**Universidade de Brasília**
**Instituto de Ciências Exatas**
**Departamento de Matemática**

# Existência de soluções inteiras minimais para sistemas elípticos semi-lineares com termos singulares e superlineares

por

Mariana Ramos Reis

**2009**

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

# Existência de soluções inteiras minimais para sistemas elípticos semi-lineares com termos singulares e superlineares

por

**Mariana Ramos Reis** [1]

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

**MESTRE EM MATEMÁTICA**

Brasília, 2009.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Carlos Alberto P. dos Santos - MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves - MAT/UnB - Membro

Prof. Dr. Paulo César Carrião - MAT/UFMG - Membro

[1] A autora foi bolsista do CNPQ durante a elaboração deste trabalho.

# DEDICATÓRIA

*Aos meus pais que torcem muito por mim, e que por entre sorrisos e lágrimas tentam me guiar para uma vida correta e com grandes conquistas.*

# AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a Deus por sempre iluminar meu caminho e me abençoar colocando oportunidades e pessoas maravilhosas em minha vida.

Sou muito grata a meus pais, Nicácio e Marina, pelo apoio incondicional, incentivo e força. Sem eles eu não teria chegado até aqui. Obrigada a toda a minha família e amigos de Araguari que oram e torcem por mim.

Gostaria de agradecer à minha querida irmã que está sempre presente, me escutando, aconselhando e tranquilizando. Ao meu Rodrigo, por ser meu companheiro, compartilhando os momentos bons e os tensos também, sempre com sua paciência e tranquilidade. Além de sempre me incentivar e apoiar em minhas decisões.

Aos meus amigos-irmãos, Adriana, Kaliana e Ricardo, obrigada não só pela amizade especial, que me fez sentir em "casa", já que isso era o mais difícil para mim, mas também pelos inúmeros momentos que dividimos, rindo, chorando, conversando, aprendendo e estudando juntos.

Obrigada aos amigos, que não menos importantes para mim, sempre me ajudaram falando uma palavra de carinho, de incentivo, de conforto, me chamando a atenção, me ensinando: Fernanda Lima, Taynara Arielly, Igor Lima, Bruno Nunes, Eunice, Daniele Nantes, João Paulo dos Santos, Kelem "Maria", André Caldas, Laura Lobato, Shirley Macedo e outros.

Muito obrigada ao meu orientador, Carlos Alberto, pela atenção, paciência e dedicação com que trabalhou comigo, me orientando da melhor maneira possível. Agradeço ainda a confiança que depositou em mim.

Fico grata aos professores participantes da banca examinadora, Paulo Carrião, José Valdo Abreu Gonçalves e Marcelo Furtado, por terem aceitado o convite e também pelas dicas e correções em relação ao meu trabalho.

Aos funcionários, Eveline, Sr. Manuel, Sr. Pereira, Sr. Valdir, Isabel e Tânia, obrigada pela atenção e pelo carinho.

Agradeço muito a todos que contribuiram de alguma forma para a conclusão deste trabalho, pode não parecer, mas todos são muito importantes.

# SUMÁRIO

# Resumo

Consideramos neste trabalho duas classes de problemas de equações diferenciais parciais elípticas, ambas semilineares com termos singulares, superlineares e sublineares, envolvendo funções não-negativas e localmente Holder contínuas, sendo uma das classes composta de uma equação e a outra de duas equações.

Em relação a esses problemas, mostramos a existência de soluções positivas, inteiras minimais, onde a demonstração na primeira classe de problemas se baseia no uso de Teorema de Sub e Supersolução. No segundo caso, usamos Teoremas de Ponto Fixo, como por exemplo, o Teorema de Ponto Fixo de Schauder-Tychonoff em espaços vetoriais topológicos de Hausdorff localmente convexos.

**Palavras-chave:** Subsolução, Supersolução, Soluções Inteiras, Holder contínua, Soluções clássicas minimais, Problemas semilineares e Ponto Fixo.

# Abstract

In this work, two classes of problems are considered both semilinears with singular, superlinear and sublinear terms envolving non-negative and locally Holder continuous functions, where one class is compose to one equation and the other with two equations.

In these problems, we are showing the existence of positive, entire minimal solutions, where the demonstration of the first class of the problem to be based on the usage of lower-upper solution argument. In the second case, we use fixed-point Theorem, for example, fixed-point Theorem of Schauder-Tychonoff in Hausdorff locally convex vectorial topological spaces.

**Keywords:** Uppersolution, Lowersolutions, Entire solutions, Holder continuous, Classical minimal solutions, Semilinear problem e Fixed-point.

# Introdução

Neste trabalho, nosso foco principal é investigar a seguinte classe de sistema de equações diferenciais parciais elípticas semilineares

$$(S): \qquad \begin{cases} -\triangle u = f_1(x)u^\alpha + g_1(x,u) + h_1(x)u^\gamma P(v), \quad \mathbb{R}^n, \\ \\ -\triangle v = f_2(x)v^\alpha + g_2(x,v) + h_2(x)v^\gamma P(u), \quad \mathbb{R}^n, \\ \\ \qquad u, v > 0, \ \mathbb{R}^n; \quad u(x), v(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases}$$

onde $\triangle$ é o operador Laplaciano; $\alpha, \gamma < 1$ são constantes; as funções $f_i, h_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty)$ são localmente Holder contínuas com expoente $\theta \in (0,1)$; $g_i : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ , $i = 1,2$ e $P : (0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ é uma função continuamente diferenciável; com $n \geq 3$.

Além disso, observamos que as variações em $\alpha$ e $\gamma$ e os comportamentos em $g_1(x,s)$ e $g_2(x,s)$ podem levar à singularidade em $s = 0$ dos termos não-lineares, isto é, comportamentos do tipo $\lim\limits_{s\to 0} g_i(x,s) = +\infty$, $i = 1,2$.

Estamos preocupados em estudar a existência de soluções clássicas, inteiras, positivas e minimais para $(S)$, isto é, um par de funções $u, v : \mathbb{R}^n \longrightarrow (0,\infty)$, $(u,v) \in C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ que satisfazem as equações em $(S)$ e adicionalmente

$$c_1|x|^{2-n} \leq u(x), v(x) \leq c_2|x|^{2-n}, \quad |x| \geq 1, \ \text{para alguns } c_1, c_2 > 0.$$

É bem conhecido que a equação de reação-difusão

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u^m &= f(\lambda, u) \\ &\equiv \lambda u(1-u) \text{ ou } u(1-u)(\lambda u - 1), \ \text{etc.} \ , (t,x) \in (0,+\infty) \times \Omega, \end{aligned}$$

com as condições iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} u(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,+\infty) \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

tem sido investigada em conexão com o modelo de população dinâmica (veja Mottoni, Schiaffino e Tesei [24], e Gurtin e MacCamy [19]).

Para alguns modelos de população de duas espécies, mutualmente simbióticos, é necessário estudar sistemas de equações tais como

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - d_1 \triangle u^m = f_1(x)u^\rho + g_1(x,u) + h_1(x)u^\mu P(v), \quad \mathbb{R}^n, \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - d_2 \triangle v^m = f_2(x)v^\rho + g_2(x,v) + h_2(x)v^\mu P(u), \quad \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

onde $0 < \rho, \mu < m$, $d_1, d_2 > 0$ são os coeficientes de difusão e $g$ pode ser definida da seguinte forma

$$g_i(x,s) = g_i(x)s^{-\sigma} \text{ com } -m < \sigma < 0,$$

ou

$$g_i(x,s) = -g_i(x)s^{\sigma} \text{ com } \sigma \geq m.$$

As soluções estacionárias para o sistema (1) em $\mathbb{R}^n$ correspondem às soluções inteiras de um sistema na forma de $(S)$, já que esse é o caso particular de forma estacionária de (1) com $m = 1$.

No sentido de mostrar a existência de soluções para o sistema $(S)$, primeiramente obteremos existência de soluções para seguinte classe de problemas

$$(E): \qquad \begin{cases} -\triangle u = f(x)u^\alpha + g(x,u) + h(x)u^\gamma, \mathbb{R}^n, \\ \\ u > 0, \ \mathbb{R}^n; \quad u(x) \overset{|x| \to \infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases}$$

onde os termos $f, g, h$ satisfarão hipóteses apropriadas [Veja a pág. 25]. E tal como antes estaremos interessados em provar a existência de soluções clássicas, inteiras, positivas e minimais $u$ para $(E)$.

Problemas singulares elípticos incluídos em $(E)$ aparecem no contexto de catalisadores heterogêneos, fluídos não-Newtonianos e também na teoria de condução de calor em materiais condutores elétricos, veja [4], [8], [9], [16] para uma discussão detalhada.

Para facilitar as notações, a seguir faremos algumas considerações. Dados $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\theta \in (0,1)$ consideraremos

$$Q^{\lambda,\theta} = \left\{ \rho \in C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \ / \ \rho \geq 0, \rho \not\equiv 0 \text{ e } \int_1^{+\infty} s^{n-1-\lambda(n-2)} \rho^*(s) ds < +\infty \right\}$$

onde

$$\rho^*(r) = \max_{|x|=r} \rho(x), \ r > 0$$

e adicionalmente, por ser usada nas demonstrações dos resultados posteriores, também denotaremos por $\rho_*$ a seguinte função,

$$\rho_*(r) = \min_{|x|=r} \rho(x),\ \ r \geq 0.$$

Casos particulares do problema $(E)$ têm sido recentemente estudados por muitos autores. No que segue, vamos citar alguns. Fukagai [15] em 1984 provou, para $\gamma \in (-1, 0)$, que se $a \in Q^{\gamma,\theta}$; então existe uma solução inteira, positiva e minimal para a equação

$$\begin{cases} -\triangle u = a(x)u^{-\gamma}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 3, \\ \\ u > 0,\ \mathbb{R}^n, \qquad u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases} \tag{2}$$

Ele observou ainda que este resultado pode ser estendido à equações elípticas sublineares da forma

$$\begin{cases} \triangle u + a_1(x)u^{\sigma_1} + \cdots + a_m(x)u^{\sigma_m} = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n, \\ \\ u > 0,\ \mathbb{R}^n, \qquad u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

onde $0 \leq \sigma_i < 1$, $i = 1, \cdots, m$ e $a_i(x)$, $i = 1, \cdots, m$ são funções positivas localmente Holder contínuas com expoente $\theta \in (0, 1)$ em $\mathbb{R}^n$.

Em 1989, Edelson [11] estudou o problema (2) com $\gamma \in (0, 1)$, e demonstrou a existência de uma solução de (2) sob a hipótese

$$a \in Q^{-\gamma,\theta}.$$

Esse resultado foi generalizado em 1993, por Shaker [33] para $\gamma > 0$, via método de sub e supersolução.

Em 1996, Lair e Shaker [21] mostraram a existência de uma única solução do problema (2), ainda considerando $\gamma > 0$, sob a hipótese menos restritiva para $a$, a saber

$$\int_0^\infty r\ a^*(r)\ dr < \infty.$$

Para termos mais gerais do que $u^\gamma$, com $\gamma < 1$ em (2), que apresentem termos sublineares em 0 e $\infty$, referenciamos por exemplo, o trabalho de Gonçalves e Santos [18], que também estudaram a existência e o comportamento assintótico das soluções inteiras positivas do problema

$$\begin{cases} -\triangle u = a(x)f(u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \\ u > 0,\ \mathbb{R}^n, \qquad u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases} \tag{3}$$

sendo $a$ uma função positiva contínua e $f$ positiva Lipschitz, uma função singular em 0. Então assumindo que $a \in C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para $\theta \in (0, 1)$,

$$\int_1^\infty s\ a^*(s)\ ds < \infty;$$

e

$$\frac{f(s)}{s} \text{ é decrescente }, \qquad \lim_{s\to 0}\frac{f(s)}{s} = \infty, \qquad \lim_{s\to\infty}\frac{f(s)}{s} = 0$$

em [18] foi provado que (3) tem uma solução $u \in C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Ainda foi abordado em [18] que com as técnicas usadas, é possível tratar do caso mais geral

$$-\triangle u = p(x)u^{-\lambda} + q(x)u^{\gamma}$$

com $0 < \lambda, \gamma < 1$.

Nesse sentido, em 1999, Cirstea e Radulescu [6] generalizaram os principais resultados anteriores. Eles demonstraram a existência de uma única solução $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in (0,1)$ do problema (3) para não linearidades da função $f$, não necessariamente decrescente, satisfazendo:

$(i)$ $\exists\, \beta > 0$ tal que $\dfrac{f(s)}{s+\beta}$ é decrescente em $(0,\infty)$;

$(ii)$ $f$ é limitada numa vizinhaça do infinito;

$(iii)$ $\displaystyle\lim_{s\to 0^+}\frac{f(s)}{s} = \infty$.

Quanto a termos superlineares, por exemplo ($u^{\gamma}, \gamma > 1$), citaremos alguns trabalhos.

Em 1982, Ni [26] provou que a equação (2), com $\gamma > 1$, tem infinitas soluções inteiras positivas as quais são limitadas e limitadas longe do zero em $\mathbb{R}^n$, se $|a(x)| \leq \phi^*(|x|)$ com $x \in \mathbb{R}^n$ e $\phi^*(t) = O(t^p)$ para $p < -2$ quando $t \to \infty$.

Kawano [20], em 1984, melhorou o resultado de Ni apresentando que, com $\gamma \neq 0$ (permite ser negativo), a mesma conclusão de Ni ainda é valida se a condição citada anteriormente, $a \in Q^{\gamma,\theta}$, é substituída por uma mais fraca

$$\int_0^{\infty} t\phi^*(t)dt < \infty \text{ para } \gamma \neq 1, \tag{4}$$

$$\int_0^{\infty} t\phi^*(t)dt < n-2 \text{ para } \gamma = 1. \tag{5}$$

Naito [25], em 1984, afirma mais fortemente que, a equação elíptica semilinear de segunda ordem (3) tem solução inteira $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, onde $f$ é uma função localmente Holder contínua sobre $\mathbb{R}^n$ e $a$ é um função localmente Lipschitz sobre $(0,\infty)$, a qual é positiva e não-decrescente para $u > 0$. Neste artigo, é também abordada a situação em que $f(u) = u^{\gamma}$ com $\gamma$ positivo, e neste caso, se a condição (4) ou (5) de Kawano é satisfeita, então além de garantir a existência de infinitas soluções inteiras positivas as quais são limitadas e limitadas longe do zero em $\mathbb{R}^n$, afirma também que o limite da solução inteira positiva com $|x| \to \infty$ pode estar arbitrariamente definida em um intervalo.

Uma observação importante relativa a equação (2) do tipo singular, é que tais equações se originam da Teoria da camada limite de fluídos viscosos, veja Callegari e Nachman [3] e [4]. Neste trabalho, estaremos estudando sistemas elípticos do tipo misto, ou seja, envolvendo termos superlineares e singulares.

Um dos objetivos deste trabalho é demonstrar que o problema $(E)$ tem solução minimal sob hipóteses apropriadas nos potênciais $f$ e $h$, e nos termos não lineares, nos seguintes casos particulares. Primeiro, tomaremos em $(E)$,

$$g(x,u) = g(x)u^{-\beta}, \quad 0 < \beta < 1, \tag{6}$$

onde $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty)$ é uma função dada, isto é, em particular o problema $(E)$ se torna

$$(QY)_1 \qquad \begin{cases} -\triangle u = f(x)u^{\alpha} + g(x)u^{-\beta} + h(x)u^{\gamma} \\ \\ u > 0, \ \mathbb{R}^n, \quad u \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

que foi estudado por Qiu e Yao [28], em 2006. Este resultado está enunciado no Teorema $(QY)_1$ abaixo.

Antes, consideremos a seguinte condição

$$(E_1): \qquad f_*(s) + g_*(s) + h_*(s) \neq 0, \qquad s \geq 0.$$

**Teorema $(QY)_1$:** *Suponha que $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ e $f \in Q^{\alpha,\theta}$, $g \in Q^{-\beta,\theta}$, $h \in Q^{\gamma,\theta}$, para algum $\theta \in (0,1)$ e $(E_1)$. Então $(QY)_1$ possui uma única solução. Isto é, existe $u \in C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ que satisfaz o problema $(QY)_1$ e adicionalmente*

$$c_1|x|^{2-n} \leq u(x) \leq c_2|x|^{2-n}, \quad |x| \geq 1, \ \textit{para alguns } c_1, c_2 > 0.$$

No segundo caso, tomaremos

$$g(x,u) = -g(x)u^{\beta}, \ \beta \geq 1, \tag{7}$$

onde $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty)$ é uma função dada. Assim, $(E)$ se torna

$$(CY)_1 \qquad \begin{cases} -\triangle u = f(x)u^{\alpha} - g(x)u^{\beta} + h(x)u^{\gamma}, \\ \\ u > 0, \ \mathbb{R}^n, \quad u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

Então temos o Teorema $(CY)_1$, devido a Chen e Yao [5]. E, antes de enunciá-lo, consideremos as seguintes condições:

$$(E_2) \qquad g(x) \leq c_0 f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ \text{para algum } c_0 > 0,$$

$(E_3)$ $$f_*(s) + h_*(s) \neq 0, \text{ para } s \geq 0.$$

**Teorema** $(CY)_1$**:** *Suponha que* $-\infty < \alpha, \gamma < 1$, $\beta \geq 1$ *e* $f \in Q^{\alpha,\theta}$, $h \in Q^{\gamma,\theta}$, *para algum* $\theta \in (0,1)$, $(E_2)$ *e* $(E_3)$. *Então* $(CY)_1$ *possui uma única solução. Isto é, existe* $u \in C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *que satisfaz o problema* $(CY)_1$ *e adicionalmente*

$$c_1|x|^{2-n} \leq u(x) \leq c_2|x|^{2-n}, \quad |x| \geq 1, \text{ para alguns } c_1, c_2 > 0.$$

De volta à classe de sistemas $(S)$, faremos um breve histórico do estudo de problemas a ela correlacionados.

Yarur [34], em 1998 mostrou a existência de uma curva de ground states contínuas positivas radialmente simétricas e uma curva de ground states singular com a singularidade no zero, para o sistema

$$\begin{cases} -\triangle u = \rho(|x|)f(v), \ \mathbb{R}^n, \\ \\ -\triangle v = \nu(|x|)g(u), \ \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Lembrando que a existência dessas curvas depende das condições sobre as funções $f, g, \rho$ e $\nu$. Serrin e Zou [31], em 1998, provaram a existência de ground states para um sistema Hamiltoniano geral elíptico.

Figueiredo e Jianfu [14], em 1998, fizeram um estudo qualitativo das possíveis soluções do sistema de equações elípticas semilineares da forma

$$\begin{cases} -\triangle u = -u + g(x,v), \ \mathbb{R}^n, \\ \\ -\triangle v = -v + f(x,u), \ \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

com $n \geq 3$, de acordo com hipóteses apropriadas em $f$ e $g$. Observando que, afirmações similares foram apresentadas por Clément [7] e Peletier e van der Vorst [27], em 1992, para o caso de domínios limitados, no lugar do $\mathbb{R}^n$.

O principal objetivo deste trabalho é mostrar a existência de soluções inteiras positivas para o sistema $(S)$, o qual se divide em dois problemas que se correlacionam apresentando soluções que têm o mesmo comportamento assintótico. Então teremos dois teoremas principais que se diferem na definição das funções $g_1(x,u)$ e $g_2(x,v)$.

Assim, conforme em (6) e (7) teremos, na primeira situação

$$g_i(x,u) = g_i(x)u^{-\beta}, \quad i = 1, 2.$$

Daí, segue que o problema $(S)$ se torna

$$(QY)_2 : \quad \begin{cases} -\triangle u = f_1(x)u^\alpha + g_1(x)u^{-\beta} + h_1(x)u^\gamma P(v), \ \mathbb{R}^n, \\ \\ -\triangle v = f_2(x)v^\alpha + g_2(x)v^{-\beta} + h_2(x)v^\gamma P(u), \ \mathbb{R}^n, \\ \\ u, v > 0, \ \mathbb{R}^n; \quad u(x), v(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

que foi estudado por Qiu e Yao [28], em 2006.

De forma análoga à (7), definimos

$$g_i(x,u) = -g_i(x)u^{\beta}, \quad i = 1,2,$$

daí segue que o sistema $(S)$ ficará assim

$$(CY)_2: \quad \begin{cases} -\triangle u = f_1(x)u^{\alpha} - g_1(x)u^{\beta} + h_1(x)u^{\gamma}P(v), \ \mathbb{R}^n, \\ -\triangle v = f_2(x)v^{\alpha} - g_2(x)v^{\beta} + h_2(x)v^{\gamma}P(u), \ \mathbb{R}^n, \\ u, v > 0, \ \mathbb{R}^n; \quad u(x), v(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

o qual foi estudado por Chen e Yao [5], em 2006.

Considere as seguintes hipóteses

$$(S_1): \qquad \int_1^{\infty} s^{n-1-\gamma(n-2)} h_i^*(s)P^*(s)ds < +\infty, \quad P^*(s) = \max_{|x|=s} P(\Phi(|x|))$$

$$f_{i_*}(s) + g_{i_*}(s) + h_{i_*}(s) \neq 0, \ \text{para } s \geq 0,$$

$(S_2)$ $\qquad P: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ é uma função contínua diferenciável tal que

$$\exists \ \lambda \in (0, 1-\gamma) \text{ tal que } \forall K \geq 1 \text{ e } c \in [K^{-1}, K],$$

$$P(cs) \leq K^{\lambda}P(s), \forall s > 0.$$

**Teorema** $(QY)_2$**:** *S*uponha que $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ são constantes, $f_i \in Q^{\alpha,\theta}$, $g_i \in Q^{-\beta,\theta}$, $(S_1)$ e $(S_2)$. Então, o sistema $(QY)_2$ possui solução. Isto é, existem $u, v \in C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ que satisfazem o sistema $(QY)_2$ e adicionalmente

$$c_1|x|^{2-n} \leq u(x), v(x) \leq c_2|x|^{2-n}, \quad |x| \geq 1, \ \text{para alguns } c_1, c_2 > 0.$$

O outro teorema principal deste trabalho foi demonstrado por Chen e Yao [5], em 2006, os quais também estudaram um caso particular do sistema $(S)$. Sob as seguintes hipóteses

$(S_3)$ $g_i(x) \leq c_i f_i(x), x \in \mathbb{R}^n$ para constantes $c_i > 0$,

$(S_4)$

$$\int_1^{\infty} s^{n-1-\gamma(n-2)} h_i^*(s)P(s^{2-n})ds < +\infty,$$

e

$$f_{i_*}(s) \neq 0 \text{ para } s \geq 0,$$

$(S_5)$ $P : (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ é uma função continuamente diferenciável tal que uma das seguintes condições é satisfeita:

**(i)** $P$ é não-crescente e existe $\delta > 0$ tal que $\forall K \geq 1, P(K^{-1}s) \leq K^{\delta}P(s), \forall s > 0$

**(ii)** $P$ é não-decrescente e existe $\delta \in (0, 1-\gamma)$ tal que, $\forall K \geq 1, P(Ks) \leq K^{\delta}P(s), \forall s > 0.$

**Teorema** $(CY)_2$: *Suponha que* $-\infty < \alpha, \gamma < 1$*,* $\beta \geq 1$*,* $f_i \in Q^{\alpha,\theta}$*,* $(S_3)$*,* $(S_4)$ *e* $(S_5)$*. Então, o sistema* $(CY)_2$ *possui solução. Isto é, existem* $u, v \in C^{2,\theta}_{loc}$ *que satisfazem o sistema* $(CY)_2$ *e adicionalmente*

$$c_1|x|^{2-n} \leq u(x), v(x) \leq c_2|x|^{2-n}, \quad |x| \geq 1, \text{ para alguns } c_1, c_2 > 0.$$

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no capítulo 1 estão relacionados algumas definições e resultados que nos auxiliarão na demonstração dos resultados principais nos capítulos posteriores. No Capítulo 2 temos as demonstrações dos Teoremas $(QY)_1$ e $(CY)_1$; e no capítulo 3, tratamos dos Teoremas $(QY)_2$ e $(CY)_2$.

Temos também, quatro apêndices, sendo que, no primeiro são abordados alguns resultados técnicos. Nas demonstrações dos Teoremas do Capítulo 2 usamos um Teorema de Sub e Supersolução, e pela sua importância reservamos o Apêndice B para prová-lo. No Apêndice C, fizemos uma análise do espaço $C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para mostrar que ele é um espaço vetorial topológico de Hausdorff localmente convexo, ou seja, satisfaz o Teorema de Ponto Fixo de Schauder-Tychonoff. E, finalmente no apêndice D temos a demonstração de um Teorema de Ponto-fixo que será usado no Teorema $(CY)_2$.

# CAPÍTULO 1

# Noções Preliminares e Resultados auxiliares

Neste capítulo, no intuito de facilitar a leitura do trabalho, faremos uma breve revisão de alguns tópicos relacionados a espaços de Banach, espaços vetoriais topológicos localmente convexos, equações diferenciais parciais, tais como regularidades, princípios de máximo e comparação.

## 1.1 Espaços de Schauder e Sobolev

Introduziremos uma importante classe de espaços que são os espaços de Schauder. Para isto vamos fazer algumas considerações iniciais, as quais foram baseadas nas observações do livro de Mitrovic e Zubrinic [23]. Seja $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ tal que $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Dado um tal multi-índice e uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, consideremos,

$$D^\alpha u(x) = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u(x)$$

e, para $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$D^m u(x) := \{D^\alpha u(x) : \alpha \text{ é um multi-índice tal que } |\alpha| = m\}.$$

Com estas notações definimos, para $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$C^m(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; D^\alpha u \text{ existe e é contínua para todo multi-índice } \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq m\}.$$

Note que, se $u \in C(\Omega)$ for uniformemente contínua em $\Omega$, podemos estender $u$ continuamente (e de maneira única) para $\overline{\Omega}$. Sendo assim, temos,

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{u \in C^m(\Omega); D^\alpha u \text{ limitada e uniformemente contínua em } \Omega, \forall\ |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço $C^m(\overline{\Omega})$ munido da norma $\|.\|_{C^m(\overline{\Omega})}$, é um espaço de Banach, onde

$$\|u\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_0 \text{ e } \|u\|_0 = \max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|.$$

**Definição 1.1.** *Dado $0 < \theta \leq 1$ e uma função $u \in C(\overline{\Omega})$ dizemos que $u$ é Holder contínua, com expoente $\theta$, se*

$$H_\theta[u] = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\theta} < \infty.$$

O fato importante é que se denotarmos por

$$C^{0,\theta}(\overline{\Omega}) = \{u \in C(\overline{\Omega}) : H_\theta[u] < \infty\},$$

então $C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} = \|u\|_0 + H_\theta[u], \quad \forall u \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega}).$$

Se $m \in \mathbb{N}$, então

$$C^{m,\theta}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^m(\overline{\Omega}) : H_\theta[D^\alpha u] < \infty, \forall |\alpha| \leq m\}$$

também é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{C^{m,\theta}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^m(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})}, \quad \forall u \in C^{m,\theta}(\overline{\Omega}).$$

O espaço $C^{m,\theta}(\overline{\Omega})$ é chamado *Espaço de Schauder*.

Temos ainda,

$$C^{m,\theta}(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega) : u \in C^{m,\theta}(\overline{\Omega_0}), \forall\ \Omega_0 \subset\subset \Omega\} = C^{m,\theta}_{loc}(\Omega).$$

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $m \geq 0$ um inteiro, $1 \leq p < \infty$, e $\alpha$ um multi-índice. Denotamos,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)\ /\ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \quad \forall\ |\alpha| \leq m\},$$

sendo $D^\alpha u$ a derivada de $u$ no sentido das distribuições e

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ é mensurável e } \int_\Omega |u|^p < \infty\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left[ \sum_{|\alpha|\leq K} \left( \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right) \right]^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach, chamado *Espaço de Sobolev.*

O espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é definido como sendo o fecho no espaço $W^{m,p}$ das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em $\Omega$. E, se $p = 2$, denotaremos $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$.

Veremos agora um resultado relacionado ao espaço de Schauder, sobre composição de funções.

**Lema 1.2.** *Suponha $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow (0, +\infty)$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $u \in C_{loc}^{0,\theta}(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^1((0, \infty))$ e $f' \in L_{loc}^\infty((0, +\infty))$. Então, $f \circ u \in C_{loc}^{0,\theta}(\mathbb{R}^n)$.*

**Demonstração.** Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado, devemos mostrar que $H_\theta[f \circ u] < \infty$.

Pelo Teorema do Valor Médio, $\exists\ \xi_{x,y} > 0$, tal que

$$0 < c < \min_{\overline{\Omega}}\{u(x), u(y)\} \leq \xi_{x,y} \leq \max_{\overline{\Omega}}\{u(x), u(y)\} < d, \text{ para } c, d > 0 \text{ constantes}$$

tais que

$$\frac{|f(u(x)) - f(u(y))|}{|x-y|^\theta} \leq |f'(\xi_{x,y})| \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\theta}.$$

Então, como $f' \in L_{loc}^\infty((0, +\infty))$ e $u \in C^{0,\theta}(\mathbb{R}^n)$ segue

$$H_\theta[f \circ u] = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(u(x)) - f(u(y))|}{|x-y|^\theta} < \infty$$

consequentemente $f \circ u \in C_{loc}^{0,\theta}(\mathbb{R}^n)$. ∎

Neste trabalho, para as demonstrações dos resultados principais vamos usar Teoremas de Ponto Fixo, sendo o próximo, um deles, o qual será usado especificamente para provar o Teorema $(CY)_2$. Mas antes, vamos definir alguns espaços e normas relativos ao resultado que será enunciado.

Dadas funções $\rho$ e $\varphi$ tais que $\varphi(x) \geq \rho(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$, constante $\theta \in [0, 1)$ e inteiro não-negativo $m$, denotaremos

$$Q_{\rho,\varphi}^{m,\theta} \equiv \{u \in C_{loc}^{m,\theta}(\mathbb{R}^n) / \rho(x) \leq u(x) \leq \varphi(x), x \in \mathbb{R}^n\}, \tag{1.1}$$

e definiremos a convergência de uma sequência $\{u_n\}$ para uma função $u \in Q_{\rho,\varphi}^{m,\theta}$, com o $u_n \overset{C_{loc}^2(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} u$. Isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{|m|\leq 2} \sup_{x\in\Omega} |D^m u_n(x) - D^m u(x)| = 0, \text{ para cada domínio limitado } \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Se $U = (u_1, u_2) \in Q^{m,\theta}_{\rho_1,\varphi_1} \times Q^{m,\theta}_{\rho_2,\varphi_2}$, definimos a norma no espaço $C^{m,\theta}(\overline{\Omega}) \times C^{m,\theta}(\overline{\Omega})$ de $U$ como sendo

$$\|U\|_{C^{m,\theta}(\overline{\Omega})\times C^{m,\theta}(\overline{\Omega})} = (\|u_1\|^2_{C^{m,\theta}(\overline{\Omega})} + \|u_2\|^2_{C^{m,\theta}(\overline{\Omega})})^{\frac{1}{2}},$$

e, escrevendo $U_n \overset{C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)\times C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} U$, queremos dizer que, para qualquer domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

$$\|U_n - U\|_{C^{2,\theta}(\Omega)\times C^{2,\theta}(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Considere $\psi : Q^{0,\theta}_{\rho_1,\varphi_1} \times Q^{0,\theta}_{\rho_2,\varphi_2} \longrightarrow Q^{2,\theta}_{\rho_1,\varphi_1} \times Q^{2,\theta}_{\rho_2,\varphi_2}$ $(\theta \in (0,1))$. Agora, vamos nos atentar às seguintes condições:

$(PF)_1$ (Estimativa de Schauder) Existe $c = c(\Omega) > 0$ constante tal que

$$\|\psi U\|_{C^{2,\theta}(\Omega)\times C^{2,\theta}(\Omega)} \leq c\|U\|_{C^{0,0}(\Omega)\times C^{0,0}(\Omega)}, \quad \forall\, U \in Q^{0,\theta}_{\rho_1,\varphi_1} \times Q^{0,\theta}_{\rho_2,\varphi_2},$$

para qualquer domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

$(PF)_2$ (Gráfico-fechado) Se $Y_n, Y, Z_n, Z \in Q^{2,0}_{\rho_1,\varphi_1} \times Q^{2,0}_{\rho_2,\varphi_2}$ satisfaz $Y_n = \psi Z_n, n = 1, 2, \cdots$,

$$\text{e } Y_n \overset{C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} Y, Z_n \overset{C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} Z, \text{ então } Y = \psi Z.$$

**Teorema 1.3.** *Considere $\rho_i, \varphi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow (0,\infty)$ com $\varphi_i(x) \geq \rho_i(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2$, localmente Holder contínuas; $\psi$ definida acima satisfazendo $(PF)_1$ e $(PF)_2$. Seja $\{V_n\}_{n\geq 0} \subset Q^{2,\theta}_{\rho_1,\varphi_1} \times Q^{2,\theta}_{\rho_2,\varphi_2}$ sequência tal que $V_n = \psi V_{n-1}$ e $\lim_{n\to\infty} V_n(x) = V(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$. Então,*

**(i)** *$V \in Q^{2,\theta}_{\rho_1,\varphi_1} \times Q^{2,\theta}_{\rho_2,\varphi_2}$ e*

**(ii)** *$V$ é um ponto fixo de $\psi$, isto é, $V = \psi V$.*

**Demonstração.** Confira Apêndice (D). ∎

Na demonstração do lema acima, para garantir a existência de uma sequência que nos levará ao ponto fixo, usamos o Teorema de Arzelá-Ascoli, que envolve os seguintes conceitos:

**Definição 1.4.** *Seja $E = (E, d)$ espaço métrico. $K$ é relativamente compacto se seu fecho $\overline{K}$ for compacto.*

**Observação 1.4.1.** *$K$ é relativamente compacto se toda sequência $\{x_n\} \subset \overline{K}$ possui uma subsequência convergente.*

**Definição 1.5.** **(a)** *$\mathcal{F} \subset C(K)$ é equicontínua em um ponto $a \in K$ se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que*

$$d_1(x,a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

**(b)** *$\mathcal{F}$ é equicontínua quando é equicontínua em todo ponto de $K$.*

**Teorema 1.6** (Teorema de Arzelá-Ascoli). *Sejam $K \subset E = (E,d)$ compacto e $\mathcal{F} \subset C(K) = (C(K), \overline{d})$ onde $\overline{d}(f,g) = \sup\limits_{x\in K} |f(x) - g(x)|$. Então, $\mathcal{F}$ é relativamente compacta se, e somente se, $\mathcal{F}$ é limitada e equicontínua.*

**Demonstração.** Conforme [22], Proposição 16, pág. 244. ■

Apresentaremos agora, alguns teoremas de regularidade e definições que dão suporte a esses teoremas, os quais foram muito usados no decorrer do trabalho.

**Definição 1.7.** *Dizemos que o espaço normado $X$ está imerso no espaço normado $Y$, e escrevemos $X \hookrightarrow Y$ para designar esta imersão, se*

**(i)** *$X$ é um subespaço vetorial de $Y$, e*

**(ii)** *o operador identidade $I$ definido de $X$ em $Y$ por $Ix = x$, para todo $x \in X$ é contínuo.*

**Observação 1.7.1.** *Desde que $I$ seja linear, **(ii)** é equivalente à existência de uma constante $M$ tal que*

$$||Ix||_Y \leq M||x||_X, \qquad x \in X$$

*onde $||.||_X$ e $||.||_Y$ são as normas dos espaços $X$ e $Y$ respectivamente.*

**Definição 1.8.** *Considere $X$ e $Y$ espaços normados. Dizemos que, $T : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação compacta se $T(A)$ é relativamente compacto em $Y$ quando $A$ é limitado em $X$, isto é, $\overline{T(A)}^{||.||_Y} \subset Y$ é compacto.*

**Definição 1.9.** *Dizemos que $X$ é compactamente imerso em $Y$ se o operador $I$ é compacto.*

**Teorema 1.10.** *Sejam $m$ um inteiro não-negativo e $0 < \nu < \lambda \leq 1$. Então:*

**(1)** $C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$,

**(2)** $C^{m,\nu}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$,

**(3)** $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,\nu}(\overline{\Omega})$.

*E adicionalmente, se $\Omega$ é limitado, as imersões (2) e (3) são compactas.*

**Demonstração.** Conforme Adams [1], Teorema 1.34, pág.11. ∎

Antes de vermos algumas imersões de Sobolev, vamos analisar uma condição que $\Omega$ tem que satisfazer para que as hipóteses do Teorema sejam satisfeitas.

**Definição 1.11.** [1] *Dizemos que, $\Omega$ satisfaz a Condição forte local Lipschitz se existirem números positivos $\delta$ e $M$, uma cobertura aberta localmente finita $\{U_j\}$ da fronteira $\Omega$ e para cada $j$, uma função real $f_j$ de $n-1$ variáveis tal que as seguintes condições valem:*

**(i)** *Para qualquer $R$ finito, toda coleção de $R+1$ dos conjuntos $U_j$ tem interseção vazia.*

**(ii)** *Para todo par de pontos $x, y \in \Omega_\delta$ tal que $|x-y| < \delta$, existe $j$ tal que*

$$x, y \in V_j \equiv \{x \in U_j \ : \ dist(x, \partial U_j) > \delta\}.$$

**(iii)** *Cada função $f_j$ satisfaz a condição de Lipschitz com constante $M$: isto é, se $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_{n-1})$ e $\rho = (\rho_1, \cdots, \rho_{n-1})$ estão em $\mathbb{R}^{n-1}$, então*

$$|f(\xi) - f(\rho)| \leq M|\xi - \rho|.$$

**(iv)** *Para cada sistema de coordenadas cartesianas $(\zeta_{j,1}, \cdots, \zeta_{j,n})$ em $U_j$, $\Omega \cap U_j$ é representado pela desigualdade*

$$\zeta_{j,n} < f_j(\zeta_{j,1}, \cdots, \zeta_{j,n-1}).$$

*Se $\Omega$ é limitado, o conjunto "complexo"de condições se reduz à simples condição de que $\Omega$ deve ter uma fronteira localmente Lipschitz, isto é, que cada ponto $x$ sobre a fronteira de $\Omega$ deve ter uma vizinhança $U_x$ onde a interseção com $\Omega$ deve ter o gráfico de uma função Lipschitz contínua.*

**Observação 1.11.1.** *Se $\Omega$ é regular, este satisfaz a condição forte local Lipschitz.*

**Teorema 1.12.** *Suponha que $\Omega$ satisfaça a condição forte local Lipschitz. Então, valem as seguintes imersões:*

**(i)** *se $(m-1)p < n < mp$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\theta}(\overline{\Omega})$, para $0 < \theta \leq m - (\frac{n}{p})$,*

**(ii)** *se $n = (m-1)p$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\theta}(\overline{\Omega})$, para $0 < \theta < 1$.*

**Demonstração.** Conforme [1], Teorema 4.12, pág.85. ∎

[1] Confira [1] pág.83

## 1.2 Princípios de Máximo, de Comparação e Regularidades

Vamos introduzir algumas definições importantes para então enunciarmos resultados de equações diferenciais parciais que serão usados posteriormente.

Seja $L$ um operador diferencial linear de segunda ordem da forma

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)D_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b^{i}(x)D_{i}u + c(x)u, \quad a^{ij} = a^{ji} \tag{1.2}$$

onde $x = (x_1, \cdots, x_n)$ pertence a um domínio $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Adotaremos as seguintes definições

**Definição 1.13.** *$L$ é elíptico em um ponto $x \in \Omega$ se a matriz coeficiente $[a^{ij}(x)]$ é positiva; isto é, se $\lambda(x), \Lambda(x)$ denotam respectivamente os auto-valores mínimo e máximo de $[a^{ij}(x)]$, então*

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2$$

*para todo $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Daí, se $\lambda > 0$ em $\Omega$, então $L$ é elíptico em $\Omega$. E, se $\Lambda/\lambda$ é limitado em $\Omega$, chamaremos $L$ de operador uniformemente elíptico em $\Omega$.*

Um exemplo de operador diferencial linear de segunda ordem uniformemente elíptico é o Laplaciano, isto é, $L = \triangle$.

**Lema 1.14** (**Estimativa Interior Elíptica**). *Sejam $\Omega, \Omega_0$ domínios abertos limitados em $\mathbb{R}^n$ com $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$. Suponha que, $L$ é um operador de segunda ordem uniformemente elíptico com coeficientes contínuos em $\overline{\Omega}$ e $p > n$. Então, existe uma constante $K$ tal que*

$$||w||_{W^{2,p}(\Omega_0)} \leq K(||Lw||_{L^p(\Omega)} + ||w||_{L^p(\Omega)}), \quad \forall w \in W^{2,p}(\Omega).$$

*A constante $K$ depende de $n$, $p$, diâmetro de $\Omega$, distância de $\Omega_0$ à $\partial\Omega$, constante de elipticidade de $L$, coeficientes de $L$ (em $L^\infty(\Omega)$) e dos módulos de continuidade dos coeficientes.*

**Demonstração.** Confira Feng e Liu [13], Lema 2.2, pág. 985. ∎

**Teorema 1.15** (**Estimativa Interior de Schauder**). *Seja $u \in C^{m+2,\alpha}(\Omega)$, $m \geq 0$, uma solução de $Lu = f$ em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e assuma os coeficientes de $L$ satisfazendo*

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

*e* $\|a^{ij}, b^i, c\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda$. *Se* $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$, *então*

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}(\Omega_0)} \leq C(\|u\|_{C^0(\Omega)} + \|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)})$$

*onde* $C = C(n, m, \alpha, \lambda, \Lambda, d)$, $d = dist(\Omega_0, \partial\Omega)$.

**Demonstração.** Confira Gilbard e Trudinger[17], Problema 2.1, pág. 134 ∎

**Teorema 1.16.** *Seja* $u \in H_0^1(\Omega)$ *uma solução fraca de*

$$\begin{cases} -\triangle u = f(x), & em\ \Omega, \\ u = 0, & sobre\ \partial\Omega. \end{cases}$$

**(i)** *(Agmon, Douglis, Nirenberg) Se* $\Omega$ *é de classe* $C^2$ *com* $\partial\Omega$ *limitada e* $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, *então* $u \in W^{2,p}(\Omega)$, *e*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(n, \Omega)\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

**(ii)** *(Schauder) Se* $\Omega$ *é limitado e de classe* $C^{2,\alpha}$, $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *e* $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, *então* $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *e*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C(n, \Omega)\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}.$$

**Demonstração.** Confira Mitrovic e Zubrinic [23], Teorema 3, pág. 230. ∎

Observe que, o próximo teorema é uma generalização do anterior.

**Teorema 1.17.** *Considere o seguinte problema*

$$\begin{cases} Lu = f, & em\ \Omega \\ u = g, & sobre\ \partial\Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

*onde* $f \in C^{0,\alpha}$ *e* $g$ *tem um extensão* $\widehat{g}$ *ao interior de* $\Omega$ *tal que* $\widehat{g} \in C^{2,\alpha}$ *e* $\Omega$ *é um conjunto aberto conexo. Se* $c = 0$ *em* (1.2), *então* (1.3) *é unicamente solúvel e satisfaz as estimativas*

**(i)** *Estimativa* $L^p$

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\widehat{g}\|_{W^{2,p}(\Omega)}).$$

*onde a constante* $C$ *é independente de* $f$ *e* $g$.

**(ii)** *Estimativa de Schauder*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C(\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|\widehat{g}\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)})$$

*onde a constante* $C$ *é independente de* $f$ *e* $g$.

**Demonstração.** Confira [30], Teorema 2.2.2, pág.19. ∎

Agora, vamos apresentar teoremas de Princípio do Máximo, de Comparação e resultados relativos à Equação de Poisson. Em ambos os capítulos, 2 e 3, foi usada a Estimativa gradiente para Equação de Poisson:

**Teorema 1.18.** *Seja $u \in C^2(\Omega)$ satisfazendo a equação de Poisson, $\triangle u = f$, em $\Omega$. Então,*

$$\sup_{\Omega} d_x|Du(x)| \leq C(\sup_{\Omega}|u| + \sup_{\Omega} d_x^2|f(x)|), \quad \forall x, y \in \Omega, x \neq y$$

*onde $d_x = dist(x, \partial\Omega)$.*

**Demonstração.** Confira [17], Teorema 3.9, pág.40. ∎

Temos ainda, outro resultado envolvendo Equação de Poisson, mas antes de enunciá-lo, vamos definir algumas funções.

Considere $\Gamma : \mathbb{R}^n \backslash 0 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} ln|x|, & n = 2 \\ \\ \dfrac{1}{n(2-n)w_n}|x|^{2-n}, & n \geq 3 \end{cases}$$

Observe que $\Gamma \in C^2(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ e satisfaz $\triangle \Gamma = 0$.

**Definição 1.19.** *$\Gamma$ é dita a Solução Fundamental da Equação de Laplace.*

Usando $\Gamma$,

**Definição 1.20.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. A função $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$u(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x-y)\rho(y)dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.4}$$

*é chamada de potencial newtoniano gerado pela densidade $\rho : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.*

E note que, $\rho$ pode assumir tanto valores negativos quanto positivos. E, se $\rho \in L^\infty(\Omega)$, então $u$ está bem definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

**Teorema 1.21.** *Seja $u$ dada por (1.4). Se $\rho$ for Holder-contínua com expoente $\theta \in (0, 1)$, então $u \in C^{2,\theta}(\Omega)$ e satisfaz a equação de Poisson*

$$-\triangle u = \rho \text{ em } \Omega.$$

**Demonstração.** Conforme [17], Teorema 4.6, pág. 59. ∎

Agora, vamos apresentar alguns Princípios do Máximo, lembrando que,

**Definição 1.22.** *Se $u \in C(\overline{\Omega})$ definimos $u^+, u^- \in C(\overline{\Omega})$ como segue*

$$u^+ = \max\{u(x), 0\}, \quad x \in \Omega$$

$$u^- = \max\{-u(x), 0\}, \quad x \in \Omega$$

Observe que $u^+, u^- \geq 0$.

**Teorema 1.23** (Princípio do Máximo Fraco para $c \leq 0$)**.** *Suponha que, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $c \leq 0$ em $\Omega, L$ é uniformemente elíptico e $\Omega$ é um aberto limitado. Então:*

**(i)** *Se $Lu \geq 0$ então $\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+$.*

**(ii)** *Se $Lu \leq 0$ então $\min_{\overline{\Omega}} u \geq -\max_{\partial\Omega} u^-$.*

**Demonstração.** Conforme [12], Teorema 2, pág. 329. ∎

O próximo teorema é uma consequência imediata do anterior.

**Teorema 1.24** (Princípio de Comparação)**.** *Se $L$ é uniformemente elíptico, $c \leq 0$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é tal que $Lu \geq 0$ e $u \leq 0$ em $\partial\Omega$, então $u \leq 0$ em $\overline{\Omega}$.*

**Demonstração.** Como $Lu \geq 0$ então, pelo Teorema 1.23,

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ \leq 0$$

Assim, $u \leq 0$ em $\overline{\Omega}$. ∎

**Teorema 1.25.** *Seja $L$ uniformemente elíptico, $c = 0$ e $Lu \geq 0 (\leq 0)$ em um domínio $\Omega$ (não necessariamente limitado). Então se $u$ atinge o máximo (mínimo) no interior de $\Omega$, $u$ é constante. Se $c \leq 0$ e $c/\lambda$ é limitado, então $u$ não pode atingir um máximo não-negativo (mínino não-positivo) no interior de $\Omega$ a menos que $u$ seja uma constante.*

**Demonstração.** Conforme [17], Teorema 3.5, pág.34. ∎

Para potênciais não-lineares mais gerais temos o seguinte Princípio de Comparação.

**Lema 1.26.** *Suponha que $f : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é um função contínua tal que uma das seguintes afirmações é satisfeita:*

**(a)** *$s^{-1} f(x, s)$ é decrescente em $s$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$,*

**(b)** *$s^{-1}f(x,s)$ é decrescente em $s$ para cada $x$ em um subconjunto aberto $\Omega_0$ de $\mathbb{R}^n$, e ambos $f(x,s)$ e $s^{-1}f(x,s)$ são não-crescentes em $s$ para todo $x$ na parte restante $\mathbb{R}^n - \Omega_0$.*

*Seja $w, v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo*

**(i)** $\triangle w + f(x,w) \leq 0 \leq \triangle v + f(x,v)$ *em* $\mathbb{R}^n$*;*

**(ii)** $w, v > 0$ *em* $\mathbb{R}^n$ *e* $\liminf_{|x|\to\infty}(w(x) - v(x)) \geq 0$*;*

**(iii)** $\triangle v \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

*Então, $w \geq v$ em $\mathbb{R}^n$.*

**Demonstração.** Conforme [5], Lema 3.2, pág.305. ∎

Vamos agora introduzir um importante resultado de Serrin, o qual nos ajuda a provar a unicidade das soluções nos Teoremas do Capítulo 2. Mas antes, considere $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$ como sendo uma função dada por

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t < 1, \\ t^{2-n}, & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

**Lema 1.27.** *Suponha $\{|x| > R > 0\} \subset \Omega$, para algum $R > 0$. Seja $u$ uma solução positiva fraca da desigualdade*

$$\triangle_p u \leq 0, \quad x \in \Omega.$$

*Então*

**(i)** *se $n > p$, então existe uma constante $C = C(p,n,u,R) > 0$ tal que*

$$u(x) \geq C|x|^{-(n-p)/(p-1)},$$

**(ii)** *se $n \leq p$, então*

$$\liminf_{x\to\infty} u(x) > 0.$$

**Demonstração.** Confira Serrin e Zou [32], Lema 2.3, pág.89. ∎

**Observação 1.27.1.** *Em nosso caso, $p = 2$ e $n \geq 3$, então a condição correspondente a $(i)$ será*

$$u(x) \geq C\phi(|x|).$$

## 1.3 Espaços Vetoriais Topológicos localmente convexos

A demonstração do Teorema $(QY)_1$ se baseia em verificar as hipóteses do Teorema de Ponto fixo de Schauder-Tychonoff o qual é uma extensão para espaços não-normáveis do Teorema de Ponto fixo de Schauder. E uma das hipóteses é verificar se o espaço no qual as soluções são procuradas é um espaço vetorial topológico de Hausdorff localmente convexo. Mas antes, vamos apresentar definições e resultados que nos auxiliarão nesta verificação.

Considere $X$ um conjunto e $P(X)$ as partes de $X$.

**Definição 1.28.** **(i)** *Um subconjunto $\tau \subset P(X)$ é uma topologia sobre $X$, se:*

$$(i_1) \quad \emptyset, X \in \tau$$

$$(i_2) \quad X_1, \cdots, X_n \in \tau \Rightarrow \cap_{i=1}^{n} X_i \in \tau_i, \quad \forall\ n$$

$$(i_3) \quad \cup_{\alpha \in A} X_\alpha \in \tau, \quad X_\alpha \in \tau,\ \alpha \in A - \ \textit{para qualquer } A$$

**(ii)** *$X = (X, \tau)$ é dito espaço topológico.*

**Definição 1.29.** *O espaço topológico $X$ é de Hausdorff se pontos distintos têm vizinhanças disjuntas, ou seja,*

$$\forall\ x, y \in X, x \neq y, \ \textit{existem } U, V \in \tau \ \textit{com } x \in U, y \in V \ \textit{tal que } U \cap V = \emptyset.$$

**Teorema 1.30.** *Todo espaço vetorial topológico é um espaço de Hausdorff.*

**Demonstração.** Confira [29], Teorema 1.12, pág. 10. ■

**Definição 1.31.** *Em um espaço vetorial, o termo base local significará uma base local em 0. Uma base local de um espaço vetorial topológico $X$ é então uma coleção $\mathcal{B} \subset \tau$ de vizinhanças de 0 tais que cada membro de $\tau$ é uma união de membros de $\mathcal{B}$.*

**Definição 1.32.** *Espaço vetorial topológico $X$ é localmente convexo se há uma base local $\mathcal{B}$ formada por conjuntos convexos.*

**Exemplo 1.33.** *$C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\theta \in (0,1)$ é um espaço vetorial topológico de Hausdorff localmente convexo. (Veja Apêndice C)*

Para mostrar que um espaço é topológico, deveremos introduzir uma seminorma.

**Definição 1.34.** *Uma seminorma sobre um espaço vetorial $X$ é uma função real sobre $X$ tal que*

**(a)** $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, *subatividade*

**(b)** $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$, $\forall x, y \in X$ *e* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Observe que, uma seminorma $p$ é uma norma se satisfaz;

$$p(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

**Definição 1.35.** *Uma família $\mathcal{P}$ de seminormas sobre $X$ é dita separada se para cada $x \neq 0$ corresponde pelo menos um $p \in \mathcal{P}$ com $p(x) \neq 0$.*

**Definição 1.36.** *Um conjunto $B \subset X$ é dito balanceado se $\alpha B \subset B$ para todo escalar $\alpha$, com $|\alpha| \leq 1$.*

**Teorema 1.37.** *Se $X$ é um espaço vetorial topológico com uma base local enumerável, então existe um métrica $d$ sobre $X$ tal que*

**(a)** *$d$ é compatível com a topologia de $X$,*

**(b)** *as bolas abertas centradas em $0$ são balanceadas, e*

**(c)** *$d$ é invariante: $d(x+z, y+z) = d(x, y)$, para $x, y, z \in X$.*

*Se, além disso, $X$ é localmente convexo, então $d$ pode ser escolhida de tal forma que satisfaça (a), (b), (c) e também*

**(d)** *todas as bolas abertas são convexas.*

**Demonstração.** Conforme [29], Teorema 1.24, pág.18. ∎

**Teorema 1.38.** *Suponha que $\mathcal{P}$ seja uma família de seminormas separada sobre um espaço vetorial $X$. Associada a cada $p \in \mathcal{P}$ e a cada inteiro positivo $n$, temos o conjunto*

$$V(p, n) = \left\{ x : p(x) < \frac{1}{n} \right\}.$$

*Seja $\mathcal{B}$ a coleção de todas as interseções finitas dos conjuntos $V(p, n)$. Então, $\mathcal{B}$ é uma base local convexa balanceada para uma topologia $\tau$ sobre $X$, que torna $X$ um espaço vetorial topológico localmente convexo tal que*

*(a) toda $p \in \mathcal{P}$ é contínua, e*

*(b) um conjunto $E \subset X$ é limitado se, e somente se, toda $p \in \mathcal{P}$ é limitada sobre $E$.*

**Demonstração.** Conforme [29], Teorema 1.37, pág.26. ■

**Teorema 1.39.** *O espaço vetorial topológico $X$ é normável se, e somente se, $X$ é localmente convexo e localmente limitado.*

**Demonstração.** Confira [29], Teorema 1.9, pág. 9. ■

**Exemplo 1.40.** $C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n), \quad \theta \in (0,1)$ *é não-normável. Veja Apêndice (C).*

A seguir temos o Teorema de Ponto Fixo de Schauder-Tychonoff,

**Teorema 1.41.** *Seja $C$ um subconjunto convexo de um espaço vetorial topológico de Hausdorff localmente convexo $E$. Suponha que, $F : C \longrightarrow C$ é uma aplicação compacta e contínua. Então $F$ tem pelo menos um ponto fixo em $C$.*

**Demonstração.** Conforme [2], Teorema 8.3, pág. 98. ■

## 1.4 Teoremas de Sub e Supersolução

Para demonstrar a existência de solução para os problemas $(QY)_1$ e $(CY)_1$, usamos o Método de Sub e Supersolução.

Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} -Lu = f(x,u) & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.5}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto conexo e $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ apropriada.

Uma supersolução desse problema é uma função $\varphi \in C^2(\Omega)$ satisfazendo,

$$\begin{cases} -L\varphi \geq f(x,\varphi) & \text{em } \Omega, \\ \varphi \geq g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Uma subsolução desse problema é uma função $\psi \in C^2(\Omega)$ satisfazendo,

$$\begin{cases} -L\psi \leq f(x,\psi) & \text{em } \Omega, \\ \psi \leq g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Assumimos que $\partial\Omega, f, g$ e os coeficientes de $L$ são regulares no que segue,

**Teorema 1.42.** *Seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função satisfazendo a seguinte condição,*

$$f(x,s) - f(x,t) \geq -c(s-t), \quad \forall s,t \in I. \tag{1.6}$$

*Se $\psi$ e $\varphi$ são uma subsolução e uma supersolução do problema (1.5) respectivamente, com*

$$\psi \leq \varphi, \quad \Omega$$

*então o problema (1.5) possui uma solução $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, onde $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$ tal que $\psi \leq u \leq \varphi$.*

**Demonstração.** Confira Apêndice (D). ∎

Agora, vamos apresentar um Teorema de Sub e Supersolução que completa o anterior, pois é válido para todo o $\mathbb{R}^n$. Sendo que para a demonstração dele usamos o Teorema 1.42 juntamente com um processo de diagonalização.

**Teorema 1.43.** *Suponha que $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ seja uma supersolução de*

$$-Lu = f(x,u) \tag{1.7}$$

*onde $L$ é um operador uniformemente elíptico de segunda ordem, $f$ é uma função localmente Holder contínua em $x$ e localmente Lipschitz em $u$.*
*Se $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ é uma subsolução de (1.7) com $\Phi \geq \psi$ em $\mathbb{R}^n$. Então (1.7) possui uma solução $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ com*

$$\psi \leq u \leq \Phi.$$

**Demonstração.** Confira Apêndice (D). ∎

**Observação 1.43.1.** *Note que uma função localmente Lipchitz satisfaz a condição (1.6).*

# CAPÍTULO 2

# Existência de Soluções inteiras para problemas com uma equação

Neste capítulo, nos propomos a investigar a existência de solução para a classe de problemas

$$(E): \quad \begin{cases} -\triangle u = f(x)u^{\alpha} + g(x,u) + h(x)u^{\gamma}, \mathbb{R}^n; \\ \\ u > 0,\ \mathbb{R}^n; \quad u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

E como já foi especificado na introdução, estudaremos dois casos particulares de $(E)$.

Relembraremos a definição de um importante conjunto que nos auxiliará bastante. Dados $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\theta \in (0,1)$ consideraremos

$$Q^{\lambda,\theta} = \left\{ \rho \in C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \ / \ \rho \geq 0, \rho \neq 0 \text{ e } \int_1^{+\infty} s^{n-1-\lambda(n-2)} \rho^*(s) ds < +\infty \right\},$$

onde para uma dada função $\rho : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,+\infty)$ denotaremos por

$$\rho^*(r) = \max_{|x|=r} \rho(x),\ r > 0 \text{ e } \rho_*(r) = \min_{|x|=r} \rho(x).$$

Vamos rever os problemas que foram chamados de $(QY)_1$ e $(CY)_1$ na Introdução, e os resultados relacionados a eles.

Primeiramente, estudaremos a existência de solução para o seguinte problema

$$(QY)_1 \quad \begin{cases} -\triangle u = f(x)u^{\alpha} + g(x)u^{-\beta} + h(x)u^{\gamma}, \mathbb{R}^n; \\ \\ u > 0,\ \mathbb{R}^n, \quad u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases}$$

sob a seguinte condição

$$(E_1): \qquad f_*(s) + g_*(s) + h_*(s) \neq 0, \qquad s \geq 0.$$

Temos o teorema.

**Teorema** $(QY)_1$**:** *Suponha que* $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$, $f \in Q^{\alpha,\theta}$, $g \in Q^{-\beta,\theta}$, $h \in Q^{\gamma,\theta}$, *para algum* $\theta \in (0,1)$ *e* $(E_1)$. *Então* $(QY)_1$ *possui uma única solução. Isto é, existe* $u \in C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *satisfazendo o problema* $(QY)_1$ *tal que*

$$c_1|x|^{2-n} \leq u(x) \leq c_2|x|^{2-n}, \quad |x| \geq 1, \text{ para alguns } c_1, c_2 > 0.$$

O outro caso particular de $(E)$ estudado é

$$(CY)_1 \qquad \begin{cases} -\triangle u = f(x)u^\alpha - g(x)u^\beta + h(x)u^\gamma, \mathbb{R}^n; \\ \\ u > 0, \ \mathbb{R}^n, \quad u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

Considere as seguintes condições

$$(E_2) \qquad g(x) \leq c_0 f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \text{ para algum } c_0 > 0,$$

$$(E_3) \qquad f_*(s) + h_*(s) \neq 0, \text{ para } s \geq 0.$$

Então, temos o seguinte teorema,

**Teorema** $(CY)_1$**.** *Suponha que,* $-\infty < \alpha, \gamma < 1$, $\beta \geq 1$ *e* $f \in Q^{\alpha,\theta}$, $h \in Q^{\gamma,\theta}$, *para algum* $\theta \in (0,1)$, $(E_2)$ *e* $(E_3)$. *Então* $(CY)_1$ *possui uma única solução. Isto é, existe* $u \in C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *satisfazendo o problema* $(CY)_1$ *tal que*

$$c_1|x|^{2-n} \leq u(x) \leq c_2|x|^{2-n}, \quad |x| \geq 1, \text{ para alguns } c_1, c_2 > 0.$$

## 2.1 Lema de comportamento assintótico

Nesta seção faremos algumas considerações que serão usadas em ambos os Teoremas. Definiremos um conjunto $S$ e um operador $J$ o qual tem $S$ como seu domínio, e enunciaremos um Lema relativo ao operador $J$.

Considere

$$S = \left\{ E : [0,\infty) \longrightarrow (0,\infty), \ E \in C([0,\infty)) \ / \ 0 < \int_0^\infty s^{n-1}E(s)ds < +\infty \right\}$$

e defina $J : S \longrightarrow (0, +\infty)$ por

$$J(E)(t) = \frac{1}{n-2}\left[\int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{n-2} sE(s)ds + \int_t^{+\infty} sE(s)ds\right].$$

Observe que $J$ está bem definido e $J(E) \in C^2((0,\infty))$ para cada $E \in S$. E, no apêndice (A.1), apresentamos uma motivação para a definição desse operador relacionada à solução do problema $(E)$.

**Lema 2.1.** *Seja $E \in S$. Então:*

**(i)** $J(E)''(t) + \dfrac{n-1}{t} J(E)'(t) = -E(t) \quad t > 0,$

**(ii)** $l_1\phi(t) \leq J(E)(t) \leq l_2\phi(t), \quad t > 0$ *para algumas constantes positivas $l_1$ e $l_2$, onde*

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & se\ 0 \leq t < 1, \\ t^{2-n}, & se\ t \geq 1. \end{cases}$$

**Demonstração.** Confira Apêndice (A.2). ∎

**Observação 2.1.1.** *A expressão $(i)$ do Lema (2.1) é equivalente a*

$$-(r^{n-1}J(E)')' = r^{n-1}E, \qquad r > 0.$$

## 2.2 Existência de Sub e Supersolução de $(QY)_1$

Nesta seção, vamos provar dois Lemas que são parte da demonstração do Teorema $(QY)_1$, e que estão relacionados com a sub e a supersolução para o problema $(QY)_1$, respectivamente.

**Lema 2.2** (Supersolução). *Suponha que $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ e $f \in Q^{\alpha,\theta}$, $g \in Q^{-\beta,\theta}$ e $h \in Q^{\gamma,\theta}$, para algum $\theta \in (0,1)$. Considere $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow (0, +\infty)$ definida por $v(x) = y(|x|)$, onde*

$$y(t) = \begin{cases} K_1^\lambda J[G(t, \phi(t))], & t > 0, \\ \dfrac{K_1^\lambda}{n-2}\displaystyle\int_0^\infty sG(s,\phi(s))ds, & t = 0, \end{cases}$$

*e*

$$G(t,s) = f^*(t)s^\alpha + g^*(t)s^{-\beta} + h^*(t)s^\gamma, \ t, s > 0.$$

*Então:*

**(i)** $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$

**(ii)** *$v$ é uma supersolução do problema $(QY)_1$. Isto é,*

$$\begin{cases} -\triangle v \geq f(x)v^{\alpha} + g(x)v^{-\beta} + h(x)v^{\gamma}, \\ \\ v > 0, \ \mathbb{R}^n, \quad v(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

**(iii)** *$v(x) \leq c\phi(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Em particular, $v(x) \leq c|x|^{2-n}$, $|x| \geq 1$, para alguma constante $c > 0$.*

**Observação 2.2.1.** *Definimos as constantes positivas $K_1$ e $\lambda$ no interior da demonstração.*

**Demonstração do Lema (Supersolução).** Vamos construir a função $y$ e para garantir que ela esteja bem definida temos que provar a afirmação seguinte. Além disso, esta afirmação também será utilizada para mostrar que $y \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

**Afirmação 2.3.** $G(s, \phi(s)) \in S$.

De fato,

$$G(s,\phi(s)) = \begin{cases} f^*(s) + g^*(s) + h^*(s), & \text{se } 0 \leq s < 1 \\ \\ s^{(2-n)\alpha} f^*(s) + s^{(2-n)(-\beta)} g^*(s) + s^{(2-n)\gamma} h^*(s), & \text{se } s \geq 1 \end{cases}$$

Assim, como $f \in Q^{\alpha,\theta}$, $g \in Q^{-\beta,\theta}$, $h \in Q^{\gamma,\theta}$, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} s^{n-1} G(s,\phi(s))ds &= \int_0^1 s^{n-1}(f^*(s) + g^*(s) + h^*(s))ds + \int_1^{\infty} s^{n-1-\alpha(n-2)} f^*(s)ds \\ &+ \int_1^{\infty} s^{n-1+\beta(n-2)} g^*(s)ds + \int_1^{\infty} s^{n-1-\gamma_1(n-2)} h^*(s)ds < +\infty. \end{aligned}$$

Isso mostra a afirmação.

Defina,

$$\widetilde{y}(t) = K_1^{\lambda} \ J[G(t,\phi(t))], \ t > 0,$$

onde $\lambda = \max\{\alpha, \beta, \gamma\}$ e $K_1 = \max\{1, l_1^{\frac{-1}{\lambda}}, l_2^{\frac{\alpha}{\lambda(1-\alpha)}}, l_2^{\frac{\gamma}{\lambda(1-\gamma)}}\}$ com $l_1$ e $l_2$ dados no Lema 2.1.

Note que, a função $\widetilde{y}$ pode ser estendida continuamente até $t = 0$. De fato, como

$G \in S$

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\widetilde{y}(t) &= \frac{K_1^\lambda}{n-2}\lim_{t\to 0}\left[\int_0^t\left(\tfrac{s}{t}\right)^{n-2} sG(s,\phi(s))ds + \int_t^{+\infty} sG(s,\phi(s))ds\right]\\
&= \frac{K_1^\lambda}{n-2}\left[\lim_{t\to 0}\left(\tfrac{1}{t^{n-2}}\int_0^t s^{n-1}G(s,\phi(s))ds\right) + \lim_{t\to 0}\left(\int_t^{+\infty} sG(s,\phi(s))ds\right)\right]\\
&= \frac{K_1^\lambda}{n-2}\left[\lim_{t\to 0}\left(\frac{t^{n-1}G(t,\phi(t))}{(n-2)t^{n-3}}\right) + \int_0^{+\infty} sG(s,\phi(s))ds\right]\\
&= \frac{K_1^\lambda}{n-2}\left[\frac{1}{n-2}\lim_{t\to 0}(t^2G(t,1)) + \int_0^{+\infty} sG(s,\phi(s))ds\right]\\
&= \frac{K_1^\lambda}{n-2}\left[\frac{1}{n-2}\lim_{t\to 0}(t^2f^*(t)+t^2g^*(t)+t^2h^*(t)) + \int_0^{+\infty} sG(s,\phi(s))ds\right]\\
&= \frac{K_1^\lambda}{n-2}\int_0^{+\infty} sG(s,\phi(s))ds < \infty.
\end{aligned}
$$

Assim, podemos definir $y$ como sendo a extensão de $\widetilde{y}$, ou seja, $y : [0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ por

$$
y(t) = \begin{cases} K_1^\lambda J[G(t,\phi(t))], & t > 0,\\[2mm] \dfrac{K_1^\lambda}{n-2}\displaystyle\int_0^{+\infty} sG(s,\phi(s))ds, & t = 0.\end{cases}
$$

Observe ainda que,

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} y'(t) &= \lim_{t\to 0}\frac{K_1^\lambda}{n-2}\left[(2-n)t^{1-n}\int_0^t s^{n-1}G(s,\phi(s))ds + \frac{1}{t^{n-2}}t^{n-1}G(t,\phi(t))\right] +\\
&\quad + \lim_{t\to 0}\frac{K_1^\lambda}{n-2}\left[-tG(t,\phi(t))\right]\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{-K_1^\lambda}{n-1} tG(t,\phi(t)) = 0.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
y'(0) &= \lim_{t\to 0}\frac{y(t)-y(0)}{t} \\
&= \frac{K_1^\lambda}{n-2}\left[\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\int_0^t\left(\frac{s}{t}\right)^{n-2}sG(s,\phi(s))ds+\int_t^{+\infty}sG(s,\phi(s))ds-\int_0^{+\infty}sG(s,\phi(s))ds\right)\right] \\
&= \frac{K_1^\lambda}{n-2}\left[\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^{n-1}}\left(\int_0^t s^{n-1}G(s,\phi(s))ds\right)+-\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\int_0^t sG(s,\phi(s))ds\right)\right] \\
&= \frac{K_1^\lambda}{n-2}\left[\lim_{t\to 0}\frac{t^{n-1}G(t,\phi(t))}{(n-1)t^{n-2}}-\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\int_0^t sG(s,\phi(s))ds\right)\right] \\
&= \frac{K_1^\lambda}{n-2}\left[\lim_{t\to 0}\frac{1}{n-1}tG(t,\phi(t))-\lim_{t\to 0}tG(t,\phi(t))\right] \\
&= \frac{K_1^\lambda}{n-2}\left[\lim_{t\to 0}\frac{1}{n-1}tG(t,1)-\lim_{t\to 0}tG(t,1)\right]=0,
\end{aligned}$$

consequentemente, $\lim_{t\to 0}y'(t)=y'(0)$, logo

$$y\in C^1([0,\infty)).$$

E,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}y''(t) &= \lim_{t\to 0}\left[-(1-n)K_1^\lambda t^{-n}\int_0^t s^{n-1}G(s,\phi(s))ds-K_1^\lambda t^{1-n}t^{n-1}G(t,\phi(t))\right] \\
&= \lim_{t\to 0}\left[-(1-n)K_1^\lambda t^{-n}\int_0^t s^{n-1}G(s,\phi(s))ds-K_1^\lambda G(t,\phi(t))\right] \\
&= \lim_{t\to 0}\left[-(1-n)K_1^\lambda\frac{t^{n-1}G(t,\phi(t))}{(n)t^{n-1}}\right]-\lim_{t\to 0}K_1^\lambda G(t,\phi(t)) \\
&= \frac{(n-1)K_1^\lambda}{n}\lim_{t\to 0}G(t,\phi(t))-K_1^\lambda\lim_{t\to 0}G(t,\phi(t)) \\
&= \frac{-K_1^\lambda}{n}\lim_{t\to 0}G(t,\phi(t)).
\end{aligned}$$

Analogamente, vamos calcular $y''(0)$

$$\begin{aligned} y''(0) &= \lim_{t\to 0}\frac{y'(t)-y'(0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{-K_1^\lambda t^{1-n}\int_0^t s^{n-1}G(s,\phi(s)-0}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{-K_1^\lambda \int_0^t s^{n-1}G(s,\phi(s)}{t^n} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{-K_1^\lambda t^{n-1}G(t,\phi(t))}{nt^{n-1}} \\ &= \frac{-K_1^\lambda}{n}\lim_{t\to 0}G(t,\phi(t)). \end{aligned}$$

Assim,

$$y\in C^2([0,\infty)).$$

Portanto, tomando $v(x)=y(|x|)$ obtemos que $v\in C^2(\mathbb{R}^n)$.

Temos pelo item $(i)$ do Lema 2.1 que,

$$y''+\frac{n-1}{t}y'=-K_1^\lambda G(t,\phi(t)),\qquad t>0.$$

E, pelo item $(ii)$ do Lema 2.1 segue que

$$\phi(t)\le K_1^\lambda l_1\phi(t)\le y(t)\le K_1^\lambda l_2\phi(t),\quad t\ge 0$$

logo

$$\phi(t)\le y(t)\le K_1^\lambda l_2\phi(t),\quad t\ge 0.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} G(t,y) &= f^*(t)y^\alpha+g^*(t)y^{-\beta}+h^*(t)y^\gamma \\ &\le f^*(t)(l_2K_1^\lambda)^\alpha\phi^\alpha+g^*(t)\phi^{-\beta}+h^*(t)(l_2K_1^\lambda)^\gamma\phi^\gamma,\ t>0. \end{aligned}$$

Note que, $(l_2K_1^\lambda)^\alpha\le K_1^\lambda$ e $(l_2K_1^\lambda)^\gamma\le K_1^\lambda$. Além disso, $K_1^\lambda\ge 1$. Então, segue,

$$\begin{aligned} G(t,y) &\le K_1^\lambda[f^*(t)\phi^\alpha+g^*(t)\phi^{-\beta}+h^*(t)\phi^\gamma] \\ &= K_1^\lambda G(t,\phi(t)), \end{aligned}$$

ou seja,

$$G(t,y)\le K_1^\lambda\ G(t,\phi(t)),\ t\ge 0.$$

Portanto,

$$y''+\frac{n-1}{t}y'=-K_1^\lambda G(t,\phi(t))\le -G(t,y),$$

isto é,

$$-\left(y''+\frac{n-1}{t}y'\right)\ge G(t,y). \tag{2.1}$$

No Apêndice A.1 mostramos que,

$$\triangle v = y'' + y'\left(\frac{n-1}{r}\right)$$

daí, por (2.1), fazendo $t = |x|$ temos

$$\begin{aligned} -\triangle v &\geq G(|x|, y(|x|)) = f^*(|x|)v^{\alpha}(x) + g^*(|x|)v^{-\beta}(x) + h^*(|x|)v^{\gamma}(x) \\ &\geq f(x)v^{\alpha} + g(x)v^{-\beta} + h(x)v^{\gamma}. \end{aligned}$$

e pelo Lema 2.1,

$$K_1^{\lambda} l_1 \phi(|x|) \leq y(|x|) \leq K_1^{\lambda} l_2 \phi(|x|). \tag{2.2}$$

Assim de $v(x) = y(|x|)$ segue que

$$v(x) \leq K_1^{\lambda} l_2 \phi(|x|),$$

isto é,

$$v(x) \leq K_1^{\lambda} l_2 |x|^{2-n}, \ |x| \geq 1.$$

Isto prova o item (ii).

E como

$$\phi(|x|) \stackrel{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

temos de (2.2),

$$y(|x|) \stackrel{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ ou equivalentemente, } v(x) \stackrel{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Portanto, $v$ é uma supersolução de $(QY)_1$.

■

**Lema 2.4** (Subsolução)**.** *Suponha que* $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ *e* $f \in Q^{\alpha,\theta}$, $g \in Q^{-\beta,\theta}$, $h \in Q^{\gamma,\theta}$, *para algum* $\theta \in (0,1)$ *e* $(E_1)$. *Considere* $w : \mathbb{R}^n \longrightarrow (0, +\infty)$, *definida por* $w(x) = z(|x|)$, *onde*

$$z(t) = \begin{cases} K_2^{\lambda} J[g(t, \phi(t))], & t > 0, \\ \dfrac{K_2^{\lambda}}{n-2} \displaystyle\int_0^{\infty} s g(s, \phi(s)) ds, & t = 0 \end{cases}$$

*e*

$$g(t,s) = f_*(t)s^{\alpha} + g_*(t)s^{-\beta} + h_*(t)s^{\gamma}.$$

*Então* $w \leq v$, $\mathbb{R}^n$ *e*

**(i)** $w \in C^2(\mathbb{R}^n)$

**(ii)** *$w$ é uma subsolução do problema $(QY)_1$. Isto é,*

$$\begin{cases} -\triangle w \leq f(x)w^{\alpha} + g(x)w^{-\beta} + h(x)w^{\gamma} \\ \\ \quad w > 0, \ \mathbb{R}^n, \quad w \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

**(iii)** *$w(x) \geq d\phi(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Em particular, $w(x) \geq d|x|^{2-n}$, $|x| \geq 1$, para alguma constante $d > 0$.*

**Observação 2.4.1.** *Definimos as constantes positivas $K_2$ e $\lambda$ no interior da demonstração.*

**Demonstração do Lema (Subsolução).** Da mesma forma, também teremos que provar a seguinte afirmação para definir a função $z$ e mostrar que esta pertence ao espaço $C^2(\mathbb{R}^n)$.

**Afirmação 2.5.** $g(s, \phi(s)) \in S$

Note que,

$$f^*(t) = \max_{|x|=t} f(x) \geq f(x) \geq \min_{|x|=t} f(x) = f_*(t),$$

isto é,

$$f^*(|x|) \geq f(x) \geq f_*(|x|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Assim,

$$g(|x|, u) \leq [f(x)u^{\alpha} + g(x)u^{-\beta} + h(x)u^{\gamma}] \leq G(|x|, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u > 0.$$

Logo, de $g(s, \phi(s)) \leq G(s, \phi(s))$ e pela Afirmação (2.3) mostrada no Lema anterior segue,

$$0 < \int_0^{\infty} s^{n-1} g(s, \phi(s)) ds < \int_0^{\infty} s^{n-1} G(s, \phi(s)) ds < +\infty,$$

mostrando assim a afirmação.

Seja

$$\widetilde{z}(t) = K_2^{-\lambda} \ J(g(t, \phi(t))), \quad t > 0,$$

onde $\lambda = \max\{\alpha, \beta, \gamma\}$ e $K_2 = \min\{1, l_2^{\frac{1}{\lambda}}, l_1^{\overline{-\lambda(1-\alpha)}^{\,\alpha}}, l_1^{\overline{-\lambda(1-\gamma)}^{\,\gamma}}\}$ com $l_1, l_2$ dados pelo Lema 2.1.

Analogamente, podemos estender $\widetilde{z}$ para $t = 0$ e consideraremos $z$ como sendo a extensão de $\widetilde{z}$ para $t = 0$. Mostra-se também, similarmente ao Lema anterior, que $z \in C^2([0, \infty))$, consequentemente

$$w \in C^2(\mathbb{R}^n).$$

Obtemos, novamente pelo item $(i)$ do Lema 2.1, que

$$z'' + \frac{n-1}{t}z' = -K_2^{-\lambda}g(t,\phi(t)), \qquad t > 0.$$

E de $(ii)$ do Lema (2.1) segue que

$$\phi(t) \geq K_2^{-\lambda}l_2\phi(t) \geq z(t) \geq K_2^{-\lambda}l_1\phi(t), \quad t \geq 0,$$

isto é,

$$\phi(t) \geq z(t) \geq K_2^{-\lambda}l_1\phi(t), \quad t \geq 0.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} g(t,z) &= f_*(t)z^\alpha + g_*(t)z^{-\beta} + h_*(t)z^\gamma \\ &\geq f_*(t)(l_1K_2^{-\lambda})^\alpha\phi^\alpha(t) + g_*(t)\phi^{-\beta}(t) + h_*(t)(l_1K_2^{-\lambda})^\gamma\phi^\gamma(t). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Note que, $(l_1K_2^{-\lambda})^\alpha \geq K_2^{-\lambda}$ e $(l_1K_2^{-\lambda})^\gamma \geq K_2^{-\lambda}$. Então, a desigualdade (2.3) fica

$$\begin{aligned} g(t,z) &\geq K_2^{-\lambda}[f_*(t)\phi^\alpha(t) + g_*(t)\phi^{-\beta}(t) + h_*(t)\phi^\gamma(t)] \\ &= K_2^{-\lambda}g(t,\phi(t)), \end{aligned}$$

ou seja,

$$g(t,z) \geq K_2^{-\lambda}g(t,\phi(t)).$$

Portanto,

$$z'' + \frac{n-1}{t}z' = -K_2^{-\lambda}g(t,\phi(t)) \geq -g(t,z)$$

consequentemente

$$-\left(z'' + \frac{n-1}{t}z'\right) \leq g(t,z). \tag{2.4}$$

Daí, por (2.4), fazendo $t = |x|$ temos

$$\begin{aligned} -\triangle v &\leq g(|x|, z(|x|)) = f_*(|x|)w^\alpha(x) + g_*(|x|)w^{-\beta}(x) + h_*(|x|)w^\gamma(x) \\ &\leq f(x)v^\alpha + g(x)v^{-\beta} + h(x)v^\gamma. \end{aligned}$$

Além disso, pelo item (ii) do Lema 2.1

$$K_2^{-\lambda}l_1\phi(|x|) \leq z(|x|) \leq K_2^{-\lambda}l_2\phi(|x|), \tag{2.5}$$

isto é, como $w(x) = z(|x|)$ segue

$$w(x) \geq K_2^{-\lambda}l_1\phi(|x|),$$

o que prova o item (iii) do Lema.

E como

$$\phi(|x|) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

segue de (2.5) que

$$z(|x|) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ ou equivalentemente, } w(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Portanto, $w$ é uma subsolução de $(QY)_1$.

Temos ainda que,

$$z(t) \leq K_2^{-\lambda} l_2 \phi(t) \leq \phi(t) \leq y(t), \quad t \geq 0$$

consequentemente,

$$z(t) \leq y(t), \qquad t \geq 0.$$

Assim, fazendo $t = |x|$ segue que

$$w(x) \leq v(x), \; x \in \mathbb{R}^n.$$

■

## 2.3 Demonstração do Teorema $(QY)_1$ (Finalização)

Agora, com os Lemas anteriores demonstrados, vamos finalizar a prova do Teorema $(QY)_1$.

**Demonstração.** *Existência.* Mostramos nos lemas que $v(x) = y(|x|)$ e $w(x) = z(|x|)$ são respectivamente uma supersolução e uma subsolução de $(QY)_1$, com $v(x) \geq w(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ satisfeito. Logo, como $f(x)s^\alpha + g(x)s^{-\beta} + h(x)s^\gamma$ é uma função localmente Holder contínua em $x \in \mathbb{R}^n$ e localmente Lipschitz em $s > 0$ temos pelo Teorema 1.43, demonstrado no Apêndice (D), que $(QY)_1$ tem uma solução positiva $u$ tal que

$$w(x) \leq u(x) \leq v(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

*Unicidade.* Suponha, por contradição, que $v$ e $w$ são duas soluções de $(QY)_1$. Note que a condição $(a)$ do Lema 1.26 é satisfeito. De fato,

$$[f(x)v^\alpha + g(x)v^{-\beta} + h(x)v^\gamma] + \triangle v = 0 = [f(x)v^\alpha + g(x)v^{-\beta} + h(x)v^\gamma] + \triangle w.$$

É fácil ver que, a condição (b) do Lema 1.26 também é satisfeita.

Adicionalmente,

$$\begin{aligned} |\triangle v| &= |f(x)v^\alpha + g(x)v^{-\beta} + h(x)v^\gamma| \\ &\leq |f(x)v^\alpha| + |g(x)v^{-\beta}| + |h(x)v^\gamma|. \end{aligned}$$

Então, pelas hipóteses $f \in Q^{\alpha,\theta}$, $g \in Q^{-\beta,\theta}$, $h \in Q^{\gamma,\theta}$ e pelo Lema 1.27 existem $c_i$ e $C_i$, $i = 1, 2, 3$ constantes positivas tais que

- $$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)v^{\alpha} &= \int_{\overline{B_1}} f(x)v^{\alpha} + \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_1} f(x)v^{\alpha} \\ &\leq c_1 + \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_1} f^*(|x|)C_1^{\alpha}|x|^{(2-n)(\alpha)} \\ &= c_1 + C_1^{\alpha} \int_1^{\infty} \left( \int_{|x|=r} f^*(|x|)|x|^{(2-n)(\alpha)} dS \right) dr \\ &= c_1 + C_1^{\alpha}\omega_n \int_1^{\infty} r^{n-1} f^*(r) r^{(2-n)(\alpha)} dr \\ &= c_1 + C_1^{\alpha}\omega_n \int_1^{\infty} r^{n-1-\alpha(n-2)} f^*(r) dr < +\infty \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} g(x)v^{-\beta} &= \int_{\overline{B_1}} g(x)v^{-\beta} + \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_1} g(x)v^{-\beta} \\ &\leq c_2 + \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_1} g^*(|x|)A^{-\beta}|x|^{(2-n)(-\beta)} \\ &= c_2 + C_2^{-\beta} \int_1^{\infty} \left( \int_{|x|=r} g^*(|x|)|x|^{(2-n)(-\beta)} dS \right) dr \\ &= c_2 + C_2^{-\beta}\omega_n \int_1^{\infty} r^{n-1} g^*(r) r^{(2-n)(-\beta)} dr \\ &= c_2 + C_2^{-\beta}\omega_n \int_1^{\infty} r^{n-1+\beta(n-2)} g^*(r) dr < +\infty \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} h(x)v^{\gamma} &= \int_{\overline{B_1}} h(x)v^{\gamma} + \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_1} h(x)v^{\gamma} \\ &\leq c_3 + \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_1} h^*(|x|)C_1^{\gamma}|x|^{(2-n)(\gamma)} \\ &= c_3 + C_3^{\gamma} \int_1^{\infty} \left( \int_{|x|=r} h^*(|x|)|x|^{(2-n)(\gamma)} dS \right) dr \\ &= c_3 + C_3^{\gamma}\omega_n \int_1^{\infty} r^{n-1} h^*(r) r^{(2-n)(\gamma)} dr \\ &= c_3 + C_3^{\gamma}\omega_n \int_1^{\infty} r^{n-1-\gamma(n-2)} h^*(r) dr < +\infty \end{aligned}$$

Portanto,

$$\triangle v \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Analogamente, $\triangle w \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Logo, usando o Lema 1.26, temos $v \geq w$ e $w \geq v$ em $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$v \equiv w.$$

■

## 2.4 Existência de Sub e Supersolução de $(CY)_1$

Analogamente, ao Teorema $(QY)_1$ vamos continuar com a mesma estrutura para demonstrar o Teorema $(CY)_1$. Apresentaremos os Lemas de Super e Subsolução e finalizaremos provando a existência e unicidade de solução para o sistema $(CY)_1$.

**Lema 2.6** (Supersolução). *Suponha que, $-\infty < \alpha, \gamma < 1$, $\beta \geq 1$ e $f \in Q^{\alpha,\theta}$, $h \in Q^{\gamma,\theta}$, para algum $\theta \in (0,1)$ e $(E_2)$. Considere $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow (0, +\infty)$, definida por $v(x) = y(|x|)$ onde*

$$y(t) = \begin{cases} K_1^\lambda J[G(t, \phi(t))], & t > 0 \\ \dfrac{K_1^\lambda}{n-2} \int_0^\infty sG(s, \phi(s))ds, & t = 0 \end{cases}$$

*e*

$$G(t, s) = f^*(t)s^\alpha + h^*(t)s^\gamma$$

*Então:*

**(i)** $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$

**(ii)** *$v$ é uma supersolução do problema $(CY)_1$. Isto é,*

$$\begin{cases} -\triangle v \geq f(x)v^\alpha - g(x)v^\beta + h(x)v^\gamma, \\ v > 0, \ \mathbb{R}^n, \quad v \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

**(iii)** *$v(x) \leq \bar{c}\phi(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Em particular, $v(x) \leq \bar{c}|x|^{2-n}$, $|x| \geq 1$, para alguma constante $\bar{c} > 0$.*

**Observação 2.6.1.** *Definimos as constantes positivas $K_1$ e $\lambda$ no interior da demonstração.*

**Demonstração do Lema (Supersolução).** Vamos primeiramente provar uma afirmação para garantir que a função $y$ considerada está bem definida e além disso a usaremos para mostrar que $y \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

**Afirmação 2.7.** $G(s, \phi(s)) \in S$

Temos que

$$G(s, \phi(s)) = \begin{cases} f^*(s) + h^*(s), & \text{se } 0 \leq s < 1 \\ s^{(2-n)\alpha} f^*(s) + s^{(2-n)\gamma} h^*(s), & \text{se } s \geq 1 \end{cases}$$

Assim, como $f \in Q^{\alpha,\theta}$, $h \in Q^{\gamma,\theta}$, temos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty s^{n-1}G(s,\phi(s))ds &= \int_0^1 s^{n-1}(f^*(s)+h^*(s))ds + \int_1^\infty s^{n-1-\alpha(n-2)}f^*(s)ds \\ &+ \int_1^\infty s^{n-1-\gamma(n-2)}h^*(s)ds < +\infty.\end{aligned}$$

Isso mostra a afirmação.

Se $\alpha\gamma \leq 0$, sem perda de generalidade podemos assumir $\gamma \leq 0$, então tome

$$m = |\gamma| + 1 \text{ e } \lambda = \max\{m\alpha, |\gamma| + \frac{1}{2}\}.$$

Se $\alpha, \gamma > 0$, tome $m = 1$ e $\lambda = \max\{\alpha, \gamma\}$.

Se $\alpha, \gamma < 0$, tome $m = \max\{|\alpha|, |\gamma|\} + 1$ e $\lambda = \max\{|\alpha|, |\gamma|\}$.

Dados $K \geq 1$ e $c \in \mathbb{R}$ tal que $K^{-1} \leq c \leq K^m$, então

$$G(t,cs) \leq K^\lambda G(t,s), \qquad t \geq 0, u > 0. \tag{2.6}$$

De fato, considere os casos:

$\bullet \alpha\gamma \leq 0 \quad (\gamma \leq 0,\ \alpha \geq 0)$

$$\begin{aligned}G(t,cs) &= f^*(t)c^\alpha s^\alpha + h^*(t)c^\gamma s^\gamma \\ &\leq f^*(t)K^{\alpha m}s^\alpha + h^*(t)K^{-\gamma}s^\gamma \\ &\leq f^*(t)K^\lambda s^\alpha + h^*(t)K^\lambda s^\gamma \\ &= K^\lambda G(t,s).\end{aligned}$$

$\bullet \alpha,\ \gamma > 0$

$$\begin{aligned}G(t,cs) &= f^*(t)c^\alpha s^\alpha + h^*(t)c^\gamma s^\gamma \\ &\leq f^*(t)K^{\alpha m}s^\alpha + h^*(t)K^{m\gamma}s^\gamma \\ &\leq f^*(t)K^\lambda s^\alpha + h^*(t)K^\lambda s^\gamma \\ &= K^\lambda G(t,s).\end{aligned}$$

$\bullet \alpha,\ \gamma < 0$

$$\begin{aligned}G(t,cs) &= f^*(t)c^\alpha s^\alpha + h^*(t)c^\gamma s^\gamma \\ &\leq f^*(t)K^{-\alpha}s^\alpha + h^*(t)K^{-\gamma}s^\gamma \\ &\leq f^*(t)K^\lambda s^\alpha + h^*(t)K^\lambda s^\gamma \\ &= K^\lambda G(t,s).\end{aligned}$$

Portanto,

$$G(t, cs) \leq K^{\lambda} G(t, s), \qquad t \geq 0, s > 0.$$

Defina

$$\widetilde{y}(t) = K_1^{\lambda} J[G(t, \phi(t))], \quad t > 0,$$

onde $K_1$ é um número tal que $K_1 = \max\{1, l_2^{\frac{1}{m-\lambda}}, l_1^{\frac{-1}{\lambda}}\}$, onde $l_1$ e $l_2$ são dados pelo Lema 2.1.

Note que, a função $\widetilde{y}$ pode ser estendida para $t = 0$ analogamente ao $\widetilde{y}$ definido no Lema 2.2; já que $G$ agora, é um caso particular da função $G$ definida anteriormente, pois $g = 0$.

Assim, podemos definir $y$ como sendo a extensão de $\widetilde{y}$, ou seja, $y : [0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ por

$$y(t) = \begin{cases} K_1^{\lambda} J[G(t, \phi(t))], & t > 0 \\ \dfrac{K_1^{\lambda}}{n-2} \displaystyle\int_0^{+\infty} sG(s, \phi(s))ds, & t = 0 \end{cases}$$

Observe que, da mesma forma que mostramos anteriormente, $y \in C^2([0, \infty))$. Daí tomando $v(x) = y(|x|)$ concluímos que $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

Temos do Lema 2.1, segue que

$$y'' + \frac{n-1}{t} y' = -K_1^{\lambda} G(t, \phi(t)), \qquad t \geq 0.$$

Note que, pelo Lema 2.1,

$$K_1^{\lambda} l_1 \phi(t) \leq y(t) \leq K_1^{\lambda} l_2 \phi(t) \tag{2.7}$$

isto é, a condição (iii) está satisfeita.

De (2.7) segue,

$$\phi(t) \leq K_1^{\lambda} l_1 \phi(t) \leq y(t) \leq K_1^{\lambda} l_2 \phi(t) \leq K_1^{m} \phi(t), \quad t > 0$$

$$\phi(t) \leq y(t) \leq K_1^{m} \phi(t), \quad t > 0,$$

ou seja,

$$K^{-1} \leq 1 \leq \frac{y(t)}{\phi(t)} \leq K_1^{m}.$$

Portanto, segue de (2.6) que

$$G(t, y) \leq K_1^{\lambda} G(t, \phi(t)),$$

onde $c = \dfrac{y(t)}{\phi(t)}$ e $u = \phi(t)$ em (2.6), consequentemente

$$y'' + \frac{n-1}{t} y' \leq -G(t, y).$$

Isto é, $v(x) = y(|x|)$ é supersolução de $(CY)_1$. ∎

**Lema 2.8** (Subsolução)**.** *Suponha que,* $-\infty < \alpha, \gamma < 1$, $\beta \geq 1$ *e* $f \in Q^{\alpha,\theta}$, $h \in Q^{\gamma,\theta}$, *para algum* $\theta \in (0,1)$, $(E_2)$ *e* $(E_3)$. *Considere* $w : \mathbb{R}^n \longrightarrow (0, +\infty)$, *definida por* $w(x) = z(|x|)$, *onde*

$$z(t) = \begin{cases} K_2^{\lambda} J[g(t, \phi(t))], & t > 0, \\ \dfrac{K_2^{\lambda}}{n-2} \int_0^{\infty} sg(s, \phi(s))ds, & t = 0 \end{cases}$$

*e*

$$g(t,s) = \frac{1}{2}(f_*(t)s^{\alpha} + h_*(t)s^{\gamma}).$$

*Então,* $w \leq v$, $\mathbb{R}^n$ *e*

**(i)** $w \in C^2(\mathbb{R}^n)$

**(ii)** $w$ *é uma subsolução do problema* $(CY)_1$. *Isto é,*

$$\begin{cases} -\triangle w \leq f(x)w^{\alpha} - g(x)w^{\beta} + h(x)w^{\gamma}, \\ w > 0, \ \mathbb{R}^n, \quad w \overset{|x| \to \infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

**(iii)** $w(x) \geq \overline{d}\phi(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^n$. *Em particular,* $w(x) \geq \overline{d}|x|^{2-n}$, $|x| \geq 1$, *para alguma constante* $\overline{d} > 0$.

**Observação 2.8.1.** *Definimos as constantes positivas* $K_2$ *e* $\lambda$ *no interior da demonstração.*

**Demonstração do Lema (Subsolução).** Similarmente provaremos uma afirmação para garantir que a função $z$ está bem definida e mostrar que esta pertence ao espaço $C^2(\mathbb{R}^n)$.

**Afirmação 2.9.** $g(s, \phi(s)) \in S$

Note que,

$$f^*(t) = \max_{|x|=t} f(x) \geq f(x) \geq \min_{|x|=t} f(x) = f_*(t)$$

isto é,

$$f^*(|x|) \geq f(x) \geq f_*(|x|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Analogamente,

$$h^*(|x|) \geq h(x) \geq h_*(|x|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Logo, como $g(s, \phi(s)) \leq G(s, \phi(s))$ e pela afirmação (2.7) segue,

$$0 < \int_0^{\infty} s^{n-1} g(s, \phi(s))ds < +\infty.$$

o que mostra a afirmação.

Agora, se $\alpha\gamma \leq 0$, podemos assumir que $\gamma \leq 0$ sem perda de generalidade, então tome

$$m = |\gamma| + 1 \text{ e } \lambda = \max\{m\alpha, |\gamma| + \frac{1}{2}\}.$$

Se $\alpha, \gamma > 0$, tome $m = 1$ e $\lambda = \max\{\alpha, \gamma\}$.

Se $\alpha, \gamma < 0$, tome $m = \max\{|\alpha|, |\gamma|\} + 1$ e $\lambda = \max\{|\alpha|, |\gamma|\}$.

Se $K^{-m} \leq c \leq K$ então

$$g(t, cs) \geq K^{-\lambda} g(t, s), \qquad t \geq 0, s > 0. \tag{2.8}$$

Observamos que, as contas para mostrar (2.8) são parecidas com àquelas do Lema anterior. Por apresentar alguns detalhes interiores da desigualdade, as colocamos no que segue.

Temos três casos:

$\bullet \alpha\gamma \leq 0 \quad (\gamma \leq 0,\ \alpha \geq 0)$

$$\begin{aligned} g(t, cs) &= \frac{1}{2} f_*(t) c^\alpha s^\alpha + \frac{1}{2} h_*(t) c^\gamma s^\gamma \\ &\geq \frac{1}{2} f_*(t) K^{-\alpha m} s^\alpha + \frac{1}{2} h_*(t) K^\gamma s^\gamma \\ &\geq \frac{1}{2} f_*(t) K^{-\lambda} s^\alpha + \frac{1}{2} h_*(t) K^{-\lambda} s^\gamma \\ &= K^{-\lambda} g(t, s). \end{aligned}$$

$\bullet \alpha, \gamma > 0$

$$\begin{aligned} g(t, cs) &= \frac{1}{2} f_*(t) c^\alpha s^\alpha + \frac{1}{2} h_*(t) c^\gamma s^\gamma \\ &\geq \frac{1}{2} f_*(t) K^{-\alpha m} s^\alpha + \frac{1}{2} h_*(t) K^{\gamma m} s^\gamma \\ &\geq \frac{1}{2} f_*(t) K^{-\lambda} s^\alpha + \frac{1}{2} h_*(t) K^{-\lambda} s^\gamma \\ &= K^{-\lambda} g(t, s). \end{aligned}$$

$\bullet \alpha, \gamma < 0$

$$\begin{aligned} g(t, cs) &= \frac{1}{2} f_*(t) c^\alpha s^\alpha + \frac{1}{2} h_*(t) c^\gamma s^\gamma \\ &\geq \frac{1}{2} f_*(t) K^{\alpha} s^\alpha + \frac{1}{2} h_*(t) K^{\gamma} s^\gamma \\ &\geq \frac{1}{2} f_*(t) K^{-\lambda} s^\alpha + \frac{1}{2} h_*(t) K^{-\lambda} s^\gamma \\ &= K^{-\lambda} g(t, s). \end{aligned}$$

Portanto,

$$g(t, cs) \geq K^{-\lambda} g(t, s), \qquad t \geq 0, s > 0.$$

Analogamente ao Lema 2.4, mostra-se que $\exists\ K_2 \geq 1$ tal que a função $\widetilde{z}$ definida por

$$z(x) = K_2^{-\lambda} J[g(t, \phi(t))], \quad t > 0$$

pode ser estendida a $t = 0$ e essa extensão chamaremos de $z$, ou seja, a função $z$ é dada por

$$z(t) = \begin{cases} K_2^{\lambda} J[g(t, \phi(t))], & t > 0, \\ \dfrac{K_2^{\lambda}}{n-2} \displaystyle\int_0^{\infty} sg(s, \phi(s))ds, & t = 0. \end{cases}$$

Note que, o item $(i)$ deste Lema também é mostrado de forma similar ao Lema 2.4. E que, o item $(ii)$ segue diretamente do Lema 2.1.

E com a desigualdade mostrada em (2.8), segue

$$z'' + \frac{n-1}{t} z' \geq -g(t, z), \qquad t > 0$$

assim, $w(x) = z(|x|)$ é subsolução do problema $(CY)_1$.

Temos ainda,

$$K_2^{-m} \phi(t) \leq z(t) \leq \phi(t), \quad t > 0.$$

Observe que,

$$z(t) \leq \phi(t) \leq y(t), \qquad t > 0$$

consequentemente,

$$v(x) \geq w(x), \ x \in \mathbb{R}^n.$$

■

## 2.5 Demonstração do Teorema $(CY)_1$ (Finalização)

**Demonstração.** *Existência.* Como $f(x)s^{\alpha} - g(x)s^{\beta} + h(x)s^{\gamma}$ é uma função localmente Holder contínua em $x \in \mathbb{R}^n$ e localmente Lipschitz em $s > 0$, pelo Teorema 1.43, $(CY)_1$ tem uma solução $u$ tal que

$$w(x) \leq u(x) \leq v(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Adicionalmente,
*Unicidade.* Suponhamos que $v$ e $w$ são duas soluções do problema $(CY)_1$. É fácil ver que, as condições $(a)$ e $(b)$ do Lema 1.26 são satisfeitas para $v$ e $w$.

Além disso,

$$\begin{cases} |\triangle v| = |f(x)v^{\alpha} - g(x)v^{\beta} + h(x)v^{\gamma}|, \\ |\triangle w| = |f(x)w^{\alpha} - g(x)w^{\beta} + h(x)w^{\gamma}|. \end{cases}$$

E, independente dos sinais de $\alpha$ e $\gamma$, segue de

$$\begin{cases} c_1|x|^{2-n} \leq v \leq d_1|x|^{2-n}, \\ \\ c_2|x|^{2-n} \leq w \leq d_2|x|^{2-n}. \end{cases}$$

que

$$\triangle v, \triangle w \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Portanto, usando Lema 1.26, temos $v \geq w$ e $w \geq v$ em $\mathbb{R}^n$, o que nos dá $v \equiv w$.

$\blacksquare$

# CAPÍTULO 3

# Existência de soluções inteiras para sistemas com duas equações

O principal objetivo deste trabalho é estudar a classe de sistemas $(S)$, que será relembrado a seguir. Neste capítulo, estamos interessados em investigar a existência de solução para,

$$(S): \quad \begin{cases} -\triangle u = f_1(x)u^{\alpha} + g_1(x,u) + h_1(x)u^{\gamma}P(v), \quad \mathbb{R}^n, \\ \\ -\triangle v = f_2(x)v^{\alpha} + g_2(x,v) + h_2(x)v^{\gamma}P(u), \quad \mathbb{R}^n, \\ \\ \quad u, v > 0, \ \mathbb{R}^n; \quad u(x), v(x) \stackrel{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

Como já foi citado, vamos estudar dois sistemas particulares de $(S)$, que serão abordados em Teoremas que foram denominados como Teorema $(QY)_2$ e $(CY)_2$. Esses sitemas se diferem na definição de $g$ e nos intervalos das potências em $u$ e $v$, em ambas as equações.

E novamente, consideraremos o conjunto

$$Q^{\lambda,\theta} = \left\{ \rho \in C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \ / \ \rho \geq 0, \rho \neq 0 \text{ e } \int_1^{+\infty} s^{n-1-\lambda(n-2)}\rho^*(s)ds < +\infty \right\},$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\theta \in (0,1)$.

Vamos relembrar os problemas com respeito à classe de sistemas $(S)$.

O primeiro, que estudaremos neste trabalho, consiste no seguinte sistema

$$(QY)_2: \quad \begin{cases} -\triangle u = f_1(x)u^{\alpha} + g_1(x)u^{-\beta} + h_1(x)u^{\gamma}P(v), x \in \mathbb{R}^n, \\ \\ -\triangle v = f_2(x)v^{\alpha} + g_2(x)v^{-\beta} + h_2(x)v^{\gamma}P(u), x \in \mathbb{R}^n, \\ \\ \quad u, v > 0, \ \mathbb{R}^n; \quad u(x), v(x) \stackrel{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases}$$

que é um problema que apresenta sua singularidade no termo que tem $(-\beta)$ como potência, já que $0 < \beta < 1$.

Esse problema foi estudado por Qiu e Yao, em 2006, sob as seguintes hipóteses

$$(S_1): \qquad \int_1^{\infty} s^{n-1-\gamma(n-2)} h_i^*(s) P^*(s) ds < +\infty, \quad P^*(s) = \max_{|x|=s} P(\phi(|x|)),$$

$$f_{i_*}(s) + g_{i_*}(s) + h_{i_*}(s) \neq 0, \text{ para } s \geq 0,$$

$(S_2)$ $\quad P : (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ é uma função continuamente diferenciável tal que

$$\exists\ \lambda \in (0, 1-\gamma) \text{ tal que } \forall K \geq 1 \text{ e } c \in [K^{-1}, K],$$

$$P(cs) \leq K^{\lambda} P(s), \forall s > 0.$$

A saber,

**Teorema** $(QY)_2$**:** *Suponha* $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$, $f_i \in Q^{\alpha,\theta}$, $g_i \in Q^{-\beta,\theta}$, $h_i \in C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *para algum* $\theta \in (0,1)$, $(S_1)$ *e* $(S_2)$. *Então o sistema* $(QY)_2$ *possui solução. Isto é, existem* $u, v \in C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *satisfazendo o sistema* $(QY)_2$ *e adicionalmente*

$$c_1|x|^{2-n} \leq u(x), v(x) \leq c_2|x|^{2-n}, \quad |x| \geq 1, \text{ para alguns } c_1, c_2 > 0.$$

A idéia principal da demonstração deste Teorema, consiste em definir uma aplicação apropriada em um espaço vetorial topológico localmente convexo de Hausdorff adequadamente considerado e em seguida verificar as hipóteses do Teorema de Ponto Fixo de Schauder-Tychonoff, a saber o Teorema 1.41.

O Teorema $(QY)_2$ garante a existência de soluções para os seguintes sistemas:

**Exemplo 3.1.** *Considere* $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$, $0 < \sigma < 1-\gamma$,

$$\begin{cases} -\triangle u = f_1(x)u^{\alpha} + g_1(x)u^{-\beta} + h_1(x)u^{\gamma}v^{\sigma}, \mathbb{R}^n, \\ -\triangle v = f_2(x)v^{\alpha} + g_2(x)v^{-\beta} + h_2(x)v^{\gamma}u^{\sigma}, \mathbb{R}^n, \\ u, v > 0, \ \mathbb{R}^n; \quad u(x), v(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

**Exemplo 3.2.** *Considere* $0 < \delta \leq \lambda, 0 < \sigma \leq \lambda$,

$$\begin{cases} -\triangle u = f_1(x)u^{\alpha} + g_1(x)u^{-\beta} + h_1(x)u^{\gamma}(v^{\delta} + v^{-\sigma}), \mathbb{R}^n, \\ -\triangle v = f_2(x)v^{\alpha} + g_2(x)v^{-\beta} + h_2(x)v^{\gamma}(u^{\delta} + u^{-\sigma}), \mathbb{R}^n, \\ u, v > 0, \ \mathbb{R}^n; \quad u(x), v(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

**Exemplo 3.3.** *Considere* $c_0 > 0, \delta > 0, \sigma > 0, 0 < \delta + \sigma \leq \lambda,$

$$\begin{cases} -\triangle u = f_1(x)u^{\alpha} + g_1(x)u^{-\beta} + h_1(x)u^{\gamma}\left(\dfrac{v^{\delta}}{(c_0+v)^{\sigma}}\right), \mathbb{R}^n, \\ \\ -\triangle v = f_2(x)v^{\alpha} + g_2(x)v^{-\beta} + h_2(x)v^{\gamma}\left(\dfrac{u^{\delta}}{(c_0+u)^{\sigma}}\right), \mathbb{R}^n, \\ \\ \qquad u, v > 0, \ \mathbb{R}^n; \quad u(x), v(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

O outro problema considerado neste trabalho, trata-se do seguinte sistema

$$(CY)_2 : \qquad \begin{cases} -\triangle u = f_1(x)u^{\alpha} - g_1(x)u^{\beta} + h_1(x)u^{\gamma}P(v), x \in \mathbb{R}^n, \\ \\ -\triangle v = f_2(x)v^{\alpha} - g_2(x)v^{\beta} + h_2(x)v^{\gamma}P(u), x \in \mathbb{R}^n, \\ \\ \qquad u, v > 0, \ \mathbb{R}^n; \quad u(x), v(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases}$$

que podem apresentar suas singularidades nas potências envolvendo $\alpha$ e $\gamma$, já que $-\infty < \alpha, \gamma < 1$, e superlinearidades nos termos envolvendo $\beta \geq 1$.

Esse sistema foi estudado por Chen e Yao, em 2006, que provaram a existência de solução para $(CY)_2$ sob as hipóteses,

$(S_3)$ $g_i(x) \leq c_i f_i(x), x \in \mathbb{R}^n$; para constantes $c_i > 0$; $i = 1, 2$,

$(S_4)$
$$\int_1^{\infty} s^{n-1-\gamma(n-2)} h_i^*(s) P(s^{2-n}) ds < +\infty \text{ e } f_{i_*}(s) \neq 0 \text{ para } s \geq 0; \ i = 1, 2,$$

$(S_5)$ $P : (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ é uma função continuamente diferenciável tal que uma das seguintes condições é satisfeita:

- **(i)** $P$ não crescente, e existe $\delta > 0$ tal que, $\forall K \geq 1, P(K^{-1}s) \leq K^{\delta}P(s), \forall s > 0$,
- **(ii)** $P$ não decrescente, e existe $\delta \in (0, 1-\gamma)$ tal que, $\forall K \geq 1, P(Ks) \leq K^{\delta}P(s), \forall s > 0$.

Mais especificamente,

**Teorema** $(CY)_2$: *Suponha que* $-\infty < \alpha, \gamma < 1$, $\beta \geq 1$, $f_i \in Q^{\alpha,\theta}, h_i \in C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *para algum* $\theta \in (0,1)$, $i = 1, 2$, $(S_3)$, $(S_4)$ *e* $(S_5)$. *Então o sistema* $(CY)_2$ *possui solução. Isto é, existem* $u, v \in C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *satisfazendo o sistema* $(CY)_2$ *tais que*

$$c_1|x|^{2-n} \leq u(x), v(x) \leq c_2|x|^{2-n}, \quad |x| \geq 1, \ \textit{para alguns } c_1, c_2 > 0.$$

A demonstração desse Teorema também se baseia na verificação das hipóteses de um Teorema de Ponto Fixo, a saber, o Teorema 1.3, que foi demonstrado no Apêndice (D).

Esse resultado pode ser aplicado a sistemas tais como,

**Exemplo 3.4.** *Considere* $d_i \geq 0$, $\delta_i < 1 - \gamma$, $i = 1, 2$,

$$\begin{cases} -\triangle u = f_1(x)u^{\alpha} - g_1(x)u^{\beta} + h_1(x)u^{\gamma}(d+v)^{\delta}, \mathbb{R}^n \\ -\triangle v = f_2(x)v^{\alpha} - g_2(x)v^{\beta} + h_2(x)v^{\gamma}(d+u)^{\delta}, \mathbb{R}^n \\ u, v > 0, \ \mathbb{R}^n; \quad u(x), v(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases}$$

**Exemplo 3.5.** *Considere* $-\infty < \alpha, \gamma < 1$, $\beta \geq 1$ *e* $0 < \sigma < 1 - \gamma$,

$$\begin{cases} -\triangle u = f_1(x)u^{\alpha} + g_1(x)u^{-\beta} + h_1(x)u^{\gamma}v^{\sigma}, \mathbb{R}^n, \\ -\triangle v = f_2(x)v^{\alpha} + g_2(x)v^{-\beta} + h_2(x)v^{\gamma}u^{\sigma}, \mathbb{R}^n, \\ u, v > 0, \ \mathbb{R}^n; \quad u(x), v(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

**Observação 3.5.1.** *Os métodos utilizados nas demonstrações dos Teoremas* $(QY)_2$ *e* $(CY)_2$ *podem ser adaptados para os problemas do tipo* $(QY)_2$ *e* $(CY)_2$ *em domínios limitados regulares.*

## 3.1 Demonstração do Teorema $(QY)_2$

Vamos dividir o sistema $(QY)_2$ em dois outros problemas compostos por uma equação cada um. Através do Teorema $(QY)_1$, teremos uma solução única para cada um desses problemas, estas deixam bem definida uma aplicação. Daí, pelo Teorema de Ponto Fixo de Schauder Tychonoff, mostraremos que a aplicação tem um ponto fixo, sendo esse a nossa solução.

**Demonstração.** De $f_1 \in Q^{\alpha,\theta}$, $g_1 \in Q^{-\beta,\theta}$ e $(S_1)$, segue pelo Teorema $(QY)_1$ que existem $u_0 \in C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $c_1 > 1$ tais que

$$\begin{cases} -\triangle u_0 = f_1(x)u_0^{\alpha} + g_1(x)u_0^{-\beta} + h_1(x)u_0^{\gamma}P(\phi(|x|)), x \in \mathbb{R}^n, \\ u_0 > 0, \ u_0(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

e

$$c_1^{-1}\phi(|x|) \leq u_0(x) \leq c_1\phi(|x|), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Analogamente, de $f_2 \in Q^{\alpha,\theta}$, $g_2 \in Q^{-\beta,\theta}$ e $(S_1)$ novamente segue pelo Teorema $(QY)_1$ que existem $v_0 \in C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $c_2 > 1$ tais que

$$\begin{cases} -\triangle v_0 = f_2(x)v_0^{\alpha} + g_2(x)v_0^{-\beta} + h_2(x)v_0^{\gamma}P(\phi(|x|)), x \in \mathbb{R}^n, \\ \\ v_0 > 0, \ v_0(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

e

$$c_2^{-1}\phi(|x|) \leq v_0(x) \leq c_2\phi(|x|), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Então tomando $c_0 \in \mathbb{R}$ tal que $c_0 > \max\{c_1, c_2\} > 1$ segue

$$\begin{aligned} c_0^{-1}\phi(|x|) \ &\leq \ u_0(x) \ \leq \ c_0\phi(|x|), \ x \in \mathbb{R}^n, \\ \\ c_0^{-1}\phi(|x|) \ &\leq \ v_0(x) \ \leq \ c_0\phi(|x|), \ x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Agora, considere $e \geq c$ um parâmetro real e denote por

$$U_e \equiv \{u \in C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) / e^{-1}u_0(x) \leq u(x) \leq eu_0(x), x \in \mathbb{R}^n\}$$

e

$$V_e \equiv \{v \in C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) / e^{-1}v_0(x) \leq v(x) \leq ev_0(x), x \in \mathbb{R}^n\}$$

Assim, $U_e, V_e \neq \emptyset$, pois $u_0, v_0 \in C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e como $e \geq c$ segue de (3.3) e que $u_0 \in U_e$ e $v_0 \in V_e$.

Dados

$$(u, v) \in U_e \times V_e \subset C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

defina as funções $h^e_{u,v}, z^e_{u,v} : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$ por

$$\begin{aligned} h^e_{u,v}(x) \ &= \ f_1(x)u^{\alpha} + g_1(x)u^{-\beta} + h_1(x)u^{\gamma}P(v(x)) \text{ e} \\ \\ z^e_{u,v}(x) \ &= \ f_2(x)v^{\alpha} + g_2(x)v^{-\beta} + h_2(x)v^{\gamma}P(u(x)). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Temos que,

$$h^e_{u,v}, z^e_{u,v} \in C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

De fato,

$$\begin{aligned} H_{\theta}[f_1u^{\alpha}] \ &= \ \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^n \\ x\neq y}} \frac{|f_1(x)u^{\alpha}(x) - f_1(y)u^{\alpha}(y)|}{|x-y|^{\theta}} \\ &\leq \ \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^n \\ x\neq y}} \left( \frac{|f_1(x)u^{\alpha}(x) - f_1(x)u^{\alpha}(y)|}{|x-y|^{\theta}} + \frac{|f_1(x)u^{\alpha}(y) - f_1(y)u^{\alpha}(y)|}{|x-y|^{\theta}} \right) \\ &\leq \ \|f_1\| \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^n \\ x\neq y}} \left( \frac{|u^{\alpha}(x) - u^{\alpha}(y)|}{|x-y|^{\theta}} \right) + \|u^{\alpha}\| \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^n \\ x\neq y}} \left( \frac{|f_1(x) - f_1(y)|}{|x-y|^{\theta}} \right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

E, como $\rho(s) = s^\alpha$ é tal que $\rho \in C^1$, $\rho' \in L^\infty_{loc}((0,\infty))$ e $u \in C^{0,\theta}(\mathbb{R}^n)$ então pelo Lema 1.2, $\rho(u) = u^\alpha \in C^{0,\theta}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $f \in C^{0,\theta}(\mathbb{R}^n)$. Daí voltando em (3.5) segue que $f_1 u^\alpha \in C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$. De forma semelhante, mostra-se que $g_1 u^{-\beta} \in C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $h_1 u^\gamma P(v) \in C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Portanto, $h^e_{u,v} \in C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Analogamente, $z^e_{u,v} \in C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Então pelo Teorema (1.21), existem $\widetilde{u} = \widetilde{u}_e, \widetilde{v} = \widetilde{v}_e \in C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\begin{aligned} -\triangle \widetilde{u} &= h^e_{u,v}(x), x \in \mathbb{R}^n, \text{ e} \\ -\triangle \widetilde{v} &= z^e_{u,v}(x), x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Isso deixa bem definidas, as aplicações

$$A_e, B_e : U_e \times V_e \longrightarrow C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \text{ onde}$$

$$A_e(u,v) = \widetilde{u} \text{ e } B_e(u,v) = \widetilde{v}.$$

Ou seja, como uma consequência, também fica bem definida a aplicação

$$\Phi_e : U_e \times V_e \longrightarrow C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

dada por

$$\Phi_e(u,v) = (A_e(u,v), B_e(u,v)).$$

Adicionalmente, temos,

**Afirmação 3.6.** *Existe $e_0 > 1$ suficientemente grande tal que*

**(i)** $\Phi_{e_0}(U_{e_0} \times V_{e_0}) \subset U_{e_0} \times V_{e_0}$,

**(ii)** $\Phi_{e_0}$ *é contínua de* $U_{e_0} \times V_{e_0}$ *em* $U_{e_0} \times V_{e_0}$,

**(iii)** $\Phi_{e_0}$ *é relativamente compacta em* $C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$,

**(iv)** $U_{e_0} \times V_{e_0} \subset C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *é um subconjunto convexo.*

Admita que a Afirmação 3.6 tenha sido provada. Desde que $C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial topológico de Hausdorff localmente convexo (veja Apêndice C), segue pelo Teorema de Ponto Fixo de Schauder-Tychonoff, a saber Teorema 1.41, que existem $u, v \in U_{e_0} \times V_{e_0}$ tal que

$$\Phi_{e_0}(u,v) = (u,v).$$

Isto é,

$$A_{e_0}(u,v) = u \text{ e } B_{e_0}(u,v) = v.$$

Daí,

$$(u,v) \in C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \text{ é uma solução de } (QY)_2.$$

Isso mostra o Teorema $(QY)_2$.

No que segue, provaremos a Afirmação 3.6.

**Prova de (i):** Para provar é suficiente mostrarmos as afirmações:

**Afirmação(i.1):** Existe $e_1 > 0$ suficientemente grande tal que $A_{e_1}(U_{e_1} \times V_{e_1}) \subset U_{e_1}$.

**Afirmação(i.2):** Existe $e_2 > 0$ suficientemente grande tal que $B_{e_2}(U_{e_2} \times V_{e_2}) \subset V_{e_2}$.

**Prova de Afirmação (i.1)**: Da hipótese $(S_2)$, isto é, $0 < \lambda < 1-\gamma$, podemos tomar $e_1 > 0$ suficientemente grande tal que

$$e_1^{\frac{1-\lambda-\gamma}{\lambda}} \geq c_0 \tag{3.6}$$

Fixemos esse $e_1$. Dadas $(u,v) \in U_{e_1} \times V_{e_1}$, temos bem definida $\widetilde{u} \in C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, onde $\widetilde{u} = A_{e_1}(u,v)$. Isto é, $\widetilde{u}$ satifaz

$$-\triangle \widetilde{u} = f_1(x)u^{\alpha} + g_1(x)u^{-\beta} + h_1(x)u^{\gamma}P(v(x)),\ \mathbb{R}^n. \tag{3.7}$$

Assim, para provar a Afirmação (i.1) devemos mostrar que

$$e_1^{-1}u_0(x) \leq \widetilde{u}(x) \leq e_1 u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

De fato, de $(u,v) \in U_{e_1} \times V_{e_1}$ e (3.3), segue

$$\begin{cases} e_1^{-1}c_0^{-1}\phi(|x|) \leq e_1^{-1}u_0(x) \leq u(x) \leq e_1u_0(x) \leq e_1c_0\phi(|x|) \\ e_1^{-1}c_0^{-1}\phi(|x|) \leq e_1^{-1}v_0(x) \leq v(x) \leq e_1v_0(x) \leq e_1c_0\phi(|x|) \end{cases} \tag{3.8}$$

De (3.7) e (3.8),

$$\begin{aligned} -\triangle \widetilde{u} &= f_1(x)u^{\alpha} + g_1(x)u^{-\beta} + h_1(x)u^{\gamma}P(v) \\ &\leq f_1(x)e_1^{\alpha}u_0^{\alpha} + g_1(x)e_1^{\beta}u_0^{-\beta} + h_1(x)e_1^{\gamma}u_0^{\gamma}P(v(x)) \\ &= f_1(x)e_1^{\alpha}u_0^{\alpha} + g_1(x)e_1^{\beta}u_0^{-\beta} + h_1(x)e_1^{\gamma}u_0^{\gamma}P\left(\frac{v(x)}{\phi(|x|)}\phi(|x|)\right) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Como

$$(e_1c_0)^{-1} \leq \frac{v(x)}{\phi(|x|)} \leq (e_1c_0),$$

então pela hipótese $(S_2)$ temos

$$P\left(\frac{v(x)}{\phi(|x|)}\phi(|x|)\right) \leq (e_1c_0)^{\lambda}P(\phi(|x|)). \tag{3.10}$$

Portanto, de (3.9) e (3.10) segue

$$\begin{aligned} -\triangle\widetilde{u} &\leq f_1(x)e_1u_0^{\alpha}+g_1(x)e_1u_0^{-\beta}+h_1(x)e_1^{\gamma}u_0^{\gamma}(e_1c_0)^{\lambda}P(\phi(|x|)) \\ &= f_1(x)e_1u_0^{\alpha}+g_1(x)e_1u_0^{-\beta}+h_1(x)u_0^{\gamma}e_1^{\gamma+\lambda}c_0^{\lambda}P(\phi(|x|)) \end{aligned} \tag{3.11}$$

De (3.6) e (3.11), segue

$$\begin{aligned} -\triangle\widetilde{u} &\leq f_1(x)(e_1u_0^{\alpha})+g_1(x)(e_1u_0^{-\beta})+h_1(x)(e_1u_0^{\gamma})P(\phi(|x|)) \\ &= -\triangle(e_1u_0). \end{aligned}$$

onde $u_0$ é dada pelo Teorema $(QY)_1$. Isto é, satisfaz (3.1).

Afirmamos que

$$\widetilde{u}(x)\leq e_1u_0(x), x\in\mathbb{R}^n.$$

Suponha, por contradição, existe $x_0$ tal que $\widetilde{u}(x_0)>e_1u_0(x_0)$.

Desde que,

$$(\widetilde{u}(x)-e_1u_0(x))\xrightarrow{|x|\to\infty}0,$$

segue que $(\widetilde{u}-e_1u_0)$ assume um valor máximo em $x_1$ tal que

$$\widetilde{u}(x_1)-e_1u_0(x_1)\geq\widetilde{u}(x_0)-e_1u_0(x_0)>0 \text{ e } \triangle(\widetilde{u}-e_1u_0)\geq 0, \mathbb{R}^n.$$

Assim, pelo Princípio do Máximo, (1.25), $\widetilde{u}-e_1u_0=c$, onde $c$ é constante. Isto é,

$$0<c=\widetilde{u}(x_0)-e_1u_0(x_0)=\widetilde{u}(x)-e_1u_0(x)\xrightarrow{|x|\to\infty}0.$$

Agora, vamos mostrar que, $e_1^{-1}u_0(x)\leq\widetilde{u}(x), \forall x\in\mathbb{R}^n$. Novamente, desde que, $A_{e_1}(u,v)=\widetilde{u}$, segue de (3.5) e (3.8),

$$\begin{aligned} -\triangle(e_1^{-1}u_0) &= f_1(x)e_1^{-1}u_0^{\alpha}+g_1(x)e_1^{-1}u_0^{-\beta}+h_1(x)e_1^{-1}u_0^{\gamma}P(\phi(|x|)) \\ &\leq f_1(x)e_1^{-\alpha}u_0^{\alpha}+g_1(x)e_1^{\beta}u_0^{-\beta}+h_1(x)e_1^{-1}u_0^{\gamma}P(\phi(|x|)) \\ &= f_1(x)e_1^{-\alpha}u_0^{\alpha}+g_1(x)e_1^{\beta}u_0^{-\beta}+h_1(x)e_1^{-1}u_0^{\gamma}P\left(\frac{\phi(|x|)}{v(x)}v(x)\right). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Como de (3.8) segue

$$(e_1c_0)^{-1}\leq\frac{\phi(|x|)}{v(x)}\leq(e_1c_0),$$

então pela hipótese $(S_2)$ temos

$$P(\phi(|x|))=P\left(\frac{\phi(|x|)}{v(x)}v(x)\right)\leq(e_1c_0)^{\lambda}P(v(x)) \tag{3.13}$$

Portanto de (3.12) e (3.13) segue

$$\begin{aligned} -\triangle(e_1^{-1}u_0) &\leq f_1(x)e_1^{-\alpha}u_0^{\alpha}+g_1(x)e_1^{\beta}u_0^{-\beta}+h_1(x)e_1^{-1}u_0^{\gamma}(e_1c_0)^{\lambda}P(v(x)) \\ &= f_1(x)e_1^{-\alpha}u_0^{\alpha}+g_1(x)e_1^{\beta}u_0^{-\beta}+h_1(x)e_1^{\lambda-1}u_0^{\gamma}c_0^{\lambda}P(v(x)). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Logo, de (3.14), (3.6) e (3.8) segue

$$\begin{aligned} -\triangle(e_1^{-1}u_0) &\leq f_1(x)e_1^{-\alpha}u_0^{\alpha} + g_1(x)e_1^{\beta}u_0^{-\beta} + h_1(x)e_1^{-\gamma}u_0^{\gamma}P(v(x)) \\ &\leq f_1(x)u^{\alpha} + g_1(x)u^{-\beta} + h_1(x)u^{\gamma}P(v(x)) = -\triangle\widetilde{u}. \end{aligned}$$

Analogamente, ao caso anterior, prova-se também que $e_1^{-1}u_0 - \widetilde{u} \leq 0$, ou seja, $e_1^{-1}u_0(x) \leq \widetilde{u}(x), x \in \mathbb{R}^n$.

Portanto,

$$e_1^{-1}u_0(x) \leq \widetilde{u}(x) \leq e_1u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Com o mesmo argumento, concluímos que existe $e_2 > 1$ suficientemente grande tal que

$$e_2^{-1}v_0(x) \leq \widetilde{v}(x) \leq e_2v_0(x),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Isto é,

$$\begin{cases} A_{e_1}(U_{e_1} \times V_{e_1}) & \subset & U_{e_1}, \\ B_{e_2}(U_{e_2} \times V_{e_2}) & \subset & V_{e_2}. \end{cases}$$

Assim, tomando $e_0 = \max\{e_1, e_2\}$ temos

$$\Phi_{e_0}(U_{e_0} \times V_{e_0}) \subset U_{e_0} \times V_{e_0}.$$

**Prova de (ii):** Para provar (ii), é suficiente mostrar que

$$A_{e_0}, B_{e_0} : U_{e_0} \times V_{e_0} \longrightarrow C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

são contínuas. Isto é, $A_{e_0}w_n \longrightarrow A_{e_0}w$ em $C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para $w_n, w \in U_{e_0} \times V_{e_0}$ com $w_n \longrightarrow w$ em $C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Analogamente, para $B_{e_0}$.

Sejam $w_n = (u_n, v_n)$, $w = (u, v) \in U_{e_0} \times V_{e_0}$ tais que $w_n \overset{C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)\times C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} w$. Isto é, dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado, temos

$$\|u_n - u\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})}, \|v_n - v\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} \longrightarrow 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|u_n^{\alpha} - u^{\alpha}\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} &\longrightarrow 0, \\ \|u_n^{-\beta} - u^{-\beta}\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} &\longrightarrow 0, \\ \|u_n^{\gamma} - u^{\gamma}\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} &\longrightarrow 0, \\ \|P(v_n) - P(v)\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} &\longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Fazendo

$$\begin{aligned} F(x) &= f_1(x)u^{\alpha} + g_1(x)u^{-\beta} + h_1(x)u^{\gamma}P(v), x \in \mathbb{R}^n, \\ F_n(x) &= f_1(x)u_n^{\alpha} + g_1(x)u_n^{-\beta} + h_1(x)u_n^{\gamma}P(v_n), x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

segue

$$\begin{aligned}
||F_n - F||_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} &= \|(u_n^{\alpha} - u^{\alpha})f_1(x) + (u_n^{-\beta} - u^{-\beta})g_1(x) + [u_n^{\gamma}P(v_n) - u^{\gamma}P(v)]h_1(x)\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} \\
&\leq \|(u_n^{\alpha} - u^{\alpha})f_1(x)\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} + \|(u_n^{-\beta} - u^{-\beta})g_1(x)\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} + \\
&\quad + \|[u_n^{\gamma}P(v_n) - u^{\gamma}P(v)]h_1(x)\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})}.
\end{aligned}$$

Desde que,

$$c < f_1(x) < d, \quad x \in \overline{\Omega}$$

segue

$$\begin{aligned}
(u_n^{\alpha} - u^{\alpha})(x)f_1(x) - (u_n^{\alpha} - u^{\alpha})(y)f_1(y) &\leq d(u_n^{\alpha} - u^{\alpha})(x) - c(u_n^{\alpha} - u^{\alpha})(y) \\
&\leq R_1|(u_n^{\alpha} - u^{\alpha})(x) - (u_n^{\alpha} - u^{\alpha})(y)|
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(u_n^{\alpha} - u^{\alpha})(y)f_1(y) - (u_n^{\alpha} - u^{\alpha})(x)f_1(x) &\leq d(u_n^{\alpha} - u^{\alpha})(x) - c(u_n^{\alpha} - u^{\alpha})(x) \\
&\leq R_1|(u_n^{\alpha} - u^{\alpha})(x) - (u_n^{\alpha} - u^{\alpha})(y)|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|(u_n^{\alpha} - u^{\alpha})f_1(x)\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} \leq R_1\|u_n^{\alpha} - u^{\alpha}\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})}. \tag{3.16}$$

Analogamente,

$$\begin{gathered}
\|(u_n^{-\beta} - u^{-\beta})g_1(x)\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} \leq R_2\|u_n^{-\beta} - u^{-\beta}\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})}, \\
\|[u_n^{\gamma}P(v_n) - u^{\gamma}P(v)]h_1(x)\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} \leq R_3\|u_n^{\gamma}P(v_n) - u^{\gamma}P(v)\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})}.
\end{gathered} \tag{3.17}$$

Assim, por (3.16), (3.17) e (3.15), temos

$$\begin{aligned}
||F_n - F||_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} &\leq R_1\|u_n^{\alpha} - u^{\alpha}\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} + R_2\|u_n^{-\beta} - u^{-\beta}\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} + \\
&\quad + R_3\|u_n^{\gamma}.P(v_n) - u^{\gamma}.P(v)\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} \\
&\leq K_2.\|u_n^{\gamma}.P(v_n) - u_n^{\gamma}.P(v) + u_n^{\gamma}.P(v) - u^{\gamma}.P(v)\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} \\
&\leq K_2(\|u_n^{\gamma}\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})}.\|P(v_n) - P(v)\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} + \|P(v)\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})}.\|u_n^{\gamma} - u^{\gamma}\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})}) \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|F_n - F\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} \longrightarrow 0 \tag{3.18}$$

Por outro lado, do Teorema 1.21,

$$\triangle\widetilde{u} = F(x) \text{ e } \triangle\widetilde{u}_n = F_n(x),$$

para únicas $\widetilde{u}, \widetilde{u}_n \in C_{loc}^{2,\theta}(\mathbb{R}^n)$.

Assim, do Teorema (1.16),

$$\|\widetilde{u}_n - \widetilde{u}\|_{C^{2,\theta}(\overline{\Omega})} \leq c\|F_n - F\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})}, \tag{3.19}$$

para algum $c > 0$ independente de $n$.

Portanto, do Teorema 1.10 e (3.19) temos

$$\begin{aligned} \|\widetilde{u}_n - \widetilde{u}\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} &\leq K\|\widetilde{u}_n - \widetilde{u}\|_{C^{2,\theta}(\overline{\Omega})} \\ &\leq cK\|F_n - F\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} \\ &\leq K_1\|F_n - F\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Logo, de (3.18) segue que

$$\|\widetilde{u_n} - \widetilde{u}\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} \longrightarrow 0.$$

Isto é,

$$\|A_{e_0}(u_n, v_n) - A_{e_0}(u, v)\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} \longrightarrow 0.$$

Isso mostra a afirmação.

**Prova de (iii):** Novamente, para provar a Afirmação **(iii)**, é suficiente mostrar:

<u>**Afirmação (iii.1):**</u> $A_{e_0}$ é relativamente compacta em $C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

<u>**Afirmação (iii.2):**</u> $B_{e_0}$ é relativamente compacta em $C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

**Prova da Afirmação (iii.1):** Para mostrar **(iii.1)**, (analogamente **(iii.2)**), provaremos inicialmente que $A_{e_0}(U_{e_0} \times V_{e_0})\big|_{B_m}$ é relativamente compacta para cada $m = 1, 2, \cdots$, onde $B_m = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < m\}, m = 1, 2, \cdots$. E, em seguida, obtemos a Afirmação **(iii.1)** por um processo de diagonalização.

Dados $m \in \mathbb{N}$ e $u \in A_{e_0}(U_{e_0} \times V_{e_0})\big|_{B_m}$, isto é, $u \in A_{e_0}(U_{e_0} \times V_{e_0})$, $u = u(x)$, $x \in B_m$, então pelo Teorema 1.18,

$$\begin{aligned} \sup_{\overline{B_m}} |Du(x)| &\leq \sup_{B_{m+1}} d_x|Du(x)| \\ &\leq c(\sup_{B_{m+1}} |u(x)| + \sup_{B_{m+1}} d_x^2|F(x)|) \\ &\leq c(\sup_{B_{m+1}} |e_0c_0\phi(x)| + (m+1)^2 \sup_{B_{m+1}} |F(x)|) \\ &\leq ce_0c_01 + c(m+1)^2 \sup_{B_{m+1}} |F(x)|. \end{aligned}$$

Note que, por (3.8) e (3.10), temos,

$$\begin{aligned}
|F(x)| &\leq |f_1(x)||u^{\alpha}(x)| + |g_1(x)||u^{-\beta}(x)| + |h_1(x)||u^{\gamma}(x)||P(v)| \\
&\leq d_1|u^{\alpha}(x)| + d_2|u^{-\beta}(x)| + d_3|u^{\gamma}(x)||P(v)| \\
&\leq d_1e_1c_0\phi(|x|)^{\alpha} + d_2e_1^{-1}c_0^{-1}\phi(|x|)^{-\beta} + d_3e_1c_0\phi(|x|)^{\gamma}|P(v(x))| \\
&\leq d_1e_1c_0\phi(|x|)^{\alpha} + d_2e_1^{-1}c_0^{-1}\phi(|x|)^{-\beta} + d_3e_1c_0\phi(|x|)^{\gamma}(e_1c_0)^{\lambda}P(\phi(|x|)) \\
&\leq K_m, \ x \in \overline{B_m}.
\end{aligned}$$

Logo, concluímos

$$\sup_{\overline{B_m}} |Du(x)| \leq \widetilde{K}_m, \tag{3.21}$$

onde $\widetilde{K}_m$ depende apenas de $m$ e $n$.

Além disso, por (3.21) e pelo Teorema do Valor Médio segue que

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} \leq |Du(t_0x+(1-t_0)y)| \leq \widetilde{K}_m, \forall x, y \in B_m.$$

para algum $t_0 \in (0,1)$.

Portanto,

$$\|u\|_{C^{0,1}(\overline{B_m})} = \sup_{\overline{B_m}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} \leq \widetilde{K}_m.$$

Isto é,

$$A_{e_0}(U_{e_0}\times V_{e_0})\big|_{B_m} \subset C^{0,1}(\overline{B_m}).$$

Então dada uma sequência $(u_n)_{n\geq 1} \subset A_{e_0}(U_{e_0}\times V_{e_0})$ limitada, esta é limitada em $C^{0,1}(\overline{B_m})$.

Logo pelo Teorema 1.10, temos a imersão compacta $C^{0,1}(\overline{B_m}) \hookrightarrow C^{0,\theta}(\overline{B_m})$. Assim, definindo

$$u_m^n := u_n\big|_{B_m}, \ n \geq m,$$

existem para cada $m = 1, 2, \cdots$, subsequências $\{u_m^{n_{mj}}\}_{n\geq m}$ e $u_m \in C^{0,\theta}(\overline{B_m})$ tais que

$$u_m^{n_{mj}} \longrightarrow u_m \text{ em } C^{0,\theta}(\overline{B_m}).$$

Mais especificamente,

$$u_1^{n_{11}}, u_1^{n_{12}}, u_1^{n_{13}}, \cdots \longrightarrow u_1 \text{ em } C^{0,\theta}(\overline{B_1})$$

$$u_2^{n_{21}}, u_2^{n_{22}}, u_2^{n_{23}}, \cdots \longrightarrow u_2 \text{ em } C^{0,\theta}(\overline{B_2})$$

$$u_3^{n_{31}}, u_3^{n_{32}}, u_3^{n_{33}}, \cdots \longrightarrow u_3 \text{ em } C^{0,\theta}(\overline{B_3})$$

$$\vdots$$

Note que, $u_{m+1}\big|_{B_m} = u_m$, pois a sequência $(u_{m+1}^{n_{(m+1)j}})$ foi tomada como uma subsequência da sequência $(u_m^{n_{mj}})$ onde cada $u_m^{n_{mj}}$ foi estendida à bola $B_{m+1}$.

Defina $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$ tal que

$$u(x)\big|_{B_m} = u_m(x), \text{ para cada } m = 1, 2, \cdots .$$

Segue da regularidade dos $u_m's$ que $u \in C^{0,\theta}(\mathbb{R}^n)$.

Temos ainda que, $u_r^{n_{rr}}$, $r = 1, 2, \cdots$ é tal que

$$u_r^{n_{rr}} \longrightarrow u_m \text{ em } C^{0,\theta}(\overline{B_m}), \text{ para cada } m \geq 1.$$

De fato, a sequência $(u_r^{n_{rr}})_{r\geq 1}$, restrita à $B_m$, é uma subsequência de $(u_m^{n_{mr}})_{n\geq 1}$ e

$$u_m^{n_{mr}} \longrightarrow u_m := u, \ \forall x \in B_m.$$

Logo,

$$u_r^{n_{rr}} \longrightarrow u_m \text{ em } C^{0,\theta}(\overline{B_m}).$$

Assim, fazendo $r \to \infty$,

$$u_r^{n_{rr}} \longrightarrow u \text{ em } C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Portanto, obtemos uma subsequência de $(u_n) \subset A_{e_0}(U_{e_0} \times V_{e_0})$ que converge em $C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, mostrando assim que $A_{e_0}(U_{e_0} \times V_{e_0})$ é relativamente compacta.

De maneira análoga, $B_{e_0}(U_{e_0} \times V_{e_0})$ é relativamente compacta em $C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Assim, $\Phi(U_{e_0} \times V_{e_0}) = (A_{e_0}(U_{e_0} \times V_{e_0}), B_{e_0}(U_{e_0} \times V_{e_0}))$ é um subconjunto relativamente compacto de $C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

**Prova de (iv):** Vamos mostrar que, o subconjunto $U_{e_0} \times V_{e_0}$ de $C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ é convexo.

Relembremos,

$$U_{e_0} \equiv \{u \in C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)/e_0^{-1}u_0(x) \leq u(x) \leq e_0 u_0(x), x \in \mathbb{R}^n\},$$

$$V_{e_0} \equiv \{v \in C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)/e_0^{-1}v_0(x) \leq v(x) \leq e_0 v_0(x), x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Devemos mostrar que, dados $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in U_{e_0} \times V_{e_0}$ e $t \in (0, 1)$ temos:

$$t(u_1, v_1) + (1-t)(u_2, v_2) \in U_{e_0} \times V_{e_0}, \text{ ou equivalentemente,}$$

$$\begin{cases} tu_1 + (1-t)u_2 & \in & U_{e_0}, \\ \\ tv_1 + (1-t)v_2 & \in & V_{e_0}. \end{cases}$$

Note que, como $u_1 \in U_{e_0}$ temos,

$$e_0^{-1}u_0(x) \leq u_1(x) \leq e_0 u_0(x),$$

isto é,

$$e_0^{-1}tu_0(x) \leq tu_1(x) \leq e_0tu_0(x).$$

E de $u_2 \in U_{e_0}$, segue

$$e_0^{-1}u_0(x) \leq u_2(x) \leq e_0u_0(x),$$

logo,

$$e_0^{-1}(1-t)u_0(x) \leq (1-t)u_2(x) \leq e_0(1-t)u_0(x).$$

Assim, somando os termos, temos:

$$e_0^{-1}u_0(x)[t+(1-t)] \leq tu_1(x)+(1-t)u_2(x) \leq e_0u_0(x)[t+(1-t)],$$

então,

$$e_0^{-1}u_0(x) \leq tu_1(x)+(1-t)u_2(x) \leq e_0u_0(x)$$

isto é, $tu_1(x)+(1-t)u_2(x) \in U_{e_0}$.

De forma análoga, mostra-se $tv_1(x)+(1-t)v_2(x) \in V_{e_0}$.

Portanto, $U_{e_0} \times V_{e_0}$ é um conjunto convexo.

■

## 3.2 Demonstração do Teorema $(CY)_2$

Na demonstração desse teorema vamos dividir nosso problema original $(CY)_2$ em dois outros, compostos de uma equação apenas, sendo que estes podem ser resolvidos usando o Teorema $(CY)_1$. As respectivas soluções definem uma aplicação que satisfará as condições de um Teorema de Ponto Fixo, Teorema 1.3, nos dando assim, um ponto fixo, que é a solução do problema $(CY)_2$.

Sejam $c$ e $d$ parâmetros que serão ajustados no decorrer da demonstração tais que $0 < c < d$. Assim, denotaremos por

$$Q_{c,d} = Q^{2,\theta}_{c\phi,d\phi} = \{u \in C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)/c\phi(|x|) \leq u(x) \leq d\phi(|x|), x \in \mathbb{R}^n\},$$

que representa um caso particular de $Q^{m,\theta}_{\rho,\varphi}$ definido em (1.1).

### 3.2.1 Lema auxiliar

Vamos primeiramente provar um Lema que faz parte da demonstração do Teorema $(CY)_2$, que nos facilitará na prova das hipóteses do Teorema 1.3.

**Lema 3.7.** *Suponha que* $-\infty < \alpha, \gamma < 1$, $\beta \geq 1$, $f_i \in Q^{\alpha,\theta}$, $i = 1, 2$, $(S_3)$, $(S_4)$ *e* $(S_5)$. *Então, existem constantes positivas* $c < d$ *e* $\widetilde{c} < \widetilde{d}$, *uma aplicação* $\psi : Q_{c,d} \times Q_{\widetilde{c},\widetilde{d}} \longrightarrow Q_{c,d} \times Q_{\widetilde{c},\widetilde{d}}$ *bem definida e uma sequência* $\{V_n\}_{n\geq 1} \subset Q_{c,d} \times Q_{\widetilde{c},\widetilde{d}}$ *tal que*

**(i)** $V_n = \psi V_{n-1}$,

**(ii)** $\lim\limits_{n\to\infty} V_n(x) = V(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

**Observação 3.7.1.** *Uma consequência imediata do Lema acima é que, se* $V = (u, v)$ *então*

$$c\phi(|x|) \leq u(x) \leq d\phi(|x|), \ x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\widetilde{c}\phi(|x|) \leq v(x) \leq \widetilde{d}\phi(|x|), \ x \in \mathbb{R}^n.$$

**Demonstração do Lema.**

Para facilitar, durante a demonstração vamos denotar $Q = Q_{c,d}$, para alguns $c$ e $d$ constantes positivas tais que $c < d$. Inicialmente, construiremos a aplicação $\psi$. Para isso, considere para cada $v \in Q$ o problema

$$\begin{cases} -\triangle w = f_i(x)w^\alpha - g_i(x)w^\beta + h_i(x)w^\gamma P(v), \ \mathbb{R}^n \\ \\ w > 0, \ \mathbb{R}^n; \quad w(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases} \tag{3.22}$$

Vamos mostrar que este problema tem solução através do Teorema $(CY)_1$. Observe que de $v \in Q$ segue

$$c_1|x|^{2-n} \leq v(x) \leq d_1|x|^{2-n}, \ |x| \geq 1,$$

para algumas contantes $0 < c_1 < d_1$. Tome constantes $\overline{c_1} \leq c_1$ e $\overline{d_1} \geq d_1$ tais que $0 < \overline{c_1} \leq 1$ e $\overline{d_1} \geq 1$. Dessa forma, ainda teremos

$$\overline{c_1}|x|^{2-n} \leq v(x) \leq \overline{d_1}|x|^{2-n}, \ |x| \geq 1.$$

Assim, vamos analisar as situações dependendo da monotonicidade de $P$:
de $P$ ser não-decrescente segue,

$$P(v) \leq P(\overline{d_1}|x|^{2-n}), \ |x| \geq 1,$$

de $P$ ser não-crescente segue,

$$P(v) \leq P(\overline{c_1}|x|^{2-n}), \ |x| \geq 1.$$

Logo da hipótese $(S_5)$, temos:
se $P$ é não-decrescente então,

$$P(v) \leq P(\overline{d_1}|x|^{2-n}) \leq (\overline{d_1})^\delta P(|x|^{n-2}), \ |x| \geq 1$$

e se $P$ é não-crescente então,

$$P(v) \leq P(\overline{c_1}|x|^{2-n}) \leq \left(\frac{1}{\overline{c_1}}\right)^{\delta} P(|x|^{2-n}),\ |x| \geq 1.$$

Assim, tomando $\widetilde{h_i}(x) = h_i(x)P(v(x))$, $x \in \mathbb{R}^n$, obtemos de $(S_4)$,

$$\int_1^{\infty} s^{n-1-\gamma(n-2)}\widetilde{h_i}^*(s)ds \leq K^{\delta}\int_1^{\infty} s^{n-1-\gamma(n-2)}h_i(x)P(s^{2-n})ds < +\infty, \tag{3.23}$$

onde $K = \dfrac{1}{\overline{c_1}}$ ou $K = \overline{d_1}$.

Resta mostrar que, $\widetilde{h_i} \in C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, mas este fato é consequência do Lema 1.2, já que $P$ é uma função continuamente diferenciável, $v \in C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $h_i \in C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Portanto, de (3.23) segue que

$$\widetilde{h_i} \in Q^{\gamma,\theta}.$$

Desta forma, adicionalmente à hipótese $f_i \in Q^{\alpha,\theta}$ e $(S_3)$, segue do Teorema $(CY)_1$ que existe uma única solução $w_i(v) \in Q$ de (3.22). Isso deixa bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} A_i \ &: \ Q_{a_i,b_i} \longrightarrow Q_{a_i,b_i} \\ &\quad v \longmapsto A_i(v) = w_i(v),\ i = 1, 2, \end{aligned} \tag{3.24}$$

e como consequência também fica bem definida a aplicação

$$\psi : Q_{a_i,b_i} \times Q_{\widetilde{a_i},\widetilde{b_i}} \longrightarrow Q_{a_i,b_i} \times Q_{\widetilde{a_i},\widetilde{b_i}} \text{ dada por}$$

$$\psi(u, v) = (A_1(v), A_2(u)), \tag{3.25}$$

para constantes positivas $a_i, b_i, \widetilde{a_i}, \widetilde{b_i}$ com $a_i < b_i$ e $\widetilde{a_i} < \widetilde{b_i}$ apropriadas.

No que segue, vamos construir uma sequência $\{V_n\}_{n\geq 1} \subset Q_{a_i,b_i} \times Q_{\widetilde{a_i},\widetilde{b_i}}$. E, como a função $P$ pode ser crescente ou decrescente dividimos a demonstração em dois casos.

**CASO 1**: $P$ não-crescente.

De $f_2 \in Q^{\alpha,\theta}$, segue pelo Teorema $(CY)_1$, que o problema

$$\begin{cases} -\triangle w = f_2(x)w^{\alpha}, \\ \\ w > 0,\ \mathbb{R}^n; \quad w(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases} \tag{3.26}$$

tem solução única $w_0 \in Q$ e satisfaz

$$c_0\phi(|x|) \leq w_0(x) \leq d_0\phi(|x|) \tag{3.27}$$

para $0 < c_0 < d_0$.

Considere $m > 0$ tal que $mc_0 \leq 1$, e tome

$$v_0 = mw_0.$$

Assim, de $(S_3)$, isto é; $g_i(x) \leq c_i f_i(x),\ x \in \mathbb{R}^n;$ para $c_i > 0,\ i = 1, 2;$ e também por (3.26) temos

$$\begin{aligned} -\triangle v_0 - (f_2(x)v_0^\alpha - g_2(x)v_0^\beta) &= -m\triangle w_0 - f_2(x)v_0^\alpha + g_2(x)v_0^\beta \\ &= mf_2(x)w_0^\alpha - f_2(x)m^\alpha w_0^\alpha + g_2(x)m^\beta w_0^\beta \\ &\leq mf_2(x)w_0^\alpha - f_2(x)m^\alpha w_0^\alpha + c_2 f_2(x)m^\beta w_0^\beta. \end{aligned}$$

Reescrevendo e agrupando termos apropriados, temos

$$\begin{aligned} -\triangle v_0 - (f_2(x)v_0^\alpha &- g_2(x)v_0^\beta) = \left(mf_2(x)w_0^\alpha - \frac{1}{2}f_2(x)m^\alpha w_0^\alpha\right) + \left(c_2 f_2(x)m^\beta w_0^\beta - \frac{1}{2}f_2(x)m^\alpha w_0^\alpha\right) \\ &= f_2(x)w_0^\alpha\left[m - \frac{1}{2}m^\alpha\right] + f_2(x)w_0^\alpha\left[c_2 m^\beta w_0^{\beta-\alpha} - \frac{1}{2}m^\alpha\right] \\ &= f_2(x)w_0^\alpha m^\alpha\left[m^{1-\alpha} - \frac{1}{2}\right] + f_2(x)w_0^\alpha m^\alpha\left[c_2 m^{\beta-\alpha}w_0^{\beta-\alpha} - \frac{1}{2}\right] \\ &= f_2(x)w_0^\alpha m^\alpha\left[m^{1-\alpha} - \frac{1}{2}\right] + f_2(x)w_0^\alpha m^\alpha\left[c_2 m^{\beta-\alpha}\|w_0\|^{\beta-\alpha} - \frac{1}{2}\right] \\ &\leq 0, \end{aligned} \tag{3.28}$$

onde a última desigualdade ocorre para $m = m_0 \leq 1/c_0$ suficientemente pequeno, pois $-\infty < \alpha < 1 \leq \beta$, e adicionalmente de (3.27) segue

$$m_0 c_0 |x|^{2-n} \leq v_0 \leq m_0 d_0 |x|^{2-n},\ |x| \geq 1. \tag{3.29}$$

Agora, mostremos que o seguinte problema tem solução única, provando que as hipóteses do Teorema $(CY)_1$ são satisfeitas

$$\begin{cases} -\triangle u = f_1(x)u^\alpha + h_1(x)u^\gamma P(v_0), \\ \\ u > 0,\ \mathbb{R}^n; \quad u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases} \tag{3.30}$$

De fato, de (3.29) e $P$ ser não crescente, temos

$$P(m_0 d_0 |x|^{2-n}) \leq P(v_0) \leq P(m_0 c_0 |x|^{2-n}),\ |x| \geq 1. \tag{3.31}$$

Assim, fazendo $\widetilde{c} = m_0 c_0 \leq 1$; temos $\widetilde{c} = 1/\widehat{c}$ com $\widehat{c} \geq 1$.

Daí por (3.31), usando $(S_5)$, existe $\delta > 0$ tal que

$$P(v_0) \leq P(\widetilde{c}|x|^{2-n}) \leq (\widehat{c})^\delta . P(|x|^{2-n}),\ |x| \geq 1. \tag{3.32}$$

Tomando $\widehat{h_1}(x) = h_1(x)P(v_0(x))$, $x \in \mathbb{R}^n$, obtemos de (3.32) e $(S_4)$,

$$\int_1^{\infty} s^{n-1-\gamma(n-2)}\widehat{h_1} \leq (\widehat{d})^{\delta} \int_1^{\infty} s^{n-1-\gamma(n-2)} h_1^*(s)P(s^{2-n})ds < +\infty. \tag{3.33}$$

Logo, fazendo uma análise análoga à feita para mostrar que $\widetilde{h_i} \in C_{loc}^{0,\theta}(\mathbb{R}^n)$, temos também que $\widehat{h_1} \in C_{loc}^{0,\theta}(\mathbb{R}^n)$. Assim, de (3.33) segue que $\widehat{h_1} \in Q^{\gamma,\theta}$. Além disso, por hipótese $f_1 \in Q^{\alpha,\theta}$, portanto, segue do Teorema $(CY)_1$ que existe uma solução $u_0 \in Q$ de (3.30).

A sequência procurada será definida por meio do operador $A$, a partir de $u_0$ e $v_0$.

**Afirmação 3.8.** *$A_i$ é um operador não-crescente, $i = 1, 2$.*

Para provar esta afirmação, vamos usar um Lema de Comparação, a saber o Lema 1.26.

De fato, para quaisquer $u, v \in Q, u \geq v$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $s > 0$, considere

$$F_i(x,s) = f_i(x)s^{\alpha} - g_i(x)s^{\beta} + h_i(x)s^{\gamma}P(v(x)),\ i = 1, 2. \tag{3.34}$$

Observe que,

$$\frac{F_i(x,s)}{s} = f_i(x)\frac{1}{s^{1-\alpha}} - g_i(x)s^{\beta-1} + h_i(x)P(v_0(x))\frac{1}{s^{1-\gamma}},$$

daí, desde que $\alpha, \gamma < 1$, $\beta \geq 1$ e os potenciais em $x$ não-negativos segue que

$$\frac{F_i(x,s)}{s}, s > 0 \text{ é decrescente para cada } x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.35}$$

satisfazendo uma das condições do Lema 1.26.

Assim, de (3.22), (3.34) e pela monotonicidade da função $P$ segue

$$\begin{aligned} \triangle w_i(u) + F_i(x, w_i(u)) &= -[f_i(x)w_i^{\alpha}(u) - g_i(x)w_i^{\beta}(u) + h_i(x)w_i^{\gamma}(u)P(u)] + \\ &\quad +[f_i(x)w_i^{\alpha}(u) - g_i(x)w_i^{\beta}(u) + h_i(x)w_i^{\gamma}(u)P(v)] \\ &= h_i(x)w_i^{\alpha}(u)[P(v) - P(u)] \geq 0 \end{aligned}$$

e

$$\triangle w_i(v) + F_i(x, w_i(v)) = 0.$$

Logo,

$$\triangle w_i(v) + F_i(x, w_i(v)) = 0 \leq \triangle w_i(u) + F_i(x, w_i(u)).$$

Para aplicarmos o Lema 1.26, nos resta mostrar que $\triangle w_i(u) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Para isso, observe que, de (3.22) segue

$$\begin{aligned} |\triangle w_i(u)| &= |f_i(x)w_i^{\alpha}(u) - g_i(x)w_i^{\beta}(u) + h_i(x)w_i^{\gamma}(u)P(u)| \\ &\leq |f_i(x)w_i^{\alpha}(u)| - |g_i(x)w_i^{\beta}(u)| + |h_i(x)w_i^{\gamma}(u)P(u)| \end{aligned}$$

e usando que $w_i(u) \in Q$, isto é,

$$c_i\phi(|x|) \leq u(x) \leq d_i\phi(|x|),\ x \in \mathbb{R}^n \quad 0 < c_i < d_i.$$

segue de $f \in Q^{\alpha,\theta}$ que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f_i(x)w_i^\alpha(u) &= \int_{\overline{B_1}} f_i(x)w_i^\alpha(u) + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_1} f_i(x)w_i^\alpha(u)\\
&= \overline{c}_i + \int_1^\infty \left(\int_{|x|=r} f_i(x)w_i^\alpha(u)dS\right)dr\\
&\leq \overline{c}_i + c_i\int_1^\infty \left(\int_{|x|=r} f_i^*(|x|)|x|^{\alpha(2-n)}dS\right)dr\\
&= \overline{c}_i + c_iw_n\int_1^\infty r^{n-1}f_i^*(r)r^{\alpha(2-n)}dr\\
&= \overline{c}_i + c_iw_n\int_1^\infty r^{n-1-\alpha(n-2)}f_i^*(r)dr < +\infty,
\end{aligned}$$

onde $w_n$ é o volume da bola unitária.

Como uma consequência da desigualdade anterior e usando $(S_3)$ segue

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_i(x)w_i^\beta(u) \leq c_i\int_{\mathbb{R}^n} f_i(x)w_i^\beta(u) < +\infty.$$

E finalmente, por $(S_4)$ e $(S_5)$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} h_i(x)w_i^\gamma(u)P(u) &= \int_{\overline{B_1}} h_i(x)w_i^\gamma(u)P(u) + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_1} h_i(x)w_i^\alpha(u)P(u)\\
&= K_i + \int_1^\infty \left(\int_{|x|=r} h_i(x)w_i^\gamma(u)P(u)dS\right)dr\\
&\leq K_i + \overline{K}_i\int_1^\infty \left(\int_{|x|=r} h_i^*(|x|)|x|^{\gamma(2-n)}P(|x|^{2-n})dS\right)dr\\
&= K_i + \overline{K_i}w_n\int_1^\infty r^{n-1-\gamma(n-2)}h_i^*(r)P(r^{2-n})dr < +\infty,
\end{aligned}$$

onde $w_n$ é o volume da bola unitária.

Portanto,

$$\triangle w_i(u) \in L^1(\mathbb{R}^n),\ i = 1, 2. \tag{3.36}$$

Logo, segue do Lema 1.26 que

$$A_i(u) = w_i(u) \leq w_i(v) = A_i(v),\ i = 1, 2.$$

Isto é, $A_i$ é não crescente.

Defina as sequências,

$$\begin{aligned}
u_n &= A_1(v_{n-1}), \qquad n = 1, 2, \cdots,\\
v_n &= A_2(u_{n-1}), \qquad n = 1, 2, \cdots.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

a partir das funções iniciais dadas $u_0, v_0 \in Q$. Dessa forma, podemos definir a sequência $V_n = (u_n, v_n)$. A seguir, será mostrado que esta sequência $\{V_n\}_{n\geq 1}$ satisfaz os itens (i) e (ii) do Lema 3.7. Primeiro observamos que da definição de $u_n$ e $v_n$ segue imediatamente o item (i) do Lema 3.7, isto é,

$$V_n = \psi V_{n-1}.$$

Para provar o item (ii) inicialmente mostraremos que estas sequências são monótonas, usando novamente o Lema 1.26.

Então, sendo

$$F(x,s) = f_1(x)s^\alpha - g_1(x)s^\beta + h_1(x)s^\gamma P(v_0(x)),\ x \in \mathbb{R}^n$$

analogamente à prova de (3.35) temos que $F(x,s)/s$ é decrescente.

Além disso, de (3.25) e $u_0$ solução de (3.30), temos que

$$\begin{aligned}
\triangle u_0 + F(x,u_0) &= -[f_1(x)u_0^\alpha + h_1(x)u_0^\gamma P(v_0)] + \\
&\quad +[f_1(x)u_0^\alpha - g_1(x)u_0^\beta + h_1(x)u_0^\gamma P(v_0)] \\
&= -g_1(x)u_0^\beta \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

e da definição de $A_1$ e (3.22),

$$\begin{aligned}
\triangle u_1 + F(x,u_1) &= \triangle(A_1(v_0)) + F(x, A_1(v_0)) \\
&= \triangle w_1(v_0) + F(x, w_1(v_0)) \\
&= -f_1(x)w_1^\alpha + g_1(x)w_1^\beta - h_1(x)w_1^\gamma P(v_0)] + \\
&\quad +f_1(x)w_1^\alpha - g_1(x)w_1^\beta + h_1(x)w_1^\gamma P(v_0)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

logo,

$$\triangle u_0 + F(x,u_0) \leq 0 = \triangle u_1 + F(x,u_1).$$

Portanto, pelo Lema (1.26),

$$u_0(x) \geq u_1(x), x \in \mathbb{R}^n,$$

observando que a condição $\triangle u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é satisfeita como antes.

Quanto a $v_0$ e $v_1$, segue pela definição de $A_2$, (3.37) e (3.22) que

$$\begin{aligned}
\triangle v_1 &+ [f_2(x)v_1^\alpha - g_2(x)v_1^\beta] = \triangle(A_2(u_0)) + [f_2(x)A_2(u_0)^\alpha - g_2(x)A_2(u_0)^\beta] \\
&= \triangle w_2(u_0) + [f_2(x)w_2^\alpha(u_0) - g_2(x)w_2^\beta(u_0)] \\
&= -f_2(x)w_2^\alpha + g_2(x)w_2^\beta - h_2(x)w_2^\gamma P(u_0) + [f_2(x)w_2^\alpha - g_2(x)w_2^\beta] \\
&= -h_2(x)w_2^\gamma P(u_0) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Isto é, usando (3.28), temos

$$\triangle v_1 + [f_2(x)v_1^\alpha - g_2(x)v_1^\beta] \leq 0 \leq \triangle v_0 + [f_2(x)v_0^\alpha - g_2(x)v_0^\beta].$$

Assim, novamente pelo Lema 1.26,

$$v_1(x) \geq v_0(x),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Daí, como $A_i$ é não crescente, $i = 1, 2$, concluímos que

$$v_0 \leq v_1 = A_2(u_0) \leq A_2(u_1) = v_2$$

e analogamente,

$$u_0 \geq u_1 = A_1(v_0) \geq A_1(v_1) = u_2.$$

Então, por indução, obtemos

$$v_0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \cdots \leq v_n \leq \cdots ;$$

$$u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq \cdots \geq u_n \geq \cdots .$$

Para completar a prova de (ii) resta-nos mostrar que estas sequências são limitadas. Observe inicialmente que, pelo Teorema $(CY)_1$, existe uma solução $u^* \in Q$ do problema:

$$\begin{cases} -\triangle w = f_1(x)w^\alpha - g_1(x)w^\beta, \\ \\ w > 0,\ \mathbb{R}^n; \quad w(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases} \tag{3.38}$$

Assim, por (3.37), (3.25) e (3.22) segue,

$$\begin{aligned} \triangle u_n \ &+\ [f_1(x)u_n^\alpha - g_1(x)u_n^\beta] = \triangle(A_1(v_{n-1})) + [f_1(x)A_1(v_{n-1})^\alpha - g_1(x)A_1(v_n-1)^\beta] \\ &=\ \triangle w_1(v_{n-1}) + [f_1(x)w_1^\alpha(v_{n-1}) - g_1(x)w_1^\beta(v_{n-1})] \\ &=\ -f_1(x)w_1^\alpha + g_1(x)w_1^\beta - h_1(x)w_1^\gamma P(v_{n-1}) + f_1(x)w_1^\alpha - g_1(x)w_1^\beta \\ &=\ -h_1(x)w_1^\gamma P(v_{n-1}) \\ &\leq\ 0 \end{aligned}$$

e consequentemente, de (3.38),

$$\triangle u_n + [f_1(x)u_n^\alpha - g_1(x)u_n^\beta] \leq 0 = \triangle u^* + [f_1(x)(u^*)^\alpha - g_1(x)(u^*)^\beta].$$

Logo, pelo Lema (1.26),

$$u_n(x) \geq u^*(x),\ x \in \mathbb{R}^n, n = 1, 2, \cdots .$$

E, para mostrar a limitação da sequência $(v_n)_{n\geq 1}$, considere a seguinte problema

$$\begin{cases} -\triangle w = f_2(x)w^{\alpha} - g_2(x)w^{\beta} + h_2(x)w^{\gamma}P(u^*(x)),\ \mathbb{R}^n \\ \\ w > 0,\ \mathbb{R}^n; \quad w(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases} \tag{3.39}$$

Note que, pelo Teorema $(CY)_1$, o problema (3.39) possui uma solução $v^* \in Q$.

Assim, similarmente de (3.37), (3.22) e pela monotonicidade de $P$, temos

$$\begin{aligned} \triangle v_n &+ [f_2(x)v_n^{\alpha} - g_2(x)v_n^{\beta} + h_2(x)v_n^{\gamma}P(u^*)] = \\ &= \triangle w_2 + [f_2(x)w_2^{\alpha} - g_2(x)w_2^{\beta} + h_2(x)w_2^{\gamma}P(u^*)] \\ &= h_2(x)w_2[P(u^*) - P(u_{n-1})] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Daí, de (3.39),

$$\begin{aligned} \triangle v_n + [f_2(x)v_n^{\alpha} - g_2(x)v_n^{\beta} + h_2(x)v_n^{\gamma}P(u^*)] \geq 0 = \\ = \triangle v^* + [f_2(x)(v^*)^{\alpha} - g_2(x)(v^*)^{\beta} + h_2(x)(v^*)^{\gamma}P(u^*)]. \end{aligned}$$

Logo, pelo Lema (1.26),

$$v_n(x) \leq v^*(x),\ x \in \mathbb{R}^n,\ n = 1, 2, \cdots .$$

Resumindo, obtemos de $u_0, v_0, u^*, v^* \in Q_{a,b}$ com $a$ e $b$ parâmetros apropriados dependentes dessas funções, tais que

$$c\phi \leq u^* \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \leq u_1 \leq u_0 \leq d\phi,\ \mathbb{R}^n.$$

$$\widetilde{c}\phi \leq v_0 \leq v_1 \leq \cdots \leq v_n \leq \cdots \leq \cdots \leq v^* \leq \widetilde{d}\phi,\ \mathbb{R}^n.$$

Defina ainda $V = (u, v)$ como

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{n\to\infty} u_n(x),\ x \in \mathbb{R}^n, \\ v(x) &= \lim_{n\to\infty} v_n(x),\ x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Isto é,

$$V(x) = \lim_{n\to\infty} V_n(x),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Deste modo, temos bem definido o operador

$$\psi : Q_{c,d} \times Q_{\widetilde{c},\widetilde{d}} \longrightarrow Q_{c,d} \times Q_{\widetilde{c},\widetilde{d}}$$

e

$$V_n = (u_n, v_n) \in Q_{c,d} \times Q_{\widetilde{c},\widetilde{d}},$$

satisfazendo as hipóteses do Lema 3.7.

**CASO 2**: $P$ não decrescente.

Seja $w_i \in Q$ a solução única do problema

$$\begin{cases} -\triangle w = f_i(x)w^\alpha, \quad i = 1,2, \\ \\ w > 0,\ \mathbb{R}^n; \quad w(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases} \tag{3.40}$$

dada pelo Teorema $(CY)_1$.

Denotando $u_0(x) = m_0 w_1(x)$ e $v_0(x) = m_0 w_2(x)$, segue, análogo ao CASO 1 em (3.28), que

$$\begin{aligned} -\triangle u_0(x) &\leq f_1(x)u_0^\alpha - g_1(x)u_0^\beta, \\ -\triangle v_0(x) &\leq f_2(x)v_0^\alpha - g_2(x)v_0^\beta, \end{aligned} \tag{3.41}$$

onde $m_0 > 0$ é suficientemente pequeno.

E como uma consequência obteremos que $A_i$ é não decrescente, relembrando que a definição da aplicação $A_i$ é

$$\begin{aligned} A_i :\ & Q_{a_i,b_i} \longrightarrow Q_{a_i,b_i} \\ & v \longmapsto A_i(v) = w_i(v), \qquad i = 1,2 \end{aligned} \tag{3.42}$$

onde $w_i(v) \in Q$ é a solução única do problema,

$$\begin{cases} -\triangle w = f_1(x)w^\alpha - g_1(x)w^\beta + h_1(x)w^\gamma P(v),\ \mathbb{R}^n \\ \\ w > 0,\ \mathbb{R}^n; \quad w(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases} \tag{3.43}$$

dada pelo Teorema $(CY)_1$.

**Afirmação 3.9.** *$A_i$ é um operador não decrescente $i = 1,2$.*

De fato, dados $u, v \in Q, u \geq v$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $s > 0$, considere novamente

$$F_i(x,s) = f_i(x)s^\alpha - g_i(x)s^\beta + h_i(x)s^\gamma P(v(x)),$$

então, de (3.43), (3.10) e $P$ não-decrescente segue

$$\begin{aligned} \triangle w_i(u) + F_i(x, w_i(u)) &= -f_i(x)w_i^\alpha(u) + g_i(x)w_i^\beta(u) - h_i(x)w_i^\gamma(u)P(u) + \\ &\quad + f_i(x)w_i^\alpha(u) - g_i(x)w_i^\beta(u) + h_i(x)w_i^\gamma(u)P(v) \\ &= h_i(x)w_i^\gamma(u)[P(v) - P(u)] \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\triangle w_i(u) + F_i(x, w_i(u)) \leq 0 = \triangle w_i(v) + F_i(x, w_i(v)).$$

Além disso, de (3.43),

$$|\triangle w_i(v)| = |f_i(x)w_i^\alpha(v)| + |g_i(x)w_i^\beta(v)| + |h_i(x)w_i^\gamma(v)P(v)|,$$

daí, análogo ao mostrado em (3.36) temos, $\triangle w_i(v) \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

Logo, segue do Lema (1.26), que $w_i(v) \leq w_i(u)$ em $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$A_i(v) \leq A_i(u),$$

então $A_i$ é crescente.

Considere novamente as sequências

$$u_n = A_1(v_{n-1}), \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$v_n = A_2(u_{n-1}), \quad n = 1, 2, \cdots$$

apartir das funções iniciais dadas $u_0, v_0 \in Q$. Desta forma, tomando $V_n = (u_n, v_n)$ temos,

$$V_n = \psi V_{n-1},$$

mostrando o item (i) do Lema 3.7.

Pela definição da sequência $(u_n)$ e por (3.42), temos

$$\begin{aligned}
\triangle u_1(x) &+ [f_1(x)u_1^\alpha - g_1(x)u_1^\beta] = \triangle A_1(v_0(x)) + [f_1(x)A_1(v_0)^\alpha - g_1(x)A_1(v_0)^\beta] \\
&= -f_1(x)w_1^\alpha(v_0) + g_1(x)w_1^\beta(v_0) - h_1(x)w_i^\gamma(v_0)P(v_0) + f_1(x)w_1^\alpha(v_0) - g_1(x)w_1^\beta(v_0) \\
&= -h_1(x)w_1^\gamma(v_0)P(v_0) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Isto é, de (3.41) segue,

$$\triangle u_1(x) + [f_1(x)u_1^\alpha - g_1(x)u_1^\beta] \leq 0 \leq \triangle u_0(x) + [f_1(x)u_0^\alpha - g_1(x)u_0^\beta].$$

Assim, pelo Lema (1.26),

$$u_1(x) \geq u_0(x), x \in \mathbb{R}^n;$$

observando que $\triangle u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Analogamente, temos que $v_0(x) \leq v_1(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Daí, como $A_i$ é não decrescente $i = 1, 2$, concluímos que

$$v_0 \leq v_1 = A_2(u_0) \leq A_2(u_1) = v_2;$$

$$u_0 \leq u_1 = A_1(v_0) \leq A_1(v_1) = u_2.$$

Então, repetindo o processo acima, obtemos as seguintes sequências

$$\begin{aligned} &u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots ; \\ &v_0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \cdots \leq v_n \leq \cdots . \end{aligned} \tag{3.44}$$

Vamos agora mostrar a limitação das sequências acima. Nesse sentido, considere $w_i^* \in Q$, $i = 1, 2$, como sendo a única solução do problema

$$\begin{cases} -\triangle w = f_i(x)w^\alpha - g_i(x)w^\beta + h_i(x)w^\gamma P(\phi(|x|)), \quad i = 1, 2, \\ \\ w > 0, \ \mathbb{R}^n; \quad w(x) \stackrel{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases} \tag{3.45}$$

dada pelo Teorema $(CY)_1$.

Portanto, podemos assumir que existe uma constante $K_0 \geq 1$ tal que

$$K_0^{-1}\phi(|x|) \leq u_0(x), v_0(x), w_i^*(x) \leq K_0\phi(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.46}$$

**Afirmação 3.10.** *Dados* $\varepsilon \in \left[\dfrac{\delta}{1-\gamma}, 1\right)$ *e* $K_n = K_0^{\varepsilon + \cdots + \varepsilon^n}$, $n = 1, 2, \ldots,$ *então*

$$u_n(x) \leq K_n w_1^*(x), \ x \in \mathbb{R}^n,$$

*e*

$$v_n(x) \leq K_n w_2^*(x), \ x \in \mathbb{R}^n.$$

De fato, de $\varepsilon \in [\delta/(1-\gamma), 1)$ e $K_1 = K_0^\varepsilon$, $u_1$ satisfazendo (3.43) e $P$ não decrescente segue que,

$$\begin{aligned} 0 &= \triangle u_1 + f_1(x)u_1^\alpha - g_1(x)u_1^\beta + h_1(x)u_1^\gamma P(v_0) \\ &\leq \triangle u_1 + f_1(x)K_1^{1-\alpha}u_1^\alpha - g_1(x)K_1^{1-\beta}u_1^\beta + h_1(x)u_1^\gamma P(K_0\phi(|x|)). \end{aligned}$$

Em seguida, usando $(S_5)$ e as hipóteses da afirmação, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \triangle u_1 + f_1(x)K_1^{1-\alpha}u_1^\alpha - g_1(x)K_1^{1-\beta}u_1^\beta + h_1(x)K_0^\delta u_1^\gamma P(\phi(|x|)) \\ &\leq \triangle u_1 + f_1(x)K_1^{1-\alpha}u_1^\alpha - g_1(x)K_1^{1-\beta}u_1^\beta + h_1(x)K_0^{\varepsilon(1-\gamma)}u_1^\gamma P(\phi(|x|)) \\ &\leq \triangle u_1 + [f_1(x)K_1^{1-\alpha}u_1^\alpha - g_1(x)K_1^{1-\beta}u_1^\beta + h_1(x)K_1^{1-\gamma}u_1^\gamma P(\phi(|x|)) \end{aligned}$$

Por outro lado, de (3.45) obtemos,

$$\triangle(K_1w_1^*) + [f_1(x)K_1^{1-\alpha}(K_1w_1^*)^\alpha - g_1(x)K_1^{1-\beta}(K_1w_1^*)^\beta + h_1(x)K_1^{1-\gamma}(K_1w_1^*)^\gamma P(\phi(|x|))] = 0.$$

Portanto, mostrando de maneira similar ao que foi demonstrado em (3.36) e (3.35), temos que $\triangle u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e que a função $f_1(x)s^\alpha - g_1(x)s^\beta + h_1(x)s^\gamma P(\phi(|x|))$ é decrescente, logo pelo Lema 1.26 segue que,

$$u_1(x) \leq K_1 w_1^*(x), x \in \mathbb{R}^n.$$

Fazendo uma análise análoga, com $K_2 = K_0^{\varepsilon+\varepsilon^2}$, de (3.43) e $P$ não decrescente, segue

$$\begin{aligned} 0 &= \triangle u_2 + f_1(x)u_2^\alpha - g_1(x)u_2^\beta + h_1(x)u_2^\gamma P(v_1) \\ &\leq \triangle u_2 + f_1(x)K_2^{1-\alpha}u_2^\alpha - g_1(x)K_2^{1-\beta}u_2^\beta + h_1(x)u_2^\gamma P(K_1 w_2^*). \end{aligned}$$

Daí, pela condição $(S_5)$ e as hipóteses da Afirmação 3.10, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \triangle u_2 + f_1(x)K_2^{1-\alpha}u_2^\alpha - g_1(x)K_2^{1-\beta}u_2^\beta + h_1(x)K_1^\delta u_2^\gamma P(w_2^*) \\ &\leq \triangle u_2 + f_1(x)K_2^{1-\alpha}u_2^\alpha - g_1(x)K_2^{1-\beta}u_2^\beta + h_1(x)K_1^{\varepsilon(1-\gamma)}u_2^\gamma P(K_0\phi(|x|)) \\ &\leq \triangle u_2 + [f_1(x)K_2^{1-\alpha}u_2^\alpha - g_1(x)K_2^{1-\beta}u_2^\beta + h_1(x)K_1^{\varepsilon(1-\gamma)}K_0^{\varepsilon(1-\gamma)}u_2^\gamma P(\phi(|x|)) \\ &\leq \triangle u_2 + [f_1(x)K_2^{1-\alpha}u_2^\alpha - g_1(x)K_2^{1-\beta}u_2^\beta + h_1(x)K_2^{1-\gamma}u_2^\gamma P(\phi(|x|)). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos por (3.45),

$$\triangle(K_2 w_1^*) + [f_1(x)K_2^{1-\alpha}(K_2 w_1^*)^\alpha - g_1(x)K_2^{1-\beta}(K_2 w_1^*)^\beta + h_1(x)K_2^{1-\gamma}(K_2 w_1^*)^\gamma P(\phi(|x|))] = 0.$$

Logo, pelo Lema (1.26),

$$K_2 w_1^* \geq u_2, \ \mathbb{R}^n.$$

Usando argumentos similares e indução, concluímos que

$$u_n \leq K_n w_1^*, \ \mathbb{R}^n.$$

De forma semelhante, mostra-se que,

$$v_n \leq K_n w_2^*, \ \mathbb{R}^n.$$

Desde que, $K_n$ é monótona crescente, segue que

$$K_n \leq \lim_{n\to\infty} K_n = K_0^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}.$$

Resumindo, obtemos de (3.44),

$$\begin{aligned} u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \leq K_0^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} w_1^*; \\ v_0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \cdots \leq v_n \leq \cdots \leq K_0^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} w_2^*. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Podemos concluir então que, as sequências $u_n$ e $v_n$ são monótonas e limitadas, e como consequência fica definido $V = (u, v)$ tais que

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x), \ x \in \mathbb{R}^n,$$

$$v(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x), \ x \in \mathbb{R}^n,$$

isto é,

$$V(x) = \lim_{n\to\infty} V_n(x), \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Resta-nos mostrar a afirmação a seguir, para podermos usar o Teorema do Ponto Fixo na demonstração final do Teorema $(CY)_2$ com a aplicação $\psi$ adequadamente definida e a sequência $\{V_n\}_{n\geq 1}$ em um conjunto $Q$ também apropriado.

**Afirmação 3.11.** *Para todo $n = 1, 2, \ldots$ vale:*

**(i)** $K_0^{\frac{-1}{1-\varepsilon}}\phi(|x|) \leq u_n(x) \leq K_0^{\frac{1}{1-\varepsilon}}\phi(|x|), \ x \in \mathbb{R}^n, \ \forall n.$

**(ii)** $K_0^{\frac{-1}{1-\varepsilon}}\phi(|x|) \leq v_n(x) \leq K_0^{\frac{1}{1-\varepsilon}}\phi(|x|), \ x \in \mathbb{R}^n, \ \forall n.$

De fato, de $w_1^*$ satisfazer (3.46) e por (3.47) segue

$$u_n \leq K_0^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} w_1^* \leq K_0^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} K_0 \phi(|x|) = K_0^{\frac{1}{1-\varepsilon}}\phi(|x|), \ n = 1, 2, \ldots.$$

Portanto,

$$u_n(x) \leq K_0^{\frac{1}{1-\varepsilon}}\phi(|x|), \ x \in \mathbb{R}^n, \ n = 1, 2, \ldots.$$

De forma análoga,

$$v_n(x) \leq K_0^{\frac{1}{1-\varepsilon}}\phi(|x|), \ x \in \mathbb{R}^n, \ n = 1, 2, \ldots.$$

Por outro lado, a hipótese $(S_5), (ii)$ é equivalente a,

$$P(K^{-1}s) \geq P(s) \geq K^{-\delta}P(Ks) \geq K^{-\delta}P(s),$$

isto é,

$$P(K^{-1}s) \geq K^{-\delta}P(s). \tag{3.48}$$

Observe ainda que, de (3.46) segue

$$K_0^{\frac{-1}{1-\varepsilon}}\phi(|x|) \leq u_0(x), v_0(x) \leq K_0^{\frac{1}{1-\varepsilon}}\phi(|x|), \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.49}$$

Para facilitar, vamos denotar $K = K_0^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}$.

Então pela definição de $u_1 = A_1(v_0)$, (3.49), (3.48) e as hipóteses da afirmação 3.10 temos,

$$\begin{aligned}
0 &= \triangle u_1 + f_1(x)u_1^{\alpha} - g_1(x)u_1^{\beta} + h_1(x)u_1^{\gamma}P(v_0)\\
&\geq \triangle u_1 + f_1(x)K^{\alpha-1}u_1^{\alpha} - g_1(x)K^{\beta-1}u_1^{\beta} + h_1(x)u_1^{\gamma}P(K_0^{\frac{-1}{1-\varepsilon}}\phi(|x|))\\
&\geq \triangle u_1 + f_1(x)K^{\alpha-1}u_1^{\alpha} - g_1(x)K^{\beta-1}u_1^{\beta} + h_1(x)K_0^{\frac{-\delta}{1-\varepsilon}}u_1^{\gamma}P(\phi(|x|))\\
&\geq \triangle u_1 + f_1(x)K^{\alpha-1}u_1^{\alpha} - g_1(x)K^{\beta-1}u_1^{\beta} + h_1(x)K_0^{\frac{-\varepsilon(1-\gamma)}{1-\varepsilon}}u_1^{\gamma}P(\phi(|x|))\\
&= \triangle u_1 + [f_1(x)K^{\alpha-1}u_1^{\alpha} - g_1(x)K^{\beta-1}u_1^{\beta} + h_1(x)K^{\gamma-1}u_1^{\gamma}P(\phi(|x|))
\end{aligned}$$

e, adicionalmente,

$$\triangle(K^{-1}w_1^*)+[f_1(x)K^{\alpha-1}(K^{-1}w_1^*)^{\alpha}-g_1(x)K^{\beta-1}(K^{-1}w_1^*)^{\beta}+h_1(x)K^{\gamma-1}(K^{-1}w_1^*)^{\gamma}P(\phi(|x|))] = 0.$$

Assim, pelo Lema 1.26,

$$K^{-1}w_1^* \leq u_1,\ \mathbb{R}^n.$$

Portanto,

$$K_0^{\frac{-1}{1-\varepsilon}}\phi(|x|) \leq u_1(x),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Analogamente, de (3.49) segue,

$$K_0^{\frac{-1}{1-\varepsilon}}\phi(|x|) \leq A_2(u_0(x)),\ x \in \mathbb{R}^n,$$

isto é,

$$K_0^{\frac{-1}{1-\varepsilon}}\phi(|x|) \leq v_1(x),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Indutivamente, temos

$$K_0^{\frac{-1}{1-\varepsilon}}\phi(|x|) \leq u_n(x),\ x \in \mathbb{R}^n,$$
$$K_0^{\frac{-1}{1-\varepsilon}}\phi(|x|) \leq v_n(x),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Isso completa a demonstração da afirmação.

Desta forma, temos

$$\psi : Q_{c,d} \times Q_{c,d} \longrightarrow Q_{c,d} \times Q_{c,d},$$

e

$$\{V_n\} \subset Q_{c,d} \times Q_{c,d},$$

onde $c = K_0^{\frac{-1}{1-\varepsilon}}$ e $d = K_0^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$, satisfazendo as hipóteses do Lema 3.7.

Isso finaliza a demonstração do Lema 3.7

∎

### 3.2.2 Demonstração do Teorema $(CY)_2$ (Finalização)

Considere, $\psi : Q_{c,d} \times Q_{\widetilde{c},\widetilde{d}} \longrightarrow Q_{c,d} \times Q_{\widetilde{c},\widetilde{d}}$, onde $c < d$ e $\widetilde{c} < \widetilde{d}$ são como estabelecidos na prova do Lema anterior.

**Afirmação 3.12.** *O operador $\psi$ satisfaz as seguintes hipóteses do Teorema 1.3:*

**(i)** $(PF)_1$ : *Estimativa de Schauder,*

**(ii)** $(PF)_2$ : *Propriedade do Gráfico Fechado.*

Admita que a Afirmação 3.12 foi provada. Seja $V_n = (u_n, v_n)$, $V = (u, v)$ dada pelo Lema 3.7. Então pelo Teorema 1.3, $V = (u, v) \in C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e é um ponto fixo de $\psi$. Isto é,

$$(u, v) = \psi(u, v) = (A_1(v), A_2(u)),$$

e como consequência da definição de $A_i$, $i = 1, 2$,

$$\begin{cases} -\triangle u = f_1(x)u^\alpha - g_1(x)u^\beta + h_1(x)u^\gamma P(v), \\ \\ -\triangle v = f_2(x)v^\alpha - g_2(x)v^\beta + h_2(x)v^\gamma P(u). \end{cases}$$

Além disso, $c\phi(|x|) \leq u(x) \leq d\phi(|x|),\ x \in \mathbb{R}^n$ e $\widetilde{c}\phi(|x|) \leq v(x) \leq \widetilde{d}\phi(|x|),\ x \in \mathbb{R}^n$.

No que segue, vamos provar a Afirmação 3.12.

**Demonstração de (i).**

Relembrando que, $\psi : Q_{c,d} \times Q_{\widetilde{c},\widetilde{d}} \longrightarrow Q_{c,d} \times Q_{\widetilde{c},\widetilde{d}}$ é o operador dado por

$$\psi(u, v) = (A_1(v), A_2(u)),$$

e $A_i : Q_{c,d} \longrightarrow Q_{c,d}$ é a aplicação dada por

$$A_i(v) = w_i(v), \quad i = 1, 2,$$

onde $w_i(v) = w_i$ é solução única do problema

$$\begin{cases} -\triangle w_i = f_i(x)w_i^\alpha - g_i(x)w_i^\beta + h_i(x)w_i^\gamma P(v), \\ \\ w_i > 0,\ \mathbb{R}^n; \quad w_i(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

Considere

$$\begin{cases} w_1 = \ A_1(v),\ n = 1, 2, \ldots, \\ \\ w_2 = \ A_2(u),\ n = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{3.50}$$

Devemos mostrar que, $\psi$ satisfaz a propriedade $(PF)_1$ (Estimativa de Schauder), ou seja, para qualquer domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, existe $c = c(\Omega) > 0$ constante tal que

$$\|\psi U\|_{C^{2,\theta}(\overline{\Omega})\times C^{2,\theta}(\overline{\Omega})} \leq c\|U\|_{C^{0,0}(\overline{\Omega})\times C^{0,0}(\overline{\Omega})}, \qquad \forall U \in Q_{c,d} \times Q_{\widetilde{c},\widetilde{d}}.$$

Observe que, de (3.50), é suficiente mostrar,

$$\begin{cases} \|w_1\|_{C^{2,\theta}(\overline{\Omega})} = & \|A_1(v)\|_{C^{2,\theta}(\overline{\Omega})} \leq & c\|v\|_{C^{0,0}(\overline{\Omega})} \\ \|w_2\|_{C^{2,\theta}(\overline{\Omega})} = & \|A_2(u)\|_{C^{2,\theta}(\overline{\Omega})} \leq & c\|u\|_{C^{0,0}(\overline{\Omega})} \end{cases}$$

para qualquer domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado e denote $d_\Omega = \sup_{y\in\Omega} |y|$ e seja

$$B_i = B_i(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < d_\Omega + i\}, \quad i = 0, 1.$$

Observe que, $\Omega \subseteq B_i$.

Então, de acordo com (3.50), temos:

$$-\triangle w_1 = f_1(x)w_1^\alpha - g_1(x)w_1^\beta + h_1(x)w_1^\gamma P(v),\ \Omega,$$

$$-\triangle w_2 = f_2(x)w_2^\alpha - g_2(x)w_2^\beta + h_2(x)w_2^\gamma P(u),\ \Omega,$$

onde $c\phi(|x|) \leq w_1(x) \leq d\phi(|x|)$, $\widetilde{c}\phi(|x|) \leq w_2(x) \leq \widetilde{d}\phi(|x|)$, $\overline{c}\phi(|x|) \leq v(x) \leq \overline{d}\phi(|x|)$, $\widehat{c}\phi(|x|) \leq w_1(x) \leq \widehat{d}\phi(|x|)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Assim, pela Teoria de Schauder e analogamente ao que foi mostrado em (3.16), temos

$$\begin{aligned} \|w_1\|_{C^{2,\theta}(\overline{\Omega})} &\leq c_1\|f_1w_1^\alpha - g_1w_1^\beta + h_1w_1^\gamma P(v)\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} \\ &\leq c_1(R_1\|w_1\|^\alpha_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} + R_2\|w_1\|^\beta_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} + R_3\|w_1\|^\gamma_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})}\|P(v)\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})}). \end{aligned}$$

Daí, pelo Lema 1.2, segue,

$$\begin{aligned} \|w_1\|_{C^{2,\theta}(\overline{\Omega})} &\leq c_2(\|w_1\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} + \|w_1\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} + \|w_1\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})}\|v\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})}) \\ &\leq c_3(2\|w_1\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} + \|w_1\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})}\|v\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})}). \end{aligned}$$

Assim, concluímos que,

$$\|w_1\|_{C^{2,\theta}(\overline{\Omega})} \leq c_4(f_1, g_1, h_1, P, \Omega)(\|w_1\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} + \|w_1\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})}\|v\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})}). \tag{3.51}$$

Analogamente, mostra-se que

$$\|w_2\|_{C^{2,\theta}(\overline{\Omega})} \leq \overline{c_4}(f_1, g_1, h_1, P, \Omega)(\|w_2\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} + \|w_2\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})}\|u\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})}).$$

Vamos mostrar primeiramente que

$$\begin{cases} \|w_1\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} \leq d_1 \|v\|_{C^{0,0}(\overline{\Omega})}, \\ \|w_2\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} \leq d_2 \|u\|_{C^{0,0}(\overline{\Omega})}. \end{cases}$$

Temos por (3.51) e pelo Teorema 1.18 que

$$\begin{aligned} \sup_{B_0} |Dw_1(x)| &\leq \sup_{B_1} |Dw_1(x)| \leq \sup_{B_1} d_x |Dw_1(x)| \leq C\{\sup_{B_1} |w_1(x)| + \\ &\quad +(d_\Omega + 1)^2 \sup_{B_1} [|f_1 w_1^\alpha - g_1 w_1^\beta + h_1 w_1^\gamma P(v)|]\} \\ &\leq C\{\sup_{B_1} |d\phi(|x|)| + (d_\Omega + 1)^2 \sup_{B_1} |f_1(x)||w_1(x)|^\alpha + \\ &\quad +(d_\Omega + 1)^2 \sup_{B_1} |g_1(x)||w_1(x)|^\beta + \\ &\quad +(d_\Omega + 1)^2 \sup_{B_1} |h_1(x)||w_1(x)|^\gamma P(v(x))|]\} \\ &\leq C\{\sup_{B_1} |d\phi(|x|)| + (d_\Omega + 1)^2 \sup_{B_1} |f_1(x)|(|d\phi(|x|)|^\alpha + |c\phi(|x|)|^\alpha) + \\ &\quad +(d_\Omega + 1)^2 \sup_{B_1} |g_1(x)||d\phi(|x|)|^\beta + \\ &\quad +(d_\Omega + 1)^2 \sup_{B_1} |h_1(x)|(|d\phi(|x|)|^\gamma + |c\phi(|x|)|^\gamma) P(\overline{d}\phi(|x|))]\}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Médio, dados $x, y \in \Omega$, $s \in (0,1)$, temos

$$|w_1(x) - w_1(y)| \leq |Dw_1(x + sy)||x - y|,$$

assim, segue que

$$\frac{|w_1(x) - w_1(y)|}{|x - y|^\theta} \leq |Dw_1(x + sy)| \frac{|x - y|}{|x - y|^\theta} \leq C|x - y|^{1-\theta}, \ \forall\, x, y \in \Omega.$$

Logo,

$$\|w_1\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} \leq \widetilde{C_1}(\Omega). \tag{3.52}$$

Por outro lado,

$$\|w_1\|_{C^{0,0}(\overline{\Omega})}, \|w_2\|_{C^{0,0}(\overline{\Omega})}, \|v\|_{C^{0,0}(\overline{\Omega})}, \|u\|_{C^{0,0}(\overline{\Omega})} \geq K \min_{x \in \overline{\Omega}} \phi(|x|) > 0.$$

Como uma consequência temos,

$$\|v\|_{C^{0,0}} \geq \widehat{C_1},$$

daí, multiplicando por $d_1 > 0$ tal que $d_1 \widehat{C_1} > \widetilde{C_1}$ temos

$$d_1 \|v\|_{C^{0,0}} \geq d_1 \widehat{C_1} > \widetilde{C_1}.$$

Logo,

$$\|w_1\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} \leq d_1 \|v\|_{C^{0,0}(\overline{\Omega})}, \quad \forall n. \tag{3.53}$$

Analogamente,

$$\|w_2\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} \leq d_2\|u\|_{C^{0,0}(\overline{\Omega})}, \quad \forall n.$$

Portanto, de (3.51), (3.52) e (3.53)

$$\begin{aligned}
\|w_1\|_{C^{2,\theta}(\overline{\Omega})} &\leq c_4(\|w_1\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} + \|w_1\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})}\|v\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})}) \\
&\leq c_4(\|w_1\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} + \widetilde{C_1}\|v\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})}) \\
&\leq c_4(d_1\|v\|_{C^{0,0}(\overline{\Omega})} + \widetilde{C_1}\|v\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} \\
&\leq c_4(d_1\|v\|_{C^{0,0}(\overline{\Omega})} + \widetilde{C_1}C_1)
\end{aligned}$$

Como $\|v\|_{C^{0,0}(\overline{\Omega})} > 0$ então

$$\begin{aligned}
\|w_1\|_{C^{2,\theta}(\overline{\Omega})} &\leq c_4(d_1\|v\|_{C^{0,0}(\overline{\Omega})} + K\|v\|_{C^{0,0}(\overline{\Omega})}) \\
&\leq c_5\|v\|_{C^{0,0}(\overline{\Omega})},
\end{aligned}$$

isto é, $\|w_1\|_{C^{2,\theta}(\overline{\Omega})} \leq c_5\|v\|_{C^{0,0}(\overline{\Omega})}$, para alguma constante $c_5 > 0$.

De forma similar, mostra-se que

$$\|w_2\|_{C^{2,\theta}(\overline{\Omega})} \leq c_6\|u\|_{C^{0,0}(\overline{\Omega})}, \text{ para alguma constante } c_6 > 0.$$

Assim, a condição $(PF)_1$ é satisfeita.

**Demonstração de (ii).**

De fato, sejam $Z_n = (z_n, \overline{z}_n) \in Q^{2,0}_{c\phi,d\phi} \times Q^{2,0}_{\widetilde{c}\phi,\widetilde{d}\phi}$ tais que

$$Z_n \xrightarrow{C^2_{loc}} Z \text{ e } \psi Z_n \xrightarrow{C^2_{loc}} Y,$$

onde $Z = (z, \overline{z}) \in Q^{2,0}_{c\phi,d\phi} \times Q^{2,0}_{\widetilde{c}\phi,\widetilde{d}\phi}$.

No apêndice (D), durante a demonstração do Teorema de Ponto Fixo, mostramos que $Y = (y, \overline{y}) \in Q^{2,0}_{c\phi,d\phi} \times Q^{2,0}_{\widetilde{c}\phi,\widetilde{d}\phi}$, então resta-nos mostrar que, $Y = \psi Z$,

$$\begin{cases} y &= A_1(\overline{z}) \\ \overline{y} &= A_2(z) \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{cases} \triangle y &= f_1(x)y^\alpha - g_1(x)y^\beta + h_1(x)y^\gamma P(\overline{z}) \\ \\ \triangle \overline{y} &= f_2(x)\overline{y}^\alpha - g_2(x)\overline{y}^\beta + h_2(x)\overline{y}^\gamma P(z) \end{cases}$$

Temos por hipótese que, dado um subconjunto limitado $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$, temos que

$$z_n \xrightarrow{C^2(\overline{\Omega})} z,$$

$$\overline{z}_n \xrightarrow{C^2(\overline{\Omega})} \overline{z},$$

$$A_1\overline{z}_n \overset{C^2(\overline{\Omega})}{\longrightarrow} y,$$
$$A_2 z_n \overset{C^2(\overline{\Omega})}{\longrightarrow} \overline{y}.$$

Assim,

$$f_1(x)(A_1\overline{z}_n)^\alpha - g_1(x)(A_1\overline{z}_n)^\beta + h_1(x)(A_1\overline{z}_n)^\gamma P(\overline{z}_n) \longrightarrow f_1(x)y^\alpha - g_1(x)y^\beta + h_1(x)y^\gamma P(\overline{z})$$

e

$$\triangle A_1\overline{z}_n \longrightarrow \triangle y,$$

logo, $\triangle y = f_1(x)y^\alpha - g_1(x)y^\beta + h_1(x)y^\gamma P(\overline{z})$, ou seja, $y = A_1(\overline{z})$.

Analogamente, $\overline{y} = A_2(z)$.

Portanto, $\psi$ satisfaz $(PF)_2$.

# APÊNDICE A

# Resultados técnicos

Vamos apresentar neste apêndice alguns resultados técnicos, que foram apenas citados durante as demonstrações dos lemas e teoremas principais.

## A.1 Motivação para o operador $J$

Nesta seção, vamos exibir uma motivação para a definição do operador $J$, partindo do princípio que o objetivo desta definição é mostrar que o sistema $(E)$ tem uma solução, isto é, uma função $u \in C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ que satisfaça a seguinte equação

$$-\triangle u = f(x)u^{\alpha} + g(x,u) + h(x)u^{\gamma},\ \mathbb{R}^n. \tag{A.1}$$

Observando que, $g^*(r,s) = \max\limits_{|x|=r} g(x,s)$, considere $v$ tal que

$$\begin{aligned} -\triangle v &= f^*(|x|)v^{\alpha} + g^*(|x|,v) + h^*(|x|)v^{\gamma} \\ &\geq f(x)v^{\alpha} + g(x,v) + h(x)v^{\gamma}, \end{aligned}$$

ou seja, $v$ é supersolução de (A.1).

E, considerando $g_*(r,s) = \min\limits_{|x|=r} g(x,s)$, seja $w$ tal que

$$\begin{aligned} -\triangle w &= f_*(|x|)w^{\alpha} + g_*(|x|,w) + h_*(|x|)w^{\gamma} \\ &\leq f(x)w^{\alpha} + g(x,w) + h(x)w^{\gamma}, \end{aligned}$$

ou seja, $w$ é subsolução de (A.1).

Se $v(x) = V(r), V \in C^2(0,\infty) \bigcap C^1([0,\infty))$ com $v > 0$ temos

$$\begin{cases} V'(0) &= 0 \\ V(0) &= a > 0 \end{cases}$$

onde $r = |x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}, \quad n \geq 3.$

Então derivando $v$ em relação a $x_i$, segue

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = V'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i}, \tag{A.2}$$

sendo que,

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{1}{2}} 2x_i = \frac{x_i}{r}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_i \frac{1}{r}\right) \\ &= \frac{1}{r} + x_i\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial r}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}. \end{aligned}$$

Logo derivando (A.2) novamente em relação à $x_i$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} &= V''(r)\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)^2 + V'(r)\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} \\ &= V''\frac{x_i^2}{r^2} + V'\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right), \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned} \triangle_x v = \triangle_r V(r) &= \sum_{i=1}^{n}\left[V''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + V'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right)\right] \\ &= V'' + V'\left(\frac{n}{r} - \frac{1}{r}\right). \end{aligned}$$

Assim, considerando $\triangle v = -F(|x|, v)$ temos:

$$V'' + V'\left(\frac{n}{r} - \frac{1}{r}\right) = -F(r, V(r)),$$

ou equivalentemente,

$$-(r^{n-1}V')' = r^{n-1}F(r, V(r)).$$

Isto é,

$$-(r^{n-1}V')' = r^{n-1}\underbrace{(f^*(r)V^\alpha + g^*(r, V) + h^*(r)V^\gamma)}_{F(r,V(r))}.$$

Integrando de 0 à $r$, temos,

$$-\int_0^r (t^{n-1}V')'dt = \int_0^r t^{n-1}F(t, V(t))dt,$$

assim,

$$-(t^{n-1}V'(t))\Big|_{t=0}^{r} = \int_0^r t^{n-1}F(t,V(t))dt,$$

isto é,

$$-V'(r) = r^{1-n}\int_0^r t^{n-1}F(t,V(t))dt. \tag{A.3}$$

Integrando (A.3) de $r$ a $\infty$ segue,

$$-\int_r^\infty V'(t)dt = \int_r^\infty t^{1-n}\left[\int_0^t s^{n-1}F(s,V(s))ds\right]dt,$$

assim, como $\lim_{t\to\infty} V(t) = 0$,

$$V(r) = \int_r^\infty t^{1-n}\left[\int_0^t s^{n-1}F(s,V(s))ds\right]dt. \tag{A.4}$$

Integrando (A.4) por partes, temos,

$$V(r) \;=\; \frac{1}{2-n}t^{2-n}\int_0^t s^{n-1}F(s,V(s))ds\Big|_{t=r}^{\infty} - \int_r^\infty \frac{1}{2-n}t^{2-n}t^{n-1}F(t,V(t))dt,$$

assim, como

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2-n}t^{2-n}\int_0^t s^{n-1}F(s,V(s))ds = \lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t s^{n-1}F(s,V(s))ds}{(2-n)t^{n-2}} = 0,$$

segue

$$V(r) = \frac{1}{n-2}\left[\int_0^r\left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} sF(s,V(s))ds + \int_r^\infty sF(s,V(s))ds\right]. \tag{A.5}$$

Portanto, usando que $v$ é solução da equação $-\triangle v = F(|x|,v)$ e que esta é uma solução radial chegamos em (A.5), que é o próprio operador $J$.

## A.2 Demonstração do Lema de comportamento assintótico

Nesta seção vamos demonstrar o Lema 2.1 enunciado no Capítulo 2, para auxiliar nas demonstrações dos resultados principais. Na prova deste lema usaremos um resultado devido à Díaz e Saa [10], que será enunciado a seguir.

**Lema A.1.** *Seja $i,j=1,2$ e seja $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Se $w_i\in L^\infty(\Omega)$ satisfaz $w_i>0$, q.t.p. em $\Omega$, $w_1=w_2$ sobre $\partial\Omega$, $w_i^{\frac{1}{2}}\in H^1(\Omega)$, $\triangle w_i^{\frac{1}{2}}\in L^\infty(\Omega)$ e $w_i/w_j\in L^\infty(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega\left[\frac{-\triangle w_1^{\frac{1}{2}}}{w_1^{\frac{1}{2}}} + \frac{\triangle w_2^{\frac{1}{2}}}{w_2^{\frac{1}{2}}}\right](w_1-w_2)dx \geq 0.$$

Agora, vamos ao nosso lema,

**Lema A.2.** *Seja $E \in S$. Relembrando que,*

$$S = \left\{ E : [0, \infty) \longrightarrow (0, \infty) \ / \ 0 < \int_0^\infty s^{n-1} E(s) ds < +\infty \right\}$$

*e $J : S \longrightarrow [0, +\infty)$ é dado por*

$$J(E)(t) = \frac{1}{n-2} \left[ \int_0^t \left( \frac{s}{t} \right)^{n-2} sE(s) ds + \int_t^{+\infty} sE(s) ds \right], \quad t > 0.$$

*Então:*

**(i)** $J(E)''(t) + \dfrac{n-1}{t} J(E)'(t) = -E(t) \quad t > 0,$

**(ii)** $l_1 \phi(t) \leq J(E)(t) \leq l_2 \phi(t), \quad t > 0$ *para algumas constantes positivas $l_1$ e $l_2$.*

**Demonstração. (i)** Observe que,

$$\begin{aligned} J(E)'(t) &= \frac{1}{n-2} \left[ (2-n) t^{1-n} \int_0^t s^{n-1} E(s) ds + \frac{1}{t^{n-2}} t^{n-1} E(s) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{n-2} [\lim_{s \to \infty} (sE(s)) - tE(t)] \\ &= -t^{1-n} \int_0^t s^{n-1} E(s) ds, \quad t > 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} J(E)''(t) &= -(1-n) t^{-n} \int_0^t s^{n-1} E(s) ds - t^{1-n} t^{n-1} E(t) \\ &= (n-1) t^{-n} \int_0^t s^{n-1} E(s) ds - E(t), \quad t > 0. \end{aligned}$$

Logo,$J(E)''(t) + \dfrac{n-1}{t} J(E)'(t) = -E(t)$, $t > 0$.

**(ii)** Vamos dividir a desigualdade em dois itens:

$$(a) \ J(E)(t) \leq l_2 \phi(t), \quad t \geq 0$$

$$(b) \ l_1 \phi(t) \leq J(E)(t), \quad t \geq 0$$

para algumas constantes positivas $l_1$ e $l_2$.

Note que, como

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t < 1, \\ t^{2-n}, & \text{se } t \geq 1, \end{cases}$$

então $\phi'' + \dfrac{n-1}{t} \phi' = 0, \quad t \neq 1, t > 0.$

Assim, dessa observação e por $(i)$, temos o sistema

$$\begin{cases} -(t^{n-1}J(E)')' &= t^{n-1}E(t), \quad t > 0, \\ \\ -(t^{n-1}\phi')' &= 0, \quad t \neq 1. \end{cases} \tag{A.6}$$

Vamos mostrar $(a)$ primeiramente.

Observe que, para $0 \leq t < 1$, a desigualdade $(a)$ é satisfeita, basta fixar $l_2 > J(E)(0)$, pois desta forma

$$l_2\phi(t) = l_2 > J(E)(0) > J(E)(t), \ 0 \leq t \leq 1,$$

já que $J(E)$ é decrescente.

Suponha, por contradição, que existe $t_0 > 1$ tal que

$$l_2\phi(t) > J(E)(t), \qquad 0 \leq t < t_0$$

$$\phi(t_0) = J(E)(t_0).$$

Seja

$$w_1(t) = l_2^2\phi^2(t)$$
$$w_2(t) = J(E)^2(t).$$

Dessa forma, $w_1(t) > w_2(t)$, $0 \leq t < t_0$ e $w_1(t_0) = w_2(t_0)$.

Assim,

$$1 \leq \frac{w_1(t)}{w_2(t)} = \frac{l_2^2\phi^2(t)}{J(E)^2(t)} \leq \frac{l_2^2}{J(E)^2(t_0)}, \ t \in [0, t_0],$$
$$\frac{w_2(t)}{w_1(t)} \leq 1, \ t \in [0, t_0].$$

Agora, considere

$$\widehat{w}_1(x) = w_1(|x|), \ x \in \mathbb{R}^n,$$
$$\widehat{w}_2(x) = w_2(|x|), \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Vamos mostrar que as funções $\widehat{w_1}$ e $\widehat{w_2}$ satisfazem as hipóteses do Lema A.1, com $\Omega = B_{t_0}$.

Observe primeiramente que, $\widehat{w}_i \in L^\infty(B_{t_0})$, $\widehat{w}_i > 0$, em $B_{t_0}$ e $\widehat{w}_1(x) = \widehat{w}_2(x)$ para $|x| = t_0$.

Temos ainda que,

$$1 \leq \frac{\widehat{w}_1}{\widehat{w}_2} \leq \frac{l_2^2}{J(E)^2(t_0)}, \ \text{em } B_{t_0},$$
$$\frac{\widehat{w}_2}{\widehat{w}_1} \leq 1, \ \text{em } B_{t_0},$$

consequentemente,

$$\frac{w_i}{w_j} \in L^\infty(B_{t_0}).$$

**Afirmação A.3.** $\widehat{w}_1^{1/2}(x) = l_2\phi(|x|) \in H^1(B_{t_0})$.

De fato, temos que $l_2\phi(|x|)$ é integrável em $B_{t_0}$.

Além disso, como

$$\phi'(t) = \left\{ \begin{array}{cl} 0, & \text{se } 0 \leq t < 1, \\ (2-n)t^{1-n}, & \text{se } t \geq 1, \end{array} \right.$$

então

$$| \bigtriangledown \widehat{w}_1^{1/2}(x)| = |\phi'(|x|)| = \left\{ \begin{array}{cl} 0, & \text{se } |x| < 1 \\ (2-n)|x|^{1-n}, & \text{se } |x| > 1 \end{array} \right.$$

logo, $| \bigtriangledown \widehat{w}_1^{1/2}|^2$ é integrável.

Portanto, $\widehat{w}_1^{1/2} \in H^1(B_{t_0})$.

**Afirmação A.4.** $\widehat{w}_2^{1/2}(x) = J(E)(|x|) \in H^1(B_{t_0})$.

De fato, $J(E)(|x|)$ é integrável em $B_{t_0}$, pois $E \in S$.

E, como $J(E)'(t) = -t^{n-1} \int_0^1 s^{n-1}E(s)ds$, segue

$$| \bigtriangledown \widehat{w}_2^{1/2}(x)| = |J(E)(|x|)| = -|x|^{1-n} \int_0^t s^{n-1}E(s)ds.$$

Então, $| \bigtriangledown \widehat{w}_2^{1/2}|^2$ é integrável.

Portanto, $\widehat{w}_2^{1/2} \in H^1(B_{t_0})$.

Resta-nos mostrar que, $\triangle\widehat{w}_1^{1/2}, \triangle\widehat{w}_2^{1/2} \in L^\infty(B_{t_0})$.

Observe que,

$$\begin{aligned} \triangle\widehat{w}_1^{1/2}(x) &= \frac{(|x|^{n-1}(w_1(|x|)^{1/2})')'}{|x|^{n-1}} \\ &= \frac{(|x|^{n-1}l_2\phi'(|x|))'}{|x|^{n-1}}, \ |x| \neq 1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

logo, $\triangle\widehat{w}_1^{1/2} \in L^\infty(B_{t_0})$.

E,

$$\begin{aligned} \triangle\widehat{w}_2^{1/2}(x) &= \frac{(|x|^{n-1}(w_2(|x|)^{1/2})')'}{|x|^{n-1}} \\ &= \frac{(|x|^{n-1}(J(E)(|x|))')'}{|x|^{n-1}}, \ |x| \neq 1 \\ &= \frac{-|x|^{n-1}E(|x|)}{|x|^{n-1}} \\ &= -E(|x|), \end{aligned}$$

logo, $\triangle\widehat{w}_2^{1/2} \in L^\infty(B_{t_0})$.

Assim, pelo Lema A.1,

$$\int_{B_{t_0}} \left[ \frac{-\triangle w_1^{1/2}}{w_1^{1/2}} + \frac{\triangle w_2^{1/2}}{w_2^{1/2}} \right] (w_1 - w_2)dx \geq 0,$$

isto é,

$$0 \leq \int_{B_{t_0}} \frac{-E(|x|)}{J(E)(|x|)} (\widehat{w}_1 - \widehat{w}_2)dx < 0.$$

Portanto, não existe $t_0$, consequentemente, $l_2\phi(t) \geq J(E)(t)$, $\forall t \geq 0$.

Vamos mostrar $(b)$ agora.

Observe que, para $0 \leq t < 1$, a desigualdade $(b)$ é satisfeita, basta fixar $l_1 < J(E)(1)$, pois desta forma

$$l_1\phi(t) = l_1 < J(E)(1) < J(E)(t), \qquad 0 \leq t < 1.$$

Suponha, por contradição, que $\exists\ t_1 > t_0$ onde $t_0 > 1$ é tal que $l_1\phi(t_0) = J(E)(t_0)$ e $J(E)(t_1) < l_1\phi(t_1)$.

Por (A.6), temos que:

$$-(t^{n-1}J(E)')' = t^{n-1}E(t) \geq 0 = -(t^{n-1}(l_1\phi(t))')' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t^{n-1}J(E)')' \leq (t^{n-1}(l_1\phi)')'$$

Integrando de $t_0$ a $r(r > t_0)$,

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{t_0}^{r}(t^{n-1}J(E)')'dt &\leq \textstyle\int_{t_0}^{r}(t^{n-1}(l_1\phi)')'dt \Rightarrow \\ \Rightarrow r^{n-1}J(E)'(r) - t_0^{n-1}J(E)'(t_0) &\leq r^{n-1}l_1\phi'(r) - t_0^{n-1}l_1\phi'(t_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow r^{n-1}J(E)'(r) &\leq r^{n-1}l_1\phi'(r) + t_0^{n-1}J(E)'(t_0) - t_0^{n-1}l_1\phi'(t_0) = r^{n-1}l_1\phi'(r) \Rightarrow \end{aligned}$$

Integrando de $t$ a $\infty$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \textstyle\int_t^\infty J(E)'(r)dr &\leq l_1 \textstyle\int_t^\infty \phi'(r)dr, \quad \forall r > t_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -J(E)(t) &\leq -l_1\phi(t), \forall t > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow J(E)(t) &\geq l_1\phi(t)\ \forall\ t > t_0. \end{aligned}$$

Chegamos a uma contradição, pois $\exists\ t_1 > 0$ tal que $J(E)(t_1) < l_1\phi(t_1)$.

Logo, $J(E)(t) \geq l_1\phi(t), \quad \forall t \geq 0$.

$\blacksquare$

# APÊNDICE B

# Teoremas de Sub e Supersoluções

Reservamos este apêndice à demonstração do Teorema de sub e supersolução no $\mathbb{R}^n$, devido à Ni [26] em 1982, o qual é imprescindível para a obtenção de nossos resultados.

Mas antes, vamos enunciar e provar o Teorema de sub e supersolução para um conjunto aberto conexo, devido à Sattinger [30], em 1973, esse é um teorema que servirá de base para a demonstração do Teorema de Ni.

Na demonstração vamos usar o método bem conhecido de Iteração Monotônica, que pode ser usado para provar também Teoremas de sub e supersolução sob outras hipóteses.

## B.1 Teorema de Sub e Supersolução para domínio limitado

Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} Lu + f(x,u) = 0 & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{B.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto limitado.

Uma supersolução deste problema é uma função $\varphi \in C^2(\Omega)$ satisfazendo,

$$\begin{cases} L\varphi + f(x,\varphi) \leq 0 & \text{em } \Omega, \\ \varphi \geq g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Uma subsolução deste problema é uma função $\psi \in C^2(\Omega)$ satisfazendo,

$$\begin{cases} L\psi + f(x,\psi) \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ \psi \leq g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Assumimos que $\partial\Omega, f, g$ e os coeficientes de $L$ são regulares no que segue.

**Teorema B.1.** *Seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função satisfazendo a seguinte condição:*

$$f(x,s) - f(x,t) \geq -c(s-t), \quad \forall s,t \in I. \tag{B.2}$$

*Se $\psi$ e $\varphi$ são uma subsolução e uma supersolução do problema (B.1) respectivamente, tal que*

$$\psi \leq \varphi$$

*em $\Omega$, então o problema (B.1) possui uma solução $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ tal que $\psi \leq u \leq \varphi$.*

**Demonstração.** Observe que, se $x \in \Omega$ então

$$0 < m = \min_{\overline{\Omega}} \psi \leq u(x) \leq \max_{\overline{\Omega}} \varphi = M < \infty.$$

Logo, vamos trabalhar com o intervalo $[m, M]$.

Defina uma transformação (não-linear) $T : C^{0,\alpha}(\Omega) \longrightarrow C^{2,\alpha}(\Omega)$ por $Tu = v$ tal que

$$\begin{cases} (L-c)v = -[f(x,u) + cu] & \text{em } \Omega, \\ v = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

**Afirmação B.2.** *$T$ é monótona, ou seja, dados $u, v \in [m, M]$ tais que*

$$u \leq v \Rightarrow Tu \leq Tv.$$

Temos que,

$$\begin{cases} (L-c)Tu = -[f(x,u) + cu] & \text{em } \Omega, \\ (L-c)Tv = -[f(x,v) + cv] & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} Tu = v = g, & \text{sobre } \partial\Omega, \\ Tv = u = g, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

ou seja, $Tu = Tv = g$ sobre $\partial\Omega$.

Colocando $w = Tv - Tu$ temos:

$$\begin{cases} (L-c)w = -[f(x,v) - f(x,u) + c(v-u)] & \text{em } \Omega \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{B.3}$$

Observe que, se $u \leq v$, por (B.2)

$$f(x,v) - f(x,u) + c(v-u) \geq 0. \tag{B.4}$$

Assim, de (B.3) e (B.4), segue

$$\begin{cases} (L-c)w \leq 0 & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo, aplicando o Princípio de Comparação (1.24) em $L-c$, $w \geq 0$ em $\Omega$; temos $Tu \leq Tv$.

Seja agora $u_1 = T\varphi$.

**Afirmação B.3.** $u_1 \leq \varphi$.

Temos que,

$$\begin{cases} (L-c)u_1 = -[f(x,\varphi) + c\varphi] & \text{em } \Omega, \\ u_1 = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (L-c)(u_1-\varphi) &= (L-c)u_1 - (L-c)\varphi \\ &= -[f(x,\varphi)+c\varphi] - L\varphi + c\varphi \\ &= -[f(x,\varphi) + L\varphi] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

e $u_1 - \varphi = g - \varphi \leq 0$ sobre $\partial\Omega$, ou seja,

$$\begin{cases} (L-c)(u_1-\varphi) \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ u_1 - \varphi \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Aplicando novamente o Princípio de Comparação (1.24) em $(L-c)$, chega-se que $u_1 - \varphi \leq 0$ em $\Omega$, isto é, $u_1 = T\varphi \leq \varphi$.

Agora, defina $u_2 = Tu_1$.

Então, de $u_1 \leq \varphi$ segue,

$$u_2 = Tu_1 \leq T\varphi = u_1.$$

Por indução, tomamos uma sequência monótona não-crescente de iterações

$$\varphi \geq u_1 \geq u_2 \geq \ldots .$$

Similarmente, começamos de $\psi$ e tomamos uma sequência monótona não-decrescente,

$$\psi \leq v_1 \leq v_2 \leq \ldots,$$

onde $v_1 = T\psi$ e $v_n = Tv_{n-1}$.

Além disso, de $\psi \leq \varphi$ segue $T\psi \leq T\varphi$, isto é,

$$v_1 \leq u_1.$$

Por indução, $v_n \leq u_n, \forall n$, logo,

$$\psi \leq v_1 \leq v_2 \leq \cdots \leq u_2 \leq u_1 \leq \varphi.$$

Portanto, ambas sequências convergem (pois são limitadas e monótonas).

Seja

$$\begin{aligned} \overline{v}(x) &= \lim_{n\to\infty} v_n(x), \\ \overline{u}(x) &= \lim_{n\to\infty} u_n(x). \end{aligned}$$

E observe ainda que, $\overline{v} \leq \overline{u}$.

**Afirmação B.4.** *$\overline{v}$ e $\overline{u}$ são pontos fixos de $T$ isto é, $\overline{v} = T\overline{v}$ e $\overline{u} = T\overline{u}$.*

Note que, pelo Teorema (1.17) da continuidade de $f$ segue que

$$||u_n||_{W^{2,p}(\Omega)} \leq c_1||f||_{L^p} \leq K_1.$$

Logo, existem subsequências de $u_n$ que convergem pontualmente em $W^{2,p}(\Omega)$, para $1 < p < \infty$.

Pelas Imersões de Sobolev (1.12), temos $W^{2,p} \hookrightarrow W^{1,p}$.

Então, pelo Lema (1.12) (tomando $p > n$), concluímos que as iterações convergem em $C^{0,\alpha}(\Omega)$ onde $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$.

Além disso, retornando ao Teorema (1.16), temos

$$||u_n||_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq c_2||f||_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq K_2,$$

assim as iterações convergem em $C^{2,\alpha}(\Omega)$.

Assim,

$$\overline{u} = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} Tu_{n-1} = T(\lim_{n\to\infty} u_{n-1}) = T\overline{u}.$$

Dessa forma, temos

$$\begin{cases} (L-c)u = -[f(x,u) + cu] & \text{em } \Omega, \\ v = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{cases} Lu = -f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo, $\overline{u} \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ e é uma solução clássica do problema (B.1).

■

## B.2 Teorema de Sub e Supersolução para $\mathbb{R}^n$

Vamos agora, abordar o Princípio de Sub Super Solução sobre $\mathbb{R}^n$, devido à [26].

**Teorema B.5.** *Suponha que $\Phi$ seja uma supersolução de*

$$Lu + f(x,u) = 0, \ \mathbb{R}^n \tag{B.5}$$

*onde $L$ é um operador uniformemente elíptico de segunda ordem, $f$ é uma função localmente Holder contínua a qual é localmente lipschitz.*
*Se $\psi$ é uma subsolução de (B.5) com $\Phi \geq \psi$ em $\mathbb{R}^n$. Então, (B.5) possui uma solução $u$ em $C^2(\mathbb{R}^n)$ com*

$$\Phi \geq u \geq \psi. \tag{B.6}$$

**Demonstração.** Seja $B_r$ a bola com raio $r$ em $\mathbb{R}^n$. Considere o problema de valor na fronteira:

$$\begin{cases} Lu + f(x,u) = 0, & B_R, \\ u = g, & \partial B_R, \end{cases} \tag{B.7}$$

onde $g(x)$ é uma função que satisfaz $\Phi \geq g \geq \psi$.

Para (B.7), $\Phi$ é ainda uma supersolução ($\forall r$), e $\psi$ é ainda uma subsolução ($\forall r$), e $\Phi \geq \psi$ em $B_r$.

Pelo conhecido Esquema de Iteração Monotônica, que foi mostrado anteriormente, existe uma solução $u_r$ de (B.7) com $\psi \leq u_r \leq \Phi$ em $B_r$.

Agora, queremos aplicar estimativas interiores elípticas juntamente com um processo diagonal para concluir: $\{u_r : r \geq 1\}$ tem um subsequência $\{u_{r_k} : r_k \to \infty\}$ tal que $\{u_{r_k}\}$ converge para uma função $u$ (pontualmente) e esta convergência é em $C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. (Portanto, $u \in C^2$ e $Lu + f(x,u) = 0$ com $\Phi \geq u \geq \psi$, e isto conclui a prova.)

Sobre $B_3$, $\{u_r : r \geq 3\}$ é uniformemente limitada por $\Phi$ e $\psi$.

Desde que,$\Phi$ e $\psi$ sejam funções limitadas sobre $B_3$, existem $m_3, M_3$ tais que

$$M_3 \geq \Phi \geq u_r \geq \psi \geq \mu_3 \text{ em } B_3.$$

Como f é localmente Lipschitz em $u$, dado um subconjunto compacto $I$ de $\mathbb{R}$, $\exists K_I$ tal que

$$|f(x,s) - f(x,t)| \leq K_I|s-t|, \forall s,t \in I.$$

Tome $I = (m_3, M_3)$, então $\exists K_I$ tal que

$$|f(x,u_r(x)) - f(x,m_3)| \leq K_I|u_r(x) - m_3| \leq \overline{M}.$$

Assim, como f é localmente Holder contínua, f é contínua, donde f é limitada em compactos, logo temos:

$$|f(x,u_r(x))| \leq |f(x,u_r(x)) - f(x,m_3)| + |f(x,m_3)| \leq \overline{M} + \overline{m}.$$

Portanto, tomando $M = max\{\overline{M} + \overline{m}, M_3\}$ temos,

$$\begin{aligned} \|u_r\|_{L^\infty(B_3)} &\leq M, \forall r \geq 3, \\ \|f(x,u_r(x))\|_{L^\infty(B_3)} &\leq M, \forall r \geq 3. \end{aligned} \tag{B.8}$$

Desta forma, de (B.8) segue,

$$|f(x,u_r(x))| < M$$

isto é,

$$\left(\int_\Omega |f(x,u_r(x))|^p\right)^{1/p} < \left(\int_\Omega M^p\right)^{1/p} = C^p. \tag{B.9}$$

Logo, por (B.9), temos

$$||f||_{L^p(B_3)} < C_p, \ \forall p > 1.$$

Analogamente,

$$||u_r||_{L^p(B^3)} < D_p.$$

Vamos tomar domínios adequados para usar a estimativa interior elíptica (1.14). Considere $\Omega_0 = B_2$ e $\Omega = B_3$, note que $\Omega_0$ e $\Omega$ são domínios abertos limitados em $\mathbb{R}^n$ com $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$. Assim,

$$\begin{aligned} \|u_r\|_{W_{2,p}(B^2)} &\leq K(\|f\|_{L^p(B_3)} + \|u_r\|_{L^p(B_3)}) \\ &\leq K(C_p + D_p) = M_p \\ &\leq M_p, \qquad\qquad\qquad \forall r \geq 3. \end{aligned}$$

Pelo Teorema das Imersões de Sobolev (1.12), tomando $m = 1$, $j = 1$ , $p > n$ e $\Omega = B_2$ temos:

$$W^{2,p}(B_2) \hookrightarrow C^{1,\lambda}(\bar{B}_2)$$

para $p > n > (n-1)p$.

Temos ainda outra imersão

$$C^{1,\lambda}(\bar{B}_2) \hookrightarrow C^1(\bar{B}_2).$$

Daí, segue que,

$$W^{2,p}(B_2) \hookrightarrow C^1(\bar{B}_2),$$

logo,

$$\|u_r\|_{C^1(\bar{B}_2)} \leq C_1\|u_r\|_{W_{2,p}(B^2)} \leq C_1 M_p,$$

isto é,

$$\|u_r\|_{C^1(\bar{B}_2)} \leq C_1 M_p.$$

Então, novamente por imersão, temos

$$||u_r||_{C^0(\bar{B}_2)} \leq C_2 M_p. \tag{B.10}$$

.

**Afirmação B.6.** $|f(x,u_r(x))|_{C^{0,\mu}(B_2)} \leq K$.

Devemos mostrar que,

$$\frac{|f(x,u_r(x)) - f(y,u_r(y))|}{|x-y|^\mu} \leq K.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\frac{|f(x,u_r(x))-f(y,u_r(y))|}{|x-y|^{\mu}} &\leq \frac{|f(x,u_r(x))-f(x,u_r(y))|}{|x-y|^{\mu}}+\frac{|f(x,u_r(y))-f(y,u_r(y))|}{|x-y|^{\mu}}\\
&\leq \overline{K}.\frac{|u_r(x)-u_r(y)|}{|x-y|^{\mu}}+\frac{|f(x,c_1)-f(y,c_2)|}{|x-y|^{\mu}}\\
&\leq \overline{K_1}+\overline{K_2}<\infty
\end{aligned}$$

lembrando que, $f$ é lipschitz em $u_r$ e $f$ é localmente Holder contínua com expoente $\mu$ em $x$, e temos ainda que $u_r \in C^1(\overline{B_2})$.

Portanto,

$$|f(x,u_r(x))|_{C^{\mu}(B_2)} \leq K \tag{B.11}$$

Aplicando a estimativa interior de Schauder com domínios adequados: $\Omega = B_2, \Omega' = B_1$, temos,

$$\begin{aligned}
||u_r||_{C^{2,\mu}(\overline{B_1})} &\leq L(||u_r||_{C^0(\overline{B_2})}+||f||_{C^{\mu}(\overline{B_2})})\\
&\leq L(C_2.M_p+K)\\
&\leq K_1,\ \forall r \geq 3.
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Usando o mesmo raciocínio, podemos mostrar,

$$||u_r||_{C^{2,\mu}(\overline{B_2})} \leq K_2, \forall r \geq 4$$

$$||u_r||_{C^{2,\mu}(\overline{B_3})} \leq K_3, \forall r \geq 5$$

$$||u_r||_{C^{2,\mu}(\overline{B_n})} \leq K_n, \forall r \geq (n+2)$$

$$\vdots$$

Defina para cada inteiro $n = i \geq 1$,

$$u_i^r := u_r|_{B_i}, r \geq (i+2).$$

E, como a imersão $C^{2,\mu}(\overline{B_i}) \hookrightarrow C^2(\bar{B}_i) i = 1,2,\cdots$ é compacta, existem para cada $i = 1,2,\cdots$, subsequências de $\{u_i^{r_{ij}}\}_{r=i+1}^{\infty}$ e $u_i \in C^2(\overline{B_i})$ tais que

$$u_i^{r_{ij}} \longrightarrow u_i \text{ em } C^2(\overline{B_i}).$$

Mais especificamente,

$$u_1^{r_{11}}, u_1^{r_{12}}, u_1^{r_{13}}, \ldots \overset{C^2(B_1)}{\longrightarrow} u_1 (i=1)$$

$$u_2^{r_{21}}, u_2^{r_{22}}, u_2^{r_{23}}, \ldots \overset{C^2(B_2)}{\longrightarrow} u_2 (i=2)$$

$$u_3^{r_{31}}, u_3^{r_{32}}, u_3^{r_{33}}, \ldots \overset{C^2(B_3)}{\longrightarrow} u_3 (i=3)$$

$$\vdots$$

Note que, $u_{i+1}|_{B_i} = u_i$, pois a sequência $\{u_{i+1}^{r_{(i+1)j}}\}$ foi tomada como uma subsequência da sequência $\{u_i^{r_{ij}}\}$ onde cada $u_i^{r_{ij}}$ foi estendida à bola $B_{i+1}$.

Defina $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$ tal que

$$u(x)|_{B_i} = u_i(x) \text{ para cada } i = 1, 2, \ldots .$$

Segue da regularidade das $u_i$'s que $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

**Afirmação B.7.** *A sequência* $w_n = u_n^{r_{nn}}, n = 1, 2, 3, \ldots$ *é tal que*

$$w_n \overset{C^2(\bar{B}_i)}{\longrightarrow} u_i, \ \textit{para cada } i \geq 1.$$

De fato, para cada $i \geq 1$ e para cada $n \geq i$, temos:

$$w_n|_{B_i} = u_n^{r_{nn}}|_{B_i}.$$

Por sua vez, a sequência $\{u_n^{r_{nn}}\}_{n=1}^{\infty}$, restrita à $B_i$, é uma subsequência de $\{u_i^{r_{in}}\}_{n=1}^{\infty}$ e

$$u_i^{r_{in}} \longrightarrow u_i := u, \forall x \in B_i.$$

Logo, $w_n \overset{C^2(\bar{B}_i)}{\longrightarrow} u_i$.

Observe que, de

$$\begin{cases} Lu_r + f(x, u_r(x)) = 0, & \text{em } B_r, \\ \Phi \geq u_r \geq \psi, & \text{em } B_r, \end{cases}$$

segue

$$\begin{cases} Lw_n + f(x, w_n) = 0, & \text{em } B_i, \\ \Phi \geq w_n \geq \psi, & \text{em } B_i. \end{cases}$$

Fazendo $n \to \infty, \forall i$, temos dos sistemas anteriores que,

$$\begin{cases} Lu + f(x, u(x)) = 0, & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ \Phi \geq u \geq \psi, & \text{em } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

■

# APÊNDICE C

# O espaço $C^{0,\theta}_{loc} \times C^{0,\theta}_{loc}$ para $\theta \in (0,1)$

Neste apêndice, vamos mostrar que o conjunto $C^{0,\theta}_{loc} \times C^{0,\theta}_{loc}$ é um espaço vetorial topológico de Hausdorff localmente convexo, ou seja, este espaço satisfaz as hipóteses do Teorema de Ponto Fixo de Schauder-Tychonoff (1.41).

E, um fato interessante que será observado também, é que o espaço $C^{0,\theta}_{loc} \times C^{0,\theta}_{loc}$ não é um espaço normado, e por essa razão não foi possível usar o Teorema de Ponto Fixo de Schauder, o qual pedi apenas que o espaço seja normado.

## C.1 $C^{0,\theta}_{loc} \times C^{0,\theta}_{loc}$ espaço vetorial topológico de Hausdorff localmente convexo não-normável.

**Demonstração.** Primeiramente, vamos mostrar que uma família de seminormas induz uma topologia metrizável e exibiremos uma métrica compatível com esta topologia.

Seja $\mathcal{P} = \{p_i : i = 1, 2, 3, \cdots\}$ uma família separada (1.35) enumerável de seminormas sobre $X$, então o Teorema 1.38 mostra que $\mathcal{P}$ induz uma topologia $\tau$ com uma base local enumerável. Pelo Teorema (1.37), $\tau$ é metrizável.

Defina

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{-1} p_i(x-y)}{1 + p_i(x-y)}. \tag{C.1}$$

Temos que, $d$ é uma métrica sobre $X$.

Para provar que, $d$ é compatível com $\tau$, mostraremos que as bolas

$$B_r = \{x; d(x,0) < r\} \qquad (r > 0) \tag{C.2}$$

formam uma base local para $\tau$, pois desta forma, teremos mostrado que $\tau = \tau_d$, onde $\tau_d$ é a topologia que tem como base local as bolas $B_r$.

Como $p_i$ é contínua (pelo Teorema 1.38) e a série (C.1) converge uniformemente sobre $X \times X, d$ é contínua; assim cada $B_r$ é aberta.

Seja $W$ uma vizinhança de 0, então $W$ contém a interseção de conjuntos escolhidos apropriadamente

$$V(p_i, n_i) = \left\{ x : p_i(x) < \frac{1}{n_i} \right\} \qquad (1 \leq i \leq k) \tag{C.3}$$

Se $x \in B_r$, então

$$\frac{2^{-1} p_i(x)}{1 + p_i(x)} < r \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots). \tag{C.4}$$

Se $r$ é pequeno o suficiente, (C.4) força $p_1, p_2, \ldots$ serem tão pequenas que $B_r$ está em cada um dos conjuntos (C.3); logo $B_r \subset W$.

Assim, concluímos que as bolas $B_r$ formam uma base local para $\tau$.

Portanto, $d$ é compatível com $\tau$.

Agora, mostraremos que $C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n), \quad \theta \in (0,1)$ com uma topologia adequada é espaço topológico de Hausdorff localmente convexo, porém não é espaço normado.

Note que, se $\Omega$ é um conjunto aberto não-vazio em algum espaço euclidiano, então $\Omega$ é a união enumerável de conjuntos compactos $K_n \neq \emptyset$, os quais podem ser escolhidos de tal forma que $K_n$, esteja no interior de $K_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$.

Neste caso, como $\Omega = \mathbb{R}^n$, então este pode ser escrito como união enumerável de conjuntos compactos $B_n(0) \neq \emptyset$, a qual está no interior de $B_{n+1}(0) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$.

Temos que, $C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial que, pelo Teorema (1.38), pode ser topologizado pela família separada de seminormas

$$p_n(f, g) = \sup_{x \in B_n(0)} \{\max\{\|f(x)\|_{0,\theta}, \|g(x)\|_{0,\theta}\}\}.$$

Como $p_1 \leq p_2 \leq \cdots$, os conjuntos

$$V_n = \left\{ (f, g) \in C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) : p_n(f, g) < \frac{1}{n} \right\}$$

formam uma base local convexa para $C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, que torna $C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ um espaço localmente convexo.

De acordo com que já mostramos, a topologia de $C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ é compatível com a métrica

$$d((f^{(1)}, g^{(1)}), (f^{(2)}, g^{(2)})) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{-n} p_n((f^{(1)}, g^{(1)}) - (f^{(2)}, g^{(2)}))}{1 + p_n((f^{(1)}, g^{(1)}) - (f^{(2)}, g^{(2)}))}$$

onde $(f^{(1)}, g^{(1)}), (f^{(2)}, g^{(2)}) \in C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Se $(f_i, g_i)$ é uma sequência de Cauchy relativa a esta métrica, então por definição, $d((f_i, g_i), (f_j, g_j)) \overset{i,j\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Como para cada $n$, temos

$$\frac{2^{-n} p_n((f_i, g_i) - (f_j, g_j))}{1 + p_n((f_i, g_i) - (f_j, g_j))} \leq d((f_i, g_i), (f_j, g_j))$$

então,

$$p_n((f_i, g_i) - (f_j, g_j)) = p_n(f_i - f_j, g_i - g_j) \longrightarrow 0.$$

Logo,

$$\|(f_i - f_j, g_i - g_j)\| = \max\{\|(f_i - f_j)(x)\|_{C^{0,\theta}}, \|(g_i - g_j)(x)\|_{C^{0,\theta}}\} \longrightarrow 0.$$

Daí, como $(C^{0,\theta}_{loc}(B_n(0)) \times C^{0,\theta}_{loc}(B_n(0)), \|.\|)$ é espaço de Banach, segue

$$(f_i, g_i) \longrightarrow (f, g) \in C^{0,\theta}_{loc}(B_n(0)) \times C^{0,\theta}_{loc}(B_n(0)).$$

Desta forma, $d((f, g), (f_i, g_i)) \longrightarrow 0$.

Assim, $d$ é uma métrica completa. Provamos então que, a topologia $\tau$ de $C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ é induzida por uma métrica completa.

Pelo Teorema (1.38), um conjunto $E_1 \times E_2 \subset C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ é limitado se, e somente se, existem números $M_n < \infty$ tais que $p_n(f, g) \leq M_n, \quad \forall (f, g) \in E_1 \times E_2$, ou seja,

$$\|(f, g)\| \leq M_n, \quad se (f, g) \in E_1 \times E_2 \text{ e } x \in B_n(0).$$

Como todo $V_n$ contém uma $(f, g)$ para a qual $p_{n+1}(f, g)$ é tão grande quanto se queira, segue que $V_n$ não é limitado.

Logo,$C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ não é localmente limitado, consequentemente não é normável (Teorema (1.39)).

E, mostramos que $C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial topológico localmente convexo, daí pelo Teorema (1.30), $C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço topológico de Hausdorff localmente convexo.

■

# APÊNDICE D

# Prova do Teorema de Ponto Fixo 1.3

A idéia da demonstração do Teorema $(CY)_2$ se baseia em mostrar que as hipóteses do Teorema de Ponto Fixo, apresentado no Capítulo 1, no Teorema (1.3) são satisfeitas. Então, devido à importância desse Teorema para a demonstração de um dos resultados principais, vamos demonstrá-lo neste apêndice. Mas, primeiramente relembraremos algumas observações relativas ao Teorema que serão usadas em sua demonstração.

Para funções $\rho$ e $\varphi$ tais que $\varphi(x) \geq \rho(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$, constante $\theta \in [0,1)$ e inteiro não-negativo $m$, denotamos

$$Q^{m,\theta}_{\rho,\varphi} \equiv \{u \in C^{m,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)/\rho(x) \leq u(x) \leq \varphi(x), x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Vamos nos atentar às seguintes condições:

$(PF)_1$ (Estimativa de Schauder) Existe $c = c(\Omega) > 0$ constante, tal que

$$\|\psi U\|_{C^{2,\theta}(\overline{\Omega})\times C^{2,\theta}(\overline{\Omega})} \leq c\|U\|_{C^{0,0}(\overline{\Omega})\times C^{0,0}(\overline{\Omega})}, \quad \forall U \in Q^{0,\theta}_{\rho_1,\varphi_1} \times Q^{0,\theta}_{\rho_2,\varphi_2},$$

para qualquer domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

$(PF)_2$ (Gráfico-fechado) Se $Y_n, Y, Z_n, Z \in Q^{2,0}_{\rho_1,\varphi_1} \times Q^{2,0}_{\rho_2,\varphi_2}$ satisfazem $Y_n = \psi Z_n, n = 1, 2, \ldots,$ e

$$Y_n \overset{C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} Y, Z_n \overset{C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} Z, \text{ então } Y = \psi Z$$

**Teorema D.1.** *Considere $\rho_i, \varphi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow (0,\infty)$ com $\varphi_i(x) \geq \rho_i(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2,$ localmente Holder contínuas; $\psi : Q^{0,\theta}_{\rho_1,\varphi_1} \times Q^{0,\theta}_{\rho_2,\varphi_2} \longrightarrow Q^{2,\theta}_{\rho_1,\varphi_1} \times Q^{2,\theta}_{\rho_2,\varphi_2} \quad (\theta \in (0,1))$ satisfazendo $(PF)_1$ e $(PF)_2$. Seja $\{V_n\}_{n\geq 0} \subset Q^{2,\theta}_{\rho_1,\varphi_1} \times Q^{2,\theta}_{\rho_2,\varphi_2}$ sequência tal que $V_n = \psi V_{n-1}$ e $\lim_{n\to\infty} V_n(x) = V(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$. Então,*

**(i)** *$V \in Q^{2,\theta}_{\rho_1,\varphi_1} \times Q^{2,\theta}_{\rho_2,\varphi_2}$ e*

**(ii)** *$V$ é um ponto fixo de $\psi$, isto é, $V = \psi V$.*

**Demonstração.** Para demonstrar esse Teorema, vamos usar o Teorema de Arzela-Áscoli (1.6) enunciado no Capítulo 1, então consideraremos $\overline{\Omega} \subset E$ e $E = \mathbb{R}^n$.

Desde que, $\{V_{n-1}\}_{n\geq 1} \subset Q^{2,\theta}_{\rho_1,\varphi_1} \times Q^{2,\theta}_{\rho_2,\varphi_2}$, então $\{V_{n-1}\}$ é limitada em $C^{0,0}(\Omega)$.

De fato, temos que $V_{n-1} = (u_{n-1}, v_{n-1}) \in C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|V_{n-1}\|_{C^{0,0}(\Omega)} = (\|u_{n-1}\|^2_{C^{0,0}(\overline{\Omega})} + \|v_{n-1}\|^2_{C^{0,0}(\overline{\Omega})})^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, como

$$\begin{aligned} \|u_{n-1}\|_{C^{0,0}(\overline{\Omega})} &= \|u_{n-1}\|_0 \\ &= \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u_{n-1}(x)| \\ &\leq \sup_{x\in\overline{\Omega}} |\varphi_1(x)|, \end{aligned}$$

segue que

$$||V_{n-1}||_{C^{0,0}(\Omega)} \leq \overline{K} \tag{D.1}$$

onde, $K$ depende apenas de valores de $\rho_i, \varphi_i, \quad i = 1, 2$, sobre $\Omega$.

Considere a sequência,

$$U_n = D^2 V_n.$$

Temos que,

$$\|U_n\|_{C^0} = \|D^2 V_n\|_{C^0} \leq \|V_n\|_{C^2} \overset{(*)}{\leq} K_2$$

$(*)\|V_n\|_{C^{2,\theta}(\Omega)\times C^{2,\theta}(\Omega)} = \|\psi V_{n-1}\|_{C^{2,\theta}(\Omega)\times C^{2,\theta}(\Omega)} \overset{(PF)_1}{\leq} c||V_{n-1}||_{C^{0,0}(\Omega)\times C^{0,0}(\Omega)} \overset{(D.1)}{\leq} c\overline{K} = K_1$, e como, $C^{2,\theta}(\Omega) \hookrightarrow C^2(\Omega)$ então

$$||V_n||_{C^2} \leq \overline{c}||V_n||_{C^{2,\theta}} \leq \overline{c}K_1 = K_2.$$

Portanto, $\{U_n\}$ é limitada em $C^{0,0}(\Omega)$.

Agora, vamos mostrar que $\{U_n\}$ é equicontínua. Ou seja, devemos provar que, dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\|U_n(x) - U_n(y)\|_{C^{0,0}(\Omega)} < \varepsilon$, sempre que $x, y \in \Omega, |x - y| < \delta$.

Temos que,

$$\frac{||D^2V_n(x) - D^2V_n(y)||_{C^{0,0}(\Omega)}}{|x-y|^\theta} < K_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ||D^2V_n(x) - D^2V_n(y)||_{C^{0,0}(\Omega)} < K_2|x-y|^\theta$$

$$\Rightarrow ||D^2V_n(x) - D^2V_n(y)||_{C^{0,0}(\Omega)} < K_2\frac{\varepsilon}{K_2} = \varepsilon$$

sempre que $|x-y| < \left(\frac{\varepsilon}{K_2}\right)^{\frac{1}{\theta}}$.

Logo, $||U_n(x) - U_n(y)|| < \varepsilon$, sempre que $|x-y| < \delta$, isto é, $U_n$ é equicontínua.

Assim, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli (1.6), $\{U_n\}_{n\geq 1}$ é relativamente compacta, ou seja, possui uma subsequência uniformemente convergente em $C(\Omega)$. Ou seja, devido à definição da sequência $\{U_n\}_{n\geq 1}$ podemos dizer então que, $\{V_n\}$ é relativamente compacta.

Como $\Omega$ é qualquer domínio limitado, tomemos $\Omega = B_1$, depois $\Omega = B_2, \cdots, \Omega = B_n, \cdots$ e teremos que a sequência $\{V_n\}$ em cada uma das bolas possui uma subsequência convergente.

Defina para cada inteiro $n = i \geq 1$,

$$V_i^n = V_n\big|_{B_i}, \quad n \geq i$$

sendo a subsequência convergente de $\{V_n\}$ em cada bola $B_i$.

Assim, temos:

$$V_1^1, V_1^2, V_1^3, \cdots \longrightarrow \overline{V}_1$$

$$V_2^1, V_2^2, V_2^3, \cdots \longrightarrow \overline{V}_2$$

$$V_3^1, V_3^2, V_3^3, \cdots \longrightarrow \overline{V}_3$$

$$\vdots$$

onde as convergências acontecem em $Q^{2,0}_{\rho_1,\varphi_1} \times Q^{2,0}_{\rho_2,\varphi_2}$.

Observe que, $V_{i+1}\big|_{B_i} = V_i$, pois a sequência $\{V_{i+1}^n\}$ foi tomada como uma subsequência da sequência $\{V_i^n\}$, onde cada $V_i^n$ foi estendida à bola $B_{i+1}$.

Defina $\widetilde{V} : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty)$ tal que

$$\widetilde{V}(x)\big|_{B_i} = \overline{V_i}(x) \qquad \text{para cada } i = 1, 2, \cdots.$$

Como cada $\overline{V_i} \in Q^{2,0}_{\rho_1,\varphi_1} \times Q^{2,0}_{\rho_2,\varphi_2}$ então $\widetilde{V} \in Q^{2,0}_{\rho_1,\varphi_1} \times Q^{2,0}_{\rho_2,\varphi_2}$.

Vamos denotar, por conveniência, a subsequência $\{V_n^n\}$ ainda por $\{V_n\}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

**Afirmação D.2.** *A sequência $\{V_n^n\}_{n\geq 1}$ é tal que $V_n^n \overset{C^{2,0}_{loc}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} \overline{V_i}$ para cada $i \geq 1$.*

De fato, a sequência $\{V_n^n\}_{n\geq 1}$ restrita à $B_i$, é uma sequência de $\{V_i^n\}_{n\geq 1}$ e $V_i^n \longrightarrow \overline{V_i} = \widetilde{V}\big|_{B_i}$, $\forall B_i$.

Assim, $\{V_n\} = \{V_n^n\} \overset{C^{2,0}_{loc}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} \widetilde{V}$.

E, para a sequência imagem

$$\{\psi V_n\} = \{V_{n-1}\} \subset Q^{2,\theta}_{\rho_1,\varphi_1} \times Q^{2,\theta}_{\rho_2,\varphi_2}$$

da subsequência $\{V_n\}$, pela mesma razão, $\exists \widehat{V}$ e a subsequência $\{V_{n_i+1}\} \subset Q^{2,\theta}_{\rho_1,\varphi_1} \times Q^{2,\theta}_{\rho_2,\varphi_2} \subset Q^{2,0}_{\rho_1,\varphi_1} \times Q^{2,0}_{\rho_2,\varphi_2}$ tal que

$$V_{n_i+1} \overset{C^{2,0}_{loc}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} \widehat{V}.$$

Note que, ainda é válido,

$$V_{n_i} \overset{C^{2,0}_{loc}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} \widetilde{V}, \quad i \longrightarrow \infty.$$

Então, pela hipótese que $V$ é o limite ponto a ponto da sequência original $\{V_n\}$, pela unicidade do limite, temos:

$$V = \widetilde{V} = \widehat{V} \in Q^{2,0}_{\rho_1,\varphi_1} \times Q^{2,0}_{\rho_2,\varphi_2}.$$

Portanto, considerando $\psi : Q^{2,0}_{\rho_1,\varphi_1} \times Q^{2,0}_{\rho_2,\varphi_2} \longrightarrow Q^{2,\theta}_{\rho_1,\varphi_1} \times Q^{2,\theta}_{\rho_2,\varphi_2} \subset Q^{2,0}_{\rho_1,\varphi_1} \times Q^{2,0}_{\rho_2,\varphi_2}$ pela propriedade do gráfico fechado $(PF)_2$ e como $V_{n_i+1} = \psi V_{n_i}, \quad i = 1, 2, \cdots$

$$\begin{array}{ccc} V_{n_i+1} & \overset{C^{2,0}_{loc}}{\longrightarrow} & \widehat{V} \\ V_{n_i} & \overset{C^{2,0}_{loc}}{\longrightarrow} & \widetilde{V} \end{array} \Rightarrow \widehat{V} = \psi \widetilde{V} \Rightarrow V = \psi V$$

isto é, $V$ é um ponto fixo de $\psi$, e portanto,

$$V \in Q^{2,\theta}_{\rho_1,\varphi_1} \times Q^{2,\theta}_{\rho_2,\varphi_2}.$$

■

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


[1] Robert A. Adams and J. F. Fournier. *Sobolev Spaces.* Canada, $2^{th}$ edition, 2003.

[2] R. P. Agarwal, M. Meehan, and D. O'regan. *Fixed Point Theory and Applications.* Estados Unidos, 2006.

[3] A. Callegari and A. Nachman. Some singular, nonlinear differential equations arising in boundary layer theory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 64:96–105, 1978.

[4] A. Callegari and A. Nachman. A nonlinear singular boundary value problem in the theory of pseudoplastic fluids. *SIAM J. Appl. Math.*, 38:275–281, 1980.

[5] F. Chen and M. Yao. Decaying positive solutions to a system of nonlinear elliptic equations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 136A:301–320, 2006.

[6] F Cirstea and V. Radulescu. Existence and uniqueness of positive solutions to a semilinear elliptic problem in, $r^n$. *J. Math. Anal. Appl.*, 229:417–425, 1999.

[7] P. Clément, D. G. Figueiredo, and E. Mitidieri. Positive solutions of semilinear elliptic systems. *Comm. Partial Differential Equation*, 17:923–940, 1992.

[8] D. S. Cohen and H. B. Keller. Some positive problems suggested by nonlinear heat generators. *J. Math. Mech.*, 16:1361–1376, 1967.

[9] Morel J. M. Diaz, J. I. and L. Oswald. An elliptic equation with singular nonlinearity. *Comm. Partial Differential Equations*, 12:1333–1344, 1987.

[10] J.I. Díaz and J.E. Saa. Existence et unicité de solutions positives pour certaines equations elliptiques quasilinéares. *C. R. Acad. Sci. Paris 305 Sèrie I*, pages 521–524, 1987.

[11] A. Edelson. Entire solutions of singular elliptic equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 139:523–532, 1989.

[12] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19.

[13] Wei J. Feng and Xi Y. Liu. Existence of entire solutions of a singular semilinear elliptic problem. *Acta Mat. Sin.*, 20(6):983–988, 2004.

[14] D. G. Figueiredo and Y. Jianfu. Decay, symmetry and existence of solutions of semilinear elliptic systems. *Nonlinear analysis, Theory, Methods and Applications*, 33:211–234, 1998.

[15] N. Fukagai. On decaying entire solutions of second order sublinear elliptic equations. *Hiroshima Mathematic*, 14:551–562, 1984.

[16] W Fulks and J. S. Maybee. A singular nonlinear equation. *Osaka Math.*, 12:1–19, 1960.

[17] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Berlin, $3^{th}$ edition, 1997.

[18] J. V. Gonçalves and C. A. P. Santos. Positive solutions for a class of quasilinear singular equations. *Eletronic Journal of Differential Equations*, 2004(56):1–15, 2004.

[19] M. E. Gurtin and R. C. MacCamy. On the difusion of biological populations. *Math. Biosci.*, 33:35–49, 1977.

[20] N. Kawano. On bounded entire solutions of semilinear elliptic equations. *Hiroshima Mathematic*, 14:125–158, 1984.

[21] A. V. Lair and A. W. Shaker. Entire solutions of a singular semilinear elliptic problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 200:498–505, 1996.

[22] E. L. Lima. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro, 2005.

[23] D. Mitrovic and D. Zubrinic. *Fundamentals of applied functional analysis*. Inglaterra, 1998.

[24] P. de Mottoni, A. Schiaffino, and A. Tesei. Attractivity properties of nonnegative solutions for a class of nonlinear degenerate parabolic problems. *Annli Mat. Pura Appl. IV*, 136:35–48, 1984.

[25] M. Naito. A note on bounded positive entire solutions of semilinear elliptic equations. *Hiroshima Mathematic*, 14:211–214, 1984.

[26] Wei-Ming Ni. On the elliptic equation , its generalizations, and applications in geometry. *Indiana University Mathematics Journal*, 31(4):493–529, 1982.

[27] L. A. Peletier and R. C. A. M. van der Vorst. Existence and non-existence of positive solutions of non-linear elliptic systems and the bi-harmonic equation. *Diff. Int. Eq.*, 5:747–767, 1992.

[28] L. Qiu and M. Yao. Entire positive solution to the system of nonlinear elliptic equations. *Boundary Value Problems*, 2006:1–11, 2006.

[29] W. Rudin. *Functional Analysis*. Estados Unidos, 1973.

[30] D. Sattinger. Topics in stability and bifurcation theory. In Springer-Verlag, editor, *Lecture Notes in Mathematics 309*, Berlin/Heidelberg/New York, 1973.

[31] J. Serrin and Zou H. Existence of ppo. *Diff. Int. Eq.*, 5:747–767, 1992.

[32] J. Serrin and H. Zou. Cauchy-liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities. *Acta Math.*, 189:79–142, 2002.

[33] A. W. Shaker. On singular semilinear elliptic equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 173:222–228, 1993.

[34] C. S. Yarur. Existence of continuous and singular ground states for semilinear elliptic systems. *Electronic Journal of Differential Equations*, 1:1–27, 1998.