

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA

**ANÁLISE NUMÉRICA DAS SOLUÇÕES DE VÁCUO  
DOS UNIVERSOS HOMOGÊNEOS DE BIANCHI VII**

JULIANO ALVES DE DEUS

Brasília - DF, Março de 2009

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ANÁLISE NUMÉRICA DAS SOLUÇÕES DE VÁCUO  
DOS UNIVERSOS HOMOGÊNEOS DE BIANCHI VII**

JULIANO ALVES DE DEUS

ORIENTADOR:

DANIEL MÜLLER

Brasília - DF, Março de 2009

*Dedico,*

*A meus pais,  
Moacir e Zenilde,*

*e a meus irmãos,  
Fabiano e Camila.*

# Agradecimentos

Meus agradecimentos...

À minha família, pelo apoio e compreensão diante da saudade compelida pela distância, mas minimizada pelo amor que nos une.

Ao professor Daniel Müller, pela dedicada orientação.

Aos professores da pós-graduação, Ademir, Anníbal, Geraldo Magela, Marcos Maia e Vanessa, com os quais tive a satisfação de cursar disciplinas.

Às minhas amigas conterrâneas e colegas de mestrado, Anailde, Dieime, Eliane e Priscilla, pela amizade confortadora.

Aos muitos amigos que adquiri na pós-graduação e nesta cidade, André, Andrei e Gabriela, Camila, Carlos, Ednardo, Elias, Fernando, Fábio e Deise, Franciscarlos, José Antônio, Juliana, Leandro e Andrezza, o outro Leandro, Luis, Márcio, Marcos, Mirian, Paula, Pedro, Sávio, Sérgio, Thiago e aos muitos outros que indesculpavelmente não me recordo neste momento.

Aos professores Tarcísio Marciano e Vanessa, coordenadores da pós-graduação em Física durante a minha permanência no mestrado, e a Célia, secretária da pós-graduação.

Ao Instituto de Física da UNB e à CAPES.

# Resumo

As cosmologias de Bianchi são modelos cosmológicos homogêneos anisotrópicos. Podem no entanto incluir o caso particular isotrópico. Modelos anisotrópicos adquirem importância no estudo do universo próximo ao seu surgimento, quando a geometria é dominante na determinação da dinâmica do universo. Portanto, soluções de vácuo, que desconsideram o efeito da matéria e energia, são apropriadas para obter as equações de campo do sistema.

Neste trabalho nós resolvemos numericamente soluções de vácuo dos universos homogêneos de Bianchi VII. O tipo Bianchi VII constitui um caso de grande generalidade dentro destes modelos cosmológicos homogêneos.

Nós obtivemos soluções que indicam universos com expansões lineares e com um particular comportamento tipo Kasner, para Bianchi VII<sub>0</sub>. Para Bianchi VII<sub>A</sub>, obtivemos soluções de universos com expansões lineares (incluindo o caso isotrópico) e, num caso mais geral, verificamos numericamente um comportamento de onda plana.

# Abstract

The Bianchi's cosmologies are anisotropic homogeneous cosmological models. May however include the particular isotropic case. Anisotropic models gain importance in the study of the universe close to their emergence, when the geometry is dominant in determining the dynamics of the universe. Therefore, vacuum solutions, which disregards the matter and energy effect, are suitable to obtain the system field equations.

In this work we numerically solve the vacuum solutions of Bianchi VII homogeneous universes. The Bianchi VII type is a case of great generality within this homogeneous cosmological models.

We obtained solutions which indicates universes with linear expansions and with a particular Kasner type behavior, for Bianchi VII<sub>0</sub>. For Bianchi VII<sub>A</sub>, we obtained solutions for universes with linear expansion (including the isotropic case) and, for more general case, we verify numerically a behavior of flat wave.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>3</b>
<b>Resumo</b>	<b>4</b>
<b>Abstract</b>	<b>5</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>8</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>9</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>11</b>
<b>2 Geometria Diferencial e Formalismo Tetrádico</b>	<b>13</b>
2.1 Variedades Diferenciáveis . . . . .	13
2.2 Vetores Tangentes . . . . .	14
2.3 1-Formas . . . . .	16
2.4 $P$ -Formas, Produto e Derivada Exterior . . . . .	18
2.5 Tensores . . . . .	19
2.6 Derivada de Lie . . . . .	20
2.7 Derivada Covariante . . . . .	21
2.8 Tensor Curvatura de Riemann . . . . .	23
2.9 Tensor Métrico . . . . .	24
2.10 Espaço-Tempo . . . . .	26
<b>3 Modelos Cosmológicos Homogêneos</b>	<b>27</b>
3.1 Grupo e Álgebra de Lie . . . . .	27
3.2 Classificação de Bianchi . . . . .	28
3.3 Espaços Homogêneos . . . . .	30
3.4 Universo Homogêneo e Isotrópico . . . . .	31
<b>4 Equações de Campo e Soluções Analíticas</b>	<b>36</b>
4.1 Equações de Campo de Einstein . . . . .	36
4.2 Soluções de Vácuo . . . . .	37

4.3	Métrica Homogênea . . . . .	38
4.4	Soluções de Vácuo da Classe $G_3A$ de Bianchi . . . . .	39
4.4.1	Bianchi I . . . . .	40
4.4.2	Bianchi $VII_0$ e Bianchi IX . . . . .	41
4.5	Solução de Vácuo do Tipo $VII_A$ de Bianchi . . . . .	43
4.5.1	Solução para Métrica Diagonal . . . . .	43
4.5.2	Solução para Métrica Não-Diagonal . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Resultados Numéricos e Discussão</b>	<b>46</b>
5.1	Condição Inicial e Evolução dos Vínculos . . . . .	46
5.2	Solução Numérica para Bianchi $VII_0$ . . . . .	48
5.3	Solução Numérica para Bianchi $VII_A$ . . . . .	63
5.3.1	Solução para Condição Inicial Não-Diagonal . . . . .	63
5.3.2	Solução para Condição Inicial Diagonal . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>72</b>
	<b>Apêndice</b>	<b>74</b>
<b>A</b>	<b>Equações de Campo da Métrica Não-Diagonal</b>	<b>75</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>80</b>

# Lista de Tabelas

3.1	Constantes de estrutura do grupo de Lie para $G_3$ . . . . .	29
3.3	Tipos de Bianchi para a álgebra de Lie. . . . .	30
3.5	Constantes de estrutura para Bianchi I, VII <sub>A</sub> e IX. . . . .	32
3.7	Bases de $G_3$ para Bianchi I, VII <sub>A</sub> e IX. . . . .	34
5.1	Condições iniciais para Bianchi VII <sub>0</sub> . . . . .	48
5.3	Condições iniciais para sistema Bianchi VII <sub>A</sub> com métrica não-diagonal. . .	64
5.5	Condições iniciais diagonais para Bianchi VII <sub>A</sub> com métrica não-diagonal. .	67

# Lista de Figuras

2.1	a) Carta $(U, \varphi)$ na variedade $M$ associando $U \subset M$ com $x_i \in E^n$ . b) Cartas compatíveis $(U, \varphi)$ e $(U', \varphi')$ em $M$ : $(U \cup U', \varphi' \circ \varphi^{-1})$ . . . . .	14
3.1	a) Hipersuperfícies $\Sigma_t$ folheando o espaço-tempo homogêneo. b) Congruência de curvas tipo-tempo (linhas-mundo) em um espaço-tempo isotrópico. . . . .	31
4.1	Vetor deslocamento e função lapso numa folheação de hipersuperfícies homogêneas $\Sigma_t$ . . . . .	38
5.1	Evolução temporal para o sistema 1 de Bianchi VII <sub>0</sub> (tabela 5.1). . . . .	50
5.2	Índices de Kasner associados com a evolução do sistema 1 de Bianchi VII <sub>0</sub> (tabela 5.1). . . . .	51
5.3	Escalar de Riemann $R^{abcd}R_{abcd}$ , escalar de curvatura $R$ e vínculo $R_{44}$ para o sistema 1 de Bianchi VII <sub>0</sub> (tabela 5.1). . . . .	52
5.4	Evolução temporal para o sistema 2 de Bianchi VII <sub>0</sub> (tabela 5.1). . . . .	53
5.5	Índices de Kasner associados com a evolução do sistema 2 de Bianchi VII <sub>0</sub> (tabela 5.1). . . . .	54
5.6	Escalar de Riemann $R^{abcd}R_{abcd}$ , escalar de curvatura $R$ e vínculo $R_{44}$ para o sistema 2 de Bianchi VII <sub>0</sub> (tabela 5.1). . . . .	55
5.7	Evolução temporal para o sistema 2 de Bianchi VII <sub>0</sub> (tabela 5.1) na região próxima à singularidade. . . . .	56
5.8	Índices de Kasner associados com a evolução do sistema 2 de Bianchi VII <sub>0</sub> (tabela 5.1) na região próxima à singularidade. . . . .	57
5.9	Escalar de Riemann $R^{abcd}R_{abcd}$ para o sistema 2 de Bianchi VII <sub>0</sub> (tabela 5.1) na região de continuidade. . . . .	58
5.10	Escalar de Riemann $R^{abcd}R_{abcd}$ , escalar de curvatura $R$ e vínculo $R_{44}$ para o sistema 2 de Bianchi VII <sub>0</sub> (tabela 5.1) na região próxima à singularidade. . . . .	58
5.11	Evolução temporal para o sistema 3 de Bianchi VII <sub>0</sub> (tabela 5.1). . . . .	60
5.12	Escalar de Riemann $R^{abcd}R_{abcd}$ , escalar de curvatura $R$ e vínculo $R_{44}$ para o sistema 3 de Bianchi VII <sub>0</sub> (tabela 5.1). . . . .	61
5.13	Evolução temporal para o sistema 4 de Bianchi VII <sub>0</sub> (tabela 5.1). . . . .	62

5.14	Escalar de Riemann $R^{abcd}R_{abcd}$ , escalar de curvatura $R$ e vínculo $R_{44}$ para o sistema 4 de Bianchi VII <sub>0</sub> (tabela 5.1). . . . .	63
5.15	Evolução temporal para o sistema de métrica não-diagonal de Bianchi VII <sub>A</sub> (tabela 5.3). . . . .	65
5.16	Escalares e vínculos para o sistema de métrica não-diagonal de Bianchi VII <sub>A</sub> (tabela 5.3). . . . .	66
5.17	Evolução temporal para o sistema 1 de Bianchi VII <sub>A</sub> com condição inicial diagonal (tabela 5.5). . . . .	68
5.18	Escalares e vínculos para o sistema 1 de Bianchi VII <sub>A</sub> com condição inicial diagonal (tabela 5.5). . . . .	69
5.19	Evolução temporal para o sistema 2 de Bianchi VII <sub>A</sub> com condição inicial diagonal (tabela 5.5). . . . .	70
5.20	Escalares e vínculos para o sistema 2 de Bianchi VII <sub>A</sub> com condição inicial diagonal (tabela 5.5). . . . .	71

# Capítulo 1

## Introdução

A Relatividade Geral constitui a teoria básica para o entendimento da dinâmica do nosso universo. Ela pressupõe o nosso espaço-tempo sendo descrito pela geometria diferencial na variedade Riemanniana, cuja relação com a distribuição de matéria e energia é dada pelas equações de campo de Einstein. Assim, a distribuição de matéria e energia no universo determina a sua geometria, que define a gravitação.

A Relatividade Geral resulta em sistemas de equações diferenciais parciais não lineares, que salvo em casos particulares, são de difícil solução. Modelos cosmológicos homogêneos são mais fáceis de tratar, uma vez que suas resoluções resultam em sistemas de equações diferenciais ordinárias. Além disso, modelos cosmológicos homogêneos são os que estão em concordância com as observações atuais do universo.

É possível estabelecer um formalismo tetrádico da geometria diferencial, definindo um espaço em termos de bases gerais, que podem ser escritas em relação à base coordenada. As bases deste espaço são determinadas pelos grupos de isometria e pela relação de comutação definida pela álgebra de Lie desses grupos.

A classificação das possíveis álgebras de Lie de três dimensões e sua utilização na descrição de espaço homogêneos foi feita pela primeira vez por Luigi Bianchi, em 1898 [1]. Bianchi descobriu que se tratam de nove espaços homogêneos de três dimensões, sendo o tensor de Riemann constante numa base apropriada. Um espaço-tempo com seção espacial homogênea, ou seja, uma cosmologia homogênea, pode ser obtido de um produto direto de um desses 3-espaços  $M$  numa variedade pseudo-Riemanniana  $R \times M$ . O tensor de Riemann apresentará necessariamente apenas derivadas temporais na base conveniente da seção homogênea. Neste caso, as equações de Einstein se reduzem a um sistema de equações diferenciais ordinárias e a métrica é uma função do tempo apenas.

Os modelos de Bianchi tipo I, VII e IX são os mais importantes do ponto de vista cosmológico, pois contém em si os modelos de Friedmann plano, aberto e fechado, respectivamente. Modelos homogêneos isotrópicos, tais como Friedmann, constituem o foco das atenções na descrição do universo atual. Porém, nas condições do universo próximo a seu surgimento, modelos anisotrópicos como as cosmologias de Bianchi adquirem maior

importância [2].

Neste trabalho apresentaremos o formalismo tetrádico da geometria diferencial e o formalismo de grupos de Lie referidos [3]. Também mostraremos a classificação das álgebras de Lie dadas por Bianchi. De posse dessas ferramentas, obteremos as equações de campo para soluções de vácuo dos tipo Bianchi I, VII e IX. Soluções de vácuo são as mais naturais para descrever o universo próximo ao seu surgimento, pois acredita-se que a influência de outros campos seja desprezível.

O objetivo deste trabalho é resolver numericamente as equações de campo das soluções de vácuo dos universos homogêneos de Bianchi, e verificar como ocorre a evolução do espaço-tempo descrito. O uso de métodos numéricos se faz útil uma vez que praticamente todas as soluções conhecidas de Bianchi são casos particulares, e a obtenção de soluções mais gerais pode ser viabilizada por estudos numéricos.

O presente trabalho não pretende esgotar todas as soluções possíveis, mas sim concentra-se nas soluções de Bianchi VII, pelo fato de conter o espaço hiperbólico e também de ser o caso menos estudado na literatura.

## Notação de Índices e Convenções

Como convenção de notação, usamos algarismos latinos da primeira metade do alfabeto ( $a, b, \dots, g, h$ ) para representar índices de tensores em bases gerais. Para representação em bases coordenadas, usamos algarismos latinos da segunda metade do alfabeto ( $i, j, \dots, n, o$ ). Nas notações acima, os índices correm de 1 a  $n$ , onde  $n$  é a dimensão do espaço. Para índices varrendo apenas a parte espacial do tensor, usamos algarismos gregos ( $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ) como índices.

Tensores e bases são representados em negrito:  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\partial}_i$ ,  $\mathbf{d}x^j$ ,  $\mathbf{e}_a$ ,  $\boldsymbol{\omega}^b$ .

As derivadas parciais são representadas pela usual vírgula para derivação na base coordenada,  $\frac{\partial}{\partial x^i} f \equiv f_{,i}$ ; derivadas parciais em relação a outras bases (*derivadas projetadas*) utilizam uma barra como convenção de notação,  $f_{|a}$ . Derivadas covariantes são representadas pelo usual ponto-e-vírgula, diferenciando base coordenada e base geral pelos índices e pela vírgula ou barra na parte parcial da derivada,  $T^i_{j;k} = T^i_{j,k} + \dots$ ,  $T^a_{b;c} = T^a_{b|c} + \dots$

A métrica do espaço-tempo é definida pela assinatura  $(+++-)$ , onde o sinal negativo está associado à parte temporal. Similarmente, na notação de tensores do espaço-tempo, o último valor do índice expressa o termo temporal, como em  $\mathbf{v} = (v^\alpha, v^4)$ , em que  $v^\alpha = (v^1, v^2, v^3)$  e  $v^4$  é a componente relacionada ao tempo.

Utilizamos o sistema de unidades geometrizadas ( $c = G = 1$ ), onde o tempo tem unidade de medida de comprimento, que será omitido no texto. O fator de expansão  $a(t)$  é adimensional.

## Capítulo 2

# Geometria Diferencial e Formalismo Tetrádico

Os tensores compõem os objetos básicos da geometria diferencial com os quais relacionamos as grandezas físicas da Relatividade Geral. No âmbito deste trabalho, eles são enfocados na representação de bases gerais de vetores e 1-formas, relacionados à coordenadas móveis (*formalismo tetrádico*), o que difere da literatura padrão, onde são representados na base coordenada. Coeficientes de comutação, de conexão e derivada covariante são definidos a fim de incluir estrutura à geometria, com ênfase na obtenção da curvatura.

Para englobar o conceito de espaço-tempo da Relatividade Geral, endossamos a geometria Riemanniana por meio da inclusão da métrica e da condição de metricidade. Estas possibilitam determinarmos unicamente toda a estrutura dos elementos que compõem o espaço-tempo, desde a transformação entre vetores e 1-formas até o tensor de Riemann.

### 2.1 Variedades Diferenciáveis

A *variedade Riemanniana* é a estrutura básica que caracteriza a configuração geométrica do espaço. Uma variedade  $n$ -dimensional é um espaço (ou conjunto)  $M$  contendo pontos  $p \in M$  com vizinhanças  $U \subset M$  e possuindo mapeamentos no espaço euclidiano  $E^n$ .

Uma *carta*  $(U, \varphi)$  em  $M$  é um subconjunto de  $U \subset M$  que possui um mapeamento  $\varphi$  (um-para-um) associando  $U$  com um espaço euclidiano  $E^n$  (ou com um subconjunto de  $E^n$ ). Assim,  $\varphi$  associa a cada ponto  $p \in U$  uma  $n$ -upla de coordenadas locais  $(x^1, \dots, x^n) \in E^n$  (figura 2.1a).

Se duas cartas  $(U, \varphi)$  e  $(U', \varphi')$  formam um mapeamento combinado  $\varphi' \circ \varphi^{-1}$  (contínuo, um-para-um e de inverso contínuo) da sobreposição  $U \cup U'$  das vizinhanças  $U$  e  $U'$  levando no espaço  $E^n$ , então estas cartas são ditas *compatíveis* (figura 2.1b).

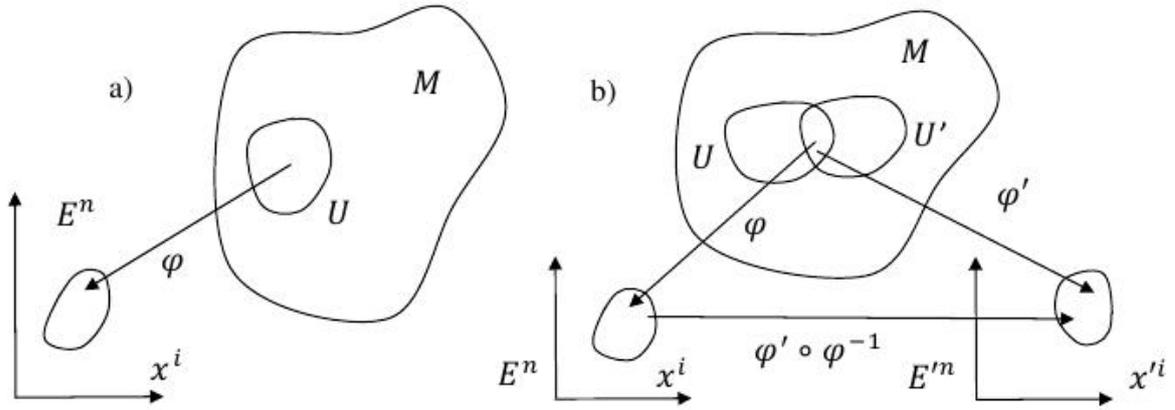


Figura 2.1: a) Carta  $(U, \varphi)$  na variedade  $M$  associando  $U \subset M$  com  $x_i \in E^n$ . b) Cartas compatíveis  $(U, \varphi)$  e  $(U', \varphi')$  em  $M$ :  $(U \cup U', \varphi' \circ \varphi^{-1})$ .

Um *atlas* sobre  $M$  é definido como o conjunto de cartas compatíveis  $(U_a, \varphi_a)$  tal que cada ponto  $p \in M$  localiza-se em pelos menos uma vizinhança  $U_a$  das cartas compatíveis.

Se o mapeamento compatível  $\varphi' \circ \varphi^{-1}$  para diferentes cartas é, além de contínuo, também diferenciável, então a variedade é diferenciável. Neste caso, para cada ponto  $p$  na sobreposição do atlas, podemos relacionar as transformações de coordenadas de  $E^n$  para  $E^m$ :

$$\begin{aligned} x'^i &= x'^i(x^j), \\ \det(J) &= \det(\partial x'^i / \partial x^j) \neq 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Uma curva suave  $\gamma(t)$  em  $M$  é definida com um mapeamento diferenciável de um intervalo da linha dos reais sobre  $M$ , ou seja,

$$\gamma(t) : -\varepsilon < t < \varepsilon \rightarrow M, \quad (2.2)$$

onde  $t \in R$  é o parâmetro da curva.

## 2.2 Vetores Tangentes

A generalização de vetor em  $E^n$  para uma variedade  $M$  é feita por meio do conceito de *vetor tangente*. Um vetor tangente  $\mathbf{v}$  em um ponto  $p$  da variedade  $M$  é um operador funcional linear que associa para cada função diferenciável  $f$  sobre  $M$  um número real  $\mathbf{v}(f)$ . Este operador segue as propriedades de linearidade e da regra do produto:

$$\begin{aligned} i) \mathbf{v}(cf + dh) &= c\mathbf{v}(f) + d\mathbf{v}(h), \\ ii) \mathbf{v}(fh) &= \mathbf{v}(f)h + f\mathbf{v}(h), \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde  $c$  e  $d$  são constantes ( $\mathbf{v}(c) = \mathbf{v}(d) = 0$ ) e  $f$  e  $h$  são funções diferenciáveis em  $M$ .

A aplicação  $\mathbf{v}(f)$  representa uma *derivada direcional* de  $f$  ao longo da curva  $\gamma(t)$  sobre

$M$  passando em  $p$ , de modo que podemos expandir o vetor tangente  $\mathbf{v}$  como

$$\mathbf{v} = v^i \boldsymbol{\partial}_i, \quad (2.4)$$

onde  $v^i$  são as componentes de  $\mathbf{v}$  em  $p$  com respeito ao sistema de coordenadas locais  $(x^1, \dots, x^n)$  e  $\boldsymbol{\partial}_i \equiv \boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial}x^i$  é a *base coordenada* ou *frame holonômico*. Aqui  $\mathbf{v}$  atua como um operador derivativo, que define a derivada direcional na direção de  $\mathbf{v}$ . O espaço vetorial  $n$ -dimensional formado pelos vetores  $\mathbf{v}$  e cuja base é  $\boldsymbol{\partial}_i$  chama-se *espaço tangente*  $T_p$ .

A definição (2.3) é independente de escolha de coordenadas. Podemos ter uma *base geral*  $\{\mathbf{e}_a\}$  formada por  $n$  vetores  $\mathbf{e}_a$  linearmente independentes de modo que qualquer vetor  $\mathbf{v} \in T_p$  pode ser escrito como uma combinação linear dessa base:

$$\mathbf{v} = v^a \mathbf{e}_a. \quad (2.5)$$

Os vetores da base  $\{\mathbf{e}_a\}$  são também vetores do espaço vetorial, ou seja, operadores derivativos cuja atuação sobre uma função  $f$  é denotada  $\mathbf{e}_a(f) \equiv f_{|a}$  (que significa a derivada direcional de  $f$  na direção da própria base  $\mathbf{e}_a$ ). No caso particular de  $\mathbf{e}_a$  ser a própria base coordenada  $\boldsymbol{\partial}_i$ , usamos uma vírgula ao invés da barra como convenção de notação, e temos  $\boldsymbol{\partial}_i(f) \equiv f_{,i}$ . Temos então a generalização da expansão de vetores e da derivada direcional,

$$\mathbf{v} = v^a \mathbf{e}_a \rightarrow \mathbf{v}(f) = v^a \mathbf{e}_a(f) = v^a f_{|a}, \quad (2.6)$$

e

$$\mathbf{v} = v^i \boldsymbol{\partial}_i \rightarrow \mathbf{v}(f) = v^i \boldsymbol{\partial}_i(f) = v^i f_{,i}, \quad (2.7)$$

sendo (2.6) para uma base geral e (2.7) para uma base coordenada.

A base geral  $\{\mathbf{e}_a\}$  pode ser expandida em termos de outra base  $\{\mathbf{h}_b\}$ , com em  $\mathbf{e}_a = e_a^b \mathbf{h}_b$ , ou mesmo na base coordenada (e o contrário), como em  $\mathbf{e}_a = e_a^i \boldsymbol{\partial}_i$ . Neste último caso, operações de derivada na base geral podem ser escritas como  $f_{|a} = f_{,i} e_a^i$ , envolvendo derivadas usuais na base coordenada.

O conjunto dos espaços tangentes  $T_p$  sobre pontos  $p$ 's na variedade forma um *espaço tangente total*  $T(M)$  de  $M$ . Podemos entender como *campo vetorial*  $\mathbf{v}(p)$  sobre  $M$  a associação de cada ponto  $p \in M$  com um vetor tangente  $\mathbf{v} \in T_p$  de modo que as componentes  $v^i$  sejam funções diferenciáveis de coordenadas locais. Assim um campo vetorial é definido como sendo o mapeamento suave  $M \rightarrow T(M)$  tal que cada ponto  $p \rightarrow \mathbf{v}(p)$ , o que é referido como uma seção do espaço tangente total.

Da associação de vetores como operadores derivativos (que definem uma derivada direcional) podemos supor que o resultado da aplicação sucessiva de vetores sobre uma função depende da ordem em que atuam sobre ela. Assim, definimos o *comutador*  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$

de dois vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  como

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}](f) = \mathbf{u}(\mathbf{v}(f)) - \mathbf{v}(\mathbf{u}(f)). \quad (2.8)$$

Para uma base  $\{\mathbf{e}_a\}$  temos

$$[\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b] = D_{ab}^c \mathbf{e}_c, \quad (2.9)$$

onde

$$D_{ab}^c = -D_{ba}^c, \quad (2.10)$$

que define os *coeficientes de comutação*  $D_{ab}^c$ . Para o caso particular da base coordenada,  $[\partial_i, \partial_j] = 0$ , ou seja,  $D_{ab}^c = 0$ . Os comutadores obedecem a *identidade de Jacobi*, ou seja, para quaisquer vetores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ ,

$$[\mathbf{u}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]] + [\mathbf{w}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]] + [\mathbf{v}, [\mathbf{w}, \mathbf{u}]] = 0. \quad (2.11)$$

Se  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  são vetores da base  $\{\mathbf{e}_a\}$ , então teremos

$$D_{bc}^d D_{ad}^f + D_{ca}^d D_{bd}^f + D_{ab}^d D_{cd}^f \equiv D_{[ab}^d D_{c]d}^f = 0. \quad (2.12)$$

## 2.3 1-Formas

A 1-forma  $\alpha$  é um objeto que mapeia um vetor  $\mathbf{v}$  em um número real. A aplicação  $\langle \alpha, \mathbf{v} \rangle$ , ou simplesmente  $\alpha \cdot \mathbf{v}$ , é linear,

$$\alpha \cdot (a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = a(\alpha \cdot \mathbf{u}) + b(\alpha \cdot \mathbf{v}), \quad (2.13)$$

para todo  $a$  e  $b$  reais e  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p$ . A combinação linear de 1-formas é definida por

$$(a\alpha + b\beta) \cdot \mathbf{v} = a(\alpha \cdot \mathbf{v}) + b(\beta \cdot \mathbf{v}), \quad (2.14)$$

para todo  $a$  e  $b$  reais e  $\mathbf{v} \in T_p$ .

Se  $n$  1-formas linearmente independentes mapeiam uma base vetorial  $\{\mathbf{e}_b\}$  do espaço tangente  $T_p$  na identidade  $I$ ,

$$\omega^a \cdot \mathbf{e}_b = \delta_b^a \quad (2.15)$$

(*relação de dualidade*), então essas  $n$  1-formas formam uma base de 1-formas  $\{\omega^a\}$  do espaço cotangente  $T_p^*$ . O espaço cotangente  $T_p^*$  é o *espaço dual* de  $T_p$ , e a base  $\{\omega^a\}$  é a *base dual* de  $\{\mathbf{e}_b\}$ . Qualquer 1-forma pertencente a  $T_p^*$  pode ser escrita como uma combinação linear de sua base  $\{\omega^a\}$ :

$$\alpha = \alpha_a \omega^a. \quad (2.16)$$

Deste modo, expandindo  $\alpha \in T_p^*$  na base  $\{\omega^a\}$  e  $v \in T_p$  na base  $\{e_b\}$ , temos que a aplicação  $\alpha \cdot v$  resulta em um número real

$$\alpha \cdot v = (\alpha_a \omega^a) \cdot (v = v^b e_b) = \alpha_a v^b (\omega^a \cdot e_b) = \alpha_a v^b \delta_b^a = \alpha_a v^a. \quad (2.17)$$

Podemos investigar a base dual da base coordenada  $\{\partial_i\}$  observando que a *diferencial*  $df$  de uma função  $f$  é uma 1-forma definida pela propriedade

$$df \cdot v = v(f) = v^a f_{|a}. \quad (2.18)$$

Sendo  $f$  a própria coordenada local,  $f = x^i$ , e  $v$  a própria base coordenada,  $v = \partial_j$ , temos que

$$dx^i \cdot \partial_j = x^i_{,j} = \delta_j^i, \quad (2.19)$$

que é a relação de dualidade (para a base coordenada) que define base de 1-formas. Então temos que  $dx^i \in T_p^*$  é a base de 1-formas dual da base coordenada  $\{\partial_i\}$ , e resumindo podemos escrever a diferencial de funções como

$$\alpha = \alpha_a \omega^a \rightarrow df = f_{|a} \omega^a \quad (2.20)$$

e

$$\alpha = \alpha_i dx^i \rightarrow df = f_{,i} dx^i, \quad (2.21)$$

sendo (2.20) para a base geral de 1-formas e (2.21) para a base coordenada de 1-formas.

Analogamente ao caso da base vetorial, a base geral de 1-formas pode ser expandida em termos de outra base como  $\omega^a = \omega_b^a \sigma^b$ , ou da base coordenada de 1-formas, como em  $\omega^a = \omega_i^a dx^i$ , e vice-versa. Para expansões na base coordenada e sua dual, obtemos a partir de (2.15) e (2.19) que

$$\omega_i^a e_b^i = \delta_b^a \quad (2.22)$$

e

$$\omega_i^a e_a^j = \delta_i^j. \quad (2.23)$$

O conjunto de espaços cotangentes definidos nos pontos  $p$ 's da variedade  $M$  forma um *espaço cotangente total*  $T^*(M)$  de  $M$ . Analogamente ao caso de vetores, podemos entender como *campo de 1-formas*  $\alpha(p)$  a associação de cada ponto  $p \in M$  com uma 1-forma  $\alpha \in T_p^*$ , onde as componentes  $\alpha_i$  são funções diferenciáveis das coordenadas locais.

## 2.4 $P$ -Formas, Produto e Derivada Exterior

Vamos definir a operação algébrica

$$\boldsymbol{\alpha}^1 \wedge \boldsymbol{\alpha}^2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\alpha}^p \quad (2.24)$$

entre  $p$  1-formas  $\boldsymbol{\alpha}^1, \boldsymbol{\alpha}^2, \dots, \boldsymbol{\alpha}^p$  de modo que i) seja linear em cada variável e ii) anule-se para qualquer dois fatores coincidentes. Esta operação é chamada *produto exterior* e segue de i) e ii) que  $\boldsymbol{\alpha}^1 \wedge \boldsymbol{\alpha}^2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\alpha}^p$  é completamente anti-simétrico.

Da base  $n$ -dimensional de 1-formas  $\{\boldsymbol{\omega}^a\} = \boldsymbol{\omega}^1, \boldsymbol{\omega}^2, \dots, \boldsymbol{\omega}^n$  podemos obter  $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$  objetos independentes

$$\boldsymbol{\omega}^{a_1} \wedge \boldsymbol{\omega}^{a_2} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\omega}^{a_p}, \quad (2.25)$$

onde  $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_p \leq n$  e  $p \leq n$ . Estes objetos são chamados  *$p$ -formas* na base de 1-formas. No caso de  $p > n$  haverá termos repetidos em (2.25), que se anulará conforme ii).

Podemos obter uma  $p$ -forma geral  $\boldsymbol{\alpha}_{(p)}$  como uma combinação linear da  $p$ -forma (2.25):

$$\boldsymbol{\alpha}_{(p)} = \alpha_{a_1 \dots a_p} \boldsymbol{\omega}^{a_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\omega}^{a_p}, \quad (2.26)$$

onde os índices  $a_1, \dots, a_p$  correm de 1 a  $n$  e não necessariamente precisam obedecer a restrição  $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_p \leq n$ . Para o caso particular da base coordenada, temos

$$\boldsymbol{\alpha}_{(p)} = \alpha_{i_1 \dots i_p} \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_p}. \quad (2.27)$$

A relação de comutatividade entre  $p$ -formas é dada por

$$\boldsymbol{\alpha}_{(p)} \wedge \boldsymbol{\beta}_{(q)} = (-1)^{pq} \boldsymbol{\beta}_{(q)} \wedge \boldsymbol{\alpha}_{(p)}. \quad (2.28)$$

Vimos anteriormente que a aplicação (contração) de um vetor com uma 1-forma resulta em um número. Analogamente, a contração entre um vetor e uma  $p$ -forma  $\boldsymbol{\alpha}_{(p)}$  resulta em uma  $(p-1)$ -forma  $\boldsymbol{\beta}_{(p-1)}$ :

$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{(p)} = \boldsymbol{\beta}_{(p-1)}. \quad (2.29)$$

Em (2.18), (2.20) e (2.21) definimos a diferencial  $df$  com o operador  $d$  atuando em uma função  $f$  ( $0$ -forma) e gerando uma 1-forma. Podemos generalizar este conceito e definir a *derivada exterior*: um operador derivada exterior  $d$  mapeia uma  $p$ -forma em uma  $(p+1)$ -forma, obedecendo os seguintes axiomas:

$$d(\boldsymbol{\alpha}_{(p)} + \boldsymbol{\beta}_{(q)}) = d\boldsymbol{\alpha}_{(p)} + d\boldsymbol{\beta}_{(q)}, \quad (2.30)$$

$$d(\boldsymbol{\alpha}_{(p)} \wedge \boldsymbol{\beta}_{(q)}) = d\boldsymbol{\alpha}_{(p)} \wedge \boldsymbol{\beta}_{(q)} + (-1)^p \wedge d\boldsymbol{\beta}_{(q)}, \quad (2.31)$$

$$d\boldsymbol{f} = f_{|a}\boldsymbol{\omega}^a, \boldsymbol{d}f = f_{,i}\boldsymbol{d}x^i \quad (2.32)$$

e

$$d(d\boldsymbol{\alpha}) = 0, d(\boldsymbol{d}f) = 0. \quad (2.33)$$

Para uma  $p$ -forma numa base geral de 1-formas, como (2.26), temos

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\alpha}_{(p)} &= d(\alpha_{a_1 \dots a_p} \boldsymbol{\omega}^{a_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\omega}^{a_p}) \\ &= d(\alpha_{a_1 \dots a_p}) \boldsymbol{\omega}^{a_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\omega}^{a_p} + \alpha_{a_1 \dots a_p} d(\boldsymbol{\omega}^{a_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\omega}^{a_p}) \\ &= \alpha_{a_1 \dots a_p | b} \boldsymbol{\omega}^b \wedge \boldsymbol{\omega}^{a_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\omega}^{a_p} + \alpha_{a_1 \dots a_p} d\boldsymbol{\omega}^{a_1} \wedge (\boldsymbol{\omega}^{a_2} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\omega}^{a_p}) - \\ &\quad \alpha_{a_1 \dots a_p} \boldsymbol{\omega}^{a_1} \wedge d(\boldsymbol{\omega}^{a_2} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\omega}^{a_p}) + \dots, \end{aligned} \quad (2.34)$$

o que deduzimos de (2.32) e (2.31). Para o caso da  $p$ -forma estar na base coordenada de 1-formas, como em (2.27), temos que os termos  $d\boldsymbol{\omega}^{a_k}$  em (2.34) tornam-se  $d(\boldsymbol{d}x^{a_k})$ , que são nulos conforme (2.33), logo

$$d\boldsymbol{\alpha}_{(p)} = \alpha_{i_1 \dots i_p, j} \boldsymbol{d}x^j \wedge \boldsymbol{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{d}x^{i_p}. \quad (2.35)$$

## 2.5 Tensores

Seja  $T_p(r, s)$  um espaço formado pelo produto de  $r$  espaços tangentes  $T_p$  e  $s$  espaços cotangentes  $T_p^*$ :

$$T_p(r, s) = T_p \otimes \dots \otimes T_p \otimes T_p^* \otimes \dots \otimes T_p^*. \quad (2.36)$$

O operador  $\otimes$  define um *produto tensorial* e  $T_p(r, s)$  é chamado de *espaço tensorial*. Um elemento do espaço tensorial  $T_p(r, s)$  é um *tensor*  $\boldsymbol{T}$  de *tipo*  $(r, s)$  e *ordem* ou *rank*  $(r + s)$ .

Um tensor  $\boldsymbol{T}$  de tipo  $(r, s)$  mapeia qualquer conjunto ordenado  $(\boldsymbol{\alpha}^1, \dots, \boldsymbol{\alpha}^r; \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_s)$  de  $r$  1-formas e  $s$  vetores em um número real. Assim, em termos das bases  $\{\boldsymbol{e}_a\}$  e  $\{\boldsymbol{\omega}^b\}$  podemos escrever

$$\boldsymbol{T} = T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} \boldsymbol{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{e}_{a_r} \otimes \boldsymbol{\omega}^{b_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\omega}^{b_s}, \quad (2.37)$$

onde os coeficientes  $T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s}$  são chamados *componentes* de  $T$  nas bases  $\{\boldsymbol{e}_a\}$  e  $\{\boldsymbol{\omega}^b\}$ . Usualmente, na literatura padrão, a componente de tensor  $T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s}$  é chamada simplesmente tensor. Os índices  $a_1 \dots a_r$  são chamados *contravariantes* e  $b_1 \dots b_s$  são ditos *covariantes* (ambos correm de 1 a  $n$ ). Se usarmos a base coordenada e sua dual, temos

$$\boldsymbol{T} = T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \boldsymbol{\partial}_{i_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\partial}_{i_r} \otimes \boldsymbol{d}x^{j_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{d}x^{j_s}. \quad (2.38)$$

Podemos operar as transformações entre bases como em

$$\mathbf{e}'_a = L_a^b \mathbf{e}_b, \quad (2.39)$$

$$\boldsymbol{\omega}'^a = L_b^a \boldsymbol{\omega}^b \quad (2.40)$$

e assim

$$L_b^a L_a^c = \delta_b^c, \quad (2.41)$$

onde  $L_a^b$  (e  $L_b^a$ ) são as matrizes de transformação de ordem  $(n \times n)$ . Deste modo, as componentes de  $\mathbf{T}$  obedecem a seguinte lei de transformação:

$$T^{c_1 \dots c_r}_{d_1 \dots d_s} = L_{a_1}^{c_1} \dots L_{a_r}^{c_r} L_{d_1}^{b_1} \dots L_{d_s}^{b_s} T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s}. \quad (2.42)$$

Para o caso particular de transformação da base coordenada e sua dual temos que  $L_a^a = \partial x^a / \partial x^{a'}$  e  $L_a^{a'} = \partial x^{a'} / \partial x^a$ , logo

$$\partial_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \partial_i \quad (2.43)$$

e

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} dx^i. \quad (2.44)$$

Analogamente ao caso de vetores e 1-formas, podemos entender como *campo tensorial*  $\mathbf{T}(p)$  a associação de cada ponto  $p \in M$  com um tensor  $\mathbf{T} \in T_p(r, s)$ , onde as componentes de  $\mathbf{T}$  são diferenciáveis nas coordenadas locais.

Fica claro, pela definição de tensores, que vetores, formas e funções são caso particulares de tensores. Uma função  $f$  sobre  $M$  é um tensor de tipo  $(0, 0)$ ; um vetor  $\mathbf{v} = v^a \mathbf{e}_a$  é um tensor de tipo  $(1, 0)$ ; e uma 1-forma  $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_a \boldsymbol{\omega}^a$  é um tensor de tipo  $(0, 1)$ . O produto exterior  $\wedge$  nada mais é do que uma anti-simetrização do produto tensorial  $\otimes$ , e portanto  $p$ -formas são tensores covariantes anti-simétricos de ordem  $p$  (tipo  $(0, p)$ ).

## 2.6 Derivada de Lie

A *derivada de Lie* (em relação a um vetor  $\mathbf{v}$ ) mapeia um tensor  $\mathbf{T}$  de tipo  $(r, s)$  em outro tensor de mesmo tipo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{T} &= \mathcal{L}_{\mathbf{v}} (T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} \mathbf{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{a_r} \otimes \boldsymbol{\omega}^{b_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\omega}^{b_s}) \\ &= \mathcal{L}_{\mathbf{v}} (T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s}) \mathbf{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{a_r} \otimes \boldsymbol{\omega}^{b_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\omega}^{b_s} + \\ &\quad T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} \mathcal{L}_{\mathbf{v}} (\mathbf{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{a_r} \otimes \boldsymbol{\omega}^{b_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\omega}^{b_s}), \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde a derivada de Lie da componente é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{v}} (T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s}) &= T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s | c} v^c - T^{d \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} v^d_{|c} - \dots - \\ &= T^{a_1 \dots f}_{b_1 \dots b_s} v^a_r + T^{a_1 \dots a_r}_{g \dots b_s} v^g_{|b_1} + \dots + T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots h} v^h_{|b_s}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

A derivada de Lie da base coordenada é nula, logo, a derivada de Lie de um tensor  $\mathbf{T}$  expandido na base coordenada é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v \mathbf{T} = & (T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s, k} v^k - T^{l \dots i_r}_{j_1 \dots j_s, l} v^{i_1} - \dots - T^{i_1 \dots m}_{j_1 \dots j_s, m} v^{i_r} + \\ & T^{i_1 \dots i_r}_{n \dots j_s, j_1} v^n + \dots + T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots o, j_s} v^n) \boldsymbol{\partial}_{i_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\partial}_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Para uma função  $f$ , a derivada de Lie resulta em

$$\mathcal{L}_v f = v^a f_{|a}, \quad (2.48)$$

que coincide com a derivada direcional  $\mathbf{v}(f) = v^a \mathbf{e}_a(f)$ . Para a base coordenada temos  $\mathcal{L}_v f = v^i f_{,i}$ .

No caso de vetores, a derivada de Lie de  $\mathbf{u}$  em relação a  $\mathbf{v}$  é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v \mathbf{u} = \mathcal{L}_v(u^a \mathbf{e}_a) &= \mathcal{L}_v(u^a) \mathbf{e}_a + u^a \mathcal{L}_v \mathbf{e}_a \\ &= (u^a_{|b} v^b - u^b v^a_{|b}) \mathbf{e}_a - u^a v^b D^c_{ab} \mathbf{e}_c, \end{aligned} \quad (2.49)$$

que é igual ao comutador  $[\mathbf{v}, \mathbf{u}] = v^a \mathbf{e}_a(u^b \mathbf{e}_b) - u^a \mathbf{e}_a(v^b \mathbf{e}_b)$ . Para a base coordenada  $\{\boldsymbol{\partial}_i\}$ , conforme mencionamos antes, a derivada de Lie é nula,  $\mathcal{L}_v \boldsymbol{\partial}_i = v^j D^k_{ij} \mathbf{e}_k = 0$  (uma vez que o coeficiente de comutação é nulo para a base coordenada), e temos então  $\mathcal{L}_v \mathbf{u} = (u^i_{,j} v^j - u^j v^i_{,j}) \boldsymbol{\partial}_i$ .

Para 1-formas, a derivada de Lie de  $\boldsymbol{\alpha}$  em relação a  $\mathbf{v}$  é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v \boldsymbol{\alpha} = \mathcal{L}_v(\alpha_a \boldsymbol{\omega}^a) &= \mathcal{L}_v(\alpha_a) \boldsymbol{\omega}^a + \alpha_a \mathcal{L}_v \boldsymbol{\omega}^a \\ &= (\alpha_{a|b} v^b + \alpha_b v^b_{|a}) \boldsymbol{\omega}^a + \alpha_a v^b D^a_{cb} \boldsymbol{\omega}^c, \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde obtemos a derivada de Lie da base  $\{\boldsymbol{\omega}^a\}$  por meio de  $\mathcal{L}_v(\mathbf{e}_a \cdot \boldsymbol{\omega}^b) = \mathcal{L}_v(\mathbf{e}_a) \cdot \boldsymbol{\omega}^b + \mathbf{e}_a \cdot \mathcal{L}_v(\boldsymbol{\omega}^b) = \mathcal{L}_v(\delta_a^b) = 0$ . Para a base coordenada,  $\mathcal{L}_v dx^i = 0$ , e então  $\mathcal{L}_v \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{i,j} v^j + \alpha_j v^j_{,i}) dx^i$ . A derivada de Lie de uma 1-forma comuta com a derivada exterior,

$$\mathcal{L}_v(d\boldsymbol{\alpha}) = d(\mathcal{L}_v \boldsymbol{\alpha}).$$

A derivada de Lie executa um importante papel na definição de isometrias de grupo, conforme veremos no capítulo 3.

## 2.7 Derivada Covariante

A *derivada covariante*  $\nabla$  mapeia um tensor de tipo  $(r, s)$  em um outro tensor de tipo  $(r, s + 1)$ ; a *derivada covariante direcional*  $\nabla_v$  (na direção do vetor  $\mathbf{v}$ ) mapeia um tensor

de tipo  $(r, s)$  em outro tensor de mesmo tipo:

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{T} &= \nabla (T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} \mathbf{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{a_r} \otimes \boldsymbol{\omega}^{b_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\omega}^{b_s}) \\ &= T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s; c} \mathbf{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{a_r} \otimes \boldsymbol{\omega}^{b_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\omega}^{b_s} \otimes \boldsymbol{\omega}^c\end{aligned}\quad (2.51)$$

e

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{T} &= \nabla_{\mathbf{v}} (T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} \mathbf{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{a_r} \otimes \boldsymbol{\omega}^{b_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\omega}^{b_s}) \\ &= T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s; c} v^c \mathbf{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{a_r} \otimes \boldsymbol{\omega}^{b_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\omega}^{b_s},\end{aligned}\quad (2.52)$$

onde o coeficiente  $T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s; c}$  não foi definido ainda. Sendo assim, para o caso particular de um vetor  $\mathbf{u}$ , temos  $\nabla \mathbf{u} = u^a_{;b} \mathbf{e}_a \otimes \boldsymbol{\omega}^b$  e  $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = u^a_{;b} v^b \mathbf{e}_a$ .

A derivada covariante da base vetorial  $\{\mathbf{e}_a\}$  em relação a própria base ( $\nabla_{\mathbf{e}_b} \mathbf{e}_a$ , simpli- ficadamente denotada  $\nabla_b \mathbf{e}_a$ ) pode ser escrita como uma expansão na base vetorial, como em

$$\nabla_b \mathbf{e}_a = \Gamma^c_{ab} \mathbf{e}_c, \quad (2.53)$$

onde os coeficientes  $\Gamma^c_{ab}$ , chamados *coeficientes de conexão*, podem ser obtidos aplicando- se  $\boldsymbol{\omega}^d$  em ambos os lados de (2.53), resultando em

$$\Gamma^c_{ab} = \boldsymbol{\omega}^c \nabla_b \mathbf{e}_a. \quad (2.54)$$

Por compatibilidade com a relação de dualidade entre bases (2.15), podemos calcular  $\nabla_b(\boldsymbol{\omega}^a \mathbf{e}_c) = \nabla_b(\delta^a_c) = 0$ , e usando a regra do produto e (2.53), obtemos

$$\nabla_b \boldsymbol{\omega}^a = -\Gamma^a_{cb} \boldsymbol{\omega}^c, \quad (2.55)$$

mostrando que derivada covariante de uma base de 1-formas  $\{\boldsymbol{\omega}^a\}$  em relação a base vetorial  $\{\mathbf{e}_b\}$ , analogamente ao caso de vetores, pode ser escrita como uma expansão na própria base.

A fim de definir o coeficiente  $T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s; c}$  em (2.51) e (2.52), podemos restringir a derivada covariante para obedecer a relação

$$\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u} - \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = [\mathbf{v}, \mathbf{u}], \quad (2.56)$$

que para  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_a$  e  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_b$ , e usando (2.53) e (2.9), leva em

$$\Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba} \equiv 2\Gamma^c_{[ab]} = -D^c_{ab}. \quad (2.57)$$

Agora, resolvendo (2.56) para  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  gerais, e usando (2.57), temos que

$$u^a_{;c} = u^a_{|c} + \Gamma^a_{bc} u^b. \quad (2.58)$$

A generalização desta construção permite obter a derivada covariante da componente

de um tensor geral qualquer:

$$T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s; c} = T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s | c} + \Gamma_{dc}^{a_1} T^{d \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} + \dots + \Gamma_{fc}^{a_r} T^{a_1 \dots f}_{b_1 \dots b_s} - \Gamma_{b_1 c}^g T^{a_1 \dots a_r}_{g \dots b_s} - \dots - \Gamma_{b_s c}^h T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots h}. \quad (2.59)$$

Por convenção de notação,  $T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s; c} \equiv \nabla_c T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s}$ .

A derivada covariante se relaciona com o *transporte paralelo*, ou seja, se  $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{T} = 0$ , então  $\mathbf{T}$  é paralelamente transportado ao longo da curva cujo vetor tangente é  $\mathbf{v}$ .

## 2.8 Tensor Curvatura de Riemann

Podemos expandir as bases  $\{\mathbf{e}_a\}$  e  $\{\boldsymbol{\omega}^a\}$  em termos da base coordenada,  $\mathbf{e}_a = e_a^i \boldsymbol{\partial}_i$  e  $\boldsymbol{\omega}^a = \omega^a_i \mathbf{d}x^i$ , e reescrever (2.54) como

$$\Gamma_{bc}^a = e_b^i{}_{;j} \omega_i^a e_c^j = -\omega_{i;j}^a e_b^i e_c^j, \quad (2.60)$$

que são conhecidos como *coeficientes de rotação de Ricci*.

A derivada exterior de  $\{\boldsymbol{\omega}^a\}$  expressa na base coordenada é

$$d\boldsymbol{\omega}^a = \omega_{i;j}^a \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j. \quad (2.61)$$

Fazendo as substituições  $(, \rightarrow ;)$  e  $\mathbf{d}x^i = \omega_j^a e_a^i \mathbf{d}x^j$ , e usando (2.60), temos

$$d\boldsymbol{\omega}^a = \Gamma_{bc}^a \boldsymbol{\omega}^b \wedge \boldsymbol{\omega}^c, \quad (2.62)$$

ou ainda, usando  $2d\boldsymbol{\omega}^a$  e (2.57),

$$d\boldsymbol{\omega}^a = -\frac{1}{2} D_{bc}^a \boldsymbol{\omega}^b \wedge \boldsymbol{\omega}^c. \quad (2.63)$$

Agora, definimos a *conexão 1-forma*

$$\Gamma_b^a \equiv \Gamma_{bc}^a \boldsymbol{\omega}^c \quad (2.64)$$

de maneira que podemos escrever

$$d\boldsymbol{\omega}^a = -\Gamma_b^a \wedge \boldsymbol{\omega}^b \quad (2.65)$$

(*primeira equação de Cartan*).

O *tensor curvatura (tensor de Riemann)* é um tensor de tipo (1,3),  $\mathbf{R} = R_{bcd}^a \mathbf{e}_a \otimes \boldsymbol{\omega}^b \otimes \boldsymbol{\omega}^c \otimes \boldsymbol{\omega}^d$ , mapeando um conjunto ordenado  $(\boldsymbol{\alpha}; \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  da 1-forma  $\boldsymbol{\alpha}$  e dos vetores

$\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  em um número real

$$\begin{aligned} R^a_{bcd}\alpha_a u^b v^c w^d &= \boldsymbol{\alpha} \cdot [(\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{v}} - \nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{u}} - \nabla_{[\mathbf{u},\mathbf{v}]})\mathbf{w}] \\ &= \alpha_a (w^a_{;cd} - w^a_{;dc})v^c u^d, \end{aligned} \quad (2.66)$$

onde  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = (u^a v^b_{;a} - v^a u^b_{;a})\mathbf{e}_b$ . Devido à arbitrariedade de escolha das componentes  $\alpha_a$ ,  $u^b$  e  $v^c$ , supomos a *identidade de Ricci*

$$w^a_{;cd} - w^a_{;dc} = w^b R^a_{bcd}, \quad (2.67)$$

e usando (2.59) obtemos

$$R^a_{bcd} = \Gamma^a_{bd|c} - \Gamma^a_{bc|d} + \Gamma^a_{fc}\Gamma^f_{bd} - \Gamma^a_{fd}\Gamma^f_{bc} - D^f_{cd}\Gamma^a_{bf}. \quad (2.68)$$

O tensor de Riemann satisfaz as seguintes relações de simetria:

$$R^a_{bcd} = -R^a_{bdc}, \quad (2.69)$$

$$R^a_{bcd} + R^a_{cdb} + R^a_{dbc} \equiv R^a_{[bcd]} = 0, \quad (2.70)$$

$$R^a_{bcd;f} + R^a_{bdf;c} + R^a_{bfc;d} \equiv R^a_{b[cd;f]} = 0, \quad (2.71)$$

onde (2.71) é conhecida como *identidade de Bianchi*. Sua forma na base coordenada é dada por  $\mathbf{R} = R^i_{jkl}\boldsymbol{\partial}_i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l$ .

A fim de obter uma maneira facilitada de calcular as componentes de (2.68) definimos a *curvatura 2-forma*

$$\Theta^a_b \equiv \frac{1}{2}R^a_{bcd}\boldsymbol{\omega}^c \wedge \boldsymbol{\omega}^d, \quad (2.72)$$

que por simples substituição equivale a

$$\Theta^a_b = d\Gamma^a_b + \Gamma^a_c \wedge \Gamma^c_b. \quad (2.73)$$

A equação (2.73) é referida como *segunda equação de Cartan* e fornece um método de obtenção da curvatura diretamente a partir da conexão.

## 2.9 Tensor Métrico

O *tensor métrico* (também chamado *elemento de linha*) é um tensor de tipo (0,2),  $\mathbf{g} = g_{ab}\boldsymbol{\omega}^a \otimes \boldsymbol{\omega}^b$ , associando (linearmente) para cada dois vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  do espaço tangente  $T_p$  um número chamado *produto escalar* ou *produto interno*:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u^a \mathbf{e}_a) \cdot (v^b \mathbf{e}_b) = g_{ab}u^a v^b, \quad (2.74)$$

onde identificamos a *métrica*

$$g_{ab} = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b. \quad (2.75)$$

Se  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ , então os vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são ditos *ortogonais*. Se  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$ ,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} < 0$  ou  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ , então o vetor não nulo  $\mathbf{u}$  é chamado vetor *tipo-espaço*, *tipo-tempo* ou *nulo*, respectivamente.

Poderíamos alternativamente definir um tensor métrico inverso,  $\mathbf{g}^{-1} = g^{ab} \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b$ , com  $g^{ab} = \boldsymbol{\omega}^a \cdot \boldsymbol{\omega}^b$ , mapeando duas 1-formas  $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\boldsymbol{\beta}$  do espaço cotangente  $T_p^*$  em um número  $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = (\alpha_a \boldsymbol{\omega}^a) \cdot (\beta_b \boldsymbol{\omega}^b) = g^{ab} \alpha_a \beta_b$ . Do mapeamento  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}$  verificamos que

$$g_{ab} g^{bc} = \delta_a^c. \quad (2.76)$$

Temos assim definido a componente contravariante  $g^{ab}$ , inverso de  $g_{ab}$ , e podemos efetuar operações de abaixamento e levantamento de índices de tensores,

$$g_{ca_i} T^{a_1 \dots a_i \dots a_r}{}_{b_1 \dots b_j \dots b_s} = T^{a_1 \dots a_{i-1} \quad c \quad a_{i+1} \dots a_r}{}_{b_1 \dots b_j \dots b_s} \quad (2.77)$$

e

$$g^{cb_j} T^{a_1 \dots a_i \dots a_r}{}_{b_1 \dots b_j \dots b_s} = T^{a_1 \dots a_i \dots a_r}{}_{b_1 \dots b_{j-1} \quad c \quad b_{j+1} \dots b_s} \quad (2.78)$$

conectando os elementos dos espaços tangentes  $T_p$  e cotangentes  $T_p^*$ .

Denominamos *condição de metricidade* a imposição

$$\nabla \mathbf{g} = 0 \quad (2.79)$$

que implica em

$$g_{ab;c} = g_{ab|c} - \Gamma_{ac}^f g_{fb} - \Gamma_{bc}^h g_{ah} = 0, \quad (2.80)$$

ou ainda, usando  $\Gamma_{abc} = g_{da} \Gamma_{bc}^d$  e  $2\Gamma_{(ab)c} \equiv \Gamma_{abc} + \Gamma_{bac}$ ,

$$g_{ab|c} = 2\Gamma_{(ab)c}. \quad (2.81)$$

Assim, determinamos unicamente os coeficientes de conexão (2.54) em termos da métrica. Se a métrica é constante, então  $g_{ab|c} = 0$  e de (2.81) vem  $\Gamma_{abc} = -\Gamma_{bac}$  (anti-simétrico nos dois primeiros índices).

Usando (2.81), (2.57) e  $D_{abc} = g_{da} D_{bc}^d$  temos a expressão

$$\Gamma_{abc} = \frac{1}{2}(g_{ab|c} + g_{ac|b} - g_{bc|a} + D_{cab} + D_{bac} - D_{abc}), \quad (2.82)$$

determinando os coeficientes de conexão em termos da métrica e dos coeficientes de comutação. Na base coordenada,  $D_{abc} = 0$ , e de (2.57) vem  $\Gamma_{abc} = \Gamma_{acb}$  (simétrico nos dois últimos índices).

## 2.10 Espaço-Tempo

O mundo físico é descrito em termos do *espaço-tempo 4-dimensional* (três dimensões do espaço e uma do tempo). A descrição matemática do espaço-tempo é feita em termos de uma variedade Riemanniana diferenciável  $(3 + 1)$ -dimensional, cuja base ortonormal  $\{\mathbf{e}_a\}$  é formada pelos vetores  $(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_4)$  tal que  $\mathbf{e}_\alpha$  é um vetor tipo-espaço e  $\mathbf{e}_4$  é um vetor tipo-tempo.

As equações de campo que determinam a dinâmica do espaço-tempo seguem a partir do tensor curvatura e da métrica, compondo as *Equações de Einstein*.

# Capítulo 3

## Modelos Cosmológicos Homogêneos

O grupo e a álgebra de Lie permite-nos formar a representação das bases de Killing e sua ligação com as bases de vetores e 1-formas introduzidas anteriormente. No contexto deste formalismo, Bianchi classificou as possíveis álgebras de Lie para grupos de três dimensões. As isometrias resultam da invariância da métrica sob transformações do grupo, e consistem na própria definição de espaços homogêneos.

Mostraremos também os modelos cosmológicos homogêneos e isotrópicos plano, hiperbólico e esférico, compondo o modelo de Friedmann, que podem ser obtidos por meio dos tipos I, VII<sub>A</sub> e IX de Bianchi, respectivamente.

### 3.1 Grupo e Álgebra de Lie

Um grupo  $g$  de dimensão  $n$  é determinado pelos seus elementos  $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ , existindo um elemento  $g_I$  chamado *elemento identidade*, e pelo mapeamento (*operação* ou *regra de multiplicação*)  $g \times g \rightarrow g$  tal que i)  $(g_i g_j) g_k = g_i (g_j g_k)$ , ii)  $g_I g_i = g_i g_I = g_i$  para qualquer  $g_i \in g$ , e iii) para cada  $g_j \in g$  existe um  $g_k (\in g) = g_j^{-1}$  chamado *elemento inverso* de  $g_j$ , tal que  $g_j g_j^{-1} = g_j^{-1} g_j = g_I$ .

Determinaremos o *grupo de Lie*  $G$   $n$ -dimensional pela relação de comutação (mapeamento  $G \times G \rightarrow G$ ) da base vetorial  $\{\xi_a\}$ ,

$$[\xi_a, \xi_b] = C_{ab}^c \xi_c, \quad (3.1)$$

onde

$$C_{ab}^c = -C_{ba}^c. \quad (3.2)$$

$C_{ab}^c$  é chamado *constante de estrutura* do grupo de Lie. Conhecidamente, da identidade de Jacobi,

$$C_{[ab}^d C_{cd]}^f = 0. \quad (3.3)$$

O espaço vetorial obedecendo (3.3) e a operação de comutação  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = -[\mathbf{v}, \mathbf{u}]$  define uma *Álgebra de Lie*.

A base vetorial  $\{\xi_a\}$ , e conseqüentemente seu mapeamento (3.1), definem um grupo de transformação *invariante à direita*. Analogamente, podemos construir uma álgebra de Lie com uma base vetorial  $\{\eta_a\}$  satisfazendo a operação de comutação

$$[\eta_a, \eta_b] = D_{ab}^c \eta_c \quad (3.4)$$

(similarmente ao desenvolvimento da seção 2.2), onde pressupomos a implicação

$$[\xi_a, \eta_b] = 0, \quad (3.5)$$

definindo um grupo de transformação *invariante à esquerda*. Deste modo, temos que

$$\eta_a = M_a^b \xi_b \quad (3.6)$$

e

$$\xi_a = (M^{-1})_a^b \eta_b, \quad (3.7)$$

onde  $(M^{-1})_a^b$  denota a transformação inversa de  $M_a^b$ . De (3.1) e (3.7) temos

$$[\eta_a, \eta_b] = -M_a^c M_b^d C_{cd}^f (M^{-1})_f^g \eta_g, \quad (3.8)$$

e de (3.4) temos a relação entre as constantes de estrutura  $C_{ab}^c$  e  $D_{ab}^c$ :

$$D_{ab}^c = -M_a^d M_b^f C_{df}^g (M^{-1})_g^c. \quad (3.9)$$

Uma escolha conveniente  $\xi_a = \eta_a$  para a identidade do grupo determina  $M_a^b = \delta_a^b$  e  $(M^{-1})_a^b = \delta_a^b$ , e então

$$D_{bc}^a = -C_{bc}^a. \quad (3.10)$$

A derivada de Lie da base  $\{\eta_a\}$ , considerando (3.5), é nula

$$\mathcal{L}_{\xi_a} \eta_b = [\xi_a, \eta_b] = 0, \quad (3.11)$$

e calculando  $\mathcal{L}_{\xi_a}(\eta_b \cdot \omega^c) = (\mathcal{L}_{\xi_a} \eta_b) \cdot \omega^c + \eta_b \cdot (\mathcal{L}_{\xi_a} \omega^c) = \mathcal{L}_{\xi_a}(\delta_b^c) = 0$ , podemos obter a seguinte relação:

$$\mathcal{L}_{\xi_a} \omega^b = 0. \quad (3.12)$$

## 3.2 Classificação de Bianchi

A obtenção de álgebras de Lie para grupos de três dimensões  $G_3$  foi originalmente mostrada por Bianchi [1]. Podemos relacionar a constante de estrutura do grupo com

uma parte simétrica e outra anti-simétrica, tal como

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{cdb}C_{cd}^a = N^{ab} + \varepsilon^{abc}A_c, \quad (3.13)$$

onde  $\varepsilon^{abc}$  é um tensor totalmente anti-simétrico e  $\varepsilon^{123} = 1$ . Multiplicando (3.13) por  $\varepsilon_{hll}$  e usando  $\varepsilon_{abf}\varepsilon^{cdf} = \delta_a^c\delta_b^d - \delta_a^d\delta_b^c$  e  $\frac{1}{2}\varepsilon_{abd}\varepsilon^{fgd}C_{fg}^c = \frac{1}{2}(C_{ab}^c - C_{ba}^c) = C_{ab}^c$ , temos

$$C_{bc}^a = \varepsilon_{bcd}N^{ad} + \delta_c^a A_b - \delta_b^a A_c, \quad (3.14)$$

que relata a constante de estrutura para o tensor simétrico  $N^{ab}$  e para a 1-forma  $A_a$ . Substituindo (3.14) na identidade de Jacobi (3.3) temos a condição entre  $N^{ab}$  e  $A_a$ :

$$N^{ab}A_b = 0. \quad (3.15)$$

Para  $A_b = 0$  a equação (3.15) é sempre satisfeita, e essa álgebra de Lie é referida como classe  $G_3A$ . Para  $A_b \neq 0$  temos a classe  $G_3B$ . Em ambos os casos é sempre possível escrever

$$A_b = (A, 0, 0) \quad (3.16)$$

e

$$N^{ab} = \text{diag}(N_1, N_2, N_3), \quad (3.17)$$

de modo que a condição (3.15) se reduz a

$$N_1A = 0. \quad (3.18)$$

Assim, usando (3.14) podemos determinar as constantes de estrutura do grupo em relação ao parâmetro do grupo  $A$  e aos coeficientes diagonais  $N_1$ ,  $N_2$  e  $N_3$ , conforme mostrados na tabela 3.1.

Tabela 3.1: Constantes de estrutura do grupo de Lie para  $G_3$ .

$C_{23}^1 = -C_{32}^1 = N_1$	$C_{12}^2 = -C_{21}^2 = A$	$C_{13}^2 = -C_{31}^2 = -N_2$
$C_{12}^3 = -C_{21}^3 = N_3$	$C_{13}^3 = -C_{31}^3 = A$	$C_{bc}^a = 0$ (outros)

A relação de comutação (3.1) do grupo de Lie para a base vetorial  $\{\xi_a\}$  é então obtida:

$$[\xi_1, \xi_2] = A\xi_2 + N_3\xi_3, \quad (3.19)$$

$$[\xi_2, \xi_3] = N_1\xi_1 \quad (3.20)$$

e

$$[\xi_1, \xi_3] = A\xi_3 - N_2\xi_2; \quad (3.21)$$

e na tabela 3.3 a enumeração completa dos nove tipos de Bianchi.

Tabela 3.3: Tipos de Bianchi para a álgebra de Lie.

Classe	Tipo	$A$	$N_1$	$N_2$	$N_3$
$G_3A$	I	0	0	0	0
	II	0	1	0	0
	VI <sub>0</sub>	0	0	-1	1
	VII <sub>0</sub>	0	0	1	1
	VIII	0	-1	1	1
	IX	0	1	1	1
$G_3B$	III	1	0	-1	1
	IV	1	0	0	1
	V	1	0	0	0
	VI <sub>A</sub>	A	0	-1	1
	VII <sub>A</sub>	A	0	1	1

Observar que o tipo VII<sub>0</sub> é um particular caso do tipo VII<sub>A</sub>, e que os tipos III e VI<sub>0</sub> são particulares casos do tipo VI<sub>A</sub>.

### 3.3 Espaços Homogêneos

Um espaço *homogêneo* é definido como uma variedade cujo grupo de transformação é *isométrico*, ou seja, mantém a métrica invariante [4]. A base  $\{\xi_a\}$  forma os geradores do grupo;  $\xi_a$  são os *vetores de Killing* cuja atuação mantém a invariância da métrica,

$$\mathcal{L}_{\xi_a} g = 0, \quad (3.22)$$

que resolvida, usando a condição de metricidade, resulta na *Equação de Killing*:

$$\xi_{ab;c} + \xi_{a;c;b} = 0. \quad (3.23)$$

O grupo definido pela base invariante à esquerda  $\{e_a = \eta_a\}$  (satisfazendo (3.5) com os campos de Killing  $\xi_a$ , geradores do grupo) e sua base dual  $\{\omega^a\}$  é dito *simplesmente-transitivo* e tem definido o tensor métrico

$$g = g_{ab}\omega^a \otimes \omega^b, \quad (3.24)$$

descrito na seção 2.9.

### 3.4 Universo Homogêneo e Isotrópico

A *homogeneidade e isotropia* do nosso universo são conceitos amplamente aceitos e usados como caminho natural na construção das teorias padrões. Fortes evidências observacionais (distribuição de galáxias e aglomerados de galáxias, radiação de raios-X e raios- $\gamma$ , radiação cósmica de fundo) e teóricas (coerência entre teorias e observações) justificam a consideração de tais características [5].

A homogeneidade está naturalmente ligada ao fato de prevermos que todos os pontos do universo são semelhantes às vizinhanças da nossa galáxia. A isotropia reflete a natural relação de homogeneidade prevista em todas as direções observadas do universo.

Em termos de descrição física (ver [5]), podemos pensar em um espaço-tempo (*espacialmente*) homogêneo como uma família de hipersuperfícies (3 dimensões) tipo-espaço  $\Sigma_t$  parametrizadas pelo parâmetro  $t$ , onde para quaisquer pontos  $p, q \in \Sigma_t$  existe uma isometria na métrica do espaço-tempo  $g_{ab}$  levando  $p$  em  $q$  (figura 3.1a). Um espaço-tempo (espacialmente) isotrópico é definido em termos de uma família de curvas tipo-tempo (observadores) com vetores tangentes  $\mathbf{u}$ , preenchendo o espaço-tempo de tal modo que, para dois vetores unitários  $\mathbf{s}_1$  e  $\mathbf{s}_2$  ortogonais à  $\mathbf{u}$  em um ponto  $p$ , possua uma isometria na métrica do espaço-tempo  $g_{ab}$  trocando  $\mathbf{s}_1$  e  $\mathbf{s}_2$ , mas mantendo  $\mathbf{u}$  (figura 3.1b).

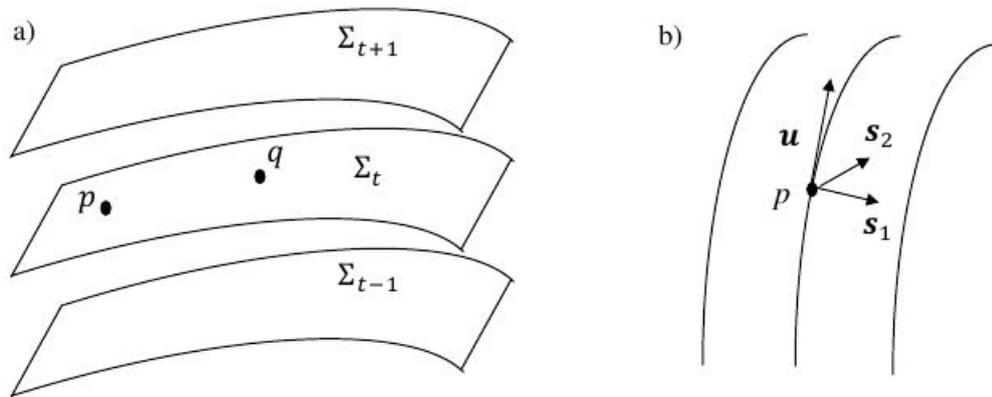


Figura 3.1: a) Hipersuperfícies  $\Sigma_t$  folheando o espaço-tempo homogêneo. b) Congruência de curvas tipo-tempo (linhas-mundo) em um espaço-tempo isotrópico.

Assim, num espaço-tempo homogêneo e isotrópico, as hipersuperfícies de homogeneidade  $\Sigma_t$  são ortogonais às linhas de observadores. São três as possíveis geometrias das hipersuperfícies  $\Sigma_t$ , de modo que um espaço-tempo homogêneo e isotrópico pode ser apenas *plano* (aberto),

$$ds^2 = a^2(t)\{dx^2 + dy^2 + dz^2\} - dt^2, \quad (3.25)$$

esférico (fechado),

$$ds^2 = a^2(t)\{d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\} - dt^2, \quad (3.26)$$

ou hiperbólico (aberto)

$$ds^2 = a^2(t)\{d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\} - dt^2; \quad (3.27)$$

$ds^2$  denota o elemento de linha (métrica) e  $a(t)$  é o *fator de expansão* (como o raio de um volume, denotando a separação entre linhas-mundo [6]). Podemos transladar a métrica do espaço plano para coordenadas esféricas e escrever (3.25), (3.26) e (3.27) como

$$ds^2 = a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right\} - dt^2, \quad (3.28)$$

onde ( $k = 0, r = \chi$ ) para o espaço plano, ( $k = 1, r = \sin\chi$ ) para o espaço esférico e ( $k = -1, r = \sinh\chi$ ) para o espaço hiperbólico. O modelo cosmológico homogêneo e isotrópico descrito por (3.28) é conhecido como modelo Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Tal modelo descreve um universo de curvatura constante [6] e nula (plano), positiva (esférico) ou negativa (hiperbólico) [7].

Em termos do grupo de Lie de três dimensões  $G_3$ , um espaço-tempo (espacialmente) homogêneo é definido pela base  $\{\xi_a\}$  da álgebra de Lie. A invariância da métrica (3.24) pela transformação do grupo  $G_3$  determina que  $g_{ab} = g_{ab}(t)$ , ou seja, sem dependência nas coordenadas espaciais. Os espaços Bianchi I, VII<sub>A</sub> e IX contêm os modelos FRW plano, hiperbólico e esférico, conforme mostraremos à frente.

Vamos primeiramente obter as constantes de estrutura e as bases para Bianchi. Relacionando as informações das tabelas 3.1 e 3.3 obtemos as constantes de estrutura para os tipos Bianchi I, VII<sub>A</sub> e IX (tabela 3.5):

Tabela 3.5: Constantes de estrutura para Bianchi I, VII<sub>A</sub> e IX.

Tipo de Bianchi	I	VII <sub>A</sub>	IX
$C_{23}^1 = -C_{32}^1$	0	0	1
$C_{12}^2 = -C_{21}^2$	0	A	0
$C_{13}^2 = -C_{31}^2$	0	-1	-1
$C_{12}^3 = -C_{21}^3$	0	1	1
$C_{13}^3 = -C_{31}^3$	0	A	0

A base  $\{\omega^a\}$  pode ser obtida relacionando (2.63) e (3.10) em  $d\omega^a = \frac{1}{2}C_{bc}^a\omega^b\wedge\omega^c$  (equação de *Maurer-Cartan*), que pode ser expandida na base coordenada como

$$d(\omega_i^a dx^i) = \frac{1}{2}C_{bc}^a(\omega_i^b dx^i) \wedge (\omega_j^c dx^j), \quad (3.29)$$

$$\omega_{i,j}^a dx^j \wedge dx^i = \frac{1}{2}C_{bc}^a\omega_i^b\omega_j^c dx^i \wedge dx^j, \quad (3.30)$$

resultando no sistema de equações de primeira ordem

$$\omega_{i,j}^a + \frac{1}{2}C_{bc}^a\omega_i^b\omega_j^c = 0, \quad (3.31)$$

que pode ser analiticamente resolvido.

A obtenção da base  $\{\eta_a\}$  é feita usando a relação de dualidade  $\eta_a \cdot \omega^b = \delta_a^b$ :

$$(\eta_a^i \partial_i) \cdot (\omega_j^b dx^j) = \eta_a^i \omega_j^b \delta_i^j = \delta_a^b, \quad (3.32)$$

resultando no sistema de equações de primeira ordem

$$\eta_a^i \omega_i^b - \delta_a^b = 0, \quad (3.33)$$

que também pode ser analiticamente resolvido.

Por fim, os geradores do grupo  $\{\xi_a\}$  são obtidos por meio da relação (3.12),  $\mathcal{L}_{\xi_a}\omega^b = 0$ :

$$\mathcal{L}_{\xi_a}(\omega_i^b dx^i) = (\mathcal{L}_{\xi_a}\omega_i^b)dx^i = 0, \quad (3.34)$$

que resulta no sistema de equações de primeira ordem

$$\omega_{i,j}^b \xi_a^j + \omega_j^b \xi_{a,i}^j = 0, \quad (3.35)$$

cuja solução analítica também pode ser obtida. Relembramos por último que essa representação de grupo descreve uma álgebra 3-dimensional, e portanto no cálculo das constantes de estrutura e das bases os índices  $(a, b, c, \dots, i, j, k, \dots)$  correm de 1 a 3 apenas.

Na tabela 3.7 mostramos o resultado do cálculo de bases descrito acima para os três tipos de Bianchi já mencionados (I, VII<sub>A</sub> e IX):

Tabela 3.7: Bases de  $G_3$  para Bianchi I, VII<sub>A</sub> e IX.

	I	VII <sub>A</sub>	IX
$\xi_1$	$\partial_x$	$\partial_x + (z - Ay)\partial_y - (y + Az)\partial_z$	$\sec y \cos z \partial_x + \sin z \partial_y - \tan y \cos z \partial_z$
$\xi_2$	$\partial_y$	$\partial_y$	$-\sec y \sin z \partial_x + \cos z \partial_y + \tan y \sin z \partial_z$
$\xi_3$	$\partial_z$	$\partial_z$	$\partial_z$
$\eta_1$	$\partial_x$	$\partial_x$	$\partial_x$
$\eta_2$	$\partial_y$	$e^{-Ax}(\cos x \partial_y - \sin x \partial_z)$	$\sin x \tan y \partial_x + \cos x \partial_y - \sin x \sec y \partial_z$
$\eta_3$	$\partial_z$	$e^{-Ax}(\sin x \partial_y + \cos x \partial_z)$	$-\cos x \tan y \partial_x + \sin x \partial_y + \cos x \sec y \partial_z$
$\omega^1$	$dx$	$dx$	$dx + \sin y dz$
$\omega^2$	$dy$	$e^{Ax}(\cos x dy - \sin x dz)$	$\cos x dy - \sin x \cos y dz$
$\omega^3$	$dz$	$e^{Ax}(\sin x dy + \cos x dz)$	$\sin x dy + \cos x \cos y dz$

Uma tabela de bases completa para os nove tipos de Bianchi pode ser encontrada em [3]. Essas bases compõem o grupo  $G_3$ . Para completar a representação do espaço-tempo  $(3+1)$ -dimensional, adicionamos os vetores  $\xi_4 = \eta_4 = \partial_t$  e a 1-forma  $\omega^4 = dt$ .

A fim de montar um tensor métrico para o espaço-tempo homogêneo, conforme equação (3.24), escrevemos

$$g_{ab}(t) = \text{diag}(a_1^2(t), a_2^2(t), a_3^2(t), -1), \quad (3.36)$$

onde a igualdade  $a_1(t) = a_2(t) = a_3(t) = a(t)$  monta a isotropia do espaço homogêneo. Então temos o tensor métrico

$$\mathbf{g} = a^2(t)[(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2] - dt^2. \quad (3.37)$$

A substituição da base de Bianchi I (tabela 3.7) em (3.37) gera diretamente o espaço homogêneo e isotrópico plano (3.25).

Substituindo a base de Bianchi VII<sub>A</sub> (tabela 3.7) em (3.37) obtemos o elemento de linha

$$ds^2 = a^2(t)[dx^2 + e^{2Ax}(dy^2 + dz^2)] - dt^2, \quad (3.38)$$

que mediante a transformação de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{A} \ln(\cosh \chi - \sinh \chi \cos \theta), \\ y &= \frac{1}{A} \sin \theta \cos \varphi / (\cotanh \chi - \cos \theta), \\ z &= \frac{1}{A} \sin \theta \sin \varphi / (\cotanh \chi - \cos \theta) \end{aligned} \quad (3.39)$$

e  $a(t)/A \rightarrow \tilde{a}(t)$  resulta no espaço homogêneo e isotrópico hiperbólico (3.27).

O elemento de linha espacial obtido pela substituição da base Bianchi IX (tabela 3.7)

em

$$dl^2 = \left(\frac{1}{2}\omega^1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\omega^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\omega^3\right)^2 \quad (3.40)$$

é dado por

$$ds^2 = \frac{1}{4}[dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2sinydydz], \quad (3.41)$$

que coincide com o elemento de linha espacial  $dl^2 = d\chi_1^2 + d\chi_2^2 + d\chi_3^2 + d\chi_4^2$ , mediante a troca de variáveis

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \cos\left(\frac{x+z}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ \chi_2 &= \sin\left(\frac{x+z}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ \chi_3 &= -\sin\left(\frac{x-z}{2}\right)\sin\left(\frac{y}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ \chi_4 &= \cos\left(\frac{x-z}{2}\right)\sin\left(\frac{y}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Portanto, o elemento de linha espacial de Bianchi IX (3.40) descreve um 3-esfera de raio igual a 1.

# Capítulo 4

## Equações de Campo e Soluções Analíticas

Uma vez descrita a métrica do espaço e o tensor curvatura, podemos obter o tensor de Einstein, que guarda informações sobre o conteúdo geométrico do espaço-tempo. Introduzimos uma descrição física do espaço-tempo homogêneo (ADM), que será representado pela métrica homogênea e pelo formalismo das álgebras de Bianchi.

Podemos formalizar a obtenção das equações dinâmicas do espaço-tempo, por meio das equações de campo de Einstein, focando as soluções de vácuo. O formalismo de Bianchi permite descrever as equações de Einstein como um sistema de equações ordinárias em  $t$ .

Demonstramos ainda as equações de campo para a classe  $G_3A$  de Bianchi e para o tipo Bianchi  $VII_A$  (pertencente à classe  $G_3B$ ), e algumas soluções analíticas obtidas, como preparação para o estudo numérico do capítulo 5.

### 4.1 Equações de Campo de Einstein

Como colocamos anteriormente, o espaço-tempo é descrito em termos de uma variedade Riemanniana diferenciável de quatro dimensões, onde são definidos uma métrica  $g_{ab}$  e um tensor curvatura  $R^a_{bcd}$ . O tensor curvatura pressupõe a determinação dos coeficientes de comutação, relacionados às constantes de estrutura do grupo por (3.10).

O *tensor de Ricci*  $\mathbf{R} = R_{ab}\omega^a \otimes \omega^b$  é dado pela contração do tensor curvatura,

$$R_{ab} = R^c_{acb}, \quad (4.1)$$

e possui com ele a seguinte relação de simetria:

$$R^a_{bcd;a} = -2R_{b[c;d]}. \quad (4.2)$$

O *escalar de Ricci* ou *escalar de curvatura*  $R$  é dado pelo traço do tensor de Ricci,

$$R = g^{ab}R_{ab} = R^a_a. \quad (4.3)$$

Podemos agora definir o *tensor de Einstein*  $\mathbf{G} = G_{ab}\omega^a \otimes \omega^b$  como:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R. \quad (4.4)$$

O tensor de Einstein guarda informação sobre o conteúdo geométrico do espaço-tempo.

A distribuição de matéria e campos no espaço-tempo é dada pelo *tensor Momento-Energia*  $\mathbf{T} = T_{ab}\omega^a \otimes \omega^b$ . Segundo estatiza a Relatividade Geral, a conexão entre a geometria do espaço-tempo e a distribuição de matéria é relatada pela *equação de campo de Einstein*:

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab}. \quad (4.5)$$

A geometria do universo, conectada à distribuição de matéria e energia pelas equações de Einstein, determina dinâmica do universo (*gravitação*).

## 4.2 Soluções de Vácuo

A ausência de fontes ( $T_{ab} = 0$ ) caracteriza as soluções de vácuo da equação de Einstein,

$$G_{ab} = 0, \quad (4.6)$$

que podemos escrever como

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 0, \quad (4.7)$$

cujo traço resulta em

$$R = 0 \quad (4.8)$$

e

$$R_{ab} = 0. \quad (4.9)$$

Vemos, portanto, que a equação (4.9) toma o papel da equação dinâmica para a solução de vácuo.

A ausência de fontes pode ser entendida como um cenário onde a geometria do universo é dominante, tal como o universo próximo ao seu surgimento. As soluções de vácuo das equações de Einstein são as mais naturais para descrever tal cenário. Constituem também as melhores representações de modelos anisotrópicos [2], tais como o formalismo de Bianchi.

Modelos anisotrópicos desempenham um papel importante na descrição do universo primordial, uma vez que este é um período um pouco menos restritivo quanto a condições

de isotropia, e a princípio não existe uma forte razão para acreditar que o universo tenha surgido totalmente isotrópico.

### 4.3 Métrica Homogênea

Na seção 3.4 mostramos uma descrição física do espaço-tempo homogêneo e montamos uma métrica para tal espaço. Vamos aqui estender essa descrição.

Pensemos em uma família de hipersuperfícies tridimensionais tipo-espaço  $\Sigma_t$  parametrizadas pela família de curvas tipo-tempo (observadores, linhas-mundo) de parâmetro  $t$ . A homogeneidade é formalizada em termos da isometria da métrica transformando pontos em  $\Sigma_t$ . Seja  $\mathbf{n}$  um vetor tipo-tempo unitário e normal à hipersuperfície  $\Sigma_t$ ,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = n_a n^a = -1. \quad (4.10)$$

Definimos um sistema de coordenadas em que  $x^4$  é constante na hipersuperfície  $\Sigma_t$ :

$$n_a = (0, 0, 0, -N); \quad (4.11)$$

então

$$n^a = (-N^\alpha/N, 1/N). \quad (4.12)$$

Assim  $x^4$  parametriza a separação na direção normal à  $\Sigma_t$  entre as hipersuperfícies  $\Sigma_t$  e  $\Sigma_{t+dt}$ . A *função lapso*  $N$  especifica o tempo próprio de separação entre as hipersuperfícies  $\Sigma_t$  e  $\Sigma_{t+dt}$  na direção normal à  $\Sigma_t$ ,

$$d\tau = N dt. \quad (4.13)$$

O *vetor deslocamento*  $N^\alpha$  determina a distância entre o ponto  $x^\alpha$  na hipersuperfície  $\Sigma_{t+dt}$  e a sua interseção em  $\Sigma_{t+dt}$  na direção normal à  $\Sigma_t$  (figura 4.1).

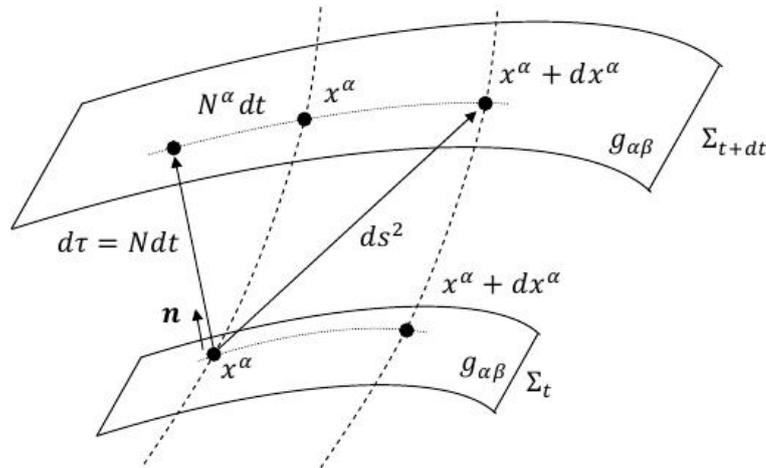


Figura 4.1: Vetor deslocamento e função lapso numa folheação de hipersuperfícies homogêneas  $\Sigma_t$ .

O formalismo descrito acima é conhecido como *formalismo ADM*, devido à Arnowitt, Deser e Misner [8]. O elemento de linha que mede a separação entre os pontos  $x^a$  ( $x^\alpha$  em  $t$ ) e  $x^a + dx^a$  ( $x^\alpha + dx^\alpha$  em  $t + dt$ ) é dado por

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(N^\alpha dt + dx^\alpha)(N^\beta dt + dx^\beta) - N^2 dt^2 \quad (4.14)$$

[4, 9].

Em termos das bases do grupo de Lie, podemos expressar o elemento de linha acima como o tensor métrico

$$\mathbf{g} = g_{\alpha\beta}(N^\alpha \mathbf{d}t + \boldsymbol{\omega}^\alpha) \otimes (N^\beta \mathbf{d}t + \boldsymbol{\omega}^\beta) - N^2 \mathbf{d}t^2 \quad (4.15)$$

[3, 10]. Podemos agora supor que as linhas-mundo cruzam perpendicularmente as hipersuperfícies. Disso resulta a nulidade do vetor deslocamento,  $N^\alpha = 0$ , e

$$\mathbf{g} = g_{\alpha\beta} \boldsymbol{\omega}^\alpha \otimes \boldsymbol{\omega}^\beta - N^2 \mathbf{d}t^2. \quad (4.16)$$

Temos assim definida uma métrica homogênea

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta}(t) & 0 \\ 0 & -N^2(t) \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

para  $\mathbf{g} = g_{ab} \boldsymbol{\omega}^a \otimes \boldsymbol{\omega}^b$  (3.24), onde  $g_{\alpha\beta}(t)$  compõe a isometria em  $\Sigma_t$ .

Um sistema de coordenadas especial em que o elemento de linha segue

$$g_{44} = -1 \quad (4.18)$$

e

$$g_{\alpha 4} = 0 \quad (4.19)$$

é chamado de sistema de referência *síncrono* [6, 4]. Nesse sistema o parâmetro tempo  $t$  coincide com o tempo próprio  $\tau$ .

O formalismo ADM pode ser desenvolvido para a métrica espacialmente homogênea  $g_{ab}(t)$  (3.24) no sentido da formulação hamiltoniana da teoria. Porém não é objetivo deste trabalho desenvolver esta formulação, que será deixada para um trabalho posterior.

## 4.4 Soluções de Vácuo da Classe $G_3A$ de Bianchi

Os tipos de Bianchi em que  $A = 0$  compõem a classe  $G_3A$ . As soluções de vácuo das equações de Einstein obtidas para esta classe por meio da métrica homogênea (4.17) num

sistema de referência síncrono

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} a_1^2(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

são [4]:

$$R_1^1 = \frac{(\dot{a}_1 a_2 a_3)'}{a_1 a_2 a_3} + \frac{1}{2a_1^2 a_2^2 a_3^2} [\lambda^2 a_1^4 - (\mu a_2^2 - \nu a_3^2)^2] = 0, \quad (4.21)$$

$$R_2^2 = \frac{(a_1 \dot{a}_2 a_3)'}{a_1 a_2 a_3} + \frac{1}{2a_1^2 a_2^2 a_3^2} [\mu^2 a_2^4 - (\lambda a_1^2 - \nu a_3^2)^2] = 0, \quad (4.22)$$

$$R_3^3 = \frac{(a_1 a_2 \dot{a}_3)'}{a_1 a_2 a_3} + \frac{1}{2a_1^2 a_2^2 a_3^2} [\nu^2 a_3^4 - (\lambda a_1^2 - \mu a_2^2)^2] = 0 \quad (4.23)$$

e

$$R_4^4 = \frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\ddot{a}_3}{a_3} = 0, \quad (4.24)$$

onde as constantes  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\nu$  estão relacionadas com a constante de estrutura por  $(\lambda, \mu, \nu) = (N_1, N_2, N_3)$ . Vamos brevemente discutir os tipos I, VII<sub>0</sub> e IX.

#### 4.4.1 Bianchi I

Para o grupo Bianchi I,  $(\lambda, \mu, \nu) = (0, 0, 0)$ , e o sistema de equações (4.21-4.24) torna-se

$$\frac{(\dot{a}_1 a_2 a_3)'}{a_1 a_2 a_3} = 0, \quad (4.25)$$

$$\frac{(a_1 \dot{a}_2 a_3)'}{a_1 a_2 a_3} = 0, \quad (4.26)$$

$$\frac{(a_1 a_2 \dot{a}_3)'}{a_1 a_2 a_3} = 0 \quad (4.27)$$

e

$$\frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\ddot{a}_3}{a_3} = 0. \quad (4.28)$$

Uma solução conhecida para este sistema é a *solução de Kasner* [11]:

$$a_1(t) = t^{p_1}, a_2(t) = t^{p_2}, a_3(t) = t^{p_3}, \quad (4.29)$$

onde

$$p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \quad (4.30)$$

são os *índices de Kasner*. Esta solução descreve um espaço-tempo homogêneo anisotrópico de volume linearmente crescente com o tempo e com expansão ao longo de dois dos eixos

espaciais e contração ao longo de outro (salvo para  $(p_1, p_2, p_3) = (0, 0, 1)$ , onde temos expansão linear numa direção e comportamento estático nas outras). Exceto para os casos  $(p_1, p_2, p_3) = (-1/3, 2/3, 2/3)$  e  $(p_1, p_2, p_3) = (0, 0, 1)$ , a expansão nunca é igual ao longo de dois dos eixos. Este último caso reduz-se ao caso plano mediante transformações de coordenadas, e é a única exceção à singularidade não-eliminável em  $t = 0$ .

#### 4.4.2 Bianchi VII<sub>0</sub> e Bianchi IX

Para o grupo Bianchi VII<sub>0</sub>,  $(\lambda, \mu, \nu) = (0, 1, 1)$ , e obtemos o sistema de equações

$$\frac{(\dot{a}_1 a_2 a_3)'}{a_1 a_2 a_3} = \frac{(a_2^2 - a_3^2)^2}{2a_1^2 a_2^2 a_3^2}, \quad (4.31)$$

$$\frac{(a_1 \dot{a}_2 a_3)'}{a_1 a_2 a_3} = \frac{a_3^4 - a_2^4}{2a_1^2 a_2^2 a_3^2}, \quad (4.32)$$

$$\frac{(a_1 a_2 \dot{a}_3)'}{a_1 a_2 a_3} = \frac{a_2^4 - a_3^4}{2a_1^2 a_2^2 a_3^2} \quad (4.33)$$

e

$$\frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\ddot{a}_3}{a_3} = 0. \quad (4.34)$$

Já para o grupo Bianchi IX,  $(\lambda, \mu, \nu) = (1, 1, 1)$ , e temos

$$\frac{(\dot{a}_1 a_2 a_3)'}{a_1 a_2 a_3} = \frac{(a_2^2 - a_3^2)^2 - a_1^4}{2a_1^2 a_2^2 a_3^2}, \quad (4.35)$$

$$\frac{(a_1 \dot{a}_2 a_3)'}{a_1 a_2 a_3} = \frac{(a_1^2 - a_3^2)^2 - a_2^4}{2a_1^2 a_2^2 a_3^2}, \quad (4.36)$$

$$\frac{(a_1 a_2 \dot{a}_3)'}{a_1 a_2 a_3} = \frac{(a_1^2 - a_2^2)^2 - a_3^4}{2a_1^2 a_2^2 a_3^2} \quad (4.37)$$

e

$$\frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\ddot{a}_3}{a_3} = 0. \quad (4.38)$$

Uma abordagem para se obter soluções destes sistemas de equações consiste em considerar o lado direito de (4.31-4.33) e (4.35-4.37) como uma perturbação da solução de Kasner: se em um certo instante de tempo estes termos puderem ser negligenciados, a dinâmica segue o regime de Kasner.

As soluções podem ser estáveis ou instáveis. Para o caso de Bianchi VII<sub>0</sub>, por exemplo, se num certo instante de tempo os índices de Kasner positivos estão associados a  $a_2(t)$  e  $a_3(t)$ , então essas soluções seguem para a singularidade em  $t = 0$ , e conseqüentemente anulam o lado direito do sistema (4.31-4.33), gerando uma época de Kasner com índices ordenados ( $p_1 < 0, p_2 > 0, p_3 > 0$ ) para  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$  e  $a_3(t)$ . Essa solução é estável. Para o índice de Kasner negativo associado a  $a_2(t)$  ou a  $a_3(t)$  num instante de tempo, resulta

que o lado direito do sistema (4.31-4.33) não se anula. Essa solução é instável.

Assumindo que num tempo  $t \rightarrow \infty$  o universo seja descrito por uma *época de Kasner*  $a_1(t) = t^{p_1}, a_2(t) = t^{p_2}, a_3(t) = t^{p_3}$  com  $p_1 < p_2 < p_3$ , o sistema evoluirá de modo que a perturbação cresça formando um ponto de potencial cuja ação é modificar os índices de Kasner, dando início a uma nova época de Kasner com índices  $p'_1, p'_2$  e  $p'_3$ . A relação entre os índices da nova e da antiga época de Kasner é dada pelo chamado *mapeamento BKL* (Belinsky, Khalatnikov e Lifshitz) [12]:

$$p'_1 = \frac{|p_1|}{1 - 2|p_1|}, \quad (4.39)$$

$$p'_2 = \frac{p_2 - 2|p_1|}{1 - 2|p_1|} \quad (4.40)$$

e

$$p'_3 = \frac{p_3 - 2|p_1|}{1 - 2|p_1|}. \quad (4.41)$$

A compreensão deste mapeamento não é objetivo deste trabalho. Ressaltamos tal abordagem apenas como uma possibilidade de solução, alvo de um estudo futuro. Uma discussão introdutória pode ser encontrada em [4].

Na busca de uma solução analítica exata, mas não geral, para Bianchi VII<sub>0</sub>, vamos impor  $a_2(t) = a_3(t)$ . Deste modo, os termos do lado direito das equações (4.31-4.34) se anulam, resultando no sistema de equações (4.25-4.28), que sabidamente, obedecem a solução de Kasner.

Conforme mencionamos anteriormente, só existem dois casos de solução de Kasner onde  $a_2(t) = a_3(t)$ , e são eles:  $(p_1, p_2, p_3) = (1, 0, 0)$  e  $(p_1, p_2, p_3) = (-1/3, 2/3, 2/3)$ . Então, duas soluções possíveis para Bianchi VII<sub>0</sub> são dadas por:

$$a_1(t) = t, a_2(t) = 1, a_3(t) = 1 \quad (4.42)$$

e

$$a_1(t) = t^{-1/3}, a_2(t) = t^{2/3}, a_3(t) = t^{2/3}. \quad (4.43)$$

Como soluções tipo Kasner, elas modelam um universo homogêneo anisotrópico com volume linearmente crescente com o tempo. No primeiro caso, se expande linearmente numa direção e permanece estático nas outras; no segundo caso, se contrai numa direção e se expande igualmente ao longo das outras.

Essas duas soluções não são soluções de grande generalidade, pois uma solução geral de Bianchi VII<sub>0</sub> não necessariamente precisa obedecer  $a_2(t) = a_3(t)$ .

## 4.5 Solução de Vácuo do Tipo VII<sub>A</sub> de Bianchi

O tipo VII<sub>A</sub> de Bianchi pertence à classe  $G_3B$ . Enfatizaremos dois casos de solução de vácuo para Bianchi VII<sub>A</sub>, um para a métrica diagonal

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} a_1^2(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N^2(t) \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

e outro para a métrica não-diagonal num sistema de referência síncrono

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} a_1^2(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2(t) & a_4(t) & 0 \\ 0 & a_4(t) & a_3^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

O primeiro caso, num sistema de referência síncrono, já foi considerado na seção 3.4 para obtenção de um espaço homogêneo e isotrópico com geometria hiperbólica. O segundo caso será testado na solução de uma onda-plana de Lukash e na obtenção de soluções diagonais.

### 4.5.1 Solução para Métrica Diagonal

A solução de vácuo para o espaço homogêneo (4.44) resulta no seguinte sistema de equações:

$$R_{11} = \frac{a_1^2}{N^2} \frac{(\dot{a}_1 a_2 a_3)'}{a_1 a_2 a_3} - \frac{a_1^2 (a_2^2 - a_3^2)^2}{2 a_1^2 a_2^2 a_3^2} - \frac{a_1 \dot{a}_1 \dot{N}}{N^3} - 2A^2 = 0, \quad (4.46)$$

$$R_{14} = A \left( \frac{2\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} - \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) = 0, \quad (4.47)$$

$$R_{22} = \frac{a_2^2}{N^2} \frac{(a_1 \dot{a}_2 a_3)'}{a_1 a_2 a_3} - \frac{a_2^2 (a_3^4 - a_2^4)}{2 a_1^2 a_2^2 a_3^2} - \frac{a_2 \dot{a}_2 \dot{N}}{N^3} - \frac{2a_2^2 A^2}{a_1^2} = 0, \quad (4.48)$$

$$R_{23} = \frac{A}{a_1^2} (a_3^2 - a_2^2) = 0, \quad (4.49)$$

$$R_{33} = \frac{a_3^2}{N^2} \frac{(a_1 a_2 \dot{a}_3)'}{a_1 a_2 a_3} - \frac{a_3^2 (a_2^4 - a_3^4)}{2 a_1^2 a_2^2 a_3^2} - \frac{a_3 \dot{a}_3 \dot{N}}{N^3} - \frac{2a_3^2 A^2}{a_1^2} = 0, \quad (4.50)$$

e

$$R_{44} = - \left( \frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\ddot{a}_3}{a_3} \right) + \frac{\dot{N}}{N} \left( \frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) = 0. \quad (4.51)$$

Observe que para o caso particular de Bianchi VII<sub>0</sub> ( $A = 0$ ) num sistema de referência síncrono ( $N = 1$ ), o sistema (4.46-4.51) reduz-se ao sistema (4.31-4.34), já mostrado na

seção 4.4.2.

A equação (4.49) estabelece a relação  $a_2 = \pm a_3$  que simplifica demasiado a solução do sistema. Sua substituição em (4.47) resulta em  $\dot{a}_1/a_1 = \dot{a}_2/a_2$  e conseqüentemente em  $\ddot{a}_1/a_1 = \ddot{a}_2/a_2$ . Usando isto, nós resolvemos o restante do sistema (4.46-4.51) e obtivemos que sua solução analítica obedece

$$\dot{a}_1 = \pm AN, \quad (4.52)$$

$$\dot{a}_2 = a_2 \frac{\dot{a}_1}{a_1} \quad (4.53)$$

e

$$a_3 = a_2. \quad (4.54)$$

Observe que o lapso  $N$  é arbitrário para a solução. Para  $N = 1$  (síncrono) calculamos a seguinte solução:

$$a_1 = \pm(At + C_1), a_2 = C_2At + C_1C_2, a_3 = C_2At + C_1C_2, N = 1, \quad (4.55)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes de integração. Esta solução descreve um espaço-tempo plano, homogêneo e anisotrópico com expansão linear. Para  $N = a_1a_2a_3$  temos duas possíveis soluções:

$$a_1 = \frac{C_1}{\sqrt{2At - C_2}}, a_2 = \frac{\pm 1}{\sqrt{-2At + C_2}}, a_3 = \frac{\pm 1}{\sqrt{-2At + C_2}}, N = \frac{-C_1}{(2At - C_2)^{3/2}} \quad (4.56)$$

e

$$a_1 = \frac{C_1}{\sqrt{2At + C_2}}, a_2 = \frac{\pm 1}{\sqrt{2At + C_2}}, a_3 = \frac{\pm 1}{\sqrt{2At + C_2}}, N = \frac{C_1}{(2At + C_2)^{3/2}}. \quad (4.57)$$

A segunda (4.57) se reduz à solução (4.55) mediante a reparametrização para o tempo próprio  $d\tau = Ndt$ . A primeira (4.56), mediante a mesma reparametrização, resulta no elemento de linha

$$ds^2 = (A\tau + D_1)^2 dx^2 - (D_2A\tau + D_2D_1)^2 e^{2Ax} (dy^2 + dz^2) - d\tau^2. \quad (4.58)$$

Este elemento de linha é uma solução Bianchi VII<sub>A</sub> em que a seção espacial não é homogênea, e por isso não apresenta maior interesse cosmológico. A seção homogênea é (x,y,z), onde x faz o papel de uma coordenada temporal.

Convém aqui observar que, conforme mencionamos na seção 3.4, podemos obter a descrição de um universo homogêneo e isotrópico hiperbólico como um caso de Bianchi VII<sub>A</sub> com métrica dada por (3.36), onde  $a_1(t) = a_2(t) = a_3(t) = a(t)$ . Portanto  $C_2 = \pm 1$  em (4.55) consiste na solução de um universo homogêneo e isotrópico, cuja seção espacial é o espaço hiperbólico.

Cumpra aqui observar também que a relação  $a_2 = \pm a_3$  não ocorre necessariamente

para o caso particular Bianchi VII<sub>0</sub>. Então, apesar de Bianchi VII<sub>0</sub> ser um caso particular de Bianchi VII<sub>A</sub> (com  $A = 0$ ) e ter um particular sistema de equações de Bianchi VII<sub>A</sub>, sua solução não necessariamente precisa ser um caso particular da solução geral de Bianchi VII<sub>A</sub>. Um exemplo é pela solução (4.43), que apesar de obedecer  $a_2 = \pm a_3$ , não é linear e nem a mais geral possível.

No entanto, uma solução possível para Bianchi VII<sub>0</sub> é a solução particular de Bianchi VII<sub>A</sub>, fazendo  $A = 0$  na solução (4.55). Essa solução particular é constante e não apresenta maior interesse neste trabalho, uma vez que representa apenas uma parametrização na métrica.

### 4.5.2 Solução para Métrica Não-Diagonal

A solução de vácuo para o espaço homogêneo síncrono (4.45) resulta no sistema de equações mostrado no apêndice A. A solução de vácuo da *onda plana de Lukash* [13, 14] é um tipo de solução BVII<sub>A</sub> com métrica não-diagonal (4.45).

O elemento de linha para a onda plana de Lukash é dado por

$$ds^2 = t^2 dx^2 + t^{2r} e^{2rx} \{ (A_1 dy + A_2 dz)^2 + (A_3 dy + A_1 dz)^2 \} - dt^2, \quad (4.59)$$

onde  $0 < r < 1$  é um parâmetro constante,  $A_1 = \cos v$ ,  $A_2 = f^{-1} \sin v$ ,  $A_3 = -f \sin v$  e  $v = k(x + \ln(t))$  [13, 14, 15]. As constantes  $k$  e  $f$  são relacionadas a  $r$  e  $A$  (parâmetro do grupo) por

$$k = \frac{r}{A} \quad (4.60)$$

e

$$\frac{r^2(1-f^2)^2}{A^2 f^2} = 4r(1-r). \quad (4.61)$$

Podemos verificar que a métrica (4.45) com

$$a_1^2(t) = \frac{A^2 t^2}{r^2}, \quad (4.62)$$

$$a_2^2(t) = t^{2r} \left( \cos^2 \left( \frac{r \ln(t)}{A} \right) + f^2 \sin^2 \left( \frac{r \ln(t)}{A} \right) \right), \quad (4.63)$$

$$a_4(t) = t^{2r} \cos \left( \frac{r \ln(t)}{A} \right) \sin \left( \frac{r \ln(t)}{A} \right) (f^2 - 1) \quad (4.64)$$

e

$$a_3^2(t) = t^{2r} \left( f^2 \cos^2 \left( \frac{r \ln(t)}{A} \right) + \sin^2 \left( \frac{r \ln(t)}{A} \right) \right) \quad (4.65)$$

resulta no elemento de linha de Lukash (4.59), com diferença apenas de transformações de coordenadas. Portanto, (4.62-4.65) constitui uma solução de vácuo para Bianchi VII<sub>A</sub>.

# Capítulo 5

## Resultados Numéricos e Discussão

Um estudo numérico se faz apropriado para verificar soluções de sistemas de equações diferenciais mais complexos, tais como aquele obtido para a solução de vácuo de (4.45). Mesmo sistemas mais simples como (4.31-4.34) podem possuir soluções mais gerais que aquelas dadas por (4.42) e (4.43), e que podem ser reveladas por um estudo numérico. Vamos nos concentrar na resolução numérica de soluções de vácuo para Bianchi VII ( $VII_0$  e  $VII_A$ ), uma vez que os modelos Bianchi I e Bianchi IX são mais estudados na literatura.

No desenvolvimento deste trabalho, utilizamos o software *Maple* (versão 11) [16] como manipulador algébrico para a obtenção das equações dinâmicas dos sistemas estudados. O código para o cálculo numérico propriamente dito foi desenvolvido usando linguagem de programação C, por meio da utilização do pacote compilador *GCC* (GNU Compiler Collection, versão 4.2.2) [17] e da biblioteca de cálculo científico *GSL* (GNU Scientific Library, versão 1.10) [18], ambos pertencentes ao projeto *GNU* [19]. Os gráficos foram gerados por meio do software *GNUPlot* (versão 4.2) [20], também pertencente ao projeto GNU. Os cálculos foram efetuados num processador Intel Pentium 3.4 GHz.

A biblioteca de cálculo científico *GSL* possui um conjunto de funções que permitem o controle de erro relativo e do erro absoluto, estipulados em  $1, 0.10^{-21}$ . O método numérico utilizado foi o Runge-Kutta-Fehlberg.

### 5.1 Condição Inicial e Evolução dos Vínculos

A solução de vácuo do espaço homogêneo (4.16) resulta num sistema de equações diferenciais ordinárias que podem ser separadas em duas partes:  $R_{4a} = 0$  e  $R_{\alpha\beta} = 0$ .

Pode-se demonstrar que, uma vez satisfeita a condição  $R_{4a} = 0$  inicialmente (nas condições iniciais), ela será satisfeita por toda a evolução do sistema [9]. Para isso partimos da identidade de Bianchi e obtemos a equação

$$R^a_{b;a} = 0, \tag{5.1}$$

onde já assumimos as nulidades (4.8-4.9) da solução de vácuo. Podemos agora escrever

sua forma projetada por

$$R_{b;a}^a = [(h_i^a - n^a n_i) R_b^i]_{;a} = 0, \quad (5.2)$$

onde  $h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$  é o tensor projeção e  $n_a$  é o vetor unitário definido em (4.11). Resolvendo (5.2) temos

$$h_i^a R_{b;a}^i - n_{;a}^a n_i R_b^i - n^a (n_i R_b^i)_{;a} = 0, \quad (5.3)$$

que implica em

$$\frac{1}{N} (NR_b^4)_{;4} = -n_{;a}^a NR_b^4 - R_{b;\gamma}^\gamma. \quad (5.4)$$

Para a parte espacial ( $b = \delta$ ), temos para a condição inicial que  $R_{\delta;4}^4 = 0$ ; já para a parte temporal ( $b = 4$ ), temos para a condição inicial que  $R_{4;4}^4 = 0$ . Logo,  $R_{b;4}^4 = 0$  para solução de vácuo, e daí implica que, se  $R_b^4 = 0$  na condição inicial, então permanecerá nulo por toda a evolução.

Já as equações  $R_{\alpha\beta} = 0$  determinam a evolução temporal do sistema,  $g_{\alpha\beta}(t)$ , sendo portanto as reais equações dinâmicas de campo [9].

No contexto do método numérico desenvolvido neste trabalho, vamos nos referir ao vínculo imposto por  $R_{4a} = 0$  como *vínculo*  $R_{4a}$ . Ele será checado na condição inicial (ou mesmo poderá determiná-la) e durante a evolução dos sistemas de estudo. Para casos de métrica diagonal, só temos o vínculo  $R_{44}$ . Para casos de métrica não-diagonal, como (4.45), temos o vínculo  $R_{44}$  e o vínculo  $R_{41}$ .

Conforme mostramos na seção 4.2, resulta do traço da equação de Einstein para solução de vácuo que o escalar de curvatura é nulo:  $R = 0$ . Este resultado também será monitorado durante a evolução dos sistemas de estudo.

A checagem dos vínculos  $R_{4a}$  e do escalar de curvatura  $R$  constitui um importante mecanismo de controle numérico que certifica a exatidão dos resultados e atesta que os erros numéricos estão dentro de um limite admissível.

Por fim, monitoraremos ao longo do cálculo numérico o *escalar quadrático de Riemann*, definido por

$$R^{abcd} R_{abcd}; \quad (5.5)$$

trata-se de um escalar da teoria, que independe do sistema de coordenadas utilizado. Constitui assim um bom parâmetro para determinar se certos efeitos observados são de fato relacionados à geometria do espaço-tempo ou apenas efeitos ocasionados por uma escolha não conveniente de coordenadas. Assim, se um efeito tal como a aproximação de uma singularidade é acompanhado de uma variação atípica do escalar de Riemann, é provável que essa singularidade realmente esteja presente na geometria. Caso contrário, pode refletir uma deficiência das coordenadas em questão em modelar aquele ponto da geometria. Para modelos homogêneos, singularidades estão associadas a evolução temporal. Isto significa que estamos interessados na verificação de divergências no parâmetro  $t$ ,

e não nas coordenadas espaciais.

Os casos que iremos resolver numericamente (Bianchi VII<sub>0</sub> e VII<sub>A</sub>) constituem-se de sistemas de equações diferenciais não-lineares de segunda ordem (sistema (4.31-4.34) para Bianchi VII<sub>0</sub> com métrica diagonal (4.20) e sistema do apêndice A para Bianchi VII<sub>A</sub> com métrica não-diagonal (4.45)). Portanto as condições iniciais para a resolução destes sistemas devem constituir-se dos valores  $a_\alpha(t_{inicial})$  e  $\frac{d}{dt}a_\alpha(t_{inicial})$ . A única restrição sobre a escolha das condições iniciais é a obediência aos vínculos já discutidos acima. Fora isso, elas podem ser escolhidas livremente. No entanto, em algumas escolhas de condições iniciais (devidamente mencionadas ao longo do texto), iremos utilizar valores de soluções analíticas particulares conhecidas, de modo a comparar a correção do resultado numérico.

## 5.2 Solução Numérica para Bianchi VII<sub>0</sub>

Já mencionamos na seção 4.4.2 possíveis soluções analíticas (4.42 e 4.43) para Bianchi VII<sub>0</sub>. No entanto tais soluções são particulares, e na busca de soluções mais gerais torna-se apropriado um estudo numérico.

As equações dinâmicas para a solução de vácuo de VII<sub>0</sub> são dadas pelo sistema (4.31-4.34). Vamos simular quatro sistemas com condições iniciais obedecendo os vínculos. São eles (tabela 5.1):

Tabela 5.1: Condições iniciais para Bianchi VII<sub>0</sub>.

Sistema	$t_{inicial}$	$a_1(t_i)$	$a_2(t_i)$	$a_3(t_i)$	$\frac{d}{dt}a_1(t_i)$	$\frac{d}{dt}a_2(t_i)$	$\frac{d}{dt}a_3(t_i)$
Sistema 1	$1, 0.10^{-5}$	$1, 0.10^{-5}$	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0
Sistema 2	1,0	1,0	1,0	1,0	$-1/3$	$2/3$	$2/3$
Sistema 3	0,0	1,0	2,0	3,0	1,0	2,0	-1,239583333
Sistema 4	0,0	0,1	-2,3	0,4	8,9	0,0	3,493566937

As condições iniciais dos sistemas 1 e 2 (tabela 5.1) foram obtidas utilizando  $t_{inicial} = 1, 0.10^{-5}$  e  $t_{inicial} = 1$  em (4.42) e (4.43), respectivamente, com o objetivo de verificar a similaridade de tais soluções analíticas com o resultado numérico obtido. Tal escolha fornece também uma verificação da eficácia do método numérico utilizado. As condições iniciais para os sistemas 3 e 4 (tabela 5.1) foram escolhidas genericamente, obedecendo apenas a restrição dos vínculos.

As evoluções temporais para os sistemas 1, 2, 3 e 4 são mostradas nas figuras (5.1-5.14), juntamente com os escalares e a preservação dos vínculos durante a dinâmica.

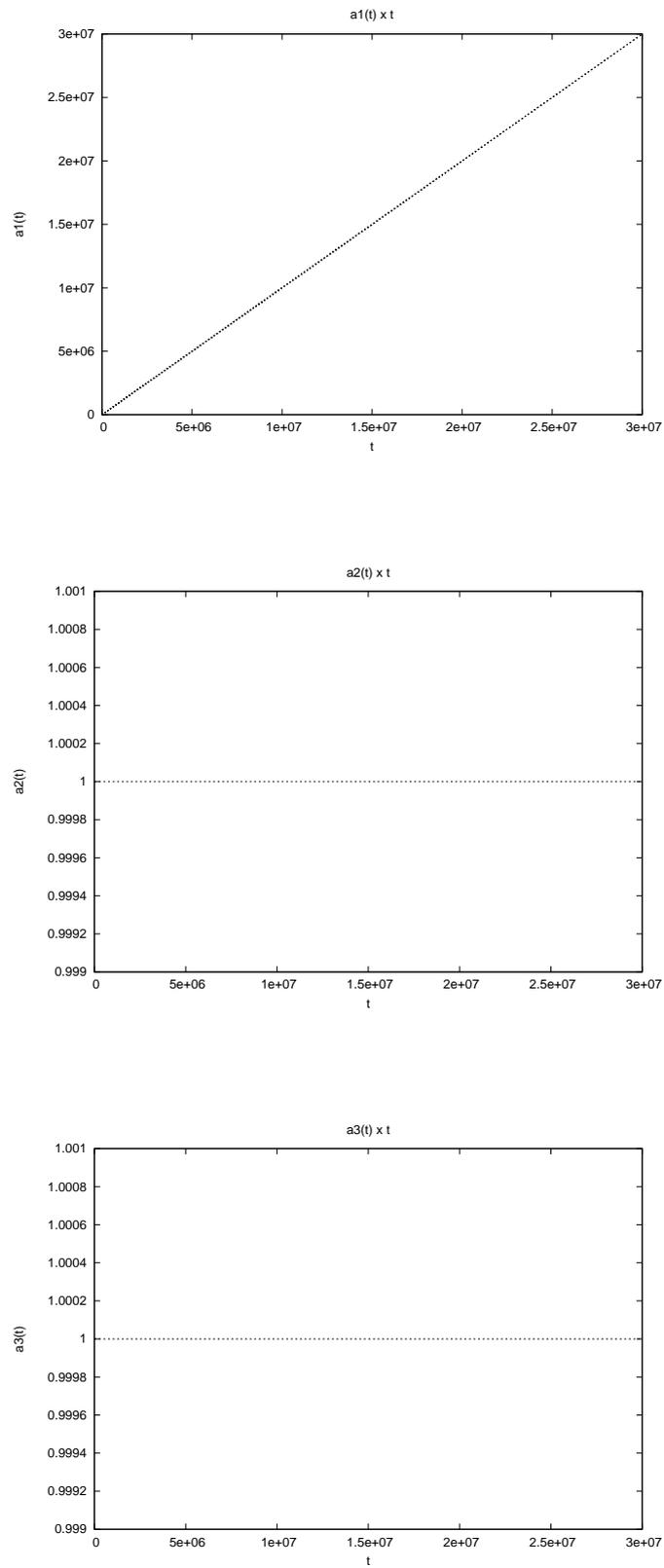
Vemos que a solução numérica do sistema 1 da tabela 5.1 (figura 5.1) representa exatamente o universo descrito por (4.42), estático em duas direções e com expansão

linear na última. Trata-se de um espaço-tempo plano de Minkowski escrito nas coordenadas de *Rindler* ( $t = t' \cosh(x')$ ,  $x = t' \sinh(x')$ ). Substituindo os valores numéricos  $a_\alpha$  em  $\ln(a_\alpha(t_\beta))/\ln(t_\beta) = p_\alpha$  obtemos os  $p_\alpha$  mostrados na figura 5.2, que equivalem à  $(p_1, p_2, p_3) = (1, 0, 0)$ . Esse sistema não apresenta singularidade temporal, o que é certificado pela suavidade do escalar de Riemann  $R^{abcd}R_{abcd}$ , que é mostrado na figura 5.3, juntamente com o escalar de curvatura  $R$  e com o vínculo  $R_{44}$ . Estes dois últimos permanecem constantes dentro da precisão do cálculo.

Na figura 5.4 vemos a evolução temporal numericamente calculada para o sistema 2 da tabela 5.1. Novamente, substituímos os  $a_\alpha$  numericamente calculados em  $\ln(a_\alpha(t_\beta))/\ln(t_\beta) = p_\alpha$  e obtemos os  $p_\alpha$  mostrados na figura 5.5. Dentro da precisão numérica eles equivalem a  $(-1/3, 2/3, 2/3)$ . Isto nos mostra que o sistema 2 modela numericamente o universo (4.43), que tem contração ao longo de uma direção e expansões equivalentes ao longo das duas outras.

Sabemos que a solução (4.43) possui uma singularidade não-eliminável em  $t = 0$ . Para verificar se o modelo numérico está descrevendo essa singularidade, observemos o comportamento do escalar  $R^{abcd}R_{abcd}$  na figura 5.6: ele começa a crescer na direção de  $t = 0$ . Vemos também a flutuação do escalar de curvatura e do vínculo, que indicam uma diminuição da precisão nesta direção, o que também é esperado nos arredores de singularidades. Vamos então considerar uma condição inicial tipo (4.43) para  $t$  mais próximo de zero, substituindo  $t_{inicial} = 1, 0 \cdot 10^{-5}$  em  $(a_1 = t^{-1/3}, a_2 = t^{2/3}, a_3 = t^{2/3})$  e  $(\frac{d}{dt}a_1 = -\frac{1}{3}t^{-4/3}, \frac{d}{dt}a_2 = \frac{2}{3}t^{-1/3}, \frac{d}{dt}a_3 = \frac{2}{3}t^{-1/3})$ . A evolução a partir desta condição inicial e os índices de Kasner associados são mostrados nas figuras 5.7 e 5.8, respectivamente. Vemos que suas evoluções são contínuas com aquelas calculadas a partir da condição inicial 2 da tabela 5.1, exceto pela aparente quebra de continuidade dos  $p_\alpha$  próximo a  $t = 1$ ; na verdade, trata-se apenas de oscilação numérica, como podemos verificar pela suavidade do escalar  $R^{abcd}R_{abcd}$  de Riemann na região de continuidade entre as duas soluções (figura 5.9).

Finalmente, analisando a figura (5.10), vemos a divergência do escalar  $R^{abcd}R_{abcd}$  na direção de  $t = 0$ , mostrando claramente que a solução numérica indica a existência da singularidade neste ponto.

Figura 5.1: Evolução temporal para o sistema 1 de Bianchi VII<sub>0</sub> (tabela 5.1).

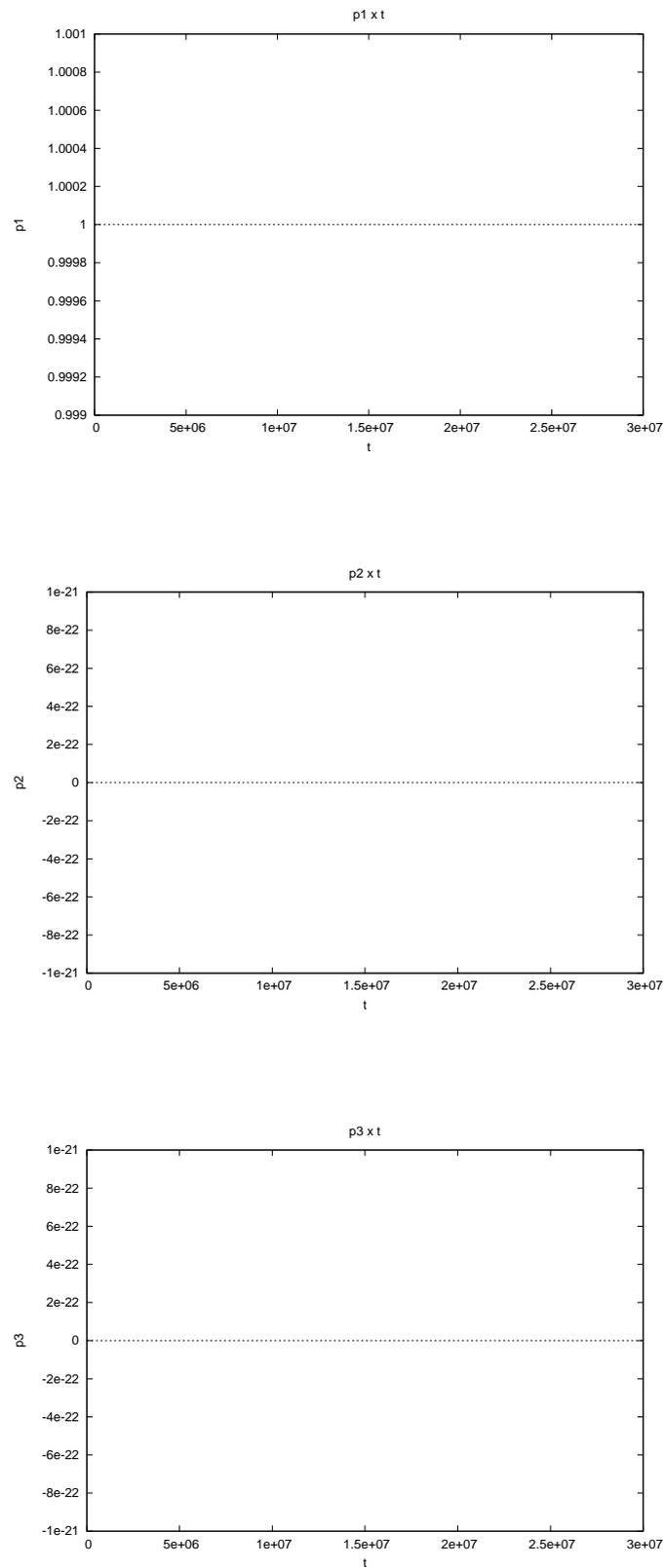


Figura 5.2: Índices de Kasner associados com a evolução do sistema 1 de Bianchi VII<sub>0</sub> (tabela 5.1).

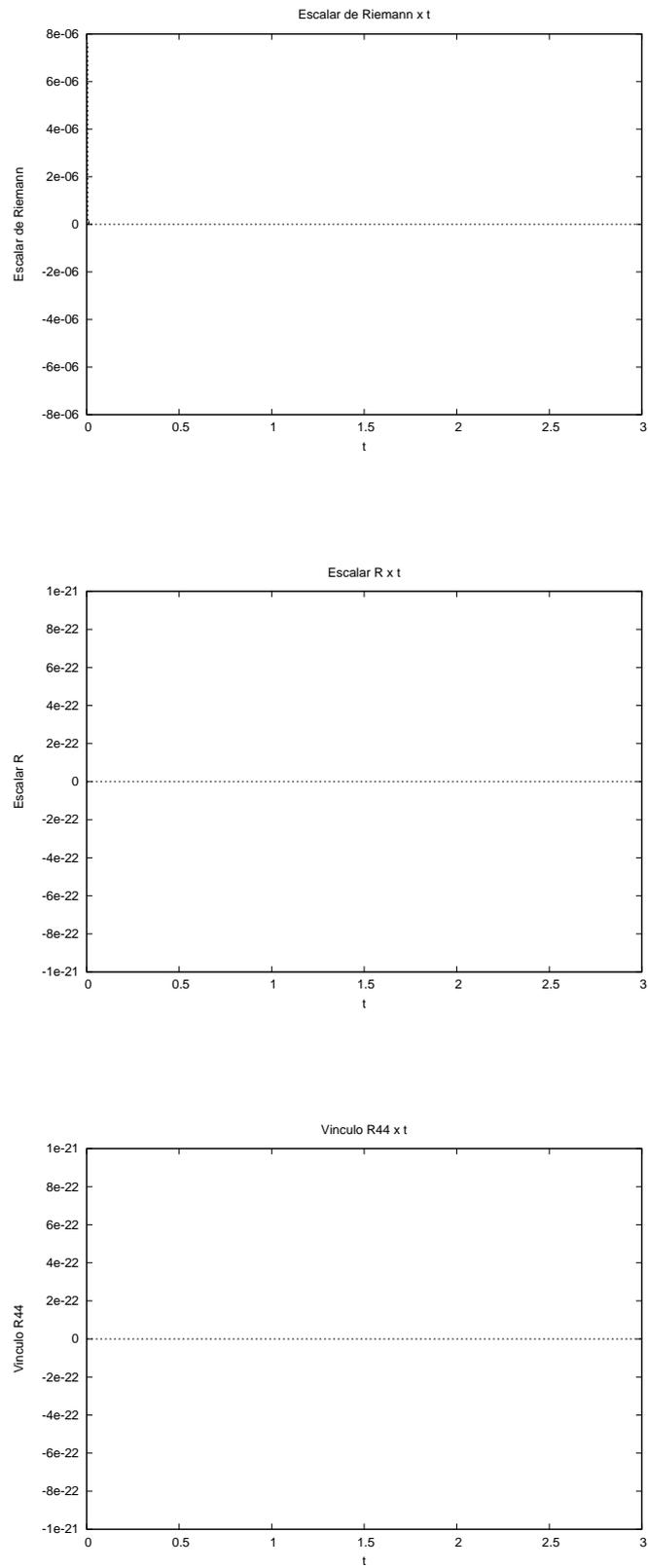
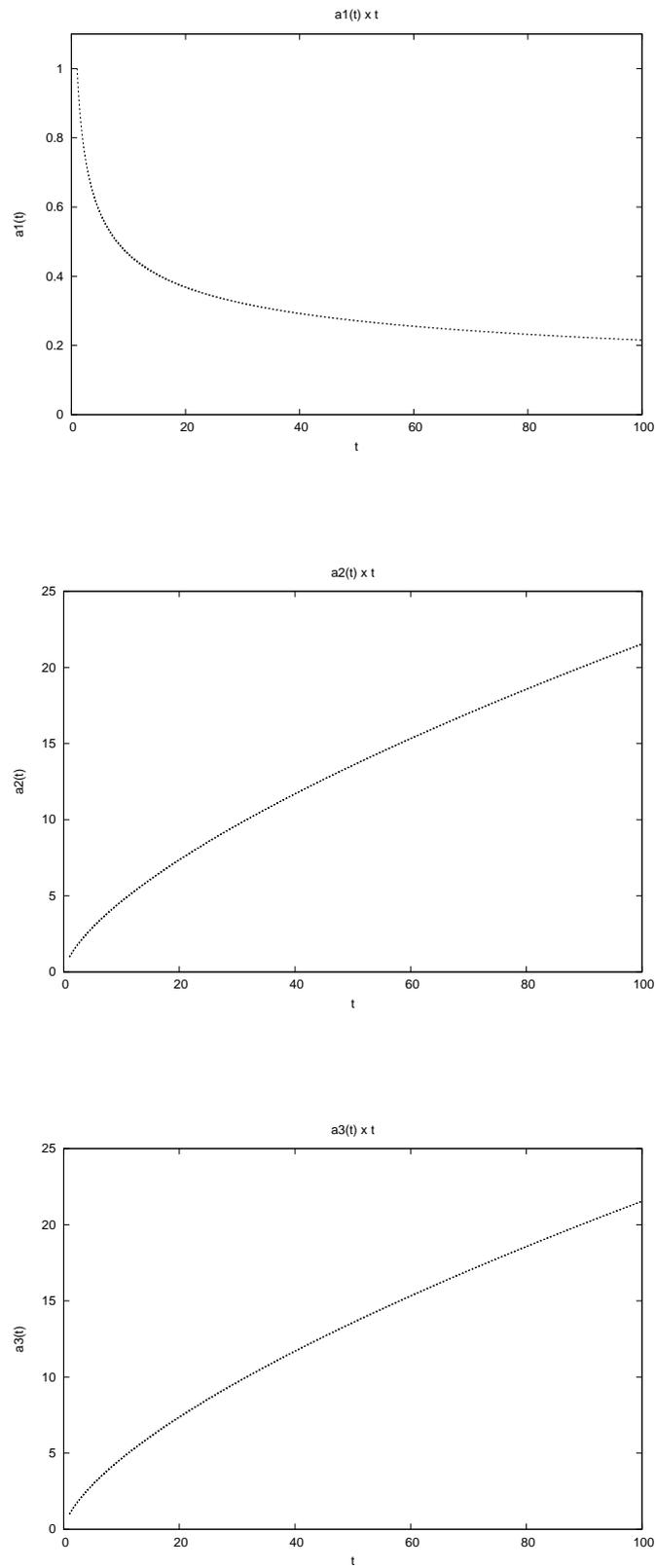


Figura 5.3: Escalar de Riemann  $R^{abcd}R_{abcd}$ , escalar de curvatura  $R$  e vínculo  $R_{44}$  para o sistema 1 de Bianchi VII<sub>0</sub> (tabela 5.1).

Figura 5.4: Evolução temporal para o sistema 2 de Bianchi VII<sub>0</sub> (tabela 5.1).

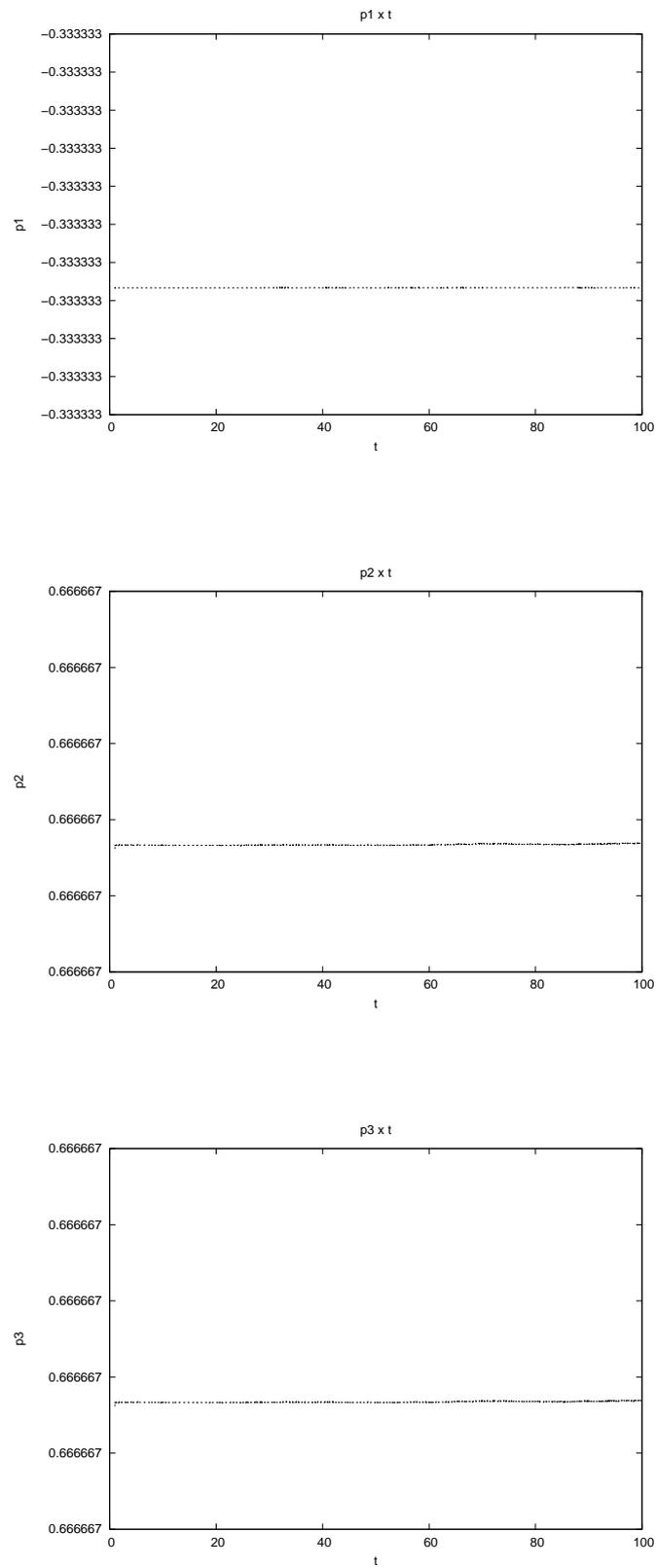


Figura 5.5: Índices de Kasner associados com a evolução do sistema 2 de Bianchi VII<sub>0</sub> (tabela 5.1).

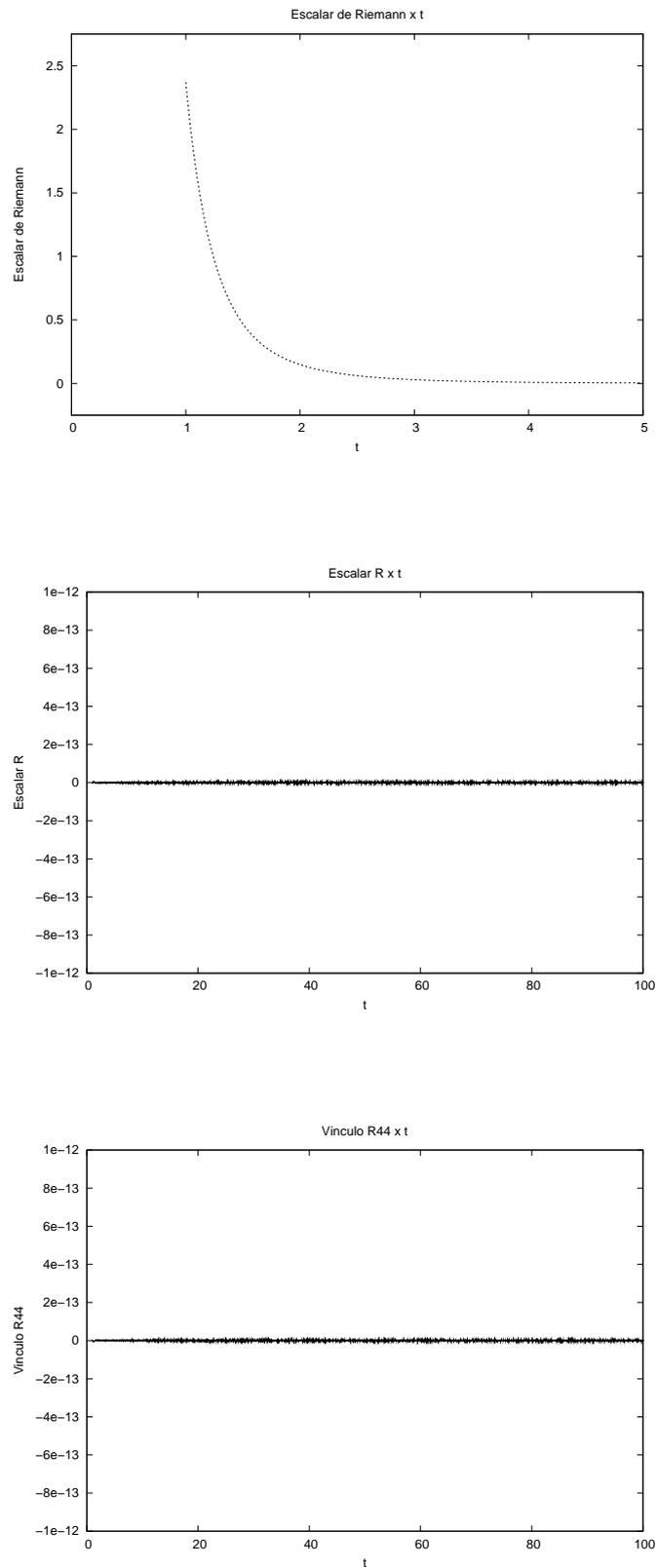


Figura 5.6: Escalar de Riemann  $R^{abcd}R_{abcd}$ , escalar de curvatura  $R$  e vínculo  $R_{44}$  para o sistema 2 de Bianchi VII<sub>0</sub> (tabela 5.1).

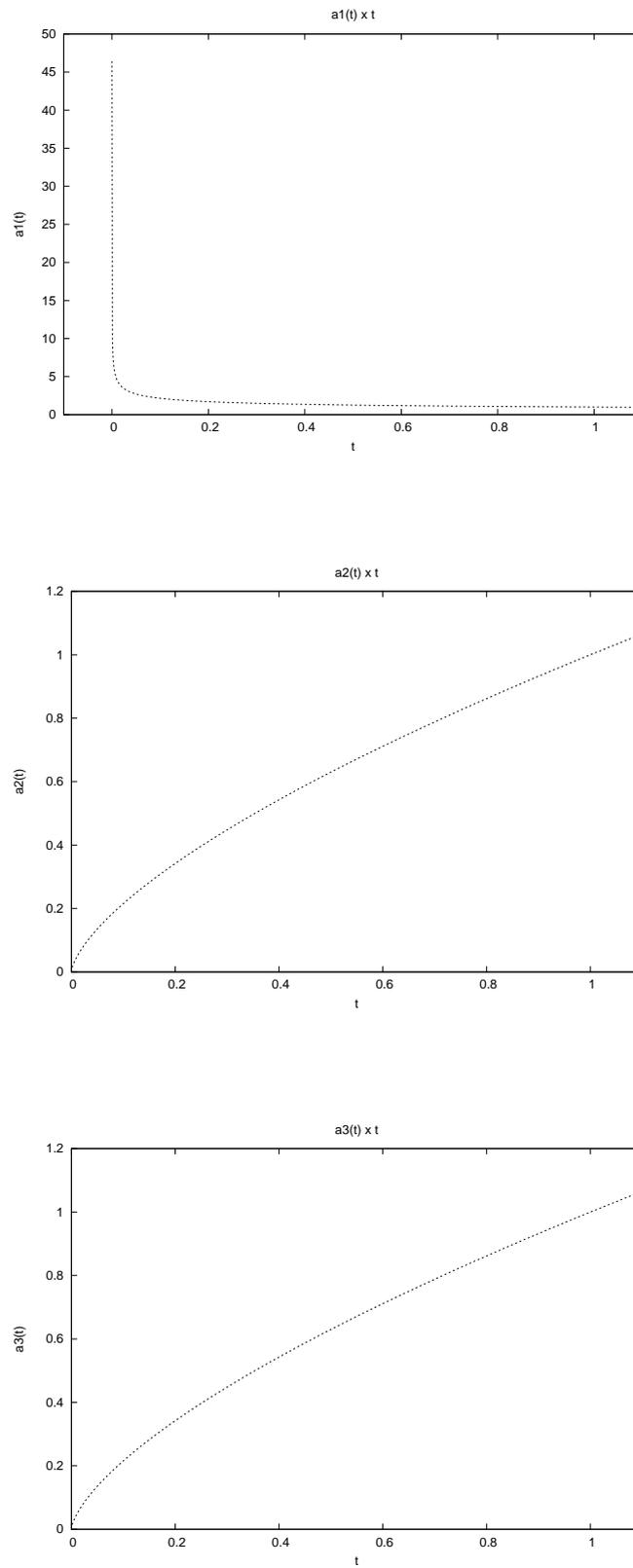


Figura 5.7: Evolução temporal para o sistema 2 de Bianchi VII<sub>0</sub> (tabela 5.1) na região próxima à singularidade.

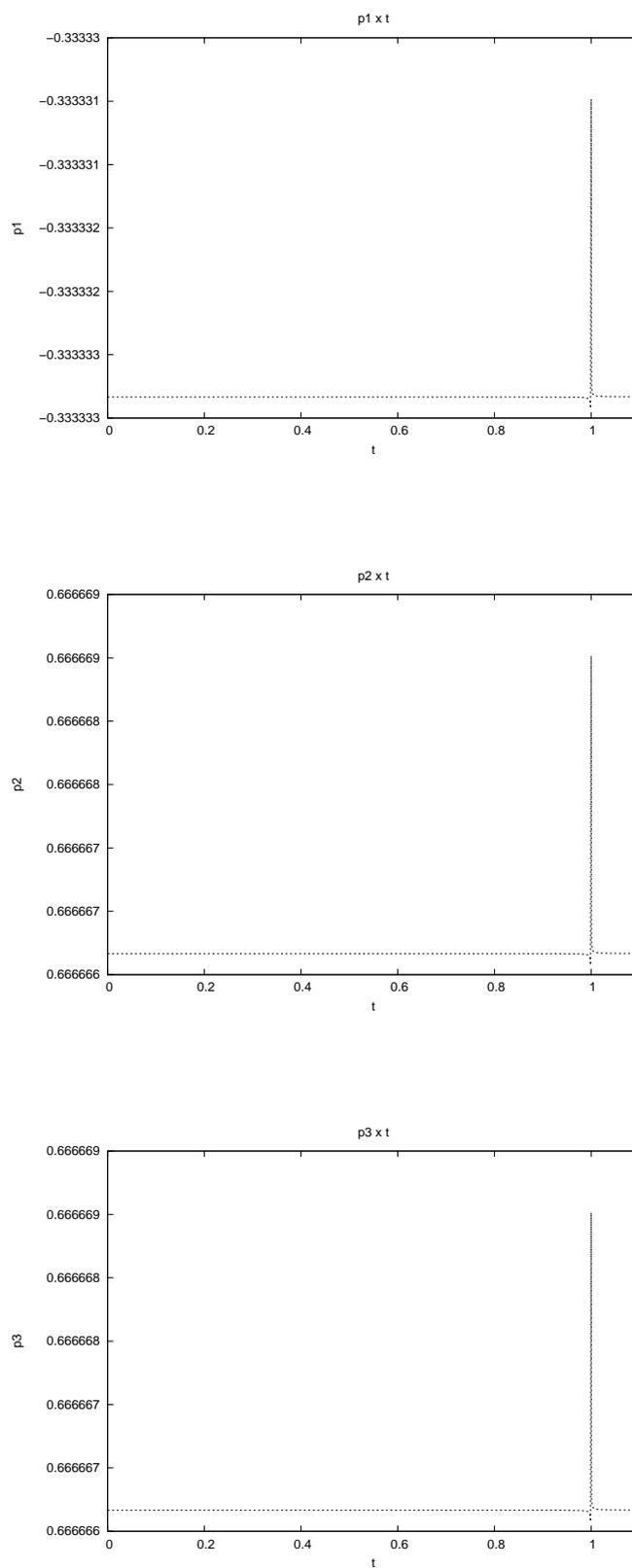


Figura 5.8: Índices de Kasner associados com a evolução do sistema 2 de Bianchi VII<sub>0</sub> (tabela 5.1) na região próxima à singularidade.

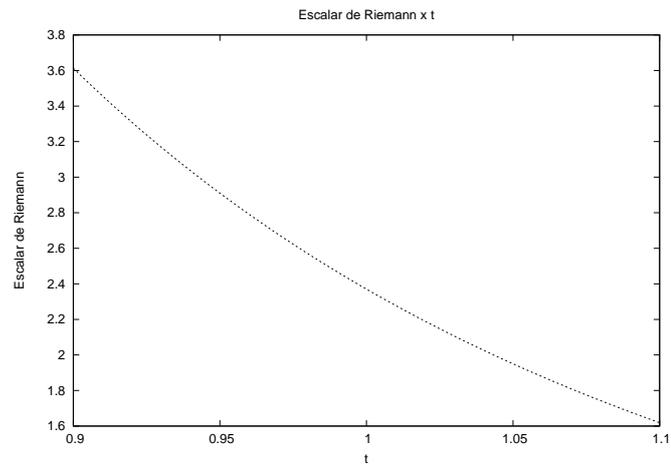


Figura 5.9: Escalar de Riemann  $R^{abcd}R_{abcd}$  para o sistema 2 de Bianchi VII<sub>0</sub> (tabela 5.1) na região de continuidade.

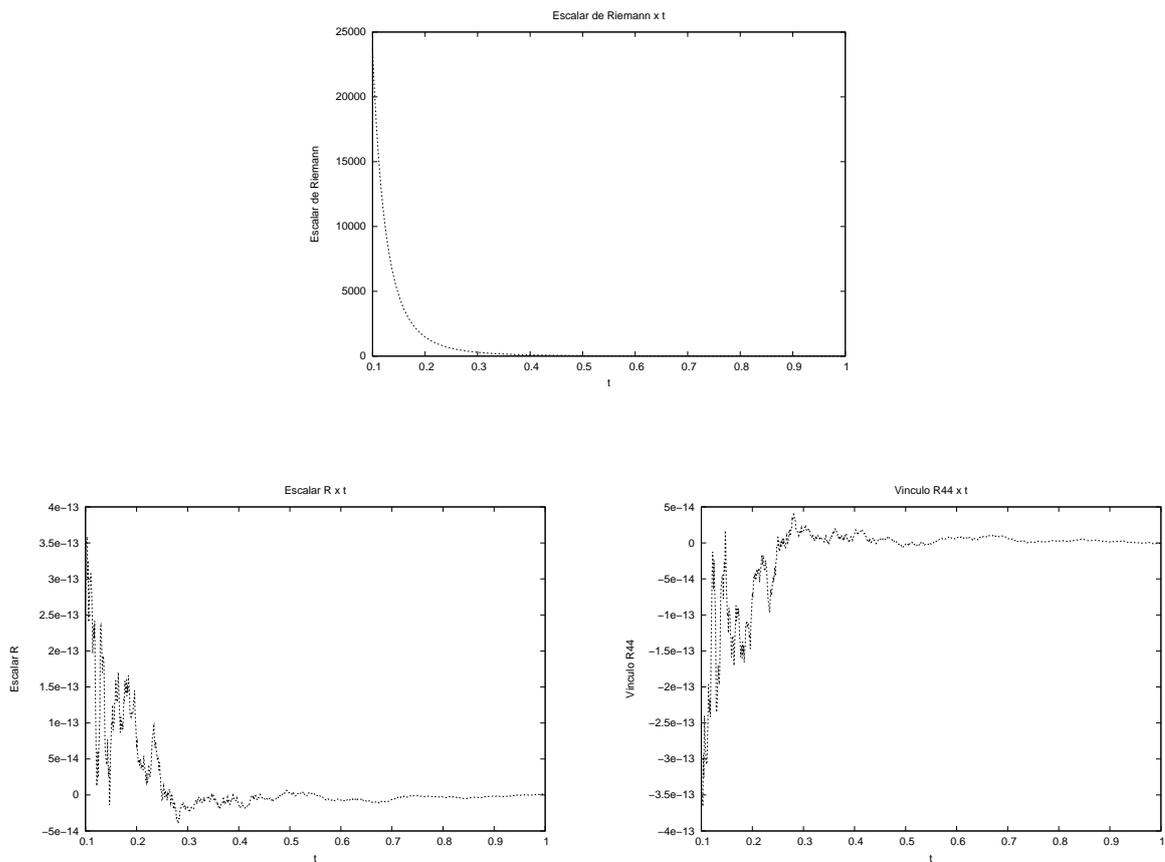


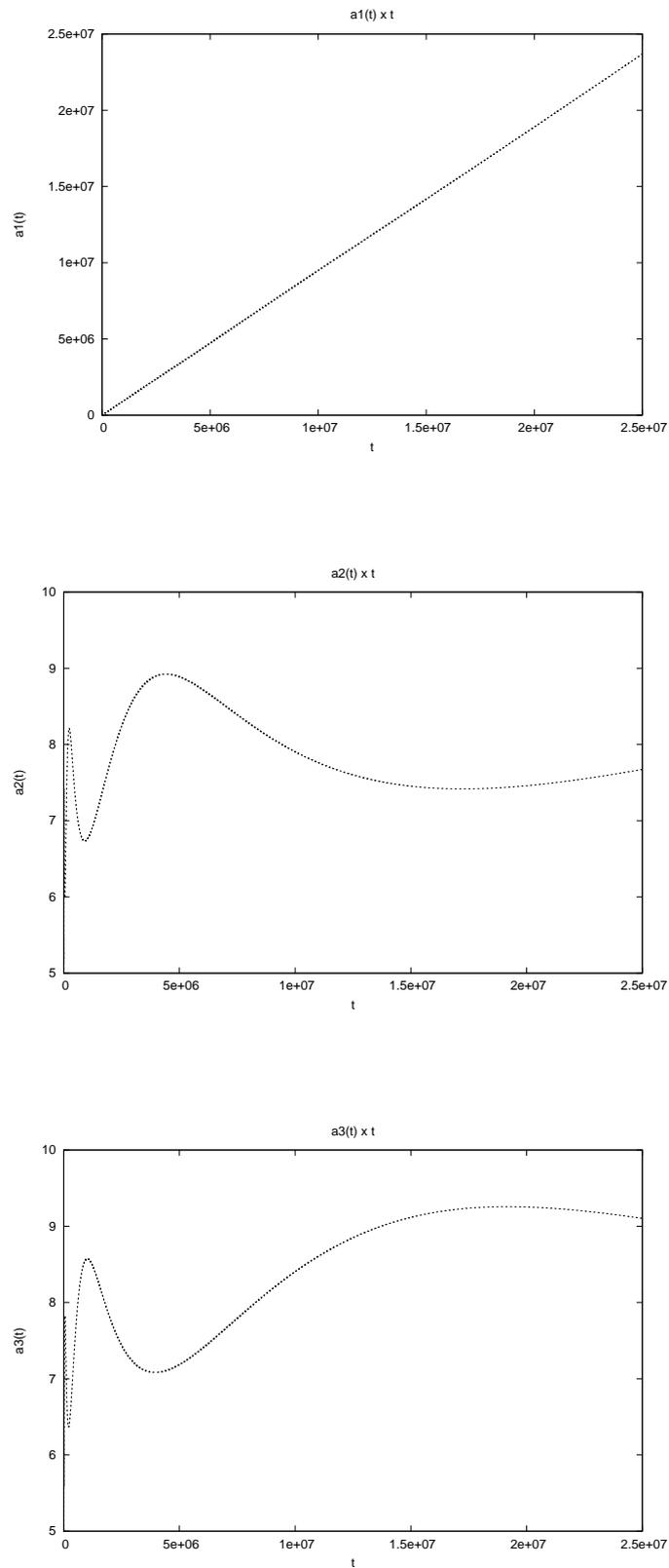
Figura 5.10: Escalar de Riemann  $R^{abcd}R_{abcd}$ , escalar de curvatura  $R$  e vínculo  $R_{44}$  para o sistema 2 de Bianchi VII<sub>0</sub> (tabela 5.1) na região próxima à singularidade.

Os sistemas 1 e 2 (tabela 5.1) possuem condições iniciais obedecendo  $a_2(t_{inicial}) = a_3(t_{inicial})$ . Bianchi VII<sub>0</sub> não necessariamente precisa obedecer este tipo de condição. Vamos agora analisar os sistemas 3 e 4, que possuem condições iniciais com  $a_2(t_{inicial}) \neq a_3(t_{inicial})$ .

As evoluções temporais para os sistemas 3 (figura 5.11) e 4 (figura 5.13) da tabela 5.1 mostram que ambos possuem expansão linear em uma direção, predominante em relação às outras.

Para o sistema 3, o escalar de Riemann  $R^{abcd}R_{abcd}$  apresenta uma queda negativa, mas não muito acentuada, na proximidade de  $t = 0$ ; o escalar de curvatura e o vínculo demonstram apenas ruído numérico (figura 5.12). Uma vez que a condição inicial foi bem definida em  $t = 0$ , podemos esperar que, se existe uma singularidade, ela se encontra antes da condição inicial testada.

Para o sistema 4, o escalar de Riemann  $R^{abcd}R_{abcd}$  sofre um decaimento bastante acentuado na proximidade de  $t = 0$ , indicando aparentemente a existência de uma singularidade neste ponto.

Figura 5.11: Evolução temporal para o sistema 3 de Bianchi  $VII_0$  (tabela 5.1).

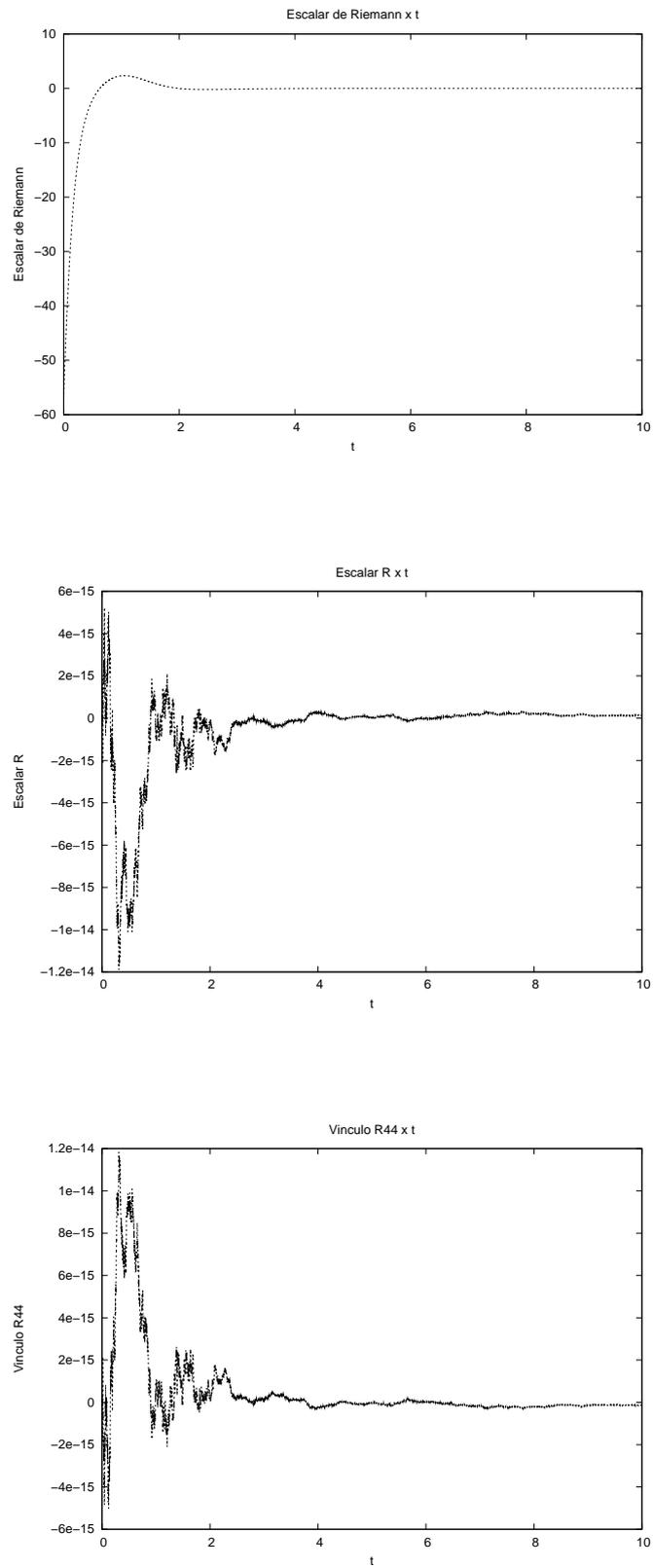
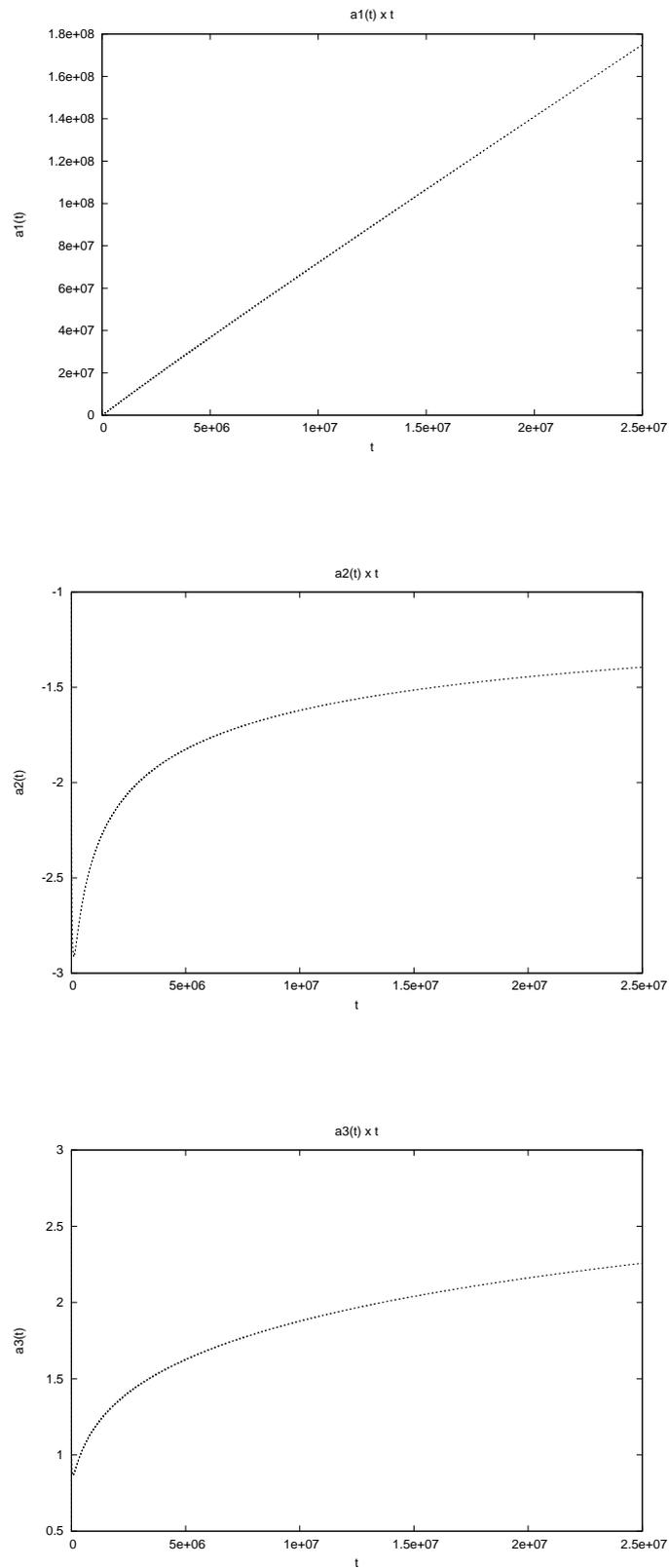


Figura 5.12: Escalar de Riemann  $R^{abcd}R_{abcd}$ , escalar de curvatura  $R$  e vínculo  $R_{44}$  para o sistema 3 de Bianchi VII<sub>0</sub> (tabela 5.1).

Figura 5.13: Evolução temporal para o sistema 4 de Bianchi  $VII_0$  (tabela 5.1).

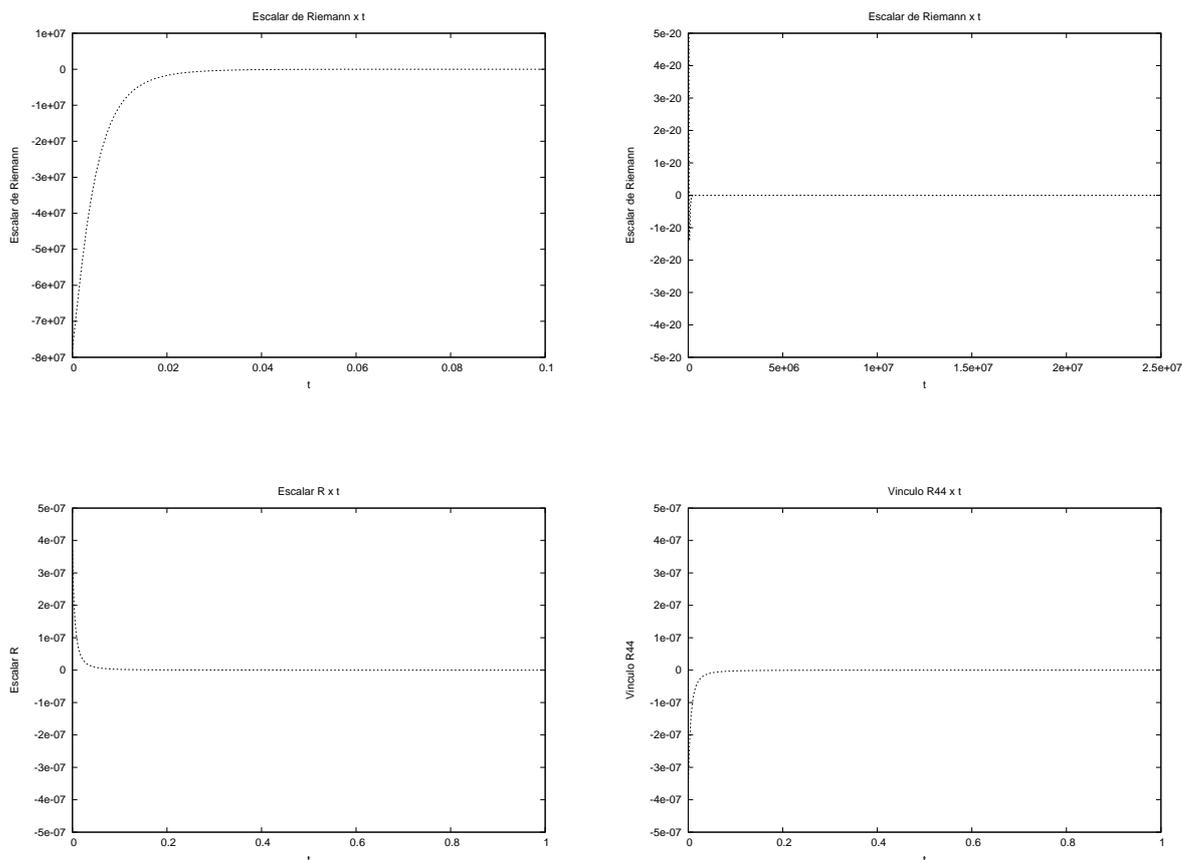


Figura 5.14: Escalar de Riemann  $R^{abcd}R_{abcd}$ , escalar de curvatura  $R$  e vínculo  $R_{44}$  para o sistema 4 de Bianchi VII<sub>0</sub> (tabela 5.1).

### 5.3 Solução Numérica para Bianchi VII<sub>A</sub>

Para o tipo VII<sub>A</sub> de Bianchi com métrica diagonal (4.44) já demonstramos as soluções analíticas lineares (4.55-4.57). Tais soluções são um tanto particulares, e por isso vamos nos concentrar na solução numérica de um caso mais geral, o tipo Bianchi VII<sub>A</sub> com métrica não-diagonal (4.45).

Alternativamente, vamos procurar condições iniciais diagonais para (4.45) que mantenham a diagonalidade durante a evolução do sistema, de modo a verificar sua similaridade com (4.55).

O sistema de equações diferenciais para a solução de vácuo de um espaço-tempo obedecendo (4.45) é mostrado no apêndice A, juntamente com os vínculos.

#### 5.3.1 Solução para Condição Inicial Não-Diagonal

Vamos simular um sistema com a condição inicial mostrada na tabela 5.3.

Tabela 5.3: Condições iniciais para sistema Bianchi VII<sub>A</sub> com métrica não-diagonal.

$A$	0,1
$t_{inicial}$	$1, 0.10^{-5}$
$a_1(t_{inicial})$	0,002451250000000000000000
$a_2(t_{inicial})$	0,994227631397922072628
$a_3(t_{inicial})$	0,109856219562202721010
$a_4(t_{inicial})$	0,0459954479760918211611
$\frac{d}{dt}a_1(t_{inicial})$	245,12500000000000000000
$\frac{d}{dt}a_2(t_{inicial})$	59,4330465162375172080
$\frac{d}{dt}a_3(t_{inicial})$	-166,324152470685908958
$\frac{d}{dt}a_4(t_{inicial})$	-394,582806512352940054

Tal condição inicial foi obtida fazendo  $t_{inicial} = 1, 0.10^{-5}$ ,  $A = 0, 1$ ,  $f = 0, 1$  e  $r = 0, 407955124936257011728.10^{-3}$  em (4.62-4.65), novamente com o objetivo de obter a comparação entre a solução analítica e a numérica (figura 5.15). De forma concordante, a solução numérica reproduz a solução da onda plana de Lukash (4.62-4.65), que se expande linearmente na primeira direção e é praticamente estática nas outras.

Analisando o escalar de Riemann  $R^{abcd}R_{abcd}$  (figura 5.16) vemos a notória indicação de singularidade para  $t = 0$ , o que é corroborado pelo comportamento do escalar de curvatura  $R$  e dos vínculos nas proximidades (figura 5.16).

Em outras simulações, nós analisamos também condições iniciais não tão próximas à singularidade, tais como  $t_{inicial} = 1$  e  $t_{inicial} = 10$ . Tais soluções se aproximam da solução de Lukash com maior precisão do que a simulação demonstrada. Isso pode indicar um excessivo erro numérico associado a um  $t_{inicial}$  muito pequeno. Optamos, no entanto, por resolver um  $t_{inicial}$  pequeno para verificar a indicação de singularidade.

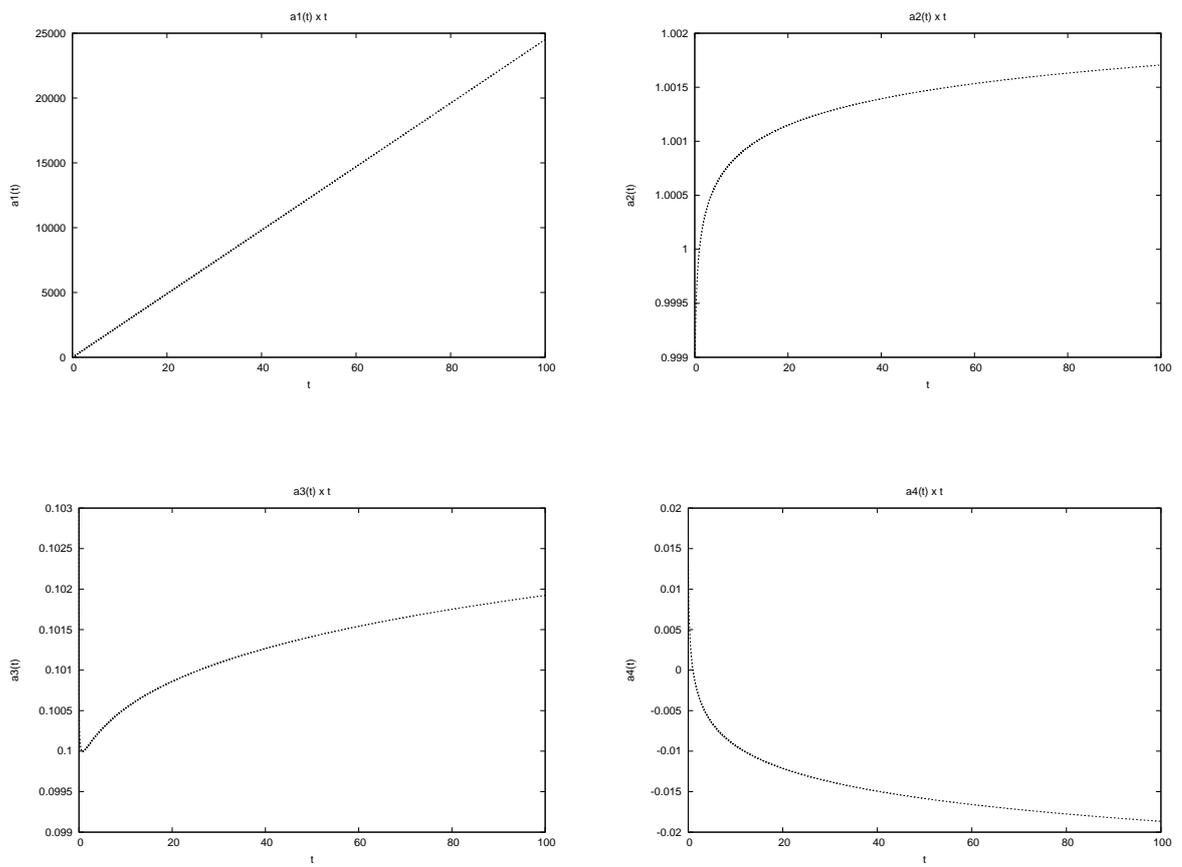


Figura 5.15: Evolução temporal para o sistema de métrica não-diagonal de Bianchi VII<sub>A</sub> (tabela 5.3).

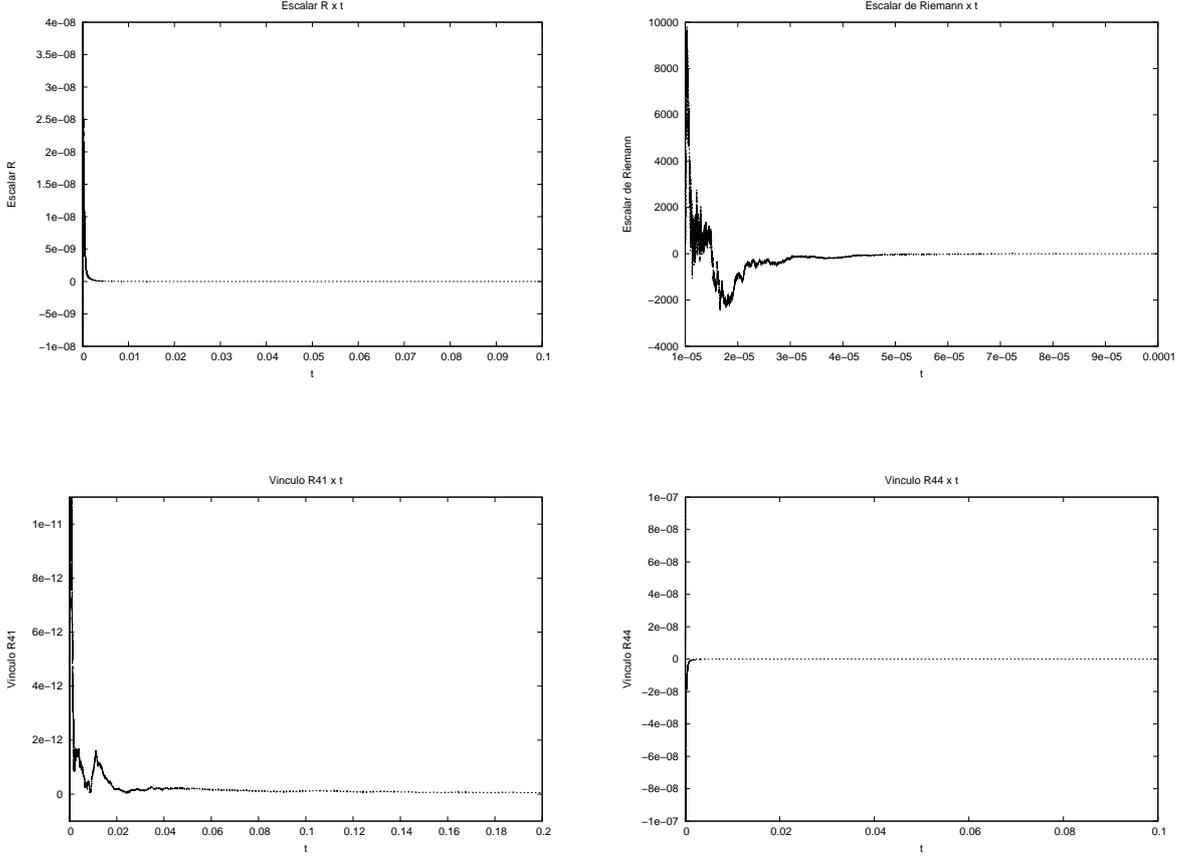


Figura 5.16: Escalares e vínculos para o sistema de métrica não-diagonal de Bianchi VII<sub>A</sub> (tabela 5.3).

### 5.3.2 Solução para Condição Inicial Diagonal

Vamos supor condições iniciais diagonais, com  $a_4(t_{inicial}) = \frac{d}{dt}a_4(t_{inicial}) = 0$ , e verificar a subsequente evolução do sistema. Cada novo ponto na evolução de um sistema é também uma condição inicial do sistema. Para uma evolução diagonal, esperamos que  $a_2(t) = a_3(t)$ , conforme (4.49). Então usaremos diretamente essa igualdade na condição inicial.

Vamos agora verificar como os vínculos são obedecidos por tais condições iniciais. Os vínculos  $R_{44}$  e  $R_{41}$  para Bianchi VII<sub>A</sub> com métrica não-diagonal são mostrados no apêndice A. A imposição da condição inicial diagonal  $a_4(t_{inicial}) = \frac{d}{dt}a_4(t_{inicial}) = 0$ ,  $a_2(t_{inicial}) = a_3(t_{inicial})$  e  $\frac{d}{dt}a_2(t_{inicial}) = \frac{d}{dt}a_3(t_{inicial})$  satisfaz os vínculos se

$$a_1(t_{inicial}) \frac{d}{dt}a_2(t_{inicial}) = a_2(t_{inicial}) \frac{d}{dt}a_1(t_{inicial}) \quad (5.6)$$

e

$$\left| \frac{d}{dt}a_1(t_{inicial}) \right| = A. \quad (5.7)$$

Para um caso mais particular, isotrópico ( $a_1(t_{inicial}) = a_2(t_{inicial})$ ;  $\frac{d}{dt}a_1(t_{inicial}) = \frac{d}{dt}a_2(t_{inicial})$ ), basta que  $|\frac{d}{dt}a_1(t_{inicial})| = A$ . No entanto, será que satisfazer os vínculos diagonais nas condições iniciais garante uma evolução diagonal do sistema? De fato, podemos verificar que, uma vez obedecido  $a_4(t_{inicial}) = \frac{d}{dt}a_4(t_{inicial}) = 0$ , também  $\frac{d^2}{dt^2}a_4(t) = 0$ , e resulta daí que  $a_4(t) = \frac{d}{dt}a_4(t) = 0$  para todo  $t$  na evolução. Portanto,  $a_4(t) = 0$  também constitui um vínculo do sistema, que garante a evolução diagonal.

Consideremos dois sistemas de estudo (tabela 5.5), sendo que o último obedece condição inicial isotrópica.

Tabela 5.5: Condições iniciais diagonais para Bianchi VII<sub>A</sub> com métrica não-diagonal.

Sistema	$A$	$a_1(0)$	$a_2(0)$	$a_3(0)$	$a_4(0)$	$\frac{d}{dt}a_1(0)$	$\frac{d}{dt}a_2(0)$	$\frac{d}{dt}a_3(0)$	$\frac{d}{dt}a_4(0)$
Sistema 1	0,2	2,0	1,0	1,0	0,0	0,2	0,1	0,1	0,0
Sistema 2	0,1	1,0	1,0	1,0	0,0	0,1	0,1	0,1	0,0

A partir das soluções destes sistemas, nota-se que ambos se expandem linearmente nas três direções (figuras 5.17 e 5.19). O primeiro evolue igualmente ao longo de duas direções e diferentemente ao longo da outra (figura 5.17). Uma simples verificação indica que o sistema 1 da tabela 5.5 modela a solução (4.55) com  $(C_1; C_2; A) = (2, 0; 0, 5; 0, 2)$ . O último sistema resolvido se expande igualmente de forma linear nas três direções com isotropia espacial (figura 5.19). Trata-se, portanto, de um modelo cosmológico homogêneo e isotrópico. Uma verificação mostra que o sistema 2 da tabela 5.5 também modela a solução (4.55) com  $(C_1; C_2; A) = (1, 0; 1, 0; 0, 1)$ , e representa um universo de *Milne* [15].

Os vínculos para os dois sistemas são mantidos dentro de um erro numérico aceitável, e os escalares de Riemann  $R^{abcd}R_{abcd}$  e de curvatura  $R$  não indicam qualquer comportamento anômalo (figuras 5.18 e 5.20). A evolução de  $a_4(t)$  para os dois sistemas (tabela 5.5) oscila em torno de zero numa aproximação de 14 casas decimais (figuras 5.17 e 5.19).

Outras condições iniciais testadas mostraram, com parâmetro  $A < 1$ , um comportamento de  $a_4(t)$  similar aos sistemas 1 e 2. Para  $A \geq 1$ , mostraram comportamentos instáveis no intervalo, às vezes evoluindo para uma rápida violação dos vínculos. Parece, portanto, que condições iniciais tais que o parâmetro  $A$  é pequeno produzem menos erros numéricos do que aquelas em que  $A$  é maior. É necessário um estudo mais rigoroso sobre esse papel do parâmetro  $A$  na evolução numérica do sistema.

As condições iniciais testadas foram escolhidas genericamente dentro da restrição dos vínculos, e todas conduziram a uma solução linear compatível com (4.55). Verificar a existência ou não de soluções diagonais mais gerais que essa (por exemplo, uma evolução diagonal não linear) será alvo de um estudo futuro.

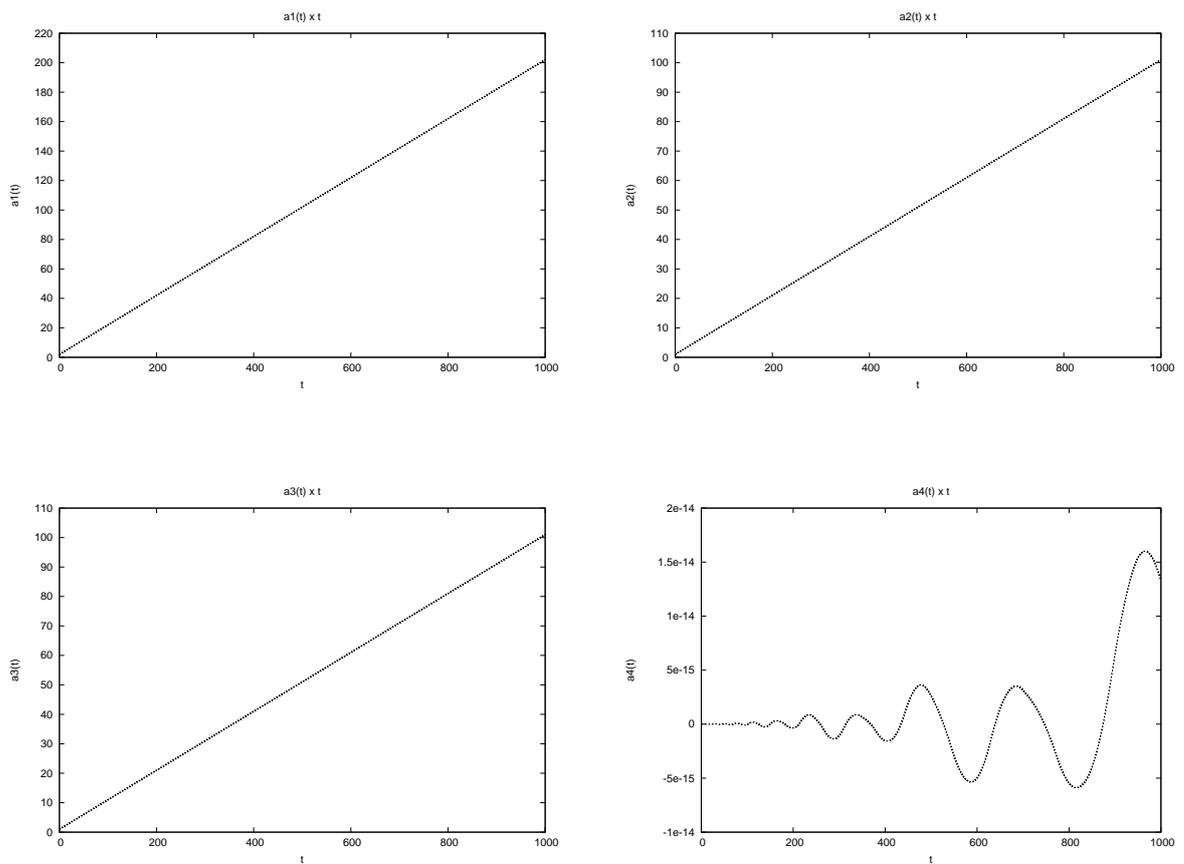


Figura 5.17: Evolução temporal para o sistema 1 de Bianchi VII<sub>A</sub> com condição inicial diagonal (tabela 5.5).

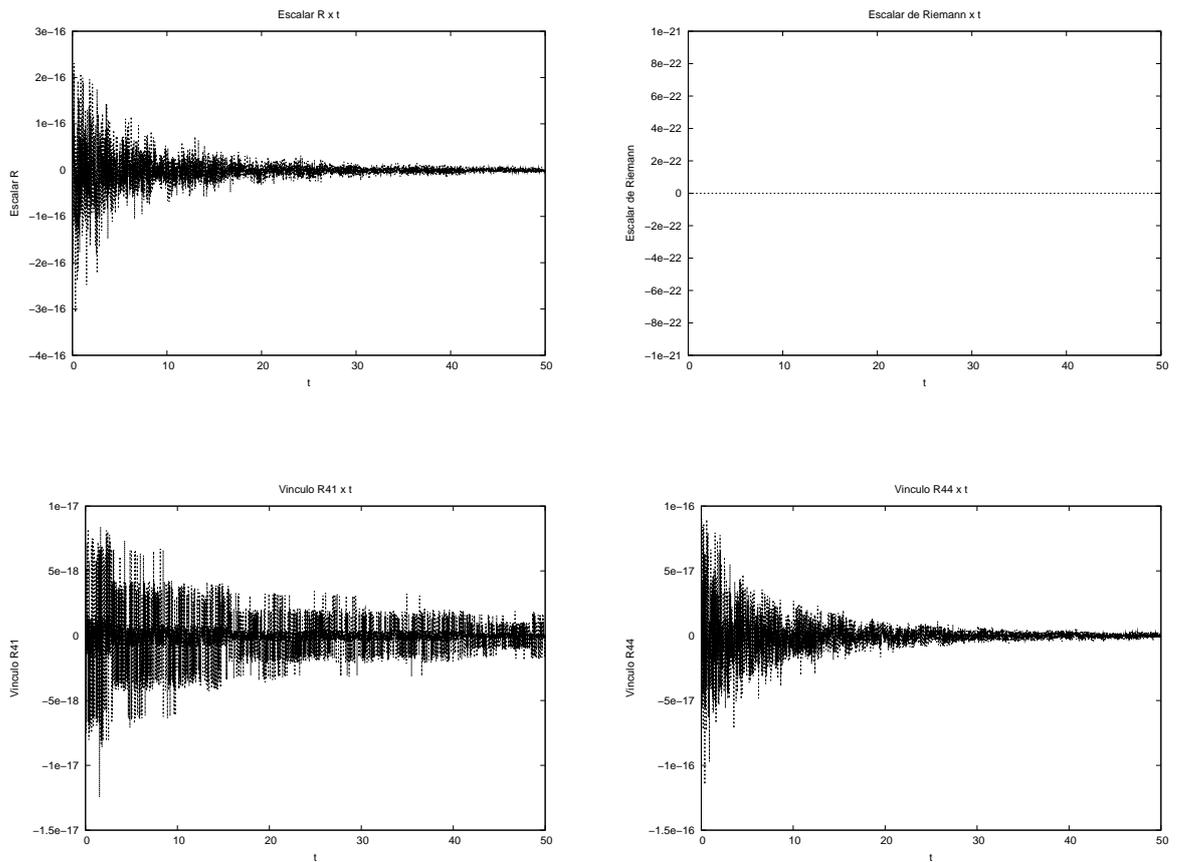


Figura 5.18: Escalares e vínculos para o sistema 1 de Bianchi VII<sub>A</sub> com condição inicial diagonal (tabela 5.5).

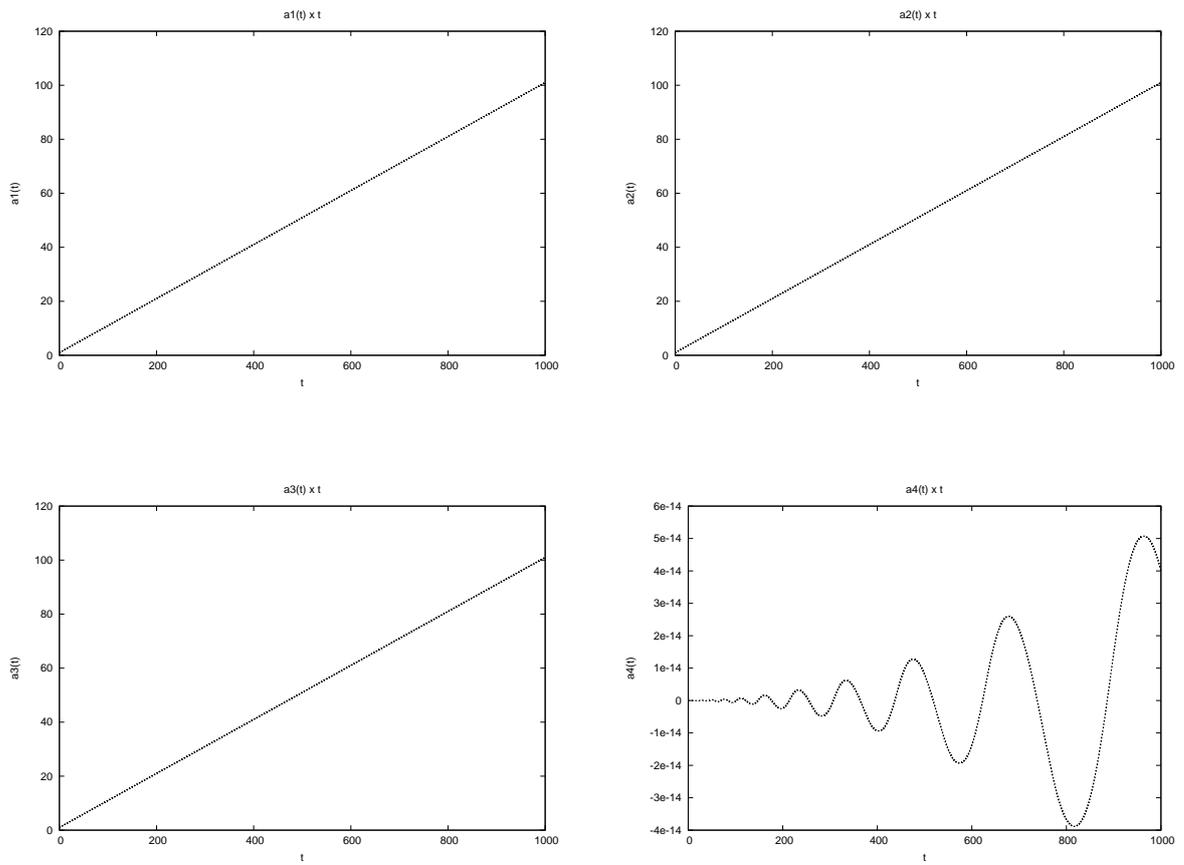


Figura 5.19: Evolução temporal para o sistema 2 de Bianchi VII<sub>A</sub> com condição inicial diagonal (tabela 5.5).

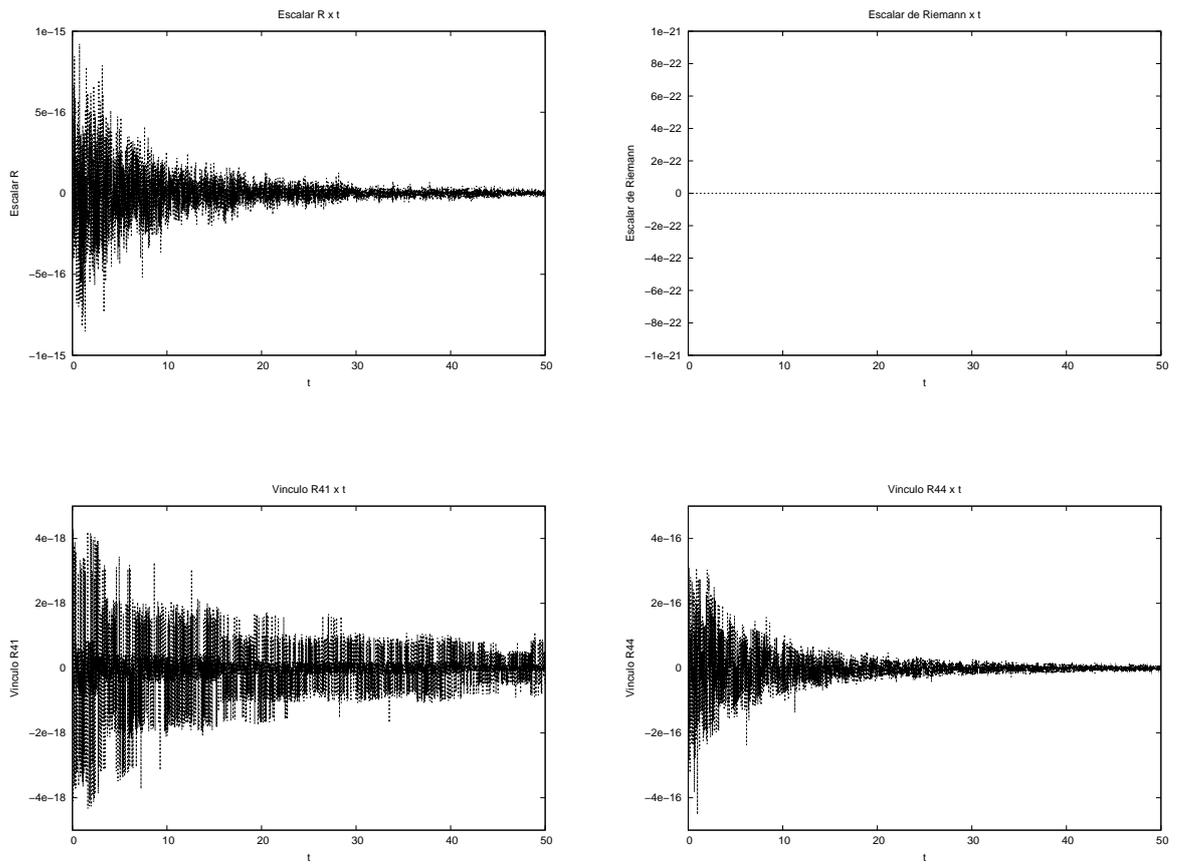


Figura 5.20: Escalares e vínculos para o sistema 2 de Bianchi VII<sub>A</sub> com condição inicial diagonal (tabela 5.5).

# Capítulo 6

## Conclusões e Perspectivas

Ao longo deste trabalho, mostramos como desenvolver um formalismo tetrádico capaz de descrever modelos cosmológicos homogêneos. Esse formalismo foi descrito em termos de bases gerais definidas pela relação de comutação dos grupos homogêneos de Lie e classificadas pelos modelos cosmológicos de Bianchi.

Nos concentramos em soluções de vácuo, que são as mais naturais para descrever o universo próximo ao seu surgimento. Também é nesse regime que modelos cosmológicos anisotrópicos, tais como Bianchi, se apresentam como boas alternativas.

Obtivemos as equações de campo para soluções de vácuo dos tipos I, VII e IX de Bianchi, supondo uma métrica diagonal. Também averiguamos o caso VII<sub>A</sub> com uma métrica não-diagonal. Na determinação das soluções numéricas nos concentramos apenas no caso de Bianchi VII.

Para Bianchi VII<sub>0</sub> mostramos as soluções analíticas particulares (4.42) e (4.43), que descrevem um espaço-tempo com comportamento particular de Kasner: a primeira de um espaço-tempo sem instante de singularidade, com expansão linear numa direção e estático nas outras; a segunda de um espaço-tempo com expansão em duas direções e contração na outra, com singularidade em  $t = 0$ . Posteriormente, estas duas soluções particulares foram numericamente obtidas. Tais resultados numéricos de soluções conhecidas servem, principalmente, para testar a eficiência do método numérico: ele se mostrou confiável para determinar o comportamento da evolução e a aproximação da singularidade. Para condições iniciais mais gerais, obtivemos originalmente soluções de espaços-tempos com expansões lineares numa direção, predominante em relação às outras, quase estáticas.

Para Bianchi VII<sub>A</sub> com métrica diagonal, calculamos de forma original a solução analítica (4.55), que representa um universo plano com expansão linear anisotrópica. Posteriormente foi numericamente obtida para um estudo de evoluções diagonais.

Para Bianchi VII<sub>A</sub> com métrica não-diagonal, comparamos nossa solução numérica com a solução da onda plana de Lukash (4.62-4.65). Neste teste o cálculo numérico se mostrou menos preciso para condições iniciais próximas à singularidade, o que acreditamos se tratar de uma maior sensibilidade numérica à tais condições iniciais.

Testamos também condições iniciais diagonais para este último caso. Verificamos que as possíveis condições iniciais diagonais são bem definidas (restringidas) pelos vínculos, isto é, nossa liberdade de escolha de condições iniciais diagonais deve se restringir a (5.6) e (5.7). De fato verificamos que as condições iniciais diagonais testadas numericamente resultaram num espaço-tempo com expansão linear ao longo de todas as direções, sem singularidades. Neste mesmo teste verificamos também a evolução linear homogênea e isotrópica do universo para uma condição inicial diagonal isotrópica. Portanto, em todos os casos, isotrópico ou não, a solução numérica diagonal resultou na solução linear (4.55) que havíamos calculado analiticamente. Mostrar a existência ou a inexistência de condições iniciais diagonais que evoluam para uma solução mais geral que a solução linear (4.55) é alvo de um estudo futuro mais rigoroso.

Por fim, mencionamos que de acordo com [2], qualquer solução Bianchi VII ortogonal é assintoticamente do tipo Kasner, onda plana ou Milne, o que reafirma os resultados que encontramos. No entanto, até onde sabemos, as soluções que calculamos dadas por (4.43) e (4.55) aparentemente ainda não foram obtidas explicitamente na literatura pelo método com o qual as obtivemos neste trabalho.

Como perspectiva de estudos futuros, temos a pretensão de aprofundar nossa investigação sobre as soluções numéricas dos universos de Bianchi, assim como refinar o método de tratamento de condições iniciais, na busca de conjuntos de condições iniciais que resultem em soluções com características especiais. Neste contexto pretendemos investigar numericamente o efeito atrator da onda plana de Lukash [13, 2], a relação entre as condições iniciais e os potenciais que implicam nas transições BKL do regime de Kasner [4, 15], incluindo a averiguação de fractais nas condições iniciais para a solução de saída [21]. Pretendemos também acrescentar o formalismo hamiltoniano ao desenvolvimento de nossos estudos. Outras perspectivas interessantes partem para a análise da isotropização do modelo e da inclusão de matéria, em adição a solução de vácuo.

# Apêndice

# Apêndice A

## Equações de Campo da Métrica Não-Diagonal

A solução de vácuo para o espaço-tempo homogêneo com métrica não-diagonal síncrona (4.45) resulta no seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} R_{11} = & \frac{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} + a_1(t) \frac{d^2}{dt^2} a_1(t) \\ & - \frac{a_1(t) \left(\frac{d}{dt} a_1(t)\right) a_4(t) \frac{d}{dt} a_4(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} - 2 \frac{(a_4(t))^2}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} \\ & - 1/2 \frac{(a_3(t))^4}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} + \frac{a_1(t) \left(\frac{d}{dt} a_1(t)\right) (a_2(t))^2 a_3(t) \frac{d}{dt} a_3(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} \\ & - 1/2 \frac{(a_2(t))^4}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} + 2 \frac{(a_4(t))^2 A^2}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} - \\ & - 2 \frac{(a_3(t))^2 (a_2(t))^2 A^2}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} + \frac{a_1(t) \left(\frac{d}{dt} a_1(t)\right) (a_3(t))^2 a_2(t) \frac{d}{dt} a_2(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} = 0, \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
 R_{14} = & 2 \frac{\left(\frac{d}{dt}a_1(t)\right) (a_3(t))^2 (a_2(t))^2 A}{a_1(t) \left((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2\right)} - 2 \frac{\left(\frac{d}{dt}a_1(t)\right) (a_4(t))^2 A}{a_1(t) \left((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2\right)} \\
 & - \frac{(a_3(t))^2 a_2(t) A \frac{d}{dt}a_2(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} + \frac{a_4(t) A \frac{d}{dt}a_4(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} \\
 & - 1/2 \frac{(a_3(t))^2 \frac{d}{dt}a_4(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} + \frac{a_4(t) a_3(t) \frac{d}{dt}a_3(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} \\
 & - \frac{a_4(t) a_2(t) \frac{d}{dt}a_2(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} + 1/2 \frac{(a_2(t))^2 \frac{d}{dt}a_4(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} \\
 & - \frac{a_3(t) (a_2(t))^2 A \frac{d}{dt}a_3(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} = 0,
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
 R_{22} = & \frac{\left(\frac{d}{dt}a_1(t)\right) a_2(t) \frac{d}{dt}a_2(t)}{a_1(t)} + 1/2 \frac{(a_4(t))^2 (a_3(t))^2}{(a_1(t))^2 \left((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2\right)} \\
 + 3/2 & \frac{(a_4(t))^2 (a_2(t))^2}{(a_1(t))^2 \left((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2\right)} + 1/2 \frac{(a_2(t))^6}{(a_1(t))^2 \left((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2\right)} \\
 & - \frac{(a_2(t))^2 A^2}{(a_1(t))^2} - 2 \frac{a_4(t) A}{(a_1(t))^2} - 1/2 \frac{(a_3(t))^2}{(a_1(t))^2} + 1/2 \frac{(a_2(t))^2}{(a_1(t))^2} \\
 + & \frac{(a_4(t))^2 A^2 (a_2(t))^2}{(a_1(t))^2 \left((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2\right)} - \frac{(a_3(t))^2 (a_2(t))^4 A^2}{(a_1(t))^2 \left((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2\right)} \\
 & + \frac{(a_2(t))^3 \left(\frac{d}{dt}a_2(t)\right) a_3(t) \frac{d}{dt}a_3(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} - 1/2 \frac{(a_3(t))^2 (a_2(t))^4}{(a_1(t))^2 \left((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2\right)} \\
 - 1/2 & \frac{(a_2(t))^2 \left(\frac{d}{dt}a_4(t)\right)^2}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} + \left(\frac{d}{dt}a_2(t)\right)^2 + a_2(t) \frac{d^2}{dt^2}a_2(t) \\
 & - \frac{(a_2(t))^2 \left(\frac{d}{dt}a_2(t)\right)^2 (a_3(t))^2}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} + \frac{\left(\frac{d}{dt}a_4(t)\right) a_4(t) a_2(t) \frac{d}{dt}a_2(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} = 0,
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
 R_{23} = & \frac{a_4(t) A^2 (a_3(t))^2 (a_2(t))^2}{(a_1(t))^2 ((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2)} + \frac{(a_4(t))^3}{(a_1(t))^2 ((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2)} \\
 & + 1/2 \frac{\left(\frac{d}{dt} a_1(t)\right) \frac{d}{dt} a_4(t)}{a_1(t)} + 1/2 \frac{a_4(t) (a_3(t))^4}{(a_1(t))^2 ((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2)} \\
 & + \frac{(a_4(t))^3 A^2}{(a_1(t))^2 ((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2)} + 1/2 \frac{(a_2(t))^4 a_4(t)}{(a_1(t))^2 ((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2)} \\
 & + 1/2 \frac{d^2}{dt^2} a_4(t) + \frac{a_4(t)}{(a_1(t))^2} - 1/2 \frac{\left(\frac{d}{dt} a_4(t)\right) (a_3(t))^2 a_2(t) \frac{d}{dt} a_2(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} \\
 & + 2 \frac{a_2(t) \left(\frac{d}{dt} a_2(t)\right) a_4(t) a_3(t) \frac{d}{dt} a_3(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} - 1/2 \frac{(a_3(t))^2 A}{(a_1(t))^2} + 3/2 \frac{(a_2(t))^2 A}{(a_1(t))^2} \\
 & - 1/2 \frac{(a_2(t))^4 A (a_3(t))^2}{(a_1(t))^2 ((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2)} - 1/2 \frac{(a_2(t))^2 A (a_3(t))^4}{(a_1(t))^2 ((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2)} \\
 & + 1/2 \frac{(a_2(t))^2 A (a_4(t))^2}{(a_1(t))^2 ((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2)} + 1/2 \frac{(a_4(t))^2 A (a_3(t))^2}{(a_1(t))^2 ((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2)} \\
 & - \frac{a_4(t) A^2}{(a_1(t))^2} = 0,
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
 R_{33} = & \frac{\left(\frac{d}{dt} a_1(t)\right) a_3(t) \frac{d}{dt} a_3(t)}{a_1(t)} + 1/2 \frac{(a_3(t))^6}{(a_1(t))^2 ((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2)} \\
 & + 3/2 \frac{(a_4(t))^2 (a_3(t))^2}{(a_1(t))^2 ((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2)} + 1/2 \frac{(a_4(t))^2 (a_2(t))^2}{(a_1(t))^2 ((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2)} \\
 & + 2 \frac{a_4(t) A}{(a_1(t))^2} + 1/2 \frac{(a_3(t))^2}{(a_1(t))^2} - 1/2 \frac{(a_2(t))^2}{(a_1(t))^2} - \frac{(a_3(t))^2 A^2}{(a_1(t))^2} \\
 & - \frac{(a_3(t))^4 (a_2(t))^2 A^2}{(a_1(t))^2 ((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2)} + \frac{(a_4(t))^2 A^2 (a_3(t))^2}{(a_1(t))^2 ((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2)} \\
 & + \frac{(a_3(t))^3 \left(\frac{d}{dt} a_3(t)\right) a_2(t) \frac{d}{dt} a_2(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} - 1/2 \frac{(a_3(t))^4 (a_2(t))^2}{(a_1(t))^2 ((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2)} \\
 & - 1/2 \frac{(a_3(t))^2 \left(\frac{d}{dt} a_4(t)\right)^2}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} + \left(\frac{d}{dt} a_3(t)\right)^2 + a_3(t) \frac{d^2}{dt^2} a_3(t) \\
 & + \frac{a_3(t) \left(\frac{d}{dt} a_3(t)\right) a_4(t) \frac{d}{dt} a_4(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} - \frac{(a_3(t))^2 \left(\frac{d}{dt} a_3(t)\right)^2 (a_2(t))^2}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} = 0
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
 R_{44} = & -4 \frac{a_3(t) a_2(t) \left(\frac{d}{dt} a_2(t)\right) \frac{d}{dt} a_3(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} - \frac{(a_2(t))^2 \left(\frac{d}{dt} a_3(t)\right)^2}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} \\
 & - \frac{(a_2(t))^2 a_3(t) \frac{d^2}{dt^2} a_3(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} + 3/2 \frac{(a_4(t))^2 \left(\frac{d}{dt} a_4(t)\right)^2}{((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2)^2} \\
 & - \frac{(a_3(t))^2 \left(\frac{d}{dt} a_2(t)\right)^2}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} - \frac{(a_3(t))^2 a_2(t) \frac{d^2}{dt^2} a_2(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} \\
 & + \frac{(a_3(t))^4 (a_2(t))^2 \left(\frac{d}{dt} a_2(t)\right)^2}{((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2)^2} + \frac{\left(\frac{d}{dt} a_4(t)\right)^2}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} \\
 & + \frac{a_4(t) \frac{d^2}{dt^2} a_4(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} + \frac{(a_2(t))^4 (a_3(t))^2 \left(\frac{d}{dt} a_3(t)\right)^2}{((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2)^2} \\
 & - \frac{\frac{d^2}{dt^2} a_1(t)}{a_1(t)} - 2 \frac{a_4(t) \left(\frac{d}{dt} a_4(t)\right) (a_2(t))^2 a_3(t) \frac{d}{dt} a_3(t)}{((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2)^2} \\
 & - 2 \frac{(a_4(t))^2 a_3(t) \left(\frac{d}{dt} a_3(t)\right) a_2(t) \frac{d}{dt} a_2(t)}{((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2)^2} + 4 \frac{(a_3(t))^3 (a_2(t))^3 \left(\frac{d}{dt} a_2(t)\right) \frac{d}{dt} a_3(t)}{((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2)^2} \\
 & - 2 \frac{(a_3(t))^2 a_2(t) \left(\frac{d}{dt} a_2(t)\right) a_4(t) \frac{d}{dt} a_4(t)}{((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2)^2} - 1/2 \frac{(a_3(t))^2 \left(\frac{d}{dt} a_4(t)\right)^2 (a_2(t))^2}{((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2)^2} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{A.6}$$

Os vínculos para (4.45) são:

$$\begin{aligned}
 R_{14} = & 2 \frac{\left(\frac{d}{dt}a_1(t)\right) (a_3(t))^2 (a_2(t))^2 A}{a_1(t) \left((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2\right)} - 2 \frac{\left(\frac{d}{dt}a_1(t)\right) (a_4(t))^2 A}{a_1(t) \left((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2\right)} \\
 & - \frac{(a_3(t))^2 a_2(t) A \frac{d}{dt}a_2(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} + \frac{a_4(t) A \frac{d}{dt}a_4(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} \\
 & - 1/2 \frac{(a_3(t))^2 \frac{d}{dt}a_4(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} + \frac{a_4(t) a_3(t) \frac{d}{dt}a_3(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} \\
 & - \frac{a_4(t) a_2(t) \frac{d}{dt}a_2(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} + 1/2 \frac{(a_2(t))^2 \frac{d}{dt}a_4(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} \\
 & - \frac{a_3(t) (a_2(t))^2 A \frac{d}{dt}a_3(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} = 0
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

e

$$\begin{aligned}
 R_{44} = & -4 \frac{a_3(t) a_2(t) \left(\frac{d}{dt}a_2(t)\right) \frac{d}{dt}a_3(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} - \frac{(a_2(t))^2 \left(\frac{d}{dt}a_3(t)\right)^2}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} \\
 & - \frac{(a_2(t))^2 a_3(t) \frac{d^2}{dt^2}a_3(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} + 3/2 \frac{(a_4(t))^2 \left(\frac{d}{dt}a_4(t)\right)^2}{\left((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2\right)^2} \\
 & - \frac{(a_3(t))^2 \left(\frac{d}{dt}a_2(t)\right)^2}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} - \frac{(a_3(t))^2 a_2(t) \frac{d^2}{dt^2}a_2(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} \\
 & + \frac{(a_3(t))^4 (a_2(t))^2 \left(\frac{d}{dt}a_2(t)\right)^2}{\left((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2\right)^2} + \frac{\left(\frac{d}{dt}a_4(t)\right)^2}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} \\
 & + \frac{a_4(t) \frac{d^2}{dt^2}a_4(t)}{(a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2} + \frac{(a_2(t))^4 (a_3(t))^2 \left(\frac{d}{dt}a_3(t)\right)^2}{\left((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2\right)^2} \\
 & - \frac{\frac{d^2}{dt^2}a_1(t)}{a_1(t)} - 2 \frac{a_4(t) \left(\frac{d}{dt}a_4(t)\right) (a_2(t))^2 a_3(t) \frac{d}{dt}a_3(t)}{\left((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2\right)^2} \\
 & - 2 \frac{(a_4(t))^2 a_3(t) \left(\frac{d}{dt}a_3(t)\right) a_2(t) \frac{d}{dt}a_2(t)}{\left((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2\right)^2} + 4 \frac{(a_3(t))^3 (a_2(t))^3 \left(\frac{d}{dt}a_2(t)\right) \frac{d}{dt}a_3(t)}{\left((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2\right)^2} \\
 & - 2 \frac{(a_3(t))^2 a_2(t) \left(\frac{d}{dt}a_2(t)\right) a_4(t) \frac{d}{dt}a_4(t)}{\left((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2\right)^2} - 1/2 \frac{(a_3(t))^2 \left(\frac{d}{dt}a_4(t)\right)^2 (a_2(t))^2}{\left((a_2(t))^2 (a_3(t))^2 - (a_4(t))^2\right)^2} = 0.
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

# Referências Bibliográficas

- [1] L. BIANCHI. Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti. *Mem. Mat. Fis. Soc. Ital. Sci.*, 11(267), 1898.
- [2] J. WAINWRIGHT, A. A. COLEY, G. F. R. ELLIS, and M. HANCOCK. On the isotropy of the universe: do bianchi viih cosmologies isotropize? *Class. Quantum Grav.*, 15:331–350, 1998.
- [3] H. STEPHANI, D. KRAMER, M. MACCALLUM, C. HOENSELAERS, and E. HERLT. *Exact Solutions to Einstein's Field Equations*. Cambridge University Press, 2 edition, 2003.
- [4] G. MONTANI, M. V. BATTISTI, R. BENINI, and G. IMPONENTE. Classical and quantum features of the mixmaster singularities. *Int. J. Mod. Phys. A*, 23(16/17):2353–2503, 2008.
- [5] R. M. WALD. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [6] C. W. MISNER, K. S. THORNE, and J. A. WHEELER. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, 1973.
- [7] R. ALDROVANDI and J. G. PEREIRA. An introduction to general relativity, April 2004. Classnotes. Disponível em: <<http://www.ift.unesp.br/users/jpereira/classnotes.html>>. Último acesso em: 04 mar. 2009.
- [8] R. ARNOWITT, S. DESER, and C. W. MISNER. The dynamics of general relativity. *ARXIV:gr-qc/0405109v1*, 2004. In *Gravitation: An Introduction do Current Research*, WITTEN L., ed. (Wiley, New York, 1962).
- [9] H. STEPHANI. *General Relativity*. Cambridge University Press, 2 edition, 1993.
- [10] P. A. TERZIS and T. CHRISTODOULAKIS. The general solutions of bianchi type viih vacuum cosmology. *arXiv:0803.3710v1 [gr-qc]*, March 2008.
- [11] E. KASNER. Geometrical theorems on einstein's cosmological equations. *American Journal of Mathematics*, 43(4):217–221, October 1921.

- [12] V. A. BELINSKII, I. M. KHALATNIKOV, and E. M. LIFSHITZ. Oscillatory approach to a singular point in the relativistic cosmology. *Advances in Physics*, 19(525), 1970.
- [13] J. D. BARROW and C. G. TSAGAS. Structure and stability of the lukash plane-wave spacetime. *Class. Quantum Grav.*, 22:825–839, May 2005.
- [14] L. HSU and J. WAINWRIGHT. Self-similar spatially homogeneous cosmologies: orthogonal perfect fluid and vacuum solutions. *Class. Quantum Grav.*, 3:1105–1124, 1986.
- [15] J. WAINWRIGHT and G. F. R. ELLIS. *Dynamical Systems in Cosmology*. Cambridge University Press, 1997.
- [16] Maplesoft, February 2007. Disponível em: <<http://www.maplesoft.com/>>. Último acesso em: 25 fev. 2009.
- [17] Gcc, the gnu compiler collection, 2008. Disponível em: <<http://gcc.gnu.org/>>. Último acesso em: 25 fev. 2009.
- [18] Gsl - gnu scientific library, 2008. Disponível em: <<http://www.gnu.org/software/gsl/>>. Último acesso em: 25 fev. 2009.
- [19] Gnu operating system, 1984. Disponível em: <<http://www.gnu.org/>>. Último acesso em: 25 fev. 2009.
- [20] Gnuplot homepage, 2008. Disponível em: <<http://www.gnuplot.info/>>. Último acesso em: 25 fev. 2009.
- [21] S. BLEHER, C. GREBORG, E. OTT, and R. BROWN. Fractal boundaries for exit in hamiltonian dynamics. *Physical Review A*, 38(2):930–938, July 1988.