UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

ÉRICA SANTANA SILVEIRA NERY

A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS E A INCLUSÃO DE ESTUDANTES COM DEFICIÊNCIA VISUAL NOS PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO MEDIADOS POR UM RECURSO LÚDICO

BRASÍLIA - DF
2021

ÉRICA SANTANA SILVEIRA NERY

A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS E A INCLUSÃO DE ESTUDANTES COM DEFICIÊNCIA VISUAL NOS PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO MEDIADOS POR UM RECURSO LÚDICO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Educação.
Linha de Pesquisa: Educação em Ciências e Matemática – ECMA.
Orientação: Prof. Dr. Antônio Villar Marques de Sá.

BRASÍLIA – DF
2021

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

NN456t

Nery, Érica Santana Silveira
A Teoria das Situações Didáticas e a inclusão de estudantes com deficiência visual nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função mediados por um recurso lúdico / Érica Santana Silveira Nery; orientador Antônio Villar Marques de Sá. -- Brasília, 2021.
295 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Educação) -- Universidade de Brasília, 2021.

1. Educação inclusiva. 2. acessibilidade. 3. Teoria das Situações Didáticas; ludicidade. 4. conceito de função. 5. jogo. I. Villar Marques de Sá, Antônio, orient. II. Título.

ÉRICA SANTANA SILVEIRA NERY

A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS E A INCLUSÃO DE ESTUDANTES COM DEFICIÊNCIA VISUAL NOS PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO MEDIADOS POR UM RECURSO LÚDICO

Tese apresentada à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Brasília, Linha de Pesquisa – Educação em Ciências e Matemática – ECMA.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Antônio Villar Marques de Sá
Universidade de Brasília – UnB
Presidente da banca – Orientador

____

Prof.ª Dr.ª Ana Cristina Ferreira
Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP
Examinadora externa

____

Prof.ª Dr.ª Siobhan Victoria Healy
Kings College London – KCL
Examinadora externa

____

Prof.ª Dr.ª Sinara Pollom Zardo
Universidade de Brasília – UnB
Examinadora interna

____

Prof. Dr. Cleyton Hércules Gontijo
Universidade de Brasília – UnB
Examinador suplente

Resultado: Aprovada. Data: 05/07/2021

Dedico esta tese a Felipe Gabriel
e às crianças, jovens e adultos
com necessidades educacionais específicas.
Que ao longo das suas trajetórias pessoais e
de formação vocês possam encontrar cidadãos,
profissionais, professores e pesquisadores
que lhes proporcionem acessibilidade como um direito,
para a construção de uma sociedade que seja verdadeiramente inclusiva.

AGRADECIMENTOS

Agradecer é reconhecer todos os coadjuvantes que auxiliaram decisivamente no desenvolvimento deste estudo e como diz Fernando Pessoa em seu poema: o meu olhar, neste momento, é nítido como um girassol que anda pelas estradas, olhando para a direita e para a esquerda, mas também para trás, para tudo que passou e todos aqueles que estiveram comigo, nesse percurso e, sem os quais, não teria chegado a este momento, para poder evidenciar as suas presenças e a minha gratidão.

Primeiramente, quero agradecer a Deus, pelo dom da vida, pela inspiração, por me sustentar nos momentos desta caminhada. Foram inúmeros instantes de alegria, mas também, de dificuldades e em todos eles, a Sua presença foi incessante.

Aos meus pais, Ivan e Edna, pelos ensinamentos e valores passados. Saibam que pelos seus olhares, sinto o quanto estão orgulhosos da minha trajetória. Mas, gostaria de evidenciar o quanto a minha mãe foi fundamental no decorrer desse processo, pois você Edna, foi a minha incentivadora, confidente, amiga de todas as horas e meu porto seguro, sem você não teria conseguido.

Ao meu esposo, Genildo, que embarcou comigo nessa aventura e que em meio às adversidades da caminhada, esteve ao meu lado, foi meu companheiro, confidente, conselheiro, ombro amigo, conseguiu ser calmaria no meio das tempestades e luz a me guiar.

Ao meu irmão, Ivanildo, pelo companheirismo, por torcer e vibrar a cada conquista. Por sempre acreditar nos meus sonhos e dizer, você consegue, você é corajosa e determinada. Saiba que ter você como meu irmão é motivo para agradecer sempre, pois você me ensinou a ser forte, sendo forte, e ser corajosa e determinada, sendo exemplo.

Ao meu sobrinho, Felipe Gabriel, inspiração dos meus sonhos, força que me conduziu e me fez querer contribuir com a construção de uma sociedade mais justa e inclusiva. Você, com seu jeito meigo, amoroso, doce, arrancou sorrisos em momentos difíceis da caminhada e minimizou a saudade com um simples “oi” ao telefone.

Ao meu orientador, Antônio Villar, por além dos conhecimentos compartilhados, ter sido um conselheiro que compartilhou vivências, experiências, valores, saberes, sempre atencioso, humano, ético e sábio.

Minha gratidão às amigas e colegas que a UnB e o Distrito Federal me apresentaram: Bianca, Cleia, Flávia, Helma, Ieda e Meire. Aproveito para agradecer também a todos os partícipes da pesquisa, vocês foram essenciais na construção e desenvolvimento deste estudo, em especial aos professores que tive o privilégio de conviver e conhecer.

Ao Laboratório de Design da UnB, em especial ao professor Gabriel Lyra, que compartilhou inúmeros conhecimentos atrelados ao design e auxiliou na construção e impressão das células braille.

Ao Laboratório Aberto de Brasília (LAB UnB), na pessoa do João, que foi sempre atencioso e me auxiliou na construção e desenvolvimento de inúmeras peças que compuseram a presente pesquisa.

Ao Laboratório de Apoio às Pessoas com Deficiência Visual da Faculdade de Educação (LDV/FE), à coordenadora do LDV, professora Sinara Zardo, e às(aos) estudantes estagiárias(os) que tive o privilégio de conhecer e que me auxiliaram durante o estudo.

Meus agradecimentos também, aos professores da Faculdade de Educação que tive o privilégio de cursar disciplinas que muito me auxiliaram na execução deste trabalho: Amaralina Miranda, Geraldo Eustáquio, Kátia Curado, Liliane Machado, Otília Dantas, Sinara Zardo e Viviane Legnani.

Agradeço ainda, aos grupos de pesquisa e aos membros que o compõem: Aprendizagem Lúdica - Pesquisas e Intervenção em Educação e Desporto (Gepal) e Grupo de Investigação em Ensino de Matemática (Giem). Muito obrigada pela acolhida e pelos conhecimentos e aprendizagens construídas sob diferentes perspectivas e temáticas.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), pelo apoio no financiamento do presente estudo.

Por último, gostaria de agradecer imensamente aos professores: Ana Cristina Ferreira, Lulu Healy, Sinara Zardo e Cleyton Gontijo, membros da banca de avaliação desta pesquisa, que dedicaram seu precioso tempo, na leitura e no compartilhamento dos seus conhecimentos.

Ser diferente de você
mas, muito mais do que se pode ver,
amar é raro
quando alguém te dá a mão pra seguir no caminho
mesmo sem saber a direção,
quem se sente sozinho?
Alguém espera por você
e o tempo voa veloz,
o mesmo sonho raro e real
mas, raro é ser igual [...]
(MILTON GUEDES, O Amor é Raro).

NERY, E. S. S. **A Teoria das Situações Didáticas e a inclusão de estudantes com deficiência visual nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função mediados por um recurso lúdico**. 2021. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Brasília, Brasília, 2021.

RESUMO

Esta pesquisa tem por objetivo investigar as potencialidades e limitações da Teoria das Situações Didáticas para a inclusão de estudantes com deficiência visual nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função mediados por um recurso lúdico. Para isto, utilizamos, como fundamentação teórica, os pressupostos da Teoria das Situações Didática (TSD), proposta por Brousseau (1986, 1995, 1997, 1998, 2002), bem como a compreensão da ludicidade, inclusão e acessibilidade, sendo este último, um conceito transversal, para a construção do material didático denominado *Caça ao tesouro*, o qual possibilitou o estudo do conceito de função. O jogo *Caça ao tesouro* é composto por materiais e uma sequência didática, a qual foi construída com fundamentos na Engenharia Didática proposta por Artigue (1995, 1996) e envolveu as seguintes fases: análise preliminar; concepção e análise *a priori*; experimentação e, por último, análise e avaliação *a posteriori*. No contexto da fase de experimentação, realizamos a aplicação de duas versões do material didático em um colégio público do Distrito Federal que possuía estudantes com deficiência visual dentre os videntes e contamos com a participação tanto dos estudantes quanto dos professores da sala de recursos e da sala de aula regular que os atendiam, além de avaliações de materiais específicos por estudantes partícipes da experimentação da primeira versão do jogo e do Ensino Superior de uma instituição pública federal. Uma limitação que a TSD apresentou na elaboração da sequência didática se referiu ao processo de adaptação do estudante ao *milieu*, a princípio, isso feria os pressupostos da educação inclusiva que defendemos. Por este motivo, buscamos construir um *milieu* acessível que fosse ao encontro das necessidades que os estudantes possuíam e não o contrário. Assim, essa limitação acabou contribuindo para que pudéssemos aprofundar a releitura da TSD, pautando-nos na acessibilidade para dispensar a adaptabilidade. Destarte, os resultados apontaram a possibilidade de utilizar a TSD em uma perspectiva inclusiva, tendo como cerne a construção de um *milieu* acessível, pautado na valorização e ampliação dos canais de percepção, superando-se, portanto, o visocentrismo que permeia os processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Asseveramos que essa ampliação dos canais de percepção pode favorecer não apenas os estudantes com deficiência visual, mas todos os demais estudantes da sala de aula regular, tendo em vista, que o conceito de função envolve outros conhecimentos matemáticos e que este pode ainda ser considerado algo abstrato para os estudantes, a manipulação e o tocar nos materiais para construir tabelas e gráficos e, a partir disso, representar as informações algebricamente, como forma de sintetizar as informações, pode favorecer a construção de um contexto inclusivo. Ademais, a teoria dos jogos, atrelada à TSD e à inclusão pode contribuir para a vivência da fase *adidática* da situação didática, isso por auxiliar na autonomia e, por conseguinte, na ação, formulação de hipóteses, comprovação dos resultados e construção de novos conceitos matemáticos.

Palavras-chave: Educação inclusiva; acessibilidade; Teoria das Situações Didáticas; ludicidade; conceito de função; cego; baixa visão; jogo.

NERY, E. S. S. **The Theory of Didactical Situations and the inclusion of visually impaired students in the processes of teaching and learning of the concept of function mediated by a ludic resource**. 2021. Thesis (Doctorate in Education) - Faculty of Education, University of Brasília, Brasília, 2021.

ABSTRACT

The objective of this study was to investigate the potentials and limitations of the Theory of Didactic Situations for the inclusion of students with visual impairment in the teaching and learning processes of the concept of function mediated by a playful resource. The theoretical basis of the Theory of Didactical Situations Theory (TDS) proposed by Brousseau (1986, 1995, 1997, 1998, 2002) was used together with the concepts of playfulness, inclusion and accessibility. Accessibility is a transversal concept which was used in the development of the “Treasure Hunt”, a didactic material used to facilitate the understanding of the concept of function. The Treasure Hunt game is composed by a didactic sequence and materials, which were created using the Didactic Engineering proposed by Artigue (1995, 1996). The game was developed in the following steps: preliminary analysis; prior conception and analysis; experimentation and posterior analysis and evaluation. In the experimental phase, two versions of the didactic material were applied in a public school in the Federal District with visually impaired students and sighted students. In this step both visually impaired and sighted students and the teachers from the resource classroom and regular classroom participated. Evaluations of specific materials were also carried out by the students participating of the experimental phase and by higher education students from a public federal institution. One of the limitations of TDS in the development of the didactic sequence was related to the process of adaptation of the student to the *milieu*, which was opposed to the basis of inclusive education defended in this work. In this sense, it was necessary to build an accessible *milieu* that would meet the student’s needs and not the other way around. In view of this limitation, a deeper reinterpretation of the TDS was necessary, based on accessibility and not adaptability. The results show that it is possible to use TDS from an inclusive perspective, centered on the development of an accessible *milieu*, valuing the expansion of sensory channels and overcoming the ocularcentrism that permeates the teaching and learning processes in mathematics. Broadened sensory channels favor not only the visually impaired students, but all other students in the regular classroom, especially considering the understanding of the concept of function, which demands other mathematical knowledge and is an abstract concept for students. Therefore, when students touch and handle the materials to build tables and graphs, create algebraic representations and synthesize information, they favor the construction of an inclusive context. Furthermore, the game theory allied to TDS and inclusion may help the experience of the a-didactic phase of the didactic situation. In turn, this contributes with autonomy, action, formulation of hypotheses, result checking and the construction of new mathematical concepts.

Keywords: Inclusive education; accessibility; Theory of Didactic Situations; playfulness; concept of function; blind; low vision; game.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

A educação, direito de todos e dever do Estado e da família,
será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade,
visando ao pleno desenvolvimento da pessoa,
seu preparo para o exercício da cidadania e
sua qualificação para o trabalho (BRASIL, 1988, p. 123).

A educação para todos é o pressuposto fundamental de um sistema educacional inclusivo, de igual modo, as pessoas têm direito à educação de qualidade, que lhes auxiliem na busca por igualdades de condições e na superação de atitudes discriminatórias e segregadoras, que ainda se fazem presentes na sociedade atual. Com este entendimento e, sem receio de cometer exageros, é que lhes apresento a epígrafe em questão, por acreditar que as pessoas possuem características, interesses e necessidades que lhes são próprias e ao considerar que a educação é um direito de todos, esta deve ser pensada e planejada para atender a qualquer pessoa. Assim, tal processo de inclusão demanda um esforço e investimento coletivo.

Neste contexto, ouso-me a discutir, nesta tese, aspectos relacionados à inclusão escolar, considerando que este processo ainda é um desafio político a ser conquistado. Além disso, embora seja uma temática necessária e atual, a defesa da inclusão educacional não é recente, a Declaração Universal dos Direitos Humanos que assegura no parágrafo primeiro do artigo 26 que "toda pessoa tem direito à instrução" (DUDH, 1948, p. 4). Assim, além de reconhecer o direito à educação como sendo para todos, esse documento se constitui enquanto um precursor para a construção de outros documentos que vieram a reafirmar e assegurar a educação visando o "pleno desenvolvimento da personalidade humana e do fortalecimento do respeito pelos direitos humanos e pelas liberdades fundamentais" (DUDH, 1948, p. 4).

Outro marco legal que se constitui enquanto um avanço para o reconhecimento da inclusão na educação, isto no contexto nacional, é a Constituição da República Federativa do Brasil (BRASIL, 1988), na qual encontra-se assegurada a equidade de oportunidades, a valorização da educação para todos e a educação enquanto um direito humano fundamental, subjetivo e necessário a sociedade humana.

Nesta perspectiva, a educação assume uma função que visa o desenvolvimento humano, a formação para a cidadania, a manutenção da paz, o respeito à diversidade e aos direitos fundamentais do ser humano. Tendo desdobramentos na Declaração de Salamanca, elaborada durante a Conferência

Mundial de Educação Especial (UNESCO, 1994, p. 1), a qual traz a educação para as pessoas com deficiência como sendo integrantes do sistema educacional e reconhece a "necessidade e urgência da oferta da educação para as crianças, jovens e adultos com necessidades educacionais especiais dentro do sistema regular de ensino".

Desde então, sobretudo com o advento do século XXI, muitas pesquisas e discussões sobre a inclusão na educação estão sendo realizadas, com o intuito de reconhecer que todos têm o direito de serem incluídos nos diversos espaços sociais, aos quais frequentam. As instituições educacionais podem possibilitar reflexões que venham a capacitar os estudantes a se reconhecerem enquanto sujeitos de direitos, capazes de construir uma sociedade mais justa e inclusiva. Para isso, faz-se necessário a execução de um projeto educacional crítico, emancipador e desencadeador de atitudes autônomas e altruístas, que busque superar a simples inserção em sala de aula regular, a qual exige do estudante com Necessidades Educacionais Específicas (NEE) a adaptação ao ambiente educacional, sendo que este acaba por não possibilitar acessibilidade aos serviços, espaços, interações e atividades desenvolvidas.

O conceito de acessibilidade, no âmbito desta tese, será transversal, por acreditar que ele pode possibilitar a eliminação de barreiras e obstáculos que limitam a participação das pessoas com NEE nos diversos espaços e ações, tanto no contexto educacional quanto social. De acordo com a Convenção sobre o Direito das Pessoas com Deficiência (ONU, 2006) esse conceito compreende a possibilidade das pessoas com deficiência participarem plenamente de todos os aspectos da vida, sendo necessário, para isto, que os Estados possam tomar medidas apropriadas para assegurar o acesso das pessoas com deficiência, em igualdade de oportunidades com as demais pessoas, dos meios físicos, transporte, informação e comunicação, abertos ao público ou de uso público. Destarte, ao longo desta tese, farei a descrição de todas as figuras, tabelas e quadros, com o intuito de possibilitar o acesso de todos e todas ao conhecimento fruto da pesquisa apresentada.

O anseio por desenvolver estudos relacionados à inclusão de estudantes com NEE em sala de aula regular emerge desse contexto e está atrelado à minha trajetória profissional, isto ao considerar que, enquanto professora, posso suscitar reflexões sobre o processo de ensino e aprendizagem de estudantes com NEE, enquanto sujeitos com particularidades e singularidades que devem ser reconhecidas e consideradas como forma de incluí-los em sala de aula regular. Além disso, no âmbito do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, a inclusão pode contribuir com a superação dos discursos que buscam justificar sua não realização, atrelada a constatação da deficiência ou da presença de um laudo médico.

Reconheço, assim como abordado na Convenção sobre o Direito das Pessoas com Deficiência (ONU, 2006) que a deficiência é um conceito em evolução, mas esta resulta, da interação entre pessoas com deficiência e as barreiras atitudinais e ambientais, que possam vir a impedir a efetiva participação de todos na sociedade e nos diversos espaços que queiram vir a atuar. Assim, faz-se necessário o reconhecimento do direito à diferença para que se possa efetivar a igualdade dos direitos.

No âmbito deste estudo, não foi possível adentrar a sala de aula regular para uma das etapas finais que havia sido prevista na pesquisa, a saber, a utilização de um recurso lúdico pelos estudantes com deficiência visual e videntes. Esta impossibilidade se deu, pela emergência na saúde pública com a pandemia do novo coronavírus (SARS-CoV-2), que ocasionou na suspensão das atividades escolares e posterior realização em um regime de atividades remotas, pautadas na necessidade de distanciamento social, fato que impossibilitou a realização de pesquisas e atividades com a presença de estudantes próximos uns aos outros.

Destacarei a seguir, a minha trajetória acadêmica e profissional, objetivando apresentar experiências formativas, momentos de reflexão e aspirações que motivaram a realização desta pesquisa, visando contribuir com a educação inclusiva e, mais especificamente, com a inclusão nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática.

A trajetória da autora

Ingressei no curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), no Centro de Formação de Professores (CFP), em 2009. Meu primeiro ano no curso marcou a descoberta da minha fragilidade em relação aos conteúdos de Matemática da Educação Básica, fruto de um ensino marcado pela presença de professores formados em área distintas e que lecionavam matemática, ou ainda, pela ausência de professores para ensinar tal disciplina, em alguns momentos, tal inexistência chegou a perdurar uma unidade do ano letivo. No entanto, tal experiência não foi motivo para que eu desanimasse ou buscasse outra profissão, pelo contrário fortaleceu-me ainda mais a continuar o curso, na certeza de que após minha formação inicial poderia contribuir para que outros não passassem pela mesma situação.

Foi na graduação a minha primeira experiência docente, mais especificamente no ano de 2010, ao participar de um curso de extensão denominado “Utilização do *software* Geogebra no Processo de Ensino e Aprendizagem da Matemática”, junto com dois colegas da graduação e dois professores adjuntos da UFRB. Este curso era destinado a graduandos e professores que lecionavam matemática em turmas dos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, contribuindo para despertar ainda mais o gosto pela docência e a certeza de que meu anseio era ser professora de Matemática. Após esse momento formativo, comecei a participar ativamente de diversas atividades acadêmicas: projetos de pesquisa, extensão, encontros, colóquios e eventos, além do processo de ensino que já vinha vivenciando.

Ao concluir o curso de licenciatura em Matemática, lecionei em oito turmas do Ensino Médio de um colégio estadual no município onde residia. À época, deparei-me com uma estudante surda, e fiquei sem saber como poderia desenvolver um trabalho pedagógico que contemplasse a ela e a todos os demais estudantes ouvintes. Tive uma sensação de incapacidade perante à situação e percebi que, apesar de ter concluído recentemente o curso, os conhecimentos adquiridos não eram suficientes. Comecei então a conversar com outros docentes para saber como estavam desenvolvendo suas aulas, foi quando uma professora sugeriu que eu tentasse sempre falar pausadamente, olhando para aquela estudante. Contudo, durante as aulas, ao tentar sanar dúvidas dos outros, sentia que a estudante surda era “excluída” do diálogo, pois, mesmo falando pausadamente, eu não estava a olhar para ela. Em outros momentos, vivenciei situações em que ao tentar incluir a estudante excluía os demais.

Decidi permanecer com a educanda após as aulas, tendo em vista que havia feito um curso de extensão em Língua Brasileira de Sinais (Libras), durante a licenciatura, e via ali a possibilidade de conversar com ela e esclarecer possíveis dúvidas. No entanto, ela não sabia Libras, novamente vivenciei uma situação de incapacidade. Resolvi envolver a Direção e percebi que a equipe gestora também não estava preparada para atender pessoas surdas, mas se comprometeu em encontrar uma alternativa: foi quando lançaram um edital para contratação de um professor intérprete de Libras. Tal professor deveria acompanhar todas as aulas da estudante no turno matutino, sendo que no vespertino ministraria aulas de Libras para ela. A partir daí, comecei a ter mais confiança no trabalho em parceria, que se estabelecia com o intérprete.

Tendo em vista tais aspectos, tive o anseio em continuar estudando, pesquisando e refletindo sobre a Educação Matemática Inclusiva, especificamente sobre o ensino de Probabilidade. Percebi que um caminho poderia ser o ingresso em um curso de Pós-Graduação em Educação Matemática e desenvolver um projeto nesta linha de pesquisa. Determinada, fiz o processo seletivo, ingressei na Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), ao tempo em que recebi o convite de pesquisadores do Projeto de Pesquisa de Kataoka *et al.* (2013), que também eram professores do Programa, para fazer parte do grupo de estudos que tratava dessas temáticas. Assim, desenvolvi a pesquisa de Mestrado neste âmbito, com o objetivo de investigar elementos nas ações das alunas, cega e vidente, que sinalizassem a presença da Gênese Instrumental ao resolverem tarefas de Probabilidade no contexto de uma maquete tátil (SILVEIRA, 2016), sob a orientação da Professora Doutora Aida Carvalho Vita.

Neste cenário, utilizei uma Maquete tátil (Figura 1), composta por peças e tarefas da sequência de ensino “Os Passeios Aleatórios do Jefferson”, a qual possibilitou o estudo de conceitos básicos de Probabilidade, a saber: espaço amostral, eventos simples e compostos, probabilidade de eventos simples e compostos, situação determinística, experimento aleatório, frequências esperadas e observadas, padrões observados e esperados.

Figura 1 - Maquete Tátil

Fonte: Silveira (2016, p. 36)

Descrição da Figura 1: Foto contendo seis objetos. Uma maquete tátil no lado esquerdo superior, com ruas na cor preta e com quadras verdes, há ainda, cinco casas azuis dispostas na diagonal principal e uma na parte inferior esquerda da maquete e ao lado desta há um carrinho amarelo. Ao lado da maquete há uma forma de doces transparente com divisórias em formato quadrangular dispostos em nove colunas e seis linhas. Um dispositivo sonoro, na parte superior a direita. Abaixo desse dispositivo, há algumas folhas de papel ofício A4 contendo impressões em tinta. Na parte inferior e a esquerda da foto, há uma pasta classificadora na cor azul, com seis copos encaixados em sua parte interna, contendo: pequenos cubos de madeira; bonecos de plástico; bolinhas de isopor brancas; anéis de plástico; botões e Etil, Vinil e Acetato (EVA) atoalhado cortado em formato quadrangular na cor vermelha. Ao seu lado há outra pasta transparente com cinco copos descartáveis vazios, em seu interior (Fim da descrição).

Durante a aplicação da maquete tátil, mais especificamente no desenvolvimento da tarefa de número 9 da sequência de ensino, cujo objetivo era construir um pictograma das frequências esperadas de visitas de Jefferson[1] a cada um dos cinco amigos[2], ao explicar às estudantes, cega e vidente, sobre a construção do pictograma, mencionei que no colégio esse pictograma poderia ser nomeado por gráfico. A estudante cega, após construir, juntamente com a estudante vidente, o pictograma, afirmou não saber o que era aquilo que se chamava gráfico e que nas aulas a professora se referia a gráficos de funções. Contudo, ela não compreendia o que eram as funções, mencionou ainda que esse fato não a prejudicava, pois as atividades avaliativas eram sempre desenvolvidas com uma colega vidente.

Diante desses comentários, comecei a me inquietar, tendo em vista que função é um conceito matemático cuja aplicabilidade se dá em diversas áreas do conhecimento e em diversos setores da sociedade. Além disso, esse conceito vai ao encontro da terceira competência específica da matemática para o Ensino Médio, apresentada na Base Nacional Comum Curricular - BNCC a qual sugere que sejam utilizados estratégias, conceitos e definições para interpretar, construir modelos e resolver problemas de diferentes contextos (BRASIL, 2018).

Sabe-se que o conceito de função possui diversas aplicações, seja dentro da própria matemática, como por exemplo, na Matemática Financeira ou na Estatística, mas, estes conceitos possuem aplicações em outras áreas do conhecimento, tais como na Física, Química, Economia Geografia ou Biologia, dentre outras. O estudo desse conceito, pode contribuir para que os estudantes possam analisar a

[1] Personagem principal da estória apresentada na tarefa 1, que contextualiza todas as peças e as treze tarefas posteriores e cuja casa encontra-se na parte inferior e esquerda do tabuleiro, sobre seu telhado não há nenhum objeto de identificação.
[2] Duda, Babi, Abel, Beto e Pelé, cujas casas, nesta ordem, encontram-se na diagonal principal do tabuleiro.

plausibilidade dos resultados e construir argumentações consistentes para explicitar os posicionamentos perante a situação analisada (BRASIL, 2018).

Destarte, decidida participei da seleção para ingresso no doutorado em Educação no ano de 2017 e obtive sucesso para ingresso no Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE) da Universidade de Brasília (UnB), com o intuito de desenvolver estudos que pudessem contribuir com o processo de ensino e aprendizagem de função junto a estudantes com deficiência visual. Em seguida, recebi o convite do Professor Doutor Antônio Villar Marques de Sá para ingressar no grupo “Aprendizagem Lúdica: Pesquisas e Intervenção em Educação e Desporto” (Gepal), que trata sobre a utilização da ludicidade enquanto estratégia de ensino e de promoção à inclusão.

Após apresentar um pouco da minha trajetória acadêmica e profissional, reflexões e motivações para o desenvolvimento da presente pesquisa, passo a delimitar o contexto do estudo. Vale ressaltar que a partir deste momento, a escrita desta tese passará a ser realizada na primeira pessoa do plural, por entender que desde o momento em que ingressei no PPGE passei a realizar estudos tendo o auxílio e a orientação do professor Doutor Antônio Villar Marques de Sá, que passou a ser coautor deste trabalho.

Delimitando o contexto da pesquisa

Desde a sua gênese, no âmbito da Matemática, os conceitos referentes à função foram sendo apresentados como uma tentativa de modelar situações da realidade, para tentar compreender e prever seu comportamento. Entretanto, ressalto que desde as primeiras noções de função até chegar à definição que se conhece hoje, séculos se passaram, além disso, muitos foram os estudiosos que se envolveram em estudos e em definições relacionadas a este assunto. Destaco que as primeiras manifestações que apresentavam um conceito intuitivo de função, mas sem ainda nomeá-lo desta maneira, estão historicamente registradas nas civilizações do Egito, Mesopotâmia, China e Índia. Como exemplo, tem-se os pastores de ovelhas, que, de acordo com Boyer (1974), efetuavam a “contagem” do seu rebanho associando cada ovelha a uma pedra, isto pode estar atrelado ao que hoje se conhece como sendo a relação de ordem e de correspondência biunívoca.

Vale ressaltar, também, os registros encontrados nas famosas tábuas babilônicas, os quais mostram representações de funções em forma de tabelas, apresentando resultados de multiplicações e divisões. Mais tarde, já na Idade Média, Oresme usou linhas verticais e horizontais para a construção de um gráfico com o intuito de mostrar um corpo se movendo em velocidade uniforme. De acordo com Boyer (1974), esta foi a primeira sugestão para a representação gráfica de funções.

No século XVII, foi apresentada por James Gregory a primeira definição de função, em seus trabalhos com séries de funções e processos infinitos. Contudo, o que hoje é aceito como sendo o conceito de função, foi efetivamente criado por Newton e Leibniz, ao desenvolverem, independentemente, o cálculo diferencial e integral, e ao utilizarem, neste mesmo século, o termo “função”, pela primeira vez, para designar a dependência entre quantidades geométricas. Posteriormente, no século XVIII, Euller definiu função como uma expressão analítica, no entanto, esta definição incluía só um subconjunto restrito de funções contínuas. Segundo Vázquez, Rey e Boubée (1976), a existência de controvérsias apresentadas no “problema da corda vibrante” fez com que Euler e Bernoulli incluísse no conceito de função, as funções definidas por expressões analíticas por partes e as funções que continham gráficos, mas não possuíam expressão analítica definida.

Atualmente, a definição de função que é aceita pela comunidade matemática foi estabelecida pelo grupo Bourbaki, em 1939. Em síntese, é definida por Lima *et al*. (2016) como uma função $f: A \rightarrow B$ é um conjunto matemático que consta de três ingredientes: um conjunto A, chamado o domínio da função (ou o conjunto onde a função é definida); um conjunto B, chamado o contradomínio (ou conjunto onde a função toma valores); e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado de valor que a função assume em x (ou no ponto x).

O conceito de função de acordo com as orientações presentes na BNCC está atrelado a unidade temática de Álgebra, cujo estudo inicia-se no nono ano do Ensino Fundamental, sendo que “Funções: representações numérica, algébrica e gráfica” (BRASIL, 2018, p. 315) constituem-se enquanto um dos objetos de conhecimento da área de Matemática. Assim, sugere-se que o conceito de função seja trabalhado com o intuito de possibilitar que os estudantes as compreendam como relações de dependência entre variáveis e utilizem as suas representações numérica, algébrica e gráfica para analisar situações funcionais (BRASIL, 2018).

Ressaltamos ainda, que apesar do início do estudo do conceito ser demarcado no nono do Ensino Fundamental, a apresentação dos conhecimentos atrelados a função é iniciada bem antes, isso desde os anos iniciais do Ensino Fundamental ao serem apresentadas atividades que levem os estudantes a observarem regularidades, generalizar resultados, analisar interdependência entre grandezas e desenvolver uma linguagem e escrita algébrica adequada em tais situações (BRASIL, 2018).

Já em relação ao Ensino Médio, o conceito de função e as funções são explorados em todos os anos desta etapa da escolaridade. Entretanto, Ribeiro e Cury (2015) evidenciaram que os estudantes, neste período, ainda não identificam o comportamento de crescimento e decrescimento tendo o gráfico da função, ou ainda, detectam o gráfico de uma função dada sua equação. Isto reafirma a necessidade de o professor apresentar as múltiplas representações de uma função, isto é, gráfica, tabular, algébrica e em língua materna, alternando-se a maneira como apresenta essas representações para os estudantes.

Neste contexto, o papel do professor nos processos de ensino e aprendizagem é crucial, tendo em vista que este pode utilizar abordagens metodológicas que instiguem seus educandos e os possibilitem desenvolverem uma aprendizagem mais autônoma perante ao conceito de função. Além disso, faz-se necessário que os professores estejam atentos a heterogeneidade, presente na sala de aula, tendo em vista, que cada um possui um ritmo de aprendizagem diferente. Outro aspecto, imprescindível no trabalho docente, é a atenção que deve ser dada aos estudantes com alguma NEE, pois estes devem ser incluídos em sala de aula regular em condições de equidade perante a turma, para participarem ativamente na construção de novos conhecimentos.

Salientamos que no Brasil, desde a década de 90, a inclusão vem sendo impulsionada: “[...] de uma forma crescente [...] visando, entre outras conquistas, minimizar os prejuízos e as inúmeras exclusões geradas pelas práticas que exploraram e discriminaram segmentos da população ao longo da história” (LOPES; FABRIS, 2013, p. 21). Diante disso, constata-se que a inclusão apesar de não ser um debate recente, ainda não alcançou sua efetividade enquanto um projeto de emancipação e alcance de todos, isso é possível de ser observado nas instituições em que os estudantes com NEE foram inseridos nos espaços, mas que ainda não se fizeram incluídos em todas as atividades desenvolvidas no mesmo.

Neste sentido, é necessário que sejam desenvolvidas ações para que todos sejam incluídos não apenas nas instituições de ensino, mas buscando o desenvolvimento de cidadãos participativos e atuantes na sociedade e no meio em que vivem. Por conseguinte, no âmbito escolar, torna-se imprescindível que esses estudantes comecem a se sentirem cidadãos com direitos e deveres, para que fora dele possam buscar o respeito aos seus direitos. Nesse sentido, se almejamos construir uma sociedade inclusiva, a escola deverá ser o espaço para desencadear as ações de respeito à diversidade, de reafirmação das identidades e de efetivação da acessibilidade nos diversos espaços sociais existentes.

Destarte, faz-se necessário assegurar a acessibilidade, compreendendo-a como sendo a maneira de garantir a todos o direito de participação na construção de novos conhecimentos e nos processos de ensino e aprendizagem, sendo sugerido por Silva (2019) que a acessibilidade deve ser assegurada por meio de uma metodologia de ensino que contemple a diversidade e os diferentes ritmos de aprendizagem. Assim, destacamos que dentre as ações inclusivas, torna-se imprescindível o desenvolvimento de materiais didáticos acessíveis, isto é, que possa ser utilizado por todos os estudantes independente das suas especificidades.

No contexto do nosso estudo, elaboramos uma sequência didática, pautada em aspectos lúdicos, que poderá ser utilizada tanto por estudantes com deficiência visual quanto videntes, em sala de aula regular, isso por acreditarmos que a acessibilidade contribui para que todos participem com equidade de oportunidades. Além disso ao confeccionarmos um material acessível esperamos que este possa contribuir para o desenvolvimento do sistema háptico ou tato ativo dos estudantes com deficiência visual, para a ampliação dos canais de percepção e para a aprendizagem de todos os estudantes em sala de aula regular.

Salientamos que é através do tato ativo que os indivíduos sem acuidade visual são capazes "de captar e processar informações dos objetos que constituem o ambiente" (FERNANDES, 2004, p. 37). Ademais, com a utilização do jogo *Caça ao tesouro* construído neste estudo, os estudantes poderão utilizar diferentes órgãos do sentido para compreender aspectos relacionados ao conceito de função, tais como: relações entre duas grandezas, representação tabular, gráfica e algébrica de uma função. Esperamos, ainda, que possam aplicar tais conhecimentos em diferentes situações, além de reconhecer e exemplificar situações que possam ser modeladas com os conhecimentos matemáticos de função.

Ao reportarmos a concepção de lúdico é possível relacionar aos jogos, brincadeiras e atividades de lazer, entretanto, tais atividades são consideradas como expressões de atividade lúdicas, tendo em vista que, o conceito de ludicidade é mais amplo e pode possibilitar aos indivíduos sensações de alegria, satisfação, contentamento, superação, prazer, diversão e liberdade. Neste contexto, ressaltamos que a ludicidade não pode ser uma característica específica de um dado objeto, seja um jogo, uma brincadeira ou outra forma de expressão, isso pelo fato de que por despertar algumas sensações nos indivíduos envolvidos, estes podem não se apresentarem como sendo lúdicos, seja pelo momento, meio ou por questões afetivas e sentimentais dos próprios sujeitos que os executam.

Destarte, a concepção de ludicidade é complexa e subjetiva, pois depende diretamente da relação estabelecida ente o sujeito, o objeto e o meio em que a atividade está inserida. Entretanto, há algumas características que são destacadas por autores como Luckesi (2014, p. 13) que compreende a ludicidade como uma “experiência interna de inteireza e plenitude por parte do sujeito”, assim a vivência de uma atividade lúdica pode ser diferente para cada pessoa, pois dependerá intimamente das suas experiências e identidade, com isso, constitui-se enquanto uma experiência interna de cada pessoa e pode favorecer a atenção plena e o seu envolvimento efetivo levando-o a uma entrega total, que poderá ser constatada, a partir, de manifestações exteriores. Tais aspectos, foram considerados na construção da proposta lúdica desta pesquisa.

Diante disso, uma teoria que poderá apresentar-se como uma referência para auxiliar os professores de Matemática na elaboração de atividades lúdicas, de modo a despertar nos educandos maior autonomia e participação, é a Teoria das Situações Didáticas (TSD), desenvolvida por Brousseau (1997). Isto pelo fato de valorizar por um lado, os conhecimentos mobilizados pelos estudantes na elaboração de perguntas, na formulação de hipóteses, na construção de prova e modelos, bem como na utilização de linguagens e teorias adequadas (BROUSSEAU, 2002) e, por outro, valorizar o trabalho do professor, que consiste em simular em sua classe uma micro-sociedade científica, fornecendo meios para se construir o conhecimento cultural que se almeja ensinar (BROUSSEAU, 2002). Assim, percebe-se a importância, no âmbito desta teoria, do papel do educando e do professor no processo de aprendizagem da Matemática.

Vale ressaltar que essa teoria não foi desenvolvida em contextos necessariamente inclusivos, entretanto, há pontos em que poderão trazer contribuições para incentivar a autonomia e a participação dos estudantes no decorrer da realização da atividade, por exemplo, ao se preocupar com "a *promoção existencial do aluno* através do saber matemático" (FREITAS, 2016, p. 106) e com "os *procedimentos metodológicos*, nos quais o professor não fornece, ele mesmo, as respostas, fazendo com que o aluno participe efetivamente da elaboração do conhecimento" (FREITAS, 2016, p. 107).

Pelo exposto, considerando o contexto desta investigação, almejamos responder com o desenvolvimento deste estudo a seguinte questão de pesquisa:

Quais as potencialidades e limitações apresentadas pela Teoria das Situações Didáticas para a inclusão de estudantes com deficiência visual nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função com a mediação de um recurso lúdico?

Considerando este questionamento propulsor, apresentamos o objetivo geral desta pesquisa, qual seja:

Investigar as potencialidades e limitações da Teoria das Situações Didáticas para a inclusão de estudantes com deficiência visual nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função mediados por um recurso lúdico.

Vale destacar que estamos compreendendo potencialidades enquanto possibilidades que contribuem para a inclusão e, para tanto, vão ao encontro do favorecimento da acessibilidade nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função, levando-se em consideração os estudantes com deficiência visual e a permissibilidade do recurso lúdico ser também utilizado por estudantes videntes, ambos em sala de aula regular. Já as limitações, no âmbito deste estudo, compreendem restrições, as quais se opõem as potencialidades, dito de outra forma, estão se contrapondo a acessibilidade e a inclusão dos estudantes com deficiência visual no estudo do conceito de função.

Para alcançarmos ao objetivo geral apresentado elencamos os seguintes objetivos específicos:

- Elaborar situações didáticas que promovam uma interação dos estudantes ao *milieu*.

- Identificar as potencialidades da fase *adidática*, isto é, a fase de ação, formulação e validação para a inclusão de estudantes com deficiência visual.
- Investigar as potencialidades da fase didática, ou seja, a institucionalização e as devoluções a partir das entrevistas realizadas com um professor da sala de recursos e com um professor de Matemática da sala de aula regular e das devoluções apresentadas aos estudantes.
- Descrever as manifestações lúdicas que se fazem presentes na sequência didática.
- Reconhecer as potencialidades e as limitações da Teoria das Situações Didáticas no processo de inclusão de estudantes com deficiência visual.

A seguir, detalharemos a estrutura desta tese.

Estrutura da tese

Esta tese está organizada em 6 capítulos, além da Introdução e das Considerações Finais. Na presente Introdução, apresentamos as nossas motivações pessoais e profissionais atrelada a trajetória da pesquisadora, delimitamos o contexto da pesquisa, o questionamento norteador e o objetivo geral deste estudo.

No Capítulo 1, detalhamos a Fundamentação Teórica centrada na educação inclusiva, na acessibilidade e no desenho universal, os enfatizamos em uma perspectiva que compreende o reconhecimento do direito à diferença na igualdade de direitos. Discorremos sobre a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (1986), caracterizamos a situação *didática* e *adidática*, abordando as 5 fases distintas que compõem essas situações, bem como definimos os polos que integra o sistema didático. Ademais, caracterizamos a Ludicidade e o jogo, tendo em vista que pela subjetividade inerente a esses conceitos não é possível definirmos, além de classificarmos os jogos em cooperativos e competitivos. Em seguida, articulamos todos esses conceitos teóricos na busca de estabelecermos uma releitura da TSD pensando em um contexto inclusivo. Por último, exibimos os objetivos específicos deste estudo.

Apresentamos, no Capítulo 2, a revisão de literatura, com ênfase em pesquisas internacionais e nacionais, bem como publicações em seminários e encontros de grande relevância na área da Educação Matemática, que abordassem sobre: a Teoria das Situações Didáticas, a ludicidade e a inclusão no ensino de Matemática; a ludicidade e o conceito de função junto a estudantes com deficiência visual e, ao estudo de função com estudantes com deficiência visual.

No Capítulo 3, discorremos sobre a metodologia do estudo, centrada nos alicerces teóricos da Engenharia Didática, proposta por Artigue (1995, 1996) envolvendo, portanto, quatro fases, a saber: análise preliminar; concepção e análise *a priori* da engenharia da situação didática; experimentação e, como quarta fase, análise e avaliação *a posteriori*. Neste capítulo, descrevemos também os partícipes do nosso estudo, buscando caracterizá-los quanto a deficiência visual ou a relação que possuem com estudantes com deficiência visual.

Esboça-se, no Capítulo 4, a análise preliminar do estudo considerando-se o conceito de função. Assim, abordamos o estudo histórico e epistemológico desse conceito; sua definição; as principais dificuldades e obstáculos que são apresentados pelos estudantes perante esse estudo; uma análise dos materiais didáticos utilizados e disponibilizados gratuitamente pelo Instituto Benjamin Constant e o multiplano que são materiais utilizados nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função junto a estudantes com deficiência visual, bem como uma análise das orientações versadas na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) sobre o conceito de função.

Já no Capítulo 5, explicitamos as análises da primeira versão da sequência didática. Para isto, dissertamos sobre a análise *a priori* do jogo *Caça ao tesouro*, seção na qual discutimos sobre os conhecimentos matemáticos que poderão ser mobilizados pelos estudantes e as possíveis soluções que estes poderão dar na experimentação; na continuidade apresentamos a experimentação com três docentes do Atendimento Educacional Especializado, bem como a experimentação e análise *a posteriori* dos dados coletados junto a quatro estudantes com deficiência visual do Ensino Médio.

No Capítulo 6, explanamos sobre as análises da segunda versão da sequência didática. Assim, discutimos as alterações realizadas nos materiais didáticos que compõem o jogo *Caça ao tesouro* à luz da acessibilidade, trazemos também, os aspectos que permearam a Prototipagem Rápida de células Braille em 3D; explicitamos a análise *a priori* da segunda versão da sequência didática, discutindo para isso, os conceitos atinentes a cada uma das dicas que compõem a sequência didática do jogo *Caça ao tesouro* e, na continuidade, exibimos a avaliação da segunda versão do jogo *Caça ao tesouro* realizada junto aos professores, da Sala de recursos e da sala de aula regular do Ensino Médio.

Por último, são retratadas as nossas considerações finais, na qual retomamos e respondemos a questão norteadora desta pesquisa. Na continuidade, são elencadas as referências utilizadas, os apêndices e os anexos, que apesar de não serem capítulos são considerados como partes essenciais desta tese.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

> *A educação é o ponto em que decidimos se amamos o mundo o bastante para assumirmos a responsabilidade por ele e, com tal gesto, salvá-lo da ruína que seria inevitável não fosse a renovação e a vinda dos novos e dos jovens. A educação é, também onde decidimos se amamos as crianças o bastante para não expulsá-las de nosso mundo e abandoná-las a seus próprios recursos, e tampouco arrancar de suas mãos a oportunidade de empreender alguma coisa nova e imprevista para nós, preparando-as em vez disso com antecedência para a tarefa de renovar um mundo comum* (ARENDT, 2016, p. 202).

A educação tem a função de renovar o mundo, transformá-lo em um bem comum, no qual todos possam atuar com liberdade, autonomia, reconhecimento e valorização do outro como sujeito de direitos. Essa perspectiva, sob a ótica da inclusão, implica em enxergar o outro como igual, no sentido humano, mas com singularidades que lhes caracterizam e diferenciam. Tal compreensão pode possibilitar que todas as pessoas atuem na sociedade e no meio em que vivem com equidade de oportunidades.

Assim, o intuito de apresentar este capítulo partindo da epígrafe do texto "A crise na Educação", de Arendt (2016), é para ressaltar que a educação é responsabilidade de todos, sejam professores, pesquisadores, pais ou responsáveis, estes podem se unir para o fortalecimento das oportunidades empreendedoras da geração atual e das que estão por vir. Para isso, deve-se pensar e fomentar teorias da educação que possam favorecer a autonomia, o reconhecimento e o respeito ao outro, com singularidades a serem valorizadas e consideradas nos processos de ensino e aprendizagem.

A autonomia é um conceito caro para o campo da educação inclusiva, o qual necessita ser elucidado nas primeiras linhas deste capítulo, pois estará presente na abordagem teórica que compõe esta tese. Este conceito também se encontra previsto como um dos princípios gerais na Convenção sobre os Direitos das Pessoas com Deficiência da Organização das Nações Unidas (ONU) - "o respeito pela dignidade inerente, a autonomia individual, inclusive a liberdade de fazer as próprias escolhas, e a independência das pessoas" (BRASIL, 2007, p. 17). Assim, a autonomia encontra-se atrelada à liberdade de escolhas das pessoas. Neste contexto, Madruga (2016, p. 75, grifo nosso) salientou:

> A autonomia individual está associada com o **princípio de uma vida independente**, isto é, com a capacidade de homens e mulheres com

> deficiência controlarem pessoalmente seus múltiplos aspectos de vida, tomando decisões e assumindo responsabilidades, de modo a ascender aos bens materiais e imateriais inerentes a todos.

A vida independente que Madruga (2016) aludiu se refere ao fato de que a pessoa pode fazer suas próprias escolhas e participar ativamente do contexto social, opinando e expressando os seus anseios, interesses e escolhas para outras pessoas. Afinal, o ser humano se constitui socialmente e é nas relações interpessoais com os outros que aprende, constrói e reafirma a sua identidade. Dito de outra forma, a independência mencionada refere-se às decisões de escolha, ou seja, a capacidade de assumir responsabilidades, atuar na sociedade e no meio em que se vive de maneira efetiva e resolutiva, enquanto um cidadão com direitos e deveres a serem respeitados e assegurados.

Nesta mesma perspectiva, Sassaki (1999, p.35) elucidou que a "independência é a faculdade de decidir sem depender de outras pessoas" e no contexto das pessoas com deficiência é possível constatar mais independência ou menos independência em decorrência das suas experiências pessoais. Assim, a independência está intimamente atrelada a situação vivenciada, isto é, poderá haver situações de maior e menor emancipação, aspecto este que vai ao encontro da autonomia individual de cada pessoa.

Ademais, Sanchez-Rubio (2017, p. 14) ponderou que a autonomia pode então ser compreendida como a possibilidade dos seres humanos de "passar mediante ações de experiências de menor controle (ou alienantes) a experiências de maior controle (libertadoras)". Dito de outro modo, a autonomia está relacionada à capacidade das pessoas de dotarem suas produções em um dado contexto, transpondo-as no anseio de denunciar e lutar contra qualquer situação que impossibilitem criar, significar e ressignificar o novo contexto social ao qual encontram-se inseridas.

Diante disso, ressaltamos que os fundamentos teóricos desta pesquisa se ancoram em quatro eixos, a saber: o primeiro refere-se à inclusão enquanto um direito humano fundamental. O segundo trata-se de pressupostos da Teoria das Situações Didáticas (TSD), proposta por Guy Brousseau, iniciada na década de 1970, no contexto da Didática da Matemática e que centra a sua preocupação na maneira como os conteúdos são trabalhos em sala de aula e visa delinear características para as posturas tanto dos estudantes quanto dos professores frente ao saber. O terceiro diz respeito à ludicidade, perspectiva que concebe o processo de ensino e aprendizagem como sendo um compromisso consciente, intencional e participativo, no qual todos os envolvidos são coadjuvantes essenciais, atuando de forma prazerosa, satisfatória e desafiadora. O quarto implica em ampliar o escopo da Teoria das Situações Didáticas sob uma perspectiva lúdica e inclusiva, transpondo-a para um contexto heterogêneo e que possui estudantes com deficiência visual dentre os videntes.

1.1 Inclusão: reconhecimento do direito à diferença na igualdade de direitos

No âmbito deste texto, defendemos a inclusão enquanto o reconhecimento do direito à diferença na igualdade de oportunidades, isso pelo fato de que “temos o direito a ser iguais quando a diferença nos inferioriza; temos o direito a ser diferente quando a igualdade nos descaracteriza” (SANTOS, 2006, p. 462). Nesta perspectiva, a inclusão pressupõe a superação da igualdade e da diferença, enquanto aspectos díspares, para que se possa reconhecer e fazer valer a igualdade na diferença.

Como exemplo desse reconhecimento, Mantoan (2015) destacou que ao se considerar um estudante cego como sendo o único a usar um computador, em sala de aula regular, este não será diferenciado e excluído se esse recurso o possibilita participar das aulas com autonomia. Além disso, ele tem o direito de estudar os conteúdos em braile ou em áudio. Tal diferenciação oferece a esse estudante a possibilidade de participar das aulas. Outro exemplo refere-se à possibilidade de um estudante com mobilidade reduzida poder escolher, no âmbito da sala de aula, o lugar que deseja ocupar, isso lhe confere certa autonomia para decidir e não se sujeitar às imposições de outras pessoas (MANTOAN, 2015).

Assim, a inclusão pautada pela igualdade na diferença pressupõe a superação de barreiras e atitudes de imposição, exclusão, segregação e discriminação, as quais inferiorizam e colocam algumas pessoas à margem das oportunidades. Dito de outro modo, quando se diferencia para incluir, respeita-se as singularidades e se propicia equidade de oportunidades. Por outro lado, ao se diferenciar com um propósito que não visa a inclusão, pode-se impor barreiras físicas ou atitudinais que poderão ocasionar um processo de exclusão ou de segregação. Ressaltamos que a não-discriminação é defendida na Convenção de Guatemala, ratificada pelo decreto n° 3.956 de 2001, conceituando-a do seguinte modo:

> [...] qualquer diferenciação, exclusão ou restrição baseada em deficiência, com o propósito ou efeito de impedir ou impossibilitar o reconhecimento, o desfrute ou o exercício, em igualdade de oportunidades com as demais pessoas, de todos os direitos humanos e liberdades fundamentais nas esferas política, econômica, social, cultural, civil ou qualquer outra. Abrange todas as formas de discriminação, inclusive a recusa de adaptação razoável (BRASIL, 2001, p. 2).

Destarte, faz-se necessário a construção de uma sociedade alicerçada na aceitação da diferença, buscando superar a exclusão e a segregação. Tal construção é iniciada no seio educacional e segundo Arendt (2016, p.195) “a criança é introduzida ao mundo pela primeira vez através da escola”. Assim, faz-se necessário e urgente o enfrentamento dos desafios para a efetivação da inclusão que são constantemente vivenciados no âmbito escolar. Dentre tais adversidades a serem superadas, encontram-se o conservadorismo e as atitudes de protecionismo e paternalismo, as quais buscam justificar a incapacidade de incluir a todos os estudantes na escola, atreladas à impossibilidade de proporcionar condições de aprender na convivência com a diferença, de modo a valorizar o outro em sua diversidade e a respeitar o conhecimento de mundo que cada pessoa possui (MANTOAN, 2008).

Ressaltamos que a luta pela inclusão escolar e, por conseguinte, social, ocorre diariamente, entretanto, esse enfrentamento não pode ser realizado de maneira solitária e individual pelo professor, no âmbito da sua sala de aula, almeja-se que este possa perpassar, segundo Mantoan (2008, p. 37), por “mudança de paradigma educacional, que gera uma reorganização das práticas escolares”. Enfim, tal empenho aspira envolver pais, professores e estudantes, com o intuito de assegurar e reconhecer a igualdade na diferença, oferecendo a todos os estudantes as oportunidades que lhes permitam atuar de maneira autônoma e efetiva no meio social e educacional. Assim,

> A inclusão é uma inovação que implica um esforço de modernizar e reestruturar a natureza da maioria de nossas escolas. Isso acontece à medida que as instituições de ensino assumem que as dificuldades de alguns alunos não são apenas deles, mas resultam, em grande parte, do modo como o ensino é ministrado e de como a aprendizagem é concebida e avaliada (MANTOAN, 2015, p. 62).

Assumir a dificuldade do estudante como não sendo apenas dele, implica na necessidade da superação do uso de metodologias de ensino específicas para determinada NEE e igualmente pressupõe a recriação de um modelo escolar que tem como eixo norteador o ensino para todos. Assim, é apresentada uma demanda que pressupõe uma reorganização pedagógica das escolas, com o intuito de dar lugar à cooperação, ao diálogo, à solidariedade e à criatividade, por parte de todos os agentes envolvidos, nos processos de ensino e aprendizagem. Essa reestruturação, ao objetivar o ensino para todos, pode possibilitar o respeito ao tempo e à liberdade para aprender de cada um dos estudantes. Do mesmo modo, oportunizar aos professores uma formação contínua que possa vir a valorizar e incentivar uma atuação profissional inclusiva e que busca diferenciar para incluir.

Neste contexto, “a diferença é marco de uma compreensão plural do humano e de sua realização. Ser é ser diferente, ser diferente é não ser o *mesmo*. A mesmice preenche; a alteridade abre(-se)” (CARBONARI, 2007, p. 174). A diferença possibilita o ser humano abrir-se à alteridade, a qual busca contribuir para a construção de uma sociedade mais humana e sensível às diferenças e que possa incutir nas pessoas o anseio pelo reconhecimento e efetivação dos seus direitos, contribuindo para sua aclamação enquanto sujeitos de direitos:

> Os direitos, assim como o sujeito de direitos, não nascem desde fora da relação; nascem do âmago do ser com os outros. Nascem do chão duro das interações conflituosas que marcam a convivência. Mais do que para regular, servem para gerar possibilidades emancipatórias (CARBONARI, 2007, p. 177).

Dessarte, é na interação com os outros que são reformulados e construídos os direitos, em seu sentido normativo, mas na convivência e na interação humana são reconhecidos e efetivados. Além disso, no convívio com a diferença são suscitadas as lutas para a construção e a reconstrução da igualdade na diferença e, neste contexto, as pessoas são concebidas enquanto sujeitos de direito. Tais interações contribuem, ainda, para a construção de identidades emancipatórias, caracterizadoras de sujeitos livres e autônomos, conhecedores das suas responsabilidades, concessões e lutas pela reafirmação das garantias individuais e coletivas de uma sociedade singular e em constante transformação.

Sob este horizonte interpretativo, salientamos que a educação é compreendida enquanto um direito humano fundamental, assegurada desde a Constituição Federal de 1988, tal como comparece no artigo 205: “a educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho” (BRASIL, 1988, p. 1). Desse modo, busca-se, então, possibilitar que os estudantes se reconheçam enquanto sujeitos de direitos à educação, cujas particularidades são alcançadas nas práticas pedagógicas desenvolvidas no âmbito da sala de aula e cujo ensino e aprendizagem desenvolvem-se com a participação de todos.

Para que todos possam participar com autonomia, faz-se necessário a promoção da acessibilidade, termo este que, de acordo com o dicionário Aurélio, deriva da palavra acessível, a qual se refere a algo que possui acesso fácil (FERREIRA, 2001). Ao considerarmos a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência, nº 13.146, de 6 de julho de 2015, a acessibilidade é assegurada enquanto um direito que garante a pessoa com deficiência a participação social e a realização de suas atividades com autonomia (BRASIL, 2015). Ademais, a acessibilidade é definida, no âmbito desta lei, do seguinte modo:

> [...] possibilidade e condição de alcance para utilização, com segurança e autonomia, de espaços, mobiliários, equipamentos urbanos, edificações, transportes, informação e comunicação, inclusive seus sistemas e tecnologias, bem como de outros serviços e instalações abertos ao público, de uso público ou privados de uso coletivo, tanto na zona urbana como na rural, por pessoa com deficiência ou com mobilidade reduzida (BRASIL, 2015, *online*).

Assim, a acessibilidade no contexto educacional é essencial, pois a sua efetivação permite que os estudantes com deficiência tenham assegurado o direito à educação e o acesso aos conhecimentos que são mediados nos espaços escolares. Além disso, o Estatuto da Pessoa com Deficiência garante ainda que o poder público deve assegurar, criar, desenvolver, implementar, incentivar, acompanhar e avaliar a acessibilidade para todos os estudantes no que se refere às edificações, aos ambientes e às atividades concernentes a todas as modalidades e etapas da educação (BRASIL, 2015).

Com isso, a acessibilidade não se constitui como sendo uma responsabilidade de um determinado profissional da instituição de educação, mas é responsabilidade de todos. Tal princípio inclusivo permeia desde os comportamentos atitudinais e procedimentais das mediações didáticas, quanto os aspectos pedagógicos, curriculares e arquitetônicos das instituições de ensino.

Diante disso, ao refletirmos sobre a acessibilidade no contexto educacional, compreendemos seu caráter amplo e multifacetado, pois envolve diversos setores, segmentos sociais e distintas dimensões da vida humana (SILVA, 2019). Ademais, para os estudantes, a garantia da acessibilidade traduz-se em um princípio indispensável para a utilização de bens e serviços, com segurança, autonomia e reafirmação da sua cidadania e do seu direito à educação. Direito este que assegura outros direitos sociais, configurando-se, também, um direito público subjetivo.

De acordo com Silva (2019), a acessibilidade educacional envolve tanto o aspecto pedagógico quanto o curricular, com o intuito de garantir, ao estudante, o direito à participação e à aprendizagem. Mas, para isso, faz-se necessário a utilização de metodologias que envolvam, desde a disponibilização de materiais didáticos acessíveis, até o respeito às diferentes necessidades específicas, as quais podem ser caracterizadas por ritmos e estilos de aprendizagem distintos. Almeja-se, portanto, possibilitar que todos os estudantes participem das atividades escolares com equidade de oportunidades, junto aos demais colegas da sala de aula regular.

Um aspecto que pode contribuir com a participação de todos os estudantes em ambientes e atividades que sejam inteligíveis e utilizáveis é o desenho universal, ou seja, uma "concepção de produtos, ambientes, programas e serviços a serem usados por todas as pessoas, sem necessidade de adaptação ou de projeto específico, incluindo os recursos de tecnologia assistiva" (BRASIL, 2015, *online*). Assim, o desenho universal é responsável pela criação e disponibilização de bens e serviços acessíveis e que, portanto, podem ser utilizados pelo maior número de pessoas possíveis. Concordamos com Cambiaghi (2018, p. 73) que "a essência do desenho universal está no propósito de estabelecer acessibilidade integrada a todos, sejam ou não pessoas com deficiência".

Vale ressaltar que o termo *universal design* ou desenho universal foi apresentado, pela primeira vez, na década de 70, pelo arquiteto Ron Mace, quando descreveu ambientes mais acessíveis e utilizáveis. No âmbito educacional, o desenho universal tem sido aplicado em espaços físicos, tecnologias digitais, metodologias de ensino, materiais didáticos, entre outros. Além disso, esse conceito surgiu em decorrência das reivindicações das pessoas com deficiência na defesa por equidade de oportunidades (CAMBIAGHI, 2018).

Ademais, o que caracteriza o desenho universal e sua relevância, segundo Burgstahler (2009), é o seguinte: ao contrário de uma acomodação ou um material apresentado para uma pessoa específica, com alguma deficiência, o desenho universal beneficia a todas as pessoas, incluindo aquelas que não necessitam diretamente daquela acomodação ou daquele material acessível, mas o acesso lhe permite abrir horizontes e participar junto com as demais com equidade de oportunidade. No âmbito educacional, mais especificamente:

> A estrutura proposta pelo desenho universal pressupõe a diversidade e o trabalho com identidade e diferença em sua constituição. Metodologia, processo de comunicação e material instrucional pensado sobre a estrutura referida precisam ser aplicados para toda a sala de aula, devendo ser contemplado na metodologia, processo de comunicação e material instrucional, elementos próprios dos princípios da diversidade, identidade e diferença, e não da homogeneidade e dos espaços homogeneizantes, esses últimos produtos de construção social (CAMARGO, 2017, p. 3-4).

Destarte, o desenho universal e a acessibilidade possuem como meta a inclusão na diferença, isto é, considerar as diferentes identidades presentes, no contexto social e educacional, propondo metodologias, materiais e métodos de comunicação que possam ser utilizados para contemplar a todos. Nesse sentido, a identidade e a diferença são vistas como aspectos inerentes aos estudantes e igualmente relevantes para a educação inclusiva.

Para se avaliar os projetos, métodos e materiais elaborados com base no desenho universal alguns princípios são apontados por Cambiaghi (2018), a saber: equiparação nas possibilidades de uso, ou seja, disponibilização dos mesmos recursos para todos os usuários, evitando-se a segregação e assegurando-se a segurança na utilização; flexibilidade no uso, pode ser utilizado por usuário com diferentes necessidades específicas e oferece ainda a adaptabilidade ao ritmo de utilização do usuário; uso simples e intuitivo, tornando a utilização simples e compreensível, independente da experiência que o usuário possui; informação perceptível, isto é, comunicando-se eficazmente ao usuário as informações necessárias, utilizando-se, para isto, diferentes meios de comunicação, sejam estes simbólicos, sonoros ou sensoriais; tolerância ao erro, protegendo e evitando elementos de risco, além da disponibilização de recursos que reparem falhas de utilização; mínimo esforço físico que possibilite a utilização com eficiência e conforto, empenhando para isso o mínimo esforço possível; por último, o dimensionamento de espaços para acesso e uso de todos os usuários.

Partindo dos pressupostos sobre o desenho universal que busca estabelecer a acessibilidade com o intuito de se efetivar a inclusão na educação, apresentaremos, a seguir, a Teoria das Situações Didáticas. Lembramos que sua construção não foi alicerçada em um contexto inclusivo. Entretanto, ao possibilitar uma maior autonomia para o estudantes, comparando as suas ações a dos matemáticos de profissão na busca pela construção de novos conhecimentos, isto é, tendo uma atitude mais ativa e participativa na formulação e validação de novos conhecimentos, acreditamos que esta teoria pode trazer um novo olhar para a educação enquanto um direito de todos, também o reconhecimento da igualdade na diferença, rumo à inclusão que respeita a singularidade de cada pessoa e seus modos de aprender.

1.2 A Teoria das Situações Didáticas

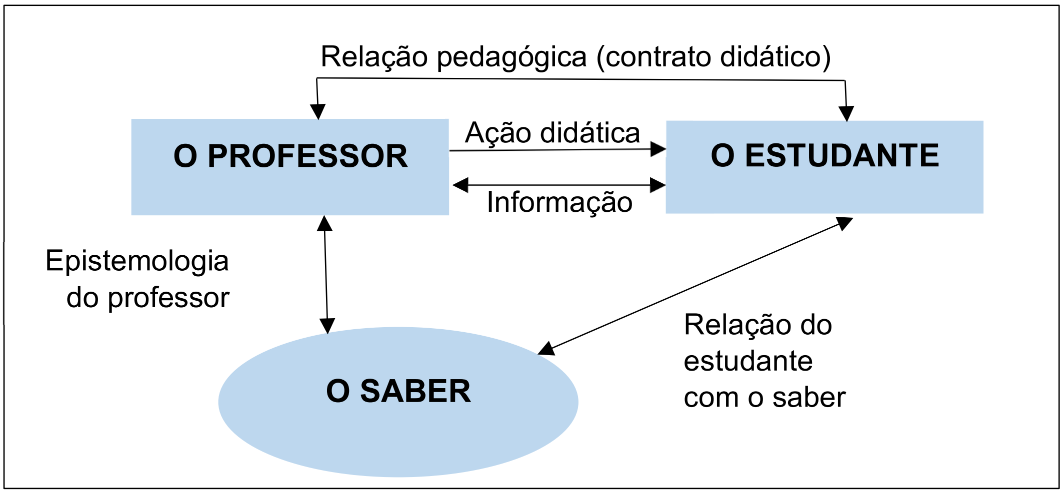
A Teoria das Situações Didáticas (TSD) foi desenvolvida por Guy Brousseau (1986), que se fundamentou no construtivismo originado na teoria da epistemologia genética proposta por Jean Piaget. A TSD compõe um dos fundamentos teóricos da didática da matemática, sendo desenvolvido na França, a partir dos anos de 1970, isto em um contexto marcado pela reforma no ensino da Matemática, mais conhecido como Movimento da Matemática Moderna (MMM), cujo objetivo foi estabelecer uma aproximação entre a matemática da Educação Básica e a matemática do Ensino Superior (VALENTE, 2012).

Vale ressaltar que o MMM não obteve o sucesso que se esperava, entretanto, ocasionou um aumento significativo das pesquisas sobre o ensino de Matemática, fato que contribuiu para consolidar a Educação Matemática enquanto um campo emergente e relevante de estudos, pesquisas e produções de conhecimentos. Do mesmo modo, incentivou a criação de teorias que se preocupavam com o aspecto didático no processo de ensino e aprendizagem, dentre essas a TSD.

Neste contexto, a gênese da TSD encontra-se atrelada à preocupação com a situação didática, cuja modelação pode ser feita a partir da teoria dos jogos, definida por Brousseau (1998) enquanto uma atividade física ou mental, totalmente gratuita que na perspectiva de quem a realiza, não tem outro propósito, se não o prazer por ela proporcionado. A situação didática pode ainda ser entendida como um sistema de regras, as quais implícita ou explicitamente são predefinidas e orientam as posturas tanto do professor, quanto do estudante perante a construção do saber. Este jogo deve ocorrer de tal forma que o conhecimento apareça na forma escolhida: como solução ou como meio de estabelecer a estratégia ideal para se alcançar a solução (BROUSSEAU, 1998).

Esta teoria concebe, inicialmente, a situação didática em torno de três polos, isto é: o professor, o estudante e o saber. Nesse caso, o professor e os estudantes são considerados jogadores que brincam com o saber a ser institucionalizado. Vale destacar que, no âmbito da TSD, Brousseau (1997, p. 97, tradução nossa) diferenciou saber de conhecimento, considera, portanto, que “um saber é um conhecimento institucionalizado” e, além disso, a passagem de um *status* para o outro são explicadas pelas relações didáticas que os envolvem. Assim, o sistema *stricto sensu* e suas interações, estão representados na Figura 2, conforme esquema a seguir:

Figura 2 - Representação do sistema didático stricto sensu



Fonte: Adaptado de Brousseau (1997).

Descrição da Figura 2: Diagrama formado por figuras em formato de dois retângulos e uma elipses, na cor azul. Nos retângulos que estão na parte superior da figura estão escritos O PROFESSOR e O ESTUDANTE, já na parte inferior há uma elipse com o nome O SABER. Há uma seta de pontas duplas que indica a relação entre O PROFESSOR e O ESTUDANTE que recebe o nome de relação pedagógica (contrato didático). Há outra seta que parte do professor e aponta para o estudante e indica a ação didática. Outra seta, de ponta dupla, que parte do professor e aponta para o estudante indicando que este recebe e fornece informação para o professor. Há uma seta que indica uma relação recíproca entre o estudante e o saber e outra seta de ponta dupla que reflete a epistemologia do professor e parte do professor para o saber (Fim da descrição).

Em se tratando do referido esquema, iniciaremos a discussão abordando a relação do professor com o saber, nomeada na Figura 2 como epistemologia do professor, a qual envolve os aspectos que perpassam sua formação, função social e experiência docente. Assim, o trabalho do professor, fundamentado nesta teoria, até certo ponto é o oposto ao do pesquisador, ou seja, o professor produz uma recontextualização e repersonalização do conhecimento que foi concebido pelos estudantes (BROUSSEAU, 2002). Portanto, o professor se encarrega da criação de condições que possibilitem aos estudantes se apropriarem do conhecimento estudado, permitindo-lhes que reflitam sobre: “como responder com a ajuda de conhecimentos prévios, como entender e construir novos conhecimentos, como ‘aplicar’ lições prévias, como reconhecer questões, como aprender, adivinhar, resolver, etc.” (BROUSSEAU, 2002, p. 35, tradução nossa).

Isto posto, as situações apresentadas pelo professor poderão ter como intuito possibilitar que os estudantes levantem questionamentos e os assumam para si, objetivando a busca por soluções e tendo como referência os saberes que já foram construídos em etapas anteriores à sua escolarização. Além disso, faz-se necessário uma atenção, por parte do professor, para a determinação do momento em que irá realizar a sua intervenção, de modo a não acontecer precocemente, nem tampouco tardiamente. Tal intervenção pode incentivar os estudantes, a partir da devolução em forma de questionamentos, ou ainda ser realizada visando-se a validação do saber que os estudantes construíram com seus pares.

Na relação do estudante com o saber (Figura 2), Brousseau (2002) enfatizou que o trabalho do estudante deve assemelhar-se à atividade científica desenvolvida pelo matemático. Sob esse horizonte interpretativo, compreender os conhecimentos matemáticos não significa apenas aprender as definições e teoremas, deve-se dominar tais saberes, aplicando-os na resolução de problemas propostos. Na realização de uma reprodução fiel de uma atividade científica, os estudantes devem produzir, formular, comprovar e construir conceitos, apresentá-los a outras pessoas, para que estas os reconheçam, avaliem e aprovem a sua veracidade ou não (BROUSSEAU, 2002).

Já a interação entre o professor e os estudantes, presente na Figura 2, envolve a relação pedagógica estabelecida em sala de aula. Nessa interação, cabe ao professor a ação didática, a qual podemos nomear também como intenção didática. Por conseguinte, o trabalho pedagógico do professor pode ser desenvolvido buscando transformar seus intentos em intenções didáticas, considerando-se que “uma intenção torna-se didática se, e somente se, um dos sujeitos demonstra a intenção de modificar o sistema de conhecimentos do outro” (BROUSSEAU, 2008, p. 53). Além disso, as informações são sempre compartilhadas entre professores e estudantes, tendo em vista que, a todo instante, os estudantes estarão informando ao professor sobre o progresso na resolução da situação proposta e o professor estará convidando e incentivando os estudantes a aceitarem os problemas.

Ademais, essa relação pedagógica entre o professor e o estudante perpassa, também, pelo que Brousseau (1980) nomeou por contrato didático, ou seja, os comportamentos específicos do professor esperados pelos estudantes e os comportamentos dos estudantes esperados pelo professor:

> Em uma situação de ensino, preparada e realizada por um professor, o estudante geralmente tem a tarefa de resolver o problema (matemático) que lhe é apresentado, mas o acesso a essa tarefa é feito por meio de uma interpretação das perguntas feitas, informação fornecida, restrições impostas que são constantes da maneira de ensinar do professor. Estes (específicos) hábitos do professor esperados pelo estudante e os comportamentos do estudante esperados pelo professor, é o contrato didático (BROUSSEAU, 1980, p. 181, tradução nossa).

Sendo assim, o contrato didático estabelece as ações que cada agente deve desenvolver em uma dada tarefa, na perspectiva de Brousseau (1980), é possível entendermos que o contrato didático poderá impedir ou promover o acesso dos estudantes ao conhecimento, é o contrato didático que revela, também, as responsabilidades de cada um dos agentes perante o processo de ensino e aprendizagem. Neste contexto, são as escolhas que se realizam:

> [...] que impede ou promove o acesso dos estudantes ao conhecimento, o que bloqueia o retorno de algumas crianças no processo de aprendizagem. Pois os contratos, sua realização e os seus sucessos revelam a ideia que os professores e estudantes têm da matemática e de seu funcionamento, das condições de sua criação, assim como do seu sentido e do seu interesse [...]. São as circunstâncias em que os conhecimentos são empregados que lhe dão significação (BROUSSEAU, 1980, p. 181, tradução nossa).

Então o contrato didático aponta indícios da epistemologia do professor e dos estudantes perante o conhecimento matemático e a aplicação no contexto social em que se encontram inseridos. Brousseau (1986, p. 50, tradução nossa) argumentou que o “contrato didático é a regra do jogo e a estratégia da situação didática. Isto é, a maneira que o professor tem para se colocar em cena. Mas, a evolução da situação modifica o contrato que permite então a obtenção de novas situações”. Assim, o contrato didático depende dos diferentes contextos de ensino e aprendizagem, mas não deve ser confundido com o contrato pedagógico geral (BROUSSEAU, 1986), pois ele encontra-se intimamente relacionado aos conhecimentos trabalhados, aos objetivos de formação, ao trabalho proposto para os estudantes e às escolhas pedagógicas realizadas pelo professor.

Neste sentido, tanto o professor quanto os estudantes possuem um papel importante nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática, sendo que tais sujeitos contribuem diretamente para o cumprimento dos aspectos que perpassam pelo contrato didático. Entretanto, cabe ao professor realizar a escolha das variáveis didáticas que poderão favorecer o acesso dos estudantes ao conhecimento.

Ademais, um contrato muito “explícito está fadado ao fracasso. Em particular, as cláusulas de rescisão e a emissão do contrato não podem ser descritas antecipadamente. O conhecimento será justamente o que resolverá as crises resultantes dessas rupturas” (BROUSSEAU, 1986, p. 52, tradução nossa). Assim, o contrato didático envolve o professor e o estudante enquanto parceiros da relação didática, os quais possuem o conhecimento a ser ensinado como o fio condutor implícito dessa relação, esse conhecimento poderá ditar a necessidade de negociações ou o estabelecimento de um novo contrato didático. A ruptura do contrato didático manifesta-se quando os processos de ensino e aprendizagem passam por contradições que envolvem um dos parceiros da relação didática, ou seja, o professor ou o estudante (BROUSSEAU, 1997).

Destarte, deve se ponderar que o contrato didático é passível de reformulações e este só vem à tona quando apresenta a necessidade de renegociação. Brousseau (1986) destacou, ainda, que não existe contrato bom, ruim, verdadeiro ou falso, o que existe é um processo de pesquisa de um contrato hipotético que sustente a relação professor/estudante, a qual é mediada pelo conhecimento. Nesse contexto, quando o contrato didático é mal interpretado pode gerar dificuldades no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem, ou ocasionar efeitos de contrato. Tais efeitos podem ser compreendidos como atitudes desenvolvidas pelo professor, as quais contribuem para romper com o contrato didático (BROUSSEAU, 1997).

O conceito de contrato didático e os efeitos correlatos foram propostos por Brousseau (1997) a partir dos resultados de uma pesquisa realizada junto a estudantes que resolveram pseudos-problemas, ou seja, problemas incompletos ou sem solução, aos quais apresentaram respostas “absurdas”. Por exemplo, para o problema: “em um navio foram embarcadas 26 ovelhas e 18 cabras, qual é a idade do capitão?” (BROUSSEAU, 1997, p. 33, tradução nossa), mais de 60% dos estudantes responderam 44 anos, foi então que os pesquisadores perguntaram aos estudantes se a resposta apresentada não lhes parecia estranha, eles afirmaram que sim, mas que para todo problema apresentado pelo professor eles deveriam lhe informar uma solução. Tais aspectos estavam atrelados ao contrato didático estabelecido pelo professor e estudantes e aos efeitos desse contrato.

Dentre os efeitos do contrato didático destacamos: o efeito *Topaze*, neste “a resposta que o estudante deve dar é previamente determinada. O professor escolhe as perguntas que a podem provocar” (BROUSSEAU, 2008, p. 80), assim, esse efeito caracteriza-se pelo controle por parte do professor das incertezas que poderão surgir durante o processo de ensino e aprendizagem.

Outro efeito do contrato didático é o *Jourdain*, no qual “o professor, para evitar o debate do conhecimento com o estudante e, eventualmente, comprovar o fracasso, admite perceber indício de um conhecimento sábio nos comportamentos ou nas respostas dele” (BROUSSEAU, 2008, p. 80-81). Tal efeito é compreendido como um mal entendido fundamental, em que ao responder questões ou expressões com fundamentos no senso comum, o professor interpreta as respostas apresentadas pelos estudantes como corretas e lhes confere um caráter verdadeiro e científico. Em relação a isso, Almouloud (2007, p. 94, grifo nosso) abordou sobre a resolução de equações do primeiro grau do seguinte modo:

> [...] o aluno usa, de forma sistemática, o **passar para o outro lado com sinal trocado** como regra para encontrar a resposta procurada. O professor então passa a apresentar periodicamente equações do tipo $a + x = b$, para que o aluno obtenha a resposta correta mesmo usando uma estratégia falsa.

Ao legitimar como científica a compreensão apresentada pelos estudantes durante a resolução das equações “de passar para o outro lado com sinal trocado”, o professor deixa de apresentar as propriedades relacionadas aos números e às operações numéricas e passa a mecanizar e a reafirmar a construção de estratégias falsas de resolução.

Outro efeito se refere ao deslize metacognitivo e metadidático no qual o “professor pode ser conduzido a justificar e continuar sua ação, tomar suas próprias explicações e os meios heurísticos como objetos de estudo no lugar do real conhecimento matemático” (BROUSSEAU, 1997, p. 35, tradução nossa), ou seja, o professor considera a técnica para resolver um determinado problema como sendo o objeto de estudo e deixa de lado o real conhecimento que deveria ser ensinado. Um exemplo desse efeito que foi apresentado por Almouloud (2007) na utilização de tabelas de variação para dominar o conceito de função, esse efeito ocorre quando o professor reduz sua explicação sobre o conceito de função à compreensão da utilização de tabelas de variação.

Além dos efeitos citados, há, também, o uso abusivo da analogia. Segundo Bousseau (2008), o emprego da analogia pode produzir efeitos *Topaze*, isto ao considerar que na analogia parte-se do pressuposto de que “se os estudantes fracassam em seu processo de aprendizagem, devem receber uma nova oportunidade no mesmo assunto” (BROUSSEAU, 2008, p. 84). O efeito mencionado pode favorecer a memorização e a reprodução dos conceitos trabalhados, pois o estudante vivencia questões do mesmo tipo, recorrendo a questões análogas que já tenham sido resolvidas anteriormente.

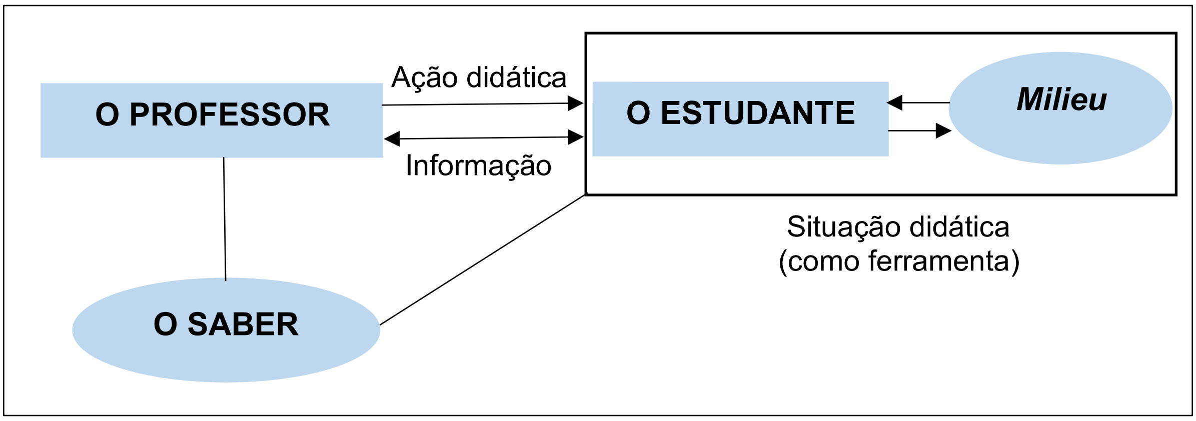
Outro efeito apresentado por Brousseau (1997) é o envelhecimento das situações de ensino, neste o professor encontra dificuldade para reproduzir a mesma lição, embora estas sejam novas para os estudantes. Entretanto, a reprodução exata daquilo que ele disse ou fez anteriormente não obteve resultados tão bons, ou os resultados foram muito piores, portanto, ele reluta na reprodução e modifica: a formulação, a apresentação das instruções, os exercícios ou mesmo a lição. Desse modo, “esse efeito aumenta com o número de reproduções e é ainda mais fortes se a lição compreende mais interações entre o professor e o estudante” (BROUSSEAU, 1997, p. 37, tradução nossa).

Diante da apresentação dos efeitos que perpassam pelo contrato didático, constata-se o quanto se faz necessário, por parte do professor, a busca pelo equilíbrio entre a necessidade de criar condições para que os estudantes possam adquirir novos saberes, igualmente atentar-se para as dificuldades que estejam apresentando no decorrer do processo. O professor, ao identificar um obstáculo explicitado pelos estudantes em uma dada situação, tentará não reduzir o seu trabalho pedagógico as ações que perpassam pelos efeitos supracitados e que possam vir a prejudicar o processo de aprendizagem dos estudantes, seja abreviando os conhecimentos a serem trabalhados a uma parte ou uma ferramenta de resolução que o compõe, ou ainda, ao seu anseio, com vistas a atender as suas próprias expectativas.

Ao analisar o ambiente de aprendizagem, a TSD então evidencia que este não se reduz às ações dos professores e estudantes, frente ao saber, tendo em vista que o professor “cria de maneira real ou ficcional, um outro ‘milieu’ em que o estudante atua de maneira autônoma” (BROUSSEAU, 1997, p. 20, tradução nossa). Assim, a TSD possui como objeto de estudo a situação didática, a partir da interação entre o professor, o saber, o estudante e o *milieu*[3], conforme Figura 3, contrapondo-se, portanto, "à forma didática clássica, centrada no ensino com ênfase na divulgação de conteúdos sistematizados, incluindo a forma axiomática" (FREITAS, 2016, p. 78), isto por considerar que a TSD defende uma postura mais autônoma por parte dos estudantes, assemelhando-se à postura de um matemático na construção de novos saberes.

Neste contexto, o processo de ensino e aprendizagem engloba aspectos para além dos três polos: professor, estudante e saber, compreendendo-se que há outros fatores presentes no *milieu* que foi pensado e planejado pelo professor, os quais podem dificultar ou contribuir para as intenções didáticas e as modificações e ampliações do arcabouço de conhecimentos dos estudantes.

Figura 3 - Representação de um sistema didático



Fonte: Adaptado de Brousseau (1997).

Descrição da Figura 3: Diagrama formado por figuras em formato de dois retângulos e duas elipses, na cor azul, envolvendo duas estruturas: uma estrutura menor formada por um retângulo com a inscrição O ESTUDANTE e uma elipse o M*ilieu*, contendo duas setas: uma que parte do estudante para o *milieu* e a outra do *milieu* para o estudante. Essa estrutura tem um nome abaixo do retângulo maior que a circunscreve, nomeada por situação didática (como ferramenta); a outra estrutura envolve um retângulo escrito O PROFESSOR, a estrutura menor O ESTUDANTE-*Milieu* e uma elipse intitulada O SABER, há uma seta partindo do professor para a estrutura menor estudante-*milieu*, nomeada por ação didática e outra seta de pontas duplas que parte do professor para essa estrutura intitulada informação (Fim da descrição).

Conforme pode ser observado na Figura 3, os estudantes interagem diretamente com o *milieu*, e tendo a situação didática como ferramenta ambos se influenciam, contribuindo para que a aprendizagem possa vir a ocorrer. Desta maneira, faz-se necessário entender o que vem a ser uma situação didática em uma

[3] No âmbito desta pesquisa, utilizaremos o termo *milieu*, por compreender que sua tradução na Língua Portuguesa (meio), não contempla a dimensão do seu significado.

perspectiva mais ampla, a qual possui um *milieu* que foi planejado para um determinado fim. Na perspectiva de Brousseau (1986, p. 8, tradução nossa):

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um estudante ou um grupo de estudantes, num certo *milieu*, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes estudantes um saber construído ou em vias de construção.

Assim, haverá sempre uma situação didática quando o professor possuir uma intenção didática na construção de um novo conhecimento junto aos estudantes. Para tanto, irá preparar o *milieu*, ou seja, os instrumentos e objetos que possam contribuir para a construção autônoma por parte dos estudantes do saber que se deseja desenvolver.

Nas palavras do referido autor, “o estudante aprende adaptando-se a um *milieu* que é fator de contradições, dificuldades e desequilíbrios” (BROUSSEAU, 1986, p. 59, tradução nossa). Tal aspecto centra-se nos pressupostos que constituem a epistemologia genética desenvolvida por Jean Piaget, em que o estudante aprende por adaptação (PIAGET, 2007), entretanto, caso essa teoria seja mal interpretada, corre-se o risco de isentar o professor de toda a responsabilidade didática e, consequentemente, cair em uma espécie de empirismo. Por este motivo, Brousseau (1986, p. 59) destacou, ainda, que “o *milieu* sem intenções didáticas é manifestamente insuficiente para induzir no estudante todo o conhecimento cultural que desejamos que ele adquira”.

Destarte, a adaptação do estudante não é a qualquer *milieu*, este deve estar dotado de intenções didáticas, organizadas pelo professor, com o intuito de provocar e instigar o desenvolvimento de novas aprendizagens (BROUSSEAU, 1986). As aprendizagens a serem construídas devem ter como ponto axial os conhecimentos matemáticos cientificamente produzidos e disseminados, de modo que o:

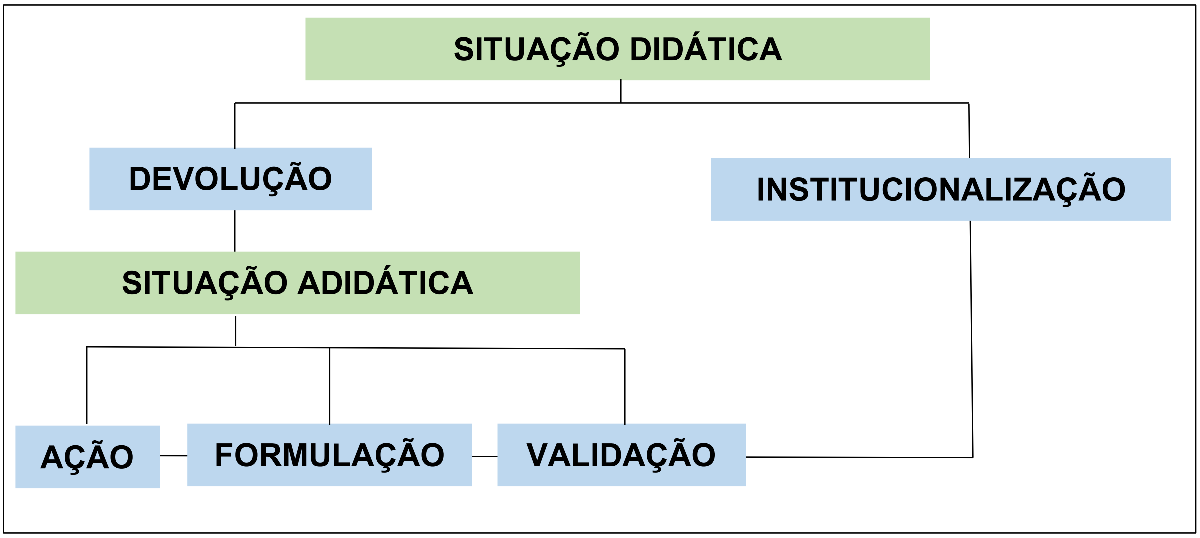
> [...] professor provoque a adaptação esperada em seus estudantes por uma escolha criteriosa de ‘problemas’ [...]. Esses problemas, devem ser escolhidos de tal forma que os estudantes possam aceitá-los e que estes lhes façam agir, falar, refletir, evoluir, pelo seu próprio movimento (BROUSSEAU, 1986, p. 59, tradução nossa).

Assim, a demonstração de aceitação, dos problemas, por parte dos estudantes, poderá ser verificada a partir das suas atitudes na busca por solucioná-los. Já a aprendizagem poderá ser constatada a partir das respostas novas apresentadas pelos estudantes, decorrente dos processos de desequilíbrio, contradição, dificuldade, reorganização e adaptação ao *milieu* (BROUSSEAU, 1986).

Para investigar o desenvolvimento do processo de aprendizagem dos estudantes, Brousseau (1997) propôs que a TSD pudesse vir a observar e decompor esse processo em cinco fases distintas, a saber: devolução, ação, formulação, validação e institucionalização, as quais articulam-se entre si e podem ocorrer em variados e diferentes momentos do processo de ensino e aprendizagem. A ação, a formulação e a validação caracterizam uma *situação adidática*, busca-se que as atitudes dos estudantes, nesse momento, possam se assemelhar à postura de um pesquisador, isto é, que suas ações sejam mais autônomas e investigativas. Já a devolução e a institucionalização correspondem a *situações didáticas* que envolvem diretamente a postura do professor, pois ele será a figura mais ativa e atuante nesses momentos.

Vale salientar que a *situação adidática* é parte essencial da *situação didática*, conforme pode ser observado na representação da Figura 4, a seguir:

Figura 4 - Esquema da situação didática



Fonte: Nossa produção (NERY, 2021).

Descrição da Figura 4: Diagrama formado por figuras em formato de sete retângulos interligados nas cores verde e azul. Há um retângulo na parte superior com a inscrição SITUAÇÃO DIDÁTICA, esse retângulo está ligado por linhas verticais e horizontais a outros dois retângulos com os nomes DEVOLUÇÃO e INSTITUCIONALIZAÇÃO. O retângulo com a palavra DEVOLUÇÃO está ligado por uma linha vertical a outro com a inscrição SITUAÇÃO DIDÁTICA, sendo que este está ligado a partir de linhas verticais e horizontais aos retângulos com inscrições AÇÃO, FORMULAÇÃO E VALIDAÇÃO, os quais se interligam e ligam-se ao retângulo com o nome INSTITUCIONALIZAÇÃO (Fim da descrição).

Conforme Figura 4, todas as fases estão interligadas e podem ocorrer em diferentes momentos. No entanto, em uma *situação didática*, a apresentação inicial é realizada pela devolução, na qual "o professor coloca o estudante em uma situação adidática ou pseudo-didática" (BROUSSEAU, 1986, p. 88, tradução nossa). Este momento acontece à semelhança de um convite, em que o professor provoca o estudante a aceitar o problema proposto. Por este motivo, na Figura 4, colocamos a fase de devolução como uma *situação didática* que se interliga à *situação adidática*. Assim, para que a aprendizagem ocorra faz-se necessário que o estudante aceite o problema como sendo de sua responsabilidade. Brousseau (2002) comparou a devolução a um jogo escolhido pelo professor para que o estudante possa interagir com o *milieu*, aceitando vivenciar as fases da *situação adidática.*

No que se refere à devolução, espera-se dos estudantes que desenvolvam, previamente, uma estratégia básica para iniciar o jogo, a qual irá possibilitar a apreciação do problema e das regras que o compõe. Além disso, haverá sempre retroações ou *feedbacks* fornecidos pela situação que está presente no *milieu,* as quais permitirão aos estudantes refletirem sobre as estratégias que lhes possibilitarão "ganhar" o jogo (BROUSSEAU, 2002).

Sendo assim, para se obter êxito nesse jogo de construção de saberes, o professor buscará estimular os estudantes e se recusará a intervir na situação como um fornecedor de conhecimentos, almejando a aceitação por parte dos sujeitos, deixando-os agir com autonomia frente a construção de novos conhecimentos, tendo em vista que:

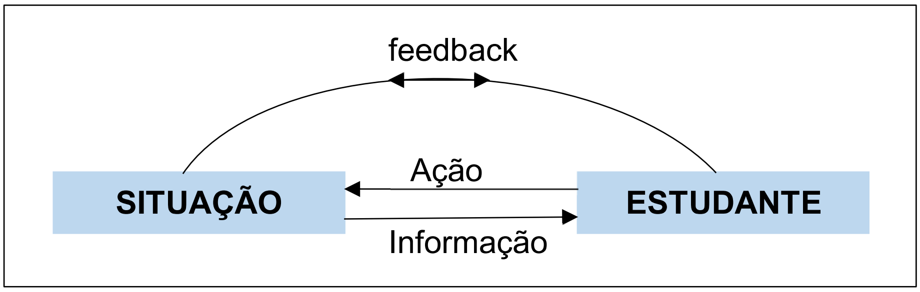
> Entre o momento em que o estudante aceita o problema como seu e aquele em que produz sua resposta, o professor se recusa a intervir, como alguém que propõe os conhecimentos que deseja ver surgir. O estudante sabe que o problema foi escolhido para que ele possa adquirir um novo conhecimento, mas também deve saber que esse conhecimento é justificado pela lógica interna da situação e que ele pode construí-lo sem apelar às razões didáticas (BROUSSEAU, 1986, p. 49, tradução nossa).

Nesse caso, desaparece a intenção de ensinar, dito de outra forma, o professor não revela aos estudantes a intenção de apresentar um novo conhecimento matemático. Entretanto, tal situação é devidamente planejada pelo professor de modo a possibilitar condições para que os estudantes se apropriem do novo conhecimento, isto a partir de escolhas criteriosas de situações que possam despertar o anseio em desenvolvê-las. Para tanto, faz-se necessário a aceitação do convite pelos estudantes para resolvê-las, com o intuito de adquirir novos conhecimentos e isto sem o apelo didático explícito do professor.

Desse modo, em uma situação *adidática*, tanto a postura do professor quanto as atitudes dos estudantes são fundamentais para o sucesso na atividade, uma vez que “as situações *adidáticas* representam os momentos mais importantes da aprendizagem, pois o sucesso do aluno nelas significa que ele, por seu próprio mérito, conseguiu sintetizar algum conhecimento” (FREITAS, 2016, p. 86). Para tanto, o intuito do professor será o de possibilitar, ao estudante, uma construção mais autônoma do conhecimento, de maneira que este possa vivenciar atitudes de ação, formulação e validação, as quais compõem a situação *adidática*.

No âmbito da ação, é realizada uma sucessão de interações entre o estudante e o *milieu*, isso foi nomeado por Brousseau (2002) como dialética da ação. Tal situação constitui o processo pelo qual o estudante constrói estratégias e métodos na busca de resolver o problema proposto. Com isso, para construir a solução, ele começa a organizar suas estratégias e cria representações da situação que servem de modelos e guia para a tomada de decisões. Desta maneira, o estudante ensina a si mesmo, utilizando-se de estratégias e ações distintas que o permitem elucidar as informações presentes na situação, conforme esquematizado na Figura 5, a seguir:

Figura 5 - Esquema geral de situação de ação



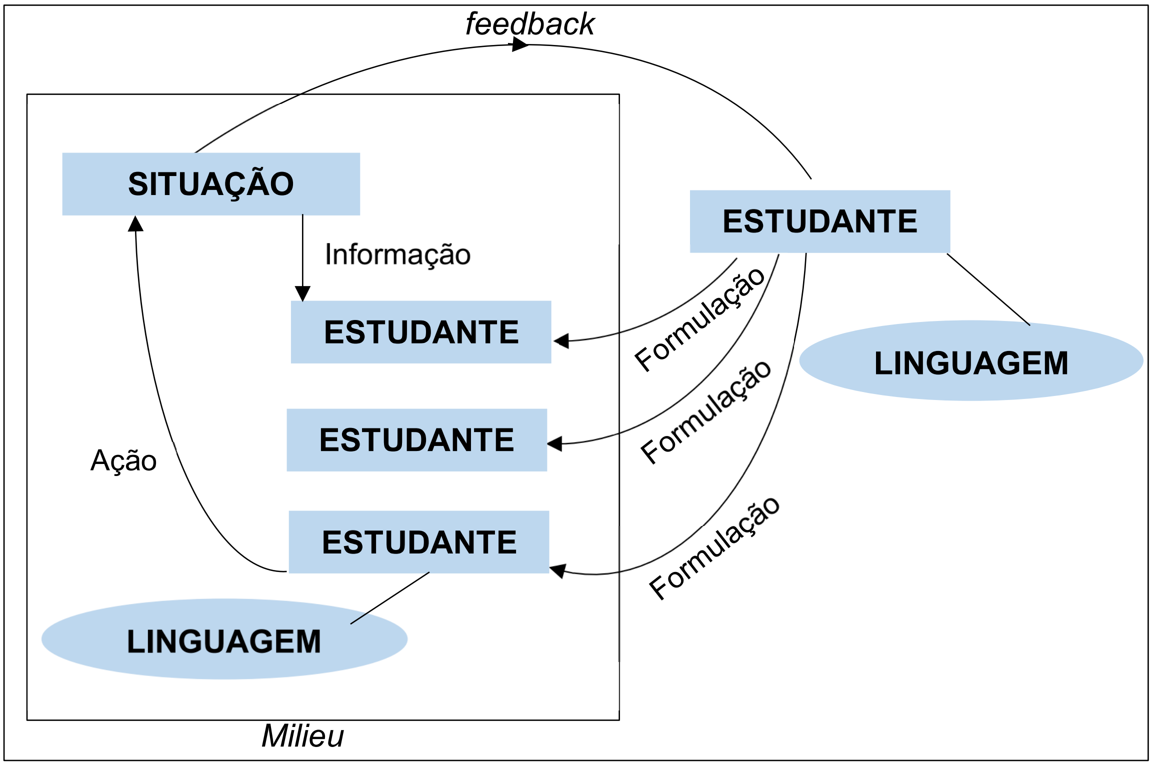
Fonte: Brousseau (1997, p. 6).

Descrição da Figura 5: Diagrama formado por figuras em formato de dois retângulos, na cor azul, com uma inscrição interna SITUAÇÃO e ESTUDANTE. Há, na parte superior, uma seta maior de ponta dupla que liga os retângulos à inscrição feedback e outra seta que sai do ESTUDANTE e aponta para a SITUAÇÃO, com a inscrição ação. Além dessa, há outra seta que parte da SITUAÇÃO e indica o ESTUDANTE, intitulada informação (Fim da descrição).

Diante disso, o estudante age sobre a situação, a qual retorna informações sobre sua ação, isto é, há sempre um *feedback*. Neste contexto, a situação deve possibilitar que os estudantes avaliem o resultado das suas ações, a partir da retroação do *milieu* (BROUSSEAU, 1998). Os estudantes poderão então ajustar a ação, aceitar ou rejeitar uma hipótese e escolher entre as várias soluções, ou seja, a que satisfaça ao problema proposto, sem contar com a intervenção do professor.

Outra fase da situação *adidática* é a formulação, compreendida enquanto uma dialética que estabelece, progressivamente, uma linguagem possível de ser compreendida por todos. Nessa perspectiva, deve-se levar em conta os objetos e as relações relevantes da situação, sendo que as proposições de um estudante podem ser discutidas por outros estudantes para além da mensagem, isto é, considerando-se a veracidade e a eficiência do conteúdo presente na linguagem apresentada (BROUSSEAU, 1997). Esta situação encontra-se representada na Figura 6.

Figura 6 - Esquema de situação de formulação



Fonte: Brousseau (1998, p. 35).

Descrição da Figura 6: Diagrama formado por figuras em formato de cinco retângulos e duas elipses na cor azul. Nesses retângulos estão escritos SITUAÇÃO e ESTUDANTE e nas elipses LINGUAGEM. Há setas que ligam a SITUAÇÃO ao ESTUDANTE e intitula-se feedback e informação. Há setas que ligam uma expressão ESTUDANTE aos outros três retângulos com o nome ESTUDANTE, cujas setas recebem o nome de formulação. Há também ligações entre o retângulo da palavra ESTUDANTE e da elipse que possui a inscrição LINGUAGEM. Há uma seta que liga um retângulo do termo ESTUDANTE ao retângulo da palavra SITUAÇÃO e esta possui a inscrição ação (Fim da descrição).

Conforme observado na representação do esquema dessa situação (Figura 6), o estudante autor das formulações não age diretamente sobre a situação, nessa fase, entretanto, ele pode valer-se da comunicação entre os seus pares, recebendo, inclusive, o *feedback* da situação investigada. Dessarte, os estudantes que discutem a mensagem emitida compõem o *milieu,* podendo agir sobre a situação e igualmente receber informações.

Em síntese, Brousseau (1997, p. 35) destacou que “para vencer, não basta que o estudante saiba jogar (isto é, tenha um modelo implícito) ele deve indicar aos colegas da equipe qual a estratégia ele propõe”. Assim, essa fase envolve outros sujeitos, com os quais as descobertas serão comunicadas tendo o intuito de apresentar as ferramentas utilizadas na resolução, seja através de mensagens orais ou escritas, redigidas em linguagem natural ou matemática.

A situação de validação é a etapa na qual todos os estudantes cooperam na busca da verdade, ou seja, o estudante que estabeleceu e apresentou a formulação, com a utilização da linguagem, isso na fase anterior, necessitará mostrar a validade do modelo por ele criado, submetendo sua mensagem ao julgamento dos demais pares. Juntos, eles lidam com as interações formadas entre o *milieu* e o conhecimento relativo a esse *milieu*. Nesse momento, todos podem se posicionar sobre as mensagens apresentadas e, se houver discordância, pedir uma prova a fim de comprová-las ou refutá-las (BROUSSEAU, 1986).

Vale destacar que “o esquema didático de validação motiva os estudantes a discutirem uma situação e favorece a formulação de suas validações implícitas [...]. A situação didática deve levá-los a evoluir, revisar suas opiniões e substituir teorias falsas por verdadeiras” (BROUSSEAU, 2002, p. 17, tradução nossa). Assim, o momento de validação deve possibilitar que os estudantes consigam descobrir erros, sem a intervenção direta do professor, isso poderá contribuir para desencadear uma maior motivação e favorecer o desenvolvimento da autonomia dos estudantes frente aos processos de ensino e aprendizagem da matemática.

Apenas o esquema didático de validação não é suficiente para a consolidação do conhecimento enquanto um saber. Dessa maneira, ao desenvolverem uma atividade, os estudantes possivelmente apresentarão uma solução, é possível questionar: como saber se tal solução está correta? Ou ainda, será que o conhecimento construído, pelos estudantes, é cientificamente válido? É neste momento que entra em cena a outra fase denominada por Brousseau (1986) de institucionalização, que caracteriza a situação didática.

Na etapa de institucionalização, o professor estabelece as relações entre os comportamentos ou produções “livres” dos estudantes, isto é, que foram realizados nos momentos de ação, formulação e validação, e o conhecimento cultural ou científico (BROUSSEAU, 1986). Dito de outro modo, o professor faz uma leitura das atividades empreendidas pelos estudantes e lhes concede um *status* de conhecimento culturalmente instituído ou conhecimento institucionalizado, que é ensinado explícito e formalmente aos estudantes.

Cabe ao professor se atentar às etapas que compõem a *situação adidática*, de modo a não precipitar ou mesmo postergar o momento de institucionalização. Tendo em vista que se for feita muito cedo, a institucionalização poderá interromper a construção do significado que está alicerçado à situação que foi proposta pelo professor aos estudantes, podendo acarretar prejuízos para os processos de ensino e aprendizagem (ALMOULOUD, 2007). Feita tardiamente, poderá reforçar interpretações inexatas (ALMOULOUD, 2007), ou erros que foram tomados como verdades. Caso isso ocorra, poderá atrasar a aprendizagem ou criar obstáculos epistemológicos futuros.

Assim sendo, a fase de institucionalização é imprescindível no processo de ensino e aprendizagem, pois, nesse momento, o professor encontra oportunidades de corrigir possíveis equívocos demonstrados pelos estudantes nas fases anteriores. Do mesmo modo, os estudantes terão a chance de descobrir seus erros, caso essa constatação não tenha sido realizada anteriormente. No azo, Brousseau (2002) assinalou que nestas situações sempre existirão uma intenção docente explícita em relação à aprendizagem de um determinado saber, isto é, o professor instaura um caráter de conhecimento institucionalizado.

No âmbito deste estudo, as situações apresentadas aos estudantes são classificadas enquanto atividades lúdicas, as quais podem contribuir para eles elaborarem hipóteses e explicitarem o pensamento matemático, através da utilização de expressões orais, gestuais ou escritas de maneira mais natural, sem o receio de estarem errados. Assim, a situação didática e o *milieu* foram compostos por uma atividade lúdica e inclusiva. Diante disso, apresentamos, na próxima seção, o que concebemos como sendo uma atividade lúdica e quais as características de uma vivência lúdica no contexto do ensino e aprendizagem.

1.3 A Ludicidade na construção de novos saberes

A ludicidade compreende um conceito em constante construção. No senso comum, pode estar associada a atividades como jogos, brincadeiras e outras formas de lazer. Entretanto, a sua compreensão é mais ampla e está atrelada a uma vivência lúdica, que é interna ao sujeito e “integra as dimensões emocional, física e mental” (BACELAR, 2009, p. 30). Além disso, a ludicidade depende de uma motivação externa, que são as chamadas atividades lúdicas. Estas atividades, segundo Bacelar (2009), podem ser observadas e descritas por outra pessoa enquanto são realizadas.

As vivências lúdicas podem ser executadas individualmente ou em grupo e variam a depender dos indivíduos que as realizam, entretanto, uma das características da atividade lúdica enquanto uma vivência lúdica são os sentimentos dos indivíduos na experimentação, atentando-se para “a experiência lúdica (= ludicidade), que é uma experiência interna ao sujeito, só pode ser percebida e expressa pelo sujeito que a vivencia” (LUCKESI, 2014, p. 17).

Neste ínterim, a concepção de ludicidade é complexa e subjetiva, pois depende diretamente da relação estabelecida entre o sujeito, o objeto e o meio em que a atividade está inserida. Para possibilitar uma exemplificação e diferenciação entre ludicidade e atividade lúdica, Bacelar (2009, p. 30) explicou: a brincadeira de roda constitui a atividade lúdica; a vivência lúdica ou ludicidade pode ser identificada através dos “estados de inteireza, de plenitude, de prazer com os quais o indivíduo faz contato enquanto brinca de roda”. Sendo assim, várias pessoas podem estar na roda, mas a experiência de cada uma delas é diferente, fato que permite inferir que uma atividade pode ser lúdica para uma pessoa e para outra não.

Diante disso, Macedo, Petty e Passos (2005) apontaram que há, na perspectiva das crianças, algumas características que permitem indicar uma vivência lúdica, no processo de ensino e aprendizagem, a saber: ter prazer funcional; ser desafiadora; criar possibilidades ou dispor delas; possuir uma dimensão simbólica e, por último, expressar-se de modo construtivo ou relacional. Apesar dessas características estarem atreladas a vivência lúdica das crianças, podemos a partir delas pensar nas características da ludicidade para jovens e adultos, tendo em vista que algumas delas também podem ser constatadas com esses outros públicos, ao vivenciarem uma atividade lúdica.

A primeira característica diz respeito a ter prazer funcional. Para compreendê-la, é preciso analisar o fato de que, atualmente, constatam-se escolas que não são lúdicas, as quais podem apresentar os conteúdos como sendo recursos necessários aos estudantes em um futuro próximo, no entanto, eles podem não entender a utilidade de tais conteúdos e, por conseguinte, despertar desinteresse.

Para os estudantes, muitas vezes, o que vale a pena é o prazer funcional, isto é, a alegria de exercitar certo domínio, de testar certas habilidades, enfim de transpor obstáculos ou de vencer certos desafios (MACEDO; PETTY; PASSOS, 2005). Com isso, nesse primeiro aspecto da atividade lúdica, o espírito lúdico reporta-se a uma relação da criança ou adulto, com uma tarefa, atividade ou pessoa pelo prazer funcional por ela despertado, isto é, a motivação torna-se algo intrínseco e desenvolve-se a atividade pelo prazer proporcionado e não para obter informações para serem utilizadas no futuro.

Outro atributo de uma atividade lúdica refere-se às atividades serem desafiadoras, ou seja, configura-se como algo que chama atenção pelo desafio e surpresa, pelo gosto de repetir em outro contexto, despertando, assim, uma vivência lúdica. Atrelado ao desafio, encontra-se a surpresa, tendo em vista que não se pode controlar todos os resultados durante a vivência lúdica, podendo acontecer momentos em que a curiosidade das pessoas será aflorada, isso por apresentar-se como uma atividade interessante e instigante. De acordo com Macedo, Petty e Passos (2005), qualquer atividade poderá ser interessante, tudo dependerá de como será proposta, do meio em que está inserida, das pessoas e do sentido que lhes será atribuído pelos sujeitos envolvidos.

A terceira característica diz respeito à criação de possibilidades ou dispor delas. Nesta conjuntura, destaca-se que as atividades podem ser compreendidas como sendo necessárias e possíveis. O aspecto necessário pode ser compreendido sob dois pontos de vista distintos: o primeiro deles, o afetivo, remete ao fato de que o não fazer a atividade lúdica pode produzir algum desconforto, como por exemplo um sentimento de perda ou um desejo ou demanda não atendida; já o segundo ponto de vista relaciona-se a aspectos cognitivos, na medida em que se a atividade é imperiosa, ela tem de ser minimamente pensável ou realizável (MACEDO; PETTY; PASSOS, 2005).

Para além de ser necessária, Macedo, Petty e Passos (2005) destacaram que a atividade deve ser possível, na medida em que as crianças ou os adultos carecem dispor de recursos internos, ou seja, habilidades ou competências para realizá-la. Igualmente de recursos externos, os quais referem-se aos objetos, espaços, pessoas ou tempo suficiente para a realização de toda a atividade.

Além disso, a presença do lúdico na aprendizagem pode ainda ser identificada por uma quarta característica, a saber: possuir uma dimensão simbólica. Nesta perspectiva, as atividades são motivadas e históricas, como, por exemplo, quando uma criança brinca de casinha, ela atribui sentido aos objetos utilizados para montar o cenário, simula pessoas e acontecimentos, para que sua brincadeira tenha um sentido próprio, expressando seus desejos, sentimentos, valores e que incorporem o mundo e a cultura que a cerca (MACEDO; PETTY; PASSOS, 2005).

Neste sentido, “o lúdico torna-se simbólico e amplifica as possibilidades de assimilação do mundo” (MACEDO; PETTY; PASSOS, 2005, p. 20). Assim, a criança, o jovem ou o adulto têm a possibilidade de pensar, imaginar ou questionar sobre a situação que vivencia, haja vista que a atividade realizada possui um correspondente em seu contexto social, o que a torna possível de ser associada.

A quinta característica é o expressar-se de modo construtivo ou relacional, o desafio neste momento é o de examinar algo que é fruto da construção do próprio sujeito, segundo diversos pontos de vista. Assim, destacam-se como sendo parte de uma atividade lúdica os seguintes aspectos: um olhar atento, aberto e disponível para as muitas possibilidades de expressão a “qual implica em uma relação múltipla, que ora considera um aspecto, ora considera outro, ora observa a forma, ora o conteúdo, ora o tema, ora as imagens, sabendo que tudo isso faz parte de um mesmo todo” (MACEDO; PETTY; PASSOS, 2005, p. 21).

Diante desses indicadores, enfatizamos que a ludicidade envolve “uma conexão entre o externo (objetivo) e o interno (subjetivo) e, portanto, é de relevância significativa para a vida em todas as suas fases” (BACELAR, 2009, p. 30). Assim, não cabe considerar a vivência lúdica apenas como sendo inerente à infância, pois perpassa por todas as fases e compõe a vida adulta, basta averiguar que a ludicidade provém das mais complexas atividades e experiências humanas (LUCKESI, 2014).

Como exemplo, Luckesi (2014) destacou que desde o útero materno já se vivência a ludicidade, através do estado oceânico em que os bebês se desenvolvem, com o passar das fases da vida, as expressões lúdicas vão sendo experimentadas em distintos contextos. Durante a infância, são caracterizadas através de brincadeiras, brinquedos, momentos de afetividade, interação, viagens e momentos que suscitam o sentimento de alegria, entusiasmo, realização e prazer. Na juventude, os sonhos e as conquistas, rumo à vida adulta podem se caracterizar como momentos de vivência lúdica. Já na fase adulta, os momentos lúdicos podem estar atrelados ao trabalho, às relações amorosas, aos estudos, às conversas e aos momentos de lazer. Enfim, o lúdico, nas etapas que compõem a vida humana, pode estar associado às diversas realizações de desenvolvimento daquilo que se gosta de fazer e que se faz pelo prazer proporcionado.

Uma das atividades lúdicas que pode despertar o prazer funcional, o desafio, a criação de possibilidades, associar-se ao simbólico e expressar-se de maneira construtiva e relacional são os jogos, pois, de acordo com Huizinga (2017, p. 1), "é no jogo e pelo jogo que a civilização surge e se desenvolve". Nesta concepção, o jogo compreende um fenômeno cultural e a espécie *Homo sapiens* pode ser então nomeada como sendo *Homo ludens*.

Tentar definir o que é jogo também é uma tarefa complexa, tendo em vista que "o jogo é uma função da vida, mas não é passível de definição exata em termos lógicos, biológicos ou estéticos" (HUIZINGA, 2017, p. 10), o que se pode fazer, então, é determinar as suas características:

> [...] poderíamos considerá-lo uma **atividade livre**, **consciente** tomada como **'não-séria'** e **exterior à vida habitual**, mas ao mesmo tempo capaz de absorver o jogador de maneira intensa e total. É uma atividade **desligada de todo e qualquer interesse material**, com a qual não se pode obter qualquer lucro, **praticada dentro de limites espaciais e temporais próprios**, segundo uma **certa ordem** e **certas regras**. Promove a **formação de grupos sociais** com tendências a rodearem-se de segredo e a sublinharem sua diferença em relação ao resto do mundo por meio de disfarces ou outros meios semelhantes (HUIZINGA, 2017, p. 16, grifo nosso).

Assim, o jogo se constitui enquanto uma atividade livre, na qual o sujeito brinca pelo prazer e alegria que aquela atividade está lhe proporcionando. Além disso, constitui-se como sendo uma atividade não-séria, isto é, vinculado ao riso, ao barulho e ao imaginário, entretanto, a pessoa pode estar no jogo compenetrada e o jogo constituir-se enquanto uma atividade séria. Desse modo, o jogo enquanto uma atividade não-séria, na perspectiva apresentada por Huizinga (2017), está contrapondo-se ao trabalho, sendo este último considerado uma atividade séria. Ligado a isso, o jogo distancia-se também das atividades cotidianas, tendo em vista que perpassa pelo imaginário do jogador e pode capturar toda a sua atenção, levando-o a uma outra realidade.

O interesse que perpassa o jogo está atrelado à fascinação e ao prazer que aquela atividade induz, assim não há interesses materiais ou objetivos de jogar para se aprender, joga-se pelo sentimento de incerteza, alegria e pela busca de tornar-se ganhador do jogo. Entretanto, apesar do anseio de ganhar, respeitam-se as regras e ordens implícitas ou explícitas, caso isso não ocorra, o jogador será chamado de “desmancha-prazeres” (HUIZINGA, 2017, p. 14) e não irá pertencer ao grupo social que o jogo construiu.

Vertendo-se o olhar para as diferentes classificações dos jogos, ressaltamos que podem ser: cooperativos ou competitivos. No jogo cooperativo, joga-se com o outro, enquanto que no jogo competitivo joga-se contra o outro. Neste contexto, Brotto (1999, p. 35) diferenciou as situações de cooperação e de competição, isso ao mencionar que a “cooperação é um processo onde os objetivos são comuns e as ações são benéficas para todos. Competição é um processo onde os objetivos são mutuamente exclusivos e as ações são benéficas somente para alguns”.

Destarte, o jogador em uma situação de cooperação percebe que para atingir seus objetivos faz-se necessária a execução de ações por parte de todos os membros envolvidos, os quais são mais sensíveis às solicitações uns dos outros, ajudam-se mutuamente com maior frequência e há uma maior homogeneidade na quantidade de contribuições e participação (BROTTO, 1999). Em contrapartida, na situação competitiva, os jogadores percebem que para atingir os seus objetivos não é possível a obtenção dos objetivos dos demais jogadores; além disso, todos os envolvidos na situação são menos sensíveis às solicitações, ajudam-se mutuamente com menor frequência e há uma menor homogeneidade na quantidade de contribuições e participação (BROTTO, 1999).

Para Brotto (1999), a competição e a cooperação são processos antagônicos. Entretanto, suas fronteiras são tênues, isso pelo fato de que se pode presenciar ocasiões nas quais uma competição compreende momentos de cooperação e uma cooperação torna-se competitiva. Assim, ao se propor uma atividade lúdica, em âmbito educacional, deve-se ficar atento a tais fronteiras, ainda mais no aspecto cooperativo, levando-se em conta que o ser humano é, muitas vezes, imerso em inúmeros contextos competitivos cujo comportamento pode ser reafirmado como sendo algo “natural”, “hereditário” ou “instintivo”.

No entanto, Orlick (1978) apresentou um conjunto de evidências indicando que os homens pré-históricos viviam juntos, compartilhavam alimentos, frutas e caças, caracterizações das situações cooperativas na convivência humana. Entretanto, com a evolução da humanidade, passou-se a recompensar vencedores e rejeitar perdedores e isso vem fundamentando a sociedade contemporânea e permeando os espaços educacionais ao não se ensinar as crianças e jovens a amarem aprender, construir conhecimentos ou descobrir assuntos até então não sabidos, na maioria das vezes, as ensinamos a se esforçarem para conseguirem notas altas (ORLICK, 1978).

Nesse contexto, ressaltamos que “os jogos cooperativos surgiram da preocupação com a excessiva valorização dada ao individualismo e à competição exacerbada existente na sociedade moderna, mais especificamente, na cultura ocidental” (BROTTO, 2013, p. 61). Essa gênese apresenta à sociedade maneiras de: promover a solidariedade; construir uma cultura de paz; respeitar as individualidades; incluir a todo(as) e desenvolver habilidades interpessoais positivas, tanto para si quanto para os outros.

Na busca por uma correlação entre os jogos cooperativos e a vida, Brotto (2013, p. 72) defendeu que “tanto no jogo como na Vida, estamos permanentemente sendo desafiados a solucionar problemas, a harmonizar conflitos e a realizar objetivos”. Assim, os jogos permitem o desenvolvimento de uma visão ampla sobre as interações sociais, tendo em vista que tanto no jogo quanto na vida, para que se possa superar os desafios e solucionar os problemas, necessitamos uns dos outros. Além do mais, carece-se de ações que cooperem para o bem comum, considerando-se que ninguém joga ou vive tão bem sozinho ou em uma constante competição (BROTTO, 2013).

Diante das características dos jogos cooperativos, concordamos com Brown (2004) que estes devem ser utilizados no âmbito educacional, isso pelo fato de que as ações de cooperação na educação vão muito além da simples utilização de jogos cooperativos:

> [...] pode-se usá-la como estratégia para buscar a igualdade e a justiça com o grupo e para ajudar a entender como tal modelo pode ser aplicado em contextos mais amplos. Estruturas de cooperação criam as condições para transformar a desigualdade, produzindo situações de igualdade e relações humanas onde cada um sente a liberdade e a confiança para trabalhar em conjunto em função de algumas metas comuns (BROWN, 2004, p. 20).

Destarte, os jogos cooperativos contribuem para a consolidação de atitudes de cooperação, as quais podem vir a desenvolver estratégias de igualdade e justiça social, tanto no lócus da sala de aula, da escola, quanto em outros espaços nos quais os estudantes possam vir a atuar. Como exemplo, podemos mencionar a construção de associações de bairros que possam se unir cooperativamente para reivindicar ou melhorar problemas constatados na localidade. Assim, a solução de tais problemas perpassam pela união, cooperação, ajuda mútua e respeito às individualidades de cada membro da comunidade, valores estes que podem ser trabalhados metodologicamente com a utilização de jogos cooperativos educacionais.

Brown (2004) destacou que os jogos cooperativos têm várias características consideradas libertadoras, a saber: libertam da competição, considerando que seu objetivo é sempre jogar com o outro, os participantes não se preocupam se vão ganhar ou perder, a meta do jogo é comum; libertam da eliminação, os jogos cooperativos buscam a interação de todos, assim podemos mencionar que estes almejam a inclusão; libertam para criar, faz-se necessário que todos colaborem, as regras podem mudar, os participantes podem adaptar as informações que constituem o jogo, visando alcançar o intuito maior que ele se propõe e, por último, libertam da agressão física, tais jogos buscam eliminar estruturas que impulsionem a agressão uns contra os outros.

Em suma, os jogos cooperativos constituem-se enquanto uma atividade lúdica que podem vir a possibilitar a todos os envolvidos avaliar, interagir, colaborar, compartilhar, criar, adaptar, incluir e refletir sobre sua relação consigo mesmo e com os outros, na busca pela construção de uma sociedade mais justa e igualitária. Assim:

> [...] A ideia básica da proposta pelo brincar cooperativo é de permitir uma mudança de sentimentos e de entrarmos em contato íntimo com as nossas emoções para potencializar as habilidades humanas básicas como: o amor, a alegria, a criatividade, a confiança, o respeito, a responsabilidade, a liberdade, a autonomia, a paciência, a humildade e a tolerância (ALMEIDA, 2011, p. 28).

Ao utilizar os jogos cooperativos no processo educacional, estamos a considerar que a educação da atual e das próximas gerações terão a oportunidade de realizarem uma interação cooperativa prazerosa que envolva diversos sentimentos, valores e habilidades básicas para a constituição do ser humano, além de contribuir "para diminuir as barreiras e estreitar as distâncias que têm separado pessoas, grupos, sociedades, nações, assim como têm nos afastado da interação harmoniosa com a natureza" (BROTTO, 2013, p. 22).

Assim, defendemos que as atividades lúdicas, expressas por jogos cooperativos, podem vir a despertar uma vivência lúdica nas mais distintas fases da vida e podem, ainda, contemplar as diversas particularidades do sujeito contemporâneo. Além disso, pode "promover o resgate de valores necessários para a formação humana a partir do desprendimento do aprendizado mecânico, convencional e alienante" (ALMEIDA, 2011, p. 25). Desta maneira, a utilização do lúdico para a construção de conhecimentos pode apresentar-se enquanto um contributo eficaz, por possibilitar a vivência de momentos de prazer, alegria e entusiasmo, os quais podem contribuir para a superação de obstáculos, a autodescoberta, a assimilação e uma maior interação com o outro e com o mundo, em que a construção do conhecimento se torna uma aventura desafiadora.

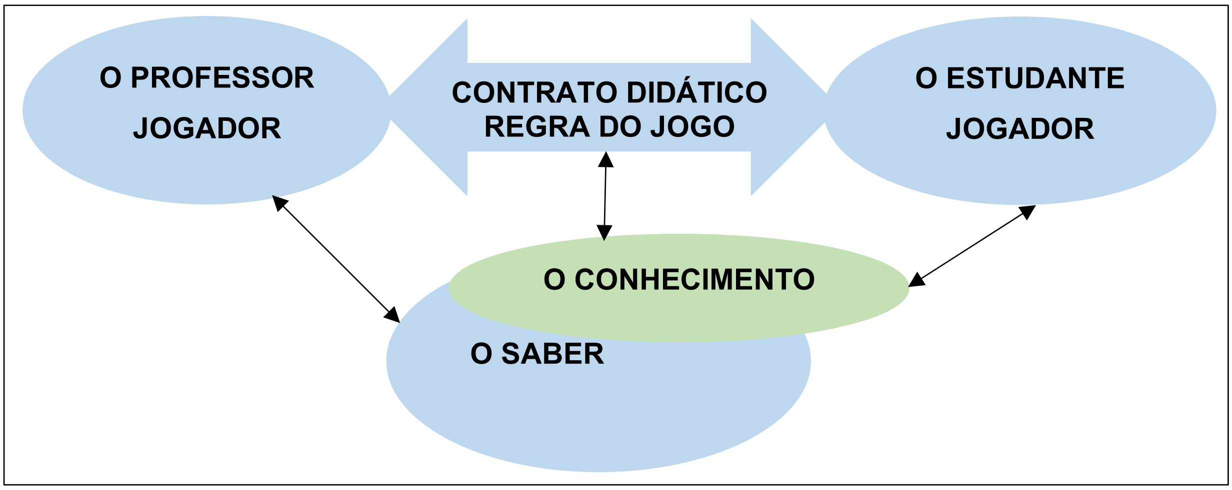
Desta maneira, acreditamos que atividades lúdicas, vivenciadas no âmbito da didática da Matemática e sob o princípio da acessibilidade e da equidade de oportunidades, podem contribuir com a construção de uma educação inclusiva enquanto o reconhecimento da diferença na igualdade de direitos, até mesmo o direito à aprendizagem, conforme discutido na seção seguinte, na qual estabeleceremos elos entre as questões teóricas abordadas neste capítulo.

1.5 Os enlaces teóricos: a Teoria das Situações Didáticas lúdica e inclusiva

Ao modelar a situação didática e compará-la a um jogo, Brousseau (2002) permitiu que se possa considerar: o professor e o estudante, enquanto jogadores; o contrato didático enquanto a regra do jogo, sendo que este determinará as estratégias a serem desenvolvidas por estudante e professor e o “conhecimento como sendo expresso pelas regras da situação adidática e pelas estratégias” (BOUSSEAU, 2002, p. 31, tradução nossa) que o estudante desenvolveu com a mediação do professor.

Além disso, acrescentamos, ainda, que o saber será culminado dessa relação e do *status* que a situação de institucionalização lhe conferiu. Institucionalização que o professor realizou, frente ao conhecimento que o estudante elaborou. Representamos, na Figura 7, os aspectos que compõem e aproximam a situação didática a um jogo.

Figura 7 - O jogo da situação didática



Fonte - Nossa produção (NERY, 2021).

Descrição da Figura 7: Diagrama contendo quatro figuras em formato de elipse nas cores azuis e verde. Na parte superior da figura há uma elipse com o nome O PROFESSOR JOGADOR, a qual está ligada por uma seta contendo a inscrição CONTRATO DIDÁTICO REGRA DO JOGO, a elipse com a inscrição O ESTUDANTE JOGADOR. Na parte inferior da figura, há uma elipse com o nome O CONHECIMENTO sobreposta sobre a elipse com o nome O SABER, estas estão ligadas as outras duas elipses por três setas de pontas dupla.

Ao vertermos o nosso olhar para a relação do professor (jogador) com o saber, reafirmamos que o saber perpassa pela epistemologia docente e pelo seu processo de formação e de construção da sua identidade profissional. Assim, o saber inspira as ações do professor e este influencia diretamente na maneira como será apresentado ao estudante. Destarte, o papel do professor é de organizar os jogos dos estudantes, por este motivo, o professor brinca com o saber que será construído ao final da situação didática. O jogo do professor, portanto, “define e dá um significado ao jogo do estudante e ao conhecimento” (BROUSSEAU, 2002, p. 56, tradução nossa).

Ademais, é possível analisarmos, na Figura 6, a relação do estudante (jogador) com o conhecimento. Inicialmente, o estudante poderá elaborar estratégias e conhecimentos sem entender que, dentre os possíveis resultados do jogo, ou dentre os conhecimentos que ele irá construir, alguns foram previamente determinados pelo professor, os quais pertencem a situação didática e outros não. Por este motivo, conforme representado na Figura 6, o polo do conhecimento é menor do que o polo do saber, mas estes possuem intersecções, tendo em vista que alguns dos conhecimentos aflorados na situação serão institucionalizados pelo professor e receberão o *status* de saber.

Assim, à medida que o estudante (jogador) compreende as regras do jogo (contrato didático) ele vai transformado as suas estratégias e produzindo conhecimentos que, por vezes, permitem o desenho de novas estratégias e a elaboração ou a reformulação das regras do jogo. Com isso, o conhecimento também recebe influências das regras do jogo (contrato didático) e o transforma.

Além da modelação da situação didática enquanto um jogo, outro aspecto que permite aproximar a TSD da ludicidade refere-se ao convite do professor para o estudante e a sua aceitação em resolver o problema que lhe foi apresentado. Mesmo que implicitamente, o estudante assume a responsabilidade pela construção do conhecimento, atitude que se expressará pelas suas ações durante a vivência da *situação adidática*. Neste contexto, a *situação adidática* passa a ser livre, consciente e pode absorver o estudante (jogador) de maneira intensa (HUIZINGA, 2017), despertando sentimentos de emoção e motivação (BROUSSEAU, 2002), os quais se encontram presentes em vivências lúdicas.

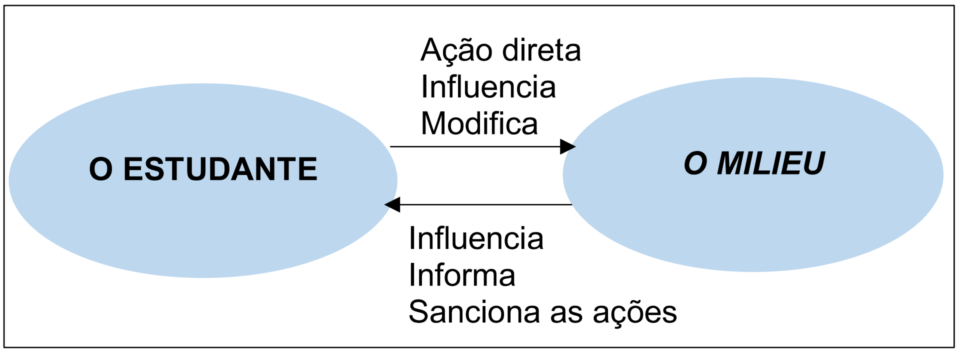
Vale salientar que o estudante (jogador) não estará sozinho, ele terá seus pares, distintos jogadores, que também estarão vivenciando a *situação adidática* e com os quais poderá apresentar as suas formulações e, utilizando a linguagem, tentar validar os seus conhecimentos. Esse momento de formulação e validação envolve uma cooperação entre os estudantes (jogadores), assemelhando-se assim a um jogo cooperativo em que os objetivos são comuns e as ações (validação e formulação) podem ser benéficas para todos. (BROTTO, 1999).

No jogo da situação didática, a aprendizagem é o prêmio por vencer o jogo, por estabelecer as estratégias exitosas (BROUSSEAU, 2002). No entanto, para que a aprendizagem ocorra, faz-se necessário que o estudante passe por um processo de "adaptação" a um *milieu*, definido, por Brousseau (1990), como o conjunto de condições externas dentro das quais o ser humano se comporta e cresce, além de ser uma fonte de contradições, dificuldades e desequilíbrios. Frente a isto, a aprendizagem se manifestará pelas novas respostas que os estudantes vão apresentando ao longo da vivência da situação.

O papel do professor nesse processo é de suma importância, pois é ele quem organiza o *milieu,* fonte da aprendizagem dos estudantes. Assim, segundo Brousseau (1990), o *milieu*, para o professor, é um ambiente em que ele imergirá os estudantes, para que estes passem pelas etapas da *situação adidática*, assim o conhecimento deve ser introduzido pelo próprio estudante, a partir da ação, formulação e validação, os quais serão posteriormente institucionalizados na situação didática tendo a mediação do professor.

Ao considerar o processo de adaptação, Brousseau (2002) pontuou que o estudante é influenciado pelo *milieu* e tenta anular as sanções que este expressa e o modifica. A adaptação envolve a situação didática e, por conseguinte, o *milieu*, o qual pode ser compreendido como um "sistema receptor e/ou emissor com o qual o jogador [estudante] troca mensagens" (BROUSSEAU, 1986, p. 104, tradução nossa). Dessa forma, há uma via de mão dupla, na medida em que o estudante influencia ao agir sobre o *milieu*, tentando adaptar-se a ele, este último sanciona ou informa ao estudante o resultado de suas ações. Tal situação pode ser representada conforme Figura 8, a seguir:

Figura 8 - O subsistema do estudante com o *milieu*



Fonte - Adaptação de Brousseau (2002).

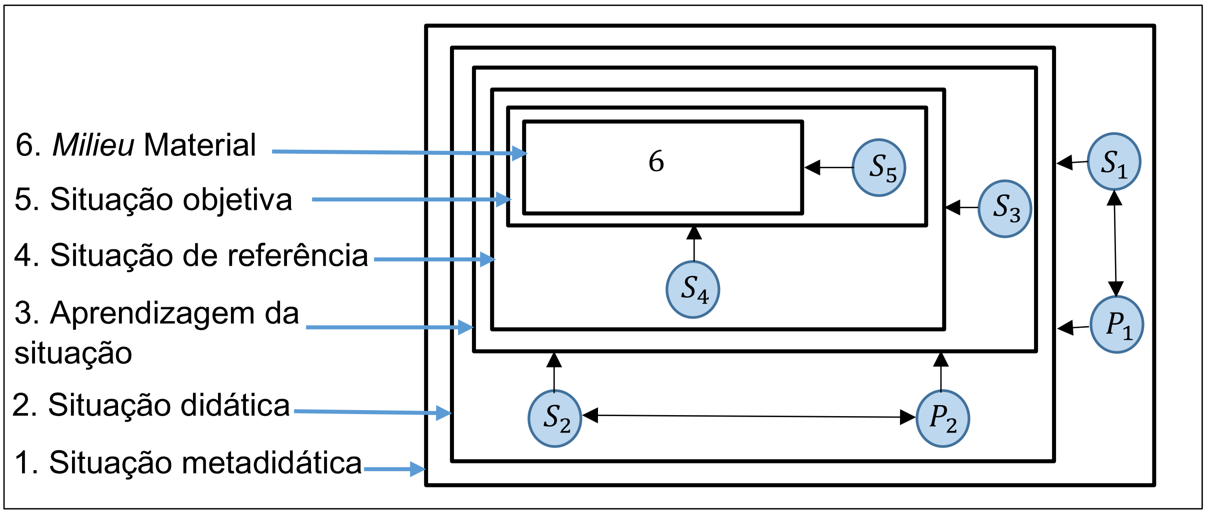
Descrição da Figura 8: Diagrama formado por duas elipses azuis com a inscrição O ESTUDANTE e O MILIEU. Estas elipses são interligadas por duas setas: a primeira parte do estudante para o *milieu* e contém a inscrição ação direta, influencia, modifica; já a segunda seta parte do *milieu* para o estudante e possui a inscrição influencia, informa e sanciona as ações.

Nesse esquema, o conhecimento a ser gerado, fruto dessas influências no subsistema composto pelo estudante e *milieu* é expresso na forma de estímulo-resposta. Contudo, vale lembrar que não estamos nos referindo a qualquer *milieu*, esse foi pensado, planejado pelo professor, considerando os seus estudantes, suas necessidades específicas, os conhecimentos a serem emergidos e o saber que será institucionalizado.

Perante ao *milieu*, podemos afirmar que este deve ser pensado pautando-se nos pressupostos do desenho universal e, por conseguinte, da acessibilidade. Considera-se, assim, o desenho universal como uma concepção de ambiente (*milieu*) pensado para que todos os estudantes atuem de maneira autônoma e inteligível, sem que seja necessário adaptações individualizadas, que venham a diferenciar para excluir determinado estudante da situação didática proposta.

Destarte, a TSD permite que o professor possa organizar um *milieu* acessível, construído com fundamentos no desenho universal, pensado para atender a todos os seus estudantes e, além disso, que seja levado em consideração a identidade de cada um deles, rompendo-se, com a lógica dos espaços educacionais como sendo homogeneizantes. Assim, o *milieu* da situação didática deve estar pautado nos aspectos materiais e metodológicos que possam vir a aumentar gradativamente a autonomia dos estudantes no processo de aprendizagem, conforme estrutura do *milieu* didático e a postura do professor e dos estudantes, tal como representada na Figura 9:

Figura 9 - A estrutura do *milieu* didático



Fonte: Brousseau (2002, p. 248).

Descrição da Figura 9: Diagrama formado seis retângulos internos um ao outro, há inscrições na lateral esquerda da figura que apontam com uma seta para os retângulos, na ordem do maior para o menor e da parte inferior para a superior: 1. Situação metadidática; 2. Situação didática; 3. Aprendizagem da situação; 4. Situação de referência; 5. Situação objetiva; 6. *Milieu* material. Dentro dos retângulos possuem algumas figuras em formato de círculos azuis, com setas que lhes interligam e possuem as inscrições, também do maior para o menor: S1, P1; S2, P2; S3; S4; S5 e 6.

A título de esclarecimento, P representa o professor e S são os estudantes, isto é: S_1 é um sujeito universal, um estudante que olha a situação de ensino de fora e estabelece uma conversa com o professor P_1, que prepara a lição e lhe apresenta; S_2 é um estudante genérico, que analisa a sua própria situação de aprendizagem e conversa com o professor P_2, que o ensina a agir e o observa; S_3 é um sujeito na condição de aprendiz, ele se encontra sendo confrontado com a situação que não tem mais a interferência didática explícita do professor; S_4 é o sujeito como ator principal do seu processo de aprendizagem (postura autônoma) e, por último S_5 é um setor objetivo, no qual encontram-se estudantes que dialogam e validam os conhecimentos aflorados a partir do *milieu* material.

Ao passo que os estudantes vão se aprofundando na situação didática e interagindo com um *milieu* acessível, estes poderão apresentar uma maior autonomia frente ao processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos que são objetos de estudo. Defendemos que a TSD permite ser utilizada com um cunho lúdico e inclusivo, desde que seja respeitada a sua modelação, enquanto um jogo que captura e envolve os estudantes, de tal maneira que a situação didática se apresenta como sendo uma vivência lúdica e pode possibilitar a participação de todos os estudantes, logo que aceitem atuar, formular e validar os conhecimentos de modo autônomo e com equidade de oportunidades.

Apresentaremos no próximo capítulo, a nossa revisão da literatura, na qual descrevemos estudos que se entrelaçam com os aspectos abordados em nossa fundamentação teórica, além disso, a revisão da literatura, auxiliará a demarcar a nossa tese, na qual buscamos investigar as potencialidades e limitações da Teoria das Situações Didáticas para a inclusão de estudantes com deficiência visual nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função mediados por um recurso lúdico.

CAPÍTULO 2

REVISÃO DE LITERATURA

[...] A pesquisa,
É a caminhada pelos bosques e pântanos
Para tentar explicar,
Vendo folhas e flores,
Por que a vida apresenta tantos rostos.
A pesquisa,
É a fusão, em um só crisol,
De observações, teorias e hipóteses
Para ver se cristalizar
Algumas parcelas de verdade.
A pesquisa,
É, ao mesmo tempo, trabalho e reflexão
Para que os homens
Achem todos um pouco de pão
E mais liberdade.
Também é o olhar para o passado
Para encontrar nos antigos
Alguns grãos de sabedoria
Capazes de germinar
No coração dos homens de amanhã
(MARTIN, 1994, apud LAVILLE; DIONNE, 1999, p. 278-279).

O poema de Gérard-B. Martin, publicado no Jornal da Universidade de Laval em 1994, faz entrever metáforas sobre a pesquisa, com todas as suas nuances e abrangências. Assim, sugere-se que a pesquisa visa explicar, a partir das observações, teorias, hipóteses e reflexões, os rostos cristalizados no *corpus* do objeto de estudo. Um caminho para essa explicação e caracterização do objeto de estudo é olhar para o passado na busca de encontrar grãos de conhecimentos que foram construídos e disseminados por outros pesquisadores, de modo a cultivar novas informações que possam contribuir para a construção de uma sociedade mais justa, humana e igualitária.

A partir dessa perspectiva, apresentamos, neste capítulo, pesquisas que possuem interseções com a nossa investigação e que foram desenvolvidas nos últimos quinze anos, isto é, desde o ano de 2006. Tem-se como marco a Convenção sobre os Direitos das Pessoas com Deficiência, adotada pela Organização das Nações Unidas (ONU) em 13 de dezembro de 2006, isso como forma de comemorar o dia Nacional dos Direitos Humanos. Esta Convenção foi assinada pelo Brasil em 30 de março de 2007 e assegura, em seus princípios, o respeito pela dignidade inerente à pessoa humana, autonomia individual, não discriminação, a necessidade da plena participação e da inclusão social, além de reafirmar o reconhecimento da educação enquanto um direito de todos.

Tendo esta Convenção como marco para a inclusão das pessoas com deficiência, buscamos recolher trabalhos publicados no período compreendido entre 2006 e 2020, tendo como base de dados: o Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), o Portal de periódicos da Capes, a *Scientific Eletronic Library Online* (Scielo), o *Google* acadêmico, os Anais do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (Sipem) e do Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (Ebrapem).

Ressaltamos que o Sipem (2018, p. 3) “tem como finalidade promover o intercâmbio entre os grupos que, em diferentes países, dedicam-se às pesquisas na área da Educação Matemática”. Este evento ocorre em uma periodicidade trienal, tendo registro de sua primeira edição no ano 2000, na cidade Serra Negra, estado de São Paulo, cujo intuito foi discutir sobre “investigação em Educação Matemática no Brasil” (SIPEM, 2000, p. 5). No âmbito desta revisão, nos deteremos nas edições que ocorreram em 2006, 2009, 2012, 2015 e 2018. Vale ressaltar que, a partir de 2015, esse evento contou com o grupo de trabalho 13, intitulado “Diferença, Inclusão e Educação Matemática” (SIPEM, 2015, *online*), cujo escopo são estudos relacionados à Educação Inclusiva.

Já o Ebrapem visa discutir pesquisas em andamento, no âmbito dos estudos de pós-graduação *stricto sensu* e possui uma periodicidade anual, sendo organizado por estudantes de mestrado e doutorado e contando com inúmeros pesquisadores que proferem palestras e participam de grupos para a discussão das pesquisas apresentadas durante o evento. Sua primeira edição ocorreu na Universidade Estadual Paulista, em Rio Claro, no ano de 1997. De 2012 a 2014, contou com o grupo de trabalho 12 intitulado “Educação Matemática e Inclusão” (EBRAPEM, 2012, *online*), o qual passou a ser chamado em 2014 pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática de “grupo de trabalho 13 - Diferença, Inclusão e Educação Matemática” (EBRAPEM, 2015, *online*).

Para a busca, foram utilizados, inicialmente, os seguintes descritores: Teoria das Situações Didáticas, inclusão, Educação Inclusiva, conceito de Função, ludicidade, lúdico, jogo, deficiência visual, cego e baixa visão. Estes termos compreendem as palavras-chave deste estudo e para combiná-los utilizamos os operadores booleanos (AND e OR) e as suas respectivas grafias em português e inglês.

Destacamos que não foram encontrados trabalhos, tanto em âmbito nacional quanto internacional, que abordassem todos os aspectos que caracterizam o presente estudo, ou seja, que se aproximassem do estudo da Teoria das Situações Didáticas e da inclusão de estudantes com deficiência visual nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função mediados por um recurso lúdico.

Diante disso, decidimos investigar os descritores, combinando-os três ou mais, para que pudéssemos levantar aspectos sobre o que se tem de pesquisa e quais as contribuições que estas podem trazer para o presente estudo. Dessa maneira, utilizamos as mesmas bases de dados e o mesmo período (2006 – 2020) e buscamos estudos sobre: a Teoria das Situações Didáticas e os entrelaces com as temáticas de ludicidade, inclusão, conceito de função ou deficiência visual; a ludicidade e sua interface com a inclusão, a deficiência visual e o conceito de função; a inclusão de pessoas com deficiência visual nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função. Os resultados encontrados compõem as próximas três seções deste capítulo.

2.1 A Teoria das Situações Didáticas, a ludicidade e a inclusão no ensino de Matemática

Para a coleta dos trabalhos que compuseram o *corpus* da nossa revisão de literatura, utilizamos, inicialmente, os seguintes descritores: Teoria das Situações Didáticas, ludicidade, conceito de função, Inclusão, Educação Inclusiva, Matemática e deficiência visual. Combinamos estes termos três a três e, então, os trabalhos foram aparecendo. Realizamos a leitura dos seus resumos, com o intuito de identificarmos aqueles que tivessem relação com a temática proposta desta seção. Após essa análise prévia, organizamos os trabalhos conforme representação no Quadro 1:

Quadro 1 - Pesquisas sobre a Teoria das Situações Didáticas e a interface com as demais temáticas do estudo.

Autor	Ano	Tipo	Título
CASTRO, Mariângela Assumpção de	2013	Dissertação/ Mestrado em	A Construção e a Desconstrução das Ideias Geométricas:

		Educação Matemática	Intervenção no Ensino e na Aprendizagem na Perspectiva da Matemática Inclusiva
CHEQUETTO, Jonas José	2016	Dissertação/ Mestrado em Ensino na Educação Básica	Uma experiência didática para a aprendizagem de frações: matemática para residentes de uma casa de passagem
NICKELS, Megan; CULLEN, Craig J.	2017	Artigo	*Mathematical Thinking and Learning Through Robotics Play for Children With Critical Illness: The Case of Amelia*
RODRIGUES, Chang Kuo; VEIGA, Janaína; SILVA, Júlio César; TOSTES, Adriana Maria Balena; SANTOS, Leandro Bastos dos	2013	Artigo	Educação inclusiva na perspectiva da Educação Matemática e da Tecnologia
TOSTES, Adriana Maria Balena	2013	Dissertação/ Mestrado em Educação Matemática	Matemática inclusiva, situações didáticas e tecnologia: um estudo de caso no ensino superior
WAIRIMU, Chege Mary	2019	Tese/ Doutorado em Psicologia	*Effectiveness of assistive technology on teaching mathematics to learners with visual impairments in special primary schools in Kenya*

Fonte - Nossa produção (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 1: Quadro contendo quatro colunas e sete linhas. Na primeira linha há as inscrições: autor; ano; tipo e título. Na segunda linha: CASTRO, Mariângela Assumpção de; 2013; Dissertação/ Mestrado em Educação Matemática; A Construção e a Desconstrução das Ideias Geométricas: Intervenção no Ensino e na Aprendizagem na Perspectiva da Matemática Inclusiva. Na terceira linha: CHEQUETTO, Jonas José; 2016; Dissertação/ Mestrado em Ensino na Educação Básica; Uma experiência didática para a aprendizagem de frações: matemática para residentes de uma casa de passagem. Na quarta linha: NICKELS, Megan; CULLEN, Craig J.; 2017; Artigo; *Mathematical Thinking and Learning Through Robotics Play for Children With Critical Illness: The Case of Amelia*. Na quinta linha: RODRIGUES, Chang Kuo; VEIGA, Janaína; SILVA, Júlio César; TOSTES, Adriana Maria Balena; SANTOS, Leandro Bastos dos; 2013; Artigo; Educação inclusiva na perspectiva da Educação Matemática e da Tecnologia. Na sexta linha: TOSTES, Adriana Maria Balena; 2013; Dissertação/ Mestrado em Educação Matemática; Matemática inclusiva, situações didáticas e tecnologia: um estudo de caso no ensino superior. Na sétima linha: WAIRIMU, Chege Mary; 2019; Tese/ Doutorado em Psicologia; *Effectiveness of assistive technology on teaching mathematics to learners with visual impairments in special primary schools in Kenya* (Fim da descrição).

O fio condutor que permeia todas as pesquisas elencadas no Quadro 1 é a Educação Inclusiva, em uma perspectiva ampla, isto é, envolvendo estudantes com défices de aprendizagem e Necessidade Específica Neurológica (CASTRO, 2013); residentes de uma casa de passagem (CHEQUETTO, 2016); com paralisia cerebral (TOSTES, 2013; RODRIGUES et al., 2013); com uma doença crônica denominada leucemia linfoblástica (NICKELS; CULLEN, 2017) e deficiência visual (WAIRIMU, 2019).

Ressaltamos, inicialmente, que a principal contribuição de todas estas pesquisas para o nosso estudo refere-se à reflexão com relação a TSD que estas apresentam. Destarte, todas trazem a Teoria das Situações Didáticas e possuem enquanto *lócus* de estudo a Matemática, seja em uma abordagem ampla ou apenas em alguns dos conceitos que as compõem. Assim, na continuidade desta seção, destacaremos com maior riqueza de detalhes como foi a abordagem da TSD em cada uma das pesquisas apresentadas, as contribuições e as principais distinções em relação ao presente estudo.

A pesquisa realizada por Wairimu (2019) fundamentou-se na Teoria das Situações Didáticas proposta por Brousseau (1997), compreendendo-a enquanto uma teoria cujo papel do professor é o de descobridor de problemas ou de situações que podem despertar a aceitação e o envolvimento dos estudantes na situação visando contribuir para a aprendizagem de um determinado conhecimento. Além disso, ao se envolver, eles poderão “agir, falar, pensar e evoluir por sua própria motivação” (WAIRIMU, 2019, p. 21, tradução nossa). Pressupõe-se, assim, que a autonomia do estudante será uma condição fundamental para a aprendizagem.

Entretanto, apesar de mencionar que a TSD fundamenta seu estudo, os pressupostos desta teoria não se fazem presentes em seu objetivo geral, o qual perpassa por “avaliar a eficácia da Tecnologia Assistiva no ensino de Matemática para alunos com deficiência visual de escolas especiais primárias do Quênia” (WAIRIMU, 2019, p. 13, tradução nossa). Este estudo foi realizado em 6 escolas especiais e contou com 35 participantes, dentre eles professores de Matemática; vice professores, conforme nomeado no trabalho, os quais, no contexto brasileiro, podem ser compreendidos enquanto auxiliares de classe e estudantes.

Para alcançar o objetivo geral do estudo, Wairimu (2019) buscou identificar os tipos de Tecnologia Assistiva utilizados no ensino de Matemática, determinar os fatores que possivelmente influenciam o uso de determinada Tecnologia Assistiva e investigar o papel destas no ensino da Matemática junto a estudantes com deficiência visual. Destarte, não foi realizado, no âmbito do estudo, um aprofundamento teórico sobre a TSD e a educação realizada nas escolas especiais, nem tampouco na Educação Inclusiva do Quênia. Enfatizamos a nossa compreensão de Educação Inclusiva como sendo distinta da Educação Especial que é desenvolvida em escolas especiais. Assim como também, destacamos que a TSD não se constituiu, em nosso estudo, enquanto uma lente teórica na análise dos dados, mas sim, nos orientou na construção da sequência didática.

Wairimu (2019) constatou uma escassez de Tecnologia Assistiva destinada às escolas que atendem os estudantes com deficiência visual. Mas, foram identificadas algumas tecnologias que podem contribuir com o ensino de Matemática, a saber: Mathplayer, Talkmaths, telas Braille renováveis, calculadoras científicas sonoras, dentre outras ferramentas tecnológicas de alta, média ou baixa tecnologia. Além disso, a carência de tecnologias escancarou uma necessidade de formação de professores de Matemática para a utilização de Tecnologia Assistiva nas escolas especiais.

Vale enfatizar que a principal diferença do nosso estudo em relação à pesquisa de Wairimu (2019) é a apresentação e utilização da TSD em uma perspectiva inclusiva, superando-se a compreensão de um estudante ideal. Ademais, a construção e realização de uma sequência didática com base nas fases adidáticas e didáticas não foram discutidas, nem apresentadas no estudo de Wairimu (2019). Outro aspecto refere-se à possibilidade de utilização da sequência didática tanto por estudantes com deficiência visual quanto por videntes.

Outra pesquisa que traz em seu bojo de discussão as Tecnologias Assistivas foi desenvolvida por Tostes (2013, p. 14) cujo intuito foi o seguinte: “identificar os recursos e estratégias de Tecnologia Assistiva, voltados para alunos com limitações motoras e propor atividades didáticas, que poderão contribuir para a prática pedagógica dos professores que atuam na modalidade de ensino da Educação Inclusiva”. Tal investigação foi realizada com um estudante com paralisia cerebral que cursava, à época, o primeiro período do curso de administração de empresas em uma universidade privada. Foram elaboradas 9 atividades didáticas que abordavam os conteúdos de Função, Limite e Continuidade com a utilização dos *softwares* Winplot, e Geogebra e do editor de planilhas Excel.

A TSD constituiu a lente teórica do estudo, a qual possibilitou analisar os dados que foram coletados; além disso, foi utilizada a Engenharia Didática enquanto abordagem metodológica. Vale ressaltar que Tostes (2013) mencionou que a TSD trouxe para a sua pesquisa uma concepção nova, quanto ao protagonismo do estudante perante à construção da solução da situação didática apresentada. Ademais, as 9 atividades que foram propostas foram organizadas com base na TSD de maneira a possibilitar que o estudante vivenciasse as fases adidáticas (ação, formulação e validação) e didática (institucionalização).

Na discussão tecida por Tostes (2013) não foi apresentada a relação da TSD com a Educação Inclusiva ou a constatação de que a TSD é pensada para "o estudante" sem considerar a heterogeneidade ou a diversidade presente no âmbito educacional e, mais especificamente, na Educação Inclusiva. Na análise dos dados, Tostes (2013) demarcou as fases vivenciadas pelo estudante, entretanto, não é realizada um aprofundamento sobre as ações e/ou falas que lhes possibilitaram identificar a fase que estava sendo vivenciada pelo partícipe do estudo.

Ao considerar o comprometimento motor do estudante, Tostes (2013) mencionou que a utilização da visualização gráfica em substituição à manipulação e à possibilidade de visualizar algumas propriedades, que são apresentadas algebricamente, pode contribuir significativamente para a aprendizagem dos estudantes. Em relação ao uso das tecnologias, elas proporcionaram uma outra maneira de acessar ao conteúdo da aula, permitindo que a limitação motora fosse minimizada, igualmente oportunizando acessibilidade ao conteúdo trabalhado. Em relação à TSD, Tostes (2013) não mencionou as contribuições que a utilização desta teoria apresentou no desenvolvimento do estudo.

Antes de mencionar sobre as distinções entre o estudo de Tostes e o que realizamos, gostaríamos de mencionar sobre a pesquisa desenvolvida por Rodrigues et al. (2013), isso por ser um desdobramento do estudo realizado por Tostes (2013). Neste artigo, Rodrigues et al. (2013) descreram os resultados de dois estudos: o primeiro abordou a aprendizagem geométrica de um estudante com Síndrome de Down; e o segundo a aprendizagem de Função por um estudante com paralisia cerebral, segundo os pressupostos da TSD.

Ressaltamos que não nos deteremos a comentar sobre o primeiro estudo, pelo fato deste, apesar de estar no âmbito dos estudos da Educação Inclusiva, não se aproximar dos demais aspectos da presente pesquisa, isto é, trouxe outro objeto matemático, não utilizou a TSD, os aspectos lúdicos, enfim não articula com nenhum dos outros tópicos elencados nas palavras-chaves. Em relação ao segundo estudo, apresentado por Rodrigues et al. (2013), os resultados foram fruto da pesquisa de mestrado de Tostes (2013) não trazendo nenhum aspecto diferente daquilo que foi apresentado anteriormente.

Desta maneira, a principal distinção entre o presente estudo e as pesquisas de Tostes (2013) e de Rodrigues et al. (2013) é que além de apresentar a TSD, realizamos uma apresentação desta teoria, apontando os aspectos pelos quais ela pode vir a contribuir com a inclusão nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática. Além disso, nosso público se difere, pois os partícipes da presente pesquisa são estudantes com deficiência visual e videntes do Ensino Médio e o conteúdo trabalhado refere-se ao conceito de Função. Nas pesquisas de Tostes (2013) e de Rodrigues et al. (2013), não foi abordado o conceito de Função, mas sim questões relacionadas à construção de gráficos com a utilização de *softwares* de Geometria Dinâmica junto a estudantes com paralisia cerebral.

O estudo realizado por Nickels e Cullen (2017) trouxe para a centralidade da discussão o ensino de Matemática que é ministrado para as crianças com doenças críticas, tais como: câncer; vírus da imunodeficiência humana; doenças falciformes; distúrbios da hemoglobina; ou ainda, leucemia linfoblástica aguda (LLA), caso da partícipe do estudo, nomeada por Amélia. Assim, no referido estudo, foi feito uma discussão sobre o potencial da robótica para o ensino de Matemática junto a uma estudante de 14 anos diagnosticada com LLA que se encontra em um contexto hospitalar e realiza atividades de intervenção educacional durante o tratamento da doença que a acomete.

Esse estudo trouxe, de contribuição para a nossa pesquisa, a constatação de que a TSD se baseia na teoria dos jogos e que pode ser utilizada criticamente para analisar a construção do conhecimento matemático, tendo em vista que há quatro premissas epistemológicas subjacentes a este modelo, a saber: o conhecimento é o resultado ‘ideal’ para uma determinada situação problema; a aprendizagem é uma forma de ‘adaptação’ cognitiva, sendo este aspecto que caracteriza a TSD como fundamentada nos pressupostos da epistemologia genética de Piaget; todo conhecimento matemático possui uma família de situações que lhe confere uma significação; e, por último, a autonomia do estudante é uma condição necessária para a construção da aprendizagem matemática (NICKLES; CULLEN, 2017).

Em seu estudo, pelo contexto de intervenção realizada em um hospital, durante um tratamento de saúde, não foi abordado sobre o papel do professor na situação didática que compõe a TSD. Contudo, os questionamentos que a pesquisa buscou responder perpassam pela utilização da robótica fundamentada na TSD, isto é:

> [...] a robótica pode apoiar a devolução de uma situação fundamental a uma situação adidática da Matemática para crianças gravemente doentes? Quando crianças com doenças críticas se envolvem em um jogo de robótica quais são as principais características do fenômeno da robótica que apoiam a devolução a uma situação didática?" (NICKLES; CULLEN, 2017, p. 41, tradução nossa).

Para responder a estas questões, foram apresentadas situações nas quais Amélia pudesse aprender a reconhecer relações que poderiam ser estabelecidas entre duas ou mais variáveis em uma relação linear e permitissem a construção de tabelas, gráficos e equações que expressassem tais relações. Como exemplo, ressaltamos a construção de um cão para trenó robótico. A situação matemática apresentada a Amélia relacionou-se a determinação da distância percorrida e a relação com o tempo gasto pelo cão, além disso a verificação se esta era uma relação linear ou não (NICKLES; CULLEN, 2017).

Como mencionamos, a TSD subsidiou as análises dos dados que permitiram concluir que o jogo na robótica pode apoiar a devolução fundamental em uma abordagem didática, isto é, que pode vir a subsidiar as fases da *situação adidática*. Segundo Nickles e Cullen (2017), com a TSD é possível criar um ambiente antagônico, que pode vir a oferecer uma maior motivação para a compreensão de situações mais complexas e pode ainda apoiar o envolvimento do estudante a partir dos *feedbacks* educativos.

A principal distinção entre o presente estudo e a pesquisa de Nickles e Cullen (2017) refere-se à abordagem que é feita com a TSD e ao contexto de realização da investigação. Dito de outra forma, a TSD fundamentou nosso estudo enquanto uma lente teórica para a construção da sequência didática. Já Nickles e Cullen (2017), a utilizaram para analisar os dados que foram coletados. Em relação ao segundo aspecto mencionado, nossa sequência didática foi construída para ser utilizada em sala de aula regular, tanto por estudantes com deficiência visual quanto por videntes; no estudo de Nickles e Cullen (2017) a investigação foi realizada em um contexto hospitalar, tendo como participante da pesquisa uma estudante com LLA, em período de tratamento médico.

Outro estudo que gostaríamos de comentar foi desenvolvido por Chequetto (2016, p. 18) com o intuito de "investigar quais aspectos podem emergir da realização de uma experiência didática na aprendizagem de frações com um grupo de alunos da Educação Básica residentes da Casa de Passagem de São Mateus – Espírito Santo”. Apresentamos esse trabalho por entendermos que a inclusão não se restringe apenas aos estudantes com deficiência, ela perpassa também realidades como a dos estudantes em situação de vulnerabilidade social.

O conteúdo de Matemática, que fez parte desse estudo, foi o de frações e para sua abordagem foi utilizada a TSD, a Engenharia Didática e a ludicidade. As atividades perpassaram por: tangram; repartindo chocolates; bolo de chocolate da Tia Maria; régua para estudar frações e trilha das frações. Chequetto (2016) concluiu que a utilização de jogos, enquanto um recurso didático, pode trazer valiosas contribuições para o ensino de Matemática, dentre estas foi destacado: um envolvimento maior dos estudantes na realização da atividade e uma forma prazerosa de estudar conteúdos de Matemática.

Em relação à Engenharia Didática, constatou-se que após alguns encontros fez-se necessário reconsiderar a forma de abordagem e de apresentação das atividades, esta constatação foi realizada nas fases iniciais da Engenharia Didática e possibilitou a experimentação, considerando a realidade, especificidades e interesses dos participantes do estudo (CHEQUETTO, 2016).

A utilização da Engenharia Didática enquanto uma metodologia de pesquisa também subsidiou o estudo de Castro (2013), no qual foi aplicado um material lúdico, denominado Geokit, com o intuito de desenvolver a percepção geométrica espacial, trabalhando, assim, a relação entre a representação tridimensional e bidimensional, isto junto a 4 estudantes do Ensino Médio que possuíam déficits de aprendizagem, sendo que uma delas possuía um laudo médico.

Castro (2013) desenvolveu o estudo na Sala de recursos, sendo que a aluna que possuía o laudo médico realizou a atividade individualmente e em um horário diferente das demais estudantes. Além do mais, foi constatado que a utilização da Engenharia Didática e da sequência didática teve como função primordial facilitar o entendimento sobre os objetos de estudo e auxiliar o professor na organização destes, de maneira coerente e adequada à realidade das estudantes (CASTRO, 2013).

A distinção do presente estudo para ambas as pesquisas descritas perpassa tanto pelo objeto do conhecimento matemático quanto pelo público alvo, o qual envolveu estudantes com deficiência visual, já o estudo de Chequetto (2016) foi realizado junto a estudantes com vulnerabilidade social residentes em uma Casa de

Passagem; a pesquisa de Castro (2013) contou com estudantes que possuíam déficits de aprendizagem. As pesquisas de Castro (2013) e de Chequetto (2016), apesar de tratarem de aspectos lúdicos, não fizeram uma discussão sobre as expressões lúdicas que os estudantes manifestaram ao realizarem as atividades, nem estabeleceram relações entre a Teoria das Situações Didáticas e a Educação Inclusiva, tal como propõe esta tese.

Tendo em vista a apresentação dos estudos que trouxeram expressões lúdicas em seu cerne e considerando-se o objeto desta tese, permeando o jogo, enquanto uma expressão lúdica, discorreremos, na próxima seção, sobre as pesquisas encontradas tendo uma abordagem sobre a ludicidade e sua interface com o conceito de função e a deficiência visual.

2.2 A ludicidade e o conceito de função junto a estudantes com deficiência visual

Desde a época de Platão (427 a.C. - 347 a.C), já eram utilizadas expressões lúdicas para chamar a atenção da juventude em relação aos conhecimentos que perpassavam pelo campo da filosofia. Nesse contexto, defendia-se, também, a ideia de que o lúdico deveria compor o cenário educativo destinado às crianças pequenas, isto em uma perspectiva que não incentivasse a competição (HUIZINGA, 2017), ou seja, que fosse cooperativa. Ademais, nesse período, o elemento lúdico poderia estar associado a uma brincadeira infantil, um jogo, uma competição verbal, uma antilogia, entre outras situações (HUIZINGA, 2017).

Com o passar dos anos, buscaram-se elementos que viessem a caracterizar uma atividade como sendo lúdica, isso para não correr o risco de se reduzir o lúdico, simplesmente, ao jogo ou à brincadeira. Nesta perspectiva, Macedo, Petty e Passos (2005) argumentaram que para se identificar uma atividade lúdica basta considerá-la a partir do ponto de vista das crianças, tendo em vista que na realização das suas atividades cotidianas, as crianças, em sua maioria, sempre acrescentam um caráter lúdico, imaginário e fantasioso, pois o lúdico para elas contribui para a atribuição de sentido em suas atividades. Por exemplo, a criança ao sentar na mesa para almoçar, começa a organizar os alimentos no prato, tentando formar uma carinha feliz e ao pegar a colher começa a imaginar que este artefato é uma nave espacial e assim a imaginação flui. O simples ato de comer pode se tornar uma grande aventura fantasiosa e lúdica para a criança.

Os estudos de Maria Montessori foram os precursores junto as crianças com NEE, isto na passagem do século XIX para o século XX, os quais, de acordo com Silva, Oliveira e Sás (2008), possuíam um forte apelo à percepção visual e tátil, caracterizando, em sua maioria, como sendo materiais manipuláveis e jogos sensoriais. Assim, após a constatação de que os jogos poderiam estimular o interesse dos estudantes com NEE, as expressões lúdicas na Educação Especial e, posteriormente, na Educação Inclusiva começaram a ganhar destaque, inclusive no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. O lúdico passou a ser compreendido como uma estratégia exitosa para mediar o processo de ensino e aprendizagem.

Nesta perspectiva, ao investigarmos pesquisas que abordaram sobre alguma das expressões lúdicas nos processos de ensino e aprendizagem de função junto a estudantes com deficiência visual, identificamos dois trabalhos, conforme Quadro 2, a seguir:

Quadro 2 - Pesquisas que abordam a ludicidade e o conceito de função junto a estudantes com deficiência visual.

Autor	Ano	Tipo	Título
LUTZ, Maurício Ramos; SALBEGO, Alisson Furquim; CORTELINI, Débora Rodrigues	2020	Artigo/ Revista Prociênci@s	O ensino de funções para alunos deficientes visuais
VILA-VERDE, Tiago Miguel Damião	2016	Tese/ Doutorado em Educação	El álgebra en la enseñanza inclusiva de la matemática Braille: estrategias didácticas en el 3er. ciclo de la enseñanza básica en Portugal

Fonte - Nossa produção (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 2: Quadro contendo quatro colunas e três linhas. Na primeira linha há as inscrições: autor; ano; tipo e título. Na segunda linha: LUTZ, Maurício Ramos; SALBEGO, Alisson Furquim; CORTELINI, Débora Rodrigues; 2020; Artigo/ Revista Prociênci@s; O ensino de funções para alunos deficientes visuais. Na terceira linha: VILA-VERDE, Tiago Miguel Damião; 2016; El álgebra en la enseñanza inclusiva de la matemática Braille: estrategias didácticas en el 3er. ciclo de la enseñanza básica em Portugal (Fim da descrição).

Vale destacar que a principal distinção do nosso estudo, em se tratando de ambas as pesquisas, refere-se ao fato destas não tratarem, nem utilizarem a TSD enquanto fundamentação teórica dos seus estudos.

Destacamos, ainda, que o estudo realizado por Lutz, Salbego e Cortelini (2020) versou sobre uma prática pedagógica realizada no curso de licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Farroupilhas, campus Alegrete e consistiu na elaboração de uma ferramenta para ensinar estudantes cegos sobre os tipos de funções: injetora, sobrejetora e bijetora. Esse material foi testado junto a 18 acadêmicos, do curso de licenciatura em matemática, videntes que foram vendados.

Para a realização da prática pedagógica, foram utilizados materiais recicláveis, dentre estes: tampinhas de garrafa, isopor e alfinetes para a elaboração de um diagrama de *Venn*. Esse material foi utilizado de maneira individual, sendo que o professor, após vendar os licenciandos, montava uma correspondência entre os conjuntos e o estudante, vendado, identificava o tipo de função a partir das suas características.

Constatou-se que, ao se colocarem no lugar de um estudante com deficiência visual, os futuros professores tiveram a oportunidade de desenvolver o sentimento de empatia e compreender que ser professor é viabilizar ações para alcançar a todos os seus estudantes, almejando atender as necessidades de cada um e proporcionando momentos que possam instigar a curiosidade perante o processo de ensino e aprendizagem da matemática (LUTZ; SALBEGO; CORTELINI, 2020).

A contribuição que este estudo nos apresentou refere-se à constatação de que o uso de jogos pode vir a facilitar o processo de aprendizagem de Matemática, pois ele possui diversas possibilidades, dentre estas identificaram-se a plausibilidade de favorecer a construção de conceitos e o processo de memorização, tendo em vista a permissibilidade de se realizar repetições de situações de maneira mais agradável do que a simples resolução de exercícios.

Nosso estudo se distingue também da pesquisa realizada por Lutz, Salbego e Cortelini (2020) no que diz respeito ao fato de que o jogo elaborado, no âmbito do nosso estudo, não discute os tipos de funções, ou seja, não discutimos sobre a compreensão das funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras. O nosso *lócus* de estudo são estudantes com deficiência visual do Ensino Médio.

Outra pesquisa que também trouxe contribuições para o nosso estudo foi realizada por Vila-Verde (2016, p. 47), tendo por objetivos gerais:

- Conhecer as características, limitações e dificuldades recorrentes da grafia matemática Braille;
- Identificar as maiores dificuldades manifestadas pelos alunos cegos na aprendizagem em Álgebra;
- Delinear estratégias de organização e gestão da sala de aula para a inclusão de alunos cegos em atividades algébricas, utilizando os recursos pedagógicos existentes no contexto do estudo;
- Avaliar o impacto de um vasto leque de atividades de caráter exploratório que possibilite ao aluno cego desenvolver o seu próprio raciocínio matemático, nomeadamente no que à Álgebra diz respeito e assim evoluir no seu processo de ensino-aprendizagem;
- Analisar e refletir sobre explorações, raciocínios e conclusões matemáticas de alunos cegos no decorrer da aprendizagem de diferentes tópicos no domínio temático da Álgebra em contexto de sala de aula, de forma a possibilitar a sua utilização e adaptação por outros docentes, no sentido de melhorar o processo de ensino-aprendizagem destes alunos.

Conforme os objetivos gerais supracitados, a abordagem realizada no estudo de Vila-Verde (2016) foi ampla e envolveu vários conteúdos da área de álgebra, dentre estes, o conceito de função. A exploração se valeu da utilização de sequências envolvendo figuras, números, dentre outros objetos, os quais caracterizaram-se enquanto um fio condutor para fomentar o pensamento sobre variáveis e funções, permitindo que os estudantes, a partir disso, realizassem generalizações. Tal processo se configura em uma das maiores dificuldades enfrentadas pelos estudantes videntes e com deficiência visual.

As atividades referentes à busca por regularidades de situações, como por exemplo, a procura pela lógica no som, foram realizadas com um caráter de jogo e identificou-se que esse tipo de atividade despertou, nos estudantes, um enorme interesse e alguma competitividade com os outros colegas, mas ao resolverem a situação e apesar de não alcançarem a resposta correta para a situação, emanou-se um clima de cooperação, o qual para Vila-Verde (2016) é um dos elementos fundamentais quando nos reportamos ao processo de inclusão.

Concordamos com Vila-Verde (2016) que o conceito de função é um dos mais importantes da Matemática e que há uma diversidade extraordinária de interpretações e representações. A sua compreensão envolve contextos que vão desde a percepção de regularidades até a generalização e a abstração de comportamentos, com a utilização da linguagem matemática, seja ela algébrica, natural ou gráfica. Tais aspectos perpassam, também, pelos obstáculos que são apresentados pelos estudantes, pois a utilização de letras na escrita simbólica da matemática, o uso de gráficos, a generalização, a abstração e a interpretação de diferentes noções que envolvem as funções são alguns dos obstáculos que Vila-Verde (2016) se deparou ao longo do estudo realizado.

Neste contexto, Vila-Verde (2016) mencionou sobre a dualidade da natureza das funções, a qual pode ser compreendida como: um objeto, isso em uma perspectiva estrutural, vista como um conjunto de pares ordenados, ou ainda pode ser vista sob um caráter operacional, como um processo ou um método bem definido que permite passar de um sistema para o outro. A interpretação e a compreensão desses contextos podem vir a confundir os estudantes. Por outro lado, o que pode contribuir para a superação dessa dificuldade se refere a uma apresentação progressiva de todos os contextos que envolvem as funções, isso desde os primeiros anos de escolaridade (VILA-VERDE, 2016).

Dentre as contribuições que este estudo nos apresentou, enfatizamos a necessidade de apresentar, para os estudantes, a perspectiva de que uma função vai além da sua representação geométrica, isto é, vai além de um gráfico ou da representação algébrica que lhe caracteriza: “para adquirir um conceito não basta o conhecimento da definição, pois tal não garante a sua compreensão e, para o atingir, é preciso ter um conceito imagem” (VILA-VERDE, 2016, p. 440). Isso significa que o processo de formação de um conceito envolve o conceito definição e o conceito imagem e, para isso, carece que os estudantes tenham contato com diversas representações de uma função e de famílias de funções.

Destacamos, ainda, que no âmbito do processo de ensino e aprendizagem de Matemática junto aos estudantes com deficiência visual faz-se necessário evitar o excesso de informações, as quais podem se constituir enquanto irrelevantes para o trabalho de determinado conteúdo, tendo em vista que a utilização de muitas informações acarreta na necessidade de descrição, a qual pode vir a tornar-se extensa e cansativa para os estudantes com deficiência visual.

A principal distinção do nosso estudo em relação à pesquisa desenvolvido por Vila-Verde (2016) refere-se ao fato de estarmos utilizando um jogo que possibilita abordarmos, concomitantemente, o conceito de função em sua representação gráfica, algébrica e tabular, permitindo que tal abordagem seja construída de maneira autônoma pelos estudantes, em um contexto de jogo cooperativo. Na seção a seguir, apresentaremos pesquisas que discorrem sobre o conceito de função junto a estudantes com deficiência visual, mas que não envolvem aspectos lúdicos.

2.3 O estudo de função com estudantes com deficiência visual

A apresentação do conceito de função pode ser realizada com a utilização de correspondências entre dois conjuntos, tabelas, expressão analítica e pela utilização de pares ordenados no Plano de Coordenadas Cartesianas. Após o entendimento deste conceito, os estudantes devem coordenar as representações gráfica, algébrica e tabular, para, a partir disso, estudar as funções afim, quadrática, exponencial, logarítmica, trigonométrica e modular. No entanto, tal estudo traz consigo um grande apelo visual de representações bidimensionais, e isso, para os estudantes com deficiência visual, pode se constituir enquanto uma dificuldade para a compreensão deste conteúdo. Tal cenário corrobora com a necessidade do desenvolvimento de pesquisas que apresentem alternativas para a utilização de outros órgãos do sentido, indo além da visão.

No Quadro 3, a seguir, apresentamos as pesquisas desenvolvidas desde 2006 que tratam dos processos de ensino e/ou aprendizagem do conceito de função junto a estudantes com deficiência visual em uma perspectiva inclusiva. A principal distinção do nosso trabalho em relação aos estudos que serão apresentados se refere ao fato destes não estarem fundamentados na TSD e não discutirem ou serem utilizados em uma perspectiva lúdica. Estes estudos enfatizaram a utilização de: tecnologias digitais acessíveis e tecnologias assistivas (LEÓN; MARTINI, 2015; OLIVEIRA, 2010; QUIÑONEZ, 2016; SOUZA, 2015); materiais manipuláveis (CÉZAR, 2013a, 2013b, 2013c; MELLO; CAETANO; MIRANDA, 2017; MELLO, MIRANDA, 2016; PINHEIRO, 2014;) e de maneira específica o Multiplano (ARAGÃO; TAVARES; JESUS, 2016); além de trabalhos que abordaram tanto as tecnologias digitais quanto os materiais manipuláveis (BANDEIRA et al., 2011; LOPES, 2012; VIANNA et al., 2013).

Quadro 3 - Pesquisas que trataram sobre o conceito de função junto a estudantes com deficiência visual.

Autor	Ano	Tipo	Título
ARAGÃO, Ildema Gomes; TAVARES,	2016	Anais/ 8º Encontro Nacional de	Multiplano pedagógico: do concreto ao abstrato

Jorge Alberto Vieira; JESUS, Auxiliadora Machado de		Formação de Professores, 9º Fórum Permanente de Inovação Educacional	
BANDEIRA, Salete Maria Chalub; GHEDIN, Evandro; BEZERRA, Simone Maria Chalub Bandeira; BEZERRA, Nilza Jane Filgueira	2011	Anais/ VIII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, I Congresso Iberoamericano de Investigación en Enseñanza de las Ciéncias	Fundamentos epistemológicos na inclusão social e educacional dos deficientes visuais: estudo a partir de um tabuleiro perfurado
CÉZAR, Nilza dos Santos Rodrigues	2013ª	Anais/ XVII Encontro Nacional de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática	Deficiente visual e a construção da ideia de função
CÉZAR, Nilza dos Santos Rodrigues	2013b	Anais/ VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática	Deficientes visuais e a construção da ideia de função
CÉZAR, Nilza dos Santos Rodrigues	2013c	Anais/ XI Encontro Nacional de Educação Matemática	Deficientes visuais e a construção do conhecimento matemático da ideia de função
LEÓN, Lorena C.; MARTINI, Luiz C.	2015	Artigo/ CSR and Sustainable Development: a Multinational Perspective	Education and Social inclusion of People with Visual Impairment in the Study of Mathematical Functions
LOPES, Arilise Moraes de Almeida	2012	Tese/ Doutorado em Informática na Educação	Estratégias de mediação para o ensino de Matemática com objetos de aprendizagem acessíveis: um estudo de caso com alunos com deficiência visual
MELLO, Felipe Almeida de; CAETANO, Jaciene Lara de	2017	Artigo	Ferramentas tácteis no ensino de Matemática para estudante cego: uma experiência no IF Sudeste MG

Paula; MIRANDA, Paula Reis de			
MELLO, Felipe Almeida de; MIRANDA, Paula Reis de	2016	Anais/ XII Encontro Nacional de Educação Matemática	O projeto “Matemática para além da visão” e a confecção de uma ferramenta táctil para educandos cegos
OLIVEIRA, Heitor Barbosa Lima de	2010	Dissertação/ Mestrado em Ensino de Matemática	Introdução ao conceito de função para deficientes visuais com o auxílio do computador
PINHEIRO, Daniela Macêdo Damaceno	2014	Dissertação/ Mestrado em Ensino na Educação Básica	A importância da utilização de Material Concreto no ensino de Matemática: uma experiência no ensino de Funções
QUIÑONEZ, Lorena Del León	2016	Dissertação/ Mestrado em Engenharia Elétrica	Matgrafvoice: sistema de tratamento matemático e visualização tátil de funções matemáticas através de uma impressora Braille
SOUZA, Maria Aldete de	2015	Dissertação/ Mestrado em Matemática	Introdução ao estudo de funções para alunos com deficiência visual com o auxílio do multiplano
VIANNA, Claudia C. de Segadas; BARBOSA, Paula Marcia; ROCHA, Denise Felippa da; MENEZES, Adrianne Christine; PEREIRA, Flávia Cardoso; SANTOS, Thiago Esquian dos	2013	Anais/ XI Encontro Nacional de Educação Matemática	Recursos para o ensino de gráficos e funções para deficientes visuais

Fonte - Nossa produção (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 3: Quadro contendo quatro colunas e 16 linhas. Na primeira linha há as inscrições: autor; ano; tipo e título. Na segunda linha: ARAGÃO, Ildema Gomes; TAVARES, Jorge Alberto Vieira; JESUS, Auxiliadora Machado de; 2016; Anais/ 8º Encontro Nacional de Formação de Professores, 9º Fórum Permanente de Inovação Educacional; Multiplano pedagógico: do concreto ao abstrato. Na terceira linha: BANDEIRA, Salete Maria Chalub; GHEDIN, Evandro; BEZERRA, Simone Maria Chalub Bandeira; BEZERRA, Nilza Jane Filgueira; 2011; Anais/ VIII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, I Congresso Iberoamericano de Investigación en Enseñanza de las Ciéncias; Fundamentos epistemológicos na inclusão social e educacional dos deficientes visuais: estudo a partir de um tabuleiro perfurado. Quarta linha: CÉZAR, Nilza dos Santos Rodrigues; 2013a; Anais/ XVII

Encontro Nacional de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática; Deficiente visual e a construção da ideia de função. Quinta linha: CÉZAR, Nilza dos Santos Rodrigues; 2013b; Anais/ VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática; Deficientes visuais e a construção da ideia de função. Sexta linha: CÉZAR, Nilza dos Santos Rodrigues; 2013c; Anais/ XI Encontro Nacional de Educação Matemática; Deficientes visuais e a construção do conhecimento matemático da ideia de função. Sétima linha: LEÓN, Lorena C.; MARTINI, Luiz C.; 2015; Artigo/ CSR and Sustainable Development: a Multinational Perspective; Education and Social inclusion of People with Visual Impairment in the Study of Mathematical Functions. Oitava linha: LOPES, Arilise Moraes de Almeida; 2012; Tese/ Doutorado em Informática na Educação; Estratégias de mediação para o ensino de Matemática com objetos de aprendizagem acessíveis: um estudo de caso com alunos com deficiência visual. Nona linha: MELLO, Felipe Almeida de; CAETANO, Jaciene Lara de Paula; MIRANDA, Paula Reis de; 2017; Artigo; Ferramentas tácteis no ensino de Matemática para estudante cego: uma experiência no IF Sudeste MG. Décima linha: MELLO, Felipe Almeida de; MIRANDA, Paula Reis de; 2016; Anais/ XII Encontro Nacional de Educação Matemática; O projeto “Matemática para além da visão” e a confecção de uma ferramenta táctil para educandos cegos. Décima primeira linha: OLIVEIRA, Heitor Barbosa Lima de; 2010; Dissertação/ Mestrado em Ensino de Matemática; Introdução ao conceito de função para deficientes visuais com o auxílio do computador. Décima segunda linha: PINHEIRO, Daniela Macêdo Damaceno; 2014; Dissertação/ Mestrado em Ensino na Educação Básica; A importância da utilização de Material Concreto no ensino de Matemática: uma experiência no ensino de Funções. Décima segunda linha: QUIÑONEZ, Lorena Del León; 2016; Dissertação/ Mestrado em Engenharia Elétrica; Matgrafvoice: sistema de tratamento matemático e visualização tátil de funções matemáticas através de uma impressora Braille. Décima terceira linha: SOUZA, Maria Aldete de; 2015; Dissertação/ Mestrado em Matemática; Introdução ao estudo de funções para alunos com deficiência visual com o auxílio do multiplano. Décima terceira linha: VIANNA, Claudia C. de Segadas; BARBOSA, Paula Marcia; ROCHA, Denise Felippa da; MENEZES, Adrianne Christine; PEREIRA, Flávia Cardoso; SANTOS, Thiago Esquian dos; 2013; Anais/ XI Encontro Nacional de Educação Matemática; Recursos para o ensino de gráficos e funções para deficientes visuais (Fim da descrição).

Apesar de não estarmos utilizando em nosso estudo tecnologias digitais, acreditamos que os primeiros trabalhos apresentados, a seguir, têm contribuições relevantes para o nosso estudo, pensando-se nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função junto aos estudantes com deficiência visual.

A pesquisa desenvolvida por Quiñonez (2016, p.16) possuía o intuito de “entregar um programa computacional nomeado por MatGrafvoice, que se concentra no tratamento matemático de gráficos de funções matemáticas” para ser utilizado por estudantes com deficiência visual. Salientamos que o MatGrafvoice se constituiu em uma ferramenta de informática que possibilitava o tratamento e a visualização tátil de funções, usando uma impressora em Braille. Para isto, este *software* interpretava graficamente uma ou mais funções inseridas pelo usuário em um editor de texto, após essa validação, o gráfico da função era apresentado na tela e poderia ser impresso em uma impressora Braille.

A utilização deste programa pode ser realizada tanto por pessoas com deficiência visual quanto por pessoas videntes, considerando-se que o sistema apresenta informações adequadas para os diferentes usuários (QUIÑONEZ, 2016). Isto é, para pessoas cegas eram emitidas mensagens sonoras e o sistema reproduzia o título dos formulários e gráficos construídos pelos usuários; já para as pessoas videntes e com baixa visão foram apresentados textos em um tamanho de fonte maior e com cores que contrastam com a tela de fundo do programa.

A investigação de Quiñonez (2016) trouxe inúmeras contribuições para o processo de ensino e aprendizagem de gráficos de funções, pois, com este programa, os próprios estudantes com deficiência visual podem inserir seus gráficos no aplicativo, ferramenta acessível que pode contribuir para a sua autonomia perante o estudo deste conceito. De igual modo, com o auxílio de uma impressora em Braille podem analisar o gráfico da função que foi impresso. Neste contexto, uma limitação que poderá ser encontrada refere-se ao fato de que a impressora Braille é um equipamento de alto custo e não é acessível a todos os estudantes com deficiência visual ou, ainda, a todas as instituições de ensino que possuem pessoas com deficiência visual.

Dentre as contribuições que o trabalho de Quiñonez (2016) apresentou para o nosso estudo, destacamos a constatação de que o material tátil impresso pode contribuir para a autonomia dos estudantes com deficiência visual, possibilitando que estes possam interagir com o equipamento e analisar gráficos de maneira tátil, além de possibilitar uma ampliação da percepção da forma física da função, isso a partir da leitura da linha da função impressa em relevo.

Neste mesmo contexto, de utilização de um *software* acessível que permite inserir e imprimir gráficos de funções, o estudo realizado por León e Martini (2015) aborda a inclusão de pessoas com deficiência visual, tendo como foco nos processos de ensino e aprendizagem da matemática. Neste estudo, foi apresentado o *software MatGraf* que permite a inserção de representações algébricas das funções e a impressão tátil destas. Ação que se constitui enquanto um recurso potencial para que as pessoas com deficiência visual possam compreender os gráficos das funções utilizadas na disciplina de Matemática, uma vez que a maior barreira para os estudos nessa área é a mentalização de conceitos abstratos (LEÓN; MARTINI, 2015).

A abstração presente na disciplina de Matemática pode ser contornada pelo contato visual dos estudantes com os conceitos estudados. No caso dos estudantes com deficiência visual, essa abstração pode ser contornada com a utilização de materiais táteis que permitem uma aproximação e um contato com o conhecimento em questão (LEÓN; MARTINI, 2015).

A contribuição que o estudo de León e Martini (2015) apresentou para a nossa pesquisa diz respeito à necessidade de substituir símbolos matemáticos presentes na escrita Braille, como forma de simplificar a leitura e o entendimento das informações escritas. Além disso, nos apresentou também a necessidade de, ao utilizar um material tátil com gráficos de funções construídos ou a serem construídos, explicar aos estudantes cegos que a leitura dos gráficos das funções não pode ser realizada por linha, como comumente ocorre na leitura de textos impressos em Braille, a leitura deve envolver uma percepção tátil maior do espaço da impressão do Braille e/ou da construção do gráfico da função.

Outra pesquisa que também destacou o cuidado com as notações matemáticas foi desenvolvida por Oliveira (2010, p. 9) com o intuito de "verificar como os alunos deficientes visuais podem aprender o conceito de função através de uma sequência de exercícios e avaliar como o computador, por intermédio de planilhas eletrônicas, pode contribuir neste processo de aprendizagem". O referido estudo ocorreu no 9º ano do Ensino Fundamental no Instituto Benjamin Constant e constatou que se faz necessária a exploração do conceito de Função em diferentes contextos que envolvem desde a regularidade de padrões até a generalização e abstração de comportamentos abstratos, os quais devem abarcar a correspondência entre dois conjuntos, a expressão analítica, os pares ordenados, a utilização de tabelas e gráficos.

Oliveira (2010) concluiu, ainda, que a ausência de um trabalho em sala de aula que possa contemplar esses contextos de forma gradativa, isso desde os primeiros anos de escolaridade, pode apresentar dificuldades na interpretação de dados representados em tabelas ou gráficos, além de gerar dificuldades na constatação de padrões e na compreensão do conceito de variável e, consequentemente, no conceito de função.

Ao utilizar a planilha eletrônica Planivox, como ferramenta auxiliar no estudo do conceito de Função, Oliveira (2010) notou que os estudantes perceberam: a necessidade de utilizar as notações matemáticas de maneira correta, caso contrário o programa apresentava valores discrepantes; o conceito de variável, isto em virtude de utilizarem a mesma fórmula para determinar todos os valores de uma dada coluna e que pudessem constatar, também, os aspectos que perpassavam pela construção de uma tabela com o auxílio de um computador. Já o professor identificou que as dificuldades apresentadas pelos estudantes com deficiência visual eram similares às expostas por estudantes sem essa necessidade específica.

Souza (2015) inspirou-se no estudo realizado por Oliveira (2010) e desenvolveu uma pesquisa com o objetivo de "propiciar oportunidades iguais de aprendizagem, em específico aos que possuem deficiência visual, muitas vezes, deixados à margem do sistema de ensino" (SOUZA, 2015, p. 8). Para isto, aplicou uma sequência didática em duas turmas do 1º ano da Educação de Jovens e Adultos do Ensino Médio de duas escolas da rede estadual de ensino, sendo que uma das turmas possuía estudantes com deficiência visual.

Em seu estudo, Souza (2015) ressaltou sobre o "visocentrismo", no âmbito do ensino da Matemática, o qual diz respeito ao fato da visão ocupar o topo dos sentidos, argumentando sobre a necessidade de se ampliar tais sentidos, ou seja, apresentar metodologias, atividades, tarefas e um trabalho pedagógico para além do uso da visão.

A contribuição desses dois estudos, desenvolvidos por Oliveira (2010) e Souza (2015), para a investigação que realizamos refere-se à constatação da dificuldade que os estudantes com cegueira, principalmente cegueira congênita, têm em relação à exploração tátil de informações expressas de maneira bidimensional, devido à constante leitura na horizontal. Ademais, Oliveira (2010) salientou sobre a necessidade de apresentar situações que tragam a exploração tátil bidimensional pois isso poderá contribuir para a construção e interpretação de tabelas, além da percepção de sequências formadas por figuras geométricas, conceitos que podem vir a contribuir com a compreensão do conceito de função.

Considerando o contexto específico dos estudantes com baixa visão e da possibilidade de utilizar Objetos de Aprendizagem, enquanto tecnologias digitais acessíveis, o estudo de Lopes (2012, p. 23) foi realizado com o objetivo de "analisar as estratégias de mediação nos processos de ensino e aprendizagem envolvendo o professor, os alunos e o uso de objetos de aprendizagem em ambiente escolar inclusivo". A ênfase dada neste artigo é a acessibilidade digital que pode permitir que os usuários com baixa visão possam ter acesso a diversos tipos de conteúdos digitais, propiciando igualdade de condições e contribuindo para a inclusão no ensino de Matemática.

A contribuição que esse estudo apresentou para a formação e a prática de professores de Matemática refere-se à necessidade de estes desenvolverem estratégias que levem em consideração os estímulos a serem priorizados na apresentação dos conceitos Matemáticos. Ademais, que possam considerar o conteúdo a ser ministrado perante os estudantes e a disponibilidade tanto do espaço físico, quanto do material existente na instituição. Tais aspectos explicitam a necessidade de, quando possível, os professores utilizarem mecanismos descritivos e que se componham de materiais e objetos manipuláveis para os estudantes com baixa visão (LOPES, 2012).

Para o trabalho com o Objeto de Aprendizagem, Lopes (2012) ressaltou que foi necessária a utilização, concomitante, de um material concreto, construído pelas professoras para realizar a representação gráfica que era apresentada na tela. Isso possibilitou uma maior aproximação da professora com os estudantes com baixa visão, além de propiciar que esta pudesse identificar os conhecimentos prévios dos estudantes e os obstáculos que possuíam perante o conteúdo estudado, sanando, assim, as dúvidas que surgiram.

Essa pesquisa salientou a importância da mediação do conteúdo a partir de uma estratégia de aula expositiva dialogada das professoras com os estudantes, constituindo-se em um momento oportuno tanto para os estudantes refletirem sobre as dúvidas e os conhecimentos que foram emergindo quanto para exporem as suas aprendizagens e dúvidas em voz alta, o que propiciou à professora compreendê-las e conhecer também os obstáculos epistemológicos que os estudantes estavam vivenciando, para, com isto, sanar as dúvidas e formalizar os conceitos relacionados à função.

Além do estudo de Lopes (2012), que fez uma articulação entre as tecnologias digitais e a utilização de materiais manipuláveis, o minicurso elaborado por Vianna et al. (2013, p. 1) foi realizado com o objetivo de "apresentar atividades envolvendo conteúdos de álgebra, função e interpretação de gráficos, que já foram aplicadas com alunos do 8º e 9º anos do Instituto Benjamin Constant, instituição especializada para a educação de deficientes visuais". Os materiais utilizados foram: geoplano, multiplano, programa Braile Fácil, planilha do Excel e a Planivox.

Nesse minicurso foram aplicadas dez atividades com o objetivo de manusear e utilizar materiais acessíveis que possibilitassem a compreensão dos conteúdos, dentre estes: a localização de pontos no plano cartesiano, a interpretação de gráficos, a comparação e observação de regularidades, a utilização de variáveis e a associação de pontos dos gráficos com elementos que estavam presentes nas situações vivenciadas. Como este estudo centrou-se na descrição das atividades, não foram apresentadas análises de resultados, assim, a contribuição que podemos destacar se refere à maneira como as situações foram elaboradas, aos seus enunciados e à descrição de sua aplicação.

Ainda nesta interface de utilização de materiais manipuláveis e tecnologias digitais, Bandeira et al. (2011) desenvolveram um estudo em que construíram e testaram um recurso didático nomeado por “tabuleiro perfurado”, cuja finalidade era trabalhar com os conteúdos de funções. Para isso, buscaram demonstrar, ao longo do estudo, o apoio que a utilização do Dosvox pode vir a proporcionar aos estudantes com deficiência visual. Com o tabuleiro perfurado, foi possível trabalhar os conceitos de plano cartesiano, par ordenado, relação, função e gráficos de função.

A reflexão que Bandeira et al. (2011) trouxeram para esta tese diz respeito à constatação do quanto a comunicação entre o professor e os estudantes com deficiência deve ser clara, concisa e objetiva, tendo em vista, que “a ‘palavra’ foi o elo entre o professor mediador, o recurso didático e a aluna” (BANDEIRA et al., 2011, p. 10). Desta maneira, os recursos didáticos utilizados podem quebrar barreiras de exclusão e possibilitar aos estudantes com deficiência visual uma efetiva participação e com equidade de oportunidades no processo de construção dos seus conhecimentos.

Na continuidade desta seção, apresentaremos os trabalhos relacionados à utilização de materiais manipuláveis nos processos de ensino e/ou aprendizagem do conceito de função. Esses estudos trouxeram contribuições relacionadas tanto a compreensão do conceito de função quanto aos aspectos atrelados ao uso de materiais manipuláveis, os quais também se fizeram presentes no jogo construído no âmbito desta tese. Inicialmente, trataremos sobre o estudo desenvolvido por Aragão, Tavares e Jesus (2016, p. 1), que utilizaram o Multiplano, enquanto uma tecnologia assistiva e um material manipulável, tendo por objetivo de pesquisa trazer “uma reflexão/contribuição, acerca de uma ferramenta tecnológica (tecnologia assistiva), que possibilita às pessoas com deficiência visual aprenderem conteúdos Matemáticos”.

O Multiplano foi construído por Ferronato (2002) e se constitui enquanto uma ferramenta tátil que pode vir a facilitar a aquisição dos conteúdos matemáticos de:

função, geometria plana e espacial, matriz, determinante, sistema linear, equações, estatística, quatro operações, limites e derivadas de função. Além disso, o Multiplano pode ser utilizado pelo estudante com deficiência visual e pelo vidente, pois, por se constituir enquanto uma ferramenta acessível, esta tecnologia assistiva pode ser utilizada por todos os estudantes em sala de aula (ARAGÃO; TAVARES; JESUS, 2016).

A colaboração deste estudo diz respeito à constatação que Aragão, Tavares e Jesus (2016) identificaram de que o material concreto pode proporcionar a equiparação de oportunidades de acesso às mesmas informações que os videntes, levando-se em consideração que muitos conteúdos matemáticos que possuem um grande apelo visual acabam não estando disponíveis para os estudantes com deficiência visual, isto pela ausência de recursos didáticos acessíveis. Enfatiza-se, assim, a necessidade de ampliação e construção de novos materiais manipuláveis para o estudo de conteúdos matemáticos.

Com o objetivo de "auxiliar educandos sem acuidade visual na aprendizagem de conteúdos matemáticos", o trabalho de Mello e Miranda (2016, p. 1) abordou ações do projeto "Matemática para além da visão", dentre estas, destacamos a confecção de uma ferramenta tátil para o estudo do conceito de função com um estudante cego do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologias do Sudeste de Minas Gerais.

A ferramenta confeccionada foi nomeada de "*ConjunTáctil*". Segundo Mello e Miranda (2016), a elaboração desta ferramenta tátil é de fácil confecção e baixo custo, possibilitando a apresentação do Plano de Coordenadas Cartesianas, da relação entre conjuntos e da definição de função, conteúdos previstos na ementa da disciplina de Fundamentos de Cálculo do Instituto Federal ao qual o estudante encontrava-se vinculado. Vale ressaltar que com a utilização desta ferramenta foi possível apresentar o conceito de função através do Diagrama de *Venn.*

O ConjunTáctil foi utilizado durante quatro aulas, sendo duas destinadas à revisão dos conceitos trabalhados nas duas aulas iniciais. Mello e Miranda (2016) constataram que o estudante, com o auxílio da ferramenta, sentiu-se mais confiante e seguro para responder aos questionamentos propostos e nos momentos em que possuía alguma dúvida, tateava a ferramenta para confirmar seu raciocínio. Outro aspecto, mencionado por Mello e Miranda (2016), refere-se ao fato de que esta ferramenta pode possibilitar, ainda, o estudo das funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras, também da intuição do conceito de função inversa e de função composta.

Ainda no âmbito do projeto “Matemática para além da visão”, Mello, Caetano e Miranda (2017, p. 11), tendo o objetivo de “compreender e oportunizar a construção do saber matemático pelo estudante não vidente”, realizaram um estudo de caso, através do acompanhamento de um estudante cego do curso de Bacharelado em Administração do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologias do Sudeste de Minas Gerais.

No decorrer desse acompanhamento, Mello, Caetano e Miranda (2017) utilizaram alguns materiais, os quais foram sendo aperfeiçoados. Para tanto, na construção dos materiais manipuláveis levaram em consideração alguns parâmetros relacionados ao tamanho, significação tátil, aceitação, fidelidade, facilidade no manuseio, resistência e segurança, aspectos que contribuem para a construção de um material acessível para os estudantes com deficiência visual. Os materiais utilizados foram: reglete e punção, de modo que o estudante cego realizasse escritas em Braille e o Multiplano.

Outro material apresentado por Mello, Caetano e Miranda (2017) foi a Ficha Triângulo com Palitos, ferramenta adaptada do Projeto Fundão da Universidade Federal do Rio de Janeiro, cujo intuito é registrar regularidades, padrões ou leis de formação de sequências que podem ser identificadas a partir da percepção tátil.

Utilizou-se, também, o ConjunTáctil, supracitado na pesquisa de Mello e Miranda (2016). Nesta foi apresentada uma Caixa Algébrica que pode contribuir com o processo de compreensão da lei de formação de uma função afim, seu valor numérico, imagem e domínio (MELLO; CAETANO; MIRANDA, 2017). Outras ferramentas utilizadas na referida pesquisa foram as Fichas em Alto-Relevo, para o estudo dos gráficos da função quadrática e para a introdução da posição relativa de uma reta a uma circunferência.

Em síntese, a impressão e a construção de gráficos em alto-relevo, bem como a utilização do multiplano, apresentaram possibilidades para o processo de ensino e aprendizagem de função, isso, a partir de pares ordenados no Plano de Coordenadas Cartesianas. Já a ferramenta ConjunTáctil explicita a abordagem deste conceito com correspondências entre dois conjuntos. Por último, as ferramentas Ficha Triângulo com Palitos e Caixa algébrica trazem a oportunidade de empregar expressões analíticas para se elucidar o conceito de função.

As pesquisas desenvolvidas por Mello e Miranda (2016) e Mello, Caetano e Miranda (2017) contribuem para considerarmos que o apelo visual tão presente no conceito de função, o qual é valorizado e utilizado com muita frequência na maioria das instituições de ensino, no âmbito do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, pode ser transformado em um apelo sensorial. Esta inflexão se configura em uma possibilidade para que os estudantes sem acuidade visual possam utilizar o sistema háptico em atividades de investigação e compreensão do conceito de função e os conceitos das funções estudadas no decorrer do Ensino Médio.

Outra pesquisa que apresenta um material para o estudo do conceito de função foi desenvolvida por Pinheiro (2014, p. 9) tendo por objetivo “apresentar um material concreto, denominado CAPEFI – Caixa Para o Estudo de Funções e Inequações, útil ao processo de ensino e aprendizagem e, com isso, favorecer a aprendizagem dos alunos”. Esse estudo foi desenvolvido em uma turma do 1º ano do Ensino Médio e com 3 estudantes com deficiência visual também do Ensino Médio, perfazendo-se 6 encontros.

O CAPEFI constitui-se de uma caixa aberta em placa de fibra de média densidade (MDF), composta de duas placas de acrílico plotadas uma com um plano cartesiano ortogonal e outra com um sistema composto por seis eixos das abscissas. Esse material foi construído com pressupostos acessíveis e utilizado tanto por estudantes com deficiência visual quanto videntes, a partir disso, constatou-se que “o conceito de função apresenta dificuldades em todos os níveis de ensino e em diferentes aspectos em relação a como compreender, interpretar e atribuir significados a esse conceito” (PINHEIRO, 2014, p. 33), fazendo-se necessária a utilização de diferentes materiais e abordagens metodológicas que possam vir a contribuir com o processo de significação e atribuição de sentido ao conceito de função.

A influência que esse estudo nos apresentou centra-se na necessidade do professor assumir uma postura de orientador e mediador entre o conhecimento exposto e os estudantes, bem como na constatação de que o trabalho em grupo possibilitou que os estudantes participassem das discussões de maneira mais ativa e cooperativa com os demais membros do grupo, os quais buscaram montar estratégias e ações para a resolução das atividades que lhes foram apresentadas, fato que pode contribuir para o desenvolvimento da autonomia e da compreensão do conceito de função.

Vale destacar também os estudos realizados por Cézar (2013a, 2013b, 2013c), os quais tiveram por objetivo compreender como os estudantes com deficiência visual constroem a ideia de função, além de verificar a possibilidade de utilizar um material de baixo custo e demonstrar estratégias diferenciadas e simples na formação do educando. Tais estudos culminaram na construção de um projeto de pesquisa que buscou instigar a curiosidade e melhorar a participação dos estudantes com deficiência visual em sala de aula regular, tendo os seguintes pilares para o desenvolvimento dos materiais: aprender a conhecer; aprender a fazer, aprender a viver juntos e aprender a ser (DELORS, 1999).

Em seus estudos, Cézar (2013b, 2013c) apresentou atividades com o intuito dos estudantes com deficiência visual observarem a regularidade de diferentes sequências e generalizarem as informações, aspectos que contribuem para o processo de abstração no âmbito da Matemática. A contribuição desse estudo se refere aos critérios de avaliação utilizados para analisar as atividades junto aos estudantes com deficiência visual, a saber: primar por atividades coletivas que possam despertar a motivação e o anseio pela construção do conhecimento por todos e extrapolar as situações apresentadas, permitindo que os estudantes possam criar novas situações e indagações (CÉZAR, 2013b, 2013c). Tais aspectos podem contribuir com uma participação mais efetiva na construção do conceito de função pelos estudantes.

Em linhas gerais, as pesquisas aqui apresentadas articulam alguns dos aspectos que compõem a temática de estudo desta tese e colaboram para compreendermos os processos de ensino e aprendizagem de função junto aos estudantes com deficiência visual. Corroboram, assim, com a necessidade do desenvolvimento de pesquisas cujo cerne sejam os diferentes conteúdos matemáticos em uma perspectiva inclusiva, visando superar a concepção da Matemática enquanto uma disciplina centrada na percepção visual dos seus conceitos.

Assim, os estudos apresentados trazem a necessidade de superação do apelo visual tanto no âmbito educacional quanto social, tendo em vista que a maioria das informações apresentadas em nosso dia a dia são visuais. Necessitamos ampliar e utilizar os diferentes canais de percepção, os quais tendem a contribuir com o desenvolvimento de uma sociedade mais inclusiva. Necessitamos, com isso, compreender e utilizar as diferentes teorias que fundamentam a Educação Matemática de maneira inclusiva, superando-se a utilização de metodologias que pensam nos estudantes enquanto um grupo homogêneo de pessoas, com características comuns e que aprendem de maneira similar. Vivemos em uma sociedade heterogênea e cujos sujeitos possuem diferentes necessidades específicas, as quais devem ser levadas em consideração na sala de aula e nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática.

Vale enfatizar que a revisão da literatura aqui descrita, foi fruto do levantamento de estudos nas bases de dados que contém artigos de periódicos, dissertações, teses e outros trabalhos. Não foram encontradas pesquisas publicadas nos últimos 15 anos que abordassem, em sua totalidade, a temática proposta nesta tese, isto é, que discutissem sobre o conceito de função em uma perspectiva inclusiva e lúdica, à luz da Teoria das Situações Didáticas, com estudantes com deficiência visual. Isto reafirma a importância e necessidade do presente trabalho.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA

A educação, tendo por finalidade a humanização do homem, integra sempre um sentido de emancipação às suas ações. Por conseguinte, o método científico que a estudará deverá ter como pressuposto a possibilidade de oferecer aos sujeitos do grupo pesquisado condições formadoras e incentivadoras dessa emancipação, o que poderá facilitar a transformação democrática das condições de vida e existência dos sujeitos (GHEDIN; FRANCO, 2011, p. 42).

Ao considerarmos a humanização do homem enquanto finalidade da educação e ao acreditarmos que a pesquisa pode contribuir para a emancipação dos sujeitos partícipes e dos demais que a ela tenham acesso, descrevemos, neste capítulo, os procedimentos metodológicos da presente investigação. Perfazendo esse itinerário, explicitamos a utilização da Engenharia Didática enquanto metodologia de pesquisa.

Tendo em vista que a Teoria das Situações Didáticas serve de referência para a utilização da Engenharia Didática, enquanto metodologia de pesquisa, acreditamos que para atender ao objetivo geral, qual seja investigar as potencialidades e limitações da Teoria das Situações Didáticas para a inclusão de estudantes com deficiência visual nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função mediados por um recurso lúdico, fez-se necessário nos ampararmos em uma abordagem que possibilitasse uma constante tomada de decisão, interpretação e compreensão das informações coletadas, levando-se em consideração a teoria e a prática como aspectos indissociáveis no âmbito dos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função.

A Engenharia Didática, enquanto uma metodologia de pesquisa, surgiu, segundo Artigue (1996), no âmbito da Didática da Matemática nos anos de 1980. Seu fundamento faz uma analogia entre o trabalho realizado no âmbito educacional ao que é desempenhado pelo engenheiro. Para executar um projeto arquitetônico, o engenheiro conta com o conhecimento científico da sua área, mas, em contato com a realidade da execução do projeto, verifica que esta é muito mais complexa. À semelhança disso ocorre com o professor/pesquisador, cuja realização de uma investigação em sala de aula demanda conhecimentos científicos da área, mas só esses conhecimentos não são suficientes para suprir os desafios da complexidade dos objetos educacionais.

Outro aspecto que podemos mencionar quanto à analogia apresentada por Artigue (1996) é que tanto o engenheiro quanto o professor/pesquisador necessitam conceber, planejar e então executar o projeto. Para realizar todas essas ações, ambos necessitam, além do conjunto de conhecimentos específicos da sua área de atuação, de uma criatividade inicial para a elaboração de uma proposta a ser executada (PAIS, 2015).

Vale destacar ainda que, enquanto uma metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática caracteriza-se como sendo um esquema experimental com fundamentos nas realizações didáticas desenvolvidas em sala de aula, ou seja, ampara-se: nas concepções tanto do professor quanto do estudante; na realização, isto é, execução do processo didático; na observação, do professor/pesquisador sobre o objeto de estudo e na análise da Sequência Didática - SD (ARTIGUE, 1995). Assim, a Engenharia Didática, de acordo com Artigue (1995), envolve 4 fases consecutivas, a saber: análise preliminar; concepção e análise *a priori* da engenharia da situação didática; experimentação e, como quarta fase, análise e avaliação *a posteriori*. Tais fases estão descritas nas próximas seções, nas quais abordaremos sobre como ocorreu a execução da presente investigação fundamentada nesta metodologia.

3.1 Análise preliminar

A primeira fase da Engenharia Didática envolve o levantamento e a inferência, com base em um quadro teórico geral. Esta fase encontra-se estruturada em torno de um sistema de informações que pode ser categorizado em três dimensões, a saber: *epistemológica*, associada ao conteúdo a ser trabalhado; *cognitiva*, está atrelada ao público a quem o ensino será dirigido e perpassa pelo levantamento das concepções dos estudantes, suas dificuldades e os obstáculos que ocorrem com frequência ao se estudar determinado conteúdo; a última categoria, encontra-se associada a uma dimensão *didática*, concernente ao funcionamento do sistema de ensino (ARTIGUE, 1995).

Com o intuito de contemplar essas três dimensões da análise preliminar, apresentamos no capítulo 4 desta tese:

- O estudo histórico e epistemológico sobre o conceito de função.
- A definição do conceito de função.

- A descrição das concepções e das principais dificuldades e obstáculos que são apresentados pelos estudantes perante o estudo do conceito de função.
- Análise do campo de restrições, no estudo do conceito de função, para tratar do desempenho e da busca por um ensino eficaz.
- Uma análise dos materiais didáticos utilizados e disponibilizados gratuitamente pelo Instituto Benjamin Constant para os processos de ensino e aprendizagem do conceito de função junto a estudantes com deficiência visual.
- Uma descrição do Multiplano, construído por Rubens Ferronato em 2002, que permite trabalhar com o conceito de função junto a estudantes com deficiência visual.
- A análise das orientações versadas na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) sobre o conceito de função.

3.2 Concepção e análise *a priori*

Em se tratando da segunda fase, Artigue (1995) destacou que o pesquisador deve tomar decisões sobre um certo número de variáveis de comando que possuem relação com o problema estudado. Tais variáveis podem ser: macrodidáticas ou globais, as quais estão atreladas à organização geral da Engenharia Didática e há também as variáveis microdidáticas ou locais que dizem respeito à organização local da Engenharia Didática e estão vinculadas à organização de uma sessão/aula ou uma fase (ARTIGUE, 1995).

O intuito da análise *a priori* é determinar como as escolhas realizadas permitem controlar os comportamentos e significados que são atribuídos pelos estudantes frente ao objeto de estudo (ARTIGUE, 1995). Assim, esta análise se baseia no levantamento de suposições, ou seja, constitui-se de descrições e previsões da SD. Além disso, centra-se na descrição das características de uma situação *adidática*, segundo os pressupostos de Brousseau (1997), isso na medida em que apresenta o que se pretende construir e como poderá ser desenvolvido pelos estudantes (ARTIGUE, 1996). Almeja-se, na análise *a priori*, responder as seguintes indagações que foram destacadas por Artigue (1995):

- Qual o problema que os estudantes têm para resolver?

- Quais os conhecimentos que os estudantes precisam ter para compreender o enunciado do problema?
- É possível explicitar esse problema em termos da teoria dos jogos?
- Que conhecimentos os estudantes devem possuir para ter êxito na resolução do problema (para ganhar o jogo)?
- Qual o controle que os estudantes têm sobre as suas ações?
- Há quantas fases/sessões?

Diante disso, realizamos duas análises a *priori*, a primeira delas referente à primeira versão da SD e a segunda foi realizada na segunda versão da SD, sendo que esta última levou em consideração alterações que se fizeram necessárias após a experimentação da primeira versão do Material Didático - MD. Tais análises encontram-se descritas nos capítulos 5 e 6 desta tese. Em ambos os capítulos, foram realizadas explanações minuciosas da SD e apresentadas justificativas quanto às escolhas didáticas, isso com o intuito de apresentar as estratégias de resolução dos problemas propostos, evidenciando as que se apresentavam de maneira correta e/ou possíveis erros que os estudantes poderiam cometer ao longo da resolução, objetivando, com isso, prever os comportamentos dos estudantes perante o desenvolvimento da SD.

Vale destacar que as suposições apresentadas na análise *a priori*, segundo Artigue (1995), serão confrontadas na quarta fase que constitui a análise e avaliação *a posteriori*, a qual se fundamentou no que foi observado na fase de experimentação. A descrição sobre a terceira fase, isto é, sobre como ocorreu a experimentação neste estudo, encontra-se descrita na próxima seção.

3.3 Experimentação

No contexto da fase de experimentação, realizamos a aplicação de duas versões do MD composto por materiais e por uma SD, cuja descrição encontra-se nas análises *a priori*, isto nos capítulos 5 e 6. Vale destacar que compreendemos uma SD como sendo "formada por um número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática. Essas aulas são também consideradas sessões" (PAIS, 2015, p. 102). As duas versões da SD foram construídas tendo como fundamentos a TSD proposta por Brousseau (1997), além da perspectiva da ludicidade e da Educação Inclusiva.

Para o desenvolvimento desta pesquisa, inicialmente foi realizado um contato com a Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF). Em seguida, com a direção de uma escola pública inclusiva, que possui turmas do Ensino Médio e atende estudantes com deficiência visual. Este colégio está situado na zona urbana de Brasília e conta com dependências e vias acessíveis para os estudantes com deficiência visual. Sua estrutura física está dividida em: 28 salas de aula, sala para direção, sala de secretaria, sala de professores, banheiros adaptados e com chuveiros, laboratório de informática, Sala de recursos multifuncionais para Atendimento Educacional Especializado (AEE), pátio coberto, sala de artes, piscina semiolímpica, piscina infantil, academia de musculação, sala de dança, ginásio para ginástica olímpica, 2 quadras de esporte, uma quadra de areia, horta, biblioteca, auditório e lanchonete.

Vale destacar, de acordo com dados do censo escolar e dados quantitativos disponibilizados pela instituição, conforme pode ser observado na Tabela 1, que a instituição contou nos últimos quatro anos com a seguinte quantidade de funcionários, docentes e estudantes:

Tabela 1 - Dados quantitativos da instituição

Categoria	**2017**	**2018**	**2019**	**2020**
Funcionários	129	124	124	42
Docentes	96	98	98	105
Estudantes	1.636	1.602	1600	1703
Estudantes com deficiência visual	5	6	7	6

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Tabela 1: Tabela com 5 linhas e 5 colunas. Na primeira linha consta categoria e os anos de 2017 a 2020. Na segunda linha Funcionários em 2017 haviam 129, em 2018 e 2019 possuía 124 e em 2020 haviam 42. Na categoria de docentes, isto na terceira linha, tinha 96 em 2017, 98 em 2018 e 2019 e, 105 em 2020. A quarta linha representa os Estudantes em 2017 haviam 1693; em 2018, 1602, e em 2019, 1600 e em 2020, 1703. Na quinta linha, Estudantes com deficiência Visual em 2017, cinco; em 2018, seis, e em 2019, sete e em 2020, seis (Fim da descrição).

Durante o levantamento das informações relacionadas na referida instituição de ensino, apresentamos aos membros da direção o objetivo deste estudo e os convidamos para participar. Tendo recebido o aceite, solicitamos a assinatura do

Termo de Anuência da Instituição (Apêndice A). Em seguida, apresentamos a proposta aos professores que atuam no AEE com estudantes com deficiência visual e o professor da sala de aula regular que atua nas turmas de 1º ano do Ensino Médio, as quais possuíam estudantes com deficiência visual dentre os videntes. Todos esses professores se colocaram prontamente à disposição para contribuir e participar do desenvolvimento desta investigação.

Assim, após o consentimento da SEEDF, da direção e do corpo docente da referida instituição, realizamos a submissão do projeto ao Conselho de Ética em Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais da Universidade de Brasília, com Certificado de Apresentação para Apreciação Ética (CAAE), sob o nº 93755018.6.0000.5540, e aprovado conforme parecer consubstanciado nº 2.894.913 (Anexo A).

Após a autorização ética da instituição de Ensino Superior à qual pertencemos, entramos em contato com 4 estudantes com deficiência visual do Ensino Médio e com seus respectivos responsáveis legais, com o intuito de lhes apresentar a proposta da pesquisa e convidá-los para participar do estudo. Após o aceite, solicitamos a assinatura pelos estudantes do Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (Apêndice B) e dos responsáveis do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice C) e no Termo de Direito ao Uso de Imagens (Apêndice D). Tais documentos foram reproduzidos em duas vias, com tamanho da fonte 14 pontos (pt), sendo que para os estudantes cegos disponibilizamos em Braille; uma das vias foi recolhida pela pesquisadora com as respectivas assinaturas dos responsáveis e dos próprios estudantes e a outra entregue aos sujeitos.

Conforme mencionamos, durante o desenvolvimento desse estudo foram construídas duas versões da SD. A primeira versão foi inicialmente avaliada pelos 3 professores da Sala de recursos que atuavam com estudantes com deficiência visual e utilizada por 4 estudantes com deficiência visual do Ensino Médio na Sala de recursos da referida instituição de ensino. Após a sua utilização e as observações realizadas pela pesquisadora sobre a utilização do material, foi construída uma segunda versão, a qual foi analisada por 1 professor do 1º ano do Ensino Médio da mesma instituição dos estudantes que atuavam na sala de aula regular e por 1 professor generalista da Sala de recursos que também participou da avaliação da primeira versão da SD, além disso, com a participação de 1 estudante do Ensino Médio e 2 estudantes do Ensino Superior que avaliaram a acessibilidade de alguns materiais que compunham a segunda versão. Assim, contamos ao longo da investigação com a participação de 4 estudantes e 4 professores do Ensino Médio de um colégio público do Distrito Federal e 2 estudantes do Ensino Superior, cujas características encontram-se descritas a seguir.

3.3.1 Partícipes do estudo

Os estudantes que fizeram parte deste estudo e utilizaram a primeira versão da SD foram estudantes com deficiência visual, cegos ou com baixa visão, que estavam cursando o Ensino Médio de um colégio público do Distrito Federal. Vale ressaltar que, segundo Haddad e Sampaio (2010), a cegueira é uma terminologia empregada para perda total da visão e para condições nas quais a pessoa, predominantemente, utilize recursos de substituição da visão. Já em relação à baixa visão, Haddad e Sampaio (2010) mencionaram que esta nomenclatura é utilizada quando se reporta a níveis menores de perda visual, nos quais os sujeitos possam utilizar recursos que os auxiliem para uma melhor resolução visual. Dito de outra forma, a Portaria nº 3.128 do Ministério da Saúde (BRASIL, 2008, p. 1) apresenta a deficiência visual e a baixa visão de acordo com os níveis de acuidade visual, isto ao considerar:

> [...] baixa visão ou visão subnormal, quando o valor da acuidade visual corrigida no melhor olho é menor do que 0,3 e maior ou igual a 0,05 ou seu campo visual é menor do que 20º no melhor olho com a melhor correção óptica (categorias 1 e 2 de graus de comprometimento visual do CID 10) e considera-se cegueira quando esses valores encontram-se abaixo de 0,05 ou o campo visual menor do que 10º (categorias 3, 4 e 5 do CID 10).

Destarte, a baixa visão é quando a pessoa tem percepção visual menor que 0,3 ou 3/10, isso significa que essa pessoa enxerga apenas a 3 metros de distância o que uma pessoa com visão normal enxerga a uma visão de 10 metros de distância, e maior que 0,05 ou 3/60, compreendendo esta fração nos mesmos moldes descritos. Já a cegueira é quando os valores são abaixo de 0,05 ou 3/60.

A deficiência visual, no contexto educacional, encontra-se atrelada à perda parcial ou total da visão, o que leva o indivíduo a utilizar alguns materiais ou recursos para contribuir com o seu processo de inclusão educacional. Tais recursos podem oferecer condições para que os estudantes com deficiência visual possam participar das aulas e atividades educacionais com maior autonomia. Neste contexto, Bruno (2006, p. 13) destacou:

> A definição educacional diz que são cegas as crianças que não têm visão suficiente para aprender a ler em tinta, e necessitam, portanto, utilizar outros sentidos (tátil, auditivo, olfativo, gustativo e cinestésico) no seu processo de desenvolvimento e aprendizagem. O acesso à leitura e escrita dar-se-á pelo sistema braile [...]. As crianças com baixa visão [...] são as que utilizam seu pequeno potencial visual para explorar o ambiente, conhecer o mundo e aprender a ler e escrever. Essas crianças se diferenciam muito nas suas possibilidades visuais. Embora necessitem aprender a utilizar a visão da melhor forma possível, podem também utilizar os outros sentidos ao mesmo tempo para a aprendizagem, aquisição de conceitos e construção do conhecimento.

Com isso, faz-se necessário ampliarmos os canais de percepção dos estudantes com deficiência visual nas instituições de ensino, para que possam utilizar outros sentidos e terem acesso aos conhecimentos que são ministrados no âmbito educacional. Vale salientar que a deficiência visual se constitui enquanto uma limitação sensorial. Assim, a pessoa com deficiência visual tem possibilidade de aprender, correlacionar informações e organizar dados, como qualquer outra pessoa, desde que lhes sejam apresentadas as ferramentas acessíveis necessárias para a sua atuação efetiva (MASINI, 2013). Nesse contexto, a presente investigação foi construída levando-se em consideração a acessibilidade nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função.

A aplicação da primeira versão da SD ocorreu com 3 professores da sala de recursos e 4 estudantes com deficiência visual que se encontram cursando o Ensino Médio. Assegurando-lhes o anonimato, os professores foram nomeados por: Lílian, Márcio e Paulo. Já os estudantes receberam os seguintes nomes fictícios, a saber: Amanda, Beatriz, Helena e Mateus.

- *Lílian*, licenciada em Física e pós-graduada em Ensino de Matemática, possuía 18 anos de atuação profissional docente e atuava há 8 anos na sala de recursos do Ensino Médio.
- *Márcio*, licenciado em Geografia, possuía 30 anos de experiência profissional docente e há 25 anos atuava na sala de recursos do Ensino Médio.
- *Paulo*, formado em magistério, licenciado em Pedagogia, especialista em ensino de Matemática para cegos, estava cursando licenciatura em Matemática, atuava na SEEDF há 23 anos com estudantes com deficiência visual.
- *Amanda*, 20 anos e cegueira congênita, encontrava-se cursando o terceiro ano do Ensino Médio.

- *Beatriz*, 16 anos e baixa visão, causada pela Síndrome Stevens-Johnson, encontrava-se com acuidade visual em 40%, mas mencionou durante a aplicação que sua acuidade visual já chegou em 5%, foi quando ela aprendeu Braille e estava cursando o segundo ano do Ensino Médio.
- *Helena*, 17 anos, encontrava-se cursando o segundo ano do ensino Médio e possuía cegueira congênita.
- *Mateus*, 18 anos, encontrava-se cursando o terceiro ano do Ensino Médio e possuía cegueira adquirida devido ao glaucoma inato, passou por 4 cirurgias, sendo que na última a sua acuidade visual ficou abaixo de 0,05.

A segunda versão da SD foi avaliada por dois professores do Ensino Médio, o professor *Márcio* que avaliou também a primeira versão e encontrava-se atuando na sala de recursos e o professor *Samuel* que estava atuando na sala de aula regular do Ensino Médio e possuía Licenciatura em Matemática, Especialização em Ensino de Matemática, Especialização em Matemática Superior e Mestrado em Educação. O professor Samuel contava com 34 anos de experiência profissional, em instituições tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior em instituições públicas e particulares.

Destacamos ainda que contamos com a participação de dois estudantes do Ensino Superior para avaliarem as células Braille que foram construídas, no contexto da segunda versão do material, os quais nomeamos por *Carlos* e *Cibele*. Ambos são licenciandos em Música em uma universidade pública brasileira. *Carlos* nasceu com deficiência visual e teve glaucoma que afetou o seu nervo óptico e ocasionou a cegueira, tem formação técnica pela Escola de música de Brasília e possuía 24 anos de idade. *Cibele* tem 22 anos e cegueira congênita.

3.2.2 Instrumentos utilizados para a coleta dos dados

Para atender ao objetivo geral deste estudo, qual seja, investigar as potencialidades e limitações da Teoria das Situações Didáticas para a inclusão de estudantes com deficiência visual nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função mediados por um recurso lúdico, utilizamos enquanto instrumentos para a coleta dos dados a observação participante, anotações, gravação em áudio e vídeo e entrevistas semiestruturadas.

A aplicação da primeira versão do MD, foi realizada junto aos 3 professores da sala de recursos e aos 4 estudantes do Ensino Médio valeu-se da observação participante, anotações e gravação em áudio e vídeo. A observação participante é um método que tem o potencial de produzir novas percepções na medida em que a realidade vai tornando-se mais nítida em decorrência da permanência em campo (ANGROSINO, 2009). Destacamos que a observação participante foi realizada em 2018, durante 4 encontros que ocorreram no Colégio onde os estudantes encontravam-se cursando o Ensino Médio.

O primeiro encontro teve uma duração de 50 minutos e os professores da sala de recursos avaliaram a SD e realizaram sugestões de alteração. No segundo encontro, mediamos a aplicação junto as estudantes Amanda e Beatriz, perpassando uma duração de 3 horas/aulas. Neste encontro as estudantes realizaram todas as atividades da SD. O terceiro e quarto encontros foram realizados com Helena e Mateus, ambos com duração de 2 horas e 30 minutos.

Já a aplicação da segunda versão da SD, contou inicialmente com avaliações no que se refere a acessibilidade de alguns materiais, realizadas por 3 estudantes, sendo 1 do Ensino Médio (Mateus) e 2 estudantes do Ensino Superior (Carlos e Cibele), esses encontros tiveram duração máxima de quinze minutos, ocorrerão em 2020 e os dados foram coletados por observações participantes e registros de imagens.

Após a organização da segunda versão, levando-se em consideração as avaliações dos 3 estudantes com deficiência visual e devido ao período de suspensão das atividades escolares em decorrência da pandemia do novo coronavírus (SARS-CoV-2), ocorreu em 2020 a partir do envio do MD, isto é, dos materiais que o compõem e da SD, para a residência dos dois professores e após a análise do material realizamos uma entrevista semiestruturada virtual, com duração de 1 hora cada entrevista e cujas perguntas encontram-se no Apêndice I.

O intuito da entrevista foi investigar a percepção dos professores quanto ao MD que eles analisaram. Além disso, identificar aspectos pedagógicos da utilização do material para o ensino do conceito de função, a partir de questões que trataram sobre o conceito de função e seu ensino, as interações entre os agentes da situação didática, isto, a luz da análise dos polos: professor, estudante, saber e *milieu* e a linguagem matemática presente no material. Atrelado a isso, investigarmos ainda a acessibilidade do material a partir das experiências dos professores participantes do estudo e das suas sugestões de alterações do material pensando na utilização tanto em Sala de aula regular quanto na Sala de recursos. Assim, as questões envolveram os critérios pedagógico, interativo e comunicacional. Vale ressaltar que a entrevista semiestruturada foi caracterizada por Laville e Dionne (1999, p. 188) como uma “série de perguntas abertas, feitas verbalmente em uma ordem prevista, mas na qual o entrevistador pode acrescentar perguntas de esclarecimento”.

Como uma forma de sintetizarmos as informações e esclarecermos sobre os participantes e os métodos de coleta dos dados, em cada uma das versões do material didático construído, representamos uma síntese destes elementos no Quadro:

Quadro 4 - Síntese das etapas da pesquisa

	Estudantes	Professores	Quando aconteceu	Instrumentos utilizados para a coleta dos dados
Primeira Versão	Amanda Beatriz Helena Mateus	Lílian Márcio Paulo	2018	Observação participante; Anotações; Gravação em áudio e vídeo.
Segunda Versão	Carlos Cibele Mateus	Márcio Samuel	2019/ 2020	Observação participante; Anotações; Entrevista semiestruturada virtual.

Fonte - Nossa produção (Nery, 2021).

Descrição do Quadro 4: Quadro contendo cinco colunas e três linhas. Na primeira linha há as inscrições: Estudante; Professor; Quando aconteceu; Instrumentos utilizados para a coleta dos dados. Na segunda linha: Primeira Versão; Amanda, Beatriz, Helena e Mateus; Lílian, Márcio e Paulo; 2018; Observação participante, anotações, gravação em áudio e vídeo. Na terceira e última linha: Segunda versão; Carlos, Cibele e Mateus; Márcio e Samuel; 2019; Observação participante, anotações, entrevista semiestruturada virtual (Fim da descrição).

Na próxima seção descreveremos os aspectos que envolveram a quarta etapa da Engenharia Didática, a saber a análise e avaliação *a posteriori* na qual fazemos uma comparação e contestação dos dados coletados na experimentação com aquilo que foi apresentado nas nossas concepções e análises a priori.

3.4 Análise e avaliação *a posteriori*

Para responder à questão norteadora deste estudo - quais as potencialidades e limitações apresentadas pela Teoria das Situações Didáticas para a inclusão de estudantes com deficiência visual nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função com a mediação de um recurso lúdico? - foi realizada a transcrição do áudio, com as falas dos professores e dos estudantes ao desenvolverem as atividades da primeira versão da SD, bem como foi realizada a transcrição da entrevista semiestruturada com os dois professores que avaliaram a segunda versão da SD. Utilizamos também observações das gravações em vídeo e análise das anotações realizadas no decorrer do estudo.

Após tais transcrições, foram realizadas a análise e avaliação *a posteriori* que se baseou em todos os dados coletados durante o experimento, isto é, nas observações, falas, nos registros em áudio e vídeo, nas entrevistas e fotos. Assim, nesta fase da Engenharia Didática foi realizada uma comparação da análise *a priori* com a análise *a posteriori*, para que pudéssemos validar ou refutar as suposições levantadas incialmente (ARTIGUE, 1996).

Vale destacar que, no âmbito desta pesquisa, tivemos as seguintes fases da Engenharia Didática, no contexto da primeira versão do MD: análise preliminar a qual encontra-se descrita no capítulo 4; análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* da primeira versão da SD, cujos dados encontram-se descritos no capítulo 5. Vale destacar que a experimentação realizada junto aos estudantes, permeou pela devolução, ação, formulação e validação, não foram realizadas institucionalizações, pelo fato de estarmos junto a estudantes que já conheciam o conceito de função e o nosso intuito também foi de construirmos um *milieu* acessível que pudesse pautar-se nos pressupostos do desenho universal.

No contexto da segunda versão do material, contamos com as seguintes fases da Engenharia Didática: análise *a priori*, experimentação e avaliação *a posteriori* da segunda versão da SD realizada pelos professores que atuavam na sala de aula regular e na sala de recursos, cujos dados encontram-se analisados no capítulo 6 desta tese. Ressaltamos que não foi possível realizar uma análise *a posteriori* da segunda versão do MD, tendo em vista que não contamos com a experimentação junto a estudantes, por este motivo foi feita uma avaliação *a posteriori* levando-se em consideração a experiência dos profissionais docentes que avaliaram o MD e as suas sugestões quanto às questões da SD e à disposição do material para utilização por estudantes com deficiência visual e videntes.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE PRELIMINAR: O CONCEITO DE FUNÇÃO

Função sf.
1. *Ação própria ou natural dum órgão, aparelho ou máquina.*
2*. Cargo, serviço, ofício.*
3. *Prática ou exercício de função (2).*
4. *Utilidade, serventia.*
5. *Posição, papel; atribuição.*
6. *Espetáculo (2).*
7. *Festividade.*
8. Mat. *Qualquer correspondência entre dois ou mais conjuntos.*
9. Quím. *Grupo de átomos que, presente numa molécula, lhe confere propriedades químicas características; grupo funcional.*
10. Quím. *Conjunto de substâncias que têm o mesmo grupamento funcional. [...].*
(FERREIRA, 2001, p. 363).

Iniciamos a apresentação deste capítulo com a descrição do significado da palavra função, isto para reafirmarmos o quanto é amplo o seu significado, perpassando por vários contextos e distintas aplicações sociais. A palavra função compreende um substantivo feminino e constitui-se desde uma ação própria ou natural de um órgão; ao cargo; à posição ou à atribuição desempenhada por uma pessoa até contextos de festividades e espetáculos. Porém, além desses significados sociais, o termo função também possui especificidades no âmbito das ciências da natureza, como na Química que se encontra atrelada ao estudo dos átomos e das moléculas. Enfatizamos que a compreensão que trataremos nesse estudo encontra significação nas ciências exatas e permeia a Matemática, a Física, a Economia, a Estatística, entres outras áreas.

Destacamos que ao abordar sobre função no âmbito da Matemática, junto aos estudantes da Educação Básica, faz-se necessária a consciência de que, em princípio, poderá haver dúvidas, por parte dos estudantes, atreladas à própria significação e interpretação da palavra, isso pelo fato dela estar presente em diferentes contextos, assumindo significados distintos. Além disso, poderão surgir dúvidas e obstáculos epistemológicos que poderão estar ligados à sua gênese histórica, afinal de contas, o conceito de função foi construído ao longo de inúmeros séculos e contou com a contribuição de vários estudiosos.

Abordaremos, neste capítulo, sobre a gênese histórica e epistemológica atreladas ao conceito de função e ressaltaremos os principais obstáculos epistemológicos que podem surgir no decorrer do estudo desse conceito no contexto da Educação Básica. Faremos uma apresentação do conceito de função que atualmente é exposto para os estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, a partir das orientações versadas na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) em relação aos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função. Descreveremos, ainda, o material denominado Multiplano construído por Ferronato (2002) e apresentaremos os materiais disponibilizados pelo Instituto Benjamin Constant para o estudo de função junto a estudantes com deficiência visual.

4.1 Gênese histórica e epistemológica do conceito de função

Desde as primeiras noções de função até chegarmos à definição que conhecemos hoje, muitos séculos se passaram e muitos foram os estudiosos que se envolverem em estudos e em definições relacionadas a este assunto. Ressaltamos que as primeiras manifestações que apresentavam um conceito intuitivo de função, mas sem ainda nomeá-lo desta maneira, estão historicamente registradas nas civilizações do Egito, Mesopotâmia, China e Índia.

Youschkevitch (1976) mencionou que a construção do conceito de função pode ser compreendida em três etapas: Antiguidade, fase em que havia o estudo de casos particulares de dependência entre duas grandezas; Idade Média, as noções gerais começaram a ser apresentadas pela primeira vez na ciência Europeia, por volta do século XIV, utilizando-se formas geométricas, mecânicas e verbais para representar dependências entre duas quantidades; e Época Moderna, tendo seu início no século XVI e, principalmente, durante o século XVII, quando começaram a prevalecer as expressões analíticas das funções.

Considerando-se o período da Antiguidade em que apesar de ainda não ser nomeada por função, tal noção foi constatada a partir da dependência entre duas quantidades, como exemplo, destacamos os pastores de ovelhas que efetuavam a “contagem” do seu rebanho associando a cada ovelha uma pedra, isto pode estar relacionado ao que hoje conhecemos como sendo a relação de ordem e de correspondência biunívoca, cuja compreensão faz parte do cerne do conceito de função.

Vale destacar, também, os registros encontrados nas famosas tábuas babilônicas e egípcias, mostrando de alguma forma a ideia de função, ao tratar de registros em forma de tabelas, apresentavam correspondências entre um número e o resultado de operações de multiplicações e divisões envolvendo esse número (ROQUE, 2012). Mais tarde, já na Idade Média, Oresme usou linhas verticais e horizontais, para a construção de um gráfico com o intuito de mostrar um corpo se movendo com velocidade uniforme, conforme Boyer (1974), esta foi a primeira sugestão para a representação gráfica de funções.

Vale destacar, segundo Roque (2012), que nesses períodos, isto é, na Antiguidade e Idade Média, não se mencionavam sobre um componente fundamental que faz parte do conceito de função: a noção de variação ou variável. Esta noção só foi introduzida formalmente no século XIX, entretanto foi proposta inicialmente por Viète, no século XVI, mas desenvolvida a partir do século XVII. "Um passo fundamental para se chegar a esse conceito foi o nascimento da física matemática e a representação simbólica de uma quantidade desconhecida" (ROQUE, 2012, p. 346).

No século XVII, foi apresentada por James Gregory a primeira definição de função, em seus trabalhos com séries de funções e processos infinitos. Contudo, essa definição se perdeu. Neste mesmo século, Leibniz e Newton utilizaram inúmeras relações funcionais, mas, segundo Roque (2012), eles não explicitavam o conceito de função. Tal definição foi identificada, posteriormente, em uma correspondência trocada entre Leibniz e Bernoulli. Em uma das respostas apresentadas às correspondências de Bernoulli, isto em 1698, Leibniz mencionou sobre qual a melhor notação para uma função. Assim, ele já discutia, nesse período, sobre os conceitos de constante e variável que posteriormente ficaram conhecidos em seus trabalhados sobre o cálculo diferencial.

A definição de função foi apresentada por Bernoulli mais tarde, isto em 1718, à Academia de Paris: "Definição: Chamamos função de uma grandeza variável, uma quantidade composta, de um modo qualquer, desta grandeza variável e de constantes" (BERNOULLI, 1742, p. 241, tradução nossa). Tal definição pode ser expressa na linguagem algébrica utilizada atualmente, como por exemplo: $f(x) = x \pm 9$. Assim, possivelmente o que Bernoulli tinha em mente ao apresentar esta definição para função eram as expressões analíticas as quais em seu trabalho estão relacionadas às curvas; vale destacar, também, que Bernoulli não tratou em sua definição sobre a função constante.

Euler, no século XVIII, definiu função como: "Uma função de uma quantidade variável, é uma expressão analítica composta de um modo qualquer dessa variável e de números, ou de quantidades constantes" (EULER, 1748, p. 4). Percebe-se que

Euler já incluía em sua definição as funções formadas por constantes, entretanto, esta definição abarcava só um subconjunto restrito de funções continuas. Posteriormente, segundo Vázquez, Rey e Boubée (1976), a existência de controvérsias apresentadas no “problema da corda vibrante” fez com que Euler e Bernoulli estendessem o conceito de função, incluindo funções definidas por expressões analíticas por partes e funções que continham gráficos, mas não possuíam expressão analítica definida, as quais não estavam na primeira definição proposta por Euler. Assim, na obra intitulada *Institutiones calculi differentialis*, Euler (1787, p. 4, tradução nossa) destacou:

> Se certas quantidades dependem de outras quantidades, de maneira que se as outras mudam, essas quantidades também mudam, então temos o hábito de chamar essas quantidades de funções dessas últimas. Essa denominação é bastante extensa e contém nela mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Consequentemente, se x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x, de qualquer maneira, ou que são determinadas por x, são chamadas funções de x.

Nesta definição, expressa por Euler, há uma grande demarcação do conceito de função atrelado à dependência entre quantidades, além da busca pela generalização ao abordar a maneira pela qual uma quantidade pode ser determinada pela influência de outras quantidades. Outro aspecto que merece ênfase diz respeito ao uso da letra x para designar uma quantidade variável, sendo esta utilizada até os dias de hoje e que ao ser alterada gera certa estranheza para os estudantes.

De acordo com Roque (2012), as críticas às concepções de função foram acirradas no início do século XIX, período em que caracterizaram as funções contínuas de Euler enquanto funções analíticas e a noção de função foi então discutida tendo como fundamento o problema físico atrelado ao estudo da propagação de calor. Vale destacar que um dos estudiosos de grande influência para a resolução do problema da propagação de calor e que contribuiu com a redefinição do conceito de função, foi Fourier, isto ao considerar uma função somente em um determinado intervalo e a partir da sua expressão analítica, não observando, assim, o seu domínio, tendo em vista que nesse período não existia a noção de domínio de uma função (ROQUE, 2012).

Em 1829, o matemático Dirichlet prosseguiu com os estudos que foram iniciados por Fourier e em uma publicação realizada em 1837 apresentou a seguinte definição:

> Sejam a e b dois números fixos e x uma quantidade variável que recebe sucessivamente todos os valores entre a e b. Se a cada x corresponde um único y, finito, de maneira que, quando x se move continuamente no intervalo entre a e b, $y = f(x)$ também varia progressivamente, então y é dita uma função contínua de x nesse intervalo. Para isso, não é obrigatório, em absoluto, nem que y dependa de x de acordo com uma mesma e única lei, nem mesmo que seja representada por uma relação expressa por meio de operações matemáticas (DIRICHLET, 1837, p. 135-136, tradução nossa).

A definição apresentada por Dirichlet (1837) considerou um intervalo fixo entre os números a e b e definiu a função nesse intervalo. Assim, levou em consideração os aspectos que foram anteriormente apresentados na definição de Fourier e ampliou ao mencionar sobre a correlação biunívoca entre x e y, isto quando apresentou que a cada x corresponde um único y finito. Vale destacar que a correspondência biunívoca tratada por Dirichlet (1837) está presente na definição de função a partir da utilização de conjuntos numéricos, entretanto, esta não foi mencionada por ele em sua definição.

Atualmente, a definição de função aceita pela comunidade matemática encontra-se atrelada à noção de conjuntos numéricos e foi estabelecida pelo grupo Bourbaki em 1939, publicada no livro intitulado “Théorie dês Ensembles”, isto no “fascicule de results”:

> Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F chama-se relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, qualquer que seja $x \in E$, existe um elemento y de F, e somente um, que esteja na relação considerada com x.
> Dá-se o nome de função à operação que associa a todo elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que encontra na relação dada com x; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função (BOURBAKI, 1990, p. 5-6, tradução nossa).

Na definição do grupo Bourbaki (1990), é possível constatarmos uma distinção entre as definições que foram anteriormente apresentadas, a qual relacionou-se com a utilização das noções de conjuntos para subsidiar o entendimento do conceito de função. Dito de outra forma, nesta definição apresentou-se uma relação biunívoca e a dependência entre as variáveis, bem como explicitou-se a distinção entre a relação funcional e o conceito de função, compreendendo-a enquanto uma operação que permitia associar elementos pertencentes aos conjuntos. Trouxe, ainda, o fato de que duas relações funcionais equivalentes determinam uma mesma função.

A definição apresentada atualmente, na Educação Básica, no âmbito do 9º ano do Ensino Fundamental e/ou o 1º ano do Ensino Médio, no contexto brasileiro, segue o padrão da definição elaborada pelo grupo Bourbaki em 1939. Como por exemplo, explicitamos a definição apresentada por Lima (2016, p. 38) a saber:

> Dados os conjuntos X, Y, uma função $f: X \to Y$ (lê-se "uma função de X em Y") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se o domínio e Y é o contra-domínio da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \to f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em $f(x)$.

Enfatizamos o quanto esta definição encontra-se arraigada nos aspectos abordados pelo grupo Bourbarki (1990), isto no que diz respeito ao fato de definir função a partir da noção de conjunto. Entretanto, o conceito de função envolve outros conceitos preliminares, tais como: noção de domínio, contradomínio, relação biunívoca, variável dependente, variável independente e a noção de transformação. Todos esses termos e o significado que a eles são atribuídos, em princípio, podem ser confusos para os estudantes e estes também eram confusos para os estudiosos que foram ao longo dos anos delimitando e buscando definir o conceito de função de maneira ampla, de modo a englobar os diversos aspectos que a compõe.

Neste contexto, destacamos que inúmeras pesquisas foram desenvolvidas visando compreender as concepções e dificuldades dos estudantes durante os processos de ensino e aprendizagem do conceito de função, dentre essas enfatizamos os estudos realizados por: Zuffi (2016); Ribeiro e Cury (2015); Sierpinska (1992); Sfard (1992) e Pires (2014).

Em relação a construção de um novo conceito, pelos estudantes, Ribeiro e Cury (2015) mencionaram sobre o fato desta se concretizar a partir dos conhecimentos pré-existentes, ou seja, os novos conceitos apresentados vão sendo agregadas aos saberes já consolidados, tornando-se uma amálgama, a qual posteriormente começará a fazer sentido ou não para quem está estudando. Tudo isso dependerá dos conhecimentos disponíveis, do conceito estudado e da abordagem metodológica utilizada, tendo em vista que tais conhecimentos podem também vir a se constituírem enquanto obstáculos à formação de novos saberes.

Neste contexto, Sfard (1992) realizou uma pesquisa sobre as dificuldades dos estudantes no que se refere ao estudo das noções de função e buscou identificar quais eram as concepções destes sobre o conceito de função. Fundamentado nesse estudo, Pires (2014, p. 28) almejou “investigar como os professores concebem o conceito de função, como essa concepção se reflete em seu trabalho em sala de aula nos Ensinos Médio e Superior e como essa noção é compreendida pelos estudantes dos dois níveis de ensino”, este estudo nos auxiliou a demarcar o campo das restrições, o qual pode possibilitar uma reflexão sobre o ensino do conceito de função.

Vale destacar que ao longo da história da construção do conceito de função, muitas concepções foram apresentadas, as quais subsidiaram a compreensão do que conhecemos e definimos hoje como sendo função. Diante disso, concordamos com Sfard (1992) que conhecer os longos e dolorosos processos que precedem o nascimento de um objeto matemático pode contribuir para a compreensão de algumas dificuldades que são vivenciadas e constatadas atualmente. Além disso, acreditamos que tais conhecimentos, podem auxiliar, na demarcação das possíveis concepções dos estudantes no que se refere a esse conceito.

Em sua pesquisa Sfard (1992) apresentou três concepções que podem ser identificadas no estudo das noções de função: a primeira delas, diz respeito ao tratar noções matemáticas como se elas se referissem a entidades semelhantes a objetos, esta concepção foi nomeada por estrutural, pode ser exemplificada, quando os estudantes analisam uma fórmula como sendo uma relação estática entre pares ordenados (SFARD, 1992); a segunda concepção, denominada operacional, refere-se a noção de função concebida como um processo computacional e não como uma construção estática, por exemplo, quando os estudantes percebem uma fórmula como uma breve descrição de um algoritmo computacional (SFARD, 1992) e, por último, uma concepção inferior, denominada de *pseudoestrutural,* na qual os estudantes concebem função como uma fórmula computacional (SFARD, 1992).

Alguns dos desdobramentos encontrados por Sfard (1992) foram ao encontro da concepção *pseudoestrutural*, a qual pode ser considerada como sendo a tendência dos estudantes de associarem uma função a sua expressão algébrica, mas que essa tendência não é tão natural, quando estamos com a representação gráfica ou tabular da função, isto é, não é comum os estudantes associarem uma função a sua representação tabular. Estes desdobramentos permitiram Sfard (1992) identificar algumas das concepções dos estudantes que se fazem presentes no estudo do conceito de função, a saber:

1) Os estudantes não consideram a ideia de que uma função pode ser definida por mais de uma sentença, considerando-se assim, como se houvessem duas

funções ou mais. Tal rejeição se constitui enquanto algo natural para os estudantes que não conseguem fazer uma distinção entre um símbolo abstrato e a entidade matemática que está por trás dele (SFARD, 1992).

2) Alguns estudantes consideram que uma curva descontínua representa várias funções e não pode representar apenas uma (SFARD, 1992).

3) Podem apresentar dificuldades frequentes em estabelecer relações entre as representações algébricas e gráficas das funções (SFARD, 1992).

4) Uma pessoa que não consegue perceber, para além dos símbolos algébricos que a mesma função pode se esconder por trás de duas que diferem apenas nos nomes das suas variáveis (SFARD, 1992).

5) A falta de domínio pode indicar uma tendência dos estudantes a se concentrarem apenas nos símbolos das representações algébricas das funções (SFARD, 1992).

6) Se o estudante identificar uma função como uma fórmula, o conceito pode extrair o seu significado não dos processos numéricos subjacentes, mas de manipulações algébricas que podem ser realizadas a partir da expressão simbólica. Por exemplo, o estudante pode considerar que quando se trata de uma função, ele necessita manipular a variável x para obter um y correspondente (SFARD, 1992).

Constatamos, na pesquisa desenvolvida por Pires (2014) que as concepções explicitadas pelos estudantes podem estar intimamente relacionadas a atuação do professor em sala de aula. Assim, podemos mencionar que estão, portanto, atreladas a epistemologia do professor, a qual envolve os seus saberes, formação, função social e experiências docentes.

Com isso, o que poderá influenciar no desempenho do ensino do conceito de função, é a epistemologia docente, bem como, a compreensão da gênese da construção do conceito e as dificuldades e obstáculos epistemológicos que foram constatados ao longo desse processo. Assim, como o fato de que novos conceitos não devem ser apresentados, para os estudantes, em termos estruturais, isto é, de forma abstrata, sem os meios pelos quais eles poderão construir uma base sólida, para então fundamentá-los (SFARD, 1992).

Ademais, Sierpinska (1992) mencionou, em seu estudo, a discussão sobre as possíveis dificuldades para a aprendizagem do conceito de função e a compreensão dos diferentes níveis de obstáculos epistemológicos que podem estar ligados ao estudo desse conceito. Foi destacado por Sierpinska (1992) que os obstáculos epistemológicos não são características particulares de uma dada pessoa, eles são comuns na estrutura de uma cultura, seja passada ou presente, os quais podem impedir a evolução da aprendizagem de um dado conceito, independente da necessidade específica dos estudantes.

Vale destacar que a noção de obstáculo epistemológico surge a partir dos estudos realizados pelo filósofo Francês Bachelard (1996), isto no âmbito dos conceitos da Física, mas que são transpostos para o contexto da Didática da Matemática a partir dos estudos realizados no campo da Teoria das Situações Didáticas, por Brousseau (1986). Nesse contexto, Bachelard (1996, p.14-15) assegurou que “a noção de obstáculo epistemológico pode ser estudada no desenvolvimento histórico do pensamento científico e na prática da educação”. Entretanto, só é possível identificar os obstáculos epistemológicos ao longo da história do desenvolvimento de um dado conceito à luz dos conhecimentos que se possui na contemporaneidade. Tendo em vista que não é fácil fazer tal identificação, mas o que pode ocasionar o aparecimento do obstáculo é o desenvolvimento de um conhecimento não questionado. Assim:

> Quando se procuram as condições psicológicas do progresso da ciência, logo se chega à convicção de que é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado. E não se trata de considerar obstáculos externos, como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostramos causas de estagnação e até de regressão, detectamos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos (BACHELARD, 1996, p.11).

A concepção apresentada por Bachelard (1996) reafirmou o fato de que os obstáculos epistemológicos não são dificuldades de uma determinada pessoa ou estão apenas em um dado contexto socioeducacional, isto é, não se constituem enquanto pertencentes a fragilidade dos sentidos humanos, mas estão no âmago do ato de conhecer, nas lentidões e conflitos desse próprio ato. Os obstáculos epistemológicos, segundo Bachelard (1996), são confusos e polimorfos, dito de outra forma, eles só são possíveis de serem reconhecidos por aqueles que se abrem para a crítica e para o questionamento, considerando-se o fato de estes surgirem e se apresentarem de diferentes formas, sendo os erros o mais aparente, os quais não se devem ao acaso e que podem persistir por muito tempo.

Ao abordar sobre os obstáculos, Brousseau (1997) mencionou que estes podem ser de origem: ontológica, surgem devido à limitação neurofisiológica, isto é, estão atrelados aos estágios de desenvolvimento, modificação e assimilação do conhecimento; didática, são aqueles que aparecem dentro de um sistema educacional e, por último, epistemológica que são aqueles que não se pode nem deve se escapar, pelo seu papel formativo, tendo em vista que são encontrados na história dos próprios conceitos, isso não significa que devemos reproduzi-los, mas necessitamos conhecê-los e estarmos atentos as suas influências nos processos de ensino e aprendizagem.

Em sua abordagem, Sierpinska (1992) destacou que é possível identificar e categorizar os obstáculos epistemológicos em três níveis: o primeiro refere-se às atitudes, crenças e convicções, os quais estão relacionados à nossa visão de mundo e podem ser comunicados a outras pessoas a partir das nossas declarações; o segundo nível refere-se aos esquemas de pensamento, principalmente os esquemas inconscientes, estes influenciam na maneira como abordamos os problemas, interpretamos as situações, enfim, aspectos que aprendemos na prática e/ou por imitação; já o terceiro nível, compreende os conhecimentos técnicos que são afirmados por critérios racionais e conscientes perante aos conhecimentos institucionalmente reconhecidos.

Corroboramos com Zuffi (2016) sobre o fato de ser comum ouvir dos professores que um dos grandes obstáculos apresentado pelos estudantes no processo de aprendizagem do conceito de função diz respeito à compreensão das relações entre as grandezas, a utilização de letras enquanto variáveis e a identificação de função enquanto uma expressão analítica. Nesse mesmo contexto, acrescentamos ainda o que mencionou Sierpinska (1992) sobre a ligação entre as diferentes representações de função, isto é, a representação algébrica, gráfica, tabular e a utilização de palavras para descrever as relações entre as variáveis, além da dificuldade no processo de interpretação dos gráficos e na manipulação dos símbolos que se fazem presentes quando se está estudando as funções.

No contexto do estudo sobre função, Sierpinska (1992) comentou que é fácil responder à pergunta sobre o que diz a definição de função, tendo em vista que esta pode ser apresentada utilizando-se apenas símbolos, isto é, $\forall\, x \in A, \exists\, y \in B / (x, y) \in f$, ou apenas a linguagem natural, pode-se definir a função como contento dois conjuntos A e B, não vazios, a relação de A em B recebe o nome de função definida em A com imagem em B (IEZZI; MURAKAMI, 2013). Mas, é difícil dizer sobre o que é a definição, para esta resposta faz-se necessário uma interpretação dos símbolos, ou seja, além do que se encontra representado, envolve a sua análise, compreensão e aplicação.

Em relação ao uso dos símbolos, Sierpinska (1992) destacou, como exemplo, de possível dificuldade a compreensão da linguagem utilizada no estudo das funções: $f(x)$ significa tanto o nome da função quanto o valor que a função assume em x. Ademais, em seu estudo, Sierpinska (1992) identificou que os estudantes tinham outras dificuldades, nomeadas por ele como sendo obstáculos epistemológicos e os categorizou, totalizando dezesseis, os quais dizem respeito tanto a Matemática, de maneira geral que influi na compreensão do conceito de função, quanto ao entendimento específico do conceito de função, suas aplicações e às diversas formas para a sua representação.

O primeiro obstáculo epistemológico destacado refere-se ao fato de que a “Matemática não se refere a problemas práticos” (SIERPINSKA, 1992, p. 31, tradução nossa), isto deve ser superado para a construção do conceito de função na medida em que esta noção é o resultado do esforço humano para modelar situações observadas e experimentadas nos contextos sociais. Destarte, a superação desse primeiro obstáculo está atrelada a compreensão da necessidade de contextualização do conceito de função, para a análise de fenômenos, descrição de regularidades, interpretação e generalização de dependências entre variáveis de fenômenos possíveis de observações.

O segundo obstáculo diz respeito ao fato de que as “técnicas computacionais usadas na produção de tabelas de relações numéricas não são dignas de serem objetos de estudo da Matemática” (SIERPINSKA, 1992, p. 32, tradução nossa). Esse obstáculo encontra-se atrelado ao fato de que, na Grécia Antiga, a arte de construir tabelas não pertencia à Ciência, constituindo-se, portanto, um campo desprezado do conhecimento. Contudo, a construção de tabelas permite que os estudantes possam identificar os modelos e as relações entre eles para que se possa fazer previsões, isso auxilia a compreensão de uma das formas de representar as funções.

Enquanto terceiro obstáculo epistemológico, Sierpinska (1992) apresentou a consideração das mudanças como fenômeno, isto é, focaliza-se em como as coisas mudam ignorando-se sobre o que mudou. Dito de outra forma, os estudantes têm dificuldade em observar as mudanças e identificar o que está mudando ou quais são os objetos que influenciam na mudança. Por exemplo, ao analisar o deslocamento de um ponto $(x, f(x))$ ao longo de uma curva que representa uma função, os estudantes podem vir a deter os seus olhares para o deslocamento específico do ponto, sem se preocupar com o aspecto que influencia nessa mudança. Para eles, a curva permanece a mesma e o que se desloca é o ponto. Como forma de superar tal obstáculo, Sierpinska (1992) argumentou que é fundamental trabalhar, durante o estudo de funções com os estudantes, a identificação dos objetos de mudanças e as influências dessa mudança.

Outro obstáculo refere-se à consideração da ordem das variáveis como sendo irrelevantes, assim, faz-se necessário trabalhar com os estudantes a discriminação entre as variáveis dependentes e independentes (SIERPINSKA, 1992). Isso pelo fato de que ao longo dos anos de construção do conceito de função, demorou-se muito tempo para perceber a importância de se distinguir as variáveis e o fato de que os papeis atribuídos a elas, isto é, a x e a y, não eram e não devem ser simétricos no contexto da definição do conceito de função.

O quinto e o sexto, obstáculos epistemológicos, apresentados por Sierpinska (1992) se referem a “uma concepção heterogênea de número” (p.39, tradução nossa) e “uma filosofia pitagórica de número: tudo é número” (p. 41, tradução nossa). Assim, o enfoque principal encontra-se atrelado à ingênua crença de que tudo é número, não preocupando-se em entender a distinção entre número e numeral. Quem primeiro conseguiu distinguir esse conceito foi Nicole Oresme, isto no século XIV, através das suas representações gráficas, ao comparar grandezas envolvendo tempo e deslocamento, esse trabalho influenciou outros matemáticos como Galileu e Descartes, nos séculos XVI e XVII (SIERPINSKA, 1992).

Como sétimo obstáculo epistemológico, Sierpinska (1992, p. 42, tradução nossa) apresentou “um esquema inconstitucional de pensamento: leis em Física e funções em Matemática não têm nada em comum, elas pertencem a domínios de pensamento diferentes”, ou seja, faz-se necessário trabalhar com os estudantes a discriminação entre variáveis representando conceitos físicos e variáveis numéricas. Isso pode contribuir com a consciência da aplicação dos conceitos de função para modelar relações entre grandezas físicas e outras grandezas, tais aspectos se constituem em uma concepção necessária para o entendimento do conceito de função e a compreensão das leis físicas que são apresentadas aos estudantes ao longo da escolarização.

No oitavo obstáculo, Sierpinska (1992) discutiu sobre o encantamento que é dado à noção de proporcionalidade, tendo em vista que ao longo da história o conceito de função esteve intrinsecamente atrelado ao conceito de proporcionalidade. Um dos defensores dessa relação foi Aristóteles (384 a.C. - 322 a.C.), isso ao escrever sobre o fato de uma grandeza variar dependendo de outra, a relação estabelecida entre elas era de proporcionalidade. Para desmistificar esta concepção, Oresme, no decorrer do século XIV, discorreu sobre as funções que variavam de maneira exponencial e não proporcional, nas quais havia também uma relação entre as variáveis dependentes e independentes.

Outros dois obstáculos dizem respeito à “forte crença na transformação de operações formais em expressões algébricas” (SIERPINSKA, 1992, p. 42, tradução nossa) e “somente relações descritíveis por fórmulas analíticas são dignas de receberem o nome de função” (SIERPINSKA, 1992, p. 42, tradução nossa). Discutiremos esses obstáculos de maneira concomitante, isto pelo fato de que ambos destacam o papel da álgebra na Matemática e a sua influência na construção e desenvolvimento do conceito de função, tendo em vista que se faz necessária certa familiaridade com a álgebra para que se possa compreender o conceito de função. Entretanto, não se pode construir uma falsa crença de que a álgebra ajuda a resolver todos os problemas de maneira automática. Como ato de entendimento, para superar esse obstáculo, Sierpinska (1992, p.46, tradução nossa) defendeu a necessidade de se trabalhar com os estudantes a “discriminação entre uma função e os instrumentos analíticos às vezes, usados para descrever a sua lei”.

Considerando as representações das funções, Sierpinska (1992) comentou sobre a dificuldade na discriminação das diferentes representações, ou seja, algébrica (obstáculo 11), tabular (obstáculo 13) e gráfica (obstáculo 15), isto na consideração da representação como sendo a própria função. Dito de outra forma, trata-se da compreensão do conceito de função como reduzindo-se a uma expressão algébrica, a um gráfico ou a uma sequência numérica representada através de uma tabela. Esses obstáculos foram também constatados ao longo dos anos do desenvolvimento do conceito de função, na medida em que muitos matemáticos definiam o conceito de função a partir da sua representação algébrica ou compreendiam a função apenas pela sua representação gráfica.

O obstáculo 12 está atrelado à concepção de definição, conforme enfatizado por Sierpinska (1992, p. 47, tradução nossa) e compreende a definição enquanto “uma descrição de um objeto conhecido de outra forma pelos sentidos ou percepção. A definição não determina o objeto, em vez disso, o objeto determina a definição". Para superar tal obstáculo, faz-se necessário que os estudantes entendam a distinção entre definições matemáticas e descrições de objetos, superando-se a falsa concepção de que as funções são contínuas e diferenciáveis em todos os seus pontos.

Atrelado a compreensão de pontos, é explicitado o obstáculo epistemológico 14, o qual refere-se ao fato de que "as coordenadas de um ponto são segmentos de linha (não números)" (SIERPINSKA, 1992, p. 51, tradução nossa). Perante a isto, faz-se necessário apresentar aos estudantes a distinção entre coordenadas de um ponto e os segmentos de reta que pertencem a uma função. De maneira geral, esse obstáculo nos chama a atenção para a distinção entre os diversos aspectos que compreendem e compõem a representação gráfica de uma função, pois os estudantes necessitam estabelecer as relações entre as diversas representações para que possa superar a sumarização das coordenadas atreladas a segmentos e vice-versa.

Em relação às variáveis, Sierpinska (1992) apresentou o obstáculo epistemológico 16, mencionando sobre a necessidade de generalização da noção de variável e a consciência da possibilidade de as relações funcionais serem expressas com a utilização de variáveis isso fruto do esforço humano para compreender as mudanças presentes no contexto social dos estudantes. Diante disso, ressaltamos que muitos dos obstáculos identificados na contemporaneidade, durante o estudo do conceito de função, estiveram presentes também ao longo dos anos de sua formulação.

Na continuidade deste capítulo, apresentaremos como os documentos oficiais atuais que regem e orientam o ensino destinado aos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio sugerem que sejam ensinados o conceito de função e as competências e habilidades correlatas a esse estudo.

4.2 O conceito de função nos documentos oficiais brasileiros

A construção do conceito de função levou inúmeros anos para ser apresentada conforme o conhecemos atualmente, além disso, vários são os obstáculos epistemológicos que podem surgir no decorrer do ensino deste conceito junto aos estudantes da Educação Básica. Mas, algo que caracteriza o conceito de função é que este surgiu como resultado do esforço humano para modelar situações da realidade, compreender e prever seu comportamento. Destarte, este deve também ser uma prerrogativa para se apresentar o conceito de função para os estudantes brasileiros, conforme apregoa a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018).

Ademais, de acordo com Trindade (1996), o conceito de função é um dos mais importantes de toda a Matemática, considerando-se as suas aplicações em outros ramos do conhecimento humano. Destaca-se, também, o fato deste conceito compor o currículo dos estudantes do 1º e 2º graus a partir do Movimento da Matemática Moderna - MMM, movimento este que impulsionou o ensino impregnado pelo formalismo Bourbakiano e que acabou por negligenciar as razões do surgimento deste conceito e os obstáculos epistemológicos constatados ao longo da história (TRINDADE, 1996). O MMM influenciou o ensino brasileiro entre os anos de 1955 e 1970, o qual apresentava o conceito de função sem considerar a necessidade de analisar fenômenos sociais; descrever regularidades; interpretar relações e generalizar informações (CARAÇA, 1975).

Na contemporaneidade, o documento brasileiro norteador do ensino é a BNCC, a qual possui um caráter normativo destinado à Educação Básica. Foi instituída pelas Resoluções número 4, em 17 de dezembro de 2018, destinada ao Ensino Médio e, número 2, em 22 de dezembro de 2017 que instituiu a BNCC para os estudantes da Educação Infantil e Ensino Fundamental. A construção deste documento contou com a participação de vários especialistas das diversas áreas do conhecimento e possui como objetivo “garantir o conjunto de aprendizagens essenciais aos estudantes brasileiros, seu desenvolvimento integral por meio das dez competências gerais para a Educação Básica” (BRASIL, 2018, p. 5). Assim, este documento vem assegurar os conhecimentos básicos que devem ser trabalhados com os estudantes das diversas regiões que compõem o Brasil, apoiando as escolhas individuais e assegurando a possibilidade de continuidade dos estudos.

Destacamos que a BNCC foi construída com base em competências e habilidades, sendo que neste documento entende-se por competência “a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho” (BRASIL, 2018, p. 8). Assim, as competências podem ser compreendidas enquanto conhecimentos que devem ser acumulados, mobilizados ou desenvolvidos pelos estudantes, isto é, o que os estudantes devem saber para que possam atuar efetivamente na sociedade, exercendo seu papel enquanto cidadão com direitos e deveres, visando o bem comum e a construção de uma sociedade mais justa, democrática e inclusiva (BRASIL, 2018).

Em relação às habilidades, é destacado na BNCC que estas “expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares” (BRASIL, 2018, p. 29). Destarte, as habilidades estão estritamente atreladas aos objetos de conhecimentos, ou seja, aos conteúdos e conceitos que devem ser assegurados a todos os estudantes, nos diversos contextos escolares e em cada uma das etapas da escolarização.

No lócus da Matemática, a BNCC reúne um conjunto de conceitos consideradas como fundamentais para o desenvolvimento do pensamento matemático, a saber: “equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação” (BRASIL, 2018, p. 268). Enfatiza-se que estes se converterão em objetos de conhecimento distribuídos em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística.

O conceito de função encontra-se descrito na unidade temática de Álgebra e, conforme é apregoado na BNCC, deve ser apresentado aos estudantes a partir do 9º ano do Ensino Fundamental, com a utilização de representações numérica, algébrica e gráfica, tendo por habilidade “compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis” (BRASIL, 2018, p. 317). Com isso, ao trabalhar o conceito de função no 9º ano do Ensino Fundamental, espera-se retomar com os estudantes o conceito de variável que compõe os objetos de conhecimento destinados ao 7º ano do Ensino Fundamental, bem como analisar situações que envolvem relações funcionais, além de articular e interpretar as situações utilizando-se as diversas representações de função.

Destarte, para que se possa desenvolver essa habilidade junto aos estudantes faz-se necessário apresentar o conceito de função, levando-se em consideração que a sua noção intuitiva já vem sendo trabalhada desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, isso a partir de problemas que envolvem a variação proporcional direta entre as grandezas (BRASIL, 2018). Mas, ressaltamos o cuidado de não se resumir o estudo do conceito de função atrelado ao conceito de proporcionalidade, considerando-se esta última enquanto uma relação privilegiada, pois, caso isso aconteça, corre-se o risco de se perpetuar o nono obstáculo epistemológico citado por Sierpinska (1992), isto é, a supervalorização do conceito de proporcionalidade.

Espera-se que os estudantes possam, no decorrer dos anos finais do Ensino Fundamental, compreender os significados atribuídos às variáveis e desmistificá-los das noções de incógnita, de modo a distinguir expressões algébricas, equações e funções. Outrossim, investigar e generalizar propriedades, correlacionando os conceitos algébricos com outras unidades temáticas; igualmente investigar regularidades de sequências numéricas e estabelecer a variação entre duas grandezas, compreendendo e definindo o que se constitui enquanto grandezas (BRASIL, 2018). Todos esses pressupostos de conhecimento perpassam pelo entendimento do conceito de função e para que se possa alcançar tais objetivos, Brasil (2018, p. 271) assevera que: "é necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação".

É dada continuidade ao estudo de função no Ensino Médio e a primeira competência específica da área de Matemática para este nível de escolaridade envolve a interpretação, o posicionamento crítico e reflexivo dos estudantes perante as situações que envolvem as Ciências da Natureza, as Ciências Humanas ou outros contextos sociais (BRASIL, 2018). Para tanto, faz-se necessário "interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação" (BRASIL, 2018, p. 533).

Assim, esta habilidade permeia a análise dos gráficos das funções e a compreensão das taxas de variação que possam estar sendo representados e divulgados em diferentes meios de comunicação e cuja interpretação seja apresentada de maneira imprópria, contendo generalizações equivocadas ou formas de representações que dificultam a leitura e o posicionamento perante as informações explicitadas.

Outra competência que merece destaque refere-se à quarta competência destinada ao Ensino Médio, a qual apresenta a necessidade do estudante "compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas" (BRASIL, 2018, p. 538). Desse modo, para alcançar esta competência, as habilidades a serem desenvolvidas envolvem a utilização e a articulação entre as diferentes representações matemáticas, compreendendo o que elas podem expressar, posicionando-se sobre a sua adequação para sumarizar uma dada informação e contribuir com o pensar e posicionar perante as informações matemáticas.

Dentre as habilidades que são elencadas para o âmbito desta competência, atreladas ao conceito de função, destacamos:

> - Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
> - Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais (BRASIL, 2018, p. 539).

A necessidade de conversão das representações algébricas em representações geométricas no plano de coordenadas cartesianas auxilia na comunicação e apresentação dos resultados, bem como em seu processo de interpretação, para o estabelecimento de domínios de validade, imagem, crescimento, decrescimento, enfim, auxilia na determinação do comportamento da função que está sendo representada graficamente. Mas, para que os estudantes possam optar e determinar a melhor maneira de representar uma função, faz-se necessário conhecer as suas diversas formas de representação. Inclusive, esse conhecimento permite aos estudantes compreenderem se a função possui um comportamento proporcional ou não. Isso vai ao encontro da superação do obstáculo epistemológico atrelado ao fato de somente as relações descritíveis por fórmulas analíticas constituírem-se enquanto funções e pela supervalorização das relações proporcionais (SIERPINSKA, 1992).

A BNCC traz, ainda, uma competência relacionada à necessidade dos estudantes investigarem e levantarem conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades da Matemática (BRASIL, 2018). Enquanto habilidades atrelada a esta competência, é apresentada a necessidade dos estudantes investigarem relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano de coordenadas cartesianas, igualmente representar graficamente a variação de grandezas ligadas ao estudo de outras unidades temáticas da Matemática, como por exemplo: a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando a medida dos seus lados variam, buscando assim identificar padrões e generalizar informações, expressando-as algebricamente (BRASIL, 2018).

Como sugestões metodológicas para o ensino do conceito de função e dos diversos conhecimentos que compõem esse conceito, a BNCC aborda sobre a utilização das tecnologias digitais, tais como o uso de *softwares* de geometria dinâmica, além de recursos didáticos, tais como: malha quadriculada, jogos, calculadora, planilha eletrônica, a história da Matemática, entre outros recursos que possam vir a despertar o interesse dos estudantes perante os processos de ensino e aprendizagem de Matemática (BRASIL, 2018).

Considerando que o presente estudo foi desenvolvido com base nos pressupostos da Educação Inclusiva e, mais especificamente na inclusão de estudantes com deficiência visual, apresentamos, na próxima seção deste capítulo, alguns materiais didáticos que foram elaborados para o desenvolvimento dos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função junto aos estudantes com deficiência visual.

4.3 Materiais Didáticos construídos para o estudo de função junto a estudantes com deficiência visual

O primeiro material didático que gostaríamos de apresentar é denominado Multiplano. Este material é atualmente comercializado pela marca Multiplano: produtos educacionais. Os primeiros passos para o desenvolvimento e construção desta ferramenta pedagógica ocorreram em abril de 2000 a partir das pesquisas desenvolvidas pelo professor Ferronato (2002).

Vale destacar que a motivação para a construção do Multiplano emergiu a partir da atuação profissional do professor Ferronato (2002), quando se deparou com a dificuldade de ensinar, a um estudante cego, os conceitos que permeavam a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Diante desse desafio, em uma loja de materiais de construção, surgiram as primeiras ideias de utilizar uma placa perfurada de linhas e colunas perpendiculares, com alguns rebites e elásticos (MULTIPLANO, 2021), de modo que o estudante com deficiência visual pudesse construir gráficos de função e figuras geométricas e, com isso, aproximar-se dos conceitos que compunham a ementa da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

A eficácia deste material permeou o estudo intitulado “A construção de instrumento de inclusão no Ensino de Matemática” (FERRONATO, 2002) desenvolvido no âmbito do mestrado em Engenharia de Produção, sendo aperfeiçoado a partir da avaliação e das constantes sugestões realizadas por um grupo de cinco estudantes com deficiência visual, tendo por objetivo:

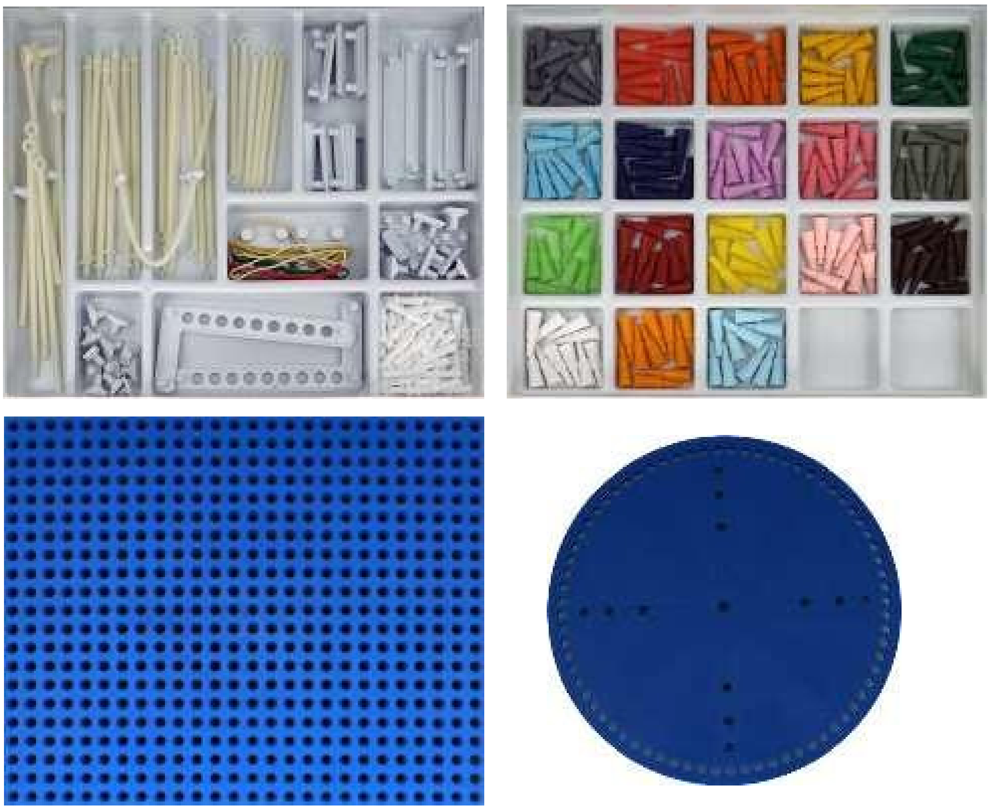
> Contribuir com a sociedade no sentido de tornar mais próximo da realidade o discurso inclusivo nas salas de aula regulares, dando condições para que todos os alunos e não somente parte deles tenham acesso aos bens culturais acumulados, no que tange ao conhecimento matemático. Mas principalmente para que esse acesso direcione ao entendimento do caráter lógico, dando condições para o educando desenvolver sua consciência crítica no sentido de analisar todas as informações com cautela, ao invés de simplesmente absorvê-las, como se seguissem uma hierarquia incontestável (FERRONATO, 2002, p. 12).

Destarte, a principal inquietação que motivou os estudos desenvolvidos por Ferronato (2002) dizia respeito à necessidade de contribuir com a efetivação do processo de inclusão em sala de aula regular, oportunizando, para isso, ferramentas acessíveis para que os estudantes com deficiência visual e videntes pudessem ter acesso aos conhecimentos matemáticos destinados à sua formação. Ao se construir um material didático acessível, este não deve ser pensado, por exemplo, exclusivamente para utilização pelos estudantes cegos, mas deve ter como premissa a possibilidade de utilização tanto por estudantes cegos quanto videntes, tendo em vista que deve permitir equidade de oportunidades e acesso ao conhecimento por todos os estudantes.

Após os estudos realizados por Ferronato (2002), foi dada continuidade no estudo do material didático Multiplano e foram desenvolvidos ajustes e aperfeiçoamentos neste material. O Multiplano, atualmente, constitui-se em um recurso que possibilita trabalhar com os estudantes com deficiência visual ou videntes diversos conteúdos de Matemática que possuem um maior apelo visual ou a necessidade de um registro dos mecanismos para a resolução, tais como: operações numéricas; equações; proporção; regra de três; gráficos de funções; matriz; determinantes; sistemas lineares; trigonometria; geometria plana e espacial e estatística (MULTIPLANO, 2021).

Para trabalhar tais conteúdos de Matemática, conforme pode ser observado na Figura 10, o material conta com: um estojo com compartimento superior, reservado para hastes e barras estatísticas, também um compartilhamento inferior, reservado para os pinos; pinos, com identificação de números, símbolos e algumas letras em Braille; elásticos; parábola; hastes trigonométricas; hastes retas; multiplano retangular, que é uma placa na cor azul com 546 furos distribuídos em 26 linhas e 21 colunas; multiplano circular, contendo 72 furos distribuídos ao longo da circunferência com distância de cinco em cinco graus; base de operações e fixador para unir mais de uma placa do multiplano retangular.

Figura 10 - Materiais que compõem o Multiplano

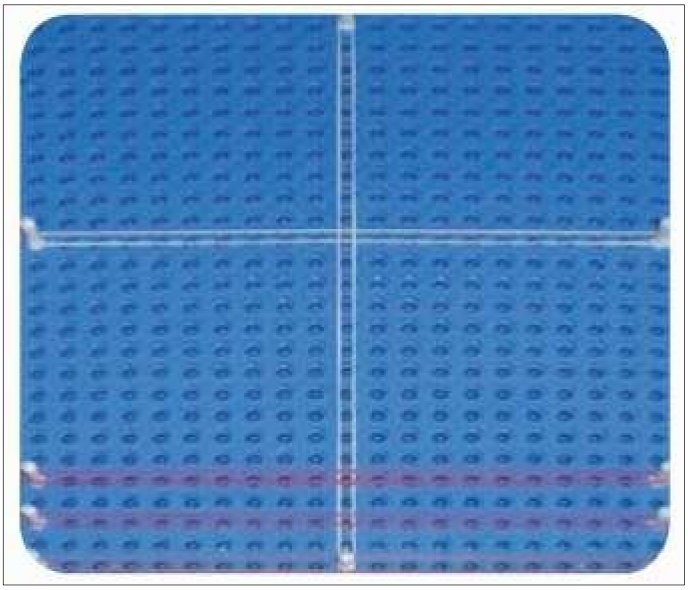


Fonte: Multiplano (2021).

Descrição da Figura 10: Quatro fotos dos materiais que compõem o multiplano. A primeira foto, parte superior e esquerda da figura é de um compartimento contendo 11 divisórias com hastes, barras, pinos, fixadores e elásticos. A segunda foto, parte superior e à direita da figura, é de outro compartimento contendo 20 divisórias e dentro destas há 10 pinos com identificações em braile e com cores diferentes que representam cada um dos 10 algarismo, sinal ou letra. A terceira foto, está na parte inferior e a direita, é de uma placa retangular azul que possui 546 furos distribuídos em 26 linhas e 21 colunas. A direita da imagem está outra foto de um círculo azul com 72 furos na circunferência, distribuídos de cinco em cinco graus, além dos furos da extremidade possui 12 furos no seu interior que representam a projeção do raio sobre os eixos, nos ângulos de 30º, 45º e 60º e um furo central (Fim da descrição).

Vale ressaltar que o Multiplano permite a construção de gráficos de diversas funções, sendo que a delimitação do plano de coordenadas cartesianas é feita com a utilização do multiplano retangular e sugere-se que sejam utilizados elásticos nas direções verticais e horizontais, bem como o uso de pinos que possam sustentar esses elásticos, dividindo-se, assim, o multiplano retangular em quatro quadrantes, conforme Figura 11.

Figura 11 - Plano de Coordenadas Cartesianas construído no Multiplano retangular



Fonte: Multiplano (2021, p. 35).

Descrição da Figura 11: Foto de uma placa retangular azul que possui 546 furos distribuídos em 26 linhas e 21 colunas. A placa está dividida em quatro partes por dois elásticos esticados na parte central da placa, um na direção horizontal e outro na vertical, fixados por quatro pinos, um na parte superior e um na parte inferior, outro na metade da placa na lateral esquerda e na parte direita. Há ainda três elásticos esticados na parte inferior na placa, na direção horizontal e fixados por seis pinos, três na parte esquerda da placa e três na parte direita da placa (Fim da descrição).

Salientamos, ainda, que o Multiplano compõe os materiais didáticos de algumas instituições de ensino que possuem estudantes com deficiência visual. A instituição onde desenvolvemos a presente pesquisa possuía um kit Multiplano para uso de estudantes com deficiência visual nos atendimentos realizados na Sala de recursos, assim a utilização em sala de aula regular, por todos os estudantes, ainda não se constituía em uma realidade, pelo menos na referida instituição.

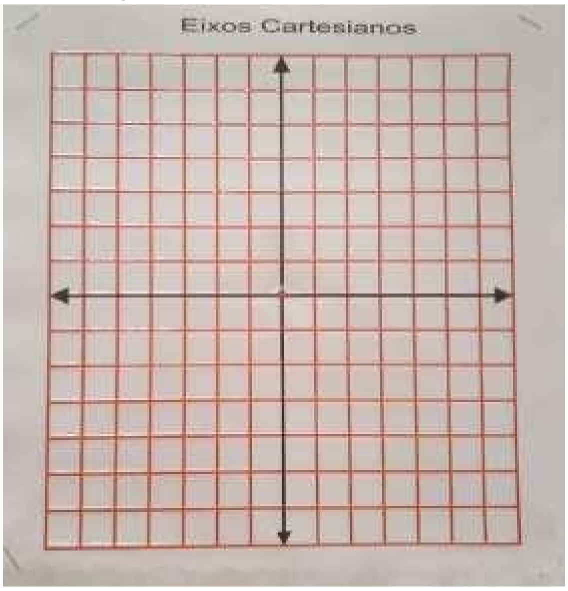
Outros materiais que podem ser utilizados para os processos de ensino e aprendizagem de função junto aos estudantes com deficiência visual são desenvolvidos e disponibilizados gratuitamente, para qualquer cidade brasileira, pelo Instituto Benjamin Constant – IBC. A gênese desse instituto encontra-se datada em 1850, tendo como idealizador o jovem José Álvares de Azevedo, natural do Rio de Janeiro. Cego desde o seu nascimento, estudou em Paris no Instituto dos Meninos

Cegos e após os seus estudos trouxe as suas aprendizagens sobre o método Braille e se tornou o primeiro professor cego do Brasil. Continuou a sua luta objetivando a implantação de uma instituição destinada aos estudantes cegos, a qual foi inaugurada em 1854 tendo como nome “Imperial Instituto dos Meninos Cegos”, isto 6 meses após o seu falecimento, tendo em vista que José Álvares de Azevedo havia sido acometido por tuberculose. Em 1891, esse instituto passou a se chamar Instituto Benjamin Constant e constitui-se enquanto:

> [...] um órgão singular, dotado de autonomia administrativa limitada, ligado diretamente ao Gabinete do Ministro de Estado da Educação. Funciona em regime de externato, e, de acordo com a situação socioeconômica e o lugar de residência do aluno, em regime de semi-internato (INSTITUTO BENJAMIN CONSTANT, 2021a, *online*).

O primeiro material que gostaríamos de apresentar é destinado ao ensino de função, configurando-se enquanto grafotátil, isto é, reproduzido em tinta e em alto relevo com película transparente de PVC. Compreende uma prancha medindo 28 centímetros de largura por 29 centímetros de comprimento, com os eixos de coordenadas cartesianas (INSTITUTO BENJAMIN CONSTANT, 2021b), conforme representado na Figura 12:

Figura 12 - Eixos Cartesianos

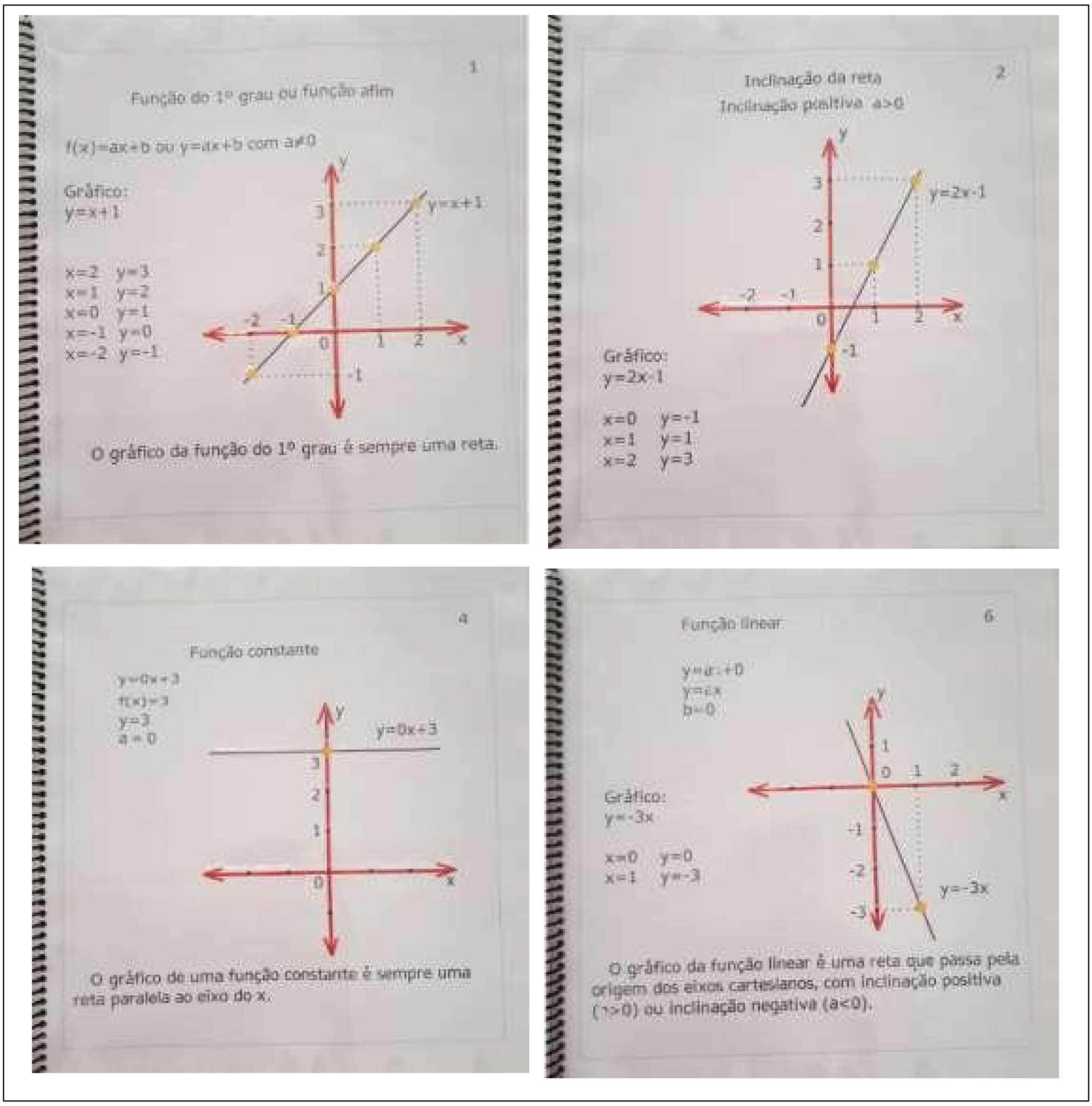


Fonte: Instituto Benjamin Constant (2021b).

Descrição da Figura 12: Foto de uma malha quadriculada na cor vermelha, contendo duas setas de pontas duplas na parte central da malha uma na direção horizontal e a outra na vertical (Fim da descrição). O plano de coordenadas cartesianas está representado em tinta, nas cores vermelha e preta; e em alto relevo, em uma película de PVC transparente que está fixada sobre a impressão dos eixos cartesianos, com grampos. Na parte superior da prancha está escrito em tinta e em Braille “Eixos Cartesianos”. Ao centro da folha consta a representação dos quatro quadrantes do plano de coordenadas cartesianas. Este material não possui marcações diferentes para os eixos que estão na horizontal e na vertical, ambos possuem apenas o relevo na impressão da película em PVC. Além disso, não há representação numérica nos eixos coordenados (Fim da descrição).

Outro material disponibilizado pelo IBC, para os estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, é um caderno de função do 1º grau ou função afim, medindo 28 centímetros de largura por 29 centímetros de comprimento. Foi elaborado pelos professores Paula Márcia Barbosa e Jonir Bechara Cerqueira, em um volume único (INSTITUTO BENJAMIN CONSTANT, 2011). Este caderno possui 6 páginas e nelas encontram-se representadas características da função afim, sendo trabalhada as representações algébrica, numérica e gráfica. Também apresenta o estudo dos parâmetros da função e as características das funções constantes e lineares, conforme encontra-se representado na Figura 13:

Figura 13 - Caderno de função do 1º grau ou função Afim



Fonte: Instituto Benjamin Constant (2011).

Descrição da Figura 13: Quatro fotos das páginas um, dois, quadro e seis de um livro que possui inscrição em tinta e alto-relevo. A página um está na parte superior e à esquerda da figura e possui escrito na parte superior da página Função do 1º grau ou função afim, logo abaixo está representado o gráfico da função $y = x + 1$ e possui a descrição que o gráfico da função do 1º grau é sempre uma reta. A página dois, está na parte superior e à esquerda da figura e possui a inscrição na parte superior da foto inclinação da reta inclinação positiva $a > 0$, logo abaixo dessa informação está representado o gráfico da função $y = 2x - 1$. A página quatro está na parte inferior e esquerda da figura e possui a indicação na parte superior da página Função constante, em seguida está sendo apresentado o gráfico da função $y = 0x + 3$. Abaixo do gráfico há a inscrição o gráfico da função constante é sempre uma reta paralela ao eixo x. A página seis está na parte inferior e a direita da figura e possui a indicação na parte superior Função Linear e seguidamente o gráfico da função $y = -3x$, posteriormente há a informação de que o gráfico da função linear é uma reta que passa pela origem dos eixos cartesianos, com inclinação positiva $(a > 0)$ ou inclinação negativa $(a < 0)$ (Fim da descrição).

Percebe-se que apesar desses materiais serem disponibilizados para os estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental estes não discutem o conceito de função, nem possibilitam a construção de gráficos. Mas, auxiliam os estudantes a entenderem as propriedades das funções afim e a analisarem as variações nos gráficos atreladas ao coeficiente angular e linear, por meio dos exemplos que são representados em tinta e em alto relevo com a película transparente de PVC.

Vale destacar que além da disponibilização de materiais didáticos para outras instituições que deles necessitem, o IBC oferta: Educação Especial para os estudantes com deficiência visual, perfazendo-se desde a Educação Precoce até a Educação Profissional de Nível Médio; cursos de pós-graduação *latu sensu* e *stricto sensu*, além de cursos de extensão e aperfeiçoamento; programas de divulgação científica e intercâmbio de experiências relacionadas à deficiência visual.

Destarte, esses materiais podem auxiliar os professores de Matemática nos processos de ensino e aprendizagem de função, sendo que permitem trabalhar com a construção de gráficos de funções, isto é, com gráficos de funções afim, quadrática, exponencial e trigonométricas. Mas, faz-se necessário a construção de materiais que permitem trabalhar o conceito de função e a possibilidade de os estudantes com deficiência visual estarem utilizando e articulando as diversas representações, ou seja, possam representar uma função a partir da sua representação algébrica, gráfica e tabular, sendo que este foi o nosso intuito.

Para tanto, construímos duas versões de um material didático que possibilita o estudo do conceito de função, isto à luz da Teoria das Situações Didáticas. Vale destacar que estas versões levaram em consideração a definição de função que atualmente é apresentada no contexto da Educação Básica, isto em termos de conjuntos matemáticos X (domínio) e Y (contra-domínio), sendo uma função $f: X \rightarrow Y$ uma regra que associa cada um dos elementos $x \in X$ a um elemento $y \in Y$ (LIMA, 2016). Ademais, as versões apresentadas nos próximos capítulos, levaram em conta os obstáculos de origem ontológica, didática e epistemológica que podem se fazer presentes no estudo do conceito de função, bem como, as concepções dos estudantes perante o estudo desse conceito.

Destarte, o jogo tem o intuito de permitir que os estudantes sejam capazes de reconhecer o conceito de função sob diferentes representações e possam articular tais representações para construir saberes atrelados a esse objeto matemático. Assim, o jogo *Caça ao tesouro* pode contribuir para desmistificar alguns obstáculos epistemológicos, mas demanda do professor uma atenção para identifica-los e trabalha-lo junto aos estudantes para que estes não sejam reafirmados ou ainda venham a se constituir enquanto obstáculos didáticos futuros. Ressaltamos que no decorrer das nossas análises, isto nos capítulos 5 e 6, exibiremos alguns dos obstáculos identificados ao longo da experimentação e avaliação do jogo.

CAPÍTULO 5

ANÁLISES DA PRIMEIRA VERSÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Jogar não é simplesmente apropriar-se das regras.
É muito mais do que isso!
A perspectiva do jogar que desenvolvemos
relaciona-se com a apropriação da estrutura,
das possíveis implicações e tematizações.
Logo, não é somente jogar que importa (embora seja fundamental!),
mas refletir sobre as decorrências da ação de jogar,
para fazer do jogo um recurso pedagógico
que permita a aquisição de conceitos e
valores essenciais à aprendizagem
(MACEDO; PETTY; PASSOS, 2005, p. 105).

O ato de jogar é fundamental para contribuir com o desenvolvimento humano, assim, sua utilização em uma perspectiva pedagógica pode favorecer, no âmbito educacional, momentos de reflexão, descoberta, desafios, entusiasmo, entre outros aspectos, os quais tendem a contribuir com o processo de ensino e aprendizagem. Desse modo, conforme a epígrafe que utilizamos para introduzir esse capítulo, o jogo, em uma perspectiva pedagógica, vai muito além da apropriação das suas regras. Assim, nesta pesquisa, ao propor um jogo enquanto um recurso pedagógico, buscamos contribuir com o processo de ensino e aprendizagem do conceito de função e com a construção de um ambiente inclusivo.

Inspirados em uma caça ao tesouro, construímos um jogo levando em consideração a necessidade de aquisição dos conceitos de função, na área de Matemática para o Ensino Fundamental, no contexto do 9º ano, especificamente a seguinte competência: “desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo” (BRASIL, 2018, p. 267).

Ressaltamos que apesar de apresentarmos um contexto fictício, este poderá contribuir para que os estudantes estabeleçam relações entre as variáveis envolvidas na situação que conduz o jogo, construindo novos conhecimentos atrelados ao conceito de função a partir de conhecimentos prévios que possam auxiliar nesse processos. Ademais, que os estudantes possam, ainda, no contexto das competências específicas de Matemática e suas tecnologias atreladas ao Ensino Médio, construir argumentos pautados nas estratégias utilizadas, nos conceitos e definições, levando em consideração a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções às questões apresentadas (BRASIL, 2018).

Assim, a partir do jogo, que intitulamos *Caça ao tesouro*, buscamos a mobilização de conhecimentos gerais que consubstanciam os processos de ensino e aprendizagem do conceito de função, para tanto o jogo possui o objetivo de construir o conceito de função junto aos estudantes com deficiência visual tendo sido construído com fundamentos na Teoria das Situações Didáticas, mas este jogo, pode ainda ser utilizado em sala de aula regular. Vale destacar que o jogo não possui um ganhador, isso por estarmos nos fundamentando nos jogos cooperativos, portanto, ao final do jogo todos ganham e o prêmio, são os conhecimentos atrelados ao conceito de função, os quais são construídos ao longo do jogo.

O jogo inicia-se com uma história (Quadro 5), a qual é apresentada como um convite para que os estudantes possam envolver-se no contexto do jogo, cujo objetivo é contextualizar as situações que sucederam, bem como despertar a curiosidade pelo conhecimento que será construído, sendo este o tesouro a ser encontrado. Contudo, não explicitamos a palavra função ao longo da apresentação da história, isso tem o intuito de incentivar o levantamento de hipóteses e a imaginação dos estudantes pelo anseio em descobrir o que é o tesouro escondido.

Quadro 5 - História que contextualiza o jogo

História da Caça ao Tesouro
Muitos aventureiros tentam encontrar tesouros escondidos em vários países; há um registro de um tesouro escondido na cidade de Salvador. Este tesouro foi descoberto pela primeira vez em 1673, por Newton e Leibiniz. Após esse período, não se sabe o que aconteceu com este tesouro e, desde então, muitas pessoas ficaram curiosas, sentindo-se aventureiras e almejando encontrá-lo para saber o que de tão especial ele possuía. Conta-se que quem o descobre torna-se pleno de conhecimento e sabedoria que podem ser aplicados em várias ciências, como: Física, Química, Engenharia e Economia. Sabendo-se da importância e da grande aplicabilidade deste tesouro, dois aventureiros, Átlas e Apolo, decidem investigar, até encontrá-lo. Para isto, estes aventureiros têm uma maquete de um dos bairros de Salvador, a qual poderá auxiliá-los a descobrir. Vamos juntos com Átlas e Apolo encontrar o tesouro escondido?

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 5: Quadro com uma linha e uma coluna com a história da Caça ao Tesouro (Fim da descrição).

Com tais considerações sobre o jogo, destacamos que a organização deste capítulo contempla três seções: na primeira seção apresentaremos as análises *a priori* da primeira versão da Sequência Didática, na qual exibimos o material que compõe o jogo *Caça ao tesouro* e os problemas que os estudantes irão se deparar, sendo que explicitaremos os conhecimentos necessários para que os estudantes possam solucioná-los. Teceremos uma análise sobre a experimentação realizada com os docentes do Atendimento Educacional Especializado sobre o jogo; e, por último, descreveremos a experimentação realizada com os estudantes com deficiência visual, além disso, exibiremos a análise *a posteriori*, confrontando tais resultados com a análise *a priori*.

5.1 Análise *a priori* da primeira versão da Sequência Didática

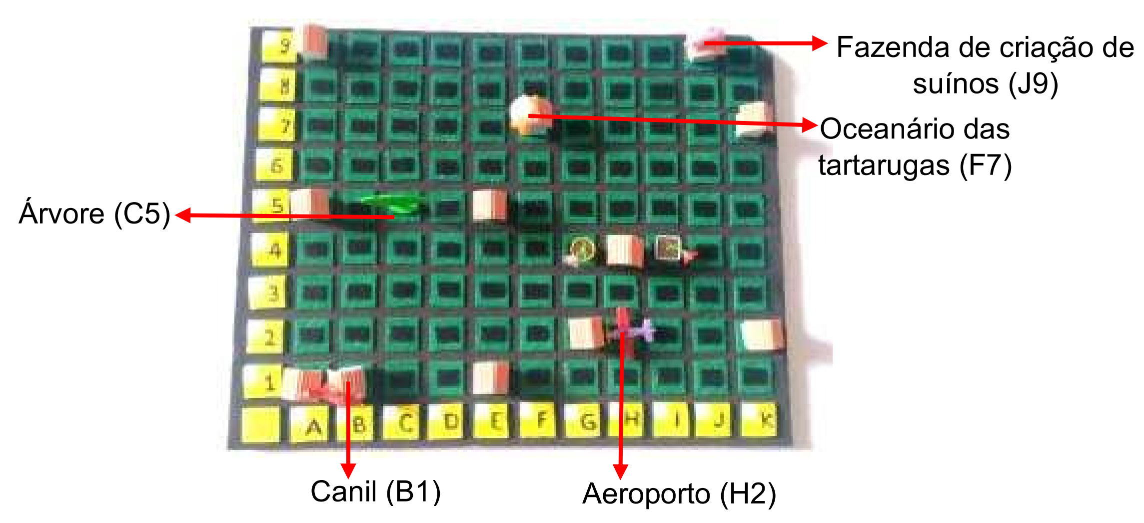
O jogo que compõe a sequência didática utilizada nesta pesquisa foi inspirado na Maquete Tátil que compõe a Sequência de Ensino denominada *Os Passeios Aleatórios do Jefferson* (SILVEIRA, 2016), a qual foi utilizada para o estudo dos conceitos básicos de Probabilidade junto a estudantes com deficiência visual do Ensino Médio. Ademais, o jogo tem como conteúdo possível de ser trabalhado o conceito de função, cuja abordagem se deu em formato de um jogo cooperativo denominado *Caça ao tesouro*. Este jogo foi elaborado para ser realizado por uma dupla de estudantes com deficiência visual e/ou videntes.

A execução do jogo compreende ações da fase *adidática* da situação didática, sendo que as fases didáticas, durante a execução do jogo, caracterizam-se por momentos de devolução que o professor realiza com os estudantes. Ademais, o jogo pode ser compreendido a partir de quatro fases: a primeira delas refere-se ao estudo inicial da determinação de coordenadas no plano de coordenadas cartesianas, isto ao solicitar que os estudantes investiguem a maquete de um bairro; a segunda compreende a resolução de problemas que envolvem a determinação numérica de uma função; a terceira corresponde à construção de tabelas, gráficos e, por fim, a quarta e última fase compreende a apresentação das conclusões e explicitação do tesouro escondido.

Para o desenvolvimento do jogo, os estudantes necessitam, inicialmente, decidir quem começa o jogo, sendo que após isso, eles escolheriam uma das pastas classificadoras com divisórias e executariam as dicas que estão dentro dessa pasta, jogando de forma alternada. Vale destacar que cada uma das dicas deveria ser lida em voz alta e as respostas também apresentadas em voz alta para o outro jogador. O jogador que escuta a leitura da dica e a solução decidiria se estava ou não correta. Caso estivesse incorreta, poderia também pedir esclarecimentos ou apresentar outra sugestão de solução.

A história que apresenta o jogo tem por enredo a busca por um tesouro escondido na cidade de Salvador e, para encontrá-lo, é apresentada aos estudantes uma maquete de um dos bairros da referida cidade. Esta maquete (Figura 14) possui casas, hotéis e pontos de referências que constam nas dicas entregues aos estudantes. Os objetos da maquete possuem velcro que auxilia na fixação e permite que os estudantes possam utilizar o tato para identificá-los e localizá-los. Outra característica deste material é que cada um deles encontra-se fixado em uma quadra, cuja localização pode ser dada por coordenadas que estão escritas em tinta e em braile.

Figura 14 - Maquete do bairro em que o tesouro está escondido



Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 14: Maquete em fundo preto com quadrados verdes com velcro preto no meio de cada um, existindo uma distância de meio centímetro entre eles. No lado esquerdo na vertical, quadrados amarelos enumerados de 9 a 1 em sentindo de cima para baixo e na horizontal escritos de A até K, lembrando um tabuleiro de batalha naval, tendo 12 casas rosas espalhadas, uma arvore, dois vasos de flores e um avião (Fim da descrição).

Os conhecimentos que os estudantes necessitaram ter para o manuseio da maquete tátil é sobre os objetos em miniaturas e em materiais plásticos utilizados: Fazenda de criação de suínos, representada na maquete por uma casa com um porco no telhado; Oceanário das tartarugas retratado por uma casa com uma tartaruga no telhado; Árvore de plástico tendo sua copa achatada; Aeroporto descrito como sendo um avião; Canil tendo por representação uma casa com um cachorro no telhado;

vasos de flores em miniaturas e as casas construídas de papelão tendo seus telhados construídos em papel micro ondulados. Vale destacar que todas essas referências ocupavam uma quadra que possuía uma coordenada de localização que continha uma letra (A a K) e um número (1 a 9).

Os dois aventureiros presentes na história, isto é, Átlas e Apolo, são representados por dois homens em miniatura: Átlas, homem com chapéu liso; e Apolo, homem com marcação no chapéu, conforme pode ser observado na Figura 15 (a) e (b), estes possuem um velcro em sua base que permitem fixá-los na maquete. Nas regras do jogo (Apêndice E), é mencionado que para iniciar a caça ao tesouro, os jogadores devem escolher uma dentre as posições expressas em coordenadas: D3, E4, G3 ou K9, em seguida, devem posicionar a miniatura a qual irá representá-lo e esta lhe foi entregue dentro da caixinha do caçador.

Figura 15 - Os dois aventureiros que constam na história

(a) Átlas (b) Apolo

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 15: À esquerda, foto do boneco Átlas, feito de biscuit, vestindo um chapéu liso e achatado, roupas cinzas e bota cinza, com a legenda (a). E, do lado direito, o boneco de Apolo, vestindo um chapéu alto na cor verde e amarelo nas bordas, uma blusa de manga longa na cor rosa, calça azul e bota bege, com a legenda (b) (Fim da descrição).

A solicitação pela escolha da posição a ser fixada os aventureiros (Figura 15) insere os estudantes em um contexto, no qual eles precisam levar em consideração os seus conhecimentos sobre às coordenadas de localização. Apesar de a maquete apresentar, na horizontal, letras e, na vertical, números, ao combinarmos estas informações, estamos propondo uma maneira para eles compreenderem que cada quadra poderia ser localizada a partir de uma letra e um número e que a forma de demarcação dessas coordenadas levava a determinação de uma localização específica na maquete.

Outro material que compõe o jogo é a caixinha do caçador (Figura 16), a qual possui 82 moedas de plástico cujo valor é de um real; 45 fichas com a representação de um quilômetro, representado em tinta e em braile; um aventureiro que irá representar o jogador na maquete; dois elásticos para a construção de gráficos no momento da institucionalização e 10 pinos para marcação de pontos no plano de coordenadas cartesianas.

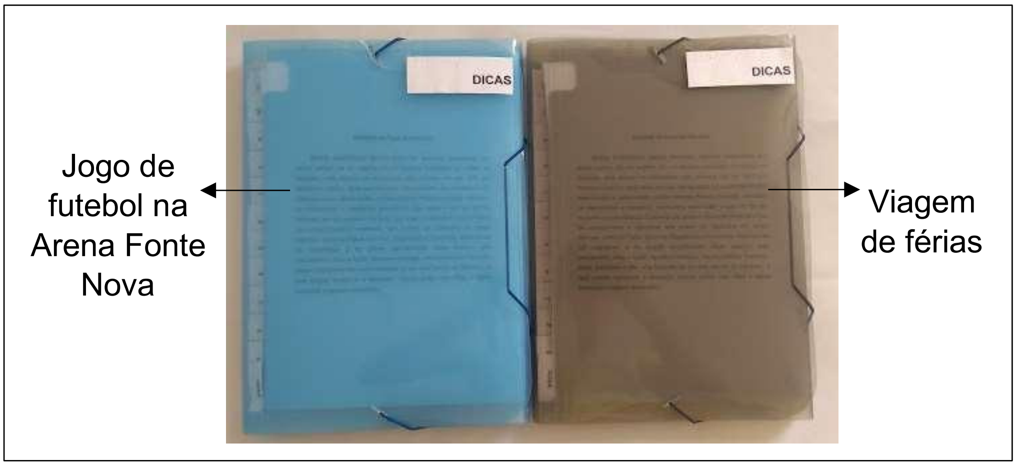
Figura 16 - Caixinha do caçador

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 16: Figura com duas caixas: no lado esquerdo uma caixa feita de papel na cor parda com quatro divisórias e tampa transparente com uma ficha no meio escrito em braile na parte superior e em tinta, em caixa alta o nome "Caixinha do caçador"; no lado direito caixa sem a tampa, divisória superior esquerda com fichas escritas "1 km", à direita moedas de plástico coloridas no formato de círculo, na divisória inferior esquerda a miniatura denominada Apolo e à direita pinos e ligas de plástico (Fim da descrição).

Outros objetos que foram entregues aos estudantes, no início do jogo, foram as duas pastas classificadoras com divisórias contendo dicas (Figura 17). Cada pasta possuía uma temática, a saber: viagem de férias para Salvador e jogo de futebol na Arena Fonte Nova. Cada uma das pastas continha 11 dicas, organizadas em ordem numérica crescente, as quais permitiram aos estudantes se movimentarem na maquete e solucionarem questões que os subsidiariam na generalização das situações para construção do conceito de função. Vale ressaltar que ambas as temáticas possuíam, enquanto grandezas a serem relacionadas, o valor a ser pago e a quantidade de quilômetros percorridos nas situações de investigação. Para o manuseio desta pasta, os estudantes levaram em consideração a organização em uma sequência numérica ascendente.

Figura 17 - Pastas classificadoras com Dicas



Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 17: Duas pastas classificadoras com divisórias com elásticos, uma azul com uma seta que informa jogo de futebol na Arena Fonte Nova e outra cinza com uma seta indicando viagem de férias, ambas estão lado a lado. No canto superior direito de cada uma há uma etiqueta com a palavra “DICAS”. Por conta da transparência do material das pastas, é possível ver que elas contem folhas A4 impressas em tinta preta (Fim da descrição).

Considerando-se a temática jogo de futebol na Arena Fonte Nova, destaco que todas as 11 dicas possuíam como enredo a ida de Marcos, recém chegado a cidade de Salvador, à Arena Fonte Nova, com seus três amigos: Camila, Joana e Ricardo. Eles resolveram ir de táxi até à Arena Fonte Nova para assistirem ao jogo do Bahia *versus* o Vitória e, para isso, cada um pagaria um valor fixo de cinco reais e cinquenta centavos pela bandeira I do táxi, além da taxa variável de dois reais e cinquenta centavos, conforme a quantidade de quilômetros percorridos.

Já a temática Viagem de férias tem por enredo uma viagem que Felipe fez para a cidade de Salvador e necessitou alugar um carro para se deslocar na cidade. Ele encontrou uma empresa de locação de veículos que cobrava uma taxa fixa de quinze reais mais cinquenta centavos por quilômetro percorrido. Diante dessa proposta, Felipe buscou um hotel que estivesse próximo aos pontos turísticos para poder economizar na locação do veículo. Assim, Felipe pediu ao jogador para determinar as coordenadas de vários hotéis da cidade de Salvador e calcular o valor pago por um dia de aluguel do carro, tendo como informação o fato de que ele queria visitar apenas a Praia do Forte, ponto turístico da cidade.

Ressaltamos que as dicas número um, três, cinco e sete, de ambos os enredos, isto é do jogo de futebol na Arena Fonte Nova e da Viagem de férias, tinham por objetivo descrever e interpretar as posições das casas de Marcos e seus amigos, bem como dos hotéis em que Felipe poderia vir a ficar hospedado, isto através da utilização de coordenadas. Assim, ao contrário do que havia sido solicitado aos estudantes nas regras do jogo, solicitamos a escolha de uma das posições na maquete para então fixarem os seus representantes no jogo. Nestas quatro dicas, de cada um dos enredos, havia descrições de onde estavam as casas e hotéis, isto a partir de pontos de referência, de modo que os estudantes eram solicitados a determinarem a localização em termos de coordenadas que envolviam letras e números. Assim, buscou-se incentivar o uso de um vocabulário apropriado, tais como: direita e esquerda (BRASIL, 2018) e a determinação de coordenadas que envolvessem abscissas e ordenadas.

A dica número um do tema visita à Arena Fonte Nova, representada no Quadro 6, solicitava que o estudante informasse que a casa de Marcos se localizava na quadra A1.

Quadro 6 - Dica nº 1 do tema visita à Arena Fonte Nova

Dica nº 1: Marcos precisa da sua ajuda para ir à Arena Fonte Nova, a casa dele localiza-se na quadra à esquerda do Canil da cidade, representado na maquete, por uma casa com um cachorro no telhado. Qual é a quadra da casa de Marcos?

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 6: Quadro com uma linha e uma coluna com a dica de número um do tema visita à Arena Fonte Nova (Fim da descrição).

Na temática Viagem de férias para Salvador, isto na dica número um (Quadro 7), esperava-se que o estudante mencione que a localização do hotel procurado era G2.

Quadro 7 - Dica nº 1 do tema viagem de férias

Dica nº 1: Felipe irá viajar de férias com a família para Salvador. Como pretende ir de avião, pensa em alugar um carro para se deslocar nesses dias. Pesquisou e encontrou a empresa Dirija Bem que aluga carros com a seguinte oferta: pagar uma diária de R$ 15,00 mais R$ 0,50 por quilômetro percorrido. A dúvida de Felipe agora é sobre o hotel que ficará hospedado com sua família. O primeiro hotel que ele entrou em contato fica na quadra à esquerda do Aeroporto (representado na maquete pelo avião). Qual a localização exata deste hotel?

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 7: Quadro com uma linha e uma coluna com a dica número um do tema viagem de férias (Fim da descrição).

Em relação à dica três, explicitada no Quadro 8, aspirava-se que o jogador responda A5 como sendo a coordenada da casa de Camila.

Quadro 8 - Dica nº 3 do tema visita à Arena Fonte Nova

Dica nº 3: A ajuda que você deu a Marcos foi muito útil, por isso ele lhe enviou a seguinte mensagem: Muito obrigado pelo auxílio no problema que estava a me inquietar. Sei que você está em busca do tesouro escondido, a informação que tenho é que este tesouro pode estar próximo a uma árvore. A casa de Camila fica duas quadras à esquerda da árvore, acredito que ela poderá lhe apresentar mais detalhes. Qual a localização exata da casa de Camila?

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 8: Quadro com uma linha e uma coluna com a dica número três do tema visita à Arena Fonte Nova (Fim da descrição).

A dica três, exibida no Quadro 9, refere-se ao Hotel Star 1. Ansiava-se que o jogador mencionasse que esse hotel estava localizado nas coordenadas K7.

Quadro 9 - Dicas nº 3 do tema Viagem de férias

Dica nº 3: O Hotel Star 1 soube que você auxiliou Felipe na informação que ele estava querendo, então decidiu te encaminhar a seguinte mensagem: Muito obrigado pela assistência ao cliente interessado em nossos serviços, por isso, gostaríamos de te auxiliar na dica para encontrar o tesouro, sabemos que este tesouro é muito antigo e que se encontra próximo ao Oceanário das tartarugas. Temos uma filial do nosso hotel lá, indicamos a Felipe, por ser mais próximo da Praia do Forte. Este hotel fica a cinco quadras à direita do Oceanário. Desejamos sucesso em sua caça ao tesouro. Felipe gostaria de saber a localização em coordenadas do hotel.

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 9: Quadro com uma linha e uma coluna com a dica número três do tema viagem de férias (Fim da descrição).

Considerando-se a dica cinco, concebida no Quadro 10, almejávamos que a resposta dada para a localização da casa de Joana fosse dada por K2.

Quadro 10 - Dica nº 5 do tema visita à Arena Fonte Nova

Dica nº 5: Camila te enviou uma mensagem de agradecimento: Obrigada pelos cálculos que você realizou, foi exatamente esse valor que paguei pela viagem. Sobre o tesouro escondido que você está procurando, dizem que ele é muito valioso e está próximo ao aeroporto. Nós temos uma amiga, a Joana, que mora próximo ao aeroporto, ela também está com dúvida em relação ao valor que irá pagar pela corrida de táxi. Tenho certeza que ela poderá lhe ajudar, a casa dela fica três quadras à direita do aeroporto (na maquete o aeroporto está sendo representado por um avião). Qual a localização da casa de Joana?

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 10: Quadro com uma linha e uma coluna com a dica número cinco do tema visita à Arena Fonte Nova (Fim da descrição).

Outra dica que também solicitava a localização de um hotel é a dica cinco (Quadro 11). Desta vez é a localização do Hotel Campo Verde, o qual encontrava-se fixado na quadra de coordenadas E5.

Quadro 11 - Dica nº 5 do tema Viagem de férias

Dica nº 5: Felipe mencionou no Hotel Star 2 sobre a sua caça ao tesouro, então o funcionário do hotel informou que já ouviu falar do tesouro, mas quem conhece muitos detalhes é o proprietário do Hotel Campo Verde. Então o funcionário sugeriu que você fosse ao Hotel Campo Verde, localizado duas quadras à direita da árvore. Qual a localização em coordenadas deste hotel?

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 11: Quadro com uma linha e uma coluna com a dica número cinco do tema viagem de férias (Fim da descrição).

A última dica que indagou sobre a localização, tendo a temática jogo de futebol na Arena Fonte Nova é a dica sete (Quadro 12), cuja localização da casa de Ricardo era a A9.

Quadro 12 - Dica nº 7 do tema visita à Arena Fonte Nova

Dica nº 7: Joana pagou exatamente o valor que você informou a ela, como ela estava com muita pressa, pediu para você ir na casa de Ricardo, que ele saberá te dar informações sobre o tesouro. A mensagem encaminhada por Joana foi a seguinte: Obrigada pelo auxílio, procure Ricardo, ele irá te dar dicas sobre o tesouro. Ricardo mora 9 quadras a esquerda da fazenda de criação de suínos (na maquete está fazenda possui um porquinho no telhado). Qual a localização da casa de Ricardo?

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 12: Quadro com uma linha e uma coluna com a dica número sete do tema visita à Arena Fonte Nova (Fim da descrição).

A localização do último hotel, isto é, do Hotel Praieiro, cuja descrição encontra-se expressa no Quadro 13, correspondente a dica sete era em termos de coordenada E1.

Quadro 13 - Dica nº 7 do tema Viagem de férias

Dica nº 7: O proprietário do Hotel Campo Verde foi muito simpático e te informou que o tesouro é extremamente valioso e que muitos já foram até ele para saber pistas para encontrá-lo. No entanto, quem sabe muita coisa sobre o tesouro é o proprietário do Hotel Praieiro, este hotel fica três quadras à direita do Canil da cidade. Qual a localização em coordenadas do hotel?

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 13: Quadro com uma linha e uma coluna com a dica número sete do tema viagem de férias (Fim da descrição).

As dicas de números dois, quatro, seis e oito, possibilitaram aos jogadores realizarem cálculos que relacionavam as grandezas: quilômetros percorridos e valores pagos, tanto no que se refere à corrida de táxi quanto ao aluguel do automóvel. Nesse caso, os estudantes se utilizaram dos conhecimentos que continham sobre grandezas diretamente proporcionais e interdependência entre as grandezas (BRASIL, 2018).

Assim, o objetivo destas dicas apresentadas em forma de jogo visita à Arena Fonte Nova era explorar qualitativamente a relação entre as duas grandezas presentes nas situações, associando-se assim o valor pago pela corrida de táxi a quantidade de quilômetros que foram percorridos e correlacionando-se o valor pago pelo aluguel do automóvel à quantidade de quilômetros percorridas até a Praia do Forte. Tais ações permitiam que os estudantes relacionassem a situação presente na dica a uma representação tabular e, por conseguinte, associasse este aspecto a conceitos e a propriedades matemáticas (BRASIL, 2018).

Para a execução das dicas dois, quatro, seis e oito, de ambos os temas, cada estudante recebeu um quadro de registros composto por linhas e colunas, para realizar o registro das informações no quadro de registros (Figura 18). Esperava-se que cada um dos jogadores utilizasse uma coluna para representar cada uma das grandezas. Dito de outra forma, esperava-se que utilizassem uma coluna para organizar a quantidade de quilômetros percorridos pelo táxi e pelo carro de aluguel e a outra coluna para representar os respectivos valores que foram pagos nas corridas de táxi e do carro de aluguel, utilizando-se, para isso, as fichas com a representação de um quilômetro e as moedas de um real, as quais estavam dentro da caixinha do caçador (Figura 16).

Figura 18 - Quadro para registro

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 18: Uma caixa de papelão contendo duas colunas com cinco linhas, formando um retângulo em cada (Fim da descrição).

A tabela construída em três dimensões permitiu aos estudantes expressar as suas respostas e conclusões de maneira sintetizada, com a utilização de linhas e colunas, tendo a linguagem como forma de mediação do que havia sido representado. Estes registros deveriam ser feitos com autonomia, sendo que, após a conclusão destas quatro dicas em ambos os enredos, os estudantes seriam convidados a representar as informações no primeiro quadrante do plano de coordenadas cartesianas.

A primeira dica apresentada no contexto do jogo de futebol que permitia o estudante iniciar a construção da tabela foi a dica de número dois (Quadro 14). Vale destacar que esperávamos enquanto resposta, para essa dica, que os estudantes multipliquem 3 quilômetros pelo valor pago a cada quilômetro percorrido, isto é, dois reais e cinquenta centavos e adicionem a este resultado o valor fixo de cinco reais e cinquenta centavos, obtendo-se, assim, o valor de 13 reais a ser pago pela corrida.

Quadro 14 - Dica nº 2 tema visita à Arena Fonte Nova

Dica nº 2: Seja bem-vindo(a) à casa de Marcos, para prosseguir ajude-o a calcular quanto pagará por um táxi, conforme situação a seguir: Marcos e seus amigos moram há pouco tempo em Salvador e são fanáticos por futebol. Resolveram assistir ao jogo do Bahia *versus* o Vitória, na Arena Fonte Nova. Como ainda não conhecem muito bem a cidade, decidiram ir de táxi ao estádio. Ao entrar no táxi, Marcos perguntou ao motorista quanto custaria a corrida; o taxista informou que a bandeira I custava R$ 5,50 mais R$ 2,50 por quilômetro percorrido. Sabendo-se que a casa de Marcos fica a 3 quilômetros do estádio quanto ele pagará pela viagem? Agora que você já respondeu a situação proposta, represente as informações no quadro de registros.

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 14: Quadro com uma linha e uma coluna com a dica número dois do tema visita à Arena Fonte Nova (Fim da descrição).

Já no contexto da viagem de férias, a dica número dois mencionava o seguinte:

Quadro 15 - Dica nº 2 do tema Viagem de férias

Dica nº 2: Seja bem-vindo(a) ao Hotel Star 1, estamos a 8 quilômetros da Praia do Forte. Considerando-se que a locadora de veículos entregue o carro no hotel em que Felipe e sua família estará hospedado, quanto Felipe pagará por um dia de aluguel do carro se for apenas para a Praia?

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 15: Quadro com uma linha e uma coluna com a dica número dois do tema viagem de férias (Fim da descrição).

Essa dica solicita o cálculo do valor de um dia de aluguel do carro, informando a distância de oito quilômetros do “Hotel Star One” da Praia do Forte. A informação que poderia auxiliar o jogador na solução da questão refere-se ao fato de que a locadora de veículo Dirija Bem entregará o carro no hotel onde Felipe irá se hospedar. Outro detalhe, a ser analisado pelo estudante, refere-se ao fato de que para ir e voltar à Praia do Forte, Felipe percorrerá 16 quilômetros, pagando, assim, pelo aluguel o valor fixo de 15 reais, além do valor variável resultante da multiplicação dos 16 quilômetros pelos cinquenta centavos por cada quilômetro percorrido. Determina-se um valor de 23 reais referente ao aluguel do carro nas condições destacadas. Entretanto, o estudante poderá considerar apenas que Felipe foi à Praia. Nesse caso, Felipe pagaria 19 reais pelo aluguel do carro.

Acreditamos que esta última solução não seja tão comum entre os jogadores, entretanto, não a descartamos, pois os estudantes poderiam extrapolar as informações presentes nas dicas e incluir novos detalhes.

Em relação às dicas de número quatro, representadas no Quadro 16 e 17, tínhamos a expectativa de que os estudantes utilizassem das mesmas estratégias para a determinação da solução das dicas de número dois, ou seja, que no contexto da visita à Arena Fonte Nova informassem que Camila iria pagar 23 reais pela corrida de táxi.

Quadro 16 - Dica nº 4 do tema visita à Arena Fonte Nova

Dica nº 4: Camila está sem saber quanto custará a sua ida à Arena Fonte Nova, para assistir ao jogo. Marcos lhe avisou que a bandeira I custa R$ 5,50 mais R$ 2,50 por quilômetro percorrido. Sabendo-se que Camila mora a 7 quilômetros do estádio, quanto ela pagará ao taxista pela viagem?

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 16: Quadro com uma linha e uma coluna com a dica número quatro do tema visita à Arena Fonte Nova (Fim da descrição).

Já no contexto da viagem de férias, esta dica poderia ter como solução dois valores, isto é: se o jogador ponderou que Felipe foi à Praia do Forte e retornou ao hotel, então seria percorrido quatro quilômetros com o carro, assim o valor do aluguel do carro seria de 17 reais. Contudo, se o estudante aceitasse apenas que Felipe foi até a Praia do Forte sem considerar o retorno, Felipe iria pagar pelo aluguel do carro um valor de 16 reais.

Quadro 17 - Dica nº 4 do tema viagem de férias

Dica nº 4: Seja bem-vindo(a) ao Hotel Star 2, a distância das nossas instalações até a Praia do Forte é de apenas 2 quilômetros. Considerando-se que a locadora de veículos entregue o carro no hotel em que Felipe e sua família estará hospedado, quanto Felipe pagará por um dia de aluguel do carro se for apenas para a praia? Represente as informações no quadro de registros.

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 17: Quadro com uma linha e uma coluna com a dica número quatro do tema viagem de férias (Fim da descrição).

Outra dica apresentada, na temática do jogo de futebol na Arena Fonte Nova, foi a número seis, citada no Quadro 18. Esperávamos que o jogador informasse que Joana pagaria 28 reais pela corrida de táxi.

Quadro 18 - Dica nº 6 tema visita à Arena Fonte Nova

Dica nº 6: Seja bem-vindo(a) à casa de Joana. Joana também é amiga de Marcos e também irá de táxi à Arena Fonte Nova. Como Marcos já havia lhe avisado que a bandeira I custava R$ 5,50 mais R$ 2,50 por quilômetros percorridos e sabendo-se que Joana mora a 9 quilômetros do estádio, quanto ela pagará pela viagem ao taxista?

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 18: Quadro com uma linha e uma coluna com a dica número seis do tema visita à Arena Fonte Nova (Fim da descrição).

Para a solução da dúvida de Felipe, expressa na dica de número seis da Viagem de férias (Quadro 19), o jogador ao examinar a ida até à Praia do Forte saindo do hotel e, consequentemente, o seu retorno novamente para o hotel, estaria percorrendo, portanto, 20 quilômetros de carro, fato que resultaria em um aluguel no valor de 25 reais. Caso considerasse apenas a ida de Felipe à praia sem que tenha retornado para o hotel com o carro, o estudante deveria informar que Felipe pagaria 20 reais pelo aluguel.

Quadro 19 - Dica nº 6 do tema Viagem de férias

Dica nº 6: Felipe gostaria de saber a distância deste hotel à praia e o valor que pagaria pela locação do carro, caso resolvesse se hospedar nele. Sabendo-se que o Hotel Campo Verde fica a 10 quilômetros de distância da Praia do Forte, qual seria o valor da locação do carro por um dia, considerando-se que a locadora entregou o carro no hotel e que Felipe foi apenas na Praia. Represente as informações no quadro de registros.

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 19: Quadro com uma linha e uma coluna com a dica número seis do tema Viagem de férias (Fim da descrição).

Outra dica que envolveu os objetivos supracitados foi a número oito (Quadro 20 e 21). No entanto, diferentemente das dicas anteriores, a estratégia de solução não deveria ser a mesma, tendo em vista que em ambos os contextos os valores a serem pagos já se encontravam informados nos problemas que compunham as dicas, então os estudantes deveriam determinar a grandeza quilômetro, de ambas as situações.

Na visita à Arena Fonte Nova (Quadro 20), o valor pago por Ricardo foi de 18 reais. Uma estratégia que poderia ser utilizada pelo estudante é subtrair, dos 18 reais, o valor fixo de cinco reais e cinquenta centavos referente à taxa da bandeira I, obtendo-se, assim, o resultado de 12 reais e 50 centavos. Em seguida, dividir esse valor por dois reais e cinquenta centavos, o que lhe possibilitaria obter cinco quilômetros como resultado. Dessa maneira, para a resolução das situações apresentadas ao estudante, estes poderiam valer-se de estratégias diversas, dentre estas o processo inverso das operações que haviam sido realizadas até então, conforme descrito, a regra de três simples, o cálculo mental ou ainda a calculadora (BRASIL, 2018).

A dica número oito, citada a seguir, apresenta o valor a ser pago por Felipe e questionava ao estudante a distância do hotel até a praia, conforme pode ser observado no Quadro 20:

Quadro 20 - Dica nº 8 do tema visita à Arena Fonte Nova

Dica nº 8: Seja bem-vindo(a) à casa de Ricardo. Ao ligar para um taxista, ele informou que a viagem para a Arena Fonte Nova saindo da sua casa irá custar R$ 18,00. Mas, Ricardo está com dúvida se o valor a ser pago é realmente este. Sabendo-se que a taxa da bandeira I é de R$ 5,50, para que o valor pago esteja correto, a quantos quilômetros de distância do estádio está a casa de Ricardo?

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 20: Quadro com uma linha e uma coluna com a dica número oito do tema visita à Arena Fonte Nova (Fim da descrição).

A dica número oito, citada a seguir, apresenta o valor a ser pago por Felipe e questionava ao jogador a distância do hotel até a praia, conforme pode ser observado no Quadro 21:

Quadro 21 - Dica nº 8 do tema viagem de férias

Dica nº 8: Seja bem-vindo(a) ao Hotel Praieiro, Felipe nos ligou e informamos que caso ele queira se hospedar conosco ele pagará na locação do carro para sair daqui do hotel e ir até a Praia do Forte uma diária de R$ 27,00. Nestas condições, Felipe gostaria de saber de você, qual a distância em quilômetros do hotel até a praia? Represente as informações no quadro de registros.

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 21: Quadro com uma linha e uma coluna com a dica número oito do tema Viagem de férias (Fim da descrição).

Ponderando-se que Felipe pagou 27 reais e que a locadora Dirija Bem cobra uma taxa fixa de 15 reais, subtraindo-se 15 reais dos 27 reais pagos, obtinham-se como valor pago pelo locatário referente à quilometragem percorrida a quantia de 12 reais. Ademais, como o valor cobrado por cada quilômetro percorrido com o carro é de 50 centavos, então, ao dividir 12 reais pelos 50 centavos logrou-se 24 quilômetros.

Com isso, teremos duas possibilidades de respostas: a primeira delas Felipe foi a praia e retornou ao hotel, então o Hotel Praieiro fica localizado a uma distância de 12 quilômetros da Praia do Forte; a segunda opção de resposta refere-se ao fato de Felipe ir à praia e a locadora Dirija Bem ir buscar o carro na praia, então o Hotel Praieiro fica a uma distância de 24 quilômetros da Praia do Forte.

Em suma, o conjunto de pares ordenados que deveriam ser representados no quadro de registros após executarem as dicas de número dois, quatro, seis e oito eram: no contexto do jogo de futebol na Arena Fonte Nova $\{(3,13);\ (5,18);\ (7,23)\ e\ (9,28)\}$ e em relação à Viagem de férias de Felipe, poderiam ser considerados apenas a viagem de ida e, portanto, o conjunto seria $\{(2,16);\ (8,19);(10,20);(24,27)\}$ ou se for levado em conta tanto a ida quanto o retorno tem-se: $\{(2,17);(8,23);(10,25)\ e\ (12;27)\}$.

As dicas de números nove, dez e 11 objetivavam estreitar as interações entre os jogadores e explicitar a cooperação presente no jogo e, com isso, incentivou-se a busca coletiva pela determinação do tesouro escondido. Para além do anseio individual de ganhar o jogo, tem-se o intuito comum de solucionar as dicas e encontrar o tesouro, mediante a cooperação e participação de ambos os estudantes.

Apresentamos as dicas nove e dez juntas (Quadro 22) e ressaltamos que ambas estão presentes na caixa de dicas dos dois jogadores contendo o mesmo teor.

Quadro 22 - Dicas nº 9 e 10 do tema visita à Arena Fonte Nova

Dica nº 9: Ricardo te enviou a seguinte mensagem: Obrigado pelo auxílio na solução da minha dúvida, realmente você estava correto(a). Para descobrir o tesouro escondido você deve trabalhar junto com seu colega que também está à procura do tesouro, pois só assim, saberão decifrar a dica final. Eu sei apenas uma parte dela e seu colega deve ter encontrado a parte que falta. A dica que tenho é a seguinte: Todos os problemas que vocês resolveram para chegar até aqui, relacionavam quilômetros com valores a serem pagos. O tesouro que vocês procuram pode ser exemplificado pelas leis de correspondência que possibilitam calcular o valor pago para qualquer quantidade de quilômetros percorridos em cada uma das situações investigadas por vocês. Diante disso, analisem juntos o quadro de registros e representem as informações deste quadro em um sistema de coordenadas (placa de madeira com furos). Em seguida, determinem as fórmulas que possibilitam calcular qualquer valor pago em cada uma das situações investigadas. **Dica nº 10:** Quais as fórmulas encontradas? Para passar à última dica, determine o valor pago por uma pessoa que deseja ir de táxi à Arena Fonte Nova e encontra-se a 321 quilômetros de distância da Arena. Determine, também, o valor pago por um dia de diária de locação de carro, se o locatário percorreu 1.241 quilômetros de distância. Peguem a última informação que está na caixa de dicas e vocês concluirão o desafio da caça ao tesouro.

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 22: Quadro com uma linha e uma coluna com as dicas de números nove e dez do tema visita à Arena Fonte Nova (Fim da descrição).

Destacamos que a dica de número nove assumiu, enquanto competência, o processo de compreensão e utilização com flexibilidade e precisão dos diferentes registros de representações matemáticas, isto é, o registro algébrico, gráfico e tabular, no intuito de sumarizar as informações e facilitar o processo de comunicação do resultado dos problemas apresentados (BRASIL, 2018). Enquanto habilidade específica de Matemática para o Ensino Médio, no contexto da unidade temática referente aos números e álgebra, sob o prisma a BNCC, estas dicas permitiram aos estudantes:

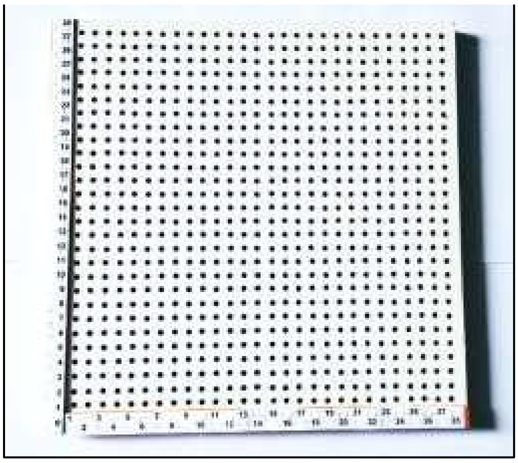
> Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau (BRASIL, 2018, p. 543).

Vale destacar que as estratégias de construção e representação tabular deveriam ser apresentadas pelos estudantes, estes determinariam o que iriam compor cada linha ou coluna da tabela. Além disso, ao término do cumprimento das dicas dois, quatro, seis e oito, eles deveriam investigar as informações que foram apresentadas para, então, modificar a forma de representação, utilizando-se a representação gráfica e, em seguida, generalizar, utilizando a expressão algébrica.

Essa permissibilidade de se trabalhar com a conversão de representações de funções favoreceu para os estudantes as conhecerem e perceberem o fato de cada uma delas possuíam particularidades, mas estas deveriam ser escolhidas visando facilitar a discussão e a descrição dos resultados a serem apresentados. Permitiu ainda que os estudantes com deficiência visual tivessem a oportunidade de construir tabelas, gráficos e, a partir dessas construções, determinassem a lei de representação algébrica para a relação representada nas formas tabulares e gráficas, ações estas que não são tão comuns e corriqueiras para os estudantes com deficiência visual. Isso devido ao pouco acesso a materiais que permitem esse manuseio, por estudantes com deficiência visual, no contexto educacional.

Destacamos que para a realização da dica de número dez, isto é, para que os estudantes analisassem juntos o quadro de registros e representassem as informações deste quadro em um sistema de coordenadas, obtiveram a representação do primeiro quadrante do sistema de coordenadas cartesianas apresentado na Figura 19 (placa de madeira com furinhos).

Figura 19 - Representação do I quadrante do sistema de coordenadas



Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 19: Foto de uma placa de fibra de média densidade na cor branca, com perfurações que distam 1 centímetro de distâncias umas das outras, tanto da horizontal, quanto na vertical, sendo que horizontal e ao longo da parte inferior da placa constam os números de 1 a vinte e oito em tinta e em braile, bem como na vertical na parte esquerda da placa contam a numeração em tinta e em braile de 1 a vinte e oito (Fim da descrição).

Esperava-se, com esta solicitação, que cada um dos estudantes utilizassem a placa de madeira que representa o primeiro quadrante do sistema de coordenadas cartesianas, quadrante positivo (Figura 19) e marcassem os pontos que relacionam as grandezas quilômetros percorridos e valores pagos. Para representar os pontos, os jogadores poderiam utilizar as hastes confeccionadas com palitos de pirulito e alfinetes (Figura 20), que se encontravam na caixinha do caçador.

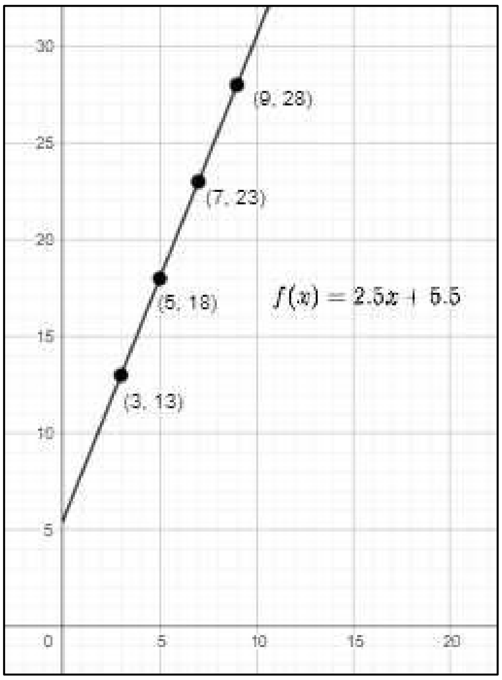
Figura 20 - Hastes para representação dos pontos

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 20: Haste horizontal em formato cilíndrico na cor branca e na parte superior uma bolinha verde (Fim da descrição).

Nesse contexto, esperávamos que os estudantes, com o material disponibilizado, pudessem determinar o gráfico e a representação algébrica da função, de maneira a se assemelhar a representação da Figura 21 para o contexto do jogo de futebol na Arena Fonte Nova:

Figura 21 - Representação gráfica e algébrica da função do contexto do jogo

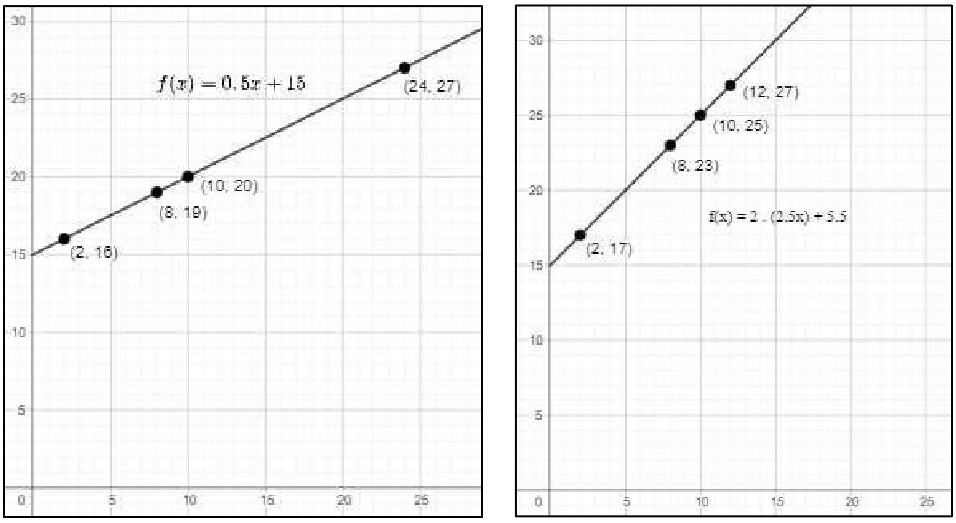


Fonte: Nossa produção (NERY, 2021).

Descrição da Figura 21: Gráfico de uma função linear apresentada no primeiro quadrante do plano de coordenadas cartesianas tendo a numeração no eixo das abcissas de zero a 20 e no eixo das ordenadas de zero a 30. Está sendo exibido os pontos de coordenadas (3, 13); (5, 18), (7, 23); (9, 28) e a função $f(x) = 2{,}50x + 5{,}5$ (Fim da descrição).

Já o contexto da Viagem de férias de Felipe abre a possibilidade para termos diferentes representações, isso a partir da interpretação dos estudantes. Desse modo, permite-se que seja construído o gráfico exibido na Figura 22 (a), ao considerar apenas a ida de Felipe à praia, ou, ainda, o gráfico explicitado na Figura 22 (b) que leva em consideração a saída do hotel para ir à praia e o posterior retorno ao hotel em que Felipe está hospedado:

Figura 22 - Representação gráfica e algébrica da função do contexto da viagem



(a) Apenas a ida (b) Ida e volta

Fonte: Nossa produção (NERY, 2021).

Descrição da Figura 22: Imagem contendo dois gráficos. O primeiro gráfico, com a legenda (a), é de uma função linear apresentada no primeiro quadrante do plano de coordenadas cartesianas, tendo a numeração no eixo das abcissas de zero a 25 e no eixo das ordenadas de zero a 30. Estão sendo exibidos, nesse primeiro gráfico, os pontos de coordenadas (2, 16); (8, 19), (10, 20); (24, 27) e a função $f(x) = 0{,}50x + 15$. O segundo gráfico, com a legenda (b), também é de uma função linear explicitada no primeiro quadrante do plano de coordenadas cartesianas, tendo a numeração no eixo das abcissas de zero a 25 e no eixo das ordenadas de zero a 30. São exibidos, no segundo gráfico, os pontos de coordenadas (2, 17); (8, 23), (10, 25); (12, 27) e a função $f(x) = 2 \cdot (0{,}50x) + 15$ (Fim da descrição).

Conforme supracitado, as dicas de números nove e dez são comuns a ambos os jogadores, então estas já foram apresentadas anteriormente. Assim, na continuidade, explicitamos a dica número 11 (Quadro 23) de ambos os temas. Nesse momento do jogo, os dois jogadores já se encontravam trabalhando juntos e uma dica complementou a informação presente na outra dica. Vale ressaltar que o objetivo destas dicas foi o seguinte: apresentar o conceito de função a ser institucionalizado nos momentos posteriores da aula.

Quadro 23 - Dicas nº 11 dos dois temas

Tema: Viagem de férias para Salvador **Dica nº 11:** Como são chamadas estas representações que estabelecem relações entre duas grandezas? Seu colega possui uma informação que lhes auxiliarão descobrir. **Tema: Jogo de futebol na Arena Fonte Nova** **Dica nº 11:** Dizem que sou de extrema importância na Matemática. Dizem ainda que possuo aplicações em várias áreas do conhecimento. Historicamente, estou atrelada a momentos diferentes da evolução humana. Houve muitas idas e vindas na minha relação com o homem, até que ele conseguisse me compreender e formalizar essa compreensão em um conceito. Não se assuste, não sou complexa. Parto do pressuposto de que quaisquer duas grandezas não devem ficar sozinhas, por isso, estabeleço relações entre elas. Minha relação é simples, correspondo todo número de um conjunto que representa uma grandeza a um único elemento do outro conjunto que representa outra grandeza. Para mim é importante que o primeiro conjunto tenha essa unicidade com os elementos do segundo conjunto. Posso ser representada de diferentes maneiras, muitos preferem usar uma fórmula com “x” e “y” ou “a” e “b”. Outros tantos, gostam de representar-me com a utilização de diagramas, mas o que é inquestionavelmente mais bonito, são as minhas representações gráficas, sempre contendo retas e curvas sempre contínuas e infinitas... Ah!!!! Minha representação gráfica é linda, envolve plano cartesiano, coordenadas que as chamo de abscissas e ordenadas e que permitem levantar hipóteses apenas com a contemplação. Então, chamam-me de função, tenho algumas propriedades e posso me subdividir em função afim, quadrática, exponencial e trigonométrica, mas, em todas elas, preservo o princípio de estabelecer relações.

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 23: Quadro com uma linha e uma coluna com as dicas de números 11 dos dois contextos (Fim da descrição).

A dica de número 11 trouxe consigo uma referência à gênese histórica do conceito de função, conforme foi apresentado nas análises preliminares levou inúmeros séculos e contou com o envolvimento de diversos estudiosos, além dos diversos momentos de avanços e retrocessos até sua delimitação conceitual. Mas, essa dica traz consigo a premissa da função enquanto uma relação entre duas grandezas e amplia tal compreensão ao mencionar sobre as diferentes maneiras de representar uma função. Almejou-se, com isso, apresentar esse conceito aos estudantes de maneira que o próximo passo do processo é realizar a institucionalização das informações presentes no jogo.

Após descrever o material e apresentar a análise *a priori* contendo os problemas que os estudantes tinham para resolver, bem como a “mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver” (BRASIL, 2018, p. 8), passamos a apresentar, nas próximas seções, a experimentação desta primeira versão da sequência didática, cuja experimentação ocorreu, inicialmente, com a participação de 3 professores do Atendimento Educacional Especializado e, posteriormente, com 4 estudantes, com deficiência visual, sendo que a aplicação com os estudantes ocorreu em dias distintos.

5.2 Experimentação com os docentes do Atendimento Educacional Especializado

A avaliação dos materiais que compõem o jogo *Caça ao tesouro* foi realizada por 3 professores e aconteceu em um único encontro, na Sala de recursos multifuncionais, local em que ocorria o Atendimento Educacional Especializado (AEE). Esse encontro teve uma duração de quarenta minutos e contou com a presença simultânea dos professores que atuam com os estudantes com deficiência visual do Ensino Médio. Estes colaboradores foram assim nomeados: Lílian, Márcio e Paulo. Destacamos que, inicialmente, os professores leram as regras do jogo e, posteriormente, avaliaram os materiais e as dicas. Durante o encontro, os professores estabeleceram um diálogo entre eles, visando contribuir com a melhoria do material, isso a partir das intervenções, explicações e indagações da pesquisadora.

Buscamos compreender, ao longo da experimentação, a compreensão que os partícipes possuíam sobre aspectos que, posteriormente, categorizamos no âmbito de três critérios, isto é: **critério de acessibilidade** do material, buscamos compreender aspectos sobre a pertinência do material, autonomia dos estudantes para manuseá-lo e sobre o processo de comunicação que, possivelmente, seria estabelecido entre os estudantes; **critério pedagógico**, no qual foram pontuados aspectos sobre o conteúdo de função com a utilização do material, a presença do erro e o papel pedagógico do professor e do estudante na situação didática; e, por último, buscamos compreender aspectos sobre o **critério de interação**, almejando compreender como os estudantes se relacionariam com o material e igualmente como a ludicidade poderia se fazer presente no decorrer da execução das fases *adidáticas.* Também buscamos compreender aspectos atrelados à interação entre os diferentes agentes que compõem o sistema didático *stricto sensu*, isto é: o professor, o estudante e o saber.

No âmbito do **critério de acessibilidade,** concordamos com Silva (2019) que, no contexto educacional, a acessibilidade envolve desde aspectos pedagógicos, administrativos, de recursos materiais até as relações interpessoais. No entanto, no âmbito das nossas análises, enfatizaremos a questão da acessibilidade dos recursos materiais que compunham o jogo *Caça ao tesouro*. Assim, os docentes apresentaram observações sobre acessibilidade atreladas às suas experiências docentes, bem como a elaboração de outros recursos didáticos destinados aos estudantes que eles atendiam no AEE.

A primeira constatação mencionada foi em relação aos animais que estavam sobre as casas, os quais eram referências para as localizações das casas de Marcos e seus amigos, assim como também para a localização dos hotéis em que Felipe queria se hospedar durante a sua viagem, isto é: o canil (cachorro); o oceanário (tartaruga) e a fazenda de suínos (porco). O professor Paulo tentou experimentar a vivência do material, fechando os olhos e elencando as características e diferenças de cada um dos animais, conforme Figura 23:

Figura 23 - Vivência realizada pelos professores

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 23: Foto com três pessoas em frente a uma mesa branca com os seguintes objetos sobre a mesa: quatro caixas organizadoras de papelão espalhadas pela mesa e no centro há uma maquete em formato retangular com quadras nas cores verde e o espaço entre essas quadras na cor preta, com algumas casas de papelão fixadas nas quadras. No lado esquerdo da foto há um homem sentado com camisa social azul e com os braços cruzados. Ao seu lado aparece somente a parte do tronco de uma mulher que está em pé manuseando a maquete e no lado direito da foto há um homem sentado de cabelos grisalhos com o rosto borrado e camisa preta que aparece manuseando a maquete com as duas mãos (Fim da descrição).

Durante esse momento, os três professores estabeleceram o seguinte diálogo:

> Paulo: Cadê a casa que tem um porco? Como é que eu vou saber que isso é um porco? Qual a diferença do porco para o cachorro que está aqui? O rabo do cachorro e o do porco possibilita diferenciar?
> Lílian: Não é melhor escrever? Você poderia colocar um material duro aqui em cima, olha, coloca o nome em braile.
> Pesquisadora: Uma plaquinha em cima da casa?
> Lílian: Uma plaquinha em cima é melhor do que os objetos.
> Paulo: Como são só três...
> Márcio: Como eles nunca seguraram um porco... Eles podem até ter segurado uma tartaruga.
> Lílian: Eles podem não ter a noção de como é.
> Márcio: E o cachorro, a noção que eles têm é do pelo... É, daquela sensação... Não sei se eles irão identificar pelo formato, né?
> Pesquisadora: E o estudante com baixa visão? O que vocês sugerem? Pode ser uma placa grande com o nome em tinta e braile?
> Lílian: O [estudante] baixa visão provavelmente já conheceria.
> Pesquisadora: Então, eu deixaria os dois, o animal e o nome em braile?
> Lílian: Ou faria casinhas de cores diferentes, a casa rosa é a casa do porco. A casa vermelha é a casa... Porque aí você poderia fazer as casas diferentes, para o cego põe as plaquinhas e para o [estudante] baixa visão, ele diferencia pela cor. Eu acho que ficaria melhor.

Conforme o diálogo transcrito, os professores concluíram que a inclusão de uma placa sobre o telhado das casas identificadas com nomes em braile: canil, oceanário e fazenda de suínos, poderia contribuir para que o material se tornasse mais acessível. Além disso, para o estudante com baixa visão, a diferença poderia estar atrelada à utilização de materiais com cores distintas e contrastantes.

Após essa avaliação, passamos então para a análise da árvore, conforme diálogo transcrito a seguir:

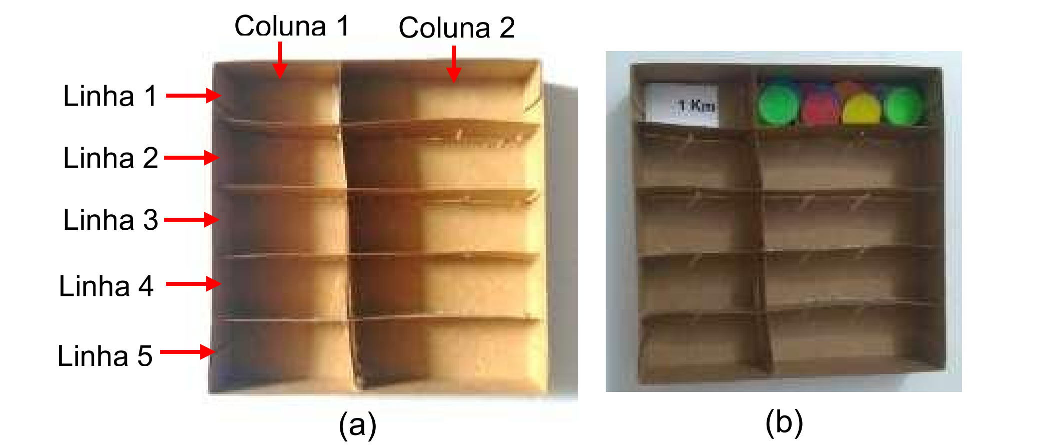
> Pesquisadora: Em relação à árvore?
> Lílian: Não! Essa árvore está plana. Eu acho que você poderia utilizar aqueles pinheirinhos, de repente ficaria mais fácil.
> Márcio: O pinheirinho você consegue encontrar pronto. Eles vão achar que isso daí é uma placa.

A sugestão dos docentes foi realizar a substituição da árvore por um pinheiro em miniatura, isso pelo fato de que os estudantes, possivelmente, poderiam já ter tido algum contato, talvez, fruto das festividades de final de ano e da ornamentação que é realizada nesses períodos com a utilização de tal árvore.

Outro material que provocou o diálogo entre os professores foi o quadro de registros. Durante o manuseio que estavam realizando, mencionei para eles que era esperado dos estudantes que preenchessem o quadro na posição indicada na Figura

24 (a), isto é, contendo 2 colunas e 5 linhas. Nesse preenchimento, almejava-se que os estudantes utilizassem cada linha para representar os valores referentes à quantidade de quilômetros e os respectivos valores pagos pelos quilômetros percorridos, em consonância com o exemplo representado na Figura 24 (b), isso em cada uma das situações investigadas por eles.

Figura 24 - Quadro de registros



Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 24: Na primeira imagem (a), temos o quadro de registros em papelão com indicativo ao lado de cada uma das suas duas colunas e cinco linhas. Ao lado (b), temos o mesmo quadro, mas desta vez sem os indicativos. Na coluna 1, linha 1 há um papel escrito “1 km” e na coluna 2, linha 1 algumas fichinhas redondas coloridas (Fim da descrição).

A professora Lílian mencionou que deve ser indicado, no quadro de registros, o que os estudantes deverão colocar em cada uma das colunas. O professor Paulo mencionou a possibilidade de organizar os dados de cada um dos cálculos em linhas, colocando quilômetros em uma coluna e o valor pago na outra, conforme registro representado na Figura 24 (b). Isso poderia possibilitar que os estudantes determinassem a relação entre esses valores e a indicação de um par ordenado de maneira mais natural. O professor Márcio não opinou sobre esse material.

Todas essas observações sobre os materiais que compõem o jogo *Caça ao tesouro* vão ao encontro da acessibilidade pedagógico-curricular, conforme nomeado por Silva (2019). Considera-se que a construção e disponibilização de materiais didáticos acessíveis possibilita e favorece a educação contra-hegemônica, caracterizada por atividades escolares elaboradas com fundamentos na equidade de oportunidades, as quais respeitam as necessidades específicas dos estudantes.

Inclusive pressupõe a construção de um contexto inclusivo, no qual os estudantes têm possibilidade de desenvolver as atividades com os seus colegas de turma.

Ao mencionar sobre o par ordenado, o professor Paulo resolveu realizar uma experimentação com uma das dicas do jogo, essa ação nos permitiu analisar aspectos que compreenderam os **critérios de acessibilidade** e **pedagógico**. Paulo selecionou a dica de número 2, a saber: “Dica nº 2: Seja bem-vindo(a) ao Hotel Star 1, estamos a 8 quilômetros da Praia do Forte. Considerando-se que a locadora de veículos entregue o carro no hotel em que Felipe e sua família estará hospedado, quanto Felipe pagará por um dia de aluguel do carro se for apenas para a Praia? Agora que você já respondeu a situação proposta, represente as informações no quadro de registros”.

Após ler a dica e verificar os valores pagos por cada quilômetro e o valor fixo da diária que estava na dica número 1, ele realizou o registro no quadro de registro e depois marcou um ponto no plano de coordenadas cartesianas, passando, assim, a avaliar esse último material. O excerto transcrito, a seguir, elucida as ações e diálogos realizados:

> Paulo: Ah sim! Aí vira o par ordenado. [...] Eu fiz um material bem parecido com esse seu. Na época em que eu fiz, os meninos pediram para colocar mais distante. Na época em que eu fiz, eles pediram para colocar 2 centímetros de um espaço para o outro, esse daqui tem 1 centímetro, não é?
> Pesquisadora: Isso!
> Paulo: Eles pediram para caber o dedo entre 1 e o outro. Mas isso, para início, pois quanto mais ponto que você tiver na placa é melhor para eles. Esses pinos ficaram muito bom para marcar.
> Lílian: Aqui eles vão ter dificuldade [se referindo ao plano de coordenadas cartesianas]. Poderia ser mais espaçado. A menina do primeiro ano que eu estou trabalhando, ela está com muita dificuldade na localização de um ponto, tem horas que o nosso que tem dois centímetros de distância ela tem dificuldade. [...] Se a gente for parar para pensar aqui é confuso, porque você passa a mão em uma e logo está na outra, se subir torto já está no outro. Oh, foi o que eu fiz aqui olha, você nem percebeu mais eu troquei, você troca de um para o outro muito fácil.

Conforme o diálogo estabelecido entre a pesquisadora e os professores Paulo e Lílian, em relação à acessibilidade do plano de coordenadas cartesianas, faz-se necessário um acréscimo no espaçamento. Nessa primeira aplicação, a placa possuía trinta centímetros, com espaçamento de 1 centímetro entre um ponto e outro, a sugestão dos professores é que o espaçamento seja de 2 centímetros. A exemplificação que a professora Lílian realizou e que ela menciona, em sua fala, foi de percorrer com o dedo uma sequência de furos alinhados verticalmente, e de repente mudar para um furo adjacente na direção horizontal. Ela destacou que essa mudança é sútil e o estudante poderá realizar sem nem perceber tal alteração.

A dificuldade que Lílian mencionou quanto à localização de pontos e o percorrer os eixos cartesianos nas direções horizontais e verticais também foram constatados nas pesquisas desenvolvidas por Oliveira (2010) e Souza (2015). Os referidos autores destacam que é comum os estudantes com deficiência visual, principalmente de cegueira congênita, apresentarem dificuldades para a exploração de informações representadas de maneira bidimensional. Em suas palavras, isso pode estar atrelado ao fato de que a leitura em braile é sempre realizada de maneira horizontal, sem a necessidade de uma exploração bidimensional das informações.

No que se refere ao **critério pedagógico**, os três professores, durante a avaliação do material, conversaram sobre os conceitos que estavam presentes na dica que havia sido realizada e em um dado instante o professor Paulo mencionou o seguinte:

> Paulo: [...] você tem a quilometragem e aqui você tem a quantidade de dinheiro, isso torna-se um par ordenado e aí você acha aqui ô [se referindo a marcação do ponto no plano de coordenadas cartesianas]. Daí, você vai trabalhando plano cartesiano com o aluno, sem nem o menino perceber, porque aí ele vai ficar craque. Porque ele achou aqui olha! No meu caso, deu 8 quilômetros e deu 19 reais a corrida [...]. No final, ele irá tentar descobrir como aconteceu isso, porque tem uma relação entre todas as corridas e a quilometragem. Bem lúdico né, lúdico mesmo!

Em sua fala, Paulo explicita que compreendeu a proposta e valorizou o fato de o estudante realizar o registro no quadro, tendo os mecanismos que poderão lhe possibilitar autonomia nesta ação, para, em seguida, transformá-lo em um par ordenado e representá-lo como sendo um ponto no plano, isso com a utilização dos pinos. Esta autonomia foi também mencionada no estudo realizado por Quiñonez (2016), quando defendeu que os materiais táteis podem contribuir para que os estudantes analisem os gráficos de maneira independente e com autonomia.

Destacamos que tais processos serão conduzidos pelas dicas, sem a interferência direta do professor, o estudante estará vivenciando questões relacionadas ao plano cartesiano, à marcação de pontos e à determinação da lei da função, sem que a palavra função ou sua definição tenha sido mencionada. Todas essas ações fazem parte da fase *adidática* da situação didática, isto é, a fase de ação, formulação e validação (BROUSSEAU, 1997) nas quais os estudantes possuem um papel de protagonistas.

Um aspecto que surgiu nesse momento da fala de Paulo foi em relação à identificação da presença do lúdico no jogo. Ao abordarmos sobre as questões atreladas à ludicidade, destacamos estas como pertencentes ao **critério de interação** entre os diferentes agentes presentes na situação didática. Vale ressaltar que durante a discussão uma das preocupações mencionadas pelos professores foi em relação ao seguinte aspecto: quem irá ganhar o jogo? Como determinar quem ganhou? Quais as recompensas que serão recebidas ao responder as situações corretamente? Tais preocupações encontram-se presentes no extrato do diálogo a seguir:

> Márcio: Por que as dicas são diferentes?
> Pesquisadora: Você vai para um lugar e o professor Paulo para outro. E vocês encontrarão resultados diferentes e no final leis de funções diferentes.
> Márcio: O que ele ganha? Por exemplo, ele deve encontrar a casa a esquerda do Canil. Ele encontrou, ele vai ganhar alguma coisa? [...] Quando é que eu ganho?

Entretanto, o jogo foi pensado em um caráter cooperativo, de modo que o objetivo individual só é alcançado quando os objetivos dos demais integrantes também é atingido (BROTTO, 1999). Para isso, o jogo foi pensado com o intuito de aproximar os jogadores durante sua realização, tentando superar os sentimentos de individualismo, ausência de comunicação, competição, pressa e a falta de organização e planejamento (BROTTO, 1999). Assim, não há como demarcar um único ganhador, ambos os estudantes ganham no decorrer do jogo, acertam, erram, corrigem os erros de maneira colaborativa e buscam alcançar o objetivo que lhes levaram a desenvolver o jogo: a determinação do tesouro escondido. Então, parte-se do pressuposto de que para se descobrir o tesouro escondido os estudantes precisam se ajudar mutuamente para solucionar as suas dicas, as quais são diferentes umas das outras.

Nesse momento da discussão, sobre a competição e a cooperação, a professora Lílian apresentou uma indagação relacionada ao erro. Tais reflexões compõem o **critério pedagógico** e perpassam pela análise da postura do professor, estudante e a presença do erro e dos momentos de devolutivas que a situação didática favorece. Dessa maneira, o diálogo estabelecido entre a professora Lílian e a pesquisadora pode ser observado no extrato que foi transcrito a seguir:

> Lílian: [...], mas, se ele errar?

> Pesquisadora: A proposta da pesquisa é que o professor intervenha o mínimo possível e quando faça intervenção durante o jogo seja em forma de devolutivas, isso é, em forma de questionamentos. Então, eu não posso chegar e dizer que ele errou. Por isso que eu sinalizo nas dicas para que ele fale em voz alta, aí os dois juntos vão conversando para tentar determinar.
> Lílian: Entendi. Aí, ele mesmo pode de repente voltar depois da explicação do professor e achar o erro, tipo, o professor pode sinalizar tem um erro aqui e ele de repente tenta buscar o erro.

A preocupação da professora Lílian é válida e, no âmbito da TSD, Brousseau (2008) destacou que os obstáculos epistemológicos podem se manifestar pelos erros. Nessa perspectiva, o erro poderá elucidar conhecimentos anteriores que possam constituir-se enquanto impedimentos para a construção dos novos conhecimentos que estão sendo trabalhados na situação.

Ademais, Almouloud (2007) defendeu que a dialética da ação é uma possibilidade para o estudante julgar os resultados de suas ações e ajustá-las, se necessário, isso sem a intervenção direta do professor. O momento da situação *adidática* deve possibilitar ao estudante melhorar seu resultado ou abandoná-lo para criar outro. Tal atitude do estudante frente a sua resposta caracteriza uma aprendizagem por adaptação, dentre os aspectos que poderão contribuir com esse processo, estão as devolutivas apresentadas pelo professor. Entretanto, os questionamentos apresentados nesse momento só irão surtir efeito se forem aceitos pelos estudantes, como sendo de sua responsabilidade. Caso isso ocorra, poderá proporcionar aos estudantes o desenvolvimento de uma postura mais autônoma frente à construção de novos saberes (ALMOULOUD, 2007).

Na continuidade, apresentamos os resultados da experimentação realizada com quatro estudantes com deficiência visual do Ensino Médio e a análise *a posteriori* dos dados que foram construídos durante esta experimentação. Para tanto, levaremos em consideração as análises *a priori* apresentadas na primeira seção deste capítulo e teremos enquanto lentes teóricas os estudos de: Bacelar (2009); Brotto (1999); Brousseau (1980, 1986, 1997, 1998, 2002); Huizinga (2017); Macedo, Petty e Passos (2005); Mantoan (2015) e Santos (2005), entre outros.

5.4 Experimentação e análise *a posteriori* dos dados coletados junto aos estudantes com deficiência visual

O jogo *Caça ao tesouro* foi aplicado com os estudantes organizados em duplas e em dias diferentes. A primeira dupla de estudantes, que experienciou o jogo, foi composta por Amanda e Beatriz e a aplicação ocorreu em um único encontro de 3 horas/aula. Ao longo das nossas análises, chamaremos esse grupo de AB1, sendo as letras correspondentes às iniciais dos nomes fictícios das estudantes desse grupo e o número a ordem de aplicação, esse foi o primeiro grupo. A segunda dupla foi formada por Helena e Mateus, esta aplicação ocorreu em dois encontros de 2 horas/aula cada um deles, totalizando-se um tempo de aplicação de 4 horas/aula, nomearemos essa dupla como HM2, considerando-se os mesmos critérios apresentados anteriormente. O espaço utilizado foi a Sala de recursos de uma instituição pública inclusiva do Distrito Federal que oferece o Ensino Médio.

Inicialmente, questionamos os estudantes se eles já haviam brincado de caça ao tesouro. Amanda, Mateus e Helena mencionaram que não. Já Beatriz disse que costumava brincar com seu irmão. Mas, a brincadeira descrita por Beatriz, na verdade, não era uma caça ao tesouro, pois o que eles faziam era esconder um objeto e apresentar dicas para que o outro tentasse encontrar. Entretanto, não havia nenhuma surpresa pois já sabiam, previamente, qual objeto estavam procurando. Cabe ressaltar que a surpresa, ou seja, o fato de não saber previamente o que está escondido, é uma das características do jogo *Caça ao tesouro*.

Em seguida, solicitamos, no contexto da experimentação, que os estudantes analisassem a maquete tátil e os demais objetos. As reflexões sobre a experimentação desses materiais, encontram-se atreladas à mesma categoria de análise dos dados organizados junto aos professores denominada por **critério de acessibilidade**. Durante o manuseio dos objetos da maquete tátil foi estabelecido o seguinte diálogo entre os membros do AB1:

> Beatriz: Eu consigo alterar as casinhas de lugar?
> Pesquisadora: Sim. Você consegue?
> Amanda: Isso é tipo uma caixinha, não é?
> Pesquisadora: É uma caixinha que irá representar uma casa, perceba que sobre a casinha tem um papel diferente, isso... Isso representa o telhado da casa. Agora Amanda, que animal é esse que está sobre a casa?
> Amanda: Onça? [se referindo ao cachorro].

> Pesquisadora: Uma onça? O que você acha Beatriz?
> Beatriz: Acho que é um cavalo [se referindo ao cachorro].
> Pesquisadora: Um cavalo? Tá agora um outro animal? Que animal é esse? [entrega a casinha com a tartaruga para Amanda].
> Amanda: É um elefante [se referindo a tartaruga].
> Pesquisadora: Beatriz, que animal é esse?
> Beatriz: É uma tartaruga.
> Pesquisadora: E esse Amanda?
> Amanda: Esse é um gatinho [se referindo ao porco].
> Pesquisadora: Certo! E esse daqui o que é? [entregando a árvore para Amanda].
> Amanda: Isso é tipo um... É um tipo de flor.

Inicialmente o AB1 buscou compreender o formato dos objetos que estavam na maquete, tentando entender o que estava sendo representado. Em relação aos animais, elas levantaram hipóteses que associavam: o cachorro a uma onça ou a um cavalo; a tartaruga a um elefante; o porco a um gatinho e a árvore a uma flor. Constatamos, assim, que a maquete tátil não estava acessível, pois considerando-se o AB1, as estudantes apresentaram dúvidas quanto aos animais que estavam presentes nesse material. Já o HM2 apresentou uma maior facilidade na identificação dos objetos que compunham a maquete tátil, conforme extrato do diálogo transcrito a seguir:

> Helena: Tem um cachorro aqui. Eu conheço isso aqui, é um cachorro, eu acho.
> Pesquisadora: Esse é o que, Helena?
> Helena: Cachorro.
> Pesquisadora: Você tem como retirar a casinha e verificar se é um cachorro mesmo?
> Helena: Retirar daqui?
> Pesquisadora: Pode puxar que a casinha se solta.
> Helena: Cachorro [passa a casinha para Mateus].
> Mateus: [analisa o objeto sobre a casa por um tempo]. É!
> Pesquisadora: O que é que você acha?
> Mateus: É um cachorro mesmo.
> Pesquisadora: O que auxiliou vocês a identificarem que é um cachorro?
> Helena: A orelha, o rabo, as patinhas...
> Pesquisadora: Vamos colocar esse aqui e vamos analisar um outro. Quais são os outros objetos?
> Helena: Outra casa.
> Mateus: Um avião.
> Pesquisadora: Um avião, pode retirar Mateus. Ele está preso no velcro, então pode puxar que ele se solta.
> Helena: Ah, é um avião.
> Pesquisadora: Um avião, o que mais?
> Helena: Uma árvore, não é? Uma árvore, com uma flor [se referindo ao vaso de plantas que estava ao lado de uma das casas na maquete].
> Pesquisadora: Ok! É uma plantinha, certo! E esse Helena? [se referindo à árvore].

> Helena: Esse daqui eu não faço a mínima ideia.
> Pesquisadora: Mateus você tem ideia do que seja?
> Helena: Acho que isso aqui é um galho de uma árvore.
> Mateus: É uma árvore.

Percebemos que o HM2 estava com receio em retirar os objetos da maquete, talvez acreditando que poderia danificá-los, isso pelo fato de que as casas eram construídas em papel cartão. Mas, a todo momento, incentivamos o manuseio e os processos de retirar e fixar esses objetos na maquete, até como forma dos estudantes manusearem e perceberem que estavam diante de uma maquete, em que cada uma das casas possuía uma localização. Ademais, percebemos, também, que o HM2 apresentou uma maior facilidade na identificação dos animais e objetos que estavam na maquete. Buscamos investigar um pouco mais os motivos para isto, e identificamos que Helena possuía uma tia que residia em um sítio e ela sempre a visitava no período de férias, fato este que pode ter influenciado na facilidade de identificação dos animais.

Diante desses trechos dos diálogos estabelecidos tanto pelo AB1 quanto pelo HM2, constatamos a necessidade de alteração das referências utilizadas, tendo em vista que tanto a estudante com cegueira Amanda quanto a que possuía baixa visão, Beatriz, partícipes do AB1, apresentaram dificuldades para identificar e diferenciar os animais que estavam sob os telhados. Identificamos, ainda, que a facilidade ou não na identificação dos animais poderia estar relacionada a experiências anteriores, considerando, conforme o professor Márcio mencionou, que a característica marcante para as estudantes frente a um cachorro poderia estar relacionada ao pelo macio e não, necessariamente, ao seu formato.

Ao analisar o avião, Mateus identificou, de imediato, o seu formato e o apresentou para Helena. Entretanto, na outra dupla, ao analisar o avião, Beatriz hesitou e entregou a Amanda perguntando-lhe o que era aquilo, nesse momento, foi estabelecido o seguinte diálogo:

> Beatriz: Tem esse daqui ô?
> Amanda: É um animal.
> Pesquisadora: Qual animal?
> Amanda: Gavião!

Sua resposta, possivelmente, foi influenciada pela análise dos materiais já investigados, como todos eram animais, então Amanda concluiu que esse também seria um animal e, nesse caso, um animal com asas. Entretanto, o que consideramos, após a investigação e identificação desses materiais, foi o seguinte: os objetos que serviam de referência, os quais estavam sob os telhados das casas, não eram adequados para possibilitar uma identificação imediata pelos estudantes, necessitávamos levar em consideração a significação tátil e a resistência dos materiais, conforme nos alertaram Mello, Caetano e Miranda (2017).

Após esse reconhecimento, foi solicitado que os estudantes realizassem a leitura das regras do jogo (Apêndice E). Após cada item lido, foi discutido sobre o que estava sendo solicitado e se tais instruções estavam claras, assim apresentaremos, a partir deste momento, as nossas **análises *a posteriori*** atreladas também ao **critério de acessibilidade** dos materiais que compõem o jogo. Constatamos que as regras se fizeram claras e à medida que as regras foram lidas, as estudantes experienciaram o material para verificar a sua pertinência e acessibilidade. O parágrafo inicial das regras do jogo comentava sobre todos os materiais que as estudantes receberam, conforme Quadro 24:

Quadro 24 - Texto inicial das regras do jogo caça ao tesouro

Vocês estão recebendo uma maquete de um bairro, contendo ruas, quadras e casas. Cada casa encontra-se em quadras distintas; a localização de cada casa pode ser encontrada por meio de coordenadas representadas por letras e números. Além da maquete, estão recebendo, também, uma caixinha do caçador, com objetos que poderão lhes auxiliar nos registros de informações. Outro objeto que está lhes sendo entregue é um quadro para registro.

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 24: Quadro com uma linha e uma coluna com o texto inicial das regras do jogo caça ao tesouro (Fim da descrição).

Como Amanda e Beatriz já haviam investigado a maquete, passamos para a caixinha do caçador. Nesse momento, foi estabelecido o seguinte diálogo:

> Beatriz: Tem umas fichas aqui [referindo-se às moedas de 1 real].
> Pesquisadora: Isso! Essas fichas são moedas de 1 real, todas elas têm o mesmo valor. E o que mais nós temos?
> Amanda: Têm umas liguinhas.
> Beatriz: Isso daqui eu não sei o que é? [referindo-se aos pinos].
> Amanda: E têm uns pinos.
> Pesquisadora: Esses que vocês pegaram agora são pinos, depois a gente vai entender pra que eles irão servir.
> Beatriz: Fichinhas de 1 quilômetro.
> Pesquisadora: Amanda, o braile está bom?
> Amanda: Está bom!

Tais falas nos permitiram inferir que os objetos e as quatro divisórias da caixinha do caçador ficaram claras para ambas as estudantes. O HM2 também estabeleceu um diálogo que reafirmou o fato de que estes objetos foram fáceis de serem identificados, apesar de, nesse momento, ambos os grupos ainda não saberem a utilidade para cada um dos objetos que estavam na caixinha do Caçador. Além disso, o braile e a numeração em tinta, da ficha de 1 quilômetro (1 Km), ficou identificável tanto para AB1 quanto para HM2.

Em relação ao quadro de registros, eles apenas verificaram com o tato que a caixa possuía várias divisórias e Helena mencionou: "Ah, esse daqui está vazio, então é para colocar". Em sua fala, refere-se aos materiais que estavam na caixinha do caçador, mas, ainda, sem explicitar, com precisão, o que seria colocado. A pesquisadora não comentou sobre as linhas e as colunas, com o intuito de verificar, no momento do registro, se as estudantes o fariam utilizando para cada registro uma linha e duas colunas, ou seja, uma coluna para alocar as moedas (valor pago) e a outra para as fichas de quilômetros (distância percorrida).

Na leitura do item dois das regras, o qual solicitava que os estudantes escolhessem uma dentre as posições indicadas, a saber: D3, E4, G3 ou K9 e posicionasse o seu caçador, considerando que Átlas era o homem com chapéu liso, e Apolo homem com a marcação no chapéu, foi estabelecido o seguinte diálogo entre AB1:

> Pesquisadora: Esses são os dois caçadores, que representarão vocês na maquete, você pode me dar sua mão Amanda? Isso... Aí quem é Átlas e quem é Apolo? A dica menciona o seguinte: Átlas é o homem com o chapéu liso e Apolo é o homem com a marcação no chapéu.
> Amanda: Deve ser esse, esse é Átlas.
> Pesquisadora: Que é o homem com?
> Amanda: Chapéu liso [Entretanto, Amanda trocou a ordem: o homem com marcação no chapéu para ela era o homem com o chapéu liso]!
> Pesquisadora: E Apolo?
> Amanda: Esse...

Nesse momento, Amanda identificou o chapéu com a marcação como sendo liso e vice-versa. Entretanto, essa alteração na característica não influenciou as movimentações que foram realizadas, posteriormente, na maquete. Então, caso esse equívoco ocorra em outras situações, possivelmente ele não apresentará empecilhos para a continuidade do jogo. No que se refere à posição a ser escolhida na maquete, Beatriz selecionou a G3 e ao mencioná-la apontou para a posição correta, conforme representado na Figura 25.

Figura 25 - Beatriz identificando sua posição

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Foto 25: Foto tirada do ângulo do lado direito de duas jovens com os rostos borrados, uma de cabelos vermelhos e a outra de cabelos pretos, ambas estão de camisa azul escuro e detalhes em branco. Elas estão sentadas em cadeiras em frente à uma mesa branca com diversos objetos, são eles: quatro caixas de papelão espalhadas pela mesa, pasta na cor azul, papéis em branco e no centro da mesa há uma maquete nas cores preto e verde, com algumas pequenas casinhas em cima. Na foto a jovem com cabelos vermelhos aparece manuseando a maquete (Fim da descrição).

A identificação realizada por Beatriz foi imediata, ela olhou as letras dispostas na parte inferior da maquete e contou três quadras e apontou, ao tempo em que questionou se estava correta. Em seguida, foi a vez de Amanda, que escolheu a posição K9. No entanto, para ela ainda não estava claro como encontrar essa posição na maquete, conforme evidencia o diálogo a seguir:

> Amanda: K9.
> Beatriz: Você vai procurar o K e vai andar sobre os quadrinhos até o 9 [Então Amanda fez o que sua colega a havia sugerido].
> Pesquisadora: Você poderia me dizer as letras Amanda?
> Amanda: Ah han: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K.
> Beatriz: Vai sobe [Amanda começou a percorrer as quadras na vertical].
> Amanda: 3, 4, 5, 6...
> Beatriz: Tem uma casa aí.
> Amanda: 7, 8, 9.
> Beatriz: Você andou para o lado.

Nesse momento, constatamos que a preocupação das duas estudantes era compreender o jogo e jogá-lo, não estavam competindo, tanto que Beatriz orienta Amanda na identificação da sua posição. Assim, podemos afirmar que a cooperação começou neste momento e perdurou durante todo o jogo, iniciando-se, portanto, antes da dica que orientava os jogadores a trabalharem juntos. Considera-se que esse processo “pressupõe que todos os objetivos no processo educativo tenham ou possam construir uma intencionalidade coletiva, buscando solucionar os problemas com o grupo, assim como crescimento de cada indivíduo e do grupo como um todo" (ALMEIDA, 2011, p. 25).

Ressaltamos que Amanda seguiu as orientações apresentadas por sua colega. Um aspecto que chamou atenção foi quando Beatriz mencionou: "Tem uma casa aí", imediatamente Amanda migra para a quadra adjacente a referida casa (Figura 26), passando, assim, para a coluna J. Entretanto, Beatriz intervém no equívoco e menciona: "Você andou para o lado". Novamente Amanda retorna para a coluna K. Assim, a interação entre as estudantes e o diálogo que foi estabelecido entre elas reafirmava que ambas estavam jogando uma com a outra, ratificando, portanto, o contexto de cooperação.

Figura 26 - Amanda realizando a identificação da sua posição

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 26: Foto tirada do ângulo do lado direito de duas jovens com os rostos borrados, uma de cabelos vermelhos e a outra de cabelos pretos, ambas estão de camisa azul escuro e detalhes em branco. Elas estão sentadas em cadeiras em frente à uma mesa branca com diversos objetos, são eles: quatro caixas de papelão espalhadas pela mesa, pasta na cor azul, papéis em branco e no centro da mesa há uma maquete nas cores preto e verde, com algumas pequenas casinhas em cima. Dessa vez a jovem de cabelos pretos aparece manuseando a maquete, e na foto há uma seta vermelha indicando para sua mão (Fim da descrição).

Um dos motivos que pode ter dificultado a identificação da localização por Amanda é o tamanho da maquete, esse material possuía cinquenta centímetros de comprimento por quarenta centímetros de largura. Tal identificação foi verificada ao se observar que, para chegar na posição K9, Amanda necessitou estender o seu braço ao máximo, conforme Figura 26. Isso também foi constatado na aplicação realizada junto ao HM2, quanto Helena escolheu a posição K9 e comentou:

Helena: K9.

Pesquisadora: K9. Certo! E você Mateus?
Mateus: Eu vou ficar no D3.
Pesquisadora: D3. Pronto. Então, vamos tentar fixar esse bonequinho lá na posição.
Helena: Por que eu escolhi tão longe?
Pesquisadora: Você quer trocar Helena?
Helena: Não, não...

Além da posição K9 ter ficado longe de Helena, ela também não conseguiu, inicialmente, determinar uma posição a partir de um par de letras e números, tendo em vista que a ação desempenhada por Helena para localizar o 9 foi analisar a coluna de quadras verticais que possuíam os números escritos em tinta e em braile. Já para encontrar o K, Helena seguiu a linha horizontal que possui as letras escritas em braile. O obstáculo encontrado por Helena era articular essas coordenadas para determinar a quadra que correspondia tanto a letra K quanto o número 9, conforme representado na Figura 27. A estudante ficou por um tempo com os braços estendidos sobre as duas localizações sem, com isso, conseguir fazer o encontro destas.

Figura 27 - Helena estabelecendo a localização da sua posição

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 27: Foto tirada do ângulo do lado direito de dois jovens com os rostos borrados, um do sexo masculino com cabelos cortados curtos e a outra jovem do sexo feminino com cabelos longos e pretos, ambos estão de camisa azul escuro e detalhes na cor branca. Eles estão sentados em cadeiras em frente à uma mesa branca com diversos objetos, são eles: papéis em branco, uma tábua em MDF com vários furos e, no centro da mesa, há uma maquete nas cores preto e verde, com algumas pequenas casinhas em cima. A jovem de cabelos pretos aparece manuseando a maquete com as suas duas mãos estendidas sobre a maquete (Fim da descrição).

Com o intuito de auxiliar na formulação de uma hipótese e, consequentemente, na validação e determinação das coordenadas da quadra que seria a sua localização inicial, estabelecemos o seguinte diálogo com o HM2:

> Pesquisadora: Você achou o K e o 9? E agora a localização K9.
> Helena: É aqui? [aponta novamente para o K e para o 9]. Eu não sei...
> Pesquisadora: Aí, qual dessas duas mãos?
> Helena: Essa [apontando para o K].
> Pesquisadora: Essa é o K. Percebe que a localização tem que ser uma letra e um número. E agora? Como você pode encontrar uma localização a partir dessas duas?
> Helena: Eu não sei não [risos].
> Pesquisadora: Vamos ver o que nós podemos fazer para ajudar na localização de Helena. Helena está com uma mão no K e a outra mão no 9.
> Mateus: É, assim eu acho um pouco difícil, é melhor em uma só. O problema é achar, aqui o K, não é?
> Helena: Já achei.
> Mateus: Eu sei, mas você vai subindo aqui, na coluna.
> Helena: 1, 2, 3, ... 9.

A formulação apresentada por Mateus era para que a Helena escolhesse uma coordenada, de letras ou de números, ou seja, a abscissa ou a ordenada, e a partir dela fosse percorrendo a outra. Sua sugestão foi então localizar o K e percorrer na horizontal as 9 quadras até chegar à quadra K9. Helena aceitou a sugestão de Mateus, mas demonstrou dificuldades no percurso realizado na vertical, mudava a quadra sem perceber. Buscou validá-la, mas se deparou com alguns obstáculos epistemológicos atrelado às noções de representação bidimensional. Tal contexto, corrobora com a necessidade de se trabalhar com a representação bidimensional do plano de coordenadas cartesianas, aspecto identificado pelos professores da Sala de recursos, conforme apresentado na seção anterior. Esse aspecto também comparece nos resultados do estudo de Oliveira (2010), no qual ele nomeou como sendo uma necessidade emergente.

Após os estudantes, de ambos os grupos estarem posicionados na maquete, passamos para a avaliação da acessibilidade da pasta classificadora com divisórias que organizava as dicas. Constatou-se que esse material não é de fácil manuseio para a estudante com cegueira, tanto que, durante a utilização, a pesquisadora necessitou segurar a pasta para que os estudantes: Amanda, Mateus e Helena pudessem manuseá-la com as duas mãos, conforme ilustração da utilização de Amanda na Figura 28.

Figura 28 - Utilização da pasta de dicas

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 28: Foto tirada do ângulo do lado direito de duas jovens com os rostos borrados, uma de cabelos vermelhos e a outra de cabelos pretos, ambas estão de camisa azul escuro e detalhes na cor branca. Elas estão sentadas em cadeiras em frente a uma mesa branca com diversos objetos. Neste momento, a jovem de cabelos vermelhos está segurando uma folha branca perto de seu rosto, ao seu lado esquerdo está a menina de cabelos pretos manuseando uma pasta azul com o auxílio de uma mulher onde aparece somente seu braço e um pouco do seu rosto ao lado direito da foto (Fim da descrição).

Apesar da identificação das divisórias da pasta, constando o número da dica na parte superior da divisória, os estudantes apresentaram dificuldades em localizar e ler a numeração. Mesmo encontrando a numeração, às vezes, acabavam abrindo uma divisória que continha uma dica que não era a que ele deveria realizar. Ademais, após a leitura da dica, os estudantes não conseguiam retornar o documento ao local em que estava anteriormente guardado. A sugestão que Amanda e Helena deram para a alteração desse material foi a substituição da pasta classificadora com divisória por uma caixa, organizando as dicas na ordem de execução.

Na continuidade, ambos os grupos foram lendo as regras do jogo de maneira alternada e mencionavam sobre o que haviam compreendido em cada uma delas. Salientamos que não foram explicitados equívocos, por parte das estudantes, na compreensão desses itens. Assim, as regras, de maneira geral, mostraram-se com uma linguagem acessível e adequada para os estudantes. Após finalizarem a leitura das regras, passamos, então, para a leitura da história que contextualizava o jogo e a execução de cada uma das dicas, conforme as regras do jogo. Ressaltamos que todas as dicas estão representadas no Apêndice F.

Destacamos que na escolha dos contextos que compunham o jogo, Amanda, no AB1, e Mateus, no HM2, depararam-se com a situação que envolvia a ida ao jogo de futebol na Arena Fonte Nova. Já Beatriz, partícipe do AB1 e Helena, jogadora do HM2, ficaram com a situação que envolvia a Viagem de férias de Felipe para Salvador.

Vale destacar que cada casa e hotel possuíam uma localização em termos de letras e números, isto é, uma coordenada que permitia determinar sua quadra. Durante as 4 dicas que solicitavam a determinação da posição, isto é, nas dicas de números 1, 3, 5 e 7, do contexto do jogo de futebol na Arena Fonte Nova, Amanda apresentou dúvidas em relação à direita e esquerda, sendo que, várias vezes, ela balançava sua mão e questionava “essa é à direita, não é?” ou “essa é à esquerda?” e aguardava a validação da Beatriz quanto a tal identificação, sendo que em todas essas dúvidas, Beatriz mencionava se estava correto ou não.

Além disso, sempre que Amanda encontrava um impedimento, ao percorrer as quadras para determinar a localização, ela os contornava e passava para as quadras adjacentes. Por exemplo, para determinar a coordenada da casa de Joana que ficava três quadras à direita do aeroporto, cuja localização era a K2, Amanda mencionou que era I3, quadra em que não havia nenhuma casa ou objeto de referência, conforme pode ser observado na Figura 29 que apresenta Amanda com a mão sobre a quadra I3.

Figura 29 - Determinação das coordenadas da casa de Joana

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 29: Foto tirada do ângulo do lado direito de duas jovens com os rostos borrados, uma de cabelos vermelhos e a outra de cabelos pretos, ambas estão de camisa azul escuro e detalhes na cor branca. Elas estão sentadas em cadeiras em frente à uma mesa branca com diversos objetos, são eles: duas caixas de papelão, uma pasta na cor azul, papéis em branco e no centro da mesa há uma maquete nas cores preto e verde, com algumas pequenas casinhas em cima. Nesta foto a jovem de cabelos pretos está manuseando a maquete e há uma seta com a inscrição “casa de Joana” (Fim da descrição).

Quando Amanda realizava essas mudanças de quadra, Beatriz sempre fazia intervenções e solicitava que ela realizasse novamente a identificação. Em alguns momentos, Beatriz valeu-se da ação de segurar na mão de Amanda e a guiá-la sobre uma mesma coluna na maquete, conforme exibido na Figura 30. Ressaltamos que Beatriz não apresentou dúvidas quanto à determinação das localizações dos hotéis que pertenciam ao contexto das férias de Felipe em Salvador.

Figura 30 - Determinação de coordenadas pelas estudantes juntas

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 30: Foto tirada do ângulo do lado direito de duas jovens com os rostos borrados, uma de cabelos vermelhos e a outra de cabelos pretos, ambas estão de camisa azul escuro e detalhes na cor branca. Elas estão sentadas em cadeiras em frente a uma mesa branca com diversos objetos, no centro da mesa há uma maquete nas cores preto e verde, com algumas pequenas casinhas em cima. Na foto, ambas aparecem manuseando a maquete, dessa vez, a mão esquerda da jovem de cabelos pretos aparece junto com a mão direita da outra jovem, manuseando a maquete juntas (Fim da descrição).

No contexto do HM2, Mateus perante a ida ao jogo de futebol determinou todas as localizações de maneira correta. Entretanto, Helena continuou apresentando a dificuldade que inicialmente lhe assolou, com a diferença de que agora ela tentava determinar a localização dos números e letras, partindo destas para então encontrar a referência na maquete, isso conforme o sentido da seta que está representada na Figura 31.

Figura 31 - Helena tentando determinar a localização J7

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 31: Foto tirada do ângulo do lado direito de dois jovens com os rostos borrados, um do sexo masculino com cabelos cortados curtos e a outra jovem do sexo feminino com cabelos longos e pretos, ambos estão de camisa azul escuro e detalhes na cor branca. O jovem do sexo masculino está no canto a esquerda da foto observando a outra jovem de cabelos longos e pretos. Eles estão sentados em cadeiras em frente a uma mesa branca com diversos objetos, no centro da mesa há uma maquete nas cores preta e verde, com algumas pequenas casinhas em cima. Na foto, a jovem do sexo feminino está manuseando a maquete e há uma seta na cor vermelha partindo da mão esquerda da jovem para a mão direita (Fim da descrição).

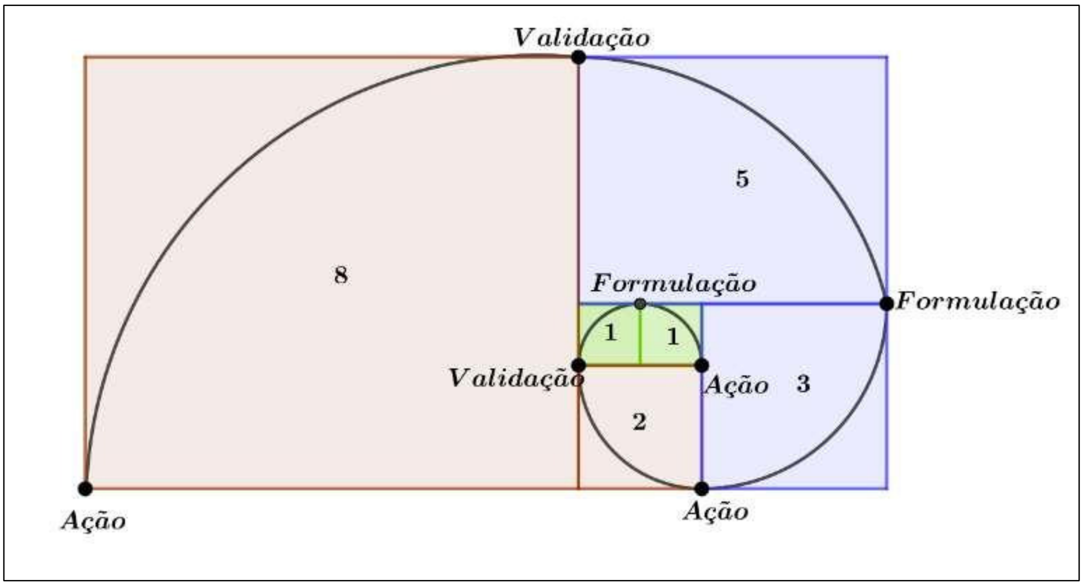
Para que Helena conseguisse determinar a sua localização foi necessário o trabalho em conjunto com Mateus, conforme constatado no excerto da conversa a seguir:

> Helena: A, B, C... H. Onde será que eu estou? 8. [Depois de um tempo e de tentar sair de uma letra e um número até chegar ao boneco que a representava. Helena, mencionou que estava no H8].
> Pesquisadora: Mateus, você concorda que é o H8?
> Mateus: Eu acho que a localização não é esta.
> Helena: Acho que eu me perdi.
> Mateus: Onde você está?
> Helena: Aqui ô?
> Mateus: Você está no J.
> Helena: Você acha que é o J? Não.
> Mateus: Esse daqui é você?
> Helena: Risos...
> Mateus: Você está aqui. J8.
> Helena: J8.
> Mateus: É o 7.

Em relação ao diálogo realizado entre Helena e Mateus, podemos identificar os momentos que compõem a *situação adidática*, através da estratégia criada por Helena. A ação pode ser identificada quando Helena sai das letras e números para chegar até o objeto na maquete. A formulação, encontra-se explicitada na apresentação da coordenada que envolvia letras e números, aspecto este que Helena ainda estava com dificuldade, pois até então ela não havia conseguido relacionar estas coordenadas. Sobre a validação, identificamos essa fase no momento em que Helena apresentou a Mateus a sua localização e buscou convencê-lo, mas esta foi refutada por ele e, então foi realizada uma nova ação que dizia respeito à verificação da localização, por conseguinte, foi feita uma nova formulação, ao mencionar que ela estava no J e, passou-se para o processo de validação que agora foi realizado por Helena.

Todo esse processo foi permeado pelo uso da linguagem. Perante a isso, podemos inferir que a fase *adidática* ocorreu em um formato que pode ser entendido como uma espiral perfeita construída a partir da sequência de Fibonacci (Figura 32), tendo em vista que essa espiral é construída a partir de uma sucessão de números que sempre leva em consideração os números anteriores, assim também foi o desenvolvimento das fases *adidáticas*, sempre era ampliado os conhecimentos e se levava em consideração as informações anteriores.

Figura 32 - Fases adidática da situação didática



Fonte: Nossa produção (NERY, 2021).

Descrição da Figura 32: Imagem contendo a representação de seis quadrados de tamanhos e cores diferentes: dois verdes de mesmo tamanho, contendo dois números um e os nomes ação, formulação e validação; dois azuis, com os números três e cinco e os nomes ação, formulação e validação e dois vermelhos com os números dois e oito e os nomes validação e ação. Há, também, uma linha curva na cor preta que passa por dois vértices de cada um dos quadrados (Fim da descrição).

Ademais, constatamos também a presença da cooperação, nesses momentos, uma vez que os jogadores, de ambos os grupos, nas situações apresentadas, possivelmente consideraram que a determinação do tesouro estava atrelada às ações realizadas em conjunto. Assim cada um dos membros da dupla se constituía enquanto agentes essenciais para se alcançar o objetivo do jogo. Esse aspecto pode ser identificado a partir das atitudes de compreensão e de valorização das ações individuais, bem como da ajuda mútua na construção de estratégias que sempre eram compartilhadas uns com os outros (BROWN, 2004). Ao se efetivar tais atitudes não sobrou espaço para reações negativas, perante ao erro ou a discordância de opiniões, aspectos estes que poderiam se constituir enquanto dificultadores da realização da *situação adidática* no contexto do jogo.

Na continuidade da realização das dicas atreladas à determinação das coordenadas, percebemos que os estudantes foram sanando as suas dúvidas uns com os outros e, na última dica, as ações utilizadas para determinar as localizações já eram comuns e compartilhadas com agilidade e precisão.

No que se refere as quatro dicas que permitiam abordar a relação entre as grandezas, ou seja, as dicas de números dois, quatro, seis e oito, as quais relacionavam a distância percorrida e o valor pago em reais. Amanda, ao ler a dica de número 2, para a determinação do valor a ser pago em uma corrida de táxi da casa de Marcus até a Arena Fonte Nova, no contexto do AB1, deveria considerar a distância de três quilômetros, entre esses pontos de referência e o fato da bandeira I, ter um custo de R$ 5,50 mais R$ 2,50 por quilômetro percorrido. Foi estabelecido o seguinte diálogo por Amanda, Beatriz e a pesquisadora:

> Amanda: É: $5{,}50 + 3 \times 2{,}50$.
> Pesquisadora: E isso dá quanto?
> Amanda: Dá... $5{,}50 + 3 \cdot 2{,}50$, dá 21 reais.
> Pesquisadora: Beatriz, será que está correto?
> Beatriz: Se essa for a conta o resultado dá 13.
> Pesquisadora: E agora? Vocês que vão decidir.
> Beatriz: É só fazer $2{,}50 \times 3$ dá $7{,}50$ e $7{,}50 + 5{,}50$ dá 13.
> Pesquisadora: O que você acha Amanda?
> Amanda: Assim, mesmo!
> Pesquisadora: E quem está certa?
> Amanda: A Beatriz!
> Pesquisadora: Por que a Beatriz está certa?
> Amanda: Porque ela fez 3 vezes $2{,}50$ que dá $7{,}50$ reais, mais $5{,}50$ deu 13.

O erro apresentado por Amanda estava relacionado ao cálculo, mas a estrutura que permitia determinar o resultado estava correta. Diante disso, questionamos as estudantes se elas gostariam de utilizar a calculadora para realizar as contas, na perspectiva de contribuir com o processo de validação do resultado. Elas disseram que poderíamos deixar sobre a mesa e caso necessitassem utilizariam. Para além disso, a função da pesquisadora foi de realizar a devolução de questionamentos, objetivando que Amanda e Beatriz pudessem, por si mesmas, identificar o erro que estava sendo cometido. Elas assumiram a responsabilidade e, conforme diálogo apresentado, argumentaram a solução correta. A estratégia utilizada por Mateus, que havia trabalhado com esse mesmo contexto, foi equivalente ao algoritmo que Amanda determinou em seu cálculo e o resultado encontrado também foi o valor de 13 reais.

Tanto Amanda quanto Mateus resolveram, sem nenhuma dificuldade, as dicas de número quatro e seis, que possuíam a mesma estrutura textual que a dica de número dois, alterando-se apenas a quantidade de quilômetros percorridos para: na dica de número quatro, sete quilômetros; e na de número seis, nove quilômetros; cujos valores que deveriam ser pagos foram 23 e 28 reais, respectivamente. Entretanto, na dica número oito, que mencionava sobre o valor pago por Ricardo -18 reais - e questionava sobre a quantidade de quilômetros percorridos, identificamos que ambos os estudantes vivenciaram um momento de desequilíbrio e adaptação a nova situação, conforme os pressupostos da Teoria das Situações Didática (BROUSSEAU, 1997). Tal inferência se reafirma no extrato do diálogo realizado pelo AB1, a seguir:

> Pesquisadora: Essa questão é diferente das demais questões?
> Amanda: Sim!
> Pesquisadora: Por que?
> Amanda: Porque ela não fala quantos quilômetros está a casa de Ricardo.
> Pesquisadora: Então, como podemos resolver? [depois de um tempo que ambas ficaram pensando Beatriz pediu para ler a questão].
> Beatriz: Deixa-me ler a questão?
> Amanda: Claro!
> Amanda: É só pegar dezoito e dividi por dois reais e cinquenta centavos.
> Pesquisadora: E a bandeira?
> Amanda: A bandeira é cinco reais e cinquenta centavos.
> Pesquisadora: Mas, ela não deveria estar nessa conta, quando ele paga dezoito reais ele também não pagou a bandeira?
> Amanda: Hum... hun.
> Beatriz: Você vai fazer o que?
> Amanda: Subtrair.

No diálogo, fica evidente a compreensão de Amanda em relação à questão e sua averiguação sobre o resultado do cálculo como sendo correspondente à quantidade de quilômetros percorridos. Entretanto, a estudante não sabia como fazer esse cálculo. Por esse motivo, sugeriu-se a divisão do valor pago referente a cada quilômetro, atrelando-se, a isso, a ideia de proporcionalidade que havia ficado presente nas dicas anteriores. Amanda e Beatriz buscaram juntas a solução, tanto que Beatriz pede a Amanda a dica para que ela pudesse ler e entender o que estava lhes sendo solicitado.

Já Mateus, no cenário do HM2, ao ler essa dica, tentou responder de imediato com o algoritmo que havia determinado para a solução das questões anteriores, conforme trecho da conversa a seguir:

> Mateus: Agora, nós pegaremos cinco e cinquenta que já é da bandeira, aí a cada quilômetro é dois e cinquenta. Vamos pagar... É... Aí vai dá...
> Pesquisadora: Qual é a distância da casa dele? [Mateus retomou a leitura da dica novamente].
> Mateus: Aqui não fala.
> Pesquisadora: Não fala? E, qual a informação que ele dá?
> Mateus: Que vai pagar 18 reais.
> Pesquisadora: Que vai pagar 18 reais. E, ele pede para saber o quê?
> Mateus: A quantidade de quilômetros.
> Pesquisadora: Então como podemos encontrar essa informação Mateus?
> Mateus: A gente pode encontrar...
> Pesquisadora: Se quiser usar a calculadora, pode ficar à vontade.
> Mateus: Eu acho que é 7 quilômetros.
> Helena: Ah, eu não sei fazer esse.

Mateus formulou a hipótese de que seriam sete quilômetros, mas ele havia calculado o valor a ser pago pela corrida de táxi quando a distância era de sete quilômetros, cujo valor havia dado 23 reais. Salientamos que as fases *adidáticas* de ação, formulação e validação, perante o contexto do jogo, favoreceu os estudantes para que, por si mesmos, avaliassem os seus resultados. Os questionamentos apresentados pela pesquisadora permitiram que Mateus e Helena pudessem refletir e buscar juntos uma nova formulação que possibilitasse a determinação da quantidade de quilômetros solicitada na questão e que pudessem validá-la, por meio da linguagem, conforme extrato apresentado a seguir:

> Mateus: Acho que preciso fazer uma regra de três.
> Pesquisadora: Uma regra de três. Será que com a regra de três obtemos o resultado Helena?
> Helena: Sim.

> Mateus: É... Aí vai ter 17 reais né, sobre... sobre... sobre x. Esta para dois e cinquenta... E agora? Está faltando um dado.

Mateus, diante da situação, formulou a conjectura de que poderia determinar o resultado valendo-se dos conhecimentos que possuía de proporcionalidade e o algoritmo da regra de três, mas ao investigar quais seriam as grandezas presentes na regra de três ele chegou à conclusão de que sua formulação não teria como ser validada. Ele passou a analisar o algoritmo que estava sendo utilizando nas dicas anteriores para então determinar a quantidade de quilômetros, valendo-se das operações inversas da adição e da divisão. Após várias tentativas e muitas devoluções apresentadas pela pesquisadora, Mateus chegou ao resultado, com o auxílio da calculadora digitando $(18 - 5{,}50)/2{,}50$, obteve como resultado cinco quilômetros.

As dicas de número dois, quatro, seis e oito, que foram exibidas à Beatriz no AB1 e à Helena no HM2 se referiam à Viagem de férias de Felipe para a cidade de Salvador, com a distinção de que estas não retomavam os valores da situação, como foi realizado para Amanda e Mateus, no contexto da Visita à Arena Fonte Nova. Dito de outra forma, os dados numéricos apresentados na dica de número um não eram retomados nas dicas de número dois, quatro, seis e oito. Tal fato influenciou na resposta apresentada pelas duas estudantes, conforme pode ser constatado no diálogo estabelecido pelo AB1, a seguir:

> Beatriz: O negócio que aluga carros [a locadora] foi deixar o carro com Felipe e ele vai só pra praia. Eu acho que é 50 centavos por dia e ele vai andar 8 quilômetros aí ele vai pagar 4 reais.
> Pesquisadora: Está certo Amanda?
> Amanda: Está certíssima!

O fato de não ter os dados na dica influenciou tanto Beatriz, que considerou em sua formulação apenas o valor de 50 centavos por cada quilômetro percorrido, quanto Amanda, que validou a resposta apresentada. Vale enfatizar que Beatriz não expressou o anseio em retornar para a dica número um, para conferir se os valores estimados por ela estavam ou não corretos. Diante dessa situação, as estudantes continuaram a responder as dicas que sucederam, desconsiderando a taxa fixa e considerando-se apenas o valor variável da situação. Fato este que permitiu a Beatriz apresentar como resultado, para a dica número dois, o valor de um real para os dois quilômetros que foram percorridos, sendo que, conforme análise *a priori*, esse valor dever ser de 19 ou 23 reais. Já com relação aos dez quilômetros trilhados, isto na dica de número seis, Beatriz apresentou o valor de cinco reais, cujo resultado deveria ser o valor de 20 ou 25 reais.

Já Helena no HM2, ao finalizar a leitura da dica de número dois, apresentou uma dúvida quanto aos valores e a pesquisadora interveio, conforme excerto a seguir:

> Pesquisadora: Helena, você lembra os valores apresentados na dica de número um? Ou melhor dizendo: para responder a dica você precisa saber quais informações?
> Helena: Teve 15 ou 50. Foi 15.
> Pesquisadora: 15 o que? Como nós podemos determinar o valor pago?
> Helena: 15 vezes 50

A formulação apresentada por Helena foi, inicialmente, de multiplicar os valores que estavam presentes na situação, mas esta formulação passou pela validação do que Mateus mencionou:

> Mateus: [...] São 8 quilômetros vezes os 50, mais os 15 que já paga.
> Helena: 415.
> Pesquisadora: Mais é 50, 50 centavos.
> Helena: Então é quatro reais e 15 centavos. Eu fiz de cabeça.
> Mateus: Mas é 50 centavos.
> Helena: Ah tá [Helena busca validar o seu cálculo na calculadora]. Ham... tá!
> Pesquisadora: Decidiram?
> Helena: 19.

Tal extrato nos permite inferir em relação às fases *adidáticas* da situação que a cada formulação apresentada era sempre avaliada e esta era validada ou não pelo colega, reafirmando-se, assim, a comparação que realizamos anteriormente das fases *adidáticas* com a espiral perfeita de Fibonacci. Além disso, dependendo do valor que havia sido pago, os estudantes ajuizavam a plausibilidade do mesmo perante à situação que estava sendo resolvida e isso lhes auxiliava no processo de validação. Como por exemplo, na resolução da dica de número seis, sobre o Hotel Campo Verde está localizado a uma distância de dez quilômetros da Praia do Forte, Helena buscou comparar os resultados e identificou que a solução encontrada não fazia sentido perante o contexto, conforme pode ser constatado pelas falas transcritas a seguir:

> Helena: Eu acho que não é isso [Helena digitou 50, então o resultado que foi apresentado foi 515, ela achou muito alto]. Será que é isso? [perguntou para Mateus]
> Mateus: Você precisa colocar zero vírgula cinco.
> Helena: Ah tá. Não, esquece. Calma, viu! Como eu vou colocar? [Pergunta a Mateus, que cochicha para Helena a ordem que deve digitar os valores na calculadora. Helena consultou Mateus várias vezes, para ter certeza de que estava fazendo o cálculo correto].
> Helena: Nossa, que diferença. Vinte.

Constatamos que ao ser apresentado o valor de 515, como resultado do cálculo realizado, Helena, de imediato, desconfiou que esse valor estava errado. A ação desempenhada por Helena foi a de envolver o seu colega Mateus para que ele lhe auxiliasse na formulação e na validação de uma nova estratégia. Foi então que Mateus informou que havia um erro na consideração de 50 unidades e não de 50 centésimos, ou conforme o contexto do jogo, de 50 reais e não 50 centavos. Após, toda a conversa, em forma de cochichos realizados entre eles, Helena determinou o valor correto para a situação, mencionando que o valor a ser pago seria 20 reais.

Em relação à dica número oito, a qual informava o valor pago de 27 reais e questionava a quantidade de quilômetros, Beatriz e Helena também passaram pelo mesmo processo de dúvida que Amanda e Mateus haviam vivenciado, na dica de mesmo número no contexto do jogo na Arena Fonte Nova, como pode ser constatado na interlocução estabelecida entre Beatriz e Amanda:

> Beatriz: 27 divido por 50. Eu acho que é por 50 mesmo, 50 centavos.
> Pesquisadora: Você acha que está correto Amanda?
> Amanda: Não!
> Beatriz: Dá... Vixi, se fosse outra quantidade, 27 divido por 2, dá 13 quilômetros,13,5 quilômetros.
> Pesquisadora: Você acha que está correto Amanda?
> Amanda: Hum hun!
> Pesquisadora: Por que dividir por 2?
> Beatriz: Porque 50 centavos é a metade de 1 real, que é 50 centavos. Aí, se é a metade de 1 real, é só pegar o valor e dividir pela metade.

Nesse diálogo, fica explícito que Beatriz estava tão acostumada a dividir a quantidade de quilômetros por dois que não se atentou para o fato de que a informação apresentada na questão já se referia ao valor que foi pago pela diária. Solicitamos que elas analisassem, juntas, a dica número seis e, então, identificassem a diferença desta para a dica de número oito. Após, essa consigna, Beatriz mencionou:

> Beatriz: Multiplicando... Ah é! Ele gastou o dinheiro, ele quer saber a distância. Então vai ser 54. Deu 54. Eu fiz 27 divido por 0,5 dá 54.
> Pesquisadora: Amanda, você entendeu a resposta que Beatriz apresentou?
> Amanda: Ah han!
> Pesquisadora: Qual foi o cálculo que ela fez?
> Amanda: 27 vezes 2.

Diante desse diálogo, é possível constatar que Amanda compreendeu a lógica que Beatriz estava em dúvida, isto é: 27 dividido por cinco décimos é igual a 27 dividido por meio, ou seja, 27 vezes dois. Para isso, Amanda levou em consideração o que Beatriz havia mencionado anteriormente, ou seja, que a cada quilômetro percorrido é pago metade de um real, ou seja, 50 centavos.

No HM2, Helena estabeleceu como ação ler a dica em voz baixa para, em seguida, explicar para Mateus. Desse modo, após ler a dica, de imediato ela mencionou para Mateus:

> Helena: Ô, ele quer descobrir a distância em quilômetros, entre a praia e o hotel.
> Pesquisadora: Sim e ele pagou quanto na locação do carro?
> Helena: Vinte e sete.

Assim, pelo trecho do diálogo, fica explícito que Helena compreendeu a solicitação da questão, sendo que ela foi apresentada a esta situação após Mateus ter resolvido a dica de número oito do contexto do jogo de futebol na Arena Fonte Nova. Levantamos, como hipótese, que isso pode ter influenciado a ação de Helena. Na busca pela formulação de uma hipótese foi estabelecido o seguinte diálogo:

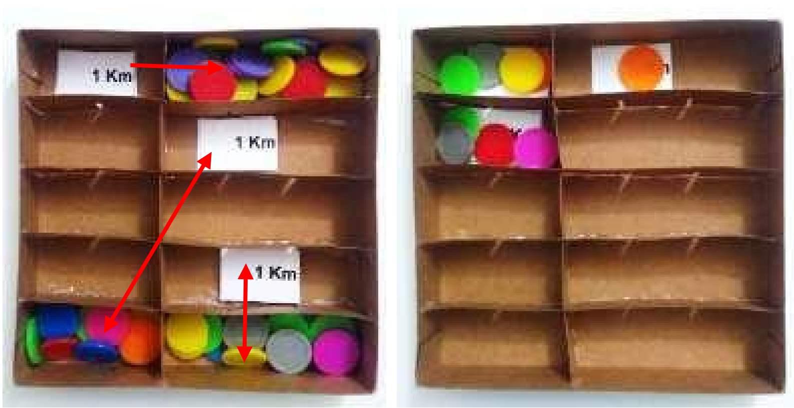
> Helena: É... cinquenta... cinquenta menos vinte e sete e divide por dois e cinquenta, ou por quinze e não dois e cinquenta [houve uma confusão entre os valores de Helena e de Mateus].
> Pesquisadora: Vamos rever novamente, você propõe fazer como?
> Helena: Cinquenta vezes vinte e sete dividido por quinze.
> Pesquisadora: Você concorda Mateus?
> Mateus: Concordo.
> Pesquisadora: Vamos fazer a conta?
> Helena: Qual é? [Helena, ficou com uma dúvida quanto às teclas da calculadora e então perguntou a Mateus].
> Mateus: O seu é zero vírgula cinco.
> Helena: Qual é? Eu já apaguei tudo. Han... é depois do igual, não é? Menos, menos o que? Dividido por cinco e cinquenta.
> Pesquisadora: Está certo Helena?

Na formulação inicial apresentada por Helena, ela propôs a realização do seguinte cálculo $(50 - 27)/15$. Ao convidarmos para rever as informações numéricas utilizadas, isso com o intuito de verificarmos se sua proposição seria defendida, Helena formulou uma nova solução, mencionando que seria $(0{,}50 \times 27/15)$. Ao efetuar os cálculos com a utilização da calculadora, lhes foi apresentado nove décimos como resultado, valor esse que não correspondia a solução correta para a dica. Destacamos que a última formulação apresentada por Helena havia sido influenciada pela dica que Mateus havia resolvido anteriormente. Na continuidade, Helena e Mateus teceram um diálogo que a levou a concluir que o cálculo deveria ser “vinte e sete menos quinze e dividido por cinquenta” (Helena). Nesse sentido, chegou ao valor de 24 quilômetros.

Os diálogos supracitados nos possibilitam constatar que se faz necessário repetir os valores em todas as dicas, considerando-se que nas dicas relacionadas ao jogo de futebol na Arena Fonte Nova os estudantes não tiveram dúvida quanto aos valores pagos na situação, isso pelo fato destes serem repetidos em todas as situações.

Após cada uma das respostas apresentadas nas dicas de número dois, quatro, seis e oito, ambos os grupos foram preenchendo o quadro de registros, sendo que a organização utilizada por cada um dos jogadores de ambos os grupos foi diferente (Figuras 33, 34 e 35). Ressaltamos que após o AB1 finalizar a dica de número seis, a pesquisadora solicitou que eles trocassem os registros que haviam sido realizados (Figura 33 – a e b) e analisassem o seu preenchimento.

Figura 33 - Quadro de registros preenchido pelo AB1



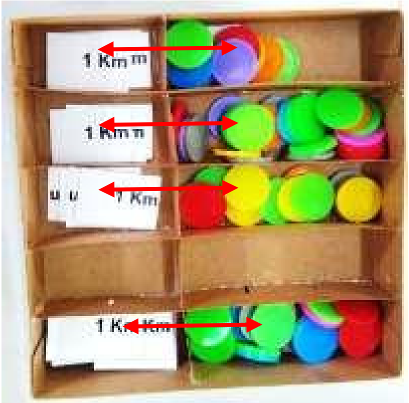
(a) Amanda (b) Beatriz

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 33: Imagens de duas caixinhas de papelão, com as legendas (a) e (b), divididas em duas colunas com cinco linhas cada uma, formando dez retângulos ao total. No primeiro retângulo da primeira caixinha, há um papel escrito “1 Km”. Ao lado, o retângulo foi preenchido com algumas fichas redondas coloridas. Logo abaixo, na segunda e na quarta linhas, há outros dois papéis com “1 Km” e já na parte inferior estão outras fichas redondas coloridas. Ao lado, na segunda caixinha, o primeiro e o segundo retângulos da primeira linha estão preenchidos com as fichas redondas coloridas, assim como o primeiro retângulo embaixo (Fim da descrição).

Amanda analisou o quadro de registro com os valores que haviam sido determinados nas dicas de número dois, quatro e seis de Beatriz, e então decidiu reorganizar o seu quadro e colocou as fichas de quilômetro ao lado das moedas, conforme Figura 34, o que facilitou marcar os pontos no primeiro quadrante do plano de coordenada cartesianas. Beatriz deixou o seu registro como havia feito anteriormente, isto é, com as moedas e as placas de quilômetros em um mesmo espaço da tabela, enfatizamos também, a impossibilidade vivenciada por Beatriz para o registro do resultado do cálculo da dica número oito, pois, como necessitaria de 54 fichas de um quilômetro e em sua caixa não possuía, ela decidiu não informar esse cálculo em seu quadro de registros. Além disso, em nenhum momento, Beatriz mencionou a necessidade de retornar a dica número um para verificar os valores apresentados.

Figura 34 - Quadro de registros apresentado por Amanda



Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 34: A imagem é de uma caixa feita de papelão organizada em duas colunas e cinco linhas. Na primeira coluna e na primeira, segunda, terceira e quinta linhas foram preenchidos com fichas escritos “1 Km”. Na segunda coluna, na primeira, segunda, terceira e quinta linha contém várias fichas redondas de cores diversas: verde, amarelo, rosa, lilás, azul, vermelho e laranja. Há quatro setas em vermelho sobre as fichas que ligam as informações da primeira coluna com as da segunda coluna, em uma mesma linha (Fim da descrição).

A reorganização que Amanda fez possibilitou uma leitura mais rápida das informações que estavam sendo concebidas em seu quadro de registros e isso acabou favorecendo a representação dessas informações em forma de coordenadas posteriormente, no plano de coordenadas cartesianas. No HM2 (Figura 35 – a e b), Mateus construiu, desde o início do jogo, o seu quadro com as informações, de maneira similar ao quadro final que foi apresentado por Amanda. Já Helena construiu de maneira aleatória, fato que influenciou na marcação dos pontos e na determinação do gráfico e da lei da função.

Figura 35 - Quadro de registros preenchido pelo HM2

(a) Mateus (b) Helena

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 35: Imagens de duas caixas de papelão, com as legendas (a) e (b), divididas em duas colunas com cinco linhas cada uma, formando dez espaços. No primeiro espaço da primeira caixa, há um papel escrito “1 Km”, na coluna ao lado desse espaço foi preenchido com algumas fichas redondas coloridas. Logo abaixo há outros três espaços com papéis escritos “1 Km”, ao lado destes, fichas redondas coloridas, sendo possível identificá-las como moedas que representam o valor um real. Há setas que ligam a primeira e a segunda coluna, nos quatro espaços preenchidos dessa primeira caixa. Na segunda caixa, a primeira coluna encontra-se preenchida nos quatro primeiros espaços com fichas de plástico e papéis em branco, na segunda coluna a primeira linha está vazia e as linhas seguintes estão preenchidas de forma alternada com papéis e fichas redondas de plástico. Há quatro setas que ligam, em uma mesma coluna, os papéis e as fichas de plástico (Fim da descrição).

Ademais, solicitamos que Mateus e Helena trocassem os seus quadros para investigar como estavam representando e se as informações estavam claras e realizamos o seguinte diálogo:

> Pesquisadora: Você conseguiria identificar os valores e as correspondências entre eles? Só para vocês analisarem mesmo. Vocês conseguem identificar quais foram as primeiras contas que foram feitas? [Entreguei os quadros de registros trocados para que analisassem um o quadro do outro].
> Helena: Sim. A primeira.
> Pesquisadora: E a segunda?
> Helena: Também.
> Pesquisadora: E a terceira?
> Helena: Também.
> Pesquisadora: E a quarta?
> Helena: A quarta... Aqui.
> Pesquisadora: Mateus, você consegue me dizer qual foi a primeira conta de Helena?
> Helena: O meu está desorganizado.
> Mateus: Eu não sei se foi essa daqui?
> Pesquisadora: Tá e a segunda?
> Mateus: Segunda... Acho que foi essa daqui...
> Pesquisadora: E a terceira?

Mateus: Deve ter sido essa daqui.

Com esse diálogo, Helena percebeu que a organização apresentada por Mateus não gerava dúvidas para outras pessoas que fossem analisar o quadro. A intervenção realizada pela pesquisadora possuía o intuito de contribuir para que os estudantes pudessem considerar as suas representações e o fato de estarem construindo tabelas contendo a correlação entre variáveis as quais seriam, posteriormente, representadas em um plano de coordenadas cartesianas. Esses momentos vivenciados pelos estudantes caracterizam a fase *adidática*: com o processo que compreendeu a ação de preencher o quadro; formulação na maneira como estariam preenchendo e a validação que foi esse momento de troca realizada entre eles. Além disso, caracterizam também como pertencentes à fase *didática*, na medida em que as intervenções realizadas pela pesquisadora tiveram o intuito de possibilitar que os estudantes refletissem sobre as tabelas e concluíssem qual a melhor maneira para organizá-las.

Após a resolução da dica de número oito, passamos para a dica de número nove, na qual era solicitado que os jogadores trabalhassem juntos. Mesmo essa dica não tendo sido mencionada anteriormente, ou seja, que os jogadores poderiam ou deveriam atuar juntos e “brincar com o outro e não contra o outro” (ALMEIDA, 2011, p. 17), ambos os grupos já haviam feito isso, pois, desde o início do jogo, trabalharam juntos e sempre um orientava e auxiliava na resolução da dica do colega. Assim, a cooperação aconteceu de maneira natural ao longo de todo o jogo.

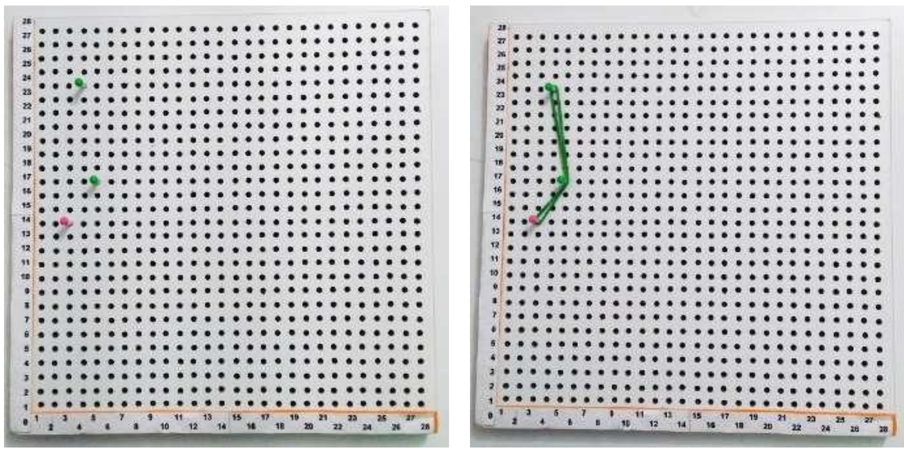
Ademais, a dica de número nove solicitava, ainda, que os estudantes analisassem juntos o quadro de registros e representassem as informações deste quadro em um sistema de coordenadas, placa de madeira com furos; em seguida, determinassem as fórmulas que possibilitavam calcular qualquer valor pago em cada uma das situações investigadas. Assim, com as informações que estavam registradas no quadro de registros, os membros do AB1 e HM2 marcaram os pontos no plano de coordenadas cartesianas.

No contexto do jogo de futebol na Arena Fonte Nova, os pares ordenados envolvendo os quilômetros percorridos e os valores pagos deveriam ser, conforme análise *a priori*, formado por: $\{(3,13);\ (5,18);\ (7,23)\ e(9,28)\}$. Amanda, partícipe do AB1, ao organizar o seu quadro de registros, fez a contagem errada das moedas e das fichas de 1 quilômetro, isso porque pegou moedas e fichas em linhas diferentes.

No momento da contagem, não foi estabelecido nenhum parâmetro que pudesse lhe auxiliar, fato que a levou a determinar os seguintes pares ordenados, referentes a quilômetros e moedas respectivamente: $\{(3,14);\ (5,17);\ (5,24)\ e\ (9,29)\}$.

Perante a esses valores, Amanda encontrou um empecilho para representar o ponto de coordenadas $(9,29)$, isso pela limitação de números no eixo vertical, que estava numerado até o 28. Além disso, quando Amanda foi marcar o ponto de coordenada $(5,24)$ o ponto $(5,17)$ já estava marcado, ela então contornou esse ponto e acabou marcando $(4,24)$ no primeiro quadrante do plano de coordenadas cartesianas, conforme Figura 36 (a). Em seguida, Amanda pegou a liguinha e contornou os pontos, conforme Figura 36 (b).

Figura 36 - Marcação de pontos por Amanda no plano de coordenadas cartesianas



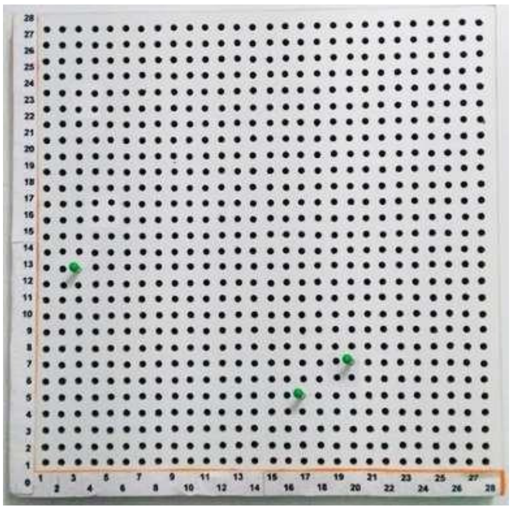
(a) (b)

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 36: Imagem com duas fotografias de dois planos de coordenadas cartesianas, eixos positivos, numerados de zero a 28 na horizontal e na vertical, com as legendas (a) e (b). Na primeira foto, a foto (a) com três pinos nas cores verdes e rosas marcados na parte esquerda superior, na segunda foto (b) além dos pinos há um elástico verde que contorna os pinos (Fim da descrição).

No contexto do HM2, Mateus ficou com as mesmas dicas que Amanda no AB1, ele marcou os pontos de coordenadas: $\{(3,13);\ (17,5)\ e\ (20,7)\}$. O erro cometido por Mateus foi trocar a ordem das coordenadas, isto é, na representação do segundo e terceiro ponto o que era abscissa passou a ser ordenada e vice versa, conforme representação dos pontos na Figura 37:

Figura 37 - Pontos marcados por Mateus



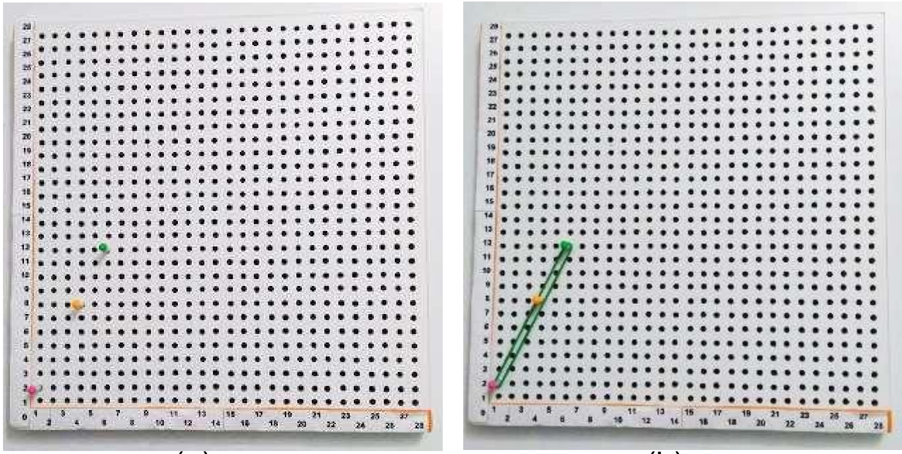
Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 37: Foto do primeiro quadrante do plano de coordenadas cartesianas, com numeração nos eixos horizontal e vertical do número zero ao número 28. Há a marcação de três pinos verdes (Fim da descrição).

Assim, mesmo com a representação no quadro de registros de uma maneira que favoreceria correlacionar as variáveis, na marcação dos pontos e, posteriormente, na ligação destes para a construção do gráfico, Mateus não se atentou para a importância da correspondência e demarcação da abcissa e da ordenada de um ponto. Esse erro pode vir a se constituir enquanto um obstáculo epistemológico. Contudo, se realizada uma institucionalização dos conceitos de maneira a se discutir e explicitar quais são as variáveis dependente e independentes, esse obstáculo pode ser superado.

No contexto da Viagem de férias de Felipe para a cidade de Salvador, conforme descrevemos em nossa análise *a priori*, os estudantes poderiam determinar enquanto pares ordenados os seguintes valores: $\{(2,16);\ (8,19);(10,20);(24,27)\}$ ou se for levado em conta tanto a ida quanto o retorno $\{(2,17);(8,23);(10,25)\ e\ (12;27)\}$. Beatriz, partícipe do grupo AB1, por ter desconsiderado a taxa fixa de 15 reais apresentada na situação, realizou o registro dos seguintes pares ordenados (Figura 38): $\{(2,1),(4,8)\ e\ (6,12)\}$, o único par ordenado que ela não conseguiu registrar foi o $(54,27)$. Após marcar os pontos, de acordo com a Figura 38 (a), Beatriz utilizou uma liguinha e os uniu, consoante a Figura 38 (b).

Figura 38 - Marcação de pontos por Beatriz no plano de coordenadas cartesianas



(a) (b)

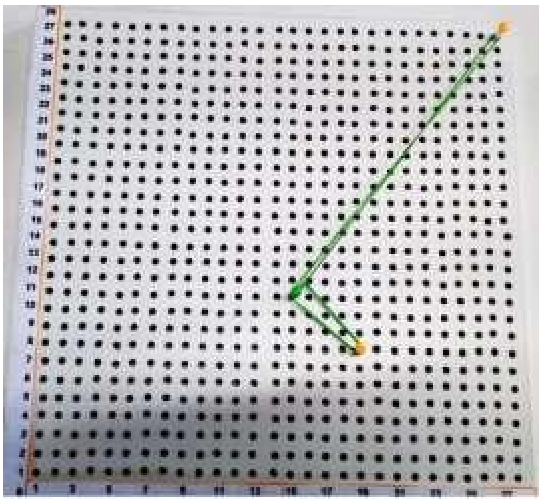
Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 38: Imagem com duas fotos apresentando o plano de coordenadas cartesianas e abaixo das fotos as legendas (a) e (b). Na foto (a) há três pinos alinhados nas cores rosa, laranja e verde. Na foto (b) são apresentados os mesmos pinos unidos por um elástico verde formando uma linha reta (Fim da descrição).

Ressaltamos que Beatriz não levou em consideração a taxa fixa e perante a situação apresentada as suas soluções estão incorretas. Entretanto, ao analisarmos a justificativa e o fato dela considerar apenas o valor variável, os pontos marcados e o gráfico construído estão corretos, apresentando uma função linear com apenas o coeficiente angular cujo contexto depende da quantidade de quilômetros da situação.

Nessa mesma conjuntura, Helena marcou os seguintes pares ordenados: $\{(15,11);\ (19,8)\ e\ (28,28)\}$. A dificuldade apresentada por Helena relacionou-se à maneira como organizou as informações no quadro de registros, tendo em vista que, naquele momento da atividade, ela não se lembrava mais quais eram os valores que estavam relacionados e o local onde os havia organizado. Ademais, ao fazer a contagem das fichas e moedas, ela não demarcou os espaços em que estava contando e acabou transferindo fichas e moedas de um espaço para o outro. Portanto, o gráfico construído por Helena, Figura 39, não corresponde à situação investigada pelas dicas.

Figura 39 - Representação gráfica elaborada por Helena



Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 39: Foto do plano de coordenadas cartesianas contendo a inscrição na horizontal dos números de zero a 27 e na vertical de zero a 28. Na foto há três pinos nas cores laranja e verde e um elástico ligando esses três pontos (Fim da descrição).

Salientamos que durante o manuseio da placa de madeira que representa o plano de coordenadas cartesianas, isso por ambos os grupos, foi constatada a necessidade de aumentar o espaço entre os furos, aspecto que os professores já haviam sinalizado durante a avaliação do material. Tal ampliação poderá corrigir a dificuldade que os estudantes com cegueira possam ter quanto à passagem de um furo para outro adjacente, sendo que esta passagem não foi constatada durante o manuseio de Beatriz, estudante com baixa visão participante da pesquisa. Ademais, poderá facilitar a leitura dos números em braile e em tinta.

Na continuidade, realizamos a dica de número dez, a qual solicitava a determinação das fórmulas que estavam presentes em cada uma das situações. Destacamos que na dupla AB1, ambas as estudantes determinaram a lei da função a qual permitia associar as duas grandezas. Beatriz mencionou que a representação algébrica para a situação de Amanda seria:

> Beatriz: x vezes dois vírgula cinco, mais, cinco vírgula cinco.
> Pesquisadora: Concorda Amanda?
> Amanda: Concordo.
> Pesquisadora: Esse valor possibilita calcular qualquer quantidade a ser paga. Essa fórmula que vocês me deram, vocês sabem como é o nome dela? Amanda, você sabe como é o nome dessa fórmula?
> Amanda: Equação.

Amanda apresentou um possível obstáculo epistemológico, isto ao considerar que a representação algébrica de uma função é dada por uma equação. Talvez tenha sido influenciada pelas dicas que apresentavam os valores para a incógnita e transformava, com isto, a representação algébrica da função em uma equação, na qual poderia ser determinado o valor numérico ou a representação numérica da função.

Para a situação analisada por Beatriz, ela mencionou que bastava multiplicar a quantidade de quilômetros por cinco décimos, essa seria, portanto, a fórmula que modelava a sua situação, cujo tema abordado foi a Viagem de férias de Felipe à cidade de Salvador.

No HM2, Mateus determinou a fórmula de maneira imediata, pois, durante todas as situações, ele vinha retomando esse algoritmo, mas Helena teve um pouco de dificuldade em relacionar as variáveis que havia investigado nas dicas anteriores, conforme excerto a seguir:

> Mateus: Era... Era... Cinco e cinquenta da bandeira mais, a quantidade de quilômetros percorrido multiplicado por dois e cinquenta.
> Pesquisadora: Se eu disser que essa quantidade de quilômetros é x. Então, vezes x. Certo?
> Mateus: Isso.
> Helena: A minha é a: quinze. Não, é cinquenta... É, cinquenta.
> Pesquisadora: Cinquenta centavos.
> Helena: Vezes vinte e cinco, dividido por quinze.

Para Helena, até esse momento, a relação entre as variáveis ainda não era tão simples de ser determinada. Ela conseguiu apresentar de maneira algébrica a relação investigada, mas isso foi fruto das inúmeras devoluções que a pesquisadora realizou e do incentivo para que eles estabelecessem essa relação, contando com a colaboração do outro.

As dicas de número 11, de ambos os contextos, complementavam-se e possuíam o intuito de iniciar o processo de institucionalização dos conhecimentos que os estudantes haviam construído até então, isto ao apresentar o conceito de função e caracterizar as situações que se constituem como tal. Enfatizamos que após finalizarem a leitura da dica, as estudantes da dupla AB1 mencionaram que o jogo foi divertido, sendo que Helena e Mateus, do segundo grupo, acharam o jogo bem legal.

No contexto da ludicidade, ressaltamos que o jogo foi elaborado com o intuito de favorecer o despertar do espírito lúdico no decorrer de toda a situação didática, isto é, durante os momentos de ação, formulação, validação e institucionalização. Assim, constatamos que durante o jogo, um dos sentimentos explicitados pelas estudantes que apontou indícios da presença da ludicidade foi a curiosidade e o desafio por cumprir as dicas para chegar ao tesouro escondido. Isto provocou os estudantes a levantarem algumas hipóteses sobre ser uma pedra preciosa ou muito dinheiro, por estarem em contato com as moedas de plástico que foram utilizadas no jogo.

Tais sentimentos relacionam-se à dimensão lúdica de ser desafiadora, apontada por Macedo, Petty e Passos (2005), a qual estava atrelada à surpresa e ao desafio intrínseco de uma situação pautada nos pressupostos da ludicidade. O desafio pode ter sido evidenciado ao se considerar que, em todas as dicas, ambos os estudantes buscaram solucioná-las e sempre estavam muito atentos a sua dupla de jogo, pois quando era apresentada uma solução que parecia estar equivocada, ambos paravam para identificar o que não estava fazendo sentido.

Ademais, o jogo possibilitou também a valorização de outros conhecimentos que os estudantes foram mobilizando, isso através do incentivo à ação, formulação e validação de hipóteses de maneira autônoma. Tais formulações e validações podem ser comparadas às ações realizadas pelos matemáticos de profissão, sendo esta atitude defendida pela TSD como sendo um caminho para o desenvolvimento dos processos de ensino e aprendizagem mais autônomos no âmbito da Matemática. Além disso, houve indícios que o jogo pode favorecer a inclusão, na medida em que permite ser utilizado tanto por estudantes, com cegueira ou baixa visão, quanto por videntes, com o uso dos mesmos materiais, mas respeitando as singularidades e igualmente possibilitando acessibilidade, ou seja, um processo de aprendizagem com autonomia, segurança e eficiência, aspectos que podem promover a inclusão no ensino da matemática, especificamente do conceito de função.

CAPÍTULO 6

ANÁLISES DA SEGUNDA VERSÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Inclusão é mais difícil de definir [...] reflete a equidade. Trata-se de um processo: medidas e práticas que abarcam a diversidade e criam um sentimento de pertença, baseado na convicção de que cada pessoa tem valor e contém um potencial e deve ser respeitada. No entanto, a inclusão também é um estado das coisas, um resultado, cuja natureza multifacetada torna difícil a sua definição (UNESCO, 2020, p. 11, tradução nossa).

Iniciamos este capítulo com a epígrafe retirada do documento intitulado “A inclusão e a educação: todos e todas sem exceção” (UNESCO, 2020), o qual apresenta os informes do seguimento da educação e discute sobre o processo de inclusão pelo mundo, levando em consideração as várias alterações e transformações sociais vivenciadas pela sociedade no ano de 2020, dentre estas a emergência na saúde pública com a pandemia da Covid-19. Tal acontecimento acarretou inúmeras mudanças e adicionou novos desafios e níveis de exclusão, relacionados ao acesso e à inclusão frente ao contexto de ensino remoto e à distância.

Este documento, elaborado pela Unesco, apresenta a inclusão na educação enquanto um processo multifacetado, difícil de se definir, mas que visa à realização de medidas e práticas, com o intuito de remover obstáculos relacionados ao direito à educação, de modo a abarcar a diversidade e possibilitar o desenvolvimento de um sentimento de pertencimento, de respeito e aceitação das individualidades. Assim, para que possamos construir uma educação para todos e todas, faz-se necessário um planejamento cuidadoso que promova a melhoria do desempenho acadêmico, desenvolvimento social e emocional, autoestima, aceitação e a incorporação dos princípios do diálogo, da participação e da equidade (UNESCO, 2020).

Assim, escrevemos este capítulo descrevendo a construção da segunda versão do material didático e apresentamos uma análise das entrevistas realizadas junto a dois professores do Ensino Médio de uma escola pública do Distrito Federal, sendo que um deles atua na Sala de recursos (Paulo) e o outro na sala de aula regular (Samuel). O objetivo geral proposto é investigar as potencialidades e limitações da Teoria das Situações Didáticas para a inclusão de estudantes com deficiência visual nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função mediados por um recurso lúdico. Buscou-se, com isso, a melhoria da primeira versão do material didático, a partir dos dados que foram coletados e descritos no capítulo 5, aprofundando as discussões propostas nesta tese.

Vale ressaltar que devido à necessidade de distanciamento social ocasionada pela pandemia da Covid-19, realizamos apenas avaliações individuais dos materiais que apresentaram necessidade de ajustes e que compõem o jogo, junto a um dos estudantes, partícipes da experimentação da primeira versão do material (Mateus) e a outros dois estudantes, do Ensino Superior (Carlos e Cibele) que avaliaram individualmente as impressões das células braille. Desta forma, não realizamos a experimentação com outros estudantes do Ensino Médio ou anos finais do Ensino Fundamental, isso pela necessidade inerente do jogo cooperativo de ser executado tendo a participação de pelo menos dois jogadores em um mesmo espaço, para possibilitar a interação, o diálogo e a colaboração, aspectos estes que demandariam o contato físico e próximo entre esses estudantes.

6.1 Os materiais didáticos que compõem o jogo *Caça ao tesouro* à luz da acessibilidade

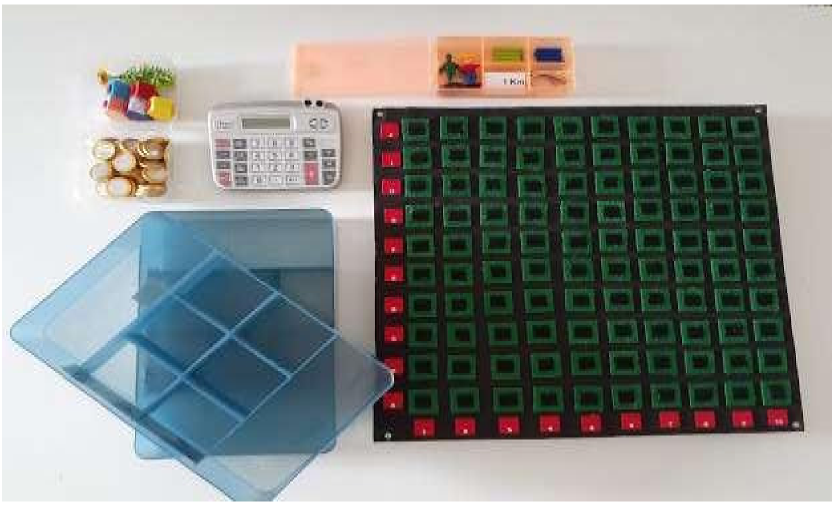
A elaboração da segunda versão do jogo *Caça ao tesouro* levou em consideração a necessidade de incentivar a autonomia dos estudantes na vivência da situação *adidática* (BROUSSEAU, 1997); os obstáculos constatados na experimentação da primeira versão, realizada junto aos estudantes do Ensino Médio com deficiência visual; bem como as sugestões apresentadas pelos professores da Sala de recursos. Contemplou-se, também, os pressupostos da acessibilidade e do desenho universal (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2015; BRASIL, 2001, 2015, 2018; CAMBIAGHI, 2018 e SILVA, 2019). Além disso, seguimos os critérios apresentados por Cerqueira e Ferreira (2016) no que se refere à elaboração de recursos didáticos acessíveis para estudantes com deficiência visual, a saber: tamanho adequado; significação tátil; aceitação; estimulação visual; fidelidade; facilidade de manuseio; resistência e segurança.

Enfatizamos que todos esses critérios foram levados em conta na elaboração da segunda versão do jogo *Caça ao tesouro*. Alguns materiais necessitaram de uma atenção maior quanto a um ou outro critério, os quais estaremos ressaltando ao longo desta seção. Mas, de maneira geral, os materiais apresentados buscaram ser fáceis de manusear, tanto pelos estudantes com deficiência visual quanto videntes.

Buscamos, também, substituir os materiais da primeira versão que não possuíam resistência, ou estragavam com facilidade e, de igual modo, buscamos ofertar materiais seguros que não oferecessem risco para os estudantes (CERQUEIRA; FERREIRA, 2016).

Nesta segunda versão, o jogo *Caça ao tesouro* sofreu alterações em seu formato. O convite para descobrir o tesouro escondido foi apresentado nas regras do jogo, fato este que alterou a ordem de apresentação da história da *Caça ao tesouro*, a qual passou a ser a última dica do jogo. Apresentamos, ainda, no início das regras, os materiais que poderiam vir a auxiliar os estudantes na descoberta do tesouro, isto é: uma calculadora sonora, duas caixas organizadoras com divisórias e alguns objetos que poderiam lhes auxiliar nos registros das informações durante o jogo; uma maquete de um bairro, que contém ruas e quadras e que deverá conter casas e uma árvore, as quais deveriam ser fixadas por eles, seguindo as orientações presentes nas regras do jogo, conforme Figura 40:

Figura 40 - Segunda versão do material didático



Fonte: Nossa produção (NERY, 2021).

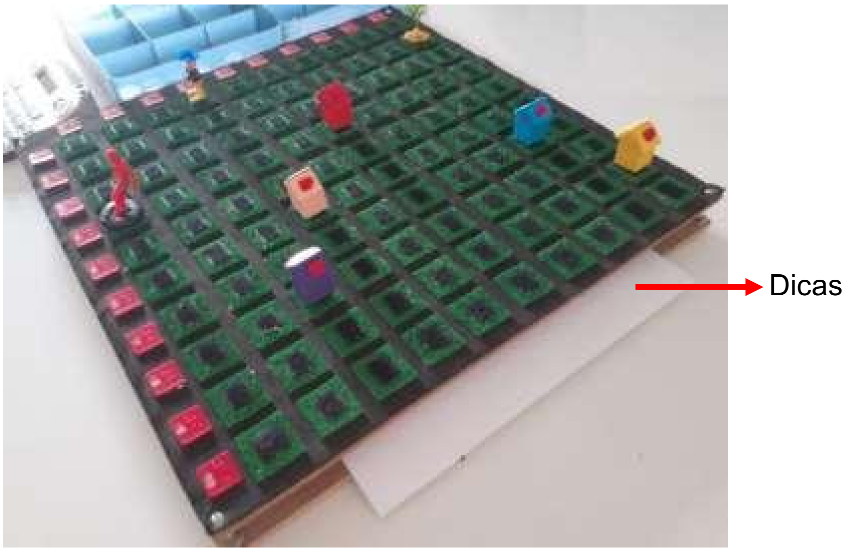
Descrição da Figura 40: Foto de vários objetos. No lado esquerdo, na parte superior, está uma árvore em miniatura de plástico e cinco pequenas casas nas cores azul, vermelha, rosa, roxa e amarela, além de representações de moedas de 1 real e uma calculadora sonora. Ainda na parte superior, à direita, há uma caixa organizadora laranja com: dois bonecos em miniatura; alguns canudos cortados nas cores verde e azul; fichas de papel com a inscrição de um quilômetro e elásticos coloridos. Na parte inferior da foto, à esquerda, há duas caixas organizadoras na cor azul sem as tampas. Ao lado, na parte inferior à direita, há uma maquete com formato quadrado, cujas medidas são de 45 centímetros por 45 centímetros; tem uma base na cor preta e sobre essa base há 100 pequenos quadrados na cor verde, de mesmo tamanho e alinhados, sobre os quadrados há um velcro preto; na parte inferior e horizontal da maquete, há 10 pequenas placas na cor vermelha com a numeração em braille e tinta de 1 a 10 e na parte esquerda da maquete e vertical há a indicação da letra A até a letra J em braille e tinta (Fim da descrição).

Pensando no conjunto de materiais que compõem o jogo, vertemos a nossa atenção para o tamanho adequado dos mesmos, levando em conta que materiais excessivamente pequenos não ressaltam detalhes, aspecto constatado na utilização dos animais em miniatura, tal como na primeira versão do material didático. Ademais, caso tenham partes removíveis estas podem facilmente se perder. Por outro lado, não devem ser exagerados no tamanho, pois necessitam permitir que os estudantes tenham uma dimensão da sua totalidade (CERQUEIRA; FERREIRA, 2016).

Na experimentação realizada, constatamos que um tamanho razoável para a maquete e para o primeiro quadrante do plano de coordenadas cartesianas seria de dimensões medindo 450 milímetros, tanto de comprimento quanto de largura. Em relação à altura, poderia variar até no máximo 100 milímetros e isso não influenciaria no manuseio. Contudo, algo que era necessário, dizia respeito a permissibilidade de os estudantes poderem retirar e colocar as casas e a árvore sem se preocupar em danificar o material. Por isso, utilizamos uma placa em MDF de espessura igual a seis milímetros.

Diante da possibilidade de ampliar a altura do material para um tamanho que não influenciasse no manuseio da maquete, resolvemos fixar as duas placas de MDF que representavam a maquete e o primeiro quadrante do plano de coordenadas cartesianas, utilizando quatro parafusos colocados em suas extremidades, sendo que para o primeiro quadrante do plano de coordenadas cartesianas bastava os estudantes virarem a maquete da parte superior para a inferior e vice-versa. Assim, com a junção da maquete e do primeiro quadrante do plano de coordenas cartesianas, conseguimos reduzir significativamente a quantidade de materiais que foram entregues aos estudantes e disponibilizados, ao mesmo tempo, sobre a mesa. Ademais, deixamos um espaço entre a maquete e o plano de coordenadas cartesianas, com o intuito de alocarmos as dicas, conforme representado na Figura 41.

Figura 41 - Maquete tátil com objetos e dicas



Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 41: Foto tirada da lateral direita de uma maquete de formato quadrado. A maquete tem uma base na cor preta com pequenos quadrados verdes alinhados igualmente e sobre eles pequenos velcros na cor preta. Há, sobre alguns velcros, os seguintes objetos: um homem em miniatura de plástico na cor vermelha; cinco casas espalhadas sobre a maquete nas cores roxa, rosa, vermelha, azul e amarela; outra miniatura de um homem com um chapéu de abas na cor azul e uma árvore. Na parte inferior da foto, há um papel e uma seta vermelha indicando que são as dicas (Fim da descrição).

Acreditamos que as dicas entre a maquete e o primeiro quadrante do plano de coordenadas cartesianas poderia facilitar o manuseio pelos alunos, levando-se em conta que as pastas classificadoras com divisórias utilizadas na primeira versão do material didático, constituiu-se enquanto um obstáculo para a autonomia dos estudantes cegos. Assim, as referidas pastas foram retiradas desta segunda versão do material didático.

Os próximos materiais que serão apresentados são: a árvore e as casas. Para a construção e escolha de cada um deles, consideramos, além do tamanho do material, a significação tátil, isto é, buscamos utilizar relevos perceptíveis, com diferentes texturas que pudessem ressaltar as partes que compunham cada material, também a utilização de contrates que permitissem distinções adequadas entre liso/ápero (CERQUEIRA; FERREIRA, 2016). Utilizamos várias texturas, tanto na maquete para diferenciar as ruas e quadras, quanto nos telhados das casas para diferenciá-las.

Ao vertermos o nosso olhar para a aceitação dos materiais que podem ser influenciados pelas texturas e cores utilizadas, salientamos que estas foram escolhidas com cuidado, evitando uma possível rejeição durante o manuseio. Buscou-se evitar qualquer tipo de irritação da pele ou reações sensoriais desagradáveis aos estudantes. Intencionou-se, também, estimular a percepção visual, com a utilização de cores fortes e contrastantes, aspectos que coadunam com as orientações apresentadas por Cerqueira e Ferreira (2016).

A árvore da segunda versão do material didático possui folhas de plástico e encontra-se fixada em uma plataforma com um velcro, como pode ser observado na Figura 42 (b), acreditamos que esta árvore não traria dúvidas quanto ao seu formato. Tal mudança ocorreu porque árvore apresentada na primeira versão, conforme Figura 42 (a), possuía a sua copa achatada e não permitia sentir as suas folhas, fato que gerou, em vários momentos, dúvidas nos estudantes com cegueira, durante a execução do jogo.

Figura 42 - Árvores

(b) Árvore da primeira versão.

(a) Árvore da segunda versão.

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 42: Duas fotos de árvore. A foto (a) é da árvore da primeira versão do material didático, em material plástico, na cor verde, com a copa achatada. A foto (b) é a árvore da segunda versão do material didático, em material plástico na cor verde e com folhas com pontas amareladas (Fim da descrição).

Realizamos a substituição das casas que foram construídas em papel cartão e utilizadas na primeira versão do material didático por casas em miniatura arquitetadas em madeira (Figura 43). Retiramos também os animais que eram fixados nos telhados das casas, pois estes não eram acessíveis para sua identificação, tendo em vista que para reconhecê-los os estudantes necessitavam de experiências prévias com estes materiais e/ou animais, as quais lhes possibilitassem identificar os seus formatos. O intuito desta alteração foi utilizarmos materiais mais resistentes, duráveis e acessíveis, atentando-se aos pressupostos da acessibilidade que foram apresentados por Cambiaghi (2018), no sentido de um objeto para ser acessível deve ser compreendido por todos, independentemente de experiências prévias que os sujeitos possuam.

Figura 43 - Casas

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

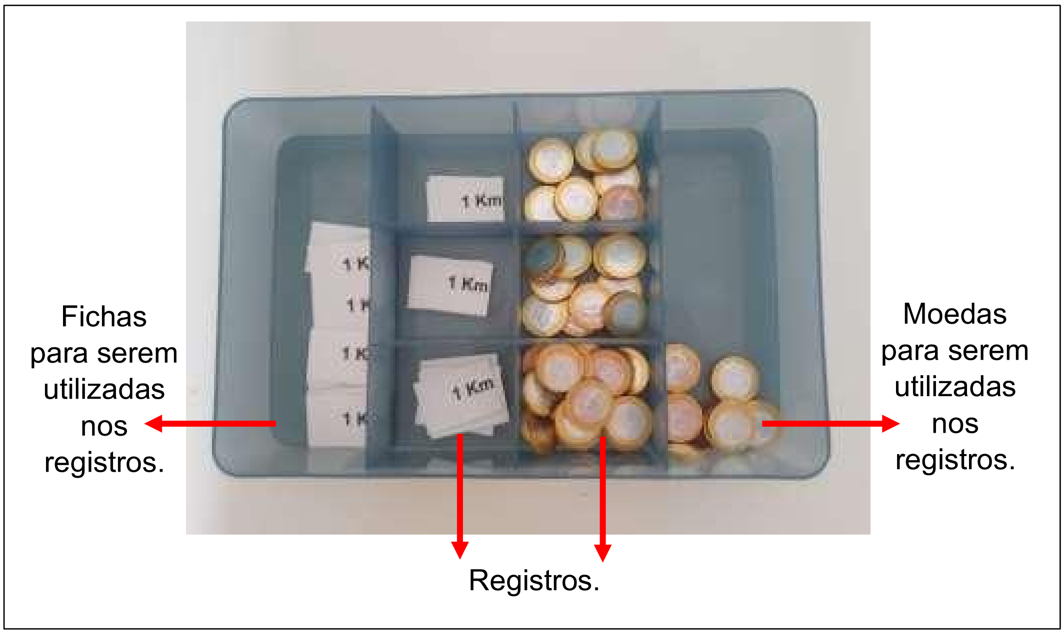
Descrição da Figura 43: Cinco casas de cores: azul, rosa, roxa, amarela e vermelha, de mesmo tamanho e formato, com texturas na parte esquerda do telhado e com uma placa contendo uma letra em braille colada na parte direita dos telhados (Fim da descrição).

Devido à alteração nas referências das casas, mudamos também o enredo do jogo, pensando no desenho universal, o qual compreende a concepção de produtos, ambientes, programas e serviços (BRASIL, 2015). Tendo em vista que o enredo descreve o lócus imaginário onde se desenrola o *Caça ao tesouro*, levamos em conta a possibilidade de os estudantes não conhecerem a cidade de Salvador e os pontos turísticos que estavam sendo referendados nas dicas e no contexto da história, então deixamos o contexto mais geral, apenas informamos aos alunos, nas regras do jogo, que eles precisavam encontrar um tesouro e que necessitavam percorrer um bairro e passar por alguns pontos de referência.

Vale destacarmos que cada uma das casas representava uma referência para os estudantes, assim a casa azul correspondia à farmácia, possuía em seu telhado a letra f e a textura lisa feita com papel seda; a casa rosa representava um restaurante, com a letra r no telhado e textura feita com papel ondulado; a roxa, uma lanchonete, com a letra l no telhado e com textura de algodão; a amarela, papelaria com a letra p no telhado e uma textura da mesma cor da casa feita com emborrachado em Etil, Vinil e Acetato (EVA) atoalhado e, por último, a casa na cor vermelha se referia a um mercado com a letra m no telhado e uma textura feita com EVA com glitter, cuja sensação é de algo não liso, porém não causa desconforto ao tato.

Outro material que merece destaque são as duas caixas organizadoras, que deveriam ser entregues uma para cada um dos jogadores e utilizadas no decorrer do jogo para a construção das tabelas com as informações relacionadas aos quilômetros percorridos e valores pagos. Estas são: de plástico, aspecto que pode facilitar o seu manuseio; possuem oito espaços, sendo seis espaços centrais e dois espaços maiores em suas laterais, esses últimos, possivelmente auxiliarão os estudantes na manipulação das moedas e placas de quilômetro. Acreditamos que o seu formato poderia induzir os estudantes a utilizarem os espaços centrais para a organização das informações. Assim, esperamos que os alunos utilizem uma coluna central para colocar os quilômetros e a outra coluna os valores pagos, conforme representação realizada na Figura 44, facilitando a posterior construção do gráfico da função.

Figura 44 - Quadro de registros da segunda versão do material didático



Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

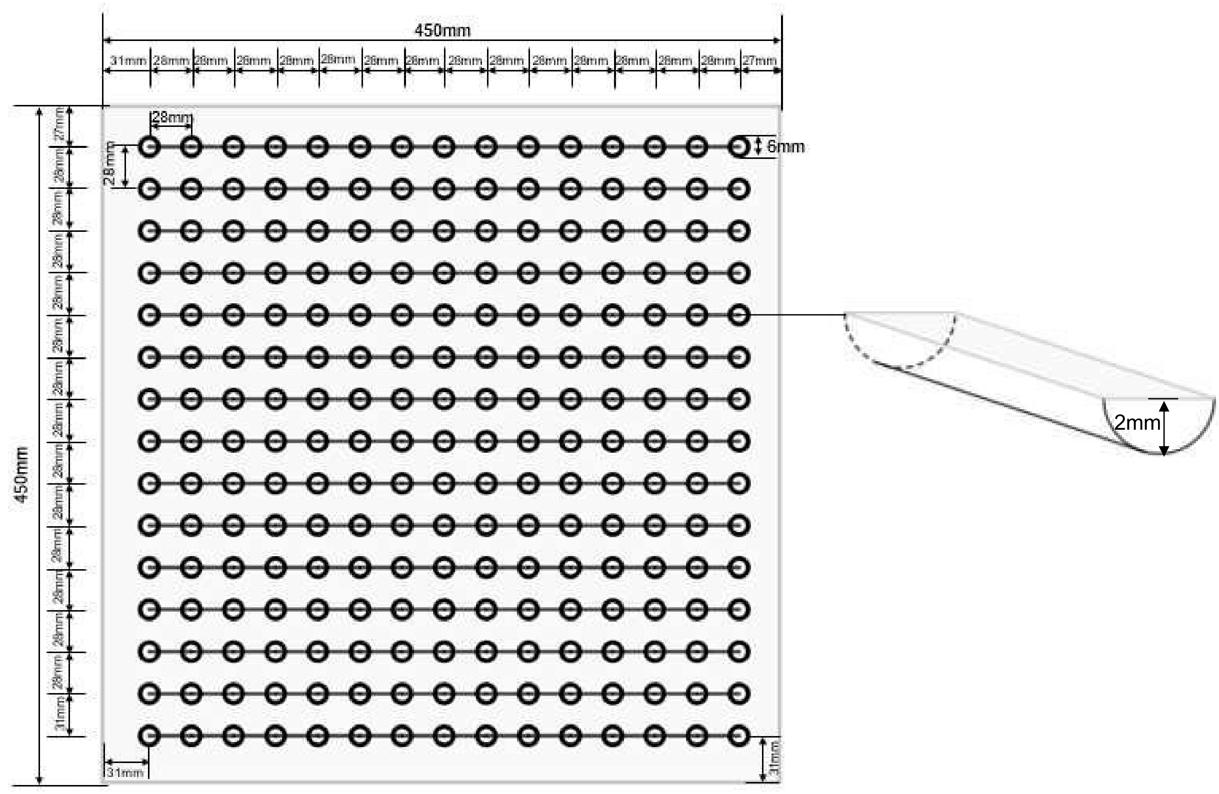
Descrição da Figura 44: Foto de uma caixa organizadora retangular, com oito espaços, todos preenchidos: a primeira coluna constitui-se em um único espaço e possui fichas com a descrição em tinta e braille de um quilômetro (1 km) e uma seta saindo deste espaço e indicando fichas para serem utilizadas nos registros; a segunda coluna é dividida em três espaços, ocupados cada um deles por fichas com a inscrição 1 km; a terceira coluna, também dividida em três espaços ocupados com moedas de um real, desta coluna e da anterior partem uma seta que indica registros; e, a última coluna possui moedas e uma seta indicando para a inscrição moedas para serem utilizadas nos registros (Fim da descrição).

As moedas utilizadas nesta segunda versão foram escolhidas com o intuito de atendermos ao critério de fidelidade (CERQUEIRA; FERREIRA, 2016), na medida em que este pressupõe que o material apresentado seja fiel a sua representação original em relação à proporção de tamanhos, cores e texturas. Assim, como utilizamos na primeira versão do material moedas de plástico, coloridas, achamos conveniente a utilização de moedas que se assemelhassem mais ao modelo exato e original.

Após a construção da tabela, os estudantes foram orientados a marcar os pontos no plano de coordenadas cartesianas, sendo que, para isso, foi disponibilizada a representação do primeiro quadrante do plano de coordenadas cartesianas. Na versão anterior do jogo *Caça ao tesouro*, o primeiro quadrante do plano cartesiano apresentou inúmeros obstáculos para os estudantes: o espaçamento entre os furos que antes era de dez milímetros e as orientações vertical e horizontal não possuíam indicações. Corroborando com Oliveira (2010) e Souza (2015), no que se refere à constatação de que os estudantes com cegueira, principalmente cegueira congênita, apresentam dúvidas quanto à exploração tátil de informações expressas de maneira bidimensional, devido à constante leitura na horizontal, aspecto que também verificamos na experimentação realizada, acrescentamos relevos baixos e altos no primeiro quadrante do plano de coordenadas cartesianas para guiar a orientações vertical e horizontal, respectivamente.

Dessa maneira, construímos uma representação do primeiro quadrante do plano de coordenadas cartesianas com a utilização de uma máquina fresadora *Computer Numeric Control* (CNC), criando um espaçamento maior entre os furos, sendo que a distância do centro de um furo ao outro foi de 28 milímetros. Cada furo possuía seis milímetros de medida de diâmetro e de profundidade; havia um baixo relevo em formato de calha na horizontal cuja medida de profundidade era de dois milímetros, conforme pode ser observado na Figura 45, a seguir:

Figura 45 - Esboço do plano de coordenadas cartesianas

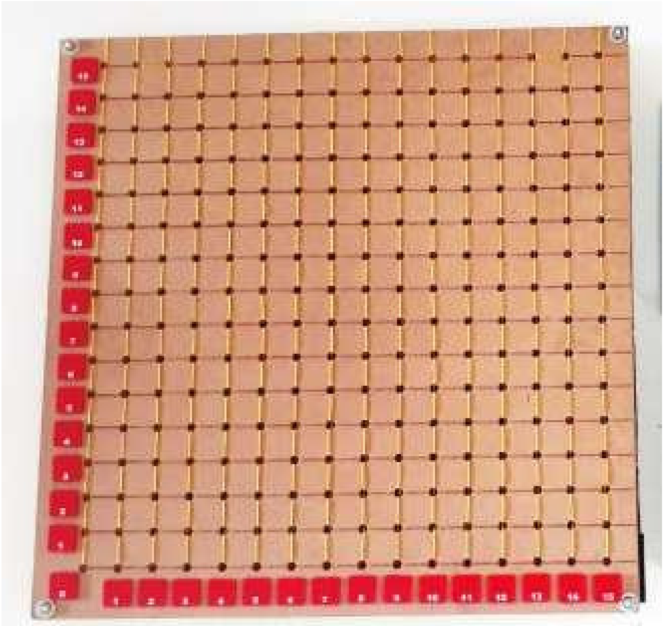


Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 45: Desenho digital com duas figuras interligadas. A primeira figura possui o formato de um quadrado de medidas de lados iguais a 450 milímetros. Na parte inferior da figura e ao longo da horizontal há 15 circunferências com medida de diâmetro igual a seis milímetros, à esquerda do quadrado há também 15 círculos ao longo da vertical. Assim, a figura forma uma malha com 225 circunferências com distâncias de um ao outro de 28 milímetros. Há uma linha que liga as circunferências ao longo da horizontal do quadrado. A segunda figura possui o formato de uma calha formada por um semicírculo de raio igual a dois milímetros (Fim da descrição).

Além de nos atentarmos aos espaçamentos entre os furos, a ampliação dos furos e o baixo relevo ao longo da direção horizontal do primeiro quadrante do plano de coordenadas cartesianas, aspectos que foram todos construídos com a utilização da máquina fresadora CNC, acrescentamos, também, no primeiro quadrante representado, um alto relevo ao longo da direção vertical feito com linha de polipropileno na cor amarela e pequenas placas com a numeração arábica e em braille de zero a 15, tanto na vertical quanto na horizontal, conforme Figura 46.

Figura 46 - Segunda versão do plano de coordenadas cartesianas



Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 46: Foto de uma placa de madeira. Na parte inferior e ao longo da horizontal há dezesseis placas pequenas em material plástico de cor vermelha, numeradas do zero ao 15. Essa mesma numeração também está sendo apresentada à esquerda, ao longo da vertical. A placa possui 225 furos ligados ao longo da horizontal por marcas feitas na placa que deixam um baixo relevo e são interligados também ao longo da vertical por uma linha de polipropileno na cor amarela que deixa um alto relevo (Fim da descrição).

Levamos a representação do primeiro quadrante do plano de coordenadas cartesianas, que havia sido preparado com o auxílio da máquina CNC, tendo o acréscimo da linha de polipropileno amarela, para que Mateus, partícipe da experimentação da primeira versão do material didático, pudesse avaliar o manuseio desse novo material. Mateus marcou os pontos, sugeridos pela pesquisadora, $(3{,}4)$ e $(4{,}6)$, perfazendo um tempo de 40 segundos e mencionou: “o manuseio desse plano foi muito mais fácil e rápido, pois não tem como se perder entre os furos, por ter referências [se referindo aos relevos]”.

Destacamos que a nova placa apresentada a Mateus ainda não possuía as numerações em braille, conforme representado na Figura 47. Por esse motivo, ele iniciava a contagem da origem ao longo da primeira linha das abcissas e utilizava, para isso, o baixo relevo como estratégia de orientação. Após localizar as abscissas, ele partia para a contagem ao longo da linha vertical em que estava e então determinava o ponto, a partir dos valores das abcissas e ordenadas que lhe havia sido informado pela pesquisadora.

Figura 47 - Mateus avaliando a segunda versão do plano de coordenadas cartesianas

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 47: Foto do tronco de um jovem vestido com uma camisa preta, sentado em frente a uma mesa com as mãos sobre uma placa de madeira (Fim da descrição).

Assim, identificamos, a partir do manuseio e da fala de Mateus, que o primeiro quadrante do plano de coordenadas cartesianas estava acessível, considerando-se que este atendia aos princípios de avaliação de projetos fundamentados no desenho universal, a saber: equiparação nas possibilidades de uso; flexibilidade de uso; uso simples e intuitivo; informações perceptíveis; tolerância ao erro; mínimo esforço e dimensionamento dos espaços (CAMBIAGHI, 2018).

Ressaltamos, em relação ao último princípio apresentado, isto é, ao dimensionamento dos espaços, que apesar de termos ampliado a distância entre os furos e os tamanhos dos furos, a dimensão da placa com 450 milímetros não se constitui em um tamanho desconfortável para a utilização e pode possibilitar que os estudantes tenham uma percepção de todo o espaço que compõem o plano, aspecto constatado na observação realizada pela pesquisadora no decorrer do manuseio feito por Mateus.

Destacamos, ainda, outro obstáculo que se fez presente na primeira versão tanto na maquete tátil quanto no primeiro quadrante do plano de coordenadas cartesianas, atrelado ao braille impresso em papel de gramatura 120 e colado sobre esses materiais. Essas informações apresentadas em braille após várias leituras realizadas pelos alunos, o relevo foi danificado e até suprimido, isso gerou algumas dúvidas, tanto em relação às localizações na maquete quanto no primeiro quadrante plano de coordenadas cartesianas, aspecto que pode ter influenciado, também, na marcação dos pontos. Diante disso, utilizamos uma impressora que faz impressões em três dimensões (3D) com cabine fechada para a impressão das células braille, as quais foram utilizadas para a indicação das letras tanto nos telhados das casas quanto na marcação da maquete e do primeiro quadrante do plano de coordenadas cartesianas. A construção dessas células permeou o princípio da prototipagem rápida e do *design* centrado no usuário, isto é, pessoas com deficiência visual.

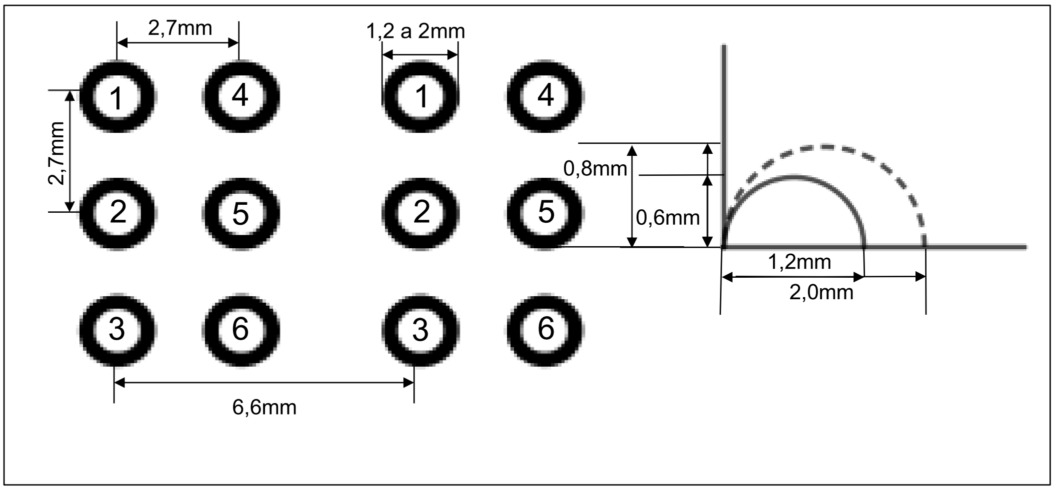
6.1.1 A Prototipagem Rápida de células Braille em 3D: uma contribuição para a construção de materiais didáticos acessíveis

A Prototipagem Rápida ou *Rapid Prototyping* é definida por Carvalho e Valpato (2006, p. 3) "como um processo de fabricação através da adição de material em forma de camadas planas sucessivas, isto é, baseado no princípio da manufatura por camadas". Assim, o processo se iniciou a partir da construção de um modelo em 3D e impresso em camadas de duas dimensões, assemelhando-se a um material sendo fatiado e reconstruído através da sobreposição das camadas de maneira sequencial em um processo de aquecimento que permite unir as camadas, gerando uma peça física única em 3D.

Para a Prototipagem Rápida de uma peça em 3D são realizadas algumas etapas a saber: modelagem tridimensional com a utilização de um sistema *Computer Aided Design* (CAD); geração da geometria 3D da peça; verificação do arquivo de dados; planejamento do processo para fabricação e definição de estratégias do fatiamento e da sobreposição das camadas; fabricação e, por último, a limpeza e acabamento da peça (VALPATO, 2006).

Para a modelagem tridimensional da célula braille com a utilização do CAD, necessita-se, inicialmente, definir as medidas adequadas ao tato. Considera-se, desse modo, que a disposição da célula braille são dadas a partir de um arranjo de seis pontos (123456), dispostos em duas colunas e três linhas, numerados de cima para baixo e da esquerda para a direita, cujo ponto em braille deve ter aresta arredondada na forma esférica e cujas medidas devem ser dispostas conforme a Norma de Acessibilidade da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), da seguinte maneira (Figura 48):

Figura 48 - Disposição da célula braille



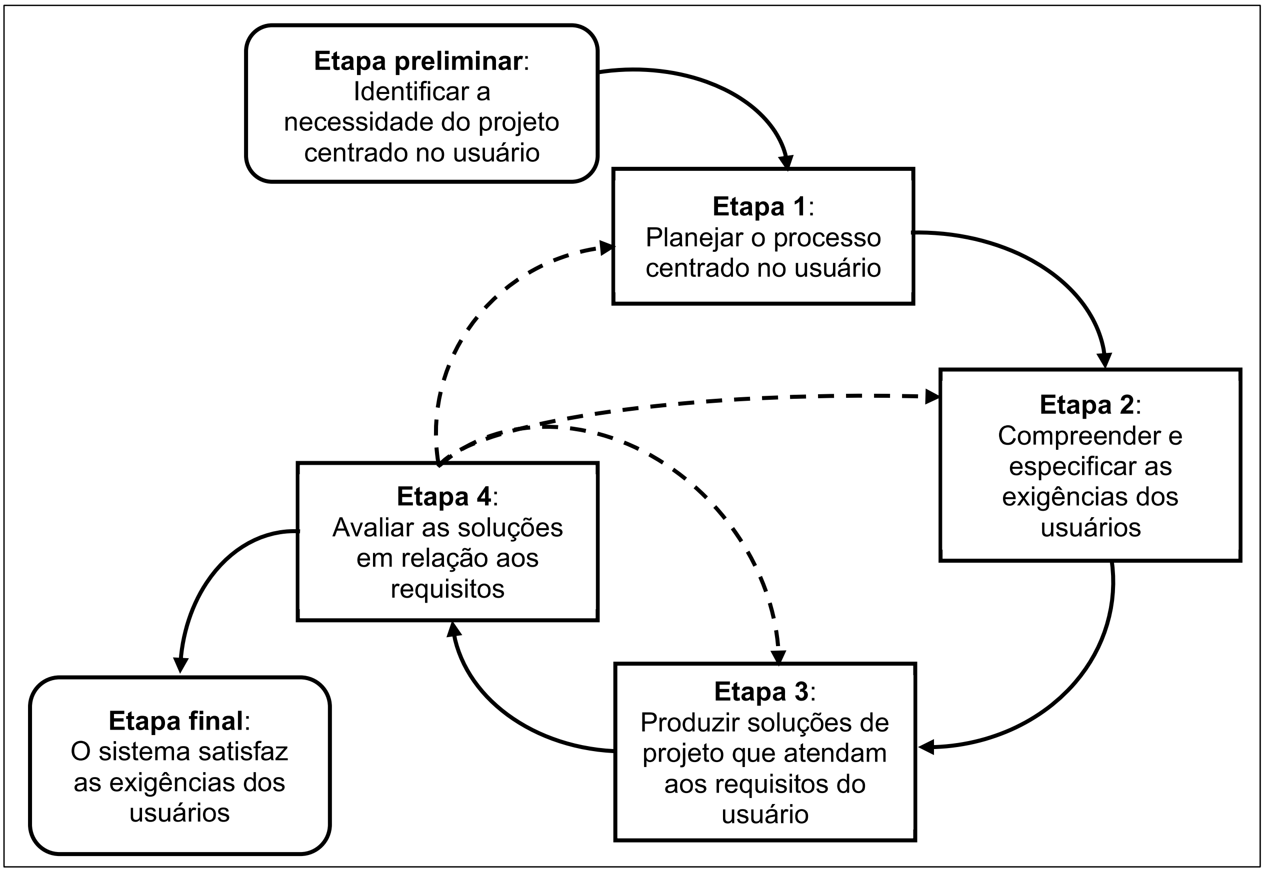
Fonte: Adaptado de Associação Brasileira de Normas Técnicas (2020).

Descrição da Figura 48: Desenho das dimensões de duas células braille. Cada uma delas possuem seis circunferências numeradas de cima para baixo e da esquerda para a direita de um a seis. São demarcadas as distâncias das circunferências com os numerais um e quatro e um e dois como sendo de medidas iguais a 2,7 milímetros. Além disso, são apresentadas as distâncias entre a primeira e a segunda célula braille como sendo de medida igual a 6,6 milímetros e o diâmetro de cada uma das circunferências pode variar de 1,2 a 2 milímetros. Além disso, há um desenho indicando o arredondamento do ponto dessas células (Fim da descrição).

Destarte, sugere-se que as informações apresentadas em braille nas edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos (ABNT, 2020) tenham o ponto em braille com arestas arredondadas em formato esférico ou abobadado, tendo como medida de altura do ponto entre 0,6 e 0,8 milímetros e cujo diâmetro da base deve ter dimensão entre 1,2 e 2,0 milímetros. Outro aspecto, refere-se ao espaçamento entre os pontos, conforme representado na Figura 48, deve ser de 2,7 milímetros.

Ressaltamos que a metodologia utilizada para o desenvolvimento das células braille fundamentou-se no *Design* Centrado no Usuário (DCU), que é uma abordagem metodológica de construção de sistemas interativos e produtos, com intuito de torná-los utilizáveis aos usuários, considerando-se as suas necessidades e exigências (ABNT, 2011). Os usuários, na metodologia do DCU participam ativamente da criação dos produtos e, por conseguinte, influenciam nas características do produto final. Para isso, pautamos no modelo cíclico de projeto centrado no usuário apresentado na ISO 9241-210 que trata sobre “Ergonomia da interação humano-sistema: projeto centrado no ser humano para sistemas interativos” (ABNT, 2011, p.1), as etapas que foram percorridas encontram-se descritas na Figura 49:

Figura 49 - Interdependência das etapas do DCU



Fonte: Adaptado de ISO 9241-210 (ABNT, 2011).

Descrição da Figura 49: Diagrama em formato cíclico, contendo quatro etapas interligadas de maneira circular, além das etapas preliminar e final, descritas da seguinte maneira: etapa preliminar, identificar a necessidade do projeto centrado no usuário; etapa 1, planejar o processo centrado no usuário; etapa 2, compreender e especificar as exigências dos usuários; etapa 3, produzir soluções de projeto que atendam aos requisitos do usuário; etapa 4, avaliar as soluções em relação aos requisitos e etapa final, conferir se o sistema satisfaz as exigências dos usuários (Fim da descrição).

A etapa preliminar do modelo cíclico foi a identificação da necessidade do projeto centrado no usuário, esta surgiu no âmago da construção do jogo *Caça ao tesouro*, com o intuito de torná-lo acessível em relação às informações que deveriam ser apresentadas em braille, de modo a atender também as orientações apresentadas pela Norma Brasileira de Acessibilidade (ABNT, 2020) quanto às dimensões das células braille. Para que o jogo se tornasse acessível, necessitávamos garantir que essas medidas fossem adequadas aos usuários.

No contexto da primeira etapa, a qual permeou o planejamento do DCU, convidamos dois estudantes cegos, Carlos e Cibele, frequentadores do Laboratório de Apoio às Pessoas com Deficiência Visual (LDV), da Universidade de Brasília, para avaliarem os protótipos do braille. Ambos são estudantes do curso de Licenciatura em

Música da Universidade de Brasília, sendo um do sexo masculino e a outra estudante do sexo feminino, possuem cegueira e utilizam o braille para leitura e escrita. Ressaltamos que esta escolha se deu pela proximidade do LDV ao Laboratório de *Design*, local onde estávamos realizando a modelagem das células braille, ambos localizados no mesmo campus da referida universidade. Assim, a participação destes graduandos no presente estudo se materializou a partir da avaliação dos protótipos do braille em 3D.

Nesta mesma etapa de planejamento, realizamos a Prototipagem Rápida de duas versões dos ladrilhos do braille versão 1, com o numeral sete impresso na horizontal e a versão 2, numeral um impresso na vertical, as quais seguiram as dimensões apresentadas na Norma Brasileira de Acessibilidade (ABNT, 2020) e cujos ladrilhos possuíam dimensões medindo: 20 milímetros de comprimento; 20 milímetros de largura e 2,6 milímetros de altura.

Após a Prototipagem Rápida, levamos os ladrilhos do braille ao LDV para serem avaliados por Carlos e Cibele, perfazendo-se uma ação da segunda etapa de desenvolvimento do DCU. A informação obtida sobre a versão 1, impressa na horizontal, foi da ilegibilidade do braille e, na versão 2, impressa na vertical, o ponto não estava agradável ao tato, estava muito pontudo. Com isso, identificamos as exigências dos usuários, as quais relacionavam-se à distância entre os pontos e à ampliação do arredondamento da esfera do ponto.

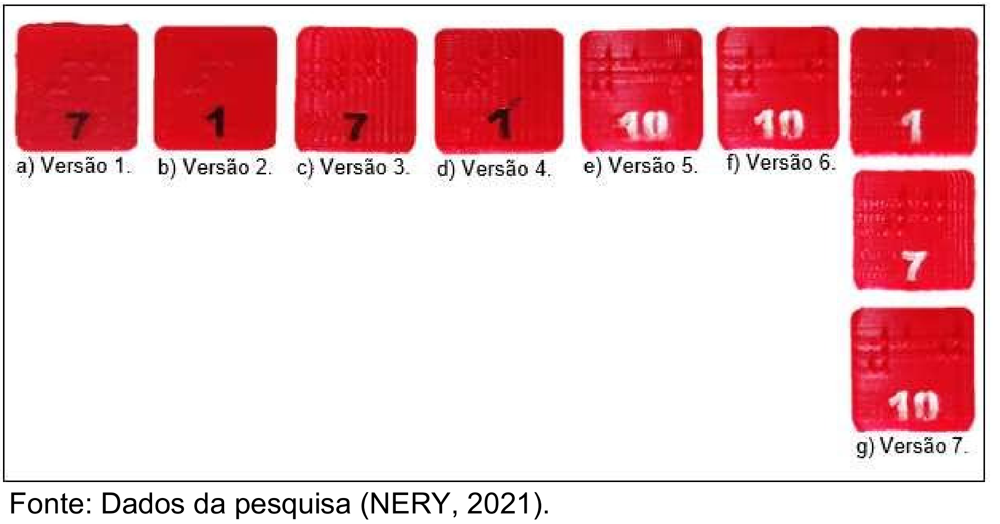
Ao vertermos o nosso olhar para a utilização dos ladrilhos, contendo as células braille, no lócus do material didático, sentimos a necessidade de reduzir a sua espessura de 2,6 milímetros para 2 milímetros, por identificarmos que, ao fixarmos os ladrilhos em uma plataforma plana (maquete e plano de coordenadas cartesianas), a espessura menor poderia facilitar a identificação e a leitura das informações. Com isso, construímos e imprimimos os protótipos das versões 3 e 4 na horizontal e vertical, contendo os algarismos sete e um, respectivamente.

Avaliamos as soluções frente aos requisitos apresentados pelos usuários, perfazendo a quarta etapa do DCU, constatamos que estas vinham ao encontro das exigências que haviam sido apresentadas por eles. Após isso, levamos os ladrilhos com os numerais sete e um novamente ao LDV e pedimos para os mesmos graduandos avaliarem a acessibilidade do braille, os quais mencionaram que estes ladrilhos estavam legíveis, agradáveis ao tato e a alteração na altura não interferia na leitura da célula braille. Pedimos, ainda, que os estudantes comparassem as duas versões, isto é, 3 e 4 e, destacando a mais agradável. Ambos preferiram a versão 4 que havia sido impressa na vertical.

Com essa constatação, chegamos à etapa final do DCU, isto ao averiguarmos que o sistema satisfez as exigências dos usuários. No entanto, tínhamos a necessidade de modelar ladrilhos com três células braille, os quais representariam números com dois algarismos, tendo em vista que as quatro primeiras versões do braille em 3D eram numerais com um algarismo e com duas células braille. Achamos pertinente realizarmos a Prototipagem Rápida do numeral dez, com as dimensões informadas como acessíveis e levarmos para os usuários reavaliarem sua acessibilidade.

Diante disso, modelamos os protótipos das versões 5 e 6. No protótipo da versão 5, mantivemos o mesmo espaço da versão 4 entre as três células braille, isto é, de cinco milímetros de distância entre as células. Na versão 6, diminuímos este espaço para 4,4 milímetros. Ao apresentarmos para os graduandos, eles mencionaram que tanto a versão 5 quanto a versão 6 estavam legíveis e agradáveis, demonstrando mais afeição pela versão 6, que possuía um espaço menor entre as células braille e havia sido impresso na vertical. A Figura 50, a seguir, representa todas as versões e ladrilhos que foram avaliados pelos referidos graduandos no LDV.

Figura 50 - Protótipos do braille

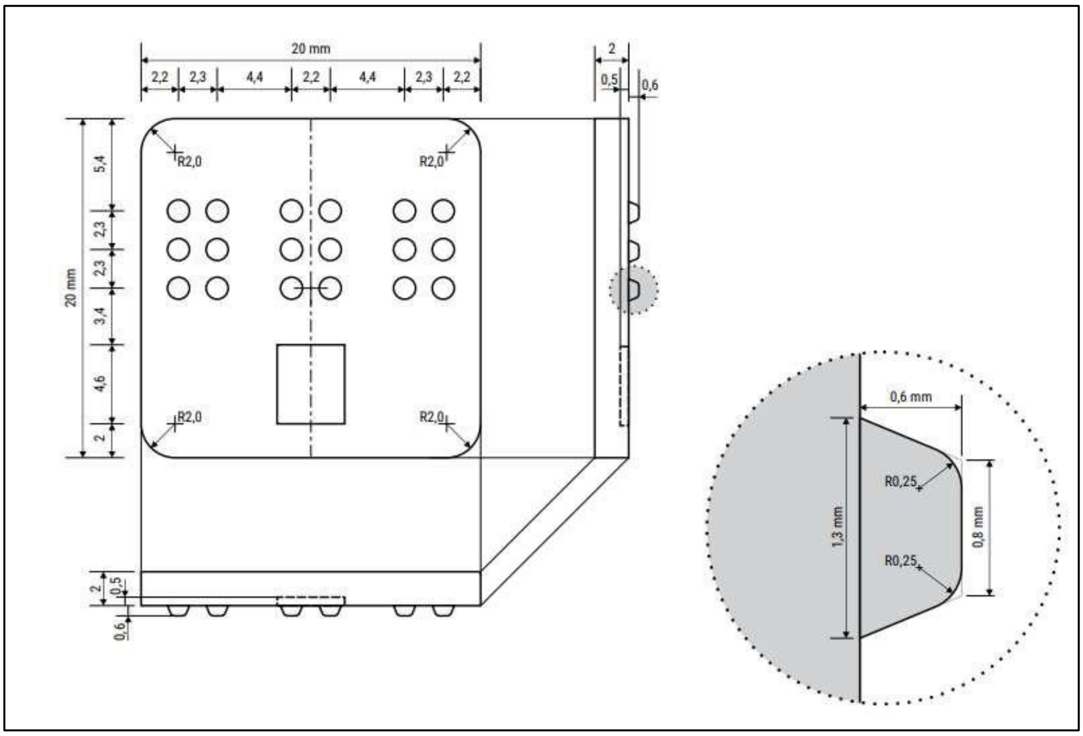


Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 50: Protótipos de braille em formato quadrado com as arestas arredondas na cor vermelha, no canto superior sentido horizontal dispostos em sete colunas, nomeadas da versão 1 até a versão 7 apresentam os número sete, um e dez em tinta e braille: a) versão 1, número 7; b) versão 2, número 1; c) versão três, número 7; d) versão 4, número 1; e) versão 5, número 10; f) versão 6, número 10; g) versão 7, os números 1, 7 e 10, dispostos separadamente na vertical e de cima para baixo (Fim da descrição).

Salientamos que a versão 7, representada na Figura 50, apresenta os numerais um, sete e dez avaliados pelos estudantes como acessíveis. Assim, todos os ladrilhos construídos para o material didático que compunham o jogo *Caça ao tesouro*, isto é, os números de zero a 15 e as letras de A a J estavam com as dimensões representadas na sétima versão. Destacamos que a modelagem tridimensional de todas as sete versões foi construída em um CAD e as dimensões utilizadas para a modelação da sétima versão estão representadas na Figura 51:

Figura 51 - Modelagem tridimensional do braille



Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 51: Desenho digital das dimensões de uma célula braille para impressão em 3D, com os tamanhos em milímetros (Fim da descrição).

Enfatizamos a necessidade de divulgarmos os resultados deste estudo, pois durante a modelação do ladrilho do braille em 3D fizemos uma revisão da literatura sobre a construção e impressão de células braille com a utilização da impressora aditiva 3D, e encontramos no Banco de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior apenas a dissertação intitulada “Desenvolvimento de símbolos para mapa tátil indoor a partir de impressora 3D” (ARAÚJO, 2018). Nesta pesquisa, não havia indicações sobre as dimensões dessa célula adotada na legenda em braille utilizada no estudo.

Ao considerarmos as alterações dos materiais e a alteração no enredo da história, com o intuito de torná-lo acessível, identificamos a necessidade de mudarmos as dicas, tendo em vista a dimensão do primeiro quadrante do plano de coordenadas cartesianas que passou a permitir a marcação de pontos com abcissas e ordenadas entre zero e 15. Além disso, ao ponderarmos sobre os obstáculos epistemológicos identificados na experimentação da primeira versão do material didático que havia sido realizada pelos estudantes do Ensino Médio, elaboramos as dicas da segunda versão com o objetivo de retomar alguns conhecimentos prévios para, então, apresentar o conceito de função. A apresentação das dicas e a indicação dos conhecimentos presentes em cada uma delas compreendem as nossas análises *a priori* e estão descritas na próxima seção.

6.2 Análise *a priori* da segunda versão da sequência didática

Nossa análise *a priori* inicia-se a partir da descrição de alguns dos itens das regras do jogo *Caça ao tesouro,* segunda versão do material didático (Apêndice G), as quais foram elaboradas com o intuito de imergir os estudantes no jogo e subsidiar a apresentação do conceito de função durante a experimentação no jogo e, ao final deste, deverá ser institucionalizada. Destacamos ainda que a sequência didática que compõe o jogo *Caça ao tesouro* vem ao encontro da superação do primeiro obstáculo epistemológico apontado por Sierpinska (1992), o qual refere-se ao fato da Matemática estar desvinculada dos problemas práticos, assim buscamos apresentar situações práticas, que permeiam o enredo do jogo e que podem ser modeladas pelo conceito de função.

Após apresentar um convite para os estudantes descobrirem o tesouro escondido, isso em forma de devolução de uma situação didática, exibimos, nos itens 1 e 2 das regras do jogo, a solicitação para que fixassem os objetos na maquete tátil em coordenadas pré-estabelecidas, conforme Quadro 25:

Quadro 25 - Regra de número 1 da segunda versão do jogo *Caça ao tesouro*

1 – Para iniciar o jogo, vocês necessitarão fixar os objetos na maquete, da seguinte maneira: árvore (a) posição 2J; farmácia (f) – casa azul com telhado liso – posição 7L; lanchonete (l) – casa lilás com telhado de algodão branco – posição 8C; mercado (m) – casa vermelha com telhado em EVA com glitter crespo – posição 4F; padaria (p) – casa amarela com telhado atoalhado – posição 9J e restaurante (r) – casa rosa com telhado ondulado - posição 6D. 2 - Escolher uma dentre as seguintes posições: 4A, 1D ou 4E. Posicionar o seu jogador em miniatura, que está na caixa organizadora: Átlas, homem com chapéu; Apolo, homem com os braços voltados para baixo e perna esquerda suspensa.

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

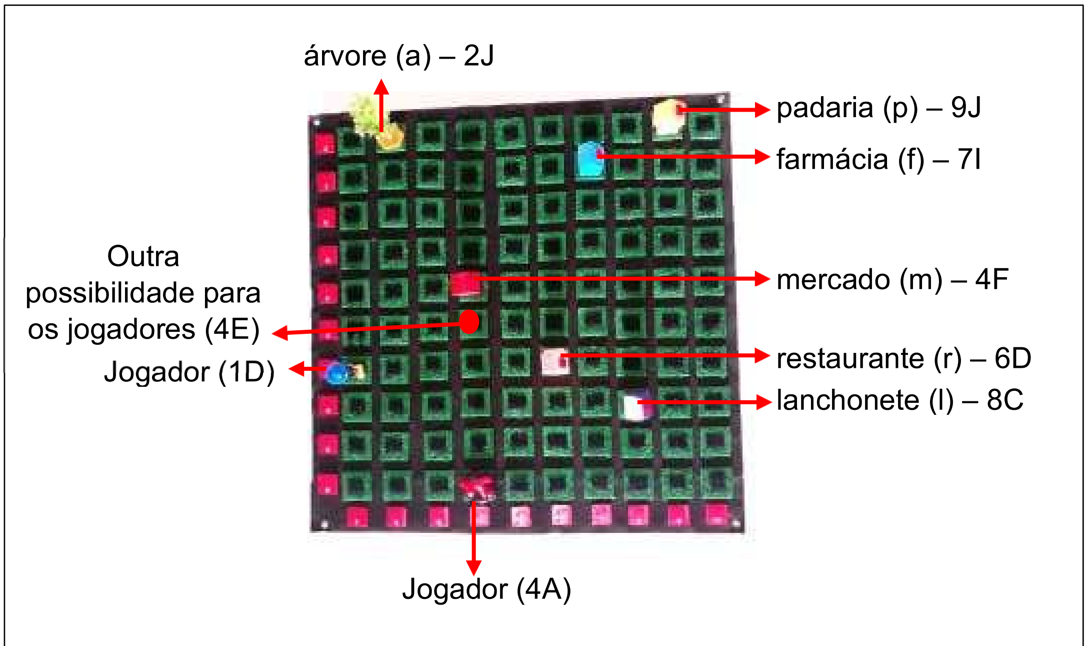
Descrição do Quadro 25: Quadro com uma linha e uma coluna com a regra de número um da segunda versão do jogo *caça ao tesouro* (Fim da descrição).

O intuito desta solicitação foi associar pares, contendo números e letras, às quadras, nas quais deveriam ser fixadas as casas, a árvore e os representantes dos jogadores que compreenderiam as referências. Portanto, esta solicitação era o contrário do que havia sido pedido na versão anterior, isto é, parte-se dos objetos para a determinação das coordenadas de localização, nas quais serão fixadas as referências.

Vale destacar que na versão anterior desse jogo, os estudantes apresentaram alguns obstáculos epistemológicos (BROUSSEAU, 1997) quanto à determinação das localizações de maneira individual, identificamos por exemplo o terceiro obstáculo mencionado por Sierpinska (1992), o qual se refere a consideração das mudanças como fenômeno, ou seja, os estudantes focaram em como as casas e referências mudavam ignorando-se sobre o que mudou, no que se refere a coordenada de localização que havia se alterado.

Assim, decidimos envolver ambos os estudantes, no trabalho em prol de uma meta comum e, portanto, de forma cooperativa (BROWN, 2004), e a partir da localização em termos de coordenadas contendo números e letras, fixassem os materiais no tabuleiro da maquete. Destarte, esperava-se que os estudantes organizassem os objetos na maquete tátil conforme representação na Figura 52:

Figura 52 - Maquete tátil da segunda versão do jogo



Fonte - Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 52: Foto aérea tirada de uma maquete tátil de formato quadrado. A maquete tem uma base na cor preta com pequenos quadrados verdes alinhados igualmente e sobre eles pequenos velcros na cor preta. Há sobre alguns velcros os seguintes objetos: um homem em miniatura de plástico na cor vermelha tendo uma seta indicando jogador (4A); cinco casas espalhadas sobre a maquete nas cores roxa, com uma seta indicando lanchonete (l) – 8C; casa rosa, restaurante (r) – 6D; casa vermelha, mercado (m) – 4F; casa azul, farmácia (f) – 7I e casa amarela, padaria (p) – 9J; outra miniatura de um homem com um chapéu de abas na cor azul, tendo uma seta indicando jogador (1D); uma circunferência na cor vermelha com uma seta que indica para a frase, outra possibilidade para os jogadores (4E); e uma árvore contendo uma seta que aponta para o nome árvore (a) – 2J (Fim da descrição).

Essa solicitação pode contribuir para que os estudantes possam interpretar, descrever e representar a movimentação dos objetos (BRASIL, 2018), no caso, das casas e da árvore, objetos usados no jogo, utilizando coordenadas para a sua localização e compreendendo as mudanças, em termos de números e letras que ocorrem durante a fixação destes objetos na maquete tátil.

Outra regra do jogo que merece destaque, em nossa análise *a priori*, refere-se à escolha do meio de transporte a ser empregado pelos estudantes, este deve ser único, para ambos os jogadores. Em nossa segunda versão, como reduzimos a quantidade de números representados no primeiro quadrante do plano de coordenadas cartesianas, alteramos o meio de transporte, o qual na primeira versão era um táxi e um carro alugado. Nesta nova versão, pedimos para os estudantes escolherem uma bicicleta ou um patinete e sobre estes serão cobrados os seguintes valores, conforme Quadro 26:

Quadro 26 - Regra de número 4 da segunda versão do jogo *Caça ao tesouro*

4 – Para iniciar a caça ao tesouro, os jogadores devem escolher um dos meios de transporte: bicicleta ou patinete. Será selecionado um único meio de locomoção para os dois jogadores. Pela bicicleta será pago R$ 0,50 para desbloquear mais R$ 1,50 por quilometro percorrido e pelo patinete R$ 3,50 para desbloquear, mais R$ 0,50 por quilômetros percorridos. Cada vez que o jogador chegar a um local, os meios de transporte serão bloqueados, necessitando, assim, quando for sair novamente, ter que pagar o valor preestabelecido para desbloquear, mais o valor pela distância que foi percorrida.

Fonte - Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 26: Quadro com uma linha e uma coluna com a regra de número quatro da segunda versão do jogo *caça ao tesouro* (Fim da descrição).

A escolha realizada pelos estudantes, nesse momento, determinará a relação entre a quantidade de quilômetros percorridos e os valores pagos, no decorrer dos deslocamentos que eles realizarão ao longo do jogo. Essa também foi uma alteração na estrutura do jogo, pois na primeira versão eram disponibilizados dois planos de coordenadas cartesianas para os jogadores e eles determinavam as representações tabular, gráfica e algébrica de duas funções. Além disso, a função era apresentada ao longo das dicas. Nesta nova versão, disponibilizamos apenas um material que representava o primeiro quadrante do plano de coordenadas cartesianas aos alunos para que os estudantes se envolvessem de forma colaborativa, incentivando a ação, formulação e validação de ambos, de modo a construir a representação tabular, gráfica e algébrica da função, associando, portanto, a quantidade de quilômetros percorridos e o valor pago.

Ademais, passamos a pontuar a resolução das dicas, indo ao encontro do questionamento e da sugestão apresentada pelo professor Márcio ao avaliar a primeira versão do jogo. Na referida ocasião, ele nos questionou sobre o que os jogadores ganham ao acertar as respostas das dicas. Ressaltamos que nesta nova versão do *Caça ao tesouro* evidenciamos, de maneira mais nítida, a cooperação que deverá acontecer entre os jogadores, bem como o fato de não haver um único ganhador, mas, sim, ganhadores que descobrem juntos o tesouro escondido, isto é, determinando a função em suas representações tabular, gráfica e algébrica.

Desta maneira, os percursos dos jogadores, na segunda versão do jogo, foram orientados por situações envolvendo conhecimentos prévios de função. As quais foram elaboradas com o intuito de contribuir para relembrar conceitos e possibilitar a superação de possíveis obstáculos epistemológicos pré-existentes, estas dicas poderiam vir a lhes auxiliar na superação desse obstáculo, assim como favorecer a apresentação do conceito de função. Destacamos ainda que todas as dicas estão representadas no Apêndice H.

Quadro 27 - Dica inicial da segunda versão do jogo caça ao tesouro

Você deverá sair do local escolhido posições: 4A, 1D ou 4E. Percorrer a menor quantidade de quilômetros possível até uma das referências da maquete (casas ou árvore). O trajeto deve ser realizado nas direções norte, sul, leste ou oeste. Cada quadra possui 1 quilômetro de extensão. Calcule a quantidade de quilômetros e o valor que irá pagar pelo meio de transporte utilizado, lembrando que pela bicicleta você pagará R$ 0,50 ao desbloquear, mais R$ 1,50 por cada quilômetro percorrido. O patinete será R$ 3,50 ao desbloquear, mais R$ 0,50 por quilômetro percorrido. Cada vez que você chegar a um local, ambos os meios de locomoção são bloqueados, necessitando, assim, quando for sair novamente, pagar o valor para desbloqueá-los mais o valor do trajeto realizado. Ao chegar no local, retire a casa ou a árvore e deixe o seu jogador fixado no velcro. Registre na caixa organizadora a quantidade de quilômetros percorridos e o valor pago. Informe ao seu colega a sua localização e a letra ou a cor do local em que você se encontra. Ele irá pegar a dica com a letra ou a tarja na cor informada e ler em voz alta para que você possa desvendar a charada matemática apresentada.

Fonte - Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 27: Quadro com uma linha e uma coluna com a dica inicial da segunda versão do jogo *caça ao tesouro* (Fim da descrição).

Destarte, esperava-se que os alunos saindo de uma das posições escolhidas por eles tivessem ido para as casas que representam o mercado ou o restaurante, pois estas compreendem as menores distância até os jogadores. Se eles estivessem nas posições 4A ou 1D a menor distância a ser percorrida para chegar tanto ao mercado quanto ao restaurante é de cinco quilômetros e, portanto, será pago pelo trajeto percorrido com a bicicleta oito reais ou com o patinete seis reais. Já se estiverem na posição 4E, a distância até o mercado seria de um quilômetro, pagando, portanto, pelo trajeto de bicicleta dois reais e de patinete quatro reais. Caso o mercado já tenha sido visitado pelo seu colega de jogo, que estava na posição 4A ou 1D, ele poderá ir para o restaurante, percorrendo um trajeto de três quilômetros e pagando tanto pela bicicleta quanto pelo patinete um valor de cinco reais. Vale destacar que, após a determinação da distância e do valor pago, os jogadores deverão utilizar a caixa organizadora para representar estas informações.

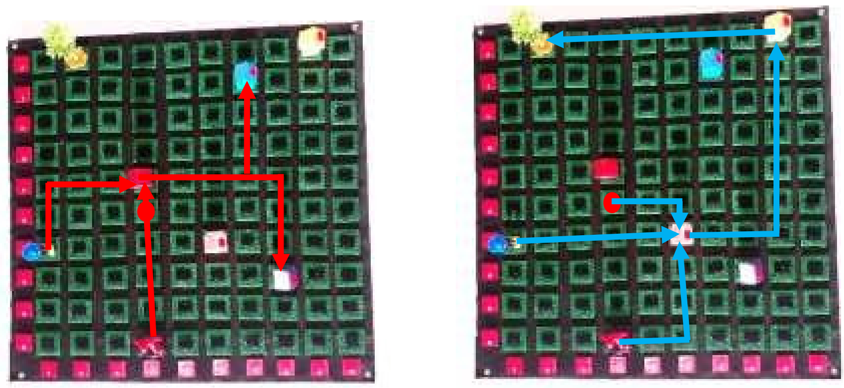
Essa situação de escolha do menor trajeto e determinação do valor a ser pago pelo trajeto envolve uma relação funcional e possibilita que os jogadores possam analisar tais situações e compreender que as funções compreendem relações de dependência unívoca entre duas variáveis (BRASIL, 2018). De igual modo, estes dados lhes subsidiaram para a representação numérica, algébrica e gráfica que estarão apresentando ao longo da experimentação do *Caça ao tesouro*.

Ademais, o professor deverá ficar atento para que os estudantes não alterem a ordem das variáveis, sendo este um obstáculo epistemológico indicado por Sierpinska (1992) que carece de um trabalho cuidadoso quanto a discriminação entre as variáveis dependentes e independentes. Vale destacar ainda que este obstáculo epistemológico foi constatado na experimentação da primeira versão do material didático realizada por Mateus no contexto do grupo HM2.

Ao informar as coordenadas, cores das casas ou letra em braille da referência, o jogador estará orientando o seu colega para pegar a dica do mercado ou a do restaurante e ler em voz alta. Ressaltamos que em cada um dos pontos de referência há quatro dicas sobre a mesma situação, à medida que estas vão sendo lidas, há a complementação de informações e a pontuação aferida pela resposta correta vai diminuindo gradativamente. Ressaltamos que a validação do resultado é deferida pelos jogadores, assim, em um contexto de cooperação, eles leem as dicas um para o outro, formulam hipóteses, as testam e validam juntos as respostas apresentadas (BROUSSEAU, 1997), reafirmando o princípio da autonomia no contexto da TSD e da inclusão enquanto alicerce do jogo apresentado.

Vale destacarmos que os jogadores são orientados, nas regras, a jogarem alternadamente, assim ambos chegarão no terceiro ponto de referência em uma mesma jogada. Caso o jogador vá para o mercado, ele poderá percorrer o trajeto representado na Figura 53 (a). Se for para o restaurante, sua trajetória poderá ser representada conforme a Figura 53 (b). Além disso, eles poderão, ainda, seguir outros caminhos cujas distâncias mínimas sejam equivalentes às representadas na Figura 53. Vale destacar, também, que caso os jogadores não percorram a menor distância, esse erro não influenciará nas representações tabular, gráfica e algébrica da função. Entretanto, o professor, no momento da institucionalização, deverá discutir com a turma sobre as distâncias e os menores trajetos que podem ser percorridos, pagando menos. Isso poderá auxiliar os estudantes a analisarem e correlacionarem a determinação da distância entre dois pontos no plano de coordenadas cartesianas (BRASIL, 2018).

Figura 53 - Possíveis trajetórias realizadas pelos jogadores



(a) Trajetória iniciada no mercado (b) Trajetória iniciada no restaurante

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição da Figura 53: Duas fotos aéreas tiradas de uma maquete tátil de formato quadrado. As duas fotos representam uma maquete de base na cor preta com pequenos quadrados verdes alinhados igualmente e sobre eles pequenos velcros na cor preta. Há sobre alguns velcros os seguintes objetos: um homem em miniatura de plástico na cor vermelha; cinco casas espalhadas sobre a maquete nas cores roxa, rosa, vermelha, azul e amarela; outra miniatura de um homem com um chapéu de abas na cor azul; uma circunferência na cor vermelha e uma árvore. A foto da maquete, à esquerda da figura, possui uma indicação na parte inferior: "(a) Trajetória iniciada no mercado" e está demarcada com linhas horizontais e verticais com setas indicando, na cor vermelha, uma trajetória que parte dos homens em miniatura e passa pelas casas de cores vermelha, roxa e azul. Já na segunda foto, à direita da figura, há uma maquete com a indicação na parte inferior da foto: "(b) Trajetória iniciada no restaurante" e indica com linhas horizontais e verticais, com setas na cor azul, o caminho que parte dos homens em miniatura e passa pelas casas rosa e amarela e pela árvore (Fim da descrição).

As dicas que compreendem a trajetória do jogador que percorrerá o caminho conforme a Figura 53 (a), partindo do mercado e passando pela lanchonete e farmácia, iniciou-se mencionando a seguinte situação (Quadro 28):

Quadro 28 - Dicas do mercado

Dicas do mercado (m) **Localização 4F** **Dica 1**: Um mercado funciona das 8 horas da manhã às 19 horas da noite. Esse mercado vende em média 12 quilos de arroz a cada 60 minutos. O gerente gostaria de saber qual a quantidade mínima de arroz que o mercado necessitará ter em seu estoque para atender a demanda diária? (100 pontos) **Dica 2**: 1 hora equivale a 60 minutos. Qual a quantidade mínima de arroz que o mercado necessitará ter em seu estoque para atender a demanda diária? (80 pontos) **Dica 3**: O funcionamento do mercado é de 11 horas diárias. Qual a quantidade mínima de arroz que o mercado necessitará ter em seu estoque para atender a demanda diária? (40 pontos) **Dica 4**: A resposta é uma das seguintes alternativas (20 pontos): a) 130 quilos de arroz; b) 112 quilos de arroz; c) 132 quilos de arroz; d) 212 quilos de arroz. **Próximo passo**: Dirija-se à lanchonete (l) fazendo os movimentos norte, sul, leste ou oeste e registre na caixa organizadora, a menor quantidade possível de quilômetros e o valor pago pelo meio de transporte.

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 28: Quadro com uma linha e uma coluna com as quatro dicas do mercado (Fim da descrição).

Espera-se que o jogador formule a solução pautada nos conhecimentos atrelados à proporcionalidade e, portanto, multiplique as 11 horas em que o mercado se encontrava de portas abertas pela quantidade que vendia a cada hora, isto é, 12 quilos de arroz, determinando-se, com isso, a quantidade mínima diária de arroz que devia ter em estoque no mercado, a saber, 132 quilos de arroz. Outra estratégia que pode ser utilizada pelos estudantes, é considerar o tempo em que o mercado se encontrava aberto em minutos e valer-se dos conhecimentos atinentes a proporcionalidade ou regra de três simples, para tanto efetuar os cálculos e determinar que o estoque deveria ter 132 quilos de arroz.

Esse desafio apresentado envolve o objeto de conhecimento grandezas diretamente proporcionais (BRASIL, 2018) e poderá contribuir para que os estudantes possam identificar a natureza da variação das duas grandezas, presentes na situação e extrapolem esse conhecimento, de modo a analisar as grandezas que envolvem a relação funcional presente no contexto do jogo.

Ao solucionar a dica do mercado, respondendo uma das situações que a compõem, o jogador é orientado para se deslocar até a lanchonete, casa que se encontra na posição 8C na maquete tátil. A menor distância entre o mercado e a lanchonete é de sete quilômetros e o valor pago poderá ser 11 reais, se percorridos com a utilização da bicicleta ou sete reais se forem trilhados com o patinete. Dessa maneira, após a determinação da relação supracitada e da representação da caixa organizadora, o colega de jogo fará a leitura das dicas da farmácia conforme Quadro 29.

Quadro 29 - Dicas da lanchonete

Dicas da lanchonete (I) **Localização 8C**
Dica 1: Cinco amigos entraram em uma lanchonete e o dono da lanchonete lhes explicou que uma caixa de suco concentrado traz a informação de que a cada dois copos de suco concentrado é possível fazer cinco copos de suco diluídos em água. Na lanchonete há 20 pessoas, cada uma delas solicitou um copo de suco, então o dono da lanchonete pediu para que os cinco amigos o ajudassem a compreender quantos copos de suco concentrado ele precisa para diluir em água de maneira a atender os 20 clientes? (100 pontos). **Dica 2**: A razão entre o número de copos de suco concentrado e a quantidade de suco produzido após diluir em água é de $\frac{2}{5}$. Então, quantos copos de suco concentrado ele precisa para diluir em água de maneira a atender os 20 clientes? (80 pontos). **Dica 3**: Serão necessários 12 copos de água. Então, quantos copos de suco concentrado ele precisa para diluir em água de maneira a atender os 20 clientes? (40 pontos). **Dica 4**: A resposta é uma das seguintes alternativas: a) 8 copos de suco concentrado; b) 10 copos de suco concentrado; c) 6 copos de suco concentrado; d) 11 copos de suco concentrado (20 pontos). **Próximo passo**: Dirija-se à farmácia (f) fazendo os movimentos norte, sul, leste ou oeste e registre na caixa organizadora, a menor quantidade possível de quilômetros e o valor pago pelo meio de transporte utilizado.

Fonte: Adaptado de Ripoll et al. (2018).

Descrição do Quadro 29: Quadro com uma linha e uma coluna com as quatro dicas da lanchonete (Fim da descrição).

Para a solução destas dicas, o jogador poderá valer-se dos conhecimentos atrelados a grandezas diretamente proporcionais ou a razão entre grandezas de mesma espécie. Utilizando-se as noções de grandezas diretamente proporcionais, poderá apoiar-se na estratégia de regra de três simples para determinar a solução, considerando-se que dois copos de suco concentrado após diluídos em água permitem a confecção de cinco copos de suco concentrados, então ele deverá determinar a quantidade de copos de suco concentrado para fazer 20 copos de suco diluído, após os cálculos determinará que serão necessários oito copos de suco. Além dessa estratégia, poderá aproveitar-se dos conhecimentos sobre razão, para tanto o jogador deverá constatar que: se para fazer cinco copos de suco diluído são necessários dois copos de suco concentrado, tendo, portanto, uma razão correspondente a $\frac{2}{5}$, então, para se fazer 20 copos de suco diluído, serão necessários oito copos de suco concentrado.

Assim, esta situação permite que o jogador possa utilizar estratégias e conceitos já estudados em anos anteriores para interpretar e resolver a situação. De igual modo, analisa a plausibilidade do resultado apresentado e busca construir uma argumentação convincente através da linguagem (BROUSSEAU, 1997), explicando, ao seu colega de jogo, a estratégia que utilizou para a determinação da solução. Esse aspecto vai ao encontro das competências elencadas na BNCC para o ensino de Matemática no Ensino Médio (BRASIL, 2018).

Após a apresentação da solução da situação que envolve a lanchonete, o jogador é convidado a se dirigir à farmácia que está na posição 7l na maquete. Para se deslocar da lanchonete até a farmácia, o jogador poderá percorrer sete quilômetros, como sendo a menor distância entre esses pontos de referência e, para isto, deverá pagar pela bicicleta 11 reais e pelo patinete sete reais. Lembrando que após a representação na caixa organizadora, o colega de jogo deverá ler as dicas da farmácia que se encontram descritas no Quadro 30.

Quadro 30 - Dicas da farmácia

Dicas da farmácia (f) **Localização 7I** **Dica 1**: Uma farmácia entregou 60 medicamentos, na cidade, em três dias. Em cada dia, a partir do primeiro, entregou 5 medicamentos a mais que no dia anterior. Quantos medicamentos essa farmácia entregou em cada um dos dias? (100 pontos); **Dica 2**: No terceiro dia foi entregue 25 medicamentos. Quantos medicamentos essa farmácia entregou nos outros dias? (80 pontos); **Dica 3**: A quantidade de medicamento entregue em cada um dos dias é representada por números múltiplos de 5. Quantos medicamentos essa farmácia entregou em cada um dos dias? (40 pontos); **Dica 4**: A resposta é uma das seguintes alternativas. Qual é a alternativa correta? (20 pontos) a) 5 medicamentos no primeiro, 25 medicamentos no segundo dia e 30 medicamentos no terceiro dia; b) 15 medicamentos no primeiro, 20 medicamentos no segundo dia e 25 medicamentos no terceiro dia; c) 25 medicamentos no primeiro, 25 medicamentos no segundo dia e 25 medicamentos no terceiro dia d) 60 medicamentos no primeiro, 60 medicamentos no segundo dia e 60 medicamentos no terceiro dia. **Próximo passo**: Após percorrerem todos os estabelecimentos, você e o seu colega deverão refletir juntos sobre o percurso realizado. Assim, vire a sua maquete e registre os valores pagos e a quantidade de quilômetros que vocês percorreram no primeiro quadrante do plano de coordenadas cartesianas.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Descrição do Quadro 30: Quadro com uma linha e uma coluna com as quatro dicas da lanchonete (Fim da descrição).

Essas dicas envolvem uma situação de relação funcional, considerando-se que os dias compõem um conjunto e a quantidade de medicamentos entregues corresponde a outro conjunto, os quais permitem o estabelecimento de uma relação unívoca entre os dados. Destarte, espera que os estudantes possam determinar que, no primeiro dia, foram entregues “d” quantidades de medicamentos, no segundo dia “$d+5$” e no terceiro dia “$d+5+5=d+10$” quantidades e que ao adicionar essas quantidades obtém-se como resultado 60 medicamentos. Após os cálculos os estudantes deverão encontrar que a quantidade de medicamentos do primeiro dia foi 15; no segundo dia 20 e no terceiro dia 25 medicamentos.

Outra estratégia que pode ser utilizada pelos estudantes, diz respeita a constatação de que o aumento da quantidade de medicamentos de um dia para o outro, no decorrer dos três dias foi de 15 medicamentos ao todo, assim eles podem subtrair essa quantidade do total de medicamentos, isto é, dos 60, encontrando, portanto, 45 medicamentos que dividido pelos três dias resulta em 15 medicamentos por dia. Como houve um aumento de cinco medicamentos a partir do segundo dia, determinará como quantidade de entrega no segundo dia 20 medicamentos e no terceiro dia 25 medicamentos.

Essa situação vai ao encontro da definição de função que foi apresentada pelo grupo Bourbaki (1990) e pode contribuir para superar obstáculos epistemológicos, caso os estudantes tenham, quanto ao conceito de variável e a distinção deste com o conceito de incógnita.

Em síntese, ao chegar nessas últimas dicas, relacionadas à referência da farmácia, esperamos que o jogador que seguiu o percurso do mercado preencha a caixa organizadora e encontre os seguintes pares ordenados: se estiver partido de uma das posições 4A ou 1D e escolhido a bicicleta como meio de locomoção $\{(5,8), (7,11)$ e $(7,11)\}$; caso tenha saído de 4A ou 1D e percorrido de patinete o trajeto deve ter como pares ordenados $\{(5,6), (7,7)$ e $(7,7)\}$; há ainda, a possibilidade de, saindo da quadra de coordenada 4E, percorrer o caminho de bicicleta determinar os pares $\{(1,2), (7,11)$ e $(7,11)\}$ e se forem de patinete, os pares ordenados $\{(1,4), (7,7)$ e $(7,7)\}$.

Vale destacar que, apesar da nossa opção ter sido de apresentar, nesta análise *a priori,* inicialmente o percurso de um dos jogadores para então apresentar o percurso do outro jogador, reafirmamos que estes jogam alternadamente e chegam no terceiro ponto de referência juntos. Assim, a construção do gráfico da função será apresentada, nesta seção, após a descrição das trajetórias de ambos os jogadores.

Ao chegar no restaurante que se encontra na posição 6D, esperamos que o colega jogador tenha feito a leitura em voz alta das dicas do restaurante, as quais encontram-se descritas no Quadro 31.

Quadro 31 - Dicas do restaurante

Dicas do restaurante (r) **Localização 6D**
Dica 1: Um garçom organiza os copos na seguinte ordem: na primeira fileira é colocado 1 copo, na segunda fileira 4 copo, na terceira fileira 9 copos e na quarta fileira 16 copos. Quantos copos o garçom irá colocar na quinta fileira, considerando que ele siga a mesma relação estabelecida na organização dos copos anteriores? (100 pontos); **Dica 2**: Descubra um padrão entre a sequência de copos formada pelas quantidades: 1, 4, 9, 16. Há um padrão entre esses números. Quantos copos o garçom irá colocar na quinta fileira? (80 pontos); **Dica 3**: A quinta fileira será formada por uma quantidade representada por um número ímpar de copos. Quantos copos o garçom irá colocar na quinta fileira? (40 pontos); **Dica 4**: A resposta é uma das seguintes alternativas (20 pontos): a) 17 copos; b) 21 copos; c) 25 copos; d) 19 copos. **Próximo passo**: Dirija-se à padaria (p) fazendo os movimentos norte, sul, leste ou oeste e registre na caixa organizadora, a menor quantidade possível de quilômetros e o valor pago pelo meio de transporte.

Fonte: Dados da pesquisa (NERY, 2021).

Descrição do Quadro 31: Quadro com uma linha e uma coluna com as quatro dicas do restaurante (Fim da descrição).

Essas dicas permeiam o conceito de sequência numérica e requerem dos estudantes a investigação da regularidade, observando a regra de sua formação para então determinar que a quinta fileira de copos terá um total de 25 copos. Assim, a estratégia utilizada pelos estudantes poderá estar relacionada a análise de que a sequência de copos pode ser investigada a partir da sequência de números 1, 4, 9 e 16, a qual se constitui enquanto números que são quadrados perfeitos, ou seja, os números 1, 2, 3 e 4 elevados a potência 2. Com isso, os estudantes poderão identificar que a próxima quantidade de copos deverá representar o resultado do numeral 5 elevando ao ser elevado ao quadrado, isto é, 25 copos.

Após responder a dica, o jogador será orientado a se deslocar até a padaria. Para isso, poderá percorrer enquanto trajeto mínimo nove quilômetros e pagará caso esteja utilizando a bicicleta 14 reais e pelo patinete oito reais. Após o registro na caixa organizadora, o seu colega de jogo deverá fazer a leitura das dicas da padaria, as quais compreendem o conceito de sequência numérica recursiva (Quadro 32).

Quadro 32 - Dicas do restaurante

Dicas da padaria (p) **Localização 9J** **Dica 1**: Em uma padaria são vendidas caixas com brigadeiros, cuja organização segue uma lógica. Na primeira fileira da caixa é colocado apenas 1 brigadeiro, na segunda fileira são colocados 2 brigadeiros, na terceira fileira 3 brigadeiros, na quarta 5 brigadeiros e na quinta 8 brigadeiros. Quantos brigadeiros estarão dispostos na sexta fileira? (100 pontos); **Dica 2**: Descubra um padrão entre a seguinte sequência de quantidades de brigadeiros: 1, 2, 3, 5, 8. Há um padrão entre esses números. Quantos brigadeiros estarão dispostos na sexta fileira? (80 pontos); **Dica 3**: A sexta fileira será formada por uma quantidade representada por um número ímpar de brigadeiros. Quantos brigadeiros estarão dispostos na sexta fileira? (40 pontos); **Dica 4**: A resposta é uma das seguintes alternativas (20 pontos): a) 11 brigadeiros; b) 13 brigadeiros; c) 21 brigadeiros; d) 25 brigadeiros. **Próximo passo**: Dirija-se à árvore (a) fazendo os movimentos norte, sul, leste ou oeste e registre na caixa organizadora, a menor quantidade possível de quilômetros e o valor pago pelo meio de transporte.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Descrição do Quadro 32: Quadro com uma linha e uma coluna com as quatro dicas da padaria (Fim da descrição).

A maneira de organizar os brigadeiros compreende a formação de uma sequência numérica recursiva. Assim a estratégia que poderá ser utilizada pelos estudantes é a partir dos numerais que representam a quantidade de brigadeiros, isto é, 1, 2, 3, 5 e 8, verificar que após o segundo termo da sequência é possível obter o próximo número a partir da adição dos números anteriores, isso ao constatar que o padrão de formação da sequência pode ser estabelecido a partir da soma dos dois números antecedentes. Assim, a quantidade de brigadeiros da sexta posição será o resultado da adição dos números cinco e oito, sendo, portanto, o número 13 a solução para a situação apresentada.

Vale destacar que essas dicas, representadas nos quadros 7 e 8, envolvem a “identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas” (BRASIL, 2018), objeto de conhecimento da unidade temática de álgebra. Tais habilidades podem contribuir para que os estudantes possam analisar a regularidade estabelecida em uma situação envolvendo função, a partir da sequência numérica, igualmente representar tais relações com a utilização dos conhecimentos de função. Além do mais, colaboram para a compreensão da sequência de uma progressão aritmética como sendo uma função afim e da sequência de uma progressão geométrica enquanto uma função exponencial.

Ademais, essas dicas favorecem a situação *adidática*, no contexto da fase de formulação (BROUSSEAU, 1997), na medida em que o jogador deverá valer-se da dialética do uso da linguagem, de maneira a convencer o seu colega de jogo que a sua resposta está correta, ou o contrário, caso a resposta apresentada esteja errada o colega utilizará da linguagem para convencer o jogador do erro apresentado. Desse modo, há possibilidade de elaboração de novas formulações a serem validadas entre os pares. Nesse processo de trocas, a cooperação e a comunicação funcionam como mecanismos fundamentais para o sucesso no jogo.

Com a apresentação e discussão da solução, o jogador será orientado a ir até a árvore. Para isso, o menor percurso possível perpassará por sete quilômetros e ao se utilizar a bicicleta o jogador deverá pagar 11 reais e no patinete pagará o valor de sete reais pela trajetória realizada. Após se fixar no local onde estava a árvore, o colega de jogo deverá ler as dicas da árvore, conforme inscrição no Quadro 33.

Quadro 33 - Dicas das árvores

Dicas da árvore (a) **Localização 2J**
Dica 1: O consumo de determinadas frutas traz inúmeros benefícios à saúde. Um exemplo é a maçã, cujo consumo melhora a função cerebral, previne o câncer, combate a asma, evita cáries e fortalece o sistema imunológico. Sabendo-se que a cada 100 gramas dessa fruta equivale a 52 calorias, uma pessoa que ingere 250 gramas de maçã, fornece ao organismo quantas calorias? (100 pontos); **Dica 2**: A razão entre a quantidade consumida em gramas e as calorias que são fornecidas ao organismo é a razão de $\frac{25}{13}$. Então, uma pessoa que ingere 250 gramas de maçã, fornece ao organismo quantas calorias? (80 pontos); **Dica 3**: A resposta é uma das seguintes alternativas (40 pontos): a) 400 calorias; b) 104 calorias; c) 130 calorias; d) 200 calorias. **Dica 4**: A soma dos algarismos que compõem o número é 4 (20 pontos); **Próximo passo**: Após percorrerem todos os estabelecimentos, você e o seu colega deverão refletir juntos sobre o percurso realizado. Assim, vire a sua maquete e registre os valores pagos e a quantidade de quilômetros que vocês percorreram no primeiro quadrante do Plano de Coordenadas Cartesianas.

Fonte: Adaptado de Tocantins (2020).

Descrição do Quadro 33: Quadro com uma linha e uma coluna com as quatro dicas da padaria (Fim da descrição).

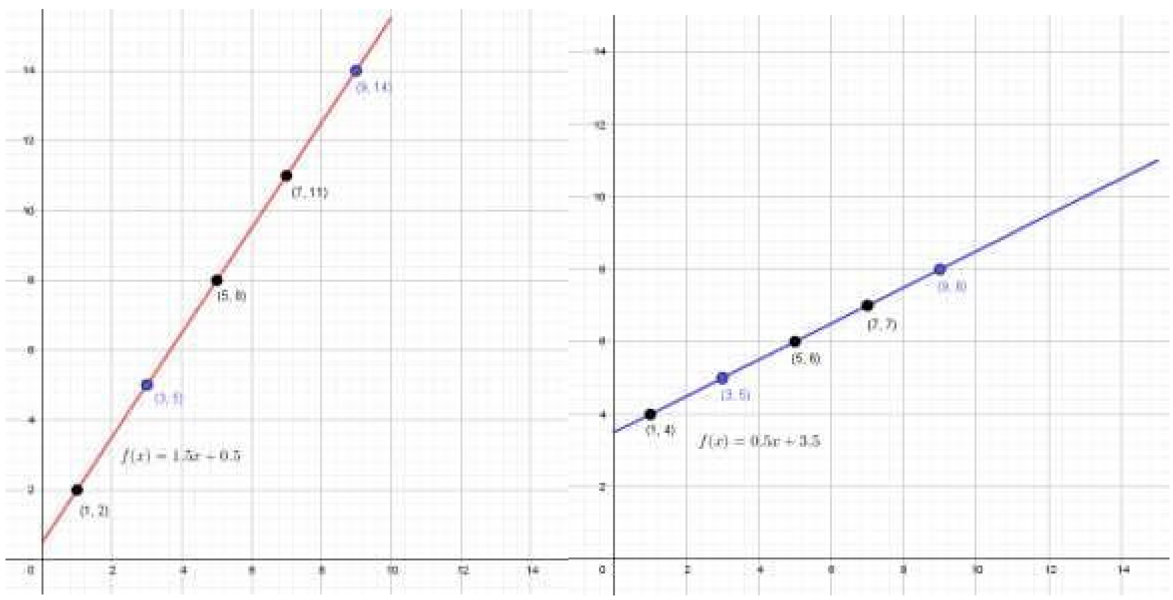
Essas dicas, assim como as que foram apresentadas na lanchonete para o outro jogador, envolvem uma relação funcional. Assim, sabendo-se que a ingestão de 100 gramas de maçã fornece 52 calorias ao organismo, os estudantes poderão estabelecer, enquanto estratégias de solução, uma a razão entre a quantidade de gramas por calorias de $\frac{100}{52}$, a qual é equivalente a $\frac{25}{13}$, então, ao analisarmos a situação apresentada, é possível inferir que ao ser ingerido 250 gramas de maçã serão fornecidos ao organismo 130 calorias. Além dessa estratégia, poderão valer-se dos conhecimentos de proporcionalidade e regra de três simples.

Após responder todas as dicas, o jogador que fez o percurso saindo do restaurante e passando pela padaria e pela árvore deverá ter determinado os seguintes pares ordenados, os quais relacionam a quantidade de quilômetros percorridos e o valor pago em cada um deles: utilizou a bicicleta no trajeto e partiu da posição 4A ou 1D deve ter determinado $\{(5,8),(7,11)$ e $(9,14)\}$; recorreu à bicicleta, mas partiu da posição 4E $\{(3,5),(7,11)$ e $(9,14)\}$; deslocou-se de patinete e saiu da posição 4A ou 1D, estabeleceu os seguintes pares $\{(5,6),(7,7)$ e $(9,8)\}$; ou, caso tenha saído de patinete da quadra 4E, $\{(3,5),(7,7)$ e $(9,8)\}$.

Após responder a essas dicas, ambos os jogadores são convidados a refletirem juntos sobre o percurso realizado e correlacionarem as informações expressas nas caixas organizadoras, com o intuito de determinarem as coordenadas dos pontos que servirão de base para a representação gráfica da função que estão buscando, enquanto tesouro escondido. Para isso, salientamos que nestas últimas dicas de ambos os jogadores, sugere-se, como próximo passo, que eles, após terem percorrido todos os estabelecimentos, reflitam juntos sobre o percurso realizado. Para isso, recomenda-se como estratégia virar a maquete e registrar os valores pagos e a quantidade de quilômetros que percorreram no primeiro quadrante do Plano de Coordenadas Cartesianas.

Apesar de terem realizado percursos com direções e referências distintas na maquete, os jogadores foram orientados a utilizarem o mesmo meio de locomoção. Assim, ambos os estudantes determinaram as coordenadas de pontos da mesma função e, portanto, construíram as representações tabulares separadas. Entretanto, ambas se referiam ao mesmo conjunto de informações que iriam compor o gráfico da função a ser construído em um mesmo plano de coordenadas cartesianas, as quais em sua representação gráfica e algébrica serão conforme Figura 54 (a) referente ao trajeto feito com a bicicleta ou a Figura 54 (b) realizado com o patinete.

Figura 54 - Gráficos das funções dos trajetos realizados com a bicicleta e o patinete



(b) Bicicleta (a) Patinete

Fonte: Nossa produção (NERY, 2021).

Descrição da Figura 54: Dois gráficos de duas funções lineares apresentadas no primeiro quadrante do plano de coordenadas cartesianas, tendo a numeração no eixo das abcissas de zero a 14 e no eixo das ordenadas de zero a 14. O primeiro gráfico, à esquerda, exibe os pontos de coordenadas $(1,2)$; $(3,5), (5,8)$; $(7,1)$ e $(9,14)$, a linha que intercepta os pontos e a função $f(x) = 1{,}50x + 0{,}5$. O segundo gráfico, à direita, exibe os pontos de coordenadas $(1,4)$; $(3,5), (5,6)$; $(7,7)$ e $(9,8)$, a linha que intercepta os pontos e a função $f(x) = 0{,}50x + 3{,}5$ (Fim da descrição).

Cada um dos jogadores determinam as coordenadas de três pontos em suas jogadas, sendo que há pontos com as mesmas coordenadas determinados por diferentes jogadores. Na Figura 15, destacamos estes pontos em cores diferentes, preto e azul, mas salientamos que ambos os pontos pertencem ao mesmo gráfico e, portanto, à mesma função. A ação de marcar os pontos no primeiro quadrante do Plano de Coordenadas Cartesianas pode possibilitar que os estudantes compreendam a distinção entre coordenadas cartesianas de um ponto e segmentos de reta que pertencem a uma função, tais aspectos foram abordados por Sierpinska (1992) enquanto um obstáculo epistemológico.

Assim, o jogo permite que os estudantes: partindo de uma representação tabular das informações, estabeleçam a correlação entre estas informações; determinem os pares ordenados de pontos com o intuito de sumarizar as informações;

observem as variáveis dependentes e independentes, ou seja, que o valor pago depende da quantidade de quilômetros que foram percorridos; possam construir o gráfico e, por último, determinem a representação algébrica para descrever a situação investigada.

Tais ações, vão de encontro aos obstáculos epistemológicos 11, 13 e 15 que foram descritos por Sierpinska (1992) e que se referem as representações das funções e as dificuldades na discriminação de diferentes representações, isto é, algébrica, tabular e gráfica, ou ainda, na redução do conceito de função a uma das suas representações.

Salientamos, ainda, que a relação a ser estabelecida entre as quantidades de quilômetros e os valores pagos são questionados na última dica, a qual é apresentada para ambos os jogadores pensarem juntos, conforme Quadro 34.

Quadro 34 - Última dica

Última dica: História da Caça ao tesouro
Muitos aventureiros tentaram encontrar esse tesouro escondido em vários países; há um registro dele na cidade que vocês investigaram com a maquete. Este tesouro foi descoberto pela primeira vez em 1673 por Newton e Leibiniz. Após esse período, não se sabe o que aconteceu com este tesouro e, desde então, muitas pessoas ficaram curiosas, sentindo-se aventureiras e almejando encontrá-lo para saber o que era de tão especial que ele possuía. Conta-se que quem o descobre torna-se cheio de conhecimento e sabedoria, que podem ser aplicados em várias ciências, como na Física, Química, Engenharia e Economia. Após todas as dicas e todo o percurso realizado, a última dica que apresentamos a vocês é: analisem os valores que foram pagos nas andanças que realizaram e a quantidade de quilômetros que percorreram e estabeleçam uma relação entre essas duas grandezas. Qual é essa relação?

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Descrição do Quadro 34: Quadro com uma linha e uma coluna com a última dica (Fim da descrição).

Esta última dica tem o intuito de contextualizar historicamente o conceito de função, mencionando sobre a possibilidade de aplicação em outras áreas do conhecimento, tais como na Física, Química, Engenharia e Economia. As ações realizadas ao longo do jogo contribuem para que os estudantes possam correlacionar as diferentes representações, contemplando as orientações propostas na BNCC (BRASIL, 2018).

Ademais, a mudança de abordagem, isto é, partindo de uma relação entre as variáveis, determinar o gráfico e a lei da função, pode favorecer a compreensão de que uma função possui distintas formas de representações, superando-se, assim, a mecanização desse processo, no sentido de acreditar que só as fórmulas analíticas são funções, conforme destacou Sierpinska (1992) na demarcação dos obstáculos epistemológicos no estudo de função. Ou ainda, a tradicional forma de estudo das funções que parte da representação algébrica para a gráfica, aspecto este que pode se constituir em um obstáculo epistemológico didático futuro.

Destacamos que a experimentação realizada com o jogo e todos os materiais apresentados permitirão que os estudantes possam vivenciar a situação *adidática*, composta pelas fases de ação, formulação e validação (BROUSSEAU, 1997). Dessa maneira, durante a execução do jogo, o professor poderá realizar devoluções aos estudantes e, ao final, caberá a ele realizar o processo de institucionalização (BROUSSEAU, 1997), com o intuito de sistematizar e apresentar o conceito de função para os estudantes, fechando-se, assim, o ciclo de desenvolvimento da situação didática proposta.

Vale salientar que no momento da institucionalização o professor deverá atentar-se ao obstáculo de número 12 que foi destacado por Sierpinska (1992) e que se refere a distinção entre definições matemáticas e descrições de objeto, tendo em vista que, neste momento, ele estará apresentado para os estudantes a definição de função e não descrevendo o que vem a se constituir como sendo uma função.

Na próxima seção, apresentaremos a avaliação realizada pelos professores Márcio e Samuel, ambos atuavam no Ensino Médio de um colégio público do Distrito Federal e no ano de desenvolvimento da pesquisa estavam ministrando aulas na Sala de recursos, (com estudantes com deficiência visual) e em salas de aula regular do 1º ano do Ensino Médio, as quais possuíam, dentre os estudantes videntes, dois estudantes com deficiência visual, respectivamente.

6.3 Avaliação da segunda versão do jogo *Caça ao tesouro*, realizada pelos professores da Sala de recursos e da sala de aula regular

Para a realização das entrevistas com os professores, organizamos todos os materiais e dicas que compõem esse jogo e expedimos para as suas residências, via empresa brasileira que executa o envio e a entrega de correspondências. Disponibilizamos um mês para que analisassem o referido material, um prazo relativamente longo, considerando o contexto das suas atividades docentes, isto é, o trabalho na Sala de recursos e nas turmas regulares.

As entrevistas foram realizadas individualmente, com a utilização de uma plataforma de videochamada, tendo a duração de 1 hora com o professor Samuel e de 1 hora e 13 minutos com o professor Márcio. De posse das informações coletadas, organizamos o processo de análise buscando contemplar a compreensão sobre: a presença da TSD, enquanto fundamento teórico; a ludicidade como pressuposto que orienta e organiza a situação didática; e a inclusão, tendo como fundamento para sua efetivação a acessibilidade do material e da linguagem utilizada no contexto do jogo *Caça ao tesouro*. Para isso, as perguntas que compuseram a entrevista semiestruturada foram apresentadas abordando os seguintes critérios: pedagógico, interativo e comunicacional.

No **critério pedagógico**, tínhamos por intuito compreender a postura dos professores perante a uma experimentação com seus estudantes, assim, indagamos sobre: Como eles poderiam aplicar o material em sala de aula regular ou na sala de recursos? Como o conceito de função seria explicitado para os estudantes? Como o erro é encarado ao longo da vivência dos estudantes?

Na avaliação realizada por Márcio em relação às orientações pedagógicas destinadas aos estudantes, tem-se o seguinte posicionamento:

> Márcio: Então, a parte pedagógica para a introdução de função: ficaram bem precisas as orientações. Falando do aluno com necessidades especiais, com deficiência visual, o aluno cego, ele vai conseguir sim, deslocar, vai conseguir achar os pares ordenados e os endereços no jogo. [...] eles têm que tocar, eles têm que perceber todo o objeto. Então, isso faz parte da introdução do que a gente vai propor a fazer com eles [...]. O alcance pedagógico do material é muito grande, dá sim para trabalhar com função. [...] Eles têm muita dificuldade com o horizontal e vertical, aí, a gente revisa o conceito com eles e aí eles conseguem trabalhar de forma eficiente com o material (Professor Márcio, entrevista virtual, 2021).

Em seu comentário, o professor Márcio enfatizou que as orientações apresentadas no jogo estavam precisas, mas ao apresentar o jogo para os estudantes com deficiência visual, e, de modo enfático, para os estudantes cegos, faz-se necessário destinar um tempo para que eles possam perceber todos os materiais que compõem o jogo. Márcio faz até uma comparação sobre o quanto essa necessidade é importante, isto ao mencionar: “Quando a gente chega no ambiente, nós vemos um todo e depois, a gente começa a ver as partes: tem um copo em cima da mesa; tem uma caneta; tem um livro. Os estudantes com deficiência visual eles só conseguem ver a parte que conseguiu tocar” (MÁRCIO, 2021). Assim, a percepção do vidente e do cego são diferentes, na medida em que o vidente percebe do todo para as partes e o cego das partes para o todo.

No contexto de vivência do jogo é imprescindível destinar um tempo para a percepção tátil. Isto permitirá aos estudantes a exploração, identificação dos materiais e aproximação do contexto do jogo, aspectos que coadunam com os princípios da ludicidade. Tendo em vista que Macedo, Petty e Passos (2005), destacaram que a atividade deve ser possível e ela só será possível se os estudantes tiverem: além dos recursos internos, os quais estão atrelados a mobilização dos conhecimentos que eles possuem; os recursos externos, os quais perpassam pela disponibilização de tempo suficiente para a compreensão de todos os objetos que compõem o jogo e posterior experimentação.

Outro detalhe que o professor Márcio apontou diz respeito às dificuldades dos estudantes no tocante às orientações horizontais e verticais. Dificuldades estas que haviam sido apontadas também nos estudos de Oliveira (2010) e Souza (2015), foram também ratificadas na experimentação realizada junto aos estudantes na primeira versão do material desta pesquisa. Como alternativa, para superar este possível obstáculo, Márcio sugeriu, na utilização do jogo, a substituição dos termos horizontais e verticais, por direita, esquerda, para cima ou para baixo.

Ademais, estes aspectos permitem que os estudantes, segundo Márcio, possam utilizar o material de maneira eficiente. Destacamos que esta utilização eficiente, conota a ideia, de acordo com os pressupostos do desenho universal, definidos por Cambiaghi (2018), de desenvolvimento e inclusão social, pormenores que estão em consonância com a acessibilidade e a efetivação da inclusão na educação e nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática.

Nesse mesmo contexto de como pensar na experimentação do jogo, o professor Samuel comentou que o material estava adequado para apresentar o conceito de função, tanto para os estudantes do nono ano quanto do Ensino Médio. Ressaltou, ainda, sobre o cuidado que o professor da sala de aula regular deve ter ao propor atividades que permitam aos estudantes irem aos poucos deixando o material e compreendendo o conceito de função para além da situação apresentada, conforme pode ser constatado no extrato da sua fala:

> Samuel: [...] em algum momento, ele tem que abandonar o material, a ideia é que ele vai receber o material, ele vai se familiarizar com ele e aí... Na próxima etapa, é o que a gente faz, como no jogo de xadrez [...] mentaliza o jogo, isto é, como é que você faz o jogo na sua mente

> e depois lá. Então, a ideia seria com problemas como você colocou, sem colocar números muito complexos para eles. Mas, alguns problemas que eles pudessem resolver mentalmente sem a necessidade do material (Professor Samuel, entrevista virtual, 2021).

Com isso, considera-se que o material didático que compõe o jogo pertence a um *milieu* acessível, o qual defendemos como sendo o cerne principal para que a TSD possa ser utilizada em um contexto que favoreça a inclusão no ensino de Matemática. O cuidado ressaltado por Samuel compreende a importância de o *milieu*, estar pautado em aspectos materiais e metodológicos (BROUSSEAU, 2002), ou seja, o *milieu* permeia tanto a abordagem e opção metodológica do professor, quanto aos materiais por ele utilizados, para subsidiar a sua prática pedagógica. Na medida em que os estudantes vão emergindo e interagindo com esse *milieu*, o retorno apresentado por ele, possibilitará um aumento gradativo da sua autonomia frente aos processos de ensino e aprendizagem. Aspecto que poderá lhes propiciará compreender o conceito de função, suas diferentes formas de representação e a unicidade das relações que podem ser estabelecidas entre as variáveis de uma função. Nessa conjuntura, Samuel comenta ainda que se faz necessário:

> Samuel: [...] Ir dialogando com eles até o ponto em que eles pudessem estabelecer essas relações. Em algum momento, a gente vai ter que introduzir para eles as duas variáveis; dar nome; chamá-las de x e y; mencionar que uma depende da outra; até chegar à expressão [...]. Nessa fase, eles já têm uma ideia de equação. Quando a gente fala pra eles de equação, tranquilo, então aí quando você joga para eles a ideia de função aí eu acho que você vai conseguir mostrar para eles, que eles vão precisar de duas variáveis para essa expressão. Eu acho que essa é a parte que seria talvez o final do processo (Professor Samuel, entrevista virtual, 2021).

Ao mencionar isto, Samuel está se referindo à fase de institucionalização da situação didática (BROUSSEAU, 1997). Fica explícito, na transcrição da sua fala, que esse momento é a parte final do processo, no sentido de sistematizar as informações construídas ao longo da experimentação didática. Isso vai ao encontro da maneira como planejamos o desenvolvimento do jogo, ou seja, pautado na vivência das situações *adidática* e *didática*. Além disso, vale destacar que a institucionalização realizada pelo professor nos aspectos da definição de função, que foram supracitadas, não se encontram fundamentados nos aspectos da definição apresentada pelo grupo Bourbarki (1990), mas sim na dependência entre variáveis exibida anteriormente por Euler (1787). Ademais, perpassam pelo conceito definição e conceito imagem destacados no estudo de Vila-Verde (2016).

Uma comparação que é feita por Samuel é do conteúdo de função com o de equação, este último para os estudantes já é um conceito sistematizado em anos anteriores da sua escolarização. Assim, faz-se necessário apresentá-los conforme orientações preconizadas na BNCC, contemplando as “conexões entre variável e função e entre incógnita e equação” (BRASIL, 2018, p. 533). Tais conexões poderão auxiliar os estudantes na compreensão das distinções entre função e equação e na superação de um obstáculo epistemológico recorrente no estudo de função, que, de acordo com Sierpinska (1992), confere o *status* de função somente nas relações descritíveis por fórmulas analíticas.

Por considerarmos que os obstáculos epistemológicos podem ser apresentados a partir da evidência do erro, buscamos compreender como os professores lidariam com o erro. Na explicitação realizada pelo professor Márcio, o erro “não vai influenciar, [...] porque no final vai ser feito uma correção, então não acredito que vai influenciar no conceito”. Pela sua experiência, mesmo que os estudantes cometam erros, estes não acarretarão na construção de obstáculos epistemológicos. Contudo, após esse comentário, questionamos ainda sobre os impactos e influências da marcação de pontos com coordenadas erradas. Nesse contexto, Márcio mencionou:

> Márcio: É na hora da construção, [...], nessa hora não dá para deixar para depois não, nessa hora tem que conversar e falar se tem certeza. Reveja de novo... E, se não der certo, tem que ajudar com os pontos, porque isso vai influenciar bastante, o que vai prejudicar tem que ser corrigido (Professor Márcio, entrevista virtual, 2021).

Apesar de não termos destacado em nenhum momento das entrevistas que o jogo *Caça ao tesouro* possui fundamentos na TSD e que a intervenção realizada pelo professor permeia os momentos de devolução e de institucionalização (BROUSSEAU, 1986). Constatamos, na reflexão apresentada por Márcio, que essa postura docente ficou clara, pois ele destacou o fato daquilo que pode vir a atrapalhar a institucionalização do conceito deve ser corrigido. Entretanto, percebemos que a correção a que ele se refere trata-se, inicialmente, de indagações apresentadas aos estudantes e, caso isso não funcione, sugere-se que sejam realizadas intervenções na situação. Nessa mesma direção Samuel comentou:

> Samuel: [...] Eu pediria para que ele voltasse e refizesse o caminho para identificar em que momento ele errou [...] Não precisaria dizer obrigatoriamente que ele errou nisso, porque essas coisas podem acabar tirando a chance dele de pesquisar e identificar. [...] Nesse caso, eu acho que ele vai observar um padrão e isso inclusive, às

> vezes, é até fonte de erro, coisas que não são proporcionais, eles querem que sejam proporcionais. Mas, por exemplo, no caso dos seus exemplos, vão ter os pontos quase sempre alinhados, ele vai perceber (Professor Samuel, entrevista virtual, 2021).

Samuel deixa explícito, em sua fala, o cuidado com a forma de intervenção, de modo a permitir ao estudante a oportunidade de pesquisar e identificar o erro, no contexto da situação *adidática.* Isso pode estar atrelado ao processo de formulação e validação, na medida em que os estudantes apresentam as suas formulações e avaliam a plausibilidade dos conhecimentos. Tais aspectos também estão relacionados com a produção de conhecimentos e a comparação da atividade realizada pelos estudantes com aquelas desenvolvidas pelos matemáticos de profissão (BROUSSEAU, 1986).

Vale destacar, ainda, o obstáculo epistemológico mencionado por Samuel nos processos de ensino e aprendizagem de função, a saber: o encantamento que os estudantes conferem à noção de proporcionalidade (SIERPINSKA, 1992). No contexto do jogo, há essa proporcionalidade estabelecida entre as variáveis, mas deve-se ter cuidado para que os estudantes não façam uma transposição destas noções para outras situações, cujas funções não são proporcionais e isso poderá ocasionar um erro atrelado a um obstáculo epistemológico no estudo do conceito de função.

Ainda no lócus do critério pedagógico, indagamos os professores Márcio e Samuel sobre a avaliação deles quanto ao material, isto é, se teriam algumas modificações a sugerir, levando-se em consideração os estudantes com deficiência visual e videntes pertencentes as suas turmas no período letivo da realização das entrevistas. O professor Márcio fez o seguinte comentário:

> Márcio: Esse material com velcro que você fez aqui, ficou muito bacana eu gostei muito. [...] As casinhas ficaram muito boas, elas têm três e dois tipos de identificação, isto é, três pela cor para o estudante com baixa visão e vidente e duas para o estudante cego, que são o braille e a textura. [...]. Se conseguisse fazer menor dava para colocar em uma pastinha na mochila e aí você leva quatro e aí quando for trabalhar nos quatro quadrantes você junta e trabalha, depois desacopla e guarda (Professor Márcio, entrevista virtual, 2021).

No extrato da fala do professor Márcio, nota-se o comentário sobre três materiais: o primeiro deles é a maquete, na qual colocamos os velcros para que os estudantes fixassem os materiais. Esses velcros estavam presentes também na primeira versão do material e na avaliação inicial realizada pelos professores da sala de recursos, sendo que, naquele momento, eles sinalizaram para a importância da fixação, o que facilitou a utilização pelos estudantes e permitiu que não derrubassem ou ficassem com receios de derrubar o material. É comentado também sobre as casas, as quais agora estavam mais acessíveis por não serem mais confeccionadas em papel cartão e sim em cubos de madeira e apresentarem em sua estrutura três canais de percepção: o braille, as texturas e as cores.

O terceiro material, referendado por Márcio, foi o primeiro quadrante do plano de coordenadas cartesianas. Na sugestão apresentada por ele, foi destacado sobre o alcance pedagógico do material e o fato de que poderiam haver mais três placas, podendo compor, com o primeiro quadrante, os quatro quadrantes do plano de coordenadas cartesianas. Para isso, seria necessário reduzir o espaçamento entre os furos, aspecto este que identificamos na primeira versão do material como algo que dificultou, pelo menos em uma primeira utilização do material, a marcação dos pontos pelos estudantes.

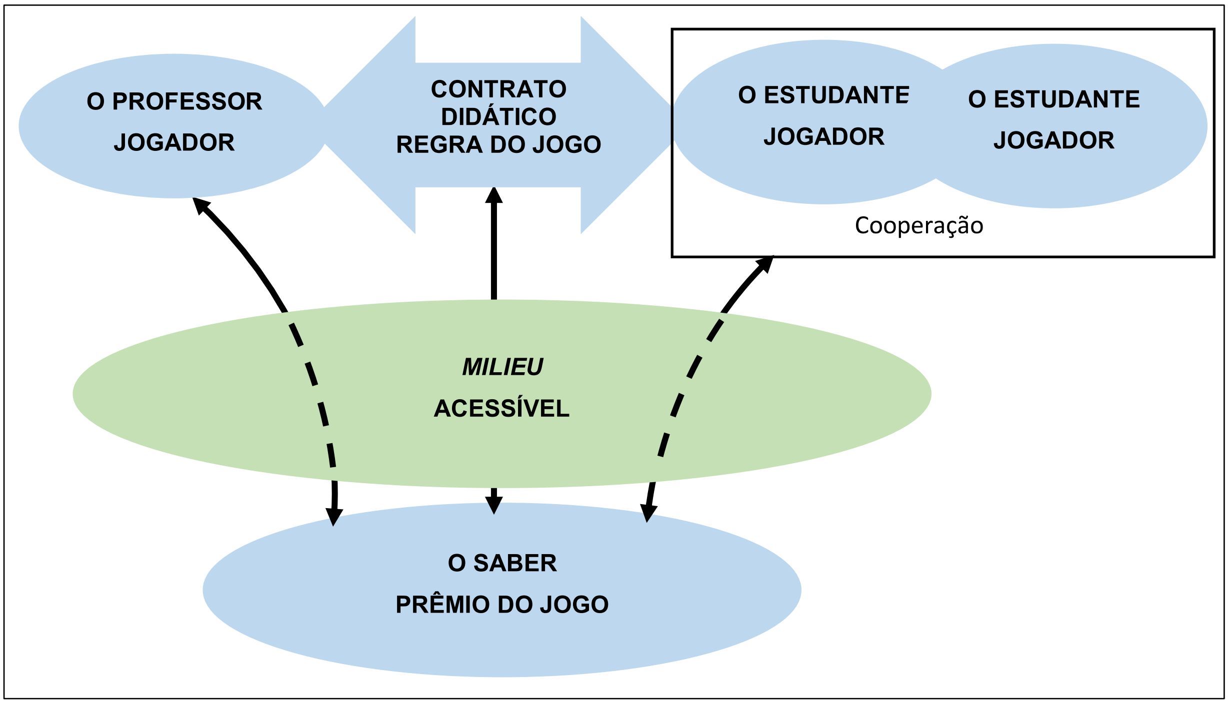
Como as informações necessárias para o desenvolvimento do jogo compõem as informações do primeiro quadrante, acreditamos que a utilização apenas desse quadrante não irá gerar obstáculos didáticos futuros. Mas, esta constatação reforça a necessidade de, no momento da institucionalização realizada pelo professor, ele comentar e apresentar os quatro quadrantes que compõem o plano de coordenadas cartesianas. Tal aspecto é ratificado pelo professor Samuel no extrato transcrito a seguir:

> Samuel: Eu acho que seria interessante começar com os inteiros até mesmo para se familiarizarem [...] começar logo com um número que não seja inteiro, talvez ele tivesse dificuldade em passar de uma etapa para outra. [...]. Então, o material representa um quadrante [...] precisa passar para ele a ideia do plano de coordenadas cartesianas, daí para os reais talvez a limitação de um quadrante que só tem inteiros, talvez isso possa dificultar um pouquinho, depois da formalização do conceito, ou [...] depois a ideia de domínio e de contradomínio [...]. Aí talvez usar outros esquemas (Professor Samuel, entrevista virtual, 2021).

Assim, Samuel reafirma a necessidade de iniciar a apresentação do conceito de função com a utilização de números inteiros. Mas, reforça o imperativo de na formalização do conceito, isto é, na institucionalização o professor apresentar os quatro quadrantes. Isso, com o intuito de que o trabalho desenvolvido não venha a criar uma falsa impressão de redução do plano de coordenadas cartesianas a apenas um quadrante, nem tão pouco, possa vir a criar obstáculos pedagógicos para os processos de ensino e aprendizagem dos conceitos de domínio e contradomínio de uma função. A sugestão que ele apresenta refere-se à utilização de outros esquemas, os quais já existem, como por exemplo, o plano de coordenadas cartesianas desenvolvido pelo Instituto Benjamin Constance (2021b) ou por Ferronato (2002).

No que se refere ao **critério interativo**, buscamos, a partir do sistema didático de Brousseau (1997), o qual envolve o professor, o estudante, o saber e o *milieu*, compreender as interações que se estabelecem entre eles, a partir das experiências e avaliações que foram realizadas por Márcio e Samuel. Assim, uma representação de como estamos compreendendo as relações teóricas que subsidiam o nosso estudo e que envolve a TSD, a Ludicidade e a inclusão no ensino do conceito de função, pode ser compreendida de acordo com a Figura 55:

Figura 55 - A TSD em um contexto lúdico e inclusivo



Fonte: Nossa produção (NERY, 2021).

Descrição da Figura 55: Diagrama formado por figuras em formato de elipses nas cores azul e verde e uma figura no formato de uma seta de pontas duplas na cor azul. Há três elipses na parte superior da figura: na primeira elipse, à esquerda da figura, está escrito O PROFESSOR JOGADOR e nas duas outras elipses, à direita da figura e com a junção destas duas, O ESTUDANTE JOGADOR; há uma seta entre a elipse do professor e a dos estudantes, na qual está escrito CONTRATO DIDÁTICO REGRA DO JOGO. No centro da figura, há uma elipse na cor verde, com a inscrição *MILIEU* ACESSÍVEL. Logo abaixo desta elipse e na parte inferior da figura, há outra elipse com a inscrição O SABER PRÊMIO DO JOGO. Partem desta última elipse três setas de pontas duplas que indicam para O PROFESSOR JOGADOR, O CONTRATO DIDÁTICO REGRA DO JOGO e O ESTUDANTE JOGADOR (Fim da descrição).

A primeira interação que questionamos os professores foi quanto à relação estudante-estudante mediada/influenciada pelo material. Salientamos que a nossa fundamentação teórica se encontra arraigada em um contexto cooperativo, no qual os estudantes ajudam-se mutuamente para alcançar a um objetivo comum, isto é, determinar o tesouro escondido. Essa perspectiva do jogo não foi descrita de antemão para os professores, diante disso, buscamos analisar como eles compreenderam os papeis que os estudantes poderiam vir a assumir ao longo da experimentação. Márcio destaca:

> Márcio: [...] Olhando a questão dos comandos eles vão ter que ter uma interação bem afinada, porque é um jogo bem dependente. Um depende do outro. Então, dá para interagir bem, os alunos vão ter que estar em sintonia, ele vai ter que seguir várias pistas, ele vai depender do outro até para responder. Eu acredito que o objetivo do jogo não é só aprender função, você vai aumentar os laços entre os colegas de sala, entre os alunos também, com essa interação que o jogo oferece.

Em sua fala, Márcio mencionou que os comandos/regras do jogo deixaram claro que os estudantes necessitarão ter uma interação afinada, pois, no jogo, um estudante depende do outro. Tais aspectos se alinham aos pressupostos dos jogos cooperativos, os quais foram abordados por Brown (2004) e dizem respeito sobre a necessidade dos estudantes: ajudarem-se mutuamente; serem mais sensíveis às solicitações uns dos outros; valorizarem e avaliarem as ações uns dos outros e questionarem as conclusões na busca pela compreensão da situação, também na promoção da tomada de decisões que influenciam no percurso de desenvolvimento do jogo.

Além disso, Márcio identificou, em sua avaliação, que o jogo não possui o intuito de possibilitar apenas que os estudantes pudessem aprender função, mas ampliar os laços de amizade entre os colegas, aspectos que terão desdobramentos ao longo das atividades posteriores ao desenvolvimento do jogo (BROWN, 2004). Ainda nesse contexto de interação entre os estudantes, Samuel comentou sobre o diálogo estabelecido entre os estudantes:

> Samuel: [...] a partir do momento que você consegue colocar os estudantes para conversarem entre eles, é impossível que eles façam as suas atividades sem dialogarem [...]. Então, você muda o centro da atividade, sai do professor, da exposição e vai para a ação do estudante. Então, quando você coloca o material você consegue deslocar esse eixo, isso é fundamental, a interação é entre eles, [...]. A função do professor é muito [...] no sentido de organizar as ideias, acompanhar o que eles estão fazendo e dar pistas (Professor Samuel, entrevista virtual, 2021).

Na opinião de Samuel, o jogo *Caça ao tesouro* possibilita mudar o enfoque do ensino, centrado na figura do professor, passando a considerar os estudantes como sendo o centro dos processos de ensino e aprendizagem. Sendo assim, ao colocar os estudantes para realizarem o jogo, de maneira colaborativa, estes se valem do diálogo/linguagem para a apresentação das formulações no contexto da situação *adidática* (BROUSSEAU, 1986). O elemento interação foi constatado e avaliado, por Samuel, como sendo positivo, segundo ele, fundamental para o sucesso nos processos de ensino e aprendizagem de função. Além disso, Samuel destaca, mais uma vez, que o professor deverá ter uma postura no sentido de organizar as ideias, acompanhar os estudantes, aspectos que podem ser traduzidos à luz da TSD como sendo constitutivos das fases de ação, formulação e validação (BROUSSEAU, 1997), além de dar pistas, as quais podem ser apresentadas pelas devolutivas realizadas no contexto da situação *adidática*.

Destarte, foi explicitada na fala do professor Samuel indícios da interação do professor com o estudante, mediada pelo material, postura esta que se caracteriza como uma mediação dos processos de ensino e aprendizagem de função. Essa concepção, também está presente na fala de Márcio:

> Márcio: [...] Eu acredito que o professor ele vai conseguir está mediando os grupos, vê quem está com maior e menor dificuldade, vai conseguir orientar para que essa dificuldade seja sanada. [...] essa interação vai depender do tipo de professor que vai estar na sala. Mais o material em si, ele oferece uma interação muito bacana (Professor Márcio, entrevista virtual, 2021).

O professor Márcio ressaltou em seu comentário o fato de a interação estar intimamente relacionada a disponibilidade e postura do professor em sala de aula. Esse aspecto também foi abordado por Samuel, ao ressaltar como um dos pressupostos iniciais para o sucesso no jogo, o aceite do professor. Tais aspectos, no permite também, analisar a interação do professor com o saber mediado pelo material, tendo em vista que ele precisa estar disposto a dialogar e favorecer a autonomia e interação entre os estudantes, conforme excerto a seguir:

> Samuel: [...] você precisa encontrar um professor que aceite a sua ideia, um professor que acredite trabalhar com esse tipo de material ou qualquer outro material. [...] a vantagem do material é que você não está preocupado em falar sobre o conceito antes, sem que os alunos passem pela experiência, o conceito é a última parte do processo e, isso é importante. E se o professor for apresentar o conceito sem o material, ele vai fazer isso muito mais rápido e ele vai ter uma falsa percepção de que todo mundo entendeu, porque eles memorizaram algumas coisinhas [...]. Alguns professores não querem ter essa

> experiência, esse trabalho, mas eu acho que vale a pena sim, eu acho que é para o professor que está interessado em fazer com que seu aluno compreenda um pouco mais (Professor Samuel, entrevista virtual, 2021).

É possível constatarmos, no extrato da fala de Samuel, que o papel do professor é fundamental para a utilização do jogo *Caça ao tesouro*, enquanto uma sequência didática que permite trabalhar com o conceito de função, mas que, para além disso, o professor deve estar disposto a trabalhar com qualquer material que possa possibilitar que os estudantes experienciem e construam, a partir dessas experiências, o conceito. Assim, essa mudança de postura gera uma mudança de enfoque, como foi supracitado, o enfoque encontra-se no estudante, o professor necessita estar mais atento e observar o processo, aspectos estes que podem vir a ser mais desafiadores para o professor do que a mera apresentação do conceito para os estudantes. Por esse motivo, o professor precisa estar disposto para utilizar o material.

Assim, em contrapartida ao convite apresentado para o estudante, faz-se necessário o seu aceite perante aos problemas, compreendendo-os como sendo de sua responsabilidade, tendo o intuito de agir e buscar solucioná-los (BROUSSEAU, 1986). Este convite deve ser aceito inicialmente pelo professor, para que ele possa conduzir o processo de experimentação com os estudantes, respeitando a autonomia e a construção do conhecimento elaborado pelos estudantes. Por outro lado, Márcio mencionou que o professor, ao utilizar um material como o que subsidia o jogo *Caça ao tesouro,* poderá ganhar tempo. Ele afirma: “a gente perde muito tempo fazendo um gráfico no quadro, ou então, pedindo para que os alunos façam. O material é como se o gráfico já estivesse pronto, o aluno só vai fazer as marcações, ele vai ganhar tempo com isso” (Professor Márcio, entrevista virtual, 2021).

Além disso, vale destacar que para os estudantes com deficiência visual a construção de gráficos, no quadro, não é acessível, eles necessitam de materiais para construção dos gráficos, também a constatação, com a percepção tátil, da relação entre as variáveis. Nesse contexto, buscamos compreender a interação dos estudantes com o saber mediada pelo material. Em relação a isso Samuel enfatiza:

> Samuel: o ponto de partida, mas, talvez não um ponto de chegada, [...] vai começar com o material, depois vai ter que abandonar o material. Se nesse momento da formalização, digamos, assim, de sistematização você ou o grupo puder voltar ao material, para reconstruir esses conceitos eu acho que ele será útil, acho que vai depender um pouco de como a atividade vai ser feita, da dinâmica da

> atividade, porque, também, você não pode sair do material e pular para outra etapa de maneira estanque (Professor Samuel, entrevista virtual, 2021).

O ponto de chegada, na perspectiva apresenta por Samuel, é o conceito de função. Isto também foi corroborado por Márcio, o qual mencionou que se faz necessário, ao final da experimentação realizada pelos estudantes, o professor deixar claro para eles a dependência entre as variáveis presentes na situação. Outro aspecto refere-se à necessidade de, aos poucos, abandonar o material e apresentar progressivamente todos os contextos que envolvem as funções, isto é: enquanto um objeto, em uma perspectiva estrutural; como um conjunto de pares ordenados; com um caráter operacional, enquanto um processo, um método bem definido que permite passar de um sistema para o outro (VILA-VERDE, 2016).

A terceira ponderação que buscamos compreender, junto aos professores, dizia respeito ao **critério comunicacional** e buscou identificar as influências que o material didático poderia apresentar para o processo de comunicação em sala de aula, entre os estudantes e dos estudantes com o professor. Alguns aspectos relacionados à comunicação entre os estudantes foram mencionados anteriormente, isso ao discorrermos sobre a interação entre eles, a qual caracterizou-se, no contexto de utilização do jogo enquanto um processo de cooperação, pautado na comunicação. Segundo Almeida (2011), isso pode vir a promover a integração de todos, visando alcançar uma meta coletiva.

Ao analisarmos a linguagem utilizada nas regras e dicas que compõem o jogo, considerando o público alvo estudantes iniciando o estudo do conceito de função, para tanto, cursando o nono ano de Ensino Fundamental, ou o primeiro ano do Ensino Médio, destacamos que Samuel mencionou, em sua fala, conforme transcrição a seguir:

> Samuel: [...] quando você coloca esse tipo de material é importante que eles consigam ler e interpretar, e irem de forma mais independente, que eles não retornem com perguntas: é pra fazer isso? Geralmente, nessa idade, eles já perguntam, independentemente do texto está complexo ou não. Mesmo que eles perguntem você pode pedir pra eles retornem a leitura da pergunta [...]. O material não possui problemas de conceito. E está ajustado a linguagem deles, sem problema algum, tanto para o nono ano quanto para o primeiro ano (Professor Samuel, entrevista virtual, 2021).

Na avaliação feita pelo professor Samuel, o material possui uma linguagem adequada, orientações claras, permitindo que seja abordado, de maneira adequada, o conceito de função, até mesmo porque, segundo ele, não foram identificados problemas de cunho conceitual. Mas, o material demanda dos estudantes a leitura, a interpretação e a busca pela solução das situações por si mesmos. Vale destacar que Samuel chama a atenção para o fato de que os estudantes podem vir a ler as questões, mas retornarem para um diálogo que envolva o professor com perguntas que venham a confirmar as suas hipóteses.

Destarte, faz-se necessário que o professor assuma um papel de incentivador e idealizador das condições para que os estudantes reflitam e elaborem respostas, pautadas em conhecimentos prévios, para as situações apresentadas. Isto poderá favorecer o processo de reflexão, descobertas, apreensão e construção de novos saberes (BROUSSEAU, 2002). Isto posto, destacamos que as situações apresentadas pelo professor poderão vir a possibilitar o levantamento de questionamentos pelos estudantes, contudo estes devem assumir para si tais questionamentos e o professor deverá atentar-se para quando lhes forem apresentadas indagações efeitos que rompam com o contrato didático/regras do jogo.

Ademais, ao questionarmos Márcio sobre a comunicação que o material pode vir a possibilitar entre o professor e o estudante, ele mencionou quanto ao aspecto de validação das soluções apresentadas pelos estudantes, as quais passam a ser avaliadas por todos os estudantes da turma, conforme excerto transcrito a seguir:

> Márcio: como o material é muito visual dá para os alunos mostrarem um pro outro, olha só que bacana. Todo mundo, faz o mesmo gráfico, gente levanta aí os gráficos para conferir. Tudo okay! Para você vê, bem interessante eu já estou imaginando uma aula assim (Professor Márcio, entrevista virtual, 2021).

Em seu comentário, ele mencionou sobre a possibilidade de todos estarem construindo o mesmo gráfico e apresentar essa solução para a turma, de maneira que ao levantarem o gráfico que foi construído, os estudantes estarão validando a sua construção, avaliando e validando também a dos seus colegas. Essa é uma etapa que também permeia por uma ação de cooperação na busca da legitimar o que acabou de ser construído, tendo em vista o fato de os estudantes terem a possibilidade de formular e validar conhecimentos, em um contexto menor, isto é, em dupla no decorrer do jogo. Aspecto este que poderá favorecer a apresentação e legitimação de modelos apresentados para outros membros da turma no momento de socialização indicado pelo professor Márcio.

Esse momento pode ainda favorecer o processo de comunicação entre os demais estudantes da turma, pois todos podem se posicionar sobre o modelo que foi apresentado e, caso haja discordância, o professor poderá envolver a turma na busca pela justificativa para a discordância ou concordância, visando à construção de argumentos convincentes que venham a provar a veracidade daquilo que foi apresentado (BROUSSEAU, 1986). Vale destacar que nos pressupostos da TSD o esquema didático de validação pode motivar os estudantes a discutirem uma situação e favorece a formulação de suas validações implícitas e explícitas (BROUSSEAU, 2002).

Em síntese, essa avaliação que foi realizada pelos professores da sala de recursos e da sala de aula regular aponta que o material pode favorecer o processo de inclusão educacional, na medida em que permite que o professor reconheça a diferença presente em sala de aula, não como um aspecto que dificulta ou impede o estudo do conceito de função, mas como um material didático que pode ampliar as possibilidades de participação, atuação, diálogo e cooperação entre os estudantes. Reconhece-se, portanto, o direito aos processos de ensino e aprendizagem de função como sendo para todos, respeitando, desse modo, a necessidade de se construir um *milieu* acessível para todos, no qual os estudantes podem atuar com equidade de oportunidades.

Primeiro eu quero parabenizar pela iniciativa
de pensar em um material pedagógico tão inclusivo,
você pensar em um material que pode ser usado
tanto com os meninos com necessidades especiais,
no caso, a falta da visão e a pouca visão.
Isso em conjunto com o pessoal da sala de recurso
e o pessoal do ensino regular, então é uma iniciativa bacana
que tem que ser parabenizada.
Poucos são os estudiosos que se aventuram nessa parte do conhecimento.
Então, essa é uma contribuição muito grande e muito válida
(MÁRCIO, entrevista online, 2021).

A epígrafe apresentada foi escolhida com o intuito de iniciarmos as nossas considerações finais, enfatizando a fala do professor da Sala de recursos sobre a necessidade que a educação inclusiva pressupõe, de um trabalho em parceria, que envolva tanto o professor da sala de aula regular quanto o da sala de recursos, pensando no contexto da acessibilidade e do ensino para todos. Ademais, Márcio explicita, em sua fala, a carência de pesquisas que envolvem os estudantes com deficiência visual em contextos inclusivos, perante o ensino de Matemática, a partir disso, é que gostaríamos de iniciar as nossas considerações finais, motivando outros pesquisadores a buscarem contribuir com a efetivação da inclusão na educação.

Destacamos que os contextos inclusivos podem ser construídos com pressupostos na cooperação, isso ao se buscar a igualdade e a justiça social na educação, ações estas que podem favorecer a construção de uma sociedade mais inclusivas que busca respeitar as diferenças e os direitos humanos de todos os cidadãos. Salientamos que a cooperação vai além dos jogos, mas estes podem ser os precursores e desencadeadores de atitudes cooperativas no cerne educacional e, consequentemente, social.

Durante o presente estudo, foi possível constatarmos o quanto a estratégia cooperativa presente no jogo, fundamentado na TSD, possibilitou que os estudantes apresentassem algumas ações que podem favorecer a inclusão na educação. Ressaltamos, como exemplo, a confiança no trabalho em dupla, a qual possibilitou compartilhar opiniões, levantar hipóteses, argumentá-las e testá-las, com o intuito de validá-las. Mas, todas essas ações necessitavam do aval apresentado pelo colega no contexto do jogo e, quando alguma das respostas não estava como esperado, a maneira de encarrar o erro foi realizada com naturalidade, na medida em que juntos buscavam determinar a resposta que julgavam correta.

Destarte, constatamos com o desenvolvimento deste estudo que a cooperação na educação escolar pode contribuir para alcançar metas comuns, mas, nesse processo, favorece a inclusão, isso ao transformar situações desiguais em contextos que visam a equidade, respeitando-se as singularidades, autenticidades e espontaneidades de cada um dos partícipes da estrutura cooperativa. Desta maneira, trabalhar o jogo com um viés cooperativo incutiu nos estudantes o respeito mútuo, a compreensão de que o jogar com o outro pode ser criativo, desafiante, descontraído, divertido, harmonioso, inclusivo e igualmente prazeroso.

Nesse mesmo sentido, foi possível identificarmos o quanto é difícil definir jogo. Tendo em vista que uma situação pode vir a se constituir enquanto um jogo para uma dada pessoa e para outra apenas uma atividade. Mas, os aspectos que nos permitiram classificar a sequência didática elaborada como sendo um jogo coadunam com as características elencadas por Huizinga (2017), a saber: uma atividade livre, os estudantes foram convidados a participar; consciente, tomada como 'não-séria', isto é, na situação de jogo os estudantes poderiam valer-se do seu imaginário, das diversas formas para expressar os seus sentimentos, sejam através do riso, do barulho, entre outras; exterior à vida habitual, mas, fez referência a um contexto social; desligada de todo e qualquer interesse material, apesar de ter apresentado um enredo que motivou a descoberta de um tesouro escondido, não havia um interesse material explicito enfatizado ao longo do jogo, jogou-se pelo prazer e curiosidade que foram emanados da situação; foi praticada dentro de limites espaciais e temporais próprios, o jogo possuía um início e fim; continham regras, as quais compreenderam o contrato didático que fora estabelecido entre a professora pesquisadora e os estudantes e, talvez, tenha favorecido a formação de grupos sociais e o estreitamento das relações interpessoais entre os estudantes.

Vale destacar que a teoria dos jogos e as características que lhes conferem tal *status* contribuiu para que Brousseau (1998) realizasse uma modelação da TSD, a partir da compreensão de uma situação de jogo. Esse aspecto favoreceu para que nós pudéssemos realizar um entrelace entre a TSD e a ludicidade. Assim, a gênese da TSD encontra-se atrelada a preocupação com a situação didática, que poderá ser modelada por meio de um jogo, cujo prêmio será o conhecimento construído, a partir da solução ou das estratégias utilizadas pelos estudantes na situação.

Tendo em vista, esse entrelace entre a teoria dos jogos e a TSD, utilizou-se tais aspectos para favorecer a inclusão no ensino do conceito de função, tendo o intuito de responder ao seguinte questionamento propulsor:

Quais as potencialidades e limitações apresentadas pela Teoria das Situações Didáticas para a inclusão de estudantes com deficiência visual nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função com a mediação de um recurso lúdico?

Assim, buscamos construir um contexto que possibilitasse a inclusão, mesmo não utilizando o material em sala de aula regular, nos pautamos nos pressupostos da acessibilidade que pode favorecer, portanto, a utilização tanto por estudantes com deficiência visual quanto videntes. Assim, é um material que permite que todos possam aprender juntos o conceito de função e que tenham as suas singularidades respeitadas e levadas em consideração. Nesse viés compreensivo, construímos um material didático que compõe uma sequência didática, valorizando, portanto, outros canais de percepção além da visão, assim, utilizamos inúmeras texturas e materiais cuja percepção pudesse ser realizada a partir do tato.

Essa ampliação dos canais de percepção pode vir a favorecer não apenas os estudantes com deficiência visual, também todos os demais estudantes da sala de aula regular. Na medida em que o conceito de função envolve outros conhecimentos matemáticos e este pode ainda ser considerado algo abstrato para os estudantes, a manipulação e o tocar nos materiais para construir tabelas e gráficos e, a partir disso, representar as informações algebricamente como forma de sintetizar as informações, pode favorecer para que todos manipulem e sistematizem um saber atrelado ao conceito de função.

Destarte, um contexto inclusivo se faz com a promoção da igualdade na diferença, implica no reconhecimento da diferença como algo intrínseco da diversidade humana e que se encontra nas salas de aulas, considerando a acessibilidade como algo transversal a todos os espaços, relações pedagógicas e interações interpessoais. Além disso, a legislação brasileira assegura a necessidade de se garantir, criar, desenvolver, implementar, incentivar, acompanhar e avaliar a acessibilidade para todos os estudantes em todas as etapas e modalidades de ensino (BRASIL, 2015). Assim, o princípio da acessibilidade traduz-se em uma condição indispensável para a utilização com autonomia, segurança e reafirmação dos direitos de todas as pessoas à educação de qualidade. Além disso, a acessibilidade pode se constituir em um princípio que pode favorecer a todos/as, não apenas aqueles/as aos quais esse princípio é indispensável.

Nesse contexto, merece destaque a metodologia do desenho universal, a qual permite a construção de produtos e serviços, ambientes, programas e espaços acessíveis, os quais possibilitam ser utilizados pelo maior número de pessoas possíveis. Essa metodologia nos auxiliou na construção do jogo que compõe a sequência didática apresentada nesta tese que pode ser utilizado tanto por estudante com deficiência visual quanto videntes. Buscamos desenvolver, portanto, um material que possibilitasse a equiparação das possibilidades de uso. Defendemos que tais recursos pode contribuir com a reafirmação da necessidade de apresentar um *milieu* acessível que contribua para superar práticas segregacionistas no ensino do conceito de função.

Uma das potencialidades que a utilização da TSD trouxe para a construção da sequência didática, diz respeito a postura dos estudantes perante a construção de novos conhecimentos. Dito de outra forma, os estudantes devem formular hipóteses, comprovar resultados, construir conceitos e produzir conhecimentos, de uma maneira mais autônoma, ações que permearam a *situação adidática* apresentada no jogo *Caça ao tesouro*. Foi possível identificarmos esse aspecto, ao compararmos a postura dos estudantes, na fase *adidática*, a uma espiral perfeita e constatarmos que os estudantes realizavam a ação e formulação, de uma maneira muito natural, sendo que durante esses momentos buscavam validar as suas formulações e, ao constatarem a impossibilidade de validação, criavam novas estratégias de ação e formulação, levando-se em conta os momentos vivenciados anteriormente. Destarte, esses momentos contribuíram muito para a reafirmação da postura mais ativa e autônoma dos estudantes.

Dentre as funções sociais assumidas pelas escolas, ressaltamos a formação autônoma dos estudantes, isso pelo fato de identificarmos que a criança é inserida no mundo através das aprendizagens construídas nas instituições de ensino. Para tanto, faz-se necessário que os estudantes participem ativamente das atividades com equidade de oportunidades, ou seja, carece-se de metodologias e atividades acessíveis para todos, independente das suas necessidades específicas. Valoriza-se, portanto, o outro em sua diversidade e igualmente respeita-se os conhecimentos de mundo que cada um possui.

Ademais, atrelado a esse princípio da autonomia e tendo respaldo na TSD, constatamos que a sequência didática deveria proporcionar um uso simples e intuitivo, cuja utilização pudesse ser compreensível e que, portanto, não dependesse de experiências prévias. Neste sentido, depreendemos a necessidade de construir duas versões da sequência didática e avaliarmos os materiais e a estrutura destas duas versões.

A primeira versão, possuía alguns animais de plástico na maquete tátil, os quais compuseram o material didático. Estes não se mostraram acessível para os estudantes com deficiência visual, tendo em vista que foi constatada a necessidade de experiências prévias para sua identificação. Além disso, o primeiro quadrante do plano de coordenadas cartesianas contava com um espaço de 1 centímetros entre os furos, aspecto que dificultou para que os estudantes pudessem marcar os pontos e percorrer a mesma linha nas direções verticais e/ou horizontais.

Na segunda versão da sequência didática, ajustamos os materiais que não se mostraram acessíveis, na experimentação realizada pelos estudantes com a primeira versão, além disso, buscamos utilizar materiais com uma maior durabilidade e que não viesse a danificar a sua estrutura com a manipulação realizada pelos estudantes. Todos esses aspectos, foram pautados na acessibilidade e no desenho universal, atendendo-se, para tanto nos aspectos referentes: ao tamanho adequado; a significação tátil; a aceitação; a estimulação visual; a fidelidade; a facilidade de manuseio; a resistência e a segurança. Tais alterações poderão contribui com a autonomia dos estudantes na vivência da situação *adidática*.

No contexto da TSD, as fases da *situação adidática* representam os momentos mais importantes da aprendizagem, tendo em vista que o sucesso dos estudantes, nesses momentos, pode significar que eles, trabalhando de maneira autônoma, conseguiram construir novos conhecimentos. Essas fases também contribuíram para a reafirmação do princípio da inclusão na educação e, mais especificamente, no ensino de matemática, buscando superar atitudes de conservadorismo pedagógico ou metodológico, que enaltecem práticas de ensino tradicionais, cujo cerne se centra na figura do professor, enquanto detentor do saber, ou ainda, de atitudes protecionistas, caracterizadas pela impossibilidade de proporcionar condições de aprendizagem na/para a convivência com a diferença.

Assim, outra potencialidade apresentada pela TSD para a elaboração da sequência didática foi a possibilidade de se investigar o desenvolvimento do processo de aprendizagem dos estudantes com deficiência visual, a partir das quatro fases distintas, vivenciadas no decorrer do estudo, a saber: devolução, ação, formulação e validação. A ação, a formulação e a validação caracterizam uma *situação adidática* (BROUSSEAU, 1997) e compreenderam fases cuja postura dos estudantes ocorrerão de forma autônoma e investigativa, objetivando a construção de novos conhecimentos, os quais poderiam ser institucionalizados pelo professor. Enfatizamos que não realizamos a institucionalização do conceito de função, tendo em vista que os estudantes já estavam em anos cujo conceito de função já lhes havia sido apresentado. Assim, nossa postura no decorrer da pesquisa permeou pela fase de devolução a qual compete ao professor e compreendem uma *situação didática*.

Na ação, os estudantes buscaram ensinar, a si mesmos, o conceito de função, isto na medida em que ao longo da vivência do jogo ajustaram as suas ações, aceitaram ou rejeitaram hipóteses, indicaram hipóteses uns para os outros, escolheram as melhores soluções para as dicas e desenvolveram inúmeras interações com o *milieu*, o qual, no contexto do jogo *Caça ao tesouro*, foi construído tendo fundamentos acessíveis enquanto pressupostos essenciais para favorecer a autonomia, a interação e a investigação das dicas que compuseram o jogo e a situação *didática*.

Uma limitação que a TSD apresentou na elaboração da sequência didática se refere ao processo de adaptação do estudante ao *milieu*. Ao pensarmos em um processo de adaptação do sujeito ao jogo, no começo, isso feria os princípios da educação inclusiva que defendemos. Entretanto, ao nos fundamentarmos na construção de um *milieu* acessível que estivesse fundamentado nos pressupostos da Engenharia Didática, identificamos que isso possibilitava que o material didático construído fosse ao encontro das necessidades que os estudantes possuíam e não o contrário. Assim, essa limitação acabou contribuindo para que pudéssemos aprofundar a releitura da TSD, pautando-nos na acessibilidade para dispensar a adaptabilidade.

Além disso, o *milieu* apresentada foi dotado de intenções didáticas, organizadas pela professora pesquisadora, com o intuito de provocar e instigar o desenvolvimento de novas aprendizagens (BROUSSEAU, 1986) atreladas ao conceito de função. Nessa perspectiva, para se utilizar a TSD em um contexto inclusivo, carece-se de antemão a organização de um *milieu* acessível, por parte do professor, ou seja, deve-se levar em conta as necessidades específicas, não como forma de diferenciar para excluir, mas sim, considerar para incluir, provocar, instigar, gerar momento de desequilíbrio e equilíbrio, como forma de contribuir para a construção de novos conhecimentos que nas fases posteriores da situação didática, terão o *status* de saber. Assim, ao defendermos a construção de um *milieu* acessível, pressupõe-se o fato deste possibilitar a utilização de maneira autônoma e inteligível, por todos os estudantes que integram a turma, sem a necessidade de adaptações individualizadas.

A interação dos estudantes com o *milieu* acessível e cooperativo, estreitou também a interação entre os próprios estudantes, identificadas a partir da ajuda mútua e de uma maior sensibilidade uns com os outros, tanto que durante a aplicação da primeira versão do material, percebemos que mesmo antes da nossa sugestão de trabalharem juntos, os estudantes ajudavam-se mutuamente e apresentavam sugestões e indicações de estratégias uns para os outros. Esse aspecto também foi destacado por um dos professores, durante a avaliação do material, isso ao enfatizar em seu comentário sobre a possibilidade do jogo *Caça ao tesouro* além de proporcionar a aprendizagem do conceito de função, contribuir com a ampliação dos laços de amizade entre os colegas da turma.

A fase de formulação também nos permitiu destacar outra potencialidade da TSD para a construção da sequência didática, isso ao incentivar a utilização progressiva da linguagem, pelos estudantes, para exibir os conhecimentos construídos, uns para os outros. Nesta fase, o estudante, autor da formulação não agiu diretamente sobre a situação, pois foi o seu colega de jogo que faz a leitura das dicas e avaliou as soluções apresentadas. No entanto, vale destacar que nos momentos de formulações, a cooperação se fez presente e, na maioria das vezes, estas eram estabelecidas em parceria e a partir do diálogo estabelecido entre os estudantes.

Todas estas ações foram mediadas pela linguagem, com isso, atividades fundamentadas na TSD, podem permitir aos estudantes aproximarem a sua linguagem da linguagem matemática. Esse aspecto permitiu que os estudantes utilizassem uma linguagem matemática e, portanto, científica, de maneira clara visando possibilitar o seu entendimento pelo colega de jogo e pela professora pesquisadora, a qual valeu-se da devolução para instigar momentos de utilização de uma linguagem matemática adequada ao contexto vivenciado. Além disso, esse mecanismo contribuiu também para o processo de autonomia, ao acarretar a necessidade de utilização de uma comunicação de fácil compreensão pelos estudantes. Essa ênfase que a linguagem possui no contexto da TSD, pode favorecer, portanto, a inclusão na educação e a participação mais efetiva na sociedade.

Outra etapa presente na situação *adidática* que também se apresentou como uma potencialidade para a construção do jogo foi a validação, fase na qual todos os estudantes cooperaram na busca pela verdade, isto é, a mensagem que foi apresentada no momento anterior de formulação, isto a partir da linguagem, passou a ser submetida a um julgamento por parte do colega de jogo. Na experimentação realizada da primeira versão da sequência didática, isso ocorreu de maneira natural e quando não se aceitavam a formulação apresentada, os estudantes buscavam uma nova formulação para que esta fosse validada ou não, isso de maneira quase que imediata.

Um dos aspectos que contribuiu para a TSD apresentar estas potencialidades foi a permissibilidade do jogo ser cooperativo, no sentido de que a vivência das fases se constituiu como algo natural. Desse modo, os estudantes, demonstraram se sentir à vontade para apresentar as suas formulações, assim como também validar ou explicar porque estas estavam erradas. Eles demonstraram estar tão à vontade que, em alguns momentos, pelo fato de a pesquisadora estar lhes observado, eles utilizavam uma linguagem a partir de cochichos, como forma de comunicar uns aos outros os seus pensamentos, opiniões, formulação e validações.

Vale destacar que o momento de validação, no contexto da TSD, não é suficiente para a consolidação do conhecimento como um saber, faz-se necessário um momento para institucionalizar os conhecimentos construídos. No contexto da experimentação do jogo *Caça ao tesouro*, enfatizamos que não realizamos esse momento, isso pelo fato de os estudantes estarem em anos posteriores aos que são apresentados os conceitos de função, então eles já conheciam e demonstraram ter saberes atrelados a esse conceito.

Ademais, a TSD trouxe uma ênfase para a importância da institucionalização, ao enfatizar o momento a ser realizada, pois não deve ser precipitado nem tardio, pois, caso isso ocorra, poderá interromper a construção do significado da situação proposta pelo professor, ou ainda, poderá reforçar interpretações inexatas. Esta compreensão se fez presente também nas avaliações da segunda versão do material didático, realizadas pelos professores da Sala de recursos e da sala de aula regular, ao ressaltarem como sendo um momento essencial para a sistematização das informações construídas ao longo da experimentação *adidática*.

Uma limitação do material apresentada pelo professor Samuel e que vem ao encontro das potencialidades da TSD, refere-se ao fato de utilizarmos o primeiro quadrante do plano de coordenadas cartesianas, pela limitação do tamanho, não utilizamos todo o plano. Assim, foi sugerido pelo professor Samuel para o momento de institucionalização o professor aproveitar para apresentar, aos estudantes, os quatro quadrantes, isso poderá contribuir com o processo didático posterior ao jogo *Caça ao tesouro*, bem como favorecerá o não desenvolvimento de obstáculos pedagógicos futuros.

O desenvolvimento deste estudo nos permite inferir que o professor ao utilizar o jogo *Caça ao tesouro* deverá assumir uma postura de mediador do conhecimento e coadjuvante nos processos de ensino e aprendizagem. Mas, necessitará estar atento para a postura dos estudantes, buscando incentivá-los no decorrer de toda *situação adidática*, e poderá ainda fazer intervenções em forma de devolutivas objetivando permitir, aos estudantes, refletirem ou repensarem sobre os conhecimentos, exibidos ao longo da vivência. Assim, a postura do professor é um aspecto decisivo para o sucesso ou não da situação didática, este aspecto encontra fundamento tanto na experimentação da primeira versão do jogo, quanto na avaliação que os professores da Sala de recursos e da Sala de aula regular realizaram da segunda versão do jogo.

O professor deverá, ainda, atentar-se para o contrato didático, isto é, para as regras do jogo, no sentido de ter claro os efeitos destes, os quais foram considerados para a elaboração do jogo *Caça ao tesouro* e podem ser destacados enquanto contribuições apresentadas pela TSD, a saber: Topaze, a resposta a ser fornecida pelo estudante é previamente determinada, assim, o professor se coloca em uma zona de conforto; Joudain, o professor para evitar o debate do conhecimento admite perceber indícios de um saber nos comportamentos e respostas do estudante; Deslize metacognotivo e metadidático, o professor acaba considerando a técnica como sendo o objeto de estudo; o uso abusivo de analogias, se o estudante fracassou em um processo de aprendizagem lhes são apresentas situações similares para serem memorizadas e/ou reproduzidas e, por último, o envelhecimento das situações de ensino, quando o professor encontra dificuldade para reproduzir a mesma lição.

O professor necessita também estar atento ao erro durante o jogo *Caça ao tesouro*, este poderá dar indícios de obstáculos epistemológicos. As fases que compuseram a situação *adidática* permitiram que os estudantes melhorassem os seus resultados ou os abandonassem para formular outros e estes mesmos avaliaram a plausibilidade das informações apresentadas, constituindo-se, assim, em momentos autônomos para os estudantes. Conforme dados coletados no momento de experimentação do estudo, houve formulações posteriormente validadas, as quais estavam erradas, mas necessitamos estar atentos para identificarmos se: tais erros poderiam trazer prejuízos futuros? E se estes erros se constituíam enquanto obstáculos epistemológicos ou obstáculos didáticos futuros?

A resposta para essa pergunta permeou a decisão de intervenção da professora pesquisadora no decorrer do estudo, a qual buscou realizar devoluções com o intuito de permitir aos estudantes retornarem ao que havia sido validado e, portanto, buscarem novas formulações, ou ainda, deixarem seguir com a formulação, por ter percebido a não interferência do erro no processo de institucionalização do resultado. Esse último caso, pode ser exemplificado a partir da formulação de Beatriz ao se desconsiderar, na resolução, a taxa fixa da locação do carro e aceitar apenas o valor que variava a partir dos quilômetros percorridos.

Concordamos com os professores Márcio e Samuel, avaliadores da segunda versão do jogo *Caça ao tesouro*, sobre o pressuposto inicial para o sucesso da situação didática se referir ao aceite do convite apresentado no jogo, tanto por parte dos professores quanto dos estudantes. Ademais, o papel do professor será orientado por atitudes de mediação e, portanto, oposta ao ensino tradicional e técnico, ele será um observador, idealizador, incentivador e propositor de devoluções. Já os estudantes passam a ter papel principal, assumindo uma corresponsabilidade pela construção de novos saberes e aceitando as situações do jogo, como sendo suas e que carecem da sua atuação mais ativa para ler, interpretá-las e solucioná-las.

Em síntese, a TSD nos auxiliou na construção de um jogo que possibilitou aos estudantes com deficiência visual partirem de uma representação tabular das informações; estabelecerem correlações entre estas informações; determinarem pares ordenados de pontos, com o intuito de sumarizar as informações, perceberem que esta correlação envolvia variáveis dependentes e independentes, as quais não poderiam ser tomadas de maneira diferente, isto é, a variável dependente sempre resultava das informações expressas a partir da variável independe; construírem gráficos, e, por último, determinarem a representação algébrica para descrever a situação investigada. Estas ações contribuíram para a organização de uma sequência didática que permitiu superar a mecanização do processo de apresentação do conceito de função, isso ao partir sempre de uma representação algébrica para uma representação gráfica.

Enfatizamos que um dos maiores desafios no estudo do conceito de função, junto aos estudantes com deficiência visual, refere-se ao processo de construção dos gráficos de maneira autônoma, além disso, comumente presenciamos práticas pedagógicas que valorizam o apelo visual no estudo desse conceito. Assim, acreditamos e defendemos, a partir dessa pesquisa, a necessidade de ampliarmos os canais de percepção no estudo de conhecimentos matemáticos, isso poderá favorecer o processo de inclusão e de aprendizagem dos estudantes dos diversos conceitos da Matemática, além de contribuir com a superação do visocentrismo que é tão presente nas práticas pedagógicas na Matemática.

Muitos foram os desafios vivenciados ao longo da realização deste estudo, dentre eles destacamos a impossibilidade de estarmos junto aos estudantes e professores que foram partícipes deste estudo. Tínhamos o intuito, no início do estudo, de adentrarmos a sala de aula regular, no memento de apresentação do conceito de função do ano letivo dos estudantes do primeiro ano do Ensino Médio da turma do professor Samuel, para utilizarmos o recurso lúdico elaborado e então investigarmos a sua acessibilidade e o processo de interação entre os agentes envolvidos nos processos de ensino e aprendizagem, no entanto, isso não foi possível, mas esperamos, em breve levarmos esse material para o contexto da sala de aula regular que possua estudantes com deficiência visual dentre os videntes.

Assim, destacamos ainda, que esse estudo culminou na necessidade de desenvolvimento de outras pesquisas, as quais possam analisar as contribuições da utilização da sequência didática, a partir da experimentação do jogo *Caça ao tesouro* em sala de aula regular, tendo estudantes com deficiência visual e videntes, tanto no contexto do nono ano do Ensino Fundamental quanto do primeiro ano do Ensino Médio. Outra necessidade que identificamos é de realizar estudos que possam investigar a postura do professor ao utilizar a sequência didática em um contexto inclusivo, tendo estudantes com deficiência visual e videntes. Além disso, faz-se necessário pesquisas que busquem compreender a postura dos estudantes com deficiência visual e videntes, em sala de aula regular, com a utilização de sequências didáticas, cujos objetivos perpassam pela mobilização de atitudes proativas e incentivo a imaginação, ao levantamento de hipóteses, a validação destas e a uma postura mais autônoma por parte de todos.

Chegamos ao final desse estudo com a sensação de que muito ainda necessita ser feito, visando construir instituições educacionais verdadeiramente inclusivas. Para ao longo da história da humanidade, não mais seja necessário falarmos de inclusão, pois este processo será tão natural que todos estarão praticando com envolvimento, empenho, respeito e reafirmação. Além disso, para essa construção podemos ter como ponto de partida o mesmo método de percepção dos estudantes com deficiência visual, isto é, os quais percebem das partes para o todo, ao contrário de uma percepção centrada no visocentrismo que parte do todo para as partes. Tal comparação nos permite inferir que a inclusão se inicia no portão que dá acesso a instituição, permeia todos os espaços, corredores, murais, conversas, práticas pedagógicas, metodologias e avaliações e gera impactos nos diversos segmentos da sociedade, pois se a inclusão se efetiva nas escolas, estas disseminam esse processo para outras espaços sociais, e, contribuem, portanto, para a construção de uma sociedade inclusiva.

ALMEIDA, M. T. P. **Brincar cooperativo**: vivências lúdicas. 2. ed., Petrópolis: Vozes, 2011.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

ANGROSINO, M. **Etnografia e observação participante**. Tradução de José Fonseca. Porto Alegre: Artmed, 2009.

ARAGÃO, I. G.; TAVARES, J. A. V.; JESUS, A. M. de. Multiplano pedagógico: do concreto ao abstrato. **Anais...** 2016, p. 1-11. Disponível em: <https://eventos.set.edu.br/enfope/article/download/2098/644>. Acesso em: 2 jan. 2021.

ARENDT, H. A crise na Educação. In: ______. **Entre o passado e o futuro**. Tradução de Mauro W. Barbosa. 8. ed. São Paulo: Perspectiva, 2016, p. 181-203.

ARTIGUE, M. Ingeniería didáctica. In: ARTIGUE, M. *et al*. **Ingeniería didáctica em Educación Matemática**: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica, 1995, p. 33-59.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. In: ARTIGUE, M. *et al*. **Didactique des mathématiques**. Paris: Delachaux et Niestlé, 1996, p. 243-274.

ABNT - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 9050**: Acessibilidade e edificações, mobiliário, espaço e equipamentos urbanos. 2020.

ABNT - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR ISO 9241-210**: Ergonometria da interação humano-sistema – parte 210: projeto centrado no ser humano para sistemas interativos. 2011.

BACELAR, V. L. E. **Ludicidade e Educação Infantil**. Salvador: EDUFBA, 2009.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Tradução de Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BANDEIRA, S. M. C. *et al*. Fundamentos epistemológicos na inclusão social e educacional dos deficientes visuais: estudo a partir de um tabuleiro perfurado. **Anais...** 2011, p. 1-12.

BERNOULLI, J. Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les isopérimétres. In: ______. **Opera Omnia, Tam Antea Sparsim Edita, quam hactenus inedita**. ETH-Bibliothek Zürich: Lausannae & Genevae, p. 235-269. 1742. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-3595>. Acesso em: 23 jan. 2021.

BOURBAKI, N. **Théorie des ensembles**. Paris: Masson, 1990. Disponível em: <http://tomlr.free.fr/Math%E9matiques/Bourbaki/Theorie%20Des%20Ensembles.pdf>. Acesso em: 23 jan. 2021.

BOYER, C. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher; Edusp, 1974.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Diário Oficial da República Federativa do Brasil. Brasília: Distrito Federal, 1988. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicaocompilado.htm>. Acesso em: 3 maio 2018.

BRASIL. **Convenção sobre os direitos das pessoas com deficiência**: protocolo facultativo à convenção sobre os direitos das pessoas com deficiência. Secretaria Especial dos Direitos Humanos, Brasília, 2007. Disponível em: <https://www.oab.org.br/arquivos/a-convencao-sobre-os-direitos-das-pessoas-com-deficiencia-comentada-812070948.pdf>. Acesso em: 14 jun. 2020.

BRASIL. **Decreto nº 3.956**, de 8 de outubro de 2001. 2001. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto/2001/d3956.htm>. Acesso em: 3 mar. 2019.

BRASIL. **Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência**: Lei 13.146, de 6 de julho de 2015. Brasília, 2015. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2015/lei/l13146.htm>. Acesso em: 14 jun. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: a educação é a base, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 19 fev. 2021.

BRASIL. Ministério da Saúde. **Portaria nº 3.128**. 2008. Disponível em: <http://bvsms.saude.gov.br/bvs/saudelegis/gm/2008/prt3128_24_12_2008.html>. Acesso em: 1 maio 2018.

BROTTO, F. O. **Jogos cooperativos**: o jogo e o esporte como um exercício de convivência. 4. ed. São Paulo: Palas Athena, 2013.

BROTTO, F. O. **Jogos cooperativos**: o jogo e o esporte como um exercício de convivência. 1999. 209 f. Dissertação (Mestrado em Educação Física). Programa de Pós-Graduação em Educação Física. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 1999.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches em Didactique des Mathématiques**. v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. Tradução de Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, G. L'échec et le contract. **Recherches 41**. p. 177-182, 1980. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00483149/document>. Acesso em: 4 abr. 2019.

BROUSSEAU, G. **La théorie des situations didactiques**. Montréal: Université de Montréal, 1997. Disponível em: <www.cfem.asso.fr/actualites/archives/Brousseau.pdf>. Acesso em: 2 maio 2019.

BROUSSEAU, G. **La théorie des situations didactiques**. Université de Montréal, 1997. Disponível em: <http://www.cfem.asso.fr/actualites/archives/Brousseau.pdf>. Acesso em: 2 maio 2019.

BROUSSEAU, G. Le contrat didactique: le milieu. **Recherches em Didactique des Mathematiques**, La Pensée Sauvage, 1990, p. 309-336. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00686012/file/contrat_didactique_le_milieu.pdf>. Acesso em: 14 jun. 2020.

BROUSSEAU, G. **Théorie des situations didactiques**: didactique des mathématiques 1970-1990. França: La Pensée Sauvage, 1998.

BROUSSEAU, G. **Theory of didactical situations in mathematics**: didactique des mathématiques, 1970-1990. Translated by Nicolas Balacheff; Martin Cooper; Rosamund Sutherland; Virginia Warfiel. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002.

BROWN, G. **Jogos cooperativos**: teoria e prática. Tradução de Rui Bender. 5. ed. São Leopoldo: Sinodal, 2004.

BRUNO, M. M. G. Secretaria de Educação Especial. **Educação infantil**: saberes e práticas da inclusão - dificuldades de comunicação e sinalização - deficiência visual. 4. ed. Brasília: Ministério da Educação, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/deficienciavisual.pdf>. Acesso em: 6 jul. 2019.

BURGSTAHLER, S. **Universal design in education**: principles and applications. Seattle: University of Washington, 2009. Disponível em: <www.washington.edu/doit/sites/default/files/atoms/files/Universal-Design-Education-Principles-Applications.pdf>. Acesso em: 14 jun. 2020.

CAMARGO, E. P. de. Inclusão social, educação inclusiva e educação especial: enlaces e desenlaces. **Ciência e Educação**, Bauru, v. 23, n. 1, p. 1-6, 2017. Disponível em: <www.scielo.br/pdf/ciedu/v23n1/1516-7313-ciedu-23-01-0001.pdf>. Acesso em: 14 jun. 2020.

CAMBIAGHI, S. **Desenho Universal**: métodos e técnicas para arquitetos e urbanistas. 3. ed. São Paulo: Senac, 2018.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951. Disponível em: <http://literamati.dominiotemporario.com/doc/Conceitos.pdf>. Acesso em: 19 fev. 2021.

CARBONARI, P. C. Sujeito de direitos humanos: questões abertas em construção. In: SILVEIRA, R. G. *et al*. **Educação em Direitos Humanos**: fundamentos teórico-metodológicos. João Pessoa: Editora Universitária, 2007. p. 169-186.

CASTRO, M. A. de. **A construção e a desconstrução das ideias geométricas**: intervenção no ensino e na aprendizagem na perspectiva da matemática inclusiva. 2013, 105 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora: Juiz de Fora, 2013. Disponível em: <https://www2.ufjf.br/mestradoedumat/wp-content/uploads/sites/134/2011/05/Mari%C3%A2ngela-Assump%C3%A7%C3%A3o-de-Castro.pdf>. Acesso em: 2 jan. 2021.

CERQUEIRA, J. B.; FERREIRA, E. M. B. **Recursos didáticos na educação especial**. Instituto Benjamin Constant, 2016. Disponível em: <http://www.ibc.gov.br/educacao/71-educacao-basica/ensino-fundamental/262-recursos-didaticos-na-educacao-especial>. Acesso em: 24 maio 2021.

CÉZAR, N. S. R. Deficiente visual e a construção da ideia de função. **Anais...** 2013a, p. 1.

CÉZAR, N. S. R. Deficientes visuais e a construção da ideia de função. **Anais...** 2013b, p. 1-8. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/view/1141/131>. Acesso em: 2 jan. 2021.

CÉZAR, N. S. R. Deficientes visuais e a construção do conhecimento matemático da ideia de função. **Anais...** 2013c, p. 1-10. Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/227_1822_ID.pdf>. Acesso em: 2 jan. 2021.

CHEQUETTO, J. J. **Uma experiência didática para a aprendizagem de frações**: matemática para residentes de uma casa de passagem. 2016, 155 f. Dissertação (Mestrado em Ensino na Educação Básica). Universidade Federal do Espírito Santo: São Mateus, 2016. Disponível em: <http://repositorio.ufes.br/handle/10/5317>. Acesso em: 2 jul. 2020.

DUDH – ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS. **Declaração Universal dos Direitos Humanos**. 1948. Disponível em: <http://www.mp.go.gov.br/portalweb/hp/7/docs/declaracao_universal_dos_direitos_do_homem.pdf>. Acesso em: 24 maio 2021.

DELORS, Jacques. **Educação**: um tesouro a descobrir. São Paulo: Unesco, MEC, Cortez, 1999.

DIRICHLET, L. Ueber die darstellung ganz willkürlicher funktionen nach sinus und cosinusreihen. In: **Die darstellung ganz willkürlicher funktionen nach sinus und cosinusreihen**, 1837, p. 152-174. Disponível em: <https://archive.org/details/diedarstellungga00liebuoft/page/n5/mode/2up>. Acesso em: 19 fev. 2021.

ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. XVI Ebrapem. **Anais...** 2012. Disponível em: <http://www.eventos.ulbra.br/index.php/ebrapem2012/index/about>. Acesso em: 20 nov. 2020.

ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. XIX Ebrapem. **Anais...** 2015. Disponível em: <https://www.ufjf.br/ebrapem2015/anais/>. Acesso em: 20 nov. 2020.
enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: Universidad de los Andes, 1995, p. 33-59.

EULER, L. **Institutiones calculi differentialis**. ETH-Bibliothek Zürich: Ticini, 1787. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-3713>. Acesso em: 23 jan. 2021.

EULER, L. **Introductio in analysin infinitorum**. v. 1. University of the Pacific Scholarly Commons, 1748. Disponível em: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/101>. Acesso em: 23 jan. 2021.

FERNANDES, S. H. A. A. **Uma análise Vygotskiana da apropriação do conceito de simetria por aprendizes sem acuidade visual**. 2004. 322 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo: PUC, 2004.

FERREIRA, A. B. H. **Miniaurélio século XXI**: o minidicionário da língua portuguesa. 5. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2001.

FERRONATO, R. **A construção de instrumento de inclusão no ensino de matemática**. 2002. 126 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis: UFSC, 2002.

FREITAS, J. L. M. de. Teoria das Situações Didáticas. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: Educ, 2016, p. 77-111.

GHEDIN, E.; FRANCO, M. A. S. **Questões de método na construção da pesquisa em educação**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

HADDAD, M. A. O.; SAMPAIO, M. W. Aspectos globais da deficiência visual. In: SAMPAIO, M. W. *et al*. **Baixa visão e cegueira**: os caminhos para a reabilitação, a educação e a inclusão. Rio de Janeiro: Cultura Médica: Guanabara Koogan, p. 7-28, 2010.

HUIZINGA, J. **Homo Ludens**: o jogo como elemento da cultura. Tradução de João Pedro Monteiro. 8. ed. São Paulo: Perspectiva, 2017.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar**: conjuntos, funções. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

INSTITUTO BENJAMIN CONSTANT. Ministério da Educação. **Eixos Cartesianos**. 2021a.

INSTITUTO BENJAMIN CONSTANT. Ministério da Educação. **Função do 1º grau ou função Afim**. 2011.

INSTITUTO BENJAMIN CONSTANT. Ministério da Educação. **Informações institucionais**. 2021b. Disponível em: <http://www.ibc.gov.br/o-ibc>. Acesso em: 19 fev. 2021.

LAVILLE, C.; DIONE, J. **A construção do saber**: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas. Porto Alegre: Artmed; Belo Horizonte: UFMG, 1999.

LEÓN, L. C.; MARTINI, L. C. Education and social inclusion of people with visual impairment in the study of mathematical functions. **CSR and Sustainable Development**: a Multinational Perspective. 2015, p. 149-155. Disponível em: <https://www.researchgate.net/profile/Anu_Gupta6/publication/277664690_CSR_and_Sustainable_Development_A_Multinational_Perspective/links/556f484308aefcb861dd764f.pdf#page=177>. Acesso em: 2 jan. 2021.

LIMA, E. L. *et al*. **A matemática do ensino médio**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, Coleção do Professor de Matemática, v. 1, 2016.

LOPES, A. M. A. **Estratégias de mediação para o ensino de matemática com objetos de aprendizagem acessíveis**: um estudo de caso com alunos com deficiência visual. 2012, 290 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul: Porto Alegre, 2012. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/55685>. Acesso em: 2 jan. 2021.

LOPES, M. C.; FABRIS, E. H. **Inclusão e educação**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

LUCKESI, C. Ludicidade e formação do educador. **Revista Entreideias**, Salvador, v. 3, n. 2, p. 13-23, 2014. Disponível em: <https://rigs.ufba.br/index.php/entreideias/article/viewFile/9168/8976>. Acesso em: 1 abr. 2018.

LUTZ, M. R.; SALBEGO, A. F.; CORTELINI, D. R. O ensino de funções para alunos deficientes visuais. **Revista Prociências**, v. 3, n. 1, p. 1-16, jul. 2020. Disponível em: <http://prociencias.org/revista/ojs/index.php/prociencias/article/view/36/32>. Acesso em: 2 jan. 2021.

MACEDO, L. de; PETTY, A. L. S.; PASSOS, N. C. **Os jogos e o lúdico na aprendizagem escolar**. Porto Alegre: Artmed, 2005.

MADRUGA, S. **Pessoas com deficiência e direitos humanos**: ótica da diferença e ações afirmativas. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

MANTOAN, M. T. E. (Org.). **O desafio das diferenças nas escolas**. Petrópolis: Vozes, 2008.

MANTOAN, M. T. E. **Inclusão escolar**: O que é? Por quê? Como fazer? São Paulo: Summus, 2015.

MASINI, E. F. S. **O perceber de quem está na escola sem dispor da visão**. São Paulo: Cortez, 2013.

MELLO, F. A. de; CAETANO, J. L. P.; MIRANDA, P. R. de. Ferramentas tácteis no ensino de matemática para um estudante cego: uma experiência no IF Sudeste MG. **Remat**, Bento Gonçalves, v. 3, n. 1, p. 11-25, jul. 2017.

MELLO, F. A. de; MIRANDA, P. R. de. O projeto "Matemática para além da visão" e a confecção de uma ferramenta táctil para educandos cegos. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2016. p.1-7.

MULTIPLANO. **Multiplano**: aprendendo matemática brincando. Guia de orientações didáticas. 2021. Disponível em: <http://multiplano.com.br/>. Acesso em: 19 fev. 2021.

NICKELS, M.; CULLEN, Craig J. Mathematical Thinking and Learning Through Robotics Play for Children With Critical Illness: The Case of Amelia. **Journal for Research in Mathematics Education**. v. 48, n. 1, p. 22-77, jan. 2017. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/10.5951/jresematheduc.48.1.0022>. Acesso em: 20 ago. 2020.

OLIVEIRA, H. B. L. **Introdução ao conceito de função para deficientes visuais com o auxílio do computador**. 2010, 109 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro: Rio de Janeiro, 2010. Disponível em: <http://intervox.nce.ufrj.br/dosvox/textos/tese_heitor.pdf>. Acesso em: 2 jan. 2021.

ONU - Organização das Nações Unidas. **Convenção sobre os Direitos das Pessoas com Deficiência**. Nova Iorque: ONU, 2006.

ORLICK, T. **Vencendo a competição**. Tradução: Fernando José Guimarães Martins. São Paulo: Círculo do Livro, 1978.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

PIAGET, J. **Epistemologia genética**. Tradução de Álvaro Cabral, 3. ed., São Paulo: Martins Fontes, 2007.

PINHEIRO, D. M. D. **A importância da utilização de Material Concreto no ensino de Matemática**: uma experiência no ensino de Funções. 2014, 115 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia: Vitória da Conquista, 2014.

PIRES, R. F. **Função**: concepção de professores e estudantes dos Ensinos Médio e Superior. 2014, 440 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: São Paulo, 2014. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10984>. Acesso em 10 maio 2021.

QUINÓNEZ, L. D. C. L. **MatGrafvoice**: sistema de tratamento matemático e visualização tátil de funções matemáticas através de uma impressora Braille. 2016. 81 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica). Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2016.

RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N. **Álgebra para a formação do professor**: explorando os conceitos de equação e função. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

RODRIGUES, C. K. *et al*. Educação inclusiva na perspectiva da Educação Matemática e da Tecnologia. **Revista Fluminense de Extensão Universitária**. p. 19-20, jan./dez. 2013. Disponível em: <http://editora.universidadedevassouras.edu.br/index.php/RFEU/article/view/572>. Acesso em: 10 dez. 2020.

ROQUE, T. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANCHEZ-RUBIO, D. Crítica a uma cultura estática e anestesiada de direitos humanos: por uma recuperação das dimensões constituintes da luta por direitos. **Revista Cultura Jurídica**. v. 4, n. 7, p. 1-35, 2017. Disponível em: <www.culturasjuridicas.uff.br/index.php/rcj/article/view/370/142>. Acesso em: 4 abr. 2019.

SANTOS, B. S. Para uma concepção intercultural dos direitos humanos. In: ______. **A gramática do tempo: para uma nova cultura política**. São Paulo: Cortez, 2006, p. 433-470.

SASSAKI, R. K. **Inclusão**: construindo uma sociedade para todos. Rio de Janeiro: WVA, 1999.

SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. I Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**: livro de resumos. 2000. Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/files/sipemI.pdf>. Acesso em: 2 jan. 2021.

SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Relatório**. 2018. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/relatorio_viisipem.pdf>. Acesso em: 2 jan. 2021.

SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**: relatório. 2015. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/images/arquivos/relatorio_visipem.pdf>. Acesso em: 2 jan. 2021.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Ed.). **The concept of function**: aspects of epistemology and pedagogy, MAA Notes 25, p. 1-36, 1992.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Ed.). **The concept of function**: aspects of epistemology and pedagogy, MAA Notes 25, p. 25-58, 1992.

SILVA, N. C. B. da; OLIVEIRA, A. S. S. e; SÁS, R. M. Brincadeiras e jogos no ensino do indivíduo com deficiência mental. **Revista Científica Educare**, Paraíba, v. 1, n. 3, p. 20-33, 2008.

SILVA, J. S. S. da. **Acessibilidade educacional**: um conceito multifacetado. 3. ed. Ebook: Espírito Santo, 2019.

SILVEIRA, E. S. **A gênese instrumental na interação de alunas, cega e vidente, com uma maquete tátil no estudo de probabilidade**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Estadual de Santa Cruz. 2016.

SOUZA, M. A. de. **Introdução ao estudo de funções para alunos com deficiência visual com o auxílio do multiplano**. 2015, 114 f. Dissertação (Mestrado em Matemática), 2015.

TOCANTINS. **Guia pedagógico**: 9º ano do Ensino Fundamental. 2020. Disponível em: <https://central3.to.gov.br/arquivo/357215/>. Acesso em: 24 maio 2021.

TOSTES, A. M. B. **Matemática inclusiva, situações didáticas e tecnologia**: um estudo de caso no ensino superior. 2013, 87 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Severino Sombra: Vassouras, 2013. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=540423>. Acesso em: 2 jan. 2021.

TRINDADE, J. A. O. **Os obstáculos epistemológicos e a educação matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Santa Catarina: Programa de Pós-Graduação em Educação, 1996. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/111424>. Acesso em: 19 fev. 2021.

UNESCO. **Declaração de Salamanca**: sobre Princípios, Políticas e Práticas na Área das Necessidades Educativas Especiais. 1994. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/salamanca.pdf>. Acesso em: 24 maio 2021.

UNESCO. **Global education monitoring**: report inclusion and education - all means all. 2020. Disponível em: <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000373718>. Acesso em: 24 maio 2021.

VALENTE, W. R. Por uma história comparativa da Educação Matemática. **Cadernos de Pesquisa**. v. 42, n. 145, p. 162-179, 2012.

VALPATO, N. **Prototipagem rápida**: tecnologias e aplicações. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

VÁZQUEZ, P. S.; REY, G.; BOUBÉE, C. El concepto de Function up to the Middle of the 19 th Century. **Archive for History of Exact Sciences**, v. 16, n. 1, p. 37-85, 1976.

VIANNA, C. C. S. *et al*. Recursos para o ensino de gráficos e funções para deficientes visuais. **Anais...** 2013, p. 1-8.

VILA-VERDE, T. M. P. D. **El álgebra en la enseñanza inclusiva de la matemática Braille**: estrategias didácticas en el 3er. ciclo de la enseñanza básica em Portugal. 2016, 809 f. Tese (Doutorado em Didática e Organização Escolar). Universidade Complutense de Madrid: Madrid. Disponível em: <https://eprints.ucm.es/40562/1/T38159.pdf>. Acesso em: 2 jan. 2021.

WAIRIMU, C. M. **Effectiveness of Assistive Technology on Teaching Mathematics to Learners with Visual Impairments in Special Primary Schools in Kenya**. 2019, 194 f. Tese (Doutorado em Psicologia), Universidade Kenyatta: Quênia, 2019. Disponível em: <http://ir-library.ku.ac.ke/handle/123456789/19860>. Acesso em: 2 jan. 2021.

YOUSCHKEVITCH, A. O. The concept of function up to the middle of the 19th century. **Archive for History of Exact Sciences**. v. 16, n. 1, p. 37-85, 1976. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/41133460>. Acesso em: 19 fev. 2021.

ZUFFI, E. M. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. **Hipátia**, Campos do Jordão (SP), v. 1, n. 1, p.1-10, dez. 2016.

APÊNDICE A – Termo de anuência da Instituição

Ao:

Comitê de Ética em Pesquisa com seres humanos

Universidade de Brasília

Senhor(a) Coordenador(a) do CEP-UnB

Eu, ____, responsável pela ____, conheço o Protocolo de Pesquisa intitulado "*A Teoria das Situações Didática e a inclusão de estudantes com deficiência visual nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função mediados por um recurso lúdico*", desenvolvido pela pesquisadora Professora M.Sc. Érica Santana Silveira Nery, sob orientação do Professor Dr. Antônio Villar Marques de Sá e concordo com sua realização após a apresentação do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido devidamente preenchido e assinado pelas partes.

O início desta pesquisa nesta Instituição só poderá ocorrer, a partir da apresentação da carta de aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa da UnB.

Atenciosamente,

____

APÊNDICE B – Carta de esclarecimento sobre o Projeto e a Pesquisa e Termo de Assentimento Livre e Esclarecido

Carta de esclarecimento sobre o Projeto e a Pesquisa

Pesquisa: A Teoria das Situações Didática e a inclusão de estudantes com deficiência visual nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função mediados por um recurso lúdico

Pesquisadora: Érica Santana Silveira Nery

Informações sobre o projeto e sobre a pesquisa: A pesquisa a ser realizada tem por objetivo investigar as potencialidades e limitações da Teoria das Situações Didáticas para a inclusão de estudantes com deficiência visual nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função mediados por um recurso lúdico. Para isso, estamos lhe convidando para participar deste estudo. Ressaltamos que esta pesquisa terá como atividade principal a realização de atividades de uma Sequência de Didática sobre o conteúdo denominado por função, que pertence à grade de conteúdos de Matemática a serem estudados no Ensino Médio. Seu nome será mantido em sigilo, assim escolheremos um nome fictício a fim de poder descrever suas respostas e opiniões durante os encontros. Os encontros serão gravados e sua transcrição será lida para você a fim de que tome conhecimento do conteúdo das áudio-gravações. Essas gravações e suas transcrições serão guardadas em sigilo por cinco anos.

Termo de Assentimento Livre e Esclarecido

Eu, ____, portador (a) do RG __________________, residente na ____, com número de telefone _______________________e e-mail _________________________________, abaixo assinado, dou meu assentimento livre e esclarecido para participar como voluntário da pesquisa supracitada, sob a responsabilidade da pesquisadora Érica Santana Silveira Nery e Antônio Villar Marques de Sá.

Assinando este Termo de Consentimento, estou ciente de que:

1) O objetivo da pesquisa é investigar as potencialidades e limitações da Teoria das Situações Didáticas para a inclusão de estudantes com deficiência visual nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função mediados por um recurso lúdico;
2) A realização desta pesquisa é fundamental para contribuir com a integração entre alunos cegos e com baixa visão em salas de aula regular, bem como com a aprendizagem do conceito de função;
3) Durante o estudo, estarei resolvendo as tarefas de uma sequência de ensino utilizando os materiais que compõem esta sequência;
4) Assim que for terminada a pesquisa, terei acesso aos resultados globais do estudo;
5) Durante toda a pesquisa estarei livre para interromper, a qualquer momento, minha participação;

6) A participação nesta pesquisa é voluntária, sendo que estou ciente que não receberei qualquer forma de remuneração;
7) O risco desta pesquisa é mínimo e restringe-se ao constrangimento, caso eu não saiba responder às indagações que serão propostas, entretanto, neste caso, poderei tirar as dúvidas com a pesquisadora. Outro risco refere-se à lembrança de algum evento desagradável durante minha experiência escolar com a própria Matemática ou disciplinas afins;
8) Os meus dados pessoais serão mantidos em sigilo e os resultados obtidos com a pesquisa serão utilizados apenas para alcançar os objetivos do trabalho, incluindo a publicação na literatura científica especializada;
9) Se tiver qualquer dúvida em relação à pesquisa, poderei entrar em contato com a pesquisadora através dos telefones (75) 99959-7838 ou (61) 98559-0969 ou pelo e-mail erica.s.silveira@hotmail.com;
10) Este projeto foi revisado e aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais (CEP/CHS) da Universidade de Brasília. As informações com relação à assinatura do TCLE ou aos direitos do participante da pesquisa podem ser obtidas por meio do e-mail do CEP/CHS: cep_chs@unb.br;
11) Obtive todas as informações necessárias para poder decidir conscientemente sobre a minha participação na referida pesquisa;
12) Este Termo de Assentimento é feito em duas vias, impressas em Braille, a qual permanecerá em meu poder e a outra com os pesquisadores responsáveis.

Brasília - DF, ______de ____________________ de 2021.

____

Assinatura do participante

____

Érica Santana Silveira Nery

Pesquisadora do projeto

____

Antônio Villar Marques de Sá

Orientador da pesquisa

APÊNDICE C – Carta de esclarecimento sobre o Projeto e a Pesquisa e Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Carta de esclarecimento sobre o Projeto e a Pesquisa

Pesquisa: A Teoria das Situações Didática e a inclusão de estudantes com deficiência visual e videntes nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função mediados por um recurso lúdico

Pesquisadora: Érica Santana Silveira Nery

Informações sobre o projeto e sobre a pesquisa: A pesquisa a ser realizada tem por objetivo investigar as potencialidades e limitações da Teoria das Situações Didáticas para a inclusão de estudantes com deficiência visual nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função mediados por um recurso lúdico. Para isso, convidamos o aluno sob sua responsabilidade para participar desta pesquisa. Ressaltamos que esta pesquisa terá como atividade principal a realização de atividades de uma sequência de ensino sobre o conteúdo denominado por função, que pertence à grade de conteúdos de Matemática a serem estudados no Ensino Médio. O nome do aluno sob sua responsabilidade será mantido em sigilo, assim escolheremos um nome fictício a fim de poder descrever suas respostas e opiniões durante os encontros. Os encontros serão gravados e sua transcrição será lida para o aluno a fim de que tome conhecimento do conteúdo das áudio-gravações. Essas gravações e suas transcrições serão guardadas em sigilo por cinco anos.

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Eu, ____, portador (a) do RG __________________,responsável pelo aluno ____, residente na ____, com número de telefone _______________________e e-mail __________________________________, abaixo assinado, dou meu consentimento livre e esclarecido para a participação do aluno acima referido como voluntário da pesquisa supracitada, sob a responsabilidade da pesquisadora Érica Santana Silveira Nery e Antônio Villar Marques de Sá.

Assinando este Termo de Consentimento, estou ciente de que:

1) O objetivo da pesquisa é investigar as potencialidades e limitações da Teoria das Situações Didáticas para a inclusão de estudantes com deficiência visual nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função mediados por um recurso lúdico;
2) A realização desta pesquisa é fundamental para contribuir com a integração entre alunos cegos e com baixa visão em salas de aula regular, bem como com a aprendizagem do conceito de função;
3) Durante o estudo, o aluno sob minha responsabilidade estará resolvendo as tarefas de uma sequência de ensino utilizando os materiais que compõem esta sequência;

4) Assim que for terminada a pesquisa, terei acesso aos resultados globais do estudo;
5) O aluno sob minha responsabilidade estará livre para interromper, a qualquer momento, sua participação nesta pesquisa;
6) A participação nesta pesquisa é voluntária, sendo que estou ciente que o aluno sob minha responsabilidade não receberá qualquer forma de remuneração;
7) O risco desta pesquisa é mínimo e restringe-se ao constrangimento do aluno sob minha responsabilidade não saber responder aos problemas propostos ou à lembrança de algum evento desagradável durante sua experiência escolar com a própria Matemática ou disciplinas afins;
8) Os dados pessoais do aluno sob minha responsabilidade serão mantidos em sigilo e os resultados obtidos com a pesquisa serão utilizados apenas para alcançar os objetivos do trabalho, incluindo a publicação na literatura científica especializada;
9) Se tiver qualquer dúvida em relação à pesquisa, poderei entrar em contato com a pesquisadora através dos telefones (75) 99959-7838 ou (61) 98559-0969 ou pelo e-mail erica.s.silveira@hotmail.com;
10) Este projeto foi revisado e aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais (CEP/CHS) da Universidade de Brasília. As informações com relação à assinatura do TCLE ou aos direitos do participante da pesquisa podem ser obtidas por meio do e-mail do CEP/CHS: cep_chs@unb.br;
11) Obtive todas as informações necessárias para poder decidir conscientemente sobre a participação do aluno sob minha responsabilidade na referida pesquisa;
12) Este Termo de Consentimento é feito em duas vias, de maneira que uma permanecerá em meu poder e a outra com os pesquisadores responsáveis.

Brasília - DF, ______de ____________________ de 2021.

____

Assinatura do responsável pelo aluno participante

____

Érica Santana Silveira Nery

Pesquisadora do projeto

____

Antônio Villar Marques de Sá

Orientador da pesquisa

APÊNDICE D – Termo de Autorização ao Uso de Imagem

Eu, ____, portador(a) de cédula de identidade nº _______________________, autorizo a Pesquisadora Érica Santana Silveira Nery, a gravar em vídeo as imagens, tirar fotos e depoimentos do estudante sob minha responsabilidade durante os encontros, no(a) ____, referentes ao desenvolvimento do Projeto de Pesquisa "A Teoria das Situações Didática e a inclusão de estudantes com deficiência visual e videntes nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função mediados por um recurso lúdico" e veicular em qualquer meio de comunicação para fins didáticos, de pesquisa e divulgação de conhecimento científico sem quaisquer ônus e restrições.

Fica ainda autorizada, de livre e espontânea vontade, para os mesmos fins, a cessão de direitos da veiculação, não recebendo para tanto o estudante sob minha responsabilidade qualquer tipo de remuneração.

Brasília - DF, _____ de __________________ de 2021

Assinatura do responsável: ____

RG: ____________________________

APÊNDICE E – Regras da primeira versão do jogo "Caça ao tesouro"

Vocês estão recebendo uma maquete de um bairro, contendo ruas, quadras e casas. Cada casa encontra-se em quadras distintas; a localização de cada casa pode ser encontrada por meio de coordenadas representadas por letras e números. Além da maquete, estão recebendo também, uma caixinha do caçador, com objetos que poderão lhes auxiliar nos registros de informações. Outro objeto que está lhes sendo entregue é um quadro para registro.

1 – Cada um de vocês deve pegar uma caixinha do caçador e um quadro para registro;

2 – Para iniciar a caça ao tesouro, vocês devem escolher uma dentre as posições a seguir: D3, E4, G3 ou K9. Em seguida, posicionar o seu jogador, que está na caixinha do caçador, Átlas, homem com chapéu liso ou Apolo, homem com marcação no chapéu;

3 – Após estarem posicionados na maquete, vocês devem decidir qual de vocês dois, irá iniciar o jogo. O jogador que iniciar deverá escolher uma dentre as duas pastas de dicas para a caça ao tesouro e então retirar o texto que está na divisória nomeada por início;

4 – Depois de realizar a tarefa apresentada no texto, é a vez do segundo jogador pegar a outra pasta de dicas e então realizar sua primeira jogada;

5 – Os jogadores jogam alternadamente e a pasta de dicas escolhida inicialmente, será a pasta utilizada durante todo o jogo;

6 – Os jogadores deverão pegar as dicas na pasta de dicas sempre na ordem crescente dos números apresentados em suas divisórias;

7 – O jogador ao pegar uma dica, deverá ler em voz alta para que seu colega escute a dica e verifique se a jogada ou resposta apresentada está ou não correta;

8 – Atentem-se para as dicas que necessitam de cálculos e registrem os valores que lhe auxiliaram na resposta no quadro para registros que lhes foi entregue inicialmente. Para o registro, utilizem os objetos presentes na caixinha de cada caçador;

9 – Ao realizar as tarefas sugeridas pela dica, vocês devem retirar a casa e posicionar seu jogador sobre o velcro em que a casa estava.

Sucesso na caça ao tesouro!

APÊNDICE F – Dicas da primeira versão do jogo "Caça ao tesouro"

História da Caça ao tesouro

Muitos aventureiros tentam encontrar tesouros escondidos em vários países; há um registro de um tesouro escondido na cidade de Salvador, este tesouro foi descoberto pela primeira vez em 1673 por Newton e Leibiniz, após esse período, não se sabe o que aconteceu com este tesouro e, desde então, muitas pessoas ficaram curiosas, sentindo-se aventureiras e almejando encontrá-lo para saber o que era de tão especial que ele possuía. Conta-se que quem o descobre torna-se cheio de conhecimento e sabedoria, que podem ser aplicados em várias ciências, como na Física, Química, Engenharia e Economia. Sabendo-se da importância e da grande aplicabilidade deste tesouro, dois aventureiros, Átlas e Apolo, decidem investigar, até encontrá-lo. Para isto, estes aventureiros têm uma maquete de um dos bairros de Salvador, a qual poderá auxiliá-los a descobrir. Vamos juntos com Átlas e Apolo encontrar o tesouro escondido!

DICAS DO CONTEXTO DA VIAGEM DE FÉRIAS

Dica nº 1: Felipe irá viajar de férias com a família para Salvador. Como pretende ir de avião, pensa em alugar um carro para se deslocar nesses dias. Pesquisou e encontrou a empresa Dirija Bem que aluga carros com a seguinte oferta: pagar uma diária de R$ 15,00 mais R$ 0,50 por quilômetro percorrido. A dúvida de Felipe agora é sobre o hotel que ficará hospedado com sua família. O primeiro hotel que ele entrou em contato fica na quadra a esquerda do Aeroporto (representado na maquete pelo avião). Qual a localização exata deste hotel?

Dica nº 2: Seja bem-vindo(a) ao Hotel Star 1, estamos a 8 quilômetros da Praia do Forte. Considerando-se que a locadora de veículos entregue o carro no hotel em que Felipe e sua família estará hospedado, quanto Felipe pagará por um dia de aluguel do carro se for apenas para a Praia?
Agora que você já respondeu a situação proposta, represente as informações no quadro de registros.

Dica nº 3: O Hotel Star 1 soube que você auxiliou Felipe na informação que ele estava querendo, então decidiu lhe encaminhar a seguinte mensagem:
Muito obrigado pela assistência ao cliente interessado em nossos serviços, por isso, gostaríamos de lhe auxiliar na dica para encontrar o tesouro, sabemos que este tesouro é muito antigo e que se encontra próximo ao Oceanário das tartarugas. Temos uma filial do nosso hotel lá, indicamos a Felipe, por ser mais próximo da Praia do Forte. Este Hotel fica a cinco quadras à direita do Oceanário. Desejamos sucesso em sua caça ao tesouro. Felipe gostaria de saber a localização em coordenadas do hotel?

Dica nº 4: Seja bem-vindo(a) ao Hotel Star 2, a distância das nossas instalações até a Praia do Forte é de apenas 2 quilômetros. Considerando-se que a locadora de veículos entregue o carro no hotel em que Felipe e sua família estará hospedado, quanto Felipe pagará por um dia de aluguel do carro se for apenas para a praia?
Represente as informações no quadro de registros.

Dica nº 5: Felipe mencionou no Hotel Star 2 sobre a sua caça ao tesouro, então o funcionário do hotel informou que já ouviu falar do tesouro, mas, quem conhece muitos detalhes é o proprietário do Hotel Campo Verde. Então o funcionário sugeriu que você fosse ao Hotel Campo Verde, localizado duas quadras à direita da árvore. Qual a localização em coordenadas deste hotel?

Dica nº 6: Felipe gostaria de saber a distância deste hotel à praia e o valor que pagaria pela locação do carro, caso resolvesse se hospedar nele. Sabendo-se que o Hotel Campo Verde fica a 10 quilômetros de distância da Praia do Forte, qual seria o valor da locação do carro por um dia, considerando-se que a locadora entregou o carro no hotel e que Felipe foi apenas na Praia.
Represente as informações no quadro de registros.

Dica nº 7: O proprietário do Hotel Campo Verde foi muito simpático e lhe informou que o tesouro é extremamente valioso e que muitos já foram até ele para saber pistas para encontrá-lo; no entanto, quem sabe muita coisa sobre o tesouro é o proprietário do Hotel Praieiro, este hotel fica três quadras à direita do Canil da cidade. Qual a localização em coordenadas do hotel?

Dica nº 8: Seja bem-vindo(a) ao Hotel Praieiro, Felipe nos ligou e informamos que caso ele queira se hospedar conosco ele pagará na locação do carro para sair daqui do hotel e ir até a Praia do Forte uma diária de R$ 27,00.
Nestas condições, Felipe gostaria de saber de você, qual a distância em quilômetros do hotel até a praia?
Represente as informações no quadro de registros.

Dica nº 9: Sobre a sua caça ao tesouro, o gerente do Hotel Praieiro ligou para o proprietário que lhe encaminhou a seguinte mensagem:
Para descobrir o tesouro escondido você deve trabalhar junto com seu colega que também está à procura do tesouro, pois só assim saberão decifrar a dica final, pois eu sei apenas uma parte dela, ele deve ter encontrado a parte que falta. A dica que tenho é a seguinte:
Todos os problemas que vocês resolveram para chegar até aqui relacionam quilômetros com valores a serem pagos. O tesouro que vocês procuram pode ser exemplificado pelas leis de correspondência que possibilitam calcular o valor pago para qualquer quantidade de quilômetros percorridos em cada uma das situações investigadas por vocês. Diante disso, analisem juntos o quadro de registros e representem as informações deste quadro em um sistema de coordenadas (placa de madeira com furinhos); em seguida, determinem as fórmulas que possibilitam calcular qualquer valor pago em cada uma das situações investigadas.

Dica nº 10: Quais as fórmulas encontradas?
Para passar à última dica, determine o valor pago por uma pessoa que deseja ir de táxi à Arena Fonte Nova e encontra-se a 321 quilômetros de distância da Arena?
Determine também o valor pago por um dia de diária de locação de carro, se a o locatário percorreu 1.242 quilômetros de distância?
Pegue a última dica que está na caixa de dicas e vocês concluíram o desafio da caça ao tesouro.

Dica nº 11: Como são chamadas estas fórmulas que estabelecem relações entre duas grandezas? Seu colega possui uma informação que lhes auxiliarão descobrir.

DICAS DO CONTEXTO DA VISITA À ARENA FONTE NOVA

Dica nº 1: Marcos precisa da sua ajuda para ir à Arena Fonte Nova, a casa dele localiza-se na quadra a esquerda do Canil da cidade, representado na maquete, por uma casa com um cachorro no telhado. Qual é a quadra da casa de Marcos?

Dica nº 2: Seja bem-vindo(a) à casa de Marcos, para prosseguir ajude-o a calcular quanto pagará por um táxi, conforme situação a seguir:
Marcos e seus amigos moram há pouco tempo em Salvador e são fanáticos por futebol. Resolveram assistir ao jogo do Bahia X Vitória, na Arena Fonte Nova. Como ainda não conhecem muito bem a cidade, decidiram ir de táxi ao estádio. Ao entrar no táxi, Marcos perguntou ao motorista quanto custaria a corrida; o taxista informou que a bandeira I custava R$ 5,50 mais R$ 2,50 por quilômetro rodado. Sabendo-se que a casa de Marcos fica a 3 quilômetros do estádio quanto ele pagará pela viagem?
Agora que você já respondeu a situação proposta, represente as informações no quadro de registros.

Dica nº 3: A ajuda que você deu a Marcos foi muito útil, por isso ele lhe enviou a seguinte mensagem:
Muito obrigado pelo auxílio no problema que estava a me inquietar, sei que você está em busca do tesouro escondido, a informação que tenho é que este tesouro pode estar próximo a uma árvore. A casa de Camila fica duas quadras a esquerda da árvore, acredito que ela poderá lhe apresentar mais detalhes. Qual a localização exata da casa de Camila?

Dica nº 4: Camila está sem saber quanto custará a sua ida à Arena Fonte Nova, para assistir ao jogo. Marcos lhe avisou que a bandeira I custa R$ 5,50 mais R$ 2,50 por quilômetro rodado e sabendo-se que Camila mora a 7 quilômetros do estádio, quanto ela pagará ao taxista pela viagem?

Represente as informações no quadro de registros.

Dica nº 5: Camila lhe enviou uma mensagem de agradecimento:

Obrigada pelos cálculos que você realizou, foi exatamente esse valor que paguei pela viagem. Sobre o tesouro escondido que você está procurando, dizem que ele é muito valioso e está próximo ao aeroporto. Nós temos uma amiga, a Joana, que mora próximo ao aeroporto, ela também está com dúvidas sobre o valor que irá pagar pela corrida de taxi. Tenho certeza que ela poderá lhe ajudar, a casa dela fica três quadras à direita do aeroporto (na maquete o aeroporto está sendo representado por um avião). Qual a localização da casa de Joana?

Dica nº 6: Seja bem-vindo(a) a casa de Joana. Joana também é amiga de Marcos e também irá de táxi à Arena Fonte Nova. Como Marcos já havia lhe avisado que a bandeira I custava R$ 5,50 mais R$ 2,50 por quilômetros rodados e sabendo-se que Joana mora a 9 quilômetros do estádio, quanto ela pagará pela viagem ao taxista?

Dica nº 7: Joana, pagou exatamente o valor que você informou a ela, como ela estava com muita pressa, pediu para você ir na casa de Ricardo que ele saberá lhe dar informações sobre o tesouro. A mensagem encaminhada por Joana foi a seguinte:

Obrigada pelo auxílio, procure Ricardo, ele irá lhe dar dicas sobre o tesouro. Ricardo mora 9 quadras a esquerda da fazenda de criação de suínos (na maquete esta fazenda possui um porquinho no telhado). Qual a localização da casa de Ricardo?

Dica nº 8: Seja bem-vindo(a) à casa de Ricardo. Ao ligar para um taxista, ele informou que uma viagem para a Arena Fonte Nova saindo da sua casa irá custar R$ 17,00. Mas, Ricardo está com dúvida se o valor a ser pago é realmente este, sabendo-se que a taxa da bandeira I é de R$ 5,50, para que o valor pago esteja correto, quantos quilômetros de distância do estádio está a casa de Ricardo?

Dica nº 9: Ricardo lhe enviou a seguinte mensagem:

Obrigado pelo auxílio na solução da minha dúvida, realmente você estava correto(a). Para descobrir o tesouro escondido você deve trabalhar junto com seu colega que também está à procura do tesouro, pois só assim saberão decifrar a dica final, pois eu sei apenas uma parte dela e ele encontrou a parte que falta. A dica que tenho é a seguinte:

Todos os problemas que vocês resolveram para chegar até aqui relacionam quilômetros com valores a serem pagos. O tesouro que vocês procuram pode ser exemplificado pelas leis de correspondência que possibilita calcular o valor pago para qualquer quantidade de quilômetros percorrida em cada uma das situações investigadas por vocês. Diante disso, analisem juntos o quadro de registros e representem as informações deste quadro em um sistema de coordenadas (placa de madeira com furinhos); em seguida, determinem as fórmulas que possibilitam calcular qualquer valor pago em cada uma das situações investigadas.

Dica nº 10: Quais as fórmulas encontradas?

Para passar à última dica, determine o valor pago por uma pessoa que deseja ir de táxi à Arena Fonte Nova e encontra-se a 321 quilômetros de distância da Arena?

Determine também o valor pago por um dia de diária de locação de carro, se a o locatário percorreu 1.241 quilômetros de distância?

Pegue a última dica que está na caixa de dicas e vocês concluirão o desafio da caça ao tesouro.

Dica nº 11: Dizem que sou de extrema importância na Matemática...

Dizem ainda que possuo aplicações em várias áreas do conhecimento...

Historicamente, estou atrelada a momentos diferentes da evolução humana...

Houve muitas idas e vindas na minha relação com o homem, até que o homem, conseguisse me compreender e formalizar essa compreensão em um conceito.

Não se assuste, não sou complexa...

Parto do pressuposto de que quaisquer duas grandezas não devem ficar sozinhas, por isso, estabeleço relações entre elas.

Minha relação é simples, correspondo todo número de um conjunto que representa uma grandeza a um único elemento do outro conjunto que representa outra grandeza. Para mim é importante que o primeiro conjunto tenha essa unicidade com os elementos do segundo conjunto...

Posso ser representada de diferentes maneiras, muitos preferem usar uma fórmula com “x” e “y”, “a” ou “b”. Outros tantos, gostam de representar-me com a utilização de diagramas, mas o que é inquestionavelmente mais bonito, são as minhas representações gráficas, sempre contendo retas e curvas, sem saltos, sempre contínuas e infinitas...

Ah!!!! Minha representação gráfica é linda, envolve plano cartesiano, coordenadas que as chamo de abscissas e ordenadas e que permitem levantar hipóteses apenas com a contemplação...

Então, chamam-me de Função, tenho algumas propriedades e posso me subdividir em Função Afim, Quadrática, Exponencial e Trigonométrica, mas, preservo o princípio de estabelecer relações.

APÊNDICE G – Regras da segunda versão do jogo “Caça ao tesouro”

Vocês estão sendo convidados a descobrir um tesouro escondido. Para isto, vocês estão recebendo uma maquete de um bairro, contendo ruas, quadras, casas e uma árvore. Além da maquete, estão recebendo também: uma calculadora e duas caixa organizadora com divisórias e com objetos que lhes auxiliarão nos registros das informações durante o jogo.

Regras do Jogo “Caça ao tesouro”

1 – Para iniciar o jogo vocês necessitarão fixar os objetos na maquete, da seguinte maneira: árvore (a) posição 2J; farmácia (f) – casa azul com telhado liso – posição 7I; lanchonete (l) – casa lilás com telhado de algodão branco – posição 8C; mercado (m) – casa vermelha com telhado em EVA com glitter crespo – posição 4F; padaria (p) – casa amarela com telhado atoalhado – posição 9J e restaurante (r) – casa rosa com telhado ondulado - posição 6D.

2 - Escolher uma dentre as seguintes posições: 4A, 1D ou 4E. Posicionar o seu jogador em miniatura, que está na caixa organizadora: Átlas, homem com chapéu e Apolo, homem com os braços voltados para baixo e perna esquerda suspensa;

3 – Colocar as dicas no lado esquerdo na maquete no espaço entre as tábuas que compreendem a maquete (tábua superior) e o Plano de Coordenadas cartesianas (tábua inferior).

4 – Para iniciar a caça ao tesouro, os jogadores devem escolher um dos meios de transporte: bicicleta ou patinete. Será selecionado um único meio de locomoção para os dois jogadores. Pela bicicleta será pago R$ 0,50 para desbloquear mais R$ 1,50 por quilometro percorrido e, pelo patinete R$ 3,50 para desbloquear, mais R$ 0,50 por quilômetros percorridos. Cada vez que o jogador chegar a um local, os meios de transporte serão bloqueados, necessitando assim, quando for sair novamente, ter que pagar o valor preestabelecido para desbloquear mais o valor pela distância que foi percorrida.

5 – O meio de transporte escolhido deverá ser único e será utilizado até o final do jogo;

6 - Cada jogador deverá pegar uma caixa organizadora para registro;

7 – Todas às vezes que se deslocar na maquete, registrem, na caixa organizadora, a quantidade de quilômetros percorridos e o valor que foi pago utilizando para isso as moedas e as placas com a indicação dos quilômetros;

8 – Após estarem posicionados na maquete, vocês devem decidir quem irá iniciar o jogo;

9 – Os jogadores jogam alternadamente;

10 - O jogador que iniciar à caça ao tesouro deverá pegar a dica inicial, do lado esquerdo da maquete e cumprir com o que está sendo solicitado. Em seguida, será a vez do seu colega que também deverá cumprir a mesma dica;

11 - Após chegar em um dos objetos que são referências na maquete, os jogadores deverão informar as suas localizações em coordenadas utilizando letras e números e informar um dos itens que são referências das casas, a saber: a letra que está escrita no telhado em braile; ou a cor da casa, ou ainda, a textura presente no telhado da casa. Seu colega pegará a pergunta correspondente e fará a leitura;

12 – A leitura será feita em voz alta e você terá 4 oportunidades para apresentar a solução correta para a pergunta, isto é, cada pergunta possui 4 dicas. Se você apresentar a resposta correta na dica número 1 você obterá 100 pontos; se for na dica número 2 obterá 80 pontos; na dica número 3 obterá 40 pontos e na dica número 4 terá 20 pontos e na dica número 5 conseguirá 20 pontos.

13 – Quem avaliará as respostas das perguntas realizadas são vocês, então fiquem atentos para as dicas e se as respostas apresentadas são convincentes ou não. Caso a resposta não lhe convença faça a leitura da dica seguinte e mencione a pontuação;

14 – Ao responder corretamente à pergunta leia o próximo passo para seu colega e espere que ele chegue ao local correspondente. Em seguida, será a sua vez de ouvir a pergunta do local em que se encontra. Lembrem-se vocês deverão jogar alternadamente.

Sucesso na caça ao tesouro!

APÊNDICE H – Dicas da segunda versão do jogo “Caça ao tesouro”

Dica inicial

Você deverá saindo do local escolhido posições: 4A, 1D ou 4E. Percorrer a menor quantidade de quilômetros possível até uma das referências da maquete (casas ou árvore). Cada quadra possui 1 quilometro de extensão. Calcule a quantidade de quilômetros e o valor que irá pagar pelo meio de transporte utilizado, lembrando que pela bicicleta você pagará R$ 0,50 ao desbloquear mais R$ 1,50 por cada quilômetro percorrido. O patinete será R$ 3,50 ao desbloquear, mais R$ 0,50 por quilômetro percorrido. Cada vez que você chega a um local, ambos os meios de locomoção são bloqueados, necessitando assim, quando for sair novamente pagar o valor para desbloqueá-los mais o valor do trajeto realizado.

Ao chegar no local, retire a casa ou a árvore e deixe o seu jogador fixado no velcro. Registre na caixa organizadora a quantidade de quilômetros percorridos e o valor pago.

Informe ao seu colega a sua localização e a letra ou a cor do local em que você se encontra. Ele irá pegar a dica com a letra ou a tarja na cor informada e ler em voz alta para que você possa desvendar a charada matemática apresentada.

Dicas do mercado (m)
Localização 4F

Dica 1: Um mercado funciona das 8 horas da manhã às 19 horas da noite. Esse mercado vende em média 12 quilos de arroz a cada 60 minutos. O gerente gostaria de saber qual a quantidade mínima de arroz que o mercado necessitará ter em seu estoque para atender a demanda diária? (100 pontos)

Dica 2: 1 hora equivale a 60 minutos. Qual a quantidade mínima de arroz que o mercado necessitará ter em seu estoque para atender a demanda diária? (80 pontos)

Dica 3: O funcionamento do mercado é de 11 horas diárias. Qual a quantidade mínima de arroz que o mercado necessitará ter em seu estoque para atender a demanda diária? (40 pontos)

Dica 4: A resposta é uma das seguintes alternativas (20 pontos):

a) 130 quilos de arroz;

b) 112 quilos de arroz;

c) 132 quilos de arroz;

d) 212 quilos de arroz.

Próximo passo: Dirija-se à lanchonete (l) fazendo os movimentos norte, sul, leste ou oeste e registre na caixa organizadora, a menor quantidade possível de quilômetros e o valor pago pelo meio de transporte.

Dicas da lanchonete (l)
Localização 8C

Dica 1: Cinco amigos entraram em uma lanchonete e o dono da lanchonete lhes explicou que uma caixa de suco concentrado traz a informação de que a cada dois copos de suco concentrado é possível fazer cinco copos de suco diluídos em água. Na lanchonete há 20 pessoas, cada uma delas solicitou um copo de suco, então o dono da lanchonete pediu para que os cinco amigos o ajudassem a compreender quantos copos de suco concentrado ele precisa para diluir em água de maneira a atender os 20 clientes? (100 pontos).

Dica 2: A razão entre o número de copos de suco concentrado e a quantidade de suco produzido após diluir em água é de $\frac{2}{5}$. Então, quantos copos de suco concentrado ele precisa para diluir em água de maneira a atender os 20 clientes? (80 pontos).

Dica 3: Serão necessários 12 copos de água. Então, quantos copos de suco concentrado ele precisa para diluir em água de maneira a atender os 20 clientes? (40 pontos).

Dica 4: A resposta é uma das seguintes alternativas: a) 8 copos de suco concentrado; b) 10 copos de suco concentrado; c) 6 copos de suco concentrado; d) 11 copos de suco concentrado (20 pontos).

Próximo passo: Dirija-se à farmácia (f) fazendo os movimentos norte, sul, leste ou oeste e registre na caixa organizadora, a menor quantidade possível de quilômetros e o valor pago pelo meio de transporte utilizado.

Dicas da Farmácia (f)
Localização 7I

Dica 1: Uma farmácia entregou 60 medicamentos, na cidade, em três dias. Em cada dia, a partir do primeiro, entregou 5 medicamentos a mais que no dia anterior. Quantos medicamentos essa farmácia entregou em cada um dos dias? (100 pontos);

Dica 2: No terceiro dia foi entregue 25 medicamentos. Quantos medicamentos essa farmácia entregou nos outros dias? (80 pontos);

Dica 3: A quantidade de medicamento entregue em cada um dos dias é representada por números múltiplos de 5. Quantos medicamentos essa farmácia entregou em cada um dos dias? (40 pontos);

Dica 4: A resposta é uma das seguintes alternativas. Qual é a alternativa correta? (20 pontos)
a) 5 medicamentos no primeiro, 25 medicamentos no segundo dia e 30 medicamentos no terceiro dia;
b) 15 medicamentos no primeiro, 20 medicamentos no segundo dia e 25 medicamentos no terceiro dia;
c) 25 medicamentos no primeiro, 25 medicamentos no segundo dia e 25 medicamentos no terceiro dia
d) 60 medicamentos no primeiro, 60 medicamentos no segundo dia e 60 medicamentos no terceiro dia.

Próximo passo: Após percorrerem todos os estabelecimentos, você e o seu colega deverão refletir juntos sobre o percurso realizado. Assim, vire a sua maquete e registre os valores pagos e a quantidade de quilômetros que vocês percorreram no primeiro quadrante do Plano de Coordenadas Cartesianas.

Dicas do restaurante (r)
Localização 6D

Dica 1: Um garçom organiza os copos na seguinte ordem: na primeira fileira é colocado 1 copo, na segunda fileira 4 copo, na terceira fileira 9 copos e na quarta fileira 16 copos. Quantos copos o garçom irá colocar na quinta fileira, considerando que ele siga a mesma relação estabelecida na organização dos copos anteriores? (100 pontos);

Dica 2: Descubra um padrão entre a sequência de copos formada pelas quantidades: 1, 4, 9, 16. Há um padrão entre esses números. Quantos copos o garçom irá colocar na quinta fileira? (80 pontos);

Dica 3: A quinta fileira será formada por uma quantidade representada por um número ímpar de copos. Quantos copos o garçom irá colocar na quinta fileira? (40 pontos);

Dica 4: A resposta é uma das seguintes alternativas (20 pontos):
a) 17 copos;
b) 21 copos;
c) 25 copos;
d) 19 copos.

Próximo passo: Dirija-se à padaria (p) fazendo os movimentos norte, sul, leste ou oeste e registre na caixa organizadora, a menor quantidade possível de quilômetros e o valor pago pelo meio de transporte.

Dicas da padaria (p)
Localização 9J

Dica 1: Em uma padaria são vendidas caixas com brigadeiros, cuja organização segue uma lógica. Na primeira fileira da caixa é colocado apenas 1 brigadeiro, na segunda fileira são colocados 2 brigadeiros, na terceira fileira 3 brigadeiros, na quarta

5 brigadeiros e na quinta 8 brigadeiros. Quantos brigadeiros estarão dispostos na sexta fileira? (100 pontos);

Dica 2: Descubra um padrão entre a seguinte sequência de quantidades de brigadeiros: 1, 2, 3, 5, 8. Há um padrão entre esses números. Quantos brigadeiros estarão dispostos na sexta fileira? (80 pontos);

Dica 3: A sexta fileira será formada por uma quantidade representada por um número ímpar de brigadeiros. Quantos brigadeiros estarão dispostos na sexta fileira? (40 pontos);

Dica 4: A resposta é uma das seguintes alternativas (20 pontos):
a) 11 brigadeiros;
b) 13 brigadeiros;
c) 21 brigadeiros;
d) 25 brigadeiros.

Próximo passo: Dirija-se à árvore (a) fazendo os movimentos norte, sul, leste ou oeste e registre na caixa organizadora, a menor quantidade possível de quilômetros e o valor pago pelo meio de transporte.

Dicas da árvore (a)
Localização 2J

Dica 1: O consumo de determinadas frutas traz inúmeros benefícios à saúde. Um exemplo é a maça, cujo consumo melhora a função cerebral, previne o câncer, combate a asma, evita cáries e fortalece o sistema imunológico. Sabendo-se que a cada 100 gramas dessa fruta equivale a 52 calorias. Uma pessoa que ingere 250 gramas de maça, fornece ao organismo quantas calorias? (100 pontos);

Dica 2: A razão entre a quantidade consumida em gramas e as calorias que são fornecidas ao organismo é a razão de $\frac{25}{13}$. Então, uma pessoa que ingere 250 gramas de maça, fornece ao organismo quantas calorias? (80 pontos);

Dica 3: A resposta é uma das seguintes alternativas (40 pontos):

a) 400 calorias;

b) 104 calorias;

c) 130 calorias;

d) 200 calorias.

Dica 4: A soma dos algarismos que compõem o número é 4 (20 pontos);

Próximo passo: Após percorrerem todos os estabelecimentos, você e o seu colega deverão refletir juntos sobre o percurso realizado. Assim, vire a sua maquete e registre os valores pagos e a quantidade de quilômetros que vocês percorreram no primeiro quadrante do Plano de Coordenadas Cartesianas.

Última dica: História da Caça ao tesouro

Muitos aventureiros tentaram encontrar esse tesouro escondido em vários países; há um registro dele na cidade que vocês investigaram com a maquete. Este tesouro foi descoberto pela primeira vez em 1673 por Newton e Leibiniz, após esse período, não se sabe o que aconteceu com este tesouro e, desde então, muitas pessoas ficaram curiosas, sentindo-se aventureiras e almejando encontrá-lo para saber o que era de tão especial que ele possuía. Conta-se que quem o descobre torna-se cheio de conhecimento e sabedoria, que podem ser aplicados em várias ciências, como na Física, Química, Engenharia e Economia.

Após todas as dicas e todo o percurso realizado, a última dica que apresentamos a vocês é: analisem os valores que foram pagos nas andanças que realizaram e a quantidade de quilômetros que percorreram e estabeleçam uma relação entre essas duas grandezas. Qual é essa relação?

APÊNDICE I – Questões da entrevista

0 – Conte-nos um pouco sobre a sua formação docente e experiência profissional.

Critério pedagógico:

1 – O material possibilita introduzir o conceito de função?

2 – Como você avalia cada uma das questões que estão presentes no material?

3 – Quais modificações você sugere no material e/ou nas questões?

4 – Caso os alunos apresentem uma resposta errada em umas das questões, qual intervenção você faria?

5 – Os erros que, por ventura, venham a ocorrer na execução do jogo, poderão influenciar na construção do conceito de função?

6 – Se os estudantes construírem o gráfico com algum par ordenado errado, como você procederia?

7 – Caso você venha a utilizar esse material, como seria?

Critério interativo:

8 – Como você avalia a interação aluno-aluno mediada pelo material?

9 - Como você avalia a interação aluno-material?

10 – Como você avalia a interação aluno-conteúdo mediada pelo material?

11 – Como você avalia a interação professor-aluno mediada pelo material?

12 – Como você avalia a interação professor-conteúdo mediada pelo material?

13 - Como você avalia a interação professor-material?

Critério comunicacional:

12 – Como o material influencia no processo de comunicação em sala de aula?

13 – Como você avalia a linguagem utilizada no material para os estudantes do Ensino Médio?

14 – Como você avalia a linguagem utilizada no material para os estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental?

ANEXO A - PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: O Lúdico na Educação Inclusiva: Um estudo sobre o conceito de função com estudantes deficientes visuais

Pesquisador: Érica Santana Silveira

Área Temática:

Versão: 2

CAAE: 93755018.6.0000.5540

Instituição Proponente: Faculdade de Educação

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 2.894.913

Apresentação do Projeto:

Resumo: O objetivo deste projeto de pesquisa é investigar as contribuições de uma sequência de ensino, elaborada em uma perspectiva lúdica e com pressupostos na Teoria das Situações Didáticas, para o ensino e a aprendizagem do conceito de função com estudantes deficientes visuais do Ensino Médio.
Esta pesquisa possui uma abordagem qualitativa e será realizada em um colégio público que atenda alunos do Ensino Médio e que possua alunos deficientes visuais dentre os videntes. Para isto, inicialmente construiremos uma sequência de ensino, subsidiada em aspectos lúdicos que aborde o conceito de Função, isto com pressupostos na Teoria das Situações Didáticas proposta por Gui Brousseau. Em seguida, convidaremos estudantes com deficiência visual da sala de recursos que realiza o Atendimento Educacional Especializado com estes alunos, para que possamos aplicar um jogo, enquanto recurso lúdico, com o intuito de verificarmos sua pertinência ou a necessidade de alteração em sua estrutura. Na continuidade entraremos em contato com o professor de Matemática de uma sala de aula regular do Ensino Médio que possua estudantes com deficiência visual dentre os videntes, para então, convidarmos todos os estudantes da turma para participarem do nosso estudo.

Após a aceitação dos estudantes e dos seus responsáveis, aplicaremos um pré-teste nesta sala de aula, este pré-teste conterá questões que abarquem o conceito de Função, em seguida, ministraremos aulas sobre o conceito de função utilizando a sequência de ensino juntamente com o jogo, após essas aulas aplicaremos um pós-teste equivalente ao pré-teste, com o intuito de realizarmos uma comparação entre os conhecimento prévios dos alunos apresentados no pré-teste e os conhecimentos apresentados no pós-teste, os quais podem ter sido influenciados pelas aulas que foram ministradas sobre oconceito de Função.

Para a realização destes momentos serão necessárias 4 horas/aulas, as quais poderão ocorrer em apena um dia ou em dois dias.

Para a coleta dos dados, utilizaremos observações, registros escritos feitos pelos pesquisadores, filmagens e áudiogravações dos estudantes.
Em seguida, faremos as transcrições e a respectiva análise qualitativa dos dados coletados. Espera-se com esta pesquisa, a criação de uma sequência de ensino que possa despertar o espírito lúdico dos estudantes, bem como, contribuir para o processo de ensino e aprendizagem do conceito de Função.

Hipótese: Com base nos estudos referentes a ludicidade e a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986), assumimos as seguintes hipóteses:• Os alunos durante a realização do jogo poderão demonstrar em suas atitudes algumas características que as atividades lúdicas podem suscitar, tais como: entusiasmo, ordem, tensão, movimento, ritmo, liberdade, criação de novas regras e explicitação de opiniões;• Poderão surgir alguns erros nas respostas explicitadas pelos estudantes durante a realização do jogo, acreditamos que nestes momentos os erros que forem surgindo serão corrigidos pelos próprios estudantes;• No momento de socialização das respostas e na fase didática da aula, acreditamos que os alunos estarão mais abertos a participar e apresentar as vivências que tiveram durante a execução do jogo;• A sequência de ensino poderá apresentar potencialidades para o processo de ensino e aprendizagem do conceito de Função com alunos deficientes visuais e videntes do Ensino Médio.

Objetivo da Pesquisa:

Objetivo Primário:
Investigar as contribuições de uma sequência de ensino, elaborada em uma perspectiva lúdica e com pressupostos na Teoria das Situações Didáticas, para o ensino e a aprendizagem do conceito de função com estudantes deficientes visuais do Ensino Médio.

Objetivo Secundário:

• Elaborar situações que promovam o desequilíbrio e a adaptação dos estudantes ao meio, entendendo estecomo sendo o conjunto de condições externas, dentro das quais o ser humano se comporta e cresce (BROUSSEAU, 1990);

• Possibilitar aos estudantes, por meio de uma sequência de ensino, vivenciarem as fases adidáticas, isto é, fase de ação, formulação e validação, que são propostas na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau(1986);

• Possibilitar a vivencia da fase didática, a partir dos momentos de institucionalização; • Analisar se a sequência de ensino desperta o espírito lúdico nos estudantes deficientes visuais e videntes;

• Identificar as contribuições da sequência de ensino para o ensino e a aprendizagem do conceito de função.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Texto informado pelo pesquisador:

Riscos: A pesquisa tem como principal risco, o possível desconforto aos participantes caso estes não se sintam capazes para resolver algumas das questões apresentadas nos momentos de pré-teste, pós-teste ouaté mesmo na fase adidática em que estarão com o jogo. Ou ainda, podem apresentar este sentimento de desconforto por estarem sendo observados e filmados durante os momentos de desenvolvimento do estudo. Ademais, outro fator de risco está na divulgação dos dados coletados que possa de alguma maneira apresentar indícios que identifique os participantes da pesquisa.Para minimizar tais riscos previstos, deixaremos claro aos alunos que a pesquisa e as atividades que lhes serão apresentadas não serão utilizadas para efeito de avaliação, portanto, não necessitarão estar preocupados em estarem corretas ou não, além disso, explicitaremos que caso queiram deixar questões sem respostas, eles poderão deixar e quiserem a qualquer momento desistir da sua participação na pesquisa, não haverá nenhum impedimento por parte dos pesquisadores. Ademais, buscaremos conduzir todos os momentos da pesquisa e as coletasdos dados previstas, de forma discreta e com o mínimo de interferência possível nas atividades para que não haja constrangimentos e intimidação aos participantes. Quanto à divulgação dos dados coletados, ressaltaremos que as identidades tanto dos participantes quanto do colégio, que aceitará nosso estudo, serão mantidos em sigilo e utilizadas apenas para efeito da pesquisa que estamos desenvolvendo.

Benefícios: Dentre os benefícios que esta pesquisa poderá apresentar aos estudantes, destacamos o fato de possibilitar-lhes aprenderem o conceito de Função, o que poderá facilitar a aprendizagem dos conteúdos de Função que serão abordados durante todos os anos subsequentes do Ensino Médio. Outro benefício que gostaríamos de destacar, refere-se à apresentação do conceito de Função subsidiada em uma perspectiva lúdica e como pressupostos em uma teoria em que tanto estudantes quanto professores são agentes ativos e coparticipantes das suas aprendizagens e, por conseguinte, construção de novos conhecimentos.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

Desenho: A abordagem metodológica utilizada para consolidação desta pesquisa terá um caráter qualitativo tendo a pesquisa participante como estratégia de estudo. Vale ressaltar que a pesquisa será desenvolvida em quatro momentos, a saber: o primeiro, ocorrerá em uma sala de atendimento especializado com alunos deficientes visuais, estamos nomeando este momento por teste piloto, no qual verificaremos se a opção metodológica escolhida por nós pesquisadores para o processo de ensino-aprendizagem de Função, necessitará de alguma alteração para sua utilização em etapas posteriores, tais alterações serão sugeridas pelos alunos deficientes visuais, ao lhes serem apresentados o jogo idealizado por nós que permitirá trabalhar com o conceito de Função; o segundo momento, ocorrerá em uma sala de aula regular que tenha algum aluno deficiente visual, o qual não tenha participado do teste piloto, estamos nomeando este momento por pré-teste, na qual serão apresentadas algumas questões que abordam o conceito de função, com o intuito de realizarmos um levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos sobre o referido assunto; o terceiro momento, também ocorrerá em sala de aula regular e estamos nomeando-o por teste principal, neste estaremos ministrando aulas sobre o conceito de Função com a utilização do jogo, já constando as adaptações sugeridas pelos alunos no teste piloto e a última etapa do nosso estudo, será o pós-teste, neste momento aplicaremos questões equivalentes as aplicadas no pré-teste para tentarmos investigar se houve alguma alteração em suas respostas, comparando as questões do pós-teste com as do pré-teste que os alunos realizaram na primeira fase do nosso estudo. Para a coleta dos dados, utilizaremos em todas as quatro etapas do estudo, observações, filmagens e áudio-gravações.

Tamanho da Amostra: 45

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

- TCLE adequado;
- Termo de Assentimento adequado;
- Aceite Institucional;

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Nenhuma pendência ou inadequação.

Considerações Finais a critério do CEP:

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BASICAS_DO_PROJETO_1151361.pdf	11/09/2018 20:52:28		Aceito
Cronograma	Cronograma.pdf	11/09/2018 20:51:59	Érica Santana Silveira	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE_Termo_de_Assentimento.pdf	11/09/2018 20:51:33	Érica Santana Silveira	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	Projeto_detalhado_Brochura.pdf	11/09/2018 20:51:21	Érica Santana Silveira	Aceito
Outros	Termo_de_Autorizacao_Imagem_e_som.pdf	15/07/2018 16:40:49	Érica Santana Silveira	Aceito
Outros	curriculo_lattes_orientador.pdf	15/07/2018 16:39:59	Érica Santana Silveira	Aceito
Outros	curriculo_lattes_pesquisadora.pdf	15/07/2018 16:38:45	Érica Santana Silveira	Aceito
Outros	Carta_de_revisao_etica.pdf	15/07/2018 16:35:54	Érica Santana Silveira	Aceito
Folha de Rosto	Folha_de_rosto.pdf	05/07/2018 20:30:37	Érica Santana Silveira	Aceito
Recurso Anexado pelo Pesquisador	Roteiro_de_observacao.pdf	03/07/2018 19:01:32	Érica Santana Silveira	Aceito
Orçamento	Orcamento.pdf	03/07/2018 18:37:12	Érica Santana Silveira	Aceito
Declaração de Pesquisadores	Carta_de_encaminhamento.pdf	03/07/2018 18:35:23	Érica Santana Silveira	Aceito
Declaração de	Declaracao_de_instituicao.pdf	03/07/2018	Érica Santana	Aceito

Instituição e Infraestrutura	Declaracao_de_instituicao.pdf	18:30:21	Silveira	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

BRASILIA, 14 de Setembro de 2018

Assinado por:

Érica Quinaglia Silva (Coordenador)

Endereço: CAMPUS UNIVERSITÁRIO DARCY RIBEIRO - FACULDADE DE DIREITO - SALA BT 03/1 (Ao lado da Direção)
Bairro: ASA NORTE **CEP:** 70.910-900
UF: DF **Município:** BRASILIA
Telefone: (61)3107-1592 **E-mail:** cep_chs@unb.br