Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Equações diferenciais do tipo neutro com retardo dependendo do estado e aplicações

Felipe Gonçalves Netto

Brasília

2022

Felipe Gonçalves Netto

Equações diferenciais do tipo neutro com retardo dependendo do estado e aplicações

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientadora:
Profa. Dra. Jaqueline Godoy Mesquita

Brasília

2022

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Equações diferenciais do tipo neutro com retardo dependendo do estado e aplicações

por

Felipe Gonçalves Netto *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 27 de junho de 2022.

Comissão Examinadora:

Profa. Dra. Jaqueline Godoy Mesquita - MAT/UnB (Orientadora)

Prof. Dr. Eduard Toon - UFJF (Membro)

Prof. Dr. Ma To Fu - MAT/UnB (Membro)

*O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração deste trabalho.

Agradecimentos

À minha mãe Indaira, e meus irmãos Luany e Victor, que me incentivaram nos momentos difíceis e compreenderam a minha ausência enquanto eu me dedicava à realização deste trabalho.

À Jaqueline, minha orientadora, a qual tenho muita admiração, por toda a paciência, compreensão e ensinamentos durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos amigos, que sempre estiveram ao meu lado, pela amizade incondicional. Em especial, agradeço ao André e Marielson pelo apoio demonstrado ao longo de todo o período de tempo em que me dediquei a este trabalho.

Aos amigos do mestrado. Em especial, agradeço à Fran que me ajudou em vários momentos no desenvolvimento deste trabalho, e aos amigos de representação discente, Mirelly, Wendy, Daniella, Lucas, Vinicius e Gabriela pela amizade e apoio.

Aos professores da UFG e UnB, por todos os ensinamentos, pela ajuda e pela paciência com a qual guiaram o meu aprendizado. Em especial agradeço aos professores Jhone Caldeira, Ronaldo Garcia, Ronaldo Antônio, Ivonildes Ribeiro, Marcelo Almeida, Marcos Leandro, Marina Tuyako, Bruno Rodrigues, Noraí Rocco, Manuela Rezende, Willian Cintra, Daniele Nantes, José Luis Teruel, Luís Henrique de Miranda.

Às pessoas com quem convivi ao longo desses anos de curso, que me incentivaram e que certamente tiveram impacto na minha formação acadêmica.

Aos membros da banca, Eduard Toon, Ma To Fu e Manuela Rezende, por aceitarem fazer parte desse momento e pelas correções e sugestões propostas à versão final desta dissertação.

Por fim, agradeço ao CNPq pelo financiamento durante a elaboração deste trabalho.

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo estudar as equações diferenciais do tipo neutro com retardo dependendo do estado. Mais precisamente, iremos investigar a formulação abstrata do modelo proposto por Walther, obtendo resultados que garantem a existência de semifluxo e o princípio da estabilidade linearizada. Todos os resultados podem ser encontrados em [37, 39].

Palavras-chave: retardos; equações com retardos dependendo do estado; equações do tipo neutro; semifluxos; estabilidade linearizada.

Abstract

This dissertation aims to study the neutral differential equations with state-dependent delays. More precisely, we will investigate the abstract formulation of the model proposed by Walther, obtaining results that ensure the existence of semiflow and the principle of linearized stability. All results can be found in [37, 39].

Keywords: delays; equations with state-dependent delays; neutral differential equations; semiflows; linearized stability.

Notação

$\mathscr{L}(X,Y)$	Conjunto das aplicações lineares contínuas de X em Y
$\partial x(t)$ ou $x'(t)$	Derivada de x em relação a t
C	Espaço das funções contínuas de $[-h,0]$ em $\mathbb{R}^n$
C^1	Espaço das funções continuamente diferenciáveis de $[-h,0]$ em $\mathbb{R}^n$
C^2	Espaço das funções duas vezes continuamente diferenciáveis de $[-h,0]$ em $\mathbb{R}^n$
$\lVert\cdot\rVert_{X\times Y}$	Norma da soma no espaço produto $X\times Y$
$\overline{A}$	Fecho de A
$Lip(\alpha)$	Constante de Lipschitz de α
W	Aberto de $C\times C^1$
g	função de W em $\mathbb{R}^n$
U_1	$U_1=\{\psi\in C^1:(\partial\psi,\psi)\in W\}$
X_1	$X_1=\{\psi\in U_1:\partial\psi(0)=g(\partial\psi,\psi)\}$
X_{1+}	$X_{1+}=\{\psi\in X_1:Lip(\partial\psi)<\infty\}$
X_2	$X_1\cap C^2$
$T_\psi X_2$	Espaço tangente de X_2 em ψ
$T_{e,\psi}X_2$	Espaço tangente estendido de X_2 em ψ
X_{2*}	$X_{2*}=\{\psi\in X_2:\partial\psi\in T_{e,\psi}\}$

Sumário

Introdução **3**

1 Preliminares **10**

1.1 Propriedades de g 10

1.2 Resultados básicos 15

2 Semifluxo contínuo **35**

2.1 Semifluxo em um subconjunto de C^1 35

2.2 Semifluxo em um subconjunto fechado de X_2 49

2.3 Aplicação 57

3 Estabilidade Linearizada **63**

3.1 Estabilidade Linearizada 63

3.2 Aplicação 83

Apêndice **89**

Referências Bibliográficas **93**

Introdução

Muitos fenômenos da natureza podem ser descritos pelas chamadas equações diferenciais ordinárias. Entretanto, sabemos que a maior parte dos fenômenos não acontecem instantaneamente, mas decorre um certo tempo entre a sua causa e o efeito. Isto acontece em muitos modelos como, por exemplo, modelos que descrevem o uso de medicamentos que precisam levar em consideração o tempo entre a ingestão deste e o seu efeito; modelos que descrevem dinâmicas populacionais que precisam considerar o tempo entre o nascimento e entrar na fase reprodutiva; modelos de processamento de dados que precisam considerar o tempo entre o envio de certa informação e esta ser processada, entre outros fenômenos. Portanto, de modo a descrever de forma mais precisa estes fenômenos, é necessário inserir um termo na equação chamado *retardo*, dando origem ao que chamamos de uma equação diferencial com retardo. Este tipo de equação descreve a influência que o passado tem no momento presente, trazendo mais precisão à descrição do fenômeno estudado. Por outro lado, este pequeno termo pode gerar uma grande mudança no comportamento da solução, bem como em toda sua dinâmica.

Existem vários tipos de equações com retardos e o foco neste trabalho será em uma classe bastante ampla chamada *Equações Diferenciais com Retardos Dependendo do Estado*. Estas equações foram investigadas por muitos autores, inclusive Poisson [30] que foi um dos primeiros a trabalhar com estas equações dependendo do estado. Muitos outros autores têm contribuído bastante para o avanço desta teoria, veja [2, 3, 4, 15, 19, 21, 22, 23, 35] e também o survey [20], que compila de forma bastante completa todos os resultados nesta direção. Estas equações possuem diversas aplicações importantes, pois sabemos que a maior parte dos retardos não são constantes, mas dependem de outros fatores, especialmente do estado. Devido a isso, é muito importante investigá-las sob esta óptica mais geral. Por outro lado, trabalhar com este tipo de equação pode apresentar muitas complicações, especialmente no que tange à regularidade, devido à natureza intrínseca destas equações.

Para ilustrar este fato, mencionamos que a boa colocação do problema não segue tão diretamente quanto para o caso do retardo constante. De fato, tomando os dados iniciais em $C = C([-h,0], \mathbb{R}^n)$, as soluções das equações com retardos dependendo do estado em geral não são únicas, mesmo quando o análogo para o caso do retardo constante tenha a unicidade garantida ([20]).

Para descrever isso, vamos mencionar o notável exemplo trazido por Winston [42], em que as funções definidas por:

$$x(t) = t + 1 \text{ e } x(t) = t + 1 - t^{\frac{3}{2}},$$

para $t > 0$ pequeno, são ambas soluções da equação:

$$x'(t) = -x(t - |x(t)|)$$

com a seguinte condição inicial

$$x(t) = \begin{cases} -1, & \text{se } t \leqslant -1, \\ \frac{3}{2}(t+1)^{\frac{1}{3}} - 1, & \text{se } -1 < t \leqslant -\frac{7}{8}, \\ \frac{10}{7}t + 1, & \text{se } -\frac{7}{8} < t \leqslant 0. \end{cases}$$

Isso mostra que é necessário considerar outras hipóteses diferentes da usual[†] para garantir a unicidade. De fato, observe que uma equação diferencial com retardo dependendo do estado, do tipo

$$x'(t) = ax(t - r(x(t))) \tag{1}$$

com a aplicação de retardo limitada $r\colon \mathbb{R} \to [-h,0]$, pode ser reescrita na forma geral:

$$x'(t) = f(x_t) \tag{2}$$

de uma equação diferencial funcional clássica, onde do lado direito de (2) aparece o segmento de solução $x_t\colon [-h,0] \to \mathbb{R}^n$, $h > 0$, dado por

$$x_t(s) = x(t+s), \; -h \leqslant s \leqslant 0.$$

Tomando $n = 1$ e $f\colon U \to \mathbb{R}$ definida em um subconjunto U do conjunto $(\mathbb{R})^{[-h,0]}$ de

[†]No análogo para o retardo contante, a unicidade é garantida apenas com a continuidade da condição inicial.

todas as funções $\phi\colon [-h,0] \to \mathbb{R}$, dada por:

$$f(\phi) = a\phi(-r(\phi(0))),$$

obtemos uma relação entre (1) e (2).

Por outro lado, apesar desta relação entre (1) e (2), as aplicações $f\colon U \to \mathbb{R}$ que são definidas por meio desta relação com equações com retardo dependendo do estado possuem menos regularidade do que aquelas que são definidas por meio de equações com retardo constante. Desse modo que toda a teoria clássica de equações diferenciais funcionais com retardos que foi desenvolvida nas últimas décadas e que foi condensada em vários livros de referência (veja [8, 17, 24, 33]) não pode ser aplicada para equações com retardos dependendo do estado.

Isso também pode ser mostrado de forma mais explícita por meio do simples exemplo comentado anteriormente, em que não temos a unicidade de solução garantida.

Os primeiros estudos feitos sobre existência, unicidade e dependência contínua para soluções de problemas de valor inicial de equações diferenciais com retardo dependendo do estado são atribuídas à Driver (veja [9, 10, 11, 12, 13, 14]). Também, do ponto de vista de aplicações, Driver trouxe uma contribuição muito importante para essas equações com retardos dependendo do estado, com seu estudo pioneiro do problema de dois corpos em eletrodinâmica. O modelo investigado por Driver envolve equações neutras com retardos dependendo do estado, que é objeto de grande interesse nessa dissertação.

O modelo proposto por Driver para o problema de dois corpos em eletrodinâmica foi bem descrito em [20] e considera duas cargas se movendo ao longo de um eixo x, e denotando por $x_i(t)$, $i = 1,2$, a posição das duas cargas ao longo do eixo x no tempo t, e por $v_i(t) = x_i'(t)$, $i = 1,2$ a velocidade de tais cargas. Desconsiderando os efeitos da radiação e considerando um campo elétrico externo $E_{ext}(t,x)$ na direção de x, contínuo em um aberto D do plano (t,x), Driver chega à seguinte equação de movimento da carga i:

$$\frac{m_i v_i'(t)}{[1 - v_i^2(t)/c^2]^{3/2}} = q_i E_j(t, x_i(t)) + q_i E_{ext}(t, x_i(t)), \quad i,j \in 1,2, \quad i \neq j, \tag{3}$$

onde m_i é a massa, q_i é a magnitude da carga i, c é a velocidade da luz e $E_j(t,x)$ é o campo elétrico devido à carga, $j \neq i$. O campo elétrico E_j em $x_i(t)$ é calculado a partir do potencial de Liénard–Wiechert. Sua expressão depende de um atraso no tempo, $t - \tau_{ji}$, que representa o instante em que a luz deveria deixar o ponto $x_j(t - \tau_{ji})$ de modo a alcançar o ponto $x_i(t)$ no instante t, pois o efeito eletromagnético se propaga na velocidade da luz. Portanto, a função memória $\tau_{ji}(t)$ deve satisfazer a seguinte equação

$$\tau_{ji}(t) = \frac{x_i(t) - x_j(t - \tau_{ji}(t))}{c}. \tag{4}$$

Considere agora as trajetórias iniciais e suas respectivas extensões $(x_1(t), x_2(t))$ definidas em um certo intervalo $[\alpha, \beta)$, onde $\beta > t_0$, e assuma que elas satisfazem as seguintes condições:

(i) cada $x_i'(t)$, $i = 1, 2$, é contínua e $|x_i'(t)| < c$, para todo $t \in [\alpha, \beta)$;

(ii) $x_2(t) > x_1(t)$ e $(t, x_i(t)) \in D$ para todo $t \in [\alpha, \beta)$;

(iii) as duas equações

$$\tau_{ji}^0 = \frac{|x_i(t_0) - x_j(t_0 - \tau_{ji}^0)|}{c}$$

possuem soluções τ_{ji}^0, $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2\}$.

Driver demonstra, sob certas hipóteses, que $(x_1(t), x_2(t))$ é solução de (3)-(4) se, e somente se, satisfaz o sistema de equações diferenciais com retardo:

$$\begin{cases} x_i'(t) = v_i(t), \\ \tau_{ji}'(t) = \dfrac{(-1)^i v_i(t) - (-1)^i v_j(t - \tau_{ji}(t))}{c - (-1)^i v_j(t - \tau_{ji}(t))}, \\ \dfrac{v_i'(t)}{[1 - v_i^2(t)/c^2]^{3/2}} = \dfrac{(-1)^i a_i c}{\tau_{ji}^2(t)} \cdot \dfrac{c + (-1)^i v_j(t - \tau_{ji}(t))}{c - (-1)^i v_j(t - \tau_{ji}(t))} + \dfrac{q_i E_{ext}(t, x_i(t))}{m_i}, \end{cases}$$

para $t \in (t_0, \beta)$, no qual $a_i = q_1 q_2 / (4\pi\epsilon_0 m_i c^3)$ é constante e $(i, j) = (1, 2)$ ou $(2, 1)$. Em [9], Driver mostra ainda que sob certas hipóteses a equação acima possui solução única. A partir deste trabalho importante de Driver, as equações com retardo dependendo do estado começaram a ganhar bastante visibilidade e a atrair a atenção de diversos pesquisadores. Para maiores detalhes sobre a descrição deste modelo, consulte [20].

Neste trabalho, estamos interessados na seguinte equação:

$$x'(t) = ax'(t + d(x(t))) + f(x(t)), \tag{5}$$

com $d \colon \mathbb{R} \to (-h, 0)$, $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a > 0$ dados. Esta equação é do *tipo neutro*, pois o retardo aparece no argumento de x', com retardo dependendo do estado. Essa equação estudada em [37] é uma modificação da equação não neutra dada por

$$x'(t) = a[x(t) - x(t-1)] - b|x(t)|x(t), \ a, b > 0, \tag{6}$$

que descreve as flutuações de curto prazo de um ativo, cujo preço é livremente determinado pela oferta e procura do mercado, e reage rapidamente ao seu movimento.

Assume-se também que os agentes têm uma certa percepção, mas não um conhecimento preciso dessa taxa. Desta forma, objetivando o lucro nas suas negociações, os agentes tentam antecipar o movimento da taxa de câmbio no futuro. Para nortear sua previsão, eles empregam seu movimento baseado no passado imediato, tomando como referência sua posição em relação à taxa de equilíbrio.

Isto implica dizer que, se a taxa aumentou no passado recente, espera-se que o mesmo aconteça no presente. Logo, um aumento da taxa de câmbio leva a um aumento da demanda e, portanto, a um aumento no preço. Este mecanismo pode ser descrito pelo primeiro termo do lado direito de (6). Por outro lado, uma vez que a taxa aumenta, ficando mais distante do seu equilíbrio, aumenta-se também o número de agentes que esperam que esta "tendência" acabe e volte ao que era antes. Como consequência, tem-se um aumento da oferta e, com isso, uma diminuição da taxa. Isso é modelado pelo segundo termo que aparece do lado direito na equação (6). Este modelo foi apresentado pela primeira vez em [7] e nesse artigo, os autores provaram, para $0 < a < 1$, a estabilidade local assintótica de $x = 0$, e a existência de uma solução periódica estável para $a > 1$ relativo à equação (6).

Mais para frente, nos anos de 2005 e 2006, Walther ([40, 41]), analisou a oscilação de soluções periódicas de (6) e provou que o período tende ao infinito quando $a \to 1^+$.

Recentemente, Stumpf ([34]) generalizou o modelo, considerando pela primeira vez retardos dependendo do estado, trazendo mais precisão ao modelo e também, uma dinâmica mais sofisticada e interessante para ser investigada. A versão apresentada por Stumpf pode ser descrita abaixo:

$$x'(t) = a[x(t) - x(t-r)] - |x(t)|x(t), \tag{7}$$

com parâmetro $a > 0$ e o retardo dependente do estado $r = r(x(t)) > 0$. Neste trabalho, Stumpf investiga se órbitas periódicas ainda existem quando $a > 1$. Também, Stumpf investiga existência de soluções sob condições mais fracas impostas à função de retardo.

Além disso, Stumpf generaliza alguns resultados anteriores para o caso do retardo constante.

Para isso, ele assume as seguintes hipóteses para a aplicação retardo $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(h1) r é continuamente diferenciável;

(h2) $0 < r(s) \leqslant r(0) =: r_0$, para todo $s \in \mathbb{R}$;

(h3) $r(s) = r(-s)$, para todo $s \in \mathbb{R}$ e

(h4) $r_0 = 1$.

Adicionalmente, para provar alguns resultados importantes ao longo do trabalho, pede-se a seguinte hipótese:

(h5) $|r'(s)| < \frac{1}{4a^2}$, para todo $-2a \leqslant s \leqslant 2a$,

onde a é o parâmetro que aparece na equação (7).

Em 2016, Garab et al. ([16]) provaram ainda para o caso do retardo constante, a estabilidade assintótica global de $x = 0$, desde que $a \in (0; 0,61)$. Este fato estava em aberto no primeiro trabalho relacionado a isso ([7]). Para alcançar os resultados, os autores reescreveram a equação como uma equação diferencial do tipo neutro. Disto, uma equação equivalente com retardo infinito foi obtida para que um resultado de estabilidade encontrado em [25] pudesse ser aplicado.

Cabe ainda destacar que a mesma técnica aplicada por Garab et al. ([16]) continua válida para o modelo de preço geral

$$x'(t) = a\sum_{i=1}^{n} b_i[x(t-s_i)] - x(t-r_i)] - g(x(t)), \tag{8}$$

onde $a, b_i > 0$, $0 \leqslant s_i < r_i \leqslant 1$, $i \in \{1, ..., n\}$, $\sum_{i=1}^{n} b_i(r_i - s_i) = 1$ vale, onde g é uma função suave real crescente que satisfaz $ug(u) > 0$, para $u \neq 0$. Em [16], os autores provaram que a estabilidade assintótica global para (8) está satisfeita para $a \in (0, 1)$.

Em 2013, Walther ([37]) generalizou o modelo considerado anteriormente, inserindo uma parte neutra na equação, levando assim o modelo à uma equação diferencial com retardo dependendo do estado do tipo neutro. A equação considerada por Walther é dada por:

$$x'(t) = ax'(t + d(x(t))) + f(x(t)) \tag{9}$$

onde $d\colon \mathbb{R} \to (-h, 0)$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a > 0$. Neste modelo, d é crescente para $\xi < 0$ e decrescente para $\xi > 0$, $f(0) = 0$ e $\xi f(\xi) < 0$ para $\xi \neq 0$.

Walther mostra que a equação (9) pode ser escrita na forma abstrata

$$x'(t) = g(\partial x_t, x_t), \tag{10}$$

em que $g\colon W \to \mathbb{R}^n$ e $W \subset C \times C^1$ aberto. Para $h > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, os espaços C e C^1 são espaços de Banach das funções $\phi\colon [-h, 0] \to \mathbb{R}^n$ contínuas e continuamente diferenciáveis com as normas $\|\phi\| = \max_{-h\leqslant\tau\leqslant 0} |\phi(\tau)|$ e $\|\phi\|_1 = \max_{-h\leqslant\tau\leqslant 0} |\phi(\tau)| + \max_{-h\leqslant\tau\leqslant 0} |\phi'(\tau)|$, respectivamente. No espaço produto $C \times C^1$, considera-se a norma da soma, isto é, $\|(\phi, \psi)\|_{C\times C^1} = \|\phi\| + \|\psi\|_1$. Para $\phi \in C^1$, $\partial\phi$ é a *derivada* de ϕ, isto é, $\partial\phi(t) = \phi'(t)$. Também usaremos $\partial\colon C^1 \to C$ como o operador linear de derivação. Para $x\colon I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ intervalo, e para $t \in \mathbb{R}$ tal que $[t - h, t] \subset I$, definimos o *segmento* $x_t\colon [-h, 0] \to \mathbb{R}^n$ por

$$x_t(\theta) = x(t + \theta).$$

Para obter a relação entre (9) e (10), basta tomar $n = 1$, $W = C \times C^1$ e

$$g(\phi, \psi) = a\phi(d(\psi(0))) + f(\psi(0)).$$

Descreveremos esta relação de forma mais precisa ao longo deste trabalho.

Esta dissertação está baseada no estudo aprofundado das referências [37] e [39]. Investigaremos de maneira detalhada a construção do semifluxo e suas propriedades, bem como a construção da variedade e do seu espaço tangente associado, relativo ao problema abstrato (10). Também, ainda como parte deste trabalho, estudaremos o Princípio da Estabilidade Linearizada apresentada em [39]. Por fim, apresentaremos uma aplicação.

Este trabalho está dividido em 3 capítulos e um apêndice. O primeiro capítulo apresenta os resultados preliminares necessários para a boa compreensão dos resultados dos Capítulos 2 e 3. No Capítulo 2, trazemos a construção do semifluxo em um subconjunto de C^1, bem como a construção do semifluxo em um subconjunto fechado de X_2. A última seção contém uma aplicação. O último capítulo trata de um resultado de estabilidade linearizada para a equação (10) e uma aplicação deste resultado. Por fim, o apêndice traz resultados e definições bem conhecidas que foram usadas ao longo deste trabalho.

Capítulo

1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos conceitos, definições e resultados básicos que serão importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

Ele será dividido em duas seções. Na primeira seção, falaremos sobre algumas propriedades da função g que aparece no lado direito da equação que será objeto principal de estudo neste trabalho:

$$x'(t) = g(\partial x_t, x_t),$$

onde $g\colon W \to \mathbb{R}^n$ e $W \subset C \times C^1$ é aberto. Essas propriedades serão importantes para que possamos provar os principais resultados deste trabalho. Na segunda seção, apresentaremos alguns resultados básicos que serão usados nos capítulos seguintes. Todos os resultados deste capítulo podem ser encontrados em [37].

1.1 Propriedades de g

Nesta seção, começamos apresentando a equação abaixo que será o foco do nosso estudo:

$$x'(t) = g(\partial x_t, x_t), \tag{1.1}$$

onde $g\colon W \to \mathbb{R}^n$, $W \subset C \times C^1$ é aberto e os espaços C e C^1 são, respectivamente, das funções contínuas e continuamente diferenciáveis de $[-h, 0]$ em $\mathbb{R}^n$. Consideramos que estes espaços estão munidos, respectivamente, com as seguintes normas:

$$\|\phi\| = \max_{-h \leqslant u \leqslant 0} |\phi(u)| \text{ e } \|\psi\|_1 = \max_{-h \leqslant u \leqslant 0} |\psi(u)| + \max_{-h \leqslant u \leqslant 0} |\psi'(u)|$$

para $\phi \in C$ e $\psi \in C^1$. Usaremos também a notação $\partial\psi(t)$ para indicar a derivada de ψ em relação à t, isto é, $\partial\psi(t) = \psi'(t)$. O segmento $x_t\colon [-h, 0] \to \mathbb{R}^n$ é dado por $x_t(s) = x(s+t)$.

Apresentamos, a seguir, a definição de solução da equação (1.1):

Definição 1.1.1 ([37]). *Uma* ***solução da equação*** (1.1) *é uma função continuamente diferenciável $x\colon [t_0 - h, t_e) \to \mathbb{R}^n$, com $t_0 < t_e \leqslant \infty$ tal que $(\partial x_t, x_t) \in W$ para $t_0 \leqslant t < t_e$ e satisfaz a equação* (1.1) *para $t_0 < t < t_e$.*

Desta definição, temos que todos os segmentos x_t de qualquer solução $x\colon [t_0 - h, t_e) \to \mathbb{R}^n$ pertencem ao conjunto

$$U_1 = \{\psi \in C^1 : (\partial\psi, \psi) \in W\}.$$

Veja que U_1 é aberto em C^1, pois a aplicação $\Lambda : C^1 \ni \psi \mapsto (\partial\psi, \psi) \in C \times C^1$ é contínua, e $U_1 = \Lambda^{-1}(W)$. Como x satisfaz a equação (1.1), então, para $t_0 < t < t_e$, temos

$$(x_t)'(0) = (x')_t(0) = x'(t) = g(\partial x_t, x_t).$$

Portanto, para $t_0 < t < t_e$, temos que x_t satisfaz a equação

$$\psi'(0) = g(\partial\psi, \psi). \tag{1.2}$$

Isso nos leva à definição do conjunto abaixo:

$$X_1 = \{\psi \in U_1 : \ \psi \text{ satisfaz (1.2)}\}.$$

A fim de obter resultados de existência, unicidade, regularidade e estabilidade linearizada para a equação (1.1), vamos assumir que g satisfaz algumas hipóteses. Antes de apresentá-las, vamos lembrar a seguinte definição da constante de Lipschitz:

Definição 1.1.2. *Seja $\alpha\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ uma função. Definimos a* ***constante de Lipschitz*** *de α por*

$$Lip(\alpha) = \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in I}} \frac{|\alpha(x) - \alpha(y)|}{|x - y|}.$$

Observação 1.1.3. *Na definição acima, podemos ter $Lip(\alpha) = \infty$. Além disso, $Lip(\alpha) < \infty$ se, e somente se, α é Lipschitziana.*

Ao longo deste trabalho, vamos considerar as seguintes condições para obtermos nossos resultados:

(g0) g é contínua.

A próxima hipótese permite que seja assumido, sem perda de generalidade, que o retardo na parte neutra não se anula. Isso traz a vantagem de sabermos que estamos sempre trabalhando com uma equação do tipo neutro. Por outro lado, por conta desta hipótese, nosso modelo não prevê choque entre partículas, mas no nosso caso, isso não será importante, dado que nosso modelo é baseado em flutuação cambial e mercado financeiro.

(g1) Para todo $(\phi, \psi) \in W$, existem $\Delta \in (0, h)$ e uma vizinhança $N \subset W$ de (ϕ, ψ) em $C \times C^1$ tais que, para todos $(\phi_1, \chi), (\phi_2, \chi) \in N$ com

$$\phi_1(t) = \phi_2(t), \forall t \in [-h, -\Delta],$$

temos

$$g(\phi_1, \chi) = g(\phi_2, \chi).$$

(g2) Para todo $\phi \in U_1 \subset C^1$, existem $L \geqslant 0$ e uma vizinhança $N \subset W$ de $(\partial\phi, \phi)$ em $C \times C^1$ tais que, para todos $(\phi_1, \psi_1), (\phi_2, \psi_2) \in N$, temos

$$|g(\phi_2, \psi_2) - g(\phi_1, \psi_1)| \leqslant L(\|\phi_2 - \phi_1\| + (Lip(\phi_2) + 1)\|\psi_2 - \psi_1\|).$$

No caso não neutro, ou seja, no caso em que g não depende da primeira coordenada, mais precisamente, $g(\phi, \psi) = g(\psi)$, a propriedade (g2) se torna uma "versão forte" da propriedade de ser localmente Lipschitz, pois na desigualdade aparece a norma $\|\cdot\|$ e não, a norma $\|\cdot\|_1$.

Essa hipótese é fundamental na construção da solução do caso não neutro em [36]. Na primeira seção do próximo capítulo, usaremos as hipóteses (g0), (g1) e (g2) para provar existência e unicidade de solução da equação (1.1), além de construir um semifluxo contínuo para tal equação no conjunto

$$X_{1+} = \{\psi \in X_1 : Lip(\partial\psi) < \infty\}.$$

(g3) A restrição g_1 de g no aberto $W_1 = W \cap (C^1 \times C^1)$ do espaço $C^1 \times C^1$ é continuamente diferenciável, toda derivada $Dg_1(\phi, \psi) \colon C^1 \times C^1 \to \mathbb{R}^n$, para $(\phi, \psi) \in W_1$, tem uma extensão linear

$$D_e g_1(\phi, \psi) \colon C \times C \to \mathbb{R}^n,$$

e a aplicação

$$W_1 \times C \times C \ni (\phi, \psi, \chi, \rho) \mapsto D_e g_1(\phi, \psi)(\chi, \rho) \in \mathbb{R}^n$$

é contínua.

A propriedade (g3) é uma versão adaptada de uma propriedade bastante usual que aparece em outros trabalhos como em [36], por exemplo. Em [28], tal propriedade também aparece e é chamada de *quase Fréchet diferenciável*. Na segunda seção do próximo capítulo, usaremos as condições (g0)-(g3) para mostrar que se $X_2 = X_1 \cap C^2 \neq \emptyset$, então X_2 é uma subvariedade continuamente diferenciável de codimensão n em C^2, onde C^2 é o espaço de Banach das funções $\phi\colon [-h, 0] \to \mathbb{R}^n$ duas vezes continuamente diferenciáveis com norma dada por

$$\|\phi\|_2 = \|\phi\| + \|\partial\phi\|_1 = \|\phi\| + \|\partial\phi\| + \|\partial\partial\phi\|.$$

Mostraremos que para $\psi \in X_2$, o espaço tangente $T_\psi X_2 \subset C^2$ é dado pela equação

$$\chi'(0) = Dg_1(\partial\psi, \psi)(\partial\chi, \chi). \tag{1.3}$$

Para isso, definiremos o espaço tangente estendido $T_{e,\psi}X_2 \subset C^1$ por

$$\chi'(0) = D_e g_1(\partial\psi, \psi)(\partial\chi, \chi), \tag{1.4}$$

para concluir que as soluções da equação (1.1) geram um semifluxo contínuo no subconjunto de X_2:

$$\begin{aligned} X_{2*} &= \{\psi \in X_2 : \partial\psi \in T_{e,\psi}X_2\} \\ &= \{\psi \in X_2 : (\partial\psi)'(0) = D_e g_1(\partial\psi, \psi)(\partial\partial\psi, \partial\psi)\}. \end{aligned}$$

Este subconjunto X_{2*} também apresenta uma propriedade muito importante, como veremos mais à frente, que é a invariância. Isto será fundamental para obtermos nossos resultados.

As propriedades (g4) e (g5) abaixo não serão usadas neste trabalho. Tais propriedades são usadas em [37] para provar diferenciabilidade de uma certa composição do operador solução e continuidade pontual de sua derivada.

(g4) A restrição g_1 de g no aberto $W_1 = W \cap (C^1 \times C^1)$ do espaço $C^1 \times C^1$ é continuamente diferenciável e, para todo $(\phi_0, \psi_0) \in W_1$, existem $c \geqslant 0$ e uma vizinhança

$N \subset W_1$ de (ϕ_0, ψ_0) em $C^1 \times C^1$ tais que, para todos $(\phi, \psi), (\phi_1, \psi_1) \in N$ e, para todo $\chi \in C^1$, temos

$$|(Dg_1(\phi, \psi) - Dg_1(\phi_1, \psi_1))(\chi, 0)| \leqslant c\|\partial\chi\|\|\psi - \psi_1\|.$$

(g5) A restrição g_1 de g no aberto $W_1 = W \cap (C^1 \times C^1)$ do espaço $C^1 \times C^1$ é continuamente diferenciável, toda derivada $Dg_1(\phi, \psi)\colon C^1 \times C^1 \to \mathbb{R}^n$, para $(\phi, \psi) \in W_1$, tem uma extensão linear

$$D_e g_1(\phi, \psi)\colon C \times C \to \mathbb{R}^n,$$

e, para todo $(\phi_0, \psi_0) \in W_1$, existem $c \geqslant 0$ e uma vizinhança $N \subset W_1$ de (ϕ_0, ψ_0) em $C^1 \times C^1$ tais que, para todos $(\phi, \psi), (\phi_1, \psi_1) \in N$ e, para todos $(\chi, \rho) \in C \times C$, com $\|(\chi, \rho)\|_{C \times C} = 1$, temos

$$\begin{aligned} &|(D_e g_1(\phi, \psi) - D_e g_1(\phi_1, \psi_1))(\chi, \rho)| \\ &\qquad \leqslant c(Lip(\chi) + Lip(\partial\phi) + 1)\|(\phi, \psi) - (\phi_1, \psi_1)\|_{C^1 \times C^1}. \end{aligned}$$

As propriedades (g6) e (g7) abaixo são usadas para provar os resultados de estabilidade linearizada em [38].

(g6) (g3) está satisfeita, $(0,0) \in W$, $g(0,0) = 0$ e a aplicação

$$W_1 \ni (\phi, \psi) \mapsto \|D_e g_1(\phi, \psi)(\cdot, 0)\|_{\mathscr{L}(C, \mathbb{R}^n)} \in \mathbb{R}$$

é semicontínua superiormente em $(0,0)$.

(g7) g_1 é diferenciável, $(0,0) \in W$, $g(0,0) = 0$ e existem $\eta > 0$, $c \geqslant 0$ e uma função $\zeta\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ com

$$\zeta(0) = 0 = \lim_{t \to 0} \zeta(t),$$

tais que, para todo $(\phi, \psi) \in W_1$, com $\|\phi\| + \|\psi\| \leqslant \eta$ e, para todo $\rho \in C^1$, temos

$$|(Dg_1(\phi, \psi) - Dg_1(0,0))(0, \rho)| \leqslant c(\zeta(\|\phi\|_1 + \|\psi\|_1)\|\rho\| + \|\rho\|_1\|\psi\|).$$

As propriedades (g8) e (g9) abaixo, juntamente com (g0)-(g3) e (g6), são usadas no Capítulo 4 para provar a estabilidade da solução estacionária $0 \in X_{2*}$.

(g8) g_1 é diferenciável, $(0,0) \in W$, $g(0,0) = 0$ e existem $V_0 \subset U_1 \cap C^2$ vizinhança convexa de 0 em C^2, uma constante $c > 0$, uma função contínua $\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\Delta \in (0,h)$ tais que, para todo $\psi \in V_0$, temos

$$\begin{aligned}\max_{0\leqslant s\leqslant 1} |(Dg_1(s\partial\psi, s\psi) - Dg_1(0,0))(\partial\psi, 0)| &\leqslant c\|\partial\partial\psi\|\|\psi\| \\ &+ \left(\max_{|\xi|\leqslant\|\partial\psi\|} |\alpha(\xi) - \alpha(0)|\right)\left(\max_{-h\leqslant u\leqslant -\Delta} |\psi'(u)|\right).\end{aligned}$$

(g9) g_1 é diferenciável, $(0,0) \in W$, $g(0,0) = 0$ e existem $V_0 \subset U_1 \cap C^2$ vizinhança convexa de 0 em C^2, uma constante $c > 0$ e uma função $\zeta \colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ contínua em $0 = \zeta(0)$ tais que, para todo $\psi \in V_0$, temos

$$\max_{0\leqslant s\leqslant 1} |(Dg_1(s\partial\psi, s\psi) - Dg_1(0,0))(0,\psi)| \leqslant c \max_{0\leqslant s\leqslant 1} \left(\zeta(\|s\psi\|_2)\|\psi\| + \|s\psi\|\|\psi\|_1\right).$$

A propriedade (g8*) abaixo é uma hipótese mais fraca que (g8). Em [6], ela substitui (g8) afim de obter o mesmo resultado de estabilidade linearizada contido no Capítulo 4 deste trabalho.

(g8*) g_1 é diferenciável, $(0,0) \in W$, $g(0,0) = 0$ e existem $V_0 \subset U_1 \cap C^2$ vizinhança convexa de 0 em C^2, uma constante $c > 0$, uma função $\theta \colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ contínua em $0 = \theta(0)$ e $\Delta \in (0,h)$ tais que, para todo $\psi \in V_0$, temos

$$\begin{aligned}\max_{0\leqslant s\leqslant 1} |(Dg_1(s\partial\psi, s\psi) - Dg_1(0,0))(\partial\psi, 0)| &\leqslant c\|\partial\partial\psi\|\|\psi\| \\ &+ \left(\max_{0\leqslant\xi\leqslant\|\psi\|_1} \theta(\xi)\right)\left(\max_{-h\leqslant u\leqslant -\Delta} |\psi'(u)|\right).\end{aligned}$$

Apesar das condições acima parecerem muito técnicas, veremos que elas são apropriadas e gerais o suficiente para englobar o modelo que temos interesse em investigar.

1.2 Resultados básicos

Nesta seção, iremos apresentar alguns resultados básicos que serão muito importantes para provarmos os resultados principais deste trabalho. Todos eles podem ser encontrados em [37].

Proposição 1.2.1 ([37], Proposição 2.1)**.** *Sejam $a < b < c$ números reais e $\alpha \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e $\beta \colon [b,c] \to \mathbb{R}$ funções tais que $\alpha(b) = \beta(b)$. Sendo $\alpha\beta \colon [a,c] \to \mathbb{R}$ a justaposição de α e β,* *isto é, $\alpha\beta$ é igual a α em $[a,b]$ e igual a β em $[b,c]$, vale que*

$$Lip(\alpha\beta) \leqslant Lip(\alpha) + Lip(\beta).$$

Demonstração. Por definição, $(\alpha\beta)(x) = \begin{cases} \alpha(x), \text{ se } x \in [a,b], \\ \beta(x), \text{ se } x \in [b,c]. \end{cases}$
Assim para $x, y \in [a,b]$, $x \neq y$, temos

$$\frac{|(\alpha\beta)(x) - (\alpha\beta)(y)|}{|x-y|} = \frac{|\alpha(x) - \alpha(y)|}{|x-y|} \leqslant Lip(\alpha) \leqslant Lip(\alpha) + Lip(\beta).$$

Se $x, y \in [b,c]$, $x \neq y$, temos

$$\frac{|(\alpha\beta)(x) - (\alpha\beta)(y)|}{|x-y|} = \frac{|\beta(x) - \beta(y)|}{|x-y|} \leqslant Lip(\beta) \leqslant Lip(\alpha) + Lip(\beta).$$

Se $x \in [a,b)$ e $y \in (b,c]$, temos

$$\begin{aligned} \frac{|(\alpha\beta)(x) - (\alpha\beta)(y)|}{|x-y|} &= \frac{|\alpha(x) - \beta(y)|}{|x-y|} = \frac{|\alpha(x) - \alpha(b) + \beta(b) - \beta(y)|}{|x-y|} \\ &\leqslant \frac{|\alpha(x) - \alpha(b)|}{|x-y|} + \frac{|\beta(b) - \beta(y)|}{|x-y|} \\ &\leqslant \frac{|\alpha(x) - \alpha(b)|}{|x-b|} + \frac{|\beta(b) - \beta(y)|}{|b-y|} \\ &\leqslant Lip(\alpha) + Lip(\beta). \end{aligned}$$

Analogamente, se $x \in (b,c]$ e $y \in [a,b)$, temos

$$\frac{|(\alpha\beta)(x) - (\alpha\beta)(y)|}{|x-y|} \leqslant Lip(\alpha) + Lip(\beta).$$

Dessa maneira, $Lip(\alpha) + Lip(\beta)$ é uma cota superior para o conjunto

$$\left\{ \frac{|(\alpha\beta)(x) - (\alpha\beta)(y)|}{|x-y|} \;:\; x, y \in [a,c], x \neq y \right\}.$$

Portanto, segue que

$$Lip(\alpha\beta) = \sup_{x \neq y} \frac{|(\alpha\beta)(x) - (\alpha\beta)(y)|}{|x-y|} \leqslant Lip(\alpha) + Lip(\beta),$$

obtendo o resultado desejado. □

Sejam E, F espaços de Banach. Denotamos o espaço das *transformações lineares contínuas* de E em F por $\mathscr{L}(E,F)$. Para $(\phi,\psi) \in E \times F$, usaremos a norma da soma no espaço produto $E \times F$, $\|(\phi,\psi)\|_{E\times F} = \|\phi\|_E + \|\psi\|_F$.

O próximo resultado descreve propriedades da aplicação

$$ev : [-h,0] \times C \ni (s,\psi) \mapsto \psi(s) \in \mathbb{R},$$

que possui um papel importante na construção da relação entre as equações (9) e (1.1).

Proposição 1.2.2 ([37], Proposição 2.1). *Sejam $h > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. A respeito da aplicação*

$$ev\colon [-h,0] \times C \ni (s,\psi) \mapsto \psi(s) \in \mathbb{R}^n,$$

valem as seguintes afirmações:

i) ev é contínua, mas não localmente Lipschitz;

ii) A aplicação linear $ev(s,\cdot)\colon C \to \mathbb{R}^n$, $-h \leqslant s \leqslant 0$, é contínua, assim como sua restrição $ev_1(s,\cdot) = ev(s,\cdot)|_{C^1}$ com respeito à norma $\|\cdot\|_1$;

iii) A aplicação $[-h,0] \ni t \mapsto ev_1(t,\cdot) \in \mathscr{L}(C^1,\mathbb{R}^n)$ é contínua;

iv) A restrição $ev_1 = ev|_{(-h,0)\times C^1}$ é continuamente diferenciável com respeito à norma de $\mathbb{R} \times C^1$, com derivada

$$Dev_1(s,\phi)(t,\chi) = t\partial\phi(s) + \chi(s).$$

Demonstração. i) Seja $(s,\phi) \in [-h,0] \times C$. Dado $\epsilon > 0$, como ϕ é contínua, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$t \in [-h,0], |s-t| < \delta_1 \Rightarrow |\phi(s) - \phi(t)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \frac{\epsilon}{2}\}$. Então

$$(t,\psi) \in [-h,0] \times C, \|(s,\phi) - (t,\psi)\|_{\mathbb{R}\times C} = |s-t| + \|\phi - \psi\| < \delta.$$

Isto implica que:

$$|ev(s,\phi) - ev(t,\psi)| = |\phi(s) - \psi(t)|$$

$$
\begin{aligned}
&= |\phi(s) - \phi(t) + \phi(t) - \psi(t)| \\
&\leqslant |\phi(s) - \phi(t)| + |\phi(t) - \psi(t)| \\
&\leqslant |\phi(s) - \phi(t)| + \|\phi - \psi\| < \frac{\epsilon}{2} + \delta \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,
\end{aligned}
$$

provando a continuidade.

Tal função não é localmente Lipschitz, pois para $\epsilon > 0$ e cada $(t, \phi) \in [-h, 0] \times C^1 \subset [-h, 0] \times C$, podemos obter uma função $\psi \in C$ tal que $\|\phi - \psi\| < \epsilon$, e

$$\lim_{s \to t^+} \frac{|\psi(t) - \psi(s)|}{|t - s|} = \infty.$$

De fato, sem perda de generalidade, suponhamos que $n = 1$. Basta tomar $\psi \colon [-h, 0] \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(s) = \phi(s)$ para $-h \leqslant s < t$ e $\psi(s) = \phi(s) + \alpha\sqrt{s - t}$ para $t \leqslant s \leqslant 0$. Logo, para α suficientemente pequeno, temos

$$\|\phi - \psi\| < \epsilon$$

e

$$\lim_{s \to t^+} \frac{|\psi(t) - \psi(s)|}{|t - s|} = \lim_{s \to t^+} \frac{|\phi(t) - \phi(s) - \alpha\sqrt{s - t}|}{|t - s|} = \infty,$$

como queríamos demonstrar.

ii) Pela linearidade, basta mostrar que $ev(s, \cdot)$ e $ev_1(s, \cdot)$ são limitadas. Para $s \in [-h, 0]$, temos:

$$|ev(s, \phi)| = |\phi(s)| \leqslant \|\phi\|, \forall \phi \in C$$

e

$$|ev_1(s, \phi)| = |\phi(s)| \leqslant \|\phi\| \leqslant \|\phi\| + \|\partial\phi\| = \|\phi\|_1, \forall \phi \in C^1,$$

obtendo o resultado desejado.

iii) Para $s, t \in [-h, 0]$ e $\phi \in C^1$, pela Desigualdade do Valor Médio (Veja Apêndice A), temos

$$|ev_1(s, \phi) - ev_1(t, \phi)| = |\phi(s) - \phi(t)| \leqslant \|\partial\phi\| |s - t|.$$

Assim para $s, t \in [-h, 0]$, temos

$$\|ev_1(s, \cdot) - ev_1(t, \cdot)\| = \sup_{\substack{\phi \in C^1 \\ \|\phi\|_1 \leqslant 1}} |ev_1(s, \phi) - ev_1(t, \phi)| \leqslant \sup_{\substack{\phi \in C^1 \\ \|\phi\|_1 \leqslant 1}} \|\partial\phi\| |s - t| \leqslant |s - t|.$$

Disto, concluímos o item iii).

iv) Seja $(s,\phi) \in (-h,0) \times C^1$, escrevemos

$$ev_1(s+t,\phi+\chi) = ev_1(s,\phi) + Dev_1(s,\phi)(t,\chi) + r(t,\chi)$$

e obtemos

$$r(t,\chi) = \phi(s+t) - \phi(s) - t\partial\phi(s) + \chi(t+s) - \chi(s),$$

em que $(t,\chi) \in (-h,0) \times C^1$ é tal que $(s+t,\phi+\chi) \in (-h,0) \times C^1$. Agora basta mostrar que

$$\lim_{\|(t,\chi)\|\to 0} \frac{|r(t,\chi)|}{\|(t,\chi)\|_{\mathbb{R}\times C^1}} = 0$$

na qual $\|(t,\chi)\|_{\mathbb{R}\times C^1} = |t| + \|\chi\| + \|\partial\chi\|$ (norma de $\mathbb{R} \times C^1$). Para isso, veja que

$$\begin{aligned}
\frac{|r(t,\chi)|}{\|(t,\chi)\|_{\mathbb{R}\times C^1}} &= \frac{|\phi(s+t) - \phi(s) - t\partial\phi(s) + \chi(t+s) - \chi(s)|}{|t| + \|\chi\| + \|\partial\chi\|} \\
&\leqslant \frac{|\phi(s+t) - \phi(s) - t\partial\phi(s)|}{|t| + \|\chi\| + \|\partial\chi\|} + \frac{|\chi(s+t) - \chi(s)|}{|t| + \|\chi\| + \|\partial\chi\|} \\
&\leqslant \frac{|\phi(s+t) - \phi(s) - t\partial\phi(s)|}{|t|} + \frac{|\chi(s+t) - \chi(s)|}{|t|} \\
&\leqslant \left| \frac{\phi(s+t) - \phi(s)}{t} - \partial\phi(s) \right| + \|\partial\chi\| \to 0
\end{aligned}$$

quando $\|(t,\chi)\|_{\mathbb{R}\times C^1} \to 0$.

Para ver que esta derivada é contínua, observe que para $(s,\phi),(s_1,\phi_1) \in (-h,0) \times C^1$, temos

$$\begin{aligned}
|(Dev_1(s,\phi) - Dev_1(s_1,\phi_1))(t,\chi)| &= |t\partial\phi(s) + \chi(s) - t\partial\phi_1(s_1) - \chi(s_1)| \\
&= |t(\partial\phi(s) - \partial\phi_1(s_1)) + \chi(s) - \chi(s_1)| \\
&\leqslant |t||\partial\phi(s) - \partial\phi_1(s_1)| + |\chi(s) - \chi(s_1)| \\
&\leqslant |t||\partial\phi(s) - \partial\phi_1(s_1)| + \|\partial\chi\||s - s_1|.
\end{aligned}$$

Isto implica que

$$\begin{aligned}
\|Dev_1(s,\phi) - Dev_1(s_1,\phi_1)\| &\leqslant \sup_{\substack{(t,\chi)\in\mathbb{R}\times C^1 \\ \|(t,\chi)\|\leqslant 1}} \big(|t||\partial\phi(s) - \partial\phi_1(s_1)| + \|\partial\chi\||s - s_1|\big) \\
&\leqslant \sup_{\substack{(t,\chi)\in\mathbb{R}\times C^1 \\ \|(t,\chi)\|\leqslant 1}} \big(|\partial\phi(s) - \partial\phi_1(s_1)| + |s - s_1|\big) \\
&= |\partial\phi(s) - \partial\phi_1(s_1)| + |s - s_1|
\end{aligned}$$

$$\leqslant |\partial\phi(s) - \partial\phi(s_1)| + |\partial\phi(s_1) - \partial\phi_1(s_1)| + |s - s_1|$$
$$\leqslant |\partial\phi(s) - \partial\phi(s_1)| + \|\partial\phi - \partial\phi_1\| + |s - s_1| \to 0,$$

quando $(s_1, \phi_1) \xrightarrow{\mathbb{R}\times C^1} (s, \phi)$. □

Definição 1.2.3. *Sejam E um espaço de Banach e $x\colon I \subset \mathbb{R} \to E$ uma função diferenciável em $t \in I$. Definimos $x'(t) = Dx(t)1 = Dx(t) \in E$.*

Proposição 1.2.4 ([37], Proposição 2.2)**.** *Seja $x\colon [t_0 - h, t_e) \to \mathbb{R}^n$, $t_0 < t_e \leqslant \infty$, continuamente diferenciável. Então as aplicações*

$$[t_0, t_e) \ni t \mapsto x_t \in C^1, \qquad [t_0, t_e) \ni t \mapsto \partial x_t \in C$$

são contínuas, e

$$\Gamma_x\colon [t_0, t_e) \ni t \mapsto x_t \in C$$

é continuamente diferenciável com $\Gamma'_x(t) = \partial x_t = (x')_t$ para $t_0 \leqslant t < t_e$.

Demonstração. Seja $t \in [t_0, t_e)$. Como $t < t_e$, tomamos $t^* \in \mathbb{R}$ tal que $t < t^* < t_e$ e consideramos o seguinte intervalo compacto $I = [t_0 - h, t^*]$. Como x é uniformemente contínua em I, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $z, w \in I$, $|z - w| < \delta_1$, então $|x(z) - x(w)| < \epsilon$. Consideremos $\delta' = \min\{|t^* - t|, \delta_1\}$, de modo que, para todo $s \in [t_0, t_e)$ tal que $|t - s| < \delta'$, temos que $s \leqslant t^*$, pois $|t - s| < |t^* - t|$. Com isso, $[s - h, s] \subset [t_0 - h, t^*] = I$. Claramente, $[t - h, t] \subset [t_0 - h, t^*] = I$. Portanto, para $s \in [t_0, t_e)$ tal que $|t - s| < \delta'$, temos que $s + \theta \in I$, para todo $\theta \in [-h, 0]$. Do mesmo modo, $t + \theta \in I$ para todo $\theta \in [-h, 0]$. Logo, se $s \in [t_0, t_e)$, $|t - s| < \delta'$, então $s + \theta, t + \theta \in I$ e $|t + \theta - (s + \theta)| < \delta'$, para todo $\theta \in [-h, 0]$.

Assim, pela continuidade uniforme de x, para $s \in [t_0, t_e)$, $|t - s| < \delta'$, tem-se

$$|x(t + \theta) - x(s + \theta)| < \epsilon, \text{ para todo } \theta \in [-h, 0],$$

o que implica que

$$\|x_t - x_s\| = \max_{\theta \in [-h, 0]} |x(t + \theta) - x(s + \theta)| < \epsilon.$$

De modo inteiramente análogo, uma vez que x é continuamente diferenciável, sua derivada ∂x é contínua, logo existe $\delta^* > 0$ tal que, para todo $s \in [t_0, t_e)$ com $|t - s| < \delta^*$, tem-se

$$\|\partial x_t - \partial x_s\| < \epsilon.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta', \delta^*\}$, obtemos

$$s \in [t_0, t_e),\ |s-t| < \delta \Rightarrow \|x_t - x_s\|_1 = \|x_t - x_s\| + \|\partial x_t - \partial x_s\| < 2\epsilon.$$

Portanto $[t_0, t_e) \ni t \mapsto x_t \in C^1$ é contínua. Além disso, de modo análogo, temos que $[t_0, t_e) \ni t \mapsto \partial x_t \in C$ é também contínua.

Como x é continuamente diferenciável, sua derivada x' é uniformemente contínua em intervalos compactos. Seja $t \in [t_0, t_e)$ e considere $\alpha > 0$ tal que $t + \alpha < t_e$. Assim, x' é uniformemente contínua em $[t_0 - h, t + \alpha]$. Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $1 \geqslant \delta > 0$ tal que, para todos $u, v \in [t_0 - h, t + \alpha]$ com $|u - v| < \delta$, temos

$$|x'(u) - x'(v)| < \epsilon.$$

Para cada $s \in [-h, 0]$ e $\eta \in \mathbb{R}$ tal que $|\eta| < \delta$ e $t + s + \eta \in [t_0 - h, t + \alpha]$, temos

$$\begin{aligned}
|x(t+s+\eta) - x(t+s) - \eta x'(t+s)| &= \left| \int_0^1 x'(t+s+\theta\eta)\eta d\theta - \int_0^1 x'(t+s)\eta d\theta \right| \\
&\leqslant \int_0^1 |x'(t+s+\theta\eta) - x'(t+s)||\eta| d\theta \\
&\leqslant \epsilon|\eta| < \epsilon\delta \leqslant \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, para $|\eta| < \delta$, temos

$$\|\Gamma_x(t+\eta) - \Gamma_x(t) - \eta x_t'\| = \max_{-h \leqslant s \leqslant 0} |x(t+\eta+s) - x(t+s) - \eta x'(t+s)| < \epsilon.$$

Logo $\Gamma_x'(t) = x_t'$, como queríamos mostrar. □

Proposição 1.2.5 ([37], Proposição 2.3)**.** *Seja $x\colon [t-h, s] \to \mathbb{R}^n$, $t < s$, continuamente diferenciável, com $x_t \in C^2$ e $r > 0$. Então existe uma função $y\colon [t-h, s] \to \mathbb{R}^n$ duas vezes continuamente diferenciável tal que $y_t = x_t$ e*

$$|y'(u) - x'(u)| < r, \textit{ para todo } u \in [t, s].$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, consideramos que $n = 1$. Por hipótese, $x'|_{[t,s]}$ é contínua, logo, pelo Teorema da Aproximação de Weierstrass (Ver Apêndice

A), existe p um polinômio com $p(t) = x'(t)$ e $p(s) = x'(s)$, tal que

$$|p(u) - x'(u)| < \frac{r}{2}, \text{ para todo } u \in [t,s].$$

Para $N \in \mathbb{N}$, considere a função $r_N \colon [t,s] \to \mathbb{R}$ dada por

$$r_N(u) = \frac{x''(t) - p'(t)}{N}\left(1 - e^{-N(u-t)}\right).$$

Logo,

$$r'_N(u) = (x''(t) - p'(t))e^{-N(u-t)}$$

e, em particular, $r'_N(t) = x''(t) - p'(t)$. Veja que, para todo $u \in [t,s]$, $-N(u-t) \leqslant 0$, portanto,

$$|r_N(u)| = \frac{|x''(t) - p'(t)|}{N}\left|1 - e^{-N(u-t)}\right| \leqslant \frac{|x''(t) - p'(t)|}{N}.$$

Seja $N' \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que, para todo $u \in [t,s]$,

$$|r_{N'}(u)| \leqslant \frac{|x''(t) - p'(t)|}{N'} < \frac{r}{2}.$$

Considere $z \colon [t,s] \to \mathbb{R}^n$ dada por $z(u) = p(u) + r_{N'}(u)$. Veja que z é continuamente diferenciável,

$$z'(t) = p'(t) + r'_{N'}(t) = p'(t) + x''(t) - p'(t) = x''(t)$$

e

$$z(t) = p(t) + r_{N'}(t) = p(t) = x'(t).$$

Definimos $y \colon [t-h,s] \to \mathbb{R}$ por:

$$y(u) = \begin{cases} x(u), & \text{se } t-h \leqslant u \leqslant t, \\ x(t) + \displaystyle\int_t^u z(v)dv, & \text{se } t \leqslant u \leqslant s. \end{cases}$$

Como $x'(t) = z(t)$ e $x''(t) = z'(t)$, concluímos que y é duas vezes continuamente diferenciável. Pela definição, $y_t = x_t$. Para $u \in [t,s]$, temos

$$\begin{aligned} |x'(u) - y'(u)| &= |x'(u) - z(u)| = |x'(u) - p(u) - r_{N'}(u)| \\ &\leqslant |x'(u) - p(u)| + |r_{N'}(u)| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. $\square$

A próxima definição trata da extensão de funções.

Definição 1.2.6 ([37])**.** *Sejam* $\phi\colon [-h,0] \to \mathbb{R}^n$, $\varphi\colon [-h,0] \to \mathbb{R}^n$ *e* $\psi\colon [-h,0] \to \mathbb{R}^n$ *tais que* $\phi \in C$, $\varphi \in C^1$ *e* $\psi \in C^2$. *Definimos as extensões* ϕ^c, φ^d *e* ψ^{dd} *destas funções em* $[-h,\infty)$ *por*

$$\phi^c(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{se } -h \leqslant t \leqslant 0, \\ \phi(0), & \text{se } t > 0, \end{cases}$$

$$\varphi^d(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{se } -h \leqslant t \leqslant 0, \\ \varphi(0) + t\varphi'(0), & \text{se } t > 0, \end{cases}$$

e

$$\psi^{dd}(t) = \begin{cases} \psi(t), & \text{se } -h \leqslant t \leqslant 0, \\ \psi(0) + t\psi'(0) + \frac{t^2}{2}\psi''(0), & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

O próximo resultado traz importantes propriedades de funções nos espaços C e C^1 que serão fundamentais em nosso estudo.

Proposição 1.2.7 ([37], Proposição 2.4)**.** *As seguintes afirmações são válidas:*

i) Para $\phi \in C$ *e* $t \geqslant 0$, $\|(\phi^c)_t\| \leqslant \|\phi\|$.

ii) A aplicação $[0,\infty) \times C^1 \ni (t,\phi) \mapsto (\phi^d)_t \in C^1$ *é contínua. Para* $\phi \in C^1$,

$$(\phi^d)' = (\partial\phi)^c \text{ e } Lip((\phi^d)') \leqslant Lip(\partial\phi),$$

e para todo $t \geqslant 0$,

$$\|(\phi^d)_t\|_1 \leqslant (1+t)\|\phi\|_1.$$

iii) A aplicação $[0,\infty) \times C^2 \ni (t,\phi) \mapsto (\phi^{dd})_t \in C^2$ *é contínua. Para* $\phi \in C^2$,

$$(\phi^{dd})' = (\partial\phi)^d \text{ e } Lip((\phi^{dd})'') \leqslant Lip(\partial\partial\phi),$$

e para todo $t \geqslant 0$,

$$\|(\phi^{dd})_t\|_2 \leqslant \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)\|\phi\|_2.$$

Demonstração. i) Note que $(\phi^c)_t(\theta) = \phi^c(t+\theta) = \begin{cases} \phi(t+\theta), & t+\theta \in [-h,0], \\ \phi(0), & t+\theta > 0. \end{cases}$

Logo, para todo $\theta \in [-h,0]$, temos:

$$|(\phi^c)_t(\theta)| \leqslant \|\phi\|.$$

Portanto, para todo $t \geqslant 0$, segue que:

$$\|(\phi^c)_t\| \leqslant \|\phi\|, \tag{1.5}$$

obtendo o resultado desejado.
ii) Primeiramente, vejamos que, por definição, $\phi^d\colon [-h,\infty) \to \mathbb{R}^n$ é dada por:

$$\phi^d(t) = \begin{cases} \phi(t), & -h \leqslant t \leqslant 0, \\ \phi(0) + t\phi'(0), & t > 0. \end{cases}$$

Com isso, obtemos

$$(\phi^d)'(t) = \begin{cases} \phi'(t), & -h \leqslant t \leqslant 0, \\ \phi'(0), & t > 0, \end{cases}$$

ou seja,

$$(\phi^d)' = (\partial\phi)^c. \tag{1.6}$$

Sejam $x, y \in [-h, \infty)$ tais que $x \neq y$. Se $x, y \in [-h, 0]$, temos:

$$\frac{|(\phi^d)'(x) - (\phi^d)'(y)|}{|x-y|} = \frac{|\partial\phi(x) - \partial\phi(y)|}{|x-y|} \leqslant Lip(\partial\phi).$$

Se $x \in [-h, 0]$ e $y \in (0, \infty)$, temos

$$\frac{|(\phi^d)'(x) - (\phi^d)'(y)|}{|x-y|} = \frac{|\partial\phi(x) - \partial\phi(0)|}{|x-y|} \leqslant \frac{|\partial\phi(x) - \partial\phi(0)|}{|x-0|} \leqslant Lip(\partial\phi).$$

Se $x, y \in (0, \infty)$, então

$$\frac{|(\phi^d)'(x) - (\phi^d)'(y)|}{|x-y|} = \frac{|\partial\phi(0) - \partial\phi(0)|}{|x-y|} = 0 \leqslant Lip(\partial\phi).$$

Portanto,

$$Lip((\phi^d)') \leqslant Lip(\partial\phi).$$

Vamos agora provar a continuidade da aplicação no ponto $(t, \phi) \in [0, \infty) \times C^1$. Dado $\epsilon > 0$, seja $p_\phi(\tau) = \phi(0) + \tau\phi'(0)$ o polinômio de Taylor de grau 1 de ϕ em torno de 0. Pela continuidade de ϕ em 0 e pela aproximação de Taylor em torno de 0, obtemos

$\delta > 0$ tal que se $\tau \in [-h, \infty)$, $|\tau - 0| < \delta$, então $|\phi(\tau) - \phi(0)| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|p_\phi(\tau) - \phi(0)| < \frac{\epsilon}{2}$, implicando que $|\phi(\tau) - p_\phi(\tau)| < \epsilon$.

Seja $(s, \psi) \in [0, \infty) \times C^1$ tal que

$$\|(t, \phi) - (s, \psi)\|_{\mathbb{R}\times C^1} = |t - s| + \|\phi - \psi\| + \|\partial\phi - \partial\psi\| < \min\{\epsilon, \delta, 1\}.$$

Por definição, para $\theta \in [-h, 0]$, temos

$$|\phi^d(t+\theta) - \psi^d(s+\theta)| = \begin{cases} |\phi(t+\theta) - \psi(s+\theta)|, & t+\theta \in [-h,0],\ s+\theta \in [-h,0], \\ |\phi(t+\theta) - p_\psi(s+\theta)|, & t+\theta \in [-h,0],\ s+\theta \in (0,\infty), \\ |p_\phi(t+\theta) - \psi(s+\theta)|, & t+\theta \in (0,\infty),\ s+\theta \in [-h,0], \\ |p_\phi(t+\theta) - p_\psi(s+\theta)|, & t+\theta \in (0,\infty),\ s+\theta \in (0,\infty). \end{cases}$$

Assim, temos os seguintes casos:

Caso 1: $t+\theta, s+\theta \in [-h, 0]$.
Nesse caso, $|\phi^d(t+\theta) - \psi^d(s+\theta)| = |\phi(t+\theta) - \psi(s+\theta)|$. Logo,

$$\begin{aligned} |\phi(t+\theta) - \psi(s+\theta)| &\leqslant |\phi(t+\theta) - \phi(s+\theta)| + |\phi(s+\theta) - \psi(s+\theta)| \\ &= |\phi(t+\theta) - \phi(s+\theta)| + |(\phi - \psi)(s+\theta)| \\ &\leqslant \|\partial\phi\||t-s| + \|\phi - \psi\| \\ &\leqslant (\|\partial\phi\| + 1)\epsilon. \end{aligned}$$

Caso 2: $t+\theta \in [-h, 0]$ e $s+\theta \in (0, \infty)$.
Nesse caso, $|\phi^d(t+\theta) - \psi^d(s+\theta)| = |\phi(t+\theta) - p_\psi(s+\theta)|$. Como $t+\theta \leqslant 0 < s+\theta$ e $|(t+\theta) - (s+\theta)| = |t-s| < \delta$, então $|(t+\theta) - 0| < \delta$. Logo,

$$\begin{aligned} |\phi(t+\theta) - p_\psi(s+\theta)| &= |\phi(t+\theta) - p_\phi(t+\theta)| + |p_\phi(t+\theta) - p_\psi(s+\theta)| \\ &\leqslant |\phi(t+\theta) - p_\phi(t+\theta)| + |\phi(0) - \psi(0)| \\ &+ |(t+\theta)\phi'(0) - (s+\theta)\psi'(0)| \\ &\leqslant |\phi(t+\theta) - p_\phi(t+\theta)| + \|\phi - \psi\| \\ &+ |(t+\theta)\phi'(0) - (t+\theta)\psi'(0)| \\ &+ |(t+\theta)\psi'(0) - (s+\theta)\psi'(0)| \\ &\leqslant |\phi(t+\theta) - p_\phi(t+\theta)| + \|\phi - \psi\| \\ &+ |t+\theta||\phi'(0) - \psi'(0)| + |t-s||\psi'(0)| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant |\phi(t+\theta) - p_\phi(t+\theta)| + \|\phi - \psi\| \\
&+ (|t| + |\theta|)\|\partial\phi - \partial\psi\| + |t-s|\|\partial\psi\| \\
&\leqslant |\phi(t+\theta) - p_\phi(t+\theta)| + \|\phi - \psi\| \\
&+ (|t| + |h|)\|\partial\phi - \partial\psi\| + |t-s|\|\partial\psi\| \\
&\leqslant \epsilon + \epsilon + (|t| + |h|)\epsilon + \epsilon\|\partial\psi\| \\
&\leqslant 2\epsilon + (|t| + |h|)\epsilon + \epsilon(\|\partial\psi - \partial\phi\| + \|\partial\phi\|) \\
&\leqslant 2\epsilon + (|t| + |h|)\epsilon + \epsilon(1 + \|\partial\phi\|) \\
&= (3 + |t| + |h| + \|\partial\phi\|)\epsilon.
\end{aligned}
$$

Caso 3: $t+\theta \in (0,\infty)$ e $s+\theta \in [-h,0]$.
Nesse caso, $|\phi^d(t+\theta) - \psi^d(s+\theta)| = |p_\phi(t+\theta) - \psi(s+\theta)|$. Como $s+\theta \leq 0 < t+\theta$ e $|(s+\theta)-(t+\theta)| = |s-t| < \delta$, então $|(s+\theta)-0| < \delta$ e $|(t+\theta)-0| < \delta$. Logo

$$
\begin{aligned}
|p_\phi(t+\theta) - \psi(s+\theta)| &\leqslant |p_\phi(t+\theta) - \phi(s+\theta)| + |\phi(s+\theta) - \psi(s+\theta)| \\
&\leqslant |p_\phi(t+\theta) - \phi(s+\theta)| + \|\phi - \psi\| \\
&\leqslant |p_\phi(t+\theta) - \phi(0)| + |\phi(0) - \phi(s+\theta)| + \|\phi - \psi\| \\
&\leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} + \epsilon = 2\epsilon.
\end{aligned}
$$

Caso 4: $t+\theta,\ s+\theta \in (0,\infty)$.
Nesse caso, $|\phi^d(t+\theta) - \psi^d(s+\theta)| = |p_\phi(t+\theta) - p_\psi(s+\theta)|$. Logo,

$$
\begin{aligned}
|p_\phi(t+\theta) - p_\psi(s+\theta)| &\leqslant |\phi(0) - \psi(0)| + |(t+\theta)\phi'(0) - (s+\theta)\psi'(0)| \\
&\leqslant |\phi(0) - \psi(0)| + |(t+\theta)\phi'(0) - (t+\theta)\psi'(0)| \\
&\quad + |(t+\theta)\psi'(0) - (s+\theta)\psi'(0)| \\
&\leqslant \|\phi - \psi\| + (|t| + |h|)\|\partial\phi - \partial\psi\| + |t-s|\|\partial\psi\| \\
&\leqslant \|\phi - \psi\| + (|t| + |h|)\|\partial\phi - \partial\psi\| + \epsilon(\|\partial\psi - \partial\phi\| + \|\partial\phi\|) \\
&\leqslant \epsilon + (|t| + |h|)\epsilon + (1 + \|\partial\phi\|)\epsilon \\
&= (2 + |t| + |h| + \|\partial\phi\|)\epsilon.
\end{aligned}
$$

Em todo caso, temos

$$
\begin{gathered}
|\phi^d(t+\theta) - \psi^d(s+\theta)| \\
\leqslant \max\{(\|\partial\phi\| + 1)\epsilon, (3 + |t| + |h| + \|\partial\phi\|)\epsilon, 2\epsilon, (2 + |t| + |h| + \|\partial\phi\|)\epsilon\}
\end{gathered}
$$

$$= (3 + |t| + |h| + \|\partial\phi\|)\epsilon, \; \theta \in [-h, 0].$$

Portanto,

$$\|(\phi^d)_t - (\psi^d)_s\| = \max_{\theta\in[-h,0]} |\phi^d(t+\theta) - \psi^d(s+\theta)| \leqslant K\epsilon, \tag{1.7}$$

em que $K = (3 + |t| + |h| + \|\partial\phi\|)$.

Por outro lado, de forma análoga à Proposição 1.2.4, a aplicação $[0,\infty) \ni \tau \mapsto ((\partial\phi)^c)_\tau \in C$ é contínua. Portanto, existe $\delta^* > 0$ tal que

$$s \in [0,\infty), |t-s| < \delta^* \Rightarrow \|((\partial\phi)^c)_t - ((\partial\phi)^c)_s\| < \epsilon. \tag{1.8}$$

Assim, se $(s,\psi) \in [0,\infty) \times C^1$ for tal que $\|(t,\phi) - (s,\psi)\|_{\mathbb{R}\times C^1} < \min\{\delta, \epsilon, 1, \delta^*\}$, vale que

$$\begin{aligned}
\|\partial(\phi^d)_t - \partial(\psi^d)_s\| &= \|(\partial\phi^d)_t - (\partial\psi^d)_s\| = \|((\phi^d)')_t - ((\psi^d)')_s\| \\
&\overset{(1.6)}{=} \|((\partial\phi)^c)_t - ((\partial\psi^c)_s)\| \\
&\leqslant \|((\partial\phi)^c)_t - ((\partial\phi)^c)_s\| + \|((\partial\phi)^c)_s - ((\partial\psi^c)_s)\| \\
&= \|((\partial\phi)^c)_t - ((\partial\phi)^c)_s\| + \|((\partial\phi)^c - (\partial\psi)^c)_s)\| \\
&= \|((\partial\phi)^c)_t - ((\partial\phi)^c)_s\| + \|((\partial\phi - \partial\psi)^c)_s\| \\
&\overset{(1.5)}{\leqslant} \|((\partial\phi)^c)_t - ((\partial\phi)^c)_s\| + \|\partial\phi - \partial\psi\| \\
&\overset{(1.8)}{<} \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Logo, por (1.7) e (1.9), temos:

$$\|(\phi^d)_t - (\psi^d)_s\|_1 = \|(\phi^d)_t - (\psi^d)_s\| + \|\partial(\phi^d)_t - \partial(\psi^d)_s\| < K\epsilon + 2\epsilon = (K+2)\epsilon.$$

Portanto, a aplicação $[0,\infty) \times C^1 \ni (t,\phi) \mapsto (\phi^d)_t \in C^1$ é contínua.

Finalmente, seja $t \geqslant 0$. Para $\theta \in [-h, 0]$, temos

$$(\phi^d)_t(\theta) = \phi^d(t+\theta) = \begin{cases} \phi(t+\theta), & \text{se } t+\theta \leqslant 0, \\ \phi(0) + (t+\theta)\phi'(0), & \text{se } t+\theta > 0. \end{cases}$$

Considere o caso $t + \theta > 0$:

$$|(\phi^d)_t(\theta)| = |\phi(0) + (t+\theta)\phi'(0)| \leqslant \|\phi\| + |t+\theta|\|\partial\phi\|.$$

Como $t+\theta>0$ e $\theta\leqslant 0$, então $-t\leqslant 0\leqslant t+\theta\leqslant t$, ou seja, $|t+\theta|\leqslant t$. Daí

$$|(\phi^d)_t(\theta)|\leqslant\|\phi\|+t\|\partial\phi\|.$$

Claramente, a desigualdade acima também vale quando $t+\theta\leqslant 0$. Logo,

$$\|(\phi^d)_t\|=\max_{-h\leqslant\theta\leqslant 0}|(\phi^d)_t(\theta)|\leqslant\|\phi\|+t\|\partial\phi\|.$$

Por outro lado, $\partial(\phi^d)_t=((\phi^d)')_t=((\partial\phi)^c)_t$ e, pelo item i), obtemos

$$\|\partial(\phi^d)_t\|=\|((\partial\phi)^c)_t\|\leqslant\|\partial\phi\|.$$

Portanto,

$$\|(\phi^d)_t\|_1=\|(\phi^d)_t\|+\|\partial(\phi^d)_t\|\leqslant\|\phi\|+t\|\partial\phi\|+\|\partial\phi\|\leqslant(1+t)\|\phi\|_1,$$

provando o item ii).
iii) Demonstração análoga ao item ii). $\square$

Proposição 1.2.8 ([39], Proposição 3.2)**.** *Seja $\phi\in C^1$, $\psi\in C^2$. Então, para $0<t<h$, temos:*

$$\|\partial(\phi^d)_t\|\leqslant\max_{t-h\leqslant\theta\leqslant 0}|\phi'(\theta)|,\ \|\partial\partial(\psi^{dd})_t\|\leqslant\max_{t-h\leqslant\theta\leqslant 0}|\psi''(\theta)|\ \text{e}$$
$$\|\partial(\psi^{dd})_t\|\leqslant\max_{t-h\leqslant\theta\leqslant 0}\big(|\psi'(\theta)|+t|\psi''(0)|\big).$$

Demonstração. Pelos itens ii) e iii) da Proposição 1.2.7, temos que $\partial(\phi^d)_t=((\partial\phi)^c)_t$ e $\partial\partial(\psi^{dd})_t=((\partial\partial\psi)^c)_t$ e portanto valem as duas primeiras desigualdades. Novamente pelo item iii) da Proposição 1.2.7, temos que $\partial(\psi^{dd})_t=((\partial\psi)^d)_t$. Para $-h\leqslant u\leqslant 0$, temos

$$\partial(\psi^{dd})_t(u)=((\partial\psi)^d)_t(u)=\begin{cases}\partial\psi(u+t), & u+t\leqslant 0,\\ \partial\psi(0)+(u+t)(\partial\psi)'(0), & u+t>0.\end{cases}$$

Caso 1: $u+t>0$.

Como $t>0$, temos que $|u+t|<t$. Logo,

$$|\partial(\psi^{dd})_t(u)|\leqslant|\partial\psi(0)|+|u+t||(\partial\psi)'(0)|\leqslant\max_{t-h\leqslant\theta\leqslant 0}\big(|\psi'(\theta)|+t|\psi''(0)|\big).$$

Caso 2: $u+t\leqslant 0$.

Não é difícil ver, neste caso, que a desigualdade acima também é satisfeita, obtendo o resultado desejado. $\square$

Proposição 1.2.9 ([37], Proposição 2.5). *Suponha que $g\colon W \subset C \times C^1 \to \mathbb{R}^n$, $W \subset C \times C^1$ aberto, satisfaz (g0). Então todo segmento x_t de qualquer solução $x\colon [t_0 - h, t_e) \to \mathbb{R}^n$ da equação* (1.1) *está contido em X_1, onde $X_1 = \{\psi \in U_1 : \psi'(0) = g(\partial\psi, \psi)\}$.*

Demonstração. Como x é solução da equação (1.1), para $t \in (t_0, t_e)$, temos que $x_t \in X_1$, pois

$$(x_t)'(0) = (x')_t(0) = x'(t) = g(\partial x_t, x_t).$$

Além disso, $x_{t_0} \in U_1$ pela definição de solução. Pela continuidade de g e das aplicações dadas na Proposição 1.2.4, temos

$$(x_{t_0})'(0) = x'(t_0) = \lim_{t \to t_0+} x'(t) = \lim_{t \to t_0+} g(\partial x_t, x_t) = g(\partial x_{t_0}, x_{t_0}),$$

provando o resultado. $\square$

O resultado a seguir traz uma propriedade muito importante da aplicação $D_e g_1$.

Proposição 1.2.10 ([37], Proposição 2.6). *Suponha que $g\colon W \subset C \times C^1 \to \mathbb{R}^n$, $W \subset C \times C^1$ aberto, satisfaz (g3). Então a aplicação $D_e g_1\colon W_1 \to \mathscr{L}(C \times C, \mathbb{R}^n)$ é localmente limitada, onde $g_1\colon W_1 \to \mathbb{R}^n$ e $W_1 = W \cap C^1 \times C^1$.*

Demonstração. Seja $(\phi_0, \psi_0) \in W_1$. Pela continuidade da aplicação $W_1 \times C \times C \ni (\phi, \psi, \chi, \rho) \mapsto D_e g_1(\phi, \psi)(\chi, \rho) \in \mathbb{R}^n$ em $(\phi_0, \psi_0, 0, 0)$, existe uma vizinhança $N \subset W_1$ de (ϕ_0, ψ_0) em $C^1 \times C^1$ e $r > 0$ tal que $|D_e g_1(\phi, \psi)(\chi, \rho)| \leqslant 1$ para $(\phi, \psi) \in N$ e $\|(\chi, \rho)\|_{C \times C} \leqslant r$. Consequentemente, $|D_e g_1(\phi, \psi)(\chi, \rho)| \leqslant \frac{1}{r}$ para $(\phi, \psi) \in N$ e $\|(\chi, \rho)\|_{C \times C} \leqslant 1$. Portanto, para todo $(\phi, \psi) \in N$, temos:

$$\|D_e g_1(\phi, \psi)\|_{\mathscr{L}(C \times C, \mathbb{R}^n)} = \sup_{\|(\chi,\rho)\|_{C \times C} \leqslant 1} |D_e g_1(\phi, \psi)(\chi, \rho)| \leqslant \frac{1}{r},$$

obtendo o resultado desejado. $\square$

Proposição 1.2.11 ([37], Proposição 2.7-(i)). *Suponha que $g\colon W \subset C \times C^1 \to \mathbb{R}^n$, $W \subset C \times C^1$ aberto, satisfaz (g1) e que $K \subset W$ é compacto. Então existem $\Delta \in (0, h)$, uma vizinhança $N \subset W$ de K em $C \times C^1$ e $r > 0$ tais que, para todos $(\phi, \psi), (\phi_1, \psi) \in N$ com*

$$\|(\phi, \psi) - (\phi_1, \psi)\|_{C \times C^1} = \|\phi - \phi_1\| < r \ \ e \ \ \phi(t) = \phi_1(t), t \in [-h, \Delta],$$

temos

$$g(\phi,\psi) = g(\phi_1,\psi).$$

Demonstração. Para cada $(\varphi,\eta) \in K$, tome $\epsilon = \epsilon(\varphi,\eta) > 0$ e $\Delta(\varphi,\eta) \in (0,h)$ tal que, para

$$N(\varphi,\eta) = \left\{(\overline{\varphi},\overline{\eta}) \in C \times C^1 \ : \ \|(\overline{\varphi},\overline{\eta}) - (\varphi,\eta)\|_{C\times C^1} < \epsilon(\varphi,\eta)\right\},$$

a conclusão de (g1) vale. Considere

$$N'(\varphi,\eta) = \left\{(\overline{\varphi},\overline{\eta}) \in C \times C^1 \ : \ \|(\overline{\varphi},\overline{\eta}) - (\varphi,\eta)\|_{C\times C^1} < \frac{\epsilon(\varphi,\eta)}{2}\right\}.$$

Logo,

$$K \subset \bigcup_{(\varphi,\eta)\in K} N'(\varphi,\eta).$$

Como K é compacto e $\{N'(\varphi,\eta)_{(\varphi,\eta)\in K}\}$ é uma cobertura aberta de K, existem finitos $(\varphi_1,\eta_1),...,(\varphi_m,\eta_m) \in K$ tais que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} N'(\varphi_i,\eta_i).$$

Seja

$$\Delta = \min_{i=1,...,m} \Delta(\varphi_i,\eta_i), \ N = \bigcup_{i=1}^{m} N'(\varphi_i,\eta_i) \ \text{ e } \ r = \min_{i=1,...,m} \frac{\epsilon(\varphi_i,\eta_i)}{2}.$$

Assim, se $(\phi,\psi),(\phi_1,\psi) \in N$ forem tais que $\|(\phi,\psi) - (\phi_1,\psi)\|_{C\times C^1} < r$ e $\phi(t) = \phi_1(t)$ para $t \in [-h,-\Delta]$, existe $k \in \{1,...,m\}$ tal que $(\phi,\psi) \in N'(\varphi_k,\eta_k) \subset N(\varphi_k,\eta_k)$. Como

$$\begin{aligned}
\|(\phi_1,\psi) - (\varphi_k,\eta_k)\|_{C\times C^1} &\leqslant \|(\phi,\psi) - (\phi_1,\psi)\|_{C\times C^1} + \|(\phi,\psi) - (\varphi_k,\eta_k)\|_{C\times C^1} \\
&< r + \frac{\epsilon(\varphi_k,\eta_k)}{2} \leqslant \frac{\epsilon(\varphi_k,\eta_k)}{2} + \frac{\epsilon(\varphi_k,\eta_k)}{2} \\
&= \epsilon(\varphi_k,\eta_k),
\end{aligned}$$

então $(\phi_1,\psi) \in N(\varphi_k,\eta_k)$. Além disso, como $-\Delta \geqslant -\Delta(\varphi_k,\eta_k)$, então $\phi(t) = \phi_1(t)$ para todo $t \in [-h,-\Delta(\varphi_k,\eta_k)]$. Portanto, $g(\phi,\psi) = g(\phi_1,\psi)$. □

Corolário 1.2.12 ([37], Corolário 2.8)**.** *Suponha que* $g\colon W \subset C \times C^1 \to \mathbb{R}^n$, $W \subset C \times C^1$ *aberto, satisfaz (g1) e (g3) e seja* $K \subset W_1$ *um subconjunto compacto de* $C^1 \times C^1$*. Então existem* $\Delta \in (0,h)$*, uma vizinhança* $N_1 \subset W_1$ *de* K *em* $C^1 \times C^1$ *e* $r > 0$ *tais que, para todos*

$(\phi,\psi),(\phi_1,\psi)\in N_1$ *com*

$$\|(\phi,\psi)-(\phi_1,\psi)\|_{C^1\times C^1}=\|\phi-\phi_1\|_1<r \;\; e \;\; \phi(t)=\phi_1(t), t\in[-h,-\Delta],$$

e para todos $(\chi,\rho),(\chi_1,\rho)\in C\times C$ *com*

$$\chi(t)=\chi_1(t), t\in[-h,-\Delta],$$

temos

$$D_e g_1(\phi,\psi)(\chi,\rho)=D_e g_1(\phi_1,\psi)(\chi_1,\rho).$$

Demonstração. Como a aplicação inclusão $i\colon C^1\times C^1\to C\times C^1$, dada por $i(\phi,\psi)=(\phi,\psi)$ é contínua, então K é também um subconjunto compacto de $C\times C^1$. Sejam $\Delta\in(0,h)$, $N\subset W$ vizinhança de K e $r>0$ como garantidos pela Proposição 1.2.11. Então $N_1=N\cap(C^1\times C^1)=i^{-1}(N)\subset W_1$ é uma vizinhança de K em $C^1\times C^1$. Dados $(\phi,\psi),(\phi_1,\psi)\in N_1$ tais que

$$\|(\phi,\psi)-(\phi_1,\psi)\|_{C^1\times C^1}=\|\phi-\phi_1\|_1<r \;\text{ e }\; \phi(t)=\phi_1(t),\; t\in[-h,-\Delta],$$

considere $\chi,\chi_1\in C^1$ com $\chi(t)=\chi_1(t)$, para $t\in[-h,-\Delta]$. Para $s\in\mathbb{R}$ suficientemente pequeno, temos que $(\phi+s\chi,\psi),(\phi_1+s\chi_1,\psi)\in N_1\subset N$ e

$$\|(\phi+s\chi,\psi)-(\phi_1+s\chi_1,\psi)\|_{C^1\times C^1}\leqslant\|\phi-\phi_1\|_1+|s|\|\chi-\chi_1\|_1<r.$$

Logo, pela Proposição 1.2.11, temos

$$g_1(\phi+s\chi,\psi)-g_1(\phi,\psi)=g_1(\phi_1+s\chi_1,\psi)-g_1(\phi_1,\psi).$$

Isto implica que

$$\begin{aligned} D_1g_1(\phi,\psi)\chi&=\lim_{s\to0}\frac{g_1(\phi+s\chi,\psi)-g_1(\phi,\psi)}{s}=\lim_{s\to0}\frac{g_1(\phi_1+s\chi_1,\psi)-g_1(\phi_1,\psi)}{s}\\ &=D_1g_1(\phi_1,\psi)\chi_1.\end{aligned}$$

Analogamente, para $\rho\in C^1$, obtemos

$$D_2g_1(\phi,\psi)\rho=D_2g_1(\phi_1,\psi)\rho.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} Dg_1(\phi,\psi)(\chi,\rho) &= D_1g_1(\phi,\psi)\chi + D_2g_1(\phi,\psi)\rho = D_1g_1(\phi_1,\psi)\chi_1 + D_2g_1(\phi_1,\psi)\rho \\ &= Dg_1(\phi_1,\psi)(\chi_1,\rho). \end{aligned}$$

Agora, sejam $\chi, \chi_1 \in C$ tais que $\chi(t) = \chi_1(t)$ para $t \in [-h, -\Delta]$. Tome sequências (χ^m) (χ_1^m) em C^1 que convergem em C para χ e χ_1, respectivamente, satisfazendo

$$\chi^m(t) = \chi_1^m(t), \forall m \in \mathbb{N} \text{ e } t \in [-h, -\Delta].$$

Seja $\rho \in C$. Tome uma sequência (ρ^m) em C^1 que converge em C para ρ. Usando a continuidade da aplicação $(\phi, \psi, \chi, \rho) \mapsto D_eg_1(\phi,\psi)(\chi,\rho)$ dada em (g3), obtemos

$$\begin{aligned} D_eg_1(\phi,\psi)(\chi,\rho) &= \lim_{m\to\infty} D_eg_1(\phi,\psi)(\chi^m,\rho^m) = \lim_{m\to\infty} Dg_1(\phi,\psi)(\chi^m,\rho^m) \\ &= \lim_{m\to\infty} Dg_1(\phi_1,\psi)(\chi_1^m,\rho^m) = \lim_{m\to\infty} D_eg_1(\phi_1,\psi)(\chi_1^m,\rho^m) \\ &= D_eg_1(\phi_1,\psi)(\chi_1,\rho), \end{aligned}$$

o que nos leva ao resultado desejado. □

Proposição 1.2.13 ([37], Proposição 2.9). *Suponha que $g\colon W \subset C \times C^1 \to \mathbb{R}^n$, $W \subset C \times C^1$ aberto, satisfaz (g3). Seja $t_0 < t_e \leqslant \infty$. Suponha que $q\colon [t_0 - h, t_e) \to \mathbb{R}^n$ e $c\colon [t_0 - h, t_e) \to \mathbb{R}^n$ são continuamente diferenciáveis e que $(q_t, c_t) \in W_1$, para todo $t \in [t_0, t_e)$. Então a função $g_{q,c}\colon [t_0, t_e) \to \mathbb{R}^n$ dada por*

$$g_{q,c}(t) = g_1(q_t, c_t)$$

é continuamente diferenciável, com

$$g'_{q,c}(t) = D_eg_1(q_t,c_t)(\partial q_t, \partial c_t),\ \forall t \in [t_0, t_e).$$

Demonstração. Seja $t \in [t_0, t_e)$. Tome $N \subset W_1$ uma vizinhança convexa de (q_t, c_t) em $C^1 \times C^1$. Pela continuidade da aplicação $[t_0, t_e) \ni \tau \mapsto (q_\tau, c_\tau) \in C^1 \times C^1$, garantida pela Proposição 1.2.4, existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ de modo que $t_0 \leqslant t + s < t_e$, temos

$$(q_{t+s}, c_{t+s}) \in N.$$

Para $s \neq 0$ nas condições acima, por uma versão adaptada do Teorema Fundamental do Cálculo (Veja Apêndice A), temos

$$\begin{aligned} g_{q,c}(t+s) - g_{q,c}(t) &= g_1(q_{t+s}, c_{t+s}) - g_1(q_t, c_t) \\ = \int_0^1 Dg_1((q_t,c_t) + \theta((q_{t+s}, c_{t+s}) &- (q_t,c_t)))((q_{t+s},c_{t+s}) - (q_t,c_t))d\theta \\ = \int_0^1 Dg_1((q_t,c_t) + \theta(q_{t+s} - q_t, &c_{t+s} - c_t))(q_{t+s} - q_t, c_{t+s} - c_t)d\theta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} &g_{q,c}(t+s) - g_{q,c}(t) - sD_e g_1(q_t,c_t)(\partial q_t, \partial c_t) \\ &= \int_0^1 Dg_1((q_t,c_t) + \theta(q_{t+s} - q_t, c_{t+s} - c_t))(q_{t+s} - q_t, c_{t+s} - c_t)d\theta \\ &\qquad - sD_e g_1(q_t,c_t)(\partial q_t, \partial c_t) \\ &= s \cdot \int_0^1 \Big[D_e g_1((q_t,c_t) + \theta(q_{t+s} - q_t, c_{t+s} - c_t)) \left(\frac{1}{s}(q_{t+s} - q_t), \frac{1}{s}(c_{t+s} - c_t)\right) \\ &\qquad - D_e g_1(q_t,c_t)(\partial q_t, \partial c_t)\Big] d\theta. \end{aligned}$$

Veja que, para $\theta \in [0,1]$, temos

$$\begin{aligned} \|(q_t,c_t) + \theta(q_{t+s} - q_t, c_{t+s} - c_t) - (q_t,c_t)\|_{C^1 \times C^1} &= \|\theta(q_{t+s} - q_t, c_{t+s} - c_t)\|_{C^1 \times C^1} \\ &\leqslant \|(q_{t+s} - q_t, c_{t+s} - c_t)\|_{C^1 \times C^1}. \end{aligned}$$

Por outro lado, como a aplicação $[t_0, t_e) \ni \tau \mapsto (q_\tau, c_\tau) \in C^1 \times C^1$ é contínua, $(q_t, c_t) + \theta(q_{t+s} - q_t, c_{t+s} - c_t)$ converge uniformemente em relação a $\theta \in [0,1]$ para (q_t, c_t) em $C^1 \times C^1$, quando $0 \neq s \to 0$. Além disso, pela Proposição 1.2.4, temos que

$$\frac{1}{s}(q_{t+s} - q_t) \to \partial q_t, \frac{1}{s}(c_{t+s} - c_t) \to \partial c_t \text{ em } C \text{ quando } 0 \neq s \to 0.$$

Pela continuidade da aplicação $W_1 \times C \times C \ni (\phi, \psi, \chi, \rho) \mapsto D_e g_1(\phi,\psi)(\chi,\rho) \in \mathbb{R}^n$ no ponto $(q_t, c_t, \partial q_t, \partial c_t)$, garantido por (g3), concluímos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 [D_e g_1((q_t,c_t) + \theta(q_{t+s} - q_t, c_{t+s} - c_t)) \left(\frac{1}{s}(q_{t+s} - q_t), \frac{1}{s}(c_{t+s} - c_t)\right) \\ - D_e g_1(q_t,c_t)(\partial q_t, \partial c_t)] d\theta \to 0 \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

quando $0 \neq s \to 0$. Portanto $g_{q,c}$ é diferenciável em t, com derivada

$$g'_{q,c}(t) = D_e g_1(q_t,c_t)(\partial q_t, \partial c_t).$$

Além disso, a continuidade de $g'_{q,c}$ é garantida pela continuidade das aplicações

$$[t_0, t_e) \ni \tau \mapsto (q_\tau, c_\tau) \in C^1 \times C^1 \text{ e } [t_0, t_e) \ni \tau \mapsto (\partial q_\tau, \partial c_\tau) \in C \times C$$

e pela continuidade da aplicação citada acima dada em (g3). □

Corolário 1.2.14 ([37], Corolário 2.11). *Suponha que* $g\colon W \subset C \times C^1 \to \mathbb{R}^n$, $W \subset C \times C^1$ *aberto, satisfaz (g0) e (g3). Então todos os segmentos* $\psi = x_t$ *de qualquer solução duas vezes continuamente diferenciável* $x\colon [t_0 - h, t_e) \to \mathbb{R}^n$ *da equação* (1.1) *pertencem a* X_{2*}.

Demonstração. Como x é solução da equação (1.1), pela Proposição 1.2.9, $x_t \in X_1$. Como $x_t \in C^2$, logo $x_t \in X_2 = X_1 \cap C^2$ para todo $t \in [t_0, t_e)$. Resta mostrar que $\partial x_t \in T_{e,x_t} X_2$, para $t_0 \leqslant t < t_e$. Considere a função $g_*\colon [t_0, t_e) \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$g_*(t) = g((x')_t, x_t), t \in [t_0, t_e).$$

Para $t_0 \leqslant t < t_e$, como x e x' são continuamente diferenciáveis, temos que $g_*(t) = g_1((x')_t, x_t)$. Logo pela Proposição 1.2.13, g_* é continuamente diferenciável, com

$$g'_*(t) = D_e g_1((x')_t, x_t)(\partial (x')_t, \partial x_t).$$

Como x é solução da equação (1.1), temos $x'(t) = g(\partial x_t, x_t) = g_*(t)$. Logo,

$$(\partial x_t)'(0) = x''(t) = g'_*(t) = D_e g_1(\partial x_t, x_t)(\partial(\partial x_t), \partial x_t),$$

portanto, $x_t \in X_{2*}$. □

Capítulo

2

Semifluxo contínuo

Neste capítulo, vamos apresentar a definição de semifluxo gerado pela solução maximal de:

$$x'(t) = g(\partial x_t, x_t), \tag{2.1}$$

onde $g\colon W \subset C \times C^1$, $W \subset C \times C^1$ aberto, bem como apresentaremos suas propriedades. Mais precisamente, iremos mostrar que os semifluxos gerados pela solução maximal de (2.1) em certos conjuntos são contínuos. Na primeira seção, investigaremos o semifluxo em X_{1+}, onde $X_{1+} = \{\psi \in X_1 : Lip(\partial\psi) < \infty\}$.

Na segunda seção, vamos mostrar que $X_2 = X_1 \cap C^2$ é uma subvariedade de codimensão n em C^2, além de tratar do semifluxo em $X_{2*} \subset X_2$, onde $X_{2*} = \{\psi \in X_2 : \partial\psi \in T_{e,\psi}X_2\}$. Todos os resultados podem ser encontrados em [37].

2.1 Semifluxo em um subconjunto de C^1

Nesta seção, vamos assumir que $g\colon W \subset C \times C^1 \to \mathbb{R}^n$, $W \subset C \times C^1$ aberto, satisfaz as condições (g0), (g1) e (g2). Considere o seguinte PVI

$$\begin{cases} x'(t) = g(\partial x_t, x_t), \\ x_0 = \psi \in X_{1+}. \end{cases} \tag{2.2}$$

A próxima proposição fornece condições que garantem a existência de solução local para o PVI (2.2), e pode ser encontrada em [37].

Proposição 2.1.1 (Existência Local - [37], Proposição 4.1). *Para todo $\psi \in X_{1+}$ existe uma solução $x\colon [-h, t_e) \to \mathbb{R}^n$, $0 < t_e \leqslant \infty$, para o PVI* (2.2).

Demonstração. Para $T > 0$, seja C^1_T o espaço de Banach das funções continuamente diferenciáveis $u\colon [-h, T] \to \mathbb{R}^n$ com $u_0 = 0$, com a seguinte norma:

$$\|u\|_{1,T} = \max_{-h \leqslant t \leqslant T} |u(t)| + \max_{-h \leqslant t \leqslant T} |u'(t)|.$$

Considere $\psi \in X_{1+}$. Seja $\lambda = Lip(\partial\psi) < \infty$. Sejam $N \subset W$ uma vizinhança de $(\partial\psi, \psi)$ em $C \times C^1$, $\Delta \in (0, h)$ e $L \geqslant 0$ tais que valem as conclusões em (g1) e (g2). Considere $r > 0$ e $T \in (0, \Delta)$ suficientemente pequeno tal que, para todo $u \in C^1_T$ com $\|u\|_{1,T} \leqslant r$ e para todo $t \in [0, T]$, tem se

$$(\partial\psi^d_t, \psi^d_t + u_t) \in N \ \text{ e } \ (\partial(\psi^d_t + u_t), \psi^d_t + u_t) \in N \tag{2.3}$$

e

$$2LT(\lambda + 1) < 1 \ \text{ e } \ 2LT(\lambda + 1)r + (T + 1) \max_{0 \leqslant s \leqslant T} |g(\partial\psi^d_s, \psi^d_s) - g(\partial\psi, \psi)| \leqslant r, \tag{2.4}$$

onde $\psi^d_t = (\psi^d)_t$.

Para $u \in C^1_T$, pela continuidade de g e das aplicações $[0, T] \ni t \mapsto \partial\psi^d_t$, $[0, T] \ni t \mapsto \psi^d_t + u_t$, temos que a aplicação

$$[0, T] \ni t \mapsto g(\partial\psi^d_t, \psi^d_t + u_t) \in \mathbb{R}^n$$

é contínua. Seja F_T o conjunto de todas funções de $[-h, T]$ em $\mathbb{R}^n$. Defina a aplicação $A = A_{\psi,T}\colon C^1_T \to F_T$ por

$$A(u)(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } -h \leqslant t \leqslant 0, \\ \displaystyle\int_0^t \big(g(\partial\psi^d_s, \psi^d_s + u_s) - g(\partial\psi, \psi)\big) ds, & \text{se } 0 < t \leqslant T. \end{cases}$$

Assim, para $u \in C^1_T$, temos que $A(u)$ é diferenciável em $[-h, 0) \cup (0, T]$. Em $t = 0$, a derivada à esquerda existe e é igual a $0 \in \mathbb{R}^n$, enquanto que a derivada à direita existe,2 pelo Teorema Fundamental do Cálculo e é igual a

$$g(\partial\psi^d_0, \psi^d_0 + u_0) - g(\partial\psi, \psi) = 0 \in \mathbb{R}^n,$$

pois $\partial\psi_0^d = \partial\psi$, $\psi_0^d = \psi$ e $u_0 = 0$. Logo,

$$A(u)'(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } -h \leqslant t \leqslant 0, \\ g(\partial\psi_t^d, \psi_t^d + u_t) - g(\partial\psi, \psi), & \text{se } 0 < t \leqslant T, \end{cases}$$

é contínua, ou seja, $A(u) \in C_T^1$.
Sejam $u, v \in C_T^1$ tais que $\|u\|_{1,T} \leqslant r$ e $\|v\|_{1,T} \leqslant r$. Sejam $w = A(u)$, $z = A(v)$ e $t \in [0, T]$. Então

$$\begin{aligned} |w(t) - z(t)| &= \left| \int_0^t \big(g(\partial\psi_s^d, \psi_s^d + u_s) - g(\partial\psi_s^d, \psi_s^d + v_s)\big)ds \right| \\ &\leqslant \int_0^t \big|g(\partial\psi_s^d, \psi_s^d + u_s) - g(\partial\psi_s^d, \psi_s^d + v_s)\big|ds \\ &\leqslant t \max_{0\leqslant s\leqslant t} \big|g(\partial\psi_s^d, \psi_s^d + u_s) - g(\partial\psi_s^d, \psi_s^d + v_s)\big| \\ &\overset{(g2)}{\leqslant} tL \max_{0\leqslant s\leqslant t} (Lip(\partial\psi_s^d) + 1)\|u_s - v_s\| \\ &\leqslant tL(\lambda + 1) \max_{0\leqslant s\leqslant t} \|u_s - v_s\| \\ &\leqslant tL(\lambda + 1) \max_{-h\leqslant s\leqslant t} |u(s) - v(s)| \\ &\leqslant tL(\lambda + 1)\|u - v\|_{1,T}. \end{aligned}$$

Para obter as desigualdades acima, usamos o fato que $Lip(\partial\psi_s^d) \leqslant Lip(\partial\psi^d) \leqslant Lip(\partial\psi)$. Analogamente, temos

$$\begin{aligned} |w'(t) - z'(t)| &= |g(\partial\psi_t^d, \psi_t^d + u_t) - g(\partial\psi_t^d, \psi_t^d + v_t)| \\ &\leqslant L(\lambda + 1)\|u_t - v_t\| \\ &\leqslant L(\lambda + 1) \max_{-h\leqslant s\leqslant t} |u(s) - v(s)|. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Por outro lado, note que:

$$\begin{aligned} |u(s) - v(s)| &= \left| \int_0^s (u'(\tau) - v'(\tau))d\tau \right| \\ &\leqslant \int_0^s |u'(\tau) - v'(\tau)|d\tau \\ &\leqslant s \max_{0\leqslant\theta\leqslant s} |u'(\theta) - v'(\theta)| \\ &\leqslant t \max_{-h\leqslant\theta\leqslant T} |u'(\theta) - v'(\theta)| \end{aligned}$$

$$\leqslant t\|u-v\|_{1,T}, \tag{2.6}$$

para $0 \leqslant s \leqslant t$. Combinando (2.5) e (2.6), temos:

$$|w'(t)-z'(t)| \leqslant L(\lambda+1)t\|u-v\|_{1,T}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|A(u)-A(v)\|_{1,T} &= \max_{-h\leqslant t\leqslant T}|w(t)-z(t)| + \max_{-h\leqslant t\leqslant T}|w'(t)-z'(t)| \\
&\leqslant TL(\lambda+1)\|u-v\|_{1,T} + L(\lambda+1)T\|u-v\|_{1,T} \\
&= 2TL(\lambda+1)\|u-v\|_{1,T}.
\end{aligned}$$

De (2.4), temos que $2TL(\lambda+1) < 1$, logo, a restrição de A na bola fechada $\overline{B}_{C_T^1}(r) = \{u \in C_T^1 \;:\; \|u\|_{1,T} \leqslant r\}$ é uma contração.

Para $u \in \overline{B}_{C_T^1}(r)$, temos:

$$\begin{aligned}
\|A(u)\|_{1,T} &\leqslant \|A(u)-A(0)\|_{1,T} + \|A(0)\|_{1,T} \\
&\leqslant 2TL(\lambda+1)\|u\|_{1,T} + \max_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t \big(g(\partial\psi_s^d,\psi_s^d) - g(\partial\psi,\psi)\big)ds\right| \\
&\quad + \max_{0\leqslant t\leqslant T}\big|g(\partial\psi_t^d,\psi_t^d) - g(\partial\psi,\psi)\big| \\
&\leqslant 2TL(\lambda+1)r + \int_0^T \big|g(\partial\psi_s^d,\psi_s^d) - g(\partial\psi,\psi)\big|ds \\
&\quad + \max_{0\leqslant t\leqslant T}\big|g(\partial\psi_t^d,\psi_t^d) - g(\partial\psi,\psi)\big| \\
&\leqslant 2TL(\lambda+1)r + T\max_{0\leqslant t\leqslant T}\big|g(\partial\psi_t^d,\psi_t^d) - g(\partial\psi,\psi)\big| \\
&\quad + \max_{0\leqslant t\leqslant T}\big|g(\partial\psi_t^d,\psi_t^d) - g(\partial\psi,\psi)\big| \\
&= 2TL(\lambda+1)r + (T+1)\max_{0\leqslant t\leqslant T}\big|g(\partial\psi_t^d,\psi_t^d) - g(\partial\psi,\psi)\big| \overset{(2.4)}{\leqslant} r.
\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach (Ver Apêndice A), existe um ponto fixo $u \in C_T^1$ de A com $\|u\|_{1,T} \leqslant r$. A função $x\colon [-h,T] \to \mathbb{R}^n$ dada por $x(t) = \psi^d(t) + u(t)$ é continuamente diferenciável e $x_0 = \psi$. Devido à (2.3), temos

$$(\partial x_t, x_t) = (\partial(\psi_t^d + u_t), \psi_t^d + u_t) \in N \subset W$$

e

$$x'(t) = (\psi^d)'(t) + u'(t) = \psi'(0) + g(\partial\psi_t^d, \psi_t^d + u_t) - g(\partial\psi, \psi) = g(\partial\psi_t^d, \psi_t^d + u_t),$$

para $0 \leqslant t \leqslant T$. Como $u_0 = 0$, para $0 \leqslant t \leqslant T$ e $-h \leqslant s \leqslant -\Delta$, temos $-h \leqslant t+s \leqslant T - \Delta \leqslant 0$. Logo,

$$\partial\psi_t^d(s) = (\psi^d)'(t+s) = (\psi^d)'(t+s) + u'(t+s) = \partial(\psi_t^d + u_t)(s).$$

De (2.3), temos $(\partial\psi_t^d, \psi_t^d + u_t) \in N$, portanto, de $(g1)$ segue que

$$g(\partial\psi_t^d, \psi_t^d + u_t) = g(\partial(\psi_t^d + u_t), \psi_t^d + u_t) = g(\partial x_t, x_t),$$

para $0 \leqslant t \leqslant T$, isto é, x é solução do PVI (2.2). $\square$

O próximo resultado garante que a derivada de qualquer solução da equação (2.1), com $x_{t_0} \in X_{1+}$, é localmente Lipschitz.

Proposição 2.1.2 ([37], Proposição 4.2). *Para qualquer solução $x\colon [t_0 - h, t_e) \to \mathbb{R}^n$ da equação* (2.1) *com $x_{t_0} \in X_{1+}$, sua derivada $x'\colon [t_0 - h, t_e) \to \mathbb{R}^n$ é localmente Lipschitz.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, considere $t_0 = 0$. Temos que

$$0 \in A = \Big\{ t \in [0, t_e) \ : \ x'|_{[-h,t]} \text{ é Lipschitziana} \Big\} \neq \emptyset,$$

pois $x_0 \in X_{1+}$. Suponha que $s = \sup A < t_e$. Sejam N uma vizinhança de $(\partial x_s, x_s)$, $\Delta \in (0, h)$ e $L \geqslant 0$ tais que valem as conclusões de (g1) e (g2). Pela continuidade da aplicação $[0, t_e) \ni t \mapsto (\partial x_t, x_t) \in C \times C^1$, existe $\epsilon \in (0, \frac{\Delta}{2})$ tal que $s + \epsilon < t_e$ e $(\partial x_t, x_t) \in N$ para $t \in [s - \epsilon, s + \epsilon] \cap [0, \infty)$. Pela definição de s, para algum $u \geqslant 0$ em $(s - \epsilon, s]$, a restrição $x'|_{[-h,u]}$ é Lipschitziana. Supondo que $x' = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, seja $p_{i,\delta}$, $\delta > 0$, o polinômio tal que $\max_{u \leqslant \tau \leqslant s+\epsilon} |p_{i,\delta}(\tau) - \xi_i(\tau)| < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ para cada $i = 1, ..., n$, garantido pelo Teorema da Aproximação de Weierstrass (Ver Apêndice A). Definimos $y_\delta\colon [-h, s+\epsilon] \to \mathbb{R}^n$ por $y_\delta(t) = (y_{1,\delta}(t), y_{2,\delta}(t), ..., y_{n,\delta}(t))$ em que

$$y_{i,\delta}(t) = \begin{cases} \xi_i(t), & \text{se } t \in [-h, u], \\ p_{i,\delta}(t), & \text{se } t \in [u, s+\epsilon]. \end{cases}$$

Como $p_{i,\delta}(u) = \xi_i(u)$, y_δ está bem definida. Pela Proposição 1.2.1 temos que y_δ é

Lipschitziana e vale que

$$\max_{u\leqslant\tau\leqslant s+\epsilon}|x'(\tau)-y_\delta(\tau)| = \max_{u\leqslant\tau\leqslant s+\epsilon}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|p_{i,\delta}(\tau)-\xi_i(\tau)|^2} < \sqrt{n\left(\frac{\delta}{\sqrt{n}}\right)^2} = \delta.$$

Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, temos que $y = y_\delta$ é tal que $(y_t, x_t) \in N$ para $u \leqslant t \leqslant s+\epsilon$. Assim, para $u \leqslant t \leqslant s+\epsilon$ e $-h \leqslant w \leqslant \Delta$, temos $-h \leqslant t+w \leqslant s+\epsilon-\Delta \leqslant u$. Logo, $y_t(w) = y(t+w) = x'(t+w) = \partial x_t(w)$. Portanto, para $t, \tau \in [u, s+\epsilon]$, temos

$$\begin{aligned}
|x'(t)-x'(\tau)| &= |g(\partial x_t, x_t) - g(\partial x_\tau, x_\tau)| \overset{(g1)}{=} |g(y_t, x_t) - g(y_\tau, x_\tau)| \\
&\overset{(g2)}{\leqslant} L\left(\|y_t - y_\tau\| + (Lip(y_t)+1)\|x_t - x_\tau\|\right) \\
&\leqslant L\Big(\max_{-h\leqslant\theta\leqslant 0}|y(t+\theta)-y(\tau+\theta)| \\
&\quad + (Lip(y)+1)\max_{-h\leqslant\theta\leqslant 0}|x(t+\theta)-x(\tau+\theta)|\Big) \\
&\leqslant L\left(Lip(y)|t-\tau| + (Lip(y)+1)\max_{-h\leqslant v\leqslant s+\epsilon}|x'(v)||t-\tau|\right) \\
&= L\left(Lip(y) + (Lip(y)+1)\max_{-h\leqslant v\leqslant s+\epsilon}|x'(v)|\right)|t-\tau|.
\end{aligned}$$

Consequentemente, $x'|_{[-h,s+\epsilon]}$ é Lipschitziana, contrariando $s = \sup A$. Logo, $\sup A = t_e$. □

O resultado abaixo garante a unicidade de solução local do PVI (2.2).

Corolário 2.1.3 (Unicidade - [37], Corolário 4.3)**.** *Se $x\colon [-h, t_e) \to \mathbb{R}^n$ e $y\colon [-h, t_e) \to \mathbb{R}^n$, $0 < t_e \leqslant \infty$, são soluções do PVI (2.2), então $x = y$.*

Demonstração. Suponha que $x \neq y$. Como $x_0 = y_0 = \psi$, então

$$A = \{t \in [0, t_e) \ : \ x(u) = y(u) \text{ para} - h \leqslant u \leqslant t\} \neq \emptyset.$$

Logo $s = \sup A < t_e$. Pela continuidade de x e y, temos $x(u) = y(u)$ para $-h \leqslant u \leqslant s$, isto é, $s \in A$. Sejam N uma vizinhança de $(\partial x_s, x_s)$, $\Delta \in (0, h)$ e $L \geqslant 0$ tais que valem as conclusões de (g1) e (g2). Pela continuidade das aplicações $[0, t_e) \ni t \mapsto x_t \in C^1$ e $[0, t_e) \ni t \mapsto y_t \in C^1$, garantida pela Proposição 1.2.4 e pelo fato de que $x_s = y_s$, existe $\sigma \in (s, t_e) \cap (s, s+\Delta)$ tal que, para todo $u \in [s, \sigma]$, temos

$$(\partial x_u, x_u) \in N, \ (\partial y_u, y_u) \in N \ \text{ e } \ (\partial x_u, y_u) \in N.$$

Assim, para $s \leqslant u \leqslant \sigma$ e $-h \leqslant w \leqslant -\Delta$, temos que $-h \leqslant u + w \leqslant s$ e, portanto,

$$\partial x_u(w) = x'(u+w) = y'(u+w) = \partial y_u(w).$$

Seja $s \leqslant t \leqslant \sigma$. Como $x(s) = y(s)$, temos

$$\begin{aligned}
|x(t) - y(t)| &= \left| \int_s^t (x'(u) - y'(u))du \right| \\
&\leqslant \int_s^t |x'(u) - y'(u)|du \\
&= \int_s^t |g(\partial x_u, x_u) - g(\partial y_u, y_u)|du \\
&\overset{(g1)}{=} \int_s^t |g(\partial x_u, x_u) - g(\partial x_u, y_u)|du \\
&\overset{(g2)}{\leqslant} \int_s^t L\left(Lip\left(x'|_{[-h,\sigma]}\right) + 1\right) \|x_u - y_u\| du \\
&\leqslant L(t-s)\left(Lip\left(x'|_{[-h,\sigma]}\right) + 1\right) \max_{s \leqslant u \leqslant t} |x(u) - y(u)|,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

onde esta última desigualdade segue usando o fato que $x(u) = y(u)$, para $-h \leqslant u \leqslant s$. Tome $T \in (s, \sigma)$ tal que

$$L(T-s)\left(Lip\left(x'|_{[-h,\sigma]}\right) + 1\right) < 1. \tag{2.8}$$

Seja $t^* \in [s, T]$ tal que $|x(t^*) - y(t^*)| = \max_{s \leqslant u \leqslant T} |x(u) - y(u)|$. Logo,

$$|x(t^*) - y(t^*)| = \max_{s \leqslant u \leqslant t^*} |x(u) - y(u)|.$$

De (2.7) e (2.8), temos que

$$\begin{cases} |x(t^*) - y(t^*)| \leqslant L(t^* - s)\left(Lip\left(x'|_{[-h,\sigma]}\right) + 1\right) |x(t^*) - y(t^*)|, \\ \qquad\qquad L(t^* - s)\left(Lip\left(x'|_{[-h,\sigma]}\right) + 1\right) < 1. \end{cases}$$

Portanto, $0 = |x(t^*) - y(t^*)| = \max_{s \leqslant u \leqslant T} |x(u) - y(u)|$, ou seja, $x(u) = y(u)$, para todo $u \in [-h, T]$. Assim, $T \leqslant s = \sup A$, contrariando $T \in (s, \sigma)$. Logo, $x = y$. □

Por outro lado, para obter uma solução maximal do PVI (2.2), considere $\psi \in X_{1+}$ e tome

$$t_\psi = \sup\{t_e > 0 \ : \ \text{existe } x \colon [-h, t_e) \to \mathbb{R}^n \text{ solução do PVI (2.2)}\} \leqslant \infty.$$

Logo, existe uma sequência $x_k\colon [-h, t_k) \to \mathbb{R}^n$ de soluções do PVI (2.2) tal que $\lim_{k\to\infty} t_k = t_\psi$. Pela unicidade de soluções, temos que se $t_k < t_j$, então $x_j\big|_{[-h,t_k)} = x_k$. Definimos a *solução maximal* $x^\psi\colon [-h, t_\psi) \to \mathbb{R}^n$ tal que $x^\psi\big|_{[-h,t_k)} = x_k$. Dessa forma, temos

$$(x^\psi)_t = x_t^\psi \in X_{1+}, \forall t \in [0, t_\psi).$$

Seja

$$\Omega_1 = \bigcup_{\psi \in X_{1+}} [0, t_\psi) \times \{\psi\}.$$

Definimos $G_1\colon \Omega_1 \to X_{1+}$ por $G_1(t,\psi) = x_t^\psi$. Dessa maneira, $\{0\} \times X_{1+} \subset \Omega_1$ e, para todo $\psi \in X_{1+}$, $G_1(0,\psi) = x_0^\psi = \psi$.

O seguinte PVI

$$\begin{cases} x'(t) = g(\partial x_t, x_t), \\ x_0 = \psi \in X_{1+}, \end{cases} \tag{2.9}$$

tem solução $x^\psi\colon [-h, t_\psi) \to \mathbb{R}^n$. Seja $0 \leqslant t < t_\psi$ e tome $\gamma = G_1(t,\psi) = x_t^\psi \in X_{1+}$. Considere agora o seguinte PVI

$$\begin{cases} x'(t) = g(\partial x_t, x_t), \\ x_0 = \gamma \in X_{1+}, \end{cases} \tag{2.10}$$

que possui solução $x^\gamma\colon [-h, t_\gamma) \to \mathbb{R}^n$. Definimos $x\colon [-h, t + t_\psi) \to \mathbb{R}^n$ por

$$x(\tau) = \begin{cases} x^\psi(\tau), & \text{se } -h \leqslant \tau \leqslant t, \\ x^\gamma(\tau - t), & \text{se } t \leqslant \tau < t + t_\gamma. \end{cases} \tag{2.11}$$

Se $t - h \leqslant \tau \leqslant t$, então $-h \leqslant \tau - t \leqslant 0$. Logo, $x^\gamma(\tau - t) = \gamma(\tau - t) = x_t^\psi(\tau - t) = x^\psi(\tau)$. Portanto, x está bem definida e é continuamente diferenciável com derivada dada por

$$x'(\tau) = \begin{cases} (x^\psi)'(\tau), & \text{se } -h \leqslant \tau \leqslant t, \\ (x^\gamma)'(\tau - t), & \text{se } t \leqslant \tau < t + t_\gamma. \end{cases}$$

Pela definição, $x_0 = x_0^\psi = \psi$. Além disso, temos que, para $0 \leqslant \tau \leqslant t$, $(\partial x_\tau, x_\tau) =$

$(\partial x^{\psi}_{\tau}, x^{\psi}_{\tau}) \in W$ e para $t \leqslant \tau \leqslant t + t_{\gamma}$, $(\partial x_{\tau}, x_{\tau}) = (\partial x^{\gamma}_{\tau-t}, x^{\gamma}_{\tau-t}) \in W$. Finalmente

$$x'(\tau) = \begin{cases} (x^{\psi})'(\tau) = g(\partial x^{\psi}_{\tau}, x^{\psi}_{\tau}) = g(\partial x_{\tau}, x_{\tau}), & \text{se } 0 < \tau \leqslant t, \\ (x^{\gamma})'(\tau - t) = g(\partial x^{\gamma}_{\tau-t}, x^{\gamma}_{\tau-t}) = g(\partial x_{\tau}, x_{\tau}), & \text{se } t \leqslant \tau < t + t_{\gamma}. \end{cases}$$

Portanto, x é solução do PVI (2.9). Logo, $t + t_{\gamma} \leqslant t_{\psi}$, ou seja, para $0 \leqslant s < t_{\gamma} = t_{G_1(t,\psi)}$ temos $0 \leqslant t + s < t + t_{\gamma} < t_{\psi}$. Agora, pelo Corolário 2.1.3 (Unicidade), $x = x^{\psi}\big|_{[-h,t+t_{\gamma})}$ e, como observado acima, $x(\tau) = x^{\gamma}(\tau - t)$ para $t - h \leqslant \tau < t + t_{\gamma}$. Então, para $-h \leqslant \theta \leqslant 0$, temos

$$x^{\psi}(t + s + \theta) = x(t + s + \theta) = x^{\gamma}(t + s + \theta - t) = x^{\gamma}(s + \theta),$$

o que implica em:

$$G_1(t + s, \psi) = x^{\psi}_{t+s} = x^{\gamma}_{s} = G_1(s, \gamma) = G_1(s, G_1(t, \psi)).$$

Em resumo, para $0 \leqslant t < t_{\psi}$ e $0 \leqslant s < t_{G_1(t,\psi)}$, temos que $0 \leqslant t + s < t_{\psi}$ e

$$G_1(t + s, \psi) = G_1(s, G_1(t, \psi)). \tag{2.12}$$

A próxima proposição será importante para provar a dependência contínua local relativas às condições iniciais da equação (1.1).

Proposição 2.1.4 ([37], Proposição 4.4). *Seja $\psi \in X_{1+}$. Então existem $T = T(\psi) \in (0, t_{\psi})$ e uma vizinhança V de ψ em C^1 com $x^{\psi}_{t} \in V$, para $0 \leqslant t \leqslant T$, tais que valem as seguintes afirmações:*

i) Para cada $\chi \in X_{1+}$, $T < t_{\chi}$ ou $x^{\chi}_{t} \notin V$, para algum $t \in [0, T] \cap [0, t_{\chi})$.

ii) Para cada $\rho \in X_{1+}$, com $T < t_{\rho}$ e $x^{\rho}_{t} \in V$, para todo $t \in [0, T]$, existe $c(\rho) \geqslant 0$ tal que, para $\eta \in X_{1+}$ e, para cada $t \in [0, T] \cap [0, t_{\eta})$ tal que $x^{\eta}_{s} \in V$, para todo $s \in [0, t]$, temos

$$\|x^{\eta}_{s} - x^{\rho}_{s}\|_1 \leqslant c(\rho)\|\eta - \rho\|_1, \forall s \in [0, t].$$

Demonstração. Sejam $N \subset W$ vizinhança de $(\partial\psi, \psi)$ em $C \times C^1$, $\Delta \in (0, h)$ e $L \geqslant 0$ tais que valem as conclusões de (g1) e (g2). Pela continuidade da solução x^{ψ}, existem uma vizinhança aberta e limitada V de ψ em C^1 e $T \in (0, \Delta) \cap (0, t_{\psi})$ suficientemente pequeno tais que, para todos $\chi, \phi \in \overline{V}$ e para todo $t \in [0, T]$, temos

$$(\partial \chi^{d}_{t}, \phi) \in N, \ (\partial \phi, \phi) \in N \text{ e } x^{\psi}_{t} \in V.$$

i) Seja $\chi \in X_{1+}$ e defina $x = x^{\chi}$. Suponha que $x_t^{\chi} = x_t \in V$, para todo $t \in [0,T] \cap [0,t_\chi)$. Vamos mostrar que $x'|_{[-h,T]\cap[-h,t_\chi)}$ é Lipschitziana e, supondo que $t_\chi \leqslant T$, chegaremos em uma contradição. Para $t \in [0,T] \cap [0,t_\chi)$, temos $(\partial\chi_t^d, x_t) \in N$, pois $\chi = x_0 \in V \subset \overline{V}$ e $x_t \in V \subset \overline{V}$. Além disso, temos $(\partial x_t, x_t) \in N$, pois $x_t \in V \subset \overline{V}$. Desta maneira, para $t \in [0,T] \cap [0,t_\chi)$ e para $-h \leqslant s \leqslant -\Delta$, temos $-h \leqslant t+s \leqslant T-\Delta \leqslant 0$, de modo que

$$\partial\chi_t^d(s) = (\chi^d)'(t+s) = x'(t+s) = \partial x_t(s).$$

Para todos $t, u \in [0,T] \cap [0,t_\chi)$, temos:

$$\begin{aligned}
|x'(t) - x'(u)| &= |g(\partial x_t, x_t) - g(\partial x_u, x_u)| \\
&\overset{(g1)}{=} |g(\partial\chi_t^d, x_t) - g(\partial\chi_u^d, x_u)| \\
&\overset{(g2)}{\leqslant} L(\|\partial\chi_t^d - \partial\chi_u^d\| + (Lip(\partial\chi_t^d)+1)\|x_t - x_u\|) \\
&= L\Big(\max_{\theta\in[-h,0]} |\partial\chi^d(t+\theta) - \partial\chi^d(u+\theta)| \\
&\quad + (Lip(\partial\chi_t^d)+1) \max_{\theta\in[-h,0]} |x(t+\theta) - x(u+\theta)|\Big) \\
&\leqslant L\Big(\max_{\theta\in[-h,0]} Lip(\partial\chi^d)|t-u| \\
&\quad + (Lip(\partial\chi_t^d)+1) \sup_{\tau\in[-h,T]\cap[-h,t_\chi)} |x'(\tau)||t-u|\Big) \\
&\leqslant L\Big(Lip((\chi^d)')|t-u| + (Lip((\chi^d)')+1) \sup_{\tau\in[-h,T]\cap[-h,t_\chi)} |x'(\tau)||t-u|\Big) \\
&\leqslant L\Big(Lip(\partial\chi)|t-u| + (Lip((\partial\chi)+1) \sup_{\tau\in[0,T]\cap[0,t_\chi)} \|x'_\tau\||t-u|\Big) \\
&\leqslant L\Big(Lip(\partial\chi)|t-u| + (Lip((\partial\chi)+1) \sup_{\tau\in[0,T]\cap[0,t_\chi)} \|x_\tau\|_1|t-u|\Big) \\
&\leqslant L\Big(Lip(\partial\chi)|t-u| + (Lip((\partial\chi)+1) \sup_{\phi\in V} \|\phi\|_1|t-u|\Big).
\end{aligned}$$

Como V é um conjunto limitado de C^1, então $x'|_{[-h,T]\cap[-h,t_\chi)}$ é Lipschitziana.

Supondo agora que $t_\chi \leqslant T$, temos que $x' \colon [-h, t_\chi)$ é Lipschitziana, bem como sua extensão contínua no intervalo fechado $[-h, t_\chi]$. Disto segue que existe uma extensão diferenciável de x no intervalo fechado $[-h, t_\chi]$, $\hat{x} \colon [-h, t_\chi] \to \mathbb{R}^n$ com derivada Lipschitziana. O segmento $\phi = \hat{x}_{t_\chi} = \lim_{t\to t_\chi} x_t$ pertence a $\overline{V}$, logo $(\partial\phi, \phi) \in N \subset W$, ou seja, $\phi \in X_{1+}$. Assim podemos definir, como feito em (2.11), uma extensão de x além de t_χ como solução, contrariando a definição de t_χ. Isto conclui a demonstração do item i).

ii) Seja $\rho \in X_{1+}$ tal que $T < t_\rho$ e $x_t^\rho \in V$, para todo $t \in [0,T]$. Considere $\eta \in X_{1+}$ e $t \in [0,T] \cap (0, t_\eta)$ tal que $x_s^\eta \in V$, para todo $s \in [0,t]$. Ponha $x = x^\rho$ e $y = x^\eta$. Analogamente ao que foi feito no item anterior, temos $g(\partial x_s, x_s) = g(\partial \rho_s^d, x_s)$ e $g(\partial y_s, y_s) = g(\partial \eta_s^d, y_s)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
|x'(s) - y'(s)| &= |g(\partial x_s, x_s) - g(\partial y_s, y_s)| \\
&\overset{(g1)}{=} |g(\partial \rho_s^d, x_s) - g(\partial \eta_s^d, y_s)| \\
&\overset{(g2)}{\leqslant} L\big(\|\partial \rho_s^d - \partial \eta_s^d\| + (Lip(\partial \rho_s^d) + 1)\|x_s - y_s\|\big) \\
&\leqslant L\big(\|(\partial \rho)_s^c - (\partial \eta)_s^c\| + (Lip(\partial \rho) + 1)\|x_s - y_s\|\big) \\
&\leqslant L\big(\|\partial \rho - \partial \eta\| + (Lip(\partial \rho) + 1)\|x_s - y_s\|\big).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Para $u \in [-h, 0]$, temos que:

$$|x(s+u) - y(s+u)| = |\rho(s+u) - \eta(s+u)| \leqslant \|\rho - \eta\|,$$

se $s + u \leqslant 0$, e

$$\begin{aligned}
|x(s+u) - y(s+u)| &\leqslant |x(0) - y(0)| + \int_0^{s+u} |x'(v) - y'(v)| dv \\
&\leqslant \|\rho - \eta\| + \int_0^s |x'(v) - y'(v)| dv,
\end{aligned}$$

se $s + u \geqslant 0$, pois $s + u \leqslant s$. Logo,

$$\begin{aligned}
|x'(s) - y'(s)| &\overset{(2.13)}{\leqslant} L\big(\|\partial \rho - \partial \eta\| + (Lip(\partial \rho) + 1)\|x_s - y_s\|\big) \\
&= L\big(\|\partial \rho - \partial \eta\| + (Lip(\partial \rho) + 1) \max_{u \in [-h,0]} |x(s+u) - y(s+u)|\big) \\
&\leqslant L\left[\|\partial \rho - \partial \eta\| + (Lip(\partial \rho) + 1)\big(\|\rho - \eta\| + \int_0^s |x'(v) - y'(v)| dv\big)\right].
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Gronwall (Veja Apêndice A), segue que, para $0 \leqslant s \leqslant t$

$$\begin{aligned}
|x'(s) - y'(s)| &\leqslant L\big(\|\partial \rho - \partial \eta\| + (Lip(\partial \rho) + 1)\|\rho - \eta\|\big) e^{L(Lip(\partial \rho)+1)s} \\
&\leqslant L(Lip(\partial \rho) + 1)\big(\|\partial \rho - \partial \eta\| + \|\rho - \eta\|\big) e^{L(Lip(\partial \rho)+1)t} \\
&\leqslant L(Lip(\partial \rho) + 1)\|\rho - \eta\|_1 e^{TL(Lip(\partial \rho)+1)} \\
&= \|\rho - \eta\|_1 c_1(\rho),
\end{aligned}$$

em que $c_1(\rho) = L(Lip(\partial\rho)+1)e^{TL(Lip(\partial\rho)+1)}$. Integrando a desigualdade acima, obtemos

$$|x(s)-y(s)| \leqslant |x(0)-y(0)| + T\|\rho-\eta\|_1 c_1(\rho), \text{ para } 0 \leqslant s \leqslant t.$$

Para $-h \leqslant u \leqslant 0$ e $0 \leqslant s \leqslant t$, temos

$$\begin{cases} |x(s+u)-y(s+u)| \leqslant (1+Tc_1(\rho))\|\rho-\eta\|_1, \\ |x'(s+u)-y'(s+u)| \leqslant (1+c_1(\rho))\|\rho-\eta\|_1. \end{cases}$$

Portanto,

$$\|x_s-y_s\|_1 \leqslant \|\rho-\eta\|_1(2+(T+1)c_1(\rho)), \forall s \in [0,t].$$

Tomando $c(\rho) = (2+(T+1)c_1(\rho))$, o resultado segue. □

Corolário 2.1.5 (Dependência contínua relativa às condições iniciais - [37], Corolário 4.5)**.** *Seja $\psi \in X_{1+}$. Então existem $T = T(\psi) \in (0, t_\psi)$ e uma vizinhança $V_{0,\psi}$ de ψ em C^1 com as seguintes propriedades:*

i) $T < t_\chi$ para todo $\chi \in X_{1+} \cap V_{0,\psi}$.

ii) Para todo $\rho \in X_{1+} \cap V_{0,\psi}$, existe $c(\rho) \geqslant 0$ tal que, para todo $\chi \in X_{1+} \cap V_{0,\psi}$ e todo $t \in [0,T]$, temos

$$\|x_t^\chi - x_t^\rho\|_1 \leqslant c(\rho)\|\chi-\rho\|_1.$$

Demonstração. Seja $\psi \in X_{1+}$. Ponha $x = x^\psi$ e tome $T = T(\psi) \in (0, t_\psi)$ e V uma vizinhança aberta de ψ em C^1, de acordo com a Proposição 2.1.4. Como $T < t_\psi$ e $x_t \in V$, para $0 \leqslant t \leqslant T$, pelo item ii) da Proposição 2.1.4 obtemos uma constante $c = c(\psi)$. Seja $K = \{x_t : 0 \leqslant t \leqslant T\} \subset V$. Veja que K é sequencialmente compacto com respeito à norma de C^1. Portanto, K é compacto. Logo, existe $\epsilon > 0$ tal que, se $\phi \in C^1$ com $\|\phi - x_t\|_1 < \epsilon$, para algum $t \in [0,T]$, então $\phi \in V$. Tome $\delta > 0$ tal que

$$\delta < \frac{\epsilon}{1+c}$$

e considere

$$V_{0,\psi} = \{\chi \in C^1 : \|\chi-\psi\|_1\} \cap V.$$

i) Seja $\chi \in X_{1+} \cap V_{0,\psi}$, ponha $y = x^\chi$. Veja que, pelo item i) da Proposição 2.1.4, basta mostrar que $y_t \in V$ para todo $t \in [0,T] \cap [0, t_\chi)$. Suponha que, para algum $t \in [0,T] \cap [0,t_\chi)$, $y_t \notin V$. Como $y_0 \in V_{0,\psi} \subset V$, então

$$0 < s = \inf\{t \in [0,T] \cap [0,t_\chi) : y_t \notin V\} = \inf\{t \in [0,T] \cap [0,t_\chi) : y_t \in C^1 \backslash V\}.$$

Uma vez que $C^1 - V$ é fechado, tem-se que $y_s \notin V$. Portanto, $y_t \in V$, para $0 \leqslant t < s$ e $y_s \notin V$. Pelo item ii) da Proposição 2.1.4, temos

$$\|y_t - x_t\|_1 \leqslant c\|\chi - \psi\|_1 \leqslant c\delta, \text{ para } 0 \leqslant t < s.$$

Portanto, temos

$$\|y_s - x_s\|_1 \leqslant c\delta < c\frac{\epsilon}{1+c} < \epsilon.$$

Logo $y_s \in V$, contrariando $y_s \notin V$. Portanto, $y_t \in V$, para todo $t \in [0,T] \cap [0,t_\chi)$, ou seja, $T < t_\chi$.
ii) Seja $\rho \in X_{1+} \cap V_{0,\psi}$. Pelo item i), temos que $T < t_\rho$ e $x_t^\rho \in V$, para todo $t \in [0,T]$. Logo, pelo item ii) da Proposição 2.1.4, existe $c(\rho) \geqslant 0$ tal que, para todo $\chi \in X_{1+} \cap V_{0,\psi}$ e para todo $t \in [0,T]$, temos

$$\|x_t^\chi - x_t^\rho\|_1 \leqslant c(\rho)\|\chi - \rho\|_1,$$

concluindo a demonstração. □

Finalizamos esta seção com o resultado principal, que garante a continuidade do semifluxo G_1 com respeito às normas de $\mathbb{R} \times C^1$ e C^1.

Corolário 2.1.6 ([37] - Corolário 4.6). *Ω_1 é um subconjunto aberto de $[0,\infty] \times X_{1+}$ com respeito à topologia induzida pela norma de $\mathbb{R} \times C^1$ e $G_1 \colon \Omega_1 \to X_{1+}$ é contínuo com respeito às normas de $\mathbb{R} \times C^1$ e C^1.*

Demonstração. Seja $\psi \in X_{1+}$. Pelo item i) do Corolário 2.1.5, existem $T \in (0, t_\psi)$ e uma vizinhança $V_{0,\psi}$ de ψ em C^1 tal que $[0,T] \times X_{1+} \cap V_{0,\psi} \subset \Omega_1$. Sejam $\rho \in X_{1+} \cap V_{0,\psi}$ e $t \in [0,T]$. Pelo item ii) do Corolário 2.1.5, existe $c = c(\rho) \geqslant 0$ tal que, para todo $\chi \in X_{1+} \cap V_{0,\psi}$ e para todo $s \in [0,T]$, temos

$$\|G_1(s,\chi) - G_1(s,\rho)\|_1 = \|x_s^\chi - x_s^\rho\|_1 \leqslant c\|\chi - \rho\|_1. \tag{2.14}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|G_1(s,\chi) - G_1(t,\rho)\|_1 &= \|G_1(s,\chi) - G_1(s,\rho) + G_1(s,\rho) - G_1(t,\rho)\|_1 \\ &\leqslant \|G_1(s,\chi) - G_1(s,\rho)\|_1 + \|G_1(s,\rho) - G_1(t,\rho)\|_1 \\ &\overset{(2.14)}{\leqslant} c\|\chi - \rho\|_1 + \|x_s^\rho - x_t^\rho\|_1.\end{aligned}$$

Pela continuidade da aplicação $[0, t_\rho) \ni s \to x_s^\rho \in C^1$, garantida pela Proposição 1.2.4, e pela desigualdade acima, temos que $G_1|_{[0,T]\times X_{1+}\cap V_{0,\psi}}$ é contínuo em (t,ρ). Portanto, $G_1|_{[0,T]\times(X_{1+}\cap V_{0,\psi})}$ é contínuo (com respeito às normas de $\mathbb{R}\times C^1$ e C^1). Com isso, mostramos que $M_\psi \neq \emptyset$, onde M_ψ é o conjunto formado por $t\in(0,t_\psi)$ tal que existe uma vizinhança V_t de ψ em C^1 com $[0,t]\times(X_{1+}\cap V_t)\subset\Omega_1$ e $G_1|_{[0,T]\times(X_{1+}\cap V_t)}$ é contínuo. Vamos mostrar que

$$M := M_\psi = (0,t_\psi).$$

Suponha que existe $t^*\in(0,t_\psi)\backslash M$. Pela definição de M, $(0,t]\in M$, para todo $t\in M$. Logo $0<t_M=\sup M<t_\psi$ e $(0,t_M)\subset M$. Seja $\rho = G_1(t_M,\psi)\in X_{1+}$. Analogamente ao que foi feito acima, temos que existe $T_\rho>0$ e uma vizinhança aberta $V_{0,\rho}$ de ρ em C^1 tal que $[0,T_\rho]\times X_{1+}\cap V_{0,\rho}\subset\Omega_1$ e $G_1|_{[0,T_\rho]\times(X_{1+}\cap V_{0,\rho})}$ é contínuo. Pela continuidade de $G_1(\cdot,\psi)$, existem $u,v\in(t_M-T_\rho,t_M)$, com $u>v>0$, tais que $G_1(u,\psi)\in V_{0,\rho}$ e $G_1(v,\psi)\in V_{0,\rho}$. Como $u\in(0,t_M)$, então $u\in M$, logo existe uma vizinhança aberta V_u de ψ em C^1 tal que $[0,u]\times(X_{1+}\cap V_u)\subset\Omega_1$ e $G_1|_{[0,u]\times(X_{1+}\cap V_u)}$ é contínuo. Como $v\in[0,u]$, G_1 é contínuo em (v,ψ) e, como $G_1(v,\psi)\in V_{0,\rho}$, podemos supor que V_u é suficientemente pequena tal que

$$G_1(v,\phi)\in V_{0,\rho} \text{ para todo } \phi\in V_u.$$

Seja $(t,\chi)\in[v,v+T_\rho]\times(X_{1+}\cap V_u)$. Logo, $t-v\in[0,T_\rho]$, $(v,\chi)\in[0,u]\times(X_{1+}\cap V_u)\subset\Omega_1$ e $G_1(v,\chi)\in X_{1+}\cap V_{0,\rho}$. Consequentemente, $(t-v,G_1(v,\chi))\in[0,T_\rho]\times(X_{1+}\cap V_{0,\rho})\subset W$ e, por (2.12), temos que $(t,\chi)\in\Omega_1$ e

$$G_1(t,\chi) = G_1(t-v,G_1(v,\chi)).$$

Logo, $[v,v+T_\rho]\times(X_{1+}\cap V_u)\subset\Omega_1$. Além disso, pela continuidade de $G_1|_{[0,u]\times(X_{1+}\cap V_u)}$ e $G_1|_{[0,T_\rho]\times(X_{1+}\cap V_{0,\rho})}$ e pela igualdade acima, concluímos que $G_1|_{[v,v+T_\rho]\times(X_{1+}\cap V_u)}$ é contínuo. Como $v<u$, concluímos que $[0,v+T_\rho]\times(X_{1+}\cap V_u)\subset\Omega_1$ e $G_1|_{[0,v+T_\rho]\times(X_{1+}\cap V_u)}$ é contínuo, ou seja, $v+T_\rho\in M$. Neste caso, temos $T_M\geqslant v+T_\rho\in M$. Por outro lado, $v\in(T_M-T_\rho,T_M)$, logo $T_M<v+T_\rho$, uma contradição. Portanto, $M=M_\psi=(0,t_\psi)$.

Finalmente, seja $(t,\psi)\in\Omega_1$. Logo $0\leqslant t<t_\psi$. Tome $s\in(t,t_\psi)$, daí $s\in M_\psi$, ou seja, existe uma vizinhança V_s de ψ em C^1 tal que $[0,s]\times(X_{1+}\times V_s)\subset\Omega_1$ e $G_1|_{[0,s]\times(X_{1+}\times V_s)}$ é contínuo. Portanto, Ω_1 é um aberto de $[0,\infty)\times X_{1+}$ com respeito à topologia induzida por $\mathbb{R}\times C^1$ e G_1 é contínua em relação às normas de $\mathbb{R}\times C^1$ e C^1. $\square$

2.2 Semifluxo em um subconjunto fechado de X_2

Começaremos essa seção relembrando a definição de X_2:

$$X_2 = \{\psi \in X_1 : \psi \in C^2\},$$

onde $X_1 = \{\psi \in U_1 : \psi'(0) = g(\partial\psi, \psi)\}$ e $U_1 = \{\psi \in C^1 : (\partial\psi, \psi) \in W\}$.

O próximo resultado mostra que $X_2 \subset C^2$ é uma subvariedade de Banach de codimensão n em C^2, desde que $g\colon W \subset C \times C^1 \to \mathbb{R}^n$ satisfaça (g1), (g3) e $X_2 \neq \emptyset$.

Proposição 2.2.1 ([37] - Proposição 5.1)**.** *Suponha que $g\colon W \subset C \times C^1 \to \mathbb{R}^n$ satisfaz (g1) e (g3) e que $X_2 \neq \emptyset$. Então X_2 é uma subvariedade diferenciável de codimensão n em C^2, com espaço tangente em $\psi \in X_2$ dado por*

$$T_\psi X_2 = \{\chi \in C^2 : \chi'(0) = Dg_1(\partial\psi, \psi)(\partial\chi, \chi)\}.$$

Demonstração. Seja $T\colon C^2 \to C^1 \times C^1$ a transformação linear contínua dada por $T(\psi) = (\partial\psi, \psi)$ e $\partial\colon C^2 \to C^1$ o operador linear derivação. Considere a seguinte aplicação

$$A : C^2 \supset U_2 \ni \psi \mapsto (ev_1(0, \cdot) \circ \partial)(\psi) - (g_1 \circ T)(\psi) \in \mathbb{R}^n,$$

em que $U_2 = \{\psi \in C^2 : (\partial\psi, \psi) \in W\} = U_1 \cap C^2$ é aberto em C^2. Veja que A é continuamente diferenciável, pois $A = (ev_1(0, \cdot) \circ \partial - g_1 \circ T)|_{U_2}$. Além disso,

$$A^{-1}(0) = \{\psi \in U_2 : A(\psi) = 0\} = \{\psi \in U_2 : \partial\psi(0) = g_1(\partial\psi, \psi)\} = X_1 \cap C^2 = X_2.$$

Pela regra da cadeia, para $\psi \in U_2$, temos que $DA(\psi)\colon C^2 \to \mathbb{R}^n$ é dada por

$$DA(\psi) = ev_1(0, \cdot) \circ \partial - \big(Dg_1(T(\psi))\big) \circ T = ev_1(0, \cdot) \circ \partial - \big(Dg_1(\partial\psi, \psi)\big) \circ T.$$

Vamos mostrar que, para todo $\psi \in X_2$, $DA(\psi)$ é sobrejetiva. Seja $\psi \in X_2 = A^{-1}(0)$. Sejam $\Delta \in (0, h)$ e N uma vizinhança de $(\partial\chi, \chi)$ em $C \times C^1$ de acordo com (g1). Seja $\chi \in C^2$ tal que $\chi(t) = 0$ para $-h \leqslant t \leqslant -\Delta$. Existe $\delta > 0$ tal que $(\partial\psi + s\partial\chi, \psi) \in N$ para todo $s \in (0, \delta)$. Como $(\partial\psi + s\partial\chi)(t) = \partial\psi(t)$, para $-h \leqslant t \leqslant -\Delta$ e $s \in (0, \delta)$, por (g1), temos:

$$g(\partial\psi + s\partial\chi, \psi) = g(\partial\psi, \psi), \forall s \in (0, \delta).$$

Logo,

$$0 = \lim_{0 \neq s \to 0} \frac{1}{s}\big(g_1(\partial\psi + s\partial\chi, \psi) - g_1(\partial\psi, \psi)\big) = Dg_1(\partial\psi, \psi)(\partial\chi, 0),$$

e portanto,

$$\begin{aligned} DA(\psi)\chi &= \partial\chi(0) - Dg_1(\partial\psi, \psi)(\partial\chi, \chi) \\ &= \chi'(0) - Dg_1(\partial\psi, \psi)(\partial\chi, 0) - Dg_1(\partial\psi, \psi)(0, \chi) \\ &= \chi'(0) - Dg_1(\partial\psi, \psi)(0, \chi) \\ &= \chi'(0) - D_e g_1(\partial\psi, \psi)(0, \chi). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Para $i \in \{1, ..., n\}$, sejam $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, existe uma sequência $\chi_m \in C^2$, $m \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$, temos $\chi_m'(0) = e_i$, $\chi_m(t) = 0$ para $-h \leqslant t \leqslant -\Delta$ e $\lim_{m\to\infty} \|\chi_m\| = 0$. De (2.15), obtemos

$$DA(\psi)\chi_m = \chi_m'(0) - D_e g_1(\partial\psi, \psi)(0, \chi_m) = e_i - D_e g_1(\partial\psi, \psi)(0, \chi_m).$$

Portanto, $\lim_{m\to\infty} DA(\psi)\chi_m = e_i$, pois por (g3), $D_e g_1(\partial\psi, \psi)\colon C \times C \to \mathbb{R}^n$ é contínuo em $(0, 0) \in C \times C$. A imagem $DA(\psi)C^2 \subset \mathbb{R}^n$ é um subespaço de dimensão finita, logo, é fechado. Portanto, temos que $\lim_{m\to\infty} DA(\psi)\chi_m = e_i \in DA(\psi)C^2$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Logo $DA(\psi)C^2 = \mathbb{R}^n$, isto é, $DA(\psi)$ é sobrejetiva.

Considere $\psi \in X_2$ e tome $K = DA(\psi)^{-1}(0)$. Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo (Veja Apêndice A), temos que o espaço quociente $\frac{C^2}{K}$ é isomorfo à imagem $DA(\psi)C^2$, ou seja, tem dimensão n. Assim, K tem codimensão n em C^2. Como K é fechado em C^2, temos que existe $Q \subset C^2$, subespaço de dimensão n de C^2, tal que

$$C^2 = K \oplus Q.$$

Temos que $DA(\psi)|_Q\colon Q \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo. Escrevendo $\psi = \psi_K + \psi_Q$, com $\psi_K \in K$ e $\psi_Q \in Q$, pelo Teorema da Função Implícita (Veja Apêndice A), existem vizinhanças $V \subset K$ e $Z \subset U_2$ com $\psi_K \in V$ e $\psi \in Z$ tais que $A^{-1}(0) \cap Z = X_2 \cap Z$ é o gráfico de uma aplicação continuamente diferenciável $\xi\colon V \to Q$. Logo, X_2 é uma subvariedade de C^2 de codimensão n.

Com isso, concluímos que

$$T_\psi X_2 = \{\chi \in C^2 : \chi'(0) = Dg_1(\partial\psi, \psi)(\partial\chi, \chi)\},$$

obtendo o resultado desejado. $\square$

Para os próximos resultados, vamos assumir que $g\colon W \subset C \times C^1 \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições (g0)-(g3).

A próxima proposição garante que $X_{2*} = \{\psi \in X_2 : \partial\psi \in T_{e,\psi}X_2\}$ é invariante, no sentido que os segmentos x_t^ψ, $0 \leqslant t < t_\psi$, pertencem a X_{2*}, para todo $\psi \in X_{2*}$.

Proposição 2.2.2 ([37] - Proposição 6.1)**.** *Para $\psi \in X_{2*}$, a solução x^ψ da equação* (2.1) *é duas vezes continuamente diferenciável e $x_t^\psi \in X_{2*}$ para todo $t \in [0, t_\psi)$.*

Demonstração. Seja $\psi \in X_{2*}$, pelo Corolário 1.2.14, é suficiente mostrar que $x = x^\psi$ é duas vezes continuamente diferenciável. Seja

$$M = \{t \in [0, t_\psi) : x'|_{[-h,t]} \text{ é continuamente diferenciável}\}.$$

Queremos mostrar que $M = [0, t_\psi)$. Veja que $0 \in M \neq \emptyset$, pois $x'|_{[-h,0]} = \partial\psi \in C^1$. Assim, temos que $0 \leqslant s := \sup M \leqslant t_\psi$ e $x'|_{[-h,s)}$ é continuamente diferenciável. Por contradição, suponhamos que $s < t_\psi$. Tome $N \subset W$ vizinhança de $(\partial x_s, x_s)$ em $C \times C^1$ e $\Delta \in (0, h)$ de acordo com (g1). Temos, pela continuidade garantida na Proposição 1.2.4, que existe $\delta \in (0, \Delta)$ tal que $s + \delta < t_\psi$ e $(\partial x_t, x_t) \in N$ para $t \in (s - \delta, s + \delta) \cap [0, \infty)$. Tome $r > 0$ tal que, para todo $(\chi, \rho) \in C \times C^1$ com $\|\chi - \partial x_s\| < r$ e $\|\rho - x_s\|_1 < r$, tenha-se $(\chi, \rho) \in N$. Seja $\epsilon \in (0, \delta)$ tal que

$$\|x_u - x_s\|_1 < \frac{r}{2},$$

para todo $u \in [s - \epsilon, s + \epsilon] \cap [0, \infty)$. Se $s = 0$, tome $t = 0$. Se $s > 0$, tome $t \in (s - \epsilon, s) \cap [0, \infty)$. Em todo caso, $t \in M$, logo, $x_t \in C^2$. Pela Proposição 1.2.5, existe $y\colon [t - h, s + \epsilon] \to \mathbb{R}^n$ duas vezes continuamente diferenciável com $y_t = x_t$ e $|y'(u) - x'(u)| < \frac{r}{2}$, para $t - h \leqslant u \leqslant s + \epsilon$. Assim, temos:

$$\|\partial y_u - \partial x_u\| \leqslant \max_{\tau \in [t-h, s+\epsilon]} |y'(\tau) - x'(\tau)| < \frac{r}{2}, \text{ para } t \leqslant u \leqslant s + \epsilon.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|\partial y_u - \partial x_s\| &\leqslant \|\partial y_u - \partial x_u\| + \|\partial x_u - \partial x_s\| \\ &\leqslant \|\partial y_u - \partial x_u\| + \| x_u - x_s\|_1 \\ &< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \text{ para } t \leqslant u \leqslant s + \epsilon. \end{aligned}$$

Com isso, temos $(\partial y_u, x_u) \in N$ para $t \leqslant u \leqslant s+\epsilon$. Para $t \leqslant u \leqslant t+\epsilon \leqslant s+\epsilon$ e para $-h \leqslant v \leqslant -\Delta$, temos que $t-h \leqslant u+v \leqslant t+\epsilon-\Delta \leqslant t+\Delta-\Delta = t$. Consequentemente,

$$\partial y_u(v) = y'(u+v) = x'(u+v) = \partial x_u(v).$$

De (g1), como y' e x são continuamente diferenciáveis, obtemos

$$x'(u) = g(\partial x_u, x_u) = g(\partial y_u, x_u) = g_1((y')_u, x_u) \text{ para } t \leqslant u \leqslant t+\epsilon. \tag{2.16}$$

Pela Proposição 1.2.13 e por (2.16), temos que $x'|_{[t,t+\epsilon)}$ é continuamente diferenciável. No caso em que $0 < s$, temos $t < s < t+\epsilon$, logo, $x'|_{[-h,t+\epsilon)}$ é continuamente diferenciável, contrariando $s = \sup M$. No caso em que $s = 0$, temos $t = 0$. Como $x_0 = \psi \in X_{2*}$, temos que a derivada de x' à esquerda em $t = 0$ é dada por

$$x''(0^-) = (\partial\psi)'(0) = D_e g_1(\partial\psi, \psi)(\partial\partial\psi, \psi).$$

Por outro lado, por (2.16) e pela Proposição 1.2.13, a derivada de x' à direita em $t = 0$ é dada por

$$x''(0^+) = D_e g_1(y_0', x_0)(\partial y_0', \partial x_0).$$

Como $y_0' = x_0' = (x_0)' = \partial\psi$ e $x_0 = \psi$, obtemos que x' é continuamente diferenciável em $[-h, t+\epsilon)$, contrariando novamente $s = \sup M$. Portanto, $s = t_\psi$, provando o resultado. $\square$

Definimos

$$\Omega_2 = \{(t,\psi) \in [0,\infty) \times X_{2*} : t < t_\psi\} \subset \Omega_1.$$

Considere $G_2 \colon \Omega_2 \to X_{2*}$ dada por $G_2(t,\psi) = x_t^\psi$. Pela Proposição 2.2.2, $G_2(\Omega_2) \subset X_{2*}$, isto é, G_2 está bem definido. Seja $\psi \in X_{2*}$, $0 \leqslant t < t_\psi$ e $0 \leqslant s < t_{G_2(t,\psi)}$, logo pela Proposição 2.2.2 e pela seção anterior, obtemos $0 \leqslant t+s < t_\psi$, $(s, G_2(t,\psi)) \in \Omega_2$ e

$$G_2(t+s,\psi) = G_2(t, G_2(t,\psi)).$$

Além disso, Ω_2 é a imagem inversa de Ω_1 pela inclusão contínua

$$i : [0,\infty) \times X_{2*} \to [0,\infty) \times X_{1+},$$

logo, Ω_2 é aberto em $[0,\infty) \times X_{2*}$ com respeito à topologia de $\mathbb{R} \times C^2$. Também, temos que a aplicação

$$\Omega_2 \ni (t, \psi) \mapsto G_2(t, \psi) \in C^1$$

é contínua. Agora, nosso objetivo é mostrar que G_2 é contínua com respeito às normas de $\mathbb{R} \times C^2$ e C^2.

Antes de prosseguir para o próximo resultado, vamos definir produto cartesiano de funções.

Definição 2.2.3. *Sejam A, B, C conjuntos e $f\colon A \to B$, $g\colon A \to C$ funções. Definimos o produto cartesiano de f por g como a função $f \times g\colon A \to B \times C$ dada por*

$$(f \times g)(x) = (f(x), g(x)).$$

O próximo resultado garante a continuidade local de G_2.

Proposição 2.2.4 ([37] - Proposição 6.2)**.** *Para todo $\psi \in X_{2*}$, existem $T = T(\psi) > 0$ e uma vizinhança $V = V(\psi)$ de ψ em X_{2*} com respeito à topologia de C^2 tais que $[0, T] \times V \subset \Omega_2$ e*

$$G_2|_{[0,T]\times V}\colon [0, T] \times V \to C^2$$

é contínua com respeito à norma de $\mathbb{R} \times C^2$ e C^2.

Demonstração. Seja $\psi \in X_{2*}$. Ponha $x = x^{\psi}$. Pela Proposição 1.2.10, existem $c \geqslant 0$ e uma vizinhança aberta $N \subset W_1$ de $(\partial\psi, \psi)$ em $C^1 \times C^1$ tais que $\|D_e g_1(\chi, \rho)\|_{\mathscr{L}(C\times C, \mathbb{R}^n)} \leqslant c$, para todo $(\chi, \rho) \in N$. Pelo Corolário 1.2.12, existem $\Delta \in (0, h)$ e $N_1 \subset N$ vizinhança aberta de $(\partial\psi, \psi)$ em $C^1 \times C^1$ tais que, para todos $(\phi, \xi), (\phi_1, \xi) \in N_1$, com $\phi(t) = \phi_1(t)$, para $t \in [-h, -\Delta]$ e para todos $(\chi, \rho), (\chi_1, \rho) \in C \times C$, com $\chi(t) = \chi_1(t)$, para $t \in [-h, -\Delta]$, temos

$$D_e g_1(\phi, \xi)(\chi, \rho) = D_e g_1(\phi_1, \xi)(\chi_1, \rho). \tag{2.17}$$

Seja $\phi \in X_{2*}$. Temos que

$$\begin{aligned} \|(\partial(\phi^{dd})_t, x_t^{\phi}) - (\partial\psi, \psi)\|_{C^1\times C^1} &= \|\partial(\phi^{dd})_t - \partial\psi\|_1 + \|x_t^{\phi} - \psi\|_1 \\ &\leqslant \|(\phi^{dd})_t - \psi\|_2 + \|G_1(t, \phi) - G_1(0, \psi)\|_1 \\ &= \|(\phi^{dd})_t - (\psi^{dd})_0\|_2 + \|G_1(t, \phi) - G_1(0, \psi)\|_1. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Pelo item iii) da Proposição 1.2.7, temos que a aplicação $[0, \infty) \times C^2 \ni (t, \phi) \mapsto (\phi^d)_t \in C^2$ é contínua. Pela Proposição 1.2.4, obtemos que as aplicações

$$[0, t_\psi) \ni t \mapsto x_t \in C^1 \text{ e } [0, t_\psi) \ni t \mapsto (x')_t = \partial x_t \in C^1$$

são contínuas. Assim, como Ω_1 é aberto e G_1 é contínuo, pela desigualdade (2.18), existem uma vizinhança $V_1 = V_1(\psi) \subset X_{2*}$ de ψ com respeito à topologia de C^2 e $T = T(\psi) \in (0, \Delta)$ tais que valem as seguintes afirmações:

1. $[0, T] \times V_1 \subset \Omega_1$;
2. $(\partial(\phi^{dd})_t, x_t^{\phi}) \in N_1$ para $t \in 0, T$ e $\phi \in V_1$;
3. $(\partial x_t, x_t) \in N_1$ para $t \in [0, T]$.

Como $V_1 \subset X_{2*}$, então temos $[0, T] \times V_1 \subset \Omega_2$. Para $\phi \in V_1$, $t \in [0, T]$ e $s \in [-h, -\Delta]$ temos $-h \leqslant t + s \leqslant 0$, pois $T < \Delta$. Logo,

$$\partial x_t^{\phi}(s) = (x^{\phi})'(t+s) = \phi'(t+s) = \partial(\phi^{dd})_t(s) \tag{2.19}$$

e

$$\partial\partial x_t^{\phi}(s) = (x^{\phi})''(t+s) = \phi''(t+s) = \partial\partial(\phi^{dd})_t(s). \tag{2.20}$$

Sejam $\phi, \rho \in V_1$. Pondo $y = x^{\phi}$ e $z = x^{\rho}$, temos que $y_t, z_t \in X_{2*}$, para $t \in [0, T]$. Para todo $t \in [0, T]$ tal que $(\partial y_t, y_t) \in N_1$ e $(\partial z_t, z_t) \in N_1$, usando (2.17), (2.19) e (2.20), obtemos

$$\begin{aligned}
|y''(t) - z''(t)| &= |D_e g_1(\partial y_t, y_t)(\partial\partial y_t, \partial y_t) - D_e g_1(\partial z_t, z_t)(\partial\partial z_t, \partial z_t)| \\
&\leqslant |\big[D_e g_1(\partial y_t, y_t) - D_e g_1(\partial z_t, z_t)\big](\partial\partial y_t, \partial y_t)| \\
&\quad + |D_e g_1(\partial z_t, z_t)\big[(\partial\partial y_t, \partial y_t) - (\partial\partial z_t, \partial z_t)\big]| \\
&\overset{(2.17)}{=} |\big[D_e g_1(\partial(\phi^{dd})_t, y_t) - D_e g_1(\partial(\rho^{dd})_t, z_t)\big](\partial\partial(\phi^{dd})_t, \partial y_t)| \\
&\quad + |D_e g_1(\partial(\rho^{dd})_t, z_t)\big[(\partial\partial(\phi^{dd})_t, \partial y_t) - (\partial\partial(\rho^{dd})_t, \partial z_t)\big]| \\
&\leqslant |\big[D_e g_1(\partial(\phi^{dd})_t, y_t) - D_e g_1(\partial(\rho^{dd})_t, z_t)\big](\partial\partial(\phi^{dd})_t, \partial y_t)| \\
&\quad + c\|(\partial\partial(\phi^{dd})_t, \partial y_t) - (\partial\partial(\rho^{dd})_t, \partial z_t)\|_{C\times C} \\
&\leqslant |\big[D_e g_1(\partial(\phi^{dd})_t, y_t) - D_e g_1(\partial(\rho^{dd})_t, z_t)\big](\partial\partial(\phi^{dd})_t, \partial y_t)| \\
&\quad + c(\|(\phi^{dd})_t - (\rho^{dd})_t\|_2 + \|y_t - z_t\|_1).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Agora, vamos construir uma vizinhança $V = V(\psi) \subset V_1$ de ψ com respeito à topologia de C^2 tal que, para todo $t \in [0, T]$ e para todo $\psi \in V$, temos

$$(\partial x_t^{\phi}, x_t^{\phi}) \in N_1.$$

Usando a Proposição 1.2.4, podemos mostrar que a aplicação $[0, t_{\psi}) \ni t \mapsto x_t \in C^2$ é contínua. Logo, o conjunto $K = \{x_t \in C^2 : 0 \leqslant t \leqslant T\}$ é compacto em C^2. A imagem $(\partial \times i)(K) = \{(\partial x_t, x_t) : t \in [0,T]\}$ de K pela aplicação contínua $\partial \times i : C^2 \ni \phi \mapsto (\partial\phi, \phi) \in C^1 \times C^1$, onde $i \colon C^2 \to C^1$ é a inclusão, está contida em N_1. Como K é compacto, temos que existe $\epsilon > 0$ tal que $(\partial\phi, \phi) \in N_1$, para todo $\phi \in C^2$, com $dist(\phi, K) \leqslant \epsilon$.

A continuidade de G_1 e a continuidade da aplicação do item iii) da Proposição 1.2.7 implicam que existe uma vizinhança $V_2 \subset V_1$ de ψ com respeito à topologia de C^2 tal que, para todo $t \in [0,T]$ e para todo $\phi \in V_2$, temos

$$\|x_t^\phi - x_t\|_1 < \frac{\epsilon}{4(c+1)} \text{ e } \|(\phi^{dd})_t - (\psi^{dd})_t\|_2 < \frac{\epsilon}{4(c+1)}. \tag{2.22}$$

Por (g3), a aplicação

$$[0,T] \times V_2 \ni (0,\phi) \mapsto \left[D_e g_1(\partial(\phi^{dd})_t, x_t^\phi) - D_e g_1(\partial(\psi^{dd})_t, x_t)\right](\partial\partial(\phi^{dd})_t, \partial(\phi^{dd})_t) \in \mathbb{R}^n$$

é contínua e se anula no compacto $[0,T] \times \{\psi\}$. Logo, existe $V \subset V_2$, vizinhança de ψ com respeito à topologia de C^2 tal que, para todo $t \in [0,T]$ e para todo $\phi \in V$, temos

$$\|\phi - \psi\|_2 < \frac{3\epsilon}{4}. \tag{2.23}$$

$$\left|\left[D_e g_1(\partial(\phi^{dd})_t, x_t^\phi) - D_e g_1(\partial(\psi^{dd})_t, x_t)\right](\partial\partial(\phi^{dd})_t, \partial(\phi^{dd})_t)\right| < \frac{\epsilon}{4}. \tag{2.24}$$

Suponha que existe $\phi \in V$ tal que $(\partial x_t^\phi, x_t^\phi) \notin N_1$, para algum $t \in [0,T]$. Como $(\partial x_0^\phi, x_0^\phi) = (\partial\phi, \phi) \in N_1$ e N_1 é aberto, então existe $s \in [0,T]$ tal que $(\partial x_t^\phi, x_t^\phi) \in N_1$, para $0 \leqslant t < s$, e $(\partial x_s^\phi, x_s^\phi) \notin N_1$. De (2.21), (2.22), (2.23) e (2.24), para $0 \leqslant u < s$, obtemos

$$|(x^\phi)''(u) - x''(u)| < \frac{\epsilon}{4} + c\left(\frac{\epsilon}{4(c+1)} + \frac{\epsilon}{4(c+1)}\right) < \frac{3\epsilon}{4}.$$

Portanto, pela primeira desigualdade em (2.22) e por (2.23), temos

$$\|x_u^\phi - x_u\|_2 = \|\partial\partial x_u^\phi - \partial\partial x_u\| + \|x_t^\phi - x_t\|_1 < \frac{3\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4(c+1)} < \epsilon,$$

para $0 \leqslant u < s$. Disto segue que $\|x_s^\phi - x_s\|_2 \leqslant \epsilon$, consequentemente, $dist(x_s^\phi, K) \leqslant \epsilon$, contrariando $(\partial x_s^\phi, x_s^\phi) \notin N_1$. Portanto, para todo $\phi \in V$, tem-se $(\partial x_t^\phi, x_t^\phi) \in N_1$, para todo $t \in [0,T]$.

Sejam $\phi \in V$ e $\epsilon > 0$ dados. Repetindo um raciocínio análogo ao que foi usado para obter a última desigualdade, concluímos que existe $V_\phi \subset V$, vizinhança de ϕ com respeito à topologia de C^2 tal que, para $0 \leqslant t \leqslant T$ e para $\rho \in V_\phi$, temos

$$\|x_t^\rho - x_t^\phi\|_2 < \epsilon. \tag{2.25}$$

Seja $(t, \phi) \in [0, T] \times V$ dado. Para todo $s \in [0, T]$ e para todo $\rho \in V$, temos

$$\|G_2(s, \rho) - G_2(t, \phi)\|_2 = \|x_s^\rho - x_t^\phi\|_2 \leqslant \|x_s^\rho - x_s^\phi\|_2 + \|x_s^\phi - x_t^\rho\|_2.$$

Por (2.25) e pela continuidade da aplicação $[0, T] \ni s \mapsto x_s^\phi \in C^2$ combinado com a última desigualdade, concluímos que $G_2|_{[0,T]\times V}$ é contínuo com respeito às normas de $\mathbb{R} \times C^2$ e C^2. $\square$

Finalizamos com o resultado principal desta seção, que garante a continuidade de G_2 com respeito às normas de $\mathbb{R} \times C^2$ e C^2.

Corolário 2.2.5 ([37] - Corolário 6.3). *$G_2 \colon \Omega_2 \to X_{2*}$ é contínuo com respeito às normas de $\mathbb{R} \times C^2$ e C^2.*

Demonstração. Seja $(t, \psi) \in \Omega_2$ dado. Tome $t_0 \in (t, t_\psi)$. Seja M o conjunto formado por $s \in (0, t_0]$ tal que existe uma vizinhança $V_s \subset X_{2*}$ de ψ com respeito à topologia de C^2 tal que $[0, s] \times V_s \subset \Omega_2$ e $G_2|_{[0,s]\times V_s}$ é contínuo com respeito às normas de $\mathbb{R} \times C^2$ e C^2. Pela Proposição 2.2.4, temos que $M \neq \emptyset$. Seja $t_1 = \sup M$. Por contradição, suponhamos que $t_1 < t_0$. Sejam $T > 0$ e $V_\rho \subset X_{2*}$ vizinhança de $\rho = x_{t_1}^\psi$ com respeito à topologia de C^2, garantidos pela proposição anterior, tais que $[0, T] \times V_\rho \subset \Omega_2$ e $G_2|_{[0,T]\times V_\rho}$ é contínuo. Pela continuidade da aplicação $[0, t_\psi) \ni t \mapsto x_t^\psi \in C^2$, existe $s \in (t_1 - T, t_1) \cap (0, \infty)$ tal que $x_s^\psi \in V_\rho$. Seja $u \in (s, t_1)$. Como $s < u < t_1$, pela definição de t_1 temos que $s, u \in M$. Logo, existe $V_s \subset X_{2*}$, vizinhança de ϕ com respeito à topologia de C^2, tal que $[0, s] \times V_s \subset \Omega_2$ e $G_2|_{[0,s]\times V_s}$ é contínuo. Assim, existe $V_u \subset V_s$, vizinhança de ϕ com respeito à topologia de C^2, tal que $[0, u] \times V_u \subset \Omega_2$, $G_2|_{[0,u]\times V_s}$ é contínuo e $G_2(\{s\} \times V_u) \subset V_\rho$. Seja $(w, \chi) \in [s, s+T] \times V_u$. Dessa maneira, $0 \leqslant w - s \leqslant T$ e $G_2(s, \chi) \in V_\rho$, logo $w - s \leqslant T < t_{G_2(s,\chi)}$. Portanto, $w = s + (w - s) < t_\chi$ e

$$G_2(s + (w - s), \chi) = G_2(w, \chi) = G_2(w - s, G_2(s, \chi)).$$

Pela continuidade de $G_2|[0, T] \times V_\rho$ e $G_2|_{[0,u]\times V_u}$ e pela igualdade acima, obtemos que $G_2|[s, s+T] \times V_u$ é contínuo. Como $s < u$, então $[0, s+T] \times V_u \subset \Omega_2$ e $G_2|_{[0,s+T]\times V_u}$ é contínuo com respeito às normas de $\mathbb{R} \times C^2$ e C^2. Mas $t_1 - T < s$, isto é, $t_1 < s + T$, contrariando $t_1 = \sup M$. Portanto, $t_1 = t_0$, logo G_2 é contínua em (t, ϕ) com respeito às normas de $\mathbb{R} \times C^2$ e C^2, provando o resultado. $\square$

2.3 Aplicação

Nesta seção, considere os espaços C e C^1 com $h > 0$ e $n = 1$. Considere a equação

$$x'(t) = ax'(t + d(x(t))) + f(x(t)), \tag{2.26}$$

onde $d\colon \mathbb{R} \to (-h, 0)$ e $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e $a > 0$. Reescrevendo a equação (2.26), obtemos

$$x_t'(0) = ax_t'(d(x_t(0))) + f(x_t(0)).$$

Isso nos motiva a definir $g\colon C \times C^1 \to \mathbb{R}$ por

$$g(\phi, \psi) = a\phi(d(\psi(0))) + f(\psi(0)).$$

Daí, para uma função continuamente diferenciável $x\colon [-h, t_e) \to \mathbb{R}$, $0 < t_e \leqslant \infty$, temos

$$\begin{aligned} g(\partial x_t, x_t) &= a\partial x_t(d(x_t(0))) + f(x_t(0)) \\ &= ax'(t + d(x(t))) + f(x(t)), \end{aligned}$$

portanto, a equação (2.26) é um caso particular da equação

$$x'(t) = g(\partial x_t, x_t).$$

Definição 2.3.1. *Seja $X = \prod_{i=1}^{m} X_i$ o produto cartesiano dos conjuntos X_i, $i = 1, ..., m$. Para $x = (x_1, ..., x_m) \in X$, definimos a **projeção na k-ésima coordenada** por $pr_k(x) = x_k$.*

A próxima proposição mostra que os resultados obtidos nas duas últimas seções podem ser aplicados ao modelo descrito pela equação (2.26) que explicamos na Introdução, desde que d e f satisfaçam algumas condições.

Proposição 2.3.2 ([37], Proposição 3.1)**.** *Seja $g\colon C \times C^1 \to \mathbb{R}$ dada por*

$$g(\phi, \psi) = a\phi(d(\psi(0))) + f(\psi(0)).$$

Então:

i) g satisfaz (g0) e (g1) e $X_2 \neq \emptyset$;

ii) Se d e f forem localmente Lipschitz, então g satisfará (g2);

iii) Se d e f forem continuamente diferenciáveis, então g satisfará (g3) e (g4);

iv) Se d e f forem continuamente diferenciáveis e f' e d' forem localmente Lipschitz, então g satisfará (g5).

Demonstração. Considere a aplicação $ev\colon \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}$ dada por $ev(t,\psi) = \psi(t)$, sua restrição $ev_1 = ev|_{\mathbb{R}\times C^1}$ e as projeções $pr_1\colon C \times C^1 \to C$, $pr_2\colon C \times C^1 \to C^1$, dadas por $pr_1(\phi,\psi) = \phi$ e $pr_2(\phi,\psi) = \psi$, respectivamente. Veja que

$$g = a\, ev \circ [(d \circ ev_1(0,\cdot) \circ pr_2) \times pr_1] + f \circ ev_1(0,\cdot) \circ pr_2, \tag{2.27}$$

pois, para $(\phi,\psi) \in C \times C^1$,

$$\begin{aligned}
&(a\, ev \circ [(d \circ ev_1(0,\cdot) \circ pr_2) \times pr_1] + f \circ ev_1(0,\cdot) \circ pr_2)(\phi,\psi)\\
&= (a\, ev \circ [(d \circ ev_1(0,\cdot) \circ pr_2) \times pr_1])(\phi,\psi) + (f \circ ev_1(0,\cdot) \circ pr_2)(\phi,\psi)\\
&= aev([(d \circ ev_1(0,\cdot) \circ pr_2) \times pr_1]\,(\phi,\psi)) + f(ev_1(0,pr_2(\phi,\psi)))\\
&= aev(d(ev_1(0,pr_2(\phi,\psi))), pr_1(\phi,\psi)) + f(ev_1(0,\psi))\\
&= aev(d(ev_1(0,\psi)),\phi) + f(\psi(0))\\
&= aev(d(\psi(0)),\phi) + f(\psi(0))\\
&= a\phi(d(\psi(0))) + f(\psi(0)).
\end{aligned}$$

i) De (2.27), concluímos que g é contínua, isto é, g satisfaz (g0). Dado $\psi \in C^1$, existe $\Delta > 0$ tal que $d(ev_1(0,\psi)) = d(\psi(0)) < -\Delta$. Pela continuidade de $d \circ ev_1(0,\cdot)$, existe uma vizinhança N de ψ em C^1 tal que $d(ev_1(0,\chi)) < -\Delta$, para todo $\chi \in N$. Assim, para todo $\chi \in N$ e para todos $\phi, \phi_1 \in C$ tais que $\phi(t) = \phi_1(t)$, $t \in [-h,-\Delta]$, temos

$$g(\phi,\chi) = a\phi(d(\chi(0))) + f(\chi(0)) = a\phi_1(d(\chi(0))) + f(\chi(0)) = g(\phi_1,\chi).$$

Portanto, g satisfaz (g1). Seja $\xi \in \mathbb{R}$ e tome $\delta = d(\xi) \in (-h,0)$. Seja $\varphi\colon [-h,0] \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t) = -\frac{f(\xi)}{2\delta}t^2 + f(\xi)t + \xi$. Logo, $\varphi(0) = \xi$, $\varphi'(0) = f(\xi)$ e $\varphi'(d(\xi)) = \varphi'(\delta) = 0$. Então,

$$\varphi'(0) = f(\xi) = a\varphi'(d(\xi)) + f(\xi) = a\partial\varphi(d(\varphi(0))) + f(\varphi(0)) = g(\partial\varphi,\varphi).$$

Como $\varphi \in C^2$ e $\varphi'(0) = g(\partial\varphi,\varphi)$, então $\varphi \in C^2 \cap X_1 = X_2$, isto é, $X_2 \neq \emptyset$.
ii) Seja $\psi \in C^1$ dada. Tome $r > \|\psi\|_1$. Como d e f são localmente Lipschitz, então

$$\alpha := Lip\left(d|_{[-r,r]}\right) < \infty \text{ e } \beta := Lip\left(f|_{[-r,r]}\right) < \infty.$$

Seja $L > \alpha + \beta + 1$. Para todos $\psi_1, \psi_2 \in C^1$ tais que $\|\psi_1\|_1 < r$, $\|\psi_2\|_1 < r$ e para todos $\phi_1, \phi_2 \in C$, temos

$$\begin{aligned}
|g(\phi_2, \psi_2) - g(\phi_1, \psi_1)| &= |a(\phi_2(d(\psi_2(0))) - \phi_1(d(\psi_1(0)))) + f(\psi_2(0)) - f(\psi_1(0))| \\
&\leqslant a(|\phi_2(d(\psi_2(0))) - \phi_2(d(\psi_1(0)))| \\
&\quad + |\phi_2(d(\psi_1(0))) - \phi_1(d(\psi_1(0)))|) + |f(\psi_2(0)) - f(\psi_1(0))| \\
&\leqslant a(Lip(\phi_2)|d(\psi_2(0)) - d(\psi_1(0))| + \|\phi_2 - \phi_1\|) \\
&\quad + \beta|\psi_2(0) - \psi_1(0)| \\
&\leqslant a(Lip(\phi_2)\alpha|\psi_2(0) - \psi_1(0)| + L\|\phi_2 - \phi_1\|) + L\|\psi_2 - \psi_1\| \\
&\leqslant a(Lip(\phi_2)L\|\psi_2 - \psi_1\| + L\|\phi_2 - \phi_1\|) + L\|\psi_2 - \psi_1\| \\
&\leqslant aL(Lip(\phi_2)\|\psi_2 - \psi_1\| + \|\phi_2 - \phi_1\|) + L\|\psi_2 - \psi_1\| \\
&\leqslant ML(\|\phi_2 - \phi_1\| + (Lip(\phi_2) + 1)\|\psi_2 - \psi_1\|),
\end{aligned}$$

em que $M = \max\{a, 1\}$. Isso mostra que g satisfaz (g2).

iii) Seja $g_1 = g|_{C^1 \times C^1}$. De (2.27), temos que

$$g_1 = a\, ev_1 \circ [(d \circ ev_1(0, \cdot) \circ pr_2) \times pr_1] + f \circ ev_1(0, \cdot) \circ pr_2. \tag{2.28}$$

Seja $\widetilde{d} = d \circ ev_1(0, \cdot) \circ pr_2$ e $\widetilde{f} = f \circ ev_1(0, \cdot) \circ pr_2$. Usando a regra da cadeia e o fato que $ev_1(0, \cdot)$ e pr_2 são lineares, temos

$$D\widetilde{d}(\phi, \psi) = d'(\psi(0)) ev_1(0, \cdot) \circ pr_2 \;\text{ e }\; D\widetilde{f}(\phi, \psi) = f'(\psi(0)) ev_1(0, \cdot) \circ pr_2.$$

Usando a regra da cadeia novamente, temos que g_1 é continuamente diferenciável, com derivada dada por:

$$\begin{aligned}
Dg_1(\phi, \psi) &= D(aev_1 \circ (\widetilde{d} \times pr_1) + \widetilde{f})(\phi, \psi) \\
&= aDev_1((\widetilde{d} \times pr_1)(\phi, \psi)) \circ D(\widetilde{d} \times pr_1)(\phi, \psi) + D\widetilde{f}(\phi, \psi) \\
&= aDev_1((\widetilde{d} \times pr_1)(\phi, \psi)) \circ (D\widetilde{d}(\phi, \psi) \times Dpr_1(\phi, \psi)) + D\widetilde{f}(\phi, \psi) \\
&= aDev_1(d(\psi(0)), \phi) \circ (D\widetilde{d}(\phi, \psi) \times pr_1) + D\widetilde{f}(\phi, \psi).
\end{aligned}$$

Assim, para $(\phi, \psi), (\chi, \rho) \in C^1 \times C^1$, temos

$$\begin{aligned}
Dg_1(\phi, \psi)(\chi, \rho) &= aDev_1(d(\psi(0)), \phi)(D\widetilde{d}(\phi, \psi)(\chi, \rho), pr_1(\chi, \rho)) + D\widetilde{f}(\phi, \psi)(\chi, \rho) \\
&= aDev_1(d(\psi(0)), \phi)(d'(\psi(0))\rho(0), \chi) + f'(\psi(0))\rho(0)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ad'(\psi(0))\rho(0)\partial\phi(d(\psi(0))) + a\chi(d(\psi(0))) + f'(\psi(0))\rho(0)\\
&= ad'(ev(0,\psi))ev(0,\rho)ev(d(ev(0,\psi)),\partial\phi) + aev(d(ev(0,\psi)),\chi)\\
&\quad + f'(ev(0,\psi))ev(0,\rho).
\end{aligned}
$$

Logo, para cada $(\phi,\psi) \in C^1 \times C^1$, definimos a extensão linear $D_e g_1(\phi,\psi)\colon C\times C \to \mathbb{R}$ por:

$$
\begin{aligned}
D_e g_1(\phi,\psi)(\chi,\rho) &= ad'(ev(0,\psi))ev(0,\rho)ev(d(ev(0,\psi)),\partial\phi) + aev(d(ev(0,\psi)),\chi)\\
&\quad + f'(ev(0,\psi))ev(0,\rho).
\end{aligned}
$$

Pela definição acima e usando o fato que f e d são continuamente diferenciáveis, temos que a aplicação

$$
C^1 \times C^1 \times C \times C \ni (\phi,\psi,\chi,\rho) \mapsto D_e g_1(\phi,\psi)(\chi,\rho) \in \mathbb{R}
$$

é contínua. Isso mostra que g satisfaz (g3).

Para provar (g4), note que para $(\phi,\psi),(\phi_1,\psi_1) \in C^1\times C^1$ e $\chi \in C^1$, usando a Desigualdade do Valor Médio (Veja Apêndice A), temos

$$
\begin{aligned}
|(Dg_1(\phi,\psi) - Dg_1(\phi_1,\psi_1))(\chi,0)| &= |a(\chi(d(\psi(0))) - \chi(d(\psi_1(0))))|\\
&\leqslant a\|\partial\chi\||d(\psi(0)) - d(\psi_1(0))|\\
&\leqslant a\|\partial\chi\| \max_{\xi\leqslant\|\psi\|+\|\psi_1\|}|d'(\xi)|\|\psi-\psi_1\|\\
&= c\|\partial\chi\|\|\psi-\psi_1\|,
\end{aligned}
$$

em que $c = a\max\limits_{\xi\leqslant\|\psi\|+\|\psi_1\|}|d'(\xi)|$.

iv) Como d e f são continuamente diferenciáveis, pelo item anterior já temos que g_1 é continuamente diferenciável e que existe a extensão linear $D_e g_1(\phi,\psi)$, para todo $(\phi,\psi) \in C^1\times C^1$. Seja $r > 0$. Para todos $(\phi,\psi),(\phi_1,\psi_1) \in C^1\times C^1$, com $\|\phi_1\|_1 \leqslant r$, $\|\psi\|_1 \leqslant r$, $\|\psi_1\|_1 \leqslant r$ e para todo $(\chi,\rho) \in C\times C$, com $\|(\chi,\rho)\|_{C\times C} = 1$, temos

$$
\begin{aligned}
|(D_e g_1(\phi,\psi) - D_e g_1(\phi_1,\psi_1))(\chi,\rho)| &\leqslant a|\chi(d(\psi(0))) - \chi(d(\psi_1(0)))|\\
&+a|\partial\phi(d(\psi(0)))d'(\psi(0))\rho(0) - \partial\phi_1(d(\psi_1(0)))d'(\psi_1(0))\rho(0)|\\
&+|f'(\psi(0))\rho(0) - f'(\psi_1(0))\rho(0)|.
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

Seja $c_r = \max\limits_{-r\leqslant\xi\leqslant r}|d'(\xi)|$. Pela Desigualdade do Valor Médio (Veja Apêndice A), temos que $Lip\left(\left. d\right|_{[-r,r]}\right) \leqslant c_r$. Assim, estimando o primeiro termo da desigualdade (2.29), temos

$$\begin{aligned} a|\chi(d(\psi(0))) - \chi(d(\psi_1(0)))| &\leqslant aLip(\chi)|d(\psi(0)) - d(\psi_1(0))| \\ &\leqslant aLip(\chi)Lip\left(\left. d\right|_{[-r,r]}\right)|\psi(0) - \psi_1(0)| \\ &\leqslant aLip(\chi)c_r\|\psi - \psi_1\| \\ &\leqslant aLip(\chi)c_r(\|\phi - \phi_1\|_1 + \|\psi - \psi_1\|). \end{aligned}$$

Sejam $\lambda = Lip(d'|_{[-r,r]})$ e $\mu = Lip(f'|_{[-r,r]})$. Como $\|\rho\| \leqslant \|(\chi, \rho)\|_{C\times C} = 1$, estimando o segundo termo em (2.29), temos

$$\begin{aligned} & a|\partial\phi(d(\psi(0)))d'(\psi(0))\rho(0) - \partial\phi_1(d(\psi_1(0)))d'(\psi_1(0))\rho(0)| \\ &\leqslant a\|\rho\|\Big(|\partial\phi(d(\psi(0)))d'(\psi(0)) - \partial\phi(d(\psi_1(0)))d'(\psi(0)) \\ &\quad + \partial\phi(d(\psi_1(0)))d'(\psi(0)) - \partial\phi_1(d(\psi_1(0)))d'(\psi(0)) \\ &\quad + \partial\phi_1(d(\psi_1(0)))d'(\psi(0)) - \partial\phi_1(d(\psi_1(0)))d'(\psi_1(0))|\Big) \\ &\leqslant a|\partial\phi(d(\psi(0))) - \partial\phi(d(\psi_1(0)))||d'(\psi(0))| \\ &\quad + a|\partial\phi(d(\psi_1(0))) - \partial\phi_1(d(\psi_1(0)))||d'(\psi(0))| \\ &\quad + a|\partial\phi_1(d(\psi_1(0)))||d'(\psi(0)) - d'(\psi_1(0))| \\ &\leqslant aLip(\partial\phi)|d(\psi(0)) - d(\psi_1(0))|c_r + a\|\partial\phi - \partial\phi_1\|c_r + a\|\partial\phi_1\|\lambda|\psi(0) - \psi_1(0)| \\ &\leqslant aLip(\partial\phi)Lip(d|_{[-r,r]})|\psi(0) - \psi_1(0)|c_r + a\|\partial\phi - \partial\phi_1\|c_r + ar\lambda\|\psi - \psi_1\| \\ &\leqslant aLip(\partial\phi)\|\psi - \psi_1\|c_r^2 + a\|\partial\phi - \partial\phi_1\|c_r + ar\lambda\|\psi - \psi_1\| \\ &\leqslant (aLip(\partial\phi)c_r^2 + ac_r + ar\lambda)(\|\phi - \phi_1\|_1 + \|\psi - \psi_1\|). \end{aligned}$$

Finalmente, estimando o terceiro termo em (2.29), temos

$$\begin{aligned} |f'(\psi(0))\rho(0) - f'(\psi_1(0))\rho(0)| &\leqslant |\rho(0)|Lip\left(\left. f'\right|_{[-r,r]}\right)|\psi(0) - \psi_1(0)| \\ &\leqslant \mu\|\rho\|\|\psi - \psi_1\| \\ &\leqslant \mu(\|\phi - \phi_1\|_1 + \|\psi - \psi_1\|). \end{aligned}$$

Disto, concluímos que

$$\begin{aligned} |(D_e g_1(\phi, \psi) - D_e g_1(\phi_1, \psi_1))(\chi, \rho)| &\leqslant (\|\phi - \phi_1\|_1 + \|\psi - \psi_1\|) \\ &\quad \cdot(ac_r Lip(\chi) + ac_r^2 Lip(\partial\phi) + ac_r + ar\lambda + \mu) \\ &\leqslant (\|\phi - \phi_1\|_1 + \|\psi - \psi_1\|)(Lip(\chi) + Lip(\partial\phi) + 1)(ac_r + ac_r^2 + ar\lambda + \mu) \end{aligned}$$

$$\leqslant c(Lip(\chi) + Lip(\partial\phi) + 1)\|(\phi, \psi) - (\phi_1, \psi_1)\|_{C^1 \times C^1},$$

em que $c = ac_r + ac_r^2 + ar\lambda + \mu$. Portanto, segue que g satisfaz (g5). $\square$

Capítulo

3

Estabilidade Linearizada

Assumindo que as hipóteses (g0)-(g4), (g6) e (g7) estão satisfeitas, Walther mostra, em [38], que G_2 possui decaimento exponencial próximo do ponto de equilíbrio $0 \in X_{2*}$. Em seguida, em [38], Walther retira as hipóteses (g4) e (g7) e acrescenta duas novas hipóteses (g8) e (g9), de modo a obter um novo resultado sobre estabilidade do ponto $0 \in X_{2*}$. Posteriormente, em [6], Walther e Barbarossa substituem a hipótese (g8) por uma versão mais fraca (g8*) e mostram que o mesmo resultado de estabilidade ainda é válido.

Neste capítulo, iremos provar a estabilidade do ponto de equilíbrio $0 \in X_{2*}$. Para isso, usaremos os resultados apresentados em [39]. Na primeira seção, vamos demonstrar tal resultado. Na segunda seção, mostraremos uma classe de equações para a qual o resultado da primeira seção é válido.

3.1 Estabilidade Linearizada

Sejam $L, R \in \mathscr{L}(C, \mathbb{R}^n)$ e considere a seguinte equação

$$\frac{d}{dt}(v - L \circ \Gamma_v)(t) = Rv_t, \tag{3.1}$$

onde $\Gamma_v\colon [0, t_e) \to C$ é dada por $\Gamma_v(t) = v_t$, para alguma função contínua $v\colon [-h, t_e) \to \mathbb{R}^n$, com $0 \leqslant t_e \leqslant \infty$.

Definição 3.1.1 ([39]). *Uma **solução** da equação* (3.1) *é uma função contínua* $v\colon [-h, t_e) \to \mathbb{R}^n$ *tal que* $v - L \circ \Gamma_v$ *é diferenciável em* $[0, t_e)$ *e a equação* (3.1) *é satisfeita para* $t > 0$ *e para* $t = 0$*, com derivada lateral à direita.*

Definição 3.1.2. *Seja E um espaço de Banach. Um **semigrupo** em E é uma família de operadores lineares $\{S(t)\colon t \geqslant 0\} \subset \mathscr{L}(E, E)$ satisfazendo:*

i) $S(0) = I$*, o operador identidade em* E*;*

ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$*, para todo* $t, s \geqslant 0$*.*

*Além disso, um semigrupo $S(t)$ em E é dito **fortemente contínuo** se, para todo $x \in E$,*

$$\lim_{t \to 0^+} \|S(t)x - x\|_E = 0.$$

Sejam $L, R \in \mathscr{L}(C, \mathbb{R}^n)$ e $\chi \in C$. Então existe uma única solução $v\colon [-h, \infty) \to \mathbb{R}^n$ da equação (3.1), com $v_0 = \chi$. Essa solução $v = v^\chi$ define um semigrupo fortemente contínuo $S_{LR}(t)\colon C \to C$, $t \geqslant 0$, dado por $S_{LR}(t)\chi = v_t^\chi$ (Veja Corolário 6.2 de [38]).

Considere agora a versão não homogênea da equação (3.1):

$$\frac{d}{dt}\left(v - L \circ \Gamma_y\right)(t) = Ry_t + N(t), \tag{3.2}$$

com $L, R \in \mathscr{L}(C, \mathbb{R}^n)$, $\Gamma_y(t) = y_t$ e $N\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ contínua. Analogamente ao caso homogêneo, definimos uma solução como sendo uma função contínua $y\colon [-h, t_e) \to \mathbb{R}^n$ tal que $y - L \circ \Gamma_y$ é diferenciável em $[0, t_e)$ e a equação (3.2) é satisfeita. A próxima proposição nos dá uma estimativa uma para solução de (3.2). Um esboço da demonstração pode ser encontrado em [38, Corolário 6.3].

Proposição 3.1.3 ([39], Proposição 1.1)**.** *Sejam $L, R \in \mathscr{L}(C, \mathbb{R}^n)$, $c \geqslant 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\|S_{LR}(t)\chi\| \leqslant ce^{\alpha t}\|\chi\|, \text{ para todos } t \geqslant 0 \text{ e } \chi \in C.$$

Então, para toda solução contínua $y\colon [-h, \infty) \to \mathbb{R}^n$ de (3.2) e para todo $t \geqslant 0$, temos

$$|y(t)| \leqslant c\Big(e^{\alpha t}\|y_0\| + n\int_0^t e^{\alpha(t-s)}|N(s)|ds\Big).$$

Seja $g\colon W \subset C \times C^1 \to \mathbb{R}^n$ contínua. Suponha que $(0,0) \in W$ e que $g_1 = g|_{W_1}$, $W_1 = W \cap C^1 \times C^1$, seja diferenciável em $(0,0) \in W_1$. Definimos a aplicação $r_g\colon U_2 \to \mathbb{R}^n$, $U_2 = \{\psi \in C^2 : (\partial\psi, \psi) \in W_1\}$, por

$$r_g(\psi) = g(\partial\psi, \psi) - Dg_1(0,0)(\partial\psi, \psi).$$

Para uma solução duas vezes continuamente diferenciável $x\colon [-h, t_e) \to \mathbb{R}^n$ da equação (2.1), com $x_0 \in X_{2*}$, definimos $r_{g,x} \colon [0, t_e) \to \mathbb{R}^n$ por

$$r_{g,x}(t) = r_g(x_t) = g(\partial x_t, x_t) - Dg_1(0,0)(\partial x_t, x_t).$$

Como x é duas vezes continuamente diferenciável, pela Proposição 1.2.4, a aplicação

$$[0, t_e) \ni t \mapsto (\partial x_t, x_t) \in C^1 \times C^1$$

é contínua. Dessa maneira, pela continuidade de g e de $Dg_1(0,0)$, segue que $r_{g,x}$ é contínua. Com isso, temos a próxima proposição que relaciona a equação (2.1) com a equação não homogênea (3.2).

Proposição 3.1.4 ([39], Proposição 1.2)**.** *Suponha que $x \colon [-h, t_e) \to \mathbb{R}^n$, duas vezes continuamente diferenciável, seja solução de* (2.1) *com $x_0 \in X_{2*}$. Então x também é solução de* (3.2) *para $L = D_e g_1(0,0)(\cdot, 0)$, $R = D_e g_1(0,0)(0, \cdot)$ e $N = r_{g,x}$.*

Demonstração. Pela Proposição 1.2.4, Γ_x é diferenciável. Pela regra da cadeia, temos que $x - L \circ \Gamma_x$ é diferenciável em $[0, t_e)$, e

$$\frac{d}{dt}(x - L \circ \Gamma_x)(t) = x'(t) - L\partial x_t = x'(t) - D_e g_1(0,0)(\partial x_t, 0).$$

Como x é solução de (2.1), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(x - L \circ \Gamma_x)(t) &= g(\partial x_t, x_t) - D_e g_1(0,0)(\partial x_t, 0) \\
&= g(\partial x_t, x_t) - Dg_1(0,0)(\partial x_t, x_t) \\
&\quad + Dg_1(0,0)(\partial x_t, x_t) - Dg_1(0,0)(\partial x_t, 0) \\
&= r_{g,x}(t) + Dg_1(0,0)(0, x_t) \\
&= r_{g,x}(t) + Rx_t,
\end{aligned}$$

concluindo o resultado desejado. □

Observação 3.1.5. *Analogamente ao que foi feito na Proposição 3.1.4, podemos mostrar que qualquer solução da equação variacional*

$$v'(t) = D_e g_1(0,0)(\partial v_t, v_t),$$

ao longo da solução $x = 0$ (veja [37, Seção 7]), é também solução da equação homogênea (3.1).

Vamos relembrar as propriedades de g que serão importantes para os próximos resultados.

(g0) g é contínua.

(g1) Para todo $(\phi, \psi) \in W$, existem $\Delta \in (0, h)$ e uma vizinhança $N \subset W$ de (ϕ, ψ) em $C \times C^1$ tais que, para todos $(\phi_1, \chi), (\phi_2, \chi) \in N$ com

$$\phi_1(t) = \phi_2(t), \forall t \in [-h, -\Delta],$$

temos

$$g(\phi_1, \chi) = g(\phi_2, \chi).$$

(g2) Para todo $\phi \in U_1 \subset C^1$, existem $L \geqslant 0$ e uma vizinhança $N \subset W$ de $(\partial\phi, \phi)$ em $C \times C^1$ tais que, para todos $(\phi_1, \psi_1), (\phi_2, \psi_2) \in N$, temos

$$|g(\phi_2, \psi_2) - g(\phi_1, \psi_1)| \leqslant L(\|\phi_2 - \phi_1\| + (Lip(\phi_2) + 1)\|\psi_2 - \psi_1\|).$$

(g3) A restrição g_1 de g no aberto $W_1 = W \cap (C^1 \times C^1)$ do espaço $C^1 \times C^1$ é continuamente diferenciável, toda derivada $Dg_1(\phi, \psi) \colon C^1 \times C^1 \to \mathbb{R}^n$, para $(\phi, \psi) \in W_1$, tem uma extensão linear

$$D_e g_1(\phi, \psi) \colon C \times C \to \mathbb{R}^n,$$

e a aplicação

$$W_1 \times C \times C \ni (\phi, \psi, \chi, \rho) \mapsto D_e g_1(\phi, \psi)(\chi, \rho) \in \mathbb{R}^n$$

é contínua.

(g6) (g3) está satisfeita, $(0, 0) \in W$, $g(0, 0) = 0$ e a aplicação

$$W_1 \ni (\phi, \psi) \mapsto \|D_e g_1(\phi, \psi)(\cdot, 0)\|_{\mathscr{L}(C, \mathbb{R}^n)} \in \mathbb{R}$$

é semicontínua superiormente em $(0, 0)$.

(g8) g_1 é diferenciável, $(0, 0) \in W$, $g(0, 0) = 0$ e existem $V_0 \subset U_1 \cap C^2$ vizinhança convexa de 0 em C^2, uma constante $c > 0$, uma função contínua $\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\Delta \in (0, h)$ tais que, para todo $\psi \in V_0$, temos

$$\max_{0 \leqslant s \leqslant 1} |(Dg_1(s\partial\psi, s\psi) - Dg_1(0, 0))(\partial\psi, 0)| \leqslant c\|\partial\partial\psi\|\|\psi\| + \left(\max_{|\xi| \leqslant \|\partial\psi\|} |\alpha(\xi) - \alpha(0)|\right)\left(\max_{-h \leqslant u \leqslant -\Delta} |\psi'(u)|\right).$$

(g9) g_1 é diferenciável, $(0,0) \in W$, $g(0,0) = 0$ e existem $V_0 \subset U_1 \cap C^2$ vizinhança convexa de 0 em C^2, uma constante $c > 0$ e uma função $\zeta\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ contínua em $0 = \zeta(0)$ tais que, para todo $\psi \in V_0$, temos

$$\max_{0 \leqslant s \leqslant 1} |(Dg_1(s\partial\psi, s\psi) - Dg_1(0,0))(0,\psi)| \leqslant c \max_{0 \leqslant s \leqslant 1} \left(\zeta(\|s\psi\|_2)\|\psi\| + \|s\psi\|\|\psi\|_1\right).$$

Daqui para a frente, vamos considerar que $L = D_e g_1(0,0)(\cdot,0)$, $R = D_e g_1(0,0)(0,\cdot)$ e $S_{LR}(t) = S(t)$. Os próximos três resultados serão importantes para provar o resultado principal deste capítulo.

Proposição 3.1.6 ([39], Proposição 3.1)**.** *Suponha que $g\colon W \subset C \times C^1 \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições (g0)-(g3), (g6), (g8) e (g9). Adicionalmente, suponhamos que*

(H1) $\|L\|_{\mathscr{L}(C,\mathbb{R}^n)} = \|D_e g_1(0,0)(\cdot,0)\|_{\mathscr{L}(C,\mathbb{R}^n)} < 1$*;*

(H2) *Existem $c' \geqslant 1$ e $\alpha < 0$ tais que*

$$\|S(t)\chi\| \leqslant c' e^{\alpha t}\|\chi\|, \text{ para todos } t \geqslant 0 \text{ e } \chi \in C.$$

Então existem uma vizinhança aberta e convexa V_0 de 0 em C^2, uma vizinhança $N_1 \subset W_1$ de $(0,0)$ em $C^1 \times C^1$, $c \geqslant 1$, $q \in (0,1)$ e $\Delta \in (0,h)$ com as seguintes propriedades:

i) Para todo $\psi \in V_0$, $(\partial\psi,\psi) \in N_1$;

ii) Para todos $(\phi,\psi), (\phi_1,\psi) \in N_1$, com $\phi(t) = \phi_1(t)$, $t \in [-h,-\Delta]$, e para todos (χ,ρ) e (χ_1,ρ) em $C \times C$, com $\chi_1(t) = \chi(t)$, $t \in [-h,-\Delta]$, temos

$$D_e g_1(\phi,\psi)(\chi,\rho) = D_e g_1(\phi_1,\psi)(\chi_1,\rho).$$

iii) Para todo $t \geqslant 0$, a desigualdade

$$\|S(t)\|_{\mathscr{L}(C,C)} \leqslant c e^{\alpha t}$$

está satisfeita e, para todo $\psi \in V_0$, temos

$$\|D_e g_1(\partial\psi,\psi)\|_{\mathscr{L}(C \times C,\mathbb{R}^n)} \leqslant c.$$

iv) Para todo $\psi \in V_0$, a desigualdade

$$\|D_e g_1(\partial\psi,\psi)(\cdot,0)\|_{\mathscr{L}(C,\mathbb{R}^n)} < q$$

segue.

v) Para todo $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança $V_\epsilon \subset V_0$ de 0 em C^2 tal que, para todo $\psi \in V_\epsilon$, temos

$$|r_g(\psi)| \leqslant \epsilon \left(\|\psi\| + \max_{-h \leqslant u \leqslant -\Delta} |\psi'(u)| \right).$$

Demonstração. Pela Proposição 1.2.10, a aplicação

$$W_1 \ni (\phi, \psi) \mapsto \|D_e g_1(\phi, \psi)\|_{\mathscr{L}(C\times C), \mathbb{R}^n} \in \mathbb{R}$$

é localmente limitada. Logo, existem $N_1 \subset W_1$, vizinhança de $(0,0)$ em $C^1 \times C^1$, e $c \geqslant c'$ tais que

$$\|D_e g_1(\phi, \psi)\|_{\mathscr{L}(C\times C), \mathbb{R}^n} \leqslant c, \ \forall (\phi, \psi) \in N_1.$$

Como $c \geqslant c' \geqslant 1$, temos, por (H2), que para todo $t \geqslant 0$,

$$\|S(t)\|_{\mathscr{L}(C,C)} \leqslant ce^{\alpha t}.$$

Por outro lado, por (g6), a aplicação

$$W_1 \ni (\phi, \psi) \mapsto \|D_e g_1(\phi, \psi)(\cdot, 0)\|_{\mathscr{L}(C, \mathbb{R}^n)} \in \mathbb{R}$$

é semicontínua superiormente em $(0,0)$. De (H1), temos que

$$\|D_e g_1(0,0)(\cdot, 0)\|_{\mathscr{L}(C,\mathbb{R}^n)} < 1.$$

Logo, existem $q \in (0,1)$ e uma vizinhança $N_1' \subset W_1$ de $(0,0)$ tais que

$$\|D_e g_1(\phi, \psi)(\cdot, 0)\|_{\mathscr{L}(C,\mathbb{R}^n)} < q, \ \forall (\phi, \psi) \in N_1'.$$

Pelo Corolário 1.2.12, existem $\Delta \in (0,h)$ e uma vizinhança $N_1'' \subset W_1$ de $(0,0)$ em $C^1 \times C^1$ tais que, para todos $(\phi, \psi), (\phi_1, \psi) \in N_1''$, com $\phi(t) = \phi_1(t)$, $t \in [-h, -\Delta]$, e para todos (χ, ρ) e (χ_1, ρ) em $C \times C$, com $\chi_1(t) = \chi(t)$, $t \in [-h, -\Delta]$, temos

$$D_e g_1(\phi, \psi)(\chi, \rho) = D_e g_1(\phi_1, \psi)(\chi_1, \rho).$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que $N_1 = N_1' = N_1''$. Considere V_0 uma vizinhança aberta e convexa de 0 em C^2 tais que valham as conclusões de (g8) e (g9) para $c^* > 0$, uma função contínua $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Delta' \in (0,h)$ e uma função $\zeta\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ contínua em $0 = \zeta(0)$. Podemos assumir que $c^* = c$ e $\Delta' = \Delta$. Além disso, como $(0,0) \in N_1$, podemos supor que $(\partial\psi, \psi) \in N_1$, para todo $\psi \in V_0$. Dessa forma, mostramos que, para tais N_1, V_0, c, q e Δ, valem os itens i)-iv). Para mostrar o item v), considere $\psi \in V_0$. Como $0 \in V_0$ e V_0 é convexo, $s\psi \in V_0$, para todo $0 \leqslant s \leqslant 1$. Seja $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ dada por $\gamma(s) = g_1(s\partial\psi, s\psi)$. Temos que γ é diferenciável, com derivada

$$\gamma'(s) = Dg_1(s\partial\psi, s\psi)(\partial\psi, \psi).$$

Assim, como $g(0,0) = 0$, temos

$$\begin{aligned}
r_g(\psi) &= g(\partial\psi, \psi) - Dg_1(0,0)(\partial\psi, \psi) \\
&= g(\partial\psi, \psi) - g(0,0) - Dg_1(0,0)(\partial\psi, \psi) \\
&= \gamma(1) - \gamma(0) - Dg_1(0,0)(\partial\psi, \psi) \\
&= \int_0^1 \gamma'(s)ds - \int_0^1 Dg_1(0,0)(\partial\psi, \psi)ds \\
&= \int_0^1 Dg_1(s\partial\psi, s\psi)(\partial\psi, \psi)ds - \int_0^1 Dg_1(0,0)(\partial\psi, \psi)ds \\
&= \int_0^1 \big(Dg_1(s\partial\psi, s\psi) - Dg_1(0,0)\big)(\partial\psi, \psi)ds \\
&= \int_0^1 \big(Dg_1(s\partial\psi, s\psi) - Dg_1(0,0)\big)(\partial\psi, 0)ds \\
&\quad + \int_0^1 \big(Dg_1(s\partial\psi, s\psi) - Dg_1(0,0)\big)(0, \psi)ds.
\end{aligned}$$

Da igualdade acima e, por (g8) e (g9), obtemos

$$\begin{aligned}
|r_g(\psi)| &\leqslant \left|\int_0^1 \big(Dg_1(s\partial\psi, s\psi) - Dg_1(0,0)\big)(\partial\psi, 0)ds\right| \\
&\quad + \left|\int_0^1 \big(Dg_1(s\partial\psi, s\psi) - Dg_1(0,0)\big)(0, \psi)ds\right| \\
&\leqslant \int_0^1 \left|\big(Dg_1(s\partial\psi, s\psi) - Dg_1(0,0)\big)(\partial\psi, 0)\right| ds \\
&\quad + \int_0^1 \left|\big(Dg_1(s\partial\psi, s\psi) - Dg_1(0,0)\big)(0, \psi)\right| ds \\
&\leqslant \max_{0\leqslant s\leqslant 1} \left|\big(Dg_1(s\partial\psi, s\psi) - Dg_1(0,0)\big)(\partial\psi, 0)\right| \\
&\quad + \max_{0\leqslant s\leqslant 1} \left|\big(Dg_1(s\partial\psi, s\psi) - Dg_1(0,0)\big)(0, \psi)\right| \\
&\leqslant c\|\partial\partial\psi\|\|\psi\| + \left(\max_{|\xi|\leqslant\|\partial\psi\|} |\alpha(\xi) - \alpha(0)|\right)\left(\max_{-h\leqslant u\leqslant -\Delta} |\psi'(u)|\right) \\
&\quad + c \max_{0\leqslant s\leqslant 1} \left(\zeta(\|s\psi\|_2)\|\psi\| + \|s\psi\|\|\psi\|_1\right)
\end{aligned}$$

$$\leqslant \left(c\|\partial\partial\psi\| + c \max_{0\leqslant s\leqslant 1} \zeta(\|s\psi\|_2) + \|\psi\|_1 \right) \|\psi\|$$
$$+ \left(\max_{|\xi|\leqslant\|\partial\psi\|} |\alpha(\xi) - \alpha(0)| \right) \left(\max_{-h\leqslant u\leqslant -\Delta} |\psi'(u)| \right).$$

Dado $\epsilon > 0$, pela continuidade de α e de ζ em $0 = \zeta(0)$, existe $V_\epsilon \subset V_0$, vizinhança de 0 em C^2, tal que, para todo $\psi \in V_\epsilon$, temos

$$\left(c\|\partial\partial\psi\| + c \max_{0\leqslant s\leqslant 1} \zeta(\|s\psi\|_2) + \|\psi\|_1 \right) < \epsilon$$

e

$$\max_{|\xi|\leqslant\|\partial\psi\|} |\alpha(\xi) - \alpha(0)| < \epsilon.$$

Portanto, para todo $\psi \in V_\epsilon$, obtemos

$$|r_g(\psi)| \leqslant \epsilon \left(\|\psi\| + \max_{-h\leqslant u\leqslant -\Delta} |\psi'(u)| \right),$$

como queríamos demonstrar. □

Proposição 3.1.7 ([39], Proposição 4.1)**.** *Suponha que as hipóteses da Proposição 3.1.6 estejam satisfeitas e considere V_0, c, q e Δ de acordo com tal proposição. Seja*

$$\beta = \frac{\log(q)}{2h} < 0.$$

Seja $\epsilon > 0$ tal que

$$\|D_e g_1(0,0)(\cdot,0)\|_{\mathscr{L}(C,\mathbb{R}^n)} + \epsilon < q,$$

e $\eta > 0$ e $\xi > 0$ dados. Considere $x\colon [-h, t_e) \to \mathbb{R}^n$ a solução da equação (2.1), com $x_0 \in X_{2*}$. Para $t_0 \in (0, t_e)$, suponhamos que

$$\|\partial x_0\| \leqslant \eta,\ x_t \in V_\epsilon \text{ para } t \in [0, t_0],$$

e

$$|x(t)| \leqslant \xi \text{ para } t \in [-h, t_0].$$

Então, temos

$$|x'(t)| \leqslant \left(\frac{1}{q} + \frac{c+\epsilon}{q(1-q)} + \frac{c+\epsilon}{1-q} \right) \left(e^{\beta t}(\eta + \xi) + \max_{\frac{t}{2}\leqslant s\leqslant t} |x(s)| \right) \tag{3.3}$$

e

$$|x''(t)| \leqslant \left(\frac{1}{q} + \frac{c}{q(1-q)} + \frac{c}{1-q}\right)\left(e^{\beta t}\big(\|\partial\partial x_0\| + \max_{-h\leqslant s\leqslant t}|x'(s)|\big) + \max_{\frac{t}{2}\leqslant s\leqslant t}|x'(s)|\right), \tag{3.4}$$

para todo $t \in (0, t_0]$.

Demonstração. Considere a extensão de x, de modo que tal extensão seja duas vezes continuamente diferenciável em $(-\infty, t_e)$. Seja $t \in (0, t_0]$. Logo,

$$\begin{aligned} x'(t) = g(\partial x_t, x_t) &= \Big(g(\partial x_t, x_t) - D_e g_1(0,0)(\partial x_t, x_t)\Big) + D_e g_1(0,0)(\partial x_t, x_t) \\ &= r_g(x_t) + D_e g_1(0,0)(\partial x_t, 0) + D_e g_1(0,0)(0, x_t). \end{aligned}$$

Para $u \in [-h, -\Delta]$, temos

$$\partial x_t(u) = x'(u+t)$$

e

$$\begin{aligned} \partial((x_{t-\Delta})^d)_\Delta(u) &= \partial(x_{t-\Delta})^d(u+\Delta) \\ &= \partial x_{t-\Delta}(u+\Delta) \\ &= (x_{t-\Delta})'(u+\Delta) \\ &= x'(u+\Delta+t-\Delta) \\ &= x'(u+t), \end{aligned}$$

pois $u + \Delta \leqslant 0$. Pelo item ii) da Proposição 3.1.6,

$$D_e g_1(0,0)(\partial x_t, 0) = D_e g_1(0,0)(\partial((x_{t-\Delta})^d)_\Delta, 0),$$

logo,

$$x'(t) = D_e g_1(0,0)(\partial((x_{t-\Delta})^d)_\Delta, 0) + r_g(x_t) + D_e g_1(0,0)(0, x_t). \tag{3.5}$$

Pelo item iv) da Proposição 3.1.6 e pela Proposição 1.2.8, obtemos

$$\begin{aligned} |D_e g_1(0,0)(\partial((x_{t-\Delta})^d)_\Delta, 0)| &\leqslant \|D_e g_1(0,0)(\cdot,0)\|_{\mathscr{L}(C,\mathbb{R}^n)}\|\partial((x_{t-\Delta})^d)_\Delta\| \\ &\leqslant \|D_e g_1(0,0)(\cdot,0)\|_{\mathscr{L}(C,\mathbb{R}^n)} \max_{\Delta-h\leqslant u\leqslant 0}|(x_{t-\Delta})'(u)| \\ &= \|D_e g_1(0,0)(\cdot,0)\|_{\mathscr{L}(C,\mathbb{R}^n)} \max_{\Delta-h\leqslant u\leqslant 0}|x'(t-\Delta+u)| \\ &= \|D_e g_1(0,0)(\cdot,0)\|_{\mathscr{L}(C,\mathbb{R}^n)} \max_{-h\leqslant u\leqslant -\Delta}|x'(t+u)|. \end{aligned}$$

Como $x_t \in V_\epsilon$, pelos itens iii) e v) da Proposição 3.1.6, temos

$$|r_g(x_t)| + |D_e g_1(0,0)(0,x_t)| \leqslant \epsilon \left(\|x_t\| + \max_{-h \leqslant u \leqslant -\Delta} |x'(t+u)| \right) + c\|x_t\|.$$

Portanto, de (3.5), das duas desigualdades acima e pela hipótese sobre ϵ, obtemos

$$\begin{aligned}
|x'(t)| &\leqslant \Big(\|D_e g_1(0,0)(\cdot,0)\|_{\mathscr{L}(C,\mathbb{R}^n)} + \epsilon \Big) \max_{-h \leqslant u \leqslant -\Delta} |x'(t+u)| + (c+\epsilon)\|x_t\| \\
&\leqslant q \max_{-h \leqslant u \leqslant -\Delta} |x'(t+u)| + (c+\epsilon)\|x_t\| \\
&= q|x'(t_1)| + (c+\epsilon)\|x_t\|,
\end{aligned}$$

para algum $t_1 \in [t-h, t-\Delta]$. Se $t_1 > 0$, podemos repetir o que foi feito acima, com t_1 no lugar de t, e obter $t_2 \in [t_1 - h, t_t - \Delta]$ tal que

$$|x'(t_1)| \leqslant q|x'(t_2)| + (c+\epsilon)\|x_{t_1}\|,$$

Dessa maneira, obtemos uma sequência finita estritamente decrescente

$$t_0 = t > t_1 > t_2 > ... > t_{m-1} > t_m,$$

tal que $m \geqslant 1$, $t_{m-1} \notin [-h, 0]$, $t_m \in [-h, 0]$ e

$$t_{j+1} \in [t_j - h, t_j - \Delta],\ |x'(t_j)| \leqslant q|x'(t_{j+1})| + (c+\epsilon)\|x_{t_j}\|,\ j \in \{0, 1, ..., m-1\}.$$

Assim, como $t_m \in [-h, 0]$, temos

$$\begin{aligned}
|x'(t)| = |x'(t_0)| &\leqslant q|x'(t_1)| + (c+\epsilon)\|x_{t_0}\| \\
&\leqslant q\Big(q|x'(t_2)| + (c+\epsilon)\|x_{t_1}\|\Big) + (c+\epsilon)\|x_{t_0}\| \\
&= q^2|x'(t_2)| + (c+\epsilon)\sum_{j=0}^{1} q^j \|x_{t_j}\| \\
&\leqslant \qquad\qquad\quad . \\
&\leqslant \qquad\qquad\quad . \\
&\leqslant \qquad\qquad\quad . \\
&\leqslant q^m|x'(t_m)| + (c+\epsilon)\sum_{j=0}^{m-1} q^j \|x_{t_j}\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant q^m\eta + (c+\epsilon)\sum_{j\in J} q^j\|x_{t_j}\| + (c+\epsilon)\sum_{j\in J'} q^j\|x_{t_j}\| \\
&\leqslant q^m\eta + (c+\epsilon)\sum_{j\in J} q^j\|x_{t_j}\| + (c+\epsilon)\xi\sum_{j\in J'} q^j, \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

em que $J = \{j \in \mathbb{N}\cap[0, m-1] : t_j - h > \frac{t}{2}\}$ e $J' = \{j \in \mathbb{N}\cap[0, m-1] : t_j - h \leqslant \frac{t}{2}\}$. Para $j \in J$, temos $\frac{t}{2} < t_j - h < t_j \leqslant t$, logo

$$\|x_{t_j}\| = \max_{-h\leqslant u\leqslant 0} |x(t_j+u)| = \max_{t_j-h\leqslant s\leqslant t_j} |x(s)| \leqslant \max_{\frac{t}{2}\leqslant s\leqslant t} |x(s)|.$$

Daí como $|q| < 1$, temos

$$\sum_{j\in J} q^j\|x_{t_j}\| \leqslant \max_{\frac{t}{2}\leqslant s\leqslant t}|x(s)|\sum_{j\in J} q^j \leqslant \max_{\frac{t}{2}\leqslant s\leqslant t}|x(s)|\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \max_{\frac{t}{2}\leqslant s\leqslant t}|x(s)|\frac{1}{1-q}. \qquad (3.7)$$

Por outro lado, sendo $j_t = \min J'$, temos

$$\sum_{j\in J'} q^j \leqslant \sum_{j=j_t}^{\infty} q^j = \frac{q^{j_t}}{1-q}. \qquad (3.8)$$

Para $j \in J'$, temos

$$\begin{aligned}
t-h-jh &\leqslant t_1 - jh \\
&= t_1 - h - (j-1)h \\
&\leqslant t_2 - (j-1)h \\
&= t_2 - h - (j-2)h \\
&\leqslant \quad\quad . \\
&\leqslant \quad\quad . \\
&\leqslant \quad\quad . \\
&\leqslant t_j - h - (j-j)h \\
&= t_j - h \leqslant \frac{t}{2},
\end{aligned}$$

e, em particular, para $j = j_t$, temos

$$\frac{t}{2} - h \leqslant j_t h,$$

logo,

$$\frac{t}{2h} - 1 \leqslant j_t.$$

Multiplicando por $\log(q) < 0$ (pois $0 < q < 1$), obtemos

$$\log(q)\left(\frac{t}{2h} - 1\right) \geqslant \log(q) j_t = \log(q^{j_t}),$$

ou ainda,

$$\beta t - \log(q) \geqslant \log(q^{j_t}),$$

onde $\beta = \frac{\log(q)}{2h}$. Com isto, temos a seguinte desigualdade

$$q^{j_t} \leqslant \frac{e^{\beta t}}{q}. \tag{3.9}$$

Pelas desigualdades (3.6), (3.7), (3.8) e (3.9), obtemos

$$|x'(t)| \leqslant q^m \eta + \frac{c+\epsilon}{1-q} \max_{\frac{t}{2} \leqslant s \leqslant t} |x(s)| + \frac{c+\epsilon}{q(1-q)} \xi e^{\beta t}.$$

Como $j_t \leqslant m$ e $q \in (0,1)$, então $q^m \leqslant q^{j_t}$. Logo

$$\begin{aligned} |x'(t)| &\leqslant \frac{1}{q} \eta e^{\beta t} + \frac{c+\epsilon}{1-q} \max_{\frac{t}{2} \leqslant s \leqslant t} |x(s)| + \frac{c+\epsilon}{q(1-q)} \xi e^{\beta t} \\ &\leqslant \left(\frac{1}{q} + \frac{c+\epsilon}{1-q} + \frac{c+\epsilon}{q(1-q)}\right)\left((\eta + \xi) e^{\beta t} + \max_{\frac{t}{2} \leqslant s \leqslant t} |x(s)|\right), \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração da desigualdade (3.3).

Por outro lado, como $x_t \in X_{2*}$, repetindo o argumento de forma análoga ao que foi feito acima, obtemos

$$\begin{aligned} |x''(t)| &= |D_e g_1(\partial x_t . x_t)(\partial\partial x_t, \partial x_t)| \\ &\leqslant |D_e g_1(\partial x_t . x_t)(\partial\partial x_t, 0)| + |D_e g_1(\partial x_t . x_t)(0, \partial x_t)| \\ &= |D_e g_1(\partial x_t . x_t)(\partial\partial((x_{t-\Delta})^d)_\Delta, 0)| + |D_e g_1(\partial x_t . x_t)(0, \partial x_t)| \\ &\leqslant q \max_{t-h \leqslant s \leqslant t-\Delta} |x''(s)| + c\|\partial x_t\|. \end{aligned}$$

Repetindo o argumento acima, obtemos desigualdades análogas às desigualdades

(3.6), (3.7) e (3.8) e, consequentemente, temos

$$|x''(t)| \leqslant \frac{1}{q}\|\partial\partial x_0\|e^{\beta t} + \frac{c}{1-q}\max_{\frac{t}{2}\leqslant s\leqslant t}|x'(s)| + \frac{c}{q(1-q)}e^{\beta t}\max_{-h\leqslant s\leqslant t}|x'(s)|,$$

concluindo a demonstração de (3.4). □

Corolário 3.1.8 ([39], Corolário 4.2)**.** *Suponha que as hipóteses da Proposição 3.1.7 estejam satisfeitas e considere ϵ, η, ξ e x e t_0 de acordo com tal proposição. Seja*

$$c_\epsilon = \frac{1}{q} + \frac{c+\epsilon}{q(1-q)} + \frac{c+\epsilon}{1-q}.$$

Então

$$|x(t)| \leqslant ce^{\alpha t}\|x_0\| + nc\epsilon\int_0^t e^{\alpha(t-s)}\left(\|x_s\| + c_\epsilon\left(e^{\beta(s-h)}(\eta+\xi) + \max_{\frac{s-h}{2}\leqslant u\leqslant s}|x(u)|\right)\right)ds,$$

para todo $t \in [0, t_0]$.

Demonstração. Seja $t \in [0, t_0]$. Pela Proposição 3.1.4, x é solução da equação (3.2). Logo pela Proposição 3.1.3, temos

$$|x(t)| \leqslant c\left(e^{\alpha t}\|x_0\| + n\int_0^t e^{\alpha(t-s)}|r_{g,x}(s)|ds\right). \tag{3.10}$$

Pelo item v) da Proposição 3.1.6, como $x_s \in V_\epsilon$, para todo $s \in [0, t_0]$, temos que, para $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant t_0$,

$$|r_{g,x}(s)| = |r_g(x_s)| \leqslant \epsilon\left(\|x_s\| + \max_{-h\leqslant u\leqslant 0}|x_s'(u)|\right) = \epsilon\left(\|x_s\| + \max_{-h\leqslant u\leqslant 0}|x'(s+u)|\right).$$

Sejam $u \in [-h, 0]$ e $s \in [0, t]$. Se $0 < s+u$, então $0 < s+u \leqslant t_0$. Logo pela desigualdade (3.3) da Proposição 3.1.7 e como $\beta = \frac{\log(q)}{2h} < 0$, obtemos

$$\begin{aligned}|x'(s+u)| &\leqslant c_\epsilon\left(e^{\beta(s+u)}(\eta+\xi) + \max_{\frac{s+u}{2}\leqslant v\leqslant s+u}|x(v)|\right)\\ &\leqslant c_\epsilon\left(e^{\beta(s-h)}(\eta+\xi) + \max_{\frac{s-h}{2}\leqslant v\leqslant s}|x(v)|\right).\end{aligned}$$

Se $s+u \leqslant 0$, então $s-h \leqslant s+u \leqslant 0$ e $|x'(s+u)| \leqslant \|\partial x_0\| \leqslant \eta$. Como $c_\epsilon \geqslant 1$ e

$\beta(s-h) \geqslant 0$, então $c_\epsilon e^{\beta(s-h)} \geqslant 1$. Portanto,

$$|x'(s+u)| \leqslant \eta \leqslant c_\epsilon e^{\beta(s-h)}\eta \leqslant c_\epsilon \left(e^{\beta(s-h)}(\eta+\xi) + \max_{\frac{s-h}{2}\leqslant v\leqslant s} |x(v)| \right).$$

Dessa forma, para todo $0 \leqslant s \leqslant t$, temos

$$\begin{aligned} |r_{g,x}(s)| &\leqslant \epsilon \left(\|x_s\| + \max_{-h\leqslant u\leqslant 0} |x'(s+u)| \right) \\ &\leqslant \epsilon \left(\|x_s\| + c_\epsilon \left(e^{\beta(s-h)}(\eta+\xi) + \max_{\frac{s-h}{2}\leqslant v\leqslant s} |x(v)| \right) \right). \end{aligned}$$

Pela desigualdade (3.10) e pela estimativa para $|r_{g,x}(s)|$ acima, concluímos a demonstração. □

Definição 3.1.9. *Uma **solução estacionária** da equação* (2.1) *é uma solução* $x\colon [-h,\infty) \to \mathbb{R}^n$ *da equação* (2.1) *que é constante. Esta solução é dita **estável** para* G_2 *se, para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que, se* $\psi \in X_{2*}$ *com* $\|\psi - x_0\|_2 < \delta$, *então* $\|G_2(t,\psi) - G_2(t,x_0)\|_2 < \epsilon$, *para todo* $t \in [0, t_\psi)$.

O próximo teorema, que é o resultado principal deste capítulo, mostra que a solução estacionária $0 \in X_{2*}$ é estável.

Teorema 3.1.10 ([39], Teorema 1.3)**.** *Suponha que* $g\colon W \subset C \times C^1 \to \mathbb{R}^n$, $W \subset C \times C^1$ *aberto, satisfaz (g0)-(g3), (g6), (g8), (g9), (H1) e (H2). Então:*

i) Para todo $\rho > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que, para todo* $\psi \in X_{2*}$ *com* $\|\psi\|_2 < \delta$, *temos* $t_\psi = \infty$ *e*

$$\|G_2(t,\psi)\|_2 < \rho,$$

para todo $t \geqslant 0$.

ii) Existe $\delta_a > 0$ *tal que, para todo* $\psi \in X_{2*}$ *com* $\|\psi\|_2 < \delta_a$, *temos* $t_\psi = \infty$ *e*

$$\lim_{t\to\infty} \|G_2(t,\psi)\|_2 = 0.$$

Demonstração. i) Vamos demonstrar este item a partir de duas afirmações.
Afirmação 1. ([39], Proposição 5.1). Para todo $\rho > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para toda solução $x\colon [-h, t_e)$ da equação (2.1) com $x_0 \in X_{2*}$ e $\|x_0\|_2 < \delta$, temos $\|x_t\|_2 < \rho$, para todo $t \in [0, t_e)$.

Considere V_0, c e q, garantidos pela Proposição 3.1.6, e

$$\beta = \frac{\log(q)}{2h} \text{ e } c_\epsilon = \frac{1}{q} + \frac{c+\epsilon}{q(1-q)} + \frac{c+\epsilon}{1-q}, \text{ para } \epsilon > 0.$$

Ponha

$$\omega = c_\epsilon e^{-\beta h} + 1.$$

Tome $\epsilon > 0$ tal que

$$\|D_e g_1(0,0)(\cdot,0)\|_{\mathscr{L}(C,\mathbb{R}^n)} + \epsilon < q,$$

$$\frac{2nc\omega\epsilon}{-\alpha} < 1 \text{ e } nc\omega\epsilon < 1.$$

Seja $V_\epsilon \subset V_0$, de acordo com o item v) da Proposição 3.1.6, e $\rho_\epsilon > 0$ tal que, se $\psi \in C^2$, com $\|\psi\|_2 < \rho_\epsilon$, então $\psi \in V_\epsilon$. Seja $\rho \in (0, \rho_\epsilon)$ dado. Tome $\delta_0, \zeta \in (0, \frac{\rho}{3})$ tais que

$$\left(\frac{1}{q} + \frac{c}{q(1-q)} + \frac{c}{1-q}\right)(\delta_0 + 2\zeta) < \frac{\rho}{3}. \tag{3.11}$$

Tome $\xi \in (0, \frac{\rho}{3})$ tal que $c_\epsilon 2\xi < \zeta$. Finalmente, tome η e δ_* em $(0, \frac{\rho}{3})$ tais que

$$\eta < \zeta \text{ e } c_\epsilon(\eta + 2\xi) < \zeta, \tag{3.12}$$

$$\delta_* < \xi \text{ e } \left(\frac{1}{1 - \frac{2nc\omega\epsilon}{-\alpha}}\right)\left(c\delta_* + \frac{nc\omega\epsilon}{-\alpha}\eta\right) < \xi. \tag{3.13}$$

Seja $x\colon [-h, t_e) \to \mathbb{R}^n$ solução da equação (2.1) com $x_0 \in X_{2*}$ e

$$\|x_0\| \leqslant \delta_*,\ \|\partial x_0\| \leqslant \eta,\ \|\partial\partial x_0\| \leqslant \delta_0.$$

Queremos mostrar que $\|x_t\|_2 < \rho$, para todo $t \in [0, t_e)$. Note que

$$\|x_0\|_2 = \|x_0\| + \|\partial x_0\| + \|\partial\partial x_0\| < \delta_* + \eta + \delta_0 < \frac{\rho}{3} + \frac{\rho}{3} + \frac{\rho}{3} = \rho < \rho_\epsilon.$$

Por contradição, suponhamos que existe $t \in (0, t_e)$ tal que $\|x_t\|_2 \geqslant \rho$. Pela continuidade da aplicação $[0, t_e) \ni t \mapsto \|x_t\|_2 \in \mathbb{R}$, existe $t^* \in (0, t_e)$ tal que $\|x_t\| < \rho$, para $t \in [0, t^*)$, e

$$\|x_{t^*}\|_2 = \rho.$$

Se mostrássemos que $|x(t)| < \xi$, $|x'(t)| < \zeta$ e $|x''(t)| < \frac{\rho}{3}$, para $t \in [-h, t^*]$, então teríamos

$$\|x_{t^*}\|_2 < \xi + \eta + \frac{\rho}{3} < \frac{\rho}{3} + \frac{\rho}{3} + \frac{\rho}{3} = \rho,$$

uma contradição. Logo $\|x_t\|_2 < \rho$, para todo $t \in [0, t_e)$, necessitando apenas tomar $\delta = \min\{\delta_*, \eta, \delta_0\}$ para concluir a demonstração.

Note que $|x(t)| \leqslant \|x_0\| \leqslant \delta_* < \xi$, para $t \in [-h, 0]$. Suponhamos que exista $t \in (0, t^*]$ tal que $|x(t)| \geqslant \xi$. Logo, existe $t_0 \in (0, t^*]$ tal que $|x(t)| < \xi$, para $t \in [-h, t_0)$ e $|x(t_0)| = \xi$. Note que $[0, t_0] \subset [0, t_*]$, logo, $\|x_t\|_2 \leqslant \rho < \rho_\epsilon$, para $t \in [0, t_0]$. Portanto, $x_t \in V_\epsilon$, $|x(t)| \leqslant \xi$, para $t \in [-h, t_0]$ e $\|\partial x_0\| \leqslant \eta$. Logo, pelo Corolário 3.1.8,

$$\begin{aligned}
\xi &= |x(t_0)| \\
&\leqslant ce^{\alpha t_0}\|x_0\| + nc\epsilon \int_0^{t_0} e^{\alpha(t_0 - s)} \left(\|x_s\| + c_\epsilon \left(e^{\beta(s-h)}(\eta + \xi) + \max_{\frac{s-h}{2} \leqslant u \leqslant s} |x(u)| \right) \right) ds \\
&\leqslant c\delta_* + nc\epsilon \int_0^{t_0} e^{\alpha(t_0 - s)} \left(\xi + c_\epsilon \left(e^{\beta(s-h)}(\eta + \xi) + \xi \right) \right) ds.
\end{aligned}$$

Como $\beta < 0$, $\beta(s - h) \leqslant -\beta h$, para $s \in [0, t_0]$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\xi &\leqslant c\delta_* + nc\epsilon \int_0^{t_0} e^{\alpha(t_0 - s)} \left(\xi + c_\epsilon \left(e^{-\beta h}(\eta + \xi) + \xi \right) \right) ds \\
&= c\delta_* + nc\epsilon \left(\xi + c_\epsilon \left(e^{-\beta h}(\eta + \xi) + \xi \right) \right) \int_0^{t_0} e^{\alpha(t_0 - s)} ds \\
&= c\delta_* + nc\epsilon \left(\xi + c_\epsilon \left(e^{-\beta h}(\eta + \xi) + \xi \right) \right) \left(\frac{1}{-\alpha} - \frac{e^{\alpha t_0}}{-\alpha} \right) \\
&\leqslant c\delta_* + nc\epsilon \left(\xi + c_\epsilon \left(e^{-\beta h}(\eta + \xi) + \xi \right) \right) \left(\frac{1}{-\alpha} \right) \\
&= c\delta_* + \frac{ncc_\epsilon e^{-\beta h}\epsilon}{-\alpha}\eta + \frac{nc\omega\epsilon}{-\alpha}\xi + \frac{nc\epsilon}{-\alpha}\xi \\
&\leqslant c\delta_* + \frac{nc(c_\epsilon e^{-\beta h} + 1)\epsilon}{-\alpha}\eta + \frac{nc\omega\epsilon}{-\alpha}\xi + \frac{nc\omega\epsilon}{-\alpha}\xi,
\end{aligned}$$

o que implica em

$$\xi - \frac{2nc\omega\epsilon}{-\alpha}\xi \leqslant c\delta_* + \frac{nc(c_\epsilon e^{-\beta h} + 1)\epsilon}{-\alpha}\eta,$$

ou ainda,

$$\left(1 - \frac{2nc\omega\epsilon}{-\alpha}\right)\xi \leqslant c\delta_* + \frac{nc(c_\epsilon e^{-\beta h} + 1)\epsilon}{-\alpha}\eta.$$

Consequentemente,

$$\xi \leqslant \left(\frac{1}{1 - \frac{2nc\omega\epsilon}{-\alpha}} \right) \left(c\delta_* + \frac{nc\omega\epsilon}{-\alpha}\eta \right),$$

contrariando (3.13). Portanto, $|x(t)| < \xi$, para $t \in [-h, t^*]$.

Agora, temos $\|\partial x_0\| \leqslant \eta < \zeta$. Por contradição, suponhamos que $\zeta \leqslant |x'(t)|$, para algum $t \in (0, t^*]$. Então, existe $t_0 \in (0, t^*]$ tal que $|x'(t)| < \zeta$, para $t \in [0, t_0)$ e $x'(t_0) = \zeta$. Pela desigualdade (3.3) da Proposição 3.1.7, temos

$$\zeta = x'(t_0) \leqslant c_\epsilon(\eta + \xi + \xi) = c_\epsilon(\eta + 2\xi),$$

contrariando (3.12). Portanto $|x'(t)| < \zeta$, para $t \in [-h, t^*]$.

Finalmente, temos $\|\partial\partial x_0\| \leqslant \delta_0 < \frac{\rho}{3}$. Por contradição, suponhamos que $\frac{\rho}{3} \leqslant |x''(t)|$, para algum $t \in (0, t^*]$. Então, existe $t_0 \in (0, t^*]$ tal que $|x''(t)| < \frac{\rho}{3}$, para $t \in [0, t_0)$ e $x''(t_0) = \frac{\rho}{3}$. Pela desigualdade (3.4) da Proposição 3.1.7, temos

$$\frac{\rho}{3} = x''(t_0) \leqslant \left(\frac{1}{q} + \frac{c}{q(1-q)} + \frac{1}{1-q}\right)(e^{\beta t_0}(\delta_0 + \zeta) + \zeta).$$

Como $e^{\beta t_0} \leqslant 1$, obtemos

$$\frac{\rho}{3} \leqslant \left(\frac{1}{q} + \frac{c}{q(1-q)} + \frac{1}{1-q}\right)(\delta_0 + 2\zeta),$$

contrariando (3.11). Portanto, $|x''(t)| < \frac{\rho}{3}$, para $t \in [-h, t^*]$, concluindo a demonstração da Afirmação 1.

Afirmação 2. ([39], Proposição 5.2). Existe $\delta > 0$ tal que $t_\psi = \infty$, para todo $\psi \in X_{2*}$, com $\|\psi\|_2 < \delta$.

Seja $\rho_1 > 0$ tal que, para todos $\phi, \psi \in C^1$ com $\|\phi\|_1 \leqslant (2 + \Delta)\rho_1$ e $\|\psi\|_1 \leqslant \rho_1$, temos

$$(\phi, \psi) \in N_1.$$

Seja $\rho_2 > 0$ tal que, para todos $\phi \in C$, $\psi \in C^1$, com $\|\phi\| \leqslant \rho_2$ e $\|\psi\|_1 \leqslant \rho_2$, temos

$$(\phi, \psi) \in W.$$

Ponha $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\} > 0$. Seja $\delta(\rho) = \delta > 0$, garantido pela Afirmação 1. Seja $\psi \in X_{2*}$ tal que $\|\psi\|_2 < \delta$. Queremos mostrar que $t_\psi = \infty$. Por contradição, suponhamos que $t_\psi < \infty$. Pela Afirmação 1, para $x = x^\psi$, temos:

$$\|x_t\|_2 \leqslant \rho, \ \forall t \in [0, t_\psi). \tag{3.14}$$

Logo,

$$\sup_{-h\leqslant s<t_\psi} |x'(s)| \leqslant \rho \;\text{ e }\; \sup_{-h\leqslant s<t_\psi} |x''(s)| \leqslant \rho,$$

ou seja, x e x' são Lipschitzianas e, em particular, são uniformemente contínuas em $[-h, t_\psi)$. Sejam y e z as extensões contínuas de x e x' em $[-h, t_\psi]$, respectivamente. Daí, temos

$$\lim_{t_\psi\neq t\to t_\psi} y'(t) = \lim_{t_\psi\neq t\to t_\psi} x'(t) = z(t_\psi).$$

Pela continuidade de y em t_ψ, temos que $y'(t_\psi) = z(t_\psi)$. Assim, temos que $y' = z$. Logo, y é continuamente diferenciável. Por (3.14), temos

$$\|\partial y_{t_\psi}\| \leqslant \rho \;\text{ e }\; \|y_{t_\psi}\|_1 \leqslant \rho,$$

logo, pela escolha de ρ, $(\partial y_{t_\psi}, y_{t_\psi}) \in W$. Pela continuidade de g e da aplicação $[0, t_\psi] \ni t \mapsto y_t \in C^1$, obtemos

$$y'(t_\psi) = \lim_{t_\psi\neq t\to t_\psi} y'(t) = \lim_{t_\psi\neq t\to t_\psi} g(\partial y_t, y_t) = g(\partial y_{t_\psi}, y_{t_\psi}).$$

Considere x estendida a uma função duas vezes continuamente diferenciável em $(-\infty, t_\psi)$. Pela Proposição 1.2.8, temos que, para $0 \leqslant t < t_\psi$,

$$\begin{aligned}
\|\partial((x_{t-\Delta})^{dd})_\Delta\|_1 &= \|\partial\partial((x_{t-\Delta})^{dd})_\Delta\| + \|\partial((x_{t-\Delta})^{dd})_\Delta\| \\
&\leqslant \max_{\Delta-h\leqslant u\leqslant 0} |x''_{t-\Delta}(u)| + \max_{\Delta-h\leqslant u\leqslant 0} |x'_{t-\Delta}(u)| + \Delta|x''_{t-\Delta}(0)| \\
&= \max_{t-h\leqslant u\leqslant t-\Delta} |x''(u)| + \max_{t-h\leqslant u\leqslant t-\Delta} |x'(u)| + \Delta|x''(t-\Delta)| \\
&\leqslant \|x_t\|_2 + \|x_t\|_2 + \Delta\|x_t\|_2 \leqslant (2+\Delta)\rho.
\end{aligned}$$

Como $\|x_t\|_1 \leqslant \|x_t\|_2 < \rho$ e $\|\partial x_t\|_1 \leqslant \|x_t\|_2 < \rho$, então

$$(\partial x_t, x_t),\; (\partial((x_{t-\Delta})^{dd})_\Delta, x_t) \in N_1,$$

para $0 \leqslant t \leqslant t_\psi$. Para $0 \leqslant t < t_\psi$ e $-h \leqslant u \leqslant -\Delta$, temos

$$\partial((x_{t-\Delta})^{dd})_\Delta(u) = x'(t-\Delta+\Delta+u) = x'(t+u) = \partial x_t(u)$$

e

$$\partial\partial((x_{t-\Delta})^{dd})_\Delta(u) = x''(t-\Delta+\Delta+u) = x''(t+u) = \partial\partial x_t(u).$$

Logo, pelo item ii) da Proposição 3.1.6, obtemos

$$x''(t) = D_e g_1(\partial x_t, x_t)(\partial\partial x_t, \partial x_t) = D_e g_1(\partial((x_{t-\Delta})^{dd})_\Delta, x_t)(\partial\partial((x_{t-\Delta})^{dd})_\Delta, \partial x_t), \quad (3.15)$$

para $0 \leqslant t < t_\psi$. Pelo item iii) da Proposição 1.2.7, para $s, t \in (-\infty, t_\psi]$, temos

$$\begin{aligned} \|((x_{t-\Delta})^{dd})_\Delta - ((x_{s-\Delta})^{dd})_\Delta\|_2 &= \|((x_{t-\Delta})^{dd} - (x_{s-\Delta})^{dd})_\Delta\|_2 \\ &= \|((x_{t-\Delta} - x_{s-\Delta})^{dd})_\Delta\|_2 \\ &\leqslant \left(1 + \Delta + \frac{\Delta^2}{2}\right) \|x_{t-\Delta} - x_{s-\Delta}\|_2. \end{aligned}$$

Portanto, pela continuidade de $(-\infty, t_\psi) \ni t \mapsto x_t \in C^2$ e pela desigualdade acima, concluímos que a aplicação

$$(-\infty, t_\psi] \ni t \mapsto ((x_{t-\Delta})^{dd})_\Delta \in C^2$$

é contínua. Pela continuidade da aplicação

$$W_1 \times C \times C \ni (\phi, \psi, \chi, \rho) \mapsto D_e g_1(\phi, \psi)(\chi, \rho),$$

garantida por (g3), combinada com (3.15), obtemos

$$y''(t_\psi) = \lim_{t \to t_\psi} x''(t) = D_e g_1(\partial((y_{t_\psi - \Delta})^{dd})_\Delta, y_{t_\psi})(\partial\partial((y_{t_\psi-\Delta})^{dd})_\Delta, \partial y_{t_\psi}).$$

Portanto, y é duas vezes continuamente diferenciável em $[-h, t_\psi]$ e, em particular, $y_{t_\psi} \in C^2$. Como $(\partial y_{t_\psi}, y_{t_\psi}) \in W$, concluímos que $y_{t_\psi} \in X_{1+}$. Pondo $\phi = y_{t_\psi}$ e definindo $\widehat{x}\colon [-h, t_\psi + t_\phi) \to \mathbb{R}^n$ por

$$\widehat{x}(t) = \begin{cases} x(t), & \text{se } -h \leqslant t < t_\psi, \\ x^\phi(t - t_\psi), & \text{se } t_\psi \leqslant t < t_\psi + t_\phi, \end{cases}$$

concluímos que $\widehat{x}$ é solução de (2.1), com $\widehat{x}_0 = \psi$, contrariando a definição de t_ψ. Portanto, $t_\psi = \infty$.

ii) Seja $\epsilon > 0$ tal que

$$\|D_e g_1(0,0)(\cdot, 0)\|_{\mathscr{L}(C,\mathbb{R}^n)} + \epsilon < q$$

e
$$nc\epsilon(1+c_\epsilon)\frac{1}{-\alpha} < 1.$$

Tome $V_\epsilon \subset V_0$ vizinhança de 0 em C^2, como no item v) da Proposição 3.1.6. Pelas Afirmações 1 e 2, existe $\delta_a > 0$ tal que, para toda solução $x\colon [-h, t_e) \to \mathbb{R}^n$ da equação (2.1), com $x_0 \in X_{2*}$ e $\|x_0\|_2 < \delta_a$, temos $t_e = \infty$, $x_t \in V_\epsilon$ para todo $t \geqslant 0$, e

$$|x(t)| \leqslant 1 \text{ e } |x'(t)| \leqslant 1, \text{ para todo } t \geqslant -h.$$

Seja $w = \limsup_{t\to\infty} |x(t)|$. Queremos mostrar que $w = 0$. Seja $y > w$ arbitrário. Logo, existe $t_y > 0$ suficientemente grande tal que, para todo $s \geqslant \frac{t_y - h}{2}$, temos $|x(s)| < y$. Seja $t_* > t_y$. Como $\|\partial x_0\| \leqslant 1$ e $\max_{t\geqslant -h} |x(t)| \leqslant 1$, pelo Corolário 3.1.8, para $t \geqslant t_*$, temos

$$\begin{aligned}
|x(t)| &\leqslant ce^{\alpha t}\|x_0\| + nc\epsilon \int_0^t e^{\alpha(t-s)} \left(\|x_s\| + c_\epsilon \left(e^{\beta(s-h)}(1+1) + \max_{\frac{s-h}{2}\leqslant u\leqslant s} |x(u)| \right)\right) ds \\
&\leqslant ce^{\alpha t} + nc\epsilon \int_0^t e^{\alpha(t-s)} \left(\|x_s\| + c_\epsilon \left(e^{\beta(s-h)}(1+1) + \max_{\frac{s-h}{2}\leqslant u\leqslant s} |x(u)| \right)\right) ds \\
&= ce^{\alpha t} + nc\epsilon \int_0^{t*} e^{\alpha(t-s)} \left(\|x_s\| + c_\epsilon \left(e^{\beta(s-h)}(1+1) + \max_{\frac{s-h}{2}\leqslant u\leqslant s} |x(u)| \right)\right) ds \\
&\quad + nc\epsilon \int_{t_*}^t e^{\alpha(t-s)} \left(\|x_s\| + c_\epsilon \left(e^{\beta(s-h)}(1+1) + \max_{\frac{s-h}{2}\leqslant u\leqslant s} |x(u)| \right)\right) ds \\
&\leqslant ce^{\alpha t} + nc\epsilon \int_0^{t*} e^{\alpha(t-s)} \left(1 + c_\epsilon \left(2e^{-\beta h} + 1\right)\right) ds \\
&\quad + nc\epsilon \int_{t_*}^t e^{\alpha(t-s)} \left(y + c_\epsilon \left(2e^{\beta(s-h)} + y\right)\right) ds \\
&\leqslant ce^{\alpha t} + nc\epsilon(1 + c_\epsilon + 2c_\epsilon e^{-\beta h}) \int_0^{t*} e^{\alpha(t-s)} ds + nc\epsilon y(1+c_\epsilon) \int_{t_*}^t e^{\alpha(t-s)} ds \\
&\quad + 2nc\epsilon c_\epsilon e^{-\beta h} \int_{t_*}^t e^{\beta s} ds \\
&= ce^{\alpha t} + nc\epsilon(1 + c_\epsilon + 2c_\epsilon e^{-\beta h}) \left(\frac{e^{\alpha(t-t_*)}}{-\alpha} + \frac{e^{\alpha t}}{-\alpha} \right) \\
&\quad + nc\epsilon y(1+c_\epsilon) \left(\frac{1}{-\alpha} - \frac{e^{\alpha(t-t_*)}}{-\alpha} \right) + 2nc\epsilon c_\epsilon e^{-\beta h} \frac{1}{\beta} \left(e^{\beta t} - e^{\beta t_*} \right).
\end{aligned}$$

Tomando uma sequência $t_j \to \infty$ tal que $|x(t_j)| \to w$, quando $j \to \infty$, na desigualdade acima, obtemos
$$w \leqslant nc\epsilon(1+c_\epsilon)\frac{1}{-\alpha} y + 2nc\epsilon c_\epsilon e^{-\beta h} \frac{1}{-\beta} e^{\beta t_*}.$$

Fazendo $t_* \to \infty$ na desigualdade acima, temos

$$w \leqslant nc\epsilon(1 + c_\epsilon)\frac{1}{-\alpha}y.$$

Como $y > w$ é arbitrário, fazendo $y \to w$, segue que

$$w \leqslant nc\epsilon(1 + c_\epsilon)\frac{1}{-\alpha}w$$

e, como $nc\epsilon(1 + c_\epsilon)\frac{1}{-\alpha} < 1$, concluímos que $w = 0$. Como $w = \limsup_{t\to\infty} |x(t)| = 0$, então $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0$. Pelas desigualdades (3.3) e (3.4), concluímos que $\lim_{t\to\infty} |x'(t)| = 0$ e $\lim_{t\to\infty} |x''(t)| = 0$. Portanto, para todo $\psi \in X_{2*}$, com $\|\psi\|_2 < \delta_a$, temos $t_\psi = \infty$ e

$$\lim_{t\to\infty} \|G_2(t,\psi)\|_2 = \|x_t^\psi\|_2 = 0,$$

como queríamos demonstrar. □

3.2 Aplicação

Nesta seção, considere os espaços C e C^1 com $h > 0$ e $n = 1$. Considere a equação

$$x'(t) = A(x'(t + d(x(t)))) + f(x(t + r(x(t)))), \tag{3.16}$$

com as funções continuamente diferenciáveis $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d\colon \mathbb{R} \to [-h, 0)$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $r\colon \mathbb{R} \to [-h, 0]$, satisfazendo $A(0) = 0 = f(0)$. Note que essa equação é um caso particular da equação (2.26). De fato, basta tomar $A(x) = ax$ e $r(x) = 0$. Reescrevendo a equação (3.16), obtemos

$$x'(t) = A(x_t'(d(x_t(0)))) + f(x_t(r(x_t(0)))).$$

Isso nos motiva a definir $g\colon C \times C^1 \to \mathbb{R}$ por

$$g(\phi, \psi) = A(\phi(d(\psi(0)))) + f(\psi(r(\psi(0)))).$$

Daí, para uma função continuamente diferenciável $x\colon [-h, t_e) \to \mathbb{R}$, $0 < t_e \leqslant \infty$, temos

$$\begin{aligned} g(\partial x_t, x_t) &= A(\partial x_t(d(x_t(0)))) + f(x_t(r(x_t(0)))) \\ &= A(x'(t + d(x(t)))) + f(x(t + r(x(t)))), \end{aligned}$$

ou seja, a equação (3.16) é um caso particular da equação (2.1).

Considere a aplicação $ev\colon \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}$ dada por $ev(t, \psi) = \psi(t)$, sua restrição $ev_1 = ev|_{\mathbb{R}\times C^1}$ e as projeções $pr_1\colon C \times C^1 \to C$, $pr_2\colon C \times C^1 \to C^1$, dadas, respectivamente, por $pr_1(\phi, \psi) = \phi$ e $pr_2(\phi, \psi) = \psi$. Usando a mesma notação da terceira seção do Capítulo 2, temos

$$g = A \circ ev \circ ((d \circ ev(0, \cdot) \circ pr_2) \times pr_1) + f \circ ev \circ ((d \circ ev(0, \cdot) \circ pr_2) \times pr_2). \tag{3.17}$$

Isso nos motiva a apresentar o seguinte resultado, que nos garante que podemos aplicar o nosso resultado de estabilidade linearizada para a equação descrita pelo modelo (3.16).

Proposição 3.2.1 ([39], Proposição 2.1)**.** *A função g dada acima satisfaz (g0)-(g3), (g6),(g8) e (g9).*

Demonstração. Veja que g é contínua por (3.17), portanto, vale (g0). Dado $\psi \in C^1$, existe $\Delta > 0$ tal que $d(ev_1(0, \psi)) = d(\psi(0)) < -\Delta$. Pela continuidade de $d \circ ev_1(0, \cdot)$, existe uma vizinhança N de ψ em C^1 tal que $d(ev_1(0, \chi)) < -\Delta$, para todo $\chi \in N$. Assim, para todo $\chi \in N$ e para todos $\phi, \phi_1 \in C$ tais que $\phi(t) = \phi_1(t)$, $t \in [-h, -\Delta]$, temos

$$\begin{aligned} g(\phi, \chi) &= A(\phi(d(\chi(0)))) + f(\chi(r(\chi(0)))) = A(\phi_1(d(\chi(0)))) + f(\chi(r(\chi(0)))) \\ &= g(\phi_1, \chi). \end{aligned}$$

Portanto, g satisfaz (g1).

Seja $\psi \in C^1$ dado. Tome $\eta > \|\psi\|_1$ e

$$\lambda > \max\left\{ \max_{-\eta \leqslant \xi \leqslant \eta} |A'(\xi)|, \max_{-\eta \leqslant \xi \leqslant \eta} |d'(\xi)|, \max_{-\eta \leqslant \xi \leqslant \eta} |f'(\xi)|, \max_{-\eta \leqslant \xi \leqslant \eta} |r'(\xi)| \right\}.$$

Para todos $\psi_1, \psi_2 \in C^1$ com $\|\psi_1\|_1 < \eta$ e $\|\psi_2\|_1 < \eta$, e para todos $\phi_1, \phi_2 \in C$ com $\|\phi_1\| < \eta$ e $\|\phi_2\| < \eta$, temos

$$\begin{aligned} &|g(\phi_2, \psi_2) - g(\phi_1, \psi_1)| \\ &\quad \leqslant |A(\phi_2(d(\psi_2(0)))) - A(\phi_1(d(\psi_1(0))))| + |f(\psi_2(r(\psi_2(0)))) - f(\psi_1(r(\psi_1(0))))| \\ &\quad \leqslant \lambda|\phi_2(d(\psi_2(0))) - \phi_1(d(\psi_1(0)))| + \lambda|\psi_2(r(\psi_2(0))) - \psi_1(r(\psi_1(0)))| \\ &\quad \leqslant \lambda\big(|\phi_2(d(\psi_2(0))) - \phi_2(d(\psi_1(0)))| + |\phi_2(d(\psi_1(0))) - \phi_1(d(\psi_1(0)))|\big) \\ &\qquad + \lambda\big(|\psi_2(r(\psi_2(0))) - \psi_1(r(\psi_2(0)))| + |\psi_1(r(\psi_2(0))) - \psi_1(r(\psi_1(0)))|\big) \\ &\quad \leqslant \lambda\big(Lip(\phi_2)|d(\psi_2(0)) - d(\psi_1(0))| + \|\phi_2 - \phi_1\|\big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\lambda\big(\|\psi_2-\psi_1\|+\|\partial\psi_1\||r(\psi_2(0))-r(\psi_1(0))|\big)\\
&\leqslant \lambda\big(\lambda Lip(\phi_2)\|\psi_2-\psi_1\|+\|\phi_2-\phi_1\|\big)+\lambda\big(\|\psi_2-\psi_1\|+\eta\lambda\|\psi_2-\psi_1\|\big)\\
&=\lambda^2 Lip(\phi_2)\|\psi_2-\psi_1\|+\lambda\|\phi_2-\phi_1\|+\lambda\|\psi_2-\psi_1\|+\eta\lambda^2\|\psi_2-\psi_1\|\\
&\leqslant (\lambda^2+\lambda+\eta\lambda^2)\big(\|\phi_2-\phi_1\|+Lip(\phi_2)\|\psi_2-\psi_1\|+\|\psi_2-\psi_1\|\big)\\
&=(\lambda^2+\lambda+\eta\lambda^2)\big(\|\phi_2-\phi_1\|+(Lip(\phi_2)+1)\|\psi_2-\psi_1\|\big).
\end{aligned}
$$

Portanto, para $L=\lambda^2+\lambda+\eta\lambda^2$, g satisfaz (g2).

Por (3.17), temos que $g_1=g|_{C^1\times C^1}$ é dada por

$$g_1=A\circ ev_1\circ((d\circ ev_1(0,\cdot)\circ pr_2)\times pr_1)+f\circ ev_1\circ((r\circ ev_1(0,\cdot)\circ pr_2)\times pr_2).$$

Portanto, pela regra da cadeia, g_1 é continuamente diferenciável. Procedendo de forma análoga à Seção 3 do Capítulo 2, para $(\phi,\psi)\in C^1\times C^1$, obtemos

$$
\begin{aligned}
Dg_1(\phi,\psi)=&\,A'(\phi(d(\psi(0))))Dev_1(d(\psi(0)),\phi)\circ([d'(\psi(0))ev_1(0,\cdot)\circ pr_2]\times pr_1)\\
&+f'(\psi(r(\psi(0))))Dev_1(r(\psi(0)),\psi)\circ([r'(\psi(0))ev_1(0,\cdot)\circ pr_2]\times pr_2).
\end{aligned}
$$

Portanto, para $\phi,\psi,\chi,\rho\in C^1$, temos

$$
\begin{aligned}
&Dg_1(\phi,\psi)(\chi,\rho)\\
&\quad=A'(\phi(d(\psi(0))))Dev_1(d(\psi(0)),\phi)\circ([d'(\psi(0))ev_1(0,\cdot)\circ pr_2]\times pr_1)(\chi,\rho)\\
&\qquad+f'(\psi(r(\psi(0))))Dev_1(r(\psi(0)),\psi)\circ([r'(\psi(0))ev_1(0,\cdot)\circ pr_2]\times pr_2)(\chi,\rho)\\
&\quad=A'(\phi(d(\psi(0))))Dev_1(d(\psi(0)),\phi)\big(d'(\psi(0))ev_1(0,\rho),\chi\big)\\
&\qquad+f'(\psi(r(\psi(0))))Dev_1(r(\psi(0)),\psi)\big(r'(\psi(0))ev_1(0,\rho),\rho\big)\\
&\quad=A'(\phi(d(\psi(0))))Dev_1(d(\psi(0)),\phi)\big(d'(\psi(0))\rho(0),\chi\big)\\
&\qquad+f'(\psi(r(\psi(0))))Dev_1(r(\psi(0)),\psi)\big(r'(\psi(0))\rho(0),\rho\big)\\
&\quad=A'(\phi(d(\psi(0))))\Big(d'(\psi(0))\rho(0)\partial\phi(d(\psi(0)))+\chi(d(\psi(0)))\Big)\\
&\qquad+f'(\psi(r(\psi(0))))\Big(r'(\psi(0))\rho(0)\partial\psi(r(\psi(0)))+\rho(r(\psi(0)))\Big).
\end{aligned}
$$

Para cada $(\phi,\psi)\in C^1\times C^1$, definimos a extensão $D_eg_1(\phi,\psi)\colon C\times C\to\mathbb{R}$, por

$$
\begin{aligned}
D_eg_1(\phi,\psi)(\chi,\rho)=&\,A'(\phi(d(\psi(0))))\Big(d'(\psi(0))\rho(0)\partial\phi(d(\psi(0)))+\chi(d(\psi(0)))\Big)\\
&+f'(\psi(r(\psi(0))))\Big(r'(\psi(0))\rho(0)\partial\psi(r(\psi(0)))+\rho(r(\psi(0)))\Big).
\end{aligned}
$$

Como A, f, d, r são continuamente diferenciáveis, então a aplicação

$$C^1 \times C^1 \times C \times C \ni (\phi, \psi, \chi, \rho) \mapsto D_e g_1(\phi, \psi)(\chi, \rho)$$

é contínua. Logo, g satisfaz (g3).

Note que $(0,0) \in W = C \times C^1$ e

$$g(0,0) = A(0) + f(0) = 0.$$

Para todos $\phi, \psi \in C^1$ e $\chi \in C$, temos

$$D_e g_1(\phi, \psi)(\chi, 0) = A'(\phi(d(\psi(0)))\chi(d(\psi(0))),$$

logo,

$$\begin{aligned}
\|D_e g_1(\phi, \psi)(\cdot, 0)\|_{\mathscr{L}(C,\mathbb{R})} &= \sup_{\|\chi\|\leqslant 1} |A'(\phi(d(\psi(0)))\chi(d(\psi(0)))| \\
&= |A'(\phi(d(\psi(0)))| \sup_{\|\chi\|\leqslant 1} |\chi(d(\psi(0)))| \\
&= |A'(\phi(d(\psi(0)))|.
\end{aligned}$$

Como $|A'(\phi(d(\psi(0))))| = |A' \circ ev \circ ((d \circ ev(0, \cdot) \circ pr_2) \times pr_1)(\phi, \psi)|$, a aplicação

$$C^1 \times C^1 \ni (\phi, \psi) \mapsto \|D_e g_1(\phi, \psi)(\cdot, 0)\|_{\mathscr{L}(C,\mathbb{R})}$$

é contínua e, em particular, semicontínua em $(0,0)$. Portanto, g satisfaz (g6).

Para todo $\psi \in C^2$, com $\|\psi\|_2 \leqslant 1$, e para todo $0 \leqslant s \leqslant 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
|(Dg_1(s\partial\psi, s\psi) - Dg_1(0,0))(\partial\psi, 0)| &= |A'(s\partial\psi(d(s\psi(0))))\partial\psi(d(s\psi)) - A'(0)\partial\psi(d(0))| \\
&\leqslant \left|A'(s\partial\psi(d(s\psi(0))))\big(\partial\psi(d(s\psi)) - \partial\psi(d(0))\big)\right| \\
&\quad + \left|\big(A'(s\partial\psi(d(s\psi(0)))) - A'(0)\big)\partial\psi(d(0))\right| \\
&\leqslant \max_{|\xi|\leqslant\|s\partial\psi\|} |A'(\xi)|\|\partial\partial\psi\||d(s\psi) - d(0)| \\
&\quad + \max_{|\xi|\leqslant\|s\partial\psi\|} |A'(\xi) - A'(0)| \max_{-h\leqslant u\leqslant d(0)} |\psi'(u)| \\
&\leqslant \max_{|\xi|\leqslant 1} |A'(\xi)|\|\partial\partial\psi\| \max_{|\xi|\leqslant\|s\psi\|} |d'(\xi)||s\psi| \\
&\quad + \max_{|\xi|\leqslant 1} |A'(\xi) - A'(0)| \max_{-h\leqslant u\leqslant d(0)} |\psi'(u)|
\end{aligned}$$

$$\leqslant \max_{|\xi|\leqslant 1}|A'(\xi)|\max_{|\xi|\leqslant 1}|d'(\xi)|\|\partial\partial\psi\||s|\|\psi\| \\ + \max_{|\xi|\leqslant 1}|A'(\xi)-A'(0)|\max_{-h\leqslant u\leqslant d(0)}|\psi'(u)|.$$

Sejam $c = \max_{|\xi|\leqslant 1}|A'(\xi)|\max_{|\xi|\leqslant 1}|d'(\xi)|$, $\alpha = A'$ e $\Delta = -d(0)$. Logo,

$$|(Dg_1(s\partial\psi, s\psi) - Dg_1(0,0))(\partial\psi, 0)| \leqslant c\|\partial\psi\|\|\psi\| + \max_{|\xi|\leqslant 1}|\alpha(\xi)-\alpha(0)|\max_{-h\leqslant u\leqslant -\Delta}|\psi'(u)|,$$

concluindo assim que g satisfaz (g8).

Para todo $\psi \in C^2$, com $\|\psi\|_2 \leqslant 1$, e para todo $0 \leqslant s \leqslant 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
&|(Dg_1(s\partial\psi, s\psi) - Dg_1(0,0))(0,\psi)| \\
&\quad = \big|A'(s\partial\psi(d(s\psi)))d'(s\psi(0))\psi(0)s\partial\partial\psi(d(s\psi(0))) \\
&\qquad + f'(s\psi(r(s\psi(0))))\big(r'(s\psi(0))\psi(0)s\partial\psi(r(s\psi(0))) + \psi(r(s\psi(0)))\big) - f'(0)\psi(r(0))\big| \\
&\quad \leqslant |A'(s\partial\psi(d(s\psi)))d'(s\psi(0))\psi(0)s\partial\partial\psi(d(s\psi(0)))| \\
&\qquad + |f'(s\psi(r(s\psi(0))))r'(s\psi(0))\psi(0)s\partial\psi(r(s\psi(0)))| \\
&\qquad + |f'(s\psi(r(s\psi(0))))\psi(r(s\psi(0))) - f'(0)\psi(r(0))| \\
&\quad \leqslant \max_{|\xi|\leqslant\|s\partial\psi\|}|A'(\xi)|\max_{|\xi|\leqslant\|s\psi\|}|d'(\xi)|\|\psi\|\|s\partial\partial\psi\| \\
&\qquad + \max_{|\xi|\leqslant\|s\psi\|}|f'(\xi)|\max_{|\xi|\leqslant\|s\psi\|}|r'(\xi)|\|\psi\|\|s\partial\psi\| \\
&\qquad + |f'(s\psi(r(s\psi(0)))) - f'(0)||\psi(r(s\psi(0)))| + |f'(0)||\psi(r(s\psi(0))) - \psi(r(0))| \\
&\quad \leqslant \max_{|\xi|\leqslant 1}|A'(\xi)|\max_{|\xi|\leqslant 1}|d'(\xi)|\|s\partial\partial\psi\|\|\psi\| \\
&\qquad + \max_{|\xi|\leqslant 1}|f'(\xi)|\max_{|\xi|\leqslant 1}|r'(\xi)|\|s\partial\psi\|\|\psi\| \\
&\qquad + \max_{|\xi|\leqslant\|s\psi\|}|f'(\xi) - f'(0)|\|\psi\| + |f'(0)|\|\partial\psi\||r(s\psi(0)) - r(0)| \\
&\quad \leqslant \left(\max_{|\xi|\leqslant 1}|A'(\xi)|\max_{|\xi|\leqslant 1}|d'(\xi)| + \max_{|\xi|\leqslant 1}|f'(\xi)|\max_{|\xi|\leqslant 1}|r'(\xi)|\right)(\|s\partial\partial\psi\| + \|s\partial\psi\|)\|\psi\| \\
&\qquad + \max_{|\xi|\leqslant\|s\psi\|}|f'(\xi) - f'(0)|\|\psi\| + |f'(0)|\max_{|\xi|\leqslant 1}|r'(\xi)|\|s\psi\|\|\partial\psi\|.
\end{aligned}$$

Seja

$$c = \max_{|\xi|\leqslant 1}|A'(\xi)|\max_{|\xi|\leqslant 1}|d'(\xi)| + \max_{|\xi|\leqslant 1}|f'(\xi)|\max_{|\xi|\leqslant 1}|r'(\xi)| + 1 \geqslant 1.$$

Pela desigualdade acima, obtemos

$$|(Dg_1(s\partial\psi, s\psi) - Dg_1(0,0))(0,\psi)|$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant c\|s\psi\|_2\|\psi\| + c \max_{|\xi|\leqslant\|s\psi\|} |f'(\xi) - f'(0)|\|\psi\| + c\|s\psi\|\|\psi\|_1 \\
&= c\left(\|s\psi\|_2 + \max_{|\xi|\leqslant\|s\psi\|} |f'(\xi) - f'(0)|\right)\|\psi\| + c\|s\psi\|\|\psi\|_1 \\
&\leqslant c\zeta(\|s\psi\|_2)\|\psi\| + c\|s\psi\|\|\psi\|_1 = c\big(\zeta(\|s\psi\|_2)\|\psi\| + \|s\psi\|\|\psi\|_1\big),
\end{aligned}
$$

onde $\zeta\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ é dada por

$$
\zeta(z) = z + \max_{|\xi|\leqslant z} |f'(\xi) - f'(0)|.
$$

Portanto, segue que g satisfaz (g9), concluindo a demonstração. $\square$

Observação 3.2.2. *É possível mostrar que a função g satisfaz as condições (H1) e (H2). Mais precisamente, que g satisfaz (H1) se, e somente se,*

$$
|A'(0)| = \|D_e g_1(0,0)(\cdot,0)\|_{\mathscr{L}(C,\mathbb{R}^n)} < 1.
$$

Também temos que g satisfaz (H2) no caso em que $r = 0$, $|A'(0)| < 1$ e $f'(0) < 0$. Tais estimativas não serão demonstradas aqui, mas podem ser encontradas em [38].

Apêndice

A. Resultados Clássicos

Nesta seção, apresentamos alguns resultados clássicos que foram utilizados nessa dissertação.

Teorema (Desigualdade do Valor Médio). *Seja $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação continuamente diferenciável. Suponha que o segmento de a até $a + v$ esteja contido em U e suponha que exista $M > 0$ tal que $\|Df(x)\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} \leqslant M$, para todo $x \in [a, a + v]$. Então*

$$|f(a + h) - f(a)| \leqslant M|v|.$$

Demonstração. Veja [27]. □

Teorema (Teorema da Aproximação de Weierstrass). *Seja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Para todo $\epsilon > 0$, existe um polinômio p tal que $p(a) = f(a)$, $p(b) = f(b)$ e*

$$\max_{a \leqslant s \leqslant b} |f(s) - p(s)| < \epsilon.$$

Demonstração. Veja [31, Teorema 19, Página 228]. □

Teorema (Teorema Fundamental do Cálculo-Adaptado). *Seja $P\colon U \subset F \to G$ uma aplicação continuamente diferenciável entre espaços de Banach. Suponha que o segmento de u até $u + v$ esteja contido em U. Então*

$$P(u + v) - P(u) = \int_0^1 DP(u + tv)v dt.$$

Demonstração. Veja [18, Teorema 3.2.2] □

Teorema (Teorema do Ponto Fixo de Banach). *Seja M um espaço métrico completo e $f\colon M \to M$ uma aplicação. Suponha que existe $c \in (0,1)$ tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leqslant cd(x,y),$$

para todo $x, y \in M$. Então f admite um único ponto fixo.

Demonstração. Veja [26]. □

Teorema (Desigualdade de Gronwall). *Suponha que $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja contínua satisfazendo $g(t) \geqslant 0$ e*

$$g(t) \leqslant C + K \int_0^1 g(s)ds,$$

para todo $t \in [0,a]$, onde C e K são constantes positivas. Então, para todo $t \in [0,a]$,

$$g(t) \leqslant Ce^{Kt}.$$

Demonstração. Veja [29, Seção 2.3]. □

Teorema (Primeiro Teorema do Isomorfismo). *Seja $T\colon V \to W$ uma transformação linear entre espaços vetoriais. Então o espaço quociente $\frac{V}{ker(T)}$ é isomorfo à imagem $Im(T) = T(V)$.*

Demonstração. Veja [32, Teorema 3.5]. □

Teorema (Teorema da Função Implícita). *Sejam $U \subset E$, $V \subset F$ abertos e $f\colon U \times V \to G$ uma aplicação de classe C^r, $r \geqslant 1$, entre espaços de Banach. Suponha que, para algum $(x_0, y_0) \in U \times V$, a derivada no segundo argumento $D_2 f(x_0, y_0)\colon F \to G$ seja um isomorfismo. Então existem vizinhanças U_0 de x_0 e W_0 de $f(x_0, y_0)$ e uma única aplicação de classe C^r, $g\colon U_0 \times W_0 \to V$ tal que, para todo $(x, w) \in U_0 \times W_0$, temos*

$$f(x, g(x,w)) = w.$$

Demonstração. Veja [1, Teorema 2.5.7]. □

B. Variedades de Banach, Vetores Tangentes e Subvariedades

Nessa seção, apresentamos alguns conceitos sobre Variedades de Banach, vetores tangentes e subvariedades. Todos os resultados e definições apresentados nesta seção podem ser encontrados em [8].

Definição 3.2.3. *Seja M um subconjunto de um espaço de Banach real X dado. Um* ***vetor tangente*** *de M em x é um elemento $v \in X$ de modo que existe uma curva diferenciável $c\colon I \to X$, $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto contendo 0, com as propriedades:*

$$c(0) = x, \ \ c(I) \subset M, \ \ c'(0) := Dc(0)1 = v.$$

O conjunto de todos os vetores tangentes de M em x é denotado por T_xM.

Definição 3.2.4. *Considere X um espaço de Hausdorff dado. Definimos uma* ***carta*** *como sendo um homeomorfismo de um subconjunto aberto de X em um subconjunto aberto de um espaço de Banach real.*

A próxima definição traz uma relação entre duas cartas.

Definição 3.2.5. *Sejam $\alpha\colon U \to A$ e $\beta\colon V \to B$ duas cartas. Dizemos que elas são* ***C^r-compatíveis*** *se, e somente se, a aplicação*

$$\alpha(U \cap V) \ni \xi \longmapsto \beta(\alpha^{-1}(\xi)) \in \beta(U \cap V)$$

é um C^r-difeomorfismo entre subconjuntos abertos de espaços de Banach.

Isto nos leva à próxima definição que tem um papel muito importante no estudo das variedades.

Definição 3.2.6. *Um conjunto de cartas duas a duas C^r-compatíveis é chamado de* ***C^r-atlas*** *de X. Um C^r-atlas é chamado* ***maximal*** *se, e somente se, ele contém toda carta que é C^r-compatível com todos seus elementos.*

Com as definições acima, estamos prontos para definir uma C^r-variedade.

Definição 3.2.7. *Um par $(X, \mathscr{A})$, onde $\mathscr{A}$ é um C^r-atlas maximal, é chamado uma* ***C^r-variedade****.*

Usaremos aqui a mesma notação que [8] e, portanto, denotaremos $(X, \mathscr{A})$ apenas por X.

Definição 3.2.8. *Sejam X e Y C^r-variedades. Uma aplicação $f\colon X \to Y$ é chamada uma* ***C^r-aplicação*** *se, e somente se, para toda carta $\alpha\colon U \to A$ de X e para toda carta $\beta\colon V \to B$ de Y, com $f(U) \subset V$, a aplicação induzida*

$$A \ni \xi \longmapsto \beta(f(\alpha^{-1}(\xi)))$$

é uma C^r-aplicação do conjunto aberto A de um espaço de Banach no espaço de Banach contendo a imagem B de β.

A seguir, apresentaremos a definição de uma C^r-curva que será fundamental para que possamos apresentar o conceito de vetor tangente de X em x.

Definição 3.2.9. *Uma C^r**-curva** é uma C^r-aplicação c de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em X.*

Com esta definição em mãos, vamos apresentar a definição de quando duas curvas são tangentes em 0.

Para isso, considere x um ponto em uma C^r-variedade X, com $r \geqslant 1$ dado. Considere as C^r-curvas $c\colon I \to X$ e $d\colon J \to X$, de modo que $0 \in I \cap J$ e $c(0) = x = d(0)$.

Definição 3.2.10. *As curvas c e d são ditas **tangentes em** 0 se, e somente se, existe uma carta $\alpha\colon U \to A$ com $x \in U$ e $\epsilon > 0$ de modo que:*

$$c((-\epsilon,\epsilon)) \cap d((-\epsilon,\epsilon)) \subset U \text{ e } D(\alpha \circ c|_{(-\epsilon,\epsilon)})(0)1 = D(\alpha \circ d|_{(-\epsilon,\epsilon)})(0)1,$$

onde D representa a derivada usual de uma aplicação do intervalo $(-\epsilon,\epsilon)$ no espaço de Banach contendo a imagem A de α.

Agora estamos preparados para apresentar a definição de um vetor tangente de X.

Definição 3.2.11. *Um **vetor tangente** de X em x é uma classe de equivalência de C^r-curvas $c\colon I \to X$ com $c(0) = x$, com respeito à relação de tangência. O conjunto de todos os vetores tangentes de X em x é denotado por $(TX)_x$.*

Terminamos essa seção apresentando o conceito de uma subvariedade.

Definição 3.2.12. *Um subconjunto M de uma C^r-variedade, munida com a topologia relativa, é chamado uma **subvariedade** se, e somente se, para todo $x \in M$, existem espaços de Banach reais E e F, vizinhanças abertas A de 0 em E e B de 0 em F, e uma carta $\alpha\colon U \to A \times B$ de modo que:*

$$x \in U,\ \alpha(x) = (0,0),\ \alpha(U \cap M) = A \times \{0\}.$$

Como consequência desta definição, os subconjuntos abertos de C^r-variedades são subvariedades [8, Exercício 3.1].

Para mais detalhes sobre este tópico, consulte a referência [8].

Referências Bibliográficas

[1] R. Abraham, J. E. Marsden, T. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag Publishing Company, (2002).

[2] W. G. Aiello, H.I. Freedman, J. Wu, Analysis of a model representing stage-structured population growth with state-dependent time delay, *SIAM J. Appl. Math.* 52 (1992), 3, 855-869.

[3] K. Aissani, M. Benchohra, Fractional integro-differential equations with state dependent delay, *Advances in Dynamical Systems and Applications* 9 (1) (2014), 17-30.

[4] F. Andrade, C. Cuevas, H. R. Henríquez, Periodic Solutions of abstract functional differential equation with state-dependent delay, *Math. Meth. Appl. Sci.* 39 (2016), 3897-3909.

[5] M. V. Barbarossa, *On a class of neutral equations with state-dependent delay in population dynamics, Doctoral Dissertation*, Technical University Munich, Munich (2013).

[6] M. V. Barbarossa, H. O. Walther, Linearized Stability for a New Class of Neutral Equations with State-Dependent Delay, *Differential Equations and Dynamical Systems*, 24 (2016), 63-79.

[7] P. Brunovský, A. Erdélyi, H. O. Walther, On a Model of a Currency Exchange Rate - Local Stability and Periodic Solutions, *Journal of Dynamics and Differential Equations* (2004), 393-432.

[8] O. Diekmann, S. A. van Gils, S. M. Verduyn Lunel and H. O. Walther, *Delay Equations: Functional-, Complex- and Nonlinear Analysis*, Springer, New York (1995).

[9] R. D. Driver, A two-body problem of classical electrodynamics: The one-dimensional case, *Ann. Phys.* 21 (1963), 122–142.

[10] R. D. Driver, Existence theory for a delay-differential system, *Contributions to Differential Equations I* (1963), 317-336.

[11] R. D. Driver, *A functional differential system of neutral type arising in a two-body problem of classical electrodynamics*, International Symposium on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics, J. LaSalle and S. Lefschetz (eds.), Academic Press, New York (1963), 474-484.

[12] R. D. Driver, A "backwards"two-body problem of classical relativistic electrodynamics, *Phys. Rev.* 178 (1969), 2051-2057.

[13] R. D. Driver, A neutral system with state-dependent delay, *J. Differential Equations* 54 (1984), 73-86.

[14] R. D. Driver, A mixed neutral system, *Nonlinear Anal. TMA* 8 (1984), 155-158.

[15] C. Feng, S. Dexian, S. Jinlin, Periodicity in a food-limited population model with toxicants and state-dependent delays, *J. Math. Anal. Appl.* 288 (1) (2003), 136-146.

[16] A. Garab, V. Kovács, T. Krisztin, Global stability of a price model with multiple delays, *Discrete Cont. Dyn. Sys.* 36 (2016), 6855-6871.

[17] J. K. Hale, S. M. V. Lunel, *Introduction to functional differential equations,* Springer, New York, (1993).

[18] R. S. Hamilton, The inverse function theorem of Nash and Moser, *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.) 7 (1) (1982), 65 - 222.

[19] F. Hartung, Linearized stability in periodic functional differential equations with state-dependent delays, *J. Comput. Appl. Math.* 174 (2) (2005), 201-211.

[20] F. Hartung, T. Krisztin, H. O. Walther, J. Wu, *Functional differential equations with state-dependent delays: theory and applications*, in: A. Cabada, P. Drabek, A. Fonda (Eds), Handbook of Differential Equations: Ordinary Differential Equations, Volume 3, Elsevier, B.V., (2006), 435-545.

[21] E. Hernández, J. Wu, D. Fernandes, Existence and uniqueness of solutions for abstract neutral differential equations with state-dependent delay, *Appl. Math. and Optim.* 81 (2) (2020), 89-111.

[22] E. Hernández, J. Wu, Existence, uniqueness and qualitative properties of global solutions of abstract differential equations with state-dependent delay, *Proc. Edinb. Math. Soc.* 62 (2019), 771-788.

[23] E. Hernández, K. A. G. Azevedo, V. Rolnik, Well-posedness of abstract differential equations with state-dependent delay, *Mathematische Nachrichten* (2018), 1-12.

[24] Y. Hino, S. Murakami, T. Naito, *Functional Differential Equations with infinite delay*, Springer-Verlag, Berlin (1991).

[25] T. Krisztin, On stability properties for one-dimensional functional differential equations, *Funkcial. Ekvac.* 34 (1991), 241-256.

[26] E. L. Lima, *Espaços Métricos*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Projeto Euclides, (1977).

[27] E. L. Lima, *Curso de Análise*, Vol. 2, Rio de Janeiro, IMPA, Projeto Euclides, (2015).

[28] J. Mallet-Paret, R. Nussbaum, P. Paraskevopoulos, Periodic solutions for functional-differential equations with multiple state-dependent time lags, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 3, (1994), 101-162.

[29] L. Perko, *Differential equations and Dynamical systems*, Texts in applied mathematics, (2001).

[30] S. D. Poisson, Sur les équations aux différences melées, *J. de l'Ecole Polytechnique Paris* (1) 6, 13 (1806), 126-147.

[31] C. C. Pugh, *Real Mathematical Analysis*, Springer Intern. Publishing, (2015).

[32] S. Roman, *Advanced Linear Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York 3 ed. (2005).

[33] H. L. Smith, *An Introduction to delay differential equations with applications to life sciences*, Texts in Applied Mathematics, vol. 57, Springer, Berlin (2011).

[34] E. Stumpf, On a differential equation with state-dependent delay: a center-unstable manifold connecting an equilibrium and a periodic orbit, *J. Dynam. Diff. Equations* 24, (2012), 197-248.

[35] X. Su, X. Fu, Approximate controllability of second-order semilinear evolution systems with state-dependent infinite delay, *J. Applied Analysis and Computation* 10 (3) (2020), 1118-1148.

[36] H. O. Walther, The solution manifold and C^1-smoothness for differential equations with state-dependent delay, *J. Differential Equations* 195 (2003), 46–65.

[37] H. O. Walther, Semiflows for neutral equations with state-dependent delays, *Infinite dimensional dynamical systems*, Springer, New York, (2013), 211-267.

[38] H. O. Walther, Linearized Stability for Semiflows Generated by a Class of Neutral Equations, with Applications to State-Dependent Delays. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 22 (2010), 439-462.

[39] H. O. Walther, More on Linearized Stability for Neutral Equations with State-Dependent Delays, *Differential Equations and Dynamical Systems*, 19 (2011), 315-333.

[40] H. O. Walther, Bifurcations of periodic solutions with large periods for a delay differential equation, *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 185 (2006), 577-611.

[41] H. O. Walther, Convergence to square waves for a price model with delay, *Discrete and Continuous Dynamical System* 13 (2005), 1325-1342.

[42] E. Winston, Uniqueness of solutions of state-dependent delays differential equations, *J. Math. Anal. Appl*, 47 (1974), 620-625.

Índice Remissivo

C^r-

aplicação, 91
atlas, 91
compatíveis, 91
curva, 92
difeomorfismo, 91
variedade, 91

carta, 91
constante de Lipschitz, 11

Desigualdade
de Gronwall, 45, 90
do Valor Médio, 18, 60, 89

espaço
de Banach, 20, 36
tangente, 49
Estabilidade, 8
assintótica global, 8
Linearizada, 9
local assintótica, 7
existência, 5, 7, 11, 12, 35

Lipschitziana, 11

Primeiro Teorema do Isomorfismo, 50, 90
projeção na k-ésima coordenada, 57

quase Fréchet diferenciável, 13

segmento, 9
Semifluxo, 9, 35, 47
contínuo, 12, 13
gerados, 35
semigrupo, 64
fortemente contínuo, 64
solução, 11, 63
estacionária, 76
local, 35
maximal, 35, 42
subvariedade, 92

Teorema
da Aproximação de Weierstrass, 89
da Função Implícita, 50, 90
do Ponto Fixo de Banach, 38, 89
Fundamental do Cálculo, 33, 36, 89
transformações lineares
contínuas, 17

unicidade, 4, 5, 11, 12, 43
da solução, 40
de soluções, 42

vetor tangente, 91, 92