Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Existência e multiplicidade de soluções não triviais para um problema elíptico envolvendo os operadores bi-harmônico e o p-Laplaciano

por

Wendy Fernanda de Almeida

Brasília

2022

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Existência e multiplicidade de soluções não triviais para um problema elíptico envolvendo os operadores biharmônico e o p-Laplaciano

por

Wendy Fernanda de Almeida

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

24 de junho de 2022

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo - Orientador (MAT-UnB)

Prof. Ricardo Ruviaro (MAT - UnB)

Prof. Gustavo Silvestre do Amaral Costa (DEMAT - UFMA)

*O autor foi bolsista CNPq durante a elaboração deste trabalho.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

de Almeida, Wendy Fernanda
A447e Existência e multiplicidade de soluções não triviais para um problema elíptico envolvendo os operadores bi-harmônico e o p-Laplaciano / Wendy Fernanda de Almeida; orientador Giovany de Jesus Malcher Figueiredo. -- Brasília, 2022.
85 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2022.

1. Equações bi-harmônicas. 2. p-Laplaciano. 3. Métodos Variacionais. 4. Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg. I. Malcher Figueiredo, Giovany de Jesus, orient. II. Título.

Aos meus pais,
Nilton e Sônia;
À todos os meus amigos,
E tudo e a todos que me permitiram estar aqui.

"O estudo em geral,
a busca da verdade e da beleza
são domínios em que nos é consentido
sermos crianças por toda a vida". (Albert Einstein)

"A diferença de um visionário
para um louco é a ciência". (João Paulo Sapia)

Agradecimentos

Agradeço ao meus pais, Nilton e Sônia, por dedicarem por toda a minha vida pelo meu sucesso. Ninguém fez mais por mim do que vocês.

Agradeço ao meu orientador Giovany Figueiredo pela dedicação, ensinamentos, críticas e principalmente sua confiança no meu potencial para minha formação como mestra em matemática.

Também dedico meus agradecimentos aos professores e orientadores que tive durante minha graduação na UNESP-FCT: Cristiane Néspoli, Marcos Pimenta e José Roberto Nogueira que foram como pais na minha formação como matemática e guardo até hoje minha gratidão.

Uma dedicação especial ao José Carlos Rodrigues (Biroca), que foi professor na UNESP-FCT, coordenador da OBMEP da região de Pres. Prudente, e também agiu como orientador e um pai na minha formação de matemática, e mesmo que este hoje já não possa ler meus agradecimentos, eu dedico pois quero que as pessoas possam ver até onde o trabalho que esse grande professor pôde alcançar, seu apoio foi essencial na minha formação, assim dedico meus eternos agradecimentos.

Quero agradecer a CNPq pelo apoio financeiro, sem isso eu não seria capaz de concluir meu estudos na Universidade de Brasília.

Por fim e não menos importante, agradeço ao Alex Minakawa Sato, por todo amor, carinho e apoio. Aos meus amigos da UNESP-FCT: Fabio, Sapia, Leandro, Gustavo, Marcos e Izabella. Aos meus colegas e amigos da UnB, aos meus irmãos de sangue William e Wislaine, e aos meus irmãos de orientador Letícia, Manuel e Romulo. O apoio e a amizade de vocês me completam como pessoa, obrigada por tudo!

Resumo

Neste trabalho apresentaremos um estudo sobre a classe de equações bi-harmônicas não lineares com p-Laplaciano, que foram investigadas pelos autores Juntao Sun, Jifeng Chu, Tsung-fang Wu no trabalho [15], sobre o seguinte problema:

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \beta \Delta_p u + \lambda V(x) u = f(x,u) \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^2(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{1}$$

onde $N \geq 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ são parâmetros e $\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ com $p \geq 2$. Diferente de outros artigos que tratam esse problema, os autores substituíram o Laplaciano com p-Laplaciano e permitiram que β seja negativo. Sobre adequadas hipóteses em $V(x)$ e $f(x,u)$, foi possível obter a existência e multiplicidade de soluções não triviais para λ grande o suficiente. A prova se baseia em métodos variacionais assim como na desigualdade de Gagliardo-Nirenberg.

Palavras-chave: Equações biharmonicas; p-Laplaciano; Métodos Variacionais; Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg.

Abstract

In this work we will present a study on the class of nonlinear biharmonic equations with p-Laplacian, which were investigated by the authors Juntao Sun, Jifeng Chu, Tsung-fang Wu at work [15] on the following problem:

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \beta\Delta_p u + \lambda V(x)u = f(x,u) \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^2(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{2}$$

where $N \geq 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ are parameter and $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ with $p \geq 2$. Unlike other papers dealing with this problem, the authors replaced the Laplacian with p-Laplacian and allowed β to be negative. Under suitable assumptions in $V(x)$ and $f(x,u)$, it was possible to obtain the existence and multiplicity of non-trivial solutions for λ large enough. The proof relies on variational methods and Gagliardo-Nirenberg inequality.

Keywords: Biharmonic equations; p-Laplacian; Variational methods; Gagliardo-Nirenberg.

Notações

$\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	gradiente da função u;
$\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \mathrm{div}(\nabla u)$	Laplaciano de u;
$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$	operador bi-harmônico;
$\Delta_p u = \mathrm{div}(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u)$	operador p-laplaciano;
$\rightharpoonup$	convergência fraca;
$\to$	convergência forte;
$o_n(1)$	sequência real que converge para 0 quando $n \to \infty$;
$q.t.p.$	quase em todo ponto;
X'	espaço dual do espaço X;
S_∞	melhor constante de Sobolev da imersão de $H^2(\mathbb{R}^N)$ em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$;
$L^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$	espaço de todas as classes de funções as quais pertencem a L^s em todo subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$;
$\\|\cdot\\|_\lambda$	norma no espaço normado X_λ;
$\\|\cdot\\|$	$\\|\cdot\\|_\lambda$, com $\lambda = 1$;
$\\|\cdot\\|_{H^2}$	norma do espaço de Hilbert;
$\|\cdot\|_\infty$	norma do espaço $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Problemas envolvendo bi-harmônico e o operador laplaciano já foram anteriormente trabalhados por outros autores, como por exemplo no artigo [10] dos autores Lazer-McKenna, no qual utiliza apenas o bi-harmônico e o operador laplaciano como a seguir:

$$\begin{cases} \Delta^2 u - c\Delta u = f(x,u), \quad x \in \Omega, \\ u = \Delta u = 0, x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde Ω é um domínio suavemente limitado e c é um parâmetro. Já com a utilização do potencial temos o exemplo do trabalho [11] do autor Liu-chen-Wu como apresentado abaixo:

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \beta\Delta u + \lambda V(x)u = f(x,u) \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^2(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $N \geqslant 1$. Outro exemplo de problema é apresentado pelos autores Wang-Zhang no artigo [16] utilizando o operador bi-harmônico e o potencial, mas sem utilizar o operador laplaciano como a seguir:

$$\begin{cases} \Delta^2 u + V_\lambda(x)u = f(u) \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^2(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $N \geqslant 5$, $V_\lambda(x) = 1 + \lambda g(x)$ é um potencial.

Em um interessante artigo, Chueshov and Lasiecka [4] consideram a seguinte equação da placa não linear conhecida como o modelo de Kirchhoff–Boussinesq (K–B):

$$w_{tt} + kw_t + \Delta^2 w = \operatorname{div}\left(|\nabla w|^{p-2}\nabla w\right) + \sigma\Delta(w^2) - f(w) \tag{1.1}$$

definida em domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com fronteira suficiente regular e um adequado dado inicial. O modelo (1.1) aparece naturalmente, como mostrado em [5], como limite das equações de Mindlin–Timoshenko, o qual descreve a dinâmica da placa que leva em conta os efeitos de cisalhamento transversal, (ver, e.g., [8] e [9, Capítulo 1] e as suas referências. Para detalhes relativos as dinâmicas das placas de Mindlin–Timoshenko nós citamos [8] e [9].

Esta motivação física nos despertou interesse em estudar nesta dissertação o artigo [15] de J. Sun, J. Chu, T.F. Wu. Mais precisamente estudaremos o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \beta\Delta_p u + \lambda V(x)u = f(x,u) \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^2(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{E}$$

onde $N \geqslant 1$, $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ é um parâmetro, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ com $p \geqslant 2$ e $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Assumimos que o potencial $V(x)$ satisfaz as seguintes condições:

(V1) $V \in C(\mathbb{R}^N)$ e $V(x) \geqslant 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^N$;

(V2) Existe $b > 0$ tal que o conjunto

$$\{V < b\} := \left\{x \in \mathbb{R}^N, V(x) < b\right\}, \tag{1.2}$$

tem medida de Lebesgue positiva finita para $N \geqslant 4$ e

$$|\{V < b\}| < S_\infty^{-2}\left(1 + \frac{A_0^2}{2}\right)^{-1} \quad \text{para} \quad N \leq 3, \tag{1.3}$$

onde $|\cdot|$ é a medida de Lebesgue, S_∞ é a melhor constante de Sobolev para a imersão de $H^2(\mathbb{R}^N)$ em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ para $N \leq 3$, e A_0 é definida em (2.4) posteriormente;

(V3) $\Omega = \operatorname{int}\left\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) = 0\right\}$ é não vazio e tem fronteira suave com $\overline{\Omega} = \left\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) = 0\right\}$.

Ao longo dessa dissertação vamos denotar L^r−norma ($1 \leqslant r \leqslant \infty$) por $|\cdot|_r$, $2_* := \infty$ se $1 \leqslant N \leqslant 4$ e $2_* := \dfrac{2N}{N-4}$ se $N \geqslant 5$; usamos a notação $\alpha^+ = \max\{\alpha, 0\}$ e $B_r = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < r\}$. Quando consideramos uma subsequência de $\{u_n\}$ continuaremos usando a mesma notação $\{u_n\}$ para a subsequência. E usaremos $o_n(1)$ para denotar uma quantidade o qual converge para zero quando $n \to \infty$.

A seguir será apresentado algumas condições de crescimento da função f que utilizaremos e os devidos teoremas que iremos demonstrar usando essas condições.

(D1) $f \in C\left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$ e existe q tal que $p < q < 2_*$ e duas funções $a, b \in L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ que satisfazem $|a^+|_\infty < \Theta_2^{-1}$ e $b(x) > 0$ em $\overline{\Omega}$ tal que

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{f(x,s)}{|s|^{q-1}} = a(x) \quad \text{uniformemente em } \ x \in \mathbb{R}^N,$$

e

$$\lim_{s \to \infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{q-1}} = b(x) \quad \text{uniformemente em } \ x \in \mathbb{R}^N,$$

onde Θ_2 é dado em (2.26).

(D2) Existe l tal que $1 < l < 2$ e uma função não negativa $d \in L^{2/(2-l)}\left(\mathbb{R}^N\right)$ tal que

$$pF(x,s) - f(x,s) \leqslant d(x)|s|^l \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \text{ e}, \ s \in \mathbb{R},$$

onde $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$.

(D1') $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e existe q tal que $2 < q < p$ e três funções não negativas g_0, $g_1 \in L^{p^*/(p^*-q)}(\mathbb{R}^N)$ com $g_0(x) > 0$ em $\overline{\Omega}$ e $a \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$g_0(x)s^{q-1} \leqslant f(x,s) \leqslant a(x)s + g_1(x)s^{q-1},$$

onde $p^* := \frac{Np}{N-p}$;

(D2') Existe uma função não negativa $g_2 \in L^{p^*/(p^*-q)}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\frac{1}{2}f(x,s)s - F(x,s) \leqslant g_2(x)|s|^q.$$

(D3) $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ com $f(x,s) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^N$ e $s \leqslant 0$, e existe q tal que $1 < q < p$, e duas funções não negativas $\tilde{a} \in L^{2/(2-q)}(\mathbb{R}^N)$ para $1 < q < 2$, ou $\tilde{a} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leqslant q < p$ e $\tilde{b} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$-\tilde{a}(x)s^{q-1} \leqslant f(x,s) \leqslant \tilde{a}(x)s^{q-1} + \tilde{b}(x)s^{p-1}.$$

Teorema 1.1. *Suponha que $N \geqslant 1$, $2 \leqslant p < 2_*$ e condições $(V1) - (V3)$ são satisfeitas. Também assumimos que a função f satisfaz $(D1)$ e $(D2)$.*

Então existe $\Lambda_0 > 0$ tal que o problema (E) admite ao menos uma solução não trivial para todo $\lambda \geqslant \Lambda_0$ e $\beta \geqslant 0$.

Teorema 1.2. *Suponha que* $N \geqslant 3$, $2 < p < \min\{N, \frac{2N}{N-2}\}$ *e as condições* $(V1) - (V3)$ *são satisfeitas. Também assumimos que a função* f *satisfaz* $(D1')$ *e* $(D2')$.

Então temos os seguintes resultados:

(i) para $\beta > 0$, $\Lambda_0 > 0$ *tal que a equação* (E) *admite ao menos uma solução não trivial para todo* $\lambda \geqslant \Lambda_0$*;*

(ii) existe β_0 , $\Lambda_0 > 0$ *tal que a equação* (E) *admite ao menos duas soluções não triviais para todo* $\lambda \geqslant \Lambda_0$ *e* $0 < \beta < \beta_0$.

Teorema 1.3. *Suponha que* $N \geqslant 1, 2 < p < 4$ *e as condições* $(V1) - (V3)$, $(D2)$ *e* $(D3)$ *são satisfeitas.*

Então os seguintes resultados são verdadeiros:

(i) se $f(x,s) \geqslant 0$ *para todo* $(x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ *e* $1 < q < 2$, *então existe* $\Lambda_0, \Pi_0 > 0$ *tal que para* $|\tilde{a}|_{L^{2/(2-q)}} < \Pi_0$, *então a equação* (E) *admite ao menos uma solução não trivial para todo* $\lambda \geqslant \Lambda_0$ *e* $\beta < 0$*;*

(ii) se $f(x,s) \geqslant 0$ *para todo* $(x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ *e* $1 < q < p$, *então existe* $\Lambda_0 > 0$ *tal que a equação* (E) *admite ao menos uma solução não trivial para todo* $\lambda \geqslant \Lambda_0$ *e* $\beta < 0$.

Teorema 1.4. *Suponha que* $N \geqslant 1$, $2 < p < 4$ *e as condições* $(V1) - (V2)$ *são satisfeitas. Se* $f(x,u) = h(x)|u|^{q-2}u$ *com* $h \in L^{2/(2-q)}(\mathbb{R}^N)$ *e* $1 < q < 2$, *então existe* Λ^*,$\Pi^* > 0$ *tal que para* $0 < |h^+|_{2/(2-q)} < \Pi^*$, *a equação* (E) *admite ao menos duas soluções não triviais para todo* $\lambda \geqslant \Lambda^*$ *e* $\beta < 0$.

No Capítulo 2 mostraremos a estrutura variacional do problema e alguma estimativas que serão usadas ao longo da dissertação. No Capítulo 3 mostraremos que o funcional associado naturalmente ao problema tem a geometria do teorema do Passo da Montanha. No Capítulo 4 faremos as demonstrações dos Teoremas 1.1 e 1.3. No Capítulo 5 será demonstrado o Teorema 1.2. A demonstração do Teorema 1.4 será apresentada no Capítulo 6. Ao final da dissertação apresentaremos dois Apêndices. No Apêndice A enunciaremos e apresentaremos as demonstrações do Princípio Variacional de Ekeland e do Teorema do Passo da Montanha. No Apêndice B enunciaremos os principais resultados nessa dissertação indicando referências onde o leitor poderá encontrar as demonstrações.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Estrutura variacional

Neste capítulo estudaremos a estrutura variacional necessária para estudar o problema (E). Mais precisamente, vamos estudar o espaço onde vamos procurar as soluções e estabelecer algumas estimativas que serão importantes no decorrer desse estudo.
Vamos definir o seguinte conjunto:

$$X = \left\{ u \in H^2(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx < \infty \right\}. \tag{2.1}$$

Vamos equipar (2.1) com o seguinte produto interno e norma

$$\langle u, v \rangle_\lambda = \int_{\mathbb{R}^N} (\Delta u \Delta v + \lambda V(x) uv)\, dx \quad \text{e} \quad \|u\|_\lambda^2 = \langle u, u \rangle_\lambda \quad \text{com } u, v \in X. \tag{2.2}$$

Assim, construímos o espaço $X_\lambda = (X, \|u\|_\lambda)$. Podemos observar que para $\lambda > 1$ temos, $\|u\| \leq \|u\|_\lambda$, o qual definimos $\|u\| = \|u\|_1$, ou seja

$$\|u\| = \int_{\mathbb{R}^N} (\Delta u \Delta v + V(x) uv)\, dx. \tag{2.3}$$

Agora vamos mostrar algumas estimativas envolvendo as normas de X_λ e H^2.

Considere a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, encontrada no Apêndice B, Teorema 6.11 com $j = 1$, $p = 2$, $\theta = \frac{1}{2}$,$k = 2$, $m = 2$, $q = r = 2$, existe A_0>0, tal que temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \leqslant A_0^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx \right)^{1/2}. \tag{2.4}$$

Segundo a desigualdade de Young, encontrada no Apêndice B, Teorema 6.14, com os valores $p = 2$, $q = 2$, conseguimos

$$A_0^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant \frac{A_0^2}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx\right).$$

Disso, pela desigualdade (2.4) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \leqslant \frac{A_0^2}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx\right). \tag{2.5}$$

Somando a expressão $\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx\right)$ em ambos os lados da desigualdade, temos

$$\|u\|_{H^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \leqslant \left(\frac{A_0^2}{2} + 1\right)\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx\right).$$

Assim, conseguimos majorar $\|u\|_{H^2}^2$, definido em 6.8 encontrado no Apêndice B, por cima e por baixo como a seguir:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \leq \|u\|_{H^2}^2 \leq \left(\frac{A_0^2}{2} + 1\right)\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx\right). \tag{2.6}$$

Lema 2.1. *O espaço X_λ definido possui imersão contínua em L^r, ou seja, $X_\lambda(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ para $r \in [2, 2_*)$.*

Para demonstrar o Lema 2.1 vamos precisar estudar as desigualdades com $|u|_2^2$ separadamente para cada um dos casos $N \leq 3$, $N = 4$ e $N > 4$.

Se $N \leqslant 3$, e lembrando que $\{V < b\} = \big\{x \in \mathbb{R}^N \mid V(x) < b\big\}$, $\{V \geqslant b\} = \big\{x \in \mathbb{R}^N \mid V(x) \geqslant b\big\}$, podemos separar a seguinte integral na soma de duas integrais nesses dois domínios disjuntos

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = \int_{\{V \geqslant b\}} u^2 dx + \int_{\{V < b\}} u^2 dx.$$

Usando a propriedade (V2) chegamos em

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \leqslant \frac{1}{b}\int_{\{V \geqslant b\}} V(x) u^2 dx + \int_{\{V < b\}} u^2 dx, \tag{2.7}$$

de $|u| \leqslant |u|_\infty = \inf\{c > 0 : |u(x)| \leqslant c\}$, logo ocorre a desigualdade

$$\int_{\{V<b\}} |u|^2 dx \leqslant \int_{\{V<b\}} |u|_\infty^2 dx = |u|_\infty^2 \int_{\{V<b\}} 1 dx = |u|_\infty^2 |\{V < b\}|.$$

Então aplicando a desigualdade anterior em (2.7),

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \leqslant \frac{1}{b} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx + |u|_\infty^2 |\{V < b\}|.$$

Da imersão contínua de $H^2\left(\mathbb{R}^N\right)$ em $L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ na desigualdade anterior, conseguimos

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \leqslant \frac{1}{b} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx + S_\infty^2 \|u\|_{H^2}^2 |\{V < b\}|.$$

Combinando com a desigualdade em (2.6), temos

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{A_0^2}{2}\right)^{-1} \|u\|_{H^2}^2 &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx + \frac{1}{b} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx + S_\infty^2 \|u\|_{H^2}^2 \left| \{V < b\} \right|. \end{aligned}$$

Pela definição da norma em X_λ, com $\lambda = 1$, conseguimos:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{A_0^2}{2}\right)^{-1} \|u\|_{H^2}^2 &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx + \frac{1}{b} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx + S_\infty^2 \left| \{V < b\} \right| \|u\|_{H^2}^2 \\ &\leqslant \max\left\{1, \frac{1}{b}\right\} \|u\|^2 + S_\infty^2 \left| \{V < b\} \right| \|u\|_{H^2}^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Isolando $\|u\|_{H^2}^2$ no lado inferior da desigualdade concluímos que

$$\|u\|_{H^2}^2 \leqslant \max\left\{1, \frac{1}{b}\right\} \|u\|^2 \left[\left(1 + \frac{A_0^2}{2}\right)^{-1} - S_\infty^2 |\{V < b\}|\right]^{-1} \quad \text{para} \quad \lambda = 1,\ N \leqslant 3. \tag{2.9}$$

Se $\lambda \geqslant \dfrac{1}{b}$, da desigualdade em (2.8) teríamos

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{A_0^2}{2}\right)^{-1} \|u\|_{H^2}^2 &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx + \frac{1}{b} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx + S_\infty^2 \left| \{V < b\} \right| \|u\|_{H^2}^2 \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx + S_\infty^2 \|u\|_{H^2}^2 |\{V < b\}|. \end{aligned}$$

Usando a definição de $\|u\|_\lambda$ ficamos com

$$\left(1 + \frac{A_0^2}{2}\right)^{-1} \|u\|_{H^2}^2 \leqslant \|u\|_\lambda^2 + S_\infty^2 \|u\|_{H^2}^2 |\{V < b\}|.$$

Então podemos concluir que

$$\|u\|_{H^2}^2 \leqslant \|u\|_\lambda^2 \left[\left(1+\frac{A_0^2}{2}\right)^{-1} - S_\infty^2 |\{V<b\}| \right]^{-1}, \quad \text{para } \lambda \geqslant \frac{1}{b}, N \leqslant 3. \tag{2.10}$$

Se $N=4$, e considerando a condição $(V2)$, podemos abrir a integral a seguir como no caso $N<4$:

$$\int_{\mathbb{R}^4} u^2 dx = \int_{\{V\geq b\}} u^2 dx + \int_{\{V<b\}} u^2 dx.$$

Para $(V1)$, conseguimos

$$\int_{\mathbb{R}^4} u^2 dx \leqslant \frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}^4} V(x)u^2 dx + \int_{\{V<b\}} 1.u^2 dx.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, encontrada no Apêndice B, Teorema 6.13, com $p=q=2$ temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^4} u^2 dx &\leqslant \frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}^4} V(x)u^2 dx + \left(\int_{\{V<b\}} 1^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{\{V<b\}} (u^2)^2 dx\right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}^4} V(x)u^2 dx + |\{V<b\}|^{1/2} \left(\int_{\{V<b\}} |u|^4 dx\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, encontrada no Apêndice B, Teorema 6.11, com $k=q=r=2$, $p=4$, $j=0$ e $\Theta=\dfrac{1}{2}$, existe $B_0>0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^4} u^2 dx \leqslant \frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}^4} V(x)u^2 dx + \left(|\{V<b\}| B_0^4 \int_{\mathbb{R}^4} |\Delta u|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^4} u^2 dx\right)^{1/2}.$$

Com a desigualdade de Young, encontrada no Apêndice B, Teorema 6.14, conseguimos

$$\int_{\mathbb{R}^4} u^2 dx \leqslant \frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}^4} V(x)u^2 dx + \frac{1}{2}B_0^4 |\{V<b\}| \int_{\mathbb{R}^4} |\Delta u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^4} u^2 dx.$$

Então multiplicando por 2 na desigualdade anterior, e isolando $\int_{\mathbb{R}^4} u^2 dx$ em um só lado da desigualdade, ficamos com

$$\int_{\mathbb{R}^4} u^2 dx \leqslant \frac{2}{b}\int_{\mathbb{R}^4} V(x)u^2 + B_0^4 |\{V<b\}| \int_{\mathbb{R}^4} |\Delta u|^2 dx. \tag{2.11}$$

Das desigualdades (2.6) e (2.11) temos

$$\|u\|_{H^2}^2 \leqslant \left(1+\frac{A_0^2}{2}\right)\left[\left(1+B_0^4|\{V<b\}|\right)\int_{\mathbb{R}^4}|\Delta u|^2dx+\frac{2}{b}\int_{\mathbb{R}^4}V(x)u^2dx\right] \quad (2.12)$$

$$\leqslant \left(1+\frac{A_0^2}{2}\right)\max\left\{1+B_0^4|\{V<b\}|,\frac{2}{b}\right\}\|u\|^2. \quad (2.13)$$

Voltando para a desigualdade em (2.12), como $1 \leqslant 1+B_0^4|\{V<b\}|$ vamos ter que $1 \leqslant (1+B_0^4|\{V<b\}|)^2$. Então conseguimos

$$\|u\|_{H^2}^2 \leqslant \left(1+\frac{A_0^2}{2}\right)\left[(1+B_0^4|\{V<b\}|)\int_{\mathbb{R}^4}|\Delta u|dx+\frac{2}{b}(1+B_0^4|\{V<b\}|)^2\int_{\mathbb{R}^4}V(x)u^2dx\right].$$

Colocando $(1+B_0^4|\{V<b\}|)$ em evidência, conseguimos

$$\|u\|_{H^2}^2 \leqslant \left(1+\frac{A_0^2}{2}\right)(1+B_0^4|\{V<b\}|)\left[\int_{\mathbb{R}^4}|\Delta u|^2dx+\frac{2}{b}(1+B_0^4|\{V<b\}|)\int_{\mathbb{R}^4}V(x)u^2dx\right].$$

Assim para $\lambda \geqslant \dfrac{2\,(1+B_0^4|\{V<b\}|)}{b}$ temos

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^2}^2 &\leqslant \left(1+\frac{A_0^2}{2}\right)(1+B_0^4|\{V<b\}|)\left[\int_{\mathbb{R}^4}|\Delta u|^2dx+\frac{2}{b}(1+B_0^4|\{V<b\}|)\int_{\mathbb{R}^4}V(x)u^2dx\right]\\ &\leqslant \left(1+\frac{A_0^2}{2}\right)(1+B_0^4|\{V<b\}|)\left[\int_{\mathbb{R}^4}|\Delta u|^2dx+\lambda\int_{\mathbb{R}^4}V(x)u^2dx\right].\end{aligned}$$

Usando a definição de $\|u\|_\lambda$ chegamos em

$$\|u\|_{H^2}^2 = \left(1+\frac{A_0^2}{2}\right)(1+B_0^4|\{V<b\}|)\|u\|_\lambda^2.$$

Podemos concluir então que

$$\|u\|_{H^2}^2 \leqslant \left(1+\frac{A_0^2}{2}\right)(1+B_0^4|\{V<b\}|)\|u\|_\lambda^2 \quad \text{para} \quad \lambda \geqslant \frac{2\,(1+B_0^4|\{V<b\}|)}{b},\ N=4. \quad (2.14)$$

Se $N>4$ e considerando as condições $(V1)-(V2)$, e separando a integral a seguir como no caso $N=4$, ficamos com

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}u^2dx &= \int_{\{V\geqslant b\}}u^2dx+\int_{\{V<b\}}u^2dx\\ &= \frac{1}{b}\int_{\{V\geq b\}}V(x)u^2dx+\int_{\{V<b\}}1\cdot u^2dx.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder, encontrada no Apêndice B, Teorema 6.13, com $p = \frac{N}{4}$ e $q = \frac{N}{N-4}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \leqslant \frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx + \left(\int_{\{V<b\}} 1^{frac4N} dx\right)^{4/N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (u^2)^{\frac{N}{N-4}} dx\right)^{(N-4)/N}$$
$$\leqslant \frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx + |\{V<b\}|^{4/N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{2N}{N-4}} dx\right)^{(N-4)/N}.$$

Da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg 6.11, encontrada no Apêndice B, para $\theta \in (0,1)$, $j = 0$, $q = p = \dfrac{2N}{N-4}$, $r = k = 2$ e $n = N$ assim $n \neq 4$, então existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{\frac{2N}{N-4}} \leqslant C\|\nabla^2 u\|_2^{\theta}\ \|u\|_{\frac{2N}{N-4}}^{1-\theta}.$$

Deixando $\|u\|_{\frac{2N}{N-4}}$ em um só lado da desigualdade obtemos

$$\|u\|^{\theta}_{\frac{2N}{N-4}} \leqslant C\|\Delta u\|_2^{\theta}.$$

Passando a raiz de θ em ambos os lados

$$\|u\|_{\frac{2N}{N-4}} \leqslant C^{1/\theta}\|\Delta u\|_2. \tag{2.15}$$

Definindo $C_0 = C^{1/\theta}$ conseguimos

$$\left(\left(\int_{\mathbb{R}^N} u^{\frac{2N}{N-4}} dx\right)^{\frac{N-4}{2N}}\right)^2 \leqslant C_0^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx.$$

Assim, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \leqslant \frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx + |\{V<b\}|^{4/N}\left(C_0^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx\right).$$

Combinando a desigualdade anterior com (2.6), temos:

$$\|u\|_{H^2}^2 \leqslant \left(1 + \frac{A_0^2}{2}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx\right)$$
$$\leqslant \left(1 + \frac{A_0^2}{2}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx + \frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx + |\{V<b\}|^{4/N} C_0^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx\right) \tag{2.16}$$
$$\leqslant \left(1 + \frac{A_0^2}{2}\right)\left(\left(1 + C_0^2|\{V<b\}|^{4/N}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx + \frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx\right) \tag{2.17}$$
$$\leqslant \left(1 + \frac{A_0^2}{2}\right)\max\left\{1 + C_0^2|\{V<b\}|^{4/N}, \frac{1}{b}\right\}\|u\|^2. \tag{2.18}$$

Pela desigualdade em (2.17)

$$\|u\|_{H^2}^2 \leqslant \left(1+\frac{A_0^2}{2}\right)\left[(1+C_0^2|\{V<b\}|^{4/N})\int_{\mathbb{R}^N}|\Delta u|^2dx+\frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u^2dx\right].$$

Como $1\leqslant 1+C_0^2|\{V<b\}|^{4/N}$ temos que $1\leqslant \left(1+C_0^2|\{V<b\}|^{4/N}\right)^2$, ficamos com

$$\|u\|_{H^2}^2 \leqslant \left(1+\frac{A_0^2}{2}\right)\left[(1+C_0^2|\{V<b\}|^{4/N})\int_{\mathbb{R}^4}|\Delta u|dx+\frac{1}{b}(1+C_0^2|\{V<b\}|^{N/4})^2\int_{\mathbb{R}^4}V(x)u^2dx\right].$$

Colocando $\left(1+C_0^2|\{V<b\}|^{4/N}\right)$ em evidência, temos

$$\|u\|_{H^2}^2 \leqslant \left(1+\frac{A_0^2}{2}\right)(1+C_0^2|\{V<b\}|^{4/N})\left[\int_{\mathbb{R}^4}|\Delta u|^2dx+\frac{1}{b}(1+C_0^2|\{V<b\}|^{4/N})\int_{\mathbb{R}^4}V(x)u^2dx\right].$$

Assim, se $\lambda\geqslant \frac{1}{b}(1+C_0^2|\{V<b\}|^{4/N})$

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^2}^2 &\leqslant \left(1+\frac{A_0^2}{2}\right)(1+C_0^2|\{V<b\}|^{4/N})\left[\int_{\mathbb{R}^4}|\Delta u|^2dx+\frac{1}{b}(1+C_0^2|\{V<b\}|^{4/N})\int_{\mathbb{R}^4}V(x)u^2dx\right]\\ &\leqslant \left(1+\frac{A_0^2}{2}\right)(1+C_0^2|\{V<b\}|^{4/N})\left[\int_{\mathbb{R}^4}|\Delta u|^2dx+\lambda\int_{\mathbb{R}^4}V(x)u^2dx\right].\end{aligned}$$

Usando a definição de $\|u\|_\lambda$

$$\|u\|_{H^2}^2 \leqslant \left(1+\frac{A_0^2}{2}\right)(1+C_0^2|\{V<b\}|^{4/N})\|u\|_\lambda^2.$$

Logo

$$\|u\|_{H^2}^2 \leqslant \left(1+\frac{A_0^2}{2}\right)(1+C_0^2|\{V<b\}|^{4/N})\|u\|_\lambda^2 \quad \text{para} \quad \lambda\geqslant\frac{1+C_0^2|\{V<b\}|^{4/N}}{b}, N>4. \tag{2.19}$$

Podemos agora construir a constante de imerção para cada uma das restrições de N, temos:

$$\alpha_N := \begin{cases} \left[\left(1+\frac{A_0^2}{2}\right)^{-1}-S_\infty^2|\{V<b\}|\right]^{-1}\max\left\{1,\frac{1}{b}\right\} & \text{para} \quad N\leqslant 3,\\ \left(1+\frac{A_0^2}{2}\right)\max\left\{1+B_0^4|\{V<b\}|,\frac{2}{b}\right\} & \text{para} \quad N=4,\\ \left(1+\frac{A_0^2}{2}\right)\max\left\{1+C_0^2|\{V<b\}|^{4/N},\frac{1}{b}\right\} & \text{para} \quad N>4.\end{cases}$$

Então das desigualdades (2.9), (2.13) e (2.18), temos

$$\|u\|_{H^2}^2\leqslant \alpha_N\|u\|^2, \tag{2.20}$$

logo, temos que a imersão $X \hookrightarrow H^2(\mathbb{R}^N)$ é contínua.

Como a imersão $H^2(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$ é contínua para $N \leqslant 3$, então pela desigualdade (2.10), e para todo $r \in [2, +\infty)$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^r dx &\leqslant |u|_\infty^{r-2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \\ &\leqslant S_\infty^{-(r-2)} \|u\|_{H^2}^r \\ &\leqslant S_\infty^{-(r-2)} \left[\left(1 + \frac{A_0^2}{2}\right)^{-1} - S_\infty^2 |\{V < b\}| \right]^{-\frac{r}{2}} \|u\|_\lambda^r, \end{aligned} \tag{2.21}$$

para $\lambda \geqslant \frac{1}{b}$. Além disso, usando que a imersão $H^2(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ $(2 \leqslant r < +\infty)$ é contínua para $N = 4$ e a desigualdade em (2.14), para todo $r \in [2, +\infty)$ temos

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^4} |u|^r dx \leqslant S_r^{-r} \|u\|_{H^2}^r \\ &\leqslant S_r^{-r} \left(1 + B_0^4 |\{V < b\}|\right)^{\frac{r}{2}} \left(1 + \frac{A_0^2}{2}\right)^{\frac{r}{2}} \|u\|_\lambda^r \quad \text{para} \quad \lambda \geqslant \frac{2\big(1 + B_0^4 |\{V < b\}|\big)}{b}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

onde S_r é a melhor constante para a imersão de $H^2(\mathbb{R}^N)$ em $L^r(\mathbb{R}^N)$, com $r \in [2, +\infty)$, para $N = 4$.

Finalmente para $N \geqslant 4$, das condições $(V1)-(V2)$ e a desigualdade (2.19), e as desigualdades de Hölder (6.23) e Gagliardo-Nirenberg (6.22), considerando o seguinte, para $r \in \left[2, \frac{2N}{N-4}\right)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^r dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{r - \frac{N(r-2)}{4}} |u|^{\frac{N(r-2)}{4}} dx.$$

Usando a desigualdade de Hölder, encontrada no Apêndice B, Teorema 6.13, com $q = \frac{8}{(r-2)(N-4)}$ e $p = \frac{8}{2N - r(N-4)}$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^r dx &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(|u|^{\frac{N(r-2)}{4}} \right)^q dx \right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(|u|^{\frac{4r - N(r-2)}{4}} \right)^p dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(|u|^{\frac{N(r-2)}{4}} \right)^{\frac{8}{(r-2)(N-4)}} dx \right)^{\frac{(r-2)(N-4)}{8}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(|u|^{\frac{4r - N(r-2)}{4}} \right)^{\frac{8}{2N - r(N-4)}} dx \right)^{\frac{2N - r(N-4)}{8}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{2N}{N-4}} dx \right)^{\frac{(r-2)(N-4)}{8}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx \right)^{\frac{2N - r(N-4)}{8}} \\ &= \left(\|u\|_{\frac{2N}{N-4}}^{\frac{2N}{N-4}} \right)^{\frac{(r-2)(N-4)}{8}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx \right)^{\frac{2N - r(N-4)}{8}}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, encontrada no Apêncide B, Teorema 6.11, com $p = q = \frac{2N}{N-4}$, $j = 0$, $k = r = 2$ e $\theta \in (0,1)$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^r dx \leqslant \left(C^{\frac{2N}{\theta(N-4)}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 \right)^{\frac{N}{N-4}} \right)^{\frac{(r-2)(N-4)}{8}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx \right)^{\frac{2N-r(N-4)}{8}}.$$

Definindo $C_0 = C^{1/\theta}$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^r dx \leqslant \left(C_0^{\frac{2N}{N-4}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx \right)^{\frac{N}{N-4}} \right)^{\frac{(r-2)(N-4)}{8}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx \right)^{\frac{2N-r(N-4)}{8}}.$$

Distribuindo as potências, ficamos com

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^r dx &\leqslant C_0^{\frac{N(r-2)}{4}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx \right)^{\frac{N(r-2)}{8}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx \right)^{\frac{2N-r(N-4)}{8}}. \\ &= C_0^{\frac{N(r-2)}{4}} \left(\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx \right)^{\frac{N(r-2)}{8}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx \right)^{\frac{2N-r(N-4)}{8}} \right)^{\frac{2}{r}\cdot\frac{r}{2}}. \end{aligned}$$

Distribuindo a potência $\dfrac{2}{r}$, conseguimos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^r dx \leqslant C_0^{\frac{N(r-2)}{4}} \left(\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx \right)^{\frac{N(r-2)}{4r}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx \right)^{\frac{2N-r(N-4)}{4r}} \right)^{r/2}. \tag{2.23}$$

Considerando a desigualdade de Young, encontrada no Apêndice B, Teorema 6.14 com $\frac{1}{p} = \frac{N(r-2)}{4r} > 0$ e $\frac{1}{q} = \frac{2N-r(N-4)}{4r} > 0$ temos $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, logo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^r dx &\leqslant C_0^{\frac{N(r-2)}{4}} \left(\frac{N(r-2)}{4r} \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx + \frac{2N-r(N-4)}{4r} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx \right)^{r/2} \\ &\leqslant C_0^{\frac{N(r-2)}{4}} \left[\left(\frac{N(r-2)}{4r} + \frac{2N-r(N-4)}{4r} \right) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx \right) \right]^{r/2}. \end{aligned}$$

Como a soma $\left(\frac{N(r-2)}{4r} + \frac{2N-r(N-4)}{4r} \right) = 1$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^r dx \leqslant C_0^{\frac{N(r-2)}{4}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\Delta u|^2 + |u|^2) dx \right)^{r/2}.$$

Da desigualdade (2.6), conseguimos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^r dx \leqslant C_0^{\frac{N(r-2)}{4}} \|u\|_{H^2}^r.$$

E pela desigualdade (2.19), chegamos em

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^r dx \leqslant C_0^{\frac{N(r-2)}{4}} \left(1 + C_0^2|\{V < b\}|^{4/N}\right)^{\frac{r}{2}} \left(1 + \frac{A_0^2}{2}\right)^{\frac{r}{2}} \|u\|_\lambda^r \tag{2.24}$$
$$\text{para} \quad \lambda \geqslant \frac{1 + C_0^2|\{V < b\}|^{4/N}}{b}.$$

Então podemos construir a seguinte constante de imersão

$$\Theta_r := \begin{cases} S_\infty^{-(r-2)} \left[\left(1 + \frac{A_0^2}{2}\right)^{-1} - S_\infty^2|\{V < b\}|\right]^{-r/2} & \text{se} \quad N \leqslant 3, \\ S_r^{-r} \left(1 + B_0^4|\{V < b\}|^{4/N}\right)^{r/2} \left(1 + \frac{A_0^2}{2}\right)^{r/2} & \text{se} \quad N = 4, \\ C_0^{N(r-2)/4} \left(1 + C_0^2|\{V < b\}|^{4/N}\right)^{r/2} \left(1 + \frac{A_0^2}{2}\right)^{r/2} & \text{se} \quad N > 4, \end{cases} \tag{2.25}$$

e

$$\Lambda := \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{se} \quad N \leqslant 3, \\ \frac{2(1+B_0^4|\{V<b\}|)}{b} & \text{se} \quad N = 4, \\ \frac{1+C_0^2|\{V<b\}|^{4/N}}{b} & \text{se} \quad N > 4. \end{cases}$$

Podemos agora demonstrar o Lema 2.1.

Demonstração do Lema 2.1. De (2.21), (2.22), (2.24) e (2.25), temos que para todo $r \in [2, 2_*)$ e $\lambda \geqslant \Lambda$, a desigualdade a seguir é satisfeita

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^r dx \leqslant \Theta_r \|u\|_\lambda^r. \tag{2.26}$$

Assim, temos que $X_\lambda(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ para $r \in [2, 2_*)$. □

Agora vamos estudar as condições $(D1), (D1')$ e $(D3)$, apresentadas no capítulo introdutório, estas são condições de crescimento da função f, que por sua vez foi definida para o problema (E).

Considerando que a condição $(D1)$ é satisfeita, $\forall \ \ \varepsilon > 0, \ \ \exists \ \ \delta_0 > 0$, tal que se $|s| < \delta$, temos

$$\varepsilon \geqslant \left|\frac{f(x,s)}{|s|^{q-1}} - a(x)\right| \geqslant \frac{f(x,s)}{|s|^{q-1}} - a(x) \qquad |s| < \delta_0,$$

mas isso significa que

$$a(x) + \varepsilon \geqslant \frac{f(x,s)}{|s|^{q-1}},$$

então

$$|s|^{q-1}(a(x) + \varepsilon) \geqslant f(x,s) \qquad |s| < \delta_0. \tag{2.27}$$

Definimos $a^+(x) = \max\{a(x), 0\}$ e $a^-(x) = \max\{-a(x), 0\}$, então $a(x) = -a^-(x) + a^+(x) \leqslant a^+(x)$. Logo, substituindo em (2.27), temos

$$f(x,s) \leqslant (a^+(x) + \varepsilon)|s|^{q-1} \ \text{ para } \ |s| < \delta_0.$$

Como é para um δ_0 pequeno, podemos escolher $\delta = \min\{1, \delta_0\}$ tal que as desigualdades anteriores continuam sendo satisfeitas.

$$\begin{aligned} f(x,s) &\leqslant (a^+(x) + \varepsilon)|s|^{q-1} \ \text{ para } \ |s| \leqslant \delta \\ f(x,s) &\leqslant (|a^+(x)| + \varepsilon)|s|^{q-1} \ \text{ para } \ |s| \leqslant \delta, \end{aligned}$$

$a \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ então uma vez que $a^+(x) = |a^+(x)| \leqslant |a^+|_\infty$, e $|s| \leqslant 1$ e $1 < q-1$ então $|s|^1 \geqslant |s|^{q-1}$, e se $|s| < \delta < 1$ então $|s| < 1$, assim

$$f(x,s) \leqslant (|a^+|_\infty + \varepsilon)|s| \ \text{ para } \ |s| \leqslant 1. \tag{2.28}$$

Da outra parte da condição $(D1)$, para o mesmo $\varepsilon > 0$, $\exists \ M > 1$, tal que se $|s| > M$, temos

$$\varepsilon \geqslant \left| \frac{f(x,s)}{|s|^{q-1}} - b(x) \right| \geqslant \frac{f(x,s)}{|s|^{q-1}} - b(x) \ \text{ para } \ |s| > M,$$

então

$$\varepsilon + b(x) \geqslant \frac{f(x,s)}{|s|^{q-1}}.$$

Multiplicando a desigualdade anterior por $|s|^{q-1}$, ficamos com

$$|s|^{q-1}(\varepsilon + b(x)) \geqslant f(x,s).$$

Como $b \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ então $0 < b(x) = |b(x)| \leqslant |b|_\infty$, logo

$$|s|^{q-1}(\varepsilon + |b|_\infty) \geqslant f(x,s).$$

Seja m tal que $2 < q < m < 2^*$, e $1 < q-1 < m-1 < 2^*-1$ então $|s|^{q-1} < |s|^{m-1}$, assim

$$f(x,s) \leqslant (\varepsilon + |b|_\infty)|s|^{m-1} \;\text{ para }\; |s| > M. \tag{2.29}$$

Agora considere $M \geqslant |s| \geqslant \delta$, neste conjunto a função $f(x,\cdot)$ é compacta, ou seja, o máximo e o mínimo é assumido por s em $[-M,-\delta] \cup [\delta, M]$, e da f e $|s|^{m-1}$ serem funções contínuas, $\dfrac{f(x,s)}{(\varepsilon + |b|_\infty)|s|^{m-1}}$ é contínua e compacta, logo $\exists\, c_1 \in \mathbb{R}$, e $c_2 > 0$, tal que

$$c_1 \leqslant \frac{f(x,s)}{(\varepsilon + |b|_\infty)|s|^{m-1}} \leqslant c_2 \;\text{ para }\; \delta \leqslant |s| \leqslant M,$$

assim

$$f(x,s) \leqslant c_2(\varepsilon + |b|_\infty)|s|^{m-1} \;\text{ para }\; \delta \leqslant |s| \leqslant M. \tag{2.30}$$

Logo, juntando (2.28), (2.29) e (2.30), temos

$$f(x,s) \leqslant (|a^+|_\infty + \varepsilon)|s| + (c_2+1)(\varepsilon + |b|_\infty)|s|^{m-1} \;\; \forall\; s \in \mathbb{R}.$$

Com $0 < (c_2+1)(\varepsilon + |b|_\infty) = C_\varepsilon$ pois só depende de ε, então conseguimos

$$f(x,s) \leqslant (|a^+|_\infty + \varepsilon)|s| + C_\varepsilon |s|^{m-1} \;\; \forall\; s \in \mathbb{R}.. \tag{2.31}$$

Considerando $F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,t)dt$, então

$$F(x,s) \leqslant \int_0^s (|a^+|_\infty + \varepsilon)|t| + C_\varepsilon |t|^{m-1} dt = (|a^+|_\infty + \varepsilon)\frac{|s|^2}{2} + C_\varepsilon \frac{|s|^m}{m}.$$

Logo obtemos

$$F(x,s) \leqslant (|a^+|_\infty + \varepsilon)\frac{|s|^2}{2} + C_\varepsilon \frac{|s|^m}{m} \;\; \forall\; s \in \mathbb{R}.$$

Então, pela desigualdade (2.26), concluímos que para todo $u \in X_\lambda$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx &\leqslant \frac{(|a^+|_\infty + \varepsilon)}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx + \frac{C_\varepsilon}{m}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^m dx \\ &\leqslant \frac{(|a^+|_\infty + \varepsilon)\Theta_2}{2}\|u\|_\lambda^2 + \frac{C_\varepsilon\Theta_m}{m}\|u\|_\lambda^m. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Considerando agora que a condição $(D1')$ é satisfeita, temos

$$g_0(x)s^{q-1} \leqslant f(x,s) \leqslant a(x)s + g_1(x)s^{q-1}. \tag{2.33}$$

Definindo $F(x,u) = \displaystyle\int_0^u f(x,s)ds$, temos da desigualdade anterior a seguinte condição sobre a $F(x,u)$

$$\int_0^u g_0(x)s^{q-1}ds \leqslant F(x,u) \leqslant \int_0^u a(x)s + g_1(x)s^{q-1}ds.$$

Assim conseguimos

$$g_0(x)\frac{u^q}{q} \leqslant F(x,u) \leqslant a(x)\frac{u^2}{2} + g_1(x)\frac{u^q}{q}. \tag{2.34}$$

Então, aplicando a integral de Lebesgue, mantemos a desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^N} g_0(x)\frac{u^q}{q}dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} a(x)\frac{u^2}{2} + g_1(x)\frac{u^q}{q}dx.$$

Logo temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} a(x)\frac{u^2}{2} + g_1(x)\frac{u^q}{q}dx \tag{2.35}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx \geqslant \int_{\mathbb{R}^N} g_0(x)\frac{u^q}{q}dx. \tag{2.36}$$

Sabemos que $a(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, então como já vimos anteriormente $a(x) \leqslant |a|_\infty$, assim, usando isso em (2.35), chegamos em

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx \leqslant \frac{|a|_\infty}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N}|g_1(x)|u^q dx.$$

Usando a desigualdade de Hölder, que pode ser encontrado no Apêndice B, Teorema 6.13, com as potências $\dfrac{p^*}{q}$ e $\dfrac{p^*}{p^*-q}$, com $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$, conseguimos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx \leqslant \frac{|a|_\infty}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx + \frac{1}{q}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |g_1(x)|^{\frac{p^*}{p^*-q}} dx\right)^{\frac{p^*-q}{p^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^{q\frac{p^*}{q}} dx\right)^{\frac{q}{p^*}}.$$

Como $g_1(x) \in L^{\frac{p^*}{p^*-q}}(\mathbb{R}^N)$, então a desigualdade anterior pode ser apresentada da seguinte forma

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx \leqslant \frac{|a|_\infty}{2}|u|_2^2 + \frac{1}{q}|g_1|_{p^*/(p^*-q)}|u|_{p^*}^q. \tag{2.37}$$

Usando a desigualdade (2.26) concluímos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx \leqslant \frac{|a|_\infty}{2}\Theta_2\|u\|_\lambda^2 + \frac{1}{q}|g_1|_{p^*/(p^*-q)}\Theta_{p^*}^{\frac{q}{p^*}}\|u\|_\lambda^q. \tag{2.38}$$

Agora considerando que ocorre a condição $(D3)$, temos

$$-\tilde{a}(x)s^q \leqslant f(x,s) \leqslant \tilde{a}(x)s^q + \tilde{b}(x)s^p. \tag{2.39}$$

Logo a desigualdade a seguir é válida

$$-\int_0^u \tilde{a}(x)s^{q-1}ds \leqslant \int_0^u f(x,s)ds \leqslant \int_0^u \tilde{a}(x)s^{q-1} + \tilde{b}(x)s^{p-1}ds.$$

Como $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$, então

$$-\tilde{a}(x)\frac{u^q}{q} \leqslant F(x,u) \leqslant \tilde{a}(x)\frac{u^q}{q} + \tilde{b}(x)\frac{u^p}{p}.$$

Assim, aplicando a integral de Lebesgue, conseguimos

$$-\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{a}(x)\frac{u^q}{q}dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{a}(x)\frac{u^q}{q} + \tilde{b}(x)\frac{u^p}{p}dx.$$

Ou seja, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{a}(x)\frac{u^q}{q} + \tilde{b}(x)\frac{u^p}{p}dx \tag{2.40}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx \geqslant -\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{a}(x)\frac{u^q}{q}dx. \tag{2.41}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder na desigualdade (2.40), que pode ser encontrada no Apêndice B, Teorema 6.13, com os expoentes $\frac{2}{2-q}$ e $\frac{2}{q}$ ficamos com

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{a}(x)\frac{u^q}{q} + \tilde{b}(x)\frac{u^p}{p}dx \\ &\leqslant \frac{1}{q}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{a}(x)^{\frac{2}{2-q}}dx\right)^{\frac{2-q}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} u^{q\frac{2}{q}}dx\right)^{\frac{q}{2}} + \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{b}(x)\frac{u^p}{p}dx.\end{aligned}$$

Como a função $\tilde{b} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ podemos limitar $\tilde{b}(x) \leqslant |\tilde{b}|_\infty$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx \leqslant \frac{1}{q}|\tilde{a}|_{2/(2-q)}|u|_2^q + \frac{1}{p}|\tilde{b}|_\infty |u|_p^p.$$

Usando (2.26) na desigualdade anterior conseguimos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx \leqslant \frac{1}{q}|\tilde{a}|_{2/(2-q)}\Theta_2^{\frac{q}{2}}\|u\|_\lambda^q + \frac{1}{p}|b|_\infty \Theta_p \|u\|_\lambda^p. \tag{2.42}$$

Agora considere que $f(x,u) = h(x)|u|^{q-2}u$ com as condições do Teorema 1.4, então

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds = \int_0^u h(x)|s|^{q-2}sds = h(x)\frac{|u|^q}{q} \leqslant h^+(x)\frac{|u|^q}{q},$$

logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\frac{|u|^q}{q}dx = \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx.$$

De $h^+(x) \geqslant h(x)$, ficamos com

$$\int_{\mathbb{R}^N} h^+(x)\frac{|u|^q}{q}dx \geqslant \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx.$$

Usando a desigualdade de Hölder, encontrada no Apêndice B, Teorema 6.13, com $\frac{2}{2-q}$ e $\frac{2}{q}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx \leqslant \frac{1}{q}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(h^+(x)\right)^{2/(2-q)}dx\right)^{(2-q)/2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} u^{q\frac{2}{q}}dx\right)^{q/2}.$$

Como $h(x) \in L^{2/(2-q)}(\mathbb{R}^N)$ ficamos com

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx \leqslant \frac{1}{q}|h^+|_{2/(2-q)}|u|_2^q.$$

Da desigualdade (2.26) concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx \leqslant \frac{1}{q}|h^+|_{2/(2-q)}\Theta_2^{\frac{q}{2}}\|u\|_2^q. \tag{2.43}$$

Agora que temos mostrado que a $F(\cdot,\cdot)$ está bem definida para as condições $(D1)$, $(D1')$ e $(D3)$, e também para as condições do Teorema 1.4, então vamos agora definir o funcional associado ao problema (E).

Dizemos que $u \in X_\lambda(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca de (E), se

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u \Delta v dx + \beta \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} V(x)uv dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)v dx = 0,$$

para todo $v \in X_\lambda(\mathbb{R}^N)$.
Então o funcional associado ao problema (E), $J_{\lambda,\beta} : X_\lambda \to \mathbb{R}$ é dado por

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\beta}(u) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\Delta u|^2 + \lambda V(x)u^2\right] dx + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx \\ &= \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx, \end{aligned} \tag{2.44}$$

e sua derivada de Fréchet é dada por

$$\begin{aligned} \langle J'_{\lambda,\beta}(u), v\rangle = &\int_{\mathbb{R}^N} \left[\Delta u \Delta v + \lambda V(x)uv\right] dx + \beta \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)v dx \qquad \text{para} \quad u, v \in X_\lambda. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Assim, os pontos críticos de $J_{\lambda,\beta}$ são as soluções fracas de (E).

Lema 2.2. *Suponha que $\beta \in \mathbb{R}$ e a condição $(D2)$ é satisfeita. Se u_λ é uma solução fraca não trivial da equação (E), então para todo $\lambda \geqslant \Lambda$, temos*

$$J_{\lambda,\beta}(u_\lambda) \geqslant k := -\frac{(p-2)(2-l)}{2pl}\left(\frac{l|d|_{2/2-l}\Theta_2^{l/2}}{p-2}\right)^{2/2-l}. \tag{2.46}$$

Demonstração. Como u_λ é solução fraca, e usando ela como função teste em (2.45), obtemos

$$0 = \langle J'_{\lambda,\beta}(u_\lambda), u_\lambda\rangle = \beta \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^p dx + \|u_\lambda\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_\lambda)u_\lambda dx \tag{2.47}$$

que é o mesmo que ter

$$\beta \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^p dx \quad = \quad -\|u_\lambda\|_\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}^N} f\left(x, u_\lambda\right) u_\lambda dx. \tag{2.48}$$

Substituindo a equação anterior em $J_{\lambda,\beta}(u_\lambda)$, conseguimos

$$\begin{aligned}
J_{\lambda,\beta}\left(u_\lambda\right) &= \frac{1}{2}\|u_\lambda\|_\lambda^2 + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} F\left(x, u_\lambda\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\|u_\lambda\|_\lambda^2 + \frac{1}{p}\left(-\|u_\lambda\|_\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}^N} f\left(x, u_\lambda\right) u_\lambda dx\right) - \int_{\mathbb{R}^N} F\left(x, u_\lambda\right) dx \\
&= \|u_\lambda\|_\lambda^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p}\left(p\int_{\mathbb{R}^N} F\left(x, u_\lambda\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f\left(x, u_\lambda\right) u_\lambda dx\right).
\end{aligned}$$

Da condição $(D2)$, temos

$$J_{\lambda,\beta}(u_\lambda) \geqslant \|u_\lambda\|_\lambda^2 \left(\frac{p-2}{2p}\right) - \frac{1}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^N} d(x)|u_\lambda|^l dx\right). \tag{2.49}$$

Usando a desigualdade de Hölder, encontrada na Apêndice B, Teorema 6.13, com $\frac{2}{2-l}$ e $\frac{2}{l}$, encontramos

$$\begin{aligned}
J_{\lambda,\beta}(u_\lambda) &\geqslant \|u_\lambda\|_\lambda^2 \left(\frac{p-2}{2p}\right) - \frac{1}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^N} d(x)^{2/2-l} dx\right)^{2-l/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^{l\frac{2}{l}} dx\right)^{l/2} \\
&\geqslant \|u_\lambda\|_\lambda^2 \left(\frac{p-2}{2p}\right) - \frac{1}{p}|d|_{2/2-l}|u_\lambda|_2^l.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Usando a desigualdade em (2.26) na desigualdade anterior, chegamos em

$$J_{\lambda,\beta}(u_\lambda) \geqslant \|u_\lambda\|_\lambda^2 \left(\frac{p-2}{2p}\right) - \frac{1}{p}|d|_{2/2-l}\Theta_2^{\frac{l}{2}}\|u_\lambda\|_\lambda^l. \tag{2.51}$$

Pela desigualdade de Young, encontrada na Apêndice B, Teorema 6.15 com $a = \|u_\lambda\|_\lambda^l$, $b = \frac{1}{p}\Theta_2^{\frac{l}{2}}|d|_{2/2-l}$, com expoentes $\frac{2}{l}$ e $\frac{2}{2-l}$, $\varepsilon = \left(\frac{p-2}{2p}\right)$, temos que $C\left(\varepsilon\right) = \frac{(2-l)}{2}\frac{(pl)^{l/2-l}}{(p-2)^{l/2-l}}$ então

$$\begin{aligned}
J_{\lambda,\beta}\left(u_\lambda\right) &\geqslant \|u_\lambda\|_\lambda^2 \left(\frac{p-2}{2p}\right) - \|u_\lambda\|_\lambda^2 \left(\frac{p-2}{2p}\right) - C\left(\varepsilon\right)\left(\frac{1}{p}\Theta_2^{l/2}|d|_{2/2-l}\right)^{2/2-l} \\
&= -\frac{(2-l)}{2}\frac{(pl)^{l/2-l}}{(p-2)^{l/2-l}}\left(\frac{1}{p}\Theta_2^{l/2}|d|_{2/2-l}\right)^{2/2-l} \\
&= -\frac{(2-l)\,(p-2)}{(2pl)}\left(\frac{l|d|_{2/2-l}\Theta_2^{l/2}}{(p-2)}\right)^{2/2-l}.
\end{aligned}$$

Então concluímos que

$$J_{\lambda,\beta}(u_\lambda) \geqslant -\frac{(2-l)\,(p-2)}{(2pl)}\left(\frac{l|d|_{2/2-l}\Theta_2^{l/2}}{(p-2)}\right)^{2/2-l}.$$

□

Lema 2.3. *Suponha que* $\beta > 0$, $2 < p < \min\left\{N, \dfrac{2N}{N-2}\right\}$ *e as condições* $(V1)-(V2)$ *e* $(D1')$ *são satisfeitos. Para todo* $\lambda \geqslant \Lambda$, $J_{\lambda,\beta}$ *é limitado inferiormente por* X_λ*, como a seguir*

$$J_{\lambda,\beta}\,(u) \geqslant \widetilde{K} := -\left(\frac{p-q}{pq}\right)\left(\frac{|g_1|^p_{p^*/(p^*-q)}}{\beta^q C_*^{pq}}\right)^{1/p-q} \quad \forall u \in X_\lambda,$$

onde $C_* > 0$ *é uma constante de imersão, o qual depende de* p *em* N*.*

Demonstração. Usando a condição $(D1')$ de $F(x,u)$ em $J_{\lambda.\beta}$, temos

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\beta}\,(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2_\lambda + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} F\,(x,u)\,dx \\ &\geqslant \frac{1}{2}\|u\|^2_\lambda + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{2}a(x)u^2 + \frac{1}{q}g_1\,(x)\,u^q\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2_\lambda + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} a\,(x)\,u^2 dx - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} g_1\,(x)\,u^q dx. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, encontrada na Apêndice B, Teorema 6.12, em $\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p dx$, sendo $C_0 > 0$ a constante de imersão, temos

$$J_{\lambda,\beta}\,(u) \geqslant \frac{1}{2}\|u\|^2_\lambda + \frac{\beta}{p}\frac{1}{C_0^p}\|u\|^p_{p^*} - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} a\,(x)\,u^2 dx - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} g_1\,(x)\,u^q dx.$$

Como é válido

$$\int_{\mathbb{R}^N} a\,(x)\,u^2 dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N}|a\,(x)\,||u|^2 dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N}|a|_\infty |u|^2 dx = |a|_\infty \int_{\mathbb{R}^N}|u|^2 dx,$$

temos

$$J_{\lambda,\beta}\,(u) \geqslant \frac{1}{2}\|u\|^2_\lambda + \frac{\beta}{p}\frac{1}{C_0^p}\|u\|^p_{p^*} - \frac{1}{2}|a|_\infty\|u\|^2_2 - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} g_1\,(x)\,u^q dx.$$

Aplicando a desigualdade (2.26) para $r = 2$, conseguimos

$$J_{\lambda,\beta}\,(u) \geqslant \frac{1}{2}\|u\|^2_\lambda + \frac{\beta}{p}\frac{1}{C_0^p}\|u\|^p_{p^*} - \frac{1}{2}|a|_\infty\Theta_2\|u\|^2_\lambda - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} g_1\,(x)\,u^q dx.$$

Usando a desigualdade de Hölder, encontrada no Apêndice B, Teorema 6.13, com $\dfrac{p^*}{p^*-q}$ e $\dfrac{p^*}{q}$, temos

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\beta}(u) \;\geqslant\; & \|u\|_\lambda^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}|a|_\infty\Theta_2\right)+\frac{\beta}{pC_0^p}\|u\|_{p^*}^p \\ & -\frac{1}{q}\left(\int_{\mathbb{R}^N} g_1(x)^{p^*/p^*-q}\,dx\right)^{p^*-q/p^*}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{q\frac{p^*}{q}}\,dx\right)^{q/p^*}. \end{aligned}$$

De $|a|_\infty<\Theta_2^{-1}$, então $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}|a|_\infty\Theta_2\right)>0$, logo

$$J_{\lambda,\beta}(u)\geqslant\frac{\beta}{pC_*^p}\|u\|_{p^*}^p-\frac{1}{q}\|g_1\|_{p^*/p^*-q}\|u\|_{p^*}^q.$$

Aplicando a desigualdade de Young, encontrada no Apêndice B, Teorema 6.15, para $a=\|u\|_{p^*}^q$, $b=\dfrac{1}{q}\|g_1\|_{p^*/p^*-q}$, com expoentes $\dfrac{p}{q}=\alpha$ e $\dfrac{p}{p-q}=\beta$, $\varepsilon=\dfrac{\beta}{pC_*^p}$, então $C(\varepsilon)=\dfrac{(p-q)}{p}\dfrac{(pC_*^pq)^{q/p-q}}{(\beta p)^{q/p-q}}$. Temos

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\beta}(u) &\geqslant \frac{\beta}{pC_*^p}\|u\|_{p^*}^p-\frac{1}{q}\|g_1\|_{p^*/p^*-q}\|u\|_{p^*}^q \\ &\geqslant \frac{\beta}{pC_*^p}\|u\|_{p^*}^p-\frac{\beta}{pC_*^p}\|u\|_{p^*}^p-C(\varepsilon)\left(\frac{1}{q}\|g_1\|_{p^*/p^*-q}\right)^{p/p-q} \\ &= -\frac{(p-q)}{p}\frac{(pC_*^pq)^{q/p-q}}{(\beta p)^{q/p-q}}\left(\frac{1}{q}\|g_1\|_{p^*/p^*-q}\right)^{p/p-q} \\ &= -\frac{1}{q^{p/p-q}}\frac{q^{q/p-q}\left(C_*^{pq}\right)^{1/p-q}}{(\beta^q)^{1/p-q}}\frac{(p-q)}{p}\left(\|g_1\|_{p^*/p^*-q}^p\right)^{1/p-q} \\ &= -\frac{(p-q)}{pq}\left(\frac{\|g_1\|_{p^*/p^*-q}^p}{C_*^{-pq}\beta^q}\right)^{1/p-q}, \quad \forall u\in X_\lambda. \end{aligned}$$

Então concluímos que

$$J_{\lambda,\beta}(u)\geqslant-\frac{(p-q)}{pq}\left(\frac{\|g_1\|_{p^*/p^*-q}^p}{C_*^{-pq}\beta^q}\right)^{1/p-q}, \quad \forall u\in X_\lambda.$$

□

Lema 2.4. *Suponha que $\beta\in\mathbb{R}$ e $f(x,u)=h(x)|u|^{q-2}u$ com $h\in L^{2/2-q}\left(\mathbb{R}^N\right)$ e $1<q<2$. Se u_λ é uma solução fraca não trivial da equação (E), então para todo $\lambda\geqslant\Lambda$, ocorre a seguinte desigualdade*

$$J_{\lambda,\beta}(u_\lambda) \geqslant K := -\frac{(p-2)(2-q)}{2pq}\left(\frac{(p-2)|h^+|_{2/2-q}\Theta_2^q}{p-2}\right)^{2/2-q}. \tag{2.52}$$

Demonstração. Como u_λ é solução fraca, usando u_λ como função teste em (2.45), temos

$$0 = \langle J'_{\lambda,\beta}(u_\lambda), u_\lambda\rangle = \beta\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_\lambda|^p dx + \|u_\lambda\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_\lambda)u_\lambda dx.$$

Isto é

$$\beta\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_\lambda|^p dx = -\|u_\lambda\|_\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_\lambda)u_\lambda dx.$$

Substituíndo em (2.44), com $f(x,u) = h(x)|u|^{q-2}u$, conseguimos

$$\begin{aligned}
J_{\lambda,\beta}(u_\lambda) &= \frac{1}{2}\|u_\lambda\|_\lambda^2 + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_\lambda|_\lambda^p dx - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u_\lambda|^q dx\\
&= \frac{1}{2}\|u_\lambda\|_\lambda^2 + \frac{1}{p}\left(-\|u_\lambda\|_\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u_\lambda|^{q-2}u_\lambda^2 dx\right) - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u_\lambda|^q dx\\
&= \|u_\lambda\|_\lambda^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\int_{\mathbb{R}^4} h(x)|u_\lambda|^q dx.
\end{aligned}$$

Mas $h(x) \leqslant h^+(x)$, e $\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{p} > 0$, então

$$J_{\lambda,\beta}(u_\lambda) \geqslant \|u_\lambda\|_\lambda^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right) - \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N} h^+(x)|u_\lambda|^q dx. \tag{2.53}$$

Lembrando que $1 < q < 2 < p < 2^*$, então $1 < \dfrac{2}{q}$, assim usando a desigualdade de Hölder, encontrada no Apêndice B, Teorema 6.13, com $\dfrac{q}{2}$ e $\dfrac{2-q}{2}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} h^+(x)|u_\lambda|^q dx \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^N}(h^+(x))^{\frac{2}{2-q}}dx\right)^{\frac{2-q}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u_\lambda|^{q\frac{2}{q}}dx\right)^{\frac{q}{2}} = |h^+|_{2/(2-q)}|u_\lambda|_2^q.$$

Logo na desigualdade (2.53), obtemos

$$J_{\lambda,\beta}(u_\lambda) \geqslant \|u_\lambda\|_\lambda^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right) - \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)|h^+|_{2/(2-q)}|u_\lambda|_2^q,$$

da desigualdade (2.26), conseguimos

$$J_{\lambda,\beta}(u_\lambda) \geqslant \|u_\lambda\|_\lambda^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right) - \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)|h^+|_{2/(2-q)}\Theta_2^{q/2}\|u_\lambda\|_\lambda^q. \tag{2.54}$$

Por outro lado, aplicando a desigualdade de Young com ε, Teorema 6.15, com as potências $\dfrac{2}{q}$ e $\dfrac{2}{2-q}$, com $\varepsilon = \left(\dfrac{p-2}{2p}\right)$ e $C(\varepsilon) = \left(\varepsilon\dfrac{2}{q}\right)^{-\frac{2-q}{q}} \dfrac{2-q}{2}$, encontramos

$$
\begin{aligned}
\left(\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)|h^+|_{2/(2-q)}\Theta_2^{q/2}\right)\|u_\lambda\|_\lambda^q \;&\leqslant\; \left(\left(\frac{p-q}{pq}\right)|h^+|_{2/(2-q)}\Theta_2^{q/2}\right)^{\frac{2}{2-q}} C(\varepsilon) + \|u_\lambda\|^{q\frac{2}{q}}\varepsilon \\
&= C(\varepsilon)\left(\left(\frac{p-q}{pq}\right)|h^+|_{2/(2-q)}\Theta_2^{q/2}\right)^{\frac{2}{2-q}} + \|u_\lambda\|_\lambda^2\left(\frac{p-2}{2p}\right).
\end{aligned}
$$

Substituindo em (2.54),

$$
\begin{aligned}
J_{\lambda,\beta}(u_\lambda) \;&\geqslant\; \|u_\lambda\|_\lambda^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right) - \|u_\lambda\|_\lambda^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right) - C(\varepsilon)\left(\left(\frac{p-q}{pq}\right)|h^+|_{2/(2-q)}\Theta_2^{q/2}\right)^{2/(2-q)} \\
&= -C(\varepsilon)\left(\left(\frac{p-q}{pq}\right)|h^+|_{2/(2-q)}\Theta_2^{q/2}\right)^{2/(2-q)} \\
&= -\left(\frac{p-2}{pq}\right)^{-q/2-q}\left(\frac{2-q}{2}\right)\left(\left(\frac{p-q}{pq}\right)|h^+|_{2/(2-q)}\Theta_2^{q/2}\right)^{2/(2-q)} \\
&= -\left(\frac{pq}{p-2}\right)^{q/2-q}\left(\frac{2-q}{2}\right)\left(\frac{1}{pq}\right)^{2/(2-q)}\left((p-q)|h^+|_{2/(2-q)}\Theta_2^{q/2}\right)^{2/(2-q)} \\
&= -\left(\frac{(p-2)^{-q/(2-q)}(2-q)}{(pq)^{2/(2-q)}(pq)^{-q/(2-q)}2}\right)\left(\frac{p-2}{p-2}\right)^{2/(2-q)}\left((p-q)|h^+|_{2/(2-q)}\Theta_2^{q/2}\right)^{2/(2-q)} \\
&= -\left(\frac{(p-2)^{\frac{2-q}{2-q}}(2-q)}{(pq)^{\frac{2-q}{2-q}}2}\right)\left(\frac{(p-q)|h^+|_{2/(2-q)}\Theta_2^{q/2}}{p-2}\right)^{2/(2-q)} \\
&= -\left(\frac{(p-2)(2-q)}{2pq}\right)\left(\frac{(p-q)|h^+|_{2/(2-q)}\Theta_2^{q/2}}{p-2}\right)^{2/(2-q)}.
\end{aligned}
$$

Isto é,

$$
J_{\lambda,\beta}(u_\lambda) \geqslant -\left(\frac{(p-2)(2-q)}{2pq}\right)\left(\frac{(p-q)|h^+|_{2/(2-q)}\Theta_2^{q/2}}{p-2}\right)^{2/(2-q)}.
$$

$\square$

Lema 2.5. *Seja $1 < q < 2 < r$, $A, B > 0$, e considere a função*

$$
\Psi_{A,B}(t) := t^2 - At^q - Bt^r, \quad t \geqslant 0.
$$

Então $\max\limits_{t\geqslant 0}\Psi_{A,B}(t) > 0$ se, e somente se

$$
A^{r-2}B^{2-q} < d(r,q) := \frac{(r-2)^{r-2}(2-q)^{2-q}}{(r-q)^{r-q}}. \tag{2.55}
$$

Além disso, para $t = t_B := [(2-q)/B(r-q)]^{1/(r-2)}$*, uma vez que*

$$\Psi_{A,B}(t_B) = t_B^2 \left[\frac{r-2}{r-q} - AB^{\frac{2-q}{r-2}} \left(\frac{r-q}{2-q} \right)^{\frac{2-q}{r-2}} \right] > 0.$$

Demonstração. Note que $\Psi_{A,B}(t) := t^2 - At^q - Bt^r = t^q(t^{2-q} - A - Bt^{r-q})$.
Logo $\Psi_{A,B}(t)$ é positivo se, e somente se, $t^{2-q} - A - Bt^{r-q} > 0$. Considere $h(t) = t^{2-q} - A - Bt^{r-q}$, tem-se que

$$h'(x) = (2-q)\,t^{1-q} - B(r-q)\,t^{-1+r-q}.$$

Queremos os pontos críticos de h, então fazendo $h'(x) = 0$

$$0 = (2-q)\,t^{1-q} - B(r-q)\,t^{-1+r-q},$$

que é o mesmo que ter

$$(2-q)\,t^{1-q} = B(r-q)\,t^{r-q-1}.$$

Como $q < 2$, então $q - 2 \neq 2$, podemos passar $(2-q)$ dividindo na desigualdade anterior

$$t^{1-q}t^{-(r-q-1)} = B\frac{(r-q)}{2-q}.$$

Assim

$$t^{2-r} = B\frac{(r-q)}{2-q}.$$

Calculando os inversos, ficamos com

$$t^{r-2} = \frac{2-q}{B(r-q).}$$

Logo,

$$t = \left(\frac{2-q}{B(r-q)} \right)^{1/r-2} = t_B.$$

Aplicando t_B em $\Psi_{A,B}$, temos

$$\begin{aligned}
\Psi_{A,B}\left(t_B\right) &= t_B^2\left(1 - A\left(\frac{2-q}{B\left(r-q\right)}\right)^{(q-2)/(r-2)} - B\left(\frac{2-q}{B\left(r-q\right)}\right)^{(r-2)/(r-2)}\right)\\
&= t_B^2\left(1 - AB^{(2-q)/(r-2)}\left(\frac{2-q}{r-q}\right)^{(q-2)/(r-2)} - \frac{B}{B}\left(\frac{2-q}{r-q}\right)\right)\\
&= t_B^2\left(\frac{r-q}{r-q} + \frac{q-2}{r-q} - AB^{(2-q)/(r-2)}\left(\frac{r-q}{2-q}\right)^{(2-q)/r-2}\right)\\
&= t_B^2\left(\frac{r-2}{r-q} - AB^{(2-q)/(r-2)}\left(\frac{r-q}{2-q}\right)^{(2-q)/(r-2)}\right).
\end{aligned}$$

Se A, B satisfaz a desigualdade (2.55) então

$$AB^{(2-q)/(r-2)} < \left(\frac{\left(r-2\right)^{r-2}\left(2-q\right)^{2-q}}{\left(r-q\right)^{r-q}}\right)^{1/(r-2)}.$$

Substituindo em $\Psi_{A,B}\left(t_B\right)$, conseguimos

$$\begin{aligned}
\Psi_{A,B}\left(t_B\right) &> t_B^2\left(\frac{r-2}{r-q} - \left(\frac{\left(r-2\right)^{r-2}\left(2-q\right)^{2-q}}{\left(r-q\right)^{r-q}}\right)^{\frac{1}{r-2}}\left(\frac{r-q}{2-q}\right)^{\frac{2-q}{r-2}}\right)\\
&= t_B^2\left(\frac{r-2}{r-q} - (r-2)\frac{(2-q)^{\frac{2-q}{r-2}}}{(r-q)^{\frac{r-q}{r-2}}}\frac{((r-q)^{\frac{2-q}{r-2}})}{(2-q)^{\frac{2-q}{r-2}}}\right)\\
&= t_B^2\left(\frac{r-2}{r-q} - (r-2)(r-q)^{\frac{2-q}{r-2}+\frac{r-q}{r-2}}\right)\\
&= t_B^2\left(\frac{r-2}{r-q} - \frac{(r-2)}{r-q}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Logo, concluímos que $\Psi_{A,B}(t_B) > 0$. $\square$

Lema 2.6. *Seja $2 < q < p$ and $\overline{A}, \overline{B} > 0$ satisfazendo*

$$\overline{A}^{q-2} < (q-2)^{q-2}(p-q)^{p-q}\left(\frac{\overline{B}}{p-2}\right)^{p-2}. \tag{2.56}$$

Considere a função

$$\Phi_{\overline{A},\overline{B}}(t) := t^2 + \overline{A}t^p - \overline{B}t^q, \quad t \geqslant 0.$$

Então para $t = t_{\overline{B}} := \left[\frac{(q-2)\overline{B}}{(p-2)\overline{A}}\right]^{1/(p-q)}$ *chegamos em*

$$\Phi_{\overline{A},\overline{B}}(t_{\overline{B}}) = -\left(\frac{(q-2)\overline{B}}{(p-2)\overline{A}}\right)^{2/(p-q)}\left[1 - \frac{(p-q)\overline{B}}{(p-2)}\left(\frac{(q-2)\overline{B}}{(p-2)\overline{A}}\right)^{(q-2)/(p-q)}\right] < 0. \tag{2.57}$$

Demonstração. Note que, t^2 em evidencia em $\Phi_{\overline{A},\overline{B}}(t)$, assim $\Phi_{\overline{A},\overline{B}}(t) = t^2\left(1 + \overline{A}t^{p-2} - \overline{B}t^{q-2}\right)$, logo $\Phi_{\overline{A},\overline{B}}(t) < 0$ se, e somente se, $\left(1 + \overline{A}t^{p-2} - \overline{B}t^{q-2}\right) < 0$. Então defina $h(t) = 1 + \overline{A}t^{p-2} - \overline{B}t^{q-2}$, para $t > 0$, e estudando pontos críticos em $h(t)$ temos

$$0 = h'(t) = \overline{A}(p-2)t^{p-3} - \overline{B}(q-2)t^{q-3}$$

passando $\overline{B}(q-2)t^{q-3}$ para o outro lado da igualdade, ficamos com

$$\overline{A}(p-2)t^{p-3} = \overline{B}(q-2)t^{q-3},$$

então

$$\frac{t^{p-3}}{t^{q-3}} = \frac{\overline{B}}{\overline{A}}\frac{(q-2)}{(p-2)}.$$

Isolando t, encontramos

$$t = \left(\frac{\overline{B}(q-2)}{\overline{A}(p-2)}\right)^{1/(p-q)}.$$

Definindo $t_{\overline{B}} = \left(\frac{\overline{B}(q-2)}{\overline{A}(p-2)}\right)^{1/(p-q)}$, podemos observar que de $2 < q < p$ e $\overline{A}, \overline{B} > 0$ então $t_{\overline{B}} > 0$. Aplicando $t_{\overline{B}}$ em $\Phi_{\overline{A},\overline{B}}(t)$, temos

$$\Phi_{\overline{A},\overline{B}}(t_{\overline{B}}) = t_{\overline{B}}^2\left[1 + \overline{A}\left(\frac{\overline{B}(q-2)}{\overline{A}(p-2)}\right)^{(p-2)/(p-q)} - \overline{B}\left(\frac{\overline{B}(q-2)}{\overline{A}(p-2)}\right)^{(q-2)/(p-q)}\right].$$

Colocando $\left(\frac{\overline{B}(q-2)}{\overline{A}(p-2)}\right)^{(q-2)/(p-q)}$ em evidência, conseguimos

$$\Phi_{\overline{A},\overline{B}}(t_{\overline{B}}) = t_{\overline{B}}^2\left[1 + \left(\overline{A}\left(\frac{\overline{B}(q-2)}{\overline{A}(p-2)}\right) - \overline{B}\right)\left(\frac{\overline{B}(q-2)}{\overline{A}(p-2)}\right)^{(q-2)/(p-q)}\right].$$

Colocando $\overline{B}$ em evidência, ficamos com

$$\begin{aligned}\Phi_{\overline{A},\overline{B}}(t_{\overline{B}}) &= t_{\overline{B}}^2\left[1+\left(\frac{(q-2)}{(p-2)}-\frac{(p-2)}{(p-2)}\right)\overline{B}\left(\frac{\overline{B}(q-2)}{\overline{A}(p-2)}\right)^{(q-2)/(p-q)}\right],\\ &= t_{\overline{B}}^2\left[1-\left(\frac{(p-q)}{(p-2)}\right)\overline{B}\left(\frac{\overline{B}(q-2)}{\overline{A}(p-2)}\right)^{(q-2)/(p-q)}\right],\end{aligned}$$

assim

$$= t_{\overline{B}}^2\left[1-\left(\frac{(p-q)}{(p-2)}\right)\overline{B}\left(\frac{1}{\overline{A}}\right)^{(q-2)/(p-q)}\left(\frac{\overline{B}(q-2)}{(p-2)}\right)^{(q-2)/(p-q)}\right]. \tag{2.58}$$

Se considerarmos satisfeita a condição (2.56), temos

$$\begin{aligned} 0<\overline{A}^{q-2} &< (q-2)^{q-2}(p-q)^{p-q}\left(\frac{\overline{B}}{p-2}\right)^{p-2}\\ \overline{A} &< (q-2)(p-q)^{\frac{p-q}{q-2}}\left(\frac{\overline{B}}{p-2}\right)^{\frac{p-2}{q-2}}\\ -\left(\frac{1}{\overline{A}}\right)^{\frac{(q-2)}{p-q}} &< -\left(\frac{(p-2)^{\frac{(p-2)}{(p-q)}}}{(q-2)^{\frac{(q-2)}{(p-q)}}(p-q)\overline{B}^{\frac{p-2}{p-q}}}\right).\end{aligned} \tag{2.59}$$

Assim, substituíndo (2.59) em (2.58), conseguimos

$$\begin{aligned}\Phi_{\overline{A},\overline{B}}(t_{\overline{B}}) &< t_{\overline{B}}^2\left[1-\left(\frac{(p-q)}{(p-2)}\right)\overline{B}\left(\frac{(p-2)^{\frac{(p-2)}{(p-q)}}}{(q-2)^{\frac{(q-2)}{(p-q)}}(p-q)\overline{B}^{\frac{p-2}{p-q}}}\right)\left(\frac{\overline{B}(q-2)}{(p-2)}\right)^{(q-2)/(p-q)}\right]\\ &= t_{\overline{B}}^2\left[1-(p-2)^{\frac{-(p-q)}{(p-q)}}(p-2)^{\frac{(p-2)}{(p-q)}}(p-2)^{\frac{-(q-2)}{(p-q)}}\overline{B}^{\frac{p-q}{p-q}}\overline{B}^{\frac{-(p-2)}{p-q}}\overline{B}^{\frac{(q-2)}{(p-q)}}\right]\\ &= t_{\overline{B}}^2\left[1-(p-2)^0\overline{B}^0\right]\\ &= t_{\overline{B}}^2[1-1]=0.\end{aligned}$$

Concluímos então que

$$\Phi_{\overline{A},\overline{B}}(t_{\overline{B}})<0.$$

□

Capítulo 3

Teorema de Passo da Montanha

Nesta sessão mostraremos que o funcional definido em (2.44), com as condições $(D1)$, $(D1')$, $(D3)$ e também as condições do Teorema 1.4 para f, satisfaz as geometrias do Teorema do Passo da Montanha, este o qual pode ser encontrado no Apêndice A, Lema 6.6.

Lema 3.1. *Assuma que $\beta \geqslant 0$ e as condições $(V1)-(V2)$, $(D1)$ são satisfeitas. Então para cada $\lambda \geqslant \Lambda$, existe $\rho, \eta > 0$ tal que*

$$\inf\{J_{\lambda,\beta}(u) : u \in X_\lambda \quad com \quad \|u\|_\lambda = \rho\} > \eta.$$

Demonstração. Usando a desigualdade em (2.32) na definição do funcional $J_{\lambda,\beta}$, e lembrando que $\beta \geqslant 0$, temos

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\beta}(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx \\ &\geqslant \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^4} F(x,u)dx \\ &\geqslant \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \left(\frac{(|a^+|_\infty+\varepsilon)\Theta_2}{2}\|u\|_\lambda^2 + \frac{C_\varepsilon\Theta_m}{m}\|u\|_\lambda^m\right). \end{aligned}$$

Escolhendo $\varepsilon \in (0, \Theta_2^{-1} - |a^+|_\infty)$, assim, temos $0 < \varepsilon < \Theta_2^{-1} - |a^+|_\infty$, onde $|a^+|_\infty < \Theta_2^{-1}$, então, $0 < 1 - (|a^+|_\infty + \varepsilon)\Theta_2 = \varepsilon_0$, logo

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\beta}(u) &\geqslant \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2(\varepsilon_0) - \frac{C_\varepsilon}{m}\Theta_m\|u\|_\lambda^m \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{C_\varepsilon}{m}\Theta_m\|u\|_\lambda^m \quad \text{com} \quad 2^* > m > 2. \end{aligned}$$

Assim, para u pequeno, ou seja, existe ρ tal que $\|u\|_\lambda = \rho > 0$, e existe $\eta > 0$ tal que $J_{\lambda,\beta}(u) > \eta > 0$. Ou seja

$$\inf\{J_{\lambda,\beta} : u \in X_\lambda, \text{com } \|u\|_\lambda = \rho\} > \eta > 0.$$

□

Lema 3.2. *Assuma que $\beta > 0$ e as condições $(V1) - (V2)$, $(D1')$ são satisfeitas. Então para cada $\lambda \geqslant \Lambda$, existe $\rho, \eta > 0$ tal que*

$$\inf\{J_{\lambda,\beta}(u) : u \in X_\lambda \quad com \quad \|u\|_\lambda = \rho\} > \eta.$$

Demonstração. Como a condição $(D1')$ é satisfeita, a desigualdade (2.38) ocorre, então aplicando ela no funcional (2.44), temos

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\beta}(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx \\ &\geqslant \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{|a|_\infty \Theta_2}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{q}|g_1|_{\frac{p^*}{p^*-q}} \Theta_q^{\frac{q}{p^*}} \|u\|_\lambda^q \\ &= \left(\frac{1 - |a|_\infty \Theta_2}{2}\right)\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{q}|g_1|_{\frac{p^*}{p^*-q}} \Theta_q^{\frac{q}{p^*}} \|u\|_\lambda^q. \end{aligned}$$

Mas sabemos de $(D1')$ que $|a|_\infty < \Theta_2^{-1}$, então $1 - |a|_\infty \Theta_2 > 0$, concluímos assim que existe $c_0 > 0$ tal que

$$J_{\lambda,\beta}(u) \geqslant c_0\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{q}|g_1|_{\frac{p^*}{p^*-q}} \Theta_q^{q/p^*} \|u\|_\lambda^q.$$

Como $2 < q$, para $\|u\|_\lambda$ pequeno, $J_{\lambda,\beta}(u) > 0$, ou seja, $\exists\ \rho > 0$ tal que

$$\inf\{J_{\lambda,\beta} : u \in X_\lambda, \text{com } \|u\|_\lambda = \rho\} > \eta > 0.$$

□

Lema 3.3. *Assuma que as condições $(V1) - (V3)$ e $(D1)$ são satisfeitas. Seja $\rho > 0$ como no Lema 3.1. Então existe $e \in X_\lambda$ com $\|e\|_\lambda > \rho$ tal que $J_{\lambda,\beta}(e) < 0$ para $\beta \geqslant 0$ e $\lambda > 0$.*

Demonstração. Da condição $(D1)$ temos que $b(x) > 0$ em Ω, assim, podemos escolher uma função não negativa $\phi \in X_\lambda$, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} b(x)\phi^q dx > 0. \tag{3.1}$$

Assim, calculando o seguinte limite para $t > 0$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{J_{\lambda,\beta}(t\phi)}{t^{q+1}} &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{q+1}}\left(\frac{1}{2}\|t\phi\|_\lambda^2+\frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla t\phi|^p dx-\int_{\mathbb{R}^N}F(x,t\phi)dx\right)\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{q+1}}\left(\frac{t^2}{2}\|\phi\|_\lambda^2+\frac{\beta t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\phi|^p dx-\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(x,t\phi)}{\phi^{q+1}}\phi^{q+1}dx\right).\end{aligned}$$

Distribuindo $\dfrac{1}{t^{q+1}}$ no limite anterior

$$\lim_{t\to\infty}\frac{J_{\lambda,\beta}(t\phi)}{t^{q+1}} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2t^{q+1}}\|\phi\|_\lambda^2+\frac{\beta}{pt^{q-p+1}}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\phi|^p dx-\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(x,t\phi)}{t^{q+1}\phi^{q+1}}\phi^{q+1}dx\right).$$

Passando o limite nos termos positivos, ficamos com

$$\lim_{t\to\infty}\frac{J_{\lambda,\beta}(t\phi)}{t^{q+1}} = \lim_{t\to\infty}\left(-\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(x,t\phi)}{(t\phi)^{q+1}}\phi^{q+1}dx\right). \tag{3.2}$$

Da condição $(D1)$ temos que, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists M > 0$, tal que $|u| > M$, então

$$(b(x)-\varepsilon)|u|^{q-1}\leqslant f(x,u)\leqslant(b(x)+\varepsilon)|u|^{q-1},$$

assim

$$(b(x)-\varepsilon)\frac{|u|^q}{q}\leqslant F(x,u)\leqslant(b(x)+\varepsilon)\frac{|u|^q}{q},$$

de $u\neq 0$, podemos dividir tudo por $|u|^q$, logo

$$\frac{b(x)-\varepsilon}{q}\leqslant\frac{F(x,u)}{|u|^q}\leqslant\frac{b(x)+\varepsilon}{q}.$$

Se passarmos o limite, conseguimos

$$\lim_{u\to\infty}\frac{F(x,u)}{|u|^q}=\frac{b(x)}{q}. \tag{3.3}$$

Da desigualdade (3.3) em (3.2), temos

$$\lim_{t\to\infty}\frac{J_{\lambda,\beta}(t\phi)}{t^{q+1}}\leqslant\lim_{t\to\infty}-\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(x,t\phi)}{(t\phi)^{q+1}}\phi^{q+1}dx\leqslant-\int_{\mathbb{R}^N}\frac{b(x)}{q+1}\phi^q dx. \tag{3.4}$$

Mas da desigualdade (3.1), ficamos com

$$\lim_{t\to\infty} \frac{J_{\lambda,\beta}(t\phi)}{t^{q+1}} \leqslant -\int_{\mathbb{R}^N} \frac{b(x)}{q+1}\phi^q dx < 0.$$

Logo, $J_{\lambda,\beta(t\phi)} \to -\infty$ com $t \to \infty$, e $\exists\ \ e \in X_\lambda$ com $\|e\|_\lambda > \rho$ tal que $J_{\lambda,\beta}(e) < 0$. $\square$

Lema 3.4. *Assuma que as condições $(V1)-(V3)$ e $(D1')$ são satisfeitas. Seja $\rho > 0$ como no Lema 3.2. Então existe $\beta_* > 0$ e um elemento $e \in X_\lambda$ com $\|e\|_\lambda > \rho$ tal que $J_{\lambda,\beta}(e) < 0$ para $0 < \beta < \beta_*$ e $\lambda > 0$.*

Demonstração. Da condição $(D1')$ temos que $g_0(x) > 0$ em Ω, então podemos escolher uma função não negativa ϕ_0 em X_λ, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} g_0(x)\phi_0^q dx > 0. \tag{3.5}$$

Assim, segue de (3.5) e da condição (2.36), para $t > 0$ e $\beta = 0$ que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{J_{\lambda,0}(t\phi_0)}{t^q} &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^q}\left(\frac{1}{2}\|t\phi_0\|^2 + \frac{0}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla t\phi_0|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,t\phi_0)dx\right) \\
&\leqslant \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^q}\left(\frac{t^2}{2}\|\phi_0\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} g_0(x)(t\phi_0)^q dx\right) \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{2t^{q-2}}\|\phi_0\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} g_0(x)\phi_0^q dx\right).
\end{aligned}$$

Aplicando o limite, como ϕ_0 é uma função não negativa de X_λ, concluímos que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{J_{\lambda,0}(t\phi_0)}{t^q} \leqslant -\int_{\mathbb{R}^N} g_0(x)\phi_0^q dx < 0. \tag{3.6}$$

Logo, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\|t\phi\| > \rho > 0$ e $J_{\lambda,0}(t\phi) < 0$ então definimos $e = t\phi$, logo $J_{\lambda,0}(e) < 0$, mas isso para $\beta = 0$. Para β maior que 0 temos

$$J_{\lambda,\beta}(e) = J_{\lambda,0}(e) + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla e|^p dx.$$

Tomando $\beta \in (0, \beta^*)$ temos que

$$J_{\lambda,\beta}(e) < 0,$$

com $0 < \beta^* < -\dfrac{pJ_{\lambda,0}(e)}{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla e|^p dx}$. Logo, concluímos que $J_{\lambda,\beta}(e) < 0\ \ \forall\ \beta \in (0, \beta^*)$. $\square$

Lema 3.5. *Assuma que $\beta < 0$, $2 < p < 4$ e as condições $(V1)-(V2)$, $(D3)$ são satisfeitas. Então os seguintes resultados são verdadeiros:*

(i) *Se* $f(x,s) \geqslant 0$ *para todo* $(x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ *e* $1 < q < 2$*, então para cada* $\lambda \geqslant \Lambda$*, existem números* $\Pi_0, \rho, \eta > 0$ *tal que para* $|\tilde{a}|_{2/(2-q)} < \Pi_0$,

$$\inf\{J_{\lambda,\beta}(u) : u \in X_\lambda \quad com \quad \|u\| = \rho\} > \eta;$$

(ii) *Se* $f(x,s) \leqslant 0$ *para todo* $(x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ *e* $1 < q < p$*, então para cada* $\lambda \geqslant \Lambda$*, existem números* $\rho, \eta > 0$ *tal que*

$$\inf\{J_{\lambda,\beta}(u) : u \in X_\lambda \quad com \quad \|u\| = \rho\} > \eta.$$

Demonstração. *(i)* Da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, encontrada no Apêndice B, Teorema 6.11, com $n = N$, $j = 1$, $k = 2$, $r = 2$, $\theta = \dfrac{1}{2}$ e $q = \dfrac{2p}{4-p}$, conseguimos

$$\int_{R^N} |\nabla u|^p dx \leqslant \tilde{A}^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx\right)^{p/4} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2p/(4-p)} dx\right)^{(4-p)/4}. \tag{3.7}$$

Usando agora a desigualdade de Young, encontrada no Apêndice B, Teorema 6.14 para ambas as potências iguais a 2, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \leqslant \frac{\tilde{A}^p}{2} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx\right)^{p/2} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2p/(4-p)} dx\right)^{(4-p)/2}\right]. \tag{3.8}$$

Como $\beta < 0$ da hipótese, e $f(x,s) \geqslant 0$ e $\forall (x,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ e $1 < q < 2$, usando a condição (2.42) e a desigualdade em (3.8) no funcional $J_{\lambda,\beta}(u)$ conseguimos

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\beta}(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx \\ &\geqslant \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 + \frac{\beta \tilde{A}^p}{2p}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx\right)^{p/2} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2p/(4-p)} dx\right)^{(4-p)/2}\right] \\ &- \frac{1}{q}|\tilde{a}|_{2/(2-q)}\Theta_2^{\frac{q}{2}}\|u\|_\lambda^q - \frac{1}{p}|b|_\infty \Theta_p \|u\|_\lambda^p. \end{aligned}$$

Observando que, da definição de $\|u\|_\lambda^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 + \lambda V(x) u^2 dx \\ &= \|u\|_\lambda^2. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Então, como $\beta < 0$, conseguimos

$$\beta\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\Delta u|^2dx\right)^{p/2} \geqslant \beta\|u\|_\lambda^p. \tag{3.10}$$

Usando a desigualdade anterior em $\int_{\mathbb{R}^N}|\Delta u|^2dx$, e (2.26) em $\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2p/(4-p)}dx$ com $r = 2p/(4-p)$, chegamos em

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\beta}(u) \geqslant{}& \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 + \frac{\beta\tilde{A}^p}{2p}\left[\|u\|_\lambda^p + \Theta_{2p/(4-p)}^{(4-p)/2}\|u\|_\lambda^p\right] - \frac{1}{q}|\tilde{a}|_{2/(2-q)}\Theta_2^{q/2}\|u\|_\lambda^q \\ &- \frac{1}{p}|b|_\infty\Theta_p\|u\|_\lambda^p. \end{aligned}$$

Colocando $\|u\|_\lambda^p$ em evidência na desigualdade anterior, conseguimos

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\beta}(u) \geqslant{}& \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \left[\frac{-\beta\tilde{A}^p}{2p}\left(1+\Theta_{2p/(4-p)}^{(4-p)/2}\right) + \frac{1}{p}|b|_\infty\Theta_p\right]\|u\|_\lambda^p \\ &- \frac{1}{q}|\tilde{a}|_{2/(2-q)}\Theta_2^{q/2}\|u\|_\lambda^q. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Podemos aplicar o Lema 2.5, encontrado no Capítulo 2, com $\tilde{a} \in L^{2/(2-q)}(\mathbb{R}^N)$, $r = p$, e definindo

$$A = \frac{2|\tilde{a}|_{2/(2-q)}\Theta_2^{q/2}}{q} > 0$$

e

$$B = \frac{-\beta\tilde{A}^p}{p}\left(1+\Theta_{2p/(4-p)}^{(4-p)/2}\right) + \frac{2}{p}|b|_\infty\Theta_p > 0,$$

com $\beta < 0$. A e B nessas condições satisfaz (2.55) se

$$|\tilde{a}|_{2/(2-q)} < \frac{q(p-2)}{2\Theta_2^{\frac{q}{2}}(p-q)^{\frac{(p-q)}{(p-2)}}}\left(\frac{p(2-q)}{-\beta\tilde{A}^p(1+\Theta_{2p/(4-p)}^{(4-p)/2}) + 2|b|_\infty\Theta_p}\right)^{\frac{(2-q)}{(p-2)}} = \Pi_0.$$

Assim o Lema 2.5 pode ser aplicado e concluímos que com $\|u\|_\lambda = t_B = [(2-q)/B(p-q)]^{1/(p-2)}$ conseguimos

$$J_{\lambda,\beta}(u) \geqslant \frac{1}{2}\psi_{A,B}(t_B) > 0$$

desde que

$$|\tilde{a}|_{2/(2-q)} < \Pi_0. \tag{3.12}$$

Pegando $\rho = t_B$ e $\eta = \frac{1}{2}\psi_{A,B}(t_B) > 0$, como $J_{\lambda,\beta}(u) \geqslant \frac{1}{2}\psi_{A,B}(t_B) > 0$ para $\|u\|_\lambda = \rho$, e concluímos a demonstração de (i).

(ii) Como $\beta < 0$ e $f(x,s) \leqslant 0 \ \forall \ (x,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, temos

$$J_{\lambda,\beta}(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx. \tag{3.13}$$

De $f(x,s) \leqslant 0$, então $F(x,u) \leqslant 0$ logo

$$J_{\lambda,\beta}(u) \geqslant \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx.$$

Aproveitando os resultados encontrados a partir da desigualdade em (3.8) e (3.10) ficamos com

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\beta}(u) &\geqslant \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 + \frac{\beta\tilde{A}^p}{2p}\|u\|_\lambda^p + \frac{\beta\tilde{A}^p}{2p}\Theta_{2p/(4-p)}^{(4-p)/2}\|u\|_\lambda^p \\ &= \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 + \frac{\beta\tilde{A}^p}{2p}\left(1 + \Theta_{2p/(4-p)}^{(4-p)/2}\right)\|u\|_\lambda^p. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Sabemos que $2 < p < 4$, então de (3.14) para $\|u\|_\lambda$ pequeno, existe $\eta > 0$ tal que $J_{\lambda,\beta}(u) > \eta$, ou seja, existe $\rho > 0$ tal que

$$\inf\{J_{\lambda,\beta}(u) : u \in X_\lambda \text{ com } \|u\|_\lambda = \rho\} > \eta > 0. \tag{3.15}$$

$\square$

Lema 3.6. *Suponha válidas as suposições do Teorema 1.3. Seja $\rho > 0$ como no Lema 3.5. Então para cada $\lambda > 0$, existe $e \in X_\lambda$ com $\|e\|_\lambda > \rho$ tal que $J_{\lambda,\beta}(e) < 0$.*

Demonstração. Se $f(x,s) \geqslant 0, \ \forall \ (x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, considerando a condição $(D3)$, e um dado $\phi \in X_\lambda \setminus \{0\}$ fixo, o limite a seguir para $t > 0$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{J_{\lambda,\beta}(t\phi)}{t^p} &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^p}\left(\frac{1}{2}\|t\phi\|_\lambda^2 + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla t\phi|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,t\phi)dx\right) \\ &= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2t^{p-2}}\|\phi\|_\lambda^2 + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^p dx - \frac{1}{t^p}\int_{\mathbb{R}^N} F(x,t\phi)dx\right). \end{aligned}$$

Da condição $(D3)$, temos que ocorre (2.41), então

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{J_{\lambda,\beta}(t\phi)}{t^p} &\leqslant \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2t^{p-2}}\|\phi\|_\lambda^2 + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^p dx + \frac{1}{qt^p}\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{a}(x)(t\phi)^q dx\right) \\ &= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2t^{p-2}}\|\phi\|_\lambda^2 + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^p dx + \frac{1}{qt^{p-q}}\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{a}(x)\phi^q dx\right). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Como $p > 2 > q$ então $p - q > 0$ e $p - 2 > 0$, assim, passando o limite em (3.16), chegamos em

$$\lim_{t\to\infty} \frac{J_{\lambda,\beta}(t\phi)}{t^p} \leqslant \frac{\beta}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi| dx. \tag{3.17}$$

Como $\beta < 0$, de (3.17) existe $e \in X_\lambda$ tal que $\|e\|_\lambda > \rho$ implica que $J_{\lambda,\beta}(e) < 0$.
Considerando agora que $f(x,s) \leqslant 0$ para todo $(x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, então da condição $(D3)$ e (2.41) temos o limite

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \frac{J_{\lambda,\beta}(t\phi)}{t^p} &\leqslant \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2t^{p-2}}\|\phi\|_\lambda^2 + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^p dx + \frac{1}{qt^{p-q}}\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{a}(x)(\phi)^q dx\right)\\ &= \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^p dx < 0. \end{aligned}\tag{3.18}$$

Assim, de (3.18), se $t \to \infty$, então $J_{\lambda,\beta}(t\phi) \to -\infty$, logo existe $e \in X_\lambda$ com $\|e\|_\lambda > \rho$ tal que $J_{\lambda,\beta}(e) < 0$. □

Lema 3.7. *Suponha que $\beta < 0$, $2 < p < 4$ e as condições $(V1) - (V2)$ são satisfeitas. Se $f(x,u) = h(x)|u|^{q-2}u$ com $h \in L^{2/(2-q)}(\mathbb{R}^N)$ e $1 < q < 2$, então para cada $\lambda \geqslant \Lambda$, existe numeros Π^*, ρ e $q > 0$ tal que para todo $0 < |h^+|_{2/(2-q)} < \Pi^*$, então*

$$\inf\{J_{\lambda,\beta}(u) : u \in X_\lambda \ \textit{com} \ \ \|u\|_\lambda = \rho\} > \eta.$$

Demonstração. Da definição do funcional $J_{\lambda,\beta}(u)$ em (2.44) temos

$$J_{\lambda,\beta}(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u) dx.$$

De $f(x,u) = h(x)|u|^{q-2}$, então de (2.43) obtemos

$$J_{\lambda,\beta}(u) \geqslant \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx - \frac{1}{q}|h^+|_{2/(2-q)}\Theta_2^{\frac{q}{2}}\|u\|_\lambda^q. \tag{3.19}$$

Usando a desigualdade já encontrada em (3.8) com $\beta < 0$ em (3.19) conseguimos

$$\begin{aligned} J_{\lambda.\beta}(u) \geqslant \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 + \frac{\beta\tilde{A}^p}{2p}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx\right)^{\frac{p}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2p/(4-p)} dx\right)^{(4-p)/2}\right]\\ - \frac{1}{q}|h^+|_{2/(2-q)}\Theta_2^{\frac{q}{2}}\|u\|_\lambda^q. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade (2.26) e (3.10) como feito nos Lemas anteriores conseguimos

$$J_{\lambda.\beta}(u) \geqslant \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{(-\beta\tilde{A}^p)}{2p}\left(1 + \Theta_{2p/(4-p)}^{(4-p)/2}\right)\|u\|_\lambda^p - \frac{1}{q}|h^+|_{2/(2-q)}\Theta_2^{\frac{q}{2}}\|u\|_\lambda^q. \tag{3.20}$$

Definindo as seguintes constantes

$$A = 2\frac{|h^+|_{2/(2-q)}}{q}\Theta_2^{\frac{q}{2}} \quad \text{e} \quad B = \frac{(-\beta\tilde{A}^p)}{p}\left(1 + \Theta_{2p/(4-p)}^{(4-p)/2}\right).$$

Podemos aplicar o Lema 2.5 em (3.20), desde que

$$|h^+|_{2/(2-q)} < \frac{(p-2)q}{2\Theta_2^{\frac{q}{2}}(p-q)^{\frac{(p-q)}{(p-2)}}}\left(\frac{p(2-q)}{-\beta\tilde{A}^p(1+\Theta_{2p/(4-p)}^{\frac{(4-p)}{2}})}\right)^{\frac{(2-q)}{(p-2)}} = \Pi^*.$$

Assim, para A e B escolhidos, $\forall u \in X_\lambda$ com $\|u\|_\lambda = t_B = [(2-q)/B(p-q)]^{1/(p-2)}$ temos de (3.20) que

$$J_{\lambda,\beta}(u) \geqslant \frac{1}{2}\psi_{A,B}(t_B) > 0.$$

Logo, para $\rho = t_B$ temos

$$\inf\{J_{\lambda,\beta}(u) : u \in X_\lambda \ \text{ com } \ \|u\|_\lambda = \rho\} > \eta.$$

□

Lema 3.8. *Suponha que $\beta < 0$, $2 < p < 4$ e as condições $(V1) - (V3)$ são satisfeitas. Seja $\rho > 0$ como no Lema 3.7. Se $f(x,u) = h(x)|u|^{q-2}u$ com $h \in L^{2/(2-q)}(\mathbb{R}^N)$ e $1 < q < 2$, então para cada $\lambda > 0$, existe $e \in X_\lambda$ com $\|e\|_\lambda > \rho$ tal que $J_{\lambda,\beta}(e) < 0$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\frac{J_{\lambda,\beta}(t\phi)}{t^p} &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^p}\left(\frac{1}{2}\|t\phi\|^2 + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla t\phi|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N}F(x,t\phi)dx\right)\\
&= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2t^{p-2}}\|\phi\|^2 + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\phi|^p dx - \frac{1}{qt^p}\int_{\mathbb{R}^N}h(x)|t\phi|^q dx\right)\\
&= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2t^{p-2}}\|\phi\|^2 + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\phi|^p dx - \frac{1}{qt^{p-q}}\int_{\mathbb{R}^N}h(x)|\phi|^q dx\right). \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Sabemos que $1 < q < 2 < p < 4$, logo $p-2 > 0$ e $p-q > 0$, assim, aplicando o limite em (3.21) conseguimos

$$\lim_{t\to\infty}\frac{J_{\lambda,\beta}(t\phi)}{t} = \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\phi|^p dx < 0. \qquad (3.22)$$

Logo para $t \to \infty$ temos $J_{\lambda,\beta}(t\phi) < 0$, logo existe $e \in X_\lambda$ tal que $\|e\|_\lambda > p$ tal que $J_{\lambda,\beta}(e) < 0$. □

A partir de agora, vamos unir os resultados dos Lemas 3.1 - 3.8 para as duas geometrias do passo da montanha e concluir que existe o nível c_λ definido a seguir

$$c_\lambda = \inf_{\gamma \in \Gamma_\lambda} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} J_{\lambda,\beta}(\gamma(t)). \tag{3.23}$$

Também definimos

$$c_0(\Omega) = \inf_{\gamma \in \overline{\Gamma}_\lambda(\Omega)} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} J_{\lambda,\beta}\big|_{H_0^1(\Omega) \cap H^2(\mathbb{R}^N)}(\gamma(t)). \tag{3.24}$$

Onde $J_{\lambda,\beta}\big|_{H_0^1(\Omega) \cap H^2(\mathbb{R}^N)}$ é a restrinção de $J_{\lambda,\beta}$ em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\mathbb{R}^N)$ e

$$\Gamma_\lambda = \{\gamma \in C([0,1], X_\lambda) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\} \tag{3.25}$$

e

$$\overline{\Gamma}_\lambda(\Omega)\{\gamma \in C([0,1], H_0^1(\Omega) \cap H^2(\mathbb{R}^N)) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Note que para $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\mathbb{R}^N)$

$$J_{\lambda,\beta}\big|_{H_0^1(\Omega) \cap H^2(\mathbb{R}^N)}(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 + \frac{\beta}{p}\int_{R^N} |\nabla u|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx.$$

Observe que $c_0(\Omega)$ é independente de λ porque quando x está em Ω, temos que $V(x) = 0$, então $\lambda \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx = 0$. Por outro lado, se as condições de crescimento da f $(D1) - (D2)$, ou $(D1') - (D2')$, ou $(D2) - (D3)$ ou $f(x,u) = h(x)|u|^{q-2}u$ com $h \in L^{2/(2-q)}$ e $1 < q < 2$ são satisfeitos, então pelas demonstrações dos Lemas 3.1 e 3.3, ou 3.2 e 3.4, ou 3.5 e 3.6, ou 3.7 e 3.8, concluímos que $J_{\lambda,\beta}|_{H_0^1(\Omega) \cap H^2(\mathbb{R}^N)}$ satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, encontrado no Apêndice A, Lema 6.6.

Desde que $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\mathbb{R}^N) \subset X_\lambda$ para todo $\lambda > 0$, podemos ver que $0 < \eta \leqslant c_\lambda \leqslant c_0(\Omega)$ para todo $\lambda \geqslant \Lambda$. Pegue $D_0 > c_0(\Omega)$, então temos

$$0 < \eta \leqslant c_\lambda \leqslant c_0(\Omega) < D_0 \quad \forall \ \ \lambda \geqslant \Lambda,$$

para $\beta \geqslant 0$, pelos Lemas 3.1, 3.3 e o Lema 6.6(ou para $\beta > 0$ usando os Lemas 3.2, 3.4 e 6.6, ou para $\beta < 0$, usando os Lemas 3.5, 3.6 e 6.6, ou para $\beta < 0$ usando os Lemas 3.7, 3.8 e 6.6), obtemos que para cada $\lambda \geqslant \Lambda$ existe uma sequência $\{u_n\} \subset X_\lambda$ tal que

$$J_{\lambda,\beta}(u_n) \to c_\lambda > 0 \text{ e } (1 + \|u_n\|_\lambda)\|J'_{\lambda,\beta}(u_n)\|_{X_\lambda^{-1}} \to 0 \text{ , quando } n \to \infty.$$

Capítulo 4

Demonstração dos Teoremas 1.1 e 1.3

Lema 4.1. *Suponha que $\beta \in \mathbb{R}$ e as condições $(V1) - (V3)$ e $(D2)$ são satisfeitas. Seja $\{u_n\}$ uma sequência-C_c de $J_{\lambda,\beta}$, definida como em 6.5. Então $\{u_n\}$ é limitado em X_λ para cada $\lambda \geqslant \Lambda$.*

Demonstração. Considerando válida a condição $(D2)$, o funcional definido em (2.44) e sua derivada de Frechet (2.45), e seja $\{u_n\}$ uma sequência de Cerami no nível c, temos

$$\|J'_{\lambda,\beta}(u_n)\|_{X_\lambda^{-1}} \to 0, \text{ e } J_{\lambda,\beta}(u_n) \to c.$$

Então

$$\begin{aligned}
c + o_n(1) &\geqslant J_{\lambda,\beta}(u_n) - \frac{1}{p}\langle J'_{\lambda,\beta}(u_n), u_n\rangle \\
&= \frac{1}{2}\|u_n\|_\lambda^2 + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx \\
&- \frac{1}{p}\left(\|u_n\|_\lambda^2 + \beta\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)u_n dx\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u_n\|_\lambda^2 + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)u_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^N} pF(x,u) - f(x,u_n)u_n dx\right).
\end{aligned}$$

Da condição $(D2)$ conseguimos

$$c + o_n(1) \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} d(x)|u_n|^l dx.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, encontrada no Apêndice B, Teorema 6.13 com $\dfrac{2}{2-l}$ e

$\dfrac{2}{l}$, ficamos com

$$\begin{aligned} c + o_n(1) &\geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \|u_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^N} d(x)^{\frac{2}{2-l}} dx\right)^{(2-l)/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{l\frac{2}{l}} dx\right)^{l/2} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \|u_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^N} d(x)^{\frac{2}{2-l}} dx\right)^{(2-l)/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 dx\right)^{l/2}. \end{aligned}$$

Como $d(x) \in L^{2/2-l}(\mathbb{R}^N)$, então

$$c + o_n(1) \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \|u_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}|d|_{2/(2-l)}|u_n|_2^l.$$

Da desigualdade (2.26) obtemos

$$c + o_n(1) \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \|u_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}|d|_{2/(2-l)}\Theta_2^{l/2}\|u_n\|_\lambda^l.$$

Usando a desigualdade de Young, encontrada no Apêndice B, Lema 6.15, com $p = \dfrac{2}{2-l}$ e $q = \dfrac{2}{l}$, e com $\varepsilon < \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}\right)$ em $\dfrac{1}{p}|d|_{2/(2-l)}\Theta_\lambda^{l/2}$, ficamos com

$$\begin{aligned} c + o_n(1) &\geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \|u_n\|_\lambda^2 - \left(\frac{1}{p}|d|_{2/(2-l)}\Theta_2^{\frac{l}{2}}\right)^{2/(2-l)} C(\varepsilon) - \varepsilon\|u_n\|_\lambda^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} - \varepsilon\right) \|u_n\|_\lambda^2 - \left(\frac{1}{p}|d|_{2/(2-l)}\Theta_2^{\frac{l}{2}}\right)^{2/(2-l)} C(\varepsilon). \end{aligned}$$

Isolando $\|u_n\|_\lambda$ na desigualdade, conseguimos

$$\left(c + o_n(1) + \left(\frac{1}{p}|d|_{2/(2-l)}\Theta^{\frac{l}{2}}\right)^{\frac{2}{2-l}} C(\varepsilon)\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} - \varepsilon\right)^{-1} + o_n(1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} - \varepsilon\right)^{-1} \geqslant \|u_n\|_\lambda^2.$$

Com isso concluímos que existe uma constante $\overline{D} > 0$ tal que

$$\|u_n\|_\lambda \leqslant \overline{D} + o_n(1) \quad \text{para todo} \quad \lambda > \Lambda,$$

desde que $1 < l < 2$. Consequentemente, $\{u_n\}$ é limitado em X_λ. □

Proposição 4.2. *Suponha que $\beta \in \mathbb{R}$, e as condições $(V1) - (V3)$ e $(D2)$ são satisfeitas. E suponha que a condição $(D1)$ ocorre quando $\beta \geqslant 0$, ou a condição $(D3)$ ocorre quando $\beta < 0$. Então para cada $D > 0$, existe $\Lambda_0 := \Lambda(D) \geqslant \Lambda$ tal que $J_{\lambda,\beta}$ satisfaz a condição-C_c em X_λ para todo $c < D$ e $\lambda > \Lambda_0$.*

Demonstração. Seja $\{u_n\}$ uma sequência-C_c de $J_{\lambda\beta}$ com $c < D$. Pelo Lema 4.1, $\{u_n\}$ é limitada em X_λ e existe $D_0 > 0$ tal que $\|u_n\|_\lambda \leqslant D_0$, então existe uma subsequência $\{u_n\}$ e $u_0 \in X_\lambda$ tal que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u_0 \quad \text{fracamente em } X_\lambda, \\ u_n &\to u_0 \quad \text{fortemente em } L^r_{loc}(\mathbb{R}^N), \text{ para } 2 \leqslant r < 2_*, \\ u_n &\to u_0 \quad \text{para quase todo ponto em } \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

u_0 tal que $J'_{\lambda,\beta}(u_0) = 0$.

Além do mais, usando (2.26) e (3.7) implica que a imersão $X_\lambda \hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é contínua o qual nos diz que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ fracamente em } W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Pela prova do Lemma 4.4 da referência [7], obtemos

$$\nabla u_n(x) \to \nabla u_0(x) \ \text{ q.t.p. em } \ \mathbb{R}^N.$$

Então, segue do Lema 5 do Brezis-Lieb [2], que

$$\lim_{n\to\infty} (|\nabla u_n|^p - |\nabla u_n - \nabla u_0|^p) = |\nabla u_0|^p.$$

Ou seja

$$|\nabla u_n|^p - |\nabla u_n - \nabla u_0|^p + o_n(1) = |\nabla u_0|^p,$$

integrando com relação a Lebesgue, conseguimos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u_0|^p dx + o_n(1) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^p dx.$$

Arranjando a igualdade anterior, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u_0|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^p dx + o_n(1). \tag{4.1}$$

Agora provaremos que $u_n \to u_0$ fortemente em X_λ.

Seja $v_n = u_n - u_0$. Então $v_n \rightharpoonup 0$ em X_λ. Pela condição $(V2)$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_n^2 dx = \int_{\{V \geqslant b\}} v_n^2 dx + \int_{\{V < b\}} v_n^2 dx.$$

Se $V(x) \geqslant b$ então $\dfrac{V(x)}{b} \geqslant 1$ e $\dfrac{V(x)}{b}\dfrac{\lambda}{\lambda} \geqslant 1$, de $\lambda \neq 0$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_n^2 dx \leqslant \frac{1}{\lambda b}\int_{\{V \geqslant b\}} \lambda V(x) v_n^2 dx + \int_{\{V<b\}} v_n^2 dx.$$

De $\{V \geqslant b\} \subset \mathbb{R}^N$, ficamos com

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_n^2 dx \leqslant \frac{1}{\lambda b}\int_{\mathbb{R}^N} \lambda V(x) v_n^2 dx + \int_{\{V<b\}} v_n^2 dx.$$

Mas da definição da norma $\|u\|_\lambda$ temos que

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} V(x) v_n^2 dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta v_n|^2 dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} V(x) v_n^2 dx = \|v_n\|_\lambda^2.$$

Logo conseguimos

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_n^2 dx \leqslant \frac{1}{\lambda b}\|v_n\|_\lambda^2 + \int_{\{V<b\}} v_n^2 dx.$$

Como $v_n \rightharpoonup 0$ em X_λ, temos que $v_n \to 0$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$, logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_n^2 dx \leqslant \frac{1}{\lambda b}\|v_n\|_\lambda^2 + o_n(1). \tag{4.2}$$

Agora vamos conferir a seguinte estimativa, considere $N \leq 3$, $\lambda > \Lambda$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^r dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{r-2}|v_n|^2 dx.$$

Usando o Teorema 6.9, encontrada no Apêndice B, com $m = p = 2$ temos que $W^{2,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$, então ficamos com

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^r dx \leqslant |v_n|_\infty^{r-2} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^2 dx.$$

Agora vamos trabalhar com essa desigualdade para os casos $N \leqslant 4$, $N = 4$ e $N > 4$. Como a imersão $H^2(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$ é contínua para $N \leqslant 3$ e $r \in [2, +\infty)$, e usando a desigualdade (4.2) conseguimos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^r dx &\leqslant S_\infty^{r-2}\|v_n\|_{H^2}^{r-2}\left(\frac{1}{\lambda b}\|v_n\|_\lambda^2 + o_n(1)\right)\\ &\leqslant \frac{S_\infty^{r-2}}{\lambda b}\|v_n\|_{H^2}^{r-2}\|v_n\|_\lambda^2 + o_n(1).\end{aligned}$$

Mas de (2.10) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^r dx \leqslant \frac{S_\infty^{r-2}}{\lambda b}\left[\left(1+\frac{A_0^2}{2}\right)^{-1} - S_\infty^2|\{V<b\}|\right]^{-\frac{(r-2)}{2}} \|v_n\|_\lambda^r + o_n(1). \tag{4.3}$$

Considere agora, $N=4$, encontramos

$$\int_{\mathbb{R}^4} |v_n|^r dx = \int_{\mathbb{R}^4} |v_n|\ |v_n|^{r-1} dx.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, encontrado no Apêndice B, Teorema 6.13 com $p=q=2$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^4} |v_n|^r dx \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^4} v_n^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^4} v_n^{2(r-1)} dx\right)^{1/2}.$$

Da desigualdade (4.2), e (2.22) com $2(r-1)\in[2,+\infty)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^4} |v_n|^r dx \leqslant \left(\frac{1}{\lambda b}\|v_n\|_\lambda^2 + o_n(1)\right)^{1/2}\left(S_{2(r-1)}^{-2(r-1)}\left(1+B_0^4|\{V<b\}|\right)^{\frac{2(r-1)}{2}}\left(1+\frac{A_0^2}{2}\right)^{\frac{2(r-1)}{2}}\|v_n\|_\lambda^{2(r-1)}\right)^{1/2}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^4} |v_n|^r dx &\leqslant \left[\left(\frac{1}{\lambda b}\|v_n\|_\lambda^2 + o_n(1)\right) S_{2(r-1)}^{-2(r-1)}\left(1+B_0^4|\{V<b\}|\right)^{r-1}\left(1+\frac{A_0^2}{2}\right)^{r-1}\|v_n\|_\lambda^{2(r-1)}\right]^{1/2}\\
&= \left[\frac{S_{2(r-1)}^{-2(r-1)}}{\lambda b}\left(1+B_0^4|\{V<b\}|\right)^{r-1}\left(1+\frac{A_0^2}{2}\right)^{r-1}\|v_n\|_\lambda^{2r} + o_n(1)\right]^{1/2}.\\
&\leqslant \left(\frac{S_{2(r-1)}^{-2(r-1)}}{\lambda b}\left(1+B_0^4|\{V<b\}|\right)^{r-1}\|v_n\|_\lambda^{2r}\right)^{1/2} + o_n(1)^{1/2}\\
&= \frac{S_{2(r-1)}^{-(r-1)}}{\lambda b}\left(1+B_0^4|\{V<b\}|\right)^{\frac{(r-1)}{2}}\|v_n\|_\lambda^{r} + o_n(1).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Suponha agora $N>4$, e observe que $\frac{2(2_*-r)}{2_*-2}+\frac{2_*(r-2)}{2_*-2}=r$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^r dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{\frac{2(2_*-r)}{2_*-2}}|v_n|^{\frac{2_*(r-2)}{2_*-2}} dx.$$

Aplicando desigualdade Hölder, encontrado no Apêndice B, Teorema 6.13 com $p=\frac{2_*-2}{2_*-r}$ e $q=\frac{2_*-2}{r-2}$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^r dx \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^2 dx\right)^{\frac{2_*-r}{2_*-2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2_*} dx\right)^{\frac{r-2}{2_*-2}}. \tag{4.5}$$

Usando (4.2) em (4.5)

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^r dx \leqslant \left(\frac{1}{\lambda b} \|v_n\|_\lambda^2 + o_n(1) \right)^{\frac{2_*-r}{2_*-2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2_*} dx \right)^{\frac{r-2}{2_*-2}}.$$

Usando (2.15) na desigualdade anterior temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^r dx &\leqslant \left(\frac{1}{\lambda b} \|v_n\|_\lambda^2 + o_n(1) \right)^{\frac{2_*-r}{2_*-2}} \left(C_0^{2_*} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta v_n|^2 \right)^{\frac{2_*}{2}} \right)^{\frac{r-2}{2_*-2}}. \\ &\leqslant \left(\frac{1}{\lambda b} \|v_n\|_\lambda^2 + o_n(1) \right)^{\frac{2_*-r}{2_*-2}} \left(C_0^{2_*} \|v_n\|_\lambda^{2_*} \right)^{\frac{r-2}{2_*-2}}. \end{aligned}$$

Distribuindo os termos, conseguimos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^r dx \leqslant C_0^{\frac{2_*(r-2)}{(2_*-2)}} \left(\frac{1}{\lambda b} \right)^{\frac{(2_*-r)}{2_*-2}} \|v_n\|_\lambda^r + o_n(1). \tag{4.6}$$

Então, com as desigualdades encontradas em (4.2), (4.4) e (4.6), construímos a seguinte constante

$$\Pi_\lambda := \begin{cases} \dfrac{S_\infty^{r-2}}{\lambda b} \left[\left(1 + \frac{A_0^2}{2}\right)^{-1} - S_\infty^2 |\{V < b\}| \right]^{-\frac{(r-2)}{2}} & \text{se } N \leqslant 3 \\ \dfrac{S_{2(r-1)}^{-(r-1)}}{\lambda b} \left(1 + B_0^4 |\{V < b\}|\right)^{\frac{(r-1)}{2}} & \text{se } \ N = 4 \\ C_0^{\frac{2_*(r-2)}{2_*-2}} \left(\dfrac{1}{\lambda b} \right)^{(2_*-r)/(2_*-2)} & \text{se } \ N > 4. \end{cases} \tag{4.7}$$

Então, se $\Pi_\lambda \to 0$ quando $\lambda \to \infty$. Então com as desigualdades (4.3)-(4.6) nos indica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^r dx \leqslant \Pi_\lambda \|v_n\|_\lambda^r + o_n(1). \tag{4.8}$$

Além do mais, seguindo o argumento de [14], quando a condição $(D1)$ (ou$(D3)$) ocorrem, temos que é satisfeito a igualdade a seguir

$$\int_{\mathbb{R}^N} [F(x, v_n) - F(x, u_n) + F(x, u_0)] \, dx = o_n(1). \tag{4.9}$$

Então, considerando (4.1) e (4.9) e o lema do Brezis-Lieb [2], conseguimos

$$J_{\lambda,\beta}(v_n) = J_{\lambda,\beta}(u_n) - J_{\lambda,\beta}(u_0) + o_n(1) \ \text{ e } \ J'_{\lambda,\beta}(v_n) = o_n(1), \tag{4.10}$$

consequêntemente, por (4.10) e K como no Lema 2.2, $D > c$ como na hipótese e lembrando que u_0 é solução fraca de $J_{\lambda,\beta}(u_0)$, temos

$$\begin{aligned}
D - K &\geqslant c - J_{\lambda,\beta}(u_0) \\
&\geqslant J_{\lambda,\beta}(v_n) - \frac{1}{p}\langle J'_{\lambda,\beta}(v_n), v_n\rangle + o_n(1) \\
&= \frac{1}{2}\|v_n\|_\lambda^2 + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx \\
&- \frac{1}{p}\|v_n\|_\lambda^2 - \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} f(x,v_n)v_n dx + o_n(1) \\
&= (\frac{1}{2} - \frac{1}{p})\|v_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} (pF(x,v_n) - f(x,v_n)v_n dx) + o_n(1).
\end{aligned}$$

Da condição $(D2)$ ser satisfeita, conseguimos

$$D - K \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|v_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} d(x)|v_n|^l dx + o_n(1).$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, encontrado no Apêndice B, Teorema 6.13, com $\dfrac{2}{2-l}$ e $\dfrac{2}{l}$, ficamos com

$$D - K \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|v_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^N} d(x)^{\frac{2}{2-l}}\right)^{(2-l)/2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{l\frac{2}{l}} dx\right)^{l/2} + o_n(1).$$

Como $d(x) \in L^{2/(2-l)}(\mathbb{R}^N)$, então

$$D - K \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|v_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}|d|_{2/(2-l)}|v_n|_2^l + o_n(1).$$

Da desigualdade (2.26) concluímos que

$$D - K \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|v_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}|d|_{2/(2-l)}\Theta_2^{l/2}\|v_n\|_\lambda^l + o_n(1). \tag{4.11}$$

De $1 < l < 2$, segue da desigualdade (4.11) que existe constante $D_1 > 0$ tal que

$$\|v_n\|_\lambda \leqslant D_1 + o_n(1) \text{ para todo } \lambda > \Lambda. \tag{4.12}$$

Se $\beta \geqslant 0$ e a condição $(D1)$ é satisfeita, então pelas equações (2.31), (4.2), (4.8), (4.12), temos

$$o_n(1) = \langle J'_{\lambda,\beta}(v_n), v_n\rangle = \|v_n\|_\lambda^2 + \beta\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,v_n)v_n dx.$$

Como $\beta \geqslant 0$, então $\beta \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx > 0 \ \forall \ u \in X_\lambda$, ou seja

$$o_n(1) \geqslant \|v_n\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, v_n) v_n dx.$$

Da desigualdade (2.31), ficamos com

$$o_n(1) \geqslant \|v_n\|_\lambda^2 - \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} v_n^2 dx - C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^m dx. \tag{4.13}$$

Utilizando (4.2) e (4.8) em (4.13), conseguímos

$$o_n(1) \geqslant \|v_n\|_\lambda^2 - \frac{\varepsilon}{\lambda b}\|v_n\|_\lambda^2 - C_\varepsilon \Pi_\lambda \|v_n\|_\lambda^m + o_n(1). \tag{4.14}$$

Agora considerando que $\beta < 0$, $f \geqslant 0$ e a condição $(D3)$ é satisfeita, então

$$o_n(1) = \langle J'_{\lambda,\beta}(v_n), v_n \rangle = \|v_n\|_\lambda^2 + \beta \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, v_n) v_n dx. \tag{4.15}$$

Usando (3.7) em (4.15) com $\beta < 0$ temos

$$o_n(1) \geqslant \|v_n\|_\lambda^2 + \beta \tilde{A}^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta v_n|^2 dx \right)^{p/4} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2p/(4-p)} dx \right)^{(4-p)/4} - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, v_n) v_n dx.$$

Da desigualdade $(D3)$, é valido (2.39), logo

$$o_n(1) \geqslant \|v_n\|_\lambda^2 + \beta \tilde{A}^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta v_n|^2 dx \right)^{p/4} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2p/(4-p)} dx \right)^{(4-p)/4} - \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{a}(x) v_n^q + \tilde{b}(x) v_n^p dx.$$

Como $\tilde{a}(x) \in L^{2/(2-q)}(\mathbb{R}^N)$ e $\tilde{b}(x) \leqslant |b(x)| \leqslant |b|_\infty$ de $\tilde{b} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ então

$$\begin{aligned} o_n(1) \geqslant \|v_n\|_\lambda^2 + \beta \tilde{A}^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta v_n|^2 dx \right)^{p/4} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2p/(4-p)} dx \right)^{(4-p)/4} - \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{a}(x) v_n^q dx \\ - |\tilde{b}|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} v_n^p dx. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, encontrado no Apêndice B, Teorema 6.13, com $\dfrac{2}{2-q}$ e $\dfrac{2}{q}$, conseguimos

$$\begin{aligned} o_n(1) \geqslant \|v_n\|_\lambda^2 + \beta \tilde{A}^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta v_n|^2 dx \right)^{p/4} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2p/(4-p)} dx \right)^{(4-p)/4} \\ - \left(\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{a}(x)^{\frac{2}{2-q}} dx \right)^{(2-q)/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_n^{q\frac{2}{q}} dx \right)^{q/2} - |\tilde{b}|_\infty |v_n|_p^p. \end{aligned}$$

Pela desigualdade (4.8), temos

$$\begin{aligned} o_n(1) &\geqslant \|v_n\|_\lambda^2 + \beta \tilde{A}^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta v_n|^2 dx \right)^{p/4} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2p/(4-p)} dx \right)^{(4-p)/4} \\ &\quad - |\tilde{a}|_{\frac{2}{2-q}} |v_n|_2^q - |\tilde{b}|_\infty |v_n|_p^p \\ &\geqslant \|v_n\|_\lambda^2 + \beta \tilde{A}^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta v_n|^2 dx \right)^{p/4} \Pi_\lambda^{(4-p)/4} \|v_n\|_\lambda^{p/2} \\ &\quad - |\tilde{a}|_{\frac{2}{2-q}} \Pi_\lambda^{\frac{q}{2}} \|v_n\|_\lambda^q - |\tilde{b}|_\infty \Pi_\lambda \|v_n\|_\lambda^p + o_n(1). \end{aligned}$$

Usando a desigualdade (3.9), com $\beta < 0$, obtemos

$$o_n(1) \geqslant \|v_n\|_\lambda^2 + \beta \tilde{A}^p \|v_n\|_\lambda^{p/2} \Pi_\lambda^{(4-p)/4} \|v_n\|_\lambda^{p/2} - |\tilde{a}|_{\frac{2}{2-q}} \Pi_\lambda^{\frac{q}{2}} \|v_n\|_\lambda^q - |\tilde{b}|_\infty \Pi_\lambda \|v_n\|_\lambda^p + o_n(1).$$

Como a sequência $\|v_n\|_\lambda$ é limitada, por (4.12), concluímos que

$$o_n(1) \geqslant \|v_n\|_\lambda^2 + \beta \tilde{A}^p \overline{D}^{p/2} \Pi_\lambda^{(4-p)/4} \|v_n\|_\lambda^{p/2} - |\tilde{a}|_{\frac{2}{2-q}} \Pi_\lambda^{\frac{q}{2}} \|v_n\|_\lambda^q - |\tilde{b}|_\infty \Pi_\lambda \|v_n\|_\lambda^p + o_n(1). \tag{4.16}$$

Agora considere $\beta < 0$ e $f \leqslant 0$, conseguimos

$$\begin{aligned} o_n(1) &= \langle J'_{\lambda,\beta}(v_n), v_n \rangle \\ &= \|v_n\|_\lambda^2 + \beta \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, v_n) v_n dx \\ &\geqslant \|v_n\|_\lambda^2 + \beta \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dx. \end{aligned}$$

De (3.7), temos

$$o_n(1) \geqslant \|v_n\|_\lambda^2 + \beta \tilde{A}^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta v_n|^2 dx \right)^{p/4} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2p/(4-p)} dx \right)^{(4-p)/4}.$$

Usando (4.8) e (4.12) na desigualdade anterior, ficamos com

$$o_n(1) \geqslant \|v_n\|_\lambda^2 + \beta \tilde{A}^p \overline{D}^{p/2} \Pi_\lambda^{(4-p)/4} \|v_n\|_\lambda^{p/2} + o_n(1). \tag{4.17}$$

Como $\Pi_\lambda \to 0$ quando $\lambda \to +\infty$, pelas desigualdades (4.14), (4.16) e (4.17), existe $\Lambda_0 := \Lambda(D) \geqslant \Lambda$ tal que $\forall \lambda > \Lambda_0$

$$v_n \to 0 \quad \text{fortemente em} \quad X_\lambda.$$

Logo de $v_n = u_n - u_0$, então $u_n \to u_0$ fortemente em X_λ. $\square$

Agora, usando os resultados anteriores desde capítulo, estamos prontos para demonstrar o Teorema 1.1 e 1.3.

Para conforto do leitor, voltamos a enunciar os teoremas antes de suas devidas demonstrações.

Teorema 1.1. *Suponha que $N \geqslant 1$, $2 \leqslant p < 2_*$ e condições $(V1) - (V3)$ são satisfeitas. Também assumimos que a função f satisfaz as condições $(D1)$ e $(D2)$. Então existe $\Lambda_0 > 0$ tal que o problema (E) admite ao menos uma solução não trivial para todo $\lambda \geqslant \Lambda_0$ e $\beta \geqslant 0$.*

Demonstração do Teorema 1.1. Para todo $\beta \geqslant 0$, e pela Proposição 4.2, com $0 < \eta \leqslant c_\lambda \leqslant c_0(\Omega)$ e todo $\lambda \geqslant \Lambda$, $\exists \Lambda_0 > \Lambda$ e $u_\lambda \in X_\lambda$ tal que todo $\lambda > \Lambda_0$ implique que

$$u_n \to u_\lambda \text{ fortemente em } X_\lambda.$$

Isso indica que $J'_{\lambda,\beta}(u_\lambda) = 0$ e $J_{\lambda,\beta}(u_\lambda = c_\lambda)$. Então, u_λ é uma solução não trivial da equação (E). $\square$

Teorema 1.3. *Suponha que $N \geqslant 1, 2 < p < 4$ e as condições $(V1) - (V3)$, $(D2)$ e $(D3)$ são satisfeitas. Então os seguintes resultados são verdadeiros:*

(i) se $f(x,s) \geqslant 0$ para todo $(x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ e $1 < q < 2$, então existe $\Lambda_0, \Pi_0 > 0$ tal que para $|\tilde{a}|_{L^{2/(2-q)}} < \Pi_0$, então a equação (E) admite ao menos uma solução não trivial para todo $\lambda \geqslant \Lambda_0$ e $\beta < 0$,

(ii) se $f(x,s) \geqslant 0$ para todo $(x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$e $1 < q < p$, então existe $\Lambda_0 > 0$ tal que a equação (E) admite ao menos uma solução não trivial para todo $\lambda \geqslant \Lambda_0$ e $\beta < 0$.

Demonstração do Teorema 1.3. (i) Se $\beta < 0$, e $f(x,s) \geqslant 0$ $\forall (x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, com $1 < q < 2$, então pela proposição 4.2 e $0 < \eta \leqslant c_\lambda \leqslant c_0(\Omega)$ e para todo $\lambda \geqslant \Lambda$, existe $\Lambda_0 > \Lambda$, $\Pi_0 > 0$ e $u_\lambda \in X_\lambda$ tal que $\forall \lambda > \Lambda_0$ e $|\tilde{a}|_{2/(2-q)} < \Pi_0$, então

$$u_n \to u_\lambda \text{ fortemente em } X_\lambda,$$

o qual implica que $J'_{\lambda,\beta}(u_\lambda) = 0$ e $J_{\lambda,\beta}(u_\lambda) = c_\lambda$. Isso indica que u_λ é uma solução não trivial da equação (E). $\square$

Capítulo 5

Demonstração do Teorema 1.2

Lema 5.1. *Suponha que $\beta > 0$, e as condições $(V1) - (V3)$ e $(D1') - (D2')$ são satisfeitas. Seja $\{u_n\}$ uma sequência $(C)_c$. Então $\{u_n\}$ é limitado em X_λ para $\lambda \geqslant \Lambda$.*

Demonstração. Considerando $\{u_n\}$ uma sequência-C_c, temos

$$J_{\lambda,\beta}(u_n) + \frac{1}{2}\langle J'_{\lambda,\beta}(u_n), u_n\rangle = J_{\lambda,\beta}(u_n) + o_n(1).$$

Passando $\frac{1}{2}\langle J'_{\lambda,\beta}(u_n), u_n\rangle$ para o outro lado da igualdade, temos

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\beta}(u_n) &= \frac{1}{2}\|u_n\|_\lambda^2 + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n)dx \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(\|u_n\|_\lambda^2 + \beta\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n)u_n dx\right) + o_n(1) \\ &= -\frac{(p-2)\beta}{2p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{2}f(x, u_n)u_n - F(x, u_n)\right]dx + o_n(1). \end{aligned}$$

Da condição $(D2')$ conseguimos

$$J_{\lambda,\beta}(u_n) \leqslant -\frac{(p-2)\beta}{2p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} g_2(x)|u_n|^q dx + o_n(1).$$

Usando a desigualdade de Hölder encontrada no Apêndice B, Teorema 6.13 com $\frac{p^*}{p^*-q}$ e $\frac{p^*}{q}$, temos

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\beta}(u_n) &\leqslant -\frac{(p-2)\beta}{2p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx + \left(\int_{\mathbb{R}^N} (g_2(x))^{\frac{p^*}{p^*-q}} dx\right)^{\frac{p^*-q}{p^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q\frac{p^*}{q}} dx\right)^{\frac{q}{p^*}} + o_n(1) \\ &= -\frac{(p-2)\beta}{2p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx + |g_2|_{p^*/(p^*-q)}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx\right)^{\frac{q}{p^*}} + o_n(1). \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, encontrado no Apêndice B, Teorema 6.12, com

$$J_{\lambda,\beta}(u_n) \leqslant -\frac{(p-2)\beta}{2p} C_*^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx \right)^{p/p^*} + |g_2|_{\frac{p^*}{(p^*-q)}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx \right)^{q/p^*} + o_n(1). \quad (5.1)$$

Por outro lado

$$J_{\lambda,\beta}(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|_\lambda^2 + \frac{\beta}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n) dx.$$

Da desigualdade (2.26) temos

$$J_{\lambda,\beta}(u_n) \geqslant \frac{1}{2}\Theta_2^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx + \frac{\beta}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n) dx.$$

Da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, encontrado no Apêndice B, Teorema 6.12 conseguimos

$$J_{\lambda,\beta}(u_n) \geqslant \frac{1}{2}\Theta_2^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx + \frac{\beta}{p} C_*^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx \right)^{p/p^*} - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n) dx.$$

Da condição $(D1')$, temos que (2.37) é satisfeita, então

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\beta}(u_n) &\geqslant \frac{1}{2}\Theta_2^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx + \frac{\beta}{p} C_*^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx \right)^{p/p^*} - \frac{|a|_\infty}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{q} |g_1|_{p^*/(p^*-q)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx \right)^{q/p^*} \\ &= \frac{1}{2} \left(\Theta_2^{-1} - |a|_\infty \right) \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx + \frac{\beta}{p} C_*^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx \right)^{p/p^*} \\ &\quad - \frac{1}{q} |g_1|_{p^*/(p^*-q)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx \right)^{q/p^*}. \end{aligned}$$

Temos de $(D1')$ que $|a|_\infty < \Theta_2^{-1}$ logo

$$J_{\lambda,\beta}(u_n) \geqslant \frac{\beta}{p} C_*^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx \right)^{p/p^*} - \frac{1}{q} |g_1|_{p^*/(p^*-q)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx \right)^{q/p^*}. \quad (5.2)$$

Então de (5.1) e (5.2), temos

$$\begin{aligned} &\frac{\beta}{p} C_*^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx \right)^{p/p^*} - \frac{1}{q} |g_1|_{p^*/(p^*-q)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx \right)^{q/p^*} \\ &\leqslant J_{\lambda,\beta}(u_n) \leqslant -\frac{(p-2)\beta}{2p} C_*^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx \right)^{p/p^*} + |g_2|_{\frac{p^*}{(p^*-q)}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx \right)^{q/p^*} + o_n(1). \end{aligned}$$

Então concluímos que

$$o_n(1) \geqslant \frac{\beta C_*^p}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p^*}dx\right)^{p/p^*} - \left(\frac{1}{q}|g_1|_{p^*/(p^*-q)} + |g_2|_{p^*/(p^*-q)}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p^*}dx\right)^{q/p^*}.$$

O qual implica que existe $C^* > 0$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p^*}dx\right)^{1/p^*} \leqslant C^*. \tag{5.3}$$

Desde que

$$\langle J'_{\lambda,\beta}(u_n), u_n\rangle = o_n(1),$$

é valido, segue

$$\|u_n\|_\lambda^2 + \beta\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)u_n dx + o_n(1).$$

Da condição $(D1')$ da f (2.37) podemos chegar em

$$\|u_n\|_\lambda^2 + \beta\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^p dx \leqslant |a|_\infty\int_{\mathbb{R}^N}u_n^2dx + |g_1|_{p^*/(p^*-q)}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p^*}dx\right)^{q/p^*} + o_n(1).$$

De (5.3) e (2.26) chegamos

$$\|u_n\|_\lambda^2 + \beta\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^p dx \leqslant |a|_\infty\Theta_2\|u_n\|_\lambda^2 + (C^*)^q|g_1|_{p^*/(p^*-q)} + o_n(1).$$

Como $\beta \geqslant 0$ então

$$\|u_n\|_\lambda^2 \leqslant |a|_\infty\Theta_2\|u_n\|_\lambda^2 + (C^*)^q|g_1|_{p^*/(p^*-q)} + o_n(1).$$

Isolando $\|u_n\|_\lambda^2$, e lembrando que $|a|_\infty\Theta_2 < 1$, temos

$$\|u_n\|_\lambda^2 \leqslant \frac{(C^*)^q|g_1|_{p^*/(p^*-q)}}{1-|a|_\infty\Theta_2} + o_n(1). \tag{5.4}$$

Logo, concluímos que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada. □

Proposição 5.2. *Suponha que $\beta > 0$, condições $(V1)-(V3)$ e $(D1')-(D2')$ são satisfeitas. Então existe $\Lambda_0 \geqslant \Lambda$ tal que $J_{\lambda,\beta}$ satisfaz a condição $(C)_c$ em X_λ para todo $\lambda > \Lambda_0$.*

Demonstração. Seja $\{u_n\}$ uma sequência de Cerami. Pelo Lema 5.1, $\{u_n\}$ é limitada em X_λ e existe $D_0 > 0$ tal que $\|u_n\|_\lambda < D_0$ para $\lambda \geqslant \Lambda$. Podemos assumir que existe uma subsequência

$\{u_n\}$ e u_0 em X_λ tal que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u_0 \ \text{ fracamente em } \ X_\lambda \\ u_n &\to u_0 \ \text{ fortemente em } \ L^r_{loc}(\mathbb{R}^N), \ \text{ para } \ 2 \leqslant r < 2_* \\ u_n &\to u_0 \ \text{ em q.t.p. em } \ \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

e $J'_{\lambda,\beta}(u_0) = 0$. Segue do argumento de [14], que da condição $(D1')$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} [F(x, v_n) - F(x, u_n) + F(x, u_0)]\, dx = o_n(1). \tag{5.5}$$

Então, usando (5.5) e o Lema de Brezis-Lieb [2], conseguimos

$$J_{\lambda,\beta}(v_n) = J_{\lambda,\beta}(u_n) - J_{\lambda,\beta}(u_0) + o_n(1) \ \text{ e } \ J'_{\lambda,\beta}(v_n) = o_n(1). \tag{5.6}$$

De (5.6), e seguindo o mesmo raciocínio como em (5.4), existe uma constante $D_2 > 0$ tal que

$$\|v_n\|_\lambda \leqslant D_2 + o_n(1) \quad \text{para} \ \ \lambda \geqslant \Lambda. \tag{5.7}$$

Desde que $\beta > 0$, e condições $(D1')$, segue que

$$o_n(1) = \langle J'_{\lambda,\beta}(v_n), v_n\rangle = \|v_n\|^2_\lambda + \beta \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, v_n) v_n dx$$

como $\beta > 0$ então

$$o_n(1) \geqslant \|v_n\|^2_\lambda - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, v_n) v_n dx$$

da condição $(D1')$, conseguimos da desigualdade (2.37) da f que o seguinte é satisfeito

$$o_n(1) \geqslant \|v_n\|^2_\lambda - |a|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} v_n^2 dx - |g_1|_{p^*/(p^*-q)} |v_n|^q_{p^*}$$

da desigualdade (4.8) e (4.2) conseguimos

$$o_n(1) \geqslant \|v_n\|^2_\lambda - \frac{|a|_\infty}{\lambda b} \|v_n\|^2_\lambda - |g_1|_{p^*/(p^*-q)} \Pi_\lambda^{q/p^*} \|v_n\|^q_\lambda + o_n(1). \tag{5.8}$$

Desde que $\Pi_\lambda \to 0$ quando $\lambda \to \infty$, segue de (5.7) e (5.8) que existe $\Lambda_0 \geqslant \Lambda$ tal que para $\lambda > \Lambda_0$,

$$v_n \to 0 \ \text{ fortemente em } \ X_\lambda$$

logo $u_n - u_0 \to 0$ fortemente em X_λ, o que equivale a dizer que $u_n \to u_0$ fortemente em X_λ. Logo $J_{\lambda,\beta}$ satisfaz a condição de Cerami. $\square$

Agora podemos mostrar o Teorema 1.2

Teorema 1.2. *Suponha que* $N \geqslant 3$, $2 < p < \min\{N, \frac{2N}{N-2}\}$ *e as condições* $(V1) - (V3)$ *são satisfeitas. Também assumimos que a função* f *satisfaz as condições* $(D1')$ *e* $(D2')$*. Então temos os seguintes resultados:*

(i) para $\beta > 0$, $\Lambda_0 > 0$ *tal que a equação* (E) *admite ao menos uma solução não trivial para todo* $\lambda \geqslant \Lambda_0$*;*

(ii) existe $\beta_0 > 0$, $\Lambda > 0$ *tal que a equação* (E) *admite ao menos duas soluções não triviais para todo* $\lambda \geqslant \Lambda_0$ *e* $0 < \beta < \beta_0$*.*

Demonstração do Teorema 1.2. (i) Fixemos $u \in X_\lambda$, $u \neq 0$, então

$$\frac{p(q-2)(p-q)^{(p-q)/(q-2)}}{2\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla tu|^p dx} \left(\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} g_0(x)|tu|^q dx}{q(p-2)} \right)^{(p-2)/(q-2)}$$

$$= \frac{p(q-2)(p-q)^{(p-q)/(q-2)}}{2\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx} \left(\frac{2\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} g_0(x)|u|^q dx}{q(p-2)} \right)^{(p-2)/(q-2)} \frac{t^{q(p-1)/(q-2)}}{t^p}. \tag{5.9}$$

Mas

$$t^{q(p-2)/(q-2)} t^{-p} = t^{(q(p-2)-p(q-2))/(q-2)} = t^{(pq-2q-pq+2p)/(q-2)} = t^{2(p-q)/(q-2)}.$$

Portanto

$$\frac{p(q-2)(p-q)^{(p-q)/(q-2)}}{2\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx} \left(\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} g_0(x)|u|^q dx}{q(p-2)} \right)^{(p-2)/(q-2)} t^{2(p-q)/(q-2)} \to \infty$$

quando $t \to \infty$. Lembrando que $2 < q < p$. Isso implica que para qualquer $\beta > 0$, existe $\phi_1 \in X_\lambda$, com $\|\phi_1\|_\lambda = 1$, $\phi_1 = t_* u$, t_* tal que

$$\beta < \frac{p(q-2)(p-q)^{(p-q)/(q-2)}}{2\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi_1|^p dx} \left(\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} g_0(x)|\phi_1|^q dx}{q(p-2)} \right)^{(p-2)/(q-2)}. \tag{5.10}$$

Então pegamos

$$\overline{A} = \frac{2\beta}{p} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi_1|^p dx \right) > 0 \ \text{ e } \ \overline{B} = \frac{2}{q} \left(\int_{\mathbb{R}^N} g_0(x)|\phi_1|^q dx \right) > 0.$$

Então segue da desigualdade (5.10) que

$$\overline{A} < (q-2)(p-q)^{(p-q)/(q-2)}\left(\frac{\overline{B}}{p-2}\right)^{(p-2)/(q-2)}. \tag{5.11}$$

Da condição $(D1')$ a desigualdade (2.36) é satisfeita, logo

$$J_{\lambda,\beta}(u) \leqslant \frac{1}{2}t^2\|u\|_\lambda^2 + t^p\frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p dx - t^q\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} g_0(x)|u|^q dx.$$

Considerando $\overline{A}$ e $\overline{B}$ definidos, podemos definir $\Phi_{\overline{A},\overline{B}}(t)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}\Phi_{\overline{A},\overline{B}}(t) &= t^2\|\phi_1\|_\lambda^2 + t^p\frac{2\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\phi_1|^p dx - t^q\frac{2}{q}\int_{\mathbb{R}^N} g_0(x)|\phi_1|^q dx\\ &= t^2\|\phi_1\|_\lambda^2 + t^p\overline{A} - t^q\overline{B}.\end{aligned}$$

Segue da desigualdade anterior e de (5.11) que $\overline{A}$, $\overline{B}$, e $\Phi_{\overline{A},\overline{B}}(t)$ satisfazem as condições do Lema 2.6, então existe $t_{\overline{B}} \in \mathbb{R}$ com $t_{\overline{B}} = \left[\dfrac{(q-2)\overline{B}}{(p-2)\overline{A}}\right]^{1/(p-q)}$ tal que $\Phi_{\overline{A},\overline{B}}(t_{\overline{B}}) < 0$, assim

$$J_{\lambda,\beta}(t_{\overline{B}}\phi_1) \leqslant \frac{1}{2}\Phi_{\overline{A},\overline{B}}(t_{\overline{B}}) < 0.$$

Logo $J_{\lambda,\beta}(t_{\overline{B}}\phi_1) < 0$. Do Lema 2.3, $J_{\lambda,\beta}$ é limitado inferiormente, então

$$\overline{K} \leqslant \inf_{u\in X_\lambda} J_{\lambda,\beta}(u) \leqslant J_{\lambda,\beta}(t_{\overline{B}}\phi_1) < 0.$$

Logo, pelo Princípio Variacional de Ekeland, encontrado no Apêndice A, Lema 6.4 e a Proposição 5.2, existe $u_0^- \in X_\lambda$ tal que $J_{\lambda,\beta}(u_0^-) = \inf_{u\in X_\lambda} J_{\lambda,\beta}(u) < 0$ e $J'_{\lambda,\beta}(u_0^-) = 0$, e então u_0^- é uma solução não trivial da equação (E).

(ii) Se $0 < \eta \leqslant c_\lambda \leqslant c_0(\Omega)$ para todo $\lambda \geqslant \Lambda$, pela Proposição 5.2, existe $\beta_* > 0$, $\Lambda_0 > \Lambda$ e $u_0^+ \in X_\lambda$ tal que $\forall\lambda > \Lambda$ e $0 < \beta < \beta_*$, temos

$$u_n \to u_0^+ \text{ fortemente em } X_\lambda.$$

Então $J'_{\lambda,\beta}(u_0^+) = 0$ e $J_{\lambda,\beta}(u_0^+) = c_\lambda$, o qual implica que u_0^+ é uma solução não trivial da equação (E). Note que a solução encontrada em (i) é diferente da solução encontrada acima pois $J_{\lambda,\beta}(u^-) < 0$ e $J_{\lambda,\beta}(u^+) > 0$, assim concluímos que existem duas soluções não triviais para (E). □

Capítulo 6

Demonstração do Teorema 1.4

Lema 6.1. *Suponha que as condições do Teorema 1.4 são satisfeitas. Seja $\{u_n\}$ uma sequência-C_c. Então $\{u_n\}$ é limitado em X_λ para todo $\lambda \geqslant \Lambda$.*

Demonstração. Para n grande o suficiente, e usando uma sequência-C_c no funcional $J_{\lambda\beta}$ e usando (2.44), (2.45) e uma sequência-C_c de Cerami, então temos

$$\begin{aligned} c+1 &\geqslant J_{\lambda,\beta}(u_n) - \frac{1}{p}\langle J'_{\lambda,\beta}(u_n), u_n\rangle \\ &= \frac{1}{2}\|u_n\|_\lambda^2 + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u_n)dx \\ &- \frac{1}{p}\left(\|u_n\|_\lambda^2 + \beta\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)u_n dx\right). \end{aligned}$$

Pela hipótese, $f(x,u) = h(x)|u|^{q-2}u$, logo

$$\begin{aligned} c+1 &\geqslant \frac{1}{2}\|u_n\|_\lambda^2 + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u_n|^q dx \\ &- \frac{1}{p}\left(\|u_n\|_\lambda^2 + \beta\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u_n|^q dx\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u_n\|_\lambda^2 + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u_n|^q dx. \end{aligned}$$

Da definição da função f, temos que (2.43) é satisfeita, então

$$c+1 \geqslant \frac{(p-2)}{2p}\|u_n\|_\lambda^2 - \frac{(p-q)|h^+|_{2/(2-q)}\Theta_2^{q/2}}{pq}\|u_n\|_\lambda^q. \tag{6.1}$$

Como $1 < q < 2 < p < 4$, então de (6.1) temos que $\{u_n\}$ é limitada em X_λ. $\square$

Proposição 6.2. *Suponha que as condições do Teorema 1.4 são satisfeitas. Então para cada*

$D > 0$, existe $\Lambda^* := \Lambda(D) \geqslant \Lambda$ tal que $J_{\lambda,\beta}$ satisfaz a condição $(C)_c$ em X_λ para todo $c < D$ e $\lambda > \Lambda^*$.

Demonstração. Seja $\{u_n\}$ uma sequência de Cerami com $c < D$. Pelo lema 6.1, $\{u_n\}$ é limitada em X_λ e existe $c_\lambda > 0$ tal que $\|u_n\|_\lambda < c_\lambda$. Então, existe uma subsequência $\{u_n\}$ e u_0 em X_λ tal que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u_0 \text{ fracamente em } X_\lambda, \\ u_n &\to u_0 \text{ fortemente em } L^r_{loc}(\mathbb{R}^N), \text{ para } 2 \leqslant r < 2_*, \\ u_n &\to u_0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N, \end{aligned}$$

com $J'_{\lambda,\beta}(u_0) = 0$. Seja $\phi(t) = t^q$ com $t > 0$. Então $\phi'(t) = qt^{q-1}$, logo pelo Teorema do Valor Médio

$$|u_n - u_0|^q - |u_n|^q = \phi(|u_n - u_0|) - \phi(|u_n|) = \phi'(\xi)(|u_n - u_0| - |u_n|). \tag{6.2}$$

Onde $\xi = (1-\theta)|u_n| + \theta|u_n - u_0| \leqslant |u_n| + |u_0|$ para algum $\theta \in [0,1]$. Então, usando a desigualdade de Young, encontrada no Apêndice B, Teorema 6.15, com $\varepsilon > 0$, então de (6.2) conseguimos

$$\begin{aligned} \big||u_n - u_0|^q - |u_n|^q\big| &= |\phi'(\xi)|||u_n - u_0| - |u_n|| \\ &\leqslant |\phi'(\xi)||u_n - u_0 - u_n| \\ &= |\phi'(\xi)||u_0| \\ &= |q\xi^{q-1}||u_0|. \end{aligned}$$

Como $\xi \leqslant |u_n| + |u_0|$, então

$$\big||u_n - u_0|^q - |u_n|^q\big| \leqslant q\,||u_n| + |u_0||^{q-1}\,|u_0|. \tag{6.3}$$

Do Lema 6.16, encontrado no Apêndice B, em (6.3), temos

$$\begin{aligned} \big||u_n - u_0|^q - |u_n|^q\big| &\leqslant q(|u_n|^{q-1} + |u_0|^{q-1})|u_0| \\ &= q|u_n|^{q-1}|u_0| + q|u_0|^q. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Considerando a desigualdade de Young, encontrado no Apêndice B, Teorema 6.15, com as potências q e $\frac{q}{q-1}$, obtemos

$$\big||u_n - u_0|^q - |u_n|^q\big| \leqslant \varepsilon|u_n|^{(q-1)\frac{q}{q-1}} + (q|u_0|)^q C(\varepsilon) + q|u_0|^q.$$

Tomando $C_1(\varepsilon) = q^q C(\varepsilon) + q$, temos

$$\big||u_n - u_0|^q - |u_n|^q\big| \leqslant \varepsilon |u_n|^q + C_1(\varepsilon)|u_0|^q.$$

Então

$$\big||u_n - u_0|^q - |u_n|^q\big| + |u_0|^q \leqslant \varepsilon |u_n|^q + C_1(\varepsilon)|u_0|^q + |u_0|^q.$$

Logo, usando a desigualdade triangular e agora definindo $C_2(\varepsilon) = C_1(\varepsilon) + 1$, conseguimos

$$\big||u_n - u_0|^q - |u_n|^q + |u_0|^q\big| \leqslant \big||u_n - u_0|^q - |u_n|^q\big| + |u_0|^q \leqslant \varepsilon |u_n|^q + C_2(\varepsilon)|u_0|^q.$$

Ou seja

$$\big||u_n - u_0|^q - |u_n|^q + |u_0|^q\big| \leqslant \varepsilon |u_n|^q + C_2(\varepsilon)|u_0|^q. \tag{6.5}$$

Como $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em X_λ e $u_n \to u_0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$, segue que

$$|u_0|_2 \leqslant \liminf_{n\to\infty} |u_n|_2 \leqslant C. \tag{6.6}$$

Usando (6.5) e (6.6), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)||(|u_n - u_0|^q - |u_n|^q + |u_0|^q)|dx \leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |h(x)||u_n|^q dx + C_2(\varepsilon) \int_{\mathbb{R}^N} |h(x)||u_0|^q dx.$$

Usando a desigualdade de Hölder, encontrada no Apêndice B, Teorema 6.13, com $\dfrac{2}{2-q}$ e $\dfrac{2}{q}$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)(|u_n - u_0|^q - |u_n|^q + |u_0|^q)|dx &\leqslant \varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)|^{\frac{2}{2-q}} dx\right)^{(2-q)/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q\frac{2}{q}} dx\right)^{q/2} \\ &+ C_2(\varepsilon) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)|^{\frac{2}{2-q}} dx\right)^{(2-q)/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{q\frac{2}{q}} dx\right)^{2/q} \\ &= \varepsilon |h|_{2/(2-q)} |u_n|_2^q + C_2(\varepsilon)|h|_{2/(2-q)}|u_0|_2^q.\end{aligned}$$

De (6.6), ficamos com

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)|\big||u_n - u_0|^q - |u_n|^q - |u_0|^q\big| dx \leqslant \varepsilon C |h|_{2/(2-q)} + C_2(\varepsilon)|h|_{2/(2-q)}|u_0|_2^q. \tag{6.7}$$

Usando (6.6) novamente, existe $\delta > 0$ e um conjunto E em $\mathbb{R}^N$ que satisfaz $|E| < \delta$ tal que

$$\int_E |u_0|^2 dx < \varepsilon. \tag{6.8}$$

Usando (6.8) em (6.7) conseguimos

$$\int_E |h(x)| \big| |u_n - u_0|^q - |u_n|^q + |u_0|^q \big| dx \leqslant \varepsilon C |h|_{2/(2-q)} + \varepsilon^q C_2(\varepsilon) |h|_{2/(2-q)} < C_\varepsilon.$$

Então $|h(x)(|u_n - u_0|^q - |u_n|^q + |u_0|^q)| = o_n(1)$ para quase todo ponto em $\mathbb{R}^N$. Segue do Teorema da Convergência de Vitali, encontrado no Apêndice B, Lema 6.18, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)(|u_n - u_0|^q - |u_n|^q + |u_0|^q)| dx = o_n(1),$$

O que implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u_n - u_0|^q dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u_n|^q dx - \int_{R^N} h(x)|u_0|^q dx + o_n(1). \tag{6.9}$$

Então, usando (4.1), (6.9) e o Lema de Brezis-Lieb, [2], concluímos que

$$J_{\lambda,\beta}(u_n - u_0) = J_{\lambda,\beta}(u_n) - J_{\lambda,\beta}(u_0) + o_n(1) \text{ e } J'_{\lambda,\beta}(u_n - u_0) = o_n(1). \tag{6.10}$$

Agora vamos provar que $u_n \to u_0$ fortemente em X_λ. Seja $v_n = u_n - u_0$, então $v_n \rightharpoonup 0$ em X_λ. Segue de (6.10) e do Lema 2.4, e da definição de $f(x,u) = h(x)|u|^{q-2}u$ que

$$\begin{aligned}
D - \overline{K} &\geqslant c - J_{\lambda,\beta}(u_0) \\
&\geqslant J_{\lambda,\beta}(u_n) - \frac{1}{p}\langle J'_{\lambda,\beta}(v_n), v_n\rangle + o_n(1) \\
&\geqslant \frac{1}{2}\|v_n\|_\lambda^2 + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dx - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|v_n|^q dx \\
&\quad - \frac{1}{p}\left(\|v_n\|_\lambda^2 + \beta \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^q dx \right) + o_n(1) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|v_n\|_\lambda^2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|v_n|^q dx + o_n(1) \\
&\geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|v_n\|_\lambda^2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)|h^+|_{2/2-q}\Theta_2^q \|v_n\|_\lambda^q + o_n(1).
\end{aligned}$$

Isso nos mostra que existe uma constante $\tilde{D} > 0$ tal que

$$\|v_n\|_\lambda \leqslant \tilde{D} + o_n(1) \quad \text{para todo} \quad \lambda > \Lambda. \tag{6.11}$$

Segue de (3.7) que

$$
\begin{aligned}
o_n(1) = \langle J'_{\lambda,\beta}(v_n), v_n\rangle &= \|v_n\|_\lambda^2 + \beta \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dx - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|v_n|^q dx \\
&\geqslant \|v_n\|_\lambda^2 + \beta\tilde{A}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta v_n|^2 dx\right)^{p/4}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2p/(4-p)} dx\right)^{(4-p)/4} - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|v_n|^q dx \\
&\geqslant \|v_n\|_\lambda^2 + \beta\tilde{A}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta v_n|^2 dx\right)^{p/4}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2p/(4-p)} dx\right)^{(4-p)/4} - \frac{1}{q}|h^+|_{2/(2-q)}|v_n|_2^q.
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

Usando (4.8) e (6.11) em (6.12) temos

$$
o_n(1) \geqslant \|v_n\|_\lambda^p + \beta\tilde{A}^p\tilde{D}^{p/2}\Pi_\lambda^{(4-p)/4}\|v_n\|_\lambda^{p/2} - \frac{1}{q}|h^+|_{2/(2-q)}\Pi_\lambda^{q/2}\|v_n\|_\lambda^q.
$$

Desde que $\Pi_\lambda \to 0$ quando $\lambda \to \infty$, e considerando (6.11) existe $\Lambda^* := \Lambda(D) \geqslant \Lambda$ tal que $\lambda > \Lambda^*$

$$
v_n \to 0 \quad \text{fortemente em} \quad X_\lambda.
$$

Logo, como $v_n = u_n - u_0$, $u_n \to u_0$ fortemente em X_λ. □

Teorema 6.3. *Suponha que $\beta < 0$ e as condições $(V1)-(V2)$ são satisfeitas. Seja $f(x,u) = h(x)|u|^{q-2}u$ com $1 < q < 2$ e $\Pi^* > 0$ seja como no Lema 3.7. Então existe $\Lambda_1 > \Lambda$ tal que para todo $\lambda > \Lambda_1$ e $h \in L^{2/(2-q)}(\mathbb{R}^N)$ com $0 < |h^+|_{2/(2-q)} < \Pi^*$, $J_{\lambda,\beta}$ tem um ponto crítico diferente de zero $u_\lambda^- \in X_\lambda$ tal que $J_{\lambda,\beta}(u_\lambda^-) < 0$.*

Demonstração. Se $h \in L^{2/(2-q)}$ com $|h^+|_{2/(2-q)} < \Pi^*$, podemos escolher $\phi \in X_\lambda$, $\phi \neq 0$ tal que

$$
\int_{R^N} h(x)|\phi|^q dx > 0.
$$

Logo, como $\beta < 0$, e de $f(x,u) = h(x)|u|^{q-2}u$, então

$$
\begin{aligned}
J_{\lambda,\beta}(t\phi) &= \frac{1}{2}\|t\phi\|_\lambda^2 + \frac{\beta}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla t\phi|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|t\phi|^q dx \\
&\leqslant \frac{t^2}{2}\|\phi\|_\lambda^2 - t^q\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|\phi|^q dx.
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

Desde que $q < 2$ temos que para $t > 0$ pequeno o suficiente $J_{\lambda,\beta}(t\phi) < 0$. Além disso, pelo Lema 3.7, existe $\tilde{R} \leqslant p$ tal que

$$
J_{\lambda,\beta}(u) \geqslant 0 \quad \text{para todo } u \text{ com } \|u\|_\lambda = \tilde{R}. \tag{6.14}
$$

Então. usando (6.13) e (6.14), temos

$$\theta_\lambda := \inf\{J_{\lambda,\beta}(u) : u \in \overline{B}_{\tilde{R}}\} < 0. \tag{6.15}$$

Pelo princípio Variacional de Ekeland, encontrado no Apêndice B, Teorema 6.4, existe uma subsequência minimizante $\{u_n\} \subset B_{\tilde{R}}$ tal que

$$J_{\lambda,\beta}(u_n) \to \theta_\lambda \ \text{ e } \ J'_{\lambda,\beta}(u_n) \to 0 \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Pela Proposição 6.2, existe $\Lambda_1 > \Lambda$ e uma subsequência $\{u_n\}$ e $u_\lambda^- \in B_{\tilde{R}}$ tal que $\forall \lambda > \Lambda_1$ tenhamos

$$u_n \to u_\lambda^- \ \text{ fortemente em } \ X_\lambda,$$

o qual implica que $J'_{\lambda,\beta}(u_\lambda^-) = 0$ e $J_{\lambda,\beta}(u_\lambda^-) = \theta_\lambda < 0$. Isto mostra que $J_{\lambda,\beta}$ tem um ponto crítico não nulo u_λ^- em X_λ. □

Agora podemos demonstrar o Teorema 1.4 usando o Lema 6.1, 6.2 e o Teorema 6.3.

Teorema 1.4. *Suponha que $N \geqslant 1$, $2 < p < 4$ e as condições $(V1)-(V2)$ são satisfeitas. Se $f(x,u) = h(x)|u|^{q-2}u$ com $h \in L^{2/(2-q)}(\mathbb{R}^N)$ e $1 < q < 2$, então existe Λ^*,$\Pi^* > 0$ tal que para $0 < |h^+|_{2/(2-1)} < \Pi^*$, a equação (E) admite ao menos duas soluções não triviais para todo $\lambda \geqslant \Lambda^*$ e $\beta < 0$.*

Demonstração do Teorema 1.4. Se $0 < \eta \leqslant c_\lambda \leqslant c_0(\Omega)$ para todo $\lambda \geqslant \Lambda$, segue da proposição 6.2 que existe $\Lambda_2 > \Lambda$ e $u_\lambda^+ \in X_\lambda$ tal que para todo $\lambda > \Lambda_2$,

$$u_n \to u_\lambda^+ \ \text{ fortemente em } \ X_\lambda,$$

e

$$J'_{\lambda,\beta}(u_\lambda^+) = 0 \ \text{ e } \ J_{\lambda,\beta}(u_\lambda^+) = c_\lambda.$$

Por outro lado, pelo Teorema 6.3, existe $\Lambda_1 > \Lambda$ e $u_\lambda^- \in X_\lambda$ tal que para todo $\lambda > \Lambda_1$, é satisfeito que $J'_{\lambda,\beta}(u_\lambda^-) = 0$ e $J_{\lambda,\beta}(u_\lambda^-) = \theta_\lambda < 0$. Seja $\Lambda^* = \max\{\Lambda_1, \Lambda_2\}$. Para $0 < |h^+|_{2/(2-q)} < \Pi^*$, $J_{\lambda,\beta}$ tem dois pontos críticos diferentes u_λ^-, $u_\lambda^+ \in X_\lambda$ para $\lambda > \Lambda^*$. Consequentemente, o problema (E) admite ao menos duas soluções não triviais $u_\lambda^-, u_\lambda^+ \in X_\lambda$ para $0 < |h^+|_{2/(2-q)} < \Pi^*$ e $\lambda > \Lambda^*$. □

Apêndice A

Lema 6.4 (Princípio Variacional de Ekeland)**.** *Sejam* (X, d) *um espaço métrico completo e* $\Phi : X \to (-\infty, +\infty]$ *um funcional semicontínuo inferiormente. Suponha que* Φ *seja limitado inferiormente, ou seja,* $\inf_{u \in X} \Phi(u) > -\infty$*. Então dado* $\varepsilon > 0$ *e* $v_0 \in X$ *tais que*

$$\Phi(v_0) \leqslant \inf_{u \in X} \Phi(u) + \varepsilon,$$

existe $u_\varepsilon \in X$*, tal que*

$$\begin{aligned} &(a) \quad \Phi(u_\varepsilon) \leqslant \Phi(v_0) \leqslant \inf_{u \in X} \Phi(u) + \varepsilon; \\ &(b) \quad d(v_0, u_\varepsilon) \leqslant \sqrt{\varepsilon}; \\ &(c) \quad \textit{Para cada } w \in X, w \neq u_\varepsilon, \textit{ vale que} \end{aligned}$$

$$\Phi(u_\varepsilon) < \Phi(w) + \sqrt{\varepsilon} d(u_\varepsilon, w).$$

Demonstração. Na demonstração vamos considerar $\lambda = 1$. Para o caso geral é suficiente considerar a métrica λd, visto que se d é uma métrica, então λd também será. Considere a relação em X definida da seguinte forma:

$$w \prec v \Longleftrightarrow \Phi(w) \leq \Phi(v) - \varepsilon d(w, v).$$

Agora provaremos que $\prec$ é uma relação de ordem parcial em X, ou seja, $\prec$ é reflexiva, anti-simétrica e transitiva. De fato;

(i) $\prec$ é reflexiva.

Seja $w \in X$, então,

$$\Phi(w) \leq \Phi(w) - \varepsilon d(w, w) \Longrightarrow \Phi(w) = \Phi(w) \Longleftrightarrow w \prec w.$$

Provando que $\prec$ é reflexiva.

(ii) $\prec$ é anti-simétrica.

Sejam $w, v \in X$, tais que $w \prec v$ e $v \prec w$, então

$$\Phi(w) \leq \Phi(v) - \varepsilon d(w, v)$$

e

$$\Phi(v) \leq \Phi(w) - \varepsilon d(v, w).$$

Segue das duas expressões anteriores que

$$2\varepsilon d(v, w) \leq 0 \Longrightarrow d(v, w) = 0 \Longleftrightarrow w = v.$$

Pravando que $\prec$ é anti-simétrica.

(iii) $\prec$ é transitiva.

Sejam w, v e $u \in X$ tais que $w \prec v$ e $v \prec u$, então

$$\Phi(w) \leq \Phi(v) - \varepsilon d(w, v)$$

e

$$\Phi(v) \leq \Phi(u) - \varepsilon d(v, u).$$

De onde concluimos que

$$\begin{aligned} \Phi(w) \leq \; & \Phi(u) \quad -\varepsilon d(v, u) - \varepsilon d(w, v) \\ \leq \; & \Phi(u) \quad -\varepsilon d(u, w) \Longleftrightarrow w \prec u. \end{aligned}$$

O que prova que $\prec$ é transitiva. Portanto de $(i), (ii)$ e (iii) conclui-se que $\prec$ é uma relação de ordem parcial em X.

Definamos agora uma sequência (A_n) de subconjuntos de X como se segue; comecemos com

$$u_0 = u.$$

E seja:
$A_0 = \{w \in X : w \prec u_0\}$, com $u_1 \in A_0$ tal que

$$\Phi(u_1) \leq \inf_{A_0} \Phi + \frac{1}{1}.$$

$A_1 = \{w \in X : w \prec u_1\}$, com $u_2 \in A_1$ tal que

$$\Phi(u_2) \leq \inf_{A_1} \Phi + \frac{1}{2}.$$

$A_2 = \{w \in X : w \prec u_2\}$, com $u_3 \in A_2$ tal que

$$\Phi(u_3) \leq \inf_{A_2} \Phi + \frac{1}{3}.$$

Prosseguindo assim, teremos indutivamente
$A_n = \{w \in X : w \prec u_n\}$, com $u_{n+1} \in A_n$ tal que

$$\Phi(u_{n+1}) \leq \inf_{A_n} \Phi + \frac{1}{n+1}.$$

Afirmamos que $A_n \supset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato.

Seja w um elemento arbitrário em A_{n+1}, então, $w \prec u_{n+1}$ e desde que $u_{n+1} \in A_n$ segue que $u_{n+1} \prec u_n$ e por transitividade concluimos que $w \prec u_n$ e assim $w \in A_n$. O que prova a afirmação.
Agora provaremos que A_n é fechado.

Seja $\{w_k\} \subset A_n$ tal que $w_k \longrightarrow w \in X$. Segue que

$$w_k \prec u_n \Longleftrightarrow \Phi(w_k) \leq \Phi(u_n) - \varepsilon d(w_k, u_n).$$

Como Φ é semicontínua inferiormente, então,

$$\liminf_{k \to +\infty} \Phi(w_k) \geqslant \Phi(w).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Phi(w) &\leq \liminf_{k\to+\infty}\,[\Phi(u_n)-\varepsilon d(w_k,u_n)]\\ &\leq \liminf_{k\to+\infty}\Phi(u_n)-\liminf_{k\to+\infty}\varepsilon d(w_k,u_n)\\ &\leq \Phi(u_n)-\varepsilon d(w,u_n).\end{aligned}$$

Esta última desigualdade nos mostra que

$$w \prec u_n \Longleftrightarrow w \in A_n.$$

Portanto A_n é fechado.

Notando que $diamA_n = \sup\limits_{w,v\in A_n} d(w,v)$, vamos mostrar que $diamA_n \longrightarrow 0$.

Seja $w \in A_{n+1}$ então, $w \prec u_{n+1} \prec u_n$ e portanto,

$$\varepsilon d(w,u_{n+1}) \leq \Phi(u_{n+1}) - \Phi(w)$$

e desde que

$$\Phi(u_{n+1}) \leq \inf_{A_n}\Phi + \frac{1}{n+1}$$

e

$$-\Phi(w) \leq -\inf_{A_n}\Phi,$$

então,

$$\varepsilon d(w,u_{n+1}) \leq \inf_{A_n}\Phi + \frac{1}{n+1} - \inf_{A_n}\Phi = \frac{1}{n+1},$$

ou seja,

$$d(w,u_{n+1}) \leq \frac{1}{\varepsilon(n+1)}.$$

Agora sejam $w, v \in A_{n+1}$, então,

$$d(w,v) \leq d(w,u_{n+1}) + d(u_{n+1},v) \leq \frac{2}{\varepsilon(n+1)},$$

segue que

$$\sup_{w,v\in A_{n+1}} d(w,v) \leq \frac{2}{\varepsilon(n+1)}$$

e dai

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \sup_{w,v\in A_{n+1}} d(w,v) \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\varepsilon(n+1)}.$$

De onde concluimos que

$$diam A_{n+1} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Afirmamos que o único ponto de interseção dos A_n satisfaz $(a), (b)$ e (c). Realmente. Seja $\bigcap_n A_n = \{v_\varepsilon\}$. Assim, $v_\varepsilon \in A_0$, logo pela definição de A_0, tem-se que

$$v_\varepsilon \prec u_0 = u \Longleftrightarrow \Phi(v_\varepsilon) \leq \Phi(u) - \varepsilon d(v_\varepsilon, u)$$

e portanto

$$\Phi(v_\varepsilon) \leq \Phi(u),$$

provando (a). Por outro lado,

$$\begin{aligned} d(u, v_\varepsilon) &\leq \frac{1}{\varepsilon}(\Phi(u) - \Phi(v_\varepsilon)) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon}(\inf_X \Phi + \varepsilon - \inf_X \Phi) = 1, \end{aligned}$$

provando (b).

Além disso, se $w \neq u_\varepsilon$, tem-se que w não se relaciona com u_ε, pois caso contrário, teríamos $w \in \bigcap_n A_n$. Logo

$$\Phi(w) > \Phi(v_\varepsilon) - \varepsilon d(v_\varepsilon, w),$$

provando (c). □

Definição 6.5. *Seja X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$, um funcional de classe C^1. Suponha que existam $c \in \mathbb{R}$ e $\{u_n\} \subset X$ tais que*

$$I(u_n) \to c \quad e \quad \|I'(u_n)\|_{H^{-1}}(1 + \|u_n\|) \to 0,$$

então dizemos que $\{u_n\}$ é uma sequência de Cerami no nível c para I, denotaremos por sequência-C_c de I quando $\{u_n\}$ for uma sequência de Cerami de I no nível c. O funcional I satisfaz a condição de Cerami no nível c se toda sequência-C_c admitir uma subsequência convergente no espaço X, denotaremos essa condição por condição-C_c.

Lema 6.6 (Teorema do Passo da Montanha)**.** *Seja E um espaço de Banach real e E' seu espaço dual, e suponhamos que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz*

$$\max\{I(0), I(e)\} \leqslant \mu < \eta \leqslant \inf_{\|u\|=\rho} I(u),$$

para algum $\mu < \eta$, $\rho > 0$, $e \in E$ com $\|e\| > \rho$. Seja $c \geq \eta$ caracterizado por

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leqslant \tau \leqslant 1} I(\gamma(\tau)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$ é o conjunto dos caminhos continuos ligando 0 a e, então existe uma sequência $\{u_n\} \subset E$ tal que

$$I(u_n) \to c \geqslant \eta \quad e \quad (1 + \|u_n\|)\|I'(u_n)\|_{E'} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Demonstração. Considere Γ munido com a seguinte norma

$$\|\gamma\|_\Gamma = \max_{t \in [0,1]} \|\gamma(t)\|,$$

ou seja, $\Gamma \subset C([0,1], E)$ pode ser visto como um subespaço de $(C([0,1], E), \|\cdot\|_\infty)$. Assim, como $C([0,1], E)$ é completo, basta mostrar que Γ é fechado para garantir que $(\Gamma, \|\cdot\|_\Gamma)$ é um espaço de Banach. Dessa forma, dada $(\gamma_n) \subset \Gamma$ uma sequência convergindo para γ em $(C[0,1], X)$, quando $n \to \infty$, note que $\gamma_n(0) = 0$ e $\gamma_n(1) = e$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo como $\|\gamma_n - \gamma\|_\infty \to 0$, quando $n \to \infty$, então $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(1) = e$, assim $\gamma \in \Gamma$, e segue que Γ é fechado, portanto $(\Gamma, \|\cdot\|_\Gamma)$ é um espaço de Banach. Agora defina o funcional $\Psi : \Gamma \to \mathbb{R}$, dado

$$\Psi(\gamma) = \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)). \tag{6.16}$$

Para cada $t \in [0,1]$ fixado, considere $E_t = \{\gamma(t); \gamma \in \Gamma\} \subset E$. Como por hipótese $I : E \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, então é semicontínuo inferiormente, e denotado por I_t a restrição $I|_{E_t}$, segue que $I_t : E_t \to \mathbb{R}$ é semicontínuo inferiormente. Mas observe que $\Psi = \max_{t \in [0,1]} I_t$, e como I_t é semicontínuo inferiormente, para todo $t \in [0,1]$, segue que Ψ é semicontínuo inferiormente.

Por outro lado, dado $\gamma \in \Gamma$, como I satisfaz a geometria do Passo da Montanha, e vale $\gamma(0) = 0$, $\|\gamma(1)\| > \rho$ e $\gamma \in C([0,1], E)$, então existe $t_0 \in (0,1)$ com $\|\gamma(t_0)\| = \rho$, e pelo Lema 6.4, segue que

$$\Psi(\gamma) \geqslant I(\gamma(t_0)) \geqslant \alpha > 0,$$

assim Ψ é limitado inferiormente. Dado $n \in \mathbb{N}$, e $\varepsilon = \dfrac{1}{n^2}$, existe $\gamma \in \Gamma$, tal que

$$\Psi(\gamma_n) \leqslant \inf_{\gamma \in \Gamma} \Psi(\gamma) + \frac{1}{n^2} = c + \frac{1}{n^2}, \tag{6.17}$$

e

$$\Psi(\gamma) \geqslant \Psi(\gamma_n) - \frac{1}{n}\delta_\Gamma(\gamma, \gamma_n), \forall \gamma \in \Gamma. \tag{6.18}$$

Portanto definindo

$$M_n = \{t \in [0,1]; I(\gamma_n(t)) = \max_{s \in [0,1]} I(\gamma_n(s)) = \Psi(\gamma_n)\},$$

e tomando $t_n \in M_n$, (6.17) segue que

$$c \leqslant I(\gamma_n(t_n)) \leqslant c + \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N},$$

isto é

$$\lim_{n \to \infty} I(\gamma_n(t_n)) = c. \tag{6.19}$$

Além disso, fixado $n \in \mathbb{N}$, considere que $\gamma \in C([0,1], E)$ arbitrário, tal que $\|\gamma\|_\Gamma = \|\gamma(t_n)\|$, e $\gamma(0) = \gamma(1) = 0$, então fazendo $\tilde{\gamma}(s) = \gamma_n(s) + t\gamma(s)$, com $t > 0$, como $\gamma_n \in \Gamma$, segue que $\tilde{\gamma} \in \Gamma$, e para t suficiente pequeno, pela continuidade vale que $\max_{s \in [0,1]} I(\tilde{\gamma}(s)) = I(\tilde{\gamma}(t_n)) = I(\gamma_n(t_n) + t\gamma(t_n))$, assim por (6.18) segue que

$$I(\gamma_n(t_n) + t\gamma(t_n)) - I(\gamma_n(t_n)) \geqslant -\frac{1}{n}\delta_\Gamma(\gamma_n + t\gamma, \gamma_n).$$

Com isso, dividindo ambos os lados da desigualdade acima por t, e relembrando a definição da distância geodésica δ_γ, e a definição de $\|\cdot\|_\Gamma$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\left[I(\gamma_n(t_n)) + t\gamma(t_n) - I(\gamma_n(t_n))\right] &\geqslant -\frac{1}{nt}\delta_\Gamma(\gamma_n + t\gamma, \gamma_n)\\ &\geqslant -\frac{1}{nt}\int_0^t \frac{\|\gamma\|_\Gamma}{1+\|\gamma_n + s\gamma\|_\Gamma}ds\\ &\geqslant -\frac{1}{nt}\int_0^t \frac{\|\gamma(t_n)\|}{1+\|\gamma_n(t_n) + s\gamma(t_n)\|}ds\\ &\geqslant -\frac{1}{nt}\|\gamma(t_n)\|\int_0^t \frac{ds}{1+\|\gamma_n(t_n) + s\gamma(t_n)\|}.\end{aligned}$$

E como I é de classe C^1, aplicando o limite com $t \to 0$, obtemos que

$$I'(\gamma_n(t_n))\gamma(t_n) \geqslant -\frac{1}{n}(1+\|\gamma_n(t_n)\|)^{-1}\|\gamma(t_n)\|.$$

Agora como γ é arbitrário, trocando γ por $-\gamma$, obtemos

$$I'(\gamma_n(t_n)\gamma(t_n)) \leqslant \frac{1}{n}\left(1+\|\gamma_n(t_n)\|\right)^{-1}\|\gamma(t_n)\|,$$

e assim

$$\frac{|I'(\gamma_n(t_n))\gamma(t_n)|}{\|\gamma(t)n)\|} \leqslant \frac{1}{n}\left(1+\|\gamma_n(t_n)\|\right)^{-1},$$

o que implica em

$$0 \leqslant \left(1+\|\gamma_n(t_n)\|\right)\|I'(\gamma_n(t_n))\|_{E'} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Como $n \in \mathbb{N}$, fixado acima, é qualquer, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}(1+\|\gamma_n(t_n)\|)\|I'(\gamma_n(t_n))\|_{E'} = 0. \tag{6.20}$$

Por fim, considerando $(u_n) \subset E$, tal que $u_n = \gamma_n(t_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, por (6.19) e (6.20) segue que

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = c \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty}(1+\|u_n\|)\|I'(u_n)\|_{E'} = 0$$

Portanto, obtemos uma sequência de Cerami para I no nível do Passo da Montanha. $\square$

Apêndice B

Neste Apêndice será apresentados alguns resultados fundamentais e algumas definições importantes para o desenvolvimento dos resultados dessa dissertação

Definição 6.7. *Sejam E e F dois espaços vetoriais normados com $E \subset F$. Dizemos que E está imerso continuamente em F se existe $c > 0$ tal que:*

$$\|e\|_F \leqslant c\|e\|_E, \quad \forall\ e \in E.$$

Quando isso acontece, escrevemos $E \hookrightarrow F$.

Definição 6.8. *O espaço $H^2(\Omega)$ é munido com a seguinte norma:*

$$\|u\|_{H^2}^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\Delta u|^2 dx + \int_\Omega u^2 dx,$$

onde $u \in H^2(\Omega)$.

A norma no espaço $L^\infty(\Omega)$ é definido como a seguir

$$|u|_\infty = \inf\{C : |u(x)| \leqslant C \ ,\ q.t.p \ em \ \Omega\},$$

para $u \in L^\infty(\Omega)$.

Teorema 6.9. *Seja $m \geqslant 1$ um inteiro e $p \in [1, +\infty)$. Temos*

$$\begin{aligned}
&W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N), \quad onde\ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N} && se\ \frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0,\\
&W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \qquad \forall q \in [p, +\infty) && se\ \frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0,\\
&W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N) && se\ \frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0,
\end{aligned}$$

e todas estas inclusões são imersões continuas. Além disso, se $m - (N/p) > 0$ não é um *inteiro, tomamos*

$$k = [m - (N/p)] \quad e \quad \theta = m - (N/p) - k \ (0 < \theta < 1).$$

Temos, para todo $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$,

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}, \forall\ \alpha \quad com \quad |\alpha| \leqslant k$$

e

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leqslant C\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}|x-y|^\theta \ q.t.p.\ x, y \in \mathbb{R}^N,\ \forall\ \alpha \quad com \quad |\alpha| = k.$$

Em particular, $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset C^k(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Veja [3]. □

Corolário 6.10. *Se* $N > 4$ *segue do Teorema 6.9 que*

$$H^2(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2_*}(\mathbb{R}^N)$$

isto é, existe $C > 0$ *tal que*

$$\|u\|_{L^{2_*}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^N)}, \forall\ u \in H^2(\mathbb{R}^N). \tag{6.21}$$

Teorema 6.11 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg)**.** *Seja* $1 \leqslant q \leqslant \infty$ *e* $j, k \in \mathbb{N}$, $j < k$ *e também*

$$\begin{cases} r = 1, \\ \dfrac{j}{k} \leqslant \theta \leqslant 1, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} 1 < r < \infty, \\ k - j - \dfrac{n}{r} = 0, 1, 2, \ldots, \\ \dfrac{j}{k} \leqslant \theta < 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \theta\left(\frac{1}{r} - \frac{k}{n}\right) + \frac{1-\theta}{q},$$

então existe uma constante $C > 0$ *independente de* u *tal que*

$$\|\nabla^j u\|_p \leqslant C\|\nabla^k u\|_r^\theta \|u\|_q^{1-\theta} \quad , \forall u \in L^q(\mathbb{R}^n) \cap W^{k,r}(\mathbb{R}^n). \tag{6.22}$$

Demonstração. Veja [12]. □

Teorema 6.12 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev). *Se* $1 \leqslant p < N$*, então existe* $C = C(N,p) > 0$*, tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

para todo $u \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$*.*

Demonstração. Veja [3]. □

Teorema 6.13 (Desigualdade de Hölder). *Seja* $1 \leqslant p$*,* $u \in L^p(\Omega)$ $v \in L^q(\Omega)$*, o qual* $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$*, então o produto* $u.v \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leqslant \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}. \tag{6.23}$$

Demonstração. Veja [3] □

Teorema 6.14 (Desigualdade de Young). *Sejam* $a,b > 0$ *e* $1 < p,q < \infty$ *tais que* $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$*. Então*

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{6.24}$$

Demonstração. Veja [3]. □

Teorema 6.15 (Desigualdade de Young com ε). *Sejam* $a,b > 0$ *e* $p,q > 1$ *e* $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-q/p}q^{-1}$*, temos*

$$ab < \varepsilon a^p + C(\varepsilon)b^q \tag{6.25}$$

Demonstração. Basta considerar (6.24) com $ab = \left((\varepsilon p)^{1/p}a\right)\left(\dfrac{b}{(\varepsilon p)^{1/p}}\right)$. □

Lema 6.16. *Se* $0 < r \leqslant 1$ *e* $a,b \geqslant 0$*, então*

$$(a+b)^r \leqslant a^r + b^r$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}(a+b)^r &= (a+b)^{1+r-1} = (a+b)(a+b)^{r-1} = a(a+b)^{r-1} + b(a+b)^{r-1}\\ &= a\left(\frac{1}{a+b}\right)^{1-r} + b\left(\frac{1}{a+b}\right)^{1-r}\\ &\leqslant a\left(\frac{1}{a}\right)^{1-r} + b\left(\frac{1}{b}\right)^{1-r} = a^r + b^r.\end{aligned}$$

□

Lema 6.17. *Se* $1 \leqslant r < \infty$ *e* $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, *então*

$$(a+b)^r \leqslant 2^{r-1}(a^r + b^r).$$

Demonstração. Considere $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $\phi(t) = t^r$. Temos que $\phi''(t) = r(r-1)t^{r-2} \geqslant 0$ para $t \geqslant 0$, o que nos garante que ϕ é convexa. Consequentemente,

$$\phi(at + (1-t)b) \leqslant t\phi(a) + (1-t)\phi(b), \quad a, b \in \mathbb{R}, \forall\, t \in [0,1].$$

Como $\phi(a+b) = \phi(\frac{1}{2}(2a) + \frac{1}{2}(2b))$ decorre da convexidade de ϕ que

$$\phi(a+b) \leqslant \frac{1}{2}\phi(2a) + \frac{1}{2}\phi(2b).$$

Então, com isso temos que

$$(a+b)^r \leqslant \frac{1}{2}(2a)^r + \frac{1}{2}(2b)^r = 2^{r-1}(a^r + b^r).$$

□

Lema 6.18 (Convergência de Vitali)**.** *Sejam as funções* $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *integráveis, tais que*

$$f_n \to f \quad q.t.p \quad x \in \Omega.$$

Então f *é integrável e* $\displaystyle\int_\Omega f_n dx \to \int_\Omega f dx$ *se, e somente se* $\left(\displaystyle\int_\Omega f_n dx\right)$ *é uniformemente absolutamente contínua, ou seja, dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$, *tal que*

$$|A| < \delta \Longrightarrow \left|\int_A f_n\right| < \varepsilon, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Veja [3]. □

Referências Bibliográficas

[1] Y. An, R. Liu, *Existence of nontrivial solutions of an asymptotically linear fourth-order elliptic equation*, Nonlinear Anal. 68 (2008) 3325-3331.

[2] H. Brezis, E. Lieb, *A relation between point convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983) 486-490.

[3] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2011.

[4] I. Chueshov and I. Lasiecka, *On Global Attractor for 2D Kirchhoff-Boussinesq Model with Supercritical Nonlinearity*, Communications in Partial Differential Equations, 36: 67-99, 2011.

[5] I. Chueshov and I. Lasiecka, *Existence, uniqueness of weak solutions and global attractors for a class of nonlinear 2D Kirchhoff–Boussinesq models* . Discr. Cont. Dyn. Sys. 15 : 777 -809 , 2006.

[6] I. Ekeland, *On the variational principle*. J. Math. Anal. Appl. 47, 1974. 324-353.

[7] N. Ghoussoub, C. Yuan, *Multiple solutions for quasi-linear PDEs involving the critical Sobolev and Hardy exponents,*

Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000) 5703-5743.

[8] J. Lagnese, Boundary Stabilization of Thin Plates. SIAM , 1989.

[9] J. Lagnese and J. L. Lions, Modeling, Analysis and Control of Thin Plates , Collection RMA. Paris: Masson, 1988.

[10] A.C. Lazer, P.J. McKenna, *Global bifurcation and a theorem of Tarantello*, J. Math. Anal. Appl. 181 (1994) 648-655.

[11] J. Liu, S. Chen, X. Wu, *Existence and multiplicity of solutions for a class of fourth-order elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$, J. Math. Anal. Appl. 395 (2012) 608-615.

[12] L. Nirenberg, *On elliptic partial differential equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), 13:115-162, 1959.

[13] M. Soares, *Um problema Elíptico no* $\mathbb{R}^N$ *Assintoticamernte Linear e Autônomo no Infinito*, Dissertação de Mestrado em Matemática, UnB, (2016).

[14] J. Sun, T.F. Wu, *On the nonlinear Schrödinger-Poisson systems with sign-changing potential*, Z. Angew. Math. Phys. 66 (2015) 1649-1669.

[15] J. Sun, J. Chu, T.F. Wu, *Existence and multiplicity of nontrivial solutions for some biharmonic equation with p-Laplacian*, J. Differential Equations, 262 (2017), 945-977.

[16] J. Wang, Y. Zhang, *A biharmonic eigenvalue problem and its application*, Acta Math. Sci. Engl. Ed. 32 (2012) 1213-1225.