



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional



Análise de Fenômenos Periódicos como Aplicação da Trigonometria Visando Motivar Seu Aprendizado na Educação Básica

Valdir Silva dos Santos

Brasília

2021

Valdir Silva dos Santos

Análise de Fenômenos Periódicos como Aplicação da Trigonometria Visando Motivar Seu Aprendizado na Educação Básica

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do “Programa” de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de Mestre.

Universidade de Brasília - UnB
Departamento de Matemática - MAT
PROFMAT - SBM

Orientador: Prof. Dr. Vinícius de Carvalho Rispoli

Brasília
2021

Posição vertical

Santos, Valdir Silva dos
ss237a

Análise de Fenômenos Periódicos como Aplicação da Trigonometria Visando Motivar Seu Aprendizado na Educação Básica/ Valdir Silva dos Santos; orientador Prof. Dr. Vinícius de Carvalho Rispoli– Brasília, 2021-.
155 p.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade de Brasília, 2021.

1. Aplicação da Trigonometria. 2. Trigonometria hiperbólica. 3. Fenômenos periódicos. 4. Série de Fourier. 5. Catenária. I. Rispoli, Vinícius de Carvalho, Orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Análise de Fenômenos Periódicos como Aplicação da Trigonometria Visando Motivar Seu Aprendizado na Educação Básica

por

Valdir Silva dos Santos

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do “Programa” de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 03 de setembro de 2021

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Vinícius de Carvalho Rispoli- MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Ronni Geraldo de Amorim - FGA/UnB (Membro)

Prof. Dr. Rui Seimetz - MAT/UnB (Membro)

A Deus! A minha Família! Aos meus alunos! Ao meu pai Manoel Severino dos Santos; por sempre acreditar em mim e estar presente nos bons e maus momentos. E em especial a minha adorada mãe, Neusa Silva dos Santos por educar pelo exemplo; por sua dedicação ao bem comum familiar, por me ensinar a valorizar a metade do copo que está cheia e lutar para seu conteúdo ser completado, por tornar melhor a vida de todos a sua volta e por dizer com um simples olhar tudo que é essencial para mim.

Agradecimentos

O nobre do agradecimento é o reconhecimento da importância daqueles aos quais agradecemos; ser grato significa dizer: "**sem você eu não conseguiria!**"; "**essa vitória também é sua!**". A gratidão portanto, devolve àqueles iluminados a energia que nos fez crescer; a centelha que nos fez vencer a inércia e nos possibilitou desenvolver nossa potencialidade. Quero, com toda força de minha existência agradecer:

- A Deus, nosso criador, pela minha existência e senciência, pela vida que tenho, pelas oportunidades; por minha saúde e pela ajuda nos momentos cruciais.
- Aos meus pais: **Manoel Severino dos Santos** e **Neusa Silva dos Santos**, pela dedicação e sacrifício que fizeram para que eu tivesse a oportunidade de estudar. Simplesmente seria impossível romper os rígidos limites sociais impostos, sem aquele impulso inicial que os senhores me deram. Sei do quanto tiveram que abdicar para termos acesso a educação. Agradeço por serem modelo de dedicação e honestidade e por me indicarem, com exemplos, o valor da conquista pela meritocracia. A palavra ensina, o exemplo educa! Muitíssimo obrigado queridos e amados pais.
- A minha esposa e companheira **Josane Maria Martins Natal**. Mulher forte, dedicada e decidida; figura ímpar com a qual posso sempre contar; sua capacidade de transformar para melhor a minha vida é, sem sombra de dúvidas, sua melhor qualidade. **Josane Maria** tem a capacidade de me motivar a ser sempre uma pessoa melhor; com e por você procuro melhorar como filho, pai, avô, marido, professor e como pessoa. Por tudo isso; muito obrigado Esposa, Mulher e Companheira.
- Ao meu filho **Rafael Santos**; as minhas filhas: **Airina Santos**, **Luiza Santos**, **Thuany Santos** e **Maria Eduarda Santos**; aos meus netos: **Davi** e **Miguel** e a minha neta **Maria Carolina**. Sou um privilegiado por ter Deus me abençoado com tantas preciosidades; minha caleidoscópica e excêntrica prole, sempre me incentivou a ser uma pessoa esforçada e dedicada, vocês são o que tenho de melhor. Meus cinco filhos únicos e essa trinca de netos; são as partes vitais da minha existência; a força motivadora para sempre buscar perseverar e melhorar. Essa conquista também é por e para vocês.
- Ao Professor Doutor **Vinicius de Carvalho Rispoli**, meu orientador; por ter aceitado trabalhar comigo, por me orientar de maneira sabia e autônoma, por acreditar e confiar no meu potencial; pela paciência e pela qualidade do tempo dedicado ao meu aprendizado.

- Aos Professores Doutores **Rui Seimetz** e **Ronni Geraldo Gomes de Amorim** pela participação na banca de avaliação, pelas valiosas observações e orientações, legitimando esse trabalho com seus conhecimentos e prestígios acadêmicos.
- A minha primeira professora "**Dona Socorro**"; por ter me conduzido, com maestria, no meu árido caminho da alfabetização; me fazendo vencer a dislexia graças a sua natural e intuitiva capacidade de alfabetizar e ao seu profissionalismo. Para senhora mestra, meu eterno muito obrigado.
- Aos Diretores, Coordenadores e colegas professores do **Centro de Ensino Médio Urso Branco** (CEMUB), da Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF). Pelo incentivo, apoio e ensinamentos nesses últimos 15 anos de excelente convivência. Especialmente, ao Diretor; professor **Dreithe Thiago Ribeiro de Carvalho**, pela forma competente de gestão, pela eficiência, solicitude e proatividade visando tornar o ambiente escolar favorável ao aprendizado significativo.
- Ao Chefe e aos Coordenadores intermediários da Unidade de Educação Básica (UNIEB); da Coordenação Regional de Ensino do Núcleo Bandeirante (CRE-NB) da Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF); pelo apoio técnico e dedicação aos professores, no difícil caminho da formação continuada e em especial, ao professor **Jean de Sousa Costa**; pelo apoio incondicional e por sua eficiência no ensino dos conhecimentos especializados, visando a elaboração do *site* de divulgação dos conteúdos desse trabalho.
- A todos meus alunos do presente e do passado por serem a força motriz dessa complicada engrenagem que compõe o difícil arranjo didático do ensino/aprendizagem.

“O essencial é invisível aos olhos!”
Antoine de Saint-Expéry (1900-1944)

Resumo

Este trabalho apresenta a análise de alguns fenômenos periódicos com objetivo de exemplificar a aplicação da trigonometria circular e hiperbólica, visando tornar seus conceitos significativos para o aluno.

O fato motivador para elaboração deste trabalho, por ir ao encontro do que é postulado pelos grandes educadores e satisfazer o desejo dos educandos; é responder a duas perguntas:

1. *Por que se deve estudar e entender as funções trigonométricas no ensino básico?*
2. *Onde serão aplicados os conteúdos da trigonometria?*

Neste texto a trigonometria é apresentada como o importante conteúdo que modela e explica: os fenômenos periódicos, ondulatórios e vibratórios; o período sinódico; as fases e o calendário lunar; a altura das marés; a velocidade das ondas do oceano e as de um tsunami; o percurso dos pistões no motor a combustão; o funcionamento dos amortecedores de um carro; a frequência cardíaca e pressão sanguínea; a ritmicidade biológica do ciclo claro-escuro; a construção de pontes suspensas e a disposição espacial das linha de transmissão elétrica. Também é apresentada a série de Fourier, sua aplicação na análise harmônica e a modelagem das ondas quadradas.

Os conteúdos trigonométricos carecem de *marketing* pró-ativo porque muitos alunos e educadores têm uma postura temerosa em relação à trigonometria; por isso, é preciso evidenciar suas aplicação e funcionalidades para tornar atrativo seu aprendizado.

Palavras-chaves: Aplicação da Trigonometria. Trigonometria hiperbólica. Fenômenos periódicos. Série de Fourier. Catenária.

Abstract

This work presents an analysis of some periodic phenomena with the objective of exemplifying the application of circular and hyperbolic trigonometry, making its concepts defined for the student.

The motivating fact for the preparation of this work, for meeting what is postulated by the great educators and satisfying the students' desire; is to answer two questions:

1. Why should one study and understand trigonometric functions in basic education?
2. Where will the concepts of trigonometry be recognized?

In this text, trigonometry is presented as the important content that models and explains: periodic, wave and vibratory phenomena; the synodic period; the phases and the lunar calendar; the height of the tides; the speed of ocean waves and those of a tsunami; the path of the pistons in the combustion engine; the functioning of a car's shock absorbers; heart rate and blood pressure; the biological rhythmicity of the light-dark cycle; the construction of suspension bridges and the spatial arrangement of electrical transmission lines. The Fourier series, its application in harmonic analysis and square wave modeling is also presented.

Trigonometric content lacks proactive marketing because many students and educators are fearful about trigonometry; therefore, it is necessary to highlight its applications and characteristics to make learning more attractive.

Key-words: Application of Trigonometry. Hyperbolic trigonometry. Periodic phenomena. Fourier series. Catenary.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Diagrama da aprendizagem significativa, segundo Ausubel	30
Figura 2 – Formação das funções psicológicas superiores	31
Figura 3 – Zona de Desenvolvimento Proximal-ZDP	32
Figura 4 – Aprendizagem e evolução segundo Piaget	33
Figura 5 – Representação de praxeologia segundo TAD	38
Figura 6 – Modelo epistemológico de organizações didáticas.	40
Figura 7 – Constituição da técnica $\tau O_o \rightarrow m$ e $O_{no} \rightarrow e$	42
Figura 8 – Organização Praxeologica, objetos não ostensivos e ostensivos na construção do gráfico da função seno	44
Figura 9 – Ostensivos: Plano Cartesiano Ortogonal e a Senóide.	45
Figura 10 – Detalhamento do Nível Técnico	47
Figura 11 – Detalhamento do Nível Mobilizável	47
Figura 12 – Detalhamento do Nível Disponível	48
Figura 13 – Classificação quanto a Raiz do Erro.	55
Figura 14 – Variação da função seno no 1° quadrante	59
Figura 15 – Projeção da função seno no 2° quadrante	60
Figura 16 – Projeção da função seno no 3° quadrante	60
Figura 17 – Projeção da função seno no 4° quadrante	61
Figura 18 – Senóide definida por $F(x) = \text{sen}x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$	62
Figura 19 – Projeção da função cosseno no 1° quadrante	63
Figura 20 – Projeção da função cosseno no 2° quadrante	64
Figura 21 – Projeção da função cosseno no 3° quadrante	65
Figura 22 – Projeção da função cosseno no 4° quadrante	65
Figura 23 – Cossenoide definida por $F(x)=\text{cos}x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$	66
Figura 24 – – Projeção da tangente do arco α	67
Figura 25 – Gráfico de $F(x) = \text{tg}x$ para $\frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$	68
Figura 26 – Projeção da secante do arco α	69
Figura 27 – Gráfico de $F(x) = \text{sec}x$ para $0 \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$	70
Figura 28 – Projeção da cossecante do arco α	71
Figura 29 – Gráfico de $F(x) = \text{cossec}x$ para $0 \leq x \leq 5\pi/2$	72
Figura 30 – Projeção da cotangente do arco α	73
Figura 31 – Gráfico $F(x) = \text{cot}gx$ para $0 < x < \pi$ e $\pi < x < 2\pi$	74
Figura 32 – Projeções para arcos do 1° quadrante	75
Figura 33 – Projeções para arcos do 2° quadrante	76
Figura 34 – Projeções para arcos do 3° quadrante	77
Figura 35 – Projeções para arcos do 4° quadrante	78

Figura 36 – Função $f : X \rightarrow Y$ e sua inversa $g : Y \rightarrow X$	79
Figura 37 – $F(x) = \operatorname{sen}x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$	80
Figura 38 – Função $F(x) = \operatorname{Arcsen}x$, $D = [-1, 1]$ e $CD = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	80
Figura 39 – $F(x) = \operatorname{cos}x$, $D = [0, \pi]$ e $CD = [-1, 1]$	81
Figura 40 – $F(x) = \operatorname{Arccos}x$, $D = [-1, 1]$ e $CD = [0, \pi]$	81
Figura 41 – $F(x) = \operatorname{tg}x$, $D = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $CD = R$	82
Figura 42 – $F(x) = \operatorname{Arctg}x$, $D = R$ e $CD = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	82
Figura 43 – Simetria das funções f^{-1} e f em relação a reta $y = x$	83
Figura 44 – Simetria de $f^{-1}(x) = \operatorname{Arcsen}x$ e $f = \operatorname{sen}x$ em relação a $y = x$	83
Figura 45 – Simetria de $f^{-1}(x) = \operatorname{Arccos}x$ e $f(x) = \operatorname{cos}x$ em relação a $y = x$	84
Figura 46 – Simetria de $f^{-1}(x) = \operatorname{Arctg}x$ e $f(x) = \operatorname{tg}x$ em relação a $y = x$	84
Figura 47 – Função de Euler, transição entre $P = (x, y)$ e $P = (\operatorname{cos}\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$	85
Figura 48 – Função de Euler $E : R \rightarrow \lambda$, $E(t) = (x, y)$ e $0 \leq t \leq 2\pi$	86
Figura 49 – Função Euler e os Arcos Congruentes	86
Figura 50 – Setor circular determinado pelo ângulo central θ	87
Figura 51 – Setor hiperbólico $\frac{\theta}{2}$, determinado pelo ângulo hiperbólico θ	88
Figura 52 – Ângulo hiperbólico	88
Figura 53 – Hipérbole equilátera e as razões trigonométricas	89
Figura 54 – Seno hiperbólico balizado por $\frac{e^x}{2}$ e $-\frac{e^{-x}}{2}$	90
Figura 55 – Cosseno hiperbólico balizado por $\frac{e^x}{2}$ e $\frac{e^{-x}}{2}$	90
Figura 56 – Tangente hiperbólica	91
Figura 57 – Gráfico de Função Periódica	93
Figura 58 – Gráfico da função periódica $f(x) = x - [x]$	94
Figura 59 – Partícula em MCU projetando MHS	98
Figura 60 – Onda Quadrada e sua Representação por Fourier	100
Figura 61 – Onda alternada não Sinusoidal	103
Figura 62 – Sistema Massa e Mola (Energia Mecânica conservada)	104
Figura 63 – Suspensão independente do Veículo	105
Figura 64 – Viga em balanço com massa na extremidade	106
Figura 65 – Viga bi apoiada com carga transversal no centro	107
Figura 66 – Viga bi engastada com carga transversal no centro	107
Figura 67 – Estrutura com um andar	108
Figura 68 – Modelagem do Batimento Cardíaco	110
Figura 69 – Definição das características do ritmo Circadiano	113
Figura 70 – Estabilidade Intermediária-IS	114
Figura 71 – Altura de Marés em Recife, 31 de maio 2021	115
Figura 72 – Ajuste ao Cosseno da Altura de Maré em Recife, 31 de maio 2021	116
Figura 73 – Conjunto pistão-carvilhão-biela, com suporte no pé da biela	118
Figura 74 – Virabrequim, biela e pistão	118

Figura 75 – Deslocamento do Pistão e o giro circular	119
Figura 76 – Deslocamento do pistão para $\alpha = 0$ rad	120
Figura 77 – Deslocamento do pistão para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rad	120
Figura 78 – Deslocamento do pistão para $\alpha = \pi$ rad	121
Figura 79 – Deslocamento do pistão para $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ rad	121
Figura 80 – Deslocamento do pistão para $\alpha = 2\pi$ rad	121
Figura 81 – Fases da Lua	122
Figura 82 – Inclinação órbita da Lua com a Eclíptica	123
Figura 83 – Duração do mês sinódico	124
Figura 84 – Cálculo Função "L" para Fase Quarto Minguante	127
Figura 85 – Função "A" para Fase Quarto Minguante	128
Figura 86 – Função "B" para Fase Quarto Minguante	128
Figura 87 – Tempo para Fase Quarto Minguante	129
Figura 88 – Fases da Lua para 2021	130
Figura 89 – Curva Catenária	134
Figura 90 – Ponte Juscelino Kubitschek	134
Figura 91 – Gateway Arch	135
Figura 92 – Trem Unidade Elétrica (TUE)-Fortaleza/CE	136
Figura 93 – Esquema da Catenária do metrô de Fortaleza	136
Figura 94 – Velocidade das ondas para $d= 30\text{m}$ e $g = 9,8\text{m/s}^2$	137
Figura 95 – Variação da velocidade das ondas marítimas	138
Figura 96 – Interseção da trigonometria, exponencial e hiperbólica	139
Figura 97 – Diagrama básico simplificado de um Sistema de Energia	141
Figura 98 – Parte Real da Tensão na Linha de Transmissão	143
Figura 99 – Parte Imaginária da Tensão na Linha de Transmissão	143
Figura 100 – Tensão na Linha de Transmissão	144
Figura 101 – Página INÍCIO do site Aplica-Trigonometria	146
Figura 102 – Página OBJETIVO do site Aplica-Trigonometria	146
Figura 103 – Página POR QUE ESTUDAR? do site Aplica-Trigonometria	146
Figura 104 – Página ONDE APLICAR? do site Aplica-Trigonometria	147
Figura 105 – Página NO TRIÂNGULO do site Aplica-Trigonometria	147
Figura 106 – Página NO CÍRCULO do site Aplica-Trigonometria	147
Figura 107 – Página PERÍODO SINÓDICO do site Aplica-Trigonometria	148
Figura 108 – Página NA HIPÉRBOLE do site Aplica-Trigonometria	148
Figura 109 – Página CURVA CATENÁRIA do site Aplica-Trigonometria	148
Figura 110 – Página TRANSMISSÃO DE ENERGIA do site Aplica-Trigonometria	149
Figura 111 – Página LINHAS TRANSMISSÃO do site Aplica-Trigonometria	149

Lista de tabelas

Tabela 1 – Taxonomia dos Objetos Ostensivos	41
Tabela 2 – Momentos Didáticos Propostos	45
Tabela 3 – Trigonometria Circular Versus Hiperbólica	92
Tabela 4 – Exemplos de Aplicação dos Movimentos Periódicos	96
Tabela 5 – Preia-mares e Baixa-mares	115
Tabela 6 – Média das marés em 31 maio 2021	115
Tabela 7 – Altura das Marés previstas e calculadas	117
Tabela 8 – Valores: Previsto, Determinado e Diferença	131
Tabela 9 – Formas do ponto na Hipérbole	140

Sumário

	INTRODUÇÃO	25
1	APRENDIZAGEM E CONHECIMENTO	29
1.1	APRENDIZAGEM SEGUNDO AUSUBEL	29
1.2	APRENDIZAGEM SEGUNDO VYGOTSKY	30
1.3	APRENDIZAGEM SEGUNDO PIAGET	32
1.4	NEUROCIÊNCIA COGNITIVA	35
1.5	TEORIA DA ANTROPOLOGIA DO DIDÁTICO	36
1.6	NÍVEIS DE FUNCIONAMENTO DO CONHECIMENTO	46
1.7	DIFICULDADE NO APRENDIZADO	51
2	FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	57
2.1	FUNÇÃO SENO	57
2.2	FUNÇÃO COSSENO	62
2.3	FUNÇÃO TANGENTE	66
2.4	RECÍPROCAS TRIGONOMÉTRICAS	69
2.4.1	FUNÇÃO SECANTE	69
2.4.2	FUNÇÃO COSSECANTE	70
2.4.3	FUNÇÃO COTANGENTE	72
2.5	PROJEÇÕES TRIGONOMÉTRICA	74
2.5.1	PROJEÇÕES PARA ARCOS DO PRIMEIRO QUADRANTE	75
2.5.2	PROJEÇÕES PARA ARCOS DO SEGUNDO QUADRANTE	76
2.5.3	PROJEÇÕES PARA ARCOS DO TERCEIRO QUADRANTE	77
2.5.4	PROJEÇÕES PARA ARCOS DO QUARTO QUADRANTE	78
3	INVERSAS TRIGONOMÉTRICAS	79
3.1	FUNÇÃO ARCO-SENO	79
3.2	FUNÇÃO ARCO-COSSENO	80
3.3	FUNÇÃO ARCO-TANGENTE	81
3.4	SIMETRIA COM AS INVERSAS	83
3.4.1	SIMETRIA ENTRE A RESTRIÇÃO DO SENO E O ARCO-SENO	83
3.4.2	SIMETRIA ENTRE A RESTRIÇÃO DO COSSENO E O ARCO-COSSENO	84
3.4.3	SIMETRIA ENTRE A RESTRIÇÃO DA TANGENTE E O ARCO-TANGENTE	84
4	FUNÇÕES HIPERBÓLICAS	85
4.1	FUNÇÃO DE EULER	85

4.2	ÂNGULO HIPERBÓLICO	87
4.3	RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS	88
4.4	HIPERBÓLICAS E A EXPONENCIAL DE BASE NATURAL	89
4.4.1	SENO; COSSENO E A EXPONENCIAL NATURAL	89
4.4.2	TANGENTE HIPERBÓLICA E A EXPONENCIAL NATURAL	91
5	APLICAÇÃO DA TRIGONOMETRIA CIRCULAR	93
5.1	FENÔMENOS PERIÓDICOS	93
5.2	MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES	96
5.2.1	SÉRIE DE FOURIER	98
5.2.1.1	ONDA QUADRADA APROXIMADA POR SUA SÉRIA DE FOURIER	100
5.2.1.2	ANÁLISE HARMÔNICA	102
5.2.2	SISTEMA MASSA-MOLA	103
5.2.2.1	SUSPENSÃO DO VEÍCULO	104
5.2.2.2	VIBRAÇÕES NAS ESTRUTURAS	105
5.2.2.2.1	VIGA EM BALANÇO COM MASSA NA EXTREMIDADE	105
5.2.2.2.2	VIGA BI APOIADA COM CARGA TRANSVERSAL NO CENTRO	106
5.2.2.2.3	VIGA BI ENGASTADA COM CARGA TRANSVERSAL NO CENTRO	107
5.2.2.2.4	VIBRAÇÃO EM ESTRUTURA COM UM ANDAR	107
5.3	APLICAÇÃO NA MEDICINA	108
5.3.1	FREQUÊNCIA CARDÍACA E PRESSÃO SANGUÍNEA	109
5.3.2	MEDICINA DO SONO	110
5.4	MOVIMENTO DA MARÉ E ALTURA DAS ONDAS	114
5.5	PISTÕES NOS MOTORES A COMBUSTÃO INTERNA	118
5.6	PERÍODO SINÓDICO E CALENDÁRIO LUNAR	122
5.6.1	PERÍODO SINÓDICO	123
5.6.2	CALENDÁRIO LUNAR	125
6	APLICAÇÃO DA TRIGONOMETRIA HIPERBÓLICA	133
6.1	A CURVA CATENÁRIA	133
6.1.0.1	CATENÁRIA E A PONTE PÊNSIL	134
6.1.0.2	CATENÁRIA E A ARQUITETURA	135
6.1.0.3	CATENÁRIA E A ELETRIZAÇÃO FERROVIÁRIA	135
6.2	VELOCIDADE DAS ONDAS DO MAR	137
6.3	TRANSMISSÃO DE ENERGIA	139
6.3.1	EXPONENCIAL, TRIGONOMETRIA, HIPERBÓLICA E COMPLEXO	139
6.3.2	LINHAS DE TRANSMISSÃO DE ENERGIA	141
6.3.2.1	GRÁFICO DA PARTE REAL DA TENSÃO NA LINHA DE TRANSMISSÃO	142
6.3.2.2	GRÁFICO DA PARTE IMAGINÁRIA DA TENSÃO NA LINHA DE TRANSMISSÃO	143
6.3.2.3	GRÁFICO DA TENSÃO NA LINHA DE TRANSMISSÃO	144

7	SITE APLICA TRIGONOMETRIA	145
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	151
	REFERÊNCIAS	153

Introdução

As últimas quatro décadas ficaram marcadas pelas mudanças na sociedade e pelos impactos dessas mudanças na forma de educar.

A escola, antiga guardiã dos costumes e baluarte da conservação e do continuísmo, assumiu papel de protagonista nessas mudanças; ressignificando velhos paradigmas, evidenciando novas tendências, tornando-se a caixa de ressonância da sociedade a qual pertence.

No bojo dessas mudanças vimos a palavra “**significativo**” assumir vários vieses. Tivemos o “**conteúdo significativo**”; classificado segundo a ótica de diretores, coordenadores e professores; depois o “**ensino significativo**”, para contemplar habilidades e competências. E por fim; chegamos ao “**aprendizado significativo**”, com o aluno assumindo o protagonismo no processo da aprendizagem. Sob esse prisma, educar passou a ser o ato de dar significado as informações que estão disponíveis para o aluno nas mídias sociais e na internet.

O ensino da matemática foi impactado de forma direta. A **matemática científica** e **acadêmica**, incentivada a partir dos anos 50 e 60, impulsionada pelo desejo de enviar o homem à Lua, deu origem a **matemática significativa**, cujo objetivo é instrumentalizar o cidadão para que possa assumir seu papel na sociedade.

A Aritmética, álgebra, geometria e trigonometria continuaram a ser os grandes eixos formadores no ensino da matemática e são trazidos nos livros didáticos. Não houve mudança na quantidade de conteúdo a ser ministrado; entretanto, os professores de ensino médio tinham uma carga horária de seis tempos por semana e agora, nas escolas públicas do Distrito Federal, têm apenas três tempos de aulas semanais. Essa quantidade é considerada insuficiente pela maioria dos docentes. O ensino da matemática que precisava ficar mais efetivo se tornou superficial e muitos conteúdos passaram a ser preteridos por professores, alunos e até pelas avaliações externas.

A trigonometria continua presente nos livros e nos currículos. Porém, sua aplicação e relevância é questionada pelos alunos e até por professores. É imperativo que seja apresentado aos alunos significado para os conteúdos trigonométricos. Uma forma de torná-los relevantes e atraentes é mostrar exemplos de sua aplicação nas diversas áreas da ciência que impactam na vida do aprendiz.

(FEIJÓ, 2018), traz um relato detalhado sobre o desenvolvimento histórico da trigonometria e a define como sendo a área da matemática que estuda as medidas de um triângulo e suas aplicações.

Segundo Boyer (1974) e Eves (2004), em (LUCENA, 2020b), os conceitos da trigonometria nasceram, em 190 antes da era cristã, motivados pela necessidade do homem diante dos desafios com a astronomia. Os egípcios e babilônicos aplicaram a trigonometria para mediar ângulos e distâncias entre pontos na face da Terra e os muçulmanos usaram a trigonometria para construção de suas tábuas de logaritmos. Os conceitos da trigonometria evoluíram para suprir a demanda gerada pela agrimensura e pela navegação. Para Siqueira (2013), também em (LUCENA, 2020b), a trigonometria chegou ao Brasil para instrumentalizar a formação nas Escolas de Artilharia.

A aprendizagem da trigonometria começa conturbada porque os alunos, no início, a veem como uma parte da geometria que necessita das equações algébricas para modelagem de seus problemas; com isso, a trigonometria herda as dificuldades interpretativas da geometria e as deficiências na resolução de equações. Isso se dá, justamente, no momento que o aluno está se preparando para entrar no ensino médio e em um período confuso do seu desenvolvimento biológico.

A apresentação da trigonometria no triângulo retângulo, começa como uma continuação natural dos estudos da geometria plana dos triângulos. Esse começo misturado com a geometria tira da trigonometria o protagonismo e passa ao aluno a ideia de que as razões trigonométricas têm pouca relevância diante do gigantismo da geometria plana.

É necessário lembrar que o aluno, nessa idade, está no ápice de sua guerra hormonal e isso o torna, naturalmente, disperso. Somando-se a esse fato biológico o comprometimento existente na leitura interpretativa e na resolução de equações algébricas básicas, a modelagem de problemas aplicando as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente se tornou um tormento didático para professores e alunos.

O aluno até entende os conceitos de hipotenusa, catetos e razões trigonométricas, porém, como muitos dizem: “eu só não sei quando devo usar o seno, quando devo o cosseno e quando devo usar a tangente.”

Segundo (LUCENA, 2020b), a trigonometria no triângulo retângulo deixou de constar em boa parte dos livros didáticos do ensino fundamental, seguindo orientação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Um ou dois anos a mais na maturidade do aluno ajudará o entendimento dos conceitos trigonométricos, porém em contra partida, tem-se mais um conteúdo a ser ministrado no ensino médio sem que haja aumento da carga horária.

O quadro se agrava porque uma boa parte dos alunos apresentam acentuado comprometimento teórico nos pré-requisitos básicos. O grande desafio é encontrar uma forma eficiente de fazer o aluno aprender trigonometria, dada a importância desse conteúdo para a futura vida acadêmica, principalmente, daqueles que optarem por cursos na área das exatas. É recomendável o entendimento dos conceitos trigonométricos devido a necessi-

dade de utilização dos mesmos na explicação e modelagem dos fenômenos periódicos.

Os teóricos da educação indicam que o aprendizado só se torna efetivo quando é internalizado criando ligações com os saberes pré-existentes; dessa forma, passa a ser significativo para o aprendiz; com isso, será facilmente lembrado e ainda servirá de ponte para aprendizagem de novos saberes. É necessário apresentar para o aprendiz a importância do conteúdo e suas aplicações. Ou seja, responder aquelas velhas perguntas: Professor! Onde que eu vou utilizar isso na minha vida? Para que serve isso?

A Teoria da Antropologia do Didático (TAD), de Chevallard (1998); os estudos da Neurociência Cognitiva, trazidos por (SÁ; NARCISO; FUMIÃ, 2020) apub (BARROS et al., 2004) e (BARBOSA et al., 2016) e também os Níveis de Funcionamento do Conhecimento (NFC) de Robert (1997 e 1998) trazidos por (FONSECA, 2015) indicam que uma saída viável é levar os conceitos trigonométricos para realidade do aluno, fazendo com que ele experimente a sensação de pertencimento ao mundo trigonométrico.

É impossível prever onde o aluno vai aplicar os conceitos trigonométricos, isso seria exercício de adivinhação ou futurismo. Porém, é possível mostrar onde a trigonometria é aplicada; sua importância para o desenvolvimento atual e para o contexto histórico.

Para (SILVA, 2019), a matemática é uma construção humana; por isso é necessário ter contato com a história de sua gênese e da sua evolução para que a forma como é apresentada para nós nos dias de hoje, tenha algum significado. A história da gênese e evolução da matemática é um deleite que todos deveriam ter a oportunidade conhecer. Ela representa um espelho de como a humanidade se beneficiou dos conhecimentos matemáticos por intermédio das respostas dadas as perguntas: “para que? e por que?” Questionamentos que continuam a ser ouvidos pelos professores em suas aulas.

Sob a ótica da epistemologia da Neurociência Cognitiva (NC), da Teoria da Antropologia do Didático (TAD) e dos Níveis de Funcionamento do Conhecimento (NFC), responder a esses questionamentos dos alunos implica dizer de que forma e onde os conhecimentos matemáticos foram aplicados e quais os percalços e obstáculos que surgiram no trato do desse conhecimento.

A proposta desse trabalho é pesquisar os fenômenos periódicos que possam ser modelados aplicando os conceitos trigonométricos. O objetivo de analisar os fenômenos periódicos tem a finalidade exclusiva de tornar os conteúdos significativos para o aluno do ensino básico.

Para que esse objetivo seja atingido, outros objetivos secundários também deverão ser alcançados, tais como: analisar as fragilidades existentes no aprendizado da matemática, em especial no aprendizado das funções trigonométricas, sob a ótica dos trabalhos escritos nos últimos anos; bem como, mostrar o que as teorias têm indicado para que essas fragilidades sejam mitigadas.

Pretende-se, como consequência imediata desse trabalho, responder às perguntas:

- Por que se deve estudar e entender as funções trigonométricas no ensino básico?
- Onde serão aplicados os conteúdos da trigonometria?

Como produto dessa dissertação, será confeccionado e alimentado um *site*, aplicando a ferramenta *Google Sites*, para difusão dos conteúdos e aplicações trigonométricas estudadas. Esse *site*, estará vinculado ao domínio da Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF), dessa forma, poderá servir como fonte de pesquisa, facilitando o acesso dos discentes e docentes do ensino básico a essa produção acadêmica.

Este trabalho foi dividido em seis blocos lógicos: O **primeiro bloco** é formado por este capítulo introdutório que explica o trabalho e seus objetivos. O **segundo bloco** é formado pelo **capítulo 1**, e traz os pressupostos teóricos didáticos que buscam explicar a necessidade da aprendizagem ser significativa no ensino da trigonometria em conformidade com o pensamento dos grandes teóricos da educação; corroborados pelas teorias da Neurociência Cognitiva, da Antropologia do Didático, pelos Níveis de Funcionamento Conhecimento e por estudos que expõem as dificuldades do aprendizado matemático e trigonométrico. No **terceiro bloco**, composto pelos **capítulos 2,3 e 4**, estão todos os componentes teóricos específicos da trigonometria circular, hiperbólica, necessários para análise e modelagem dos fenômenos que serão apresentados. O **quarto bloco**, formado pelos **capítulos 5 e 6**, traz as aplicações da trigonometria circular e hiperbólica na modelagem de fenômenos periódicos e no Movimento Harmônico simples (MHS); em áreas como: Engenharia Civil, Mecânica e Elétrica; Medicina; Física; Geografia e Arquitetura. No **quinto bloco**, é apresentado o site: <https://sites.google.com/edu.se.df.gov.br/aplica-trigonometria>. Produto direto da pesquisa para esta dissertação, a confecção e alimentação deste site objetiva ratificar a resposta as duas perguntas motivadoras deste trabalho e a difusão dos conceitos e aplicações trigonométricas. O **sexto e último bloco** é formado pelas considerações finais e as referências.

1 APRENDIZAGEM E CONHECIMENTO

1.1 APRENDIZAGEM SEGUNDO AUSUBEL

Para Ausubel, em (MOREIRA, 1999), os novos conhecimentos são ancorados pelos já existentes. Portanto, é fundamental que seja do conhecimento do educador os conteúdos que o aluno já possui para que os novos tópicos sejam entendidos com facilidade.

O pior que pode acontecer para a aprendizagem significativa, não é a falta dos conhecimentos prévios, denominados por Ausubel de subsunçores¹, mas sim, o professor presumir que os alunos já os tenham. Com isso, novos conceitos não serão internalizados devido a falta de âncoras para a ação dos mecanismos internos.

Parte do novo conteúdo será retido em função das pressões naturais do ambiente escolar e da memória do aluno, pelo menos até a avaliação, porém a aprendizagem não será efetiva. O que explica o ciclo vicioso dos conteúdos vistos e esquecidos, ou seja, não aprendidos. Para Ausubel, em (MOREIRA, 1999), existem três tipos gerais de aprendizagem:

- **Cognitiva**, aquela que é resultado do armazenamento organizado de informações na mente do aprendiz.
- **Afetiva**, é resultado de sinais interno do indivíduo; proveniente de experiências sensoriais tais: prazer, dor, alegria, descontentamento etc.
- **Psicomotora**, aquela atrelada a respostas musculares adquiridas por treino ou prática.

Embora reconheça a importância da experiência afetiva e os resultados da psicomotricidade, Ausubel é um representante do cognitivismo que se baseia na ideia de que existe uma estrutura na qual a organização e integração se processam para o indivíduo adquirir o conhecimento.

A aprendizagem significativa, acontece via os “subsunçores”. Conteúdos novos são acrescentados aos conhecimentos prévios por meio de **comparações** e **assimilações**. A informação nova é recebida pelos subsunçores que a transforma em uma nova estrutura interna de conhecimento, acontecendo a internalização do novo conteúdo. Na aprendizagem

¹ (MOREIRA, 1999), traz que para Ausubel “Subsunçor” é a tentativa de aporuguesar a palavra inglesa “subsumer” que significa inseridor, facilitador ou subordinador. Equivale a uma espécie de índice que organiza os novos conceitos aproveitando conceitos parecidos que o indivíduo já possuía.

significativa são formadas redes de relacionamentos com os conhecimentos pré-existentes. **Figura 1.**



Figura 1 – Diagrama da aprendizagem significativa, segundo Ausubel

Fonte: (SANTOS, 2010)

A aprendizagem memorística, não cria vínculo, nem forma rede entre os conhecimentos. A memória é utilizada quase que exclusivamente; a falta de uso constante leva ao esquecimento e, na maioria das vezes, o conhecimento não faz sentido devido a falta de vínculos com os conteúdos anteriores. Os conhecimentos escolares devem ser significativos para quem está aprendendo e devem ser organizados de forma lógica para facilitar a ação dos mecanismos internos (subsunçores). A assimilação gradativa se deve a forma lógica da organização dos conteúdos e a formação de relações de equivalência.

A valorização da pessoa e de sua história foi trazida pela teoria da aprendizagem significativa. Portanto, o que for ensinado criará ecos internos e viabilizará o aprendizado de novos conteúdos. Ao começar com o que está mais próximo ao aluno, é valorizado a pessoa que vai aprender e não os conteúdos transmitidos.

1.2 APRENDIZAGEM SEGUNDO VYGOTSKY

Para Oliveira, em (ALECRIM, 2010); a função psicológica tem suporte nas atividades do cérebro; contudo, sofre influência do ambiente externo, variando em conformidade com as atividades vivenciadas e as necessidades futuras do indivíduo. Vygotsky procurava integrar o homem enquanto ser biológico e social.

A plasticidade do cérebro o faz evoluir e também as suas funções psicológicas. Para Vygotsky em (ALECRIM, 2010), não é apenas o cérebro que é responsável pela formação das funções psicológicas do indivíduo, as relações estabelecidas com o mundo exterior, o processo histórico do indivíduo e a cultura na qual se encontra inserido também contribuem para essa formação. O processo de formação das **Funções Psicológicas**

Superiores² acontece de forma indireta mediante a ação de mecanismos mediadores ou sistemas simbólicos conhecidos como **Instrumentos**³ e **Signos**⁴

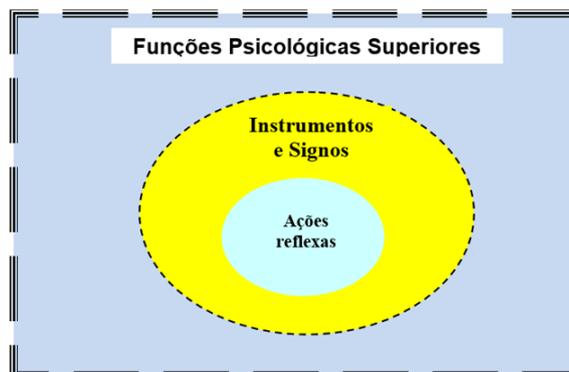


Figura 2 – Formação das funções psicológicas superiores

Fonte: (SANTOS, 2010)

O desenvolvimento das funções psicológicas superiores acontece a partir dos mecanismos intermediários, conforme mostra a figura 2. Nota-se que o conjunto mais interno é composto pelas ações reflexas automatizadas que são inerentes ao indivíduo desde o nascimento, tendo como exemplo, os estímulos naturais é a sucção do seio materno. Os processos intermediários são compostos pelos instrumentos e signos, que levam até funções psicológicas superiores.

Segundo Vygotsky em (ALECRIM, 2010), os signos externos que pertencem à cultura do indivíduo vão sendo internalizados e passam a ser signos internos que representam mentalmente objetos da realidade. Para o autor o desenvolvimento se dá de “fora para dentro”, na medida em que as ações externas efetuadas pelo indivíduo são interpretadas pelas pessoas ao seu redor em conformidade com os padrões culturais estabelecidos.

As interpretações das ações externas do indivíduo por parte do grupo retornam e são ressignificadas e internalizadas passando a fazer parte dos processos psicológicos interiores necessários para a vida do indivíduo no grupo social. Portanto, a origem das funções psicológicas superiores é social e histórica estando impregnada de instrumentos e signos do meio cultural que cerca o indivíduo.

A aprendizagem é melhor alcançada quando o individual participa de grupos onde

² Para Oliveira em (ALECRIM, 2010), consiste na capacidade do indivíduo de pensar em objetos ausentes, imaginar ações futuras e planejar suas execuções. Tornam possível a tomada de decisão a partir de uma informação nova é o que Vygotsky denominou de comportamento intencional e voluntário característico do ser humano.

³ Segunda a teoria de Vygotsky, instrumentos são objetos utilizados para realização de tarefas.

⁴ Signos são símbolos que representam outros objetos. Para Vygotsky os signos são instrumentos psicológicos que auxiliam nos processos não concretos. Exemplo: utilizar de mapa, planta para construir uma casa, ou letra para representar um número.

suas vivências são potencializadas pela interação com outros indivíduos, essa interação facilita a internalização dos novos conteúdos em suas funções superiores. Vygotsky em (ALECRIM, 2010),

Segundo a teoria de Vygotsky existem dois desenvolvimentos: **Real e Potencial**. O desenvolvimento real expressa tudo que possa ser realizado pelo indivíduo sem a ajuda de terceiros. Já o desenvolvimento potencial é formado pelas tarefas que o indivíduo, para realizá-las, necessita da ajuda e orientação de outra pessoa com mais conhecimento ou experiência. A tendência natural é que o **conhecimento potencial** se torne **conhecimento real**.

Para Vygotsky, em (DILLI, 2018), a **Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP)** é o espaço que existe entre o nível desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial. Uma espécie de portal em constante mudança, no qual, devem ser concentradas as ações pedagógicas para que ocorra uma aprendizagem significativa.

Esta região pode ser imaginada como sendo uma faixa intermediária que contém o conjunto do **Nível de desenvolvimento real** e está contida dentro do conjunto **Nível de desenvolvimento potencial**. **Figura 3.**

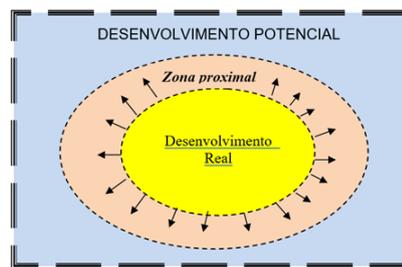


Figura 3 – Zona de Desenvolvimento Proximal-ZDP

Fonte: (SANTOS, 2010)

1.3 APRENDIZAGEM SEGUNDO PIAGET

Segundo (ALECRIM, 2010), duas das perguntas que nortearam a teoria da Psicogênese Cognitiva de Jean Piaget (1969) foram: como os conhecimentos se formam? E como os conhecimentos evoluem de um patamar menor para um estágio mais elevado?

A teoria considera que os conhecimentos estão interligados, são incompletos e atualizados constantemente; dependentes da maturação orgânica do indivíduo e são afetados pelo ambiente físico e sociocultural no qual está inserido o indivíduo.

Para Piaget (1969), em (ALECRIM, 2010), o desenvolvimento surge da adaptação psicológica constante ao meio devido ao desequilíbrio que existe entre o conhecimento interno e externo do indivíduo. O desenvolvimento é fruto da “Equilibração” progressiva

e contínua que tem fluxo de fora para dentro. O ser humano, qualquer que seja a etapa do desenvolvimento na qual se encontre, busca explicar o mundo a sua volta. Logicamente, as bases cognitivas para explicação do ambiente no qual vive, aumenta em conformidade com o desenvolvimento físico do indivíduo. Porém, existem algumas funções constantes que são comuns a todas as idades; são denominadas funções de “Invariantes” do desenvolvimento; Como exemplo tem-se: a **curiosidade** e o **interesse**.

O construtivismo a que se refere Jean Piaget (1969) é a construção por camadas autossustentáveis que formam o conhecimento intelectual inacabado do indivíduo. Para sustentar sua teoria Piaget define os conceitos de: esquema, assimilação e acomodação. A concatenação destes conceitos interage com o ambiente na formação do entendimento cognitivo. O modelo sugerido por Piaget agrega às funções invariantes do desenvolvimento novos conceitos do ambiente por meio da assimilação. Ao ser gerada a zona de desconforto, o indivíduo modifica as suas estruturas e esquemas anteriores, acomodando os novos conceitos em busca do novo equilíbrio. Acontece então, a adaptação ao conteúdo mais recente e um novo esquema equilibrado de conhecimento é gerado.

A curiosidade e o interesse em explicar os fenômenos a sua volta retira os recursos psicológicos e os conhecimentos anteriores do indivíduo da zona de conforto levando-o a um desequilíbrio, ao buscar o equilíbrio, o indivíduo diante de novos esquemas faz a comparação com seus esquemas mentais, já existente, acontecendo a assimilação ou acomodação e novos conteúdos são agregados aos conhecimentos anteriores, acontecendo desta forma o aprendizado. **Figura 4.**

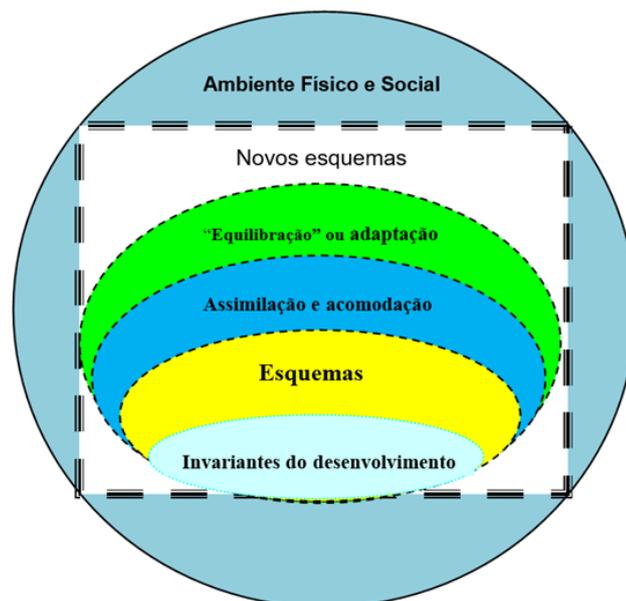


Figura 4 – Aprendizagem e evolução segundo Piaget

Para (ALECRIM, 2010), a Psicogênese do Desenvolvimento Cognitivo de Jean Piaget ajuda no entendimento da forma de pensar do aluno e elucida como acontece o processo de construção do conhecimento. A teoria mostra ao educador que o conhecimento intelectual é fruto de uma busca por equilíbrio e que é inerente ao indivíduo a predisposição ao aprendizado.

Cabe ao professor organizar o ambiente educacional para que a mente do aluno seja levada ao desequilíbrio e os processos internos, naturalmente, a levem a um novo equilíbrio em um patamar mais alto do desenvolvimento.

Também é tarefa da escola, organizar o conteúdo, em nível crescente de dificuldade, levando em consideração o desenvolvimento biológico e a cultura do indivíduo. A Psicogênese do desenvolvimento indica para o educador a importância de se valorizar o processo de construção do conhecimento. Para Piaget (1969), em (ALECRIM, 2010), o caminho para se chegar a um resultado é mais importante que o resultado esperado.

Portanto, é possível notar que existe uma concordância entre os três teóricos da Educação. Ausubel, Vygotsky e Piaget. Cada um, seguindo sua lógica, descrevem o processo de aprendizagem como consequência da influência do meio externo, no qual o indivíduo está inserido. Para os autores citados, a aprendizagem acontece do exterior para interior, ou seja; o conhecimento para que possa ser internalizado, precisa ter significado para o indivíduo aprendiz.

As âncoras presentes nos “subsunoços” descritos na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel equivalem aos conhecimentos presentes na “Zona de Desenvolvimento Proximal”, da teoria desenvolvimentista de Vygotsky, e também equivalem as “Invariantes” e aos “Esquemas” da teoria da Psicogênese do desenvolvimento Cognitivo de Jean Piaget.

Os Três teóricos indicam que a ação pedagógica do professor além de ser consonante com os conhecimentos já presentes na mente do aprendiz, deve oportunizar a socialização para que todos possam guiar e serem guiados na efetiva transformação dos novos conceitos em conhecimentos consolidados nas funções superiores. O que tem significado para o indivíduo é aprendido, essa é a realidade. Teóricos como Ausubel e Vygotsky e Piaget trazem isso de forma clara e contundente.

Para corroborar com a visão dos teóricos Ausubel, Vygotsky e Piaget; (SILVA, 2019), sob a ótica da Neurociência Cognitiva, cita o inspirado Rabuske (1999, p. 161) “Pelo corpo, o homem está no tempo, pelo espírito o tempo está no homem, enquanto o homem se desprende do agora, recorda o passado e prevê o futuro”.

Segundo (SILVA, 2019), sempre há uma transição entre o que está sendo feito no presente e o que será feito no futuro, tendo como régua de referência aquilo que já foi feito no passado. É impossível, para o homem, fugir de sua história e não construir o seu

conhecimento a partir de sua perspectiva histórica.

1.4 NEUROCIÊNCIA COGNITIVA

(SÁ; NARCISO; FUMIÃ, 2020), apud (BARROS et al., 2004) trazem a Neurociência Cognitiva como uma subdivisão da Neurociência que se ocupa em entender como o cérebro aprende, ou seja, esse campo de pesquisa investiga o cérebro visando entender como ele sustenta as atividades mentais cognitivas para efetivar a aprendizagem.

(BARBOSA et al., 2016) em (SÁ; NARCISO; FUMIÃ, 2020), indicam que os estudos da Neurociência Cognitiva estão relacionados de forma direta com a teoria da Neuroplasticidade, segundo essa teoria as interferências no sistema nervoso modificam a forma, tamanho e funcionalidade do cérebro.

Ao evidenciar que a quantidade de neurônios e suas **sinapses**⁵. sofrem alterações em face das experiências vivências pela pessoa, os estudos da Neurociência Cognitiva vão ao encontro do que é defendido pelos teóricos da educação. Para Schiffman (2005), em (VIEIRA; FONSECA; SILVA, 2016), “quanto mais forte o estímulo, maior a frequência dos potenciais de ação”. Ou seja, quanto mais significativo for o conteúdo para o aprendiz mais efetivo será o aprendizado.

D’Ambrósio (1993) em (SÁ; NARCISO; FUMIÃ, 2020); classifica a matemática como uma disciplina investigativa e indica que seu escopo vai além da simples aplicação de algoritmos na resolução de problemas. A matemática tem papel social porque melhora o raciocínio e a forma de pensar do cidadão, dá subsídios para que o aluno pense de forma crítica sendo isso, fundamental para o processo de tomada de decisão.

Contudo, (SÁ; NARCISO; FUMIÃ, 2020) alertam para o perigo da divulgação dos achados científicos da Neurociência Cognitiva estarem sendo traduzidos de forma reducionista e simplista para público externo ao meio acadêmico, gerando os chamados **Neuromitos**.⁶ Essas conjecturas falaciosas atrapalham a aplicação das contribuições da Neurociência Cognitiva na melhoria da aprendizagem significativa.

(VIEIRA; FONSECA; SILVA, 2016), estudaram a aprendizagem das relações trigonométricas no triângulo retângulo sob a ótica da Neurociência Cognitiva, nesse estudo fica evidenciado a ideia de que problemas contextualizados com recursos visuais e sequência lógica, melhoram a associação do conteúdo e aumentam o processamento e armazenamento das informações no córtex cerebral. Os estímulos viso-espaciais, presentes na contextu-

⁵ Sinapse é a conexão ou junção entre os terminais do axônio da célula nervosa que envia a informação e a parte do corpo celular ou dendritos da célula que recebe a informação. (VIEIRA; FONSECA; SILVA, 2016)

⁶ Neuromitos são informações incompletas e ou equivocadas sobre o funcionamento do cérebro geradas por interpretações generalizações falaciosas sobre publicações da Neurociência Cognitiva. (POMPÉIA, 2016; BRUM, 2108) em (SÁ; NARCISO; FUMIÃ, 2020).

alização dos problemas envolvendo as relações trigonométricas no triângulo retângulo, foram analisados quanto a **qualidade da contextualização**, a **relação da figura com cotidiano** e **relação da figura com o conteúdo estudado**. Para os autores, quanto maior for o estímulo inicial da figura associada ao problema, maior será a frequência dos potenciais de ação no córtex cerebral visando a aprendizagem das noções matemáticas.

Por exemplo, (VIEIRA; FONSECA; SILVA, 2016); apud (SCHIFFMAN, 2005), indicam que na figura de uma ponte conhecida pelo aluno, a razão tangente deve ser associada a capacidade de medir o que não se alcança. Desta forma, os estudos da Neurociência Cognitiva indicam que a razão tangente deve ser apresentada primeiro que as razões seno e cosseno, isso fará com que seja aproveitado todo potencial sensitivo do processo inicial de detecção e codificação da energia do ambiente.

1.5 TEORIA DA ANTROPOLOGIA DO DIDÁTICO

A Teoria da Antropologia do Didático (TAD) foi apresentada em 1998 pelo matemático francês Ives Chevallard. Segundo (FONSECA, 2015), foi a primeira teoria desenvolvida para analisar a aprendizagem matemática, utilizando a própria estrutura da matemática para analisar o comportamento humano.

Para Chevallard, em (FONSECA, 2015), qualquer atividade humana pode ser observada e modelada por um modelo teórico que foi denominado **Praxeologia**.⁷ Anos mais tarde, Chevallard (1998) considerou como facilitadores na aprendizagem do saber matemático: a capacidade de modelagem; a abrangência do termo “Antropológico” e os fazeres práticos (praxeologia).

O saber fazer na prática é característica do indivíduo que possui conhecimento sobre um tema e tem habilidade de realizar tarefas aplicando esses conhecimentos sem ajuda de uma pessoa mais experiente para indicar-lhe o caminho. A aquisição da competência do “**saber fazer**” pode acontecer sob a luz da teoria, em instituições como a Escola, ou como resultado do processo de “**tentativa e erro**” em instituições como família, trabalho ou sociedade. Esse saber adquirido pela experiência do processo “tentativa e erro” é conhecido como o saber do “**chão de fábrica**”.

O saber matemático e o saber didático no ensino da matemática, para muitos professores, são adquiridos pelo processo “tentativa e erro”. Os fracassos e sucessos durante os anos de ensino lhes conferem uma praxeologia eficiente. Porém, as mudanças no currículo, tanto na forma, como no viés, e também na sua abrangência, juntamente com redução na quantidade de horas de regência, estão tornando esses saberes incompatíveis e obsoletos muito rapidamente. Os novos professores chegam com uma boa bagagem teórica, porém

⁷ Praxeologia: do grego práxis, (ação, hábito, prática); logos (conhecimento, teoria). Indica saber fazer na prática. (FONSECA, 2015).

com pouco “saber-fazer” praxeológico.

Os professores experientes estão deixando a sala de aula devido aposentadoria, doença ou óbito. O fluxo de reposição está sendo afetado por fatores como: poucos egressos das academias, alto índice de professores apresentando doenças somáticas e desvios do magistério. A quantidade de pessoas que buscam os cursos de licenciatura diminuiu. O magistério não é a preferência do jovem ao terminar o ensino médio.

Uma parte dos professores regentes são afastados do ofício por apresentarem doenças somáticas. Essas doenças, em parte, resultam da internalização de angústias e frustrações no trabalho; seja pela natureza do próprio labor pedagógico ou por fatores sociais externos a sala de aula, tais como: **desamparo social do aluno, precariedade das escolas, pouco reconhecimento e remuneração defasada.**

O “**saber-fazer praxeológico**” fica comprometido; o conhecimento adquirido no “chão de sala” não flui de uma geração para outra. Apenas uma parte dos professores consegue continuar em sala, melhorando sua forma de ensinar e interagir com os alunos. Esses professores, buscam nas academias formação continuada e cruzam os conhecimentos acadêmicos com o seu conhecimento prático, melhorando, efetivamente, sua forma de lecionar. Para esses professores, a Teoria da Antropologia do Didático (TAD), serve como grande aliada e pode lhes conferir autonomia para tratar os conteúdos dos currículos como **objetivos factíveis** e não como grades que engessam e dificultam a aprendizagem por parte do aluno.

Para (SANTOS; FREITAS, 2017) a TAD possibilita o estudo da matemática dentro do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais. Para Bosch e Chevallard (1999), em (SANTOS; FREITAS, 2017), “tudo é objeto”. As instituições são objetos, os indivíduos são sujeitos dessas instituições, porque para que um objeto exista basta existirem pessoas ou instituições que tenham relações com esse objeto. Esse modelo “teia de existência e inter-relacionamento” de conteúdo é semelhante ao modelo de mapeamento utilizado pelas redes sociais. Atualmente, ou as pessoas estão participando diretamente de alguma rede social: *Facebook, Instagram, Telegram, WhatsApp*; ou de forma indireta quando têm alguém próximo a elas que participa.

Para a TAD, o conhecimento é ofertado sempre que houver a demanda para o mesmo; quando o questionamento do aprendiz o conduz à fronteira de seu conhecimento, sua mente passa a explorar novos objetos, então, novas demandas aparecem e a essa teia faz surgir novos objetos, conduzindo o aprendiz para fora da sua zona de conforto. Ou seja, um questionamento leva a outros tantos questionamentos e as respostas a essas perguntas acabam abrangendo e por vezes extrapolando o currículo demarcado.

Segundo a TAD, em (FONSECA, 2015), existe o meio interno, formado pelo cérebro e o meio externo, composto pelas instituições, dentre as quais a escola. O indivíduo

ao participar da vida escolar sofre modificações na plasticidade do seu cérebro, essas mudanças ocorrem devido a ação de neurotransmissores durante as sinapses. A escola está preparada para auxiliar o indivíduo a modelar seu cérebro por meio de um desenvolvimento social e cognitivo, inclusive, com o aprendizado da matemática.

(SANTOS; FREITAS, 2017) e Chevallard (1998) em (FONSECA, 2015), qualificaram as praxeologia ou práxis como um conjunto de elementos associados e concatenados. Nomeando "t", como uma tarefa qualquer; "T", como um tipo de tarefa; "τ", como uma técnica; "θ", como uma tecnologia; e "Θ", como uma teoria.

Para (SANTOS; FREITAS, 2017), citando Chevallard (1998), ainda em (FONSECA, 2015), a praxeologia é representado pela notação: $[T|\tau|\theta|\Theta]$, indicando que uma tarefa "t", pertence a um determinado tipo de tarefa "T", que para ser resolvida necessita de uma técnica "τ", que está amparada em uma tecnologia "θ" e é justificada pela teoria "Θ". **Figura 5.**

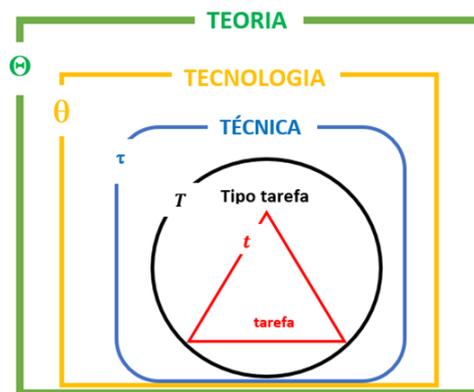


Figura 5 – Representação de praxeologia segundo TAD

Fonte: O autor (2021)

(SANTOS; FREITAS, 2017), trazem que a TAD possibilita a investigação da prática do docente por meio da proxeologia. Para entender a matemática realizada em sala de aula, segundo a organização dos conteúdos valorizados pelo professor em sua prática são necessárias três atividades: **observação, descrição e análise dos aspectos didáticos e matemáticos.**

A organização matemática dos conteúdos caracteriza o objeto matemático sob os quatro componentes descritos na figura 5: Tipo de tarefa, (T); técnica, "τ"; tecnologia, "θ" e teoria, "Θ".

Chevallard (1998), em (FONSECA, 2015), denomina de bloco **prático-técnico** $[T|\tau]$ ou **saber-fazer**, como a primeira parte de uma organização praxeológica e a segunda parte denominou de bloco **tecnológico-teórico** $[\theta|\Theta]$, equivalente ao discurso teórico ou simplesmente sinônimo de saber. O autor indica que a tecnologia, "θ"; têm três funções

básicas: **justificar, explicar e produzir** a técnica, " τ ".

Porém, para Chevallard (1998), ainda em (FONSECA, 2015), existe uma assimetria na utilização das funções da tecnologia, " θ "; principalmente nas praxeologias na área da matemática. A função de **justificar** a técnica " τ ", é muito mais valorizada que a função **explicar e tornar inteligível** a técnica " τ ". Existe uma predisposição para exigência das demonstrações em detrimento da explicação.

Como exemplo da assimetria que acontece entre os dois blocos $[T|\tau]$ e $[\theta|\Theta]$, Chevallard (1998), em (FONSECA, 2015), exemplifica como o **tema de estudo**, é identificado por uma determinada **tecnologia**. No caso os Teoremas de Pitágoras ou de Tales, são identificados, implicitamente, com o bloco, $[\theta|\Theta]$; por produzir e justificar as técnicas " τ " relativas a diversas tarefas. O mesmo acontece com "fatoração" e "resolução de equações"; temos tecnologia e teoria sendo usada como tipos de tarefas.

As práxis pedagógicas que costumam valorizam, acentuadamente, a técnica tendem a usar até a teoria como técnica. Bordões didáticos como: "**a interpretação faz parte da prova**" evidenciam que o comando da atividade valoriza o bloco tecnológico em detrimento do bloco teórico; a função **justificar**, do bloco tecnológico-teórico $[\theta|\Theta]$, está sendo mais valorizada que a função **explicar**.

Contudo; Gascón (2003), em (SANTOS; FREITAS, 2017), resume as instituições em um espaço tridimensional descrito por três eixos: **modernista**, no qual está a experimentação; **teoricista**, no qual está o bloco $[\theta|\Theta]$, e o **tecnicista**, no qual está o bloco $[T|\tau]$. **Figura 6**.

Gáscon (2003), ainda em (SANTOS; FREITAS, 2017), informa que os eixos **teoricista** e **tecnicista** são processos didáticos mecânicos que consideram o discente como "caixa vazia" ou como "autômato", respectivamente. Porém, o eixo da **experimentação** valoriza a exploração de problemas que desafiam o educando a utilizar várias técnicas diferentes juntamente com os conhecimentos e saberes já internalizados. Portanto, o eixo modernista, corrobora com as teorias de valorização do processo social e histórico do indivíduo.

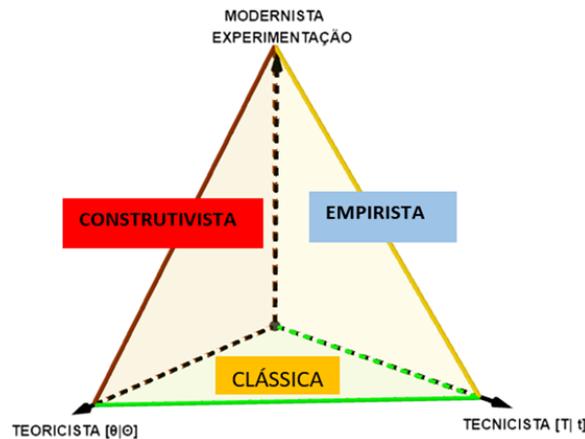


Figura 6 – Modelo epistemológico de organizações didáticas.

Fonte: O Autor (2021)

Da combinação do **tecnicismo** $[T|\tau]$, com o **teoricismo** $[\theta|\Theta]$, surge a **epistemologia clássica**. Para os clássicos, o processo de ensino é controlado na íntegra pelo professor. Os eixos **teoricista** $[\theta|\Theta]$ e **modernista** combinados formam o plano que representa a abordagem **construtivista**. Para o **construtivista**, as atividades contextualizadas tornam o aprendizado resultado ativo da construção do conhecimento. Por fim, o plano **empirista**, que resulta da combinação do eixo da **experimentação** como o eixo **tecnicismo** $[\theta|\Theta]$. A organização epistemológica empirista considera o aprendizado matemático como resultado de um processo indutivo que tem como base a imitação do modelo proposto utilizando várias técnicas de abordagens.

Apesar da praxeologia ter ficado evidenciada após a divulgação dos estudos de Chevallard (1998), estudos anteriores do autor indicam que a praxeologia tem sua gênese na Teoria da Transposição Didática (TTD) cujo objetivo, segundo (FONSECA, 2015), é entender e unificar as diversas relações entre os fenômenos didáticos.

Para Chevallard (1998) tanto em (FONSECA, 2015); como em (SANTOS; FREITAS, 2017); na gênese da TAD estão presente três axiomas: Objeto (O), Pessoas (X) e Instituições (I); formando a trinca ordenada (O, X, I) .

O objeto é a pedra fundamental da construção de toda teoria, como partícula inicial tudo é objeto. É aceito, por axioma, que a existência de um objeto está vinculada, apenas, a condição de que uma pessoa “X” ou uma instituição “I” o reconheça.

Chevallard (1998), tanto em (FONSECA, 2015); como em (SANTOS; FREITAS, 2017); representou $R(X, O)$, como a relação de uma pessoa “X” com um objeto “O” e $R_I(O)$, como a relação de uma instituição “I” com um objeto “O”.

(FONSECA, 2015) indica que a taxonomia dos objetos é trazida por Chevallard

(1994) e por Bosch e Chevallard (1999). **Objetos ostensivos** (O_o), são aqueles que têm forma sensível ou material e podem ser manipulados; enquanto os **Objetos não ostensivos** (O_{no}) são os conceitos e ideias e não podem ser manipulados, apenas evocados quando da manipulação dos objetos ostensivos.

(FONSECA, 2015), designou a manipulação do objeto ostensivo como $O_o \rightarrow m$ e a evocação do objeto não ostensivo como $O_{no} \rightarrow e$. A tabela 1 apresenta a classificação dos objetos ostensivos com respectiva exemplificação.

Tabela 1 – Taxonomia dos Objetos Ostensivos

OBJETOS OSTENSIVOS	EXEMPLOS
MATERIAIS	LÁPIS, CANETA COMPASSO
GESTUAIS	GESTOS, ACENO
GRÁFICOS	ESQUEMAS e DESENHOS
ESCRITURAIS	ESCRITAS e FORMALISMO
DISCURSIVOS	PALAVRAS e DISCURSOS

Fonte: O Autor (2021)

A figura 7, mostra um exemplo da relação entre objetos ostensivos e não ostensivos descrito por Chevallard (1994), em (FONSECA, 2015). Nesse exemplo, do campo da matemática, a relação entre objetos ostensivos e não ostensivos aplicados na resolução da equação exponencial $2^x = 10$, é aplicada a definição de logaritmo e a uma técnica para chegar ao resultado.

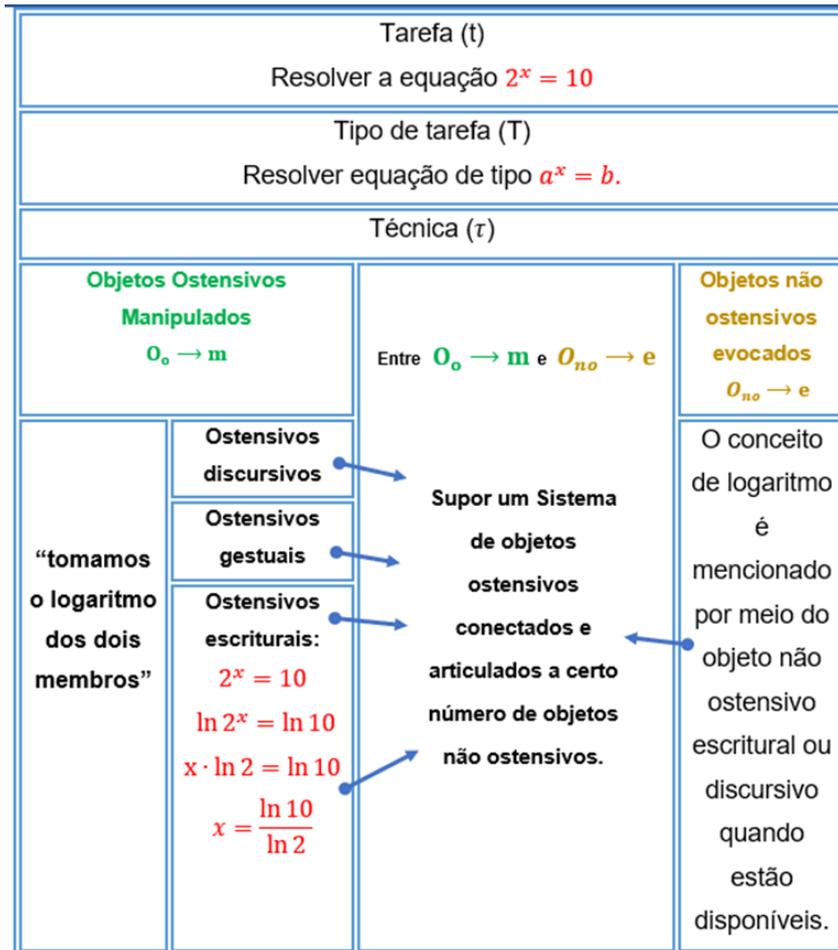


Figura 7 – Constituição da técnica τ $O_o \rightarrow m$ e $O_{no} \rightarrow e$

Fonte: O autor (2021)

A tarefa (t), resolver a equação $2^x = 10$, é um caso específico de resolução do tipo de tarefa (T), resolver a equação da forma genérica $a^x = b$. A técnica (τ), aplicada consiste em aplicar, por evocação, o objeto não ostensivo, logaritmo; a evocação acontece por meio do objeto ostensivo discursivo: "**Tomamos o logaritmo natural dos dois membros**", a evocação do logaritmo por meio do discurso pode ser acompanhado por objetos gestuais; a solução é registrada no papel ou no quadro por meio dos ostensivos escriturais ou gráficos até a conclusão da tarefa, onde o valor de $x = \frac{\ln 10}{\ln 2}$.

Percebe-se que o domínio sobre os elementos não ostensivos (O_{no}) é proporcional a quantidade de manipulação dos objetos ostensivos (O_o). Ou seja, se o aluno tem a sua disposição uma grande quantidade de noções e definições, então precisará de mais objetos ostensivos para manipular os conceitos visando realizar a tarefa (τ). (FONSECA, 2015)

É interessante mostrar um exemplo aplicado no campo das funções trigonométricas. A **figura 8**, mostra a relação entre os objetos ostensivos (O_o) e não-ostensivos, O_{no} para resolução da **tarefa** (τ). Para ficar alinhado com o tema deste trabalho foi

apresentado a construção, no plano cartesiano ortogonal, do gráfico da função, $F(x) = 2.\text{sen}(4x) + 1$, para o domínio $0 \leq x \leq 2\pi$.

Para resolver a **tarefa (t): *construção do gráfico da função trigonométrica***, $F(x) = 2.\text{sen}(4x) + 1$; é necessário saber que a tarefa (t) está contida no tipo de tarefa **(T): *construção do gráfico de funções da forma: $F(x) = b.\text{sen}(cx + d) + a$*** .

Para aplicar a técnica (τ), é preciso evocar, dentre outros, os objetos não ostensivos (O_{no}): conceito e representação em plano cartesiano, conceito de função seno e noção da forma senoidal modificada pelos parâmetros “a”, “b”, “c” e “d”; noção de determinação do conjunto imagem com os parâmetros “a” e “b”, noção de determinação do período por meio do parâmetro “c”; e o deslocamento no eixo horizontal, determinado pelo parâmetro “d”. Na evocação dos objetos não manipuláveis (O_{no}), são utilizados objetos ostensivos **discursivos, gestuais e escriturais**. Esses objetos são usados para explicar e concatenar as sentenças pensadas, ou seja, os objetos ostensivos organizam o saber interno do indivíduo. Desta forma, é coerente a fala de Bosch e Chevallard (1999) em (FONSECA, 2015). “**Tudo é objeto**”.

Tarefa (t)			
Construir o gráfico da função $F(x) = 2 \cdot \text{sen}(4x) + 1$.			
Tipo de tarefa (T)			
Construir o gráfico da função da forma: $F(x) = b \cdot \text{sen}(cx + d) + a$.			
Técnica (τ)			
Objetos ostensivos Manipulados $O_o \rightarrow m$		$O_o \rightarrow m$ e $O_{no} \rightarrow e$	Objetos não ostensivos evocados $O_{no} \rightarrow e$.
OSTENSIVOS DISCURSIVOS, GESTUAIS e ESCRITURAIS			
<ul style="list-style-type: none"> O conjunto imagem é determinado pelo intervalo $[a - b, a + b]$. A senóide inicia no ponto (d, a). O período da função determinado por $\frac{2\pi}{c}$. Domínio: $[-d, 2\pi - d]$ 	<ul style="list-style-type: none"> $a = 1$ $b = 2$ $c = 4$ $d = 0$ $Im = [-1, 3]$ $(0, 1)$ Início da senóide. $2p = \frac{2\pi}{4}$ $2p = \frac{\pi}{2}$ $D = [0, 2\pi]$ Construção do gráfico senoidal 	<p style="text-align: center;">Os conceitos e noções são evocadas e expressas pelos ostensivos discursivos gestuais e escritos.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Conceito de plano cartesiano. Conceito de função seno e noção da forma senoidal. Noção para encontrar a imagem. Noção para encontrar o período da função. Noção para encontrar o domínio da função.

Figura 8 – Organização Praxeológica, objetos não ostensivos e ostensivos na construção do gráfico da função seno

Fonte: O Autor (2021)

Após obtenção e escrituração dos **objetos ostensivos** (O_o): *conjunto imagem*, $Im = [-1, 3]$; *período*, $P = \frac{\pi}{2}$; *conjunto domínio*, $D = [0, 2\pi]$ e *ponto de corte no eixo y*, $(0, 1)$; foi possível a determinação do **objeto ostensivo**: construção do gráfico da senoide, $F(x) = 2 \cdot \text{sen}(4x) + 1$.

Para representar o gráfico foi utilizado o **objeto ostensivo**, *plano cartesiano ortogonal*. **Figura 9**.

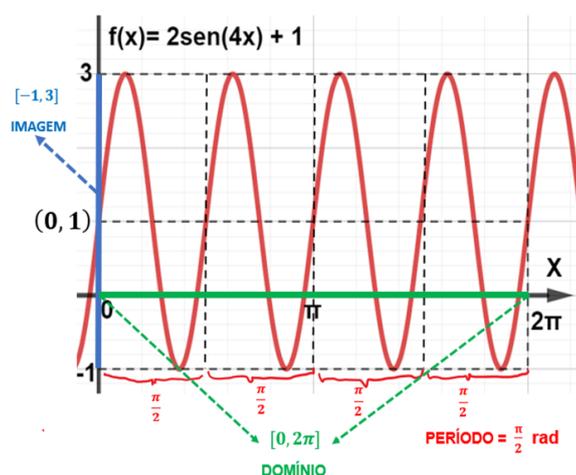


Figura 9 – Ostensivos: Plano Cartesiano Ortogonal e a Senóide.

Fonte: O autor (2021)

Para Chevallard (1998), em (SANTOS; FREITAS, 2017), a equipagem praxeológica matemática do professor não deve se resumir aquilo que está restrito nos currículos ou na organização praxeológica didática da instituição a qual pertence. Porque, segundo Bosch e Gascón (2010), também em (SANTOS; FREITAS, 2017), o modelo epistemológico da matemática dominante na organização sustenta e apoia essa organização praxeológica didática. O professor ao entender o ambiente escolar e as restrições imposta na prática deve organizar sua sequência praxeológica didática conforme os seis momentos didáticos proposto por Chevallard (1998). **Tabela 2.**

Tabela 2 – Momentos Didáticos Propostos

MOMENTOS DIDÁTICOS E PRAXEOLOGIA EM MATEMÁTICA	
1	ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA
2	EXPLORAÇÃO DO TIPO DE TAREFA (T)
3	CONSTITUIÇÃO DO AMBIENTE TECNOLÓGICO-TEÓRICO θ
4	TRABALHO COM A TÉCNICA τ
5	INSTITUCIONALIZAÇÃO
6	AVALIAÇÃO

Fonte: O Autor (2021)

- 1. Organização matemática**, iniciar novos conteúdos pelas definições básicas ou por uma situação problema, realizando um determinado tipo de tarefa (T).
- 2. Exploração do tipo de tarefa (T)**, é elaboração de uma técnica (τ).
- 3. Constituição do ambiente tecnológico-teórico (θ)**, relativo à técnica (τ).

4. Trabalho com a técnica (τ); testar e melhorar a técnica verificando se atende a resolução de todas as tarefas (t), para um tipo (T) de tarefa visando torná-la mais confiável e eficaz.
5. **Institucionalização**, o professor decide quais conteúdos são relevantes para serem cobrados no sexto momento.
6. **Avaliação**, articulada como a **institucionalização**, o professor, analisa com os alunos, a praxeologia adotada, seus limites e possibilidades, decidindo se a avaliação deve ou não existir.

1.6 NÍVEIS DE FUNCIONAMENTO DO CONHECIMENTO

(FONSECA, 2015), traz os NFC como sendo um conjunto de ferramentas desenvolvidas pela pesquisadora francesa Aline Robert (1997 e 1998) visando montar uma análise epistemológica e didática que possibilite a organização hierárquica dos conhecimentos.

Essa organização hierárquica auxilia na preparação dos cenários didáticos de aprendizagem. Para Robert (1987 e 1998), em (FONSECA, 2015), os conteúdos segundo os NFC são subdivididos em três níveis: **Nível técnico (NT)**; **Nível Mobilizável (NM)** e **Nível Disponível (ND)**.

Esses níveis mensuram o grau operacional de funcionamento dos conhecimentos. Por meio dessa classificação é possível identificar em que etapa do desenvolvimento matemático e trigonométrico se encontra o estudante.

A pesquisa conduzida por Robert (1987,1988) e trazida por (FONSECA, 2015), indica que esses Níveis de Funcionamento do Conhecimento NFC, podem ser aplicados nas tarefas, nas avaliações de aprendizagem e nas avaliações de diagnósticos. A hierarquia desses níveis indica um aumento de complexidade do nível técnico para o nível disponível, passado pelo nível mobilizável. Para a pesquisadora é fundamental que seja respeitada a ordem de complexidade das tarefas para melhor oportunizar o aprendizado e compreensão das noções matemática, em especial, as trigonométricas.

As **figuras 10, 11 e 12**; trazem em detalhes a hierarquia das tarefas e o que representam para Aprendizagem Matemática conforme os níveis: NT, NM e ND, seguindo a classificação de Robert (1997, 1998) em (FONSECA, 2015).

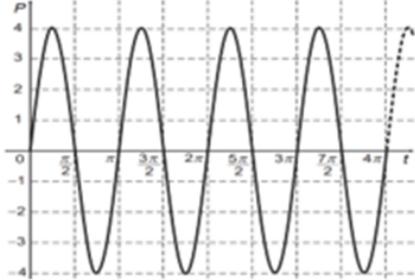
NÍVEL DISPONÍVEL - ND			
<p>Aprendizado Matemático representa um trabalho que transcende o concreto e depende da capacidade de abstração do aluno para gerar um modelo de solução. Pode-se usar mais de uma teoria, definição, propriedade e fórmula para que tarefa executada. Aplicações concatenada de fórmulas, definições e propriedades.</p>			
<p>Tarefas cuja resolução depende única exclusivamente da capacidade do aluno associar teorias, propriedades e definições. Nenhuma indicação é passada ao aluno, o comando, apesar de claro não restringe a atuação do aluno a um campo do conhecimento.</p>			
Propriedades	Teoremas	Definições	Fórmulas
<p>EXEMPLO:</p> <p>Enem 2019 (adaptada) - Os movimentos ondulatórios (periódicos) são representados por equações do tipo $\pm A \text{sen}(wt + \theta)$, que apresentam parâmetros com significados físicos importantes, tais como a frequência $w = \frac{2\pi}{T}$, em que T é o período; A é a amplitude ou deslocamento máximo; θ é o ângulo de fase $0 \leq \theta < \frac{2\pi}{w}$, que mede o deslocamento no eixo horizontal em relação à origem no instante inicial do movimento. O gráfico representa um movimento periódico, $P = P(t)$, em centímetro, em que P é a posição da cabeça do pistão do motor de um carro em um instante t, conforme ilustra a figura.</p>  <p>Determine expressão algébrica que representa a posição $P(t)$, da cabeça do pistão, em função do tempo t.</p>			

Figura 12 – Detalhamento do Nível Disponível

Fonte: O Autor (2021)

Os Níveis de Funcionamento do Conhecimento NFC, de Robert (1997,1998) descrevem como o conhecimento precisa ser capilarizado para que o aluno consiga assimilá-lo, a dosagem é funcional e a hierarquia crescente possibilita que o aluno que tenha dificuldade passa vencer as etapas, bastando para isso aumentar a sua curva de esforço pessoal. Já o aluno que apresentar menor dificuldade pode avançar sem que haja o risco de ficar ocioso e deixar de se sentir desafiado.

É necessário estar atento porque mesmo o nível técnico, no ensino das funções

trigonométrica, para muitos alunos, pode apresentar característica dos níveis mobilizável e disponível.

Para calcular o valor de $tg15\pi$, o aluno precisa saber:

- a noção de tangente no círculo,
- o conceito e aplicação de radiano,
- a localização de arcos e sua composição no sentido anti-horário,
- associar por equivalência (15π) com (π),
- relacionar o arco com segmento linear que representa a tangente.

Para calcular o $senx$, partindo do cosseno e vice-versa, o aluno precisa aplicar a relação fundamental da trigonometria. Realmente é nível técnico; porém, existe alguns entraves que podem equiparar essa tarefa de nível técnico aos níveis mais complexos. Muitos alunos apresentam:

- Dificuldade em entender o que significa $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ e que aparece no enunciado. Apesar de muitos alunos chegarem na resposta correta, o fato de não apresentarem o resultado negativo do $senx$, indica que estão condicionados a considerarem apenas a raiz positiva; e não a condição do sinal positivo do seno e do cosseno, devido a condição imposta por $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.
- Dificuldade em aceitar que $cosx$ é o termo a ser substituído na relação fundamental da trigonometria: $sen^2x + cos^2x = 1$; existe resistência em considerar o **COSX** como uma variável a ser substituída.
- Dificuldade em operacionalizar a resolução de equação. Os princípios aditivo e multiplicativo e a radiciação são processos que os alunos costumam não acertar.

(FEIJÓ, 2018) indica que a trigonometria é a um assunto difícil por si só e cita Demir e Heck (2013) que diz: “a natureza complexa da trigonometria torna desafiador para o aluno compreender o tema de forma profunda e conceitual”. Essa posição é corroborada pela fala de Weber (2005), também em Raquel (2018): “a trigonometria é um dos primeiros tópicos da matemática que relaciona o raciocínio algébrico, geométrico e gráfico”.

Portanto, mesmo nas tarefas mais simples das funções e equações trigonométricas é necessário usar uma gama de operações aritméticas, nas quais, historicamente, o aluno não está no nível operacional. O fato é que a trigonometria paga um preço alto porque expõe a fragilidade do aluno na aritmética básica e na álgebra elementar; mesmo não

sendo a causa do baixo desempenho dos alunos a trigonometria é taxada como matéria difícil, tanto no ensino básico, como no ensino superior.

(AZÊVEDO; RÊGO, 2016), trazem que a matemática possui uma linguagem própria e específica cujo os temas nem sempre guardam relação direta com a língua materna. O ensino da matemática tem por base a comunicação na língua materna, mas o professor precisa evitar distanciamento entre a linguagem matemática e a língua materna. Porém a linguagem matemática para ser compreendida requer processos cognitivos de assimilação e compreensão diferente dos usados na língua materna.

Para D'Amore (2006), em (AZÊVEDO; RÊGO, 2016), uma razão para linguagem matemática ser tão específica é o fato dos seus objetos não poderem ser acessados diretamente, por serem objetos que remetem e evocam ideias, conceitos e axiomas. A característica de ser precisa e concisa e sua universalidade tem acarretado dificuldade para o estudante porque no seu cotidiano utiliza apenas o discurso em língua materna.

D'Amore (2006), citado por (AZÊVEDO; RÊGO, 2016), indica ainda que além das características de precisão e concisão a linguagem matemática ainda possui um código **simiótico**⁸ próprio capaz de conferir a essa linguagem uma densidade de informações muito grande, o que lhe confere um poder de síntese acentuado, com o qual podem ser geradas definições e proposições que se apresentam desprovidas de sentido para o aprendiz.

O que precisa ficar claro é que a trigonometria é uma linguagem e como tal requer que o aluno passe por um processo de alfabetização. Aprender uma linguagem requer tempo, para maturação dos conceitos e oportunidade para utilização dos mesmos. O aluno tem pouco tempo para efetivar a sua alfabetização na trigonometria, basicamente em apenas três meses o aluno tem que sair do nível zero de conhecimento para o nível de fluência operacional.

Na questão do **ENEM**⁹ apresentada do nível ND, figura 12; são incontáveis os processos e saberes que um aluno precisa ter para chegar a solução. Apenas saber as modificações causadas pelos diversos parâmetros que transformam a função trigonométrica; não seria suficiente para responder à questão, sobretudo quando se leva em consideração o tempo disponível para resolução e as condições de pressão a qual está submetido o aluno. Mesmo para um aluno dotado de um bom letramento em língua portuguesa e trigonometria e com uma capacidade de leitura dinâmica acima da média a questão é considerada difícil.

Isso leva a uma outra questão perigosa para o ensino dos fundamentos da trigonometria; a quantidade de questões que aparece nas provas externas é pequena e o grau de

⁸ Relativo a semiótica, “[...] é a ciência que tem o objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, o exame dos modos de constituição, produção de significado e sentido [...]” (SANTAELLA 1988, P. 15) em (AZÊVEDO; RÊGO, 2016).

⁹ Exame Nacional do Ensino Médio.

dificuldade dessas questões é considerado muito alto, sua resolução requer muitos saberes que devem ser usados concatenados e de forma analítica. É comum ouvir de bons alunos, e até de professores, a seguinte frase: “*questão de trigonometria, pula! Deixa para resolver no final, se sobrar tempo você volta e tenta resolver*”.

Ou seja, é necessário entender que os NFC devem ser respeitados, e os *deficits* nos pré-requisitos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria devem ser considerados e sanados. Porque, mesmo se for considerada apenas hipótese extrema e subestimada de que o único benefício do ensino da trigonometria seja motivar o aluno a completar as lacunas existentes em seus conhecimentos básicos nas áreas acima citadas; ainda assim, o benefício do ensino da trigonometria já seria incalculável.

Para corroborar com os preceitos dos NFC de Robert(1997,1998), a noção de **obstáculo didático** de Guy Brousseau (1983), trazida por (SILVA, 2019), faz alusão aos obstáculos epistemológicos de Gastón Bachelard e a teoria de equilíbrio de Piaget; para o autor esses obstáculos didáticos estão ligados intrinsecamente a erros na escolha do tipo de tarefas.

(SILVA, 2019) cita, Brousseau (1983) e Almouloud (2007) para indicar que esse erro é consequência do surgimento de concepções espontâneas ou reconstruídas que se tornam obstáculos didáticos na aquisição e entendimento de novos conceitos quando são acrescidos a uma rede de representações cognitivas.

Para Brousseau (1983), ainda em (SILVA, 2019) os obstáculos se manifestam pela incapacidade do aprendiz de compreender certos problemas (tarefas para TAD).

Portanto, é necessário aplicar os NFC nas tarefas trigonométricas não só para oportunizar o letramento nesse ferramental tão importante para modelar os fenômenos periódicos; mas também, para minimizar o surgimento dos obstáculos didáticos de Brousseau (1983) e Almouloud (2007) citados em (SILVA, 2019). Afinal, quando a tarefa está muito acima da capacidade do aprendiz, simplesmente, é abandonada e o benefício da tentativa e erro é perdido.

1.7 DIFICULDADE NO APRENDIZADO

A literatura acadêmica que trata do tema Dificuldades no Aprendizado da Matemática (DAM) é pouco abundante, diz (FEIJÓ, 2018), citando: Weber (2005), Moore (2010), Demir (2012); Demir e Heck (2013). Porém, a autora ressalta o fato da produção acadêmica atual ser capaz de trazer luz a esse tema de relevância inquestionável para as ciências exatas.

(SILVA, 2019) cita Feijó (2018) para informar que as dificuldades de aprendizagem se caracterizam por impedir o percurso natural de aquisição de conhecimento. Para o

autor, as dificuldades estão ligadas a obstáculos didáticos de Brausseau (1983), fazem parte do processo de constituição e construção do conhecimento e precisam ser estudadas e entendidas para que seja retirada do seu status a aversão.

Para (FONSECA, 2015), as dificuldades na aprendizagem da matemática, em especial, na aprendizagem das funções trigonometria (DAMFT), levam a dificuldades na disciplina Cálculo Diferencial I; porque a resolução de limites reque um trato diferenciado das propriedades das funções trigonométricas.

Para (SILVA, 2019), Fonseca (2015) chegou a essa conclusão após articular o seu trabalho tendo como ancora as relações com Psicologia Cognitiva e a Neurociência Cognitiva, e como bússola as lentes de Ausubel (1982) e Sternberg (2010).

Além disso, sua conclusão foi corroborada por autores como Nasser (2009), que tentou entender a **etiologia**¹⁰ das Dificuldades de Aprendizado Matemático (DAM) e fez alusão ao desempenho dos alunos na disciplina Cálculo I e por Resende (2013), quando observou que as dificuldades na disciplina Cálculo I, são de origem epistemológica e estão na articulação da geometria com as funções. Para o autor, a transposição deve acontecer no ensino médio por meio de tarefas que envolvam variedades de funções.

Canindé (2006), em (SILVA, 2019), argumenta sobre a importância dos conhecimentos das funções trigonométricas para a compreensão dos conceitos da física clássica, principalmente para compreensão de vetores e decomposição cartesiana de forças. O autor relata que em seus 18 anos de trabalho com turmas de 8º ano e do ensino médio, os alunos apresentaram dificuldades ou durante as aulas de trigonometria, ou quando são abordados problemas relacionados com o tema. Para o autor, as dificuldades podem impactar, negativamente, a resolução de situações problemas que envolvam trigonometria e física clássica.

(SILVA, 2019), apresenta os resultados da investigação de Brito e Morey (2004), nele está indicado que a raiz histórica das dificuldades dos professores de ensino fundamental com o tema trigonometria, está relacionada com a sua formação acadêmica. O excesso de formalismo foi apontado como maior impasse porque os professores tendem a reduzir esse formalismo na sala de aula.

Lobo da costa (1997), também em (SILVA, 2019), verificou que as sequências didáticas, no ensino da trigonometria, que apresentaram maiores eficácias são aquelas que começam com materiais manipuláveis e depois passam para prática computacional; a prerrogativa principal da investigação de Lobo da costa (1997); para (SILVA, 2019), é a concretização de conceitos visto, porque a trigonometria tem seu aprendizado dependendo de um nível alto de abstração por parte dos alunos.

¹⁰ Ramo do conhecimento que se dedica ao estudo e à pesquisa acerca daquilo que pode determinar as causas e origens de um certo fenômeno (ou de qualquer coisa). <https://www.dicio.com.br/etiologia/> acessado em 12 março 2021 às 13:20h.

Weber (2005), em (FEIJÓ, 2018), ressalta o papel das figuras geométricas na aprendizagem dos conceitos das funções trigonométrica. Saber relacionar com clareza as funções trigonométricas com modelos geométricos apropriada é fundamental.

Na argumentação de sua pesquisa o autor relata que muitos alunos tiveram dificuldade de determinar o $\text{sen}\theta$, mesmo tendo acesso ao valor de θ ; para uma parte dos alunos seria necessário ter acesso a um triângulo com informações extras. Falta a esses alunos a habilidade de construir mentalmente objetos geométricos para ajudá-los na modelagem trigonométrica.

Orhun (2004), em (FEIJÓ, 2018), destaca as dificuldades apresentadas por uma parte de alunos de sua pesquisa com estudantes do ensino médio:

- não perceber que um número real pode expressar um ângulo formando o argumento de uma função trigonométrica;
- acham inadequado usar radiano para conceituar e para medir definir

Em outro estudo Orhun (2010), também em (FEIJÓ, 2018), a pesquisa com alunos do primeiro ano apresentou:

- muitos estudantes só consideram o ângulo em radiano quando apresentam π no argumento,
- apesar de fazerem corretamente a convenção a transformação de ângulos em grau para radiano, não conseguem trabalhar de forma eficiente com ângulos representados por um número real quando estes estão sem notação de grau,
- uma parte apresentou como resposta a questão: qual o domínio da função seno? o intervalo $[0^\circ, 360^\circ]$; outra parte, (mais expressiva), apresentou como resposta o intervalo $[-1, 1]$. Para o autor esse fato evidenciou erros conceituais na definição e na transposição do círculo para reta real.
- Apesar de conhecer o conceito de função, dúvidas na interpretação ficam evidentes quando tratam as funções trigonométricas como as funções polinomiais quando realizam operações.

Brown (2006), em (FEIJÓ, 2018), apresentou o estudo realizado com cento e vinte alunos de alto desempenho, concluiu que é **incompleta** e ou **fragmentada** a compreensão dos alunos em relação às formas de ver o seno e cosseno, quer seja como coordenadas de um ponto no círculo unitário, ou como proporções dos lados de um triângulo retângulo

ou como gráfico das funções. Para autora, é frágil a concepção de ângulo para uma boa parte dos alunos; e aponta que há falha na conexão entre uma rotação ciclo unitário e um ponto no gráfico das funções.

Independente da forma como são definidas e apresentadas as funções trigonométricas, quer seja por razão dos lados de um triângulo retângulo, ou pelo método de círculo unitário ou pela combinação dos dois métodos, seus gráficos não passam de diagramas produzidos por calculadora gráfica ou por software de matemática e permanecem misteriosos. É o que conclui o estudo, com alunos da educação básica de Demir e Heck (2013), presente no trabalho de (FEIJÓ, 2018).

Quando o seno, cosseno e tangente apresentam valores negativos os alunos têm interpretação inadequada e não conseguem identificar o quadrante. Essa é conclusão do estudo Chiconga (2016) em (FEIJÓ, 2018).

O trabalho de Gur (2009), em (FEIJÓ, 2018), indica que a relação fundamental $\text{sen}^2 + \text{cos}^2 = 1$, é memorizada, mas, está desassociada de sua justificativa. O estudo também apresentou a taxonomia dos erros no ensino da trigonometria apresentados em cinco grupos:

- dados mal usados,

- interpretação equivocada da linguagem,

- inferências lógicas inválidas,

- definições destorcidas,

- erros técnicos e/ou mecânicos.

A raiz do erro é classificada por Gur (2009), ainda em (FEIJÓ, 2018), em três grupos: **conceitos**, **processos** e **procepto**¹¹. **Figura 13.**

¹¹ “quando um simbolismo é usado tanto para representar um processo de manipulação quanto o resultado desse processo”. (TALL 2002, p. 262; tradução de (FEIJÓ, 2018))

CLASSIFICAÇÃO QUANTO A RAIZ DO ERRO		
GRUPO	DESCRIÇÃO	EXEMPLO
CONCEITOS	Relacionado ao objeto ou símbolo matemático. Interpretação equivocada.	não conseguir identificar a hipotenusa.
PROCESSOS	Relacionado à capacidade de usar operações. Estão contidos aqui os erros técnicos.	Não encontrar a aproximação do $\sin\theta$, dado o valor do $\cos\theta$.
PROCEPTOS	Relacionado à capacidade de reconhecer um simbolismo como processo.	Não reconhecer o $\sin x$ como função e também como um valor numérico.

Figura 13 – Classificação quanto a Raiz do Erro.

Fonte: o Autor (2021)

2 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Em (LAGES et al., 1997), temos que o objetivo inicial da trigonometria era a resolução de problemas de triângulos, após a criação do Cálculo Infinitesimal e do seu prolongamento para a Análise Matemática, surgiu a necessidade de atribuir ao seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente o status de função Real de variável Real.

Para (LAGES et al., 1997), a importância das funções trigonométricas foi expandida quando da descoberta, em 1822, de **Joseph Fourier** de que toda função periódica, com poucas restrições, é uma soma finita ou infinita de funções do tipo: $a \cdot \cos(nx) + b \cdot \sin(nx)$. Como as funções trigonométricas circulares são periódicas e adaptáveis a modelagem de fenômenos periódicos, oscilatórios ou vibratórios aconteceu a disseminação e aplicação do seu uso em fenômenos como:

- movimento planetário;
- ondas sonoras;
- corrente elétrica alternada;
- circulação de sangue e batimentos cardíacos.

Para o aluno do ensino básico, aprender trigonometria e suas funções é condição indispensável para entender como acontece a modelagem dos fenômenos periódicos. Além dessa relevância incontestável, ainda existe o benefício colateral do processo de aprendizagem da trigonometria revelar quanto conhecimento nas áreas de aritmética, geometria e álgebra o aprendiz possui. Isso porque, grande parte da dificuldade no aprendizado da trigonometria está atrelada a falta de conhecimento dos pré-requisitos nas citadas áreas. Portanto, o aprendizado da trigonometria é mais uma oportunidade para o aluno aprender esses pré-requisitos.

Pegg (1992, p.33) e Weber (2005, p.91), em (FEIJÓ, 2018), indicam que existir evidências da necessidade do aluno está em um nível adequado de pensamento geométrico para começar a estudar trigonometria. Caso contrário, não conseguirá relacionar de maneira consistente e fluídica os raciocínios algébrico, geométrico e gráfico.

2.1 FUNÇÃO SENO

Antes de definir as funções seno e cosseno é importante lembrar que a função de Euler associou a cada arco da circunferência, em radiano, o número real “t”. (LAGES et

al., 1997)

A mesma preocupação teve (PAIVA, 2015), quando mencionou que cada medida de arco “ x ” associada a um ponto da circunferência de raio 1, pode ser identificado com o número Real “ x ”. O autor concluiu afirmando que cada Real “ x ” pode associar apenas um único valor para o seno de x e um único valor para cosseno de x .

(PAIVA, 2015), define a função seno como aquela que associar a cada número Real “ x ”, o número também real y , determinado pelo seno de x e limitado no intervalo Real, $[-1, 1]$. Simbolicamente, $F : R \rightarrow [-1, 1]$ tal que $f(x) = \text{sen}x$, tem-se:

- $D = R$;
- $Im = \{y \in R \mid -1 \leq y \leq 1\}$;

Para (LAGES et al., 1997), a **função seno** é a ordenada y , da função de Euler $E(t) = (\text{cos}t, \text{sent})$, marcada na circunferência unitária. Ou seja, $y = \text{sent}$, com $t \in R$ e $-1 \leq y \leq 1$.

(NETO, 2015) indica como função $\text{sen}R : \rightarrow R$, aquela que associa a cada $x \in R$ o valor do seno de um arco x radianos. Para o autor o conjunto imagem está no intervalo $[-1, 1]$ e a função deve ser qualificada como **ímpar** e **periódica**. Dessa forma, tem-se que $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$.

Observa-se que o deslocamento de um ponto sobre a circunferência de raio unitário, no sentido anti-horário, projeta um segmento no eixo vertical y . É importante perceber que arcos marcados sobre a circunferência provocam segmentos marcados sobre o eixo Y . Ou seja, a função seno transforma "**pedaços**" de curvas (arcos) em segmentos de retas. É importante também a percepção de que cada volta dada na circunferência equivale a um ciclo completo de deslocamentos sobre o eixo Y . Considerando a função $f(x) = b \cdot \text{sen}(kx)$; para $k = b = 1$, observa-se que a variação no eixo y :

- começa em *zero* e vai até 1, para arcos do 1º quadrante. **Figura 14**;
- começa em 1 e vai até *zero*, para arcos do 2º quadrante. **Figura 15**
- começa em *zero* e vai até -1 , para arcos do 3º quadrante. **Figura 16**
- por fim, começa em -1 e volta a ser *zero*, para arcos do 4º quadrante. **Figura 17**

Nas voltas subsequentes tudo se repete. Portanto, a **função** $f(x) = \text{sen}x$; tem período $T = 2\pi$ e conjunto imagem limitado ao intervalo $-1 \leq y \leq 1$. Apesar das **figuras** 14, 15, 16, 17; representarem o que acontece na projeção $f(x) = \text{sen}x$, para a primeira

volta; é possível generalizar que para função; $f(x) = b.\text{sen}(kx)$, com $x, b, k \in R$ e $b, k \neq 0$. Tem:

- período $T = \frac{2\pi}{|k|}$;
- imagem "y" está limitada ao intervalo $-b \leq y \leq b$, onde "b" representa o raio da circunferência "λ" na qual estão marcados os arcos "x".

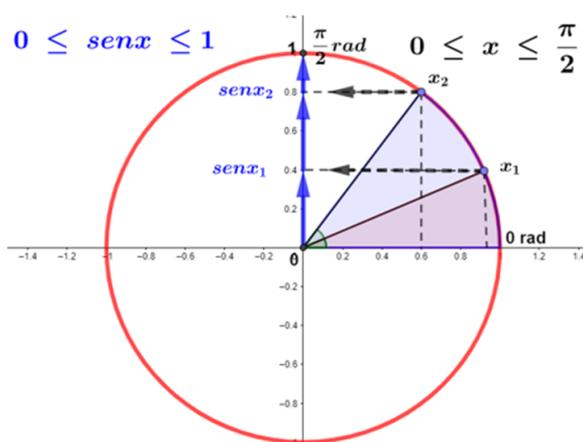


Figura 14 – Variação da função seno no 1º quadrante

Fonte: O Autor (2021)

figura 14 traz a variação dos arcos do 1º quadrante, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, projetando segmentos sobre o eixo vertical y. O aumento do arco "x" faz aumentar o valor do segmento em y até chegar em **1**. Portanto, quando os arcos variam de **zero** a $\frac{\pi}{2}$ radianos as imagens $y = \text{sen}x$, crescem de **zero a 1**; $0 \leq \text{sen}x \leq 1$, tornando a função seno **crescente e positiva** para o primeiro quadrante.

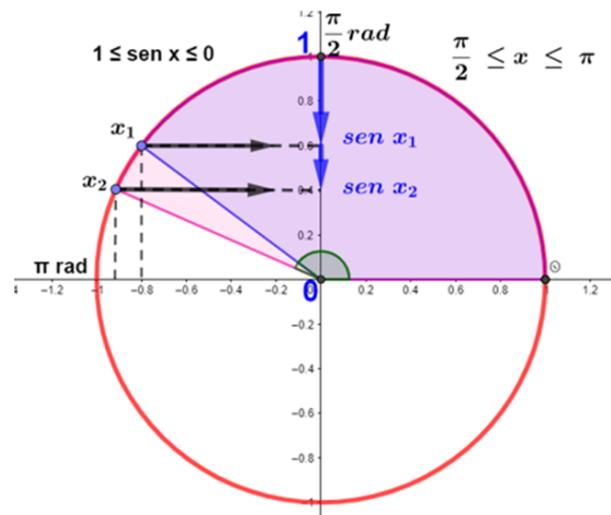


Figura 15 – Projeção da função seno no 2º quadrante

Fonte: O Autor (2021)

A **figura** 15 traz a variação dos arcos do 2º quadrante, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$, projetando segmentos no eixo vertical y , o aumento do arco "x" faz diminuir a medida do segmento em y , de 1 até chegar em zero. Portanto, quando os arcos variam de $\frac{\pi}{2}$ a π radianos, a imagem $y = \text{sen}x$, varia de **um** a **zero**, $1 \geq \text{sen}x \geq 0$; tornando a função seno **decrecente e positiva** para arcos do segundo quadrante.

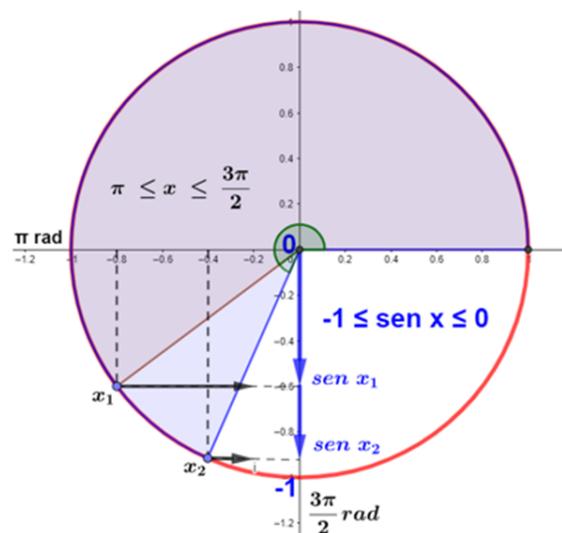


Figura 16 – Projeção da função seno no 3º quadrante

Fonte: O Autor (2021)

A **figura** 16 traz a variação dos arcos do 3º quadrante, $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, projetando segmentos no eixo vertical y , o aumento do arco "x" faz diminuir o a medida do segmento

em "y" de "zero" até chegar em -1 . Portanto, quando os arcos variam de π a $\frac{3\pi}{2}$ radianos, a imagem $y = \text{sen}x$ varia de **zero** a **menos um**, $0 \geq \text{sen}x \geq -1$; tornando a função seno **decrecente** e **negativa** para arcos do terceiro quadrante.

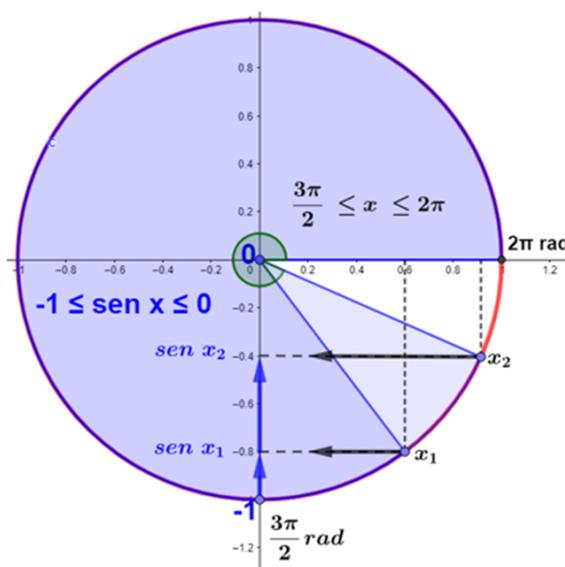


Figura 17 – Projeção da função seno no 4º quadrante

Fonte: O Autor (2021)

A **figura 17** traz a variação dos arcos do 4º quadrante, $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$, projetando segmentos no eixo vertical y, o aumento do arco "**x**" faz aumentar o segmento em "**y**" de -1 até chegar em zero. Portanto, quando os arcos variam de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π radianos, a imagem $y = \text{sen}x$, varia de **menos um** a **zero**; $-1 \leq \text{sen}x \leq 0$, tornando a função seno **crecente** e **negativa** para arcos do quarto quadrante.

A senoide, ou ciclo completo da projeção da função seno, $F(x) = b.\text{sen}(kx)$; $b = k = 1$ será apresentado na **figura 18**. Percebe-se um comportamento **crecente** para os quadrantes 1 e 4; **decrecentes** para os quadrantes 2 e 3. O sinal da projeção senoidal é **positivo** para os quadrantes 1 e 2 e **negativo** para os quadrantes 3 e 4.

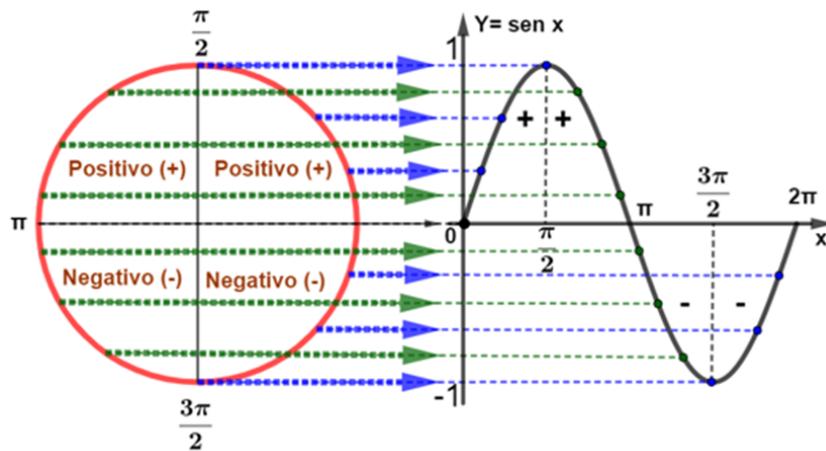


Figura 18 – Senóide definida por $F(x) = \text{sen}x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$

Fonte: O Autor (2021)

2.2 FUNÇÃO COSSENO

Para (NETO, 2015), a função $\text{cos}R : \rightarrow R$ é aquela que associa a cada $x \in R$, o valor do cosseno do um arco " x " radianos. O autor indica que a imagem está no intervalo $[-1, 1]$ e classifica a função como **par** e **periódica**. Dessa forma temos que $\text{cos}(-x) = \text{cos}(x)$.

(PAIVA, 2015), define a função cosseno como aquela que associa a cada número Real " x " o número Real y , determinado pelo cosseno do arco x e limitado no intervalo Real, $[-1, 1]$. Simbolicamente, $F : R \rightarrow [-1, 1]$ tal que $f(x) = \text{cos}x$, temos:

- $D = R$;
- $Im = \{y \in R \mid -1 \leq y \leq 1\}$;

Para (LAGES et al., 1997), a **função cosseno** é a abscissa x , da **função de Euler** $E(t) = (\text{cost}, \text{sent})$ marcada na circunferência unitária. Portanto, o valor $f(t) = \text{cost}$, com $t \in R$ e $-1 \leq \text{cost} \leq 1$.

Analogamente ao que foi feito para a função seno, observa-se que o deslocamento de um ponto sobre a circunferência de raio unitário, no sentido **anti-horário**, projeta um segmento no eixo horizontal x , dessa forma, é importante a percepção de que arcos marcados sobre a circunferência provocam segmentos projetados sobre o eixo horizontal das abscissas. Ou seja, a **função cosseno** associa (arcos) a segmentos de retas e a cada volta dada na circunferência equivale a um deslocamento completo da projeção no intervalo $[-1, 1]$. Para a função $F(x) = b.\text{cos}(kx)$, com $k = b = 1$; observa-se que a variação no eixo x :

- começa no valor máximo 1 e vai até o zero, para arcos do 1° quadrante. **Figura 19**;
- começa no valor zero e vai até -1 , para arcos do 2° quadrante. **Figura 20**;
- inicia em -1 e vai até *zero*, para arcos do 3° quadrante. **Figura 21**;
- por fim, começa em *zero* e volta ao valor máximo 1, para arcos do 4° quadrante. **Figura 22**.

O mesmo acontece para as demais voltas, porque a função $f(x) = \cos x$; tem período $T = 2\pi$ e o conjunto imagem limitado ao intervalo $-1 \leq \cos x \leq 1$. As **figuras**: 19, 20, 21 e 22; representam o que acontece para projeção da função $F(x) = \cos x$, em uma volta; portanto, é possível concluir que a função é **periódica e limitada**.¹² Para $f(x) = b \cdot \cos(kx)$, com $x, b, k \in \mathbb{R}$ e $b, k \neq 0$. Tem-se:

- período $T = \frac{2\pi}{|k|}$;
- imagem "y" limitada ao intervalo $-b \leq y \leq b$, onde "b" representa o raio da circunferência "λ" na qual estão marcados os arcos "x".

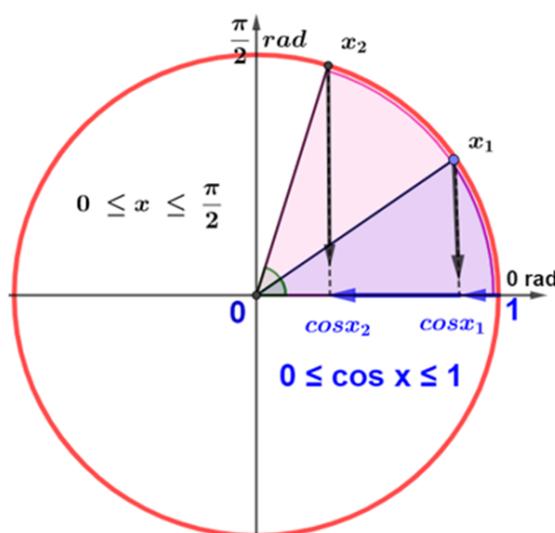


Figura 19 – Projeção da função cosseno no 1° quadrante

Fonte: O Autor (2021)

¹² Função limitada, em seu domínio, é aquela cuja imagem está contida num intervalo. $Im \subset [a, b]$ com "a" e "b" números reais. $|f(x)| \leq M$, com $M = \max\{|a|, |b|\}$. <http://ecalculo.if.usp.br>. Acessado em 26 março 2021, 09:20H.

A **figura 19** traz a variação dos arcos do 1º quadrante, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, projetando segmentos no eixo horizontal, o aumento do arco "x" faz diminuir a medida do segmento horizontal até chegar a zero. Portanto, quando os arcos variam de zero a $\frac{\pi}{2}$ radianos as imagens, $F(x) = \cos x$ decrescem de 1 a zero, ou seja, $1 \geq \cos x \geq 0$; tornando a função cosseno **decrescente** e **positiva** para arcos do primeiro quadrante.

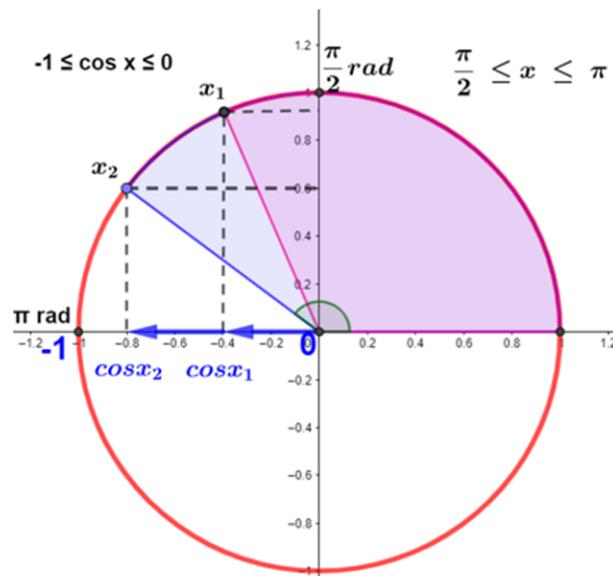


Figura 20 – Projeção da função cosseno no 2º quadrante

Fonte: O Autor (2021)

A **figura 20** traz a variação dos arcos do 2º quadrante, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$, projetando segmentos no eixo horizontal, o aumento do arco "x" faz diminuir a medida do segmento no eixo horizontal até chegar em -1 . Portanto, quando os arcos variam de $\frac{\pi}{2}$ a π radianos as imagens $F(x) = \cos x$, decrescem de zero a -1 , ou seja, $0 \geq \cos x \geq -1$; tornando a função cosseno **decrescente** e **negativa** para arcos do segundo quadrante.

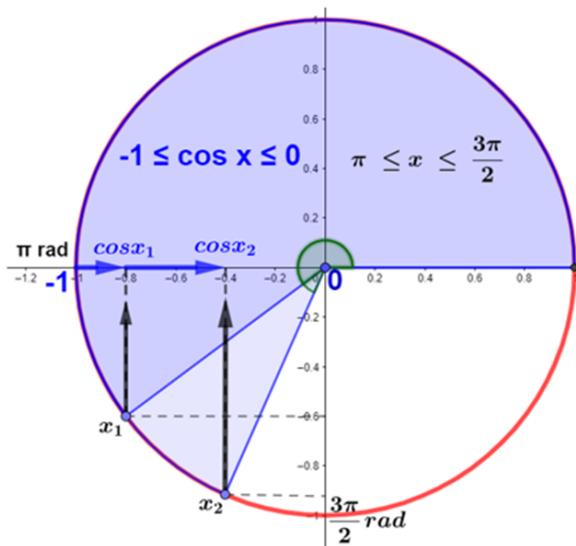


Figura 21 – Projeção da função cosseno no 3º quadrante

Fonte: O Autor (2021)

A **figura 21** traz a variação dos arcos do 3º quadrante, $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, projetando segmentos no eixo horizontal, o aumento do arco "x" faz aumentar a medida do segmento horizontal de -1 até chegar em zero. Portanto, quando os arcos variam de π a $\frac{3\pi}{2}$ radianos as imagens $F(x) = \cos x$, crescem de -1 até zero, ou seja, $-1 \leq \cos x \leq 0$; tornando a função cosseno **crescente** e **negativa** para arcos do terceiro quadrante.

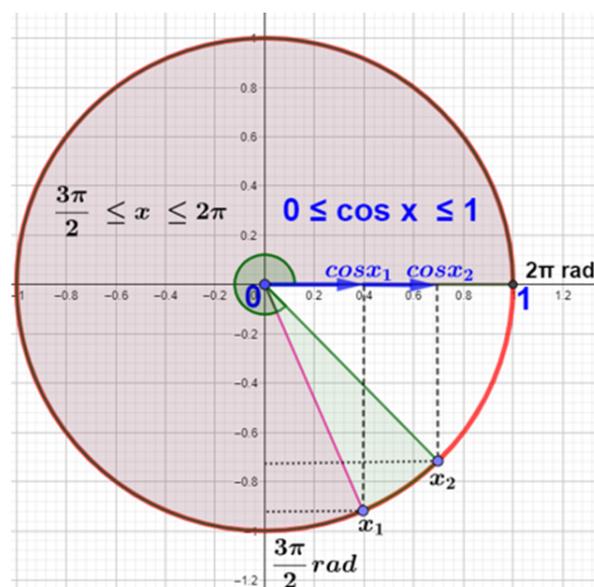


Figura 22 – Projeção da função cosseno no 4º quadrante

Fonte: O Autor (2021)

figura 22 traz a variação dos arcos do 4º quadrante, $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$, projetando

segmentos no eixo horizontal, o aumento do arco "x" faz aumentar o segmento horizontal de zero até chegar em seu valor máximo 1. Portanto, quando os arcos variam de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π radianos as imagens da função $F(x) = \cos x$, aumentam de zero a 1, ou seja, $0 \leq \cos x \leq 1$; tornando a função cosseno **crecente** e **positiva** no quarto quadrante.

A cossenoide, ou ciclo completo da projeção da função cosseno, $F(x) = b \cdot \cos(kx)$; para $b = k = 1$, está apresentada na **figura 23**. Nota-se um comportamento **crecente** para os quadrantes 3 e 4; **decrecentes** para os quadrantes 1 e 2. O sinal da cossenoide é **positivo** para os quadrantes 1 e 4; **negativo** para os quadrantes 2 e 3.

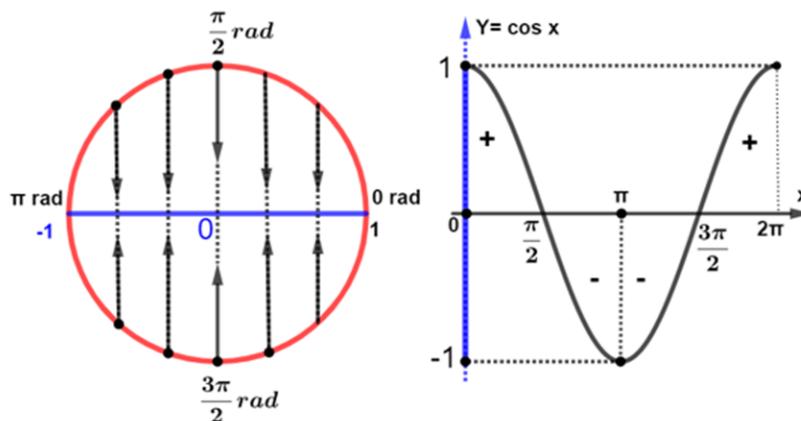


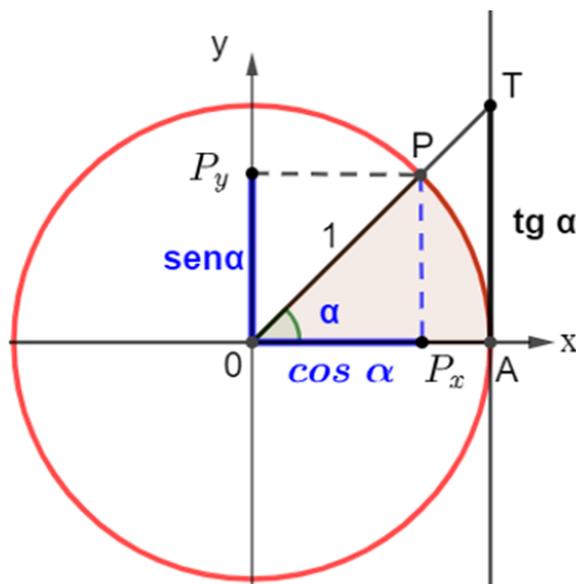
Figura 23 – Cossenoide definida por $F(x) = \cos x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$

Fonte: O Autor (2021)

2.3 FUNÇÃO TANGENTE

A definição de **tangente do ângulo de um triângulo** pode ser estendida para **tangente de um arco na circunferência**. Para isso, é preciso aplicar a função de Euler. Associando a cada número Real x , um arco α sobre a circunferência; esses arcos definem um ângulo central de medida α , no sentido anti-horário, a partir da posição $A = (1, 0)$.

Ao marcar o ponto P , sobre a circunferência trigonométrica, a tangente do ângulo central α é equivalente ao segmento \overline{AT} , onde $A = (1, 0)$ e T é a projeção do ponto $P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, sobre a reta que passa tangente à circunferência no ponto $A = (1, 0)$. **Figura 24**.

Figura 24 – – Projção da tangente do arco α

Fonte: O Autor (2021)

Analisando a **figura 24**, nota-se que os triângulos OTA e OP_xP são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo. Ou seja:

$$O\hat{P}_xP = O\hat{A}T = 90^\circ \text{ e } T\hat{O}A = P\hat{O}P_x.$$

Como $\overline{OP_y} = \overline{PP_x} = \overline{sen\alpha}$; então, $\overline{OP_x} = \overline{cos\alpha}$ e $\overline{AT} = \overline{tg\alpha}$. Tem-se, pela proporcionalidade dos lados, que:

- $\frac{\overline{AT}}{\overline{PP_x}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP_x}} \Rightarrow \frac{tg\alpha}{sen\alpha} = \frac{1}{cos\alpha} \Rightarrow tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$;
- com $cos\alpha \neq 0$. Logo, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

(LAGES et al., 1997), traz a função tangente como resultado do quociente $\frac{senx}{cosx}$; dessa forma, a função tangente existirá apenas quando $cos\alpha \neq 0$. Portanto, quando $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$. O autor define $F(x) = \frac{senx}{cosx} = tgx$; com "x" sendo um arco que pertence ao intervalo $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$. Mesmo a função tangente não estando definida em todos reais é classificada como periódica, $tg(x + \pi) = tg(x)$; ou seja, seu período é $T = \pi$.

Para (NETO, 2015), a função tangente está definida se, somente se, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, para $k \in Z$. O autor indica que o domínio maximal da tangente é $D = R/\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in Z\}$. Ou seja, $tg : D \rightarrow R$, com $x \in D$ e $tgx \in R$. A tangente tem paridade ímpar porque:

- $tg(-x) = \frac{sen(-x)}{cos(-x)} = \frac{-senx}{cosx} = -tgx$ para todo $x \in D$.

(PAIVA, 2015), define a função tangente como aquela que associar a cada número real "x", $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $k \in Z$, o número também real y, tal que $y = tgx$.

- $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
- $Im = \mathbb{R}$;
- Período $= \pi$

O segmento $y = \operatorname{tg} x$ é projetado sobre a reta que passa tangente à circunferência trigonométrica no ponto $A = (1, 0)$. A **Figura 25**, traz o gráfico da tangente para o intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

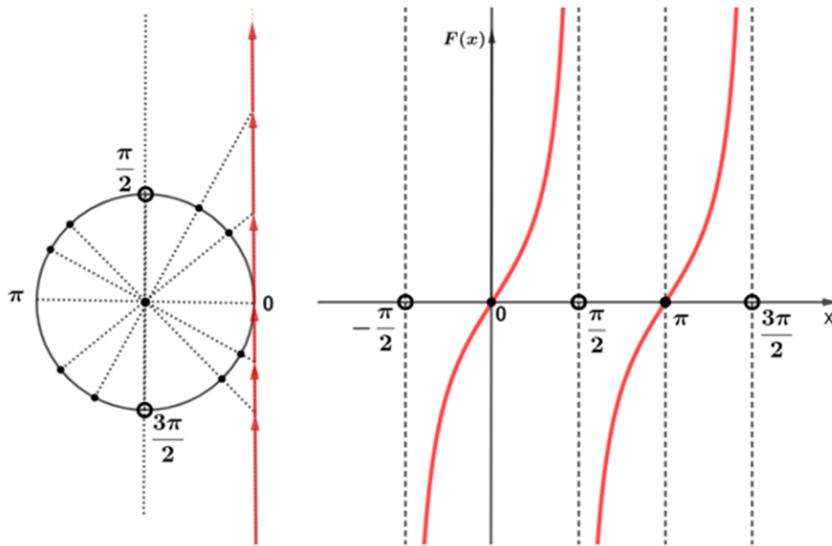


Figura 25 – Gráfico de $F(x) = \operatorname{tg} x$ para $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

Fonte: O Autor (2021)

Da análise **figura 25**, percebe-se:

- **crescente** em todos os quadrantes;
- **positiva**, para arcos $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$; 1º ou 3º quadrantes; com variação de zero a $+\infty$.
- **negativa**, para arcos $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$ ou $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$; 2º ou 4º quadrantes; com variação de $-\infty$ a zero.

Percebe-se que é necessário “x” variar π radianos para $Y = \operatorname{tg} x$, completar seu ciclo; por isso seu período é $P = \pi$. A tangente além de periódica possui retas **assíntotas verticais**¹³ que passam em $x = \frac{-\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$.

¹³ Retas verticais para as quais a função se aproxima indefinidamente. No caso de ser uma reta horizontal para a qual a curva se aproxime indefinidamente, tem-se uma assíntota horizontal.

A **figura 25**, representa o que acontece para função $F(x) = \operatorname{tg}x$, para o intervalo de domínio, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$; porém é possível inferir que a função; $F(x) = b.\operatorname{tg}(kx)$, com $b, k \in \mathbb{R}$ e $b, k \neq 0$; tem o período $T = \frac{\pi}{|k|}$ e como conjunto imagem todos os reais; independentemente, do valor de "b".

2.4 RECÍPROCAS TRIGONOMÉTRICAS

2.4.1 FUNÇÃO SECANTE

Para (PAIVA, 2015) a função secante é aquela que associar a cada número real x , com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$, um único número real $y = \operatorname{sec}x$ com $Im = \{y \in \mathbb{R} | y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$.

(MEDEIROS et al., 2006), indica que a **secante** é determinada pela projeção de um ponto P , sobre a circunferência, na reta horizontal que suporta o cosseno de "P". Para os autores, a **secante** é equivalente ao segmento que vai da origem $O(0,0)$ até o ponto B , determinado pela interseção do eixo horizontal (\overrightarrow{OX}) com a reta tangente à circunferência no ponto "P". **Figura 26**.

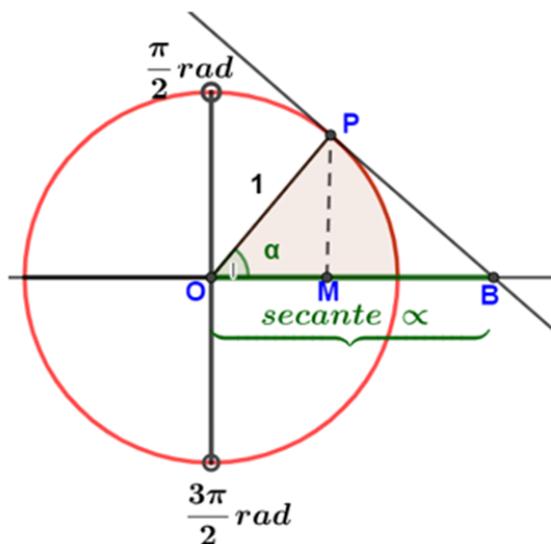


Figura 26 – Projeção da secante do arco α

Fonte: O Author (2021)

Analisando a **figura 26**, percebe-se que os triângulos retângulos OPB e OPM são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo $\widehat{OPB} = \widehat{OPM} = 90^\circ$ e $\widehat{BOP} = \widehat{MOP}$ e que o segmento $\overline{OM} = \cos\alpha$. Pela proporcionalidade entre os lados tem-se:

- $\frac{\overline{OB}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} \Rightarrow \frac{\operatorname{sec}\alpha}{1} = \frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{sec}\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$; com $\cos\alpha \neq 0$.

O fato do cosseno está no denominador da fração implica que para os arcos onde cosseno seja igual a zero a secante deixa de existir. Em conformidade com o gráfico da função secante para o intervalo de domínio $[0, \frac{5\pi}{2}]$ com $x \neq \frac{\pi}{2}$, $x \neq \frac{3\pi}{2}$ e $x \neq \frac{5\pi}{2}$. **Figura 27**

- $D = \{x \in R | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}$;
- conjunto imagem formado pelo intervalo $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$;
- retas assíntotas verticais passando em $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$ e $x = \frac{5\pi}{2}$;
- comportamento crescente para os quadrantes **1 e 2**;
- comportamento decrescente para os quadrantes **3 e 4**;
- sinal positiva (+), para o 1° e 4° quadrantes;
- sinal negativa (-), para o 2° e 3° quadrantes.

Ainda no gráfico apresentado na **figura 27**, a comparação entre as funções secante e cosseno evidencia que as funções têm a mesma variação de sinal nos quadrantes; porém, no quadrante onde a secante cresce o cosseno decresce e vice-versa. Percebe-se ainda que a união entre os conjuntos imagens das duas funções é o conjunto dos Reais; tendo como interseção apenas os valores -1 e 1.

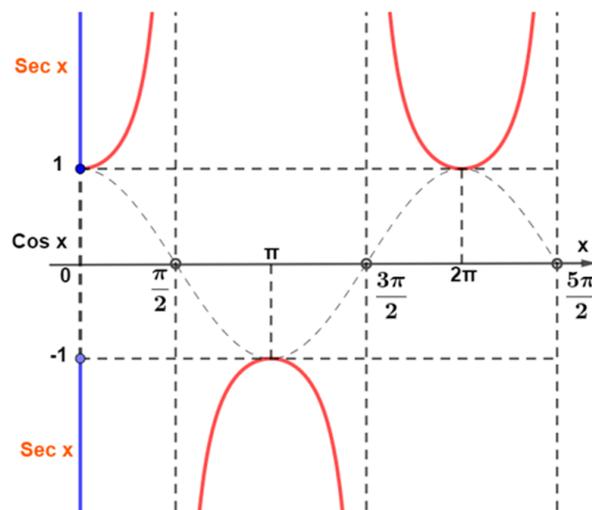


Figura 27 – Gráfico de $F(x) = \sec x$ para $0 \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$

Fonte: O Autor (2021)

2.4.2 FUNÇÃO COSSECANTE

(PAIVA, 2015), traz que a função cossecante é aquela que associa a cada número real x , com $x \neq k\pi$, $k \in Z$, um único número real $y = \operatorname{cosec} x$ com imagem $Im = \{y \in R | y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$.

(MEDEIROS et al., 2006), indica que a **cossecante** é determinada pela projeção de um ponto **P**, da circunferência, sobre a reta vertical que suporta o seno de “P”. Para os autores, a cossecante é equivalente ao segmento que vai da origem $O(0,0)$ até o ponto P' , determinado pela interseção do eixo vertical \overrightarrow{OY} com a reta tangente à circunferência no ponto **P**. **Figura 28**.

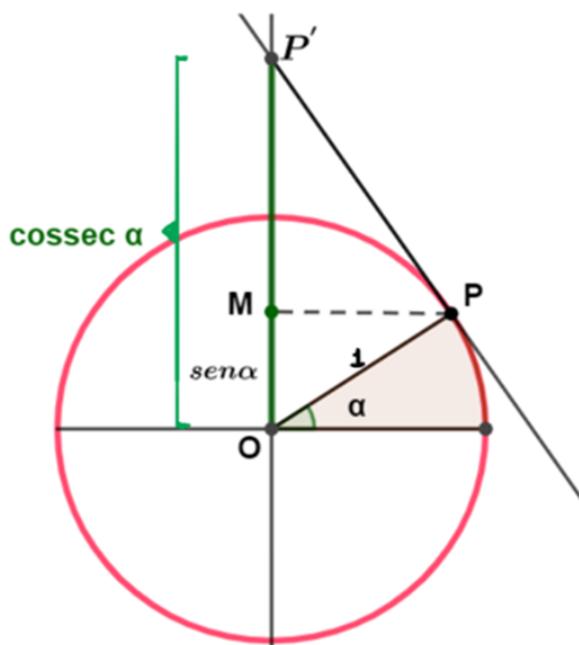


Figura 28 – Projeção da cossecante do arco α

Fonte: O Autor (2021)

Analisando a **figura 28**, percebe-se que os triângulos retângulos OPP' e OPM são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo, $O\hat{P}P' = 90^\circ$; $O\hat{M}P = 90^\circ$ $P\hat{O}P' = M\hat{O}P$ e que o segmento $\overline{OM} = \text{sen}\alpha$. Pela proporcionalidade entre os lados, tem-se:

$$\bullet \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} \Rightarrow \frac{\text{cossec}\alpha}{1} = \frac{1}{\text{sen}\alpha} \Rightarrow \text{cossec}\alpha = \frac{1}{\text{sen}\alpha} \text{ com } \text{sen}\alpha \neq 0.$$

Devido ao fato do seno está no denominador da fração implica que para os arcos onde o seno for igual a zero a cossecante deixa de existir. De acordo com o gráfico da função cossecante para o intervalo de domínio $[0, \frac{5\pi}{2}]$ com $x \neq 0$ $x \neq \pi$ $x \neq 2\pi$, **figura 29**; tem-se:

- $D = \{x \in R | x \neq k\pi, k \in Z\}$;
- conjunto imagem formado pelo intervalo $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$;
- retas assíntotas verticais passando em $x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$;

- comportamento crescente para os quadrantes 2 e 3;
- comportamento decrescente para os quadrantes 1 e 4;
- sinal positiva (+), para o 1° e 2° quadrantes;
- sinal negativa (-), para o 3° e 4° quadrantes.

Ainda analisando a **figura 29**, a comparação entre as funções cossecante e seno mostra que elas têm a mesma variação de sinais nos quadrantes; porém, no quadrante onde a cossecante cresce o seno decresce e vice-versa. A união entre os conjuntos imagens das duas funções é o conjunto dos números reais, tendo como interseção apenas os valores -1 e 1.

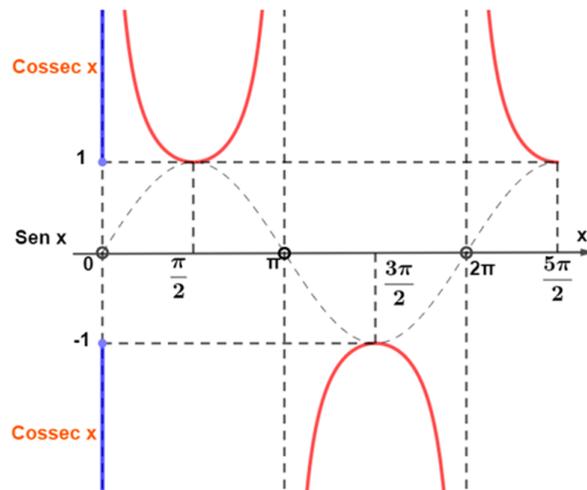


Figura 29 – Gráfico de $F(x) = \operatorname{cossec} x$ para $0 \leq x \leq 5\pi/2$

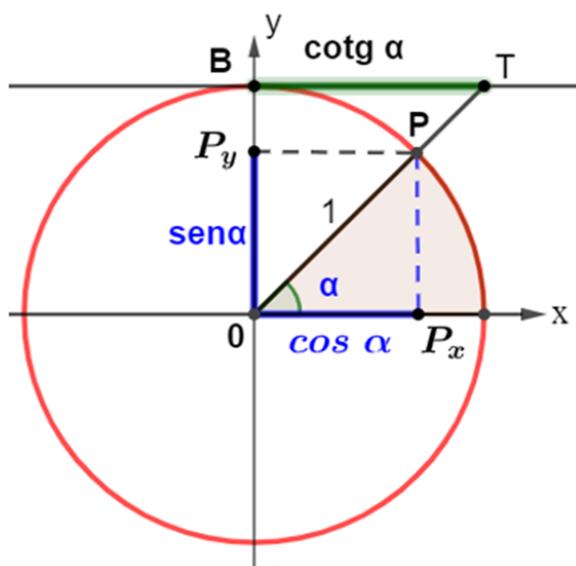
Fonte: O Autor (2021)

2.4.3 FUNÇÃO COTANGENTE

(MEDEIROS et al., 2006), indica que a cotangente do arco α é equivalente ao segmento \overline{BT} , sendo T a projeção do ponto $P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ na reta \overline{BT} que passa tangente a circunferência trigonométrica no ponto \mathbf{B} .

Analisando a **figura 30**, nota-se que os triângulos \mathbf{OBT} e \mathbf{OPP}_y são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo, $\widehat{OP}_yP = \widehat{OBT} = 90^\circ$ e $\widehat{TOB} = \widehat{POP}_y$. Como $\overline{OP}_x = \overline{PP}_y = \cos\alpha$; $\overline{OP}_y = \sin\alpha$ e $\overline{BT} = \operatorname{cotg}\alpha$. Pela proporcionalidade dos lados tem-se:

- $\frac{\overline{BT}}{\overline{PP}_y} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OP}_y} \Rightarrow \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; com $\sin\alpha \neq 0$.

Figura 30 – Projeção da cotangente do arco α

Fonte: O Autor (2021)

(PAIVA, 2015), indica que o $\text{sen}(\frac{\pi}{2} - x) = \text{cos}x$ e $\text{cos}(\frac{\pi}{2} - x) = \text{sen}x$; porque os arcos $(\frac{\pi}{2} - x)$ e x são complementares. Portanto:

- $\text{tg}(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{\text{sen}(\frac{\pi}{2} - x)}{\text{cos}(\frac{\pi}{2} - x)} = \frac{\text{cos}x}{\text{sen}x} = \text{cotg}x$;
- com $x \neq k\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$.

(PAIVA, 2015), define a função cotangente como aquela que associar a cada número real x , o valor real y , tal que $y = \text{cotg}x$. Sendo necessário que $x \neq k\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$. O segmento $y = \text{cotg}x$ é projetado sobre a reta que passa tangente à circunferência trigonométrica no ponto $B = (0, 1)$. A **figura 31**, traz o gráfico da $F(x) = \text{cotg}x$ para o intervalo $(0, 2\pi)$. Nota-se:

- $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
- $Im = \mathbb{R}$;
- é necessário x variar π radianos para $F(x) = \text{cotg}x$, completar seu ciclo; por isso seu período é $T = \pi$;
- A cotangente é **periódica** e possui retas **assíntotas verticais** que passam em $x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$;
- é **decrecente** em todos os quadrantes;

- é **positiva**, para arcos $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$; 1° ou 3° quadrantes; com variação de $+\infty$ a 0;
- é **negativa**, para arcos $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ou $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$; 2° ou 4° quadrantes; com variação de 0 a $-\infty$;
- a função; $F(x) = b \cdot \cotg(kx)$, com $b, k \in \mathbb{R}$ e $b, k \neq 0$; terá o período $T = \frac{\pi}{|k|}$ e o conjunto imagem $Im = \mathbb{R}$; para qualquer valor não nulo de "b" e de "k" .

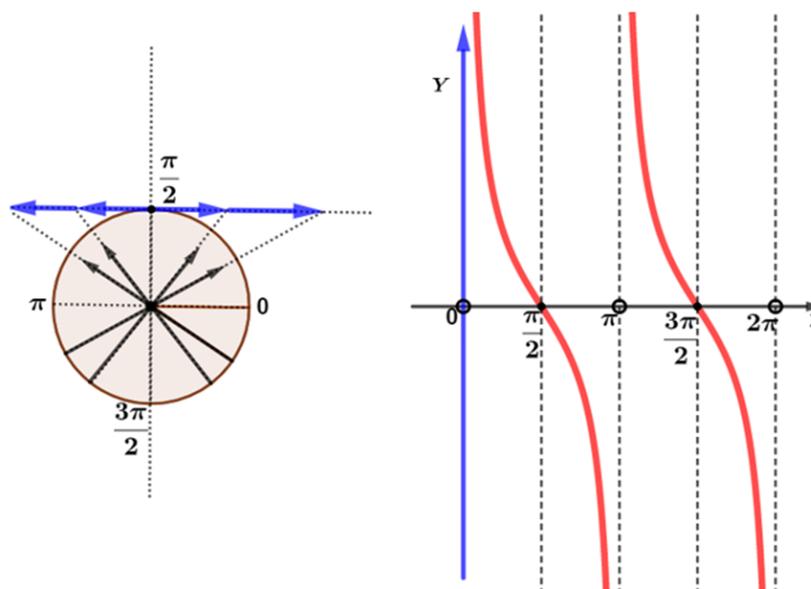


Figura 31 – Gráfico $F(x) = \cotg x$ para $0 < x < \pi$ e $\pi < x < 2\pi$

Fonte: O Autor (2021)

2.5 PROJEÇÕES TRIGONOMÉTRICA

O estudo individual de cada função trigonométrica pode passar ao aluno a ideia de que as projeções ocorrem de forma isolada, desta forma, é importante mostrar ao aprendiz que as projeções do seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente ocorrem simultaneamente para cada arco da circunferência. O movimento de uma partícula sobre a circunferência tem como efeito modificações em suas projeções, internas e externas à circunferência, nos eixos horizontal, vertical, tangente e cotangente.

2.5.1 PROJEÇÕES PARA ARCOS DO PRIMEIRO QUADRANTE

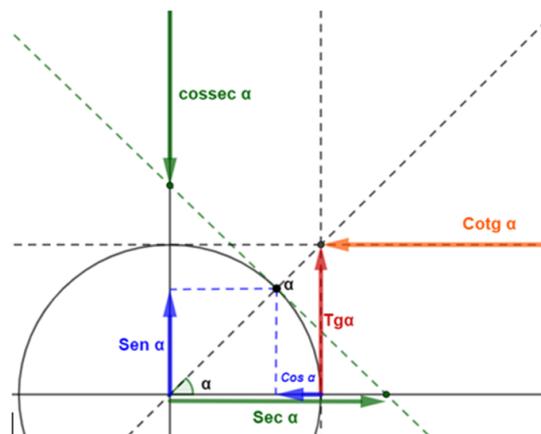


Figura 32 – Projeções para arcos do 1º quadrante

Fonte: O Autor (2021)

A análise da **figura 32**, indica:

- todas as funções trigonométricas têm sinal **positivo** para arcos do primeiro quadrante;
- as funções o seno, tangente e secante apresentam comportamento **crescente**;
- as funções cosseno, cotangente e cossecante apresentam comportamento **decente**.

2.5.2 PROJEÇÕES PARA ARCOS DO SEGUNDO QUADRANTE

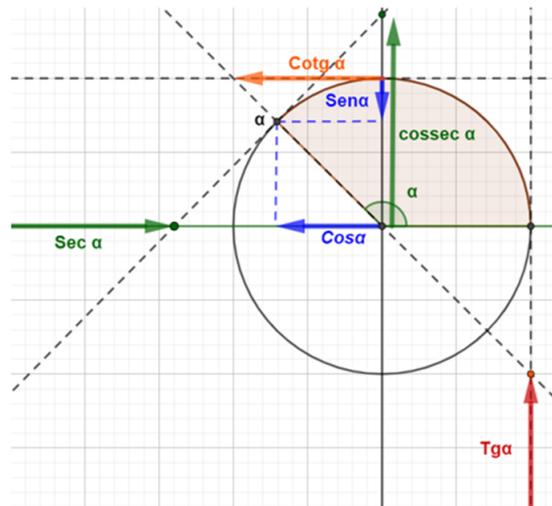


Figura 33 – Projeções para arcos do 2º quadrante

Fonte: O Autor (2021)

Na análise **Figura 33**, nota-se:

- as funções seno e cossecante são **positivas** para arcos do 2º quadrante;
- as funções cosseno, secante, tangente e cotangente são **negativas** para os arcos do 2º quadrante;
- o comportamento **crescente** é apresentado pelas funções cossecante, secante e tangente;
- o comportamento **decrecente** está presente nas funções seno, cosseno e cotangente.

2.5.3 PROJEÇÕES PARA ARCOS DO TERCEIRO QUADRANTE

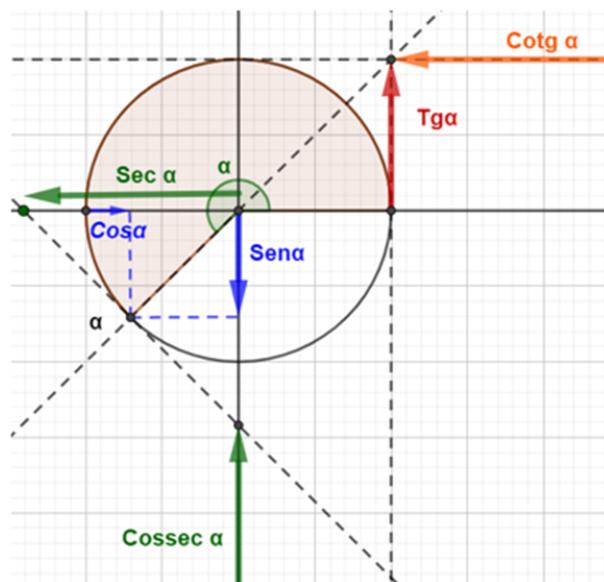


Figura 34 – Projeções para arcos do 3º quadrante

Fonte: O Autor (2021)

Na **figura 34**, percebe-se:

- as funções tangente e cotangente são **positivas** para arcos do 3º quadrante;
- as funções seno, cosseno, cossecante e secante são negativas para os arcos do 3º quadrante;
- O comportamento **crescente** é apresentado pelas funções cosseno, cossecante e tangente;
- o comportamento **decrecente** está presente nas funções seno, cosseno e cotangente.

2.5.4 PROJEÇÕES PARA ARCOS DO QUARTO QUADRANTE

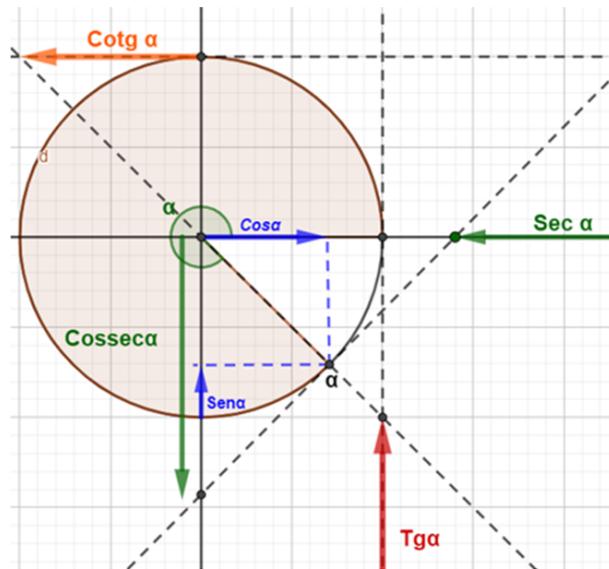


Figura 35 – Projeções para arcos do 4º quadrante

Fonte: O Autor (2021)

A **Figura 35**, traz:

- as funções cosseno e secante são **positivas** para arcos do 4º quadrante;
- as funções seno, cossecante, tangente e cotangente são **negativas** para os arcos do 4º quadrante;
- O comportamento **crescente** é apresentado pelas funções seno, cosseno e tangente;
- o comportamento **decrecente** está presente nas funções cossecante, secante e cotangente.

3 INVERSAS TRIGONOMÉTRICAS

(LAGES et al., 1997), trazem como consequência da inversão de função a correspondência biunívoca de dois conjuntos. Considera-se que $g : Y \rightarrow X$ é a inversa de $f : X \rightarrow Y$, apenas quando $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$; para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Portanto, quando a função "g" é inversa da função "f" tem-se que $g(y) = x$ se, e somente se, $f(x) = y$. **Figura 36**

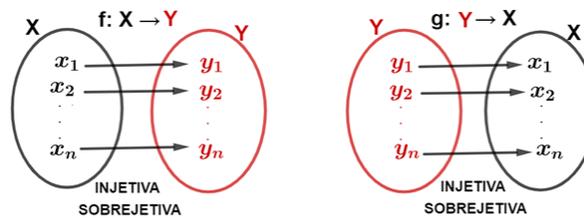


Figura 36 – Função $f : X \rightarrow Y$ e sua inversa $g : Y \rightarrow X$

Fonte: O Autor (2021)

Como as funções trigonométricas são periódicas, existem várias imagens para cada domínio, isso faz com que deixem de ser funções injetoras sendo impossível possuírem inversas. Porém, pode-se restringir o domínio da função trigonométrica criando as chamadas **funções restrições das funções trigonométricas**, gerando as desejadas bijeções entre o conjunto de segmentos e de arcos.

3.1 FUNÇÃO ARCO-SENO

A função seno não é bijetora porque existem vários arcos $x \in \mathbb{R}$ cujo seno tem a mesma medida real y . Portanto, é necessário que seja feita uma restrição no domínio da função seno para que exista a sua inversa.

(PAIVA, 2015) traz a restrição da função $F(x) = \text{sen}x$, com domínio $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e contradomínio $CD = [-1, 1]$. Haverá uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos arcos: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ e o conjunto dos segmentos $-1 \leq y \leq 1$. **Figura 37**

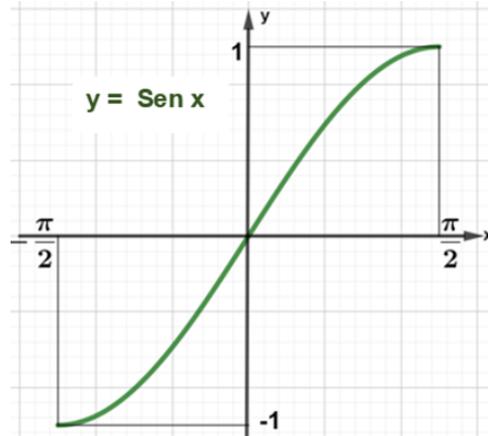


Figura 37 – $F(x) = \text{sen } x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Fonte: O Autor (2021)

A inversa da função bijetora, $F(x) = \text{sen } x$, representada na **figura 37**, com domínio $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e contradomínio $CD = [-1, 1]$; é a função $F(x) = \text{arcsen } x$, cujo domínio $D = [-1, 1]$ e o contradomínio $CD = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Portanto, y é o arco cujo seno é igual a x . **Figura 38.**

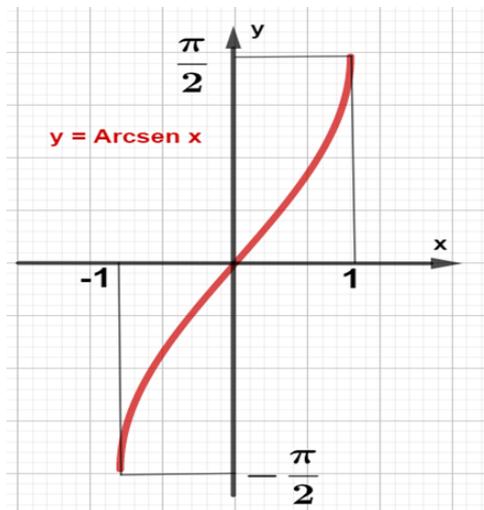


Figura 38 – Função $F(x) = \text{Arcsen } x$, $D = [-1, 1]$ e $CD = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Fonte: O Autor (2021)

3.2 FUNÇÃO ARCO-COSSENO

A função cosseno também não é bijetora para o domínio $D = \mathbb{R}$. Portanto, é necessário que seja feita uma restrição no seu domínio para torná-la bijetora e sua inversa exista. (PAIVA, 2015), traz a restrição da função $F(x) = \text{cos } x$, com domínio $D = [0, \pi]$ e

contradomínio $CD = [-1, 1]$. Desta forma, haverá uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos arcos $0 \leq x \leq \pi$ e o conjunto dos segmentos $-1 \leq y \leq 1$. **Figura 39** .

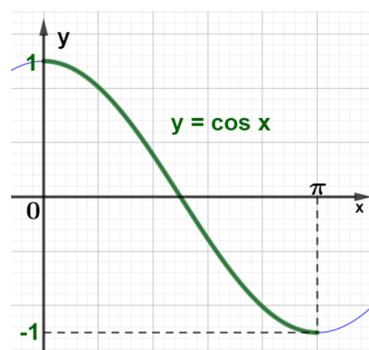


Figura 39 – $F(x) = \cos x$, $D = [0, \pi]$ e $CD = [-1, 1]$

Fonte: O Autor (2021)

A inversa da função bijetora, $F(x) = \cos x$, representada na **figura 39**, $D = [0, \pi]$ e contradomínio $CD = [-1, 1]$; é a função $F(x) = \arccos x$, cujo domínio $D = [-1, 1]$ e o contradomínio $CD = [0, \pi]$. Portanto, y é o arco cujo cosseno é igual a x . **Figura 40**

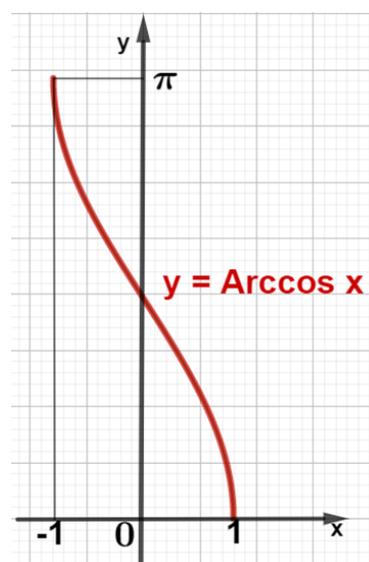


Figura 40 – $F(x) = \text{Arccos } x$, $D = [-1, 1]$ e $CD = [0, \pi]$

Fonte: O Autor (2021)

3.3 FUNÇÃO ARCO-TANGENTE

É necessário gerar uma função que seja uma restrição da tangente para que seja possível existir a sua inversa. (PAIVA, 2015), traz a restrição da função $F(x) = \text{tg } x$, com conjunto domínio $D = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e contradomínio $CD = R$. Desta forma haverá uma

correspondência biunívoca entre o conjunto dos arcos $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ e o conjunto dos segmentos $-\infty < y < \infty$. **figura 41**

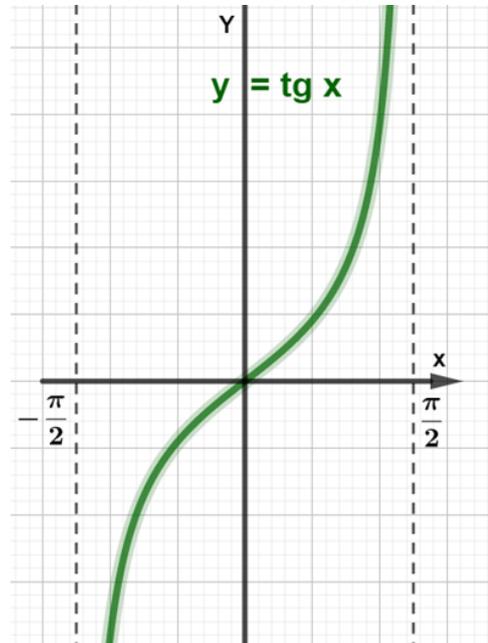


Figura 41 – $F(x) = \operatorname{tg} x$, $D = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $CD = R$

Fonte: O Autor (2021)

A inversa da função bijetora, $F(x) = \operatorname{tg} x$, **figura 41**, com conjunto domínio $D = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e contradomínio $CD = R$; é a função $F(x) = \operatorname{arctg} x$, cujo domínio $D = R$ e o contradomínio $CD = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Portanto, y é o arco cujo tangente é igual a x . **Figura 42**

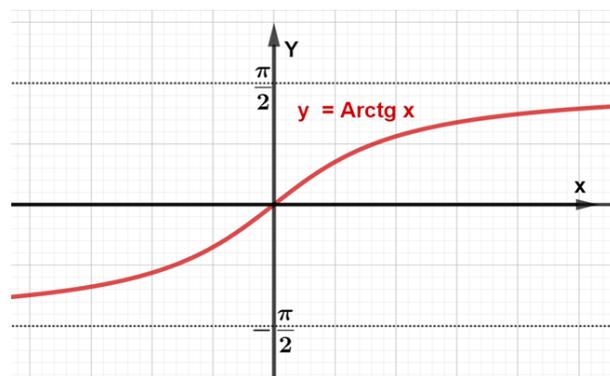


Figura 42 – $F(x) = \operatorname{Arctg} x$, $D = R$ e $CD = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Fonte: O Autor (2021)

3.4 SIMETRIA COM AS INVERSAS

(LAGES et al., 1997), trazem a noção de simetria de um ponto em relação a uma reta. Se X e Y são conjuntos reais e a função $f^{-1} : Y \rightarrow X$ é a inversa de $f : X \rightarrow Y$, então o gráfico das funções f^{-1} e f são simétricos em relação a reta $y = x$ (**função identidade**¹⁵). Conforme **figura 43**.

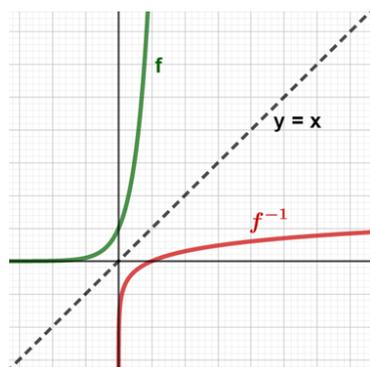


Figura 43 – Simetria das funções f^{-1} e f em relação a reta $y = x$

Fonte: O Autor (2021)

3.4.1 SIMETRIA ENTRE A RESTRIÇÃO DO SENO E O ARCO-SENO

A função arco-seno, $f^{-1}(x) = \arcsen x$; $D = [-1, 1]$ e $CD = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e a restrição da função seno, $f(x) = \sen x$; $D = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $CD = [-1, 1]$; são simétricas em relação a função identidade $y = x$, bissetriz dos quadrantes ímpares. **Figura 44**

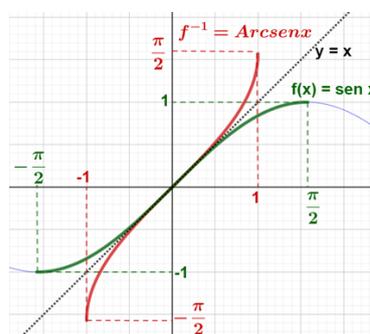


Figura 44 – Simetria de $f^{-1}(x) = \text{Arcsen } x$ e $f = \text{sen } x$ em relação a $y = x$

Fonte: O Autor (2021)

¹⁵ É a função de domínio real e imagem também real que associa a cada domínio “x” a imagem $y=x$. Seu gráfico é uma reta que divide o 1 e 3 quadrantes em partes iguais. Ou seja, forma um ângulo de 45° com o eixo das abscissas.

3.4.2 SIMETRIA ENTRE A RESTRIÇÃO DO COSSENO E O ARCO-COSSENO

A função arco-cosseno, $f^{-1}(x) = \arccos x$; $D = [-1, 1]$ e $CD = [0, \pi]$ e a restrição da função cosseno, $f(x) = \cos x$; $D = [0, \pi]$ e $CD = [-1, 1]$; são simétricas em relação a reta $y = x$, bissetriz dos quadrantes ímpares. Conforme mostra a **figura 45**.

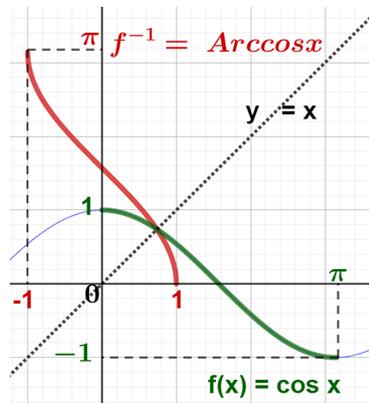


Figura 45 – Simetria de $f^{-1}(x) = \arccos x$ e $f(x) = \cos x$ em relação a $y = x$

Fonte: O Autor (2021)

3.4.3 SIMETRIA ENTRE A RESTRIÇÃO DA TANGENTE E O ARCO-TANGENTE

A função arco-cosseno, $f^{-1}(x) = \arctg x$; $D = R$ e $CD = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e a restrição da função tangente, $f(x) = \operatorname{tg} x$; $D = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $CD = R$; são simétricas em relação a reta $y = x$, bissetriz dos quadrantes ímpares. **Figura 46**.

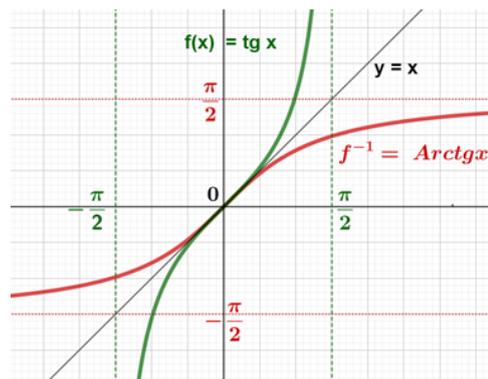


Figura 46 – Simetria de $f^{-1}(x) = \arctg x$ e $f(x) = \operatorname{tg} x$ em relação a $y = x$

Fonte: O Autor (2021)

4 FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

Para (VASCONCELOS, 2013), as hiperbólicas são funções obtidas a partir da hipérbole equilátera, existindo uma evidente analogia com as funções trigonométricas obtidas a partir do círculo trigonométrico. Para que seja traçado uma paralelo entre a trigonometria na circunferência e na hipérbole, é fundamental que seja entendido o conceito da função de Euler, que relaciona um valor Real com um ponto na circunferência e com um ângulo central; e que se saiba as definições de ângulo e projeções na hipérbole.

4.1 FUNÇÃO DE EULER

Para (LAGES et al., 1997), a relação fundamental $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, mostra que para cada ângulo " α ", existe um ponto $P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$; da circunferência $\lambda : (x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1$, de raio 1 e centro $C = (0, 0)$.

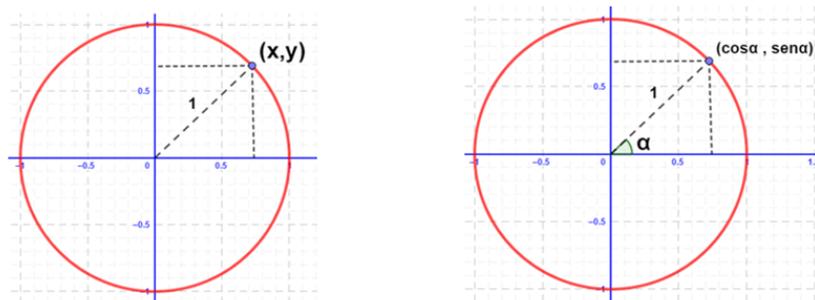


Figura 47 – Função de Euler, transição entre $P = (x, y)$ e $P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

Fonte: O autor (2021)

Conforme mostrado na figura 47, nota-se que $\cos\alpha = \frac{x}{1}$ e $\sin\alpha = \frac{y}{1}$; logo, $P=(x,y)$ $P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Ou seja, cada ângulo central " α " será relacionado com um ponto sobre a circunferência de raio unitário. A função Euler, $E : \mathbb{R} \rightarrow \lambda$, faz a correspondência entre valor de $t \in \mathbb{R}$ com o ponto, $E(t) = (x, y)$, da circunferência " λ ". Considerando a primeira volta, no sentido horário (-) ou no anti-horário (+) temos para $0 \leq |t| \leq 2\pi$:

- Quanto $t = 0$, o ponto P estará sobre a circunferência na posição $E(0) = (1, 0)$.
- Quando $t > 0$, o ponto P estará sobre a circunferência em uma posição " t " unidades distantes da posição $(1, 0)$, em uma trajetória no sentido anti-horário (+).

- Quando $t < 0$, o ponto P estará sobre a circunferência em uma posição "t" unidades distantes da posição $(1, 0)$, em uma trajetória no sentido horário (-).

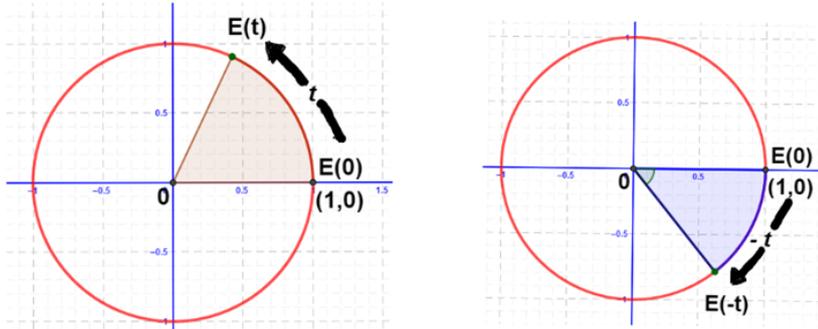


Figura 48 – Função de Euler $E : R \rightarrow \lambda$, $E(t) = (x, y)$ e $0 \leq |t| \leq 2\pi$

Fonte: O Autor (2021)

O segmento de reta que contém "t" está sendo enrolado na circunferência como se fosse uma linha em um carretel, a origem é a posição $E(0) = (1, 0)$ e a posição final $E(t)$, dependerá do tamanho do segmento "t". Como o raio da circunferência é 1, então, o seu comprimento será " $C = 2\pi$ ". Para valores de $t \geq 2\pi$; a função de Euler, $E(t)$, começa a repetir valores; descrevendo o comportamento de uma função periódica de período $T = 2\pi$, para todo $t \in R$.

São formados arcos congruentes a cada volta dada na circunferência, tanto no sentido anti-horário (+); como no horário (-). **Figura 49.**

t < 0	<ul style="list-style-type: none"> • $E(-t) = E(-t - k \cdot 2\pi)$, para volta (k+1) no sentido horário. • \vdots \vdots \vdots \vdots • $E(-t) = E(-t - 2.2\pi)$, para volta 3 no sentido horário. • $E(-t) = E(-t - 1.2\pi)$, para volta 2 no sentido horário.
t = 0	<ul style="list-style-type: none"> • $E(-t) = E(-t + 0.2\pi)$, para volta 1 no sentido horário. • $E(t) = E(t + 0.2\pi)$, para volta 1 no sentido anti-horário.
t > 0	<ul style="list-style-type: none"> • $E(t) = E(t + 1.2\pi)$, para volta 2 no sentido anti-horário. • $E(t) = E(t + 2.2\pi)$, para volta 3 no sentido anti-horário. • \vdots \vdots \vdots \vdots • $E(t) = E(t + k \cdot 2\pi)$, para volta (k+1) no sentido anti-horário.

Figura 49 – Função Euler e os Arcos Congruentes

Fonte: O Autor (2021)

4.2 ÂNGULO HIPERBÓLICO

(VASCONCELOS, 2013) faz um paralelo entre o ângulo central circular com o ângulo hiperbólico. Existe uma proporção entre o **ângulo central** θ e a **área do setor circular** determinado por $\frac{\theta}{2}$.

A área do setor circular (A_{setor}), está para o ângulo central (θ); assim como, πR^2 está para o ângulo central 2π radianos. Como o raio da circunferência trigonométrica vale 1; tem-se que o ângulo central θ , é equivalente, em área, ao dobro do **setor circular** $\frac{\theta}{2}$.

Figura 50

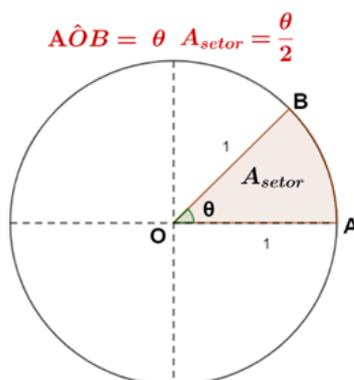


Figura 50 – Setor circular determinado pelo ângulo central θ

Fonte: O Autor (2021)

Pelo princípio da proporcionalidade:

Área do setor circular	Ângulo central
A_{setor}	θ
πR^2	2π

Portanto;

- como o raio da circunferência trigonométrica vale uma unidade $R = 1$;
- temos: $(A_{setor})(2\pi) = (\pi R^2)(\theta) \Rightarrow A_{setor} = \frac{(\pi R^2)(\theta)}{2\pi} \Rightarrow A_{setor} = \frac{\pi(1)^2\theta}{2\pi}$;
- $A_{setor} = \frac{\theta}{2}$ unidade de área.

De forma análoga, ao ângulo central determinado no círculo trigonométrico; (VASCONCELOS, 2013), traz que o ângulo hiperbólico θ , determina um setor hiperbólico $\frac{\theta}{2}$.

Figura 51

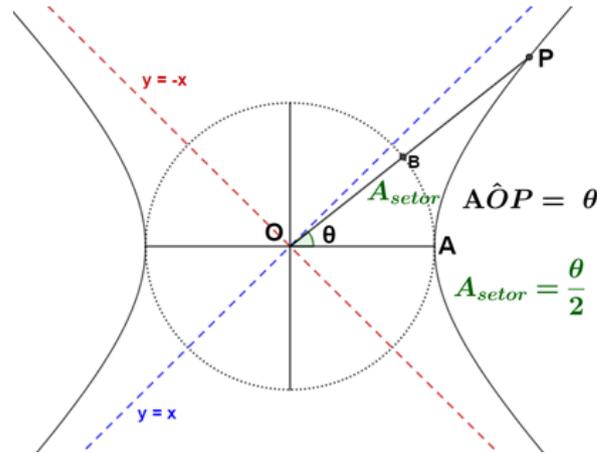


Figura 51 – Setor hiperbólico $\frac{\theta}{2}$, determinado pelo ângulo hiperbólico θ

Fonte: O Autor (2021)

Tomando o ponto **P**, sobre um braço da hipérbole equilátera $X^2 - Y^2 = 1$, e o ponto **A**, interseção do eixo coordenado **x** com o mesmo braço da hipérbole. O ângulo $A\hat{O}P = \theta$, determina um **setor hiperbólico** de área igual a $\frac{\theta}{2}$. (VASCONCELOS, 2013).

Para (SANTOS, 2015), o **ângulo hiperbólico** γ , é sempre o dobro do **setor hiperbólico** $\frac{\gamma}{2}$. Apesar da definição análoga ao ângulo circular, que varia de 0° a 360° ou de 0 a 2π radianos. O ângulo hiperbólico γ , varia de $-\infty$ a $+\infty$, medido em unidade de área. **Figura 52**

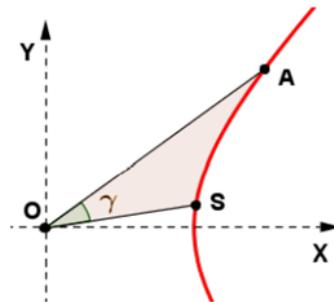


Figura 52 – Ângulo hiperbólico

Fonte: (SANTOS, 2015), p 26

4.3 RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS

(VASCONCELOS, 2013) e (SANTOS, 2015) utilizaram a hipérbole equilátera unitária $x^2 - y^2 = 1$, para determinar as razões trigonométricas hiperbólicas e correlacionar com as razões trigonométricas circulares. **Figura 53**

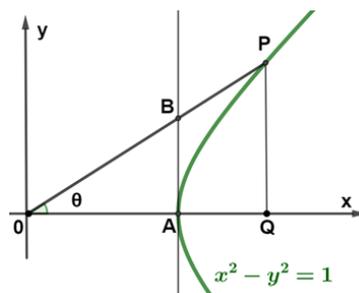


Figura 53 – Hipérbole equilátera e as razões trigonométricas

Fonte: O Autor (2021)

A figura **53**, mostra um dos braços da hipérbole equilátera $x^2 - y^2 = 1$, o ângulo hiperbólico θ , o triângulo retângulo OQP e o ponto $A = (1, 0)$, na interseção da hipérbole, com o eixo das abscissas e com a reta AB , tangente a curva hiperbólica no ponto A . tem-se:

- seno hiperbólico de θ , $\sinh(\theta) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OA}}$; como $\overline{OA} = 1$, isso implica $\sinh(\theta) = \overline{PQ}$;
- cosseno hiperbólico de θ , $\cosh(\theta) = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OA}}$; como $\overline{OA} = 1$, isso implica $\cosh(\theta) = \overline{OQ}$;
- tangente hiperbólica de θ , $\tanh(\theta) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\sinh(\theta)}{\cosh(\theta)}$. Isso porque o triângulo OQP é semelhante ao triângulo OAB , vale a proporcionalidade entre os lados, $\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OA}}$, como o segmento $\overline{OA} = 1$; então $\frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \overline{AB}$. Portanto, $\tanh(\theta) = \frac{\sinh(\theta)}{\cosh(\theta)}$;
- cotangente hiperbólica de θ , $\coth(\theta) = \frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}} = \frac{\cosh(\theta)}{\sinh(\theta)}$;
- secante hiperbólica de θ , $\operatorname{sech}(\theta) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OQ}} = \frac{1}{\cosh(\theta)}$;
- cossecante hiperbólica de θ , $\operatorname{csch}(\theta) = \frac{\overline{OA}}{\overline{PQ}} = \frac{1}{\sinh(\theta)}$.

4.4 HIPERBÓLICAS E A EXPONENCIAL DE BASE NATURAL

4.4.1 SENO; COSSENO E A EXPONENCIAL NATURAL

(FREITAS, 2015), indica que as curvas $\operatorname{senh}x$ e $\operatorname{cosh}x$ ficam próximas da curva $\frac{e^x}{2}$, quando x cresce e se aproximam da curva $-\frac{e^{-x}}{2}$ ou $\frac{e^{-x}}{2}$; quando x decresce.

Para (SANTOS, 2015), a função $\operatorname{senh}(\theta) = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$ e o $\operatorname{cosh}\theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$. Para ambas funções o domínio é qualquer θ real; entretanto, o conjunto imagem para o seno hiperbólico são todos reais e para o cosseno hiperbólico é o intervalo $[1, +\infty[$.

(VASCONCELOS, 2013), aplicou as propriedades de limites e as regras de derivação para construir os gráficos das funções: $\operatorname{senh} = \{(x, y) : y = \operatorname{senh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\}$ e $\operatorname{cosh} = \{(x, y) : y = \operatorname{cosh}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\}$. Ambos mostrados, respectivamente, nas figuras 54 e 55.

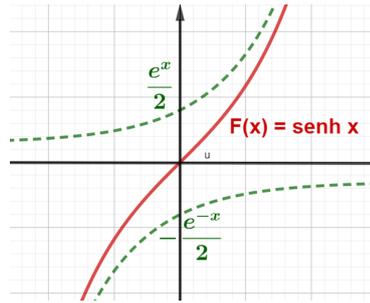


Figura 54 – Seno hiperbólico balizado por $\frac{e^x}{2}$ e $-\frac{e^{-x}}{2}$

Fonte: O Autor (2021)

Nota-se:

- a curva senoidal hiperbólica se aproxima por baixo da exponencial $\frac{e^x}{2}$, quando x é positivo;
- a curva senoidal hiperbólica se aproxima por cima da exponencial $-\frac{e^{-x}}{2}$, quando x é negativo;
- a imagem do seno hiperbólico é a reta dos Reais;
- vale a relação de ordem: $-\frac{e^{-x}}{2} < \sinh < \frac{e^x}{2}$;
- a função \sinh é sempre crescente.
- $\text{Senh} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

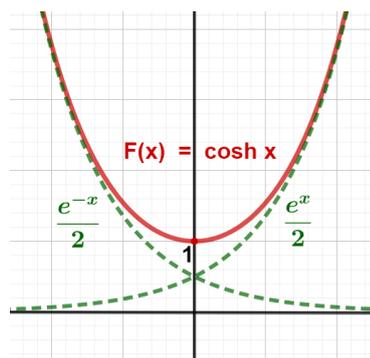


Figura 55 – Cosseno hiperbólico balizado por $\frac{e^x}{2}$ e $\frac{e^{-x}}{2}$

Fonte: O Autor (2021)

Nota-se:

- a curva do cosseno hiperbólico se aproxima por cima da exponencial $\frac{e^x}{2}$, quando x é positivo;

- a curva do cosseno hiperbólica se aproxima por cima da exponencial $\frac{e^{-x}}{2}$, quando x é negativo;
- a imagem do cosseno hiperbólico é intervalo $[1, +\infty)$;
- a função *cosh* é **decrescente** para $x \leq 0$ e **crescente** para $x \geq 0$;
- $Cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

4.4.2 TANGENTE HIPERBÓLICA E A EXPONENCIAL NATURAL

Conhecido seno e o cosseno hiperbólicos, em função das curvas exponenciais, aplica-se a relação para gerar a tangente hiperbólica:

- como $tanh = \frac{senh}{cosh}$;
- tem-se $tanh = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
- portanto: $tanh = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

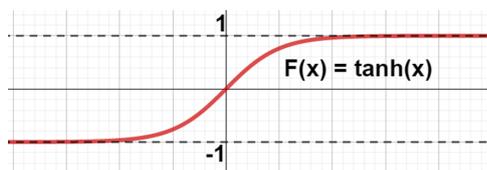


Figura 56 – Tangente hiperbólica

Fonte: O Autor (2021)

A análise da **figura** 56 mostra sobre a tangente hiperbólica:

- seu domínio é o intervalo $(-\infty, +\infty)$;
- seu conjunto imagem é $] - 1, 1[$;
- é uma função ímpar $tanh(x) = -tanh(-x)$.

A trigonometria hiperbólica não é objeto de estudo no ensino básico, porém seu entendimento é facilitado quando feita a correlação com a trigonometria circular. O círculo é bem mais conhecido que a hipérbole na educação básica; porém, como existem bons exemplos de fenômenos modelados pela trigonometria hiperbólica é vantajoso apresentar a correlação entre as duas trigonometrias para que seja possível mostrar os exemplos aplicando as curvas catenárias na engenharia civil, na arquitetura e nas linhas de transmissões elétricas; creditando tudo na conta da trigonometria. A relação com os conceitos

de função exponencial de base natural, se torna um atrativo a mais que vai ao encontro da interdisciplinaridade entre os conteúdos na modelagem dos fenômenos.

A **tabela 4**, apresenta comparação entre a trigonometria circular e a hiperbólica. É possível notar a correlação entre as fórmulas; contudo, a trigonometria hiperbólica, ainda apresenta ligação com a função exponencial de base natural "e". Apesar de não ser preciso adentrar nos detalhes, é importante para o aprendiz saber que o conteúdo apresentado em sala é apenas a ponta de um "iceberg" de conteúdos que se entrelaçam para explicar os fenômenos que nos cerca. Alguns alunos são ávidos por esse tipo de informação; portanto, é importante oportunizar a pesquisa sobre o tema.

Tabela 3 – Trigonometria Circular Versus Hiperbólica

CIRCULAR	HIPERBÓLICA	
$F(x) = \text{sen}x$	$F(x) = \text{senhx}$	$\text{senhx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$F(x) = \text{cos}x$	$F(x) = \text{cosh}x$	$\text{cosh}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\text{tg}x = \frac{\text{sen}x}{\text{cos}x}$	$\text{tanh} = \frac{\text{sen}x}{\text{cosh}x}$	$\text{tanh}x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$
$\text{sec}x = \frac{1}{\text{cos}x}$	$\text{sech}x = \frac{1}{\text{cosh}x}$	$\text{sech}x = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1}$
$\text{csc}x = \frac{1}{\text{sen}x}$	$\text{csch}x = \frac{1}{\text{senhx}}$	$\text{csch}x = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}$
$\text{cot}g x = \frac{\text{cos}x}{\text{sen}x}$	$\text{cot}gh = \frac{\text{cosh}x}{\text{senhx}}$	$\text{cot}ghx = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$
$\text{sen}^2x + \text{cos}^2x = 1$	$\text{cosh}^2 - \text{senh}^2 = 1$	
$\text{sen}(x + y) = \text{sen}x\text{cos}y + \text{sen}y\text{cos}x$	$\text{senh}(x + y) = \text{senhx}\text{cosh}y + \text{senhy}\text{cosh}x$	
$\text{cos}(x + y) = \text{cos}x\text{cos}y - \text{sen}x\text{sen}y$	$\text{cosh}(x + y) = \text{cosh}x\text{cosh}y + \text{senhx}\text{cosh}y$	
$\text{tg}(x + y) = \frac{\text{tg}x + \text{tg}y}{1 - \text{tg}x\text{tg}y}$	$\text{tanh}(x + y) = \frac{\text{tanh}x + \text{tanh}y}{1 + \text{tanh}x\text{tanh}y}$	
$\text{sen}2x = 2\text{sen}x\text{cos}x$	$\text{senh}2x = 2\text{senhx}\text{cosh}x$	$\text{senh}2x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$
$\text{cos}2x = 2\text{cos}^2x - 1$	$\text{cosh}2x = \text{cosh}^2x + \text{senh}^2x$	$\text{cosh}2x = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$
$\text{tg}2x = \frac{2\text{tg}x}{1 - \text{tg}^2x}$	$\text{tanh}2x = \frac{2\text{tanh}x}{1 + \text{tanh}^2x}$	$\text{tanh}2x = \frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1}$
$\text{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{\text{cos}x - 1}{2}}$	$\text{senh}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{\text{cosh}x - 1}{2}}$	$\text{senh}\frac{x}{2} = \frac{\pm\sqrt{e^x + e^{-x} - 2}}{2}$
$\text{cos}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{\text{cos}x + 1}{2}}$	$\text{cosh}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{\text{cosh}x + 1}{2}}$	$\text{cosh}\frac{x}{2} = \frac{\pm\sqrt{e^x + e^{-x} + 2}}{2}$
$\text{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{\text{cos}x - 1}{\text{cos}x + 1}}$	$\text{tanh}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{\text{cosh}x - 1}{\text{cosh}x + 1}}$	$\text{tanh}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{e^x + e^{-x} - 2}{e^x + e^{-x} + 2}}$

Fonte: O Autor (2021)

5 APLICAÇÃO DA TRIGONOMETRIA CIRCULAR

5.1 FENÔMENOS PERIÓDICOS

(PAIVA, 2015), traz que o movimento dos **planetas e das marés; as estações do ano e as fases da lua**, são fenômenos que se repetem a intervalos iguais de tempo; por esse motivo são chamados de fenômenos periódicos e podem ser representados por funções trigonométricas.

Para (SANTOS, 2004), uma função f é dita periódica se existe um número real positivo P , denominado período da função f , tal que $f(x) = f(x + nP)$; para todo x pertencente ao domínio da função (D_f) e n pertence ao conjunto dos inteiros (Z).

- $f(x) = f(x + nP)$ com $x \in D_f$, $n \in Z$ e $P \in R_+^*$
 - Temos então que $f(x)$ tem imagem igual para os termos da sequência: $((x - nP), \dots, (x - 1P), x, (x + 1P), \dots, (x + nP))$.
 - O menor valor positivo de " nP " será o Período fundamental da função $f(x)$ e será representado pela letra T .
 - O período Fundamental T é espaço do domínio que a função gasta para completar um ciclo ou pulso. **Figura 57.**

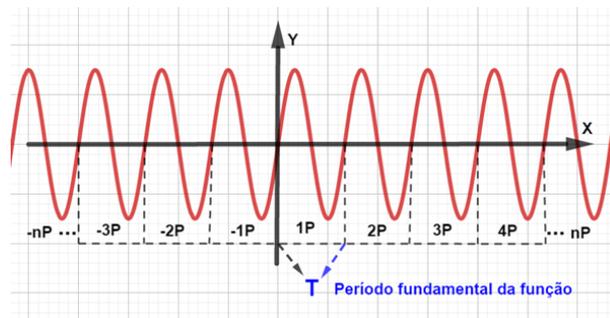


Figura 57 – Gráfico de Função Periódica

Fonte: O autor (2021)

Não é raro o pensamento que as funções periódicas limitam-se apenas as funções trigonométricas: seno, cosseno, tangente, ou suas recíprocas. Considerar função periódica como sinônimo de função trigonométrica é um engano comum. As funções trigonométricas

são as mais conhecidas e modelam os fenômenos periódicos de forma eficiente porque possuem uma gama de ferramentas e teoremas que podem ser aplicados na modelagem dos fenômenos periódicos.

(LUCENA, 2020a), traz como exemplo de função periódica a função parte decimal; $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$; na qual $x = x - \lfloor x \rfloor$ com sendo $\lfloor x \rfloor$ a parte inteira de x . Portanto:

- $f(x + 1) = f(x)$.
- Para todo x real, temos que $T = 1$ é o período fundamental; da função $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$. **Figura 58**
- (LAGES et al., 1997), denominou essa função de dente-de-serra e a definiu como sendo:

$$- f(k) = 0 \text{ se } k \in \mathbb{Z} \text{ e } f(k + \alpha) = \alpha \text{ quando } 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ e } k \in \mathbb{Z}.$$

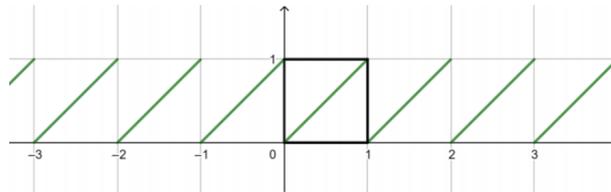


Figura 58 – Gráfico da função periódica $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$

Fonte: (LUCENA, 2020a)

(MARKUS; JUNIOR; FERREIRA, 2003), trazem que os fenômenos periódicos permeiam toda a nossa existência e ressaltam a extrema importância desses fenômenos, indicando que sem os mesmos não seria possível o desenvolvimento da percepção do tempo nem sequer a sua definição. Para os autores os fenômenos periódicos constituem o alicerce da ciência, porque as leis da física têm como base a detecção de eventos que ocorram de forma repetitiva e previsível. Os fenômenos periódicos permitem a visualização de um mundo extraordinariamente complexo devido a existência de uma ordem subjacente, não percebida à primeira vista. A lógica interna, a coerência da nossa representação mental do mundo externo, e por extensão nossa própria mente dependem da percepção dessa ordem subjacente.

A descrição entusiasmada e eloquente dos fenômenos periódicos acima; não foi feita por matemáticos, mas sim, por cientistas da área biológica. Os professores de matemática atuam no letramento matemático e trigonométrico dos alunos visando o entendimento e modelagem dos fenômenos periódicos. Portanto, é importante que o discente saiba que a trigonometria não é a vilã, seus conceitos e saberes são frutos da persistente ação

da humanidade em explicar e entender os fenômenos periódicos que são descritos por cientistas como essenciais para a vida humana.

(MARKUS; JUNIOR; FERREIRA, 2003) e (LUCENA, 2020a), indicam que esses fenômenos estão presentes em vários estudos nas mais variadas áreas, exemplo:

- Movimentos planetários e Fases da lua.
- Cronobiologia.¹⁶;
- Fenômeno climático El Niño.¹⁷.
- Movimentos vibratórios.
- Sistema massa e mola.
- Ondulatória.
- Medicina do sono.

(PAIVA, 2015), define movimento periódico como aquele atribuído a um móvel descrevendo o mesmo movimento repetidas vezes consecutivas em intervalos de tempo iguais. Define Período (p) como sendo o tempo necessário para realizar cada movimento e Frequência (f) como número de movimentos realizados em determinada unidade de tempo.

O movimento oscilatório ou periódico é que realiza movimentos de ida e volta em torno de uma posição que esteja em equilíbrio. Para a autora todo movimento oscilatório também é periódico porque depende de um Período (P) que é o tempo necessário para completar uma oscilação. A autora traz a equação $p = \frac{1}{f}$ que relaciona o período com a frequência. Dentre tantos exemplos de aplicação dos Movimentos Periódicos ou Oscilatório alguns são mostrados na **tabela 4**.

¹⁶ Ciência que estuda os ritmos da natureza, observa a influência do tempo em diferentes situações e como cada organismo está sincronizado com ciclos do meio ambiente. <https://www.cpapvital.com.br/blog/o-que-e-cronobiologia-e-qual-a-sua-relacao-com-o-sono/>, acessado em 14 03 2021 às 09:25H.

¹⁷ É um fenômeno atmosférico-oceânico caracterizado por um aquecimento anormal das águas superficiais no Oceano Pacífico Tropical. Altera o clima regional e global, mudando os padrões de vento a nível mundial, afetando assim, os regimes de chuva em regiões tropicais e de latitudes médias. <http://educacao.globo.com/artigo/el-nino-e-la-nina>. Acessado em 14 03 2021 às 10:00 h.

Tabela 4 – Exemplos de Aplicação dos Movimentos Periódicos

MOVIMENTOS PERIÓDICOS OSCILATÓRIO	
TIPO	APLICAÇÃO
CIRCULAR	Giro com velocidade constante. Movimento Circular Uniforme (MCU). Mecânica celeste, movimento do sol, Lua e satélites. Relógio Biológico Circadiano; ou Núcleos Supraquiasmático (NSQ) ¹⁴ .
PENDULAR (VAI e VEM)	Determinação de área metropolitana das cidades. Relógio Pendular Mecânico. Movimentos da maré. Movimentos dos pistões nos motores a combustão. Diagnósticos de doenças do sono como (MPMS) ¹⁵ . Marcapasso ¹⁶ .

Fonte: O Autor (2021)

Os livros didáticos do ensino médio trazem muitas páginas dedicadas ao ensino da trigonometria. Porém, não fica claro para o aluno, nem para o professor, qual a utilidade desse material. Existem muitas aplicações para parte inicial (trigonometria no triângulo), onde são mostrados exemplos de aplicação da tangente para cálculo de distâncias inacessíveis. Entretanto, para parte de funções as aplicações são poucas e na maioria das vezes vêm nos exercícios.

As seções seguintes trazem exemplos de fenômenos periódicos que aplicam a trigonometria circular e hiperbólica; visando conscientizar da relevância desses conteúdos para formação dos alunos.

5.2 MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

A trigonometria circular está associada diretamente aos fenômenos periódicos. As funções seno e cosseno são ferramentas aplicadas na modelagem desses fenômenos. Associar o movimento oscilatório ao de uma partícula se deslocando em uma circunferência é um caminho natural para fazer o aluno do ensino médio entender o Movimento Harmônico Simples.

(VENCESLAU, 2015), traz que as oscilações e vibrações são fenômenos presentes nas atividades cotidianas e impactam diretamente os sentidos: audição, fala e visão. A membrana timpânica vibra ao ser atingida por ondas sonoras; as cordas vocais vibram e produzem ondas mecânicas e a retina é sensibilizada ao ser atingida pela luz visível que é uma onda ou perturbação eletromagnética. O organismo humano ainda apresenta, no pulmão e coração, movimentos oscilatórios vitais que viabilizam a respiração e a circulação sanguínea. A autora também traz que as vibrações estão associadas aos fenômenos sísmicos e moleculares, têm impacto multidisciplinar e são aplicados na física, química, biologia, medicina e engenharia. Associar aos movimentos oscilatório a trigonometria circular au-

mentou exponencialmente a importância e significância da aprendizagem dos conteúdos trigonométricos no ensino básico.

As vibrações estão associadas a equipamentos que melhoram o bem estar das pessoas, exemplo: micro-ondas; máquina de lavar; amplificadores elétricos e GPS, dentre tantos outros. Porém, na engenharia civil uma consequência nefasta das vibrações é a **Ressonância**.¹⁸ Quando, não previstas e/ou mitigadas podem provocar falhas em estruturas e máquinas que levam ao colapso ou a ineficiências desastrosas.

(SILVA, 2008), indica o Movimento Harmônico Simples como uma aplicação da trigonometria que consiste no movimento de um corpo com oscilação em torno de um ponto de equilíbrio. Os coeficientes a , b , c e d ; característicos da função $y = a + b\text{sen}(cx + d)$ ou $y = a + b\text{cos}(cx + d)$ são substituídos por constantes físicas que representam importantes aspectos do MHS. Para o autor " a " é considerado zero, devido ao sistema ter origem na posição de equilíbrio; b é a amplitude " A "; c , representa a frequência angular ω ; d é a fase inicial φ ; e $(\omega.t + \varphi)$ é denominado fase do movimento no tempo " t ". Portanto, tem-se:

- $x = A.\text{sen}(\omega.t + \varphi)$ ou $x = A.\text{cos}(\omega.t + \varphi)$

(VENCESLAU, 2015), define Movimento Harmônico simples (MHS); como o movimento periódico no qual uma partícula se move em uma trajetória em consequência da ação de uma força restauradora, exercida por uma mola ou elástico, dirigida para um ponto de equilíbrio.

Considerando uma partícula se deslocando sobre uma circunferência de raio R , seguindo um movimento Curvilíneo e Uniforme (MCU); ao se deslocar a velocidade angular contante (ω), o ângulo central α varia em função do tempo (t). A projeção do ponto "P" varia de $-R$ a R ; tanto na vertical como na horizontal; descrevendo um movimento oscilatório e periódico; porque a cada volta os valores da projeções de "P" se repetem.

¹⁸ Aumento na amplitude de vibração natural do material provocado por uma vibração externa de frequência coincidente.

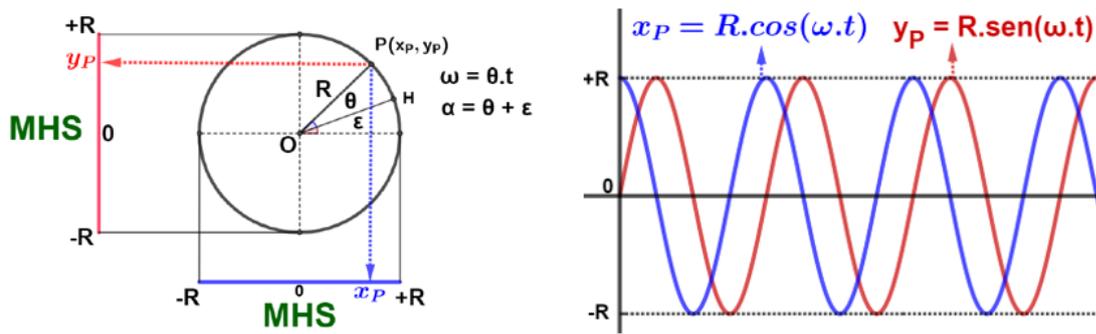


Figura 59 – Partícula em MCU projetando MHS

Fonte: O Autor (2021)

A partícula ao sair do ponto H para P, descreve um arco $HP = \theta$; a velocidade angular ω é a taxa de variação instantânea do ângulo central pelo tempo "t". Ou seja:

- $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, então $d\theta = \omega \cdot dt$.
- $\int_0^\theta d\theta = \omega \int_0^t dt \Rightarrow \theta = \omega \cdot t$
- O ângulo central $\alpha = \theta + \epsilon$; logo, $\alpha = \omega \cdot t + \epsilon$.
- Como $\text{sen}(\alpha) = \frac{y_P}{R}$, logo, implica $y_P = R \text{sen}(\omega \cdot t + \epsilon)$
- $\text{cos}(\alpha) = \frac{x_P}{R}$, implica que $x_P = R \text{cos}(\omega \cdot t + \epsilon)$. Onde:
 - " ω " é a velocidade angular,
 - " ϵ " é a posição inicial da partícula,
 - " t " é o tempo de deslocamento no MCU,
 - " R " é o raio da circunferência.

Os sistemas vibratórios podem gerar movimentos harmônicos ou não harmônicos. Mesmo o movimento não harmônico, caso tenha periodicidade, pode ser modelado por meio da superposição de movimentos harmônicos representados através de combinações lineares de funções periódicas (trigonométricas); também conhecido como análise de Fourier.

5.2.1 SÉRIE DE FOURIER

Segundo (AMORIM; TRINDADE; JUNIOR, 2019), a ideia de decompor funções por meio de suas componentes trigonométricas surgiu em torno de 1750, após as tentativas de resolução do problema de vibração de uma corda. No ano 1723, Daniel Bernaulli (1700-

1782), tinha apresentado a expressão como solução do problema de vibração da corda de comprimento π quando vibra por um deslocamento de sua posição de repouso.

$$\bullet \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}(nx) \cos(nct)$$

Personalidades como D'Alembert, Euler e Lagrange deixaram suas contribuições para o tema, porém coube a Fourier (1768-1830), no ano 1811 em seu trabalho, Teoria Matemática de Condução de Calor, especificar os coeficientes da série que hoje recebe seu nome. Para os Autores; a principal contribuição de Fourier, mesmo não estando integralmente correto, foi afirmar que qualquer função contínua ou não de um variável poderia ser expressa pela série:

$$\bullet \quad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Em (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005), João Bosco Carvalho afirma que a introdução das séries de Fourier mostrou a posição central das funções trigonométricas na análise matemática moderna.

Domingues, em (IEZZI, 2013), traz como resultado fundamental de Fourier o teorema que assegura que a toda função periódica, no que se refere ao som, pode ser representada por uma soma da forma:

$$\bullet \quad a_1 \text{sen} b_1 t + a_2 \text{sen} b_2 t + a_3 \text{sen} b_3 t + \dots$$

na qual, as frequências das senoidais são múltiplas da menor das frequências. A série de Fourier viabiliza a análise do sinal sonoro periódico.

(FIGUEIREDO, 1977), no prefácio de seu livro, traz que a análise de Fourier tem como ingredientes a Série de Fourier e a Transformada de Fourier, essa análise é aplicada na resolução de equações diferenciais parciais. A série de Fourier viabiliza a análise de sinal periódico, ou seja, aquele que apresenta repetição de seus valores a intervalo definido de tempo conhecido como período. Esse sinal periódico é representado por uma função periódica. É uma série trigonométrica formada por seno e cosseno.

(FIGUEIREDO, 1977), define como a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; periódica de período fundamental $2L$, integrável e também absolutamente integrável. tal que:

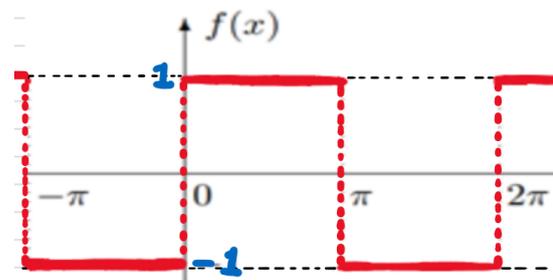
- $f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right)$;
- o período da função é $T = \frac{2L}{n}$, para $n=1$, tem-se período fundamental $T = 2L$;
- (AMORIM; TRINDADE; JUNIOR, 2019), demonstraram que os coeficientes da série Fourier são:

$$\begin{aligned}
 - a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx; \\
 - a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \text{ para } n \geq 0; \\
 - b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \text{ para } n \geq 1;
 \end{aligned}$$

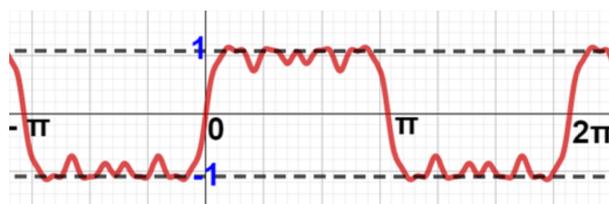
Segundo (GUEDES, 1992), a análise de Fourier traz o enunciado: "**Uma grandeza periódica retoma as mesmas características ao fim de um intervalo**". Esse intervalo \mathbf{T} , chama-se **período**. O autor aplica a série de Fourier e sua transformada discreta para fazer a análise harmônica das ondas não sinusoidais, decompondo essas ondas em seus termos harmônicos.

Os dois próximos tópicos trazem exemplos de aproximação pela Série de Fourier para funções que representam as ondas quadrada e triangular; essas aproximações aplicam técnicas de integração que fogem do escopo do ensino médio; porém é salutar que o aprendiz de ensino médio saiba que os conteúdos de trigonometria do ensino médio têm aplicação interna, ou seja, na própria matemática e em outras áreas. Para aplicar o seno e cosseno na modelagem por Fourier é necessário aplicar técnicas de integração das funções trigonométricas.

5.2.1.1 ONDA QUADRADA APROXIMADA POR SUA SÉRIA DE FOURIER



a) Onda Quadrada Período 2π



b) Fourier Onda Quadrada $P = 2\pi$

Figura 60 – Onda Quadrada e sua Representação por Fourier

A **figura 60** traz a representação gráfica da onda quadrada, **figura 60-a**, definida pela função periódica $f(x + \pi) = f(x)$, com $f(x) = \begin{cases} -1; & \text{se } -\pi \leq x < 0; \\ 1; & \text{se } 0 \leq x < \pi \end{cases}$; também traz o gráfico da aproximação dessa onda quadrada construído pela série de Fourier, **figura 60-b**.

Com a série de Fourier é possível se aproximar tanto quanto se queira da função analisada, bastando para isso aumentar a quantidade de termos da série.

- Na série: $f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L})$.

- Como $T = 2L = 2\pi$; implica $L = \pi$.

- Sabendo que $a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx$, tem-se:

$$a_0 = -\frac{1}{\pi}[0 + \pi] + \frac{1}{\pi}[\pi - 0] = -1 + 1 = 0$$

$$a_0 = 0$$

.

- O próximo passo é determinar o valor de $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$, tem-se:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \cos n\pi dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1) \cos n\pi dx$$

$$a_n = -\frac{1}{n\pi}[0 + \sin(n\pi)] + \frac{1}{n\pi}[\sin(n\pi) - 0]$$

$$a_n = -\frac{1}{n\pi}[0 + 0] + \frac{1}{n\pi}[0 - 0]$$

$$a_n = 0.$$

- Para o cálculo do coeficiente $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$, tem-se:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \sin n\pi dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1) \sin n\pi dx$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}[\cos 0 - \cos(n\pi)] - \frac{1}{n\pi}[\cos(n\pi) - \cos 0]$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}[1 - \cos(n\pi)] - \frac{1}{n\pi}[\cos(n\pi) - 1]$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}[1 - \cos n\pi].$$

- Se n for par, então $\cos(n\pi) = 1$; isso implica $b_n = 0$.

- Se n for ímpar, então $\cos(n\pi) = -1$; então $b_n = \frac{4}{n\pi}$.

- Como n é ímpar, $n = 2k + 1$ e $k \in Z$; substituído os coeficientes a_0 ; a_n e b_n na aproximação de Fourier:

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L})$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2}(0) + \sum_{n=0}^{\infty} ((0) \cos \frac{n\pi x}{\pi} + (\frac{4}{n\pi}) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\pi})$$

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \operatorname{sen}(nx) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx).$$

- Portanto, a série de Fourier para a onda quadrada, mostrado na **figura 58-b** é determinada por:

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \operatorname{sen}(2k+1)x, \quad \text{ou seja:}$$

$$f(x) \cong \frac{4}{\pi} (\operatorname{sen}x + \frac{1}{3}\operatorname{sen}3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}5x + \frac{1}{7}\operatorname{sen}7x + \dots)$$

5.2.1.2 ANÁLISE HARMÔNICA

Processo utilizado para decomposição de grandezas físicas periódicas e não sinusoidais em seus termos harmônicos. Podem ser utilizadas tanto a série de Fourier como sua transformada discreta.

A análise harmônica das ondas não sinusoidais, consiste em decompor essas ondas em seus harmônicos utilizando o teorema de Fourier. Segundo (GUEDES, 1992), a análise de Fourier traz o enunciado: **"Uma grandeza periódica retoma as mesmas características ao fim de um intervalo"**. Esse intervalo **T**, chama-se **período**. Em seu estudo, o autor, traz a análise de grandezas físicas periódicas com formato de onda não **sinusoidal**¹⁹ atreladas às máquinas elétricas. Esse estudo analisa a interferência das grandezas periódicas não sinusoidais no desempenho individual das máquinas, na estabilidade e na eficiência da rede elétrica. Para o autor a geração de **termos harmônicos**²⁰ têm origem nos materiais ferromagnéticos, nas especificidades de construção ou nas características das grandezas elétricas do sistema de alimentação. O estudo dessas grandezas e das consequências no comportamento da máquina elétrica pode ser feito por meio da análise harmônica das grandezas. **Figura 61**

¹⁹ Aquela que não é sinusoidal; não pode de ser representada pela senoide.

²⁰ São distorções das formas de onda das grandezas físicas. São responsáveis por fenômenos parasitas que prejudicam o funcionamento da máquina.

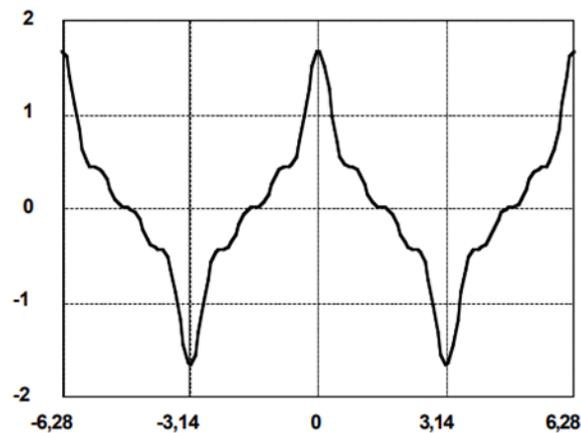


Figura 61 – Onda alternada não Sinusoidal

Fonte: (GUEDES, 1992)

Dessa forma, por meio da aplicação da teoria de Fourier, mesmo as ondas não sinusoidais podem ser analisadas ao serem decompostas em suas harmônicas. Daí a importância das funções periódicas e em especial as trigonométricas.

5.2.2 SISTEMA MASSA-MOLA

Um sistema que funciona vibrando possui elementos que guardam a energia potencial (mola ou elástico), um armazenador de energia cinética (massa) e um dissipador de energia (amortecedor ou um aplicador de atrito). No sistema perfeito ou conservador a energia mecânica geral é conservada; toda energia potencial é transformada em cinética e vice versa. Claro que o sistema real é não conservadorista e parte da energia é perdida por atrito, calor ou outro meio. (VENCESLAU, 2015)

O conjunto massa-mola é um sistema mecânico onde elementos físicos atuam juntos para simular um fenômeno. A **massa** representa o conjunto da massa de todas as partículas envolvidas e a **mola** representa todos elementos do sistema que sofrem deformação linear quando submetidos a uma força aplicada. Esse conjunto ao funcionar descreve um movimento Harmônico Simples, portanto sua modelagem acontece por meio das funções trigonométricas. Todos processos ou equipamentos modelados por um sistema mecânico massa-mola é uma aplicação da trigonometria.

A força peso impõem uma elongação na mola, provocando um deslocamento y_0 para baixo; as especificidades da mola são traduzidas pelo seu coeficiente de deformação linear "K". A lei de Hooke indica $K = \frac{P}{\Delta y}$; onde P é força peso e Δy é a deformação sofrida devido a ação da força. Como no sistema ideal a energia mecânica é conservada; na descida toda energia potencial elástica da mola se transforma em energia cinética; contudo, no percurso de volta; a ação da mola recompõe a energia potência elástica e o

corpo passa pelo ponto de equilíbrio até a posição $+y_0$. Figura 62

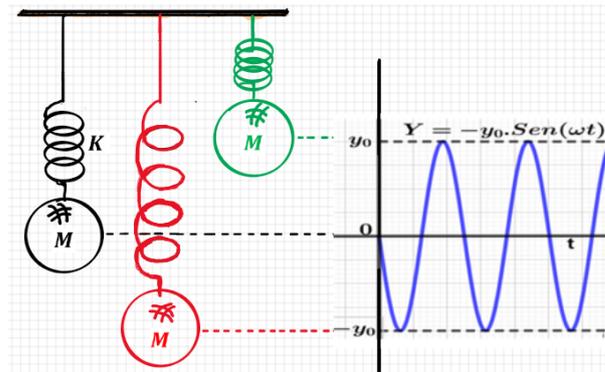


Figura 62 – Sistema Massa e Mola (Energia Mecânica conservada)

Fonte: O Autor (2021)

Nas subseções seguintes tem-se exemplos de aplicação do sistema massa-mola na suspensão de veículo e nos elementos estruturais de uma construção.

5.2.2.1 SUSPENSÃO DO VEÍCULO

A suspensão do veículo é um conjunto mecânico modelável por uma sistema massa-mola; com dois **graus de liberdade**, [19]¹ composto pelas massas m_1 e m_2 , interligadas pela mola K_2 e pelo amortecedor "c"; esse conjunto está ligado a mola K_1 , e também está sujeita a ação da força advinda das imperfeições do terreno. Entretanto, a energia mecânica não é conservada, pelo contrário, devido a ação de amortecedores ou geradores de atrito a energia é absorvida com a finalidade de estabilizar o conjunto.

A ação do conjunto de suspensão tem como objetivo neutralizar as variações verticais causadas pela atuação da força peso e das forças geradas pelas imperfeições do terreno. As variações verticais, em função do tempo, descrevem uma sucessão de movimentos harmônicos representados por funções trigonométricas com amplitudes decrescentes devido a drenagem da energia cinética do sistema pelo amortecedor, mola e pneu.

(VENCESLAU, 2015), apresenta a modelagem simplificada da suspensão de uma das rodas. A massa suspensa foi denominada m_2 ; a massa das peças não suspensas como pneu, roda, eixo e os demais itens; foram representadas por m_1 ; a rigidez do pneu foi representado pela constante K_1 ; o coeficiente de amortecimento do amortecedor foi representado por "c", a rigidez da mola de suspensão foi representada como K_2 ; o deslocamento vertical do conjunto foi representado por y_2 e y_1 medidos a partir da posição de equilíbrio estático e também por y_0 que varia em função das oscilações do terreno. Figura 63

¹ É o número mínimo de variáveis independentes necessárias para determinar com exatidão a posição e a orientação dos elementos de um sistema. (VENCESLAU, 2015).

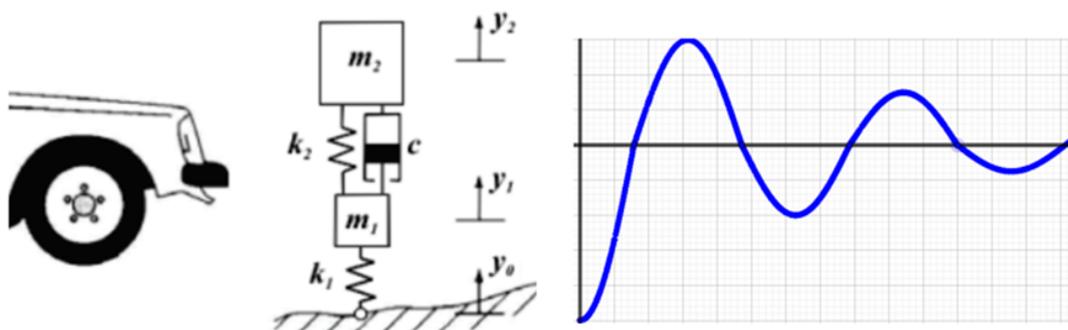


Figura 63 – Suspensão independente do Veículo

Fonte: O Autor (2021) com base em (VENCESLAU, 2015)

5.2.2.2 VIBRAÇÕES NAS ESTRUTURAS

Um sistema vibratório gera os movimentos harmônicos simples, muitos deles periódicos que podem ser modelados por sistema massa-mola que são, em sua gênese, funções trigonométricas. As vibrações naturais nas estruturas edificadas são motivos de preocupação dos engenheiros e construtores porque caso essas vibrações entrem em ressonância com alguma vibração externa a estrutura pode entrar tragicamente em colapso estrutural. Como no caso da ponte **Tacoma Narrows**, Estados Unidos; que foi inaugurada em julho de 1940 e entrou em colapso no dia 7 de novembro daquele mesmo ano. (VENCESLAU, 2015).

Os elementos estruturais podem ser modelados por sistemas massa-mola para representar as vibrações verticais e horizontais das estruturas; Como exemplo tem-se:

- Viga em balanço com massa na extremidade;
- Viga bi-apoiada com carga no centro;
- Viga bi-engastada com carga no centro;
- Vibração estrutural nas edificações.

5.2.2.2.1 VIGA EM BALANÇO COM MASSA NA EXTREMIDADE

As estruturas possuem vigas que devido a sua natureza vibratória podem ser modelados como sendo molas ou superfícies elásticas. Para o caso de ser viga em balanço; aquela presa apenas em uma das extremidades, não considerando seus componentes de amortecimento e sua massa; pode-se modelar o comportamento dessa estrutura como um conjunto massa-mola de deslocamento vertical. Para esse caso, a massa da extremidade "m" está sujeita a força peso que traciona a mola de rigidez ou constante elástica K impondo ao sistema um deslocamento y_0 em função de um tempo t . Figura 64

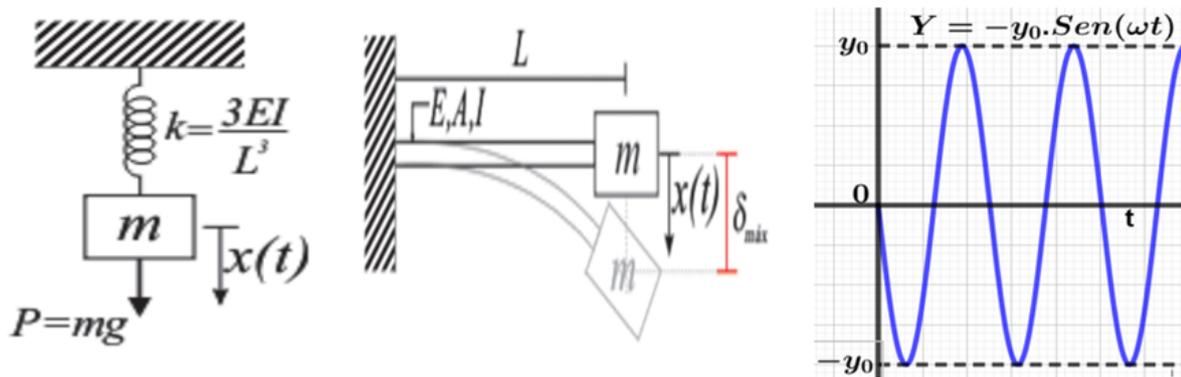


Figura 64 – Viga em balanço com massa na extremidade

Fonte: O Autor (2021), com base em (VENCESLAU, 2015)

Segundo (VENCESLAU, 2015), com base nos conhecimentos sobre resistência de materiais, a deflexão estática da viga em sua extremidade livre é dada por: $\delta_{m\acute{a}x} = \frac{PL^3}{3EI}$.

- Com \mathbf{P} igual ao peso da massa "m"; \mathbf{E} é o módulo de elasticidade do material; \mathbf{I} é o momento de inércia da secção transversal da viga e \mathbf{L} é a comprimento da viga.

- Portanto, $K = \frac{P}{\delta_{m\acute{a}x}} \Rightarrow K = \frac{P}{\frac{PL^3}{3EI}} \Rightarrow K = \frac{3EI}{L^3}$

5.2.2.2.2 VIGA BI APOIADA COM CARGA TRANSVERSAL NO CENTRO

Mais um exemplo da modelagem de vibração vertical representada pelo sistema massa-mola com uma grau de liberdade. O massa da viga e sua capacidade de amortecimento não devem ser consideradas. Considerando-se apenas a carga da massa "m" no centro do vão; a constante de elasticidade dada por $K = \frac{48EI}{L^3}$; com \mathbf{E} , sendo o módulo da elasticidade do material; \mathbf{I} , o momento de inércia da secção transversal e \mathbf{L} , o comprimento da viga. Figura 65

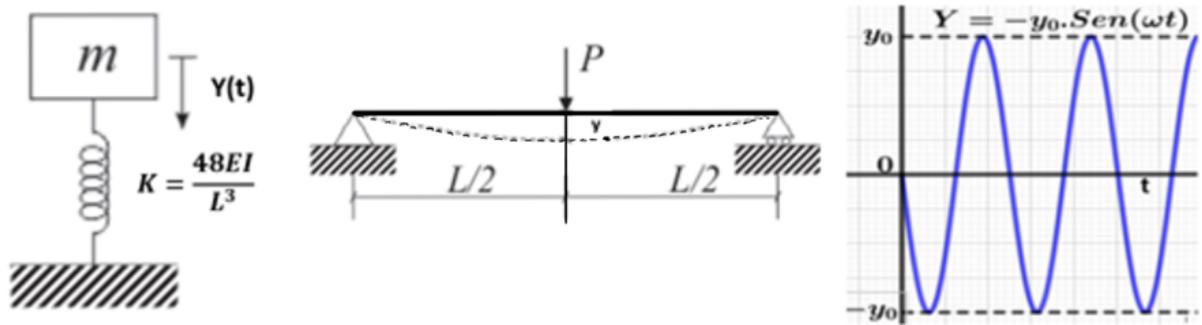


Figura 65 – Viga bi apoiada com carga transversal no centro

Fonte: O Autor (2021), com base em (VENCESLAU, 2015)

$$Y = -y_0 \cdot \text{Sen}(\omega t)$$

5.2.2.2.3 VIGA BI ENGASTADA COM CARGA TRANSVERSAL NO CENTRO

Quando a viga está bi-engastada e sua massa é desprezível em relação a massa da carga transversal colocada ao centro, o modelo se assemelha ao da viga bi-apoiada; porém a constante de elasticidade passa a ser dada por $K = \frac{192EI}{L^3}$. Figura 66

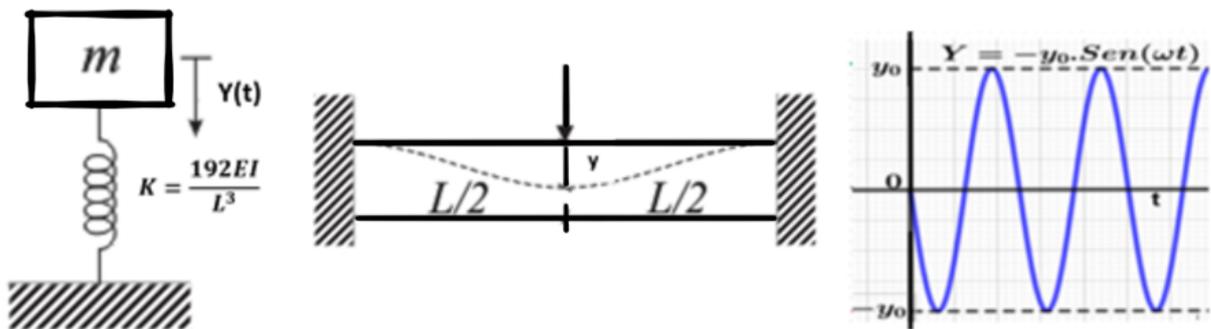


Figura 66 – Viga bi engastada com carga transversal no centro

Fonte: O Autor (2021), com base em (VENCESLAU, 2015)

5.2.2.2.4 VIBRAÇÃO EM ESTRUTURA COM UM ANDAR

A estrutura das edificações vibram naturalmente, esses movimentos podem ser modelados de forma simplificada por sistemas massa-molas, com grau de liberdade associado ao número de andares. Considerando que não existe compressão e alongação axial das vigas e que as massas das colunas são desprezíveis, o deslocamento horizontal na estrutura é associado ao sistema massa-mola horizontal. Para prédios de um andar a modelagem

acontece por meio do sistema massa-mola, com um grau de liberdade, que considera a massa da coluna desprezível e seu coeficiente de elasticidade \mathbf{K} ; a massa \mathbf{m} do sistema é a massa da viga, o deslocamento horizontal $x(t)$ ocorre em função do tempo \mathbf{t} . Como não são considerados amortecedores que capturem a energia do sistema a vibração é livre e a energia total do sistema é preservada; por tanto, a energia potencial elástica $E_e = \frac{1}{2}Kx^2$ somada a energia cinética $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ é igual a constante real H . Tem-se:

- Como v é velocidade do sistema; aplicando a equação da velocidade $v^2 = v_0^2 + 2ax$ com $v_0 = 0 \Rightarrow v^2 = 2ax$; e a sendo aceleração do conjunto.
- $E_e + E_c = H \Rightarrow \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}m2ax = H \Rightarrow \frac{d}{dx}(\frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}m2ax) = \frac{d}{dt}H$.
Então, $Kx + ma = 0$.
- Isso implica que $|x| = |\frac{-ma}{K}|$. Ou seja, $K = \frac{F}{x}$ é a constante de deformação linear da mola (ou elasticidade da coluna) indica pela lei de Hooke.
- Como um sistema de vibração livre gera MHS associado a uma partícula que gira livre sobre uma circunferência, conforme mostrado na figura 59. A frequência natural de vibração é $w = \sqrt{\frac{K}{m}}$ e o deslocamento em função do tempo é determinado por $x(t) = A.\text{sen}(wt + \varphi)$; com "A" sendo a amplitude da senoide que representa a vibração ou o raio "R" da circunferência associada ao deslocamento. (VENCESLAU 2015)

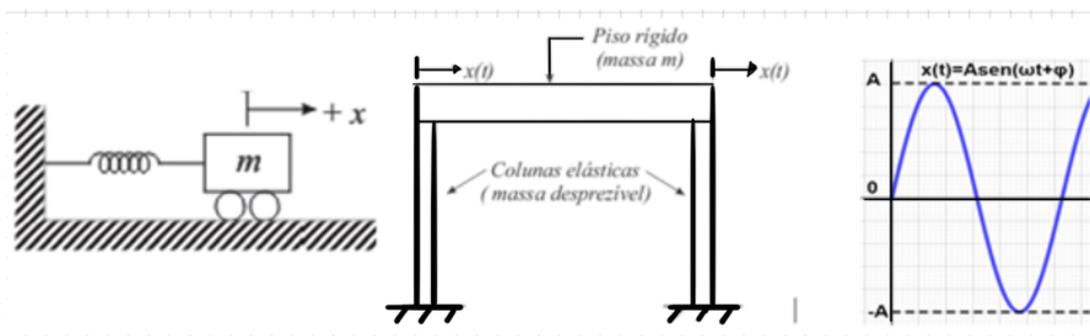


Figura 67 – Estrutura com um andar

Fonte: O Autor (2021), com base em (VENCESLAU, 2015)

5.3 APLICAÇÃO NA MEDICINA

A importância da medicina para humanidade é incontestável. Preservar a vida e promover o bem estar humano é o nobre objetivo dessa ciência. O coração é motor do corpo; ou seja, o propulsor da vida. Bombear sangue por todo corpo, distribuir o oxigênio

e recolher o gás carbônico é uma tarefa que requer força nos batimentos e ritmo para a pressão nos vasos e órgãos não ser demasiada nem aquém da necessária.

A monitoração dos batimentos cardíacos e da pressão sanguínea é uma tarefa igualmente relevante. A trigonometria torna possível a monitoração e diagnóstico do coração e da pressão sanguínea arterial, portanto o saber trigonométrico é importante para o entendimento desse órgão vital vida.

5.3.1 FREQUÊNCIA CARDÍACA E PRESSÃO SANGUÍNEA

(OLIVEIRA, 2013), apresenta a modelagem da frequência dos batimentos cardíacos. O número de batidas em função do tempo é medido em bpm (batimentos cardíacos por minuto); dessa forma, pode-se registrar a **pressão sanguínea ou arterial**²¹ da pessoa.

Para medir ou aferir a pressão é necessário registrar o maior e menor valor. A maior pressão acontece quando o coração está contraído, essa pressão é denominada **sistólica**; a menor acontece quando o coração está em repouso, pressão **diastólica**. Tem-se aí um movimento periódico, isso possibilita a modelagem por meio da função trigonométrica: $F(x) = a + b\cos(cx + d)$.

O batimento médio do coração é 80 bpm e a pressão normal oscila entre 120 e 80 mm Hg. Tem-se uma variação de 40 mm Hg entre a maior e a menor pressão; a modelagem começa com o cálculo dos parâmetros "a e "b"; em seguida, calcula-se valor de "c". O coeficiente "d" pode ser considerado zero porque o primeiro batimento será iniciado no instante "t=0".

$$1. \text{ Tem-se: } \begin{cases} a + b = 120; \\ a - b = 80; \end{cases} \Rightarrow 2a = 200 \Rightarrow a = \frac{200}{2} \Rightarrow a = 100 .$$

$$\text{Portanto, } 100 + b = 120 \Rightarrow b = 120 - 100 \Rightarrow b = 20.$$

2. O período T é o tempo, em segundo, gasto para o coração realizar um batimento; como o coração bate 80 vezes por minuto, tem-se:

$$\bullet T = \frac{1 \text{ min}}{80} = \frac{60 \text{ seg}}{80} \Rightarrow T = \frac{3}{4};$$

$$\bullet \text{ Como } T = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow c = \frac{8\pi}{3}$$

3. Substituindo-se os valores encontrados na função, obtém-se a modelagem da variação da pressão sanguínea(em mm Hg), em função do tempo (em segundo).

$$\bullet P(t) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right)$$

²¹ Força exercida pelo sangue ao ser bombeado pelo coração

- (OLIVEIRA, 2013), indica o argumento da função como $(\frac{8\pi}{3}t)$, em radianos, com t em segundos; logo, um batimento demora 0,75 segundos. Conforme mostra a **figura 68**.

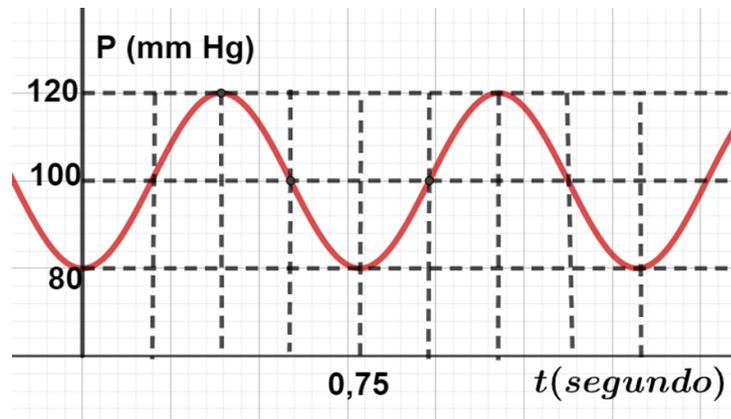


Figura 68 – Modelagem do Batimento Cardíaco

Fonte: Autor (2021)

Com a realização dessa modelagem, tem-se o benefício da resolução de sistema linear e equação; além da oportunidade de mostrar a **aplicação prática da trigonometria**. Entretanto, essa não é a única aplicação na medicina; quando conjugada à elétrica e a ondulatória tem-se algumas aplicações na medicina de diagnóstico, tais como: eletrocardiogramas e eletroencefalograma.

5.3.2 MEDICINA DO SONO

Parece até contraditório associar a trigonometria à medicina do sono; isso porque, para muitos esse conteúdo está associado a privação do sono devido as noites dedicadas ao entendimento de seus conceitos. Contudo, o aumento do bem estar, o diagnóstico de doenças e muitos transtornos são possíveis devido a aplicação da trigonometria. A psicobiologia é um ramo da ciência beneficiado com a utilização dos conceitos trigonométricos no diagnóstico, acompanhamento e avaliação de enfermidades como: Alzheimer, doença de Parkinson, esquizofrenia, doenças cardiovasculares, transtorno do déficit de atenção/hiperatividade (TDAH) e síndrome de Asperger.

A cronobiologia é o campo da ciência que busca entendimento de como os seres vivos manuseiam as recorrências temporais e como são capazes de sincronizar as suas atividades com as variações da luminosidade, Esse campo da ciência surgiu da investigação de padrões regulares da ritmicidade biológica e sua interação com ritmicidade ambiental. (MARKUS; JUNIOR; FERREIRA, 2003)

Segundo (ANDREOLI, 2013), Cronobiologia é a ciência que investiga e estuda os mecanismos da estrutura temporal biológica e seu objetivo é ajudar na compreensão da atividade humana e explicar o papel dos relógios biológicos nessa atividade.

Os relógios biológicos, juntamente com alguns sensores, são responsáveis pela marcação endógena do tempo, independente das variações ambientais. Nos mamíferos existem dois aglomerados de neurônios no hipotálamo; do lado do quiasma óptico, que são responsáveis pela marcação da ritmicidade circadiana, são denominados Núcleos Supraquiasmáticos (NSQ). (MARKUS; JUNIOR; FERREIRA, 2003)

(ALOÉ; AZEVEDO; HASAN, 2005), definem os Núcleos Supraquiasmáticos (NSQs) como marcapasso circadiano formados por uma aglomerado de ± 10 mil células, localizados no hipotálamo anterior, acima do quiasma óptico. Esse relógio biológico é capaz de gerar ritmo endógeno próprio que pode ser sincronizado por sincronizadores internos ou pela luz solar.

(GONÇALVES, 2013), define os ritmos circadianos como variações em processos fisiológicos que auxiliam os seres vivos na adaptação dos ciclos ambientais claro e escuro que ocorrem no período de 24 horas. A sincronização acontece em decorrência da ação do oscilador biológico denominado Núcleo Supraquiasmático (NSQ). Para o autor essa ritmicidade confere ao indivíduo a capacidade de se antecipar as mudanças que acontecem diariamente no ambiente. A gênese da ritmicidade circadiana está no movimento de rotação da Terra; devido as alterações que acontecem no ritmo circadiano pelo ciclo claro e escuro. A integridade da ritmicidade circadiana tem implicação direta na qualidade de vida e no bem estar do ser humano, alteração no ritmo circadiano é responsável por problemas de saúde como: obesidade, propensão a câncer, transtornos mentais e de cognição.

Para Moore (1999) em (GONÇALVES, 2013), os ritmos circadianos permanecem mesmo quando o indivíduo está submetido a condições de ausência de pistas temporais (ambiente permanentemente claro ou escuro); o sistema endógeno NSQ permite a antecipação à mudanças ambientais, a disponibilidade de alimentos e até a procura de parceiros.

A esse conjunto de osciladores, (GONÇALVES, 2013), deu o nome de Sistema de Temporização Circadiano (STC), que é composto pela via de recepção; presente na retina, pelos núcleos supraquiasmáticos (NSQ) e por uma via que possibilite o controle de saída (em hamsteres são variações na concentração intracelular de Ca^{2+}).

(GONÇALVES, 2013), indica que o estudo da ritmicidade circadiana pode acontecer por experimentos ou por modelos matemáticos que simulam tais experimentos. Porém, o autor relata que o ritmo de repouso e atividade (sono-vigília, na medicina do sono) é estudado pela **actimetria**.²² O modelo matemático ajusta uma **função cosseno** aos da-

²² Técnica aplicada para avaliação do sono, contudo os dados obtidos podem ser aplicado para determinar

dos colhidos pela **actimetria** e são gerados parâmetros como amplitude, mesor, acrofase e o período do ritmo. O cálculo dos parâmetros nesse modelo matemático é determinado pelo programa **Cosinor** de regressão qui-quadrada.

O sistema **Cosinor** é um método de ajuste a uma função cossenoide. (CORNELISEN, 2016), descreve o programa "Cosinor simples" e indica que o mesmo foi desenvolvido para análise de séries curtas e esparsas com dados equidistantes. Mesmo tendo a limitação de ser sensível aos **autliers**²³, a aplicação do método dos mínimos quadrados possibilita o ajuste do conjunto de medições e iguala, para dados equidistantes, os resultados nas sequências de Fourier e nas transformadas discretas de Fourier. Para o autor, o modelo de regressão é determinado pela equação $Y(t) = M + A\cos(\frac{2\pi t}{T} + \phi) + e(t)$, onde:

- "M" é o **mesor** - valor médio ajustado pelo ritmo;
- "A" é a **amplitude** - distância do mesor (M) ao valor mais alto ou metade da extensão da variação dentro do ciclo;
- " ϕ " é a **acrofase** - tempo para chegar na Amplitude máxima;
- "T" é o **período** - tempo necessário para completar um ciclo, nesse caso é um dia, ou 24 horas;
- "e(t)" é termo de **erro na regressão**.

Desenvolvendo-se $\cos(\frac{2\pi t}{T} + \phi)$, por meio da fórmula do cosseno da soma de arcos, tem-se:

- $\cos(\frac{2\pi t}{T} + \phi) = \cos(\frac{2\pi t}{T}).\cos\phi - \sin(\frac{2\pi t}{T}).\sin\phi$. Considerando:
 - $\beta = A\cos\phi$;
 - $x = \cos(\frac{2\pi t}{T})$;
 - $\gamma = -A\sin\phi$;
 - $z = \sin(\frac{2\pi t}{T})$.

- A equação pode ser reescrita da forma:

$$- Y(t) = M + \beta x + \gamma z + e(t)$$

o ritmo de atividade e repouso. (GONÇALVES, 2013)

²³ São pontos fora da curva porque estão muito defasados dos demais

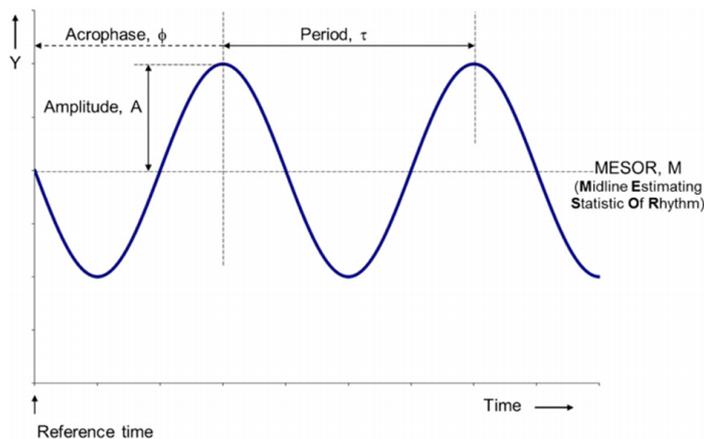


Figura 69 – Definição das características do ritmo Circadiano

Fonte: (CORNELISSEN, 2016)

(GONÇALVES, 2013), relata que a **actimetria** é usada também para registrar o **ritmo de atividade e repouso**. Para o autor existem dois tipos de variáveis que registram o ritmo atividade e repouso; aquelas baseadas em parâmetros da **função cosseno**, calculadas no *COSINOR*; e as variáveis **não paramétricas**.

Segundo o autor, as parametrizadas do Cosinor: mesor, amplitude, acrofase e a significância do período são ineficazes para modelar o ritmo de atividade e repouso porque o seu comportamento não segue uma cossenoide.

Witting et al (1990), em (GONÇALVES, 2013), propôs que fossem calculadas as variáveis não parametrizadas:

- **Variabilidade intra diária (IV)** - representa a fragmentação do ritmo decorrentes da sonolência diurna e ou despertares noturnos.
- **Estabilidade intermediária (IS)**- informa a sincronização do ritmo ao ciclo claro escuro (24 horas).
- **Menor atividade durante 5 horas seguidas (I5)** - variável determinada pela soma das atividades durante as 5 horas consecutivas menos ativas; indica a medida da fase de repouso.
- **Maior atividade durante 10 horas consecutivas (M10)** - Soma das atividades durante as 10 horas consecutivas de mais atividade.
- **Amplitude Relativa do Ritmo (RA)** - Pode ser determinada pela diferença entre M10 e L5; dividida pela media entre M10 e L5.

(GONÇALVES, 2013), utilizou funções seno; com período de 24,5 e 25 horas; durante 2, 14 e 100 ciclos (100 dias) para registrar as séries temporais dos valores da variável Estabilidade Intermediária IS.

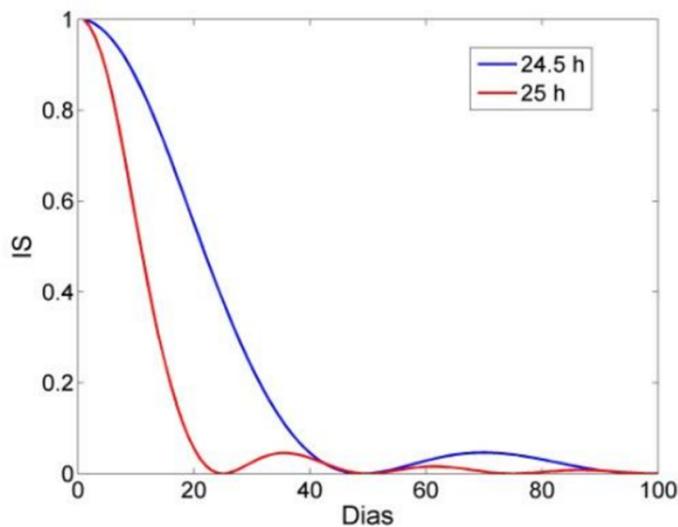


Figura 70 – Estabilidade Intermediária-IS

Fonte: (GONÇALVES, 2013) p 65

5.4 MOVIMENTO DA MARÉ E ALTURA DAS ONDAS

A trigonometria é aplicada na elaboração e representação das tábuas de marés; esse conjunto de informações possibilita a previsibilidade da altura das águas e dos períodos melhores de atividade para pesca. O movimento e posição do Sol e da Lua influenciam na atividade de pesca, na altura e duração das mares. No período de 24 horas acontecem a intercalação de duas marés baixas (baixa-mares) e duas marés altas (preia-mares). Esse fenômeno periódico acontece como resultado da combinação do movimento de rotação da Terra e das forças gravitacionais do Sol e da Lua sobre a Terra.

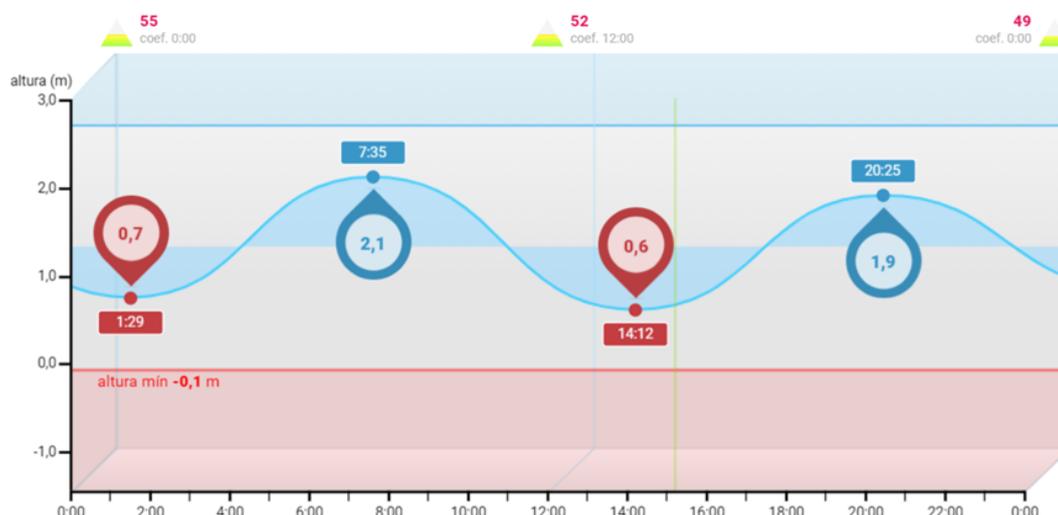


Figura 71 – Altura de Marés em Recife, 31 de maio 2021

Fonte: <https://tabuademares.com.br>, acessado em 31 maio 2021, às 15:30H

Da **figura** 71, foram extraídos os valores das duas preia-mares e baixa-mares, com seus respectivos horários e montada a tabela 5.

Tabela 5 – Preia-mares e Baixa-mares

RECIFE 31 MAIO 2021	1ª MARÉ	2ª MARÉ	3ª MARÉ	4ª MARÉ
HORÁRIO	01:29 H	07:35 H	14:12 H	20:25 H
ALTURA	0,7 m	2,10 m	0,6 m	1,9 m

Fonte: O Autor (2021) - extraído <https://tabuademares.com.br>, 31 maio de 2021

Ajusta-se os dados a função cosseno: $A(t) = a + b \cdot \cos(ct + d)$. Onde $A(t)$ é a altura da maré, em metros e " t " é o tempo em horas. Os coeficientes " a ", " b ", " c " e " d ", são os parâmetros de ajuste da função. Será calculado primeiro " a " e " b "; em seguida calcula-se " c " e por fim " d ". Contudo, é necessário calcular a média dos valores das marés altas e baixas antes de calcular o valor da translação vertical e a variação na amplitude.

Tabela 6 – Média das marés em 31 maio 2021

RECIFE: 31 MAIO 2021	ALTURA (m)	PARÂMETROS
MÉDIA DAS PREIA-MARES	$\frac{2,10+1,90}{2} = 2,0$	$a + b$
MÉDIA DAS BAIXA MARES	$\frac{0,70+0,60}{2} = 0,65$	$a - b$

Fonte: O Autor (2021)

$$1. \text{ Tem-se: } \begin{cases} a + b = 2,0; \\ a - b = 0,65; \end{cases} \Rightarrow 2a = 2,65 \Rightarrow a = \frac{2,65}{2} \Rightarrow a = 1,325.$$

Portanto, $1,325 + b = 2,0 \Rightarrow b = 2,0 - 1,325 \Rightarrow \mathbf{b = 0,675}$.

2. O semiperíodo $\frac{T}{2}$ é o tempo gasto para ir de uma maré baixa a uma alta ou vice-versa. Como existem três semi-perímetros no intervalo de 24 horas apresentado na figura 68; será feita determinado o semiperímetro médio $\frac{T}{2}$.

$$\frac{T}{2} = \frac{(7:35-1:29)+(14:12-07:35)+(20:25-14:12)}{3} = \frac{18:56}{3} = 6 : 19 = 6,3166H$$

Então, o período médio $T = 2(6 : 19) = 12 : 38 = 12,6333H$.

$$\text{Como } T = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow |c| = \frac{2\pi}{12,6333}.$$

$$\text{Portanto, } c = \frac{\pi}{6,3166}.$$

3. Para o cálculo do parâmetro "**d**", translação horizontal; aplicando-se as coordenadas da primeira maré na função $A(t)$. Tem-se o tempo $t = 1 \text{ h e } 29'$ ou $1,4833\text{horas}$ e altura $A(t) = 0,70$ metros:

$$A(t) = a + b \cdot \cos(ct + d)$$

$$0,7 = 1,325 + 0,675 \cos\left(\frac{\pi \cdot 1,4833}{6,3166} + d\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi \cdot 1,4833}{6,3166} + d\right) = \frac{0,7-1,325}{0,675}$$

$$\cos\left(\frac{\pi \cdot 1,4833}{6,3166} + d\right) = -1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi \cdot 1,4833}{6,3166} + d\right) = \cos(\pi); \text{ então, } \frac{\pi \cdot 1,4833}{6,3166} + d = \pi$$

$$d = \pi - \frac{\pi \cdot 1,4833}{6,3166} = \frac{6,3166\pi - 1,4833\pi}{6,3166} \Rightarrow d = \frac{4,8333\pi}{6,3166}.$$

4. Portanto, $A(t) = 1,325 + 0,675 \cos\left(\frac{\pi}{6,3166}t + \frac{4,8333\pi}{6,3166}\right)$. Com o auxílio do GeoGebra foi possível a construção do gráfico dessa função. Figura 72

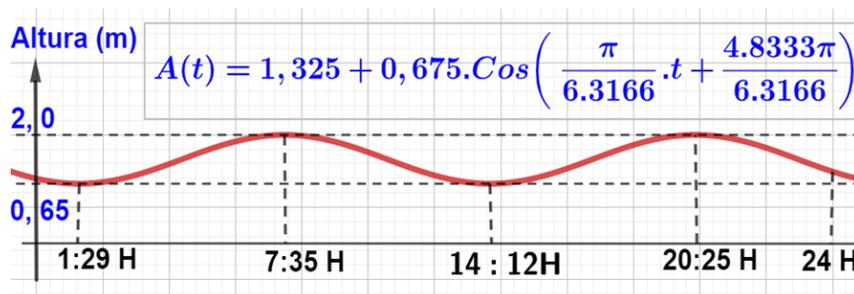


Figura 72 – Ajuste ao Cosseno da Altura de Maré em Recife, 31 de maio 2021

Nota-se que a curva apresentada na figura 72, ficou muito próxima da curva da figura 71, retirada do site que divulga a tábua de Marés em Recife-PE. Ou seja, os alunos podem escolher a informação disponível no site e modelar com aplicação do conteúdo trabalhado em sala; além de dar credibilidade a informação, modelagem ajuda a destacar o papel dos coeficientes da função e a tornar significativo o conteúdo porque fica evidente a utilização do que está sendo ensinado.

A quarta linha da **tabela 7** traz os valores das alturas obtidas por meio da substituição dos valores do tempo "**t**" na função ajustada de **A(t)**. A comparação com os valores previstos na terceira linha, também da tabela 7, indica que os valores calculados pelo modelo estão muito próximos dos previstos, isso mostra que a modelagem está bem apropriada.

Para (MAIA, 2018), mesmo que a curva ajustada traga dados distantes dos reais, ou seja, o modelo não se ajuste perfeitamente, o benefício do aluno entender o processo de modelagem não fica comprometido porque o resultado é apenas um detalhe. A manipulação dos dados brutos e a aplicação das operações matemáticas básica já são de grande valia para o aprendiz.

Tabela 7 – Altura das Marés previstas e calculadas

RECIFE 31 MAIO 2021	1ª MARÉ	2ª MARÉ	3ª MARÉ	4ª MARÉ
HORÁRIO	01:29 H	07:35 H	14:12 H	20:25 H
ALTURA	0,7 m	2,10 m	0,6 m	1,9 m
ALTURA CALCULADA	0,65 m	1,99 m	0,65 m	1,99 m

Fonte: O Autor (2021) - extraído <https://tabuademares.com.br>, 31 maio de 2021

Como relato pessoal do autor, temos a informação que durante os anos letivos de pandemia do Corona vírus (2020 e 2021), o ensino passou a utilizar a tecnologia como ferramenta básica, programas de construção de gráficos, como o GeoGebra, se popularizaram. Dessa forma, a modelagem ficou mais rápida e prática.

Antes da pandemia o professor dependeria de um laboratório de informática para levar os alunos ou de um projetor e computador para que todos acompanhassem o desenvolvimento. O autor revela que antes de 2020, no ensino presencial, eram necessárias três encontros para completar a modelagem; nas aulas remotas, durante a pandemia, uma ou no máximo duas aulas foram suficientes.

5.5 PISTÕES NOS MOTORES A COMBUSTÃO INTERNA

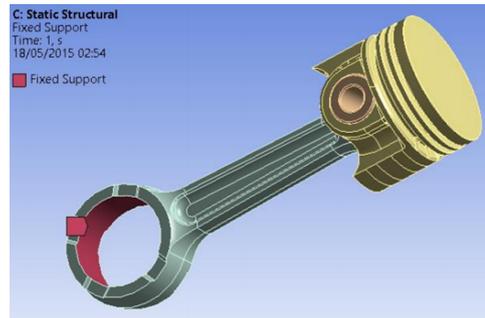


Figura 73 – Conjunto pistão-carvilhão-biela, com suporte no pé da biela

Fonte: (BIZARRO, 2015) p 55

Associar o movimento periódico ao circular é a forma eficiente de garantir que o estudo dos fenômenos periódicos possa ser beneficiado de todo arsenal teórico da trigonometria circular. Essa associação nem sempre é imediata, porém um exemplo bem real é o caso do movimento do pistão na câmara de combustão dos motores automotivos.

(BIZARRO, 2015), descreve o pistão com um dos principais componentes do motor de combustão interna, indicando-o como ponto de partida para o projeto de um motor porque partindo de suas dimensões são calculadas outros componentes fundamentais do motor. (PAIVA, 2015), define pistão como "peça cilíndrica metálica deslizante que realiza um movimento de vaivém no interior de um cilindro no motor de combustão interna".

A Engenharia Mecânica usa o mecanismo formado pelo virabrequim, biela e pistão para fazer a transferência da energia térmica em energia angular. A explosão na câmara de combustão faz o pistão movimentar-se linearmente (vaivém) e como o mesmo está conectado faz girar o virabrequim que está preso ao eixo do pistão pela biela.



Figura 74 – Virabrequim, biela e pistão

Fonte: <https://autocarup.com.br/>. Acessado em 10 06 2021, às 1900H

Observa-se que os pistões estão agrupados dois a dois e esses conjuntos estão

defasados 180 graus; assim, quando dois estão descendo, dois estão subindo; isso completa o gira de 180 graus; fazendo girar as engrenagens, transformando a energia da explosão do combustível (energia térmica) em movimento circular (energia angular).

O esquema matemático dessa transformação consiste em associar um círculo de diâmetro igual ao percurso do pistão (pêndulo). Imaginando um ponto percorrendo a circunferência no sentido anti-horário; para cada ângulo formado, tem-se uma distância percorrida; dessa forma, o ponto ao girar meia volta π rad, faz o pistão completar o movimento de ida; e ao girar mais π rad, faz o pistão completar o movimento de volta.

Supondo que um pistão percorra 20cm no movimento de ida e volta, conforme figura 75. Para modelar o deslocamento desse pistão, primeiro vamos associar esse movimento periódico ao deslocamento de uma ponto em um círculo e ajustá-lo a função:

- $F(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$.

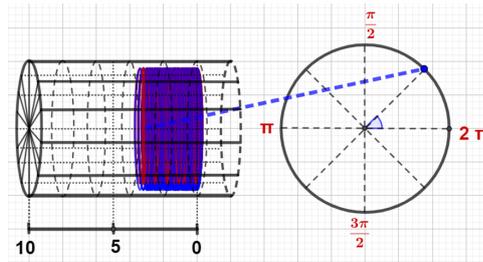


Figura 75 – Deslocamento do Pistão e o giro circular

Fonte: o Autor (2021)

1. Como o percurso do pistão é 20 cm; 10 cm na ida e 10 cm na volta; o diâmetro do círculo também será 10cm; o que torna o raio $R = 5$ cm.
2. Para calcular os coeficiente "a" e "b", considera-se:

$$\begin{cases} a + b = 10; \\ a - b = -10; \end{cases} \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{0}{2} \Rightarrow \mathbf{a = 0}.$$

Portanto, $0 + b = 10 \Rightarrow b = 10$.

3. Para completar 20 cm de percursos o pistão percorre 2 pedaços de 10cm; após comparações e ajustes da curva no GeoGebra, ficou evidente que o período é $T = 4\pi$, como $T = \frac{2\pi}{|c|}$

$$4\pi = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

4. Por fim, pode-se considerar $d = 0$, porque o deslocamento do pistão inicia no instante que o ponto começa seu giro na circunferência.
5. Portanto, a função ajustada que descreve o deslocamento do pistão em decorrência da modificação dos valores de α é:
- $$D(\alpha) = 10\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

As **figuras** 76 a 80; mostram o deslocamento do pistão em decorrência do giro do ponto sobre a circunferência e o respectivo gráfica deste deslocamento no plano cartesiano.

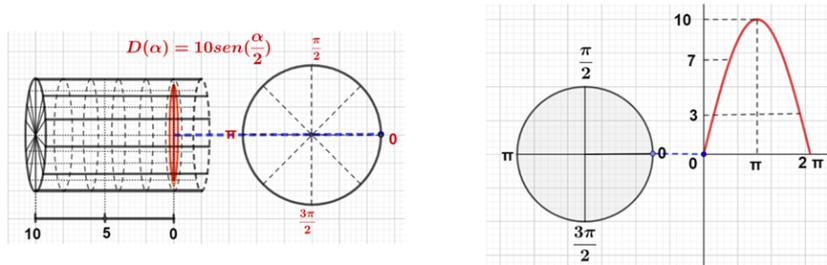


Figura 76 – Deslocamento do pistão para $\alpha = 0$ rad

Fonte: O autor (2021)

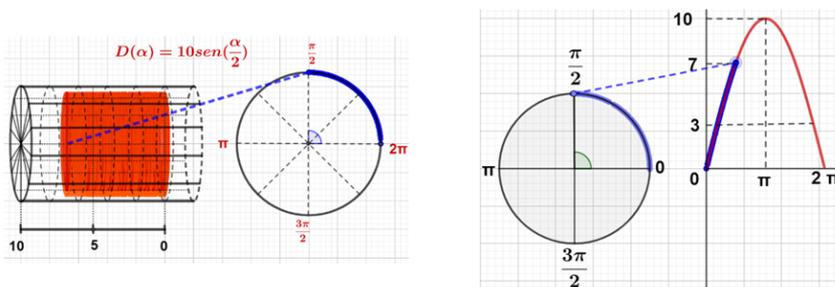


Figura 77 – Deslocamento do pistão para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rad

Fonte: O Autor (2021)

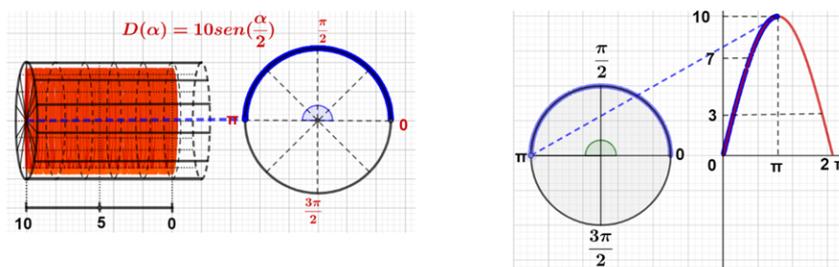


Figura 78 – Deslocamento do pistão para $\alpha = \pi$ rad

Fonte: O Autor (2021)

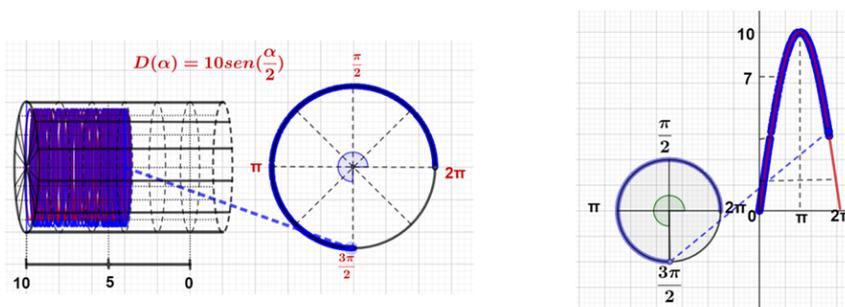


Figura 79 – Deslocamento do pistão para $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ rad

Fonte: O Autor (2021)

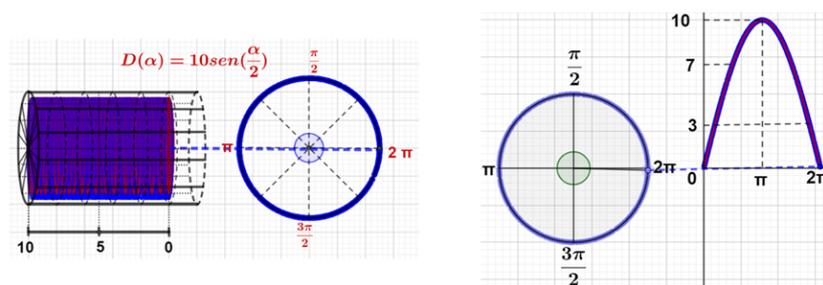


Figura 80 – Deslocamento do pistão para $\alpha = 2\pi$ rad

Fonte: O Autor (2021)

Considerando a importância do pistão para o motor a combustão e o relevante papel desses motores na revolução industrial e tendo em mente que essa revolução transformou de forma ímpar a sociedade que vivemos; não é exagero dizer que sem as ferramentas disponibilizadas pela trigonometria circular não seria possível a sociedade ter evoluído com tanta maestria.

5.6 PERÍODO SINÓDICO E CALENDÁRIO LUNAR

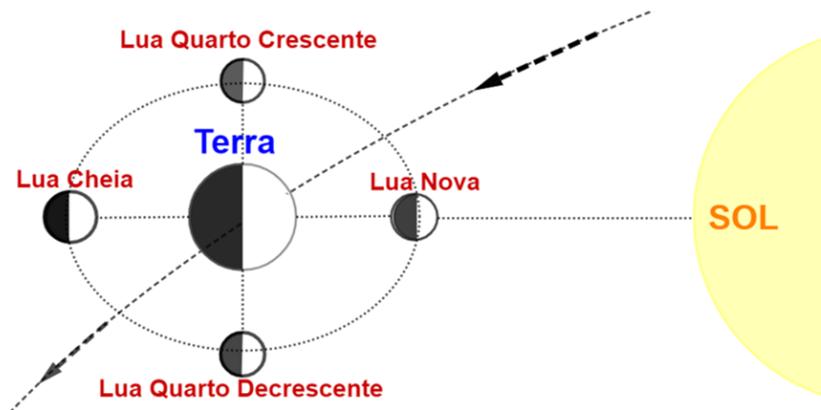


Figura 81 – Fases da Lua

Fonte: O autor (2021)

A trajetória da Terra em torno do Sol e a da Lua ao redor da Terra e do próprio Sol, são fenômenos periódicos que impactam de forma decisiva na vida terrestre. Utilizar esses fenômenos como exemplo de aplicação das funções trigonométrica é fundamental para motivar e justificar seu aprendizado.

A literatura apresenta como exemplo de aplicação da trigonometria: 1) cálculo da duração do **mês sinódico**²⁴; 2) montagem do calendário lunar; 3) modelo cinemático das órbitas da Lua e a da Terra. Neste, trabalho serão apresentados, apenas, as aplicações 1 e 2.

(SILVEIRA, 2001), informa que as quatro principais fases da Lua são: **Nova**, **Quarto Crescente**, **Cheia** e **Quarto Minguante**. Essas fases acontecem nessa sequência durante o período de um mês sinódico ou luação. O mês sinódico dura, aproximadamente, 29,53 dias; entretanto, devido a especificidade da órbita lunar em torno da Terra; os períodos entre as fases consecutivas podem variar de 6 a 9 dias. O autor mostra que no período de 1940 a 2020; 48% dos intervalos entre fases têm 7 dias; 49,9% têm 8 dias; 8,3% têm 6 dias e 2,8% têm 9 dias. As quatro fases da Lua acontecem quando o ângulo entre os três astros: Sol, Terra e Lua; variar de 0 a 2π radianos.

Quando a Lua está alinhada entre o Sol e a Terra, temos a fase **Lua Nova**; quando a lua está alinhada com a Terra e Sol, porém a Terra está entre os dois astros tem-se a **Lua Cheia**; quando o ângulo entre o Sol a Terra e Lua for de 90° ou 270° ; temos **Lua Quarto Crescente** e **Lua Quarto Decrescente**, respectivamente. Figura 81

(SILVEIRA, 2001), informa que o plano que contém a órbita da Lua em torno da Terra está inclinado cinco (5) graus em relação ao plano que contém a órbita da Terra ao

²⁴ Período, em dias, entre duas Luas Novas.

redor do Sol (plano eclíptico); esse é o motivo de não se ter eclipse da lua a cada fase de Lua Cheia, nem eclipse do Sol a cada fase de Lua Nova.

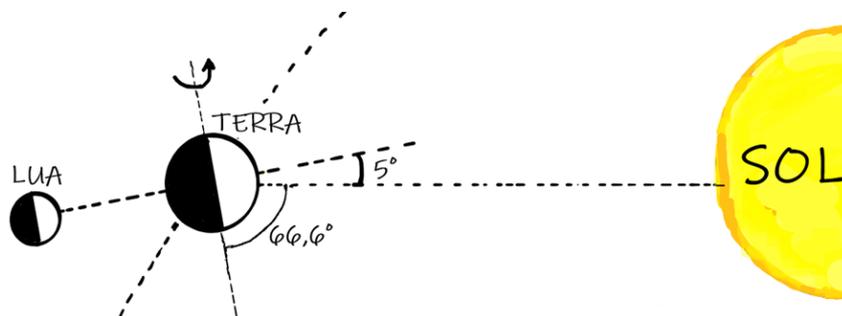


Figura 82 – Inclinação órbita da Lua com a Eclíptica

Fonte: O Autor (2021)

5.6.1 PERÍODO SINÓDICO

O cálculo da duração do mês sinódico (lunação) é uma aplicação direta da função cosseno. Segundo (SILVEIRA, 2001), a modelagem desse fenômeno periódico foi determinada com base nas tabelas de lunação de 1940 a 2020, a equação é resultado da aplicação do pacote estatístico SPSS - versão 10.0. Através da regressão não linear foi estimado o período do mês sinódico, em dias, em função do número de lunação (N). Esse N, começou a ser registrado pelos institutos científicos na segunda década do século passado. A função gerada pela regressão foi:

- **Período Sinódico** $T_{sinódico} = A + B + 29,5306$

$$A = 0,00866.Cos\left[\frac{2\pi}{12,3689}(N - 953) + 0,298\right]$$

$$B = 0,1817Cos\left[\frac{2\pi}{13,9444}(N - 953) + 0,602\right]$$

A figura 83 traz o gráfico dessa regressão e foi construída com auxílio do programa GeoGebra.



Figura 83 – Duração do mês sinódico

Fonte: O Autor 2021

Nota-se na figura 83, uma oscilação cossenoidal, para representar a duração dos meses sinódicos; o recorte apresentado é do período dezembro 2019 a agosto 2021. A última Lua Nova do ano de 2019, aconteceu em 26 dezembro, foi a luação $N = 1200$ registrada e durou um pouco menos que 29,61 dias; a última Lua Nova do recorte (08 agosto 2021) luação $N = 1220$ tem previsão de durar 29,53 dias, exatamente o centro das oscilações. Após, alguns cálculos de aferição dessa curva o erro variou até 3 pontos percentuais.

Portanto, o ciclo de mudanças das fases da Lua gastam 29,53 dias, porém esse valor é apenas uma referência porque existem vários **perturbações siderais** que causam irregularidades no movimento lunar e impactam diretamente o mês sinódico. Dentre varias perturbações, Payne-Gaposchkin e Haramundanis(1970) em Silvério (2001 p 10), indicam três:

1. **Variação**, são fenômenos que adiantam as fases Nova e Cheia e retardam as Quarto Crescente e Decrescente.
2. **Equação Anual**, causada pela variação da força gravitacional do Sol em decorrência da órbita elíptica que a Terra descreve.
3. **Rotação da linha Apside**, semi-eixo imaginária que passa pelos perigeu e apogeu, respectivamente, são pontos onde a Lua está mais distante e mais próxima da Terra. A linha apside é o semi-eixo maior da órbita elíptica da Lua. Esse conjunto, de centro de massa em um dos focos, gira 40° a cada ano; em nove anos a linha apside completa sua rotação.

Além, dessas três perturbações siderais, existem catalogadas mais de 150 efeitos que podem influenciar no duração do mês sinódico. Porém, essa modelagem por cosseno

faz uma aproximação muito realista do tamanho do ciclo lunar. Dada a influência desse satélite para a vida na Terra, poder antecipar seus movimentos é vital para melhoria da qualidade de vida no planeta. Esse é o tipo de fato meritoso que os professores de matemática precisam reivindicar para trigonometria visando motivar e dar significado a seu aprendizado.

5.6.2 CALENDÁRIO LUNAR

Com a previsibilidade da duração dos meses sinódicos ficou possível a construção do calendário lunar. Processos estatísticos aplicados aos dados de registros dos diversos períodos de duração entre as fases da Lua; possibilitaram chegar a funções matemáticas que determinam a data e hora das fases da Lua. Dentre as funções usadas está a função cosseno.

(SILVEIRA, 2001), traz as funções que possibilitam determinar data e hora das quatro principais fases da lua; essas funções são resultado da aplicação do pacote estatísticos **SPSS - Versão 10.0** nos dados sobre as fases da Lua desde 1940; o erro para os resultados, segundo o autor, afeta apenas o último algarismo significativo do resultado. As equações calculam o tempo, em dias, a contar do hora zero de 01 janeiro do ano 2000.

As funções usam como variável domínio o número de luação (N) que para o mês de janeiro de 2000 é $N = 953$. A variável independente é o tempo "T", expresso em dias; contados a partir de 01 janeiro do ano 2000. Percebe-se que as funções são retas crescentes com coeficiente angular 29, 53, valor de duração do mês sinódico, esse número multiplica a diferença entre a luação(N) desejada e a luação referência ($N = 953$). Porém, o coeficiente linear da função é determinado pela soma de duas funções cossenos e uma constante. As funções podem ser expressas como:

$$T = 29, 53(N - 953) + (A + B + C)$$

N é o número da luação desejada;

A e B são funções cosseno.

C é uma constante.

Com base nos dados trazidos por (SILVEIRA, 2001) e considerando "N" a luação para a qual se deseja estimar a data e hora da fase da Lua; foram organizadas as quatro funções: T_{Nova} , $T_{Crescente}$, T_{Cheia} e $T_{Minguante}$. Para todos os quatro casos a função resultante é a soma de uma função de 1º grau, com duas funções cossenos e uma constante. Como as quatro funções são similares, será representada graficamente, apenas a função que estima o tempo para fase Minguante. Figura 84

1. Cálculo de Tempo para Lua Nova.

$$T_{Nova} = L_{Nova} + A_{Nova} + B_{Nova} + C_{Nova}$$

$$L_{Nova} = 29,5305888(N - 953)$$

$$A_{Nova} = 0,1723.Cos\left[\frac{2\pi}{12,3686}(N - 953) - 1,526\right]$$

$$B_{Nova} = 0,4067.Cos\left[\frac{2\pi}{13,94436}(N - 953) + 5,089\right]$$

$$C_{Nova} = 5,4716$$

2. Cálculo de tempo para Lua Quarto Crescente.

$$T_{Crescente} = L_{Cres} + A_{Cres} + B_{Cres} + C_{Cres}$$

$$L_{Cresc} = 29,5305888(N - 953)$$

$$A_{Cres} = 0,1723.Cos\left[\frac{2\pi}{12,3686}(N - 953) - 1,401\right]$$

$$B_{Cres} = 0,6280.Cos\left[\frac{2\pi}{13,94436}(N - 953) + 0,4888\right]$$

$$C_{Cres} = 12,8571$$

3. Cálculo de tempo para Lua Cheia

$$T_{Cheia} = L_{Cheia} + A_{Cheia} + B_{Cheia} + C_{Cheia}$$

$$L_{cheia} = 29,5305888(N - 953)$$

$$A_{Cheia} = 0,1723.Cos\left[\frac{2\pi}{12,3686}(N - 953) - 1,143\right]$$

$$B_{Cheia} = 0,6280.Cos\left[\frac{2\pi}{13,94436}(N - 953) + 3,856\right]$$

$$C_{Cheia} = 20,2366$$

4. Cálculo de tempo para Lua Quarto Minguante

$$T_{Ming} = L_{Ming} + A_{Ming} + B_{Ming} + C_{Ming}$$

$$L_{Ming} = 29,5305888(N - 953)$$

$$A_{Ming} = 0,1723.Cos\left[\frac{2\pi}{12,3686}(N - 953) - 1,272\right]$$

$$B_{Ming} = 0,6280.Cos\left[\frac{2\pi}{13,94436}(N - 953) + 2,172\right]$$

$$C_{Ming} = 27,6163$$

As funções que estimam as datas para todas as quatro fases da Lua são resultante da soma das função "L", "A", "B" e "C". Será calculado como exemplo as datas e horas de ocorrência da fase Quarto Minguante, para os meses julho e agosto de 2021; lunações $N = 1219$ e $N = 1220$. Após a determinação das datas, será feita comparação com os dados oficiais divulgados pelo **Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas**, (Figura 88).

Os valores das funções: "L", "A" e "B" para as lunações $N = 1219$ e $N = 1220$, somados ao valor de "C=27,6163" resulta no valor da função $T_{Minguante}$. A figura 84 apresenta o gráfico da função $L(Ming)$; as figuras: 85 e 86 apresentam os gráficos de função $A(Ming)$ e $B(Ming)$ e por fim a figura 87, mostra o gráfico da resultante $T_{Minguante}$ que estima o tempo, em dias a partir de 01 janeiro 2000, para as fases minguantes relacionadas as lunações $N = 1219$ e $N = 1220$.

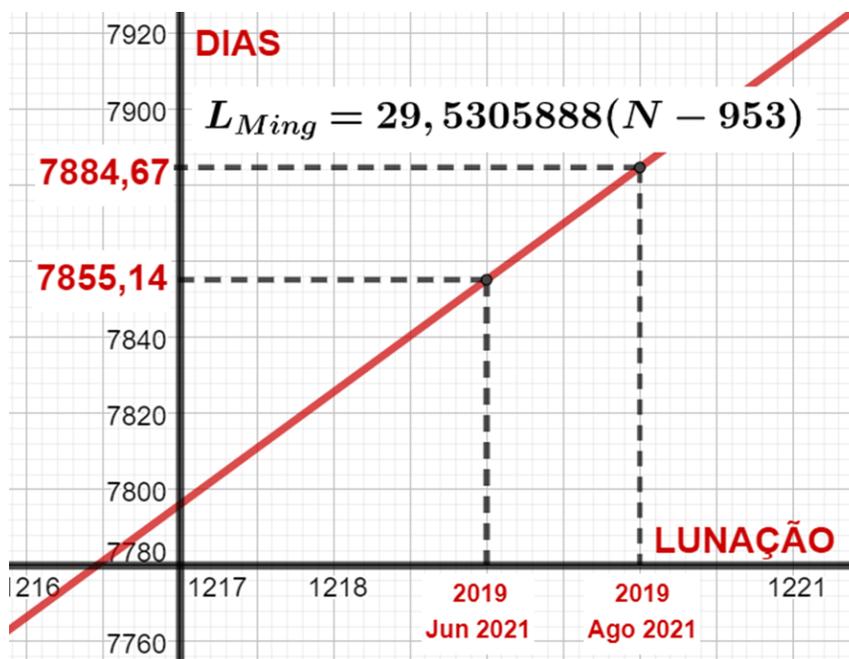


Figura 84 – Cálculo Função "L" para Fase Quarto Minguante

Fonte: O Autor (2021)

A função L_{Ming} , tem como gráfico uma reta quase vertical porque o coeficiente angular 29,5305888 representa uma inclinação de $88,06^\circ$. A figura 84, foi construído com

auxílio do programa GeoGebra, seu eixo vertical foi deslocado para posição $N = 1217$; e o eixo horizontal foi marcado na posição $L = 7780$; a razão entre os eixos horizontal e vertical está em 1 : 40, desta forma, foi possível a reta ficar com inclinação confortável visualmente. Figura 84

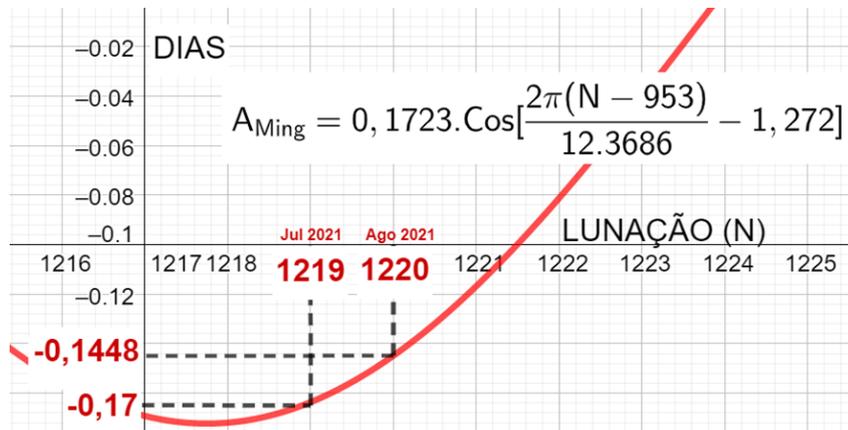


Figura 85 – Função "A" para Fase Quarto Minguante

Fonte: O Autor(2021)

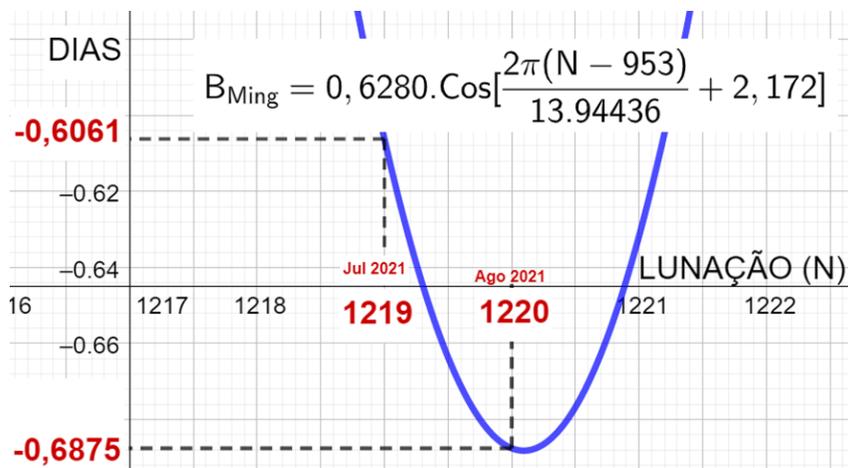


Figura 86 – Função "B" para Fase Quarto Minguante

Fonte: O Autor (2021)

Nas figuras: 85 e 86; estão gráficos das funções A_{Ming} e B_{Ming} , foram construídos no programa GeoGebra, Seus eixos horizontal e vertical estão na razão 30 : 1; o eixo vertical foi deslocado para posição $x = 1217$ e o eixo horizontal foi marcado em $y = 7780$; esse artifício possibilitou apresentar de forma destacada o recorte para as lunações $N = 1219$ e $N = 1220$.

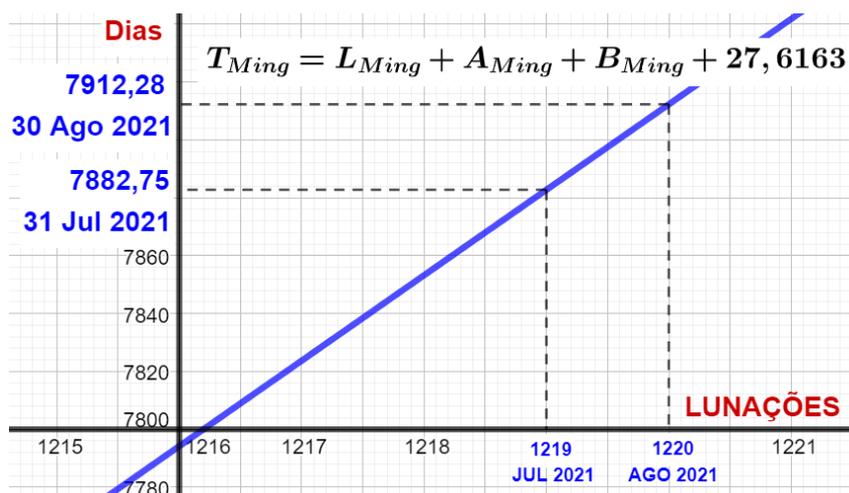


Figura 87 – Tempo para Fase Quarto Minguante

Fonte: O Autor (2021)

No gráfico da figura 84 estão determinados os tempos, em dias, para Lua Minguante de 31 julho de 2021 (7882,75 dias) e 30 agosto de 2021 (7912,28 dias); relacionados as lunações ($N = 1219$ e $N = 1220$). Essa função é resultante da soma de três funções, **L**, **A** e **B**; com a constante 27,6163. A função "**T**" tem inclinação muito verticalizada, aproximadamente $88,06^\circ$. Para fins didático, seu gráfico foi deformado horizontalmente na razão 1 : 42, assim o recorte para as lunações 1219 e 1220 ficou convenientemente apresentado.

1. Data da Lunação 1219 (31 julho 2021)

- Como e entre os anos 2000 e 2021 existem cinco anos bissextos; então, o total de dias passa a ser: $7882,75 - 5 = 7877,75$.
- $7877,75 \div 365 = 21,582876712 = (21 + 0,582876712)$ anos.
- $0,582876712(365) = 212,75 = (212 + 0,75) = 212 + 0,75(24) = 212$ dias e 18 horas.
- Os 212 dias de 2021, equivalem aos meses: janeiro, fevereiro, março, abril, maio, junho e julho; $(31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31)$.
- Portanto, a partir das zero horas de 01 janeiro de 2020, tem-se: 21 anos; 7 meses e 18 horas. Esse tempo equivale a data calendário: **31 julho 2021 às 18:00 horas**.

2. Data da Lunação 1220 (30 agosto 2021)

- Entre os anos 2000 e 2021 existem cinco anos bissextos; então, o total de dias passa a ser: $7912,28 - 5 = 7907,28$.

- $7907,28 \div 365 = 21,663780822 = (21 + 0,0663780822)$ anos.
- $0,066378082(365) = 242,28 = (242 + 0,28) = 242 + 0,28(24) = 242$ dias, 6 horas, 43 minutos.
- Os 242 dias de 2021, equivalem aos meses: janeiro, fevereiro, março, abril, maio, junho, julho e agosto; $(31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 30)$.
- Portanto, a partir das zero horas de 01 janeiro de 2020, tem-se: 21 anos; 8 meses, 6 horas e 43 minutos . Esse tempo equivale a data calendário: **30 agosto 2021 às 06:43 horas.**



LUA NOVA	LUA CRESCENTE	LUA CHEIA	LUA MINGUANTE
--	--	--	06 Jan 2021 - 06:37
13 Jan 2021 - 02:00	20 Jan 2021 - 18:01	28 Jan 2021 - 16:16	04 Feb 2021 - 14:37
11 Feb 2021 - 16:05	19 Feb 2021 - 15:47	27 Feb 2021 - 05:17	05 Mar 2021 - 22:30
13 Mar 2021 - 07:21	21 Mar 2021 - 11:40	28 Mar 2021 - 15:48	04 Abr 2021 - 22:30
11 Abr 2021 - 23:30	20 Abr 2021 - 03:58	27 Abr 2021 - 00:31	03 Mai 2021 - 16:50
11 Mai 2021 - 15:59	19 Mai 2021 - 16:12	26 Mai 2021 - 08:13	02 Jun 2021 - 04:24
10 Jun 2021 - 07:52	18 Jun 2021 - 00:54	24 Jun 2021 - 15:39	01 Jul 2021 - 18:10
09 Jul 2021 - 22:16	17 Jul 2021 - 07:10	23 Jul 2021 - 23:36	31 Jul 2021 - 10:15
08 Ago 2021 - 10:50	15 Ago 2021 - 12:19	22 Ago 2021 - 09:01	30 Ago 2021 - 04:13
06 Set 2021 - 21:51	13 Set 2021 - 17:39	20 Set 2021 - 20:54	28 Set 2021 - 22:57
06 Out 2021 - 08:05	13 Out 2021 - 00:25	20 Out 2021 - 11:56	28 Out 2021 - 17:05
04 Nov 2021 - 18:14	11 Nov 2021 - 09:45	19 Nov 2021 - 05:57	27 Nov 2021 - 09:27
04 Dez 2021 - 04:43	10 Dez 2021 - 22:35	19 Dez 2021 - 01:35	26 Dez 2021 - 23:23

Fonte: Departamento De Astronomia Do Instituto De Astronomia, Geofísica E Ciências Atmosféricas

Figura 88 – Fases da Lua para 2021

Fonte: <https://portal.inmet.gov.br/paginas/luas>, acessado às 14:00 18 junho 2021

Fazendo a comparação entre os resultados obtidos por meio da função e o calendário (Fases da Lua 2021) do Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências atmosférica; nota-se que houve diferença apenas na hora dos eventos; para a luação 1219 (31 julho 2021) a diferença foi 7 horas e 45 minutos e para luação 1220 (30 agosto 2021) a diferença foi 2 horas e 30 minutos. Tabela 8

Tabela 8 – Valores: Previsto, Determinado e Diferença

LUNAÇÃO	TEMPO (DIAS)	CALENDÁRIO	ESTIMADO	DIFERENÇA
1219	7882.75	31/07/2021 10:15	31/07/2021 18:00	07:45
1220	7912.28	30/08/2021 04:13	30/08/2021 06:43	02:20

Fonte: O Autor (2021)

6 APLICAÇÃO DA TRIGONOMETRIA HIPERBÓLICA

6.1 A CURVA CATENÁRIA

A trigonometria hiperbólica aumentou muito o leque de aplicação da trigonometria. A engenharia civil é responsável por varias aplicações das hiperbólicas tanto em pontes pênses como em coberturas. Na natureza temos a modelagem dos contornos do ovo, asas de borboletas e outros insetos. Ainda podem ser citadas: construção de linhas de transmissões de energia e o cálculo da velocidade das ondas do mar. Dentre tantas aplicações aquelas que envolvem a curva Catenária têm papel de destaque.

(SANTOS, 2015), traz que o estudo da curva catenária despertou a atenção da ciência em 1690, quando o suíço Jakob Bernoulli (1654-1705) apresentou o problema do fio suspenso e propôs um concurso para determinar a forma da curva. Muitos nomes de vulto tentaram a solução, por muito tempo tentou-se a modelagem por função parabólica; porém o problema foi resolvido 50 anos mais tarde pelo irmão de Jakob Bernoulli, o Johann Bernoulli, juntamente com Leibniz (1446 - 1716) e Christiaan Huygens (1629-1695) . A curva catenária é modelada por:

- $y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + k$ ou $y = \frac{a}{2} \cdot (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) + k$

(VASCONCELOS, 2013) informa que a catenária é, com frequência, confundida com a parábola. Apesar da parábola ter equação polinomial e a catenária ser transcendental e ter modelagem pelo cosseno hiperbólico. O autor indica que a catenária se forma quando uma fio flexível, homogêneo e não elástico é suspenso por suas extremidades e fica sob ação do seu próprio peso.

(FREITAS, 2015), traz que o nome catenária foi dada por Leibniz e significa corrente em latim. Segundo autora um ponto do fio suspenso pelas extremidades está sujeito a três forças: uma delas é a força peso, empurrando para baixo; as outras duas são forças resultantes dos outros pontos adjacentes. Portanto, a curva catenária é uma curva cuja forma assumida é a de um cabo suspenso pelas extremidades sob ação de seu próprio peso; logo, as tensões internas equilibram de forma natural o peso.

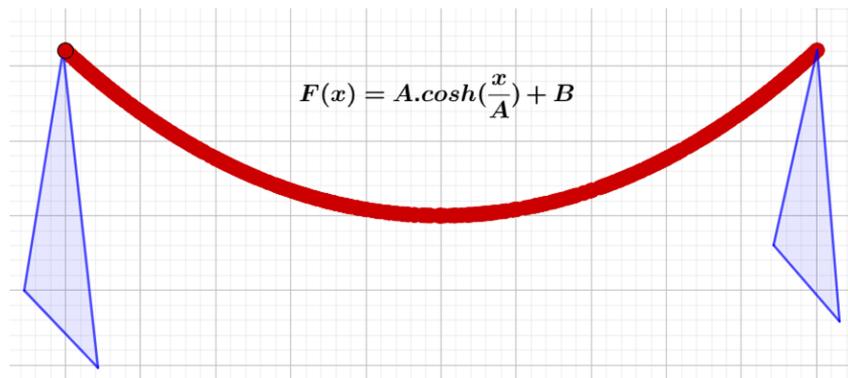


Figura 89 – Curva Catenária

Fonte: o Autor (2021)

6.1.0.1 CATENÁRIA E A PONTE PÊNSIL

Seguramente a aplicação mais conhecida da catenária é na construção de ponte Pênsil. (TALAVEIRA, 2008), traz a definição do Novo dicionário Aurélio da Língua Portuguesa: "Ponte cujo tabuleiro é sustentado por cabos ancorados".

(SANTOS, 2015), indica que a catenária vem sendo utilizada a milhares de anos na engenharia e na arquitetura. O autor traz que existem relatos indicando o uso da catenária na construção de ponte Pênsil pelos chineses por volta de 400 a.c. feitas usando bambu e outros elementos naturais.

(FREITAS, 2015), traz como exemplo de ponte Pênsil no Brasil a ponte Juscelino Kubitschek, onde o tabuleiro central é suspenso por três catenárias invertidas concatenadas. Segundo a autora os arcos catenários são definidos por:

- $y(x) = -180\cosh\left(-\frac{x}{180}\right)$



Figura 90 – Ponte Juscelino Kubitschek

Fonte: <http://www.comerciojardimbotnico.com.br/pontos-turisticos-de-brasilia/>. Em (FREITAS, 2015)

6.1.0.2 CATENÁRIA E A ARQUITETURA

A catenária invertida apresenta muita estabilidade e harmonia arquitetônica com o ambiente; essas características possibilitaram sua aplicação em varias construções históricas em todo mundo.

(FREITAS, 2015), apresenta exemplos da aplicação da equação catenária no monumento:

- Gateway Arch, em St. Louis - EUA, as margens do rio mississippi. É um monumento que tem a forma de uma catenária invertida, inaugura em 1968, conta com 192 metros de altura sendo o maior monumento em solo norte-americano. Projetado por Eero Saarinem (Finlândia) e Hannskrl Bandel (Alemão) para homenagear a expansão para o Oeste no século XIX.



Figura 91 – Gateway Arch

Fonte: <http://en.wikipedia.org/wiki/gateway-arch>. (FREITAS, 2015)

6.1.0.3 CATENÁRIA E A ELETRIZAÇÃO FERROVIÁRIA

Nos grandes centros urbanos o controle e administração da mobilidade passou a ser preocupação constante do gestores. O dinamismo no transito das grandes cidades se torna possível quando existe um transporte coletivo eficiente a um custo aceitável para população. Dentre as formas de transportes coletivos adotadas tem-se os trens subterrâneos e de superfície, viabilizados graças a aliança entre a eletricidade e os meios transporte. Contudo, para essa aliança ser possível cabos flexíveis precisavam ser estendidos sobre os trilhos para fornecimento de energia; daí as catenárias passaram a integrar os cenários urbanos possibilitando a fluidez de pessoas e materiais para garantir a oxigenação das

metrópoles. Como cada catenária traz na sua formação uma função cosseno-hiperbólica, tem-se mais uma aplicação da trigonometria garantindo o bem estar das pessoas.



Figura 92 – Trem Unidade Elétrica (TUE)-Fortaleza/CE

Fonte: <<http://www.metrofor.ce.gov.br>> Acesso em junho de 2018. Em (FILHO, 2018)

(FREITAS, 2015), definiu como catenária o sistema de distribuição e alimentação elétrica aérea disposto sobre os trilhos dos trens. Essas catenárias são tencionadas nas extremidades por contrapesos que têm mais da metade do peso da catenária para garantir o contato dos cabos com os **pantógrafos**²⁵ viabilizando a alimentação elétrica dos trens.

(FILHO, 2018), informa que no metrô de Fortaleza (METROFOR), linha sul; o sistema de alimentação possui dois tipos de **catenárias**; as fixas, para as partes subterrâneas e as auto compensadas por meio de roldanas e contrapesos; para o circuito a céu aberto. As catenárias autocompensadas são fixadas por meio de suportes auto-reguláveis que garantem o contato permanente da catenária com os pantógrafos e também a sinuosidade do contato para permitir o desgaste uniformes dos grafites nas extremidades dos pantógrafos.

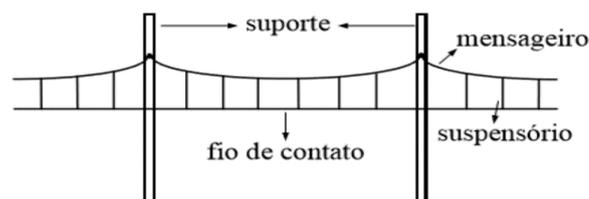


Figura 93 – Esquema da Catenária do metrô de Fortaleza

Fonte: Pires (2006). Em (FILHO, 2018) p 58

²⁵ São dispositivos elétricos dispostos sobre os trens que servem para transferir a energia das catenárias para os dispositivos elétricos dos trens.

6.2 VELOCIDADE DAS ONDAS DO MAR

A função tangente hiperbólica é aplicada no cálculo da velocidade das ondas do oceano. Para (SANTOS, 2015), a velocidade de uma onda está em função do seu comprimento de onda, com influência da intensidade do campo gravitacional e espessura da lâmina de líquido. O autor classificou como ondas de gravidades (*gravity waves*), aquelas que se propagam na superfície do oceano em virtude da interação entre a força do vento e a força gravitacional.

Para Elmore e Heard (1985, p. 187), em (SANTOS, 2015); a velocidade de propagação das ondas na superfície do oceano é dada pelo fórmula:

$$\bullet v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)}. \text{ Onde:}$$

- **d** é a espessura da lâmina de líquido;
- λ é o comprimento da onda;
- **g** é a intensidade da força gravitacional.

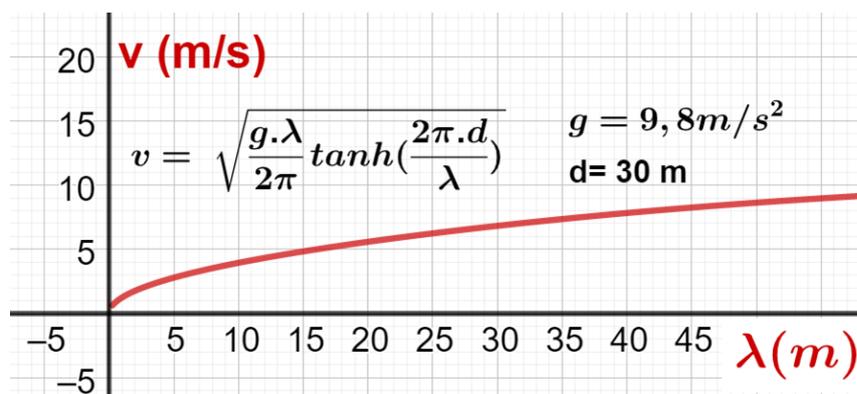


Figura 94 – Velocidade das ondas para $d = 30m$ e $g = 9,8m/s^2$

Fonte: O Autor (2021)

O gráfico na figura 94 mostra que a velocidade se aproxima de um valor limite quando o comprimento de onda λ assume valores grandes. Para $\lambda = 10d$ a velocidade se aproxima valor limite. Esse fato pode ser melhor notado quando se analisa o gráfico da figura 95.

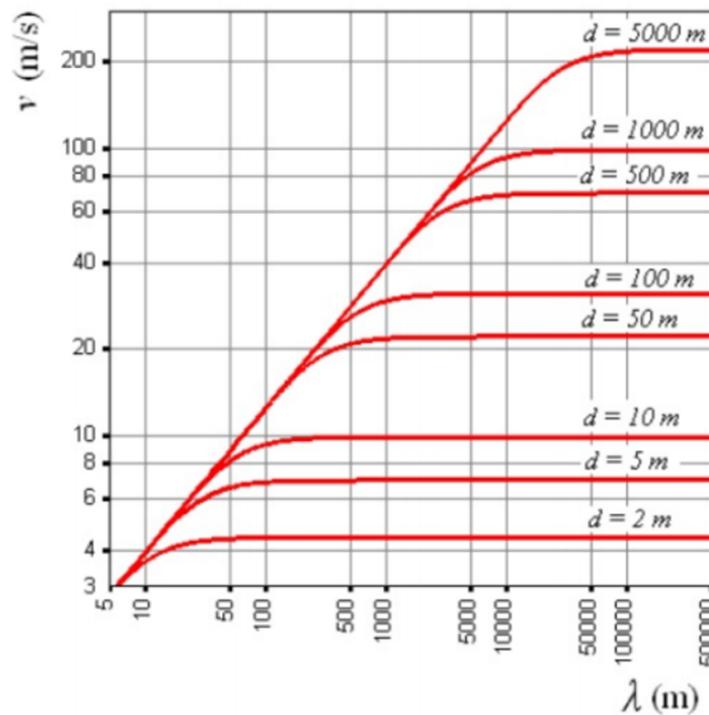


Figura 95 – Variação da velocidade das ondas marítimas

Fonte: G. Pino, (2012). Em (SANTOS, 2015) p 61

(SANTOS, 2015), ressalta que a velocidade de propagação (v) cresce em função do comprimento de onda λ , independentemente da espessura da lâmina de água (d). Esse crescimento fica próximo do limite, quando λ se aproximar do valor " $10d$ ". O autor ainda indica duas situações especiais para o limite da função tangente hiperbólica:

1. Para valores em que $\lambda \leq 2d$, o limite da função $\tanh\left(\frac{2\pi \cdot d}{\lambda}\right) = 1$; com isso:

$$\bullet v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi \cdot d}{\lambda}\right)} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

• Exemplo:

Para um situação em alto mar a lâmina de água tem espessura " d " em km; supondo que o comprimento de onda seja $\lambda = 500$ m a velocidade de propagação " v ", será determinada pela igualdade:

$$v = \sqrt{\frac{9,8 \cdot 500}{2 \cdot 3,14}} \cong 27,93 \text{ m/s ou } 100,54 \text{ km/h.}$$

2. Quando o valor do comprimento de onda λ for **muito maior** que a espessura da lâmina líquida d , ($\lambda \gg d$); então o limite $\tanh\left(\frac{2\pi \cdot d}{\lambda}\right) = \frac{2\pi \cdot d}{\lambda}$. Dessa forma:

$$\bullet v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi \cdot d}{\lambda}\right)} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \cdot \frac{2\pi \cdot d}{\lambda}} \Rightarrow v = \sqrt{g \cdot d}$$

• Exemplo:

Em uma tsunami, o comprimento de onda λ supera a espessura da lâmina de

água. Supondo que essa onda aconteça em um local onde $d = 4 \text{ km}$; tem-se portanto, a velocidade de propagação "v" calculada pela igualdade:

$$v = \sqrt{9,8 \cdot 4000} = 197,98 \text{ m/s ou } 712,72 \text{ km/h.}$$

6.3 TRANSMISSÃO DE ENERGIA

6.3.1 EXPONENCIAL, TRIGONOMETRIA, HIPERBÓLICA E COMPLEXO

(AGUIAR, 2018), traz a fórmula Euler como elemento vinculador entre as funções **exponenciais**, **trigonométricas** e **hiperbólicas**; dentro do contexto do conjunto dos números **complexos**. Da interseção desses campos surgem aplicações importantes na Engenharia Elétrica e de forma particular na área da **transmissão de energia**.



Figura 96 – Interseção da trigonometria, exponencial e hiperbólica

Fonte: O autor (2021)

Para (AGUIAR, 2018), um ponto sobre uma hipérbole pode ser expresso na forma cartesiana, exponencial, polar e paramétrica. Considerando a unidade imaginária ($j = \sqrt{-1}$); a base dos logaritmos naturais ($e \approx 2,71$) e o módulo do complexo atrelado ao ponto (r); após manipulação algébrica entre as formas, chega-se a forma complexa do ponto em função do **coseno** e **seno hiperbólico**. Conforme mostrado na última linha da tabela 9.

Tabela 9 – Formas do ponto na Hipérbole

FORMAS DO PONTO SOBRE A HIPÉRBOLE	
CARTESIANA	(x, y)
EXPONENCIAL	$ze^{j\theta}$
POLAR	z/θ
PARAMÉTRICA	$x = r \cosh\theta$ e $y = r \sinh\theta$
COMPLEXA	$(x, y) = r(\cosh\theta + j \sinh\theta)$

Fonte: O Autor (2021)

A função exponencial complexa e a trigonometria básica são lincadas na fórmula de Euler; essa relação é determinada pela derivada da função $f(x) = e^{jx}(\cos x - j \sin x)$; chegando-se ao resultado da expressão de Euler, que viabiliza importantes aplicações para as fórmulas de somas tanto das funções trigonométricas, como das hiperbólicas. (DALLA VERDE, 1953); em (AGUIAR, 2018).

- $e^{jx} = \cos x + j \sin x$ ou $e^{-jx} = \cos x - j \sin x$.

- Após manipulação algébrica das expressões anteriores tem-se:

- $\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$ e $\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$.

- As funções hiperbólicas reais podem ser expressas em função das exponenciais tais que:

- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

- Substituindo o número real x pelo complexo (jx) nas equações do item 3; obtém-se:

- $\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \Rightarrow \cos(x) = \cosh(jx)$
- $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow \cosh(x) = \cos(jx)$.
- $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow \sin(x) = \frac{\sinh(jx)}{j}$.
- $\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \Rightarrow \sinh(jx) = -j \sin(jx)$.

- As funções hiperbólicas de números complexos, da forma $(x + jy)$, são funções complexas que envolvem as funções trigonométricas e hiperbólicas de números reais; podem ser expressas como:

- $\cosh(x + jy) = \cosh(x) \cdot \cos(y) + j \sinh(x) \cdot \sin(y)$
- $\sinh(x + jy) = \sinh(x) \cdot \cos(y) + j \cosh(x) \cdot \sin(y)$

6.3.2 LINHAS DE TRANSMISSÃO DE ENERGIA



Figura 97 – Diagrama básico simplificado de um Sistema de Energia

Fonte: (AGUIAR, 2018) p 13

A energia elétrica é transportada do local de geração para os pontos de distribuição utilizando as **linhas de transmissão**; as principais grandezas e constantes elétricas no processo de transmissão da energia são:

1. Tensão no terminal emissor V_S e Corrente de emissão I_S ; no início da linha de transmissão, na saída da subestação elevadora.
2. Tensão de recepção V_R e Corrente no terminal receptor I_R ; no final da linha de transmissão, na subestação abaixadora.
3. As equações que regem o fluxo de energia nas linhas de transmissões segundo (AGUIAR, 2018); são:

- $V_S = A.V_R + B.I_R$ e $I_R = C.V_R + D.I_S$
- Com $A = \cosh(\gamma x)$; $B = Z_c \sinh(\gamma x)$; $C = \frac{\sinh(\gamma x)}{Z_c}$ e $D = \cosh(\gamma x)$
- γ é a **constante de propagação** da linha e Z_c é a **impedância**²⁶ inerente a linha de transmissão.

4. Portanto, a tensão e a corrente elétrica em uma linha de transmissão em um ponto distante "x" km da distribuição de carga, são determinadas pela aplicação do seno e cosseno hiperbólico segundo as equações:

- $V_x = \cosh(\gamma x).V_R + Z_c.\sinh(\gamma x).I_R$
- $I_x = \frac{\sinh(\gamma x)}{Z_c}.V_R + \cosh(\gamma x).I_R$

5. A constante de propagação γ , nas fórmulas do item 4, pode assumir um valor complexo determinado pela **constante de atenuação** α e **constante de fase** β . Dessa forma tem-se: $\gamma = \alpha + j\beta$.

²⁶ Medida da capacidade de resposta de uma circuito, quando percorrido por uma corrente alternada.

6. O processo de **energização da linha "u"** ou **velocidade de propagação** da onda na linha é determinada pelo produto do comprimento da onda λ por sua frequência "f".

- $u = \lambda \cdot f$.
- O comprimento de onda $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$. Se for considerado $\beta = 0,001256$, tem-se que $\lambda = 5000 \text{ km}$.
- Como a frequência elétrica $f = 60 \text{ hz}$; então a velocidade de propagação da onda $u = 5000 \cdot 60 = 300.000 \text{ km/s}$.

7. Considerando a equação do item 5: $\gamma = \alpha + j\beta$; ao multiplicar ambos os lados pelo **comprimento de onda** λ e calcular seno e cosseno hiperbólico tem-se as equações:

- $\gamma \cdot \lambda = \alpha \cdot \lambda + j \cdot \beta \cdot \lambda$
- $\cosh(\alpha \cdot \lambda + j \cdot \beta \cdot \lambda) = \cosh(\alpha \cdot \lambda) \cdot \cos(\beta \cdot \lambda) + j \sinh(\alpha \cdot \lambda) \cdot \sen(\beta \cdot \lambda)$.
- $\sinh(\alpha \cdot \lambda + j \cdot \beta \cdot \lambda) = \sinh(\alpha \cdot \lambda) \cdot \cos(\beta \cdot \lambda) + j \cosh(\alpha \cdot \lambda) \cdot \sen(\beta \cdot \lambda)$.

8. Quanto a atenuação do sistema de transmissão for considerada nula; ou seja, $\alpha = 0$; implica $\alpha \cdot \lambda = 0$. Logo, $\cosh(\alpha \cdot \lambda) = 1$ e $\sinh(\alpha \cdot \lambda) = 0$. Portanto:

- $\cosh(\gamma \cdot \lambda) = \cosh(j \cdot \beta \cdot \lambda) = \cos(\beta \cdot \lambda)$.
- $\sinh(\gamma \cdot \lambda) = \sinh(j \cdot \beta \cdot \lambda) = j \cdot \sen(\beta \cdot \lambda)$.

9. Aplicando os resultados do item 8, nas igualdades do item 4, considerando $x = \lambda$ tem-se:

- $V_x = \cosh(\gamma x) \cdot V_R + Z_c \cdot \sinh(\gamma x) \cdot I_R$
- $V_x = \cos(\beta \lambda) \cdot V_R + Z_c \cdot j \sen(\beta \lambda) \cdot I_R$ ou

$$V_x = \cos(\beta x) \cdot V_R + j I_R Z_c \sen(\beta x) .$$

6.3.2.1 GRÁFICO DA PARTE REAL DA TENSÃO NA LINHA DE TRANSMISSÃO

A parte real é determinada por meio uma função cosseno, se for usada a **constante de fase** β ; ou determinada por uma função cosseno hiperbólico, quando usada a **constante de propagação** λ . Para construção da figura 98; foi utilizada a parte real da função V_x ; expressão por:

- $P_{RealV_x} = \cos(\beta x) \cdot V_R$.
- A **constante de fase** $\beta = 0,001256$ e a **tensão de recepção** $V_R = 220$ volts.



Figura 98 – Parte Real da Tensão na Linha de Transmissão

Fonte: O Autor 2021

6.3.2.2 GRÁFICO DA PARTE IMAGINÁRIA DA TENSÃO NA LINHA DE TRANSMISSÃO

A parte imaginária da tensão na linha de transmissão a x Km de distância do local de carga é determinada pelo seno hiperbólico, caso seja usada a **constante de propagação** λ . Ou pela função seno circular, no caso de ser usada a **constante de fase** β . Na construção do gráfico da figura 99, a parte imaginária da função V_x ; é expressão por:

- $P_{ImagV_x} = jI_R Z_c \text{sen}(\beta x)$.
- Considerando a **constante de fase** $\beta = 0,001256$;
- a **corrente de recepção** $I_R = 300$ amperes;
- e a impedância da linha $Z_c = 0,9$

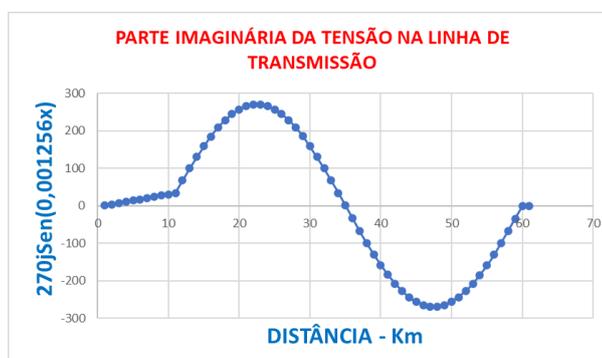


Figura 99 – Parte Imaginária da Tensão na Linha de Transmissão

Fonte: O Autor 2021

6.3.2.3 GRÁFICO DA TENSÃO NA LINHA DE TRANSMISSÃO

A tensão na linha de transmissão a uma distância x , em quilômetros, do local de carga é modelada no conjunto dos números complexos. A parte real está associada a tensão que se deseja entregar V_R e também a função cosseno, circular ou hiperbólico; conforme escolha. A parte imaginária da tensão depende da corrente que se pretende entregar I_R , da impedância da linha de transmissão Z_C e do seno circular ou hiperbólico.

A tensão na linha é representada por um ponto no plano cartesiano $(P_{Real(V_x)}, P_{Imag(V_x)})$; no qual a parte real é representada no eixo horizontal e a parte imaginária, atrelada a unidade imaginária $j = \sqrt{-1}$; fica representada no eixo vertical. A figura 100 é formada com as imagens das funções Parte real $P_{Real(V_x)}$ e parte imaginária P_{ImagV_x} .

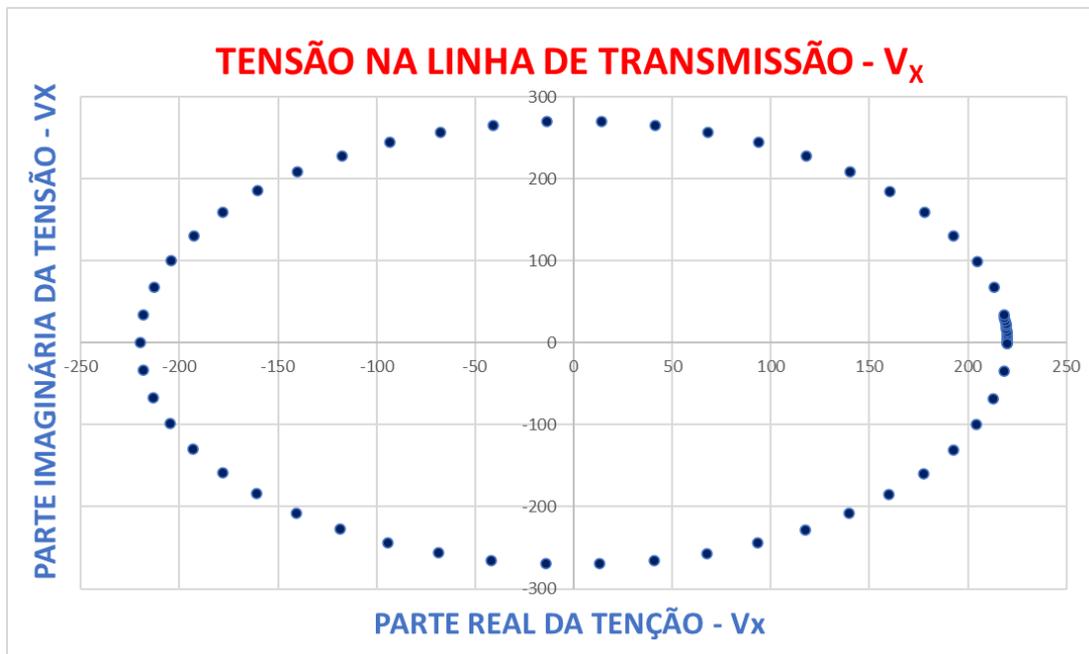


Figura 100 – Tensão na Linha de Transmissão

Fonte: O Autor 2021

7 SITE APLICA TRIGONOMETRIA

Um dos objetivos desta pesquisa foi responder aos questionamentos dos alunos sobre a relevância e utilidade dos conceitos trigonométricos para vida. Por ser um questionamento recorrente não só para o aprendiz, mas também para muitos colegas professores, ficou evidente que os conceitos e aplicações da trigonometria necessitavam ser disponibilizados para a comunidade escolar, tanto no âmbito da Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF) como fora do seu domínio.

O recorte temporal especial no qual está inserido a execução desta pesquisa favorece a busca por formas alternativas de ensinar, devido a suspensão das aulas presenciais em virtude do distanciamento social imposto pela pandemia do Corona vírus (covid-19); a comunidade escolar teve de se reinventar e passar a utilizar formas de ensino remoto por meio de tecnologias didáticas ainda pouco difundidas no meio escolar.

A Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal por meio do seu programa de formação continuada passou a ofertar cursos das ferramentas Google para educação. Dentre essas, foi escolhida a ferramenta "sites da Google" para auxiliar na divulgação e difusão dos conteúdos trigonométricos abordados nesta pesquisa. Após realização de curso de formação continuada na Unidade de Educação Básica (UNIEB); da Coordenação Regional de Ensino do Núcleo Bandeirante (CRE-NB) da Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF) foi possível elaborar e alimentar o site; <https://sites.google.com/edu.se.df.gov.br/aplica-trigonometria>.

Este site é portanto, um legado da presente pesquisa; viabilizado em decorrência da convergência de três fatores: necessidade de tornar significativo para o aprendiz os conceitos trigonométricos; disponibilização e difusão desses conteúdos na comunidade escolar e aplicação de tecnológicas remotas em virtude da proibição impostas às aulas presenciais.

O site "aplica-trigonometria" foi elaborado com a ferramenta Google sites e está hospedado no domínio "edu.se.df.gov.br"; pode ser acessado por qualquer pessoa e tem fácil navegabilidade; sua finalidade exclusiva é difundir os conhecimentos e aplicações da trigonometria no triângulo, na circunferência e na hipérbole. As figuras 101 a 111 na sequência, trazem suas principais páginas.



Figura 101 – Página INÍCIO do site Aplica-Trigonometria

Fonte: <https://sites.google.com/edu.se.df.gov.br/aplica-trigonometria>



Figura 102 – Página OBJETIVO do site Aplica-Trigonometria

Fonte: <https://sites.google.com/edu.se.df.gov.br/aplica-trigonometria>



Figura 103 – Página POR QUE ESTUDAR? do site Aplica-Trigonometria

Fonte: <https://sites.google.com/edu.se.df.gov.br/aplica-trigonometria>



Figura 104 – Página ONDE APLICAR? do site Aplica-Trigonometria

Fonte: <https://sites.google.com/edu.se.df.gov.br/aplica-trigonometria>



Figura 105 – Página NO TRIÂNGULO do site Aplica-Trigonometria

Fonte: <https://sites.google.com/edu.se.df.gov.br/aplica-trigonometria>



Figura 106 – Página NO CÍRCULO do site Aplica-Trigonometria

Fonte: <https://sites.google.com/edu.se.df.gov.br/aplica-trigonometria>



Figura 107 – Página PERÍODO SINÓDICO do site Aplica-Trigonometria

Fonte: <https://sites.google.com/edu.se.df.gov.br/aplica-trigonometria>

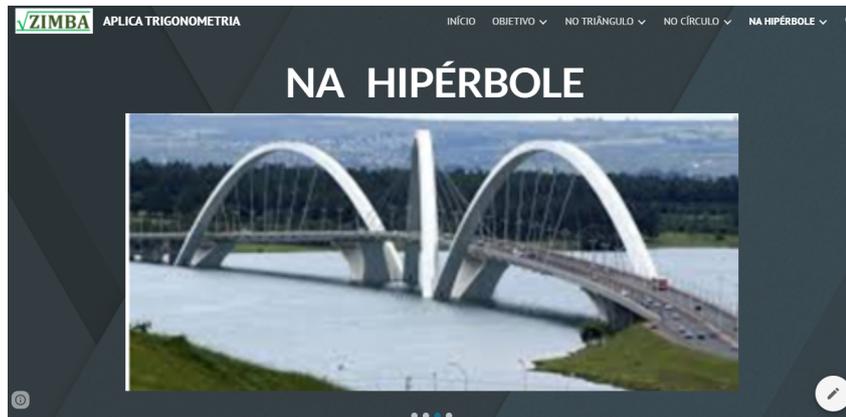


Figura 108 – Página NA HIPÉRBOLE do site Aplica-Trigonometria

Fonte: <https://sites.google.com/edu.se.df.gov.br/aplica-trigonometria>

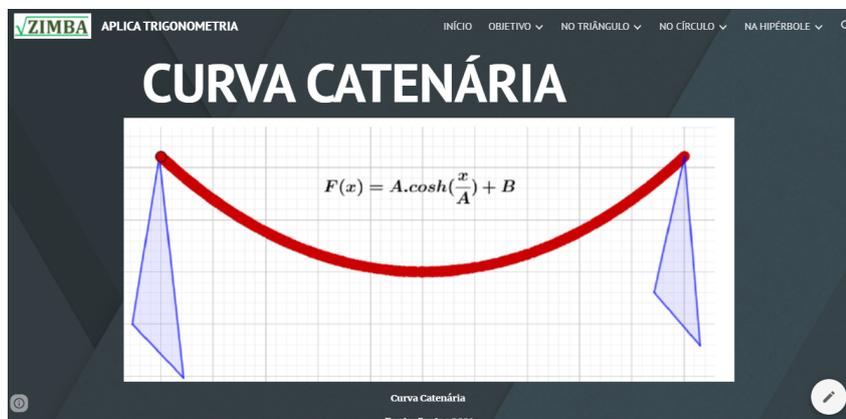


Figura 109 – Página CURVA CATENÁRIA do site Aplica-Trigonometria

Fonte: <https://sites.google.com/edu.se.df.gov.br/aplica-trigonometria>

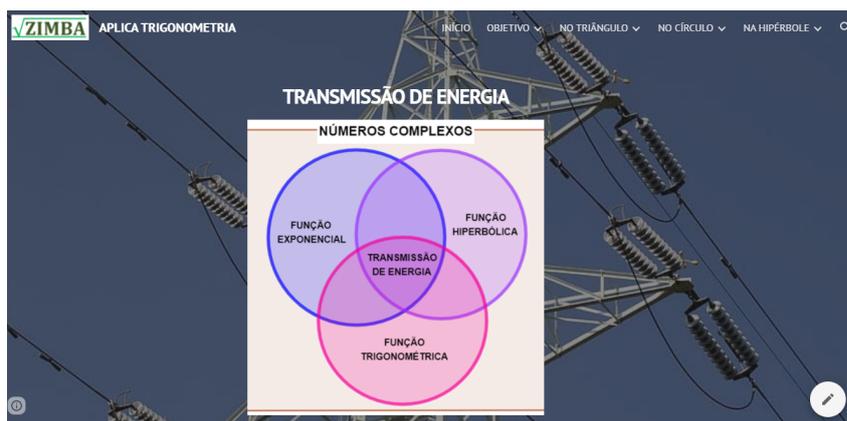


Figura 110 – Página TRANSMISSÃO DE ENERGIA do site Aplica-Trigonometria

Fonte: <https://sites.google.com/edu.se.df.gov.br/aplica-trigonometria>



Figura 111 – Página LINHAS TRANSMISSÃO do site Aplica-Trigonometria

Fonte: <https://sites.google.com/edu.se.df.gov.br/aplica-trigonometria>

Atualmente o site conta com vinte nove páginas que trazem: figuras, animações, carrossel de imagens e textos explicativos em uma linguagem direta visando facilitar o entendimento e despertar no leitor a curiosidade sobre o mundo trigonométrico. Existe o plano de, no futuro, completar o site com páginas que tragam os teóricos e as teorias da educação, o histórico da trigonometria e as aplicações da trigonometria na esfera.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os conteúdos apresentados, no primeiro capítulo deste trabalho, deixaram evidente que a aprendizagem precisar ter significado para o educando. As teorias de Ausubel, Vygotsky e Piaget; juntamente com a Teoria da Antropologia do Didático (TAD); os pressupostos didáticos da Praxeologia dos Níveis Conhecimento, corroborados pelos estudos da Neurociência indicam que é preciso mudar a forma de ensinar. Sobretudo, a forma de lecionar matemática. Valorizar os conteúdos já vivenciados e presentes no universo do aluno é apenas o primeiro passo; para essa mudança.

No caso da trigonometria, ficou claro que sua aplicação impacta de forma direta na vida do aprendiz; as aplicações mostradas nos capítulos 5 e 6, respondem de forma cabal a segunda pergunta motivadora desse trabalho, (*Onde serão aplicados os conteúdos da trigonometria?*) Foram mostradas aplicações diretas na Medicina; Engenharia Civil, Elétrica e Mecânica, Geografia e Arquitetura. Se forem consideradas as formas indiretas de aplicação; tem-se um crescimento exponencial na quantidade de aplicação da trigonometria. Porque só a Série de Fourier e suas transformadas têm aplicações em incontáveis processos.

A resposta para primeira pergunta (*Por que se deve estudar e entender as funções trigonométricas no ensino básico?*) está subentendida no conjunto deste trabalho. As funções circulares, vistas no ensino básico, dão subsídios para o futuro cidadão entender os fenômenos periódicos com os quais convive. Além disso, os conteúdos trigonométricos interagem com a geometria analítica, as exponenciais, as cônicas, e até com os números complexos. Ainda existe o fato, dos cálculos trigonométricos servirem para mensurar o quanto os conteúdos básicos da aritmética, álgebra e geometria foram internalizados; oportunizando, caso necessário, uma retomada de posição visando mitigar as dificuldades apresentadas. Supondo o caso extremo, no qual, o único benefício do ensino da trigonometria seja a ratificação do aprendizado dos conteúdos básicos, já citados, mesmo assim; esse único benefício já justificaria ensinar trigonometria aos alunos.

Levando em consideração os benefícios agregados a humanidade pela trigonometria triangular na área da astronomia, agrimensura e navegação; adicionando-se os benefícios trazidos pela aplicação da trigonometria circular e hiperbólica em várias áreas fundamentais a vida cidadã; pode-se dizer que optar pelo não entendimento dos conceitos da trigonometria é uma decisão pouco saudável social e economicamente.

Foi graças a trigonometria que o homem se tornou capaz de medir o tempo. Apenas esse fato, já tornaria imprescindível a sua aprendizagem; portanto, como é impossível calcular a magnitude do prejuízo causado pela falta dos conhecimentos trigonométricos,

é imperativo apresentar esses conteúdos e suas aplicações às novas gerações; tornando significativo o seu aprendizado para que possa ser internalizado de forma eficiente.

O capítulo 7 apresentou o *site*: <https://sites.google.com/edu.se.df.gov.br/aplica-trigonometria>, elaborado com a ferramenta *Google Sites*, no domínio da Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF), é um dos legados desta pesquisa e tem como objetivo difundir os conteúdos e aplicações da trigonometria junto aos alunos e professores da Rede de Ensino Básico. A trigonometria, enquanto produto, necessita de *marketing* agressivo e pró-ativo que dê destaque a sua importância e aplicação. As perguntas respondidas por esse trabalho precisam reverberar na comunidade de forma contundente e incontestável.

O saber trigonométrico é essencial. Portanto, precisa ser popularizado e passar a fazer parte do inconsciente coletivo porque o essencial; pode até ser invisível aos olhos, seguindo o que diz o poeta; porém, conforme os grandes teóricos da educação, precisa estar internalizado na mente para servir de ancora na Zona de Desenvolvimento Proximal, formando esquemas e invariantes que o torne significativo para o aprendiz.

Referências

- AGUIAR, L. B. *Relações Complexas entre as Funções Hiperbólicas*. Fortaleza CE, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 139, 140 e 141.
- ALECRIM, C. G. M. *Desenvolvimento Humano e Aprendizagem*. Brasília DF, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 30, 31, 32 e 34.
- ALOÉ, F.; AZEVEDO, A. P. de; HASAN, R. Mecanismos do ciclo sono-vigília. *Revista Brasileira de Psiquiatria*, 2005. Citado na página 111.
- AMORIM, A. M. do N.; TRINDADE, A. K. B. da; JUNIOR, F. de Paula. Santos de A. Um estudo sobre série de fourier e aplicações a problemas do tipo laplace. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 98 e 99.
- ANDREOLI, C. P. P. *Análise da Variabilidade Circadiana da Temperatura Oral, Estresse e Cronotipo em Estudantes e trabalhadores do Turno Noturno*. Tese — Universidade de Campinas, Campinas SP, 2013. Citado na página 111.
- AZÊVEDO, M. A. de; RÊGO, R. G. do. Linguagem e matemática: A importância dos diferentes registros semióticos. *Revista Temas em Educação, João Pessoa*, junho 2016. Citado na página 50.
- BIZARRO Álvaro José. Gandarez de O. *Projeto do Pistão de um Motor de Combustão Interna para um Veículo de Elevada Eficiência Energética*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Coimbra, Coimbra, 2015. Citado na página 118.
- CARMO, M. P. do; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. *Trigonometria, Números Complexos*. [S.l.]: SBM, 2005. Citado na página 99.
- CORNELISSEN, G. Cosinor-based rhythmometry. *Theoretical Biology and Medical Modelling*, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 112 e 113.
- DILLI, L. M. As implicações das teorias de vygotsky para uma aprendizagem significativa. *Revista Didática Sistêmica*, v. 8, 2018. Citado na página 32.
- FEIJÓ, R. S. A. A. *Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria: um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, Brasília DF, 2018. Citado 6 vezes nas páginas 25, 49, 51, 53, 54 e 57.
- FIGUEIREDO, D. G. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1977. Citado na página 99.
- FILHO, H. T. de Q. *Descrição do Sistema de tração elétrica Aplicado ao Metrô de Fortaleza (METROFOR)*. Fortaleza CE, 2018. Citado na página 136.
- FONSECA, L. S. da. *Um estudo sobre o Ensino de Funções Trigonométricas no Ensino Médio e no Ensino Superior no Brasil e França*. Universidade Anhanguera de São Paulo, 2015. Citado 11 vezes nas páginas 27, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 46 e 52.

- FREITAS, M. do Bom Conselho. da S. B. *As Funções Hiperbólicas e Suas Aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa PB, 2015. Citado 5 vezes nas páginas 89, 133, 134, 135 e 136.
- GONÇALVES, B. da S. B. *Estudo da Organização Funcional do Sistema Circadiano por Meio de Ferramentas Computacionais e Matemática*. Tese — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal RN, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 111, 112, 113 e 114.
- GUEDES, M. V. *Grandezas Periódicas Não Sinusoidais*. [S.l.]: NEME-FEUP, 1992. Citado 3 vezes nas páginas 100, 102 e 103.
- IEZZI, G. *Fundamentos de matemática elementar, Trigonometria*. [S.l.]: Atual, 2013. Citado na página 99.
- LAGES, E. et al. *A matemática do ensino médio*. [S.l.]: SBM, 1997. v. 1. Citado 8 vezes nas páginas 57, 58, 62, 67, 79, 83, 85 e 94.
- LUCENA, A. E. S. de. *Funções Periódicas e Quase-Periódicas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande PB, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 94 e 95.
- LUCENA, L. A. da S. *Trigonometria no triângulo Retângulo: uma proposta de sequência didática no Ensino Básico*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Maranhão, São Luis MA, 2020. Citado na página 26.
- MAIA, A. de S. *Modelagem Matemática no Estudo de Funções trigonométricas no Ensino Médio*. Castanhal PR, 2018. Citado na página 117.
- MARKUS, R. P.; JUNIOR, E. J. M. B.; FERREIRA, Z. S. Ritmos biológicos: entendendo as horas, os dias e as estações do ano. *Einstein*, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 94, 95, 110 e 111.
- MEDEIROS, V. Z. et al. *Pré-Cálculo*. [S.l.]: Pioneira Thomson Learning, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 69, 71 e 72.
- MOREIRA, A. M. *A teoria da Aprendizagem significativa de Ausubel*. São Paulo, 1999. Citado na página 29.
- NETO, A. C. M. *Fundamentos de cálculo*. [S.l.]: SBM, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 58, 62 e 67.
- OLIVEIRA, J. E. M. de. *A Trigonometria na Educação Básica com Foco em Sua Evolução Histórica e Suas Aplicações Contemporânea*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Viçosa, Viçosa MG, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 109 e 110.
- PAIVA, M. *Matemática(Ensino Médio)*. [S.l.]: Moderna, 2015. Citado 12 vezes nas páginas 58, 62, 67, 69, 70, 73, 79, 80, 81, 93, 95 e 118.
- SÁ, A. L. de; NARCISO, A. L. do C.; FUMIÃ, H. F. Neurociência cognitiva e educação: análise sobre a prevalência de neuromitos entre os docentes de matemática e das demais áreas do conhecimento atuantes na sre de carangola-mg. *Revista de Educação UFSM*, junho 2020. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 35.

- SANTOS, C. M. dos; FREITAS, J. L. M. de. Contribuições da teoria antropológica do didático na formação de professores de matemática. *Amazonia: Revista de Educação em Ciências e Matemática*, v. 13, 2017. Citado 5 vezes nas páginas 37, 38, 39, 40 e 45.
- SANTOS, F. J. Introdução às séries de fourier. *Belo Horizonte: PUC Minas, Instituto de*, 2004. Citado na página 93.
- SANTOS, J. J. C. dos. *Estudo e Aplicação das Funções Hiperbólicas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa PB, 2015. Citado 6 vezes nas páginas 88, 89, 133, 134, 137 e 138.
- SANTOS, V. S. dos. *Cantina Escolar e suas Externalidades Positivas e Negativas*. [S.l.], 2010. Citado 4 vezes nas páginas 30, 31, 32 e 33.
- SILVA, L. P. *Um Estudo da Atenção Seletiva na Aprendizagem das Funções Trigonométricas: etiologias e tipologias de erros na perspectiva da neurociência cognitiva*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão SE, 2019. Citado 4 vezes nas páginas 27, 34, 51 e 52.
- SILVA, W. da. *O ensino de trigonometria: perspectivas do ensino fundamental ao médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro SP, 2008. Citado na página 97.
- SILVEIRA, F. L. da. As variações dos intervalos de tempo entre as fases principais da lua. *Revista Brasileira de Física*, v. 23, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 122, 123 e 125.
- TALAVEIRA, L. M. B. *Parábola e Catenária: história e aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Paulo SP, 2008. Citado na página 134.
- VASCONCELOS, J. G. S. F. *Funções Hiperbólicas: História Conceito e Aplicação*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Amazonas, Manaus AM, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 85, 87, 88, 89 e 133.
- VENCESLAU, S. M. M. *Modelagem Matemática de Sistemas Vibratórios com Aplicação de Autovalores*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, São Cristóvão SE, 2015. Citado 8 vezes nas páginas 96, 97, 103, 104, 105, 106, 107 e 108.
- VIEIRA, J. E. L.; FONSECA, L. S.; SILVA, K. S. da. Aprendizagem das noções de trigonometria no triângulo retângulo: Reflexos à luz da neurociência cognitiva. *Encontro Nacional de Educadores Matemática - ENEM*, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 36.