Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Os Modelos Axiomáticos das Geometrias Euclidiana e Projetiva: Histórico, Similaridades, Diferenças e Aplicações

Lucas de Sousa Holanda

Brasília

2020

Lucas de Sousa Holanda

Os Modelos Axiomáticos das Geometrias Euclidiana e Projetiva: Histórico, Similaridades, Diferenças e Aplicações

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de Mestre.

Universidade de Brasília - UnB

Departamento de Matemática - MAT

PROFMAT - SBM

Orientadora: Profa. Dra. Tatiane da Silva Evangelista

Brasília

2020

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

dL933m

de Sousa Holanda, Lucas
Os Modelos Axiomáticos das Geometrias Euclidiana e Projetiva: Histórico, Similaridades, Diferenças e Aplicações Lucas de Sousa Holanda; orientador Tatiana da Silva Evangelista. -- Brasília, 2020.
82 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2020.

1. Geometria Euclidiana. 2. Geometria Projetiva. I. da Silva Evangelista, Tatiana, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Os Modelos Axiomáticos das Geometrias Euclidiana e Projetiva: Histórico, Similaridades, Diferenças e Aplicações

por

LUCAS DE SOUSA HOLANDA

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 23 de junho de 2020.

Comissão Examinadora:

____

Prof.ª Tatiane de Silva Evangelista (Orientadora)

____

Prof. Antônio Luiz de Melo – FUP/UnB

____

Prof. João Paulo dos Santos - MAT/UnB

Dedico este trabalho a Deus Pai, e aos pais que, neste mundo, Ele me deu a graça de ter: Bibiano e Justina, este trabalho, esta vitória, esta alegria é para vocês. Este trabalho é para coroar o esforço que vocês fizeram. Este trabalho é para coroar o suor escorrido pela face. Esta dissertação não é apenas minha, ela pertence mais a vocês do que a mim. E que fique registrado que cada vitória nesta vida sempre será para vocês, minha mãe aqui neste mundo, meu pai na vida eterna e ao próprio Deus que me proporcionou todas estas graças, sobretudo a graça de ter os pais que eu tenho.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pelo dom da vida. Agradeço a Ele pelas alegrias e também pelas dificuldades, ou seja, por cada momento desde que Ele me chamou à vida. Este trabalho só foi possível pela força, coragem e fé que vieram do alto sob a forma das pessoas que foram colocadas neste caminho.

Agradeço à minha família, sobretudo aos meus pais que faço questão de nomear: Bibiano de Holanda Cavalcante e Justina de Sousa Holanda. Vocês não tiveram tantas oportunidades de estudo, entretanto batalharam para que eu pudesse tê-las. Vocês não tiveram a oportunidade de ter seus nomes em diplomas, mas hoje eu faço questão de colocar os seus nomes nesta dissertação, para que se saiba que este trabalho não é só meu, ele é de vocês. Agradeço também às minhas irmãs Fabiana e Verônica, às quais também faço questão de nomear, sobretudo pela força e união nestes momentos difíceis que passamos durante o ano de conclusão deste trabalho.

Agradeço à Geiane, minha namorada, por me incentivar nos estudos, cobrar resultados e participar sempre desta minha caminhada.

Agradeço também aos meus amigos. Como é bom tê-los em minha vida! A maioria não é capaz de entender quase nada da teoria que aqui se encontra, mas mesmo assim sempre me apoiaram, me ajudaram e principalmente me corrigiram nos caminhos da vida. Sinto que Deus me deu a graça de não ter um melhor amigo, mas sim vários melhores amigos, alguns dos quais faço questão de nomear: Roberto, que foi como uma coluna de força neste ano difícil. Waldenor e Kamila, com quem dividi alguns dos sorrisos mais sinceros. Antônio, Frank e Victor, que me vieram pela fé em Deus e que me fortificam nesta fé. Willian, Clayton, Layanne, João Luiz, Talita, Letícia, Jéferson, Angélica, Bruna, Karen, Daniela e todos os outros que fazem parte deste belo caminho que chamo de vida.

Aos meus colegas de trabalho, sobretudo aos meus gerentes Meg e Wagner, pelo apoio dado neste período de intensos estudos.

Aos meus padrinhos, Severino e Margarida, por todo o carinho que me foi dado em tantos anos. Aos meus avós, primos, tios e todos aqueles que fizeram parte da minha vida de alguma forma, tanto os que estão aqui quanto aos que já foram para a vida eterna.

À minha orientadora Tatiane, por todas as ideias e pelos caminhos que me ajudou a traçar neste trabalho e a todos aqueles que participaram desta turma (2018 - 2019) do PROFMAT, mais conhecida como turma do Juci e da Kelem, e a todos os professores que nos acompanharam nesta caminhada: Matheus, Antônio, Rui, Rogério e Castilho. Sim, agradeço pelo conhecimento adquirido, mas agradeço principalmente pela convivência e pelas experiências vividas nestes dois anos.

Certa vez li que Isaac Newton disse que “Se enxerguei mais longe, foi porque me apoiei sobre os ombros de gigantes” e vejo que Newton tem muito a ensinar com esta frase. Como Newton, também acho que se tive algum sucesso foi por me apoiar em gigantes. Alguns destes gigantes fiz questão de citar nestes agradecimentos. Cada um foi ou é gigante à sua maneira, do seu jeito, com sua história. Estes são os gigantes da minha vida. Alguns destes eu fiz questão de nomear, e isso foi proposital. Em nossos dias, infelizmente, cada vez mais o "valor"está apenas nos números, sobretudo naqueles que se referem ao dinheiro. É bem verdade que nós, matemáticos, gostamos de números. Mas antes de gostar dos números precisamos voltar a valorizar as pessoas. E pessoas tem nome.

A todos estes gigantes, muito obrigado.

*"Arquimedes será lembrado enquanto Ésquilo foi esquecido, porque os idiomas morrem mas as idéias matemáticas permanecem. **Imortalidade** pode ser uma idéia tola, mas provavelmente um matemático tem a melhor chance que pode existir de obtê-la."*

G.H.Hardy

Resumo

Neste trabalho serão apresentadas algumas das principais características da Geometria Euclidiana e da Geometria Projetiva. Além do histórico de desenvolvimento de ambas, serão expostos os modelos axiomáticos, assim como alguns teoremas clássicos e demonstrações. A partir de cada conjunto de axiomas, serão exploradas as similaridades e as diferenças entre cada um dos dois modelos de Geometria. A teoria apresentada será utilizada como subsídio para a proposição de aplicações em exercícios destinados a alunos da educação básica. Sabendo que a Geometria Projetiva é menos conhecida, buscamos apresentá-la da maneira mais simples possível, com a utilização de ferramentas de desenho e de fotografias, além de explorá-la sob duas óticas distintas: através dos axiomas e dos modelos de representação da realidade desenvolvido pelos artistas renascentistas. Por fim, finalizamos este trabalho elencando considerações sobre a importância da temática da Geometria Projetiva para a comunidade acadêmica e finalizamos, fazendo uma análise sucinta dos resultados brasileiros no PISA de 2018.

Palavras-chaves: Geometria Euclidiana. Geometria Projetiva. Axiomas. Perspectividade. Projetividade.

Abstract

In this work, some of the main characteristics of Euclidean Geometry and Projective Geometry will be presented. In addition to the development history of both, axiomatic models will be exposed, as well as some classical theorems and demonstrations. From each set of axioms, the similarities and differences between each of the two models of Geometry will be explored. The theory presented will be used as a basis for proposing applications in exercises for students in basic education. Knowing that Projective Geometry is less known, we seek to present it in the simplest possible way, using drawing and photography tools, in addition to exploring it from two different perspectives: through axioms and models of reality representation developed by Renaissance artists. Finally, we finish this work by listing considerations about the importance of the Projective Geometry theme for the academic community and we conclude, making a succinct analysis of the Brazilian results in PISA 2018.

Key-words: Euclidean Geometry. Projective Geometry. Axioms. Perspective. Projectivity.

Lista de ilustrações

Lista de abreviaturas e siglas

LLL	Lado-lado-lado
LAL	Lado-ângulo-lado
ALA	Ângulo-lado-ângulo
AA	Ângulo-ângulo
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes

Lista de símbolos

$X\overset{O}{\underset{\wedge}{=}}X_1$	Projetividade entre X e X_1
$X \barwedge X_1$	Correspondência elementar (perspectividade) entre Xe X_1
$AB//A'B'$	Reta definida por AB paralela à reta definida por $A'B'$
$\overrightarrow{AB}$	Semirreta partindo de A e contendo B
$\leftrightarrow$	Relaçao de bijeção
$=, \equiv, \cong$	Relação de congruência
$\triangle ABC$	Triângulo de vértices A,B e C

Sumário

Justificativa

A Geometria é, sem dúvida, uma das áreas da Matemática que mais se aproxima da vivência cotidiana. Desde muito cedo, nos acostumamos com as formas geométricas, sejam elas sólidas ou planas. Antes mesmo de começar a escrever, somos levados a desenhar, a pintar e a contornar figuras. Antes mesmo de aprender cálculos formais, tais como de áreas e de volumes, a nossa vivência nos mostra, por exemplo, se uma determinada quantidade de tinta é suficiente para terminar uma pintura. Deste modo, podemos afirmar que a Geometria é, talvez, a Matemática mais palpável e visível.

Esta ciência está em todos os lugares, na arquitetura, nas artes e na natureza e isso, ao longo da história, motivou o estudo de diversas geometrias. A Geometria Euclidiana, a qual estamos mais acostumados, nos mostra uma figura do mundo tal como ele é, ao contrário da Geometria Projetiva que busca estudar o mundo tal como o vemos. Deste modo, é importante estudar estas duas geometrias paralelamente, de modo a observar as similaridades e as diferenças que existem entre elas.

Os axiomas da Geometria Euclidiana, assim como seus princípios, teoremas e demonstrações são bastante difundidos, entretanto, o mesmo não acontece no que se refere à Geometria Projetiva. Sendo assim, pesquisar e estudar sobre as relações entre estes dois modelos geométricos é importante, pois pode aliar teoria e prática, visto que estes temas possuem relevância tanto dentro quanto fora da Matemática pura. É importante ressaltar que os conceitos projetivos são, muitas vezes, desconhecidos até entre aqueles que possuem formação superior em Matemática ao passo de que são amplamente utilizados e difundidos entre profissionais das artes plásticas e da arquitetura. Isso mostra que estudar tais conceitos é, antes de tudo, uma maneira de evidenciar que a Matemática está próxima à realidade humana.

São muitas as pessoas que observam na Matemática apenas regras rígidas, cálculos complexos e difíceis de se compreender. Neste sentido, a Geometria se mostra como fator motivador, sobretudo para aqueles que tem dificuldades em compreender as ideias Matemáticas, pois evidencia que até na ideia de profundidade de uma pintura existem conceitos matemáticos escondidos.

Deste modo, pesquisar e escrever sobre as relações entre estes modelos de Geometria se mostra importante, sobretudo quando se busca apresentar tais conceitos de forma simples, através de imagens e de analogias, possibilitando a compreensão até mesmo de quem não é estudioso do assunto.

Objetivos gerais

Este trabalho busca apresentar o modelo axiomático e outras características da Geometria Euclidiana e da Geometria Projetiva, caracterizando as suas similaridades e as suas diferenças e quando possível, exemplificar a teoria com imagens da arquitetura de Brasília.

Objetivos específicos

- Apresentar o contexto histórico que levou ao desenvolvimento da Geometria Euclidiana e da Geometria Projetiva;
- Exemplificar, quando possível, a teoria de forma clara e precisa através de imagens da arquitetura de Brasília;
- Apresentar exercícios práticos ao leitor para que possa ter uma melhor compreensão dos assuntos tratados;
- Propor atividades práticas para que professores da educação básica possam trabalhar os conceitos geométricos apresentados;

Introdução

Todos os dias, ao olhar o Sol e a Lua cheia vê-se um círculo. Os prédios geralmente são semelhantes a paralelepípedos. A tela do celular tem forma retangular. Alguns dos monumentos mais famosos e emblemáticos do mundo são pirâmides. As abelhas constroem colmeias com cavidades em formato de hexágono. Certamente todos os dias nas relações de compra são utilizadas moedas, que são semelhantes a pequenos cilindros e em algum lugar, provavelmente neste momento, pessoas jogam algum jogo que utiliza dados, que são cubos. Muitos outros exemplos poderiam ser citados, mas não há necessidade pois estes já permitem chegar a uma conclusão bastante interessante: a Geometria está em todos os lugares.

Como será apresentado nesta obra, o desenvolvimento do ser humano, por vezes, se confunde com desenvolvimento do pensamento geométrico. Pensar geometricamente possibilitou ao ser humano desenvolver a agricultura, a pecuária, a engenharia, a arquitetura, as artes etc, sendo um fator crucial para que a humanidade chegasse aos níveis de desenvolvimento atuais. Esta área da Matemática é tão próxima da realidade que, em certo sentido, pode-se dizer que todo ser humano é também um geômetra.

Na educação básica todos os alunos são apresentados a conceitos fundamentais, tais como os postulados de Euclides, o Teorema de Pitágoras, o Teorema de Tales dentre outros, acabando por acreditar que existe apenas um *tipo* de geometria, pois quase todos os problemas cotidianos podem ser explicados por estes conceitos. Mas algumas observações simples podem ser feitas de modo a *perturbar* esse senso comum.

Figura 1 – Biblioteca Nacional de Brasília

Fonte: Elaborada pelo autor

Ao observar um edifício de posições diferentes a percepção visual é alterada, tal como mostra a Figura 1. É verdade que a forma real do edifício não se altera, o que é alterado é a percepção que se tem da forma deste edifício.

A Figura 2 apresenta um fato semelhante, onde duas pistas retilíneas e paralelas parecem se aproximar num ponto distante do observador. Sendo assim, parece existir uma dualidade entre as formas reais dos objetos e a percepção visual que se tem deles e este é um dos fatos que deram origem ao estudo de um novo modelo geométrico: a Geometria Projetiva. De maneira bastante simples Barros e Andrade (2004, p. 87) afirma que a Geometria Euclidiana é um modelo da realidade não tão próximo das nossas sensações quanto estamos acostumados a imaginar.

Figura 2 – Esplanada dos Ministérios

Fonte: Disponível em https://brasiliadefato.com.br/grandebrasilia/2019/01/esplanada-dos-ministerios-e-totalmente-liberada-para-transito-apos-4-dias-de-interdicoes/ Acesso em 15 de agosto de 2019

O primeiro capítulo deste trabalho, intitulado *Convite ao Estudo da Geometria*, busca despertar o interesse do leitor para o estudo desta ciência, evidenciando o contexto histórico de sua formação e a proximidade entre ciência e cotidiano. Ao apresentar os fatos históricos que levaram ao desenvolvimento do estudo geométrico tem-se o objetivo de mostrar uma ciência próxima, acessível e dinâmica. É verdade que cada leitor tem suas próprias impressões de um determinado texto, entretanto, este capítulo busca levar o leitor a ver a geometria, assim como toda a Matemática, como um motor que deu forças ao desenvolvimento da humanidade.

O segundo capítulo contempla a obra de Euclides e seu posterior desenvolvimento. Nesse capítulo o leitor é apresentado às grandes contribuições que os antigos gregos fizeram para a Matemática, sobretudo na geometria, através do desenvolvimento do *método axiomático*, presente em *Os Elementos*. As seções que seguem apresentam um modelo axiomático completo para a Geometria Euclidiana Plana, além de definições, de teoremas e de outros resultados importantes referentes ao plano euclidiano. É importante ressaltar que as construções geométricas apresentadas neste capítulo foram construídas através do software Geogebra, cuja utilização é livre e gratuita.

O terceiro capítulo apresenta um breve modelo axiomático para a Geometria Projetiva e algumas de suas características, sobretudo no que se refere aos seus aspectos visuais. Como os conceitos deste modelo geométrico são menos conhecidos, buscaremos exemplificá-los através de fotografias, de obras de arte e de modelos criados através das versões 2D e 3D da aplicação Geogebra. Neste capítulo também apresentaremos uma breve comparação entre os dois modelos axiomáticos, evidenciando as similaridades e as diferenças entre os dois modelos de geometria.

O quarto capítulo é reservado para apresentar algumas aplicações destes modelos geométricos, que possam ser replicadas por professores, tanto da educação básica quanto do ensino superior, de maneira simples e com poucos recursos, com o objetivo de tornar a aprendizagem mais efetiva. Por fim, concluiremos este trabalho apresentando os resultados mais importantes e interessantes da pesquisa bibliográfica aplicada, relatando sucessos, insucessos e inquietações geradas por este estudo.

1 Um convite ao estudo da Geometria

1.1 Para que estudar Geometria?

Muitos alunos, observando todas as fórmulas, os teoremas e as demonstrações, questionam a seus professores com uma pergunta que, mesmo sendo quase sempre ignorada, tem bastante relevância: onde se usa isso? Muitos professores consideram este tipo de questionamento como algo sem importância e até mesmo ofensivo, quando deveriam considerar este tipo de pergunta como um indicativo de que é necessário rever conceitos, pois apresentar uma Matemática visível e palpável pode ser um fator motivador para que os alunos não se preocupem apenas em decorar fórmulas e demonstrações, mas também criem gosto por esta ciência.

Pensando nisso, pode-se ter na Geometria a resposta para o questionamento citado anteriormente. Pode ser que um aluno chegue até seu professor e pergunte: onde se usa a Geometria? E, tomando este questionamento como ponto de partida, o professor pode mostrar uma infinidade de coisas, e desta infinidade de coisas simples chegar até estudos mais complexos. A Geometria está na agricultura, na pecuária, na arquitetura, na engenharia, nas artes, na indústria, nos alimentos, ou seja, em todos os lugares.

A Geometria, sobretudo em suas formas mais simples, pode ser observada como uma porta aberta para uma Matemática mais profunda, e cabe ao professor buscar mostrar isso a cada aluno. Dentro de uma sala de aula, mesmo numa escola sem muitos recursos, os alunos vão ver paredes, vigas, teto, portas, janelas e destas coisas simples e monótonas podem-se criar diversas atividades lúdicas, e assim iniciar o ensino e discussões de uma Geometria mais profunda.

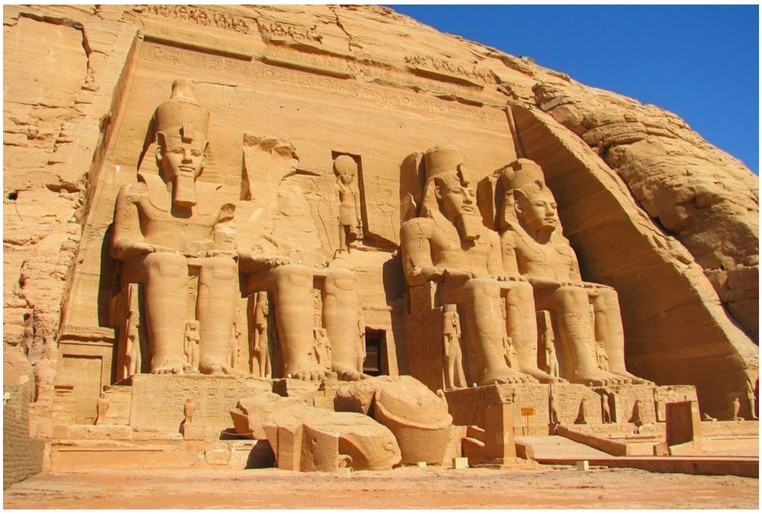
1.2 Breve histórico da evolução da Geometria Euclidiana e da Geometria Projetiva

1.2.1 Origens primitivas, Egito, Mesopotâmia e Índia

A história da Geometria é belíssima e se entrelaça de maneira muito próxima com a história do desenvolvimento do ser humano. É difícil fazer afirmações concretas sobre as origens desta ciência, mas se sabe que muito antes do início da escrita o ser humano já fazia uso de formas rudimentares de Geometria. Achados históricos do período neolítico mostram que aqueles homens já tinham alguma preocupação com relações espaciais. “Seus potes, seus tecidos e suas cestas mostram exemplos de congruência e simetria, que em essência são partes da Geometria elementar" (BOYER, 1996, p. 4).

Ao propor sobre as raízes da Geometria, o historiador Grego Heródoto (±485 a.C. - ± 425 a.C.) e o filósofo Aristóteles (±384 a.C. - ±322 a.C.) foram bastante conservadores, não querendo se arriscar sugerindo períodos mais antigos. Ambos propuseram que a Geometria teria se originado no Egito, entretanto, cada um propôs uma motivação diferente para seu estudo. Heródoto acreditava que a motivação para o estudo desta ciência estava ligada à necessidade de se fazerem medições de terras. Aristóteles, entretanto, acreditava que a motivação para o início da Geometria estava ligada às questões sacerdotais e rituais. As duas teorias podem até parecer antagônicas, entretanto, podemos imaginar que as medições feitas pelos "estiradores de corda", como eram conhecidos os geômetras egípcios, eram necessárias tanto para demarcar terras quanto para se erguer templos. Deste modo podemos afirmar que, quanto à motivação dos egípcios, ambos podem estar corretos, tal como pode ser observado na Figura 3.

Figura 3 – Templo de Ramsés II



Fonte: Disponível em https://www.egito.com/abu-simbel Acesso em: 12/08/2019

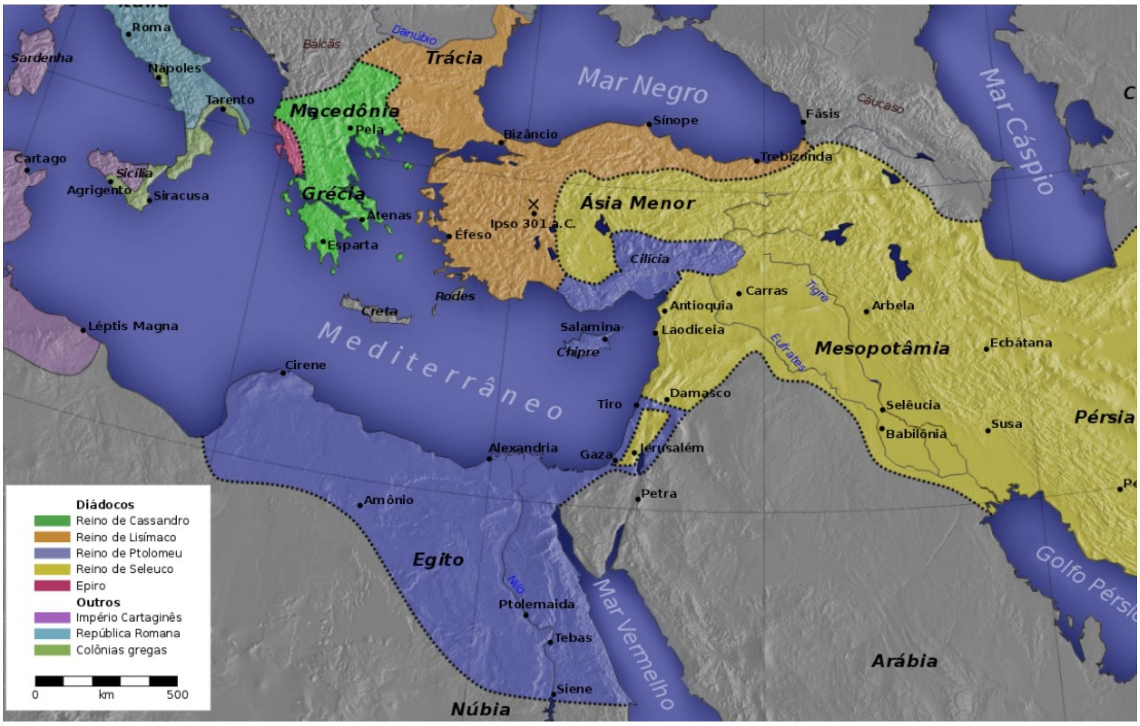
Há relatos históricos, tais como os problemas encontrados nos Papiros de Rhind datado de aproximadamente 1650 a.C. e de Moscou, datado de cerca de 1890 a.C., que mostram que os egípcios faziam estudos sobre a resolução de problemas envolvendo áreas, volumes e problemas trigonométricos, porém, não deixavam claro em seus escritos se seus cálculos eram exatos ou aproximados. O Papiro de Rhind é o mais extenso documento matemático do antigo Egito, medindo 5,5m x 0,32m e contendo 85 problemas. O papiro de Moscou possui 25 problemas, medindo aproximadamente 5,5m x 0,8m.

Os povos mesopotâmicos e indianos tratavam a Geometria de forma similar aos antigos egípcios, utilizando-a para a resolução de problemas práticos e rudimentares, sem muita atenção à exatidão dos cálculos. Pode-se afirmar que em seus primeiros passos a Geometria esteve essencialmente ligada às necessidades mais básicas das pessoas, tais como a alimentação através da agricultura e às construções, fossem elas casas, templos religiosos ou monumentos para outros usos.

1.2.2 A grande revolução – a Geometria grega

Devemos aos gregos a transformação da Geometria de um conhecimento rudimentar e prático num dos ramos da Matemática pura (BARROS; ANDRADE, 2004, p. 2). Foram estes que começaram a pensar nesta ciência com maior formalidade, saindo de um contexto meramente físico para um contexto mental e teórico. Durante o século VIII a.C. a Grécia passava por uma grande efervescência cultural, sobretudo na literatura, onde se pode destacar as obras de Homero e Hesíodo, entretanto, pouco se sabe da Matemática desenvolvida neste período. Dois séculos depois, isto é, no século VI a.C. viveram Pitágoras de Samos (±569 a.C. – ±475 a.C) e Tales de Mileto (±624 a.C. – ±547 a.C.) "que tiveram na Matemática o papel de Homero e Hesíodo na literatura (BOYER, 1996, p. 33).

Figura 4 – Mapa Egito, Grécia e Mesopotâmia



Fonte: Disponível em https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/69/Diadochi_ PT.svg Acesso em: 12/08/2019

Por estar relativamente próximo a alguns centros antigos de conhecimento, tal como observado na Figura 4, acredita-se que Tales tenha adquirido parte de seu conhecimento geométrico com os povos do Egito e da Mesopotâmia, além do conhecimento da astronomia da Babilônia. Pouco se sabe a respeito de sua vida e obra, visto que não são conhecidos escritos deixados por ele. Tudo o que se sabe a respeito baseia-se na tradição e em escritos de outros autores, que são unânimes em creditar a Tales uma inteligência formidável, além de o considerar como primeiro filósofo, cientista e matemático grego (BARROS; ANDRADE, 2004, p. 3). A Tales são creditadas as demonstrações dos seguintes resultados:

1. Um círculo é bissectado por um diâmetro.
2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
3. Os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais.
4. Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado de outro, então os triângulos são congruentes.

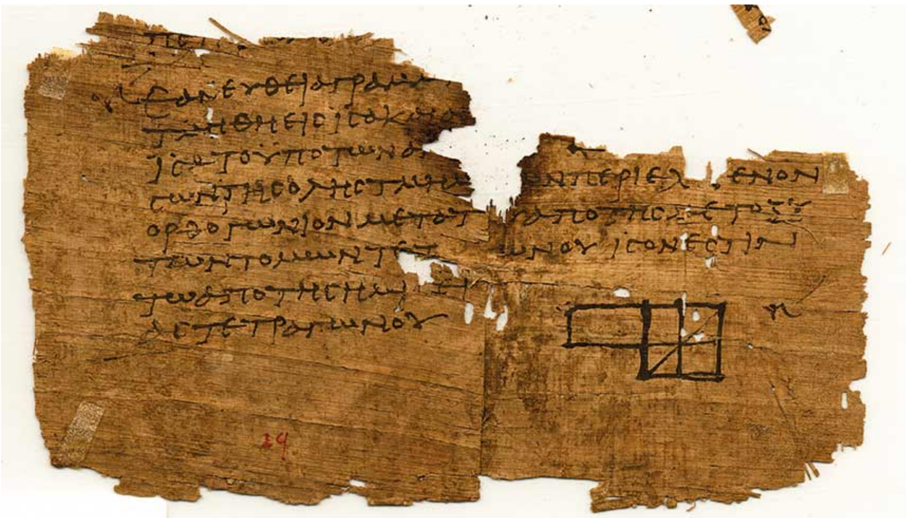
Pitágoras, tal como Tales, viajou ao Egito e à Babilônia - possivelmente foi até a Índia. Em suas viagens, além de Matemática e astronomia ele buscou aprender as ideias religiosas dos povos o que contribuiu para que, ao retornar ao mundo grego, ele se estabelecesse em Crotona e fundasse uma sociedade que unia religião, Filosofia e Matemática, que muito contribuiu para a formalização da Geometria. Os avanços seguintes foram estabelecidos por Hipócrates de Chios (± 470 a.C - ±410 a.C.) e Platão (±427a.C. - ±347a.C.). Hipócrates de Chios contribuiu com teoremas sobre circunferências e escreveu Elementos de Geometria, onde apresentava uma estrutura formal de teoremas provados com base em teoremas anteriores. Platão fundou a Academia, uma instituição que congregava os maiores sábios de sua época, onde a Matemática passou a ser vista como uma Ciência Pura através de um método axiomático.

Muitos foram os matemáticos gregos que se destacaram no estudo da Geometria deste período, entretanto, um destes se destacou por uma façanha memorável. Euclides de Alexandria (± 330a.C – 270 a.C.) registrou em uma obra, intitulada *Os Elementos*, grande parte do conhecimento matemático grego da época. Esta obra é subdividida em treze livros (ou capítulos), onde são demonstradas 465 proposições através de um sistema axiomático de forma bastante didática. Além desta, quatro outras obras de Euclides sobreviveram até hoje: *Os Dados, Divisão de Figuras, Os Fenômenos* e *Óptica*.

Euclides começa o primeiro livro de *Os Elementos* de forma bastante abrupta, com vinte e três definições, cinco postulados e cinco noções comuns. Os demais livros seguem um padrão parecido, contendo definições prévias que serão utilizadas para a demonstração das proposições. Do livro I ao livro VI, Euclides trata de Geometria Plana. Dos livros VII ao IX são expostos resultados da Teoria dos Números. O livro X trata de números irracionais e os livros restantes tratam de geometria sólida e espacial.

Boyer (1996, p. 87) destaca que "*Os elementos* de Euclides não só constituem a mais antiga obra Matemática grega importante a chegar até nós, mas o texto mais influente de todos os tempos". Sabe-se que Euclides não criou toda a Matemática presente em *Os Elementos*, entretanto, sua habilidade em elencar e formalizar tais conhecimentos é que torna esta obra tão especial a ponto da geometria obtida através dela levar o nome de seu autor. Trata-se da *Geometria Euclidiana.* A Figura 5 retrata um papiro datado do século IX contendo fragmentos do segundo livro de *Os Elementos* que foi encontrado em 1897, na cidade de Oxirrinco, atual El-Bahnasa, a cerca de 160 quilômetros do Cairo. Posteriormente uma seção será dedicada a tratar de outras características deste importante escrito histórico.

Figura 5 – Papiro de Oxirrinco contendo fragmentos de *Os Elementos*



Fonte: Disponível em https://nationalgeographic.sapo.pt/historia/grandes-reportagens/1191-ed-especial-euclides-mar2017 Acesso em: 12/08/2019

1.2.3 O Renascimento e o início da Geometria Projetiva

Durante o Renascimento, os artistas passaram a buscar um maior realismo às suas obras, introduzindo conceitos tais como ponto de fuga e perspectiva. Boyer (1996, p. 215) observa que um ponto que diferia a arte renascentista da arte medieval era o uso da perspectiva na representação plana de objetos do espaço tridimensional, o que pode ser evidenciado nas diferenças entre a Figura 6, datada do século XIII, e a Figura 7, datada do século XV. Neste contexto, no início do século XV o arquiteto Brunelleschi (1377 – 1446) iniciou estudos a respeito da teoria geométrica da perspectiva, o que foi consolidado tempos depois por Leon Battista Alberti (1404-1472). É importante destacar que Leonardo da Vinci (1452 - 1519) também teve interesse no estudo da teoria perspectiva, num contexto de aproximação entre Matemática e arte.

Cerca de dois séculos mais tarde o arquiteto e engenheiro militar Girard Desargues (1591-1661) demonstrou interesse nos conceitos de ponto de fuga e perspectividade, formalizando matematicamente estes conceitos em uma obra intitulada *Brouillon Projet* *d'une atteinte aux événements des rencontres du Cône avec un Plan*, de 1636 que, segundo Boyer (1996, p. 262) pode ser traduzido como *"Esboço tosco de uma tentativa de tratar o resultado de um encontro entre um cone e um plano"*. Este livro, assim como as ideias de Desargues não foram bem aceitos em sua época. Do trabalho de Desargues destaca-se o teorema que leva seu nome, que estabelece algumas relações entre triângulos em perspectiva.

Figura 6 – Santa Ceia da Taula de São Miguel

Fonte: Disponível em http://www.ricardocosta.com/sites/default/files/imagens/taula/taula2.jpg. Acesso em: 27 de julho de 2019

Figura 7 – A Última Ceia de Leonardo Da Vinci

Fonte: Disponível em https://www.todamateria.com.br/a-ultima-ceia-de-leonardo-da-vinci/ Acesso em: 27 de julho de 2019

O século XIX foi bastante fecundo para a Geometria. Neste período foram estudados diversos tipos de transformações geométricas, no qual se destaca aquela que mais tarde viria a ser conhecida como Geometria Projetiva. Neste período destaca-se Jean Victor Poncelet (1788-1867), que resgatou e sistematizou a obra de Desargues e Pascal dando origem à celebre obra *Traité des propriétés projectives des figures*, publicada em 1822, que em tradução livre significa Tratado das Propriedades Projetivas das Figuras. Além de Desargues e Poncelet destacam-se no estudo da Geometria Projetiva: Michel Chasles (1798-1867), Jacob Steiner (1796-1863), Karl Christian Von Staudt (1798-1867). No fim do século XIX a *Geometria Projetiva* estava solidificada.

1.2.4 A fixação dos sistemas de axiomas das Geometrias Euclidiana e Projetiva

No fim do século XIX o matemático David Hilbert (1862 – 1943) apresenta um dos sistemas axiomáticos mais marcantes da história. Hilbert sistematiza os resultados escritos por Euclides em *Os Elementos*, dando origem a um sistema de axiomas completo para a Geometria Euclidiana plana e espacial. Após o feito de Hilbert, os matemáticos Oswald Veblen (1880 – 1960) e John Wesley Young (1879 – 1932) estabeleceram os axiomas da Geometria Projetiva em sua obra *Projective Geometry*, de 1910.

2 A Geometria Euclidiana

A Geometria Euclidiana é extremamente rica. Durante mais de dois milênios este modelo de Geometria foi amplamente estudado, o que gerou uma grande quantidade de teoremas e de aplicações importantes, rompendo as fronteiras da Matemática e se espalhando por diversas áreas do conhecimento humano. De forma simples, pode-se dizer que a Geometria Euclidiana é a mais conhecida dentre todas as Geometrias.

Neste capítulo buscaremos explorar as características e peculiaridades desta Geometria, apresentando diversas informações importantes a respeito de seu desenvolvimento, destacando a contribuição de Euclides e seu modelo de pensamento, que deu base ao que viria a ser conhecido como *modelo axiomático*.

Além das definições e dos axiomas que dão base à Geometria Euclidiana, apresentaremos proposições e teoremas. É importante ressaltar que algumas demonstrações foram omitidas nesta obra, por serem muito simples ou muito longas, entretanto tais demonstrações podem ser encontradas nas referências apresentadas.

2.1 Os Elementos de Euclides

Os Elementos são compostos por treze livros (ou capítulos) onde Euclides incorpora, salvo algumas exceções, todo o conhecimento matemático acumulado de sua época. Sabe-se que Euclides não criou toda a Matemática contida em sua obra, entretanto, tal como destaca Aaboe (1984, p. 57) "seu grande feito é a apresentação do material sob uma bela forma sistemática e seu tratamento dele como de um todo orgânico". Em outras palavras, uma das grandes contribuições dele foi formalizar o conhecimento de uma forma mais técnica e menos empírica, tal como faziam os egípcios e os babilônios.

Frequentemente *Os Elementos* são associados apenas à Geometria, entretanto, Euclides aborda diversos assuntos nesta obra:

- Livros I a IV - Geometria Elementar e Álgebra Geométrica.
- Livros VII A IX - Teoria dos Números.
- Livro X - Caracterização de alguns incomensuráveis (números irracionais).
- Livro XI A XIII - Geometria Espacial.

Cada um dos treze livros apresenta uma série de definições que dão base às proposições e suas devidas demonstrações, sendo que no primeiro livro também são apresentados *postulados* e *noções comuns*, que serão apresentados nas seções seguintes. É verdade que críticas podem (e devem) ser feitas quanto à formalidade e à organização de *Os Elementos*, entretanto, há de se destacar que esta publicação constitui uma das bases para a evolução do pensamento matemático, de modo que nos dias de hoje os livros e tratados matemáticos geralmente seguem um modelo parecido com o adotado por Euclides, isto é, são apresentadas definições e axiomas e sobre esta base os teoremas são enunciados e demonstrados. Deste modo, mesmo após mais de dois mil anos esta publicação ainda é vista como uma das mais importantes de todos os tempos.

No início do Livro I são apresentadas 23 definições que, por vezes, são alvo de controvérsias tal como aponta Boyer (1996, p. 77): "a deficiência, aqui, é que algumas definições não definem, pois não há um conjunto prévio de elementos não definidos em termos dos quais os outros sejam definidos". Para a melhor compreensão desta controvérsia apresentamos algumas das definições dadas por Euclides:

- Ponto é aquilo de que nada é parte.
- E linha é o comprimento sem largura.
- E superfície é aquilo que tem apenas comprimento e largura.

Afirmar tais coisas, de fato, não é definir estes termos, pois uma definição deve ser expressa em termos de coisas precedentes que são melhor conhecidas que as coisas definidas (BOYER, 1996, p. 77). Além do Livro I todos os outros que compõe a publicação apresentam uma lista de definições antes das proposições.

Após as definições, Euclides apresenta cinco postulados e cinco noções comuns (ou axiomas). Boyer (1996, p. 77) destaca que Aristóteles tratava axiomas (ou noções comuns) e postulados como sendo fortemente distintos: Noções comuns devem ser convincentes por elas mesmas, isto é, verdades comuns a todos os estudos enquanto os postulados são menos óbvios e dizem respeito somente ao assunto em discussão. Entretanto, como destaca Aaboe (1984, p. 58) hoje a maioria dos matemáticos não mais veem a necessidade de tal distinção mas chamam ambos os tipos de hipóteses de axiomas ou postulados. A seguir apresentamos os postulados e as noções comuns enunciadas por Euclides:

Postulados:

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e toda distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.

5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão menores do que dois retos.

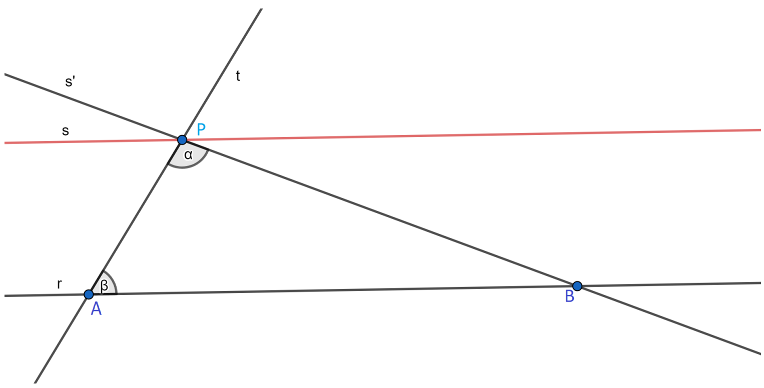
Noções comuns (ou axiomas)

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, os restantes são iguais.
4. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
5. E o todo é maior do que a parte.

Ao observar os postulados e as noções comuns de Euclides percebe-se claramente que o quinto postulado tem a redação mais extensa e complexa que os demais, o que levou a que muitos matemáticos acreditassem que, na verdade, este postulado seria consequência dos outros, sendo assim um teorema. Diversas tentativas de demonstrar o quinto postulado foram feitas ao longo da história, entretanto nenhuma obteve sucesso.

O quinto postulado, conhecido como postulado das retas paralelas, implica diretamente que dada uma reta r e um ponto P que não pertence a esta reta, existe apenas uma reta s que contém P e é paralela a r. É simples entender o quinto postulado observando a Figura 8. Observamos na imagem que se $\alpha + \beta < 2 \times 90^{o}$, então r e s se intersectam no lado no qual a soma dos ângulos é menor do que a soma de dois ângulos retos. Deste modo, existe apenas uma reta s' que passa por A e é paralela a r. Euclides (2009, p. 119) enuncia e demonstra um resultado semelhante na 28º proposição do Livro I.

Figura 8 – Ilustração do 5º postulado



Fonte: Elaborado pelo autor

2.2 O método axiomático

Como exposto anteriormente os gregos foram os responsáveis por formalizar a Matemática através de um modelo axiomático. Mas o que isso significa? Coutinho (2001) explica que uma teoria é dita axiomatizada, isto é, segue o método axiomático, quando é construída a partir de axiomas, que são afirmativas aceitas sem comprovação. É de comum conhecimento que os teoremas matemáticos são demonstrados tomando por base outros teoremas, deste modo, fazendo um caminho inverso encontra-se sempre um "primeiro teorema"que não pode ser demonstrado devido à ausência de teoremas precedentes. Deste modo, como afirma Aaboe (1984, p. 59) os teoremas indemonstráveis que iniciam uma teoria são chamados de axiomas.

Um bom modelo axiomático deve ser compacto e possuir as seguintes propriedades:

- Completude: Um conjunto axiomático é dito suficiente ou completo quando uma determinada teoria pode ser totalmente construída sobre eles, sem a necessidade de outros axiomas.
- Consistência: Um conjunto de axiomas é dito consistente quando não conduz a resultados contraditórios, por exemplo, um conjunto de axiomas não pode demonstrar que um determinado teorema é verdadeiro e ao mesmo tempo negar sua veracidade.
- Independência: Um conjunto de axiomas é dito independente se cada axioma independe dos outros, isto é, nenhum axioma é resultado dos demais.

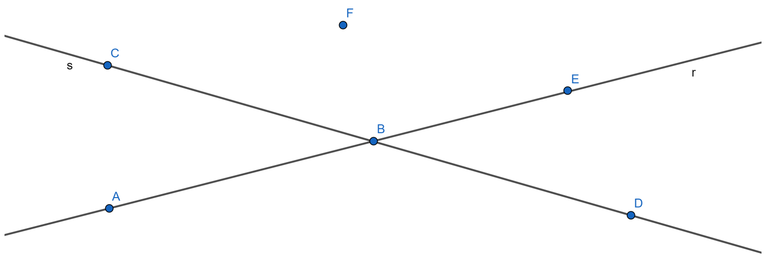
Ressalta-se que se um sistema de axiomas é completo e consistente mas não independente, isso não causará nenhum problema sério, significa simplesmente que um ou mais dos axiomas estão erroneamente designados, e deveriam em vez disso serem chamados de teoremas (AABOE, 1984, p. 59).

2.3 Um modelo axiomático para a Geometria Euclidiana Plana

Após apresentar uma breve explicação sobre o que são modelos axiomáticos, apresentaremos um modelo para a Geometria Euclidiana Plana. Existem diversos modelos semelhantes e escolhemos o modelo utilizado na obra *Geometria Euclidiana Plana* (BARBOSA, 2012) , que é semelhante ao modelo de Hilbert, porém possui linguagem mais simples e didática. Para a construção deste modelo apresentaremos os termos indefinidos, definições, axiomas e teoremas, além de ilustrações para uma melhor compreensão dos conceitos teóricos.

Seguindo a literatura tradicional, os termos *ponto*, *reta*, *plano*, *pertence*, *estar entre* e *congruência* serão considerados como ***termos indefinidos***. Utilizaremos letras latinas maiúsculas para designar pontos e minúsculas para designar retas, tal como apresenta a Figura 9.

Figura 9 – Ilustração de retas e pontos



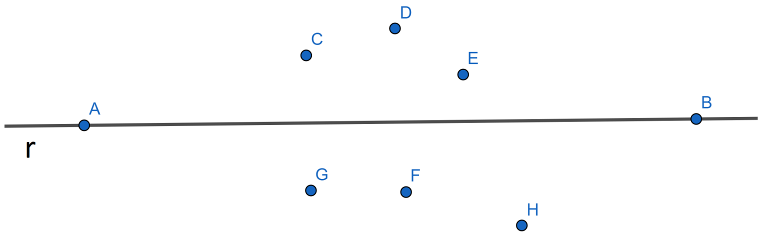
Fonte: Elaborada pelo autor

O modelo axiomático que será apresentado divide-se em: axiomas de incidência, de ordem, de medição de segmentos, de medição de ângulo, de congruência, de retas paralelas e de medição de áreas de regiões poligonais.

1 - Axiomas de incidência

Os dois primeiros são conhecidos como axiomas de incidência e tem a redação simples e autoexplicativa. A Figura 10 ilustra os dois primeiros axiomas apresentados.

Figura 10 – Ilustração dos axiomas I_1 e I_2



Fonte: Elaborada pelo autor

- **Axioma** I_1: qualquer que seja a reta, existem pontos que pertencem e pontos que não pertencem à reta.
- **Axioma** I_2: dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

2 - Axiomas de ordem

A Figura 11 apresenta uma reta contendo os pontos A, B, C e D. Observamos que o ponto C encontra-se entre os pontos A e B e que o ponto B encontra-se entre os pontos A e D. Esta noção de *estar entre* é uma relação entre pontos que pertencem a uma mesma reta e satisfaz os axiomas que seguem, chamados *axiomas de ordem*.

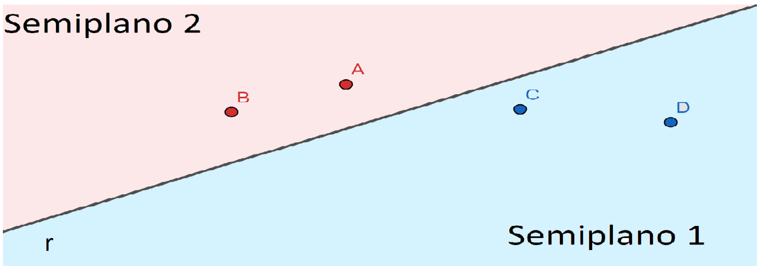
- **Axioma** I_3: dados três pontos distintos de uma reta, só um deles localiza-se entre os outros dois.
- **Axioma** I_4: dados dois pontos distintos A e B, sempre existem: um ponto C entre A e B e um ponto D, tal que B está entre A e D.

Figura 11 – Ilustração dos axiomas I_3 e I_4

Fonte: Elaborada pelo autor

Como resultado direto dos axiomas I_3 e I_4 temos os conceitos de segmento de reta e semirreta. Utilizando uma linguagem padrão denotaremos um segmento de reta entre os pontos A e B como AB e uma semirreta partindo de A e contendo o ponto B como S_{AB} ou $\overrightarrow{AB}$. Para a compreensão do Axioma I_5 é necessário que o leitor conheça o conceito de semiplano. As definições de semirreta e semiplano podem ser encontradas em Neto (2013, p. 3 e 9). A Figura 12 exemplifica o axioma I_5

Figura 12 – Ilustração do axioma I_5



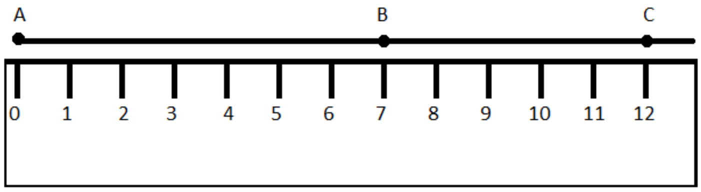
Fonte: Elaborada pelo autor

- **Axioma** I_5: Uma reta r determina exatamente dois semiplanos distintos cuja interseção é a reta r.

3 - Axiomas de medição de segmentos

Muitos são os problemas geométricos que envolvem a medição de segmentos e a possibilidade de fazer estas medições é consequência dos próximos três axiomas. A Figura 13 representa uma régua graduada, objeto utilizado para se medir distâncias entre pontos, através da associação entre os pontos e as graduações da régua. A medida de um segmento de reta AB sempre será calculada subtraindo o número relacionado ao ponto A do número relacionado ao ponto B, deste modo a distância entre A e B, denotada por $\overline{AB}$ sempre será maior ou igual a 0 ($\overline{AB} \geq 0$).

Figura 13 – Régua graduada



Fonte: Elaborada pelo autor

- **Axioma** I_6: todo par de pontos do plano corresponde a um número maior ou igual a zero. Este número é zero se, e somente se, os pontos são coincidentes.
- **Axioma** I_7: os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que a diferença entre os números meça a distância entre dois pontos correspondentes.
- **Axioma** I_8: se o ponto C encontra-se entre A e B, então $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$.

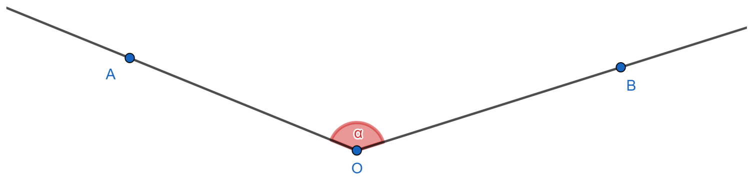
4 - Axiomas de medição de ângulos

Chamamos de ângulo a figura formada por duas semirretas com a mesma origem. As semirretas são chamadas lados do ângulo e a origem comum de vértice do ângulo (BARBOSA, 2012, p. 22), conforme observa-se na Figura 14. Existem diversas notações possíveis para se representar ângulos, entretanto as mais comuns são $A\hat{O}B$, onde os pontos A e B estão sobre as semirretas que formam o ângulo que tem como origem o ponto O, e as letras gregas minúsculas, por exemplo, α, β, γ etc.

O objeto mais comum para se medir os ângulos é o transferidor, onde cada graduação é associada à posição das semirretas, de modo que a medida do ângulo é obtida pela subtração dessas marcações. A possibilidade de se fazer medições de ângulo é consequência dos próximos axiomas:

- **Axioma** I_9: todo ângulo tem uma medida maior ou igual a zero. A medida de um ângulo é zero se, e somente se, ele é constituído por duas semirretas coincidentes.
- **Axioma** I_{10}: é possível colocar, em correspondência biunívoca, os números reais entre zero e 180 e as semirretas da mesma origem que dividem um dado semiplano,

Figura 14 – Ângulo $A\hat{O}B$



Fonte: Elaborada pelo autor

de modo que a diferença entre estes números seja a medida do ângulo formado pelas semirretas correspondentes.

- **Axioma** I_{11}: se uma semirreta $\overrightarrow{OC}$ divide um ângulo $A\hat{O}B$, então:

$$A\hat{O}B = A\hat{O}C + C\hat{O}B.$$

5 - Axioma de congruência

Dizemos que dois segmentos AB e $A'B'$ são congruentes quando a medida de AB é igual à de $A'B'$, isto é $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Da mesma forma, dizemos que dois ângulos α e β são congruentes quando apresentam a mesma medida. A relação de congruência geralmente é apresentada através de três símbolos principais: $=$, $\equiv$ e $\cong$. Para os fins deste trabalho utilizaremos o símbolo $\equiv$, sendo assim diremos que $AB \equiv A'B'$ significa AB é congruente a $A'B'$.

A definição de congruência apresentada permite que algumas propriedades numéricas também passem a ser válidas para a congruência de ângulos e segmentos, sendo assim, é imediato observar que:

- Qualquer segmento AB é congruente a si mesmo.
- Se $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF$, então $AB \equiv EF$.
- Qualquer ângulo α é congruente a si mesmo.
- Se o ângulo $\alpha \equiv \beta$ e $\beta \equiv \gamma$, então $\alpha \equiv \gamma$.

A relação de congruência se estende além de ângulos e segmentos, sendo muito importante para se comparar outras figuras. Sendo o triângulo a figura plana mais simples, apresentamos a seguir a definição de triângulos congruentes, que pode ser facilmente estendida para outras figuras geométricas. Para se tratar de triângulos definidos pelos pontos A, B e C utilizaremos a notação $\triangle ABC$ ou ABC. Couceiro (2016) afirma que dois triângulos são congruentes quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que seus ângulos e seus lados sejam congruentes.

Sendo assim, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes se, e somente se, é possível estabelecer uma bijeção:

$$\psi : \{A, B, C\} \leftrightarrow \{A', B', C'\}.$$

Com a correspondência

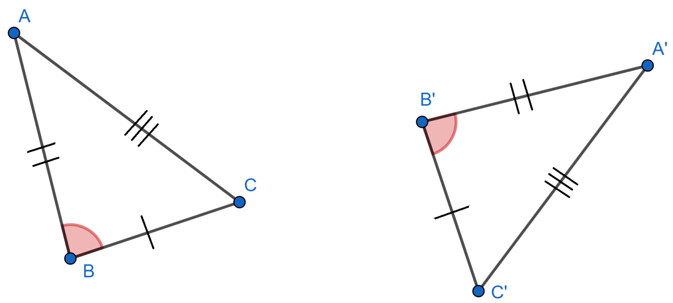
$$A \leftrightarrow A'$$
$$B \leftrightarrow B'$$
$$C \leftrightarrow C'.$$

De modo que:

$$\begin{array}{ll} AB \equiv A'B' & \widehat{A} \equiv \widehat{A'} \\ AC \equiv A'C' & \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \\ BC \equiv B'C' & \widehat{C} \equiv \widehat{C'}. \end{array}$$

Os vértices A e A', B e B' C e C' são chamados correspondentes. Os ângulos cujos vértices são correspondentes são ditos ângulos correspondentes. Os lados descritos por vértices correspondentes são chamados lados correspondentes. A Figura 15 exemplifica esta definição.

Figura 15 – Triângulos congruentes



Fonte: Elaborada pelo autor

O próximo axioma é conhecido como primeiro caso de congruência entre triângulos, e apresenta uma maneira mais simples de se definir esta congruência.

- **Axioma** I_{12}: dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ se $AB \equiv A'B'$, $B'C' \equiv B'C'$ e $A\widehat{B}C \equiv A'\widehat{B'}C'$, então $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

6 - Axioma das retas paralelas

A última definição do primeiro livro que compõe *Os Elementos* apresenta o conceito de retas paralelas: Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum ponto se encontram (EUCLIDES, 2009, p. 98). Este conceito é importante para a compreensão do seguinte axioma:

- **Axioma** I_{13}: Por um ponto não pertencente a uma reta r, é possível traçar uma única reta paralela à reta r.

7 - Axiomas de áreas de regiões poligonais

Antes de apresentar os axiomas que dão base à noção e aos cálculos de áreas de polígonos é importante apresentar o conceito de região triangular e região poligonal.

Definição 2.1. *Sejam A, B e C três pontos não colineares. Chamamos de* ***região triangular*** *à região delimitada pelos segmentos AB, AC e BC, que formam um triângulo. Os segmentos AB, AC e BC são denominados de fronteira da região triangular, e o conjunto de pontos da região que não pertencem à fronteira é chamado de interior da região triangular.*

Definição 2.2. *Sejam os pontos A_1, A_2, A_3, ... , A_n, três a três não colineares, chamamos de* ***região poligonal*** *à região delimitada pelos segmentos A_1A_2, A_2A_3, ... , A_nA_1. Também pode-se definir uma região poligonal como a união de um número finito de regiões triangulares, de modo que dois a dois os triângulos não possuam pontos internos em comum. Assim como nas regiões triangulares, os segmentos A_1A_2, A_2A_3, ... , A_nA_1 são chamados de fronteira, enquanto que o conjunto pontos da região que não pertencem à fronteira é chamado de interior da região poligonal.*

- **Axioma** I_{14}: a toda região poligonal corresponde um número maior do que zero.
- **Axioma** I_{15}: se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais que duas a duas não tenham pontos interiores em comum, então sua área é a soma das áreas daquelas regiões.
- **Axioma** I_{16}: regiões triangulares limitadas por triângulos congruentes tem áreas iguais.
- **Axioma** I_{17}: se ABCD é um retângulo, então sua área é dada pelo produto:

$$\overline{AB} \times \overline{BC}.$$

2.4 O plano euclidiano: definições, teoremas e aplicações importantes

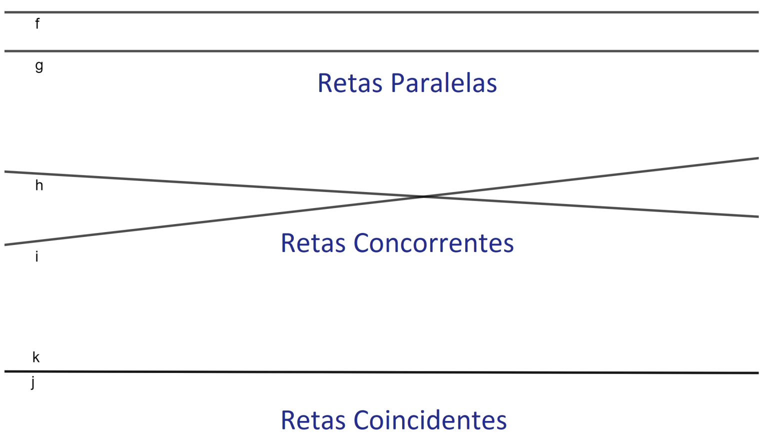
O modelo axiomático apresentado caracteriza o plano euclidiano e as relações entre *os elementos* que fazem parte deste plano, tais como as relações métricas e de posição. Seguindo a literatura padrão, utilizaremos letras gregas maiúsculas, por exemplo Ω, Θ, Γ etc, para denominar um plano. Nesta seção apresentaremos alguns resultados importantes a respeito dos seguintes temas: paralelismo, colinearidade, concorrência, congruência e semelhança entre triângulos.

2.4.1 Retas: posições relativas, paralelismo e concorrência

Dizemos que uma reta r está contida em um plano Ω e denotamos por $r \subset \Omega$, quando todos os pontos que pertencem a r também pertencem a Ω. Duas retas r e s contidas em um plano assumem as seguintes posições relativas:

- **Retas Paralelas:** duas retas são chamadas paralelas se não possuírem nenhum ponto em comum.
- **Retas Concorrentes:** duas retas são ditas concorrentes se possuírem um, e somente um, ponto em comum.
- **Retas Coincidentes:** duas retas são chamadas coincidentes se possuírem todos os pontos em comum.

Figura 16 – Posições relativas entre retas



Fonte: Elaborada pelo autor

As posições relativas entre retas contidas em um plano são consequência direta dos axiomas apresentados, sobretudo o axioma I_{13}. Como consequência direta deste axioma temos as seguintes proposições:

Proposição 2.1. *Dadas as retas r, s e q. Se q é paralela a r e s, então r e s são paralelas entre si ou coincidentes (BARBOSA, 2012, p. 72).*

Proposição 2.2. *Dadas as retas paralelas r e s. Se uma reta q corta uma das retas, então também corta a outra (BARBOSA, 2012, p. 73).*

Proposição 2.3. *Os ângulos opostos pelo vértice, formados a partir de duas retas concorrentes são iguais (BARBOSA, 2012, p. 14).*

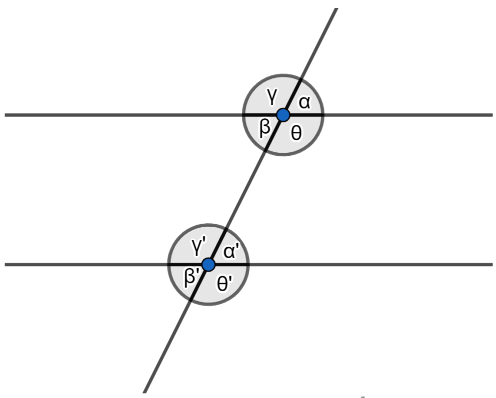
Dadas duas retas paralelas r e s e uma transversal q, as proposições anteriores garantem que se q corta r, então corta s, formando oito ângulos de modo que quatro deles são correspondentes aos outros quatro, conforme Figura 17, da seguinte forma:

$$\alpha \leftrightarrow \alpha' \qquad \beta \leftrightarrow \beta'$$

$$\theta \leftrightarrow \theta' \qquad \gamma \leftrightarrow \gamma'$$

Observe que, como são opostos pelo vértice, é verdade que $\alpha = \beta$ $\gamma = \theta$ $\alpha' = \beta'$ e $\gamma' = \theta'$.

Figura 17 – Retas paralelas - ângulos correspondentes



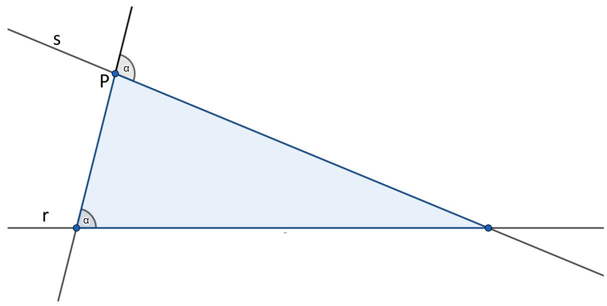
Fonte: Elaborada pelo autor

A relação de correspondência observada na Figura 17, além das proposições anteriores, permitem apresentar a seguinte proposição:

Teorema 2.1. *(Adaptado de Barbosa (2012, p. 73 e 75)). Sejam duas retas r e s cortadas por uma transversal. Os ângulos correspondentes são congruentes se, e somente se, r e s são paralelas.*

Demonstração. Primeiramente iremos demonstrar que se os ângulos correspondentes são congruentes, então r e s são paralelas. Suponha, por contradição, que α e α' são congruentes e que r e s são concorrentes em P, tal como na Figura 18. Deste modo α e α' são, respectivamente, um ângulo interno e um ângulo externo de um triângulo referentes a vértices distintos. Pela **Proposição 2.5**, que enunciaremos na próxima seção, é verdade que $\alpha' > \alpha$ o que contradiz a congruência entre estes dois ângulos. Sendo assim, se os ângulos correspondentes são congruentes as retas r e s são paralelas.

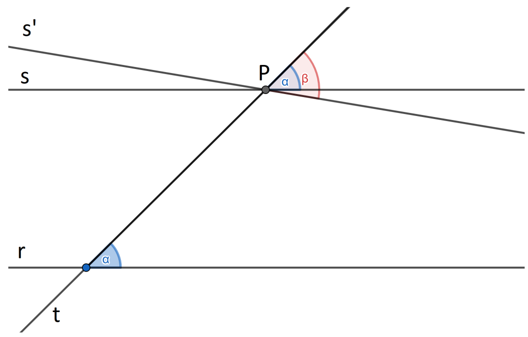
Figura 18 – Ilustração da demonstração do teorema 2.1 - primeira parte



Fonte: Elaborada pelo autor

Reciprocamente, iremos provar que se r e s são paralelas, então os ângulos correspondentes são congruentes. Sejam r e s retas cortadas por uma transversal t de modo que os ângulos correspondentes sejam congruentes e sendo P o ponto de interseção entre s e t. Como visto anteriormente, estas condições garantem que r e s sejam paralelas. Suponha que pelo ponto P passe a reta s' paralela a r de modo que o ângulo correspondente a α seja β, conforme observado na Figura 19, sendo assim s e s' são duas retas e paralelas a r contendo o ponto P. Pelo axioma das retas paralelas pelo ponto P só pode passar uma reta paralela a r, sendo assim, s e s' são coincidentes e os ângulos correspondentes entre r e s' são congruentes. $\square$

Figura 19 – Ilustração da demonstração do teorema 2.1 - segunda parte



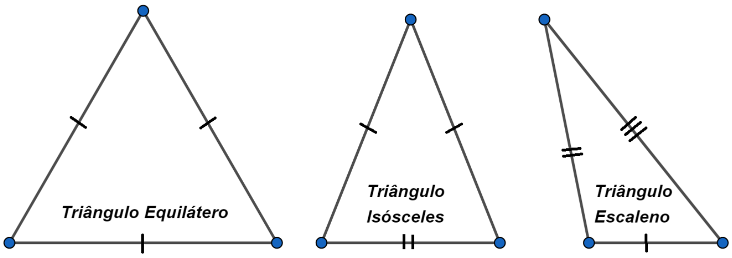
Fonte: Elaborada pelo autor

2.4.2 Triângulos: classificação e congruência

Os triângulos são alguns dos polígonos mais simples. O estudo de suas propriedades constitui a base do estudo de formas mais complexas, visto que todos os polígonos podem ser seccionados em triângulos a partir de seus vértices. Estas formas são classificadas quanto à medida de seus lados de três maneiras diferentes:

- Triângulo equilátero: possui os três lados com a mesma medida.
- Triângulo isósceles: possui dois lados com a mesma medida.
- Triângulo escaleno: possui os três lados com medidas distintas.

Figura 20 – Triângulos: classificação quanto aos lados



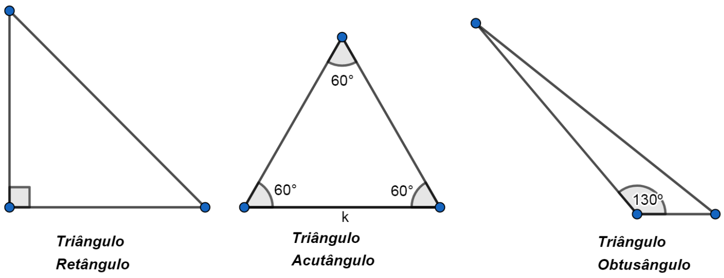
Fonte: Elaborada pelo autor

Quanto à medida dos seus ângulos internos os triângulos podem ser classificados como:

- Triângulo retângulo: possui um ângulo reto, isto é, com medida de 90^o.
- Triângulo acutângulo: possui os três ângulos agudos, ou seja, com medida menor do que 90^o.
- Triângulo obtusângulo: possui um ângulo obtuso, isto é, com medida maior do que 90^o.

A definição de congruência de triângulos apresentada anteriormente pode ser simplificada, de modo a afirmar que dois triângulos são congruentes se possuem lados correspondentes com a mesma medida, o que se conhece como caso lado-lado-lado ($\boldsymbol{LLL}$). O axioma I_{12} apresenta o primeiro caso de congruência entre triângulos, excluída a definição, conhecido como caso lado-ângulo-lado ($\boldsymbol{LAL}$). Da definição de congruência e do axioma citado anteriormente surge o teorema abaixo, que se trata do caso de congruência entre triângulos conhecido como ângulo-lado-ângulo ($\boldsymbol{ALA}$).

Figura 21 – Triângulos: classificação quanto aos ângulos



Fonte: Elaborada pelo autor

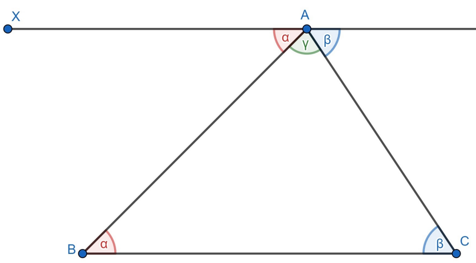
Teorema 2.2. ***(Congruência de triângulos: Caso Ângulo-Lado-Ângulo)*** *Dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, se $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\widehat{A} = \widehat{A'}$ e $\widehat{B} = \widehat{B'}$, então, $ABC \equiv A'B'C'$ (BARBOSA, 2012, p. 36).*

Os casos anteriores são interessantes pois permitem atestar a congruência entre triângulos mesmo sem que se conheçam todas as informações sobre os mesmos, entretanto há outros casos menos conhecidos. Antes de apresentar tais casos é importante conhecer algumas relações entre os ângulos internos e externos dos triângulos:

Proposição 2.4. *A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º. (BARBOSA, 2012, p. 75).*

Demonstração. Seja ABC um triângulo e $\overline{XY}$ um segmento paralelo a $\overline{AB}$ passando por A. Observando a **Proposição 2.3** e o **Teorema 2.1** temos que o ângulo $A\widehat{B}C = B\widehat{A}X$ e $B\widehat{C}A = C\widehat{A}Y$. Sendo assim $A\widehat{B}C + B\widehat{C}A + B\widehat{A}C = B\widehat{A}X + C\widehat{A}Y + B\widehat{A}C = 180º$. □

Figura 22 – Soma dos ângulos internos do triângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

Proposição 2.5. *Em todo triângulo, a medida de cada ângulo externo é maior que as medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele (BARBOSA, 2012, p. 49).*

Teorema 2.3. ***Teorema do Ângulo Externo****: Em todo triângulo, a medida de cada ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos não adjacentes a ele (NETO, 2013, p. 40).*

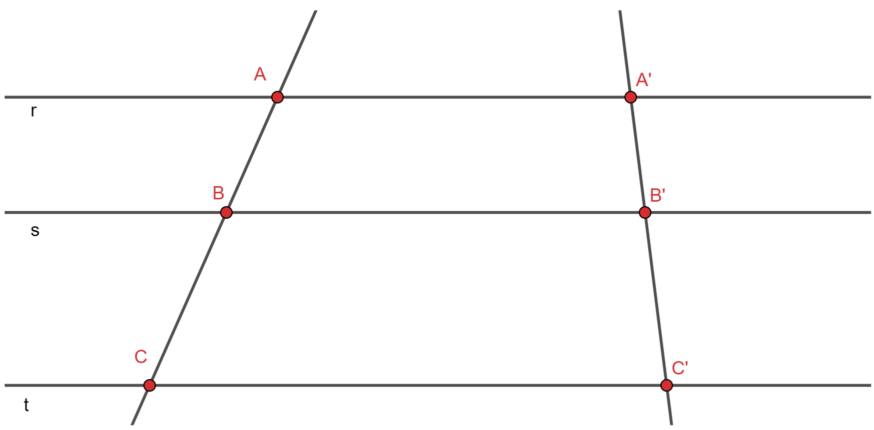
2.4.3 Proporcionalidade de segmentos e semelhança de triângulos

Nesta seção iremos apresentar algumas informações importantes a respeito de dois temas intimamente ligados: proporcionalidade de segmentos e semelhança de triângulos. Os teoremas que seguem buscam auxiliar na solução de problemas que partem da comparação da razão de comprimento de segmentos. Como primeiro resultado importante apresentaremos o Teorema de Tales, cujo enunciado e demonstração podem ser encontrados em Neto (2013, p. 123).

Teorema 2.4. ***Teorema de Tales:*** *Sejam r, s, t retas paralelas. Escolhemos os pontos* $A, A' \in r$*,* $B, B' \in s$*,* $C, C' \in t$ *de modo que A,B,C e A',B',C' sejam dois ternos de pontos colineares. Então,*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

Figura 23 – Teorema de Tales



Fonte: Elaborada pelo autor

O Teorema de Tales, tal como apresentado na Figura 23, possui diversas aplicações sobretudo no que diz respeito à construção de segmentos com alguma proporção pré-definida. Algumas aplicações bastante interessantes deste teorema estão relacionadas à ideia de semelhança de triângulos, conforme veremos a seguir.

Definição 2.3. *Dizemos que dois triângulos* ABC *e* $A'B'C'$ *são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e de outro, de modo que os ângulos de vértices correspondentes sejam iguais e que a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma. Escrevemos* $ABC \sim A'B'C'$ *para denotar a semelhança entre os triângulos.*

Sendo assim, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes se, e somente se, é possível estabelecer a bijeção:

$$\gamma : \{A, B, C\} \leftrightarrow \{A', B', C'\}.$$

Com a correspondência

$$A \leftrightarrow A'$$
$$B \leftrightarrow B'$$
$$C \leftrightarrow C'.$$

De modo que:

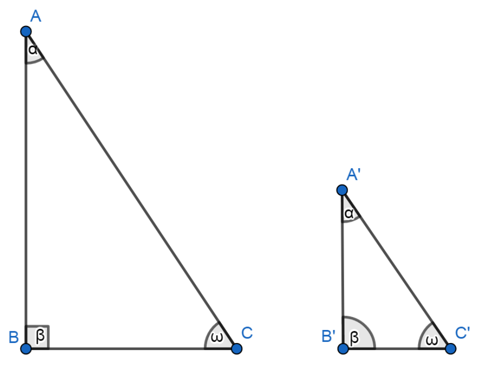
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k.$$

$$\widehat{A} \equiv \widehat{A'} \qquad \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \qquad \widehat{C} \equiv \widehat{C'}.$$

Em que k é um número real positivo denominado ***razão de semelhança***.

Neto (2013, p. 129) destaca que "fisicamente, dois triângulos são semelhantes se pudermos dilatar e/ou girar e/ou refletir e/ou transladar um deles, obtendo o outro ao final de tais operações". A Figura 24 apresenta dois triângulos semelhantes.

Figura 24 – Triângulos semelhantes - $ABC \sim A'B'C'$



Fonte: Elaborada pelo autor

Como saber se dois triângulos são semelhantes? Em alguns problemas nem sempre são conhecidas todas as características de um par de triângulos, de modo que é difícil saber se os dois são semelhantes apenas pela definição anterior. Pensando nisso, apresentaremos as três proposições a seguir, que estabelecem as condições suficientes para atestar a semelhança entre triângulos. O primeiro caso, conhecido como caso lado-lado-lado (**LLL**) de semelhança de triângulos, permite atestar a semelhança entre triângulos quando as medidas dos três lados de cada um são conhecidas. O enunciado e a demonstração da seguinte proposição podem ser encontrados em Neto (2013, p.130).

Proposição 2.6. *Sejam ABC E A'B'C' triângulos no plano, tais que*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

Então, $ABC \sim A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular, $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ e $\widehat{C} = \widehat{C'}$. .

O segundo caso é conhecido como lado-ângulo-lado (**LAL**) de semelhança. O seguinte enunciado e a respectiva demonstração encontram-se em Neto (2013, p. 131).

Proposição 2.7. *Sejam ABC E A'B'C' triângulos no plano, tais que*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k. \quad e \quad \widehat{B} = \widehat{B'}$$

Então, $ABC \sim A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular, $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$ e $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$

O terceiro caso é conhecido lado-lado (**LL**) de congruência. Seu enunciado e demonstração podem ser encontrados em Neto (2013, p. 131).

Proposição 2.8. *Sejam ABC e A'B'C' triângulos no plano, tais que*

$$\widehat{A} = \widehat{A'} \quad \widehat{B} = \widehat{B'}.$$

Então, $ABC \sim A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

2.4.4 Colinearidade e concorrência

Nesta seção iremos explorar os conceitos de colinearidade e concorrência. Dizemos que um conjunto de pontos A, B, C são colineares se os três pontos pertencem a uma mesma reta. Adotaremos também as seguintes convenções:

Convenção 1: Dados pontos distintos X e Y no plano, XY denota o segmento ordinário que une X e Y, orientado de X para Y. Convencionamos também que $XY = -YX$, dado que os segmentos XY e YX tem orientações distintas.

Convenção 2: Dados pontos colineares X, Y e Z, denotamos:

- $\frac{XY}{YZ} = \frac{\overline{XY}}{\overline{YZ}}$, se XY e YZ têm orientações iguais.

- $\frac{XY}{YZ} = -\frac{\overline{XY}}{\overline{YZ}}$, se XY e YZ têm orientações distintas.

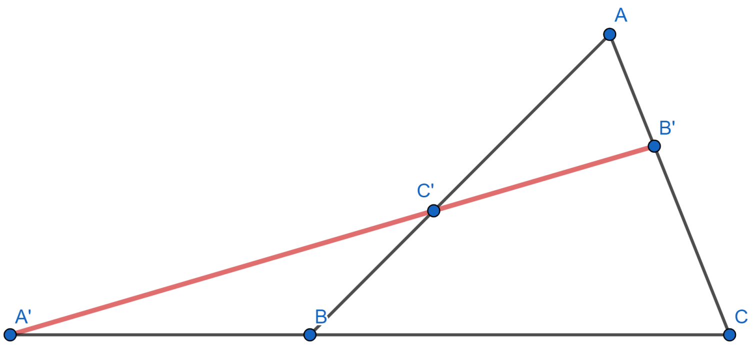
Adotando as notações acima pode-se apresentar o seguinte teorema, conhecido como Teorema de Menelaus. O enunciado e a demonstração deste teorema podem ser encontrados em Neto (2013, p. 152).

Teorema 2.5. ***Teorema de Menelaus:*** *Seja ABC um triângulo e A', B' e C' pontos sobre as retas suportes dos lados BC, CA e AB, respectivamente, todos distintos dos vértices de ABC. Então,*

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = -1 \tag{2.1}$$

se, e somente se, os pontos A', B' e C' forem colineares.

Figura 25 – Teorema de Menelaus ilustrado



Fonte: Elaborada pelo autor

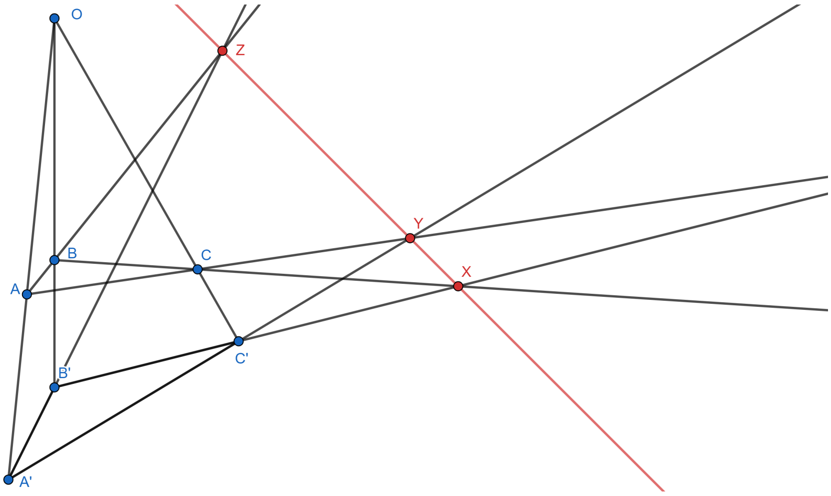
Como aplicação do teorema de Menelaus apresentamos o Teorema de Desargues. Para os fins deste trabalho adaptamos o enunciado e a demonstração encontrados em Neto (2013, p. 154), está presente tanto na Geometria Euclidiana quanto na Geometria Projetiva.

Teorema 2.6. ***Teorema de Desargues:*** *Sejam ABC e A'B'C' dois triângulos tais que:*

$$\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{Z\}$$
$$\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = \{X\}$$
$$\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = \{Y\}$$
$$\overleftrightarrow{AA'} \cap \overleftrightarrow{BB'} \cap \overleftrightarrow{CC'} = \{O\}.$$

Então X, Y e Z são colineares.

Figura 26 – Teorema de Desargues ilustrado



Fonte: Elaborada pelo autor

Demonstração. A demonstração será baseada no Teorema de Menelaus, apresentado anteriormente. Com relação ao triângulo OAB, sabendo que os pontos Z, B' e A' são colineares, através da equação (2.1) obtemos:

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{OA'}{A'A} = -1. \tag{2.2}$$

Com relação ao triângulo OAC, sabendo que os pontos X, A' e C são colineares obtemos:

$$\frac{CX}{XA} \cdot \frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OC'}{C'C} = -1. \tag{2.3}$$

Com relação ao triângulo OCB, sabendo que os pontos Y,C' e A' são colineares obtemos:

$$\frac{BY}{YC} \cdot \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{OB'}{B'B} = -1. \tag{2.4}$$

Pela convenção 2 obtemos as seguintes relações:

$$\frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{B'O}{BB'} = \frac{OA'}{A'O} \cdot \frac{A'O}{OA'} = \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{C'O}{CC'} = 1. \tag{2.5}$$

Multiplicando (2.2), (2.3) e (2.4) termo a termo e levando em consideração (2.5) obtemos:

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CX}{XA} = -1. \tag{2.6}$$

Sendo assim, X, Y e Z são colineares, como queríamos provar.

□

3 A Geometria Projetiva

Como visto anteriormente, a Geometria Projetiva surge com base na ideia de projetar imagens em um plano, sendo inicialmente uma preocupação apenas dos artistas (STILLWELL, 2010, p. 127), o que mudou apenas séculos depois, quando grandes matemáticos se debruçaram sobre este conhecimento e o formalizaram. Deste modo, pode-se apresentar e estudar este modelo de Geometria partindo de dois pontos: das observações e das técnicas dos artistas renascentistas ou das observações e formalizações dos matemáticos.

A princípio apresentaremos esta Geometria a partir de uma visão Matemática, apresentando seus axiomas e definições formais. Posteriormente apresentaremos os conceitos de projetividade e de perspectividade sobre um ponto de vista artístico, tal como observado pelos artistas renascentistas.

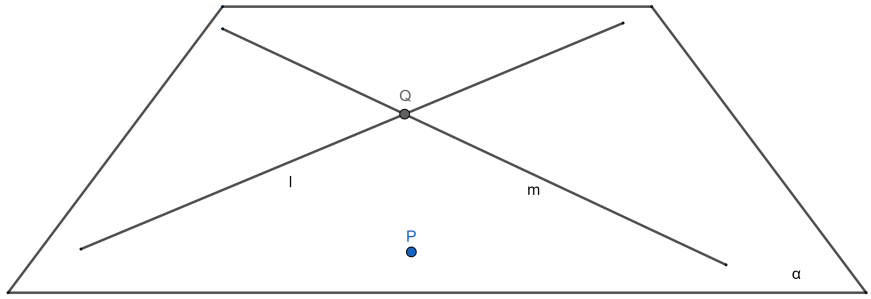
3.1 Noções gerais

Antes de apresentar um modelo axiomático para a Geometria Projetiva é importante estabelecer as notações que serão utilizadas ao longo deste trabalho. Utilizaremos letras maiúsculas para pontos, letras minúsculas para retas e letras gregas minúsculas para os planos e estudaremos as relações existentes entre estes elementos, sobretudo a relação de incidência. De forma bastante simples, dizemos que uma reta e um ponto são incidentes quando o primeiro está sobre o segundo, ou vice-versa. De forma semelhante podemos relacionar também retas com planos e pontos com planos. Adotaremos também a seguinte simbologia:

- Quando duas retas l e m passarem pelo ponto Q, isto é, quando l e m forem incidentes ao ponto Q, utilizamos a simbologia $Q = l \cdot m$.
- Quando os pontos Q e R estiverem sobre a reta n, isto é, quando a reta n ligar os pontos Q e R, adotaremos a simbologia $n = QR$.
- Quando o plano α estiver sobre as retas l e m e sobre o ponto P de modo que tais retas não sejam incidentes ao ponto P, escrevemos:

$$\alpha = lm = ml = lP = Pl = mP = Pm.$$

Figura 27 – Retas, pontos e plano projetivo



Fonte: Elaborada pelo autor

3.2 Projetividade e perspectividade

Os conceitos de perspectividade e de projetividade são intimamente ligados aos conceitos de ***feixe de retas*** e ***fileira de pontos***, que definiremos a seguir.

Definição 3.1. *Considere um ponto P e uma reta l não incidentes. Chamamos de **fileira de pontos** a todos os pontos incidentes a l e de **feixe de retas** a todas as retas incidentes a P.*

Observamos que a interseção entre o feixe de retas passando por P e a reta l é a fileira de pontos de l e que é possível estabelecer uma relação biunívoca entre este feixe de retas e a fileira de pontos. Sendo assim, como destaca Coxeter (1974, p. 8), a fileira de pontos é uma seção do feixe de retas e o feixe de retas projeta a fileira de pontos. Seguindo a literatura tradicional utilizaremos a seguinte notação para esta correspondência elementar:

$$X \barwedge x,$$

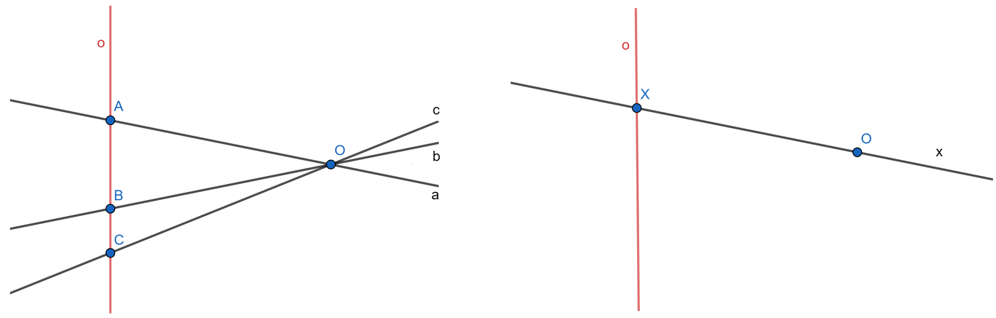
onde X é um ponto da fileira de pontos e x é a reta correspondente do feixe. Também utilizamos a seguinte notação:

$$ABC \cdots \barwedge abc \cdots$$

onde $A, B, C, ...$ são pontos do da fileira e $a, b, c, ...$ são as retas correspondentes. A Figura 28 exemplifica esta correspondência elementar entre pontos da reta o e o feixe de retas que passam por O. Observa-se que esta simbologia não apresenta uma ordem definida, entretanto deve-se atentar para que que símbolos correspondentes sejam posicionados em posições correspondentes. Assim as seguintes simbologias são equivalentes:

$$ABC \cdots \barwedge abc \cdots \qquad BCA \cdots \barwedge bca \cdots \qquad BAC \cdots \barwedge bac \cdots .$$

Figura 28 – Correspondência elementar:$ABC \cdots \overline{\wedge}\, abc \cdots$ e $X \,\overline{\wedge}\, x$

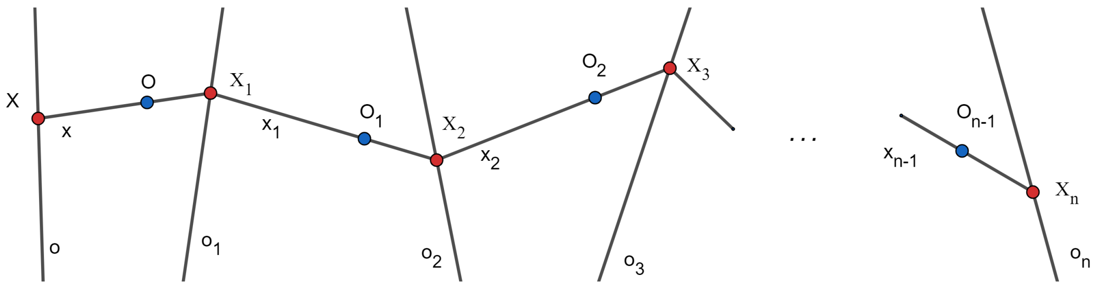


Fonte: Elaborada pelo autor

Ainda a respeito da notação, é importante ressaltar que a notação $X \,\overline{\wedge}\, x$ indica que X e x são incidentes, desta forma a correspondência $x \,\overline{\wedge}\, X$ é equivalente, de modo que pode-se dizer que $X \,\overline{\wedge}\, x$ transforma X em x enquanto que a correspondência inversa, isto é, $x \,\overline{\wedge}\, X$ transforma x em X. Estas observações a respeito da notação utilizada é importante, visto que esta simbologia não é comum na Geometria Euclidiana, mais comumente estudada.

Além das transformações apresentadas pelas correspondências elementares presentes na Figura 28 pode-se estabelecer transformações mais sofisticadas, tal como é apresentado na Figura 29:

Figura 29 – Sequência de correspondências elementares



Fonte: Elaborada pelo autor

Que pode ser representada pelas seguintes notações:

$$X \,\overline{\wedge}\, x \,\overline{\wedge}\, X_1 \,\overline{\wedge}\, x_1 \,\overline{\wedge}\, X_2 \,\overline{\wedge}\, x_2 \,\overline{\wedge}\, X_3 \cdots \overline{\wedge}\, X_n$$

ou de maneira mais simples,

$$X \,\overline{\wedge}\, x_n, \qquad x \,\overline{\wedge}\, x_n, \qquad x \,\overline{\wedge}\, X_n, \qquad X \,\overline{\wedge}\, X_n.$$

Os conceitos de feixe de retas, fileira de pontos e correspondência elementar são importantes para a compreensão do conceito de *perspectividade*, definido por Coxeter

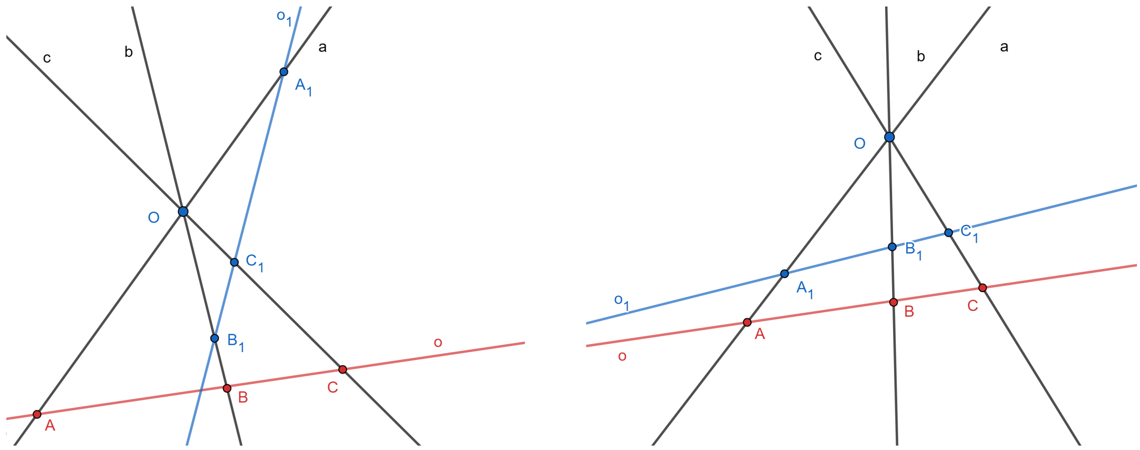
(1974, p.10) como sendo o produto de duas correspondências elementares, isto é, uma perspectividade associa duas fileiras de pontos ou dois feixes de retas. Seguindo a literatura tradicional, indicaremos uma perspectiva através do símbolo $\overset{=}{\wedge}$. Deste modo podemos dizer que, duas fileiras de pontos estão relacionadas por uma **perspectividade** de centro O se elas são seções de um feixe (com todas as retas incidentes em O) por duas distintas retas o e o_1 (COXETER, 1974, p.10).

Seguindo a literatura tradicional utilizaremos a seguinte simbologia:

$$X \overset{=}{\wedge} X_1 \quad ou \quad X \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} X_1.$$

A Figura 30 apresenta duas perspectividades que relacionam os pontos A, B e C aos pontos A_1, B_1 e C_1, em símbolos: $ABC \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} A_1B_1C_1$. Observa-se que as retas AA_1, BB_1 e CC_1 de pontos correspondentes passam pelo ponto O.

Figura 30 – Perspectiva $ABC \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} A_1B_1C_1$



Fonte: Elaborada pelo autor

Assim como podemos relacionar duas fileiras de pontos, também pode-se relacionar dois feixes de retas por uma perspectividade. Dois feixes de retas são relacionados por uma perspectividade com eixo o_1 se eles projetam uma fileira de pontos (com todos os pontos incidentes a o_1) por dois pontos distintos O e O_1.(COXETER, 1974, p.10).

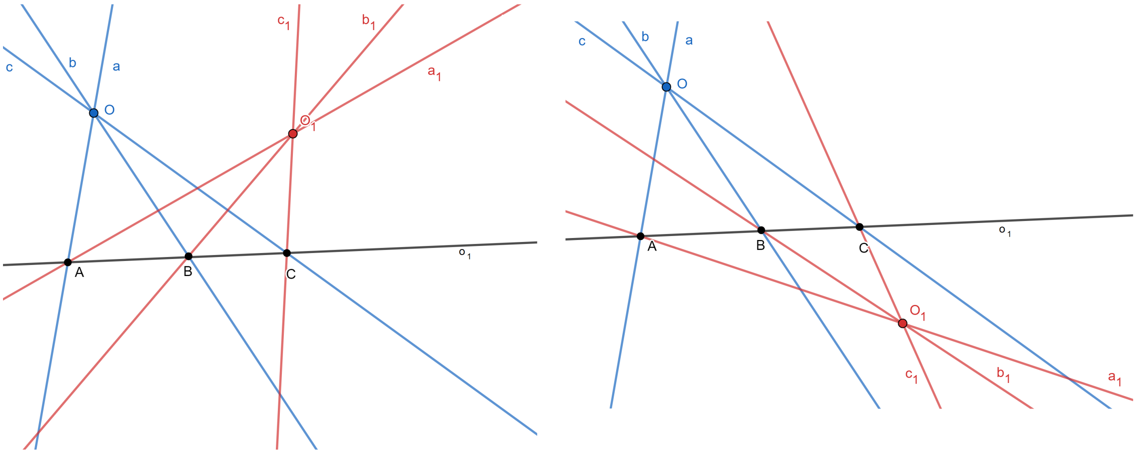
Em símbolos:

$$x \overset{=}{\wedge} x_1 \quad ou \quad x \overset{o_1}{\underset{\wedge}{=}} x_1.$$

A Figura 31 apresenta duas perspectividades que relacionam as retas a, b e c às retas a_1, b_1 e c_1, em símbolos: $abc \overset{o}{\underset{\wedge}{=}} a_1b_1c_1$.

Por fim, cabe apresentar o conceito de ***projetividade***, definida por Auffinger e Valentim (2003, p. 5) como sendo uma combinação finita de correspondências elementares. Também pode-se definir a projetividade como sendo o produto de duas ou mais

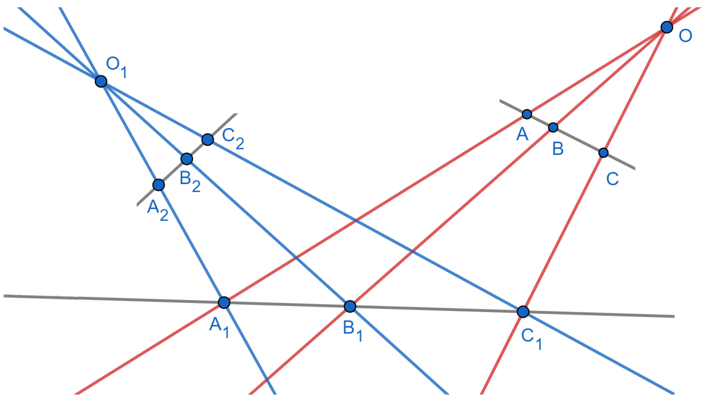
Figura 31 – Perspectiva $abc \overset{O_1}{\overline{\overline{\wedge}}} a_1b_1c_1$



Fonte: Elaborada pelo autor

perspectividades. Seguindo a simbologia padrão, designaremos uma projetividade através do símbolo $\overline{\wedge}$. A Figura 32 exemplifica a definição de projetividade. Na figura observa-se que a fileira de pontos ABC e a fileira $A_1B_1C_1$ são perspectivas, assim como as fileiras $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$. Pela definição de projetividade a fileira de pontos $A_2B_2C_2$ é uma projeção da fileira ABC. Em símbolos $ABC \overset{O}{\overline{\overline{\wedge}}} A_1B_1C_1 \overset{O_1}{\overline{\overline{\wedge}}} A_2B_2C_2$, logo, $ABC \ \overline{\wedge}\ A_2B_2C_2$.

Figura 32 – Projetividade $ABC \ \overline{\wedge}\ A_2B_2C_2$



Fonte: Elaborada pelo autor

3.3 Modelo axiomático para a Geometria Projetiva

As notações apresentadas são importantes para a compreensão do modelo axiomático da Geometria Projetiva que iremos apresentar. Tal como acontece na Geometria Euclidiana nem todos os termos podem ser definidos. Sendo assim, os termos ponto, reta e incidência são considerados como ***termos indefinidos ou primitivos***, tal como apresenta Coxeter (1974, p.15). De maneira diferente do que foi apresentado no modelo axiomático para a Geometria Euclidiana, na Geometria Projetiva o plano não é considerado um termo indefinido, sendo definido da seguinte forma:

Definição 3.2. *Sejam P um ponto e l não incidentes. Definimos o **plano** Pl como sendo o conjunto de todos os pontos que estão sobre retas que unem P a pontos de l e todas as retas que são união de pares de pontos assim construídos.*

Seguindo a literatura tradicional apresentaremos agora os axiomas que dão base à Geometria Projetiva, tal como apresenta Coxeter (1974, p.15):

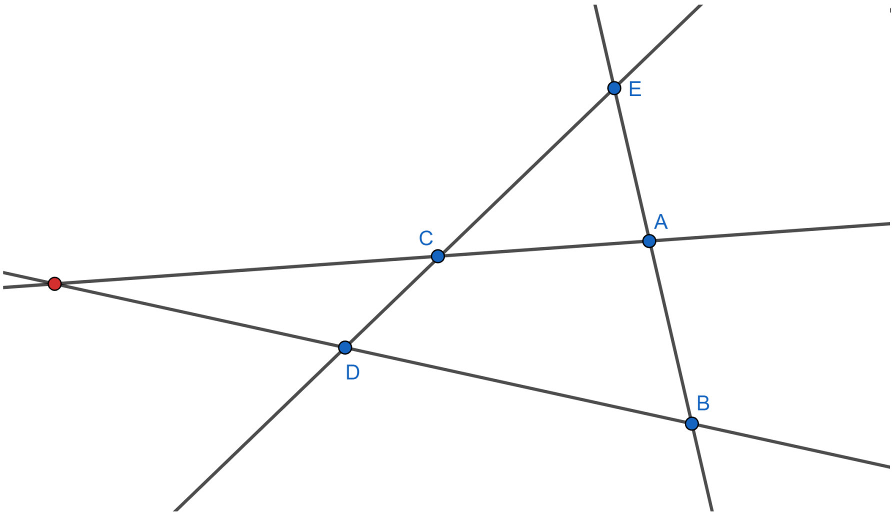
- Axioma II_1: existem uma reta e um ponto que não são incidentes.
- Axioma II_2: qualquer reta é incidente com pelo menos três pontos distintos.
- Axioma II_3: quaisquer dois pontos são incidentes com apenas uma reta.
- Axioma II_4: se A, B, C e D são quatro pontos tais que a reta AB cruza a reta CD, então AC também cruza a reta BD. A Figura 33 exemplifica este axioma.
- Axioma II_5: se ABC é um plano, então existe ao menos um ponto que não pertence ao plano ABC.
- Axioma II_6: quaisquer dois planos tem ao menos dois pontos em comum.
- Axioma II_7: as três diagonais de um quadrângulo completo nunca são colineares.
- Axioma II_8: se uma projetividade deixa invariante cada um de três pontos distintos de uma reta, então ela deixa invariantes todos os pontos da reta.

Por serem semelhantes aos conceitos encontrados na Geometria Euclidiana os três primeiros axiomas são de fácil compreensão e aceitação. O quarto axioma foi obra de Oswald Veblen e (1880-1960) e apresenta uma das diferenças marcantes entre os dois modelos de Geometria apresentados nesta obra. A Figura 33 ilustra o quarto axioma.

O quinto e o sexto axiomas são a base da Geometria Projetiva tridimensional e não permitem a existência de geometrias com mais de três dimensões. O sétimo axioma não será explorado neste trabalho, visto que exige conceitos que fogem ao objetivo desta obra.

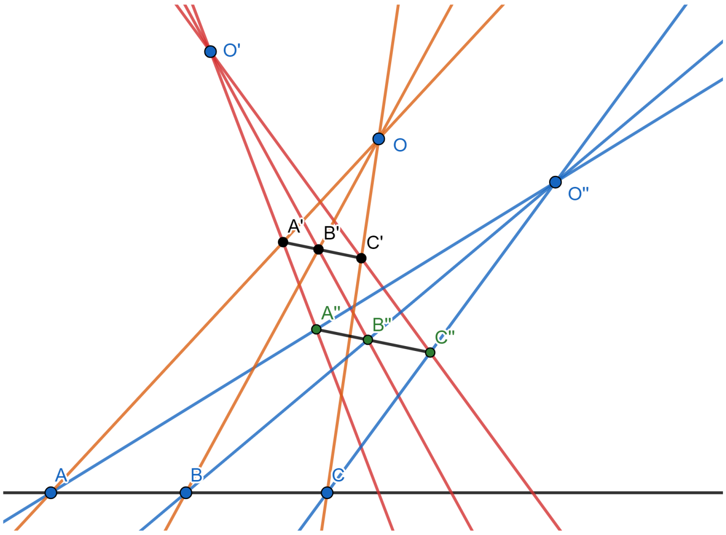
O oitavo axioma diz que caso uma projetividade $ABC \barwedge A_1B_1C_1$ deixe invariantes cada um de três pontos distintos de uma reta, ou seja $A = A_1$, $B = B_1$ e $C = C_1$, então deixará invariantes todos os pontos desta reta. A Figura 34 apresenta uma projeção que deixa invariantes três pontos de uma reta e a Figura 35 exemplifica que esta projeção, conforme exposto no oitavo axioma, também deixa invariantes os outros pontos da reta, exemplificado pelo ponto D.

Figura 33 – Axioma II_4



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 34 – Projetividade $ABC \,\overline{\wedge}\, ABC$



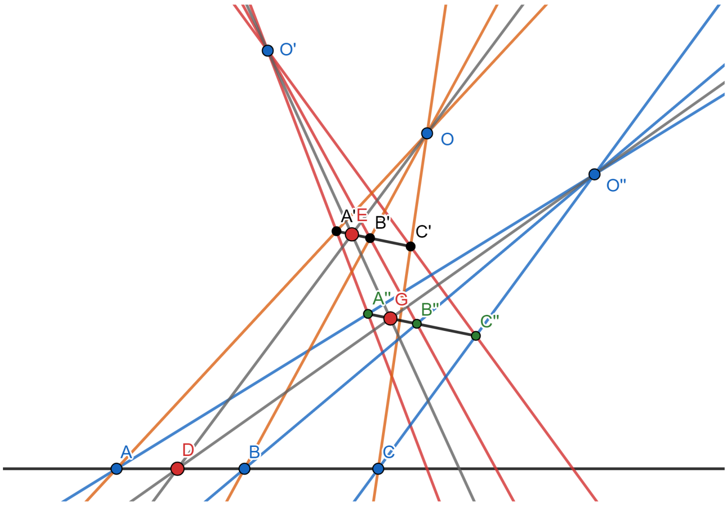
Fonte: Elaborada pelo autor

3.3.1 O Princípio da dualidade

Ao analisar as definições de perspectividade entre feixes de retas ou fileiras de pontos percebe-se que ambas são semelhantes, de modo que a única diferença entre elas é a posição das palavras *pontos* e *retas*. Este fato deve-se ao ***Princípio da Dualidade***, muito importante dentro da Geometria Projetiva, que afirma que retas e pontos tem exatamente o mesmo comportamento em relação à incidência. Este princípio é tão importante que autores como Coxeter (1974, p. 10) apresentam as definições de perspectividade entre pontos e retas lado-a-lado, a fim de evidenciar tal princípio.

Deste modo, definições, proposições e teoremas relacionados a incidência perma-

Figura 35 – Projetividade $ADBC \barwedge ADBC$



Fonte: Elaborada pelo autor

necem válidos quando as palavras ponto e reta são intercambiadas (COXETER, 1974, p. 25). Deste modo, o leitor é convidado a identificar este príncípio nas proposições e teoremas que serão apresentados ao longo das próximas seções.

3.4 Proposições e teoremas importantes

3.4.1 Consequências diretas dos axiomas

Após apresentar os axiomas que são a base da Geometria Projetiva pode-se enunciar e demonstrar algumas proposições e teoremas importantes. As demonstrações dos seguintes resultados foram adaptadas com o objetivo de facilitar a sua compreensão.

Proposição 3.1. *Quaisquer duas retas distintas tem no máximo um ponto em comum (COXETER, 1974, p.17).*

Demonstração. Suponha, se possível, que as duas retas dadas tem dois pontos em comum A e B. O Axioma II_3 nos diz que dois pontos determinam uma única reta. Sendo assim, estas duas retas são coincidentes, contradizendo nossa suposição de que elas eram distintas. □

Proposição 3.2. *Se duas retas tem um ponto em comum, elas são coplanares (COXETER, 1974, p.17).*

Demonstração. Se duas retas tem um ponto o ponto C em comum, nós podemos nomeá-las AC e BC, onde A, B e C são pontos distintos e A e B pertencem a retas distintas, e concluir que tais retas encontram-se no plano ABC. □

Proposição 3.3. *Existem quatro pontos coplanares de modo que quaisquer três deles não são colineares (COXETER, 1974, p.17).*

Demonstração. Com base nos três primeiros axiomas, existem duas retas distintas com um ponto em comum e contendo outros dois pontos cada uma, por exemplo, as retas EA e EC contendo também B e D, respectivamente, tal como na Figura 33. Os quatro pontos distintos A, B, C, D têm a desejada propriedade de não colinearidade. Por exemplo, se os pontos A, B e C fossem colineares, E também seria colinear com todos estes pontos, visto que $E \in AB$, e EA seria coincidente a EC, contradizendo nossa suposição de que estas duas retas são distintas. □

As proposições e as demonstrações apresentadas até agora nesta seção são de fácil compreensão, visto que são consequências diretas dos três primeiros axiomas, que são mais simples. Observa-se ainda que estes resultados são semelhantes aos encontrados na Geometria Euclidiana, cujo estudo é mais comum, o que facilita a compreensão dos mesmos. O mesmo não acontece com o teorema que apresentaremos a seguir. Neste teorema apresenta-se uma ruptura da Geometria Projetiva em relação a um dos conceitos mais conhecidos encontrados na Geometria Euclidiana: o quinto postulado de Euclides.

Teorema 3.1. *Quaisquer duas retas tem ao menos um ponto em comum (COXETER, 1974, p.17).*

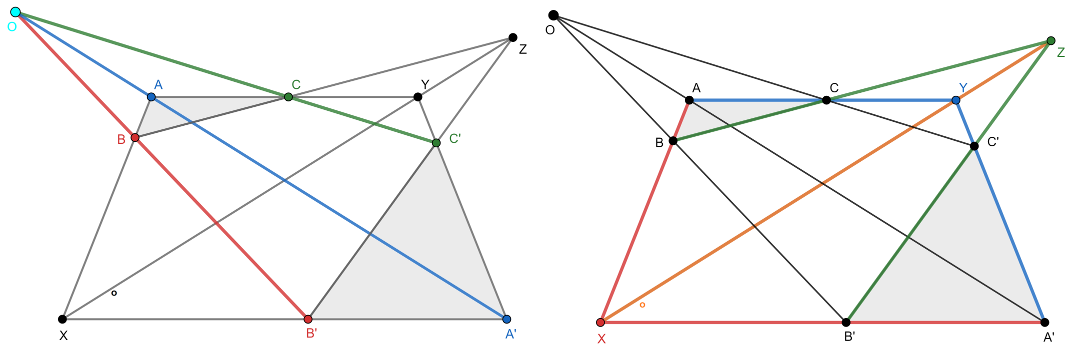
Demonstração. Seja E um ponto coplanar com duas retas de modo que E não pertença a elas. Seja AC uma destas retas. Uma vez que o plano ACE é determinado pelo feixe de retas contendo E e que cortam AC, a outra reta dada pode ser cortada em dois pontos distintos por retas deste feixe, por exemplo, B em EA e D em EB, conforme a Figura 33. De acordo com o Axioma II_4, as duas retas AC e BD tem um ponto em comum. □

3.4.2 O teorema de Desargues

Nas seções anteriores foram apresentados os conceitos de *projetividade* e de *perspectividade* em relação a feixes de retas e fileiras de pontos. De agora em diante iremos expandir estes conceitos para figuras envolvendo mais de um ponto e mais de uma reta.

Duas figuras são ditas *perspectivas* se seus pontos podem ser colocados em correspondência biunívoca de modo que pares de pontos correspondentes definam retas concorrentes, ou se as suas retas podem ser colocadas em uma correspondência biunívoca de modo que pares de retas correspondentes se encontrem em pontos colineares (COXETER, 1974, p.18). A primeira correspondência é chamada *perspectividade por um ponto*, enquanto que a segunda é dita *perspectividade por uma reta*.

Figura 36 – Triângulos ABC e $A'B'C'$ em perspectiva



Fonte: Elaborada pelo autor

A Figura 36 apresenta os *triângulos ABC e $A'B'C'$ em perspectiva*. A figura à esquerda evidencia que os dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são perspectivos pelo ponto, visto que AA', BB' e CC' concorrem no ponto O. Cabe ressaltar que este ponto é chamado centro da perspectividade. A figura à direita mostra que os dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são perspectivos pela reta o, chamada de eixo da perspectividade, visto que X, Y e Z são colineares e que:

$$X = AB \cdot A'B'$$
$$Y = AC \cdot A'C'$$
$$Z = BC \cdot B'C'.$$

A Figura 36 apresenta dois triângulos que são, ao mesmo tempo, perspectivos por uma reta e por um ponto. Assim surgem dois questionamentos importantes: sempre que dois triângulos forem perspectivos por um ponto, também serão perspectivos por uma reta? Sempre que dois triângulos forem perspectivos por uma reta, serão perspectivos por um ponto? Estes dois questionamentos são respondidos pelos dois teoremas que seguem. Os enunciados e as respectivas demonstrações dos seguintes teoremas encontram-se em Coxeter (1974, p. 19).

Teorema 3.2. *Se dois triângulos são perspectivos por uma reta, então são perspectivos por um ponto.*

Teorema 3.3. ***Teorema de Desargues****: se dois triângulos são perspectivos por um ponto, então são perspectivos por uma reta.*

Demonstração. **teorema de Desargues:**

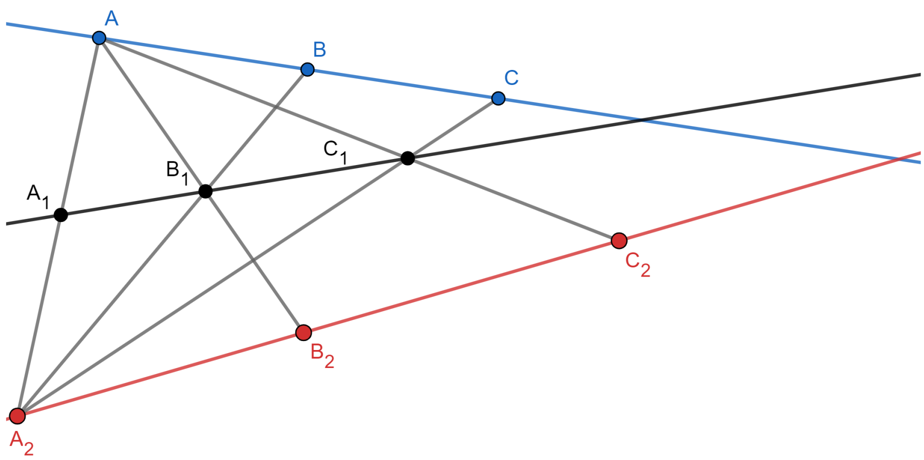
Para a devida compreensão da demonstração deve-se observar a Figura 36. Sejam dois triângulos ABC e $A'B'C'$em perspectiva pelo ponto O. Pelo axioma II_4 temos que os três pares de retas correspondentes concorrem em X, Y e Z e devemos demonstrar que estes três pontos são colineares. Consideramos dois triângulos $BB'X$ e $CC'Y$. Como os pares de retas correspondentes concorrem nos pontos colineares O, A e A' estes triângulos são perspectivos por uma reta. Logo, pelo teorema **3.2**, são perspectivos por um ponto, nomeado de $F = AC \cdot A'C'$. Sendo assim, X, Y e Z são colineares. □

3.4.3 O teorema fundamental da Geometria Projetiva

O Axioma II_8 afirma se uma projetividade deixa invariantes três pontos em uma reta, então deixa invariantes todos os pontos desta reta. Em outras palavras, este axioma nos diz que é possível conhecer a imagem de todos os pontos de uma projetividade sobre uma reta a partir de um conjunto finito de pontos, desde que esta projetividade deixe invariantes três pontos, em símbolos, $ABC \barwedge ABC$. Então, surge uma pergunta interessante: é possível determinar uma projetividade como um todo conhecendo apenas a imagem de um conjunto finito de pontos? A resposta para este questionamento encontra-se em um importante teorema, conhecido como o *Teorema Fundamental da Geometria Projetiva*.

Antes de apresentar este teorema e sua demonstração, é importante conhecer a seguinte proposição que irá auxiliar na sua compreensão.

Figura 37 – $ABC \barwedge A_2B_2C_2$



Fonte: Elaborada pelo autor

Proposição 3.4. *(AUFFINGER; VALENTIM, 2003, p. 6). Dados três pontos distintos A, B e C em uma reta e três pontos distintos A_2, B_2 , C_2 em outra reta, podemos estabelecer duas perspectividades cujo produto satisfaz: $ABC \barwedge A_2B_2C_2$.*

Demonstração. Sejam

$$B_1 = AB_2 \cdot A_2B$$

$$C_1 = AC_2 \cdot A_2C$$

$$A_1 = AA_2 \cdot B_1C_1,$$

conforme a Figura 37, então temos:

$$ABC \overset{A_2}{\doublebarwedge} A_1B_1C_1 \overset{A}{\doublebarwedge} A_2B_2C_2$$

□

Teorema 3.4. *(COXETER, 1974, p.33 - 34).* ***Teorema Fundamental da Geometria Projetiva:*** *uma projetividade é determinada quando três pontos colineares e seus três pontos colineares correspondentes são dados.*

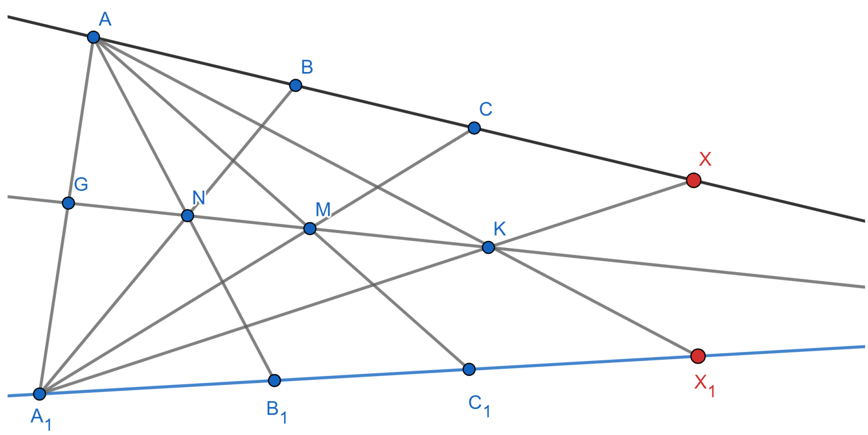
Demonstração. Dados três pontos distintos A, B, C e X em uma reta, e três pontos distintos A_1, B_1, C_1 na mesma ou em outra reta, há muitas formas possíveis em que nós podemos construir um ponto X_1 sobre a reta A_1B_1, em símbolos:

$$ABCX \barwedge A_1B_1C_1X_1$$

Caso os pontos estejam em retas distintas, a Figura 38 apresenta uma maneira possível de se construir $ABCX \barwedge A_1B_1C_1X_1$. Em símbolos:

$$ABCX \overset{A_1}{\doublebarwedge} GNMK \overset{A}{\doublebarwedge} A_1B_1C_1X_1.$$

Figura 38 – $ABCX \overset{A_1}{\doublebarwedge} GNMK \overset{A}{\doublebarwedge} A_1B_1C_1X_1$

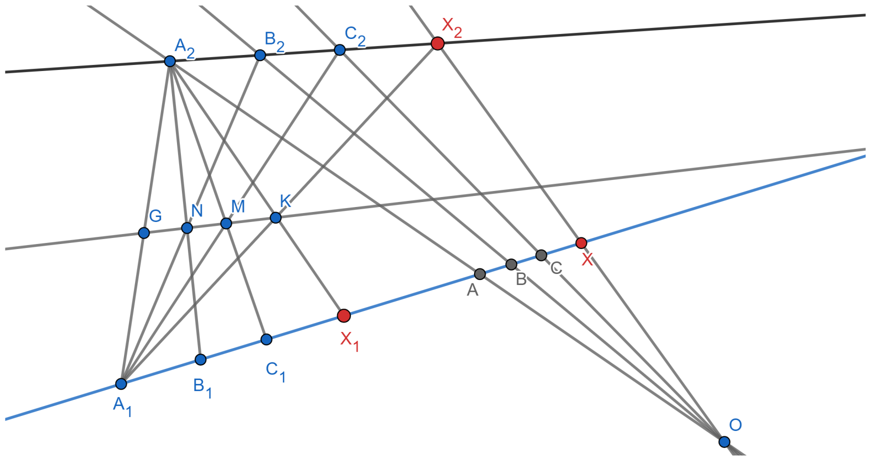


Fonte: Elaborada pelo autor

Caso todos os pontos estejam em uma mesma reta, pode-se utilizar uma perspectiva arbitrária $ABCX \doublebarwedge A_2B_2C_2X_2$ para obter quatro pontos em outra reta, e após isso relacionar $A_2B_2C_2X_2$ aos pontos $A_1B_1C_1X_1$, tal como na Figura 39 em símbolos:

$$ABCX \overset{O}{\overline{\overline{\wedge}}} A_2B_2C_2X_2 \overset{A_1}{\overline{\overline{\wedge}}} GNMK \overset{A_2}{\overline{\overline{\wedge}}} A_1B_1C_1X_1.$$

Figura 39 – $ABCX \overset{O}{\overline{\overline{\wedge}}} A_2B_2C_2X_2 \overset{A_1}{\overline{\overline{\wedge}}} GNMK \overset{A_2}{\overline{\overline{\wedge}}} A_1B_1C_1X_1$



Fonte: Elaborada pelo autor

Para provar que este ponto X_1 é único, suponha que existam dois pontos distintos X_1 e X_3, isto é, $X_1 \neq X_3$, e duas cadeias de perspectividades tais que:

$$ABCX \overline{\wedge} A_1B_1C_1X_1 \qquad e \qquad ABCX \overline{\wedge} A_1B_1C_1X_3.$$

Procedendo com uma composição da inversa da primeira cadeia de perspectividades com a segunda obtemos

$$A_1B_1C_1X_1 \overline{\wedge} A_1B_1C_1X_3,$$

o que contradiz o axioma II_8. □

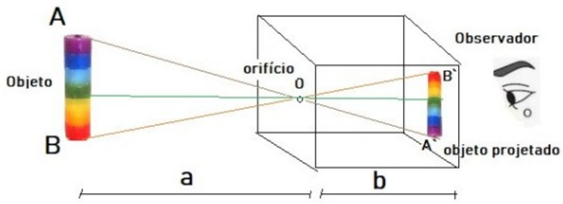
3.5 O desenho em perspectiva: a Arte encontra a Matemática

3.5.1 A câmara escura e a visão humana

Nas seções anteriores foram apresentados alguns dos fundamentos matemáticos da Geometria Projetiva, tais como definições, axiomas, proposições e teoremas. Estas informações constituem uma base sólida para este estudo, entretanto, é importante que também sejam apresentados os modelos de desenho e as descobertas feitas pelos artistas da Renascença, visto que estes foram os fatos motivadores para o desenvolvimento deste ramo da Geometria. De maneira bastante simples, podemos dizer que esta Geometria relaciona-se com a percepção visual que se tem do mundo.

Assim surge um questionamento natural: como enxergamos? Não é um dos objetivos deste trabalho fazer uma grande exposição a respeito da Física Óptica, entretanto, é interessante apresentar de maneira superficial o funcionamento de um objeto conhecido como câmara escura, que funciona de maneira semelhante ao olho humano e a uma câmera fotográfica. Compreender o funcionamento da câmara escura, e analogamente da própria visão humana, é importante pois está intimamente relacionado aos conceitos de perspectiva e projetividade.

Figura 40 – Câmara escura

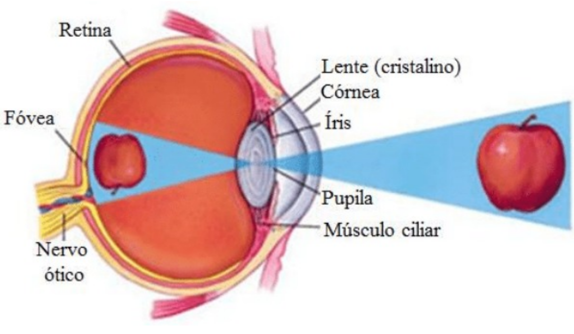


Fonte: Disponível em https://vamosestudarfisica.com/camara-escura-de-orificio-e-o-olho-humano/ Acesso em: 19/03/2020

Uma câmara escura é uma caixa composta por paredes opacas, que possui um orifício em um dos lados, e na parede paralela e este orifício, uma superfície fotossensível para a captação da imagem (PORTO, 2006). Baseando-se no princípio da propagação retilínea da luz, os raios de luz que partem do objeto observado adentra a câmara escura pelo orifício e produzem uma imagem na superfície fotossensível, tal como apresentado na Figura 40. Ressalta-se que a imagem é projetada de forma invertida.

De maneira semelhante, a Figura 41 apresenta a estrutura básica de funcionamento do olho humano. Observa-se que o a imagem é projetada no fundo do olho, tal como como acontece numa câmara escura.

Figura 41 – Esquema de funcionamento do olho humano



Fonte: Disponível em https://www.todamateria.com.br/olhos/ Acesso em: 05/03/2020

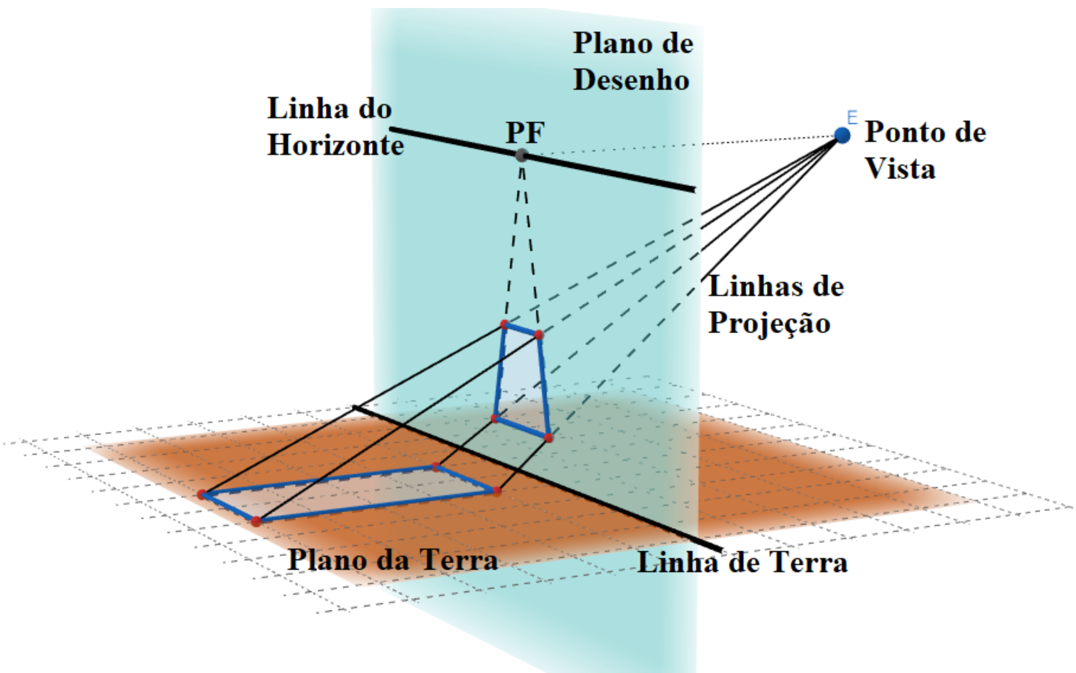
3.5.2 A perspectiva cônica

A palavra *perspectiva* vem do termo latino *perspicere*, cujo significado é *"ver através de"* (PACHECO et al., 2017, p. 155). Stillwell (2010, p.128) afirma que a perspectiva pode ser descrita como sendo uma representação realística de cenas espaciais em um plano. Uma obra de arte que faz uso destes conceitos consegue ser bastante realista, apresentando proporções harmônicas e a ideia de profundidade, tal como apresentam os objetos tridimensionais, tal como observado na Figura 7.

A descoberta de um método eficaz para uma perspectiva correta é atribuída ao pintor e arquiteto Brunelleschi (STILLWELL, 2010, p.128). Este método foi desenvolvido e publicado por Alberti no tratado *On Painting* (1436) e é conhecido como *Véu de Alberti* (STILLWELL, 2010, p. 128), *Método da Tela de Vidro* (KLINE, 1967, p. 216) ou simplesmente por Perspectiva Cônica, que pode ser definida como uma representação sobre a superfície plana da forma aparente de corpos bi ou tridimensionais.

O método consiste em olhar para a cena a ser retratada com apenas um dos olhos a partir de um ponto fixo. Imagine que retas liguem os pontos da figura ao olho do observador. Este conjunto de retas é chamado de *projeção*, e cada uma destas retas é denominada de *linha de projeção*. Colocando uma tela de vidro (ou um tecido transparente) entre o olho e a cena a ser retratada, as retas de projeção intersectam esta tela em pontos, de modo que a figura formada por estes pontos, também conhecida como *seção*, causa a mesma impressão ao olho que a cena original (KLINE, 1967, p. 216). A Figura 42 exemplifica este método.

Figura 42 – Perspectiva cônica



Fonte: Elaborada pelo autor

Alguns dos elementos que compõem a perspectiva cônica são:

- Ponto de vista ou ponto de observação: ponto do espaço ocupado pela vista do observador.
- Plano base ou plano da terra: plano horizontal que abriga os objetos representados na perspectiva.
- Plano de desenho ou quadro: superfície plana na qual se representa o objeto visto pelo observador.
- Linha de terra: interseção do plano da terra com o plano de desenho.
- Linha do horizonte: interseção entre o plano de desenho e o plano horizontal que passa pelo Ponto de Vista.
- Linha de projeção: reta que vai o ponto de vista até o objeto a ser representado.
- Pontos de fuga: pontos para os quais convergem as linhas que se dirigem ao horizonte.

A Figura 43 apresenta uma fotografia da Esplanada dos Ministérios, onde foram marcados o ponto de fuga e a linha do horizonte.

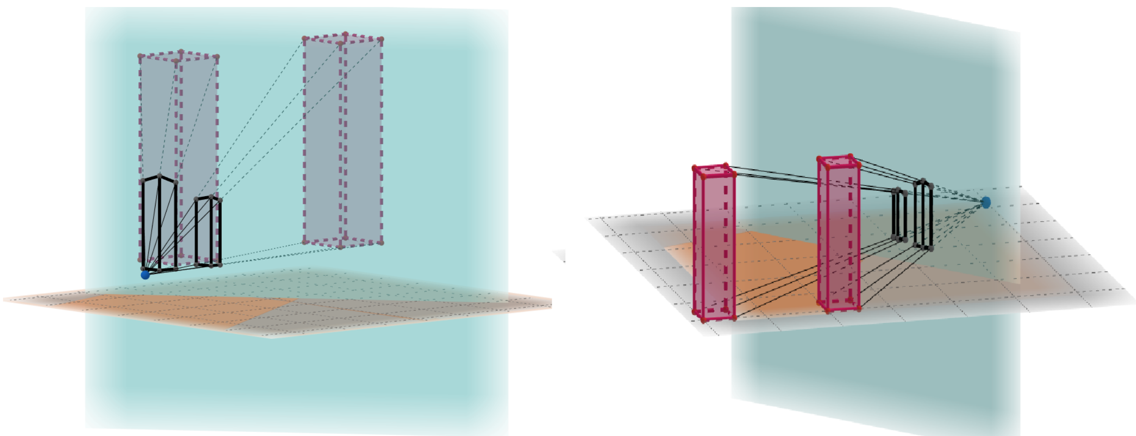
Figura 43 – Esplanada dos Ministérios 2

Fonte: Disponível em https://agenciabrasilia.df.gov.br/wp-conteudo/uploads/2018/12/esplanada-acesso-posse-tony-winston-24-02-2016.jpg Acesso em: 27/03/2020

A Figura 43 evidencia este fato. Deve-se observar que os prédios dos ministérios mais distantes do observador tem tamanhos menores na fotografia do que aqueles que estão mais próximos, ainda que todos tenham as mesmas dimensões.

É importante ressaltar que neste tipo de perspectiva os objetos vão diminuindo de tamanho (no plano de desenho) à medida que se afastam do ponto de observação, tal como observado na Figura 44.

Figura 44 – Paralelepípedos em perspectiva



Fonte: Elaborada pelo autor

4 Aplicações propostas

Antes de apresentar algumas aplicações da Geometria Euclidiana e da Geometria Projetiva é interessante apresentar alguns dados a respeito do atual momento da educação brasileira, sobretudo em relação ao ensino da Matemática, e sobre a organização dos conteúdos dentro da proposta nacional de educação. As atividades serão divididas em relação ao conteúdo abordado, sendo apresentados o público alvo, os conhecimentos e o material necessários para bem realizá-las.

4.1 Breve diagnóstico da educação brasileira - PISA 2018

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, cuja sigla em inglês é PISA, é uma pesquisa trienal de estudantes na faixa etária de 15 anos que avalia até que ponto eles adquiriram os principais conhecimentos e habilidades essenciais para a plena participação na sociedade (OCDE, 2018, p. 1). No ano de 2018, o relatório do PISA referente ao Brasil, divulgado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), trouxe resultados alarmantes a respeito da educação brasileira.

O documento é longo, e por isso apenas alguns dados serão expostos nesta obra, sendo recomendada a leitura do texto em sua integralidade para os profissionais da educação. Do documento destacamos os seguintes pontos:

- No PISA 2018, os estudantes no Brasil pontuaram abaixo da média da OCDE em leitura, Matemática e ciências (OCDE, 2018, p. 1).
- Apenas 2% dos alunos tiveram os níveis mais altos de proficiência em pelo menos uma disciplina (média da OCDE: 16%) e 43% dos alunos obtiveram pontuação abaixo do nível mínimo de proficiência nas três disciplinas (OCDE, 2018, p. 1).
- Depois de 2009, em Matemática, como em leitura e ciências, o desempenho médio não mudou significativamente (OCDE, 2018, p. 1).

O relatório da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), assim como o resultado de vários testes nacionais, mostra uma realidade triste, porém, conhecida: o processo educacional brasileiro tem problemas graves. Não é objetivo deste trabalho ter a audácia de falar a respeito dos motivos ou das soluções destes problemas, entretanto, é importante que estes resultados sejam apresentados, reconhecidos e debatidos com seriedade que os fatos exigem.

Apresentar e debater tais problemas é importante sobretudo no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), que tem como um de seus objetivos proporcionar formação Matemática aprofundada e relevante ao exercício da docência na Educação Básica, visando dar ao egresso a qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática (SBM, 2016).

Como citado anteriormente, aqui não se quer encontrar um caminho perfeito para a melhoria do processo educacional brasileiro, visto que num país com dimensões continentais e com tantas diferenças regionais este caminho, provavelmente, não será único e nem de curto prazo. Entretanto, melhorar o processo educacional, sobretudo no que diz respeito ao aprendizado da Matemática, passa principalmente pela relação entre professor e aluno e depende da criatividade do docente em levar os alunos a ter uma maior motivação para o seu estudo. Sendo assim, neste capítulo apresentamos algumas atividades que podem ser facilmente aplicadas em sala de aula, utilizando materiais e tecnologias acessíveis.

4.2 A Base Nacional Comum Curricular e a Educação Matemática

O artigo 26 da lei 9.394 de 1996, conhecida como Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), afirma que os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos (BRASIL, 1996). Em atendimento à esta lei, após amplo processo de discussões técnicas e audiências públicas, em 2017 foi homologada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para a Educação Infantil e Ensino Fundamental e em 2018 foi homologada a BNCC para o Ensino Médio.

Em resumo, a BNCC é um documento que visa orientar os sistemas educacionais a respeito dos conteúdos mínimos a serem trabalhados em cada componente curricular, etapa e série. É importante ressaltar que a BNCC, além de conteúdos, apresenta orientações gerais e também habilidades e competências a serem desenvolvidas pelos alunos. É recomendado que os professores conheçam o documento e sigam as diretrizes que nele se encontram.

Cabe destacar que a BNCC busca uma integração entre o conhecimento e prática, além de prezar pela interdisciplinaridade entre as ciências. É uma das competências específicas para o ensino fundamental reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos e é uma ciência viva (BRASIL, 2017, p. 265). Deste modo, algumas das atividades propostas leva em consideração a realidade histórica do conhecimento, a aplicabilidade prática da teoria e interdisciplinaridade.

4.3 Atividades relacionadas à Geometria Euclidiana

Atividade 1

Publico Alvo: alunos do 8º ano do ensino fundamental.

Objeto de Conhecimento: congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros (BRASIL, 2017, p. 312).

Habilidades: (EF08MA14) demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos (BRASIL, 2017, p. 313).

Descrição da Atividade: o professor apresentará ao aluno uma estrutura para suporte de peso formada por triângulos, tal como apresentado na Figura 45. Uma dica para a atividade é questionar os alunos sobre o motivo de serem utilizadas formas triangulares, e não quadrangulares.

Para complementá-la o professor pode construir triângulos e quadriláteros utilizando materiais simples, tais como palitos de sorvete, e mostrar aos alunos que outras formas geométricas se deformam, enquanto o triângulo permanece firme.

Figura 45 – Estrutura de sustentação do teto - Estádio Al Janoub

Fonte: https://epocanegocios.globo.com/Mundo/noticia/2019/05/projetado-por-nobel-da-arquitetura-estadio-com-ar-condicionado-recebera-jogos-na-copa-no-qatar.html Acesso em: 19/03/2020

Objetivo Esperado: espera-se que o aluno perceba que o triângulo não se deforma em outro pois mantém os lados com a mesma medida. Este fato deve-se ao caso **LLL** de congruência.

Atividade 2

Publico Alvo: alunos do 7º ano do ensino fundamental.

Objeto de Conhecimento: cálculo de volume de blocos retangulares, utilizando unidades de medida convencionais mais usuais. Equivalência da área de figuras planas. Cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros (BRASIL, 2017, p. 306).

Habilidades: (EF07MA21) reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros (BRASIL, 2017, p. 307).

Descrição da Atividade: sabe-se que um dos grandes problemas enfrentados, sobretudo na rede pública de ensino, deve-se à depredação e mau uso do patrimônio. Muitas escolas são alvo de vandalismo, sobretudo sobre a forma de pichações, que deixam a estrutura menos agradável ao estudo. Pensando nisso, esta atividade busca levar os alunos a conhecer o custo destas ações que prejudicam a escola, objetivando diminuir o número de ocorrências de mal uso do patrimônio. Nesta atividade os alunos serão convidados a conhecer o valor monetário do patrimônio escolar.

Com o uso de fita métrica, ou outro instrumento de medição, os alunos irão calcular os volumes e áreas de alguma estrutura da escola (uma parede, uma sala de aula etc). A partir deste conhecimento, serão estimados os preços dos materiais necessários para a sua reconstrução ou reparação (tijolos, cerâmicas, tintas etc). Com as informações das áreas e volumes os alunos irão calcular o quanto custaria reparar ou reconstruir tais estruturas. Esta atividade pode envolver a pesquisa de preços por parte dos estudantes, assim como ser integrada com aulas de ética.

Objetivo Esperado: espera-se que o aluno consiga decompor as estruturas em figuras simples, conseguindo calcular corretamente as áreas e os volumes, chegando assim aos valores monetários corretos de reparação ou reconstrução do patrimônio. Também é esperado que esta atividade seja útil para que se perceba que estes cálculos são necessários no dia-a-dia.

Atividade 3

Publico Alvo: alunos do ensino médio.

Objeto de Conhecimento: semelhança de triângulos.

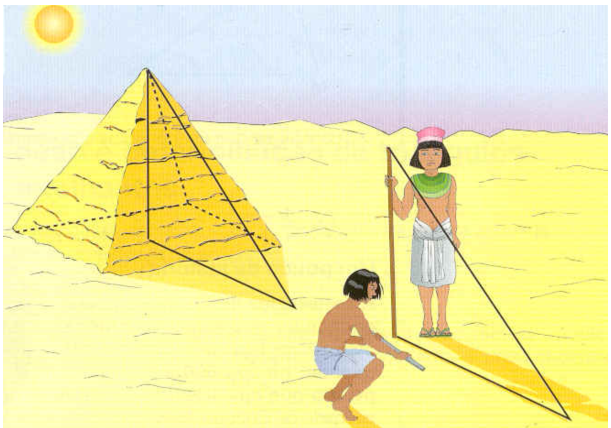
Habilidades: (EM13MAT105) utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras (BRASIL, 2018, p. 525).

(EM13MAT308) Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança (BRASIL, 2018, p. 529).

Descrição da Atividade: esta atividade assemelha-se ao experimento realizado por Tales de Mileto. Em seus estudos, Tales observou que os raios solares que chegavam à Terra estavam na posição inclinada e eram paralelos, dessa forma, ele concluiu que havia uma proporcionalidade entre as medidas da sombra e da altura dos objetos. (SILVA, c2020).

Com esta observação Tales foi capaz de medir a altura de uma pirâmide, a partir do comprimento de sua sombra. Para este Cálculo, Tales fincou uma haste na areia e mediu as sombras da pirâmide e da haste, conforme a Figura 46. Partindo do experimento de Tales, o professor deverá convidar os alunos a desenvolver uma maneira de estimar a altura de um prédio, ou até mesmo da escola, com base na medição feita por Tales.

Figura 46 – Medição da altura da pirâmide



Fonte: Disponível em http://matematicaferafacitec.blogspot.com/2011/08/tales-de-mileto-piramide-e-o-teorema.html Acesso em: 19/03/2020

Objetivo Esperado: espera-se que os alunos sejam capazes de reconhecer as relações de semelhança entre triângulos, presentes na atividade. É interessante que o professor apresente a história deste experimento, levando a que os alunos reconheçam a genialidade e a simplicidade da medição realizada por Tales.

4.4 Atividades relacionadas à Geometria Projetiva

A teoria deste ramo da Geometria não está presente na BNCC de maneira explícita, entretanto, pode ser articulada em diversos períodos da educação básica, visto que o rol de objetos de conhecimento e habilidades presentes no documento não é taxativo. É importante ressaltar que a aprendizagem desta Geometria pode ser um fator de integração entre as disciplinas de Matemática, Artes e História, o que está em profundo acordo com as disposições do documento, que afirma que deve-se construir uma visão mais integrada da Matemática com outras áreas do conhecimento (BRASIL, 2017, p. 471).

Deste modo, propomos que as seguintes atividades, quando possível, sejam integradas entre as disciplinas de Matemática, História e Artes.

Atividade 1

Publico Alvo: alunos do 7º ano do ensino fundamental.

Objeto de Conhecimento: renascimentos artísticos e culturais (BRASIL, 2017, p. 422).

Habilidades: (EF07HI04) identificar as principais características dos Humanismos e dos Renascimentos e analisar seus significados (BRASIL, 2017, p. 423).

Descrição da Atividade: o professor apresentará aos alunos as Figura 7 e Figura 6 e os alunos serão convidados a escrever e comentar as principais diferenças entre as pinturas, observando os seguintes questionamentos:

- Em qual período histórico foram pintadas cada uma das obras analisadas?
- Qual das obras transmite um maior realismo?
- Quais os motivos que levam uma pintura a ser mais realista que a outra?

É importante que o professor leve ao conhecimento dos alunos as características históricas do renascimento, sobretudo no que diz respeito às técnicas de representação da realidade tridimensional através da pintura. É interessante que o professor discuta com os alunos a respeito dos elementos da perspectiva, levando-os a perceber a presença ou ausência destes elementos nas pinturas.

Objetivo Esperado: espera-se que os alunos reconheçam que a Figura 7 apresenta maior realismo, devido à sensação de profundidade expressa por Leonardo Da Vinci em sua obra. Também é esperado que os alunos se questionem sobre os motivos que levam uma das obras a ser mais realista que a outra.

Atividade 2

Publico Alvo: alunos do 7º ano do ensino fundamental.

Descrição da Atividade: o professor apresentará aos alunos os principais elementos da perspectiva, tais como ponto de fuga e linha do horizonte. Para cada aluno, ou grupos de alunos, serão entregues as figuras abaixo:

Figura 47 – Rodoviária de Brasília

Fonte: http://g1.globo.com/distrito-federal/fotos/2011/12/eixo-monumental-reune-principais-obras-de-niemeyer-em-brasilia.html#F319862 Acesso em: 19/03/2020

Figura 48 – Palácio do Planalto

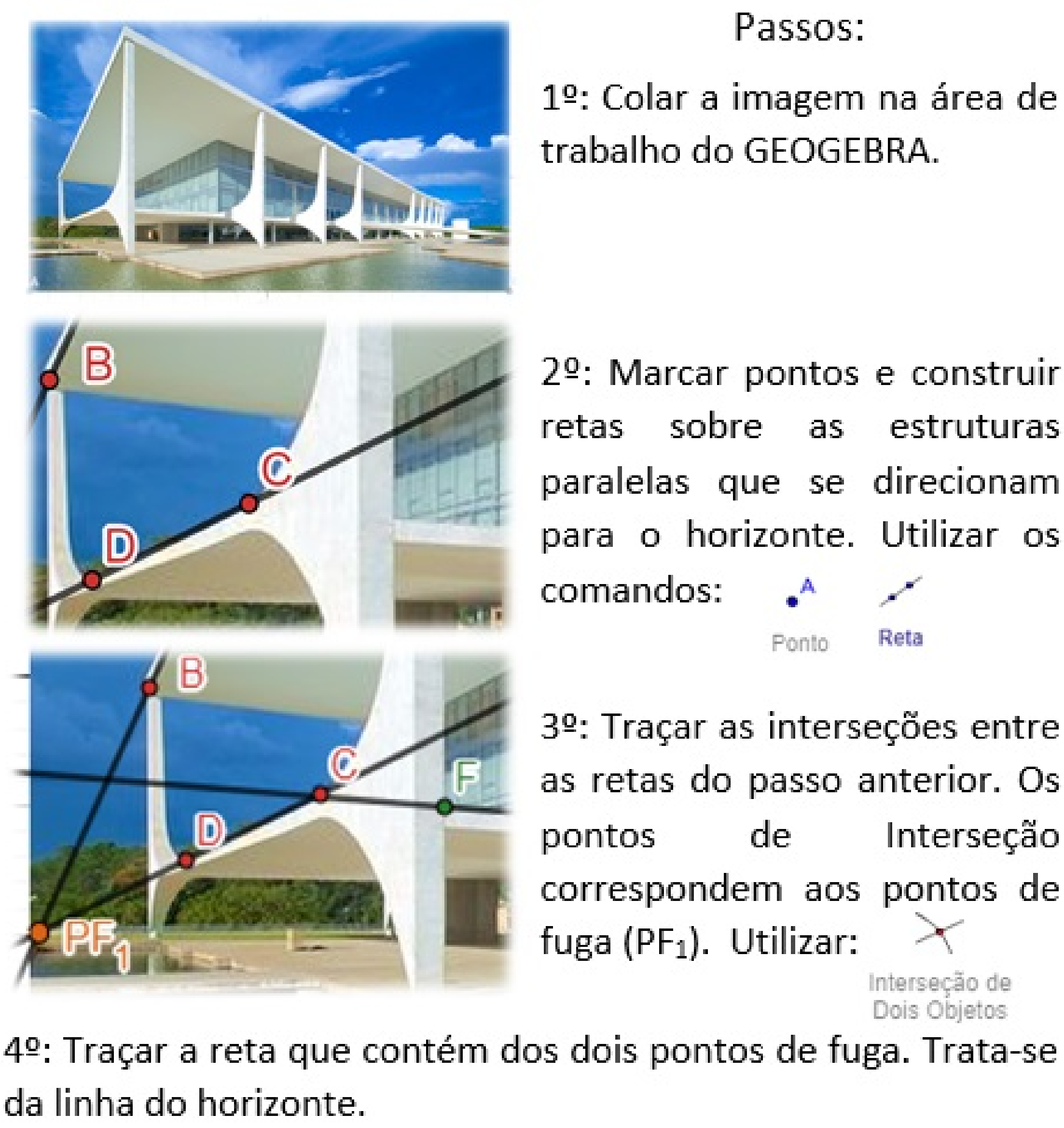
Fonte: https://www.expedia.com.br/Palacio-Do-Planalto-Monumental-Axis.d6098038.Guia-de-Viagem Acesso em: 19/03/2020

Em cada uma das figuras os alunos deverão marcar, com o auxílio de régua, os seguintes itens:

- Ponto de fuga.
- Linha do horizonte.

Objetivo Esperado: espera-se que os alunos sejam capazes de encontrar os pontos de fuga e a relação entre estes pontos e a linha do horizonte. Para facilitar e dar mais dinâmica a esta atividade pode ser utilizada a ferramenta gráfica Geogebra. A Figura 49 apresenta os passos para a realização desta atividade com a utilização do Geogebra.

Figura 49 – Passos para a solução da atividade



Fonte: Elaborada pelo autor

Após seguir os passos citados anteriormente encontramos dois pontos de fuga e a linha do horizonte. A Figura 50 apresenta a atividade solucionada.

Figura 50 – Solução - Atividade 2

Fonte: Elaborada pelo autor

Atividade 3

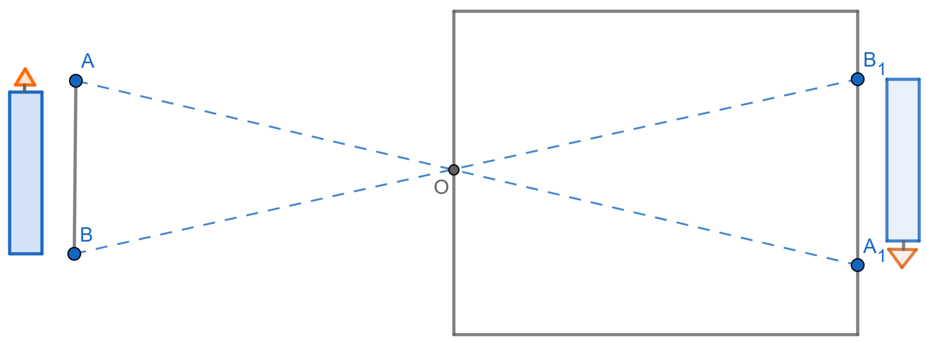
Publico Alvo: alunos do ensino médio.

Descrição da Atividade: em conjunto com os alunos o professor constroi uma câmara escura de orifício. Os passos para a construção deste objeto podem ser encontrados em (CAVALCANTE, c2020). Após a construção, o professor deve expor aos alunos os conceitos de perspectividade. Por fim, o professor deve propor aos alunos os seguintes questionamentos:

Qual a relação entre o funcionamento de uma câmara escura e o conceito de perspectividade? Qual a relação que existe entre este objeto e o olho humano?

A Figura 51 apresenta um esquema plano de uma câmara escura. Esta imagem deve ser apresentada aos alunos para que estes estabeleçam as relações entre este objeto e o conceito de perspectividade.

Figura 51 – Câmara escura



Fonte: Elaborado pelo autor

Objetivo Esperado: espera-se que o aluno seja capaz de compreender que a câmara escura apresenta uma representação plana de um objeto tridimensional. É interessante que os alunos percebam que o olho humano funciona de maneira semelhante a este objeto.

5 Considerações finais

5.1 Geometria Euclidiana e Geometria Projetiva: principais similaridades e diferenças

Ponto é aquilo de que nada é parte (EUCLIDES, 2009, p. 97). Com esta definição Euclides inicia uma das obras científicas mais importantes da história humana. Após as definições ele apresenta também postulados e noções comuns, e sobre estas *bases* enuncia e prova diversas proposições. Como visto anteriormente, Euclides não criou toda a teoria presente nesta obra, de modo que sua genialidade ficou expressa em sua forma de organizar e escrever a Matemática. Este modo de organizar e escrever a Matemática é tão importante que, mesmo após tantos séculos, pode ser encontrado em qualquer livro ou trabalho matemático, inclusive nesta obra.

O título desta obra busca evidenciar a importância que o método axiomático tem dentro da Matemática. Desde a educação básica a palavra axioma é presente, o que se reforça no currículo da graduação em Matemática. Ouve-se falar nos axiomas de Euclides, de Hilbert, de Peano e assim por diante, entretanto, o significado da palavra axioma e os princípios de um modelo axiomático não são tão explorados e expostos aos estudantes. Explorar os modelos axiomáticos e o próprio significado deste modelo pode aproximar a Matemática da filosofia e da história, o que pode ser importante, sobretudo para aqueles alunos que não encontram motivação para o seu estudo.

Nesta obra foram expostos dois modelos axiomáticos distintos. Um relacionado à Geometria clássica, a Euclidiana. O outro relaciona-se a uma Geometria não tão explorada, a Projetiva. Nas próximas seções estes modelos de Geometria serão postos em paralelo, de modo a evidenciar as similaridades e diferenças entre elas e suas respectivas consequências.

5.1.1 Similaridades

A primeira similaridade importante entre as geometrias apresentadas surge antes mesmo de sua formalização em axiomas e teoremas. Em palavras simples, pode-se dizer que ambos os modelos caracterizam-se por surgirem devido à necessidade humana de conhecimento sobre o espaço, ainda que com focos diferentes.

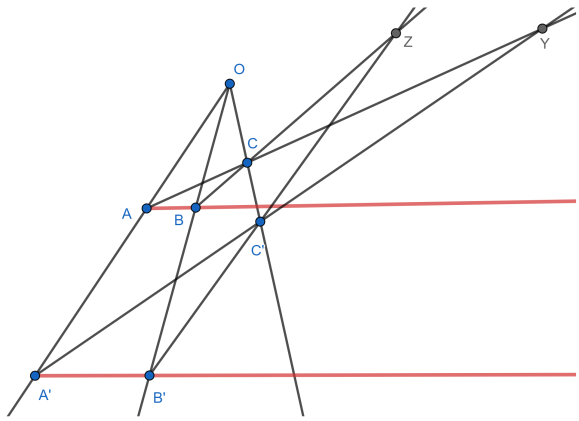
Euclides organizou em suas obras um modelo teórico de Geometria, caracterizado por sistematizar o conhecimento de diversos povos a respeito desta ciência, formado e desenvolvido por séculos. A Geometria Euclidiana, sobretudo a mais elementar, apresenta questionamentos e respostas a respeito do plano e do espaço, aplicáveis em diversas atividades humanas desde os tempos mais antigos da história da humanidade. A Geometria de Euclides foi pensada e organizada principalmente por ser necessária na engenharia, na religião, na obtenção de alimentos, ou seja, em quase todas as atividades desempenhadas pelo ser humano ao longo da história.

A Geometria Projetiva, também desenvolveu-se por ser importante para o ser humano. Se a Geometria elementar apresentava o mundo palpável, a projetiva era importante por apresentar uma identidade visual do mundo. Sendo assim, as duas são similares pelos motivos que levaram ao seu desenvolvimento, ainda que este desenvolvimento tenha se dado em épocas diferentes e por motivos diferentes. Em resumo, ambas se tratam da *experiência humana de mundo*.

Antes de tratar dos axiomas, é importante que se saiba que, com exceção do plano, ambos os modelos compartilham os mesmos termos indefinidos. Quanto aos modelos axiomáticos, podemos destacar que os axiomas de incidência são válidos nos dois modelos. Os Axiomas I_1 e I_2 são análogos aos axiomas II_1 e II_3, respectivamente. O Axioma II_2 é bastante semelhante ao axioma I_4 no contexto euclidiano, visto que I_4 também garante que na a reta possui ao menos três pontos distintos. Nesta obra não exploramos os axiomas a que dão base à Geometria Euclidiana Espacial, entretanto, é de conhecimento comum que o axioma II_5 também é válido nos dois modelos.

Quanto às proposições e teoremas apresentados cabe ressaltar que alguns destes são válidos em ambas as Geometrias, ainda que por razões diferentes. O Teorema de Desargues, por exemplo, é válido tanto no contexto euclidiano quanto no projetivo, como visto anteriormente.

Figura 52 – Triângulos em perspectiva por O com $AB//A'B'$



Fonte: Elaborada pelo autor

Dentro da Geometria Euclidiana é necessário evidenciar as interseções entre as retas que passam por lados correspondentes dos triângulos, o que não é necessário quando se trata do modelo projetivo, visto que estas interseções sempre existem como consequência do axioma II_4. No primeiro caso, como apresentado na seção **2.4.4**, se estas interseções não sejam fixadas, os dois triângulos podem ter lados paralelos e o teorema perde seu sentido, tal como observado na Figura 52, onde AB e $A'B'$ são paralelos.

5.1.2 Diferenças

Nas atividades relacionadas à Geometria Euclidiana, quase sempre são utilizados régua e compasso. Com estes dois objetos pode-se transportar ângulos, construir retas paralelas, triângulos semelhantes e assim por diante. Entretanto, tal como Coxeter (1974, p. 2), uma pergunta pode ser interessante: pode se desenvolver uma Geometria sem círculos, sem distâncias, sem ângulos ou sem paralelismo? Neste trabalho observamos que sim, trata-se da Geometria Projetiva. Nesta seção faremos um apanhado das principais diferenças entre estes dois modelos geométricos, começando por sua diferença mais marcante: a ausência de paralelismo.

Figura 53 – Via S1

Fonte: Disponível em http://doc.brazilia.jor.br/Centro/CCR-via-S1.shtml Acesso em: 27/03/2020

A principal diferença presente entre os modelos estudados é consequência do axioma II_4, que nega a existência de retas paralelas na Geometria Projetiva, em contraposição ao quinto postulado de Euclides. Observa-se também que o axioma II_6 também exclui a possibilidade de planos paralelos no contexto desta Geometria. A princípio, é complicado compreender esta ausência de paralelismo, entretanto, todos os dias esta ausência de paralelismo se faz presente. A Figura 53 apresenta a via S1 em Brasília. Sabemos que as bordas desta via são paralelas, entretanto, a visão nos dá uma *impressão* de que em algum ponto distante estas bordas se cruzam. Eis uma das principais diferenças entre estas duas formas de se fazer Geometria.

Deste modo, grande parte dos axiomas e definições apresentadas no Capítulo 2 desta obra não são alvo de estudo da Geometria Projetiva, e este foi o principal motivo de apresentar estes conceitos nesta obra. É importante destacar que, em geral, as projetividades não preservam ângulos e nem distâncias e, sendo assim, estas informações não estão presentes nos seus axiomas.

Outra diferença importante trata-se do Princípio da Dualidade, presente na seção **3.3.1**. Este princípio é bastante útil pois, de certa forma, diz que uma proposição relacionada à incidência entre pontos e retas permanece válida quando as palavras retas e pontos são intercambiadas. E assim surge um questionamento importante: este princípio é válido na Geometria Euclidiana? Para responder a este questionamento deve-se observar o axioma I_2. Caso as palavras reta e pontos sejam intercambiadas e sejam feitas algumas correções para preservar o sentido, o texto afirmaria que *dadas duas retas distintas, existe um único ponto que está contido em ambas* o que claramente não é uma realidade absoluta, visto que o quinto postulado admite retas paralelas. Este princípio também pode ser observado nos Teoremas **3.2** e **3.3**.

5.2 Um olhar para o futuro

Este trabalho, ainda que introdutório, apresentou ao leitor uma visão bastante abrangente a respeito da Geometria. Ao apresentar a história do desenvolvimento desta ciência, o leitor foi convidado a enxergar que a Matemática é, acima de tudo, uma ciência ligada ao desenvolvimento do ser humano.

Buscamos também apresentar diversos teoremas, com diversos níveis de complexidade. Alguns bastante simples de se compreender e demonstrar, e isso teve um propósito: atingir pessoas com diversos níveis de conhecimento e experiência no estudo da Matemática. Algumas demonstrações foram apenas referenciadas, e com isso esperou-se levar o leitor a conhecer as obras utilizadas para se extrair tais proposições e teoremas.

Falar sobre uma Geometria tão ligada à arte foi importante para apresentar a todos, principalmente para aqueles que têm pouca habilidade com a Matemática, que esta ciência não é estática e distante, mas sim dinâmica e integrada às necessidades humanas.

E aí surge uma pergunta: O que fazer a partir de agora? Acreditamos que este trabalho tem potencial para ser desenvolvido e submetido a periódicos e revistas especializadas, possibilitando assim uma possível publicação no futuro. Acreditamos também que seria interessante fazer trabalhos semelhantes relacionados às outras geometrias não-euclidianas. São muitas as possibilidades para o futuro. Agora é a hora de olhar para ele.

Referências

AABOE, A. *Episódios da História Antiga da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM-Sociedade Brasileira de Matemática, 1984. Citado 3 vezes nas páginas 29, 30 e 32.

AUFFINGER, A. C. T. C.; VALENTIM, F. J. S. *Introdução à Geometria Projetiva*. Vitória: Universidade Federal do Espírito Santo, 2003. Disponível em: <http://virtual.lncc.br/rodrigo/cursos/CG/01-Apostilas/outros/geometriaprojetiva-ufes.pdf>. Acesso em: 01 jan. 2020. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 59.

BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. 11ª. ed. Rio de Janeiro: SBM-Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 32, 35, 40 e 43.

BARROS, A. A. d.; ANDRADE, P. F. d. A. *Introdução à Geometria Projetiva*. Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 20, 24 e 25.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1996. Citado 6 vezes nas páginas 23, 24, 25, 26, 27 e 30.

BRASIL. *Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União, Brasília, 23 de dezembro de 1996*. 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 13 mar. 2020. Citado na página 67.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. 2017. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79611-anexo-texto-bncc-aprovado-em-15-12-17-pdf&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 13 mar. 2020. Citado 4 vezes nas páginas 67, 68, 69 e 71.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. 2018. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4377462/mod_resource/content/2/BNCC%20-%20Base%20Nacional%20Comum%20Curricular%20-%20Ensino%20M%C3%A9dio.pdf>. Acesso em: 13 mar. 2020. Citado na página 70.

CAVALCANTE, K. G. *Construção de uma Câmara Escura de Orifício: Brasil Escola*. c2020. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/fisica/construcao-uma-camara-escura-orificio.htm>. Acesso em: 27 mar. 2020. Citado na página 75.

COUCEIRO, K. C. U. d. S. *Geometria Euclidiana*. Curitiba: InterSaberes, 2016. Citado na página 36.

COUTINHO, L. *Convite às Geometrias Não-Euclidianas*. 2ª. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2001. Citado na página 32.

COXETER, H. S. *Projective Geometry*. 2ª. ed. Toronto: University of Toronto Press, 1974. Citado 9 vezes nas páginas 50, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 60 e 78.

EUCLIDES. *Os Elementos. Tradução e Introdução de Irineu Bicudo*. São Paulo: Unesp, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 31, 38 e 76.

KLINE, M. *Mathematics for the Nonmathematician*. New York: Dover Publications, 1967. Citado na página 63.

NETO, A. C. M. *Geometria*. 1ª. ed. Rio de Janeiro: SBM-Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. Citado 6 vezes nas páginas 34, 43, 44, 45, 46 e 47.

OCDE. *Programme for International Student Assessment (PISA)*. 2018. Disponível em: <https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_BRA.pdf>. Acesso em: 13 mar. 2020. Citado na página 66.

PACHECO, B. d. A.; SOUZA-CONCíLIO, I. d. A.; FILHO, J. P. *Desenho Técnico*. Curitiba: InterSaberes, 2017. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br/Leitor/Publicacao/129458/pdf/0>. Acesso em: 05 mar. 2020. Citado na página 63.

PORTO, G. *Câmara Escura*. 2006. Disponível em: <https://www.infoescola.com/fotografia/camara-escura/>. Acesso em: 05 mar. 2020. Citado na página 62.

SBM. *Regimento Interno do PROFMAT*. 2016. Disponível em: <https://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/regimento/>. Acesso em: 13 mar. 2020. Citado na página 67.

SILVA, M. N. P. d. *Teorema de Tales*. Brasil Escola., c2020. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/teorema-tales.htm>. Acesso em: 19 mar. 2020. Citado na página 70.

STILLWELL, J. *Mathematics and Its History*. 3ª. ed. New York: Springer, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 63.