



Universidade de Brasília

**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL**

RICARDO ALEXANDRE ALVES SARAIVA DOS SANTOS

**ÁLGEBRA LINEAR, A EQUAÇÃO DA ONDA E ALGUMAS APLICAÇÕES NO
ENSINO MÉDIO**

BRASÍLIA

2021

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

**ÁLGEBRA LINEAR, A EQUAÇÃO DA ONDA E ALGUMAS APLICAÇÕES NO
ENSINO MÉDIO**

por

RICARDO ALEXANDRE ALVES SARAIVA DOS SANTOS

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília,
como parte dos requisitos “Programa” de Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de*

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 14 de junho de 2021.

Comissão Examinadora:

Prof. Vinícius de Carvalho Rispoli (Orientador)

Prof. Ronni Geraldo Gomes de Amorim FGA/UnB

Profª Tatiane da Silva Evangelista - FGA/UnB

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

SS237? Santos , Ricardo Alexandre Alves Saraiva dos
Álgebra Linear, a Equação da Onda e Algumas Aplicações no
Ensino Médio. / Ricardo Alexandre Alves Saraiva dos Santos
; orientador Vinícius de Carvalho Rispoli. -- Brasília, 2021.
116 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em
Matemática) -- Universidade de Brasília, 2021.

1. Álgebra Linear. 2. Equação da Onda. 3. Aplicações no
Ensino Médio. I. Rispoli, Vinícius de Carvalho, orient. II.
Título.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus.

Aos meus pais, Antilhon Saraiva, Maria Lucilar e aos meus tios Ubirajara Saraiva, Maria do Rosário e Dagildo Saraiva, pois desde cedo os vi como exemplo de amor e persistência.

A minha esposa Maria Eliane por todo o amor, carinho e compreensão nos meus momento ausentes.

Aos meus filhos Melissa Saraiva, Geovana Saraiva e Mateus Saraiva, pois vocês são de certa forma o meu combustível para seguir em frente.

Aos professores e doutores Ronni de Amorim, José Eduardo Castilho e Vinícius de Carvalho Rispoli pela atenção e paciência. Vocês são sem dúvida fonte de inspiração.

Aos meus grande amigos Alan Valim, Otávio Isaías e Ronei Gualberto por todos esses anos de amizade, alegrias e pela força que vocês me deram.

A todos os meus irmãos Alan, Helder, Ana Flavia, Ana Maria, Antilhon Filho, Fabrício, Bil, Sabrina, Rodrigo, Melissa e John pela força e carinho nesses anos de vida.

A todos os meus amigos que iniciaram esse curso com dedicação e persistência.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é mostrar a aplicação de tópicos estudados em espaços vetoriais em algumas equações da Física como, a Equação do Calor e principalmente a Equação de Onda culminando com alguns conceitos introdutórios da Física na música. Para isso fazemos uma breve revisão dos principais conceitos estudados na teoria dos Espaços Vetoriais e damos ênfase numa importante função estudada nos Espaços Vetoriais: o Produto Interno. Dessa forma procuramos estender o conceito de Produto Interno a espaços vetoriais diferentes daqueles que são trivialmente estudados, como por exemplo o espaço vetorial das matrizes quadradas ou espaço vetorial das funções reais. Com isso fica bem claro o conceito de Funções Ortogonais o que sem dúvida alguma é a essência das chamadas Séries de Fourier. Assim damos um destaque para essa Série que permite a resolução de Equações Diferenciais as quais dão sentido na resolução de problemas físicos. Por fim fazemos um breve estudo do som produzido por ondas mecânicas dando como exemplo de onda a corda do violão dedilhada, a ressonância e o batimento, permitindo um entendimento físico e matemático empregado nesses fenômenos.

ABSTRACT

The aim of this work is to show the application of topics studied in Vector Spaces in some Physics equations such as the Heat Equation and mainly the Wave Equation culminating with some introductory concepts of Physics in music. For this, we make a brief review of the main concepts studied in the theory of vector spaces and emphasize an important function studied in Vector Spaces: the Internal Product. In this way we try to extend the concept of Internal Product to vector spaces different from those that are trivially studied, such as the vector space of square matrices or vector space of real functions. This makes the concept of Orthogonal Functions very clear, which is undoubtedly the essence of the so-called Fourier Series. Thus, we highlight this Series, which allows the resolution of Differential Equations which give meaning in the resolution of physical problems. Finally, we make a brief study of the sound produced by mechanical waves, giving the strummed guitar string as an example of a wave, allowing a physical and mathematical understanding used in this phenomenon.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	CORPOS E ESPAÇOS VETORIAIS.....	11
2.1	Corpos.....	11
2.2	Espaços Vetoriais	13
2.3	Subespaços Vetoriais	18
2.4	Subespaços Gerados	20
2.5	Dependência e Independência Linear	22
2.6	Base e Dimensão.....	23
3	PRODUTO INTERNO.....	25
3.1	Ângulos entre Vetores e Ortogonalidade.....	29
3.2	Bases Ortonormais.....	31
3.3	Ortogonalização de Gram-Schmidt	34
3.4	O Produto Interno $\langle q(x), p(x) \rangle$	40
3.5	Polinômios de Legendre.....	44
3.6	Polinômios de Hermite	44
4	FUNÇÕES ORTOGONAIS.....	45
4.1	O Conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots\}$	46
4.2	O Conjunto $\{1, \cos(n\pi x/p), \sin(n\pi x/p)\}$	49
5	SÉRIE DE FOURIER GENERALIZADA	56
5.1	Teorema da Convergência	65
5.2	Série de Fourier do Cosseno e do Seno	66
5.4	Fenômeno de Gibbs	73
6	EQUAÇÕES A DERIVADAS PARCIAIS	80
6.1	Equação do Calor	81

6.2	Equação da Onda	87
7	ONDAS ESTACIONÁRIAS	96
7.1	A Corda Dedilhada	100
7.2	Ressonância e Batimento.....	104
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	114
	REFERÊNCIAS	115

1 INTRODUÇÃO

Espaços vetoriais são o objeto de estudo da álgebra linear e são bem caracterizados pela sua dimensão, que, a grosso modo, especifica o número de direções independentes no espaço. Espaços vetoriais de dimensão infinita surgem naturalmente em análise matemática, como em espaços funcionais, cujos vetores são funções. Esses espaços vetoriais são munidos em geral de uma estrutura adicional, que pode ser uma topologia, permitindo a consideração de conceitos como proximidade e continuidade. Dentre essas topologias, aquelas que são definidas por uma norma ou um produto interno são mais frequentemente utilizadas, por possuírem uma noção de distância entre vetores. Historicamente, as primeiras ideias que levaram ao conceito de espaços vetoriais podem ser associadas aos avanços durante o século XVII, nas áreas de geometria analítica, matrizes, sistemas de equações lineares e os vetores euclidianos. O tratamento moderno e mais abstrato, formulado pela primeira vez por Giuseppe Peano em 1888, contém objetos mais gerais que o espaço euclidiano, mas muito da teoria pode ser visto como uma extensão de ideias da geometria clássica como retas, planos, e seus análogos de dimensão mais alta [10].

Assim, quando trabalhamos com vetores no \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , a nossa percepção sobre os conceitos que são explorados é muito clara, já que um vetor pode ser visto como um segmento orientado. Já no \mathbb{R}^n , com $n \geq 4$, essa percepção foge do ponto de vista geométrico e simplesmente verificamos que os conceitos estudados no \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 se encaixam perfeitamente no \mathbb{R}^n , apesar de não termos uma visão geométrica. A mesma ideia acontece com o espaço vetorial das matrizes quadradas ou das funções reais, ou seja, não temos uma interpretação geométrica, mas temos toda uma gama de conceitos aplicados no \mathbb{R}^n que também podem ser aplicados ao espaço das matrizes quadradas ou espaço das funções reais. Logo um dos objetivos deste trabalho é introduzir aqueles conceitos básicos que são estudados em álgebra linear e dá-los sentido em outros espaços vetoriais destacando os espaços das funções reais. Com isso abre-se um nítido e claro caminho para a Série de Fourier na medida em que verificamos que uma dada função destacada num certo espaço vetorial pode ser representada por essa Série. Essa série surgiu na história na tentativa de Fourier solucionar um problema físico, que gerou novas fronteiras na matemática durante o

estudo da propagação de calor em corpos sólidos, admitindo que essa propagação deveria ser por ondas de calor e levando em consideração que a forma mais simples de uma onda é uma função senoidal. Assim Fourier demonstra através da transformada que qualquer função complexa, pode ser decomposta em uma combinação infinita de senoides, dividida como uma soma de senos e cossenos [11].

Propomos então um trabalho simples e direto que possibilite a aplicação da Série de Fourier em equações diferenciais de segunda ordem culminando assim com o grande objetivo deste trabalho que é o estudo introdutório da onda aplicado à música. O estudo de uma corda vibrante, por exemplo, pode ser estudado em laboratórios de Física e muito bem ilustrado se aplicado diretamente à vibração de uma corda em um instrumento musical, como um violão ou um violino. Através do violão, os alunos perceberão fenômenos que estão em seu cotidiano como por exemplo a ressonância, o batimento, as ondas estacionárias e outros que podem ser associados a vários instrumentos musicais.

Para uma melhor compreensão do assunto destacamos que este trabalho foi construído tendo por base as referências bibliográficas [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11] e [12], embora alguns exemplos sejam de autoria do próprio autor.

2 CORPOS E ESPAÇOS VETORIAIS [1]

2.1 Corpos

Um conjunto K será chamado de *Corpo* se for munido de um operação de adição (+) e uma outra de multiplicação (\times), verificando as condições a seguir

A1 A adição é associativa:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \text{ para todos } a, b, c \in K.$$

A2 A adição é comutativa:

$$a + b = b + a, \text{ para todos } a, b \in K.$$

A3 A adição possui um elemento neutro:

$$\text{Existe } 0 \in K, \text{ tal que } a + 0 = a, \text{ para todo } a \in K.$$

A4 A adição possui simétricos:

$$\text{Para todo } a \in K, \text{ existe } -a \in K \text{ tal que } a + (-a) = 0.$$

M1 A multiplicação é associativa:

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c), \text{ para todos } a, b, c \in K.$$

M2 A multiplicação é comutativa:

$$a \times b = b \times a, \text{ para todos } a, b \in K.$$

M3 A multiplicação possui elemento neutro:

$$\text{Existe } 1 \in K \setminus \{0\}, \text{ tal que } a \times 1 = a, \text{ para todo } a \in K.$$

M4 A multiplicação possui inversos:

Para todo $a \in K \setminus \{0\}$, existe $a^{-1} \in K$ tal que $a \times a^{-1} = 1$.

AM A multiplicação é distributiva com relação à adição:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c, \text{ para todos } a, b, c \in K.$$

Portanto são corpos os conjuntos \mathbb{Q}, \mathbb{R} e \mathbb{C} , com suas respectivas adições e multiplicações.

A operação de multiplicação em um corpo muitas vezes é denotada por (\cdot) , escrevendo $a \cdot b$, ou mesmo ab , no lugar de $a \times b$. Como exemplos de corpos podemos citar o corpo de Galois $F = \{0,1\}$ e as operações usuais de adição e multiplicação módulo 2. Para ficar mais claro, vamos separar essas operações em duas tabelas:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

x	0	1
0	0	0
1	0	1

Para a primeira tabela envolvendo adição:

- $0 + 0 = 0$ e $0 \text{ mod } 2 = 0$.
- $0 + 1 = 1$ e $1 \text{ mod } 2 = 1$.
- $1 + 0 = 1$ e $1 \text{ mod } 2 = 1$.
- $1 + 1 = 2$ e $2 \text{ mod } 2 = 0$.

Para a segunda tabela envolvendo a multiplicação:

- $0 \times 0 = 0$ e $0 \text{ mod } 2 = 0$.
- $0 \times 1 = 0$ e $0 \text{ mod } 2 = 0$.
- $1 \times 0 = 0$ e $0 \text{ mod } 2 = 0$.
- $1 \times 1 = 1$ e $1 \text{ mod } 2 = 1$.

Observamos na primeira tabela que a adição obedece as quatro operações A1, A2, A3 e A4 sendo 0 o elemento neutro. Para a segunda tabela, a multiplicação também obedece as quatro operações M1, M2, M3 e M4. Por último observe que a multiplicação módulo 2 é distributiva em relação à adição módulo 2.

2.2 Espaços Vetoriais [1]

Os espaços vetoriais são os principais objetos de estudo da Álgebra Linear. Os espaços \mathbb{R}^n , com a adição e multiplicação por escalares por vetores são o modelo para a definição de espaço vetorial a seguir.

Um conjunto V será dito um espaço vetorial sobre um corpo K , se possui uma adição (+) com as mesmas propriedades da adição em um corpo; ou seja,

A1 A adição é associativa:

$$(u + v) + w = u + (v + w), \text{ para todos } u, v, w \in V.$$

A2 A adição é comutativa:

$$u + v = v + u, \text{ para todos } u, v \in V.$$

A3 A adição possui um elemento neutro (elemento neutro):

$$\text{Existe } 0 \in V, \text{ tal que } v + 0 = v, \text{ para todo } v \in V.$$

A4 A adição possui simétricos:

$$\text{Para todo } v \in V, \text{ existe } -v \in V \text{ tal que } v + (-v) = 0.$$

E além disso, existe uma operação chamada multiplicação por escalar, que associa a um elemento $a \in K$ e a um elemento $v \in V$, um elemento $av \in V$, tal que

$$\text{ME1 } a(u + v) = au + av, \text{ para todos } a \in K \text{ e } u, v \in V.$$

ME2 $(a_1 + a_2)v = a_1v + a_2v$, para todos $a_1, a_2 \in K$ e $v \in V$.

ME3 $(a_1a_2)v = a_1(a_2v)$, para todos $a_1, a_2 \in K$ e $v \in V$.

ME4 $1v = v$, para todo $v \in V$.

Os elementos de V serão chamados de vetores e os elementos de K de escalares. Assim, o elemento 0 de V será chamado de vetor nulo e o elemento $-v$ será o oposto de v .

O fato a seguir decorre da definição de espaço vetorial. Para $a \in K$ e $v \in V$, tem-se que

$$a = 0 \text{ ou } v = 0 \Leftrightarrow av = 0.$$

De fato, sejam $a \in K$ e $0 \in V$. Como $0 + 0 = 0$, pela propriedade ME1, segue-se que

$$a0 \stackrel{A3}{\cong} a(0 + 0) \stackrel{ME1}{\cong} a0 + a0.$$

Somando o simétrico $-a0$ de $a0$ a ambos os lados da igualdade acima e utilizando as propriedades A4, A1 e A3, temos que

$$0 = a0 + (-a0) = (a0 + a0) + (-a0) = a0 + [a0 + (-a0)] = a0 + 0 = a0.$$

De modo semelhante, mostra-se que para $0 \in K$ e $v \in V$ tem-se $0v = 0$, onde o elemento 0 da direita é o elemento zero de V .

Reciprocamente, suponhamos que $av = 0$ e $a \neq 0$, então, multiplicamos ambos os lados da igualdade acima pelo escalar a^{-1} , temos que

$$0 = a^{-1}0 = a^{-1}(av) = (a^{-1}a)v = 1v = v.$$

Dentre os sistemas de equações lineares, ocupam lugar de destaques os sistemas homogêneos, ou seja, aqueles do tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Esses sistemas possuem peculiaridades não compartilhadas pelos sistemas mais gerais. Por exemplo, o vetor $(0, 0, \dots, 0)$ pertence ao conjunto S_h de soluções do sistema. Além disso, se os vetores $u = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ e $u' = (c_1', c_2', \dots, c_n')$ são soluções do sistema, e se $a \in \mathbb{R}$, então os vetores $u + u' = (c_1 + c_1', c_2 + c_2', \dots, c_n + c_n')$ e $au = (ac_1, ac_2, \dots, ac_n)$ também são soluções do sistema. Logo o conjunto S_h das soluções do sistema é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . De fato, as propriedades A1 e A2 da definição são satisfeitas para todos os vetores de \mathbb{R}^n e em particular para os de S_h . Também $(0, 0, \dots, 0) \in S_h$ e se $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in S_h$, então $-1(c_1, c_2, \dots, c_n) = (-c_1, -c_2, \dots, -c_n) \in S_h$, o que mostra que a adição em S_h possui também as propriedades A3 e A4. Além disso, as propriedades ME1 – ME4 da multiplicação por escalar são facilmente verificadas para S_h .

Exemplo 1 Conjunto das funções de um conjunto não vazio A em \mathbb{R} .

O Conjunto das funções de um conjunto não vazio A em \mathbb{R} forma um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , onde a soma é a soma usual de funções com valores reais $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para todo $x \in A$ e a multiplicação de uma função f por um escalar $a \in \mathbb{R}$ é definida como sendo $(af)(x) = af(x)$, para todo $x \in A$. Considere o conjunto $F = \{\text{funções de um conjunto não vazio } A \text{ em } \mathbb{R}\}$. Sejam $f, g, h \in F$ e $a \in \mathbb{R}$. Como as funções f, g e h representam números reais, então:

A1 A adição é associativa

$$\begin{aligned} (f + (g + h))(x) &= f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) = ((f + g) + h)(x). \end{aligned}$$

A2 A adição é comutativa

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x).$$

A3 A adição possui elemento neutro

Para toda $f(x) \in F$, considere $0(x) = 0 \in F$, logo $f(x) + 0(x) = f(x)$.

A4 A adição possui simétrico

Para toda $f(x) \in F$, considere $-f(x) \in F$, tal que $f(x) + (-f(x)) = 0(x) = 0$.

ME1 Distributividade da multiplicação de um escalar pela soma de dois vetores

$$a(f + g)(x) = a(f(x) + g(x)) = af(x) + ag(x) = (af)(x) + (ag)(x).$$

ME2 Distributividade da multiplicação da soma de dois escalares por um vetor

$$((a_1 + a_2)f)(x) = (a_1 + a_2)f(x) = a_1f(x) + a_2f(x) = (a_1f)(x) + (a_2f)(x).$$

ME3 A multiplicação envolvendo dois escalares e um vetor é associativa

$$((a_1a_2)f)(x) = (a_1a_2)f(x) = a_1(a_2f(x)) = a_1(a_2f)(x).$$

ME4 O escalar 1 é o elemento neutro

Para toda $f(x) \in F$, considere $I(x) = 1 \in F$, logo $f(x)I(x) = f(x)$.

Assim F é um espaço vetorial.

Exemplo 2 Seja $\mathbb{R}^+ = \{v \in \mathbb{R}; v > 0\}$ e considere as operações de adição e de multiplicação por escalar definidas por

$$u \oplus v = uv, \text{ para } u, v \in \mathbb{R}^+, \\ \alpha \odot u = u^\alpha, \text{ para } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } u \in \mathbb{R}^+ [2].$$

Vamos mostrar que \mathbb{R}^+ com essas operações é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Note que, para todo $u, v \in \mathbb{R}^+$, tanto $u \oplus v$ e $\alpha \odot u$ são elementos de \mathbb{R}^+ . Agora, vamos verificar as operações A1, A2, A3 e A4. Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Segue então que

A1 A adição é associativa

$$[u \oplus v] \oplus w = (uv) \oplus w = (uv)w = u(vw) = u \oplus (vw) = u \oplus [v \oplus w].$$

A2 A adição é comutativa

$$u \oplus v = uv = vu = v \oplus u.$$

A3 O elemento neutro da adição é o 1. Veja

$$v \oplus 1 = v1 = v.$$

A4 Dado um elemento v , o elemento simétrico de v é $\frac{1}{v}$, pois

$$v \oplus \frac{1}{v} = v \frac{1}{v} = 1 \text{ (elemento neutro da adição).}$$

Para a multiplicação pelo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

ME1 Distributividade da multiplicação de um escalar pela soma de dois vetores

$$\alpha \odot (u \oplus v) = \alpha \odot (uv) = (uv)^\alpha = u^\alpha v^\alpha = u^\alpha \oplus v^\alpha = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v).$$

ME2 Distributividade da multiplicação da soma de dois escalares por um vetor

$$(\alpha + \beta) \odot v = v^{\alpha+\beta} = v^\alpha v^\beta = v^\alpha \oplus v^\beta = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v).$$

ME3 A multiplicação envolvendo dois escalares e um vetor é associativa

$$(\alpha\beta) \odot v = v^{\alpha\beta} = (v^\beta)^\alpha = (\beta \odot v)^\alpha = \alpha \odot (\beta \odot v).$$

ME4 O escalar 1 é o elemento neutro

$$1 \odot v = v^1 = v.$$

Conclui-se então que $\mathbb{R}^+ = \{v \in \mathbb{R}; v > 0\}$ é um espaço vetorial com as operações definidas acima.

2.3 Subespaços Vetoriais [1]

Seja V um espaço vetorial e W um subconjunto não vazio de V . Dizemos que W é um subespaço vetorial de V ou simplesmente um subespaço de V , se W , com as operações de adição em V e de multiplicação de vetores por escalares, é um espaço vetorial.

Proposição 2.3.1

Seja V um espaço vetorial e W um subconjunto não vazio de V . Então, W é um subespaço de V se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

- (i) se $u, v \in W$, então $u + v \in W$;
- (ii) se $a \in \mathbb{R}$ e $u \in W$, então $au \in W$.

Demonstração

Se W é um subespaço de V , então claramente as condições (i) e (ii) são verificadas.

Reciprocamente, suponhamos que W possua as propriedades (i) e (ii). Para mostrar que W é um subespaço de V precisamos somente verificar que os elementos de W possuem as propriedades A3 e A4. Tome um elemento qualquer u de W , o que é possível pois $W \neq \emptyset$. Pela condição (ii), $au \in W$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Tomando $a = 0$, segue que $0u = 0 \in W$ e tomando $a = -1$, segue que $(-1)u = -u \in W$.

A proposição acima afirma que um subconjunto não vazio de um espaço vetorial V é um subespaço de V se, e somente se, a adição e a multiplicação por escalar são fechadas em W e pode ser reescrita da seguinte forma:

Corolário 2.3.2

Seja V um espaço vetorial e W um subconjunto não vazio de V . Temos que W é um subespaço de V se, e somente se, $u + av \in W$, para todo $a \in \mathbb{R}$ e para todos $u, v \in W$.

Considere V um espaço vetorial. Então o conjunto $\{0\}$, constituído apenas do vetor nulo, e também todo o espaço V são subespaços de V . O conjunto $\{0\}$ é chamado de espaço vetorial nulo.

Exemplo 3 O subconjunto P de \mathbb{R}^n cujas coordenadas formam uma progressão aritmética é um subespaço vetorial [3].

Considere os vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\begin{aligned}u &= (a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, \dots, a_1 + (n - 1)r), \\v &= (b_1, b_1 + s, b_1 + 2s, \dots, b_1 + (n - 1)s)\end{aligned}$$

e $\alpha \in \mathbb{R}$. Para mostrar que P é um subespaço vetorial, precisamos mostrar que $u + \alpha v \in P$. Segue que

$$\begin{aligned}u + \alpha v &= (a_1 + \alpha b_1, a_1 + r + \alpha b_1 + \alpha s, a_1 + 2r + \alpha b_1 + \alpha 2s, \dots, a_1 + (n - 1)r + \alpha b_1 \\&\quad + \alpha(n - 1)s).\end{aligned}$$

De fato as coordenadas de $u + \alpha v$ formam uma progressão aritmética, pois sendo $u + \alpha v = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ então

$$c_2 - c_1 = a_1 + r + \alpha b_1 + \alpha s - (a_1 + \alpha b_1) = r + \alpha s$$

e

$$c_3 - c_2 = a_1 + 2r + \alpha b_1 + \alpha 2s - (a_1 + r + \alpha b_1 + \alpha s) = r + \alpha s$$

e de forma geral

$$c_n - c_{n-1} = a_1 + (n-1)r + \alpha b_1 + \alpha(n-1)s - (a_1 + (n-2)r + \alpha b_1 + \alpha(n-2)s) \\ = r + \alpha s.$$

Logo P é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n .

2.4 Subespaços Gerados [1]

Seja V um espaço vetorial e sejam v_1, v_2, \dots, v_r vetores de V . Diremos que um vetor v de V é uma combinação linear de v_1, v_2, \dots, v_r se existirem os números reais a_1, a_2, \dots, a_r tais que,

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_r v_r.$$

Por exemplo, o vetor $(1,6,0)$ em \mathbb{R}^3 é uma combinação linear dos vetores $v_1 = (1,2,0)$ e $v_2 = (-1,2,0)$, já que $v = 2v_1 + 1v_2$. De fato, a equação

$$(1,6,0) = a_1(1,2,0) + a_2(-1,2,0)$$

Equivalente ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = 1 \\ 2a_1 + 2a_2 = 6 \end{cases}'$$

cuja solução é única e dada por $a_1 = 2$ e $a_2 = 1$.

Proposição 2.4.1

Seja $W = G(v_1, v_2, \dots, v_r)$, onde v_1, v_2, \dots, v_r são vetores de um espaço vetorial V . Valem as seguintes afirmações:

- (i) W é um subespaço de V ;
- (ii) W é o menor subespaço de V contendo v_1, v_2, \dots, v_r , ou seja, qualquer subespaço de V , que contém v_1, v_2, \dots, v_r também contém W .

O subespaço gerado por $G(v_1, v_2, \dots, v_r)$ é chamado o subespaço gerado por v_1, v_2, \dots, v_r .

Exemplo 4 O subespaço gerado pelo vetor $v = (1, 1, 2)$ em \mathbb{R}^3 é o conjunto $w = \{a(1, 1, 2); a \in \mathbb{R}\}$, já que uma combinação linear de v é múltiplo escalar de v .

Dizemos que um vetor $w = av$ é uma dilatação, uma contração, ou uma inversão, de v , se $a \geq 1$, $0 \leq a < 1$, ou $a < 0$, respectivamente.

Assim um elemento do subespaço W , acima, é uma dilatação, uma contração ou uma inversão de v .

Exemplo 5 Expressar o polinômio $p(x) = 2 + 5x$ como uma combinação linear dos polinômios $p_1(x) = 2 + x + 4x^2$, $p_2(x) = 1 - x + 3x^2$ e $p_3(x) = 3 + 2x + 5x^2$.

Devemos encontrar os números reais a_1, a_2 e a_3 tais que

$$p(x) = a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + a_3 p_3(x),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 2 + 5x &= a_1(2 + x + 4x^2) + a_2(1 - x + 3x^2) + a_3(3 + 2x + 5x^2) \\ 2 + 5x &= 2a_1 + a_2 + 3a_3 + x(a_1 - a_2 + 2a_3) + x^2(4a_1 + 3a_2 + 5a_3) \end{aligned}$$

que é equivalente a ao sistema

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 + 3a_3 = 2 \\ a_1 - a_2 + 2a_3 = 5 \\ 4a_1 + 3a_2 + 5a_3 = 0 \end{cases}$$

Trabalhando apenas com a matriz dos coeficientes do sistema acima encontramos

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \end{array} \right| &\rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \end{array} \right| &\rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & -8 \\ 0 & 7 & -3 & -20 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 21 & -7 & -56 \\ 0 & 21 & -9 & -60 \end{array} \right| &\rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 21 & -7 & -56 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array} \right| \end{aligned}$$

que nos dá facilmente

$$\begin{aligned} -2a_3 &= -4 \Leftrightarrow a_3 = 2, \\ 21a_2 - 7a_3 &= -56 \Leftrightarrow a_2 = -2 \\ a_1 - a_2 + 2a_3 &= 5 \Leftrightarrow a_1 = -1. \end{aligned}$$

Logo

$$2 + 5x = -1(2 + x + 4x^2) - 2(1 - x + 3x^2) + 2(3 + 2x + 5x^2)$$

2.5 Dependência e Independência Linear [1]

Sejam v_1, v_2, \dots, v_r vetores de um espaço vetorial V . Dizemos que os vetores v_1, v_2, \dots, v_r são linearmente independentes, ou simplesmente independentes, se a equação

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_rv_r = 0$$

é satisfeita somente quando $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$. Caso exista algum $a_i \neq 0$, dizemos que os vetores v_1, v_2, \dots, v_r são linearmente dependentes, ou simplesmente dependentes.

Se um dos vetores v_1, v_2, \dots, v_r é o vetor nulo, digamos $v_1 = 0$, então os vetores são dependentes.

Exemplo 6 Considere o espaço vetorial dos polinômios $K[x]_3 = \{p(x); \text{grau } p(x) \leq 3\}$ com coeficientes reais. Mostre que os polinômios $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 3$, $g(x) = x^3 + 6x^2 - x + 4$ e $h(x) = x^3 + 8x^2 - 8x + 7$ são linearmente independentes.

Sabemos que $f(x), g(x)$ e $h(x)$ são linearmente independentes quando $a_1f(x) + a_2g(x) + a_3h(x) = 0$, somente se, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Então

$$a_1(x^3 + 4x^2 - 2x + 3) + a_2(x^3 + 6x^2 - x + 4) + a_3(x^3 + 8x^2 - 8x + 7) = 0,$$

o que nos leva ao sistema
$$\begin{cases} a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \\ 4a_1 + 6a_2 + 8a_3 = 0 \\ -2a_1 - a_2 - 8a_3 = 0 \\ 3a_1 + 4a_2 + 7a_3 = 0 \end{cases}$$

Escalonando a matriz dos coeficientes do sistema acima, obtemos o sistema equivalente

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

ou seja, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Daí os polinômios $f(x), g(x)$ e $h(x)$ são linearmente independentes.

2.6 Base e Dimensão [1]

Seja $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ um conjunto ordenado de vetores de um espaço vetorial não nulo V . Dizemos que α é uma base de V se as seguintes condições são verificadas:

- (i) α é linearmente independente.
- (ii) $V = G(\alpha)$.

Repare que os vetores do conjunto $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$ tal que $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ são linearmente independentes. Também qualquer vetor v em \mathbb{R}^3 pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores e_1, e_2 , e e_3 , ou seja, $v = (x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Assim o conjunto α é uma base para \mathbb{R}^3 .

Exemplo 7 Considere o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem 2 $M(2)$ sobre o corpo \mathbb{R} . Temos que as matrizes $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ formam um base para $M(2)$. De fato qualquer matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2)$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores E_1, E_2, E_3 e E_4 pois

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4,$$

e também

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = b = c = d = 0.$$

Assim E_1, E_2, E_3 e E_4 formam uma base para $M(2)$.

O número de elementos de uma base de um espaço vetorial não nulo V de dimensão finita é chamado de dimensão de V . O espaço vetorial nulo, por convenção, tem dimensão $\dim V = 0$.

Para o exemplo anterior cujo espaço vetorial é o espaço das matrizes quadradas de ordem 2, $\dim V = 4$, pois E_1, E_2, E_3 e E_4 formam uma base para tal espaço. A dimensão de \mathbb{R}^n é n , já que a base canônica de \mathbb{R}^n tem n elementos. Por essa razão, \mathbb{R}^n é chamado de espaço n – dimensional. Os espaços \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 são usualmente chamados de espaços bidimensional e tridimensional, respectivamente. Já o espaço vetorial das matrizes $M(m, n)$ tem dimensão $m \cdot n$. O espaço $\mathbb{R}[x]$, espaço dos polinômios com coeficientes reais, é um espaço vetorial que tem dimensão infinita. De fato, tomemos $n \in \mathbb{N}$ e suponhamos que $\alpha = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}[x]$. Observemos que qualquer combinação linear dos elementos de α tem, grau no máximo M , onde $M = \max\{\text{grau}(p_i); 1 \leq i \leq n\}$. Assim, o polinômio $q(x) = x^{M+1}$ está em $\mathbb{R}[x]$, mas não pode ser escrito como combinação linear dos elementos de α . Portanto, α não forma uma base para $\mathbb{R}[x]$. Como n foi tomado de modo arbitrário, vemos que nenhum conjunto finito de vetores $\mathbb{R}[x]$ constitui uma base para este espaço vetorial.

3 PRODUTO INTERNO [1]

Vamos imaginar agora uma função que associa dois vetores $u, v \in V$ a um número real qualquer, ou seja, $(u, v) \mapsto \mathbb{R}$. Se tal função satisfizer as cinco propriedades listadas abaixo, ela será chamada de produto interno e será denotada daqui para frente por $\langle u, v \rangle$. As propriedades são:

- PI 1 $\langle u, u \rangle \geq 0$;
- PI 2 $\langle u, u \rangle = 0$ se, e somente se, $u = 0$;
- PI 3 $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$;
- PI 4 $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$;
- PI 5 $\langle ku, v \rangle = k\langle u, v \rangle$.

Exemplo 1 Sejam $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ em \mathbb{R}^n . Vamos mostrar que $\langle u, v \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ satisfaz as cinco propriedades listadas acima e portanto define um produto interno. É fato que

$$\langle u, u \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq 0,$$

pois o quadrado de um número real é sempre maior do que zero ou igual a zero.

$$\langle u, v \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \dots + y_nx_n = \langle v, u \rangle,$$

pois a propriedade comutativa se verifica facilmente para os números reais. Assim ficam claras a veracidade das propriedades PI 1 e PI 3. A propriedade PI 2 também se verifica pois

$$\langle u, u \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Seja $w = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, então

$$\langle u + v, w \rangle = (x_1 + y_1)z_1 + (x_2 + y_2)z_2 + \dots + (x_n + y_n)z_n,$$

pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de números reais

$$\begin{aligned} & (x_1 + y_1)z_1 + (x_2 + y_2)z_2 + \cdots + (x_n + y_n)z_n \\ &= x_1z_1 + y_1z_1 + x_2z_2 + y_2z_2 + \cdots + x_nz_n + y_nz_n, \end{aligned}$$

e pela propriedade associativa da adição de números reais

$$\begin{aligned} & x_1z_1 + y_1z_1 + x_2z_2 + y_2z_2 + \cdots + x_nz_n + y_nz_n \\ &= (x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n) + (y_1z_1 + y_2z_2 + \cdots + y_nz_n) = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \end{aligned}$$

portanto PI 4 também se verifica. Por último

$$\langle ku, v \rangle = (kx_1)y_1 + (kx_2)y_2 + \cdots + (kx_n)y_n;$$

pela propriedade associativa da multiplicação de números reais

$$\begin{aligned} (kx_1)y_1 + (kx_2)y_2 + \cdots + (kx_n)y_n &= k(x_1y_1) + k(x_2y_2) + \cdots + k(x_ny_n) \\ &= k(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) = k\langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

Portanto $\langle u, v \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ define um produto interno em \mathbb{R}^n . Este é o famoso produto interno usual de \mathbb{R}^n ou produto escalar de \mathbb{R}^n , ficando claro que o produto escalar de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 são casos particulares do caso geral.

Exemplo 2 Considere o espaço vetorial $V = M(2)$ das matrizes quadradas de ordem 2. Mostrar que $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t \cdot A)$ define um produto interno em V , tal que, $\text{tr}(A)$ (traço da matriz A) é a soma dos elementos da diagonal principal de A .

Considere as matrizes $A, B \in V$ tais que $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$. Tem-se que $B^t = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}$. Segue que

$$(B^t \cdot A) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{21}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{21}a_{22} \\ b_{12}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{12}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\text{tr}(B^t \cdot A) = b_{11}a_{11} + b_{21}a_{21} + b_{12}a_{12} + b_{22}a_{22}.$$

Vamos mostrar que $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t \cdot A) = b_{11}a_{11} + b_{21}a_{21} + b_{12}a_{12} + b_{22}a_{22}$ define um produto interno. De fato

$$\text{PI 1} \quad \langle A, A \rangle = a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} + a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \geq 0.$$

Portanto $\langle A, A \rangle \geq 0$.

PI 2 (\Rightarrow) Considere $\langle A, A \rangle = 0$. Então

$0 = \langle A, A \rangle = a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} + a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2$, e isso implica $a_{11} = a_{21} = a_{12} = a_{22} = 0$, ou seja, $A = 0$ (matriz nula).

(\Leftarrow) Se $A = 0$ (matriz nula), então

$$\langle A, A \rangle = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{PI 3} \quad \langle A, B \rangle &= b_{11}a_{11} + b_{21}a_{21} + b_{12}a_{12} + b_{22}a_{22} \\ &= a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} = \langle B, A \rangle. \end{aligned}$$

$$\text{PI 4} \quad \text{Seja } C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \in V. \text{ Então } (B + C)^t = \begin{bmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{21} + c_{21} \\ b_{12} + c_{12} & b_{22} + c_{22} \end{bmatrix}. \text{ Assim}$$

$$\langle B + C, A \rangle = \langle A, B + C \rangle = \text{tr}((B + C)^t \cdot A) = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{21} + c_{21} \\ b_{12} + c_{12} & b_{22} + c_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} &= (b_{11} + c_{11})a_{11} + (b_{21} + c_{21})a_{21} + (b_{12} + c_{12})a_{12} + (b_{22} + c_{22})a_{22} \\ &= b_{11}a_{11} + c_{11}a_{11} + b_{21}a_{21} + c_{21}a_{21} + b_{12}a_{12} + c_{12}a_{12} + b_{22}a_{22} + c_{22}a_{22} \\ &= (b_{11}a_{11} + b_{21}a_{21} + b_{12}a_{12} + b_{22}a_{22}) + (c_{11}a_{11} + c_{21}a_{21} + c_{12}a_{12} + c_{22}a_{22}) \end{aligned}$$

$$= \text{tr}(B^t \cdot A) + \text{tr}(C^t \cdot A) = \langle A, B \rangle + \langle A, C \rangle = \langle B, A \rangle + \langle C, A \rangle.$$

PI 5 Seja $k \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned}\langle kA, B \rangle &= b_{11}(ka_{11}) + b_{21}(ka_{21}) + b_{12}(ka_{12}) + b_{22}(ka_{22}) \\ &= kb_{11}a_{11} + kb_{21}a_{21} + kb_{12}a_{12} + kb_{22}a_{22} \\ &= k(b_{11}a_{11} + b_{21}a_{21} + b_{12}a_{12} + b_{22}a_{22}) = k\langle A, B \rangle.\end{aligned}$$

Portanto $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t \cdot A)$ define um produto interno em $V = M(2)$.

Considere V um espaço vetorial com produto interno $\langle u, v \rangle$, $k \in \mathbb{R}$ e u, v e w elementos de V . Verificamos facilmente que

$$(i) \quad \langle 0, u \rangle = \langle u, 0 \rangle = 0;$$

No caso do \mathbb{R}^n e o produto interno usual, $\langle 0, u \rangle = 0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$.

$$(ii) \quad \langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle;$$

Pela propriedade PI 3, $\langle u, v + w \rangle = \langle v + w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$.

$$(iii) \quad \langle u, kv \rangle = k\langle u, v \rangle;$$

Novamente pela propriedade PI 3, $\langle u, kv \rangle = \langle kv, u \rangle$. Pela propriedade PI 5, $\langle kv, u \rangle = k\langle v, u \rangle$. Por último, novamente por PI 3, $k\langle v, u \rangle = k\langle u, v \rangle$.

$$(iv) \quad \langle u - v, w \rangle = \langle u, w \rangle - \langle v, w \rangle.$$

Pela propriedade PI 4 $\langle u - v, w \rangle = \langle u + (-v), w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle -v, w \rangle$. Pela propriedade PI 5, $\langle u, w \rangle + \langle -v, w \rangle = \langle u, w \rangle + (-1)\langle v, w \rangle = \langle u, w \rangle - \langle v, w \rangle$.

Se estabelecemos um produto interno em um certo espaço vetorial V , a norma de cada vetor desse espaço vetorial será o número real denotado por $\|v\|$ tal que

$$\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2} \therefore \|v\|^2 = \langle v, v \rangle.$$

Dessa forma, v é um vetor unitário quando $\|v\| = 1$. Já a distância entre dois vetores quaisquer de V será o número real definido por

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle} \therefore \\ \|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v \rangle.$$

Logo, se $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ são vetores em \mathbb{R}^n e o produto interno é o usual, então

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \therefore \\ \|u\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

e

$$d(u, v)^2 = \|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v \rangle \therefore \\ \|u - v\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

3.1 Ângulos entre Vetores e Ortogonalidade

Considere θ a medida entre dois vetores quaisquer v_1 e v_2 do espaço vetorial \mathbb{R}^3 com produto interno usual. Esses dois vetores formarão dois ângulos. Consideraremos o menor desses dois ângulos. Assim entendemos que $0 \leq \theta \leq \pi$. Mostraremos agora que tal ângulo satisfaz a igualdade

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \quad (1) \therefore \\ \theta = \arccos \left(\frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \right), \text{ sendo } u \cdot v \text{ o produto interno usual.}$$

Para definir esse ângulo há a necessidade de mostrarmos a veracidade de (1) onde o produto interno generaliza o produto interno usual. Temos que ter a certeza de que

$$\frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \|v\|} \leq 1,$$

sendo u e v vetores quaisquer de V não nulos. Para isso fazemos uso da Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Teorema Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Se u e v são vetores de um espaço com produto interno V , então $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$, com a igualdade valendo se, e somente se, u e v são linearmente dependentes.

Demonstração

A desigualdade é clara se u é o vetor nulo de V . Suponhamos, então, u diferente do vetor nulo. Para qualquer $t \in \mathbb{R}$, temos que $\langle tu + v, tu + v \rangle \geq 0$, ou seja, para qualquer $t \in \mathbb{R}$,

$$\langle u, u \rangle t^2 + 2\langle u, v \rangle t + \langle v, v \rangle \geq 0.$$

Definamos $p(t) = \langle u, u \rangle t^2 + 2\langle u, v \rangle t + \langle v, v \rangle$, $t \in \mathbb{R}$. Observamos que p é uma função polinomial não negativa. Além disso, como o coeficiente do termo quadrático é não negativo, segue que o discriminante Δ de $p(t)$ é um número real não positivo. Portanto, $\Delta = 4\langle u, v \rangle^2 - 4\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle = 4\langle u, v \rangle^2 - 4\|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0$, o que equivale a $\langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$. Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados da desigualdade acima, obtemos o desejado.

Vamos agora resolver a questão do ângulos em espaços com produto interno arbitrários. Suponhamos que u e v são vetores não nulos de um espaço com produto interno V . Considere a $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$. Dividindo ambos os membros dessa desigualdade por $\|u\| \|v\|$, obtemos

$$\frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \|v\|} \leq 1,$$

ou equivalentemente

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \leq 1 (*).$$

Como $\cos \theta$ assume, uma única vez, cada valor no intervalo $[-1, 1]$ quando θ varia no intervalo $[0, \pi]$, segue de (*) que existe um único $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}.$$

Definimos o ângulo entre u e v como o número real θ acima mencionado.

Sejam u e v dois vetores não nulos de um espaço com produto interno V e seja θ o ângulo entre eles. Segue que $\cos \theta = 0$ se, e somente se, $\langle u, v \rangle = 0$. Equivalentemente, temos $\theta = \frac{\pi}{2}$ se, e somente se $\langle u, v \rangle = 0$. Convencionamos que se u ou v é o vetor nulo, o ângulo entre eles é $\frac{\pi}{2}$. Assim definimos:

Dois vetores u e v em V são ortogonais quando $\langle u, v \rangle = 0$.

3.2 Bases Ortonormais [1]

Um espaço vetorial com produto interno possui bases que se destacam das demais, chamadas de bases ortogonais. Trabalhar com este tipo de base torna V geometricamente muito parecido com o espaço \mathbb{R}^n .

Um conjunto de vetores em V é chamado conjunto ortogonal se quaisquer dois vetores distintos do conjunto são ortogonais. Por exemplo, o conjunto $\{(1, 2, 1), (2, 1, -4), (3, -2, 1)\}$ é um conjunto ortogonal em \mathbb{R}^3 com seu produto interno usual.

Um conjunto ortogonal no qual cada vetor tem norma 1 é chamado conjunto ortonormal. Se v é um vetor não nulo em um espaço com produto interno, então o vetor $\|v\|^{-1}v$ tem norma 1. O processo de multiplicar um vetor não nulo pelo inverso de sua norma para obter um vetor de norma 1 é chamado de normalização. Assim um conjunto ortogonal de vetores não nulos pode ser sempre transformado em um conjunto ortonormal, normalizando-se cada um de seus vetores.

Proposição 3.2.1 Todo conjunto ortogonal de vetores não nulo de V é linearmente independente.

Demonstração

Seja $\{v_1, \dots, v_r\}$ um conjunto de vetores ortogonais de V com produto interno. Consideremos a equação

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_rv_r = 0.$$

Vamos mostrar que $a_i = 0$, para todo $1 \leq i \leq r$. Fixe $1 \leq i \leq r$. Então, $\langle a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_rv_r, v_i \rangle = a_1\langle v_1, v_i \rangle + \dots + a_i\langle v_i, v_i \rangle + a_{i+1}\langle v_{i+1}, v_i \rangle + \dots + a_r\langle v_r, v_i \rangle = a_i\langle v_i, v_i \rangle$ (*), já que $\langle v_j, v_i \rangle = 0$ sempre que $j \neq i$. Por outro lado

$$\langle a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_rv_r, v_i \rangle = \langle 0, v_i \rangle = 0 (**).$$

De (*) e (**) segue que $a_i\langle v_i, v_i \rangle = 0$ e como v_i é um vetor não nulo, temos necessariamente que $a_i = 0$. Como i foi tomado de modo arbitrário em seu intervalo de variação, o resultado segue. A recíproca do resultado é obviamente falsa, pois, por exemplo, o conjunto $\{(1, 1), (1, 0)\}$ de vetores em \mathbb{R}^2 com produto interno usual é linearmente independente, mas não é um conjunto ortogonal.

Teorema Se $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal de V , então, para todo $v \in V$, podemos escrever $v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle v, v_n \rangle v_n$.

Demonstração

Seja $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$ a escrita de v na base α . Fixe i , com $1 \leq i \leq n$. Temos $\langle v, v_i \rangle = \langle a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n, v_i \rangle = a_1\langle v_1, v_i \rangle + \dots + a_i\langle v_i, v_i \rangle + \dots + a_n\langle v_n, v_i \rangle = a_i$, já que $\langle v_j, v_i \rangle = 0$ se $j \neq i$ e $\langle v_i, v_i \rangle = \|v_i\|^2 = 1$. Como i foi tomado de modo arbitrário, a demonstração está completa.

Se $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base ortogonal de V , normalizando cada um dos vetores de β , obtemos a base ortonormal α de V , onde

$$\alpha = \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\}.$$

Pelo teorema anterior, para cada vetor v em V , temos que

$$v = \langle v, \frac{v_1}{\|v_1\|} \rangle \frac{v_1}{\|v_1\|} + \dots + \langle v, \frac{v_n}{\|v_n\|} \rangle \frac{v_n}{\|v_n\|} = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \dots + \frac{\langle v, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n.$$

O número real $a_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}$ é chamado de coeficiente de Fourier de v em relação ao vetor v_i . Este escalar admite uma interpretação geométrica relacionada com a noção de projeção.

Proposição 3.2.2 Seja w um vetor não nulo de V . Se $v \in V$, então

$$k = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} = \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2}$$

é o único número real tal que $v' = v - kw$ é ortogonal a w .

O escalar k é o coeficiente de Fourier de v em relação ao vetor w . A projeção de v ao longo de w é denotado por $proj_w(v)$ e é definido por

$$proj_w(v) = kw = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w.$$

Proposição 3.2.3 Suponhamos que $\{w_1, w_2, \dots, w_r\}$ seja um conjunto ortogonal de vetores não nulos de V . Se $v \in V$, então

$$k_i = \frac{\langle v, w_i \rangle}{\|w_i\|^2}, 1 \leq i \leq r,$$

são os únicos números reais tais que o vetor $v' = v - k_1 w_1 - k_2 w_2 - \dots - k_r w_r$ é ortogonal aos vetores w_1, w_2, \dots, w_r .

3.3 Ortogonalização de Gram-Schmidt

Trabalhar com bases ortonormais é bastante conveniente. Veremos a seguir que todo espaço com produto interno, não nulo, de dimensão finita tem uma base ortonormal. A construção dada na prova do resultado abaixo é chamada de processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, pois leva os nomes de Jorge Pedersen Gram (Dinamarca, 1850 – 1916) e de Erhard Schmidt (Alemanha, 1876 – 1959).

Teorema Um espaço vetorial V com produto interno possui uma base ortogonal.

Demonstração

Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V . Então

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1, \\ w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 \\ w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2, \\ &\vdots \\ w_n &= v_n - \frac{\langle v_n, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \dots - \frac{\langle v_n, w_{n-1} \rangle}{\|w_{n-1}\|^2} w_{n-1}. \end{aligned}$$

Pela proposição 3.2.3, o conjunto $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ é um conjunto ortogonal. Além disso, como o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente independente, cada vetor w_i é não nulo. Assim o conjunto $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ é um conjunto ortogonal de vetores não nulos de V .

Exemplo 3 Considere o conjunto de vetores $\{(2, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$. Tais vetores são linearmente independentes e formam uma base para \mathbb{R}^3 . Vamos agora determinar uma base ortogonal $\{w_1, w_2, w_3\}$ para \mathbb{R}^3 aplicando o processo de Gram-Schmidt a tal conjunto e considerando o produto interno usual.

Seja $v_1 = (2, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$. De imediato vamos tomar $w_1 = (2, 0, 0)$. Assim

$$w_1 = (2, 0, 0),$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = (1, 1, 0) - \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0}{2^2 + 0^2 + 0^2} (2, 0, 0) = (0, 1, 0),$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = (1, 1, 1) - \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0}{2^2 + 0^2 + 0^2} (2, 0, 0) - \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{0^2 + 1^2 + 0^2} (0, 1, 0) = (0, 0, 1).$$

Note que w_1, w_2 e w_3 são dois a dois ortogonais, pois o produto interno usual é zero. Logo o conjunto $\{(2, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base ortogonal em \mathbb{R}^3 .

Exemplo 4 Considere as matrizes quadradas de ordem 2: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$. Note que tais matrizes são linearmente independentes. De fato:

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \lambda = 0,$$

pois

$$\begin{cases} \alpha + 0\beta + \gamma + \lambda = 0 \\ 0\alpha + 2\beta + 0\gamma + 3\lambda = 0 \\ 3\alpha + \beta + 0\gamma - 4\lambda = 0 \\ -\alpha + 5\beta + \gamma + 0\lambda = 0 \end{cases}$$

é um sistema homogêneo com determinante da matriz dos coeficientes diferente de zero. Portanto a solução é única e homogênea. Sabemos que o espaço $V = M(2)$, chamado de espaço das matrizes quadradas de ordem 2, tem dimensão 4. Logo as matrizes acima formam uma base para $V = M(2)$. Vamos determinar uma base ortogonal usando o processo de Gram-Schmidt a partir de tais matrizes e usando

o produto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t \cdot A)$. Já mostramos que $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t \cdot A) = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22}$. Então

(i) Chamemos w_1 de A .

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

(ii) $w_2 = B - \frac{\langle B, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$.

Vamos calcular $\frac{\langle B, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}$.

$$\langle B, w_1 \rangle = 0 + 0 + 3 - 5 = -2$$

$$\langle w_1, w_1 \rangle = 1 + 0 + 9 + 1 = 11,$$

assim

$$w_2 = B - \frac{\langle B, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} - \frac{(-2)}{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/11 & 2 \\ 17/11 & 53/11 \end{bmatrix}.$$

(iii) $w_3 = C - \frac{\langle C, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle C, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$.

Vamos calcular $\frac{\langle C, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}$ e $\frac{\langle C, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle}$.

$$\langle C, w_1 \rangle = 1 + 0 + 0 - 1 = 0$$

$$\langle w_1, w_1 \rangle = 1 + 0 + 9 + 1 = 11$$

$$\langle C, w_2 \rangle = \frac{2}{11} + 0 + 0 + \frac{53}{11} = 5$$

$$\langle w_2, w_2 \rangle = \frac{4}{121} + 4 + \frac{289}{121} + \frac{2809}{121} = \frac{326}{11},$$

assim

$$\frac{\langle C, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} = \frac{0}{11} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\langle C, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} = \frac{5}{\frac{326}{11}} = \frac{55}{326}$$

logo

$$w_3 = C - \frac{\langle C, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle C, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{55}{326} \begin{bmatrix} 2/11 & 2 \\ 17/11 & 53/11 \end{bmatrix}$$

$$w_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5/163 & 55/163 \\ 85/326 & 265/326 \end{bmatrix}$$

$$w_3 = \begin{bmatrix} 158/163 & -55/163 \\ -85/326 & 61/326 \end{bmatrix}$$

$$(iv) \quad w_4 = D - \frac{\langle D, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle D, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \frac{\langle D, w_3 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle} w_3.$$

Vamos calcular $\frac{\langle D, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}$, $\frac{\langle D, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle}$ e $\frac{\langle D, w_3 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle}$.

$$\langle D, w_1 \rangle = 1 + 0 - 12 + 0 = -11$$

$$\langle w_1, w_1 \rangle = 1 + 0 + 9 + 1 = 11$$

$$\langle D, w_2 \rangle = \frac{2}{11} + 6 - \frac{68}{121} + 0 = 0$$

$$\langle w_2, w_2 \rangle = \frac{4}{121} + 4 + \frac{289}{121} + \frac{2809}{121} = \frac{326}{11}$$

$$\langle D, w_3 \rangle = \frac{158}{163} - \frac{165}{163} + \frac{170}{163} + 0 = \frac{163}{163} = 1$$

$$\langle w_3, w_3 \rangle = \left(\frac{158}{163}\right)^2 + \left(\frac{55}{163}\right)^2 + \left(\frac{85}{326}\right)^2 + \left(\frac{61}{326}\right)^2 = \frac{377}{326}$$

assim

$$\frac{\langle D, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} = \frac{-11}{11} = -1$$

$$\frac{\langle D, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} = \frac{0}{\frac{326}{11}} = 0$$

$$\frac{\langle D, w_3 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle} = \frac{1}{\frac{377}{326}} = \frac{326}{377}$$

logo

$$w_4 = D - \frac{\langle D, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle D, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \frac{\langle D, w_3 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle} w_3$$

$$w_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 2/11 & 2 \\ 17/11 & 53/11 \end{bmatrix} - \frac{326}{377} \begin{bmatrix} 158/163 & -55/163 \\ -85/326 & 61/326 \end{bmatrix}$$

$$w_4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - \frac{326}{377} \begin{bmatrix} 158/163 & -55/163 \\ -85/326 & 61/326 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{438}{377} & \frac{1241}{377} \\ -\frac{292}{377} & -\frac{438}{377} \end{bmatrix}$$

Em resumo as matrizes $w_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 2/11 & 2 \\ 17/11 & 53/11 \end{bmatrix}$, $w_3 =$

$\begin{bmatrix} 158/163 & -55/163 \\ -85/326 & 61/326 \end{bmatrix}$ e $w_4 = \begin{bmatrix} 438/377 & 1241/377 \\ -292/377 & -438/377 \end{bmatrix}$ são ortogonais e formam uma

base para o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem 2. É bastante satisfatório que encontremos $\langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_1, w_3 \rangle = \langle w_1, w_4 \rangle = \langle w_2, w_3 \rangle = \langle w_2, w_4 \rangle = \langle w_3, w_4 \rangle = 0$. Lembrando que, dadas as matrizes quadradas A e B de ordem 2, temos que $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t \cdot A) = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22}$. Daí

$$\langle w_1, w_2 \rangle = 1 \cdot \frac{2}{11} + 0 \cdot 2 + 3 \cdot \frac{17}{11} + (-1) \cdot \frac{53}{11} = \frac{2}{11} + \frac{51}{11} - \frac{53}{11} = 0.$$

$$\langle w_1, w_3 \rangle = 1 \cdot \frac{158}{163} + 0 \cdot \frac{-55}{163} + 3 \cdot \frac{-85}{326} + (-1) \cdot \frac{61}{326} = \frac{158}{163} - \frac{255}{326} - \frac{61}{326} = 0.$$

$$\langle w_1, w_4 \rangle = 1 \cdot \frac{438}{377} + 0 \cdot \frac{1241}{377} + 3 \cdot \frac{-292}{377} + (-1) \cdot \frac{-438}{377} = \frac{438}{377} - \frac{876}{377} + \frac{438}{377} = 0.$$

$$\langle w_2, w_3 \rangle = \frac{2}{11} \cdot \frac{158}{163} + 2 \cdot \frac{-55}{163} + \frac{17}{11} \cdot \frac{-85}{326} + \frac{53}{11} \cdot \frac{61}{326}$$

$$= \frac{632 - 2420 - 1445 + 3233}{3586} = 0.$$

$$\begin{aligned} \langle w_2, w_4 \rangle &= \frac{2}{11} \cdot \frac{438}{377} + 2 \cdot \frac{1241}{377} + \frac{17}{11} \cdot \frac{-292}{377} + \frac{53}{11} \cdot \frac{-438}{373} \\ &= \frac{876 + 27302 - 4964 - 23214}{4147} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle w_3, w_4 \rangle &= \frac{158}{163} \cdot \frac{438}{377} + \frac{-55}{163} \cdot \frac{1241}{377} + \frac{-85}{326} \cdot \frac{-292}{377} + \frac{61}{326} \cdot \frac{-438}{373} \\ &= \frac{138408 - 136510 + 24820 - 26718}{122902} = 0. \end{aligned}$$

Outro t3pico interessante 3e o c3lculo da norma dessas matrizes. J3 mostramos que $\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$. Como no espa3o vetorial das matrizes quadradas de ordem 2 cada matriz 3e um vetor, ent3o a norma de w_n 3e $\|w_n\|^2 = \langle w_n, w_n \rangle$, ou seja

$$\|w_1\|^2 = 11 \Rightarrow \|w_1\| = \sqrt{11} \cong 3,31$$

$$\|w_2\|^2 = \frac{326}{11} \Rightarrow \|w_2\| = \sqrt{\frac{326}{11}} = \frac{\sqrt{3586}}{11} \cong 5,44$$

$$\|w_3\|^2 = \frac{377}{326} \Rightarrow \|w_3\| = \sqrt{\frac{377}{326}} \cong 1,07$$

$$\|w_4\|^2 = \frac{2009033}{377^2} \Rightarrow \|w_4\| = \sqrt{\frac{2009033}{377^2}} = \frac{\sqrt{2009033}}{377} \cong 3,75.$$

Para normalizar o conjunto $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ multiplicamos cada um dos vetores pelo inverso de sua respectiva norma. Segue ent3o que

$$\bar{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{11}}{11} & 0 \\ \frac{3\sqrt{11}}{11} & -\frac{\sqrt{11}}{11} \end{bmatrix}.$$

$$\bar{w}_2 = \frac{\sqrt{3586}}{326} \begin{bmatrix} 2/11 & 2 \\ 17/11 & 53/11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3586}}{1793} & \frac{\sqrt{3586}}{163} \\ \frac{17\sqrt{3586}}{3586} & \frac{53\sqrt{3586}}{3586} \end{bmatrix}.$$

$$\bar{w}_3 = \sqrt{\frac{326}{377}} \begin{bmatrix} 158/163 & -55/163 \\ -85/326 & 61/326 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\frac{326}{377}} 158}{163} & \frac{-\sqrt{\frac{326}{377}} 55}{163} \\ \frac{-\sqrt{\frac{326}{377}} 85}{326} & \frac{\sqrt{\frac{326}{377}} 61}{326} \end{bmatrix}.$$

$$\bar{w}_4 = \frac{\sqrt{2009033}}{5329} \begin{bmatrix} \frac{438}{377} & \frac{1241}{377} \\ -292 & -438 \\ \frac{438}{377} & \frac{1241}{377} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{438\sqrt{2009033}}{2009033} & \frac{1241\sqrt{2009033}}{2009033} \\ -292\sqrt{2009033} & -438\sqrt{2009033} \\ \frac{438\sqrt{2009033}}{2009033} & \frac{1241\sqrt{2009033}}{2009033} \end{bmatrix}.$$

Finalizando podemos afirmar que qualquer matriz de ordem 2 pode ser escrita como uma combinação dos vetores \bar{w}_1 , \bar{w}_2 , \bar{w}_3 e \bar{w}_4 .

3.4 O Produto Interno $\langle q(x), p(x) \rangle$

Seja $q(x), p(x) \in \mathbb{R}[x]$, tal que $\mathbb{R}[x]$ representa o conjunto de todos os polinômios de coeficientes reais. Mostrar que $\langle q(x), p(x) \rangle = \int_0^1 q(x)p(x)dx$ define um produto interno.

PI 1 Considere $h(x) = q(x)q(x)$. Daí

$$\langle q(x), q(x) \rangle = \int_0^1 q(x)^2 dx = \int_0^1 h(x) dx \geq 0, \text{ pois } h(x) \geq 0. \text{ Portanto PI 1 é válida.}$$

PI 2 Sendo $\langle q(x), q(x) \rangle = \int_0^1 q(x)^2 dx$, temos que

$$\int_0^1 q(x)^2 dx = 0 \Leftrightarrow q(x) = 0.$$

PI 3 Como $q(x)p(x) = p(x)q(x)$, então

$$\langle q(x), p(x) \rangle = \int_0^1 q(x)p(x)dx = \int_0^1 p(x)q(x)dx = \langle p(x), q(x) \rangle.$$

PI 4 Considere $q(x), p(x), t(x) \in \mathbb{R}[x]$. Então

$$\begin{aligned} \langle q(x), p(x) + t(x) \rangle &= \int_0^1 q(x)(p(x) + t(x))dx = \int_0^1 [q(x)p(x) + q(x)t(x)] dx \\ &= \int_0^1 q(x)p(x)dx + \int_0^1 q(x)t(x)dx = \langle q(x), p(x) \rangle + \langle q(x), t(x) \rangle. \end{aligned}$$

PI 5 Sendo $k \in \mathbb{R}$, temos que

$$\langle kq(x), p(x) \rangle = \int_0^1 kq(x)p(x)dx = k \int_0^1 q(x)p(x)dx = k\langle q(x), p(x) \rangle.$$

Mostramos então que $\langle q(x), p(x) \rangle = \int_0^1 q(x)p(x)dx$ define um produto interno.

Exemplo 5 Determinar o ângulo entre os vetores $(2,0)$ e $(2, 2\sqrt{3})$ e as funções $f(x) = 2$ e $g(x) = \sqrt{3}x$.

Estamos diante de dois vetores que pertencem ao \mathbb{R}^2 e de dois vetores que pertencem ao espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais $K[x]_1$, ou seja, de grau $n \leq 1$. Em \mathbb{R}^2 usaremos o produto interno usual $\langle u, v \rangle = x_1x_2 + y_1y_2$ e em $K[x]_1$ o produto interno $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$. Sabemos que $\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$. Então calculemos θ para o caso dos vetores em \mathbb{R}^2 .

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} = \frac{2 \cdot 2 + 0 \cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{2^2 + 0^2} \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2}} = \frac{4}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{16}} = \frac{4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2} \therefore$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3},$$

e agora o caso para os vetores $f(x)$ e $g(x)$ em $K[x]_1$

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} = \frac{\int_0^1 2 \cdot \sqrt{3}x \, dx}{\sqrt{\int_0^1 2 \cdot 2 \, dx} \sqrt{\int_0^1 \sqrt{3}x \cdot \sqrt{3}x \, dx}} = \frac{\sqrt{3}x^2 \Big|_0^1}{\sqrt{4x \Big|_0^1} \cdot \sqrt{x^3 \Big|_0^1}} \\ \cos \alpha &= \frac{\sqrt{3} \cdot 1 - \sqrt{3} \cdot 0}{\sqrt{(4 \cdot 1 - 4 \cdot 0)} \sqrt{(1 - 0)}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

Neste exemplo consideramos as funções $f(x) = 2$ e $g(x) = \sqrt{3}x$ de modo que os gráficos de tais funções contivessem respectivamente os vetores $(2,0)$ e $(2, 2\sqrt{3})$. É obvio então que o menor ângulo entre as retas responsáveis por tais funções é o mesmo que o ângulo entre os dois vetores dados. Mas estamos nos referindo a tais funções como vetores do espaço vetorial $K[x]_1$, motivo esse que faz com que $\theta \neq \alpha$.

Note também que a norma do vetor $f(x) = 2$ é $\sqrt{\int_0^1 2 \cdot 2 \, dx} = 2$ e isso não pode ser confundido com o absurdo que seria o comprimento da reta do gráfico de $f(x) = 2$, pois reta não tem começo e nem fim. O mesmo para o vetor $g(x) = \sqrt{3}x$ que tem norma $\sqrt{\int_0^1 \sqrt{3}x \cdot \sqrt{3}x \, dx} = 1$.

Exemplo 6 Usando o produto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t \cdot A)$, mostre que as matrizes $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são ortonormais.

Demonstramos anteriormente que $\text{tr}(B^t \cdot A) = b_{11}a_{11} + b_{21}a_{21} + b_{12}a_{12} + b_{22}a_{22}$ em que A e B são matrizes quadradas de ordem 2 define um produto interno. Precisamos mostrar que o ângulo entre duas quaisquer matrizes do conjunto $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ é $\theta = \frac{\pi}{2}$ e que cada uma das matrizes do conjunto tem norma igual a 1.

Cálculo da norma de

$$\begin{aligned}\|E_1\|^2 &= \langle E_1, E_1 \rangle = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 = 1 \therefore \|E_1\| = 1, \\ \|E_2\|^2 &= \langle E_2, E_2 \rangle = 0^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1 \therefore \|E_2\| = 1, \\ \|E_3\|^2 &= \langle E_3, E_3 \rangle = 0^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1 \therefore \|E_3\| = 1,\end{aligned}$$

$$\|E_4\|^2 = \langle E_4, E_4 \rangle = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 = 1 \therefore \|E_4\| = 1.$$

Cálculo do ângulo θ .

É fácil verificar que em se tratando das matrizes E_1, E_2, E_3 e E_4 , o produto interno para $\langle E_i, E_j \rangle = 0$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, sempre que $i \neq j$. Temos por exemplo então que

$$\cos \theta = \frac{\langle E_1, E_2 \rangle}{\|E_1\| \|E_2\|} = \frac{1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0}{1 \cdot 1} = 0 \therefore \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Logo

$$\cos \theta = \frac{\langle E_i, E_j \rangle}{\|E_i\| \|E_j\|} = 0 \therefore \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Portanto as matrizes E_1, E_2, E_3 e E_4 são ortonormais e formam uma base para $M(2)$.

Considere a sequência de polinômios $1, x, x^2, x^3, \dots$ que sabemos formar uma base para todos os polinômios $\mathbb{R}[x]$ de coeficientes reais. Por exemplo, o polinômio $p(x) = x^5 - 2$, pode ser escrito como uma combinação linear dos termos de tal sequência da seguinte forma

$$p(x) = \dots + 0x^n + 0x^{n-1} + \dots + x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 0x - 2.$$

Sendo $p(x) \neq 0$ e $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ um polinômio qualquer, então pelo menos um dos coeficientes $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ é não nulo, ou seja, $1, x, x^2, x^3, \dots$ é linearmente independente e geram todo o espaço $\mathbb{R}[x]$. Dizemos que os polinômios $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots$ de graus respectivamente iguais a $0, 1, 2, \dots$ são ortogonais se

$$\begin{cases} \langle p_i(x), p_j(x) \rangle = 0, & \text{para } i \neq j \\ \langle p_i(x), p_i(x) \rangle \neq 0, & \text{para } p_i(x) \neq 0 \end{cases} \quad [8],$$

tal que o produto interno é dado por $\langle q(x), p(x) \rangle = \int_a^b w(x)q(x)p(x)dx$, $w(x), q(x), p(x) \in \mathbb{R}[x]$, com $w(x) \geq 0$ e continua em $[a, b]$. A função $w(x)$ é chamada de função peso. Como exemplos de polinômios ortogonais temos

3.5 Polinômios de Legendre [8]

São aqueles tal que $\langle q(x), p(x) \rangle = \int_{-1}^1 q(x)p(x)dx$, ou seja, $w(x) = 1$, $a = -1$ e $b = 1$. Para obtê-los vamos usar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aplicados aos polinômios da sequência $1, x, x^2, x^3, \dots$. Os três primeiros são

$$p_0(x) = 1$$

$$p_1(x) = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \cdot 1 = x - \frac{\int_{-1}^1 x \cdot 1 dx}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 dx} \cdot 1 = x - \frac{\left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1}{\left[x \right]_{-1}^1} = x - 0 = x$$

$$\begin{aligned} p_2(x) &= x^2 - \frac{\langle x^2, x \rangle}{\langle x, x \rangle} x - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 = x^2 - \frac{\int_{-1}^1 x^2 \cdot x dx}{\int_{-1}^1 x \cdot x dx} x - \frac{\int_{-1}^1 x^2 \cdot 1 dx}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 dx} 1 \\ &= x^2 - \frac{\left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1}{\left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1} x - \frac{\left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1}{\left[x \right]_{-1}^1} = x^2 - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3.6 Polinômios de Hermite [8]

São aqueles tal que $\langle q(x), p(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} q(x)p(x)dx$, ou seja, $w(x) = e^{-x^2}$, $a = -\infty$ e $b = \infty$. Para obtê-los vamos usar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aplicados aos polinômios da sequência $1, x, x^2, x^3, \dots$. Os três primeiros são

$$p_0(x) = 1$$

$$p_1(x) = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \cdot 1 = x - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x \cdot 1 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot 1 dx} \cdot 1 = x - \frac{0}{1,77} \cdot 1 = x - 0 = x$$

$$p_2(x) = x^2 - \frac{\langle x^2, x \rangle}{\langle x, x \rangle} x - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 = x^2 - \frac{0}{0,89} x - \frac{0,89}{1,77} = x^2 - \frac{89}{177}.$$

4 FUNÇÕES ORTOGONAIS

No capítulo 3 definimos o que vem a ser um produto interno e em 3.4 fizemos o caso $\langle q(x), p(x) \rangle = \int_a^b w(x)q(x)p(x)dx$ em que $w(x) = 1$, $a = 0$ e $b = 1$ mostrando a validade das propriedades PI 1, PI 2, PI 3, PI 4 e PI 5. Ficou bem claro, tanto no \mathbb{R}^2 ou no \mathbb{R}^3 , que dois vetores u e v são ortogonais quando $\langle u, v \rangle = 0$, ou por exemplo, no conjunto das matrizes quadradas $M(2)$ de ordem 2 quando $\langle A, B \rangle = 0$, sendo $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t \cdot A)$ e $A, B \in M(2)$. Trazemos a mesma ideia para o conjunto das funções reais definidas em $[a, b]$, ou seja, se $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, então $f(x)$ e $g(x)$ são ortogonais em $[a, b]$. Como exemplo fácil temos $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$ definidas em $[-1, 1]$. De fato

$$\begin{aligned}\langle f(x), g(x) \rangle &= \int_{-1}^1 x^2 x^3 dx = \int_{-1}^1 x^5 dx \\ &= \left. \frac{x^6}{6} \right|_{-1}^1 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6} \right) = 0,\end{aligned}$$

portanto $f(x)$ e $g(x)$ são funções ortogonais em $[-1, 1]$. É bom salientar que essas mesmas funções não são ortogonais, por exemplo, no intervalo $[0, 1]$, pois a integral definida tem resultado é $\frac{1}{6}$.

Consideremos agora o conjunto $F = \{f_0, f_1, \dots, f_i, \dots\}$ das funções definidas em $[a, b]$, com $i = 0, 1, 2, \dots$, tal que $\langle f_i(x), f_j(x) \rangle = \int_a^b f_i(x)f_j(x)dx = 0$ para $i \neq j$. Dizemos então que o conjunto $F = \{f_0, f_1, \dots, f_i, \dots\}$ define um conjunto de funções ortogonais em $[a, b]$. Quando falamos da norma de um vetor em \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , ficou bem claro que a norma é o comprimento do segmento orientado e expandimos esse conceito também para o \mathbb{R}^n . Assim por exemplo para $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, a norma de u é

$$\|u\| = \sqrt{x \cdot x + y \cdot y + z \cdot z} = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

$$\Rightarrow \|u\|^2 = \langle u, u \rangle.$$

Se quisermos normalizar o vetor $u = (x, y, z) \neq 0$, basta multiplicá-lo pelo escalar $\frac{1}{\|u\|}$, ou seja, o vetor $\frac{u}{\|u\|}$ tem norma igual a 1.

A ideia para funções reais definidas em um intervalo $[a, b]$ é a mesma. Se considerarmos $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$ definidas em $[-1, 1]$, então

$$\begin{aligned} \|f(x)\| &= \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle} \Rightarrow \|f(x)\|^2 = \int_{-1}^1 x^4 dx = \left. \frac{x^5}{5} \right|_{-1}^1 \\ &\Rightarrow \|f(x)\|^2 = \frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5} \Rightarrow \|f(x)\| = \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|g(x)\| &= \sqrt{\langle g(x), g(x) \rangle} \Rightarrow \|g(x)\|^2 = \int_{-1}^1 x^6 dx = \left. \frac{x^7}{7} \right|_{-1}^1 \\ &\Rightarrow \|g(x)\|^2 = \frac{1}{7} - \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{2}{7} \Rightarrow \|g(x)\| = \sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{\sqrt{14}}{7}. \end{aligned}$$

4.1 O Conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots\}$ [4]

Um exemplo de conjunto ortogonal é o conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots\}$, tal que $x \in [-\pi, \pi]$. Para mostrarmos esse fato de forma genérica considere dois elementos quaisquer desse conjunto dados por $\cos nx$ e $\cos kx$ com $n, k \in \mathbb{Z}$ e o produto interno $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx$. Da trigonometria conhecemos a seguinte identidade

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B (*).$$

Note agora que

$$\cos(n+k)x + \cos(n-k)x = \cos(nx+kx) + \cos(nx-kx).$$

Aplicando (*) ao 2 membro da equação acima, obtemos

$$\cos(nx+kx) + \cos(nx-kx)$$

$$= \cos nx \cos kx - \sin nx \sin kx + \cos nx \cos kx + \sin nx \sin kx = 2 \cos nx \cos kx.$$

Segue então que

$$\cos(n+k)x + \cos(n-k)x = 2 \cos nx \cos kx (**).$$

O produto interno é escrito da seguinte forma

$$\langle \cos nx, \cos kx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 2 \cos nx \cos kx dx.$$

Substituímos (**) na integral definida acima, obtemos

$$\begin{aligned} & \langle \cos nx, \cos kx \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+k)x + \cos(n-k)x] dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+k)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-k)x dx. \end{aligned}$$

Como

$\int \cos mx dx = \frac{\sin mx}{m} + C$, pois $\frac{d(\frac{\sin mx}{m} + c)}{dx} = \cos mx$, com $m \neq 0$ e o número $n \pm k \in \mathbb{Z} / \{0\}$, então

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+k)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-k)x dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(n+k)x}{(n+k)} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(n-k)x}{(n-k)} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right). \end{aligned}$$

Perceba também que $\sin(m\pi) = 0$, qualquer que seja o valor do inteiro m . Logo

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(n+k)\pi}{(n+k)} - \frac{\sin(n+k)(-\pi)}{(n+k)} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(n-k)\pi}{(n-k)} - \frac{\sin(n-k)(-\pi)}{(n-k)} \right) \\ &= \frac{1}{2} (0 - 0) + \frac{1}{2} (0 - 0) = 0. \end{aligned}$$

Logo o conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots\}$ define um conjunto de funções ortogonais em $x \in [-\pi, \pi]$. Se desejarmos ortonormalizar o conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots\}$, basta multiplicar cada elemento do conjunto pela norma do vetor $\cos nx$, com $n \in \mathbb{Z}$. Pela definição de norma já dada, $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \langle \cos nx, \cos nx \rangle \Rightarrow \|u\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx)^2 dx$. Da relação fundamental da trigonometria sabemos que

$$(\sin nx)^2 + (\cos nx)^2 = 1 \Rightarrow (\sin nx)^2 = 1 - (\cos nx)^2 (*).$$

Como $\cos(2nx) = \cos nx \cos nx - \sin nx \sin nx$, então

$$\cos(2nx) = (\cos nx)^2 - (\sin nx)^2 (**).$$

Substituindo (*) em (**) obtemos

$$\cos(2nx) = (\cos nx)^2 - [1 - (\cos nx)^2] \therefore (\cos nx)^2 = \frac{\cos(2nx) + 1}{2}.$$

Segue então que

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \langle u, u \rangle = \langle \cos nx, \cos nx \rangle \Rightarrow \|u\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(2nx) + 1}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2nx) dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2nx}{2n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) + \frac{1}{2} (x) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2n\pi}{2n} - \frac{\sin 2n(-\pi)}{2n} \right) + \frac{1}{2} (\pi - (-\pi)) = \frac{1}{2} (0 - 0) + \frac{2\pi}{2} = \pi \therefore \\ &\|u\|^2 = \pi \therefore \|u\| = \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Para normalizar o conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots\}$ de funções definidas no intervalo $[-\pi, \pi]$, basta dividirmos cada elemento do conjunto por $\sqrt{\pi}$, ou seja, $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$ é um conjunto de funções ortonormais definidas no intervalo $[-\pi, \pi]$.

4.2 O Conjunto $\{1, \cos(n\pi x/p), \sin(m\pi x/p)\}$ [4]

Vamos mostrar que o conjunto $\{1, \cos(\frac{n\pi x}{p}), \sin(\frac{m\pi x}{p})\}$, com $m, n = 0, 1, 2, \dots$ é ortogonal no intervalo $[-p, p]$, sendo $\langle f, g \rangle = \int_{-p}^p \cos(\frac{n\pi x}{p}) \sin(\frac{m\pi x}{p}) dx$. Note que

$$\left\{1, \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right), \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right)\right\} = \left\{1, \cos\left(\frac{\pi x}{p}\right), \cos\left(\frac{2\pi x}{p}\right), \dots, \sin\left(\frac{\pi x}{p}\right), \sin\left(\frac{2\pi x}{p}\right), \dots\right\}.$$

Seja $f(x) = 1, g(x) = \cos(\frac{n\pi x}{p})$ e $h(x) = \sin(\frac{m\pi x}{p})$. Vamos mostrar primeiro que $\langle f, g \rangle = \langle f, h \rangle = \langle g, h \rangle = 0$.

$$(i) \quad \langle f, g \rangle = \int_{-p}^p 1 \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx = \int_{-p}^p \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx.$$

Resolvemos a integral $\int \cos(\frac{n\pi x}{p}) dx$ por substituição. Se $u = \frac{n\pi x}{p} \Rightarrow du = \frac{n\pi}{p} dx \therefore dx = \frac{p}{n\pi} du$. Assim

$$\int \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx = \int \cos u \frac{p}{n\pi} du = \frac{p}{n\pi} \int \cos u du = \frac{p \sin u}{n\pi} + c.$$

Logo $\int \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx = \frac{p \sin(\frac{n\pi x}{p})}{n\pi} + c$. Segue então que

$$\begin{aligned} \int_{-p}^p \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx &= \left(\frac{p \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)}{n\pi} \right) \Big|_{-p}^p = \frac{p \sin\left(\frac{n\pi p}{p}\right)}{n\pi} - \frac{p \sin\left(\frac{n\pi(-p)}{p}\right)}{n\pi} \\ &= \frac{p \sin(n\pi)}{n\pi} - \frac{p \sin(-n\pi)}{n\pi} = 0, \end{aligned}$$

pois $\sin(n\pi) = \sin(-n\pi) = 0$, qualquer que seja o valor do inteiro de $n > 0$. Assim $f(x)$ e $g(x)$ são ortogonais em $[-p, p]$.

$$(ii) \quad \langle f, h \rangle = \int_{-p}^p 1 \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx = \int_{-p}^p \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx.$$

Resolvemos a integral $\int \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx$ por substituição. Se $u = \frac{m\pi x}{p} \Rightarrow du = \frac{m\pi}{p} dx \therefore$

$dx = \frac{p}{m\pi} du$. Assim

$$\int \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx = \int \sin u \frac{p}{m\pi} du = \frac{p}{m\pi} \int \sin u du = -\frac{p \cos u}{m\pi} + c.$$

Logo $\int \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx = -\frac{p \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right)}{m\pi} + c$. Segue então que

$$\begin{aligned} \int_{-p}^p \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx &= \left(-\frac{p \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right)}{m\pi} \right) \Big|_{-p}^p = -\frac{p \cos\left(\frac{m\pi p}{p}\right)}{m\pi} - \left(-\frac{p \cos\left(\frac{m\pi(-p)}{p}\right)}{m\pi} \right) = \\ &= -\frac{p \cos(m\pi)}{m\pi} + \frac{p \cos(-m\pi)}{m\pi} = 0, \end{aligned}$$

pois a função $\cos x$ é par, ou seja, $\cos(m\pi) = \cos(-m\pi)$. Assim $f(x)$ e $h(x)$ são ortogonais em $[-p, p]$.

$$(iii) \langle g, h \rangle = \int_{-p}^p \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx.$$

Considere a seguinte identidade trigonométrica

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)] &= \frac{1}{2} [\sin A \cos B + \sin B \cos A + \sin A \cos B - \sin B \cos A] \\ &= \frac{1}{2} [2 \sin A \cos B] = \sin A \cos B \therefore \\ \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)] &= \sin A \cos B. \end{aligned}$$

Segue então que

$$\begin{aligned} \int_{-p}^p \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_{-p}^p \sin\left(\frac{n\pi x + m\pi x}{p}\right) dx + \frac{1}{2} \int_{-p}^p \sin\left(\frac{n\pi x - m\pi x}{p}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-p}^p \sin\left(\frac{\pi x(n+m)}{p}\right) dx + \frac{1}{2} \int_{-p}^p \sin\left(\frac{\pi x(n-m)}{p}\right) dx. \end{aligned}$$

Resolvemos a integral $\frac{1}{2} \int \sin\left(\frac{\pi x(n \pm m)}{p}\right) dx$ por substituição. Se $u = \frac{\pi x(n \pm m)}{p} \Rightarrow du = \frac{\pi(m \pm n)}{p} dx \Rightarrow dx = \frac{p du}{\pi(m \pm n)}$. Assim

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \sin\left(\frac{\pi x(n \pm m)}{p}\right) dx &= \frac{1}{2} \int \sin u \cdot \frac{p du}{\pi(m \pm n)} = \frac{p}{2\pi(m \pm n)} \int \sin u du = \frac{-p \cos u}{2\pi(m \pm n)} + c \\ &= \frac{-p \cos\left(\frac{\pi x(n \pm m)}{p}\right)}{2\pi(m \pm n)} + c, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{-p}^p \sin\left(\frac{\pi x(n+m)}{p}\right) dx + \frac{1}{2} \int_{-p}^p \sin\left(\frac{\pi x(n-m)}{p}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-p \cos\left(\frac{\pi x(n+m)}{p}\right)}{2\pi(m+n)} \right) \Big|_{-p}^p + \frac{1}{2} \left(\frac{-p \cos\left(\frac{\pi x(n-m)}{p}\right)}{2\pi(m-n)} \right) \Big|_{-p}^p \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-p \cos\left(\frac{\pi p(n+m)}{p}\right)}{2\pi(m+n)} - \frac{-p \cos\left(\frac{\pi(-p)(n+m)}{p}\right)}{2\pi(m+n)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{-p \cos\left(\frac{\pi p(n-m)}{p}\right)}{2\pi(m-n)} - \frac{-p \cos\left(\frac{\pi(-p)(n-m)}{p}\right)}{2\pi(m-n)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-p \cos(\pi(n+m))}{2\pi(m+n)} - \frac{-p \cos(\pi(n+m))}{2\pi(m+n)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{-p \cos(\pi(n-m))}{2\pi(m-n)} - \frac{-p \cos(-\pi(n-m))}{2\pi(m-n)} \right) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} (0 - 0) = 0, \end{aligned}$$

pois a função cosseno é par. Logo $g(x)$ e $h(x)$ são ortogonais em $[-p, p]$. Para finalizarmos, precisamos mostrar que $\langle g, g' \rangle = \langle h, h' \rangle = 0$ quando g e g' diferem segundo o valor de n e h e h' segundo o valor de m . Note então que g, g', h e h' são elementos distintos do conjunto $\left\{1, \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right), \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right)\right\}$.

$$(iv) \langle g, g' \rangle = \int_{-p}^p \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \cos\left(\frac{n'\pi x}{p}\right) dx.$$

Já mostramos anteriormente que $\cos(n+k)x + \cos(n-k)x = 2 \cos nx \cos kx$, tal que n, k são inteiros quaisquer. Substituindo na integral acima temos

$$\int_{-p}^p \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \cos\left(\frac{n'\pi x}{p}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-p}^p \cos\left(\frac{\pi x(n+n')}{p}\right) dx + \frac{1}{2} \int_{-p}^p \cos\left(\frac{\pi x(n-n')}{p}\right) dx,$$

analogamente como já sabemos que $\int \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx = \frac{p \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)}{n\pi} + c$, então

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-p}^p \cos\left(\frac{\pi x(n+n')}{p}\right) dx + \frac{1}{2} \int_{-p}^p \cos\left(\frac{\pi x(n-n')}{p}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{p \sin\left(\frac{\pi x(n+n')}{p}\right)}{(n+n')\pi} \right) \Bigg|_{-p}^p + \frac{1}{2} \left(\frac{p \sin\left(\frac{\pi x(n-n')}{p}\right)}{(n-n')\pi} \right) \Bigg|_{-p}^p \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{p \sin\left(\frac{\pi p(n+n')}{p}\right)}{(n+n')\pi} - \frac{p \sin\left(\frac{\pi(-p)(n+n')}{p}\right)}{(n+n')\pi} \right) \\ & \quad + \frac{1}{2} \left(\frac{p \sin\left(\frac{\pi p(n-n')}{p}\right)}{(n-n')\pi} - \frac{p \sin\left(\frac{\pi(-p)(n-n')}{p}\right)}{(n-n')\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{p \sin(\pi(n+n'))}{(n+n')\pi} - \frac{p \sin(-\pi(n+n'))}{(n+n')\pi} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{p \sin(\pi(n-n'))}{(n-n')\pi} - \frac{p \sin(-\pi(n-n'))}{(n-n')\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2} (0 - 0) + \frac{1}{2} (0 - 0) = 0, \end{aligned}$$

pois $\sin(\pm\pi(n \pm n')) = 0$, seja quais forem os valores dos inteiros $n, n' \geq 0$. Logo $g(x)$ e $g(x)'$ são funções ortogonais em $[-p, p]$.

$$(v) \quad \langle h, h' \rangle = \int_{-p}^p \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right) \sin\left(\frac{m'\pi x}{p}\right) dx.$$

Considere a seguinte identidade trigonométrica

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[\cos(A+B) - \cos(A-B)] &= \frac{1}{2}[\cos A \cos B - \sin A \sin B - (\cos A \cos B + \sin A \sin B)] \\ &= -\frac{1}{2}[2 \sin A \sin B] = -\sin A \sin B \therefore \\ -\frac{1}{2}[\cos(A+B) - \cos(A-B)] &= \sin A \sin B.\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}&\int_{-p}^p \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right) \sin\left(\frac{m'\pi x}{p}\right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-p}^p \cos\left(\frac{\pi x(m+m')}{p}\right) + \frac{1}{2} \int_{-p}^p \cos\left(\frac{\pi x(m-m')}{p}\right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{p \sin\left(\frac{\pi x(m+m')}{p}\right)}{(m+m')\pi} \right) \Big|_{-p}^p + \frac{1}{2} \left(\frac{p \sin\left(\frac{\pi x(m-m')}{p}\right)}{(m-m')\pi} \right) \Big|_{-p}^p \\ &= -\frac{1}{2}(0-0) + \frac{1}{2}(0+0) = 0,\end{aligned}$$

ou seja, $h(x)$ e $h'(x)$ são funções ortogonais no intervalo em $[-p, p]$. Para normalizar o conjunto $\left\{1, \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right), \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right)\right\}$ calculemos a norma dos seguintes vetores

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad \|1\|^2 &= \int_{-p}^p 1 \cdot 1 dx = \int_{-p}^p dx = x \Big|_{-p}^p = p - (-p) = 2p \therefore \\ \|1\| &= \sqrt{2p}\end{aligned}$$

$$\text{(ii)} \quad \left\| \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \right\|^2 = \int_{-p}^p \left(\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \right)^2 dx.$$

Como $(\cos x)^2 = \frac{\cos(2x)+1}{2}$, então

$$\int_{-p}^p \left(\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \right)^2 dx = \int_{-p}^p \frac{\cos\left(\frac{2n\pi x}{p}\right)+1}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-p}^p \cos\left(\frac{2n\pi x}{p}\right) dx + \frac{1}{2} \int_{-p}^p dx.$$

Seendo $\int \cos\left(\frac{2n\pi x}{p}\right) dx = \frac{\sin\left(\frac{2n\pi x}{p}\right)}{\frac{2n\pi}{p}} = \frac{p \sin\left(\frac{2n\pi x}{p}\right)}{2n\pi} + c$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-p}^p \cos\left(\frac{2n\pi x}{p}\right) dx + \frac{1}{2} \int_{-p}^p dx &= \frac{1}{2} \left(\frac{p \sin 2nx\pi}{2n\pi} \Big|_{-p}^p \right) + \frac{1}{2} (x) \Big|_{-p}^p = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{p \sin 2n\pi}{2n\pi} - \frac{p \sin 2n(-p)\pi}{2n\pi} \right) + \frac{1}{2} (p - (-p)) = \frac{1}{2} (0 - 0) + \frac{1}{2} 2p = p. \end{aligned}$$

Segue então que $\left\| \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \right\| = \sqrt{p}$.

$$(iii) \left\| \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right) \right\|^2 = \int_{-p}^p \left(\sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right) \right)^2 dx.$$

Para resolvermos a integral $\int \left(\sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right) \right)^2 dx$, usamos a identidade trigonométrica $(\sin x)^2 = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. Assim

$$\int \left(\sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right) \right)^2 dx = \int \frac{1 - \cos\left(\frac{2m\pi x}{p}\right)}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos\left(\frac{2m\pi x}{p}\right) dx.$$

Por uma simples substituição chamamos $u = \frac{2m\pi x}{p} \Rightarrow du = \frac{2m\pi}{p} dx \therefore dx = \frac{p du}{2m\pi}$. Assim

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos\left(\frac{2m\pi x}{p}\right) dx &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos u \cdot \frac{p du}{2m\pi} = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{4m\pi} \int \cos u du = \\ &= \frac{x}{2} - \frac{\sin u}{4m\pi} + c = \frac{x}{2} - \frac{\sin\left(\frac{2m\pi x}{p}\right)}{4m\pi} + c. \end{aligned}$$

Então

$$\left\| \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right) \right\|^2 = \int_{-p}^p \left(\sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right) \right)^2 dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin\left(\frac{2m\pi x}{p}\right)}{4m\pi} \right) \Big|_{-p}^p$$

$$= \left(\frac{p}{2} - \frac{\sin\left(\frac{2m\pi p}{p}\right)}{4m\pi} \right) - \left(-\frac{p}{2} - \frac{\sin\left(\frac{2m\pi(-p)}{p}\right)}{4m\pi} \right) = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} - \frac{\sin 2m\pi}{4m\pi} + \frac{\sin 2m(-\pi)}{4m\pi} = p,$$

pois $\sin(\pm 2m\pi x) = 0$ seja qual for o valor do inteiro m . Logo

$$\left\| \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right) \right\|^2 = p \Rightarrow \left\| \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right) \right\| = \sqrt{p}.$$

Dividindo todos os elementos do conjunto $\left\{1, \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right), \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right)\right\}$, com $m, n = 0, 1, 2, \dots$, pela sua respectiva norma, obtemos o conjunto $\left\{\frac{1}{\sqrt{2p}}, \frac{\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)}{\sqrt{p}}, \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right)}{\sqrt{p}}\right\}$ ortonormal no intervalo $[-p, p]$.

5 SÉRIE DE FOURIER GENERALIZADA [4]

Considere um conjunto infinito de funções $F = \{f_0, f_1, \dots, f_i, \dots\}$, ($f_i \neq 0$) definidas e ortogonais em $[a, b]$ (com produto interno $\int_a^b f_i(x)f_j(x)dx = 0, i \neq j$) e seja $g(x)$ uma função qualquer definida em $[a, b]$, não necessariamente pertencente ao conjunto F . Como $F = \{f_0, f_1, \dots, f_i, \dots\}$ é ortogonal em $[a, b]$, tal conjunto forma uma base para a função $g(x)$. Logo $g(x)$ se escreve como uma combinação linear dos vetores $f_0, f_1, \dots, f_i, \dots$, com $i = 0, 1, 2, \dots$, ou seja, existem os números reais a_i tais que,

$$g(x) = a_0f_0 + a_1f_1 + a_2f_2 + \dots + a_if_i + \dots$$

que pode ser escrito como

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_if_i(x).$$

Para determinarmos os números reais a_i multiplicamos ambos os membros da equação acima por f_i (o que é possível pois $f_i \neq 0$). Então

$$g(x)f_i = a_0f_0f_i + a_1f_1f_i + a_2f_2f_i + \dots + a_if_if_i + \dots.$$

Integramos de a até b ambos os membros da equação obtida e separamos a integral do segundo membro em somas de integrais definidas, ou seja,

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x)f_idx &= \int_a^b a_0f_0f_idx + \int_a^b a_1f_1f_idx + \dots + \int_a^b a_if_if_idx + \dots \\ \int_a^b g(x)f_idx &= a_0 \int_a^b f_0f_idx + a_1 \int_a^b f_1f_idx + \dots + a_i \int_a^b f_if_idx + \dots \end{aligned}$$

Como o conjunto $F = \{f_0, f_1, \dots, f_i, \dots\}$ é ortogonal em $[a, b]$, segue que todas as integrais definidas acima são iguais a 0, com exceção da integral definida $\int_a^b f_if_idx$,

pois essa integral definida define um produto interno de dois vetores iguais, ou seja, $\int_a^b f_i f_i dx = 0 \Leftrightarrow f_i = 0$ e sabemos que $f_i \neq 0$. Daí

$$\int_a^b g(x) f_i dx = a_i \int_a^b f_i f_i dx \therefore$$

$$a_i = \frac{\int_a^b g(x) f_i dx}{\int_a^b f_i f_i dx} \therefore$$

$$a_i = \frac{\int_a^b g(x) f_i dx}{\|f_i\|^2}.$$

Aqui vale observar a clara semelhança de a_i com o coeficiente de Fourier $\frac{\langle v, w_i \rangle}{\|w_i\|^2}$ dado anteriormente na proposição 3.2.2 do capítulo 3 quando trabalhamos no espaço \mathbb{R}^n , já que a_i acima pode ser escrito da seguinte forma

$$a_i = \frac{\langle g(x), f_i \rangle}{\|f_i\|^2}.$$

Finalizando temos que

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle g(x), f_n \rangle}{\|f_n\|^2} f_n.$$

Suponhamos agora o conjunto de funções $\{f_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, definidas no intervalo $[a, b]$ tal que, $\langle f_i(x), f_j(x) \rangle = \int_a^b f_i(x) f_j(x) \neq 0$, ou seja, $f_i(x)$ e $f_j(x)$ não são ortogonais. Se adicionarmos uma função $w(x)$ ao integrando da integral definida e verificarmos que $\int_a^b w(x) f_i(x) f_j(x) = 0$, seja quais forem os valores de i e j , então o conjunto $\{f_n\}$ será chamado de ortogonal em relação a função $w(x)$ chamada de função peso no intervalo $[a, b]$.

Em seguida veremos a Série de Fourier para o conjunto $\left\{1, \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right), \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right)\right\}$. Já sabemos que o conjunto das funções reais de um conjunto não vazio A em \mathbb{R} , onde a soma é a soma usual de funções

$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in A$ e a multiplicação é a multiplicação de f por um escalar $a \in \mathbb{R}$ definida por $(af)(x) = af(x)$, é um espaço vetorial. Consideremos uma função $f(x)$ definida no intervalo $[-p, p]$. Tal função $f(x)$ é um vetor do espaço vetorial das funções reais definidas em $[-p, p]$ e como tal pode ser escrita como uma combinação linear do conjunto $\left\{1, \cos \frac{\pi x}{p}, \cos \frac{2\pi x}{p}, \dots, \sin \frac{\pi x}{p}, \sin \frac{2\pi x}{p}, \dots\right\}$ que já mostramos ser ortogonal no intervalo $[-p, p]$. Logo existem os reais $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ tais que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} \cdot 1 + a_1 \cdot \cos \frac{\pi x}{p} + a_2 \cdot \cos \frac{2\pi x}{p} + \dots + b_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{p} + b_2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{p} + \dots.$$

Justificaremos agora o motivo de tomarmos o coeficiente $\frac{a_0}{2}$ para o coeficiente da função constante 1. Para isso multipliquemos ambos os membros da igualdade acima por 1 (função constante pertencente ao conjunto). Assim

$$f(x) \cdot 1 = \frac{a_0}{2} \cdot 1 \cdot 1 + a_1 \cdot \cos \frac{\pi x}{p} \cdot 1 + \dots + b_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{p} \cdot 1 + \dots \quad (*).$$

Integramos de $-p$ ate p ambos os membros

$$\int_{-p}^p f(x) \cdot 1 dx = \int_{-p}^p \frac{a_0}{2} \cdot 1 \cdot 1 dx + \int_{-p}^p a_1 \cdot \cos \frac{\pi x}{p} \cdot 1 dx + \dots + \int_{-p}^p b_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{p} \cdot 1 dx + \dots.$$

Repare que no segundo membro todas as integrais definidas, com exceção da primeira, têm como resultado 0, pois no integrando as funções são ortogonais. Segue então que

$$\begin{aligned} \int_{-p}^p f(x) \cdot 1 dx &= \int_{-p}^p \frac{a_0}{2} \cdot 1 dx \\ &\Rightarrow \int_{-p}^p f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p dx \\ &\Rightarrow \int_{-p}^p f(x) dx = \frac{a_0}{2} (x]_{-p}^p) = \frac{a_0}{2} (p - (-p)) = \frac{a_0}{2} 2p = a_0 p \text{ (daí } \frac{a_0}{2} \text{)}. \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx = \frac{\langle f(x), 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle^2}.$$

De forma análoga, multiplicando ambos os membros da equação (*) por $\cos \frac{n\pi x}{p}$ (depois por $\sin \frac{n\pi x}{p}$), integrando de $-p$ ate p ambos os membros verificando que todas as integrais, com exceção da integral $\int_{-p}^p \left(\cos \frac{n\pi x}{p}\right)^2 dx$ $\left(\int_{-p}^p \left(\sin \frac{n\pi x}{p}\right)^2 dx\right)$, são iguais a zero, obtemos

$$\int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx = a_n \int_{-p}^p \left(\cos \frac{n\pi x}{p}\right)^2 dx$$

e

$$\int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx = b_n \int_{-p}^p \left(\sin \frac{n\pi x}{p}\right)^2 dx.$$

Segue que as integrais definidas $\int_{-p}^p \left(\cos \frac{n\pi x}{p}\right)^2 dx$ e $\int_{-p}^p \left(\sin \frac{n\pi x}{p}\right)^2 dx$ já foram resolvidas por substituição anteriormente e o resultado de ambas é p . Logo

$$\begin{aligned} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx &= a_n p \\ a_n &= \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx \\ a_n &= \frac{\int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx}{\left\| \cos \left(\frac{n\pi x}{p} \right) \right\|^2}, \end{aligned}$$

e

$$\int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx = b_n p$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx$$

$$b_n = \frac{\int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx}{\left\| \sin \left(\frac{n\pi x}{p} \right) \right\|^2}.$$

Com tudo já apresentado, podemos definir a Série de Fourier de uma função $f(x)$ definida num intervalo $[-p, p]$ como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right),$$

em que

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx, \quad b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx.$$

Exemplo 1 Expressar a função $f(x) = \begin{cases} -2, & -\pi < x < 0 \\ +2, & 0 < x < \pi \end{cases}$ como uma Série de Fourier.

Vamos determinar os coeficientes a_0, a_n e b_n da Série de Fourier. Neste caso estamos trabalhando em um intervalo $(-\pi, \pi) - \{0\}$. Sabemos que

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Como $f(x)$ é uma função definida por duas sentenças, dividimos a integral definida acima em duas outras integrais definidas, uma de $-\pi$ a 0 e a outra de 0 a π . Assim

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -2 dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2 dx$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} (-2x]_{-\pi}^0) + \frac{1}{\pi} (2x]_0^{\pi})$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}(-2 \cdot 0 - (-2 \cdot (-\pi))) + \frac{1}{\pi}(2 \cdot \pi - 2 \cdot 0)$$

$$\Rightarrow a_0 = -\frac{1}{\pi} \cdot 2\pi + \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi = 0.$$

Calculemos agora a_n

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

Novamente dividimos a integral definida acima em duas outras integrais definidas, uma de $-\pi$ a 0 e a outra de 0 a π . Assim

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -2 \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \cos nx dx$$

$$a_n = \frac{-2}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos nx dx + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx.$$

Como $\int \cos nx dx = \frac{\sin nx}{n} + c$, então

$$a_n = \frac{-2}{\pi} \left(\frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 \right) + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right)$$

$$a_n = \frac{-2}{\pi} \left(\frac{\sin 0}{n} - \frac{\sin n(-\pi)}{n} \right) + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin n\pi}{n} - \frac{\sin 0}{n} \right)$$

$$a_n = \frac{-2}{\pi} (0 - 0) + \frac{2}{\pi} (0 - 0)$$

$$a_n = 0$$

pois $\sin 0 = 0$ e $\sin n(-\pi) = \sin n\pi = 0$, qualquer que seja o valor do inteiro $n \geq 1$.

Calculemos b_n

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Novamente dividimos a integral definida acima em duas outras integrais definidas, uma de $-\pi$ a 0 e a outra de 0 a π . Assim

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -2 \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \sin nx dx$$

$$b_n = \frac{-2}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin nx dx + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx.$$

Como $\int \sin nx dx = \frac{-\cos nx}{n} + c$, então

$$b_n = \frac{-2}{\pi} \left(\frac{-\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 \right) + \frac{2}{\pi} \left(\frac{-\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right)$$

$$b_n = \frac{-2}{\pi} \left(\frac{-\cos 0}{n} - \frac{-\cos n(-\pi)}{n} \right) + \frac{2}{\pi} \left(\frac{-\cos n\pi}{n} - \frac{-\cos 0}{n} \right)$$

$$b_n = \frac{-2}{\pi} \left(-\frac{1}{n} + \frac{\cos(-n\pi)}{n} \right) + \frac{2}{\pi} \left(\frac{-\cos n\pi}{n} + \frac{1}{n} \right).$$

Sabemos que n é um inteiro, $n \geq 1$. Logo o valor de $\cos n\pi$ (ou $\cos(-n\pi)$) tem como resultado -1 ou $+1$ dependendo do valor de n , ou seja, para n ímpar $\cos n\pi = -1$ (ou $\cos(-n\pi) = -1$) e para n par $\cos n\pi = 1$ (ou $\cos(-n\pi) = 1$). Isso nos faz pensar que a expressão $\frac{\cos(\pm n\pi)}{n} = \frac{(-1)^n}{n}$. Logo

$$b_n = \frac{-2}{\pi} \left(-\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n} \right) + \frac{2}{\pi} \left(-\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n} \right)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n} \right) + \frac{2}{\pi} \left(-\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n} \right)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n} \right)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2}{n} - \frac{2 \cdot (-1)^n}{n} \right)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

$$b_n = \frac{4}{n\pi} (1 - (-1)^n).$$

Por fim

$$f(x) = \frac{0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(0 \cdot \cos \frac{n\pi x}{\pi} + \frac{4}{n\pi} (1 - (-1)^n) \cdot \sin \frac{n\pi x}{\pi} \right)$$

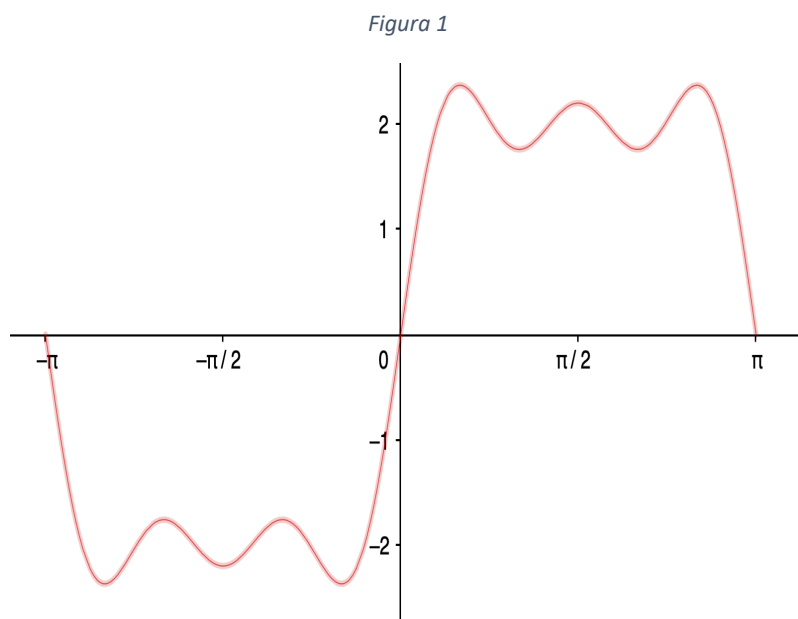
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} (1 - (-1)^n) \sin nx.$$

Atribuindo valores para n podemos “abrir” a série assim obtida. Ressaltamos que a expressão $1 - (-1)^n = 0$ se n é par e caso contrário $1 - (-1)^n = 2$. Daí

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \cdot 2 \cdot \sin x + 0 + \frac{4}{3\pi} \cdot 2 \cdot \sin 3x + 0 + \frac{4}{5\pi} \cdot 2 \cdot \sin 5x + 0 + \frac{4}{7\pi} \cdot 2 \cdot \sin 7x + \dots$$

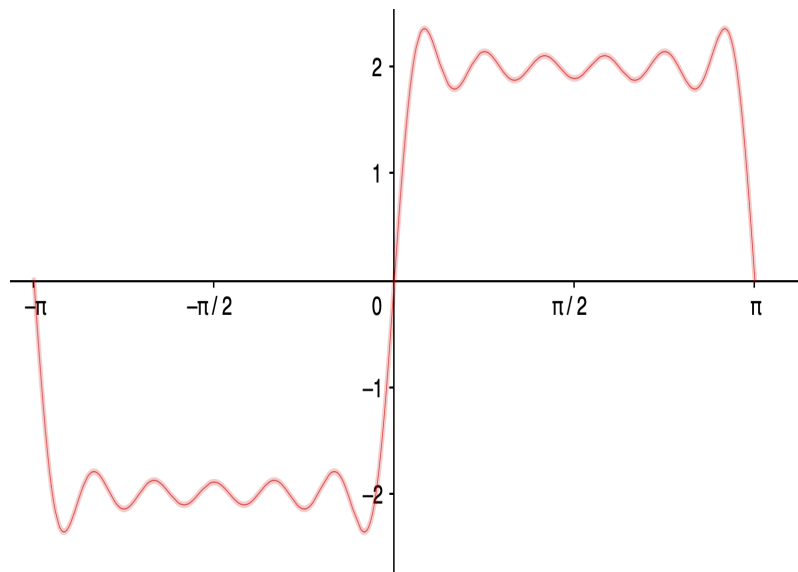
$$f(x) = \frac{8 \sin x}{\pi} + \frac{8 \sin 3x}{3\pi} + \frac{8 \sin 5x}{5\pi} + \frac{8 \sin 7x}{7\pi} + \dots$$

Com a ajuda de programas computacionais podemos plotar gráficos da função $f(x)$ dada pela Série de Fourier encontrada acima. Observe pelos gráficos obtidos abaixo que quanto maior o valor n , mais o gráfico da função descrita pela Série de Fourier se aproxima do gráfico da função original definida por duas sentenças. Para $n = 5$ e $n = 11$ temos os respectivos gráficos



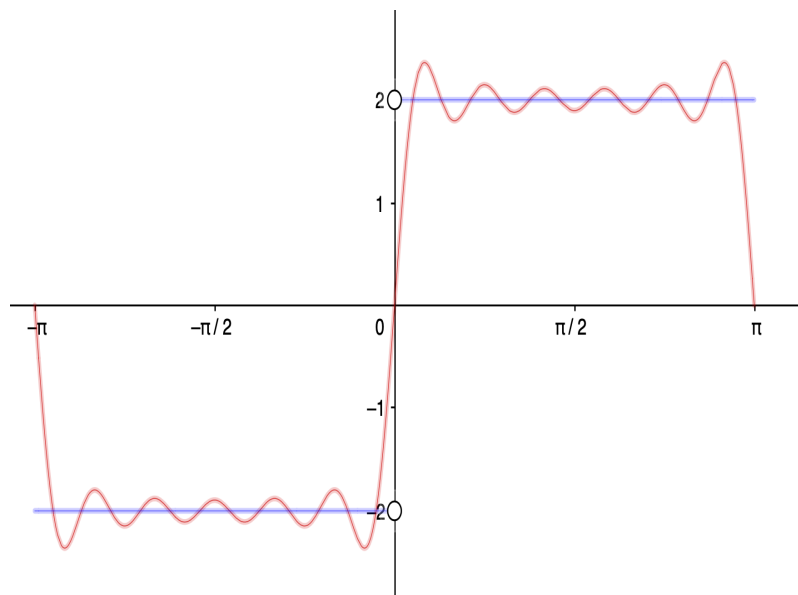
Fonte: Próprio autor (2021)

Figura 2



Fonte: Próprio autor (2021)

Figura 3



Fonte: Próprio autor (2021)

Consideremos agora uma função $f(x)$ periódica com período $2p$. Para ficar bem claro o comentário que se segue, chamaremos de $g(x)$ a função expressa pela Série de Fourier corresponde a $f(x)$. É natural nos perguntarmos se a função $g(x)$ converge

para a função $f(x)$ (não expressa pela Série de Fourier). No gráfico anterior percebemos que em $x = 0$ isso não acontece, pois $g(x) = 0$, enquanto que na função $f(x) = \begin{cases} -2, & -\pi < x < 0 \\ 2, & 0 < x < \pi \end{cases}$, $f(0)$ não existe. Logo funções dadas pela Série de Fourier nem sempre convergem para o valor da função em determinados pontos. Mas podemos determinar o ponto de convergência de $g(x)$ se pensarmos em funções seccionalmente contínuas. Considere então uma função $f(x)$ definida em um intervalo $[a, b]$ e considere também um número de pontos finitos x_i pertencentes a este intervalo tal que, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Então esses pontos determinarão n subintervalos fechados do tipo $[x_{i-1}, x_i]$. Se em cada um deles a função for contínua e os limites laterais nas extremidades em cada um deles existirem, diremos que a função é uma função seccionalmente contínua. No gráfico do exemplo anterior se tomarmos como exemplo um subintervalo do tipo $[x_{i-1}, x_i]$, verificaremos que a função dada nesse subintervalo é seccionalmente contínua. Se pensarmos que $x_{i-1} < 0$ e $x_i > 0$, verificaremos que apesar dos extremos possuírem sinais diferentes a função é seccionalmente contínua nesse subintervalo, pois dado um ponto a qualquer distinto dos extremos de $[x_{i-1}, x_i]$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$. Logo a função dada no exemplo 1 é seccionalmente contínua. Podemos então enunciar o seguinte teorema para a Série de Fourier, chamado Teorema da Convergência.

5.1 Teorema da Convergência [9]

Se existe uma função periódica de período $2p$ tal que, $f(x)$ e $f'(x)$ são seccionalmente contínuas no intervalo $[-p, p]$, então a Série de Fourier dada por $g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$, tal que $a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx$, $a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx$ e $b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx$, está bem definida e $g(x) = \frac{1}{2} \left[\lim_{c \rightarrow x^+} f(c) + \lim_{c \rightarrow x^-} f(c) \right]$.

Exemplificando, vamos tomar o gráfico da **figura 3** aonde aparecem o gráfico da função $f(x)$ e o gráfico da corresponde Série de Fourier $g(x)$. Temos que no ponto

em que $c = 0$, $\lim_{c \rightarrow 0^+} f(c) = 2$ e $\lim_{c \rightarrow 0^-} f(c) = -2$. Nesse ponto $g(0) = \frac{1}{2} \left[\lim_{c \rightarrow 0^+} f(c) + \lim_{c \rightarrow 0^-} f(c) \right] = \frac{1}{2} [2 + (-2)] = 0$.

5.2 Série de Fourier do Cosseno e do Seno

Funções pares e funções ímpares

Definição Considere uma função $f(x)$ de domínio \mathcal{D} . Dizemos que uma função é

- i) par quando $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathcal{D}$,
- ii) ímpar quando $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathcal{D}$.

Como exemplo temos que as funções $h(x) = x^2$ e $f(x) = \cos x$ são funções pares enquanto que as funções $g(x) = x^3$ e $t(x) = \sin x$ são funções ímpares.

Propriedades

- i) Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções pares, então $f(x)g(x)$ é par.

De fato. Seja $h(x) = f(x)g(x)$. Como $f(x) = f(-x)$ e $g(x) = g(-x)$, então $h(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = h(x)$.

- ii) Se $f(x)$ é uma função par e $g(x)$ é ímpar, então $f(x)g(x)$ é ímpar.

De fato. Seja $h(x) = f(x)g(x)$. Como $f(x) = f(-x)$ e $g(x) = -g(-x)$, então $h(x) = f(-x)(-g(-x)) = -[f(-x)g(-x)] = -h(-x)$.

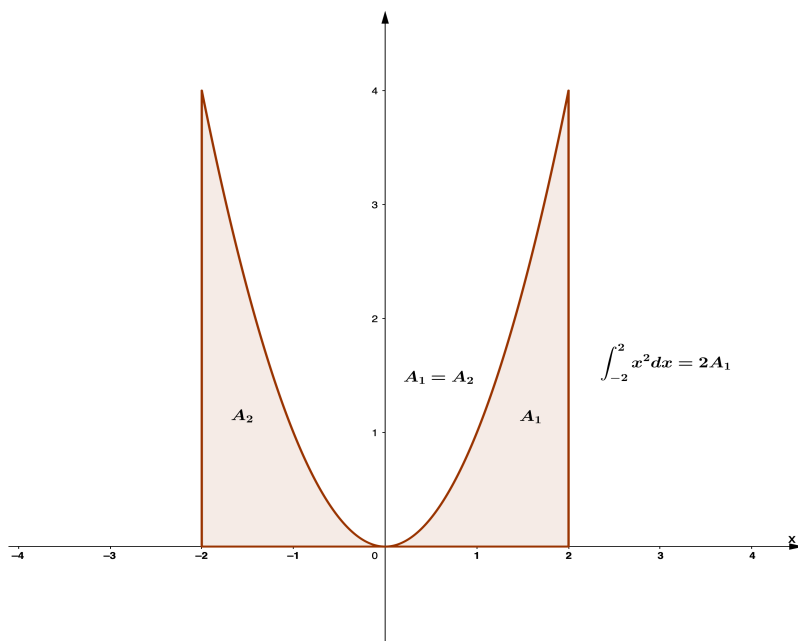
- iii) Se $f(x)$ é uma função ímpar e $g(x)$ é ímpar, então $f(x)g(x)$ é par.

De fato. Seja $h(x) = f(x)g(x)$. Como $f(x) = -f(-x)$ e $g(x) = -g(-x)$, então $h(x) = f(x)g(x) = (-f(-x))(-g(-x)) = f(-x)g(-x) = h(-x)$.

Uma função pode não ser par e nem ímpar. É o caso da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Neste caso $f(x) \neq f(-x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$. Por não ser par e nem ímpar a função é uma função sem paridade.

Interpretamos a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ como a área da região do plano delimitada pelo gráfico da função $f(x)$, pelas retas $x = a, x = b$ e pelo eixo x . Uma observação interessante das integrais definidas é quando integramos essas integrais em intervalos simétricos, por exemplo de $-p$ a p , pois podemos dividir o cálculo da integral definida em outras duas, uma de $-p$ a 0 e a outra de 0 a p . Então quando a função do integrando é par e o intervalo de integração é simétrico, estamos diante da soma de duas áreas iguais em termos de valor absoluto, ou seja, $\int_{-p}^p f(x)dx = \int_{-p}^0 f(x)dx + \int_0^p f(x)dx = 2 \cdot \int_0^p f(x)dx$. Vejamos o gráfico para a função $f(x) = x^2$ no intervalo $[-2, 2]$.

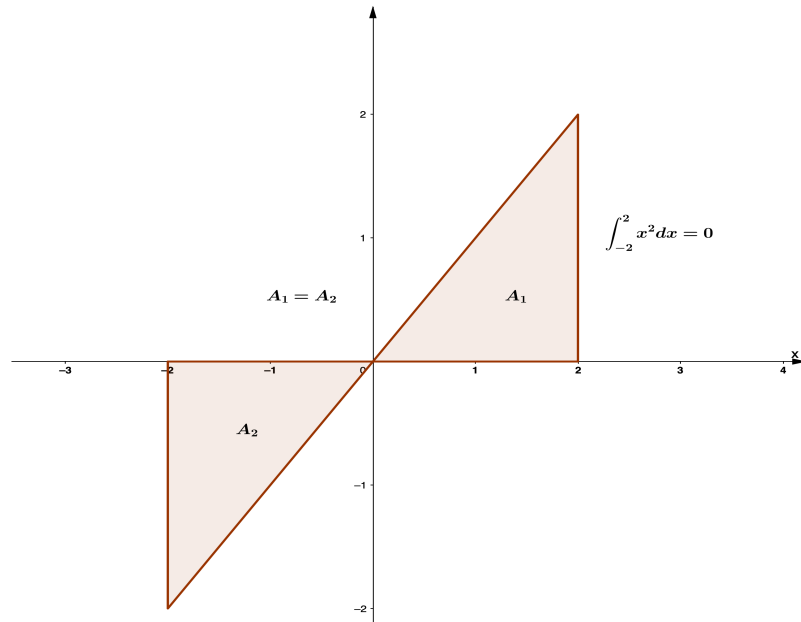
Figura 4



Fonte: Próprio autor (2021)

Quando a função do integrando é ímpar e o intervalo de integração é simétrico, estamos diante da diferença de duas áreas iguais em termos de valor absoluto, ou seja, $\int_{-p}^p f(x)dx = \int_{-p}^0 f(x)dx + \int_0^p f(x)dx = 0$, pois $\int_0^p f(x)dx = -\int_{-p}^0 f(x)dx$. Como exemplo temos a função $f(x) = x^3$ e $f(x) = x$. Vejamos o gráfico para a função $f(x) = x$ no intervalo $[-2, 2]$.

Figura 5



Fonte: Próprio autor (2021)

Voltemos agora para a Série de Fourier e suponhamos que exista uma função $f(x)$ que satisfaça as condições do Teorema da Convergência. Então

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right),$$

em que

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx, \quad b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx.$$

Temos então os seguintes casos para o cálculo de a_0 , a_n e b_n em que o integrando $f(x)$ é uma função

1) **Par**

i) $a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx = \frac{1}{p} \cdot 2 \int_0^p f(x) dx = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) dx$, pois $f(x)$ é função par.

ii) $a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx$. Como $f(x)$ é par e $\cos \frac{n\pi x}{p}$ é par, então o produto $f(x) \cos \frac{n\pi x}{p}$ é par. Assim $a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx \therefore a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx$.

iii) $b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx$. Como $f(x)$ é par e $\sin \frac{n\pi x}{p}$ é ímpar, então $f(x) \sin \frac{n\pi x}{p}$ é ímpar. Logo $b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx = 0$.

Neste caso então chegamos a conclusão que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} \right),$$

em que $a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) dx$, $a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx$ e $b_n = 0$.

2) Ímpar

i) $a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx = 0$, pois $f(x)$ é uma função ímpar.

ii) $a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx$. Como $f(x)$ é ímpar e $\cos \frac{n\pi x}{p}$ é par, então o produto $f(x) \cos \frac{n\pi x}{p}$ é ímpar. Logo $a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx = 0$.

iii) $b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx$. Como $f(x)$ é ímpar e $\sin \frac{n\pi x}{p}$ é ímpar, então o produto $f(x) \sin \frac{n\pi x}{p}$ é par. Logo $b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx \Rightarrow b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx$.

Neste caso então chegamos a conclusão que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

$$f(x) = \frac{0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right),$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

Em que $a_0 = 0$, $a_n = 0$ e $b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx$.

Exemplo 2 Expressar a função $f(x) = x^3$ definida no intervalo $-2 < x < 2$ como uma Série de Fourier.

Percebemos de imediato que a função $f(x) = x^3$ é ímpar, pois para todo x , $f(x) = -f(-x)$. Então pelo caso 2), precisamos apenas calcular $b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx$, com $p = 2$. Então

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx$$

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 x^3 \sin \frac{n\pi x}{2} dx$$

$$b_n = \int_0^2 x^3 \sin \frac{n\pi x}{2} dx.$$

Vamos integrar $\int x^3 \sin \frac{n\pi x}{2} dx$ por partes. Sabemos que a integral de $\int u dv = uv - \int v du$. Se $u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx$ e se $dv = \sin \frac{n\pi x}{2} dx \Rightarrow v = \frac{-2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2}$.

Logo

$$\int x^3 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{-2x^3}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} - \int -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \cdot 3x^2 dx$$

$$\int x^3 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{-2x^3}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{6}{n\pi} \int x^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx. (1)$$

Precisamos agora resolver a integral $\int x^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx$. Novamente resolvemos por partes. Se $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$ e se $dv = \cos \frac{n\pi x}{2} dx \Rightarrow v = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2}$. Assim

$$\int x^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2x^2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} - \int 2x \cdot \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} dx$$

$$\int x^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2x^2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} - \frac{4}{n\pi} \int x \sin \frac{n\pi x}{2} dx. (2)$$

Precisamos agora resolver a integral $\int x \sin \frac{n\pi x}{2} dx$. Novamente resolvemos por partes.

Se $u = x \Rightarrow du = dx$ e se $dv = \sin \frac{n\pi x}{2} dx \Rightarrow v = \frac{-2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2}$. Assim

$$\int x \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{-2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} - \int -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} dx$$

$$\int x \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{-2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{2}{n\pi} \int \cos \frac{n\pi x}{2} dx$$

$$\int x \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{-2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{2}{n\pi} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}$$

$$\int x \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{-2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2 \pi^2} \cdot \sin \frac{n\pi x}{2} (3).$$

Substituindo (2) em (1)

$$\int x^3 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{-2x^3}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{6}{n\pi} \left[\frac{2x^2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} - \frac{4}{n\pi} \int x \sin \frac{n\pi x}{2} dx \right]$$

$$= \frac{-2x^3}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{12x^2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} - \frac{24}{n^2 \pi^2} \int x \sin \frac{n\pi x}{2} dx. (4)$$

Substituindo (3) em (4)

$$\int x^3 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{-2x^3}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{12x^2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} - \frac{24}{n^2 \pi^2} \left[\frac{-2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2 \pi^2} \cdot \sin \frac{n\pi x}{2} \right]$$

$$= \frac{-2x^3}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{12x^2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} + \frac{48x}{n^3 \pi^3} \cos \frac{n\pi x}{2} - \frac{96}{n^4 \pi^4} \sin \frac{n\pi x}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos \frac{n\pi x}{2} \left(\frac{48x}{n^3\pi^3} - \frac{2x^3}{n\pi} \right) + \sin \frac{n\pi x}{2} \left(\frac{12x^2}{n^2\pi^2} - \frac{96}{n^4\pi^4} \right) \\
&= \left(\frac{48x - 2x^3n^2\pi^2}{n^3\pi^3} \right) \cos \frac{n\pi x}{2} + \left(\frac{12x^2n^2\pi^2 - 96}{n^4\pi^4} \right) \sin \frac{n\pi x}{2} \therefore \\
\int x^3 \sin \frac{n\pi x}{2} dx &= \left(\frac{48n\pi x - 2n^3\pi^3x^3}{n^4\pi^4} \right) \cos \frac{n\pi x}{2} + \left(\frac{12n^2\pi^2x^2 - 96}{n^4\pi^4} \right) \sin \frac{n\pi x}{2}.
\end{aligned}$$

Por fim

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_0^2 x^3 \sin \frac{n\pi x}{2} dx \\
b_n &= \left(\left(\frac{48n\pi x - 2x^3n^3\pi^3}{n^4\pi^4} \right) \cos \frac{n\pi x}{2} + \left(\frac{12x^2n^2\pi^2 - 96}{n^4\pi^4} \right) \sin \frac{n\pi x}{2} \right) \Big|_0^2 \\
b_n &= \left(\frac{48n2\pi - 2 \cdot 2^3n^3\pi^3}{n^4\pi^4} \right) \cos \frac{n\pi 2}{2} + \left(\frac{12 \cdot 2^2n^2\pi^2 - 96}{n^4\pi^4} \right) \sin \frac{n\pi 2}{2} \\
&\quad - \left(\frac{48n0\pi - 2 \cdot 0^3n^3\pi^3}{n^4\pi^4} \cos \frac{n\pi 0}{2} + \frac{12 \cdot 0^2n^2\pi^2 - 96}{n^4\pi^4} \sin \frac{n\pi 0}{2} \right) \\
b_n &= \frac{96n\pi - 16n^3\pi^3}{n^4\pi^4} \cos n\pi + \frac{48n^2\pi^2 - 96}{n^4\pi^4} \sin n\pi - \left(0 \cdot \cos 0 - \frac{96}{n^4\pi^4} \right) \sin 0 \\
b_n &= \frac{96n\pi - 16n^3\pi^3}{n^4\pi^4} \cos n\pi + \frac{48n^2\pi^2 - 96}{n^4\pi^4} \sin n\pi.
\end{aligned}$$

Como $\sin n\pi = 0$ para todo n inteiro positivo e $\cos n\pi = (-1)^n$, então

$$b_n = \frac{96n\pi - 16n^3\pi^3}{n^4\pi^4} (-1)^n$$

e

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{96n\pi - 16n^3\pi^3}{n^4\pi^4} \cdot (-1)^n \sin \frac{n\pi x}{2} \right).$$

5.4 Fenômeno de Gibbs

Considere a função $f(x) = \begin{cases} -2, & -\pi < x < 0 \\ +2, & 0 < x < \pi \end{cases}$ e sua respectiva Série de Fourier $g(x)$. Mostramos no exemplo 1 anterior que $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} (1 - (-1)^n) \sin nx$ e ficou bem claro neste exemplo que, quanto maior o valor de n , mais $g(x)$ se aproxima de $f(x)$. Por exemplo vamos tomar $n = 3$ e $n = 5$. Temos então

$$g(x)_5 = \frac{8 \sin x}{\pi} + \frac{8 \sin 3x}{3\pi} + \frac{8 \sin 5x}{5\pi}$$
$$g(x)_7 = \frac{8 \sin x}{\pi} + \frac{8 \sin 3x}{3\pi} + \frac{8 \sin 5x}{5\pi} + \frac{8 \sin 7x}{7\pi}.$$

Para $x = \frac{\pi}{2}$, temos facilmente $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Com o uso de uma calculadora científica calculemos $g_5\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e $g_7\left(\frac{\pi}{2}\right)$, ou seja

$$g_5\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8 \sin \frac{\pi}{2}}{\pi} + \frac{8 \sin 3\frac{\pi}{2}}{3\pi} + \frac{8 \sin 5\frac{\pi}{2}}{5\pi} = 2,21$$
$$g_7\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8 \sin \frac{\pi}{2}}{\pi} + \frac{8 \sin 3\frac{\pi}{2}}{3\pi} + \frac{8 \sin 5\frac{\pi}{2}}{5\pi} + \frac{8 \sin 7\frac{\pi}{2}}{7\pi} = 1,84$$

Assim, podemos pensar nos seguintes erros de aproximação relativos

$$\left| f\left(\frac{\pi}{2}\right) - g_5\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| = |2 - 2,21| = 0,21$$

$$\left| f\left(\frac{\pi}{2}\right) - g_7\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| = |2 - 1,84| = 0,16.$$

Se aumentarmos expressivamente o valor de n , por exemplo $n = 15$ e $n = 21$ e fizermos os devidos cálculos, encontraremos

$$g_{15}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8 \sin \frac{\pi}{2}}{\pi} + \frac{8 \sin 3\frac{\pi}{2}}{3\pi} + \frac{8 \sin 5\frac{\pi}{2}}{5\pi} + \frac{8 \sin 7\frac{\pi}{2}}{7\pi} + \frac{8 \sin 9\frac{\pi}{2}}{9\pi} + \frac{8 \sin 11\frac{\pi}{2}}{11\pi} + \frac{8 \sin 13\frac{\pi}{2}}{13\pi}$$
$$+ \frac{8 \sin 15\frac{\pi}{2}}{15\pi} = 1,92 \text{ e}$$

$$g_{21}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8 \sin \frac{\pi}{2}}{\pi} + \frac{8 \sin 3 \frac{\pi}{2}}{3\pi} + \frac{8 \sin 5 \frac{\pi}{2}}{5\pi} + \frac{8 \sin 7 \frac{\pi}{2}}{7\pi} + \frac{8 \sin 9 \frac{\pi}{2}}{9\pi} + \frac{8 \sin 11 \frac{\pi}{2}}{11\pi} + \frac{8 \sin 13 \frac{\pi}{2}}{13\pi} \\ + \frac{8 \sin 15 \frac{\pi}{2}}{15\pi} + \frac{8 \sin 17 \frac{\pi}{2}}{17\pi} + \frac{8 \sin 19 \frac{\pi}{2}}{19\pi} + \frac{8 \sin 21 \frac{\pi}{2}}{21\pi} = 2,06,$$

portanto

$$\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right) - g_{15}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = |2 - 1,92| = 0,08$$

$$\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right) - g_{21}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = |2 - 2,06| = 0,06.$$

Vejamos agora o que acontece se fizermos os mesmo cálculos feitos até aqui, porém num ponto x mais próximo da descontinuidade da função $f(x)$, por exemplo $x = 0,15$.

Assim

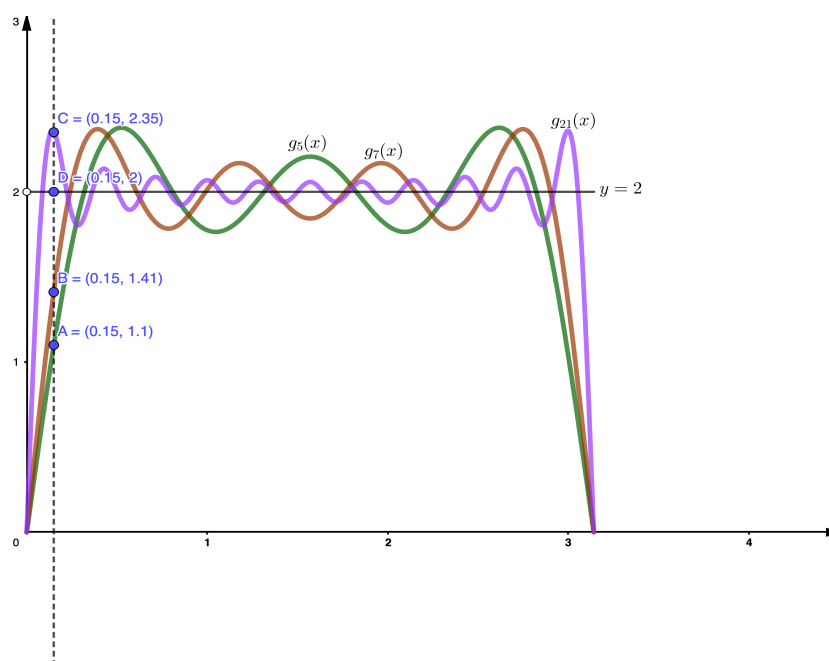
$$|f(0,15) - g_5(0,15)| = |2 - 1,10| = 0,90$$

$$|f(0,15) - g_7(0,15)| = |2 - 1,41| = 0,59$$

$$|f(0,15) - g_{21}(0,15)| = |2 - 2,35| = 0,35.$$

Considere o gráfico

Figura 6



Fonte: Próprio autor (2021)

Pelo resultados acima somos levados a pensar que quando maior o valor de n menor o erro no ponto $x = 0,15$. Para o que iremos falar agora, o gráfico acima enfatiza apenas a parte do gráfico de $f(x)$ compreendida no intervalo $0 < x < \pi$ para efeito de estudo. Para a parte em que $-\pi < x < 0$ o mesmo pode ser feito. Considere então as Séries de Fourier $g_5(x)$, $g_7(x)$ e $g_{21}(x)$ e seus respectivos valores $g_5(0,15)$, $g_7(0,15)$ e $g_{21}(0,15)$. Temos então os seguintes pontos determinados: $A = (0,15; 1,1)$, $B = (0,15; 1,41)$ e $C = (0,15; 2,35)$. O ponto $D = (0,15; 2)$ pertence ao gráfico de $f(x)$. Observamos que todos estes pontos estão sobre a reta $x = 0,15$ e portanto eles são colineares. Pensando em segmentos percebemos claramente que $\overline{AD} > \overline{BD} > \overline{CD}$, ou seja, o ponto C é aquele que está mais próximo do ponto D pertencente à $y = 2$. Então, se continuarmos aumentando os valores de n , será que os pontos obtidos na reta $x = 0,15$ estarão de fato mais próximos da reta $y = 2$? Quem dá a resposta para essa pergunta é o famoso **Fenômeno de Gibbs** que é dado pelo seguinte teorema

Teorema Dada uma Série de Fourier $g(x)$ correspondente a uma função $f(x)$, há um limite para a aproximação de $g_n(x)$ em relação a $f(x)$ nas proximidades das descontinuidades, ficando o erro absoluto em torno de 9 %.

Ou seja, para o nosso gráfico anterior, segmentos da forma \overline{XD} permanecerão praticamente com o mesmo comprimento tal que, o ponto X (próximo da descontinuidade em $x = 0$) é obtido aumentando n e calculando $g_n(0,15)$.

Consideremos novamente a função dada no exemplo anterior $f(x) = \begin{cases} -2, & -\pi < x < 0 \\ +2, & 0 < x < \pi \end{cases}$, $g(x)$ a Série de Fourier correspondente a função $f(x)$ e chamemos de $S_N(x)$ a sequência das somas parciais, ou seja, a soma dos primeiros N termos

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{4}{n\pi} (1 - (-1)^n) \sin nx$$

$$S_N(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\sin nx}{n}.$$

Como para n par $\frac{\sin nx}{n} = 0$, podemos afirmar que

$$S_N(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\sin nx}{n} = \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^N \frac{\sin(2m+1)x}{2m+1}, m = 0, 1, 2 \dots$$

$$S_N(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^N \frac{\sin(2m+1)x}{2m+1}.$$

Portanto estamos diante da Série de Fourier da função $f(x)$ mas com a soma de N termos. Então é natural pensar, segundo o teorema dado, que perto da descontinuidade da função, mesmo aumentando o valor de n , os segmentos de extremos $f(a)$ e $S_N(a)$, tal que a é um ponto crítico de $S_N(x)$, praticamente não alteram seu comprimento. Assim $S'_N(a) = 0$. Calculemos a partir de agora os pontos críticos de $S_N(x)$ no intervalo de $(0, \pi)$. Derivando $S_N(x)$ encontramos

$$S_N(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^N \frac{\sin(2m+1)x}{2m+1}$$

$$S'_N(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^N \frac{1}{2m+1} \cdot \cos(2m+1)x \cdot (2m+1) =$$

$$S'_N(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^N \cos(2m+1)x.$$

Encontrar $S'_N(x) = 0$ é muito trabalhoso. Mas podemos calcular $S'_N(x) = 0$ usando a fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. A parte real de $e^{i\theta}$ será denotada por $\cos \theta = \operatorname{Re} \{e^{i\theta}\}$. Dessa forma

$$S'_N(x) = \frac{8}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=0}^N e^{i(2m+1)x} \right\} = \frac{8}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=0}^N e^{2mix} \cdot e^{ix} \right\}$$

$$S'_N(x) = \frac{8}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ e^{ix} \sum_{m=0}^N e^{2mix} \right\} (*), \text{ pois } e^{ix} \text{ independe de } n.$$

Considere agora a série geométrica

$$\sum_{m=0}^N r^m = \frac{r^N - 1}{r - 1}.$$

Substituindo r por e^{2ix} na série geométrica, ficamos com (*) da seguinte forma

$$S'_N(x) = \frac{8}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{ix} [(e^{2ix})^N - 1]}{(e^{2ix} - 1)} \right\}$$

$$S'_N(x) = \frac{8}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{ix} [e^{Nix}(e^{Nix} - e^{-Nix})]}{e^{ix}(e^{ix} - e^{-ix})} \right\}$$

$$S'_N(x) = \frac{8}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{Nix}(e^{Nix} - e^{-Nix})}{(e^{ix} - e^{-ix})} \right\}.$$

Uma outra igualdade que nos ajudará é $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ que implica $2i \sin x = e^{ix} - e^{-ix}$. Substituindo nas expressões $(e^{Nix} - e^{-Nix})$ e $(e^{ix} - e^{-ix})$ de $S'_N(x)$ obtemos

$$S'_N(x) = \frac{8}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{Nix} 2i \sin Nx}{2i \sin x} \right\}$$

$$S'_N(x) = \frac{8}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{Nix} \sin Nx}{\sin x} \right\}.$$

Usando novamente a relação de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ para e^{Nix} , ficamos com

$$S'_N(x) = \frac{8}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{(\cos Nx + i \sin Nx) \sin Nx}{\sin x} \right\}.$$

Analisando a igualdade acima, como queremos apenas a parte real de $\left\{ \frac{(\cos Nx + i \sin Nx) \sin Nx}{\sin x} \right\}$, teremos

$$S'_N(x) = \frac{8}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\cos Nx \sin Nx}{\sin x} \right\}$$

$$S'_N(x) = \frac{4 \cdot 2}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\cos Nx \sin Nx}{\sin x} \right\}$$

$$S'_N(x) = \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{2 \cos Nx \sin Nx}{\sin x} \right\}$$

$$S'_N(x) = \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\sin 2Nx}{\sin x} \right\}.$$

Achemos agora os valores de x tais que $\sin 2Nx = 0$, pois nestes pontos $S'_N(x) = 0$.

Isso acontece quando $2Nx = k\pi, k = 0, 1, 2, \dots$, ou seja, $x = \frac{k\pi}{2N}$. Daí

$k = 0 \Rightarrow x = 0$ (esse valor não tem sentido, pois $f(0)$ não é definido)

$$k = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2N}$$

Logo $S'_N\left(\frac{\pi}{2N}\right) = 0$. Calculemos agora o valor de $S_N(x)$ para $x = \frac{\pi}{2N}$.

$$S_N\left(\frac{\pi}{2N}\right) = \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^N \frac{\sin\left[(2m+1)\frac{\pi}{2N}\right]}{2m+1}, m = 0, 1, 2, \dots.$$

Se $\alpha_m = (2m+1)\frac{\pi}{2N} \Rightarrow (2m+1) = \frac{2N\alpha_m}{\pi}$. Segue então que

$$S_N\left(\frac{\pi}{2N}\right) = \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^N \frac{\sin \alpha_m}{\frac{2N\alpha_m}{\pi}}$$

$$S_N\left(\frac{\pi}{2N}\right) = \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^N \frac{\sin \alpha_m}{\alpha_m} \cdot \frac{\pi}{2N}$$

$$S_N\left(\frac{\pi}{2N}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^N \frac{\sin \alpha_m}{\alpha_m} \frac{\pi}{N}.$$

Se $N \rightarrow +\infty \Rightarrow S_N\left(\frac{\pi}{2N}\right) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$. Vamos explicar com mais clareza essa última afirmação. Uma Soma de Riemann é expressa por

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N f(\xi_i) \Delta_i x, \text{ onde } \xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \text{ e } \Delta_i x = x_{i+1} - x_i, i=0, 1, \dots$$

e define-se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N f(\xi_i) \Delta_i x = \int_a^b f(x) dx.$$

O comprimento de cada subintervalo $[\alpha_m, \alpha_{m+1}]$ é exatamente $\frac{\pi}{N}$, pois

$$\alpha_{m+1} - \alpha_m = (2(m+1) + 1) \frac{\pi}{2N} - (2m + 1) \frac{\pi}{2N}$$

$$\alpha_{m+1} - \alpha_m = (2m + 3) \frac{\pi}{2N} - (2m + 1) \frac{\pi}{2N}$$

$$\alpha_{m+1} - \alpha_m = \frac{\pi}{2N} (2m + 3 - 2m - 1)$$

$$\alpha_{m+1} - \alpha_m = \frac{\pi}{2N} \cdot 2$$

$$\alpha_{m+1} - \alpha_m = \frac{\pi}{N}.$$

Se N tende a $+\infty$, $\sum_{m=0}^N \frac{\sin \alpha_m \pi}{\alpha_m N}$ corresponde a soma de infinitos retângulos de base

$\alpha_{m+1} - \alpha_m = \frac{\pi}{N}$ ($\frac{\pi}{N} = \Delta_i x$) e altura $\frac{\sin(\xi_i)}{(\xi_i)}$ onde $\xi_i \in [\alpha_m, \alpha_{m+1}]$. Logo

$$S_N \left(\frac{\pi}{2N} \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^N \frac{\sin \alpha_m \pi}{\alpha_m N} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \therefore S_N \left(\frac{\pi}{2N} \right) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

Como $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots$, então

$$S_N \left(\frac{\pi}{2N} \right) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots}{x} \right) dx$$

$$S_N \left(\frac{\pi}{2N} \right) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \frac{x^{10}}{11!} + \dots \right) dx$$

$$S_N \left(\frac{\pi}{2N} \right) = \frac{4}{\pi} \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \frac{x^9}{9 \cdot 9!} - \frac{x^{11}}{11 \cdot 11!} + \dots \right) \Bigg|_0^{\pi}$$

$$S_N \left(\frac{\pi}{2N} \right) = \frac{4}{\pi} \left(\pi - \frac{\pi^3}{3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{5 \cdot 5!} - \frac{\pi^7}{7 \cdot 7!} + \frac{\pi^9}{9 \cdot 9!} - \frac{\pi^{11}}{11 \cdot 11!} + \dots \right) - 0$$

$$S_N \left(\frac{\pi}{2N} \right) \cong 2,35549$$

Logo a diferença entre $S_N \left(\frac{\pi}{2N} \right) - f \left(\frac{\pi}{2N} \right) \cong 2,35549 - 2 \cong 0,35549$. Como $f(x) = 2$

e $f(x) = -2$, então a amplitude de $f(x)$ é $2 - (-2) = 4$. Por fim $\frac{0,35549}{4} = 0,088872 = 8,89\%$, como sugere o Fenômeno de Gibbs.

6 EQUAÇÕES A DERIVADAS PARCIAIS [5]

Quando existe uma equação diferencial em que a função u a se determinar tem mais de uma incógnita, ou seja, a função incógnita u tem duas ou mais variáveis, a equação diferencial é chamada de equação a derivadas parciais. Para o exemplo que se segue considere as condições de contorno $u(0, t) = t$ e $u(2, t) = 2t^4$, que nada mais são do que os valores de $u(x, t)$ em pontos diferentes.

Exemplo 1 Determinar a função $u(x, t)$ sabendo que

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = xt.$$

As condições de contorno são funções de t . Portanto em $x = 0$, $u(0, t)$ é t enquanto que em $x = 2$, $u(2, t) = 2t^4$. Assim

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = xt \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 6xt.$$

Logo integramos membro a membro em relação a x e obtemos

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 6 \frac{x^2}{2} t + r_1(t) \Leftrightarrow \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 3x^2 t + r_1(t),$$

$r_1(t)$ é uma constante. Integrando novamente em relação a x obtemos

$$u(x, t) = 3 \frac{x^3}{3} t + r_1(t)x + r_2(t)$$

$$u(x, t) = x^3 t + r_1(t)x + r_2(t).$$

Como $u(0, t) = t$, então

$$t = 0^3 t + r_1(t)0 + r_2(t)$$

$$r_2(t) = t,$$

e como $u(2, t) = 2t^4$, então

$$2t^4 = 2^3t + r_1(t)2 + t$$
$$r_1(t) = \frac{2t^4 - 9t}{2}.$$

Por fim

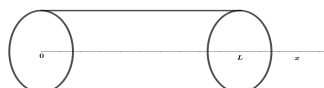
$$u(x, t) = x^3t + x \frac{2t^4 - 9t}{2} + t.$$

6.1 Equação do Calor [5]

Como mais um exemplo de equações a derivadas parciais, temos a equação do calor dada abaixo numa barra homogênea aonde k é uma constante de proporcionalidade chamada de difusividade térmica e a função $u(x, t)$ é a temperatura da barra dada na posição x no instante t .

$$k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t},$$

ou seja, a derivada parcial segunda em relação x de uma função $u(x, t)$ multiplicada por uma constante k é igual a derivada parcial também de $u(x, t)$, mas em relação a t . Entendemos então que existe uma função $u(x, t)$ e uma relação entres as derivadas parciais em relação a x e t . Neste contexto x representará a posição de um ponto na barra enquanto t o tempo. Vamos trabalhar então com o caso geral em que $k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$. Para isso vamos considerar uma barra homogênea contida no eixo x cujas extremidades estão em $x = 0$ e $x = L$ e supor as condições de contorno $u(0, t) = 0$ e $u(L, t) = 0$. Isso nos diz que nas extremidades da barra a temperatura é igual a 0. Vamos considerar também a condição inicial que diz que $u(x, 0) = F(x)$.



Como $u(x, t)$ é uma função de duas variáveis, então podemos imaginá-la como um produto das funções $F(x)$ e $T(t)$, ou seja, $u(x, t) = F(x)T(t)$. Assim

$$k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Rightarrow k \frac{\partial^2 (FT)}{\partial x^2} = \frac{\partial (FT)}{\partial t} (*).$$

Com isso entendemos que $\frac{\partial^2 (FT)}{\partial x^2} = T \frac{\partial^2 (F)}{\partial x^2}$, pois T depende apenas de t . Logo $T \frac{\partial^2 (F)}{\partial x^2}$

passa a ser uma derivada ordinária de segunda ordem e escrevemos $T \frac{\partial^2 (F)}{\partial x^2} = T \frac{d^2 F}{dx^2}$.

De forma análoga temos que $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial (FT)}{\partial t} = F \frac{\partial (T)}{\partial t}$. Logo $F \frac{\partial (T)}{\partial t}$ passa a ser uma

derivada ordinária de primeira ordem e escrevemos $F \frac{\partial (T)}{\partial t} = F \frac{dT}{dt}$. Com essas

conclusões podemos escrever (*) na seguinte forma

$$\begin{aligned} k \frac{\partial^2 (FT)}{\partial x^2} &= \frac{\partial (FT)}{\partial t} \\ kT \frac{d^2 F}{dx^2} &= F \frac{dT}{dt} \\ T \frac{d^2 F}{dx^2} &= \frac{1}{k} F \frac{dT}{dt}. \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros de $T \frac{d^2 F}{dx^2} = \frac{1}{k} F \frac{dT}{dt}$ por FT obtemos

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dx^2} = \frac{1}{kT} \frac{dT}{dt}.$$

Para que essa última igualdade se verifique não há sentido algum que encontremos

funções que não sejam constantes, pois $\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dx^2}$ é uma função de x e $\frac{1}{kT} \frac{dT}{dt}$ uma função

de t . Logo a igualdade acima só faz sentido se $\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dx^2}$ e $\frac{1}{kT} \frac{dT}{dt}$ são constantes. Seja

então $\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dx^2} = \frac{1}{kT} \frac{dT}{dt} = -\lambda^2$ (justificaremos o quadrado de λ). Assim

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dx^2} = -\lambda^2 \Rightarrow \frac{d^2 F}{dx^2} = -\lambda^2 F.$$

Se a taxa de variação de uma função é proporcional a função num determinado ponto, então essa função é a exponencial, ou seja, se $\frac{dy}{dx} = ry \Rightarrow y = Ae^{rx}$, onde r é uma constante. Dessa propriedade e trabalhando com a função F segue que

$$F = Ae^{rx} \Rightarrow \frac{dF}{dx} = A r e^{rx} (**) \quad \text{e} \quad \frac{d^2F}{dx^2} = A r^2 e^{rx} (***)$$

Substituímos então (**) e (***) em $\frac{d^2F}{dx^2} = -\lambda^2 F$ obtendo

$$\begin{aligned} A r^2 e^{rx} &= -\lambda^2 A e^{rx} \therefore \\ r^2 &= -\lambda^2 \therefore \\ r &= \sqrt{-\lambda^2} \therefore \\ r &= \pm \lambda i \text{ (justificando o quadrado de } \lambda \text{)}. \end{aligned}$$

Logo a solução para $\frac{d^2F}{dx^2} = -\lambda^2 F$ será do tipo $F(x) = A_1 e^{i\lambda x} + A_2 e^{-i\lambda x}$. Como $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ e $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$, ficamos com

$$\begin{aligned} F(x) &= A_1(\cos \lambda x + i \sin \lambda x) + A_2(\cos \lambda x - i \sin \lambda x) \therefore \\ F(x) &= (A_1 + A_2) \cos \lambda x + i(A_1 - A_2) \sin \lambda x. \end{aligned}$$

Chamando $A_1 + A_2 = A$ e $i(A_1 - A_2) = B$ ficamos com a solução geral

$$F(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x.$$

Voltemos agora para as condições de contorno $u(0, t) = 0$ e $u(L, t) = 0$ dadas no início. Sabemos que $u(x, t) = F(x)T(t)$. Daí

$$\begin{aligned} u(0, t) &= F(0)T(t) \therefore \\ 0 &= F(0) \therefore \\ 0 &= A \cos \lambda 0 + B \sin \lambda 0 \therefore \\ 0 &= A \cos 0 + B \sin 0 \therefore \\ 0 &= A \cdot 1 + B \cdot 0 \therefore \end{aligned}$$

$$0 = A \cdot 1 \therefore$$

$$A = 0.$$

Substituímos agora o valor de A em $F(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$ obtendo $F(x) = B \sin \lambda x$.
Usando $u(L, t) = 0$, ficamos com

$$u(L, t) = F(L)T(t) \therefore$$

$$0 = F(L)T(t) \therefore$$

$$F(L) = 0 \therefore$$

$$B \sin \lambda L = 0.$$

Para que essa última igualdade se verifique $\lambda L = n\pi$, ou seja, $\lambda = \frac{n\pi}{L}$, com $n = 1, 2, 3, \dots$. Então escrevemos $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$, pois λ depende de n . Logo

$$F(x) = B \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Observamos que não determinamos o valor B , mas achamos uma família de valores para λ . Então podemos pensar numa família de valores para B associando para cada valor de n um B_n . Assim reescrevemos a equação $F(x) = B \sin \frac{n\pi}{L} x$ como sendo

$$F_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Pensando agora na função T e sabendo que $\frac{1}{kT} \frac{dT}{dt} = -\lambda^2$, ou seja, $\frac{dT}{dt} = -k\lambda^2 T$, segue que $T = e^{\alpha t}$ (Se a taxa de variação de uma função é proporcional a, função num determinado ponto, então essa função é a exponencial, ou seja, se $\frac{dT}{dt} = \alpha T(t) \Rightarrow T(t) = A e^{\alpha t}$). Sendo assim

$$T(t) = e^{-k\lambda^2 t}$$

$$T(t) = e^{\frac{-kn^2\pi^2}{L^2} t}$$

Como assumimos $u(x, t) = F(x)T(t)$, a solução será

$$u_n(x, t) = B_n \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t} \therefore$$

$$u_n(x, t) = B_n e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t} \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Pelo princípio da superposição e como $n = 1, 2, 3, \dots$, então fica claro que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t} \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Assumimos também no início do nosso problema a condição $u(x, 0) = F(x)$, ou seja, para $t = 0$

$$u(x, 0) = F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^0 \sin \frac{n\pi}{L} x \therefore$$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

A função encontrada acima é “interessantíssima”, pois nos remete a 5.2 aonde ficou provado que

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

é a Série de Fourier na qual

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx,$$

no caso em que $F(x)$ é ímpar. Finalmente temos

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{\frac{-kn^2\pi^2}{L^2}t} \sin \frac{n\pi}{L} x \therefore$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) e^{\frac{-kn^2\pi^2}{L^2}t} \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Exemplo 2 Determine a temperatura de uma barra homogênea com coeficiente de difusividade $k = 1$ no ponto da barra em que $x = 2$ e $t = 5$ tal que, $F(x) = x$, $L = \pi$.

Sabemos que $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{\frac{-kn^2\pi^2}{L^2}t} \sin \frac{n\pi}{L} x$ em que $B_n = \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$. Fazemos primeiro o cálculo de B_n . Assim

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) \sin \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx.$$

A integral $\int x \sin nx dx$ pode ser resolvida por partes chamando $u = x$ e $dv = \sin nx dx$. Portanto $du = dx$ e $v = -\frac{\cos nx}{n}$. Como $\int u dv = uv - \int v du$, segue que

$$\int u dv = uv - \int v du \Rightarrow \int x \sin nx dx = x \left(-\frac{\cos nx}{n} \right) - \int -\frac{\cos nx}{n} dx \therefore$$

$$\int x \sin nx dx = x \left(-\frac{\cos nx}{n} \right) - \int -\frac{\cos nx}{n} dx$$

$$\int x \sin nx dx = -\frac{x \cos nx}{n} + \frac{1}{n} \int \cos nx$$

$$\int x \sin nx dx = -\frac{x \cos nx}{n} + \frac{1}{n} \frac{\sin nx}{n} + c$$

$$\int x \sin nx dx = -\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} + c.$$

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left(+ \frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x \cos nx}{n} \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$B_n = \frac{2}{\pi} \left(+ \frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x \cos nx}{n} \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$B_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin n\pi}{n^2} - \frac{\pi \cos n\pi}{n} - \left(\frac{\sin n0}{n^2} - \frac{0 \cos n0}{n} \right) \right]$$

$$B_n = \frac{2}{\pi} \left[0 - \frac{\pi(-1)^n}{n} - (0 - 0) \right]$$

$$B_n = -\frac{2(-1)^n}{n}$$

$$B_n = (-1) \frac{2(-1)^n}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \therefore$$

$$B_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Sendo $L = \pi, x = 2$ e $t = 5$, então

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$u(2, 5) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} e^{-\frac{1n^2\pi^2}{\pi^2}5} \sin \frac{n\pi}{\pi} 2$$

$$u(2, 5) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-5n^2} \sin 2n.$$

6.2 Equação da Onda [5]

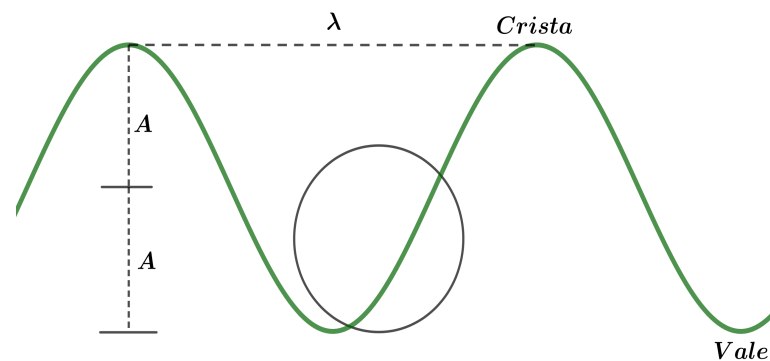
O transporte de energia sem haver o transporte de matéria é o que chamamos de onda. Vamos trabalhar com a onda mecânica ao longo de uma corda. Então dado uma corda e um ponto qualquer da corda, esse ponto se desloca para cima e para baixo verticalmente, ou seja, se considerarmos um movimento ondulatório de uma corda sendo executado num sistema de coordenadas cartesianas xy , a coordenada x permanece constante enquanto que a coordenada y varia com o tempo. Dessa forma o ponto se move apenas verticalmente. Definimos *cristas* como os pontos mais altos de uma onda, *vale* os pontos mais baixos de uma onda e *amplitude* a distância da corda em repouso a uma crista ou vale. A distância entre duas cristas ou vales consecutivos da onda é o que chamamos de comprimento de onda sendo representado por λ . Segue então que cada ponto da corda no movimento ondulatório tem um valor para y e admitimos que y depende de x e t , sendo t a variável tempo.

Dai existe uma função de duas variáveis $y = (x, t)$. Nosso objetivo agora é encontrar a equação diferencial que dá toda a dinâmica desse movimento.

Figura 7

A é a amplitude

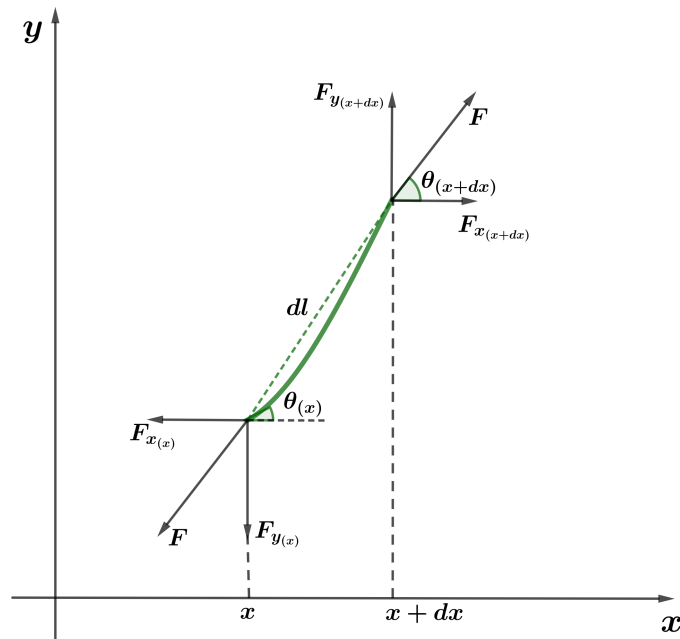
λ é o comprimento de onda



Fonte: Próprio autor (2021)

O círculo que vemos acima no gráfico é para chamar a atenção que daremos um zoom nessa parte do gráfico e o destacaremos no gráfico que se segue. Nesse trecho do gráfico vamos considerar dois pontos da corda infinitamente próximos um do outro e de abscissas respectivamente x e $x + dx$. Ora, se o comprimento da corda é L , então o comprimento da corda correspondente a esses dois pontos é simplesmente dl , ou seja, dl é um elemento infinitesimal. Se esses pontos estão infinitamente próximos um do outro, então a força que atua neles é F . A segunda lei de Newton nos diz que a força resultante que atua em um corpo é igual a sua massa multiplicado pela aceleração, ou seja, $F_r = m \cdot a$. Podemos então decompor em cada um desses pontos a força F nas componentes horizontal e vertical. Em x temos as componentes $F_{x(x)}$ e $F_{y(x)}$ e em $x + dx$ temos as componentes $F_{x(x+dx)}$ e $F_{y(x+dx)}$. Seja $\theta_{(x)}$ o ângulo entre $F_{x(x)}$ e F e $\theta_{(x+dx)}$ o ângulo entre $F_{x(x+dx)}$ e F . O gráfico a seguir ilustra todas as nossas ideias até aqui. Veja

Figura 8



Fonte: Próprio autor (2021)

Segue então que a força resultante na horizontal será $F \cos \theta_{(x+dx)} - F \cos \theta_{(x)}$. Daí

$$F \cos \theta_{(x+dx)} - F \cos \theta_{(x)} = dm \cdot a_x.$$

Como θ é muito pequeno, pois estamos trabalhando com um elemento de corda, então $\cos \theta \cong 1$, ou seja,

$$F \cdot 1 - F \cdot 1 = dm \cdot a_x$$

$$0 = dm \cdot a_x$$

$$a_x = 0.$$

Já a força resultante na vertical será $F \sin \theta_{(x+dx)} - F \sin \theta_{(x)}$. Daí

$$F \sin \theta_{(x+dx)} - F \sin \theta_{(x)} = dm \cdot a_y.$$

Ressaltamos novamente que θ é muito pequeno. Isso nos leva a considerar $\sin \theta \cong \theta \cong \tan \theta$. Assim

$$F \tan \theta_{(x+dx)} - F \tan \theta_x = dm \cdot a_y.$$

Como dissemos no começo, y é uma função de duas variáveis x e t . Então fica bem claro que se derivarmos y em relação a x , temos uma derivada ordinária, ou seja, $\frac{\partial y}{\partial x}(x + dx, t) = \tan \theta_{(x+dx)}$ e $\frac{\partial y}{\partial x}(x, t) = \tan \theta_{(x)}$. Logo

$$F \frac{\partial y}{\partial x}(x + dx, t) - F \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) = dm \cdot a_y$$

$$F \left[\frac{\partial y}{\partial x}(x + dx, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \right] = dm \cdot a_y.$$

Chamemos agora $\frac{\partial y}{\partial x} = h(x, t)$. Então

$$F[h(x + dx, t) - h(x, t)] = dm \cdot a_y.$$

Multiplicamos e dividimos o primeiro membro da igualdade acima por dx . Então

$$F dx \left[\frac{h(x + dx, t) - h(x, t)}{dx} \right] = dm \cdot a_y.$$

Como dx é muito pequeno substituímos $\frac{h(x+dx,t)-h(x,t)}{dx}$ por $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{h(x+\Delta x,t)-h(x,t)}{\Delta x} \right)$.

Então

$$F dx \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{h(x + \Delta x, t) - h(x, t)}{\Delta x} \right) \right] = dm \cdot a_y.$$

Mas $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{h(x+\Delta x,t)-h(x,t)}{\Delta x} \right)$ é a derivada de $h(x, t)$ em relação a x , ou seja

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{h(x+\Delta x,t)-h(x,t)}{\Delta x} \right) = \frac{\partial h(x,t)}{\partial x}$. Então

$$F dx \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = dm \cdot a_y.$$

Para finalizarmos temos três ideias. A primeira é que sendo $y = (x, t)$, então $\frac{\partial y}{\partial t}$ dá a velocidade do ponto da corda se deslocando verticalmente e $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ dá a aceleração.

Logo $a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. A segunda é que a densidade da corda $\mu = \frac{m}{L} = \frac{dm}{dl}$. Sendo $dx = dl \cos \theta$, com $\cos \theta \cong 1$, então $dx = dl$. Segue então que $dm = \mu dx$. A última é que $\frac{\partial h(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Substituindo essas três ideias na equação $F dx \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} = dm \cdot a_y$ obtemos

$$F dx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

que é a equação da onda em uma variável. Podemos trocar a variável y pela variável u sem prejuízo de nossas ideias e ficamos com

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Enfatizamos que se fizéssemos o estudo de uma onda se deslocando em duas dimensões teríamos, além da variável t , as variáveis x e y . Em três dimensões, além de t , as variáveis x, y e z . Portanto $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ é a equação da onda unidimensional.

Agora

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

são equações de onda bidimensional e tridimensional respectivamente. Da Física também provamos que $v^2 = \frac{F}{\mu} \therefore \frac{1}{v^2} = \frac{\mu}{F}$. Assim

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Voltemos para o caso unidimensional e consideremos uma corda de comprimento L , ou seja, qualquer ponto x da corda é tal que $0 \leq x \leq L$. Considere também as condições de contorno $u(0, t) = 0$ e $u(L, t) = 0$, tal que $t \geq 0$. Daí temos a certeza de que as extremidades da corda estão presas, pois a posição vertical nas extremidades é sempre igual a 0 mesmo o tempo variando. Além disso vamos assumir as condições iniciais $u(x, 0) = f(x)$ e $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x)$. A primeira condição nos diz em que posição inicial se encontra a corda e a segunda nos dá a velocidade vertical inicial. Assim como na equação do calor vamos assumir que $u(x, t) = G(x)T(t)$. Assim

$$\frac{\partial u}{\partial x} = T \frac{\partial G}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T \frac{d^2 G}{dx^2}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t} = G \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \frac{d^2 T}{dt^2}.$$

Como $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, então

$$T \frac{d^2 G}{dx^2} = \frac{1}{v^2} G \frac{d^2 T}{dt^2}.$$

Dividindo ambos os membros da igualdade acima por TG encontramos

$$\frac{1}{G} \frac{d^2 G}{dx^2} = \frac{1}{Tv^2} \frac{d^2 T}{dt^2}.$$

Como o primeiro membro tem como resultado uma função que depende de x e o segundo membro uma função que depende de t , então $\frac{1}{G} \frac{d^2 G}{dx^2} = \frac{1}{Tv^2} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\lambda^2$. Daí

$\frac{d^2 G}{dx^2} = -G\lambda^2$ e $\frac{d^2 T}{dt^2} = -Tv^2\lambda^2$. Em 5.9 encontramos a solução de tais equações diferenciais. Fica claro então que

$$G(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x \text{ e } T(t) = C \cos \lambda vt + D \sin \lambda vt.$$

As condições de contorno nos diz que $u(0, t) = 0$ e $u(L, t) = 0$. Segue então que

$$u(0, t) = G(0)T(t)$$

$$G(0) = 0$$

$$G(0) = A \cos \lambda 0 + B \sin \lambda 0$$

$$A = 0$$

e

$$u(L, t) = G(L)T(t)$$

$$0 = G(L)T(t)$$

$$G(L) = 0$$

$$G(L) = A \cos \lambda L + B \sin \lambda L$$

$$0 = 0 \cdot \cos \lambda L + B \sin \lambda L$$

$$B \sin \lambda L = 0.$$

Concluimos da mesma forma com que fizemos com a equação do calor que

$$\lambda_n L = n\pi \therefore$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L},$$

onde $n = 1, 2, \dots$, pois os valores negativos levarão a soluções linearmente dependentes e $n = 0$ para a solução trivial. Assim

$$G(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

A solução de $T(t)$ é análoga a anterior. Segue então que

$$T(t) = C_n \cos \lambda_n vt + D_n \sin \lambda_n vt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Com $T(t)$ e $G(x)$ determinamos $u(x, t)$. Como $u(x, t) = G(x)T(t)$, então

$$u_n(x, t) = [C_n \cos \lambda_n vt + D_n \sin \lambda_n vt] \sin \lambda_n x,$$

com a observação que inserimos o coeficiente B_n em C_n ou D_n . Então

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} ([C_n \cos \lambda_n vt + D_n \sin \lambda_n vt] \sin \lambda_n x).$$

Usamos agora a condição inicial que diz que $u(x, 0) = f(x)$ na igualdade acima. Então

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ([C_n \cos \lambda_n v0 + D_n \sin \lambda_n v0] \sin \lambda_n x)$$

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ([C_n \cdot 1 + D_n \cdot 0] \sin \lambda_n x)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \lambda_n x$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Percebemos então que $f(x)$ é uma Série de Fourier dos senos e que $f(x)$ é uma função ímpar. Segue então que

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

A outra condição inicial diz que $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x)$, ou seja, precisamos calcular a derivada de $u(x, t)$ em relação a t no ponto em que $t = 0$. Assim, se

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos \lambda_n vt + D_n \sin \lambda_n vt] \sin \lambda_n x \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n (-\sin \lambda_n vt) (\lambda_n v) + D_n (\cos \lambda_n vt) (\lambda_n v)] \sin \lambda_n x$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} [-\lambda_n v C_n \sin \lambda_n vt + \lambda_n v D_n \cos \lambda_n vt] \sin \lambda_n x.$$

Em $t = 0$, temos $g(x) = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0}$. Segue então que

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ([-\lambda_n v C_n \sin \lambda_n v0 + \lambda_n v D_n \cos \lambda_n v0] \sin \lambda_n x)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [-\lambda_n v C_n \sin 0 + \lambda_n v D_n \cos 0] \sin \lambda_n x$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ([-\lambda_n v C_n \cdot 0 + \lambda_n v D_n \cdot 1] \sin \lambda_n x)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_n v D_n] \sin \lambda_n x$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n v D_n \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Mas uma vez temos uma Série de Fourier dos senos em que $g(x)$ é ímpar. Assim

$$\lambda_n v D_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \therefore$$

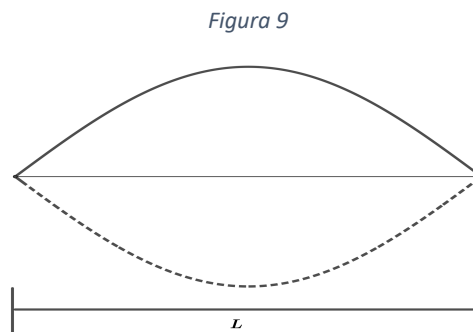
$$D_n = \frac{2}{\lambda_n v L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Por fim temos a solução geral

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) \cos \frac{n\pi}{L} vt + \left(\frac{2}{\lambda_n v L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) \sin \frac{n\pi}{L} vt \right] \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

7 ONDAS ESTACIONÁRIAS

Quando observamos um padrão de vibração estacionária de uma onda, temos a onda estacionária. Essas ondas formam-se a partir da superposição de duas ondas idênticas, porém com sentidos opostos. Podemos citar como exemplo as ondas criadas em uma corda de certo comprimento com as extremidades fixas. Vamos pensar agora na corda de um violão de comprimento L que sabemos ter as extremidades presas. Quando fazemos vibrar essa corda várias figuras responsáveis pelas ondas surgem. Uma delas aparece abaixo.



Fonte: Próprio autor (2021)

Essa onda tem comprimento λ_1 e neste caso $\frac{\lambda_1}{2} = L$. Como a frequência da onda é definida como $f_n = \frac{v}{\lambda_n}$, onde v é a velocidade da onda, então $f_1 = \frac{v}{2L}$. Se encurtamos o comprimento dessa mesma corda para $\frac{L}{2}$, a frequência muda. Portanto a frequência $f_n = \frac{v}{\lambda_n}$ depende da velocidade e do comprimento de onda. Outra coisa interessante diz respeito a velocidade da onda que depende do meio em que ela se propaga, ou seja, se tocamos numa corda de comprimento L porém mais grossa ou mais esticada então muda o meio em que a onda se propaga e conseqüentemente a velocidade também. O som produzido por uma onda aonde $\frac{\lambda_1}{2} = L$ será chamado de primeiro harmônico. Voltamos agora para a solução da equação da onda demonstrada em 6.2 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos \lambda_n vt + D_n \sin \lambda_n vt] \sin \lambda_n x$, ou seja

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + \dots$$

Daí, qualquer parcela u_n do segundo membro da igualdade acima pode ser escrita como

$$u_n = [C_n \cos \lambda_n vt + D_n \sin \lambda_n vt] \sin \lambda_n x.$$

Vamos pensar numa constante E_n tal que $C_n = E_n \sin \phi$ e $D_n = E_n \cos \phi$. Assim podemos escrever $u_n = [C_n \cos \lambda_n vt + D_n \sin \lambda_n vt] \sin \lambda_n x$ como

$$u_n = [E_n \sin \phi \cos \lambda_n vt + E_n \cos \phi \sin \lambda_n vt] \sin \lambda_n x$$

$$u_n = [E_n (\sin \phi \cos \lambda_n vt + \cos \phi \sin \lambda_n vt)] \sin \lambda_n x.$$

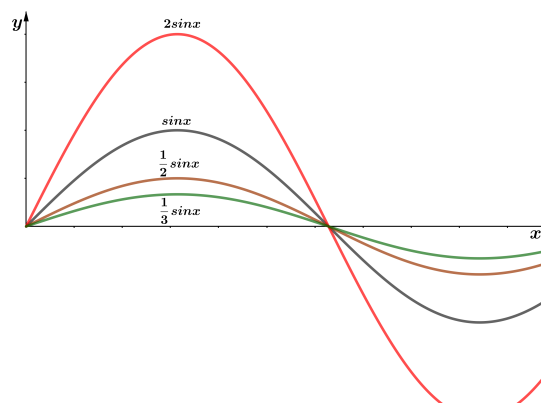
Da trigonometria sabemos que $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$. Usando essa relação trigonométrica na igualdade u_n , temos

$$u_n = E_n (\sin \lambda_n vt + \phi) \sin \lambda_n x.$$

Aqui podemos afirmar também que $E_n = \sqrt{C_n^2 + D_n^2}$ e $\tan \phi = \frac{C_n}{D_n}$, pois $C_n^2 = E_n^2 \sin^2 \phi$ e $D_n^2 = E_n^2 \cos^2 \phi \therefore C_n^2 + D_n^2 = E_n^2 \sin^2 \phi + E_n^2 \cos^2 \phi \therefore C_n^2 + D_n^2 = E_n^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \therefore E_n = \sqrt{C_n^2 + D_n^2}$. Como $\frac{C_n}{D_n} = \frac{E_n \sin \phi}{E_n \cos \phi}$, então $\tan \phi = \frac{C_n}{D_n}$.

Faremos agora um estudo do gráfico de u_n . Antes disso considere o gráfico da função $m \sin x$, com $m = 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. Perceba que quanto menor o valor de m menor é a amplitude do gráfico.

Figura 10

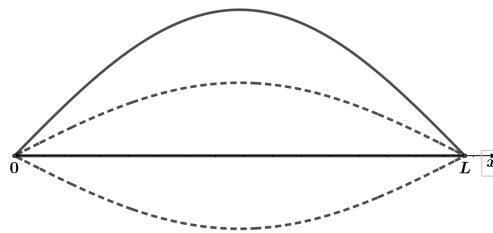


Fonte: Próprio autor (2021)

Usando essa mesma ideia podemos verificar facilmente que para $n = 1, 2, 3, \dots$ as ondas estacionárias são os gráficos de $\sin \lambda_n x$ com amplitude que varia com o tempo da forma $E_n(\sin \lambda_n vt + \phi)$, ou seja, se compararmos com o gráfico exposto acima da função $m \sin x$, $E_n(\sin \lambda_n vt + \phi)$ faz o papel de m e $\sin \lambda_n x$ o de $\sin x$. Logo se fizermos o gráfico de $\sin \lambda_n x$ com a amplitude variando de acordo com $E_n(\sin \lambda_n vt + \phi)$ temos as seguintes ondas estacionárias:

$n = 1 \Rightarrow \sin \lambda_1 x = \sin \frac{1 \cdot \pi}{L} x = \sin \frac{\pi x}{L}$, ou seja, para $n = 1$ temos a onda estacionária $E_1(\sin \lambda_1 vt + \phi) \sin \frac{\pi x}{L}$. Para determinarmos os pontos fixos ou aonde a corda não vibra fazemos $\sin \frac{\pi x}{L} = 0$ cujas soluções são $x = 0$ ou $x = L$. Note que esses são os pontos aonde a corda está presa também chamados de nós. O gráfico abaixo mostra o gráfico da função sendo o pontilhado resultado de algumas ondas de amplitudes diferentes quando t varia. Sabendo que $v = \sqrt{\frac{\mu}{F}}$, $f = \frac{1}{\lambda} v$ e que neste caso $\lambda_1 = 2L$, então $f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{\mu}{F}}$, também chamado de 1º harmônico.

Figura 11

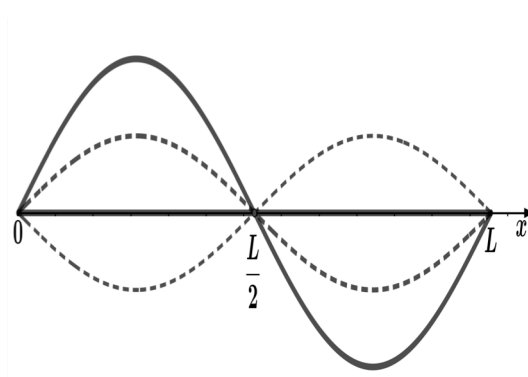


Fonte: Próprio autor (2021)

$n = 2 \Rightarrow \sin \lambda_2 x = \sin \frac{2 \cdot \pi}{L} x = \sin \frac{2\pi x}{L}$, ou seja, para $n = 2$ temos a onda estacionária $E_2(\sin \lambda_2 vt + \phi) \sin \frac{2\pi x}{L}$. Para determinarmos os pontos fixos ou aonde a corda não vibra fazemos $\sin \frac{2\pi x}{L} = 0$ cujas soluções são $x = 0, x = \frac{L}{2}$ ou $x = L$. Note que esses são os pontos aonde a corda não vibra. O gráfico abaixo mostra o gráfico da função sendo o pontilhado resultado de algumas ondas de amplitudes diferentes

quando t varia. Da mesma forma, como $v = \sqrt{\frac{\mu}{F}}$, $f = \frac{1}{\lambda}v$ e que neste caso $\lambda_2 = L$, então $f_2 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\mu}{F}}$, também chamado de 2º harmônico.

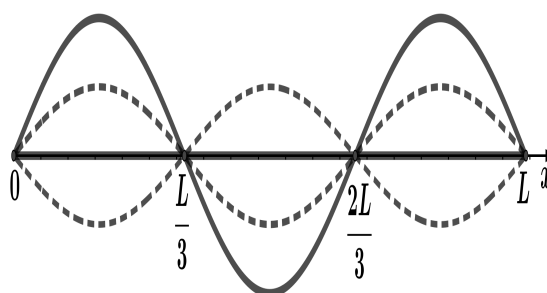
Figura 12



Fonte: Próprio autor (2021)

$n = 3 \Rightarrow \sin \lambda_3 x = \sin \frac{3\pi}{L}x = \sin \frac{3\pi x}{L}$, ou seja, para $n = 3$ temos a onda estacionária $E_3(\sin \lambda_3 vt + \phi) \sin \frac{3\pi x}{L}$. Para determinarmos os pontos fixos ou aonde a corda não vibra fazemos $\sin \frac{\pi x}{L} = 0$ cujas soluções são $x = 0, x = \frac{L}{3}, x = \frac{2L}{3}$ ou $x = L$. Note que esses são os pontos aonde a corda não vibra. O gráfico abaixo mostra o gráfico da função sendo o pontilhado resultado de algumas ondas de amplitudes diferentes quando t varia.

Figura 13



Fonte: Próprio autor (2021)

De forma geral temos amplitude $E_n(\sin \lambda_n vt + \phi)$, f_1 é a frequência e define a altura do som produzido pela corda.

7.1 A Corda Dedilhada

Vamos pensar na corda de um violão e imaginá-la num sistema de coordenadas cartesianas de modo que o eixo x coincida com a corda parada. Seja também $u(0, t) = 0$ e $u(L, t) = 0$, ou seja, as extremidades da corda estão presas. Se dedilharmos (puxarmos a corda para cima) a corda exatamente na sua metade, então a posição final de cada ponto da corda será

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} \frac{2hx}{L}, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ 2h\left(1 - \frac{x}{L}\right), & \text{se } \frac{L}{2} < x \leq L \end{cases}.$$

Sendo $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ e sabendo que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, então

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left[A_n \cos \frac{n\pi vt}{L} + B_n \sin \frac{n\pi vt}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Agora $u(x, 0)$ é tal que

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left[A_n \cos \frac{n\pi v 0}{L} + B_n \sin \frac{n\pi v 0}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left([A_n \cdot 1] \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) = \begin{cases} \frac{2hx}{L}, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ 2h\left(1 - \frac{x}{L}\right), & \text{se } \frac{L}{2} < x \leq L \end{cases}.$$

Mas $\sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$ é uma Série de Fourier tal que $A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$, ou seja

$$A_n = \frac{2}{L} \left(\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2hx}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \int_{\frac{L}{2}}^L 2h \left(1 - \frac{x}{L}\right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right),$$

pois a corda é dedilhada no meio. Vamos resolver cada integral entre parênteses por partes separadamente. Para a primeira temos que se $u = \frac{2hx}{L} dx \Rightarrow du = \frac{2h}{L} dx$ e se

$dv = \sin \frac{n\pi x}{L} dx \Rightarrow v = -\frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L}$. Daí

$$\int \frac{2hx}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2hx}{L} \left(-\frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \right) - \int -\frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot \frac{2h}{L} dx$$

$$\int \frac{2hx}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = -\frac{2hx}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{2h}{n\pi} \int \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$\int \frac{2hx}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = -\frac{2hx}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{2h}{n\pi} \frac{\sin \frac{n\pi x}{L}}{\frac{n\pi}{L}}$$

$$\int \frac{2hx}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = -\frac{2hx}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{2hL}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2hx}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx &= -\frac{2hx}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{2hL}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^{\frac{L}{2}} \\ &= -\frac{2h}{n\pi} \frac{L}{2} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{2hL}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} - \left(-\frac{2h0}{n\pi} \cos \frac{n\pi0}{L} + \frac{2hL}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi0}{L} \right) \\ &= -\frac{hL}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{2hL}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} - (0 + 0) = -\frac{hL}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{2hL}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} (*) \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned} \int 2h \left(1 - \frac{x}{L}\right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx &= \int 2h \sin \frac{n\pi x}{L} dx - \int \frac{2hx}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= 2h \int \sin \frac{n\pi x}{L} dx - \frac{2h}{L} \int x \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= -2h \frac{\cos \frac{n\pi x}{L}}{\frac{n\pi}{L}} - \frac{2h}{L} \int x \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= -\frac{2hL}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} - \frac{2h}{L} \int x \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \end{aligned}$$

Para $\int x \sin \frac{n\pi x}{L} dx$ se $u = x \Rightarrow du = dx$ e se $dv = \sin \frac{n\pi x}{L} dx \Rightarrow v = -\frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L}$. Assim

$$\begin{aligned}\int x \sin \frac{n\pi x}{L} dx &= -x \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} + \int \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ \int x \sin \frac{n\pi x}{L} dx &= -\frac{xL}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{L}{n\pi} \int \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ \int x \sin \frac{n\pi x}{L} dx &= -\frac{xL}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{L},\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\int 2h \left(1 - \frac{x}{L}\right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx &= -\frac{2hL}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} - \frac{2h}{L} \left(-\frac{xL}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{L}\right) \\ \int 2h \left(1 - \frac{x}{L}\right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx &= -\frac{2hL}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{2hx}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} - \frac{2hL}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{L}.\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}\int_{\frac{L}{2}}^L 2h \left(1 - \frac{x}{L}\right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx &= -\frac{2hL}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{2hx}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} - \frac{2hL}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{L} \Big|_{\frac{L}{2}}^L \\ &= -\frac{2hL}{n\pi} \cos \frac{n\pi L}{L} + \frac{2hL}{n\pi} \cos \frac{n\pi L}{L} \\ &\quad - \frac{2hL}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi L}{L} - \left(-\frac{2hL}{n\pi} \cos \frac{n\pi \frac{L}{2}}{L} + \frac{2h \frac{L}{2}}{n\pi} \cos \frac{n\pi \frac{L}{2}}{L} - \frac{2hL}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi \frac{L}{2}}{L}\right) \\ &= -\frac{2hL}{n^2\pi^2} \sin n\pi - \left(-\frac{2hL}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{hL}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{2hL}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}\right) \\ &= -\frac{2hL}{n^2\pi^2} 0 - \left(-\frac{2hL}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{hL}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{2hL}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \frac{2hL}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{hL}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{2hL}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \\ &= \frac{hL}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{2hL}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} (**).\end{aligned}$$

Por (*) e (**) temos que

$$A_n = \frac{2}{L} \left(-\frac{hL}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{2hL}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{hL}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{2hL}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$A_n = \frac{2}{L} \left(\frac{4hL}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right)$$

$$A_n = \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$A_n = \frac{8h}{1^2\pi^2} \cdot 1 + \frac{8h}{2^2\pi^2} \cdot 0 + \frac{8h}{3^2\pi^2} \cdot (-1) + \frac{8h}{4^2\pi^2} \cdot 0 + \frac{8h}{5^2\pi^2} \cdot 1 + \frac{8h}{6^2\pi^2} \cdot 0 + \dots$$

$$A_n = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

Agora derivando u em relação a t encontramos

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \frac{n\pi vt}{L} + B_n \sin \frac{n\pi vt}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{n\pi v}{L} A_n \sin \frac{n\pi vt}{L} + \frac{n\pi v}{L} B_n \cos \frac{n\pi vt}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\pi v}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-nA_n \sin \frac{n\pi vt}{L} + nB_n \cos \frac{n\pi vt}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \frac{\pi v}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-nA_n \sin \frac{n\pi v 0}{L} + nB_n \cos \frac{n\pi v 0}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \frac{\pi v}{L} \sum_{n=1}^{\infty} [nB_n \cdot 1] \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \frac{\pi v}{L} \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Como $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$, então

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 = \frac{\pi v}{L} \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \sin \frac{n\pi x}{L} \Rightarrow B_n = 0, \forall n$$

Com A_n e B_n determinados, temos

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \frac{n\pi vt}{L} + B_n \sin \frac{n\pi vt}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{8h}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \cdot \cos \frac{n\pi vt}{L} + 0 \cdot \sin \frac{n\pi vt}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{8h}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \cdot \cos \frac{n\pi vt}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Com essa última igualdade fica claro que podemos interpretar $\left(\frac{8h}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \cdot \cos \frac{n\pi vt}{L}$ como a amplitude das ondas estacionárias quando t varia. Uma outra observação que podemos dar é que quando dedilhamos no meio da corda, ondas estacionarias do tipo em que $n = 2, 4, 6, \dots$ não existem pois para esses valores $u(x, t) = 0$. Assim só os harmônicos ímpares existirão. Para o primeiro 1º harmônico temos ondas com amplitudes $\left[\left(\frac{8h}{1^2\pi^2} \sin \frac{\pi}{2} \right) \cdot \cos \frac{\pi vt}{L} \right] = \frac{8h}{\pi^2} \cos \frac{\pi vt}{L}$. Para o 3º harmônico temos ondas com amplitude $\left(\frac{8h}{3^2\pi^2} \sin \frac{3\pi}{2} \right) \cdot \cos \frac{3\pi vt}{L} = \left(-\frac{8h}{9\pi^2} \right) \cdot \cos \frac{3\pi vt}{L}$ e assim por diante. Como todas as ondas do 1º harmônico tem comprimento de onda igual, então o som produzido por essas ondas tem a mesma frequência e geram um mesmo som.

7.2 Ressonância e Batimento

Antes de tudo é preciso entender que os corpos possuem uma frequência natural de vibração. Como exemplos clássicos podemos citar um diapasão, o pêndulo harmônico simples e o oscilador harmônico. Quando batemos em um pêndulo ele vibra com um frequência que dependerá do comprimento do pêndulo e a aceleração da gravidade do local aonde ele se encontra. Já o oscilador quando estimulado vai oscilar numa determinada frequência que tem haver com a constante elástica da mola e com a massa pendurada no oscilador. Quando a vibração de um sistema A estimula a vibração de um outro sistema B que sabemos ter a mesma frequência que A , temos um fenômeno chamado ressonância. Assim podemos dizer que a ressonância aumenta drasticamente a amplitude de oscilação do sistema B estimulado pelo sistema A . Pensando novamente no pêndulo como o sistema B cuja frequência conhecemos e aplicando uma força nele com a mão porem com uma frequência maior do que a dele, não existirá ressonância apesar do pêndulo continuar em movimento. Agora se aplicarmos com a mão uma força com a mesma frequência ao do pendulo, veremos um aumento dramático na oscilação do pêndulo. Logo fica bem claro a

importância desse conceito na Física. Na construção de um edifício, por exemplo, os engenheiros precisam levar em consideração se acontecem terremotos ou outros fenômenos que possam provocar a oscilação da edificação que tenha a mesma frequência de vibração do solo, pois se houver ressonância também haverá um aumento dramático na oscilação do prédio o que pode acarretar o desabamento do prédio. Entendido isso mostraremos agora que a ressonância é um fenômeno presente em instrumentos musicais. Trataremos agora de um experimento que ilustrará a ressonância e um software que ajudará numa melhor compreensão do batimento.

Experimento

1) Levamos para sala de aula um violão de seis cordas afinado definindo seus elementos e observando que as cordas são contadas de baixo para cima ou da mais fina para a mais grossa.

Figura 14



Fonte: <http://primeirosacordes.com.br/images/stories/partes%20viola.jpg>

2) Vamos nos concentrar apenas na 5ª e 6ª cordas do violão. A 6ª corda quando tocada solta produzirá um som correspondente à nota musical Mi e a 5ª corda quando tocada solta produzirá um som correspondente à nota musical Lá, ou seja, temos frequências diferentes.

3) Tocamos agora a 6ª corda com o dedo pressionado na 5ª casa do violão. Verificaremos que a nota produzida será a mesma que a nota produzida pela 5ª corda solta, ou seja, a nota Lá. Isso se deve ao fato de que as cordas quando estimuladas tem a mesma frequência.

Figura 15



Fonte: Próprio autor (2021)

4) Tocando apenas a 6ª corda pausadamente com o dedo pressionado na 5ª casa os alunos perceberão que a 5ª corda, apesar de não tocada, também vibrará e neste caso será a única a vibrar, pois ambas agora tem a mesma frequência. Daí podemos interpretar isso como a transmissão de energia de um sistema para um outro sistema, ambos com a mesma frequência, ou seja, ressonância. Estimulando ou tocando a 6ª corda com o dedo na 5ª casa é fato que a 5ª corda vibrará cada vez mais drasticamente enquanto que as outras cordas não vibram porque possuem frequências diferentes.

Figura 16



Fonte: Próprio autor (2021)

Podemos agora entender um outro fenômeno chamado batimento. Se no experimento acima desafinarmos a 6ª corda afrouxando por exemplo a tarraxa do violão, a frequência não será a mesma que a 5ª corda. Com isso, tocando a 6ª corda com o dedo pressionado na 5ª casa e em seguida a 5ª corda solta, percebemos nitidamente uma diferença de volume no som produzido, ou seja, as frequências agora estão bem próximas mas não são idênticas. Esse fenômeno é chamado de batimento e é resultante da superposição de duas ondas com frequências muito próximas. O batimento é usado para a afinação do violão. Como no exemplo acima afrouxamos a tarraxa correspondente a 6ª corda, faremos agora o contrário, ou seja, vamos apertar a tarraxa. A cada aperto tocamos a 6ª corda com o dedo pressionado na 5ª casa em seguida a 5ª corda solta. Verificaremos que a medida que as frequências correspondentes se aproximam, a diferença de volume diminui. Se cuidadosamente apertamos a tarraxa e fazemos o procedimento de tocar as cordas como já descrito, verificaremos que a diferença de volume desaparecerá até que as duas cordas tocadas produzam o mesmo som, ou seja, mesma frequência. Pronto, o violão está afinado.

Seja agora a 5ª corda do violão visualizada num sistema de coordenadas cartesianas tal que

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) &= f_0(x) \text{ para } 0 \leq x \leq L, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= f_1(x) \end{aligned}$$

e seja $g(x, t)$ a equação de onda produzida pela 6ª corda do violão tocada ou estimulada com o dedo pressionado na 5ª casa. Já sabemos então que a onda produzida pela 6ª corda tocada nessas condições tem a mesma frequência que a onda produzida pela 5ª corda tocada solta. Assim a 6ª corda servirá como um estímulo ou força externa e assim teremos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t) \quad (1).$$

Para essa equação a ideia é tentarmos soluções do tipo

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L},$$

Com coeficiente $c_n(t)$ a se determinar. Suponhamos que a função $g(x, t)$ possa ser escrita como uma Série de Fourier da seguinte forma

$$g(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Assim, por (1) temos que

$$\frac{\partial^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \right)}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \right)}{\partial x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n''(t) \sin \frac{n\pi x}{L} = -k^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \cdot \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Dessa última igualdade verificamos que todas as expressões com somatórios possuem $\sin \frac{n\pi x}{L}$. Daí ficamos com

$$c_n''(t) = -k^2 \frac{n^2 \pi^2}{L^2} c_n(t) + g_n(t),$$

$$c_n''(t) + k^2 \frac{n^2 \pi^2}{L^2} c_n(t) = g_n(t)$$

$$c_n''(t) + \left(2\pi \frac{nk}{2L} \right)^2 c_n(t) = g_n(t)$$

$$c_n''(t) + (2\pi w_n)^2 c_n(t) = g_n(t),$$

onde $w_n = \frac{nk}{2L}$ é a frequência do enésimo harmônico da corda livre. Além disso usando as condições iniciais

$$u(x, 0) = f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

e

$$u_t(x, 0) = f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n'(0) \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Como ambas as igualdades acima definem uma Série de Fourier então

$$c_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L f_0(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad \text{e} \quad c_n'(0) = \frac{2}{L} \int_0^L f_1(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (2).$$

O que nos interessou desde o começo foi o termo $c_n(t)$ que aparece em $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$ e que é a solução da equação diferencial ordinária de segunda ordem dada por $c_n''(t) + (2\pi w_n)^2 c_n(t) = g_n(t)$. Mas a solução geral desta equação diferencial de segunda ordem é dada por

$$c_n = a_n \cos(2\pi w_n t) + b_n \sin(2\pi w_n t) + \hat{c}_n(t),$$

onde a_n e b_n são constantes arbitrárias que podem ser determinadas pelas condições dadas em (2) e $\hat{c}_n(t)$ é uma solução particular. Em resumo note então que a 5ª corda do nosso exemplo vibrará por ressonância tendo como equação de onda

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L},$$

em que $c_n = a_n \cos(2\pi w_n t) + b_n \sin(2\pi w_n t) + \hat{c}_n(t)$ e é claro, estimulada ao tocarmos a 6ª corda cuja equação de onda é $g(x, t)$.

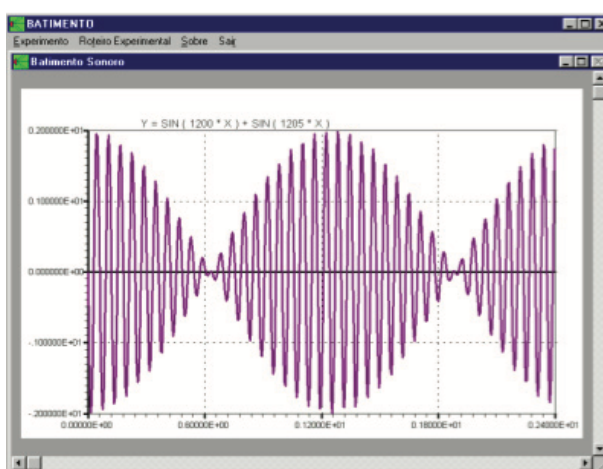
O Software Batimento [12]

Com a inclusão da informática no cotidiano das pessoas surgiram novas possibilidades para a demonstração experimental de batimentos sonoros. Uma dessas possibilidades é a utilização de softwares como o “*Mathematica*”, “*Geradores*

de Tons” e o “Batimento”. Dentre essas opções de softwares, falaremos apenas do Software Batimento.

Esse software foi desenvolvido especificamente para o estudo de um tipo de interferência de ondas, que é o fenômeno chamado batimento. Mais especificamente, o software possibilita estudar de forma ampla o batimento de ondas sonoras. A tela principal do software Batimento pode ser vista na **Figura 14**, em que se percebe os menus “Experimento”, “Roteiro Experimental”, “Sobre” e “Sair”.

Figura 17

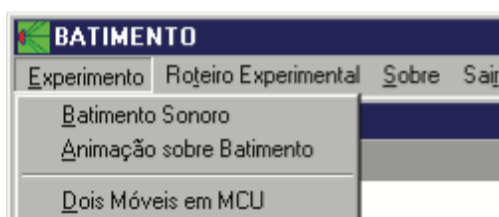


Tela principal do software Batimento.

O Menu “Experimento”

Observando a **Figura 15**, percebe-se que o menu Experimento dispõe de três itens (opções).

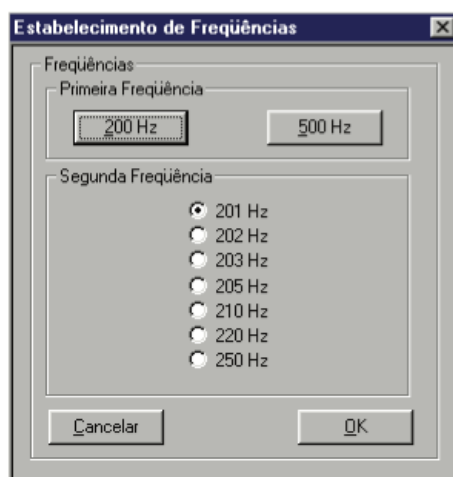
Figura 18



Itens do primeiro menu.

O primeiro item, denominado Batimento Sonoro , é aquele que executa os sons nas frequências selecionadas pelo usuário. É o item referente à realização do experimento propriamente dito, e disponibiliza um conjunto de ondas sonoras senoidais, com frequências diversas, nas vizinhanças de 200 e de 500 Hz, através da caixa de diálogo mostrada na **Figura 16**.

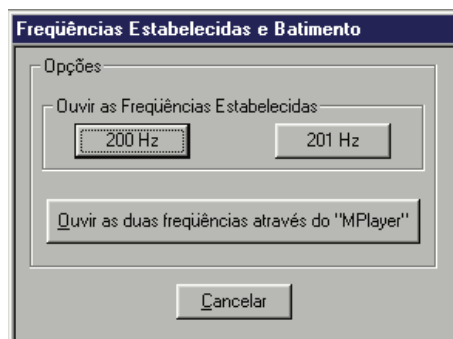
Figura 19



Seleção de frequências

Quando o botão OK dessa caixa de diálogo é clicado, aparece uma nova caixa de diálogo (Figura 16) que possibilita ao experimentador não só ouvir as ondas selecionadas mas também produzir a superposição.

Figura 20



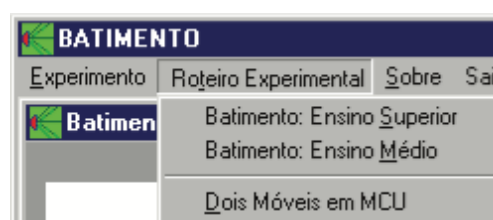
Opções de audição

O segundo item do menu, chamado Animação sobre Batimento , mostra uma simulação da amplitude da onda obtida pela superposição, ao longo do tempo, em função da distância das fontes sonoras. O terceiro item desse menu, chamado Dois móveis em MCU , apresenta um experimento sobre Movimento Circular Uniforme, possibilitando que alunos do ensino médio possam fazer uma analogia entre o período e a frequência dos alcances de dois móveis em MCU com os mesmos elementos do batimento produzido por duas ondas sonoras. É um passo rumo à dedução da expressão para a frequência dos batimentos, o que geralmente não é feito nos livros texto.

O Menu “Roteiro Experimental

Esse menu apresenta três roteiros experimentais conforme pode ser visto na Figura 18.

Figura 21



Itens do segundo menu

O primeiro item desse menu apresenta um roteiro destinado à realização da experiência sobre batimento, enfocando o nível superior de ensino. Já o segundo item propõe o mesmo experimento para o nível médio. O terceiro item do menu também é voltado para o ensino médio, e apresenta um roteiro que propõe um experimento preparatório , envolvendo dois móveis em MCU, com frequências de valores próximos.

A Realização do Experimento

Durante a realização do experimento, pode-se perceber claramente as vantagens deste software em relação a todas as outras opções já mencionadas. A primeira é a facilidade de uso. A segunda é a completa definição sonora dos batimentos (mesmo para $f_b > 10 \text{ Hz}$), independentemente da posição do observador

em relação às fontes. Isso viabiliza a realização do experimento com um único microcomputador em uma sala repleta de alunos. Outra vantagem do software Batimento é o controle absoluto do experimentador sobre cada onda sonora, já que cada uma delas é executada de forma independente da outra. Assim, cada onda pode ter a sua execução (em loop infinito) interrompida ou mesmo ter o seu volume sonoro alterado sem que a outra onda seja afetada. Didaticamente, isso é importante para uma investigação minuciosa, já que o fenômeno em estudo é um pouco intrigante: como dois sons tão parecidos podem produzir um efeito tão inesperado, quando são executados simultaneamente? Além de todas essas vantagens, o software desenvolvido ocupa pouco espaço no disco rígido, e todas as instruções, tanto do software em si quanto dos roteiros experimentais, são escritas em português. Quanto ao experimento, em si, além dos aspectos qualitativos que podem ser explorados até mesmo em uma aula teórica, o aluno é provocado a medir a frequência dos batimentos e comparar o valor obtido com aquele previsto pela teoria. Para o roteiro experimental preparado para o ensino médio, por exemplo, sugere-se selecionar as frequências $f_2 = 201 \text{ Hz}$ e $f_1 = 200 \text{ Hz}$. Então, com essas ondas sendo executadas de forma independente e em loop infinito, o aluno deve medir o intervalo de tempo referente a 40 batimentos consecutivos. Um exemplo de resultado obtido: $\Delta t = 40,12 \text{ s}$. Naturalmente, o período dos batimentos, dado por $T_b = t/40$, neste experimento é, então, $T_b = 1,003 \text{ s}$. Consequentemente, a frequência dos batimentos, dada por $f_b = 1/T_b$, tem um valor experimental igual a $f_{b(\text{experimental})} = 0,9970 \text{ Hz}$. Ao longo do roteiro experimental, são propostas reflexões que possibilitam ao aluno deduzir uma expressão teórica para a frequência dos batimentos: $f_{b(\text{teórica})} = f_2 - f_1$. Assim, teoricamente, neste experimento, deve-se esperar o valor $f_{b(\text{teórica})} = 1 \text{ Hz}$. Comparando o valor experimental com aquele previsto pela teoria, percebe-se que não existem erros sistemáticos importantes: o erro percentual é de 0,3%.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando iniciou-se o trabalho de pesquisa para este trabalho constatou-se que havia uma certa dificuldade em se interpretar e usar certos conceitos da álgebra linear em outros espaços vetoriais daqueles comumente estudados. Daí a importância de expandir esses conceitos para outros espaços vetoriais o que possibilitaria o entendimento de novos conceitos matemáticos.

Diante disso o trabalho teve como o objetivo geral a aplicação desses novos conceitos para a compreensão da equação de onda. Aqui demonstrou-se o comportamento de uma onda mecânica com o uso de equações diferenciais.

O primeiro objetivo específico foi a preocupação de uma revisão detalhada sobre os principais tópicos abordados em álgebra linear. Já o segundo objetivo específico foi um estudo à parte do produto interno para o entendimento das funções ortogonais e por fim a Série de Fourier Generalizada.

Diante da metodologia proposta percebe-se que o trabalho poderia ter sido realizado com uma pesquisa mais ampla na bibliografia o que permitiria analisar por exemplo a equação do calor em duas ou três dimensões bem como a equação de onda se expandindo em duas ou três dimensões o que mostra uma certa limitação ou dificuldade enfrentada até aqui. Poderia também se fazer um estudo da corda dedilhada mais amplo se pensarmos que é possível dedilharmos duas ou mais cordas ao mesmo tempo. Assim dedilhando duas cordas de um violão podemos pensar que em cada corda exista um tipo de função que descreve a posição de cada ponto da corda e que o som produzido seja produto de um conjunto de harmônicos que podem existir em uma corda em quanto na outra não. Fica então aqui essa perspectiva de novas ideias relacionadas a ondas.

REFERÊNCIAS

- [1] HEFEZ, A; FERNANDES, C.S. **Introdução à Álgebra Linear**. 2 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

- [2] HEFEZ, A; FERNANDES, C.S. **Exercícios Resolvidos de Álgebra Linear**. 2 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

- [3] LAGES, E. L. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: coleção matemática universitária.

- [4] FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

- [5] IÓRIO, V. M. **EDP: um curso de graduação**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

- [6] STRAUSS, W.A. **Partial Differential Equations: an introduction**. Hoboken: Wiley, 2008.

- [7] GRILLO, M.L; PEREZ, R.P. **Física e Música**. 1 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

- [8] CUMINATO, J.A. **Cálculo Numérico**. ICMC/USP.

- [9] Valle, M.E. Aula 24 Teoremas e Propriedades das Séries de Fourier. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/2016/MA311/Aula24.pdf>. Acesso em: 04/04/2021.
- [10] ESPAÇO VETORIAL. *In*: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Espaço_vetorial. Acesso em 10/02/2021.
- [11] SÉRIE DE FOURIER. *In*: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Série_de_Fourier. Acesso em 11/02/2021.
- [12] PEREIRA, S.W. UM SOFTWARE PARA EXPERIMENTOS SOBRE BATIMENTO DE ONDAS SONARAS. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/fisica/artigos/um_software_para_experimentos.pdf. Acesso em 15/05/2021.