



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

## **Teoria cinética de sistemas gravitacionais unidimensionais**

Lydiane Ferreira de Souza  
*Orientador:* Prof. Dr. Tarcísio Marciano da Rocha Filho

Brasília  
2020

# Teoria cinética de sistemas gravitacionais unidimensionais

Lydiane Ferreira de Souza

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade de Brasília (PPGF-UnB) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutora em Física.

Orientador: Prof. Dr. Tarcísio Marciano da Rocha Filho

Banca Examinadora

---

Prof. Dr. Tarcísio Marciano da Rocha Filho (Orientador)

---

Prof. Dr. Yan Levin

---

Prof. Dr. Ademir Eugênio de Santana

---

Prof. Dr. Marcelo Albano Moret Simões Gonçalves

À memória de minha mãe Rita Ferreira de Souza  
*"Seja a força e a leveza no falar."*

## Agradecimentos

Minha trajetória até aqui foi uma trajetória de muitas batalhas, durante o doutorado enfrentei inúmeras viagens, inúmeras noites dormidas em ônibus interestaduais, tendo que conciliar trabalho com estudos, não foi fácil. Agradeço primeiramente à Deus, por me dar força para continuar, em muitos momentos pensei que não conseguiria, o cansaço tomou conta de mim por muitas vezes.

Ao professor Marciano, pela orientação durante todo doutorado, pela paciência e cordialidade, que sempre me tratou. A sua postura como pesquisador me inspira.

A minha família por sempre me apoiar e estar presente nesta fase da minha vida, o apoio do meu pai Nélio foi muito importante, ele nunca me cobrou nada, sempre se fez presente e é pai e mãe a muitos anos. Luryane e Yanara obrigada pelo apoio, momentos de desabafo, papos descontraídos e diversão, vocês são minhas melhores amigas.

Ao Rodrigo pelo companheirismo, amor, por estar sempre me amparando, torcendo por mim e me ajudando com dúvidas de programação, você é o melhor presente que a UnB me deu. Agradeço também ao apoio da sua família: Lara, Luis, Ana, Cleuza e Benji.

Agradeço ao apoio dos amigos da UnB e amigos da UFOB vocês tornaram esse período mais leve e divertido, não vou citar nomes para não correr risco de esquecer ninguém. Ao César pelo apoio e relato das experiências vividas, tenho aprendido muito com você. E aos familiares, primos, tios por estarem presentes nessa trajetória.

A todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho. Ao CNPQ pelo apoio financeiro e a UFOB por ter me acolhido nestes últimos três anos.

## Resumo

Os sistemas de longo alcance são caracterizados por um potencial decaindo a longas distâncias com  $r^{-\alpha}$ , de modo que  $\alpha \leq d$  e  $d$  é a dimensão do sistema. Neste trabalho estudamos características pouco usuais do sistema gravitacional unidimensional, este sistema consiste de folhas infinitas livres para se mover no eixo  $x$ , e para tanto analisamos as propriedades ergódicas nos estados homogêneo e inhomogêneo. Também investigamos, através das equações cinéticas, a dinâmica dos sistemas de longo alcance e do sistema gravitacional unidimensional. As equações que descrevem a dinâmica dos sistemas de longo alcance homogêneos e unidimensionais, equação de Landau e Balescu-Lenard, têm termo colisional nulo, sendo necessário considerar termos de ordem superior a estes para podermos concluir como ocorre a evolução destes sistemas. Obtivemos uma equação cinética geral, que descreve a dinâmica dos sistemas homogêneos, unidimensionais e com potencial periódico. Vimos para o estado homogêneo dos sistema unidimensional que o termo colisional da equação cinética é nulo e através de simulações constatamos que a distribuição de partículas permanece constante, indicando um termo colisional nulo se considerarmos um limite adequado, logo o sistema é dito não ergódico. Já para o estado inhomogêneo vimos que é ergódico, além de constatar que o termo de ordem  $1/N$  da equação de Balescu-Lenard em variáveis ângulo-ação é nulo. Portanto para cada um dos estados do sistema gravitacional unidimensional há uma dinâmica diferente.

**Palavras-chave:** sistemas de longo alcance, equações cinéticas, sistema gravitacional unidimensional

## Abstract

Long-range systems interact by a potential decaying over long distances with  $r^{-\alpha}$ , so that  $\alpha \leq d$  and  $d$  is the size of the system. We study unusual features of the one-dimensional gravitational system, this system consists of infinite free sheets to move on the  $x$  axis, and for that, we analyze the ergodic properties in the homogeneous and inhomogeneous states. We also studied, through kinetic equations, the dynamics of long-range systems and the one-dimensional gravitational system. The equations that describe the dynamics of homogeneous and one-dimensional long-range systems, the Landau and Balescu-Lenard equation, have a vanish collisional term, and it is necessary to consider terms of a higher order than these to conclude how these systems evolve. We obtained a general kinetic equation, which describes the dynamics of homogeneous, one-dimensional systems with periodic potential. We saw for the homogeneous state of the one-dimensional system that the collisional term of the kinetic equation is null and verify through simulations, we found that the particle distribution remains constant, indicating a vanish collisional term if we consider an adequate limit, so the system is said to be non-ergodic. As for the inhomogeneous state, we saw that it is ergodic, in addition to verifying that the order term  $1/N$  of the Balescu-Lenard equation in angle-action variables vanish. So for each of the states of the one-dimensional gravitational system, there is a different dynamic.

**Keywords:** long range systems, kinetic equations, one-dimensional gravitational systems

# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>1</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>1</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2 Sistema de Longo Alcance</b>	<b>5</b>
2.1 Extensividade e aditividade . . . . .	7
2.2 Não aditividade e a inequivalência de ensembles . . . . .	7
2.3 A não aditividade e a falta de convexidade . . . . .	8
2.4 Inequivalência de ensembles e o calor específico negativo . . . . .	9
2.5 Dinâmica de Sistemas de Longo Alcance . . . . .	10
<b>3 Equações Cinéticas</b>	<b>11</b>
3.1 Hierarquia BBGKY (Bogoliubov-Born-Green-Kirk wood-Yvon) . . . . .	11
3.2 Equação de Vlasov . . . . .	15
3.3 Equação de Landau . . . . .	17
3.4 Abordagem de Klimontovich . . . . .	21
3.5 Equação de Balescu-Lenard . . . . .	24
3.6 Resultados da dinâmica de sistemas de longo alcance homogêneo . . . . .	30
<b>4 Dinâmica de um sistema auto-gravitante unidimensional</b>	<b>36</b>
4.1 O modelo . . . . .	37
4.2 Condições de contorno periódica e soma de Ewald . . . . .	39
4.3 Equação cinética para o estado homogêneo . . . . .	42
4.4 Equação cinética para o estado não homogêneo . . . . .	43
4.5 Equação cinética para um estado não homogêneo do sistema auto-gravitante unidimensional . . . . .	51
<b>5 Ergodicidade do sistema auto-gravitante em uma dimensão</b>	<b>60</b>
5.1 Teste de ergodicidade - Método Direto . . . . .	60
5.2 Propriedades ergódicas do sistema auto-gravitante unidimensional . . . . .	61
5.2.1 Estado não homogêneo . . . . .	61
5.2.2 Estado homogêneo . . . . .	65
<b>6 Conclusão</b>	<b>67</b>

Referências Bibliográficas	69
Apêndice A Diagramas da hierarquia BBGKY	74
Apêndice B Formalismo de Hamilton-Jacobi	76
Apêndice C Integrador Simplético	77

# Lista de Figuras

4.1.1	Representação do sistema gravitacional, as partículas são representadas como planos infinitos, livres para se moverem no eixo $x$ . . . . .	37
4.3.2	Força na partícula $i$ , na posição $x = x_i$ , devido a $N - 1$ partículas para o sistema gravitacional unidimensional com o adicional potencial de Ewald, para diferentes números de partículas, mas mesma densidade $n = N/L$ . A posição foi reescalada para $[-1,1]$ para fins de comparação. Nossa célula unitária para $N = 2048$ é dada por $L = 20$ e simulamos para outros valores de $N$ para manter a densidade no mesmo valor. Figura retirada de [1]. . . . .	43
4.5.3	Potencial de campo médio em cada região para $x_0 = 10$ . . . . .	55
4.5.4	Região de integração para obter $J$ quando $E \leq x_0$ . . . . .	55
4.5.5	Região de integração para obter $J$ quando $E > x_0$ . . . . .	57
4.5.6	Na figura a curva vermelha representa o primeiro termo do lado direito de (4.5.166) e é aproximadamente coincidente com a curva verde. A curva azul representa o segundo termo do lado direito de (4.5.166) e a curva verde indica a soma dos dois termos, considerando $x_0 = 5.0$ e a energia variando de 6 a 1000. . . . .	58
5.2.1	(a): Evolução dos momentos reduzidos $\mu_4$ e $\mu_6$ ao longo do tempo. (b): Evolução temporal dos desvios $\sigma_x$ e $\sigma_p$ , para $N = 100$ , $x_0 = 10.0$ , $p_0 = 0.5$ . . . . .	63
5.2.2	A distribuição $g(p, t)$ (histograma), $\phi(p, t)$ (linha pontilhada) e a distribuição de equilíbrio (linha tracejada) para a mesma simulação da Fig. 5.2.1 para $\beta=0.225$ , para alguns valores de $t$ . . . . .	64
5.2.3	Mesmo como Fig. 5.2.2, mas para $h(x, t)$ (histograma) e $\rho(x, t)$ (linha pontilhada) e a distribuição espacial no equilíbrio (linha tracejada). . . . .	65
5.2.4	Momento reduzido $\mu_4$ e $\mu_6$ para o estado homogêneo com a condição inicial waterbag com $x_0 = 1.0$ e $p_0 = 3.0$ . . . . .	66
5.2.5	(a): Função distribuição $g(p, t)$ para $t = 10^5$ , a simulação é a mesma que a realizada em Fig. 5.2.4. (b): função distribuição $h(x, t)$ para $t = 10^5$ . . . . .	66
A.0.1	Diagrama tipo $X$ -vértice. . . . .	74
A.0.2	Diagrama tipo $Y$ -vértice. . . . .	74
A.0.3	Diagrama da hierarquia BBGKY para $s = 1$ . . . . .	75
A.0.4	Diagrama da hierarquia BBGKY para $s = 2$ . . . . .	75

# Capítulo 1

## Introdução

Neste trabalho iremos estudar a dinâmica de sistemas de longo alcance, ou seja, iremos descrever como esses sistemas se comportam ao longo do tempo. Tais sistemas são caracterizados por potenciais entre pares que decaem para longas distâncias com  $r^{-\alpha}$ , tal que  $\alpha \leq d$  e  $d$  é a dimensão do sistema. Eles apresentam propriedades termodinâmica no equilíbrio diferentes das observadas em sistemas de curto alcance como não ergodicidade ([2], [3], [4]), inequivalência de ensemble [5], não aditividade [6], entre outras. São exemplos desse tipo de sistema: os sistemas gravitacionais [7], plasmas [8], sistemas de dipolos [9] e o HMF (Hamiltonian Mean Field) [10]. A dinâmica de sistemas com interação de longo alcance pode tipicamente ser dividida em três estágios: a relaxação violenta, da condição inicial para os estados quasi-estacionários [11] e ocorre num tempo curto, seguida por uma evolução lenta para o equilíbrio termodinâmico, causado por efeitos de colisão ([12],[13]). O terceiro e último estágio é o equilíbrio termodinâmico, que pode nunca ser atingido no limite  $N \rightarrow \infty$ , neste estágio a descrição de campo médio se torna exata e a colisão contribue para que a equação cinética se torne nula [14].

Vamos considerar um sistema de partículas idênticas descrito pela hamiltoniana:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{N} \sum_{i < j=1}^N V_{ij}, \quad (1.0.1)$$

com potencial entre partículas  $V_{ij} \equiv V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$ ,  $\mathbf{p}_i$ ,  $\mathbf{r}_i$  o momento e a posição da partícula  $i$ , respectivamente, e  $m$  a massa de cada partícula. O fator  $1/N$  na energia potencial da Eq.(1.0.1) é introduzido tal que a energia total é extensiva (o chamado fator de Kac [15]) [2, 5, 16, 17].

A dinâmica dos sistemas de longo alcance são descritas pelas equações de Hamilton e de Liouville, das equações de Liouville derivamos a hierarquia BBGKY, da qual obtemos a equação de Landau ou Balescu-Lenard, quando os efeitos coletivos dos sistemas são levados em consideração. A equação de Landau é obtida quando computamos termos colisionais de ordem  $\lambda^2$  da hierarquia BBGKY, onde  $\lambda$  é a constante de acoplamento fraco, já a equação de Balescu-Lenard é obtida considerando termos colisionais de ordem  $1/N$ . No sistemas unidimensional homogêneo o termo colisional das equações de Landau e Balescu-Lenard cancelam, sendo necessário considerar termos de ordem superiores, ou seja, termos de ordem  $\lambda^3$  e  $1/N^2$ . Na literatura não há uma equação cinética que descreve a evolução de um sistema homogêneo, unidimensional, com potencial geral, neste trabalho iremos obter a equação cinética que descreve a dinâmica destes sistemas, com potencial periódico geral. Para obtermos esta equação usamos um método semelhante ao usado em [13] para

o modelo HMF, mas consideramos um potencial geral. Além de investigarmos um caso particular dos sistemas de longo alcance, que é o sistema gravitacional unidimensional.

O sistema gravitacional unidimensional tem potencial  $V(x, x') = 2\pi G|x - x'|$  [20] em que as partículas são folhas infinitas no eixo  $y - z$  e estão livres para se moverem no eixo  $x$ . Este potencial é obtido da solução da equação de Poisson no espaço unidimensional e este sistema contém  $N$  folhas infinitas cada uma com massa unitária. Para o estado homogêneo do sistema gravitacional unidimensional analisaremos os termos colisionais das hierarquias BBGKY e para o estado não homogêneo usaremos a abordagem de Chavanis [21], que consiste em obter o termo colisional da equação cinética usando variável ângulo-ação. Para os sistemas gravitacionais unidimensionais a força da partícula  $i$  é dada por  $F_i = (N_-^{(i)} - N_+^{(i)})/N$ , onde  $N_+^{(i)}$  e  $N_-^{(i)}$  são o número de partículas a direita e a esquerda da partícula  $i$ , respectivamente, e partículas podem cruzar entre si livremente.

A dinâmica do sistema gravitacional unidimensional foi estudada na literatura nas últimas décadas e uma questão recorrente era se o sistema relaxa para o equilíbrio termodinâmico, devido a dinâmica lenta de parâmetros macroscópicos [22, 23, 20, 24, 25]. Rybicki em seu trabalho [26] obtém a mecânica estatística desses sistemas, considerando os ensembles canônico e microcanônico, e encontra a função distribuição de uma partícula no ensemble microcanônico para um número de partículas finito e também no limite  $N \rightarrow \infty$ . Com isto muitos grupos dedicaram em estudar o tempo de termalização, ou seja, o tempo para o sistema relaxar para a distribuição microcanônica, considerando diferentes critérios. Em [27] os autores examinam um sistema de  $N = 40$  partículas e concluem que o tempo de termalização é da ordem de  $N^2 T_c$ , com  $T_c$  o tempo para uma partícula atravessar o sistema. Em [28] foram realizadas investigações a respeito da estabilidade destes sistemas para diferentes números de partícula e eles mostram através de simulações numéricas que sistemas com  $N \leq 10$  convergem para o equilíbrio, enquanto para  $N > 10$  o sistema fica preso em regiões intermediárias. Em [29] são feitas algumas simulações para  $N$  pequeno e grande e nota-se a existência de regiões no espaço de fase onde o sistema permanece por tempos longos e não atingindo o equilíbrio em ambos os casos, levantando questões sobre a estrutura do espaço de fase, relaxamento e a adequação de vários testes de equilíbrio para estes sistemas. Joyce e Worrakitpoonpon em [30] introduziram uma ferramenta para caracterizar o longo tempo de evolução desses sistema através da evolução do parâmetro de ordem para determinar o equilíbrio, mostraram que de fato o sistema gravitacional unidimensional evoluem para o equilíbrio no estado não homogêneo e que o tempo de relaxação escala linearmente com o número de partículas. Em [14] os autores mostram a evolução ao longo do tempo para o parâmetro  $\varsigma(t)$ , para o sistema auto-gravitante unidimensional com  $N$  finito, definido por:

$$\varsigma(t) = \frac{1}{N^2} \int [N(x, t) - N_{ch}(x)]^2 dx, \quad (1.0.2)$$

onde  $N(x, t)$  é o número de partículas localizada entre  $x$  e  $x + dx$  no tempo  $t$  e  $N_{ch}(x)$  é o número de partículas na posição  $x$  na distribuição de core-halo, que corresponde a distribuição no estado quasi estacionário ou QSS. Os autores mostram neste trabalho que o tempo de relaxação para o equilíbrio, partindo do QSS é proporcional a  $N^{1,8}$ , mas outros trabalhos indicam resultados divergentes quanto ao tempo de relaxação [18, 19].

Iremos separar nosso estudo em dois casos: estados homogêneos e inhomogêneo (ou não homogêneo). Mostraremos através de uma abordagem diferente de [30] que no estado não homogêneo com  $N$  finito o sistema realmente atinge o equilíbrio, já para o estado homogêneo as simulações indicam que a evolução é lenta e ao aumentar o tamanho da célula unitária a distribuição do momento se torna constante neste estado. Nossa abordagem, também usada em [31] para um sistema gravitacional bidimensional, consiste em obter a

distribuição de uma simples partícula para um tempo fixo e comparar com a média do ensemble de  $N$  partículas para um tempo fixo. Se o sistema é ergódico, para um tempo igual ao tempo de ergodicidade as duas distribuições são iguais a distribuição gaussiana apresentada por Rybicki em seu trabalho [26]. Realizaremos este teste de ergodicidade para ambos os estados (homogêneo e não homogêneo) do sistema gravitacional unidimensional. Além disso realizamos uma análise analítica das equações que descrevem a evolução destes sistemas.

Em suma neste trabalho iremos investigar a dinâmica dos sistemas de longo alcance através de uma análise analítica e investigar a dinâmica do sistema gravitacional unidimensional através de uma descrição analítica e apresentar alguns resultados que validam a análise analítica. Deste modo, dividiremos este trabalho da seguinte maneira: no capítulo 2 são apresentadas a definição do sistema de longo alcance e algumas das principais características desses sistemas. No capítulo 3 são introduzidas as principais equações que descrevem a dinâmica de sistemas de longo alcance e a partir destas equações obtemos a equação que descreve a dinâmica dos sistemas homogêneos e unidimensionais, para um potencial geral. No capítulo 4 descreveremos o sistema gravitacional unidimensional e são apresentados nossos resultados das equações que descrevem a dinâmica destes sistemas nos estados homogêneos e não homogêneos. Finalmente, no capítulo 5 expomos alguns resultados da teoria ergódica para o sistema gravitacional unidimensional e concluímos como ocorre a dinâmica para este sistema.

# Capítulo 2

## Sistema de Longo Alcance

Vamos estimar a energia potencial para uma partícula colocada no centro da esfera  $d$ -dimensional de raio  $R$ , considerar que as partículas estão homogeneamente distribuídas dentro do volume, excluindo a contribuição para as partículas localizadas na vizinhança de raio pequeno e menor que  $\delta$ , pois o potencial diverge próximo a origem. Se o potencial entre as partículas é [2, 3]:

$$V(r) = \frac{J}{r^\alpha}, \quad (2.0.1)$$

onde  $\alpha$  é o parâmetro chave, que define o alcance da interação, então a energia potencial é:

$$\begin{aligned} U &= \int_{\delta}^R \rho \frac{J}{r^\alpha} dr^d \\ &= \rho J \Omega_d \frac{r^{d-\alpha}}{d-\alpha} \Big|_{\delta}^R \\ &= \rho J \Omega_d (R^{d-\alpha} - \delta^{d-\alpha}), \end{aligned} \quad (2.0.2)$$

onde  $\rho$  é a densidade,  $J$  é a constante de acoplamento e  $\Omega_d$  o volume angular na dimensão  $d$  ( $2\pi$  em  $d = 2$ ,  $4\pi$  em  $d = 3$ ). Quando incrementamos o raio  $R$ , a energia é finita apenas se  $\alpha > d$ . Considerando a energia potencial total  $U_{total} = UV$ , a energia potencial total irá incrementar com o volume, este comportamento ocorre em sistemas de curto alcance. Ao contrário, se  $\alpha \leq d$ :

$$U \propto JR^{d-\alpha} \approx JV^{1-\alpha/d}. \quad (2.0.3)$$

Então a energia potencial de uma partícula cresce com o volume através do fator  $V^{1-\alpha/d}$  e a energia potencial total cresce com o fator  $V^{2-\alpha/d}$ . Casos onde a energia potencial total cresce superlinearmente com o volume define interações de longo alcance. Segue alguns exemplos de sistemas de longo alcance [6]:

- **Gravitacional-** O sistema gravitacional é muito utilizado na astrofísica, esta interação é responsável pela dinâmica, formação e evolução das galáxias. Para o sistema unidimensional  $\alpha = -1$  e  $d = 1$ :

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \frac{2\pi Gm^2}{N} \sum_{i>j}^N |x_i - x_j|, \quad (2.0.4)$$

onde  $m$  é a massa da partícula  $i$ ,  $G$  é a constante gravitacional,  $x_i$  é a posição da partícula  $i$  e  $p_i$  o momento [29, 32].

Para o sistema bidimensional:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \frac{2\pi Gm^2}{2N} \sum_{i,j=1}^N \ln(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| + \epsilon), \quad (2.0.5)$$

onde  $m$  é a massa da partícula  $i$ ,  $\mathbf{r}_i$ ,  $p_i$  é a posição e o momento da partícula  $i$ , respectivamente, e  $\epsilon$  é o parâmetro de suavização, usado para lidar com a divergência quando a distância entre as partículas é zero [31].

Para o sistema tridimensional  $\alpha = 1$  e  $d = 3$ :

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \frac{2\pi Gm^2}{N} \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad (2.0.6)$$

onde  $m$  é a massa da partícula  $i$ ,  $\mathbf{r}_i$  e  $p_i$  é a posição e o momento da partícula  $i$  [33].

- **HMF-O** modelo Hamiltonian Mean-Field (HMF) é definido como:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{\varepsilon}{2N} \sum_{i,j} [1 - \cos(\theta_i - \theta_j)], \quad (2.0.7)$$

onde  $m_i$  é a massa da partícula  $i$ ,  $\theta_i \in [0, 2\pi]$  é a posição,  $p_i$  o momento conjugado da partícula  $i$  e  $\varepsilon$  é a constante que indica atração ( $\varepsilon > 0$ ) ou repulsão ( $\varepsilon < 0$ ) entre as partículas. Este potencial é obtido considerando apenas o primeiro termo da expansão do potencial gravitacional unidimensional em séries de Fourier [34]

- **Modelo Blume-Capel**- Esse modelo consiste em reproduzir a superfluidez da mistura  $He^3 - He^4$ . Para este modelo a hamiltoniana é:

$$H = \Delta \sum_{i=1}^N S_i^2 - \frac{J}{2N} \left( \sum_{i=1}^N S_i \right)^2, \quad (2.0.8)$$

onde  $J$  é a constante de acoplamento,  $S_i = 0, \pm 1$  é a variável de spin e  $\Delta > 0$  controla a diferença de energia entre o estado ferromagnético e paramagnético [35].

- **Sistema Dipolar**- Para este sistema a hamiltoniana é

$$H = \frac{\mu_0}{4\pi N} \sum_{i>j=1}^N \left[ \frac{\vec{\mu}_i \cdot \vec{\mu}_j}{|\vec{r}_{ij}|^3} - \frac{3(\vec{\mu}_i \cdot \vec{r}_{ij})(\vec{\mu}_j \cdot \vec{r}_{ij})}{|\vec{r}_{ij}|^5} \right], \quad (2.0.9)$$

onde  $\vec{\mu}_i$  é o momento magnético,  $\vec{r}_{ij} = (\vec{r}_j - \vec{r}_i)$  é a distância entre dois dipolos e  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo [36].

Como veremos a seguir o fato de conseguirmos transformar os sistemas de longo alcance em extensivos, através da redefinição da constante de acoplamento, não implica em aditividade. E veremos a seguir algumas outras características destes sistemas.

## 2.1 Extensividade e aditividade

Nesta seção utilizaremos a hamiltoniana de campo médio de Curie-Weiss para ilustrar os conceitos de aditividade e extensividade. Esta hamiltoniana é definida como segue:

$$H_{cw} = -\frac{J}{2N} \sum_{i,j=1}^N S_i S_j = -\frac{J}{2N} \left( \sum_{i=1}^N S_i \right)^2, \quad (2.1.10)$$

onde a variável de spin  $S_i = \pm 1$  é relacionada ao específico sítio  $i$ , tal que  $i = 1, \dots, N$ . O fator  $1/N$  da prescrição de Kac, garante a extensividade de (2.1.10). A magnetização por partícula é uma grandeza intensiva

$$m = \frac{\sum_{i=1}^N S_i}{N} = \frac{M}{N}, \quad (2.1.11)$$

enquanto  $M$  é uma grandeza extensiva e a hamiltoniana (2.1.10) é não aditiva, como veremos a seguir.

Vamos dividir um sistema em duas partes: uma parte com  $N/2$  spins  $+$  e outra com  $N/2$  spins  $-$  [2]. A energia das duas partes é calculada e obtem-se  $E_1 = E_2 = -\frac{JN}{2}$ . Por outro lado, a energia total  $E$  desse sistema é zero. Já que  $E \neq E_1 + E_2$ , o sistema é dito não aditivo. A extensividade em (2.1.10) é garantida pelo fator  $1/N$ . Logo o sistema descrito pela Eq. (2.1.10) é extensivo, mas não aditivo.

Dividindo um dado sistema em duas partes, a energia  $E$  vai ser igual a  $E_1 + E_2 + E_{int}$ , onde  $E_1$  e  $E_2$  é a energia das partes e  $E_{int}$  é a energia de interação entre as partes. No limite termodinâmico se a razão  $E_{int}/(E_1 + E_2)$  tende a zero, então o sistema é dito aditivo. A aditividade está relacionada com a extensividade, uma vez que se  $E_{int}$  tende a zero no limite termodinâmico, então a energia de duas partes iguais é igual a metade da energia total e a energia total é o dobro da energia de uma das metades, então aditividade implica extensividade (não extensividade implica não aditividade), mas o reverso não é válido, desde que a energia de interação deve escalar com  $N$ , como é o caso do modelo de Curie-Weiss. Para este modelo  $E_{int} \propto N$  e no limite termodinâmico a razão  $E_{int}/(E_1 + E_2)$  não tende a zero [2].

## 2.2 Não aditividade e a inequivalência de ensembles

Tomemos um sistema com dimensão  $d = 3$ , com  $N$  partículas e volume  $V$ , o número de microestados com energia  $E$ , no espaço de fase é

$$\Omega(E) \sim \int d^{3N} q d^{3N} p \delta(E - H(q, p)) \quad (2.2.12)$$

onde  $H$  é a hamiltoniana do sistema. A entropia é

$$S(E) = \ln \Omega(E), \quad (2.2.13)$$

onde a constante de Boltzmann  $k_b$  é tomada igual a 1.

Agora considere um sistema isolado com energia  $E$  e vamos dividir esse sistema em duas partes: a primeira parte menor com energia  $E_1$  e a segunda parte maior com energia

$E_2$ . Se o sistema é aditivo a probabilidade que o sistema tenha energia  $E_1$  é:

$$\begin{aligned}
p(E_1) &= \int \Omega_2(E_2) \delta(E_1 + E_2 - E) dE_2 = \Omega_2(E - E_1) \\
\ln p(E_1) &= \ln \Omega_2(E - E_1) = S(E - E_1) \\
p(E_1) &= \exp(S_2(E - E_1)) = \exp\left(S_2(E) + (-E_1) \frac{\partial S_2}{\partial E} \Big|_E + \dots\right) \\
&\propto \Omega_2(E) \exp(-E_1 \beta)
\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Podemos observar que quando o sistema é aditivo, podemos partir do ensemble microcanônico e construir o ensemble canônico. Quando o sistema é finito claramente a aditividade é violada, pois a entropia depende da contribuição da superfície que separa os dois subsistemas. No limite termodinâmico essa contribuição pode ser negligenciada para sistemas de curto alcance, mas não pode ser negligenciada para sistemas de longo alcance. Nos sistemas de longo alcance mesmo no limite termodinâmico,  $E = E_1 + E_2 + E_{int}$ , onde  $E_{int}$  é a energia da superfície que separa os dois subsistemas [6]. A escolha do ensemble dependerá dos vínculos físicos do sistema:

- O ensemble microcanônico é empregado quando o sistema é isolado, em [37] o autor considera a aplicação deste ensemble nos sistemas com partículas carregadas, com potencial Coulombiano, e em sistemas auto-gravitantes;
- O ensemble canônico é empregado quando o sistema está em contato com um banho térmico, como é o caso apresentado em [38] em que os autores mostram que no HMF podemos usar o ensemble canônico;
- E caso os ensembles sejam equivalentes, pode-se escolher qualquer um.

## 2.3 A não aditividade e a falta de convexidade

Seja o espaço de grandezas termodinâmicas intensivas  $(\varepsilon, m)$ , onde  $m$  é a magnetização por partícula e  $\varepsilon$  é a energia por partícula do sistema. Dividimos um sistema de curto alcance em dois subsistemas com energias diferentes  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  e magnetizações diferentes  $(m_1, m_2)$ . Definimos  $\lambda$  como sendo um parâmetro com valor entre 0 e 1, dependendo do tamanho do subsistema.

Considerando a aditividade dos sistemas de curto alcance, a energia total devido à contribuição de cada um dos subsistemas é  $\varepsilon = \lambda\varepsilon_1 + (1 - \lambda)\varepsilon_2$  e a magnetização  $m = \lambda m_1 + (1 - \lambda)m_2$ . Qualquer valor de  $\lambda$  no intervalo  $[0,1]$  corresponde a uma configuração do sistema que pode ser realizada. Portanto convexidade implica que o espaço de parâmetros é conectado.

Já em sistemas de longo alcance as interações são não aditivas e intermediários valores dos parâmetros não são necessariamente aceitáveis, para estes sistemas o espaço dos parâmetros termodinâmicos não é conectado. Mas devemos tomar um cuidado, pois não aditividade não necessariamente implica ser não conectado [2].

## 2.4 Inequivalência de ensembles e o calor específico negativo

No ensemble canônico o valor médio da energia é

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{\sum_i E_i e^{-\beta E_i}}{Z}, \quad (2.4.15)$$

com  $Z$  a função de partição e o calor específico é

$$c_v = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = \frac{1}{k_B T^2} \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle > 0, \quad (2.4.16)$$

com  $\beta = 1/k_B T$ , logo podemos concluir que o calor específico canônico é sempre positivo.

Já para sistemas auto-gravitantes isolados (ensemble microcanônico) tridimensionais utiliza-se o teorema do virial, que vale para o potencial  $V(r_{ij}) \propto r_{ij}^{-\alpha}$  (para sistemas autogravitantes  $\alpha = -1$ ). O teorema do virial fornece uma relação entre a energia potencial e a energia cinética para sistemas no estado estacionário. Partimos da identidade de Lagrange (para mais detalhes ver [39, 40]),

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2E_c + U, \quad (2.4.17)$$

onde  $E_c$ ,  $U$  e  $I$  são a energia cinética, potencial e o momento de inércia, respectivamente, com:

$$I = \sum_i m r_i^2. \quad (2.4.18)$$

Considerando a média temporal de (2.4.17) ao longo de  $t$  obtemos:

$$0 = 2 \langle E_c \rangle + \langle U \rangle, \quad (2.4.19)$$

este é o teorema do virial para sistemas com potencial  $1/r^\alpha$ . Do teorema do virial temos que:

$$E = \langle E_c \rangle + \langle U \rangle = -\langle E_c \rangle. \quad (2.4.20)$$

Como a energia cinética  $E_c$  devido o teorema da equipartição é proporcional à temperatura, temos que:

$$c_v = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \propto \frac{\partial E}{\partial \langle E_c \rangle} < 0, \quad (2.4.21)$$

ou seja, quando o sistema perder energia este ficará mais quente. Portanto há uma inequivalência entre os ensembles canônico e microcanônicos para os sistemas autogravitantes tridimensionais. Podemos notar essa inequivalência também em plasmas [41] e fluidos dinâmicos bidimensionais [42]. Já no modelo HMF os ensembles são equivalentes, esta equivalência é discutida em [43]. Ou seja, a inequivalência de ensemble é uma característica presente em alguns sistemas de longo alcance.

## 2.5 Dinâmica de Sistemas de Longo Alcance

A dinâmica dos sistemas de longo alcance é regida por três estágios descritos a seguir. O primeiro estágio é a relaxação violenta, que representa a evolução desde as condições iniciais até estados de Vlasov. Este é um estágio rápido que independe do número de partículas e é uma consequência da dinâmica complexa não linear da equação de Vlasov [44].

O segundo estágio da dinâmica são os estados quasi estacionários (QSS), que são estados estáveis de Vlasov, fora do equilíbrio, na qual o sistema está preso. Nesse estágio o sistema permanece por tempos longos até atingir o equilíbrio, o tempo de permanência nos QSS é conhecido como tempo de relaxação e diverge com  $N$  [13]. A dinâmica lenta nos QSS foi estudada ao longo dos anos por vários autores [6, 5, 44], principalmente para o sistema Hamiltonian Mean Field (HMF) [44, 10, 45, 12], onde sistemáticas simulações e análises das equações cinéticas indicam que a lei de escala de duração do QSS para o HMF é  $N^2$ .

O terceiro estágio é o estágio de equilíbrio de Gibbs-Boltzmann, que é o estágio na qual o sistema é conduzido após os QSS [2].

# Capítulo 3

## Equações Cinéticas

Neste capítulo veremos algumas equações cinéticas que descrevem a evolução de sistemas de longo alcance e, em particular, como obter a equação cinética geral para sistemas de longo alcance homogêneos e unidimensionais.

### 3.1 Hierarquia BBGKY (Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon)

Esta abordagem apresentada abaixo é a utilizada em [16]. Introduzimos a notação  $j$  para representar a coordenada  $\vec{x}_j$  e o momento  $\vec{p}_j$  da partícula  $j$ :

$$j = \{\vec{x}_j, \vec{p}_j\}, \quad (3.1.1)$$

para  $j = 1, \dots, N$ . Considerando um sistema de  $N$  partículas, a hamiltoniana desse sistema é uma função das variáveis  $1, 2, \dots, N$ , e pode ser escrita como,

$$H(1, 2, \dots, N) = \sum_{j=1}^N H_j^0(j) + \sum_{j < k} \sum_{k=1}^N V(j, k), \quad (3.1.2)$$

onde  $H_j^0(j)$  é a energia cinética,

$$H_j^0 = \frac{p_j^2}{2m}, \quad (3.1.3)$$

e  $V(j, k)$  é o potencial de interação entre as partículas  $j$  e  $k$ .

O estado estatístico do sistema é representado pela função distribuição no espaço de fase  $F(1, \dots, N, t)$  (eventualmente a dependência temporal será considerada implícita quando não escrita), tal que  $F(1, \dots, N, t) d1 \dots dN$  é a probabilidade de encontrar a partícula 1 no volume do espaço de fase  $d1 = dx_1 dp_1$ , a partícula 2 no volume do espaço de fase  $d2$  e assim por diante e vamos considerar todas as partículas idênticas com massa  $m$ .

Vamos definir a função distribuição de uma partícula  $f_1(1)$ , como

$$f_1(1) = \int d2 \dots dN F(1, \dots, N). \quad (3.1.4)$$

Agora definiremos a função distribuição reduzida de  $s$ -partículas  $f_s(1, \dots, s)$ ,  $s \leq N$ :

$$f_s(1, \dots, s) = \int d(s+1) \dots dN F(1, \dots, N), \quad (3.1.5)$$

tal que  $f_s(1, \dots, s)$  representa a densidade de probabilidade das  $s$  partículas estar nos respectivos  $s$  espaços de fase. Sabendo que

$$\int F(1, \dots, N) d1 \dots dN = 1, \quad (3.1.6)$$

a condição de normalização da função distribuição reduzida é:

$$\int d1 \dots ds f_s(1, \dots, s) = 1. \quad (3.1.7)$$

Em sistemas homogêneos as propriedades intensivas são as mesmas em todos os pontos do espaço. Essa propriedade é expressa matematicamente por:

$$f_s(\vec{x}_1 + \vec{a}, \vec{x}_2 + \vec{a}, \dots, \vec{x}_s + \vec{a}, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_s) = f_s(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_s, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_s), \quad (3.1.8)$$

onde  $\vec{a}$  é um vetor constante. Devido ao vínculo de (3.1.8), a função distribuição reduzida de  $s$  partículas depende efetivamente de  $s - 1$  variáveis de posição. Em particular,  $f_1$  depende apenas do momento  $\vec{p}$  e  $f_2$  depende da distância entre as partículas, além dos momentos das partículas, ou seja,

$$\begin{aligned} f_1(\vec{x}, \vec{p}) &= n\varphi(\vec{p}), \\ f_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2) &= f_2(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2), \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

onde  $n = 1/V$  é a densidade, a qual é constante para o sistema homogêneo, neste caso iremos considerar:

$$\int \varphi(\vec{p}) d\vec{p} = 1. \quad (3.1.10)$$

A evolução de um sistema de  $N$  partículas interagentes contidas num volume  $V$  é descrita pela equação de Liouville. Esta equação determina, que para um sistema com  $6N$  condições iniciais únicas  $[\vec{x}_0, \vec{p}_0]$ , a evolução hamiltoniana garante que a forma pode mudar, mas o volume permanece o mesmo. A equação de Liouville é:

$$\begin{aligned} \partial_t F(1, \dots, N) &= [H(1, \dots, N), F(1, \dots, N)] \\ \partial_t F(1, \dots, N) &= LF(1, \dots, N), \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

em que

$$L = \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{\partial H}{\partial \vec{x}_j} \frac{\partial}{\partial \vec{p}_j} - \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_j} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_j} \right\}, \quad (3.1.12)$$

é o operador Liouvilliano e  $H$  é a hamiltoniana do sistema de  $N$  partículas:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \sum_i \sum_{<k}^N V_{ik}, \quad (3.1.13)$$

com  $V_{ik} = V(x_i - x_k)$ . Vamos usar as seguintes abreviações:

$$\vec{\nabla}_j \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{x}_j}, \quad \partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{p}_j}, \quad \partial_{jn} = \partial_j - \partial_n \quad (3.1.14)$$

Então:

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{j=1}^N L_j^0 + \sum_i \sum_{<k} \sum_j \frac{\partial V_{ik}}{\partial \vec{x}_j} \frac{\partial}{\partial \vec{p}_j} \\
&= \sum_{j=1}^N L_j^0 + \sum_i \sum_{<k} \left( \frac{\partial V_{ik}}{\partial \vec{x}_i} \frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} + \frac{\partial V_{ik}}{\partial \vec{x}_k} \frac{\partial}{\partial \vec{p}_k} \right) \\
&= \sum_{j=1}^N L_j^0 + \sum_i \sum_{<k} \left( \vec{\nabla}_i V_{ik} \right) \partial_{ik}
\end{aligned} \tag{3.1.15}$$

com  $L_j^0 = -(\vec{p}_j/m) \cdot \vec{\nabla}_j$  e  $\partial V_{ik}/\partial \vec{x}_i = -\partial V_{ik}/\partial \vec{x}_k$ . E considerando  $L'_{ik} = \vec{\nabla}_i V_{ik} \partial_{ik}$ , temos:

$$L = \sum_{j=1}^N L_j^0 + \sum_i \sum_{<k} L'_{ik}. \tag{3.1.16}$$

Portanto a equação de Liouville (3.1.11) pode ser reescrita, como:

$$\partial_t F = \sum_{j=1}^N L_j^0 F + \sum_{i<k} \sum_{k=1}^N L'_{ik} F. \tag{3.1.17}$$

Derivando a condição de normalização de  $F(1, \dots, N)$  dada por Eq. (3.1.6) com relação ao tempo, obtemos:

$$\int \frac{\partial F(1, \dots, N)}{\partial t} d1 \dots dN = 0. \tag{3.1.18}$$

Logo, integrando (3.1.17) com relação a  $d1 \dots dN$  e usando (3.1.18):

$$\int d1 d2 \dots dN \left\{ \sum_{j=1}^N L_j^0 F + \sum_{i<k} \sum_{k=1}^N L'_{ik} F \right\} = 0, \tag{3.1.19}$$

para que esta equação se anule, os termos devem cancelar separadamente, ou seja,

$$\begin{aligned}
\int d1 \dots dN L_j^0 F(1, \dots, N) &= 0, \\
\int d1 \dots dN L'_{jk} F(1, \dots, N) &= 0,
\end{aligned} \tag{3.1.20}$$

para todo  $j$ . Cada um dos termos acima envolve derivada de  $F$  com respeito a  $x$  ou  $p$ , vamos considerar sempre nulas as integrais de superfícies, ou seja,

$$\int d\vec{x}_j \frac{\partial F}{\partial \vec{x}_j} = 0 \quad \text{e} \quad \int d\vec{p}_j \frac{\partial F}{\partial \vec{p}_j} = 0. \tag{3.1.21}$$

Integrando a Eq. (3.1.17) sobre as partículas  $s+1, \dots, N$ , obtemos então a equação da evolução da função distribuição reduzida a  $s$ -partículas:

$$\partial_t f_s(1, \dots, N) = \int d(s+1) \dots dN \left( \sum_{j=0}^N L_j^0 F + \sum_{i<k} \sum_{k=1}^N L'_{ik} F \right) \tag{3.1.22}$$

Considerando a propriedade de (3.1.21) no primeiro termo do lado direito de (3.1.22), reduzimos a

$$\partial_t f_s(1, \dots, s) = \sum_{j=0}^s L_j^0 f_s(1, \dots, s) + \int d(s+1) \dots dN \sum_{i <} \sum_{k=1}^N L'_{ik} F. \quad (3.1.23)$$

Já o segundo termo do lado direito de (3.1.23) é ramificado em três casos:

1. Partículas  $i$  e  $k$  pertencente ao grupo  $(1, \dots, s)$ . Para esta região:

$$\sum_{i <} \sum_{k=1}^s L'_{ik} f_s(1, \dots, s); \quad (3.1.24)$$

2. Partículas  $i$  e  $k$  pertencente ao grupo  $s+1, \dots, N$ . Para esta região os termos são nulos devido as integrais de superfície;
3. Partículas  $i$  pertencentes ao grupo  $1, \dots, s$  e partículas  $k$  pertencentes a  $s+1, \dots, N$ . Neste caso consideramos que  $f_s(1, \dots, s)$  é simétrica sob mudança de partículas, ou seja,

$$f_3(1, 2, 3) = f_3(1, 3, 2). \quad (3.1.25)$$

Vamos considerar que:

$$\int d2 \dots dN L_{12} F(1, \dots, N) = \int d2 \dots dN L_{13} F(1, \dots, N), \quad (3.1.26)$$

$$\begin{aligned} \int d2 d3 L_{12} f_3(1, 2, 3) &= \int d2 d3 L_{13} f_3(1, 2, 3), \\ \int d2 L_{12} f_2(1, 2) &= \int d3 L_{13} f_2(1, 3). \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

Ou seja, para que a igualdade de (3.1.26) seja estabelecida, basta fazer uma mudança de variável de 3 para 2. Portanto, no terceiro caso, todos os termos do somatório  $\sum_{k=s+1}^N$  para um dado  $i$  são iguais, logo:

$$\begin{aligned} \int d(s+1) \dots dN \sum_{i=1}^s \sum_{k=s+1}^N L'_{ik} F(1, \dots, N) &= \int d(s+1) \dots dN \sum_{i=1}^s (N-s) L'_{i,s+1} F(1, \dots, N) \\ &= \int d(s+1) \dots dN (N-s) \sum_{i=1}^s L'_{i,s+1} F(1, \dots, N) \\ &= (N-s) \int d(s+1) \sum_{i=1}^s L'_{i,s+1} f_{s+1}(1, \dots, (s+1)) \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

Reescrevendo a equação (3.1.23), obtemos:

$$\begin{aligned} \partial_t f_s(1, \dots, s) &= \sum_{j=0}^s L_j^0 f_s(1, \dots, s) + \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^s L'_{ik} f_s(1, \dots, s) \\ &+ (N-s) \sum_{i=1}^s \int dx_{s+1} L'_{i,s+1} f_{s+1}(1, \dots, (s+1)), \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

para  $1 \leq s \leq N$ . Esta equação consiste de um conjunto de  $N$  equações, relacionando a evolução da função distribuição de  $s$  partículas com a função distribuição de  $(s + 1)$  partículas. Devido a esta característica, esta é uma equação hierarquica e conhecida como hierarquia BBGKY (a inicial dos autores que derivaram esta equação: Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon).

Outra abordagem possível é a utilizada por Balescu em [17], nesta abordagem o autor considera a seguinte condição de normalização para a função distribuição reduzida:

$$\int d1.. ds f_s(1, \dots, s) = \frac{N!}{(N - s)!}. \quad (3.1.30)$$

Nesta abordagem a hierarquia BBGKY é:

$$\begin{aligned} \partial_t f_s(1, \dots, s) &= \sum_{j=0}^s L_j^0 f_s(1, \dots, s) + \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^s L'_{ik} f_s(1, \dots, s) \\ &+ \sum_{i=1}^s \int dx_{s+1} L'_{i,s+1} f_{s+1}(1, \dots, s + 1), \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

para  $1 \leq s \leq N$ .

Ambas as abordagens representam a equação que descreve a dinâmica de sistemas de longo alcance, a diferença está apenas na definição da função distribuição reduzida. Ao longo deste trabalho iremos utilizar as duas abordagens conforme conveniência. A hierarquia BBGKY pode ser representada através de diagramas que indicam as interações entre partículas, para entender como são representados os termos da hierarquia BBGKY através dos diagramas veja [Apêndice A](#).

## 3.2 Equação de Vlasov

Para um sistema de  $s$  partículas, se a probabilidade de encontrar uma partícula no estado  $x_i$  independe de outras partículas, podemos representar a função distribuição reduzida, tal que:

$$f_s(1, \dots, s) = \prod_{j=1}^s f_1(j). \quad (3.2.32)$$

Neste caso, o sistema de partículas é dito descorrelacionado e as partículas são estatisticamente independentes uma das outras. A correlação depende da distância entre as partículas e quando a distância tende a infinito a correlação é nula. A representação de aglomerado descreve essa dependência da correlação com a distância, além de relacionar o número de partículas da função distribuição reduzida com os possíveis tipos de correlações. Para um sistema de duas partículas, a única correlação entre partículas é a correlação entre duas partículas. Para um sistema com três partículas, a correlação pode ocorrer entre um par de partículas e a terceira partícula estar independente ou a correlação pode ocorrer entre as três partículas. Ou seja, podemos escrever a função distribuição reduzida de  $s$  partículas com um termo que representa a descorrelação entre as partículas e os termos que indicam as correlações:

$$f_2(1, 2) = f(1)f(2) + g_2(1, 2), \quad (3.2.33)$$

$$\begin{aligned} f_3(1, 2, 3) &= f(1)f(2)f(3) + f(1)g_2(2, 3) + f(2)g_2(1, 3) \\ &+ f(3)g_2(1, 2) + g_3(1, 2, 3), \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

e assim por diante.

Usando a representação de aglomerado podemos reescrever a hierarquia BBGKY (3.1.31) para  $s = 1$ :

$$\begin{aligned}\partial_t f(1) &= L_1^0 f(1) + \int d2 L'_{12} f_2(1, 2) \\ &= L_1^0 f(1) + \int d2 L'_{12} (f(1) f(2) + g_2(1, 2)).\end{aligned}\quad (3.2.35)$$

E para  $s = 2$ :

$$\begin{aligned}\partial_t f_2(1, 2) &= L_1^0 f_2(1, 2) + L_2^0 f_2(1, 2) + L'_{12} f_2(1, 2) \\ &+ \int d3 (L'_{13} f_3(1, 2, 3) + L'_{23} f_3(1, 2, 3)).\end{aligned}\quad (3.2.36)$$

Usando (3.2.33), (3.2.34), (3.2.35) na (3.2.36), obtemos:

$$\begin{aligned}\partial_t g_2(1, 2) - (L_1^0 + L_2^0) g_2(1, 2) &= L'_{12} (f(1) f(2) + g_2(1, 2)) \\ &+ \int d3 \{L'_{13} f(1) g_2(2, 3) + L'_{23} f(2) g_2(1, 3) \\ &+ (L'_{13} + L'_{23}) (f(3) g_2(1, 2) + g_3(1, 2, 3))\}.\end{aligned}\quad (3.2.37)$$

Sob certas condições as partículas podem ser consideradas descorrelacionadas (para mais detalhes veja [17]), tal que:

$$\partial_t f(1) = L_1^0 f(1) + \int d2 L'_{12} f(1) f(2).\quad (3.2.38)$$

O último termo da equação (3.2.38), usando as integrais de superfície (3.1.21), pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}\int d2 L'_{12} f(1) f(2) &= \int d2 \nabla_1 V_{12} \partial_{12} f(1) f(2) \\ &= \int d2 \nabla_1 V_{12} f(2) \partial_1 f(1) \\ &= \nabla_1 \int d\vec{x}_2 d\vec{p}_2 V_{12}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) f(2) \partial_1 f(1) \\ &= \nabla_1 \bar{V}(\vec{x}_1) \partial_1 f(1) \\ &= \mathcal{V}\{ff\},\end{aligned}\quad (3.2.39)$$

com :

$$\bar{V}(\vec{x}_1) = \int d\vec{x}_2 d\vec{p}_2 V_{12}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) f(2)\quad (3.2.40)$$

e  $\bar{V}$  é o potencial médio. Portanto:

$$\partial_t f(1) = L_1^0 f(1) + \mathcal{V}\{ff\}.\quad (3.2.41)$$

A equação (3.2.41) é conhecida como equação de Vlasov [46]. Seus termos têm a seguintes característica:

- $L_1^0 f(1)$ - está associado ao deslocamento das partículas devido sua velocidade. Quando apenas este termo está presente as partículas se movem livremente com velocidade constante;
- $\mathcal{V}\{ff\}$ - é o termo de Vlasov, ele é responsável pela aceleração e desaceleração das partículas, devido a dependência com o potencial de interação  $V_{12}$  [47].

### 3.3 Equação de Landau

Na prática as equações cinéticas de interesse são derivadas através de uma expansão em termos de um parâmetro pequeno. Inicialmente vamos considerar o estado de referência quando todas as interações estão “desligadas” e que o potencial de interação  $V(r)$  é uniformemente pequeno para todas as distâncias. Para dimensionar este potencial vamos considerá-lo:

$$V(r) \equiv \lambda v(r), \quad (3.3.42)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro adimensional.

Quando  $\lambda \ll 1$ , temos o acoplamento fraco. Ou seja, os termos da equação cinética que dependem do potencial serão termos de ordem  $O(\lambda)$ , já termos que não dependem da interação são termos de ordem  $O(\lambda^0)$ . Portanto,

$$L_j^0 = O(\lambda^0), \quad L'_{jn} = O(\lambda) \quad (3.3.43)$$

e

$$f(1) = O(\lambda^0), \quad (3.3.44)$$

mas para correlacionar duas partículas é necessário pelo menos uma interação, logo:

$$g_2(1, 2) = O(\lambda) \quad (3.3.45)$$

e para correlacionar três partículas é necessário pelo menos duas interações (a interação da partícula 1 com a 2 e da partícula 2 com a 3, por exemplo), então:

$$g_3(1, 2, 3) = O(\lambda^2). \quad (3.3.46)$$

Para um sistema de longo alcance de partículas interagentes, há diferentes tipos de comprimentos característicos e tempo de escala associados a estes comprimentos. Na equação de Vlasov vimos que a interação ocorre devido ao potencial de campo médio, ela é obtida considerando termos de ordem  $\lambda$ . Considerando termos de ordem superior ( $O(\lambda^2)$ ) a dinâmica dependerá também da correlação entre partículas. Para caracterizar o movimento é necessário os seguintes comprimentos e tempos característicos ( esta seção apresenta o método desenvolvido em [17]):

- 1° termo- Considere o movimento de uma partícula P em linha reta, quando uma partícula P se encontra próxima a uma partícula Q seu movimento muda para uma trajetória curva devido a correlação entre as partículas. Esta distância onde começa ocorrer a correlação é conhecida como comprimento de correlação  $l_c$  e o tempo onde a partícula estará sob influência da correlação é conhecido como tempo de correlação  $\tau_c$ . Ambos  $l_c$  e  $\tau_c$  são independentes de  $\lambda$ .
- 2° termo- Após o evento da correlação a partícula P continua seguindo uma trajetória retilínea até ocorrer outra colisão (correlação) com outra partícula. O comprimento percorrido entre duas colisões é conhecido como livre caminho médio  $l_{mfp}$ , este comprimento depende inversamente da densidade, quanto maior a densidade menor será o  $l_{mfp}$ , e do comprimento das interações ( $\lambda$ ), quanto maior  $\lambda$  menor será  $l_{mfp}$ . O tempo entre duas sucessivas colisões é conhecido como  $\tau_R$  tempo de relaxação.

- 3º termo- O último comprimento característico é o hidrodinâmico  $l_H$ , a qual depende do comprimento macroscópico do sistema. Este comprimento é maior do que todos os outros e associado a ele está o tempo hidrodinâmico  $\tau_H$ .

Esses comprimentos característicos e tempos característicos se relacionam através da inequivalência a seguir:

$$l_c \ll l_{mfp} \ll l_H \quad \text{e} \quad \tau_c < \tau_R < \tau_H. \quad (3.3.47)$$

Como vimos o tempo de correlação  $\tau_c$  é o menor tempo. Vamos assumir  $t$ , o tempo de interesse da teoria cinética, como sendo muito maior do que o menor tempo característico, ou seja,

$$\tau_c \ll t, \quad (3.3.48)$$

pois vamos considerar o tratamento assintótico do processo evolutivo.

Em sistemas homogêneos  $f(\vec{x}, \vec{p}, t) = n\varphi(\vec{p}, t)$ , logo o termo de Vlasov é reescrito, tal que:

$$\mathcal{V}\{ff\} = n^2 \int dp_2 \nabla_1 \left( \int d\vec{x}_2 V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \right) \partial_1 \varphi(\vec{p}_1, t) \varphi(\vec{p}_2, t), \quad (3.3.49)$$

fazendo a mudança de variável  $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ ,

$$\mathcal{V}\{ff\} = n^2 \partial_1 \varphi(\vec{p}_1, t) \nabla_1 \int dr V(r) = n^2 \partial_1 \varphi(\vec{p}_1, t) \nabla_1 V = 0, \quad (3.3.50)$$

onde  $V$  é uma constante. E a equação de Vlasov fica:

$$\partial_t \varphi(\vec{p}, t) = 0, \quad (3.3.51)$$

portanto para sistemas homogêneos devemos considerar os termos de ordem superior ( $O(\lambda^2)$ ). Para tanto vamos considerar o termo que depende da correlação em (3.2.35), mas para obter uma equação dinâmica para a função distribuição de uma partícula,  $f(1)$ , precisamos resolver (3.2.37). No lado direito da equação (3.2.37), apenas o primeiro termo é de ordem  $\lambda$ , os demais termos são de ordem  $\lambda^2$  e  $\lambda^3$ . Considerando apenas os termos de ordem  $\lambda$ :

$$\partial_t g_2(1, 2, t) + (L_1^0 + L_2^0) g_2(1, 2, t) = L'_{12} f(1) f(2). \quad (3.3.52)$$

Para resolver a equação (3.3.52), vamos introduzir a ideia do propagador. Inicialmente vamos considerar os termos de ordem  $\lambda^0$  nas equações (3.2.35) e (3.2.37):

$$\partial_t f(1) = L_1^0 f(1) \quad (3.3.53)$$

$$\partial_t g_2(1, 2) = (L_1^0 + L_2^0) g_2(1, 2) \quad (3.3.54)$$

Para resolver as equações acima vamos introduzir o propagador não perturbado  $U_1^0$ , tal que:

$$f(\vec{x}_1, \vec{p}_1, t) = U_1^0(t) f(\vec{x}_1, \vec{p}_1, 0), \quad (3.3.55)$$

onde  $U_1^0(t) = e^{L_1^0 t} = e^{-(p_1/m)\nabla_1 t}$ .

Sabendo que:

$$e^{a \frac{d}{dx}} f(x) = f(x + a), \quad (3.3.56)$$

portanto:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_1, \vec{p}_1, t) &= e^{-(p_1/m)\nabla_1 t} f(\vec{x}_1, \vec{p}_1, 0) \\ &= f\left(\vec{x}_1 - \frac{\vec{p}_1}{m}t, \vec{p}_1, 0\right), \end{aligned} \quad (3.3.57)$$

que está de acordo com a equação de Liouville, pois a função densidade de probabilidade de encontrar uma partícula no tempo  $t$  e nas coordenadas  $\vec{x}_1$  e  $\vec{p}_1$  é igual a densidade inicial quando a partícula está na posição inicial  $\vec{x}_1 - \vec{p}_1 t$ , com momento  $\vec{p}_1$ .

Já para (3.3.54) o propagador que resolve a equação para  $g_2$  é:

$$g_2(1, 2, t) = U_{12}^0 g_2(1, 2, 0), \quad (3.3.58)$$

onde

$$U_{12}^0 = e^{(L_1^0 + L_2^0)t} = U_1^0(t)U_2^0(t), \quad (3.3.59)$$

ou seja,  $L_1^0$  comuta com  $L_2^0$ . Para resolver (3.3.52) vamos utilizar o propagador  $U_{12}^0$  e a solução é

$$g_2(1, 2, t) = U_{12}^0(t) g_2(1, 2, 0) + \int_0^t d\tau U_{12}^0(\tau) L'_{12} f(1, t - \tau) f(2, t - \tau), \quad (3.3.60)$$

onde o primeiro termo é obtido da mesma maneira que em (3.3.58) e o segundo termo que é a convolução do propagador  $U_{12}^0(\tau)$  com o termo independente de  $g_2$ . Substituindo  $g_2(1, 2, t)$  na equação (3.2.35), obtemos:

$$\begin{aligned} (\partial_t - L_1^0) f(1) &= \int d2 L'_{12} f(1) f(2) + \int d2 L'_{12} U_{12}^0(t) g_2(1, 2, 0) \\ &+ \int d2 L'_{12} \int_0^t d\tau U_{12}^0(\tau) L'_{12} f(1, t - \tau) f(2, t - \tau) \end{aligned} \quad (3.3.61)$$

Nesta equação o primeiro termo do lado direito é o termo de Vlasov, o segundo termo é o funcional da correlação inicial e o terceiro termo é o termo que depende do histórico de  $f(i)$  no tempo  $\tau = 0$  a  $t$ , ou seja, devido a esta dependência com o histórico da função distribuição de uma partícula, a equação acima é uma equação não markoviana. Para transformar esta equação em uma equação markoviana, vamos analisar termo a termo da equação acima. Analisando o segundo termo do lado direito e considerando a mudança de variável  $\vec{x}_2$  para  $\vec{r}_{21} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ :

$$\begin{aligned} \int d2 L'_{12} U_{12}^0(t) g_2(1, 2, 0) &= \int d\vec{x}_2 \int d\vec{p}_2 L'_{12} U_{12}^0(t) g_2(1, 2, 0) \\ &= \int d\vec{r}_{21} \int d\vec{p}_2 L'_{12} U_{12}^0(t) g_2(\vec{x}_1, \vec{r}_{21}, \vec{p}_1, \vec{p}_2, 0) \\ &= \int d\vec{r}_{21} \int d\vec{p}_2 L'_{12} g_2(\vec{x}_1 - \vec{p}_1 t, \vec{r}_{21} - \vec{g}_{21} t, \vec{p}_1, \vec{p}_2, 0), \end{aligned} \quad (3.3.62)$$

onde  $\vec{g}_{21} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$  é o momento relativo.

Observa-se no lado direito de (3.3.62), que  $\vec{r}_{21} - \vec{g}_{21}t$  é uma função do tempo e pela relação (3.3.48), nota-se que como  $t \gg \tau_c$ , então  $|\vec{r}_{21} - \vec{g}_{21}t| \gg l_c$  e a correlação se torna nula. Logo:

$$\int d2L'_{12} U_{12}^0(t) g_2(1, 2, 0) \approx 0 \quad \text{para} \quad t \gg \tau_c. \quad (3.3.63)$$

Para o terceiro termo do lado direito de (3.3.61):

$$\begin{aligned} & \int d2 \nabla_1 V(\vec{r}_{12}) \partial_{12} \int_0^t d\tau U_{12}^0(\tau) \nabla_1 V(\vec{r}_{12}) \partial_{12} f(1, t - \tau) f(2, t - \tau) \\ &= \int_0^t d\tau \int dp_2 \int dx_2 \partial_{12} \nabla_1 V(\vec{r}_{12}) U_{12}^0(\tau) \nabla_1 V(\vec{r}_{12}) \partial_{12} U_{12}^0(-\tau) f(1, t) f(2, t) \\ &= \int_0^t d\tau \int d\vec{p}_2 \int d\vec{r}_{12} \partial_{12} \nabla_1 V(\vec{r}_{12}) \nabla_1 V(\vec{r}_{12} - \vec{g}_{12}\tau) U_{12}^0(\tau) \partial_{12} U_{12}^0(-\tau) f(1, t) f(2, t), \end{aligned} \quad (3.3.64)$$

onde  $\vec{r}_{12} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ ,  $\vec{g}_{12} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2$  e

$$U_{12}^0(\tau) \partial_{12} U_{12}^0(-\tau) = \partial_{12} + \tau (\nabla_1 + \nabla_2). \quad (3.3.65)$$

Vamos considerar que o tempo dinâmico  $t$  é consideravelmente maior que o tempo de colisão, desse modo:

$$U_{12}^0(\tau) \partial_{12} U_{12}^0(-\tau) \approx \partial_{12} \quad (3.3.66)$$

e  $t \rightarrow \infty$ .

Além disso:

$$f(\vec{x}_2) = f(\vec{x}_1 - \vec{r}_{12}) \sim f(\vec{x}_1) - \vec{r}_{12} \frac{\partial f(\vec{x}_1)}{\partial \vec{x}_1} \sim f(\vec{x}_1) - \frac{l_c}{l_H} f(\vec{x}_1) \approx f(\vec{x}_1). \quad (3.3.67)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & (\partial_t - L_1^0) f(1) = \int d2 L'_{12} f(1) f(2) \\ & + \int_0^\infty d\tau \int d\vec{p}_2 \int d\vec{r}_{12} \partial_{12} \vec{\nabla} V(\vec{r}_{12}) \vec{\nabla} V(\vec{r}_{12} - g_{12}\tau) \partial_{12} f(\vec{x}_1, \vec{p}_1, t) f(\vec{x}_1, \vec{p}_2, t) \\ & = \mathcal{V}\{ff\} + \mathcal{K}\{ff\}, \end{aligned} \quad (3.3.68)$$

onde  $\mathcal{V}\{ff\}$  é o termo de Vlasov e  $\mathcal{K}\{ff\}$  é o termo de Landau, que pode ser reescrito como:

$$\mathcal{K}\{ff\} = \int d\vec{p}_2 \partial_{12} G(\vec{g}_{12}) \partial_{12} f(\vec{x}_1, \vec{p}_1, t) f(\vec{x}_1, \vec{p}_2, t), \quad (3.3.69)$$

com

$$G(\vec{g}_{12}) = 8\pi^4 \int d\vec{k} \delta(\vec{k} \cdot \vec{g}_{12}) \tilde{V}(k)^2 \vec{k} \cdot \vec{k}, \quad (3.3.70)$$

onde  $G(\vec{g}_{12})$  é o tensor de Landau. Portanto realizamos um processo de transformação de uma equação não Markoviana em uma equação Markoviana, a este processo de transformação é conhecido como markovianização. Para sistemas homogêneos, os termos de Vlasov e do movimento livre são nulos, temos  $f(\vec{x}, \vec{p}, t) = n\varphi(\vec{p}, t)$  e a equação de Landau pode ser reescrita como [17]:

$$\partial_t \varphi(\vec{p}, t) = \mathcal{K}\{\varphi\varphi\} \quad (3.3.71)$$

e para sistemas unidimensionais:

$$\partial_t \varphi(\vec{p}, t) = 0, \quad (3.3.72)$$

pois em sistemas unidimensionais  $\vec{k}$  e  $\vec{g}_{12}$  estão numa mesma direção e temos que  $\delta(\vec{k} \cdot \vec{g}_{12}) = \delta(kg_{12})$  em (3.3.70). Portanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\{ff\} &= \int dp_2 \partial_{12} \left( 8\pi^4 \int dk \delta(kg_{12}) \tilde{V}(k)^2 kk \right) \partial_{12} f(x_1, p_1, t) f(x_1, p_2, t) \\ &= \int dp_2 \partial_{12} \left( 8\pi^4 \int dk \left( \frac{1}{|k|} \right) \delta(p_1 - p_2) \tilde{V}(k)^2 kk \right) \partial_{12} f(x_1, p_1, t) f(x_1, p_2, t) \\ &= 8\pi^4 \int dk \left( \frac{1}{|k|} \right) \tilde{V}(k)^2 kk \int dp_2 \partial_{12} \delta(p_1 - p_2) \partial_{12} f(x_1, p_1, t) f(x_1, p_2, t) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.3.73)$$

ou seja, concluímos que  $\mathcal{K}\{ff\}$  é nulo para sistemas gravitacionais homogêneos e unidimensionais. Veremos adiante um método para obter as equações que descrevem a dinâmica destes sistemas.

### 3.4 Abordagem de Klimontovich

Esta é uma abordagem alternativa para obter a equação cinética ao invés da hierarquia BBKGY. Em [48, 49, 50] a abordagem de Klimontovich é empregada no estudo de plasma. A hamiltoniana geral para um sistema de  $N$  partículas é

$$H_N = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + U(\{x_i\}), \quad (3.4.74)$$

onde  $x_i$  e  $p_i$  são a coordenada e o momento da partícula  $i$ , respectivamente, e  $\{x_i\}$  é o conjunto de coordenadas das  $i$  partículas tal que:

$$U(\{x_i\}) = \sum_{i < j}^N V(x_i - x_j), \quad (3.4.75)$$

com  $V$  uma função par, ou seja,  $V(-x) = V(x)$ . O estado exato de um estado bem definido do sistema no espaço de fase, em função do tempo, pode ser representado pela função distribuição singular:

$$f_d(x, p, t) = \frac{1}{N} \sum_i \delta(x - x_i(t)) \delta(p - p_i(t)). \quad (3.4.76)$$

As  $2N$  equações de movimento são:

$$\dot{x}_i = p_i, \quad (3.4.77)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}. \quad (3.4.78)$$

Diferenciando (3.4.76) com relação ao tempo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_d(x, p, t)}{\partial t} &= \frac{1}{N} \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial (\delta(x - x_i(t)) \delta(p - p_i(t)))}{\partial x_i} \\
&\quad + \frac{1}{N} \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial t} \frac{\partial (\delta(x - x_i(t)) \delta(p - p_i(t)))}{\partial p_i} \\
&= -\frac{1}{N} \sum_i p_i \frac{\partial \delta(x - x_i(t))}{\partial x_i} \delta(p - p_i(t)) \\
&\quad + \frac{1}{N} \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \delta(x - x_i(t)) \frac{\partial \delta(p - p_i(t))}{\partial p_i}. \tag{3.4.79}
\end{aligned}$$

Usando  $a\delta(a - b) = b\delta(a - b)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_d(x, p, t)}{\partial t} &= -\frac{1}{N} \sum_i p \frac{\partial \delta(x - x_i(t))}{\partial x} \delta(p - p_i(t)) \\
&\quad + \frac{1}{N} \sum_i \sum_j \frac{\partial V(x_i - x_j)}{\partial x_j} \delta(x - x_i(t)) \frac{\partial \delta(p - p_i(t))}{\partial p_i}. \tag{3.4.80}
\end{aligned}$$

Considerando

$$v(x, t) = N \int dx' dp' V(x - x') f_d(x', p', t), \tag{3.4.81}$$

que corresponde ao potencial de campo médio, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= N \int dx' dp' \frac{\partial V(x - x')}{\partial x} f_d(x', p', t) \\
&= \int dx' dp' \frac{\partial V(x - x')}{\partial x} \sum_i \delta(x' - x_i(t)) \delta(p' - p_i(t)) \\
&= \sum_i \int dx' \frac{\partial V(x - x')}{\partial x} \delta(x' - x_i(t)) \\
&= \sum_i \frac{\partial V(x - x_i(t))}{\partial x}. \tag{3.4.82}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_d(x, p, t)}{\partial t} &= -\frac{1}{N} \sum_i p \frac{\partial \delta(x - x_i(t))}{\partial x} \delta(p - p_i(t)) \\
&\quad + \frac{1}{N} \sum_i \frac{\partial v}{\partial x} \delta(x - x_i(t)) \frac{\partial \delta(p - p_i(t))}{\partial p_i}, \tag{3.4.83}
\end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\partial f_d(x, p, t)}{\partial t} + p \frac{\partial f_d(x, p, t)}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial f_d}{\partial p} = 0, \tag{3.4.84}$$

denominada de equação de Klimontovich, que pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial f_d}{\partial t} + [H_d, f_d] = 0, \tag{3.4.85}$$

onde  $H_d = \frac{v^2}{2} + v(x, t)$  e

$$[H, f] = \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p}. \quad (3.4.86)$$

Seja  $\{x_i(0), p_i(0)\}$  os estados iniciais das  $N$  partículas e  $f_{in}(\{x_i(0), p_i(0)\})$  a densidade do estado inicial. A função distribuição suave  $f$  é obtida por:

$$\begin{aligned} f &= \langle f_d \rangle \\ &= \int \prod_i dx_i dp_i f_{in}(\{x_i(0), p_i(0)\}) f_d(x, p, t). \end{aligned} \quad (3.4.87)$$

Note que há uma dependência de  $f_d$  com as condições iniciais, desde que  $f_d$  depende das soluções das equações de movimento decorrente de 3.4.76 [6, 51]. Vamos introduzir flutuações suave  $\delta f$ , tal que  $\delta f$  é conhecido como ruído de disparo ou *shot noise* e depende do desvio padrão da função distribuição suave [16]. Como  $\delta f \propto \sqrt{\langle f_d \rangle}$  e  $f = \langle f_d \rangle \propto 1/N$ , então  $\delta f \propto \sqrt{1/N}$ . Considerando  $\delta\phi$  a flutuação do potencial, temos:

$$\begin{aligned} f_d &= f + \frac{\delta f}{\sqrt{N}} \\ v &= \phi + \frac{\delta\phi}{\sqrt{N}}, \end{aligned} \quad (3.4.88)$$

ou seja, quanto maior o número de partículas menor é a diferença entre a função distribuição  $f_d$  e a média das distribuições. Substituindo estas funções na equação (3.4.85):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\partial \delta f}{\partial t} + \left[ H + \delta H, f + \frac{1}{\sqrt{N}} \delta f \right] = 0 \quad (3.4.89)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\partial \delta f}{\partial t} + [H, f] + [\delta H, f] + \frac{1}{\sqrt{N}} [H, \delta f] + \left[ \delta H, \frac{1}{\sqrt{N}} \delta f \right] = 0, \quad (3.4.90)$$

onde  $H_d = \frac{v^2}{2} + \phi + \delta\phi/\sqrt{N} = H + \delta H$ , onde  $\delta H = \delta\phi/\sqrt{N}$ , logo:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\partial \delta f}{\partial t} + [H, f] + \frac{1}{\sqrt{N}} [\delta\phi, f] + \frac{1}{\sqrt{N}} [H, \delta f] + \frac{1}{N} [\delta\phi, \delta f] = 0. \quad (3.4.91)$$

Fazendo a média de ensemble de (3.4.91), temos:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\partial \langle \delta f \rangle}{\partial t} + \langle [H, f] \rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} \langle [\delta\phi, f] \rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} \langle [H, \delta f] \rangle + \frac{1}{N} \langle [\delta\phi, \delta f] \rangle = 0. \quad (3.4.92)$$

Mas  $f = \langle f_d \rangle = \langle f + \delta f/\sqrt{N} \rangle = f + \langle \delta f/\sqrt{N} \rangle$ , logo  $\langle \delta f \rangle = 0$ . E  $\phi = \langle v \rangle = \langle \phi + \delta\phi/\sqrt{N} \rangle = \phi + \langle \delta\phi \rangle/\sqrt{N}$ , então  $\langle \delta\phi \rangle = 0$ . Além disso,

$$\langle [H, f] \rangle = \left\langle \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \right\rangle = [H, f], \quad (3.4.93)$$

$$\langle [\delta\phi], f \rangle = 0, \quad (3.4.94)$$

$$[H, \langle \delta f \rangle] = 0, \quad (3.4.95)$$

já que  $\langle \delta f \rangle$  e  $\langle \delta \phi \rangle$  são nulos.

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] = -\frac{1}{N} \langle [\delta \phi, \delta f] \rangle. \quad (3.4.96)$$

Subtraindo (3.4.96) de (3.4.91) :

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + [H, \delta f] + [\delta \phi, f] = -\frac{1}{\sqrt{N}} (\langle [\delta \phi, \delta f] \rangle - [\delta \phi, \delta f]). \quad (3.4.97)$$

As equações (3.4.96) e (3.4.97) formam a base da teoria quasilinear e considerando o limite termodinâmico em ambas ( $N \rightarrow \infty$ ), obtem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] = 0, \quad (3.4.98)$$

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + [H, \delta f] + [\delta \phi, f] = 0, \quad (3.4.99)$$

onde a primeira equação é a equação de Vlasov e a segunda equação de Vlasov linearizada [50]. Usaremos as equações apresentadas nesta seção para obter a equação de Balescu-Lenard na próxima seção.

### 3.5 Equação de Balescu-Lenard

Da equação de Klimontovich(3.4.84), usando  $f_d = f + \delta f/\sqrt{N}$  e  $v = \phi + \delta \phi/\sqrt{N}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + p \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} &= -\frac{1}{\sqrt{N}} \left( \frac{\partial \delta f}{\partial t} + p \frac{\partial \delta f}{\partial x} - \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \delta f}{\partial p} \right) \\ &\quad + \frac{1}{N} \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} \frac{\partial \delta f}{\partial p} \end{aligned} \quad (3.5.100)$$

Fazendo a média da equação acima, obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{N} \left\langle \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} \frac{\partial \delta f}{\partial p} \right\rangle. \quad (3.5.101)$$

Esta é a equação principal para obter a equação de Balescu-Lenard, nesta seção iremos obter esta equação para o caso unidimensional, que será o foco deste trabalho, mas esses cálculos podem ser generalizados para o caso d-dimensional. Para obter uma forma mais utilizável da equação de Balescu-Lenard vamos definir primeiramente a transformação de Laplace do tempo de uma função  $g(t)$ , tal que:

$$\tilde{g}(w) = \mathcal{L} \{g(t)\} = \int_0^\infty e^{iwt} g(t) dt, \quad (3.5.102)$$

para  $\text{Im}(w)$  suficientemente grande. A transformada de Fourier do espaço de  $g(x)$ , tal que  $x$  é a coordenada com valores no intervalo  $[0, 2\pi]$ , é [6]:

$$\tilde{g}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} g(x) dx. \quad (3.5.103)$$

A transformada da densidade  $\delta f(x, p, t)$  é dada por:

$$\tilde{\delta f}(k, p, \omega) = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\pi} \int_0^\infty dt e^{-i(kx - \omega t)} \delta f(x, p, t) \quad (3.5.104)$$

e a transformada de  $\delta\phi$ :

$$\tilde{\delta\phi}(k', \omega') = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\pi} \int_0^\infty dt e^{-i(k'x - \omega't)} \delta\phi(x, t), \quad (3.5.105)$$

onde consideramos que o potencial tem período  $2\pi$ . A transformação inversa é:

$$\delta f(x, p, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(kx - \omega t)} \tilde{\delta f}(k, p, \omega) \quad (3.5.106)$$

$$\delta\phi(x, t) = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega'}{2\pi} e^{i(k'x - \omega't)} \tilde{\delta\phi}(k', \omega'). \quad (3.5.107)$$

Nos restringimos a estados homogêneos, tal que a função distribuição de uma partícula não depende da posição e usando a equação de Vlasov linearizada para o presente caso:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta f}{\partial t} + [H, \delta f] + [\delta\phi, f] &= 0 \\ \frac{\partial \delta f}{\partial t} + p \frac{\partial \delta f}{\partial x} - \frac{\partial \delta\phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} &= 0, \end{aligned} \quad (3.5.108)$$

e multiplicando a Eq. (3.5.108) por  $e^{-i(kx - \omega t)}$ , integrando  $q$  de 0 a  $2\pi$ ,  $t$  de 0 a  $\infty$ , obtemos:

$$-\hat{\delta f}(k, p, 0) - i\omega \tilde{\delta f}(k, p, \omega) + ikp \tilde{\delta f}(k, p, \omega) - ik \tilde{\delta\phi}(k, \omega) f'(p) = 0, \quad (3.5.109)$$

onde o primeiro termo é a transformada de Fourier espacial de valor inicial:

$$\hat{\delta f}(k, p, 0) = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\pi} e^{-ikx} \delta f(x, p, 0). \quad (3.5.110)$$

Reescrevendo (3.5.109) e isolando  $\tilde{\delta f}(k, p, \omega)$ , temos:

$$\tilde{\delta f}(k, p, \omega) = \frac{k f'(p) \tilde{\delta\phi}(k, \omega)}{kp - \omega} + \frac{\hat{\delta f}(k, p, 0)}{i(kp - \omega)}. \quad (3.5.111)$$

Sabemos que:

$$\phi = \langle v \rangle = \int_0^{2\pi} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dp v(x - x') f(x', p, t), \quad (3.5.112)$$

portanto a flutuação do potencial pode ser escrita como:

$$\delta\phi(x, t) = \int_0^{2\pi} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dp v(x - x') \delta f(x', p, t) \quad (3.5.113)$$

e a transformada de Laplace-Fourier desta flutuação do potencial é :

$$\tilde{\delta\phi}(k, \omega) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{v}(k) \tilde{\delta f}(k, p, \omega), \quad (3.5.114)$$

$$\tilde{v}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx e^{-ik(x-x')} v(x - x'). \quad (3.5.115)$$

Integrando (3.5.111) por  $p$ , substitutindo (3.5.114) e passando o primeiro termo do lado direito para o lado esquerdo de (3.5.111), obtemos:

$$\int dp \tilde{\delta}f(k, p, \omega) \left( 1 - 2\pi \int \frac{k f'(p') \tilde{v}(k) dp'}{k p' - \omega} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{\hat{\delta}f(k, p, 0)}{i(kp - \omega)}. \quad (3.5.116)$$

A função dielétrica é definida como

$$\tilde{D}(\omega, k) = 1 - 2\pi \tilde{v}(k) \int dp' \frac{k f'(p')}{k p' - \omega}. \quad (3.5.117)$$

Logo de (3.5.116), temos:

$$\int dp \tilde{\delta}f(k, p, \omega) = \frac{1}{\tilde{D}(\omega, k)} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{\hat{\delta}f(k, p, 0)}{i(kp - \omega)}. \quad (3.5.118)$$

Substituindo este resultado em (3.5.114), obtemos:

$$\tilde{\delta}\phi(k, \omega) = \frac{2\pi \tilde{v}(k)}{\tilde{D}(\omega, k)} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{\hat{\delta}f(k, p, 0)}{i(kp - \omega)}. \quad (3.5.119)$$

Podemos usar as equações acima para obter o lado direito de (3.5.101). Portanto substituindo (3.5.106) e (3.5.107) em (3.5.101) e esquecendo temporariamente  $\frac{1}{N}$  e a derivada com respeito a  $p$ , temos que:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \delta\phi}{\partial x} \delta f \right\rangle &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int \frac{d\omega}{2\pi} i k e^{i(kx - \omega t)} \tilde{\delta}\phi(k, \omega) \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \int \frac{d\omega'}{2\pi} e^{i(k'x - \omega' t)} \tilde{\delta}f(k', p, \omega') \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \int \int d\omega d\omega' i k e^{i[(k+k')x - (\omega+\omega')t]} \left\langle \tilde{\delta}\phi(k, \omega) \tilde{\delta}f(k', p, \omega') \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.5.120)$$

De (3.5.111):

$$\left\langle \tilde{\delta}\phi(k, \omega) \tilde{\delta}f(k', p, \omega') \right\rangle = k' \frac{f'(p)}{k'p - \omega'} \left\langle \tilde{\delta}\phi(k, \omega) \tilde{\delta}\phi(k', \omega') \right\rangle + \frac{\left\langle \tilde{\delta}\phi(k, \omega) \hat{\delta}f(k', p, 0) \right\rangle}{i(pk' - \omega')} \quad (3.5.121)$$

e de (3.5.119):

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\delta}\phi(k, \omega) \tilde{\delta}\phi(k', \omega') \right\rangle &= \frac{(2\pi)^2 \tilde{v}(k) \tilde{v}(k')}{\tilde{D}(\omega, k) \tilde{D}(\omega', k')} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dp' \frac{\left\langle \hat{\delta}f(k, p, 0) \hat{\delta}f(k', p', 0) \right\rangle}{i(pk - \omega) i(p'k' - \omega')} \\ &= \frac{(2\pi)^2 \tilde{v}(k) \tilde{v}(k')}{\tilde{D}(\omega, k) \tilde{D}(\omega', k')} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dp' \frac{\left\langle \hat{\delta}f(k, p, 0) \hat{\delta}f(k', p', 0) \right\rangle}{(pk - \omega)(-p'k' + \omega')}, \end{aligned} \quad (3.5.122)$$

usando a definição de transformação de Fourier:

$$\left\langle \hat{\delta}f(k, p, 0) \hat{\delta}f(k', p', 0) \right\rangle = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dx'}{2\pi} e^{-i(kx + k'x')} \langle \delta f(x, p, 0) \delta f(x', p', 0) \rangle. \quad (3.5.123)$$

Como vimos  $\delta f = \sqrt{N} (f_d(x, p, 0) - f(p))$ , logo:

$$\begin{aligned} \delta f(x, p, 0) \delta f(x', p', 0) &= N (f_d(x, p, 0) f_d(x', p', 0) - f_d(x, p, 0) f(p') \\ &\quad - f_d(x', p', 0) f(p) + f(p) f(p')). \end{aligned} \quad (3.5.124)$$

E a média é :

$$\langle \delta f(x, p, 0) \delta f(x', p', 0) \rangle = N (\langle f_d(x, p, 0) f_d(x', p', 0) \rangle - f(p) f(p')). \quad (3.5.125)$$

Substituindo  $f_d(x, p, 0) = \sum_i \delta(x - x_i) \delta(p - p_i) / N$ , temos:

$$\begin{aligned} \langle f_d(x, p, 0) f_d(x', p', 0) \rangle &= \frac{1}{N^2} \left\langle \sum_{j=1}^N \delta(x - x_j) \delta(p - p_j) \delta(x - x') \delta(p - p') \right. \\ &\quad \left. + \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} \delta(x - x_j) \delta(p - p_j) \delta(x' - x_i) \delta(p' - p_i) \right\rangle \\ &= \frac{1}{N^2} (N \langle f_d(x, p, 0) \rangle \delta(x - x') \delta(p - p') \\ &\quad + N(N - 1) f_2(x, p, x', p', 0)) \\ &= \frac{1}{N} f(p) \delta(x - x') \delta(p - p') + f(p) f(p') + h_2(x, p, x', p') \end{aligned} \quad (3.5.126)$$

Onde  $f_2(x, p, x', p', 0)$  é a função distribuição de duas partículas e é definida por

$$\begin{aligned} f_2(x, p, x', p', 0) &= \langle \delta(x - x_j) \delta(p - p_j) \delta(x' - x_i) \delta(p' - p_i) \rangle \\ &= \frac{N}{N - 1} (f(p) f(p') + h_2(x, p, x', p')), \end{aligned} \quad (3.5.127)$$

onde  $h_2$  é a função correlação. Substituindo (3.5.126) em (3.5.125) e (3.5.125) em (3.5.123), obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\delta} f(k, p, 0) \hat{\delta} f(k', p', 0) \rangle &= \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\pi} \frac{f(p)}{2\pi} e^{-ix(k+k')} \delta(p - p') \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dx'}{2\pi} N e^{-i(kx+k'x')} h_2(x, p, x', p') \\ &= \frac{f(p)}{2\pi} \delta_{k, -k'} \delta(p - p') \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \frac{dq}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dx'}{2\pi} N e^{-i(kx+k'x')} e^{-ik(x'-x')} h_2(x, p, x', p') \\ &= \frac{f(p)}{2\pi} \delta_{k, -k'} \delta(p - p') \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \frac{dx'}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\pi} N e^{-ikx'} e^{-ik'x'} e^{-ik(x-x')} h_2(x - x', p, p') \\ &= \frac{f(p)}{2\pi} \delta_{k, -k'} \delta(p - p') + \int_0^{2\pi} \frac{dx'}{(2\pi)^2} e^{-i(k+k')x'} u(k, p, p') \\ &= \frac{f(p)}{2\pi} \delta_{k, -k'} \delta(p - p') + \frac{u(k, p, p')}{2\pi} \delta_{k, -k'}, \end{aligned} \quad (3.5.128)$$

onde:

$$u(k, p, p') \equiv \int_0^{2\pi} dx N e^{-ik(x-x')} h_2(x - x', p, p') \quad (3.5.129)$$

e usamos o fato do sistema ser homogêneo, ou seja,  $h_2$  depende da diferença  $x - x'$ . Portanto:

$$\langle \hat{\delta}f(k, p, 0) \hat{\delta}f(k', p', 0) \rangle = \frac{\delta_{k, -k'}}{2\pi} (f(p) \delta(p - p') + u(k, p, p')) \quad (3.5.130)$$

Substituindo este resultado em (3.5.122), temos:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\delta}\phi(k, \omega) \tilde{\delta}\phi(k', \omega') \rangle &= \frac{2\pi\delta_{k, -k'}\tilde{v}(k)\tilde{v}(k')}{\tilde{D}(\omega, k)\tilde{D}(\omega', k')} \int_{-\infty}^{\infty} dp \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dp' \frac{(f(p)\delta(p - p') + u(k, p, p'))}{(pk - \omega)(-k'p' + \omega')} \end{aligned} \quad (3.5.131)$$

O segundo termo da equação acima depende de  $u(k, p, p')$ , ou seja, da correlação inicial entre as partículas e esta função decai no tempo, logo podemos descartar o segundo termo e obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\delta}\phi(k, \omega) \tilde{\delta}\phi(k', \omega') \rangle &= \frac{2\pi\delta_{k, -k'}\tilde{v}(k)\tilde{v}(k')}{\tilde{D}(\omega, k)\tilde{D}(\omega', k')} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{f(p)}{(pk - \omega)(-k'p + \omega')} \\ &= \frac{2\pi\delta_{k, -k'}\tilde{v}(k)\tilde{v}(k')}{\tilde{D}(\omega, k)\tilde{D}(\omega', k')} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{f(p)}{(pk - \omega)(kp + \omega')}, \end{aligned} \quad (3.5.132)$$

usando a fórmula de Plemelj:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{x - a \pm i|\gamma|} = \mathcal{P} \frac{1}{x - a} \mp i\pi\delta(x - a), \quad (3.5.133)$$

temos que  $[(pk - \omega)(pk + \omega')]^{-1} = (2\pi)^2 \delta(\omega + \omega') \delta(\omega - pk)$ . Então

$$\langle \tilde{\delta}\phi(k, \omega) \tilde{\delta}\phi(k', \omega') \rangle = \frac{(2\pi)^3 \delta_{k, -k'}\tilde{v}(k)\tilde{v}(k') \delta(\omega + \omega')}{\tilde{D}(\omega, k)\tilde{D}(\omega', k')} \int_{-\infty}^{\infty} dp f(p) \delta(\omega - pk) \quad (3.5.134)$$

e sabendo que  $\tilde{D}(\omega, k) = \tilde{D}^*(-\omega, -k)$ , temos:

$$\langle \tilde{\delta}\phi(k, \omega) \tilde{\delta}\phi(k', \omega') \rangle = \frac{(2\pi)^3 \delta_{k, -k'}\tilde{v}(k)\tilde{v}(k') \delta(\omega + \omega')}{|\tilde{D}(\omega, k)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp f(p) \delta(\omega - pk). \quad (3.5.135)$$

Considerando o segundo termo de (3.5.121) e usando (3.5.119):

$$\begin{aligned} \frac{\langle \tilde{\delta}\phi(k, \omega) \tilde{\delta}f(k', p, 0) \rangle}{i(pk' - \omega')} &= \frac{2\pi\tilde{v}(k)}{\tilde{D}(\omega, k)} \int_{-\infty}^{\infty} dp' \frac{\langle \hat{\delta}f(k, p', 0) \hat{\delta}f(k', p', 0) \rangle}{i(kp' - \omega) i(pk' - \omega')} \\ &= \frac{\tilde{v}(k)}{\tilde{D}(\omega, k)} \int_{-\infty}^{\infty} dp' \frac{\delta_{k, -k'} f(p) \delta(p - p')}{i(kp' - \omega) i(pk' - \omega')} \\ &= \frac{\tilde{v}(k) f(p)}{\tilde{D}(\omega, k)} \frac{\delta_{k, -k'}}{(kp - \omega)(pk + \omega')} \\ &= \frac{(2\pi)^2 \delta(\omega + \omega') \delta(\omega - pk) \tilde{v}(k) \delta_{k, -k'} f(p)}{\tilde{D}(\omega, k)}. \end{aligned} \quad (3.5.136)$$

Desto maneira o primeiro termo do lado direito de (3.5.120), será o fator abaixo:

$$\begin{aligned}
& \frac{(2\pi)^3}{4\pi^2} \sum_k \sum_{k'} \int d\omega \int d\omega' i k e^{i[(k+k')x - (\omega+\omega')t]} \frac{\tilde{v}(k)\tilde{v}(k')\delta(\omega+\omega')}{|\tilde{D}(\omega,k)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp' f(p') \delta(\omega - p'k) \frac{k'f'(p')}{k'p-\omega'} \delta_{k,-k'} \\
&= 2\pi \sum_k \int d\omega \int d\omega' i k e^{-i(\omega+\omega')t} \frac{\tilde{v}(k)\tilde{v}(-k)\delta(\omega+\omega')}{|\tilde{D}(\omega,k)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp' f(p') \delta(\omega - p'k) \frac{(-k)f'(p')}{-kp-\omega'} \\
&= 2\pi \sum_k \int d\omega \frac{i k \tilde{v}(k)\tilde{v}(-k)}{|\tilde{D}(\omega,k)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp' f(p') \delta(\omega - p'k) \frac{kf'(p')}{kp-\omega} \\
&= 2\pi \sum_k \int d\omega \frac{i|\tilde{v}(k)|^2|k|}{|\tilde{D}(\omega,k)|^2} \frac{f'(p')}{kp-\omega} f\left(\frac{\omega}{k}\right) \\
&= 2\pi i \sum_k \int d\omega \frac{|\tilde{v}(k)|^2|k|}{|\tilde{D}(\omega,k)|^2} f'(p) f\left(\frac{\omega}{k}\right) \left(\mathcal{P}\frac{1}{kp-\omega} - i\pi\delta(kp-\omega)\right) \\
&= 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \int d\omega \frac{|\tilde{v}(k)|^2 k}{|\tilde{D}(\omega,k)|^2} f'(p) \delta(\omega - kp) f\left(\frac{\omega}{k}\right),
\end{aligned} \tag{3.5.137}$$

onde desconsideramos termos imaginarios.

O segundo termo do lado direito de (3.5.120) será:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_k \sum_{k'} \int d\omega \int d\omega' i k e^{i(k+k')x - i(\omega+\omega')t} \frac{(2\pi)^2 \delta(\omega+\omega')\delta(\omega-pk)\tilde{v}(k)\delta_{k,-k'} f(p)}{\tilde{D}(\omega,k)} \\
&= \sum_k \int d\omega \int d\omega' i k e^{-i(\omega+\omega')t} \frac{\delta(\omega+\omega')\delta(\omega-pk)\tilde{v}(k)f(p)}{\tilde{D}(\omega,k)} \\
&= \sum_k \int d\omega i k \frac{\delta(\omega-pk)\tilde{v}(k)f(p)}{\tilde{D}(\omega,k)} \\
&= i \sum_k k \int d\omega \frac{\tilde{v}(k)|\tilde{D}^*(\omega,k)}{|\tilde{D}(\omega,k)|^2} f(p) \delta(\omega - pk),
\end{aligned} \tag{3.5.138}$$

onde

$$\tilde{D}^*(\omega, k) = \tilde{D}(-\omega, -k) = 1 - 2\pi\tilde{v}(-k) \int dp' \frac{kf'(p')}{kp' - \omega}. \tag{3.5.139}$$

Sabendo que

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{x - x_0 \pm i\gamma} = \mathcal{P} \frac{1}{x - x_0} \mp i\pi\delta(x - x_0), \tag{3.5.140}$$

então

$$\frac{1}{kp' - \omega} = \mathcal{P} \frac{1}{kp' - \omega} - i\pi\delta(kp' - \omega), \tag{3.5.141}$$

logo temos:

$$\begin{aligned}
\tilde{D}^*(\omega, k) &= 1 - 2\pi\tilde{v}(-k) \int dp' k \mathcal{P} \frac{1}{kp' - \omega} f'(p') + 2\pi^2 i k \tilde{v}(-k) \int dp' \delta(kp' - \omega) f'(p') \\
&= 1 - 2\pi\tilde{v}(-k) \int dp' k \mathcal{P} \frac{1}{kp' - \omega} f'(p') + 2\pi^2 i \frac{k}{|k|} \tilde{v}(-k) f'\left(\frac{\omega}{k}\right).
\end{aligned} \tag{3.5.142}$$

Substituindo (3.5.142) em (3.5.138) e desconsiderando termos imaginários, obtemos que o segundo termo do lado direito de (3.5.120) é:

$$-2\pi^2 \sum_k k \int d\omega \frac{\tilde{v}(k)\tilde{v}(-k)}{|\tilde{D}(\omega,k)|^2} f'\left(\frac{\omega}{k}\right) \frac{k}{|k|} \delta(\omega - kp) f(p) \tag{3.5.143}$$

$$= -4\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k \int d\omega \frac{|\tilde{v}(k)|^2}{|\tilde{D}(\omega,k)|^2} f(p) \delta(\omega - kp) f'\left(\frac{\omega}{k}\right). \tag{3.5.144}$$

Portanto (3.5.120) e:

$$\left\langle \frac{\partial \delta \phi}{\partial q} \delta f \right\rangle = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \int d\omega \frac{|\tilde{v}(k)|^2}{|\tilde{D}(\omega,k)|^2} \delta(\omega - kp) \left( f'(p) f\left(\frac{\omega}{k}\right) - f(p) f'\left(\frac{\omega}{k}\right) \right). \tag{3.5.145}$$

Substituindo em (3.5.101) e derivando com relação a  $p$ , obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{4\pi}{N} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial p} \int d\omega \frac{|\tilde{v}(k)|^2}{|\tilde{D}(\omega, k)|^2} \delta(\omega - kp) \left( f'(p) f\left(\frac{\omega}{k}\right) - f(p) f'\left(\frac{\omega}{k}\right) \right). \quad (3.5.146)$$

Assim vemos que para o caso homogêneo em uma dimensão espacial obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (3.5.147)$$

ou seja, o termo de Balescu-Lenard se anula. O caso para mais de uma dimensão espacial nos dá:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\vec{v}, t)}{\partial t} &= \frac{\pi (2\pi)^d}{m^2} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \int d\vec{v}_1 d\vec{k} \frac{|\tilde{v}(\vec{k})|^2}{|\tilde{D}(\vec{k} \cdot \vec{v}, \vec{k})|^2} \delta(\vec{k} \cdot (\vec{v} - \vec{v}_1)) \\ &\times \vec{k} \cdot \left( f(\vec{v}_1, t) \frac{\partial f(\vec{v}, t)}{\partial \vec{v}} - f(\vec{v}, t) \frac{\partial f(\vec{v}_1, t)}{\partial \vec{v}_1} \right), \end{aligned} \quad (3.5.148)$$

que é a equação de Balescu-Lenard, onde:

$$\tilde{D}(\omega, \vec{k}) = 1 + \frac{(2\pi)^d}{m} \tilde{v}(\vec{k}) \int d\vec{v} \frac{\vec{k} \cdot \frac{\partial f(\vec{v})}{\partial \vec{v}}}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}}, \quad (3.5.149)$$

é a função dielétrica do sistema.

## 3.6 Resultados da dinâmica de sistemas de longo alcance homogêneo

Nesta seção serão apresentados nossos resultados da dinâmica de sistemas de longo alcance, nosso objetivo será obter uma equação cinética geral que descreva a dinâmica de sistemas unidimensionais, periódicos e homogêneo. Consideraremos o potencial periódico, pois iremos resolver as hierarquias BBGKY representando as correlações e o potencial através das séries de Fourier e para tanto estas funções devem ser periódicas.

Como vimos para um sistema homogêneo e unidimensional, o termo colisional da equação de Lenard-Balescu é nulo (assim como o termo colisional da equação de Landau), nos levando a concluir que é necessário considerar termos de ordem superior para a equação cinética. Conforme é observado em [13, 52] para o modelo do HMF (Hamiltonian Mean Field) com estados homogêneos, a interação entre duas partículas é fraca, justificando a expansão de acoplamento fraco para este caso. De maneira análoga, em sistemas de longo alcance, que a interação entre as partículas é pequena para longas distâncias, podemos utilizar a expansão de acoplamento fraco e para esses sistemas introduzimos um parâmetro  $\lambda$  para especificar a pequenez do potencial, tal que  $V \rightarrow \lambda V$ , com  $\lambda$  sendo a constante de acoplamento fraco. Iremos considerar a seguinte notação:  $1 \equiv x_1, p_1$ ,  $2 \equiv x_2, p_2$  e assim por diante, com  $x_i$  e  $p_i$  as variáveis de posição e momento, respectivamente.

Como discutido na seção 3.1 nosso ponto de partida será a hierarquia BBGKY, ou

seja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_s(1, 2, \dots, s) &= \sum_{j=1}^s \hat{L}_j^0 f_s(1, 2, \dots, s) + \frac{\lambda}{N} \sum_{j \leq n=1}^s \sum_{n=1}^s \hat{L}'_{jn} f_s(1, 2, \dots, s) \\ &+ \frac{\lambda}{N} (N-s) \sum_{j=1}^s \int d(s+1) \hat{L}'_{j(s+1)} f_{s+1}(1, 2, \dots, s+1), \end{aligned} \quad (3.6.150)$$

com

$$L_j^0 = -p_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad L'_{jn} = \frac{\partial V(x_{jn})}{\partial x_j} \partial_{j_n} = V'(x_{jn}) \partial_{j_n}, \quad \partial_{j_n} = \frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial}{\partial p_n}, \quad (3.6.151)$$

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{\lambda}{N} \sum_{i < j=1}^N \sum_{j=1}^N V(x_i, x_j). \quad (3.6.152)$$

Para  $s=1$  e considerando o sistema homogêneo, a primeira equação da hierarquia BBGKY é:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(p_1, t) = \frac{\lambda}{N} (N-1) \int dx_2 dp_2 \hat{L}'_{12} f_2(1, 2). \quad (3.6.153)$$

onde 1 e 2 representa o estado no espaço de fase das partículas 1 e 2, ou seja,  $1 = \{x_1, p_1\}$  e  $2 = \{x_2, p_2\}$ . Usando a expansão em aglomerados (3.2.33), temos que a equação acima pode ser reescrita tal que:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(p_1, t) = \frac{\lambda}{N} (N-1) \int dx_2 dp_2 \hat{L}'_{12} g_2(1, 2). \quad (3.6.154)$$

Notemos que para criar uma correlação entre duas partículas é necessário uma interação, a função  $g_2$  é proporcional à  $\lambda/N$ . Seguindo o mesmo raciocínio,  $g_3$  é proporcional à  $\lambda^2/N^2$ , e assim por diante. Então vamos expandir as correlações  $g_2$  e  $g_3$  em termos de potências de  $\lambda/N$ , temos que:

$$g_2(i, j) = \frac{\lambda}{N} g_2^{(1)}(i, j) + \left(\frac{\lambda}{N}\right)^2 g_2^{(2)}(i, j) + O\left(\frac{\lambda^3}{N^3}\right), \quad (3.6.155)$$

e

$$g_3(i, j, k) = \left(\frac{\lambda}{N}\right)^2 g_3^{(2)}(i, j, k) + O\left(\frac{\lambda^3}{N^3}\right). \quad (3.6.156)$$

Usando (3.6.155), (3.6.156), (3.2.33) e (3.2.34) e a expansão em aglomerados nas hierarquias BBGKY para  $s=2$  e  $s=3$ , obtemos que a equação que descreve a dinâmica dos termos de ordem  $1/N$  para  $s=2$  é:

$$\begin{aligned} \left(\partial_t - \hat{L}_1^0 - \hat{L}_2^0\right) g_2^{(1)}(1, 2, t) &= V'(x_{12}) \partial_{12} f(p_1, t) f(p_2, t) \\ + \lambda \frac{\partial}{\partial p_1} f(p_1, t) \int d^3 V'(x_{13}) g_2^{(1)}(2, 3, t) &+ \lambda \frac{\partial}{\partial p_2} f(p_2, t) \int d^3 V'(x_{23}) g_2^{(1)}(1, 3, t). \end{aligned} \quad (3.6.157)$$

Quando  $s = 2$  os termos de ordem  $1/N^2$  obedecem a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
& \left( \partial_t - \hat{L}_1^0 - \hat{L}_2^0 \right) g_2^{(2)}(1, 2) = \hat{L}'_{12} g_2^{(1)}(1, 2, t) \\
& + \lambda \int V'(x_{13}) \frac{\partial}{\partial p_1} g_3^{(2)}(1, 2, 3, t) \, d3 + \lambda \frac{\partial f(p_1, t)}{\partial p_1} \int V'(x_{13}) g_2^{(2)}(2, 3, t) \, d3 \\
& - f(p_1, t) \int V'(x_{23}) \frac{\partial}{\partial p_2} g_2^{(1)}(2, 3, t) \, d3 - 2 \frac{\partial f(p_1, t)}{\partial p_1} \int V'(x_{13}) g_2^{(1)}(2, 3, t) \, d3 \\
& + 1 \leftrightarrow 2, \quad (3.6.158)
\end{aligned}$$

onde  $\partial/\partial t = \partial_t$  e  $1 \leftrightarrow 2$  representando os termos onde existem permutação dos índices  $1 \leftrightarrow 2$ . Quando  $s = 3$  considerando os termos de ordem  $1/N^2$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
& \left( \partial_t - \hat{L}_1^0 - \hat{L}_2^0 - \hat{L}_3^0 \right) g_3^{(2)}(1, 2, 3, t) = \hat{L}'_{12} f(p_1, t) g_2^{(1)}(2, 3, t) + \hat{L}'_{12} f(p_2, t) g_2^{(1)}(1, 3, t) \\
& + \hat{L}'_{13} f(p_1, t) g_2^{(1)}(2, 3, t) + \hat{L}'_{13} f(p_3, t) g_2^{(1)}(1, 2, t) + \hat{L}'_{23} f(p_2, t) g_2^{(1)}(1, 3, t) \\
& + \lambda \left( \frac{\partial g_2^{(1)}(2, 3, t)}{\partial p_2} \right) \int V'(x_{24}) g_2^{(1)}(1, 4, t) \, d4 + \lambda \left( \frac{\partial g_2^{(1)}(1, 2, t)}{\partial p_2} \right) \int V'(x_{24}) g_2^{(1)}(3, 4, t) \, d4 \\
& + \lambda \left( \frac{\partial g_2^{(1)}(2, 3, t)}{\partial p_3} \right) \int V'(x_{34}) g_2^{(1)}(1, 4, t) \, d4 + \lambda \left( \frac{\partial g_2^{(1)}(1, 3, t)}{\partial p_3} \right) \int V'(x_{34}) g_2^{(1)}(2, 4, t) \, d4 \\
& + \lambda \left( \frac{\partial g_2^{(1)}(1, 2, t)}{\partial p_1} \right) \int V'(x_{14}) g_2^{(1)}(3, 4, t) \, d4 + \lambda \left( \frac{\partial g_2^{(1)}(1, 3, t)}{\partial p_1} \right) \int V'(x_{14}) g_2^{(1)}(2, 4, t) \, d4 \\
& - \left( \frac{\partial f(p_1, t)}{\partial p_1} \right) f(p_3, t) \int V'(x_{14}) g_2^{(1)}(2, 4, t) \, d4 - \left( \frac{\partial f(p_1, t)}{\partial p_1} \right) f(p_2, t) \int V'(x_{14}) g_2^{(1)}(3, 4, t) \, d4 \\
& - \left( \frac{\partial f(p_2, t)}{\partial p_2} \right) f(p_1, t) \int V'(x_{24}) g_2^{(1)}(3, 4, t) \, d4 - \left( \frac{\partial f(p_2, t)}{\partial p_2} \right) f(p_3, t) \int V'(x_{24}) g_2^{(1)}(1, 4, t) \, d4 \\
& - \left( \frac{\partial f(p_3, t)}{\partial p_3} \right) f(p_2, t) \int V'(x_{34}) g_2^{(1)}(1, 4, t) \, d4 - \left( \frac{\partial f(p_3, t)}{\partial p_3} \right) f(p_1, t) \int V'(x_{34}) g_2^{(1)}(2, 4, t) \, d4 \\
& + \lambda \left( \frac{\partial f(p_2, t)}{\partial p_2} \right) \int V'(x_{24}) g_3^{(2)}(1, 3, 4, t) \, d4 + \lambda \left( \frac{\partial f(p_3, t)}{\partial p_3} \right) \int V'(x_{34}) g_3^{(2)}(1, 2, 4, t) \, d4 \\
& + \lambda \left( \frac{\partial f(p_1, t)}{\partial p_1} \right) \int V'(x_{14}) g_3^{(2)}(2, 3, 4, t) \, d4. + \hat{L}'_{23} f(p_3, t) g_2^{(1)}(1, 2, t). \quad (3.6.159)
\end{aligned}$$

Para resolver as equações acima iremos escrever as correlações e o potencial em séries de Fourier:

$$g_2^{(1)}(i, j, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_2^{(1)}(n, p_i, p_j, t) e^{i\pi n x_{ij}/L}, \quad (3.6.160)$$

$$g_2^{(2)}(i, j, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_2^{(2)}(n, p_i, p_j, t) e^{i\pi n x_{ij}/L}, \quad (3.6.161)$$

$$g_3^{(2)}(i, j, k, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_3^{(2)}(n, m, p_i, p_j, p_k, t) e^{i\pi n x_{ij}/L} e^{i\pi m x_{jk}/L}, \quad (3.6.162)$$

$$V(x_{ij}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{V}(n) e^{i\pi n x_{ij}/L}, \quad (3.6.163)$$

com  $n$  e  $m$  inteiros e o potencial tomado como periódico com período  $2L$ . Substituindo as séries de Fourier do potencial e da correlação na equação cinética (3.6.154) obtemos:

$$\begin{aligned}\partial_t f(p_1, t) &= \frac{\pi\lambda(N-1)i}{LN} \sum_m \tilde{V}(m) m \int dp_2 \partial_1 \tilde{g}_2(m, p_1, p_2, t) \\ &= -\frac{\pi\lambda(N-1)}{LN} \sum_m \tilde{V}(m) m \int dp_2 \partial_1 \text{Im} \tilde{g}_2(m, p_1, p_2, t),\end{aligned}\quad (3.6.164)$$

onde consideramos apenas a contribuição dos termos reais no lado direito da equação. Para obter  $\text{Im} \tilde{g}_2(m, p_1, p_2, t)$  é necessário resolver as equações (3.6.157), (3.6.158) e (3.6.159).

Vamos primeiro resolver a equação (3.6.157), para os termos  $g_2^{(1)}(1, 2, t)$ , a equação (3.6.157) é uma equação integro-diferencial difícil de resolver e para conseguir resolvê-la iremos negligenciar os termos de ordem  $\lambda$  e passar para o espaço de Fourier. Assim a solução de (3.6.157) é:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_2^{(1)}(m, p_1, p_2, t) &= e^{-\frac{i\pi m p_{12} t}{L}} \tilde{g}_2^{(1)}(m, p_1, p_2, 0) \\ &+ \frac{i\pi m}{L} \int_0^t d\tau e^{-\frac{i\pi m p_{12} \tau}{L}} \tilde{V}(m) \partial_{12} f(p_1, t - \tau) f(p_2, t - \tau)\end{aligned}\quad ,\quad (3.6.165)$$

com  $p_{12} = p_1 - p_2$ . Podemos notar em 3.6.165 que a correlação  $g_2^{(1)}(m, p_1, p_2, t)$  depende do valor inicial, que corresponde ao primeiro termo do lado direito de 3.6.165, e dependerá da história de  $f$  ao longo do intervalo  $t = 0$  a  $t$ , esta é uma equação não markoviana. Para transformá-la numa equação markoviana realizaremos a aproximação markoviana, que consiste em considerar o tempo  $t - \tau$  muito maior do que  $\tau_c$ , que é o tempo de correlação, isso nos permite fazer o limite  $t \rightarrow \infty$  e trocar  $f(p, t - \tau)$  por  $f(p, t)$  [53]. Fazendo a aproximação markoviana o primeiro termo é transiente e nulo neste limite. E para segundo termo do lado direito de (3.6.165) usaremos a fórmula de Plemelj:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty d\tau e^{-\frac{i\pi m p_{12} \tau}{L}} &= -\pi\delta_- \left( \frac{\pi m p_{12}}{L} \right) = -\pi\delta_D \left( \frac{\pi m p_{12}}{L} \right) + i\mathcal{P} \left( \frac{1}{\frac{\pi m p_{12}}{L}} \right) \\ &= -L\delta_D(m p_{12}) + i\mathcal{P} \left( \frac{1}{\frac{\pi m p_{12}}{L}} \right),\end{aligned}\quad (3.6.166)$$

com  $\mathcal{P}(1/x)$  a parte principal de  $1/x$  e  $\delta_D(x)$  a função delta de Dirac. Portanto obtemos:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_2^{(1)}(m, p_1, p_2, t) &= \left( -L\delta_D(m p_{12}) + i\mathcal{P} \left( \frac{1}{\frac{\pi m p_{12}}{L}} \right) \right) \frac{i\pi m}{L} \tilde{V}(m) \partial_{12} f(p_1, t) f(p_2, t) \\ &= -\mathcal{P} \left( \frac{1}{m p_{12}} \right) m \tilde{V}(m) \partial_{12} f(p_1, t) f(p_2, t),\end{aligned}\quad (3.6.167)$$

na qual usamos a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned}\mathcal{P} \left( \frac{1}{ax} \right) &= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{ax + i\varepsilon} + \frac{1}{ax - i\varepsilon} \right) \\ &= \frac{1}{2a} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x + i\frac{\varepsilon}{a}} + \frac{1}{x - i\frac{\varepsilon}{a}} \right) \\ &= \frac{1}{2a} \lim_{\eta \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x + i\eta} + \frac{1}{x - i\eta} \right) \\ &= \frac{1}{a} \mathcal{P} \left( \frac{1}{x} \right),\end{aligned}\quad (3.6.168)$$

e então:

$$\mathcal{P} \left( \frac{1}{\frac{\pi m p_{12}}{L}} \right) = \mathcal{P} \left( \frac{L}{\pi m p_{12}} \right) = \frac{L}{\pi} \mathcal{P} \left( \frac{1}{m p_{12}} \right). \quad (3.6.169)$$

Logo  $\tilde{g}_2^{(1)}(m, p_1, p_2, t)$  é puramente real e substituindo (3.6.167) em (3.6.164) resulta num termo colisional nulo. Usando os termos  $\lambda^0$  da equação (3.6.158), concluímos que o termo  $\tilde{g}_2^{(2)}(m_1, p_1, p_2, t)$  é também puramente real e o termo colisional de (3.6.164) também é nulo.

Dessa forma devemos considerar os termos até a ordem  $\lambda$  em (3.6.158), substituindo as séries de Fourier e resolvendo usando a aproximação markoviana, conseguimos encontrar que:

$$\begin{aligned} \text{Im } \tilde{g}_2^{(2)}(m, p_1, p_2, t) &= 2\lambda \mathcal{P} \left( \frac{1}{m p_{12}} \right) \pi \\ &\times \sum_{n \neq 0} n \tilde{V}(-n) \left( \int \frac{\partial \text{Im } \tilde{g}_3^2(m+n, n, p_1, p_2, p_3, t)}{\partial p_1} dp_3 \right. \\ &\left. + \int \frac{\partial \text{Im } \tilde{g}_3^2(m, n, p_1, p_2, p_3, t)}{\partial p_2} dp_3 \right). \end{aligned} \quad (3.6.170)$$

Vamos precisar da parte imaginária da componente de Fourier da correlação de três partículas  $\text{Im } \tilde{g}_3^2(m_1 + n, n, p_1, p_2, p_3, t)$ , para tanto vamos usar a equação (3.6.159) para obter este termo. Considerando os termos de ordem  $\lambda^0$  em (3.6.159) e resolvendo no espaço de Fourier, conclui-se que:

$$\begin{aligned} \text{Im } \tilde{g}_3^2(m_1, m_2, p_1, p_2, p_3, t) &= \delta_D(m_1(p_1 - p_2) + m_2(p_2 - p_3)) \pi \\ &\times \left( -\tilde{V}(m_2) m_2 \partial_{13} f(p_3, t) \tilde{g}_2^1(m_1 - m_2, p_1, p_2, t) \right. \\ &\quad \left. - \tilde{V}(m_1) m_1 \partial_{13} f(p_1, t) \tilde{g}_2^1(-m_1 + m_2, p_2, p_3, t) \right) \\ &+ 2\tilde{V}(m_2) \pi m_2 f(p_2, t) \frac{\partial f(p_1, t)}{\partial p_1} \delta(m_1 - m_2, 0) \int \tilde{g}_2^1(-m_2, p_3, p_4, t) dp_4 \\ &\quad + 2\tilde{V}(m_2) \pi \delta(m_1, 0) \frac{\partial f(p_2, t)}{\partial p_2} f(p_1, t) \int \tilde{g}_2^1(-m_2, p_3, p_4, t) dp_4 \\ &- 2\pi f(p_2, t) \frac{\partial f(p_3, t)}{\partial p_3} \tilde{V}(-m_2) m_2 \left( \int \tilde{g}_2^1(m_2, p_1, p_4, t) dp_4 \right) \delta(m_1 - m_2, 0) \\ &\quad + 2\pi \frac{\partial f(p_1, t)}{\partial p_1} f(p_3, t) \tilde{V}(m_1) \left( \int \tilde{g}_2^1(-m_1, p_2, p_4, t) dp_4 \right) m_1 \delta(m_2, 0) \\ &- (m_1 - m_2) \left( f(p_2, t) \frac{\partial \tilde{g}_2^1(m_1, p_1, p_3, t)}{\partial p_3} - \tilde{g}_2^1(m_1, p_1, p_3, t) \frac{\partial f(p_2, t)}{\partial p_2} \right) \tilde{V}(-m_1 + m_2) \\ &- (m_1 - m_2) \left( f(p_2, t) \frac{\partial \tilde{g}_2^1(m_2, p_1, p_3, t)}{\partial p_1} - \tilde{g}_2^1(m_2, p_1, p_3, t) \frac{\partial f(p_2, t)}{\partial p_2} \right) \tilde{V}(m_1 - m_2) \\ &\quad - 2\pi \frac{\partial f(p_2, t)}{\partial p_2} f(p_3, t) \tilde{V}(-m_1) \left( \int \tilde{g}_2^1(m_1, p_1, p_4, t) dp_4 \right) m_1 \delta(m_2, 0) \\ &\quad - 2\pi f(p_1) \frac{\partial f(p_3, t)}{\partial p_3} \tilde{V}(-m_2) m_2 \left( \int \tilde{g}_2^1(m_2, p_2, p_4, t) dp_4 \right) \delta(m_1, 0) \\ &+ \left( f(p_1, t) \frac{\partial \tilde{g}_2^1(m_2, p_2, p_3, t)}{\partial p_2} \tilde{V}(m_1) m_1 - f(p_3, t) \frac{\partial \tilde{g}_2^1(m_1, p_1, p_2, t)}{\partial p_2} \tilde{V}(m_2) m_2 \right) \end{aligned}$$

$$\left. -\frac{\partial f(p_1, t)}{\partial p_1} \tilde{g}_2^1(m_2, p_2, p_3, t) \tilde{V}(m_1) m_1 + \frac{\partial f(p_3, t)}{\partial p_3} \tilde{g}_2^1(m_1, p_1, p_2, t) \tilde{V}(m_2) m_2 \right) . \quad (3.6.171)$$

Portanto a equação cinética para um potencial periódico com período  $L$  é:

$$\begin{aligned} \partial_t f(p_1, t) &= -\frac{\pi\lambda(N-1)}{NL} \sum_{m_1 \neq 0} \tilde{V}(m_1) m_1 \int dp_2 \partial_1 \text{Im} \tilde{g}_2(m_1, p_1, p_2, t) \\ &= -\frac{\pi\lambda^3(N-1)}{N^3L} \sum_{m_1 \neq 0} \tilde{V}(m_1) m_1 \int dp_2 \partial_1 \text{Im} \tilde{g}_2^2(m_1, p_1, p_2, t), \end{aligned} \quad (3.6.172)$$

com  $\text{Im} \tilde{g}_2^2(m_1, p_1, p_2, t)$  expressa por (3.6.170),  $\text{Im} \tilde{g}_3^2(m_1, m_2, p_1, p_2, p_3, t)$  por (3.6.171) e  $\tilde{g}_2^1(m_1, p_1, p_2, t)$  por (3.6.167). Nós podemos notar que fazendo  $L = \pi$  para (3.6.172), (3.6.170), (3.6.171), (3.6.167) e trocando  $\tilde{V}(n) = -(\delta_{n,1} + \delta_{n,-1})/2$ , a qual é a componente de Fourier do potencial para o HMF, obtemos a expressão para a equação cinética para HMF homogêneo unidimensional obtida em [13]. Ou seja, as equações (3.6.167), (3.6.170), (3.6.171) e (3.6.172) descrevem a evolução de um sistema de longo alcance unidimensional homogêneo com potencial periódico.

# Capítulo 4

## Dinâmica de um sistema auto-gravitante unidimensional

Neste capítulo iremos estudar as equações cinéticas que descrevem a dinâmica do sistema gravitacional unidimensional. Apresentaremos o modelo referente a este sistema, o método da soma de Ewald, que consiste em um método para transformar o potencial gravitacional unidimensional em um potencial periódico e descreveremos a dinâmica destes sistemas através das equações BBGKY e de Landau, para os dois estados possíveis destes sistemas: estados homogêneos e não homogêneos.

Nossa motivação para estudar a dinâmica deste sistema surgiu do artigo [30]. Neste trabalho Joyce e Worrakitpoonpon obtiveram resultados sobre a relaxação para o equilíbrio do sistema gravitacional unidimensional no estado não homogêneo utilizando o parâmetro de ordem definido por:

$$\phi_{\alpha\beta} = \frac{\langle |x|^\alpha |v|^\beta \rangle}{\langle |x|^\alpha \rangle \langle |v|^\beta \rangle} - 1, \quad (4.0.1)$$

com

$$\langle u \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i. \quad (4.0.2)$$

Por construção essa quantidade do parâmetro de ordem é zero no equilíbrio térmico. Para caracterizar este equilíbrio calcula-se os parâmetros de ordem  $\phi_{11}$  e  $\phi_{22}$  considerando sua evolução temporal. A condição inicial utilizada por [30] foi uma distribuição tipo *waterbag* nas posições e momentos, definida por:

$$f(x, p, 0) = \begin{cases} \frac{1}{4x_0p_0}, & \text{se } |x| < x_0 \text{ e } |p| < p_0, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4.0.3)$$

para  $x_0 = p_0 = 200$ . Neste trabalho escolhe-se a razão  $R_0$  adimensional, que caracteriza a *waterbag*, sendo  $R_0 = 2T_0/U_0$ , onde  $T_0$  é a energia cinética média e  $U_0$  a energia potencial total média, a palavra "média" indica que os valores obtidos são calculados para a configuração inicial da *waterbag*. Se em  $t = 0$  a função distribuição não é solução estacionária da equação de Vlasov, o sistema deve oscilar. Quando a relaxação é completa e o QSS é estabelecido  $R = 1$ , portanto esta deve ser uma condição para o equilíbrio térmico [14].

A evolução de  $R$ ,  $\phi_{11}$  e  $\phi_{22}$  para  $N = 100$ ,  $N = 400$  e  $R_0 = 0$  são realizadas em [30] e conseguimos observar os estágios de evolução de um típico sistema de longo alcance: relaxação violenta em um curto intervalo de tempo para um estado quase-estacionário QSS

e um tempo de relaxação  $N$ -dependente, que relaxa do QSS para o equilíbrio. Portanto é razoável dizer que o sistema atinge o equilíbrio para tempos de escala longos e da ordem de  $t \approx 3,4 \cdot 10^4$  para  $N = 100$  e  $t \approx 1,3 \cdot 10^5$  para  $N = 400$ , em [30] os autores mostram que para o número de partículas até  $N = 800$  os estados não homogêneos evoluem para o equilíbrio termodinâmico. Devido à dinâmica lenta do sistema gravitacional unidimensional não homogêneo, podemos concluir que o termo colisional da equação cinética deve ser pequeno. Analisaremos a seguir este termo colisional analiticamente para cada um dos estados do sistema gravitacional.

## 4.1 O modelo

Nosso sistema de interesse é o sistema gravitacional unidimensional. Ele consiste de um modelo onde o potencial é obtido da solução da equação de Poisson em uma dimensão [32], e descreve folhas massivas, paralelas, infinitas, livres para se moverem no eixo  $x$  [54], como ilustrado na figura abaixo:

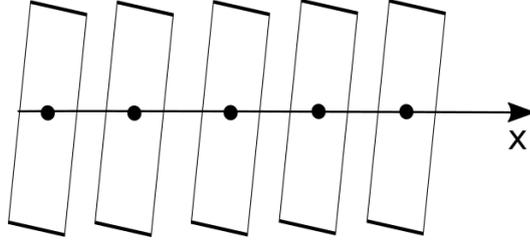


Figura 4.1.1: Representação do sistema gravitacional, as partículas são representadas como planos infinitos, livres para se moverem no eixo  $x$

A equação de Poisson para este sistema é:

$$\nabla^2 \psi(x, t) = 4\pi G \rho(x, t), \quad (4.1.4)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional e  $\rho(x, t)$  a densidade de massa. Para simplificar a equação vamos trabalhar com grandezas adimensionais. Para tanto, serão feitas as seguintes mudanças:

$$\psi(x, t) = \psi_0 \bar{\psi}(x, t), \quad (4.1.5)$$

$$\rho(x, t) = \rho_0 \bar{\rho}(x, t), \quad (4.1.6)$$

onde  $\bar{\psi}(x, t)$  e  $\bar{\rho}(x, t)$  são adimensionais. Substituindo (4.1.5) e (4.1.6) em (4.1.4), temos:

$$\psi_0 \frac{\partial^2 \bar{\psi}(x, t)}{\partial x^2} = 2(2\pi G \rho_0) \bar{\rho}(x, t), \quad (4.1.7)$$

onde  $\rho_0 = \frac{m}{L_0}$  e  $L_0$  é o comprimento da escala. Logo, temos que:

$$\psi_0 \frac{\partial^2 \bar{\psi}(x, t)}{\partial x^2} = 2 \left( 2\pi \frac{Gm}{L_0} \right) \bar{\rho}(x, t), \quad (4.1.8)$$

onde  $\psi_0 = 2\pi \frac{Gm}{L_0}$ , por simplificação consideraremos  $2\pi G = m = 1$ . Então:

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}(x, t)}{\partial x^2} = 2\bar{\rho}(x, t), \quad (4.1.9)$$

é a equação de Poisson adimensional. Podemos reescrever (4.1.9) como:

$$\hat{L}\bar{\psi}(x, t) = 2\bar{\rho}(x, t), \quad (4.1.10)$$

com  $\hat{L} \equiv \partial^2/\partial x^2$ .

Sabemos que a função de Green do operador diferencial de 2º ordem,  $\hat{L}$ , atuando no ponto  $x'$  é solução da equação:

$$\hat{L}G(x, x') = \delta(x - x'), \quad (4.1.11)$$

onde  $\delta$  é a função delta de Dirac. Se for possível encontrar a função de Green  $G(x, x')$  que satisfaz a equação acima, então a solução da equação de Poisson adimensional pode ser escrita como:

$$\bar{\psi}(x, t) = \int dx' G(x, x') \bar{\rho}(x'). \quad (4.1.12)$$

A transformada inversa de Fourier de  $\bar{\psi}(x, t)$  e  $\bar{\rho}(x, t)$  é:

$$\bar{\psi}(x, t) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \tilde{\psi}(k, t) \quad (4.1.13)$$

e

$$\bar{\rho}(x, t) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \tilde{\rho}(k, t). \quad (4.1.14)$$

Substituindo (4.1.13) e (4.1.14) em (4.1.9):

$$\begin{aligned} -k^2 \tilde{\psi}(k, t) &= 2\tilde{\rho}(k, t), \\ \tilde{\psi}(k, t) &= \frac{-2}{k^2} \tilde{\rho}(k, t). \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Então:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \left( \frac{-2}{k^2} \right) \tilde{\rho}(k, t), \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \left( \frac{-2}{k^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-ikx'} \bar{\rho}(x', t), \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \bar{\rho}(x', t) \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} \left( \frac{-2}{2\pi k^2} \right). \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Comparando (4.1.12) com (4.1.16), temos que:

$$G(x, x') = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} \left( \frac{-2}{2\pi k^2} \right). \quad (4.1.17)$$

A transformada inversa de Fourier de  $G(x, x')$  é dada por:

$$G(x, x') = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \frac{\tilde{G}(k, x')}{2\pi}, \quad (4.1.18)$$

de onde temos,

$$\tilde{G}(k, x') = -\frac{2}{k^2} e^{-ikx'}. \quad (4.1.19)$$

Tomando a transformada de Fourier inversa da Eq. (4.1.19) obtemos finalmente que:

$$G(x, x') = |x - x'|. \quad (4.1.20)$$

Considerando que a densidade é  $\rho(x - x') = \delta(x - x')$ , então a hamiltoniana para um sistema de  $N$  partículas interagindo através de um potencial gravitacional unidimensional é, portanto:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{N} \sum_{i < j=1}^N |x_i - x_j|, \quad (4.1.21)$$

onde o potencial entre as partículas é  $V(x_i, x_j) = |x_i - x_j|$ ,  $1/N$  é a prescrição de Kac necessário para garantir a extensividade da hamiltoniana e, por uma escolha de unidades, tomamos  $2\pi G = m = 1$ .

No sistema gravitacional unidimensional a força numa dada partícula  $i$  é:

$$F_i = -\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{N} \sum_j \frac{(x_i - x_j)}{|x_i - x_j|} = \frac{(N_{>}(x_i) - N_{<}(x_i))}{N}, \quad (4.1.22)$$

onde  $N_{>}(x_i)$  é o número de partículas com posição maior que  $x_i$  e  $N_{<}(x_i)$  é o número de partículas com posição menor do que  $x_i$ .

## 4.2 Condições de contorno periódica e soma de Ewald

A condição de contorno periódica consiste em dividir o eixo, onde as partículas se encontram, em infinitas células periódicas, cada célula com período  $2L$  e  $2N$  partículas. As partículas interagem através de um potencial e podem em algum momento deixar a célula através de uma das faces delimitadoras, mas, imediatamente, entram na região da face oposta [55]. A soma de Ewald consiste em obter as soluções analíticas do potencial em sistemas unidimensionais com as condições de contorno periódica [56]. Para plasmas e sistemas gravitacionais [57, 58], estas condições de contorno são adotadas para evitar o tratamento nos extremos do eixo. No caso específico do sistema gravitacional podemos calcular a contribuição de todas as células para o potencial, como veremos a seguir.

Considere uma partícula localizada em  $x'$ , o potencial gravitacional unidimensional num ponto  $x$  devido a esta partícula é:

$$V(x) = |x - x'|. \quad (4.2.23)$$

O potencial no ponto  $x$  devido a todas as partículas com massa unitária é:

$$\phi(x) = \int dx' |x - x'| \rho(x'), \quad (4.2.24)$$

onde  $\rho(x)$  é a densidade de massa. Para um sistema homogêneo com  $\rho$  constante, o potencial total sobre todo o espaço diverge. Para tratar um sistema infinito, vamos utilizar condições de contorno periódicas, ou seja, a região do espaço no intervalo  $(-L, L)$  é denominada de célula unitária e todo o restante da reta real é preenchida por cópias exatas das partículas da célula unitária. Quando uma partícula chega numa borda da célula unitária em  $x = \pm L$  ela ressurge na outra borda em  $x = \pm L$  com a mesma velocidade, em mais de uma dimensão o procedimento é o mesmo em cada variável de posição. Dessa forma a distribuição de massa passa a ter período  $2L$ :

$$\rho(x + 2L) = \rho(x), \quad (4.2.25)$$

esta distribuição de massa periódica produz um potencial periódico, que será empregada nas equações cinéticas para o sistema gravitacional. Com o intuito de tornar o potencial convergente, introduzimos um fator  $\exp(k|x - x'|)$ , resultando em:

$$\phi(x) = \int dx' |x - x'| e^{-k|x-x'|} \rho(x'), \quad (4.2.26)$$

ao final dos cálculos tomamos o limite  $k \rightarrow 0$ . Apresentamos a seguir o resultado para a soma de Ewald a uma dimensão espacial [56].

Como a densidade de massa  $\rho(x)$  é agora uma função periódica, podemos escreve-la como  $\rho(x) = \rho_0 + \sigma(x)$ , com  $\rho_0$  é a média de  $\rho(x)$  e  $\sigma(x)$  a flutuação periódica. A contribuição da média em (4.2.26) é:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \int dx' |x - x'| e^{-k|x-x'|} \rho_0 \\ &= \rho_0 \int dx' |x - x'| e^{-k|x-x'|} \\ &= \rho_0 \left( \int_{-\infty}^x dx' |x - x'| e^{-k|x-x'|} + \int_x^{\infty} dx' |x - x'| e^{-k|x-x'|} \right) \\ &= \frac{2\rho_0}{k^2}. \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

Embora  $\phi_0$  exploda no limite  $k \rightarrow 0$ , desde que  $\phi_0$  é um invariante translacional, ele não contribue para o campo gravitacional, portanto  $\phi(x)$  em (4.2.26) dependerá apenas da contribuição de  $\sigma(x)$ , que é dada por:

$$\phi_\sigma(x, k) = \int dx' |x - x'| e^{-k|x-x'|} \sigma(x'). \quad (4.2.28)$$

Como  $\sigma(x')$  é uma função periódica, podemos representa-la como uma série de Fourier,

$$\sigma(x) = \sum_n ' c_n e^{\frac{i\pi n x}{L}}, \quad (4.2.29)$$

onde no somatório ' indica que estamos desconsiderando o termo  $n = 0$ . Então:

$$\begin{aligned} \phi_\sigma(x, k) &= \int dx' |x - x'| e^{-k|x-x'|} \sum_n ' c_n e^{\frac{i\pi n x'}{L}}, \\ &= \sum_n ' c_n e^{\frac{i\pi n x}{L}} \int dx' |x - x'| e^{-k|x-x'|} e^{\frac{i\pi n (x'-x)}{L}}, \\ &= \sum_n ' c_n e^{\frac{i\pi n x}{L}} b_n, \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

com

$$\begin{aligned} b_n &= \int dx' |x - x'| e^{-k|x-x'|} e^{\frac{i\pi n}{L}(x'-x)}, \\ &= \int du |u| e^{-k|u|} e^{\frac{i\pi n}{L}u}, \\ &= \frac{2(k^2 - (\pi n/L)^2)}{(k^2 + (\pi n/L)^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

No limite  $k \rightarrow 0$ :

$$b_n = -\frac{2L^2}{\pi^2 n^2}. \quad (4.2.32)$$

Logo,

$$\begin{aligned}\phi_\sigma(x) &= \sum_n 'c_n e^{\frac{i\pi n x}{L}} \left( \frac{-2L^2}{\pi^2 n^2} \right), \\ &= -\frac{2L^2}{\pi^2} \sum_n ' \frac{c_n}{n^2} e^{\frac{i\pi n x}{L}}.\end{aligned}\quad (4.2.33)$$

Tomamos a célula unitária, com  $2N$  folhas cada, cada folha com massa  $m = 1$ , a flutuação (periódica) na densidade é:

$$\begin{aligned}\sigma_p(x) &= \rho(x) - \rho_0, \\ &= \rho(x) - \frac{M}{2L}, \\ &= \rho(x) - \frac{2N}{2L}, \\ &= \sum_{j=1}^{2N} \left( \delta(x - x_j) - \frac{1}{2L} \right).\end{aligned}\quad (4.2.34)$$

O coeficiente  $c_n$  em (4.2.29) é calculado na célula unitária:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx' \sigma(x') e^{-\frac{i\pi n x'}{L}}.\quad (4.2.35)$$

Substituindo (4.2.35), temos:

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx' \sum_{j=1}^{2N} \left( \delta(x' - x_j) - \frac{1}{2L} \right) e^{-\frac{i\pi n x'}{L}}, \\ &= \frac{1}{2L} \sum_{j=1}^{2N} (-\Theta(x_j - L) + \Theta(L + x_j)) e^{-\frac{i\pi n x_j}{L}},\end{aligned}\quad (4.2.36)$$

com  $\Theta$  a função de Heaviside. Então,

$$c_n = \frac{1}{2L} \sum_{j=1}^{2N} e^{-\frac{i\pi n x_j}{L}}.\quad (4.2.37)$$

Substituindo (4.2.37) em (4.2.33):

$$\phi_\sigma(x) = -\frac{L}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} ' \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{2N} e^{-\frac{i\pi n(x-x_j)}{L}}.\quad (4.2.38)$$

Esse é o potencial total no ponto  $x$  devido a flutuação periódica da densidade de massa, considerando a célula primitiva e todas as réplicas, devido às  $2N$  folhas em cada célula. Considerando apenas uma folha de massa  $m = 1$ , localizada em  $x_1$  e suas réplicas, o potencial em  $x$  é

$$\phi_1(x) = -\frac{L}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{i\pi n(x-x_1)}{L}}.\quad (4.2.39)$$

A função  $|x - x_1| - (x - x_1)^2 / 2L$  pode ser representada pela série de Fourier:

$$|x - x_1| - \frac{(x - x_1)^2}{2L} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} ' e^{i\pi n \frac{(x-x_1)}{L}} \frac{L}{\pi^2 n^2},\quad (4.2.40)$$

periódica de período  $2L$ . Logo,

$$\phi_1(x) = \left( |x - x_1| - \frac{(x - x_1)^2}{2L} \right). \quad (4.2.41)$$

Portanto o potencial total em (4.2.38) é:

$$\phi(x) = \phi_\sigma(x, k) = \sum_{j=1}^{2N} \left( |x - x_j| - \frac{(x - x_j)^2}{2L} \right). \quad (4.2.42)$$

E o potencial da soma de Ewald, entre duas partículas, é um potencial periódico de período  $L$  e dado por [56]:

$$V(x_i, x_j) = |x_i - x_j| - \frac{(x_i - x_j)^2}{2L}. \quad (4.2.43)$$

### 4.3 Equação cinética para o estado homogêneo

Para tratar o caso de um estado homogêneo consideramos condições de contorno periódicas e a soma de Ewald, conforme apresentado na seção anterior. A Hamiltoniana na célula unitária é então escrita como:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{N} \sum_{i < j=1} V(x_i, x_j), \quad (4.3.44)$$

com

$$V(x_i, x_j) = |x_i - x_j| - \frac{(x_i - x_j)^2}{2L}. \quad (4.3.45)$$

Como vimos anteriormente, as hierarquias BBGKY para  $s = 1$  e  $s = 2$  são:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(p_1, t) = \int d2 V'_{12} \partial_{12} [f(p_1, t) f(p_2, t) + g_2(1, 2, t)], \quad (4.3.46)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + p_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) g_2(1, 2, t) &= V'_{12} \partial_{12} f(1, t) f(2, t) + V'_{12} \partial_{12} g_2(1, 2, t) \\ &+ \int d3 [V'_{13} \partial_{13} f(1, t) g_2(2, 3, t) + V'_{23} \partial_{23} f(2, t) g_2(1, 3, t) \\ &+ (V'_{13} \partial_{13} + V'_{23} \partial_{23}) \{f(3, t) g_2(1, 2, t) + g_3(1, 2, 3, t)\}]. \end{aligned} \quad (4.3.47)$$

Podemos notar que estas equações dependem da derivada do potencial (4.3.45), que tem uma singularidade quando a distância entre as partículas é zero. Consideramos a seguinte renomeação de índices de partículas: no momento em que duas partículas (folhas) se cruzam, trocamos seus rótulos. Desta forma, em cada colisão (em distância zero) as partículas trocam seus momentos e a força é constante no tempo, esta colisão é equivalente a uma colisão elástica. Se as partículas são rotuladas tal que  $x_i < x_j$  se  $i < j$ , o ordenamento na posição é preservado ao longo do tempo. Então a força na partícula  $i$  devido a partícula  $j$  pode ser escrita como  $F = F_{grav} + F_{HC}$ , com  $F_{grav} = -\partial V(x_i - x_j)/\partial x_i$ , com  $V$  dado por (4.3.45), e  $F_{HC}$  é a força associada a troca do momento das partículas quando elas colidem a uma distância zero, a força de *hard-core*.

A contribuição da força  $F_{grav}$  para (4.3.47) desaparece no limite  $L \rightarrow \infty$ , esta afirmação é comprovada pela figura 4.3.2, que mostra a força sobre uma dada partícula em função da posição, devida ao potencial gravitacional e ao potencial de Ewald, variando  $L$  da célula unitária, mas mantendo a densidade  $n = N/L$  constante. Observamos que conforme aumentamos  $L$ , a força  $F_{grav}$  aproxima-se de zero, tal que apenas contribuições de  $F_{HC}$  são retidas em (4.3.47). Como a força *hard-core* apenas troca o momento de duas partículas em cada interação, isso faz com que as equações obtidas da hierarquia BBGKY sejam idêntica as equação de Boltzmann para um sistema homogêneo unidimensional. Isso implica que nossa equação cinética é da forma de uma equação de Boltzmann, que nesse caso tem um termo colisional nulo. Como o termo de campo médio também é nulo para um estado homogêneo, a equação cinética se reduz simplesmente a  $\partial f_1(p; t)/\partial t = 0$ , ou seja,  $f_1$  é constante no tempo. No entanto, caso o estado homogêneo seja instável, para menores energias, qualquer flutuação na homogeneidade tira o sistema do estado homogêneo, que passará então a evoluir segundo a equação de Vlasov para tempos curtos, ou segundo uma equação cinética com termo colisional não nulo para tempos mais longo. Pequenos desvios deste comportamento são esperados para ocorrer em simulações numéricas devido a efeitos resultantes do valor  $L$  finito, que resulta numa pequena flutuação do valor da força próximo de zero, mas que representa efeitos espúrios devido à aproximação de uma célula unitária finita.

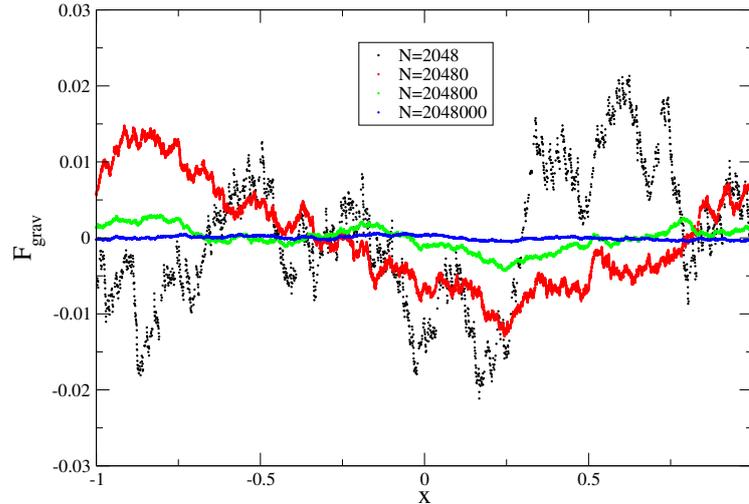


Figura 4.3.2: Força na partícula  $i$ , na posição  $x = x_i$ , devido a  $N - 1$  partículas para o sistema gravitacional unidimensional com o adicional potencial de Ewald, para diferentes números de partículas, mas mesma densidade  $n = N/L$ . A posição foi reescalada para  $[-1,1]$  para fins de comparação. Nossa célula unitária para  $N = 2048$  é dada por  $L = 20$  e simulamos para outros valores de  $N$  para manter a densidade no mesmo valor. Figura retirada de [1].

## 4.4 Equação cinética para o estado não homogêneo

Nesta seção utilizaremos a abordagem de Klimontovich, descrita na seção (3.4), para derivar a equação cinética que descreve a dinâmica de sistemas inhomogêneos unidimensionais usando variáveis ângulo-ação, nesta abordagem consideraremos os efeitos coletivos do sistema. Para tal será necessário utilizar variáveis de ângulo-ação obtidas para o potencial de campo médio, conforme desenvolvido nas referências [21, 59], e que passamos a apresentar de forma sucinta. Posteriormente aplicaremos essa abordagem para o sistema auto-gravitante unidimensional.

A variável ação é:

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p \, dx, \quad (4.4.48)$$

onde

$$p(x) = \sqrt{2(E - v(x))} \quad (4.4.49)$$

e  $v(x)$  é o potencial de campo médio no ponto  $x$ , expresso pela Eq. 3.4.81.

Definimos a variável ângulo por:

$$\varphi = \frac{\partial W(x, J)}{\partial J}, \quad (4.4.50)$$

onde  $W(x, J)$  é a solução da equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo [60]. Sendo  $W(x, J)$  independente do tempo, podemos definir a frequência angular  $\omega$ , tal que:

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial J}, \quad (4.4.51)$$

com  $\varphi = \varphi_0 + \omega t$  e  $H$  sendo a hamiltoniana do sistema. As equações de Hamilton assumem então a forma:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial J} = \omega(J) \quad (4.4.52)$$

e

$$\dot{J} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0. \quad (4.4.53)$$

Por construção a hamiltoniana  $H$  depende apenas da variável ação, isto implica que as variáveis ação são constantes de movimento, ou seja, neste caso  $f = f(J)$ , corresponde a distribuição do estado estacionário da equação de Vlasov e é uma distribuição homogênea nas variáveis ângulo-ação. Devido às colisões entre as  $N$  partículas do sistema esta função  $f$  evolue lentamente ao longo do tempo no QSS, portanto a função distribuição ao longo do tempo é descrita por  $f(J, t)$  [21]. Agora vamos partir das equações (3.4.96) e (3.4.99) para obter a equação cinética. Como, a hamiltoniana depende apenas da variável ação, temos que  $[H, f] = 0$ , além disso:

$$[\delta\phi, \delta f] = \frac{\partial\delta\phi}{\partial J} \frac{\partial\delta f}{\partial\varphi} - \frac{\partial\delta\phi}{\partial\varphi} \frac{\partial\delta f}{\partial J} = -\frac{\partial\delta\phi}{\partial\varphi} \frac{\partial\delta f}{\partial J}, \quad (4.4.54)$$

$$[H, \delta f] = \frac{\partial H}{\partial J} \frac{\partial\delta f}{\partial\varphi} - \frac{\partial H}{\partial\varphi} \frac{\partial\delta f}{\partial J} = \omega \frac{\partial\delta f}{\partial\varphi}, \quad (4.4.55)$$

$$[\delta\phi, f] = \frac{\partial\delta\phi}{\partial J} \frac{\partial f}{\partial\varphi} - \frac{\partial\delta\phi}{\partial\varphi} \frac{\partial f}{\partial J} = -\frac{\partial\delta\phi}{\partial\varphi} \frac{\partial f}{\partial J}. \quad (4.4.56)$$

Portanto as equações (3.4.96) e (3.4.99) nas variáveis ângulo-ação são:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial J} \left\langle \delta f \frac{\partial\delta\phi}{\partial\varphi} \right\rangle \quad (4.4.57)$$

e

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \omega \frac{\partial \delta f}{\partial \varphi} - \frac{\partial \delta \phi}{\partial \varphi} \frac{\partial f}{\partial J} = 0. \quad (4.4.58)$$

Podemos resolver as equações acima utilizando uma transformada de Fourier-Laplace. Definimos a transformada de Fourier-Laplace da flutuação da função distribuição  $\delta f$  como:

$$\tilde{\delta f}(k, J, \theta) = \int \frac{d\varphi}{2\pi} \int_0^\infty dt e^{-i(k\varphi - \theta t)} \delta f(\varphi, J, t), \quad (4.4.59)$$

com transformada inversa

$$\delta f(\varphi, J, t) = \sum_k \int_{\mathcal{C}} \frac{d\theta}{2\pi} e^{i(k\varphi - \theta t)} \tilde{\delta f}(k, J, \theta), \quad (4.4.60)$$

onde  $\mathcal{C}$  é o contorno de Laplace no plano complexo e deve passar acima de todos os pólos de integração. Utilizaremos a propriedade da derivada da transformada de Laplace [61]:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0), \quad (4.4.61)$$

tal que:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt. \quad (4.4.62)$$

Fazendo a transformada de Fourier-Laplace em (4.4.58) e substituindo a propriedade acima, temos:

$$-\hat{\delta f}(k, J, 0) - i\theta \tilde{\delta f}(k, J, \theta) + ik\omega \tilde{\delta f}(k, J, \theta) - ik \frac{\partial f}{\partial J} \tilde{\delta \phi}(k, J, \theta) = 0, \quad (4.4.63)$$

com:

$$\hat{\delta f}(k, J, 0) = \int \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-ik\varphi} \delta f(\varphi, J, 0) \quad (4.4.64)$$

$$\tilde{\delta \phi}(k, J, \theta) = \int \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-i(k\varphi - \theta t)} \delta \phi(\varphi, J, t). \quad (4.4.65)$$

Ou seja,

$$\tilde{\delta f}(k, J, \theta) = \frac{\hat{\delta f}(k, J, 0)}{i(k\omega - \theta)} + \frac{k \frac{\partial f}{\partial J} \tilde{\delta \phi}(k, J, \theta)}{k\omega - \theta}, \quad (4.4.66)$$

com o primeiro termo dependendo da condição inicial de  $\delta f$  e o segundo termo dependendo de efeitos coletivos de  $\delta \phi$ .

A flutuação do potencial está relacionada com a flutuação da densidade por:

$$\delta \phi(x, t) = \int V(|x - x'|) \delta \rho(x', t) dx'. \quad (4.4.67)$$

Tomemos agora a equação de Poisson:

$$\nabla^2 v(x) = 4\pi G \rho(x), \quad (4.4.68)$$

e introduzimos uma base bi-ortogonal tal que:

$$v(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \phi_{\alpha}(x) \quad (4.4.69)$$

e

$$\rho(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \rho_{\alpha}(x) \quad (4.4.70)$$

de tal forma que:

$$\nabla^2 \phi_{\alpha}(x) = 4\pi G \rho_{\alpha}(x). \quad (4.4.71)$$

O coeficiente constante  $a_{\alpha}$  é determinado quando multiplicamos Eq. (4.4.70) por  $-\phi_{\alpha}^*(x)$  e integramos em  $x$ . Então:

$$s_{\alpha} = \sum_{\beta} M_{\alpha\beta} a_{\beta}, \quad (4.4.72)$$

com:

$$\begin{aligned} s_{\alpha} &= - \int dx \phi_{\alpha}^*(x) \rho(x), \\ M_{\alpha\beta} &= - \int dx \phi_{\alpha}^*(x) \rho_{\beta}(x). \end{aligned} \quad (4.4.73)$$

Vamos escolher  $M$ , tal que é uma matriz identidade, então:

$$a_{\alpha} = - \int dx \phi_{\alpha}^*(x) \rho(x) \quad (4.4.74)$$

e temos a seguinte condição de bi-ortogonalidade:

$$\int dx \phi_{\alpha}^*(x) \rho_{\beta}(x) = -\delta_{\alpha\beta}. \quad (4.4.75)$$

Usando Eqs. (4.4.69) e (4.4.70) em (3.4.81), temos:

$$\phi_{\alpha}(x) = \int V(|x-x'|) \rho_{\alpha}(x') dx'. \quad (4.4.76)$$

Escrevemos a flutuação da densidade das partículas, a flutuação do potencial médio e a flutuação do potencial médio nas variáveis ângulo-ação, respectivamente:

$$\delta\rho(x, t) = \sum_{\alpha} A_{\alpha}(t) \rho_{\alpha}(x), \quad (4.4.77)$$

$$\delta\phi(x, t) = \sum_{\alpha} A_{\alpha}(t) \phi_{\alpha}(x), \quad (4.4.78)$$

$$\delta\phi(\varphi, J, t) = \sum_{\alpha} A_{\alpha}(t) \phi_{\alpha}(\varphi, J), \quad (4.4.79)$$

com  $A_{\alpha}(t)$  sendo o mesmo para as três funções acima e representado por:

$$A_{\alpha}(t) = - \int dx \phi_{\alpha}^*(x) \rho(x, t), \quad (4.4.80)$$

multiplicando Eq. (4.4.76) por  $A_\alpha(t)$ , somando para todo  $\alpha$ , temos a Eq. (4.4.67).

A transformada de Fourier-Laplace de (4.4.79) é:

$$\widetilde{\delta\phi}(k, J, \theta) = \sum_{\alpha} \tilde{A}_\alpha(\theta) \tilde{\phi}_\alpha(k, J), \quad (4.4.81)$$

com:

$$\tilde{A}_\alpha(\theta) = \int_0^\infty A_\alpha(t) e^{i\theta t} dt, \quad (4.4.82)$$

e

$$\tilde{\phi}_\alpha(k, J) = \int \phi_\alpha(\varphi, J) e^{-ik\varphi} \frac{d\varphi}{2\pi}. \quad (4.4.83)$$

Então podemos reescrever (4.4.66) como:

$$\tilde{\delta f}(k, J, \theta) = \frac{\hat{\delta f}(k, J, 0)}{i(k\omega - \theta)} + \frac{k \frac{\partial f}{\partial J} \sum_{\alpha} \tilde{A}_\alpha(\theta) \tilde{\phi}_\alpha(k, J)}{k\omega - \theta}. \quad (4.4.84)$$

A transformada de Fourier inversa de  $\delta f$  é:

$$\tilde{\delta f}(\varphi, J, \theta) = \sum_k e^{ik\varphi} \tilde{\delta f}(k, J, \theta). \quad (4.4.85)$$

Ou seja,

$$\tilde{\delta f}(\varphi, J, \theta) = \sum_k e^{ik\varphi} \left( \frac{\hat{\delta f}(k, J, 0)}{i(k\omega - \theta)} + \frac{k \frac{\partial f}{\partial J} \sum_{\alpha} \tilde{A}_\alpha(\theta) \tilde{\phi}_\alpha(k, J)}{k\omega - \theta} \right). \quad (4.4.86)$$

Multiplicando o lado esquerdo de (4.4.86) por  $\phi_{\alpha'}^*(\varphi, J)$  e integrando sobre  $\varphi$  e  $J$ , temos:

$$\int \tilde{\delta f}(\varphi, J, \theta) \phi_{\alpha'}^*(\varphi, J) d\varphi dJ = -\tilde{A}_{\alpha'}(\theta), \quad (4.4.87)$$

no qual usamos

$$\begin{aligned} \tilde{\delta\rho}(x, \theta) &= \int \tilde{\delta f}(x, v, \theta) dv \\ &= \sum_{\alpha} \tilde{A}_\alpha(\theta) \rho_\alpha(x), \end{aligned} \quad (4.4.88)$$

e  $dx dv = d\varphi dJ$  já que  $(\varphi, J)$  são variáveis canônicas e o jacobiano da transformação é 1.

Multiplicando o lado direito de (4.4.86) por  $\phi_{\alpha'}^*$  e integrando por  $\varphi$  e  $J$ , temos:

$$\begin{aligned} &\sum_k \int d\varphi dJ e^{ik\varphi} \phi_{\alpha'}^*(\varphi, J) \left( \frac{\hat{\delta f}(k, J, 0)}{i(k\omega - \theta)} + \frac{k \frac{\partial f}{\partial J} \sum_{\alpha} \tilde{A}_\alpha(\theta) \tilde{\phi}_\alpha(k, J)}{k\omega - \theta} \right) \\ &= 2\pi \sum_k \int dJ \tilde{\phi}_{\alpha'}^*(k, J) \left( \frac{\hat{\delta f}(k, J, 0)}{i(k\omega - \theta)} + \frac{k \frac{\partial f}{\partial J} \sum_{\alpha} \tilde{A}_\alpha(\theta) \tilde{\phi}_\alpha(k, J)}{k\omega - \theta} \right). \end{aligned} \quad (4.4.89)$$

Igualando (4.4.87) a (4.4.89), obtemos:

$$-2\pi \sum_k \int dJ \frac{\hat{\delta f}(k, J, 0)}{i(k\omega - \theta)} \tilde{\phi}_{\alpha'}^*(k, J) = \sum_{\alpha} \tilde{A}_\alpha(\theta) \epsilon_{\alpha\alpha'}(\theta) \quad (4.4.90)$$

ou

$$\sum_{\alpha} \tilde{A}_{\alpha}(\theta) \epsilon_{\alpha\alpha'}(\theta) = -2\pi \sum_k \int dJ \frac{\hat{\delta}f(k, J, 0)}{i(k\omega - \theta)} \tilde{\phi}_{\alpha'}^*(k, J), \quad (4.4.91)$$

com

$$\epsilon_{\alpha\alpha'}(\theta) = \delta_{\alpha\alpha'} + 2\pi \sum_k \int dJ \frac{k \frac{\partial f}{\partial J}}{k\omega - \theta} \tilde{\phi}_{\alpha}(k, J) \tilde{\phi}_{\alpha'}^*(k, J). \quad (4.4.92)$$

O lado esquerdo de (4.4.91) pode ser visto como o produto da matriz  $\tilde{A}(\theta)$  com a matriz  $\epsilon(\theta)$  e multiplicando ambos os lados da equação por  $\epsilon^{-1}(\theta)$ , que é a matriz inversa de  $\epsilon(\theta)$ , resulta em:

$$\tilde{A}_{\alpha}(\theta) = -2\pi \sum_{\alpha'} \epsilon_{\alpha\alpha'}^{-1}(\theta) \sum_{k'} \int dJ' \frac{\hat{\delta}f(k', J', 0)}{i(k'\omega' - \theta)} \tilde{\phi}_{\alpha'}^*(k', J'). \quad (4.4.93)$$

Substituindo (4.4.93) em (4.4.81), temos:

$$\tilde{\delta}\phi(k, J, \theta) = -2\pi \sum_{k'} \int dJ' \frac{1}{D_{k,k'}(J, J', \theta)} \frac{\hat{\delta}f(k', J', 0)}{i(k'\omega' - \theta)}, \quad (4.4.94)$$

com

$$D_{k,k'}(J, J', \theta)^{-1} = \sum_{\alpha\alpha'} \tilde{\phi}_{\alpha}(k, J) \epsilon_{\alpha\alpha'}^{-1}(\theta) \tilde{\phi}_{\alpha'}^*(k', J'). \quad (4.4.95)$$

O termo da direita de (4.4.57) é

$$\left\langle \delta f \frac{\partial \delta\phi}{\partial \varphi} \right\rangle = \sum_k \int \frac{d\theta}{2\pi} e^{i(k\varphi - \theta t)} \sum_{k'} \int \frac{d\theta'}{2\pi} e^{i(k'\varphi - \theta' t)} i k' \left\langle \tilde{\delta}f(k, J, \theta) \tilde{\delta}\phi(k', J, \theta') \right\rangle. \quad (4.4.96)$$

Usando (4.4.66):

$$\left\langle \tilde{\delta}f(k, J, \theta) \tilde{\delta}\phi(k', J, \theta') \right\rangle = \frac{\left\langle \hat{\delta}f(k, J, 0) \tilde{\delta}\phi(k', J, \theta') \right\rangle}{i(k\omega - \theta)} + k \frac{\partial f}{\partial J} \frac{\left\langle \tilde{\delta}\phi(k, J, \theta) \tilde{\delta}\phi(k', J, \theta') \right\rangle}{k\omega - \theta}. \quad (4.4.97)$$

Agora vamos calcular estes dois termos do lado direito de (4.4.97) separadamente. Usando (4.4.94):

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\delta}\phi(k, J, \theta) \tilde{\delta}\phi(k', J, \theta') \right\rangle &= -(2\pi)^2 \sum_{k_1, k_2} \int dJ_1 dJ_2 \frac{1}{D_{k, k_1}(J, J_1, \theta)} \frac{1}{D_{k', k_2}(J, J_2, \theta')} \\ &\times \frac{\left\langle \hat{\delta}f(k_1, J_1, 0) \hat{\delta}f(k_2, J_2, 0) \right\rangle}{(k_1\omega_1 - \theta)(k_2\omega_2 - \theta')} \end{aligned} \quad (4.4.98)$$

O termo  $\left\langle \hat{\delta}f(k, J, 0) \hat{\delta}f(k', J, 0) \right\rangle$  pode ser obtido usando (4.4.64), tal que:

$$\left\langle \hat{\delta}f(k, J, 0) \hat{\delta}f(k', J', 0) \right\rangle = \int \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{d\varphi'}{2\pi} e^{-i(k\varphi + k'\varphi')} \langle \delta f(\varphi, J, 0) \delta f(\varphi', J', 0) \rangle. \quad (4.4.99)$$

Na seção (3.4) vimos que  $\delta f = f_d - f$ , logo:

$$\langle \delta f(k, J, 0) \delta f(k', J', 0) \rangle = \langle f_d(\varphi, J, 0) f'_d(\varphi', J', 0) \rangle - f(J) f'(J'). \quad (4.4.100)$$

Da equação (3.4.76), fazendo  $m = 1/N$  temos:

$$f_d(\varphi, J, t) = m \sum_i \delta(\varphi_i - \varphi_i(t)) \delta(J - J_i(t)), \quad (4.4.101)$$

tal que:

$$\langle f_d(\varphi, J, 0) f'_d(\varphi', J', 0) \rangle = m f(J) \delta(\varphi - \varphi') \delta(J - J') + f(J) f'(J'). \quad (4.4.102)$$

Substituindo (4.4.102) em (4.4.100) e (4.4.100) em (4.4.99), temos:

$$\langle \hat{\delta} f(k, J, 0) \hat{\delta} f(k', J', 0) \rangle = \frac{m}{2\pi} f(J) \delta(J - J') \delta_{k, -k'}. \quad (4.4.103)$$

Logo de (4.4.98), temos:

$$\langle \tilde{\delta} \phi(k, J, \theta) \tilde{\delta} \phi(k', J, \theta') \rangle = 2\pi \sum_{k_1} \int dJ_1 \frac{1}{D_{k, k_1}(J, J_1, \theta)} \frac{1}{D_{k', -k_1}(J, J_1, \theta')} \frac{mf(J_1)}{(k_1\omega_1 - \theta)(k_1\omega_1 + \theta')}. \quad (4.4.104)$$

Mas de [48]:

$$\frac{1}{(k_1\omega_1 - \theta)(k_1\omega_1 + \theta')} = (2\pi)^2 \delta(\omega + \omega') \delta(\theta - k_1\omega_1). \quad (4.4.105)$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\delta} \phi(k, J, \theta) \tilde{\delta} \phi(k', J, \theta') \rangle &= 2\pi \sum_{k_1} \int dJ_1 \frac{mf(J_1)}{D_{k, k_1}(J, J_1, \theta)} \frac{1}{D_{k', -k_1}(J, J_1, -\theta)} \\ &\times (2\pi)^2 \delta(\theta + \theta') \delta(k_1\omega_1 - \theta). \end{aligned} \quad (4.4.106)$$

Já o segundo termo de (4.4.97) é:

$$\frac{\langle \hat{\delta} f(k, J, 0) \tilde{\delta} \phi(k', J, \theta') \rangle}{i(k\omega - \theta)} = 2\pi \sum_{k''} \int dJ'' \frac{1}{D_{k', k''}(J, J'', \theta')} \frac{\langle \hat{\delta} f(k, J, 0) \hat{\delta} f(k'', J'', 0) \rangle}{(k\omega - \theta)(k''\omega'' - \theta')}, \quad (4.4.107)$$

onde usamos (4.4.94). Usando (4.4.103):

$$\begin{aligned} \frac{\langle \hat{\delta} f(k, J, 0) \tilde{\delta} \phi(k', J, \theta') \rangle}{i(k\omega - \theta)} &= \sum_{k''} \int dJ'' \frac{1}{D_{k', k''}(J, J'', \theta')} \frac{mf(J) \delta(J - J'') \delta_{k, -k''}}{(k\omega - \theta)(k''\omega'' - \theta')} \\ &= -\frac{(2\pi)^2 mf(J)}{D_{k', -k}(J, J, -\theta)} \delta(\theta + \theta') \delta(k\omega - \theta). \end{aligned} \quad (4.4.108)$$

Iremos substituir (4.4.106) em (4.4.97) e (4.4.97) em (4.4.96), tal que o primeiro termo colisional de (4.4.96) é:

$$\left\langle \delta f \frac{\partial \delta \phi}{\partial \varphi} \right\rangle_I = (2\pi) \pi m \sum_{k, k_1} \int dJ_1 \frac{k \delta(k_1\omega_1 - k\omega)}{|D_{k, k_1}(J, J_1, k\omega)|^2} \left( k \frac{\partial f}{\partial J} f(J_1) \right) \quad (4.4.109)$$

Para o segundo termo colisional de (4.4.96) usaremos (4.4.108) em (4.4.97) e (4.4.97) em (4.4.96), logo:

$$\left\langle \delta f \frac{\partial \delta \phi}{\partial \varphi} \right\rangle_{II} = \sum_k k m f(J) \operatorname{Im} \left( \frac{1}{D_{k,k}(J, J, k\omega)} \right). \quad (4.4.110)$$

Usando (4.4.95):

$$\frac{1}{D_{k,k}(J, J, k\omega)} = \phi_\alpha(k, J) \epsilon_{\alpha\alpha'}^{-1}(k\omega) \phi_{\alpha'}^*(k, J). \quad (4.4.111)$$

Sabendo que dado um número complexo  $z = a + ib$ , o complexo conjugado será  $z^* = a - ib$ , logo:

$$z - z^* = 2ib \quad \text{e} \quad b = \frac{1}{2i}(z - z^*), \quad (4.4.112)$$

onde  $b = \operatorname{Im}(z)$ . Então,

$$\operatorname{Im} \left( \frac{1}{D_{k,k}(J, J, k\omega)} \right) = \frac{1}{2i} \phi_\alpha(k, J) [\epsilon_{\alpha\alpha'}^{-1}(k\omega) - (\epsilon_{\alpha\alpha'}^{-1}(k\omega))^*] \phi_{\alpha'}^*(k, J) \quad (4.4.113)$$

O termo entre colchetes é representado na forma matricial, como:

$$\epsilon^{-1} - (\epsilon^{-1})^\dagger = \epsilon^{-1} (\epsilon^\dagger - \epsilon) (\epsilon^\dagger)^{-1}. \quad (4.4.114)$$

Em termos das componentes:

$$\epsilon_{\alpha\alpha'}^{-1} - (\epsilon_{\alpha\alpha'}^{-1})^* = \epsilon_{\alpha\lambda}^{-1} (\epsilon_{\lambda'\lambda}^* - \epsilon_{\lambda\lambda'}) (\epsilon_{\alpha'\lambda'}^{-1})^*. \quad (4.4.115)$$

De (4.4.92), temos que a operação acima com o tensor dielétrico é:

$$\epsilon_{\lambda'\lambda}^*(\theta) - \epsilon_{\lambda\lambda'}(\theta) = 2\pi \sum_k \int dJ k \frac{\partial f}{\partial J} \left( \frac{1}{k\omega - \theta} - \frac{1}{k\omega - \theta} \right) \phi_\lambda(k, J) \phi_{\lambda'}^*(k, J). \quad (4.4.116)$$

E usando a fórmula de Plemelj:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x - a \pm i0^+} = \mathcal{P} \left( \frac{1}{x - a} \right) \mp i\pi \delta(x - a), \quad (4.4.117)$$

temos que:

$$\frac{1}{k\omega - \theta} - \frac{1}{k\omega - \theta} = -2i\pi \delta(k\omega - \theta). \quad (4.4.118)$$

Logo,

$$\epsilon_{\lambda'\lambda}^*(\theta) - \epsilon_{\lambda\lambda'}(\theta) = -i(2\pi)^2 \sum_{k'} \int dJ' \left( k' \frac{\partial f}{\partial J'} \right) \delta(k'\omega' - \theta) \phi_\lambda(k', J') \phi_{\lambda'}^*(k', J'). \quad (4.4.119)$$

Substituindo (4.4.119) em (4.4.113), obtemos:

$$\operatorname{Im} \left( \frac{1}{D_{k,k}(J, J, k\omega)} \right) = -\pi(2\pi) \sum_{k'} \int dJ' \frac{1}{|D_{k,k'}(J, J', k\omega)|^2} \delta(k'\omega' - k\omega) \left( k' \frac{\partial f}{\partial J'} \right). \quad (4.4.120)$$

Substituindo (4.4.120) em (4.4.110):

$$\left\langle \delta f \frac{\partial \delta \phi}{\partial \varphi} \right\rangle_{II} = -\pi (2\pi) m \sum_{k,k'} \int dJ' k \frac{1}{|D_{k,k'}(J, J', k\omega)|^2} \delta(k'\omega' - k\omega) \left( k' \frac{\partial f}{\partial J'} \right) f(J). \quad (4.4.121)$$

Reagrupando (4.4.57) e somando os termos (4.4.109) e (4.4.121), obtemos a equação cinética:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{2\pi^2 m}{N} \frac{\partial}{\partial J} \sum_{k,k'} \int dJ' k \frac{1}{|D_{k,k'}(J, J', k\omega)|^2} \delta(k\omega - k'\omega') \\ &\times \left( k \frac{\partial}{\partial J} - k' \frac{\partial}{\partial J'} \right) f(J, t) f(J', t). \end{aligned} \quad (4.4.122)$$

Esta é a equação de Balescu-Lenard com efeitos coletivos para um sistema unidimensional e não homogêneo [21], nas variáveis ângulo-ação.

## 4.5 Equação cinética para um estado não homogêneo do sistema auto-gravitante unidimensional

Agora vamos utilizar a abordagem descrita acima para obter uma equação cinética do tipo Balescu-Lenard para o sistema auto-gravitante unidimensional em um estado não homogêneo e hamiltoniana dada na equação 4.1.21. Como determinar as variáveis ângulo-ação em forma fechada não é sempre possível, pois requer poder realizar integrais de forma analítica mesmo em uma única dimensão, vamos nos restringir aqui a um estado de *waterbag* na parte espacial, definido pela densidade espacial:

$$\rho(x) = \frac{1}{2x_0} \Theta(x_0 - |x|), \quad (4.5.123)$$

ou seja, as partículas estão uniformemente distribuídas entre  $-x_0$  e  $x_0$ , com massa  $m = 1$  cada e  $\Theta$  é a função de Heaviside:

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (4.5.124)$$

O potencial de campo médio definido na equação (3.4.81), é dado no presente caso por:

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x - x'| \rho(x') dx' \\ &= \int_{-x_0}^{x_0} |x - x'| \frac{1}{2x_0} dx'. \end{aligned} \quad (4.5.125)$$

- Se  $x \leq -x_0$ :

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{-x_0}^{x_0} (x' - x) \frac{1}{2x_0} dx', \\ &= \frac{1}{2x_0} \left( \frac{x'^2}{2} - xx' \right) \Big|_{-x_0}^{x_0}, \\ &= \frac{1}{2x_0} \left( \frac{x_0^2}{2} - xx_0 - \frac{x_0^2}{2} - xx_0 \right), \\ &= -x. \end{aligned} \quad (4.5.126)$$

- Se  $x \geq x_0$ :

$$\begin{aligned}
v(x) &= \int_{-x_0}^{x_0} (x - x') \frac{1}{2x_0} dx', \\
&= \frac{1}{2x_0} \left( xx' - \frac{x'^2}{2} \right) \Big|_{-x_0}^{x_0}, \\
&= \frac{1}{2x_0} \left( xx_0 - \frac{x_0^2}{2} + xx_0 + \frac{x_0^2}{2} \right), \\
&= x.
\end{aligned} \tag{4.5.127}$$

- Se  $|x| < x_0$ :

$$\begin{aligned}
v(x) &= \frac{1}{2x_0} \left( \int_{-x_0}^x (x - x') dx' + \int_x^{x_0} (x' - x) dx' \right), \\
&= \frac{1}{2x_0} (x^2 + x_0^2).
\end{aligned} \tag{4.5.128}$$

A hamiltoniana que descreve o movimento de uma partícula sob o efeito do campo médio é dado por:

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2} + v(x). \tag{4.5.129}$$

A solução da equação de Hamilton-Jacobi para cada uma das regiões é (vide (B)):

- $x < -x_0$ :

A equação de Hamilton-Jacobi é:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \frac{1}{2} - x + \frac{\partial S}{\partial t} &= 0, \\
\left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \frac{1}{2} - x - \frac{\partial S}{\partial t} &= H = E,
\end{aligned} \tag{4.5.130}$$

onde  $E$  é a energia total. Usando o método de separação de variáveis, obtemos:

$$S(x, t) = W(x) - Et, \tag{4.5.131}$$

onde  $S$  é a função geradora, desta maneira podemos reescrever (4.5.130), tal que:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \frac{1}{2} - x &= E, \\
\left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 &= 2(E + x), \\
\frac{\partial W}{\partial x} &= \pm \sqrt{2(E + x)}, \\
W(x) &= \frac{2}{3(2)} [2(E + x)]^{3/2}, \\
S(x, E, t) &= \frac{1}{3} [2(E + x)]^{3/2} - Et.
\end{aligned} \tag{4.5.132}$$

Considerando que o momento associado a partícula  $i$  é definido por [60]:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad (4.5.133)$$

para esta região, temos que:

$$p = \frac{\partial S}{\partial x} = \sqrt{2(E+x)}. \quad (4.5.134)$$

O novo momento é:

$$P = E, \quad (4.5.135)$$

e a nova coordenada da posição é

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial E} = \sqrt{2(E+x)} - t. \quad (4.5.136)$$

Portanto a antiga coordenada da posição pode ser reescrita em função das novas variáveis, como segue:

$$x = \frac{(Q+t)^2}{2} - E. \quad (4.5.137)$$

- $x > x_0$ :

A equação de Hamilton-Jacobi é:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{2} + x + \frac{\partial S}{\partial t} &= 0 \\ \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{2} + x - \frac{\partial S}{\partial t} &= H = E, \end{aligned} \quad (4.5.138)$$

onde  $E$  é a energia total. Usando o método de separação de variáveis, obtemos:

$$S(x, E, t) = W(x) - Et, \quad (4.5.139)$$

desta maneira podemos reescrever (4.5.138), tal que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{2} + x &= E \\ \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 &= 2(E-x) \\ \frac{\partial W}{\partial x} &= \sqrt{2(E-x)} \\ W(x) &= \frac{1}{3}[2m(E-x)]^{3/2}. \end{aligned} \quad (4.5.140)$$

Para esta região, temos que:

$$p = \frac{\partial S}{\partial x} = \sqrt{2(E-x)}. \quad (4.5.141)$$

A nova coordenada da posição é:

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial E} = \sqrt{2(E-x)} - t. \quad (4.5.142)$$

Portanto a antiga coordenada da posição pode ser reescrita em função das novas variáveis, como segue:

$$x = E - \frac{(Q+t)^2}{2}. \quad (4.5.143)$$

- $|x| < x_0$ :

A equação de Hamilton-Jacobi é:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{2} + \frac{(x^2 + x_0^2)}{2x_0} + \frac{\partial S}{\partial t} &= 0 \\ \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{2} + \frac{(x^2 + x_0^2)}{2x_0} &= -\frac{\partial S}{\partial t} = H = E. \end{aligned} \quad (4.5.144)$$

Usando o método de separação de variáveis, obtemos:

$$S(x, E, t) = W(x, E) - Et, \quad (4.5.145)$$

reescrevendo (4.5.144), obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{2} + \frac{(x^2 + x_0^2)}{2x_0} &= E \\ \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 &= 2\left(E - \frac{(x^2 + x_0^2)}{2x_0}\right) \\ \frac{\partial W}{\partial x} &= \sqrt{2\left(E - \frac{(x^2 + x_0^2)}{2x_0}\right)} \\ W(x, E) &= \sqrt{x_0}\left(E - \frac{x_0}{2}\right) \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2x_0\left(E - \frac{(x^2 + x_0^2)}{2x_0}\right)}}\right) \\ &\quad + \frac{x}{\sqrt{2}} \sqrt{E - \frac{(x^2 + x_0^2)}{2x_0}} \end{aligned} \quad (4.5.146)$$

$$p = \sqrt{2\left(E - \frac{(x^2 + x_0^2)}{2x_0}\right)}. \quad (4.5.147)$$

A nova coordenada da posição é:

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial E} = \sqrt{x_0} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2x_0\left(E - \frac{(x^2 + x_0^2)}{2x_0}\right)}}\right) - t. \quad (4.5.148)$$

Portanto a antiga coordenada da posição pode ser reescrita em função das novas variáveis, como segue:

$$x = \pm \sqrt{x_0(2E - x_0)} \sin\left(\frac{Q + t}{\sqrt{x_0}}\right). \quad (4.5.149)$$

O potencial de campo médio para cada região é mostrado na figura 4.5.3, para o caso  $x_0 = 10$ . Nota-se que há dois intervalos possíveis para a energia,  $E < x_0$  e  $E \geq x_0$ . Quando  $E < x_0$  o potencial é  $(x^2 + x_0^2)/2x_0$  e  $|x| < \sqrt{2x_0(E - x_0/2)}$ . Quando  $E \geq x_0$ :

$$v(x) = \begin{cases} -x, & -E < x < -x_0 \\ \frac{(x^2 + x_0^2)}{2x_0}, & |x| < x_0 \\ x, & x_0 < x < E \end{cases} \quad (4.5.150)$$

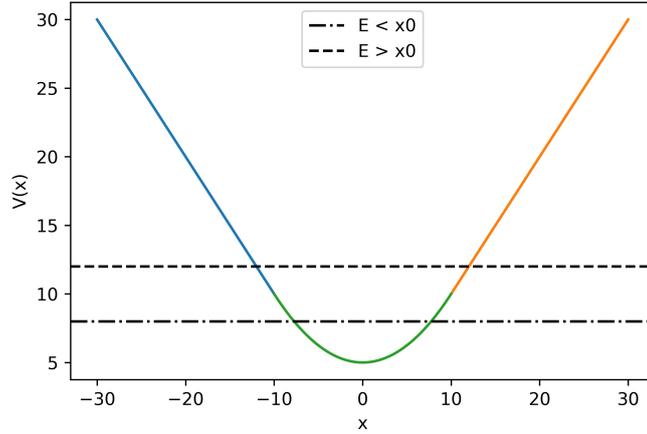


Figura 4.5.3: Potencial de campo médio em cada região para  $x_0 = 10$

Para  $E < x_0$ ,  $-x_l < x < x_l$  com:

$$x_l = \sqrt{2x_0\left(E - \frac{x_0}{2}\right)}. \quad (4.5.151)$$

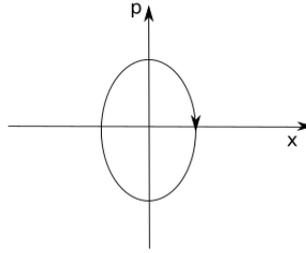


Figura 4.5.4: Região de integração para obter  $J$  quando  $E \leq x_0$

A energia total, nesta região, é:

$$E = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2 + x_0^2}{2x_0}, \quad (4.5.152)$$

esta expressão pode ser interpretada como uma elipse no espaço de fase centrada em  $(x_0, p_0) = (0, 0)$ , com a seguinte expressão:

$$\frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2x_0} = E - \frac{x_0}{2}, \quad (4.5.153)$$

com eixo maior e menor, respectivamente:

$$a = \sqrt{2\left(E - \frac{x_0}{2}\right)} \quad \text{e} \quad b = \sqrt{2x_0\left(E - \frac{x_0}{2}\right)}. \quad (4.5.154)$$

A variável de ação por sua vez é dada por:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi} \oint p \, dq = \frac{1}{2\pi} \pi ab \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4x_0\left(E - \frac{x_0}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{x_0\left(E - \frac{x_0}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (4.5.155)$$

A hamiltoniana em função da variável ação pode então ser escrita como:

$$H = E = \frac{J}{\sqrt{x_0}} + \frac{x_0}{2}, \quad (4.5.156)$$

de modo que a frequência angular é dada por:

$$\omega = \frac{\partial H}{\partial J} = \frac{1}{\sqrt{x_0}}. \quad (4.5.157)$$

A função geradora  $W(x, E)$  dada pela equação (4.5.146) assume a forma:

$$W(x, E) = \sqrt{x_0} \left( E - \frac{x_0}{2} \right) \arctan \left( \frac{x}{\sqrt{2x_0} \sqrt{E - \frac{(x^2 + x_0^2)}{2x_0}}} \right) + \frac{x}{\sqrt{2}} \sqrt{E - \frac{(x^2 + x_0^2)}{2x_0}}. \quad (4.5.158)$$

A variável ângulo é obtida substituindo a energia  $E$  em função de  $J$  como dada pela equação (4.5.156) com a função geradora na equação (4.5.158):

$$\varphi = \frac{\partial W(x, J)}{\partial J} = \arctan \left( \frac{x}{\sqrt{2x_0} \sqrt{\frac{J}{\sqrt{x_0}} - \frac{x^2}{2x_0}}} \right). \quad (4.5.159)$$

A posição nas coordenadas ângulo-ação é:

$$x = \left( \sqrt{\frac{2x_0 J}{\sqrt{x_0} (1 + \tan^2 \varphi)}} \right) \tan \varphi, \quad (4.5.160)$$

o momento em variáveis ângulo-ação usando Eq. (4.5.156) e (4.5.160) em Eq. (4.5.152) é:

$$p = \sqrt{2 \left( \frac{J}{\sqrt{x_0}} - \frac{J \tan^2 \varphi}{\sqrt{x_0} (1 + \tan^2 \varphi)} \right)}, \quad (4.5.161)$$

e a variável ação como função das variáveis  $(x, p)$  é:

$$J = \frac{\sqrt{x_0}}{2} \left( p^2 + \frac{x^2}{x_0} \right). \quad (4.5.162)$$

Note na Eq. (4.5.157) que a frequência não depende da variável ação e que a Eq. (4.4.122) depende da função  $D_{k,k'}(J, J', k\omega)$ , tal que:

$$\begin{aligned} D_{k,k'}(J, J', k\omega)^{-1} &= \lim_{\theta \rightarrow k\omega} D_{k,k'}(J, J', \theta)^{-1} \\ &= \sum_{\alpha\alpha'} \tilde{v}_\alpha(k, J) \tilde{v}_{\alpha'}^*(k', J') \lim_{\theta \rightarrow k\omega} \epsilon_{\alpha\alpha'}^{-1}(\theta), \end{aligned} \quad (4.5.163)$$

com  $\epsilon_{\alpha\alpha'}(\theta)$  dado por Eq 4.4.92. Devido  $\omega$  ser independente de  $J$  o termo  $1/(k\omega - \theta)$  sai da integral Eq (4.4.92) e no limite  $\theta \rightarrow k\omega$ , temos:

$$\lim_{\theta \rightarrow k\omega} \epsilon_{\alpha\alpha'}(\theta) \rightarrow \infty, \quad (4.5.164)$$

que por sua vez implica:

$$D_{k,k'}(J, J', k\omega)^{-1} \rightarrow 0. \quad (4.5.165)$$

Ou seja, quando  $E < x_0$ , a frequência independe de  $J$  e da Eq. (4.4.122) concluímos que  $\partial f/\partial t = 0$ .

Para  $E \geq x_0$ , a região de integração, no espaço de fase está representada na figura (4.5.5).

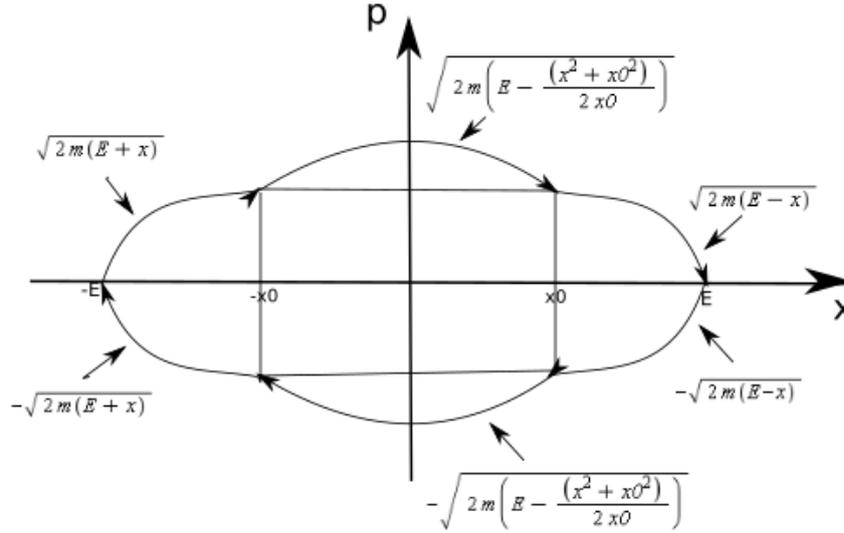


Figura 4.5.5: Região de integração para obter  $J$  quando  $E > x_0$

Com  $x_l = \pm E$ , ou seja,  $-E < x < E$  e a variável ação é:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi} \oint p dq \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-E}^{-x_0} \sqrt{2(E+x)} dx + \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{2\left(E - \frac{x^2 + x_0^2}{2x_0}\right)} dx + \int_{x_0}^E \sqrt{2(E-x)} dx \right. \\ &\quad \left. - \int_E^{x_0} \sqrt{2(E-x)} dx - \int_{x_0}^{-x_0} \sqrt{2\left(E - \frac{x^2 + x_0^2}{2x_0}\right)} dx - \int_{-x_0}^{-E} \sqrt{2(E+x)} dx \right) \\ &= \frac{(4E - x_0)}{3\pi} \sqrt{2(E - x_0)} + \frac{\sqrt{x_0}}{\pi} (2E - x_0) \arctan \left( \frac{\sqrt{x_0}}{\sqrt{2(E - x_0)}} \right). \quad (4.5.166) \end{aligned}$$

Não conseguimos obter, de maneira analítica, a energia  $E$  em função da variável ação através da equação (4.5.166). Com o intuito de obter uma aproximação para essa expressão, consideramos os valores  $x_0 = 5$  e  $E > x_0$ , e mostramos o gráfico de  $J$  em função de  $E$  na figura 4.5.6, tal que o primeiro termo da equação 4.5.166 é representado por  $T_1$ , segundo termo de 4.5.166 por  $T_2$  e a equação 4.5.166 é representada por  $T_{total}$ .

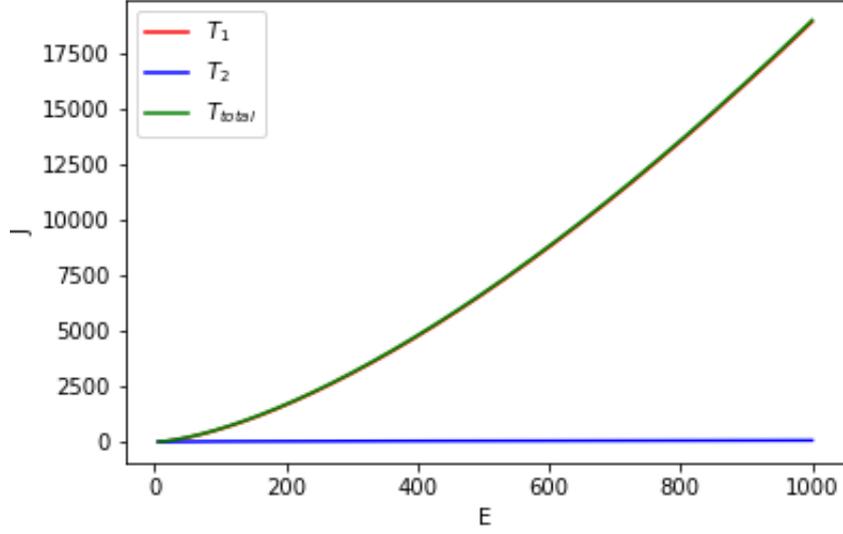


Figura 4.5.6: Na figura a curva vermelha representa o primeiro termo do lado direito de (4.5.166) e é aproximadamente coincidente com a curva verde. A curva azul representa o segundo termo do lado direito de (4.5.166) e a curva verde indica a soma dos dois termos, considerando  $x_0 = 5.0$  e a energia variando de 6 a 1000.

Podemos notar que o segundo termo de (4.5.166) é aproximadamente igual a zero, logo vamos considerar que:

$$J \approx \frac{(4E - x_0)}{3\pi} \sqrt{2(E - x_0)}. \quad (4.5.167)$$

A energia total da partícula é então:

$$E = \frac{1}{16} \frac{\left( (12J\sqrt{2}\pi + 4\sqrt{18J^2\pi^2 + 4x_0^3})^{2/3} + 4x_0 \right)^2}{\left( 12J\sqrt{2}\pi + 4\sqrt{18J^2\pi^2 + 4x_0^3} \right)^{2/3}}, \quad (4.5.168)$$

a frequência angular é:

$$\omega = \frac{\partial E}{\partial J} = \frac{2^{1/3}\pi \left( 2^{4/3} \left( 3J\pi + \sqrt{9J^2\pi^2 + 2x_0^3} \right)^{4/3} - 4x_0^2 \right)}{8\sqrt{9J^2\pi^2 + 2x_0^3} \left( 3J\pi + \sqrt{9J^2\pi^2 + 2x_0^3} \right)^{2/3}} \quad (4.5.169)$$

e a função geradora

$$W(x, E) = \begin{cases} \frac{1}{3} (2(E+x))^{3/2}, & -E < x < -x_0 \\ \sqrt{x_0} \left( E - \frac{x_0}{2} \right) \arctan \left( \frac{x}{\sqrt{2x_0} \sqrt{E - \frac{(x^2+x_0^2)}{2x_0}}} \right) + \frac{x}{\sqrt{2}} \sqrt{E - \frac{(x^2+x_0^2)}{2x_0}}, & -x_0 < x < x_0 \\ \frac{1}{3} (2(E-x))^{3/2}, & x_0 < x < E, \end{cases} \quad (4.5.170)$$

No entanto não conseguimos obter uma expressão analítica em forma fechada para

$x(J, \varphi)$ . Obtemos na região  $-x_0 < x < x_0$  a variável ângulo:

$$\begin{aligned} \varphi = & a(J, x_0) \arctan \left( \frac{x}{\sqrt{b(J, x_0) - x^2 - x_0^2}} \right) \left( \sqrt{b(J, x_0) - x^2 - x_0^2} - \frac{x}{4} \right) \\ & \times \frac{1}{\sqrt{b(J, x_0) - x^2 - x_0^2}}, \end{aligned} \tag{4.5.171}$$

com  $b(J, x_0)$  e  $a(J, x_0)$  funções de  $J$  e  $x_0$ , mas não conseguimos isolar o  $x$  na expressão acima. Portanto para o sistema gravitacional unidimensional não homogêneo conseguimos mostrar que o termo de ordem  $1/N$ , na equação dinâmica se anula para  $E < x_0$ , indicando que o tempo de relaxação para o equilíbrio neste caso deve ser  $N^\delta$ , com o expoente  $\delta \geq 2$ , no entanto não foi possível obter o termo colisional para  $E \geq x_0$ .

# Capítulo 5

## Ergodicidade do sistema auto-gravitante em uma dimensão

A teoria ergódica auxilia o estudo de diversos campos de pesquisa, como a mecânica celeste (estabilidade do sistema solar), química (estabilidade de moléculas excitadas isoladas) e na mecânica estatística. Ela surge com George D. Birkhoff e John von Neumann em 1931 [62], quando ambos publicaram artigos separados e praticamente simultâneos sobre o que veio a ser conhecido como teorema ergódico. Nesses artigos as técnicas eram diferentes, mas chegaram a resultados semelhantes. Eles conseguiram solucionar um problema enfrentado pelos criadores da mecânica estatística J. C. Maxwell e L. Boltzmann desde 1870, justificar a hipótese de que as médias de observáveis sobre intervalos grandes de tempo são iguais a suas médias de ensemble no espaço de fase. Neste capítulo apresentaremos o conceito de ergodicidade, alguns métodos para verificar a ergodicidade, como o método direto [63], funcional dinâmico [64] e estatística dos tempos de ocupação [65], e aplicaremos o método direto no sistema gravitacional unidimensional, nos estados homogêneos e não homogêneos.

Considerando  $x$  um ponto no espaço de fase  $M$ , representando o sistema no tempo  $t = 0$ , tal que  $x \equiv (q_1, p_1, \dots, q_N, p_N)$ , onde  $q_i$  e  $p_i$  são as posições e o momento da  $i$ -ésima partícula, respectivamente, e  $N$  é o número de partículas. Definimos por  $P_t(x)$  o estado do sistema no tempo  $t$ , com  $P_0(x) = x$  ao tempo inicial  $t = 0$ . Além disso  $f$  é uma função integrável, que descreve a distribuição de partículas no espaço de fase  $M$ . Na abordagem de Birkhoff e von Neumann um sistema é dito ergódico caso a seguinte relação seja satisfeita:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(P_t(x)) dt = \int_M f(\nu) d\mu(\nu), \quad (5.0.1)$$

onde  $\nu$  representa o estado do sistema no espaço de fase e  $d\mu(\nu)$  é uma medida invariante no espaço de fase. Ou seja, o sistema é ergódico quando a média temporal é igual a média do ensemble ([66],[62]). Para determinar se o sistema é ou não ergódico utilizaremos o método direto, que passamos a descrever na subseção a seguir.

### 5.1 Teste de ergodicidade - Método Direto

Neste teste de ergodicidade analisaremos o comportamento do desvio padrão para as coordenadas e para o momento de um sistema de  $N$  partículas. Este método será descrito com mais detalhes abaixo e em [63, 31]. A média temporal do momento da  $k$ -ésima

partícula é [31]:

$$\bar{p}_k(t) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M p_k(j\Delta t) \quad (5.1.2)$$

e a média temporal da posição:

$$\bar{x}_k(t) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M x_k(j\Delta t), \quad (5.1.3)$$

com  $\Delta t$  um intervalo de tempo constante, que tomamos como sendo o passo de integração,  $M = t/\Delta t$ . Definimos também o desvio padrão para cada uma das grandezas como:

$$\sigma_p(t) \equiv \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{p}_k^2(t) - \langle \bar{p}(t) \rangle^2} \quad (5.1.4)$$

e

$$\sigma_x(t) \equiv \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{x}_k^2(t) - \langle \bar{x}(t) \rangle^2}, \quad (5.1.5)$$

onde  $\langle \dots \rangle$ , denota a média de ensemble, isto é, a média sobre as  $N$  partículas. O sistema é ergódico quando  $\sigma_x(t)$  e  $\sigma_p(t)$  tendem a zero quando  $t \rightarrow t_e$ , com  $t_e$  o tempo de ergodicidade, ou seja, um sistema é ergódico quando  $\bar{x}_k$  e  $\bar{p}_k$  é a mesma para todas as partículas. Em [31] os autores apresentam um estudo sobre os desvios padrões do modelo HMF (homogêneo e inhomogêneo) e para o sistema gravitacional bidimensional mostrando que  $t_e \approx t_r$ , com  $t_r$  o tempo de relaxação para o equilíbrio termodinâmico.

Podemos classificar o sistema com forte quebra de ergodicidade, quando alguma região no espaço de fase é não acessível pela trajetória do sistema ou, por outro lado, o sistema pode ter comportamento fracamente não ergódico correspondendo a situação onde todos estados podem ser alcançados, mas o tempo gasto em regiões diferentes do espaço de fase, de mesma medida, é diferente, então o sistema é não ergódico.

Na literatura encontramos outros métodos , como:

- **Estatística de tempos de ocupação**-Este teste analisa a função densidade de probabilidade da média temporal de um observável, este método foi desenvolvido em [65] e também é apresentado em [31].
- **Método do funcional dinâmico**- O método do funcional dinâmico é usado em processos estocásticos estacionários [67, 31], como o processo clássico Ornstein-Uhlenbeck e o processo Gaussiano apresentado em [68].

Além destes métodos utilizamos outro método para determinar a ergodicidade dos sistemas auto-gravitantes unidimensionais, ele será descrito na seção seguinte.

## 5.2 Propriedades ergódicas do sistema auto-gravitante unidimensional

### 5.2.1 Estado não homogêneo

Agora iremos apresentar nossos resultados para as propriedades ergódicas do sistema auto-gravitante em uma dimensão, da hamiltoniana dada pela equação 4.1.21, e relatado em [1].

Para um estado não homogêneo não há razão de utilizar condições de contorno periódicas, de forma que a interação entre duas partículas é dada pelo potencial:

$$V(x_i - x_j) = |x_i - x_j|. \quad (5.2.6)$$

As simulações de dinâmica molecular foram realizadas utilizando uma adaptação do algoritmo de *event driven* descrito em [69], neste algoritmo as colisões ocorrem pela influência da força de *hard-core*, ou seja, no momento da colisão consideramos a troca dos rótulos das partículas. Como condição inicial vamos considerar as  $N$  partículas com posição e momento dados por uma realização de uma distribuição de *waterbag* definida por

$$f(x, p, 0) = \begin{cases} \frac{1}{4x_0p_0}, & \text{se } |x| < x_0 \text{ e } |p| < p_0, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (5.2.7)$$

para  $x_0$  e  $p_0$  constantes. A evolução temporal do sistema entre duas colisões é então dada por:

$$x_i(t) = x_i(0) + p_i(0)t + \frac{F_i t^2}{2}. \quad (5.2.8)$$

A colisão ocorre quando  $x_i(t) - x_{i+1}(t) = 0$ , para o tempo de colisão  $t = t_{col}$ , dado por:

$$t_{col} = \frac{-b + d}{2a}, \quad (5.2.9)$$

com:

$$a = \frac{F_{i+1} - F_i}{2}, \quad (5.2.10)$$

$$b = p_{i+1}(0) - p_i(0), \quad (5.2.11)$$

$$c = x_{i+1}(0) - x_i(0), \quad (5.2.12)$$

$$d = \sqrt{b^2 - 4ac}. \quad (5.2.13)$$

Após a colisão as posições e momentos são, respectivamente:

$$x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + p_i(t)\Delta t + \frac{F_i \Delta t^2}{2}, \quad (5.2.14)$$

$$p_i(t + \Delta t) = p_i(t) + F_i \Delta t. \quad (5.2.15)$$

Temos assim  $N - 1$  tempos de colisão (eventualmente infinito se as partículas nunca colidirem no futuro), que são armazenados na memória do computador. Aquela com o menor tempo de colisão é implementada, e todas as partículas são avançadas até esse tempo. O tempo de colisão entre as partículas envolvidas na colisão e suas vizinhas é atualizado correspondentemente. O sistema é assim evoluído ao longo do tempo colisão a colisão. A força  $F_i$  pode ser reescrita como:

$$F_i = \frac{N_{>}(x_i) - N_{<}(x_i)}{N} = \frac{(N - i + 1) - i}{N} = \frac{N - 2i + 1}{N}, \quad (5.2.16)$$

onde  $N_{>}(x_i)$  e  $N_{<}(x_i)$  é o número de partículas com coordenadas maior do que  $x_i$  e menor do que  $x_i$ , respectivamente. A força  $F_i$  é constante ao longo do tempo.

O desvio padrão tempo dependente, usando o método direto, será:

$$\sigma_p(t) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{p}_k^2(t)}, \quad (5.2.17)$$

$$\sigma_x(t) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{x}_k^2(t)}, \quad (5.2.18)$$

onde usamos  $\langle x \rangle = 0$  e  $\langle p \rangle = 0$ .

Para medir a distância ao equilíbrio com uma distribuição gaussiana, vamos usar o momento reduzido:

$$\mu_k = \frac{\langle p^k \rangle}{\sigma_p^k}, \quad (5.2.19)$$

onde  $\sigma_p$  é o desvio padrão de  $p$ . Para  $k = 4$  o momento reduzido é a curtose e no caso de uma distribuição gaussiana  $\mu_4 = 3$  e  $\mu_6 = 15$ . Portanto, quanto mais próxima  $\mu_4$  e  $\mu_6$  está destes valores, mais próxima a distribuição de partículas está da gaussiana.

A evolução de  $\mu_4$  e  $\mu_6$  ao longo do tempo para o sistema com a distribuição inicial tipo waterbag com  $x_0 = 10.0$ ,  $p_0 = 0.5$  e  $N = 100$ , está apresentada na Fig. 5.2.1, com tempo de relaxação  $t_r \approx 10^6$ . Usamos um valor de  $N$  pequeno para podermos observar a evolução até o equilíbrio, o que não conseguimos em nosso algoritmo para  $N$  grande. Devido à alta densidade da distribuição espacial, uma alta precisão numérica é requerida, vamos usar uma precisão quádrupla para evitar perder qualquer colisão devido aos erros de arredondamento. Além da evolução de  $\mu_4$  e  $\mu_6$ , são apresentados na Fig. 5.2.1 (b) a evolução dos desvios para  $p$  e  $x$ . Podemos notar na Fig. 5.2.1 que quando  $t \rightarrow t_r$ ,  $\mu_4$  e  $\mu_6$  tende aos valores de equilíbrio associados à distribuição gaussiana e  $\sigma_x$  e  $\sigma_p$  tende a zero, demonstrando que o sistema se torna ergódico para tempos da ordem do tempo de relaxamento para o equilíbrio.

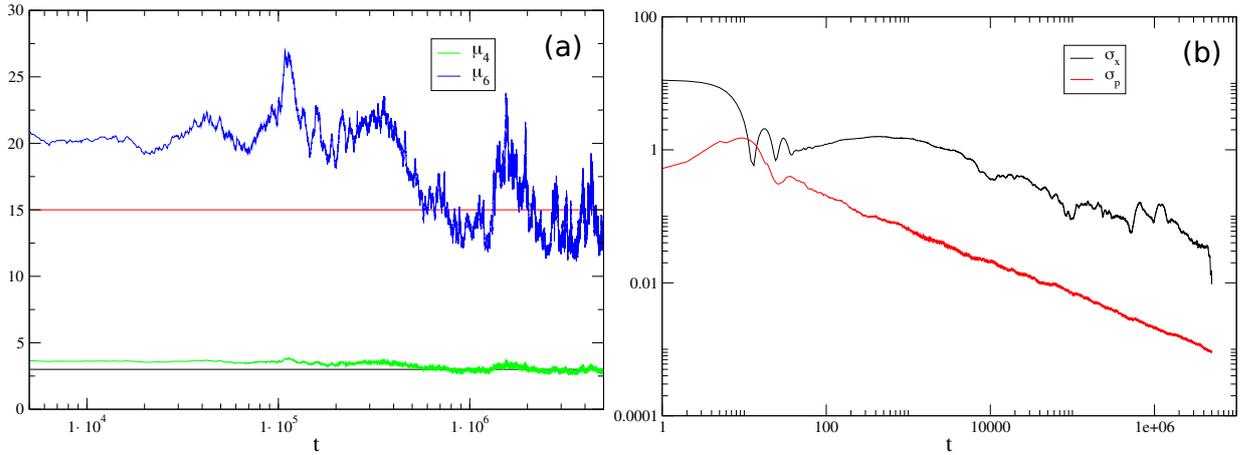


Figura 5.2.1: (a): Evolução dos momentos reduzidos  $\mu_4$  e  $\mu_6$  ao longo do tempo. (b): Evolução temporal dos desvios  $\sigma_x$  e  $\sigma_p$ , para  $N = 100$ ,  $x_0 = 10.0$ ,  $p_0 = 0.5$ .

Outra forma de obter a ergodicidade do sistema é considerar as distribuições  $\phi(p, t)$  e  $\rho(x, t)$ , que são a densidade de probabilidade para as variáveis  $x$  e  $p$  sobre as  $N$  partículas no tempo fixo  $t$  e as densidades de probabilidade para os valores de  $x$  e  $p$  de uma partícula específica, que ela assume ao longo de sua história entre o tempo inicial e  $t$ , denotamos por  $h(x, t)$  e  $g(p, t)$ . A ergodicidade implica:

$$\phi(p, t) = g(p, t) \quad (5.2.20)$$

$$\rho(x, t) = h(x, t) \quad (5.2.21)$$

$$(5.2.22)$$

e  $t \approx t_e$ , com  $t_e$  o tempo de ergodicidade. Os resultados da evolução destas densidades de probabilidade ao longo do tempo são apresentados nas figura 5.2.2 e 5.2.3 para alguns valores de tempo e é evidente que as equações 5.2.21 e 5.2.22 são satisfeitas quando o tempo tende para o tempo de ergodicidade e de relaxação para o equilíbrio.

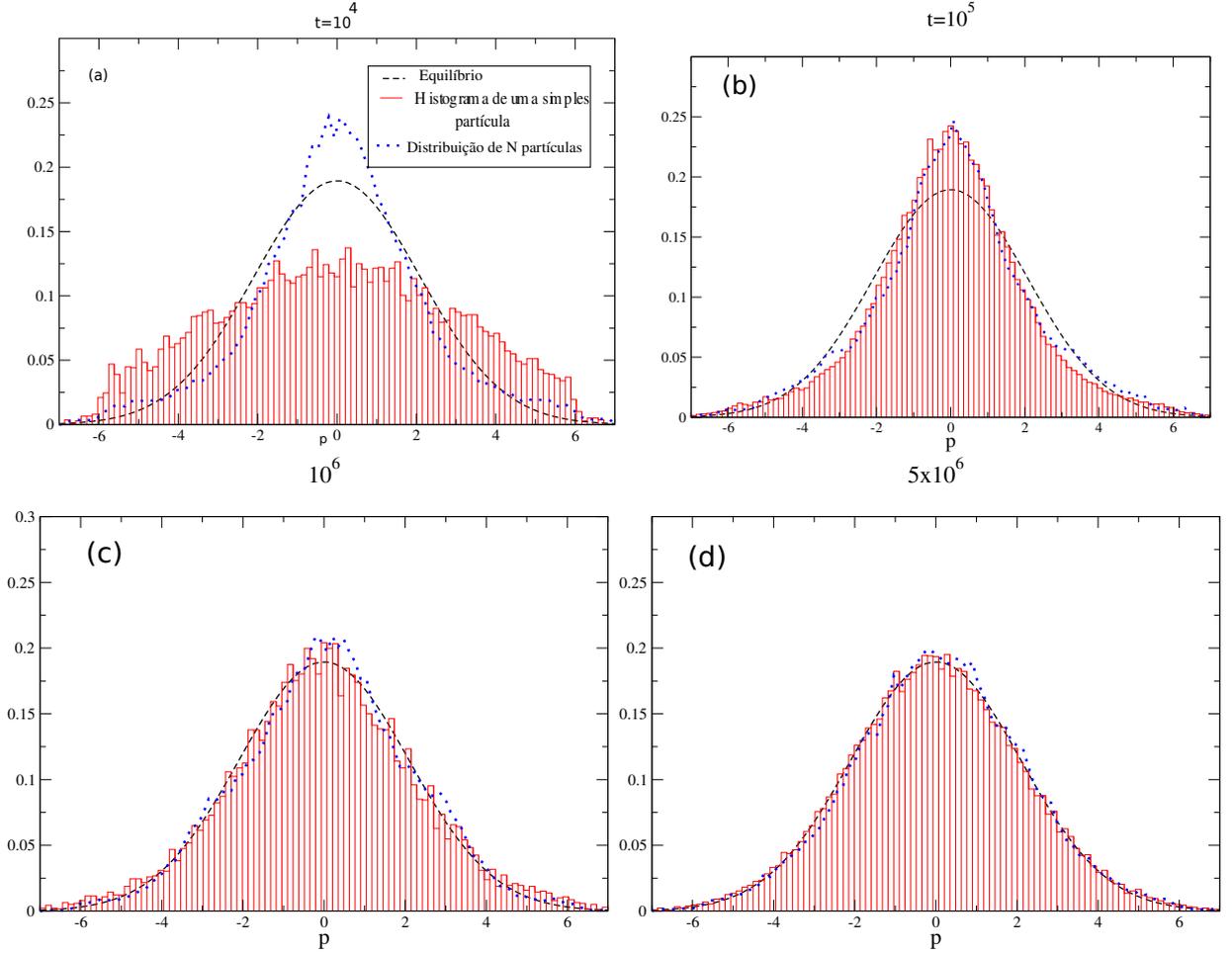


Figura 5.2.2: A distribuição  $g(p, t)$  (histograma),  $\phi(p, t)$  (linha pontilhada) e a distribuição de equilíbrio (linha tracejada) para a mesma simulação da Fig. 5.2.1 para  $\beta=0.225$ , para alguns valores de  $t$ .

Nas Figs. 5.2.2 e 5.2.3 a distribuição no equilíbrio foi obtida em [26]:

$$f_{eq}(x, p) = \frac{M}{2\sqrt{\pi}\sigma\Lambda} e^{-p^2/\sigma^2} \operatorname{sech}^2 \frac{x}{\Lambda}, \quad (5.2.23)$$

onde  $\sigma$  e  $\Lambda$  são:

$$\sigma^2 = \frac{4E}{3M}, \quad (5.2.24)$$

$$\Lambda = \frac{4E}{3GM^2}, \quad (5.2.25)$$

com  $E$  a energia total do sistema,  $G$  é a constante gravitacional e  $M = N$  é a massa total do sistema para um sistema com partículas de massa unitária. Assim as densidades de probabilidade no equilíbrio são:

$$\phi_{eq}(p) = Ce^{-bp^2\beta}, \quad (5.2.26)$$

$$\rho_{eq}(x) = A \operatorname{sech}^2 \frac{x}{\Lambda}, \quad (5.2.27)$$

com  $b$ ,  $C$  e  $A$  constantes e  $\beta$  o inverso da temperatura.

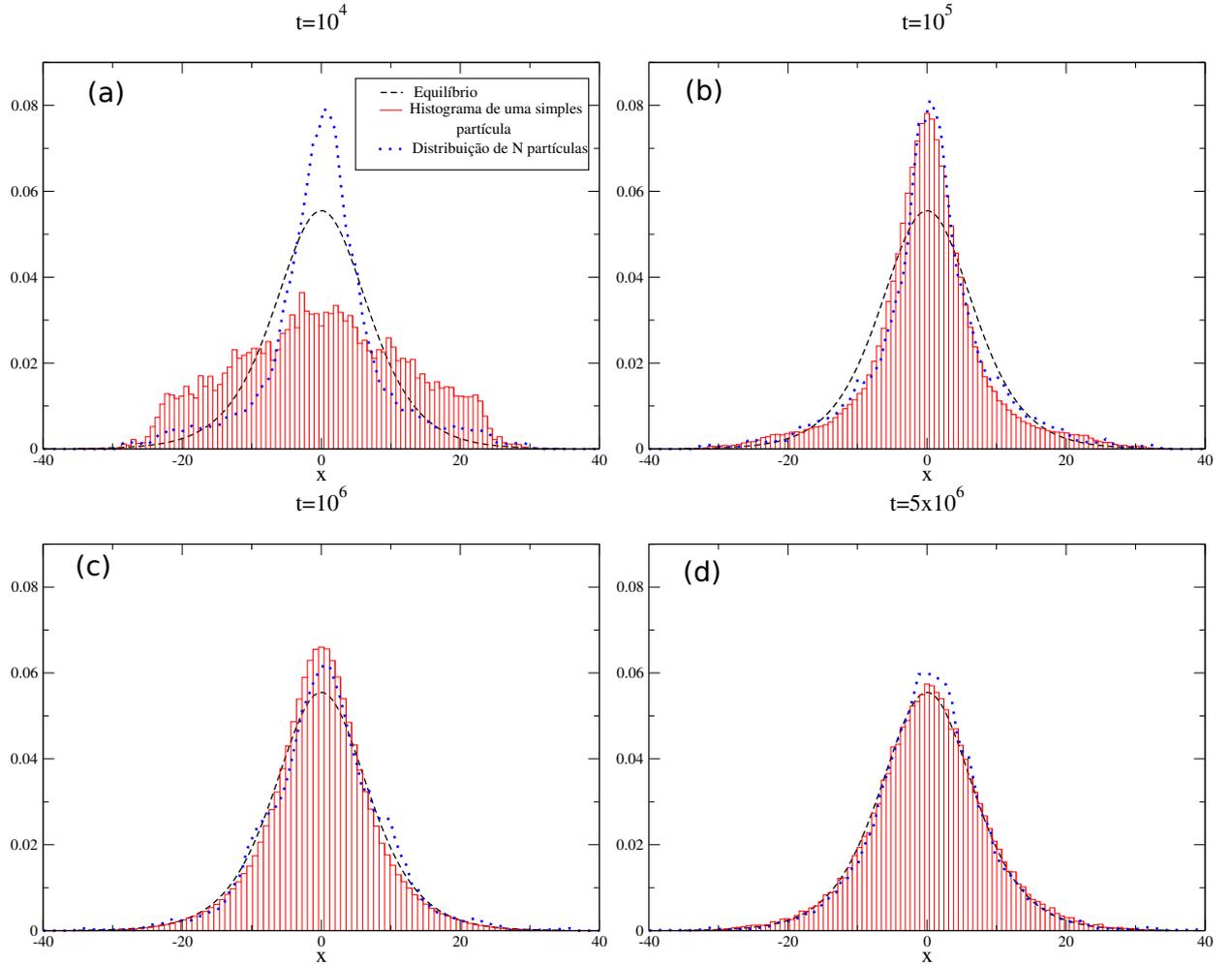


Figura 5.2.3: Mesmo como Fig. 5.2.2, mas para  $h(x, t)$  (histograma) e  $\rho(x, t)$  (linha pontilhada) e a distribuição espacial no equilíbrio (linha tracejada).

## 5.2.2 Estado homogêneo

Já para um estado homogêneo temos que utilizar condições de contorno periódicas, com célula unitária no intervalo  $[-L, L]$  e com acréscimo da componente de Ewald, como explicado na seção 4.2. Assim o potencial entre duas partículas é dado por:

$$V(x_i, x_j) = \left( |x_i - x_j| - \frac{(x_i - x_j)^2}{2L} \right). \quad (5.2.28)$$

A seguir apresentamos os resultados obtidos para uma distribuição inicial de *waterbag*, com  $x_0 = L = 1$  e  $p_0 = 3$ , tal que a colisão entre as partículas não é influenciada pela força de *hard-core*, ou seja, as partículas podem se atravessar. As equações de Hamilton do sistema são então resolvidas numericamente utilizando um integrador simplético de quarta ordem, descrito no apêndice C. A evolução temporal dos momentos reduzidos  $\mu_4$  e  $\mu_6$  até  $t = 10^5$  é mostrada na Fig. 5.2.4.

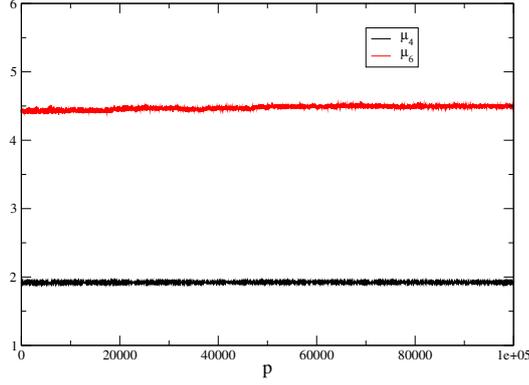


Figura 5.2.4: Momento reduzido  $\mu_4$  e  $\mu_6$  para o estado homogêneo com a condição inicial waterbag com  $x_0 = 1.0$  e  $p_0 = 3.0$ .

Cabe comparar os resultados para as distribuições  $\phi(p, t)$  e  $\rho(x, t)$  em  $t = 10^5$  com as distribuições  $g(p, t)$  e  $h(x, t)$ , mostradas na figura 5.2.5 para o mesmo valor do tempo. Elas são claramente muito distintas, mesmo após um tempo tão longo e tão poucas partículas. A distribuição espacial  $h(x, t)$  é aproximadamente uniforme, já que as partículas podem se entrecruzarem e a força de campo médio é, residualmente, pequena. No entanto a distribuição do momento  $g(p, t)$  não é simétrica, contrário ao caso do sistema inhomogêneo para todos os valores de  $t$ , exceto para um tempo inicial como é observado na figura 5.2.2. Portanto concluímos que o tempo para ergodicidade, se for finito, é muitas ordens de magnitude maior do que o estado não homogêneo.

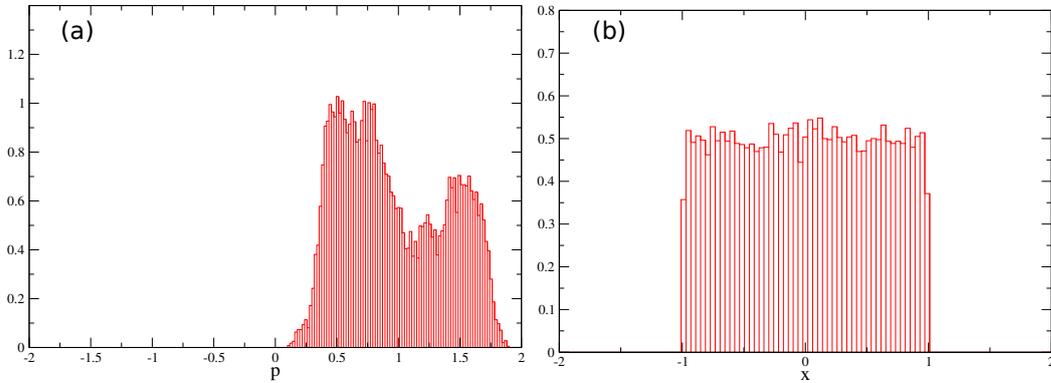


Figura 5.2.5: (a): Função distribuição  $g(p, t)$  para  $t = 10^5$ , a simulação é a mesma que a realizada em Fig. 5.2.4. (b): função distribuição  $h(x, t)$  para  $t = 10^5$ .

Com base na discussão na seção 4.3, com base nos resultados mostrados na figura 4.3.2, percebemos que essa evolução extremamente lenta do momento  $\mu_6$  observada na figura 5.2.4 é um efeito espúrio de utilizar a aproximação com valor finito para  $L$  e que quando  $L$  aumenta essa variação se tornará ainda mais lenta, desaparecendo para  $L \rightarrow \infty$ .

# Capítulo 6

## Conclusão

Neste trabalho estudamos a dinâmica dos sistemas auto-gravitantes unidimensional, além de estudar as equações cinéticas, que descreve a evolução dos sistemas unidimensionais no estado homogêneo. Nossa motivação para estudar os sistemas gravitacionais unidimensionais, se deve aos resultados do artigo [30] em que os autores indicam uma dinâmica lenta dos estados não homogêneos para o equilíbrio. Por este motivo, realizamos em nosso trabalho tanto a análise analítica, através da obtenção das equações cinéticas, quanto a análise numérica, para estados homogêneos e não homogêneos.

Além disso, os trabalhos [52, 13] também nos motivaram. Nestes trabalhos os autores obtêm uma equação cinética para o HMF e mostram através análise analítica e através de simulações numéricas, que o tempo de relaxação para o equilíbrio é proporcional a  $N^2$ . Incentivados por estes resultados, buscamos obter uma equação geral para descrever a evolução dos sistemas unidimensionais homogêneos e com potencial periódico, já que a técnica utilizada consiste em resolver as equações BBGKY expressando os potenciais e as correlações como séries de Fourier. Como vimos ao longo do capítulo 3, os termos colisionais das equações de Landau e Balescu-Lenard se anulam para este sistema, logo consideramos termos de ordem superiores da equação BBGKY e obtivemos através das equações (3.6.167), (3.6.170) e (3.6.171) uma equação que descreve a dinâmica destes sistemas. Aplicamos o potencial e período do HMF nesta equação geral e obtivemos exatamente os resultados de [52] e [13].

No capítulo 4 estudamos os sistemas auto-gravitantes unidimensionais, estes sistemas apresentam dois estados: os estados homogêneos e não homogêneos, cada qual com uma dinâmica. Apresentamos a soma de Ewald, que consiste em um método de condições de contorno periódica, com período  $L$ , para obter o potencial gravitacional devido a uma célula e suas réplicas. Este potencial obtido da soma de Ewald foi utilizado na análise da equação cinética para o estado homogêneo. As equações cinéticas deste estado dependem da derivada do potencial e este potencial tem uma singularidade, quando a distância entre as partículas é nula. Consideramos que na colisão as partículas trocam seus momentos e a força responsável por esta troca é a força de *hard-core* ( $F_{HC}$ ), neste caso a força numa partícula  $i$  devido a uma partícula  $j$  é  $F = F_{grav} + F_{HC}$ , onde  $F_{grav} = -\nabla V_{ij}$ . Vimos que, no limite  $L \rightarrow \infty$  a força gravitacional tende a zero e que a única força que permanece nesse limite é a força de *hard-core*. Esta força é responsável apenas pelas trocas dos momentos, mantendo o ordenamento entre as partículas preservado. Desta forma, a evolução da função distribuição de uma partícula ao longo do tempo é constante, implicando que o termo colisional da equação cinética é nulo. Isto indica que o tempo de relaxação do estado homogêneo é infinito.

Para o sistema auto-gravitante unidimensional no estado não-homogêneo, utilizamos a equação de Balescu-Lenard para variáveis ângulo-ação. Para este caso analisamos dois regimes diferentes de energia  $E \geq x_0$  e  $E < x_0$ . Vimos para  $E \leq x_0$ , que o termo colisional da equação cinética é nulo e que o tempo de relaxação para o equilíbrio deve ser  $N^\delta$ , com  $\delta \geq 2$ . Já para  $E > x_0$  não podemos concluir sobre a dinâmica.

No capítulo 5 foi apresentado o teste de ergodicidade do método direto para o sistema auto-gravitante unidimensional, no qual consiste em calcular o desvio padrão, tanto para a posição quanto para o momento. O sistema é dito ergódico quando o desvio padrão tende a zero, quando o tempo tende ao tempo de ergodicidade. Fizemos este teste para o estado não homogêneo, com  $N = 100$  partículas e com estado inicial representado por uma waterbag, verificamos que para  $t \approx 10^6$  o sistema atinge o equilíbrio. Realizamos outro dois testes: o teste dos momentos reduzidos ( $\mu_4$  e  $\mu_6$ ), para obter o tempo de relaxação para o equilíbrio, e o teste para comparar a evolução das distribuições das  $N$  partículas ( $\phi(p, t)$  e  $\rho(x, t)$ ) com as distribuições de uma partícula ( $g(p, t)$  e  $h(x, t)$ ) e a distribuição gaussiana, para comparar o tempo de relaxação e ergodicidade. Concluimos através destes testes, que o estado não homogêneo atinge o equilíbrio, além disso, é ergódico e o tempo de relaxação é proporcional a  $N^3$ , estando estes resultados de acordo com os resultados da análise analítica.

Considerando os estados homogêneos, os resultados dos testes de ergodicidade, mostram que estes sistemas não atingem o equilíbrio para  $t = 10^5$  e pela análise das distribuições  $g(p, t)$  e  $h(x, t)$  podemos observar que se este sistema atinge o equilíbrio é para tempos muito grande, este resultado também está de acordo com nossa análise analítica das equações cinéticas.

Como proposta para futuros estudos destacam-se estudar a dinâmica de outros sistemas unidimensionais, de longo alcance e homogêneos e aplicar as equações (3.6.172), (3.6.167), (3.6.170) e (3.6.171), para testar a validade em outros sistemas. Além disso, devido a insuficiência de resultados quanto ao uso da equação de Balescu-Lenard nas variáveis ângulo-ação para os sistemas gravitacionais unidimensionais não homogêneo devemos investigar essa dependência com a energia total e tentar obter alguma conclusão sobre a dinâmica destes sistemas para os diferentes limiares de energia.

# Referências Bibliográficas

- [1] L. F. Souza and T. M. Rocha Filho, “Slow dynamics and ergodicity in the one-dimensional self-gravitating system (enviado para a revista),” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2020.
- [2] A. Campa, T. Dauxois, D. Fanelli, and S. Ruffo, *Physics of Long-range Interacting Systems*. Oxford University Press, 2014.
- [3] F. Bouchet, T. Dauxois, D. Mukamel, and S. Ruffo, “Phase space gaps and ergodicity breaking in systems with long-range interactions,” *Physical Review E*, vol. 77, p. 011125, Jan 2008.
- [4] R. Pakter and Y. Levin, “Non-equilibrium dynamics of an infinite range xy model in an external field,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 150, 02 2013.
- [5] T. Dauxois, S. Ruffo, E. Arimondo, and M. Wilkens, *Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long Range Interactions*. Lecture Notes in Physics, Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [6] A. Campa, T. Dauxois, and S. Ruffo, “Statistical mechanics and dynamics of solvable models with long-range interactions,” *Physics Reports*, vol. 480, no. 3, pp. 57 – 159, 2009.
- [7] S. Chandrasekhar, *Principles of Stellar Dynamics*. Dover, 1942.
- [8] F. Chen, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*. Springer International Publishing, 2015.
- [9] C. Kittel, “Physical theory of ferromagnetic domains,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 21, pp. 541–583, Oct 1949.
- [10] A. Campa, A. Giansanti, and G. Morelli, “Long-time behavior of quasistationary states of the hamiltonian mean-field model,” *Physical Review E*, vol. 76, p. 041117, Oct 2007.
- [11] D. Lynden-Bell, “Statistical Mechanics of Violent Relaxation in Stellar Systems,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 136, pp. 101–121, 05 1967.
- [12] T. M. Rocha Filho, M. A. Amato, A. E. Santana, A. Figueiredo, and J. R. Steiner, “Dynamics and physical interpretation of quasistationary states in systems with long-range interactions,” *Physical Review E*, vol. 89, p. 032116, Mar 2014.
- [13] T. M. Rocha Filho, A. E. Santana, M. A. Amato, and A. Figueiredo, “Scaling of the dynamics of homogeneous states of one-dimensional long-range interacting systems,” *Physical Review E*, vol. 90, p. 032133, Sep 2014.

- [14] Y. Levin, R. Pakter, F. Rizzato, T. Teles, and F. Benetti, “Nonequilibrium statistical mechanics of systems with long-range interactions,” *Physics Reports*, vol. 535, pp. 1–60, 01 2013.
- [15] M. Kac, G. E. Uhlenbeck, and P. C. Hemmer, “On the van der waals theory of the vapor [U+2010]liquid equilibrium. i. discussion of a one [U+2010]dimensional model,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 4, no. 2, pp. 216–228, 1963.
- [16] R. Liboff, *Kinetic theory: classical, quantum, and relativistic descriptions*. Prentice Hall Advanced Reference Series, Prentice Hall PTR, 1990.
- [17] R. Balescu, *Statistical Dynamics: Matter Out of Equilibrium*. Imperial College Press, 1997.
- [18] M. Luwel and G. Severne, “Collisionless mixing in 1-dimensional gravitational systems initially in a stationary waterbag configuration,” *Astrophysics Data system*, vol. 152, pp. 305–314, Nov. 1985.
- [19] T. Tsuchiya, N. Gouda, and T. Konishi, “Relaxation processes in one-dimensional self-gravitating many-body systems,” *Phys. Rev. E*, vol. 53, pp. 2210–2216, Mar 1996.
- [20] K. R. Yawn and B. N. Miller, “Incomplete relaxation in a two-mass one-dimensional self-gravitating system,” *Phys. Rev. E*, vol. 68, p. 056120, Nov 2003.
- [21] P.-H. Chavanis, “Kinetic theory of long-range interacting systems with angle–action variables and collective effects,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 391, no. 14, pp. 3680 – 3701, 2012.
- [22] J. Reidl, Charles J. and B. N. Miller, “Gravity in One Dimension: A Correction for Ensemble Averaging,” , vol. 371, p. 260, Apr. 1991.
- [23] G. N. . K. T. Tsuchiya, T., “Chaotic itinerancy and thermalization in a one-dimensional self-gravitating system.,” *Astrophysics and Space Science*, vol. 257, pp. 319–341, 1997.
- [24] P. Valageas, “Relaxation of a one-dimensional gravitational system,” *Physical Review E*, vol. 74, p. 016606, Jul 2006.
- [25] A. Gabrielli, M. Joyce, and F. Sicard, “One-dimensional gravity in infinite point distributions,” *Physical Review E*, vol. 80, p. 041108, Oct 2009.
- [26] G. B. Rybicki, “Exact Statistical Mechanics of a One-Dimensional Self-Gravitating System ,” *Springer*, vol. 14, pp. 56–72, Nov. 1971.
- [27] F. Hohl and D. Tilghman Broaddus, “Thermalization effects in a one-dimensional self-gravitating system,” *Physics Letters A*, vol. 25, no. 10, pp. 713 – 714, 1967.
- [28] C. J. Reidl and B. N. Miller, “Gravity in one dimension: Stability of periodic orbits,” *Physical Review A*, vol. 46, pp. 837–843, Jul 1992.
- [29] K. R. Yawn and B. N. Miller, “Ergodic properties and equilibrium of one-dimensional self-gravitating systems,” *Physical Review E*, vol. 56, pp. 2429–2436, Sep 1997.

- [30] M. Joyce and T. Worrakitpoonpon, “Relaxation to thermal equilibrium in the self-gravitating sheet model,” *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, vol. 2010, p. P10012, 10 2010.
- [31] C. Silvestre and T. R. Filho, “Ergodicity in a two-dimensional self-gravitating many-body system,” *Physics Letters A*, vol. 380, no. 3, pp. 337 – 348, 2016.
- [32] J. H. Oort, “The force exerted by the stellar system in the direction perpendicular to the galactic plane and some related problems,” *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands*, vol. 6, p. 249, Aug. 1932.
- [33] T. Padmanabhan, “Statistical mechanics of gravitating systems,” *Physics Reports*, vol. 188, no. 5, pp. 285 – 362, 1990.
- [34] M. Antoni and S. Ruffo, “Clustering and relaxation in hamiltonian long-range dynamics,” *Phys. Rev. E*, vol. 52, pp. 2361–2374, Sep 1995.
- [35] M. Blume, V. J. Emery, and R. B. Griffiths, “Ising model for the  $\lambda$  transition and phase separation in  $\text{he}^3$ - $\text{he}^4$  mixtures,” *Physical Review A*, vol. 4, pp. 1071–1077, Sep 1971.
- [36] R. B. Griffiths, “Free energy of interacting magnetic dipoles,” *Physical Review*, vol. 176, pp. 655–659, Dec 1968.
- [37] D. Gross, *Microcanonical Thermodynamics: Phase Transitions in "small" Systems*. World Scientific lecture notes in physics, World Scientific, 2001.
- [38] F. Baldovin and E. Orlandini, “Hamiltonian dynamics reveals the existence of quasistationary states for long-range systems in contact with a reservoir,” *Physical Review Letters*, vol. 96, p. 240602, Jun 2006.
- [39] G. Collins, *The Virial Theorem in Stellar Astrophysics*. Astronomy and astrophysics series, Pachart Publishing House, 1978.
- [40] S. Chandrasekhar and S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. Astrophysical monographs, Dover Publications, 1957.
- [41] M. K.-H. Kiessling and T. Neukirch, “Negative specific heat of a magnetically self-confined plasma torus,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 100, no. 4, pp. 1510–1514, 2003.
- [42] L.-P. M. C. e. a. Caglioti, E., “A special class of stationary flows for two-dimensional euler equations: A statistical mechanics description. part ii.,” *Communications in Mathematical Physics*, 1995.
- [43] M. Antoni, S. Ruffo, and A. Torcini, “First- and second-order clustering transitions for a system with infinite-range attractive interaction,” *Physical Review E*, vol. 66, p. 025103, Aug 2002.
- [44] Y. Y. Yamaguchi, J. Barré, F. Bouchet, T. Dauxois, and S. Ruffo, “Stability criteria of the vlasov equation and quasi-stationary states of the hmf model,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 337, no. 1, pp. 36 – 66, 2004.
- [45] A. Campa, P.-H. Chavanis, A. Giansanti, and G. Morelli, “Dynamical phase transitions in long-range hamiltonian systems and tsallis distributions with a time-dependent index,” *Physical Review E*, vol. 78, p. 040102, Oct 2008.

- [46] R. Balescu, *Statistical Mechanics of Charged Particles*. Monographs in statistical physics and thermodynamics, Interscience Publishers, 1963.
- [47] P. Buyl, *Vlasov dynamics of 1D models with long-range interactions*. PhD thesis, Université Libre de Bruxelles, 2012.
- [48] E. Lifshitz, L. Pitaevskii, J. Sykes, and R. Franklin, *Physical Kinetics*. Course of theoretical physics, Elsevier Science, 1981.
- [49] D. Nicholson, *Introduction to plasma theory*. Wiley series in plasma physics, Wiley, 1983.
- [50] P.-H. Chavanis, “Kinetic theory with angle–action variables,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 377, no. 2, pp. 469 – 486, 2007.
- [51] P.-H. Chavanis, “Kinetic theory of spatially homogeneous systems with long-range interactions: I. general results,” *The European Physical Journal Plus*, vol. 127, no. 19, pp. 2 – 23, 2012.
- [52] J.-B. Fouvry, B. Bar-Or, and P.-H. Chavanis, “Kinetic theory of one-dimensional homogeneous long-range interacting systems sourced by  $1/N^2$  effects,” *Physical Review E*, vol. 100, p. 052142, Nov 2019.
- [53] C. R. Lourenço and T. Rocha, “Scaling of the dynamics of a homogeneous one-dimensional anisotropic classical heisenberg model with long-range interactions,” *Physical Review E*, vol. 92, 12 2014.
- [54] M. R. Hohl, Frank; Feix, “Numerical experiments with a one-dimensional model for a self-gravitating star system,” *Astrophysical Journal*, vol. 147, p.1164 (*ApJ Homepage*), 03/1967.
- [55] D. Rapaport and D. Rapaport, *The Art of Molecular Dynamics Simulation*. Cambridge University Press, 2004.
- [56] B. N. Miller and J.-L. Rouet, “Ewald sums for one dimension,” *Physical Review E*, vol. 82, p. 066203, Dec 2010.
- [57] T. Tatekawa and K. ichi Maeda, “Primordial fractal density perturbations and structure formation in the universe: One-dimensional collisionless sheet model,” *The Astrophysical Journal*, vol. 547, pp. 531–544, feb 2001.
- [58] L. Hernquist, F. R. Bouchet, and Y. Suto, “Application of the Ewald Method to Cosmological N-Body Simulations,” *Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 75, p. 231, Feb. 1991.
- [59] F. Benetti and B. Marcos, “Collisional relaxation in the inhomogeneous hamiltonian-mean-field model: diffusion coefficients,” *Physical Review E*, vol. 95, 10 2016.
- [60] N. Lemos, *Mecânica Analítica*. LIVRARIA DA FISICA, 2007.
- [61] E. Butkov, *Física matemática*. Livros Técnicos e Científicos, 1988.
- [62] C. C. Moore, “Ergodic theorem, ergodic theory, and statistical mechanics,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 112, no. 7, pp. 1907–1911, 2015.

- [63] A. Figueiredo, T. M. R. Filho, and M. A. Amato, “Ergodicity and central-limit theorem in systems with long-range interactions,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 83, p. 30011, jul 2008.
- [64] A. Janicki and A. Weron, *Simulation and Chaotic Behavior of Alpha-stable Stochastic Processes*. No. hsbook9401 in HSC Books, Hugo Steinhaus Center, Wroclaw University of Technology, 1994.
- [65] A. Rebenshtok and E. Barkai, “Weakly non-ergodic statistical physics,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 133, pp. 565–586, 11 2008.
- [66] L. Reichl, *A Modern Course in Statistical Physics*. Physics textbook, Wiley, 2009.
- [67] F. Fuchs and R. Stelzer, “Mixing conditions for multivariate infinitely divisible processes with an application to mixed moving averages and the supou stochastic volatility model,” *ESAIM: Probability and Statistics*, vol. 17, pp. 455–471, 2013.
- [68] M. Magdziarz and A. Weron, “Anomalous diffusion: Testing ergodicity breaking in experimental data,” *Physical Review E*, vol. 84, p. 051138, Nov 2011.
- [69] M. Allen, M. Allen, D. Tildesley, T. ALLEN, and D. Tildesley, *Computer Simulation of Liquids*. Oxford Science Publ, Clarendon Press, 1989.
- [70] D. Donnelly and E. Rogers, “Symplectic integrators: An introduction,” *American Journal of Physics*, vol. 73, no. 10, pp. 938–945, 2005.
- [71] H. Yoshida, “Construction of higher order symplectic integrators,” *Physics Letters A*, vol. 150, no. 5, pp. 262 – 268, 1990.

# Apêndice A

## Diagramas da hierarquia BBGKY

Para construir a representação gráfica da hierarquia BBGKY, vamos considerar  $f_s(x_1, \dots, x_s)$  representado por linhas horizontais associada as partículas  $(1, \dots, s)$ . O propagador  $L_i^0$  não requer nenhuma representação, já que ele é um propagador que representa a partícula livre. As interações associadas aos operadores  $L'_{ij}$  são representadas pela junção das linhas, que representa  $i$  e  $j$  da direita para a esquerda. Considerando esta representação, temos dois tipos de diagramas:

- *X vértice*-está associado apenas a interação de duas partículas e representa o segundo termo de 3.1.29, dependendo apenas ao operador  $L'_{ij}$ ;

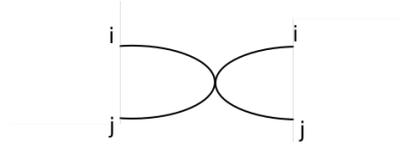


Figura A.0.1: Diagrama tipo *X-vértice*.

- *Y vértice*- representa o terceiro termo da equação 3.1.29, associado a interação entre duas partículas, seguida de uma integração da partícula extra. Este vértice representa a transição do estado de  $(s + 1)$  partículas para  $s$  partículas e apenas uma linha é representada na esquerda.

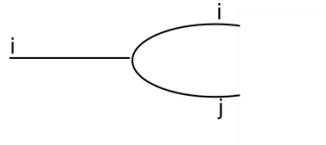


Figura A.0.2: Diagrama tipo *Y-vértice*.

Para  $s = 1$  em 3.1.29:

$$\partial_t f(x_1) = L_1^0 f(x_1) + \int dx_2 L'_{12} f(x_1) f(x_2), \quad (\text{A.0.1})$$

o diagrama de evolução da hierarquia BBGKY é:

Para  $s = 2$  em 3.1.29:

$$\begin{aligned} \partial_t f_2(x_1, x_2) &= L_1^0 f_2(x_1, x_2) + L_2^0 f_2(x_1, x_2) + L'_{12} f_2(x_1, x_2) + (N - 2) \int dx_3 L'_{13} f_3(x_1, x_2, x_3) \\ &+ (N - 2) \int dx_3 L'_{23} f_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \quad (\text{A.0.2})$$

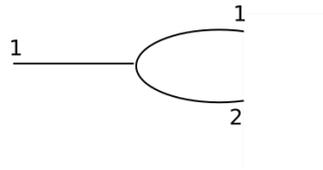


Figura A.0.3: Diagrama da hierarquia BBGKY para  $s = 1$ .

e os diagramas são:

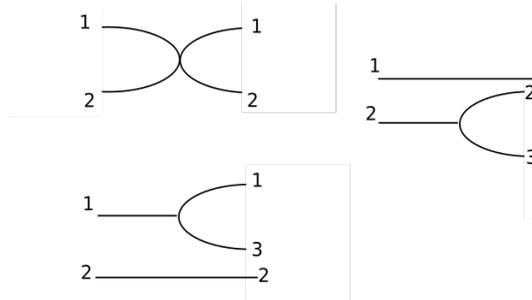


Figura A.0.4: Diagrama da hierarquia BBGKY para  $s = 2$ .

Estas representações gráficas auxiliam a visualização dos termos colisionais das equações cinéticas.

# Apêndice B

## Formalismo de Hamilton-Jacobi

O formalismo de Hamilton-Jacobi permite obter uma transformação canônica que simplifica as equações de movimento.

Seja um sistema descrito pelas variáveis canônicas  $(q, p)$  e com hamiltoniana  $H(q, p, t)$ , seja uma função geradora  $S(q, P, t)$  responsável pela transformação canônica. A função geradora  $S$  é escolhida de tal forma que a nova hamiltoniana é  $K(Q, P, t) = 0$ , logo as equações do movimento são:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0 \rightarrow Q_i = \beta_i, \quad (\text{B.0.1})$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \rightarrow P_i = \alpha_i, \quad (\text{B.0.2})$$

onde  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  são constantes. Logo,

$$K = H(q, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.0.3})$$

e para este tipo de função geradora, temos que:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad (\text{B.0.4})$$

e

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = \beta_i. \quad (\text{B.0.5})$$

Logo,

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (\text{B.0.6})$$

esta é a equação de Hamilton-Jacobi. Ou seja, encontrada uma solução da equação de Hamilton-Jacobi da forma  $S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t)$  esta função transforma a nova hamiltoniana reduzindo-a a zero.

A natureza da equação de Hamilton-Jacobi possibilita a separação de variáveis na forma de soma [60].

# Apêndice C

## Integrador Simplético

Integradores simpléticos são usados para resolver numericamente sistemas hamiltonianos. Quando o integrador não é simplético o erro da energia total cresce em geral, já quando o integrador é simplético não há mudança no erro da energia total, já que os algoritmos são construídos tal que preservam certas propriedades geométricas inerentes ao sistema.

O primeiro desses métodos foi desenvolvido por Rene de Vogelaere. Esse método foi desenvolvido independentemente por R. D. Ruth, que construiu o integrador simplético para estudar a dinâmica de aceleradores de partículas [70]. Demonstraremos a seguir como obter o integrador simplético de primeira, segunda e quarta ordem.

□

Seja  $A$  e  $B$  operadores que não comutam e  $\tau$  um número real pequeno. Vamos considerar  $n$  a ordem do integrador e encontrar um conjunto de números reais  $(c_1, c_2, \dots, c_k)$  e  $(d_1, d_2, \dots, d_k)$ , tal que:

$$e^{\tau(A+B)} = \prod_{i=1}^k e^{c_i \tau A} e^{d_i \tau B} + \mathcal{O}(\tau^{n+1}). \quad (\text{C.0.1})$$

O problema de obter  $c_i$  e  $d_i$  está relacionado diretamente ao integrador simplético do sistema Hamiltoniano. Primeiramente, introduzimos a notação  $z = (x, p)$  e a equação de Hamilton pode ser reescrita, tal que:

$$\dot{z} = \{z, H(z)\}, \quad (\text{C.0.2})$$

onde  $\{ \}$  é o parênteses de Poisson,  $\{F, G\} = F_x G_p - F_p G_x$ , com  $F_x = \partial F / \partial x$ . Vamos introduzir o operador diferencial  $D_G$ , com  $D_G = \{F, G\}$ , portanto (C.0.2) pode ser reescrito como  $\dot{z} = D_H z$ . Então a solução de 0 a  $\tau$  para  $z$  é:

$$z(\tau) = z(0) e^{D_H \tau}. \quad (\text{C.0.3})$$

Para uma hamiltoniana separável,

$$H(x, p) = T(p) + V(x), \quad (\text{C.0.4})$$

o operador diferencial  $D_H = D_T + D_V$ , ou seja:

$$z(\tau) = z(0) e^{(A+B)\tau}, \quad (\text{C.0.5})$$

com  $A = D_T$  e  $B = D_V$ . Considerando  $z = z(0)$  e  $z' = z(\tau)$ , então:

$$z' = \left( \prod_{i=1}^k e^{c_i \tau A} e^{d_i \tau B} \right) z \quad (\text{C.0.6})$$

e esse mapeamento aproxima de (C.0.5) até a ordem  $\mathcal{O}(\tau^n)$ . De (C.0.5) e (C.0.6), temos:

$$e^{\tau A} e^{\tau B} \approx \prod_{i=1}^k e^{c_i \tau A} e^{d_i \tau B}, \quad (\text{C.0.7})$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^k c_i = 1 = \sum_{i=1}^k d_i. \quad (\text{C.0.8})$$

Expressando as seguintes exponenciais em série de Taylor:

$$\begin{aligned} e^{A\tau} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A\tau)^n}{n!} \\ e^{B\tau} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(B\tau)^n}{n!}, \end{aligned} \quad (\text{C.0.9})$$

notamos que:

$$\begin{aligned} A^2 z &= D_T^2 z = D_T \{z, T\} = \{\{z, T\}, T\} = \{(\dot{x}, 0), T\} = 0, \\ B^2 z &= D_V^2 z = D_V \{z, V\} = \{\{z, V\}, V\} = \left\{0, -\frac{\partial V}{\partial x}\right\}, V\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.0.10})$$

Logo concluímos que:

$$\begin{aligned} e^{A\tau} &= 1 + \tau A \\ e^{B\tau} &= 1 + \tau B. \end{aligned} \quad (\text{C.0.11})$$

E de (C.0.5):

$$z = (1 + \tau A)(1 + \tau B) z(0) \quad (\text{C.0.12})$$

Considerando  $z = (x, p)$  e substituindo em (C.0.12), podemos reescrever:

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i-1} + \tau c_i \frac{\partial T}{\partial p}(p_{i-1}), \\ p_i &= p_{i-1} - \tau d_i \frac{\partial V}{\partial x}(x_i), \end{aligned} \quad (\text{C.0.13})$$

com  $i=1, \dots, k$ . Portanto um integrador de ordem  $n$  é obtido através de (C.0.13). Quando queremos o integrador simplético de ordem  $n = 1$ , consideramos (C.0.1) e expandimos o lado esquerdo de (C.0.1) em potenciais de  $\tau$  e igualamos o coeficiente de potência igual de  $\tau$  até a ordem 1 do lado direito de (C.0.1), fazendo  $k = 1$ , teremos duas equações: uma com os coeficientes de A e outra com os coeficientes de B. Ou seja:

$$\begin{aligned} e^{\tau(A+B)} &= 1 + \tau(A+B), \\ e^{\tau c_1} &= 1 + \tau A c_1, \\ e^{\tau d_1} &= 1 + \tau A d_1, \\ \Rightarrow 1 + \tau(A+B) &= 1 + \tau A c_1 + \tau A d_1, \end{aligned} \quad (\text{C.0.14})$$

com  $c_1 = d_1 = 1$ . Seguindo a mesma técnica, para o integrador simplético de ordem  $n = 2$  a solução mais simples é quando  $k = 2$ ,  $c_1 = c_2 = 1/2$  e  $d_1 = 1$ . Já os coeficientes do integrador de quarta ordem foi obtido por F. Neri e são [71]:

$$\begin{aligned} c_1 = c_4 &= \frac{1}{2(2 - 2^{1/3})}, & c_2 = c_3 &= \frac{1 - 2^{1/3}}{2(2 - 2^{1/3})} \\ d_1 = d_4 &= \frac{1}{(2 - 2^{1/3})}, & d_2 &= \frac{-2^{1/3}}{(2 - 2^{1/3})}, & d_4 &= 0. \end{aligned} \tag{C.0.15}$$

E para o integrador de quarta ordem a equação (C.0.13) é aplicada para  $i = 1, 2, 3, 4$ .

■