Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Sobre Certas Variedades de Grupos Solúveis

por

Kaliana dos Santos Dias

Brasília

2009

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Sobre Certas Variedades de Grupos Solúveis

por

Kaliana dos Santos Dias

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 2009.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Noraí Romeu Rocco - Orientador (MAT/UnB)

Prof. Dr. Alexei Krassilnikov - Membro (MAT/UnB)

Prof. Dra. Irene Naomi Nakaoka - Membro (UEM-PR)

Dedicatória

À minha mãe, Geni, por tudo o que ela significa para mim, um verdadeiro exemplo de superação e amor.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo amor e cuidado em todas as etapas da minha vida e por tudo o que Ele conquistou na cruz por mim e tudo o que Ele ainda fará.

À minha família, em especial, minha mãe Geni e meus irmãos Boanerjes (*In memorian*), Diran, Cida, Fáthma, Míriam, Tina, Eliana, Paulinho, Jairo, Tchayrinho e Isaac. Meus cunhados Beto, Audo e Romildo, meus sobrinhos tantos, enfim não tenho palavras pra agradecer. Cada um de vocês de alguma forma colaborou para que eu chegasse hoje aqui, no financeiro, no amor, nas palavras de conforto e na fé em Deus; Sou eternamente grata. Tenho muito amor por vocês!

Ao Professor Noraí Romeu Rocco, pela orientação, paciência, disposição com que conduziu este trabalho e pela confiança que depositou em mim. Um grande exemplo de humildade e simpatia.

Ao departamento de matemática pela oportunidade concedida e aos professores exemplos para mim, Angel Baigorri, Carlos Alberto, Katia Regina e Pavel Shumyatsky.

Aos professores Alexei Krassilnikov e Irene N. Nakaoka pela participação na banca examinadora.

À Primeira Igreja Batista em Itororó e Terceira Igreja Batista em Brasília, pelo ensino, pelo amor de Deus que nos une, pela educação cristã que me acompanha onde quer que eu vá.

Agradeço em especial aos amigos de Brasília, Fridos & Fridas, não poderia deixar

de citar Talita Abi, Talita Ishy, Naara, Méri e Rodrigo, ao meu namorado Elon, que com emoção e muito carinho me receberam, acompanharam cada fase deste curso com tantas alegrias e comemoraram junto a mim cada vitória recebida. Sem palavras o cuidado de vocês.

À Família Cocentino, em especial, tia Carmem e seus filhos Lalinha e Jon, obrigada pelos finais de semana, pelas roupas limpas, pelas caronas, pelos convites para os eventos em família, pelo cuidado e conselhos que Deus nos ensinou a oferecer, vocês realmente aprenderam. Gestos com estes são exemplos do verdadeiro amor de Deus.

À Família 101, que com amor e carinho e muita amizade estiveram juntos nos momentos de dor e alegria, nos fracassos e nas vitóras, choraram e sorriram junto a mim. Nunca me esquecerei de Adriana, Emília, Mariana, Ricardo e Thaynara, amigos que se tornaram como meus irmãos e que construiram uma amizade certamente duradoura.

Aos funcionários do departamento, em especial a Eveline, Seu Manoel, Seu Pereira, Célia, Sandra e D. Irene, pelo sorriso logo de manhã, pela preciosa atenção e pelo carinho.

Aos amigos da matemática, pela amizade e solidariedade, todos vocês mesmo que um dia deram conselhos, algumas dicas legais, sugestão de questão de prova, um ombro pra chorar, um sorriso, um abraço, uma palavra de conforto. Agradeço em especial a Kélem, Igor, João Paulo e Dani, Eunice, Laura, Andréia e todos os outros amigos que fizeram parte desta etapa da minha vida e estão guardados em meu coração.

Por fim, obrigada a todos que de alguma forma contribuiu para que eu chegasse hoje até aqui =)

"Não digo isto como por necessidade, pois aprendi a estar satisfeito com o que tenho. Sei o que é estar necessitado e sei também o que é ter mais do que é preciso; Aprendi o segredo de me sentir contente em todo lugar e em qualquer situação, quer tenha muito ou tenha pouco. Com a força que Cristo me dá, posso enfrentar qualquer coisa."

Fp. 4: 11-13

Resumo

Neste trabalho abordamos algumas variedades de grupos solúveis definidos por leis da forma $[m,n]=1$, em que $[m,n]$ indica o comutador $[[x_1,\ldots,x_m],[x_{m+1},\ldots,x_{m+n}]]$, a $m+n$ variáveis. Variedades associadas às leis $C(n+2)$ são também consideradas, onde $C(n+2)$ indica o conjunto de identidades $[x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n+2}]=[x_1,x_2,x_{\varphi(3)},\ldots,x_{\varphi(n+2)}]$, para toda permutação φ do conjunto $\{3,\ldots,n+2\}$. O objetivo principal do trabalho é explorar certos resultados devidos a F.Levin que tratam de equivalências entre essas leis, com o intuito de generalizar o caso da variedade dos grupos metabelianos, definida pela lei $[[x_1,x_2],[x_3,x_4]]=1$, a qual é equivalente à $C(4)$. Mostramos que um grupo G satisfaz $C(n+2)$, $n\geq 2$ se, e somente se, G satisfaz $[n-k,2+k]=1$, para $k=0,1,\ldots,n-2$. As leis $C(2n-1)$ decorrem de $[n,2]=1$, para $n\geq 3$; trabalhando com grupos de unidades em anéis de séries de potências formais, apresentamos um exemplo que mostra que este resultado é o melhor possível, pois $[n,2]=1$ não implica $C(k)$ para $k\leq 2n-2$.

Palavras-chave: Variedades de grupos, grupos solúveis e metabelianos, séries de potências formais.

Abstract

In this dissertation we deal with some results on varieties of solvable groups defined by laws of the form $[m, n] = 1$, where $[m, n]$ denotes the commutator $[[x_1, \ldots, x_m], [x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}]]$, in $m + n$ variables. Varieties associated with $C(n + 2)$ are also considered, where $C(n + 2)$ denotes the set of identities $[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}] = [x_1, x_2, x_{\varphi(3)}, \ldots, x_{\varphi(n+2)}]$, for all permutation φ of the set $\{3, \ldots, n+2\}$. The main objective of the work is to treat of certain results due to F.Levin that investigate equivalences among these laws, with the purpose of generalising the case of the varieties of metabelian groups, defined by the law $[[x_1, x_2], [x_3, x_4]] = 1$, which is equivalent to $C(4)$. We show that a group G satisfies $C(n + 2)$, $n \geq 2$, if and only if G satisfies the laws $[n - k, 2 + k] = 1$, for all $k = 0, 1, \ldots, n - 2$. The laws $C(2n - 1)$ are consequence of $[n, 2] = 1$, for $n \geq 3$; on considering rings of formal power series, we present an example which shows that this result is the best possible, since $[n, 2] = 1$ does not imply $C(k)$ for any $k \leq 2n - 2$.

Palavras-chave: Varieties of groups, solvable and metabelian groups, formal power series.

Índice

Introdução

Este trabalho versa sobre o estudo de certas variedades de grupos solúveis definidas por leis envolvendo comutadores e está fundamentado numa revisão sistemática e cuidadosa de artigos nessa área de estudos, especialmente os trabalhos de F.Levin [11] [12] e complementados pelos trabalhos de I.D.Macdonald [13] [14], H.Neumann [17], G.Higman [9] e N.Gupta [6], entre outros.

Évarìste Galois foi o primeiro a introduzir o conceito de solubilidade de grupo; ele provou que cada equação polinomial está associada a um grupo, chamado de Grupo de Galois de polinômios, que pode ou não ser solúvel, se a resposta for sim então esta equação admite solução por radicais. Sabemos que existem grupos não solúveis para polinômios de grau maior ou igual a 5, porém, somente as equações de grau menor ou igual a 4 tem fórmulas para se encontrar estas raízes. Além disso, estes grupos podem ser utilizados para caracterizar a construção geométrica de polígonos usando somente régua e compasso.

Os grupos solúveis são definidos, formalmente, como os grupos que possuem uma série de subgrupos

$$G = G_0 > G_1 > \ldots > G_n = \{1\},$$

tal que $G_{i+1} \lhd G_i$ e G_i/G_{i+1} é abeliano. O menor de todos os comprimentos n desta série é chamado comprimento de solubilidade ou comprimento derivado de G. E desta definição, resulta que um grupo é solúvel, se e somente se, sua série derivada se estabiliza, ou seja, exite um $n \in \mathbb{N}$ tal que $G^{(n)} = 1$, onde $G^{(0)} = G$ e $G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$.

A uma *variedade de grupos* definimos como a classe de todos os grupos satisfazendo todas as identidades de um dado conjunto V. Sendo $F(X)$ um grupo livre com base em $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ e $v = v(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F(X)$, então $v \equiv 1$ é uma *identidade* ou *lei* no grupo G, se $v = (g_1, g_2, \ldots, g_n) = 1$ para todos $g_i \in G,\ 1 \leq i \leq n$. Assim, neste caso, o conjunto V é chamado de base de identidades para a variedade em questão. Os grupos abelianos ($[x, y] = 1$), os grupos nilpotentes de classe menor ou igual a c ($\gamma_{c+1}(G) = 1$), os grupos solúveis de comprimento menor ou igual a n ($G^{(n)} = 1$) são exemplos de variedades.

Falamos também com frequência dos grupos metabelianos, que são grupos solúveis de comprimento derivado 2 ($G^{(2)} = 1$), ou seja, a variedade desses grupos é a classe de todos os grupos associados com a lei $[[x_1, x_2], [x_3, x_4] = 1$, i.e., para qualquer grupo G nesta variedade esta expressão é satisfeita independente da escolha de $x_i \in G$.

Neste trabalho, nós investigamos grupos pertencentes às variedades associadas com as leis da forma

$$[[x_1, \ldots, x_n], [x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}]] = 1,$$

que nós abreviamos por $[n, m] = 1$.

Numa primeira parte, mostramos que a variedade associada com a lei

$$[x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}] = [x_1, \ldots, x_n, x_{n+2}, x_{n+1}]$$

é equivalente à variedade associada à lei

$$[[x_1, \ldots, x_n], [x_{n+1}, x_{n+2}]] = 1,$$

de modo que, em particular, para $n = 2$ temos a variedade dos grupos metabelianos. Em seguida, nós estudamos se as possíveis extensões de equivalências destas leis podem ser usadas para definir a variedade de grupos metabelianos. E vamos concluir exatamente que isso não poderá ser possível.

Tratamos também de grupos que satisfazem à lei

$$[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k] = [x_1, x_2, x_{\varphi(3)}, \ldots, x_{\varphi(k)}],$$

onde φ é alguma permutação de $\{3, \ldots, k\}$ e, neste caso, dizemos que G satisfaz $C(k, \varphi)$, e quando G satisfaz $C(k, \varphi)$ para toda permutação φ de $\{3, \ldots, k\}$, então dizemos que G satisfaz $C(k)$.

Um resultado importante aqui, será a demostração de um teorema que afirma que quando um grupo G satisfaz $C(n+2),\ n \geq 2$, é equivalente dizer que G satisfaz às leis $[n-k, 2+k] = 1$, para todos $k = 0, 1 \ldots, n-2$. Além disso, a lei $[n, 2] = 1,\ n \geq 3$, implica $C(2n-1)$, mas não implica $C(k)$, para $k \leq 2n-2$ e damos um contra-exemplo para este resultado. Finalmente, mostramos que para $m, n \geq 3$, a lei $[m, n] = 1$ não implica a lei $C(k, \varphi)$ para qualquer k e φ não trivial.

Este trabalho está dividido em três capítulos.

No primeiro capítulo introduzimos alguns pré-requisitos, tais como os conceitos e propriedades básicas de grupos solúveis e nilpotentes, grupos metabelianos e engelianos e de variedades de grupos, de modo a tornar uma leitura linear para os poucos familiarizados com a teoria dos grupos.

No segundo capítulo abordamos as Álgebras Associativas Livres e estudamos em algum detalhe as álgebras $A(\mathbb{Z}, r)$, isto é, as $\mathbb{Z}$-álgebras associativas das séries de potências formais em r variáveis não-comutativas $x_1, \ldots, x_r$. Nesse contexto os elementos $1 + x_1, ..., 1 + x_r$ geram o grupo livre de posto r, proporcionando assim um ambiente favorável ao estudo formal de exemplos de grupos satisfazendo relações específicas entre comutadores, que é o objeto central deste trabalho.

O terceiro e último capítulo representa a parte principal. Numa primeira parte abordamos questões envolvendo a equivalência das leis já ditas entre comutadores com aquelas identidades que definem grupos metabelianos, 2-metabelianos e 3-metabelianos. A parte final trata de generalizações dessas leis. Concluímos o trabalho exibindo exemplos, devido a F.Levin, de grupos satisfazendo a lei $[3, 2] = 1$ que são 2-metabelianos, mas que não são 3-metabelianos e nem satisfazem qualquer condição finita de Engel, e grupos que satisfazem $[3, 3] = 1$, mas que não satisfazem $[n, 2] = 1$, para nenhum n. Incluímos também um exemplo, devido a Newman e Wiegold, de grupos metabelianos não nilpotentes que satisfazem a condição $[k \longrightarrow k + 1]$, para todo k, ou seja, todo subgrupo k-gerado é nilpotente de classe $k + 1$.

1

Tópicos Preliminares

Neste capítulo apresentamos as definições e resultados básicos para efeito de uma leitura mais linear do nosso trabalho. Alguns resultados são enunciados sem demonstração; apenas aqueles essenciais para o desenvolvimento do assunto central são demonstrados cuidadosamente. Aqui, utilizamos as referências dos livros de Robinson[18], Rocco[19], Milies[16] e Gupta[6].

1.1 Comutadores, Séries Derivadas e Séries Centrais

Seja G um grupo. Definimos o *comutador*[1] de $x_1, x_2 \in G$ como sendo $[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2 = x_1^{-1}x_1^{x_2}$, onde $x^g = g^{-1}xg$ é denominado o *conjugado de x por g*. Para $n \geq 2$ o comutador simples de peso n é definido recursivamente por: $[x_1, x_2, ..., x_n] = [[x_1, ..., x_{n-1}], x_n]$, $x_i \in G$ com a convenção que $[x_1] = x_1$. Usamos também a notação $[x, {}_n y]$ para o comutador $[x, y, ..., y]$, com y repetido n vezes. O comutador é uma composição não associativa, i.e, $[[x, y], z] \neq [x, [y, z]]$ e definimos o centro de G como

[1] Este conceito aparece pela primeira vez em 1860 na tese de C. Jordan (1838-1922).

o conjunto $Z(G) = \{g \in G/gh = hg, \forall\ h \in G\}$. Além disso, apresentamos a seguir, identidades que podem ser verificadas facilmente por cálculos diretos.

Proposição 1.1 (Identidades de comutadores)**.** Para todos x, y e z no grupo G, as seguintes relações são válidas:

(i) $[x, y]^{-1} = [y, x]$;

(ii) $[xy, z] = [x, z]^y[y, z] = [x, z][x, z, y][y, z]$,
$[x, yz] = [x, z][x, y]^z = [x, z][x, y][x, y, z]$;

(iii) $[x, y]^g = [x^g, y^g]$, para todo $g \in G$;

(iv) $[x, y, x] = ([x, y][x^{-1}, y])^u$, onde $u = x^y$;

e como consequência disto, temos que:

(v) $[x, y, x] = 1 \Leftrightarrow [x, y]^{-1} = [x^{-1}, y]$;

(vi) $[x, y, z^x][z, x, y^z][y, z, x^y] = 1$ (Identidade de Witt);

(vii) $[x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y]^x = 1$ (Identidade de Hall-Witt).

Para quaisquer subgrupos H, K de G, $[H, K]$ indica o subgrupo de G gerado pelo conjunto de todos os comutadores $[h, k], h \in H,\ k \in K$. Em particular, $[G, G]$ é chamado de *subgrupo comutador*[2] ou *subgrupo derivado* de G e será denotado por G'. A condição (iii) permite ver facilmente que G' é normal em G.

Indutivamente, podemos definir uma sequência de subgrupos da forma:

$$
\begin{gathered}
G^{(0)} = G. \\
G^{(1)} = [G^{(0)}, G^{(0)}] = G'. \\
G^{(2)} = [G^{(1)}, G^{(1)}] = (G')'. \\
\vdots \\
G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}] = (G^{(n-1)})'.
\end{gathered}
$$

Definição 1.1. O subgrupo $G^{(n)}$ definido anteriormente chama-se o n-ésimo subgrupo derivado de G e a sequência

$$G = G^{(0)} \supset G^{(1)} \supset \cdots \supset G^{(n)} \cdots$$

chama - se a *série derivada* de G.

[2]G.A. Miller publicou pela primeira vez as propriedades principais desses grupos, embora já eram conhecidas por R. Dedekind (1831-1916) que foi quem introduziu o termo *comutador* em 1897.

Note que, esta série não precisa necessariamente terminar na identidade de G, e pela própria definição de comutador temos que G é um grupo abeliano se, e somente se, $G' = \{1\}$. Decorre que todos os fatores $G^{(n-1)}/G^{(n)}$ são grupos abelianos, sendo o primeiro deles, G/G', de grande importância por ser o maior grupo quociente abeliano de G. De fato, pela proposição a seguir.

Proposição 1.2. *Se H é um subgrupo normal de um grupo G, então o grupo quociente G/H é abeliano se, e somente se, $G' \subset H$.*

A demonstração deste resultado encontra-se em qualquer livro de teoria dos grupos.

Há outro modo natural de gerar sequências de subgrupos comutadores de um grupo, por repetidas comutações com G. Duas séries importantes serão enunciadas aqui.

Definição 1.2. Uma *série central* é uma sequência de subgrupos

$$1 = Z_0 \leq Z_1 \leq \ldots \leq Z_i = G$$

tais que os quocientes são centrais no sentido de que $[G, Z_{i+1}] \leq Z_i$. Estes subgrupos são sempre normais em G, de modo que faz sentido falar em G/Z_i. Decorre que a sequência Z_i é central se, e somente se, $Z_{i+1}/Z_i \leq Z(G/Z_i)$.

A série central de um grupo G, dada por:

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \ldots \geq \gamma_i(G) \geq \ldots \geq \ldots$$

definida recursivamente como sendo:

$$\begin{cases} \gamma_1(G) &= G \\ \gamma_{i+1}(G) &= [\gamma_i(G), G], \ i = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

é chamada *série central inferior* de G e cada termo $\gamma_i(G)$ é um subgrupo totalmente invariante, ou seja, é invariante por qualquer endomorfismo de G, fato que está mostrado em (Noraí [19], pg. 142). Note também que $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$ fica no centro de G/γ_{i+1}, para vermos isto basta tomarmos o quociente por γ_{i+1} na igualdade de $\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G]$, fazendo isto obtemos $[\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G), G/\gamma_{i+1}(G)] = 1$.

A série central de um grupo G, dada por:

$$1 = \zeta_0(G) \leq \zeta_1(G) \leq \ldots \leq \zeta_i(G) \leq \ldots$$

definida da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \zeta_0(G) = 1 \\ \zeta_1(G) = Z(G) \\ \zeta_{i+1}(G)/\zeta_i(G) = Z(G/\zeta_i(G), \ i = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

é chamada *série central superior* de G e cada um dos subgrupos $\zeta_i(G)$ é característico em G (ver Noraí[19], pg.143), mas não é totalmente invariante em G. Esta série pode não terminar, mas sendo G finito, então a série estaciona-se num subgrupo denominado *hipercentro* de G.

A proposição, a seguir, estabelece algumas relações entre os termos das séries centrais inferior e superior.

Proposição 1.3. Sejam G um grupo qualquer, e i, j inteiros positivos.

1. $[\gamma_i(G), \gamma_j(G)] \leq \gamma_{i+j}(G)$;

2. $\gamma_i(\gamma_j(G)) \leq \gamma_{ij}(G)$;

3. $[\gamma_i(G), \zeta_j(G)] \leq \zeta_{j-i}(G) \quad se\ j \geq i$.

Uma demonstração pode ser encontrada em Robinson [18], pag. 126.

Proposição 1.4. Seja G um grupo qualquer gerado por um conjunto X. Então

1. $\gamma_i(G) = \ \langle [x_1, \ldots, x_i]^g; x_j \in X,\ j = 1, \ldots, i,\ g \in G \rangle$;

2. $\gamma_i(G) = \ \langle [x_1, \ldots, x_i], \gamma_{i+1}(G); x_j \in X,\ j = 1, \ldots, i \rangle$;

3. *Se* $X = \{x, y\}$ então $\gamma_2(G) = \ \langle [x, y], \gamma_3(G) \rangle$.

Uma demonstração pode ser encontrada em Rocco [19], pag. 146.

1.2 Grupos Solúveis e Nilpotentes

O conceito de grupos solúveis foi introduzido por E. Galois [3] quando estudava a resolução de equações algébricas por radicais. Ele associou um grupo a uma equação e estabeleceu que uma equação é resolúvel por radicais se, e somente se, o grupo correspondente é solúvel. As definições e propriedades desses grupos nos ajudarão a introduzir o tema central de nosso trabalho.

Definição 1.3. Um grupo G diz-se *solúvel* se contém uma cadeia de subgrupos:

$$\{1\} = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$$

tal que cada subgrupo H_{i-1} é normal em H_i e o grupo quociente $H_i/H_{i-1},\ 1 \leq i \leq n$, é abeliano.

A esta cadeia chamamos de *série subnormal abeliana* de G, e como a normalidade não tem propriedade transitiva, os subgrupos H_i não precisam ser normais em G, $1 \leq i \leq n-1$. Naturalmente, todo grupo abeliano é solúvel.

[3]Nasceu em 1811 e morreu 1832, na França.

Teorema 1.1. *Um grupo G é solúvel se, e somente se, sua série derivada termina na identidade, i.e, se existe um inteiro positivo n tal que $G^{(n)} = \{1\}$.*

Demonstração: Suponhamos que G possui uma série subnormal abeliana

$$G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset \ldots G_n = \{1\}.$$

Como todo quociente $G_i/G_{i-1},\ \ 0 \leq i \leq n-1$, é abeliano, segue da Proposição 1.2 e por indução que $G^{(i)} \subset G_i$, $1 \leq i \leq n$. Daí obtemos, em particular, que $G^{(n)} = \{1\}$.

Reciprocamente, suponhamos que existe um inteiro positivo n tal que $G^{(n)} = \{1\}$. Então, é fácil ver que

$$G^{(0)} \supset G^{(1)} \supset G^{(2)} \supset \ldots \supset G^{(n)} = \{1\}$$

é uma série subnormal abeliana para G. ■

Definição 1.4. O comprimento da série abeliana em G é chamado de *comprimento derivado* de G. Disto resulta que, um grupo G tem comprimento derivado 0 se, e somente se, tem ordem 1. Temos também que os grupos com comprimento derivado no máximo 1 são justamente os grupos abelianos.

Vale ressaltar algumas propriedades elementares dos grupos solúveis, como o fato de que a classe dos grupos solúveis é fechada para subgrupos, imagens homomórficas, quocientes e extensões de seus membros e também que o produto de dois subgrupos normais solúveis de um grupo é solúvel.

Definição 1.5. Um grupo G é chamado *nilpotente* se possui um série central.

Naturalmente, um grupo nilpotente de classe 0 tem ordem 1, enquanto os grupos nilpotentes de classe no máximo 1 são os abelianos. Obviamente, os grupos nilpotentes são também solúveis. Um exemplo de um grupo solúvel que não é nilpotente é o grupo S_3, pois este tem centro trivial.

Proposição 1.5. Seja G um grupo nilpotente e $1 = \xi_0 \leq \xi_1 \leq \ldots \leq \xi_n = G$ uma série central em G. Então:

(i) $\gamma_i(G) \leq \xi_{n+1-i}$, para $i = 1, \ldots, n+1$;

(ii) $\xi_i \leq \zeta_i(G)$, para $i = 0, \ldots, n$;

(iii) As séries centrais inferior e superior tem o mesmo comprimento.

Demonstração:
(i) Vamos mostrar por indução, note que para $i = 1$ temos $\gamma_1(G) = \xi_n = G$. Para $i \geq 1$ observe que $\xi_{n+1-i}/\xi_{n-i} \leq Z(G/\xi_{n-i})$ resulta que $[\xi_{n+1-i}, G] \leq \xi_{n-i}$. Assim, supondo por indução que vale para i, ou seja, $\gamma_i(G) \leq \xi_{n+1-i}$, obtemos:

$$\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G] \leq [\xi_{n+1-i}, G] \leq \xi_{n-i}.$$

(ii) A demonstração segue análoga ao item anterior.
(iii) Tome G nilpotente de classe c, então a série central dada pode ser escrita como $1 = \xi_0 \leq \xi_1 \leq \ldots \leq \xi_c = G$ e qualquer outra série central em G tem comprimento no mínimo c. Daí, pelo item (i) temos que $\gamma_{c+1}(G) \leq \xi_{n-c} = \xi_0(G) = 1$, e assim a *série central inferior* tem comprimento c, e por (ii), temos $\xi_c = G \leq \zeta_c(G)$, o que implica que $\zeta_c(G) = G$. Logo a *série central superior* tem comprimento c. ■

Teorema 1.2 (P. Hall). *Se G é um grupo nilpotente e $1 \neq N \lhd G$, então $N \cap Z(G) \neq 1$*

Demonstração: Sendo G um grupo como acima temos que $G = \zeta_c(G)$ para algum c, então existe um menor inteiro i tal que $N \cap \zeta_i(G) \neq 1$. Agora, observe que $[N \cap \zeta_i(G), G] \leq N \cap \zeta_{i-1}(G) = 1$ e $N \cap \zeta_i(G) \leq N \cap \zeta_1(G)$. Logo $N \cap \zeta_1(G) = N \cap \zeta_i(G) \neq 1$ ■.

Os grupos nilpotentes apresentam uma infinidade de resultados revelantes, mas por conveniência nós estaremos citando alguns brevemente, são os seguintes: todos os p-grupos finitos são nilpotentes, a classe dos grupos nilpotentes é fechada para subgrupos, imagens e produtos diretos, subgrupos normais minimais de grupos nilpotentes estão contidos no seu centro, subgrupos normais maximais abelianos de grupos nilpotentes são seus centralizadores. Entretanto, a classe dos grupos nilpotentes geralmente não são fechadas para extensões.

1.3 Grupos Metabelianos e Grupos de Engel

Nesta seção definimos e mostramos alguns resultados para grupos de Engel e metabelianos.

Definição 1.6. Um grupo G é dito *metabeliano* se existe um subgrupo normal $N \trianglelefteq G$ tal que N e G/N sejam abelianos.

Desta definição decorre que todo grupo abeliano é metabeliano e grupos nilpotentes de classe no máximo 3 também são metabelianos.

Lema 1.1. *G é metabeliano se, e somente se, $G^{(2)} = G'' = \{1\}$.*

Demonstração: Suponha que G é metabeliano, daí temos que existe um $N \lhd G$ tal que G/N é abeliano, assim, pela Proposição 1.2, $G' \subseteq N$, e como N é abeliano, obtemos $G'' = [G', G'] \leq N' = 1$.

Por outro lado, se $G'' = \{1\}$, então G' é abeliano e como G/G' é abeliano segue que G é metabeliano ■

A classe dos grupos metabelianos é fechada para subgrupos, de fato, pois trivialmente sendo $H \subset G$ e G é metabeliano obtemos $H'' \subset G''$ e com $G'' = 1$ segue que H é metabeliano.

Uma vez que G' é gerado por todos comutadores $[x, y]$, $x, y \in G$, G é metabeliano se, e somente se, satisfaz a lei $[[x, y], [u, v]] = 1$. Falamos com mais detalhe desta lei na Seção 1.4.

Proposição 1.6. *Se G é metabeliano e $\varphi : G \to K$ é um homomorfismo, então $\varphi(G)$ é metabeliano.*

Demonstração: Suponha G um grupo metabeliano e seja φ uma aplicação como acima. Note que $\varphi(H)' = \varphi(H')$ para qualquer grupo H. Logo, $\varphi(G)'' = \varphi(G')' = \varphi(G'')$. Mas, como G é metabeliano temos que $G'' = \{1\}$, e assim, $\varphi(G)'' = \varphi(1) = 1$. Assim pelo Lema 1.1, $\varphi(G)$ é metabeliano. ■

Definição 1.7. Um grupo é 3-*metabeliano* se todos os seus subgrupos 3-gerados são metabelianos, onde subgrupos 3-gerados são os subgrupos gerados por três elementos do grupo.

Teorema 1.3 (Macdonald)**.** *Um grupo é* 3-*metabeliano se, e somente se, satisfaz à lei* $[[x, y], [x, z]] = 1$.

Demonstração: Se a, b, c e d são palavras em três variáveis x, y, z então, manipulando as propriedades de comutadores, pode-se concluir que $[[a, b], [c, d]]$ é um produto de conjugados de comutadores da forma $[[x, y]^u, [x, z]^v]$. Assim, G satisfaz a lei $[[x, y]^u, [x, z]^v] = 1$ se, e somente se, G é 3-metabeliano. Por outro lado, se G satisfaz $[[x, y], [x, z]] = 1$, substituindo y por yuv^{-1} segue que $[[x, yuv^{-1}], [x, z]] = [[x, uv^{-1}][x, y]^{uv^{-1}}, [x, z]] = [[x, y]^{uv^{-1}}, [x, z]] = 1$ e, assim, G é 3-metabeliano se, e somente se, satisfaz a lei $[[x, y], [x, z]] = 1$. ■

Teorema 1.4 (Macdonald)**.** *Seja G um grupo* 3-*metabeliano. Então G satisfaz às leis:*

(i) $[[x, y], [u, z]]^2 = 1$;

(ii) $[[x, y, z], [u, v]] = 1$.

Demonstração: Pelo lema anterior temos que G satisfaz à lei $[[x,y]^u,[x,z]^v] = 1$. Uma vez que $[[xu,y],[xu,z]] = [[x,y]^u[u,y],[x,z]^u[u,z]] = 1$, usando isto, a expansão de $[[xu,y],[xu,z]] = 1$, as propriedades de comutadores e o fato de G ser um grupo 3-metabeliano, temos:

$$\begin{aligned} [[x,y]^u[u,y],[x,z]^u[u,z]] &= \big[[x,y][x,y,u][u,y],[x,z][x,z,u][u,z]\big] \\ &= [[x,y][x,y,u],[u,z]]^{[u,y]} \cdot [[x,y][x,y,u],[x,z][x,z,u]]^{[u,z][u,y]} \\ &\quad \cdot [[u,y],[u,z]] \cdot [[u,y],[x,z][x,z,u],[u,z]]^{[u,z]} \\ &= [[x,y],[u,z]] \cdot [[u,y],[x,z]] = 1. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Assim, usando (1.1) e a hipótese sobre G, segue que

$$[[x,y],[u,z]] = [[u,y],[x,z]]^{-1} = [[y,u],[z,x]] = [[y,x],[z,u]],$$

por outro lado, $[[x,y],[u,z]] = [[z,x],[y,u]] = [[z,u][y,x]] = [[u,z],[x,y]]$.
Logo,

$[[x,y],[u,z]]^2 = 1$, e assim, demonstramos o item (i).

Para mostrarmos o item (ii), usando (1.1) temos,

$$[[x,y],[u,z]] = [[x,z],[u,y]] \tag{1.2}$$

e ao substituir x por xv em (1.2), segue que

$$\begin{aligned} [[xv,y],[u,z]] &= [[xv,z],[u,y]] \\ [[x,y]^v[v,y],[u,z]] &= [[x,z]^v[v,y],[u,y]] \\ [[x,y][x,y,v],[u,z]]^{[v,y]} &= [[x,z][x,z,v],[u,y]]^{[v,z]}, \end{aligned}$$

e, como $[x,y,v]$ comuta com $[v,y]$ e $[x,z,v]$ comuta com $[v,z]$,

$$[[x,y][x,y,v],[u,z]^{[v,y]}] = [[x,z][x,z,v],[u,y]]^{[v,z]}],$$

e, neste caso, pela bilinearidade válida na operação, temos que

$$[[x,y],[u,z]^{[v,y]}] \cdot [[x,y,v],[u,z]^{[v,y]}] = [[x,z],[u,y]^{[v,z]}] \cdot [[x,z,v],[u,y]^{[v,z]}]$$

$$[[x,y],[u,z]]^{[v,y]} \cdot [[x,y,v],[u,z]^{[v,y]}] = [[x,z],[u,y]]^{[v,z]} \cdot [[x,z,v],[u,y]^{[v,z]}],$$

e como G é 3-metabeliano, podemos trocar y por z em $[[x,y],[u,z]]$ e, neste caso, vale a bilinearidade entre os comutadores envolvidos, usando isto e a comutatividade dos elementos $[v,y]$ e $[u,y]$, temos então

$$[[x,y,v],[u,z]] = [[x,z,v],[u,y]]$$

e, novamente por (1.2), podemos concluir que

$$[[x, y, z], [u, v]] = [[x, z, y], [u, v]].$$

Portanto, pela identidade de Jacobi, segue-se que $[[y, z, x], [u, v]] = 1$, resultando assim que grupos 3-metabelianos satisfazem à lei $[3, 2] = 1$. ■

Observação 1.1. Se G é um grupo 3-metabeliano então, usando as propriedades de comutadores é possível constatar que G satisfaz a Identidade de Jacobi [4] Em 1957, B.H.Neumann foi o primeiro a encontrar um exemplo de um grupo 3-metabeliano que não é metabeliano.

Definição 1.8. Um grupo é 2-*metabeliano* se todos os seus subgrupos 2-gerados são metabelianos. Entenda-se subgrupos 2-gerados como subgrupos gerados por dois elementos do grupo.

Ao contrário dos grupos 3-metabelianos, a classe dos 2-metabelianos é extremamente grande. Em particular, temos que grupos 3-metabelianos são 2-metabelianos, mas a recíproca não é necessariamente válida. Exemplos de grupos 2-metabelianos que não são 3-metabelianos foram dados por C.K Gupta (1968) e B.H Neumann (1957).

Teorema 1.5 (Higman). *Um grupo é* 2*-metabeliano se, e somente se, satisfaz a lei* $[[x, y], [x, y^{-1}]] = 1$*, para todos* $x, y \in G$.

A demostração deste teorema é muito extensa e não demonstraremos aqui. Uma demonstração pode ser encontrada em Gupta [6], pag.17 ou em Higman [9].

Definição 1.9. Um elemento g de um grupo G é chamado *elemento de Engel* se para cada $x \in G$ existe um $n \geq 0$ tal que $[g, {}_n\, x] = 1$.

Proposição 1.7. Seja $g \in G$ um elemento de Engel, então $[g^{-x}, {}_n\, g] = 1$ se, e somente se, $[x, {}_{n+1}\, g] = 1$ para cada $x \in G$.

Demonstração: Tome x e g sendo elementos de G. Usando as identidades fundamentais de comutadores, obtemos:

$$\begin{aligned} [x, {}_{n+1}\, g] &= [[x, g], {}_n\, g] \\ &= [[g^{-1}, x]^g, {}_n\, g] \\ &= [[g^{-1}, x], {}_n\, g]^g \\ &= [gg^{-x}, {}_n\, g]^g \\ &= [g^{-x}, {}_n\, g]^g \end{aligned}$$

[4] $[x, y, z][y, z, x][z, x, y] = 1$. A recíproca também é válida e foi mostrada por Bachmuth-Lewin (1964).

Assim, ambas as partes do resultado seguem demonstradas. ■

Definição 1.10. Um grupo G é chamado de *n-engeliano* se para todo $x, y \in G$ existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $[x,\, _n y] = 1$.

Pela definição temos que grupo nilpotentes de classe no máximo n são n-engelianos, mas a recíproca não é válida.

Teorema 1.6 (Levi). *Seja G um 2-grupo de Engel, i.e, $[x, y, y] = 1$, para todos $x, y \in G$. Dados x, y, z, w, elementos de G, valem:*

(i) $\langle x^G \rangle$ *é abeliano;*

(ii) $[x, y, z] = [z, x, y]$*;*

(iii) $[x, y, z]^3 = 1$*;*

(iv) $[x, y, z, w] = 1$*, i.e, G é nilpotente de classe* ≤ 3.

Uma demontração para este teorema pode ser encontrada em Gupta [6], pag 34.

Teorema 1.7. *Seja G um 3-grupo de Engel, i.e, $[x, y, y, y] = 1$. Então G satisfaz as seguintes condições:*

(i) *G é 2-metabeliano;*

(ii) *Todos os subgrupos 2-gerados de G são nilpotentes de classe* ≤ 4*;*

(iii) *G satisfaz às leis* $[x, y, x, y]^2 = 1$ *e* $[x, y^2, y^2, x] = 1$.

Uma demontração para este teorema pode ser encontrada em Gupta [6], pag. 35.

1.4 Variedades de Grupos

Nesta seção introduzimos algumas variedades de grupos associadas a certas leis importantes, as quais estaremos aplicando como resultado para a formulação e desenvolvimento do tema central dessa dissertação. Para isto primeiramente falamos sobre os grupos livres, tópico fundamental para o estudo de variedades.

Definição 1.11. Sejam F um grupo e $X \subset F$. O grupo $F = F(X)$, chama-se *grupo livre* com base X se, para cada grupo G qualquer aplicação $\varphi : X \to G$ pode ser estendida a um único homomorfismo $f : X \to G$. A cardinalidade do conjunto X é chamada de *posto* do grupo livre $F(X)$.

Teorema 1.8 (Nielsen-Schreier). *Se H é um subgrupo de um grupo livre $F(X)$, então H é livre. Suponhamos ainda que F tem posto finito n, então H é finitamente gerado se, e somente se, $j = [F : H] < \infty$.*

Uma demontração para este teorema pode ser encontrada em Robinson [18], pag. 162.

Segue da definição e da existência de grupos livres, que todo grupo é isomorfo a um quociente de um grupo livre. Assim, para cada grupo G existem um grupo livre $F(X)$ e um subgrupo normal $N < F(X)$ tal que $G \cong F(X)/N$.

Nestas condições, $N = \langle R \rangle^F$, o fecho normal de um subconjunto R de G, o par ordenado (X/R) chama-se uma *apresentação* de G. Os elementos de X são chamados *geradores* e os elementos do conjunto R são ditos *relatores* do grupo G e escrevemos $G = \langle X/R \rangle$. Assim, decorre que qualquer grupo G possui uma apresentação.

Definição 1.12. Sejam $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um alfabeto e $X^{-1} = \{x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots\}$. Uma *palavra* em X é uma sequência finita de símbolos em $X \cup X^{-1}$, i.e, é uma sequência da forma $v = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_r^{\varepsilon_r},\ \ x_i \in X,\ \ \varepsilon_i = \pm 1,\ r > 0$. O produto de duas palavras é formado por justaposição e a inversa da palavra v é a palavra $v^{-1} = x_r^{-\varepsilon_r} \ldots x_1^{-\varepsilon_1}$.

Sejam $F = F(X)$ um grupo livre com conjunto de geradores livres $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, G um grupo e $v = v(x_1, x_2, \ldots, x_r) \in F$. Nestas condições v pode ser visto como uma função $v : \underbrace{G \times G \times \ldots G}_{r} \longrightarrow G$. A imagem de uma r-upla $(g_1, \ldots, g_r)$ por esta função é dita um valor de u em G. Para um subconjunto V de $F(X)$ os valores assumidos por seus elementos em G é, em geral, um subconjunto não trivial de G.

Definição 1.13. Chamamos de *subgrupo verbal de G relativo a V* o subconjunto gerado por todos os valores $v \in G$ e denotamos por $V(G)$. Isto é,

$$V(G) = \langle v(g_1, \ldots, g_r)/v \in V, g_i \in G \rangle .$$

Por exemplo, se $V = \{[x_1, x_2]\}$, então $V(G) = G'$, o subgrupo derivado de G.

Proposição 1.8. Todo subgrupo verbal é característico em G.

Demonstração: Considere $\alpha : G \to H$, então $(v(g_1, \ldots, g_r))^\alpha = v(g_1^\alpha, \ldots, g_r^\alpha)$, o que mostra que $(V(G))^\alpha \leq V(H)$. Daí, em particular, considerando $\alpha \in Aut\ G$ temos que os subgrupos verbais são totalmente invariantes. A recíproca[5] só é válida para grupos livres. ■

Desta proposição resulta que todo subgrupo verbal de um grupo G é sempre normal em G $(V(G) \lhd G)$.

[5]Foi demonstrada por B.H Neumann.

Dizemos que o elemento v é uma *identidade* ou *lei* em G se todos os valores de v em G são triviais, ou seja, $v \equiv 1$

Definição 1.14. A classe[6] de todos os grupos nos quais valem as leis $v \equiv 1$, para todo $v \in V$ se chama *variedade* determinada por V.

Claramente, temos como exemplo de variedades a classe de todos os grupos abelianos ($\{[x, y] = 1\}$), dos grupos solúveis de comprimento n ($\{G^{(n)} = 1\}$), dos metabelianos ($\{G'' = 1\}$), de todos os nilpotentes de classe c ($\{[x_1, x_2, \ldots, x_c, x_{c+1}] = 1\}$); por outro lado, um exemplo de classe de grupos que não é variedade é a classe de grupos cíclicos, pois $C_2 \otimes C_2 \not\approx C_4$, este exemplo pode ser confirmado no próximo teorema.

Teorema 1.9 (Birkhoff). *Uma classe $\mathfrak{X}$ de grupos é uma variedade se, e somente se, ela é fechada aos quocientes, subgrupos e produtos subcartesianos.*

A demonstração da primeira parte é trivial, pois é consequência da definição de variedade. A recíproca do teorema pode ser encontrada, bem detalhada, em H. Neumann [17] ou Robinson[18].

Observação 1.2. Daqui por diante, estaremos investigando grupos pertencentes às variedades associadas com as leis da forma

$$[[x_1, \ldots, x_n], [x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}]] = 1. \tag{1.3}$$

Definição 1.15. Usaremos a notação simplificada de que um grupo G satisfaz à lei $[n, m] = 1$, n e $m \in \mathbb{N}$, quando G satisfazer a equação (1.3). Em particular, pela definição recursiva de um comutador de comprimento n, temos que $[n, m] = 1$ implica $[n + p, m + q] = 1$ para quaisquer números não-negativos p e q.

Em particular, usaremos a notação de que G satisfaz à variedade $\mathfrak{U}_\mathfrak{n}$, quando G satisfazer à variedade associada à lei

$$[x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}] = [x_1, \ldots, x_n, x_{n+2}, x_{n+1}].$$

Mostramos no Capítulo 3 que a variedade $\mathfrak{U}_\mathfrak{n}$ é precisamente igual à variedade associada à lei $[[x_1, \ldots, x_n], [x_{n+1}, x_{n+2}]] = 1$, ou seja, $[n, 2] = 1$.

[6] $\mathfrak{X}$ é uma classe, cujos elementos são grupos, se $\mathfrak{X}$ contém o grupo de ordem 1 e se $G_1 \approx G \in \mathfrak{X} \Rightarrow G_1 \in \mathfrak{X}$.

2

Anel das Séries de Potências Formais

Neste Capítulo, introduzimos a teoria básica necessária de representações dos grupos livres em séries de potências formais, conceitos estes devido a Wilhelm Magnus. As referências para as teorias usadas neste capítulo são de Magnus [15] e Gupta [6]. Quando acharmos pertinente, incluímos as demonstrações dos resultados apresentados.

2.1 Álgebras Associativas Livres

Em álgebra abstrata, o conceito de módulo sobre um anel é a generalização da noção de espaço vetorial, em que, em vez de um corpo, temos um anel como o conjunto de escalares. Assim, um módulo, como o espaço vetorial, é o produto entre elementos de um grupo abeliano com um anel, cuja multiplicação é associativa e distributiva. Álgebras sobre anéis e espaços vetorias sobre um corpo são exemplos de módulos. Nesta seção, expomos alguns destes conceitos e resultados importantes, que podem ser encontrados em Drensky [5].

Definição 2.1. Um espaço vetorial R é chamado *álgebra sobre* K ou K*-álgebra* se é dotado da operação binária $* : R \times R \longrightarrow R$, chamada multiplicação, com as seguintes propriedades:

1. A terna $(R, +, *)$ é um anel, ou seja, para todo $x, y, z \in R$ valem as leis distributivas:
$$(x + y) * z = x * z + y * z,$$
$$x * (y + z) = x * y + x * z,$$
2. Para todo $\alpha \in K$ temos:
$$\alpha * (x * y) = (\alpha * x) * y = x * (\alpha * y).$$

Usualmente, denotamos a multiplicação de R por $\times$, por $\cdot$ ou simplesmente omitimos o sinal. Claramente, a noção de álgebra generaliza conceitos como espaços vetoriais e anéis. Inicialmente não exigimos que $1 \in R$, associatividade e comutatividade de R.

A álgebra R é dita associativa, comutativa ou com unidade conforme for o anel $(R, +, *)$ respectivamente, associativo, comutativo ou com unidade. E assim como em grupos e anéis, o homomorfismo de álgebras é uma função que preserva as operações das respectivas álgebras e as subálgebras definimos analogamente.

Similarmente, introduzimos a noção de *isomorfismos, automorfismo* e *endomorfismos* de R em R e os teoremas usuais relativos a homomorfismos de espaços vetoriais, grupos e anéis se aplicam também nas álgebras.

Definição 2.2. Sejam K um corpo e X um conjunto não vazio. A K-álgebra $K\langle X\rangle$ definida como o K-espaço vetorial com base $\{x_{i_1} \dots x_{i_n}; x_i \in X, n = 1, 2, \dots\}$ com uma multiplicação tal que
$$(x_{i_1} \dots x_{i_m})(x_{j_1} \dots x_{j_n}) = x_{i_1} \dots x_{i_m} x_{j_1} \dots x_{j_n},\ x_{j_l} \in X,$$
chama-se *K-álgebra associativa livre.*

Proposição 2.1. Seja R uma K-álgebra associativa. Então qualquer aplicação $\varphi : X \to R$ pode ser estendida a um único homomorfismo $f : K\langle X\rangle \to R$. Em outras palavras, existe um único homomorfismo $f\colon K\langle X\rangle \to R$ tal que $f(x) = \varphi(x), x \in X$.

Demonstração: Definimos uma função $f : K\langle X\rangle \to R$, vamos mostrar que f é homomorfismo tal que $f(x) = \varphi(x),\ \forall\ x \in X$. Seja
$$\{x_{i_1} \dots x_{i_n}; x_i \in X, n = 1, 2 \dots\}$$
note que,
$$\text{se } m \in X, \text{ então } f(m) = f(x_{i_1} \dots x_{i_n}) = \varphi(x_{i_1}) \dots \varphi(x_{i_n}) \in R.$$

Seja $p = \alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_r m_r \in K\langle X\rangle$, onde $m_j \in X$. Assim podemos definir

$$f(p) = \alpha_1 f(m_1) + \ldots + \alpha_r f(m_r).$$

É fácil verificar que f é homomorfismo bem definido, e assim desta definição temos $f(x) = \varphi(x)$, $\forall\, x \in X$. ■

2.2 As álgebras $A_0(R,r)$, $A_0(R,\infty)$ e $A(R,r)$

Nesta seção trabalhamos com o anel R chamado anel dos coeficientes, R sendo um domínio de integridade com elemento identidade $1(\neq 0)$. Na maior parte deste trabalho, R é considerado como sendo o anel dos inteiros ($\mathbb{Z}$).

As álgebras precisam ser R-módulos com respectiva adição, e na multiplicação valem as leis distributivas. Exigimos também que, para $r_1, r_2 \in R$ e qualquer u, v da nossa álgebra,

$$(r_1 u)(r_2 v) = (r_1 r_2)(uv),$$

e

$$1u = u,$$

onde o produto é feito por justaposição. Um R-módulo com multiplicação satisfazendo as leis distributivas e as propriedade acima é chamado de *R-álgebra*. Observe que, não exigimos a comutatividade na álgebra. Bem como, o conceito de álgebra livre se aplica análogo ao conceito de grupos livres.

Definição 2.3. Denotamos como $A_0(R,r)$ à R-álgebra associativa cujos produtos de potências formais de monômios

$$x_{n_1}^{e_1} x_{n_2}^{e_2} \ldots x_{n_k}^{e_k}, \tag{2.1}$$

$n_j \neq n_{j+1}$, $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \{1, 2, \ldots, r\}$ e $k, e_1, e_2, \ldots, e_k \in \mathbb{Z}_+$, de r incógnitas associativas não comutativas, formam elementos da base com R como anel dos coeficientes.

Na base da ágebra adicionamos o elemento unidade $(= 1)$ que pode ser indentificado como o elemento unidade de R, e por definição será considerado a potência nula de todas as variáveis x_ρ $(\rho = 1, \ldots, r)$ e como monômio vazio. A multiplicação dos elementos da base é definida por justaposição e a multiplicação de somas dos R-múltipos de monômios é definido usando a lei distributiva.

Nesta álgebra, cada elemento pode ser expresso como uma combinação linear (com coeficientes em R) de produtos de potências do tipo (2.1), e por esta razão $A_0(R,r)$ é considerada a *álgebra associativa livremente gerada de posto* r, sendo x_ρ $(\rho = 1, \ldots, r)$ o conjunto de geradores livres. Os conceitos como grau de um elemento da base, termos homogêneos e componentes homogêneas são definidos de modo natural.

Definição 2.4. Chamamos de $A_0(R, \infty)$ a R-álgebra associativa livre gerada por várias indeterminadas enumeráveis $\{y_\rho\}_{\rho \in \mathbb{N}*}$, cujos elementos são somas finitas, tal que cada elemento da álgebra pertence à subálgebra finitamente gerada $A_0(R, r)$ para algum r finito.

A álgebra $A(R, r)$ se origina de $A_0(R, r)$ por admitir somas infinitas. Assim, um elemento v de $A(R, r)$ é escrito na forma de *séries de potências formais nas variáveis não-comutativas*

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \tag{2.2}$$

onde u_n é um elemento homogêneo de grau n pertencente a $A_0(R, r)$. A adição e multiplicação é definida de maneira natural, uma vez que no produto de duas somas infinitas deste tipo somente um número finito de termos em cada soma pode contribuir para a componente de um dado grau no produto.

Definição 2.5. O ideal X gerado por x_ρ $(\rho = 1, \ldots, r)$ em $A(R, r)$ é denominado *ideal fundamental*. Afirmar que um elemento $u \in A(R, r)$ pertence à n-ésima potência de X $(u \equiv 0 \mod X^n)$ é equivalente a afirmar que todas as componentes homogêneas de u são de graus $\geq n$. Se $u \equiv 0 \mod X^n$, para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$, então $u = 0$.

2.3 Aplicação de um Grupo Livre em $A(\mathbb{Z}, r)$

A $\mathbb{Z}$-álgebra associativa $A_0(\mathbb{Z}, r)$ nas variáveis não comutativas $x_1, \ldots, x_r$ consiste de polinômios em $x_1, \ldots, x_r$ com os coeficientes inteiros. Além da adição e multiplicação definidas anteriormente, pode-se considerar a substituição de qualquer elemento por outro; se $P(x_\rho) = x_1 x_2^2 + x_2 x_3 x_1$ e $Q_1(x_\rho)$, $Q_2(x_\rho)$ e $Q_3(x_\rho)$ são elementos quaisquer de A_0 então $Q_1 Q_2^2 + Q_2 Q_3 Q_1$ é um elemento bem definido de A_0. No entanto, para $A(\mathbb{Z}, r)$, a $\mathbb{Z}$-álgebra associativa das séries de potências formais nas variáveis não comutativas com coeficientes inteiros, a substituição só é válida se Q_ρ não tem termo constante. Para mais detalhes, os exemplos podem ser encontrados em Magnus[15], pag. 309.

Lema 2.1. *Sejam* $Q_1(x_\rho), \ldots, Q_r(x_\rho)$ *elementos de* $A(\mathbb{Z}, r)$ *com termo constante nulo. Então a aplicação*

$$x_\rho \to Q_\rho, \qquad \rho = 1, \ldots, r$$

determina um endomorfismo de $A(\mathbb{Z}, r)$.

A demonstração deste lema se baseia em obter o n-ésimo grau das componentes homegêneas da soma, em termos dos componentes homegêneos dos elementos individuais. O mais importante, é que este lema nos permite mostrar que $A(\mathbb{Z}, r)$ contém um grande grupo multiplicativo. E, dentro desse grupo, nós encontramos uma boa representação para o grupo livre de posto r.[7]

Lema 2.2. *O conjunto M de todos os elementos $g \in A(\mathbb{Z}, r)$ com termo constante 1 é um grupo multiplicativo. Mais ainda, se $g = 1 + h$, então:*

$$g^{-1} = \frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 + \ldots + (-1)^n h^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n h^n \tag{2.3}$$

Demonstração: Uma vez que o termo constante de um produto é o produto de termos constantes individuais, M é fechado para a multiplicação. Como a multiplicação em $A(\mathbb{Z}, r)$ é associativa temos que essa propriedade se mantém em M e $1 \in M$. Daí, basta mostrarmos que $g^{-1} \in M$.

Como $g = 1 + h$ e h não possui termo constante, fica claro que:

$$\begin{aligned} (1 + x_1)(1 - x_1 + x_1^2 - x_1^3 + \ldots + (-1)^n x_1^n + \ldots) \\ = (1 - x_1 + x_1^2 - x_1^3 + \ldots + (-1)^n x_1^n + \ldots) \\ + (x_1 - x_1^2 + x_1^3 - x_1^4 + \ldots + (-1)^{n+1} x_1^n) \\ = 1. \end{aligned}$$

Segue do lema anterior que:

$$g.g^{-1} = (1 + h)(1 - h + h^2 - h^3 + \ldots + (-1)^n h^n + \ldots) = 1,$$

uma vez que $g^{-1} \in M$, nós temos o resultado. ■

Teorema 2.1. *Se $A(\mathbb{Z}, r)$ é livremente gerada por $x_1, \ldots, x_r$ então os elementos $a_\rho = 1 + x_\rho$, $(\rho = 1, 2, \ldots, r)$ de $A(\mathbb{Z}, r)$ são geradores de um grupo livre de posto r, para este grupo usamos a notação de $F(r)$. Além disto: $a_\rho^{-1} = 1 - x_\rho + x_\rho^2 - x_\rho^3 + \ldots + (-1)^n x_\rho^n + \ldots$*

Demonstração: Basta mostrarmos que a palavra não vazia reduzida livremente gerada pelos elementos $a_1, \ldots, a_r$ é diferente de 1. Consideramos a palavra

$$w = a_{\rho_1}^{e_1} a_{\rho_2}^{e_2} \ldots a_{\rho_k}^{e_k}, \ e_j \ \text{ e } \ \rho_j \ \text{ inteiros, } 1 \leq \rho_j \leq r, \ j = 1, \ldots, k, \ \text{ e } \ \rho_j \neq \rho_{j+1}.$$

Note que,

[7] A representação de um grupo em termos de séries de potências foi desenvolvida por Kuo - Tsai Chen, 1954.

$$\begin{aligned} a_\rho^n &= (1+x_\rho)^n, \quad x_\rho \in A(\mathbb{Z}, r) \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \binom{n}{s} x_\rho^s \\ &= 1 + nx_\rho + \sum_{s=3}^{\infty} \binom{n}{s} x_\rho^s \\ &= 1 + nx_\rho + h(x_\rho)x_\rho^2, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

onde $h(x_\rho)$ é uma série de potências infinitas em x_ρ. Logo w é dada por:

$$(1 + e_1 x_{\rho_1} + x_{\rho_1}^2 h_1(x_{\rho_1})) \ldots (1 + e_k x_{\rho_k} + x_{\rho_k}^2 h_k(x_{\rho_k})),$$

que contém um único monômio de grau k e sílaba de comprimento k

$$e_1 \ldots e_k x_{\rho_1} \ldots x_{\rho_k}, \quad \text{e como} \quad e_1 \ldots e_k \neq 0,$$

temos $w \neq 1$. ■

Corolário 2.1. Se F é um grupo livremente gerado por x_ρ, então a aplicação

$$\psi : x_\rho \longrightarrow 1 + x_\rho, \ \ \rho = 1, 2, \ldots$$

define um isomorfismo de F dentro do grupo das unidades de $A(\mathbb{Z}, r)$, a esta aplicação chamamos de *Imersão de Magnus.*

A demonstração é análoga à do teorema anterior e pode ser encontrada em Magnus [15].

Teorema 2.2. *Tome $D_n(F)$ como sendo o conjunto dos elementos C_n de $F(r)$ tal que $C_n = 1 + h_n(x_1, \ldots, x_r)$, onde h_né um elemento de $A(\mathbb{Z}, r)$ sem termos de grau menor que n. Então $D_n(F)$ é um subgrupo totalmente invariante de $F(r)$ e o grupo quociente $D_n(F)/D_{n+1}(F)$ é um grupo abeliano livre finitamente gerado.*

Demonstração: Claramente, temos que $D_n(F) \leq F(r)$. A invariância é obvia também, visto que para $b_\rho \in F(r)$, temos $b_\rho = 1 + y_\rho$, onde $y_\rho \in X$, Daí pelo Lema (2.1), temos que a aplicação $x_\rho \longmapsto y_\rho$, $\rho = 1, \ldots, r$, determina um endomorfismo de $A(\mathbb{Z}, r)$.

$$a_\rho \longmapsto b_\rho \Longrightarrow a_\rho^{-1} \longmapsto b_\rho^{-1} \Longrightarrow w(a_1, \ldots, a_r) \longmapsto w(b_1, \ldots, b_r)$$

Assim, pelo Lema 2.2 e se $w(a_1, \ldots, a_r) = 1 + h_n(x_1, \ldots, x_r)$, temos que $w(b_1, \ldots, b_r) = 1 + h_n(y_1, \ldots, y_r) \in D_n(F)$ e, então, $D_n(F)$ é totalmente invariante.

Para mostrarmos que $D_n(F)/D_{n+1}(F)$ é um grupo abeliano livre finitamente gerado, escreva cada elemento C_n de $D_n(F)$ como $C_n = 1+P_n(x_1, \ldots, x_r)+h_{n+1}(x_1, \ldots, x_r)$, onde $P_n(x_\rho)$ é homogêneo de grau n e $h_{n+1}(x_\rho) \in X^{n+1}$. Então, a aplicação

$$C_n \longrightarrow P_n(x_1, \ldots, x_r),$$

é um homomorfismo de $D_n(F)$ sobre um grupo aditivo H_n de polinômios homogêneos de grau n nas variáves não comutativas $x_1, \ldots, x_r$ com coeficientes inteiros. Note que H_n é um grupo abeliano livre finitamente gerado, pois H_n é subgrupo de todos os polinômios de grau n em $x_1, \ldots, x_r$, que é um grupo abeliano livre finitamente gerado (se r é finito).

Temos ainda que o núcleo da aplicação $C_n \longrightarrow P_n(x_\rho)$ é $D_{n+1}(F)$, cujos polinômios é a unidade mais os elementos homogêneos com grau $\geq n+1$. Logo

$$D_n(F)/D_{n+1}(F) \simeq H_n$$

e assim completamos a demonstração. Além disso, claramente temos que a interseção de todos os D_n é a identidade. ■

Corolário 2.2. *Se F_n é o n-ésimo termo na série central inferior para $F(r)$, então $D_n(F) \supset F_n$*[8].

Demonstração: Vamos usar indução sobre n. Para $n = 1$ temos trivialmente que $D_1(F) = F(r) = F_1$.

Afirmação: $\dfrac{D_n(F)}{D_{n+1}(F)} \subset Z\left(\dfrac{F(r)}{D_{n+1}(F)}\right)$

De fato, Tome

$C = 1+P(x_\rho)+h(x_\rho)$, onde C está em $F(r)$ e $P(x_\rho)$ tem termos de graus entre 1 e n

e

$C_n = 1+Q_n(x_\rho)+h'(x_\rho)$, onde C_n está em $D_n(F)$ e $Q_n(x_\rho)$ é homogêneo de grau n,

e ambos $h(x_\rho)$ e $h'(x_\rho)$ estão em X^{n+1}. Então:

$$CC_n = 1 + P(x_\rho) + Q_n(x_\rho) + h''(x_\rho),$$

$$C_nC = 1 + Q_n(x_\rho) + P(x_\rho) + h'''(x_\rho),$$

[8]Na verdade $D_n(F) = F_n$, a recíproca está demonstrada no livro de Magnus[15], pag.337

onde $h''(x_\rho)$ e $h'''(x_\rho)$ não tem termo de grau menor que $n+1$; logo pertencem a X^{n+1}. Assim, CC_n e C_nC são congruentes módulo X^{n+1}. Por outro lado, pelo Lema (2.2), segue que $(CC_n)^{-1}$ e $(C_nC)^{-1}$ são congruentes módulo X^{n+1}. Assim,

$(CC_n)(C_nC)^{-1} \equiv 1 \text{mod} X^{n+1} \Longrightarrow [C_n, C] \subset D_{n+1}$, onde os h_{n+1} não tem elementos de ordem menor que $n+1$. Logo,

$(CC_n)(C_nC)^{-1}D_{n+1}(F) = D_{n+1}(F) \Longrightarrow (CC_n)D_{n+1}(F) = (C_nC)D_{n+1}(F)$, e assim, temos que $C_nD_{n+1}(F) \subset Z\left(\dfrac{F(r)}{D_{n+1}(F)}\right)$. □

Daí, segue que o comutador:

$[D_n(F), F(r)] \subset D_{n+1}(F)$, pois não tem elementos de ordem menor que $n+1$. Usando a hipótese de indução temos que:

$$F_{n+1} = [F_n, F(r)] \subset [D_n(F), F(r)] \subset D_{n+1}(F),$$

e assim segue o resultado. ■

Definição 2.6. Seja W um palavra nos geradores livres $a_\rho = 1 + x_\rho$ de $F(r)$. Então o desvio $\delta(W)$ é definido como $\delta(W) = 0$, se $W = 1$ ou $\delta(W) = u_n$, onde u_n é de grau n, sendo a componente homogênea não nula de menor grau positivo em W.

Lema 2.3. *Sejam U e V palavras $(\neq 1)$ em $a_\rho = 1 + x_\rho$ com*

$$\delta(U) = u_n \ e \ \ \delta(V) = v_m.$$

Então

(i) $\delta(U^l) = lu_n, \ \forall \ l \in \mathbb{Z}$;

(ii) Se $n < m$, então $\delta(UV) = \delta(VU) = u_n$;

(iii) Se $n = m$ e $u_n + v_n \neq 0$, então $\delta(UV) = \delta(VU) = u_n + v_n$;

(iv) Se $n = m$ e $u_n + v_n = 0$, então $UV = 1$ ou $\delta(UV) = \delta(VU)$ está em X^{n+1};

(v) Se $u_nv_m - v_mu_n \neq 0$, então $\delta(U^{-1}V^{-1}UV) = u_nv_m - v_mu_n$;

(vi) Se $u_nv_m - v_mu_n = 0$, então $UV = VU$ ou $\delta(U^{-1}V^{-1}UV)$ está em X^{n+m+1};

(vii) $\delta(U^{-1}VU) = v_m$.

Demonstração:

Para a prova de (i) usamos a expansão binomial $(1+u)^l = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{s}{l} u^s$, onde

$$\binom{s}{l} u^s = \frac{l!}{s!(l-s)!} = \frac{l(l-1)(l-2)...(l-s+1)(l-s)!}{s!(l-s)!} = \frac{l(l-1)(l-2)...(l-s+1))}{s!}.$$

Fazendo indução sobre l, como u está em X fica óbvio que o menor grau dos termos não constantes de $(1+u)^l$ estão contidos precisamente em lu. (ii) e (iii) seguem por multiplicação e da definição; O item (iv) segue de (iii) e da definição; a prova dos itens (v), (vi) e (vii) segue da definição e das seguintes equações:

$$\begin{aligned}
(1+u)^{-1}(1+v)(1+u) &= \left(\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s u^s\right)(1+v)(1+u) \\
&= (1-u+u^2-u^3+\ldots+(-1)u^s)(1+v)(1+u) \\
&= (1-u+u^2-u^3+\ldots+(-1)u^s+v-uv+u^2v-u^3v+\ldots+ \\
&\quad +(-1)u^s v)(1+u) \\
&= (1+v+vu-uv+u^2v-uvu+u^3v-u^3vu+\ldots+(-1)^s u+ \\
&\quad +(-1)u^s vu \\
&= 1+v+[1-u+u^2-u^3+\ldots+(-1)u^s](vu-uv) \\
&= 1+v+\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s u^s(vu-uv).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(1+u)^{-1}(1+v)(1+u) = 1+v+\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s u^s(vu-uv). \tag{2.4}$$

Temos também que

$$\begin{aligned}
(1+u)^{-1}(1+v)^{-1}(1+u)(1+v)-1 &= (1+u)^{-1}(1+v)^{-1}[(1+u)(1+v)- \\
&\quad -(1+v)(1+u)] \\
&= (1+u)^{-1}(1+v)^{-1}(uv-vu) \\
&= \sum_{s,t=0}^{\infty}(-1)^{s+t}u^s v^t(uv-vu).
\end{aligned}$$

Logo,

$$(1+u)^{-1}(1+v)^{-1}(1+u)(1+v) = 1+\sum_{s,t=0}^{\infty}(-1)^{s+t}u^s v^t(uv-vu). \tag{2.5}$$

Da equação (2.5), é claro que o menor grau dos termos não constantes do lado esquerdo da mesma ocorre precisamente em $uv-vu$. Analogamente, da equação (2.4), o menor grau dos termos não constantes do lado esquerdo respectivo ocorre precisamente em v, o que completa a nossa demonstração. ■

Observação 2.1. Se assumirmos que $D_n(F) \subset F_n$, $C_n \subset F_n$ e $C \subset F(r)$, então C e C_n comutam entre si, ou seja, $C_n^{-1}C^{-1}C_nC = 1$ ou $\delta(C_n^{-1}C^{-1}C_nC)$ tem grau no mínimo $n+1$, uma vez que $\delta(C_n)$ tem grau no mínimo n. Assim, em qualquer caso $C_n^{-1}C^{-1}C_nC$ está em $D_{n+1}(F)$ e está também em F_{n+1}.

2.4 Alguns Comutadores em $F(r)$

Nesta seção construímos dois grupos gerados pelos elementos da Z-álgebra de séries de potências formais, satisfazendo algumas condições prévias, com intuito de controlarmos o comportamento dos comutadores infinitos e com isso tirar algumas conclusões importantes para o nosso trabalho.

Seja $A(\mathbb{Z},3) = A(Z,3)$ a Z-álgebra associativa das séries de potências formais nas variáveis não comutativas x, y e z com coeficientes inteiros. Já sabemos que os elementos $1+x$, $1+y$ e $1+z$ geram o grupo multiplicativo $F(3)$; E da mesma forma os elementos $1+x$ e $1+y$ são geradores do grupo multiplicativo $F(2)$.

Definição 2.7. Definimos o comutador $(x,y) = xy - yx$, $\forall\ x,y$ de uma álgebra associativa. Esta composição é chamada *comutador em uma álgebra associativa.* Recursivamente, temos que $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = ((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n)$. As propriedades formais dos parênteses são aplicadas como em grupos. [9]

Note que, qualquer que seja $x_i \in A(Z,r)$,

$$(x_1, x_2) = (1+x_1)(1+x_2) - (1+x_2)(1+x_1),$$

e como,

$$(1+x_1)^{-1}(1+x_2)^{-1}(1+x_1)(1+x_2) - 1 = (1+x_1)^{-1}(1+x_2)^{-1}[(1+x_1)(1+x_2) - (1+x_2)(1+x_1)],$$

$$[1+x_1, 1+x_2] - 1 = (1+x_1)^{-1}(1+x_2)^{-1}(x_1, x_2),$$

$$[1+x_1, 1+x_2] = 1 + \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\ x_1^i\ \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\ x_2^j\ (x_1, x_2),$$

$$[1+x_1, 1+x_2] = 1 + \sum_{i,j=0}^{\infty}(-1)^{i+j} x_1^i x_2^j\ (x_1, x_2), \tag{2.6}$$

$$[1+x_1, 1+x_2] = 1 + (x_1, x_2) + \sum_{i,j=1}^{\infty}(-1)^{i+j} x_1^i x_2^j\ (x_1, x_2), \tag{2.7}$$

pelo *produto de Cauchy.* Observe que, a equação (2.6) é equivalente à equação (2.5), a qual usamos para demonstrar o lema anterior. Além disso, considerando que os elementos x_1 e x_2 pertencem ao ideal X (ver definição 2.5), podemos escrever o comutador (2.6), como

$$[1+x_1, 1+x_2] \equiv 1 + (x_1, x_2) (\text{mod } X^3), \tag{2.8}$$

[9] Já vimos também que existe um relação entre comutadores de grupos e de álgebras associativas.

onde X^3 é o ideal de $A(Z,r)$ gerado pelos monômios de comprimento 3. Mais ainda, de acordo com a conveniência, podemos usar também a seguinte notação

$$[1+x_1, 1+x_2] = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} r_i(x_1, x_2), \tag{2.9}$$

onde $r_1 = 1$ e os graus de r_i como monômios em x, y e z, para $i \geq 2$, são ≥ 1. Para comutadores de três elementos, podemos ver claramente que

$$\begin{aligned}
[1+x_1, 1+x_2, 1+x_3] &= [[1+x_1, 1+x_2], 1+x_3] \\
&= \Big[1 + \sum_{i=1}^{\infty} r_i(x_1, x_2), (1+x_3)\Big] \\
&= 1 + \left(\sum_{i=1}^{\infty} r_i(x_1, x_2), (1+x_3)\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty} r_i' \left(\sum_{i=1}^{\infty} r_i(x_1, x_2), (1+x_3)\right) \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} r_i'', \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

onde os graus de r_i'' são todos ≥ 3.

Proposição 2.2. $[1+x_1, \ldots, 1+x_n] \equiv 1 + (x_1, \ldots, x_n)(\text{mod } X^{n+1})$, onde X^{n+1} é o ideal de $A(Z,r)$ gerado pelos monômios de comprimento $n+1$.

Demonstração: Vamos mostrar por indução sobre $n \geq 2$. Para $k = 2$ já mostramos, agora supomos que vale para $k \leq n$. Então, usando a indução válida sobre 2

$$\begin{aligned}
[1+x_1, \ldots, 1+x_k, 1+x_{k+1}] &= [[1+x_1, \ldots, 1+x_k], 1+x_{k+1}] \\
&\equiv [1 + (x_1, \ldots, x_k)(\text{mod } X^{n+1}), 1+x_{k+1}], \\
&\equiv 1 + ((x_1, \ldots, x_k), x_{k+1}) \text{ mod } X^{k+2}.
\end{aligned}$$

■

Definição 2.8. Sabemos que os elementos $1+x$, $1+y$ e $1+z$ geram um grupo multiplicativo $F(3)$, Agora tome (x_1, x_2) como foi definido, e consideremos que as relações $x_1(x_2, x_3) = 0$ são adicionadas a $F(3)$, para quaisquer monômios $x_i \in A(Z,3), x_i \notin Z$, sempre que os graus dos monômios $x_1x_2x_3$ é ≥ 5. Daí teremos um novo grupo com esta propriedade e o chamamos de H, um elemento qualquer de H pode ser escrito da seguinte forma: $1 + x_i,\ i \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.3. O grupo H pertence à variedade $[3, 2] = 1$.

Demonstração: Usando as equações (2.9), (2.10) e a indução sobre os comutadores de comprimento dois, temos que

$$
\begin{aligned}
[[1 + x_1, 1 + x_2], [1 + x_3, 1 + x_4, 1 + x_5]] &= \big[1 + \sum_{i=1}^{\infty} r_i(x_1, x_2), 1 + \sum_{i=0}^{\infty} r_i''\big] \\
&= 1 + \big(\sum_{i=1}^{\infty} r_i(x_1, x_2), \sum_{i=1}^{\infty} r_i''\big) + \sum_{i=2}^{\infty} r_i'''\big(\sum_{i=1}^{\infty} r_i(x_1, x_2), \sum_{i=1}^{\infty} r_i''\big), \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

pois a operação parênteses em $A(Z, 3)$ é distributiva com relação à adição e qualquer monômio da expressão acima tem graus ≥ 5. ∎

Proposição 2.4. O grupo H não pertence à variedade $[[1+x, 1+y], [1+x, 1+z]] = 1$.

Demonstração: Usando a equação (2.9), temos que

$$
\begin{aligned}
[[1 + x, 1 + y], [1 + x, 1 + y]] &= \big[1 + \sum_{i=1}^{\infty} r_i(x, y), 1 + \sum_{i=1}^{\infty} s_i(x, y)\big] \\
&= 1 + \big(\sum_{i=1}^{\infty} r_i(x, y), \sum_{i=1}^{\infty} s_i(x, y)\big) + \sum_{i=2}^{\infty} r_i''\big(\sum_{i=1}^{\infty} r_i(x, y), \sum_{i=1}^{\infty} s_i(x, y)\big) \\
&= 1 + \big(\sum_{i=1}^{\infty} r_i(x, y), \sum_{i=1}^{\infty} s_i(x, y)\big) \\
&= 1 + (r_1(x, y) + \ldots + r_i(x, y), (s_1(x, y) + \ldots + s_i(x, y)) \\
&\neq 1.
\end{aligned}
$$

onde $r_1 = 1$, $s_1 = 1$, e para $i \geq 2$ os monômios r_i e s_i tem graus no mínimo 2. Daí, os monômios com graus ≥ 5 serão anulados, e pela distributividade da operação parênteses temos que esta soma não se anula totalmente pois tem monômios com grau 4. Portanto, acabamos de mostrar que o grupo H não é um grupo 3-metabeliano.Esta prova é um contra-exemplo também do teorema de Macdonald de que grupos que satisfazem à variedade $[3, 2] = 1$ não são necessariamente 3-metabelianos (ver Teorema 1.3). ∎

Proposição 2.5. O grupo H não satisfaz nenhuma condição finita de Engel.

Demonstração: Tome $1 + x_1$, $1 + x_2$ elementos quaisquer de H, então

$$
\begin{aligned}
[1 + x_1, 1 + x_2, 1 + x_2] &= [[1 + x_1, 1 + x_2], 1 + x_2] \\
&= [1 + \sum_{i=1}^{\infty} r_i(x_1, x_2), 1 + x_2] \\
&= 1 + \big(\sum_{i=1}^{\infty} r_i(x_1, x_2), x_2\big) + \sum_{i=1}^{\infty} r_i'(x_1, x_2)
\end{aligned}
$$

onde r_i e r'_i tem graus ≥ 1, e os monômios resultantes nas variáveis x, y e z tem graus ≥ 3, daí pelo mesmo argumento da demonstração anterior temos que H não satisfaz a condição finita de Engel, pois não encontramos um $n = 2$ que satisfaça a condição da Definição 1.9. ■

Definição 2.9. Agora tomamos os elementos $1 + x$ e $1 + y$ como geradores do grupo multiplicativo $F(2)$, e chamamos de M o grupo gerado por esses elementos com as seguintes relações para os monômios $r \in A(Z, 3)$, com $n > 3$:

(i) Os monômios r de grau $n + k$, $2 \leq k \leq n - 2$, com $r = x_1 \ldots x_{n+k}$, onde cada x_i tem grau 1, satisfazem a seguinte condição

$$r = x_1 \ldots x_{n+k} = x_{\varphi(1)} x_{\varphi(2)} \ldots x_{\varphi(k)} x_{k+1} \ldots x_n x_{\psi(n+1)} \ldots x_{\psi(n+k)},$$

para toda permutação φ de $\{1, \ldots, k\}$ e toda permutação ψ de $\{n+1, \ldots, n+k\}$;

(ii) Os monômios r de grau $\geq 2n - 1$ tais que $r = r_1 r_2 r_3$ em termos dos elementos r_i de graus ≥ 1, satisfazem a relação $r_1(r_2, r_3) = 0$.

Proposição 2.6. Para qualquer $1 + x_i \in M$, para $i \geq 2$ temos que

$$[1 + x_1, \ldots, 1 + x_n] = 1 + (x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=2}^{\infty} s'_i(x_1, x_2) s''_i,$$

onde s'_i e s''_i são monômios nas variáveis x e y, cada termo da soma tem grau no mínimo $n + 1$, e o grau de cada s'_i é no mínimo 1.

Demonstração: já mostramos que vale para $n = 2$, vamos usar a hipótese de indução sobre n, então

$$\begin{aligned}
[1 + x_1, 1 + x_2, \ldots, 1 + x_n, 1 + x_{n+1}] &= [1 + (x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=2}^{\infty} r'_i(x_1, x_2) r''_i, 1 + x_{n+1}] \\
&= 1 + \big((x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=2}^{\infty} r'_i(x_1, x_2) r''_i, x_{n+1}\big) + \sum_{i=2}^{\infty} r'''_i(x_1, x_2) r^{iv}_i \\
&= 1 + ((x_1, x_2, \ldots, x_n), x_{n+1}) + \big(\sum_{i=2}^{\infty} r'_i(x_1, x_2) r''_i, x_{n+1}\big) + \sum_{i=2}^{\infty} r'''_i(x_1, x_2) r^{iv}_i \\
&= 1 + (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) + \sum_{i=2}^{\infty} r^{v}_i(x_1, x_2) r^{vi}_i,
\end{aligned}$$

onde usamos a indução válida sobre 2 e a distributividade da operação parênteses, resultando assim que, a soma da última expressão acima tem grau no mínimo $n + 2$ e o grau de cada r_i^v é no mínimo 1. Substituindo os r_i^v e r_i^{vi} respectivamente por s_i' e s_i'', temos que

$$[1+x_1,\dots,1+x_{n+1}] = 1+(x_1,\dots,x_{n+1}) + \sum_{i=2}^{\infty} s_i'(x_1,x_2)s_i'',$$

onde s_i' e s_i'' são monômios nas variáveis x e y, cada termo da soma tem grau no mínimo $n+2$ e o grau de cada s_i' é no mínimo 1. ■

Proposição 2.7. O grupo M pertence à variedade $[n,2]=1$, $n>3$.

Demonstração: Para qualquer $1+x_i \in M$

$$[[1+x_1,1+x_2],[1+x_3,\dots,1+x_{n+2}]] = \big[1+\sum_{i=1}^{\infty} r_i(x_1,x_2), 1+\sum_{i=1}^{\infty} r_i'''\big],$$

onde os r_i's estão definidos como em (2.9) e os r_i''' resultantes são monômios com graus $\geq n$. Assim, como em (2.9), temos que

$$\begin{aligned}
\big[1+\sum_{i=1}^{\infty} r_i(x_1,x_2), 1+\sum_{i=1}^{\infty} r_i'''\big] &= 1+\big(\sum_{i=1}^{\infty} r_i(x_1,x_2), \sum_{i=1}^{\infty} r_i'''\big) + \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{iv} \cdot \\
&\quad \cdot\big(\sum_{i=1}^{\infty} r_i(x_1,x_2), \sum_{i=1}^{\infty} r_i'''\big) \\
&= 1+\sum_{i=1}^{\infty} r_i(x_1,x_2)\big(\sum_{i=1}^{\infty} r_i'''\big) - \sum_{i=1}^{\infty} r_i'''\big(\sum_{i=1}^{\infty} r_i(x_1,x_2)\big) \\
&+ \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{iv}\big(\sum_{i=1}^{\infty} r_i(x_1,x_2)\sum_{i=1}^{\infty} r_i''' - \sum_{i=1}^{\infty} r_i'''\sum_{i=1}^{\infty} r_i(x_1,x_2)\big) \\
&= 1+\sum_{i=1}^{\infty} r_i(x_1,x_2)\sum_{i=1}^{\infty} r_i''' - \sum_{i=1}^{\infty} r_i'''\sum_{i=1}^{\infty} r_i(x_1,x_2) \\
&+ \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{iv}\big(\sum_{i=1}^{\infty} r_i(x_1,x_2)\sum_{i=1}^{\infty} r_i''' - \sum_{i=1}^{\infty} r_i'''\sum_{i=1}^{\infty} r_i(x_1,x_2)\big)
\end{aligned}$$

cuja expressão acima pode ser escrita como uma soma

$$1+s_i(x_1,x_2)s_i', \tag{2.11}$$

onde cada s_i ou s_i' tem grau $\geq n$. Tome $s(x_1,x_2)s'$ sendo um termo em (2.11). Uma vez que a lei é simétrica em (i) para φ e ψ, podemos considerar sem perda de generalidade que o grau de $s' \geq n$. Daí, temos dois casos: Se o grau de $s(x_1,x_2) \leq n-2$, pois assim temos que (2.11) tem grau $\leq 2n-2$, então (i) aplica $s(x_1,x_2)s'=0$. Se o grau de $s(x_1,x_2) > n-2$, pois assim temos que (2.11) tem grau $> 2n-2$, então por (ii) temos que $s(x_1,x_2)=0$, o que nos dá $s(x_1,x_2)s'=0$. Assim $[[1+x_1,1+x_2],[1+x_3,\dots,1+x_{n+2}]] = 1+s_i(x_1,x_2)s_i' = 1$, logo M satisfaz $[n,2]=1$. ■

Proposição 2.8. Para qualquer elemento de M, temos que

$$[1+x, 1+y, \ {}_{(n-3)}1+w] = 1 + \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-3}{k} (-1)^k w^k (x,y) w^{n-3-k}, \tag{2.12}$$

Para cada $w = x$ ou $w = y$.

Demonstração: Vamos mostrar por indução sobre $n \geq 4$. Note que para $n = 4$, temos que
Sendo $w = x$,

$$\begin{aligned}
[1+x,1+y,1+x] &= \big[\underbrace{1+\sum_{i,j=0}^{\infty}(-1)^{i+j}\ x^i y^j (x,y)}_{=v}, 1+x\big] \\
&= [1+v, 1+x] = 1 + \sum_{s,t=0}^{\infty} (-1)^{s+t}\ v^s x^t (v,x) \\
&= 1 + \sum_{s,t=0}^{\infty} (-1)^{s+t}\ v^s x^t (vx - xv) \\
&= 1 + \sum_{s,t=0}^{\infty} (-1)^{s+t}\ v^s x^t vx - \sum_{s,t=0}^{\infty} (-1)^{s+t}\ v^s x^t xv \\
= 1 + \sum_{s,t=0}^{\infty} (-1)^{s+t} & \left(\sum_{i,j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} x^i y^j (x,y)\right)^s x^t \left(\sum_{i,j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} x^i y^j (x,y)\right) x \\
- \sum_{s,t=0}^{\infty} (-1)^{s+t} & \left(\sum_{i,j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} x^i y^j (x,y)\right)^s x^t x \left(\sum_{i,j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} x^i y^j (x,y)\right) \\
&= 1 + ((x,y),x) + h(x,y),
\end{aligned}$$

onde os graus de $h(x,y) \geq 4$. Temos que os monômios $((x,y),x)$ são resultantes de $i,j,s,t = 0$ simultâneamente, e para os índices $i,j,s,t \geq 1$ aparecem os monômios com graus ≥ 6, sendo todos estes cancelados pelas condições (i) e (ii), e para os índices i,j,s,t iguais a zero ou 1 não simultanemante são cancelados também, resultando

$$[1+x,1+y,1+x] = 1 + ((x,y),x),$$

que pode ser escrito como

$$[1+x,1+y,1+x] = 1 + \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} (-1)^k x^k (x,y) x^{1-k},$$

Satisfazendo então, o que queríamos

$$[1+x,1+y, \ {}_{(n-3)}1+w] = 1 + \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-3}{k} (-1)^k w^k (x,y) w^{n-3-k}, \ w = x.$$

Sendo $w = y$, segue analogamente que

$$\begin{aligned}[1+x,1+y,1+y] &= 1+((x,y),y)\\ &= 1+\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}(-1)^k y^k (x,y) y^{1-k}\\ &= 1+\sum_{k=0}^{n-3}\binom{n-3}{k}(-1)^k w^k (x,y) w^{n-3-k},\ w=y.\end{aligned}$$

Agora vamos supor que a proposição vale para n, consideremos $w = x$, então

$$[1+x,1+y,\ {}_{(n-3)}1+w] = 1+\sum_{k=0}^{n-3}\binom{n-3}{k}(-1)^k w^k (x,y) w^{n-3-k}$$

$$[1+x,1+y,\ {}_{(n-3)}1+x] = 1+\sum_{k=0}^{n-3}\binom{n-3}{k}(-1)^k x^k (x,y) x^{n-3-k}$$

$$\begin{aligned}[1+x,1+y,\ {}_{(n-3)}1+x,1+x] &= [1+x,1+y,\underbrace{1+x,\ldots,1+x}_{n-2\ vezes}]\\ &= [1+x,1+y,\underbrace{1+x,\ldots,1+x}_{n-3\ vezes},1+x]\\ &= \left[1+\sum_{k=0}^{n-3}\binom{n-3}{k}(-1)^k x^k (x,y) x^{n-3-k},1+x\right]\\ &= 1+\left(\sum_{k=0}^{n-3}\binom{n-3}{k}(-1)^k x^k (x,y) x^{n-3-k},x\right)+\\ &\quad+\sum_{i=0}^{\infty} r_i\left(\sum_{k=0}^{n-3}\binom{n-3}{k}(-1)^k x^k (x,y) x^{n-3-k},x\right)\end{aligned}$$

onde r_i são monômios com graus ≥ 1. Observe que para monômios com graus $\geq n+2$, os termos serão cancelados por (i) e (ii) da Definição 2.9, e assim temos que

$$[1+x,1+y,\ {}_{(n-3)}1+x,1+x] = 1+\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(-1)^k x^k (x,y) x^{n-2-k}$$

Daí, para $w = y$ a prova segue de forma análoga. ∎

Proposição 2.9. O grupo M não satisfaz $[n-1, n-1] = 1$.

Demonstração: Usando o resultado anterior temos que, para $1+x$ e $1+y \in M$

$$
\begin{aligned}
& [[1+x, 1+y, \underbrace{1+x, \ldots, 1+x}_{n-3 \text{ vezes}}], [1+x, 1+y, \underbrace{1+y, \ldots, 1+y}_{n-3 \text{ vezes}}]] \\
= \; & \Big[1 + \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-3}{k} (-1)^k x^k (x,y) x^{n-3-k}, \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-3}{k} (-1)^k y^k (x,y) y^{n-3-k}\Big] \\
= \; & 1 + \left(\sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-3}{k} (-1)^k x^k (x,y) x^{n-3-k}, \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-3}{k} (-1)^k y^k (x,y) y^{n-3-k}, 1+x \right) \\
& + \text{ termos com graus} \geq 2n-1.
\end{aligned}
$$

Por (ii), os termos de graus $\geq 2n-1$ desaparecem, e por (i), a expressão se reduz em

$$1 + x^{n-3}(x,y)(x,y)y^{n-3} - y^{n-3}(x,y)(x,y)x^{n-3} \tag{2.13}$$

$$= 1 + x^{n-3}(xy - yx)(xy - yx)y^{n-3} - y^{n-3}(xy - yx)(xy - yx)x^{n-3}$$

Por (i), os dois fatores centrais em cada termo de (2.13) ficam inalterados para qualquer permutação. Para o caso em que o termo em (2.13) é o fator yx temos

$$x^{n-3}x.yx.yy^{n-3} - y^{n-3}x.yx.yx^{n-3},$$

e claramente esta expressão não desaparece por (i).

Assim, M não satisfaz $[n-1, n-1] = 1$. ■

Observação 2.2. No próximo capítulo, mostramos um resultado muito importante, definimos variedades associadas às leis da forma $C(2n-2)$ e concluímos que variedades assim implicam em variedades do tipo $[n-1, n-1] = 1$, e neste caso, estamos mostrando também que o grupo M não satisfaz às leis $C(2n-2)$. Para $w = y$ temos também do resultado acima, que M não satisfaz a condição finita de Engel, além disso, se em $F(2)$ adicionarmos a relação que $r = 0$ para qualquer r de grau $\geq n$, o grupo resultante é um grupo nilpotente e satisfaz $C(n)$, mas não satisfaz $[n-1-k, 2+k] = 1$ para $0 \leq k \leq 3$.

3

Algumas Variedades de Grupos Solúveis

Neste Capítulo, manipulamos algumas variedades de grupos associadas às leis da forma $[n,m]=1,\ n,m\in\mathbb{N},$ já definidas anteriormente.

3.1 A variedade $\mathfrak{U}_\mathfrak{n}$

Nesta seção mostramos a equivalência da variedade $\mathfrak{U}_\mathfrak{n}$, ou seja,

$$[x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},x_{n+2}]=[x_1,\ldots,x_n,x_{n+2},x_{n+1}]$$

com a variedade associada à lei $[[x_1,\ldots,x_n],[x_{n+1},x_{n+2}]]=1$, i.e, $[n,2]=1$. O teorema central que demonstramos aqui é o seguinte: Supomos $S=\{s_i\},\ i\in I$ um subconjunto de um grupo G, então:
(a) $[s_i,x,y]=[s_i,y,x]$, para todo $i\in I$ e quaisquer $x,y\in G$ implica $[s,x,y]=[s,y,x]$ para qualquer $s\in S^G$, o fecho normal de S em G;
(b) $[s,x,y]=[s,y,x]$ se, e somente se, $[s,[x,y]]=1$.
Consequentemente, sendo $N\lhd G$, a relação $[z,x,y]=[z,y,x]$ acontece para todo $z\in N$

se, e somente se, $[N, G'] = 1$, onde G' é o grupo derivado de G. Mas, a prova deste teorema depende de três lemas que enunciamos e demonstramos a seguir.

Lema 3.1. *Fixado $z \in G$, se $[z, x, z] = 1$, $x \in G$, então qualquer que sejam $x, y \in G$ temos que $[z, x, y]^{-1} = [x, z, y]$.*

Demonstração: Por hipótese, para qualquer $x \in G$, $[z, x, z] = [[z, x], z] = [z^{-1}z^x, z] = 1$. Assim, da Proposição 1.1, item(ii) temos que $[z^{-1}z^x, z] = [z^{-1}, z]^{z^x}[z^x, z] = [z^x, z] = 1$. Em particular, fazendo $x = xy^{-1}$ para qualquer $y \in G$, $[z^{xy^{-1}}, z] = 1 \Longrightarrow [z^{xy^{-1}}, z]^y = [z^x, z^y] = 1$. O que concluímos que o fecho normal de $z \in G$ é abeliano. Logo,

$$[[z, x], y, [z, x]] = [z^{-1}z^x, y, z^{-1}z^x] = [(z^{-1}z^x)^{-1}(z^{-1}z^x)^y, z^{-1}z^x] = 1.$$

E pelo item (v) da mesma proposição,

$$[z, x, y]^{-1} = [[z, x], y]^{-1} = [[z, x]^{-1}, y] = [x, z, y].$$

■

Lema 3.2. *Fixado $z \in G$, se $[z, x, y] = [z, y, x]$ para quaisquer $x, y \in G$, então $[z, [x, y]] = 1$.*

Demonstração: Da hipótese, $[z, x, z] = [z, z, x] = 1$. Logo, usando as propriedades de comutadores e o lema anterior,

$$1 = [z, x, y][x, z, y] = [z, x, y][z, y, x]^{-1} = [z, x, y][x, [z, y]] = [z, x, y][z, y, x]^{-1},$$

ou seja,

$$1 = [z, x, y][y, z, x],$$

em particular, fazendo $x = x^{-1}z^{-1}$

$$\begin{aligned} 1 &= [z, x^{-1}z^{-1}, y][y, z, x^{-1}z^{-1}] \\ &= zxz^{-1}x^{-1}yxzx^{-1}z^{-1}y^{-1}z^{-1}yzy^{-1}zxyz^{-1}y^{-1}zx^{-1}z^{-1} \\ &= (x^{-1}yxzx^{-1}z^{-1}y^{-1}z^{-1}yzy^{-1}zxyz^{-1}y^{-1})^u, \quad u = zxz^{-1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & x^{-1}yxzx^{-1}z^{-1}y^{-1}z^{-1}yzy^{-1}zxyz^{-1}y^{-1} = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & z^{-1}y^{-1}x^{-1}yxzx^{-1} = y^{-1}x^{-1}z^{-1}yz^{-1}y^{-1}zyz. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Por outro lado, $[z, [x, y]] = z^{-1}y^{-1}x^{-1}yxzx^{-1}y^{-1}xy$. Assim, por (3.1)

$$\begin{cases} [z,[x,y]] &= y^{-1}x^{-1}z^{-1}yz^{-1}y^{-1}zyzy^{-1}xy \\ &= (z^{-1}yz^{-1}y^{-1}zyzy^{-1})^{xy} \end{cases} \tag{3.2}$$

uma vez que $[z,y,z]=[z,z,y]=1$, pelo item (v) da Proposição 1.1, temos que $y^{-1}z^{-1}yz = zy^{-1}z^{-1}y \Rightarrow z^{-1}yz^{-1}y^{-1}zyzy^{-1}=1$. Assim, por (3.2), temos $[z,[x,y]]=1$. ■

Lema 3.3. *Tome $N = < z_i^G,\ i\in I >$, o conjunto do fecho normal dos elementos $z_i\in G,\ i\in I$. Se, para cada $i\in I$,*

$$[z_i,[x,y]]=1,\ \forall\ x,y\in G, \tag{3.3}$$

então para qualquer $z\in N$, $x,y\in G$ temos $[z,x,y]=[z,y,x]$.

Demonstração: Vamos dividir esta demonstração em duas partes, primeiramente vamos mostrar que (3.3) percorrendo todo $z_i\in N$ implica $[z,[x,y]]=1,\ \forall\ z\in N$. Assim, a segunda parte seria a recíproca do lema anterior. Como base estaremos usando os itens da Proposição 1.1

(i) Observe que, $[z^{-1},[x,y]]^z[z,[x,y]]=[z^{-1}z,[x,y]]=1$, $[z,[x,y]]=1 \Longrightarrow [z^{-1},[x,y]]=1$. Daí, para $g\in G$, $[z_i^g,[x,y]]=[z_i,[u,v]]^g=1$, onde $u=gxg^{-1}$ e $v=gyg^{-1}$. Finalmente, se $[z',[x,y]]=[z,[x,y]]=1$, $[z'z,[x,y]]=[z',[x,y]]^z[z,[x,y]]=1$.

Assim, $[z,[x,y]]=1\ \forall\ z\in N$.

(ii) Temos que

$$[z,x,y]=[[z,x],y]=x^{-1}z^{-1}xzy^{-1}z^{-1}x^{-1}zxy; \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} [z,y,x] &= y^{-1}z^{-1}yzx^{-1}z^{-1}y^{-1}zyx \\ &= [y,z][x,z]z^{-1}x^{-1}y^{-1}zyx \\ &= [x,z][y,z]z^{-1}x^{-1}y^{-1}zyx, \end{cases} \tag{3.5}$$

pois, como $[y,z]=(z^{-1})^yz\ \in N$, por (i) temos $[[y,z],[x,z]]=1$, ou seja, estes elementos comutam entre si. Assim, temos que a equação (3.5) é equivalente a

$$[z,y,x]=x^{-1}z^{-1}xzy^{-1}z^{-1}yx^{-1}y^{-1}zyx \tag{3.6}$$

comparando (3.6) com (3.4) segue que o lema será provado se for mostrado que

$$x^{-1}zxy=yx^{-1}y^{-1}zyx,$$

ou seja,

$$(xy^{-1})x^{-1}zxy=(xy^{-1})yx^{-1}y^{-1}zyx,$$

$$xy^{-1}x^{-1}zxy=y^{-1}zyx$$

$$yxy^{-1}x^{-1}zxy = yy^{-1}zyx$$
$$yxy^{-1}x^{-1}zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = 1$$
$$[y,x]z[x^{-1},y^{-1}]z^{-1} = 1$$
$$[x^{-1},y^{-1}]^{-1}z[x^{-1},y^{-1}]z^{-1} = 1$$
$$[[x,y]^{-1},z^{-1}] = 1,$$

o que é verdade por hipótese e por (i), pois $[z,[x,y]] = 1$. ■

Agora, estamos prontos pra enunciarmos e demonstrarmos o teorema.

Teorema 3.1. Considere $S = \{s_i,\ i \in I\}$ um subconjunto de G. Então:

(a) $[s_i,x,y] = [s_i,y,x]$, para qualquer $i \in I$ e $x,y \in G \Longrightarrow [s,x,y] = [s,y,x]$ para todo $s \in S^G$, o fecho normal de S em G, ou seja, o menor subgrupo normal de G contendo S.

(b) $[s,x,y] = [s,y,x]$ qualquer que seja $s \in S^G$ e $x,y \in G$ se, e somente se, $[s,[x,y]] = 1$, para todo $s \in S^G$ e $x,y \in G$.

Demonstração: A demonstração segue imediatamente. Da parte (a), se $[s_i,x,y] = [s_i,y,x]$ então $[s_i,[x,y]] = 1$ pelo Lema 3.2, assim pelo Lema 3.3 temos que $[s,x,y] = [s,y,x]$, $\forall\ s \in S^G$. Finalmente, a parte (b) do teorema é meramente um resultado do Lema 3.2. ■

Corolário 3.1. Seja N sendo um subgrupo normal de G. A equação $[z,x,y] = [z,y,x]$ é satisfeita para todo $z \in N$ e quaisquer $x,y \in G$ se, e somente se, $[N,G'] = 1$.

Demonstração: Consequência direta da parte (b) do teorema, uma vez que $N \lhd G$. ■

Corolário 3.2.

(a) Seja $S^* = \{v(g_1,\ldots), i \in I,\ g_1,\ldots \in G\}$[10], se para todo $s \in S^*$ e quaisquer $x,y \in G$, $[s,x,y] = [s,y,x]$, então $[z,x,y] = [z,y,x]$ para qualquer $z \in V(G)$.

(b) $[z,x,y] = [z,y,x]$ para qualquer $z \in V(G)$ se, e somente se, $[V(G),G'] = 1$.

Demonstração: A parte (a) do corolário é obvia, pois os elementos de G satisfazem a hipótese pra um elemento s de um subgrupo verbal, então vale para $z \in V(G)$. A segunda parte é o corolário anterior, visto que o subrupo $V(G) \lhd G$. ■

[10]Conjunto de palavras em G, rever Seção 1.4.

Corolário 3.3. Considere $\mathfrak{U}_\mathfrak{n}$ [11] como sendo a variedade associada com a lei,

$$[x_1,\dots,x_n,x_{n+1},x_{n+2}] = [x_1,\dots,x_n,x_{n+2},x_{n+1}], \tag{3.7}$$

já referida anteriormente, então $\mathfrak{U}_\mathfrak{n} = \mathfrak{U}_\mathfrak{n}{}'$, onde $\mathfrak{U}_\mathfrak{n}{}'$ é a variedade associada com a lei

$$[[x_1,\dots,x_n],[x_{n+1},x_{n+2}]] = 1.$$

Demonstração: Este corolário é consequência direta do Teorema 3.1 e de seus respectivos corolários, basta tomarmos o elemento s como um comutador de tamanho n, note que satisfaz as exigências das hipóteses. ■

Corolário 3.4. Para qualquer grupo $G \in \mathfrak{U}_3$, o segundo grupo derivado $G'' = [G', G']$ de G fica no centro de G.

Demonstração: Por um resultado de Macdonald [13], G'' fica no centro de G para qualquer $G \in \mathfrak{U}_3{}'$, então usando este resultado e o corolário anterior segue demonstrado que vale para qualquer $G \in \mathfrak{U}_3$. ■

Finalmente, nós temos que para $G \in \mathfrak{U}_\mathfrak{n}$, G' é nilpotente de classe no máximo $n-1$, por (3.7).

3.2 A lei $C(k,\varphi)$

Nesta seção continuamos a investigar os grupos pertencentes às variedades associadas com comutadores estudados na seção anterior, em particular, desejamos trabalhar com possíveis estensões das observações feitas de que cada uma das leis $[2,2] = 1$ ou $[x_1,x_2,x_3,x_4] = [x_1,x_2,x_4,x_3]$ podem ser usadas equivalentemente para definir a variedade de grupos metabelianos.

Definição 3.1. Se um grupo G satisfaz à lei

$$[x_1,x_2,x_3,\dots,x_k] = [x_1,x_2,x_{\varphi(3)},\dots,x_{\varphi(k)}], \tag{3.8}$$

onde φ é alguma permutação de $\{3,\dots,k\}$, então dizemos que G satisfaz $C(k,\varphi)$, mas se G satisfaz $C(k,\varphi)$ para qualquer permutação φ de $\{3,\dots,k\}$, então G satisfaz $C(k)$.

Observação 3.1. Note que, se G satisfaz $C(k,\varphi_1)$ e $C(k,\varphi_2)$ então G satisfaz $C(k,\varphi_1^i)$ e $C(k,\varphi_2^j)$, para todo $i,j \in \mathbb{Z}$, assim, segue que G satisfaz $C(k,\varphi_1\varphi_2^{-1})$. Resultando que G satisfaz $C(k,\varphi)$ para qualquer φ no grupo gerado por φ_1 e φ_2.

[11]Em particular, $\mathfrak{U}_1$ é a variedade dos grupos nilpotentes de classe 2, enquanto $\mathfrak{U}_2$ é a variedade dos gupos metabelianos.

Lema 3.4. *Se G satisfaz $C(k)$, então G satisfaz $C(m)$ para todo $m \geq k$.*

Demonstração: Vamos usar indução sobre m, para $m = k$ é verdade por hipótese. Assumimos que o Lema vale pra $m \leq p-1$, donde G satisfaz $C(p-1)$. Então, G satisfaz $C(p, \varphi_1)$ para a permutação cíclica $\varphi_1 = (3\ 4 \ldots p-1)$ e da expressão $[x_1, \ldots, x_p]$ na forma $[[[x_1, x_2], x_3], \ldots, x_p]$ temos que G satisfaz $C(p, \varphi_2)$ para $\varphi_2 = (p-1\ p)$ também. Assim, completamos a prova de que G satisfaz $C(p)$ um vez que φ_1 e φ_2 geram o grupo de todas as permutações de $\{3, \ldots, p\}$[12]. ■

Observação 3.2. Considere $a \in G$ tal que $a = [x_1, \ldots, x_n]$. Então pelo Corolário 3.3 são equivalentes:

(i) $[a, [x, y]] = 1$, para todos $x, y, \in G$;

(ii) $[a, x, y] = [a, y, x]$, para todos $x, y, \in G$.

Lema 3.5. *Se G é um grupo satisfazendo $[n, 2] = 1, n \geq 2$, e se $G/Z(G)$ satisfaz $C(n+1)$, então G satisfaz $C(n+2)$.*

Demonstração: Pela observação acima e por definição G satisfaz $[n, 2] = 1$, então G satisfaz $C(n+2, \varphi_1)$, onde $\varphi_1 = (n+1\ n+2)$. Temos também que $G/Z(G)$ satisfaz $C(n+1)$ então, em particular, $G/Z(G)$ satisfaz $C(n+1, \varphi_2)$, para $\varphi_2 = (3\ 4\ \ldots n+1)$. Assim G satisfaz

$$[[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}].[x_1, x_2, x_4, \ldots, x_{n+1}, x_3]^{-1}, x_{n+2}] = 1, \tag{3.9}$$

ou seja, G satisfaz a lei da forma $[a.b^{-1}, x] = 1$, $\forall\ x \in G$, onde $a, b \in Z(G')$. Assim, pela Identidade de Witt enunciada na Proposição 1.1 temos que $[a.b^{-1}, x] = [a, x]^{b^{-1}}[b^{-1}, x] = [a, x][b^{-1}, x] = 1$, pois $b^{-1} \in Z(G')$. Como $[b.b^{-1}, x] = [b^{-1}, x]^b[b, x] = [b^{-1}, x][b, x] = 1$. Assim temos que, $[a.b^{-1}, x] = [b.b^{-1}, x] \Longrightarrow [a, x] = [b, x]$, ou seja, G satisfaz $C(n+2, \varphi_2)$, e como por hipótese G satisfaz $C(n+2, \varphi_1)$ segue que G satisfaz $C(n+2)$. ■

Lema 3.6. *Se G é um grupo que satisfaz $[n, m] = 1$ e $[n-1, m+1] = 1$, então $G/Z(G)$ satisfaz $[n-1, m] = 1$. Em particular, se G satisfaz $[n, n-1] = 1$, então $G/Z(G)$ satisfaz $[n-1, n-1] = 1$.*

Demonstração: Tome $c = [x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]$ e $d = [x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}]$. Por hipótese temos que G satisfaz $[c, x, d] = 1$ e $[d, y, c] = 1$, $\forall\ x, y \in G$, pelo item (vi) da Proposição 1.1

$$[c, x, d^c][d, c, x^d][x, d, c^x] = 1,$$

[12] O grupo S_n de todas as permutações de n é dado por $S_n = \langle (1\ 2 \ldots n)(n-1\ n), n \in \mathbb{N} \rangle$.

e como $[c,x,d^c]=1$ e $[x,d,c^x]=1$ temos que $[d,c,x^d]=1$, e por $[d,y,c]=1 \Longrightarrow [d,c,y]=1$, em particular, $[d,c,z]=1$, $\forall\ z\in G \Longrightarrow [d,c]\in Z(G)$. Assim temos que $G/Z(G)$ satisfaz $[d,c]=1$, i.e, $[n-1,m]=1$.

Finalmente, se G satisfaz $[n,n-1]=1$, então pelo resultado acima, $G/Z(G)$ satisfaz $[n-1,n-1]=1$. ■

Lema 3.7. *Se G satisfaz $[n,m]=1$ e $G/Z(G)$ satisfaz $[n-1,m]=1$, então G satisfaz $[m+1,n-1]=1$.*

Demonstração: Por hipótese, temos que G satisfaz $[c,x,d]=1$, $\forall\ x\in G$ e $[[c,d],y]=1$, onde$[c,d]\in Z(G)$, daí pela Identidade de Witt temos que $[x,d,c^x]=1$. O que prova que G satisfaz $[m+1,n-1]=1$. ■

3.3 A Variedade $[3,2]=1$

Nesta seção damos uma atenção especial à variedade $[3,2]=1$ e demonstramos alguns resultados baseados nos lemas vistos na seção anterior.

Teorema 3.2. *Um grupo G satisfaz $[3,2]=1$ se, e somente se, G satisfaz $C(5)$.*

Demonstração: Por hipótese, temos que G satisfaz $[2,3]=1$, daí pelo Lema 3.6 segue que $G/Z(G)$ satisfaz $[2,2]=1$, i.e, $G/Z(G)$ é metabeliano, assim $G/Z(G)$ satisfaz $C(4)$, donde $[x_1,x_2,x_3,x_4]=[x_1,x_2,x_{\varphi(4)},x_{\varphi(3)}]$, onde $\varphi=(3\ 4)$, O que implica pelo Lema 3.5 que G satisfaz $C(5)$.

Reciprocamente, se G satisfaz $C(5)$, então por definição G satisfaz $C(5,\varphi)$ para toda permutação $\varphi\in\{3,4,5\}$, em particular, vale para a permutação $\varphi_1=(4\ 5)$, ou seja, G satisfaz $[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]=[x_1,x_2,x_3,x_5,x_4]$, o que pelo Corolário 3.3 é equivalente a $[x_1,x_2,x_3,[x_4,x_5]]=1$. Assim, temos que G satisfaz $[3,2]=1$. ■

Corolário 3.5. Se G satisfaz $[3,2]=1$, ou equivalentemente, $C(5)$; então G é 2-metabeliano.

Demonstração: Fazendo cálculos simples e utilizando as propriedades de comutadores é fácil verificar que $[[x,y,y^{-1}],[x,y]]=[[y,x][y^{-1},x],[x,y]]=[[y,x][x,y]^{y^{-1}},[x,y]]=[[x,y]^{y^{-1}},[x,y]]=[[y^{-1},x],[x,y]]$. Então por hipótese, temos que G satisfaz $[[y^{-1},x],[x,y]]=1$, e pelo Teorema de Higman, G é 2-metabeliano. ■

Corolário 3.6. G satisfaz $C(n)$, para $n\geq 5$, se e somente se, G satisfaz $C(n,\varphi_i), i=1,2$ para $\varphi_1=(4\ 5\ \ldots n-1)$ e $\varphi_2=(n-1\ n)$.

Demonstração: Se G satisfaz $C(n)$ então, trivialmente, G satisfaz $C(n,\varphi)$, para qualquer $\varphi\in\{3,\ldots,n\}$, em particular para $C(n,\varphi_i), i=1,2$. Reciprocamente, considere

G satisfazendo $C(n, \varphi_i), i = 1, 2$, procedemos por indução sobre n;
(i) Para $n = 5$ é justamente o que já vimos no teorema (3.2);
(ii) Considere $n > 5$, pela Observação 3.1, temos que G satisfaz $C(n, \varphi)$ para qualquer φ no grupo gerado pelas permutações φ_1 e φ_2, ou seja, para qualquer permutação φ tal que $\varphi(3) = 3$. Uma vez que G satisfaz $C(n, \varphi_1)$, $G/Z(G)$ satisfaz $C(n-1, \varphi_1)$ e como G satisfaz, em particular, $C(n, (n-1\ \ n-2))$, então $G/Z(G)$ satisfaz $C(n-1, (n-1\ \ n-2))$. Logo, usando a indução sobre n em $G/Z(G)$, temos que $G/Z(G)$ satisfaz $C(n-1)$, então pelo Lema 3.5, por G satisfazer também $[n, 2] = 1$, concluímos que G satisfaz $C(n)$. ■

Escolhemos por conveniência φ_1 e φ_2 no Corolário 3.6 para que G satisfizesse as exigências da hipótese, entretanto, claramente, temos que φ_1 e φ_2 podem ser substituídas por qualquer outro conjunto de geradores do grupo de permutações de $\{4, \ldots, n\}$.

Observação 3.3. Dos resultados acima podemos tirar algumas conclusões, como o fato de que qualquer grupo nilpotente de classe ≤ 4 satisfaz $C(5)$. Já exibimos também na Seção 2.3 do Capítulo 2, exemplos de grupos que satisfazem $[3, 2] = 1$, mas não são 3-metabelianos nem engelianos, ou seja, não satisfazem à condição finita de Engel. Podemos fazer muito mais conclusões para esta variedade $[3, 2] = 1$ relacionando com grupos metabelianos e nilpotentes com resultados que já vimos.

3.4 A Variedade $[n, 2] = 1, n \geq 3$

Nesta seção, retomamos a investigação da variedade $[n, 2] = 1$, mostramos aqui que o Corolário 3.5 não pode ser generalizado pra $n > 3$, este resultado provém como consequência do teorema central deste trabalho que demonstramos a seguir. Mostramos também que a variedade $[n, 2] = 1$ não implica $C(k)$ para qualquer $k \leq 2n - 2$.

Teorema 3.3 (Principal). *Um grupo G satisfaz à lei $C(n+2)$, $n \geq 2$ se, e somente se, G satisfaz $[n-k, 2+k] = 1$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n-2$.*

Demonstração: Vamos usar a indução sobre n. Para $n = 2$ e $n = 3$ já mostramos, uma vez que G satisfaz $C(4) \Longleftrightarrow G$ satisfaz $[2, 2] = 1$, por definição e G satisfaz $C(5) \Longleftrightarrow G$ satisfaz $[3, 2] = [2, 3] = 1$, pelo Teorema 3.2.

Então, considere $n > 3$; se G satisfaz $C(n+2)$, então pelo Lema 3.3, em particular, G satisfaz $[n, 2] = 1$, e por definição G satisfaz $C(n+2, \varphi)$ para uma permutação φ que escolhemos de tal forma que $\varphi(n+2) = n+2$.

Afirmação: $G/Z(G)$ satisfaz $C(n+1)$
De fato, temos que

$$[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}] = [x_1, x_2, x_{\varphi(3)}, \ldots, x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n+1)}, x_{\varphi(n+2)}]$$

$$[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}] = [x_1, x_2, x_{\varphi(3)}, \ldots, x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n+1)}, x_{n+2}]$$

$$[[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}][x_1, x_2, x_{\varphi(3)}, \ldots, x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n+1)}]^{-1}, x_{n+2}] = 1$$

Note que $[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}][x_1, x_2, x_{\varphi(3)}, \ldots, x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n+1)}]^{-1} \in Z(G)$ e, neste caso, os elementos $[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}]$ e $[x_1, x_2, x_{\varphi(3)}, \ldots, x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n+1)}]^{-1}$ são equivalentes em $G/Z(G)$. O que implica que $G/Z(G)$ satisfaz $C(n+1)$. □

Assumindo a hipótese de indução sobre $G/Z(G)$ temos que $G/Z(G)$ satisfaz $[n-1-k, 2+k] = 1$, para qualquer $k > 0$ tal que $n-1-k \geq 2$. Finalmente, supondo por outra indução que G satisfaz $[n-k, 2+k] = 1$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n-2$, segue do Lema 3.7 que G satisfaz $[n-1-k, 2+k+1] = 1$, o que prova a primeira parte do teorema.

Reciprocamente, tomamos por hipótese que G satisfaz $[n-k, 2+k] = 1$, $\forall\, k \leq n-2$ e assuma como indução que se G satisfaz $[n-1-k, 2+k] = 1$, para qualquer k tal que $0 \leq k \leq n-3$, então temos G satisfazendo $C(n+1)$. Uma vez que, $[n-k, 2+k] = [n-1-k, 2+k+1] = 1$ segue-se pelo Lema 3.6, que $G/Z(G)$ satisfaz $[n-1-k, 2+k] = 1$, então por hipótese, $G/Z(G)$ satisfaz $C(n+1)$, $n-1-k \geq 2$. E assim, pelo Lema 3.5, G satisfaz $C(n+2)$. ■

Observação 3.4. Pelo item (i) da Proposição 1.1, temos que G satisfaz $[n, m] = 1 \Leftrightarrow [m, n] = 1$. Assim, a hipótese do Teorema 3.3, pode ser enunciada da seguinte forma: *G satisfaz $C(n+2)$ se, e somente se, G satisfaz*

$$[n, 2] = [n-1, 3] = \ldots = [n-s, 2+s] = 1, \tag{3.10}$$

onde

$$\begin{cases} 2s &= n-2, \quad \text{se } n \text{ é par,} \\ 2s &= n-3, \quad \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Teorema 3.4. *Se G satisfaz*

$$[n, 2] = [n-1, 3] = \ldots = [n-k, 2+k] = 1, \tag{3.11}$$

para algum $k < s$, então G satisfaz $C(2n-2k-1)$.

Demonstração: Se G satisfaz (3.11), então como $[n-m, 2+m] = 1$ implica $[n-m+p, 2+m+q] = 1$, $p, q \geq 0$ (ver Definição 1.15), assim G satisfaz

$$\begin{aligned} [2n-2k-3, 2] &= [2n-2k-4, 3] = [2n-2k-5, 4] \\ &= [2n-2k-3-s, 2+s],\ s = n-k-3 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Note que, $s = n-k-3 \Longrightarrow 2s = 2n-2k-3-3 \Longrightarrow 2s = a-3$, onde $a = 2n-2k-3$. Daí, segue da Observação 3.4 que G satisfaz $C(a+2)$, $a \geq 2$, com $a = 2n-2k-3$. E, portanto G satisfaz $C(2n-2k-1)$. ■

Em particular, se $k = 0$ temos o seguinte resultado:

Corolário 3.7. Se G satisfaz $[n, 2] = 1, n \geq 3$ então G satisfaz $C(2n-1)$.

Este resultado é interessante, pois provamos a seguir que G nestas condições não satisfaz $C(k)$ para qualquer $k \leq 2n-2$.

Proposição 3.1. Em geral, se G satisfaz $[n, 2] = 1$, não temos necessariamente que G satisfaz $C(k)$ para qualquer $k \leq 2n-2$.

Demonstração: Vamos mostrar com um contra-exemplo: Tome o conjunto M, como já foi definido (ver Definição 2.9) e pelas Proposições 2.7 e 2.9, temos que M é um grupo que satisfaz os dados da hipótese, mas não satisfaz à variedade $[n-1, n-1] = 1$, e como pelo Teorema 3.3 temos $C(2n-2)$ implica $[n-1, n-1] = 1$; assim, M não satisfaz $C(2n-2)$. ■

Retornando à Observação 2.2 temos que, nesta situação, M não satisfaz $[n-1-k, 2+k] = 1, \ 0 \leq k \leq n-3$. Com isso, não podemos generalizar o Corolário 3.5, para $n > 3$.

Observação 3.5. Sobre o Teorema 3.4, este resultado é o melhor possível, pois, se G satisfazendo (3.11) implicasse $C(2n-2k-2)$, para algum $k < s$, então $[n-k, 2] = 1$ implicaria $C(2n-2k-2)$, pois $[n-k, 2] = 1 \Longrightarrow (3.11) \Longrightarrow (3.12)$. Mas isto é absurdo, pois já mostramos que $[n, 2] = 1$ não implica $C(2n-2)$ e, consequentemente, $[n-k, 2] = 1$ não implica $C(2(n-k)-2)$.

Corolário 3.8. Se G satisfaz $C(n, \varphi), n \geq 5$ para todo φ que fixa $3, \ldots, m$, com $m \leq n-2$ ou para qualquer conjunto de geradores do grupo de permutações de $\{m+1, \ldots, n\}, m \geq 3$, então G satisfaz $C(n+m-3)$.

Demonstração: Por hipótese, temos que G satisfaz

$$\begin{cases} \varphi_1 & - \quad \text{permutação que fixa } \{3, \ldots, n-2\} \\ \varphi_2 & - \quad \text{permutação qualquer de } \{4, \ldots, n\} \end{cases}$$

Note que, desta forma G satisfaz $C(n, \varphi)$ para qualquer φ no grupo gerado por $\{\varphi_1, \varphi_2\}$, ou seja, $\varphi(3) = 3$. Observe que esta demonstração segue análoga à demostração do Corolário 3.6, fazendo indução sobre m, uma vez que pelo Lema 3.4, G satisfaz $C(n+m-3, \varphi)$, pois $m \geq 3$. ■

Teorema 3.5. *Seja G um grupo que satisfaz*

$$[n,2]=[n-k_1,2+k_1]=\ldots=[n-k_m,2+k_m]=[n-s,2+s]=1, \tag{3.12}$$

onde $0\leq k_1\leq k_2\leq\ldots\leq k_m\leq s$, com s definido como em (3.10). Então G satisfaz $C(n+1+t)$, onde $t=\max(k_1,k_2-k_1,\ldots,k_m-k_{m-1},s-k_m)$.

Demonstração: Note que, como já vimos, (3.11) $\Longrightarrow$ (3.12), então nós temos que (3.12) implica que G satisfaz:

$$[n+t-1,2]=[n+t-2,3]=\ldots=[2,n+t-1]=1.$$

Assim, pelo Teorema 3.3, temos que G satisfaz $C((n+t-1)+2)=C(n+t+1)$. ■

Finalmente, fazemos um breve comentário na situação de G satisfazendo o seguinte:

$$[x_1,x_2,\ldots,x_n]=[x_1,x_{\varphi(2)},\ldots,x_{\varphi(n)}] \tag{3.13}$$

Teorema 3.6. *G satizfaz (3.13) para toda permutação φ de $\{2,\ldots,n\}$ se, e somente se, G é nilpotente de classe $\leq n-1$.*

Demonstração: Por indução sobre n, para $n=3$ temos que $[x_1,x_2,x_3]=[x_1,x_3,x_2]\Leftrightarrow[x_1,[x_2,x_3]]=1$, pelo Corolário 3.3, e assim G é nilpotente de classe 2. Suponhamos que G satisfaz a hipótese para $n>3$, então G satisfaz $[n-2,2]=1$, pelo Corolário 3.3, e em particular, G satisfaz (3.13) para qualquer permutação φ que fixa n. E assim, como na prova do Lema 3.5, $G/Z(G)$ satisfaz (3.13) substituindo n por $n-1$ para qualquer permutação de $\{2,\ldots,n-1\}$, de modo que, por indução $G/Z(G)$ é nilpotente de classe $\leq n-2$. O que implica que G é nilpotente de classe $\leq n-1$.

A recíproca é trivial, uma vez que resulta da definição de nilpotência. ■

Observação 3.6. O Teorema 3.6 pode ser derivado do Teorema de Macdonald, o qual mostra que um grupo G é nilpotente de classe $\leq n-1$, $n\geq 4$, se (3.13) é verdade para $\varphi=(2\ \ n)$, mas a hipótese do Teorema 3.6, além de ser mais forte, nos permite uma demonstração mais simples, como foi mostrada.

3.5 A Variedade $[n,m]=1,\ n,m\geq 3$

Como já foi referido, a lei $[n,2]=1,\quad n\geq 3$ implica $C(2n-1)$. A lei $[n,1]=1$, isto é, nilpotência de classe n, implica $C(n+1)$ trivialmente. Entretanto, nesta seção mostramos que geralmente a variedade $[n,m]=1,\ n,m\geq 3$ não implica $C(k,\varphi)$ para qualquer k e φ não trivial; para isso é suficiente mostrar que não vale para o caso $[3,3]=1$. Definimos então, um grupo K como abaixo.

Definição 3.2. Chamamos de K o grupo construído de

$$F(2)=\langle 1+x,1+y;x,y\in A(Z,3)\rangle\,,$$

tal que, para monômios de graus ≥ 3, temos $r(r_1,r_2)=0$.

Proposição 3.2. O grupo K satisfaz à lei $[3,3]=1$, mas não satisfaz $[n,2]=1$.

Demonstração: De fato, já vimos que

$$[1+x_1,1+x_2,1+x_3]=1+\sum_{i=0}^{\infty}r'_i,$$

onde r'_i são monômios de graus ≥ 3. O que implica que $[3,3]=\big[1+\sum_{i=0}^{\infty}r'_i,1+\sum_{i=0}^{\infty}r''_i\big]=$ 1, por hipótese.

Por outro lado, para algum n,

$$\begin{aligned}
&[[1+x,1+y,\underbrace{1+x,\ldots,1+x}_{n-2\ vezes}],[1+x,1+y]]\\
&=\big[1+\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(-1)^k x^k(x,y)x^{n-2-k},1+\sum_{i=0}^{\infty}s'_i(x,y)\big]\\
&=1+\big(\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(-1)^k x^k(x,y)x^{n-2-k},\sum_{i=0}^{\infty}s'_i(x,y)\big)\\
&\qquad+\text{ termos com graus}\geq n+2\\
&\neq 1,
\end{aligned}$$

observe que os monômios s'_i tem graus ≥ 1. Por hipótese, os termos com graus $\geq$ $n+2$ desaparecem e usando a expressão (2.12) resulta, em K pela distributividade da operação parêteses, que esta soma não se aula de todo, o que implica que $[n,2]\neq 1$. ■

Lema 3.8. *Se G satisfaz $[3,3]=1$ e $C(n,\varphi)$, $n\geq 4$, onde $\varphi(m)=3$, $m\neq 3$, então cada subgrupo 2-gerado de G satisfaz $C(n+1)$.*

Demonstração: Vamos mostrar por indução.

Se $n=4$, então da hipótese de que $\varphi(m)=3$, $m\neq 3$ temos que G satisfaz $C(4)$ trivialmente, pois teremos única possibilidade para $[x_1,x_3,x_3,x_4]=[x_1,x_3,x_{\varphi(3)},x_{\varphi(4)}]$, e assim, pelo Lema 3.4, temos que G satisfaz $C(5)$. Então todo subgrupo 2-gerado de G também satisfaz $C(5)$.

Para $n\geq 5$, temos dois casos:

Considere $m=n$. Sejam $x,y\in G$ e H o subgrupo gerado por eles. A hipótese

$[3,3]=1$ e $C(n,\varphi)$ implicam, respectivamente, que G satisfaz $[x,y,x_3,\ldots,x_{n-1},[x,y,z]]$ $=1$ e $[x,y,x_3,\ldots,x_{n-1},[x,y]]=1$, para quaisquer $x_i,\ z\in G$, assim temos que

$$[x,y,x_3,\ldots,x_{n-1},[x,y]^z]=1$$

de modo que G satisfaz $[x,y,x_3,\ldots,x_{n-1},w]=1$, para qualquer $w\in H'$. Logo, G satisfaz $[v,w]=1$, para todo $w\in H'$ e todo v no fecho normal dos comutadores $[x,y,x_3,\ldots,x_{n-1}]$ e, similarmente, para qualquer v no fecho normal dos comutadores $[y,x,x_3,\ldots,x_{n-1}]$. Segue então que H satisfaz $[v,w]=1,\ w\in H'$ e $v=[x_1,\ldots,x_{n-1}]$, para qualquer $x_i\in H$. Assim H satisfaz $[n-1,2]=1$ e, uma vez que G satisfaz $[n-2,3]=[n-3,4]=\ldots=[3,n-2]=1$, temos que H também satisfaz esta condição, e assim segue que H satisfaz $C(n+1)$, pelo Teorema 3.3.

Suponha $m<n$, vamos mostrar por indução sobre $n-m$. Suponha que o lema vale para o caso $\varphi(m+1)=3,\ m\neq 2$ e considere $\varphi(m)=3, m\neq 3$. Usemos a indução sobre $H/Z(H)$ de modo que H satisfaz $C(n)$ e, logo, H satisfaz $[n-2,2]=1$. Uma vez que H satisfaz $[n-2,3]=1$, segue do Lema 3.7 que H satisfaz $[n-1,2]=1$ de tal forma que, como na demonstração acima, $[3,3]=1$ implica que H satisfaz $C(n+1)$. ■

Observação 3.7. Temos então que K satisfazendo $[3,3]=1$ não implica que G satisfaz $[n,2]=1$ e adicionando o Lema 3.8 com a hipótese de G satisfazendo $C(n,\varphi)$ nas condições acima, temos que o subgrupo 2-gerado de G satisfaz $C(n+1)$. Estes dois resultados juntos implicam que se $[3,3]=1\Longrightarrow C(n,\varphi)$, então $\varphi(3)=3$.

Teorema 3.7. *A lei $[m,n]=1,\ m,n\geq 3$, não implica $C(k,\varphi)$ para qualquer $k\geq 4$ e qualquer permutação φ não trivial.*

Demonstração: Suponha que $[3,3]=1\Longrightarrow C(m+n+3,\varphi)$, onde $\varphi(m+n+3)=m+3,\ n>0$. Tome K_{m+n} como sendo o grupo obtido de K (ver Definição 3.2) adicionando a relação $r=0,\ \forall$ monômio $r\in A(Z,3)$ de grau $>m+n+3$. Então, as expressões:

$$1+f=[1+x,1+y,\underbrace{1+x,\ldots,1+x}_{m+n\ vezes},1+y]$$

$$1+g=[1+x,1+y,\underbrace{1+x,\ldots,1+x}_{m\ vezes},1+y,\underbrace{1+x,\ldots,1+x}_{n\ vezes}]$$

são iguais em K_{m+n}, de fato, pois pelas próprias condições de K. Por outro lado, usando (2.12), temos que:

$$\begin{aligned}1+f &= [[1+x,1+y,\underbrace{1+x,\ldots,1+x}_{m+n\ vezes}],1+y]\\ &= [1+\sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}(-1)^k x^k(x,y)x^{m+n},1+y]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= & \ 1+\big(\sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}(-1)^k x^k(x,y)x^{m+n-k},y\big)\\
& + \text{termos de graus} \geq m+n+3\\
= & \ 1+\big(\sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}(-1)^k x^k(x,y)x^{m+n-k},y\big),
\end{aligned}
$$

pois os termos de graus $\geq m+n+3$ se anulam.

$$
\begin{aligned}
1+g &= [1+x,1+y,\underbrace{1+x,\dots,1+x}_{m\ vezes},1+y,\underbrace{1+x,\dots,1+x}_{n\ vezes}]\\
&= \big[1+\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k x^k(x,y)x^{m-k},1+y,\underbrace{1+x,\dots,1+x}_{n\ vezes}\big]\\
&= 1+\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-1)^p x^p\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k x^k(x,y)x^{m-k},y\right)x^{n-p}.
\end{aligned}
$$

Assim, usando as relações para K_{m+n}, note que:

$$
\begin{aligned}
(1+f)-(1+g) &= 1+\big(\sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}(-1)^k x^k(x,y)x^{m+n-k},y\big)\\
&\quad -1-\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-1)^p x^p\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k x^k(x,y)x^{m-k},y\right)x^{n-p}\\
&= (x,y)x^{m+n}y-y(x,y)x^{m+n}-\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-1)^p x^p\cdot\\
&\quad \cdot\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k x^k(x,y)x^{m-k}\cdot y\cdot x^{n-p}+\\
&\quad \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-1)^p x^p\cdot y\cdot\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k x^k(x,y)x^{m-k}\cdot x^{n-p}
\end{aligned}
$$

pois, para $k>0$ a primeira soma da igualdade resulta de monômios com graus $>m+n+3$, logo se anulam, resultado as outras soma que temos. No entanto, utilizando a distributividade da operação parênteses e mais uma relação pra K como o fato de que quando $r\in A(Z,3)$ tem grau ≥ 3 temos $r(r_1,r_2)=0$, por cálculos simples temos

$$
\begin{aligned}
(1+f)-(1+g) &= (x,y)x^{m+n}y-y(x,y)x^{m+n}+\big[(1-nx+\binom{n}{2}x^2-\dots)\\
&\quad ((x,y)x^m yx^{n-p}-mx(x,y)x^{m-1}yx^{n-p}+\binom{m}{2}x^2(x,y)x^{m-2}yx^{n-p}
\end{aligned}
$$

$$-\binom{m}{3}x^3(x,y)x^{m-3}yx^{n-p} + \ldots +)\big] + \big[(y - nxy + \binom{n}{2}x^2y$$
$$-\binom{n}{3}x^3y + \ldots +)((x,y)x^{m+n-p} - mx(x,y)x^{m+n-p-1}$$
$$+\binom{m}{2}x^2(x,y)x^{m+n-p-2} + \ldots)\big],$$

$$\begin{aligned}(1+f)-(1+g) &= (x,y)x^{m+n}y - y(x,y)x^{m+n} + \big((x,y)x^m yx^{n-p} \\ &-mx(x,y)x^{m-1}yx^{n-p} + \binom{m}{2}x^2(x,y)x^{m-2}yx^{n-p} \\ &-nx(x,y)x^m yx^{n-p} + nmx^2(x,y)x^{m-1}yx^{n-p} \\ &+\binom{n}{2}x^2(x,y)x^m y \cdot x^{n-p}\big) + \big(y(x,y)x^{m+n-p} \\ &-myx(x,y)x^{m+n-p-1} - nxy(x,y)x^{m+n-p}\big);\ 0 \le p \le n.\end{aligned}$$

Note que, para qualquer p na condição acima não teremos $(1+f)-(1+g)=0$, uma vez que os elementos $x, y \neq 0$, $n > 0$. Assim, temos que nestas condições o grupo K_{m+n} não satisfaz à condição que anteriormente supomos. Agora, para mostrarmos que $C(m+n+3+k,\varphi)$, onde $\varphi(m+n+3) = m+3 > 3$, $n > 0$, não permanece em K_{m+n+3} basta compararmos

$$1+f_1 = [1+f, \underbrace{1+x, \ldots, 1+x}_{k\ vezes}] \ \text{ e } \ 1+g_1 = [1+g, \underbrace{1+x, \ldots, 1+x}_{k\ vezes}];$$

Analogamente, temos que $f_1 = g_1$ não pode acontecer. E assim, provamos teorema. ■

3.6 Grupos do tipo $[m \to n]$

Nesta seção, estaremos expondo, em poucas palavras, um pouco dos estudos de variedades nilpotentes que, em particular, representam também variedades de grupos solúveis. Estaremos relacionando alguns resultados de H. Neumann [17] sobre grupos do tipo $[m \to n]$ e uma proposição de Heineken [8] sobre grupos nilpotentes finitamente gerados aos estudos da lei $C(m)$, vistos anteriormente. Sabemos que, toda classe de nilpotência $\leq c$ segue da lei $[x_1, \ldots, x_{c+1}] = 1$, isto vai nos ajudar em alguns momentos de demonstrações posteriores.

Proposição 3.3 (Heineken). *G é nilpotente de classe n, $n > 2$ se, e somente se, cada subgrupo n-gerado de G é nilpotente de classe $\leq n$.*

A demonstração é simples e pode ser encontrada em [8], não demonstraremos aqui pois, a prova exige outro resultado do Heineken que não citamos.

Definição 3.3. Um grupo G é dito do tipo $[m \to n]$ se cada subgrupo m-gerado de G é nilpotente de classe $\leq n$.

Lema 3.9. *Se A é um grupo metabeliano e $x \in A'$, então*

$$[x, y_1, \ldots, y_n] = [x, y_{\varphi(1)}, \ldots, y_{\varphi(n)}]$$

para qualquer permutação $i \longrightarrow \varphi(i)$, ou equivalentemente, A satisfaz $C(n)$.

Demonstração: A prova deste lema segue de identidades de comutadores, sendo suficiente mostrar que $[x, y_1, y_2] = [x, y_2, y_1]$. Pode ser vista com mais detalhe no livro de H. Neumann [17], pag. 96. ■

Teorema 3.8 (M.F. Newman e J. Wiegold)**.** *Se A é metabeliano, e se para $k = 2$ e $k = 3$ A satisfaz $[k \to k+1]$, então o mesmo é verdade para todos os valores de k.*

Demonstração: É suficiente mostrarmos que todos os comutadores de comprimento $k+2$ cujas entradas são obtidas do conjunto de k variáveis tem valor 1 em A. Se $[x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}, x_{k+2}]$ envolvem somente k variáveis, então assim, no mínimo 1 variável é repetida 3 vezes ou duas variáveis são repetidas duas vezes. Usando o lema anterior, isto nos conduz às seguintes situações:

(i) $[x_1, x_2, x_1, x_1, \ldots] = 1$ em A, pois $[x_1, x_2, x_1, x_1] = 1$ por hipótese de $k = 2$, ie, cada subgrupo 2-gerado é nilpotente de classe 3;

(ii) $[x_1, x_2, x_3, x_3, x_3, \ldots] = 1$ em A, segue pelo mesmo argumento anterior para $k = 3$, visto que por hipótese o comutador de peso 5 é trivial;

(iii) $[x_1, x_2, x_1, x_2, \ldots] = 1$, pois A é metabeliano e segue pelo lema anterior e por (i);

(iv) $[x_1, x_2, x_1, x_3, x_3 \ldots] = 1$, pelo mesmo argumento anterior e por (ii);

(v) $[x_1, x_2, x_3, x_3, x_4, x_4 \ldots] = [u, x_3, x_3, x_4, x_4 \ldots] = 1$ como em (ii).

(vi) $[x_3, x_4, x_1, x_5, x_6, x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots] = [[x_3, x_4, x_1, x_5, x_6], x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots]$, onde $[x_3, x_4, x_1, x_5, x_6]$ pode ser substituído por $a \in A$, daí $[a, x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots] = 1$ segue pelos itens anteriores;

e assim, segue pelos argumentos anteriores, o que queremos mostrar. ■

Newman e Wiegold também deram um exemplo de um grupo metabeliano não nilpotente satisfazendo estas condições, este grupo é denominado o produto entrelaçado de grupos cíclicos de ordem 2 e potência sendo uma classe de índices. Veja com mais detalhe este grupo no livro de H. Neumann [17], pag. 45 e 98.

Lema 3.10. *Seja G como um grupo que satisfaz $C(m+1)$ tal que seja do tipo $[n \to n+k]$, para algum $n \geq 3$, $k \leq n-2$. Então G é do tipo $[p \to q]$, para todo $p \geq n$ e $q = \max(m, p+k)$.*

Demonstração: Tome H como um subgrupo p-gerado de G gerado pelos elementos $h_1, \ldots, h_p$. Queremos mostrar que H é nilpotente de classe $\leq q$, para isso, é suficiente mostrar que todos os comutadores $[x_1, \ldots, x_{q+1}] = 1$, onde x_i estão no conjunto de geradores de H. Tome $c = [x_1, \ldots, x_{q+1}]$ e $N(j)$ sendo o número de repetições de x_j em $\{x_3, \ldots, x_{q+1}\}$. Uma vez que G satisfaz $C(m+1)$ podemos assumir, sem perda de generalidade, que $N(3) \geq N(4) \geq \ldots \geq N(q+1)$. Se $c \neq 1$, então há no mínimo $n+1$ elementos distintos no conjunto $\{[x_1, x_2], x_3, \ldots, x_n, \ldots, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}, x_{n+k+1}, x_{n+k+2}\}$ e, logo, $\geq n$ distintos h_i entre os $n+k \leq 2n-2$ elementos em $\{x_3, \ldots, x_{n+k+2}\}$, k como na hipótese. E como, $N(3) \geq N(4) \ldots$, isto é possível, se e só se, $N(n+k+1) = N(n+k+2) = 1$ de modo que $N(j) = 1$, $j \geq n+k+1$, ou seja, todos estes elementos apareceriam somente uma vez. Nós consideramos dois casos:

a) $N(1) = N(2) = 0$. Então $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+k+2}\}$ contém um número $\geq n+2$ distintos h_i enquanto $\{x_{n+k+3}, \ldots, x_{q+1}\}$ contém $q+1-(n+k+2)$ outros distintos h_i. Assim, como p é o número de geradores de H temos que $p \geq n+2+q+1-(n+k+2)$, e como $k \leq n-2$, segue que $p \geq q-n+3$ ou $q \leq p+n-3$, que contradiz a hipótese sobre q ser o máximo.

b) $N(1) \geq 1$ ou $N(2) \geq 1$. Primeiro, nós notamos que se $N(t) = 1$ para algum $t \geq 3$, podemos assumir que todas ocorrências de x_1 e x_2 em c aparecem em $\{x_1, \ldots, x_{t+1}\}$. Pois, se $N(j) > 1$, $j = 1$ ou 2, então todo x_j aparece em $\{x_1, \ldots, x_t\}$, por hipótese, enquanto se $N(j) = 1$, $j = 1$ ou 2, então o elemento x_i com $N(x_i) = 1$, $i \geq 3$, pode ser permutado tal que $x_j = x_t$ ou $x_j = x_{t+1}$. Uma vez que $N(n+k+1) = 1$, podemos dizer que qualquer x_1 ou x_2 ocorre em $\{x_3, \ldots, x_{n+k+1}\}$. Se $c \neq 1$, então há $\geq n+1$ distintos h_i em $\{x_1, \ldots, x_{n+k+1}\}$ de modo que há $\geq n-1$ distintos elementos h_i ($\neq x_1$ ou x_2) entre $n+k-2 \leq 2n-4$ de elementos em $\{x_3, \ldots, x_{n+k+1}\}$. O que é possível só se $N(n+k) = 1$. Desta forma, podemos assumir que todas as ocorrências de x_1 e x_2 aparecem em $\{x_1, \ldots, x_{n+k+1}\}$, e logo, há $\geq n+1$ distintos h_i entre $\{x_1, \ldots, x_{n+k+1}\}$. Assim, como no caso anterior, $p \geq n+1+q+1-(n+k+1) \geq q-n+3$, o qual contradiz a hipótese sobre q. ■

O Lema 3.10 pode ser aplicado na maioria dos resultados da Seção 3.4. Apresentamos, a seguir, dois teoremas que generalizam o resultado de Newman e Wiegold.

Teorema 3.9. *Seja G um grupo satisfazendo $[4, 2] = 1$ e seja do tipo $[n \to n+k]$, para algum $n \geq 4$, $k \leq n-2$. Então G é do tipo $[p \to p+k]$, para todo $p \geq n$.*

Demonstração: Se G satisfaz $[4,2] = 1$, decorre do Corolário 3.7 que G satisfaz $C(7)$, assim tanto para $n > 4$ ou $n = 4$, $k \geq 1$, a prova é consequência imediata do Lema 3.10. E para $k = 0$, $n = 4$, da Proposição 3.3 temos que G é nilpotente de classe 4. ■

Teorema 3.10. *Seja* G *um grupo satisfazendo* $[3,2] = 1$ *e do tipo* $[n \to n+k]$*, para algum* $n \geq 3$*,* $k \leq n-2$*. Então* G *é do tipo* $[p \to p+k]$*, para todo* $p \geq n$*.*

Demonstração: G satisfaz $[3,2] = 1$ equivale a $C(5)$, então a prova segue análoga à anterior. ■

Referências Bibliográficas

[1] G. Baumslag; F. Levin, On free metabelian products, *Math. Z.* 88, 375-379, (1965).

[2] J.A.G. Brito, *Variedades de p-grupos sem Base Finita*, Dissertação de Mestrado, MAT-UNB, 2008.

[3] K. Chen, Integration in free groups, *Ann. of Math.* 54, 147-162, (1951).

[4] P.M.Cohn, *Free Rings and Their Relations*, Academic Press, London & New York, 1971.

[5] V. Drensky, *Free Algebras and PI-Algebras*, Graduate course in algebra, Springer-Velag, Sofia, 1996.

[6] N. Gupta, *Burnside groups and related topics.* University of Manitoba, Winnipeg, Manitoba, 1976.

[7] M. Hall Jr., *The theory of groups*, Macmillan, New York, 1959.

[8] H. Heineken, Über ein Levisches Nilpotenzkriterium, *Arch. Math.* 12, 176-178, (1961).

[9] G. Higman, Some remarks on varieties of groups, *Quart. J. Math.*(Oxford ser.) 10, 165-178, (1959).

[10] A.G. Kurosh, *The Theory of Groups*, Chelsea publishing company, New York, 1960.

[11] F. Levin, On some varieties of soluble groups I, *Math. Z.* 85, 369-372, (1964).

[12] F. Levin, On some varieties of soluble groups II, *Math. Z.* 103, 162-178, (1968).

[13] I.D. Macdonald, On certain varieties of soluble groups I, *Math. Z.* 76, 270-282, (1961).

[14] I.D. Macdonald, On certain varieties of soluble groups II, *Math. Z.* 78, 175-188, (1962).

[15] W. Magnus, A. Karras; D. Solitar, *Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in terms of Generators and relations*, Dover Ed, 2 ed, New York, 1976.

[16] C.P. Milies, Grupos Nilpotentes: Uma introdução. *Matemática Universitária*, v.34, 55-100, 2003.

[17] H. Neumann, *Varieties of Groups*, Springer-Velag, New York, 1967.

[18] D.J.S. Robinson, *A course in the theory of groups*, 2 ed., Graduate texts in mathematics, Springer-Velag, New York, 1996.

[19] N.R. Rocco, Coleção Atas - SBM - CNPQ - Atas da 9ª Escola de Verão de Álgebra. Coleção Atas num. 17, vol.2, Brasília, 1987.

[20] E. Schenkman, *Group Theory*, D. Van Nostrand Company, Ing., New Jersey, 1965.

[21] L.A. Silva, *Sobre números de Dilworth e p-grupos Metabelianos Delgados*, Dissertação de Mestrado, MAT-UNB, 2006.