



Universidade de Brasília

**Geometria e Topologia
da Fibrção de Hopf**

Geovane Cardoso de Brito

Orientador : Lucas Seco

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Setembro 2020

Departamento de Matemática

Geometria e Topologia da Fibrção de Hopf

por

Geovane Cardoso de Brito *

*Dissertaço apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade
de Brasilia, como parte dos requisitos para obtenço do grau de*

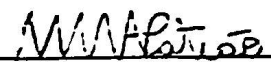
MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 02 de setembro de 2020.

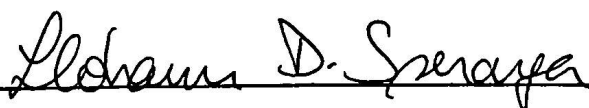
Comissõ Examinadora:



Prof. Dr. Lucas Corque Seco Ferreira - MAT/UnB (Orientador)



Prof. Dr. Mauro Moraes Alves Patrão - MAT/UnB (Membro)



Prof. Dr. Llohann Dallagnol Sperança - UNIFESP (Membro)

* O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboraçõ desta dissertaçõ.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Cg CARDOSO DE BRITO, GEOVANE
 GEOMETRIA E TOPOLOGIA DA FIBRAÇÃO DE HOPF / GEOVANE
CARDOSO DE BRITO; orientador LUCAS CONQUE SECO FERREIRA. -
Brasília, 2020.
 85 p.

 Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) --
Universidade de Brasília, 2020.

 1. Paralelismo de Clifford. 2. Círculos de Hopf. 3.
Grupos de Homotopia. 4. Operador Bordo. I. CONQUE SECO
FERREIRA, LUCAS , orient. II. Título.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus, por todo suporte e cuidado constante em toda a minha vida. Agradeço à minha família; em especial meus pais, Sônia e Joildo, por sempre incentivaram meus estudos, por todo suporte financeiro e afetivo durante esses dois anos, me impulsionando a não desistir

Agradeço aos meus amigos, Igor, Anderson, Henrique e Icaro, por serem os melhores amigos do mundo, por acreditar em mim, acompanhar os meus dramas e não permitir que a distância atrapalhe nossa amizade.

Agradeço ao Magno, por me receber em Brasília na sua casa, logo quando cheguei em Brasília e nem sabia onde ficar, sem ao menos me conhecer, confiou à mim sua casa para que eu pudesse passar um período.

Agradeço ao meu amigo Valter Borges, por todo suporte aqui em Brasília, pela disponibilidade de me ajudar sempre, pelos momentos de risadas, discussões matemáticas e conselhos. Agradeço ao meu amigo Léo(Maninho), por me dar bons conselhos, por se dedicar a me ensinar inglês quando eu mais precisava e pelos papos sobre matemática.

Agradeço ao Alex, por além de ser um bom professor, foi um grande amigo aqui em Brasília com que pude contar em diversas situações.

Agradeço ao Mateus, pelas caminhadas que ajudaram a relaxar em momentos de crise.

Agradeço ao Marcos, por todo apoio, mesmo me tirando a paciência muitas vezes.

Agradeço aos colegas: Marcos, Elaine, Cris, Laís, Camila, Lumena, Jailson, Edna, Murilo, Tharles, Junio, Paulo, Adler, Bruna, Rômulo, Lizeth, Quintino, Alex, Naty, Deivid, Lucas, João, Rodolfo, Vinícius, Katiany, Felipe, Gabrielzinho, Santiago, Pavel, Tiago, Gardel, Eduardo, Vitor, Mayla(B), Cristiele, Dalila, Beatriz, Reyjane, Vitória, Juli, Márcio, Kobayshi.

Agradeço também aos funcionários do Mat, as meninas da secretária, e ao pessoal da portaria: Claudinha e Luan.

Agradeço ao professor Tarcísio por ter despertado em mim uma paixão pela geometria.

Agradeço ao meu orientador Lucas Seco, por aceitar me orientar, pelo incentivo e confiança, por tirar minhas dúvidas, mesmo sendo triviais, muitas das vezes. Por ser compreensível e pela sugestão do tema. Muito Obrigoso mesmo!

Agradeço aos membros da banca pela correções e contribuições.

Agradeço à CAPES e à CNPq pelo financiamento dos meus estudos.

Resumo

O objetivo dessa dissertação é recuperar a intuição geométrica por trás da celebrada fibração de Hopf $h : S^3 \rightarrow S^2$. Com o tempo, isso parece haver sido deixado de lado nas exposições modernas, favorecendo apenas o lado topológico ou algébrico.

No Capítulo 1 investigamos a geometria do Paralelismo de Clifford, usado por Hopf na descoberta das propriedades topológicas de sua fibração.

No Capítulo 2 investigamos a topologia dos grupos de homotopia e da sequência exata longa em homotopia de fibrados, que permite mostrar, dentre outros, que a fibração de Hopf não é homotópica a uma constante.

Palavras-chave: Paralelismo de Clifford, Círculos de Hopf, Grupos de homotopia, Operador bordo.

Abstract

The purpose of this master's thesis is to recover the geometric intuition behind Hopf's celebrated fibration $h : S^3 \rightarrow S^2$. Over time, this seems to have been overlooked in modern exhibitions, which seem to favor only the topological or the algebraic sides.

In Chapter 1 we investigate the geometry of Clifford Parallelism, used by Hopf to discover the topological properties of his fibration.

In Chapter 2, we investigate the topology of the homotopy groups and of the exact long sequence in homotopy of fiber bundles, which allows us to show, among others, that Hopf's fibration is not homotopic to a constant.

Keywords: Clifford Parallelism, Hopf circles, Homotopy groups, Boundary operator.

Conteúdo

0	História	1
0.1	Objetivos	4
0.2	Estrutura	4
1	Geometria da fibração de Hopf	7
1.1	Geodésicas em S^n	7
1.2	Paralelas de Clifford em S^n	13
1.3	Paralelas de Clifford em $S^3 \subset \mathbb{R}^4$	18
1.4	Paralelas de Hopf em $S^3 \subset \mathbb{C}^2$	23
2	Topologia da fibração de Hopf	35
2.1	Grupos de Homotopia	35
2.2	Produto cartesiano e sequência exata curta	50
2.3	Fibrados	53
2.4	Sequência exata longa	58
2.5	$\pi_3(S^2)$	68
	Bibliografia	75

Capítulo 0

História

Duas ideias centrais na topologia são: 1) para investigar a topologia de um espaço X é conveniente considerar o espaço das aplicações contínuas de algum espaço modelo Y em X , 2) para entender esse enorme espaço das aplicações contínuas $Y \rightarrow X$ é conveniente considerar equivalentes, ou homotópicas, duas aplicações que podem ser deformadas continuamente uma na outra: tal deformação contínua entre duas aplicações é chamada de homotopia. No sentido da homotopia, um espaço X é considerado trivial se é contrátil, isto é, sua aplicação identidade é homotópica a uma aplicação constante: nesse caso todas as aplicações $Y \rightarrow X$ são homotópicas a uma aplicação constante. Em meados de 1930 Hopf estava investigando as classes de homotopia de funções contínuas $S^n \rightarrow S^m$ entre esferas, que podem ser considerados os espaços não-triviais mais simples.

No final do século 19 Poincaré já havia chamado atenção para classes de homotopia de caminhos fechados num espaço topológico X , ou seja, de funções contínuas $S^1 \rightarrow X$ partindo do círculo S^1 : intuitivamente elas permitem “pescar buracos em X com laços”. Mais precisamente, fixado pontos base em S^1 e X e considerando funções e homotopias que fixam esses pontos base, as classes de homotopia correspondentes formam um grupo com a operação induzida pela concatenação de caminhos, o chamado *grupo fundamental* $\pi_1(X)$ de X , cujo elemento neutro corresponde à curva constante. As classes de homotopia de funções contínuas entre círculos estão em bijeção com os números inteiros \mathbb{Z} : usando a inclusão $i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$, uma função contínua $f : S^1 \rightarrow S^1$ pode ser vista como uma curva fechada em $i \circ f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$. O número inteiro que corresponde à classe de homotopia de f é o número de voltas que a curva $i \circ f$ faz ao redor da origem. Esse número é conhecido como *winding number* da curva, e fornece um isomorfismo de grupos (veja Exemplo 2.7)

$$\pi_1(S^1) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$$

Note, no entanto, que $\pi_1(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) = 0$, para $n > 1$, ou seja: de \mathbb{R}^3 em diante laços não conseguem caçar esse buraco na origem. Em meados de 1930 Czech generalizou o grupo fundamental para classes de homotopia funções contínuas $S^n \rightarrow X$ partindo de esferas: elas permitem “pescar buracos em X com redes”. Mais precisamente, fixado pontos base em S^n e X e considerando funções e homotopias que fixam esses ponto base, as classes de homotopia correspondentes formam um grupo com uma operação natural induzida pela concatenação de esferas, o chamado n -ésimo grupo de homotopia $\pi_n(X)$ de X , cujo elemento neutro corresponde à aplicação constante (veja Seção 2.1).

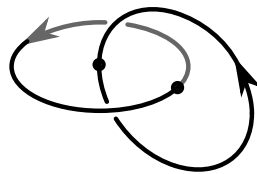
Brouwer já havia introduzido em meados de 1910 a noção de *grau*, que generaliza o winding number para aplicações $S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, e que corresponde a um isomorfismo de grupos

$$\pi_n(S^n) \xrightarrow{\sim} \pi_n(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}.$$

Segue daí, em particular, que S^n não é contrátil (veja Proposição 2.6). Se $k < n$, é possível mostrar que $\pi_k(S^n) = 0$, a ideia é que uma aplicação contínua $S^k \rightarrow S^n$ pode ser aproximado por uma suave, na mesma classe de homotopia, e essa suave não tem como cobrir todo o S^n , assim, uma vez que, pela projeção estereográfica, S^n menos um ponto é o \mathbb{R}^n , que é contrátil, o resultado segue.

O que se pode dizer sobre $\pi_k(S^n)$ para $k > n$? O caso $n = 1$ do círculo S^1 é especial, porque o recobrimento simplesmente conexo de S^1 é a reta \mathbb{R} , que é contrátil, o que acaba implicando que $\pi_k(S^1) = 0$ para $k > 1$. Já as esferas S^n , $n > 1$, são seu próprio recobrimento simplesmente conexo e não são contráteis. O que Hopf se perguntava era sobre $\pi_k(S^n)$ para $k > n > 1$. Seriam triviais como no caso $n = 1$?

O caso não trivial de dimensão mais baixa é o $\pi_3(S^2)$ e a pergunta de Hopf era: seriam todas aplicações contínuas $S^3 \rightarrow S^2$ homotópicas a uma constante? Versado na escola de Klein de geometria não-euclidiana, Hopf conhecia as investigações do paralelismo de Clifford em S^3 , apresentadas por Clifford à Klein em 1873 (veja Capítulo 1). Por volta de 1930, enquanto Hopf andava ao longo do rio Spreen em Berlim pensando em sua pergunta, notou que a fibração $h : S^3 \rightarrow S^2$ de uma família de paralelas de Clifford tem a propriedade de que todas suas fibras são entrelaçadas (veja figura abaixo e Exemplo 1.4) o que poderia impedir



que h seja homotópica a uma constante. Hopf então introduziu o invariante de Hopf $H(f)$ de uma aplicação $f : S^3 \rightarrow S^2$ que, grosso modo, conta o número de voltas que uma fibra de f , imagem inversa de um ponto na imagem, dá ao redor de outra fibra. Ele provou que $H(f)$ depende apenas da classe de homotopia de f e que desce para um homomorfismo de grupos $H : \pi_3(S^2) \rightarrow \mathbb{Z}$. Assim, se h fosse homotópico a uma constante, teríamos $H(h) = 0$. Hopf então provou que $H(h) = 1$ (veja a figura acima), o que prova que h não é homotópico a uma constante. Mais ainda, a existência do invariante de Hopf prova que a classe de homotopia de h é um elemento de ordem infinita em $\pi_3(S^2)$.

Até a descoberta de Hopf, os grupos de homotopia de Czech não haviam ainda chamado a atenção da comunidade matemática, por dois motivos. O primeiro é que $\pi_k(X)$ é imediatamente abeliano para $k > 1$ e esperava-se na época que uma generalização do grupo fundamental não deveria ter essa propriedade. O segundo, mais grave, é que ainda não havia ainda ferramentas adequadas para o cálculo dos $\pi_k(X)$ como as disponíveis para o cálculo do grupo fundamental $\pi_1(X)$ (Teorema de Van-Kampen). A dificuldade é que diferentemente dos caminhos de $\pi_1(X)$, não há uma maneira natural de subdividir o espaço X de modo a subdividir uma aplicação $S^k \rightarrow X$, $k > 1$, em aplicações menores da mesma natureza.

Ainda assim, o grupo de homotopia satisfaz (veja Proposição 2.9)

$$\pi_k(X \times Y) \simeq \pi_k(X) \times \pi_k(Y)$$

o que sugere que uma decomposição do espaço X localmente em produto cartesiano, isto é um fibrado localmente trivial com espaço total X , pode fornecer informação sobre seus π_k . Logo após o impulso dado pela descoberta de Hopf, Hurewicz introduziu uma ferramenta que dá essa informação: a sequência exata longa de homotopia de um fibrado (veja Teorema 2.1). Com essa ferramenta foi possível mostrar que o homomorfismo dado pelo invariante de Hopf é na verdade um isomorfismo, de modo que

$$\pi_3(S^2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$$

e é gerado pela classe de homotopia da fibração de Hopf $h : S^3 \rightarrow S^2$, fortalecendo o resultado de Hopf (veja Teorema 2.2).

Assim, enquanto $\pi_1(S^1)$ conta o número de voltas de uma curva no plano, $\pi_3(S^2)$ conta o número de voltas que uma fibra dá na outra. O fato que $\pi_3(S^2)$ é não trivial, e interessante, foi o pontapé inicial para a teoria de homotopia moderna no século 20, onde os grupos de homotopia desempenham um papel central até os dias de hoje.

A história acima foi adaptada de [9], que conta como essas descobertas topológicas envoltas em geometria foram os primeiros passos da teoria de homotopia moderna. A

presente dissertação trata de parte dos conceitos dessa história. Eles indicam o fato notável que em situações com muita simetria, mesmo a topologia, que envolve formas maleáveis, tende a favorecer formas rígidas.

A fibração de Hopf, publicada em [4], aparece hoje em diversas áreas tais como geometria de variedades flag [11] e física matemática [7].

0.1 Objetivos

O objetivo dessa dissertação é recuperar a intuição geométrica por trás da topologia fibração de Hopf. Com o tempo, isso parece haver sido deixado de lado nas exposições modernas, favorecendo apenas o lado topológico (por exemplo, [2]) ou algébrico (por exemplo, [5]).

0.2 Estrutura

No Capítulo 1 estudamos a geometria do Paralelismo de Clifford, usado por Hopf em sua descoberta. Esse capítulo é essencialmente auto-contido. A principal referência desse capítulo são as Seções 18.8 e 18.9 de [1].

As contribuições da exposição feita nesse capítulo são a demonstração de que os grandes círculos são as geodésicas da esfera usando a equação do sistema massa-mola (Teorema 1.1) e a demonstração de que são duas as paralelas de Clifford usando ideias de geometria projetiva (Teorema 1.2).

No Capítulo 2 definimos os grupos de homotopia $\pi_n(X)$ de um espaço X e investigamos suas propriedades básicas. Em especial vamos investigar uma ferramenta para calcular $\pi_n(X)$, a sequência exata longa em homotopia de um fibrado, vamos mostrar que existe o isomorfismo $\pi_3(S^2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$, cujo isomorfismo é gerado pela fibração de Hopf $h : S^3 \rightarrow S^2$, que não é, portanto, homotópica a uma constante. As principais referências desse capítulo são [2, 8, 12].

A contribuição da exposição feita nesse capítulo é oferecer demonstrações conectando a intuição topológica com a geométrica. Por exemplo, definimos as operações dos grupos de homotopia fazendo uso da geometria de esferas e sendo cuidadosos com as orientações (Seção 2.1) e provamos a sequência exata longa em homotopia sem usar homotopia relativa (Teorema 2.1), isso torna a prova mais extensa porém mais intuitiva. Fazemos também o cálculo explícito de um operador da fibração de Hopf, baseado em [11], e concluimos daí que $h : S^3 \rightarrow S^2$ não é um fibrado trivial.

Em ambos capítulos também foram usados como referência manuscritos do orientador: parte da dissertação é uma revisão e elaboração desses manuscritos.

A relação entre a topologia e a geometria da fibração de Hopf fica mais clara quando introduzimos o invariante de Hopf, que possui uma relação íntima com o link number entre duas curvas. No entanto nessa dissertação não tratamos do invariante de Hopf, pois isso exigiria ferramentas que estão além do escopo dessa dissertação são elas: topologia diferencial (veja Seção 8 de [6]) ou cohomologia (veja Seção 4.B de [2]). Também não tratamos aqui da relação da fibração de Hopf com os quatérnios e com grupos de Lie, uma vez que essa relação não foi necessária para os propósitos dessa dissertação.

As 32 figuras apresentadas nessa dissertação foram feitas com os softwares livres *Inkscape 1.0* e *Geogebra Clássico 6.0*.

Capítulo 1

Geometria da fibração de Hopf

Um conceito central na geometria euclidiana é o de paralelismo de retas. Em espaços curvos, os substitutos naturais das retas são as geodésicas, curvas de aceleração nula: qual o substituto natural do paralelismo? Neste capítulo, usamos ferramentas básicas de Álgebra Linear, Geometria Analítica e Topologia para investigar o paralelismo de Clifford das geodésicas da 3-esfera.

1.1 Geodésicas em S^n

A n -esfera centrada na origem com raio 1 é dada por

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

onde $|\cdot|$ é a norma canônica associada ao produto interno canônico $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de \mathbb{R}^{n+1} .

Definição 1.1. Um *círculo* na esfera é a interseção não vazia de um plano afim de \mathbb{R}^{n+1} com S^n , é chamado de *grande círculo* quando o plano passa pela origem.

Teorema 1.1. As curvas de aceleração nula de S^n são os grandes círculos.

Demonstração. Seja α uma curva regular em S^n , ou seja, $|\alpha(t)| = 1$, $\alpha'(t) \neq 0$. Assim, podemos reparametrizá-la α pelo comprimento do arco, e obter assim que $|\alpha'(t)| = 1$. Uma vez que o vetor normal à S^n em $\alpha(t)$ é o próprio $\alpha(t)$, uma curva em S^n tem aceleração (tangencial) nula se $\alpha''(t)$ é proporcional a $\alpha(t)$, então escrevemos $\alpha''(t) = k(t)\alpha(t)$. Uma vez que $|\alpha(t)|^2 = 1$, derivando esta relação, obtemos:

$$\begin{aligned}\langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle &= 0 \\ \langle \alpha''(t), \alpha(t) \rangle + \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle &= 0\end{aligned}$$

Como $\alpha''(t) = k(t)\alpha(t)$, segue que

$$\begin{aligned} k(t)\langle\alpha(t), \alpha(t)\rangle + \langle\alpha'(t), \alpha'(t)\rangle &= 0 \\ k(t) + |\alpha'(t)|^2 &= 0 \\ k(t) &= -1 \end{aligned}$$

Podemos então escrever

$$\alpha''(t) = -\alpha(t)$$

que é a equação de um sistema massa-mola, onde a posição $\alpha(0)$ e a velocidade $\alpha'(0)$ iniciais são vetores ortogonais e unitários. Assim, existe um operador linear ortogonal O de \mathbb{R}^{n+1} tal que

$$O\alpha(0) = e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad O\alpha'(0) = e_2 = (0, 1, \dots, 0).$$

Note que $O(S^n) = S^n$. Segue que $\beta(t) = O\alpha(t)$ é uma curva em S^n que satisfaz o problema de valores iniciais

$$\beta''(t) = -\beta(t), \quad \beta(0) = e_1, \quad \beta'(0) = e_2$$

Portanto suas coordenadas $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_i(t), \dots)$ satisfazem:

$$\begin{aligned} \beta_1''(t) &= -\beta_1(t), & \beta_1(0) &= 1, & \beta_1'(0) &= 0 \\ \beta_2''(t) &= -\beta_2(t), & \beta_2(0) &= 0, & \beta_2'(0) &= 1 \\ & & & \dots & & \\ \beta_i''(t) &= -\beta_i(t), & \beta_i(0) &= 0, & \beta_i'(0) &= 0 \\ & & & \dots & & \end{aligned}$$

de onde segue que $\beta(t)$ tem coordenadas

$$\beta(t) = (\cos(t), \sin(t), 0, \dots, 0)$$

de modo que β é o grande círculo dado por $S^n \cap \Pi(e_1, e_2)$, onde $\Pi(v, w)$ é o plano gerado pelos vetores v, w . Aplicando R^{-1} segue que α é o grande círculo dado por $S^n \cap \Pi(\alpha(0), \alpha'(0))$. \square

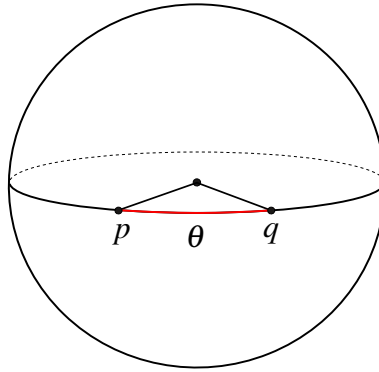


Figura 1.1 Geodésica e distância intrínseca na esfera.

Segue que a distância intrínseca entre dois pontos $p, q \in S^n$, dada pelo menor comprimento de geodésicas entre eles, é dada pelo ângulo formado entre os vetores unitários p e q , mais precisamente

$$\begin{aligned} d(p, q) &= \theta \\ &= \arccos \langle p, q \rangle \in [0, \pi] \end{aligned}$$

De fato, existe um plano $\Pi \subset \mathbb{R}^{n+1}$ contendo os vetores p, q , de tal modo que $C = S^n \cap \Pi$ é um grande círculo que contém p e q . O comprimento do menor arco do grande círculo C entre p e q é precisamente o ângulo entre os vetores p e q no plano Π . Sejam $p \neq q$. Observe que, se p, q são vetores l.i., então $d(p, q) < \pi$ e o plano Π que os contém é único, gerado por p, q , de modo que $C = S^n \cap \Pi$ é o único grande círculo que os conecta. Caso contrário $q = -p$ é o ponto antípoda de p , $d(p, q) = \pi$ e existem infinitos grandes círculos conectando os dois (meridianos de norte a sul).

Note que um grande círculo C é o conjunto de vetores unitários do plano Π que o define, logo $\Pi = \mathbb{R}C$. Note também que uma transformação ortogonal O em $O(n+1)$ leva S^n em S^n e leva planos pela origem em planos pela origem, logo leva grandes círculos $C = S^n \cap \Pi$ em grandes círculos, mais precisamente

$$O(C) = S^n \cap O(\Pi), \quad (1.1)$$

onde $O(\Pi)$ é um plano pela origem. Mais ainda, essa ação é transitiva.

Lema 1.1. Dados dois grandes círculos de S^n , existe uma transformação ortogonal que leva um grande círculo no outro.

Demonstração. Pelo visto acima, basta mostrar que dados dois planos Π' , Π'' de \mathbb{R}^{n+1} , existe uma transformação ortogonal que leva Π' em Π'' . Mais ainda, basta mostrar que, dado um plano Π' de \mathbb{R}^{n+1} , existe uma transformação ortogonal que leva Π' no plano coordenado xy , denotado por Π , pois se $O \in O(n+1)$ leva Π' em Π e $S \in O(n+1)$ leva Π'' em Π , então $S^{-1}O \in O(n+1)$ leva Π' em Π'' .

Tome então v_1, v_2 base ortogonal de Π' e complete para uma base ortogonal v_1, v_2, \dots, v_{n+1} de \mathbb{R}^{n+1} . A matriz R com colunas v_1, v_2, \dots, v_{n+1} é uma transformação ortogonal que leva Π em Π' . Portanto sua inversa leva Π' em Π , como queríamos. \square

A seguinte noção generaliza a noção de círculos em S^n .

Definição 1.2. Uma k -esfera de \mathbb{R}^{n+1} é a interseção não vazia de um subespaço afim de dimensão $k+1$ com uma esfera de \mathbb{R}^{n+1} . Em particular, se essa esfera é S^n , obtemos uma k -esfera de S^n .

Note que uma 1-esfera de S^n é um círculo de S^n . Dado um centro $p \in S^n$ e um raio $0 \leq \theta \leq \pi$, temos que a correspondente esfera na métrica intrínseca é dada por

$$\begin{aligned} S(p, \theta) &= \{x \in S^n : d(p, x) = \theta\} \\ &= \{x \in S^n : \langle p, x \rangle = \cos(\theta)\} \end{aligned}$$

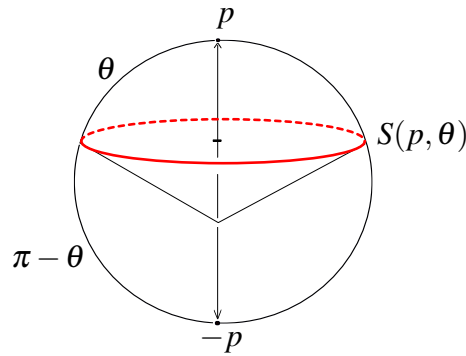


Figura 1.2 Esfera na métrica intrínseca de S^n .

Proposição 1.1. Uma $(n-1)$ -esferas de S^n é uma esfera na métrica intrínseca de S^n . Além disso, para $1 \leq k < n-1$, uma k -esfera de S^n é a interseção de um par de $(k+1)$ -esferas de S^n .

Demonstração. Para a primeira afirmação, seja $S(p, \theta)$ uma esfera na métrica intrínseca de S^n . Considere Π_0 o complemento ortogonal de p e considere o subespaço afim n -dimensional

$$\Pi = \Pi_0 + \cos(\theta)p \quad (1.2)$$

então claramente $S(p, \theta) = S^n \cap \Pi$. Reciprocamente, seja $S = S^n \cap \Pi$ uma $(n-1)$ -esfera, onde Π é um subespaço afim n dimensional de \mathbb{R}^{n+1} . Seja Π_0 o subespaço paralelo à Π que passa pela origem, então $\Pi = \Pi_0 + q$, onde o vetor q é ortogonal à Π_0 . Uma vez que S é não vazia, temos que $|q| \leq 1$, seja então $\theta = \arccos(|q|)$ e $p = q/|q|$. Afirmamos que $S = S(p, \theta)$. De fato, o complemento ortogonal de p coincide com o de q , que é Π_0 . Vimos acima que $S(p, \theta)$ é uma $(n-1)$ -esfera dada pelo plano $\Pi_0 + \cos(\theta)p = \Pi_0 + q = \Pi$, que é o plano que corresponde a S , como queríamos.

Para a segunda afirmação, uma k -esfera é dada pela interseção de S^n com um subespaço afim Π de \mathbb{R}^{n+1} com dimensão $k+1 < n$. Basta mostrar que Π é interseção de um par de subespaços afins com dimensão $k+2$. Para isso, note que, uma vez que Π tem codimensão $(n+1) - (k+1) = n-k > 1$, segue que Π possui pelo menos duas direções normais l.i. Mais precisamente, seja $\Pi = \Pi_0 + p$, onde Π_0 é paralelo à Π e passa pela origem e $p \in \Pi_0^\perp$. Temos que $\dim \Pi_0^\perp = \text{codim} \Pi \geq 2$. Tome v_+, v_- l.i. e ortogonais em Π_0^\perp . Considere os subespaços afim $\Pi_\pm = p +$ gerado por Π_0 e v_\pm . Claramente $\dim \Pi_\pm = k+2$ e $\Pi = \Pi_+ \cap \Pi_-$, como queríamos. \square

Observação 1.1. Note que (1.2) implica que $S(p, \theta) = S(-p, \pi - \theta)$ (veja Figura 1.2).

A n -esfera S^n pode ser vista como um n -espaço \mathbb{R}^n compactificado com um ponto ∞ no infinito. Mais precisamente, considere a projeção estereográfica de S^n no plano equatorial, dada por

$$\varphi : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}, \quad \varphi(N) = \infty$$

onde $N = (0, \dots, 0, 1)$ é o polo norte e, para $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n - \{N\}$ é dada por

$$\varphi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n) \quad (1.3)$$

Temos que φ é um homeomorfismo que se restringe a um difeomorfismo de $S^n - \{N\}$ com \mathbb{R}^n . Além disso, φ leva esferas em esferas. Mais precisamente, φ leva uma $(n-1)$ -esfera de S^n que não passa pelo polo norte numa $(n-1)$ -esfera de \mathbb{R}^n e leva uma $(n-1)$ -esfera que passa pelo polo norte num $(n-1)$ -subespaço afim de \mathbb{R}^n com um ponto no infinito, que é uma $(n-1)$ -esfera topológica (para uma demonstração, veja Seção 18.10.2 de [1])

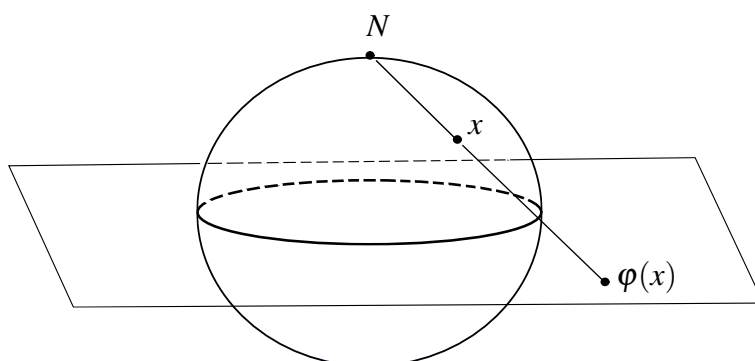


Figura 1.3 Projeção estereográfica no plano equatorial.

Proposição 1.2. Para $0 < k < n$, temos que φ leva uma k -esfera de S^n que não passa pelo polo norte numa k -esfera de \mathbb{R}^n e leva uma k -esfera que passa pelo polo norte num k -subespaço afim de \mathbb{R}^n com um ponto no infinito, que é uma k -esfera topológica. Em particular, φ leva círculos em círculos.

Demonstração. O resultado é trivial se S é apenas um ponto. Note que S é uma subvariedade de S^n , assumimos então que $\dim S > 0$. A prova é por indução finita.

Acima foi visto que o resultado vale para $k = n - 1$. Suponha que vale para $1 < k < n - 1$. Afirmamos que vale para $k - 1$. De fato, pela Proposição 1.1, uma $(k - 1)$ -esfera S de S^n pode ser escrita como a interseção de um par de k -esferas S_+, S_- de S^n de modo que

$$\varphi(S) = \varphi(S_+) \cap \varphi(S_-)$$

onde, pela hipótese de indução, a Proposição vale para as k -esferas S_{\pm} .

Se S passa pelo polo norte, então ambas S_{\pm} passam pelo polo norte, portanto suas imagens são k -subespaços afins de \mathbb{R}^n com um ponto no infinito, de modo que a imagem de S é a interseção desses subespaços afins e um ponto no infinito. Como S é uma variedade de dimensão $k - 1$ e φ é um difeomorfismo entre $S - \{N\}$ e sua imagem, segue que a interseção desses subespaços afins é um subespaço afim de dimensão $k - 1$.

Se apenas uma das k -esferas S_{\pm} , digamos que S_+ , passa pelo polo norte, então a imagem de S_+ é um k -subespaço afim e a imagem de S_- é uma k -esfera de \mathbb{R}^n . Uma vez que $\dim S > 0$, segue que a interseção dessas imagens é uma interseção não trivial entre uma k -esfera e um k -subespaço afim de \mathbb{R}^n , portanto uma $(k - 1)$ -esfera de \mathbb{R}^n .

Se nenhuma das k -esferas S_{\pm} passa pelo polo norte, então suas imagens são k -esferas de \mathbb{R}^n . Uma vez que $\dim S > 0$, segue que a interseção dessas imagens é uma interseção não-trivial entre duas k -esferas de \mathbb{R}^n , portanto uma $(k - 1)$ -esfera de \mathbb{R}^n . \square

1.2 Paralelas de Clifford em S^n

Duas retas R, S no espaço euclidiano são paralelas quando estão num mesmo plano e não se encontram. Isso pode ser formulado de forma métrica da seguinte maneira.

Definição 1.3. Dois subconjuntos A, B de um espaço métrico com distância d são *equidistantes* quando

$$d(a, B) = d(A, b)$$

para todos $a \in A$ e $b \in B$.

Considere o espaço euclidiano com a distância induzida pela norma canônica. A distância entre um vetor x e um conjunto A é então denotada por

$$d(x, A) = |x - A|$$

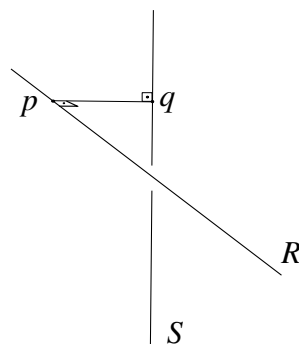
A distância entre dois conjuntos não-vazios A, B é dada por

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b); a \in A, b \in B\}$$

Proposição 1.3. Duas retas R, S no espaço euclidiano são paralelas se, e somente se, são equidistantes.

Demonstração. Sejam R, S retas quaisquer em \mathbb{R}^n . Sejam os vetores unitários u e v vetores direção de R e S , respectivamente. Afirmamos que existem $p \in R$ e $q \in S$ tais que

$$|R - S| = |p - q|, \quad p - q \perp u, \quad p - q \perp v.$$



De fato, dado $x \in R$, existe um único correspondente $q \in S$ tal que $|x - S| = |x - q|$, caracterizado por satisfazer $x - q \perp v$. Para a existência, seja $q_n \in S$ tal que $|x - q_n| \rightarrow |x - S|$.

Segue que $|q_n|$ é limitado e, passando a subsequências, podemos supor que $q_n \rightarrow q$, de modo que $|x - q| = |x - S|$. Vamos mostrar que isso implica $x - q \perp v$. Temos que

$$|x - S|^2 = \inf_{t \in \mathbb{R}} |x - (q + tv)|^2$$

onde $|(x - q) + tv|^2 = |x - S|^2 - 2t\langle x - q, v \rangle + t^2$, de modo que

$$0 = \inf_{t \in \mathbb{R}} t^2 - 2t\langle x - q, v \rangle$$

Se $\langle x - q, v \rangle \neq 0$, a função quadrática acima assume valores negativos, de modo que devemos ter $\langle x - q, v \rangle = 0$. Reciprocamente, se $q \in S$ é tal que $\langle x - q, v \rangle = 0$, então

$$|x - S|^2 = \inf_{t \in \mathbb{R}} |x - (q + tv)|^2 = \inf_{t \in \mathbb{R}} |x - q|^2 + t^2|v|^2 = |x - q|^2$$

Para a unicidade, se $q' \in S$ é tal que $x - q' \perp v$, então

$$q - q' = (q - x) + (x - q') \perp v$$

onde $q - q' \parallel v$, logo $q - q' = 0$, como queríamos. Considere agora

$$\varphi(x) = |x - S|, \quad x \in R.$$

Afirmamos que φ possui um ponto de mínimo $p \in R$. De fato, fixe $x \in R$ e seu correspondente $q \in S$ tal que $x - q \perp v$. Para $t \in \mathbb{R}$, o correspondente de $x + tu \in R$ em S é $q + sv$, para $s \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 = \langle x + tu - (q + sv), v \rangle = \langle (x - q) + tu - sv, v \rangle = \langle tu - sv, v \rangle = t\langle u, v \rangle - s$$

de onde seque que $s = t\langle u, v \rangle$. Assim

$$\varphi(x + tu) = |(x + tu) - (q + t\langle u, v \rangle v)| = |x - q + t(u - \langle u, v \rangle v)|$$

Seja $w = u - \langle u, v \rangle v$. Temos que $w = 0$, se, e só se, u, v são paralelos: nesse caso φ é constante. Caso contrário, $w \neq 0$ e $\varphi(x_0 + tu) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Em ambos casos, a imagem inversa de um intervalo compacto por φ é um conjunto limitado, o que garante a existência de ponto de mínimo. Seja então $p \in R$ um ponto de mínimo de φ , de modo que $|p - S| = |R - S|$.

Tome o correspondente $q \in S$ tal que

$$|p - q| = |p - S| = |R - S| \quad p - q \perp v.$$

Uma vez que

$$|R - q| \leq |p - q| = |R - S| \leq |R - q|$$

segue que $|q - p| = |q - R|$. Isso mostra que p é o correspondente em R de q , de modo que $q - p \perp u$, como queríamos.

Se R, S são equidistantes, então existe uma constante c tal que

$$|p - S| = |R - q| = c$$

de modo que $|R - S| = c$. Vamos provar que u e v são vetores paralelos. De fato, temos que

$$c^2 = |R - S|^2 \leq |(p + tu) - (q + t'v)|^2 = |(p - q) + (tu - t'v)|^2 = c^2 + |tu - t'v|^2$$

para $t, t' \in \mathbb{R}$. Como R e S são equidistantes, segue que

$$\inf_t |tu - t'v|^2 = \inf_{t'} |tu - t'v|^2 = 0$$

Temos que

$$|tu - t'v|^2 = t^2 - 2tt'\langle u, v \rangle + t'^2$$

Vista como função quadrática de t , seu discriminante é dado por

$$\Delta = (-2t'\langle u, v \rangle)^2 - 4t'^2 = 4t'^2(\langle u, v \rangle^2 - 1)$$

portanto seu valor mínimo é $-\Delta/(4a) = t'^2(1 - \langle u, v \rangle^2)$. Vista como função quadrática de t' , de modo análogo temos que seu mínimo é $t^2(1 - \langle u, v \rangle^2)$. Como esses mínimos são iguais para todos t, t' , segue que $1 - \langle u, v \rangle^2 = 0$ e, portanto, $|\langle u, v \rangle| = 1$. De Cauchy-Schwartz segue que $u = \pm v$, logo são vetores paralelos e R, S são retas paralelas.

Reciprocamente, se R, S são paralelas então, pelo que vimos acima $|x - S|$ e $|R - y|$ são constantes como funções de $x \in R$ e $y \in S$, de modo que

$$|R - S| = |x - S| = |y - S|$$

logo R e S são equidistantes. □

Exemplo 1.1. Para exemplos além de retas paralelas, observe que um par de círculos concêntricos em um plano são claramente equidistantes. Exemplos de curvas equidistantes não planares são dados por um par de círculos em um cilindro em \mathbb{R}^3 (veja Figura 1.4) ou cruzando ortogonalmente um o centro do outro: note como eles estão entrelaçados, é o chamado *link de Hopf* (veja Figura 1.5). Uma vez que o par de círculos concêntricos não está entrelaçado, ele também é chamado de um *unlink*. O conceito topológico de entrelaçamento será tornado mais preciso no próximo Capítulo.

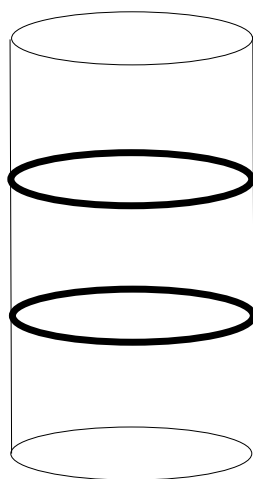


Figura 1.4 Dois pares de círculos no cilindro

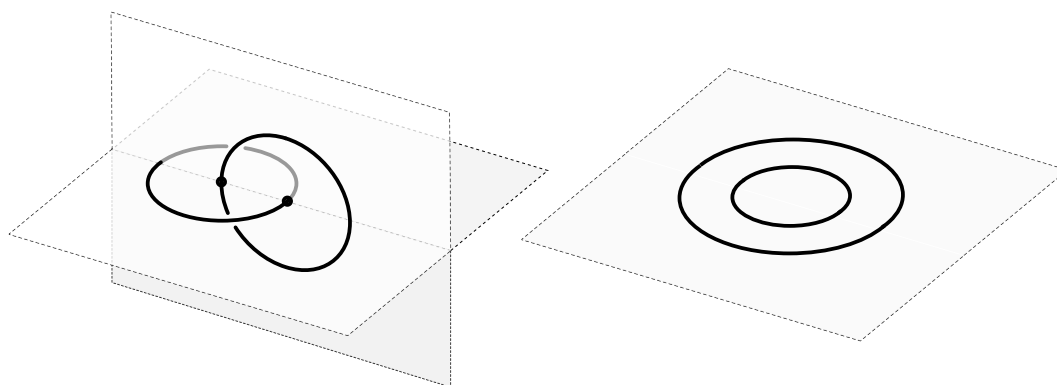


Figura 1.5 Link de Hopf e unlink.

A Proposição anterior sugere o seguinte substituto natural do paralelismo em S^n .

Definição 1.4. Dois grandes círculos de S^n são ditos (*Clifford*) *paralelos* quando são curvas equidistantes, na distância intrínseca de S^n .

Note que, para $p \in S^n$ e $B \subset S^n$ temos

$$\cos d(p, B) = \sup_{q \in B} \langle p, q \rangle \quad (1.4)$$

onde usamos que \cos é uma função contínua e decrescente em $[0, \pi]$ para trocar o inf pelo sup.

Exemplo 1.2. Na 2-esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ qualquer par de grandes círculos se encontram em dois pontos, um ponto e seu antípoda, uma vez que, por motivos de dimensão, dois planos de \mathbb{R}^3 passando pela origem sempre têm uma reta em comum. Desse modo em S^2 não há pares não-triviais de grandes círculos paralelos

Exemplo 1.3. Já na 3-esfera $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ nem todo par de grandes círculo se encontra. Sejam (x, y, z, w) as coordenadas euclidianas de \mathbb{R}^4 e tome, por exemplo, os planos perpendiculares

$$\Pi = \text{plano } xy, \quad \Pi^\perp = \text{plano } zw.$$

Então os grandes círculos

$$C = S^3 \cap \Pi, \quad C^\perp = S^3 \cap \Pi^\perp \quad (1.5)$$

claramente não se encontram e, mais do que isso, são paralelos. De fato, temos que $\langle p, q \rangle = 0$ para todo $p \in C$ e $q \in C^\perp$, segue então de (1.4) que

$$\cos d(p, C^\perp) = \sup_{q \in C^\perp} \langle p, q \rangle = 0$$

não depende de p . O mesmo vale trocando C por C^\perp . Segue que C e C^\perp são equidistantes, portanto paralelos, em particular

$$d(C, C^\perp) = \frac{\pi}{2}$$

o que faz sentido, uma vez que C e C^\perp vêm de planos ortogonais em \mathbb{R}^4

Uma maneira de visualizar C e C^\perp é notar que a 3-esfera S^3 é o 3-espaço \mathbb{R}^3 compactificado com um ponto ∞ no infinito. Mais precisamente, considere a projeção estereográfica

$$\varphi : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}, \quad \varphi(N) = \infty$$

onde $N = (0, 0, 0, 1)$ é o polo norte e, para $(x, y, z, w) \in S^3 - N$

$$\varphi(x, y, z, w) = \left(\frac{x}{1-w}, \frac{y}{1-w}, \frac{z}{1-w} \right). \quad (1.6)$$

Temos que φ é um homeomorfismo que, pela Proposição 1.2 leva um círculo que não passa pelo polo norte em um círculo do \mathbb{R}^3 , e um círculo que passa pelo polo norte em uma reta do \mathbb{R}^3 com um ponto no infinito, um círculo topológico. Dos grandes círculos

$$C = \{(x, y, 0, 0) : x^2 + y^2 = 1\}, \quad C^\perp = \{(0, 0, z, w) : z^2 + w^2 = 1, \}$$

temos que apenas C^\perp passa pelo polo norte. Uma vez que

$$\varphi(C) = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}, \quad \varphi(C^\perp) = \{(0, 0, z/(1-w)) : z^2 + w^2 = 1, w \neq \pm 1\} \cup \{\infty\},$$

segue que $\varphi(C)$ é o círculo de raio 1 no plano xy e que $\varphi(C^\perp)$ é o círculo dado pelo eixo z unido com o ponto no infinito. Assim, as paralelas de Clifford C e C^\perp se situam em S^3 entrelaçados de maneira análoga ao link de Hopf (veja Exemplo 1.1).

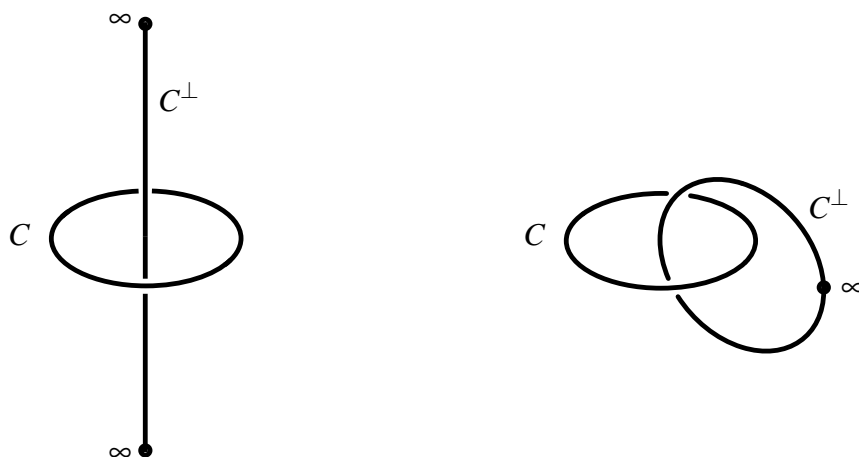


Figura 1.6 Imagens de C e C^\perp pela projeção estereográfica.

1.3 Paralelas de Clifford em $S^3 \subset \mathbb{R}^4$

A primeira esfera onde o paralelismo de Clifford é não-trivial é a 3-esfera, onde temos os grandes círculos paralelos C e C^\perp dados em (1.5). Quantos grandes círculos paralelos passam por um ponto p fora de C ?

Uma vez que os grandes círculos passando por p paralelos a C estão a uma distância constante $\theta = d(p, C)$ de C , vamos considerar o conjunto dos pontos que distam θ de C , dado por

$$T_\theta = \{q \in S^3 : d(q, C) = \theta\}$$

e procurar, dentro dele, os grandes círculos que passam por p . Claramente, temos que

$$p \in T_\theta, \quad T_0 = C$$

portanto se $p \in C$, o único grande círculo paralelo à C passando por p é o próprio C . Uma vez que $\mathbb{R}^4 = \Pi \oplus \Pi^\perp$, de agora em diante identificamos $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, de modo que

$$\langle (u, v), (r, s) \rangle = \langle u, r \rangle + \langle v, s \rangle, \quad \mathbb{R}^2 \times 0 = \Pi, \quad 0 \times \mathbb{R}^2 = \Pi^\perp.$$

Seja $q = (r, s) \in S^3$, então

$$\cos d(q, C) = |r|. \quad (1.7)$$

De fato, os pontos de C são da forma $(u, 0)$ com $|u| = 1$. Segue então de (1.4) que

$$\cos d(q, C) = \sup_{|u|=1} \langle (r, s), (u, 0) \rangle = \sup_{|u|=1} \langle r, u \rangle = \langle r, \frac{r}{|r|} \rangle = |r|$$

onde usamos Cauchy-Schwartz na penúltima desigualdade.

De (1.7) segue que

$$T_\theta = \{(r, s) \in S^3 : |r| = \cos \theta, |s| = \sin \theta\} \quad (1.8)$$

uma vez que $|r|^2 + |s|^2 = 1$ e que $\sin(\theta) \geq 0$ para $0 \leq \theta \leq \pi$. Em particular, temos que $T_{\pi/2} = C^\perp$ e, portanto, se $d(p, C) = \theta = \pi/2$, o único grande círculo paralelo à C passando por p é C^\perp . De (1.7) segue que $\cos d(q, C) \geq 0$, portanto $d(q, C) \leq \pi/2$, de onde segue a união disjunta

$$S^3 = \bigcup_{\theta \in [0, \pi/2]} T_\theta \quad (1.9)$$

De agora em diante tomamos $0 < \theta < \pi/2$. De (1.9) segue que

$$T_\theta \cap C = T_\theta \cap T_0 = \emptyset, \quad T_\theta \cap C^\perp = T_\theta \cap T_{\pi/2} = \emptyset. \quad (1.10)$$

De (1.8) segue que T_θ é um toro, o chamado *toro de Clifford*, produto de um círculo de raio $\cos \theta > 0$ pela origem do plano Π com um círculo de raio $\sin \theta > 0$ pela origem do plano Π^\perp . Segue também que os pontos $(z, w) \in T_\theta$ estão contidos no cone de \mathbb{R}^4 dado por

$$\frac{|w|}{|z|} = \tan \theta \quad (1.11)$$

Mais precisamente, de (1.11) segue que T_θ está contido no cone V_θ dado pelos zeros da forma quadrática

$$\operatorname{sen}^2 \theta |z|^2 - \operatorname{cos}^2 \theta |w|^2 = 0 \quad (1.12)$$

de modo que $T_\theta \subset S^3 \cap V_\theta$. Mais ainda, temos que

$$T_\theta = S^3 \cap V_\theta \quad (1.13)$$

Para provar a inclusão que falta, tome $(z, w) \in S^3 \cap V_\theta$. De $|z|^2 + |w|^2 = 1$ segue que $|z|$ e $|w|$ não podem se anular ao mesmo tempo. Da equação (1.12) e de ambos $\operatorname{sen} \theta, \operatorname{cos} \theta > 0$ segue então que ambos $|z|, |w| > 0$. Logo $(|z|, |w|)$ é um ponto do círculo que está no interior do primeiro quadrante de \mathbb{R}^2 , portanto existe $\alpha \in (0, \pi/2)$ tal que $|z| = \operatorname{cos} \alpha$, $|w| = \operatorname{sen} \alpha$. Segue então de (1.11) que $|w|/|z| = \tan \alpha = \tan \theta$. Como \tan é injetiva no intervalo $(0, \pi/2)$, segue que $\alpha = \theta$. Segue então de (1.8) que $(z, w) \in T_\theta$.

Um grande círculo $C' = S^3 \cap \Pi'$ passando por p é paralelo a C se, e só se $C' \subset V_\theta$ portanto se, e só se, seu plano associado $\Pi' = \mathbb{R}C'$ está contido no cone V_θ , uma vez que C' são vetores de norma 1 do plano Π' . Assim, obter as paralelas a C passando pelo ponto p é equivalente a obter os planos passando pela origem contidos em V_θ que contém o vetor p : são exatamente dois. Isso acontece essencialmente porque a equação (1.12) do cone V_θ em coordenadas euclidianas (x, y, z, w) de \mathbb{R}^4 é

$$\operatorname{sen}^2 \theta (x^2 + y^2) = \operatorname{cos}^2 \theta (z^2 + w^2) \quad (1.14)$$

que é a equação projetiva de um hiperbolóide de uma folha, variedade de dimensão três que é duplamente regrada: por cada um de seus pontos passa exatamente duas linhas contidas na superfície, que dão origem aos dois planos de V_θ contendo p . Mais precisamente, temos o seguinte.

Teorema 1.2. Se $0 < \theta < \pi/2$ então existem precisamente dois planos contidos em V_θ que contém o vetor $p = (u, v)$, eles são dados por

$$\begin{aligned} \Pi^+ &= \text{gerado por } (u, v) \text{ e } (u^\perp, v^\perp) \\ \Pi^- &= \text{gerado por } (u, v) \text{ e } (u^\perp, -v^\perp) \end{aligned}$$

onde $u^\perp \in \mathbb{R}^2$ é o vetor obtido de $u \in \mathbb{R}^2$ rotacionando 90° no sentido anti-horário.

Demonstração. Uma vez que a ação em S^3 por isometrias preserva o paralelismo e que rotações independentes nos planos Π e Π^\perp preservam C , podemos rotacionar adequadamente

as coordenadas u, v de p e supor, inicialmente, que

$$p = (\cos \theta, 0, 0, \sin \theta)$$

onde temos $\cos \theta, \sin \theta > 0$. Reescreva a equação (1.14) de V_θ como

$$z^2 = \tan^2 \theta (x^2 + y^2) - w^2 \quad (1.15)$$

Considere Σ_0 o 3-espaço $w = 0$ que passa pela origem e Σ_θ o 3-espaço afim $w = \sin \theta$, paralelo à Σ_0 . Observe que p está em $V_\theta \cap \Sigma_\theta$, que é o hiperbolóide (de rotação de uma folha) no espaço Σ_θ , de equação (veja Figura 1.7)

$$z^2 = \tan^2 \theta (x^2 + y^2) - \sin^2 \theta \quad (1.16)$$

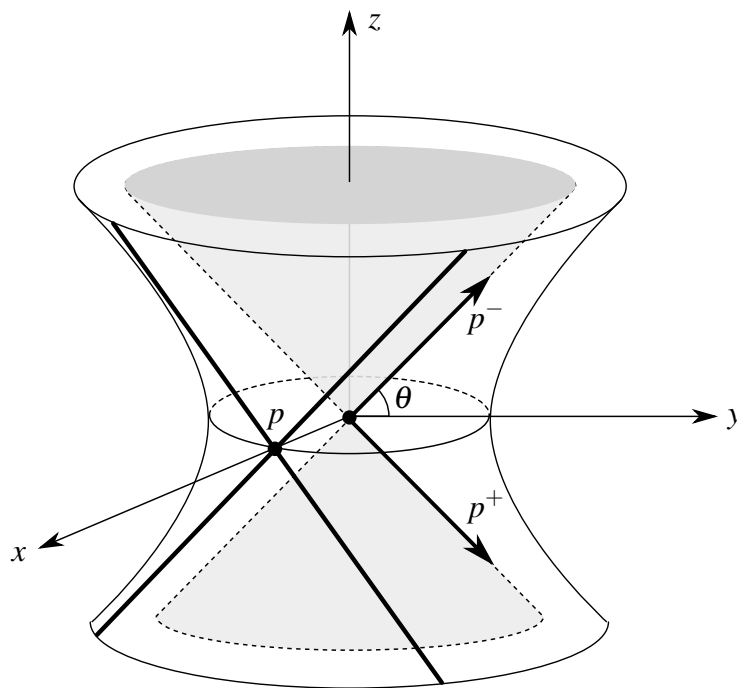


Figura 1.7 Hiperbolóide $V_\theta \cap \Sigma_\theta$ e seu cone assintótico $V_\theta \cap \Sigma_0$.

Primeiro mostramos que os planos pela origem contidos no cone V_θ que contém p correspondem às retas afins no hiperbolóide $V_\theta \cap \Sigma_\theta$ passando por p e vice-versa. Mais precisamente, seja Π' um plano contido em V_θ que contém o vetor p . Afirmamos que a interseção $\Pi' \cap \Sigma_\theta$ é uma reta afim. De fato, como Π' e Σ_0 são subespaços de dimensão 2 e 3, respectivamente, de \mathbb{R}^4 , segue que $\Pi' \cap \Sigma_0$ tem dimensão 1 ou 2. Uma vez que o plano Π' contém o vetor p , que não está contido em Σ_0 , segue que Π' não está inteiramente

contido em Σ_0 , de modo que $\Pi' \cap \Sigma_0$ é uma reta, gerada por um vetor direção não nulo $u \in \Sigma_0$. Segue então que $\Pi' \cap \Sigma_\theta$ é a reta afim passando por p , na direção de u e contida em $V_\theta \cap \Sigma_\theta$. Reciprocamente, seja R uma reta afim contida em $V_\theta \cap \Sigma_\theta$ passando por p e seja $p_0 \in \Sigma_0$ seu vetor direção. Afirmamos que o plano Π' de \mathbb{R}^4 gerado por p e p_0 está contido em V_θ . De fato, temos que a reta $p + tp_0 \in V_\theta \cap \Sigma_\theta$, logo satisfaz a equação (1.16), para todo $t \in \mathbb{R}$. Uma vez que a equação (1.15) de V_θ é homogênea, segue que $s(p + tp_0) \in V_\theta$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Assim, o conjunto Π'' de vetores $ap + bp_0$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, está contido em V_θ , uma vez que

$$ap + bp_0 = a \left(p + \frac{b}{a} p_0 \right)$$

Como V_θ é fechado, contém o fecho do conjunto Π'' que é o plano Π' .

Uma vez que um hiperbolóide contém exatamente duas retas passando por cada um de seus pontos, isso mostra que são precisamente dois os planos contidos em V_θ que contém p . Para obter explicitamente esses planos, observe que p está no equador do parabolóide $V_\theta \cap \Sigma_\theta$, que tem cone assintótico $V_\theta \cap \Sigma_0$ dado por (veja Figura 1.7)

$$z^2 = \tan^2 \theta (x^2 + y^2)$$

Segue que as direções das linhas que passam por p e estão contidas no parabolóide são exatamente as direções do cone assintótico que são tangentes ao parabolóide em p , elas estão no plano yz ortogonal à p em Σ_θ transladado para Σ_0 . Essas direções são dadas pelos vetores (veja Figura 1.7)

$$p^- = (0, \cos \theta, \operatorname{sen} \theta, 0) \quad p^+ = (0, \cos \theta, -\operatorname{sen} \theta, 0) \quad (1.17)$$

Escrevendo $p = (u, v)$ com $u = (\cos \theta, 0)$, $v = (0, \operatorname{sen} \theta)$, temos

$$u^\perp = (0, \cos \theta) \quad v^\perp = (-\operatorname{sen} \theta, 0)$$

de modo que $p^- = (u^\perp, -v^\perp)$, $p^+ = (u^\perp, v^\perp)$.

Observe que se O é uma rotação de \mathbb{R}^2 então $O(u^\perp) = O(u)^\perp$, uma vez que rotações do plano comutam. Voltamos para o $p = (u, v)$ original desfazendo a rotação que fizemos em cada coordenada u e v para obter $(\cos \theta, 0)$ e $(0, \operatorname{sen} \theta)$. Fazendo o mesmo com os p^\pm dados na equação (1.17) obtemos então os pares de vetores p, p^+ e p, p^- que geram os planos Π^\pm dados no enunciado do teorema. \square

O seguinte corolário é então imediato.

Corolário 1.1. Seja $p \notin C$. Se $p \in C^\perp$, então C^\perp é o único grande círculo por p paralelo à C . Se $p \notin C^\perp$, então por p passam precisamente dois grandes círculos C^+ , C^- paralelos a C , dados respectivamente pela interseção de S^3 com os planos Π^+ , Π^- do teorema anterior.

Quanto às paralelas a um grande círculo $C' = S^3 \cap \Pi'$ qualquer, temos o seguinte. Defina $C'^\perp = S^3 \cap \Pi'^\perp$, onde Π'^\perp é o complemento ortogonal de Π' em \mathbb{R}^4 .

Proposição 1.4. Seja $p \notin C'$. Se $p \in C'^\perp$, então C'^\perp é o único grande círculo por p paralelo à C' . Se $p \notin C'^\perp$, então por p passam precisamente dois grandes círculos paralelos a C' .

Demonstração. Podemos reduzir essa questão aos grandes círculos C e C^\perp da seguinte maneira. Pelo Lema 1.1 existe $O \in O(n+1)$ que leva Π' em Π . Pela ortogonalidade de O , leva Π'^\perp em Π^\perp . Segue então da equação (1.1) que

$$O(C) = C', \quad O(C^\perp) = C'^\perp.$$

Uma vez que a ação de $O(n+1)$ preserva o paralelismo de Clifford, o Corolário 1.1 também vale com C' no lugar de C , C'^\perp no lugar de C^\perp e com $O(\Pi^\pm)$ no lugar de Π^\pm . \square

1.4 Paralelas de Hopf em $S^3 \subset \mathbb{C}^2$

Veremos que o paralelismo de Clifford de S^3 está relacionado com a estrutura complexa que se obtém identificando \mathbb{R}^2 com \mathbb{C} via $(x, y) \mapsto x + iy$, onde $i = \sqrt{-1}$, e portanto \mathbb{R}^4 com \mathbb{C}^2 via

$$(x, y, z, w) \mapsto (x + iy, z + iw)$$

De fato, temos que

$$S^3 = \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 : |u|^2 + |v|^2 = 1\}$$

Uma vez que multiplicar por i em \mathbb{C} é rotacionar 90° no sentido anti-horário, segue do Teorema 1.2 que uma das paralelas de Clifford passando pelo ponto $p = (u, v) \in S^3$ é dada plano

$$\begin{aligned} \Pi^+ &= \mathbb{R}\text{-gerado por } (u, v), (iu, iv) \\ &= \{(a + ib)u, (a + ib)v) : a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\lambda u, \lambda v) : \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \{\lambda(u, v) : \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \mathbb{C}p \end{aligned}$$

que é, portanto, a linha complexa gerada por p , considerando \mathbb{C}^2 como \mathbb{C} -espaço vetorial de dimensão complexa 2. Sua paralela de Clifford correspondente é dada por

$$C^+ = S^3 \cap \mathbb{C}p = \{\lambda p : \lambda \in S^1\} = S^1 p$$

onde S^1 denota os números complexos de norma 1. Grandes círculos que são dados por linhas complexas são chamados de *círculos de Hopf* de S^3 . Note que o círculo de Hopf $C = S^1 p$ é o conjunto de vetores unitários da linha complexa $\mathbb{C}p$.

Note que

$$\begin{aligned} \Pi^- &= \mathbb{R}\text{-gerado por } (u, v), (iu, -iv) \\ &= \{(a + ib)u, (a - ib)v) : a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\lambda u, \bar{\lambda} v) : \lambda \in \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

não é linha complexa, portanto a outra paralela de Clifford $C^- = S^3 \cap \Pi^-$ não é círculo de Hopf, se $v \neq 0$.

Considere o grupo unitário $U(2)$ das isometrias da forma hermitiana canônica de \mathbb{C}^2 . Segue que uma matriz unitária U em $U(2)$ leva S^3 em S^3 , uma vez que $U(2) \subset O(4)$, e leva linhas complexas em linhas complexas, uma vez que $U(2) \subset Gl(2, \mathbb{C})$, logo U leva círculos de Hopf $C = S^1 p$ em círculos de Hopf, mais precisamente

$$U(C) = U(S^1 p) = S^1 U(p), \quad (1.18)$$

Mais ainda, essa ação é transitiva.

Lema 1.2. Dados dois círculos de Hopf de S^3 , existe uma transformação unitária que leva um círculo de Hopf no outro.

Demonstração. Pelo visto acima, basta mostrar que dadas duas linhas complexas de \mathbb{C}^2 existe uma transformação unitária que leva uma na outra. Mais ainda, basta mostrar que, dada uma linha complexa Π' de \mathbb{C}^2 , existe uma transformação unitária que a leva na linha complexa $\Pi = \mathbb{C}(1, 0)$. Seja então p' um vetor unitário em Π' e complete para uma base unitária p', q' de \mathbb{C}^2 . A matriz R com colunas p', q' é uma transformação unitária que leva Π em Π' . Portanto sua inversa leva Π' em Π , como queríamos. \square

Observação 1.2. Em termos de ação de grupos, temos que o grupo S^1 age no espaço S^3 via

$$\lambda(z, w) = (\lambda z, \lambda w), \quad (z, w) \in S^3, \quad \lambda \in S^1$$

Uma vez que essa ação pode ser vista como a ação de matrizes diagonais unitárias, segue que ela preserva a distância intrínseca de S^3 : é uma ação por isometrias. Observe que as órbitas dessa ação são círculos de Hopf e também que essa ação é livre pois

$$\lambda(z, w) = (z, w)$$

implica que $z = \lambda z$ e $w = \lambda w$ que implica que $\lambda = 1$, uma vez que z e w não são simultaneamente nulos.

Temos que

$$\Pi = \mathbb{C}(1, 0), \quad \Pi^\perp = \mathbb{C}(0, 1)$$

são linhas complexas, portanto

$$C = S^1(1, 0), \quad C^\perp = S^1(0, 1)$$

são círculos de Hopf paralelos. Do Corolário 1.1 segue que, por um ponto $p \notin C$ passa exatamente um círculo de Hopf paralelo à C . Mais ainda, temos.

Proposição 1.5. Seja C' um círculo de Hopf de S^3 , por um ponto $p \notin C'$ passa exatamente um círculo de Hopf paralelo à C' .

Demonstração. Podemos reduzir essa questão ao círculo de Hopf C da seguinte maneira. Pelo Lema 1.2 existe $U \in U(2)$ que leva C em C' . Uma vez que a ação de $U(2)$ preserva os círculos de Hopf, U^{-1} leva os círculos de Hopf paralelos à C' passando por p , aos círculos de Hopf paralelos à C passando por $U^{-1}(p)$. \square

Podemos usar a linha projetiva complexa $\mathbb{C}P^1$ para parametrizar as linhas complexas de \mathbb{C}^2 , portanto os círculos de Hopf de S^3 , da seguinte maneira. Dado $(z, w) \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$ sua linha complexa correspondente é denotada em coordenadas homogêneas por

$$\mathbb{C}(z, w) = (z : w)$$

e temos a projeção sobrejetora e contínua

$$p : \mathbb{C}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^1 \quad (z, w) \mapsto (z : w)$$

onde em $\mathbb{C}P^1$ adotamos a topologia quociente. Note que a fibra $\pi^{-1}(z : w)$ é a linha complexa furada $\mathbb{C}(z, w) - \{0\}$ que, interceptada com S^3 , é um círculo de Hopf.

Definição 1.5. A restrição da projeção p à esfera $S^3 \subset \mathbb{C}^2 - \{0\}$ é a *fibração de Hopf*

$$h : S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1 \quad (z, w) \mapsto (z : w)$$

cujas fibras $h^{-1}(z : w)$ são os círculos de Hopf $S^1(z, w)$. Em particular,

$$h^{-1}(1 : 0) = C, \quad h^{-1}(0 : 1) = C^\perp$$

Proposição 1.6. $\mathbb{C}P^1$ é compacto e Hausdorff.

Demonstração. Uma vez que uma linha complexa pode ser sempre gerada por um vetor unitário de \mathbb{C}^2 , segue que $h(S^3) = \mathbb{C}P^1$. Uma vez que h é contínua, segue que $\mathbb{C}P^1$ é compacto. Para mostrar que é Hausdorff, considere as fibras de h de dois pontos distintos de $\mathbb{C}P^1$, dadas por dois círculos de Hopf distintos C', C'' . Uma vez que C', C'' são fechados e disjuntos em S^3 , existe $\varepsilon > 0$ tal que suas vizinhanças abertas

$$T' = \{x \in S^3 : d(x, C') < \varepsilon\} \quad T'' = \{x \in S^3 : d(x, C'') < \varepsilon\}$$

são disjuntas. Uma vez que a ação de S^1 em S^3 deixa invariante o círculo de Hopf C' e preserva a métrica intrínseca, segue que deixa invariante a vizinhança T' . Como as órbitas dessa ação são círculos de Hopf, segue que T' é uma união de círculos de Hopf, o mesmo valendo para T'' . Segue que $h(T')$ e $h(T'')$ são vizinhanças abertas e disjuntas dos dois pontos distintos de $\mathbb{C}P^1$ com os quais começamos. \square

Observação 1.3. Seja X um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff. Tomemos um ponto $\infty \notin X$, e seja $Y = X \cup \{\infty\}$. Definamos a seguinte topologia em Y :

$$\tau = \{U \subset X\} \cup \{Y \setminus C\}$$

onde U é um aberto de X e C é um compacto de X . Assim, Y com a topologia τ é dito a compactificação a um ponto de X .

Uma maneira equivalente de parametrizar as linhas complexas $\mathbb{C}(z, w)$ de \mathbb{C}^2 é por meio de suas inclinações $w/z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, onde $w/0 = \infty$ para $w \neq 0$.

Proposição 1.7. A aplicação inclinação $(z : w) \mapsto w/z$ é um homeomorfismo entre $\mathbb{C}P^1$ e esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, a compactificação do plano complexo por um ponto no infinito.

Demonstração. Como $(z : w) = (\lambda z : \lambda w)$ têm a mesma inclinação, segue que essa aplicação está bem definida. Uma vez que $\mathbb{C}P^1$ tem a topologia quociente, a continuidade da aplicação inclinação é equivalente à continuidade de seu levantamento $(z, w) \mapsto w/z$ para $(z, w) \in \mathbb{C}^2 -$

$\{0\}$. Esse levantamento é claramente contínuo quando $z \neq 0$. Para provar sua continuidade em $(z, 0)$ seja $|u| > R$ uma vizinhança de $p(z, 0) = \infty$ em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Então claramente

$$W = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 - \{0\} : |w/z| > R\}$$

é uma vizinhança de $(z, 0)$ tal que $u \in p(W)$ satisfaz $|u| > R$.

Afirmamos que a aplicação inclinação é uma bijeção. De fato, seja $(u, v) \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$ tal que $v/u = w/z$. Se $v = 0$ então $w = 0$, logo $(u : 0) = (z : 0)$. Se $0 \neq v/u = w/z \neq \infty$ então

$$\lambda = \frac{u}{z} = \frac{v}{w} \in \mathbb{C}$$

logo $(u : v) = (\lambda z : \lambda w)$. Por último, se $v/u = w/z = \infty$ então $u = z = 0$, logo $(0 : v) = (0 : w)$. Como a aplicação inclinação é uma bijeção contínua entre compactos Hausdorff, segue que ela é um homeomorfismo. \square

Esse homeomorfismo nos permite identificar de maneira natural a linha projetiva $\mathbb{C}P^1$ com a esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, o que faremos sempre que for conveniente. Isso fornece a seguinte definição alternativa.

Definição 1.6 (alternativa). A *fibração de Hopf* também é dada por

$$h : S^3 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad (z, w) \mapsto w/z$$

cuja fibra $h^{-1}(w/z)$ é o círculo de Hopf $S^1(z, w)$. Em particular,

$$h^{-1}(0) = C, \quad h^{-1}(\infty) = C^\perp$$

Usando essa definição alternativa a seguinte proposição é praticamente imediata.

Proposição 1.8. A imagem inversa por h de um círculo centrado na origem e de raio $0 < r < \infty$ em \mathbb{C} é o toro de Clifford T_θ com $0 < \theta = \arctan(r) < \pi/2$.

Demonstração. Note que

$$|h(z, w)| = \left| \frac{w}{z} \right| = \frac{|w|}{|z|} = r = \tan(\theta).$$

O resultado segue então da equação (1.13) e as duas equações que a precedem. \square

Em outras palavras, o toro de Clifford é a união de círculos de Hopf parametrizada por um círculo. Note que nos casos extremos em que o raio é $r = 0$ ou $r = \infty$ já vimos que

$h^{-1}(0) = C = T_0$ e $h^{-1}(\infty) = C^\perp = T_{\pi/2}$: nesses casos o toro degenera em um grande círculo. Já obtivemos a imagem desses dois grandes círculos pela projeção estereográfica de S^3 , a seguir obtemos a imagem do toro de Clifford.

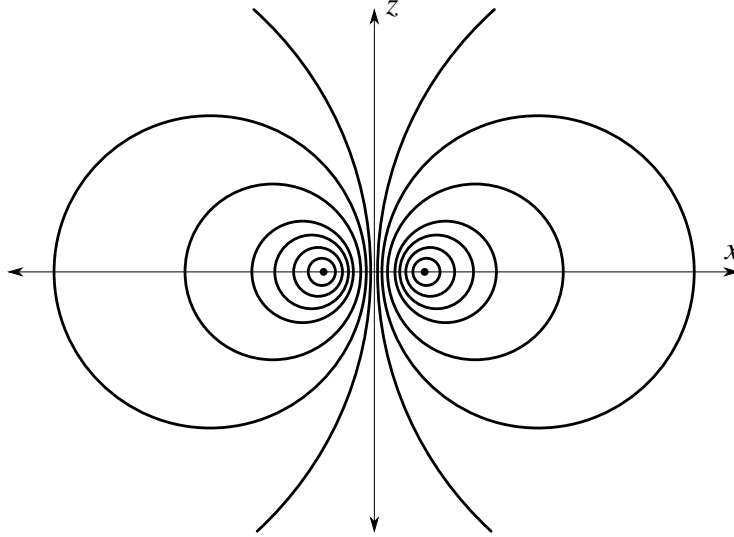


Figura 1.8 Projeção estereográfica de toros de Clifford intersectada como o plano xz .

Identificando $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2$ via

$$(x, y, z, w) \mapsto (x + iy, z, w)$$

e $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ esquecendo a última coordenada ocupada pelo vetor w , a equação (1.6) da projeção estereográfica pode ser escrita como

$$\varphi(\zeta, z, w) = \left(\frac{\zeta}{1-w}, \frac{z}{1-w} \right). \quad (1.19)$$

de modo que, para $e^{i\alpha} \in S^1$, a simetria rotacional

$$\varphi(e^{i\alpha}\zeta, z, w) = \left(\frac{e^{i\alpha}\zeta}{1-w}, \frac{z}{1-w} \right). \quad (1.20)$$

em torno do eixo z fica evidente, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposição 1.9. A projeção estereográfica do toro de Clifford T_θ é o toro de revolução de \mathbb{R}^3 ao redor do eixo z , do círculo do plano xz de centro $(\sec(\theta), 0)$ e raio $\tan(\theta)$.

Demonstração. Seja $x = \cos \theta$, da equação (1.8) temos que

$$T_\theta = \{(e^{i\alpha}x, z, w) : z^2 + w^2 = \sin^2 \theta, \alpha \in [0, 2\pi]\}$$

Segue de (1.20) e do fato que a projeção estereográfica leva círculos em círculos, que $\varphi(T_\theta)$ é a superfície de revolução ao redor do eixo z , do círculo

$$\{\varphi(x, z, w) : z^2 + w^2 = \sin^2 \theta\}$$

no plano xz . Mais precisamente, esse é o círculo no plano xz de centro $(\sec(\theta), 0)$ e raio $\tan(\theta)$. De fato, $\varphi(x, z, w) = (x/(1-w), z/(1-w))$ satisfaz

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{1-w} - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{1-w}\right)^2 &= \frac{x^2 + z^2}{(1-w)^2} - \frac{2}{1-w} + \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1-w^2}{(1-w)^2} - \frac{2}{1-w} + \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{(1+w) - 2}{1-w} + \frac{1}{x^2} \\ &= -1 + \frac{1}{x^2} = \frac{1-x^2}{x^2} \end{aligned}$$

onde

$$\frac{1}{x} = \sec(\theta), \quad \frac{1-x^2}{x^2} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta$$

como queríamos. □

Note que no caso extremo em que $\theta = 0$, $\varphi(T_0) = \varphi(C)$, o círculo no plano xz se reduz ao ponto $(1, 0)$, e o toro de revolução degenera no círculo de raio 1 no plano xy centrado na origem, como já havíamos visto. No caso extremo em que $\theta = \pi/2$, $\varphi(T_{\pi/2}) = \varphi(C^\perp)$, o círculo no plano xz tem centro em $(0, 0)$ e raio infinito que pode ser pensado como o eixo z , como já havíamos visto (veja Figura 1.8).

Um toro de revolução possui planos *bitangentes*: planos que são simultaneamente tangentes a dois pontos no toro (veja Figura 1.9).

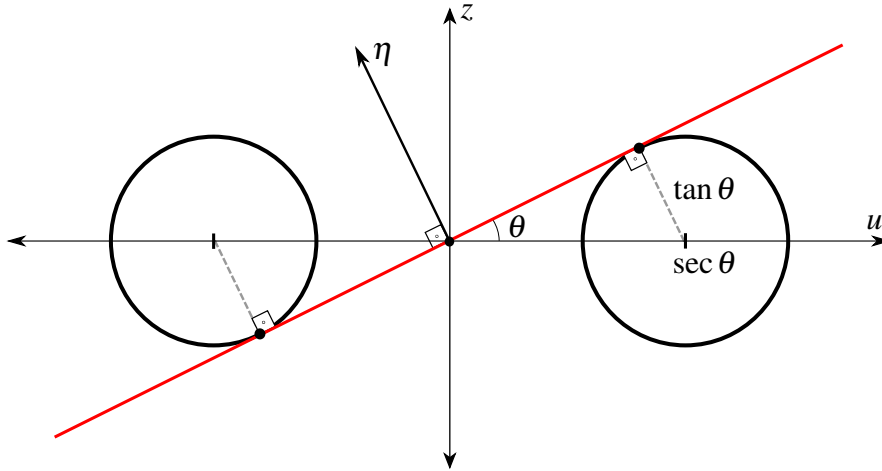


Figura 1.9 Plano bitangente ao toro de revolução, seção do plano zu .

Os círculos de Hopf tem uma relação íntima com esses planos.

Proposição 1.10. Seja C um círculo de Hopf contido num toro de Clifford T_θ . A imagem de C pela projeção estereográfica é um círculo contido num plano bitangente ao toro de revolução $\varphi(T_\theta)$ e passa pelos dois pontos de bitangência.

Demonstração. A Figura 1.9 é uma seção transversal do toro de revolução $\varphi(T_\theta)$ no plano gerado pelos eixos z e $\mathbb{R}u$, $u \in \mathbb{C}$. Os ângulos de 90 graus são dados pela tangência da reta bitangente aos círculos. O centro em $\sec \theta$ e o raio $\tan \theta$ dos círculos são dados pela Proposição anterior. Por Pitágoras, segue que o cateto adjacente mede 1, uma vez que o cateto oposto mede $\tan \theta$, o que mostra que o ângulo que a reta bitangente faz com o eixo horizontal é θ . Segue que a inclinação da reta bitangente no plano uz é $\tan \theta$.

Temos que o círculo de Hopf é dado por $C = S^1 p$ com $p \in T_\theta$, logo, pela equação (1.8), $p = (u, v)$ é tal que $u, v \in \mathbb{C}$ satisfazem $|u| = \cos \theta$, $|v| = \sin \theta$. Uma vez que

$$C = S^1 p = \{(e^{it}u, e^{it}v) : t \in [0, 2\pi]\},$$

podemos supor sem perda de generalidade que $p = (u, v)$ com $v = \sin \theta$. Seja

$$\alpha(t) = (e^{it}u, e^{it}\sin \theta)$$

uma parametrização de C , então o vetor

$$\varphi(\alpha(t)) = (e^{it}u, \cos t \sin \theta) / (1 - \sin t \sin \theta)$$

está contido no plano gerado pelo eixo z e o eixo gerado por $e^{it}u$, e tem inclinação

$$\frac{\cos t \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \cos t \tan \theta$$

uma vez que $|e^{it}u| = |u| = \cos \theta$. Assim, obtemos a inclinação bitangente $\tan \theta$ para $t = 0$ e $t = \pi$, de onde segue que $\varphi(C)$ contém os pontos de bitangência

$$\varphi(\alpha(0)) = (u, \operatorname{sen} \theta), \quad \varphi(\alpha(\pi)) = (u, -\operatorname{sen} \theta),$$

contidos no plano gerado por zu . Pondo $(u, \operatorname{sen} \theta)$ na Figura 1.9 obtemos que o correspondente plano bitangente tem vetor normal

$$\eta = (-\tan \theta u, \cos \theta)$$

Afirmamos que, mais ainda, η é perpendicular a todo $\varphi(\alpha(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. De fato, como o ângulo entre $e^{it}u$ é t radianos, segue que

$$\langle u, e^{it}u \rangle = |u|^2 \cos t = \cos^2 \theta \cos t$$

Olhando apenas para o numerador de $\varphi(\alpha(t))$ temos que

$$\langle \eta, \varphi(\alpha(t)) \rangle = -\tan \theta \langle u, e^{it}u \rangle + \cos \theta \cos t \operatorname{sen} \theta = -\operatorname{sen} \theta \cos \theta \cos t + \cos \theta \cos t \operatorname{sen} \theta = 0$$

para todo t . Isso prova que $\varphi(C)$ está contido num plano bitangente à $\varphi(T_\theta)$, passando pelos dois pontos de bitangência $\varphi(\alpha(0))$, $\varphi(\alpha(\pi))$, como queríamos. □

Exemplo 1.4. Colecionando os resultados anteriores, podemos mostrar geometricamente que quaisquer dois círculos de Hopf distintos de S^3 estão entrelaçados de maneira análoga a um link de Hopf (veja Exemplo 1.3).

De fato, dados dois círculos de Hopf distintos C' , C'' de S^3 , uma vez que as transformações unitárias preservam o paralelismo de Clifford e são transitivas nos círculos de Hopf (Lema 1.2), podemos supor sem perda de generalidade que $C'' = C^\perp$. Também podemos supor que $\theta = d(C', C^\perp) < \pi/2$, uma vez que $\theta = \pi/2$ implica em $C' = C$ e já vimos que $\varphi(C)$ é o círculo $x^2 + y^2 = 1$. Segue que C' está contido no toro de Clifford T_θ , portanto sua imagem $\varphi(C')$ é um círculo contido num plano bitangente ao toro de revolução $\varphi(T_\theta)$. Note da Figura 1.9 que os dois pontos de bitangência são antípodas, portanto um segmento de reta entre os dois pontos de bitangência é uma corda do círculo $\varphi(C')$ que passa pela origem. Segue que,

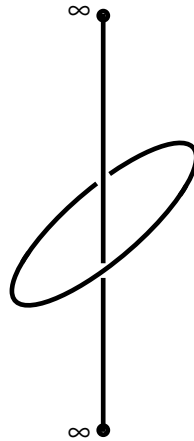


Figura 1.10 Imagens de dois círculos de Hopf pela projeção estereográfica.

no plano bitangente, a origem está no interior do círculo $\varphi(C')$. Assim, o eixo z atravessa $\varphi(C')$ (veja Figura 1.10) e, portanto, C' e C'' estão entrelaçados de modo análogo ao link de Hopf C e C^\perp .

Observação 1.4. É possível mostrar que a intersecção de um plano bitangente do toro de revolução $\varphi(T_\theta)$ com o toro é exatamente a união de dois círculos passando pelo ponto $\varphi(p)$, dados pela imagem por φ das duas paralelas de Clifford em T_θ passando por p (veja [1] p.321 para uma demonstração analítica ou [3] para uma demonstração usando geometria projetiva complexa). Esses dois círculos são conhecidos como *círculos de Villarceau* e estão ilustrados abaixo.

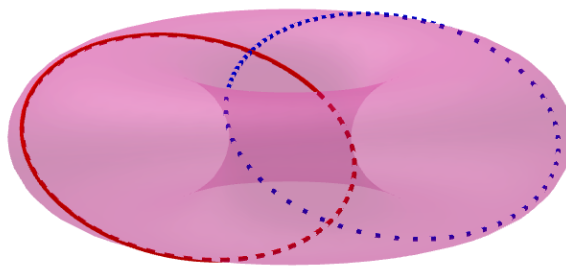


Figura 1.11 Projeção estereográfica das duas paralelas de Clifford a C por um ponto em T_θ .

Por último, usamos novamente a projeção estereográfica, agora para indentificar a esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ com a 2-esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, e obter uma definição alternativa da fibração de Hopf como uma aplicação $S^3 \rightarrow S^2$. De fato, com a identificação $S^2 \subset \mathbb{R}^3 = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$,

temos a projeção estereográfica $\varphi : S^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dada por

$$\varphi(\zeta, z) = \frac{\zeta}{1-z}$$

com inversa

$$\varphi^{-1}(\zeta) = \frac{1}{1+|\zeta|^2}(2\zeta, |\zeta|^2 - 1)$$

Assim, para $(z, w) \in S^3$, temos que

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(w/z) &= \frac{1}{1+|w/z|^2}(2w/z, |w/z|^2 - 1) \\ &= \frac{|z|^2}{|z|^2 + |w|^2} \left(2w\bar{z}/|z|^2, \frac{|w|^2 - |z|^2}{|z|^2} \right) \\ &= (2w\bar{z}, |w|^2 - |z|^2) \end{aligned}$$

onde usamos que $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$ e que $|z|^2 + |w|^2 = 1$. Usando que $h(z, w) = w/z$, o próximo resultado é imediato.

Proposição 1.11. A fibração de Hopf $\tilde{h} : S^3 \rightarrow S^2$ dada por

$$\tilde{h}(z, w) = (2w\bar{z}, |w|^2 - |z|^2)$$

satisfaz $\varphi \circ \tilde{h} = h$.

De agora em diante as fibrações de Hopf $S^3 \rightarrow S^2$, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{C}P^1$ serão denotadas pela mesma letra h , o contexto vai deixar claro a qual delas nos referimos.

Capítulo 2

Topologia da fibração de Hopf

Para responder à pergunta de Hopf se existem aplicações $S^3 \rightarrow S^2$ que não são homotópicas a uma constante, neste capítulo vamos definir os grupos de homotopia $\pi_n(X)$ de um espaço X e investigar suas propriedades básicas. Motivados pelo isomorfismo $\pi_n(X \times Y) \simeq \pi_n(X) \times \pi_n(Y)$ para produtos cartesianos, vamos investigar os π_n de espaços que são localmente dados por produtos cartesianos: a sequência exata longa em homotopia de fibrados. Com ela, vamos mostrar que existe o isomorfismo $\pi_3(S^2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$, cujo isomorfismo é gerado pela fibração de Hopf $h : S^3 \rightarrow S^2$, que não é, portanto homotópica à uma constante.

2.1 Grupos de Homotopia

Sejam (X, A) , (Y, B) espaços topológicos X, Y com respectivos subconjuntos A, B fixados. Escrevemos $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ para dizer que $f(A) \subset B$. Em particular, para espaços topológicos (X, x_0) , (Y, y_0) com ponto base fixados, escrevemos

$$f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$$

para dizer que $f(x_0) = y_0$. Dizemos que duas aplicações contínuas $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ são *homotópicas* se podemos deformar continuamente uma na outra mantendo fixos os pontos base, mais precisamente, se existe uma aplicação contínua

$$H : ([0, 1] \times X, [0, 1] \times \{x_0\}) \rightarrow (Y, y_0),$$

tal que $H(0, \cdot) = f(\cdot)$ e $H(1, \cdot) = g(\cdot)$, chamada de *homotopia* de f a g . Note que $H(t, x_0) = y_0$ para todo $t \in [0, 1]$. A homotopia é uma relação de equivalência no conjunto das funções

contínuas $(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$. A classe de equivalência de uma $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ é denotada por $[f]$ e chamada de *classe de homotopia* de f .

Definição 2.1. Fixe em $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o ponto base $s_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Denotamos por $\pi_n(X, x_0)$ o conjunto das classes de homotopia de aplicações $f : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$.

Para $n = 1$, temos que $\pi_1(X, x_0)$ é o conjunto de caminhos fechados de X baseados em x_0 , que possui uma estrutura natural de grupo, o chamado *grupo fundamental*, dada pela concatenação de caminhos, onde o inverso \bar{f} de um caminho $f : (S^1, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ é obtido percorrendo no sentido contrário, como ilustrado abaixo.

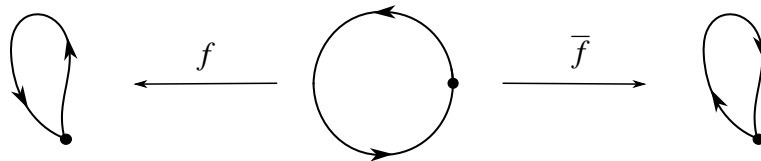


Figura 2.1 Caminho fechado percorrido no sentido inverso.

A concatenação dos caminhos $f, g : (S^1, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ num caminho $f * g : (S^1, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ pode ser obtida geometricamente colapsando S^1 pelo equador $\pm s_0$ para obter, à partir do hemisfério norte e sul de S^1 , duas cópias de S^1 adequadamente orientadas e coladas por s_0 , com f partindo do S^1 de cima e g partindo do S^1 de baixo, como ilustrado abaixo.

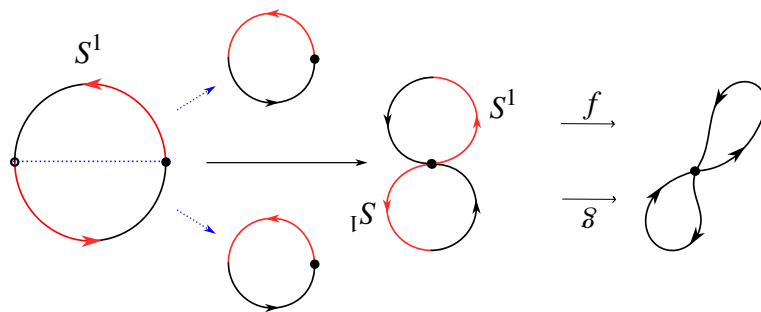


Figura 2.2 Concatenação de caminhos fechados.

Analogamente, para $n \geq 1$ o conjunto $\pi_n(X, x_0)$ possui uma estrutura natural de grupo dada à seguir. Para concatenar duas aplicações $f, g : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ em $f * g : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ primeiro colapsamos S^n pelo equador S^{n-1} para obter duas cópias de S^n coladas por s_0 e adequadamente orientadas, como ilustrado abaixo.

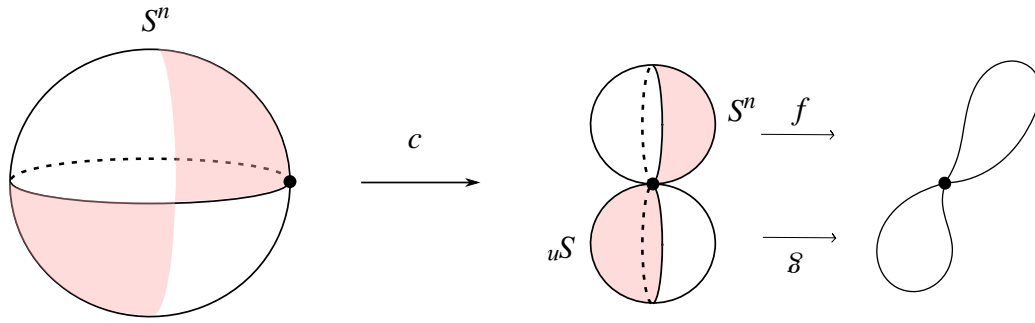


Figura 2.3 $f * g$, onde indicamos os hemisférios norte e suas pré imagens pelo colapso.

Mais precisamente, considere o n -disco fechado de \mathbb{R}^n dado por

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$$

que tem fronteira $\partial D^n = S^{n-1}$. Considere a aplicação contínua

$$\psi : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (S^n, s_0) \tag{2.1}$$

que colapsa a fronteira S^{n-1} no ponto base s_0 , é um difeomorfismo do interior de D^n em $S^n - \{s_0\}$ que preserva a orientação, dada da seguinte maneira. Primeiro considere a aplicação contínua $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}, \infty)$ que colapsa a fronteira S^{n-1} no ponto no infinito ∞ e, no interior de D^n , é dada por $x \mapsto x/(1 - |x|^2)$. Em seguida, componha com o homomorfismo $(\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}, \infty) \rightarrow (S^n, s_0)$ dado pela inversa da projeção estereográfica por s_0 no plano equatorial $x_1 = 0$, dada por

$$\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{1 + |x|^2} (|x|^2 - 1, 2x_1, \dots, 2x_n) \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

Obtemos assim

$$\begin{array}{ccccc} (D^n, S^{n-1}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}, \infty) & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & (S^n, s_0) \\ & & \searrow \psi & \nearrow & \\ & & & & \end{array}$$

Considere a projeção dada por

$$\pi : S^{n-1} \rightarrow D^n \quad \pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$$

e a reflexão ao redor do n -espaço $x_{n+1} = 0$, dada por

$$r : S^n \rightarrow S^n \quad r(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$$

Considere o wedge de esferas $S^n \vee S^n$ coladas por s_0 , a esfera de cima e a de baixo, respectivamente. O colapso de S^n em $S^n \vee S^n$ é então dado por

$$c : S^n \rightarrow S^n \vee S^n \quad c(x) = \begin{cases} \psi(\pi(x)) & \text{na esfera de cima, se } x_{n+1} \geq 0 \\ r(\psi(\pi(x))) & \text{na esfera de baixo, se } x_{n+1} \leq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Note que para $x \in S^n$, se $x_{n+1} = 0$, então $\pi(x) = x \in S^{n-1}$ é levado por ψ em s_0 , que é fixado pela reflexão, o que prova que c está bem definido e é contínuo.

Observação 2.1. A necessidade da reflexão em (2.2) quando x está no hemisfério sul é para preservar a orientação no colapso pois, enquanto a projeção do hemisfério norte para o disco preserva a orientação, a projeção do hemisfério sul para o disco inverte a orientação (o que pode ser visto, por exemplo, considerando os respectivos vetores normais).

Seja

$$f \vee g : (S^n \vee S^n, s_0) \mapsto (X, x_0)$$

dada por f na esfera de cima e g na esfera de baixo. Definimos então a concatenação por

$$f * g = (f \vee g) \circ c \quad (2.3)$$

e a inversão $\bar{f} : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ por

$$\bar{f} = f \circ r \quad (2.4)$$

Observe que, no caso $n = 1$, a equação (2.3) recupera a Figura 2.2 e a equação (2.4) recupera a Figura 2.1, uma vez que $r : S^1 \rightarrow S^1$ inverte o sentido anti-horário de S^1 para o sentido horário.

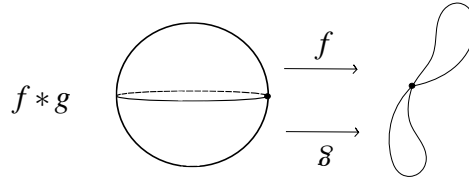
Considere a operação em $\pi_n(X, x_0)$ dada por

$$[f] * [g] = [f * g] \quad (2.5)$$

Proposição 2.1. Para $n \geq 1$ a operação acima está bem definida e faz de $\pi_n(X, x_0)$ um grupo com elemento neutro e inverso dados respectivamente por

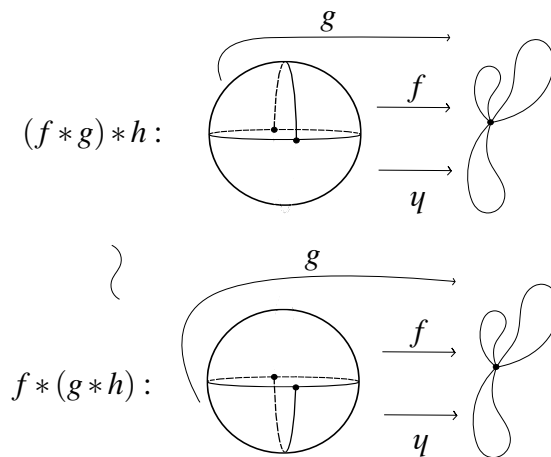
$$1 = [x_0] \quad \text{e} \quad [f]^{-1} = [\bar{f}].$$

Demonstração. Será baseada em ilustrações e observações geométricas. Primeiro, considere a concatenação $f * g : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ definida na equação (2.3) e ilustrada abaixo:



Podemos considerar que $f * g$ é dada por f puxada para o hemisfério norte de S^n e g puxada para o hemisfério sul, com as orientações adequadas (veja Figura 2.3), onde $f * g$ é constante e igual a x_0 no equador.

- Boa definição: Uma homotopia entre f e f' que mantém os pontos base fixados pode ser puxada para uma homotopia entre $f * g$ e $f' * g$, mudando apenas o hemisfério norte. Do mesmo modo, uma homotopia entre g e g' que mantém os pontos base fixados pode ser puxada para uma homotopia entre $f * g$ e $f * g'$, mudando apenas o hemisfério sul. Segue que a operação $[f] * [g] = [f * g]$ está bem definida em $\pi_n(X, x_0)$.
- Associatividade: Podemos considerar que $(f * g) * h : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ é dada por h definida sobre o hemisfério sul de S^n e $f * g$ definida sobre o hemisfério norte de S^n , onde f está definida na parte à direita deste hemisfério e g na parte à esquerda, que são separadas por um arco na metade do hemisfério superior onde f e g assumem valor constante e igual a x_0 , assim como no equador.

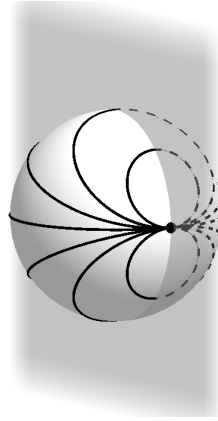


Do mesmo modo, podemos considerar que $f * (g * h) : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ é dada por f definida no hemisfério norte de S^n e $g * h$ definida no hemisfério sul de S^n , onde h está

definida na parte à direita deste hemisfério e g na parte à esquerda, que são separadas por um arco na metade do hemisfério inferior onde h e g assumem valor constante e igual a x_0 , assim como no equador.

A figura acima então ilustra $(f * g) * h$ e $f * (g * h)$ e sugere uma homotopia da primeira na segunda, obtida deformando a porção da esfera entre o arco do hemisfério superior e o arco do equador à esquerda, na porção da esfera entre o arco do equador à esquerda e o arco do hemisfério inferior.

- Para o elemento neutro e elemento inverso, vamos precisar da seguinte construção geométrica ilustrada abaixo.



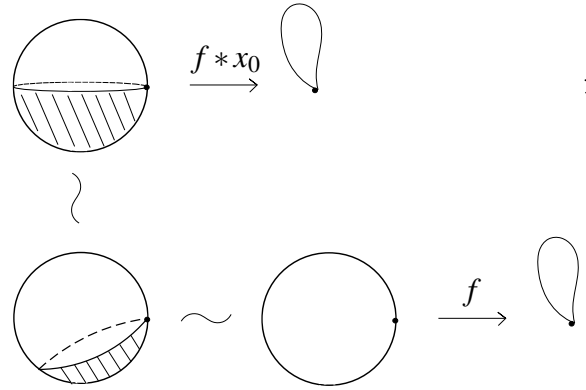
Seja $\Pi \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um plano gerado por s_0 e outro vetor unitário s_1 ortogonal à s_0 . Então o vetor unitário $s_\theta = \cos(\theta)s_0 + \text{sen}(\theta)s_1$ percorre o grande círculo $\Pi \cap S^n$. Seja Π_θ o n -subespaço afim passando por s_0 com vetor normal s_θ . Então Π_0 é o n -subespaço tangente à S^n passando por s_0 e $\Pi_{\pi/2}$ é o n -subespaço equatorial s_1^\perp .

Considere a $(n-1)$ -esfera $S_\theta = \Pi_\theta \cap S^n$. Então $S_0 = S_\pi = \{s_0\}$ e $S_{\pi/2} = s_1^\perp \cap S^n$ é o equador da figura acima. Uma vez que $s_{\theta+\pi} = -s_\theta$, segue que $S_{\theta+\pi} = S_\theta$. Em geral, para $\theta \in [0, \pi]$, S_θ é uma família de $(n-1)$ -esferas de S^n com apenas o ponto s_0 em comum, cuja união exaure S^n , como na figura acima.

Uma vez que $s_{-\theta} = \cos(\theta)s_0 - \text{sen}(\theta)s_1$ é a reflexão de s_0 ao redor do plano equatorial $\Pi_{\pi/2}$, segue que $S_{-\theta}$ é a reflexão de S_θ ao redor desse mesmo plano.

- Elemento neutro: Podemos considerar que $f * x_0$ é tal que f está definida sobre o polo norte de S^n e o equador e hemisfério sul são constantes e iguais a x_0 , como na figura abaixo, que também sugere uma homotopia de $f * x_0$ em f .

De fato, para construir essa homotopia, no segundo item escolha s_1 como o vetor unitário do eixo x_2 e considere o n -subespaço afim Π_θ , com vetor normal s_θ , onde



$\theta \in [\pi/2, \pi]$. Observe que podemos rotacionar continuamente o semi-espaço $x_2 = \langle x, s_1 \rangle \geq 0$ acima de $\Pi_{\pi/2}$ no semi-espaço $\langle x, s_\theta \rangle \geq 0$ acima de Π_θ até chegar no semi-espaço $-x_1 = \langle x, s_\pi \rangle \geq 0$ à esquerda do plano tangente Π_0 por s_0 , uma vez que $s_\pi = -s_0$. A homotopia é então obtida deformando continuamente o hemisfério superior $x_2 \geq 0$ de S^n na interseção de S^n com o semi-espaço acima de Π_θ , mantendo valor constante igual a x_0 no hemisfério abaixo de Π_θ em S^n , variando θ de $\pi/2$ a π .

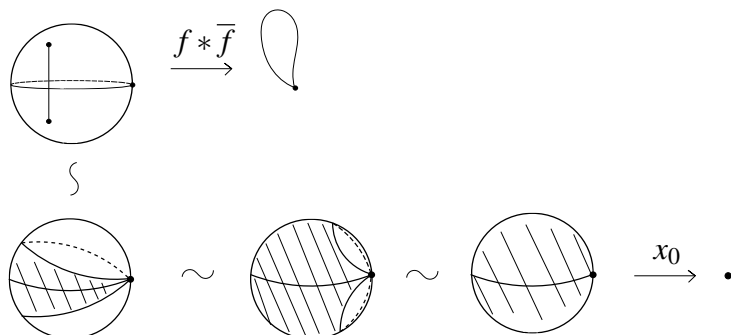
- Elemento Inverso: Podemos considerar que $f * \bar{f}$ é dada por f definida sobre o polo norte de S^n e \bar{f} definida no hemisfério sul, com as orientações adequadas. De (2.4) temos que os valores de f e \bar{f} estão relacionados pela reflexão r ao redor do plano $x_{n+1} = 0$. Observe da Figura 2.3 que a concatenação $f * \bar{f}$ tem o mesmo valor nos correspondentes pontos do hemisfério norte e sul. Isto é, se x está no hemisfério norte, então

$$f * \bar{f}(x) = f * \bar{f}(r(x)) \tag{2.6}$$

De fato, seja $x \in S^n$ no hemisfério norte, e $x' = \psi(\pi(x)) \in S^n$. Então $r(x)$ está no hemisfério sul, portanto de (2.2) e (2.3) segue que

$$f * \bar{f}(x) = f(x') \quad f * \bar{f}(r(x)) = \bar{f}(r(x')) = f(x')$$

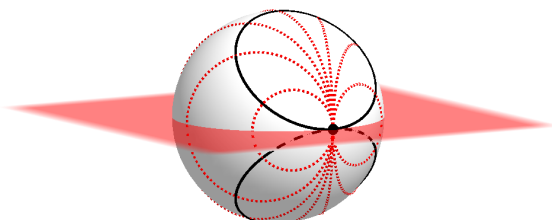
uma vez que $r(r(x')) = x'$. Isso está ilustrado na figura abaixo, que sugere uma homotopia de $f * \bar{f}$ em x_0 .



De fato, para construir essa homotopia, no segundo item escolha s_1 como o vetor unitário do eixo x_2 e considere o n -subespaço afim Π_θ , com vetor normal s_θ . Variando θ de $\pi/2$ a 0 , podemos rotacionar continuamente o semi-espaço $x_2 = \langle x, s_1 \rangle \geq 0$ acima de $\Pi_{\pi/2}$ no semi-espaço $\langle x, s_\theta \rangle \geq 0$ acima de Π_θ até chegar no semi-espaço $x_1 = \langle x, s_0 \rangle \geq 0$ à direita do plano tangente Π_0 por s_0 .

Do mesmo modo, note que $s_{-\pi/2} = -s_1$, portanto $\Pi_{-\pi/2} = \Pi_{\pi/2}$. Podemos então rotacionar continuamente o semi-espaço $x_2 = \langle x, s_{-\pi/2} \rangle \geq 0$ abaixo de $\Pi_{-\pi/2}$ no semi-espaço $\langle x, s_{-\theta} \rangle \geq 0$ abaixo de $\Pi_{-\theta}$ até chegar no semi-espaço $x_1 = \langle x, s_0 \rangle \geq 0$ à direita do plano tangente Π_0 por s_0 .

Para deformar os valores de $f * \bar{f}$ em x_0 ao longo da homotopia, seja $S_\theta = S^n \cap \Pi_\theta$ a $(n - 1)$ -esfera correspondente. Vimos no segundo item que $S_{-\theta}$ é a reflexão de S_θ ao redor do plano equatorial $\Pi_{\pi/2}$. Segue então de (2.6) que $f * \bar{f}$ tem o mesmo valor em um ponto $x \in S_\theta$ e em sua reflexão $r(x) \in S_{-\theta}$. A ideia então é nessa etapa da homotopia é tornar $f * \bar{f}$ constante igual a esse valor num “arco” de $(n - 1)$ -esfera que liga x a $r(x)$, como ilustrado na figura abaixo.



Se $n = 1$, então esse é único arco de círculo passando por $(-1, 0)$ que liga x a $r(x)$ em S^1 . Se $n > 1$, esses “arcos” de $(n - 1)$ -esferas são dadas pelo segundo item,

porém escolhendo s_1 como o vetor unitário s'_1 do eixo x_3 . Seja $s'_\varphi = \cos(\varphi)s_0 + \sin(\varphi)s'_1$, Π'_φ o plano afim passando por s_0 com vetor normal s'_φ e a $(n - 1)$ -esfera correspondente $S'_\varphi = S^n \cap \Pi'_\varphi$. Observe que os vetores normais s'_φ estão no n -espaço equatorial s_1^\perp , portanto S'_φ é invariante pela reflexão ao redor desse plano.

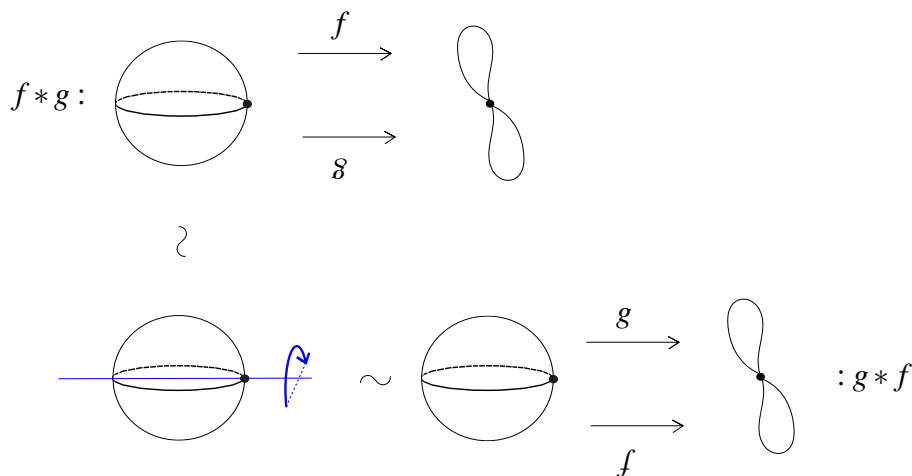
Para $0 < \theta < \pi/2$ temos que $\sin(\theta) \neq 0$ logo os vetores normais s_θ e s'_φ não são múltiplos um do outro, de modo que a interseção $\Pi_\theta \cap \Pi'_\varphi$ é uma reta passando por s_0 . Segue que os círculos correspondentes têm interseção $S_\theta \cap S'_\varphi$ dada por apenas um ponto, além de s_0 . Assim, para $x \in S_\theta - \{s_0\}$, existe uma única S'_φ que passa por x , essa mesma S'_φ é a única que contém a reflexão $r(x) \in S_{-\theta}$. O “arco” de $(n - 1)$ -esfera que liga x a $r(x)$ é então dado pelos pontos de S'_φ que estão abaixo do semi-espaço $\langle x, s_\theta \rangle \leq 0$ e acima do semi-espaço $\langle x, s_{-\theta} \rangle \geq 0$.

A homotopia de $f * \bar{f}$ na aplicação constante igual a x_0 é então obtida fazendo θ variar de $\pi/2$ até 0.

□

Proposição 2.2. Para $n \geq 2$ o grupo $\pi_n(X, x_0)$ é abeliano.

Demonstração. Como na demonstração da proposição 2.1, podemos pensar que $f * g$ é dada sobre S^n de tal forma que f está definida sobre o hemisfério norte, g sobre o hemisfério sul, onde ambas têm valor constante igual a x_0 no equador. Como $n \geq 2$, podemos girar o domínio S^n continuamente em torno do eixo s_0 , de 0 a 180 graus, girando junto os valores de g e de f , obtendo assim uma homotopia que em todos os instantes leva s_0 em x_0 e é tal que, no final, g está definida sobre o hemisfério norte e f sobre o hemisfério sul, de modo que $[f * g] = [g * f]$.



□

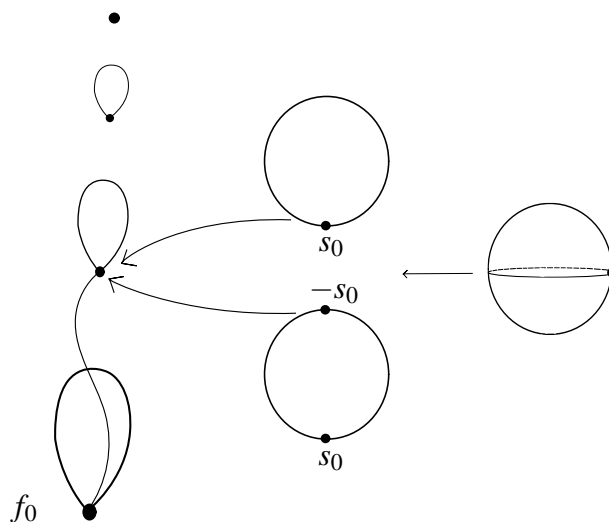
O próximo resultado mostra que se uma aplicação $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ é livremente homotópica a uma constante, então ela é homotópica ao ponto base por uma homotopia que fixa o ponto base.

Proposição 2.3. Para $n \geq 1$, seja $f : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ tal que existe uma aplicação contínua $H : [0, 1] \times S^n \rightarrow X$ de $H(0, \cdot) = f(\cdot)$ até a aplicação constante $H(1, \cdot) = x_1$. Então f é homotópica a x_0 por uma homotopia que fixa os pontos base.

Demonstração. A ideia é seguir o caminho do ponto base $s_0 = (1, 0, \dots, 0)$ por H para modificá-la e obter uma homotopia que fixa os pontos base, da seguinte maneira. Considere a curva contínua $h(t) = H(t, s_0)$, então $h(0) = f(s_0) = x_0$ e $h(1) = \bar{x}_1$. Projetando na primeira coordenada $\bar{x}_1 \in [-1, 1]$ da esfera S^n , $n \geq 1$, e percorrendo essa coordenada no sentido oposto, de 1 a -1 , podemos pensar nessa curva partindo de S^n considerando a homotopia

$$G : [0, 1] \times S^n \rightarrow X \quad G(t, x) = h(t(1 - \bar{x}_1)/2)$$

que é tal que $G(t, s_0) = h(0) = x_0$ e $G(t, -s_0) = h(t)$. Em particular $G(0, \cdot) = x_0$.



Uma vez que $H(t, s_0) = G(t, -s_0)$, consideramos o colapso modificado

$$c' : S^n \mapsto S^n \vee S^n \tag{2.7}$$

onde em “ \vee ” colamos o S^n de cima com o S^n de baixo colando o s_0 de cima com o $-s_0$ de baixo. Usando esse colapso, podemos fazer a concatenação modificada H com G para obter $I = H *' G : [0, 1] \times S^n \rightarrow X$ tal que $I([0, 1] \times s_0) = G([0, 1] \times s_0) = \{x_0\}$. Temos que $I(0, \cdot) = f *' x_0$, que é claramente homotópico a f , por uma homotopia fixando pontos base.

Além disso, $I(1, \cdot) = \bar{x}_1 *' G(1, \cdot)$, que é claramente homotópico a $G(1, \cdot)$, por uma homotopia fixando pontos base, que por sua vez é homotópico a $G(0, \cdot) = x_0$. Segue que f é homotópico a x_0 por uma homotopia fixando pontos base, como queríamos. \square

Note que a Definição 2.1 faz sentido mesmo quando $n = 0$. Nesse caso $S^0 = \{\pm 1\}$ e uma aplicação $f : (\{\pm 1\}, 1) \rightarrow (X, x_0)$ satisfaz $f(1) = x_0$, portanto está determinada por seu valor $f(-1)$. Além disso, duas aplicações $f, g : (\{\pm 1\}, 1) \rightarrow (X, x_0)$ são homotópicas se, e só se, $f(-1)$ e $g(-1)$ são conectados por um caminho contínuo de X . Segue que $\pi_0(X, x_0)$ é o conjunto das componentes conexas por caminhos de X , onde denotaremos por $[x] \in \pi_0(X, x_0)$ a componente conexa por caminhos de $x \in X$.

A princípio, $\pi_0(X, x_0)$ não tem estrutura natural de grupo. Porém, se $X = G$ é um grupo topológico com ponto base $x_0 = 1$, então $\pi_0(G, 1)$ tem uma operação natural de grupo. De fato, seja G_0 a componente conexa por caminhos de G partindo de 1, isto é

$$[1] = G_0.$$

Proposição 2.4. Temos que G_0 é subgrupo normal de G e que

$$[g] = gG_0$$

Segue então que $\pi_0(G, 1) = G/G_0$ é o grupo das componentes conexas por caminhos de G , com operação

$$[g] * [h] = [gh],$$

elemento neutro $[1]$ e inversa $[g]^{-1} = [g^{-1}]$.

Demonstração. Usando o produto contínuo de G para multiplicar ponto a ponto caminhos contínuos que partem de 1, segue que G_0 é fechado por produtos. Usando a inversa contínua de G para tomar a inversa ponto a ponto caminhos contínuos que partem de 1, segue que G_0 é fechado para inversa. Dado $g \in G$, temos que a conjugação $x \mapsto gxg^{-1}$ é um automorfismo contínuo de G , de modo que leva 1 em 1 e, portanto, G_0 em G_0 . Segue que G_0 é subgrupo normal de G , o que prova a primeira parte.

Para a segunda parte, note que

$$[g] = \{a(1) : a : [0, 1] \rightarrow G \text{ contínuo tal que } a(0) = g\}$$

Seja $a : [0, 1] \rightarrow G$ um caminho contínuo. Multiplicando ponto a ponto por $g \in G$ obtemos o caminho contínuo $ga : [0, 1] \rightarrow G$ dado por $t \mapsto ga(t)$. Se $a(0) = 1$, então $(ga)(0) = g$, o que

mostra que $gG_0 \subset [g]$. Reciprocamente, se $a(0) = g$, então $(g^{-1}a)(0) = 1$, o que mostra que $g^{-1}[g] \subset G_0$, logo $[g] \subset gG_0$, como queríamos. \square

Observação 2.2. Para simplificar os enunciados faremos um abuso de notação e também chamaremos $\pi_0(X, x_0)$ de grupo de homotopia, mesmo nos casos em que seja apenas um conjunto.

Para relacionar os grupos de homotopia de dois espaços, temos que uma aplicação contínua $\varphi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ induz a aplicação dada por

$$\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0), \quad \varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$$

onde $f : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$.

Proposição 2.5. Temos que

1. A aplicação acima está bem definida e, para $n \geq 1$, é um homomorfismo de grupos.
2. Seja a aplicação contínua $\psi : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$, então $(\psi \circ \varphi)_*$ é a composição

$$\varphi_* \circ \psi_* : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Z, z_0)$$

3. Se $\varphi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ é um homeomorfismo, então o homomorfismo induzido φ_* é uma bijeção para $n = 0$ e um isomorfismo para $n \geq 1$.
4. Se $\varphi, \psi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ são homotópicas então as aplicações induzidas $\varphi_* = \psi_*$.

Demonstração. Para o item 1, temos que f_* está bem definida. Sejam $[f], [g] \in \pi_n(X, x_0)$, se $[f] = [g]$ temos que $[\varphi \circ f] = \varphi_*([f]) = \varphi_*([g]) = [\varphi \circ g]$. Vamos mostrar que φ_* é um homomorfismo, mas isto segue da definição da operação de concatenação (2.3), uma vez que $\varphi \circ (f \vee g) = (\varphi \circ f) \vee (\varphi \circ g)$.

Para o item 2, seja $[f] \in \pi_n(X, x_0)$, temos que

$$(\psi \circ \varphi)_*([f]) = [\psi \circ \varphi \circ f] = \psi_*([\varphi \circ f]) = \psi_* \circ \varphi_*([f])$$

logo, $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$

Para o item 3, seja $\varphi^{-1} : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ a aplicação inversa de φ . Uma vez que $\varphi \circ \varphi^{-1} = id_X$, segue que

$$\varphi_*^{-1} \circ \varphi_* = (id_X)_* = id_{\pi_n(X, x_0)} \quad \varphi_* \circ \varphi_*^{-1} = (id_Y)_* = id_{\pi_n(Y, y_0)}$$

o que prova o desejado. \square

Uma *retração* de X num subconjunto $A \subset X$ é uma aplicação contínua $r : X \rightarrow A$ tal que $r \circ i = \text{id}_A$, nesse caso dizemos que A é um *retrato* de X . Essa retração é *de deformação* se $i \circ r$ é homotópico à identidade de X , nesse caso dizemos que A é um *retrato de deformação* de X . Dizemos que X é *contrátil* em $x_0 \in X$ se existe uma retração de deformação de X em $\{x_0\}$.

Proposição 2.6. Seja A é um retrato de deformação de X , $x_0 \in A$. Então a inclusão $i : A \rightarrow X$ induz isomorfismos

$$\pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0)$$

para todo n . Em particular, se X é contrátil em x_0 , segue que

$$\pi_n(X, x_0) = 0$$

para todo n .

Demonstração. Seja r a retração de X em A tal que $i \circ r$ é homotópico à identidade de X . Segue da proposição anterior que $(i \circ r)_* = i_* \circ r_* = \text{id}_{\pi_n(X, x_0)}$. Por outro lado, de $r \circ i = \text{id}_A$ segue que $(r \circ i)_* = r_* \circ i_* = \text{id}_{\pi_n(A, x_0)}$. Isso mostra que r é a inversa de i em homotopia, o que nos dá que i_* é isomorfismo. A última afirmação segue do fato dos grupos de homotopia de um ponto serem todos triviais. \square

Exemplo 2.1. 1. \mathbb{R}^k é contrátil na origem 0 . De fato, considere a homotopia $H(0, x) = 0$ e $H(t, x) = xt$ para $t \in (0, 1]$, $x \in \mathbb{R}^k$. Para mostrar continuidade em $(0, x)$, sejam seqüências $t_n \rightarrow 0$, e $x_n \rightarrow x$, com $t_n > 0$. Então $H(t_n, x_n) = x_n t_n \rightarrow 0$ uma vez que $t_n \rightarrow 0$ e x_n é limitada. Uma vez que $H(1, x) = x$, temos o afirmado. Segue da proposição anterior que

$$\pi_n(\mathbb{R}^k, 0) = 0$$

para todo n .

2. Para $k > 1$, a esfera S^{k-1} é um retrato de deformação de $\mathbb{R}^k - \{0\}$. De fato, um retrato $\mathbb{R}^k - \{0\} \rightarrow S^{k-1}$ é dado por $r(x) = x/|x|$. Considere então a homotopia $H(t, x) = x/(1 + t(|x| - 1))$ para $t \in [0, 1]$, $x \in \mathbb{R}^k - \{0\}$. Uma vez que $|x| > 0$, segue que $|x| - 1 > -1$ e $t(|x| - 1) > -t \geq -1$, portanto o denominador de $H(t, x)$ não se anula, o que mostra que ela é contínua e bem definida. Uma vez que $H(0, x) = x$ e $H(1, x) = x/|x|$, temos o afirmado. Segue da proposição anterior que

$$\pi_n(S^{k-1}, s_0) = \pi_n(\mathbb{R}^k - \{0\}, s_0)$$

para todo n .

Em algumas situações será conveniente enxergar uma aplicação $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ como definida no disco D^n , com valor constante na fronteira $\partial D^n = S^{n-1}$. Mais precisamente, compondo com (2.1), toda aplicação contínua $a : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ pode ser puxada para uma aplicação contínua

$$\begin{array}{ccccc} (D^n, S^{n-1}) & \longrightarrow & (S^n, s_0) & \xrightarrow{a} & (X, x_0) \\ & & \searrow \tilde{a} & \nearrow & \end{array}$$

partindo de um disco, colapsando sua fronteira S^{n-1} no ponto base x_0 .

Para verificar como ficam as operações de concatenação e inversão para aplicações puxadas para o disco, primeiro note que podemos concatenar duas aplicações $A, C : (D^n, -s_0) \rightarrow (B, b_0)$ definidas em discos, de maneira análoga à que concatenamos as definidas em esferas (veja a Figura 2.4).

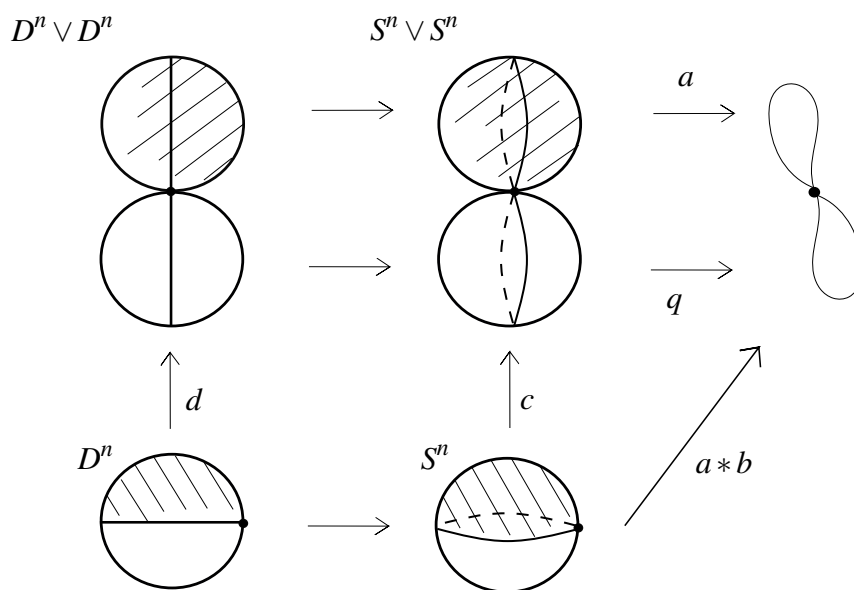


Figura 2.4 Operações no disco.

De fato, considere a aplicação

$$d : D^n \rightarrow D^n \vee D^n$$

que colapsa o $(n - 1)$ -disco $x_n = 0$ ao ponto s_0 , levando o disco superior $x_n \geq 0$ no disco D^n de cima e o disco superior $x_n \leq 0$ no disco D^n de baixo, onde “ \vee ” é o produto wedge de duas cópias de D^n coladas por $-s_0$ e, além disso, a restrição de d ao bordo S^{n-1} é a aplicação de

colapso $c : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1} \vee S^{n-1}$ dada em (2.2). Considere então

$$A \vee C : (D^n \vee D^n, -s_0) \longmapsto (X, b_0)$$

dada por A no disco de cima e C no disco de baixo e defina a concatenação

$$A * C = (A \vee C) \circ d \tag{2.8}$$

que é uma aplicação $(D^n, -s_0) \rightarrow (B, b_0)$. Defina também $\bar{A} : (D^n, -s_0) \rightarrow (B, b_0)$ dado por

$$\bar{A}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = A(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n). \tag{2.9}$$

Vimos em (2.4) que $a : (S^n, s_0) \rightarrow (B, b_0)$ definida numa esfera tem inverso em homotopia com representante canônico $\bar{a}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = a(x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$.

Proposição 2.7. Sejam $a, b : (S^n, s_0) \rightarrow (B, b_0)$, puxando-as para o disco $\tilde{a}, \tilde{b} : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (B, b_0)$ temos que

$$\tilde{a} * \tilde{b} = \widetilde{a * b} \quad \text{e} \quad \bar{\tilde{a}} = \tilde{a}$$

Demonstração. Primeiro observe que ambas aplicações

$$(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}, \infty) \quad (\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}, \infty) \rightarrow (S^n, s_0)$$

consideradas acima têm as seguintes simetrias:

1. Ao trocar o sinal da última cordenada no domínio, troca-se o sinal da última coordenada na imagem, e vice-versa. Segue que a composição (2.1) delas tem essa propriedade, em particular leva o $(n-1)$ -disco $x_n = 0$ em D^n na $(n-1)$ -esfera $x_{n+1} = 0$ em S^n .
2. A composição (2.1) delas leva o disco superior $x_n \geq 0$ no hemisfério norte $x_{n+1} \geq 0$ e o disco inferior $x_n \leq 0$ no hemisfério sul $x_{n+1} \leq 0$

Para o inverso, do item 1 do parágrafo anterior segue que, puxando o representante canônico $\bar{a}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = a(x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$ para o disco, obtemos $\tilde{\bar{a}} : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (B, b_0)$ tal que

$$\tilde{\bar{a}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \tilde{a}(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n),$$

Note que o lado direito é $\tilde{\bar{a}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ dado em (2.9), segue que $\tilde{\bar{a}} = \tilde{a}$, como queríamos.

Para a concatenação, dadas $a, b : (S^n, s_0) \rightarrow (B, b_0)$, do item 2 do parágrafo anterior, puxando para o disco, temos que

$$\widetilde{a * b} = \tilde{a} * \tilde{b}$$

□

2.2 Produto cartesiano e sequência exata curta

Uma estratégia para obter os grupos de homotopia de um espaço é subdividi-lo em partes adequadas e tentar relacionar os grupos de homotopia das partes com os grupos de homotopia do todo. Para fazer essa relação das partes com o todo, será conveniente utilizar o formalismo de sequências exatas.

Definição 2.2. Dizemos que a sequência de grupos e homomorfismos

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$$

é *exata* se $\text{Im}\varphi = \text{Ker}\psi$. Essa sequência exata *cinde* se existe um homomorfismo $\sigma : C \rightarrow B$ tal que $\psi \circ \sigma = id_C$, tal homomorfismo é chamado de *seção* da sequência exata.

Exemplo 2.2. Denote por $1_A, 1_B$ os elementos neutros dos grupos A, B , respectivamente.

1. Denote por 1 o grupo trivial de um elemento, por $1 \rightarrow A$ o homomorfismo trivial que envia 1 em 1_A , e por $B \rightarrow 1$ o homomorfismo trivial que envia tudo em 1 . Então é imediato que a sequência

$$1 \rightarrow A \xrightarrow{\varphi} B$$

é exata se, e só se, φ é injetivo, e a sequência

$$A \xrightarrow{\varphi} B \rightarrow 1$$

é exata se, e só se, φ é sobrejetor.

2. A sequência do produto cartesiano

$$A \xrightarrow{i} A \times B \xrightarrow{\pi} B$$

onde i é a inclusão de A em $A \times 1_B$ e π é a projeção de $A \times B$ no segundo fator, é claramente exata. Neste caso, a inclusão j de B em $1_A \times B$ claramente satisfaz $\pi \circ j = id_B$, logo é uma seção da sequência exata, que cinde.

3. Se G é um grupo e H um subgrupo normal, então claramente

$$H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} G/H$$

onde i é a inclusão de H em G e π é a projeção no quociente, é claramente exata.

A última sequência exata dos exemplos acima nem sempre possui seção: o próximo resultado mostra que as sequências exatas que possuem seção são essencialmente como a do produto cartesiano do penúltimo exemplo acima.

Proposição 2.8. Se a sequência exata

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$$

possui uma seção $\sigma : B \rightarrow A$. Então, existe um isomorfismo $B \rightarrow A \times C$

Demonstração. Defina

$$\theta : B \rightarrow A \times C$$

por $\theta(b) = (\sigma(b), \psi(b))$. Note que θ é um homomorfismo, uma vez que σ e ψ são. Para mostrar a injetividade, suponha que $\theta(b) = (1, 1)$. Como $\sigma(b) = 1$ e $\psi(b) = 1$. Pela exatidão da sequência, a condição $\psi(b) = 1$ implica que $b = \varphi(a)$ para todo $a \in A$. Assim,

$$1 = \sigma(b) = \sigma(\varphi(a)) = a$$

. Como $b = \varphi(a) = \varphi(1) = 1$, temos a injetividade. Para mostrar que θ é sobrejetora,

Para mostrar que θ é sobrejetora, seja $(a, c) \in A \times C$. Como ψ é sobre, $c = \psi(b)$ para algum $b \in B$. Como $\ker \psi = \text{im } \varphi$, a imagem geral inversa de c em ψ é $b\varphi(x)$ para $x \in A$. Queremos encontrar $x \in A$ tal que $\sigma(b\varphi(x)) = a$, então $\theta(b\varphi(x)) = (a, c)$. Desde σ é um homomorfismo, a condição $\sigma(b\varphi(x)) = a$ é equivalente a $\sigma(b)x = a$, então defina $x = \sigma(b)^{-1}a$. Portanto,

$$\theta(a\varphi(x)) = (\sigma(b\varphi(x)), \psi(b\varphi(x))) = (a, c)$$

e θ é sobrejetora, conseqüentemente B e $A \times C$ são isomorfos. \square

Voltando aos grupos de homotopia, suponha que um espaço E se decompõe como o produto cartesiano de espaços

$$(E, e_0) = (X, x_0) \times (Y, y_0)$$

com ponto base $e_0 = (x_0, y_0)$. A proposição abaixo mostra que $\pi_n(E, e_0)$ é isomorfo ao produto cartesiano de $\pi_n(X, x_0)$ com $\pi_n(Y, y_0)$. De fato, considere as inclusões naturais em cada coordenada $i : (X, x_0) \rightarrow (E, e_0)$, $i(x) = (x, y_0)$, $j : (Y, y_0) \rightarrow (E, e_0)$, $j(y) = (x_0, y)$, e a projeção natural na segunda coordenada $p_Y : (E, e_0) \rightarrow (Y, y_0)$.

Proposição 2.9. As aplicações $(X, x_0) \xrightarrow{i} (X \times Y, x_0) \xrightarrow{p_Y} (Y, y_0)$ induzem a sequência

$$0 \rightarrow \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \xrightarrow{(p_Y)_*} \pi_n(Y, y_0) \rightarrow 0$$

que é exata em todos seus termos e cinde, com seções $\pi_n(Y, y_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X \times Y, x_0)$ e $\pi_n(X \times Y, x_0) \xrightarrow{(p_X)_*} \pi_n(X, x_0)$. Em particular, segue que

$$\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0)$$

Demonstração. Vamos mostrar que a sequência é exata em cada trecho. No primeiro trecho devemos mostrar que i_* é injetiva. Seja $p_X : (X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow (X, x_0)$ a projeção na primeira coordenada, dada por $p_X(x, y) = x$. Uma vez que $p_X \circ i = \text{id}_X$, segue que $(p_X)_* \circ i_* = \text{id}_{\pi_n(X, x_0)}$, o que implica que i_* é injetiva.

$$[f] = (p_X)_* \circ i_* [f] = (p_X)_*([(x_0, y_0)]) = [x_0]$$

No último trecho, devemos mostrar que $(p_Y)_*$ é sobrejetora. Seja $[f] \in \pi_n(Y, y_0)$, representada por $f : (S^n, s_0) \rightarrow (Y, y_0)$. Ela tem levantamento $F(x) = (x_0, f(x))$, que é uma aplicação $F : (S^n, s_0) \rightarrow (X \times Y, (x_0, y_0))$ tal que $p_Y \circ F = f$. Segue que $(p_Y)_*[F] = [\pi \circ F] = [f]$, logo $[f]$ está em $\text{Im } p_*$, como queríamos.

Pra o trecho do meio, primeiro observe que $p_Y \circ i$ é uma aplicação constante e igual a y_0 , segue que $(p_Y \circ i)_* = (p_Y)_* \circ i_* = [y_0]$, portanto $\text{Im } i_* \subset \text{Ker } (p_Y)_*$. Para a inclusão recíproca, seja $[f] \in \pi_n(X \times Y)$ tal que $(p_Y)_*([f]) = [y_0] = 0$. Segue que, existe uma homotopia $\bar{h} : ([0, 1] \times S^n, [0, 1] \times \{s_0\}) \rightarrow (Y, y_0)$ com

$$\bar{h}(0, \cdot) = p_Y \circ f \quad \bar{h}(1, \cdot) = y_0.$$

Escrevendo $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, temos a primeira coordenada $f_1 = p_X \circ f : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ e a segunda coordenada $f_2 = p_Y \circ f : (S^n, s_0) \rightarrow (Y, y_0)$. Assim, podemos levantar a homotopia h para $H : ([0, 1] \times S^n, [0, 1] \times \{s_0\}) \rightarrow (X \times Y, (x_0, y_0))$ pondo

$$H(t, x) = (f_1(x), h(t, x))$$

de modo que

$$H(0, \cdot) = (f_1(\cdot), f_2(\cdot)) = f(\cdot) \quad H(1, \cdot) = (f_1(\cdot), y_0) = i \circ f_1(\cdot)$$

Segue que $[f] = i_*[f_1]$, portanto $\text{Ker } (p_Y)_* \subset \text{Im } i_*$, como queríamos.

Para mostrar que a sequência cinde, basta observar que $p_Y \circ j = \text{id}_Y$, de modo que $(p_Y)_* \circ j_* = \text{id}_{\pi_n(Y)}$, como queríamos. Como $(p_X)_*(i_*(x)) = x$, pela proposição 2.8, segue então que o grupo $\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0))$ é o produto direto

$$\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0)$$

□

2.3 Fibrados

O último resultado da seção anterior sugere que poderemos obter informações sobre os grupos de homotopia de um espaço se ele se decompõe localmente como produto cartesiano.

Definição 2.3. Uma aplicação contínua $p : E \rightarrow B$ é um *fibrado* (localmente trivial) com espaço total E , base B , projeção p e fibra F se p é sobrejetora e E é localmente o produto cartesiano da fibra F por um aberto de B .

Mais precisamente, se todo $b \in B$ possui uma vizinhança $U \subset B$ tal que $p^{-1}(U)$ é homeomorfa a $F \times U$ por uma trivialização local que preserva as fibras, dada por um homeomorfismo $\psi : V \rightarrow U$ e um homeomorfismo $\varphi : F \times V \rightarrow p^{-1}(U)$ tal que $p \circ \varphi = \psi \circ p_V$, onde p_V é a projeção na segunda coordenada de $F \times V$.

$$\begin{array}{ccc} E & \supseteq p^{-1}(U) & \xleftarrow{\varphi} F \times V \\ p \downarrow & & \downarrow p_V \\ B & \supseteq U & \xleftarrow{\psi} V \end{array}$$

Em particular, $\varphi(\cdot, v)$ fornece um homeomorfismo entre F e a fibra $p^{-1}(b)$ de $b = \psi(v)$.

Pedimos também que E e B sejam conexos por caminhos. A fibra F pode ser desconexa, quando ela é discreta dizemos que o fibrado é um *recobrimento*.

Observação 2.3. Quando for conveniente podemos, na definição acima, identificar V com U por meio do homeomorfismo ψ , de modo a tomar $V = U$, $p_V = p_U$ e $\psi = \text{id}_U$.

Fixado um ponto base $b_0 \in B$ e $e_0 \in E$ tal que $p(e_0) = b_0$, segue da definição acima que podemos escolher um homeomorfismo i entre F e $p^{-1}(b_0)$ e um ponto base $f_0 \in F$ com $i(f_0) = e_0$ para obter

$$\begin{array}{ccc} (F, f_0) & \xrightarrow{i} & (E, e_0) \\ & & p \downarrow \\ & & (B, b_0) \end{array}$$

Quando for conveniente podemos, na definição acima, tomar $F = p^{-1}(b_0)$, i a inclusão em E e $f_0 = e_0$.

Definição 2.4. Uma *seção* (global) do fibrado $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ é uma aplicação contínua $s : (B, b_0) \rightarrow (E, e_0)$ tal que $p \circ s = \text{id}_B$.

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{s} & (E, e_0) \\ & & \downarrow p \\ (B, b_0) & \xrightarrow{\text{id}} & (B, b_0) \end{array}$$

A seção é *local* se está definida apenas num aberto de B que contém b_0 .

Exemplo 2.3. 1. Um fibrado é *trivial* se possui uma trivialização global, isto é, definida em todo $F \times B$. Nesse caso, ele pode ser pensado como o fibrado dado pelo produto cartesiano

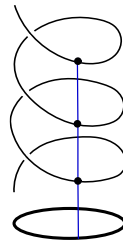
$$(E, e_0) = (F, f_0) \times (B, b_0)$$

com ponto base $e_0 = (f_0, b_0)$, projeção $p : E \rightarrow B$ na segunda coordenada e fibra F . Esse fibrado possui seção $j : (B, b_0) \rightarrow (E, e_0)$ dada pela inclusão $j(b) = (f_0, b)$ na segunda coordenada.

2. Uma vez que um ponto em S^1 é determinado um ângulo, à menos de múltiplos de 2π , temos que

$$p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad \theta \mapsto e^{2\pi i \theta}$$

é um recobrimento com fibra \mathbb{Z} .



De fato, p é claramente contínua e sobrejetora. Dado $z_0 \in S^1$, temos que $z_0 = e^{2\pi i \theta_0}$, para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}$ e que a restrição ψ de p ao intervalo $I_0 = (\theta_0 - 1/4, \theta_0 + 1/4)$ é um homeomorfismo sobre sua imagem $U = p(I_0)$. Além disso, temos que

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k + I_0)$$

é uma união de intervalos transladados da reta com fecho disjunto. Segue que

$$\varphi : \mathbb{Z} \times I_0 \rightarrow p^{-1}(U), \quad (k, \theta) \mapsto k + \theta$$

é um homeomorfismo, pois para cada $k \in \mathbb{Z}$ é um homeomorfismo entre I_0 e o intervalo $I_0 + k$. Além disso

$$p(\varphi(k, \theta)) = e^{2\pi i(k+\theta)} = e^{2\pi i\theta} = \psi(\theta)$$

como queríamos.

3. A fibração de Hopf $h : S^3 \rightarrow S^2$ é um fibrado com fibra S^1 dada pelos números complexos de norma 1.

Vimos no capítulo anterior que as fibras de h são círculos de Hopf, portanto são todas homeomorfas à S^1 . Falta mostrar que h é localmente trivial. De fato, identificando S^2 com $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, temos que $h(z, w) = w/z$, onde $(z, w) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$. O aberto $U_0 = \mathbb{C}$ de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é vizinhança de todo ponto, exceto ∞ . Seja D o disco aberto $|z| < \pi/2$ de \mathbb{C} , então a aplicação

$$\psi : D \rightarrow U_0, \quad re^{i\theta} \mapsto \tan(r)e^{i\theta}$$

está bem definida e é contínua, uma vez que $\tan(r)$ é contínua e $\tan(0) = 0$. De fato ψ é homeomorfismo, pois tem inversa $se^{i\theta} \mapsto \arctan(s)e^{i\theta}$, que é analogamente bem definida e contínua em U_0 .

Considere agora

$$\sigma : D \rightarrow S^3, \quad re^{i\theta} \mapsto (\cos(r), \sin(r)e^{i\theta})$$

que é bem definida e contínua, uma vez que $\sin(r)$ é contínua e $\sin(0) = 0$, e além disso claramente toma valores em S^3 . Note que

$$h(\sigma(re^{i\theta})) = \tan(r)e^{i\theta} = \psi(re^{i\theta})$$

portanto σ passa por todos círculos de Hopf sobre U_0 . Para obter a trivialização local sobre U_0 , usamos a ação de S^1 em S^3 para obter o círculo de Hopf que passa cada ponto da imagem de σ , fazendo

$$\varphi : S^1 \times D \rightarrow h^{-1}(U_0), \quad (z, re^{i\theta}) \mapsto z\sigma(re^{i\theta})$$

Pelo que vimos, é imediato que φ é contínua e que $h \circ \varphi = \psi \circ p_D$. Para mostrar que φ é homeomorfismo primeiro obtemos sua inversa

$$\varphi^{-1} : h^{-1}(U_0) \rightarrow S^1 \times D$$

Temos que $p \in h^{-1}(U_0)$ está no círculo de Hopf sobre $h(p)$, portanto $p \in S^1 \sigma(x)$, onde $x = \psi^{-1}(h(p))$ é claramente uma função contínua de p . Segue que $p = z\sigma(x)$, para um único $z \in S^1$, uma vez que a ação de S^1 em S^3 é livre, de modo que

$$\varphi^{-1}(p) = (z, x)$$

Para mostrar a continuidade de φ^{-1} em p , basta mostrar a continuidade de z como função de p . Seja então $p_n \rightarrow p$ em $h^{-1}(U_0)$ então $p_n = z_n \sigma(x_n)$ onde $x_n = \psi^{-1}(h(p_n))$ e $z_n \in S^1$. É imediato que $x_n \rightarrow x$. Pela continuidade de σ , toda subsequência convergente $z_{n_j} \rightarrow w$ de z_n satisfaz

$$p_{n_j} = z_{n_j} \sigma(x_{n_j}) \rightarrow w \sigma(x),$$

por outro lado, $p_{n_j} \rightarrow p = z \sigma(x)$, logo $w = z$, uma vez que a ação de S^1 em S^3 é livre. Como S^1 é compacto, segue que $z_n \rightarrow z$, como queríamos.

Considere agora U_∞ o aberto $|z| > 0$ de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, que é vizinhança de todo ponto, exceto 0. Observe que $z \mapsto z^{-1}$ é um homeomorfismo entre U_∞ e U_0 . Considere então o homeomorfismo $\psi_\infty : D \rightarrow U_\infty$ dado por $\psi_\infty(z) = \psi(z)^{-1}$, então

$$\psi_\infty(re^{i\theta}) = \cotan(r)e^{-i\theta}$$

Considere também

$$\sigma_\infty : D \rightarrow S^3, \quad re^{i\theta} \mapsto (\sen(r)e^{i\theta}, \cos(r))$$

que é bem definida e contínua, como acima. Note que

$$h(\sigma_\infty(re^{i\theta})) = \cotan(r)e^{-i\theta} = \psi_\infty(re^{i\theta})$$

portanto σ passa por todos círculos de Hopf sobre U_∞ . Argumentando como acima, temos que

$$\varphi_\infty : S^1 \times D \rightarrow h^{-1}(U_\infty), \quad (z, re^{i\theta}) \mapsto z\sigma_\infty(re^{i\theta})$$

é uma trivialização local de h sobre U_∞ .

Uma vez que h possui trivialização local sobre as vizinhanças U_0 e U_∞ que juntas cobrem todo o $\mathbb{C}P^1$, segue que h é um fibrado.

Os dois últimos exemplos acima são exemplos de fibrado principal, que são localmente dados pelo produto cartesiano de um grupo topológico G por um aberto U na base, onde $g \in G$ age em $(h, v) \in G \times V$ via

$$g \cdot (h, v) = (gh, v)$$

Definição 2.5. Um fibrado $p : E \rightarrow B$ é G -principal se p é a aplicação quociente de uma ação de um grupo topológico $g \in G$ em $x \in E$, denotada por $g \cdot x$, que é contínua, livre e é localmente a ação de G no produto cartesiano de G por um aberto da base B .

Mais precisamente, se todo $b \in B$ possui uma vizinhança $U \subset B$ tal que $p^{-1}(U)$ é homeomorfa a $G \times U$ por uma trivialização local que preserva as fibras e é compatível com a ação de G , dada por um homeomorfismo $\psi : V \rightarrow U$ e um homeomorfismo $\varphi : G \times V \rightarrow p^{-1}(U)$ tal que

$$\varphi(g \cdot (h, v)) = g \cdot \varphi(h, v)$$

e $p \circ \varphi = \psi \circ p_V$, onde p_V é a projeção na segunda coordenada de $G \times V$. Em particular, $\varphi(\cdot, v)$ fornece um homeomorfismo entre G e a fibra $p^{-1}(b)$ de $b = \psi(v)$.

O grupo G é chamado *grupo estrutural* do fibrado principal. Note que todas as fibras de um fibrado principal são homeomorfas à G .

Exemplo 2.4. 1. A ação de $2\pi\mathbb{Z}$ em \mathbb{R} é contínua e livre, com aplicação quociente $p : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (S^1, 1)$, $\theta \mapsto e^{i\theta}$, que é um fibrado principal, pelo exemplo anterior.

2. A ação de $S^1 \subset \mathbb{C}$ à esquerda de $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ é contínua e livre, com aplicação quociente $h : (S^3, (0, 1)) \rightarrow (\mathbb{C}P^1, \infty)$, $h(z, w) = w/z$, que é um fibrado principal, pelo exemplo anterior: é a fibração de Hopf.

3. Um método geral para produzir fibrados principais é partir de um grupo de Lie G e um subgrupo fechado H . Então é possível pelo Teorema do Subgrupo Fechado de Cartan colocar uma única estrutura diferenciável no quociente $H \backslash G$ tal que a projeção natural $G \rightarrow H \backslash G$ é uma submersão que, além disso, é um fibrado principal com grupo estrutural H agindo à esquerda de G (ver Seção 4.4 de [10]).

O Exemplo 1 acima é desse tipo. O Exemplo 2 também é, uma vez que S^3 tem estrutura de grupo de Lie (ver 5.2 de [10]).

Proposição 2.10. Uma seção local $s : U \rightarrow E$ de um fibrado G -principal $p : E \rightarrow B$ dá origem a uma trivialização local compatível com a ação de G , dada por

$$\varphi : G \times U \rightarrow p^{-1}(U) \quad \varphi(g, b) = g \cdot s(b)$$

Em particular, uma seção global de um fibrado G -principal dá origem a uma trivialização global.

Demonstração. Seja $x \in p^{-1}(U)$, uma vez que x e $s(p(x))$ estão sobre a mesma fibra, segue que existe um único $g(x) \in G$ tal que

$$x = g(x) \cdot s(p(x))$$

Segue que φ tem inversa

$$\varphi^{-1} : p^{-1}(U) \rightarrow G \times U \quad \varphi^{-1}(x) = (g(x), p(x))$$

que é contínua se $g : p^{-1}(U) \rightarrow G$ é contínua. Para provar a continuidade de g em $x_0 \in p^{-1}(U)$, seja $\psi : G \times V \rightarrow p^{-1}(V)$ uma trivialização local de p sobre uma vizinhança V de $p(x_0)$, compatível com a ação de G . Uma vez que $\psi(gh, b) = g \cdot \psi(h, b)$, sua inversa

$$\psi^{-1} : p^{-1}(V) \rightarrow G \times V \quad \psi^{-1}(x) = (h(x), p(x))$$

satisfaz $h(g \cdot x) = gh(x)$, com $h : p^{-1}(V) \rightarrow G$ contínua. De $x = g(x) \cdot s(p(x))$ segue que

$$(h(x), p(x)) = \psi^{-1}(x) = (g(x)h(s(p(x))), p(x))$$

Portanto

$$g(x) = h(x)h(s(p(x)))^{-1}$$

para $x \in p^{-1}(V)$, vizinhança de x_0 , o que prova a continuidade de $g(x)$. □

2.4 Sequência exata longa

Seja $p : E \rightarrow B$ um fibrado. Para relacionar os grupos de homotopia do espaço total com os da fibra e os da base, primeiro levantamos aplicações de B para E .

Definição 2.6. Seja $a : X \rightarrow B$ uma aplicação contínua. Um *levantamento* de a é uma aplicação contínua $A : X \rightarrow E$ tal que $p \circ A = a$.

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow A & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{a} & B \end{array}$$

Na primeira seção vimos que toda aplicação contínua $a : (S^n, s_0) \rightarrow (B, b_0)$ pode ser puxada para uma aplicação contínua

$$\begin{array}{ccccc} (D^n, S^{n-1}) & \longrightarrow & (S^n, s_0) & \xrightarrow{a} & (B, b_0) \\ & & \searrow \tilde{a} & \nearrow & \end{array}$$

partindo de um disco, colapsando sua fronteira S^{n-1} no ponto base b_0 . De agora em diante, para simplificar a notação, vamos denotar pela mesma letra a aplicação a definida na esfera ou sua correspondente definida num disco. Vejamos que podemos levantar aplicações e homotopias definidas em discos.

Exemplo 2.5. Sejam $a : [0, 1] \rightarrow B$ uma curva contínua na base e $e_0 \in E$ tal que $p(e_0) = a(0)$. Então a pode ser levantada para uma curva $A : [0, 1] \rightarrow E$ satisfazendo a condição inicial $A(0) = e_0$.

De fato, suponha primeiro que a imagem de a está toda contida num aberto U de B sobre o qual o fibrado tem trivialização local $\varphi : F \times U \rightarrow p^{-1}(U)$. Segue que $e_0 \in p^{-1}(U)$, de modo que $\varphi^{-1}(e_0) = (f_0, a(0))$, para algum $f_0 \in F$. Pondo $A(t) = \varphi(f_0, a(t))$ para $t \in [0, 1]$ obtemos então o levantamento desejado.

No caso geral, cobrimos a imagem de a com abertos de B sobre os quais o fibrado possui trivializações locais. A imagem inversa por a desses abertos fornece uma cobertura de abertos de $[0, 1]$. Seja $\delta > 0$ o número de Lebesgue dessa cobertura e divida $[0, 1]$ em n intervalos $[t_i, t_{i+1}]$ de comprimento $< \delta$, onde $t_0 = 0, t_{n+1} = 1$. Então cada $a|_{[t_i, t_{i+1}]}$ está contido em um aberto U_i de B sobre o qual o fibrado possui trivialização local. Levantamos $a|_{[0, t_1]}$ para $A_1|_{[0, t_1]}$ com condição inicial $A_1(0) = e_0$, como no parágrafo anterior, e tomamos $e_1 = A_1(t_1)$ que é tal que $p(e_1) = p \circ A_1(t_1) = a(t_1)$. Em seguida, levantamos $a|_{[t_1, t_2]}$ para $A_2|_{[t_1, t_2]}$ com condição inicial $A_2(t_1) = e_1$, como no parágrafo anterior, e tomamos $e_2 = A_2(t_2)$. Assim em diante, até levantar $a|_{[t_n, 1]}$ para $A_n|_{[t_n, 1]}$. Uma vez que os levantamentos A_i definidos em $[t_i, t_{i+1}]$ coincidem nas interseções t_1, t_2, \dots, t_n dos intervalos, sua concatenação define então um levantamento contínuo A em $[0, 1]$ que é tal que $A(0) = e_0$, como desejado.

Note que, mesmo com condição inicial, em geral, esse levantamento não é único.

O levantamento de curvas com uma condição inicial que foi dado no exemplo anterior pode ser generalizado para o levantamento de aplicações definidas em cubos $[0, 1]^{n+1} = [0, 1] \times [0, 1]^n$, onde identificamos $\{0\} \times [0, 1]^n$ com $[0, 1]^n$.

Proposição 2.11. Seja $p : E \rightarrow B$ um fibrado. Dada uma aplicação contínua $a : [0, 1]^{n+1} \rightarrow B$ e um levantamento inicial $A_0 : [0, 1]^n \rightarrow E$ de $a|_{\{0\} \times [0, 1]^n}$, então a pode ser levantada para uma aplicação $A : [0, 1]^{n+1} \rightarrow E$ satisfazendo $A|_{\{0\} \times [0, 1]^n} = A_0$.

Demonstração. Para uma demonstração, veja Teorema 11.52 de [8], p.364. \square

Observação 2.4. Uma aplicação sobrejetora $E \rightarrow B$ que satisfaz a conclusão da Proposição 2.11 é chamada de *fibração de Serre*. Uma vez que a aplicação de Hopf $h : S^3 \rightarrow S^2$ é um fibrado, em particular é uma fibração (de Serre).

Observe que o cubo $[0, 1]^n$ é homeomorfo ao disco D^n por um homeomorfismo que leva $(0, \dots, 0)$ em $-s_0$. Por exemplo, para $n = 1$ isso diz que $[0, 1]$ é homeomorfo à $[-1, 1]$ por um homeomorfismo que leva 0 em -1 . Temos o seguinte.

Corolário 2.1. 1. Dada uma homotopia $a : [0, 1] \times D^n \rightarrow B$ e um levantamento inicial $A_0 : D^n \rightarrow E$ de $a|_{\{0\} \times D^n}$, existe um levantamento $A : [0, 1] \times D^n \rightarrow E$ satisfazendo $A|_{\{0\} \times D^n} = A_0$.

2. Dada uma aplicação contínua $a : (D^n, -s_0) \rightarrow (B, b_0)$ existe levantamento $A : (D^n, -s_0) \rightarrow (E, e_0)$.

Considere agora um fibrado com pontos base

$$(F, f_0) \xrightarrow{i} (E, e_0) \xrightarrow{p} (B, b_0)$$

onde $F = p^{-1}(b_0)$ e i é a inclusão em E e $f_0 = e_0$. O próximo resultado é o análogo para fibrados da Proposição 2.9 para produtos cartesianos.

Proposição 2.12. As aplicações induzidas induzem a sequência exata

$$\pi_n(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \quad (2.10)$$

para todo $n \geq 0$.

Demonstração. Note que $p \circ i$ é constante igual a b_0 . Segue que $(p \circ i)_* = p_* \circ i_* = [b_0] = 1$, portanto $\text{Im } i_* \subset \text{Ker } p_*$.

Para a inclusão recíproca, primeiro note que $\text{Im } i_*$ é dada por elementos de $\pi_n(E, f_0)$ que são homotópicos a aplicações $(S^n, s_0) \rightarrow (F, f_0)$. Seja então $[a] \in \pi_n(E)$ representado

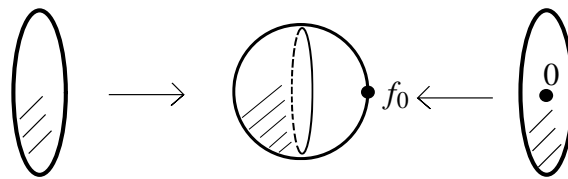
por $a : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (E, f_0)$ e tal que $p_*[a] = [p \circ a] = 1$. Segue que existe uma homotopia $\bar{h} : ([0, 1] \times D^n, [0, 1] \times S^{n-1}) \rightarrow (B, b_0)$ com

$$\bar{h}(0, \cdot) = p \circ a(\cdot) \quad \bar{h}(1, \cdot) = b_0$$

Essa homotopia pode ser levantada para $H : [0, 1] \times D^n \rightarrow E$ com condição inicial $H(0, \cdot) = a(\cdot)$. Segue que

$$p \circ H([0, 1] \times S^{n-1}) = \bar{h}([0, 1] \times S^{n-1}) = \{b_0\} \quad p \circ H(1 \times D^n) = \bar{h}(1 \times D^n) = \{b_0\}$$

isto é, a imagem da fronteira do disco D^n começa fechada em f_0 no tempo $t = 0$, pode se abrir mas se mantém em F para $t \in [0, 1]$ e, no tempo $t = 1$, a imagem de todo o disco D^n está em F . A ideia é usar que as fronteiras dos n -discos D^n estão em F para ir tampando o disco que se abre e assim obter a imagem de uma n -esfera que, em $t = 1$, está toda contida em F .



Mais precisamente, observe que podemos concatenar duas aplicações $D^n \rightarrow E$ que coincidem em S^{n-1} , uma delas enviando 0 para f_0 , para obter uma aplicação $(S^n, s_0) \rightarrow (E, f_0)$: basta usar a aplicação que envia 0 em f_0 no hemisfério leste, enviando s_0 em f_0 , e a outra aplicação no hemisfério oeste.

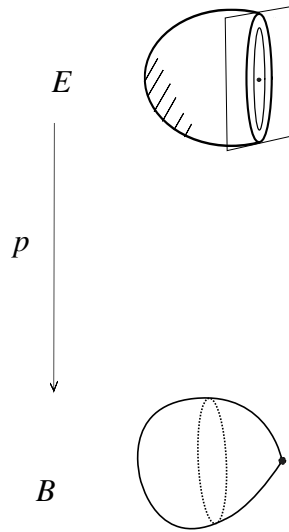


Figura 2.5

Considere a restrição de H ao cilindro $[0, 1] \times S^{n-1}$, que toma valores em F . Uma vez que $H(\{0\} \times S^{n-1}) = \{f_0\}$, podemos defini-la num disco, isto é, considerar a função contínua

$$G: D^n \rightarrow F \quad G(x) = H(|x|, x/|x|), \quad G(0) = f_0$$

Note que, para $x \in S^{n-1}$ temos

$$G(tx) = H(t, x)$$

assim, pela observação acima, para cada $t \in [0, 1]$, podemos concatenar $H(t, \cdot)$ com $G(t \cdot)$ para obter uma aplicação contínua $(S^n, s_0) \rightarrow (E, f_0)$. Note que para $t = 0$ obtemos uma aplicação homotópica à $a * f_0$. Deixando t variar, obtemos uma homotopia $I: [0, 1] \times (S^n, s_0) \rightarrow (E, f_0)$ que é tal que

$$[I(0, \cdot)] = [a * f_0] \quad I(1, \cdot) \in F$$

uma vez que, para $t = 1$, temos $H(1, \cdot) \in F$ e G sempre toma valores em F . Tomando $b: (S^n, s_0) \rightarrow (F, f_0)$ dada por $b(\cdot) = I(1, \cdot)$, segue que

$$[a] = [i \circ b] = i_*[b]$$

como queríamos. □

A proposição anterior relaciona os grupos de homotopias da fibra com os do espaço total, e os do espaço total com os da base. Para relacionar os grupos de homotopia da base com os da fibra, a observação principal é que o levantamento de uma n -esfera na base com ponto

base b_0 fornece um n -disco no espaço total, cujo bordo, que é uma $(n - 1)$ -esfera contida na fibra F sobre b_0 (veja Figura 2.6).

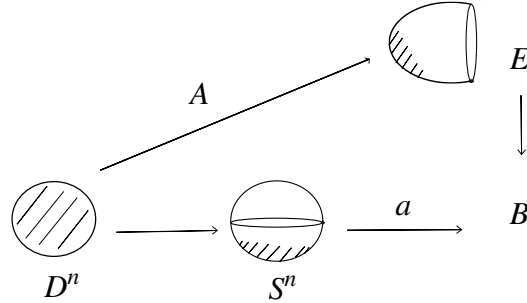


Figura 2.6 Operador Bordo

Mais precisamente, considere $a : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (B, b_0)$ e levante-a para $A : (D^n, -s_0) \rightarrow (E, f_0)$. Uma vez que

$$p \circ A(S^{n-1}) = a(S^{n-1}) = \{b_0\}$$

segue que $A(S^{n-1}) \subset F$, o que nos dá a restrição

$$A|_{S^{n-1}} : (S^{n-1}, -s_0) \rightarrow (F, f_0).$$

Definição 2.7. O operador bordo em $[a] \in \pi_n(B)$ é dado por

$$\partial[a] := [A|_{S^{n-1}}] \in \pi_{n-1}(F, f_0)$$

Teorema 2.1. Para $n > 1$, o operador bordo está bem definido, é um homomorfismo e a sequência

$$\pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0)$$

é exata.

Demonstração. Para mostrar que o bordo é um homomorfismo bem definido, fixe levantamentos $A, B : (D^n, -s_0) \rightarrow (E, f_0)$ de $a, b : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (B, b_0)$.

Em primeiro lugar, considere as concatenações de aplicações em disco definidas em (2.8), dadas por

$$A * B = (A \vee B) \circ d \quad a * b = (a \vee b) \circ d$$

onde $d : D^n \rightarrow D^n \vee D^n$ é a aplicação de colapso. Segue que $A * B$ é um levantamento de $a * b$, uma vez que

$$p \circ (A * B) = p \circ (A \vee B) \circ d = (p \circ A) \vee (p \circ B) \circ d = (a \vee b) \circ d = a * b$$

Uma vez que a restrição de d à fronteira S^{n-1} é a aplicação de colapso $c : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1} \vee S^{n-1}$, segue que

$$(A * B)|_{S^{n-1}} = (A|_{S^{n-1}} \vee B|_{S^{n-1}}) \circ c = (A|_{S^{n-1}}) * (B|_{S^{n-1}})$$

Em segundo lugar, considere \bar{A}, \bar{a} o representante da inversa homotópica definida no disco, dada em (2.9). Segue que \bar{A} é levantamento de a , uma vez que

$$p \circ \bar{A}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = p \circ A(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) = a(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) = \bar{a}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

Além disso, temos que

$$\bar{A}|_{S^{n-1}} = \overline{A|_{S^{n-1}}}$$

onde a barra do lado direito é o representante da inversa homotópica definida na esfera, dada em (2.4).

Em terceiro lugar, supondo que $[a] = [b]$ em $\pi_n(B, b_0)$, vamos mostrar então que $[A|_{S^{n-1}}] = [B|_{S^{n-1}}]$ em $\pi_n(F, f_0)$. De fato, temos que $[a] * [b]^{-1} = [a * \bar{b}] = [b_0]$, portanto existe uma homotopia $\bar{h} : ([0, 1] \times D^n, [0, 1] \times S^{n-1}) \rightarrow (B, b_0)$ tal que

$$\bar{h}(0, \cdot) = a * \bar{b}(\cdot) \quad \text{e} \quad \bar{h}(1, \cdot) = b_0$$

Pelo que vimos nos parágrafos anteriores, $A * \bar{B} : (D^n, -s_0) \rightarrow (E, f_0)$ é um levantamento de $a * \bar{b}$. Levante então a homotopia h para uma homotopia $H : [0, 1] \times D^n \rightarrow E$ com condição inicial $H(0, \cdot) = A * \bar{B}(\cdot)$. De $\bar{h}([0, 1] \times S^{n-1}) = \{b_0\}$ segue que

$$H([0, 1] \times S^{n-1}) \subset F$$

Assim, a restrição G de H à $[0, 1] \times S^{n-1}$ define uma homotopia $G : [0, 1] \times S^{n-1} \rightarrow F$ em F , tal que

$$G(0, \cdot) = A * \bar{B}|_{S^{n-1}}$$

De $\bar{h}(1, \cdot) = b_0$ segue que

$$H(\{1\} \times D^n) \subset F$$

o que define uma homotopia em F de $G(1, \cdot)$ a um ponto, mais precisamente, a homotopia $I : [0, 1] \times S^{n-1} \rightarrow F$ em F dada por

$$I(t, x) = H(1, (1-t)x)$$

que é tal que $I(0, \cdot) = G(1, \cdot)$ e $I(1, \cdot) = H(1, 0) = f_1 \in F$. Concatenando as homotopias G e I obtemos que $A * \bar{B}|_{S^{n-1}}$ é homotópica em F à f_1 .

Pela Proposição 2.3 segue que $[A * \bar{B}|_{S^{n-1}}] = [f_0]$. Pelos parágrafos anteriores temos então que

$$[A * \bar{B}|_{S^{n-1}}] = [A|_{S^{n-1}}] * [\bar{B}|_{S^{n-1}}] = [A|_{S^{n-1}}] * [B|_{S^{n-1}}]^{-1} = [f_0]$$

logo $[A|_{S^{n-1}}] = [B|_{S^{n-1}}]$, como queríamos.

O parágrafo anterior mostra que $[A|_{S^{n-1}}]$ depende apenas da classe de homotopia de a , portanto $\partial[a]$ está bem definido em $\pi_n(B, b_0)$. Os primeiros dois parágrafos acima mostram que é um homomorfismo, como queríamos.

Para mostrar que $\text{Ker } \partial \subset \text{Im } p_*$, seja $[a] \in \pi_n(B, b_0)$ representado por $a : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (B, b_0)$ e tal que $\partial[a] = 1$. Então, para um levantamento $A : (D^n, -s_0) \rightarrow (E, f_0)$, temos que $A|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow F$ é homotópico à f_0 em F . A ideia é usar que essa homotopia fornece um disco que tampa o disco dado pelo levantamento, fornecendo uma n -esfera em E que se projeta sobre a na base, como ilustrado na Figura 2.7.

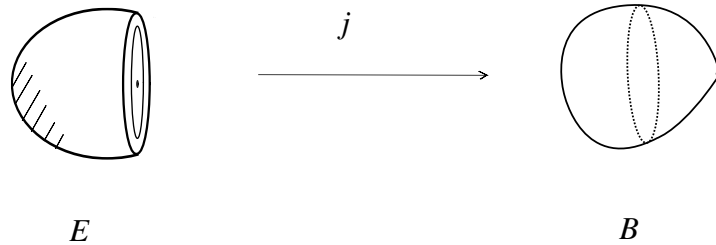


Figura 2.7

Mais precisamente, temos que existe uma homotopia

$$H : ([0, 1] \times S^{n-1}, [0, 1] \times \{s_0\}) \rightarrow (F, f_0)$$

tal que $H(1, x) = A(x)$ e $H(0, x) = f_0$, para $x \in S^{n-1}$. Uma vez que H está definida no cilindro $[0, 1] \times S^{n-1}$, tomando valores em F , com $H(\{0\} \times S^{n-1}) = \{f_0\}$, podemos defini-la num

disco, isto é, considerar a função contínua

$$G : D^n \rightarrow F \quad G(x) = H(|x|, x/|x|), \quad G(0) = f_0$$

Note que para $x \in S^{n-1}$ temos $G(x) = H(1, x) = A(x)$, assim podemos concatenar $A : D^n \rightarrow F$ com $G : D^n \rightarrow F$ para obter uma aplicação contínua $C : (S^n, -s_0) \rightarrow (E, f_0)$. Uma vez que $p \circ G(x) = b_0$ para todo $x \in D^n$, segue que $p \circ b$ é homotópica a $a * b_0$. Assim

$$p_*([b]) = [p \circ C] = [a * b_0] = [a]$$

portanto $[a] \in \text{Im } p_*$, como queríamos.

Para mostrar que $\text{Im } p_* \subset \text{Ker } \partial$, seja $[A] \in \pi_n(E, f_0)$ representado por $A : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (E, f_0)$. Para calcular $\partial \circ p_*[A] = \partial[p \circ A]$ tomamos A como levantamento de $p \circ A$. Uma vez que $A(S^{n-1}) = \{f_0\}$, segue que $\partial \circ p_*[A] = [f_0] = 1$, portanto $[A] \in \text{Ker } \partial$, como queríamos. \square

Observação 2.5. Para mostrar que operador bordo $\partial : \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, f_0)$ está bem definido, usamos a estrutura de grupo de $\pi_{n-1}(F, f_0)$, o que a princípio nos impede de definir o bordo para $n = 1$.

Com isso podemos encaixar (2.10) na sequência exata longa

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \pi_n(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \cdots \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \quad (2.11)$$

que é exata em cada um de seus termos, onde usamos os mesmos símbolos para denotar os homomorfismos induzidos nos vários π_n . Isso relaciona os grupos de homotopia das partes F e B com o todo E , como queríamos.

O próximo resultado é a generalização para fibrados da Proposição 2.9 para produtos cartesianos.

Proposição 2.13. Se o fibrado $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ possui seção global $s : (B, b_0) \rightarrow (E, e_0)$ então

$$\partial = 0$$

em $\pi_n(B, b_0)$, $n > 1$. Além disso, para $n > 1$, a sequência

$$0 \rightarrow \pi_n(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \rightarrow 0$$

é exata em todos seu termos e cinde, com seção $\pi_n(B, b_0) \xrightarrow{s_*} \pi_n(E, e_0)$, de modo que

$$\pi_n(E, e_0) \simeq \pi_n(F, f_0) \times \pi_n(B, b_0)$$

Demonstração. Seja $[a] \in \pi_n(B, b_0)$ com representante $a : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (B, b_0)$. Temos que $A = s \circ a$ é um levantamento de a com

$$A(S^{n-1}) = s \circ a(S^{n-1}) = s(b_0) = e_0$$

de modo que $\partial[a] = [e_0] = 0$. Isso mostra que $\partial = 0$ e a sequência exata longa de homotopia dá origem à sequência exata do enunciado. Uma vez que $p \circ s = \text{id}_B$, segue que $p_* \circ s_* = \text{id}_*$, de modo que s_* é uma seção de $\pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0)$ e a última afirmação segue da Proposição ??.

Para ilustrar as construções dessa seção, vamos calcular explicitamente um operador de bordo da fibração de Hopf.

Exemplo 2.6. Considere o fibrado S^1 -principal dado pela fibração de Hopf $h : (S^3, (0, 1)) \rightarrow (\mathbb{C}P^1, \infty)$, $h(z, w) = w/z$. Identificando $\mathbb{C}P^1$ com S^2 (veja Proposição 1.11), temos a fibração de Hopf $h : (S^3, (0, 1)) \rightarrow (S^2, s_0)$. Considere o trecho

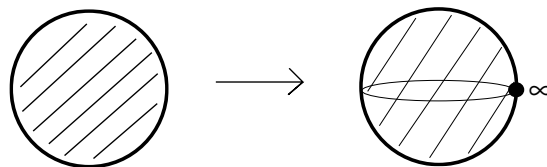
$$\pi_2(S^2, s_0) \xrightarrow{\partial} \pi_1(S^1, 1)$$

da sequência exata longa de h . Vamos calcular ∂ na classe de homotopia de $\text{id}_{S^2} : S^2 \rightarrow S^2$.

Puxando-a para o disco, temos a aplicação contínua

$$\begin{aligned} a : D \subset \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}P^1 \\ z = re^{i\theta} &\longmapsto \tan(\pi r/2)e^{i\theta} \end{aligned}$$

que vai do disco D de raio $r \leq 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$, para a esfera de Riemann, onde usamos que $\tan(\pi/2) = \infty$. Note que a é contínua, leva a origem do disco na origem da esfera, além disso, leva o interior do disco $r < 1$ homeomorficamente no complemento de ∞ (veja Exemplo 2.3.3) e mapeia todo o bordo $r = 1$ sobre o ponto base ∞ .



Um levantamento explícito de a para $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ é dado por

$$A : D \rightarrow S^3 \quad z = re^{i\theta} \mapsto (\cos(\pi r/2), \text{sen}(\pi r/2)e^{i\theta})$$

onde $h \circ A = a$. Restringindo A ao bordo ∂D , dado por $r = 1$, temos que

$$A|_{\partial D} : \partial D \rightarrow S^1 \quad e^{i\theta} \mapsto (0, e^{i\theta})$$

onde $e^{i\theta} \mapsto e^{i\theta}$ é a aplicação identidade id_{S^1} da fibra S^1 sobre ∞ . Segue que

$$\partial([\text{id}_{S^2}]) = [\text{id}_{S^1}].$$

Em particular $\partial \neq 0$.

Pela proposição anterior, isso mostra que a fibração de Hopf não possui seção global o que, pela Proposição 2.10, implica que h não possui trivialização global. Na próxima seção veremos que, mais ainda, a classe de homotopia de h é não trivial e gera $\pi_3(S^2)$.

2.5 $\pi_3(S^2)$

Primeiro vejamos que, se o fibrado é principal, sua sequência exata longa se estende até o π_0 da fibra.

Proposição 2.14. Suponha que o fibrado é G -principal. Para $n = 1$, o operador bordo está bem definido, é um homomorfismo e a sequência

$$\pi_1(E, 1) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(G, 1) \rightarrow 1$$

é exata.

Demonstração. A ideia é usar a estrutura de grupo de $\pi_0(G, 1) = G/G_0$ dada pela Proposição 2.4 para adaptar a demonstração do Teorema 2.1. Pelos primeiros parágrafos da demonstração desse teorema, uma vez que temos estrutura de grupo em $\pi_0(G, 1)$, para mostrar que o bordo é um homomorfismo basta mostrar que está bem definido. Fixe então levantamentos $A, B : ([-1, 1], -1) \rightarrow (E, 1)$ de curvas $a, b : ([-1, 1], \{\pm 1\}) \rightarrow (B, b_0)$. Supondo que $[a] = [b]$ em $\pi_1(B, b_0)$, vamos mostrar que $[A(1)] = [B(1)]$ em $\pi_0(G, 1)$, isto é, $A(1)$ e $B(1)$ estão na mesma componente conexa de G .

De fato, temos que $[a]^{-1} * [b] = [\bar{a} * b] = [b_0]$, portanto existe uma homotopia $\bar{h} : ([0, 1] \times [-1, 1], [0, 1] \times \{\pm 1\}) \rightarrow (B, b_0)$ tal que

$$\bar{h}(0, \cdot) = \bar{a} * b(\cdot) \quad \text{e} \quad \bar{h}(1, \cdot) = b_0$$

De (2.9) temos $\bar{A}(x_1) = A(-x_1)$, de modo que

$$\bar{A}(1) = A(-1) = 1 = B(-1)$$

Assim, podemos concatenar os caminhos $\bar{A} * B : [-1, 1] \rightarrow E$, obtendo assim um levantamento de $\bar{a} * b$. Levantamos então a homotopia \bar{h} para uma homotopia $H : [0, 1] \times [-1, 1] \rightarrow E$ com condição inicial $H(0, \cdot) = \bar{A} * B(\cdot)$. De $\bar{h}([0, 1] \times \{\pm 1\}) = \{b_0\}$ segue que

$$H([0, 1] \times \{\pm 1\}) \subset G$$

Assim, $H(t, -1)$ é uma curva contínua em G de

$$H(0, -1) = \bar{A} * B(-1) = \bar{A}(-1) = A(1)$$

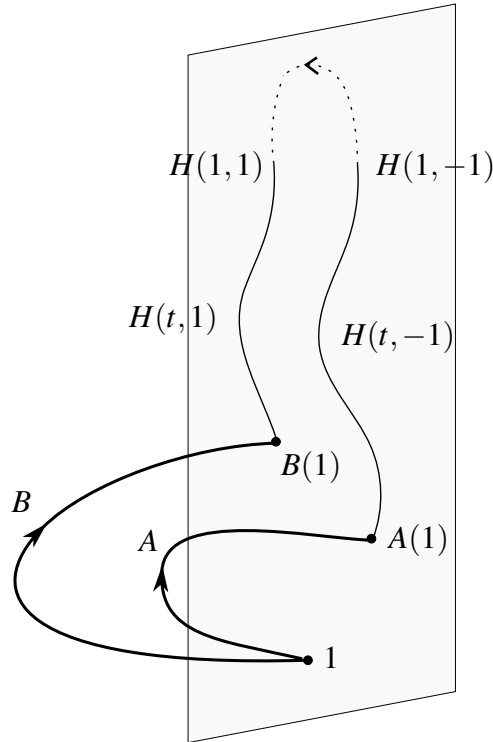
até $H(1, -1)$, enquanto $H(t, 1)$ é uma curva contínua em G de

$$H(0, 1) = \bar{A} * B(1) = B(1)$$

até $H(1, 1)$. De $\bar{h}(1, \cdot) = b_0$ segue que

$$H(\{1\} \times [-1, 1]) \subset G$$

portanto $H(1, t)$ é uma curva contínua em G de $H(1, -1)$ até $H(1, 1)$. Segue que $[A(1)] = [B(1)]$, como queríamos.



Para mostrar que $\text{Ker } \partial \subset \text{Im } p_*$, seja $[a] \in \pi_1(B, b_0)$ representado por $a : ([-1, 1], \{\pm 1\}) \rightarrow (B, b_0)$ e tal que $\partial[a] = [1]$. Seja um levantamento $A : ([-1, 1], -1) \rightarrow (E, 1)$ de a , segue que $\partial[a] = [A(1)] = [1]$, logo $A(1) \in G_0$. Assim, existe uma curva contínua $B(t)$ em G com $B(-1) = A(1)$ e $B(1) = 1$. Concatenando essas curvas obtemos uma curva fechada $A * B : ([-1, 1], \{\pm 1\}) \rightarrow (E, 1)$, representante de um elemento de $\pi_1(E, 1)$, que é tal que

$$p_*[A * B] = [p \circ (A * B)] = [a * b_0] = [a],$$

portanto $[a] \in \text{Im } p_*$, como queríamos.

Para mostrar que $\text{Im } p_* \subset \text{Ker } \partial$, seja $[A] \in \pi_1(E, 1)$ representado por $A : ([-1, 1], \{\pm 1\}) \rightarrow (E, 1)$. Para calcular $\partial \circ p_*[A] = \partial[p \circ A]$ tomamos A como o levantamento de $p \circ A$. Uma vez que $a(1) = 1$, segue que $\partial \circ p_*[A] = [A(1)] = [1]$, portanto $[A] \in \text{Ker } \partial$, como queríamos.

Mostrar que é exata em $\pi_0(G, 1)$ é mostrar que ∂ é sobrejetora. De fato, uma vez que E é conexo por caminhos, existe uma curva contínua em E de $1 \in G$ até um ponto em qualquer outra componente conexa de G . Projetando essa curva, obtemos uma curva que, quando levantada vai terminar nessa outra componente conexa de G , portanto o bordo da classe dessa curva será essa componente conexa de G , como queríamos. \square

Assim, para um fibrado G -principal temos a sequência exata longa

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \pi_n(G, 1) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(G, 1) \xrightarrow{i_*} \cdots \xrightarrow{\partial} \pi_0(G, 1) \rightarrow 1 \quad (2.12)$$

que relaciona os grupos de homotopia das partes G e B com o todo E .

Terminamos esse capítulo aplicando a sequência exata longa de homotopia aos exemplos principais da seção anterior.

Exemplo 2.7. O fibrado \mathbb{Z} -principal dado por $\pi : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (S^1, -1)$, $\theta \mapsto e^{2\pi i \theta}$ tem sequência exata longa de homotopia

$$\cdots \rightarrow \pi_n(\mathbb{R}, 0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(S^1, 1) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(\mathbb{Z}, 0) \xrightarrow{i_*} \cdots \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}, 0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{\partial} \pi_1(\mathbb{Z}, 0) \rightarrow 0$$

Uma vez que o espaço total \mathbb{R} é contrátil, temos que $\pi_n(\mathbb{R}, 0) = 0$ para todo $n \geq 0$ (veja Exemplo 2.1). Uma vez que \mathbb{Z} é um grupo discreto, é imediato que $\pi_n(\mathbb{Z}, 0) = 0$ para todo $n \geq 1$, além disso $\pi_0(\mathbb{Z}, 0) = \mathbb{Z}$ (pela Proposição 2.4). Segue que sua sequência exata longa é

$$\cdots \rightarrow 0 \xrightarrow{p_*} \pi_n(S^1, 1) \xrightarrow{\partial} 0 \xrightarrow{i_*} \cdots \rightarrow 0 \xrightarrow{p_*} \pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

O que nos permite calcular que $\pi_n(S^1, 1) = 0$ para $n \geq 1$ e $\pi_1(S^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$.

O último bordo $\pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}$ pode ser calculado explicitamente: é o *winding number* de uma aplicação $(S^1, 1) \rightarrow (S^1, 1)$. De fato, uma tal aplicação pode ser puxada para o disco $a : ([-1, 1], \{\pm 1\}) \rightarrow (S^1, 1)$ e levantada para a função angular $A : ([-1, 1], -1) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ que satisfaz $A(-1) = 0$ e

$$a(t) = e^{2\pi i A(t)}$$

Como $a(1) = a(-1) = 1$, segue que $A(1) \in \mathbb{Z}$, portanto,

$$\partial[a] = A(1) \in \mathbb{Z}$$

Por definição, o winding number de a é dado pela variação angular líquida

$$w(a) = A(1) - A(-1) = A(1) \in \mathbb{Z}$$

Segue que $w(a) = \partial[a]$, que depende apenas da classe de homotopia de a .

Para calcular o bordo na identidade id_{S^1} , a puxamos para o disco via

$$a(t) = e^{2\pi i(t+1)/2}$$

onde $(t + 1)/2$ percorre $[0, 1]$ quando $t \in [-1, 1]$. Segue que $a(t)$ tem levantamento

$$A(t) = (t + 1)/2,$$

satisfazendo $A(-1) = 0$, de modo que

$$\partial[\text{id}_{S^1}] = A(1) = 1$$

Isso mostra que $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ é gerado pela classe de homotopia da identidade id_{S^1} , que tem winding number 1.

O winding number de aplicações $S^1 \rightarrow S^1$ pode ser generalizado para o grau de aplicações $S^n \rightarrow S^n$ entre esferas de mesma dimensão (veja Teorema 51, Capítulo 7, p.51 de [6]) e com ele pode-se mostrar que a n -esfera S^n , $n \geq 1$, compartilha com o círculo S^1 a propriedade

$$\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z} \tag{2.13}$$

gerado pela classe de homotopia da identidade $\text{id}_{S^n} : S^n \rightarrow S^n$. Note que o exemplo anterior mostra que toda aplicação contínua $S^n \rightarrow S^1$, para $n > 1$, é homotópica à uma constante. Isso poderia nos levar a intuir que toda aplicação contínua $S^n \rightarrow S^m$, para $n > m$, seria também homotópica à uma constante. Porém essa intuição é falsa, como nos mostra o exemplo a seguir com a fibração de Hopf $h : S^3 \rightarrow S^2$.

Exemplo 2.8. A fibração de Hopf $h : (S^3, (0, 1)) \rightarrow (S^2, s_0)$ tem sequência exata longa de homotopia

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \pi_n(S^1, 1) \xrightarrow{i_*} \pi_n(S^3, (1, 0)) \xrightarrow{h_*} \pi_n(S^2, s_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(S^1, 1) \xrightarrow{i_*} \cdots \xrightarrow{\partial} \pi_0(S^1, 1) \rightarrow 1$$

Pelo primeiro exemplo, temos que $\pi_{n-1}(S^1, 1) = 0$ para $n \geq 3$, logo

$$0 \xrightarrow{i_*} \pi_n(S^3, (1, 0)) \xrightarrow{h_*} \pi_n(S^2, s_0) \xrightarrow{\partial} 0$$

Como essa sequência é exata, concluímos que $\pi_n(S^3) \xrightarrow{h_*} \pi_n(S^2)$ é um isomorfismo, para $n \geq 3$. Em particular, para $n = 3$ temos o isomorfismo

$$\pi_3(S^3, (1, 0)) \xrightarrow{h_*} \pi_3(S^2, s_0)$$

Como vimos acima, $\pi_3(S^3) \simeq \mathbb{Z}$, gerado pela classe de homotopia da identidade $\text{id}_{S^3} : S^3 \rightarrow S^3$, pelo isomorfismo acima temos então que $\pi_3(S^2) \simeq \mathbb{Z}$, gerado pela imagem do gerador

$$h_*[\text{id}_{S^3}] = [h \circ \text{id}_{S^3}] = [h]$$

o que nos dá o nosso último resultado.

Teorema 2.2. Temos que $\pi_3(S^2) \simeq \mathbb{Z}$, gerado pela classe de homotopia da fibração de Hopf $h : S^3 \rightarrow S^2$. Em particular h não é homotópica a um constante.

Bibliografia

- [1] BERGER, M., COLE, M., AND LEVY, S. *Geometry II*. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [2] HATCHER, A., PRESS, C. U., AND OF MATHEMATICS, C. U. D. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [3] HIRSCH, A. Extension of the 'Villarceau-Section' to surfaces of revolution with a generating conic. *Journal for Geometry and Graphics*, v.6 (2002). p. 121–132.
- [4] HOPF, H. Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. *Mathematische Annalen* (1931).
- [5] LYONS, D. An elementary introduction to the Hopf fibration. *Mathematics Magazine*, v.76 (2003).
- [6] MILNOR, J. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. University Press of Virginia, 1965.
- [7] NAKAHARA, M. *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*. Taylor & Francis, 2003.
- [8] ROTMAN, J. *An Introduction to Algebraic Topology*. Springer New York, 1998.
- [9] SAMELSON, H. $\pi_3(S^2)$, H. Hopf, W. K. Clifford, F. Klein, In: *History of Topology*. Elsevier Science, 1999. p. 575–578.
- [10] SAN MARTIN, L. A. B. *Grupos de Lie*. Editora Unicamp, 2017.
- [11] SECO, L., AND GRAMA, L. Second homotopy group and invariant geometry of flag manifolds. *Results in Mathematics*, v. 75 (2020). p. 94.
- [12] STEENROD, N. *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton University Press, 1999.