



UnB

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

CRISTIAN LANDRI CABRAL DE MORAES

**TÓPICOS EM GEOMETRIA DE FINSLER E GRAVIDADE
BI-MÉTRICA**

BRASÍLIA, DF

2020

CRISTIAN LANDRI CABRAL DE MORAES

**TÓPICOS EM GEOMETRIA DE FINSLER E GRAVIDADE
BI-MÉTRICA**

Dissertação apresentada com o objetivo de obter o título de mestre em física pelo programa de pós-graduação em física da Universidade de Brasília.
Área: Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Aleksandr N. Pinzul.

Brasília, DF

2020

CRISTIAN LANDRI CABRAL DE MORAES

**TÓPICOS EM GEOMETRIA DE FINSLER E GRAVIDADE
BI-MÉTRICA**

Dissertação apresentada com o objetivo de obter o título de mestre em física pelo programa de pós-graduação em física da Universidade de Brasília.
Área: Física Matemática
Apresentado em 24 de janeiro de 2020 e avaliado pela seguinte banca de examinadora:

Prof. Aleksandr Nikolaievich Pinzul
(Presidente) Instituto de Física Universidade de
Brasília

Prof. Arsen Melikyan
(Membro) Instituto de Física Universidade de
Brasília

Prof. Daniel Ordine Vieira Lopes
(Membro) Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia de Goiás

Dra. Carolina Matté Gregory
(Suplente) Instituto de Física Universidade de
Brasília; EaD-UnB
Brasília, DF

2020

Aos meus progenitores
À minha noiva
Aos meus amiguinhos da UnB
Ao CNPQ
Dedico

AGRADECIMENTOS

Não poderia deixar de agradecer à minha noiva Camila Pereira de Almeida, por não me expulsar de sua casa

Aos meus pais Tatiana e Agostinho, pois isso os deixa feliz

Ao meu irmão, por ser uma grande presença

Aos professores Arsen e Vanessa, como representantes do meu aprendizado (ou não)

Ao professor Pinzul, por ser o melhor orientador de mestrado que eu já tive

Aos meus amiguinhos Patrícia, Igor e César, por me ensinarem a usar o Tex e ao Solano, por me aprovar no teste de loucura para o uso da sala.

Ao CNPQ por acreditar no meu trabalho

"Tropeçavas nos astros desastrada
quase não tínhamos livros em casa.
e a cidade não tinha livraria
mas os livros que em nossa vida entraram
são como a radiação de um corpo negro
apontando para a expansão do universo
porque a frase, o conceito, o enredo, o verso
(e, sem dúvida sobretudo o verso)
é o que pode lançar mundos no mundo.

Tropeçavas nos astros desastrada
Sem saber que a ventura e a desventura
Dessa estrada que vai do nada ao nada
São livros e o luar contra a cultura."

(Livros, Caetano Veloso)

RESUMO

Estudaremos e consideraremos as possibilidades de usar um caso específico da estrutura matemática conhecida como geometria de Finsler como pano de fundo de uma teoria alternativa da gravidade, a Bi-gravidade.

Primeiramente, será explicado como nasceu a Bi-gravidade usando como motivação uma ideia antiga: o graviton massivo, que propicia a teoria da Gravidade Massiva. Uma introdução ao estudo da Bi-gravidade estará presente e os aspectos mais importantes da geometria de Finsler que serão utilizada. Será mostrado que existem três maneiras diferentes de escrever os objetos definidos na geometria de Finsler utilizados. Derivam-se algumas equações de autovalores e uma rápida análise da aplicabilidade desse espaço em teorias físicas antes de tratar diretamente o caso Bi-métrico.

Porque para os objetos importantes os cálculos são muito longos, faz sentido incluir uma análise de perturbação. Em seguida avalia-se a proximidade desse espaço com a geometria de Riemann, o pano de fundo matemático da relatividade geral. Logo mais estudar-se-á alguns limites presentes na teoria da Bi-gravidade, especificamente no limite massivo e o que ele significa na geometria de Finsler. Outro importante espaço de Finsler com enorme aplicabilidade na física é o chamado espaço de Randers, discutimos sua relação com o nosso caso.

Deve-se notar também que este trabalho contém apêndices de A a K, tratam-se de cálculos que poderiam destruir o formato desta dissertação se derivados do texto principal. Divirta-se.

Palavras-chave: Gravidade Massiva, Bi-gravidade, geometria de Finsler.

ABSTRACT

We will study and consider the possibilities of using a specific case of the mathematical structure known as Finsler geometry as background to an alternative theory of gravity, the Bi-gravity.

First it will be explained how Bi-gravity was born using the motivation of an old idea, the massive graviton which rises Massive Gravity theory. An introduction to the study of Bi-gravity will be present and the most important aspects of Finsler geometry that will be used. It will be shown that there exist 3 different ways to write the objects defined in Finsler geometry. Some eigenvalue equations are derived and a fast analysis of the applicability of this space in physical theories before treating directly the Bi-metric case.

Because even with all the important objects derived the calculations are so lengthy, it makes sense to include a perturbation analysis. Then it is evaluated the proximity of this space with Riemann geometry, the mathematical background of General Relativity. After comes the study of some limits present in Bi-gravity theory, specifically the massive limit and what does it mean in Finsler geometry. Another important Finsler space with huge applicability in physics is the so-called Randers space, it will be discussed its relation with our case.

It is also to be noted that this work contains appendices from A to K there one calculates what could destroy the format of this dissertation if where derived in the main text. Have a nice time.

Key-Words: Massive Gravity, Bi-Gravity, Finsler geometry.

LISTA DE SÍMBOLOS

μ, ν, \dots	Quando não for especificado, letras gregas denotam índices Lorenzianos
$i, j, k \dots$	Quando não for especificado, letras latinas denotam índices Riemannianos
$\binom{r}{s}$	Coefficientes binomiais
\square	Operador D' alambertiano
$g_{\mu\nu}$	Tensor métrico
$g^{\mu\nu}$	Tensor métrico inverso
L	Função lagrangeana
$T^{\mu\nu}$	Tensor momento-energia
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
R	Escalar de Ricci
J	Carga de um dado sistema
$\epsilon_{i_1 \dots}$	Símbolo de Levi-civita
δ_{ij}	Símbolo de Kronicher
$\mathcal{E}^{\mu\nu\rho\sigma}$	Tensor de Lichnerowicz
$A_{(ij)}$	Antisimetrização dos índices com normalização: $A_{(ij)} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji})$
$A_{[ij]}$	Simetrização dos índices com normalização: $A_{[ij]} = \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji})$
$A_{(ijk)}$	Antisimetrização circular dos índices com normalização: $A_{(ijk)} = \frac{1}{3!}(A_{ijk} + A_{jki} + A_{kij})$
$A_{(ijk)}$	Simetrização circular dos índices com normalização: $A_{[ijk]} = \frac{\epsilon_{ijk}}{3!}A_{ijk}$
$e_i(\cdot)$	Polinômios simétricos elementares
$SO(m, n)$	Grupo de simetrias ortogonais especiais
$\gamma_{\mu\nu}^\sigma$	Símbolos próprios de Christoffel
$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$	Símbolos de Christoffel
$d^k x$	Diferencial de x no espaço k dimensional

\wedge	Produto cunha (wedge product)
K_{ν}^{μ}	Curvatura extrínseca ou exterior
M_p	Massa de Plank
$E \xrightarrow{\pi} M$	Fibrado
$V_e P, H_e P$	Espaço vertiacal e horizontal
∇_V	Derivada covariante em fibrados associados
∇	Derivada covariante dinâmica
\mathfrak{D}_X	Derivada covariante
F	Função de Finsler
N_j^i	Coefficientes de conexão
G^i	Coefficientes de spray ou pulverização
C_{ijk}	Torção de Cartan
I_i	Torção média de Cartan
M_{ijk}	Torção de Matsumoto
∇	Conexão linear
$\nabla_{\bar{a}}$	Derivada horizontal
$\nabla_{\acute{a}}$	Derivada vertical
B^n	Bola unitária euclidiana
$\mathfrak{T}(M)$	conjunto dos campos tensoriais em M
$\mathfrak{X}(M)$	conjunto dos campos vectoriais em M
$\Omega^1(M)$	conjunto de funcionais lineares em M

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	GEOMETRIA E GRAVIDADE	17
2.1	Massive Gravity	17
2.1.1	Teoria de Fierz-Pauli	18
2.1.2	A dieta do Gráviton	21
2.1.3	Variáveis de Bardeen	26
2.1.4	Alguns percalços	30
2.1.5	Deslinearização da gravidade massiva	33
2.2	Bi-gravidade	38
2.2.1	Modelo DGP	40
2.2.2	Separação ADM	45
2.2.3	Desconstrução	49
2.2.4	múltiplas-gravidades	52
2.3	Geometria de Finsler	56
2.3.1	Feixes tangentes	62
2.3.2	A geometria	68
2.3.3	Geodésicas na geometria de Finsler	74
2.3.4	Integração no espaço de Finsler	83
3	ELEMENTOS DA GEOMETRIA DE FINSLER	90
3.1	Um olhar diferente	91
3.1.1	Métrica	91
3.1.2	Coefficientes de spray e torção de Cartan	92
3.2	Especificando o espaço	95
3.2.1	Forma da cadeia	97
3.2.2	Forma do momento	98
3.2.3	Forma tradicional	100
3.3	Algumas propriedades de cálculo	102
3.3.1	Equações de autovalores	104
3.3.2	Relações extras	106
3.4	Possíveis aplicações para a física	108
3.4.1	Perspectivas para este espaço	108
3.4.2	Analogia com a Bi-gravidade	109
4	MÉTODOS PERTURBATIVOS	113
4.1	Aproximação riemanniana	113

4.1.1	Métrica perturbada	115
4.1.2	Geodésicas perturbadas	117
4.2	Aproximação Bi-métrica	120
4.3	Caso de Randers	125
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	127
	REFERÊNCIAS	131
	APÊNDICE A – IDENTIDADES IMPORTANTES	135
	APÊNDICE B – DERIVANDO O DETERMINANTE DA SOMA $N=4$	139
	APÊNDICE C – INVERSO DA SOMA DE DUAS MATRIZES $N=4$	141
	APÊNDICE D – DETERMINANTE DA MÉTRICA	143
	APÊNDICE E – MÉTRICA INVERSA	147
	APÊNDICE F – DERIVAÇÃO DOS COEFICIENTES DE SPRAY	149
	APÊNDICE G – TORÇÃO DE CARTAM	151
	APÊNDICE H – TORÇÃO MÉDIA DE CARTAM	153
	APÊNDICE I – COEFICIENTES DE CONEXÃO	154
	APÊNDICE J – TENSOR ANGULAR	155
	APÊNDICE K – TORÇÃO DE MATSUMOTO	156

1 INTRODUÇÃO

Através dos anos a humanidade tem se empenhado para atingir o completo entendimento disso que hoje em dia é chamado de física. Muitas foram as contribuições para o crescimento do conhecimento atual nesta área, o que certamente levanta a questão: Seriam todas essas contribuições consistentes umas com as outras?

Se desejar ter uma teoria que completamente descreve o que é medido, é razoável supor que tais contribuições são consistentes umas com as outras ou uma delas deve ser recusada. Assim uma investigação mais acurada se mostra útil nestas condições. Pensando em construir a física de um ponto de vista microscópico e depois alargá-lo para se ter a visão geral, deveria ser equivalente à construção do macroscópico e então diminuir. Isso não é o que acontece com as teorias mais precisas que se tem nos dias de hoje. Vejamos o que cada uma delas tem a oferecer e então analisar suas vantagens e desvantagens.

A primeira a ser analisada tem algo por volta de 50 anos de idade: o modelo padrão das partículas elementares. É a teoria responsável pelo regime de pequenas distâncias. Ela tem grande importância pois foi capaz de explicar fenômenos experimentais como o decaimento β , estabilidade do núcleo, existência de antipartículas e muitas mais partículas que vieram a ser descobertas. Recentemente ficou famosa pela descoberta do bóson de Higgs. Muito da física feita hoje em dia é reflexo de seus resultados.

Por outro lado, tem-se uma abordagem com 104 anos de idade: Relatividade geral, a teoria de acordo com fenômenos de larga escala. Seus êxitos são: esclarecimentos sobre a natureza da interação gravitacional, ela explica o desvio da luz perto de corpos muito massivos e mais recentemente foi confirmada a existência de ondas gravitacionais previamente previstas. Uma série de resultados não intuitivos dessa teoria foram testados e confirmados.

Uma propriedade importante de uma teoria física e *sine qua non* especificamente para teoria quântica é a renormalização. Uma incoerência entre essas duas propostas é exatamente o fato que relatividade geral é não renormalizável. Se nós tentarmos fazer uma quantização padrão associando uma partícula fundamental com a interação gravitacional isso poderia acabar por não gerar probabilidades. A concordância experimental de ambas as teorias é intensa de uma forma que é insensato simplesmente abandonar uma delas. O que se supõe, e tem funcionado historicamente, é que essas são apenas válidas em um limite específico e existe uma teoria mais geral englobando as duas.

Muitas pistas sobre como fazer esta desejada teoria generalizada estão espalhadas pelo conhecimento humano e dados experimentais. Frente a este vasto campo de possibilidades, cada pesquisador ou grupo de pesquisadores escolhe o seu modelo preferido e o presente autor

escolherá o seu. Seguindo a dissertação ficará claro por que essa escolha é interessante nesta abordagem.

Os detalhes serão melhor explicados quando a hora chegar, mas basicamente os esforços neste trabalho são motivados pela pista das teorias de spin-2. No limite de gravidade linearizada da Relatividade Geral é possível obter a mesma equação de movimento do que aquela para os campos de spin-2. Assim imagina-se que Relatividade Geral pode ser uma teoria de campos de spin-2 com “algo mais”.

Pode ser útil olhar para o passado, porque algo muito parecido já aconteceu com outras interações, em específico com o eletromagnetismo acoplado a campos escalares. Dois famosos fenômenos chamados de modos de Higgs e Goldstone provaram que sistemas físicos que não obedecem plenamente uma simetria no estado fundamental tem propriedades interessantes. No caso do eletromagnetismo é observada a separação de dois campos escalares massivos em um massivo e outro sem massa causado pela quebra de simetria global chamada de modo de Goldstone. O modo de Higgs acontece quando dois campos escalares massivos e um fóton são convertidos em um campo escalar massivo e um fóton massivo por uma quebra de simetria local.

O modo de Goldstone pode ser visto de forma intuitiva como um campo que perde sua massa e se torna o então chamado Goldstone bóson sob quebra de simetria global espontânea. Mas o caso mais motivador é o modo de Higgs, pois pode ser visto como um jeito de dar massa ao fóton por um “sacrifício” de um campo escalar, o bóson de Higgs. Os dois casos (massivo e sem massa) foram estudados independentemente com as equações de Maxwell (fóton sem massa) e equações de Proca (fóton massivo), mas com o modo de Higgs existe um jeito suave de saltar de um formalismo ao outro.

Algo muito similar parece estar acontecendo com a gravitação, isso quer dizer, com a partícula de spin 2. A situação de partículas não massivas é bem conhecida e talvez aquele “algo mais” que se busca é nada mais do que um gráviton massivo. Naturalmente este limite entre os dois é algo nada trivial, pois campos não massivos de spin 2 tem 2 graus de liberdade, enquanto no caso massivo eles tem 5. Contudo este é exatamente o mesmo caso do fóton, tendo 2 graus de liberdade e alcançando 3 “comendo” o grau de liberdade do seu sacrifício. Atualmente não existe ainda um “modo de Higgs para grávitons”, ainda assim pode ser facilmente concebido um campo que é sacrificado para dar-lhe massa ou algo parecido.

Foi assim que surgiu um candidato para Teoria de Campos Gravitacional que recebeu o nome Gravidade Massiva (Massive Gravity) e será explorada em uma seção separada. De forma muito superficial, pode-se dizer que o limite de gravidade linearizada é o mesmo do que o de massa desprezível em Gravidade Massiva. Muitos percalços apareceram em seu caminho como fantasmas levando a um termo massivo não unicamente definido, generalização do caso não linear e fantasmas não lineares. É hora de considerar outros candidatos à teoria que tenham boa aceitação na comunidade científica.

Inserindo um tensor a mais, de tal modo que ele se comporte como o tensor métrico e usando alguns argumentos de simetria nasce a dita Bi-gravidade (Bi-gravity) que terá sua seção própria também. Esta é uma teoria construída sobre a possibilidade de dar um tratamento diferente para o acoplamento da gravidade com a matéria.

Assim como em Gravidade Massiva, Bi-gravidade tem seus problemas como as questões: como a matéria se acopla com duas métricas? E se ela se acopla diferente para cada uma, como a matéria sabe qual escolher? Essas são questões que podem ser consideradas, à primeira vista, questões relacionadas à nossa intuição que a natureza não precisa seguir, mas existem perguntas mais profundas como: Duas métricas podem coexistir na mesma variedade? Há alguma estrutura matemática faltando? Essas questões estão intrinsecamente relacionadas com a estrutura do espaço-tempo dessa teoria.

Segue-se que Gravidade Massiva avançou e alcançou a noção de métrica de referência, um tensor que tem de ser definido para estar de acordo com o limite linear, mas isto é justamente a teoria da Bi-gravidade. Agora resolver o problema de duas se tornou o problema de apenas uma teoria e isto foi tratado em 13 de agosto de 2014 por Yashar Akrami, Tomi S. Koivisto e Adam R. Solomon ([AKRAMI; KOIVISTO; SOLOMON, 2015](#)). Neste artigo é dito, em uma tradução livre do que o próprio autor diz: “se duas métricas se acoplam minimamente com a matéria, então não há métrica alguma para a qual toda matéria poderia acoplar-se”.

O que os autores querem nos dizer é que não existe um tensor privilegiado associando todos os pontos na variedade, o que supostamente é uma contradição com o formalismo matemático da Relatividade Geral, ou seja, Geometria Riemanniana. Isto poderia ser considerado um fato triste que nos forçaria a abandonar as duas teorias, mas o que está sendo perseguido não precisa necessariamente ser consistente com a Relatividade Geral em todos dos limites. É bem verdade que se deve recuperar o que se sabe, a principal diferença agora é ter que recuperar também a geometria em si. Isso significa que é preciso algo maior do que a geometria Riemanniana. O que poderia isso ser?

Essa pergunta pode ser respondida notando que vetores tangentes à variedade, isto é, o espaço tangente, não interferem na geometria. Poderia ser construída uma geometria que é exatamente a Riemanniana quando o espaço tangente não muda e a cada disposição diferente dos vetores tangentes geram uma diferente geometria Riemanniana. Sendo simplista o que se precisa é uma dependência do tensor métrico nos vetores tangentes. Isto é conhecido como geometria de Finsler e foi evidenciado por Yashar, Tomi e Adam em ([AKRAMI; KOIVISTO; SOLOMON, 2015](#)).

Agora todas as escolhas e predileções por algumas teorias, na tentativa de chegar na dita Geometria de Finsler foram todas justificadas. A ideia principal deste trabalho é investigar as consequências de se construir uma relatividade geral sobre a estrutura matemática da geometria de Finsler e buscar por analogias com os casos massivos e bi-métricos. Essas con-

tribuições do espaço tangente para a geometria é, por muitos autores, referido como cor, assim se diz que qualquer Geometria Riemanniana é nada mais do que uma Geometria Finsleriana “monocromática”.

Para oferecer uma abordagem àqueles tópicos principais que foram apenas mencionados acima, vamos fazer uma breve revisão sobre as teorias Gravidade Massiva, Bi-métrica e o estudo da geometria de Finsler.

O seguinte trabalho está organizado da seguinte forma: após esta breve introdução será apresentado uma revisão das teorias que foram a motivação para esta abordagem, a saber Gravidade Massiva, Bi-gravidade e geometria de Finsler no segundo capítulo. O terceiro capítulo tratará do espaço proposto para esta abordagem e o quarto capítulo será uma investigação sob a óptica aproximativa finalizando com conclusões e perspectivas futuras no capítulo 5.

2 Geometria e gravidade

2.1 Massive Gravity

Como foi mencionado, essa é uma teoria baseada nos resultados da gravidade linearizada, então avaliemos as equações de Einstein neste limite. É o limite em que a métrica pode ser aproximada à métrica plana de Minkowski, de forma esquemática: $g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}$ vamos definir: $\gamma_{\mu\nu}$, um tensor com o valor absoluto de cada uma de suas componentes menor do que 1, e determinando: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}$. A métrica inversa se torna: $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu}$, símbolos de Christoffel serão dados como $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}\eta^{\tau\sigma}(\partial_\mu\gamma_{\nu\sigma} + \partial_\nu\gamma_{\mu\sigma} - \partial_\sigma\gamma_{\mu\nu})$ e o tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = \partial^\sigma\partial_{(\nu}\gamma_{\mu)\sigma} - \frac{1}{2}\partial^\sigma\partial_\sigma\gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu\gamma_\sigma^\sigma$ (WALD, 1972).

A gravidade linearizada tem uma invariância difeomorfa dada por $\gamma_{\mu\nu} \rightarrow \gamma_{\mu\nu} + 2\partial_{(\mu}\xi_{\nu)}$ e isso capacita a teoria para escolher um calibre análogo àquele chamado de Lorentz no caso eletromagnético: $\partial^\sigma\partial_\sigma\xi_\mu = 0$. Definido $\gamma = \gamma_\sigma^\sigma$ e $\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\gamma$ isso simplifica as equações de Einstein analogamente às equações de Maxwell. A Equação linearizada de Einstein lê-se:

$$\partial^\sigma\partial_\sigma\bar{\gamma}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Está na hora de se informar sobre a teoria de Fierz e Pauli para poder entender quais são essas semelhanças. Restringindo-se ao caso dos spins inteiros, os campos com spin s e massa m podem ser representados como tensores simétricos complexos de ordem s para sistemas sem interação. Esse tensor é definido por uma equação e condições auxiliares do tipo:

$$\partial^a\partial_a\mathbf{A}_{i_1\dots i_s} = m^2\mathbf{A}_{i_1\dots i_s} \quad (c = \hbar = 1), \quad (2.2)$$

Com condições auxiliares de traço nulo e transversalidade:

$$\mathbf{A}_{i_1,i_1,\dots,i_s} = 0; \quad \partial^{i_1}\mathbf{A}_{i_1,\dots,i_s} = 0. \quad (2.3)$$

Se forem restringidas para os casos: $s = 2$, $m = 0$ chegar-se-á nas equações de Einstein linearizadas com: $\mathbf{A}_{ab} = \bar{\gamma}_{ab}$. As condições auxiliares são satisfeitas pela fixação do calibre $\partial^b\partial_b\xi_a = -\partial^b\bar{\gamma}_{ab}$. Isto significa que a teoria de campos para spin 2 é uma flutuação sobre a métrica de Minkowski na gravidade linearizada, com a adição de um campo escalar auxiliar C . A lagrangiana de Fierz e Pauli é conhecida (FIERZ; PAULI, 1939):

$$L = \partial^c \bar{\gamma}^{ab} \partial_c \bar{\gamma}_{ab} - 2 \partial^a \bar{\gamma}_{ac} \partial^b \bar{\gamma}_{bc} - \frac{3}{8} \partial^c C \partial_c C + \partial^a \bar{\gamma}_{ab} \partial^b C. \quad (2.4)$$

2.1.1 Teoria de Fierz-Pauli

A teoria de Fierz e Pauli para spins inteiros será resumida seguindo os dois mais importantes artigos neste tópico já citados. Ele é baseado no cálculo espinorial de Van der Waerden que admite uma representação tensorial para campos de spin inteiro (WAERDEN, 1932). Uma teoria de campos relativística deve estar de acordo com a equação de Klein-Gordon possibilitando o surgimento da equação de onda. As condições auxiliares são derivadas da condição de que os tensores não podem ser reduzidos à alguma outra representação de spin menor (Irreduzibilidade).

Daqui em diante a condição $\text{tr}(\mathbf{A}_{i_1, \dots, i_r}) = 0$ será esquecida, pois é possível reproduzi-la se $\mathbf{A}_{i_1, \dots, i_r}$ for simplesmente tratado como um tensor de traço nulo desde o começo. Tensores simétricos de ordem r e dimensão d tem $\binom{r+d-1}{d-1}$ número de componentes livres. A condição de traço nulo gera um vínculo para cada componente de tensores $d-2$ simétricos. Seja $d = 4$ para 3 dimensões espaciais e uma temporal, resta um número de componentes independentes:

$$\binom{r+3}{3} - \binom{r+1}{3} = (r+1)^2. \quad (2.5)$$

Ainda falta a condição $\partial^{i_1} \mathbf{A}_{i_1 \dots i_r} = 0$, ela garante que ondas planas em equilíbrio tenham amplitude nula. Pode-se ver a situação como sendo toda tratada em 3 dimensões de espaço, assim a verdadeira equação do número de componentes independentes é:

$$\binom{r+2}{2} - \binom{r}{2} = 2r+1. \quad (2.6)$$

Restringindo o alcance da teoria para campos de spin 2, o nosso caso de interesse, acaba-se com um tensor de ordem 2 simétrico com 5 graus de liberdade ($2 \cdot 2 + 1$). Neste contexto as condições auxiliares são uma condição de energia positiva (FIERZ, 1939).

$$\partial^i \mathbf{A}_{ij} = 0. \quad (2.7)$$

O próximo passo é a investigação de um princípio variacional capaz de gerar a equação de onda (aqui adota-se: $\hbar = c = 1$)

$$\square \mathbf{A}_{ij} = m^2 \mathbf{A}_{ij}. \quad (2.8)$$

Adotemos um campo escalar auxiliar C para ser independente com respeito à A_{ij} e impor que sua variação sobre L , a lagrangiana, traga as condições auxiliares à luz. Para simplificar, em um primeiro momento A_{ij} e C serão tratados como campos reais $C^* = C$ e $\mathbf{A}_{ij}^* = \mathbf{A}_{ij}$ com * denotando o conjugado complexo. O princípio variacional será então:

$$\delta \int L dt = 0. \quad (2.9)$$

Escolha L com sendo a soma de todas os possíveis termos misturando A_{ij} e C , desta forma, após as equações de Euler-Lagrange escolher-se-á qual termo deve sobreviver. Massa e o termo cinético devem aparecer, de outro modo não faz sentido uma interpretação de campos. Defina a_1 , a_2 e a_3 como constantes para as contribuições dos termos na lagrangiana, isso acarreta (FIERZ; PAULI, 1939)

$$L = k^2 \mathbf{A}_{ij} \mathbf{A}^{ij} + \partial_k \mathbf{A}_{ij} \partial^k \mathbf{A}^{ij} + a_1 \partial_i \mathbf{A}^{ik} \partial^j \mathbf{A}_{jk} + a_2 k^2 C^2 + a_3 \partial_i C \partial^i C + \partial_i \mathbf{A}^{ij} \partial_j C. \quad (2.10)$$

O termo de interação entre os dois campos deve existir igualmente, para a consistência de C como um campo auxiliar. As equações de Euler-Lagrange para A_{ij} resultam

$$2k^2 \mathbf{A}_{ij} - 2\square \mathbf{A}_{ij} - a_1 (\partial^k \partial_i \mathbf{A}_{kj} + \partial^k \partial_j \mathbf{A}_{ki} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \partial^k \partial^r \mathbf{A}_{kr}) - \partial_i \partial_j C + \frac{1}{4} \delta_{ij} \square C = 0. \quad (2.11)$$

E para o campo auxiliar C :

$$2a_2 k^2 C - 2a_3 \square C - \partial^i \partial^j \mathbf{A}_{ij} = 0. \quad (2.12)$$

Se for diferenciada a equação de A_{ij} com respeito à x_i e chamar $\partial^i \partial^j \mathbf{A}_{ij} = A$

$$2k^2 \partial^i \mathbf{A}_{ij} = 2\Box \partial^i \mathbf{A}_{ij} + a_1(\Box \partial^i \mathbf{A}_{ij} + \frac{1}{2} \partial_j A) + \frac{3}{4} \Box \partial_j C. \quad (2.13)$$

Ponha $a_1 = -2$ e o vetor $\partial^i \mathbf{A}_{ij}$ é revelado como a representação de uma partícula de spin zero pois ele é o gradiente de um escalar

$$2k^2 \partial^i \mathbf{A}_{ij} = -\partial_j A + \frac{3}{4} \Box C. \quad (2.14)$$

Derivando-a mais uma vez será notório que as duas equações formam (a mais recente e aquela referente ao campo C) um sistema de equações lineares homogêneo.

$$\begin{aligned} (2k^2 + \Box)A - \frac{3}{4} \Box \Box C &= 0 \\ -A + (2a_2 k^2 - 2a_3 \Box)C &= 0. \end{aligned}$$

Para evitar que o determinante referente a esse sistema de equações seja nulo escolhe-se a_2 e a_3 de modo a satisfazer essa exigência. O cálculo do determinante resulta em:

$$4a_2 k^4 + 2k^2(a_2 - 2a_3)\Box - (2a_3 + \frac{3}{4})\Box\Box. \quad (2.15)$$

Supondo que $k \neq 0$ (aqui começam as suspeitas de que a teoria massiva de spin 2 é fundamentalmente diferente de teorias não massivas) se $a_2 = 2a_3$ e $2a_3 = -\frac{3}{4}$, o determinante $3m^4$ nunca se anula. Como um resultado final $A = 0$, $C = 0$ e $\partial^i A_{ij} = 0$. Ironicamente introduzir o campo C foi literalmente como somar zeros, e a lagrangiana final será.

$$L = k^2 \mathbf{A}_{ij} \mathbf{A}^{ij} + \partial_k \mathbf{A}_{ij} \partial^k \mathbf{A}^{ij} - 2\partial_i \mathbf{A}^{ik} \partial^j \mathbf{A}_{jk} - \frac{3}{4} k^2 C^2 - \frac{3}{8} \partial_i C \partial^i C + \partial_i \mathbf{A}^{ij} \partial_j C. \quad (2.16)$$

Neste momento é válido mencionar que Euler-Lagrange é uma equação diferencial de segunda ordem, o que significa que para a completa solução é preciso uma condição inicial e uma derivada determinada no instante inicial para cada componente. Como se sabe, tensores de traço nulo tem 9 componentes, mais uma para C todas juntas somam 10, podendo ser tratados similarmente à tensores de traço não nulo (isso será considerado em (2.35) onde ler-se-á: $\mathbf{A}_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}$). Contudo poucas páginas atrás campos de spin 2 foram ditos se propagarem em 5

graus de liberdade. Resumido: Tudo o que é necessário são 5 condições iniciais e 5 de valor inicial das derivadas

Essas condições podem ser derivadas pela restrição $j = 4$ nas componentes do tensor \mathbf{A}_{ij} na equação de Euler-Lagrange.

$$2k^2 \mathbf{A}_{ij} - 2\Box \mathbf{A}_{ij} + 2(\partial^k \partial_i \mathbf{A}_{kj} + \partial^k \partial_j \mathbf{A}_{ki} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \partial^k \partial^r \mathbf{A}_{kr}) - \partial_i \partial_j C + \frac{1}{4} \delta_{ij} \Box C = 0. \quad (2.17)$$

Derive e combine com a equação para C .

$$-\frac{3}{2} k^2 C + \frac{3}{4} \Box C = \partial^i \partial^j \mathbf{A}_{ij}. \quad (2.18)$$

Para ter

$$2\partial^i \mathbf{A}_{ij} - \frac{3}{2} \partial_j C = 0. \quad (2.19)$$

Use i variando de 1 até 4 e elimine as derivadas temporais usando a equação de C nas equações de A_{ij} , conjuntamente coleta-se 8 condições. As 2 outras vem reconhecendo C como um campo não nulo e impondo a posteriori as duas condições

$$C = 0 \quad (2.20)$$

$$\partial_{i=4} C = 0. \quad (2.21)$$

Após todo esse desenvolvimento, ainda não é o suficiente para descrever partículas sem massa de spin 2. Em linhas gerais a referência de 1939 ([FIERZ; PAULI, 1939](#)) discute um pouco sobre isso, mas não tão rigorosamente. A ideia principal é que não se pode simplesmente tomar $k \rightarrow 0$ na lagrangiana, porque o determinante do sistema das equações de Euler-Lagrange anular-se-á, ainda que isso leve às equações de Klein-Gordon para partículas não massivas.

2.1.2 A dieta do Gráviton

Os resultados da última secção são de certa forma tristes, mas longe de serem inesperados pois o mesmo já aconteceu com a teoria eletromagnética e com o fóton. Tome por exemplo um campo escalar complexo, sua equação de Klein-Gordon $\Box \phi = k^2 \phi$ leva à lagrangiana ([RYDER, 1985](#)):

$$L = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - k^2 \phi^* \phi. \quad (2.22)$$

Garantir a invariância da lagrangiana sob a ação do grupo $U(1)$ é análogo a introduzir o campo eletromagnético no sistema. A lagrangiana do campo ϕ mais a interação eletromagnética contém termos de uma partícula de spin 1 não massiva, o fóton (RYDER, 1985):

$$L = (D_\mu \phi)(D^\mu \phi^*) - k^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (2.23)$$

Denota-se $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$ que significa a derivada covariante, A_μ o campo do fóton com g constante de acoplamento e $F_{\mu\nu}$ o tensor de Maxwell. Pode-se esperar que uma lagrangiana, para fótons massivos, seria dada por uma soma de termos que faltam originalmente, multiplicada por uma constante (massa do fóton) de um modo que quando for tomado o limite tendendo à zero ele retorna à lagrangiana massiva.

$$L = (D_\mu \phi)(D^\mu \phi^*) - k^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + m_\varphi^2 A_\mu A^\mu. \quad (2.24)$$

Tendo isto em mente vamos investigar outro fenômeno para campos escalares complexos. Devido ao conhecido teorema de Goldstone foi notado um importante desdobramento da teoria quântica de campos no caso quando algumas simetrias são quebradas no estado fundamental. Este é precisamente o nosso caso se imaginarmos o termo massivo na lagrangiana como um termo de potencial e o limite $k \rightarrow 0$ o seu estado fundamental.

Inclua na lagrangiana um termo auto-interagente como este $-\lambda(\phi^* \phi)^2$ e ache o estado fundamental pelo mínimo do potencial $\frac{\partial V(x)}{\partial \phi}|_{\phi=\phi_0} = \frac{\partial}{\partial \phi}(-k^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2)|_{\phi=\phi_0} = 0$. Os problemas da última seção surgem pois $\phi_0 = 0$ é um ponto extremo e a ordem mais importante (leading order) de flutuações sobre ele é precisamente k^2 que se torna singular em $k \rightarrow 0$.

Para evitar esta singularidade torna-se o campo escalar complexo em dois campos escalares reais deslocados pelo ponto extremo $\phi(x) = |\phi_0| + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + i\phi_2(x))$. Use os campos ϕ_1 e ϕ_2 como os campos físicos de fato eliminando a singularidade e tratando $k^2 < 0$ como um parâmetro mais do que como uma massa de fato. Colocando $|\phi_0|$ em evidência no potencial e reescrevendo a lagrangiana ignorando termos mais altos que de segunda ordem chega-se em (RYDER, 1985):

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + g^2 |\phi_0|^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1)^2 - 2\lambda |\phi_0|^2 \phi_1^2 + \dots \quad (2.25)$$

Nesta lagrangiana observe: o que foi um campo escalar complexo massivo mais um fóton (sem massa) torna-se um fóton massivo e um campo real massivo. O campo ϕ_2 se vai por uma transformação de calibre. Compare este resultado com o que foi suposto no começo e perceba que de fato nada mudou drasticamente, tem-se um termo massivo para A_μ e um para o campo ϕ bem como termos cinéticos para os dois.

$$L = (D_\mu \phi)(D^\mu \phi^*) - k^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + m_\varphi^2 A_\mu A^\mu. \quad (2.26)$$

A principal diferença entre os dois é o número de graus de liberdade, evidenciando que o processo de ganho ou perda de massa requer mais do que simples “boas intenções” do fóton. Um campo escalar massivo complexo tem 2 graus de liberdade e mais 2 do fóton massivo somam 4, agora está claro por que não se pode simplesmente adicionar um termo massivo à lagrangiana visto que fótons massivos tem 3 graus de liberdade com mais 2 do campo escalar ϕ .

Em outras palavras adicionar uma massa ao fóton de forma simplista significa adicionar uma dimensão de lugar nenhum e eliminar a sua massa quer dizer sumir com uma dimensão arbitrariamente. É totalmente diferente do que acontece no procedimento acima, chamado o modo de Higgs, pois um dos dois graus de liberdade de ϕ foi “comido” de modo a gerar massa ao fóton.

Após estes percalços, é chegada a hora de retornar ao caso do gráviton e responder à pergunta: como é o modo de Higgs no caso de partículas de spin 2? Esta é a pergunta de 1 milhão de dólares, pois apesar de muitas tentativas ainda não existe este procedimento. No lugar de insistir neste árduo trabalho o que será feito é usar o procedimento de Stückelberg para fótons e generalizá-lo para Grávitons.

Brevemente, as ideias que levaram ao o que hoje é chamado de campos de Stückelberg serão tratadas. O procedimento de Stückelberg foi uma alternativa para tratar soluções de eletrodinâmica com interações e relacioná-las com a teoria de campos para potencial central. O ponto de partida é um campo escalar A com a carga J e constante k satisfazendo a equação de campo análoga à de Maxwell de potencial eletrodinâmico.

$$(\square - k^2)A = -4\pi J. \quad (2.27)$$

No momento em que Stückelberg escreveu seus trabalhos, a solução para esta equação de campos já era conhecida estatisticamente devido a Yukawa (YUKAWA, 1935) e (YUKAWA, 1937). Seja $A(x) = \int e^{i\omega \cdot x} A(\omega) d\omega^4$ e $J(x) = \int e^{i\omega \cdot x} J(\omega) d\omega^4$ a transformada de Fourier de $A(\omega)$ e $J(\omega)$ respectivamente com x e ω quadrivetores. O que desemboca em (STÜCKELBERG, 1938a).

$$A(\omega) = \frac{4\pi J(\omega)}{\omega \cdot \omega + k^2}. \quad (2.28)$$

Estes integrandos devem ser integrados de $-\infty$ à ∞ e " \cdot " é entendido como o produto escalar de quadrivetores. A parte espacial do quadrivetor ω será livre de singularidades enquanto a parte temporal representa-se com ω_0 e contém 2 singularidades discretas quando o denominador se vai. Chame $\vec{\omega}$ a parte espacial de ω e γ o caminho para evitar essas singularidades o que resulta na solução das equações de Maxwell da forma:

$$\begin{aligned} A^\gamma(x) &= \int d\vec{\omega} \int_\gamma d\omega_0 A(\omega) e^{i\omega \cdot x} = \int dy^4 J(y) D^\gamma(x-y) \\ D^\gamma(x) &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int_\gamma e^{i\omega \cdot x} \frac{d\omega^4}{\omega \cdot \omega + k^2}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Existem dois caminhos especiais denotados por $\gamma = +$ e $\gamma = -$ de tal forma que é possível construir uma função invariante $D(x) = D^-(x) - D^+(x)$. Com base nisto é possível escrever duas formas diferentes de soluções para as equações de Maxwell que são de fato campos. Estes são referentes aos conhecidos potenciais retardados e avançados.

$$A^\pm(x) = \int dy^3 \int_{x_0}^{\pm\infty} dx_0 D(y-x) J(x). \quad (2.30)$$

Em uma generalização para mais componentes é preciso uma condição para a positividade da energia a ser satisfeitas, assegurando que existe um conjunto completo de estados de energia positiva, mas isso só é possível com o auxílio de algum campo escalar B . É bem verdade que o campo extra não é necessário para o caso $k = 0$ mas se $k \neq 0$ então deve existir. Este conjunto completo de estados são tal que $(\frac{\partial A}{\partial x} + kB)|\psi\rangle = 0$. Fazendo as adaptações para o caso de A ser um quadrivetor, seria mais fácil satisfazer uma condição como: $\frac{\partial}{\partial x} \Phi |\psi\rangle = 0$ então (STÜCKELBERG, 1938b):

$$\Phi_\mu = A_\mu + k^{-1} \partial_\mu B. \quad (2.31)$$

Façamos este campo satisfazer as equações de movimento para A desprovida de corrente $(\square - k^2)\Phi = 0$ a equação de Proca. Defina $F_{\mu\nu}$ exatamente como o tensor de Maxwell $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu$ e a função de Lagrange devido à equação de Proca é bem conhecida e a sua parte principal

$$L(\Phi) = -\frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + k^2 \Phi^\mu \Phi_\mu. \quad (2.32)$$

Esta é a parte da lagrangiana dos dois primeiros termos do caso análogo para campos escalares como visto no começo do estudo de campos de Stückelberg eq(2.24). Adicione a isso a condição de energia positiva e a parte material do sistema com $k^2 = \frac{m^2}{2}$ para m a massa, o que resta:

$$L(A, B) = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu B \partial^\mu B - \frac{1}{2}m^2 B^2 - J \cdot (A + m^{-1}\partial B). \quad (2.33)$$

Este foi o formalismo de Stückelberg para o spin 1, basicamente substituindo um campo vetorial por dois campos (um escalar e um vetorial) mais uma condição adicional. A aplicação deste formalismo para o campo de spin 2 já foi tratado previamente e como um exemplo a referência (DELBOURGO; SALAM, 1975) parece ser bem esclarecedora. Retornemos uma última vez para a lagrangiana desejada de spin 1 de campos massivos (2.24) acoplada com a carga J_μ mas desta vez explorando a simetria de calibre $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu S$ e escolha S de tal modo $A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{m}\partial_\mu B$. Note que essa simetria não é referente ao caso massivo, mas sim ao caso sem massa. Ainda que o termo massivo não compartilha desta simetria:

$$\begin{aligned} L(A) &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu - A_\mu J^\mu \rightarrow \\ L(A, B) &= -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu B \partial^\mu B - \frac{m^2}{2}B^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(\partial \cdot A + mB)^2 - J \cdot (A + \frac{1}{m}\partial B). \end{aligned} \quad (2.34)$$

A diferença entre este resultado mais recente e aquele pertencente à teoria de Stückelberg não é nada além de um termo: $\frac{1}{2}(\partial \cdot A + mB)^2$. É possível dizer que as duas teorias são equivalentes, já que este é precisamente o termo responsável pela condição de energia positiva. Se os estados $|\psi\rangle$ forem confrontados com esta condição então isto significa que $(\partial \cdot A + mB)|\psi\rangle = 0$ é uma equação de campo livre. Por conta disso, os dois candidatos a propagadores $\langle A_\mu | A_\nu \rangle = \frac{-1}{k^2 - m^2} \eta_{\mu\nu}$ e $\langle B | B \rangle = \frac{1}{k^2 - m^2}$ são bem definidos no sentido que eles são suaves no limite $m \rightarrow 0$. Finalmente chegando no tão desejado caso de spin 2, é postulado uma lagrangiana similar à Stückelberg de spin 1 (DELBOURGO; SALAM, 1975).

$$\begin{aligned} L(f, V) &= \frac{1}{2}(\partial_\lambda f_{\mu\nu} \partial^\lambda f^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\lambda f_\mu^\mu \partial^\lambda f_\nu^\nu) - \frac{m^2}{2}(f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - \frac{1}{2}f_\mu^\mu f_\nu^\nu) - \partial_\mu V_\nu \partial^\mu V^\nu \\ &\quad + m^2 V_\mu V^\mu + \theta_{\mu\nu} [f^{\mu\nu} + \frac{\partial^\mu V^\nu + \partial^\nu V^\mu}{m}]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Similarmente com o caso do spin 1, a desejada lagrangiana de Fierz-Pauli referente a um campo massivo com carga de spin 2 sofrerá uma mudança de calibre sobre a simetria

$f_{\mu\nu} \rightarrow f_{\mu\nu} + \partial_\mu U_\nu + \partial_\nu U_\mu + \partial_\mu \partial_\nu S$ aplicável ao caso sem massa. Os requisitados U_μ e S desta vez serão escolhidos de modo a gerar $f_{\mu\nu} \rightarrow f_{\mu\nu} + \frac{\partial_\mu V_\nu + \partial_\nu V_\mu}{m}$ e novamente, esta simetria originalmente não é compartilhada com o termo massivo. A semelhança entre campos de Stückelberg e a sua variação de spin 2 é estabelecida pela mudança $B \rightarrow V_\mu$ e $A_\mu \rightarrow f_{\mu\nu}$. A ideia é a mesma de outrora, achar um termo diferente da lagrangiana de Fierz-Pauli acoplada com carga $T_{\mu\nu}$ e certificar-se de que isso se torne uma equação de campo livre gerando propagadores suaves como:

$$L(f) = \frac{1}{2}(\partial_\lambda f_{\mu\nu} \partial^\lambda f^{\mu\nu} - \partial_\lambda f_\mu^\mu \partial^\lambda f_\nu^\nu - 2\partial_\mu f^{\mu\lambda} \partial^\nu f_{\nu\lambda} + 2\partial_\mu f^{\mu\lambda} \partial_\lambda f_\nu^\nu) - \frac{m^2}{2}(f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - f_\mu^\mu f_\nu^\nu) + f_{\mu\nu} T^{\mu\nu}. \quad (2.36)$$

Pode-se fazer o mesmo que foi feito para o caso de spin 1, mas este não é o nosso propósito nesta seção, pois pode acabar por ser uma abordagem um pouco evasiva do tema principal. Ao invés, vamos fazer a conexão física entre esses campos e a gravidade linearizada lidando com a ação de Einstein-Hilbert desde o começo. Após um melhor entendimento de como essa matemática é conectada com a teoria lançaremos mão dos campos de Stückelberg. De uma forma simplista pode-se definir o procedimento de Stückelberg como uma mudança de $A_\mu \rightarrow A_\mu + k^{-1} \partial_\mu B$ em campos de spin 1. Da mesma forma temos para campos de spin 2, que são representados por tensores, Stückelberg trona-se $h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + 2k^{-1} \partial_{(\mu} \chi_{\nu)}$ para recuperar a invariância difeomorfa quebrada devido à presença do termo massivo.

2.1.3 Variáveis de Bardeen

O último capítulo foi uma tentativa de achar alguma similaridade entre a teoria de spin 2 e a teoria linearizada da gravidade “pulando” da teoria de campos para a relatividade geral. De certa forma, agora o caminho inverso será seguido. Considere a métrica $g_{\mu\nu}$ e expandindo sobre o espaço-tempo plano de Minkowski $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, usa-se a decomposição em (3 + 1) e as variáveis harmônicas $(\psi, \phi, \gamma, \lambda, \beta^i, \epsilon^i, \bar{h}_{ij})$ onde índices latinos seguem de 1 à 3 e índices gregos de 0 à 3. Essa decomposição é como se segue:

$$h_{00} = 2\psi \quad (2.37)$$

$$h_{0i} = \beta_i + \partial_i \gamma \quad (2.38)$$

$$h_{ij} = -2\phi \delta_{ij} + (\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2) \lambda + \partial_{(i} \epsilon_{j)} + \bar{h}_{ij}. \quad (2.39)$$

Com os vínculos:

$$\partial_i \beta^i = \partial_i \epsilon^i = \partial^j \bar{h}_{ij} = \delta_{ij} \bar{h}_{ij} = 0. \quad (2.40)$$

E condições de contorno para a parte espacial no infinito

$$\gamma \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0, \nabla^2 \lambda \rightarrow 0, \epsilon_i \rightarrow 0. \quad (2.41)$$

\bar{h}_{ij} é um tensor transversal sem traço e β_i, ϵ_i campos vetoriais transversais, ao passo que λ, ϕ, ψ e γ são campos escalares. No limite linearizado ele exibe uma simetria linear difeomorfa para uma teoria sem massa $h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - 2\partial_{(\mu}\xi_{\nu)}$. Assim é possível ver que \bar{h}_{ij} é um invariante por calibre. Então criemos um invariante de calibre para cada setor escalar e vetorial (JACCARD; MAGGIORE; MITSOU, 2013):

$$\Phi = -\phi - \frac{1}{6}\nabla^2 \lambda \quad (2.42)$$

$$\Psi = \psi - \dot{\gamma} + \frac{1}{2}\ddot{\lambda} \quad (2.43)$$

$$\Theta_i = \beta_i - \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_i. \quad (2.44)$$

A ação linearizada de Einstein-Hilbert, com $k = \sqrt{32\pi G}$ olhando apenas para a parte quadrática é $S_2 = \int h_{\mu\nu} \mathcal{E}^{\mu\nu\rho\sigma} h_{\rho\sigma} \frac{dx^4}{2k^2}$. O tensor de Lichnerowicz $\mathcal{E}^{\mu\nu\rho\sigma}$ é definido como:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{\mu\nu\rho\sigma} = & \frac{1}{2}(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho} - 2\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma})\square - \frac{1}{2}(\eta^{\mu\rho}\partial^\sigma\partial^\nu + \eta^{\nu\rho}\partial^\sigma\partial^\mu + \eta^{\mu\sigma}\partial^\rho\partial^\nu + \eta^{\nu\sigma}\partial^\rho\partial^\mu) \\ & + (\eta^{\rho\sigma}\partial^\mu\partial^\nu + \eta^{\mu\nu}\partial^\rho\partial^\sigma). \end{aligned} \quad (2.45)$$

A interação com o tensor de energia-momento: $S_T = \int h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \frac{dx^4}{2}$ e decompondo o tensor da mesma forma que $h_{\mu\nu}$.

$$T_{00} = \rho \quad (2.46)$$

$$T_{0i} = S_i + \partial_i S \quad (2.47)$$

$$T_{ij} = P\delta_{ij} + (\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2)\sigma + \partial_{(i}\sigma_{j)} + \sigma_{ij}. \quad (2.48)$$

Com os mesmos vínculos e condições de contorno àquelas de $h_{\mu\nu}$, mas há outra condição a ser satisfeita, já que este deve ser um tensor de energia-momento conservado: $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. A componente temporal dará a relação $\nabla^2 S = \rho$ e para a parte espacial como um vetor de 3 componentes: $\frac{1}{2}\nabla^2\sigma^i - \dot{S}^i + \partial^i(-\dot{S} + P + \frac{2}{3}\nabla^2\sigma) = 0$. Tudo isso ajudará a reescrever a ação linearizada de Einstein-Hilbert em termos dos campos invariantes de calibre, as variáveis de Bardeen.

$$S_{2+T} = \int [-12\dot{\Phi}^2 + 4\partial_i\Phi\partial^i\Phi - 8\partial_i\Phi\partial^i\Phi + \partial_i\Theta_j\partial^i\Theta^j - \frac{1}{2}\partial_\mu\bar{h}_{ij}\partial^\mu\bar{h}^{ij}] \frac{dx^4}{k^2} + \int [3\Phi P + \Phi\rho - \Theta_i S^i + \frac{1}{2}\bar{h}_{ij}\sigma^{ij}] dx^4. \quad (2.49)$$

A variação desta ação dará as equações (JACCARD; MAGGIORE; MITSOU, 2013):

$$\nabla^2\Phi = -4\pi G\rho \quad (2.50)$$

$$\nabla^2\Psi = -4\pi G(\rho - 2\nabla^2\sigma) \quad (2.51)$$

$$\nabla^2\Theta_i = -16\pi G S_i \quad (2.52)$$

$$\square\bar{h}_{ij} = -16\pi G\sigma_{ij}. \quad (2.53)$$

Primeiramente observe que essas equações escalares são de algum modo ligadas e podem ser tratadas como: $\nabla^2(\Phi - \Psi) = -8\pi G\nabla^2\sigma$. Contando os graus de liberdade, os dois campos escalares parecem contribuir com apenas um grau de liberdade, o campo vetorial invariante por calibre contribui com 3 mas perde um por causa da transversalidade e o tensor de 9 componentes invariante por calibre perde 3 devido à simetria, mais 1 por condição de traço nulo e 3 novamente por conta da transversalidade. Os graus de liberdade somam 1 do campo escalar mais 2 do setor vetorial e outros 2 do tensor em um total de 5 graus de liberdade como devia ser desde o começo em concordância com a teoria de Fierz-Pauli.

Aqui discrimina-se os graus de liberdade como irradiantes ou não irradiantes pois os campos escalares e vetoriais estão obedecendo uma equação de Poisson ao passo que o campo tensorial obedece uma equação de onda. Graus de liberdade não irradiantes, aqueles que obedecem uma equação de Poisson, são completamente determinados pela distribuição de matéria. Segue que na ausência de matéria ela se torna uma equação de Laplace e com condições de contorno no infinito, esses 3 graus de liberdade se vão. Graus de liberdade irradiantes são aqueles capazes de serem propagados pois obedecem uma equação de onda e especificamente no caso não massivo são os únicos graus sobreviventes, evidenciando as duas polarizações do gráviton como suspeitado.

Note que a lagrangiana de Fierz-Pauli para spin 2 é diferente apenas por um termo: $\frac{m}{2}(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2)$, pois note a semelhança quando se abre o termo designado como cinético aqui: $h_{\mu\nu}\mathcal{E}^{\mu\nu\rho\sigma}h_{\rho\sigma} = \partial_\lambda f_{\mu\nu}\partial^\lambda f^{\mu\nu} - \partial_\lambda f_\mu^\mu\partial^\lambda f_\nu^\nu - 2\partial_\mu f^{\mu\lambda}\partial^\nu f_{\nu\lambda} + 2\partial_\mu f^{\mu\lambda}\partial_\lambda f_\nu^\nu$. Assim vertendo a suposta massa diretamente em zero recupera-se a teoria da relatividade geral linearizada, mas assim como foi comentado no fim da secção de Fierz-Pauli, o caso sem massa ainda não está bem definido. Uma forma de contornar este problema é tomar um termo massivo mais geral e então um limite para o caso desejado, como: $\lim_{b_1+b_2 \rightarrow 0}[m^2(b_1 h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} + b_2 h^2)]$, h é o traço de $h_{\mu\nu}$. Os setores escalar, vetorial e tensorial serão tratados separadamente e começando sem a contribuição do tensor de tensões.

O setor escalar é governado pelos campos γ , λ , ψ e ϕ , mas já se sabe que Ψ e Φ são os únicos campos físicos reais e compartilham uma relação um com o outro. Pela variação dos campos γ , ψ e $\nabla^2\lambda$ é possível reescrevê-los em termos de Φ e Γ definido como $\psi = -\frac{b_2}{8(b_1+b_2)}\Gamma$. O modo Γ é reconhecido como um fantasma (ghost) e o propagador tem dois polos. Faça a substituição $b_1 = 1$ e $b_2 = -1 - \epsilon$ que dará ao polo correspondente ao fantasma a seguinte forma:

$$\frac{3 + 4\epsilon}{2\epsilon}m^2. \quad (2.54)$$

É interessante buscar pela variação de Γ resultando $(1 + 2\epsilon)\frac{m^2}{16}\Gamma = -\epsilon(\ddot{\Phi} + m^2\Phi)$ e o limite $\epsilon \rightarrow 0$ revela que ele está pronto para descansar em paz $\Gamma = 0$. Após eliminar este fantasma o que resta é o campo Φ que representa o assim conhecido modo de helicidade 0 e originalmente era não dinâmico, mas agora se torna dinâmico, pois o setor escalar da lagrangiana tornou-se uma lagrangiana de Klein-Gordon.

$$L = \partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi + m^2\Phi^2. \quad (2.55)$$

É chegada a hora de perseguir o setor vetorial assim como foi feito para o escalar e os campos a serem considerados serão: β_i , ϵ_i e Θ_i . A variação de beta dará $2\nabla^2\beta^i - \nabla^2\epsilon^i = 2m^2b_1\beta^i$ tudo junto com a variação de Θ_i chega-se em $\nabla^2\epsilon^i = 2\dot{\beta}^i$ e mais dois graus de liberdade dinâmicos nascem: $(\square - b_1m^2)\epsilon^i = 0$. Observe que no limite $\lim_{b_1+b_2 \rightarrow 0}$, m representa ambos, a massa dos setores escalares e vetoriais. Esses dois novos graus de liberdade dinâmicos são responsáveis pelos modos de helicidade $+1$ e -1 .

Para o setor tensorial, tem-se apenas o campo \bar{h}_{ij} , mas desde o começo ele era um campo dinâmico com 2 graus de liberdade. Para um tratamento da interação com o tensor de tensões a mesma ideia é usada. Tome a lagrangiana de interação e use as variações dos campos para descrevê-la, mas agora adicione à isso a condição de conservação. Para conservação de escalares será interpretado como $\nabla^2 S = \dot{\rho}$ a lagrangiana de interação será $\Phi(2\rho + 3P - 3\dot{S})$.

No setor vetorial, a conservação pode ser lida $\nabla^2 \sigma^i = 2\dot{S}^i$ e a lagrangiana de interação $-k\beta_i S^i + \frac{k}{2}\dot{\epsilon}_i S^i$. As condições de conservação foram todas usadas e não restou nada para o setor tensorial, assim sua lagrangiana de interação é simplesmente $\frac{1}{2}\bar{h}_{ij}\sigma^{ij}$. O resultado são 5 campos dinâmicos descritos pela expressão:

$$(\square - m^2)\Phi = -\frac{k^2}{2}\left[\frac{\rho - \nabla^2\sigma}{12}\right] \quad (2.56)$$

$$(\square - m^2)\epsilon^i = -\frac{k^2}{2}\sigma^i \quad (2.57)$$

$$(\square - m^2)\bar{h}^{ij} = -\frac{k^2}{2}\sigma^{ij}. \quad (2.58)$$

Nesta investigação mais pormenorizada sobre todos esses elementos a ligação entre campos de spin 2 e a gravidade linearizada foi estabelecido. Coletando todos esses pedaços do quebra-cabeças e construindo o quadro inteiro veja que nós estamos na mesma situação àquela análoga ao campo de spin 1 em (2.27). Mas a abordagem não está totalmente construída visto que esta teoria ainda não é invariante por transformações difeomorfas devido ao termo massivo na lagrangiana.

$$L(h) = \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\mathcal{E}^{\mu\nu\lambda\rho}h_{\lambda\rho} - \frac{m}{2}(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2) + h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}. \quad (2.59)$$

A saída dessa situação é o campo de Stückelberg para restaurar a invariância por transformações difeomorfas. Note que mesmo sem algum “mecanismo de Higgs” é possível ver o paralelo entre o mecanismo de spin 1 em virtude do surgimento de um termo cinético para o campo de Stückelberg exatamente como os campos ϕ_1 da equação (2.25) que de alguma forma executa o papel de B da equação (2.31). Nesta nova perspectiva A_μ é interpretado como um campo de Stückelberg não normalizado $A_\mu = \frac{1}{m}A_\mu$ e esta é a lagrangiana invariante por transformações difeomorfas que se estava a procurar.

$$L(h) = \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\mathcal{E}^{\mu\nu\lambda\rho}h_{\lambda\rho} - \frac{m}{2}[(h_{\mu\nu} + 2\partial_{(\mu}A_{\nu)})^2 - (h + 2\partial_\mu A^\mu)^2] + h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}. \quad (2.60)$$

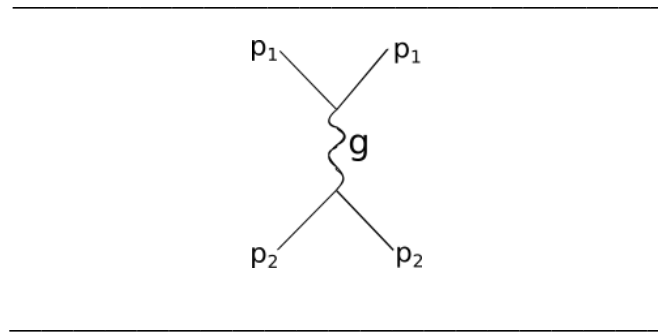
2.1.4 Alguns percalços

Mesmo se a presente abordagem revelou-se bem definida, algumas questões no que tange à continuidade, especificamente a incapacidade de trazer a teoria ao limite $m \rightarrow 0$, surgiram como uma forte razão para abandoná-la, principalmente porque este fenômeno está intrinsecamente relacionado com a massa do gráviton. Por volta do ano de 1970, Zakharov escreveu um artigo concomitantemente à van Dam e Veltman, ambos descrevendo o que hoje se conhece como a descontinuidade de van Dam-Veltman-Zakharov. Basicamente esta é a diferença

entre a relatividade geral linearizada e a gravidade massiva no limite de massa nula. Se o gráviton tem massa, então este limite deve ser suave, isto não foi exatamente o que eles provaram.

Tudo começa com a interação entre duas partículas, a partícula 1 (p_1) e a partícula 2 (p_2), intermediada por um gráviton (g). p_1 troca um gráviton com p_2 na ordem mais baixa para a constante de acoplamento gravitacional, isso pode ser descrito no seguinte diagrama de Feynman pelo propagador $\Pi_{\mu\nu\lambda\sigma}$ com o momento do gráviton k e constante gravitacional γ (ZAKHAROV, 1970) (VELTMAN; DAM, 1970):

$$\gamma p_1^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu\lambda\sigma} p_2^{\lambda\sigma}. \quad (2.61)$$



$$\Pi_{\mu\nu\lambda\sigma} = \frac{1}{2k^2} (\delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\sigma}). \quad (2.62)$$

Aqui $p_1^{\mu\nu}$ e $p_2^{\lambda\sigma}$ são os vértices para as partículas p_1 e p_2 que são transversais devido à conservação do tensor energia-momento e por isso termos proporcionais à k se vão. O que acontece no caso massivo é que, como pode ser visto na última lagrangiana escrita acima na equação (2.60), as partes com spin 0 e spin 2 são diferentes daquela para spin 1 que não se manifesta devido à transversalidade. A existência de um termo h proporciona à teoria um campo de spin 0 conjuntamente a um de spin 2 adicionando um termo $\frac{\delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\sigma}}{6(k^2 - m^2)}$ ao propagador sendo assim:

$$\Pi_{\mu\nu\lambda\sigma} = \frac{1}{2(k^2 - m^2)} (\delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\lambda} - \frac{2}{3} \delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\sigma}). \quad (2.63)$$

Está claro que o limite $\lim_{m \rightarrow 0} \Pi_{\mu\nu\lambda\sigma}$ para o caso massivo não recupera o caso não massivo por causa do termo com o fator $\frac{2}{3}$. A consequência disso é que, assim como mostrado no trabalho de Zakharov, se for tomado r como a distância de um corpo massivo com massa M e modificar seu potencial gravitacional por um fator $-\frac{\gamma M}{r} \rightarrow -\frac{\gamma M}{r} e^{-mr}$ então a deflexão dos raios de luz no caso massivo θ_m e na relatividade geral tradicional θ_0 obedece a desigualdade

$$\theta_m \leq \frac{3}{4}\theta_0. \quad (2.64)$$

A situação poderia ser bem pior pois não apenas a relatividade geral seria vandalizada mas também a gravitação Newtoniana. Uma tentativa de minimizar o dano causado é reescalonando separadamente as partes de spin 2 e spin 0 do propagador e então normalize tudo outra vez abrindo uma margem para encaixar-se na lei de Newton. O preço a pagar é o aumento da deflexão da luz em um termo proporcional ao escalar positivo λ surgindo a inequação (2.64) (ZAKHAROV, 1970):

$$\theta_m = \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\lambda\right)\theta_0. \quad (2.65)$$

Note que a teoria construída até então está em perfeita concordância com a gravidade linearizada se amassa é exatamente zero, devido à tudo o que já foi dito anteriormente, mas o limite $\lim_{m \rightarrow 0}$ não existe, este fato é chamado de descontinuidade de van Dam-Veltman-Zakharov. Não há como ignorar esta falha e ela acabou por se tornar algum tipo de prova de que o gráviton não teria massa, mas isto não acaba por aqui. Algo muito similar aconteceu com o campo de Yang-Mills, isto é, esse campo não tinha um limite não massivo muito claro, e mesmo assim aqui está ele. Um questão pertinente a ser feita é: o que acontece no limite linear? Seria razoável de imaginar que o limite $\lim_{m \rightarrow 0}$ não existe em um nível linear, pois de fato, dois limites estão sendo trabalhados simultaneamente, o limite massivo e o linearizado.

A esperança é que, na verdade, termos de acoplamento mais relevantes estejam presentes na teoria não linear que são perdidos na passagem para o limite linear e deveriam se tornar termos líderes (leading order) no limite de massa zero. Para averiguar se essas assertivas são contundentes, usa-se a equação completa de spin 2 massivo descrita por Ogievetsky (OGIEVETSKY; POLUBARINOV, 1965) considerando desta vez $h_{\mu\nu}$ como o operador de oscilação íntegro $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \frac{1}{2}m^2(h_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu}h) = kT_{\mu\nu}. \quad (2.66)$$

Aqui $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci e R o seu traço com a constante gravitacional k que gera:

$$m^2 g^{\mu\nu} \mathcal{D}_\mu (h_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} h) = 0. \quad (2.67)$$

\mathcal{D}_μ denota a derivada covariante e trate a solução do potencial simétrico central como:

$$ds = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -e^{f(r)} dt^2 + e^{g(r)} dr^2 + r^2 e^{q(r)} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (2.68)$$

Realize uma transformação nas coordenadas $\rho = r \exp[\frac{q(r)}{2}]$ e defina uma nova função $\lambda(r)$ tal que $\frac{d\rho}{dr} = \exp[g(r) - \frac{q(r)}{2} - \lambda(r)]$ apenas como um critério de simplificação. A solução do problema é dado pela determinação das funções $f(\rho)$, $g(\rho)$ e $q(\rho)$. Por mais que na teoria da relatividade geral tradicional as simplificações descritas são o suficiente para esvair-se $q(\rho)$, não é verdade para uma teoria massiva de spin 2. Vamos trabalhar em regiões onde $T_{\mu\nu} = 0$ e chame $\rho_s = \frac{kM}{3\pi}$ o raio de Schwarzschild. O mais importante após muita conta é que a equação (2.67) é usada nas expressões para $\mu = \nu = 1, 2$ gerando os componentes $\mu, \nu = 3, 4$ determina $f(\rho)$ e $g(\rho)$ deixando $q(\rho)$ pare ser determinado pelas componentes 3 e 4. Considere a região $\rho \gg \rho_s$ supondo $q(\rho)$ uma função decrescente e aplicando a expansão de campo, os termos não nulos satisfazem (VAINSHTEIN, 1972):

$$\frac{\lambda}{\rho^2} - \frac{1}{2\rho} \frac{d\lambda}{d\rho} + 4 \frac{q}{\rho} \frac{dq}{d\rho} + \frac{7}{4} \left(\frac{dq}{d\rho} \right)^2 + q \frac{d^2q}{d\rho^2} = 0. \quad (2.69)$$

Substituindo $\lambda(\rho) = \frac{\rho_s}{\rho}$ e $f(\rho) = -\frac{\rho_s}{\rho}$ pelo limite em que a massa do gráviton anula-se

$$q(\rho) = \sqrt{\frac{8}{13}} \sqrt{\frac{\rho_s}{\rho}}. \quad (2.70)$$

Note que no limite $\rho \gg \rho_s$ a função $q(r)$ de fato se anula de acordo com o caso massivo. Adicione a isto o fato que $f(r)$ e $g(r)$ não tem problemas desde o começo, então este limite está bem definido. O que aconteceu aqui de diferente do caso de van Dam-Veltman-Zakharov é que pela teoria de perturbação de ordens mais altas, uma série sobre o parâmetro $\frac{\rho_s}{m^4 \rho^5}$ surge e se por um lado o simples limite $m \rightarrow 0$ (VAINSHTEIN, 1972) causa uma singularidade, por outro na região $\rho \gg \rho_s$ a singularidade se foi (VAINSHTEIN, 1972). Este fenômeno recebe o nome de seu divulgador como mecanismo de Vainshtein.

O que esta secção nos mostrou é que não se pode trabalhar no regime de massa desprezível com gravidade massiva linearizada, pois o acoplamento à matéria é proporcional à $\frac{1}{m^4}$. A boa notícia é que ainda temos o nosso querido gráviton massivo, a notícia ruim é que se nós queremos brincar com ele, precisamos “deslinearizá-lo”.

2.1.5 Deslinearização da gravidade massiva

Uma observação feita por D.G.Boulware e S. Deser é que a descontinuidade de van Dam-Veltman-Zakharov é uma consequência normal e inevitável não apenas da invariância de

Lorentz, mas também da condição de energia positiva. De alguma forma, o que se está prestes a ser feito, é uma abordagem diferente construída sobre um fundo (background) onde a massa representa propagação de excitações na energia mínima. Assintoticamente isto é um repulsor de forças e impõe a invariância de Lorentz, então um termo como $m^2 f^{\mu\nu}(\mathbf{g})$ deve ser adicionado ao tensor de Einstein nas equações de Einstein, quebrando o grupo de calibre, invariância geral das coordenadas e sem derivadas.

A consequência de quebrar a invariância de calibre é a incapacidade de interpretar $g_{\mu\nu}$ como uma métrica Riemanniana como era considerada na relatividade geral tradicional, $g_{\mu\nu}$ ainda rege a matéria, movendo em um espaço métrico efetivo. outro critério é supor que o espaço tempo é minkowskiano assim a transformação $g_{\mu\nu} \sim \eta_{\mu\nu}$ deve ser possível. Isso implica um termo novo na ação de Einstein-Hilbert, tomando $\xi(\mathbf{g}, \phi)$ como o termo de acoplamento com a matéria, a ação se torna (BOULWARE; DESER, 1972):

$$S = \int [R(\mathbf{g}) + \xi(\mathbf{g}, \phi) - \frac{1}{4}m^2 f(\mathbf{g})] dx^4. \quad (2.71)$$

$f(\mathbf{g})$ deve ser determinado, mas precisa ser um escalar, o que significa que isto deve ser uma função do determinante $\det \mathbf{g} = g$, em vista do fato de que este é o único escalar que este tensor pode gerar sozinho. Usa-se a expansão de $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ e faça uma aproximação perto de $\eta_{\mu\nu}$ para a função $f(-g)$ desejando que se torne um termo de Fierz-Pauli. O que pode ser visto, no entanto é que o único jeito de anular o termo linear é anulando a primeira derivada $f'(1) = 0$ o que nos força a abandonar o termo $h_{\mu\nu}h^{\mu\nu}$ juntamente com a correspondência com a gravidade massiva linearizada.

$$f(-g) \simeq f(1) + [h_\lambda^\lambda - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}h^{\mu\nu}]f'(1) + \frac{1}{2}(h_\lambda^\lambda)^2[f'(1) + f''(1)]. \quad (2.72)$$

Devido a este fato, as coisas se dificultam e f não pode depender apenas de \mathbf{g} , mas pode-se convidar uma métrica de fundo para acoplar com $g_{\mu\nu}$ tal qual $\eta_{\mu\nu}$ para $f = f(\mathbf{g}, \eta)$. Com esta nova situação, as possibilidades crescem de uma forma em que incontáveis casos entram em questão, para se fazer uma escolha inteligente, vamos estudar um campo massivo escalar:

$$L(\phi) = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi g^{\mu\nu}\sqrt{-g} + \frac{1}{2}(\kappa^2\phi^2 - \frac{1}{2}\lambda^2\phi^4)\sqrt{-g}. \quad (2.73)$$

Esta é uma lagrangiana escalar tradicional que ganha massa pelo fenômeno do mecanismo de Higgs ao redor da solução de equilíbrio constante $\phi_0^2 = \frac{\kappa^2}{\lambda^2}$. A ideia é interpretar este termo de massa $\frac{1}{4}\frac{\kappa^2}{\lambda^2}\sqrt{-g}$ como um termo cosmológico para a gravidade. Agora uma generalização

pode ser feita para gerar a solução do vácuo: $\langle \phi^2 \rangle = \frac{\kappa^2}{\lambda^2}$ e o produto escalar de forma: $\langle \partial_\mu \phi; \partial_\mu \phi \rangle = \kappa^2 \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \langle \phi^2 \rangle$. Essas substituições levam a forma de $f(\mathbf{g}, \eta)$ para:

$$f(\mathbf{g}, \eta) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} g^{\mu\nu} - 1 \right) \sqrt{-g}. \quad (2.74)$$

De forma rigorosa η não é a métrica de fundo mais geral que se pode ter, η pode ser substituído por uma solução estável da equação livre de fonte, chame isso de β . Isto representa um mínimo de energia tal que o tensor de oscilação, agora definido como $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \beta_{\mu\nu}$, alcance a solução $h_{\mu\nu} = 0$. Antes de continuar, é pertinente mencionar o fato que nós estamos tratando uma teoria de 6 graus de liberdade agora, isso significa que um deles, conhecido como fantasma de Boulware-Deser (Buleware-Deser ghost), que não deveria estar aí, foi introduzido.

Primeiramente o campo $\beta_{\mu\nu}$ tem que ser tratado como um tensor, se assim for, então ele se transforma: $\beta_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{\beta}_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi^\lambda \partial_\nu \phi^\sigma \beta_{\lambda\sigma}$ e ϕ^λ são os campos de Stückelberg transformando uma simples transformação tensorial no calibre unitário. Relembre-se da transformação do campo vetorial de Stückelberg: $\phi_\lambda = x_\lambda + k^{-1} \partial_\lambda \chi$, esta é a ligação entre $\eta_{\mu\nu} \rightarrow \beta_{\mu\nu}$ e para evitar confusões o tensor $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ estará sempre ligado ao fundo referente à η e $H_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \beta_{\mu\nu}$ refere-se á β (RHAM, 2014)

Segundo as equações de Euler-Lagrange $f^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} f$ para ∂ significando uma derivada funcional, mas o vácuo é apenas um ponto de sela, não um mínimo, tornando-se uma solução não estável. Este problema pode ser visto como um fantasma pela não existência de um estado estável de energia mínima e conseqüentemente estados não positivamente energizados. Tal problema foi chamado de instabilidade do fantasma de Boulware-Deser e isto é de alguma forma análogo ao fantasma linearizado transportado para interações de altas ordens. A primeira proposta de um termo massivo, não linear e livre de fantasma para a gravidade massiva recebeu o nome de modelo de de Rham-Gabadadze-Tolley e ele é inspirado neste trabalho de Boulware e Deser.

Defina o tensor $-H_\mu^\nu = g^{\nu\alpha} \beta_{\alpha\mu} - \delta_\mu^\nu$ de modo que: $H_\mu^\nu = H_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu}$ e basicamente a ideia é colocar no termo massivo todas as contrações possíveis para o tensor $H_{\mu\nu}$ mais altas que de primeira ordem. Tome f_i como uma função dos termos de ordem i de \mathbf{H} e defina a lagrangiana sem a interação com a matéria como (HEISENBERG, 2014):

$$L = \sqrt{-g} R - \frac{m^2}{4} \sqrt{-g} [f_2(\mathbf{g}, \mathbf{H}) + f_3(\mathbf{g}, \mathbf{H}) + f_4(\mathbf{g}, \mathbf{H}) \cdots]. \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned}
f_2(\mathbf{g}, \mathbf{H}) &= H_{\mu\nu}^2 - H^2 \\
f_3(\mathbf{g}, \mathbf{H}) &= k_1 H_{\mu\nu}^3 + k_2 H H_{\mu\nu}^2 + k_3 H^3 \\
f_4(\mathbf{g}, \mathbf{H}) &= k_4 H_{\mu\nu}^4 + k_5 H H_{\mu\nu}^3 + k_6 H_{\mu\nu}^2 H_{\alpha\beta}^2 + k_7 H^2 H_{\mu\nu}^2 + k_8 H^4 \\
&\text{etc} \dots
\end{aligned}$$

Os coeficientes são arbitrários, mas em seus trabalhos de Rham, Gabadadze e Tolley acharam uma família deles aos quais a teoria não apresenta este sexto grau de liberdade, nenhum fantasma. Analisando o limite de desacoplamento definido como $\lim_{m \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty}$ com km^2 constante, eles mostraram que este termo em quatro dimensões toma a forma

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{g}, \mathbf{H}) &= -4[f_2(\mathbf{g}, \delta_\nu^\mu - \sqrt{\delta_\nu^\mu - H_\nu^\mu}) + \kappa f_3(\mathbf{g}, \delta_\nu^\mu - \sqrt{\delta_\nu^\mu - H_\nu^\mu}) \\
&\quad + \varkappa f_4(\mathbf{g}, \delta_\nu^\mu - \sqrt{\delta_\nu^\mu - H_\nu^\mu})]. \quad (2.76)
\end{aligned}$$

Esta é uma comprida e complicada expressão que pode ser simplificada com a ajuda dos polinômios simétrico elementares $e_i(\sqrt{g^{\mu\alpha}\beta_{\alpha\nu}})$. i é um índice que obedece $0 \leq i \leq \dim \mathbf{g}$ e $\dim \mathbf{g}$ significa a dimensão do conjunto das matrizes $n \times n$ em que \mathbf{g} e β estão. $e_i(\sqrt{g^{\mu\alpha}\beta_{\alpha\nu}})$ é definido como todas as possíveis combinações de soma com monômios de ordem i de λ_j , dos autovalores de $\sqrt{g^{\mu\alpha}\beta_{\alpha\nu}}$.

$$\begin{aligned}
e_0(\sqrt{g^{\mu\alpha}\beta_{\alpha\nu}}) &= 1 \\
e_1(\sqrt{g^{\mu\alpha}\beta_{\alpha\nu}}) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\
e_2(\sqrt{g^{\mu\alpha}\beta_{\alpha\nu}}) &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4 \\
e_3(\sqrt{g^{\mu\alpha}\beta_{\alpha\nu}}) &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4 \\
e_4(\sqrt{g^{\mu\alpha}\beta_{\alpha\nu}}) &= \det(\sqrt{g^{\mu\alpha}\beta_{\alpha\nu}}).
\end{aligned}$$

A quantidade $\delta_\nu^\mu - \sqrt{\delta_\nu^\mu - H_\nu^\mu}$ tem uma propriedade interessante, chame-o Λ_ν^μ , e ela satisfaz $\Lambda_\nu^\mu|_{h_{\mu\nu}=0} = \Pi_{\mu\nu}$ é o momento canônico de $H_{\mu\nu}$. No entanto uma expressão baseada em tais tensores se mostrou não ser a mais compacta, dando espaço para expressões em termos de determinantes $\sqrt{g^{\mu\sigma}\beta_{\sigma\nu}}|_{h_{\mu\nu}=0}$ e aqui entram os polinômios elementares simétricos, pois esse determinante pode ser descrito por essas funções. Tome um conjunto de coeficientes indexados como α_i e a última forma da lagrangiana, ignorando a interação com matéria, é (HEISENBERG, 2014):

$$L = \sqrt{-g}R + 2m^2\sqrt{-g} \sum_{i=0}^4 \alpha_i e_i(\sqrt{g^{\mu\sigma}\beta_{\sigma\nu}}). \quad (2.77)$$

Esta é uma teoria gravitacional massiva não linear sem fantasmas que cria uma ponte para outra teoria importante chamada Bi-gravidade. De forma simplista esta ligação surge com a questão: qual é a diferença entre $g_{\mu\nu}$ e $\beta_{\mu\nu}$, já que ambos são tensores métricos? O modelo de de Rham-Gabadadze-Tolley representa a teoria de uma partícula massiva de spin 2 interagindo com outra partícula sem massa de spin 2 e à primeira vista não há uma boa razão para se tratar uma das métricas diferentemente. Neste modelo $g_{\mu\nu}$ é dinâmico ao passo $\beta_{\mu\nu}$ não, veremos que inspirado por esta desigualdade do tratamento das duas métricas, surge a teoria Bi-métrica como uma abordagem mais “democrática”.

2.2 Bi-gravidade

Para melhor entender como o modelo de de Rham-Gabadadze-Tolley foi aplicado para o nosso caso com sucesso é preciso considerar teorias de altas dimensões e aprender um pouco mais sobre esta teoria de Bi-gravidade. A razão para acreditar que seria melhor tratar esta abordagem em mais dimensões é o fato de que em 5 dimensões não se tem o fantasma de Buleware-Deser e assim mesmo o número de graus de liberdade de uma teoria de spin 2 sem massa é o desejável para 4 dimensões.

Para considerar esses modelos de muitas dimensões, um pouco de teoria de cordas é necessário, onde a noção de partículas fundamentais pontuais é substituído objetos de dimensão 1 chamados de cordas. Esta entidade obedece um princípio de mínima ação em que, para especificar um estado é necessário uma posição inicial, uma velocidade e infinitos modos vibracionais vistos como uma torre infinita de partículas massivas e não massivas propagando na corda. É sabido que a teoria de cordas só é consistente para 26 dimensões devido às partículas taquiônicas e à presença de uma carga central no comutador de cordas bosônicas, gerando uma álgebra que não é aberta, por isso apela-se à supercordas.

A teoria de Supercordas não é tão diferente da sua versão anterior, a diferença agora é a inclusão de campos fermiônicos que contribuem para a ação com uma simetria a mais, a conhecida supersimetria (SUSY). Devido à sua topologia 1 dimensional, cordas são comumente separadas entre duas classes distintas: fechadas, aquelas que tem condições de contorno periódicas e abertas, com condições de contorno de Dirichlet ou Neumann. Ainda que o problema de dimensões em excesso persista (sabendo que supercordas é consistente em 10 dimensões) à baixas energias, modos de cordas fechadas sem massa espalham-se como grávitons em super-gravidade 10 dimensional.

Assim supercordas surge como um candidato natural para uma teoria quantizada da gravidade, mas o nosso mundo não parece ter 10 dimensões. Dessa forma muitos processos para gerar um mundo físico 4 dimensional neste pano de fundo, frequentemente referido como compactificação, vem surgindo. O mais comum e altamente estudado processo de compactificação consiste em enrolar as dimensões extras em pequenos círculos, mas aqui deseja-se investigar mais opções antes de realizá-la.

Buracos negros ganharam muita fama ao longo dos anos como soluções esquisitas da equação de Einstein. De forma muito similar à sua aparição na teoria da gravitação em 4 dimensões, uma solução não tão famosa aparece na teoria da super-gravidade em 10 dimensões conhecida como brana. Branais são basicamente sólitons n -dimensionais massivos e carregados. Como comentado anteriormente, supercordas está relacionada com super-gravidade 10 dimensional em baixas energias, o que significa que esses objetos existem nas bases de teoria de cordas.

As vantagens de estudar estas novas características do espaço é que como a brana é massiva e carregada, ela interage com os modos da corda quebrando a simetria do espaço tempo de Minkowski $SO(1, m - 1)$ em $SO(1, n - 1) \times SO(m - 1 - n - 1)$. Desta forma bósons de calibre navegam não sobre o espaço inteiro, mas apenas pelo espaço da brana, surgindo como uma nova forma de compactificar essas dimensões extras. (SCHOMERUS, 2017)

Após estes desenvolvimentos, pode-se começar a pensar sobre a teoria da gravidade em dimensões extras como uma teoria efetiva 4 dimensional com as dimensões excedentes compactificadas. Refere-se à Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali (ARKANI-HAMED; DIMOPOULOS; DVALI, 1998) que mostraram que o tamanho da dimensão extra compactada poder ser tão grande quanto um milímetro se os campos do modelo padrão estiverem localizados em uma brana 4 dimensional. Pode-se perguntar sob quais condições essas compactificações precisam ser finitas? Esta pergunta foi respondida por G. Dvali, G. Gabadadze e M. Porrati (DVALI; GABADADZE; PORRATI, 2000b).

Um modelo promissor de compactificação de dimensões extra de tamanho infinito se deve à Randall e Sundrum (RANDALL, 1999) usando uma geometria “deformada”. Basicamente este cenário consiste em identificar um estado limitado de energia nula de um gráviton 5 dimensional com o gráviton tradicional 4 dimensional. Um exemplo concreto pode ser visto no trabalho de Ruth Gregory, Valery A. Rubakov e Sergei M. Sibiryakov (GREGORY; RUBAKOV; SIBIRYAKOV, 2000), onde eles propuseram um modelo com uma brana de tensão positiva no meio de duas branas de tensão negativa em 5 dimensões, surgindo uma métrica parecida com De Sitter:

$$ds^2 = a^2(y)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2. \quad (2.78)$$

Aqui y é a coordenada da quinta dimensão, $a(y)$ uma função se comportando como uma constante ou uma exponencial em diferentes regiões do eixo y e $\eta_{\mu\nu}$ apenas a métrica plana conhecida para o espaço-tempo 4 dimensional de Minkowski. A característica interessante deste modelo é que: mesmo se a geometria é assintoticamente plana longe da brana, ainda assim é possível achar um modelo fenomenologicamente viável, se não insistir no fato do potencial newtoniano ser válido para escalas arbitrariamente largas.

Então o plano agora é considerar tais modelos menos restritos onde o potencial clássico não necessariamente é preservado para todas as escalas, permitindo que grávitons metaestáveis existam, por exemplo. Limites pequenos devem divergir da teoria tradicional também, de outra forma não se chega em uma gravidade quântica disso. Uma pergunta que pode aparecer é: será que existe um modelo onde a gravidade Newtoniana é apenas um comportamento de média escala diferindo-se para pequenas e grandes distâncias? De fato ele existe, evidenciado pelo trabalho (GREGORY; RUBAKOV; SIBIRYAKOV, 2000).

Um princípio de mínima ação é desenvolvido neste fundo, chamado de bulk, o espaço em que se posiciona a brana. Estes espaços são k dimensionais, seus conjuntos de componentes são denotados como X um multipletto de k e L a lagrangiana de um referido sistema a ser tratado.

$$S_b = M^2 \int \sqrt{G} L(G, R, \Phi) d^k X. \quad (2.79)$$

Aqui S_b é uma notação em índices que significa que a ação se refere ao bulk, G é a métrica deste espaço, R o tensor de Ricci e Φ é uma notação curta para acomodar todos os campos presentes neste espaço. Agora é a hora de ser mais específico sobre qual modelo será mais interessante para nós.

2.2.1 Modelo DGP

O modelo DGP é uma dessas abordagens extra dimensionais em nome de G. Dvali, G. Gabadadze e M. Porrati pelos seus trabalhos sobre gravidade 4 dimensional em uma brana (DVALI; GABADADZE; PORRATI, 2000a). Neste modelo, uma razão para o potencial gravitacional ser significativamente mais fraco do que o das outras interações do modelo padrão é devido ao fato que ao passo que os outros bósons se propagam em uma brana 4 dimensional o gráviton poderia acessar essas dimensões extras se propagando em muito mais graus. Não há problema com a teoria clássica pois a gravidade newtoniana correta é reproduzida à altas distâncias como uma consequência do volume finito do espaço extra.

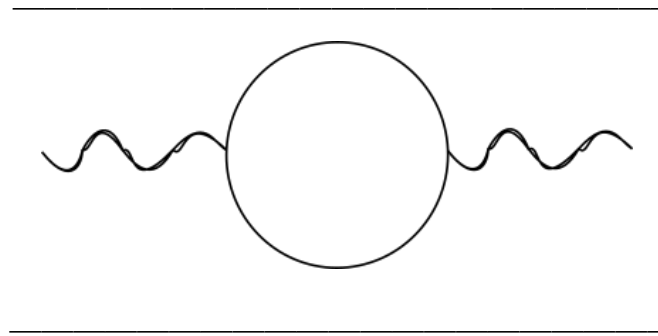
Mais especificamente escolhe-se um espaço-tempo 5 dimensional no qual existe uma brana estática 4 dimensional. Um mecanismo deve ser implementado para garantir que este espaço reproduza as propriedades mencionadas até então. Um termo passível de gerar esse tipo de fenômeno é o termo da curvatura de Ricci no volume do mundo da brana. Neste caso ele será o responsável para fazer os observadores na brana sentirem a lei de Newton tradicional, ainda que o gráviton se propague em 5 dimensões com uma extensão infinita. Foi mencionado no artigo de Dvali (DVALI; GABADADZE; PORRATI, 2000a) que esse termo pode não estar presente na abordagem clássica e mesmo assim ele pode aparecer na brana gerada como correções quânticas, o termo em questão é:

$$M_p^2 \int \sqrt{g} R d^4 x. \quad (2.80)$$

Onde M_p é a massa de Plank tradicional e g está sendo interpretado como o determinante da métrica no espaço 4 dimensional. Agora é instrutivo perseguir este termo neste modelo. Como um comentário, aqui a brana é tratada como fixa, mas se ela sofresse algumas flutuações, estados massivos podem existir e seriam interpretados como modos massivos do volume por observadores

dentro deste volume. As flutuações de seus loops é acometida às mesmas considerações que estamos prestes a discutir, como considerado por Dvali em (DV; GABADADZE, 2001).

A ideia é considerar diagramas de loops gerados por flutuações quânticas dos campos localizados na brana como mostrado abaixo:



Linhas onduladas são grávitons e as linhas normais são escalares massivos ou férmions representando a interação responsável para gerar o termo desejado para ação de baixas energias. A ação para uma teoria geral em um bulk foi apresentada anteriormente em (2.79) e agora é chegada a hora de adicionar mais detalhes do modelo em uso, mas antes vamos estabelecer a notação. Letras latinas serão usadas como índices do bulk, ao passo que suas contrapartes gregas se referem à brana, isso quer dizer que letras gregas vão de 1 a 4 como no espaço-tempo tradicional. Isso significa que coordenadas abstratamente denotadas como X em termos de seus componentes serão representados como: $X^m = (X^\mu, X^{\bar{\mu}})$ onde $\bar{\mu}$ é definido como o índice da dimensão fora da brana, isto é: $\bar{\mu}$ vai de 5 à k .

Do tensor métrico do bulk cria-se uma versão 4 dimensional dele induzido na brana, construído como uma restrição neste espaço e anulando contribuições extras, em componentes: $g_{\mu\nu}(X^\alpha) = G_{m=\mu n=\nu}(X^\alpha, X^{\bar{\alpha}} = 0)$. Especificamente nesta abordagem a brana é tratada como uma função do tipo delta com uma fonte singular localizada no ponto $X^{\bar{\mu}} = 0$ no espaço extra. A então conhecida ação de Dirac-Nambu-Goto para a brana é (DV; GABADADZE, 2001):

$$S_4 = -\lambda \int \sqrt{g} d^4 X. \quad (2.81)$$

Aqui tem-se uma ambiguidade para g que vem sendo tratado como um tensor, mas de agora em diante ele também denotará seu determinante. De forma geral qualquer tensor F terá seu determinante representado como F , a diferença entre esses dois objetos estará clara pelo contexto. A constante λ é chamada tensão da brana e define a flutuação da métrica, defina: $h_{mn}(X) = G_{mn}(X) - \eta_{mn}$ com η a métrica plana de Minkowski, a lagrangiana de interação com a matéria localizada da brana resultará:

$$L_i = \int h^{mn}(X) T_{mn} \delta(X^\alpha) d^k X. \quad (2.82)$$

Onde T_{mn} é o tensor de energia-momento que está localizado na brana, assim ele tem a seguinte estrutura:

$$T_{mn} = \begin{pmatrix} T_{\mu\nu}(X^\alpha) \delta(X^{\bar{\alpha}}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Isto na lagrangiana de interação será:

$$L_{int} = h^{\mu\nu}(X^\alpha, 0) T_{\mu\nu}(X^\alpha). \quad (2.84)$$

Considerando a interação representada no diagrama e referindo-se aos trabalhos de D.M. Capper ([CAPPER, 1975](#)), para escalares massivos e S. L. Adler ([ADLER, 1980](#)) para férmions massivos, isto induz um termo na escala de baixas energias da forma:

$$M_F^2 \int \delta(X^{\bar{\alpha}}) \sqrt{g} R_g d^k X. \quad (2.85)$$

A função delta de Dirac aqui, assim como dentro do tensor energia-momento, é uma função delta em $k - 4$ dimensões e R_g se refere ao fato que essa é a curvatura escalar de Ricci em 4 dimensões, construído sobre g e não G . Desde agora este desenvolvimento foi uma visão mais geral da teoria multidimensional que podem proceder como em ([DV; GABADADZE, 2001](#)). Então aplicando essas ideias para o espaço-tempo 5 dimensional do modelo de DGP $X = (x, y) = (x^\mu, y)$ com y a dimensão extra, devido $k = 5$, a lagrangiana de interação e as contribuições das flutuações serão:

$$L_{int} = h^{\mu\nu}(x^\alpha, 0) T_{\mu\nu}(x^\alpha) \quad M_F \int \delta y \sqrt{g} R_g d^5 X. \quad (2.86)$$

Após essas preliminares nós somos capazes de apresentar a ação deste modelo abaixo:

$$S_{DGP} = M^2 \int \sqrt{G} R d^5 X + M_p^2 \int \sqrt{g} R_g d^4 x. \quad (2.87)$$

Notavelmente desejando-se que isto tenha alguma interpretação física a constante M_F , que é um parâmetro intrínseco da teoria, deveria ser identificado com a constante de Plank M_p . Lembrando que devido à lagrangiana de interação a matéria apenas se manifesta na brana. Essa ação é compatível com o dito calibre harmônico e as equações de movimento possibilitam a seguinte solução:

$$\begin{array}{ll} \text{calibre harmônico} & \text{eq. mov.} \\ \partial^m h_{mn} = \frac{1}{2} \partial_n h_m^m & h_{\mu 5} = 0. \end{array} \quad (2.88)$$

Use-o para extrair uma equação de Einstein para os componentes da brana vindo da ação acima. O resultado é de alguma forma familiar para nós, pois ele assume a estrutura de um gráviton massivo para observadores dentro da brana 4 dimensional ou sem massa para 5 dimensões:

$$\begin{aligned} [M^2 \partial_m \partial^m + M_p^2 \delta(y) \partial_\mu \partial^\mu] h_{\mu\nu}(X) &= (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T_\alpha^\alpha) \delta(y) \\ &- \frac{1}{2} M^2 \eta_{\mu\nu} \partial_m \partial^m h_\alpha^\alpha + M_p^2 \delta(y) \partial_\mu \partial_\nu h_5^5. \end{aligned} \quad (2.89)$$

O que é evidente daqui é a contribuição do traço do tensor que é não nulo. Isso significa que o propagador tem a estrutura de um tensor 4 dimensional + gravidade escalar que já foi tratado na seção “alguns percalços” e tem o seguinte comportamento:

$$\frac{1}{2(k^2 - m^2)} (\eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\lambda} - \frac{2}{3} \eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\sigma}). \quad (2.90)$$

Como já foi tratado nesta seção, este propagador sofre com a descontinuidade de van Dam-Veltman-Zakharov o que significa que não tivemos sucesso em construir uma teoria não linear ainda. Um rápido comentário sobre este modelo parece pertinente agora, para o caso mais simples toma-se o campo escalar normalizado sem dimensão como um exemplo muito apropriado. Denotando este campo como Φ e colocando-o na ação acima o que tem-se:

$$S_\Phi = M^2 \int \partial_m \Phi(x, y) \partial^m \Phi(x, y) d^5 X + M_p^2 \int \partial_\mu \Phi(x, 0) \partial^\mu \Phi(x, 0) d^4 x. \quad (2.91)$$

A função de Green então será:

$$[M^2 \partial_m \partial^m + M_p^2 \delta(y) \partial_\mu \partial^\mu] \Gamma(X) = \delta(y) \delta(x). \quad (2.92)$$

Na equação acima a função de Green $\Gamma(X) = \Gamma(X, P = 0)$ é interpretada com coordenadas de momento nulas. $\Gamma(X) = 0$ para $x^1 < 0$ e o potencial mediado pelo escalar em 4 dimensões, com $\vec{x} = (x^2, x^3, x^4)$, é:

$$V(\vec{x}) = \int \Gamma(X) dx^1. \quad (2.93)$$

Para resolver esse problema precisa-se escrevê-lo em termos da transformada de Fourier de Γ , resolva para o espaço dos momentos e transforme de volta para o espaço das coordenadas (DVALI; GABADADZE; PORRATI, 2000a). Tendo isto feito a expressão para $V(\vec{x})$ é um pouquinho grande, mas o que é interessante no momento é o comportamento à curtas e longas distâncias com respeito ao parâmetro $r_0 = \frac{M_p^2}{2M^2}$:

$$V(\vec{x})_{|\vec{x}| \ll r_0} \approx \frac{-1}{8\pi^2 M_p^2} \frac{1}{|\vec{x}|} \left[\frac{\pi}{2} + (-1 + \gamma + \ln(\frac{|\vec{x}|}{r_0})) \frac{|\vec{x}|}{r_0} + \mathcal{O}(|\vec{x}|^2) \right] \quad (2.94)$$

$$V(\vec{x})_{|\vec{x}| \gg r_0} \approx \frac{-1}{8\pi^2 M_p^2} \frac{1}{|\vec{x}|} \left[\frac{r_0}{|\vec{x}|} + \mathcal{O}(\frac{1}{|\vec{x}|^2}) \right]. \quad (2.95)$$

Este é o tipo de comportamento que se espera, isto é, uma escala newtoniana $\frac{1}{|\vec{x}|}$ para curtas distâncias e uma escala 5 dimensional $\frac{1}{|\vec{x}|^2}$ para longas distâncias. Note que no primeiro caso apareceu lá um termo logarítmico e devido a ele, a escala de cruzamento, onde a gravidade muda o seu comportamento, deve ser analisado. Devido ao fato que a relatividade geral tem descrições precisas sobre a precessão do periélio de Mercúrio, esta escala deveria ser 10^8 vezes o tamanho do sistema solar ou uma estimativa para M algo sobre 10^3 à 10^4 vezes menor que um TeV. Seria desejável dizer que essas escala podem ser reproduzidas sob algumas condições, mas isso não é certeza. Devido à tudo isso DGP surge como um modelo consistente para campos de spin 1 e spin 0, mas não para spin 2 (DVALI; GABADADZE; PORRATI, 2000a)

De algum modo os resultados derivados nos últimos parágrafos estão ligados com o fato que essa abordagem é um modelo de dimensões extras nem compacto nem deformado com tamanho infinito. Alguns detalhes nessas características foram melhor tratadas no trabalho (DV; GABADADZE, 2001) evidenciando as limitações desse modelo. Mas isto está longe de ser uma estrutura de fundo mal sucedida, uma vez que temos uma ação a la Einstein-Hilbert em 4 dimensões e, como o trabalho anterior discutiu, o problema da constante cosmológica pode ser reinterpretado como uma re escalação do termo de tensão na brana.

Uma proposta para trazer um aspecto mais interessante a este modelo aos pontos levantados até então é mudar a condição desta dimensão extra. Um fator de deformação é necessário para compactá-la, mas uma motivação física razoável é exigida para tal estrutura. Isto é o que será tratado no dito método de desconstrução.

2.2.2 Separação ADM

Os problemas evidenciados na seção anterior serão abordados na próxima oportunidade, pois antes disso, um tratamento diferente em alguns objetos novos precisa ter o seu espaço. Começar-se-á com o desenvolvimento para gravidade 4 dimensional e depois, o método pode ser expandido para dimensões maiores, apenas substituindo a métrica 4 dimensional pela 5D. Em 4 dimensões ele é tratado como decomposição três mais um do campo de Einstein e uma apresentação formal deste método parece razoável. Esta será a motivação física que dará suporte para o nosso tratamento, ajudando a entender a ligação entre brana e a quinta dimensão do bulk.

As letras do alfabeto latino serão usadas para denotar a parte espacial dos tensores em um espaço-tempo de Minkowski. Mesmo que não haja como se confundir com as componentes da teoria 5 dimensional, porque será claro quando retornarmos para teorias de dimensões extras, sejamos cuidadosos e adotemos apenas i, j, k, p, q e l como os índices 3D espaciais. A decomposição três mais um é uma separação entre as 3 dimensões espaciais e a componente temporal da relatividade geral, começando com a seguinte reorganização da métrica:

$$g_{ij} = g_{\mu\nu} |_{\nu, \mu \neq 1}.$$

Aqui é importante notar que existem duas quantidade distintas, a parte espacial do inverso $g_{\mu\nu}^{-1} |_{\mu, \nu \neq 1}$ e o inverso da parte espacial da métrica g_{ij}^{-1} . Na notação estabelecida até então, eles são a mesma coisa g^{ij} , mas deseja-se diferenciar um do outro, então todo objeto derivado da métrica 4 dimensional carregará uma barra, do contrário ele é derivado de g_{ij} . Para se fazer claro, a parte espacial do inverso da métrica será escrito: \bar{g}^{ij} Tendo isto em mente a decomposição três mais um continua com mais alguns objetos definidos como:

$$\xi = \sqrt{-\bar{g}^{11}} \quad (2.96)$$

$$\xi_i = \bar{g}_{1i} \quad (2.97)$$

$$\pi^{ij} = \sqrt{-\bar{g}} (\bar{\Gamma}_{lk}^1 - g_{lk} \bar{\Gamma}_{pq}^1 g^{pq}) g^{il} g^{jk}. \quad (2.98)$$

Dessas quantidades se escreve também:

$$R^1 = \sqrt{-g} [R + g^{-1} (\frac{1}{2} (\pi_i^i)^2 - \pi^{ij} \pi_{ij})] \quad (2.99)$$

$$R^i = -2 \nabla_j \pi^{ij}. \quad (2.100)$$

O ∇_j representa a derivada covariante formada por g_{ij} assim como o escalar de Ricci R e os coeficientes de conexão $\bar{\Gamma}_{jk}^i$ Em 4D. Esses objetos são importantes pois a lagrangiana

da relatividade geral $L = \sqrt{-g}\bar{R}$ pode ser reescrita em termos deles (ARNOWITT; DESER; MISNER, 2004):

$$L = -g_{ij}\partial_t\pi^{ij} - \xi R^1 - \xi_i R^i - 2\partial_i(\pi^{ij}\xi_j - \frac{1}{2}\pi_j^j\xi^i + \nabla^i\xi\sqrt{g}). \quad (2.101)$$

É válido dizer que todas as estruturas 3D tem seus índices abaixados e levantados pela métrica espacial g_{ij} . Outra definição importante nesta abordagem é a segunda forma fundamental, ou também conhecida como curvatura extrínseca:

$$K_{ij} = \bar{\nabla}_{(i}\xi\delta_{j)}^1. \quad (2.102)$$

Que também obedece a seguinte identidade:

$$\pi^{ij} = -\sqrt{g}(K^{ij} - g^{ij}K_l^l). \quad (2.103)$$

A segunda forma fundamental fornece o raio de curvatura do pedaço onde se encontra a superfície $t = (\text{constante})$ medida no espaço 4 dimensional do entorno. Ela descreve como as normais à superfície convergem ou divergem determinando a geometria da superfície à tempos infinitesimalmente distantes. Esta é a relação com nossas teorias extra dimensionais pois se isso for aplicado no espaço 5 dimensional, então essa curvatura extrínseca é a ligação entre pedaços de 4 dimensões de um contêiner maior com y um parâmetro separando fatias adjacentes.

Em se tratando de dimensões extras e sua separação, poucas coisas mudam para uma decomposição “três mais um” em 5D, também chamada de separação ADM. A separação da métrica G_{mn} em termos de ξ , ξ_μ e $g_{\mu\nu}$ ainda é a mesma, mas a curvatura extrínseca assume a forma:

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2\xi}(\partial_y g_{\mu\nu} - 2\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)}). \quad (2.104)$$

Este ∇ agora refere-se à derivada covariante 4 dimensional e a ação de Einstein-Hilbert pode ser reescrita como (DEFFAYET; MOURAD, 2004):

$$M^2 \int \sqrt{-g}\xi[R + K_{\mu\nu}K_{\alpha\beta}(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta})]d^4x dy. \quad (2.105)$$

A decomposição ADM também pode ser performada em termos da “raiz quadrada da métrica”, os vielbeins. Vielbeins são bases ortonormais também chamadas de tetradas (que aqui perdem o sentido já que tetra=4 e viel=muitos, vielbein parece mais apropriado) satisfazendo:

$$\mathbf{e}_{a\tilde{c}}(X)\mathbf{e}_{\tilde{b}}^c(X) = \eta_{\tilde{d}\tilde{e}}\mathbf{e}_{\tilde{a}}^{\tilde{d}}(X)\mathbf{e}_{\tilde{b}}^{\tilde{e}}(X) = G_{ab}(X). \quad (2.106)$$

Os vielbeins tem um comportamento dual, indexando neste caso, um tensor 5 dimensional espaço-temporal com respeito aos índices do alfabeto latino e como tensores 5 dimensionais localmente lorentzianos para índices com um til. Índices do espaço-tempo são levantados e abaixados com a métrica do espaço-tempo G_{ab} , ao passo que índices localmente lorentzianos são levantados e abaixados com a métrica de Minkowski $\eta_{\tilde{a}\tilde{b}}$. Uma conexão um-forma, também chamado de conexão de spin, pode ser definida:

$$\Omega_{a\tilde{b}\tilde{c}} = \mathbf{e}_{\tilde{b}}^d \nabla_a \mathbf{e}_{\tilde{c}d}. \quad (2.107)$$

Como índices latinos normais representam índices vetoriais, pode-se pensar essas quantidades como vetores omitindo esses símbolos e simplesmente escrevendo:

$$\Omega_{\tilde{a}\tilde{b}} = \mathbf{e}_{\tilde{a}} \nabla \mathbf{e}_{\tilde{b}}. \quad (2.108)$$

Analogamente uma torção pode ser definida:

$$T^{\tilde{a}} = d\mathbf{e}^{\tilde{a}} + \Omega_{\tilde{b}}^{\tilde{a}} \wedge \mathbf{e}^{\tilde{b}}. \quad (2.109)$$

A fórmula de Einstein-Cartan cinco dimensional da relatividade geral estabelece que a condição de torção nula juntamente com a anti simetria $\Omega_{\tilde{a}\tilde{b}} = -\Omega_{\tilde{b}\tilde{a}}$ é o suficiente para determinar unicamente a um-forma como (RHAM, 2014).

$$\Omega^{\tilde{a}\tilde{b}} = \frac{1}{2}\mathbf{e}^{\tilde{c}}[\Xi_{\tilde{c}}^{\tilde{a}\tilde{b}} - \eta_{\tilde{d}\tilde{e}}\eta^{\tilde{e}\tilde{b}}\Xi_{\tilde{c}}^{\tilde{d}\tilde{a}} - \eta_{\tilde{d}\tilde{e}}\eta^{\tilde{e}\tilde{a}}\Xi_{\tilde{c}}^{\tilde{b}\tilde{d}}]. \quad (2.110)$$

Com esses objetos de auxílio definidos como:

$$\Xi_{\tilde{c}}^{\tilde{a}\tilde{b}} = 2\mathbf{e}^{a\tilde{a}}\mathbf{e}^{b\tilde{b}}[\partial_{[a}\mathbf{e}_{b]\tilde{c}}] \quad (2.111)$$

Da mesma forma define-se a curvatura de Riemann dois-forma:

$$\mathcal{R}^{\tilde{a}\tilde{b}} = d\Omega^{\tilde{a}\tilde{b}} + \Omega_{\tilde{c}}^{\tilde{a}} \wedge \Omega^{\tilde{c}\tilde{b}}. \quad (2.112)$$

Neste formalismo a ação de Einstein-Hilbert 5 dimensional se torna (RHAM, 2014):

$$S = M^2 \int \sqrt{-G} R dX = \frac{M^2}{3!} \int \varepsilon_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}\tilde{d}\tilde{e}} R^{\tilde{a}\tilde{b}} \wedge \mathbf{e}^{\tilde{c}} \wedge \mathbf{e}^{\tilde{d}} \wedge \mathbf{e}^{\tilde{e}} + S_{GHY}. \quad (2.113)$$

Onde S_{GHY} é o termo de fronteira de Gibbons-Hawking-York. Isto é o suficiente da linguagem de vielbeins para o que se intenta fazer, então a decomposição será performada sobre esses objetos pela regra básica:

$$\mathbf{e}^{\tilde{a}} = e^{\tilde{a}} + \xi^{\tilde{a}} dy \quad \mathbf{e}^{\tilde{5}} = \xi dy. \quad (2.114)$$

Um calibre pode ser estabelecido para a simetria $U(1)$, assim o cenário desejado deve reproduzir: $G_{ab} dX^a dX^b = dy dy + g_{\mu\nu}(x, y) dx^\mu dx^\nu$. Isso pode ser alcançado com a seguinte escolha:

$$\mathbf{e}^{\tilde{a}} = \begin{pmatrix} e^{\tilde{a}\alpha} dx^\mu \\ dy \end{pmatrix}. \quad (2.115)$$

$$\Omega^{\tilde{a}\tilde{b}} = \omega^{\tilde{a}\tilde{b}} + \Omega_y^{\tilde{a}\tilde{b}} dy \quad (2.116)$$

$$\Omega^{\tilde{5}\tilde{b}} = \frac{1}{2} (e^{\mu\tilde{\alpha}} \partial_y e_{\mu}^{\tilde{b}} + e^{\mu\tilde{\beta}} \partial_y e_{\mu}^{\tilde{\alpha}}) e_{\nu\tilde{\alpha}} dx^\nu. \quad (2.117)$$

A quinta componente da conexão de spin é

$$\Omega_y^{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} = \frac{1}{2} (e^{\mu\tilde{\alpha}} \partial_y e_{\mu}^{\tilde{\beta}} - e^{\mu\tilde{\beta}} \partial_y e_{\mu}^{\tilde{\alpha}}). \quad (2.118)$$

E a relação disto com a curvatura extrínseca é:

$$\Omega_{\tilde{\beta}}^{\tilde{5}\tilde{\alpha}} = e^{\mu\tilde{\alpha}} K_{\beta\mu}. \quad (2.119)$$

Curvatura de Riemann neste calibre

$$\mathcal{R}^{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} = R^{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} - \Omega^{\tilde{5}\tilde{\alpha}} \wedge \Omega^{\tilde{5}\tilde{\beta}} - \partial_y \omega^{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} \wedge dy \quad (2.120)$$

$$\mathcal{R}^{\tilde{5}\tilde{\beta}} = d\Omega^{\tilde{5}\tilde{\beta}} + \omega_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \wedge \Omega^{\tilde{5}\tilde{\alpha}} - \partial_y \Omega^{\tilde{5}\tilde{\beta}} \wedge dy. \quad (2.121)$$

Com d a derivada exterior quadridimensional e $R^{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}$ é o tensor de Riemann quadridimensional.

Após esta escolha de calibre a ação se torna:

$$S = \frac{M^2}{4} \int \varepsilon_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}\tilde{d}} (R^{\tilde{a}\tilde{b}} \wedge e^{\tilde{c}} \wedge e^{\tilde{d}} - K^{\tilde{a}} \wedge K^{\tilde{b}} \wedge e^{\tilde{c}} \wedge e^{\tilde{d}} + 2K^{\tilde{a}} \wedge \partial_y e^{\tilde{b}} \wedge e^{\tilde{c}} \wedge e^{\tilde{d}}) \wedge dy. \quad (2.122)$$

2.2.3 Desconstrução

Basicamente desconstrução é um procedimento que consiste em tornar um espaço contínuo em um espaço discreto. A implementação do processo de desconstrução é a separação da dimensão em questão em muitos sítios com suas próprias métricas 4 dimensionais cada um considerando a interação com vizinhos adjacentes. Imagine que existem N sítios e para cada um deles é possível identificá-los com um índice r e assim existem N métricas 4D diferentes denotadas como $G_{\mu\nu}(x, y_r) = g_{\mu\nu}^r(x)$. Esta separação também gera uma segregação na ação da teoria completa com uma soma de ações referentes à cada sítio e outra relativa à interação entre eles.

$$S = S_{site} + S_{int}. \quad (2.123)$$

$$S_{site} = M_p^2 \sum_r^N \int \sqrt{g^r} R[g^r] d^4x. \quad (2.124)$$

Para achar a ação que compete aos termos de interação entre os sítios é preciso pensar nisso como um mapeamento de um pedaço r para o $r + 1$. Se assim for, uma ação correspondente à métrica 5 dimensional tem a forma:

$$G_{mn} = \begin{pmatrix} g(x, y) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.125)$$

Será:

$$S = M^2 \int \sqrt{g}[R(g) + \frac{1}{4} \partial_y g_{\mu\nu} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) \partial_y g_{\alpha\beta}] d^4 x dy. \quad (2.126)$$

A discretização de tal ação é dividida em duas partes, a primeira é a ação do sítio e a segunda é a interação desejada. Como já foi discutido, um mapa entre pedaços adjacentes é dado pela seguinte regra:

$$\int dy \rightarrow \Delta y \sum_r^N \quad \partial_y g_{\mu\nu} \rightarrow \frac{1}{\Delta y} (g_{\mu\nu}^r - g_{\mu\nu}^{r+1}). \quad (2.127)$$

Um comentário sobre o termo M e M_p é necessário aqui, pois na discretização nota-se que $M_p^2 = \Delta y M^2$. Preste atenção nos cálculos para ver um termo do tipo $\frac{M^2}{\Delta y}$ aparecendo, Isso nos incentiva a chamar $\frac{1}{\Delta y} = m$ pois ele fará um papel interessante análogo ao termo massivo a la Fierz-Pauli ([ARKANI-HAMED; SCHWARTZ, 2004](#)):

$$S_{int} = \frac{1}{4} \sum_r^N \int \sqrt{g^r} m^2 M_p^2 (g_{\mu\nu}^r - g_{\mu\nu}^{r+1}) (g^{(r)\mu\nu} g^{(r)\alpha\beta} - g^{(r)\mu\alpha} g^{(r)\nu\beta}) (g_{\alpha\beta}^r - g_{\alpha\beta}^{r+1}) d^4 x \quad (2.128)$$

Seria uma maravilha aplicar o processo de desconstrução diretamente na decomposição ADM do jeito que foi apresentada, mas discretizar no nível da métrica nos levaria para o termo massivo da seção (1.5) $f(\mathbf{g}, \eta) = \frac{1}{4} (\frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} g^{\mu\nu} - 1) \sqrt{-g}$ que contém o fantasma de Buleware-Deser ([RHAM, 2014](#)). Uma saída é ir para o formalismo de vielbeins, isso significa, definir um conjunto de bases não coordenadas que satisfazem a condição: $e_{\tilde{c}a}(X) e_{\tilde{b}}^{\tilde{c}}(X) = \eta_{\tilde{c}\tilde{d}} e_{\tilde{c}}^{\tilde{d}}(X) e_{\tilde{b}}^{\tilde{a}}(X) = G_{ab}(X)$.

Os vielbeins, como já mencionados na seção anterior, indexa um espaço-tempo 5 dimensional com respeito aos índices do alfabeto latino e localmente lorentziano 5D para os índices com til. O plano agora é desconstruir os vielbeins ao invés da métrica e isso pode ser alcançado pela transformação do tipo: $e_{\tilde{b}}^{\tilde{a}}(X) \rightarrow e_{\tilde{b}}^{\tilde{a}}(x, y^r) = e_{\tilde{b}}^{\tilde{a}}(x)^{(r)}$.

Agora o processo de desconstrução será mais bem aplicado para a ação no setor de vielbeins. Assim como na equação (2.104) a massa surgirá como algum tipo de frequência da dimensão y , isto é $\frac{1}{\Delta y} = m$ e a desconstrução está resumida em:

$$\partial_y e_{\bar{a}}(X) \rightarrow m(e_{\bar{a}}^{(r+1)} - e_{\bar{a}}^{(r)}) \quad (2.129)$$

$$\int e_{\bar{a}}(X) dy \rightarrow \frac{1}{m} \sum_r^N e_{\bar{a}}^{(r)} \quad (2.130)$$

$$K_{\bar{\nu}}^{\bar{\mu}} \rightarrow m(e_{\bar{\nu}}^{\bar{\mu}(r+1)} - e_{\bar{\nu}}^{\bar{\mu}(r)}). \quad (2.131)$$

Usando a ação da seção anterior, nos convencemos que o primeiro termo nada mais é do que uma ação de Einstein-Hilbert para cada uma das partes do espaço extra-dimensional. O termo restante será estudado em mais detalhes como o responsável pela suposta contribuição massiva do graviton.

$$\frac{M^2}{4} \int \varepsilon_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}} R^{\bar{a}\bar{b}} \wedge e^{\bar{c}} \wedge e^{\bar{d}} \wedge dy \rightarrow \frac{M^2}{2} \sum_r^N \int \sqrt{-g^r} R[g^r] d^4x \quad (2.132)$$

$$\begin{aligned} \frac{M^2}{4} \int 2K^{\bar{a}} \wedge \partial_y e^{\bar{b}} \wedge e^{\bar{c}} \wedge e^{\bar{d}} \wedge - K^{\bar{a}} \wedge K^{\bar{b}} \wedge e^{\bar{c}} \wedge e^{\bar{d}} \wedge dy \\ \rightarrow \frac{M^2}{4} \sum_r^N \int \varepsilon_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}} m^2 \zeta^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}} d^4x. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Contudo pode ser notado que a desconstrução que está sendo adotada não é a mais geral possível. A métrica (ou os vielbeins) poderiam ser avaliados no sítio adjacente, formando a seguinte desconstrução: $e(X) \rightarrow e(x, y^{r+1}) = e^{r+1}(x)$. Outra possibilidade é reescalar o vielbein discretizado por uma constante: $e(X) \rightarrow ke(x, y^r) = ke^r(x)$. Se os dois métodos forem considerados, a forma mais geral que a discretização pode ser performada é reconhecidamente:

$$e(X) \rightarrow ke^r + (1 - k)e^{r+1}. \quad (2.134)$$

Adote esse novo processo de desconstrução para gerar $\zeta^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}}$, o tensor definido em (2.133), mas nesta nova abordagem ele se torna:

$$\begin{aligned} \zeta^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}} = (e^{\bar{a}(r+1)} - e^{\bar{a}(r)}) \wedge (e^{\bar{b}(r+1)} - e^{\bar{b}(r)}) \wedge [(1 - k)e^{\bar{c}(r)} + ke^{\bar{c}(r+1)}] \\ \wedge [(1 - \varkappa)e^{\bar{d}(r)} + \varkappa e^{\bar{d}(r+1)}]. \end{aligned} \quad (2.135)$$

Para evitar essa super utilização de índices, parece razoável chamar $e^{(r)} = e$ mas também $e^{(r+1)} = f$ como dois vielbeins sem nenhuma relação. Note que aqui é onde nasce a noção de

métrica auxiliar, pois o vielbein f terá o papel de a engendrar. Reescrevendo o termo massivo nestas novas notações:

$$\zeta^{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}\tilde{d}} = (f^{\tilde{a}} - e^{\tilde{a}}) \wedge (f^{\tilde{b}} - e^{\tilde{b}}) \wedge [(1 - k)e^{\tilde{c}} + kf^{\tilde{c}}] \wedge [(1 - \varkappa)e^{\tilde{d}} + \varkappa f^{\tilde{d}}]. \quad (2.136)$$

Esta função será uma soma de cinco termos levando todas as possíveis combinações entre os dois vielbeins. Para este caso específico defina um conjunto de constantes $\alpha_n^{(r)}$ como os coeficientes dos monômeros que dependem de k e \varkappa para cada sítio r . Um conjunto de funções dos vielbeins pode ser definido:

$$\mathfrak{L}_1(e, f) = \varepsilon^{\mu\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\mu'\beta\gamma\delta} K_\mu^{\mu'} \quad (2.137)$$

$$\mathfrak{L}_2(e, f) = \varepsilon^{\mu\nu\gamma\delta} \varepsilon_{\mu'\nu'\gamma\delta} K_\mu^{\mu'} K_\nu^{\nu'} \quad (2.138)$$

$$\mathfrak{L}_3(e, f) = \varepsilon^{\mu\nu\lambda\delta} \varepsilon_{\mu'\nu'\lambda'\delta} K_\mu^{\mu'} K_\nu^{\nu'} K_\lambda^{\lambda'} \quad (2.139)$$

$$\mathfrak{L}_4(e, f) = \varepsilon^{\mu\nu\lambda\tau} \varepsilon_{\mu'\nu'\lambda'\tau'} K_\mu^{\mu'} K_\nu^{\nu'} K_\lambda^{\lambda'} K_\tau^{\tau'}. \quad (2.140)$$

Com a relação entre a curvatura exterior e esses sítios na linguagem da métrica assumindo a forma:

$$K_\nu^\mu = -m \left[\delta - \sqrt{g^{-1(r)}g^{(r+1)}} \right]_\nu^\mu. \quad (2.141)$$

A ação total então será:

$$\frac{M_p^2}{2} \sum_r^N \int \sqrt{-g_r} [R(g_r) + \frac{m^2}{2} \sum_{n=0}^4 \alpha_n^{(r)} \mathfrak{L}_n(g^{(r)}, g^{(r+1)})] d^4x. \quad (2.142)$$

O uso da técnica de desconstrução é o que gera a dita teoria de multi-gravidades, pois quando se for retornar para o setor da métrica após a discretização, existirão tantas métricas quanto pedaços nos quais a dimensão extra foi fatiada. A próxima seção é o tratamento desta situação.

2.2.4 múltiplas-gravidades

A lagrangiana apresentada será o ponto de partida para a já anunciada teoria de múltiplas-gravidades no qual um número r de métricas coexistem no mesmo espaço devido à discretização da quinta dimensão. Em tal quadro esses r pedaços interagem com outros pedaços adjacentes

e geram um termo de interação com a função \mathfrak{L}_i atuando como uma cola entre eles em uma combinação linear onde α_i são constantes. Dentro de cada sítio existe um termo cinético a la Einstein-Hilbert e M_r é uma espécie de massa de Plank para cada sítio.

$$\sum_r^N \frac{M_r^2}{2} \int \sqrt{-g_r} \left[R(g_r) + \frac{m^2}{2} \sum_{n=0}^4 \alpha_n^{(r)} \mathfrak{L}_n(g^{(r)}, g^{(r+1)}) \right] d^4x. \quad (2.143)$$

As funções \mathfrak{L}_i já foram apresentadas anteriormente em (2.137) e como pode ser visto, é uma soma de componentes da curvatura exterior anti simetrizada, o que significa que de um jeito ou de outro essa soma pode ser expressada em termos dos polinômios elementares simétricos $e_i(K)$. Assim como K é dado em termos do produto $\sqrt{g^{(1)}g^{(2)-1}}$ o termo de interação pode ser escrito em termos de $e_i(\sqrt{g^{(1)}g^{(2)-1}})$ e algumas constantes arbitrárias.

Múltiplas gravidades tem um caso interessante do ponto de vista de gravidade massiva, pois como já foi mencionado, a gravidade massiva deve ser uma teoria de interação entre duas partículas de spin 2, sendo uma massiva e a outra sem massa. Inspirado por este fato, considera-se a conhecida teoria da Bi-gravidade, que não é nada mais do que múltiplas gravidades reproduzindo a desconstrução para gerar apenas dois sítios. As condições de contorno são tais que os dois estejam grudados no infinito, a ação assume a forma:

$$\begin{aligned} \frac{M_1^2}{2} \int \sqrt{-g_1} R(g_1) d^4x + \frac{M_2^2}{2} \int \sqrt{-g_2} R(g_2) d^4x \\ + \frac{M_p^2 m^2}{4} \sum_{n=0}^4 \int \alpha_n \mathfrak{L}_n(g^{(1)}, g^{(2)}) d^4x. \end{aligned} \quad (2.144)$$

Note que um termo mais geral M_P foi introduzido para cada sítio, que quando são todos iguais, recupera a ação da última seção. Chame Λ_n algum conjunto de constantes para chegar em:

$$\begin{aligned} \frac{M_1^2}{2} \int \sqrt{-g_1} R(g_1) d^4x + \frac{M_2^2}{2} \int \sqrt{-g_2} R(g_2) d^4x \\ + \frac{M_p^2 m^2}{4} \sum_{n=0}^4 \int \Lambda_n e_n(\sqrt{g^{(1)}g^{(2)-1}}) d^4x. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Mas como já é sabido, a gravidade massiva consiste em uma interação entre partículas de spin 2 massiva e não massiva, por isso remove-se o termo cinético de uma métrica que será chamado de métrica auxiliar:

$$\frac{M_p^2}{2} \sum_r^N \int \sqrt{-g_1} R(g_1) d^4x + \frac{M_p^2 m^2}{4} \sum_{n=0}^4 \alpha_n \mathfrak{L}_n(g^{(r)}, g^{(r+1)}) d^4x \quad (2.146)$$

Esta é a ação sem fantasmas que foi mencionada no final da seção sobre gravidade massiva, o dito modelo DGP nomeado em honra à de Rham, Gabadadze e Tolley. Agora é chegada a hora de buscar a massa da teoria da Bi-gravidade e uma suposição esperta no diz que ela deve aparecer na aproximação de segunda ordem, por causa da descontinuidade de van Dam-Veltman-Zakharov, então performa-se a seguinte aproximação:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{\delta g_{\mu\nu}}{M_g} \quad (2.147)$$

$$f_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{\delta f_{\mu\nu}}{M_f}. \quad (2.148)$$

Usando: $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$ depois de expandir até a segunda ordem da perturbação em termos de $\frac{1}{M_g^2}$, $\frac{1}{M_f^2}$ e $\frac{1}{M_g M_f}$ a ação será:

$$S = -\frac{1}{4} \int \delta g_{\mu\nu} \mathcal{E}^{\mu\nu\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} d^4x - \frac{1}{4} \int \delta f_{\mu\nu} \mathcal{E}^{\mu\nu\alpha\beta} \delta f_{\alpha\beta} d^4x - \frac{m_{\text{eff}}^2}{8} \int (h_{\mu\nu}^2 - h^2) d^4x. \quad (2.149)$$

Para:

$$m_{\text{eff}}^2 = m^2 \frac{M_g^2}{M_{\text{eff}}^2} \quad M_{\text{eff}} = \left(\frac{1}{M_1^2} + \frac{1}{M_2^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.150)$$

E ainda

$$h_{\mu\nu} = M_{\text{eff}} \left(\frac{\delta g_{\mu\nu}}{M_p} - \frac{\delta f_{\mu\nu}}{M_f} \right). \quad (2.151)$$

Note o aparecimento de um termos massivo de Fierz-Pauli no final da expressão evidenciando que seu coeficiente é, de fato, uma massa neste limite e a ação em si se torna uma lagrangiana de Fierz-Pauli. Um desenvolvimento interessante é também feito reescrevendo esta mesma ação em termos de um tensor feito da soma das perturbações da métrica, mas com a massa de Plank para ambos escrita da seguinte forma:

$$l_{\mu\nu} = M_{\text{eff}} \left(\frac{\delta g_{\mu\nu}}{M_2} + \frac{\delta f_{\mu\nu}}{M_1} \right). \quad (2.152)$$

O resultado é outra lagrangiana de Fierz-Pauli, mas desta vez em termos de $l_{\mu\nu}$ e $h_{\mu\nu}$ como dois tensores independentes, um massivo e outro não massivo:

$$\frac{1}{4} \int h^{\mu\nu} \left[\mathcal{E}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} m_{\text{eff}}^2 (\eta_{\mu}^{\alpha} \eta_{\nu}^{\beta} - \eta^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu}) \right] h_{\alpha\beta} d^4x - \frac{1}{4} \int l^{\mu\nu} \mathcal{E}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} l_{\alpha\beta} d^4x. \quad (2.153)$$

Considerando tudo isso chega-se na questão: como é o espaço-tempo na Bi-gravidade? E esta pergunta pode ser respondida pelo trabalho de Yashar ([AKRAMI; KOIVISTO; SOLOMON, 2015](#)) que se esmerou para isso. De uma forma simples imagine o sistema de uma partícula pontual viajando neste espaço e interagindo com as duas métricas. A ação desses sistemas será:

$$\begin{aligned} S &= -m\lambda_g \int \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}} dt - m\lambda_f \int \sqrt{f_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}} dt \\ &= -m\lambda_g \int ds_g - m\lambda_f \int ds_f. \end{aligned} \quad (2.154)$$

λ é uma constante. Se imaginarmos uma geometria Riemanniana para a métrica g com símbolos de Christoffel Γ_{jk}^i e outro para a métrica f com símbolos de Christoffel Λ_{jk}^i , a geodésica derivada desta ação não é nada parecida com uma geodésica padrão em uma geometria Riemanniana, ao invés disso ela se parece como segue:

$$\lambda_g g_{\mu\nu} \left(\frac{d^2 x^{\mu}}{ds_g^2} + \Gamma_{ij}^{\mu} \frac{dx^j}{ds_g} \frac{dx^i}{ds_g} \right) + \lambda_f f_{\mu\nu} \left(\frac{d^2 x^{\mu}}{ds_f^2} + \Lambda_{ij}^{\mu} \frac{dx^j}{ds_f} \frac{dx^i}{ds_f} \right) = 0. \quad (2.155)$$

Este é de fato o movimento de uma partícula sobre uma geodésica, apenas não em uma variedade Riemanniana, mas em uma variedade Finsleriana que será o tema da próxima seção ([AKRAMI; KOIVISTO; SOLOMON, 2015](#))

2.3 Geometria de Finsler

Como analogia com a geometria de Riemann, é razoável dizer que o estudo de feixes de fibras ou fibrados (Fiber bundles) para a geometria de Finsler é o correspondente ao estudo de variedades. Serão apresentadas ideias básicas sobre esse tema para conhecer a abordagem e introduzir a notação. Naturalmente, o conhecimento sobre variedades e a geometria de Riemann serão tratado como pré-requisito.

Definição: Feixe de coordenadas (Coordinate Bundle) $(E \xrightarrow{\pi} M)_{U_i}$

- Sejam M, E, F variedades diferenciáveis com U_i uma cobertura aberta de M , $p \in M$ e $f \in F$.
- $\exists \pi : E \rightarrow M$ um mapa sobrejetivo chamado de projeção e a imagem inversa $\pi^{-1}(p) \in F$.
- $\exists \phi_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$, ϕ_i é chamado de trivialização local.
- $\phi_i(p, f) = \phi_i^p(f)$ é um difeomorfismo para cada $p \in M$, $\phi_i^p : F \rightarrow F_p$.

Se todas essas condições forem satisfeitas, E é chamado conjunto total, M o conjunto base F a fibra e essa estrutura recebe o nome de feixe de coordenadas.

A noção de equivalência é uma relação básica entre objetos matemáticos e aqui será denotada por: \sim com transitividade, reflexiva e simétrica. Uma classe de equivalência é um conjunto formado pelos elementos equivalentes entre si e é indicado como: H / \sim com H um conjunto maior que contém todos os elementos originais. A relação de equivalência será usada para construir uma estrutura matemática semelhante aos feixes de coordenadas, mas sem dependência de uma cobertura específica.

Definição: Feixe de fibras, Pacote de fibras ou fibrado (Fiber Bundle) $E \xrightarrow{\pi} M$

Defina a relação de equivalência $(E \xrightarrow{\pi} M)_{U_i} \sim (E \xrightarrow{\pi} M)_{V_j}$ se $(E \xrightarrow{\pi} M)_{(U_i \cup V_j)}$ é novamente um feixe de coordenadas. Essa relação é trivialmente simétrica e reflexiva, é transitiva porque a trivialização sempre existe devido às duas outras trivializações. Definimos finalmente um fibrado como $(E \xrightarrow{\pi} M)_{U_i} / \sim = E \xrightarrow{\pi} M$

Um pacote de fibras pode ter um grupo de Lie (G) atuando na fibra, adotemos que ele atua à esquerda por conveniência. O grupo de Lie é chamado de grupo de estrutura se a trivialização composta $(\phi_i^p)^{-1} \circ \phi_j^p$ for um elemento do grupo. Defina $(\phi_i^p)^{-1} \circ \phi_j^p = t_{ij} \in G$ e recebe o nome da função de transição. Essas funções são mapas suaves que vinculam ϕ_i a ϕ_j pela relação $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ onde U_i é a cobertura referente a ϕ_i idem para U_j e ϕ_j .

Uma estrutura importante dos fibrados é chamada de seção ou seção transversal, que é um mapa $\sigma : M \rightarrow E$ satisfazendo $\pi \circ \sigma = Id_M$. Se σ é definido apenas em um conjunto aberto $U_i \subset M$, chamamos de seção local e denominamos σ_i . Em oposição às seções locais, existem seções globais que somente são admissíveis em fibrados chamados triviais (NAKAHARA, 1990). O conjunto de todas as seções em M é indicado como $\Gamma(M, F)$ e as seções locais sobre U_i são $\Gamma(U_i, F)$.

Se a fibra F for um espaço vetorial, o fibrado será chamado de feixe vetorial e a dimensão do espaço vetorial será a dimensão da fibra. As seções em um feixe vetorial obedecem as regras da soma e a multiplicação por escalar devido à estrutura vetorial e a seção nula é definida como: $\phi_i^{-1}(\sigma_0(p)) = (p, 0_F)$. Um feixe tangente (TM) é um feixe vetorial no qual a fibra (F) é igual ao espaço tangente do conjunto base (M). Como a base natural, ∂_i pode ser definida para cada fibra, graças ao sistema de coordenadas x^i em um gráfico $U_i \subset M$, ∂_i forma campos vetoriais linearmente independentes e diz-se que define um quadro local sobre U_i .

Quando um grupo de estruturas do fibrado é idêntico à fibra, essa estrutura é chamada de feixe principal ou feixe G e designada como $P \xrightarrow{\pi} M$ ou $P(M, G)$. Como $F = G$ a ação de G em F pode ser definida não apenas à esquerda, mas também à direita, use $e \in \pi^{-1}(U_i)$, $p = \pi(e)$ e $\phi_i^{-1}(e) = (p, g_i)$ e construa a ação à direita como: $eg = \phi_i(p, g_i g)$ ou $\phi_i^{-1}(eg) = (p, gg_i)$ para $g_i, g \in G$, $p \in M$ e $e \in E$. Para mostrar que isso não depende da trivialização local: $\phi_j(p, g_j g) = \phi_j(p, t_{ji}(p)g_i g) = \phi_i(p, g_i g)$

Ainda falando sobre feixes principais, é possível escolher uma trivialização local preferida por causa da estrutura de grupo dos pacotes principais. Primeiro, observe que a ação à direita é livre e transitiva devido à transitividade de G em si. Isso significa que sempre existe um elemento $g \in G$ de tal forma que $e_1 = e_2 g$ para $e_1, e_2 \in \pi^{-1}(p)$. É livre porque $eg = e$ se e somente se $g = 1$ o elemento unitário de G . Agora faça uma seção $\sigma_i(p)$ sobre U_i sabendo que existe um único elemento $g \in G$ tal que $e = \sigma_i(p)g$ para $e \in \pi^{-1}(p)$, $p \in U_i$ vamos chamá-lo de g_e . A seção pode ser escrita como $\sigma_i(p) = eg_e^{-1}$, o que significa que existe uma trivialização satisfazendo $\sigma_i(p) = \phi_i(p, 1)$ ou $\phi_i^{-1}(e) = (p, g_e)$ e recebe o nome de trivialização canônica local. Ele também é um elemento do grupo, então $\phi_i(p, g) = \phi(p, 1)g = \sigma_i(p)g$ e pela ação da função de transição para um elemento $p \in U_i \cap U_j$ através das seções locais $\sigma_i(p)$ e $\sigma_j(p)$:

$$\begin{aligned}\sigma_i(p) &= \phi_i(p, 1) = \phi_j(p, t_{ji}) \\ &= \phi_j(p, 1)t_{ji} = \sigma_j(p)t_{ji}.\end{aligned}\tag{2.156}$$

Denotemos T_eP como o espaço tangente de P sobre o ponto e e procuremos uma conexão entre os espaços tangentes T_pM do conjunto base e $T_gG = T_fF$ da fibra. Antes disso, são necessárias algumas definições.

Definição: Espaço vertical ou subespaço vertical (Vertical Space or Vertical Subspace) V_eP

Tome $e \in P(M, G)$ e $F_p = G_p$ a fibra em $p = \pi(e)$, definimos V_eP como um subespaço de T_eP que é tangente a G_p em e

Se $f : M \rightarrow N$ é uma função em uma variedade M então ele induz funções em $f_* : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ e $f^* : T_{f(p)}^*N \rightarrow T_p^*M$ respectivamente denominadas "função push forward" e "função pullback". Agora, leve G para ser um grupo de Lie e L_g, R_g sua ação à esquerda e direita, respectivamente. É possível construir o mapa $R_{h*} : T_gG \rightarrow T_{gh}G$ para o sinal $*$ indicando um push forward de uma função e o mesmo para L . A conexão entre os espaços tangentes da fibra, o conjunto base e o conjunto total é definida como:

Definição: Conexão

Uma conexão em um feixe principal é uma separação única para o espaço tangente T_eP no subespaço vertical V_eP e no subespaço horizontal H_eP satisfazendo:

- $T_eP = H_eP \oplus V_eP$
- Seja Φ um campo vetorial suave em P então ele pode ser separado em campos vetoriais suaves $\Phi^H \in H_eP$ e $\Phi^V \in V_eP$
- $H_{eg}P = R_{g*}H_eP \mid \forall e \in Pg \in G$

H_eP é visto como um complemento de V_eP em T_eP , mas a projeção induz um mapa entre esses espaços e é denotada como $\pi_* : T_eP \rightarrow T_{\pi(e)}M$. Denotemos $m = \dim M$ a dimensão de M e $\phi^M(p) = (x^1, \dots, x^m)$ uma carta para ele e vamos fazer o mesmo para F como $\phi^F(f) = (y^1, \dots, y^f)$, observe que ele não precisa ser um feixe principal para escrevê-lo assim. Uma carta em E pode ser escrita por aqueles usado o difeomorfismo da trivialização e observando que: $\psi^{-1}(e) = (\phi^M(p), \phi^F(f))$, isso significa que $\frac{\partial}{\partial x^j}$ e $\frac{\partial}{\partial y^k}$ são bases para os

vetores de seus espaços tangentes, Então uma base para $T_e E$ é escrita ponto a ponto, $(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^{\bar{k}}})|_e$. Tome $V \in T_e P$ e investigue como π_* age sobre ele, sabendo que será transportado para um vetor em $T_p M$, temos:

$$\pi_*(V) = \pi_*(V^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_e + V^{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial y^{\bar{k}}}|_e) = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\pi(e)}. \quad (2.157)$$

Aqui, a barra acima dos índices indica que esses índices se referem à fibra e como um lembrete $i = 1, \dots, m$ e $\bar{k} = 1, \dots, f$. A equação acima nos diz que $\ker(\pi_*) = \text{span}(\frac{\partial}{\partial y^{\bar{k}}}|_e)$ mas este é um subespaço de $T_e P$ precisamente aquele tangente à fibra em e , então esse é o espaço vertical $V_e P$. O que é importante após esta conclusão é que o espaço vertical é uma estrutura intrínseca de um fibrado, uma vez que não é necessário nada além dos objetos comuns a ele para defini-lo. O mesmo não se pode dizer do espaço horizontal, exigindo as chamadas conexões para uma definição única de $H_e P$. Se desta vez for feita uma projeção para $V_e P$, é possível introduzir um (1,1)-tensor $\omega : T_e P \rightarrow V_e P$ que não possui componentes em $\frac{\partial}{\partial x^i}$ (caso contrário, não seria uma projeção) para que possa ser escrito como:

$$\omega = (dy^{\bar{k}} + N_i^{\bar{k}} dx^i) \otimes \frac{\partial}{\partial y^{\bar{k}}} \quad (2.158)$$

Proposição: ω é uma conexão

□

Se o espaço horizontal é definido como: $\ker(\omega) = H_e P$ então ele é unicamente definido, o que leva a um lema bem conhecido, como $\text{Dom}(\omega) = \text{Im}(\omega) \oplus \ker(\omega)$ exatamente a primeira condição de uma conexão $T_e P = V_e P \oplus H_e P$ basta garantir que ω seja uma projeção, satisfazendo $\omega \circ \omega = id_{V_e P}$, mas $\omega(V) = V, \forall V \in V_e P$ e não apenas ω é uma projeção, mas a segunda condição de uma conexão é satisfeita. Para a terceira condição, pegue $V \in H_e P$ e já se sabe que $R_{g*}V \in T_{eg}P$ mas o que queremos é isso: $R_{g*}V \in H_{eg}P \subset T_{eg}P$ então aplique-lhe ω e

$$\begin{aligned} \omega(R_{g*}V) &= R_g^* \omega(V) \rightarrow V \in H_e P | V \in \ker(\omega) \\ &= 0 \rightarrow R_{g*}V \in \ker(\omega) \therefore R_{g*}V \in H_{eg}P. \end{aligned} \quad (2.159)$$

■

O tensor ω é conhecido como conexão curta (também conexão de uma forma, mas deixe esse termo ser preservado para situações mais gerais). Por enquanto, $N_j^{\bar{k}}$ seja um coeficiente indefinido chamado componentes de conexão. Similarmente ao que foi feito para

$\text{Im}(\omega) = \ker(\pi^*|_e) = \frac{\partial}{\partial y^k}|_e = \partial_{\bar{k}}|_e$ revelando-se como base para o espaço vertical, chame $\text{span}(\delta_k|_e) = \ker(\omega)$ para introduzir uma base para o espaço horizontal $\delta_k|_e$ ou $\frac{\delta}{\delta x^k}|_e$. A equação $\omega(V) = 0$ para $V \in H_eP$ e a expansão desse vetor nessas bases como $V^k \delta_k$ nos ajudam a escrever essas novas em termos das bases antigas como:

$$\delta_i|_e = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial y^{\bar{k}}} \right)|_e = (\partial_i - N_i^{\bar{k}} \partial_{\bar{k}})|_e. \quad (2.160)$$

Definição: Lift, levantamento, aumento ou elevação horizontal (Horizontal Lift) $\tilde{\gamma}$

Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva no conjunto base de um feixe principal $P \xrightarrow{\pi} M$. Uma curva no conjunto total $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow P$ é dito um lift horizontal de γ se $\pi[\tilde{\gamma}(t)] = \gamma(t)$ e vetores tangentes de $\tilde{\gamma}(t)$ pertencem à $H_{\tilde{\gamma}(t)}P$

Teorema: Existe um lift horizontal único no qual $\tilde{\gamma}(0) = p_0$ para $p_0 \in \pi^{-1}[\gamma(0)]$.

□

Tome um vetor $V_{\tilde{\gamma}}$ para ser tangente à $\tilde{\gamma}$ isso quer dizer que $\omega(V_{\tilde{\gamma}}) = 0$ porque, por definição, é horizontal. A equação passada é uma equação diferencial ordinária, o que significa que, dada uma condição inicial, como $\tilde{\gamma}(0) = p_0$, a solução é única devido ao teorema fundamental das equações diferenciais ordinárias. ■

Definição: Transporte Paralelo

Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva no conjunto base de um feixe principal $P \xrightarrow{\pi} M$. Se tomarmos $p_0 \in \pi^{-1}[\gamma(0)]$, então pelo último teorema, existe um único $p_1 = \tilde{\gamma}(1) \in \pi^{-1}[\gamma(1)]$. Diz-se que p_1 é um transporte paralelo de p_0 ao longo da curva $\tilde{\gamma}$ ou p_0 é dito ter sido transportado em paralelo para p_1 ao longo de $\tilde{\gamma}$.

Seja $P \xrightarrow{\pi} M$ um feixe principal, e G é um grupo com uma ação definida em uma variedade B . É possível construir um fibrado com base nessa ação. Imagine que $g \in G$ atua em $b \in B$ à esquerda, para simplificar, e uma ação em $P \times B$ possa ser definida como $g \star (p, b) = g \star \begin{pmatrix} p \\ b \end{pmatrix} = (pg, g^{-1} \cdot b)$ para $p \in P$. Uma relação de equivalência é introduzida para $g \star \begin{pmatrix} p \\ b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} p \\ b \end{pmatrix}$ e um feixe de fibras feito da classe de equivalência $P \times B / \sim = E$ é chamado de

fibrado associado (an associated fiber bundle) $E \xrightarrow{\pi} M$. Quando a variedade B é um espaço vetorial, o fibrado recebe o nome de um feixe vetorial associado (associated vector bundle).

Como uma analogia com o estudo de variedade, o transporte paralelo pode ser visto como uma maneira de mover objetos sem destruir suas informações originais. Nos fibrados, essa ideia ainda está presente e essa informação é transportada pelo levantamento horizontal, mas o interessante no caso de variedades é o transporte de vetores. O transporte paralelo de vetores também pode ser definido para fibrados, pelo menos para feixes de vetores associados, e é basicamente a mesma ideia. Um ponto paralelo transportado é um ponto constante sobre uma elevação horizontal e um vetor paralelo transportado é uma constante vetorial sobre uma elevação horizontal. Em um feixe de vetores associados, os vetores em M , $V \in T_i M$ são tanto de $E \xrightarrow{\pi} M$ assim como $P \xrightarrow{\pi} M$ e esta é uma possibilidade de definir o que significa ser "constante sobre um lift horizontal".

$P \xrightarrow{\pi} M$ é um feixe principal e U_i uma carta para M , $\sigma_i(\mu) = \phi_i(\mu, e)$ uma seção local e a respectiva trivialização canônica de $\mu \in M$ e e o elemento unitário de G , a fibra. Agora tome V como um espaço vetorial e $E \xrightarrow{\pi} M$ o feixe vetorial associado de $P \xrightarrow{\pi} M$ com $\Sigma_i(\mu)$ uma seção (também chamada de campo vetorial) para esse feixe, mas esse elemento é representado como $\binom{p}{v} = [(p, v)]$ com $v \in V$.

$$\Sigma(\mu) = \binom{\sigma_i(\mu)}{\eta(\mu)} = [(\sigma_i(\mu), \eta(\mu))]. \quad (2.161)$$

Observe que $\pi \circ \Sigma(\mu) = \mu$ como suspeitado e é realmente uma seção bem definida. Pegue agora uma curva $\gamma(t)$ em M e um aumento horizontal dela como $\tilde{\gamma}(t)$ em P então $\Sigma[\gamma(t)] = \binom{\tilde{\gamma}(t)}{\eta[\gamma(t)]}$. Finalmente, um transporte paralelo de um vetor é definido como constante ao longo da elevação horizontal, significa que $\eta[\gamma(t)]$ deve ser constante. Se for feito outro levantamento horizontal, nada mudará porque ele pode ser escrito como $\tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}(t)g$ e a relação de equivalência passa a ser $\Sigma[\gamma(t)] = \binom{\tilde{\gamma}_1(t)}{g^{-1} \cdot \eta[\gamma(t)]}$ mas $g^{-1} \cdot \eta[\gamma(t)]$ ainda é constante, então esta definição é intrínseca à estrutura.

A razão mais importante para definir um transporte paralelo é introduzir a chamada derivada covariante, porque mesmo em uma variedade essa é uma estrutura que mede quanto um vetor está longe de ser transportado em paralelo. O resultado óbvio é que nada deveria acontecer se um vetor fosse simplesmente transportado em paralelo e esta é a motivação para definir:

Definição: Derivada covariante em feixes vetoriais associados ∇_V

Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva, $\tilde{\gamma}(t)$ um lift horizontal arbitrário dela e $\Sigma(t) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}$ uma seção, V é um vetor tangente para $\gamma(t)$ de μ_0 , a derivada covariante de $\Sigma(t)$ ao longo de $\gamma(t)$ em $\mu_0 = \gamma(0)$ é definida:

$$\nabla_V \Sigma = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}(0) \\ \frac{d}{dt} \eta(\gamma(t))|_{t=0} \end{pmatrix} = [\tilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt} \eta(\gamma(t))|_{t=0}]. \quad (2.162)$$

É de notar que, se $\Sigma(t)$ é transportado em paralelo, então sua derivada covariante é simplesmente $\nabla_V \Sigma(t) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma} \\ 0 \end{pmatrix}$. ∇_V é um mapa que leva seções a outras seções, ou esquematicamente $\nabla_V : \Gamma(M, P \times V) \rightarrow \Gamma(M, P \times V)$ e também existe $\nabla : \Gamma(M, P \times V) \rightarrow \Gamma(M, P \times V) \otimes \Omega^1(M)$ (chama-se $\Omega^1(M)$ o conjunto de funcionais lineares em M) satisfazendo $\nabla \Sigma(V) = \nabla_V \Sigma$. Esse mapa não depende de uma elevação específica pelo mesmo motivo do transporte paralelo. Um feixe de fibras mais específico será introduzido na próxima seção, porque essa é a estrutura usada na geometria do Finsler,

2.3.1 Feixes tangentes

A geometria de Finsler é construída sobre uma estrutura de feixes, mais especificamente uma estrutura de feixes tangentes, que já foi introduzida como uma fibra, sendo o espaço tangente do conjunto de base. Também pode ser vista como uma fibra feita de \mathbb{R}^m para $m = \dim M$ pois existe um difeomorfismo entre $T_p M$ e \mathbb{R}^m . Quer dizer que um feixe tangente é uma pluralidade de espaços tangentes de um conjunto base. Para evitar confusões, vamos defini-lo formalmente:

Definição: Feixes tangentes TM

Seja $TM \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado com o conjunto base uma variedade m dimensional e F uma fibra, ele é um feixe tangente se $F = \mathbb{R}^m$ e for a unificação de todos os espaços tangentes do conjunto base.

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M. \quad (2.163)$$

Da mesma forma que fibras tangentes, existem as chamadas fibras cotangentes (T^*M), que possuem exatamente a mesma definição, alterando apenas a palavra tangente por cotangente. Escolha um sistema de coordenadas para M , um conjunto de bases, como $\phi(p) = (x^1, \dots, x^m)$ e uma base para T_pM é $\partial_i|_p$. Desde que exista um isomorfismo entre T_pM e \mathbb{R}^m , existe um mapa isomórfico entre a base de coordenadas $\partial_k|_p$ e as bases canônicas $e_{\bar{k}}$ em \mathbb{R}^m , observe a notação de barra porque $F = \mathbb{R}^m$. Um vetor arbitrário $V \in T_pM$ pode ser escrito como $\frac{\partial x^i(0)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \dot{x}^i \partial_i|_p$ para $x(t)$ sendo uma curva em M e devido ao isomorfismo um gráfico de coordenadas em $\pi^{-1}(U) \subset TM$ é naturalmente escrito como $(x^1, \dots, x^m, y^{\bar{1}}, \dots, y^{\bar{m}}) = (x^1(0), \dots, x^m(0), \dot{x}^{\bar{1}}(0), \dots, \dot{x}^{\bar{m}}(0))$ ou em uma notação curta $(x^k(0), \dot{x}^{\bar{k}}(0))$.

Devido a essa relação especial entre as coordenadas da fibra e da variedade de base, a notação \bar{k} pode ser confusa, de modo que alguns índices possam parecer misturados. O leitor precisa estar ciente, porque agora os índices de barras podem ser contraídos com índices sem barra e estabelece a notação $\partial_{\bar{r}}$ como base da fibra. Uma transformação motivada por uma mudança de gráficos no conjunto base $x^k \rightarrow \tilde{x}^k(x^i)$ induz uma alteração nas coordenadas da fibra: $y^{\bar{k}} = \dot{\tilde{x}}^{\bar{k}} = \frac{\partial \tilde{x}^{\bar{k}}}{\partial x^l} y^{\bar{l}}$ o que significa que o conjunto total se comporta de seguinte forma $[x^k, y^{\bar{k}}] \rightarrow [\tilde{x}^k(x^k), \frac{\partial \tilde{x}^{\bar{k}}}{\partial x^l} y^{\bar{l}}]$ sob essa alteração.

Como TM é ela própria uma variedade, também possui um espaço tangente chamado T_eTM sobre o ponto $e \in TM$, o que significa que uma base de coordenadas pode ser definida como $(\partial_k, \partial_{\bar{k}})|_e = (\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial y^{\bar{k}}})|_e$. Se uma transformação de coordenadas for feita, pela regra da cadeia: $\check{\partial}_k|_e = \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^k} \partial_l + \frac{\partial y^{\bar{l}}}{\partial \tilde{x}^k} \partial_{\bar{l}}$ o mesmo para coordenadas barradas, além de que uma alteração de coordenada não depende de coordenadas barradas e $\frac{\partial y^{\bar{k}}}{\partial y^{\bar{l}}} = \frac{\partial \tilde{x}^{\bar{k}}}{\partial \tilde{x}^l}$ o que leva à $\check{\partial}_{\bar{k}} = \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^k} \partial_{\bar{l}}$. Isso significa que uma alteração nas coordenadas induz uma alteração na base das componentes barradas semelhante a um tensor.

Definição: Sub-feixe

Se $P \xrightarrow{\pi} M$ é um feixe vetorial com fibra F e Q_i , uma coleção de subespaços lineares dessa fibra $Q_i \subset F$, a seguinte estrutura é chamada Sub-feixe

$$Q = \bigcup_{i \in F} Q_i. \tag{2.164}$$

Feixes verticais (VP) e horizontais (HP) são bons exemplos de subconjuntos feitos do Feixe tangente TP devido à estrutura vetorial natural de um espaço tangente sobre uma variedade. Lembre-se de V_eP e H_eP como espaços verticais e horizontais de T_eP e eles são definidos como

$$VP = \bigcup_{e \in P} V_e P$$

$$HP = \bigcup_{e \in P} H_e P.$$

Não apenas de tangentes tratam os feixes, mas também das cotangentes, e todo o desenvolvimento feito para os espaços verticais e horizontais pode ser feito igualmente para os espaços cotangentes verticais e horizontais ($V_e^* P$, $H_e^* P$), bem como para feixes cotangentes verticais e horizontais ($V^* P$, $H^* P$).

Proposição: dx^i e $\delta y^{\bar{k}} = dy^{\bar{k}} + N_i^{\bar{k}} dx^i$ são duais à $\delta_i = \partial_i - N_i^{\bar{k}} \partial_{\bar{k}}$ e $\partial_{\bar{k}}$ respectivamente \square

$$\begin{aligned} dx^k(\delta_l) &= \delta_l^k & dx^k(\partial_{\bar{l}}) &= 0 \\ \delta y^{\bar{k}}(\delta_l) &= 0 & \delta y^{\bar{k}}(\partial_{\bar{l}}) &= \delta_l^{\bar{k}}. \end{aligned} \quad (2.165)$$

■

Os resultados da última proposição podem ser interpretados como definições dos espaços $H^* P = \text{span}(dx^k)$ e $V^* P = \text{span}(\delta y^{\bar{k}})$ por causa da relação de dualidade com $VP = \text{span}(\partial_{\bar{k}})$, $VH = \text{span}(\delta_{\bar{k}})$. Alguns autores definem o feixe cotangente diferentemente do exposto como: $V^* P = \text{span}(dx^k)$, $H^* P = \text{span}(\delta y^{\bar{k}})$ mas então a relação de dualidade também inverte, o que parece ser um pouco mal definido e, por esse motivo, usaremos apenas a primeira definição. Em um feixe tangente, uma alteração de coordenadas também induz uma transformação da base cotangente $d\check{x}^k$ e $d\check{y}^{\bar{k}}$. Novamente, por regra de cadeia e as conhecidas propriedades do feixe $d\check{y}^{\bar{k}} = \frac{\partial \check{y}^{\bar{k}}}{\partial x^l} dx^l + \frac{\partial \check{y}^{\bar{k}}}{\partial \check{x}^l} d\check{x}^l$ e $d\check{x}^k = \frac{\partial \check{x}^k}{\partial x^l} dx^l$.

A conexão curta definida na última seção pode assumir o formato $\omega = \delta y^{\bar{k}} \otimes \partial_{\bar{k}}$ e uma mudança de coordenadas deve alterar a conexão como $\tilde{\omega} = \delta \check{y}^{\bar{k}} \otimes \check{\partial}_{\bar{k}} = (d\check{y}^{\bar{k}} + \check{N}_l^{\bar{k}} d\check{x}^l) \otimes \check{\partial}_{\bar{k}}$. Essa transformação define como os componentes de conexão se transformam sob alteração de coordenadas em um feixe tangente usando as relações já derivadas para a base $(\partial_k, \partial_{\bar{k}})$ e $(dx^k, dy^{\bar{k}})$. Se o feixe horizontal for realmente definido exclusivamente, a conexão não poderá ser alterada juntamente com uma transformação de coordenadas, o que obriga o coeficiente de conexão a transformar-se como:

$$N_j^{\bar{k}} = \check{N}_i^{\bar{l}} \frac{\partial x^k}{\partial \check{x}^l} \frac{\partial \check{x}^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \check{y}^{\bar{l}}}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \check{x}^l} \quad (2.166)$$

Naturalmente, é comum considerar um caso menos geral e pensar no chamado coeficiente de conexão linear. É um caso particular quando $N_j^{\bar{k}}(x, y) = T_{j\bar{l}}^{\bar{k}}(x) y^{\bar{l}}$ e a transformação desse coeficiente de conexão linear assume a forma.

$$T_{j\bar{l}}^{\bar{k}} = \tilde{T}_{i\bar{s}}^{\bar{r}} \frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^l} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^r} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} + \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^l \partial x^j} \quad (2.167)$$

Ele tem uma transformação nostálgica, lembrando a mudança de coordenada de um coeficiente de conexão em uma variedade riemanniana ou componentes de um derivado covariante padrão em M . Esse fato nos diz que, para cada derivada covariante ou conexão definida em M , sempre existe uma conexão linear em TM . É importante observar alguma especificidade na transformação da base de coordenadas e a de HTM , VTM e H^*TM , V^*TM , portanto vamos usar a transformação do coeficiente de conexão e compilar o que sabemos sobre ele:

$$\begin{aligned} d\tilde{x}^i &= \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} dx^j & \check{\delta} y^{\bar{k}} &= \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^l} \delta y^{\bar{l}} \\ \check{\partial}_{\bar{k}} &= \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^k} \partial_{\bar{l}} & \check{\delta}_i &= \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \delta_j \\ \check{\partial}_i|_e &= \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \partial_k + \frac{\partial y^{\bar{k}}}{\partial \tilde{x}^i} \check{\partial}_{\bar{k}} & d\check{y}^{\bar{k}} &= \frac{\partial \check{y}^{\bar{k}}}{\partial x^l} dx^l + \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^l} dy^{\bar{l}} \end{aligned} \quad (2.168)$$

Talvez o fato mais agradável de se ter em mente depois de ver essas relações sejam as quatro primeiras transformações. A semelhança com uma transformação tensorial leva a uma estrutura no feixe tangente que pode se comportar como um tensor tradicional em uma variedade. Se esses quatro vetores forem tratados como base para um mapa multilinear, a transformação sob alteração de coordenadas será simplificada. Não é por acaso que essas são as bases de HTM , VTM e H^*TM , V^*TM , isso significa que esse mapa se distingue daqueles que têm alguma contribuição além desses espaços. Essa estrutura é chamada de tensor-d (tensor distinto).

Definição: D-Tensor

É um (l, k) tensor definido em TM que atua apenas nos componentes verticais e horizontais dos vetores r de T^*TM e s de TTM . Em coordenadas locais, assume a forma:

$$T = T_{s_1, \dots, s_j, \bar{s}_{j+1}, \dots, \bar{s}_k}^{r_1, \dots, r_i, \bar{r}_{i+1}, \dots, \bar{r}_l} \delta_{r_1} \otimes \dots \otimes \delta_{r_i} \otimes \partial_{\bar{r}_{i+1}} \otimes \dots \otimes \partial_{\bar{r}_l} \otimes dx^{s_1} \otimes \dots \otimes dx^{s_j} \otimes \delta y^{\bar{s}_{j+1}} \otimes \dots \otimes \delta y^{\bar{s}_k}$$

É bom ver que essas bases podem ser separadas na vertical e na horizontal, o que significa que esse tensor pode ser visto também como uma contribuição proveniente de lifts.

A parte do tensor com índices barrados leva a uma interpretação como um lift levando algum tensor ao longo do conjunto base $\mathfrak{T}(M)$ para $\mathfrak{T}(TM)$ bem como outro levantamento levando também $\mathfrak{T}(M)$ para $\mathfrak{T}(TM)$. Defina duas elevações chamadas elevação horizontal γ^H e elevação vertical γ^V atuando em $\mathfrak{T}(M) \rightarrow \mathfrak{T}(TM)$ da seguinte maneira, tome um tensor em M como $T(x) = T_{s_1, \dots, s_j}^{r_1, \dots, r_i}(x) \partial_{r_1} \otimes \dots \otimes \partial_{r_i} \otimes dx^{s_1} \otimes \dots \otimes dx^{s_j}$, $x \in M$ e

$$\gamma^V[T(x)] = T_{\bar{s}_j, \dots, \bar{s}_j}^{\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_i}[\pi(u)] \partial_{\bar{r}_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\bar{r}_i} \otimes \delta y^{\bar{s}_1} \otimes \dots \otimes \delta y^{\bar{s}_j} \quad (2.169)$$

$$\gamma^H[T(x)] = T_{s_1, \dots, s_j}^{r_1, \dots, r_i}[\pi(u)] \delta_{r_1} \otimes \dots \otimes \delta_{r_i} \otimes dx^{s_1} \otimes \dots \otimes dx^{s_j}. \quad (2.170)$$

Uma estrutura interessante a ser observada é o seguinte campo vetorial $S = y^{\bar{a}} \delta_a$ porque esse campo não muda com a transformação de coordenadas. É um bom sinal porque a invariância sob a mudança de coordenadas é característica de um objeto geométrico. Este é um campo vetorial definido globalmente e, por causa disso, é usado para definir uma derivada covariante.

Definição: Derivada covariante dinâmica de um d-tensor ∇T

É um mapa que pega tensores-d e joga-os em outro tensor-d e atua nos componentes como:

$$\begin{aligned} \nabla T_{s_1, \dots, s_l}^{r_1, \dots, r_k}(u) &= S[T_{s_1, \dots, s_l}^{r_1, \dots, r_k}(u)] + \sum_i^k N_a^{r_i} T_{s_1, \dots, s_l}^{r_1, \dots, r_{i-1}, a, r_{i+1}, \dots, r_k}(u) \\ &\quad - \sum_i^l N_{s_i}^a T_{s_1, \dots, s_{i-1}, a, s_{i+1}, \dots, s_l}^{r_1, \dots, r_k}(u). \end{aligned} \quad (2.171)$$

O campo vetorial S é uma boa opção para um objeto geométrico, mas mesmo que seja invariável sob alteração de coordenadas, depende da escolha da conexão. Um objeto muito mais interessante é o campo vetorial $\check{X} := X^k \delta_k + (\nabla X^k) \partial_{\bar{k}}$. Não é difícil ver que é invariável sob alteração de coordenadas e não depende da escolha da conexão, porque também pode ser escrita como $\check{X} := X^k \partial_k + y^{\bar{l}} \partial_{\bar{l}} X^k \partial_{\bar{k}}$. Assim como os tensores-d, esse campo pode ser derivado de uma ação proveniente de um lift sobre um outro campo vetorial do conjunto base. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$, nas bases de coordenadas $X = X^i \partial_i$, chama-se um lift completo de X o vetor em $\mathfrak{X}(TM)$, $\check{X} := X^k [\pi(u)] \partial_k + y^{\bar{l}} \partial_{\bar{l}} X^k [\pi(u)] \partial_{\bar{k}}$ onde $u \in TM$ ou também $\check{X} := X^k [\pi(u)] \delta_k + (\nabla X^k) [\pi(u)] \partial_{\bar{k}}$.

O levantamento completo pode ser visto como uma consequência da definição de uma derivada covariante dinâmica. Por outro lado, uma elevação completa é um objeto geométrico, o

que significa que uma derivada covariante dinâmica pode ser interpretada como uma generalização da parte VTM desse levantamento $\check{X} := X^k(\partial_k - N_k^{\bar{l}}\partial_{\bar{l}}) + [S(X^l) + X^k N_k^{\bar{l}}]\partial_{\bar{l}}$. É verdade que, se tentarmos obter a derivada covariante tradicional em uma variedade, tomando a conexão linear e substituindo-a ela falha, então qual direito temos em chamá-la dessa maneira? É por isso que surge a necessidade de definir uma derivada covariante ao longo de $X \in \mathfrak{X}(M)$ (sem "dinâmica" desta vez)

Definição: Derivada covariante \mathfrak{D}_X

Seja T um tensor em $\mathfrak{T}(M)$ e $\gamma^{H/V}$ um lift horizontal/vertical. Uma derivada covariante de T é definida como : $\mathfrak{D}_X T := \nabla \gamma^{H/V}[T]$, ou em componentes:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_X T_{s_1, \dots, s_l}^{r_1, \dots, r_k} = & X^a \partial_a T_{s_1, \dots, s_l}^{r_1, \dots, r_k} + \sum_i^k N_a^{r_i} T_{s_1, \dots, s_l}^{r_1, \dots, r_{i-1}, a, r_{i+1}, \dots, r_k} \\ & - \sum_i^l N_{s_i}^a T_{s_1, \dots, s_{i-1}, a, s_{i+1}, \dots, s_l}^{r_1, \dots, r_k}. \end{aligned} \quad (2.172)$$

De fato, essa derivada covariante pode ser convertida na tradicional para o conjunto base, basta a restrição do coeficiente de conexão para a conexão linear $N_k^{\bar{l}} = \Gamma_{k\bar{a}}^{\bar{l}} y^{\bar{a}}$ e o que resta:

$$\begin{aligned} \nabla_X T_{s_1, \dots, s_l}^{r_1, \dots, r_k} = & X^a \left[\partial_a T_{s_1, \dots, s_l}^{r_1, \dots, r_k} + \sum_i^k \Gamma_{ab}^{r_i} T_{s_1, \dots, s_l}^{r_1, \dots, r_{i-1}, b, r_{i+1}, \dots, r_k} - \sum_i^l \Gamma_{as_i}^b T_{s_1, \dots, s_{i-1}, b, s_{i+1}, \dots, s_l}^{r_1, \dots, r_k} \right]. \end{aligned} \quad (2.173)$$

Aqui, isso nada mais é do que a derivada covariante tradicional em uma variedade.

Definição: Lift, levantamento ou elevação natural $\check{\gamma}(t)$

Seja $\gamma : [1, 0] \rightarrow M$ e $\check{\gamma} : [1, 0] \rightarrow TM$ curvas suaves no Feixe tangente $TM \xrightarrow{\pi} M$ e denote $\dot{\gamma}(y)$ as componentes em TM ao longo de $\gamma(t)$ referente à fibra. $\check{\gamma}(t)$ é dito um lift, levantamento ou elevação natural de $\gamma(t)$ se:

$$\check{\gamma}(t) = (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)). \quad (2.174)$$

Definição: Curva Auto-Paralela

Seja $\gamma : [1, 0] \rightarrow M$ uma curva suave, é chamada de curva auto-paralela da conexão ω se e somente se o seu lift natural também for um lift horizontal $\tilde{\gamma} : [1, 0] \rightarrow TM$.

Em uma curva auto-paralela, os vetores tangentes a ela devem pertencer a HTM porque também é um levantamento horizontal e devido à estrutura natural, eles podem ser expressos como $\dot{x}^k(t)\partial_k + \dot{y}^{\bar{k}}(t)\partial_{\bar{k}}$ para $x^k(t)$ e $y^{\bar{k}}(t)$ componentes de TM ao longo desta curva. A condição para que isso seja um aumento horizontal é $\omega(\dot{x}^k(t)\partial_k + \dot{y}^{\bar{k}}(t)\partial_{\bar{k}}) = 0$ e surge uma equação chamada equação auto-paralela.

$$\dot{y}^{\bar{k}} + \dot{x}^l N_l^{\bar{k}} = 0. \quad (2.175)$$

Aí vem um lembrete pertinente, lembre-se de que $y^{\bar{k}} = \dot{x}^{\bar{k}}$. Agora, se restringir à conexão linear $N_l^{\bar{k}}(x, y) = \Gamma_{l\bar{a}}^{\bar{k}}(x)y^{\bar{a}}$ torna-se à bem conhecida equação geodésica em M .

$$\ddot{x}^{\bar{k}} + \dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma_{ji}^{\bar{k}} = 0 \quad (2.176)$$

Porque em uma curva auto-paralela temos $\frac{\partial y^{\bar{i}}}{\partial t} = -N_j^{\bar{i}} \frac{\partial x^j}{\partial t}$ para t seu parâmetro.

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x^i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial y^{\bar{i}}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y^{\bar{i}}} = y^{\bar{i}} (\partial_i - N_i^j \partial_j) = S. \quad (2.177)$$

Depois disso, a derivada covariante dinâmica em $y^{\bar{i}} = \dot{x}^{\bar{i}}$ passa a ser:

$$\nabla y^{\bar{k}} = S(y^{\bar{k}}) + N_l^{\bar{k}} y^{\bar{l}} = \dot{y}^{\bar{k}} + \dot{x}^l N_l^{\bar{k}}. \quad (2.178)$$

E a equação auto-paralela vem como uma solução para $\nabla y^{\bar{i}} = 0$.

2.3.2 A geometria

Já encontramos um objeto geométrico na última seção (\check{X}); são essas quantidades que não mudam se o sistema de coordenadas e a conexão mudarem. Um exemplo comum é o comprimento da curva, não se espera que a distância mude se for medida com coordenadas

polares ou cartesianas, réguas ou fitas. Para a geometria de Riemann, ela é medida como (deixe y ter índices não barrados):

$$L[x(t)] = \int \sqrt{g_{ij}(x(t))y^i(t)y^j(t)} dt. \quad (2.179)$$

Para $x(t)$ uma curva parametrizada, $y^i(t)$ o vetor tangente no ponto $x(t)$ e g_{ij} o tensor métrico. Lembrando-se da introdução, se nós desejamos uma geometria parecida com a de Riemann com as propriedades discutidas até agora, uma medida de comprimento será governada por uma função $F(x, y)$ que generaliza a métrica, recuperando a expressão (2.179) quando y é uma constante. Mas essa expressão obriga $F(x, y)$ a ser homogêneo de grau um em relação a y devido à invariância de reparametrização, deixando uma expressão para o comprimento como a equação integral:

$$L[x(t), y(t)] = \int F[x(t), y(t)] dt. \quad (2.180)$$

Isto deve ser uma quantidade positiva (não negativa) o que gera uma condição para F . Por fim, para que seja uma generalização da geometria de Riemann, é necessário que exista $\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}$, porque pelo teorema de Euler $F^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j} y^i y^j$, que é análogo a exigir a existência de uma métrica na geometria Riemanniana devido a $F = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j} y^i y^j}$.

Teorema de Euler: Seja h uma função homogênea de grau n em relação a y^i então: $y^i \frac{\partial h}{\partial y^i} = nh$

□ Façamos a seguinte reparametrização $y^i \rightarrow \dot{y}^i = ky^i$ e pela homogeneidade da função: $h(\dot{y}^i) = k^n h(y^i)$, agora derive essa expressão em k :

$$\begin{aligned} nk^{(n-1)}h &= \frac{\partial \dot{y}^i}{\partial k} \frac{\partial h}{\partial \dot{y}^i} \\ &= y^i \frac{\partial h}{\partial \dot{y}^i}. \end{aligned}$$

Porque isso é válido para qualquer k , considere-o igual 1 e o teorema está comprovado ■

Agora, usando o teorema de Euler em uma função homogênea de grau 2, como F^2 :

$$\begin{aligned}
2\frac{\partial}{\partial y^i}F^2 &= \frac{\partial}{\partial y^i}[y^j \frac{\partial F^2}{\partial y^j}] \\
&= \delta_i^j \frac{\partial F^2}{\partial y^j} + y^j \frac{\partial}{\partial y^i} \frac{\partial F^2}{\partial y^j}.
\end{aligned}
\tag{2.181}$$

Poucas manipulações matemáticas e a multiplicação por y^j em ambos os lados da equação são necessárias para convencer-se de que:

$$2F^2 = y^j y^i \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}.$$
(2.182)

A ideia é que essa derivada dupla execute o papel da métrica Riemanniana e o comprimento dessa nova geometria seja bem descrito como uma generalização natural. Após essa motivação, são possíveis algumas definições formais:

Definição: Função de Finsler $F(x, y)$ e métrica de Finsler $g_{ij}(x, y)$

Seja F um mapa do feixe tangente para os números reais $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$, ele é chamado de função Finsler se satisfizer as propriedades 1 a 3

1. É uma função positivamente definida $F(x, y) > 0$
2. É 2 vezes diferenciável $F \in C^2$
3. É homogêneo de grau 1 em relação à fibra $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$

Um 2-forma chamado métrica de Finsler pode ser definido como:

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j} F^2(x, y)$$
(2.183)

Se as coordenadas do conjunto base devem ser consideradas constantes, $F(\cdot, y)$ é chamado de norma de Minkowski. Observe que essa métrica de Finsler satisfaz trivialmente positividade e simetria devido às propriedades de F . Além disso, o fato de a geometria de Riemann ser um caso especial da geometria de Finsler quando ela não depende de y , motiva a definição de um tensor que mede o quão longe se está do caso Riemanniano e um teorema para quando ele zera é estabelecido.

Definição e teorema: Torção de Cartan C_{ijk} e teorema de Cartan

$$C_{ijk} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = \frac{1}{4} \frac{\partial^3 F^2}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k}. \quad (2.184)$$

O teorema de Cartan afirma que sempre que a geometria é riemanniana, $C_{ijk} = 0$

Uma observação deve ser levantada aqui pelo fato de o teorema de Cartan afirmar que, se a geometria é Riemanniana, a torção de Cartan é nula, mas nada foi dito sobre o inverso, ou seja, não é verdade, em geral, que sempre que a geometria é Riemanniana, a torção de Cartan é nula. Por esse motivo, outro tensor é criado para explicar, em um teorema "se e somente se", esse caso específico:

Definição e teorema: Torção média de Cartan I_i e Teorema médio de Cartan

$$I_i = g^{jk} C_{ijk} := \frac{g^{jk}}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = \frac{g^{jk}}{4} \frac{\partial^3 F^2}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k}. \quad (2.185)$$

O teorema médio de Cartan afirma que $I_i = 0$ se e somente se a geometria for Riemanniana

□

Essa prova é muito grande e destruiria o formato desta tese. O leitor pode encontrá-lo na referência (BAO; CHERN; SHEN, 2000) ■

O tensor angular é outro objeto que será útil agora:

$$h_j^i := \delta_j^i - F^{-2} g_{jk} y^k y^i. \quad (2.186)$$

Uma atenção especial deve ser dada a outro caso da geometria de Finsler, chamado geometria de Randers, que ocorre quando $F = a(x, y) + b(x, y) = \sqrt{\alpha_{ij}(x)y^i y^j} + \beta_i(x)y^i$. Aqui $\alpha_{ij}(x)$ é uma matriz simétrica e não negativa que depende das coordenadas da base do feixe x e $\beta_i(x)$ é um 1-forma na variedade de base. Para atender a condição de não negatividade da

função de Finsler $\beta_i(x)$ é um funcional restrito, permitindo apenas valores para os quais $F > 0$, formalmente diz-se que $\|\beta\|_\alpha = \sqrt{\alpha^{ij}\beta_i\beta_j} < 1$. A métrica dessa geometria facilmente pode ser vista como $g_{ij} = \frac{F}{a} \left(\alpha_{ij} - \frac{\alpha_{ik}y^k\alpha_{jl}y^l}{a^2} \right) + \left(\beta_i - \frac{\alpha_{ik}y^k}{a} \right) \left(\beta_j - \frac{\alpha_{jl}y^l}{a} \right)$.

Em física, a geometria de Randers é útil para descrever um comportamento de algum campo secundário interagindo com um campo de fundo, como partículas viajando em um campo eletromagnético. Assim como Riemann, a geometria de Randers é um bom ponto de referência para descrever um espaço de Finsler, por esse motivo, análogo à torção de Cartan, outro tensor surge para medir a diferença com a geometria de Randers:

Definição e teorema: Torção de Matsumoto e Teorema de Matsumoto

(Os índices são abaixados e levantados pela multiplicação da métrica de Finsler)

$$M_{ijk} := C_{ijk} - \frac{3!}{n+1} I_{(i} h_{jk)} = C_{ijk} - \frac{1}{n+1} [I_i h_{jk} + I_j h_{ki} + I_k h_{ij}]. \quad (2.187)$$

O teorema de Matsumoto afirma que $M_{ijk} = 0$ para qualquer métrica de Randers

□

Por cálculo direto, a torção de Cartan para uma geometria de Randers é a seguinte:

$$C_{ijk} = \frac{1}{n+1} [I_i h_{jk} + I_j h_{ki} + I_k h_{ij}]. \quad (2.188)$$

isso é suficiente para anular a torção de Matsumoto ■

Um comentário aqui parece ser pertinente: para uma geometria Finsleriana com dimensão maior que 2, isso significa que $d \geq 3$ então $M_{ijk} = 0$ acontece se, e somente se, for Randers ([MATSUMOTO, 1972](#))

Neste trabalho o seguinte objeto será importante:

$$P_a = \partial_a F. \quad (2.189)$$

Satisfaz notavelmente $P_a y^a = F$ devido ao teorema de Euler e porque a função de Finsler é homogênea de grau 1, ele é homogêneo de grau 0. A definição passada parece ser útil porque, de um ponto de vista motivado pela física, a função de Finsler é algum tipo de lagrangiano (no

sentido de que ela é um integrando de um princípio de ação). Nada é mais natural do que definir um momento para esse lagrangiano e, por esse motivo, referir-se-á a ele como o momento de Finsler.

Definição: Curvas integrais

Seja $\gamma : [1, 0] \rightarrow M$ uma curva sobre uma variedade de M e $X(t) \in \mathfrak{X}$ um vetor nele. $\gamma(t)$ é chamado de curva integral de $X(t)$ se seu vetor tangente nada mais for do que $X(t)$, isto é $\dot{\gamma}(t) = X(t)$

A definição anterior é mais geral e é válida para qualquer variedade, não sendo restrita apenas ao Finsleriano. Agora é hora de recordar algumas idiossincrasias de feixes tangentes da seção anterior como a base vertical e horizontal aplicada a esse contexto. A métrica de Finsler é um tensor de ordem 2 e, portanto, pertence ao espaço do produto tensorial entre dois feixes cotangentes, se esse é o caso, pode-se simplesmente dividi-lo em feixes cotangentes horizontais e verticais. A métrica sendo decomposta em termos de suas bases verticais e horizontais, se assumir a forma de um tensor D, é chamada de métrica de Sasaki.

$$g_{ij}dx^i \otimes dx^j + g_{ij}\delta y^i \otimes \delta y^j. \tag{2.190}$$

Antes de terminar esta seção, é útil declarar algumas relações e convenções. Para cada tensor, seus índices são levantados e abaixados pela contração com a métrica de Finsler; observe também que $P_l = \frac{g_{kl}y^l}{F} = \frac{y_l}{F}$ devido ao teorema de Euler e regra da cadeia o que significa: $P_l y^l = \frac{g_{ij}y^i y^j}{F} = \frac{y_i y^i}{F}$. Agora um importante lema

Lema: Seja C_{ijk} os coeficientes da torção de Cartan, então: $C_{ijk}y^i = C_{ijk}y^j = C_{ijk}y^k = 0$.

□ Isso acontece porque a métrica de Finsler é uma função homogênea do grau 0 e pelo teorema de Euler:

$$2y^k C_{ijk} = y^{\bar{k}} \partial_{\bar{k}} g_{ij} = 0 \cdot g_{ij} \blacksquare \tag{2.191}$$

Nota: Isso também se aplica à torção de Matsumoto, uma vez que ele é apenas uma soma de duas torções de Cartan.

2.3.3 Geodésicas na geometria de Finsler

A presente seção se dedicará a estudar um princípio de mínima ação no fundo de uma geometria Finsleriana, a importância de investigar conexões em um feixe de fibras e um tensor de curvatura nessa abordagem. Uma curva sobre uma variedades pode ser parametrizada de várias maneiras, mas existe um parâmetro privilegiado no qual seu comprimento é sempre unitário; por simplicidade, o comprimento do arco em si. Se as coordenadas forem parametrizadas pelo comprimento do arco, a função Finsler $F(x, y)dt = ds$ será apenas 1 e:

$$\int F(x, y)dt = \int ds = \int g_{ij}y^i y^j ds. \quad (2.192)$$

As equações de Euler Lagrange que nos darão as condições em que essas curvas têm comprimento mínimo de arco:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{ds} \partial_{\bar{a}} - \partial_a \right) (g_{ij}y^i y^j) &= \frac{d}{ds} ((\partial_{\bar{a}} g_{ij})y^i y^j + 2g_{ij}y^i \delta_a^j) - \partial_a g_{ij}y^i y^j \\ &= \frac{d}{ds} (2C_{ija}y^i y^j + 2g_{ia}y^i) - \partial_a g_{ij}y^i y^j. \end{aligned} \quad (2.193)$$

Use o lema do final da seção anterior para verificar que o termo $2C_{ija}y^i y^j$ desaparece e expanda $\frac{d}{ds} = y^b \partial_b + \dot{y}^{\bar{b}} \partial_{\bar{b}}$. Aqui os pontos representam derivação em relação ao parâmetro.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{ds} \partial_{\bar{a}} - \partial_a \right) (g_{ij}y^i y^j) &= 2 \left(y^b \partial_b + \dot{y}^{\bar{b}} \partial_{\bar{b}} \right) (g_{ia}y^i) - \partial_a g_{ij}y^i y^j \\ &= 2 \left[\partial_b g_{ia}y^b y^i + (\partial_{\bar{b}} g_{ia})\dot{y}^{\bar{b}} y^i + g_{ia}\dot{y}^{\bar{b}} \delta_b^i \right] - \partial_a g_{ij}y^i y^j \\ &= 2 \left[\partial_b g_{ia}y^b y^i + 2C_{iab}y^b y^i + g_{ba}\dot{y}^{\bar{b}} \right] - \partial_a g_{ij}y^i y^j \\ &= 2 \left(\partial_b g_{ia}y^b y^i + g_{ba}\dot{y}^{\bar{b}} \right) - \partial_a g_{ij}y^i y^j \\ &= (2\partial_j g_{ia} - \partial_a g_{ij}) y^i y^j + 2g_{ba}\dot{y}^{\bar{b}}. \end{aligned} \quad (2.194)$$

Anule-o para ter o princípio de mínima ação:

$$\begin{aligned} 0 &= (2\partial_j g_{ia} - \partial_a g_{ij}) y^i y^j + 2g_{ba}\dot{y}^{\bar{b}} \\ &= \frac{g^{al}}{2} (2\partial_j g_{ia} - \partial_a g_{ij}) y^i y^j + \delta_b^l \dot{y}^{\bar{b}} \\ &= (G_{eod})^l + \dot{y}^l. \end{aligned} \quad (2.195)$$

Na última etapa, definiu-se um novo objeto, $(G_{eod})^l = \frac{g^{al}}{2} (2\partial_j g_{ia} - \partial_a g_{ij}) y^i y^j$ referindo-se claramente à geodésica. A última relação é a equação da geodésica, que nessa forma, é possível ver que $(G_{eod})^l$ não depende explicitamente do parâmetro, porque é escrito apenas em termos da fibra e componentes da base. Observe também que $(G_{eod})^l$ é uma função homogênea de grau 2. Inspirado por esse movimento da geodésica, pode-se definir um vetor especial chamado semi-spray como:

$$G = y^a \partial_a - (G_{eod})^{\bar{a}} \partial_{\bar{a}}. \quad (2.196)$$

Ele é especial porque se $\gamma(t) = (x(t), \dot{x}(t))$ é uma curva integral de G , então:

$$\dot{\gamma}(t) = G(t) \therefore \begin{cases} \dot{x}^a(t) = y^a(t) \\ \ddot{x}^a(t) = -(G_{eod})^a(t) \end{cases}$$

$$\dot{y}^a + (G_{eod})^a = 0.$$

Isso significa que a curva integral de G é uma geodésica porque satisfaz a equação da geodésica. Ao mesmo tempo, é uma elevação normal devido à relação entre seus componentes, tendo isso em mente, também existe um coeficiente de conexão especial que torna tudo mais interessante. É notável a semelhança entre a equação da geodésica e a auto paralela; portanto, um coeficiente de conexão pode ser definido para o qual uma geodésica não é outra coisa se não uma curva auto-paralela:

$$\dot{y}^a + (G_{eod})^a = 0$$

$$\dot{y}^a + y^{\bar{c}} N_{\bar{c}}^a = 0.$$

Pelo teorema de Euler:

$$y^{\bar{a}} \partial_{\bar{a}} (G_{eod})^b = 2(G_{eod})^b. \quad (2.197)$$

Para evitar qualquer desagrado com esse fator 2, basta redefinir esse tensor associado ao movimento geodésico como $G^b = \frac{(G_{eod})^b}{2} = \frac{g^{ab}}{4} (2\partial_j g_{ia} - \partial_a g_{ij}) y^i y^j$ e este é o chamado coeficiente de pulverização ou spray. Este novo objeto agora obedece: $2G^b = y^{\bar{a}} \partial_{\bar{a}} G^b$. Simplesmente comparando as duas equações com $\dot{y}^a + 2G^a = 0$ dessa vez, os coeficientes de conexão associados ao movimento da geodésica podem assumir a seguinte forma:

$$N_a^b = \partial_a G^b. \quad (2.198)$$

O uso do chamado símbolo formal de Christoffel vai simplificar alguns cálculos:

$$\gamma_{jk}^i := \frac{g^{il}}{2} (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}). \quad (2.199)$$

Proposição: Os coeficientes de conexão associados ao movimento da geodésica assumem a forma:

$$N_j^i = \gamma_{jk}^i y^k - g^{il} C_{ljk} \gamma_{ab}^k y^a y^b. \quad (2.200)$$

□ Primeiro observe uma propriedade interessante:

$$\begin{aligned} \partial_a [g^{ik} g_{kj}] &= \partial_a \delta_a^i = 0 \\ \partial_a g^{ik} g_{kj} + g^{ik} \partial_a g_{kj} &= 0 \\ (g^{lj} \times) \rightarrow \partial_a g^{ik} g_{kj} &= -g^{ik} \partial_a g_{kj} \\ \delta_k^l \partial_a g^{ik} &= -g^{lj} \partial_a g_{kj} g^{ik} \\ \partial_a g^{il} &= -2g^{lj} C_{kja} g^{ik} \therefore \end{aligned} \quad (2.201)$$

$$\begin{aligned} \partial_a G^i &= \frac{1}{2} [\partial_a \gamma_{jk}^i y^j y^k + 2\gamma_{jk}^i y^j \delta_a^k] \\ &= \frac{1}{4} [\partial_a g^{il} (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}) + g^{il} \partial_a (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk})] y^j y^k + \gamma_{ja}^i y^j. \end{aligned}$$

Observe que o segundo termo entre colchetes será uma soma de termos com $\partial_i C_{jkl} y^l$, que é igual a zero. Agora use a equação que derivamos primeiro:

$$\begin{aligned} N_a^i &= \gamma_{ja}^i y^j - \frac{1}{2} g^{ir} C_{rsa} g^{ls} (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}) y^j y^k \\ &= \gamma_{ja}^i y^j - g^{ir} C_{rsa} \gamma_{jk}^s y^j y^k. \blacksquare \end{aligned} \quad (2.202)$$

De agora em diante, sempre que se falar dos coeficientes de conexão, estamos nos referindo aos coeficientes de conexão associados ao movimento da geodésica.

Definição: Métricas de Finsler projetivamente equivalentes.

Diz-se que duas métricas de Finsler (ou espaços) sobre o mesmo conjunto base M são equivalentes projetivamente se tiverem a mesma geodésica sob reparametrização.

Vamos supor que F e F_{\otimes} sejam equivalentes projetivamente, portanto existe uma reparametrização tal que uma geodésica $\gamma_{\otimes}(\tau)$ em F_{\otimes} é igual à uma geodésica $\gamma(t)$ em F . Suas equações geodésicas são:

$$\begin{aligned} \dot{y}^i(t) + 2G^i(x, y) &= 0 \\ \dot{y}_{\otimes}^i(t) + 2G_{\otimes}^i(x_{\otimes}, y_{\otimes}) &= 0. \end{aligned}$$

Existe uma parametrização τ tal que $x_{\otimes}^i(\tau)|_{\tau=0} = x^i(t)|_{t=0}$ e $y_{\otimes}^i(\tau)|_{\tau=0} = y^i(t)|_{t=0}$. Esse novo parâmetro é uma transformação do parâmetro antigo com condições iniciais que sempre podemos escolher como $\tau(t)|_{t=0} = 0$ e $\dot{\tau}(t)|_{t=0} = 1$. As transformações dos componentes sob a reparametrização $t \rightarrow \tau$ geram $\dot{y}_{\otimes}^i(t) = \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} y_{\otimes}^i(\tau) + \left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^2 \dot{y}_{\otimes}^i(\tau)$, então sua equação da geodésica em $\tau = 0$ será:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} \Big|_{\tau=0} y_{\otimes}^i(0) + \left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^2 \Big|_{\tau=0} \dot{y}_{\otimes}^i(0) + 2G_{\otimes}^i(x_{\otimes}(0), y_{\otimes}(0)) = 0. \quad (2.203)$$

Mas $\dot{y}_{\otimes}^i(\tau) = \dot{y}^i(t) = -2G^i(x, y)$ e

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} \Big|_{\tau=0} y_{\otimes}^i(0) + G_{\otimes}^i(x, y) = G^i(x, y). \quad (2.204)$$

Este primeiro termo pode ser definido como: $\rho(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} \Big|_{\tau=0}$, o fator projetivo é uma função homogênea de grau 1. Portanto, dois espaços de Finsler podem ser identificados como projetivamente equivalentes se existir uma função escalar $\rho(x, y)$ de modo que satisfaça a equação que chamaremos de equação de equivalência projetiva.

$$y^i \rho(x, y) + G_{\otimes}^i(x, y) = G^i(x, y). \quad (2.205)$$

Definição: Conexão linear é uma conexão, chame-a de ∇ , que mede a taxa de variação de algum tensor T ao longo de uma direção v que satisfaz as propriedades de linearidade exibidas:

$$\nabla_v(fT) = (df)(v)T + f\nabla_v T \quad f \in \mathfrak{F} \quad (2.206)$$

$$\nabla_v(T_1 + T_2) = \nabla_v T_1 + \nabla_v T_2 \quad (2.207)$$

$$\nabla_{kv} T = k\nabla_v T \quad k \in \mathbb{R} \quad (2.208)$$

$$\nabla_{v_1+v_2} T = \nabla_{v_1} T + \nabla_{v_2} T \quad . \quad (2.209)$$

A conexão mapeia um tensor para outro tensor e se dividir os componentes nos espaços horizontal e vertical, será chamado de derivada covariante horizontal e vertical:

$$(\nabla T)_{l_1 \dots l_n}^{k_1 \dots k_m} = T_{l_1 \dots l_n \bar{a}}^{k_1 \dots k_m} dx^a + T_{l_1 \dots l_n \bar{a}}^{k_1 \dots k_m} \delta y^{\bar{a}}. \quad (2.210)$$

Aqui, os índices com o acento agudo representam o componente vertical do tensor após este ser covariantemente derivado e a seta representa o componente horizontal do tensor covariantemente derivado. Seria muito bom representar derivadas covariantes horizontais com os índices barrados (ou vertical para se encaixar melhor com uma notação de Einstein), mas como esses índices já acumulam muito significado, é melhor deixar como está. Uma forma explícita deles é exibida e também será referida neste trabalho como:

$$\nabla_{\acute{a}} T_{l_1 \dots l_n}^{k_1 \dots k_m} = T_{l_1 \dots l_n \acute{a}}^{k_1 \dots k_m} = \partial_{\acute{a}} T_{l_1 \dots l_n}^{k_1 \dots k_m} \quad (2.211)$$

$$\nabla_{\bar{a}} T_{l_1 \dots l_n}^{k_1 \dots k_m} = T_{l_1 \dots l_n \bar{a}}^{k_1 \dots k_m} = \delta_a T_{l_1 \dots l_n}^{k_1 \dots k_m} + \sum_i^m T_{l_1 \dots l_n}^{k_1 \dots \kappa \dots k_m} \Gamma_{\kappa a}^{k_i} - \sum_i^n T_{l_1 \dots \kappa \dots l_n}^{k_1 \dots k_m} \Gamma_{l_i a}^{\kappa}. \quad (2.212)$$

Vamos representar um vetor de base, no qual atuou uma conexão Linear da seguinte forma $\nabla_v \partial_j = \omega_j^i(v) \partial_i$ ou vetores duais $\nabla_v dx^j = -\omega_j^i(v) dx^i$. A derivada covariante desta forma obedecerá à equação estrutural de Cartan: $D^h \omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ (NAKAHARA, 1990) em que a operação D^h significa $D^h[T(X_0, \dots, X_n)] = dT[X_0^h, \dots, X_n^h]$ para $T \in \mathfrak{T}(TM)$. Um teorema importante afirma que existe apenas uma conexão linear e é chamada de conexão de Chern. Algumas propriedades se aplicam a essa conexão, em especial a condição de torção nula e a chamada quase compatibilidade- g (BAO et al., 2004):

$$dg_{ij} - g_{kj} \omega_i^k - g_{ik} \omega_j^k = 2 \frac{C_{ijk}}{F^2} \delta y^k. \quad (2.213)$$

Teorema de Chern: Seja (M, F) uma variedade de Finsler. A conexão de Chern é a única conexão linear no feixe do pull-back π^*TM .

$$\omega_j^i = \frac{g^{il}}{2} (\delta_k g_{lj} + \delta_j g_{kl} - \delta_l g_{jk}) dx^k. \quad (2.214)$$

□ De uma maneira geral, ela tem a forma: $\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k + Z_{jk}^i dy^k$ mas é livre de torção, portanto:

$$dx^j \wedge \omega_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k \wedge dx^j + Z_{jk}^i dy^k \wedge dx^j = 0. \quad (2.215)$$

Isso significa que $Z_{jk}^i = 0$ e $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$, usa-se a quase compatibilidade- g para ter:

$$\Gamma_{ijk} + \gamma_{jik} = \partial_k g_{ij} - 2 \frac{C_{ijl} N_k^l}{F^2}. \quad (2.216)$$

Use a simetria recém-derivada e o chamado truque de Christoffel executando o cálculo: $2\Gamma_{(ij)k} - 2\Gamma_{(jk)i} + 2\Gamma_{(ki)j}$. isso leva à forma:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{g^{il}}{2} (\delta_k g_{lj} + \delta_j g_{kl} - \delta_l g_{jk}) \blacksquare. \quad (2.217)$$

A partir de agora, isso será tratado como uma definição para Γ_{jk}^i

Os coeficientes da conexão de Chern Γ_{jk}^i são algumas vezes chamados de símbolo de Christoffel devido à semelhança com o símbolo padrão de Christoffel nas variedades de Riemann, diferindo apenas pela substituição de coordenadas tangentes pela horizontal. Em analogia com a geometria de Riemann, um tensor associado à comutatividade dos vetores nesse espaço pode ser definido e é chamado de curvatura. A particularidade da geometria de Finsler, no entanto, reside no fato de que ela é construída sobre um feixe tangente e preservar suas particularidades significa preservar a divisão horizontal e vertical, por isso a chamada 2-forma de curvatura é definida desta maneira:

$$\Omega = D^h \omega. \quad (2.218)$$

Proposição: $d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$.

□ Abra em cálculos explícitos o termo $X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$

$$\begin{aligned}
&= X^\mu \partial_\mu Y^\nu \omega_\nu + X^\mu Y^\nu \partial_\mu \omega_\nu - Y^\nu \partial_\mu X^\nu \omega_\nu - Y^\nu X^\mu \partial_\mu \omega_\nu - \omega_\nu (X^\mu \partial_\mu Y^\nu - Y^\mu \partial_\mu X^\nu) \\
&= \partial_\mu \omega_\nu (X^\mu Y^\nu - X^\nu Y^\mu) \\
&= X[\omega_\nu] Y^\nu - Y[\omega_\nu] X^\nu.
\end{aligned} \tag{2.219}$$

Mas isto é justamente $d\omega$ em termos de componentes ■

Para ver sua semelhança com a curvatura da geometria de Riemann, pegue dois vetores X e Y em $H_p P$ e calcule sua 2-forma de curvatura usando a equação estrutural de Cartan e a proposição acima. Lembre-se de que ω se anula quando aplicado a qualquer vetor horizontal:

$$\begin{aligned}
\Omega(X, Y) &= d\omega(X, Y) - \omega \wedge \omega(X, Y) \\
&= X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) - [\omega(X), \omega(Y)] \\
&= -\omega([X, Y])
\end{aligned} \tag{2.220}$$

Isso significa que, se os vetores X e Y comutarem ou mesmo se o comutador for horizontal, então Ω desaparecerá. O que assegura que a noção de espaços planos e curvos permanece a mesma da geometria de Riemann, se forem restringido todos os vetores apenas para o conjunto base. Observe que a curvatura 2-forma mede o componente vertical do comutador $[X, Y]$ e é o fator que impede o levantamento horizontal de um loop sobre o conjunto de bases a ser fechado (NAKAHARA, 1990). Se expandi-lo em termos de componentes, encontraremos:

$$\Omega_j^i = R_{jkl}^i dx^k \wedge dx^l + 2P_{jkl}^i dx^k \wedge \delta y^l + Q_{jkl}^i \delta y^k \wedge \delta y^l. \tag{2.221}$$

Como a conexão Chern é livre de torção: $Q_{jkl}^i = 0$, $R_{(jkl)}^i = 0$ é antissimétrica em termos de coordenadas base: $R_{jkl}^i = -R_{jlk}^i$ (BAO; CHERN; SHEN, 2000). Nas coordenadas naturais, os componentes assumem a forma:

$$R_{jkl}^i = \delta_k \Gamma_{jl}^i - \delta_l \Gamma_{jk}^i + \Gamma_{ak}^i \Gamma_{jl}^a - \Gamma_{al}^i \Gamma_{jk}^a \tag{2.222}$$

$$P_{jkl}^i = -F \partial_l \Gamma_{jk}^i. \tag{2.223}$$

Observe que, se as conexões Chern não dependerem dos componentes da fibra, R_{jkl}^i passa a ser o tensor Riemann de uma variedade Riemanniana e $P = 0$. Dando alguns passos para trás, considere duas funções de Finsler sobre a mesma variedade F e F_{\otimes} , em seguida use a derivada horizontal e vertical de F em termos dos componentes de F_{\otimes} .

$$\nabla_{\bar{a}}F = \left(\partial_a - N_{a\otimes}^{\bar{l}} \partial_{\bar{l}} \right) F = F_{\bar{a}} \qquad \nabla_{\dot{a}}F = \partial_{\bar{a}}F = F_{\dot{a}}. \quad (2.224)$$

Execute os seguintes cálculos considerando $N_{a\otimes}^{\bar{l}}$ como os coeficientes de conexão de F_{\otimes} associados ao movimento geodésico (esteja ciente de que $y^j \partial_{\bar{a}} N_j^i = N_a^i$):

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{l}} &\rightarrow F_{\bar{k}} = \partial_k F - N_{k\otimes}^{\bar{a}} \partial_{\bar{a}} F \\ F_{\bar{k}\bar{l}} &= \partial_{\bar{l}} (\partial_k F - N_{k\otimes}^{\bar{a}} \partial_{\bar{a}} F) \\ y^k F_{\bar{k}\bar{l}} &= y^k \partial_{\bar{l}}^2 F - y^k \partial_{\bar{l}} N_{k\otimes}^{\bar{a}} \partial_{\bar{a}} F - \partial_{\bar{k}} G_{\otimes}^{\bar{a}} y^{\bar{k}} \partial_{\bar{l}\bar{a}}^2 F \\ &= y^k \partial_{\bar{k}\bar{l}}^2 F - N_{l\otimes}^{\bar{a}} \partial_{\bar{a}} F - 2G_{\otimes}^{\bar{a}} \partial_{\bar{l}\bar{a}}^2 F. \end{aligned} \quad (2.225)$$

O símbolo $\partial_{\bar{k}\bar{l}}^2$ representa a segunda derivada $\partial_{\bar{k}\bar{l}}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial y^{\bar{l}}}$ e os coeficientes de spray $G_{\otimes}^{\bar{a}}$. Agora multiplique por -1 e some $-\partial_{\bar{l}}F$ dos dois lados para chegar a:

$$y^k \partial_{\bar{k}\bar{l}}^2 F - \partial_{\bar{l}}F = y^k F_{\bar{k}\bar{l}} - F_{\bar{l}} + 2G_{\otimes}^{\bar{a}} \partial_{\bar{l}\bar{a}}^2 F. \quad (2.226)$$

A expressão no lado esquerdo é quase os coeficientes de spray, conforme definidos no início, porque $G^i = \frac{1}{2} \gamma_{jk}^i y^j y^k = \frac{F}{2} g^{ik} \left(y^j \partial_{j\bar{k}}^2 F - \partial_k F \right)$, então faça acontecer:

$$\begin{aligned} \frac{F}{2} g^{il} (y^k \partial_{\bar{k}\bar{l}}^2 F - \partial_{\bar{l}}F) &= \frac{F}{2} g^{il} (y^k F_{\bar{k}\bar{l}} - F_{\bar{l}}) + \frac{F}{2} g^{il} 2G_{\otimes}^{\bar{a}} \partial_{\bar{l}\bar{a}}^2 F \Rightarrow g_{l\bar{a}} = \partial_{\bar{l}}F \partial_{\bar{a}}F + F \partial_{\bar{l}\bar{a}}^2 F \\ G^i &= \frac{F}{2} g^{il} Q_l + G_{\otimes}^a (\delta_a^i - g^{il} \partial_{\bar{a}}F \partial_{\bar{l}}F) \Rightarrow \partial_{\bar{l}}F = P_l = \frac{y_l}{F} \\ &= \frac{F}{2} g^{il} Q_l + H y^i + G_{\otimes}^i \end{aligned} \quad (2.227)$$

Aqui foram definidos dois novos tensores: $Q_l = y^k F_{\bar{k}\bar{l}} - F_{\bar{l}}$ e $H = -\frac{G_{\otimes}^a}{F} \partial_{\bar{a}}F$, é possível definir H sem apelar para o coeficiente de spray como $H = y^k \frac{F_{\bar{k}} - \partial_k F}{2F}$ pois:

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{k}}F &= \partial_k F - N_{k\otimes}^{\bar{a}} \partial_{\bar{a}}F \\ \frac{y^k}{2F} F_{\bar{k}} &= \frac{y^k}{2F} \partial_k F - \frac{y^k \partial_{\bar{k}} G_{\otimes}^{\bar{a}}}{2F} \partial_{\bar{a}}F \\ &= \frac{y^k}{2F} \partial_k F - \frac{G_{\otimes}^{\bar{a}}}{F} \partial_{\bar{a}}F. \end{aligned} \quad (2.228)$$

Teorema: Para métricas de Finsler F e F_{\otimes} sobre a mesma variedade, definindo o tensor $Q_l = y^k F_{\bar{k}l} - F_{\bar{l}}$, então F e F_{\otimes} são projetivamente equivalentes se e somente se $Q_l = 0$.

□ Observe os dois sistemas de equações, o primeiro válido para métricas de Finsler projetivamente equivalentes e o outro, o que acabamos de derivar.

$$\begin{aligned} G^i(x, y) &= G_{\otimes}^i(x, y) + y^i \rho(x, y) \\ G^i(x, y) &= G_{\otimes}^i(x, y) + y^i H(x, y) + \frac{F}{2} g^{il} Q_l. \end{aligned} \quad (2.229)$$

Se eles são de fato projetivamente equivalentes, o seguinte é verdadeiro:

$$y^i \rho(x, y) = y^i H(x, y) + \frac{F}{2} g^{il} Q_l. \quad (2.230)$$

Uma multiplicação de y_i em ambos os lados e usando o fato de que $y^i Q_i = 0$ leva a:

$$\rho(x, y) = H(x, y). \quad (2.231)$$

o que significa que $Q_i = 0$. Mas se era zero desde o início, a sentença é trivial ■

Se alguma função de Finsler é projetivamente equivalente a um espaço euclidiano (espaços de Riemann sem curvatura), então é dito que é projetivamente plano. Nos espaços euclidianos, as geodésicas são simplesmente linhas retas; portanto, por causa disso, as métricas projetivamente planas são as que geram geodésicas de linhas retas.

Este foi o estudo de espaços semelhantes entre si, no sentido de que eles reproduzem a mesma geodésica. Agora, uma pergunta a ser respondida é como a integração ocorre na geometria de Finsler. Para isso, uma medida deve ser definida e uma família de formas que possam assumir o lugar da forma do volume. Essa forma geralmente é descrita pelo produto cunha (wedge product) de n formas em que n é a dimensão do espaço e o produto cunha é definido como:

$$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n := A_{[1} \otimes \cdots \otimes A_n]. \quad (2.232)$$

2.3.4 Integração no espaço de Finsler

Seja γ uma curva suave por partes (piecewise smooth curve), isso significa que é uma curva que pode ser cortada em n pedaços e é suave em cada um deles. Chame $[a, b]$ este intervalo e $a = I_0 < \dots < I_n = b$ os cortes, então uma curva suave por partes é simplesmente:

$$\gamma : [I_{i-1}, I_i] \rightarrow M \quad \text{é suave } \forall 1 \leq i \leq n. \quad (2.233)$$

Como foi discutido no início, o comprimento do arco de uma geometria Finsleriana é motivado de alguma forma por uma generalização daqueles provenientes da geometria de Riemann. Essa discussão ainda se aplica aqui, portanto o comprimento $\mathcal{L}(\gamma)$ de uma determinada curva suave por partes γ será definida da seguinte forma:

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt. \quad (2.234)$$

O ponto sobre a curva $\dot{\gamma}(t)$ significa derivação em relação ao parâmetro t e se for alterado o parâmetro $t \rightarrow \tau$ então $\gamma(t) = \gamma(\tau)$ e $\dot{\gamma}(t) = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial \gamma(\tau)}{\partial \tau}$ como uma questão de conveniência representa-se a derivada em relação a τ como: $\gamma'(\tau)$. O comprimento dessa mesma curva, mas com parametrização diferente, será dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma) &= \int_a^b F(\gamma(\tau), \frac{\partial \tau}{\partial t} \gamma'(\tau)) dt = \int_a^b F(\gamma(\tau), \gamma'(\tau)) \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} dt \right) \\ &= \int_a^b F(\gamma(\tau), \gamma'(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (2.235)$$

É independente da parametrização como deveria ser. O próximo passo é construir uma teoria de medidas introduzindo uma função distância $\delta(a, b)$ que seja real e não negativa entre dois pontos, digamos p e q em M e satisfaça:

$$\begin{aligned} \delta(p, q) &= \delta(q, p) \\ \delta(p, q) &= 0 \quad \text{if } p = q \\ \delta(p, q) &\leq \delta(p, l) + \delta(l, q) \quad \forall l \in M. \end{aligned} \quad (2.236)$$

Se essa função existe, então nosso espaço pode ser chamado de espaço métrico. Vamos denotar $\Gamma(M)$ o espaço de todas as curvas suaves por partes de um determinado intervalo $I \in \mathbb{R}$ a M e uma função métrica pode ser construída da seguinte maneira:

$$\delta(p, q) := \inf_{\Gamma(M)} \mathcal{L}(\gamma) \quad (2.237)$$

Proposição: $\delta(p, q) := \inf_{\Gamma(M)} \mathcal{L}(\gamma)$ é uma função métrica para cada curva regular

□

A primeira condição é comprovada pela existência de curva inversa dada por: $\gamma^{(-)}(t) = \gamma(b + a - t)$ para $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ e observando que $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\gamma^{(-)})$

A segunda condição deve ser dividida em duas etapas: primeiro é que $\delta(p, q) = 0$ se $p = q$ o que é óbvio na definição. O segundo passo é que $p = q$ se $\delta(p, q) = 0$. Isso significa que, ao impor para $\delta(p, q) = 0$ existe algum $\gamma \in \Gamma(M)$ para o qual $\mathcal{L}(\gamma) = 0$, se assim for usando o teorema do valor médio para o tratamento integral de $F(\gamma(\tau), \dot{\gamma}(\tau))$ como uma função do parâmetro: $F(\tau)$ e sabendo a existência de algum $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que.

$$\int_b^a F(\tau) = F(\lambda)(a - b). \quad (2.238)$$

Mas então F é positivo, definindo o que significa que $F(\lambda)(a - b) = 0$ apenas se $(a - b) = 0$ o que conclui o segundo passo.

E o terceiro é apenas uma questão de desigualdade de triângulos para integrais ■

Para encontrar uma medida nesse espaço, primeiro é necessário definir o diâmetro $d(X)$ de um subconjunto $X \in M$ que será tratado como:

$$d(X) = \sup_{p, q \in X} \delta(p, q). \quad (2.239)$$

Agora, seja $X_i \in X$ uma família de subconjuntos que forma uma cobertura contável para X , isto é: $\bigcup_i X_i = X$ e todas as possíveis coberturas contáveis de X formam um conjunto indicado como: $\Lambda(X)$. De todos os elementos de $\Lambda(X)$ vamos nos restringir apenas aos elementos aos quais: $d(X_i) < \epsilon$ para algum $\epsilon > 0$ em \mathbb{R} e construa o subconjunto $\Lambda_\epsilon(X) \subset \Lambda(X)$. Finalmente, a chamada medida n-dimensional de Hausdorff pode ser estabelecida com $\lambda(n)$ um parâmetro, dependendo da dimensão:

$$\mu(X) = \lambda(n) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_{\Lambda_\epsilon(X)} \sum_i d^n(X_i). \quad (2.240)$$

Isso nos leva a dizer que um subconjunto aberto $U \subset M$ no sentido de um espaço métrico com a função de distância como definida acima, é dito ter o volume $V(U)$ na geometria de Finsler dada por:

$$V(U) = \int dv = \mu(U). \quad (2.241)$$

Toda métrica de Finsler em uma variedade n-dimensional M define uma forma de volume (CHERN; SHEN, 2005) e aqui dv é essa forma de volume de Finsler. Para um ponto $x \in M$, denote ∂_i uma base para $T_x M$ e seu dual dx^i uma base de $T_x^* M$ para que se possa determinar o volume a menos da orientação como:

$$dv := \sigma(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \quad (2.242)$$

Para $\sigma(x)$ um objeto que normalmente é chamado medida de Busemann. Determiná-lo não é uma tarefa fácil, portanto para o entendimento completo do tópico, é recomendada a seguinte referência: (BUSEMANN, 1947) além disso, o que será feito aqui é um resumo rápido deste artigo.

Defina $F(y)$ como a norma de Minkowski do espaço, e $(V, F(y))$ é chamado de espaço de Minkowski para $y \in V$ um espaço vetorial. A indicatriz de $(V, F(y))$ é um subespaço do espaço de Minkowski $S \subset (V, F(y))$ é definido da seguinte maneira:

$$S := \{y \in V | F(y) = 1\}. \quad (2.243)$$

Considere K uma variedade de dimensões $k < n$ dentro do espaço original de Finsler, γ será uma curva em K e γ^i são os componentes dessa curva dentro do espaço inteiro. Tome o conjunto de coordenadas: $x(\gamma) \in M$, $y(\gamma) \in T_x M$ e $\xi = \sum \frac{\partial x}{\partial \gamma^i} \zeta^i \in T_x K$ em seguida, construa para ambos um espaço de Minkowski: $(T_x M, F(y))$ e $(T_x K, F(\zeta))$. Desses espaços de Minkowski tome as suas indicatrizes: $S_y \subset (T_x M, F(y))$ e $S_\zeta \subset (T_x K, F(\zeta))$ denote $[A_y(x)]^{-1}$ e $[A_\zeta(x)]^{-1}$ respectivamente a área de dimensão $k < n$ que é delimitada por S_y e S_ζ o seguinte se aplica como explicado em (HAUPT, 1938):

$$A_y(\gamma)/A_\zeta(\gamma) = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \left(\frac{\partial(x_{j_1} \cdots x_{j_k})}{\partial(\gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_k})} \right) := A_s(\gamma). \quad (2.244)$$

Então considere Y como um conjunto mensurável dentro de K , isso significa $Y \subset K$ e calcule sua medida de Hausdorff:

$$\mu(Y) = \int_Y A_y(\gamma) d\gamma_1 \cdots d\gamma_n = \int_Y A_s(\gamma) A_\zeta(\gamma) d\gamma_1 \cdots d\gamma_n. \quad (2.245)$$

No caso de uma variedade k dimensional regular K de classe C^1 , o integrando é simplesmente $|\xi| = \sqrt{\sum (\xi^i)^2}$ a interseção de qualquer plano com 0 é uma esfera unitária da área $\lambda(k)$ para que a expressão padrão se torne:

$$\mu(Y) = \int_M A_s(\gamma) d\gamma. \quad (2.246)$$

Portanto, a medida de Busemann pode ser escrita em termos de uma bola unitária $B^n \in \mathbb{R}$ em um espaço métrico euclidiano para sua métrica dada pela função módulo: $|a - b|$. Além disso, defina a função de volume euclidiano: ν como um mapa dos subespaços de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ para o respectivo volume. Posto isto, a medida de Busemann assume a forma:

$$\sigma(x) = \frac{\nu(B^n)}{\nu(\{y^i \in \mathbb{R}^n | F(x, y^i \partial_i) < 1\})}. \quad (2.247)$$

Um exemplo instrutivo é o caso da métrica de Riemann para a qual $F = \sqrt{\alpha_{ij} y^i y^j}$ onde α_{ij} é uma matriz positivo definida e não degenerada.

Calcular a medida de Busemann é, em muitos casos, uma questão de colocar um volume em termos do outro, porque existem poucos casos em que essas expressões existem como funções elementares. Uma maneira de fazer isso é a seguinte: primeiro vamos chamar de $S := \{y^i \in \mathbb{R}^n | F(x, y) < 1\}$ o conjunto em \mathbb{R}^n contendo os componentes dos vetores do espaço tangente dentro da indicatriz. Pode existir um mapa desse subconjunto para a bola unitária na forma de uma transformação $A : S \rightarrow B^n$, para que exista, ele deve transformar a função distância em Finsler na euclidiana fazendo $A : y \mapsto \xi$.

$$F(x, y) = \sqrt{y^t \alpha y} \rightarrow \sqrt{(A^{-1} \xi)^t \alpha A^{-1} \xi} = \sqrt{\xi^t (A^{-1})^t \alpha A^{-1} \xi} \quad (2.248)$$

$$= |\xi - 0|. \quad (2.249)$$

Conclui-se que deve satisfazer:

$$\xi^t (A^{-1})^t \alpha A^{-1} \xi = \xi^t \xi. \quad (2.250)$$

O que só é possível se:

$$(A^{-1})^t \alpha A^{-1} = I \Rightarrow \det(A) = \sqrt{\det(\alpha)}. \quad (2.251)$$

Dito isto, calcula-se as relações entre os volumes como uma mudança de coordenada de y para ξ e o jacobiano da transformação será $\det(A^{-1})$. Isso significa que se y estiver localizado em S e $Ay = \xi$ estiver localizado em B^n , então:

$$\nu(S) = \int_S d^n y = \int_{B^n} \det(A^{-1}) d^n \xi = \frac{1}{\sqrt{\det(\alpha)}} \int_{B^n} d^n \xi = \frac{\nu(B^n)}{\sqrt{\det(\alpha)}}. \quad (2.252)$$

É tudo o que precisamos para encontrar a medida, porque o termo $\nu(B^n)$ será cancelado e a expressão que está sendo perseguida é a seguinte:

$$\sigma(x) = \sqrt{\det(\alpha)}. \quad (2.253)$$

Um caso mais próximo do que será tratado neste trabalho é a geometria de Randers, a partir da qual será mostrado como derivar sua medida de Busemann também. Vamos estabelecer a notação para $F = \sqrt{y^t \alpha y} + \beta(y)$ e $\beta(\star)$ é um funcional linear que atua em y , mas devido ao teorema de Riez existe um vetor β que satisfaz: $\beta(y) = \beta^t y$. Para encontrar essa medida, é necessária uma etapa intermediária, pois existe uma transformação linear L que mapeia $L : y \mapsto \xi$ com a seguinte relação:

$$y^t(\alpha - \beta\beta^t)y + 2\beta^t y + \beta^t(\alpha - \beta\beta^t)^{-1}\beta = \xi^t \xi \quad (2.254)$$

A transformação L será definida como: $\xi = Ay + \gamma$ com esses termos satisfazendo $A^t A = \alpha - \beta\beta^t$ e $\gamma^t A = \beta^t$ o que deixa: $\gamma^t \gamma = \beta^t(\alpha - \beta\beta^t)\beta$. Usando a identidade 9 do apêndice A, pode-se calcular o inverso da matriz:

$$(\alpha - \beta\beta^t)^{ij} = \alpha^{ij} + \frac{\alpha^{ik} \beta_k \alpha^{jl} \beta_l}{1 - \alpha^{kl} \beta_k \beta_l}. \quad (2.255)$$

O que significa que essa transformação pega vetores em S e lança-os em algum espaço que satisfaça: $|\xi^t \xi|^2 < 1 + \frac{\alpha^{ij} \beta_i \beta_j}{1 - \alpha^{ij} \beta_i \beta_j}$ chame a imagem deste operador para este domínio específico $\Omega = \{Ly | y \in S\}$ ou também é válido: $\Omega = \{\xi \text{ satisfaz } |\xi| \leq \sqrt{(1 - \alpha^{ij} \beta_i \beta_j)^{-1}}\}$. Essa transformação gerará um jacobiano igual a $\det(A^{-1})$ porque é linear e γ não contribui.

$$\int_S dy^1 \cdots dy^n = \int_\Omega \det(A^{-1}) d\xi^1 \cdots \xi^n. \quad (2.256)$$

Para achar $\det(A^{-1})$ usa-se o que foi afirmado antes: $A^t A = \alpha - \beta\beta^t$ e chega-se em $\det(A^t A) = \det(\alpha - \beta\beta^t)$ ou também: $\det(A^{-1}) = \sqrt{\det(\alpha - \beta\beta^t)^{-1}}$, e assim use a identidade número 8 do apêndice A para chegar a:

$$\det(A) = \sqrt{\det(\alpha)} \sqrt{1 - \beta^t \alpha^{-1} \beta}. \quad (2.257)$$

O segundo passo é uma transformação de deslocamento simples, porque o que falta é chegar à região $|\xi^t \xi| < 1$ e isso é simplesmente feito pelo deslocamento de cada componente por esse termo, o que significa: $\xi^i \rightarrow \left(1 + \frac{\alpha^{ij} \beta_i \beta_j}{1 - \alpha^{ij} \beta_i \beta_j}\right) \xi^i = (1 - \alpha^{ij} \beta_i \beta_j)^{-\frac{1}{2}} \xi^i$ e esse jacobiano é simplesmente o produto de toda essa escala das componentes de ξ . Chame dv de forma de volume euclidiano e o resultado é o seguinte:

$$\int_S dy^1 \cdots dy^n = \int_\Omega \frac{d\xi^1 \cdots \xi^n}{\sqrt{\det(\alpha)} \sqrt{1 - \beta^t \alpha^{-1} \beta}} = \int_{B^n} \frac{(1 - \beta^t \alpha^{-1} \beta)^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{1 - \beta^t \alpha^{-1} \beta}} \frac{dv}{\sqrt{\det(\alpha)}}. \quad (2.258)$$

Agora é apenas uma questão de comparação novamente: $\nu(S) = \frac{1}{d\sigma(x)} \nu(B^n)$ e observar que todos esses jacobianos são apenas funções de x , o que leva a:

$$d\sigma(x) = (1 - \beta^t \alpha^{-1} \beta)^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{\det(\alpha)}. \quad (2.259)$$

Em linhas simples, essa era a abordagem padrão da geometria de Finsler. Como se pode observar, esse quadro parece promissor na generalização da geometria de Riemann, mas isso não significa que a interpretação física dessa nova possibilidade seja imediata da anterior. Na relatividade geral, as variedades de Riemann são o fundo matemático em que a teoria é construída, mas são necessárias algumas modificações para aplicá-la à realidade física.

O requisito da invariância de Lorentz é exatamente o que leva à causalidade em uma teoria, separando caminhos e vetores sobre essa variedade em três categorias: do tipo espaço, do tipo luz e do tipo tempo. A construção dessa estrutura no espaço-tempo, conhecida como cone de luz, é feita por um requisito simples da métrica riemanniana: que sua métrica possui assinatura minkowskiana. Observe que a existência de cones de luz na geometria de Finsler não é uma tarefa alcançada tão facilmente como no caso anterior.

Mesmo que este seja uma tarefa complicada, o presente trabalho tem algumas facilidades, porque não se trata de um caso geral, mas de um pano de fundo da teoria Bi-métrica. Observe

que, pelas equações geodésicas das partículas pontuais no final da seção Bi-métrica (ou mesmo em sua ação não é difícil de ver), essa teoria se comporta como duas métricas de Riemann independentes. A questão é para quais se deve considerar a invariância de Lorentz?

Se insistirmos em estar mais apegados à motivação física e deixar apenas uma métrica ser pseudo-riemanniana, a outra, parecer realmente uma métrica auxiliar e estará perturbando a invariância de Lorentz. Se supusermos que essa métrica auxiliar dê pequenas contribuições, surge um cenário interessante para as teorias de violação da invariância de Lorentz.

Por outro lado, se ambas as métricas receberem uma assinatura Minkowskiana, ela gerará mais de três tipos de vetores, pois isso significaria que cada uma das métricas terá um cone de luz denominando vetores do tipo tempo, espaço e luz com referência a uma das duas métricas. Isso significa que existe uma região do espaço onde vetores são ao mesmo tempo, do tipo espaço e tempo, referentes às diferentes métricas. Mesmo que essas discussões sejam especulações, já que este trabalho não vai tão fundo nesses detalhes, algumas iniciativas para construir um espaço-tempo de Finsler são precisas e bem definidas, como foi tratado em (PFEIFER, 2017).

3 ELEMENTOS DA GEOMETRIA DE FINSLER

Após a discussão apresentada no capítulo anterior, a geometria de Finsler aparece como uma área promissora de investigação para comportar uma teoria física. Encontrar uma abordagem adequada de uma maneira motivada por Bi-gravidade ou gravidade massiva é o objetivo deste capítulo. Antes de abordar o nosso caso específico do espaço de Finsler, é interessante estabelecer algumas analogias entre nossa formulação matemática e o princípio de mínima ação. Se o comprimento da curva em uma variedade Finsleriana deve ser identificada com a ação física, é fácil ver que a função homogênea de Finsler executa o papel da função de Lagrange para algum parâmetro t :

$$S = \int F(x, y) dt. \quad (3.1)$$

Nesse caso, a geodésica nesse espaço são apenas as trajetórias físicas e as equações de Euler-Lagrange das funções de Finsler são as equações de movimento relacionadas a algum sistema. Essa imagem gera uma série de analogias com a realidade física e a estrutura matemática da teoria de uma maneira que as seguintes definições surgem naturalmente:

$$\begin{array}{ll} P_a = \partial_a F & \text{Momento de Finsler} \\ \Phi_i = \partial_i F & \text{Força de Finsler.} \end{array}$$

Algumas coisas já foram ditas sobre o momento de Finsler, mas é bom lembrar que $P_i = \frac{y_i}{F}$, entre outras propriedades interessantes derivadas do teorema de Euler para funções homogêneas. Vale a pena mencionar $P_a y^a = F$ porque, em certo sentido, F deve ser visto como o comprimento infinitesimal $F dt = ds$ e uma atenção especial a $P_a P^a = 1$ porque parece uma analogia importante com o invariante $p_j p^j = -m^2$ da teoria de campos quânticos relativísticos. Observe que algumas relações conhecidas da mecânica padrão também podem ser aplicadas aqui, como: sobre uma geodésica se $\Phi_i = 0$ então P_i é uma constante de movimento. Algumas vezes a métrica de Finsler será tratada da seguinte maneira por conveniência:

$$g_{ab} = P_a P_b + F \partial_a P_b. \quad (3.2)$$

Um caso interessante é a tentativa de definir algum tipo de Hamiltoniano que resultaria em uma função identicamente nula:

$$H = P_i y^i - F = 0. \quad (3.3)$$

3.1 Um olhar diferente

3.1.1 Métrica

Antes de especificar o espaço, revelando o que é F , é mais razoável estudar o caso geral. A esperança é que isso possa facilitar o uso de algumas propriedades difíceis de ver no caso específico. Primeiro, reescreva a métrica no formato:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j} F^2 \\ &= \frac{\partial}{\partial y^i} (F \partial_j F) \\ &= \frac{\partial y_j}{\partial y^i}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Aqui pode-se considerar y_j como uma função de y^i , ou seja: $y_j = y_j(y^i)$ e quando considerar o contrário $y^j = y^j(y_i)$ Então uma proposição pode ser declarada.

Proposição: O inverso dessa métrica é: $g^{ij} = \frac{\partial y^j}{\partial y_i}$

□ só precisa provar que $g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$ e isso é realizado facilmente com a regra da cadeia:

$$\frac{\partial y^j}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial y^j} = \delta_k^i \blacksquare. \quad (3.5)$$

Com base nessa forma geral da métrica, pode-se derivar formas mais convenientes (ou não) dos outros objetos em um espaço Finsleriano, esse será o destino desta seção. Pode-se encontrar uma derivação detalhada desses objetos no espaço específico de Finsler (que será proposto nas últimas seções) nos apêndices. Por enquanto, a primeira coisa a observar é a relação entre y_i e a função Finsler:

$$\begin{aligned} y_k &= F P_k \\ &= F \partial_k F \\ &= \frac{1}{2} \partial_k F^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Observe que, derivando-o em relação às coordenadas da fibra, ele se torna o tensor métrico novamente, como deveria ser.

3.1.2 Coeficientes de spray e torção de Cartan

O caso mais simples é a torção de Cartan, que nada mais é do que uma derivada da métrica:

$$C_{ijk} = \frac{1}{2} \partial_{\bar{k}} g_{ij}. \quad (3.7)$$

Com a forma reescrita acima para a métrica, não é difícil perceber que a torção de Cartan é simplesmente dada por:

$$C_{ijk} = \frac{1}{2} \partial_{\bar{j}\bar{k}}^2 y_i. \quad (3.8)$$

Lembrando o teorema de Cartan, note-se que isso não é suficiente para afirmar que $C_{ijk} = 0$ para todo espaço riemanniano. É necessária a torção média de Cartan, que significa apenas multiplicá-la por g^{-1} :

$$\begin{aligned} I_i &= \frac{1}{2} g^{jk} \partial_{\bar{j}\bar{k}}^2 y_i \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial y^j}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y^j} \left(\frac{\partial y_i}{\partial y^k} \right) = -\frac{1}{2} g^{ik} \frac{\partial g^{jk}}{\partial y^j} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{\partial y_i}{\partial y^k} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial y_k}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

O que se pode dizer sobre os espaços Finslerianos é que eles serão Riemannianos quando a métrica inversa não depender de y^i ou se a métrica em si não depender de y_i . É válido dizer que y^i e x^i são independentes um do outro, mas, em geral, y_i é uma função de x^i e y^i porque $g = g(x, y)$. Voltando agora aos coeficientes de pulverização, é bom indicar algumas relações antes de calculá-las, como:

$$\partial_k g^{ij} y_j = -g^{ij} \partial_k y_j. \quad (3.10)$$

Isso acontece porque $\partial_k y^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^k} = 0$ para $y^i = g^{ij} y_j$ só precisa usar a regra da cadeia e depois isolar $g^{ij} \partial_k y_j$ para ver o seguinte:

$$\begin{aligned} g^{ij} \partial_k y_j &= \partial_k (g^{ij} y_j) - \partial_k g^{ij} y_j \therefore \\ &= -\partial_k g^{ij} y_j. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Agora, indo para o cálculo do coeficiente de pulverização, é exibida sua expressão como derivada no capítulo 2:

$$G^i = \frac{g^{ij}}{4} (2\partial_k g_{lj} - \partial_j g_{kl}) y^k y^l. \quad (3.12)$$

Note que porque:

$$\partial_k g_{lj} y^k y^l = \partial_k g_{jl} y^k y^l. \quad (3.13)$$

Pode-se também escrever:

$$G^i = \frac{\gamma_{jk}^i y^j y^k}{2}. \quad (3.14)$$

Esta forma é útil para ver a semelhança com a geometria de Riemann, já que γ_{jk}^i executa o papel dos coeficientes de conexão, mas não será amplamente utilizado aqui. Apenas colocando as coordenadas da fibra dentro das derivadas aos quais eles comutam:

$$\begin{aligned} G^i &= \frac{g^{ij}}{4} (2\partial_k g_{lj} - \partial_j g_{kl}) y^k y^l \\ &= \frac{g^{ij}}{4} (2y^k \partial_k y_j - \partial_j F^2) \\ &= \frac{1}{4} (-2y^k y_j \partial_k g^{ij} - g^{ij} \partial_j F^2). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ou também:

$$G^i = -\frac{1}{2} \left(y^k y_j \partial_k + \frac{1}{2} \partial_j F^2 \right) g^{ij}. \quad (3.16)$$

A partir desta etapa, existem algumas formas que podem ser geradas, a ideia é mostrar o maior número possível aqui para estar ciente de todas as possibilidades. Primeiro, se for usada a regra da cadeia para coordenadas de base:

$$\partial_i = \frac{\partial y_j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y_j}. \quad (3.17)$$

Conecte-o na expressão derivada até agora para os coeficientes de pulverização e abra a métrica inversa em termos de y e seus derivados, para os quais ele se transforma:

$$\begin{aligned} G^i &= -\frac{1}{2} \left(y^k y_j \frac{\partial y_l}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial y_l} + \frac{1}{2} \partial_j F^2 \right) g^{ij} \\ &= -\frac{1}{2} \left(y^k y_j \frac{\partial y_l}{\partial x^k} \frac{\partial^2 y^j}{\partial y_l \partial y_i} + \frac{1}{2} g^{ij} \partial_j F^2 \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Agora, uma notação útil pode ser introduzida uma vez que a derivada $\frac{\partial}{\partial y_k}$ será amplamente usada, vamos chamá-lo de $\partial^{\bar{k}}$. É importante observar que essa notação está de acordo com a ação dos índices de levantamento e abaixamento da métrica porque a derivada é exatamente $g^{ik} \partial_{\bar{k}}$:

$$\begin{aligned} g^{lk} \partial_{\bar{k}} &= \frac{\partial y^k}{\partial y_l} \frac{\partial}{\partial y^k} \\ &= \frac{\partial}{\partial y^l} \\ &:= \partial^{\bar{l}}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

De volta ao coeficiente de pulverização:

$$G^i = -\frac{1}{2} \left(y^l y_j \frac{\partial y_k}{\partial x^l} \partial^{\bar{k}i} y^j + \frac{1}{2} g^{ij} \partial_j F^2 \right). \quad (3.20)$$

Também é possível adotar a expressão na segunda linha de (3.15) e substituir a expressão por y_i derivada no início da seção, isto significa:

$$y_k = \frac{1}{2} \partial_{\bar{k}} F^2. \quad (3.21)$$

Conecte-o à dita expressão e o resultado é a fórmula do coeficiente de pulverização, que é frequentemente, em muitos livros, considerada a definição desse tensor:

$$\begin{aligned} G^i &= \frac{g^{ij}}{4} (2y^\mu \partial_\mu y_j - \partial_j F^2) \\ &= \frac{g^{ij}}{4} (y^\mu \partial_{j\mu}^2 F^2 - \partial_j F^2). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Calcular todos os outros objetos pode não ser uma escolha tão sábia, porque as expressões são cada vez mais dependentes desses tensores primários, portanto, o procedimento de cálculo direto pode ser melhor aplicado ao caso específico. O objetivo deste desenvolvimento é de mais facilmente encontrar propriedades.

3.2 Especificando o espaço

É chegada a hora de definir um espaço tal como foi enunciado no início do capítulo (de maneira motivada por Bi-gravidade / Gravidade Massiva). Começamos com uma variedade de Finsler na qual, x indica as coordenadas do conjunto de base e y coordenadas do conjunto de fibras e que sejam os esses conjuntos quadridimensionais. Se $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ são duas matrizes simétricas e positivas, dependendo apenas das coordenadas da base, podemos construir um *ansatz* para uma função de Finsler

$$F(x, y) = a(x, y) + b(x, y). \quad (3.23)$$

Com

$$a = \sqrt{\alpha_{ij}(x)y^i y^j} \quad b = \sqrt{\beta_{ij}(x)y^i y^j}.$$

Para evitar qualquer termo desagradável que resultaria de uma função nula de Finsler, basta restringir o domínio do espaço por $TM/0$ excluindo a origem e evitando $F = 0$, o que permite a existência de $\frac{1}{F}$. Essa função está em perfeita conformidade com os axiomas da função de Finsler, porque é definida positivamente, infinitamente diferenciável e para o axioma homogêneo, considere $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F(x, \lambda y) &= a(x, \lambda y) + b(x, \lambda y) \\ &= \sqrt{\alpha_{ij}(x)\lambda y^i \lambda y^j} + \sqrt{\beta_{ij}(x)\lambda y^i \lambda y^j} \\ &= |\lambda| \sqrt{\alpha_{ij}(x)y^i y^j} + |\lambda| \sqrt{\beta_{ij}(x)y^i y^j} = |\lambda| F(x, y). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Para ser mais formal, vamos declarar o teorema:

Teorema: $F(x, y) = \sqrt{\alpha_{ij}(x)y^i y^j} + \sqrt{\beta_{ij}(x)y^i y^j}$ é uma função Finsler sobre $TM/0$

Esse *ansatz* é claramente inspirado na Bi-gravidade, e a ideia é reproduzir uma métrica de Riemann para um sítio do modelo DGP 5-dimensional desconstruído, que chamaremos de $\alpha(x)$ e outra métrica de Riemann para o outro sítio que chamaremos de $\beta(x)$. Para isso é desejável ter a métrica de Finsler, conforme definida no capítulo anterior, então vamos discutir sobre isso.

A ideia nesta seção é reunir algumas propriedades e considerações sobre a métrica. Eles precisam ser definidos, porque, dependendo de como se deriva esse tensor, sua expressão pode ser mais ou menos agradável em determinadas situações. Começando com a expressão do momento de Finsler. A dependência das coordenadas da base ou da fibra estará implícita quando for óbvia:

$$\begin{aligned}
 P_k &= \partial_{\bar{k}} F \\
 &= \partial_{\bar{k}} \left(\sqrt{\alpha_{ij}(x)y^i y^j} \right) + \partial_{\bar{k}} \left(\sqrt{\beta_{ij}(x)y^i y^j} \right) \\
 &= \frac{(\alpha_{ij}y^i y^j)^{(-\frac{1}{2})}}{2} \partial_{\bar{k}}(\alpha_{ij}y^i y^j) + \frac{(\beta_{ij}y^i y^j)^{(-\frac{1}{2})}}{2} \partial_{\bar{k}}(\beta_{ij}y^i y^j) \\
 &= \frac{(a^2)^{(-\frac{1}{2})}}{2} 2\alpha_{kj}y^j + \frac{(b^2)^{(-\frac{1}{2})}}{2} 2\beta_{kj}y^j \\
 &= \frac{\alpha_{kj}y^j}{a} + \frac{\beta_{kj}y^j}{b}.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Vamos apresentar uma breve notação para $\alpha_{kj}y^j = \overset{\alpha}{y}_k$ e $\beta_{kj}y^j = \overset{\beta}{y}_k$, então o momento de Finsler é escrito como:

$$P_k = \frac{\overset{\alpha}{y}_k}{a} + \frac{\overset{\beta}{y}_k}{b}. \tag{3.26}$$

É bom mencionar a relação entre P_i e y^i e determiná-la:

$$P_i = \frac{y_i}{F}. \tag{3.27}$$

Isso significa que:

$$y_i = F \left(\frac{\alpha}{a} \frac{y_i}{y_i} + \frac{\beta}{b} \frac{y_i}{y_i} \right) = \left(1 + \frac{b}{a} \right) y_i^\alpha + \left(1 + \frac{a}{b} \right) y_i^\beta. \quad (3.28)$$

O plano agora é apresentar as diferentes formas que a métrica desse espaço específico pode ser escrito, dependendo do nosso interesse. A fim de facilitar a compreensão e evitar confusões, misturando os diferentes modos e formas, decidiu-se separar para cada derivação, uma subseção.

3.2.1 Forma da cadeia

Aqui o que vamos fazer é simplesmente dar um passo adiante na derivação da métrica em termos de um tensor que podemos chamar de η . Observe que o vetor da fibra contraído pode ser colocado no formato: $y_i = \eta_{ij} y^j$ apenas usando cálculo explícito feito nas últimas páginas:

$$y_i = F \left(\frac{\alpha_{ij}}{a} + \frac{\beta_{ij}}{b} \right) y^j \rightarrow \eta_{ij} := F \left(\frac{\alpha_{ij}}{a} + \frac{\beta_{ij}}{b} \right). \quad (3.29)$$

A métrica será simplesmente sua derivada, segue que:

$$g_{jk} = \eta_{jk} + y^i \partial_{\bar{k}} \eta_{ji}. \quad (3.30)$$

Observe que η_{ij} é simétrico e como g_{ij} deve ser simétrico, portanto o segundo termo na expressão também deve ser simétrico. Dito isto, a determinação de y_i torna-se uma simples tarefa de usar as propriedades desse tensor:

$$\begin{aligned} y^i \partial_{\bar{i}} \eta_{ki} &= y^i \partial_{\bar{k}} \eta_{li} \\ \text{e} \\ y^l \partial_{\bar{l}} \eta_{ij} &= 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Como η é uma função homogênea de 0 grau e, devido ao teorema de Euler, a segunda propriedade é justificada, o que leva à forma de y_i como deveria ser:

$$\begin{aligned} y^k g_{kl} &= y^k \eta_{kl} - y^k y^i \partial_{\bar{k}} \eta_{li} \therefore \\ y_i &= \eta_{ij} y^j. \end{aligned} \quad (3.32)$$

A matriz inversa, nesse caso, será um passo adiante no cálculo da última seção. Usando η^{ij} como o inverso de η_{ij} observa que de fato, ela existe porque η é uma soma de duas matrizes positivas não degeneradas, isso significa que seu determinante nunca será zero. O inverso de g_{ij} é realizado encontrando a expressão para y^i usando a igualdade $y_i = \eta_{ij}y^j$:

$$\begin{aligned} y^i &= \eta^{ij}y_j \therefore \\ g^{kj} &= \frac{\partial y^j}{\partial y_k} = \eta^{kj} + y_i \partial_{\bar{k}} \eta^{ji}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

3.2.2 Forma do momento

A nova abordagem nesta seção será tratar a expressão em termos do momento de Finsler. A partir da definição e usando a métrica na forma fornecida no início do capítulo:

$$g_{kl} = P_k P_l + F \partial_{\bar{k}} P_l. \quad (3.34)$$

O momento de Finsler já foi calculado e a única coisa que resta é calcular a derivada do momento, para isso é preciso primeiro:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y^j} \left(\frac{1}{a} \alpha_{ki} y^k \right) &= \alpha_{ik} y^k \frac{\partial}{\partial y^j} \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial y^j} \alpha_{ik} y^k \\ &= -\frac{\alpha_{kj} y^k \alpha_{li} y^l}{a^3} + \frac{\alpha_{ij}}{a}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Faça o mesmo para β , é análogo. Isso é útil porque:

$$\frac{\partial}{\partial y^i} P_j = \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\frac{\alpha}{a} y_j + \frac{\beta}{b} y_j \right). \quad (3.36)$$

Portanto, o segundo termo da métrica está definido para ser

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y^l} \frac{\partial F}{\partial y^k} &= -\frac{\alpha_{kj} y^j \alpha_{li} y^i}{a^3} + \frac{\alpha_{kl}}{a} - \frac{\beta_{kj} y^j \beta_{li} y^i}{b^3} + \frac{\beta_{kl}}{b} \\ &= \frac{1}{a} \left(\alpha_{kl} - \frac{y_l y_k}{a^2} \right) + \frac{1}{b} \left(\beta_{kl} - \frac{y_l y_k}{b^2} \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Fazendo isso, a métrica assume o formato:

$$g_{ij} = P_i P_j + \frac{F}{a} \left(\alpha_{ij} - \frac{y_i^\alpha y_j^\alpha}{a^2} \right) + \frac{F}{b} \left(\beta_{ij} - \frac{y_i^\beta y_j^\beta}{b^2} \right). \quad (3.38)$$

Ou simplesmente:

$$g_{ij} = F \left[\frac{y_i y_j}{F^3} + \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\frac{y_j^\alpha}{a} \right) + \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\frac{y_j^\beta}{b} \right) \right]. \quad (3.39)$$

Nesta forma, alguns cálculos e propriedades tornam-se evidentes sem o uso de muitos desenvolvimentos termo a termo. Este é o caso da expressão $y^i g_{ij} = y_j$ que é simplesmente o uso do teorema de Euler, mas o mesmo vale para $y^j g_{ij} = y_i$ o que significa:

$$\begin{aligned} y^j g_{ij} &= y_i + F \left[y^j \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\frac{y_j^\alpha}{a} \right) + y^j \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\frac{y_j^\beta}{b} \right) \right] \therefore \\ y^j \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\frac{y_j^\alpha}{a} \right) &= -y^j \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\frac{y_j^\beta}{b} \right). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Mais do que isso, pode-se concluir que esse termo é de fato zero devido à propriedade de simetria do tensor métrico. Como é notável, o primeiro termo é simétrico, portanto os dois últimos também devem ser:

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{k}} \left(\frac{y_l^\alpha}{a} \right) &= \partial_{\bar{l}} \left(\frac{y_k^\alpha}{a} \right) \\ \partial_{\bar{k}} \left(\frac{y_l^\beta}{b} \right) &= \partial_{\bar{l}} \left(\frac{y_k^\beta}{b} \right). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Proposição: $y^k \partial_{\bar{l}} \left(\frac{y^k}{a} \right) = -y^k \partial_{\bar{l}} \left(\frac{y^l}{b} \right) = 0$

□ Primeira note que $\frac{y^k}{a}$ é uma função homogênea de grau zero, o que significa que:

$$y^k \partial_{\bar{k}} \left(\frac{y^l}{a} \right) = 0. \quad (3.42)$$

mas agora use a simetria discutida no último parágrafo e você terá a prova, faça o mesmo para o termo com β apenas fazendo as alterações apropriadas■

Certamente, tudo isso é óbvio pela expressão aberta da derivada, mas as coisas ficam grandes de uma forma que o mínimo que precisarmos abrir será melhor. Agora pegue a métrica e coloque a função de Finsler em evidência, deixando-a no formato da identidade de número 9 do apêndice A, para:

$$g_{kl} = F \left[\partial_{\bar{k}} P_l + \frac{1}{F} P_k P_l \right] \rightarrow g^{kl} = \frac{1}{F} \left[\partial_{\bar{k}} P_l + \frac{1}{F} P_k P_l \right]^{-1}. \quad (3.43)$$

Use a identidade número 9 nos colchetes que são invertidos com $\partial_{\bar{k}} P_l$ fazendo o papel de h_{ij} e $\frac{1}{F}$ sendo k , isso acarreta:

$$\left[\partial_{\bar{k}} P_l + \frac{1}{F} P_k P_l \right]^{-1} = \frac{\partial y^l}{\partial P_k} - \frac{\frac{\partial y^i}{\partial P_k} P_i \frac{\partial y^j}{\partial P_l} P_j}{F + \frac{\partial y^j}{\partial P_i} P_j P_i}. \quad (3.44)$$

E o mesmo argumento para dizer que $\left(\frac{\partial y^\mu}{\partial y^\nu} \right)^{-1} = \frac{\partial y^\mu}{\partial y_\mu}$ na primeira seção foi usada para justificar que $(\partial_{\bar{\mu}} P_\nu)^{-1} = \frac{\partial y_\nu}{\partial P_\mu}$. Vale ressaltar que: $\partial_{\bar{\mu}} P_\nu$ é simétrico, assim como: $\frac{\partial y^\nu}{\partial P_\mu}$. A métrica inversa será:

$$g^{kl} = \frac{1}{F} \frac{\partial y^l}{\partial P_k} - \frac{\frac{\partial y^i}{\partial P_k} P_i \frac{\partial y^j}{\partial P_l} P_j}{F^2 + F \frac{\partial y^j}{\partial P_i} P_j P_i}. \quad (3.45)$$

3.2.3 Forma tradicional

E agora é hora de fazer tudo em cálculos explícitos. Como foi feito antes, usaremos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 g_{ij} &= P_i P_j + F \frac{\partial^2}{\partial y^j \partial y^i} F \\
 &= \left(\frac{\alpha}{a} y_i + \frac{\beta}{b} y_i \right) \left(\frac{\alpha}{a} y_j + \frac{\beta}{b} y_j \right) + F \frac{\partial}{\partial y^i} P_j.
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

A derivada do momento de Finsler já foi computada anteriormente e é sabido que a métrica assume a expressão:

$$g_{ij} = \left(\frac{\alpha}{a} y_i + \frac{\beta}{b} y_i \right) \left(\frac{\alpha}{a} y_j + \frac{\beta}{b} y_j \right) + \frac{F}{a} \left(\alpha_{ij} - \frac{\alpha \alpha}{a^2} \right) + \frac{F}{b} \left(\beta_{ij} - \frac{\beta \beta}{b^2} \right). \tag{3.47}$$

Pode ser interessante colocá-lo em uma forma alternativa, fazendo:

$$g_{ij} = F \left(\frac{\alpha_{ij}}{a} + \frac{\beta_{ij}}{b} \right) - \frac{F}{a} \frac{\alpha \alpha}{y_j y_i} - \frac{F}{b} \frac{\beta \beta}{y_j y_i} + \left(\frac{\alpha}{a} y_i + \frac{\beta}{b} y_i \right) \left(\frac{\alpha}{a} y_j + \frac{\beta}{b} y_j \right). \tag{3.48}$$

Agora use a definição de η_{in} já apresenta duas seções antes:

$$\eta_{ij} = F \left(\frac{\alpha_{ij}}{a} + \frac{\beta_{ij}}{b} \right). \tag{3.49}$$

Inclua-o na métrica e faça algumas manipulações matemáticas no segundo termo para ter uma expressão separada em duas grandes partes:

$$\begin{aligned}
 g_{ij} &= \eta_{ij} - \frac{\alpha \alpha}{y_j y_i} - \frac{\beta \beta}{y_j y_i} - \frac{\alpha \alpha}{a^2} - \frac{\beta \beta}{b^2} + \left(\frac{\alpha}{a} y_i + \frac{\beta}{b} y_i \right) \left(\frac{\alpha}{a} y_j + \frac{\beta}{b} y_j \right) \\
 &= \eta_{ij} - \left(\frac{1}{a} \sqrt{\frac{b}{a}} \alpha_{ik} - \frac{1}{b} \sqrt{\frac{a}{b}} \beta_{ik} \right) \left(\frac{1}{a} \sqrt{\frac{b}{a}} \alpha_{jl} - \frac{1}{b} \sqrt{\frac{a}{b}} \beta_{jl} \right) y^k y^l.
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

A segunda parte é composta por dois tensores iguais multiplicados por y , portanto, é conveniente criar outro objeto denotado como:

$$\xi_{ik} = \left(\frac{1}{a} \sqrt{\frac{b}{a}} \alpha_{ik} - \frac{1}{b} \sqrt{\frac{a}{b}} \beta_{ik} \right). \tag{3.51}$$

Isso deixa a métrica em uma forma mais compacta:

$$g_{ij} = \eta_{ij} - \xi_{ik}\xi_{jl}y^k y^l. \quad (3.52)$$

Essas são as métricas de Finsler do espaço que está sendo tratado neste trabalho e são obviamente todas equivalentes. A razão para construir este capítulo dessa maneira específica, já se justifica agora, devido ao cálculo da métrica inversa. Nesse caso, é tão demorado que é melhor deixá-lo no apêndice em vez de destruir a fluidez deste texto principal.

Um pequeno comentário é necessário neste final de seção, porque no início foi mencionado que essa abordagem era tratada em 4D, mas até agora tudo é independente da dimensão. O ponto é que no apêndice é encontrada a derivação do inverso de uma soma da matriz apenas em 4 dimensões a ser aplicada em η , mesmo que o inverso dessa matriz sempre exista para qualquer dimensão. Outros objetos que foram estudados no capítulo anterior sobre a geometria de Finsler foram derivados para este espaço específico e podem ser encontrados nos apêndices, bem como em algumas propriedades úteis.

3.3 Algumas propriedades de cálculo

Algumas propriedades do tensor métrico de Finsler, específico desse espaço são interessantes serem destacadas e esse é o principal objetivo desta subseção, mas primeiro vamos ter certeza da notação. Tome a forma da métrica como exemplo: $g_{ij} = \eta_{ij} - \xi_{ik}\xi_{jl}y^k y^l$ onde g_{ij} , η_{ij} e ξ_{ij} representam os componentes de um tensor que serão indicados sem índices quando referidos como objetos puros g , η , ξ , respectivamente. A métrica em termos de produtos matriciais assumirá a forma: $g = \eta - \xi y(\xi y)^T$ onde nesse contexto y é um vetor e $(^T)$ significa a transposição.

Dito a notação a ser seguida, aqui vem algumas propriedades que vinculam todas as diferentes expressões da métrica que foram derivadas. O mais simples a ser observado é que, como F é uma função 1-homogênea, g_{ij} é uma função 0-homogênea e, se g_{ij} for considerado como foi a última derivação, pode-se perceber algumas coisas sobre η_{ij} e ξ_{ik} .

Tomando g como escrito anteriormente, então η é uma função homogênea de ordem 0 e ξ é uma função homogênea do grau -1 , significa que $\xi(x, \lambda y) = \lambda^{-1}\xi$ e por causa disso e pelo teorema de Euler $y^{\bar{a}}\partial_{\bar{a}}\eta_{ij} = 0$ e $y^{\bar{a}}\partial_{\bar{a}}\xi_{ij} = -\xi_{ij}$ e devido ao fato de que α e β são simétricas, η e ξ também serão simétricos. Observe que, quanto mais explícitos são os cálculos, mais os objetos auxiliares acumulam mais propriedades derivadas das formas compactas. Isso será considerado como uma proposição para o tensor ξ :

Proposição: $\xi_{ij}y^i y^j = 0$.

Só precisa abrir explicitamente:

$$\begin{aligned}\xi_{ij}y^i y^j &= \left(\frac{1}{a} \sqrt{\frac{b}{a}} \alpha_{ij} - \frac{1}{b} \sqrt{\frac{a}{b}} \beta_{ij} \right) y^i y^j \\ &= \sqrt{ab} - \sqrt{ab} = 0. \blacksquare\end{aligned}\tag{3.53}$$

Não se pode dizer que ξ seja responsável pelo emaranhamento das métricas de Riemann α e β pois η contribui com alguns termos cruzados. Isso significa que o espaço dual de y^i não é simplesmente algum tipo de soma direta de dois espaços vetoriais Riemannianos duais.

Essa proposição nada mais é que o antigo $P_i = \frac{y_i}{F}$ lembrando que $\eta_{ij} = F(\frac{\alpha_{ij}}{a} + \frac{\beta_{ij}}{b})$ o que significa que $P_i = \frac{\eta_{ij}y^j}{F}$ como deveria ser. Algumas coisas já conhecidas serão re-derivadas aqui, como foi o caso, mas essa forma será útil para desenvolver mais facilmente algumas propriedades adicionais. A existência da métrica, da forma como foi derivada na segunda subseção, será interpretada como uma consequência desta última proposição:

Proposição: $g_{ij} = \partial_{\bar{j}}\eta_{ik}y^k + \eta_{ij}$

□ aqui parece pertinente lembrar que a torção de Cartan satisfaz $C_{ijk}y^k = 0$ pois

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{k}}(g_{ij}y^j) &= \partial_{\bar{k}}g_{ij}y^j + g_{ij}\delta_{\bar{k}}^j \\ &= 2C_{ijk}y^j + g_{ik} \\ &= g_{ik}.\end{aligned}\tag{3.54}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{k}}(g_{ij}y^j) &= \partial_{\bar{k}}(\eta_{ij}y^j) \\ &= \partial_{\bar{k}}\eta_{ij}y^j + \eta_{ij}\delta_{\bar{k}}^j. \therefore\end{aligned}\tag{3.55}$$

$$g_{ij} = \partial_{\bar{j}}\eta_{ik}y^k + \eta_{ij}. \blacksquare\tag{3.56}$$

Aqui há a conexão entre duas expressões da métrica derivada até agora, o que suscita a suspeita de que o tensor ξ esteja vinculado a η . Não é possível concluir algo comparando as expressões, porque elas são contraídas com y ; portanto, por cálculos explícitos, a relação entre as duas pode ser estabelecida como:

$$\partial_{\bar{k}}\eta_{ij} = -\xi_{ij}\xi_{kl}y^l. \quad (3.57)$$

Uma consequência direta disso é a forma muito mais compacta que a métrica assume ao aplicar simplesmente uma regra da cadeia e permitir que ela seja descrita apenas no objeto η . Essa é a primeira forma da métrica derivada no início do capítulo:

$$g_{ij} = \partial_{\bar{j}}(\eta_{ik}y^k). \quad (3.58)$$

Nesta forma, vemos que $\xi_{ij}y^i y^j = 0$ tinha que ser assim, por causa do teorema de Euler discutido anteriormente, caso contrário, a métrica não seria uma derivada de alguma função 1-homogênea.

3.3.1 Equações de autovalores

Outras conclusões vêm na forma de equações de autovalores e é nisso que a seção atual está interessada. Um fato muito conhecido sobre autovetores é que, se A, B são matrizes e y é um vetor com autovalor λ para o produto de duas matrizes, isso significa:

$$(AB)y = \lambda y. \quad (3.59)$$

Então a ação adjunta de B aplicada em ambos os lados estabelece uma relação entre os autovetores do produto AB e BA :

$$(BA)ByB^{-1} = \lambda ByB^{-1} \quad (3.60)$$

É novamente uma equação de autovetor com o mesmo autovalor, mas para o vetor ByB^{-1} que pode-se chamar $v = ByB^{-1}$ e a equação de autovetor será:

$$(BA)v = \lambda v. \quad (3.61)$$

Proposição: $g^{ij}\eta_{jk}y^k = y^i$ e $g_{ij}\eta^{jk}P_k = P_i$

□ use a primeira proposição para reescrever $P_i = g_{ij}\frac{y^j}{F} = \eta_{ij}\frac{y^j}{F}$ e:

$$P^i = g^{ij}P_j = \frac{1}{F}g^{ij}\eta_{jk}y^k. \quad (3.62)$$

Mas $P^i = \frac{y^i}{F}$ então:

$$g^{ij}\eta_{jk}y^k = y^i. \quad (3.63)$$

Para o outro, segue da mesma maneira:

$$\eta^{ij}P_j = \frac{1}{F}\eta^{ij}\eta_{jk}y^k = P^i = g^{ij}P_j. \blacksquare \quad (3.64)$$

Esta é uma equação de autovetor de y com autovalores iguais a 1 para a matriz $g^{-1}\eta$ o mesmo vale para P e a matriz $g_{ij}\eta^{jk}$. Este é precisamente o caso tratado na abertura da seção, do que podem ser derivadas mais algumas equações de autovetor e autovalor, como será apresentado acima:

$$g^{-1}\eta y = y \rightarrow (\eta g^{-1})\eta y \eta^{-1} = \eta y \eta^{-1}. \quad (3.65)$$

O mesmo se aplica a P seguindo analogamente ao y . Parece apropriado fazer a definição $v = \eta y \eta^{-1}$ e então chama-se $\eta^{-1}P\eta = Z$

$$g\eta^{-1}P = P \rightarrow (\eta^{-1}g)\eta^{-1}P\eta = \eta^{-1}P\eta. \quad (3.66)$$

Exibindo todas as equações de autovetor e autovalor que foram derivadas lado a lado, leva a isso:

$$\begin{cases} g^{-1}\eta y = y \\ g\eta^{-1}P = P \end{cases} \quad \begin{cases} \eta g^{-1}v = v \\ \eta^{-1}gZ = Z \end{cases} \quad (3.67)$$

Abra g e g^{-1} como na forma tradicional, e assim seguem as seguintes relações (vá para os apêndices para ver todas as definições):

$$\begin{aligned} k\Upsilon^i\Upsilon^j\eta_{jk}y^k &= 0 & \xi_{ir}y^r\xi_{js}y^s\eta^{jk}P_k &= 0 \\ k\eta_{ij}\Upsilon^j\Upsilon^k v_k &= 0 & \eta^{ij}\xi_{jr}y^r\xi_{ks}y^s Z^k &= 0. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Vamos adotar a seguinte notação: $\frac{\partial}{\partial y_k} = \partial^{\bar{k}}$ em analogia com $\frac{\partial}{\partial y^{\bar{k}}} = \partial_{\bar{k}}$, como foi discutido algumas seções antes. Pegue g para ficar na forma da cadeia e observe: $\partial^{\bar{k}}\eta\eta^{-1} = -\eta\partial^{\bar{k}}\eta^{-1}$ para chegar em:

$$\begin{aligned} \partial^{\bar{k}}\eta^{ij}y_iy_j &= 0 & \partial^{\bar{k}}\eta_{ij}y^iy^j &= 0 \\ \partial_{\bar{k}}\eta_{ij}P^iP^j &= 0 & \partial_{\bar{k}}\eta^{ij}P_iP_j &= 0. \end{aligned} \quad (3.69)$$

3.3.2 Relações extras

Para esta seção vamos usar muitos elementos presentes nos apêndices, mais especificamente o apêndice E onde discute-se sobre a métrica inversa. Antes de dar prosseguimento ao capítulo, algumas informações do apêndice serão repassadas. Primeiramente retomemos a expressão da métrica inversa:

$$g^{ij} = \eta^{ij} + k\Upsilon^i\Upsilon^j. \quad (3.70)$$

Onde k é um escalar definido para deixar a expressão mais curta, assim como Υ^i

$$k = \frac{1}{1 - \eta^{ij}\xi_{ik}\xi_{jl}y^ky^l} \quad (3.71)$$

E também

$$\begin{aligned} \Upsilon^i &= \\ \frac{|\alpha|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_j^i + \frac{a}{b} (\delta_j^i \text{tr} \Phi - \Phi_j^i) \right] \frac{y^j}{F a^4} \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{|\beta|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_k^i + \frac{b}{a} (\delta_k^i \text{tr} \Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_k^i) \right] \frac{\beta^{kl} \alpha_{lj} y^j}{F a b^3} \sqrt{\frac{b}{a}} \\ - \frac{|\alpha|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_k^i + \frac{a}{b} (\delta_k^i \text{tr} \Phi - \Phi_k^i) \right] \frac{\alpha^{kl} \beta_{lj} y^j}{F b a^3} \sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{|\beta|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_j^i + \frac{b}{a} (\delta_j^i \text{tr} \Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_j^i) \right] \frac{y^j}{F b^4} \sqrt{\frac{a}{b}} \end{aligned} \quad (3.72)$$

É mais conveniente considerar a expressão $\eta^{ik}\xi_{kl}y^l = \Upsilon^i$ e também é possível usar a propriedade $-\xi_{ij}\xi_{kl}y^l = \partial_{\bar{k}}\eta_{ij}$ para reescrever essa métrica inversa de forma análoga à forma de cadeia, observando que é válido:

$$\Upsilon^i\Upsilon^j = -\eta^{is}\partial_{\bar{k}}\eta_{sr}\eta^{jk}y^r. \quad (3.73)$$

É bom notar que $\partial_{\bar{k}}(\eta_{ij}\eta^{il}) = 0$ porque vamos usá-lo para substituir $\eta^{ij}\partial_{\bar{k}}\eta_{il} = -\eta_{il}\partial_{\bar{k}}\eta^{ij}$, Isso significa que:

$$\Upsilon^i\Upsilon^j = \partial_{\bar{k}}\eta^{ij}\eta_{jl}\eta^{jk}y^l. \quad (3.74)$$

Faça as alterações apropriadas e a métrica inversa também pode ser considerada:

$$g^{ij} = \eta^{ij} + k\eta^{jk}\partial_{\bar{k}}\eta^{il}y_l. \quad (3.75)$$

A seguinte definição será estabelecida para tornar mais natural:

$$\bar{\partial}^k := k\eta^{kl}\partial_{\bar{l}}. \quad (3.76)$$

Do que a métrica inversa pode ser, portanto:

$$g^{ik} = \eta^{ik} + \bar{\partial}^k\eta^{ij}y_j. \quad (3.77)$$

Parece pertinente mencionar a similaridade com a forma da cadeia para a métrica inversa, pois não é difícil perceber que: $\bar{\partial}^k\eta^{ij}y_j = \partial_{\bar{k}}\eta^{ij}y_j$. Esta pode ser uma chave para se determinar a relação de $y^i(y_i)$ que até então parece muito obscura.

Para finalizar é bom expor algumas consequências das diversas formas que foram derivadas para expressar a métrica. Usando-se $y^i C_{ijk} = 0$, $g_{kl} = \partial_{\bar{k}}(y^i\eta_{il})$ e $\xi_{ij}y^j y^i = 0$ para concluir que:

$$\begin{aligned} g^{ij}y_j &= \eta^{ij}y_j & g^{ij}P_j &= \eta^{ij}P_j \\ \partial_{\bar{k}}(g^{ij}P_j) &= g^{ij}\partial_{\bar{k}}P_j & y_k\bar{\partial}^k\eta^{ij} &= 0 \\ P_k\bar{\partial}^k\eta^{ij} &= 0 & y_iP_k &= \eta_{ij}y^jP_k \\ \partial_{\bar{k}}\eta_{li}y^i &= \partial_{\bar{l}}\eta_{ki}y^i & \bar{\partial}^k\eta^{li}y_i &= \bar{\partial}^l\eta^{ki}y_i. \end{aligned}$$

3.4 Possíveis aplicações para a física

As estruturas apresentadas até então e nos apêndices serão usadas aqui de forma a discutir de que maneiras essa teoria matemática pode ser usada em favor de uma teoria física. Claramente a motivação original permanece em grande evidência, isto é a Bi-gravidade, que será tratada no último tópico desta seção. A questão é que mesmo com esta motivação original muito bem definida, este espaço de Finsler ainda pode ser repensado sob outras perspectivas. Este é o destino desta seção.

3.4.1 Perspectivas para este espaço

O que mais se espera deste espaço é que ao menos o formalismo tradicional esteja preservado, ou seja o geometria riemanniana seja de alguma forma derivada disso. Como discutido no capítulo 2, o objeto responsável por medir isso é a torção de Cartan, que foi derivada no apêndice G e será exposta aqui:

$$\begin{aligned} C_{ijk} &= \frac{1}{2} \partial_{\bar{k}\bar{j}}^2 (\eta_{il} y^l) \\ &= \frac{1}{2} \left(\partial_{\bar{k}} \eta_{ij} + \partial_{\bar{j}} \eta_{ik} + y^l \partial_{\bar{k}\bar{j}}^2 \eta_{il} \right). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Ou ainda melhor, a torção média de Cartan do apêndice H

$$I_i = \frac{g^{jk}}{2} \left(\partial_{\bar{k}} \eta_{ij} + \partial_{\bar{j}} \eta_{ik} + y^l \partial_{\bar{k}\bar{j}}^2 \eta_{il} \right). \quad (3.79)$$

Segundo o teorema de Cartan, para se ter um espaço riemanniano é preciso que esses tensores se anulem, então surge uma condição para que esse espaço seja riemanniano:

$$\partial_{\bar{k}} \eta_{ij} + \partial_{\bar{j}} \eta_{ik} + y^l \partial_{\bar{k}\bar{j}}^2 \eta_{il} = 0. \quad (3.80)$$

Uma solução bem clara é o caso em que η não depende de y , mas para evitar casos triviais como os euclidianos adota-se: $\beta = f(x)\alpha$. Neste caso é bem evidente que se trata de um espaço de Riemann deslocado pela função $\sqrt{f(x)}$ e satisfaz a equação pois:

$$\eta_{ij}(x) = (1 + \sqrt{f(x)})\alpha_{ij}(x). \quad (3.81)$$

É natural se questionar quanto à aplicabilidade desse formalismo para a Relatividade Geral, uma vez que não se apresenta como uma métrica pseudo-riemanniana. A verdade é

que não parece haver uma forma natural de considerar isso, contudo já são estudadas formas de assim o fazer como será explicado no capítulo 5. Outra grande aposta deste formalismo é a possibilidade de modelar teorias com quebra da invariância de Lorentz o que sem muita discussão parece bem plausível. Um formalismo semelhante que já foi abordado neste trabalho que também é usado para violação da invariância de Lorentz é a dita geometria de Randers.

Como já foi dito, esse espaço (chame-o de espaço da Bi-métrica) é não riemanniano, assim como o espaço de Randers então é importante saber se este espaço é uma generalização que se aproxima desta ou trilha um caminho mais autônomo. Por isso é importante analisar a torção de Matsumoto presente no apêndice K à luz do teorema de Matsumoto, afirmando que esse espaço será de Randers quando essa torção for nula. Em vista disso não é tão simples dizer quando isso ocorrerá:

$$M_{ijk} = C_{ijk} - \frac{3!F}{n+1} \left[\frac{1}{a} \left(I_{(i}\alpha_{kl)} - \frac{I_{(i}y^{\alpha}y^{\alpha)}_{kl}}{a^2} \right) + \frac{1}{b} \left(I_{(i}\beta_{kl)} - \frac{I_{(i}y^{\beta}y^{\beta)}_{kl}}{b^2} \right) \right]. \quad (3.82)$$

É de se imaginar que fazendo $\beta_{ij} = \beta_i\beta_j$ existe um paralelo muito forte entre os dois espaços, pois pela função de Finsler do espaço de Randers dada como $F = a + b = \sqrt{\alpha_{ij}y^i y^j} + \beta_i y^i$, as duas funções seriam muito parecidas. A torção de Matsumoto no entanto seria:

$$M_{ijk} = C_{ijk} - \frac{3!F}{n+1} \left[\frac{1}{a} \left(I_{(i}\alpha_{kl)} - \frac{I_{(i}y^{\alpha}y^{\alpha)}_{kl}}{a^2} \right) \right]. \quad (3.83)$$

Então não há uma solução muito bem clara, além das soluções triviais, que são espaços de Randers mas são também espaços mais fundamentais, como euclidiano e riemanniano. Isso acontece para $\eta = cte$ no caso euclidiano e $\eta = \eta(x)$ no caso riemanniano. Isso significa que o espaço Bi-métrica não é propriamente riemanniano mas também não segue o mesmo caminho de generalizá-lo feito por Randers.

3.4.2 Analogia com a Bi-gravidade

Neste tópico será discutido porque parece interessante usar este espaço de Finsler para representar a Bi-gravidade. Uma realidade desta abordagem é a quantidade elevada de contas e sem dúvida um dos principais culpados é o inverso da métrica, por isso vamos tentar evitá-la o quanto pudermos. Para nos convencermos de que este de fato é um bom ponto de partida para se abordar a supracitada teoria física, nada mais justo do que analisar as geodésicas deste modelo. Se forem algo parecido às geodésicas calculadas em (2.155) então teremos um bom sinal. Para isso encontremos a curva que obedece:

$$\dot{y}^i + 2G^i = \dot{y}^i + \frac{g^{ij}}{2} [2\partial_k \eta_{jl} - \partial_j \eta_{kl}] y^l y^k = 0. \quad (3.84)$$

Para evitar lidar com o inverso da métrica que é bastante complicado basta multiplicar a expressão pela métrica e o que resulta é:

$$g_{ij} \dot{y}^i + \frac{\delta_j^i}{2} [2\partial_k \eta_{il} - \partial_i \eta_{kl}] y^l y^k = 0. \quad (3.85)$$

Abrindo o tensor $\eta_{ij} = F \left(\frac{\alpha_{ij}}{a} + \frac{\beta_{ij}}{b} \right)$ e estudando apenas a parte da equação que veio de G^i fazendo: $\delta_j^i = \alpha_{jk} \alpha^{ki} = \beta_{jk} \beta^{ki}$ teremos:

$$F \left(\frac{\alpha_{ij} \alpha^i}{a} \gamma_{kl} y^k y^l + \frac{\beta_{ij} \beta^i}{b} \gamma_{kl} y^k y^l \right) + \frac{y^k y^l}{2} \left[\left(\alpha_{lj} \partial_k \left(\frac{F}{a} \right) + \alpha_{jk} \partial_l \left(\frac{F}{a} \right) - \alpha_{kl} \partial_j \left(\frac{F}{a} \right) \right) + \left(\alpha \rightarrow \beta \right) \right]. \quad (3.86)$$

Aqui o sinal $\left(\alpha \rightarrow \beta \right)_{a \rightarrow b}$ significa que o termo anterior se repete só trocando o que era antes α por β e a por b . Antes de seguir para o termo $g_{ij} \dot{y}^i$, primeiramente o que já se é sabido:

$$y^i = \frac{dx^i}{ds} \qquad \dot{y}^i = \frac{d}{ds} \frac{dx^i}{ds}. \quad (3.87)$$

Onde s é o parâmetro conhecido como comprimento de arco, mas a intenção é de propor um novo parâmetro baseado nas métricas α e β . Por isso definimos os parâmetros $s_\alpha = \int a dt$ e $s_\beta = \int b dt$ motivados pelo comprimento de arco no espaço de Finsler:

$$s = \int F dt = \int (a + b) dt = \int a dt + \int b dt. \quad (3.88)$$

Assim vamos adotar $ds_\alpha = a dt$ e $ds_\beta = b dt$ e as mudanças neste parâmetro implicam mudanças em y em primeiro lugar:

$$y^i = \frac{ds_\alpha}{ds} \frac{dx^i}{ds_\alpha} = \frac{ds_\beta}{ds} \frac{dx^i}{ds_\beta}. \quad (3.89)$$

Onde usando a parametrização da função de Finsler como o próprio comprimento do arco teremos $F = 1$ o que significa que:

$$\frac{ds_\alpha}{ds} = a \qquad \frac{ds_\beta}{ds} = b. \qquad (3.90)$$

Assim conclui-se também que:

$$\dot{y}^i = a^2 \frac{d}{ds_\alpha} \frac{dx^i}{ds_\alpha} + \frac{da}{ds} \frac{dx^i}{ds_\alpha} = b^2 \frac{d}{ds_\beta} \frac{dx^i}{ds_\beta} + \frac{db}{ds} \frac{dx^i}{ds_\beta}. \qquad (3.91)$$

Dito isso, retorna-se ao cálculo da equação da geodésica com:

$$g_{ij} \dot{y}^i = \eta_{ij} \dot{y}^i + \partial_i \eta_{jk} y^k \dot{y}^i. \qquad (3.92)$$

Separando cada termo tratemos o primeiro termo:

$$\eta_{ij} \dot{y}^i = aF\alpha_{ij} \frac{d}{ds_\alpha} \frac{dx^i}{ds_\alpha} + \frac{F}{a} \alpha_{ij} \frac{dx^i}{ds_\alpha} \frac{da}{ds} + bF\beta_{ij} \frac{d}{ds_\beta} \frac{dx^i}{ds_\beta} + \frac{F}{b} \beta_{ij} \frac{dx^i}{ds_\beta} \frac{db}{ds}. \qquad (3.93)$$

E para o segundo termo:

$$\partial_i \eta_{jk} y^k \dot{y}^i = -\frac{b}{a^3} \alpha_{ik} \alpha_{jl} y^k y^l \dot{y}^i - \frac{a}{b^3} \beta_{ik} \beta_{jl} y^k y^l \dot{y}^i + \frac{\alpha_{ik} \beta_{jl}}{ab} y^k y^l \dot{y}^i + \frac{\beta_{ik} \alpha_{jl}}{ab} y^k y^l \dot{y}^i.$$

Introduzimos uma notação aqui usando α como exemplo, mas o mesmo é válido apenas substituindo α por β :

$$\frac{dx^i}{ds_\alpha} := y_\alpha^i \qquad \alpha_{ij} y_\alpha^i := y_\alpha^j. \qquad (3.94)$$

Dito isso continuam-se os cálculos

$$\begin{aligned} \partial_i \eta_{jk} y^k \dot{y}^i &= -ba y_i y_j \frac{d}{ds_\alpha} y_\alpha^i - \frac{b}{a} y_j \frac{da}{ds} + a^2 y_j y_i \frac{d}{ds_\alpha} y_\alpha^i + y_j \frac{da}{ds} \\ &+ b^2 y_j y_i \frac{d}{ds_\beta} y_\beta^i + y_i \frac{db}{ds} - aby_i y_j \frac{d}{ds_\beta} y_\beta^i - \frac{a}{b} y_j \frac{db}{ds}. \end{aligned} \qquad (3.95)$$

Segue que:

$$\begin{aligned}
 g_{ij}y^i &= aF\alpha_{ij}\frac{d}{ds_{\alpha\alpha}}y^j + y_j\left[\frac{da}{ds}\left(\frac{F}{a} - \frac{b}{a}\right) + \frac{db}{ds}\right] \\
 &\quad - aby_jy_i\frac{y^i}{\alpha\alpha ds_{\alpha\alpha}} + a^2y_iy_j\frac{d}{ds_{\alpha\alpha}}y^i + \left(\alpha \rightarrow \beta\right). \quad (3.96)
 \end{aligned}$$

Mas observe que:

$$\frac{da}{ds}\left(\frac{F}{a} - \frac{b}{a}\right) + \frac{db}{ds} = \frac{dF}{ds} = 0. \quad (3.97)$$

Obviamente o mesmo vale para beta. Desse modo a equação da geodésica será:

$$F\left[a\alpha_{ij}\left(\frac{d}{ds_{\alpha\alpha}}y^i + \gamma_{kl}^{\alpha i}y_ky_l\right) + b\beta_{ij}\left(\frac{d}{ds_{\beta\beta}}y^i + \gamma_{kl}^{\beta i}y_ky_l\right)\right] + R_j = 0 \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned}
 R_j &= a^2y_iy_j\frac{d}{ds_{\alpha\alpha}}y^i - aby_iy_j + \frac{y^k y^l}{2}\left[\alpha_{kj}\partial_l\left(\frac{F}{a}\right) + \alpha_{jl}\partial_k\left(\frac{F}{a}\right) - \alpha_{kl}\partial_j\left(\frac{F}{a}\right)\right] \\
 &\quad + \left(\alpha \rightarrow \beta\right). \quad (3.99)
 \end{aligned}$$

É útil notar que $\partial_k\left(\frac{F}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial_k b^2}{ab} - \frac{b}{a^3}\partial_k a^2\right)$ assim o cálculo de R_j fica:

$$R_j = a^2y_iy_j\frac{d}{ds_{\alpha\alpha}}y^i - aby_iy_j\frac{d}{ds_{\alpha\alpha}}y^i. \quad (3.100)$$

Use $\frac{d\alpha_{ij}}{ds_{\alpha\alpha}} = \partial_k\alpha_{ij}y^k$ para notar que $2y_i\frac{d}{ds_{\alpha\alpha}}y^i = -\frac{1}{a}y^i\partial_i a^2$ e o mesmo para β e chegar na conclusão que $R_j = 0$. Ou seja a equação da geodésica será extremamente parecida com a apresentada na seção de Bi-gravidade (2.155)

$$a\alpha_{ij}\left(\frac{d}{ds_{\alpha\alpha}}y^i + \gamma_{kl}^{\alpha i}y_ky_l\right) + b\beta_{ij}\left(\frac{d}{ds_{\beta\beta}}y^i + \gamma_{kl}^{\beta i}y_ky_l\right) = 0. \quad (3.101)$$

Uma constatação final e incontestável seria a derivação de uma ação para esta geometria, tal qual feita na expressão(2.259) para o caso de Randers. No entanto essa não é uma tarefa das mais fáceis, haverá uma discussão no capítulo 5 que dará prosseguimento a essa discussão.

4 MÉTODOS PERTURBATIVOS

Neste capítulo, serão tratadas diferentes abordagens nos vários limites de perturbação, mas antes é bom estar ciente das estruturas que o próprio formalismo Finsleriano nos oferece. É bem verdade que espera-se um retorno à geometria de Riemann em algum limite. Isso é aguardado não só pela semelhança entre as funções de Finsler $F = \sqrt{\alpha_{ij}y^i y^j} + \sqrt{\beta_{ij}y^i y^j}$ e $F = \sqrt{g_{ij}y^i y^j}$, mas também pela esperança que se tem em interpretá-la como a teoria da Bi-gravidade que em algum limite retorna à Relatividade geral.

Também é de se esperar que exista alguma semelhança com a geometria de Randers pois ela é uma estrutura de fundo muito útil para tratar sistemas com quebra da invariância de Lorenz que foi comentado no final do capítulo 2. Além disso a passagem de uma geometria para outra seria feita simplesmente pela substituição: $b = \sqrt{\beta_{ij}y^i y^j} \rightarrow \beta_i y^i$, o que poderia ser feito em alguma medida pela matriz $\beta_{ij} = \beta_i \beta_j$.

É verdade que os dois casos não são completamente análogos, pois se por um lado temos na geometria de Randers a restrição $\alpha^{ij}\beta_i\beta_j < 1$, por outro a função módulo, que surge no caso Bi-métrica, pode mudar algo estrutural.

Também é preciso considerar o limite massivo desta teoria, isto é, o limite que foi apresentado no final da seção de Bi-gravidade, onde foi determinada a massa do gráviton. Aqui a ideia será a mesma, propomos uma perturbação na métrica e depois expandir-se-á até a segunda ordem na perturbação.

4.1 Aproximação riemanniana

Antes de abordar o método aproximativo propriamente dito é interessante avaliar as geodésicas dos dois espaços e compará-los. Nada melhor para fazer isso do que achar seus tensores Q_l , aquele responsável por determinar se dois espaços são ou não projetivamente equivalentes.

Para isso é só usar o que foi apresentado na seção sobre geodésicas no espaço de Finsler, mais especificamente a equação $Q_l = y^k F_{\bar{k}l} - F_{\bar{l}}$. Aqui $F = \sqrt{\alpha_{ij}y^i y^j} + \sqrt{\beta_{ij}y^i y^j}$ e $F_{\bar{k}} = \partial_k - N_k^r \partial_r F$ e os coeficientes de conexão são referentes à geometria de Riemann, $N_j^i = \gamma_{jk}^i y^k$ onde γ_{jk}^i representa os símbolos de Christoffel para a métrica g_{ij} que está presente na função de Finsler para o caso riemanniano dado por: $\sqrt{g_{ij}y^i y^j}$.

Antes de abrir todas as contas pode-se simplificar ainda mais a expressão de Q_l usando a conexão associada ao movimento da geodésica descrito como $\partial_{\bar{k}} G^i = N_k^i$ e assim $G^i = \frac{\gamma_{jk}^i}{2} y^j y^k$. Usa-se também a homogeneidade de grau 2 do coeficiente de spray para reescrever a equação

abaixo:

$$\begin{aligned}
Q_l &= y^k F_{\bar{k}l} - F_l \\
& y^k \partial_l (\partial_k - N_k^r \partial_r) F - \partial_l F + N_l^r \partial_r F \\
& y^k \partial_{\bar{k}l}^2 F - \partial_l G^r \partial_r F - y^k \partial_k G^r \partial_{\bar{l}r}^2 F - \partial_l F + \partial_l G^r \partial_r F \\
& y^k \partial_{\bar{k}l}^2 F - 2G^r \partial_{\bar{l}r}^2 F - \partial_l F.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Como o primeiro e o último termo da equação dependem apenas da função de Finsler Bi-métrica, pode-se escrever uma expressão geral para qualquer espaço que se deseja analisar a projetividade com o nosso caso. Então desenvolvendo os dois termos supracitados e deixando o termo do meio como está, teremos a seguinte expressão:

$$y^k \partial_{\bar{k}l}^2 F - \partial_l F = \frac{\alpha_{li} \alpha^i}{a} \gamma_{rs} y^r y^s - \frac{y_l y_i \alpha^i}{a^3} \gamma_{rs} y^r y^s + \frac{\beta_{li} \beta^i}{b} \gamma_{rs} y^r y^s - \frac{y_l y_i \beta^i}{b^3} \gamma_{rs} y^r y^s. \tag{4.2}$$

Onde aqui, como já feito anteriormente, $\overset{\alpha}{\gamma}_{rs}$ significa os símbolos de Christoffel para a métrica α , o mesmo para β . Agora colocando tudo na forma do tensor Q_l conclui-se que:

$$Q_l = \frac{1}{a} \left(\alpha_{li} - \frac{y_l y_i}{a^2} \right) \left(\gamma_{rs} y^s y^r - 2G^i \right) + \left(\begin{matrix} \alpha \rightarrow \beta \\ a \rightarrow b \end{matrix} \right). \tag{4.3}$$

Onde os termos que são simétricos com α e β estão contemplado na forma $\left(\begin{matrix} \alpha \rightarrow \beta \\ a \rightarrow b \end{matrix} \right)$ que significa os mesmos termos de antes só trocando α por β e a por b . Esta é uma expressão para Q_l mais geral do que só o caso riemanniano. Chegamos à conclusão que para o caso que desejamos analisar apenas colocamos o coeficiente de spray desejado, neste caso: $G^i = \frac{\gamma_{jk}^i}{2} y^j y^k$. Este objeto é:

$$Q_l = \frac{1}{a} \left(\alpha_{li} - \frac{y_l y_i}{a^2} \right) \left(\gamma_{rs}^i - \gamma_{rs}^i \right) y^s y^r + \left(\begin{matrix} \alpha \rightarrow \beta \\ a \rightarrow b \end{matrix} \right). \tag{4.4}$$

É bom também analisar o caso em que a métrica do caso riemanniano é apenas $g = \alpha$ assim a expressão se torna

$$Q_l = \frac{1}{b} \left(\beta_{li} - \frac{y_l y_i}{b^2} \right) \left(\gamma_{rs}^{\beta i} - \gamma_{rs}^{\alpha i} \right) y^s y^r. \tag{4.5}$$

Analisemos o fato que $\left(\beta_{li} - \frac{\beta \beta}{b^2}\right) y^i = 0$ e recordando-se do teorema que determina que dois espaços Finslerianos são projetivamente equivalentes quando $Q_l = 0$ pode-se dizer que o caso mais geral para isso é quando: $\left(\gamma_{rs}^{\beta^i} - \gamma_{rs}^{\alpha^i}\right) y^s y^r = \rho(x, y) y^i$. Isso acontece pois a matriz $\left(\beta_{li} - \frac{\beta \beta}{b^2}\right)$ é degenerada, no entanto β não é.

$\rho(x, y)$ seria o autovalor da matriz $\left(\gamma_{rs}^{\beta^i} - \gamma_{rs}^{\alpha^i}\right) y^s$ com autovetor y^i no entanto isso deve ser válido para qualquer y^i na fibra. Para satisfazer a equação de autovalor não se vê outra opção se não $\rho(x, y) = 0$, mas $\left(\gamma_{rs}^{\beta^i} - \gamma_{rs}^{\alpha^i}\right) y^s$ deve ser degenerado, ou $\left(\gamma_{rs}^{\beta^i} - \gamma_{rs}^{\alpha^i}\right) = 0$ o que é o caso: $\alpha = \lambda\beta$ para λ uma constante. No caso degenerado

Em se tratando do caso geral, para o qual:

$$Q_l = \frac{1}{a} \left(\alpha_{li} - \frac{\alpha \alpha}{a^2}\right) \left(\gamma_{rs}^{\alpha^i} - \gamma_{rs}^{\beta^i}\right) y^s y^r + \frac{1}{b} \left(\beta_{li} - \frac{\beta \beta}{a^2}\right) \left(\gamma_{rs}^{\beta^i} - \gamma_{rs}^{\alpha^i}\right) y^s y^r. \quad (4.6)$$

Sabe-se que $\left(\alpha_{li} - \frac{\alpha \alpha}{a^2}\right)$ é degenerado com autovetor y^i , o mesmo vale para β , mas não há uma forma evidente para se destacar quando esses espaços são projetivamente equivalentes.

4.1.1 Métrica perturbada

Inspirado no caso recém descrito podemos considerar a geometria de Finsler para uma função Bi-métrica como uma perturbação do caso riemanniano. Nesta seção será analisada a aproximação do tipo:

$$F = a + b_\lambda. \quad (4.7)$$

Para

$$a = \sqrt{\alpha_{ij}(x) y^i y^j} \quad b_\lambda = \sqrt{\lambda^2 \beta_{ij}(x) y^i y^j}. \quad (4.8)$$

Suponha $|\lambda| \ll 1$ e vamos chamar

$$\beta_{ij}^\lambda(x) = \lambda^2 \beta_{ij}(x). \quad (4.9)$$

Veja que

$$\partial_{\bar{k}l}^2 F = \partial_{\bar{k}} \left[\frac{\alpha}{a} \frac{y_l}{b_\lambda} + \frac{\beta^\lambda}{b_\lambda} \right]. \quad (4.10)$$

Esteja ciente da distinção $b_\lambda = \lambda b$ porque aqui está definido $b = \sqrt{\beta_{ij}(x)y^i y^j}$ e é válido dizer $y_l^{\beta^\lambda} = \beta_{kl}^\lambda y^k$

Calcule a métrica

$$g_{kl} = \left(\frac{\alpha}{a} \frac{y_k}{b_\lambda} + \frac{\beta^\lambda}{b_\lambda} \right) \left(\frac{\alpha}{a} \frac{y_l}{b_\lambda} + \frac{\beta^\lambda}{b_\lambda} \right) + F \left[\frac{\alpha_{kl}}{a} + \frac{\beta_{kl}^\lambda}{b_\lambda} - \left(\frac{\alpha}{a^3} \frac{y_k y_l}{b_\lambda} + \frac{\beta^\lambda}{b_\lambda^3} \frac{y_k y_l}{b_\lambda} \right) \right]. \quad (4.11)$$

Use o limite riemanniano para ter:

$$g_{kl} = \alpha_{kl} + \lambda \Lambda_{kl} + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (4.12)$$

E a matriz de perturbação é definida como:

$$\Lambda_{ij} = \frac{b}{a} \alpha_{ij} - \frac{b}{a^3} \alpha_{ij} + \frac{\alpha^\beta y_i y_j + \alpha y_j y_i}{ab} + \frac{a}{b} \beta_{ij} - \frac{a}{b^3} \beta_{ij}. \quad (4.13)$$

Proposição: o inverso da métrica acima é

$$g^{ij} = \alpha^{ij} - \lambda \alpha^{ik} \Lambda_{kl} \alpha^{lj}. \quad (4.14)$$

□ Por substituição direta na equação: $g_{ij} g^{jk} = \delta_k^i$

$$\begin{aligned} (\alpha_{ij} + \lambda \Lambda_{ij})(\alpha^{jk} - \lambda \alpha^{jl} \Lambda_{ls} \alpha^{sk}) &= \alpha_{ij} \alpha^{jk} + \lambda (\Lambda_{ij} \alpha^{jk} - \alpha_{ij} \alpha^{jl} \Lambda_{ls} \alpha^{sk}) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ &= \delta_k^i + \mathcal{O}(\lambda^2). \blacksquare \end{aligned} \quad (4.15)$$

Um método geral para calcular o determinante de matrizes semelhante a esse pode ser derivado da fórmula apresentada no apêndice B:

$$\begin{aligned} \det(g) &= \det(\alpha + \lambda\Lambda) = \det(\alpha) + \det(\alpha)\text{tr}(\lambda\alpha^{-1}\Lambda) + \mathcal{O}(\lambda^2) \therefore \\ \det(g) &= \det(\alpha)(1 + \lambda\text{tr}(\alpha^{-1}\Lambda)). \end{aligned} \quad (4.16)$$

O mesmo pode ser usado para o inverso da métrica:

$$\det(g^{-1}) = \det(\alpha^{-1})(1 - \lambda\text{tr}(\alpha^{-1}\Lambda)). \quad (4.17)$$

E a torção de Cartan será:

$$C_{ijk} = \frac{1}{2}\partial_{\bar{k}}g_{ij} = 0 + \lambda\frac{\partial_{\bar{k}}\Lambda_{ij}}{2}. \quad (4.18)$$

De fato, isso significa que a geometria que está sendo tratada nesta subseção é uma geometria de Riemann em primeira ordem e somente em $\mathcal{O}(\lambda)$ expressa seu comportamento propriamente Finsleriano. Veja também na torção média de Cartan:

$$I^i = g^{jk}C_{ijk} = 0 + \lambda\frac{\alpha^{jk}\partial_{\bar{k}}\Lambda_{ij}}{2}. \quad (4.19)$$

4.1.2 Geodésicas perturbadas

Para facilitar nossos cálculos com o coeficiente de spray, observe que:

$$F^2 = a^2 + 2\lambda ab + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (4.20)$$

Que os cálculos sobre ele:

$$\frac{\partial^2 F^2}{\partial x^k \partial y^l} y^k - \frac{\partial F^2}{\partial x^l} = 2y^k \partial_k y_l^\alpha - \partial_l a^2 + \lambda \delta G_l + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (4.21)$$

Definimos

$$\begin{aligned} \delta G_i &= \frac{a}{b} \left[2y^k \partial_k y_i^\beta + y^k y_i^\beta \left(\frac{\partial_k a^2}{b^2} - \frac{a^2 \partial_k b^2}{b^4} \right) - \partial_i b^2 \right] \\ &+ \frac{b}{a} \left[2y^k \partial_k y_i^\alpha + y^k y_i^\alpha \left(\frac{\partial_k b^2}{a^2} - \frac{b^2 \partial_k a^2}{a^4} \right) - \partial_i a^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Pois o coeficiente de spray será:

$$G^i = \frac{1}{2} \left(\alpha^{il} y^k \partial_k y_l^\alpha - \frac{\alpha^{il} \partial_l a^2}{2} \right) + \lambda \delta G^i + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (4.23)$$

Para

$$\delta G^i = \alpha^{ir} \left[\delta G_r - \Lambda_{rs} \alpha^{sl} \left(2y^k \partial_k y_l^\alpha - \partial_l a^2 \right) \right]. \quad (4.24)$$

Mas também:

$$G^i = \frac{1}{2} y^k y^l \gamma_{kl}^i + \lambda \delta G^i + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (4.25)$$

Observa-se que o termo de ordem mais alta é justamente o coeficiente de spray do caso riemanniano como se esperava. O fato de a torção de Cartan ser um objeto puramente de segunda ordem torna fácil, em certo sentido, ver qual é o termo principal na expressão do coeficiente de conexão:

$$N_j^i = \gamma_{jk}^i y^k - g^{il} C_{ljk} \gamma_{ab}^k y^a y^b. \quad (4.26)$$

O segundo termo é pelo menos de ordem $\mathcal{O}(\lambda)$, então vamos considerar o primeiro termo em um momento:

$$\gamma_{jk}^i := \frac{g^{il}}{2} (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}). \quad (4.27)$$

O único termo de primeira ordem gerado a partir dessa expressão é aquele em que ao mesmo tempo $g^{il} \rightarrow \alpha^{il}$ e $g_{kl} \rightarrow \alpha_{kl}$:

$$\gamma_{jk}^i := \frac{\alpha^{il}}{2} (\partial_j \alpha_{kl} + \partial_k \alpha_{lj} - \partial_l \alpha_{jk}) + \mathcal{O}(\lambda). \quad (4.28)$$

Esse é um símbolo formal de Christoffel, no qual a métrica usada é a métrica Riemanniana α e vamos introduzir uma notação curta, chamada $\gamma^i_{jk}(\alpha)$ com α sobre o sinal gama, o que significa que α^{-1} é a matriz usada para multiplicar $(\partial_j(\dots) + \partial_k(\dots) - \partial_l(\dots))$ onde (\dots) são os argumentos indicados entre parênteses por α . Como um exemplo avaliemos $\gamma^i_{jk}(\beta)$ e $\gamma^i_{jk}(\alpha)$

$$\begin{aligned}\gamma^i_{jk}(\beta) &= \frac{\alpha^{il}}{2}(\partial_j(\beta_{kl}) + \partial_k(\beta_{lj}) - \partial_l(\beta_{jk})) \\ \gamma^i_{jk}(\alpha) &= \frac{\beta^{il}}{2}(\partial_j(\alpha_{kl}) + \partial_k(\alpha_{lj}) - \partial_l(\alpha_{jk})).\end{aligned}\quad (4.29)$$

Semelhante a esta notação, já foi usada uma forma mais compacta como $\gamma^{\alpha i}$ que entende-se que os argumentos indicados entre parênteses podem ser suprimidos. Com essas novas definições conclui-se que:

$$N_j^i = \gamma^i_{jk}(\alpha) y^k + \lambda \delta N_j^i + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (4.30)$$

Onde

$$\delta N_j^i = \left(\gamma^i_{jk}(\Lambda) - \gamma^i_{jk}(\alpha) \right) y^k - \alpha^{il} \alpha^{kr} \left(y^s \partial_s \gamma_r^\alpha - \frac{\partial_\nu a^2}{2} \right) \left(\frac{\partial_l \Lambda_{kj}}{2} \right). \quad (4.31)$$

Sobre o tensor de Riemann, para o que será discutido aqui, basta calcular $y^j R_{jkl}^i$

$$R_{kl}^i = \frac{\partial N_l^i}{\partial x^k} - \frac{\partial N_k^i}{\partial x^l} + N_l^s \frac{\partial N_k^i}{\partial y^s} - N_k^s \frac{\partial N_l^i}{\partial y^s}. \quad (4.32)$$

Pois $\alpha = \alpha(x)$ então: $\partial_{\bar{k}} \gamma^l_{ij} = 0$ o que significa que em primeira ordem:

$$R_{ij}^k = \left(\partial_j \gamma^k_{il} - \partial_i \gamma^k_{jl} + \gamma^{\alpha \mu}_{il} \gamma^k_{j\mu} - \gamma^{\alpha \mu}_{jl} \gamma^k_{i\mu} \right) y^l + \lambda \delta R_{ij}^k. \quad (4.33)$$

E na ordem λ :

$$\begin{aligned}\delta R_{ij}^k &= \partial_j \delta N_j^k + \gamma^{\alpha a}_{ir} y^r \partial_a \delta N_j^k + \delta N_i^r \gamma^{\alpha k}_{jr} \\ &\quad - \partial_i \delta N_j^k - \gamma^{\alpha a}_{jr} y^r \partial_a \delta N_i^k - \delta N_j^r \gamma^{\alpha k}_{ir}.\end{aligned}\quad (4.34)$$

4.2 Aproximação Bi-métrica

Agora é hora de achar um paralelo com o limite massivo da teoria da Bi-gravidade, onde ambas as métricas são perturbadas e expandidas até a segunda ordem. Esta é uma aproximação baseada no seguinte quadro

$$F = a + b. \quad (4.35)$$

$$a = \sqrt{\alpha_{ij}(x)y^i y^j} \quad b = \sqrt{\beta_{ij}(x)y^i y^j}. \quad (4.36)$$

Mas desta vez

$$\alpha_{ij} = \delta_{ij} + \frac{1}{M_\alpha} \delta\alpha_{ij} \quad \beta_{ij} = \delta_{ij} + \frac{1}{M_\beta} \delta\beta_{ij}. \quad (4.37)$$

Como acontece no regime massivo de Bi-gravidade e gravidade maciça, o seguinte limite $M_\alpha, M_\beta \rightarrow \infty$ será adotado de tal maneira que os termos ao quadrado nesses parâmetros serão considerados, ou seja, termos nos quais a contribuição de $\frac{1}{M_\alpha^2}, \frac{1}{M_\beta^2}, \frac{1}{M_\alpha M_\beta}$ aparecem não serão descartados. Vamos declarar algumas definições:

$$\begin{aligned} M_{\text{eff}} &:= \left(\frac{1}{M_\alpha^2} + \frac{1}{M_\beta^2} \right)^{-\frac{1}{2}} & y_i &= \delta_{ij} y^j \\ h_{ij} &:= M_{\text{eff}} \left(\frac{\delta\alpha_{ij}}{M_\alpha} - \frac{\delta\beta_{ij}}{M_\beta} \right) & \delta y_i^\alpha &= \delta\alpha_{ij} y^j \\ h^2 &:= h_{ij} y^i y^j & |y| &:= \sqrt{y_i y^i}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

As definições são análogas para b e β e a expansão perturbativa será:

$$\begin{aligned} a &\approx |y| \left(1 + \frac{\delta y^{\alpha 2}}{2|y|^2 M_\alpha} - \frac{3}{8} \frac{\delta y^{\alpha 4}}{|y|^4 M_\alpha^2} \right) \\ \frac{1}{a} &\approx \frac{1}{|y|} \left(1 - \frac{\delta y^{\alpha 2}}{2|y|^2 M_\alpha} + \frac{3}{8} \frac{\delta y^{\alpha 4}}{|y|^4 M_\alpha^2} \right) \\ \frac{1}{a^3} &\approx \frac{1}{|y|^3} \left(1 - \frac{3\delta y^{\alpha 2}}{2|y|^2 M_\alpha} + \frac{15}{8} \frac{\delta y^{\alpha 4}}{|y|^4 M_\alpha^2} \right) \\ \frac{1}{ab} &\approx \frac{1}{|y|^2} \left[1 - \frac{1}{2|y|^2} \left(\frac{\delta y^{\alpha 2}}{M_\alpha} + \frac{\delta y^{\beta 2}}{M_\beta} \right) + \frac{1}{8|y|^4} \frac{h^4}{M_{\text{eff}}} + \frac{1}{4|y|^4} \left(\frac{M_\beta^2}{M_\alpha^2} \frac{\delta y^{\alpha 4}}{M_\beta} + \frac{M_\alpha^2}{M_\beta^2} \frac{\delta y^{\beta 4}}{M_\alpha} \right) \right]. \end{aligned}$$

Fazendo o cálculo da métrica :

$$\begin{aligned}
 g_{ij} &= 4\delta_{ij} + \frac{2\delta\alpha_{ij}}{M_\alpha} + \frac{2\delta\beta_{ij}}{M_\beta} + \frac{1}{M_{\text{eff}}^2} \frac{y(iy_j)h^4}{4|y|^6} \\
 &+ \frac{1}{M_\alpha^2} \left(-\frac{\delta\alpha_{ij}\delta\dot{y}^{\alpha 2}}{2|y|^2} - \frac{\delta\dot{y}_i\delta\dot{y}_j^\alpha}{|y|^2} + \frac{2y(i\delta\dot{y}_j^\alpha)\delta\dot{y}^{\alpha 2}}{|y|^4} - \frac{y_i y_j \delta\dot{y}^{\alpha 4}}{|y|^6} \right) \\
 &+ \frac{1}{M_\beta^2} \left(-\frac{\delta\beta_{ij}\delta\dot{y}^{\beta 2}}{2|y|^2} - \frac{\delta\dot{y}_i\delta\dot{y}_j^\beta}{|y|^2} + \frac{2y(i\delta\dot{y}_j^\beta)\delta\dot{y}^{\beta 2}}{|y|^4} - \frac{y_i y_j \delta\dot{y}^{\beta 4}}{|y|^6} \right) \\
 &+ \frac{1}{M_\alpha M_\beta} \left(\frac{\delta\alpha_{ij}\delta\dot{y}^{\beta 2}}{2|y|^2} + \frac{\delta\beta_{ij}\delta\dot{y}^{\alpha 2}}{2|y|^2} + \frac{2\delta\dot{y}_i\delta\dot{y}_j^\beta}{|y|^2} - \frac{\delta\dot{y}^{\alpha 2}\delta\dot{y}^{\beta 2}}{2|y|^4} \delta_{ij} - \frac{2y(i\delta\dot{y}_j^\alpha)\delta\dot{y}^{\beta 2}}{|y|^4} \right) \\
 &+ \frac{1}{M_\alpha M_\beta} \left(-\frac{2y(i\delta\dot{y}_j^\beta)\delta\dot{y}^{\alpha 2}}{|y|^4} + \frac{3}{4} \frac{y_i y_j \delta\dot{y}^{\alpha 2}\delta\dot{y}^{\beta 2}}{|y|^6} \right). \tag{4.39}
 \end{aligned}$$

Mas pode ser interessante também definir os seguintes objetos:

$$l_{ij} := M_{\text{eff}} \left(\frac{\delta\alpha_{ij}}{M_\beta} + \frac{\delta\beta_{ij}}{M_\alpha} \right) \quad l^2 := l_{ij} y^i y^j. \tag{4.40}$$

Para reescrever a métrica na forma:

$$\begin{aligned}
 g_{ij} &= 4\delta_{ij} + \frac{2\delta\alpha_{ij}}{M_\alpha} + \frac{2\delta\beta_{ij}}{M_\beta} + \frac{1}{M_{\text{eff}}^2} \left(\frac{y(iy_j)h^4}{4|y|^6} + \frac{3}{4} \frac{y_i y_j l^4}{|y|^6} \right) \\
 &+ \frac{1}{M_\alpha^2} \left(-\frac{\delta\alpha_{ij}\delta\dot{y}^{\alpha 2}}{2|y|^2} - \frac{\delta\dot{y}_i\delta\dot{y}_j^\alpha}{|y|^2} + \frac{2y(i\delta\dot{y}_j^\alpha)\delta\dot{y}^{\alpha 2}}{|y|^4} - \frac{y_i y_j \delta\dot{y}^{\alpha 4}}{|y|^6} \right) \\
 &+ \frac{1}{M_\beta^2} \left(-\frac{\delta\beta_{ij}\delta\dot{y}^{\beta 2}}{2|y|^2} - \frac{\delta\dot{y}_i\delta\dot{y}_j^\beta}{|y|^2} + \frac{2y(i\delta\dot{y}_j^\beta)\delta\dot{y}^{\beta 2}}{|y|^4} - \frac{y_i y_j \delta\dot{y}^{\beta 4}}{|y|^6} \right) \\
 &+ \frac{1}{M_\alpha M_\beta} \left(\frac{\delta\alpha_{ij}\delta\dot{y}^{\beta 2}}{2|y|^2} + \frac{\delta\beta_{ij}\delta\dot{y}^{\alpha 2}}{2|y|^2} + \frac{2\delta\dot{y}_i\delta\dot{y}_j^\beta}{|y|^2} - \frac{\delta\dot{y}^{\alpha 2}\delta\dot{y}^{\beta 2}}{2|y|^4} \delta_{ij} \right) \\
 &+ \frac{1}{M_\alpha M_\beta} \left(-\frac{2y(i\delta\dot{y}_j^\alpha)\delta\dot{y}^{\beta 2}}{|y|^4} - \frac{2y(i\delta\dot{y}_j^\beta)\delta\dot{y}^{\alpha 2}}{|y|^4} \right). \tag{4.41}
 \end{aligned}$$

Proposição: Se a métrica assumir a forma:

$$g = 4 + \frac{1}{M_\alpha} \delta_\alpha g + \frac{1}{M_\beta} \delta_\beta g + \frac{1}{M_{\text{eff}}} \delta_{\text{eff}} g + \frac{1}{M_\alpha^2} \delta_{\alpha^2} g + \frac{1}{M_\beta^2} \delta_{\beta^2} g + \frac{1}{M_\alpha M_\beta} \delta_{\alpha\beta} g. \quad (4.42)$$

Então seu inverso será:

$$\begin{aligned} g^{-1} = & \frac{1}{4} - \frac{1}{16M_\alpha} \delta_\alpha g - \frac{1}{16M_\beta} \delta_\beta g - \frac{1}{16M_{\text{eff}}} \delta_{\text{eff}} g + \frac{1}{16M_\alpha^2} \left(\frac{(\delta_\alpha g)^2}{4} - \delta_{\alpha^2} g \right) \\ & + \frac{1}{16M_\beta^2} \left(\frac{(\delta_\beta g)^2}{4} - \delta_{\beta^2} g \right) + \frac{1}{16M_\alpha M_\beta} \left[\frac{(\delta_\alpha g, \delta_\beta g)}{4} - \delta_{\alpha\beta} g \right]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

□ Por substituição direta, a equação é satisfeita: $gg^{-1} = 1$, para o termo $(\delta_\alpha g, \delta_\beta g)$ representando o anticomutador ■

A torção de Cartan é apenas não nula em segunda ordem

$$C_{ijk} = 0 + \frac{0}{M_\alpha} + \frac{0}{M_\beta} + \frac{(\dots)}{M_\alpha^2} + \frac{(\dots)}{M_\beta^2} + \frac{(\dots)}{M_{\text{eff}}^2} + \frac{(\dots)}{M_\alpha M_\beta}. \quad (4.44)$$

Os coeficientes de pulverização não são nulos a partir de primeira ordem, porque

$$\frac{g^{ab}}{4} (2\partial_j g_{ia} - \partial_a g_{ij}) y^i y^j \quad (4.45)$$

E g é constante em ordem zero, fazendo os cálculos diretos.

Usemos a relação $\partial_\mu \delta \alpha_{\nu j} y^\mu y^\nu = \partial_\nu \delta \alpha_{j\mu} y^\mu y^\nu$ para poder reescrever o coeficiente de spray da forma:

$$\begin{aligned}
G^i = & 0 + \frac{\gamma_{rs}^i(\delta\alpha)}{4M_\alpha} y^r y^s + \frac{\gamma_{rs}^i(\delta\beta)}{4M_\beta} y^r y^s + \frac{1}{16|y|^2 M_{\text{eff}}^2} \left(\frac{y^i y^j}{|y|^2} - \frac{\delta^{ij}}{2} \right) (h^2 \partial_j h^2 + 3l^2 \partial_j l^2) \\
& + \frac{\delta^{ij}}{M_\alpha^2 16|y|^2} \left[\left(2\delta y^{\alpha 2} \partial_j \delta y^{\alpha 2} + 3\delta y^{\beta 2} \partial_j \delta y^{\beta 2} \right) - y^r \left(\partial_r \delta y_j^\alpha \delta y^{\alpha 2} + \delta y_j^\alpha \partial_r \delta y^{\alpha 2} + 3 \frac{y_j \delta y^{\beta 2}}{|y|^2} \partial_r \delta y^{\beta 2} \right) \right] \\
& - \frac{1}{M_\alpha^2} 2\delta^{ij} \delta \alpha_{jk} \gamma_{rs}^k(\delta\alpha) y^r y^s + \frac{(\alpha \rightarrow \beta)}{M_\beta^2} \\
& + \frac{\delta^{ij}}{16M_\alpha M_\beta} \left[\frac{\delta y^{\beta 2}}{2|y|^2} \delta_{jk} \gamma_{rs}^k y^r y^s - \delta \beta_{jl} \gamma_{rs}^l y^r y^s + \frac{1}{|y|^2} \left(\delta y_j^\alpha y^r \partial_r \delta y^{\beta 2} + 2\delta y_j^\beta y^r \partial_r \delta y^{\alpha 2} \right) \right] \\
& + \frac{\delta^{ij}}{16M_\alpha M_\beta} \left[\frac{y_j}{|y|^4} \left(\frac{3}{4} \delta y^{\beta 2} y^r \partial_r \delta y^{\alpha 2} - \frac{\delta y^{\alpha 2}}{2} y^r \partial_r \delta y^{\beta 2} \right) \right] + (\alpha \rightarrow \beta). \tag{4.46}
\end{aligned}$$

Mas também podemos abrir mão destes símbolos de Christoffel modificados fazendo:

$$\gamma_{rs}^i(\delta\alpha) = \delta^{ik} \delta \alpha_{kl} \gamma_{rs}^l{}^{\delta\alpha} \text{ e assim:}$$

$$\begin{aligned}
G^i = & 0 + \frac{\delta^{ik} \delta \alpha_{kl} \gamma_{rs}^l{}^{\delta\alpha} y^r y^s}{4M_\alpha} + \frac{\delta^{ik} \delta \alpha_{kl} \gamma_{rs}^l{}^{\delta\beta} y^r y^s}{4M_\beta} + \frac{1}{16|y|^2 M_{\text{eff}}^2} \left(\frac{y^i y^j}{|y|^2} - \frac{\delta^{ij}}{2} \right) (h^2 \partial_j h^2 + 3l^2 \partial_j l^2) \\
& + \frac{\delta^{ij}}{M_\alpha^2 16|y|^2} \left[\left(2\delta y^{\alpha 2} \partial_j \delta y^{\alpha 2} + 3\delta y^{\beta 2} \partial_j \delta y^{\beta 2} \right) - y^r \left(\partial_r \delta y_j^\alpha \delta y^{\alpha 2} + \delta y_j^\alpha \partial_r \delta y^{\alpha 2} + 3 \frac{y_j \delta y^{\beta 2}}{|y|^2} \partial_r \delta y^{\beta 2} \right) \right] \\
& - \frac{1}{M_\alpha^2} 2\delta^{ij} \delta \alpha_{jk} \delta^{kc} \delta \alpha_{cl} \gamma_{rs}^l{}^{\delta\alpha} y^r y^s + \frac{(\alpha \rightarrow \beta)}{M_\beta^2} \\
& + \frac{\delta^{ij}}{16M_\alpha M_\beta} \left[\left(\frac{\delta \alpha_{jk} \delta y^{\beta 2}}{2|y|^2} - \delta \beta_{jl} \delta^{lc} \delta \alpha_{ck} \right) \gamma_{rs}^k{}^{\delta\alpha} y^r y^s + \frac{1}{|y|^2} \left(\delta y_j^\alpha y^r \partial_r \delta y^{\beta 2} + 2\delta y_j^\beta y^r \partial_r \delta y^{\alpha 2} \right) \right] \\
& + \frac{\delta^{ij}}{16M_\alpha M_\beta} \left[\frac{y_j}{|y|^4} \left(\frac{3}{4} \delta y^{\beta 2} y^r \partial_r \delta y^{\alpha 2} - \frac{\delta y^{\alpha 2}}{2} y^r \partial_r \delta y^{\beta 2} \right) \right] + (\alpha \rightarrow \beta). \tag{4.47}
\end{aligned}$$

Agora seguindo para o coeficientes de conexão:

$$N_j^i = \gamma_{jk}^i y^k. \tag{4.48}$$

porque em geral

$$N_j^i = \gamma_{jk}^i y^k - g^{il} C_{ljk} \gamma_{ab}^k y^a y^b. \tag{4.49}$$

Mas a torção de Cartan existe apenas em segunda ordem e os coeficientes de pulverização em primeira, o que faz o segundo termo de terceira ordem e, portanto, não entra em nossa aproximação. Mas γ_{jk}^i é uma expressão em termos das derivadas da métrica, o que significa que ela é de primeira ordem pelo menos, devido ao fato de que g é constante na ordem zero.

$$\begin{aligned}
N_j^i &= 0 + \frac{(\dots)}{M_\alpha} + \frac{(\dots)}{M_\beta} + \frac{(\dots)}{M_{\text{eff}}^2} + \frac{(\dots)}{M_\alpha^2} + \frac{(\dots)}{M_\beta^2} + \frac{(\dots)}{M_\alpha M_\beta} \\
&= 0 + \frac{1}{M_\alpha} \left[\frac{\delta^{il}}{4} (\partial_j \delta \alpha_{kl} + \partial_k \delta \alpha_{lj} - \partial_l \delta \alpha_{jk}) \right] y^k + \frac{1}{M_\beta} \left[\frac{\delta^{il}}{4} (\partial_j \delta \beta_{kl} + \partial_k \delta \beta_{lj} - \partial_l \delta \beta_{jk}) \right] y^k \\
&+ \frac{1}{M_{\text{eff}}^2} \left[\frac{h^2}{8|y|^4} \left(\frac{\delta^{il} y_{(j} y_{l)} }{2|y|^2} y^k \partial_k h^2 + \frac{y^i \partial_j h^2}{2} - \frac{y_j \delta^{il} \partial_l h^2}{2} \right) \right] \\
&+ \frac{1}{M_{\text{eff}}^2} \left[\frac{3l^2}{8|y|^4} \left(\frac{\delta^{il} y_{(j} y_{l)} }{2|y|^2} y^k \partial_k l^2 + \frac{y^i \partial_j l^2}{2} - \frac{y_j \delta^{il} \partial_l l^2}{2} \right) \right] + \dots \tag{4.50}
\end{aligned}$$

Ou mesmo usando esses símbolos próprios de Christoffel modificados:

$$\begin{aligned}
N_j^i &= 0 + \frac{\gamma_{kl}^i(\delta\alpha)y^k}{M_\alpha} + \frac{\gamma_{kl}^i(\delta\beta)y^k}{M_\beta} \\
&+ \frac{1}{M_{\text{eff}}^2} \left[\frac{h^2}{8|y|^4} \left(\frac{\delta^{il} y_{(j} y_{l)} }{2|y|^2} y^k \partial_k h^2 + \frac{y^i \partial_j h^2}{2} - \frac{y_j \delta^{il} \partial_l h^2}{2} \right) \right] \\
&+ \frac{1}{M_{\text{eff}}^2} \left[\frac{3l^2}{8|y|^4} \left(\frac{\delta^{il} y_{(j} y_{l)} }{2|y|^2} y^k \partial_k l^2 + \frac{y^i \partial_j l^2}{2} - \frac{y_j \delta^{il} \partial_l l^2}{2} \right) \right] + \dots \tag{4.51}
\end{aligned}$$

Usando o mesmo argumento para se livrar dos símbolos de Christoffel que foi usado para os coeficientes de spray

$$\begin{aligned}
N_j^i &= 0 + \frac{\delta^{ik} \delta \alpha_{kl} \gamma_{rj}^l y^r}{M_\alpha} + \frac{\delta^{ik} \delta \alpha_{kl} \gamma_{rj}^l y^r}{M_\beta} \\
&+ \frac{1}{M_{\text{eff}}^2} \left[\frac{h^2}{8|y|^4} \left(\frac{\delta^{il} y_{(j} y_{l)} }{2|y|^2} y^k \partial_k h^2 + \frac{y^i \partial_j h^2}{2} - \frac{y_j \delta^{il} \partial_l h^2}{2} \right) \right] \\
&+ \frac{1}{M_{\text{eff}}^2} \left[\frac{3l^2}{8|y|^4} \left(\frac{\delta^{il} y_{(j} y_{l)} }{2|y|^2} y^k \partial_k l^2 + \frac{y^i \partial_j l^2}{2} - \frac{y_j \delta^{il} \partial_l l^2}{2} \right) \right] + \dots \tag{4.52}
\end{aligned}$$

De agora em diante as expressões de maior ordem ficam cada vez mais poluídas de termos e incompreensíveis, então preservemos as menores ordens e $\frac{1}{M_{\text{eff}}^2}$, que curiosamente apresenta uma expressão bem compacta. A curvatura de Riemann se manifesta a partir de primeira ordem, porque é uma soma das derivadas do coeficiente de conexão que são de primeira ordem, e isso é uma contribuição desses termos

$$\begin{aligned}
 R_{ij}^k &= 0 + \frac{\partial_i \gamma^k{}_{lj}(\delta\alpha)y^l - \partial_j \gamma^k{}_{lj}(\delta\alpha)y^l}{M_\alpha} + \frac{\partial_i \gamma^k{}_{lj}(\delta\beta)y^l - \partial_j \gamma^k{}_{lj}(\delta\beta)y^l}{M_\beta} \\
 &+ \frac{1}{M_{\text{eff}}^2} \frac{1}{16|y|^4} \left[\delta^{kl} \frac{y(l y_i) \partial_{j\mu}^2 h^4 - y(l y_j) \partial_{i\mu}^2 h^4}{2|y|^2} y^\mu + y^k \partial_{[ji]}^2 h^4 - \delta^{kl} y_{[i} \partial_{j]l}^2 h^4 \right] \\
 &+ \frac{1}{M_{\text{eff}}^2} \frac{3}{8|y|^4} \left[\delta^{kl} \frac{y(l y_i) \partial_{j\mu}^2 l^4 - y(l y_j) \partial_{i\mu}^2 l^4}{2|y|^2} y^\mu + y^k \partial_{[ji]}^2 l^4 - \delta^{kl} y_{[i} \partial_{j]l}^2 l^4 \right] + (\dots). \quad (4.53)
 \end{aligned}$$

4.3 Caso de Randers

Semelhante ao que aconteceu com o caso riemanniano agora será apresentadas as condições nas quais o espaço determinado por esta função Bi-métrica é projetivamente equivalente à geometria de Randers. Na dita subseção foi usado um desenvolvimento para determinar o tensor Q_l que será repetido aqui:

$$Q_l = \frac{1}{a} \left(\alpha_{li} - \frac{y_l y_i}{a^2} \right) \left(\gamma_{rs}^i y^s y^r - 2G^i \right) + \left(\begin{matrix} \alpha \rightarrow \beta \\ a \rightarrow b \end{matrix} \right). \quad (4.54)$$

Desta vez como $F = q + b_R$ com $q = \sqrt{g_{ij} y^i y^j}$ e $b_R = \beta_i y^i$ lembrando que $g^{ij} \beta_i \beta_j > 1$, o coeficiente de spray do caso de Randers será:

$$\begin{aligned}
 G^i &= \frac{1}{2} \left[\gamma_{jk}^i + \frac{y^i}{q} \Delta_k \beta_j \right] y^j y^k + q \left(g^{ij} - \frac{y^i \beta_l}{q} g^{jl} \right) \Delta_{[k} \beta_{j]} y^k \\
 \Delta_k \beta_j &:= \partial_k \beta_j - \gamma_{jk}^i \beta_i \quad (4.55)
 \end{aligned}$$

Assim substituindo esta expressão em Q_l

$$\begin{aligned}
 Q_l &= \frac{1}{a} \left(\alpha_{li} - \frac{y_l y_i}{a^2} \right) \left(\gamma_{rs}^i - \gamma_{rs}^i - \frac{y^i}{2q} \Delta_s \beta_r \right) y^s y^r \\
 &- \frac{2q}{a} \left(\alpha_{li} - \frac{y_l y_i}{a^2} \right) \left(g^{ki} - \frac{y^i \beta^k}{q} \right) \Delta_{[j} \beta_{k]} y^j + \left(\begin{matrix} \alpha \rightarrow \beta \\ a \rightarrow b \end{matrix} \right). \quad (4.56)
 \end{aligned}$$

E β^i é entendido como $g^{ij} \beta_j$. Recordando-se que o tensor $\left(\alpha_{li} - \frac{y_l y_i}{a^2} \right)$ já foi analisado na seção de geometria de Riemann e que foi descoberto que ele é degenerado para o autovetor y^i , podemos eliminar alguns termos. Assim é mais conveniente apresentar a forma:

$$Q_l = \frac{1}{a} \left(\alpha_{li} - \frac{y_l y_i}{a^2} \right) \left[\left(\gamma_{rs}^i - \gamma_{rs}^i \right) y^s y^r - 2q g^{ki} \Delta_{[j} \beta_{k]} y^j \right] + \left(\begin{matrix} \alpha \rightarrow \beta \\ a \rightarrow b \end{matrix} \right). \quad (4.57)$$

É fácil de ver que quando $\beta_i \rightarrow 0$ o que sobra é simplesmente a expressão para o antigo caso riemanniano, como deveria ser:

$$Q_l = \frac{1}{a} \left(\alpha_{li} - \frac{\alpha_{li} \alpha_{li}}{a^2} \right) (\gamma_{rs}^i - \gamma_{rs}^i) y^s y^r + \left(\frac{\alpha \rightarrow \beta}{a \rightarrow b} \right). \quad (4.58)$$

De uma forma inocente se imagina que devem haver grandes semelhanças para Randers e esta geometria Bi-métrica quando $\beta_{ij} \rightarrow \beta_i \beta_j$ afinal a função de Finsler assumiria a forma $F = \sqrt{\alpha_{ij} y^i y^j} + |\beta_i y^i|$ ao passo que para Randers onde $g = \alpha$ teríamos $F = \sqrt{\alpha_{ij} y^i y^j} + \beta_i y^i$. A única diferença entre os dois é o módulo, e agora é chegada a hora de analisar como esta diferença afeta a projetividade dos dois espaços. Então substituindo $g \rightarrow \alpha$ e $\beta_{ij} \rightarrow \beta_i \beta_j$ na expressão exposta à cima:

$$Q_l = -2\alpha^{ki} \Delta_{[j} \beta_{k]} y^j \left(\alpha_{li} - \frac{\alpha_{li} \alpha_{li}}{a^2} \right) + \frac{1}{b} \left(\beta_l \beta_i - \frac{\beta_l \beta_i}{b^2} \right) \left[\left(\gamma_{rs}^i - \gamma_{rs}^i \right) y^s y^r - 2a\alpha^{ki} \Delta_{[j} \beta_{k]} y^j \right].$$

Neste caso Analisemos o que significa $\overset{\beta}{y}_i = \beta_{ij} y^j$. Lembrando que agora $b = |\beta_j y^j|$ então conclui-se que $\overset{\beta}{y}_i = \beta_i b \sin(\beta_j y^j)$ para a função $\sin(\beta_j y^j) = 1$ se $\beta_j y^j > 0$ e -1 do contrário. Essa função na verdade nem contribuirá tanto, pois notavelmente $\sin^2(x) = 1 \forall x$, que é o que acontece na expressão acima, note:

$$Q_l = -2\alpha^{ki} \Delta_{[j} \beta_{k]} y^j \left(\alpha_{li} - \frac{\alpha_{li} \alpha_{li}}{a^2} \right) \quad (4.59)$$

Para que os dois espaços sejam projetivamente equivalentes é preciso que $Q_l = 0$, o que de modo geral não acontece aqui, mesmo impondo que $\beta_i y^i > 0 \forall \beta_i; y^i$. De maneira geral não é tão óbvio imaginar como satisfazer a condição de projetividade dos dois espaços.

5 Conclusões e perspectivas futuras

O primeiro ponto a ser esclarecido é que este trabalho está bem ciente da natureza pseudo-riemanniana da teoria da Relatividade Geral e de como essa característica não foi contemplada nesta tese. Para justificar esta abordagem basta ver a diferença entre as duas teorias físicas que estão representadas aqui.

É bem óbvio o fato de que o formalismo da geometria de Finsler não apresenta a mesma motivação para a Bi-gravidade que a geometria riemanniana para a Relatividade Geral. No caso de Finsler ela surge como a compatibilidade com a geodésica da partícula pontual para a ação a equação (2.144). Já para Riemann existia uma necessidade de e resolver um problema relacionado às partículas teste da teoria, que não existem da mesma forma que existem no eletromagnetismo, por exemplo.

Isso é importante, pois a teoria da Bi-gravidade não impõe a invariância de Lorentz e pode ser vista até certo ponto como uma teoria de quebra da invariância de Lorentz ao passo que a Relatividade Geral insere a invariância de Lorentz na estrutura matemática de certa forma *ad hoc*. A questão é que a forma com que esta invariância é inserida é feita da seguinte forma: se antes a métrica era positivo definida, então agora ela tem assinatura minkowskiana, o que aparentemente não é possível de se fazer para a métrica de Finsler, algumas abordagens alternativas tem surgido neste sentido como a seguinte(PFEIFER, 2017).

Esse procedimento é bem simples implementado na métrica riemanniana (ou pseudo-riemanniana) pois a métrica é o objeto elementar e a mudança não vai alterar nenhuma condição de existência de algum outro objeto. Não se pode dizer o mesmo para a métrica de Finsler, pois ela não é um objeto elementar da teoria, mas sim uma derivação da função de Finsler, que é sempre positivo definida.

Pode-se argumentar que, assim como foi feito para a Relatividade Geral, com a positividade da matriz sendo ressignificada, a positividade da função de Finsler pode ser também questionada. Se no caso riemanniano autovetores da métrica de autovalor positivo são interpretados como vetores do tipo espaço e autovalores negativos como autovetores do tipo tempo, para autovalores nulos tem-se os vetores do tipo luz. O mesmo não se aplica para o caso Finsleriano pois ainda que interpretemos a função de Finsler como o infinitésimo do comprimento de arco $F dt = ds$ e categorizando geodésicas de um suposto espaço de Finsler com $ds^2 > 0$ como geodésicas do tipo espaço como determinar curvas do tipo tempo e luz?

Outra questão é que permitindo que a função de Finsler seja nula $F = 0$ para se alcançar $ds^2 = 0$ desejando interpretar como uma geodésica nula. Ao invés de se ter uma curva dita do tipo luz, o que se tem são diversas inconsistências matemáticas, basta notar quantas vezes essa

função aparece em um denominador neste trabalho.

Mesmo depois disso dito ainda há a possibilidade de definir um espaço de Finsler que preserve essa estrutura do espaço tempo, esse é o caso estudado por Pfeifer em seus trabalhos de PHD, que foi uma das referências na presente dissertação. Nele é possível encontrar a estrutura da geometria Finsleriana como uma teoria de fundo e sobre ela é definida outra função $F(x, y) = |L(x, y)|^{\frac{1}{r}}$ onde essa sim tem uma interpretação mais tradicional. Sua hessiana será vista como uma métrica, que poderá assumir uma assinatura minkowskiana.

Sobre a investigação deste espaço de Finsler para a função específica definida como $F = \sqrt{\alpha_{ij}y^i y^j} + \sqrt{\beta_{ij}y^i y^j}$ pode-se dizer que sua métrica foi determinada e exposta em 3 formas diferentes no capítulo 3. Devido ao elevado número de cálculos, buscar por expressões descritas em diferentes formas da métrica foi a solução encontrada para evitar tantos inconvenientes. Sem dúvida o maior causador de inconvenientes nesse sentido é a métrica inversa, a qual não se encontrou outra forma de expressar em termos das matrizes α e β mais simples do que aquela expressão no apêndice E.

Como uma esperança para futuras abordagens, acredita-se que é possível encontrar uma expressão mais compacta para a métrica inversa em termos de α e β . Isto não passa de um achismo, mas o espaço de Randers, que tem uma estruturas de certa forma semelhante à este, pode escrever a sua métrica inversa em um formato extremamente mais compacto, como segue abaixo:

$$g^{ij} = \frac{a}{b}\alpha^{ij} + \frac{y^i y^j}{F^2} \frac{b + a\alpha^{rs}\beta_r\beta_s}{F} - \frac{2a}{F}y^{(i}\beta^{j)} \quad (5.1)$$

com

$$\beta^i = \alpha^{ij}\beta_j. \quad (5.2)$$

E por mais que no corpo do texto a Geometria de Randers tenha se revelado uma realidade muito distante da geometria Bi-métrica a discrepância entre as duas expressões é muito significativa. Ainda devido a esta dificuldade é que não se pôde apresentar uma versão, por exemplo, da ação de Einstein-Hilbert que requer a forma explícita do escalar de Ricci, isto é, o traço do tensor de Riemann

No final do capítulo 3 foi comentada a possibilidade de encontrar uma ação para este espaço, e agora é chegada a hora de argumentar porque isto não é tarefa fácil. Esta tal ação precisaria da determinação da medida de Busemann tal qual feita em (2.259). É plausível dizer que o jacobiano de uma transformação desse tipo para a esfera unitária poderia não ser linear

em y . Isso significaria que não seria possível determinar uma medida para ele já que o volume integrado não corresponderia à esfera unitária.

No capítulo 4 foram abordados métodos perturbativos concluindo-se que de fato a Geometria de Finsler proposta pode retornar à Geometria de Riemann quando $\beta = 0$ ou em um limite $\lambda \rightarrow 0$ ela se comporta como uma teoria de fundo perturbado. Condições para a projetividade dos dois espaços foram derivadas e em geral o que se sabe é que para métricas do tipo $g(x) = \beta(x) = \lambda\alpha$ os espaços são projetivamente equivalentes, mas ainda não se tem nenhuma suspeita das soluções mais gerais possíveis

Aproximações no limite correspondente ao massivo para a teoria da Bi-gravidade não revelaram nenhuma estimativa do termo massivo, pois não há ainda uma ação para tal espaço e mesmo perturbativamente revelou-se um trabalho muito oneroso. Há de se notar a aparição de termos perturbativos de ordem $\frac{1}{M_{\text{eff}}^2}$ que são na verdade uma outra forma de escrever os termos de ordem $\frac{1}{M_\alpha M_\beta}$. A diferença dessas duas ordens se revela na métrica e na métrica inversa onde se pode observar que os termos de $\frac{1}{M_{\text{eff}}^2}$ se comportam como se fossem de ordem $\frac{1}{M_\alpha}$ ou $\frac{1}{M_\beta}$.

O que se pode dizer a respeito dos cálculos é que em ordem 0, nos deparamos com um espaço euclidiano, para ordem 1 um espaço de Riemann e em segunda ordem um espaço puramente Finsleriano. Isso é o que se esperava, pois devido à descontinuidade de VDVZ o termo massivo só pode aparecer em segunda ordem, e se Bi-gravidade tiver mesmo de ser uma abordagem Finsleriana, sua massa não apareceria em um espaço riemanniano.

Por fim, para complementar o que se esperava sobre uma aproximação do espaço de Randers, que já havia sido investigado no capítulo 3 com a torção de Matsumoto, estudou-se a sua projetividade. Uma condição de projetividade foi derivada sem nenhuma solução não trivial encontrada. Destaca-se a condição em que $\beta_{ij} = \beta_i\beta_j$ para a quantidade $\beta_i y^i$ sempre positiva e $g = \alpha$, pois ela não gera solução, ao contrário do que seria intuitivo.

Vale comentar aqui que a exigência $\beta_{ij} \rightarrow \beta_i\beta_j$ rompe uma das condições de existência da função de Finsler. Não somente ela não se trata mais do mesmo espaço, pois originalmente tratava-se de uma matriz não degenerada, como também desrespeita a condição de que $F \in \mathbb{C}^2$. Tais decisões foram propositalmente tomadas neste sentido, na esperança de perceber alguma indeterminação, mas no lugar disso apenas não houve satisfação da equação.

O distanciamento desses dois espaços pode ser visto com pessimismo por um lado, se não há estruturas já bem conhecidas e descritas na literatura para se amparar. Por outro pode-se dizer que um novo caminho para generalizar a geometria riemanniana, sem vínculos com objetos conhecidos está surgindo

Em vista de tudo o que foi dito existem alguns pontos a serem abordados como uma forma de continuar o que foi começado neste trabalho. Primeiramente existem alguns detalhes da estrutura matemática a serem derivados ainda como a curvatura de Riemann. Com sorte existe

alguma simplificação discutida anteriormente que pode vir na forma de uma determinação de $y^i(y_i)$ e a utilização da forma: $g^{kj} \partial^k y^j$.

Outro caminho para o futuro desta abordagem seria uma teoria de campos, ainda que perturbativa, pois parece haver uma boa chance de um modelo para quebra da invariância de Lorentz. Neste sentido há ainda uma série de trabalhos de Kostelecky para se basear na busca por adequação experimental. Por fim uma gravidade Finsleriana haveria de ser derivada, assim como sua ação. Os desafios desta tarefa basicamente é o cálculo da medida de Busemann (2.247) só assim poder-se-á fazer uma comparação verdadeira com a Bi-gravidade.

REFERÊNCIAS

- ADLER, S. L. Order- r vacuum action functional in scalar-free unified theories with spontaneous scale breaking. *Phys. Rev. Lett.*, v. 44, n. 24, p. 1567, 1980. Citado na página 42.
- AKRAMI, Y.; KOIVISTO, T. S.; SOLOMON, A. R. The nature of spacetime in bigravity: two metrics or none? *General Relativity and Gravitation*, v. 47, n. 1, p. 1838, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 55.
- ARKANI-HAMED, N.; SCHWARTZ, M. D. Discrete gravitational dimensions. *Phys.Rev.D*, v. 69, n. 10, p. 104001, 2004. Citado na página 50.
- ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. v. 429, n. 3-4, p. 263,272, 1998. Citado na página 39.
- ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C. W. The dynamics of general relativity. *Gravitation: an introduction to current research*, p. 227–265, 2004. Citado na página 46.
- BAO, D. et al. *A sampler of Riemann-Finsler geometry*. United kingdom: Cambridge university press, 2004. Citado na página 78.
- BAO, D.; CHERN, S.-S.; SHEN, Z. *An introduction to Riemann-Finsler geometry*: Graduate texts in mathematics. German: Springer, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 80.
- BOULWARE, D. G.; DESER, S. Can gravitation have a finite range? *Physics Letters D*, v. 6, n. 12, p. 3368, 1972. Citado na página 34.
- BUSEMANN, H. Intrinsic area. *Annals of Mathematics*, p. 234–267, 1947. Citado na página 85.
- CAPPER, D. On quantum corrections to the graviton propagator. *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, v. 25, n. 1, p. 29–46, 1975. Citado na página 42.
- CHERN, S.-S.; SHEN, Z. *Riemann-Finsler geometry*: Nankai tracts in mathematics. UK: World scientific publishing co, 2005. v. 6. Citado na página 85.
- DEFFAYET, C.; MOURAD, J. Multigravity from a discrete extra dimension. *Phys.Lett.B*, v. 589, n. 1-2, p. 48–58, 2004. Citado na página 46.
- DELBOURGO, R.; SALAM, A. The stueckelberg formalism for spin two. *Lettere al nuovo cimento*, v. 12, n. 9, p. 297, 1975. Citado na página 25.
- DV, G.; GABADADZE, G. Gravity on a brane in infinite-volume extra space. v. 63, n. 6, p. 065007, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 41, 42 e 44.
- DVALI, G.; GABADADZE, G.; PORRATI, M. 4d gravity on a brane in 5d minkowski space. v. 485, n. 1-3, p. 208,214, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 44.
- DVALI, G.; GABADADZE, G.; PORRATI, M. Metastable gravitons and infinite volume extra dimensions. v. 484, n. 1-2, p. 112,118, 2000. Citado na página 39.
- FIERZ. Über die relativistische theorie kräftefreier teilchen mit beliebigen spin. *Helv. Phys. Acta*, n. 12, p. 3, 1939. Citado na página 18.

- FIERZ, M.; PAULI, W. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, v. 173, p. 211, 1939. Citado 3 vezes nas páginas 17, 19 e 21.
- GREGORY, R.; RUBAKOV, V. A.; SIBIRYAKOV, S. M. Opening up extra dimensions at ultra-large scales. v. 485, p. 208–214, 2000. Citado na página 39.
- HAUPT, O. *Differential- und Integralrechnung*. Berlin: De Gruyter, 1938. vol. III. Citado na página 85.
- HEISENBERG, L. Theoretical and observational consistency of massive gravity. *These de Université de Genève*, p. 194, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 36.
- JACCARD, M.; MAGGIORE, M.; MITSOU, E. Bardeen variables and hidden gauge symmetries in linearized massive gravity. *Physical Review D*, v. 87, n. 4, p. 044017, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- MATSUMOTO, M. On c-reducible finsler spaces. 1972. Citado na página 72.
- NAKAHARA, M. *Geometry, Topology and Physics*. Shizuoka: IOP, 1990. Citado 3 vezes nas páginas 57, 78 e 80.
- OGIEVETSKY, V.; POLUBARINOV, I. V. Interacting field of spin 2 and the einstein equations. *Annals of Physics*, v. 35, n. 2, p. 167–208, 1965. Citado na página 32.
- PFEIFER, C. The finsler spacetime framework: backgrounds for physics beyond metric geometry. 2017. Citado 2 vezes nas páginas 89 e 127.
- RANDALL, R. S. L. An alternative to compactification. v. 83, p. 4690,4693, 1999. Citado na página 39.
- RHAM, C. D. Massive gravity. *Living Rev. Relativity*, v. 17, n. 1, p. 7, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 35, 47, 48 e 50.
- RYDER, L. H. *Quantum field theory*. New York: Cambridge University Press, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.
- SCHOMERUS, V. *A primer on string theory*. United kingdom: Cambridge university press, 2017. Citado na página 39.
- STÜCKELBERG, E. Die wechselwirkungskräfte in der elektrodynamik und in der feldtheorie der kernkräfte. teil i. *Helvetica Physica Acta*, v. 11, p. 225, 1938. Citado na página 23.
- STÜCKELBERG, E. Die wechselwirkungskräfte in der elektrodynamik und in der feldtheorie der kernkräfte. teil ii und iii. *Helvetica Physica Acta*, v. 11, p. 300, 1938. Citado na página 24.
- VAINSHTEIN, A. To the problem of nonvanishing gravitation mass. *Physics Letters B*, v. 39, n. 3, p. 393,394, 1972. Citado na página 33.
- VELTMAN, M.; DAM, H. van. Massive and mass-less yang-mills and gravitational fields. *Nuclear Physics B*, v. 22, n. 2, p. 397–411, 1970. Citado na página 31.
- WAERDEN, V. D. *Die Gruppentheoretische: Methode in der quantenmechanik*. Berlin: Springer, 1932. Citado na página 18.

WALD, R. M. *Gravitation and Cosmology*: Principles and applications of the general theory of relativity. New York: Wiley, 1972. Citado na página 17.

YUKAWA. On the interaction of elementary particles. *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan*, v. 17, p. 48, 1935. Citado na página 23.

YUKAWA. On the interaction of elementary particles ii. *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan*, v. 19, p. 1084, 1937. Citado na página 23.

ZAKHAROV, V. Linearized gravitation theory and the graviton mass. *JETP Lett.(USSR)(Engl. Transl.)*, v. 12, p. 312–14, 1970. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Identidades importantes

Neste primeiro apêndice, serão derivadas 9 identidades importantes que serão amplamente utilizadas nos apêndices a seguir e serão referenciadas com a enumeração aqui apresentada:

1.

$$\epsilon^{i_1 \dots i_n} \epsilon_{i_1 \dots i_n} = n!$$

O símbolo de Levi-Civita é definido por: $\epsilon^{i_1 \dots i_n} = -1$ se $i_1 \dots i_n$ é um elemento da permutação ímpar de $1 \dots n$ e $\epsilon^{i_1 \dots i_n} = 1$ se $i_1 \dots i_n$ é um elemento da permutação par de $1 \dots n$ de outro modo $\epsilon^{i_1 \dots i_n} = 0$ então:

$$\epsilon^{i_1 \dots i_n} \epsilon_{i_1 \dots i_n} = \sum_{i_1 \dots i_n} \epsilon^{i_1 \dots i_n} \epsilon_{i_1 \dots i_n} \quad (\text{A.1})$$

Cada monômio $\epsilon^{i_1 \dots i_n} \epsilon_{i_1 \dots i_n}$ deve ser igual a 1 por definição, quando não for nulo. Por esse motivo, é apenas uma soma de muitos 1 e torna-se uma contagem do número de elementos, a dimensão do espaço. Como $\epsilon^{i_1 \dots i_n}$ é antissimétrico, sua dimensão é bem conhecida como $n!$

2.

$$\epsilon^{i_1 \dots i_k i_{k+1} \dots i_n} \epsilon_{i_1 \dots i_k j_{k+1} \dots j_n} = (n - k)! k! \delta_{j_{k+1}}^{[i_{k+1}} \dots \delta_{j_n}^{i_n]}$$

Derivando a primeira identidade com a derivado covariante associado à métrica de uma variedade Riemanniana, obtém-se:

$$\nabla_j (\epsilon^{i_1 \dots i_n} \epsilon_{i_1 \dots i_n}) = 2 \epsilon^{i_1 \dots i_n} \nabla_j \epsilon_{i_1 \dots i_n} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Isso significa que a derivada covariante do tensor Levi-Civita é nula e $\epsilon^{i_1 \dots i_n} \epsilon_{j_1 \dots j_n}$ deve ser um múltiplo da unidade. Sabendo que a Levi-Civita é um tensor totalmente antissimétrico, é necessário que:

$$\epsilon^{i_1 \dots i_n} \epsilon_{j_1 \dots j_n} \propto \delta_{j_1}^{[i_1} \dots \delta_{j_n}^{i_n]} \quad (\text{A.3})$$

Para saber qual é a constante de proporcionalidade, usa-se a identidade 1 como condição de normalização.

3.

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} \det(A) = \epsilon_{j_1 \dots j_n} A_{i_1}^{j_1} \dots A_{i_n}^{j_n}$$

O determinante é definido como $\det(A) = \frac{1}{n!} \epsilon_{i_1 \dots i_n} \epsilon_{j_1 \dots j_n} A_{i_1}^{j_1} \dots A_{i_n}^{j_n}$ segue que o cálculo direto usando a identidade 2 leve à:

$$\begin{aligned} \epsilon_{i_1 \dots i_n} \det(A) &= \frac{1}{n!} \epsilon_{i_1 \dots i_n} \epsilon_{j_1 \dots j_n} \epsilon^{k_1 \dots k_n} A_{k_1}^{j_1} \dots A_{k_n}^{j_n} \\ &= \epsilon_{j_1 \dots j_n} (\delta_{i_1}^{[k_1} \dots \delta_{i_n}^{k_n]}) A_{k_1}^{j_1} \dots A_{k_n}^{j_n} \\ &= \epsilon_{j_1 \dots j_n} A_{i_1}^{j_1} \dots A_{i_n}^{j_n} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

4.

$$A_{k_1}^{i_1} \epsilon^{j_1 \dots j_n} \epsilon_{i_1 \dots i_n} A_{j_2}^{i_2} \dots A_{j_n}^{i_n} = (n-1)! \delta_{k_1}^{j_1} \det(A)$$

Use a identidade 3 e, depois dessa, a identidade 2, obtém-se:

$$\begin{aligned} A_{k_1}^{i_1} \epsilon^{j_1 \dots j_n} \epsilon_{i_1 \dots i_n} A_{j_2}^{i_2} \dots A_{j_n}^{i_n} &= \epsilon^{j_1 \dots j_n} \epsilon_{k_1 j_2 \dots j_n} \det(A) \\ &= (n-1)! \delta_{k_1}^{j_1} \det(A) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

5.

$$A_{k_1}^{i_1} A_{k_2}^{i_2} \epsilon^{j_1 \dots j_n} \epsilon_{i_1 \dots i_n} A_{j_3}^{i_3} \dots A_{j_n}^{i_n} = 2(n-2)! \delta_{k_1}^{j_1} \delta_{k_2}^{j_2} \det(A)$$

Novamente, usando as identidades 3 e 2, mas para $k = 2$ desta vez:

$$\begin{aligned} A_{k_1}^{i_1} A_{k_2}^{i_2} \epsilon^{j_1 \dots j_n} \epsilon_{i_1 \dots i_n} A_{j_3}^{i_3} \dots A_{j_n}^{i_n} &= \epsilon^{j_1 \dots j_n} \epsilon_{k_1 k_2 j_3 \dots j_n} \det(A) \\ &= [n - (n-2)]! (n-2)! \delta_{k_1}^{j_1} \delta_{k_2}^{j_2} \det(A) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Leva à:

$$A_{k_1}^{i_1} A_{k_2}^{i_2} \epsilon^{j_1 \dots j_n} \epsilon_{i_1 \dots i_n} A_{j_3}^{i_3} \dots A_{j_n}^{i_n} = 2(n-2)! \delta_{k_1}^{j_1} \delta_{k_2}^{j_2} \det(A) \quad (\text{A.7})$$

6.

$$\epsilon^{j_1 \dots j_n} \epsilon_{i_1 \dots i_n} A_{j_2}^{i_2} \dots A_{j_n}^{i_n} = (n-1)! (A^{-1})_{i_1}^{j_1} \det(A)$$

Para isso, utiliza-se a identidade 4 multiplicada pela matriz inversa $(A^{-1})_l^{k_1}$ e depois altera os índices l por i_1

$$\begin{aligned} A_{k_1}^{i_1} (A^{-1})_l^{k_1} \epsilon^{j_1 \dots j_n} \epsilon_{i_1 \dots i_n} A_{j_2}^{i_2} \dots A_{j_n}^{i_n} &= \delta_l^{i_1} \epsilon^{j_1 \dots j_n} \epsilon_{i_1 \dots i_n} A_{j_2}^{i_2} \dots A_{j_n}^{i_n} \\ &= \epsilon^{j_1 \dots j_n} \epsilon_{i_2 \dots i_n} A_{j_2}^{i_2} \dots A_{j_n}^{i_n} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Mas o lado esquerdo da identidade 4 é:

$$(n-1)! (A^{-1})_l^{k_1} \delta_{k_1}^{j_1} \det(A) \quad (\text{A.9})$$

Conclui-se que

$$\epsilon^{j_1 \dots j_n} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} A_{j_2}^{i_2} \dots A_{j_n}^{i_n} = (n-1)! (A^{-1})_{i_1}^{j_1} \det(A) \quad (\text{A.10})$$

7.

$$\epsilon^{j_1 \dots j_n} \epsilon_{i_1 \dots i_n} A_{j_3}^{i_3} \dots A_{j_n}^{i_n} = (n-2)! [(A^{-1})_{i_2}^{j_2} (A^{-1})_{i_1}^{j_1} - (A^{-1})_{i_2}^{j_1} (A^{-1})_{i_1}^{j_2}] \det(A)$$

Como na identidade 6, é possível apenas usar a identidade 5 multiplicando-a pela matriz inversa $(A^{-1})_l^{k_1}$ e depois por $(A^{-1})_p^{k_2}$:

$$(A^{-1})_p^{k_2} (A^{-1})_l^{k_1} A_{k_1}^{i_1} A_{k_2}^{i_2} \epsilon^{j_1 \dots j_n} \epsilon_{i_1 \dots i_n} A_{j_3}^{i_3} \dots A_{j_n}^{i_n} = 2(n-2)! (A^{-1})_p^{k_2} (A^{-1})_l^{k_1} \delta_{k_1}^{[j_1} \delta_{k_2}^{j_2]} \det(A) \quad (\text{A.11})$$

Agora faça a alteração $l \rightarrow i_1$ e $p \rightarrow i_2$

$$\begin{aligned} &= 2(n-2)! (A^{-1})_{i_2}^{k_2} (A^{-1})_{i_1}^{k_1} \delta_{k_1}^{[j_1} \delta_{k_2}^{j_2]} \det(A) \\ &= 2(n-2)! (A^{-1})_{i_2}^{k_2} (A^{-1})_{i_1}^{k_1} \frac{1}{2} (\delta_{k_1}^{j_1} \delta_{k_2}^{j_2} - \delta_{k_1}^{j_2} \delta_{k_2}^{j_1}) \det(A) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

8. Seja g e $h \in M_{n \times n}$ matrizes simétricas, y um n -vetor. Assumindo que h é invertível, simétrico e $g_{ij} = h_{ij} + ky_i y_j \therefore \det(g) = [1 + k(\sqrt{h^{ij} y_i y_j})^2] \det(h)$ onde k trata-se de um número

Em primeiro lugar, uma conhecida identidade matricial precisa ser declarada:

$$\det[\mathbf{I} + xy^t] = 1 + y^t x \quad (\text{A.13})$$

Onde \mathbf{I} significa a matriz identidade e x, y dois vetores da mesma dimensão que a matriz \mathbf{I} e y^t é a transposição. Agora coloque os componentes na notação matricial:

$$g = h + kyy^t \quad (\text{A.14})$$

Decomponha a matriz da seguinte maneira:

$$g = h(\mathbf{I} + kh^{-1}yy^t) \quad (\text{A.15})$$

Como o determinante preserva o produto:

$$\det g = \det(h)[\det(\mathbf{I} + kh^{-1}yy^t)] \quad (\text{A.16})$$

Aplicando a identidade acima da qual resulta:

$$\det(g) = \det(h)[1 + ky^t h^{-1}y] = [1 + k(\sqrt{h^{ij}y_i y_j})^2] \det(h) \quad (\text{A.17})$$

9. Tome g e h da última identidade, se $1 + k(\sqrt{h^{ij}y_i y_j})^2 \neq 0 \therefore g$ é invertível e seu inverso é:

$$g^{ij} = h^{ij} - k \frac{h^{ir}y_r h^{js}y_s}{1 + k(\sqrt{h^{ij}y_i y_j})^2}$$

Use a definição de matriz inversa como $gg^{-1} = 1$ e substitua a expressão desejada

$$\begin{aligned} [h_{ip} + ky_i y_p][h^{pj} - k \frac{h^{pa}y_a h^{jb}y_b}{1 + k(\sqrt{h^{rs}y_r y_s})^2}] = \\ \delta_i^j - k \frac{h^{jb}y_i y_b}{1 + k(\sqrt{h^{rs}y_r y_s})^2} + kh^{jb}y_i y_b - k^2 \frac{h^{pa}y_a y_p h^{jb}y_b y_i}{1 + k(\sqrt{h^{rs}y_r y_s})^2} = \\ \delta_i^j - k^2 \frac{h^{pa}y_a y_p h^{jb}y_b y_i}{1 + k(\sqrt{h^{rs}y_r y_s})^2} + k^2 \frac{h^{pa}y_a y_p h^{jb}y_b y_i}{1 + k(\sqrt{h^{rs}y_r y_s})^2} = \delta_i^j \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Claramente a condição $1 + k(\sqrt{h^{ij}y_i y_j})^2 \neq 0$ está relacionada com o determinante não nulo, que é a condição para a existência de inversa.

APÊNDICE B – Derivando o determinante da soma n=4

Neste apêndice, adota-se $\det(A) = |A|$, o objetivo é determinar uma expressão para o determinante da soma de duas matrizes.

$$|A + B| = \frac{1}{4!} \epsilon^{j_1 \dots j_4} \epsilon_{i_1 \dots i_4} \prod_{k=1}^4 (A_{j_k}^{i_k} + B_{j_k}^{i_k}) \quad (\text{B.1})$$

Esta é uma notação curta para determinantes e pelas propriedades Levi-Civita obtidas

$$|A| + |B| + \frac{1}{4!} \epsilon^{j_1 \dots j_4} \epsilon_{i_1 \dots i_4} [4A_{j_1}^{i_1} A_{j_2}^{i_2} A_{j_3}^{i_3} B_{j_4}^{i_4} + 6A_{j_1}^{i_1} A_{j_2}^{i_2} B_{j_3}^{i_3} B_{j_4}^{i_4} + 4A_{j_1}^{i_1} B_{j_2}^{i_2} B_{j_3}^{i_3} B_{j_4}^{i_4}] \quad (\text{B.2})$$

No primeiro e terceiro termos, usamos a identidade 6:

$$\frac{4}{4!} \epsilon^{j_1 \dots j_4} \epsilon_{i_1 \dots i_4} A_{j_1}^{i_1} A_{j_2}^{i_2} A_{j_3}^{i_3} B_{j_4}^{i_4} = \frac{1}{4!} 4(4-1)! (A^{-1})_{i_4}^{j_4} B_{j_4}^{i_4} |A| = |A| \text{tr}[A^{-1}B] \quad (\text{B.3})$$

Para o segundo termo usa-se a identidades 7:

$$\begin{aligned} \frac{6}{4!} \epsilon^{j_1 \dots j_4} \epsilon_{i_1 \dots i_4} A_{j_1}^{i_1} A_{j_2}^{i_2} B_{j_3}^{i_3} B_{j_4}^{i_4} &= \frac{6}{4!} (4-2)! [(A^{-1})_{i_4}^{j_4} (A^{-1})_{i_3}^{j_3} - (A^{-1})_{i_4}^{j_3} (A^{-1})_{i_3}^{j_4}] B_{j_3}^{i_3} B_{j_4}^{i_4} |A| \\ &= \frac{1}{2} [\text{tr}^2[A^{-1}B] - \text{tr}[(A^{-1}B)^2]] |A| \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

chega-se em:

$$\begin{aligned} |A + B| &= |A| + |B| + |A| \text{tr}[A^{-1}B] + |B| \text{tr}[B^{-1}A] \\ &\quad + |A| \frac{1}{2} (\text{tr}^2[A^{-1}B] - \text{tr}[(A^{-1}B)^2]) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Ou

$$\begin{aligned} |A + B| &= |A| + |B| + |A| \text{tr}[A^{-1}B] + |B| \text{tr}[B^{-1}A] \\ &\quad + \frac{|A|}{4} (\text{tr}^2[A^{-1}B] - \text{tr}[(A^{-1}B)^2]) + \frac{|B|}{4} (\text{tr}^2[B^{-1}A] - \text{tr}[(B^{-1}A)^2]) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Também é possível usar os polinômios simétricos elementares definidos:

$$e_k(G) = \delta_{j_1}^{[i_1]} \dots \delta_{j_k}^{[i_k]} G_{i_1}^{j_1} \dots G_{i_k}^{j_k} \quad (\text{B.7})$$

$$|A + B| = |A| \sum_{k=0}^4 e_k(A^{-1}B) = |B| \sum_{k=0}^4 e_k(AB^{-1}) \quad (\text{B.8})$$

APÊNDICE C – Inverso da soma de duas matrizes n=4

Agora é importante derivar a métrica inversa de uma soma. Considerando a matriz $M = A + B$ e Usando a identidade 6 e isolando a inversa, temos:

$$\epsilon^{i_1 \dots i_4} \epsilon_{j_1 \dots j_4} M_{i_2}^{j_2} M_{i_3}^{j_3} M_{i_4}^{j_4} = 3!(M^{-1})_{j_1}^{i_1} |M| \quad \therefore \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{aligned} (M^{-1})_{j_1}^{i_1} &= \frac{1}{3!|M|} \epsilon^{i_1 \dots i_4} \epsilon_{j_1 \dots j_4} M_{i_2}^{j_2} M_{i_3}^{j_3} M_{i_4}^{j_4} \\ &= \frac{1}{3!|M|} \epsilon^{i_1 \dots i_4} \epsilon_{j_1 \dots j_4} [A_{i_2}^{j_2} A_{i_3}^{j_3} A_{i_4}^{j_4} + 3A_{i_2}^{j_2} A_{i_3}^{j_3} B_{i_4}^{j_4} + 3A_{i_2}^{j_2} B_{i_3}^{j_3} B_{i_4}^{j_4} + B_{i_2}^{j_2} B_{i_3}^{j_3} B_{i_4}^{j_4}] \quad (\text{C.2}) \end{aligned}$$

Pela identidade 6 novamente:

$$\epsilon^{i_1 \dots i_4} \epsilon_{j_1 \dots j_4} A_{i_2}^{j_2} A_{i_3}^{j_3} A_{i_4}^{j_4} = 3!|A|(A^{-1})_{j_1}^{i_1} \quad (\text{C.3})$$

O mesmo para o último termo

$$\epsilon^{i_1 \dots i_4} \epsilon_{j_1 \dots j_4} B_{i_2}^{j_2} B_{i_3}^{j_3} B_{i_4}^{j_4} = 3!|B|(B^{-1})_{j_1}^{i_1} \quad (\text{C.4})$$

Agora, usando a identidade 7 para os termos do meio

$$\begin{aligned} \epsilon^{i_1 \dots i_4} \epsilon_{j_1 \dots j_4} A_{i_2}^{j_2} A_{i_3}^{j_3} B_{i_4}^{j_4} &= 2[(A^{-1})_{j_1}^{i_1} (A^{-1})_{j_4}^{i_4} - (A^{-1})_{j_4}^{i_1} (A^{-1})_{j_1}^{i_4}] B_{i_4}^{j_4} |A| \\ &= 2[\text{tr}(A^{-1}B)(A^{-1})_{j_1}^{i_1} - (A^{-1}BA^{-1})_{j_1}^{i_1}] |A| \quad (\text{C.5}) \end{aligned}$$

Analogamente

$$\epsilon^{i_1 \dots i_4} \epsilon_{j_1 \dots j_4} A_{i_2}^{j_2} B_{i_3}^{j_3} B_{i_4}^{j_4} = 2[\text{tr}(B^{-1}A)(B^{-1})_{j_1}^{i_1} - (B^{-1}AB^{-1})_{j_1}^{i_1}] |B| \quad (\text{C.6})$$

Juntando todos os termos

$$\begin{aligned}
(M^{-1})_{j_1}^{i_1} &= \frac{|A|}{|M|}(A^{-1})_{j_1}^{i_1} + \frac{|A|}{|M|}[tr(A^{-1}B)(A^{-1})_{j_1}^{i_1} - (A^{-1}BA^{-1})_{j_1}^{i_1}] + \frac{|B|}{|M|}(B^{-1})_{j_1}^{i_1} \\
&\quad + \frac{|B|}{|M|}[tr(B^{-1}A)(B^{-1})_{j_1}^{i_1} - (B^{-1}AB^{-1})_{j_1}^{i_1}] \tag{C.7}
\end{aligned}$$

Ou abrindo $|M| = |A + B|$:

$$M^{-1} = \frac{A^{-1}}{\sum e_k(A^{-1}B)}[1 + tr(A^{-1}B) - BA^{-1}] + \frac{B^{-1}}{\sum e_k(AB^{-1})}[1 + tr(B^{-1}A) - AB^{-1}]$$

APÊNDICE D – Determinante da métrica

Este apêndice se dedica à determinação do determinante da métrica derivada no capítulo 2 para o espaço estudado neste trabalho, a saber a matriz presente na equação (3.52). Esta métrica está na forma das identidades 8 e 9 do apêndice A e o primeiro termo na forma explorada nos apêndices B e C.

Pela identidade 8 encontra-se:

$$|g| = |\eta - \xi y (\xi y)^T| = (1 - \eta^{ij} \xi_{ir} \xi_{js} y^r y^s) |\eta| \quad (\text{D.1})$$

Mas o inverso de η_{ij} é necessário, portanto a fórmula calculada na seção anterior será usada porque η_{ij} é uma soma de determinantes.

$$\begin{aligned} \eta^{-1} &= \frac{(F \frac{\alpha}{a})^{-1}}{\sum e_k [(F \frac{\alpha}{a})^{-1} (F \frac{\beta}{b})]} [1 + \text{tr}[(F \frac{\alpha}{a})^{-1} (F \frac{\beta}{b})] - (F \frac{\beta}{b}) (F \frac{\alpha}{a})^{-1}] \\ &+ \frac{F (\frac{\beta}{b})^{-1}}{\sum e_k [(F \frac{\alpha}{a}) (F \frac{\beta}{b})^{-1}]} [1 + \text{tr}[(F \frac{\beta}{b})^{-1} (F \frac{\alpha}{a})] - (F \frac{\alpha}{a}) (F \frac{\beta}{b})^{-1}] \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Para torná-lo um pouco menos indigesto, vamos fazer os seguintes desenvolvimentos: $(F \frac{\alpha_{ij}}{a})^{-1} = \frac{a}{F} \alpha^{ij}$ e $(F \frac{\beta_{ij}}{b})^{-1} = \frac{b}{F} \beta^{ij}$, definindo $(\alpha)^{-1} \beta = \Phi$ e $(\beta)^{-1} \alpha = \Phi^{-1}$

$$\eta^{-1} = \frac{|\alpha|}{|\frac{\eta}{F}|} [1 + \frac{a}{b} (\text{tr} \Phi - \Phi)] \frac{\alpha^{-1}}{F a^3} + \frac{|\beta|}{|\frac{\eta}{F}|} [1 + \frac{b}{a} (\text{tr} \Phi^{-1} - \Phi^{-1})] \frac{\beta^{-1}}{F b^3} \quad (\text{D.3})$$

Agora precisamos provar que: $1 - \eta^{ij} \xi_{ir} \xi_{js} y^r y^s \neq 0$. Isso não é tão difícil quando percebe-se que pela identidade 9 e 8 isso não é nada mais do que:

$$\frac{|g|}{|\eta|} = 1 - \eta^{ij} \xi_{ir} \xi_{js} y^r y^s \quad (\text{D.4})$$

Mas esta é a divisão de duas matrizes não degeneradas, pois η é a soma de duas matrizes não degeneradas, isso é o suficiente para concluir que esta fração nunca se anula.

Usando o determinante da soma para $|\eta|$

$$\frac{|\eta|}{F} = \frac{|\alpha|}{a^4} + \frac{|\alpha|}{a^3 b} \text{tr} \Phi + \frac{1}{4a^2 b^2} [|\alpha| (\text{tr}^2 \Phi - \text{tr} \Phi^2) + |\beta| (\text{tr}^2 \Phi^{-1} - \text{tr} \Phi^{-2})] + \frac{|\beta|}{b^3 a} \text{tr} \Phi^{-1} + \frac{|\beta|}{b^4} \quad (\text{D.5})$$

Levando a expressão para:

$$\eta^{-1} = \frac{|\alpha|[1 + \frac{a}{b}(tr\Phi - \Phi)]\frac{\alpha^{-1}}{Fa^3} + |\beta|[1 + \frac{b}{a}(tr\Phi^{-1} - \Phi^{-1})]\frac{\beta^{-1}}{Fb^3}}{\frac{|\alpha|}{a^4} + \frac{|\alpha|}{a^3b}tr\Phi + \frac{1}{4a^2b^2}[|\alpha|(tr^2\Phi - tr\Phi^2) + |\beta|(tr^2\Phi^{-1} - tr\Phi^{-2})] + \frac{|\beta|}{b^3a}tr\Phi^{-1} + \frac{|\beta|}{b^4}}$$

Então, vamos mantê-lo em termos de $|\eta|$

$$\eta^{-1}\xi = \eta^{-1}\left(\frac{1}{a}\sqrt{\frac{b}{a}}\alpha - \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}\beta\right) \quad (D.6)$$

$$\eta^{-1}\alpha = \frac{|\alpha|}{|\frac{\eta}{F}|}\left[1 + \frac{a}{b}(tr\Phi - \Phi)\right]\frac{\alpha^{-1}\alpha}{Fa^3} + \frac{|\beta|}{|\frac{\eta}{F}|}\left[1 + \frac{b}{a}(tr\Phi^{-1} - \Phi^{-1})\right]\frac{\beta^{-1}\alpha}{Fb^3} \quad (D.7)$$

Por construção: $\alpha^{-1}\alpha = \mathbf{1}$ e $\beta^{-1}\alpha = \Phi^{-1}$

$$\eta^{-1}\alpha = \frac{|\alpha|}{|\frac{\eta}{F}|}\left[1 + \frac{a}{b}(tr\Phi - \Phi)\right]\frac{1}{Fa^3} + \frac{|\beta|}{|\frac{\eta}{F}|}\left[1 + \frac{b}{a}(tr\Phi^{-1} - \Phi^{-1})\right]\frac{\Phi^{-1}}{Fb^3} \quad (D.8)$$

$$\eta^{-1}\beta = \frac{|\alpha|}{|\frac{\eta}{F}|}\left[1 + \frac{a}{b}(tr\Phi - \Phi)\right]\frac{\Phi}{Fa^3} + \frac{|\beta|}{|\frac{\eta}{F}|}\left[1 + \frac{b}{a}(tr\Phi^{-1} - \Phi^{-1})\right]\frac{1}{Fb^3} \quad (D.9)$$

$$\begin{aligned} \eta^{-1}\xi &= \frac{|\alpha|}{|\frac{\eta}{F}|}\left[1 + \frac{a}{b}(tr\Phi - \Phi)\right]\frac{1}{Fa^4}\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{|\beta|}{|\frac{\eta}{F}|}\left[1 + \frac{b}{a}(tr\Phi^{-1} - \Phi^{-1})\right]\frac{\Phi^{-1}}{Fab^3}\sqrt{\frac{b}{a}} \\ &\quad - \frac{|\alpha|}{|\frac{\eta}{F}|}\left[1 + \frac{a}{b}(tr\Phi - \Phi)\right]\frac{\Phi}{Fba^3}\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{|\beta|}{|\frac{\eta}{F}|}\left[1 + \frac{b}{a}(tr\Phi^{-1} - \Phi^{-1})\right]\frac{1}{Fb^4}\sqrt{\frac{a}{b}} \end{aligned} \quad (D.10)$$

ou, pela simetria de η^{ij}

$$\begin{aligned} \eta^{ij}\xi_{ir} &= \frac{|\alpha|}{|\frac{\eta}{F}|}\left[\delta_r^j + \frac{a}{b}(\delta_r^j tr\Phi - \Phi_r^j)\right]\frac{1}{Fa^4}\sqrt{\frac{b}{a}} \\ &\quad + \frac{|\beta|}{|\frac{\eta}{F}|}\left[\delta_s^j + \frac{b}{a}(\delta_s^j tr\Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_s^j)\right]\frac{(\Phi^{-1})_r^s - [\alpha, \beta^{-1}]_r^s}{Fab^3}\sqrt{\frac{b}{a}} \\ &\quad - \frac{|\alpha|}{|\frac{\eta}{F}|}\left[\delta_s^j + \frac{a}{b}(\delta_s^j tr\Phi - \Phi_s^j)\right]\frac{\Phi_r^s + [\alpha^{-1}, \beta]_r^s}{Fba^3}\sqrt{\frac{a}{b}} \\ &\quad - \frac{|\beta|}{|\frac{\eta}{F}|}\left[\delta_r^j + \frac{b}{a}(\delta_r^j tr\Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_r^j)\right]\frac{1}{Fb^4}\sqrt{\frac{a}{b}} \end{aligned} \quad (D.11)$$

$$\eta^{ij}\xi_{ir}\xi_{js} = \eta^{ij}\xi_{ir}\left(\frac{1}{a}\sqrt{\frac{b}{a}}\alpha_{js} - \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}\beta_{js}\right) \quad (\text{D.12})$$

$$\begin{aligned} \eta^{ij}\xi_{ir}\alpha_{js} &= \frac{|\alpha|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_r^j + \frac{a}{b}(\delta_r^j tr\Phi - \Phi_r^j) \right] \frac{\alpha_{js}}{Fa^4} \sqrt{\frac{b}{a}} \\ &+ \frac{|\beta|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_k^j + \frac{b}{a}(\delta_k^j tr\Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_k^j) \right] \frac{(\Phi^{-1})_r^k \alpha_{js}}{Fab^3} \sqrt{\frac{b}{a}} \\ &- \frac{|\alpha|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_k^j + \frac{a}{b}(\delta_k^j tr\Phi - \Phi_k^j) \right] \frac{\Phi_r^k \alpha_{js}}{Fba^3} \sqrt{\frac{a}{b}} \\ &- \frac{|\beta|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_r^j + \frac{b}{a}(\delta_r^j tr\Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_r^j) \right] \frac{\alpha_{js}}{Fb^4} \sqrt{\frac{a}{b}} \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

$$\begin{aligned} \eta^{ij}\xi_{ir}\beta_{js} &= \frac{|\alpha|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_r^j + \frac{a}{b}(\delta_r^j tr\Phi - \Phi_r^j) \right] \frac{\beta_{js}}{Fa^4} \sqrt{\frac{b}{a}} \\ &+ \frac{|\beta|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_k^j + \frac{b}{a}(\delta_k^j tr\Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_k^j) \right] \frac{(\Phi^{-1})_r^k \beta_{js}}{Fab^3} \sqrt{\frac{b}{a}} \\ &- \frac{|\alpha|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_k^j + \frac{a}{b}(\delta_k^j tr\Phi - \Phi_k^j) \right] \frac{\Phi_r^k \beta_{js}}{Fba^3} \sqrt{\frac{a}{b}} \\ &- \frac{|\beta|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_r^j + \frac{b}{a}(\delta_r^j tr\Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_r^j) \right] \frac{\beta_{js}}{Fb^4} \sqrt{\frac{a}{b}} \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Juntando tudo e os principais pontos:

$$\eta^{ij}\xi_{ir}\xi_{js} =$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a}\sqrt{\frac{b}{a}} \left\{ \frac{|\alpha|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_r^j + \frac{a}{b}(\delta_r^j tr\Phi - \Phi_r^j) \right] \frac{\alpha_{js}}{Fa^4} \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{|\beta|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_k^j + \frac{b}{a}(\delta_k^j tr\Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_k^j) \right] \frac{(\Phi^{-1})_r^k \alpha_{js}}{Fab^3} \sqrt{\frac{b}{a}} \right\} \\ &+ \frac{1}{a}\sqrt{\frac{b}{a}} \left\{ -\frac{|\alpha|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_k^j + \frac{a}{b}(\delta_k^j tr\Phi - \Phi_k^j) \right] \frac{\Phi_r^k \alpha_{js}}{Fba^3} \sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{|\beta|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_r^j + \frac{b}{a}(\delta_r^j tr\Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_r^j) \right] \frac{\alpha_{js}}{Fb^4} \sqrt{\frac{a}{b}} \right\} \\ &- \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a}{b}} \left\{ \frac{|\alpha|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_r^j + \frac{a}{b}(\delta_r^j tr\Phi - \Phi_r^j) \right] \frac{\beta_{js}}{Fa^4} \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{|\beta|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_k^j + \frac{b}{a}(\delta_k^j tr\Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_k^j) \right] \frac{(\Phi^{-1})_r^k \beta_{js}}{Fab^3} \sqrt{\frac{b}{a}} \right\} \\ &- \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a}{b}} \left\{ -\frac{|\alpha|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_k^j + \frac{a}{b}(\delta_k^j tr\Phi - \Phi_k^j) \right] \frac{\Phi_r^k \beta_{js}}{Fba^3} \sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{|\beta|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_r^j + \frac{b}{a}(\delta_r^j tr\Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_r^j) \right] \frac{\beta_{js}}{Fb^4} \sqrt{\frac{a}{b}} \right\} \end{aligned}$$

Simplesmente

$$1 - \eta^{ij} \xi_{ir} \xi_{js} y^r y^s =$$

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{a} \sqrt{\frac{b}{a}} \left\{ \frac{|\alpha|}{|\frac{\eta}{F}|} [\delta_r^j + \frac{a}{b} (\delta_r^j tr \Phi - \Phi_r^j)] \frac{\alpha_{js} y^r y^s}{F a^4} \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{|\beta|}{|\frac{\eta}{F}|} [\delta_k^j + \frac{b}{a} (\delta_k^j tr \Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_k^j)] \frac{(\Phi^{-1})_r^k \alpha_{js} y^r y^s}{F a b^3} \sqrt{\frac{b}{a}} \right\} \\ & - \frac{1}{a} \sqrt{\frac{b}{a}} \left\{ -\frac{|\alpha|}{|\frac{\eta}{F}|} [\delta_k^j + \frac{a}{b} (\delta_k^j tr \Phi - \Phi_k^j)] \frac{\Phi_r^k \alpha_{js} y^r y^s}{F b a^3} \sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{|\beta|}{|\frac{\eta}{F}|} [\delta_r^j + \frac{b}{a} (\delta_r^j tr \Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_r^j)] \frac{\alpha_{js} y^r y^s}{F b^4} \sqrt{\frac{a}{b}} \right\} \\ & + \frac{1}{b} \sqrt{\frac{a}{b}} \left\{ \frac{|\alpha|}{|\frac{\eta}{F}|} [\delta_r^j + \frac{a}{b} (\delta_r^j tr \Phi - \Phi_r^j)] \frac{\beta_{js} y^r y^s}{F a^4} \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{|\beta|}{|\frac{\eta}{F}|} [\delta_k^j + \frac{b}{a} (\delta_k^j tr \Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_k^j)] \frac{(\Phi^{-1})_r^k \beta_{js} y^r y^s}{F a b^3} \sqrt{\frac{b}{a}} \right\} \\ & + \frac{1}{b} \sqrt{\frac{a}{b}} \left\{ -\frac{|\alpha|}{|\frac{\eta}{F}|} [\delta_k^j + \frac{a}{b} (\delta_k^j tr \Phi - \Phi_k^j)] \frac{\Phi_r^k \beta_{js} y^r y^s}{F b a^3} \sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{|\beta|}{|\frac{\eta}{F}|} [\delta_r^j + \frac{b}{a} (\delta_r^j tr \Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_r^j)] \frac{\beta_{js} y^r y^s}{F b^4} \sqrt{\frac{a}{b}} \right\} \end{aligned}$$

Lembrando que: $|g| = (1 - \eta^{ij} \xi_{ir} \xi_{js} y^r y^s) |\eta| = (1 - \eta^{ij} \xi_{ir} \xi_{js} y^r y^s) F^4 |\frac{\eta}{F}|$ e por substituição direta:

$$\begin{aligned} & |\eta| - \frac{|\eta|}{a} \sqrt{\frac{b}{a}} \left\{ \frac{|\alpha|}{|\frac{\eta}{F}|} [\delta_r^j + \frac{a}{b} (\delta_r^j tr \Phi - \Phi_r^j)] \frac{\alpha_{js} y^r y^s}{F a^4} \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{|\beta|}{|\frac{\eta}{F}|} [\delta_k^j + \frac{b}{a} (\delta_k^j tr \Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_k^j)] \frac{(\Phi^{-1})_r^k \alpha_{js} y^r y^s}{F a b^3} \sqrt{\frac{b}{a}} \right\} \\ & - \frac{|\eta|}{a} \sqrt{\frac{b}{a}} \left\{ -\frac{|\alpha|}{|\frac{\eta}{F}|} [\delta_k^j + \frac{a}{b} (\delta_k^j tr \Phi - \Phi_k^j)] \frac{\Phi_r^k \alpha_{js} y^r y^s}{F b a^3} \sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{|\beta|}{|\frac{\eta}{F}|} [\delta_r^j + \frac{b}{a} (\delta_r^j tr \Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_r^j)] \frac{\alpha_{js} y^r y^s}{F b^4} \sqrt{\frac{a}{b}} \right\} \\ & + \frac{|\eta|}{b} \sqrt{\frac{a}{b}} \left\{ \frac{|\alpha|}{|\frac{\eta}{F}|} [\delta_r^j + \frac{a}{b} (\delta_r^j tr \Phi - \Phi_r^j)] \frac{\beta_{js} y^r y^s}{F a^4} \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{|\beta|}{|\frac{\eta}{F}|} [\delta_k^j + \frac{b}{a} (\delta_k^j tr \Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_k^j)] \frac{(\Phi^{-1})_r^k \beta_{js} y^r y^s}{F a b^3} \sqrt{\frac{b}{a}} \right\} \\ & + \frac{|\eta|}{b} \sqrt{\frac{a}{b}} \left\{ -\frac{|\alpha|}{|\frac{\eta}{F}|} [\delta_k^j + \frac{a}{b} (\delta_k^j tr \Phi - \Phi_k^j)] \frac{\Phi_r^k \beta_{js} y^r y^s}{F b a^3} \sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{|\beta|}{|\frac{\eta}{F}|} [\delta_r^j + \frac{b}{a} (\delta_r^j tr \Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_r^j)] \frac{\beta_{js} y^r y^s}{F b^4} \sqrt{\frac{a}{b}} \right\} \end{aligned}$$

APÊNDICE E – Métrica inversa

Este apêndice se destina em determinar a inversa da métrica presente na equação (3.52)

Usando a identidade 9, porque a matriz é da forma: $g_{ij} = \eta_{ij} - \xi_{ir}\xi_{is}y^r y^s$

$$g^{ij} = \eta^{ij} + \frac{\eta^{ir}\eta^{js}\xi_{kr}\xi_{ls}y^k y^l}{1 - \eta^{mn}\xi_{mp}\xi_{nq}y^p y^q}$$

Primeiramente começando em $\eta_{ij} = F(\frac{\alpha_{ij}}{a} + \frac{\beta_{ij}}{b})$ e achando η^{ij} por aquela pequena expressão

$$\eta^{-1} = \frac{|\alpha|}{|\frac{\eta}{F}|} \left[1 + \frac{a}{b} (tr\Phi - \Phi) \right] \frac{\alpha^{-1}}{Fa^3} + \frac{|\beta|}{|\frac{\eta}{F}|} \left[1 + \frac{b}{a} (tr\Phi^{-1} - \Phi^{-1}) \right] \frac{\beta^{-1}}{Fb^3} \quad (E.1)$$

Agora, tudo o que precisamos e que não temos é o termo acima da fração. Como $\eta^{ij}\xi_{ir}$ já é conhecido e por construção: $\eta^{ij} = \eta^{ji}$, $\xi_{ij} = \xi_{ji}$

$$\begin{aligned} \eta^{ir}\xi_{rk} = & \\ \frac{|\alpha|}{|\frac{\eta}{F}|} \left[\delta_k^i + \frac{a}{b} (\delta_k^i tr\Phi - \Phi_k^i) \right] \frac{1}{Fa^4} \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{|\beta|}{|\frac{\eta}{F}|} \left[\delta_l^i + \frac{b}{a} (\delta_l^i tr\Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_l^i) \right] \frac{(\Phi^{-1})_k^l}{Fab^3} \sqrt{\frac{b}{a}} \\ & - \frac{|\alpha|}{|\frac{\eta}{F}|} \left[\delta_l^i + \frac{a}{b} (\delta_l^i tr\Phi - \Phi_l^i) \right] \frac{\Phi_k^l}{Fba^3} \sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{|\beta|}{|\frac{\eta}{F}|} \left[\delta_k^i + \frac{b}{a} (\delta_k^i tr\Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_k^i) \right] \frac{1}{Fb^4} \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (E.2) \end{aligned}$$

Novamente:

$$\begin{aligned} \eta^{js}\xi_{st} = & \\ \frac{|\alpha|}{|\frac{\eta}{F}|} \left[\delta_t^j + \frac{a}{b} (\delta_t^j tr\Phi - \Phi_t^j) \right] \frac{1}{Fa^4} \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{|\beta|}{|\frac{\eta}{F}|} \left[\delta_l^j + \frac{b}{a} (\delta_l^j tr\Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_l^j) \right] \frac{(\Phi^{-1})_t^l}{Fab^3} \sqrt{\frac{b}{a}} \\ & - \frac{|\alpha|}{|\frac{\eta}{F}|} \left[\delta_l^j + \frac{a}{b} (\delta_l^j tr\Phi - \Phi_l^j) \right] \frac{\Phi_t^l}{Fba^3} \sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{|\beta|}{|\frac{\eta}{F}|} \left[\delta_t^j + \frac{b}{a} (\delta_t^j tr\Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_t^j) \right] \frac{1}{Fb^4} \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (E.3) \end{aligned}$$

Indo em frente

$$\begin{aligned} \eta^{ir} \xi_{rk} y^k = & \\ \frac{|\alpha|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_k^i + \frac{a}{b} (\delta_k^i \text{tr} \Phi - \Phi_k^i) \right] \frac{y^k}{F a^4} \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{|\beta|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_l^i + \frac{b}{a} (\delta_l^i \text{tr} \Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_l^i) \right] \frac{(\Phi^{-1})_k^l y^k}{F a b^3} \sqrt{\frac{b}{a}} \\ - \frac{|\alpha|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_l^i + \frac{a}{b} (\delta_l^i \text{tr} \Phi - \Phi_l^i) \right] \frac{\Phi_k^l y^k}{F b a^3} \sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{|\beta|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_k^i + \frac{b}{a} (\delta_k^i \text{tr} \Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_k^i) \right] \frac{y^k}{F b^4} \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (\text{E.4}) \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \eta^{js} \xi_{st} y^t = & \\ \frac{|\alpha|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_t^j + \frac{a}{b} (\delta_t^j \text{tr} \Phi - \Phi_t^j) \right] \frac{y^t}{F a^4} \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{|\beta|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_l^j + \frac{b}{a} (\delta_l^j \text{tr} \Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_l^j) \right] \frac{(\Phi^{-1})_t^l y^t}{F a b^3} \sqrt{\frac{b}{a}} \\ - \frac{|\alpha|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_l^j + \frac{a}{b} (\delta_l^j \text{tr} \Phi - \Phi_l^j) \right] \frac{\Phi_t^l y^t}{F b a^3} \sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{|\beta|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_t^j + \frac{b}{a} (\delta_t^j \text{tr} \Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_t^j) \right] \frac{y^t}{F b^4} \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (\text{E.5}) \end{aligned}$$

Denota-se: $k = \frac{1}{1 - \eta^{ij} \xi_{ik} \xi_{jl} y^k y^l}$ hora de juntar tudo.

$$\begin{aligned} g^{ij} = \eta^{ij} + & \\ k \left(\frac{|\alpha|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_k^i + \frac{a}{b} (\delta_k^i \text{tr} \Phi - \Phi_k^i) \right] \frac{y^k}{F a^4} \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{|\beta|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_l^i + \frac{b}{a} (\delta_l^i \text{tr} \Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_l^i) \right] \frac{\beta^{lp} \alpha_{pk} y^k}{F a b^3} \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{|\alpha|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_l^i + \frac{a}{b} (\delta_l^i \text{tr} \Phi - \Phi_l^i) \right] \frac{\alpha^{lp} \beta_{pk} y^k}{F b a^3} \sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{|\beta|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_k^i + \frac{b}{a} (\delta_k^i \text{tr} \Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_k^i) \right] \frac{y^k}{F b^4} \sqrt{\frac{a}{b}} \right) & \\ \left(\frac{|\alpha|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_t^j + \frac{a}{b} (\delta_t^j \text{tr} \Phi - \Phi_t^j) \right] \frac{y^t}{F a^4} \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{|\beta|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_l^j + \frac{b}{a} (\delta_l^j \text{tr} \Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_l^j) \right] \frac{\beta^{lp} \alpha_{pt} y^t}{F a b^3} \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{|\alpha|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_l^j + \frac{a}{b} (\delta_l^j \text{tr} \Phi - \Phi_l^j) \right] \frac{\alpha^{lp} \beta_{pt} y^t}{F b a^3} \sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{|\beta|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_t^j + \frac{b}{a} (\delta_t^j \text{tr} \Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_t^j) \right] \frac{y^t}{F b^4} \sqrt{\frac{a}{b}} \right) & \end{aligned}$$

De forma mais compacta pode-se dizer: $\eta^{ir} \xi_{rk} y^k = \Upsilon^i$ e

$$\begin{aligned} \Upsilon^i = & \frac{|\alpha|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_j^i + \frac{a}{b} (\delta_j^i \text{tr} \Phi - \Phi_j^i) \right] \frac{y^j}{F a^4} \sqrt{\frac{b}{a}} \\ & + \frac{|\beta|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_k^i + \frac{b}{a} (\delta_k^i \text{tr} \Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_k^i) \right] \frac{\beta^{kl} \alpha_{lj} y^j}{F a b^3} \sqrt{\frac{b}{a}} \\ & - \frac{|\alpha|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_k^i + \frac{a}{b} (\delta_k^i \text{tr} \Phi - \Phi_k^i) \right] \frac{\alpha^{kl} \beta_{lj} y^j}{F b a^3} \sqrt{\frac{a}{b}} \\ & - \frac{|\beta|}{\left|\frac{\eta}{F}\right|} \left[\delta_j^i + \frac{b}{a} (\delta_j^i \text{tr} \Phi^{-1} - (\Phi^{-1})_j^i) \right] \frac{y^j}{F b^4} \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (\text{E.6}) \end{aligned}$$

Assim

$$g^{ij} = \eta^{ij} + k \Upsilon^i \Upsilon^j. \quad (\text{E.7})$$

APÊNDICE F – Derivação dos coeficientes de spray

Este apêndice é destinado ao cálculo do coeficiente de spray ou de pulverização

$$G^i = \frac{1}{4}g^{il}\left(\frac{\partial^2 F^2}{\partial x^k \partial y^l}y^k - \frac{\partial F^2}{\partial x^l}\right) \quad (\text{F.1})$$

Calculando membro por membro:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F^2}{\partial x^k \partial y^l} &= 2 \left[\left(\frac{1}{a}\alpha_{rl}y^r + \frac{1}{b}\beta_{rl}y^r \right) \frac{\partial F}{\partial x^k} + F \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{1}{a}\alpha_{rl}y^r + \frac{1}{b}\beta_{rl}y^r \right) \right] \\ &= 2 \left[\left(\frac{1}{a}y_l^\alpha + \frac{1}{b}y_l^\beta \right) \frac{\partial F}{\partial x^k} - \frac{F}{2} \left(\frac{y_l^\alpha}{a^3} \frac{\partial \alpha_{rs}}{\partial x^k} y^r y^s + \frac{y_l^\beta}{b^3} \frac{\partial \beta_{rs}}{\partial x^k} y^r y^s \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Então

$$\begin{aligned} G^i &= \frac{1}{2}g^{il} \left[y^k \left(\frac{1}{a}y_l^\alpha + \frac{1}{b}y_l^\beta \right) \frac{\partial F}{\partial x^k} - y^k \frac{F}{2} \left(\frac{y_l^\alpha}{a^3} \frac{\partial \alpha_{rs}}{\partial x^k} y^r y^s + \frac{y_l^\beta}{b^3} \frac{\partial \beta_{rs}}{\partial x^k} y^r y^s \right) - F \frac{\partial F}{\partial x^l} \right] \\ &= \frac{1}{2}g^{il} \left[\left(\frac{y^k}{a}y_l^\alpha + \frac{y^k}{b}y_l^\beta - F\delta_l^k \right) \frac{\partial F}{\partial x^k} - y^k \frac{F}{2} \left(\frac{y_l^\alpha}{a^3} \frac{\partial \alpha_{\mu\nu}}{\partial x^k} y^\mu y^\nu + \frac{y_l^\beta}{b^3} \frac{\partial \beta_{\mu\nu}}{\partial x^k} y^\mu y^\nu \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

Com

$$\frac{\partial F}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x^k} \alpha_{rs} y^r y^s + \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x^k} \beta_{rs} y^r y^s \right) \quad (\text{F.4})$$

Assim

$$\begin{aligned} G^i &= \frac{1}{4}(\eta^{il} + k\Upsilon^i\Upsilon^l) \left[\left(\frac{y^k}{a}y_l^\alpha + \frac{y^k}{b}y_l^\beta - F\delta_l^k \right) \left(\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x^k} \alpha_{rs} y^r y^s + \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x^k} \beta_{rs} y^r y^s \right) \right. \\ &\quad \left. - y^k \frac{F}{2} \left(\frac{y_l^\alpha}{a^3} \frac{\partial \alpha_{rs}}{\partial x^k} y^r y^s + \frac{y_l^\beta}{b^3} \frac{\partial \beta_{rs}}{\partial x^k} y^r y^s \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

Também pode ser reescrito na forma de cadeia como uma dependência indireta de η :

$$G^i = \left(\frac{\eta^{ij} \partial_\mu \eta_{j\nu}}{2} - \frac{\eta^{ij} \partial_j \eta_{\mu\nu}}{4} + \frac{\bar{\phi}^j \eta^{ik} y_k \partial_\mu \eta_{j\nu}}{2} - \frac{\bar{\phi}^j \eta^{ik} y_k \partial_j \eta_{\mu\nu}}{4} \right) y^\mu y^\nu \quad (\text{F.6})$$

APÊNDICE G – Torção de Cartan

Agora chegou a vez da torção de Cartan

Por definição, a torção de Cartan é: $C_{ijk} = \frac{1}{4} \frac{\partial^3 F^2}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y^k} g_{ij}$ usando o que já se sabe sobre essa métrica:

$$\begin{aligned}
 C_{ijk} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial y^k} \eta_{ij} - \frac{\partial}{\partial y^k} (\xi_{ir} \xi_{js} y^r y^s) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y^k} \eta_{ij} - \frac{1}{2} \left[\xi_{js} \frac{\partial}{\partial y^k} \xi_{ir} + \xi_{ir} \frac{\partial}{\partial y^k} \xi_{js} \right] y^r y^s - \frac{1}{2} \xi_{ik} \xi_{jr} y^r - \frac{1}{2} \xi_{ir} \xi_{jk} y^r \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y^k} \eta_{ij} - \frac{1}{2} \left[\left(\xi_{js} \frac{\partial}{\partial y^k} \xi_{ir} + \xi_{ir} \frac{\partial}{\partial y^k} \xi_{js} \right) y^s + 2\xi_{i(k} \xi_{j|s)} \right] y^r
 \end{aligned} \tag{G.1}$$

Com:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y^k} \xi_{i\mu} &= -\frac{\alpha_{lk}}{a^3} \sqrt{\frac{b}{a}} y^l \alpha_{ir} + \frac{\beta_{kl} a^2 - \alpha_{kl} b^2}{2a^5} \sqrt{\frac{a^3}{a^3}} y^l \alpha_{ir} \\
 &\quad + \frac{\beta_{lk}}{b^3} \sqrt{\frac{a}{b}} y^l \beta_{ir} - \frac{\alpha_{kl} b^2 - \beta_{kl} a^2}{2b^5} \sqrt{\frac{b^3}{a^3}} y^l \beta_{ir}
 \end{aligned} \tag{G.2}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 \xi_{js} \frac{\partial}{\partial y^k} \xi_{ir} &= -\frac{\alpha_{lk}}{a^4} \left| \frac{b}{a} \right| y^l \alpha_{js} \alpha_{ir} + \frac{\beta_{kl} a^2 - \alpha_{kl} b^2}{2a^6} y^l \alpha_{js} \alpha_{ir} + \frac{\beta_{lk}}{ab^3} y^l \alpha_{js} \beta_{ir} \\
 &\quad - \frac{\alpha_{kl} b^2 - \beta_{kl} a^2}{2ab^5} \left| \frac{b^2}{a^2} \right| y^l \beta_{ir} \alpha_{js} + \frac{\alpha_{lk}}{ba^3} y^l \alpha_{ir} \beta_{js} - \frac{\beta_{kl} a^2 - \alpha_{kl} b^2}{2a^5 b} \left| \frac{a^2}{b^2} \right| y^l \alpha_{ir} \beta_{js} \\
 &\quad - \frac{\beta_{lk}}{b^4} \left| \frac{a}{b} \right| y^l \beta_{ir} \beta_{js} + \frac{\alpha_{kl} b^2 - \beta_{kl} a^2}{2b^6} y^l \beta_{ir} \beta_{js}
 \end{aligned} \tag{G.3}$$

Vendo o que o futuro reserva para nós, reunindo tudo:

$$\begin{aligned}
 C_{ijk} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y^k} \eta_{ij} - \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{\alpha_{lk}}{a^4} \left| \frac{b}{a} \right| y^l \alpha_{js} \alpha_{ir} + \frac{\beta_{kl} a^2 - \alpha_{kl} b^2}{2a^6} \left| \frac{a}{b} \right| y^l \alpha_{js} \alpha_{ir} + \frac{\beta_{lk}}{ab^3} y^l \alpha_{js} \beta_{ir} \right. \right. \\
 &\quad - \frac{\alpha_{kl} b^2 - \beta_{kl} a^2}{2ab^5} \left| \frac{b^2}{a^2} \right| y^l \beta_{ir} \alpha_{js} + \frac{\alpha_{lk}}{ba^3} y^l \alpha_{ir} \beta_{js} - \frac{\beta_{kl} a^2 - \alpha_{kl} b^2}{2a^5 b} \left| \frac{a^2}{b^2} \right| y^l \alpha_{ir} \beta_{js} - \frac{\beta_{lk}}{b^4} \left| \frac{a}{b} \right| y^l \beta_{ir} \beta_{js} \\
 &\quad + \frac{\alpha_{kl} b^2 - \beta_{kl} a^2}{2b^6} \left| \frac{a}{b} \right| y^l \beta_{ir} \beta_{js} - \frac{\alpha_{lk}}{a^4} \left| \frac{b}{a} \right| y^l \alpha_{ir} \alpha_{js} + \frac{\beta_{kl} a^2 - \alpha_{kl} b^2}{2a^6} \left| \frac{a}{b} \right| y^l \alpha_{ir} \alpha_{js} + \frac{\beta_{lk}}{ab^3} y^l \alpha_{ir} \beta_{js} \\
 &\quad - \frac{\alpha_{kl} b^2 - \beta_{kl} a^2}{2ab^5} \left| \frac{b^2}{a^2} \right| y^l \beta_{js} \alpha_{ir} + \frac{\alpha_{lk}}{ba^3} y^l \alpha_{js} \beta_{ir} - \frac{\beta_{kl} a^2 - \alpha_{kl} b^2}{2a^5 b} \left| \frac{a^2}{b^2} \right| y^l \alpha_{js} \beta_{ir} - \frac{\beta_{lk}}{b^4} \left| \frac{a}{b} \right| y^l \beta_{js} \beta_{ir} \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha_{kl} b^2 - \beta_{kl} a^2}{2b^6} \left| \frac{a}{b} \right| y^l \beta_{js} \beta_{ir} \right) y^s + 2\xi_{i(k} \xi_{j|r)} \Big] y^r
 \end{aligned} \tag{G.4}$$

Em termos de η a torção de Cartan é muito mais compacta pois $g_{kj} = \partial_{\bar{k}}(\eta_{ir}y^r)$

$$\begin{aligned} C_{ijk} &= \frac{1}{2} \partial_{\bar{k}\bar{j}}^2 (\eta_{il} y^l) \\ &= \frac{1}{2} \left(\partial_{\bar{k}} \eta_{ij} + \partial_{\bar{j}} \eta_{ik} + y^l \partial_{\bar{k}\bar{j}}^2 \eta_{il} \right) \end{aligned} \tag{G.5}$$

APÊNDICE H – Torção média de Cartan

A torção média de Cartan será calculada neste apêndice

$$I_i = g^{jk} C_{ijk} \quad (\text{H.1})$$

$$\begin{aligned} I_i = & \frac{1}{2} g^{jk} \frac{\partial}{\partial y^k} \eta_{ij} - \frac{1}{2} g^{jk} \left[\left(-\frac{\alpha_{lk}}{\alpha^4} \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| y^l \alpha_{js} \alpha_{ir} + \frac{\beta_{kl} \alpha^2 - \alpha_{kl} \beta^2}{2\alpha^6} \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| y^l \alpha_{js} \alpha_{ir} + \frac{\beta_{lk}}{\alpha \beta^3} y^l \alpha_{js} \beta_{ir} - \right. \right. \\ & \left. \frac{\alpha_{kl} \beta^2 - \beta_{kl} \alpha^2}{2\alpha \beta^5} \left| \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right| y^l \beta_{ir} \alpha_{js} + \frac{\alpha_{lk}}{\beta \alpha^3} y^l \alpha_{ir} \beta_{js} - \frac{\beta_{kl} \alpha^2 - \alpha_{kl} \beta^2}{2\alpha^5 \beta} \left| \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right| y^l \alpha_{ir} \beta_{js} - \frac{\beta_{lk}}{\beta^4} \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| y^l \beta_{ir} \beta_{js} + \frac{\alpha_{kl} \beta^2 - \beta_{kl} \alpha^2}{2\beta^6} \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| y^l \beta_{ir} \beta_{js} - \right. \\ & \left. \frac{\alpha_{lk}}{\alpha^4} \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| y^l \alpha_{ir} \alpha_{js} + \frac{\beta_{kl} \alpha^2 - \alpha_{kl} \beta^2}{2\alpha^6} \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| y^l \alpha_{ir} \alpha_{js} + \frac{\beta_{lk}}{\alpha \beta^3} y^l \alpha_{ir} \beta_{js} - \frac{\alpha_{kl} \beta^2 - \beta_{kl} \alpha^2}{2\alpha \beta^5} \left| \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right| y^l \beta_{js} \alpha_{ir} + \frac{\alpha_{lk}}{\beta \alpha^3} y^l \alpha_{js} \beta_{ir} - \right. \\ & \left. \frac{\beta_{kl} \alpha^2 - \alpha_{kl} \beta^2}{2\alpha^5 \beta} \left| \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right| y^l \alpha_{js} \beta_{ir} - \frac{\beta_{lk}}{\beta^4} \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| y^l \beta_{js} \beta_{ir} + \frac{\alpha_{kl} \beta^2 - \beta_{kl} \alpha^2}{2\beta^6} \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| y^l \beta_{js} \beta_{ir} \right) y^s + 2\xi_{i(k} \xi_{j|r)} y^r \end{aligned}$$

Ou também

$$\begin{aligned} I_i = & \frac{1}{2} g^{jk} \frac{\partial}{\partial y^k} \eta_{ij} - \frac{1}{2} \left[\left(-g^{jk} \frac{\alpha_{lk}}{\alpha^4} \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| y^l \alpha_{js} \alpha_{ir} + g^{jk} \frac{\beta_{kl} \alpha^2 - \alpha_{kl} \beta^2}{2\alpha^6} \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| y^l \alpha_{js} \alpha_{ir} + g^{jk} \frac{\beta_{lk}}{\alpha \beta^3} y^l \alpha_{js} \beta_{ir} - \right. \right. \\ & g^{jk} \frac{\alpha_{kl} \beta^2 - \beta_{kl} \alpha^2}{2\alpha \beta^5} \left| \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right| y^l \beta_{ir} \alpha_{js} + g^{jk} \frac{\alpha_{lk}}{\beta \alpha^3} y^l \alpha_{ir} \beta_{js} - g^{jk} \frac{\beta_{kl} \alpha^2 - \alpha_{kl} \beta^2}{2\alpha^5 \beta} \left| \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right| y^l \alpha_{ir} \beta_{js} - g^{jk} \frac{\beta_{lk}}{\beta^4} \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| y^l \beta_{ir} \beta_{js} + \right. \\ & g^{jk} \frac{\alpha_{kl} \beta^2 - \beta_{kl} \alpha^2}{2\beta^6} \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| y^l \beta_{ir} \beta_{js} - g^{jk} \frac{\alpha_{lk}}{\alpha^4} \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| y^l \alpha_{ir} \alpha_{js} + g^{jk} \frac{\beta_{kl} \alpha^2 - \alpha_{kl} \beta^2}{2\alpha^6} \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| y^l \alpha_{ir} \alpha_{js} + g^{jk} \frac{\beta_{lk}}{\alpha \beta^3} y^l \alpha_{ir} \beta_{js} - \right. \\ & g^{jk} \frac{\alpha_{kl} \beta^2 - \beta_{kl} \alpha^2}{2\alpha \beta^5} \left| \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right| y^l \beta_{js} \alpha_{ir} + g^{jk} \frac{\alpha_{lk}}{\beta \alpha^3} y^l \alpha_{js} \beta_{ir} - g^{jk} \frac{\beta_{kl} \alpha^2 - \alpha_{kl} \beta^2}{2\alpha^5 \beta} \left| \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right| y^l \alpha_{js} \beta_{ir} - g^{jk} \frac{\beta_{lk}}{\beta^4} \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| y^l \beta_{js} \beta_{ir} + \right. \\ & \left. g^{jk} \frac{\alpha_{kl} \beta^2 - \beta_{kl} \alpha^2}{2\beta^6} \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| y^l \beta_{js} \beta_{ir} \right) y^s + 2\xi_{i(k} \xi_{j|r)} y^r \end{aligned}$$

Mas em termos de η , simplesmente se calcula:

$$I_i = \frac{g^{jk}}{2} \left(\partial_{\bar{k}} \eta_{ij} + \partial_{\bar{j}} \eta_{ik} + y^l \partial_{\bar{k}\bar{j}}^2 \eta_{il} \right) \quad (\text{H.2})$$

APÊNDICE I – Coeficientes de conexão

Agora é a hora de calcular os coeficientes de conexão. Temos:

$$N_j^k = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)y^i - 2g^{kl}C_{jml}G^m \quad (I.1)$$

$$\begin{aligned} N_j^k = & \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)y^i - (g^{kl}\frac{\partial}{\partial y^l}\eta_{jm} - g^{kl}[(-\frac{\alpha_{nl}}{\alpha^4}|\frac{\beta}{\alpha}|y^n\alpha_{mp}\alpha_{jq} + \frac{\beta_{ln}\alpha^2 - \alpha_{ln}\beta^2}{2\alpha^6}|\frac{\alpha}{\beta}|y^n\alpha_{mp}\alpha_{jq} + \\ & \frac{\beta_{nl}}{\alpha\beta^3}y^n\alpha_{mp}\beta_{jq} - \frac{\alpha_{ln}\beta^2 - \beta_{ln}\alpha^2}{2\alpha\beta^5}|\frac{\beta^2}{\alpha^2}|y^n\beta_{jq}\alpha_{mp} + \frac{\alpha_{ln}}{\beta\alpha^3}y^n\alpha_{jq}\beta_{mp} - \frac{\beta_{ln}\alpha^2 - \alpha_{ln}\beta^2}{2\alpha^5\beta}|\frac{\alpha^2}{\beta^2}|y^n\alpha_{jq}\beta_{mp} - \frac{\beta_{nl}}{\beta^4}|\frac{\alpha}{\beta}|y^n\beta_{jq}\beta_{mp} + \\ & \frac{\alpha_{ln}\beta^2 - \beta_{ln}\alpha^2}{2\beta^6}|\frac{\alpha}{\beta}|y^n\beta_{jq}\beta_{mp} - \frac{\alpha_{nl}}{\alpha^4}|\frac{\beta}{\alpha}|y^n\alpha_{jp}\alpha_{mq} + \frac{\beta_{ln}\alpha^2 - \alpha_{ln}\beta^2}{2\alpha^6}|\frac{\alpha}{\beta}|y^n\alpha_{jq}\alpha_{mp} + \frac{\beta_{nl}}{\alpha\beta^3}y^l\alpha_{jq}\beta_{mp} - \frac{\alpha_{ln}\beta^2 - \beta_{ln}\alpha^2}{2\alpha\beta^5}|\frac{\beta^2}{\alpha^2}|y^l\beta_{mp}\alpha \\ & \frac{\alpha_{nl}}{\beta\alpha^3}y^n\alpha_{mp}\beta_{jq} - \frac{\beta_{ln}\alpha^2 - \alpha_{ln}\beta^2}{2\alpha^5\beta}|\frac{\alpha^2}{\beta^2}|y^n\alpha_{mq}\beta_{jp} - \frac{\beta_{nl}}{\beta^4}|\frac{\alpha}{\beta}|y^n\beta_{mp}\beta_{jq} + \frac{\alpha_{ln}\beta^2 - \beta_{ln}\alpha^2}{2\beta^6}|\frac{\alpha}{\beta}|y^n\beta_{mp}\beta_{jq})y^p + 2\xi_j(l\xi_{m|q})y^q)G^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_j^k = & \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)y^i - (g^{kl}\frac{\partial}{\partial y^l}\eta_{jm} - g^{kl}[(-\frac{\alpha_{nl}}{\alpha^4}|\frac{\beta}{\alpha}|y^n\alpha_{mp}\alpha_{jq} + \frac{\beta_{ln}\alpha^2 - \alpha_{ln}\beta^2}{2\alpha^6}|\frac{\alpha}{\beta}|y^n\alpha_{mp}\alpha_{jq} + \\ & \frac{\beta_{nl}}{\alpha\beta^3}y^n\alpha_{mp}\beta_{jq} - \frac{\alpha_{ln}\beta^2 - \beta_{ln}\alpha^2}{2\alpha\beta^5}|\frac{\beta^2}{\alpha^2}|y^n\beta_{jq}\alpha_{mp} + \frac{\alpha_{ln}}{\beta\alpha^3}y^n\alpha_{jq}\beta_{mp} - \frac{\beta_{ln}\alpha^2 - \alpha_{ln}\beta^2}{2\alpha^5\beta}|\frac{\alpha^2}{\beta^2}|y^n\alpha_{jq}\beta_{mp} - \frac{\beta_{nl}}{\beta^4}|\frac{\alpha}{\beta}|y^n\beta_{jq}\beta_{mp} + \\ & \frac{\alpha_{ln}\beta^2 - \beta_{ln}\alpha^2}{2\beta^6}|\frac{\alpha}{\beta}|y^n\beta_{jq}\beta_{mp} - \frac{\alpha_{nl}}{\alpha^4}|\frac{\beta}{\alpha}|y^n\alpha_{jq}\alpha_{mp} + \frac{\beta_{ln}\alpha^2 - \alpha_{ln}\beta^2}{2\alpha^6}|\frac{\alpha}{\beta}|y^n\alpha_{jq}\alpha_{mp} + \frac{\beta_{nl}}{\alpha\beta^3}y^l\alpha_{jq}\beta_{mp} - \frac{\alpha_{ln}\beta^2 - \beta_{ln}\alpha^2}{2\alpha\beta^5}|\frac{\beta^2}{\alpha^2}|y^l\beta_{mp}\alpha \\ & \frac{\alpha_{nl}}{\beta\alpha^3}y^n\alpha_{mp}\beta_{jq} - \frac{\beta_{ln}\alpha^2 - \alpha_{ln}\beta^2}{2\alpha^5\beta}|\frac{\alpha^2}{\beta^2}|y^n\alpha_{mq}\beta_{jp} - \frac{\beta_{nl}}{\beta^4}|\frac{\alpha}{\beta}|y^n\beta_{mp}\beta_{jq} + \frac{\alpha_{ln}\beta^2 - \beta_{ln}\alpha^2}{2\beta^6}|\frac{\alpha}{\beta}|y^n\beta_{mp}\beta_{jq})y^p + 2\xi_j(l\xi_{m|q})y^q)(\frac{1}{4}g^m \\ & \frac{y^s}{\beta}y_r^{\beta} - F\delta_r^s)(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^s}\alpha_{pq}y^qy^p + \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial x^s}\beta_{qp}y^qy^p) - y^s\frac{F}{2}(\frac{y_r^{\alpha}}{\alpha^3}\frac{\partial\alpha_{qp}}{\partial x^s}y^qy^p + \frac{y_r^{\beta}}{\beta^3}\frac{\partial\beta_{qp}}{\partial x^s}y^qy^p)) \end{aligned}$$

Ou pode-se usar a forma da cadeia e colocar em termos de η como:

$$\begin{aligned} N_j^i = & \frac{1}{2}\left(y^k\partial_{k\bar{j}}^2y_l\eta^{il} + \bar{\phi}^{\bar{i}}\eta^{ls}y_s\partial_{k\bar{j}}^2y_ly^k - y^b\partial_b\eta_{lr}y^r\eta^{kl}\eta^{ia}\partial_{(\bar{k}}\eta_{a)j} - \bar{\phi}^{\bar{k}}\eta^{ls}y_sy^b\partial_b\eta_{lr}y^r\eta^{ia}\partial_{(\bar{k}}\eta_{a)j}\right) \\ & - \frac{1}{4}\left(y^b\partial_b\eta_{lr}y^r\eta^{kl}\eta^{ia}y^t\partial_{k\bar{a}}^2\eta_{jt} + \bar{\phi}^{\bar{k}}\eta^{ls}y_sy^b\partial_b\eta_{lr}y^r\eta^{ia}y^t\partial_{k\bar{a}}^2\eta_{jt}\right) \\ & - \frac{1}{2}\left(y^b\partial_b\eta_{lr}y^r\eta^{kl}\bar{\phi}^{\bar{i}}\eta^{at}y_t\partial_{(\bar{k}}\eta_{a)j} + \bar{\phi}^{\bar{k}}\eta^{ls}y_sy^b\partial_b\eta_{lr}y^r\bar{\phi}^{\bar{i}}\eta^{at}y_t\partial_{(\bar{k}}\eta_{a)j}\right) \\ & - \frac{1}{4}\left(y^b\partial_b\eta_{lr}y^r\eta^{kl}\bar{\phi}^{\bar{i}}\eta^{at}y_ty^c\partial_{k\bar{a}}^2\eta_{jc} + \bar{\phi}^{\bar{k}}\eta^{ls}y_sy^b\partial_b\eta_{lr}y^r\bar{\phi}^{\bar{i}}\eta^{at}y_ty^c\partial_{k\bar{a}}^2\eta_{jc}\right) \quad (I.2) \end{aligned}$$

APÊNDICE J – Tensor angular

Este apêndice se dedica a calcular o tensor angular

$$\begin{aligned}
 h_k^i &= \delta_k^i - F^{-2} g_{kj} y^j y^i \\
 &= \delta_k^i - \frac{\eta_{kj} y^j y^i}{(a+b)^2} \\
 &= \delta_k^i - P_k \frac{y^i}{F}
 \end{aligned} \tag{J.1}$$

$$\begin{aligned}
 h_{lk} &= g_{il} \left(\delta_k^i - P_k \frac{y^i}{F} \right) \\
 &= g_{lk} - P_l P_k
 \end{aligned} \tag{J.2}$$

Se expandirmos g_{lk} no formato de momento (3.34), então $g_{kl} = P_l P_k + F \partial_{\bar{l}} P_k \therefore$

$$h_{lk} = F \partial_{\bar{l}} P_k \tag{J.3}$$

Para a forma tradicional, em termos das métricas α e β

$$h_{lk} = \frac{F}{a} \left(\alpha_{kl} - \frac{y_l y_k}{a^2} \right) + \frac{F}{b} \left(\beta_{kl} - \frac{y_l y_k}{b^2} \right) \tag{J.4}$$

APÊNDICE K – Torção de Matsumoto

$$\begin{aligned}
 M_{ijk} &= C_{ijk} - \frac{1}{n+1} [I_i h_{jk} + I_j h_{ik} + I_k h_{ij}] \\
 &= C_{ijk} - \frac{3!}{n+1} I_{(i} h_{jk)} \\
 &= C_{ijk} - \frac{3!}{n+1} (I_{(i} g_{jk)} - I_{(i} P_j P_k))
 \end{aligned} \tag{K.1}$$

Ou também

$$M_{ijk} = C_{ijk} - \frac{3!F}{n+1} I_{(i} \partial_l P_k) \tag{K.2}$$

Deixe os componentes da torção de Cartan e torção média de Cartan como estão, para não ficar muito carregado na expressão. Abrindo o que parece razoável:

$$M_{ijk} = C_{ijk} - \frac{3!F}{n+1} \left[\frac{1}{a} \left(I_{(i} \alpha_{kl)} - \frac{I_{(i} y_l y_k)}{a^2} \right) + \frac{1}{b} \left(I_{(i} \beta_{kl)} - \frac{I_{(i} y_l y_k)}{b^2} \right) \right] \tag{K.3}$$
