



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional



Quadrângulos: uma abordagem etnomatemática

Yuri Teles Moura

Brasília

2019

Yuri Teles Moura

Quadrângulos: uma abordagem etnomatemática

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Exatas da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Proformat, para obtenção do grau de Mestre. Orientado por Vinicius de Carvalho Rispoli.

Brasília

2019

Teles Moura, Yuri
TT269a Quadrângulos: uma abordagem etnomatemática/ Yuri Teles Moura;
orientador Vinicius de Carvalho Rispoli – Brasília, 2019.

83 p.

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília - UnB
Profmat – SBM, 2019.

1. Etnomatemática. 2. Quadrângulos convexos. 3. Métodos de aproximação. 4.
Desigualdades. I. de Carvalho Rispoli, Vinicius, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Quadrângulos: uma abordagem etnomatemática

por

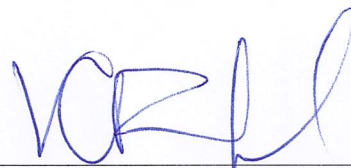
YURI TELES MOURA

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos “Programa” de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 13 de agosto de 2019.

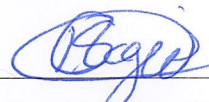
Comissão Examinadora:



Prof. Vinícius de Carvalho Rispoli (Orientador)



Profª. Mônica Menezes de Souza – SEEDF



Prof. Rogério César dos Santos - FUP/UnB

*Ao amigo Valdeci, onde quer que esteja,
por ser um incentivador e acreditar no poder transformador da educação,
e aos que, em sua condição mesma de marginalizados e oprimidos,
encontram azo para superarem-se.*

Agradecimentos

Aos colegas de turma, pelos momentos de descontração, alegria e aprendizado, e aos colegas dos mestrado e doutorado acadêmicos, em cujo convívio aprendi a perseverar nos estudos. Especiais agradecimentos ao Herisvaldo, que não permitiu que eu titubeasse ante a adversidade, ao Filipe, por me acolher em minhas dúvidas, sempre com um sorriso, e ao Michell, que não me deixou desanimar.

Aos professores do Profmat, por todo o empenho, esforço e dedicação, expressei meu reconhecimento e minha gratidão. Especiais agradecimentos ao professor Rogério, pelo interesse no trabalho e pelas sugestões, ao professor Rui, pela calorosa recepção, ao meu orientador Vinicius, por haver deixado livre a escolha do tema de pesquisa, e ao professor Zapata, por ter me dito o que precisava ouvir.

À professora Mônica, pelas críticas e sugestões.

Aos amigos Lucas, Rubens Ricardo, Rubens Teles e Tiago, pela valiosa ajuda com a revisão do texto. Desta leitura minuciosa resultaram comentários e sugestões que imbuiam-me novo vigor e motivação.

À tia Eliete e sua família, por terem-me recebido em sua casa. À Eleni, Hugo, Marli, Maurício, Ricardo, e todos com quem convivi na Casa do Estudante Nipo Brasileiro de Brasília. Senti-me seguro e, assim, pude desenvolver disciplina e me dedicar aos estudos.

Aos meus pais, Elma e Joaquim, por tudo que me ensinaram, e ainda ensinam, e por me receberem sempre de braços abertos.

À minha namorada, Aline, pelo carinho, zelo, pela compreensão e amizade sincera.

Sou muito grato, enfim, pela oportunidade de pisar o solo sagrado da Universidade de Brasília. Na sala de estudos reservada aos alunos de mestrado do Departamento de Matemática, sempre limpa e organizada, descobri o gosto pela pesquisa e a alegria que há em cada pequena descoberta.

*“Que esta superação seja o surgimento do homem novo –
não mais opressor, não mais oprimido, mas homem libertando-se.
Precisamente porque, se sua luta é no sentido de fazer-se Homem,
que estavam sendo proibidos de ser,
não o conseguirão se apenas invertem os termos da contradição.
Isto é, se apenas mudam de lugar nos polos da contradição.”*

Paulo Freire

Resumo

Este trabalho investiga os métodos de Adão e de Jorge, utilizados por camponeses para “medir a terra”. Nosso objetivo é construir conhecimento matemático a partir dessa abordagem etnomatemática. Realizamos um estudo exploratório desses modelos matemáticos para o problema de determinar a área de terrenos quadrangulares, e que fornecem aproximações para a área de quadrângulos convexos. Mostramos que todo quadrângulo torna-se cíclico via uma transformação que lhe preserva os lados. Provamos que, dentre os infinitos quadrângulos de lados dados, é cíclico o que tem a maior área. Demonstramos as fórmulas de Brahmagupta e de [Coolidge \(1939\)](#). Propomos uma melhora ao método de Jorge, e comparamos, com o auxílio do [MATLAB \(2010\)](#), os métodos de Adão, Jorge, Jorge melhorado e a fórmula de Brahmagupta ao modelo com um grau de liberdade, que fornece a área exata de quadrângulos planos e convexos. Demonstramos desigualdades que classificam esses métodos de aproximação.

Palavras-chaves: Etnomatemática. Quadrângulos convexos. Métodos de aproximação. Desigualdades.

Abstract

This work investigates the methods of *Adão* and *Jorge*, used by peasants to “measure the land”. Our goal is to build mathematical knowledge from this ethnomathematical approach. So we conduct an exploratory study of these mathematical models for the problem of determining the area of quadrangular terrain, which provide approximations for the area of convex quadrangles. We show that every quadrangle can become cyclic via a transformation that preserves its sides. We prove that among the infinite quadrangles of given sides, the one which has the largest area is cyclic. We give a proof to the formulas of Brahmagupta and [Coolidge \(1939\)](#). We propose an improvement to *Jorge*’s method, and compare, aided by [MATLAB \(2010\)](#), the methods of *Adão* and *Jorge*, improved *Jorge*’s method and Brahmagupta’s formula to the model with one degree of freedom, which gives the exact area of flat and convex quadrangles. We prove inequalities that classify these approximation methods.

Key-words: Ethnomathematics. Convex quadrangles. Approximation methods. Inequalities.

Résumé

Cet travail étudie les méthodes d'*Adão* et *Jorge*, utilisées par les paysans pour «mesurer la terre». Notre objectif est de construire des connaissances mathématiques à partir de cette approche ethnomathématique. Nous avons mené une étude exploratoire de ces modèles mathématiques sur le problème de la détermination de la surface du terrain quadrangulaire et qui fournissant des approximations de la surface des quadrangles convexes. Nous montrons que chaque quadrangle devient cyclique via une transformation préservant ses côtés. Nous prouvons que parmi les infinis quadrangles de côtés donnés, c'est le cyclique qui a la plus grande surface. Nous démontrons les formules Brahmagupta et [Coolidge \(1939\)](#). Nous proposons une amélioration de la méthode de Jorge et comparons, à l'aide de [MATLAB \(2010\)](#), les méthodes d'*Adão*, *Jorge*, la méthode de *Jorge* améliorée, la formule de Brahmagupta, au modèle avec un degré de liberté, ce qui donne la surface exacte des quadrangles plates et convexes. Nous démontrons des inégalités qui classifient ces méthodes d'approximation.

Mots-clés : Ethnomathématique. Quadrangles convexes. Méthodes d'approximation. Inégalités.

Resumen

Este trabajo investiga los métodos de *Adão* y *Jorge* utilizados por los campesinos para «medir la tierra». Nuestro objetivo es construir conocimiento matemático a partir de este enfoque etnomatemático. Realizamos un estudio exploratorio de estos modelos matemáticos para el problema de determinar el área de terreno cuadrangular, y que proporcionan aproximaciones para el área de cuadrados convexos. Mostramos que cada cuadrángulo se vuelve cíclico a través de una transformación que conserva sus lados. Probamos que entre los infinitos cuadrángulos de lados dados es cíclico el que tiene el área más grande. Demostramos las fórmulas de Brahmagupta y de [Coolidge \(1939\)](#). Proponemos una mejora al método de Jorge y comparamos, con la ayuda de [MATLAB \(2010\)](#), los métodos de *Adão*, *Jorge*, *Jorge* mejorado y la fórmula de Brahmagupta, con el modelo con un grado de libertad, que da el área exacta de los cuadrángulos planos y convexos. Demostramos desigualdades que clasifican estos métodos de aproximación.

Palabras clave: Métodos de aproximación. Cuadrángulos convexos. Etnomatemáticas.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Seno e cosseno no ciclo trigonométrico	24
Figura 2 – Arcos suplementares	25
Figura 3 – Seno e cosseno no triângulo retângulo	26
Figura 4 – Triângulos ABC para $\angle A$ agudo, reto e obtuso	27
Figura 5 – Quadrângulo não-convexo	29
Figura 6 – Quadrângulo convexo	30
Figura 7 – Tangentes a um círculo	31
Figura 8 – Se tangencial, são iguais as somas dos lados opostos	31
Figura 9 – As bissetrizes intersectam-se no centro do círculo	32
Figura 10 – Se são iguais as somas dos lados opostos, tangencial	33
Figura 11 – Se cíclico, são suplementares os ângulos opostos.	34
Figura 12 – Se suplementares os ângulos opostos, cíclico	34
Figura 13 – O teorema de Ptolomeu	35
Figura 14 – Área de quadrângulos cíclicos, função simétrica dos lados	37
Figura 15 – A fórmula de Brahmagupta	38
Figura 16 – Quadrângulo cíclico	40
Figura 17 – Modelo de um terreno quadrangular	44
Figura 18 – Construção de um quadrângulo a partir de seus lados	46
Figura 19 – Gráficos do erro em função de θ	48
Figura 20 – Região dos gráficos com o menor erro	49
Figura 21 – Gráfico da área em função do ângulo θ	50
Figura 22 – Quadrângulo, um grau de liberdade	53
Figura 23 – Quadrângulo bicêntrico	60
Figura 24 – Área de triângulos, função simétrica dos lados	71
Figura 25 – A fórmula de Heron	72
Figura 26 – Trapézio isósceles porque cíclico	73
Figura 27 – A fórmula de Brahmagupta para trapézios	74
Figura 28 – De Heron a Brahmagupta	75

Lista de tabelas

Tabela 1 – Método de Adão para estimar a área	18
Tabela 2 – Método de Jorge para estimar a área	18

Lista de abreviaturas e siglas

DER	Departamento de Educação Rural
Fundep	Fundação para o Desenvolvimento, Educação e Pesquisa da Região Celeiro
MST	Movimento dos Trabalhadores Rurais Sem Terra

Lista de símbolos

Γ	Letra grega Gama
α	Letra grega minúscula alfa
β	beta
γ	gama
δ	delta
θ	teta
λ	lambda
μ	mi
π	pi
ϕ	fi
\sphericalangle	Ângulo
\cong	Aproximadamente igual
\in	Pertence

Sumário

	INTRODUÇÃO	17
1	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	23
1.1	Trigonometria	23
1.1.1	A relação fundamental	23
1.1.2	A lei dos cossenos e a fórmula do seno	25
1.2	Quadrângulos convexos	28
1.2.1	Quadrângulos tangenciais e o teorema de Pitot	30
1.2.2	Quadrângulos cíclicos e a fórmula de Brahmagupta	33
2	MODELAGEM	43
2.1	Jorge e Adão	43
2.2	Brahmagupta e Jorge melhorado	45
2.3	Modelo com um grau de liberdade	47
2.4	Implementação	47
2.4.1	Resultados	48
2.4.2	Discussão	49
3	ANÁLISE DOS MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO	52
3.1	Brahmagupta e otimização	52
3.2	Classificação dos métodos de aproximação	57
3.3	Jorge melhorado e os quadrângulos bicêntricos	59
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	63
	REFERÊNCIAS	68
	APÊNDICES	70
	APÊNDICE A – A FÓRMULA DE HERON	71
	APÊNDICE B – DE HERON A BRAHMAGUPTA	73
B.1	Área do trapézio cíclico	73
B.2	Área do quadrângulo cíclico	75
	APÊNDICE C – DESIGUALDADE COM QUADRADOS	78

APÊNDICE D – CÓDIGO	79
ANEXOS	81
ANEXO A – DESIGUALDADE DAS MÉDIAS	82

Introdução

“Daí que vão se apropriando, cada vez mais, da ciência também, como instrumento para suas finalidades. Da tecnologia, que usam como força indiscutível de manutenção da ‘ordem’ opressora, com a qual manipulam e esmagam.”
P. Freire

A pesquisa que desenvolvemos neste trabalho começa na investigação de dois métodos de aproximação para a área de quadrângulos convexos, apresentados por [Knijnik \(1997\)](#).

Estudando sobre as chamadas tendências em educação matemática foi que tomamos conhecimento da etnomatemática. Logo nos pomos a procurar publicações nesta área de pesquisa, movidos pela curiosidade e pela vontade de aprender. Foi então que nos deparamos com o artigo de [Rosa e Gavarrete \(2016\)](#), que cita e descreve as etnomatemáticas, práticas matemáticas e sociais, do trabalho da pesquisadora.

Explicaremos agora, à luz do método de [Freire \(2013\)](#), que é de educação como prática de liberdade, o porquê da nossa abordagem etnomatemática. Começamos por descrever o cenário e o ambiente onde foi realizada a pesquisa que deu origem ao nosso trabalho.

A escola rural do do Departamento de Educação Rural (DER) e da Fundação para o Desenvolvimento, Educação e Pesquisa da Região Ceilero (Fundep), onde a educadora desenvolveu sua pesquisa, situava-se em Braga, no Rio Grande do Sul. Fundada em 1989, como resposta a movimentos rurais organizados, particularmente o Movimento dos Trabalhadores Rurais Sem Terra (MST), a escola visava implementar uma forma de educação popular, entendida como uma abordagem metodológica que pudesse contribuir com mudanças sociais.

Na época em que aconteceu a pesquisa, a escola tinha de atender, prioritariamente, os próprios trabalhadores rurais organizados, pois, como eles mesmos diziam: “Há uma urgência histórica na necessidade de educar os principais agentes envolvidos no processo de mudança social” ([KNIJNIK, 1997](#), p. 404).

Eram oferecidos cursos formais e informais. Não obstante, o trabalho de pesquisa da autora estava mais diretamente relacionado a um desses cursos, o qual tinha como objetivo preparar e conceder certificados a professores da educação básica.

Quase todos os alunos da escola estavam, na verdade, ensinando, antes mesmo de obterem o grau de formação necessário. Eram chamados “professores leigos”. Eles iam

à escola rural do DER/Fundep, como estudantes, em quatro períodos, durante as férias escolares.

Ao todo, eram seis meses estudando na escola, de manhã e à tarde. Os alunos estudavam também a distância, enquanto ensinavam em suas comunidades. Depois desses quatro períodos, havia um semestre de estágio, quando eles ensinavam em suas comunidades supervisionados pelos professores do DER/Fundep.

No artigo supracitado, a pesquisadora apresentou algumas práticas de matemática popular – objetos de sua investigação –, entre as quais estão dois métodos para medir terrenos quadrangulares – objetos da nossa investigação. Esses métodos eram conhecidos no grupo como “método de Adão” e “método de Jorge”.

Tabela 1 – Método de Adão para estimar a área

Linguagem do homem do campo	Linguagem acadêmica
Este é um terreno com quatro paredes.	Este é um quadrilátero convexo.
Primeiro, somamos duas das paredes opostas e dividimos por dois.	Primeiro, encontramos a média entre dois lados opostos.
Segundo, somamos as outras duas paredes opostas e dividimos também por dois.	Segundo, encontramos a média entre os dois outros lados opostos.
Terceiro, multiplicamos o primeiro número obtido pelo segundo.	Terceiro, encontramos a área do retângulo formado pelas médias calculadas antes.
Essa é a “cubação” desta terra.	Essa é a área do retângulo cujos lados foram determinados pela média dos dois pares de lados opostos do quadrilátero convexo.

Fonte – Knijnik (1997, p. 407)

Os estudantes Jorge e Adão ensinaram, pessoalmente, os seus métodos de “medir a terra” em sua comunidade.

Tabela 2 – Método de Jorge para estimar a área

Linguagem do homem do campo	Linguagem acadêmica
Este é um terreno com quatro paredes.	Este é um quadrilátero convexo.
Primeiro, somamos todas as paredes.	Primeiro, encontramos o perímetro desse quadrilátero.
Segundo, dividimos o resultado da soma por quatro.	Segundo, dividimos o perímetro por quatro.
Terceiro, multiplicamos o número obtido por ele mesmo.	Terceiro, encontramos a área do quadrado cujo lado foi determinado dividindo-se o perímetro por quatro.
Essa é a “cubação” desta terra.	Essa é a área do quadrado obtido a partir do perímetro do quadrilátero convexo.

Fonte – Knijnik (1997, p. 407)

Enquanto eles explicavam os métodos, os colegas descodificavam¹, compreendiam o significado destes métodos, em termos da matemática acadêmica, assegura Knijnik (1997). Isto está representado na passagem da primeira para a segunda colunas, nas Tabelas 1 e 2.

A expressão etnomatemática foi cunhada pelo professor Ubiratan D'Ambrosio em meados da década de 1970, que, desde então, tem feito contribuições teóricas importantes, além de estabelecer diretrizes de pesquisa em etnomatemática (KNIJNIK, 1997, p. 405).

As práticas pedagógicas e as pesquisas em etnomatemática, que levam em conta o contexto sociocultural e a visão de mundo que estejam tendo os sujeitos, são

dinâmicas, holísticas, transdisciplinares e transculturais. Sua evolução certamente beneficiará a matemática acadêmica, principalmente porque as etnomatemáticas avançam de maneira muito mais próxima da realidade e dos agentes imersos nessa realidade (ROSA et al., 2016, p. 7).

Porquanto convidam, conclamam os estudantes à participação na própria prática pedagógica – ação cultural –, como sujeitos ativos no processo de aprendizagem.

O termo etnomatemática foi utilizado por Knijnik (1997) para designar a investigação das tradições, práticas e conceitos matemáticos de um grupo social subordinado e o trabalho pedagógico que foi desenvolvido a fim de que o grupo fosse capaz de interpretar e decodificar seus conhecimentos; adquirir o conhecimento produzido por matemáticos acadêmicos; e estabelecer comparações entre seu conhecimento e o conhecimento acadêmico, de modo que pudessem assim analisar as relações de poder envolvidas no uso de ambos os tipos de conhecimento.

No entanto, acreditamos que em vez de simplesmente “*adquirir* o conhecimento produzido por matemáticos acadêmicos”, só podemos realmente aprender e ensinar matemática se estivermos verdadeiramente construindo conhecimento matemático. Com efeito, a ideia de que conhecimento é algo que possa ser adquirido, como um bem que se compra no mercado, segue o modelo de educação “bancária”, criticado por Freire (2013, p. 125–126):

A narração, de que o educador é o sujeito, conduz os educandos à memorização mecânica do conteúdo narrado. Mais ainda, a narração os transforma em “vasilhas”, em recipientes a serem “enchidos” pelo educador. Quanto mais vá “enchendo” os recipientes com seus “depósitos”, tanto melhor educador será. Quanto mais se deixem docilmente “encher”, tanto melhores educandos serão.

Desta maneira, a educação se torna um ato de depositar, em que os educandos são os depositários e o educador, o depositante.

Claro que um tal modelo de educação só há de servir mesmo para reforçar os mecanismos de opressão, que mantêm subordinados e esmagam os grupos mencionados por Knijnik (1997) em seu artigo.

¹ Embora decodificar seja usual, empregamos o termo *descodificar* para designar “a análise crítica da situação codificada” (FREIRE, 2013, p. 267).

É importante refletir sobre a nossa ação pedagógica de modo a elaborar práticas problematizadoras e conscientizadoras de educação, pois

os estudantes que não acreditam, não valorizam nem reconhecem suas próprias raízes culturais podem assimilar facilmente a cultura dominante (dos opressores), sem refletir criticamente seu valor (D'AMBROSIO, 1999 apud ROSA et al., 2016, p. 18).

A educação que se pretende realizar sem a verdadeira adesão do educando-educador, que está sendo oprimido, impedido de ser, é invasão cultural, alienada e alienante. Dela se servem os opressores, para manter as condições que somente a eles beneficiam.

A pesquisa cujos resultados foram apresentados em seu artigo revela os *temas geradores* de um grupo social inserido em certo contexto sociocultural, em dado momento histórico. Os temas geradores, por sua vez, revelam a visão de mundo que estavam tendo os membros daquele grupo.

Acreditamos, todavia, que a abordagem etnomatemática desenvolvida pela educadora-educanda junto aos educandos-educadores não termina na descrição das etnomatemáticas, práticas matemáticas popularizadas entre os membros do grupo. Cabe-nos realizar um estudo exploratório destas práticas a fim de produzir conhecimento matemático.

Nosso trabalho, portanto, é uma continuação natural da pesquisa de Knijnik (1997), da qual emprestamos a abordagem etnomatemática. Nesta abordagem, a prática pedagógica inicia-se a partir do contexto social, da realidade e do interesse dos estudantes, ao invés de simplesmente impor um conjunto de valores externos e atividades descontextualizadas, sem qualquer significado para eles, apenas porque estão no currículo (ROSA; OREY, 2013 apud ROSA et al., 2016, p. 21).

O objetivo da pesquisa da educadora era mostrar que as práticas de matemática popular – produto de uma relação social desigual – representam uma limitação, uma desvantagem. Era necessário compreender que a mera perpetuação desse conhecimento matemático envolvia mecanismos que reforçavam a subordinação social (KNIJNIK, 1997, p. 409).

Nosso trabalho de pesquisa está orientado à matemática que podemos construir a partir da abordagem etnomatemática desenvolvida pela professora. O problema que propomos investigar é o de determinar a área de terrenos quadrangulares, e os métodos de aproximação utilizados pelos camponeses. Estamos, pois, interessados em responder perguntas tais como:

- a) há outros métodos?
- b) qual dos métodos melhor aproxima a área de um quadrângulo convexo?
- c) eles fornecem aproximações por falta ou excesso?
- d) como calcular a área (exata) de um quadrângulo convexo?

Justificamos o presente trabalho de pesquisa no impacto e na relevância que acreditamos ter na sala de aula. Embora a fórmula de Heron, para o cálculo da área em função dos lados de um triângulo, seja, normalmente, um tema da matemática do ensino médio, à fórmula de Brahmagupta, uma generalização desta, não é feita qualquer menção.

Na verdade, os quadrângulos quase não são abordados nos cursos de geometria plana, seja no ensino básico ou na universidade, a despeito dos belíssimos resultados e do potencial pedagógico e de pesquisa que encerram.

No [Capítulo 1](#) fazemos uma revisão da Geometria Euclidiana. Provamos a fórmula do seno, que provê a área de quadrângulos convexos em termos das diagonais e do ângulo entre elas. A partir desta fórmula, da relação fundamental da trigonometria e da lei dos cossenos, deduzimos a [Fórmula de Brahmagupta](#), que dá área de um quadrângulo cíclico em termos dos seus lados.

No [Capítulo 2](#) modelamos o problema de determinar a área de um terreno quadrangular. Propomos uma melhora ao método de Jorge e utilizamos a fórmula de Brahmagupta para aproximar a área de quadrângulos convexos. Utilizamos o software [MATLAB \(2010\)](#) para comparar estes modelos e apresentamos os resultados por meio de gráficos.

No [Capítulo 3](#) provamos que, entre os quadrângulos de lados dados, o cíclico tem a maior área; fazemo-lo de duas formas diferentes, a saber, via o Cálculo Diferencial e a fórmula de [Coolidge \(1939\)](#). Neste capítulo realizamos uma classificação dos métodos de aproximação na forma do Teorema [3.5](#). Apresentamos também os quadrângulos bicêntricos, isto é, cíclicos e tangenciais, que conferem significado geométrico ao método de Jorge melhorado.

Nas [Considerações finais](#) realizamos um apanhado e tecemos comentários a cerca do que foi desenvolvido ao longo do trabalho: o problema de pesquisa, os objetivos, a metodologia utilizada e os resultados obtidos. Além disso, apresentamos sugestões para trabalhos futuros.

Utilizando a relação fundamental da trigonometria, a lei dos cossenos e a fórmula do seno, demonstramos a fórmula de Heron, no [Apêndice A](#), e a de Brahmagupta a partir desta, no [Apêndice B](#).

Todas as figuras presentes no texto foram elaboradas no software [GeoGebra \(2018\)](#), à exceção dos gráficos do [Capítulo 2](#), gerados a partir do código [MATLAB \(2010\)](#) do [Apêndice D](#).

Para a demonstração do Teorema [3.5](#), resultado central do nosso trabalho, vem em nosso auxílio uma desigualdade cuja demonstração deixamos para o [Apêndice C](#).

No livro de [Muniz Neto \(2014, p. 163–166\)](#) encontramos a desigualdade das médias. Por conta de sua importância na investigação dos métodos de aproximação que ora

propomos estudar, era imprescindível incluir uma sua demonstração. Deixamo-la, pois, para o [Anexo A](#).

Esperamos que alunos e professores, da educação básica à universidade, público alvo do nosso trabalho, encontrem nele rico material para suas descobertas e consequente aprendizagem significativa.

1 Fundamentos teóricos

“Aquele que despreza Geometria Euclidiana é como um homem que, regressando de terras estrangeiras, menospreza sua casa.”

H. G. Forder

Neste capítulo mostraremos os resultados da Geometria Euclidiana Plana em que se fundamentam as investigações a serem desenvolvidas nos capítulos subsequentes. O principal resultado é a [Fórmula de Brahmagupta](#). Para a nossa demonstração dessa fórmula, colecionaremos: a [Relação fundamental da trigonometria](#), a [Lei dos cossenos](#), a fórmula do seno (Lema 1.5) e o Teorema de [Ptolomeu](#).

1.1 Trigonometria

Nesta seção demonstraremos a relação fundamental e a lei dos cossenos, além de obtermos uma fórmula do seno para triângulos, a partir da qual deduziremos a dos quadrângulos, na próxima seção.

De acordo com [Merzbach e Boyer \(2011, p. 193\)](#), o desenvolvimento do sistema posicional de numeração foi uma das maiores contribuições da Índia para a história da matemática. A introdução de um equivalente da função seno na trigonometria, para substituir as tabelas de cordas dos gregos, foi outra.

1.1.1 A relação fundamental

No plano Cartesiano, o *ciclo trigonométrico* é o círculo Γ da [Figura 1](#), de raio 1 e centro na origem $O = (0, 0)$.

O comprimento de Γ , portanto, é igual a 2π .

Dado um número real μ , medimos sobre Γ , a partir de A , um arco de comprimento $|\mu|$, no sentido anti-horário se $\mu > 0$ e no sentido horário se $\mu < 0$. Sendo P a extremidade final desse arco, dizemos que o arco \widehat{AP} (de comprimento possivelmente maior que 2π) mede μ *radianos* ([MUNIZ NETO, 2013, p. 296](#)).

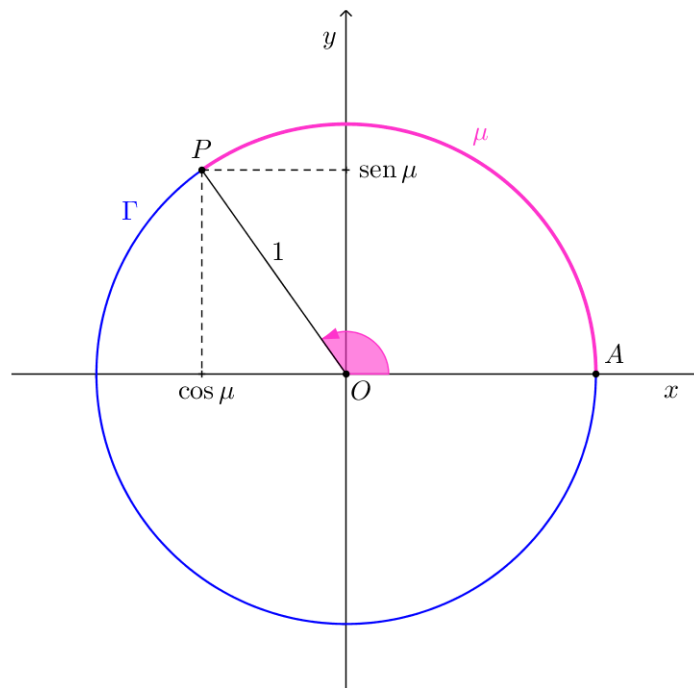
Definição 1.1. Para μ real, definimos como o seno e o cosseno de μ (radianos), respectivamente, a ordenada e a abscissa de P sobre Γ . Denotamos

$$P = (\cos \mu, \sin \mu).$$

Observação 1.1. A partir da definição e de um exame da [Figura 1](#), concluímos que

$$-1 \leq \cos \mu \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq \sin \mu \leq 1,$$

Figura 1 – Seno e cosseno no ciclo trigonométrico



Fonte – o autor

qualquer que seja o número real μ .

Agora estamos aptos a demonstrar o teorema a seguir.

Teorema 1.1 (Relação fundamental da trigonometria). *Para todo real μ ,*

$$\text{sen}^2 \mu + \text{cos}^2 \mu = 1.$$

Demonstração. Como $P = (\cos \mu, \text{sen} \mu)$ é ponto do círculo Γ , de centro na origem $O = (0, 0)$ e raio 1,

$$(\cos \mu - 0)^2 + (\text{sen} \mu - 0)^2 = 1^2. \quad \square$$

O ciclo trigonométrico tem comprimento 2π , donde 2π radianos correspondem a 360° .

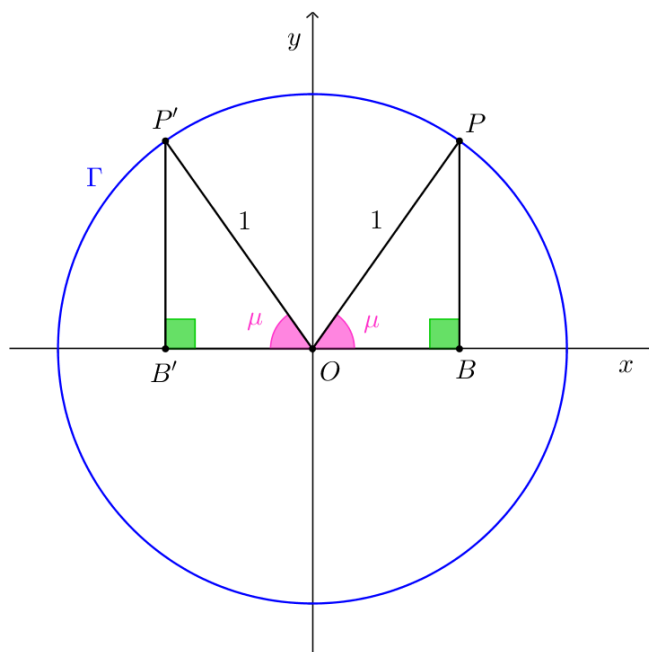
O próximo resultado, cuja prova obtemos do exame da [Figura 2](#), será utilizado na dedução da lei dos cossenos e da fórmula do seno.

Lema 1.2. *Se $\mu \in [0, 180^\circ]$, então:*

(a) $\cos(180^\circ - \mu) = -\cos \mu;$

(b) $\text{sen}(180^\circ - \mu) = \text{sen} \mu.$

Figura 2 – Arcos suplementares



Fonte – o autor

Demonstração. Primeiro os casos extremos, $\mu = 0$ e $\mu = 180^\circ$: $\cos(180^\circ - 0) = -1 = -\cos 0$ e $\sin(180^\circ - 0) = 0 = \sin 0$; $\cos(180^\circ - 180^\circ) = \cos 0 = 1 = -\cos 180^\circ$ e $\sin(180^\circ - 180^\circ) = \sin 0 = 0 = \sin 180^\circ$.

Se $\mu \in (0, 180^\circ)$, da congruência dos triângulos OBP e $OB'P'$, da [Figura 2](#), segue que $OB = OB'$ e $BP = B'P'$, isto é, $\cos(180^\circ - \mu) = -\cos \mu$ e $\sin(180^\circ - \mu) = \sin \mu$. \square

1.1.2 A lei dos cossenos e a fórmula do seno

A partir da [Relação fundamental da trigonometria](#) e do [Lema 1.2](#), demonstraremos a lei dos cossenos e a fórmula do seno.

Precisamos, antes disso, obter relações que nos permitam calcular seno e cosseno no triângulo retângulo. Com esse intento, examinemos, pois, a [Figura 3](#).

Os triângulos OBP e OCD da [Figura 3](#) são semelhantes pelo caso AA . Logo,

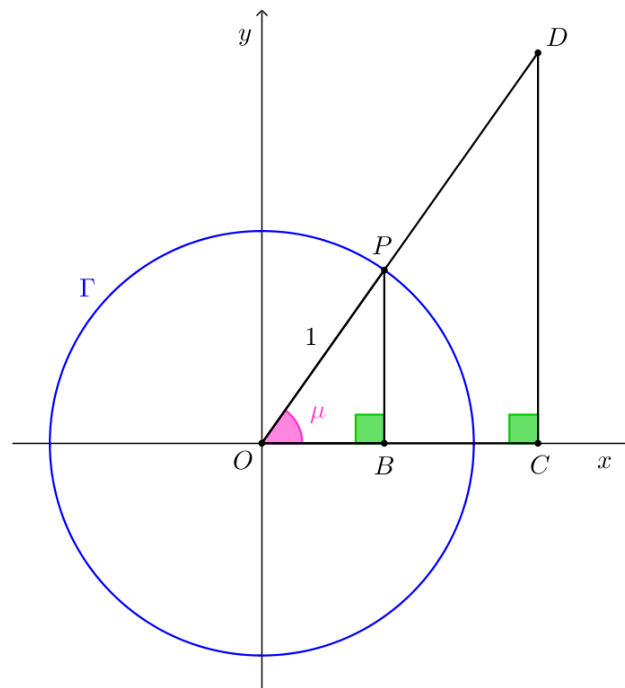
$$\frac{OB}{OP} = \frac{OC}{OD} \quad \text{e} \quad \frac{BP}{OP} = \frac{CD}{OD},$$

ou seja,

$$\cos \mu = \frac{OC}{OD} \quad \text{e} \quad \sin \mu = \frac{CD}{OD}.$$

Isso quer dizer que, em um triângulo retângulo, calculamos o cosseno de um ângulo interno pela razão entre o cateto adjacente (próximo) ao ângulo e a hipotenusa; enquanto que o seno é dado pela razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.

Figura 3 – Seno e cosseno no triângulo retângulo



Fonte – o autor

Concordemos em utilizar a notação $AB = x$ para indicar que o segmento de reta AB , que liga os pontos A e B , tem medida igual a x .

Lema 1.3 (Lei dos cossenos). *Se o triângulo ABC tem lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$, então*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

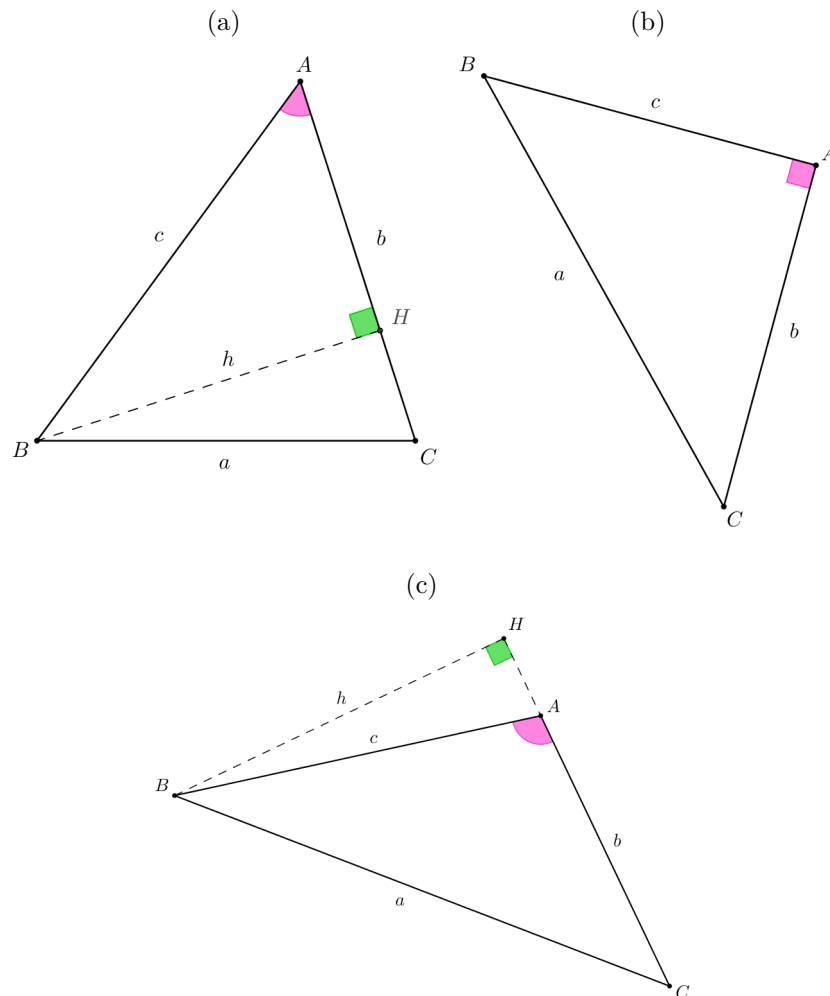
Demonstração. Abordaremos em separado os casos em que $\angle A$ é agudo, reto e obtuso. Nos três casos, sejam H o pé da altura relativa ao lado AC e h o seu comprimento.

(a) Se $A < 90^\circ$, como na Figura 4a, então H pertence ao interior de AC , e o teorema de Pitágoras aplicado ao $\triangle BCH$ nos dá

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + HC^2 \\ &= h^2 + (b - AH)^2 \\ &= (c \operatorname{sen} A)^2 + (b - c \cos A)^2 \\ &= c^2 \operatorname{sen}^2 A + b^2 - 2bc \cos A + c^2 \cos^2 A, \end{aligned} \tag{1.1}$$

e, da [Relação fundamental da trigonometria](#), segue o resultado desejado.

Figura 4 – Triângulos ABC para $\angle A$ agudo, reto e obtuso



Fonte – o autor

(b) Se $A = 90^\circ$, como indica a Figura 4b, então $\cos A = 0$, e o teorema de Pitágoras aplicado ao ΔABC nos dá

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

(c) Se $A > 90^\circ$, como indica a Figura 4c, então H não pertence ao interior de AC , e, do Lema 1.2, temos $\cos A = -\cos(180^\circ - A) = -AH/c$ e $\sin A = \sin(180^\circ - A) = h/c$.

Aplicamos o teorema de Pitágoras ao ΔBCH para obter

$$\begin{aligned} a^2 &= (b + AH)^2 + h^2 \\ &= (b - c \cos A)^2 + (c \sin A)^2, \end{aligned}$$

o mesmo resultado da Equação 1.1 (MUNIZ NETO, 2013, p. 322–323). □

Obtemos a seguir a fórmula do seno para triângulos. Utilizaremos a notação (ABC) para designar a área do triângulo ABC , o qual denotaremos ΔABC .

Lema 1.4. Se o $\triangle ABC$ tem lados $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, ângulos internos $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, então

$$(ABC) = \frac{bc \operatorname{sen} A}{2}.$$

Demonstração. Como fizemos na demonstração da lei dos cossenos, também esta dividimos nos casos em que $\angle A$ é agudo, reto e obtuso. Nos três casos, seja H o pé da altura relativa ao lado b e seja h o seu comprimento.

(a) Se $0 < \angle A < 90^\circ$ (como na Figura 4a), então $\operatorname{sen} A = h/c$. Daí,

$$\begin{aligned} (ABC) &= \frac{bh}{2} \\ &= \frac{bc \operatorname{sen} A}{2}. \end{aligned}$$

(b) Se $\angle A = 90^\circ$ (como na Figura 4b),

$$\begin{aligned} (ABC) &= \frac{bc}{2} \\ &= \frac{bc \operatorname{sen} A}{2}, \end{aligned}$$

pois $\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} 90^\circ = 1$.

(c) Se $90^\circ < \angle A < 180^\circ$ (como na Figura 4c), então, do Lema 1.2, $\operatorname{sen} A = \operatorname{sen}(180^\circ - A) = h/c$. Daí,

$$\begin{aligned} (ABC) &= \frac{bh}{2} \\ &= \frac{bc \operatorname{sen} A}{2}, \end{aligned}$$

o que completa nossa demonstração. □

1.2 Quadrângulos convexos

Nesta seção deduziremos a fórmula de Brahmagupta, passando pelas definições e características dos quadrângulos cíclicos e dos tangenciais, pelos teoremas de Ptolomeu e Pitot.

Precisamos, antes mais nada, explicar por que ‘quadrângulos’, em vez de ‘quadriláteros’, que é o termo mais comumente encontrado na literatura.

Lembremos que um polígono de n vértices e n lados chamamos n -gono (significando literalmente “ n -ângulo”). Temos, então, um *pentágono* ($n = 5$), um *hexágono* ($n = 6$), e assim por diante. Só não utilizamos o nome grego para o número n quando $n = 3$ e $n = 4$.

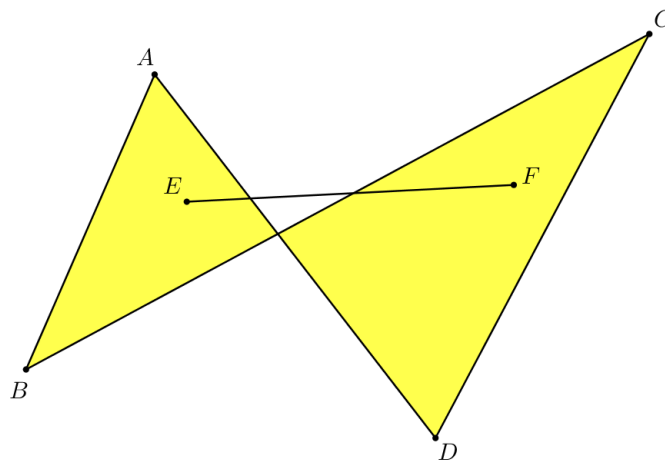
Nestes casos simples, como é costume, usamos as formas latinas *triângulo* e *quadrângulo* em vez de “trígono” e “tetragono”. Conforme argumenta [Coxeter e Greitzer \(1967, p. 52\)](#), devemos desencorajar a tendência de chamar um quadrângulo de “quadrilátero”.

Embora, no presente trabalho, estejamos interessados em resolver um problema de Geometria Euclidiana, é importante mantermos em mente que o domínio de aplicação dos conceitos bem como dos termos matemáticos ora utilizados se estende para além do nosso escopo. Em particular, na geometria projetiva, em que os lados (dos polígonos) são retas inteiras ao invés de meros segmentos, precisamos dos dois termos – ‘quadrilátero’ e ‘quadrângulo’ – com significados distintos ([COXETER; GREITZER, 1967, p. 52](#)).

O objeto de estudo desta seção está limitado aos quadrângulos convexos, uma vez que os métodos de Adão e de Jorge aplicam-se apenas a estes. Assim, precisamos de uma definição do que sejam polígonos, e, em particular, quadrângulos convexos.

Definição 1.2. Um polígono é dito convexo quando todo segmento de reta que une dois pontos quaisquer em seu interior lhe estiver inteiramente contido.

Figura 5 – Quadrângulo não-convexo



Fonte – o autor

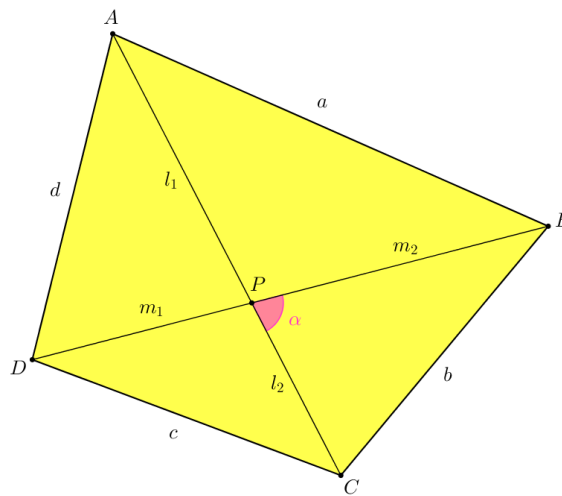
O quadrângulo $ABCD$ da [Figura 5](#), por exemplo, não é convexo. De fato, o segmento de reta que liga os pontos E e F , interiores ao quadrângulo $ABCD$, não está inteiramente contido em $ABCD$.

O lema a seguir nos acude com uma fórmula para a área de um quadrângulo convexo em termos de suas diagonais e do ângulo entre elas, que utilizaremos na obtenção da fórmula de Brahmagupta

Lema 1.5. *O quadrângulo convexo $ABCD$ cujas diagonais $AC = l$ e $BD = m$ formam entre si um ângulo α , tem área dada por*

$$K = \frac{lm \operatorname{sen} \alpha}{2}. \quad (1.2)$$

Figura 6 – Quadrângulo convexo



Fonte – o autor

Demonstração. Fazemos $l = l_1 + l_2$ e $m = m_1 + m_2$, como na Figura 6.

Do Lema 1.2, temos $\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha$, e o Lema 1.4 aplicado aos triângulos APB , BPC , CPD e DPA , nos dá a área do quadrângulo,

$$\begin{aligned} K &= \frac{l_1 m_1 + l_1 m_2 + l_2 m_1 + l_2 m_2}{2} \text{sen } \alpha \\ &= \frac{lm \text{sen } \alpha}{2}, \end{aligned}$$

como queríamos. □

O círculo tem sido mantido na mais elevada estima ao longo dos tempos. Sua forma perfeita impressionou filósofos e astrônomos (COXETER; GREITZER, 1967, p. 27). Agora nos dedicamos a estudar suas relações com os quadrângulos.

1.2.1 Quadrângulos tangenciais e o teorema de Pitot

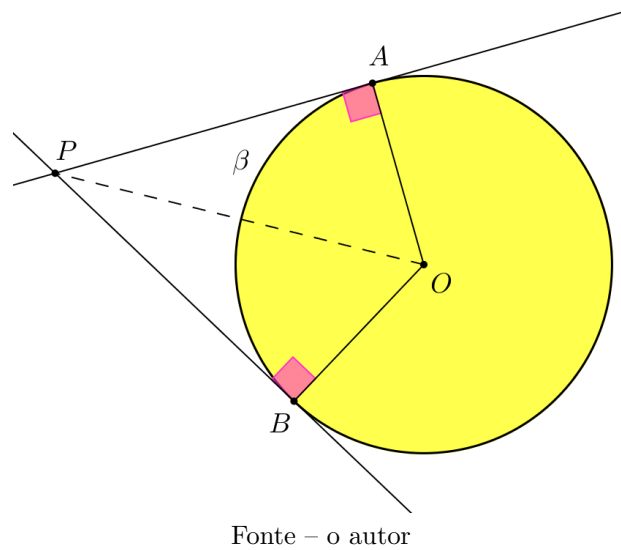
Antes de apresentarmos uma definição dos quadrângulos tangenciais, procedemos com a demonstração de um resultado importante, que utilizaremos para provar o teorema de Pitot.

Lema 1.6. *Se duas retas do plano concorrem em um ponto P , externo a um círculo, β digamos, e são tangentes a ele nos pontos A e B , então $PA = PB$.*

Demonstração. Como $OA = OB$, $\angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$ e PO é comum, são congruentes os triângulos PAO e PBO da Figura 7.

Logo, $PA = PB$. □

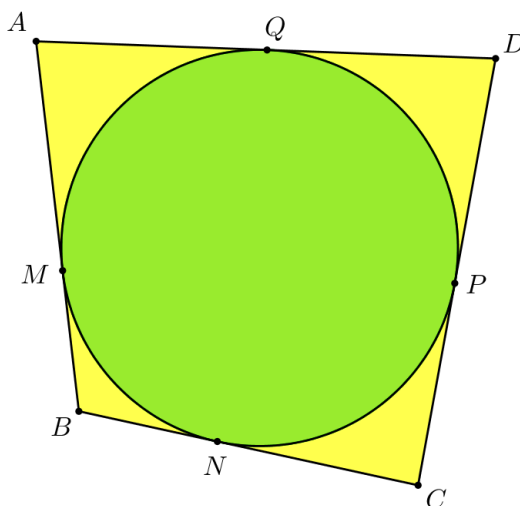
Figura 7 – Tangentes a um círculo



Ao contrário dos triângulos, nem todo quadrângulo possui um círculo tangente a todos os seus lados.

Definição 1.3. Dizemos que um quadrângulo é tangencial se houver um círculo tangente a todos os seus lados.

Figura 8 – Se tangencial, são iguais as somas dos lados opostos



O teorema a seguir provê uma caracterização dos quadrângulos tangenciais.

Teorema 1.7 (Pitot). Um quadrângulo convexo $ABCD$ de lados AB , BC , CD , AD , é

tangencial se, e só se,

$$AB + CD = BC + DA.$$

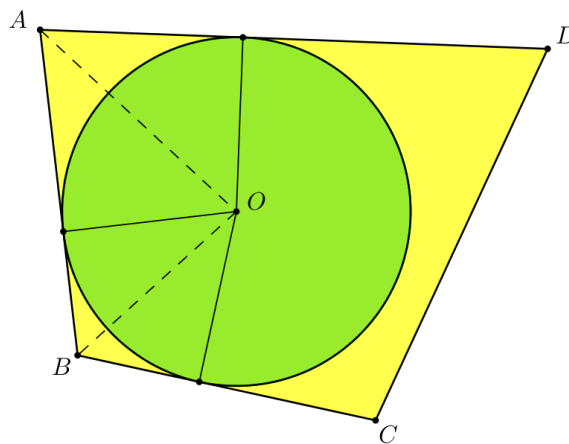
Demonstração. Suponhamos, primeiro, que $ABCD$ seja tangencial, e sejam M , N , P e Q , respectivamente, os pontos de tangência dos lados AB , BC , CD e DA com o círculo inscrito a $ABCD$ da [Figura 8](#). Temos

$$AB + CD = AM + MB + CP + PD \quad \text{e} \quad BC + DA = BN + NC + DQ + QA.$$

Do Lema 1.6, temos $AM = QA$, $MB = BN$, $CP = NC$ e $PD = DQ$, donde segue a relação desejada.

Reciprocamente, suponhamos que $AB + CD = BC + DA$ e que $ABCD$ não seja tangencial.

Figura 9 – As bissetrizes intersectam-se no centro do círculo



Fonte – o autor

Lembremos que a bissetriz de um ângulo é o *lugar geométrico* dos pontos que equidistam dos lados desse ângulo. Assim, o ponto O , intersecção das bissetrizes dos ângulos internos $\angle A$ e $\angle B$, equidista dos lados desses ângulos, como indica a [Figura 9](#).

Logo, O é o centro de um círculo que tangencia os lados AD , AB e BC de $ABCD$.

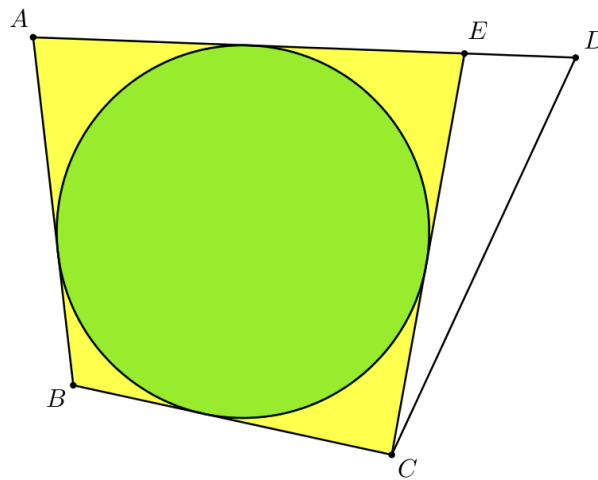
Seja E o ponto sobre a semirreta com origem A e que passa por D , de sorte que CE tangencie o círculo da [Figura 10](#) (aqui estamos considerando E interior a AD ; o outro caso é análogo). Da parte já demonstrada do teorema segue que

$$AB + CE = EA + BC.$$

Por hipótese, $AB + CD = BC + DA$; logo,

$$CD - CE = DA - EA = ED,$$

Figura 10 – Se são iguais as somas dos lados opostos, tangencial



Fonte – o autor

ou seja, $CD = CE + DE$, o que contradiz a desigualdade triangular (MUNIZ NETO, 2013, p. 142–144). \square

Continuaremos nosso estudo das relações que o círculo tem com os quadrângulos.

1.2.2 Quadrângulos cíclicos e a fórmula de Brahmagupta

Ao contrário dos triângulos, nem todo quadrângulo convexo admite um círculo passando por seus vértices. De fato, um quadrângulo $ABCD$ em que D é exterior (ou interior) ao circuncírculo de $\triangle ABC$ não tem essa propriedade.

Definição 1.4. Dizemos que um quadrângulo é cíclico se seus vértices estiverem sobre um círculo.

No lema a seguir encontramos uma caracterização bastante útil dos quadrângulos cíclicos.

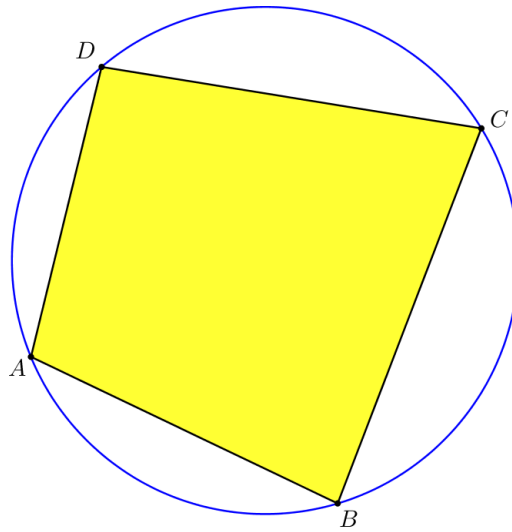
Lema 1.8. Um quadrângulo convexo $ABCD$, de lados AB , BC , CD e DA , é cíclico se, e somente se,

$$\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ.$$

Demonstração. Suponhamos $ABCD$ cíclico, como na Figura 11. Então,

$$\angle DAB + \angle BCD = \frac{1}{2} \widehat{BCD} + \frac{1}{2} \widehat{BAD} = 180^\circ.$$

Figura 11 – Se cíclico, são suplementares os ângulos opostos.



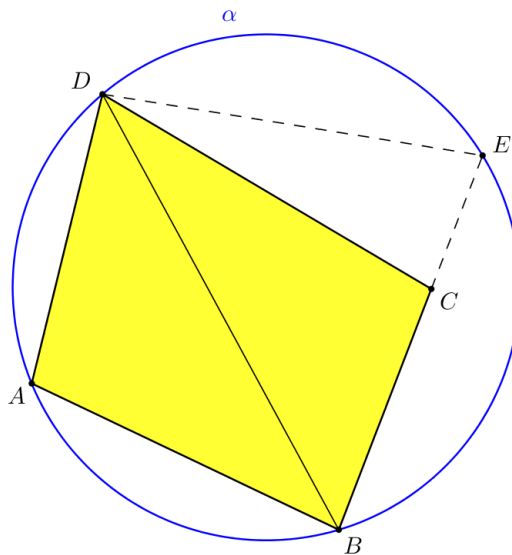
Fonte – o autor

Reciprocamente, suponhamos agora que

$$\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ, \tag{1.3}$$

e seja α o circuncírculo de $\triangle ABD$.

Figura 12 – Se suplementares os ângulos opostos, cíclico



Fonte – o autor

Se C não está sobre α , tomamos o ponto E na intersecção da semirreta de origem B , e que passa por C , com α , conforme [Figura 12](#).

Da parte já demonstrada do lema,

$$\angle DAB + \angle BED = 180^\circ. \tag{1.4}$$

Comparando as Equações 1.3 e 1.4, obtemos

$$\angle BED = \angle BCD.$$

Por outro lado, $\angle BCD$, externo ao $\triangle CDE$, é maior do que $\angle CED = \angle BED$, uma contradição (MUNIZ NETO, 2013, p. 137–139). \square

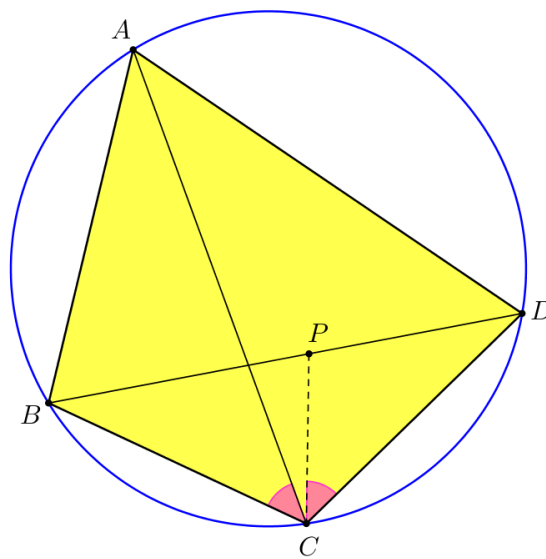
O teorema a seguir expressa uma condição necessária (e suficiente) para que um quadrângulo seja cíclico.

Teorema 1.9 (Ptolomeu). *Se o quadrângulo $ABCD$ de lados AB , BC , CD , DA , e diagonais AC e BD , é cíclico, então*

$$AB \times CD + BC \times DA = AC \times BD.$$

Demonstração. Marquemos P sobre a diagonal BD de sorte que $\angle PCD = \angle ACB$, conforme Figura 13.

Figura 13 – O teorema de Ptolomeu



Fonte – o autor

Como $\angle BAC = \angle BDC$ (pois subtendem ao mesmo arco \widehat{BC}), os triângulos ABC e DPC são semelhantes. Daí,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{PD}{CD}.$$

Também os triângulos ADC e BPC são semelhantes. De fato, $\angle CBD = \angle CAD$, pois subtendem ao mesmo arco \widehat{CD} , e $\angle ACD = \angle BCP$. Logo,

$$\frac{DA}{AC} = \frac{BP}{BC}.$$

Das duas relações obtidas acima vem que

$$BD = BP + PD = \frac{BC \times DA}{AC} + \frac{AB \times CD}{AC},$$

como queríamos (MUNIZ NETO, 2013, p. 179–180). \square

Vale também a recíproca do teorema de Ptolomeu, isto é, se, em um quadrângulo convexo, a soma dos produtos entre os lados opostos é igual ao produto entre as diagonais, então esse quadrângulo é cíclico, conforme demonstrado por Coxeter e Greitzer (1967, p. 42).

Definição 1.5. Uma *estrutura* é um conjunto de S segmentos de reta, unindo V pontos aos pares, na qual os segmentos são barras rígidas articuladas em suas extremidades, mas restritas ao plano.

Os triângulos ($S = V = 3$) são *estruturas rígidas*, ao passo que os quadrângulos ($S = V = 4$) têm um grau de liberdade: um de seus ângulos pode ser aumentado ou diminuído, com uma conseqüente mudança nos outros.

Definição 1.6. Uma estrutura é dita *apenas rígida* se ela for rígida mas deixar de sê-lo, quando uma qualquer de suas barras é removida.

Foi feita por Lamb (1916 apud COXETER; GREITZER, 1967, p. 56) uma demonstração para o fato de

$$S = 2V - 3$$

ser uma condição necessária (mas não suficiente) para que uma estrutura seja apenas rígida.

No caso em que $S = 5$ e $V = 4$, por exemplo, temos um quadrângulo com uma diagonal; a remoção dessa diagonal provê o grau de liberdade de que falamos acima.

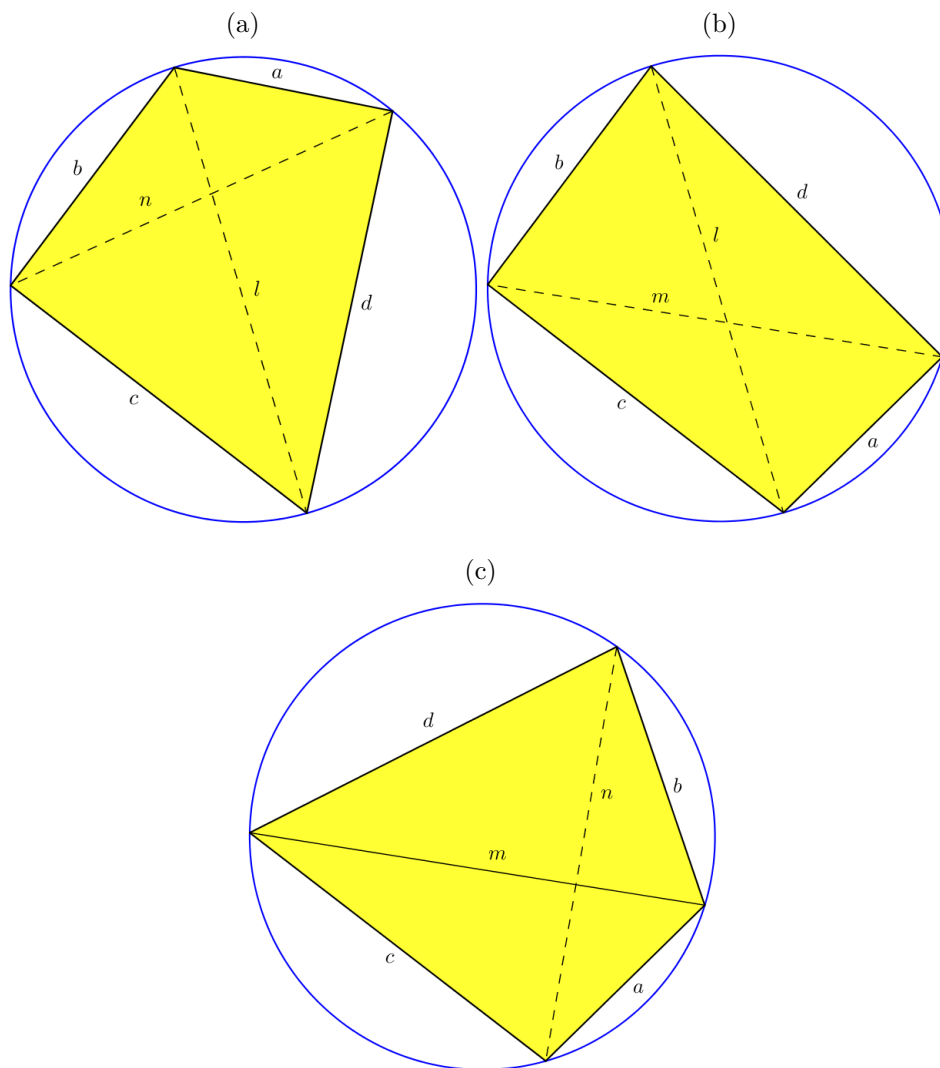
Quaisquer quatro lados a, b, c, d , cada qual menor do que a soma dos outros três, podem ser usados como lados de um quadrângulo convexo. O grau de liberdade nos permite aumentar ou diminuir dois ângulos opostos até que eles sejam suplementares, e assim, do Lema 1.8, os quatro vértices jazem num círculo.

Concordemos utilizar as notações $ABCD$ e $abcd$ para designar, indistintamente, o quadrângulo de vértices consecutivos A, B, C, D , e lados a, b, c, d , nomeados consecutivamente.

Suponhamos que l e n sejam as diagonais de um tal quadrângulo cíclico (como na Figura 14a). Mantemos fixos os lados b e c de $abcd$ e permutamos os outros dois, obtendo o quadrângulo $bcad$, inscrito no mesmo círculo (como na Figura 14b). Uma diagonal é l ainda. Agora, mantemos fixos os lados a e c de $bcad$ e permutamos os outros dois, obtendo

o quadrângulo $cabd$, inscrito no mesmo círculo (como na Figura 14c). Uma vez que esse terceiro quadrângulo poderia ter sido obtido do primeiro pela permutação dos lados c e d , suas diagonais são m e n . Não são possíveis outras transformações desse tipo (a não ser por permutações caóticas, como a de $abcd$ para dcb).

Figura 14 – Área de quadrângulos cíclicos, função simétrica dos lados



Fonte – o autor

Do Teorema de [Ptolomeu](#),

$$mn = bc + ad, \quad nl = ca + bd, \quad lm = ab + cd.$$

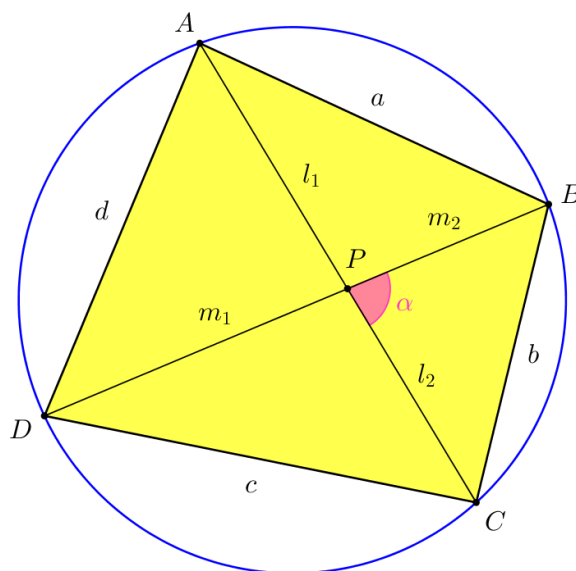
Como esses quadrângulos são todos convexos, a área de cada um deles é dada pela soma das áreas de dois triângulos. Permutar os lados de um triângulo à maneira descrita não altera sua área. (De fato, o triângulo obtido de uma tal permutação e aquele que lhe deu origem são congruentes pelo caso LLL, donde são também congruentes os seus ângulos internos. O Lema 1.4, que fornece a área de um triângulo em função de dois de seus lados e

do ângulo entre eles, garante que esses triângulos têm a mesma área. Contudo, reservamos para o [Apêndice A](#) uma demonstração construtiva.) Logo, nossos três quadrângulos têm a mesma área (embora não sejam congruentes quaisquer dois deles, exceto quando dois dos lados a, b, c, d forem iguais) (COXETER; GREITZER, 1967, p. 56–57). Acabamos de provar o lema a seguir.

Lema 1.10. *Quaisquer quatro comprimentos desiguais, cada um dos quais menor do que a soma dos outros três, servirão como os lados de três quadrângulos cíclicos todos tendo a mesma área.*

Segundo [Coxeter e Greitzer \(1967, p. 57\)](#), a natureza dessa simetria foi descoberta no século VII d.C. pelo matemático hindu Brahmagupta. Contudo, a demonstração que apresentamos a seguir é nossa.

Figura 15 – A fórmula de Brahmagupta



Fonte – o autor

Teorema 1.11 (Fórmula de Brahmagupta). *Se um quadrângulo cíclico tem lados a, b, c, d , e semiperímetro s , então sua área é dada por*

$$K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}. \quad (1.5)$$

Demonstração. Do Lema 1.5, temos

$$4K^2 = (lm)^2 \sin^2 \alpha$$

e, da [Relação fundamental da trigonometria](#), obtemos

$$\begin{aligned} 4K^2 &= (lm)^2(1 - \cos^2 \alpha) \\ &= l^2m^2(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Do Lema 1.2, temos $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$. Aplicando a [Lei dos cossenos](#) a cada um dos triângulos, APB , BPC , CPD e DPA , da [Figura 15](#), obtemos

$$\begin{aligned} a^2 &= l_1^2 + m_2^2 + 2l_1m_2 \cos \alpha, \\ b^2 &= l_2^2 + m_2^2 - 2l_2m_2 \cos \alpha, \\ c^2 &= l_2^2 + m_1^2 + 2l_2m_1 \cos \alpha, \\ d^2 &= l_1^2 + m_1^2 - 2l_1m_1 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Nossa ideia aqui é fazer aparecer o produto $2lm \cos \alpha$ na [Equação 1.6](#), de modo que possamos utilizar as relações obtidas da lei dos cossenos.

Para tanto, distribuimos $2lm$ a cada um dos parênteses da equação referida. Isto é,

$$16K^2 = (2lm - 2lm \cos \alpha)(2lm + 2lm \cos \alpha). \quad (1.7)$$

Substituindo

$$lm = (l_1 + l_2)(m_1 + m_2) = l_1m_1 + l_1m_2 + l_2m_1 + l_2m_2$$

nos termos $2lm \cos \alpha$ da [Equação 1.7](#) e utilizando as relações obtidas da lei dos cossenos acima, observamos cancelarem-se os termos em l_i^2 e m_j^2 , com $i, j \in \{1, 2\}$.

Daí,

$$16K^2 = (2lm + a^2 + c^2 - b^2 - d^2)(2lm + b^2 + d^2 - a^2 - c^2) \quad (1.8)$$

e, do Teorema de [Ptolomeu](#), $lm = ac + bd$,

$$16K^2 = [(a + c)^2 - (b - d)^2][(b + d)^2 - (a - c)^2], \quad (1.9)$$

ou seja,

$$16K^2 = (a + c - b + d)(a + c + b - d)(b + d - a + c)(b + d + a - c).$$

Portanto,

$$K^2 = (s - b)(s - d)(s - a)(s - c),$$

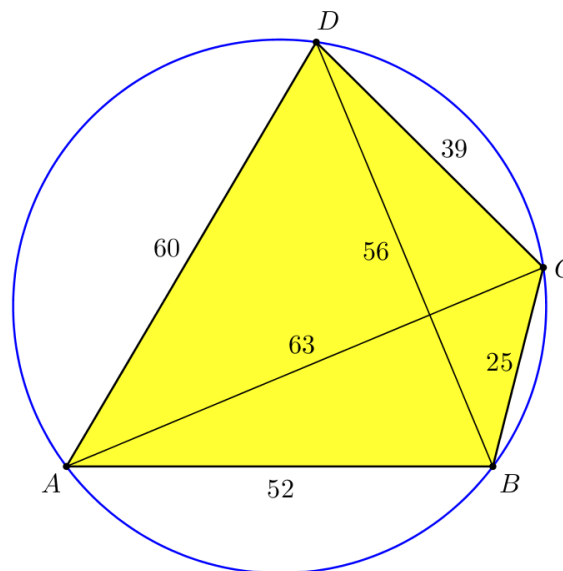
como queríamos. □

Faremos uso da notação de fração mista, como em

$$\begin{aligned} 1\,933\frac{3}{4} &= 1\,933 + \frac{3}{4} \\ &= \frac{7\,732}{4} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{7\,732 + 3}{4} \\ &= \frac{7\,735}{4}, \end{aligned}$$

no exemplo a seguir.

Figura 16 – Quadrângulo cíclico



Fonte – o autor

De acordo com [Merzbach e Boyer \(2011, p. 199\)](#), Brahmagupta atribuiu $1\,933\frac{3}{4}$ unidades de área para o quadrângulo da [Figura 16](#), apesar de sua fórmula fornecer a área exata nesse caso, 1 764 unidades de área.

De fato,

$$\begin{aligned} AB \times CD + BC \times DA &= 52 \times 39 + 25 \times 60 \\ &= 3\,528 \\ &= 63 \times 56 \\ &= AC \times BD \end{aligned}$$

e, do Teorema de [Ptolomeu](#), $ABCD$ é cíclico.

Como o semiperímetro é

$$\begin{aligned} s &= \frac{a + b + c + d}{2} \\ &= \frac{52 + 25 + 39 + 60}{2} \\ &= 88, \end{aligned}$$

vem que

$$\begin{aligned} s - a &= 88 - 52 = 36, \\ s - b &= 88 - 25 = 63, \\ s - c &= 88 - 39 = 49, \\ s - d &= 88 - 60 = 28, \end{aligned}$$

e a [Fórmula de Brahmagupta](#) fornece a área

$$\begin{aligned} K &= \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)} \\ &= \sqrt{36 \times 63 \times 49 \times 28} \\ &= \sqrt{(6^2)(7 \times 9)(7^2)(4 \times 7)} \\ &= 6 \times 7^2 \times 3 \times 2 = 1\,764. \end{aligned}$$

Calculamos, contudo,

$$\begin{aligned} U &= \frac{a + c}{2} \times \frac{b + d}{2} \\ &= \frac{52 + 39}{2} \times \frac{25 + 60}{2} \\ &= 45\frac{1}{2} \times 42\frac{1}{2} \\ &= 1\,933\frac{3}{4}, \end{aligned}$$

e vemos que Brahmagupta utilizou o método de Adão, descrito na [Tabela 1](#), para aproximar a área desse quadrângulo.

Na verdade, de acordo com [Eves \(1972, p. 4\)](#), há evidências de que os antigos Babilônios utilizavam a fórmula

$$U = \frac{a + c}{2} \times \frac{b + d}{2}$$

para aproximar a área de um quadrângulo convexo cujos lados consecutivos são a , b , c e d .

É curioso que esta mesma fórmula apareça em uma inscrição encontrada na tumba de Ptolomeu XI, datada de 51 a.C. ([EVES, 1972, p. 5](#)).

Corolário 1.12 (Fórmula de Heron). *Se ABC é um triângulo de lados a , b e c , então sua área é*

$$(ABC) = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)},$$

em que s é o seu semiperímetro.

Demonstração. Basta fazermos $d = 0$ na fórmula de Brahmagupta e obtemos o resultado desejado. \square

Apesar de esta fórmula levar o nome de Heron de Alexandria (60 d.C.), é plausível que Arquimedes de Siracusa (séc. III a.C.) a tenha descoberto, conforme argumentam [Bell; Waerden \(1945, 1961 apud COXETER; GREITZER, 1967, p. 59\)](#).

Deixamos para o [Apêndice A](#) a dedução da [Fórmula de Heron](#) a partir da fórmula do seno para triângulos, da lei dos cossenos e da relação fundamental da trigonometria, como fizemos na dedução da [Fórmula de Brahmagupta](#). No [Apêndice B](#), deduzimos a segunda a partir da primeira, o que também foi feito por [Hess \(2012\)](#).

No próximo capítulo, aplicaremos os métodos de Adão e Jorge a determinados quadrângulos, proporemos dois outros métodos de aproximação para a área de quadrângulos convexos, realizaremos uma implementação desses modelos e discutiremos os resultados.

2 Modelagem

*“Uma grande descoberta resolve um grande problema,
mas há um grão de descoberta na solução de qualquer problema.
Seu problema pode ser modesto;
mas se desafia sua curiosidade e põe em jogo suas faculdades inventivas,
e se você o resolver por seus próprios meios,
poderá experimentar a tensão e desfrutar o triunfo da descoberta.”*

G. Polya

No presente capítulo, iniciamos nossa investigação dos métodos de aproximação para a área de quadrângulos convexos apresentados na [Introdução](#). Enxergamos esses métodos como modelos para o problema de determinar a área de um terreno quadrangular.

Um modelo matemático é criado utilizando conceitos matemáticos tais como funções e equações. Quando criamos modelos matemáticos, estamos movendo-nos do mundo real para o abstrato, dos conceitos matemáticos, onde o modelo é construído ([EDWARDS; HAMSON, 1989](#), p. 2).

Modelar, portanto, é representar matematicamente uma situação real, traduzindo para a linguagem matemática, abstrata, o que observamos no mundo concreto.

É importante perceber, desde o início, que a modelagem matemática é realizada para resolver problemas ([EDWARDS; HAMSON, 1989](#), p. 3).

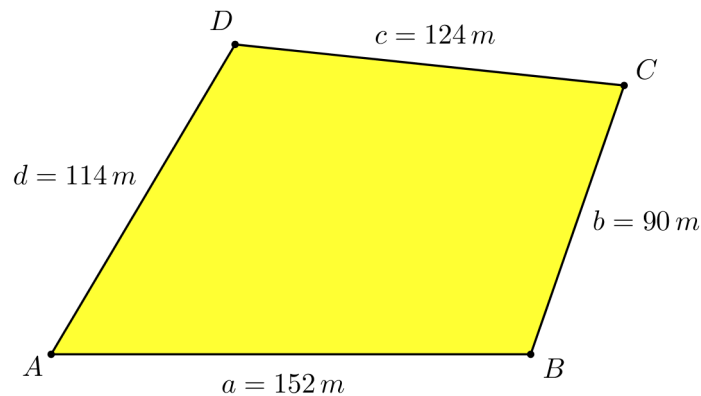
Nesse sentido, os métodos de Jorge e Adão são modelos empregados por camponeses para delimitar áreas de plantio. Nosso intuito é aplicar esses métodos, propor outros e compará-los.

2.1 Jorge e Adão

Aplicaremos aqui os métodos de Jorge e Adão para aproximar a área de um quadrângulo convexo.

Os autores [Rosa e Gavarrete \(2016, p. 26–28\)](#) utilizaram um quadrângulo cujas dimensões, em metros, são as mesmas daquele na [Figura 17](#) para aplicar os métodos de Adão e de Jorge, descritos nas [Tabela 1](#) e [Tabela 2](#), respectivamente.

Figura 17 – Modelo de um terreno quadrangular



Fonte – o autor

No método de Adão, calculamos a área, U , do retângulo cujos lados são dados pelas médias aritméticas dos lados opostos do quadrângulo, ou seja,

$$\begin{aligned} U &= \frac{a+c}{2} \times \frac{b+d}{2} \\ &= \frac{152\text{ m} + 124\text{ m}}{2} \times \frac{90\text{ m} + 114\text{ m}}{2} \\ &= (138\text{ m})(102\text{ m}) \\ &= 14\,076\text{ m}^2. \end{aligned}$$

No método de Jorge, calculamos a área, Q , do quadrado cujo lado é dado pela média aritmética dos lados do quadrângulo, isto é,

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{a+b+c+d}{4} \right)^2 \\ &= \left(\frac{152\text{ m} + 90\text{ m} + 124\text{ m} + 114\text{ m}}{4} \right)^2 \\ &= (120\text{ m})^2 \\ &= 14\,400\text{ m}^2. \end{aligned}$$

Aqui retomamos as perguntas que fizemos na [Introdução](#):

- a) há outros métodos?
 - b) qual dos métodos melhor aproxima a área de um quadrângulo convexo?
 - c) eles fornecem aproximações por falta ou excesso?
 - d) como calcular a área (exata) de um quadrângulo convexo?
- às quais adicionamos uma nova,
- e) é único, ou há mais de um quadrângulo convexo com os referidos lados?

Propomos, a seguir, dois outros métodos para aproximar a área de quadrângulos convexos, respondendo afirmativamente à pergunta da alínea a).

2.2 Brahmagupta e Jorge melhorado

Aqui, proporemos uma melhora ao método de Jorge, além de considerar a fórmula de Brahmagupta para aproximar a área de quadrângulos convexos.

A [Fórmula de Brahmagupta](#) dá a área

$$K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

do quadrângulo cíclico de lados a , b , c , d , e semiperímetro s .

Conjecturamos: caso o quadrângulo não seja cíclico, a fórmula de Brahmagupta dará uma aproximação para a sua área.

Substituindo os dados da [Figura 17](#),

$$\begin{aligned} s &= \frac{a+b+c+d}{2} \\ &= \frac{152\text{ m} + 90\text{ m} + 124\text{ m} + 114\text{ m}}{2} \\ &= 240\text{ m}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} s-a &= 240 - 152 = 88\text{ m}, \\ s-b &= 240 - 90 = 150\text{ m}, \\ s-c &= 240 - 124 = 116\text{ m}, \\ s-d &= 240 - 114 = 126\text{ m}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{88\text{ m} \times 150\text{ m} \times 116\text{ m} \times 126\text{ m}} \\ &= \sqrt{192\,931\,200\text{ m}^4} \\ &\cong 13\,890\text{ m}^2, \end{aligned}$$

em que utilizamos outra letra (W ao invés de K) para enfatizar que esta é uma aproximação. Com efeito, a fórmula de Brahmagupta somente dará a área (exata) caso o quadrângulo seja cíclico.

Inspirados na [Desigualdade das médias](#),

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd},$$

propomo-nos considerar a *média geométrica* dos lados do quadrângulo em vez da média aritmética do método de Jorge.

Nesse método de Jorge “melhorado”, calculamos a área, G , do quadrado cujo lado é dado pela média geométrica dos lados do quadrângulo, isto é,

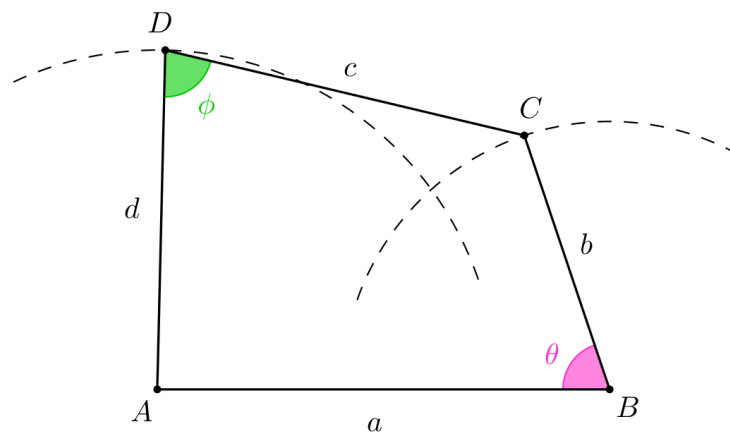
$$G = (\sqrt[4]{abcd})^2 = \sqrt{abcd}.$$

Substituindo os dados,

$$\begin{aligned} G &= \sqrt{152\text{ m} \times 90\text{ m} \times 124\text{ m} \times 114\text{ m}} \\ &= \sqrt{193\,380\,480\text{ m}^4} \\ &\cong 13\,906\text{ m}^2. \end{aligned}$$

Nesse exemplo, temos então $Q > U > G > W$.

Figura 18 – Construção de um quadrângulo a partir de seus lados



Fonte – o autor

A fim de desenhar um quadrângulo $ABCD$ cujos lados são os da [Figura 17](#), seguimos os seguintes passos, conforme [Figura 18](#):

- i) primeiro, marcamos o ponto A do plano e traçamos um círculo de raio $d = 114\text{ m}$ centrado em A ;
- ii) a seguir, marcamos B de sorte que a distância entre A e B seja $a = 152\text{ m}$.
- iii) traçamos, então, um círculo de raio $b = 90\text{ m}$ centrado em B ;
- iv) os vértices C e D são marcados sobre os círculos de raios b e d , respectivamente, e de sorte que a distância entre eles seja $c = 124\text{ m}$.

Mas há uma infinidade dessas configurações. De fato, o quadrângulo da [Figura 18](#) é uma delas, e, para cada $\theta \in (0, 180^\circ)$, temos um novo quadrângulo (possivelmente não-convexo).

Não obstante, os métodos de aproximação considerados até aqui – Jorge, Adão, Jorge melhorado e a fórmula de Brahmagupta – fornecem valores invariantes com respeito aos ângulos internos do quadrângulo considerado. Precisamos de um modelo que leva em consideração o grau de liberdade inerente às estruturas quadrangulares.

2.3 Modelo com um grau de liberdade

O objetivo desta seção é fornecer uma fórmula para a área de um quadrângulo em termos dos lados e um de seus ângulos internos. Nesse modelo apenas consideramos plano e convexo o terreno.

A fim de obter a diagonal $AC = z$ do quadrângulo $ABCD$ da [Figura 18](#), aplicamos a [Lei dos cossenos](#) ao $\triangle ABC$:

$$z^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta. \quad (2.1)$$

A seguir, aplicando o [Lema 1.4](#), calculamos a área desse triângulo, isto é,

$$(ABC) = \frac{ab \operatorname{sen} \theta}{2}.$$

A área do $\triangle CDA$ encontramos pela [Fórmula de Heron](#):

$$(CDA) = \sqrt{s(s-c)(s-d)(s-z)}, \quad (2.2)$$

em que s é o semiperímetro do triângulo.

A área do quadrângulo $ABCD$ é, pois,

$$K = (ABC) + (CDA). \quad (2.3)$$

A área, K , do quadrângulo $ABCD$, calculada à maneira da [Equação 2.3](#), é exata se, e somente se, os vértices, A , B , C e D , estiverem contidos em um plano e os lados, a , b , c e d , forem segmentos de reta. Na prática, isso não acontece, pois sempre há variações de elevação no terreno.

Para os nossos propósitos de comparação, contudo, consideraremos exata a área fornecida por esta equação.

2.4 Implementação

Aqui implementamos, com o auxílio do [MATLAB \(2010\)](#), os modelos apresentados nas seções anteriores.

Estamos em condições de implementar o código [MATLAB \(2010\)](#) do [Apêndice D](#), em que utilizamos o modelo com um grau de liberdade para calcular a área de 512 quadrângulos com os lados daquele da [Figura 18](#).

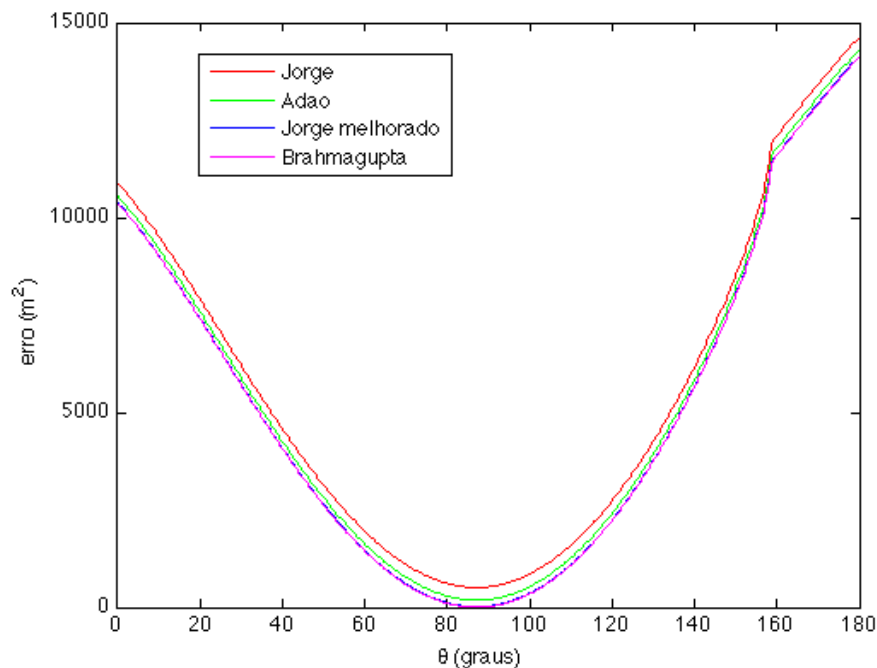
Para cada ângulo $\theta \in (0, 180^\circ)$, calculamos $K = K(\theta)$, e comparamos com os valores aproximados dos métodos de Adão, Jorge, Jorge melhorado e da fórmula Brahmagupta.

Há, como vimos na seção anterior, uma infinidade de tais quadrângulos. Assim, o mais que podemos fazer é discretizar o intervalo $(0, 180^\circ)$, e escolhemos 512 por julgar razoável esse um número de quadrângulos, capaz de captar as características de cada modelo.

2.4.1 Resultados

Mostramos aqui os gráficos que resultam da implementação dos modelos e do cálculo do erro em relação ao modelo com um grau de liberdade.

Figura 19 – Gráficos do erro em função de θ

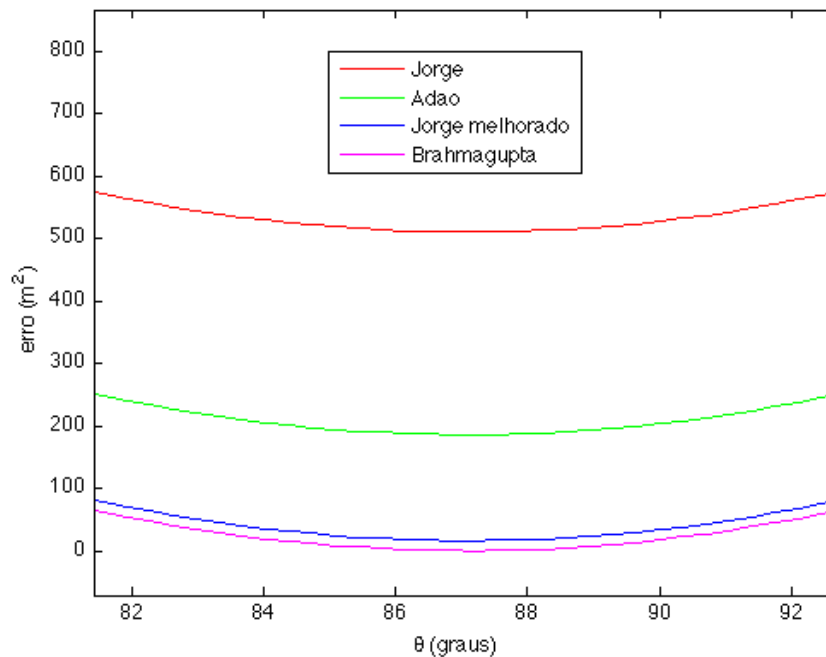


Fonte – o autor

Apresentamos, na [Figura 19](#), os gráficos do erro na aproximação da área do quadrângulo da [Figura 18](#) em função do ângulo θ medido em graus. As cores na legenda indicam os correspondentes métodos utilizados.

Os gráficos como estão na [Figura 19](#), se bem que nos permitam uma análise geral dos métodos de aproximação, inviabilizam o exame detalhado de que precisamos. Daí

Figura 20 – Região dos gráficos com o menor erro



Fonte – o autor

decidirmos ampliá-la. Na [Figura 20](#) está a região dos gráficos em que o erro é mínimo.

2.4.2 Discussão

Discutimos aqui os resultados obtidos da implementação dos modelos.

Vemos que o método de Jorge dá a pior aproximação, seguido pelos métodos de Adão e Jorge melhorado. A fórmula de Brahmagupta dá o menor erro, entre os métodos considerados.

Analisando os gráficos da [Figura 20](#), notamos que, para um ângulo $\theta \in (86^\circ, 88^\circ)$, o erro é mínimo – nos quatro métodos de aproximação.

Mais ainda, para esse ângulo de aproximadamente 87° , a fórmula de Brahmagupta dá erro igual a zero. Isto quer dizer que a fórmula de Brahmagupta dá a área exata para esse quadrângulo, daí ele ser cíclico.

Com efeito, fazendo $\theta = 87^\circ$ e substituindo os demais dados da [Figura 17](#) na [Equação 2.1](#),

$$\begin{aligned} z^2 &= (152 \text{ m})^2 + (90 \text{ m})^2 - 2(152 \text{ m} \times 90 \text{ m}) \cos 87^\circ \\ &= 31\,204 \text{ m}^2 - (27\,360 \text{ m}^2) \cos 87^\circ, \end{aligned}$$

donde, devidamente auxiliados pela calculadora, obtemos

$$z \cong 173 \text{ m.}$$

Aplicando a [Lei dos cossenos](#) ao $\triangle CDA$ vem que

$$z^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \phi,$$

ou seja,

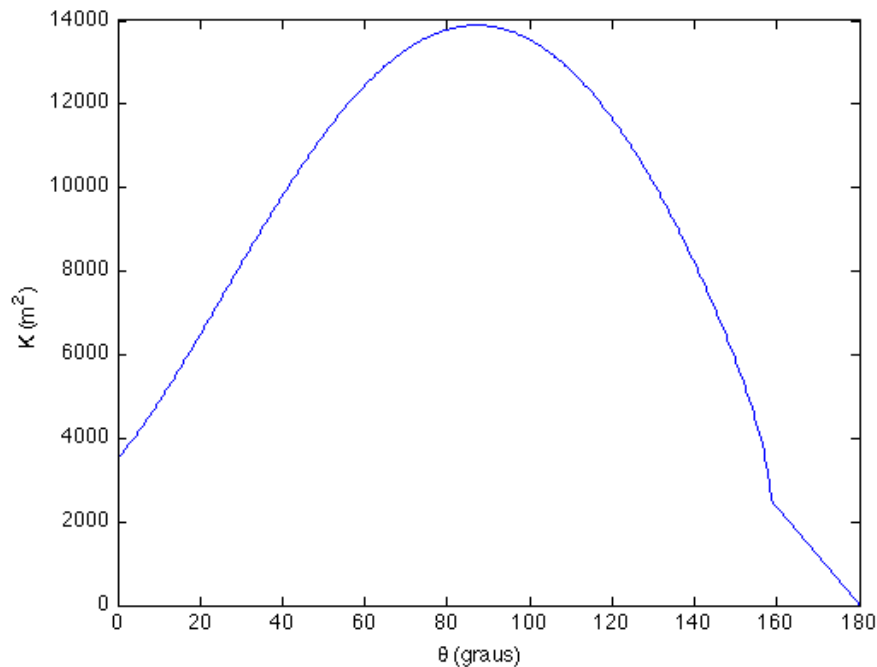
$$\cos \phi = \frac{c^2 + d^2 - z^2}{2cd}.$$

Substituindo os dados,

$$\begin{aligned} \cos \phi &\cong \frac{(124 \text{ m})^2 + (114 \text{ m})^2 - (173 \text{ m})^2}{2 \times 124 \text{ m} \times 114 \text{ m}} \\ &= \frac{-1\,557 \text{ m}^2}{28\,272 \text{ m}^2} \\ &\cong -0.0551, \end{aligned}$$

donde $\phi \cong 93^\circ$, $\theta + \phi \cong 87^\circ + 93^\circ = 180^\circ$ e o quadrângulo é cíclico.

Figura 21 – Gráfico da área em função do ângulo θ



Fonte – o autor

O gráfico da [Figura 21](#) revela que a área, $K = K(\theta)$, dada pelo modelo com um grau de liberdade, aumenta, com $\theta \in (0, 87^\circ)$, atinge seu máximo, e então decresce.

Vemos também que a fórmula de Brahmagupta dá a área (exata) do quadrângulo da [Figura 18](#), $K(\theta)$, para θ tal que $\theta + \phi = 180^\circ$. Mais ainda, esta é a área máxima.

Parece haver, contudo, uma “anomalia” na região dos gráficos em que $\theta \geq 159^\circ$. Na verdade, o lado direito da [Equação 2.2](#) resulta ser um número complexo para $\theta \in [159^\circ, 180^\circ]$. Isto se dá por conta de não haver $\triangle CDA$ nessas condições.

De fato, fazendo $\theta = 159^\circ$ e substituindo os dados da [Figura 17](#) na [Equação 2.1](#),

$$\begin{aligned} z^2 &= 31\,204\,m^2 - 27\,360\,m^2 \cos 159^\circ \\ &\cong 56\,747\,m^2 \\ &> 56\,644\,m^2 \\ &= (124\,m + 114\,m)^2, \end{aligned}$$

isto é, $z > c + d$, o que contradiz a desigualdade triangular e faz que $s - z < 0$, na fórmula de Heron ([Equação 2.2](#)), pois

$$\frac{z}{2} > \frac{c + d}{2}$$

implica

$$z > \frac{z + c + d}{2} = s.$$

Concluimos, da análise desse nosso exemplo, que

$$K \leq W < G < U < Q. \tag{2.4}$$

No próximo capítulo daremos continuidade à investigação dos métodos de aproximação para a área de quadrângulos convexos. Nosso intuito é classificar, isto é, encontrar uma desigualdade que relaciona esses métodos, como esta acima, que verificamos apenas para os quadrângulos cujos lados são as da [Figura 17](#).

3 Análise dos métodos de aproximação

*“Mas ele abriu as dobradiças,
Empurrou e puxou as juntas e dobradiças,
Até que tudo parecesse quadrado e oblongo
Como uma figura complicada
No Segundo Livro de Euclides.”
C. L. Dodgson*

No presente capítulo, analisamos os métodos de aproximação para a área de quadrângulos convexos, cuja investigação iniciamos no capítulo precedente. No Teorema 3.5, resultado central do capítulo e do nosso trabalho, classificamos esses métodos. Além disso, apresentamos os quadrângulos bicêntricos e demonstramos uma fórmula para a sua área.

No exemplo do capítulo anterior vimos que, dentre os quadrângulos de lados dados, o cíclico tem a maior área. Além disso, vimos que a fórmula de Brahmagupta dá a melhor aproximação para a área desses quadrângulos, seguida do método de Jorge melhorado.

3.1 Brahmagupta e otimização

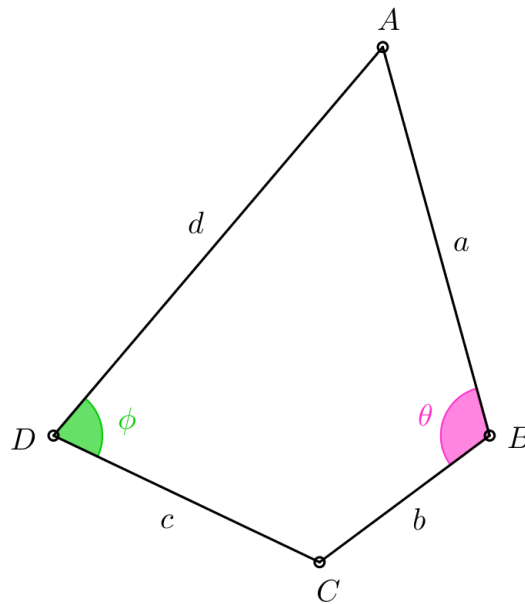
Nesta seção demonstramos a desigualdade $K \leq W$, em que K é a área de um quadrângulo convexo e W é a área do quadrângulo cíclico associado, dada pela fórmula de Brahmagupta. O Lema 3.1 e a primeira demonstração do Teorema 3.2 encontramos no artigo de Peter (2003).

Vimos, na Figura 21 do capítulo anterior, que o quadrângulo de área máxima é cíclico. Queremos demonstrar matematicamente esta relação apenas visualizada graficamente. Começamos, assim, com o problema de encontrar, entre os quadrângulos de lados dados, aquele que tem a maior área.

Imagine estarmos em via de construir uma praça em formato quadrangular, cujas dimensões são dados do projeto. Estamos interessados em delimitar o terreno com a maior área possível, para a construção dessa praça.

Para resolver esse problema, pensemos num quadrângulo como tendo “dobradiças” ou “pinos” no lugar de seus vértices. Podemos assumir que esse quadrângulo seja convexo; caso contrário, estará contido em um convexo, com os mesmos vértices e área maior.

Figura 22 – Quadrângulo, um grau de liberdade



Fonte – o autor

Lema 3.1. *A todo quadrângulo corresponde um cíclico, com lados congruentes aos do primeiro.*

Demonstração. Vamos assumir, renomeando os lados se necessário, que $a + b \leq c + d$. Podemos deformar o quadrângulo $ABCD$ da Figura 22 “empurrando” o vértice B , até que A , B e C tornem-se colineares. Nesse triângulo,

$$\theta + \phi > 180^\circ. \quad (3.1)$$

Consideremos, sem perda de generalidade, $b + c \leq a + d$. Agora, “puxando” o vértice B , podemos deformar o quadrângulo até que B , C e D tornem-se colineares. Nesse triângulo,

$$\theta + \phi < 180^\circ. \quad (3.2)$$

Deve haver, portanto, uma posição para B de sorte que $\theta + \phi = 180^\circ$ (PETER, 2003), e, pelo Lema 1.8, esse quadrângulo é cíclico.

De fato, fazemos $f(\theta, \phi) = \theta + \phi - 180^\circ$, e, como uma mudança em θ implica uma mudança em ϕ , podemos escrever $f(\theta) = \theta + \phi - 180^\circ$. Da Desigualdade 3.1 segue que existe $\alpha \in [0, 180^\circ]$ tal que $f(\alpha) > 0$, e da Desigualdade 3.2 vemos que existe $\beta \in [0, 180^\circ]$ tal que $f(\beta) < 0$. Como f é contínua em $[\alpha, \beta]$, aplicamos o Teorema de Bolzano (GUIDORIZZI, 2001, p. 121) para concluir que há um $\gamma \in [\alpha, \beta]$ tal que $f(\gamma) = 0$. \square

Teorema 3.2. *De todos os quadrângulos tendo a, b, c, d , por lados consecutivos, o que tem maior área é o cíclico.*

Demonstração. Fazemos $x = \cos \theta$ e $y = \cos \phi$, onde θ e ϕ estão em $(0, 180^\circ)$.

A [Lei dos cossenos](#) aplicada aos triângulos ABC e ACD da [Figura 22](#) nos dá

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta = c^2 + d^2 - 2cd \cos \phi,$$

isto é,

$$a^2 + b^2 - 2abx = c^2 + d^2 - 2cdy.$$

Derivando esta equação com respeito a x obtemos

$$ab = cd \frac{dy}{dx}. \quad (3.3)$$

Somando as áreas dos triângulos ABC e CDA , dadas pelo [Lema 1.4](#), estamos calculando a área do quadrângulo

$$K = \frac{ab \sin \theta}{2} + \frac{cd \sin \phi}{2}.$$

Da relação fundamental, nosso [Teorema 1.1](#),

$$K = \frac{ab\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{cd\sqrt{1-y^2}}{2}.$$

Derivando com respeito a x e usando [\(3.3\)](#), obtemos

$$\frac{dK}{dx} = -\frac{ab}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \right). \quad (3.4)$$

Uma condição necessária para que um ponto seja ponto de máximo de uma função, é que a derivada nesse ponto seja igual a zero ([GUIDORIZZI, 2001](#), p. 280). De [\(3.4\)](#),

$$\frac{dK}{dx} = 0$$

se, e só se,

$$\frac{x^2}{1-x^2} = \frac{y^2}{1-y^2},$$

isto é,

$$\frac{1}{x^2} - 1 = \frac{1}{y^2} - 1,$$

ou seja,

$$x^2 = y^2,$$

donde $x = -y$ ou $x = y$.

Se $x = -y$, então $\cos \theta = -\cos \phi$, donde, pelo [Lema 1.2](#), $\theta + \phi = 180^\circ$.

Se $x = y$, então

$$\frac{dK}{dx} = -\frac{ab}{2} \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}},$$

e, para que $dK/dx = 0$, devemos ter, necessariamente, $x = 0$. Desta feita, $\cos \theta = \cos \phi = 0$, logo $\theta = \phi = 90^\circ$ e, novamente, $\theta + \phi = 180^\circ$.

Para que um ponto crítico seja ponto de máximo de uma função, basta que a segunda derivada nesse ponto seja menor do que zero (GUIDORIZZI, 2001, p. 281).

Derivando a Equação 3.4 com respeito a x obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 K}{dx^2} &= -\frac{ab}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} \frac{-2x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{dy}{dx} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{1}{2} \frac{-2y^2}{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dy}{dx} \right] \\ &= -\frac{ab}{2} \left[\frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1-y^2+y^2}{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dy}{dx} \right] \\ &= -\frac{ab}{2} \left[\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dy}{dx} \right]. \end{aligned}$$

Como $dy/dx = ab/cd > 0$, $d^2 K/dx^2 < 0$ para todos os valores de x em $(-1, 1)$ (PETER, 2003). Portanto, a área é máxima quando os ângulos opostos são suplementares, caso em que o quadrângulo é cíclico. \square

Demonstramos assim que, dos quadrângulos $abcd$, o que tem maior área é o cíclico. Isto é, a maior área que $abcd$ pode assumir é aquela dada pela fórmula de Brahmagupta,

$$K \leq \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Abordemos agora o problema de encontrar o quadrângulo de máxima sob nova perspectiva. Por não utilizar o Cálculo Diferencial, esta outra demonstração do Teorema 3.2, por meio da fórmula de Coolidge (1939), poderá ser uma alternativa aos alunos e professores da educação básica.

Trabalhemos mais na Equação 1.8, obtida na dedução da fórmula de Brahmagupta antes de havermos utilizado o teorema de Ptolomeu. Nossa ideia é obter uma fórmula para a área de um quadrângulo convexo em termos dos seus lados e de suas diagonais. A partir daí, poderemos identificar, entre os quadrângulos cujos lados são dados, o que tem maior área.

Começemos desenvolvendo a Equação 1.9, em que já havíamos aplicado o Teorema de Ptolomeu:

$$\begin{aligned} 16W^2 &= [(a+c)^2 - (b-d)^2][(b+d)^2 - (a-c)^2] \\ &= (a+c)^2(b+d)^2 - (a^2 - c^2)^2 - (b^2 - d^2)^2 + (b-d)^2(a-c)^2 \\ &= 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2d^2 + 2a^2d^2 + 2a^2c^2 + 2b^2d^2 + 8abcd - a^4 - b^4 - c^4 - d^4, \end{aligned} \tag{3.5}$$

em que $W^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$.

Teorema 3.3 (Fórmula de Coolidge). *Se um quadrângulo convexo tem lados a, b, c, d , semiperímetro s , diagonais l e m , então sua área é dada por*

$$K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - \frac{1}{4}(ac+bd+lm)(ac+bd-lm)}.$$

Demonstração. Retomemos a demonstração da fórmula de Brahmagupta, do ponto em que íamos utilizar o [Ptolomeu](#).

Reescrevemos a [Equação 1.8](#), explicitando o produto da soma pela diferença:

$$\begin{aligned} 16K^2 &= [2lm + (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)][2lm - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)] \\ &= 4l^2m^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2 \\ &= 4l^2m^2 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2d^2 + 2a^2d^2 - 2a^2c^2 - 2b^2d^2 - a^4 - b^4 - c^4 - d^4 \\ &= 4l^2m^2 + 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - 8abcd - 4a^2c^2 - 4b^2d^2 \\ &= 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - 4(a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 - l^2m^2) \\ &= 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - 4[(ac+bd)^2 - l^2m^2]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$K^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - \frac{1}{4}(ac+bd+lm)(ac+bd-lm),$$

como queríamos. □

Utilizando a Desigualdade de Ptolomeu ([MUNIZ NETO, 2013](#), p. 339–340),

$$ac + bd \geq lm,$$

na [Fórmula de Coolidge](#), concluímos que

$$K \leq \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = W, \quad (3.6)$$

O quadrângulo $abcd$ que tem a maior área, portanto, é cíclico.

Ademais, o teorema [1.9](#),

$$ac + bd = lm$$

é condição necessária para que $abcd$ seja cíclico. Fazendo $ac + bd - lm = 0$ na [Fórmula de Coolidge](#), obtemos a de Brahmagupta.

No teorema, que enunciamos e demonstramos na seção a seguir, reunimos três desigualdades que envolvem a fórmula de Brahmagupta, os métodos de Jorge, Adão e Jorge melhorado, e a área (exata) do quadrângulo convexo. Essas relações observamos no gráfico da [Figura 20](#) do [Capítulo 2](#) para o exemplo ali considerado.

3.2 Classificação dos métodos de aproximação

Nesta seção demonstramos o Teorema 3.5, que é o principal resultado deste trabalho e que classifica os métodos de aproximação para a área quadrângulos convexos ora aboradados.

Segundo Knijnik (1997, p. 408), “não é difícil mostrar, usando matemática elementar, que, no caso de um quadrilátero convexo, o resultado de Jorge sempre excede o de Adão, que superestima a ‘medida da terra’ obtida por meio de cálculos acadêmicos”.

Entretanto, a autora não demonstra essas afirmações em seu artigo, nem deixa qualquer pista de como fazê-lo.

Lema 3.4. *Se a área, K , de um quadrângulo convexo é aproximada pelos resultados, U , do método de Adão, e Q , do método de Jorge, então,*

$$K \leq U \leq Q. \quad (3.7)$$

Demonstração. Sejam a, b, c, d , os lados consecutivos do quadrângulo convexo $ABCD$ cuja área é K .

Aplicando o Lema 1.4 aos triângulos BAD , DCB , ABC e CDA , obtemos

$$K = \frac{ad \operatorname{sen} A}{2} + \frac{bc \operatorname{sen} C}{2}$$

e

$$K = \frac{ab \operatorname{sen} B}{2} + \frac{cd \operatorname{sen} D}{2}.$$

Somando as duas expressões e levando em conta que o seno de cada um dos ângulos é ≤ 1 , conforme Observação 1.1, podemos escrever

$$\begin{aligned} 2K &= \frac{ad \operatorname{sen} A}{2} + \frac{bc \operatorname{sen} C}{2} + \frac{ab \operatorname{sen} B}{2} + \frac{cd \operatorname{sen} D}{2} \\ &\leq \frac{ab + cd + bc + ad}{2} \\ &= 2 \times \frac{a + c}{2} \times \frac{b + d}{2} \\ &= 2U, \end{aligned}$$

ou seja,

$$K \leq U, \quad (3.8)$$

com a igualdade ocorrendo quando $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$, isto é, quando $ABCD$ é um retângulo.

Do Teorema A.2,

$$\begin{aligned}
 Q &= \left(\frac{a+b+c+d}{4} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{\frac{a+c}{2} + \frac{b+d}{2}}{2} \right)^2 \\
 &\geq \frac{a+c}{2} \times \frac{b+d}{2} \\
 &= U,
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

com igualdade apenas quando $a = b = c = d$, ou seja, quando $ABCD$ é um quadrado.

Reunindo as Desigualdades 3.8 e 3.9, obtemos a desigualdade desejada. \square

Teorema 3.5. *Se a área, K , de um quadrângulo convexo é aproximada pelos resultados, U , do método de Adão, Q , do método de Jorge, W , da fórmula de Brahmagupta, e G , do método de Jorge melhorado, então,*

$$G \leq U \leq Q \tag{3.10}$$

e

$$K \leq W \leq U \leq Q. \tag{3.11}$$

Demonstração. Utilizando o Corolário A.3, obtemos

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{a+c}{2} \times \frac{b+d}{2} \\
 &= \frac{ab+bc+cd+ad}{4} \\
 &\geq \sqrt[4]{(ab)(bc)(cd)(ad)} \\
 &= \sqrt{abcd} \\
 &= G,
 \end{aligned}$$

com a igualdade ocorrendo apenas quando $a = b = c = d$, ou seja quando $ABCD$ é um quadrado.

Juntando a desigualdade, $U \leq Q$, do Lema 3.4, a esta, $G \leq U$, que acabamos de provar, obtemos a Desigualdade 3.10.

Usando $W = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, da fórmula de Brahmagupta, e $4U = (a+c)(b+d)$, do método de Adão, podemos reescrever a Equação 3.5 da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 16W^2 &= [(a+c)^2 - (b-d)^2][(b+d)^2 - (a-c)^2] \\
 &= 16U^2 - (a^2 - c^2)^2 - (b^2 - d^2)^2 + (a-c)^2(b-d)^2.
 \end{aligned}$$

Utilizamos, então, a desigualdade do Lema C.1,

$$(a^2 - c^2)^2 + (b^2 - d^2)^2 \geq (a - c)^2(b - d)^2,$$

para concluir que $W^2 \leq U^2$. Extraíndo a raiz quadrada obtemos

$$W \leq U, \tag{3.12}$$

e a igualdade ocorrendo somente quando $a = c$ e $b = d$, caso em que o quadrângulo é retângulo.

Colecionamos a Desigualdade 3.6, $K \leq W$, que resulta do Teorema 3.2, a Desigualdade 3.12, $W \leq U$, e a desigualdade $U \leq Q$, do Lema 3.4, para obter a Desigualdade 3.11, $K \leq W \leq U \leq Q$. \square

Para terminar o capítulo, estudaremos a classe dos quadrângulos que satisfazem, simultaneamente, as hipóteses dos teoremas de Ptolomeu e de Pitot.

3.3 Jorge melhorado e os quadrângulos bicêntricos

Nesta seção apresentamos uma fórmula para o cálculo da área de quadrângulos cíclicos e tangencias, mostramos como construir um tal quadrângulo a partir do Teorema de 3.7 e mostramos como age o método de Jorge melhorado nos quadrângulos tangenciais.

Exibimos, no teorema a seguir, uma fórmula para a área de quadrângulos cíclicos e tangenciais em função dos seus lados.

Teorema 3.6. *Se um quadrângulo de lados a, b, c, d , está inscrito em um círculo e circunscrito em outro, sua área é dada por*

$$K = \sqrt{abcd}.$$

Demonstração. Como $abcd$ é tangencial, do Teorema de Pitot vem que

$$a + c = b + d.$$

Substituindo esta relação na Equação 1.9, obtida na dedução da fórmula de Brahmagupta,

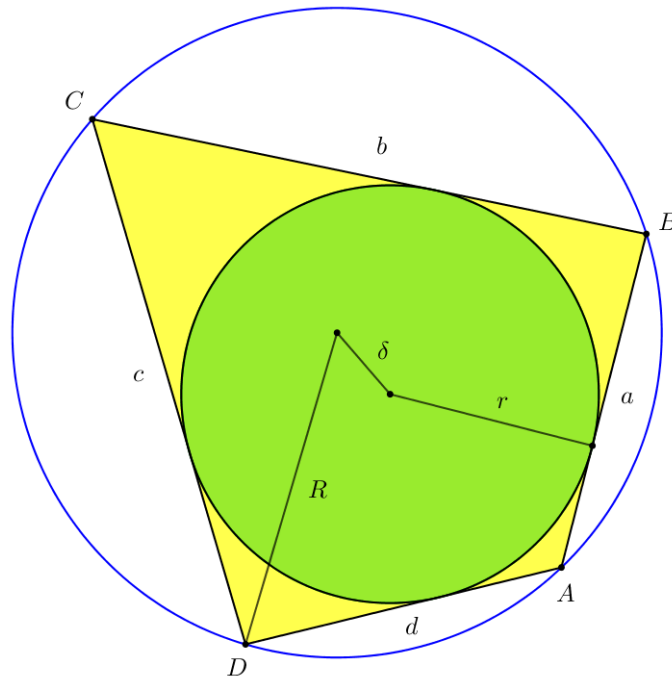
$$16K^2 = [(a + c)^2 - (b - d)^2][(b + d)^2 - (a - c)^2],$$

em que já foi aplicado o Teorema de Ptolomeu, obtemos

$$\begin{aligned} 16K^2 &= [(b + d)^2 - (b - d)^2][(a + c)^2 - (a - c)^2] \\ &= (4bd)(4ac) \end{aligned}$$

e segue a fórmula desejada. \square

Figura 23 – Quadrângulo bicêntrico



Fonte – o autor

Os quadrângulos que satisfazem as hipóteses do Teorema 3.6, como o da Figura 23, são chamados *bicêntricos*.

Utilizando semelhança de triângulos, potência de um ponto e a relação de Stewart, Salazar (2006) dá uma demonstração para o teorema a seguir.

Teorema 3.7 (Fuss). *Se r e R são, respectivamente, os raios dos círculos inscrito e circunscrito ao quadrângulo, e δ é a distância entre os centros desses círculos, então*

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R + \delta)^2} + \frac{1}{(R - \delta)^2}. \quad (3.13)$$

A relação de Stewart, referida acima, é deixada como exercício por Coxeter e Greitzer (1967, p. 6). Mas sua demonstração aparece em Muniz Neto (2013, p. 325–326).

Para que servirá o Teorema de Fuss, poderemos indagar. Ora, o quadrângulo da Figura 23 construímo-lo a partir da Equação 3.13. De fato, fazemos $R = 4$ e $\delta = 1$ para encontrar

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} &= \frac{1}{5^2} + \frac{1}{3^2} \\ &= \frac{9 + 25}{25 \times 9}, \end{aligned}$$

isto é,

$$r = \frac{15}{\sqrt{34}}.$$

Daí, bastam-nos os passos a seguir para a construção do quadrângulo bicêntrico.

- (i) traçamos o círculo de raio R (circuncírculo de $ABCD$) e centro em O .
- (ii) tomamos então o ponto P sobre o círculo de raio δ e centro em O .
- (iii) traçamos o círculo de centro em P e raio r (incírculo de $ABCD$).
- (iv) tomamos o ponto A sobre o circuncírculo e traçamos as tangentes ao incírculo passando por este ponto. As tangentes intersectam o circuncírculo nos pontos B e D .
- (v) traçamos a outra tangente ao incírculo, passando por D (ou por B), que intersecta o circuncírculo no ponto C , o que conclui a construção do quadrângulo bicêntrico $ABCD$.

É ininteressante utilizarmos o [GeoGebra \(2018\)](#) para construir o quadrângulo bicêntrico da [Figura 23](#). Terminada a construção poderemos notar, por exemplo, que a área fornecida pelo software coincide com o valor encontrado por meio da fórmula do Teorema 3.6. Além desta, [Josefsson \(2011a\)](#) revisa e prova outras nove fórmulas para o cálculo da área de um quadrângulo bicêntrico.

Esse autor publicou outros artigos sobre quadrângulos, particularmente os bicêntricos:

- prova treze condições necessárias e suficientes para que um quadrângulo tangencial seja uma pipa (quadrângulo com dois pares de lados adjacentes congruentes) ([JOSEFSSON, 2011b](#));
- prova a desigualdade, $K \leq r(r + \sqrt{4R^2 + r^2})$, para a área, K , de um quadrângulo bicêntrico, e dá os passos para a construção do quadrângulo de área máxima ([JOSEFSSON, 2012a](#));
- dá uma prova para a desigualdade de Yun, $R \geq \sqrt{2}r$, em que R e r são, respectivamente, os raios dos círculos circunscrito e inscrito ao quadrângulo bicêntrico ([JOSEFSSON, 2012b](#));
- prova a desigualdade, $K \geq 2r\sqrt{2r(\sqrt{4R^2 + r^2} - r)}$, para a área, K , de um quadrângulo bicêntrico, e dá os passos para a construção do quadrângulo de área mínima ([JOSEFSSON, 2015](#)).

Do mesmo modo que a fórmula de Brahmagupta provê a área de quadrângulos cíclicos, a fórmula do Teorema 3.6 fornece a área de quadrângulos bicêntricos, atribuindo, assim, significado geométrico ao método de Jorge melhorado. Daí a importância desses quadrângulos para o nosso trabalho de pesquisa.

Considerações finais

*“Quando a inteligência humana foi capaz de extrair,
de uma relação geométrica concreta, uma relação abstrata, geral,
contendo a primeira como um caso particular,
a geometria tornou-se uma ciência.”*

H. Eves

Neste trabalho propomo-nos estudar os quadrângulos sob a perspectiva da etnomatemática. Buscamos explorar o potencial que esta abordagem tem para produzir conhecimento matemático. Mas o que mais nos chamou a atenção é o fato de as práticas pedagógicas desenvolvidas num contexto etnomatemático fazerem-se ação – em vez de invasão – cultural.

No momento mesmo em que nos deparamos com a “cubação da terra”, modelos segundo os quais os camponeses mediam a área de terrenos em suas comunidades, fomos logo atraídos pela ideia de realizar um estudo exploratório dos métodos de Jorge e Adão. Queríamos saber por que funcionavam, quais eram suas limitações, se haveria outros métodos e se seriam modelos mais realistas para o problema de determinar a área de um terreno quadrangular.

A abordagem etnomatemática mostrou-se multi e transdisciplinar, pois envolveu diversas áreas da matemática ao mesmo tempo em que as transpassou. Com efeito, abordamos questões do interesse da história da matemática, tais como a do método de Adão ter sido utilizado pelo matemático hindu Brahmagupta e conhecido também pelos babilônios, muito provavelmente pela facilidade de aplicação e por atender às finalidades a que era destinado.

Temos de levar em conta que os adventos da calculadora e do computador são relativamente recentes, e que os recursos disponíveis são um fator determinante na modelagem de um problema. A facilidade de implementação contribui também para a escolha de um ou outro modelo, que, ademais, deve atender às necessidades a que fora destinado.

Utilizamos a desigualdade das médias, para propor uma melhora ao método de Jorge e para demonstrar relações envolvendo os métodos de aproximação. Empregamos o teorema de Bolzano para demonstrar que podemos tornar cíclico um quadrângulo qualquer via uma transformação que lhe preserva os lados. Provamos, por meio do Cálculo Diferencial e da fórmula de Coolidge, que, dentre todos os quadrângulos de lados dados, o que tem a maior área é cíclico.

Propomos considerar a média geométrica no lugar da média aritmética do método

de Jorge. O método de Jorge melhorado, aprendemos, tem também significado geométrico: fornece uma expressão para a área de quadrângulos bicêntricos, isto é, tangenciais e cíclicos.

Procurando uma maneira de calcular a área de quadrângulos, chegamos à Fórmula de Brahmagupta, que fornece a área de quadrângulos cíclicos em termos de seus lados. Utilizando a relação fundamental da trigonometria, a lei dos cossenos e a fórmula do seno, no [Capítulo 1](#), demonstramos esta fórmula, à qual atribuímos caráter de modelo, no [Capítulo 2](#). De modo geral, a fórmula de Brahmagupta provê uma aproximação para a área de quadrângulos convexos.

Com o auxílio do [MATLAB \(2010\)](#), comparamos os resultados dos métodos de Jorge, Adão, Jorge melhorado e da fórmula de Brahmagupta ao do modelo com um grau de liberdade, mais realista, por meio do erro associado a cada aproximação. Apresentamos, então, os resultados por meio de gráficos. Vimos, assim, que a fórmula de Brahmagupta é a que melhor aproxima a área dos quadrângulos convexos, seguida pelo método de Jorge melhorado.

Mostramos, no [Capítulo 3](#), que todo quadrângulo é cíclico em potencial, isto é, sempre podemos aumentar (ou diminuir) um de seus ângulos internos com uma consequente mudança nos outros ângulos; e haverá uma posição tal que os ângulos opostos sejam suplementares, o que é uma característica dos quadrângulos cíclicos.

Mostramos também que, dentre todos os quadrângulos de lados dados, o que tem a maior área é cíclico. Provamos que o método de Jorge dá resultado sempre maior do que ou igual ao do método de Adão, o qual sempre excede ou iguala a área do quadrângulo convexo.

Desenvolvemos nosso trabalho no sentido de encontrar respostas às perguntas feitas na [Introdução](#), às quais acrescentamos outras, conforme evolução da pesquisa – e outras podem ainda surgir. Podemos agora respondê-las:

a) há outros métodos?

Sim. Propomos utilizar a fórmula de Brahmagupta para aproximar a área de quadrângulos convexos. Também propomos uma melhora ao método de Jorge, utilizando, no lugar da média aritmética, a média geométrica dos lados do quadrângulo cuja área quer-se aproximar.

b) qual dos métodos melhor aproxima a área de um quadrângulo?

A fórmula de Brahmagupta fornece a melhor aproximação – dentre os métodos considerados no presente trabalho – para a área de quadrângulos convexos, e a área exata quando o quadrângulo é cíclico.

c) eles fornecem aproximações por falta ou excesso?

Os métodos de Jorge, Adão e a fórmula de Brahmagupta fornecem sempre aproximações por excesso, como indica o Teorema 3.5. O método de Jorge melhorado, no entanto, pode fornecer tanto aproximações por falta como por excesso, da área de quadrângulos convexos.

De fato, como calculado no Capítulo 2, o quadrângulo cíclico cujos lados são os daquele na Figura 17 tem área 13 890, menor, portanto, que o valor proveniente do método de Jorge melhorado, 13 906. Aplicando o método ao quadrângulo cujos lados são os da Figura 16, obtemos

$$G = \sqrt{52 \times 25 \times 39 \times 60} \cong 1744.$$

Menor, portanto, que a área do quadrângulo cíclico com esses lados, 1764, calculada na subseção 1.2.2.

d) como calcular a área exata de um quadrângulo convexo?

Se o quadrângulo for cíclico, a *Fórmula de Brahmagupta* provê a área exata. Se o quadrângulo for bicêntrico, isto é, cíclico e tangencial, então a fórmula do Teorema 3.6 – que coincide com a do método de Jorge melhorado – fornece a área exata. De modo geral, a área de um quadrângulo convexo pode ser obtida por meio da soma das áreas dos triângulos que o compõe, como fizemos na seção 2.3. A fórmula do Lema 1.5 e a *Fórmula de Coolidge* também proveem a área exata de quadrângulos convexos.

e) é único, ou há mais de um quadrângulo convexo com lados dados?

Vimos que há infinitos desses quadrângulos, a cada um dos quais corresponde uma configuração de seus ângulos internos.

Sem atermo-nos ao rigor característico da matemática, faremos aqui uma discussão caso a caso dos métodos de aproximação, à luz do estudo das transformações.

Sejam X o conjunto de todos os quadrângulos convexos e x um elemento desse conjunto, isto é, um quadrângulo de lados consecutivos a, b, c, d , e com um de seus ângulos internos θ . Sejam ainda \bar{x} a classe de todos os quadrângulos com os mesmos lados consecutivos de x e x_c o quadrângulo cíclico com esses lados.

No *método de Jorge*, calculamos a área, não de x mas do quadrado de lado $\frac{a+b+c+d}{4}$. Assim, em vez de atuarmos diretamente sobre x , atuamos sobre a imagem de x por uma transformação que distorce seus lados e ângulos, e que mantém, no lado do quadrado, apenas a “informação” dos lados do quadrângulo original. Ademais, q age em x do mesmo modo que o faz em qualquer elemento da classe \bar{x} . Apenas sobre os quadrados essa transformação funciona como a aplicação idêntica, isto é, preserva lados e ângulos.

No *método de Adão*, calculamos a área, não de x mas do retângulo de lados $\frac{a+c}{2}$ e $\frac{b+d}{2}$. Assim, em vez de atuarmos diretamente sobre x , atuamos sobre a imagem de x

por uma transformação, u , que distorce seus lados e ângulos, e que mantém, nos lados do retângulo, apenas a “informação” dos lados do quadrângulo original. Ademais, u age em x do mesmo modo que o faz em qualquer elemento da classe \bar{x} . Apenas sobre os retângulos essa transformação funciona como a aplicação idêntica, isto é, preserva lados e ângulos.

No *fórmula de Brahmagupta*, calculamos a área, não de x mas do quadrângulo cíclico associado, isto é, com os mesmos lados de x . De outro modo, quando utilizamos a fórmula de Brahmagupta para aproximar a área de x estamos, na verdade, calculando a área de $x_c \in \bar{x}$. Assim, em vez de atuarmos diretamente sobre x , atuamos sobre a imagem de x por uma transformação, w , que é uma composição de movimentos rígidos – translações e rotações – e que, portanto, preservam-lhe os lados. Daí serem as melhores aproximações os resultados dessa fórmula. Ademais, w age em x do mesmo modo que o faz em qualquer elemento da classe \bar{x} , exceto no caso em que x é cíclico, quando funciona como a aplicação idêntica, isto é, preserva lados e ângulos.

No *método de Jorge melhorado*, calculamos a área, não de x mas do quadrado de lado $\sqrt[4]{abcd}$. Assim, em vez de atuarmos diretamente sobre x , atuamos sobre a imagem de x por uma transformação g que distorce seus lados e ângulos, e mantém, no lado do quadrado, apenas a “informação” dos lados do quadrângulo original. Quando x é tangencial, entretanto, o método de Jorge melhorado funciona exatamente como a fórmula de Brahmagupta atua nos quadrângulos convexos.

Quando utilizamos a fórmula do Teorema 3.6 para aproximar a área de x (tangencial) estamos, na verdade, calculando a área de $x_c \in \bar{x}$. Assim, em vez de atuar diretamente sobre x , atua sobre a imagem de x por uma transformação que é uma composição de movimentos rígidos – translações e rotações – e que, portanto, preservam-lhe os lados.

Nesse sentido, é bastante natural pensar que quanto mais “próximo” estiver um quadrângulo de ser tangencial, mais próximos serão os resultados da fórmula de Brahmagupta e do método de Jorge melhorado. É exatamente isso o que ocorre no exemplo do [Capítulo 2](#).

Do Teorema de [Pitot](#) vem que as somas dos lados opostos devem ser iguais para que um quadrângulo seja tangencial. De outro modo, $a + c = b + d$ é condição necessária e suficiente para que x seja tangencial. Para efeitos do cálculo da área por meio da fórmula do Teorema 3.6, no entanto, é suficiente que a soma de quaisquer dois lados do quadrângulo seja igual à soma dos outros dois. (Isso vem do fato de ser comutativo o produto dos números reais na fórmula $\sqrt[4]{abcd}$, o que, por sua vez, é consequência de ser uma função simétrica a área de quadrângulos cíclicos.)

Naquele exemplo, $a + b = 152 + 90 = 242$ e $c + d = 124 + 114 = 238$, donde $(c + d) - (a + b) = 238 - 242 = -4$. Essa diferença, comparada aos lados do quadrângulo, é muito pequena – próxima de zero. Deveras, $\frac{4}{90} \cong 0.04 \cong 0$, o que explica a proximidade entre os gráficos associados ao método de Jorge melhorado e à fórmula de Brahmagupta

na Figura 20.

Ademais, g age em x do mesmo modo que o faz em qualquer elemento da classe \bar{x} , exceto no caso em que x é bicêntrico, quando funciona como a aplicação idêntica, isto é, preserva lados e ângulos.

Referências

- COOLIDGE, J. L. A historically interesting formula for the area of a quadrilateral. *The American Mathematical Monthly*, Taylor & Francis, Ltd. on behalf of the Mathematical Association of America, v. 46, n. 6, p. 345–347, 1939. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/2302891>>. Acesso em: 1º de julho de 2019.
- COXETER, H. S. M.; GREITZER, S. L. *Geometry Revisited*. 1ª. ed. New York: Random House, Inc., 1967. (New Mathematical Library, 19).
- EDWARDS, D.; HAMSON, M. *Guide to Mathematical Modelling*. 1ª. ed. London: Macmillan Education Ltd, 1989.
- EVES, H. *A Survey of Geometry*. 2ª. ed. Atlantic Avenue, Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1972. v. 1.
- FREIRE, P. *Pedagogia do Oprimido*. 1ª, ePub. ed. Rua do Triunfo, 177 – Sta Efigênia, São Paulo: Editora Paz e Terra Ltda, 2013.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*. 5ª. ed. [S.l.]: LTC, 2001. v. 1.
- HESS, A. A highway from Heron to Brahmagupta. *Forum Geometricorum*, v. 12, p. 191–192, 2012.
- INTERNATIONAL GEOGEBRA INSTITUTE. *GeoGebra Classic 5.0.426.0-d*. Wolfauerstr 90, 4040 Linz, Austria, 2018. Disponível em: <<http://www.geogebra.org/>>.
- JOSEFSSON, M. The area of a bicentric quadrilateral. *Forum Geometricorum*, v. 11, p. 155–164, 2011.
- JOSEFSSON, M. When is a tangential quadrilateral a kite? *Forum Geometricorum*, v. 11, p. 165–174, 2011.
- JOSEFSSON, M. Maximal area of a bicentric quadrilateral. *Forum Geometricorum*, v. 12, p. 237–241, 2012.
- JOSEFSSON, M. A new proof of Yun’s inequality for bicentric quadrilaterals. *Forum Geometricorum*, v. 12, p. 79–82, 2012.
- JOSEFSSON, M. Minimal area of a bicentric quadrilateral. *The Mathematical Gazette*, The Mathematical Association of America, v. 99, n. 545, p. 237–242, julho de 2015. Disponível em: <<https://search.proquest.com/docview/1695137822?accountid=26646>>. Acesso em: 8 de julho de 2019.
- KNIJNIK, G. An ethnomathematical approach in mathematical education: A matter of political power. In: _____. *Ethnomathematics: Challenging Eurocentrism in Mathematics Education*. [S.l.]: State University of New York Press, 1997. p. 403–410.
- MERZBACH, U. C.; BOYER, C. B. *A History of Mathematics*. 3ª. ed. United States: Wiley, 2011.

- MUNIZ NETO, A. C. *Tópicos de Matemática Elementar*. 2ª. ed. [S.l.]: SBM, 2013. v. 2, Geometria Euclidiana Plana. (Coleção do Professor de Matemática, v. 2, Geometria Euclidiana Plana).
- MUNIZ NETO, A. C. *Tópicos de Matemática Elementar*. 2ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014. v. 1, Números Reais. (Coleção do Professor de Matemática, v. 1, Números Reais).
- PETER, T. Maximizing the area of a quadrilateral. *The College Mathematics*, The Mathematical Association of America, 30 Amberson Ave. Yonkers, NY 10705, v. 30, n. 4, p. 315–316, set. 2003.
- ROSA, M. et al. *Current and Future Perspectives of Ethnomathematics Program*. [S.l.]: Springer, 2016. ICME 13. (Topical Surveys, ICME 13).
- ROSA, M.; GAVARRETE, M. E. Polysemic interactions between ethnomathematics and culturally relevant pedagogy. In: _____. *Current and Future Perspectives of Ethnomathematics Program*. [S.l.]: Springer, 2016. (Topical Surveys, ICME 13), p. 23–30.
- SALAZAR, J. C. Fuss' theorem. *The Mathematical Gazette*, The Mathematical Association of America, v. 90, n. 518, p. 306–307, jul. 2006. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/40378628>>. Acesso em: 2 de julho de 2019.
- THE MATHWORKS, INC. *MATLAB Student version 7.10.0.499 (R2010a)*. Natick, Massachusetts, 2010. Disponível em: <<https://www.mathworks.com>>.

Apêndices

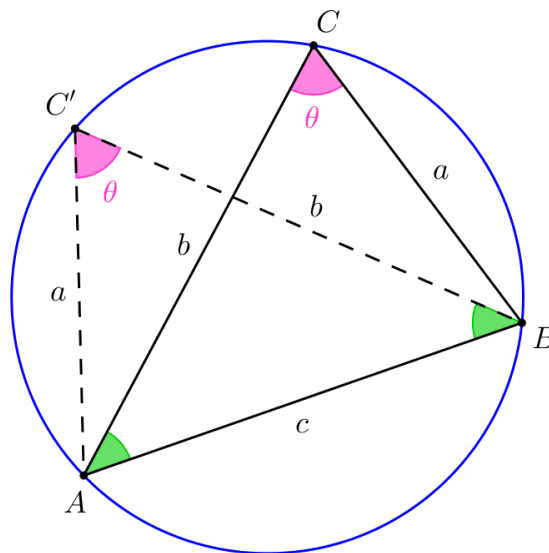
APÊNDICE A – A fórmula de Heron

A partir da fórmula do seno para a área de triângulos, da lei dos cossenos e da relação fundamental da trigonometria, demonstraremos a fórmula de Heron, no teorema a seguir. Princípios provando que a área de triângulos é função simétrica dos seus lados, afirmação feita na prova do Lema 1.10.

Lema A.1. *Permutar dois lados de um triângulo não altera sua área.*

Demonstração. Permutar os lados a e b do $\triangle ABC$ da Figura 24 equivale a marcar C' em seu circuncentro de sorte que $AC' = a$.

Figura 24 – Área de triângulos, função simétrica dos lados



Fonte – o autor

De fato, $\angle AC'B = \angle ACB$, pois subtendem ao mesmo arco \widehat{AB} , e $\angle ABC' = \angle BAC$, pois subtendem a arcos delimitados por cordas de mesma medida a . Resta que $\angle BAC' = \angle ABC$, donde os triângulos ABC e BAC' são congruentes pelo caso LAL, e $BC' = b$.

Do Lema 1.4,

$$(ABC') = \frac{ab \operatorname{sen} \theta}{2} = (ABC). \quad \square$$

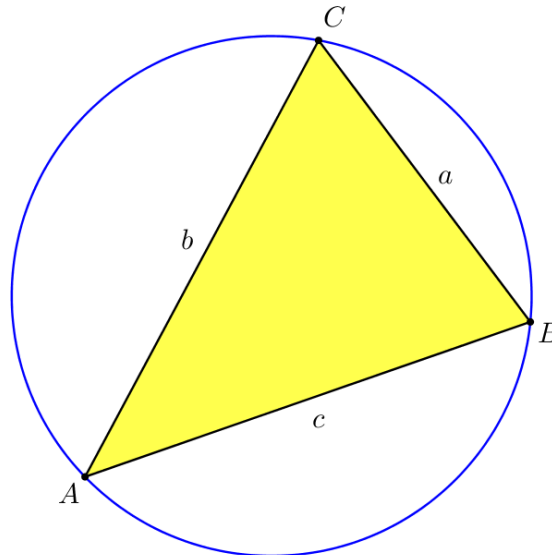
Teorema A.2. *Se o triângulo ABC tem lados a, b, c , e semiperímetro s , então sua área é dada por*

$$(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Demonstração. A [Lei dos cossenos](#) aplicada ao $\triangle ABC$ da [Figura 25](#) nos dá

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \tag{A.1}$$

Figura 25 – A fórmula de Heron



Fonte – o autor

Elevando ao quadrado a expressão do [Lema 1.4](#),

$$(ABC) = \frac{bc \operatorname{sen} A}{2},$$

e utilizando a [Relação fundamental da trigonometria](#), obtemos

$$\begin{aligned} 4(ABC)^2 &= (bc)^2 \operatorname{sen}^2 A \\ &= b^2 c^2 (1 - \cos^2 A) \\ &= b^2 c^2 (1 - \cos A)(1 + \cos A). \end{aligned}$$

Multiplicando por 2 cada um dos parênteses da equação obtida acima, temos de multiplicar por 4 o seu lado esquerdo:

$$16(ABC)^2 = (2bc - 2bc \cos A)(2bc + 2bc \cos A).$$

Utilizamos então a [Equação A.1](#) para obter

$$\begin{aligned} 16(ABC)^2 &= (2bc + a^2 - b^2 - c^2)(2bc - a^2 + b^2 + c^2) \\ &= [a^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - a^2] \\ &= (a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a), \end{aligned}$$

ou seja,

$$(ABC)^2 = (s - b)(s - c)(s - a)s.$$

□

APÊNDICE B – De Heron a Brahmagupta

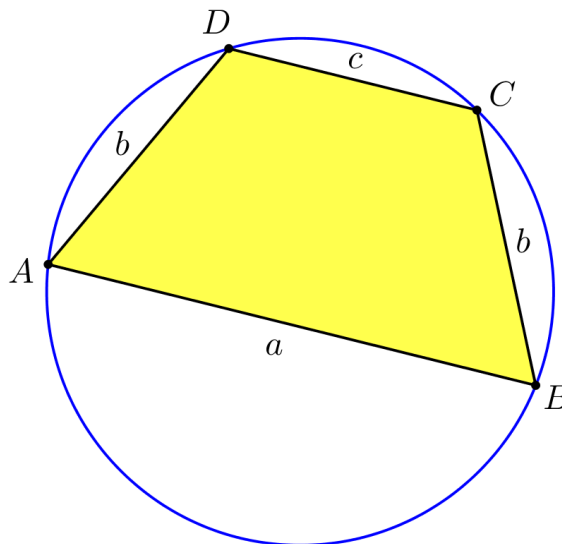
Como propôs Hess (2012), partimos da fórmula de Heron, demonstrada no Apêndice A, para deduzir a de Brahmagupta.

A dedução feita no artigo, todavia, desconsidera o caso em que são paralelos os lados do quadrângulo, pois, para o autor, a fórmula de Brahmagupta é óbvia nesse caso. Não obstante, decidimos por apresentar aqui uma demonstração que contemple também o trapézio, na esperança de motivar alunos e professores da educação básica.

B.1 Área do trapézio cíclico

No teorema a seguir exibimos uma fórmula para a área de trapézios cíclicos. Na Figura 26 temos o trapézio cíclico $ABCD$, com AB paralelo a CD .

Figura 26 – Trapézio isósceles porque cíclico



Fonte – o autor

Teorema B.1. *Se $ABCD$ é um trapézio cíclico, com $AB = a$ paralelo a $CD = c$, então $ABCD$ é isósceles, isto é, $BC = DA = b$, e sua área é dada por*

$$K = \sqrt{(s - b)^2(s - a)(s - c)},$$

em que s é seu semiperímetro.

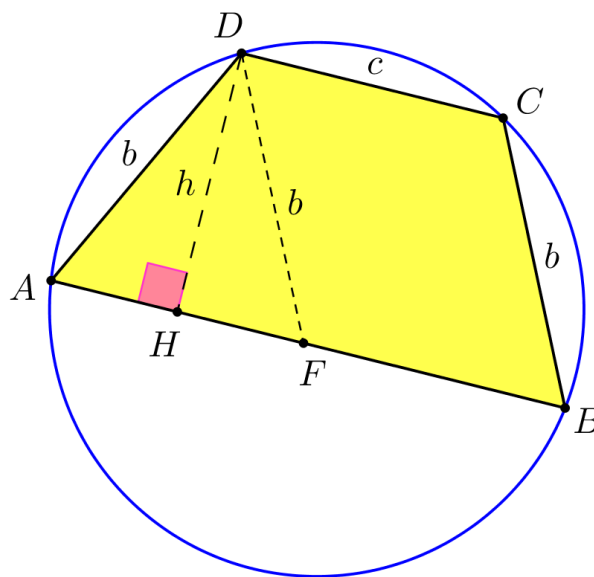
Demonstração. Seja E o ponto onde se intersectam as retas que passam pelos lados BC e AD do trapézio $ABCD$.

Do fato de serem paralelos os lados AB e CD , os ângulos internos $\angle A$ e $\angle D$ de $ABCD$ são suplementares. Mas, do Lema 1.8, $\angle A$ e $\angle C$ são também suplementares.

Logo, $\angle C = \angle D$, $\angle A = \angle B$, e o trapézio $ABCD$ é, pois, isósceles.

Traçamos uma paralela a BC passando por D , que encontra AB no ponto F . Dessa forma, $BCDF$ é um paralelogramo. Daí ser isósceles o $\triangle ADF$ da Figura 27, cuja altura DH tem comprimento h .

Figura 27 – A fórmula de Brahmagupta para trapézios



Fonte – o autor

A área do trapézio $ABCD$ é dada por

$$K = \frac{a + c}{2} \cdot h$$

e seu semiperímetro,

$$s = \frac{a + 2b + c}{2}.$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao $\triangle AHD$, obtemos

$$b^2 = h^2 + \left(\frac{a - c}{2}\right)^2.$$

Portanto,

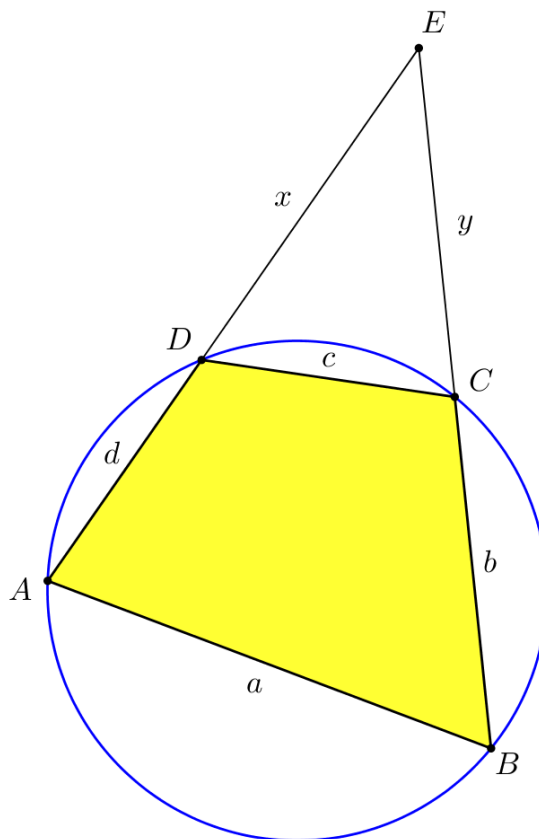
$$\begin{aligned}
 K^2 &= \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 h^2 \\
 &= \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 \left[b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2\right] \\
 &= \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 \left(b - \frac{a-c}{2}\right) \left(b + \frac{a-c}{2}\right) \\
 &= (s-b)^2 (s-a)(s-c)
 \end{aligned}$$

e segue a fórmula de Brahmagupta, para este caso particular. □

B.2 Área do quadrângulo cíclico

Agora consideramos o quadrângulo cíclico $ABCD$ da [Figura 28](#), cujos lados opostos, prolongados, intersectam-se no ponto E .

Figura 28 – De Heron a Brahmagupta



Fonte – o autor

Teorema B.2. *Se um quadrângulo cíclico tem lados a, b, c, d , e semiperímetro s , então sua área é dada por*

$$K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}. \tag{B.1}$$

Demonstração. O semiperímetro deste quadrângulo é

$$s = \frac{a + b + c + d}{2}.$$

Calculamos a área, K , de $ABCD$ a partir da diferença entre as áreas dos triângulos ABE e CDE , isto é,

$$K = (ABE) - (CDE).$$

Utilizando a fórmula de Heron,

$$(CDE) = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-c)}$$

e

$$(ABE) = \sqrt{q(q-a)(q-x-d)(p-y-b)},$$

em que

$$p = \frac{c + x + y}{2}$$

e

$$q = \frac{a + b + y + d + x}{2}$$

são os semiperímetros dos triângulos ABE e CDE , respectivamente.

Como os ângulos internos $\angle A$ e $\angle C$ do quadrângulo são suplementares, $\angle DCE = \angle A$. Analogamente, $\angle CDE = \angle B$. Logo, são semelhantes os triângulos ABE e CDE .

Seja $\lambda < 1$ esta razão de semelhança, isto é,

$$\begin{aligned} c &= \lambda a, \\ x &= \lambda(d + x), \\ y &= \lambda(b + y). \end{aligned}$$

Daí,

$$p = \lambda q$$

e, fazendo $(ABE) = S$,

$$\begin{aligned} K^2 &= (S - \lambda^2 S)^2 \\ &= (1 - \lambda^2)^2 S^2. \end{aligned}$$

Além disso, $(1 + \lambda)q = s + x + y$,

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)q &= q - p &= s - c, \\ (1 - \lambda)(q - a) &= s - c + c - a &= s - a, \\ (1 + \lambda)(q - x - d) &= s + x + y - y - x - d &= s - d, \\ (1 + \lambda)(q - y - b) &= s + x + y - x - y - b &= s - b. \end{aligned}$$

Portanto,

$$K^2 = (s - c)(s - a)(s - d)(s - b).$$

□

Claro que a fórmula obtida para o trapézio cíclico, da [seção B.1](#), é um caso particular desta. Apenas quisemos ilustrar o procedimento utilizado na obtenção daquela.

APÊNDICE C – Desigualdade com quadrados

Aqui demonstramos uma desigualdade que utilizamos na demonstração do Teorema 3.5, resultado central do nosso trabalho.

Lema C.1. *Quaisquer que sejam os reais não-negativos a, b, c, d ,*

$$(a^2 - c^2)^2 + (b^2 - d^2)^2 \geq (a - c)^2(b - d)^2.$$

Demonstração. Como a e c são reais ≥ 0 , podemos escrever

$$a^2 - c^2 = (a - c)(a + c) \geq (a - c)^2.$$

Elevada ao quadrado, esta relação nos dá

$$(a^2 - c^2)^2 \geq (a - c)^4. \tag{C.1}$$

Analogamente, obtemos

$$(b^2 - d^2)^2 \geq (b - d)^4. \tag{C.2}$$

Somamos as Desigualdades C.1 e C.2 para obter

$$(a^2 - c^2)^2 + (b^2 - d^2)^2 \geq (a - c)^4 + (b - d)^4. \tag{C.3}$$

Temos que

$$\left[(a - c)^2 - (b - d)^2 \right]^2 = (a - c)^4 + (b - d)^4 - 2(a - c)^2(b - d)^2 \geq 0,$$

donde

$$(a - c)^4 + (b - d)^4 \geq 2(a - c)^2(b - d)^2. \tag{C.4}$$

Juntando as Desigualdades C.3 e C.4 obtemos

$$\begin{aligned} (a^2 - c^2)^2 + (b^2 - d^2)^2 &\geq (a - c)^4 + (b - d)^4 \\ &\geq 2(a - c)^2(b - d)^2 \\ &\geq (a - c)^2(b - d)^2, \end{aligned}$$

como queríamos. □

É importante observar que a igualdade ocorre somente quando $a - c = b - d = 0$, isto é, $a = c$ e $b = d$.

APÊNDICE D – Código

Apresentamos o código [MATLAB \(2010\)](#) utilizado para calcular a área, K , em função do ângulo interno θ , dos quadrângulos cujos lados são os da [Figura 17](#). Esta área é comparada aos resultados dos métodos de aproximação – Jorge, Adão, Jorge melhorado e Brahmagupta. Utilizamos o presente código para gerar os gráficos das Figuras 19–21.

```

clc
clear all

%comprimento dos lados do quadrangulo ABCD
a=152;
b=90;
c=124;
d=114;

s=(a+b+c+d)/2; %semiperimetro do quadrangulo ABCD
arg=(s-a)*(s-b)*(s-c)*(s-d);

Q=(.5*s)^2; %aproximacao pelo metodo de Jorge
S=(a+c)*(b+d)/4; %aproximacao pelo metodo de Adao
G=sqrt(a*b*c*d); %aproximacao por Jorge melhorado
W=sqrt(arg); %aproximacao pela formula de Brahmagupta

N=512;
theta=0:pi/N:pi; %discretizacao do intervalo (0,\pi)
thetad=theta*180/pi; %angulo em graus

T1=.5*a*b*sin(theta); %area do triangulo ABC

x=sqrt(a^2+b^2-2*a*b*cos(theta)); %diagonal AC pela lei dos cossenos
p=(x+c+d)/2; %semiperimetro do triangulo ACD
T2=sqrt(p.*(p-x).(p-c).(p-d)); %area do triangulo ACD

K=T1+T2; %area do quadrilatero ABCD

%grafico da area em funcao do angulo \theta

```



```
plot(thetad, K)
xlabel('\theta (graus)')
ylabel('K (m^2)')

%calculo do erro
eq=abs(K-Q); %metodo de Jorge
es=abs(K-S); %metodo de Adao
eg=abs(K-G); %Jorge melhorado
ew=abs(K-W); %formula de Brahmagupta

%graficos dos erros em funcao do angulo \theta
plot(thetad, eq, 'r', thetad, es, 'g', thetad, eg, 'b', thetad, errow, 'm')
xlabel('\theta (graus)')
ylabel('erro (m^2)')
legend('Jorge', 'Adao', 'Jorge melhorado', 'Brahmagupta')
```

Anexos

ANEXO A – Desigualdade das médias

Apresentamos aqui a desigualdade que inspirou a elaboração do método de Jorge melhorado. Dela valemo-nos, também, para demonstrar o Teorema 3.5.

A fim de provar a desigualdade das médias, precisamos de um resultado sobre números reais.

Lema A.1. *Se u e v são números reais, então*

$$\frac{u^2 + v^2}{2} \geq 2|uv|.$$

Demonstração. Temos que

$$(|u| - |v|)^2 \geq 0,$$

com a igualdade ocorrendo se, e só se, $|u| = |v|$. Daí,

$$|u|^2 - 2|u||v| + |v|^2 \geq 0,$$

e, do fato de $|u|^2 = u^2$ e $|v|^2 = v^2$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{u^2 + v^2}{2} &\geq |u||v| \\ &= |uv|, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Agora a desigualdade das médias em sua versão mais simples.

Teorema A.2. *Se a e b são números reais não-negativos, então*

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Demonstração. Aplicamos o Lema A.1, com $u^2 = a$ e $v^2 = b$, para obter

$$\begin{aligned} \frac{a + b}{2} &\geq \sqrt{a}\sqrt{b} \\ &= \sqrt{ab}, \end{aligned}$$

como queríamos. □

O resultado deste teorema é conhecido como *desigualdade das médias*, e estabelece que a *média aritmética* resulta sempre maior que ou igual à *média geométrica*.

Esse resultado pode ser generalizado para n termos,

$$\frac{a_1 + a_2 \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

com n inteiro positivo, e os a_i 's reais não-negativos, como demonstrado por [Muniz Neto \(2014, p. 169–171\)](#). Mas, para os propósitos do nosso trabalho, é suficiente mostrarmos o caso $n = 4$.

Corolário A.3. *Quaisquer que sejam os reais não-negativos a, b, c, d ,*

$$\frac{a + b + c + d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}.$$

Demonstração. Aplicamos duas vezes o Teorema [A.2](#) para obter

$$\begin{aligned} \frac{a + b + c + d}{4} &= \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \\ &\geq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \\ &\geq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \\ &= \sqrt[4]{abcd}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{a + b + c + d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd},$$

como queríamos. □

Cabe ressaltar que a igualdade ocorre se, e só se, $a = b = c = d$.