Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

OS NÚMEROS PRIMOS COMO INSTRUMENTO DE ESTÍMULO À CURIOSIDADE DOS ESTUDANTES

por

DELEIR INÁCIO DE ASSIS

Brasília, 2019

DELEIR INÁCIO DE ASSIS

OS NÚMEROS PRIMOS COMO INSTRUMENTO DE ESTÍMULO À CURIOSIDADE DOS ESTUDANTES

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissionalizante em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de

Mestre

Orientador: Prof. Dr. Vinicius de Carvalho Rispoli

Brasília

2019

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

In

Inácio de Assis, Deleir
OS NÚMEROS PRIMOS COMO INSTRUMENTO DE ESTÉIMULO À CURIOSIDADE DOS ESTUDANTES / Deleir Inácio de Assis; orientador Vinicius Carvalho Rispoli. -- Brasília, 2019.
56 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2019.

1. Números Primos. 2. Problemas em Aberto. 3. Sequências Didáticas. I. Carvalho Rispoli, Vinicius, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Os Números Primos como Instrumento de Estímulo à Curiosidade dos Estudantes

por

DELEIR INÁCIO DE ASSIS

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 12 de agosto de 2019.

Comissão Examinadora:

Prof. Vinícius de Carvalho Rispoli (Orientador)

Prof. Eudes Antônio da Costa - UFT/Arraias

Prof. Rui Seimetz - MAT/UnB

DEDICATÓRIA

Dedico essa dissertação aos estudantes que têm sede de conhecimento e se sentem felizes e empolgados quando desvendam os novos horizontes da Matemática. Que meu sobrinho Daniel Inácio Silva do Carmo continue sendo um desses estudantes.

"No pares, no pares, no, No pares nunca de soñar. No tengas miedo a volar, Vive tu vida". RBD

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao Senhor Jesus, Rei dos Reis e Senhor dos Senhores, por toda sorte de bênçãos que Ele me concedeu. A Ele seja dada toda a honra e toda a glória!

Agradeço à professora Melise Reis, do Programa GESTAR II de Matemática, que no dia 19 de outubro de 2011 divulgou aos seus alunos o processo seletivo para admissão da turma de 2012 do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Apesar de eu não ter ingressado nessa ocasião, ela foi a grande responsável pelo meu retorno à Universidade de Brasília.

Agradeço muito aos meus familiares (meus pais Délio e Juvenília, minhas irmãs Deliane, Delaneide e Deliene, meu sobrinho Daniel, meus tios e primos) pelo amor sempre dedicado a mim, pelas orações e por acreditarem em meu potencial.

Agradeço aos meus companheiros do PROFMAT, especialmente ao Artur e ao Anésio, que fizeram sugestões de atividades e de leituras para o desenvolvimento da minha dissertação, e ao Augusto, que me auxiliou na conversão para o formato LaTex.

Também sou grato a todos os meus professores de Matemática, Teoria dos Números e Aritmética, com destaque ao meu orientador, Doutor Vinicius de Carvalho Rispoli, pela orientação no processo de criação dessa dissertação, e aos professores Doutor Rudolf Richard Maier e Doutor Diego Marques Ferreira, por me apresentarem o misterioso e fascinante mundo dos números primos.

Agradeço aos pouquíssimos e amados amigos que sempre estiveram ao meu lado, colaborando, ensinando, aprendendo, repreendendo meus deslizes, corrigindo meus erros e elogiando meus acertos. Obrigado, Adriano Carlos, Jac Gil, Evelyn, Vanessa, Ludimila, Luana, Ana Gabriela, Mateus, Josué, Márcio, Thompson, Susiane, Ítalo, Michel, Rubens, Roosevelt.

Agradeço à minha ex-chefe Karla Silva Ferreira da Costa Dias por atestar meu pedido de afastamento para estudos, mesmo sabendo da dificuldade que encontraria durante a minha ausência.

Muito obrigado a todos que, direta ou indiretamente, acreditaram e torceram pelo meu sucesso.

Resumo

A importância dos números primos na matemática é indiscutível. O fascínio por esses números ocorre desde a antiguidade com Eratóstenes e Euclines se estendendo até os dias contemporâneos. Apesar de grandes descobertas, relacionadas aos números primos, ao longo das história, ainda há muitos problemas em aberto na Teoria dos Números. Nessa perspectiva, alguns problemas em aberto podem ser utilizados para estimular a curiosidade dos alunos, ampliando o seu interesse pela matemática. Nessa dissertação, serão propostas duas sequências didáticas a serem trabalhadas com alunos do Ensino Fundamental II que relacionam o conteúdo dos números primos com dois desses problemas em aberto: a conjectura de Goldbach e os primos de Fermat. Essas sequências tem como objetivo geral mostrar aos estudantes que nem tudo está solucionado na matemática e que ainda há muitas perguntas sem respostas neste campo do conhecimento. Desta forma, neste trabalho, será feita uma revisão bibliográfica sobre os números primos assim como são trazidos históricos breves de alguns problemas em aberto dentro desta área. Espera-se que a discussão aqui contida também possa motivar o professor a produzir suas próprias sequências didáticas para aplicação em sala de aula. Finalmente, é esperado, nesse trabalho, que a curiosidade dos estudantes seja realmente estimulada durante o processo de ensino-aprendizagem e que eles demonstrem maior interesse pela matemática.

Palavras-chave: números primos; problemas em aberto; conjectura de Goldbach; números de Fermat; sequência didática; Geogebra.

Abstract

The importance of prime numbers in mathematics is unquestionable. The fascination with these numbers comes from antiquity with Eratosthenes and Euclines extending to the present day. Despite major discoveries related to prime numbers throughout history, there are still many open problems in Number Theory. From this perspective, some open problems can be used to stimulate students' curiosity, broadening their interest in mathematics. In this dissertation, two didactic sequences will be proposed to be worked with elementary school students that relate the content of prime numbers with two of these open problems: Goldbach's conjecture and Fermat's primes. These sequences are intended to show students that not everything is solved in mathematics and that there are still many unanswered questions in this field of knowledge. Thus, in this work, a bibliographic review of the prime numbers will be made as well as brief history of some open problems within this area. It is hoped that the discussion contained herein may also motivate the teacher to produce his own didactic sequences for classroom application. Finally, it is expected in this paper that students' curiosity is really stimulated during the teaching-learning process and that they show greater interest in mathematics.

Keywords: prime numbers; open problems; Goldbach's conjecture; Fermat numbers; didactic sequence; Geogebra.

Sumário

Introdução

Na Matemática, a importância dos números primos é indiscutível. O interesse pelo seu estudo remete a épocas remotas, já sendo realizado por matemáticos como Euclides e Eratóstenes na Antiguidade, Mersenne, Fermat e Euler na Idade Moderna, e se estendendo até os dias contemporâneos.

Com o passar do tempo, grandes descobertas nessa área foram feitas, revolucionando a Aritmética e a Teoria dos Números. Situações como, por exemplo, a quantidade de números primos existentes e de maneiras de se decompor um número natural maior que 1 em fatores primos já foram esclarecidas. Porém, alguns problemas relacionados aos números primos ainda continuam sem resposta, instigando os estudiosos e desafiando várias gerações.

Nessa perspectiva, esses problemas em aberto podem ser utilizados para estimular a curiosidade dos alunos, buscando o seu interesse pela pesquisa matemática. Mas quais são as metodologias que podem ser aplicadas em sala de aula para criar esse interesse? A tecnologia pode ser uma aliada no processo de ensino-aprendizagem?

Nessa dissertação, serão propostas duas sequências didáticas: uma para ser trabalhada com alunos do 6º/7º ano do Ensino Fundamental, aplicando um método sistemático para obtenção de números primos e utilizando uma das conjecturas matemáticas mais antigas e interessantes; a outra, para ser desenvolvida com alunos do 7º/8º ano do Ensino Fundamental, identificando números primos específicos e construindo polígonos regulares no *software* gratuiro e multiplataforma Geogebra.

É esperado, nesse trabalho, que a curiosidade dos estudantes seja realmente estimulada durante o processo de ensino-aprendizagem e que eles demonstrem interesse pela área de pesquisa matemática, em particular pela Teoria dos Números.

Por motivar a busca pelo conhecimento, a proposta dessa dissertação busca relacionar o aprendizado, o estudante e o professor, entrelaçando-os num contexto que envolva o comprometimento do docente e o despertar da curiosidade do discente. Pretende-se, enfim, alcançar a formação de um pensamento mais crítico e a construção do conhecimento, não apenas com a realização as atividades propostas, mas também compartilhando as experiências adquiridas durante todo o processo.

A metodologia utilizada é a pesquisa bibliográfica e em sites matemáticos, consistindo na teoria sobre os números primos para a consolidação dos pré-requisitos necessários à aplicação das sequências didáticas sugeridas.

No primeiro capítulo, serão apresentados conceitos, propriedades e importantes teoremas relacionados aos números primos, bem como alguns dos estudiosos que se empenharam no estudo e na evolução da Teoria dos Números e da Aritmética.

Em seguida, no segundo capítulo, algumas particularidades desses números serão discutidas, com a finalidade de se aprofundar o conhecimento sobre o assunto, destacando-se algumas categorias especiais de números primos.

Posteriormente, no terceiro capítulo, problemas matemáticos ainda não resolvidos sobre números primos também farão parte da discussão. São esses enigmas que servirão de principal estímulo à curiosidade dos estudantes.

Por fim, no quarto capítulo, serão propostas duas sequências didáticas, relacionadas aos conceitos mais relevantes apresentados nos capítulos anteriores.

Capítulo 1

Fundamentação Teórica

Nesse capítulo, para a compreensão do comportamento dos números primos, de suas importantes propriedades e de suas particularidades, serão adotados os seguintes procedimentos:

- realização de abordagem histórica, mencionando alguns dos mais importantes estudiosos que contribuíram para o desenvolvimento da Teoria dos Números;

- exposição das definições relevantes para a compreensão do tema;

- demonstração de alguns teoremas, objetivando a consolidação dos pré-requisitos necessários.

1.1 Abordagem Histórica

O estudo dos números primos vem ocorrendo desde a Antiguidade até os tempos mais contemporâneos, tendo sido realizado por estudiosos que entraram para a História pelas suas contribuições na área da Matemática. Dentre eles, os seguintes terão destaque nessa dissertação: Euclides (350 a.C.), Eratóstenes (276 – 196 a.C.), Marin Mersenne (1588 – 1648), Pierre de Fermat (1601 – 1665) e Leonhard Euler (1707 – 1783). E ainda, após o século XIX, outros importantes matemáticos se dedicaram a estudar o comportamento dos números primos.

Euclides, um importante matemático da Antiguidade que vivia na Alexandria, é o responsável por sistematizar em um tratado chamado *Os Elementos* quase todo o conhecimento matemático daquele período. Dada a sua relevância, essa obra se tornou um verdadeiro norte da Matemática. Com o passar dos tempos, várias edições foram realizadas, até chegar aos dias atuais, nos quais seu conteúdo ainda é levado em consideração [1, 2].

Euclides pode não ter tido o grande mérito de criar ou descobrir muitos resultados, mas ele foi o responsável por estabelecer o rigor matemático nunca antes alcançado e ainda utilizado milênios após esse feito. Sua obra é composta de treze livros, dos quais dez tratam de geometria e os outros três, de aritmética. Euclides tratava os números utilizando sempre uma visão geométrica, considerando números como segmentos e quadrados de números como áreas de segmentos. Desse modo, nos livros de aritmética de *Os Elementos*, que são os Livros VII, VIII e IX, Euclides faz uso dessa visão geométrica para desenvolver a teoria elementar dos números naturais. No Livro VII, além da definição dos conceitos de divisibilidade, número primo, números perfeitos, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, encontra-se também o enunciado da divisão com resto de um número natural por outro. Esse procedimento é conhecido como divisão euclidiana e, por meio de um processo de iteração desta divisão, foi estabelecido o Algoritmo de Euclides, utilizado para se determinar o máximo divisor comum entre dois ou mais inteiros (Proposições 1 e 2). Dessa forma, pode-se verificar se dois inteiros são primos entre si. Esse procedimento é utilizado até hoje, devido à sua eficiência. O Livro VIII versa sobre propriedades das sequências numéricas em progressão geométrica. No Livro IX, encontram-se resultados que serão muito significativos para o estudo da Teoria dos Números. Dentre eles, podemos citar a prova de que existem infinitos números primos (Proposição 20) e a demonstração do Teorema Fundamental da Aritmética (Proposição 14), que diz que todo número natural maior que 1 pode ser escrito como produto de primos de maneira única, salvo quanto à ordem dos fatores. Ainda nesse livro, encontra-se um resultado provado que dá uma condição necessária para que um número natural seja perfeito (Proposição 35). Além disso, também é atribuída a Euclides a conjectura dos números primos gêmeos. Tais conceitos serão estudados com propriedade mais adiante [1, 2].

Eratóstenes, outro notável estudioso da Antiguidade, natural de Cirene, região do Norte da África, dedicou-se não somente à Matemática, mas também a outras ciências, como Geografia e História. Um de seus grandes feitos foi calcular o comprimento da circunferência da Terra, por meio de sistema próprio, encontrando o valor de 40.000 km. Surpreendentemente, dois milênios depois, uma nova medição, mais precisa e moderna, resultou em 40.070 km [3].

Sua contribuição para a Teoria dos Números inclui um método de determinação de números primos por meio de regras de divisão e, principalmente, multiplicação. Esse método, que será descrito mais à frente, é conhecido como crivo de Eratóstenes e permite listar todos os números primos menores que um dado número natural. Porém, sua eficiência não é satisfatória para ordens muito elevadas, pois se torna um processo que demanda tempo na sua execução [3].

Marin Mersenne (1588 - 1648) também contribuiu com a Teoria dos Números. Religioso francês da Idade Moderna, ficou conhecido por realizar a divulgação da Matemática por meio de correspondências entre estudiosos da época. Mersenne se interessou muito por uma categoria de números em particular, que posteriormente levaria seu nome. Esses são os números primos que podem ser escritos na forma $2^p - 1$, com p primo, chamados primos de Mersenne (apesar de já terem sido levados em consideração muito antes por Euclides), denotados por M_p. Em seus estudos, afirmou que um número que se encaixasse nessa descrição seria primo quando p assumisse os valores: 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 e 257. Já para os outros números primos p menores que 257, o número M_p seria composto. Porém, com o desenvolvimento tecnológico, somente muitos anos depois ficou constatado que havia erros nessa afirmação. Como exemplos, pode-se citar a inclusão nessa relação de primos de M_{67}, que é um múmero composto, e a omissão de M_{61}, que é um número primo. Os primos de Mersenne possuem uma relação direta com os números perfeitos pares, conceito que também será estudado mais adiante [2].

Pierre de Fermat (1601 - 1665), jurista francês, foi o principal responsável pelo renascimento da Aritmética, que ocorreu por volta de 1621. Fermat também realizava correspondência com matemáticos da época, lançando desafios em vez de divulgar ou publicar as demonstrações dos resultados encontrados, tendo inclusive Mersenne como um de seus principais correspondentes. Dentre as suas notáveis contribuições está o Pequeno Teorema de Fermat, que foi apenas enunciado por ele, alegando que sua demonstração seria muito longa. Além dessa, várias outras descobertas foram feitas por Fermat, mas a que mais instigou os matemáticos ficou conhecida como Último Teorema de Fermat, apesar de não ter sido demonstrado por ele. Em 1637, à margem do Problema 8, Livro 2, de um de seus livros, *Aritmética* de Diofanto, foram descritas as infinitas soluções da equação pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$ e escritas as seguintes palavras [1, 2]:

> "Por outro lado, é impossível separar um cubo em dois cubos, ou uma biquadrada em duas biquadradas, ou, em geral, uma potência qualquer, exceto um quadrado em duas potências semelhantes. Eu descobri uma demonstração verdadeiramente maravilhosa disto, que todavia esta margem não é suficientemente grande para cabê-la".

Muitos matemáticos se empenharam para descobrir uma prova para a afirmação de Fermat, sendo utilizadas diversas abordagens, inclusive computacionais, e até mesmo oferecidos prêmios para quem decifrasse esse desafio. Foram necessários três séculos para que uma prova fosse dada. Em 1995, o matemático inglês Andrew Wiles realizou esse feito, deixando no ar apenas a dúvida de como seria a demonstração que Fermat alegou ter encontrado.

Fermat também se dedicou à determinação de números primos que seriam gerados pela expressão $2^{2^n}+1$, com n inteiro não-negativo, a qual, segundo ele, resultaria sempre em um número primo. Os números resultantes dessa expressão, denotados por F_n, eram muito grandes e difíceis de serem fatorados, o que manteve o problema em aberto por um bom tempo. Apesar da expressão gerar números primos para $n = 0, 1, 2, 3$ e 4, chamados primos de Fermat, essa afirmação foi refutada quando foi apresentada uma fatoração de $2^{2^5}+1$ por Leonhard Euler. Ainda hoje, perduram alguns questionamentos sobre a existência ou não de outros primos de Fermat, além dos cinco já conhecidos.

Leonhard Euler (1707 - 1783) foi, sem dúvida alguma, uma das mentes mais férteis e um dos matemáticos mais notáveis de todos os tempos. Nascido na Suíça, iniciou na matemática aos 14 anos, quando ingressou na universidade, onde foi aluno de Johann Bernoulli, outro grande matemático da Idade Moderna. Mas foi com Christian Goldbach que Euler passou a investigar os problemas tratados por Fermat, passando, assim, a contribuir com o desenvolvimento da Aritmética. A Euler é atribuído o grande feito de resolver um famoso problema da Teoria dos Números, o problema de Basileia, que consistia em determinar o valor exato da soma infinita $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$. Seu cálculo resultou no valor exato de $\frac{\pi^2}{6}$ [1, 2].

Euler apresentou uma fatoração para F_5, que supostamente seria o sexto primo de Fermat, demonstrou que as equações $x^3 + y^3 = z^3$ e $x^4 + y^4 = z^4$ não possuem soluções inteiras e positivas, descobriu a relação da função zeta de Riemann com os números primos e apresentou um resultado que dá uma condição suficiente para que um número natural seja perfeito par, dentre outras contribuições que o tornaram um matemático de destaque na Teoria dos Números e em outras áreas da matemática [1, 2].

Mas o que são os números primos? Com que regularidade esses números se distribuem e por que são tão importantes? O que são conjecturas e quais ainda não tiveram sua validade provada ou refutada pelos matemáticos? E por que tais números fascinam tanto os estudiosos da Teoria dos Números? Essas questões serão apresentadas e discutidas nesse e nos próximos capítulos.

1.2 Definições e Teoremas Fundamentais

Definição 1.1 *Um número $p \in \mathbb{N}$ é denominado primo se $p > 1$ e se seus únicos divisores naturais são p e 1. O conjunto dos números primos é indicado por $\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ é primo}\}$.*

Definição 1.2 *Um número $n \in \mathbb{N}$ é denominado composto se $n > 1$ e n não é primo.*

Exemplo 1.1 *O número 5 é primo, pois seus únicos divisores naturais são: 5 e 1. Do mesmo modo, o número 13 também é primo, pois seus únicos divisores naturais são: 13 e 1.*

Exemplo 1.2 *Já o número 10 não é primo; seus divisores naturais são: 1, 2, 5 e 10. Ou seja, possui 4 divisores naturais distintos.*

Um número composto pode ser decomposto em fatores primos. O Teorema Fundamental da Aritmética diz que essa decomposição ocorre de forma única, a menos de ordenação.

Teorema 1.1 *Teorema Fundamental da Aritmética.*

a) Todo número $1 < n \in \mathbb{N}$ *é produto de números primos, ou seja, existem* $p_1, p_2, \cdots, p_r \in \mathbb{P}$ *tais que* $n = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_r$.

b) Se $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_r = q_1 \times q_2 \times \cdots \times q_s$*, com* $p_1, p_2, \cdots, p_r, q_1, q_2, \cdots, q_s \in \mathbb{P}$*, e se* $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_r$*, tal como* $q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_s$*, então* $r = s$ *e* $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2, \cdots, p_r = q_r$.

Demonstração. (o leitor poderá encontrar essa prova do teorema na referência [4]).

a) Primeiro deve ser demonstrada a existência da escrita de n como produto de números primos. Se $n = p$ é um número primo, a afirmação fica clara ($r = 1$). A afirmação é mostrada para n composto supondo-se sua veracidade para todo $m \in \mathbb{N}$, com $1 < m < n$. Seja $S = \{t \in \mathbb{N} : t > 1 \text{ e } t|n\}$. Como $n > 1$, $n \in$ S, isto é, S $\neq \emptyset$. Pelo Princípio da Boa Ordenação [5] existe um $p_1 \in$ S minimal. É claro que p_1 é primo (pois, se não fosse, poderia ser decomposto e, assim, não seria minimal) e $m \in \mathbb{N}$, com $n = p_1 \times m$. Como $p_1 > 1$ e n não é primo, segue que $1 < m < n$. Como a afirmação já é válida para este m, existem $p_2, p_3, \cdots, p_r \in \mathbb{P}$, tais que $m = p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_r$. Segue, como afirmado: $n = p_1 \times m = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_r$.

b) Agora a unicidade dessa escrita também precisa ser provada. Suponha que n possa ser escrito de duas maneiras diferentes, ou seja, $n = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_r$ e $n = q_1 \times q_2 \times \cdots \times q_s$. Logo, $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_r = q_1 \times q_2 \times \cdots \times q_s$, com $p_1, p_2, \cdots, p_r, q_1, q_2, \cdots, q_s \in \mathbb{P}$ e $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_r$, tal como $q_1 \leq q_2 \leq ... \leq q_s$. Assim, $p_1 \mid q_1 \times q_2 \times \cdots \times q_s$, de onde se conclui que p_1 tem que dividir algum dos fatores $q_1, q_2, \cdots, q_s$, pois um número primo divide um produto se ele divide um dos seus fatores. Logo, existe k ($1 \leq k \leq s$), com $p_1|q_k$. Como p_1 e q_k são primos, temos $p_1 = q_k \geq q_1$. Da mesma forma, $q_1|p_l$, para algum l ($1 \leq l \leq r$) e segue que $q_1 = p_l \geq p_1$. Assim, $p_1 = q_1$. Agora, de $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_r = p_1 \times q_2 \times \cdots \times q_s$, segue que $p_2 \times \cdots \times p_r = q_2 \times \cdots \times q_s$.

Por indução conclui-se que $r - 1 = s - 1$ (isto é, $r = s$) e $p_2 = q_2$, $p_3 = q_3$, $\cdots$, $p_r = q_r$. Junto com $p_1 = q_1$, isto mostra que n se escreve como produto de primos de forma única, a menos da ordem. ∎

É por meio do Teorema Fundamental da Aritmética que se pode escrever qualquer número natural $n > 1$ como produto de números primos. Para tal, utilizamos o algoritmo da fatoração para decompor um número natural em fatores primos.

Definição 1.3 *Fatoração de um número natural é a sua decomposição em um produto de números primos.*

Exemplo 1.3 *Decompondo os números* 15, 24 *e* 343 *em fatores primos, tem-se que* $15 = 3 \times 5$, $24 = 2^3 \times 3$ *e* $343 = 7^3$.

Quando se realiza a fatoração de um número natural, é preciso verificar se ele é divisível pelos números primos menores que o número dado. Por exemplo, para fatorar o número 12, o correto seria verificar se ele é divisível por 2, 3, 5, 7 e 11. Essa tarefa não se torna tão simples assim quando o número a ser fatorado é muito grande, devido à quantidade de fatores primos a serem inspecionados. Nessa perspectiva, esse trabalho pode ser amenizado quando se leva em consideração que não é necessário verificar se o número em questão é divisível por **todos** os números primos menores que ele. Ora, se n é um número primo, então nada precisa ser verificado, visto que os seus únicos divisores são 1 e ele mesmo. Se n não é primo, então é um número composto e, desse modo, pode ser decomposto num produto da forma $n = ab$. Se $a > \sqrt{n}$ e $b > \sqrt{n}$, então $n = ab > \sqrt{n} \times \sqrt{n} = n$, o que é um absurdo. Portanto, $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$, e todo primo p que divide a é tal que $p \leq a$, satisfazendo a relação $p \leq a \leq \sqrt{n}$ e, por conseguinte, $p \leq \sqrt{n}$. Ou seja, na decomposição em fatores primos do número natural $n > 1$ existe um número primo p tal que $p \leq \sqrt{n}$. Desse modo, fica provado que é suficiente verificar a divisibilidade de n somente pelos números primos menores ou iguais a $\sqrt{n}$, o que reduz significativamente a sua quantidade nessa inspeção. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar [5].

Exemplo 1.4 . *O número 97 é primo, pois, sabendo-se que* $\sqrt{97} = 9{,}848857801...$, *basta verificar se 97 é divisível pelos números primos menores que 9: 2, 3, 5 e 7. Por nenhum desses números primos dividir 97, confirma-se a afirmação inicial.*

Por outro lado, o número 91 não é primo. Tem-se que $\sqrt{91} = 9{,}539392014...$ *e, desse modo, é preciso verificar se 91 é divisível pelos números primos menores que 9: 2, 3, 5 e 7. Como* $\frac{91}{7} = 13$ *e 7 e 13 são fatores primos, os divisores de 91 são: 1, 7, 13 e 91.*

Quando se procede à fatoração de um número natural n dado, é necessário conhecer os números primos menores que n. Caso o número considerado não seja muito grande, não será uma tarefa difícil determiná-los. Porém, para números grandes, a verificação consome muito tempo se não forem utilizados instrumentos de cálculo que auxiliem nas divisões.

Dessa forma, surge uma alternativa viável para a obtenção de números primos menores que um dado número natural n, utilizando a multiplicação em vez da divisão. É o chamado crivo de Eratóstenes, um método desenvolvido pelo matemático grego da Antiguidade, famoso por calcular a medida do raio da Terra.

Definição 1.4 *Crivo de Eratóstenes. O crivo de Eratóstenes é um método que utiliza multiplicações para determinar todos os números primos inferiores a um certo número natural n dado.*

Para se aplicar o crivo de Eratóstenes, é necessário observar inicialmente que todo número composto n possui um divisor menor que ou igual a $\sqrt{n}$, como já foi explicado anteriormente nesse capítulo. Dessa forma, listam-se inicialmente todos os números naturais de 2 até n, em ordem crescente. Logo após, determina-se o maior número primo a ser utilizado no processo, que é o maior número primo menor que ou igual a $\sqrt{n}$. O número primo 2 é mantido na relação e todos os seus múltiplos, a partir do 4, são descartados. O próximo número da lista será primo, pois, se não fosse, teria sido excluído anteriormente. Esse número primo, no caso, será o 3. O procedimento deve ser repetido até que sejam descartados os múltiplos do maior primo menor que ou igual a $\sqrt{n}$. Os números restantes na lista serão todos primos, pois não foram retirados em nenhuma etapa do processo.

Em geral, quando o crivo de Eratóstenes é aplicado e os múltiplos de um primo p_r qualquer são removidos da lista, o próximo número que permanecer nela será primo também. Pode-se denotar esse número primo por p_{r+1}. Se p_{r+1} fosse composto, já teria sido descartado em uma etapa anterior. Daí, a sequência de números primos formada por p_r, $p_{r+1}, \cdots$ e p_z, tal que p_z é o maior número primo menor que ou igual a $\sqrt{n}$, representará a sequência dos números primos menores que n. Em [5], o leitor encontra mais detalhes.

Nesse ponto, surge uma pergunta: qual é a quantidade de números primos existentes? O próximo teorema responderá a essa pergunta.

Teorema 1.2 *Existem infinitos números primos.*

Demonstração. Essa prova segue o raciocínio de [2]. Inicialmente se supõe que existe uma quantidade finita de números primos, quais sejam: $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_r$. Depois, considera-se o número natural $n = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_r + 1$. O Teorema Fundamental da Aritmética garante a existência de um fator primo p na fatoração de n. Esse fator só pode ser um dos números primos $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_{r-1}$ ou p_r. O número n não é primo, pois n é maior que qualquer elemento de $\mathbb{P}$. Se n é composto, o fator primo p divide o produto $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_r$. Porém, isso implica que p também divide 1, o que é um absurdo. Logo, existe uma quantidade infinita de números primos. ∎

Esse teorema, que se encontra na Proposição 20 do Livro IX de *Os Elementos*, de Euclides, é um dos teoremas mais importantes da Teoria dos Números e mostra que, por maior que seja um dado número primo, sempre será possível encontrar outro maior ainda.

Capítulo 2

Alguns Números Primos Especiais

Nesse capítulo, será dada ênfase a definições mais aprofundadas envolvendo números primos, com o objetivo de se consolidar os pré-requisitos necessários para a posterior exposição de alguns problemas em aberto que ainda fascinam e instigam os matemáticos.

Com uma base teórica bem fundamentada, também é possível apresentar a proposta de atividades a serem realizadas com os estudantes por meio de uma sequência didática, tendo em vista o estímulo à sua curiosidade e o incentivo à área da pesquisa matemática.

Considerando o vasto campo da Teoria dos Números, cabe ressaltar que muitas definições referentes a diferentes números primos especiais, por exemplos os números primos palindrômicos, os primos de Sophie Germain, de Ramanujan, dentre outros, não serão apresentadas nessa dissertação, o que não exclui e nem reduz a sua importância.

2.1 Primos Gêmeos

Os primos gêmeos são de particular interesse para a teoria dos números, pois não se sabe ainda se existem infinitos números desta forma.

Definição 2.1 . *Um par de números* $(p, p+2)$ *é denominado um par de primos gêmeos se ambos,* p *e* $p+2$*, são primos.*

Exemplo 2.1 *Os seguintes pares* $(3,5)$*,* $(5,7)$*,* $(11,13)$*,* $(17,19)$*,* $(29,31)$*,* $(41,43)$*,* $(59,61)$*,* $(71,73)$ *são os pares de primos gêmeos quando* $p \leq 97$*.*

No entanto, alguns resultados sobre os números primos gêmeos são conhecidos e serão falados mais adiante. Uma de suas propriedades mais básica é dada pela proposição que segue.

Proposição 2.1 . *Com exceção do par* $(3,5)$*, todos os pares de primos gêmeos são da forma* $(6n-1, 6n+1)$*, sendo* n *um número natural.*

Demonstração. Considere um par de primos gêmeos $(p, p+2)$. Pelo algoritmo da divisão sabe-se que o número primo p pode ser escrito em alguma das formas a seguir: $6n-2$, $6n-1$, $6n$, $6n+1$, $6n+2$ ou $6n+3$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Desses números, apenas $6n-1$ e $6n+1$ podem ser primos, pois os números restantes claramente são múltiplos de 2 ou de 3. Nota-se que imediato que $(6n+1)-(6n-1)=2$. Finalmente, conclui-se que caso o par $(p, p+2)$ seja de números primos gêmeos, então ele só pode ser da forma $(6n-1, 6n+1)$. ∎

Um resultado nada trivial, mas de fundamental importância é o chamado teorema de Brun. Não é sabido ainda se existem infinitos números primos gêmeos, no entanto é sabido que se eles forem infinitos então certamente se tornam cada vez mais esparsos. O teorema de Brun afirma que a soma dos recíprocos dos primos gêmeos

$$\sum_{p,p+2\in\mathbb{P}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}\right) < \infty$$

é convergente [6, 7]. Este resultado permite concluir que o surgimento dos primos gêmeos, caso existam, ocorrem com uma frequência baixa, pois a série dada pelo teorema de Brun está associada a série harmônica que é reconhecidamente divergente.

2.2 Primos de Mersenne

Definição 2.2 *Números de Mersenne são os números da forma* $2^n - 1$ *, sendo* n *um número natural maior que* 1.

Colocando $M_n = 2^n - 1$, obtém-se a sequência dos números de Mersenne: $(3, 7, 31, 63, 127, 255, 511, 1.023, 2.047, \cdots, 2^n - 1, \cdots)$. Nessa sequência, observa-se claramente a presença de números primos e é particularmente interessante quando se trata de números de Mersenne que também são primos. Neste sentido, faz-se a seguinte definição.

Definição 2.3 . *Um primo de Mersenne é um número de Mersenne* M_p*, com* $p \in \mathbb{P}$*, tal que* M_p *é primo.*

O interesse nos números de Mersenne primos se dá pela relação entre eles e os números perfeitos que trataremos a seguir. Uma condição necessária para que M_n seja primo é dada na próxima proposição.

Teorema 2.1 *Se o número de Mersenne* M_n *for primo, então* $n = p$ *é primo.*

A prova dessa proposição é consequência da proposição que segue.

Proposição 2.2 . *Sejam $a \geq 2$ e $k \in \mathbb{N}$. Se $a^k - 1$ for primo, então $a = 2$ e k é primo.*

Demonstração. A demonstração dessa proposição também segue as referências [2, 4]. Inicialmente, considere a progressão geométrica de $(n+1)$ termos, com n um número natural, primeiro termo igual a 1 e razão igual a $a \neq 1$. A soma dos seus termos é dada por:

$$1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{n-1} + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}. \tag{2.1}$$

Logo,

$$a^{n+1} - 1 = (a - 1)(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1} + a^n). \tag{2.2}$$

Fazendo-se $n = k - 1$ em 2.2, tem-se:

$$a^k - 1 = (a - 1)(1 + a + a^2 + \cdots + a^{k-1}), \tag{2.3}$$

com $1 + a +^2 + \cdots + a^{k-1} > 1$, pois a, $k \geq 2$. Ora, se $a^k - 1$ for primo, conclui-se que $a - 1 = 1$, ou seja, $a = 2$.

Agora, por outro lado, suponha que $k = rs$ seja composto, com $1 < s \leq r < k$. Fazendo-se $a = 2^r$ e $n + 1 = s$ em 2.2, tem-se a decomposição

$$(2^r)^s - 1 = 2^k - 1 = (2^r - 1)(1 + 2^r + 2^{2r} + ... + 2^{(s-1)r}), \tag{2.4}$$

na qual $2^r - 1 > 1$ e $1 + 2^r + 2^{2r} + \cdots + 2^{(s-1)r} > 1$, pois $r, s > 1$. Logo $2^k - 1$ não é primo quando k é composto. ■

Desse modo, somente os índices $k = p$ primos dos números de Mersenne M_k são prováveis geradores de primos de Mersenne. Essa condição é necessária, embora não seja suficiente, pois, por exemplo, $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2.048 - 1 = 2.047 = 23 \cdot 89$. Ou seja, para $p = 11$, o número de Mersenne M_{11} é um número composto.

Eis a sequência dos 7 primeiros primos de Marsenne: $3, 7, 31, 127, 8.191$, 131.071, 524.287. Até a data da publicação desta dissertação são conhecidos apenas 51 números primos de Mersenne, sendo que o maior deles é $M_{82589933}$. Todos os primos de Mersenne recentemente encontrados foram através do projeto de busca de grandes números primos de Mersenne chamado de GIMPS [8].

2.3 Primos de Fermat

Além dos números de Mersenne, outro destaque em Teoria dos Números são os números de Fermat.

Definição 2.4 *Números de Fermat são os números da forma* $2^{2^n}+1$, *sendo* n *inteiro não-negativo.*

Definindo $F_n = 2^{2^n}+1$, obtém-se a sequência dos números de Fermat: 3, 5, 17, 257, 65.537, 4.294.967.297, $\cdots$). Nessa sequência, assim como na sequência dos números de Mersenne, observa-se a presença de números primos.

Em 1.640, baseando-se no fato de que $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ e $F_4 = 65.537$ são todos números primos, Fermat escreveu em uma de suas cartas para Mersenne que acreditava que todos os números dessa forma eram primos, acreditando ter descoberto uma fórmula geradora de primos. Porém, em 1.732, Euler conseguiu mostrar que $F_5 = 4.294.967.297$ é divisível por 641 e, portanto, é composto. Desse modo, a afirmação de Fermat foi refutada. De fato, os únicos primos de Fermat que são conhecidos até o momento da publicação desta dissertação, são: 3, 5, 17, 257 e 65.537.

É sabido que se 2^k+1 é um número primo ímpar, então necessariamente k deve ser uma potência de 2 [2, 4]. Portanto, há grande interesse nos possíveis números de Fermat primos. Porém, ainda não se sabe se existem outros números de Fermat fora os cinco conhecidos. Esse assunto será tratado com mais detalhes no próximo capítulo.

2.4 Números Perfeitos

Antes de proceder à definição de número perfeito, que está relacionada diretamente aos números primos, inicialmente será estabelecida uma fórmula para a soma de todos os divisores de um número natural n maior que 1. Para tal, denote por $S(n)$ a soma de todos os divisores de n, donde $S(0)$ não está definido e $S(1) = 1$.

Proposição 2.3 *Seja* $n = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r}$ *um número natural tal que* $p_1 < \cdots < p_r$ *e* $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{N}$. *Se* n' *é um divisor de* n, *então* $n' = p_1^{\beta_1} \times \cdots \times p_r^{\beta_r}$, *em que* $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, *para* $i = 1, \cdots, r$.

Demonstração. Essa prova segue os argumentos de [2]. Seja n' um divisor de n e seja p^β a potência de um número primo p que aparece na decomposição de n' em fatores primos, cuja existência e unicidade são garantidas pelo Teorema Fundamental da Aritmética. Como n' divide n, p^β também divide n e, consequentemente, essa potência p^β divide algum $p_i^{\alpha_i}$ da fatoração de n por ser primo com os demais $p_j^{\alpha_j}$. Logo, $p = p_i$ e $0 \leq \beta \leq \alpha_i$. Generalizando para todos os casos de potências de primos que figuram na decomposição de n' em fatores primos, $n' = p_1^{\beta_1} \times \cdots \times p_r^{\beta_r}$, onde $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, para $i = 1, \cdots, r$. ∎

Proposição 2.4 *Se* $n = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r}$, *em que* $p_1, \cdots, p_r$ *são números primos e* $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ *são inteiros positivos, então,* $S(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \times \cdots \times \frac{p_r^{\alpha_r+1}-1}{p_r-1}$.

Demonstração. Essa demonstração também segue os argumentos de [2]. Seja n' um divisor de n. Pela Proposição 2.4, $n' = p_1^{\beta_1} \times \cdots \times p_r^{\beta_r}$, onde $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, para $i = 1, \cdots, r$. Dessa forma, a soma de todos os divisores de n é dada pelo somatório $\sum p_1^{\beta_1} \times \cdots \times p_r^{\beta_r}$, variando cada β_i no intervalo $0 \leq \beta_i \leq \alpha_r$, para $i = 0, \cdots, r$. Esse somatório é justamente igual ao produto $(1+p_1+\cdots+p_1^{\alpha_1})\times\cdots\times(1+p_r+\cdots+p_r^{\alpha_r})$, em que cada fator representa a soma dos termos de uma progressão geométrica de razão p_k, para $k = 1, \cdots, r$. Logo, $S(n)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \times \cdots \times \frac{p_r^{\alpha_r+1}-1}{p_r-1}$. ∎

A Proposição 2.4 fornece, então, uma expressão para $S(n)$ em função da decomposição de n em fatores primos.

Definição 2.5 *Função aritmética é toda função matemática definida no conjunto dos números inteiros positivos.*

Definição 2.6 *Função multiplicativa é toda função aritmética f não-nula tal que $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$, para $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$ (ou seja, m, n relativamente primos).*

Segue imediatamente da definição de função multiplicativa o seguinte corolário.

Corolário 2.1 *A função $S(n)$ é multiplicativa, isto é, se $\mathrm{mdc}(n, m) = 1$, então $S(nm) = S(n) \cdot S(m)$.*

Exemplo 2.2

$$S(3) = \frac{3^2 - 1}{3 - 1} = 4$$

$$S(6) = S(2 \cdot 3) = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^2 - 1}{3 - 1} = 3 \cdot 4 = 12$$

$$S(18) = S(2 \cdot 3^2) = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3 - 1} = 3 \cdot 13 = 39$$

$$S(28) = S(2^2 \cdot 7) = \frac{2^3 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{7^2 - 1}{7 - 1} = 7 \cdot 8 = 56$$

$$S(45) = S(3^2 \cdot 5) = \frac{3^3 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^2 - 1}{5 - 1} = 13 \cdot 6 = 78$$

Note que S(18) $= 39 \neq 48 =$ S(3) $\cdot$ S(6), pois $(3, 6) = 3 \neq 1$. Logo, a conclusão do corolário não vale se $\mathrm{mdc}(n, m) \neq 1$.

Como já foi definida uma expressão para a soma dos divisores de um número natural n maior que 1, em função da sua decomposição em fatores primos, agora também pode ser dada a definição de número perfeito.

Definição 2.7 . *Número perfeito é um número natural n, $n > 1$, tal que $S(n) = 2n$.*

Um número perfeito possui a propriedade de ser igual à metade da soma dos seus divisores. Pode-se dizer também que um número perfeito é igual à soma dos seus divisores próprios, ou seja, é igual à soma dos divisores distintos dele próprio. Esse fato fascinava os gregos antigos, que viam a perfeição nos números por acreditarem que esse seria o conceito mais fundamental do universo. Curiosamente, os números perfeitos conhecidos são todos pares. Os dois menores números perfeitos são: $6 = 1 + 2 + 3$ e $28 = 1+2+4+7+14$. Algumas culturas reverenciavam esses números por considerarem que Deus criou o mundo em 6 dias e que a Lua tem um ciclo de 28 dias em sua volta completa ao redor da Terra.

Lema 2.1 *Seja n um número inteiro positivo. Tem-se que $S(n) = n+1$ se, e somente se, n é um número primo.*

Demonstração. Essa prova segue da referência [2]. Suponha que $S(n) = n + 1$. Como $S(1) = 1$, n é necessariamente diferente de 1. Logo, $n > 1$ e os únicos divisores de n são 1 e n; logo, n é um número primo. Reciprocamente, se n é primo, então, pela fórmula da soma dos divisores de n, $S(n) = \frac{n^2-1}{n-1} = n + 1$. ■

O teorema seguinte, atribuído a Euclides e a Euler, fornece uma condição necessária e suficiente para um número natural par ser perfeito, relacionando-os diretamente aos primos de Mersenne definidos anteriormente.

Teorema 2.2 *(Euclides–Euler). Um número natural n é um número perfeito par se, e somente se, $n = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$, onde $2^p - 1$ é um primo de Mersenne.*

Demonstração. A prova desse teorema segue os argumentos de [2]. Suponha que $n = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$, onde $2^p - 1$ é um primo de Mersenne. Logo, pela Proposição 2.2, p também é primo e, consequentemente, $p > 1$. Desse modo, n é par. Como $2^p - 1$ é ímpar e 2^{p-1} só possui o fator primo 2 em sua decomposição em fatores primos, tem-se que $\text{mdc}(2^{p-1}, 2^p - 1) = 1$. Logo, pela Proposição 2.4, pelo Corolário 2.1 e pelo Lema 2.1, segue que $S(n) = S(2^p \cdot (2^p - 1)) = S(2^p) \cdot S(2^{p-1}) = \frac{2^p-1}{2-1} \cdot 2^p = 2n$. Portanto, n é um número perfeito.

Reciprocamente, suponha que n é perfeito e par. Pode-se escrever $n = 2^{p-1} \cdot b$, com b ímpar e $p > 1$. Logo, analogamente ao que já foi dito na primeira parte da demonstração, $\text{mdc}(2^{p-1}, b) = 1$ e, pela Proposição 2.4 e pelo Corolário 2.1, segue que $S(n) = S(2^{p-1}) \cdot S(b) = (2^p - 1 \cdot S(b)$. Como n é perfeito, $S(n) = 2n$ e segue que

$$(2^p - 1) \cdot S(b) = 2^p \cdot b. \tag{2.5}$$

Daí, segue que $2^p - 1$ deve dividir b, pois, por serem números consecutivos, $\text{mdc}(2^p, 2^p - 1) = 1$. Logo, existe $c \in \mathbb{N}$, com $c < b$, pois $p > 1$, tal que

$$b = c \cdot (2^p - 1). \tag{2.6}$$

Substituindo 2.6 em 2.5, segue que

$$S(b) = 2^p c. \tag{2.7}$$

De 2.5, tem-se que c e b são dois divisores distintos de b. Somando c a ambos os lados dessa equação, segue que $c + b = 2^p c$ e, portanto, $S(b) = c + b$. Daí, conclui-se que c e b são os únicos divisores de b. Particularmente, $c = 1$ e, de 2.6 e 2.7, conclui-se que $S(b) = b + 1$. Pelo Lema 2.1, b é primo e, por como $b + 1 = 2^p$, $b = 2^p - 1$. Portanto, $n = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$, sendo $2^p - 1$ um primo de Mersenne. ■

Na terceira coluna da Tabela 2.1 temos como exemplo alguns números perfeitos, associados aos respectivos primos de Mersenne geradores, representados na segunda coluna.

p	$2^p - 1$	$n = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$
2	3	$n = 6$
3	7	$n = 28$
5	31	$n = 496$
7	127	$n = 8.128$
13	8.191	$n = 33.550.336$
17	131.071	$n = 65.536 \times 131.071$
19	524.287	$n = 262.144 \times 524.287$
31	$2^{31} - 1$	$n = 2^{30}(2^{31} - -1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
44.497	$2^{44.497} - 1$	$n = 2^{44.496}(2^{44.497} - 1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 2.1: Números perfeitos pares

A primeira parte da demonstração desse teorema, que dá uma condição necessária para que um número natural seja perfeito par, é atribuída a Euclides e pode ser encontrada em *Os Elementos* (Proposição 36, Livro IX), enquanto a recíproca, que fornece uma condição suficiente para que um número natural seja perfeito par, só foi apresentada no século XVIII por Euler. Note que a cada primo de Mersenne está associado um número perfeito par. Como ainda não se sabe se a quantidade de primos de Mersenne é finita ou infinita, a mesma questão se aplica à quantidade de números perfeitos pares existentes. Até a Idade Média, somente eram conhecidos 5 números perfeitos: 6, 28, 496, 8.128 e 33.550.336. Atualmente, mais alguns deles são conhecidos, sendo que, a cada número perfeito descoberto, a quantidade de algarismos aumenta significativamente. Como exemplo, o sexto número perfeito par, 8.589.869.056, possui 10 dígitos, o sétimo, 137.438.691.328, possui 12 dígitos, enquanto o oitavo, 2.305.843.008.139.952.128, possui 19 dígitos. Voltaremos a esse assunto no próximo capítulo.

2.5 Distribuição dos Números Primos

Em Teoria dos Números, um dos mais importantes resultados é o Teorema dos Números Primos, que versa sobre a maneira como esses números se distribuem. Para que ele seja enunciado, é necessário definir a função contagem dos números primos, denotada por $\pi(x)$.

Definição 2.8 . *A função contagem dos números primos é a função* $\pi(x) = |\{p \in \mathbb{P} : p \leq x\}|$, *para todo* $0 \leq x \in \mathbb{R}$.

Claramente, essa função determina a quantidade de números primos menores que ou iguais a um número x qualquer dado.

Exemplo 2.3 $\pi(x) = 0$, *se* $0 \leq x < 2$; $\pi(x) = 1$, *se* $2 \leq x < 3$; $\pi(x) = 2$, *se* $3 \leq x < 5$. *Em geral, se* $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, $\cdots$, $p_{25} = 97$, $\cdots$ *são os termos da sequência dos números primos em ordem natural, então* $\pi(x) = r$, *se* $p_r \leq x < p_{r+1}$ $(r = 1, 2, 3, \cdots)$.

Uma das grandes descobertas do final do século XIX é atribuído os matemáticos Hadamard e de la Valeè Poussin. Ambos demonstraram esse resultado de forma independente em 1986 através da função zeta de Riemann [9, 10].

Teorema 2.3 *(Teorema dos Números Primos) Seja* $\pi(x)$ *a função contagem dos números primos. Então vale o limite*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1.$$

Isso significa que, se o número x é suficientemente grande, a quantidade dos números primos menores que ou iguais a x é dada, com aproximação cada vez melhor, pela função $\frac{x}{\ln x}$.

Esse teorema está sendo citado sem que seja apresentada a sua mais profunda demonstração. Várias versões da demonstração deste teorema surgiram ao longo dos anos, sendo que as primeiras elementares são atribuídas à Erdos (1949) e Selberg (1950) [11, 12].

Ainda há muito mistério envolvendo a distribuição dos números primos, sendo associados a ela alguns problemas em aberto, que serão tratados no próximo capítulo.

Capítulo 3

Histórico de Alguns Problemas em Aberto

Nesse capítulo serão apresentadas brevemente o histórico de alguns problemas relacionados aos números primos que ainda se encontram em aberto e continuam instigando a curiosidade dos matemáticos.

Conjectura matemática é uma proposição que os matemáticos acreditam ser verdadeira, porém ainda não conseguiram obter sua demonstração. Conjecturas podem ser ou não verdadeiras. Para que uma conjectura se torne um teorema, deve ser encontrada uma prova que assegure a sua completa validade. Observa-se que isso nem sempre acontece. A conjectura de Fermat, que afirmava que todos os números de Fermat são primos, é sabidamente falsa. Finalmente, pode-se dizer que as conjecturas na matemática são, então, problemas em aberto.

As ideias envolvidas e as ferramentas utilizadas para a demonstração de uma conjectura matemática ou a resposta para um problema em aberto serão sempre muito úteis para o desenvolvimento da Teoria dos Números e da área de pesquisa matemática.

No Congresso Internacional de Matemáticos de 1912, foram estabelecidos quatro problemas sobre números primos considerados inatacáveis até aquele momento, dadas as condições científicas que ainda não haviam sido desenvolvidas. Esses problemas são chamados de Problemas de Landau. São eles:

- conjectura de Goldbach;
- conjectura dos primos gêmeos;
- conjectura de Legendre;
- Há infinitos números primos da forma $n^2 + 1$, para $n \in \mathbb{N}$.

Até a publicação desta dissertação todos os problemas acima continuam em aberto, porém muitos progressos em direção as soluções destes foram obtidas. Nas seções que seguem alguns detalhes de cada problema, e alguns resultados, serão de forma breve tratados.

3.1 Conjectura dos Primos Gêmeos

Conforme definido na Seção 2.1, dois números primos são gêmeos se p e $p+2$ são primos. A conjectura dos primos gêmeos diz que o número de pares de primos cuja diferença é igual a 2 é infinito. Essa conjectura é atribuída por alguns a Euclides, tornado-a um dos problemas ainda sem solução mais antigos da Matemática.

Goldston, Pintz e Yildirim provaram que a diferença entre dois números primos consecutivos pode ser arbitrariamente pequena em comparação com o intervalo médio [13]. Antes, já haviam proposto uma demonstração condicional, sobre a conjectura de Elliott-Halberstam, para uma versão fraca da conjectura dos primos gêmeos, que diz que há uma quantidade infinita de números primos p tais que $\pi(p+20) - \pi(p) \geq 1$, onde $\pi(x)$ a função de contagem dos números primos menores que ou iguais a x, conforme Definição 2.9 [14]. Na conjectura dos primos gêmeos, o número 20 dessa expressão é substituído por 2. Apesar de representar um considerável avanço, a proposta apresenta um problema: que depende de uma conjectura, que obviamente ainda não provada.

Em 2013, o matemático chinês Yitang Zhang esboçou uma prova da "versão fraca" da conjectura dos números primos, que independe de outras conjecturas, ao contrário da demonstração condicional que foi feita por Goldston, Pintz e Yildirim para a versão fraca da conjectura dos primos gêmeos. Esse resultado incondicional mostra que há infinitos pares de primos consecutivos cuja diferença é menor que 70 milhões de unidades uns dos outros. Isso significa que não importa o quão raros se tornem os números primos no universo dos números gigantescos, sempre haverá um par de primos consecutivos cuja diferença será menor que 70 milhões. Isso mostra que os intervalos entre números primos consecutivos não continuam crescendo para sempre. Para mais informações, o leitor pode consultar [15].

Recentemente o Projeto Polymath foi instituído com o objetivo de tentar diminuir o limite superior encontrado por Zhang [16]. Através do trabalho de James Maynard foi possível diminuir o limite superior proposto por Zhang para $N = 246$ [17]. Desta forma, foi provado que existem infinitos números primos consecutivos cuja distância entre eles é inferior a 246.

Os maiores primos gêmeos conhecidos até o momento formam o par (2.996.863.034.895 $\times$ $2^{1.290.000}$ – 1, 2.996.863.034.895 $\times$ $2^{1.290.000} + 1$). Esses primos têm 388.342 dígitos e foram descobertos em setembro de 2016. Para consultar outros enormes primos gêmeos, o leitor poderá consultar [18].

Ressalta-se que apesar dos enormes avanços a conjectura ainda está em aberto, isto é, não se sabe se existem infinitos primos consecutivos de tal forma que a distância entre eles é 2. Alguns resultados básicos sobre os primos gêmeos e suas generalizações podem ser encontrados na referência [7].

3.2 Conjectura de Legendre

Esta conjectura é mais um dos Problemas de Landau, afirmando que sempre existe um número primo entre dois quadrados perfeitos consecutivos. Isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$ a conjectura afirma que existe pelo menos um número primo p tal que $n^2 < p < (n+1)^2$. É possível ver na Tabela 3.1 que para os primeiros intervalos na forma $(n^2, (n+1)^2)$ essa afirmação é claramente verdadeira. Observamos que se a conjectura de Legendre for verdadeira, então o intervalo entre dois números primos consecutivos, p_n e p_{n+1}, será da ordem $O(p^{1/2})$, em que p é um número primo e a função O indica que a razão $(p_{n+1} - p_n)/p_n^{1/2}$ é assintoticamente limitada.

n	$n^2 < p < (n+1)^2$	p primo
1	$1 < p < 4$	2, 3
2	$4 < p < 9$	5, 7
3	$9 < p < 16$	11, 13
4	$16 < p < 25$	17, 19, 23
5	$25 < p < 36$	29, 31
6	$36 < p < 49$	37, 41, 43, 47
7	$49 < p < 64$	53, 59, 61
8	$64 < p < 81$	67, 71, 73, 79
9	$81 < p < 100$	83, 89, 97

Tabela 3.1: Verificação da conjectura de Legendre para os primeiros 9 intervalos na forma $(n^2, (n+1)^2)$.

Apesar da conjectura de Legendre ainda se encontrar em aberto, na data de publicação deste trabalho, há vários teoremas associados a forma em que os números primos se distribuem em intervalos. Por exemplo, o Teorema de Chebyshev, provado pela primeira vez pelo russo Pafnuty Chebyshev [19], garante que sempre existe um número primo entre dois números naturais específicos.

Teorema 3.1 *(Teorema de Chebyshev). Para $m \geq 2$ com $m \in \mathbb{N}$, temos que sempre existe um primo p, com $m < p < 2m$.*

Este teorema prova o que é conhecido como conjectura de Bertrand. Além disso, a demonstração desse teorema é longa, não elementar e foge do objetivo desse trabalho. A mesma, em sua versão original, pode ser encontrada na referência [19]. Observa-se que há demonstrações elementares deste teorema, sendo a primeira realizada por Srinivasa Ramanujan [20].

Mas, se por um lado, o Teorema de Chebyshev garante a existência de números primos em um intervalo de comprimento determinado, por outro, existem intervalos de comprimento arbitrário n livres de números primos. Isso porque, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um $k_n \in \mathbb{N}$ tal que os números consecutivos $k_n + 1$, $k_n + 2$, $\cdots$, $k_n + n$ são todos compostos. Para isso, dado $n \in \mathbb{N}$, basta escolher $k_n = (n + 1)! + 1$. Como $(n + 1)!$ é divisível por 2, 3, $\cdots$, e $(n + 1)$, consequentemente $k_n + 1 = (n + 1)! + 2$ é divisível por 2, $k_n + 2 = (n + 1)! + 3$ é divisível por 3, $\cdots$, e $k_n + n = (n + 1)! + (n + 1)$ é divisível por $(n + 1)$. Ou seja, todos esses números consecutivos são compostos e o intervalo que compreende esses n números é isento de primos. O leitor interessado em mais informações pode ainda consultar a referência [2].

Apesar da conjectura de Legendre ainda não ter sido provada, resultados parciais notáveis relacionados com esta conjectura já foram apresentados na literatura. Dentre eles cita-se o trabalho de Jing Run Chen que afirma que sempre existe entre n^2 e $(n+1)^2$ um númerp p que é primo ou semiprimo, lembrando que um semiprimo é um número composto formado pelo produto de apenas dois números primos não necessariamente distintos [21]. Outro resultado interessante que se relaciona com a distribuição de números primos em intervalos curtos foi obtido por Henryk Iwaniec e Matti Jutila, em 1984, e afirma que para n suficientemente grande vale que $\pi(n) - \pi(n - n^\theta) > \dfrac{n^\theta}{177 \ln n}$, onde $\frac{13}{23} \leq \theta < 1$ [22]. Observamos que a conjectura de Legendre, em termos da função $\pi(x)$, pode ser reescrita como $\pi((n + 1)^2) - \pi(n^2) \geq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Desta forma, podemos citar um último resultado de 2006 apresentado por Mehdi Hassani que afirma que existem infinitos números naturais n tal que a desigualdade

$$\pi((n + 1)^2) - \pi(n^2) \geq \left\lfloor \frac{1}{2}\left(\frac{(n + 1)^2}{\ln(n + 1)} - \frac{n^2}{\ln n}\right) - \frac{\ln^2 n}{\ln \ln n} \right\rfloor$$

é verdadeira [23].

3.3 Conjectura de Goldbach

Essa conjectura diz que todo número par maior que 2 pode ser representado como a soma de dois números primos. Foi proposta pelo matemático Christian Goldbach (1690 - 1764), em sua correspondência com Euler, em 1742. Esse problema em aberto ainda desafia os matemáticos, que tentam a todo custo demonstrá-la.

A conjectura já foi verificada ser válida para números extremamente grandes por vários estudiosos. Desboves (1885) confirmou a conjectura para números até a ordem 10^4 [24]. Pipping (1938), Stein (1965) e Granville (1989) confirmaram-na para números até a ordem 10^5, 10^8 e 10^{10}, respectivamente [25, 26, 27]. Mais recentemente, através do Projeto *Goldbach conjecture verification*, Tomás Oliveira e Silva et al. verificaram a conjectura de Goldbach para números até $4 \cdot 10^{18}$ [28]. Para consultar mais avanços nas verificações numéricas da conjectura de Goldbach, o leitor pode consultar a referência [29].

Apesar da demonstração efetiva da conjectura de Goldbach ainda não ter sido obtida, alguns avanços em direção a prova da conjectura foram alcançados, apesar de serem resultados mais fracos, assim como os avanços obtidos na tentativa de se provar a conjectura dos primos gêmeos.

Em 1930, o matemático soviético Lev Schnirelmann provou que todo número natural pode ser representado como soma de até 20 números primos [30]. Já em 1937, outro matemático soviético Ivan Vinogradov provou que todo número ímpar, suficientemente grande, pode ser escrito como soma de até 3 números primos [31]. Apesar de não se saber a partir de que número o resultado é válido, a descoberta de Ivan mostrou na época a possibilidade da versão fraca da conjectura de Goldbach, que afirma que todo número ímpar maior que 5 pode ser representado como soma de 3 números primos, distintos ou não, ser verdadeira. Mais recentemente, em 1973, o matemático Chen Jing Run provou que todo número par suficientemente grande pode ser escrito como a soma de um número primo com outro número, produto de, no máximo, dois primos. Por exemplo, $112 = 97 + 3 \cdot 5$. Este resultado é hoje conhecido como teorema de Chen [32]. Finalmente, em 2013, o matemático peruano Harald Helfgott conseguiu demonstrar a conjectura fraca de Goldbach. O problema havia permanecido sem solução por mais de 200 anos. Para mais informações sobre a demonstração desta versão fraca, o leitor pode consultar a referência [33].

3.4 Problema em Aberto sobre Números Perfeitos Ímpares

Ainda não se sabe se existem ou não números perfeitos ímpares. O que é fato é que os números perfeitos conhecidos são todos pares, mas nada impede que existam números perfeitos ímpares também. No livro Elementos, Euclides fornece um método para construir números perfeitos, no entanto o método apresentado só possibilita a construção de números perfeitos pares, conforme Seção 2.4. Desta forma, desde a Grécia antiga já havia o interesse pelos números perfeitos [34]. No entanto, já é esperado pela comunidade matemática que números perfeitos ímpares não sejam possíveis.

O matemático Carl Pomerance apresentou um argumento heurístico de que os números perfeitos são improváveis [35]. Cabe ressaltar que o Dr. Carl Pomerance é um reconhecido pesquisador da teoria dos números sendo premiado e reconhecido por suas contribuições na fatoração de números primos, criptografia e testes de primalidade. Sua tese de doutorado versa sobre os números perfeitos ímpares e nela ele prova que se existir um número perfeito ímpar, então ele deve ser divisível por no mínimo sete primos distintos [36].

Apesar de ainda não estar provado se há ou não números perfeitos ímpares e pesquisadores, como Dr. Carl Pomerance, acreditarem não haver números desta forma, há na literatura diversas verificações numéricas que sugerem o fato de que não existem números perfeitos ímpares. Já foi mostrado, através de métodos numéricos e computacionais que se esses números existirem então eles devem ser maiores do que 10^{1500} e possuir no mínimo de 101 fatores primos, não necessariamente distintos [37]. Além disso, foi mostrado que o seu maior fator primo deve ser maior que 10^{62}.

A título de curiosidade e sem a devida demonstração, também é fato que, se existir um número perfeito ímpar, então ele será representado pela soma de dois quadrados perfeitos [34].

3.5 Problema em Aberto sobre os Primos de Fermat

Ainda não se sabe se existem outros primos de Fermat na sequência de números de Fermat, além dos 5 já conhecidos. Como já foi dito na Seção 1.1 e na Seção 2.3, sendo F_n um número de Fermat, para n inteiro não-negativo, os primos de Fermat conhecidos são apenas aqueles para os quais $n = 0, 1, 2, 3$ e 4.

Até o momento, com o auxílio de métodos computacionais, sabe-se que, para $5 \leq n \leq 32$, com n natural, F_n é composto. Porém, só são conhecidas as fatorações completas de F_n para $1 \leq n \leq 11$ e ainda na data de publicação desta dissertação não são conhecidos fatores de F_{20} e de F_{24}.

Vários outros números de Fermat são comprovadamente compostos. Há muitos grupos de pesquisa buscando, através de métodos computacionais, fatores de números de Fermat suficientemente grandes. Em 13 de fevereiro de 2015, por exemplo, Parangalan, Reynolds, Penné e Fougeron do grupo PrimeGrid descobriu que $267 \cdot 2^{2662090}$ divide $F_{2662088}$ [38]. Em um resultado ainda mais recente, datado de 23 de março de 2019, Gary Gostin mostrou que $332436749 \cdot 2^{9865} + 1$ divide F_{9863}. Observamos, com isso, que há uma grande preocupação com a busca dos números de Fermat através de métodos computacionais. Uma tabela compilada e atualizada sobre os números de Fermat pode ser encontrada nas referências [39, 40].

A seguir, são apresentadas algumas curiosidades (sem demonstração):

1. (Euler) Todo número de Fermat composto, $F_n = 2^{2^n} + 1$, admite decomposição em fatores primos na forma $k \cdot 2^{n+1} + 1$, com k positivo [41];

2. (Goldbach) Dois números de Fermat distintos são primos entre si [41];

3. Para $n \geq 2$, o algarismo das unidade de um número de Fermat é sempre igual a 7 [41, 42];

4. (Gauss) Se F_n é primo, então é possível construir com régua e compasso o polígono regular de F_n lados. Desse modo, é possível construir um heptadecágono regular (polígono com 17 lados iguais), um polígono regular de 257 lados e até mesmo um polígono regular de 65.537 lados [41]

A descoberta de uma solução para o problema em aberto sobre a quantidade de primos de Fermat não significaria o fim, mas o início de uma nova busca por outras respostas. Ou seja, se forem finitos os primos de Fermat, quantos serão? E se forem infinitos, serão os números de Fermat compostos finitos? Assim, podemos perceber que a busca pelo conhecimento é um processo contínuo, que fascina matemáticos a todo instante. Para mais curiosidades, propriedades e detalhes sobre os números de Fermat, o leitor poderá consultar as referências [41].

Capítulo 4

Proposta de Sequências Didáticas

Nessa etapa da dissertação, estabelecendo conexão com os capítulos anteriores, serão propostas duas sequências didáticas relacionadas com definições, teoremas, problemas em aberto e curiosidades sobre os números primos.

Uma sequência didática, diferentemente de um plano de aula, não trata apenas de uma aula. Nela, um determinado tema é trabalhado por completo, com base em um conjunto de atividades atreladas ao conteúdo e com foco nos objetivos a serem alcançados e já definidos no seu planejamento.

A primeira sequência didática proposta abordará a conjectura de Goldbach e a segunda, construções geométricas intimamente relacionadas com os primos de Fermat.

Essas sequências didáticas propostas serão devidamente planejadas e poderão ser utilizada pelo professor em sala de aula, idealizando a aprendizagem do estudante.

Ambas as atividades propostas se enquadram no documento da Base Nacional Comum Curricular [43].

4.1 Sequência Didática sobre a Conjectura de Goldbach

A seguir, será apresentada uma proposta de sequência didática, que poderá ser utilizada para identificar e reconhecer, de forma dinâmica, os números primos, proporcionando ao estudante a integração e o estímulo à curiosidade.

- **Disciplina, nome do professor e série/ano**: Essa sequência didática de atividades de matemática é sugerida para ser aplicada em turmas de 6º/7º ano do Ensino Fundamental.

- **Tema**: números primos e a conjectura de Goldbach.

- **Conteúdos**: dividem-sem em conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais. O conteúdo conceitual a ser tratado são os números primos, considerando que os alunos já tenham sido apresentados aos conteúdos conceituais de números naturais e operações, múltiplos e divisores. Os conteúdos procedimentais são: desenvolvimento de estratégias de utilização das operações de adição e multiplicação, composição e decomposição de números, utilização de diferentes estratégias de cálculo e utilização da história da matemática para compreensão dos conceitos matemáticos e sua evolução. Os conteúdos atitudinais são: interesse e curiosidade para aprender matemática e motivação para a aprendizagem, reconhecimento da importância da matemática, utilização e valorização de estratégias satisfatórias, revisão dessas estratégias quando os resultados não satisfizerem e aplicação correta de algoritmo.

- **Objetivos**: estudar os números primos, familiarizar os estudantes com problemas ainda sem solução e despertar o interesse dos alunos através de atividades que fogem do uso tradicional da sala de aula.

- **Habilidades**: compreender o conceito de números primos e de números compostos através da conjectura de Goldbach.

- **Tempo de duração**: previsão de quatro aulas de 50 minutos cada.

- **Material necessário**: livro didático, caderno, lápis, caneta, borracha e computadores com acesso à internet.

Primeira aula

- **Organização da turma**: os alunos estarão organizados individualmente em fileiras na sala de aula, não sendo necessário separá-los em grupos.

- **Introdução**: nessa parte da aula, o professor definirá número primo e número composto, apresentando alguns exemplos, com o auxílio do livro didático utilizado pela turma. A partir dessa explicação, ele poderá utilizar a história da matemática para citar importantes matemáticos que estudaram os números primos, como, por exemplo, Euclides, Eratóstenes e Goldbach. Também cabe fazer referência a suas contribuições.

  Nesse ponto, o professor já poderá relatar aos alunos sobre a unicidade da decomposição dos números compostos em fatores primos, sem demonstrar o Teorema Fundamental da Aritmética e sem introduzir o dispositivo de fatoração completa dos números compostos, visto que o objetivo dessa sequência didática é apenas a identificação dos números primos e dos números compostos.

- **Desenvolvimento**: o professor apresentará aos alunos uma relação de números naturais, para classificação em primo ou composto pela turma. Nessa etapa, espera-se que o aluno perceba algumas particularidades dos números naturais. Por exemplo, que todo número par maior que 2 e todo número maior que 5 e terminado em 5 é composto. Ou que todo número primo diferente de 2 é ímpar.

  Também poderá realizar uma atividade com os alunos, solicitando que escrevam os números primos menores que 25.

- **Conclusão**: para encerrar a aula, o professor poderá corrigir a atividade realizada, verificando quais foram as dificuldades dos alunos na determinação dos números primos menores que 25. Como atividades para casa, ele poderá solicitar aos alunos que classifiquem outros números naturais em primo ou composto e que escrevam os números primos menores que 40.

- **Avaliação**: nesse primeiro momento, a avaliação deverá ser feita por meio de observação e anotação do professor, registrando as dificuldades encontradas pela turma.

Segunda aula

- **Organização da turma**: no primeiro momento, os alunos estarão organizados individualmente em fileiras na sala de aula. No momento do desenvolvimento da atividade do crivo de Eratóstenes, os alunos formarão duplas.

- **Introdução**: inicialmente, o professor procederá à correção das atividades para casa. Logo após a correção, descreverá o método do crivo de Eratóstenes, com o uso do livro didático e do quadro negro.

  Nessa etapa, é importante verificar se os alunos sabem realmente determinar os múltiplos de um número natural. Desse modo, poderá chamar alguns alunos ao quadro negro para escreverem os múltiplos de alguns números naturais, para que possam obter êxito no desenvolvimento da atividade do crivo de Eratóstenes.

- **Desenvolvimento**: nessa parte da aula, o professor realizará uma atividade cujo objetivo será determinar os números primos menores que 125, por meio do crivo de Eratóstenes, organizando os alunos em duplas nas fileiras.

- **Conclusão**: nos momentos finais da aula, o professor realizará a correção da atividade, comparando os resultados obtidos pelas duplas e verificando os erros cometidos pelos alunos.

  O professor deve enfatizar que o aluno não precisa decorar todos os números primos encontrados na atividade, mas que é preciso compreender esse conceito e saber identificá-los.

- **Avaliação**: a avaliação novamente deverá ser feita por meio de observação e anotação do professor, registrando as dificuldades encontradas pela turma.

Terceira aula

- **Organização da turma**: no primeiro momento, os alunos estarão organizados individualmente em fileiras na sala de aula. No momento do desenvolvimento da atividade da conjectura de Goldbach, os alunos formarão duplas.

- **Introdução**: o professor utilizará o quadro negro para listar os números primos menores que 125 encontrados na atividade da aula anterior. Logo após, descreverá a conjectura de Goldbach para os alunos.

- **Desenvolvimento**: o professor realizará uma atividade cujo objetivo é testar a conjectura de Goldbach para os números pares maiores que 3 e menores que 41, organizando os alunos em duplas nas fileiras da sala de aula e enfatizando que eles poderão utilizar os números listados no quadro negro.

- **Conclusão**: o professor realizará a correção da atividade, comparando os resultados obtidos pelas duplas. Como alguns números pares podem ser representados de duas ou mais maneiras diferentes como soma de dois primos, o professor poderá verificar possíveis respostas corretas, mas distintas, e as respostas erradas dadas pelos alunos.

- **Avaliação**: a avaliação novamente será feita por meio de observação e anotação do professor, registrando as dificuldades encontradas pela turma.

Quarta aula

- **Organização da turma**: os alunos formarão duplas, trios ou grupos maiores na sala de informática, dependendo da quantidade de computadores disponíveis.

- **Introdução**: essa aula será totalmente dedicada ao jogo da conjectura de Goldbach, disponível em na referência. Importante notar que o software pode ser baixado para ser utilizado *offline* em locais onde não se possui internet disponível[1] [44]. No início, o professor distribuirá os alunos em grupos nos computadores, acessando o jogo e instruindo os alunos sobre suas regras.

  O jogo consiste em uma tabela contendo os números naturais de 1 a 25 (Fig. 4.1) ou os números naturais de 1 a 100 (Fig. 4.2). Os números primos são apresentados em círculos verdes, os números pares maiores que 2, em círculos vermelhos, e os números ímpares que não são primos, em círculos de cor rosa. Apenas os círculos nas cores verde e vermelha podem ser selecionados.

[1] `http://nautilus.fis.uc.pt/mn/p_index.html`

Figura 4.1: Jogo da conjectura de Goldbach para os números naturais até 25.

Figura 4.2: Jogo da conjectura de Goldbach para os números naturais até 100.

O jogador deverá primeiramente selecionar um dos números pares maiores que 2 constantes na tabela. Logo em seguida, deverá escolher dois números primos cuja soma resulte nesse número par selecionado. Na tela do jogo, será computada a quantidade de erros e de acertos do jogador (Fig. 4.3).

Figura 4.3: Jogo da conjectura de Goldbach: contagem de erros e acertos.

Nessa etapa, é importante constatar se os alunos realmente compreenderam o funcionamento do jogo, para que o bom andamento da dinâmica não seja comprometido. O professor utilizará a opção de jogo que disponibiliza os primeiros 25 números naturais para a instrução e estímulo inicial aos alunos.

- **Desenvolvimento**: de forma divertida, os alunos testarão novamente a conjectura de Goldbach, utilizando agora, no computador, a opção de jogo que disponibiliza os primeiros 100 números naturais.

  O professor poderá sugerir que o grupo vencedor será aquele que representar corretamente mais somas no menor tempo ou aquele que representar primeiro todas as somas corretamente.

- **Conclusão**: o professor realizará a conferência para verificar se o provável grupo vencedor realizou todas as somas do jogo. Caso não tenham sido realizadas todas ainda, o jogo continuará, até que algum grupo tenha completado a atividade.

  Para concluir a atividade, o professor enfatizará aos alunos que, mesmo que todos os números pares do 4 ao 100 possam ser representados como soma de dois primos, isso não significa que essa regra vale para todos os números pares maiores que 2. E, desse modo, o problema continua em aberto até o momento.

- **Avaliação**: a avaliação mais uma vez será feita por meio de observação e anotação do professor, além de registro por parte dos alunos das dificuldades encontradas durante todo o processo, bem como o aprendizado adquirido por eles.

4.2 Sequência Didática sobre Construções Geométricas Relacionadas com Primos de Fermat

A seguir, será apresentada outra proposta de sequência didática, que poderá ser utilizada para identificar primos de Fermat e construir polígonos regulares que mantêm relação com esses números, conforme provado por Gauss, utilizando o *software* gratuito Geogebra[2], possibilitando o acesso do estudante a novas tecnologias.

- **Disciplina, nome do professor e série/ano**: Essa sequência didática de atividades de matemática é sugerida para ser aplicada em turmas de 7º/8º ano do Ensino Fundamental.

- **Tema**: o tema será números primos e construções geométricas.

- **Conteúdos**: dividem-sem em conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais. O conteúdo conceitual a ser tratado são os números primos e os polígonos regulares, considerando que os alunos já tenham sido apresentados ao conteúdo conceitual de potenciação e de polígonos. Os conteúdos procedimentais são: utilização do *software* Geogebra e utilização da história da matemática para compreensão dos conceitos matemáticos e sua evolução. Os conteúdos atitudinais são: reconhecimento da importância da matemática e motivação para a aprendizagem, interesse por utilizar as diferentes representações matemáticas que se adaptam com mais precisão e funcionalidade a cada situação-problema, utilização e valorização de estratégias satisfatórias, revisão dessas estratégias quando os resultados não satisfizerem.

- **Objetivos**: compreender e aprofundar o conceito de primos e compostos através do números de Fermat. Relacionar os números primos de Fermat com a construção de polígonos regulares. Desenvolver novas habilidades com réguas e compassos virtuais através do Geogebra.

[2] `http://www.geogebra.org`

- **Habilidades**: fixação e compreensão dos conceitos de números primos e compostos; capacidade de inter-relacionar conceitos matemáticos de diferentes áreas; desenvolver hábito e prática de utilização de *softwares* matemáticos.
- **Tempo de duração**: previsão de quatro aulas de 50 minutos cada.
- **Material necessário**: livro didático, caderno, lápis, caneta, borracha, calculadora e computadores com acesso à internet.

Primeira aula

- **Objetivo**: Revisar o conteúdo referente aos números primos.
- **Organização da turma**: os alunos estarão organizados individualmente em fileiras na sala de aula, não sendo necessário separá-los em grupos.
- **Introdução**: nessa parte da aula, o professor fará uma revisão sobre número primo e número composto, apresentando alguns exemplos.
- **Desenvolvimento**: o professor apresentará aos alunos uma relação de números naturais, para classificação em primo ou composto pela turma, e realizará uma atividade com os alunos, solicitando que escrevam os números primos menores que 50. Será apresentado também o crivo de Eratóstenes para auxiliar os alunos nas atividades de busca de números primos.
- **Conclusão**: para encerrar a aula, o professor poderá corrigir a atividade realizada, verificando quais foram as dificuldades dos alunos na determinação dos números primos menores que 50. Como atividades para casa, ele poderá solicitar aos alunos que classifiquem outros números naturais em primo ou composto e que escrevam os números primos menores que 100.
- **Avaliação**: nesse primeiro momento, a avaliação deverá ser feita por meio de observação e anotação do professor, registrando as dificuldades encontradas pela turma.

Segunda aula

- **Objetivo**: Introduzir os números de Fermat e algumas de suas propriedades.
- **Organização da turma**: no primeiro momento, os alunos estarão organizados individualmente em fileiras na sala de aula. No momento da atividade dos números de Fermat, formarão duplas.

- **Introdução**: inicialmente, o professor procederá à correção das atividades para casa. Logo após a correção, ele poderá utilizar a história da Matemática para fazer referência a Fermat e às suas contribuições e definir formalmente número de Fermat e também algumas de suas propriedades. O professor pode instigar os alunos a de fato verificarem que F_3 é um número primo utilizando o crivo de Eratóstenes.

- **Desenvolvimento**: o professor realizará uma atividade na qual os alunos, em duplas, determinarão os seis primeiros termos da sequência de números de Fermat, com e sem o uso da calculadora.

  Ao término da atividade, o professor realizará a correção, informando aos alunos que os cinco primeiros termos da sequência obtida são primos, sendo que esses são os únicos números primos conhecidos nessa sequência, e que são chamados de primos de Fermat.

  O professor poderá realizar uma breve atividade solicitando aos alunos que verifiquem que o sexto número de Fermat é divisível por 641 e, portanto, é composto.

  Finalmente, o professor deverá falar do apelo geométrico entre a sequência de números de Fermat primos e os polígonos regulares.

- **Conclusão**: nos momentos finais da aula, o professor realizará a correção da atividade, comparando os resultados obtidos pelas duplas e verificando os erros cometidos pelos alunos.

- **Avaliação**: a avaliação novamente deverá ser feita por meio de observação e anotação do professor, registrando as dificuldades encontradas pela turma.

Terceira aula

- **Objetivo**: Familiarizar os alunos com o *software* Geogebra.

- **Organização da turma**: os alunos formarão duplas, trios ou grupos maiores na sala de informática, dependendo da quantidade de computadores disponíveis.

- **Introdução**: esta aula será dedicada ao *software* Geogebra. No início, o professor distribuirá os alunos nos computadores, informando que eles aprenderão a utilizar alguns comandos do Geogebra.

- **Desenvolvimento**: o Geogebra é um programa matemático desenvolvido para ser utilizado em sala de aula. Nessa ferramenta são utilizados vários conceitos geométricos, como: pontos, retas, segmentos, ângulos, polígonos e círculos. Também é possível utilizar comandos algébricos, como: equações, coordenadas e funções (Fig. 4.4).

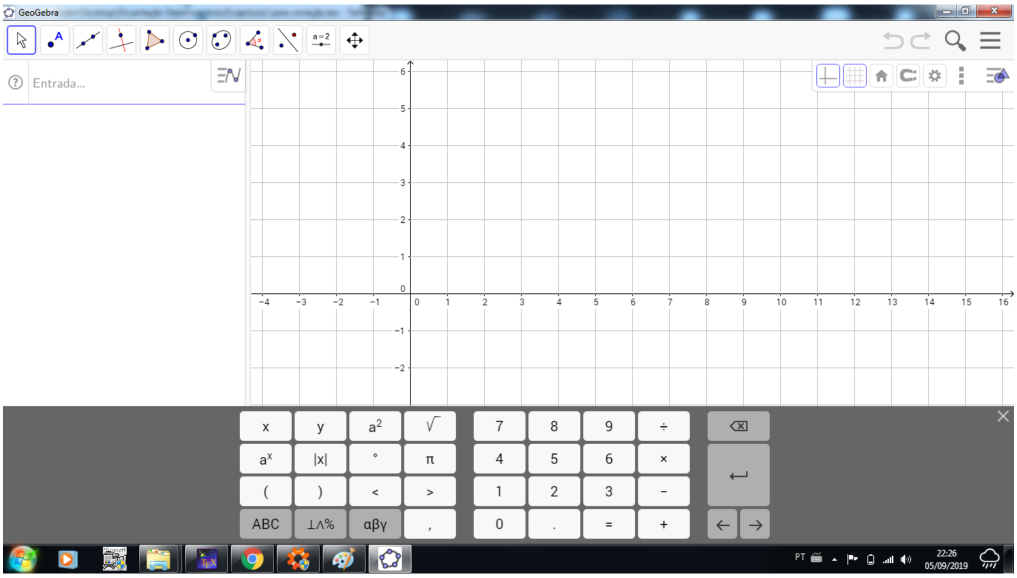

Figura 4.4: Interface Gráfica do Geogebra.

Para traçar um segmento, é suficiente clicar no terceiro ícone e selecionar Segmento. Surgirá na tela uma instrução solicitando que sejam escolhidos dois pontos delimitadores do segmento, conforme Figura 4.5.

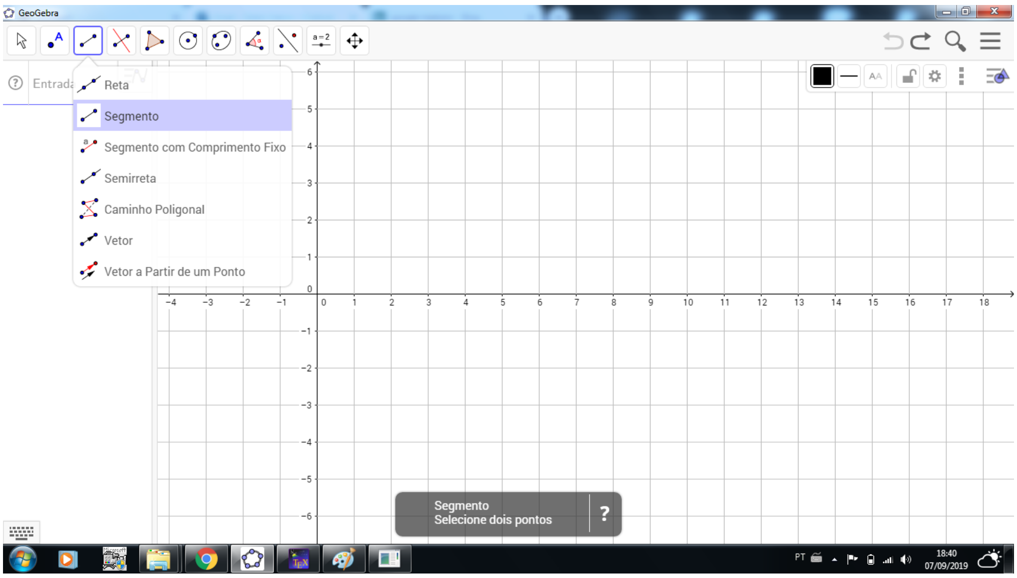

Figura 4.5: Traçando Segmentos de Reta no Geogebra.

Para construir uma circunferência, existem várias opções. O aluno clicará no sexto ícone e selecionará Círculo dados Centro e um de seus Pontos. Surgirá na tela uma instrução solicitando que seja selecionado o centro e um ponto do círculo (Fig. 4.6). Se o raio da circunferência tiver sido dado, será usado o comando Compasso, que se encontra no sexto ícone do Geogebra. Surgirá na tela uma instrução solicitando que sejam selecionados um segmento ou dois pontos para definir o raio e depois, o centro (Fig. 4.7).

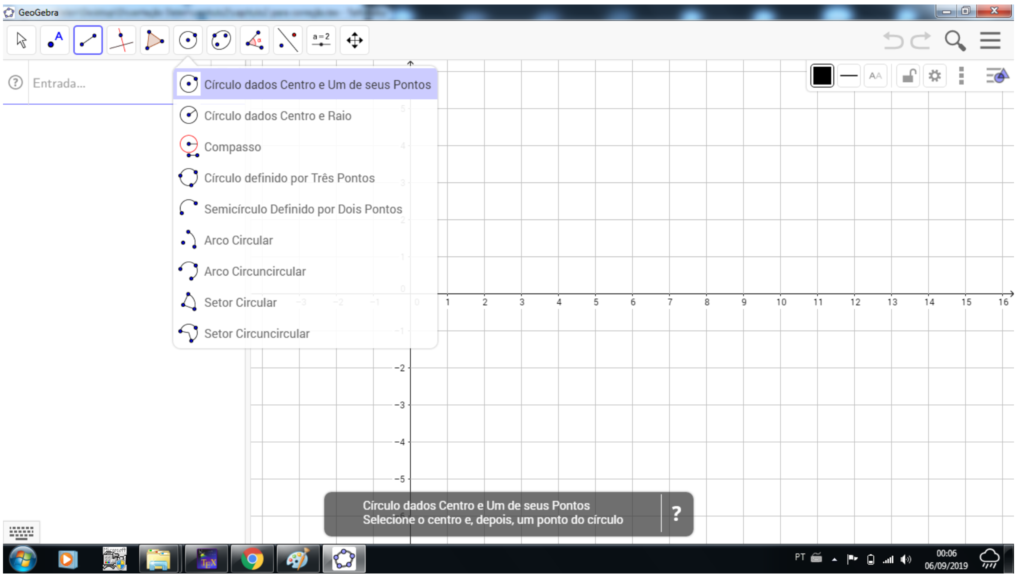

Figura 4.6: Construindo Circunferências no Geogebra.

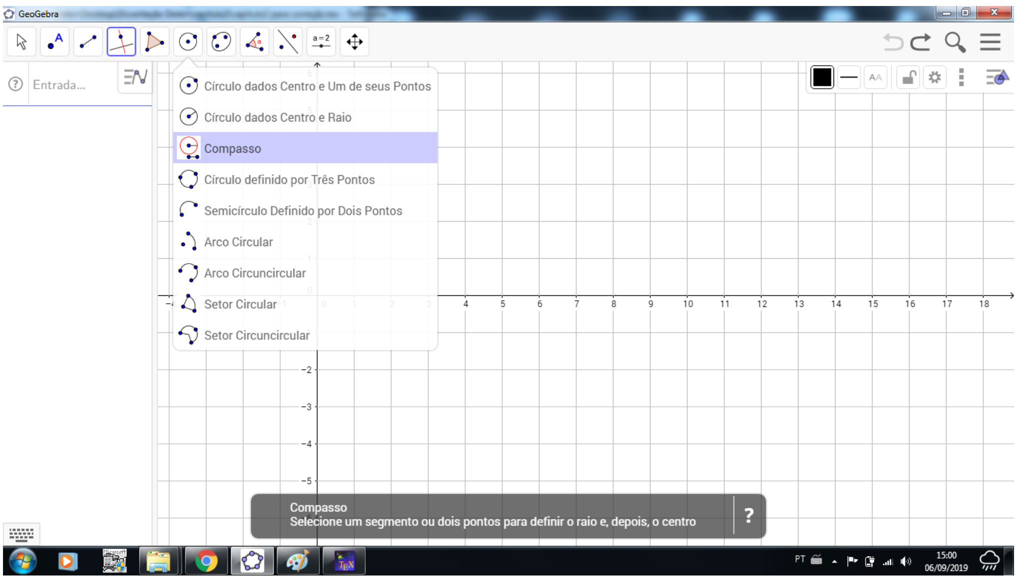

Figura 4.7: Ferramenta Compasso no Geogebra.

Para marcar um ponto, basta clicar no segundo ícone e selecionar Ponto. Surgirá na tela uma instrução solicitando que se clique na janela de visualização ou em um objeto. Dessa forma, é possível marcar um ponto de interseção de dois objetos, destacando-o, conforme Figura 4.8.

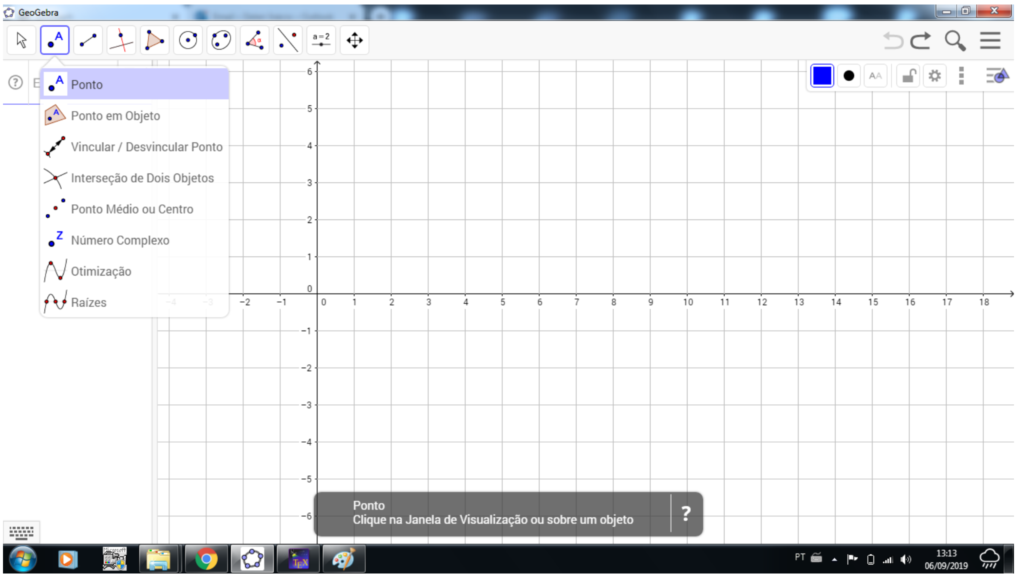

Figura 4.8: Marcando pontos no Geogebra.

Para traçar a mediatriz de um segmento, que é a reta perpendicular ao segmento passando pelo seu ponto médio, clica-se no quarto ícone e se seleciona Mediatriz. Surgirá na tela uma instrução solicitando que sejam selecionados os dois pontos delimitantes do segmento ou ele próprio (Fig. 4.9).

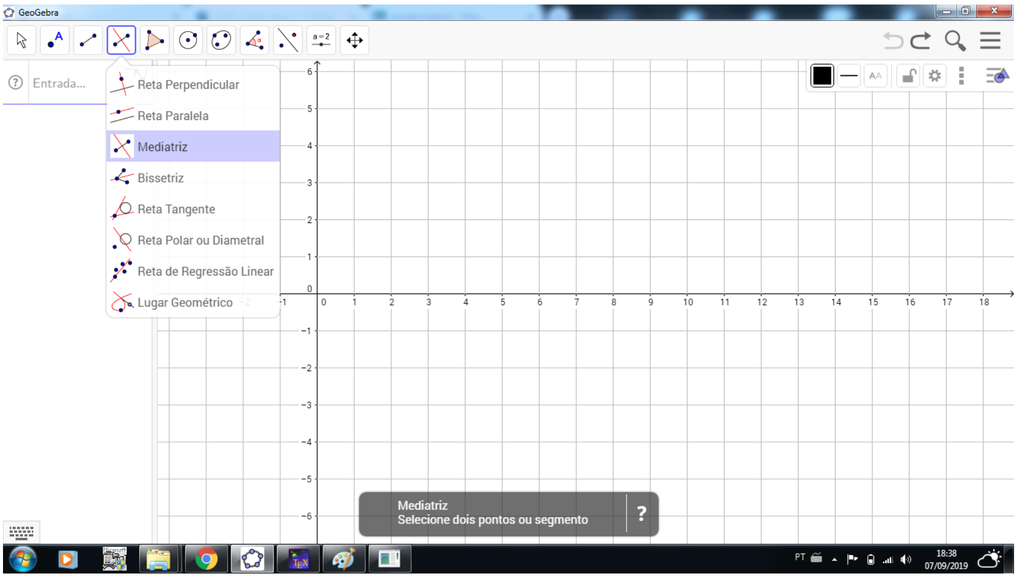

Figura 4.9: Traçando Mediatrizes no Geogebra.

Esses são os comandos que os alunos devem compreender para que possam construir os polígonos regulares da atividade no Geogebra. O professor poderá, juntamente com os alunos, realizar alguns traçados de segmentos, de mediatrizes de segmentos, algumas construções de circunferências e marcações de pontos como atividade.

- **Conclusão**: nos momentos finais da aula, o professor realizará a correção da atividade, comparando os resultados obtidos pelas duplas, trios ou grupos e verificando os erros cometidos pelos alunos.

- **Avaliação**: a avaliação novamente deverá ser feita por meio de observação e anotação do professor, registrando as dificuldades encontradas pela turma.

Quarta aula

- **Objetivo**: Construir polígonos regulares, relacionados com os números de Fermat, utilizando o Geogebra.

- **Organização da turma**: os alunos formarão duplas, trios ou grupos maiores na sala de informática, dependendo da quantidade de computadores disponíveis.

- **Introdução**: o professor fará uma breve revisão dos comandos ensinados na aula anterior. Logo após, mencionará os primos de Fermat e relatará que se o número de Fermat é primo, então é possível construir com régua e compasso o polígono regular cuja quantidade de lados é dada pelo primo de Fermat considerado (conforme curiosidade constante no item 4 da seção 3.5). Desse modo, informará aos alunos que essas construções podem ser realizadas no Geogebra. Vale ressaltar aos alunos que os polígonos regulares possuem lados de mesma medida e ângulos internos iguais.

- **Desenvolvimento**: como primeira atividade, o professor solicitará que os alunos escrevam os cinco primos de Fermat conhecidos no caderno. No final da atividade, o professor informará aos alunos que eles receberão um passo a passo para construção do polígono regular de 3 lados e do polígono regular de 5 lados, que são os polígonos regulares correspondentes aos dois primeiros primos de Fermat.

  Segue o passo a passo para construção de um triângulo equilátero e de um pentágono regular, utilizando o Geogebra, para a realização da próxima atividade.

  Triângulo equilátero ABC [45].

  1º passo: traçar o segmento AB de comprimento f.
  2º passo: construir a circunferência de centro A e raio f.
  3º passo: construir a circunferência de centro B e raio f.
  4º passo: marcar em um dos dois pontos de interseção das circunferências o ponto C.
  5º passo: traçar o segmento AC.
  6º passo: traçar o segmento BC (Fig. 4.10).

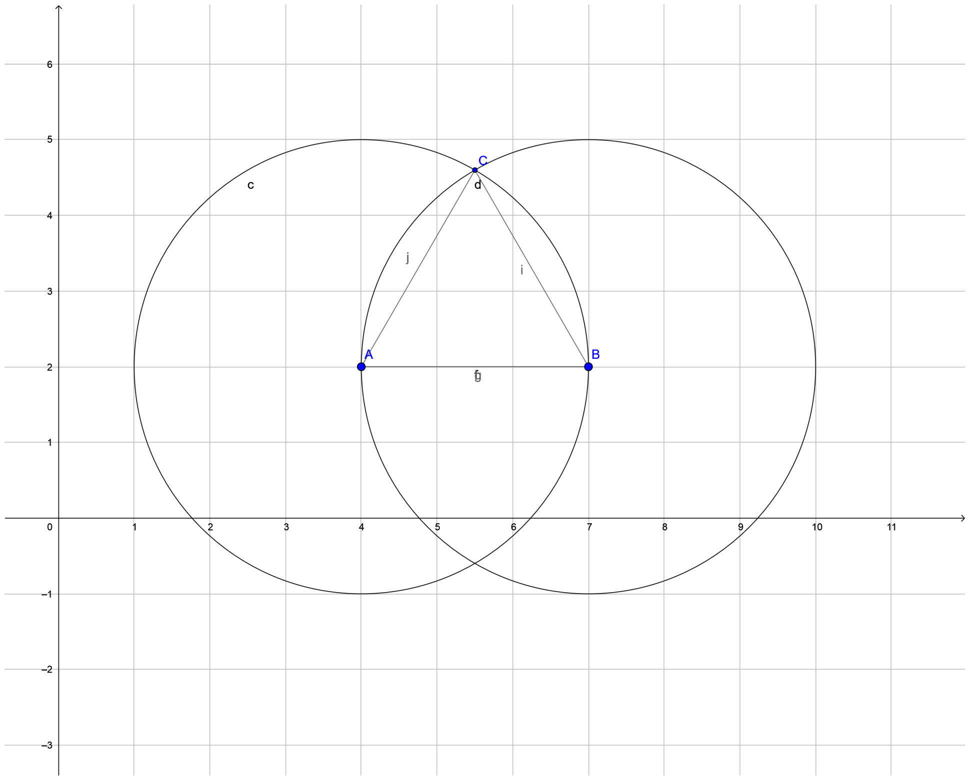

Figura 4.10: Triângulo Equilátro Construído Utilizando os Passos.

Pentágono regular DHJKI [45, 46].

1º passo: construir a circunferência de raio r, com centro em A.
2º passo: traçar o diâmetro BC, de comprimento f = 2r.
3º passo: traçar a mediatriz do segmento BC.
4º passo: marcar nos pontos de interseção da circunferência e da mediatriz do segmento BC os pontos D e E.
5º passo: traçar a mediatriz do segmento AB.
6º passo: marcar no ponto de interseção do segmento AB e da sua mediatriz o ponto F, que é o ponto médio de AB.
7º passo: traçar o segmento DF, de comprimento i.
8º passo: construir a circunferência de raio i, com centro em F.
9º passo: marcar no ponto de interseção dessa circunferência com o segmento BC o ponto G.
10º passo: traçar o segmento DG, de comprimento j.
11º passo: construir a circunferência de raio j, com centro em D.
12º passo: marcar nos pontos de interseção da circunferência com centro em A e

da circunferência com centro em D os pontos H e I.
13º passo: com auxílio do compasso do Geogebra, construir a circunferência de raio j, com centro em H.
14º passo: marcar no ponto de interseção da circunferência com centro em A e da circunferência com centro em H o ponto J, sendo J ponto distinto de D.
15º passo: com auxílio do compasso do Geogebra, construir a circunferência de raio j, com centro em J.
16º passo: marcar no ponto de interseção da circunferência com centro em A e da circunferência com centro em J o ponto K, sendo K ponto distinto de H.
17º passo: traçar os segmentos DH, HJ, JK, KI e ID (Fig. 4.11).

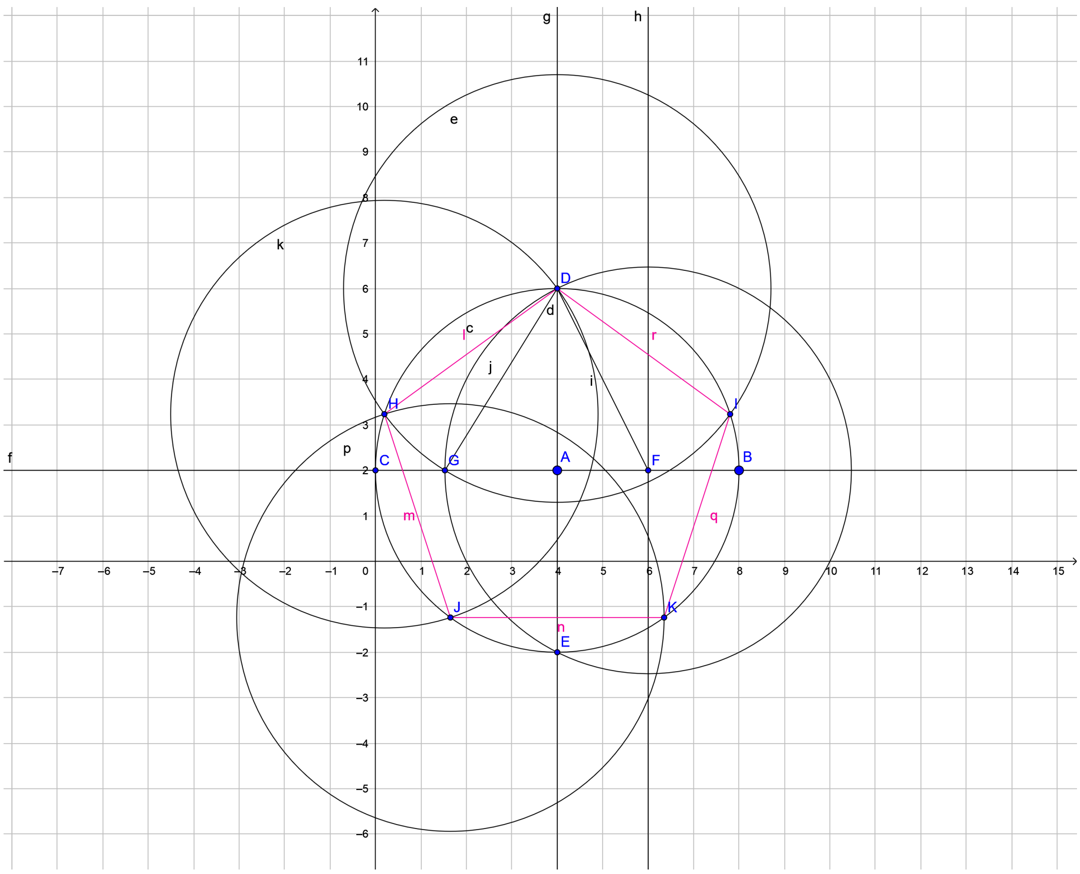

Figura 4.11: Pentágono Regular Construído Utilizando os Passos.

- **Conclusão**: o professor verificará se os alunos realizaram a atividade corretamente. Para terminar a aula, informará aos alunos que também é possível construir um polígono regular de 17 lados seguindo um passo a passo no Geogebra, disponível em [45]. Ele poderá sugerir aos alunos que realizem essa atividade em casa como desafio, entregando à eles o passo a passo para realização.

- **Avaliação**: a avaliação mais uma vez será feita por meio de observação, anotação do professor e atribuindo nota à última atividade realizada, além de registro por parte dos alunos das dificuldades encontradas durante todo o processo, bem como o aprendizado adquirido por eles.

Capítulo 5

Considerações Finais

O presente trabalho apresentou, de forma teórica, relatos históricos, definições, teoremas, problemas em aberto e curiosidades, relacionados com os números primos, possibilitando a construção do conhecimento através do seu estudo. Para a parte prática, foram sugeridas duas sequências didáticas envolvendo um problema em aberto e uma curiosidade, com o objetivo de compreensão e identificação de números primos e de números compostos pelos alunos, além da determinação de primos de Fermat e da construção de polígonos regulares de 3 e de 5 lados.

Pretende-se, então, que as sequências didáticas apresentadas, quando colocadas em prática pelo professor, possam contribuir para o processo de ensino-aprendizagem, motivando os alunos na busca pelo conhecimento, estimulando sua curiosidade e aprimorando a capacidade de argumentação nas situações ligadas ao saber matemático.

Referências Bibliográficas

[1] Mol, R. S. *Introdução à História da Matemática*. Belo Horizonte: CAED - UFMG, 2013.

[2] Hefez A. *Elementos de Aritmética*. Coleção Textos Universitários, SBM, 2011.

[3] Boyer, C. B. *História da Matemática*. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

[4] Maier, R. R. *Teoria dos Números: texto de aula*. Universidade de Brasília. Departamento de Matemática - IE, 2005.

[5] Santos, J. P. O. *Introdução à Teoria dos Números*. Coleção Matemática Universitária. IMPA, Rio de Janeiro. 3ª Ed., 2017.

[6] Brun, V. *La serie* $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{29}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\frac{1}{43}+\frac{1}{59}+\frac{1}{61}+\cdots$*, les dénominateurs sont nombres premiers jumeaux est convergente où finie*. Bull. Sci. Math. 43, 124–128, 1919.

[7] Pantoja, P. H. O. *Primos Gêmeos e Outras Conjecturas*. Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática, Portugal, n. 45, p. 10–11, 2012. Disponível em: `http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero45/primos.pdf`. Último acesso em: 07 set. 2019.

[8] Mersenne Research, Inc. *Great Internet Mersenne Prime Search*. `https://www.mersenne.org/`. Último acesso em: 07 set. 2019.

[9] Hadamard, J. *Sur la distribution des zéros de la fonction* $\zeta(s)$ *et ses conséquences arithmétiques*. Bull. Soc. math. France 24, 199–220, 1896.

[10] de la Vallée Poussin, C. J. *Recherches analytiques la théorie des nombres premiers*. Ann. Soc. scient. Bruxelles 20, 183–256, 1896.

[11] Erdos, P. *Démonstration élémentaire du théorème sur la distribution des nombres premiers*. Scriptum 1, Centre Mathématique, Amsterdam, 1949.

[12] Selberg, A. *An Elementary Proof of the Prime Number Theorem*. Ann. Math. 50, 305–313, 1949.

[13] Goldston, D. A.; Motohashi, Y.; Pintz, J.; Yildirim, C. Y. *Small gaps between primes exist*. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 82 (2006), no. 4, 61–65. doi:10.3792/pjaa.82.61

[14] Goldston, D. A.; Motohashi, Y.; Pintz, J.; Yildirim, C. Y. *Primes in Tuples I*. arXiv Preprint, 2005. arXiv:math/0508185v1

[15] Zhang, Y. *Bounded gaps between primes*. Ann. of Math. (2), 179(3):1121–1174, 2014. doi.org/10.4007/annals.2014.179.3.7

[16] Polymath, D. H. J. *The "bounded gaps between primes"Polymath project - a retrospective*. arXiv Preprint, 2014. arXiv:1409.8361v1

[17] Maynard, J. *Small gaps between primes*. Ann. of Math. (2), 181(1): 383–413. doi:10.4007/annals.2015.181.1.7, MR 3272929

[18] Caldwell, C. *The Primes Pages: prime number research, records and resources*. `http://primes.utm.edu/top20/page.php?id=1`. Último acesso em: 7 set. 2019.

[19] Chebyshev, P. *Mémoire sur les nombres premiers*. Mém. Acad. Sci. St. Pétersbourg 7, 17–33, (1850)

[20] Ramanujan, S. *A Proof of Bertrand's Postulate*. J. Indian Math. Soc. 11, 181–182, 1919.

[21] Chen, J. R. *On the Distribution of Almost Primes in an Interval*. Sci. Sinica 18, 611–627, 1975.

[22] Iwaniec, H. and Pintz, J. *Primes in Short Intervals*. Monatsh. f. Math. 98, 115–143, 1984.

[23] Hassani, M. *Counting primes in the interval* $(n^2, (n+1)^2)$. arXiv Preprint, 2006. arXiv:math/0607096

[24] Desboves, A. Nouv. Ann. Math., 14:293, 1855.

[25] Pipping, N. *Die Goldbachsche Vermutung und der Goldbach-Vinogradovsche Satz*. Acta. Acad. Aboensis, Math. Phys., 11:4–25, 1938.

[26] Stein, M. L.; Stein, P. R. *New experimental results on the Goldbach conjecture.* Math. Mag., 38:72–80, 1965.

[27] Granville, A.; Lune, J.; Riele, H. *Checking the Goldbach conjecture on a vector computer.* Number Theory and Applications: Proceedings of the NATO Advanced Study Institute, pages 42–433, April 27-May 5, 1988.

[28] Silva. T. O.; Herzog, S.; Pardi, S. *Empirical verification of the even Goldbach conjecture and computation of prime gaps up to* $4 \cdot 10^{18}$. Mathematics of Computation, vol. 83, no. 288, pp. 2033-2060, 2014.

[29] Silva, T. O. *Goldbach conjecture verification.* Disponível em: `http://sweet.ua.pt/tos/goldbach.html`. Último acesso em: 7 set. 2019.

[30] Schnirelmann, L. G. *On the additive properties of numbers.* Proceedings of the Don Polytechnic Institute in Novocherkassk (em russo), vol XIV, pp. 3–27 (1930).

[31] Vinogradov, I. M. *The Method of Trigonometrical Sums in the Theory of Numbers (em russo).* Trav. Inst. Math. Stekloff 10, 1937.

[32] Chen, J. R. *On the representation of a large even integer as the sum of a prime and a product of at most two primes.* Sci. Sinica 16 (1973), 157–176.

[33] Helfgott, H. A. *The ternary Goldbach conjecture is true.* arXiv Preprint, 2013. arXiv:1312.7748

[34] Dickson, L. E. *History of the Theory of Numbers, Vol. 1: Divisibility and Primality.* New York: Dover, pp. 3–33, 2005.

[35] OddPerfect.org. *Odd Perfect Number Search.* `http://oddperfect.org/pomerance.html`. Último acesso em: 7 set. 2019.

[36] Pomerance , C. B. *An Odd Perfect Number is Divisible by at Least Seven Distinct Primes.* Tese de Doutorado. Harvard University, 1972.

[37] Ochem, P.; Rao, M. *Odd Perfect Numbers Are Greater than* 10^{1500}. Math. Comput. 81, 1869–1877, 2012.

[38] Slatkevicius, R. *PrimeGrid Project.* Disponível em: `https://www.primegrid.com`. Último acesso em: 7 set. 2019.

[39] Morelli, L. *Distributed Search for Fermat Numbers Divisors.* Disponível em: `http://www.fermatsearch.org/`. Último acesso em: 7 set. 2019.

[40] Keller, W. *Prime Fermat Numbers*. Disponível em: www.prothsearch.com/fermat.html. Último acesso em: 7 set. 2019.

[41] Krizek, M.; Luca, F.; Somer, L. *17 Lectures on Fermat Numbers: From Number Theory to Geometry*. CMS Books in Mathematics. New York: Springer-Verlag. 2001.

[42] Pantoja, P. H. O. *Números de Fermat*. Universidade de Lisboa, Portugal. Disponível em: http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero41/NUMEROS_DE_FERMAT.pdf. Último acesso em: 7 set. 2019.

[43] Brasil. *Base Nacional Comum Curricular. Educação é a Base*. Brasília, Ministério da Educação, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br

[44] Martins, G.; Silva, J.; Paiva, J.; Martins, I. *A Magia dos Números*. http://nautilus.fis.uc.pt/mn/goldbach/index.html. Último acesso em: 25 jul. 2019.

[45] Pimentel, J. *O Ensino de Geometria por Meio de Construções Geométricas*. Dissertação de Mestrado (Profmat). Universidade Federal do Espírito Santo, 2013.

[46] Carvalho, J. B. P. *A Construção, por Euclides, do Pentágono Regular*. V Bienal da SBM, Universidade Federal da Paraíba, 2010.