Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

As álgebras associativas fortemente Lie nilpotentes

por

Cleber Pereira

Orientador: Prof. Dr. Alexei Krassilnikov

Brasília-DF

2019

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

As álgebras associativas fortemente Lie nilpotentes

por

Cleber Pereira

sob orientação do

Prof. Dr. Alexei Krassilnikov

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, PPGMat-UnB, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

As álgebras associativas fortemente Lie nilpotentes

por

Cleber Pereira

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 21 de fevereiro de 2019.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Alexei Krassilnikov – Orientador (MAT-UnB)

Profa. Dra. Irina Sviridova (MAT-UnB)

Profa. Dra. Ana Cristina Vieira (UFMG)

Profa. Dra. Manuela da Silva Souza (UFBA)

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

PP436p? Pereira, Cleber
As álgebras associativas fortemente Lie nilpotentes / Cleber Pereira; orientador Alexei Krassilnikov. -- Brasília, 2019.
96 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2019.

1. Identidades polinomiais. 2. Polinômios centrais. 3. T subespaços. 4. O grupo aditivo de uma álgebra associativa. I. Krassilnikov, Alexei , orient. II. Título.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela vida, saúde, capacidade de estudar e por mais essa importante conquista.

Ao meu orientador Alexei Krassilnikov, pela orientação, pelos ensinamentos, pela compreensão, pelo comprometimento e pela dedicação a esse trabalho.

À minha família por tudo que fizeram por mim. Especialmente aos meus pais Marli Tomazini Pereira e Carlos Pereira, pelo carinho, cuidado, incentivo e por terem acreditado no meu esforço e capacidade de vencer mesmo nas dificuldades da vida acadêmica.

Aos meus filhos Carlos Gabriel e Maria Eduarda pela alegria que trouxeram à minha vida.

Aos meus irmãos Adriano e Poliany, pelo amor carinho e confiança.

À minha sobrinha Nátali pela alegria que trouxe à nossa família.

À minha esposa Luzia de Sousa Resende, minha companheira nessa trajetória, que soube compreender como ninguém essa fase tão importante na minha vida profissional. Agradeço pelo amor, pelo carinho e pela presença nos bons e maus momentos da minha vida.

À Universidade Federal do Acre pela liberação (institucional) das atividades docentes para a realização do doutorado.

Aos professores da banca examinadora, Ana Cristina Vieira, Manuela da Silva Souza e Irina Sviridova, pelas sugestões e colaborações para a melhoria desta tese.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática da UnB, em especial aos professores Alexei Krassilnikov, Cátia Gonçalves, Leandro Ciollete e Irina Sviridova.

Aos professores da Universidade Federal do Acre. Em especial, ao José Ivan, José Roberto, José Ronaldo, Marcos Aurélio e Sérgio Brazil, pelo estímulo à busca do conhecimento.

Aos meus amigos e colegas de doutorado pela amizade, pelas ajudas e pelos momentos vivenciados. Em especial, ao Élis Gardel, Henrique Zanata, Juliana Canela, Letícia, Marcos Duarte, Jhon, Josean, Márcio, Santiago, Dióscoro, Natália, Gustavo, Karla, Túlio, Fábio, Geraldo e Vinícius.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

Dedicatória

Aos meus filhos:

Carlos Gabriel Oliveira Pereira
Maria Eduarda Lima Pereira

"A persistência é o menor caminho para o êxito".

Charles Chaplin

Resumo

Sejam K um anel associativo comutativo unitário e A uma K-álgebra associativa unitária. Definimos a série $\{T^{(n)}(A)\}_{n\geq 1}$ de ideias bilaterais em A por $T^{(1)}(A) = L^{(1)}(A) = A$ e $T^{(n)}(A) = AL^{(n)}(A)A$ ($n \geq 2$), onde $L^{(n)}(A)$ é o K-submódulo de A gerado por todos os comutadores $[a_1, \ldots, a_n]$, onde $a_i \in A$, para cada i. Definimos a série central inferior $\{R^{(m)}(A)\}_{m\geq 0}$ de ideais bilaterais de A indutivamente por $R^{(0)}(A) = A$ e $R^{(m)}(A) = A\big[R^{(m-1)}(A), A\big]A$ ($m \geq 1$). Dizemos que a álgebra A é *Lie nilpotente* de classe no máximo c, se $L^{(c+1)}(A) = \{0\}$ e, dizemos que A é *fortemente Lie nilpotente* de classe no máximo c, se $R^{(c)}(A) = \{0\}$. Observamos que $L^{(n+1)}(A) \subseteq R^{(n)}(A)$, logo cada álgebra A que é fortemente Lie nilpotente, também é Lie nilpotente. Porém, a recíproca, em geral, não é verdadeira.

Sejam F um corpo e $F\langle X\rangle$ a F-álgebra associativa unitária livre, livremente gerada por um conjunto X. É conhecido que o subespaço vetorial dos polinômios centrais $C(E)$ da álgebra de Grassmann de dimensão infinita E sobre um corpo de característica $p > 2$ não é um T-subespaço finitamente gerado de $F\langle X\rangle$. Como E é Lie nilpotente de classe 2, o T-subespaço dos polinômios centrais de uma álgebra Lie nilpotente pode não ser finitamente gerado. No presente trabalho demonstramos que isso não pode acontecer se a álgebra for fortemente Lie nilpotente. O nosso primeiro resultado principal é o seguinte: o T-subespaço $C(B)$ dos polinômios centrais de uma F-álgebra associativa unitária fortemente Lie nilpotente B é sempre finitamente gerado (como T-subespaço de $F\langle X\rangle$).

Sejam K um anel associativo comutativo unitário e $K\langle X\rangle$ a K-álgebra associativa unitária livre, livremente gerada por um conjunto X. Consideremos $R^{(m)}(K\langle X\rangle)$ ($m \geq 0$) e $T^{(n)}(K\langle X\rangle)$ ($n \geq 1$) como definido anteriormente. Por conveniência de notação, quando $X = X_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$, então escrevemos $R_3^{(m)}$ e $T_3^{(n)}$ para representar $R^{(m)}(K\langle X_3\rangle)$ e $T^{(n)}(K\langle X_3\rangle)$, respectivamente. O segundo resultado principal do presente trabalho é o seguinte: $R_3^{(n)} = T_3^{(n+1)}$, para todos $n \geq 0$. Essa igualdade permite dar uma demonstração mais simples de um resultado recente de Kuzmin e Pchelintsev.

Abstract

Let K be a unital associative comutative ring and let A be a unital associative K-algebra. Define the series $\left\{T^{(n)}(A)\right\}_{n\geq 1}$ of two-sided ideals in A by $T^{(1)}(A) = L^{(1)}(A) = A$ and $T^{(n)}(A) = AL^{(n)}(A)A$ $(n \geq 2)$, where $L^{(n)}(A)$ is the K-submodule in A generated by all commutators $[a_1, \ldots, a_n]$, where $a_i \in A$ for each i. Define the lower central series $\left\{R^{(m)}(A)\right\}_{m\geq 0}$ of two-sided ideals in A inductively by $R^{(0)}(A) = A$ and $R^{(m)}(A) = A\left[R^{(m-1)}(A), A\right]A$ $(m \geq 1)$. We say that the algebra A is *Lie nilpotent* of class at most c, if $L^{(c+1)}(A) = \{0\}$ and that A is *strongly Lie nilpotent* of class at most c, if $R^{(c)}(A) = \{0\}$. Note that $L^{(n+1)}(A) \subseteq R^{(n)}(A)$ so each strongly Lie nilpotent algebra A is Lie nilpotent. However, the converse, in general, is not true.

Let F be a field and $F\langle X\rangle$ the free unital associative F-algebra freely generated by a set X. It is known that the vector subespace of central polynomials $C(E)$ of infinite-dimensional Grassmann algebra E over a field of characteristic $p > 2$ is not a finitely generated T-subespace of $F\langle X\rangle$. Since E is Lie nilpotent of class 2, the T-subespace of central polynomials of a Lie nilpotent algebra can be non-finitely generated. In the present work we prove that this cannot happen if the algebra is strongly Lie nilpotent. Our first main result is as follows: the T-subespace $C(B)$ of central polynomials of a strongly Lie nilpotent associative unital F-algebra B is always finitely generated (as a T-subespace of $F\langle X\rangle$).

Let K be a unital associative comutative ring and let $K\langle X\rangle$ be the free unital associative K-algebra freely generated by a set X. Consider $R^{(m)}(K\langle X\rangle)$ $(m \geq 0)$ and $T^{(n)}(K\langle X\rangle)$ $(n \geq 1)$ as defined above. For convenience of notation, if $X = X_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$ then we write $R_3^{(m)}$ and $T_3^{(n)}$ for $R^{(m)}(K\langle X_3\rangle)$ and $T^{(n)}(K\langle X_3\rangle)$, respectively. The second main result of the present work is as follows: $R_3^{(n)} = T_3^{(n+1)}$, for all $n \geq 0$. This equality allows to give a simpler proof of a recent result by Kuzmin and Pchelintsev.

Conteúdo

Resumo v

Abstract vi

Introdução 1

1 Conceitos Preliminares **11**

1.1 Anéis, módulos e álgebras 11

1.1.1 Anéis e módulos 11

1.1.2 Álgebras 14

1.2 Identidades polinomiais, PI-álgebras e T-ideais 17

1.3 Polinômios centrais e T-subespaços 18

1.4 Algumas generalizações do Teorema da Base de Hilbert 19

1.5 As álgebras universais associativas fortemente Lie nilpotentes 26

1.6 As álgebras universais associativas Lie nilpotentes 32

1.6.1 Os geradores de $T^{(n)}$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ 34

1.6.2 Resultados auxiliares 36

2 Os polinômios centrais das álgebras associativas fortemente Lie nilpotentes **44**

2.1 O resultado principal e a sua reformulação 44

2.2 A redução do resultado principal ao resultado sobre certos T-subespaços de $F\langle X\rangle$ 46

2.3 A redução ao resultado sobre certos módulos sobre anéis de polinômios 51

2.3.1 O caso $r = 2$ e $l = 3$ 52

2.3.2 O caso $r = 2$ e $l = 4$ 60
2.3.3 O caso geral 65
2.4 A demonstração do resultado sobre módulos 72

3 As álgebras universais associativas Lie nilpotentes e fortemente Lie nilpotentes. 77
3.1 A relação entre os ideais $T^{(m)}$ e $R^{(n)}$ 78
3.2 A demonstração do Teorema 3: a base de indução 82
3.3 A demonstração do Teorema 3: o passo de indução 86

Bibliografia 91

Introdução

A presente tese é uma contribuição a Teoria de Álgebras com Identidades Polinomiais, que é uma subárea importante da Álgebra. Os primeiros resultados sobre identidades polinomiais foram obtidos nas primeiras décadas do século XX por Dehn e Wagner e o estudo sistemático de álgebras com identidades polinomiais (PI-álgebras) foi iniciado por Kaplansky e Jacobson por volta de 1950. Atualmente a Teoria de Álgebras com Identidades Polinomiais está se desenvolvendo rapidamente, com várias dezenas de artigos publicados anualmente.

Os polinômios centrais das álgebras associativas fortemente Lie nilpotentes

Sejam K um anel associativo comutativo unitário e G uma K-álgebra de Lie com produto $[,]$ denominado comutador ou colchete de Lie. Definimos indutivamente o comutador normado à esquerda dos elementos $g_1, \ldots, g_n \in G$ $(n \geq 3)$ por

$$[g_1, \ldots, g_n] = \big[[g_1, \ldots, g_{n-1}], g_n\big].$$

Para todos os subconjuntos A e B de G, $A, B \subseteq G$, denotamos por $[A, B]$ o K-submódulo de G gerado pelos elementos $[a, b]$, onde $a \in A$ e $b \in B$. Definimos os K-submódulos $L^{(n)}(G)$ de G, com $n = 1, 2, \ldots$, indutivamente por $L^{(1)}(G) = G$ e $L^{(n+1)}(G) = \big[L^{(n)}(G), G\big]$, para todo $n \geq 1$. Deste modo, obtemos uma série descendente de K-submódulos em G, da forma

$$G = L^{(1)}(G) \supseteq L^{(2)}(G) \supseteq L^{(3)}(G) \supseteq \cdots ,$$

denominada **série central inferior** da álgebra G. Observe que $L^{(n)}(G)$ é o K-submódulo de G gerado por todos os comutadores da forma $\big[g_1, \ldots, g_n\big]$, onde $g_i \in G$, para cada $i \in \mathbb{N}$. A álgebra G é dita **nilpotente de classe** c, se $L^{(c)}(G) \neq \{0\}$ e $L^{(c+1)}(G) = \{0\}$. Observe que se G é nilpotente de classe c, então $\big[g_1, \ldots, g_{c+1}\big] = 0$, para todos $g_1, \ldots, g_{c+1} \in G$.

Seja A uma K-álgebra associativa unitária. Para todos $a, b \in A$ definimos a multiplicação de Lie por $[a, b] = ab - ba$. A álgebra A, com essa multiplicação de Lie, é uma álgebra de Lie chamada de **álgebra de Lie associada à álgebra** A e denotada por $A^{(-)}$. O n-ésimo elemento $L^{(n)}(A) = L^{(n)}\big(A^{(-)}\big)$ da série central inferior da álgebra de Lie $A^{(-)}$ é o K-submódulo de A gerado por todos os comutadores $[a_1, \ldots, a_i]$ $(a_i \in A)$. A álgebra associativa A é dita **Lie nilpotente de classe** c se a álgebra associada de Lie $A^{(-)}$ é nilpotente de classe c, ou seja, se $L^{(c)}(A) \neq \{0\}$ e $L^{(c+1)}(A) = \{0\}$. A última condição é equivalente a condição $[a_1, \ldots, a_{c+1}] = 0$, onde $a_i \in A$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Definimos a série $\Big\{T^{(n)}(A)\Big\}_{n \geq 1}$ de ideais bilaterais de A por $T^{(n)} = AL^{(n)}A$, para $n \geq 1$.

O estudo de anéis e álgebras associativas Lie nilpotentes foi iniciado por Jennings [47] em 1947. Desde então anéis e álgebras associativas Lie nilpotentes têm sido investigados em muitos artigos de vários pontos de vista; veja, por exemplo, [3, 35, 38, 42, 60, 62, 67, 74] em nossa bibliografia.

Considere a série de ideais bilaterais da K-álgebra associativa A chamada a série central inferior de A

$$A = R^{(0)}(A) \supseteq R^{(1)}(A) \supseteq R^{(2)}(A) \supseteq \cdots$$

onde $R^{(n)}(A) = A\big[R^{(n-1)}(A), A\big]A$, para $n \geq 1$. A álgebra A é dita **fortemente Lie nilpotente de classe** c, se $R^{(c-1)}(A) \neq \{0\}$ e $R^{(c)}(A) = \{0\}$. É fácil ver que $L^{(n+1)}(A) \subseteq R^{(n)}(A)$, para $n \geq 0$. Portanto, se A é fortemente Lie nilpotente de classe c então A é Lie nilpotente de classe no máximo c. Porém, a recíproca não é verdadeira em geral. Por exemplo, a álgebra de Grassmann de dimensão infinita é Lie nilpotente de classe 2. No entanto, E não é fortemente Lie nilpotente pois $[x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}]$ não é uma identidade polinomial de E para nenhum n.

Drazin e Gruenberg [25] demonstraram que para uma álgebra A gerada por um conjunto Y o ideal $R^{(c)}$ é gerado, como um ideal bilateral de A, por todos os produtos

$$[y_{11},\ldots,y_{1l_1}]\cdots[y_{k1},\ldots,y_{kl_k}],$$

onde $y_{ij}\in Y$ e $l_1+\ldots+l_k-k=c$. Assim, uma álgebra A gerada por Y ser fortemente Lie nilpotente equivale a $[y_{11},\ldots,y_{1l_1}]\cdots[y_{k1},\ldots,y_{kl_k}]=0$, para todos $y_{11},\ldots,y_{1l_1},\ldots,y_{k1},\ldots,y_{kl_k}\in Y$ quando $l_1+\ldots+l_k-k=c$.

Uma outra definição equivalente da cadeia $A=R^{(0)}(A)\supseteq R^{(1)}(A)\supseteq R^{(2)}\supseteq\cdots$ foi dada por Kapranov [49] que usou essa cadeia, que ele denominou de NC-filtração, para desenvolver uma versão de geometria não comutativa. Segundo Kapranov, o ideal $R^{(c)}(A)$ é gerado, como um ideal bilateral de A, por todos os produtos

$$[g_{11},\ldots,g_{1l_1}]\cdots[g_{k1},\ldots,g_{kl_k}]$$

onde $g_{ij}\in Y$ e $l_1+\ldots+l_k-k\geq c$.

O estudo de anéis e álgebras associativas fortemente Lie nilpotentes foi iniciado em 1942 por Jennings [46] e continuado por vários pesquisadores (vide, por exemplo, [25, 49, 65, 73]).

Sejam F um corpo e $F\langle X\rangle$ a F-álgebra associativa unitária livre, livremente gerada pelo conjunto $X=\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\}$. Cada elemento $f=f(x_1,\ldots,x_n)$ de $F\langle X\rangle$ é dito um **polinômio** de $F\langle X\rangle$.

Sejam A uma F-álgebra associativa e $f=f(x_1,\ldots,x_n)$ um polinômio de $F\langle X\rangle$. Dizemos que o polinômio f é uma **identidade polinomial** de A se $f(a_1,\ldots,a_n)=0$, para todos $a_1,\ldots,a_n\in A$. Se f assim é um polinômio não nulo de $F\langle X\rangle$, então dizemos que A é uma **PI-álgebra**. Denotamos por $T(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais da álgebra A.

Um ideal I de $F\langle X\rangle$ é dito um **T-ideal** se ele é fechado por todos os endomorfismos de $F\langle X\rangle$, ou seja, se $f(x_1,\ldots,x_n)\in I$ e $g_1,\ldots,g_n\in F\langle X\rangle$ são polinômios quaisquer de $F\langle X\rangle$, então $f(g_1,\ldots,g_n)\in I$. É fácil ver que, para cada F-álgebra associativa A, o ideal $T(A)$ de todas as identidades polinomiais de A é um T-ideal. Por outro lado, é conhecido que se I é um T-ideal, então existe uma F-álgebra associativa A tal que $I=T(A)$.

O T-ideal **gerado** por um subconjunto S de $F\langle X\rangle$, $S\subseteq F\langle X\rangle$, denotado por $\langle S\rangle^T$, é o menor T-ideal de $F\langle X\rangle$ que contém S. Quando o T-ideal I é gerado por um conjunto finito S, ou seja, $I = \langle S \rangle^T$, onde $|S| < \infty$, então dizemos que I é um **T-ideal finitamente gerado**. Caso contrário, se um T-ideal I não pode ser gerado por nenhum conjunto finito, dizemos que I é um **T-ideal não finitamente gerado**.

Por exemplo, se F é um corpo infinito de característica $\neq 2$ e E é a álgebra de Grassmann de dimensão infinita sobre F então o T-ideal $T(E)$ é gerado por um único polinômio $[x_1, x_2, x_3]$ (veja [61, 53, 31]). Um outro exemplo: se F é um corpo infinito de característica $\neq 2, 3$ e $M_2(F)$ é a álgebra de matrizes 2×2, com coeficientes em F, então $T(M_2(F))$ é gerado por dois polinômios:

$$st_4\big(x_1, x_2, x_3, x_4\big) = \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)}$$

(o polinômio "standard" de grau 4) e

$$\big[[x_1, x_2] \circ [x_3, x_4], x_5\big]$$

onde $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$ (polinômio de Hall) (veja [14, 52, 26, 66]).

Um F-subespaço vetorial V de $F\langle X \rangle$ é dito ser um **T-subespaço** se V é fechado por todos os endomorfismos de $F\langle X \rangle$, ou seja, se $f(x_1, \ldots, x_n) \in V$ e $g_1, \ldots, g_n \in F\langle X \rangle$ são polinômios quaisquer de $F\langle X \rangle$, então $f(g_1, \ldots, g_n) \in V$. Dizemos que o conjunto $Z(A) = \big\{a \in A \mid ab = ba, \text{para todo } b \in A\big\}$ é o **centro** da álgebra A. Se o polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X \rangle$ é tal que $f(a_1, \ldots, a_n) \in Z(A)$, para todos $a_1, \ldots, a_n \in A$, então dizemos que f é um **polinômio central** de A. Denotamos por $C(A)$ o conjunto de todos os polinômios centrais da álgebra A. Para cada álgebra A, o conjunto $C(A)$ é um T-subespaço de $F\langle X \rangle$. De fato, se $f(x_1, \ldots, x_n) \in C(A)$ então $f(a_1, \ldots, a_n) \in C(A)$, para todos $a_1, \ldots, a_n \in A$. Como

$$\varphi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)),$$

segue que $\varphi(f(x_1, \ldots, x_n)) \in C(A)$, para cada endomorfismo φ de $F\langle X \rangle$. Porém, ao contrário dos T-ideais, para um T-subespaço V de $F\langle X \rangle$ nem sempre existe uma álgebra A tal que $V = C(A)$.

O T-subespaço **gerado** por um subconjunto S' de $F\langle X \rangle$, $S' \subseteq F\langle X \rangle$, denotado por $\langle S' \rangle^{ST}$, é o menor T-subespaço de $F\langle X \rangle$ que contém S'. Isto é, um T-subespaço V é gerado por S', se cada elemento de V é uma combinação linear, com coeficientes em F, de elementos da forma $\varphi(s')$, onde $s' \in S'$ e φ é um endomorfismo de $F\langle X\rangle$. Quando um T-subespaço V é gerado por um conjunto finito S', ou seja, $V = \langle S'\rangle^{ST}$, onde $|S'| < \infty$, dizemos que V é um **T-subespaço finitamente gerado**. Caso contrário, se um T-subespaço V não pode ser gerado por um conjunto finito então dizemos que V é um **T-subespaço não finitamente gerado**.

Por exemplo, se F é um corpo de característica zero, então o T-subespaço $C(E)$ dos polinômios centrais da F-álgebra de Grassmann E de dimensão infinita é gerado pelos polinômios $[x_1, x_2]$ e $x_1[x_2, x_3, x_4]$ (veja [8, 11, 37]). Um outro exemplo: se F é um corpo infinito de característica $\neq 2, 3$ então $C(M_2(F))$ é gerado por dois polinômios

$$[x_1, x_2] \circ [x_3, x_4]$$

e

$$x_1 st_4(x_2, x_3, x_4, x_5),$$

onde $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$ (veja [14, 63]).

Em 1950 foi formulado por W. Specht [71] um dos principais problemas na Teoria das Identidades Polinomiais, que ficou conhecido como o problema de Specht e pode ser enunciado a seguir: *Para cada álgebra A associativa sobre um corpo F de característica zero, o T-ideal $T(A)$ de todas as identidades polinomiais de A é finitamente gerado*? O mesmo problema sobre anéis associativos foi levantado por A.I. Malcev [72, Problem 2.39] em 1967.

Durante as décadas seguintes foram publicados dezenas de artigos onde os problemas de Specht e Malcev foram resolvidos com soluções positivas em vários casos particulares.

Finalmente, em 1987 Kemer, no famoso artigo [50], provou que o problema de Specht possui solução positiva, ou seja, se $char\, F = 0$ então cada T-ideal de $F\langle X\rangle$ é finitamente gerado (como um T-ideal). Observamos que em 2001, Shchigolev [70] demonstrou que se $char\, F = 0$ então cada T-subespaço de $F\langle X\rangle$ é finitamente gerado (como um T-subespaço). Esse resultado pode ser visto como uma generalização do resultado de Kemer.

O problema de Malcev para anéis associativos permaneceu em aberto por mais de duas décadas. Em 1999, Belov [9], Grishin [36] e Shchigolev [68] em trabalhos independentes construíram álgebras associativas sobre um corpo F, onde

$char\, F = p > 0$, cujas identidades polinomiais não possuem nenhuma base finita. Com isso, eles deram solução negativa ao problema de Malcev. Porém, vários problemas sobre T-ideais de $F\langle X\rangle$, no caso $char\, F = p > 0$, permanecem em aberto até agora. Por exemplo, o seguinte problema ainda está sem solução:

Problema. *Seja F um corpo infinito de característica $p > 0$. Existe uma F-álgebra A de dimensão finita tal que $T(A)$ é não finitamente gerado (como um T-ideal)?*

Observamos que os contraexemplos de Belov [9], Grishin [36] e Shchigolev [68] foram construídos a partir de T-subespaços não finitamente gerados de $F\langle X\rangle$ ($char\, F > 0$) construídos por Grishin [36] e Shchigolev [69]. Por causa disso, começou o estudo sistemático de T-subespaços de $F\langle X\rangle$ quando $char\, F > 0$ (veja, por exemplo, [33, 34, 39]).

Em 2010 Bekh-Ochir e Rankin [8], Brandão, Krasilnikov, Koshlukov e Silva [11] e Grishin [37] descreveram independentemente os polinômios centrais da álgebra de Grassmann E de dimensão infinita. Nesses artigos, eles mostraram que quando $char\, F = 0$, temos que $C(E)$ é um T-subespaço gerado por dois polinômios descritos acima. Por outro lado, quando F é infinito com $char\, F = p \geq 3$, temos que $C(E)$ é um T-subespaço não finitamente gerado (veja [8, 11, 37] para descrição de geradores de $C(E)$ neste caso). Mais ainda, foi descoberto em [8, 11, 37] que o T-subespaço não finitamente gerado usado por Belov e Shchigolev, para construir T-ideais não finitamente gerados de $F\langle X\rangle$ ($char\, F > 2$), foi exatamente o T-subespaço $C(E)$ (ou algum T-subespaço semelhante a $C(E)$).

Observamos que a álgebra de Grassmann E de dimensão infinita é Lie nilpotente de classe 2, ou seja, satisfaz a identidade $[x_1, x_2, x_3]$. Assim, sobre um corpo F de característica $p > 2$, uma álgebra A associativa Lie nilpotente pode ter o T-subespaço $C(A)$ dos polinômios centrais não finitamente gerado. Nós demonstramos que isso não pode acontecer para uma álgebra A associativa *fortemente* Lie nilpotente. O nosso primeiro resultado principal é o seguinte teorema.

Teorema 1 *Sejam F um corpo e A uma F-álgebra associativa unitária. Suponha que A é fortemente Lie nilpotente. Então o T-subespaço $C(A)$ dos polinômios centrais de A é finitamente gerado como T-subespaço de $F\langle X\rangle$.*

Lembramos que Shchigolev [70] demonstrou que se F for um corpo de característica 0, então todos os T-subespaços de $F\langle X\rangle$ são finitamente gerados. Em particular, se $char\, F = 0$ então o T-subespaço dos polinômios centrais de qualquer álgebra fortemente Lie nilpotente é finitamente gerado. Neste sentido, basta demonstrar o teorema para o caso em que a $char\, F = p > 0$, com p primo.

Observamos também que se uma álgebra associativa Lie nilpotente A é finitamente gerada então A é fortemente Lie nilpotente (veja Jennings [47, Theorem 3]). Assim, temos o seguinte corolário.

Corolário 2 *Sejam F um corpo e A uma F-álgebra associativa unitária Lie nilpotente. Suponhamos que A é finitamente gerada. Então o T-subespaço $C(A)$ dos polinômios centrais de A é finitamente gerado.*

Um dos problemas mais importantes sobre os polinômios centrais de álgebras associativas que ainda está em aberto é o seguinte problema.

Problema. *Seja F um corpo infinito de característica $p > 0$. Existe uma F-álgebra A de dimensão finita tal que o T-subespaço $C(A)$ dos polinômios centrais de A não é finitamente gerado?*

O Corolário 2 demonstra que se existir, a álgebra A não pode ser Lie nilpotente.

Observamos que se A for uma álgebra fortemente Lie nilpotente de classe c então $C(A)/R^{(c)}(F\langle X\rangle)$ é um T-subespaço na álgebra fortemente Lie nilpotente universal (ou relativamente livre) $F\langle X\rangle / R^{(c)}(F\langle X\rangle)$ de índice c. É bem conhecido que $F\langle X\rangle / R^{(c)}(F\langle X\rangle)$ contém, em geral, T-subespaços que não são finitamente gerados (veja Shchigolev [68, Theorem 1] e também [34, Theorem 3] ou [33, Theorem 2]). Porém se o T-subespaço $\mathbb{T} = C(A)$ é o conjunto dos polinômios centrais de uma álgebra A fortemente Lie nilpotente de classe $\leq c$ então, pelo Teorema 1, o T-subespaço $\mathbb{T}/R^{(c)}$ de $F\langle X\rangle / R^{(c)}$, é finitamente gerado.

As álgebras universais associativas Lie nilpotentes e fortemente Lie nilpotentes

Lembramos que uma F-álgebra associativa unitária A é Lie nilpotente de classe c se $L^{(c)}(A) \neq 0$ e $L^{(c+1)}(A) = 0$. Lembramos também que a série $\left\{T^{(n)}(A)\right\}_{n\geq 1}$ de ideais bilaterais de A é definida por $T^{(n)}(A) = AL^{(n)}(A)A$, para cada $n \geq 1$. Logo, se A é Lie nilpotente de classe c então $T^{(c+1)}(A) = \{0\}$. Observamos que a F-álgebra $F\langle X\rangle / T^{(c+1)}(F\langle X\rangle)$ é Lie nilpotente de classe c; essa álgebra pode ser vista como a **F-álgebra associativa unitária universal (ou, em outras palavras, relativamente livre) Lie nilpotente de classe c** gerada livremente pelo conjunto $\left\{x + T^{(c+1)}(F\langle X\rangle) \mid x \in X\right\}$. Lembramos ainda que a F-álgebra associativa unitária A é fortemente Lie nilpotente de classe c, se $R^{(c-1)}(A) \neq 0$ e $R^{(c)}(A) = 0$, onde $R^{(c)}(A)$ é o ideal bilateral de A definido indutivamente por $R^{(1)}(A) = A$ e $R^{(c)}(A) = A[R^{(c-1)}(A), A]A$ $(c \geq 1)$. A F-álgebra $F\langle X\rangle / R^{(c)}(F\langle X\rangle)$ pode ser vista como a **F-álgebra associativa unitária universal fortemente Lie nilpotente de classe c**.

O recente interesse em álgebras universais associativas Lie nilpotentes foi motivado pelo estudo dos quocientes $L^{(i)}(A)/L^{(i+1)}(A)$ da série central inferior

$$A = L^{(1)}(A) \supseteq L^{(2)}(A) \supseteq \cdots \supseteq L^{(n)}(A) \supseteq \cdots$$

da álgebra de Lie associada a álgebra associativa livre $A = F\langle X\rangle$. O estudo desses quocientes $L^{(i)}(A)/L^{(i+1)}(A)$ foi iniciado em 2007 em um artigo pioneiro de Feigin e Shoikhet [29], para $A = \mathbb{C}\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ (a álgebra associativa livre em n geradores sobre o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$). Outros resultados sobre esse assunto podem ser encontrados, por exemplo, em [1, 4, 5, 6, 10, 15, 16, 18, 20, 23, 24, 28, 48, 51, 59]. Desde que $T^{(n)}(A)$ é o ideal bilateral de A gerado por $L^{(n)}(A)$, alguns resultados sobre os quocientes $T^{(i)}(A)/T^{(i+1)}(A)$ foram obtidos também nesses artigos; em [15, 16, 18, 20, 28, 48, 51, 59] os últimos quocientes foram os objetos principais de estudos.

Em 2012 Bhupatiraju, Etingof, Jordan, Kuszmaul e Li [10] começaram o estudo dos quocientes $L^{(i)}(A)/L^{(i+1)}(A)$ para anéis associativos livres, isto é, para álgebras associativas livres $A = \mathbb{Z}\langle X\rangle$ sobre $\mathbb{Z}$. Neste caso, o quociente em questão (pode) desenvolver torção e um dos objetivos de estudo é o padrão desta torção. Em [10] muitos resultados relativos a esta torção em $L^{(i)}(A)/L^{(i+1)}(A)$ foram obtidos e vários problemas abertos relativos a esta torção foram colocados. Vários resultados sobre os quocientes $T^{(i)}(A)/T^{(i+1)}(A)$ e $A/T^{(i+1)}(A)$ foram também obtidos em [10], em particular, como mencionado acima, foi provado que o grupo aditivo de $A/T^{(3)}(A)$ é abeliano livre e uma base desse grupo foi exibida em [10, Proposition 3.2]. Outros resultados relativos aos quocientes $T^{(i)}(A)/T^{(i+1)}(A)$ para vários anéis associativos A foram obtidos por Cordwell, Fei e Zhou em [15].

Foi observado em [10] que se $A = \mathbb{Z}\langle X\rangle$ então nos quocientes $T^{(i)}(A)/T^{(i+1)}(A)$ não há torção nos subgrupos aditivos gerados pelos polinômios de graus pequenos. No entanto, Krasilnikov em [59] provou que a imagem de $v_1 = [x_1, x_2][x_3, x_4, x_5]$ em $A/T^{(4)}(A)$ é um elemento de ordem 3, que o subgrupo de torção de $A/T^{(4)}(A)$ coincide com $T^{(3,2)}(A)/T^{(4)}(A)$ e que o último é um 3-grupo abeliano elementar. Aqui $T^{(3,2)}(A)$ é o T-ideal de A gerado por $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ e $[x_1, x_2][x_3, x_4, x_5]$. Encontrar uma base deste grupo foi o objetivo do artigo [19].

Dados computacionais interessantes sobre subgrupo de torção de $T^{(i)}(A)/T^{(i+1)}(A)$ para vários i, obtido por Cordwell, Fei e Zhou, foram apresentados em [15]. Em particular, esses dados sugerem que o grupo aditivo de $A/T^{(5)}(A)$ pode não ter torção. Se este grupo é livre de torção, na verdade, ainda é um problema em aberto. Em [16] Costa e Krasilnikov encontraram geradores para o ideal $T^{(5)}(K\langle X\rangle)$ da álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$, onde K é um anel associativo comutativo unitário. Este resultado é similar ao Theorem 1.3 em [19] que dá os geradores para o ideal $T^{(4)}(K\langle X\rangle)$. O resultado de [15] pode ser o primeiro passo para provar que o grupo aditivo $A/T^{(5)}(A)$ é livre de torção.

Assim, a descrição do grupo aditivo do anel universal associativo Lie nilpotente $\mathbb{Z}\langle X\rangle/T^{(n)}(\mathbb{Z}\langle X\rangle)$ é um problema complicado que já foi resolvido só para $n \leq 4$. Por outro lado, a descrição do grupo aditivo do anel universal fortemente Lie nilpotente $\mathbb{Z}\langle X\rangle/R^{(m)}(\mathbb{Z}\langle X\rangle)$ é bem conhecida: foi demonstrado por Tyler [73] que esse grupo é abeliano livre com um conjunto de geradores livres descritos explicitamente em [73].

Seja K um anel associativo comutativo unitário e $K\langle X\rangle$ a K-álgebra associativa unitária livre, livremente gerada por um conjunto X. Por conveniência de notação, quando $X = X_k = \{x_1, \dots x_k\}$ escrevemos $T_k^{(n)}$ e $R_k^{(m)}$ para representar $T^{(n)}(K\langle X_k\rangle)$ e $R^{(m)}(K\langle X_k\rangle)$, respectivamente.

Os dados computacionais apresentados em [15] sugerem também que o quociente $T_k^{(i)}/T_k^{(i+1)}$ não tem torção se $k \leq 4$. O resultado abaixo confirma essa conjectura para $k \leq 3$.

O nosso segundo resultado principal é o seguinte teorema.

Teorema 3 *Seja K um anel associativo comutativo unitário e seja $K\langle X_3\rangle$ a K-álgebra associativa unitária livre, livremente gerada pelo conjunto $X_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$. Para cada inteiro positivo n, temos*

$$T_3^{(n)} = R_3^{(n-1)}.$$

Deduzimos deste teorema que, para cada $n \geq 0$, temos $T_2^{(n)} = R_2^{(n-1)}$. Por outro lado, se $v = [x_1, x_2][x_3, x_4]$ então $v \in R_4^{(2)}$ mas $v \notin T_4^{(3)}$; logo, em geral, $T_4^{(3)} \neq R_4^{(2)}$. Isso implica que $T_k^{(3)} \neq R_k^{(2)}$ para todo $k \geq 4$.

Lembramos que, em 1975 Tyler [73] mostrou que o grupo aditivo do quociente $\mathbb{Z}\langle X_k\rangle / R^{(m)}(\mathbb{Z}\langle X_k\rangle)$ é abeliano livre. Logo, o Teorema 3 implica o seguinte corolário.

Corolário 4 *Suponha que $k = 2$ ou $k = 3$. Então o grupo aditivo do anel quociente $\mathbb{Z}\langle X_k\rangle / T^{(n+1)}(\mathbb{Z}\langle X_k\rangle)$ é abeliano livre.*

Observamos que Kuzmin e Pchelintsev demonstraram que $K\langle X_3\rangle / R_3^{(m)}$ é um K-módulo livre e descreveram uma base deste K-módulo. Esse resultado foi anunciado por Kuzmin na XXV Escola de Álgebra em Campinas em dezembro de 2018; uma versão mais fraca desse resultado pode ser encontrada em [64]. O Teorema 3 e Corolário 4 apresentam um jeito mais simples de demonstrar este resultado de Kuzmin e Pchelintsev.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

1.1 Anéis, módulos e álgebras

Nesta seção, apresentaremos alguns conceitos básicos sobre anéis, módulos e álgebras. Para escrever este capítulo usamos como referência os livros [7, 27, 30, 32].

1.1.1 Anéis e módulos

Lembramos que um **anel** K é definido como um conjunto não-vazio com duas operações binárias "$+$" e "$\cdot$" tal que o par $(K, +)$ é um grupo abeliano e valem as leis distributivas

$$(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z, \text{ para todos } x, y, z \in K,$$

$$x\cdot (y+z) = x\cdot y + x\cdot z, \text{ para todos } x, y, z \in K.$$

Para quaisquer $x, y \in K$, escrevemos xy para denotar $x \cdot y$.

Um anel K é um dito **anel associativo** se, para todos $a, b, c \in K$, temos $(ab)c = a(bc)$. Neste caso, é bem definido o produto $a_1a_2\cdots a_n$, para todos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$. Dizemos que um anel K é um **anel comutativo** se, para todos $a, b \in K$, temos $ab = ba$. Dizemos que um anel K é um **anel unitário** se existe $1_K \in K$ tal que para cada $a \in K$, temos $1_K a = a 1_K = a$.

Um **anel de Lie** L é definido como um anel com multiplicação anti-comutativa que satisfaz a identidade de Jacobi, isto é, a terna $(L, +, [,])$ é um anel de Lie, se

i) para todos $x, y, z \in L$,

$$\big[[x,y],z\big] + \big[[z,x],y\big] + \big[[y,z],x\big] = 0;$$

ii) para todo $x \in L$,

$$[x,x] = 0.$$

Observamos que para quaisquer $a, b \in L$, vale que

$$[a+b, a+b] = 0,$$

de onde temos que $[a,b] = -[b,a]$. Logo, todo anel de Lie é anticomutativo.

Observamos também que se A for um anel associativo e $[,]$ é uma operação binária em A definida por $[a,b] = ab - ba$ $(a, b \in A)$ então $\big(A, +, [,]\big)$ é um anel de Lie.

Definição 1.1.1 *Sejam K um anel (não necessariamente comutativo ou unitário). Um K**-módulo (à esquerda)** ou **módulo (à esquerda) sobre** K é um grupo abeliano M munido de uma operação $\cdot : K \times M \longrightarrow M$ (a imagem de $(r,m) \mapsto rm$) tal que para todos $r_1, r_2 \in K$ e $m_1, m_2 \in M$:*

i) $r_1.(m_1 + m_2) = r_1.m_1 + r_1.m_2$;

ii) $(r_1 + r_2).m_1 = r_1.m_1 + r_2.m_1$;

iii) $(r_1 r_2).m_1 = r_1.(r_2.m_1)$.

Se K tem um elemento unidade 1_K e

iv) $1_K.m = m$, *para todo $m \in M$,*

*então dizemos que M é um K**-módulo unitário**. Se K é um anel de divisão, então o K-módulo unitário é chamado de K**-espaço vetorial (à esquerda)**.*

Um K-módulo à direita (unitário) é definido similarmente através da função $\cdot : M \times K \longrightarrow M$ definida por $(m,r) \mapsto mr$ satisfazendo os análogos óbvios de i)-iv). De agora em diante, a menos que especificado de outra forma, "K-módulo" significa "K-módulo à esquerda"e entende-se que todos os teoremas sobre K-módulos à esquerda também são válidos, com as óbvias modificações, para os K-módulos à direita.

Se K é comutativo, é fácil verificar que todo K-módulo à esquerda pode receber a estrutura de um K-módulo à direita definindo $mr = rm$, para todos $r \in K$ e $m \in M$

(a comutatividade é necessária para iii)). A menos que especificado de outra forma, todo módulo M sobre um anel comutativo K é assumido como sendo K-módulo à esquerda e K-módulo à direita com $mr = rm$, para todos $r \in K$ e $m \in M$.

Sejam M um K-módulo e N um subgrupo de M. Dizemos que N é um **K-submódulo** de M se a multiplicação escalar de M preserva N, isto é, se $rn \in N$, para cada $r \in K$ e para cada $n \in N$.

Sejam M um K-módulo e N um K-submódulo de M. Considerando apenas a estrutura de grupo aditivo de M, podemos construir o grupo quociente $M/N = \{m + N \mid m \in M\}$. Sobre este grupo $(M/N, +)$ vamos considerar a seguinte multiplicação por escalar:

$$\begin{aligned} \cdot : K \times M/N &\longrightarrow M/N \\ (r, m+N) &\longmapsto r \cdot m + N \end{aligned}$$

É fácil ver que esta operação é bem definida e que M/N é um K-módulo, denominado **K-módulo quociente** de M por N.

Sejam M e N dois K-módulos. Uma aplicação $\varphi : M \longrightarrow N$ é um **homomorfismo** de K-módulos ou um **K-homomorfismo**, se:

i) para todos $m_1, m_2 \in M$, então $\varphi(m_1 + m_2) = \varphi(m_1) + \varphi(m_2)$;

ii) para todos $r \in K$ e $m \in M$, então $\varphi(rm) = r\varphi(m)$;

iii) para todos $r \in K$ e $m \in M$, então $\varphi(mr) = \varphi(m)r$.

Se o homomorfismo φ é bijetivo, então dizemos que φ é um **isomorfismo** de M em N. Se existe um isomorfismo entre dois K-módulos M e N, então dizemos que eles são isomorfos e escrevemos $M \cong N$.

Seja M um K-módulo. O homomorfismo $\varphi : M \longrightarrow M$ é denominado **endomorfismo** de M. Denotamos por $\mathrm{End}_K(M)$ o conjunto de todos os endomorfismos de M. Dados $f, g \in \mathrm{End}_K(M)$, a aplicação $f + g : M \longrightarrow M$ definida por $(f + g)(m) := f(m) + g(m)$ $(m \in M)$ é um endomorfismo de M. Além disso, observamos que a composição $f \circ g$ de f com g também é um endomorfismo de M. Notemos que o conjunto $\mathrm{End}_K(M)$ munido das operações adição e composição

$$\begin{aligned} + : \mathrm{End}_K(M) \times \mathrm{End}_K(M) &\longrightarrow \mathrm{End}_K(M) \\ (f, g) &\longmapsto f + g \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \circ : \mathrm{End}_K(M) \times \mathrm{End}_K(M) &\longrightarrow \mathrm{End}_K(M) \\ (f, g) &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

é um anel associativo unitário.

Definição 1.1.2 *Seja M um módulo à esquerda sobre K. Um subconjunto B de M é dito uma* ***base*** *para M se cada elemento de M pode ser escrito de maneira única, como uma combinação linear finita de elementos de B, com coeficientes em K.*

Uma definição equivalentemente é a seguinte definição.

Definição 1.1.3 *Um subconjunto B de M é uma base para M se,*

i) *dado $m \in M$, existem $r_1, \ldots, r_n \in K$ e $b_1, \ldots, b_n \in B$ tais que $m = r_1 b_1 + \ldots r_n b_n$. Em outras palavras, B* ***gera*** *M;*

ii) *dados $r_1, \ldots, r_n \in K$ e $b_1, \ldots, b_n \in B$, se $r_1 b_1 + \cdots + r_n b_n = 0$, então $r_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Em outras palavras, B é um conjunto* ***linearmente independente*** *em M sobre K.*

Observamos que se K não for um corpo então um K-módulo pode não ter nenhuma base. Dizemos que um K-módulo M é um **K-módulo livre** se ele possui uma base. Veremos a seguir uma caracterização dos K-módulos livres.

Proposição 1.1.4 *Seja M um K-módulo. Então M é um K-módulo livre se, e somente se, M é isomorfo a uma soma direta de cópias de K.*

1.1.2 Álgebras

No decorrer dessa seção vamos considerar K um anel associativo comutativo unitário.

Uma **álgebra** A sobre um anel K ou uma **K-álgebra** é um módulo sobre K munido de uma multiplicação $\cdot : A \times A \longrightarrow A$ que satisfaz as seguintes propriedades:

i) A terna $(A, +, \cdot)$ é um anel, isto é, $(A, +)$ é um grupo abeliano e, para todos $x, y, z \in A$, valem as leis distributivas, isto é,

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

e

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

ii) Para todos $x, y \in A$ e para todo $r \in K$, vale que

$$r(x \cdot y) = (rx) \cdot y = x \cdot (ry).$$

Na maioria dos casos, álgebras são consideradas sobre um corpo F. Neste caso, uma F-álgebra A é um F-espaço vetorial com produto F-bilinear.

Seja A uma K-álgebra. Dizemos que A é uma K-**álgebra**:
associativa, se $(A, +, \cdot)$ é um anel associativo;
comutativa, se $(A, +, \cdot)$ é um anel comutativo;
unitária, se $(A, +, \cdot)$ é um anel unitário;
de Lie, se $(A, +, \cdot)$ é um anel de Lie, isto é, dados $a, b, c \in A$, temos

$$a \cdot a = 0 \text{ (a lei anticomutativa)},$$

$$(a \cdot b) \cdot c + (b \cdot c) \cdot a + (c \cdot a) \cdot b = 0 \text{ (identidade de Jacobi)}.$$

Dada uma K-álgebra associativa A, podemos definir uma nova operação de modo a torná-la uma álgebra de Lie. De fato, defina em A a seguinte operação colchete:

$$\begin{array}{rccc} [\ ,\ ]: & A \times A & \longrightarrow & A \\ & (a, b) & \longrightarrow & [a, b] = ab - ba \end{array}$$

Notamos que a álgebra A com essa operação colchete é uma K-álgebra de Lie. Essa nova álgebra $(A, +, [,])$ é chamada de **álgebra de Lie associada** à K-álgebra associativa A e é denotada por $A^{(-)}$. Dizemos que o colchete $[a, b]$ é o **comutador de Lie** de a com b. Dados $a_1, \ldots, a_n \in A$ $(n \geq 3)$, definimos indutivamente o comutador

$$[a_1, \ldots, a_n] = \big[[a_1, \ldots, a_{n-1}], a_n\big].$$

Denominamos-o **comutador normado à esquerda de comprimento** n.

Definição 1.1.5 *Seja A uma K-álgebra associativa qualquer.*

i) *Um K-submódulo B de A é uma K-**subálgebra** se B é fechado com respeito a multiplicação, isto é, se $b_1 b_2 \in B$, para todos $b_1, b_2 \in B$;*

ii) *Um K-submódulo I de A é um **ideal bilateral** (ou simplesmente um ideal) de A se $a_1 b \in I$ e $b a_2 \in I$, para todos $a_1, a_2 \in A$ e para cada $b \in I$;*

iii) *Se I é um ideal bilateral em A, dizemos que A/I é a* ***álgebra quociente*** *de A por I.*

Seja $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ um conjunto enumerável em que os elementos são denominados variáveis. Definimos uma **palavra** em X como sendo uma sequência finita $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$, onde $x_{i_j} \in X$ $(j = 1, \ldots, n)$ e $n \in \mathbb{N}$. Definimos o **tamanho** (ou **grau**) da palavra $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$ como sendo o número natural n. Quando $n = 0$, a palavra é denominada **palavra vazia** e será denotada por 1. Seja $\mathcal{P}$ o conjunto de todas as palavras em X.

O conjunto $A = K\langle X\rangle$ denota o K-módulo livre com base dada pelo conjunto $\mathcal{P}$. Consideremos em A a multiplicação induzida pela seguinte multiplicação definida nos elementos de $\mathcal{P}$:

$$(x_{i_1}\cdots x_{i_m})(x_{j_1}\cdots x_{j_n}) = x_{i_1}\cdots x_{i_m}x_{j_1}\cdots x_{j_n},$$

onde $x_{i_k}, x_{j_l} \in X$, com $k = 1, \ldots, m$ e $l = 1, \ldots, n$. O K-módulo A munido desse produto é uma K-álgebra associativa unitária, onde a unidade é a palavra vazia.

Sejam A_1 e A_2 duas K-álgebras. Recordamos que uma transformação linear $\varphi : A_1 \longrightarrow A_2$ é um **homomorfismo** de K-álgebras se, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, para quaisquer $a, b \in A_1$. Um homomorfismo $\varphi : A_1 \longrightarrow A_1$ é chamado **endomorfismo** de K-álgebras.

A K-álgebra $A = K\langle X\rangle$ tem a seguinte propriedade universal (veja [32], p. 1).

Proposição 1.1.6 (Propriedade Universal) *Seja K um anel associativo comutativo unitário e A_1 uma K-álgebra associativa unitária. Então qualquer aplicação $\phi : X \longrightarrow A_1$ pode ser estendida a um único homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow A_1$. Em outras palavras, existe um único homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow A_1$ tal que $\varphi(x) = \phi(x)$, para todo $x \in X$.*

Devido a essa propriedade, dizemos que A é uma **K-álgebra associativa unitária livre**, livremente gerada pelo conjunto X.

Os elementos de $A = K\langle X\rangle$ são denominados **polinômios**. O polinômio $u = r_i x_{i_1}\cdots x_{i_n} \in A$ $(r_i \in K$ e $x_i \in X)$ é denominado de **monômio**. O **grau do monômio** u, denotado por $\deg u$, quando $r_i \neq 0$ é o grau da palavra $x_{i_1}\cdots x_{i_n}$, ou seja, $\deg u = n$. Note que se f é um polinômio em A, então $f = \sum_i r_i u_i$, onde u_i

são monômios nas variáveis $x_i \in X$. O grau de um polinômio $f \in A$, denotado por $\deg f$, é definido como sendo o grau máximo dentre os monômios de f. Se x_i é uma variável no monômio u, o grau de u em x_i, denotado por $\deg_{x_i} u$, é o número de ocorrências de x_i em u. Se as variáveis que aparecem nos monômios de $f \in A$ pertencem ao conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$, então podemos escrever $f = f(x_1, \ldots, x_n)$. Um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ é **homogêneo** de grau m_i em x_i se todos os monômios de f possuem grau m_i em x_i; e f é **multihomogêneo** de multigrau $(m_1, \ldots, m_n)$ se f for homogêneo de grau m_i em x_i, para cada $i = 1, \ldots, n$. E, o polinômio f é **multilinear** de grau n se f é linear (ou seja, homogêneo de grau 1) em cada variável x_i.

Seja $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ um polinômio qualquer em $A = K\langle X \rangle$, podemos sempre escrever

$$f = \sum_{m_1 \geq 0, \ldots, m_n \geq 0} f^{(m_1, \ldots, m_n)},$$

onde $f^{(m_1, \ldots, m_n)}$ é a soma de todos os monômios de f com multigrau $(m_1, \ldots, m_n)$. Os polinômios $f^{(m_1, \ldots, m_n)}$ são chamados de **componentes multihomogêneas** de f. Denotamos por $A_{(m_1, \ldots, m_n)}$ o conjunto de todos os polinômios multihomogêneos de multigrau $(m_1, \ldots, m_n)$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, respectivamente. Dizemos que $A_{(m_1, \ldots, m_n)}$ é a **componente multihomogênea** de A de multigrau $(m_1, \ldots, m_n)$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, respectivamente. Assim,

$$A = \bigoplus_{(m_1, \ldots, m_n)} A_{(m_1, \ldots, m_n)}$$

é uma soma direta de suas componentes multihomogêneas.

Note que $A_{(m_1, \ldots, m_n)}$ é o K-submódulo de A gerado por monômios g de grau m_i na variável $x_i \in X$ e tais que g não contém x_i para $i > k$.

1.2 Identidades polinomiais, PI-álgebras e T-ideais

Sejam F um corpo qualquer e $F\langle X \rangle$ a F-álgebra associativa unitária livre, livremente gerada pelo conjunto X. Sejam $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio em $F\langle X \rangle$ e A uma F-álgebra associativa. Dizemos que o polinômio f é uma **identidade polinomial** da álgebra A se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, para todos $a_1, \ldots, a_n \in A$. Dizemos que a álgebra A é uma **PI-álgebra**, se A satisfaz uma identidade polinomial não nula. Denotamos por $T(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais da álgebra A.

Um ideal bilateral I de $F\langle X\rangle$ é um **T-ideal** se, ele é fechado por todos os endomorfismos de $F\langle X\rangle$, ou seja, se $f(x_1,\ldots,x_2) \in I$ e $g_1,\ldots,g_n \in F\langle X\rangle$ são polinômios quaisquer de $F\langle X\rangle$, então $f(g_1,\ldots,g_n) \in I$. É conhecido que $T(A)$ é um ideal bilateral de $F\langle X\rangle$. E mais, $T(A)$ é um T-ideal de $F\langle X\rangle$. De fato, sejam $f = f(x_1,\ldots,x_n)$ uma identidade polinomial de A e φ um endomorfismo $F\langle X\rangle$. Claramente $f(g_1,\ldots,g_n)$ pertence a $T(A)$, para todos os polinômios $g_1,\ldots,g_n \in F\langle X\rangle$. Desde que $\varphi(f(x_1,\ldots,x_n)) = f(\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_n))$, segue que $\varphi(f(x_1,\ldots,x_n))$ é uma identidade polinomial de A. Logo, $T(A)$ é um T-ideal de $F\langle X\rangle$. Por outro lado, é conhecido que se I é um T-ideal, então existe uma F-álgebra associativa A tal que $I = T(A)$ (podemos tomar $A = F\langle X\rangle/I$).

O T-ideal **gerado** por um subconjunto S de $F\langle X\rangle$, $S \subseteq F\langle X\rangle$, denotado por $\langle S\rangle^T$, é a interseção de todos os T-ideais de $F\langle X\rangle$ que contém S, ou seja,

$$\langle S\rangle^T = \bigcap_{S\subseteq I} I,$$

onde I é um T-ideal de $F\langle X\rangle$. Quando um T-ideal I é gerado por um conjunto finito S, ou seja, $I = \langle S\rangle^T$, onde $|S| < \infty$, então dizemos que I é um **T-ideal finitamente gerado**. Caso contrário, se um T-ideal I não pode ser gerado por um conjunto finito, dizemos que I é um **T-ideal não finitamente gerado**.

1.3 Polinômios centrais e T-subespaços

Sejam F um corpo qualquer e A uma F-álgebra associativa. Definimos o **centro** da álgebra A como sendo o conjunto

$$Z(A) := \{a \in A \mid ab = ba \text{ para todo } b \in A\}.$$

Note que o centro de uma álgebra é um exemplo de uma subálgebra que não é, necessariamente, um ideal. Dizemos que o polinômio $f(x_1,\ldots,x_n) \in F\langle X\rangle$ é um **polinômio central** da álgebra A se $f(a_1,\ldots,a_n) \in Z(A)$, para todos $a_1,\ldots,a_n \in A$. Denotamos por $C(A)$ o conjunto de todos os polinômios centrais da álgebra A.

Um F-subespaço vetorial V de $F\langle X\rangle$ é dito um **T-subespaço** se V é fechado por todos os endomorfismos de $F\langle X\rangle$, ou seja, $f(x_1,\ldots,x_n) \in V$ e $g_1,\ldots,g_n \in F\langle X\rangle$ são polinômios quaisquer de $F\langle X\rangle$, então $f(g_1,\ldots,g_n) \in V$. Uma subálgebra de $F\langle X\rangle$ que também é um T-subespaço é dita uma **T-subálgebra** de $F\langle X\rangle$.

Note que o conjunto $C(A)$ de todos os polinômios centrais de A forma um subespaço vetorial de $F\langle X\rangle$. Além disso, $C(A)$ é uma T-subálgebra de $F\langle X\rangle$. De fato, se $f(x_1,\ldots,x_n)\in C(A)$ então $f(g_1,\ldots,g_n)\in C(A)$, para todos os polinômios $g_1,\ldots,g_n\in F\langle X\rangle$. Desde que $\varphi(f(x_1,\ldots,x_n)) = f(\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_n))$, segue que $\varphi(f(x_1,\ldots,x_n))$ pertence a $C(A)$, para cada endomorfismo φ de $F\langle X\rangle$. Logo, $C(A)$ é um T-subespaço de $F\langle X\rangle$. Como $Z(A)$ é uma subálgebra de A, segue imediatamente da definição de polinômio central que $C(A)$ é uma subálgebra de $F\langle X\rangle$. Portanto, $C(A)$ é uma T-subálgebra de $F\langle X\rangle$.

O T-subespaço **gerado** por um subconjunto S' de $F\langle X\rangle$, $S'\subseteq F\langle X\rangle$, denotado por $\langle S\rangle^{ST}$, é o menor subespaço de $F\langle X\rangle$ que contém S'. Isto é, dizemos que um T-subespaço V é gerado por S', se cada elemento de V é uma combinação linear, com coeficientes em F, de elementos da forma $\varphi(s')$, onde $s'\in S'$ e φ é um endomorfismos de $F\langle X\rangle$. Quando V é gerado por um conjunto finito S', ou seja, $V=\langle S'\rangle^{ST}$, onde $|S'|<\infty$, então dizemos que V é **T-subespaço finitamente gerado**. Caso contrário, se um T-subespaço V não pode ser gerado por um conjunto finito então dizemos que V é um **T-subespaço não finitamente gerado**.

1.4 Algumas generalizações do Teorema da Base de Hilbert

Considere as seguintes propriedades de uma relação binária $\preceq$ em um conjunto X:

i) Para cada $x\in X$, tem-se $x\preceq x$. (reflexividade)

ii) Se $x,y,z\in X$ e $x\preceq y, y\preceq z$, então $x\preceq z$. (transitividade)

iii) Se $x,y\in X$ e $x\preceq y, y\preceq x$, então $x=y$. (antissimetria)

iv) Se $x,y\in X$, então ou $x\preceq y$ ou $y\preceq x$. (tricotomia)

Se $\preceq$ satisfaz as propriedades $i)$ e $ii)$, então dizemos que a relação binária $\preceq$ é uma **quase ordem** e que o conjunto $(X\preceq)$ é **quase ordenado**. Se $\preceq$ satisfaz $i), ii)$ e $iii)$, então dizemos que $\preceq$ é uma **ordem parcial** e que o conjunto $(X\preceq)$ é **parcialmente**

ordenado. E, se $\preceq$ satisfaz $i), ii), iii)$ e $iv)$, então dizemos que $\preceq$ é uma **ordem linear** ou **boa ordem**. Neste caso dizemos que e o conjunto $(X \preceq)$ é **linearmente ordenado**

Como é mostrado em [44, Teorema 2.1], as seguintes condições, para um conjunto quase ordenado $(X, \preceq)$, são equivalentes.

I) Toda sequência infinita $x_1, x_2, \ldots$ de elementos de X contém uma subsequência infinita $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots (i_1 < i_2 < \cdots)$ tal que

$$x_{i_1} \preceq x_{i_2} \preceq \cdots$$

II) Se S é um subconjunto qualquer não vazio de X, então existe um subconjunto finito S_0 de S tal que, para cada $s \in S$, existe um elemento $s_0 \in S_0$ tal que $s_0 \preceq s$.

Suponhamos que o conjunto $(X, \preceq)$ satisfaz a condição $I)$ ou $II)$. Neste caso,

- se o conjunto $(X, \preceq)$ é quase ordenado, então dizemos que $(X, \preceq)$ é um conjunto **quase bem ordenado**;
- se o conjunto $(X, \preceq)$ é parcialmente ordenado, então dizemos que $(X, \preceq)$ é um conjunto **parcialmente bem ordenado**;
- se o conjunto $(X, \preceq)$ é um conjunto linearmente ordenado, então dizemos que $(X, \preceq)$ é um conjunto **bem ordenado**.

Seja J o conjunto de todas as sequências finitas de inteiros não negativos. Neste conjunto, vamos definir duas ordens $\leq$ e $\preceq$ da seguinte maneira:

$$(i_1, \ldots, i_m) < (j_1, \ldots, j_n)$$

se $m < n$ ou $m = n$ e existe r tal que $i_r < j_r$, mas $i_s = j_s$, para todo $s > r$. E,

$$(i_1, \ldots, i_m) \preceq (j_1, \ldots, j_n)$$

se $m \leq n$ e existe uma aplicação $\pi : \{1, \ldots, m\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$ preservando ordem, (ou seja, $\pi(a) < \pi(b)$ sempre que $a < b$) tal que $i_r \leq j_{\pi(r)}$, para cada $r = 1, \ldots, n$.

É fácil ver que o conjunto $(J, \leq)$ é bem ordenado e que o conjunto $(J, \preceq)$ é parcialmente ordenado. Observamos que para quaisquer dois elementos $s_1, s_2 \in J$, se $s_1 \preceq s_2$ então $s_1 \leq s_2$, ou seja, a aplicação identidade, do conjunto parcialmente ordenado $(J, \preceq)$ no conjunto ordenado $(J, \leq)$, preserva ordem. Além disso, pelo [44, Teorema 4.3] $(J, \preceq)$ é parcialmente bem ordenado.

Sejam F um corpo e $\mathbb{A} = F[z_i \mid i \in \mathbb{N}]$ a F-álgebra dos polinômios comutativos nas variáveis z_i, com $i \in \mathbb{N}$. Seja $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ uma aplicação F-linear tal que $\pi(i) < \pi(j)$, sempre que $i < j$, ou seja, π é uma aplicação F-linear que preserva ordem de $\mathbb{N}$ nele mesmo. Denotamos por Π o conjunto de todas as aplicações π de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ que preservam ordem.

Agora seja $\pi \in \Pi$ uma aplicação que preserva ordem. Definimos um endomorfismo (que será denotada novamente por π) $\pi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ tal que $\pi(z_i) = z_{\pi(i)}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Denotamos por $\Pi_{\mathbb{A}}$ o conjunto de todos os endomorfismos $\pi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ acima descritos.

Dizemos que um ideal I de $\mathbb{A}$ é **fechado** por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{A}}$ se para cada polinômio $f(z_1, \ldots, z_n) \in I$ e para cada aplicação $\pi \in \Pi_{\mathbb{A}}$, temos

$$f\big(z_{\pi(1)}, \ldots, z_{\pi(n)}\big) \in I.$$

Seja $m = \lambda z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}$ um monômio de $\mathbb{A}$, com $\lambda \neq 0$. Definimos o **peso** de m como a sequência $(i_1, \ldots, i_n) \in J$ e denotamos por $\mathrm{wt}\big(m\big) = (i_1, \ldots, i_n)$. O **termo principal** de um polinômio f de $\mathbb{A}$, denotado por t.p.(f), é o seu monômio de maior peso em $(J, \leq)$. E, definimos o **peso do polinômio** f como o peso de seu termo principal.

O seguinte resultado foi demonstrado por Cohen [13, Proposição 2] e redescoberto independentemente por Hillar-Sullivan [45, Teorema 1.1].

Teorema 1.4.1 (Cohen, Hillar-Sullivan) *Sejam F um corpo e $\mathbb{A} = F[z_i \mid i \in \mathbb{N}]$ a F-álgebra dos polinômios comutativos. Então todo ideal I de $\mathbb{A}$ fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{A}}$ é finitamente gerado (como um ideal fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{A}}$).*

Demonstração: Seja $\mathcal{M}$ o semigrupo de monômios de $\mathbb{A}$ com coeficientes unitários, ou seja,

$$\mathcal{M} = \Big\{ z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n} \mid (i_1, \ldots, i_n) \in J \Big\}.$$

Sejam $z_1^{i_1} \cdots z_m^{i_m}$ e $z_1^{j_1} \cdots z_n^{j_n}$ dois monômios quaisquer em $\mathcal{M}$. Definimos uma ordem $\preceq_{(1)}$ em $\mathcal{M}$, fazendo $z_1^{i_1} \cdots z_m^{i_m} \preceq_{(1)} z_1^{j_1} \cdots z_n^{j_n}$ se, e somente se, $(i_1, \ldots, i_m) \preceq (j_1, \ldots, j_n)$ em $(J, \preceq)$.

Usando o fato que o conjunto $(J, \preceq)$ é parcialmente bem ordenado, é fácil mostrar que o conjunto $(\mathcal{M}, \preceq_{(1)})$ também é parcialmente bem ordenado.

Seja I um ideal de $\mathbb{A}$ fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{A}}$ e seja $\mathcal{M}_I$ o conjunto de todos os termos principais de I. Claramente $\mathcal{M}_I \subset \mathcal{M}$ e desde que $(\mathcal{M}, \preceq_{(1)})$ é parcialmente bem ordenado, existe um subconjunto finito $S_0 = \{h_1, \ldots, h_s\}$ de $\mathcal{M}_I$ com a seguinte propriedade: para qualquer $h \in \mathcal{M}_I$, existe $h_i \in S_0$ tal que $h_i \preceq_{(1)} h$.

Seja $S = \{f_1, \ldots, f_s\}$ o conjunto de todos os polinômios f_l de I cujo termo principal é h_l, para cada $l = 1, \ldots s$. Vamos mostrar que S gera I como um ideal fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{A}}$. De fato, suponhamos que S não gera I e seja I_0 o ideal gerado por S (como um ideal fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{A}}$). Suponhamos que existe um polinômio $f \in I$ tal que $f \notin I_0$ e com a seguinte propriedade: f é o polinômio com o menor termo principal entre os polinômios de I que não pertencem a I_0. Seja $h = z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$ o termo principal de f. Como $h \in \mathcal{M}_I$ existe um $h_j = z_1^{l_1} \cdots z_m^{l_m}$ em S_0, com $m \leq n$ tal que $h_j \preceq_{(1)} h$. Assim, pela definição de $\preceq_{(1)}$, existe uma aplicação $\pi : \{1, \ldots, m\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$ que preserva ordem tal que

$$l_r \leq k_{\pi(r)}, \text{ para cada } r. \tag{1.1}$$

A aplicação π pode ser estendida para uma aplicação F-linear em $\Pi_{\mathbb{A}}$. Denotamos novamente por π a extensão resultante. O polinômio $g_j = f_j(z_{\pi(1)}, z_{\pi(2)}, \ldots)$ pertence a I_0, pois I_0 é fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi$ e seu termo principal é igual a $z_{\pi(1)}^{l_1} \cdots z_{\pi(m)}^{l_m}$. Da desigualdade (1.1), podemos escolher um monômio g nas variáveis $z_1, \ldots, z_n$ tais que o termo principal de $g_j g$ é igual a $z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$. Segue então, que o termo principal do polinômio $(f - g_j g)$ é menor que $z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$ em $(\mathcal{M}, \preceq_{(1)})$. Logo, $(f - g_j g)$ pertence a I_0 e como $g_j g$ pertence a I_0, o polinômio f também pertence a I_0, o que contradiz escolha do polinômio f. ∎

Precisamos do Teorema 1.4.1 no caso quando F é um corpo, porém o resultado análogo é válido no caso quando F é um anel Noetheriano associativo comutativo unitário. O seguinte teorema pode ser encontrado em [13, Proposição 2].

Teorema 1.4.2 (Cohen) *Se F é um anel Noetheriano associativo comutativo unitário, então cada ideal de $\mathbb{A} = F[z_i \mid i \in \mathbb{N}]$ fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{A}}$ é finitamente gerado (como um ideal fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{A}}$).*

Demonstração: Seja I um ideal de $\mathbb{A}$ fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{A}}$. Suponhamos que I não seja finitamente gerado (como um ideal de $\mathbb{A}$ fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{A}}$).

Sejam $f_1, f_2, \ldots$ uma sequência de polinômios de I e I_l o ideal gerado, como um ideal de $\mathbb{A}$ fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{A}}$, pelos elementos $f_1, \ldots, f_l$. Pela nossa suposição, $I \neq I_l$, para todo $l \in \mathbb{N}$. Assim, deve existir um inteiro positivo m tal que f_{m+1} não pertence ao ideal I_m.

Seja J_l o ideal de F gerado, como ideal bilateral, pelos elementos $a_1, \ldots, a_l$, onde a_i é o coeficiente líder do polinômio f_i, para cada $i = 1, \ldots, l$. Como F é Noetheriano, então existe m tal que $J_m = J_n$, para cada $n > m$. Assim, podemos escrever $a_{m+1} = a_1 b_1 + \ldots + a_m b_m$, onde $b_i \in F$, com $i = 1, \ldots, m$.

Seja h_{m+1} o termo principal de f_{m+1}. Desde que I é fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{A}}$, existem endomorfismos $\pi_s \in \Pi_{\mathbb{A}}$ e monômios $g_s \in \mathbb{A}$ $(s = 1 \ldots, m)$, tais que a soma $\sum_{s=1}^{m} b_s \pi_s(f_s) g_s$ tem termo principal igual a h_{m+1}. Assim, o termo principal de

$$f_{m+1} - \sum_{s=1}^{m} b_s \pi_s(f_s) g_s \tag{1.2}$$

é menor que h_{m+1}, isto é, o polinômio $f_{m+1} - \sum_{s=1}^{m} b_s \pi_s(f_s) g_s$ pertence a I_m. Cada polinômio $b_s \pi_s(f_s) g_s$ pertence a I_m $(s = 1 \ldots, m)$, pois o ideal I_m é fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{A}}$. Logo, $f_{m+1} \in I_m$. O que contradiz a nossa escolha de f_{m+1}. ■

Voltamos ao caso quando F é um corpo qualquer. Seja $\mathbb{A} = F[z_i \mid i \in \mathbb{N}]$ a F-álgebra dos polinômios comutativos nas variáveis z_i $(i \in \mathbb{N})$. Para um inteiro positivo fixo m consideremos $\mathbb{A}' = F[z_i^m \mid i \in \mathbb{N}]$ a F-subálgebra de $\mathbb{A}$. Lembramos que os elementos do semigrupo $\mathcal{M}$ são da forma $z_1^{k_1} \cdots z_r^{k_r}$, onde $(k_1, \ldots, k_r) \in J$. Claramente podemos escrever $k_l = m i_l + j_l$, onde $j_l = 0, 1, \ldots, m-1$ $(l = 1, \ldots, r)$. Asim, podemos reescrever os elementos de $\mathcal{M}$ da seguinte maneira

$$(z_1^m)^{i_1} \cdots (z_r^m)^{i_r} z_1^{j_1} \ldots z_r^{j_r}.$$

Substituindo $(z_l^m)^{i_l}$ por $y_l^{i_l}$, para cada $l = 1, \ldots, r$, podemos reescrever $\mathcal{M}$ por

$$\mathcal{M}^* = \left\{ y_1^{i_1} \cdots y_r^{i_r} z_1^{j_1} \cdots z_r^{j_r} \mid j_l = 0, \ldots, m-1, \text{ e } l = 1, \ldots, r \right\}.$$

Para cada par de inteiros (i, j), com $i < j$, seja $\psi_{ij} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ um endomorfismo tal que

$$\psi_{ij}(z_r) = \begin{cases} z_i z_j, & \text{se} \quad r = j \\ z_r, & \text{se} \quad r \neq j. \end{cases}$$

Denotamos por $\Psi_{\mathbb{A}}$ o conjunto de todos os endomorfismos ψ_{ij} de $\mathbb{A}$.

Seja $\Omega_{\mathbb{A}}$ o conjunto de todos os endomorfismos $\omega : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ tal que $\omega = \psi_{i_r j_r} \circ \ldots \circ \psi_{i_2 j_2} \circ \psi_{i_1 j_1} \circ \pi$, onde $\pi \in \Pi_{\mathbb{A}}, \psi_{i_1 j_1}, \psi_{i_2 j_2}, \ldots, \psi_{i_r j_r} \in \Psi_{\mathbb{A}}$, $i_1, i_2, \ldots, i_r \notin \pi(\mathbb{N})$ e $i_a \neq i_b$ sempre que $a \neq b$.

Lema 1.4.3 *O conjunto $\Omega_{\mathbb{A}}$ é um semigrupo.*

Demonstração: É suficiente mostrar que o conjunto $\Omega_{\mathbb{A}}$ é fechado para a operação composição. Sejam $\omega^{(1)}$ e $\omega^{(2)}$ em $\Omega_{\mathbb{A}}$ tais que $\omega^{(1)} = \psi_{i^{(1)}_{r(1)} j^{(1)}_{r(1)}} \circ \ldots \circ \psi_{i^{(1)}_2 j^{(1)}_2} \circ \psi_{i^{(1)}_1 j^{(1)}_1} \circ \pi^{(1)}$ e $\omega^{(2)} = \psi_{i^{(2)}_{r(2)} j^{(2)}_{r(2)}} \circ \ldots \circ \psi_{i^{(2)}_2 j^{(2)}_2} \circ \psi_{i^{(2)}_1 j^{(2)}_1} \circ \pi^{(2)}$. Desde que $\pi \circ \psi_{ij} = \psi_{\pi(i)\pi(j)}$, temos que

$$\omega^{(1)} \circ \omega^{(2)} = \psi_{i^{(1)}_{r(1)} j^{(1)}_{r(1)}} \circ \ldots \circ \psi_{i^{(1)}_1 j^{(1)}_1} \circ \psi_{\pi^{(1)}\left(i^{(2)}_{r(2)}\right) \pi^{(1)}\left(j^{(2)}_{r(2)}\right)} \circ \ldots \circ \psi_{\pi^{(1)}\left(i^{(2)}_1\right) \pi^{(1)}\left(j^{(2)}_1\right)} \circ \pi^{(1)} \circ \pi^{(2)}$$

Claramente $\pi^{(1)} \circ \pi^{(2)} \in \Pi_{\mathbb{A}}$. Podemos escrever $\mathbb{N} = \pi^{(2)}(\mathbb{N}) \dot{\cup} \Big(\mathbb{N} \backslash \pi^{(2)}(\mathbb{N})\Big)$ e $\pi^{(1)}(\mathbb{N}) = \pi^{(1)} \circ \pi^{(2)}(\mathbb{N}) \dot{\cup} \pi^{(1)}\Big(\mathbb{N} \backslash \pi^{(2)}(\mathbb{N})\Big)$. Daí, como $i^{(1)}_1, \ldots, i^{(1)}_{r_1} \notin \pi^{(1)}(\mathbb{N})$, segue que $i^{(1)}_1, \ldots, i^{(1)}_{r_1} \notin \pi^{(1)} \circ \pi^{(2)}(\mathbb{N})$. E, como $i^{(2)}_1, \ldots, i^{(2)}_{r_1} \notin \pi^{(2)}(\mathbb{N})$, temos que $i^{(2)}_1, \ldots, i^{(2)}_{r_1} \in \Big(\mathbb{N} \backslash \pi^{(2)}(\mathbb{N})\Big)$. Assim, temos que $\pi^{(1)}\Big(i^{(2)}_1\Big), \ldots, \pi^{(1)}\Big(i^{(2)}_{r_1}\Big) \in \pi^{(1)}\Big(\mathbb{N} \backslash \pi^{(2)}(\mathbb{N})\Big)$, isto é, $\pi^{(1)}\Big(i^{(2)}_1\Big), \ldots, \pi^{(1)}\Big(i^{(2)}_{r_1}\Big) \notin \pi^{(1)} \circ \pi^{(2)}(\mathbb{N})$. Logo, $\omega^{(1)} \circ \omega^{(2)} \in \Omega_{\mathbb{A}}$.

Portanto, $\Omega_{\mathbb{A}}$ é um semigrupo. ■

Sejam $y_1^{l_1} \cdots y_s^{l_s} t_1^{k_1} \cdots t_s^{k_s}$ e $y_1^{l'_1} \cdots y_s^{l'_s} t_1^{k'_1} \cdots t_s^{k'_s}$ dois monômios em $\mathcal{M}^*$. Vamos definir duas ordens $\preceq_2$ e $\preceq_3$ em $\mathcal{M}^*$ da seguinte maneira:

$$y_1^{l_1} \cdots y_s^{l_s} t_1^{k_1} \cdots t_s^{k_s} \preceq_2 y_1^{l'_1} \cdots y_s^{l'_s} t_1^{k'_1} \cdots t_s^{k'_s}$$

se, e somente se $l_i \leq l'_i$ e $k_i = k'_i$ $(i = 1, \ldots, s)$. E,

$$y_1^{l_1} \cdots y_s^{l_s} t_1^{k_1} \cdots t_s^{k_s} \preceq_3 y_1^{l'_1} \cdots y_s^{l'_s} t_1^{k'_1} \cdots t_s^{k'_s}$$

se, e somente se, existe um endomorfismo $\omega \in \Omega_{\mathbb{A}}$ tal que

$$\omega\big(y_1^{l_1} \cdots y_s^{l_s} t_1^{k_1} \cdots t_s^{k_s}\big) \preceq_1 y_1^{l'_1} \cdots y_s^{l'_s} t_1^{k'_1} \cdots t_s^{k'_s}.$$

Para quaisquer polinômios $f_1, f_2 \in \mathbb{A}$, dizemos que $f_1 \preceq_3 f_2$ se, e somente se, t.p$(f_1) \preceq_3$ t.p.(f_2).

O seguinte lema é um corolário imediato de [56, Corollary 2.12] ou de [58, Lemma 3.2].

Lema 1.4.4 *Sejam f um polinômio em $\mathbb{A}$ e h o seu termo principal. Suponhamos que existe h' em $\mathcal{M}^*$ tal que $h \preceq_3 h'$. Então existem um endomorfismo $\omega \in \Omega_{\mathbb{A}}$ e um monômio g em $\mathbb{A}'$ tais que*

$$\omega(h)g = h'.$$

O seguinte lema é uma consequência imediata de [56, Lemma 2.13] ou de [58, Lema 3.3].

Lema 1.4.5 *O conjunto $(\mathcal{M}^*, \preceq_3)$ é parcialmente bem ordenado.*

Usaremos o Lema 1.4.5 para provar o seguinte teorema. A nossa demonstração é uma aplicação do método usado por Cohen [13].

Teorema 1.4.6 *A álgebra $\mathbb{A}$ é Noetheriano como um $\mathbb{A}'$-módulo fechado por todos os endomorfismos $\omega \in \Omega_{\mathbb{A}}$, ou seja, todo $\mathbb{A}'$-submódulo de $\mathbb{A}$ fechado por todos os endomorfismos $\omega \in \Omega_{\mathbb{A}}$ é finitamente gerado (como um $\mathbb{A}'$-submódulo fechado por todos os endomorfismos de $\Omega_{\mathbb{A}}$).*

Demonstração: Seja N um $\mathbb{A}'$-submódulo de $\mathbb{A}$ fechado por todos os endomorfismos $\omega \in \Omega_{\mathbb{A}}$ e seja $\mathcal{M}^*_N$ o conjunto de todos os termos principais dos elementos de N. Pelo Lema 1.4.5, o conjunto $(\mathcal{M}^*, \preceq_3)$ é parcialmente bem ordenado, então existe um subconjunto finito $S_0 = \{h_1, \ldots, h_k\}$ de $\mathcal{M}^*_N$, tal que para cada $h \in \mathcal{M}^*_N$ existe um h_l em S_0 tal que $h_l \preceq_3 h$, para algum $l = 1, \ldots, k$.

Seja S o conjunto dos polinômios de N cujo os termos principais formam o conjunto S_0, ou seja,

$$S = \{f_l \in N \mid t.p.(f_l) = h_l,\ l = 1, \ldots, k\}$$

Vamos mostrar que o conjunto S gera N (como um $\mathbb{A}'$-módulo fechado por todos os endomorfismos $\omega \in \Omega_{\mathbb{A}}$). Suponhamos que S não gera N como um $\mathbb{A}'$-módulo e seja N_0 o $\mathbb{A}'$-módulo gerado por S (como um $\mathbb{A}'$-módulo fechado por todos os endomorfismos $\omega \in \Omega_{\mathbb{A}}$). Consideremos f um polinômio em N que não pertence a N_0 e que f seja o menor (com relação a ordem $\preceq_2$) entre os elementos de N que não pertencem a N_0.

Seja h o termo principal de f. Como $h \in \mathcal{M}_N^*$ existe um $h_l \in S_0$ $(l = 1, \dots, k)$ tal que $h_l \preceq_3 h$. Pelo Lema 1.4.4, existem um endomorfismo $\omega \in \Omega_{\mathbb{A}}$ e um monômio g em $\mathbb{A}'$ tais que

$$\omega(h_l)g = h.$$

Segue então que o termo principal do polinômio $f - \omega(f_l)g$ é menor (com relação a ordem $\preceq_2$) que o termo principal de f, ou seja, $f - \omega(f_l)g$ pertence a N_0. Como N_0 é um $\mathbb{A}'$-módulo fechado por todos os endomorfismos $\omega \in \Omega_{\mathbb{A}}$, segue que $\omega(f_l)g \in N_0$. Assim, o polinômio f também pertence aN_0, o que contradiz a escolha do polinômio f.

Portanto, N é gerado por S, como $\mathbb{A}'$-submódulo de $\mathbb{A}$ fechado por todos os endomorfismos $\omega \in \Omega_{\mathbb{A}}$, e isto conclui a prova. ■

1.5 As álgebras universais associativas fortemente Lie nilpotentes

Sejam K um anel associativo comutativo unitário e $A = K\langle X \rangle$ a K-álgebra associativa unitária livre, livremente gerada pelo conjunto $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Seja U o ideal bilateral de A gerado, como um ideal bilateral, pelo subconjunto não vazio S de A e seja W o ideal bilateral de A gerado, como um ideal bilateral, pelo conjunto $\{[u, a] \mid u \in U, a \in A\}$.

É fácil verificar o seguinte lema.

Lema 1.5.1 *Para todo $u \in U$ e para todos $a_1, a_2 \in A$, temos*

$$u[a_1, a_2] \in W.$$

Demonstração: Sejam $u \in U$ e $a_1, a_2 \in A$. Temos a seguinte relação

$$[ua_1, a_2] = u[a_1, a_2] + [u, a_2]a_1.$$

Por definição de W, os comutadores $[ua_1, a_2]$ e $[u, a_2]$ pertencem a W, de onde segue que $u[a_1, a_2] \in W$. ■

Consideremos os polinômios

- $f_1 = \big[x_{i_1}, x_{i_2}\big]$;
- $f_2 = x_{i_1}\big[x_{i_2}, x_{i_3}\big]$;

da álgebra A, onde $x_i \in X$. Seja V o ideal bilateral de A gerado, como um ideal bilateral, pelos polinômios

$$\big[s, x_{i_1}\big] \tag{1.3}$$

$$s\big[x_{i_1}, x_{i_2}\big], \tag{1.4}$$

onde $s \in S$ e $x_i \in X$.

Seja I o ideal bilateral de A gerado, como um ideal bilateral, pelos polinômios

$$\big[s, a_{i_1}\big] \tag{1.5}$$

$$s\big[a_{i_1}, a_{i_2}\big], \tag{1.6}$$

onde $s \in S$ e os a_i são monômios em A.

Temos o seguinte lema.

Lema 1.5.2 $W = I$.

Demonstração: Por definição do ideal bilateral W, o polinômio $[s, a_1]$ pertence a W, para cada $s \in S$ e para cada $a_1 \in A$. Pelo Lema 1.5.1, o polinômio $s[a_1, a_2]$ pertence a W, para cada $s \in S$ e para todos os $a_1, a_2 \in A$. Logo, $I \subseteq W$.

Para mostrar a outra inclusão basta verificar que $[a_1 s a_2, a_3] \in I$, para cada $s \in S$ e para todos $a_1, a_2, a_3 \in A$. Temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} [a_1 s a_2, a_3] &= a_1[s a_2, a_3] + [a_1, a_3] s a_3 \\ &= a_1 s[a_2, a_3] + a_1[s, a_3]a_2 + s[a_1, a_3]a_2 - \big[s, [a_1, a_3]\big]a_2. \end{aligned}$$

Por definição do ideal bilateral I, os polinômios $s[a_2, a_3], [s, a_3], s[a_1, a_3], \big[s, [a_1, a_3]\big]$ pertencem a I, ou seja, $[a_1 s a_2, a_3] \in I$. Logo, $W \subseteq I$.

Portanto, $W = I$. ■

O seguinte lema pode ser encontrado (sem demonstração) na Observação 3 do artigo de Dias e Krasilnikov [22].

Lema 1.5.3 *$W = V$.*

Demonstração: Pelo Lema 1.5.2, é suficiente demostrar que $I = V$. Observamos que a inclusão $V \subseteq I$ é imediata, pois os polinômios $\big[s, x_{i_1}\big]$ e $s\big[x_{i_1}, x_{i_2}\big]$ pertencem a I, para cada $s \in S$ e para todos os $x_{i_1}, x_{i_2} \in X$. Para demostrar a outra inclusão é suficiente mostrar que os polinômios $\big[s, a_1\big]$ e $s\big[a_1, a_2\big]$ pertencem a V, para cada $s \in S$ e para todos os monômios $a_1, a_2 \in A$.

Pela bilinearidade do comutador $[,]$ podemos considerar $a_1 = x_{i_1} \cdots x_{i_l}$ $(x_i \in X)$ um monômio em A. Assim, temos

$$[s, a_1] = \big[s, x_{i_1} \cdots x_{i_l}\big] = \sum_{q=1}^{l} x_{i_1} \cdots x_{i_{q-1}} \big[s, x_{i_q}\big] x_{i_{q+1}} \cdots x_{i_l}.$$

Como $[s, x_{i_q}] \in V$, para todo $x_{i_q} \in X$ $(q = 1, \ldots, l)$, temos que $\big[s, a_1\big] \in V$. Novamente podemos considerar $a_1 = x_{j_1} \cdots x_{j_m}$ e $a_2 = x_{k_1} \cdots x_{k_n}$ monômios em A. Daí, temos

$$\begin{aligned}
s[a_1, a_2] &= s\big[x_{j_1} \cdots x_{j_m}, x_{k_1} \cdots x_{k_n}\big] \\
&= s\left(\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} x_{j_1} \cdots x_{j_{p-1}} x_{k_1} \cdots x_{k_{q-1}} \big[x_{j_p}, x_{k_q}\big] x_{k_{q+1}} \cdots x_{k_n} x_{j_{p+1}} \cdots x_{j_m}\right) \\
&= \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} s x_{j_1} \cdots x_{j_{p-1}} x_{k_1} \cdots x_{k_{q-1}} \big[x_{j_p}, x_{k_q}\big] x_{k_{q+1}} \cdots x_{k_n} x_{j_{p+1}} \cdots x_{j_m} \\
&\equiv \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} s\big[x_{j_p}, x_{k_q}\big] x_{j_1} \cdots x_{j_{p-1}} x_{k_1} \cdots x_{k_{q-1}} x_{k_{q+1}} \cdots x_{k_n} x_{j_{p+1}} \cdots x_{j_m} \pmod{V}.
\end{aligned}$$

Como $s\big[x_{j_p}, x_{k_q}\big] \in V$, para cada $s \in S$ e para todos os $x_{j_p}, x_{k_q} \in X$, com $p = 1, \ldots, m$ e $q = 1, \ldots, n$, temos $s[a_{i_1}, a_{i_2}] \in V$. Logo, $I \subseteq V$.

Portanto, $V = I$ e, consequentemente, $W = V$. ■

O Lema 1.5.3 afirma que, se S é um subconjunto de A, U é o ideal bilateral de A gerado (como um ideal bilateral) por S e W é o ideal bilateral de A gerado (como um ideal bilateral) por todos os elementos da forma $[u, a]$, onde $u \in U$ e $a \in A$, então W coincide com o ideal bilateral de A gerado (como um ideal bilateral) por todos os polinômios

$$[s, x_{i_1}] \qquad \text{e} \qquad s[x_{i_1}, x_{i_2}],$$

onde $s \in S$ e $x_i \in X$.

Consideremos a série central inferior de ideais bilaterais em A

$$A = R^{(0)} \supseteq R^{(1)} \supseteq R^{(2)} \supseteq \cdots \supseteq R^{(m)} \supseteq \cdots$$

definida indutivamente por $R^{(0)} = A$ e $R^{(m)} = R^{(m)}(A) = A\big[R^{(m-1)}(A), A\big]A$ $(m \geq 1)$. Dizemos que a álgebra A é **fortemente Lie nilpotente de classe no máximo** c, se $R^{(c+1)} = \{0\}$. Por conveniência de notação, quando o conjunto $X = X_k = \{x_1, \ldots, x_k\}$ escrevemos A_k e $R_k^{(m)}$ para representar a K-álgebra $K\langle X_k \rangle$ e o ideal bilateral $R^{(m)}(A_k)$, para cada $m \geq 0$.

Pelo Lema 1.5.3, o ideal bilateral $R^{(m)}$ é gerado, como um ideal bilateral, por todos os polinômios

$$\big[r, x_{i_1}\big] \qquad \text{e} \qquad r\big[x_{i_1}, x_{i_2}\big],$$

onde $r \in R^{(m-1)}$ e $x_i \in X$.

Definição 1.5.4 *Seja r um comutador em A. Se $r = \big[x_{i_1}, \ldots, x_{i_c}\big]$ então definimos o* ***peso*** *do r como $wt(r) = c - 1$. Se $r = r_1 \cdots r_l$ é um produto de comutadores, onde $r_j = \big[x_{j1}, \ldots, x_{jc_j}\big]$ $(j = 1, \ldots, l)$, então definimos o peso de r como a soma dos pesos dos comutadores r_j $(j = 1, \ldots, l)$, ou seja,*

$$wt(r) = \sum_{j=1}^{l} wt(r_j).$$

A seguinte proposição pode ser encontrada no artigo de Drazin e Gruenberg [25].

Proposição 1.5.5 (veja [25, Theorem 1]) *Para cada $m \geq 1$, o ideal bilateral $R^{(m)}$ de A é gerado, como um ideal bilateral, por todos os produtos de comutadores de peso m nas variáveis $x_i \in X$.*

Demonstração: Seja $V^{(m)}$ o ideal bilateral de A gerado, como um ideal bilateral, por todos os produtos de comutadores de peso m. Vamos mostrar que $V^{(m)} = R^{(m)}$, para cada $m \geq 1$. A demonstração será feita por indução em m.

Para $m = 1$, claramente $V^{(1)} = R^{(1)}$, pois ambos são gerados pelos comutadores $\big[x_{i_1}, x_{i_2}\big]$ $(x_i \in X)$. Suponhamos que $V^{(k)} = R^{(k)}$, para todo $k \leq m$ e vamos mostrar que $V^{(m+1)} = R^{(m+1)}$. Seja $v = v_1 \cdots v_l$ um gerador do ideal $V^{(m+1)}$. Usaremos indução no peso do comutador v_l para mostrar que $v \in R^{(m+1)}$.

Se o peso do comutador v_l é igual a 1, então $v = v_1 \cdots v_{l-1}\big[x_{i_1}, x_{i_2}\big]$ $(x_i \in X)$. Claramente o comutador $v_1 \ldots v_{l-1}$ tem peso m e, por hipótese de indução, $v_1 \ldots v_{l-1} \in$

$V^{(m)} = R^{(m)}$. E, pelo Lema 1.5.3, o polinômio $v = v_1 \cdots v_{l-1}\big[x_{i_1}, x_{i_2}\big] \in R^{(m+1)}$. Suponhamos agora que $v \in R^{(m+1)}$ sempre que $wt(v_l) < k$. E, consideremos que o peso de v_l seja igual a k, isto é, $wt(v_l) = k$. Seja $v_l = [v_l', x_{i_1}]$ ($x_{i_1} \in X$) tal que $wt(v_l') = k-1$. O polinômio $v' = v_1 \ldots v_{l-1}v_l'$ tem peso m e, por hipótese de indução, $v' \in V^{(m)} = R^{(m)}$. Logo, pelo Lema 1.5.3, o polinômio $\big[v', x_{i_1}\big] \in R^{(m+1)}$. Temos

$$\begin{aligned}
\big[v', x_{i_1}\big] &= \big[v_1 \cdots v_{l-1}v_l', x_{i_1}\big] \\
&= v_1 \cdots v_{l-1}\big[v_l', x_{i_1}\big] + \sum_{q=1}^{l-1} v_1 \cdots v_{q-1}\big[v_q, x_{i_1}\big]v_{q+1} \cdots v_{l-1}v_l' \\
&= v + \sum_{q=1}^{l-1} v_1 \cdots v_{q-1}\big[v_q, x_{i_1}\big]v_{q+1} \cdots v_{l-1}v_l'.
\end{aligned}$$

É fácil ver que o produto $v_1 \cdots v_{q-1}[v_q, x_{i_1}]v_{q+1} \cdots v_{l-1}v_l'$ ($q = 1, \ldots, l-1$) tem peso $m+1$ e que $wt(v_l') = k-1$. Então, pela hipótese de indução,

$$v_1 \cdots v_{q-1}\big[v_q, x_{i_1}\big]v_{q+1} \cdots v_{l-1}v_l' \in R^{(m+1)},$$

para cada $q = 1, \ldots, l-1$, o que implica que $v \in R^{(m+1)}$. Logo, $V^{(m+1)} \subseteq R^{(m+1)}$.

Portanto, $V^{(m+1)} \subseteq R^{(m+1)}$.

Seja r um gerador de $R^{(m+1)}$. Pelo Lema 1.5.3, o polinômio $r = \big[s, x_{i_1}\big]$ ou $r = s\big[x_{i_1}, x_{i_2}\big]$ ($s \in R^{(m)}$ e $x_i \in X$). Por hipótese de indução, temos que $R^{(m)} = V^{(m)}$, ou seja, s tem peso m. Digamos que $s = s_1 \cdots s_l$ daí, se $r = \big[s, x_{i_1}\big]$ então

$$\begin{aligned}
r &= \big[s_1 \cdots s_l, x_{i_1}\big] \\
&= \sum_{q=1}^{l} s_1 \cdots s_{q-1}\big[s_q, x_{i_1}\big]s_{q+1} \cdots s_l
\end{aligned}$$

Claramente o polinômio $s_1 \cdots s_{q-1}\big[s_q, x_{i_1}\big]s_{q+1} \cdots s_l$ ($q = 1, \ldots, l$) tem peso $m+1$. Logo, $r \in V^{(m+1)}$. Se $r = s\big[x_{i_1}, x_{i_2}\big]$ então claramente r tem peso $m+1$ e então $r \in V^{(m+1)}$. Logo, $R^{(m+1)} \subseteq V^{(m+1)}$.

Portanto, $R^{(m)} = V^{(m)}$, para cada $m \geq 1$. ■

Pela Proposição 1.5.5, o ideal bilateral $R^{(c)}$ é gerado, como um ideal bilateral, por todos os produtos de comutadores de peso c nas variáveis $x_i \in X$. Dizemos que o quociente $A/R^{(c)}$ é uma **álgebra universal associativa** (ou **relativamente livre**) **fortemente Lie nilpotente de classe** c gerada livremente por $x_i + R^{(c)}$ ($x_i \in X$).

Observamos que se G for uma álgebra fortemente Lie nilpotente de classe $\leq c$, então qualquer aplicação $\phi : X \longrightarrow G$ pode ser estendida ao homomorfismo $\varphi : A/R^{(c)} \longrightarrow G$ tal que $\varphi\Big(x_i + R^{(c)}\Big) = \phi(x_i)$, para cada $x_i \in X$. De fato, existe um homomorfismo $\varphi' : A \longrightarrow G$ tal que $\varphi'(x_i) = \phi(x_i)$, para cada $x_i \in X$. Mais ainda, $\varphi'\big(R^{(c)}\big) = 0$, logo, existe o homomorfismo $\varphi : A/R^{(c)} \longrightarrow G$ tal que, para cada polinômio $f \in A$, $\varphi\big(f + R^{(c)}\big) = \varphi'(f)$.

Notamos que cada elemento do ideal bilateral $R^{(m)}$ em A pode ser escrito como uma combinação linear de elementos da forma $g_1 c_1 \cdots c_l g_2$, onde g_1, g_2 são monômios em A e $c_1, \ldots, c_l$ são comutadores nas variáveis x_i. Observamos que cada produto $c_1 \cdots c_l$ é um polinômio multihomogêneo de $R^{(m)}$ de multigrau $(m_1, \ldots, m_k)$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_2$ respectivamente. Logo, cada ideal $R^{(m)}$ pode ser escrito da forma

$$R^{(m)} = \bigoplus_{(m_1,\ldots,m_k)} R^{(m)}_{(m_1,\ldots,m_k)},$$

onde $R^{(m)}_{(m_1,\ldots,m_k)}$ é uma componente multihomogênea de $R^{(m)}$ de multigrau $(m_1, \ldots, m_k)$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_k$ respectivamente. Sendo $R^{(m)}_{(m_1,\ldots,m_k)} = R^{(m)} \cap A_{(m_1,\ldots,m_k)}$ temos que $R^{(m)}$ é da forma

$$R^{(m)} = \bigoplus_{(m_1,\ldots,m_k)} \Big(R^{(m)} \cap A_{(m_1,\ldots,m_k)}\Big).$$

O seguinte lema é bem conhecido.

Lema 1.5.6 *Para cada $k \geq 2$, temos*

$$R^{(m)}_k = R^{(m)} \cap A_k.$$

Demonstração: A inclusão $R^{(m)}_k \subseteq R^{(m)} \cap A_k$ é clara, pois temos $R^{(m)}_k \subseteq R^{(m)}$ e $R^{(m)}_k \subseteq A_k$. Agora seja h um elemento qualquer na interseção $R^{(m)} \cap A_k$. Assim, $h \in R^{(m)}$ e $h \in A_k$. Do fato que $h \in A_k$, podemos decompor h em um soma de polinômios multihomogêneos, ou seja, $h = h_1 + \ldots + h_s$, onde para cada $i = 1, \ldots, s$, $h_i \in A_{(m_1,\ldots,m_k)}$, ou seja, os h_i são polinômios multihomogêneos de multigrau $(m_1, \ldots, m_k)$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_k$ respectivamente. Pelo fato de $h \in R^{(m)}$, para cada i, temos

$$h_i = \sum_j \delta_i^{(j)} g_{i_1}^{(j)} c_{i1}^{(j)} \cdots c_{il_i}^{(j)} g_{i_2}^{(j)},$$

onde, para cada i e para cada j, $\delta_i^{(j)} \in K$, $g_{i_1}^{(j)}, g_{i_2}^{(j)}$ são monômios em A_k e $c_{i1}^{(j)} \cdots c_{il_i}^{(j)}$ são comutadores nas variáveis $x_1, \ldots, x_k$, isto é, $h_i \in R_k^{(m)}$. Logo, $h \in R_k^{(m)}$, ou seja, $R^{(m)} \cap A_k \subseteq R_k^{(m)}$.

Portanto, $R_k^{(m)} = R^{(m)} \cap A_k$. ■

1.6 As álgebras universais associativas Lie nilpotentes

Sejam K um anel associativo comutativo unitário e $A = K\langle X \rangle$ a K-álgebra associativa unitária livre, livremente gerada pelo conjunto X. Lembramos que a série de K-submódulos em A

$$A = L^{(1)} \supseteq L^{(2)} \supseteq L^{(3)} \supseteq \cdots,$$

foi definida indutivamente por $L^{(1)} = A$ e $L^{(n)} = L^{(n)}(A) = \left[L^{(n-1)}, A\right]$ $(n \geq 2)$. O K-submódulo $L^{(n)}$ é gerado por todos os comutadores $[a_1, \ldots, a_n]$, onde $a_i \in A$, para cada i. Lembramos também que a série $\left\{T^{(n)}(A)\right\}_{n \geq 1}$ é a série de ideais bilaterais em A tais que $T^{(n)} = T^{(n)}(A) = AL^{(n)}A$ é gerado por $L^{(n)}$ $(n \geq 1)$. Por conveniência de notação, quando $X = X_k = \left\{x_1, \ldots, x_k\right\}$ escrevemos $L_k^{(n)}$ e $T_k^{(n)}$ para representar $L^{(n)}(A_k)$ e $T^{(n)}(A_k)$, respectivamente.

A álgebra associativa A é dita **Lie nilpotente de classe** c se a álgebra associada de Lie $A^{(-)}$ é nilpotente de classe c, ou seja, se $L^{(c)} \neq \{0\}$ e $L^{(c+1)} = \{0\}$. A última condição é equivalente a condição $[a_1, \ldots, a_n] = 0$, para todos $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Cada elemento do K-submódulo $L^{(n)}$ em A pode ser escrito como uma combinação linear de comutadores $[a_1, \ldots, a_l]$ $(l \geq n)$, onde os a_i são monômios em A. Notemos que os comutadores $[a_1, \ldots, a_l]$ são multihomogêneos de multigrau $(m_1, \ldots, m_k)$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_k$. Assim, cada K-submódulo $L^{(n)}$ em A é da forma

$$L^{(n)} = \bigoplus_{(m_1,\ldots,m_k)} L^{(n)}_{(m_1,\ldots,m_k)}.$$

Sendo $L^{(n)}_{(m_1,\ldots,m_k)} = L^{(n)} \cap A_{(m_1,\ldots,m_k)}$ uma componente multihomogênea de $L^{(n)}$ de multigrau $(m_1, \ldots, m_k)$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_k$, ou seja, $L^{(n)}$ é da forma

$$L^{(n)} = \bigoplus_{(m_1,\ldots,m_k)} \left(L^{(n)} \cap A_{(m_1,\ldots,m_k)}\right).$$

Desde que $T^{(n)} = AL^{(n)}A$ $(n \geq 1)$, temos

$$T^{(n)} = \bigoplus_{(m_1,m_2,\ldots)} T^{(n)}_{(m_1,m_2,\ldots)} = \bigoplus_{(m_1,m_2,\ldots)} \Big(T^{(n)} \cap A_{(m_1,m_2,\ldots)}\Big).$$

O seguinte lema é bem conhecido.

Lema 1.6.1 *Para cada $k \geq 2$, temos*

$$T_k^{(n)} = T^{(n)} \cap A_k.$$

Demonstração: A inclusão $T_k^{(n)} \subseteq T^{(n)} \cap A_k$ é clara, pois temos $T_k^{(n)} \subseteq T^{(n)}$ e $T_k^{(n)} \subseteq A_k$. Agora seja h um elemento qualquer em $T^{(n)} \cap A_k$. Assim, $h \in T^{(n)}$ e $h \in A_k$. Do fato que $h \in A_k$ podemos decompor h em um soma de polinômios multihomogêneos, ou seja, $h = h_1 + \ldots + h_s$, onde, para cada $i = 1, \ldots, s$, $h_i \in A_{(m_1,\ldots,m_k)}$, ou seja, os h_i são polinômios multihomogêneos de multigrau $(m_1, \ldots, m_k)$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_k$ respectivamente. Pelo fato de $h \in T^{(n)}$, para cada i, temos

$$h_i = \sum_j \delta_i^{(j)} g_{0i}^{(j)} \big[g_{1i}^{(j)}, \ldots, g_{ni}^{(j)}\big] g_{(n+1)i}^{(j)},$$

onde, para cada j, $\delta_i^{(j)} \in K$ e $g_{i'i}^{(j)}$ $(i' = 0, 1, \ldots, n+1)$ são monômios em A_k, ou seja, os monômios $g_{i'}^{(j)}$ são monômios nas variáveis $x_1, \ldots, x_k$, isto é, $h_i \in T_k^{(n)}$. Logo, $h \in T_k^{(n)}$, ou seja, $T^{(n)} \cap A_k \subseteq T_k^{(n)}$.

Portanto, $T_k^{(n)} = T^{(n)} \cap A_k$. ■

Observamos que a série

$$A = L^{(1)} \supseteq L^{(2)} \supseteq L^{(3)} \supseteq \cdots$$

é uma série de K**-submódulos da álgebra de Lie** $A^{(-)}$ **associada a** A tal que, para cada $n \geq 2$,

$$L^{(n-1)}/L^{(n)} \subseteq Z\left(A/L^{(n)}\right), \tag{1.7}$$

onde $Z\left(A/L^{(n)}\right)$ é o centro da álgebra de Lie $A/L^{(n)}$. Mais ainda, $L^{(n)}$ é o menor ideal da álgebra de Lie $A^{(-)}$ com a propriedade (1.4.5), pois se $G \subseteq L^{(n)}$ é um ideal de $A^{(-)}$ tal que

$$L^{(n-1)}/G \subseteq Z\left(A/G\right),$$

então $\left[L^{(n-1)}, A\right] \subseteq G$, ou seja, $L^{(n)} \subseteq G$.

Analogamente, a série

$$A = R^{(0)} \supseteq R^{(1)} \supseteq R^{(2)} \supseteq \cdots$$

é uma série de **ideais bilaterais de** A com as propriedades semelhantes: para cada $m \geq 1$,

$$R^{(m-1)}/R^{(m)} \subseteq Z\left(A/R^{(m)}\right), \tag{1.8}$$

e $R^{(m)}$ é o menor ideal bilateral de A com a propriedade (1.28), ou seja, se $H \subseteq R^{(m-1)}$ é um ideal bilateral de A tal que

$$R^{(m-1)}/H \subseteq Z\left(A/H\right),$$

então $\left[R^{(m-1)}, A\right] \subseteq H$, logo $R^{(m)} = A\left[R^{(m-1)}, A\right]A \subseteq H$.

1.6.1 Os geradores de $T^{(n)}$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$

Nesta seção vamos expor alguns resultados que explicitam os geradores do ideal $T^{(n)}$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Para $n = 1$, temos que $T^{(1)} = A$ e assim, o ideal $T^{(1)}$ é gerado, como um ideal bilateral, pelo conjunto X.

Para $n = 2$, o ideal bilateral $T^{(2)}$ é gerado, por definição, por todos os comutadores $[a_{i_1}, a_{i_2}]$ ($a_i \in A$). É fácil ver que os comutadores $[x_{i_1}, x_{i_2}]$ ($x_i \in X$), formam um conjunto gerador do ideal $T^{(2)}$, como ideal bilateral de A.

Para $n = 3$, um conjunto de geradores para o ideal bilateral $T^{(3)}$ é bem conhecido, veja por exemplo [61, Lemma 1], [41, Lemma 1] ou [10, Proposition 3.1].

Proposição 1.6.2 *Seja K um anel associativo comutativo unitário e seja $A = K\left\langle X\right\rangle$ a K-álgebra associativa livre, livremente gerada por $X = \left\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\right\}$. Então o ideal bilateral $T^{(3)}$ é gerado, como um ideal bilateral em A, pelos polinômios*

$$\left[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\right], \tag{1.9}$$

$$\left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}\right] + \left[x_{i_1}, x_{i_3}\right]\left[x_{i_2}, x_{i_4}\right], \tag{1.10}$$

onde $x_{i_j} \in X$ $(j = 1, 2, 3, 4)$.

Para $n = 4$, em 2013, Deryabina e Krasilnikov [19, Theorem 1.3] exibiram o seguinte conjunto gerador para o ideal bilateral $T^{(4)}$, considerando K um anel associativo comutativo unitário.

Proposição 1.6.3 (veja [19, Theorem 1.3]) *Seja K um anel associativo comutativo unitário e seja $A = K\langle X\rangle$ a K-álgebra associativa livre, livremente gerada por $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Então o ideal bilateral $T^{(4)}$ é gerado, como um ideal bilateral em A, pelos polinômios*

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}], \tag{1.11}$$

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}][x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}], \tag{1.12}$$

$$[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}] + [x_{i_5}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_1}], \tag{1.13}$$

$$[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}] + [x_{i_1}, x_{i_3}][x_{i_2}, x_{i_4}, x_{i_5}], \tag{1.14}$$

$$\Big([x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}] + [x_{i_1}, x_{i_3}][x_{i_2}, x_{i_4}]\Big)[x_{i_5}, x_{i_6}], \tag{1.15}$$

onde $x_{i_j} \in X$ $(j = 1, \ldots, 6)$.

Por fim, para $n = 5$, em 2017, Costa e Krasilnikov [16, Theorem 1.1] exibiram o seguinte conjunto de geradores para o ideal bilateral $T^{(5)}$, considerando K um anel associativo comutativo unitário.

Proposição 1.6.4 (veja [16, Theorem 1.1]) *Seja K um anel associativo comutativo unitário e seja $A = K\langle X\rangle$ a K-álgebra associativa livre, livremente gerada por $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Então o ideal bilateral $T^{(5)}$ é gerado, como um ideal bilateral em A, pelos polinômios*

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}], \tag{1.16}$$

$$[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}] + [x_{i_6}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_1}], \tag{1.17}$$

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}][x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}], \tag{1.18}$$

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}][x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}, x_{i_7}], \tag{1.19}$$

$$\Big([x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}] + [x_{i_1}, x_{i_3}][x_{i_2}, x_{i_4}]\Big)[x_{i_5}, x_{i_6}, x_{i_7}], \tag{1.20}$$

$$\Big[[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}] + [x_{i_1}, x_{i_3}][x_{i_2}, x_{i_4}], x_{i_5}, x_{i_6}\Big], \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned} &\Big[[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}] + [x_{i_1}, x_{i_3}][x_{i_2}, x_{i_4}], x_{i_5}\Big][x_{i_6}, x_{i_7}] + \\ &+ \Big[[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}] + [x_{i_1}, x_{i_3}][x_{i_2}, x_{i_4}], x_{i_6}\Big][x_{i_5}, x_{i_7}], \end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\Big([x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}] + [x_{i_1}, x_{i_3}][x_{i_2}, x_{i_4}]\Big)\Big([x_{i_5}, x_{i_6}][x_{i_7}, x_{i_8}] + [x_{i_5}, x_{i_7}][x_{i_6}, x_{i_8}]\Big), \tag{1.23}$$

onde $x_{i_j} \in X$ $(j = 1, \ldots, 8)$.

1.6.2 Resultados auxiliares

O seguinte lema pode ser visto em [7, Theorem 1.6].

Lema 1.6.5 (veja [7, Theorem 1.6]) *Para todo $x_i \in X$ $(i \in \mathbb{N})$, temos*

$$\big[x_1, \ldots, x_n\big]_{\pi_l} \in T^{(n)},$$

π_l significa um arranjo com l comutadores na palavra associativa $x_1 \cdots x_n$.

Demonstração: É suficiente mostrar que

$$\big[x_1, \ldots, x_n\big]_{\pi_l} \in L^{(n)},$$

usando indução sobre a quantidade l de comutadores. Para $l = 2$, observe que

$$\big[z, [x_{n-1}, x_n]\big] = -\big[[x_{n-1}, x_n], z\big] = -[x_{n-1}, x_n, z],$$

assim, segue da Identidade de jacobi que $[x_{n-1}, x_n, z] = [z, x_{n-1}, x_n] - [z, x_n, x_{n-1}]$. Portanto,

$$\big[z, [x_{n-1}, x_n]\big] = [z, x_n, x_{n-1}] - [z, x_{n-1}, x_n].$$

Fazendo $z = [x_1, \ldots, x_{n-2}]$, obtemos a equação

$$\big[[x_1, \ldots, x_{n-2}], [x_{n-1}, x_n]\big] = [x_1, \ldots, x_{n-2}, x_n, x_{n-1}] - [x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]. \quad (1.24)$$

Para algum $s = 1, \ldots, n-1$, considere o comutador $\big[[x_1, \ldots, x_s], [x_{s+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n]\big]$. Desde que

$$\big[[x_1, \ldots, x_s], [x_{s+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n]\big] = \Big[[x_1, \ldots, x_s], \big[[x_{s+1}, \ldots, x_{n-1}], x_n\big]\Big],$$

podemos aplicar a equação (1.24) e, assim obtemos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}\big[[x_1, \ldots, x_s], [x_{s+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n]\big] &= \big[[x_1, \ldots, x_s], [x_{s+1}, \ldots, x_{n-1}], x_n\big] - \\ &- \big[[x_1, \ldots, x_s, x_n], [x_{s+1}, \ldots, x_{n-1}]\big].\end{aligned}$$

Aplicamos novamente a equação (1.24) em $\big[[x_1, \ldots, x_s], [x_{s+1}, \ldots, x_{n-1}]\big]$ e em $\big[[x_1, \ldots, x_s, x_n], [x_{s+1}, \ldots, x_{n-1}]\big]$. Daí obtemos que $\big[[x_1, \ldots, x_s], [x_{s+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n]\big]$ é uma combinação linear de comutadores de comprimento n, ou seja,

$$\big[[x_1, \ldots, x_s], [x_{s+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n]\big] \in L^{(n)}.$$

Admitimos que para cada arranjo de comutadores de comprimento $r < l$ o comutador $\big[[x_1,\ldots,x_s]_{\pi_r}\big]$ é uma combinação linear de comutadores de comprimento s. Tomemos o arranjo de comutadores de comprimento l na palavra associativa $x_1\cdots x_n$. Reescrevemos como um comutador de dois arranjos $r_1\cdot r_2$ tal que $\big[[x_1,\ldots,x_s]_{\pi_{r_1}}\big]$ é um arranjo de comutadores na palavra associativa $x_1\cdots x_s$ e $\Big[\big[x_{s+1},\ldots,x_n\big]_{\pi_{r_2}}\Big]$ é um arranjo na palavra associativa $x_{s+1}\cdots x_n$, ou seja,

$$\big[x_1,\ldots,x_n\big]_{\pi_l} = \Big[\big[x_1,\ldots,x_s\big]_{\pi_{r_1}}, \big[x_{s+1},\ldots,x_n\big]_{\pi_{r_2}}\Big].$$

Pela hipótese de indução, aplicada aos arranjos de comutadores π_{r_1} e π_{r_2}, respectivamente, temos

$$[x_1,\ldots,x_s]_{\pi_{r_1}} = \sum \alpha_{i_1,\ldots,i_s}[x_1,\ldots,x_s], i_j = 1,\ldots,s,$$

$$[x_1,\ldots,x_s]_{\pi_{r_2}} = \sum \alpha_{i_{s+1},\ldots,i_n}[x_{s+1},\ldots,x_n], i_j = s+1,\ldots,n.$$

Pela linearidade do comutador, e pelo primeiro passo de indução, temos que $[x_1,\ldots,x_s] \in L^{(s)}$ e $[x_{s+1},\ldots,x_n] \in L^{(n-s)}$, assim para cada produto de comutador

$$\big[[x_{i_1},\ldots,x_{i_s}],[x_{i_{s+1}},\ldots,x_{i_n}]\big] \in L^{(n)}.$$

Portanto,

$$[x_1,\ldots,x_n]_{\pi_l} \in L^{(n)}.$$

Como $L^{(n)} \subset T^{(n)}$, segue o resultado.

■

Para demonstrar alguns resultados, vamos usar algumas relações que apresentaremos a seguir.

Sejam $a,b,u,v,w \in A$, temos

$$[ab,u,v] \;=\; [u,a][v,b]+[v,a][u,b]+[a,u,v]b+a[b,u,v]$$

$$[v,a][u,b] \;=\; \big[[v,a],[u,b]\big]+[u,b][v,a]$$

Logo,

$$[u,a][v,b]+[v,a][u,b] = -[u,ab,v]+\big[[u,b],[v,a]\big]+[u,a,v]b+a[u,b,v] \tag{1.25}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
[ab,u,v,w] &= \big[[a,u][b,v],w\big] + \big[[a,v][b,u],w\big] + \big[a[b,u,v],w\big] + \big[[a,u,v]b,w\big] \\
&= [a,u][b,v,w] + [a,u,w][b,v] + [a,v][b,u,w] + [a,v,w][b,u] + \\
&+ \ a[b,u,v,w] + [a,w][b,u,v] + [a,u,v][b,w] + [a,u,v,w]b \\
&= -\big([u,a][b,v,w] + [u,b][a,v,w]\big) - \big([u,a,w][b,v] + [u,a,v][b,w]\big) - \\
&+ \ \big([u,b,w][a,v] + [u,b,v][a,w]\big) + \big[[u,b,w],[a,v]\big] + \big[[u,b],[a,v,w]\big] + \\
&+ \ \big[[u,b,v],[a,w]\big] + a[b,u,v,w] + [a,u,v,w]b,
\end{aligned}$$

e, assim,

$$\begin{aligned}
[u,a][b,v,w] + [u,b][a,v,w] = [u,ab,v,w] - \big([u,a,w][b,v] + [u,a,v][b,w]\big) - \\
-\big([u,b,w][a,v] + [u,b,v][a,w]\big) + \big[[u,b],[a,v,w]\big] + \\
+\big[[u,b,w],[a,v]\big] + \big[[u,b,v],[a,w]\big] - a[u,b,v,w] + \\
+ [u,a,v,w]b \qquad (1.26)
\end{aligned}$$

Por definição, $T^{(1)} = A$ e $T^{(n)} = AL^{(n)}A$ ($n \geq 2$) é o ideal bilateral de A gerado, como um ideal bilateral, por todos os comutadores $[a_1, \ldots, a_n]$, onde $a_i \in A$, para cada i. Como o comutador $[a_1, \ldots, a_n]$ é linear em cada entrada podemos considerar que os a_i são monômios em A ($i = 1, \ldots, n$). Assim, os elementos de $T^{(n)}$ são combinações lineares de elementos da forma $b[a_1, \ldots, a_n]c$ onde $b, c \in A$ e os a_i são monômios de A ($i = 1, \ldots, n$). Desde que

$$b[a_1, \ldots, a_n]c = bc[a_1, \ldots, a_n] + b\big[[a_1, a_2], a_3 \ldots, a_n, c\big],$$

então $T^{(n)}$ é gerado, como um K-módulo (à esquerda), por todos os elementos da forma $b[a_1, \ldots, a_n]$, onde $b \in A$ e os a_i são monômios em A ($i = 1, \ldots, n$).

O seguinte lema foi demonstrado por Latyshev [62, Lemma 2].

Lema 1.6.6 *Para cada $v_{n-2} = [b_1, \ldots, b_{n-2}] \in L^{(n-2)}$ ($b_i \in A, n \geq 3$) e para todos $a_1, a_2, a_3 \in A$, temos*

$$\big[v_{n-2}, a_1\big]\big[a_2, a_3\big] + \big[v_{n-2}, a_3\big]\big[a_2, a_1\big] \in T^{(n)}.$$

Demonstração: Sejam $v_{n-2} = [b_1, \ldots, b_{n-2}] \in L^{(n-2)}$ $(b_i \in A, n \geq 3)$ e $a_1, a_2, a_3 \in A$. Fazendo $a = a_1, b = a_3, u = v_{n-2}$ e $v = a_2$ na equação (1.25), temos

$$[v_{n-2}, a_1][a_2, a_3] + [a_2, a_1][v_{n-2}, a_3] =$$

$$= -[v_{n-2}, a_1a_2, a_3] + \big[[v_{n-2}, a_3], [a_2, a_1]\big] + [v_{n-2}, a_1, a_2]a_3 + a_1[v_{n-2}, a_3, a_2].$$

Daí,

$$[v_{n-2}, a_1][a_2, a_3] + [v_{n-2}, a_3][a_2, a_1] = -[v_{n-2}, a_1a_2, a_3] + [v_{n-2}, a_1, a_2]a_3 + a_1[v_{n-2}, a_3, a_2].$$

Claramente os polinômios $[v_{n-2}, a_1a_2, a_3], [v_{n-2}, a_1, a_2]a_3$ e $a_1[v_{n-2}, a_3, a_2]$ pertencem a $L^{(n)}$. Logo,

$$\big[v_{n-2}, a_1\big]\big[a_2, a_3\big] + \big[v_{n-2}, a_3\big]\big[a_2, a_1\big] \in T^{(n)}.$$

■

Uma consequência do Lema 1.6.6 é o seguinte lema (veja [62]).

Lema 1.6.7 *Para cada $v_{n-2} = [b_1, \ldots, b_{n-2}] \in L^{(n-2)}$ $(b_i \in A, n \geq 3)$, para todos $a_1, a_2, a_3 \in A$ e para cada $\sigma \in S_3$, temos*

$$\big[v_{n-2}, a_{\sigma(1)}\big]\big[a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}\big] \equiv (-1)^{\sigma}\big[v_{n-2}, a_1\big]\big[a_2, a_3\big] \pmod{T^{(n)}}.$$

Demonstração: A demonstração segue do Lema 1.6.6. ■

O seguinte lema é bem conhecido e pode ser encontrado, por exemplo, em [21, Corollary 2.2]

Lema 1.6.8 *Para cada $v_{n-3} = [b_1, \ldots, b_{n-3}] \in L^{(n-3)}$ $(b_i \in A, n \geq 4)$, para todos $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ e para cada $\sigma \in S_4$, temos*

$$\Big[v_{n-3}, a_{\sigma(1)}\Big]\Big[a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, a_{\sigma(4)}\Big] \equiv (-1)^{\sigma}\Big[v_{n-3}, a_1\Big]\Big[a_2, a_3, a_4\Big] \pmod{T^{(n)}}.$$

Demonstração: Sejam $v_{n-3} = [b_1, \ldots, b_{n-3}] \in L^{(n-3)}$ $(b_i \in A, n \geq 4)$ e $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$. Fazendo $a = a_1, b = a_4, u = v_{n-3}$ e $v = [a_2, a_3]$ na equação (1.25), temos

$$[v_{n-3}, a_1][a_2, a_3, a_4] \equiv -[v_{n-3}, a_4][a_2, a_3, a_1] \pmod{T^{(n)}}. \tag{1.27}$$

Por outro lado, fazendo $a = a_1, b = a_3, u = [v_{n-3}, a_4]$ e $v = a_2$ na equação (1.25), temos

$$\big[[v_{n-3}, a_4], a_1\big][a_2, a_3] \equiv -\big[[v_{n-3}, a_4], a_3\big][a_2, a_1] \pmod{T^{(n)}}. \tag{1.28}$$

Agora, na equação 1.26, fazemos $a = a_1, b = a_2, u = v_{n-3}, v = a_3$ e $w = a_4$, e usando a congruência (1.28) temos

$$[v_{n-3}, a_1][a_2, a_3, a_4] \equiv -[v_{n-3}, a_2][a_1, a_3, a_4] \pmod{T^{(n)}}. \tag{1.29}$$

O resultado segue de (1.27) e (1.29). ■

Uma consequência do Lema 1.6.8 é o seguinte corolário.

Corolário 1.6.9 *Para cada* $v_{n-3} = \big[b_1, \dots, b_{n-3}\big] \in L_3^{(n-3)}$ $(b_i \in A_3, n \geq 5)$ *e para todos* $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A_3$*, temos*

$$\big[v_{n-3}, a_1\big]\big[a_2, a_3, a_4\big] \in T_3^{(n)}.$$

Demonstração: Sejam $v_{n-3} = \big[b_1, \dots, b_{n-3}\big] \in L_3^{(n-3)}$ $(b_i \in A_3, n \geq 5)$ e $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A_3$. Temos que $\big[v_{n-3}, a_1\big]\big[a_2, a_3, a_4\big]$ é uma combinação linear, módulo $T_3^{(n)}$, de produtos da forma

$$a\big[v_{n-3}, x_{i_1}\big]b\big[x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}\big]c,$$

onde a, b, c são monômios em A_3, que são congruentes, módulo $T_3^{(n)}$, aos produtos

$$\big[v_{n-3}, x_{i_1}\big]\big[x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}\big]d,$$

onde d é um monômio em A_3.

Pelo Lema 1.6.8, é fácil ver que

$$\big[v_{n-3}, x_{i_1}\big]\big[x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}\big] \equiv 0 \pmod{T_3^{(n)}}.$$

Logo,

$$\big[v_{n-3}, a_1\big]\big[a_2, a_3, a_4\big] \in T_3^{(n)}.$$

■

Usaremos o Corolário 1.6.9 para provar o seguinte lema.

Lema 1.6.10 *Para todo* $n \geq 3$*, temos*

$$\Big[T_3^{(n-2)}, A_3, A_3\Big] \subseteq T_3^{(n)}.$$

Demonstração: Observamos que cada elemento de $\left[T_3^{(n-2)}, A_3, A_3\right]$ pode ser escrito como soma de elementos da forma $v = \left[u_{n-2}d, a, b\right]$, onde $u_{n-2} = \left[b_1, \ldots, b_{n-2}\right] \in L_3^{(n-2)}$ $(b_i \in A_3, n \geq 3)$ e $a, b, d \in A_3$. Temos

$$v = u_{n-2}[d, a, b] + \left[u_{n-2}, a\right]\left[d, b\right] + \left[u_{n-2}, b\right]\left[d, a\right] + \left[u_{n-2}, a, b\right]d.$$

Pelo Corolário 1.6.9, o elemento $u_{n-2}[d, a, b] \in T_3^{(n)}$, pelo Lema 1.6.6, o elemento $\left[u_{n-2}, a\right]\left[d, b\right] + \left[u_{n-2}, b\right]\left[d, a\right] \in T_3^{(n)}$ e claramente o elemento $\left[u_{n-2}, a, b\right]d \in T_3^{(n)}$ Logo, $v \in T_3^{(n)}$.

Portanto,

$$\left[T_3^{(n-2)}, A_3, A_3\right] \subseteq T_3^{(n)}.$$

■

Seja A um anel associativo unitário e $T^{(n)} = T^{(n)}(A)$ o ideal bilateral de A gerado por todos os comutadores da forma $\left[a_1, \ldots, a_n\right](a_i \in A)$. A seguinte proposição é conhecida e pode ser encontrada no artigo de Pchelintsev [64] com o nome de Lema de Latyshev.

Proposição 1.6.11 *Sejam* $u_k = \left[a_1, \ldots, a_k\right]$, $v_l = \left[b_1, \ldots, a_l\right]$ $(a_i, b_j \in A)$ *e* $x \in A$. *Então*

$$\left[u_k, x\right]\left[v_l, x\right] \in T^{(k+l+1)}.$$

Demonstração: Primeiramente afirmamos que

$$2\left[u_k, x\right]\left[v_l, x\right] \in T^{(k+l+1)}. \tag{1.30}$$

De fato, temos

$$\left[x^2, u_k, v_l\right] = x\left[x, u_k, v_l\right] + \left[x, u_k\right]\left[x, v_l\right] + \left[x, v_l\right]\left[x, u_k\right] + \left[x, u_k, v_l\right]x.$$

Pelo Lema 1.6.5 temos que $\left[x^2, u_k, v_l\right], x\left[x, u_k, v_l\right], \left[x, u_k, v_l\right]x \in T^{(k+l+1)}$, assim

$$\left[x, u_k\right]\left[x, v_l\right] + \left[x, v_l\right]\left[x, u_k\right] = 2\left[x, u_k\right]\left[x, v_l\right] - \left[\left[x, u_k\right], \left[x, v_l\right]\right] \in T^{(k+l+1)}.$$

Desde que $\left[\left[x, u_k\right], \left[x, v_l\right]\right] \in T^{(k+l+1)} \subseteq T^{(k+l+2)}$, segue a afirmação.

Agora afirmamos que

$$3^m\left[u_k, x\right]\left[v_l, x\right] \in T^{(k+l+1)}. \tag{1.31}$$

para algum inteiro positivo m. De fato, se k é par então $\big[u_k, x\big]$ é um comutador de tamanho ímpar, e pelo [21, Theorem 1.1], temos

$$3\big[u_k, x\big]\big[v_l, x\big] \in T^{(k+l+1)}.$$

Similarmente, se l é par então $3\big[u_k, x\big]\big[v_l, x\big] \in T^{(k+l+1)}$. Assim, resta provar a afirmação quando $k = 2k' + 1$ e $l = 2l' + 1$ são ímpares.

O seguinte lema é uma modificação do [38, Lemma 2] e pode ser encontrado em [21].

Lema 1.6.12 (veja [21, Lemma 2.4]) *Sejam $h \in T^{(n)}, a, b \in A$. Então*

$$3[h, a, b] \in T^{(n+2)}.$$

Demonstração: Observamos que $T^{(n)}$ é o subespaço vetorial gerado por elementos da forma $u_n d$, onde $u_n = \big[a_1, \ldots, a_n\big]$, onde $a_i \in A$, para $i = 1, \ldots, n$ e $d \in A$. Por isso, é suficiente verificar que $3\big[u_n d, a, b\big] \in T^{(n+2)}$, onde u_n é como acima. Temos

$$\big[u_n d, a, b\big] = u_n[d, a, b] + \big[u_n, a\big]\big[d, b\big] + \big[u_n, b\big]\big[d, a\big] + \big[u_n, a, b\big]d. \tag{1.32}$$

É claro que

$$3u_n[d, a, b] \in T^{(n+2)}, \big[u_n, a, b\big]d \in T^{(n+2)}. \tag{1.33}$$

Por outro lado,

$$\big[ab, u_n, d\big] = a\big[b, u_n, d\big] + \big[a, u_n\big]\big[b, d\big] + \big[a, d\big]\big[b, u_n\big] + \big[a, u_n d\big]b,$$

onde $\big[ab, u_n, d\big], a\big[b, u_n, d\big], \big[a, u_n d\big]b \in T^{(n+2)}$. Logo, segue que

$$\big[a, u_n\big]\big[b, d\big] + \big[a, d\big]\big[b, u_n\big] = \big[u_n, a\big]\big[d, b\big] + \big[u_n, b\big]\big[d, a\big] - \Big[\big[u_n, b\big], \big[d, a\big]\Big] \in T^{(n+2)};$$

desde que $\Big[\big[u_n, b\big], \big[d, a\big]\Big] \in T^{(n+3)} \subseteq T^{(n+2)}$, temos

$$\big[u_n, a\big]\big[d, b\big] + \big[u_n, b\big]\big[d, a\big] \in T^{(n+2)}. \tag{1.34}$$

O resultado segue imediatamente (1.32), (1.33) e (1.34). A prova do Lema 1.6.12 está completa. ■

Recordamos que temos que provar que $3^m\big[u_k, x\big]\big[v_l, x\big] \in T^{(k+l+1)}$ para algum m inteiro positivo, onde $k = 2k' + 1$ e $l = 2l' + 1$ são ímpares. Temos

$$\big[u_k x, x, v_l\big] = u_k\big[x, x, v_l\big] + \big[u_k, x\big]\big[x, v_l\big] + \big[u_k, v_l\big]\big[x, x\big] + \big[u_k, x, v_l\big]x$$

Notemos que

$$\big[u_k x, x, v_l\big] = \big[u_k, x\big]\big[x, v_l\big] + \big[u_k, x, v_l\big]x. \qquad (1.35)$$

Pelo Lema 1.6.5

$$\big[u_k, x, v_l\big]x \in T^{(k+l+1)};$$

por outro lado, o comutador $\big[u_k x, x, v_l\big]$ pode ser escrito como uma combinação linear de comutadores da forma $\big[u_k x, x, b_{i_1}, \dots, b_{i_l}\big]$, onde $v_l = \big[b_{i_1}, \dots, b_{i_l}\big]$. Desde que $l = 2l'+1$, pelo Lema 1.6.12, temos

$$3^{(l'+1)}\big[u_k, x, b_{i_1}, \dots, b_{i_l}\big] \in T^{(k+2l'+1)} = T^{(k+l+1)}$$

assim,

$$3^m\big[u_k, x, v_l\big] \in T^{(k+l+1)} \qquad (1.36)$$

onde $m = l' + 1$. Agora, segue de (1.34), (1.35) e (3.3) que

$$3^m\big[u_k, x\big]\big[v_l, x\big] = -3^m\big[u_k, x\big]\big[x, v_l\big] \in T^{(k+l+1)},$$

como afirmamos.

Segue imediatamente de (1.30) e (1.31) que

$$\big[u_k, x\big]\big[v_l, x\big] \in T^{(k+l+1)},$$

como afirmamos. Isto completa a prova da proposição. ■

Capítulo 2

Os polinômios centrais das álgebras associativas fortemente Lie nilpotentes

Neste capítulo nós formularemos o nosso resultado principal sobre polinômios centrais descrito abaixo, reduziremos a demonstração deste resultado a um certo resultado sobre T-subespaços em álgebras associativas universais (ou relativamente livres) fortemente Lie nilpotentes que são submódulos sobre uma certa álgebra D_l. Em seguida, reduziremos a demonstração do último resultado ao resultado sobre certos módulos sobre anéis de polinômios. No final nós demonstraremos esse último resultado sobre módulos, e com isso completaremos a demonstração do resultado principal deste capítulo.

2.1 O resultado principal e a sua reformulação

Lembramos que o nosso principal resultado sobre polinômios centrais é o seguinte teorema.

Teorema 1 *Sejam F um corpo e A uma F-álgebra associativa unitária. Suponha que A é fortemente Lie nilpotente. Então o T-subespaço $C(A)$ dos polinômios centrais de A é finitamente gerado como T-subespaço de $F\langle X\rangle$.*

Na verdade vamos mostrar o seguinte teorema.

Teorema 2.1.1 *Sejam F um corpo e A uma F-álgebra associativa unitária tal que, para alguns k e l inteiros positivos,*

$$[a_1, a_2] \cdots [a_{2k-1}, a_{2k}] = 0 \tag{2.1}$$

e

$$[a_1, \dots, a_l] = 0 \tag{2.2}$$

para quaisquer $a_i \in A$. Então o T-subespaço $C(A)$ dos polinômios centrais de A é finitamente gerado como T-subespaço de $F\langle X \rangle$.

Os Teoremas 1 e 2.1.1 são equivalentes devido ao seguinte lema.

Lema 2.1.2 *Sejam F um corpo e A uma F-álgebra associativa unitária. Então as seguintes condições são equivalentes:*

i) *A é fortemente Lie nilpotente;*

ii) *para alguns k e l inteiros positivos valem (2.1) e (2.2).*

Demonstração: Suponha que A é fortemente Lie nilpotente de classe c. Recordamos que isso acontece se, e somente se, para quaisquer $a_{ij} \in A$ e todos os produtos de comutadores, temos

$$[a_{11}, \dots, a_{1l_1}] \cdots [a_{k1}, \dots, a_{kl_k}] = 0,$$

quando $l_1 + \cdots + l_k - k \geq c$. Logo, para quaisquer $a_i \in A$, temos

$$[a_1, a_2] \cdots [a_{2c-1}, a_{2c}] = 0 \qquad \text{e} \qquad [a_1, \dots, a_{c+1}] = 0.$$

Assim, se a álgebra A é fortemente Lie nilpotente de classe c, então A satisfaz (2.1) e (2.2), para $k = c$ e $l = c + 1$.

Por outro lado, seja A uma F-álgebra tal que, para todos $a_i \in A$,

$$[a_1, a_2] \cdots [a_{2k-1}, a_{2k}] = 0 \qquad \text{e} \qquad [a_1, \dots, a_l] = 0.$$

Suponhamos que

$$[g_{11}, \dots, g_{1l_1}] \cdots [g_{m1}, \dots, g_{ml_m}] \neq 0,$$

para alguns $g_{ij} \in A$. Claramente temos que $m \leq (k-1)$ e $l_j \leq (l-1)$, para todo $j = 1, \dots, m$. Segue então que

$$l_1 + \cdots + l_m - m \leq m(l-1) - m = m(l-2) \leq (k-1)(l-2),$$

ou seja, se $[g_{11},\ldots,g_{1l_1}]\cdots[g_{m1},\ldots,g_{ml_m}]\neq 0$, para alguns $g_{ij}\in A$, então $l_1+\cdots+l_m-m\leq(k-1)(l-2)$. Logo, se $l'_1+\cdots+l'_{m'}-m'>(k-1)(l-2)$ então

$$[a_{11},\ldots,a_{1l'_1}]\cdots[a_{m'1},\ldots,a_{m'l'_{m'}}]=0,$$

para todos $a_{ij}\in A$. Ou seja, A é fortemente Lie nilpotente de classe no máximo $(k-1)(l-2)+1$. ■

Assim, os Teoremas 1 e 2.1.1 são equivalentes como foi mencionado acima.

Recordamos que Shchigolev [70] demonstrou que se F for um corpo de característica 0 então todos os T-subespaços de $F\langle X\rangle$ são finitamente gerados. Em particular, se $charF=0$ então o T-subespaço dos polinômios centrais de qualquer álgebra fortemente Lie nilpotente é finitamente gerado. Neste sentido, basta demonstrar o teorema para o caso em que a $charF=p>0$, com p primo. Por isso, a partir deste momento, no Capítulo 2, assumimos que a característica do corpo F é igual a um número primo $p>0$.

Observamos que o esquema da demonstração do Teorema 2.1.1 apresentada abaixo é o mesmo que foi usado em [54, 55, 57] para demonstrar a existência de base finita para identidades de várias álgebras e grupos.

2.2 A redução do resultado principal ao resultado sobre certos T-subespaços de $F\langle X\rangle$

Seja $U_{k,l}$ o T-ideal de $F\langle X\rangle$ gerado por dois polinômios

$$[x_1,x_2]\cdots[x_{2k-1},x_{2k}] \qquad \text{e} \qquad [x_1,\ldots,x_l],$$

com k e l inteiros positivos e $x_i\in X$. Observamos que $U_{k,l}$ é gerado, como T-subespaço em $F\langle X\rangle$, pelos polinômios

$$x_{2k+1}[x_1,x_2]\cdots[x_{2k-1},x_{2k}]x_{2k+2}; \tag{2.3}$$

e

$$x_{l+1}[x_1,\ldots,x_l]x_{l+2}. \tag{2.4}$$

Lembramos que $char\,F = p > 0$. Pela [40, Observação 2, p. 874] existe $n = n(l)$, em função de l, tal que $p^n \geq l$ e valem as congruências seguintes

$$\left[y, x^{p^n}\right] \equiv 0 \pmod{U_{k,l}}$$

$$\left(x_1 + x_2\right)^{p^n} \equiv x_1^{p^n} + x_2^{p^n} \pmod{T^{(l)}},$$

$$\left(x_1 x_2\right)^{p^n} \equiv x_1^{p^n} x_2^{p^n} \pmod{T^{(l)}}.$$

Como $T^{(l)} \subseteq U_{k,l}$, temos as seguintes congruências

$$\left[x_1, x_2^{p^n}\right] \equiv 0 \pmod{U_{k,l}}, \tag{2.5}$$

$$\left(x_1 + x_2\right)^{p^n} \equiv x_1^{p^n} + x_2^{p^n} \pmod{U_{k,l}}, \tag{2.6}$$

$$\left(x_1 x_2\right)^{p^n} \equiv x_1^{p^n} x_2^{p^n} \pmod{U_{k,l}}. \tag{2.7}$$

Segue da congruência (2.5) que o elemento $x^{p^n} + U_{k,l}$ é central na F-álgebra $F\langle X\rangle / U_{k,l}$ e assim, $D_l = F\left[x^{p^n} + U_{k,l} \mid x \in X\right]$ é a F-álgebra dos polinômios comutativos nas variáveis $x^{p^n} + U_{k,l}$, para $x \in X$.

Seja A uma F-álgebra que satisfaz as condições (2.1) e (2.2), para alguns k e l. Observamos que cada elemento $f \in U_{k,l}$ é uma identidade polinomial de A, ou seja, $U_{k,l} \subseteq T(A) \subseteq C(A)$, onde $T(A)$ é o T-ideal das identidades polinomiais de A e $C(A)$ é o T-subespaço dos polinômios centrais de A.

A imagem homomórfica $C(A)/U_{k,l}$ do T-subespaço $C(A)$ em $F\langle X\rangle / U_{k,l}$ é um D_l-submódulo de $F\langle X\rangle / U_{k,l}$. De fato, sejam $\overline{f} = f + U_{k,l}$ um polinômio em $C(A)/U_{k,l}$ e $\overline{x} = x^{p^n} + U_{k,l}$ um gerador de D_l. Temos que $\overline{x}\overline{f} = x^{p^n} f + U_{k,l}$. Observamos que, como a álgebra A satisfaz a condição (2.2), para algum l, então g^{p^n} é central em G, para cada $a \in A$, pois $p^n \geq l$. Logo, $x^{p^n} f$ é um polinômio central em A, ou seja, $\overline{x}\overline{f} = x^{p^n} f + U_{k,l} \in C(A)/U_{k,l}$. Assim, $C(A)/U_{k,l}$ é um D_l-módulo de $F\langle X\rangle / U_{k,l}$.

Portanto, para provar o Teorema 2.1.1 basta provar a seguinte proposição.

Proposição 2.2.1 *Seja V um T-subespaço de $F\langle X\rangle$ tal que $U_{k,l} \subseteq V$. Seja $\overline{V} = V/U_{k,l}$ um D_l-módulo em $F\langle X\rangle / U_{k,l}$. Então V é finitamente gerado como um T-subespaço de $F\langle X\rangle$.*

Dizemos que V é um **$(T - D_l)$-submódulo** de $F\langle X\rangle / U_{k,l}$ se V é um T-subespaço de $F\langle X\rangle / U_{k,l}$ e é módulo sobre D_l. Temos o seguinte lema.

Lema 2.2.2 *Seja V um T-subespaço de $F\langle X\rangle$ tal que $U_{k,l}\subseteq V$. Seja $\overline{V}=V/U_{k,l}$ um $(T-D_l)$-submódulo de $F\langle X\rangle/U_{k,l}$. Suponha que $\overline{V}$ é finitamente gerado como um $(T-D_l)$-submódulo. Então $\overline{V}$ é finitamente gerado como um T-subespaço de $F\langle X\rangle/U_{k,l}$.*

Demonstração: Seja $\overline{V}=V/U_{k,l}$ um $(T-D_l)$-submódulo de $F\langle X\rangle/U_{k,l}$ finitamente gerado como um $(T-D_l)$-submódulo. Seja $\{\overline{v}_1,\ldots,\overline{v}_t\}$ um conjunto de geradores de $\overline{V}$ como um $(T-D_l)$-submódulo, onde $\overline{v}_i=v_i+U_{k,l}$, para $i=1,\ldots,t$.

Seja $\overline{V}'=V'/U_{k,l}$ o T-subespaço de $F\langle X\rangle/U_{k,l}$ gerado por todos os elementos da forma $m\varphi(\overline{v}_i)$ $(i=1,\ldots,t)$, onde φ é um endomorfismo de $F\langle X\rangle/U_{k,l}$ e m é um monômio mônico nas variáveis $\overline{x_i}=x_i^{p^n}+U_{k,l}$ $(i\in\mathbb{N})$. É claro que $\overline{V}'\subseteq\overline{V}$. Vamos mostrar que $\overline{V}'$ é um $(T-D_l)$-submódulo de $F\langle X\rangle/U_{k,l}$ e deduzir deste fato que $\overline{V}\subseteq\overline{V}'$.

É fácil verificar que $\overline{V}'$ é um D_l-módulo, logo é suficiente verificar que $\overline{V}'$ é um T-subespaço de $F\langle X\rangle/U_{k,l}$. Para cada endomorfismo ψ de $F\langle X\rangle/U_{k,l}$, temos

$$\psi(m\varphi(v_i))=\psi(m)\psi(\varphi(\overline{v}_i))\ (i=1,\ldots,t).$$

Como $\psi(\varphi(\overline{v}_i))=(\psi\circ\varphi)(\overline{v}_i)$, onde $\psi\circ\varphi$ é um endomorfismo de $F\langle X\rangle/U_{k,l}$, então para que $\psi(m\varphi(\overline{v}_i))\in\overline{V}'$ basta verificar que $\psi(m)\in D_l$. Seja $m=\left(x_{i_1}^{p^n}\right)^{n_1}\cdots\left(x_{i_s}^{p^n}\right)^{n_s}+U_{k,l}$ assim,

$$\psi(m)=\left(\left(\psi(x_{i_1})\right)^{p^n}\right)^{n_1}\cdots\left(\left(\psi(x_{i_s})\right)^{p^n}\right)^{n_s}+U_{k,l},$$

onde $\psi(x_i)=\alpha_1^{(i)}m_1^{(i)}+\ldots+\alpha_r^{(i)}m_r^{(i)}+U_{k,l}$ $(i=1,\ldots,s)$. Pelas congruências (2.6) e (2.7) temos as seguintes congruências

$$\left(\alpha\overline{u}+\beta\overline{v}\right)^{p^n}\equiv\alpha^{p^n}\overline{u}^{p^n}+\beta^{p^n}\overline{v}^{p^n}\pmod{U_{k,l}},$$

$$\left(\overline{uv}\right)^{p^n}\equiv\overline{u}^{p^n}\overline{v}^{p^n}\pmod{U_{k,l}},$$

de onde notamos que $\psi(m)$ pode ser escrito como uma combinação linear de monômios em D_l, isto é, $\psi(m)\in D_l$. Assim, $\psi(m\varphi(\overline{v}_i))\in\overline{V}'$ $(i=1,\ldots,t)$, para cada endomorfismo φ de $F\langle X\rangle/U_{k,l}$ e para cada monômio m em D_l. Ou seja, $\overline{V}'$ é um T-subespaço de $F\langle X\rangle/U_{k,l}$. Logo, $\overline{V}'$ é um $(T-D_l)$-submódulo de $F\langle X\rangle/U_{k,l}$. Como $\overline{V}$ é o $(T-D_l)$-módulo gerado por $\overline{v}_i$ $(i=1,\ldots,t)$ e $\overline{v}_i\in\overline{V}'$ $(i=1,\ldots,t)$ temos que

$\overline{V} \subseteq \overline{V}'$, logo $\overline{V} = \overline{V}'$. Assim, cada elemento de $\overline{V}$ é uma combinação linear, com coeficientes em F, de elementos da forma $m\varphi(\overline{v}_i)$ $(i = 1, \ldots, t)$, onde φ é um endomorfismo de $F\langle X\rangle/U_{k,l}$ e m é um monômio nas variáveis $\overline{x_i} = x_i^{p^n} + U_{k,l}$ $(i \in \mathbb{N})$

Agora vamos mostrar que o T-subespaço $\overline{V}$ é finitamente gerado. Sejam $\overline{v}_i = \overline{v}_i(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{r_i})$ $(i = 1, \ldots, t)$ e seja r um número inteiro tal que $r > r_i$ $(i = 1, \ldots, t)$. Vamos mostrar que o conjunto $\left\{(x_r^{p^n} + U_{k,l})\overline{v}_i \mid i = 1, \ldots, t\right\}$ gera $\overline{V}$ como um T-subespaço de $F\langle X\rangle/U_{k,l}$.

Seja $\overline{V}'' = V''/U_{k,l}$ o T-subespaço de $F\langle X\rangle/U_{k,l}$ gerado como T-subespaço pelo conjunto $\left\{(x_r^{p^n} + U_{k,l})\overline{v}_i \mid i = 1, \ldots, t\right\}$. Claramente $\overline{V}'' \subseteq \overline{V}$ e, vamos verificar que $\overline{V} \subseteq \overline{V}''$, ou seja, temos $m\varphi(\overline{v}_i) \in \overline{V}''$ $(i = 1, \ldots, t)$, para cada monômio m em D_l e para cada endomorfismo φ de $F\langle X\rangle/U_{k,l}$.

Para cada endomorfismo φ de $F\langle X\rangle/U_{k,l}$ existe um endomorfismo φ' de $F\langle X\rangle/U_{k,l}$ tal que $\varphi(\overline{v}_i) = \varphi'(\overline{v}_i)$ $(i = 1, \ldots, t)$ e $\varphi'(x_r) = x_{r'}$, onde r' e tal que $x_{r'}$ não aparece na imagem $\varphi(\overline{v}_i)$. Observamos que $\varphi(\overline{v}_i)$ não depende de $x_{r'}$ assim, temos que

$$\varphi'\left(x_r^{p^n}\overline{v}_i + U_{k,l}\right) = x_{r'}^{p^n}\varphi'(\overline{v}_i) + U_{k,l} \ (i = 1, \ldots, t).$$

Agora, exite um endomorfismo μ de $F\langle X\rangle/U_{k,l}$ tal que $\mu\big(x_j^{p^n} + U_{k,l}\big) = x_j^{p^n} + U_{k,l}$ $(j = 1, \ldots, r'-1)$, assim $\mu(\varphi(\overline{v}_i)) = \varphi(\overline{v}_i)$, para cada $i = 1, \ldots, t$ e $\mu\left(x_{r'}^{p^n} + U_{k,l}\right) = m$ (aqui usamos novamente a congruência (2.7)). Logo,

$$\mu\left(\varphi'\Big(\big(x_r^{p^n} + U_{k,l}\big)\overline{v}_i\Big)\right) = \mu\left(x_{r'}^{p^n} + U_{k,l}\right)\mu(\varphi(\overline{v}_i)) = m\varphi(\overline{v}_i) \ (i = 1, \ldots, t).$$

Como $\overline{V}''$ é um T-subespaço, temos $m\varphi(\overline{v}_i) \in \overline{V}''$ $(i = 1, \ldots, t)$. Portanto, $\overline{V} \subseteq \overline{V}''$ e assim $\overline{V} = \overline{V}''$.

Concluímos que se $\overline{V}$ é gerado pelos elementos $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_t$ como um $(T - D_l)$-submódulo de $F\langle X\rangle/U_{k,l}$, então $\overline{V}$ é gerado por $\big(x_r^{p^n} + U_{k,l}\big)\overline{v}_1, \ldots, \big(x_r^{p^n} + U_{k,l}\big)\overline{v}_t$ como um T-subespaço de $F\langle X\rangle/U_{k,l}$. ■

O Lema 2.2.2 tem o seguinte corolário.

Corolário 2.2.3 *Seja V um T-subespaço de $F\langle X\rangle$ tal que $U_{k,l} \subseteq V$. Seja $\overline{V} = V/U_{k,l}$ um $(T - D_l)$-submódulo de $F\langle X\rangle/U_{k,l}$. Suponha que $\overline{V}$ é finitamente gerado como um $(T - D_l)$-submódulo. Então V é finitamente gerado como um T-subespaço de $F\langle X\rangle$.*

Demonstração: Lembramos que $U_{k,l}$ é gerado como T-subespaço em $F\langle X\rangle$ pelos polinômios (2.3) e (2.4). Suponha que $f_1, \ldots, f_m \in V$ são polinômios tais que

$f_1 + U_{k,l}, \ldots, f_m + U_{k,l}$ geram $\overline{V}$ como T-subespaço em $F\langle X\rangle / U_{k,l}$. Agora é direto verificar que os polinômios $f_1, \ldots, f_m$ junto com (2.3) e (2.4) geram V como T-subespaço em $F\langle X\rangle$. ■

Pelo Lema 2.2.2, para provar a Proposição 2.2.1 basta provar a seguinte proposição.

Proposição 2.2.4 *Seja $\overline{V} = V/U_{k,l}$ um $(T - D_l)$-submódulo de $F\langle X\rangle / U_{k,l}$. Então $\overline{V}$ é finitamente gerado como um $(T - D_l)$-submódulo de $F\langle X\rangle / U_{k,l}$.*

É bem conhecido que a Proposição 2.2.4 é equivalente à proposição seguinte.

Proposição 2.2.5 *Toda cadeia ascendente*

$$\overline{V}_1 \subseteq \overline{V}_2 \subseteq \cdots \subseteq \overline{V}_n \subseteq \cdots$$

de $(T - D_l)$-submódulos de $F\langle X\rangle / U_{k,l}$ estabiliza-se, ou seja, existe s tal que $\overline{V}_s = \overline{V}_{s'}$, para todo $s' > s$.

Observamos que

$$F\langle X\rangle = U_{0,l} \supset U_{1,l} \supset \cdots \supset U_{k,l},$$

para todos k e l. Logo, para demonstrar a Proposição 2.2.1 é suficiente demostrar que, para cada $r = 0, 1, \ldots, k-1$, cada $(T - D_l)$-submódulo $\overline{V}$ de $\overline{U}_{r,l} = U_{r,l}/U_{(r+1),l}$ é finitamente gerado, ou seja, é suficiente demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 2.2.6 *Para $r = 0, 1, \ldots, k-1$ o ideal $\overline{U}_{r,l}$ satisfaz a condição de cadeia ascendente para $(T - D_l)$-submódulos, ou seja, se*

$$\overline{V}_1 \subseteq \overline{V}_2 \subseteq \cdots \subseteq \overline{V}_n \subseteq \cdots$$

é uma cadeia ascendente de $(T - D_l)$-submódulos de $\overline{U}_{r,l}$, então existe s tal que $\overline{V}_s = \overline{V}_{s'}$, para todo $s' \geq s$.

Seja $\pi \in \Pi$ uma aplicação $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que preserva ordem, ou seja, se $a, b \in \mathbb{N}$ e $a < b$ então $\pi(a) < \pi(b)$. Definimos um endomorfismo correspondente à π (que também denotaremos por π) $\pi : F\langle X\rangle \longrightarrow F\langle X\rangle$ tal que $\pi(x_i) = x_{\pi(i)}$ $(x_i \in X)$. Denotamos por $\Pi_{F\langle X\rangle}$ o conjunto de todos os endomorfismos π de $F\langle X\rangle$ acima descritos.

Observamos que para todo endomorfismo $\pi \in \Pi_{F\langle X\rangle}$, temos $\pi(U_{r,l}) \subseteq U_{r,l}$, para todos r, l. Assim, π define um endomorfismo correspondente (que também denotaremos por π) $\pi : \overline{U}_{r,l} \longrightarrow \overline{U}_{r,l}$, para todos r e l. Denotamos por $\Pi_{\overline{U}_{r,l}}$ o conjunto de todos os endomorfismos $\pi : \overline{U}_{r,l} \longrightarrow \overline{U}_{r,l}$ descritos acima.

Para cada par (i,j) de inteiros positivos, com $i < j$, definimo um endomorfismo $\psi_{ij} : F\langle X\rangle \longrightarrow F\langle X\rangle$ tal que

$$\psi_{ij}(x_s) = \begin{cases} x_i x_j, & \text{se} \quad s = j \\ x_s, & \text{se} \quad s \neq j. \end{cases}$$

Denotamos por $\Psi_{F\langle X\rangle}$ o conjunto de todos os endomorfismos ψ_{ij} de $F\langle X\rangle$ descritos acima.

Notemos que para todos os endomorfismos $\psi_{ij} \in \Psi_{F\langle X\rangle}$, $\psi_{ij}(U_{r,l}) \subseteq U_{r,l}$, para todos r, l. Logo, ψ_{ij} define um endomorfismo correspondente (que também denotaremos por ψ_{ij}) $\psi_{ij} : \overline{U}_{r,l} \longrightarrow \overline{U}_{r,l}$, para todos . Denotamos por $\Psi_{\overline{U}_{r,l}}$ o conjunto de todos os endomorfismos ψ_{ij} de $\overline{U}_{r,l}$.

Claramente cada $(T - D_l)$-submódulo de $\overline{U}_{r,l}$ é um D_l-submódulo de $\overline{U}_{r,l}$ fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\overline{U}_{r,l}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{r,l}}$. Logo, para demonstrar a Proposição 2.2.6 e com isso o Teorema 2.1.1, é suficiente demonstrar a proposição seguinte.

Proposição 2.2.7 *Para cada $r = 0, 1, \ldots, k-1, \ldots$ o ideal $\overline{U}_{r,l}$ de $F\langle X\rangle / U_{(r+1),l}$ satisfaz a condição de cadeia ascendente para D_l-submódulos fechados por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\overline{U}_{r,l}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{r,l}}$, ou seja, se*

$$\overline{V}_1 \subseteq \overline{V}_2 \subseteq \cdots \subseteq \overline{V}_n \subseteq \cdots$$

é uma cadeia ascendente de D_l-submódulos de $\overline{U}_{r,l}$ fechados por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\overline{U}_{r,l}}$ e $\psi \in \Psi_{\overline{U}_{r,l}}$, então existe s tal que $\overline{V}_s = \overline{V}_{s'}$, para todo $s' \geq s$.

2.3 A redução ao resultado sobre certos módulos sobre anéis de polinômios

No próximo passo, vamos mostrar que para provar a Proposição 2.2.7 basta demonstrar uma certa afirmação (ver Proposição 2.3.15 na p. 72) sobre anéis de polinômios e módulos sobre esses anéis, ou seja, vamos reduzir a Proposição 2.2.7 à Proposição 2.3.15 (veja p. 72).

Para exibir melhor a ideia e as técnicas da redução da Proposição 2.2.7 à Proposição 2.3.15, primeiro vamos fazer essa redução, com todos os detalhes, no caso $r = 2$

e $l = 3$, esse caso específico que é mais simples que o caso geral. Depois vamos reduzir a proposição, de modo menos detalhado, no caso $r = 2$ e $l = 4$, que é mais parecido com o caso geral. Por fim, a redução será feita no caso geral.

2.3.1 O caso $r = 2$ e $l = 3$

O ideal $U_{2,3}$ é gerado, como um espaço vetorial sobre F, por todos os elementos das formas

$$g_0[g_1, g_2][g_3, g_4]g_5 \qquad e \qquad g_0[g_1, g_2, g_3]g_4,$$

onde os g_i e g_j ($i = 0, 1, \dots, 5$ e $j = 0, 1, \dots, 4$) são monômios nas variáveis $x_i \in X$ ($i \in \mathbb{N}$) ou 1. Claramente o elemento $g_0[g_1, g_2, g_3]g_4$ pertence a $U_{3,3}$, para todos os monômios g_i de $F\langle X\rangle$.

Observamos que para quaisquer dois monômios g e g' em $F\langle X\rangle$ o comutador $[g, g']$ pode ser escrito como uma combinação linear, com coeficientes em F, de elementos da forma

$$g_{ij}^{(1)}[x_r, x_s]g_{ij}^{(2)},$$

onde $g_{ij}^{(1)}, g_{ij}^{(2)}$ são monômios em $F\langle X\rangle$. Logo, o produto $g_0[g_1, g_2][g_3, g_4]g_5$ pode ser escrito como uma combinação linear, com coeficientes em F, de elementos da forma

$$g'_0\left[x_{r_1}, x_{s_1}\right]g'_1\left[x_{r_2}, x_{s_2}\right]g'_2,$$

onde os g'_i, com $i = 0, 1, 2$, são monômios em $F\langle X\rangle$. Como $\left[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\right] \in U_{3,3}$ para todos i_1, i_2, i_3, o comutador $[x_s, x_t]$ é central em $F\langle X\rangle$ módulo $U_{3,3}$. Assim, temos que

$$g'_1\left[x_{r_1}, x_{s_1}\right]g'_2\left[x_{r_2}, x_{s_2}\right]g'_3 \equiv \left[x_{r_1}, x_{s_1}\right]\left[x_{r_2}, x_{s_2}\right]g'_1g'_2g'_3 \pmod{U_{3,3}}.$$

Usando que

$$\left[x_{r_1}, x_{s_1}\right]\left[x_{r_2}, x_{s_2}\right]h_1x_ix_jh_2 \equiv \left[x_{r_1}, x_{s_1}\right]\left[x_{r_2}, x_{s_2}\right]h_1x_jx_ih_2 \pmod{U_{3,3}},$$

para todos $x_i, x_j \in X$, temos que

$$\left[x_{r_1}, x_{s_1}\right]\left[x_{r_2}, x_{s_2}\right]g'_1g'_2g'_3 \equiv \left[x_{r_1}, x_{s_1}\right]\left[x_{r_2}, x_{s_2}\right]g''_0g''_1 \pmod{U_{3,3}},$$

onde $g''_0 = \left(x_1^{p^n}\right)^{n_1} \cdots \left(x_s^{p^n}\right)^{n_s} \cdots$ e $g''_1 = x_1^{m_1} \cdots x_r^{m_r} \cdots$, com $m_i = 0, 1, \dots, p^n - 1$ e $i \in \mathbb{N}$.

Portanto, $\overline{U}_{2,3} = U_{2,3}/U_{3,3}$ é gerado, como espaço vetorial sobre F, por todos os elementos da forma

$$\overline{u} = \big[x_{i_1}, x_{i_2}\big]\big[x_{i_3}, x_{i_4}\big]u_0 u_1 + U_{3,3}, \tag{2.8}$$

onde $u_0 = \left(x_1^{p^n}\right)^{n_1} \cdots \left(x_s^{p^n}\right)^{n_s} \cdots$ e $u_1 = x_1^{b_1} \cdots x_s^{b_s} \cdots$, com $b_i = 0, 1, \ldots, p^n - 1$ e $i \in \mathbb{N}$.

Seja $\pi \in \Pi_{\overline{U}_{2,3}}$ um endomorfismo qualquer de $\overline{U}_{2,3}$ definido imediatamente depois da Proposição 2.2.6. O endomorfismo π age em todo gerador $\overline{u}$ de $\overline{U}_{2,3}$ da seguinte maneira:

$$\pi(\overline{u}) = \big[x_{\pi(i_1)}, x_{\pi(i_2)}\big]\big[x_{\pi(i_3)}, x_{\pi(i_4)}\big]u_{\pi(0)} u_{\pi(1)} + U_{3,3},$$

onde $u_{\pi(0)} = \left(x_{\pi(1)}^{p^n}\right)^{n_1} \cdots \left(x_{\pi(s)}^{p^n}\right)^{n_s} \cdots$ e $u_{\pi(1)} = x_{\pi(1)}^{b_1} \cdots x_{\pi(s)}^{b_s} \cdots$, com $b_i = 0, 1, \ldots,$ $p^n - 1$ e $i \in \mathbb{N}$.

Agora vamos definir $\mathbb{M}_{2,3}$ o espaço vetorial sobre F, que será importante para a redução da Proposição 2.2.7 à Proposição 2.3.15, no caso $k = 2$ e $l = 3$.

Sejam $P = F\big[y_{i,b_i}, z_i \mid i \in \mathbb{N}, b_i = 0, 1, \ldots, p^n - 1\big]$ a F-álgebra dos polinômios comutativos nas variáveis y_{i,b_i} e z_i ($i \in \mathbb{N}$). E, seja Q o P-módulo gerado pelas quádruplas (i_1, i_2, i_3, i_4) ($i_s \in \mathbb{N}$). Definimos o conjunto $\mathbb{M}_{2,3}$ como o F-subespaço de Q gerado por todos os elementos da forma

$$\overline{m} = (i_1, i_2, i_3, i_4) m_0 m_1, \tag{2.9}$$

onde $m_0 = z_1^{n_1} \cdots z_s^{n_s} \cdots$ e $m_1 = y_{1,b_1} \cdots y_{s,b_s} \cdots$, com $b_i = 0, 1, \ldots,$
$p^n - 1$ e $i \in \mathbb{N}$.

Vamos definir também um conjunto específico de endomorfismos de $\mathbb{M}_{2,3}$. Seja $\pi \in \Pi$ uma aplicação $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que preserva ordem, definida logo após a Proposição 2.2.6. Definimos um endomorfismo correspondente à π (que também denotaremos por π) $\pi : \mathbb{M}_{2,3} \longrightarrow \mathbb{M}_{2,3}$ tal que, para todo $\overline{m}$ gerador de $\mathbb{M}_{2,3}$,

$$\pi(\overline{m}) = \big(\pi(i_1), \pi(i_2), \pi(i_3), \pi(i_4)\big) m_{\pi(0)} m_{\pi(1)},$$

onde $m_{\pi(0)} = z_{\pi(1)}^{n_1} \cdots z_{\pi(s)}^{n_s} \cdots$ e $m_{\pi(1)} = y_{\pi(1),b_1} \cdots y_{\pi(s),b_s} \cdots$, com $b_i = 0, 1, \ldots, p^n - 1$ e $i \in \mathbb{N}$. Denotamos por $\Pi_{\mathbb{M}_{2,3}}$ o conjunto de todos os endomorfismos $\pi : \mathbb{M}_{2,3} \longrightarrow \mathbb{M}_{2,3}$ descritos acima.

Agora seja $\varphi : \mathbb{M}_{2,3} \longrightarrow \overline{U}_{2,3}$ uma aplicação F-linear de $\mathbb{M}_{2,3}$ para $\overline{U}_{2,3}$ tal que para cada gerador $\overline{m} = (i_1, i_2, i_3, i_4)m_0m_1$ de $\mathbb{M}_{2,3}$,

$$\varphi\big((i_1, i_2, i_3, i_4)m_0m_1\big) = \big[x_{i_1}, x_{i_2}\big]\big[x_{i_3}, x_{i_4}\big]u_0u_1 + U_{3,3}, \tag{2.10}$$

onde $m_0 = z_1^{n_1} \cdots z_s^{n_s} \cdots$, $u_0 = \left(x_1^{p^n}\right)^{n_1} \cdots \left(x_s^{p^n}\right)^{n_s} \cdots$, $m_1 = y_{1,b_1} \cdots y_{s,b_s} \cdots$ e $u_1 = x_1^{b_1} \cdots x_s^{b_s} \cdots$, com $b_i = 0, 1, \ldots, p^n - 1$ e $i \in \mathbb{N}$.

Para todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\overline{U}_{2,3}}$ e $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{2,3}}$ correspondentes à π e para a aplicação φ definidas acima, temos o seguinte lema.

Lema 2.3.1 *Para toda aplicação $\pi \in \Pi$ e para todos os endomorfismos correspondentes $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{2,3}}$ e $\pi \in \Pi_{\overline{U}_{2,3}}$, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_{2,3} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{M}_{2,3} \\ \varphi\downarrow & & \varphi\downarrow \\ \overline{U}_{2,3} & \xrightarrow{\pi} & \overline{U}_{2,3} \end{array}$$

é comutativo.

Demonstração: Sejam φ a aplicação F-linear definida em (2.10) e $\overline{m}$ um gerador qualquer de $\mathbb{M}_{2,3}$. Por um lado, para toda aplicação $\pi \in \Pi$ e para todos os endomorfismos correspondentes $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{2,3}}$ e $\pi \in \Pi_{\overline{U}_{2,3}}$, temos

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \pi)(\overline{m}) &= \varphi\Big(\pi\big((i_1, i_2, i_3, i_4)m_1m_0\big)\Big) = \\ &= \varphi\Big(\big(\pi(i_1), \pi(i_2), \pi(i_3), \pi(i_4)\big)m_{\pi(10}m_{\pi(1)}\Big) \\ &= \big[x_{\pi(i_1)}, x_{\pi(i_2)}\big]\big[x_{\pi(i_3)}, x_{\pi(i_4)}\big]u_{\pi(0)}u_{\pi(1)} + U_{3,3} \\ &= \pi(\overline{u}). \end{aligned}$$

Por outro lado, para toda aplicação $\pi \in \Pi$ e para todo endomorfismo correspondente $\pi \in \Pi_{\overline{U}_{2,3}}$, temos

$$\begin{aligned} (\pi \circ \varphi)(\overline{m}) &= \pi\Big(\varphi\big((i_1, i_2, i_3, i_4)m_1m_0\big)\Big) = \\ &= \pi\big([x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}]u_0u_1 + U_{3,3}\big) \\ &= \big[x_{\pi(i_1)}, x_{\pi(i_2)}\big]\big[x_{\pi(i_3)}, x_{\pi(i_4)}\big]u_{\pi(0)}u_{\pi(1)} + U_{3,3} \\ &= \pi(\overline{u}) \end{aligned}$$

Logo, $(\varphi\circ\pi)(\overline{m}) = (\pi\circ\varphi)(\overline{m})$ para cada $\overline{m}$ gerador de $\mathbb{M}_{2,3}$. Portanto, o diagrama é comutativo. ■

Precisamos definir ainda um conjunto específico de endomorfismos ψ_{ij} de $\mathbb{M}_{2,3}$, onde (i,j) é um par de inteiros positivos com $i < j$. A definição se dará observando a ação dos endomorfismos $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{2,3}}$ definidos logo após a Proposição 2.2.6. Para todo par (i,j) de inteiros positivos, com $i < j$, consideremos os endomorfismos $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{2,3}}$. Observamos que a ação dos endomorfismos ψ_{ij} em todo gerador $\overline{u} = \left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}\right]u_0u_1 + U_{3,3}$ de $\overline{U}_{2,3}$ ocorre da seguinte maneira:

1) se $j \notin \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ então

$$\psi_{ij}\left(\overline{u}\right) = [x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}]u_0^{(i)}u_1^{(i)} + U_{3,3},$$

onde

a) quando $x_i \notin \overline{u}$ temos

$$u_0^{(i)} = \left(x_1^{p^n}\right)^{n_1} \cdots \left(x_i^{p^n}\right)^{n_j} \cdots \left(x_j^{p^n}\right)^{n_j} \cdots$$

e

$$u_1^{(i)} = x_1^{b_1} \cdots x_i^{b_j} \cdots x_j^{b_j} \cdots ,$$

com $b_i = 0, 1, \ldots, p^n - 1$ e $i \in \mathbb{N}$.

b) e quando $x_i \in \overline{u}$ temos

$$u_0^{(i)} = \left(x_1^{p^n}\right)^{n_1} \cdots \left(x_i^{p^n}\right)^{n_i'} \cdots \left(x_j^{p^n}\right)^{n_j} \cdots$$

e

$$u_1^{(i)} = x_1^{b_1} \cdots x_i^{b_i'} \cdots x_j^{b_j} \cdots ,$$

com $b_i = 0, 1, \ldots, p^n - 1$ e $i \in \mathbb{N}$.

2) se $j \in \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ então

$$\psi_{ij}\left(\overline{u}\right) = \sum_s \left[x_{i_1^{(s)}}, x_{i_2^{(s)}}\right]\left[x_{i_3^{(s)}}, x_{i_4^{(s)}}\right]u_0^{(s)}u_1^{(s)} + U_{3,3},$$

para alguns $i_1^{(s)}, i_2^{(s)}, i_3^{(s)}, i_4^{(s)}$, com $\left(i_1^{(s)}, i_2^{(s)}, i_3^{(s)}, i_4^{(s)}\right) \leq (i_1, i_2, i_3, i_4)$ na ordem lexicográfica e para alguns monômios $u_0^{(s)}, u_1^{(s)}$, para todo s.

Para cada par (i,j) de inteiros positivos, com $i < j$, definimo um endomorfismo $\psi_{ij} : \mathbb{M}_{2,3} \longrightarrow \mathbb{M}_{2,3}$ tal que, para todo gerador $\overline{m} = (i_1, i_2, i_3, i_4)m_1m_0$ de $\mathbb{M}_{2,3}$, temos:

1) se $j \notin \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ então

$$\psi_{ij}(\overline{m}) = (i_1, i_2, i_3, i_4) m_0^{(i)} m_1^{(i)},$$

onde

a) quando $y_{i,b_i}, z_i \notin \overline{m}$ temos

$$m_0^{(i)} = z_1^{n_1} \cdots z_i^{n_j} \cdots z_j^{n_j} \cdots$$

e

$$m_1^{(i)} = y_{1,b_1} \cdots y_{i,b_j} \cdots y_{j,b_j} \cdots ,$$

com $b_i = 0, 1, \ldots, p^n - 1$ e $i \in \mathbb{N}$.

b) e quando y_{i,b_i} e/ou $z_i \in \overline{m}$ temos

$$m_0^{(i)} = z_1^{n_1} \cdots z_i^{n'_i} \cdots z_j^{n_j} \cdots$$

e

$$m_1^{(i)} = y_{1,b_1} \cdots y_{i,b'_i} \cdots y_{j,b_j} \cdots ,$$

com $b_i = 0, 1, \ldots, p^n - 1$ e $i \in \mathbb{N}$.

2) se $j \in \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ então

$$\psi_{ij}(\overline{m}) = \sum_s \left(i_1^{(s)}, i_2^{(s)}, i_3^{(s)}, i_4^{(s)}\right) \varphi^{-1}\left(u_0^{(s)}\right) \varphi^{-1}\left(u_1^{(s)}\right)$$

para alguns $i_1^{(s)}, i_2^{(s)}, i_3^{(s)}, i_4^{(s)}$, com $\left(i_1^{(s)}, i_2^{(s)}, i_3^{(s)}, i_4^{(s)}\right) \leq (i_1, i_2, i_3, i_4)$ na ordem lexicográfica, e para alguns monômios $u_0^{(s)}$ e $u_1^{(s)}$, para todo s.

Denotamos por $\Psi_{\mathbb{M}_{2,3}}$ o conjunto de todos os endomorfismos $\psi_{ij} : \mathbb{M}_{2,3} \longrightarrow \mathbb{M}_{2,3}$ descritos anteriormente.

Para todos os endomorfismos $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{2,3}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{2,3}}$ e para a aplicação φ definidos anteriormente, vale o seguinte lema.

Lema 2.3.2 *Para todo par (i, j) de inteiros positivos, com $i < j$, e para todos os endomorfismos $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{2,3}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{2,3}}$, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_{2,3} & \xrightarrow{\psi_{ij}} & \mathbb{M}_{2,3} \\ \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow \\ \overline{U}_{2,3} & \xrightarrow{\psi_{ij}} & \overline{U}_{2,3} \end{array}$$

é comutativo.

Demonstração: Sejam φ a aplicação definida em (2.10) e $\overline{m} = (i_1, i_2, i_3, i_4)m_1m_0$ um gerador qualquer de $\mathbb{M}_{2,3}$. Por um lado, para todo par (i,j) de inteiros positivos, com $i < j$, e para todo endomorfismo $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{2,3}}$, temos:

1) se $j \notin \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ então

$$\begin{aligned}(\psi_{ij} \circ \varphi)(\overline{m}) &= \psi_{ij}\Big(\varphi\big((i_1, i_2, i_3, i_4)m_0m_1\big)\Big) = \\ &= \psi_{ij}\big([x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}]u_0u_1 + U_{3,3}\big) \\ &= [x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}]u_0^{(i)}u_1^{(i)} + U_{3,3} \\ &= \psi_{ij}(\overline{u}).\end{aligned}$$

2) se $j \in \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ então

$$\begin{aligned}(\psi_{ij} \circ \varphi)(\overline{m}) &= \psi_{ij}\Big(\varphi\big((i_1, i_2, i_3, i_4)m_0m_1\big)\Big) = \\ &= \psi_{ij}\big([x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}]u_0u_1 + U_{3,3}\big) \\ &= \left[x_{i_1^{(s)}}, x_{i_2^{(s)}}\right]\left[x_{i_3^{(s)}}, x_{i_4^{(s)}}\right]u_0^{(s)}u_1^{(s)} + U_{3,3} \\ &= \psi_{ij}(\overline{u}).\end{aligned}$$

Por outro lado, para todo par (i,j) inteiros positivos, com $i < j$, e para todos os endomorfismos $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{2,3}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{2,3}}$,

1) se $j \notin \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ então

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \psi_{ij})(\overline{m}) &= \varphi\Big(\psi_{ij}\big((i_1, i_2, i_3, i_4)m_0m_1\big)\Big) = \\ &= \psi_{ij}\big((i_1, i_2, i_3, i_4)m_0^{(i)}m_1^{(i)}\big) \\ &= [x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}]u_0^{(i)}u_1^{(i)} + U_{3,3} \\ &= \psi_{ij}(\overline{u}).\end{aligned}$$

2) se $j \in \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ então

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \psi_{ij})(\overline{m}) &= \varphi\Big(\psi_{ij}\big((i_1, i_2, i_3, i_4)m_0m_1\big)\Big) = \\ &= \varphi\left(\sum_s (i_1^{(s)}, i_2^{(s)}, i_3^{(s)}, i_4^{(s)})m_0^{(s)}m_1^{(s)}\right) \\ &= \sum_s \left[x_{i_1^{(s)}}, x_{i_2^{(s)}}\right]\left[x_{i_3^{(s)}}, x_{i_4^{(s)}}\right]u_0^{(s)}u_1^{(s)} + U_{3,3} \\ &= \psi_{ij}(\overline{u}).\end{aligned}$$

Logo, $(\varphi \circ \psi_{ij})(\overline{m}) = (\psi_{ij} \circ \varphi)(\overline{m})$, para cada gerador $\overline{m}$ de $\mathbb{M}_{2,3}$. Portanto, o diagrama é comutativo. ■

Seja $\mathbb{A} = F[z_i \mid i \in \mathbb{N}]$ a F-álgebra dos polinômios comutativos nas variáveis z_i $(i \in \mathbb{N})$. Notamos que $\mathbb{M}_{2,3}$ é um $\mathbb{A}$-módulo. Usaremos os Lemas 2.3.1 e 2.3.2 para demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 2.3.3 *Seja V um D_3-submódulo de $\overline{U}_{2,3}$ fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\overline{U}_{2,3}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{2,3}}$. Então $\varphi^{-1}(V)$ é um $\mathbb{A}$-submódulo de $\mathbb{M}_{2,3}$ fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{2,3}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{2,3}}$.*

Demonstração: Seja V um D_3-submódulo de $\overline{U}_{2,3}$ fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\overline{U}_{2,3}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{2,3}}$. Sejam f um elemento em $\varphi^{-1}(V)$ e g um monômio nas variáveis z_i $(i \in \mathbb{N})$. Claramente $\varphi(f) \in V$ e $\varphi(g)$ é um monômio nas variáveis $x_i^{p^n} + U_{3,3}$ $(i \in \mathbb{N})$. Por hipótese, V é um D_3-submódulo de $\overline{U}_{2,3}$, ou seja,

$$\varphi(g)\varphi(f) = \varphi(gf) \in V, \tag{2.11}$$

isto é, $gf \in \varphi^{-1}(V)$. Logo, $\varphi^{-1}(V)$ é um $\mathbb{A}$-submódulo de $\mathbb{M}_{2,3}$.

Para toda aplicação $\pi \in \Pi$, consideremos todos os endomorfismos correspondentes $\pi \in \Pi_{\overline{U}_{2,3}}$ e $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{2,3}}$. Para todo elemento $f \in \varphi^{-1}(V)$ claro que $\varphi(f) \in V$. Por hipótese, V é fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\overline{U}_{2,3}}$, ou seja, $\pi\big(\varphi(f)\big) \in V$. Pelo Lema 2.3.1, valem as seguintes igualdades

$$\pi(\varphi(f)) = (\pi \circ \varphi)(f) = (\varphi \circ \pi)(f) = \varphi(\pi(f)).$$

Logo, $\pi(f) \in \varphi^{-1}(V)$. Portanto, $\varphi^{-1}(V)$ é fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{2,3}}$.

Por fim, para todo par (i, j) de inteiros positivos, com $i < j$, consideremos todos os endomorfismos $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{2,3}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{2,3}}$. Para todo elemento $f \in \varphi^{-1}(V)$, claramente $\varphi(f) \in V$. Por hipótese, V é fechado por todos os endomorfismos $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{2,3}}$, ou seja, $\psi_{ij}\big(\varphi(f)\big) \in V$. E, pelo Lema 2.3.2, valem as seguintes igualdades

$$\psi_{ij}\big(\varphi(f)\big) = \big(\psi_{ij} \circ \varphi\big)(f) = \big(\varphi \circ \psi_{ij}\big)(f) = \varphi\big(\psi_{ij}(f)\big).$$

Logo, $\psi_{ij}(f) \in \varphi^{-1}(V)$. Portanto, $\varphi^{-1}(V)$ é fechado por todos os endomorfismos $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{2,3}}$. ■

Acabamos de mostrar que se V é um D_3-submódulo de $\overline{U}_{2,3}$ fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\overline{U}_{2,3}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{2,3}}$, então $\varphi^{-1}(V)$ é um $\mathbb{A}$-submódulo de $\mathbb{M}_{2,3}$ fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{2,3}}$ e $\psi \in \Psi_{\mathbb{M}_{2,3}}$. Assim, se

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq \cdots$$

é uma cadeia ascendente de D_3-submódulos de $\overline{U}_{2,3}$ fechados por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\overline{U}_{2,3}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{2,3}}$, então

$$\varphi^{-1}(V_1) \subseteq \varphi^{-1}(V_2) \subseteq \varphi^{-1}(V_3) \subseteq \cdots$$

é uma cadeia ascendente de $\mathbb{A}$-submódulos de $\mathbb{M}_{2,3}$ fechados por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{2,3}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{2,3}}$.

Observamos que se a cadeia

$$\varphi^{-1}(V_1) \subseteq \varphi^{-1}(V_2) \subseteq \varphi^{-1}(V_3) \subseteq \cdots$$

se estabiliza, ou seja, se existe s tal que $\varphi^{-1}(V_s) = \varphi^{-1}(V_{s'})$, para cada $s' > s$, então a cadeia

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq \cdots$$

também se estabiliza, pois $\varphi^{-1}(V_s) = \varphi^{-1}(V_{s'})$ implica que $V_s = V_{s'}$, para cada $s' > s$. Neste sentido, para demonstrar a Proposição 2.2.7, no caso $r = 2$ e $l = 3$, é suficiente demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 2.3.4 *Toda cadeia ascendente de $\mathbb{A}$-submódulos de $\mathbb{M}_{2,3}$ fechados por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{2,3}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{2,3}}$ estabiliza.*

Seja $\Omega_{\mathbb{M}_{2,3}}$ o conjunto de todos os endomorfismos $\omega : \mathbb{M}_{2,3} \longrightarrow \mathbb{M}_{2,3}$ tal que $\omega = \psi_{i_s j_s} \circ \ldots \circ \psi_{i_2 j_2} \circ \psi_{i_1 j_1} \circ \pi$, com $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{2,3}}, \psi_{i_1 j_1}, \psi_{i_2 j_2}, \ldots, \psi_{i_s j_s} \in \Psi_{\mathbb{M}_{2,3}}$, $i_1, i_2, \ldots, i_s \notin \pi(\mathbb{N})$ e $i_a \neq i_b$ se $a \neq b$. A demostração de que o conjunto $\Omega_{\mathbb{M}_{2,3}}$ é um semigrupo é análoga à demonstração do Lema 1.4.3.

Toda cadeia ascendente de $\mathbb{A}$-submódulos de $\mathbb{M}_{2,3}$ fechados por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{2,3}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{2,3}}$ é também uma cadeia ascendente de $\mathbb{A}$-submódulos de $\mathbb{M}_{2,3}$ fechados por todos os endomorfismos $\omega \in \Omega_{\mathbb{M}_{2,3}}$. De fato, cada $\mathbb{A}$-submódulo de $\mathbb{M}_{2,3}$ fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{2,3}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{2,3}}$ é claramente fechado por todos os endomorfismos $\omega \in \Omega_{\mathbb{M}_{2,3}}$. Logo, para demonstrar a Proposição

2.3.4 e com isso demonstrar a Proposição 2.2.7, no caso $r = 2$ e $l = 3$, é suficiente demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 2.3.5 *Toda cadeia ascendente de* $\mathbb{A}$*-submódulos de* $\mathbb{M}_{2,3}$ *fechados por todo endomorfismo* $\omega \in \Omega_{\mathbb{M}_{2,3}}$ *estabiliza.*

2.3.2 O caso $r = 2$ e $l = 4$

Agora vamos reduzir a Proposição 2.2.7 à Proposição 2.3.15, no caso $r = 2$ e $l = 4$.

O ideal $U_{2,4}$ é gerado, como espaço vetorial sobre F, por todos os elementos das formas

$$g_0[g_1, g_2][g_3, g_4]g_5 \qquad e \qquad g_0[g_1, g_2, g_3, g_4]g_5,$$

onde g_i, g_j, com $i, j = 0, 1, \ldots, 5$, são monômios nas variáveis $x_i \in X$, para cada $i \in \mathbb{N}$. É fácil ver que o polinômio $g_0[g_1, g_2, g_3, g_4]g_5$ pertencem a $U_{3,4}$. Mostramos no caso anterior que o polinômio $g_0[g_1, g_2][g_3, g_4]g_5$ pode ser escrito como uma combinação linear de elementos da forma $g'_1[x_{r_1}, x_{s_1}]g'_2[x_{r_2}, x_{s_2}]g'_3$, onde cada g'_i é um monômio nas variáveis $x_i \in X$. Como $x_i^{p^n} + U_{3,4}$ $(i \in \mathbb{N})$ é central em $F\langle X\rangle / U_{3,4}$, temos que

$$g'_1[x_{r_1}, x_{s_1}]g'_2[x_{r_2}, x_{s_2}]g'_3 \equiv g''_0 g''_1[x_{r_1}, x_{s_1}]g''_2[x_{r_2}, x_{s_2}]g''_3 \pmod{U_{3,4}},$$

onde $g''_0 = \left(x_1^{p^n}\right)^{n_1} \cdots \left(x_s^{p^n}\right)^{n_s} \cdots$ e $g''_q = x_1^{m_1} \cdots x_s^{m_s} \cdots$, com $m_i = 0, 1, \ldots, p^n - 1$, $i \in \mathbb{N}$ e $q = 1, 2, 3$.

Observamos que $[x_s, x_t]$ não é central em$F\langle X\rangle$ módulo $U_{3,4}$. Logo, o ideal $\overline{U}_{2,4}$ é gerado, como espaço vetorial sobre F, por todos os polinômios da forma

$$\overline{u} = u_0 u_1[x_{i_1}, x_{i_2}]u_2[x_{i_3}, x_{i_4}]u_3 + U_{3,4}, \tag{2.12}$$

com $u_0 = \left(x_1^{p^n}\right)^{n_1} \cdots \left(x_s^{p^n}\right)^{n_s} \cdots$, $u_q = x_1^{b_1^{(q)}} \cdots x_{t_q}^{b_{t_q}^{(q)}}, b_i^{(q)} = 0, \ldots, p^n - 1,\ i = 1, \ldots t_q$ e $q = 1, 2, 3$.

De maneira semelhante ao caso $r = 2$ e $l = 3$ definimos $\mathbb{M}_{2,4}$ um espaço vetorial sobre F. Neste caso, seja $P = F\left[y^{(q)}_{i,b_i^{(q)}}, z_i \mid i \in \mathbb{N}; b_i^{(q)} = 0, 1, \ldots, p^n - 1; q = 1, 2, 3\right]$ a F-álgebra dos polinômios comutativos nas variáveis $y^{(q)}_{i,b_i^{(q)}}$, z_i, com $i \in \mathbb{N}$. E, seja Q o P-módulo gerado pelas quádruplas (i_1, i_2, i_3, i_4) $(i_s \in \mathbb{N})$. Definimos $\mathbb{M}_{2,4}$ como o F-subespaço de Q gerado por todos os polinômios da forma

$$\overline{m} = (i_1, i_2, i_3, i_4)m_0 m_1 m_2 m_3, \tag{2.13}$$

onde $m_0 = z_1^{n_1} \cdots z_s^{n_s} \cdots$ e $m_q = y^{(q)}_{1,b_1^{(q)}} \cdots y^{(q)}_{t_q,b_{t_q}^{(q)}}$, com $b_i^{(q)} = 0, \ldots, p^n - 1, i = 1, \ldots, t_q$ e $q = 1, 2, 3$.

A aplicação F-linear $\varphi : \mathbb{M}_{2,4} \longrightarrow \overline{U}_{2,4}$ é definida semelhantemente ao caso anterior, ou seja, φ é tal que, para cada gerador $\overline{m} = (i_1, i_2, i_3, i_4)m_0m_1m_2m_3$ de $\mathbb{M}_{2,4}$,

$$\varphi\big((i_1, i_2, i_3, i_4)m_0m_1m_2m_3\big) = u_0u_1[x_{i_1}, x_{i_2}]u_2[x_{i_3}, x_{i_4}]u_3 + U_{3,4} \tag{2.14}$$

onde $m_0 = z_1^{n_1} \cdots z_j^{n_j} \cdots, u_0 = \left(x_1^{p^n}\right)^{n_1} \cdots \left(x_j^{p^n}\right)^{n_j} \cdots, m_q = y^{(q)}_{1,b_1^{(q)}} \cdots y^{(q)}_{t_q,b_{t_q}^{(q)}}$ e $u_q = x_1^{b_1^{(q)}} \cdots x_{t_q}^{b_{t_q}^{(q)}}$, com $b_i^{(q)} = 0, \ldots, p^n - 1,\ i = 1, \ldots, t_q$ e $q = 1, 2, 3$.

Seja $\pi \in \Pi_{\overline{U}_{2,4}}$ um endomorfismo qualquer de $\overline{U}_{2,4}$ definido imediatamente depois da Proposição 2.2.6. A ação π em todo gerador $\overline{u} = u_0u_1[x_{i_1}, x_{i_2}]u_2[x_{i_3}, x_{i_4}]u_3 + U_{3,4}$ de $\overline{U}_{2,4}$ ocorre da seguinte maneira:

$$\pi(\overline{u}) = u_{\pi(0)}u_{\pi(1)}\left[x_{\pi(i_1)}, x_{\pi(i_2)}\right]u_{\pi(2)}\left[x_{\pi(i_3)}, x_{\pi(i_4)}\right]u_{\pi(3)} + U_{3,4},$$

onde $u_{\pi(0)} = \left(x_{\pi(1)}^{p^n}\right)^{n_1} \cdots \left(x_{\pi(s)}^{p^n}\right)^{n_s} \cdots$ e $u_{\pi(q)} = x_{\pi(1)}^{b_1^{(q)}} \cdots x_{\pi(t_q)}^{b_{t_q}^{(q)}}$, com $b_i^{(q)} = 0, \ldots,$ $p^n - 1,\ i = 1, \ldots, t_q$ e $q = 1, 2, 3$.

A definição do semigrupo $\Pi_{\mathbb{M}_{2,4}}$ também é semelhante ao caso $k = 2$ e $l = 3$. Para cada aplicação $\pi \in \Pi$ que preserva ordem, definida imediatamente depois da Proposição 2.2.6, definimos um endomorfismo correspondente (que também denotaremos por π) $\pi : \mathbb{M}_{2,4} \longrightarrow \mathbb{M}_{2,4}$ tal que, para cada gerador $\overline{m}$ de $\mathbb{M}_{2,4}$

$$\pi(\overline{m}) = \big(\pi(i_1), \pi(i_2), \pi(i_3), \pi(i_4)\big)m_{\pi(0)}m_{\pi(1)}m_{\pi(2)}m_{\pi(3)},$$

onde $m_{\pi(0)} = z_{\pi(1)}^{n_1} \cdots z_{\pi(r)}^{n_r} \cdots$ e $m_{\pi(q)} = y^{(q)}_{\pi(1),b_1^{(q)}} \cdots y^{(q)}_{\pi(t_q),b_{t_q}^{(q)}}$, com $b_i^{(q)} = 0, \ldots,$ $p^n - 1,\ i = 1, \ldots, t_q$ e $q = 1, 2, 3$. Denotamos por $\Pi_{\mathbb{M}_{2,4}}$ o conjunto de todos os endomorfismos $\pi : \mathbb{M}_{2,4} \longrightarrow \mathbb{M}_{2,4}$ descritos acima.

Para todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\overline{U}_{2,4}}$ e $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{2,4}}$ correspondentes a aplicação F-linear π e para a aplicação φ definidos acima, temos o seguinte lema.

Lema 2.3.6 *Para toda aplicação $\pi \in \Pi$ e para todos os endomorfismos correspondentes $\pi \in \Pi_{\overline{U}_{2,4}}$ e $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{2,4}}$, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{M}_{2,4} & \stackrel{\pi}{\longrightarrow} & \mathbb{M}_{2,4} \\
\varphi\downarrow & & \varphi\downarrow \\
\overline{U}_{2,4} & \stackrel{\pi}{\longrightarrow} & \overline{U}_{2,4}
\end{array}$$

é comutativo.

Demonstração: A demonstração é semelhante à demonstração do Lema 2.3.1. ■

Para todo par (i, j) de inteiros positivos, com $i < j$, consideremos os endomorfismos $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{2,4}}$ definidos imediatamente após a Proposição 2.2.6. Os endomorfismos ψ_{ij} agem em todo gerador $\overline{u} = u_0u_1[x_{i_1}, x_{i_2}]u_2[x_{i_3}, x_{i_4}]u_3 + U_{3,4}$ de $\overline{U}_{2,4}$ da seguinte maneira:

1) se $j \notin \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ então

$$\psi_{ij}\left(\overline{u}\right) = u_0^{(i)}u_1^{(i)}[x_{i_1}, x_{i_2}]u_2^{(i)}[x_{i_3}, x_{i_4}]u_3^{(i)} + U_{3,4},$$

onde

a) quando $x_i \notin \overline{u}$ temos

$$u_0^{(i)} = \left(x_1^{p^n}\right)^{n_1} \cdots \left(x_i^{p^n}\right)^{n_j} \cdots \left(x_j^{p^n}\right)^{n_j} \cdots$$

e

$$u_q^{(i)} = x_1^{b_1} \cdots x_i^{b_j} \cdots x_j^{b_j} \cdots ,$$

com $b_i = 0, 1, \ldots, p^n - 1,\ q = 1, 2, 3$ e $i \in \mathbb{N}$.

b) e quando $x_i \in \overline{u}$ temos

$$u_0^{(i)} = \left(x_1^{p^n}\right)^{n_1} \cdots \left(x_i^{p^n}\right)^{n_i'} \cdots \left(x_j^{p^n}\right)^{n_j} \cdots$$

e

$$u_q^{(i)} = x_1^{b_1} \cdots x_i^{b_i'} \cdots x_j^{b_j} \cdots ,$$

com $b_i = 0, 1, \ldots, p^n - 1,\ q = 1, 2, 3$ e $i \in \mathbb{N}$.

2) se $j \in \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ então

$$\psi_{ij}\left(\overline{u}\right) = \sum_s u_1^{(s)}\left[x_{i_1^{(s)}}, x_{i_2^{(s)}}\right]u_2^{(s)}\left[x_{i_3^{(s)}}, x_{i_4^{(s)}}\right]u_3^{(s)}u_0^{(s)} + U_{3,4},$$

para alguns $i_1^{(s)}, i_2^{(s)}, i_3^{(s)}, i_4^{(s)}$, com $\left(i_1^{(s)}, i_2^{(s)}, i_3^{(s)}, i_4^{(s)}\right) \leq (i_1, i_2, i_3, i_4)$ na ordem lexicográfica, e para alguns monômios $u_0^{(s)}$ e $u_q^{(s)}$, $(q = 1, 2, 3)$, para cada s.

De maneira análoga ao caso $r = 2$ e $l = 3$ vamos definir o semigrupo $\Psi_{\mathbb{M}_{2,4}}$. Para cada par (i, j) de inteiros positivos, com $i < j$ definimos um endomorfismo $\psi_{ij} : \mathbb{M}_{2,4} \longrightarrow \mathbb{M}_{2,4}$ tal que, para todo gerador $\overline{m} = (i_1, i_2, i_3, i_4)m_0m_1m_2m_3$ de $\mathbb{M}_{2,4}$, temos:

1) se $j \notin \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ então

$$\psi_{ij}(\overline{m}) = (i_1, i_2, i_3, i_4) m_0^{(i)} m_1^{(i)} m_2^{(i)} m_3^{(i)}$$

onde

a) quando $y_{i,b_i}, z_i \notin \overline{m}$ temos

$$m_0^{(i)} = z_1^{n_1} \cdots z_i^{n_j} \cdots z_j^{n_j} \cdots$$

e

$$m_q^{(i)} = y_{1,b_1^{(q)}}^{(q)} \cdots y_{i,b_j^{(q)}}^{(q)} \cdots y_{j,b_j^{(q)}}^{(q)} \cdots,$$

com $b_i = 0, 1, \ldots, p^n - 1,\ q = 1, 2, 3$ e $i \in \mathbb{N}$.

b) e quando y_{i,b_i} e/ou $z_i \in \overline{m}$ temos

$$m_0^{(i)} = z_1^{n_1} \cdots z_i^{n_i'} \cdots z_j^{n_j} \cdots$$

e

$$m_1^{(i)} = y_{1,b_1^{(q)}}^{(q)} \cdots y_{i,{b_i'}^{(q)}}^{(q)} \cdots y_{j,b_j^{(q)}}^{(q)} \cdots,$$

com $b_i = 0, 1, \ldots, p^n - 1,\ q = 1, 2, 3$ e $i \in \mathbb{N}$.

2) se $j \in \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ então

$$\psi_{ij}(\overline{m}) = \sum_s \left(i_1^{(s)}, i_2^{(s)}, i_3^{(s)}, i_4^{(s)}\right) \left(u_0^{(s)}\right)\varphi^{-1}\left(u_1^{(s)}\right)\varphi^{-1}\left(u_2^{(s)}\right)\varphi^{-1}\left(u_3^{(s)}\right)\varphi^{-1}$$

para alguns $i_1^{(s)}, i_2^{(s)}, i_3^{(s)}, i_4^{(s)}$, com $\left(i_1^{(s)}, i_2^{(s)}, i_3^{(s)}, i_4^{(s)}\right) \leq (i_1, i_2, i_3, i_4)$ e para alguns monômios $u_0^{(s)}$, $u_q^{(s)}$ $(q = 1, 2, 3)$, para todo s.

Denotamos por $\Psi_{\mathbb{M}_{2,4}}$ o conjunto de todos os endomorfismos ψ_{ij} de $\mathbb{M}_{2,4}$.

Para todos os endomorfismos $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{2,4}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{2,4}}$ e para a aplicação φ definidos anteriormente, temos o seguinte lema.

Lema 2.3.7 *Para todo par (i, j) de inteiros positivos, com $i < j$ e para todos os endomorfismos $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{2,4}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{2,4}}$, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_{2,4} & \xrightarrow{\psi_{ij}} & \mathbb{M}_{2,4} \\ \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow \\ \overline{U}_{2,4} & \xrightarrow{\psi_{ij}} & \overline{U}_{2,4} \end{array}$$

é comutativo.

Demonstração: A demonstração é análoga à demonstração do Lema 2.3.2. ■

Observamos que $\mathbb{M}_{2,4}$ é um $\mathbb{A}$-módulo e, semelhante ao caso $r = 2$ e $l = 3$ temos a seguinte proposição.

Proposição 2.3.8 *Seja V um D_4-submódulo de $\overline{U}_{2,4}$ fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\overline{U}_{2,4}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{2,4}}$. Então $\varphi^{-1}(V)$ é um $\mathbb{A}$-submódulo de $\mathbb{M}_{2,4}$ fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{2,4}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{2,4}}$.*

Demonstração: A demonstração é análoga à demonstração da Proposição 2.3.3 ■

Semelhantemente ao que acontece no caso $r = 2$ e $l = 3$ acontece também aqui neste caso, ou seja, se

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq \cdots$$

é uma cadeia ascendente de D_4-submódulos de $\overline{U}_{2,4}$ fechados por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\overline{U}_{2,4}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{2,4}}$, então

$$\varphi^{-1}(V_1) \subseteq \varphi^{-1}(V_2) \subseteq \varphi^{-1}(V_3) \subseteq \cdots$$

é uma cadeia ascendente de $\mathbb{A}$-submódulos de $\mathbb{M}_{2,4}$ fechados por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{2,4}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{2,4}}$.

De maneira análoga ao caso anterior, se a cadeia

$$\varphi^{-1}(V_1) \subseteq \varphi^{-1}(V_2) \subseteq \varphi^{-1}(V_3) \subseteq \cdots$$

se estabiliza, então a cadeia

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq \cdots$$

também se estabiliza. Nesse sentido, para demonstrar a Proposição 2.2.7, no caso $r = 2$ e $l = 4$, é suficiente demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 2.3.9 *Toda cadeia ascendente de $\mathbb{A}$-submódulos de $\mathbb{M}_{2,4}$ fechados por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{2,4}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{2,4}}$ estabiliza.*

Seja $\Omega_{\mathbb{M}_{2,4}}$ o conjunto de todos os endomorfismos $\omega : \mathbb{M}_{2,4} \longrightarrow \mathbb{M}_{2,4}$ tal que $\omega = \psi_{i_s j_s} \circ \ldots \circ \psi_{i_2 j_2} \circ \psi_{i_1 j_1} \circ \pi$, com $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{2,4}}, \psi_{i_1 j_1}, \psi_{i_2 j_2}, \ldots, \psi_{i_s j_s} \in \Psi_{\mathbb{M}_{2,4}}$, $i_1, i_2, \ldots, i_s \notin \pi(\mathbb{N})$ e $i_a \neq i_b$ se $a \neq b$. A demostração de que o conjunto $\Omega_{\mathbb{M}_{2,4}}$ é um semigrupo é análoga à demonstração do Lema 1.4.3.

Toda cadeia ascendente de $\mathbb{A}$-submódulos de $\mathbb{M}_{2,4}$ fechados por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{2,4}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{2,4}}$ é também uma cadeia ascendente de $\mathbb{A}$-submódulos de $\mathbb{M}_{2,3}$ fechados por todos os endomorfismos $\omega \in \Omega_{\mathbb{M}_{2,4}}$. De fato, cada $\mathbb{A}$-submódulo de $\mathbb{M}_{2,4}$ fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{2,4}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{2,4}}$ é claramente fechado por todos os endomorfismos $\omega \in \Omega_{\mathbb{M}_{2,4}}$. Logo, para demonstrar a Proposição 2.3.9 e com isso demonstrar a Proposição 2.2.7, no caso $r = 2$ e $l = 4$, é suficiente demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 2.3.10 *Toda cadeia ascendente de $\mathbb{A}$-submódulos de $\mathbb{M}_{2,4}$ fechados por todos os endomorfismos $\omega \in \Omega_{\mathbb{M}_{2,4}}$ estabiliza.*

2.3.3 O caso geral

Por fim, vamos reduzir a Proposição 2.2.7 à Proposição 2.3.15 no caso geral. Este caso é semelhante ao caso $r = 2$ e $l = 4$. Assim, todos os passos feitos no caso anterior serão repetidos aqui.

Analogamente ao caso anterior, o ideal $\overline{U}_{r,l} = U_{r,l}/U_{r+1,l}$ é gerado, como espaço vetorial sobre F, por todos os polinômios da forma

$$\overline{u} = u_0 u_1 [x_{i_1}, x_{i_2}] u_2 \cdots u_r [x_{i_{2r-1}}, x_{i_{2r}}] u_{r+1} + U_{(r+1),l}, \tag{2.15}$$

onde $u_0 = \left(x_1^{p^n}\right)^{n_1} \cdots \left(x_s^{p^n}\right)^{n_s} \cdots$ e $u_q = x_1^{b_1^{(q)}} \cdots x_{t_q}^{b_{t_q}^{(q)}}$, com $b_i^{(q)} = 0, \dots p^n - 1$, $i = 1, \dots, t_q$ e $q = 1, \dots, r+1$.

Consideremos $P = F\left[y_{i,b}^{(q)}, z_i \mid i \in \mathbb{N}; q = 1, \dots, r+1; b = 0, 1, \dots, p^n - 1\right]$ a F-álgebra dos polinômios comutativos nas variáveis $y_{i,b}^{(q)}$ e z_i ($i \in \mathbb{N}$). Seja Q o P-módulo gerado pelas $2r$-úplas $(i_1, \dots, i_{2r})$, onde $i_s \in \mathbb{N}$. E, seja $\mathbb{M}_{r,l}$ o F-subespaço em Q gerado por todos os polinômios da forma

$$\overline{m} = (i_1, \dots, i_{2r}) m_0 m_1 \cdots m_{r+1}, \tag{2.16}$$

onde $m_0 = z_1^{n_1} \cdots z_s^{n_s} \cdots$ e $m_q = y_{1,b_1^{(q)}}^{(q)} \cdots y_{t_q,b_{t_q}^{(q)}}^{(q)}$, com $b_i^{(q)} = 0, \dots p^n - 1$, $i = 1, \dots, t_q$ e $q = 1, \dots, r+1$.

Seja $\varphi : \mathbb{M}_{r,l} \longrightarrow \overline{U}_{r,l}$ uma aplicação F-linear tal que, para cada gerador $\overline{m}$ de $\mathbb{M}_{r,l}$,

$$\varphi\left((i_1, \dots, i_{2r}) m_0 m_1 \cdots m_{r+1}\right) =$$

$$= u_0u_1\big[x_{i_1}, x_{i_2}\big]u_2\cdots u_r\big[x_{i_{2r-1}}, x_{i_{2r}}\big]u_{r+1} + U_{(r+1),l}, \tag{2.17}$$

onde $u_0 = \left(x_1^{p^n}\right)^{n_1}\cdots\left(x_s^{p^n}\right)^{n_s}\cdots$, $u_q = x_1^{b_1^{(q)}}\cdots x_{t_q}^{b_{t_q}^{(q)}}$, $m_0 = z_1^{n_1}\cdots z_j^{n_j}\cdots$ e $m_q = y_{1,b_1^{(q)}}^{(q)}\cdots y_{t_q,b_{t_q}^{(q)}}^{(q)}$, com $b_i^{(q)} = 0,\ldots,$
$p^n-1,\ i = 1,\ldots,t_q$ e $q = 1,\ldots,r+1$.

Seja $\pi\in\Pi_{\overline{U}_{r,l}}$ um endomorfismo qualquer de $\overline{U}_{r,l}$ definido imediatamente depois da Proposição 2.2.6. O endomorfismo π age em todo gerador $\overline{u} = u_0u_1[x_{i_1}, x_{i_2}]u_2\cdots u_r[x_{i_{2r-1}}, x_{i_{2r}}]u_{r+1} + U_{(r+1),l}$ de $\overline{U}_{r,l}$ da seguinte maneira:

$$\pi(\overline{u}) = u_{\pi(0)}u_{\pi(1)}\big[x_{\pi(i_1)}, x_{\pi(i_2)}\big]u_{\pi(2)}\cdots u_{\pi(r)}\big[x_{\pi(i_{2r-1})}, x_{\pi(i_{2r})}\big]u_{\pi(r+1)} + U_{(r+1),l},$$

onde $u_{\pi(0)} = \left(x_{\pi(1)}^{p^n}\right)^{n_1}\cdots\left(x_{\pi(s)}^{p^n}\right)^{n_s}\cdots$ e $u_{\pi(q)} = x_{\pi(1)}^{b_1^{(q)}}\cdots x_{\pi(t_q)}^{b_{t_q}^{(q)}}$, com $b_i^{(q)} = 0,\ldots,$
$p^n-1,\ i = 1,\ldots,t_q$ e $q = 1,\ldots,r+1$.

Seja $\pi\in\Pi$ uma aplicação F-linear $\pi:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ que preserva ordem, definida imediatamente depois da Proposição 2.2.6. Definimos um endomorfismo correspondente (que também denotaremos por π) $\pi:\mathbb{M}_{r,l}\longrightarrow\mathbb{M}_{r,l}$ tal que, para cada gerador $\overline{m} = (i_1,\ldots,i_{2r})m_0m_1\cdots m_{r+1}$ de $\mathbb{M}_{r,l}$,

$$\pi(\overline{m}) = \big(\pi(i_1),\ldots,\pi(i_{2r})\big)m_{\pi(0)}m_{\pi(1)}\cdots m_{\pi(r+1)},$$

onde $m_{\pi(0)} = z_{\pi(1)}^{n_1}\cdots z_{\pi(j)}^{n_j}\cdots$ e $m_{\pi(q)} = y_{\pi(1),b_1^{(q)}}^{(q)}\cdots y_{\pi(t_q),b_{t_q}^{(q)}}^{(q)}$, com $b_i^{(q)} = 0,1,\ldots p^n-1,\ i = 1,\ldots,t_q$ e $q = 1,\ldots,r+1$.

Para todos os endomorfismos $\pi\in\Pi_{\overline{U}_{r,l}}$ e $\pi\in\Pi_{\mathbb{M}_{r,l}}$ correspondentes à π e para a aplicação φ definidas anteriormente temos o seguinte lema.

Lema 2.3.11 *Para toda aplicação $\pi\in\Pi$ e para os endomorfismos correspondentes $\pi\in\Pi_{\overline{U}_{r,l}}$ e $\pi\in\Pi_{\mathbb{M}_{r,l}}$, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_{r,l} & \stackrel{\pi}{\longrightarrow} & \mathbb{M}_{r,l} \\ \varphi\downarrow & & \varphi\downarrow \\ \overline{U}_{r,l} & \stackrel{\pi}{\longrightarrow} & \overline{U}_{r,l} \end{array}$$

é comutativo.

Demonstração: Consideremos φ a aplicação F-linear definida em (2.17) e $\overline{m} = (i_1,\ldots,i_{2r})m_0m_1\cdots m_{r+1}$ um gerador qualquer de $\mathbb{M}_{r,l}$. Por um lado, para toda aplicação $\pi \in \Pi$ e para todo endomorfismo correspondente $\pi \in \Pi_{\overline{U}_{r,l}}$, temos

$$\begin{aligned}
(\pi \circ \varphi)(\overline{m}) &= \pi\Big(\varphi\big((i_1, \ldots, i_{2r})m_0 m_1 \cdots m_{r+1}\big)\Big) = \\
&= \pi\big(u_0 u_1 [x_{i_1}, x_{i_2}] u_2 \cdots u_r [x_{i_{2r-1}}, x_{i_{2r}}] u_{r+1} + U_{(r+1),l}\big) \\
&= u_{\pi(0)} u_{\pi(1)} \big[x_{\pi(i_1)}, x_{\pi(i_2)}\big] u_{\pi(2)} \cdots u_{\pi(r)} \big[x_{\pi(i_{2r-1})}, x_{\pi(i_{2r})}\big] u_{\pi(r+1)} + U_{(r+1),l} \\
&= \pi(\overline{u})
\end{aligned}$$

Por outro lado, para toda aplicação $\pi \in \Pi$ e para todos os endomorfismos correspondentes $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{r,l}}$ e $\pi \in \Pi_{\overline{U}_{r,l}}$, temos

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \pi)(\overline{m}) &= \varphi\Big(\pi\big((i_1, \ldots, i_{2r})m_0 m_1 \cdots m_{r+1}\big)\Big) = \\
&= \varphi\Big(\big(\pi(i_1), \ldots, \pi(i_{2r})\big) m_{\pi(0)} m_{\pi(1)} \cdots m_{\pi(r+1)}\Big) \\
&= u_{\pi(0)} u_{\pi(1)} \big[x_{\pi(i_1)}, x_{\pi(i_2)}\big] u_{\pi(2)} \cdots u_{\pi(r)} \big[x_{\pi(i_{2r-1})}, x_{\pi(i_{2r})}\big] u_{\pi(r+1)} + U_{(r+1),l} \\
&= \pi(\overline{u})
\end{aligned}$$

Logo, $(\pi \circ \varphi)(\overline{m}) = (\varphi \circ \pi)(\overline{m})$, para cada $\overline{m}$ gerador de $\mathbb{M}_{r,l}$. Portanto, o diagrama é comutativo. ■

Para todo par (i, j) de inteiros positivos, com $i < j$, consideremos os endomorfismos $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{r,l}}$ definidos imediatamente após a Proposição 2.2.6. Os endomorfismos ψ_{ij} agem em todo gerador $\overline{u} = u_0 u_1 [x_{i_1}, x_{i_2}] u_2 \cdots u_r [x_{i_{2r-1}}, x_{i_{2r}}] u_{r+1} + U_{(r+1),l}$ de $\overline{U}_{r,l}$ da seguinte maneira:

1) se $j \notin \{i_1, \ldots, i_{2r}\}$ então

$$\psi_{ij}(\overline{u}) = u_0^{(i)} u_1^{(i)} \big[x_{i_1}, x_{i_2}\big] u_2^{(i)} \cdots u_r^{(i)} \big[x_{i_{2r-1}}, x_{i_{2r}}\big] u_{r+1}^{(i)} + U_{(r+1),l}$$

onde

a) quando $x_i \notin \overline{u}$ temos

$$u_0^{(i)} = \left(x_1^{p^n}\right)^{n_1} \cdots \left(x_i^{p^n}\right)^{n_j} \cdots \left(x_j^{p^n}\right)^{n_j} \cdots$$

e

$$u_q^{(i)} = x_1^{b_1} \cdots x_i^{b_j} \cdots x_j^{b_j} \cdots ,$$

com $b_i = 0, 1, \ldots, p^n - 1,\ q = 1, \ldots, r+1$ e $i \in \mathbb{N}$.

b) e quando $x_i \in \overline{u}$ temos

$$u_0^{(i)} = \left(x_1^{p^n}\right)^{n_1} \cdots \left(x_i^{p^n}\right)^{n_i'} \cdots \left(x_j^{p^n}\right)^{n_j} \cdots$$

e

$$u_q^{(i)} = x_1^{b_1} \cdots x_i^{b_i'} \cdots x_j^{b_j} \cdots ,$$

com $b_i = 0, 1, \ldots, p^n - 1,\ q = 1, \ldots, r+1$ e $i \in \mathbb{N}$.

2) se $j \in \{i_1, \ldots, i_{2r}\}$ então

$$\psi_{ij}\left(\overline{u}\right) = \sum_s u_0^{(s)} u_1^{(s)} \left[x_{i_1^{(s)}}, x_{i_2^{(s)}}\right] u_2^{(s)} \cdots u_r^{(s)} \left[x_{i_{2r-1}^{(s)}}, x_{i_{2r}^{(s)}}\right] u_{r+1}^{(s)} + U_{(r+1),l},$$

para alguns $i_1^{(s)}, \ldots, i_{2r}^{(s)}$, com $\left(i_1^{(s)}, \ldots, i_{2r}^{(s)}\right) \leq (i_1, \ldots, i_{2k})$ na ordem lexicográfica, e para alguns monômios $u_0^{(s)}$ e $u_q^{(s)}$ $(q = 1, \ldots, r+1)$, para cada s.

Para cada par (i, j) de inteiros positivos, com $i < j$, definimos um endomorfismo $\psi_{ij} : \mathbb{M}_{r,l} \longrightarrow \mathbb{M}_{r,l}$ tal que, para todo gerador $\overline{m} = (i_1, \ldots, i_{2r}) m_0 m_1 \cdots m_{r+1}$ de $\mathbb{M}_{r,l}$, temos

1) se $j \notin \{i_1, \ldots, i_{2r}\}$ então

$$\psi_{ij}(\overline{m}) = \big(i_1, \ldots, i_{2r}\big) m_0^{(i)} m_1^{(i)} \cdots m_{r+1}^{(i)}$$

onde

a) quando y_{i,b_i} e $z_i \notin \overline{m}$ temos

$$m_0^{(i)} = z_1^{n_1} \cdots z_i^{n_j} \cdots z_j^{n_j} \cdots$$

e

$$m_q^{(i)} = y^{(q)}_{1,b_1^{(q)}} \cdots y^{(q)}_{i,b_j^{(q)}} \cdots y^{(q)}_{j,b_j^{(q)}} \cdots ,$$

com $b_i = 0, 1, \ldots, p^n - 1,\ q = 1, \ldots, r$ e $i \in \mathbb{N}$.

b) e quando y_{i,b_i} e/ou $z_i \in \overline{m}$ temos

$$m_0^{(i)} = z_1^{n_1} \cdots z_i^{n_i'} \cdots z_j^{n_j} \cdots$$

e

$$m_1^{(i)} = y^{(q)}_{1,b_1^{(q)}} \cdots y^{(q)}_{i,{b_i'}^{(q)}} \cdots y^{(q)}_{j,b_j^{(q)}} \cdots ,$$

com $b_i = 0, 1, \ldots, p^n - 1,\ q = 1, \ldots, r+1$ e $i \in \mathbb{N}$.

2) se $j \in \{i_1, \ldots, i_{2r}\}$ então

$$\psi_{ij}(\overline{m}) = \sum_s \left(i_1^{(s)}, \ldots, i_{2r}^{(s)}\right) \varphi^{-1}\left(u_0^{(s)}\right)\varphi^{-1}\left(u_1^{(s)}\right) \cdots \varphi^{-1}\left(u_{r+1}^{(s)}\right),$$

para alguns $i_1^{(s)}, \ldots, i_{2r}^{(s)}$, com $\left(i_1^{(s)}, \ldots, i_{2r}^{(s)}\right) \leq (i_1, \ldots, i_{2r})$ na ordem lexicográfica, e para alguns monômios $u_0^{(s)}$, $u_q^{(s)}$ $(q = 1, \ldots, r+1)$, para todo s.

Denotamos por $\Psi_{\mathbb{M}_{r,l}}$ o conjunto de todos os endomorfismos $\psi_{ij} : \mathbb{M}_{r,l} \longrightarrow \mathbb{M}_{r,l}$ descritos anteriormente.

Para todos os endomorfismos $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{r,l}}$, $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{r,l}}$ e a aplicação φ, definidos anteriormente, temos o seguinte lema.

Lema 2.3.12 *Para todo par (i,j) de inteiros positivos, com $i < j$, e para todos os endomorfismos $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{r,l}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{r,l}}$, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_{r,l} & \xrightarrow{\psi_{ij}} & \mathbb{M}_{r,l} \\ \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow \\ \overline{U}_{r,l} & \xrightarrow{\psi_{ij}} & \overline{U}_{r,l} \end{array}$$

é comutativo.

Demonstração: Consideremos φ a aplicação F-linear definida em (2.17) e $\overline{m} = (i_1, \ldots, i_{2r})m_0 m_1 \cdots m_{r+1}$ um gerador qualquer de $\mathbb{M}_{r,l}$. Por um lado, para todo par (i,j) de inteiros positivos, com $i < j$, e para todo endomorfismo $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{r,l}}$, temos:

1) se $j \notin \{i_1, \ldots, i_{2r}\}$ então

$$\begin{aligned} (\psi_{ij} \circ \varphi)(\overline{m}) &= \psi_{ij}\Big(\varphi\big((i_1, i_2, \ldots, i_{2r})m_0 m_1 \cdots m_{r+1}\big)\Big) \\ &= \psi_{ij}\Big(u_0 u_1 \big[x_{i_1}, x_{i_2}\big] u_2 \cdots u_r \big[x_{i_{2r-1}}, x_{i_{2r}}\big] u_{r+1} + U_{(r+1),l}\Big) \\ &= u_0^{(i)} u_1^{(i)} \big[x_{i_1}, x_{i_2}\big] u_2^{(i)} \cdots u_r^{(i)} \big[x_{i_{2r-1}}, x_{i_{2r}}\big] u_{r+1}^{(i)} + U_{(r+1),l} \\ &= \psi_{ij}(\overline{u}) \end{aligned}$$

2) se $j \in \{i_1, \ldots, i_{2r}\}$ então

$$\begin{aligned} (\psi_{ij} \circ \varphi)(\overline{m}) &= \psi_{ij}\Big(\varphi\big((i_1, \ldots, i_{2r})m_0 m_1 \cdots m_{r+1}\big)\Big) \\ &= \psi_{ij}\Big(u_0 u_1 \big[x_{i_1}, x_{i_2}\big] u_2 \cdots u_r \big[x_{i_{2r-1}}, x_{i_{2r}}\big] u_{r+1} + U_{(r+1),l}\Big) \\ &= u_0^{(s)} u_1^{(s)} \Big[x_{i_1}^{(s)}, x_{i_2}^{(s)}\Big] u_2^{(s)} \cdots u_r^{(s)} \Big[x_{i_{2r-1}}^{(s)}, x_{i_{2r}}^{(s)}\Big] u_{r+1}^{(s)} + U_{(r+1),l} \\ &= \psi_{ij}(\overline{u}) \end{aligned}$$

Por outro lado, para todo par (i,j) de inteiros positivos, com $i < j$, e para todos os endomorfismos $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{r,l}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{r,l}}$, temos:

1) se $j \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_{2r}\}$ então

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \psi_{ij})(\overline{m}) &= \varphi\Big(\psi_{ij}\big((i_1,\ldots,i_{2r})m_0m_1\cdots m_{r+1}\big)\Big)\\
&= \varphi\Big((i_1,\ldots,i_{2r})m_0^{(i)}m_1^{(i)}\cdots m_{r+1}^{(s)}\Big)\\
&= u_0^{(s)}u_1^{(s)}\big[x_{i_1},x_{i_2}\big]u_2^{(s)}\cdots u_r^{(s)}\big[x_{i_{2r-1}},x_{i_{2r}}\big]u_{r+1}^{(s)} + U_{(r+1),l}\\
&= \psi_{ij}(\overline{u})
\end{aligned}$$

2) se $j \in \{i_1, \ldots, i_{2r}\}$ então

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \psi_{ij})(\overline{m}) &= \varphi\Big(\psi_{ij}\big((i_1,\ldots,i_{2r})m_0m_1\cdots m_{r+1}\big)\Big)\\
&= \varphi\Big((i_1,\ldots,i_{2r})m_0^{(s)}m_1^{(s)}\cdots m_{r+1}^{(s)}\Big)\\
&= u_0^{(s)}u_1^{(s)}\Big[x_{i_1^{(s)}},x_{i_2^{(s)}}\Big]u_2^{(s)}\cdots u_r^{(s)}\Big[x_{i_{2r-1}^{(s)}},x_{i_{2r}}^{(s)}\Big]u_{r+1}^{(s)} + U_{(r+1),l}\\
&= \psi_{ij}(\overline{u})
\end{aligned}$$

Logo, $(\psi_{ij} \circ \varphi)(\overline{m}) = (\varphi \circ \psi_{ij})(\overline{m})$, para cada $\overline{m}$ gerador de $\mathbb{M}_{r,l}$. Portanto, o diagrama é comutativo. ■

Lembramos que $\mathbb{A} = F\big[z_i \mid i \in \mathbb{N}\big]$ é a F-álgebra dos polinômios comutativos nas variáveis z_i, para todo i. Notemos que $\mathbb{M}_{r,l}$ é um $\mathbb{A}$-módulo. Usando os Lemas 2.3.11 e 2.3.12 vamos demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 2.3.13 *Sejam V um D_l-submódulo de $\overline{U}_{r,l}$ fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\overline{U}_{r,l}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{r,l}}$. Então $\varphi^{-1}(V)$ é um $\mathbb{A}$-submódulo de $\mathbb{M}_{r,l}$ fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{r,l}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{r,l}}$.*

Demonstração: Seja V um D_l-submódulo de $\overline{U}_{r,l}$ fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\overline{U}_{r,l}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{r,l}}$. Sejam f um elemento em $\varphi^{-1}(V)$ e m um monômio nas variáveis z_i $(i \in \mathbb{N})$. Claramente $\varphi(f) \in V$ e $\varphi(m)$ é um monômio nas variáveis $x_i^{p^n} + U_{(r+1),l}$, para $i \in \mathbb{N}$. Por hipótese, V é um D_l-submódulo de $\overline{U}_{r,l}$, ou seja,

$$\varphi(m)\varphi(f) = \varphi(mf) \in V, \tag{2.18}$$

isto é, $mf \in \varphi^{-1}(V)$. Logo, $\varphi^{-1}(V)$ é um $\mathbb{A}$-submódulo de $\mathbb{M}_{r,l}$.

Para toda aplicação $\pi \in \Pi$, consideremos os endomorfismos correspondentes $\pi \in \Pi_{\overline{U}_{r,l}}$ e $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{r,l}}$. Para todo elemento $f \in \varphi^{-1}(V)$ claro que $\varphi(f) \in V$. Por hipótese, V é fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\overline{U}_{r,l}}$, ou seja, $\pi\big(\varphi(f)\big) \in V$. Pelo Lema 2.3.11, valem as seguintes igualdades

$$\pi(\varphi(f)) = (\pi \circ \varphi)(f) = (\varphi \circ \pi)(f) = \varphi(\pi(f)).$$

Logo, $\pi(f) \in \varphi^{-1}(V)$. Portanto, $\varphi^{-1}(V)$ é fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{r,l}}$.

Por fim, para todo par (i,j) de inteiros positivos, com $i < j$, consideremos os endomorfismos $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{r,l}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{r,l}}$. Para todo elemento $f \in \varphi^{-1}(V)$, claramente $\varphi(f) \in V$. Por hipótese, V é fechado por todos os endomorfismos $\psi_{ij} \in \Psi_{\overline{U}_{r,l}}$, ou seja, $\psi_{ij}\big(\varphi(f)\big) \in V$. Pelo Lema 2.3.12, valem as seguintes igualdades

$$\psi_{ij}\big(\varphi(f)\big) = \big(\psi_{ij} \circ \varphi\big)(f) = \big(\varphi \circ \psi_{ij}\big)(f) = \varphi\big(\psi_{ij}(f)\big).$$

Logo, $\psi_{ij}(f) \in \varphi^{-1}(V)$. Portanto, $\varphi^{-1}(V)$ é fechado por todos os endomorfismos $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{r,l}}$. ■

Analogamente ao caso $r = 2$ e $l = 4$, se

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq \cdots$$

é uma cadeia ascendente de D_l-submódulos de $\overline{U}_{r,l}$ fechados por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\overline{U}_{r,l}}$ e $\psi \in \Psi_{\overline{U}_{r,l}}$, então

$$\varphi^{-1}(V_1) \subseteq \varphi^{-1}(V_2) \subseteq \varphi^{-1}(V_3) \subseteq \cdots$$

é uma cadeia ascendente de $\mathbb{A}$-submódulos de $\mathbb{M}_{r,l}$ fechados por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{r,l}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{r,l}}$.

Observamos que se a cadeia

$$\varphi^{-1}(V_1) \subseteq \varphi^{-1}(V_2) \subseteq \varphi^{-1}(V_3) \subseteq \cdots$$

se estabiliza, ou seja, se existe s tal que $\varphi^{-1}(V_s) = \varphi^{-1}(V_{s'})$, para cada $s' > s$, então a cadeia

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq \cdots$$

também se estabiliza, pois $\varphi^{-1}(V_s) = \varphi^{-1}(V_{s'})$ implica que $V_s = V_{s'}$, para cada $s' > s$. Nesse sentido, para demonstrar a Proposição 2.2.7, no caso geral, é suficiente demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 2.3.14 *Toda cadeia ascendente de $\mathbb{A}$-submódulos de $\mathbb{M}_{r,l}$ fechados por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{r,l}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{r,l}}$ estabiliza.*

Seja $\Omega_{\mathbb{M}_{r,l}}$ o conjunto de todos os endomorfismos $\omega : \mathbb{M}_{r,l} \longrightarrow \mathbb{M}_{r,l}$ tal que $\omega = \psi_{i_s j_s} \circ \ldots \circ \psi_{i_2 j_2} \circ \psi_{i_1 j_1} \circ \pi$, com $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{r,l}}, \psi_{i_1 j_1}, \psi_{i_2 j_2}, \ldots, \psi_{i_s j_s} \in \Psi_{\mathbb{M}_{r,l}}$, $i_1, i_2, \ldots, i_s \notin \pi(\mathbb{N})$ e $i_a \neq i_b$ se $a \neq b$. A demostração de que o conjunto $\Omega_{\mathbb{M}_{r,l}}$ é um semigrupo é análoga à demonstração do Lema 1.4.3.

Observamos que toda cadeia ascendente de $\mathbb{A}$-submódulos de $\mathbb{M}_{r,l}$ fechados por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{r,l}}$ e $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{r,l}}$ é também uma cadeia ascendente de $\mathbb{A}$-submódulos de $\mathbb{M}_{r,l}$ fechados por todos endomorfismos $\omega \in \Omega_{\mathbb{M}_{r,l}}$. De fato, pois cada $\mathbb{A}$-submódulo de $\mathbb{M}_{r,l}$ fechado por todos os endomorfismos $\pi \in \Pi_{\mathbb{M}_{r,l}}$ e por todos os endomorfismos $\psi_{ij} \in \Psi_{\mathbb{M}_{r,l}}$ é claramente fechado por todos os endomorfismos $\omega \in \Omega_{\mathbb{M}_{r,l}}$. Logo, para demonstrar a Proposição 2.3.14 e com isso demonstrar a Proposição 2.2.7, no caso geral, basta demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 2.3.15 *Toda cadeia ascendente de $\mathbb{A}$-submódulos de $\mathbb{M}_{r,l}$ fechados por todos os endomorfismos $\omega \in \Omega_{\mathbb{M}_{r,l}}$ estabiliza.*

Assim, para demonstrar o resultado principal é suficiente demonstrar a Proposição 2.3.15. Faremos isso na próxima seção.

2.4 A demonstração do resultado sobre módulos

Lembramos que para demonstrar o Teorema 1 é suficiente demonstrar a Proposição 2.3.15. Faremos isto nesta seção.

Para demonstrar a Proposição 2.3.15 vamos mostrar que cada N $\mathbb{A}$-submódulo de $\mathbb{M}_{r,l}$ fechado por todos os endomorfismos $\omega \in \Omega_{\mathbb{M}_{r,l}}$ é finitamente gerado (como um $\mathbb{A}$-submódulo fechado por todos os endomorfismos $\omega \in \Omega_{\mathbb{M}_{r,l}}$).

Lembramos que, na seção 2.4, definimos o conjunto J de todas as sequências finitas de inteiros não negativos. Definimos em J $\leq$ uma boa ordem e $\preceq$ uma ordem parcial. Elas foram definidas da seguinte maneira: sejam $\big(i_1,\ldots,i_m\big)$ e $\big(j_1,\ldots,j_n\big)$ duas sequências em J. Dizemos que

$$\big(i_1,\ldots,i_m\big) < \big(j_1,\ldots,j_n\big)$$

se $m<n$ ou se $m=n$ e existe r tal que $i_s<j_s$ mas $i_{s'}=j_{s'}$, para cada $s'>s$. Dizemos que

$$\big(i_1,\ldots,i_m\big) \preceq \big(j_1,\ldots,j_n\big)$$

se $m\leq n$ e existe $\pi\in\Pi$ uma aplicação F-linear que preserva ordem (ou seja, se $a<b$ então $\pi(a)<\pi(b)$) tal que $\pi(i_s)=j_{\pi(s)}$, para cada $s=1,\ldots,m$.

Definimos também, na seção 2.4, $\mathcal{M}$ o semigrupo de todos os monômios $\mathbb{A}$ com coeficientes unitários, ou seja, definimos o conjunto

$$\mathcal{M}=\big\{z_1^{n_1}\cdots z_s^{n_s}\mid (n_1,\ldots,n_s)\in J\big\}.$$

Vamos definir em $\mathcal{M}$ duas ordens $\leq_{(1)}$ e $\preceq_{(1)}$ da seguinte maneira: sejam $m_0=z_1^{n_1}\cdots z_s^{n_s}$ e $m_0'=z_1^{n_1'}\cdots z_{s'}^{n_{s'}'}$ dois monômios em $\mathcal{M}$. Dizemos que $m_0<_{(1)}m_0'$ se

$$\big(n_1,\ldots,n_s\big) < \big(n_1',\ldots,n_{s'}'\big)$$

na ordem lexicográfica à direita. Dizemos que $m_0\preceq_{(1)}m_0'$ se existem um endomorfismo $\omega\in\Omega_{\mathbb{M}_{r,l}}$ e um monômio g em $\mathbb{A}$ tais que $\omega(m_0)g=m_0'$. Observamos que $\leq_{(1)}$ é uma boa ordem enquanto que $\preceq_{(1)}$ é uma ordem parcial.

Seja $\mathcal{M}_1$ o semigrupo de todos os monômios $m=y_{1,b_1}\cdots y_{t,b_t}$, onde $b_i=0,1,\ldots,p^n-1$ $(i=1,\ldots,t)$. Em $\mathcal{M}_1$ vamos definir duas ordens $\leq_{(2)}$ e $\preceq_{(2)}$ da seguinte maneira: sejam $m_s=y^{(s)}_{1,b_1^{(s)}}\cdots y^{(s)}_{t,b_t^{(s)}}$ e $m_{s'}=y^{(s')}_{1,b_1^{(s')}}\cdots y^{(s')}_{t',b_{t'}^{(s')}}$ dois monômios em $\mathcal{M}_1$. Dizemos que $m_s<_{(2)}m_{s'}$ se

$$\Big(b_1^{(s)},\ldots,b_t^{(s)}\Big) < \Big(b_1^{(s')},\ldots,b_{t'}^{(s')}\Big)$$

na ordem lexicográfica à direita. E, dizemos que $m_s\preceq_{(2)}m_{s'}$ se existe um endomorfismo $\omega\in\Omega_{\mathbb{M}_{r,l}}$ tal que $\omega(m_s)=m_{s'}$. Observamos que $\leq_{(2)}$ é uma boa ordem enquanto que $\preceq_{(2)}$ é uma ordem parcial.

Seja $\overline{\mathcal{M}}$ o semigrupo de todos os elementos da forma

$$(i_1,\ldots,i_{2r})m_0m_1\cdots m_{r+1},$$

onde $m_0 = z_1^{n_1} \cdots z_s^{n_s}, m_q = y^{(q)}_{1,b_1^{(q)}} \cdots y^{(q)}_{t_q,b_{t_q}^{(q)}}$, com $b_i^{(q)} = 0, 1, \ldots, p^n - 1,\ i = 1, \ldots, t_q$ e $q = 1, \ldots, r+1$. A seguir, vamos definir em $\overline{\mathcal{M}}$ $\leq_{(3)}$ e $\preceq_{(3)}$ duas ordens da seguinte maneira: sejam $\overline{m} = \big(i_1, \ldots, i_{2r}\big)m_0m_1 \cdots m_{r+1}$ e $\overline{m}' = \big(i'_1, \ldots, i'_{2r)}\big)m'_0m'_1 \cdots m'_r$ dois polinômios em $\overline{\mathcal{M}}$, onde $m_0 = z_1^{n_1} \cdots z_s^{n_s}, m'_0 = z_1^{n'_1} \cdots z_{s'}^{n'_{s'}}, m_q = y^{(q)}_{1,b_1^{(q)}} \cdots y^{(q)}_{t_q,b_{t_q}^{(q)}}$ e $m'_q = y^{(q)}_{1,b_1'^{(q)}} \cdots y^{(q)}_{t_q,b_{t_q}'^{(q)}}$, com $b_i^{(q)}, b_i'^{(q)} = 0, 1, \ldots, p^n - 1, i = 1, \ldots, t_q$ e $q = 1, \ldots, r+1$. Dizemos que $\overline{m} <_{(3)} \overline{m}'$ se

1) $\Big(i_1, \ldots, i_{2r}\Big) < \Big(i'_1, \ldots, i'_{2r}\Big)$; ou

2) $i_{t'} = i'_{t'}$, para cada $t' = 1, \ldots, 2r$ e $m_0 <_{(1)} m'_0$; ou

3) $i_{t'} = i'_{t'}$, para cada $t' = 1, \ldots, 2r$, $m_0 = m'_0$, $m_s = m'_s$, para cada $s < t$ e $m_t <_{(2)} m'_t$.

Dizemos que $\overline{m} \preceq_{(3)} \overline{m}'$ se existem um endomorfismo $\omega \in \Omega_{\mathbb{M}_{r,l}}$, onde $\omega = \psi_{i_s,j_s} \circ \cdots \circ \psi_{i_1,j_1} \circ \pi$, com $\big\{j_1, \ldots, j_s\big\} \cap \big\{i_1, \ldots, i_{2r}\big\} = \emptyset$, e um monômio g em $\mathbb{A}$, tais que

1) $\pi\Big(\big(i_1, \ldots, i_{2r}\big)\Big) = \Big(i'_1, \ldots, i'_{2r}\Big)$;

2) $\omega(m_0)g = m'_0$;

3) $\omega(m_s) = m'_s$, para cada $s = 1, \ldots, r+1$.

É claro que vale o seguinte lema.

Lema 2.4.1 $\big(\overline{\mathcal{M}}, \leq_{(3)}\big)$ *é um conjunto bem ordenado*

E vale também o seguinte lema.

Lema 2.4.2 $\big(\overline{\mathcal{M}}, \preceq_{(3)}\big)$ *é um conjunto parcialmente bem ordenado.*

A demonstração do Lema 2.4.2 não é trivial e pode ser encontrada, por exemplo, em [58, Lemma 3.3].

Seja g um polinômio em $\mathbb{M}_{r,l}$, com $g \neq 0$. Definimos o **termos principal** de g como o maior termo

$$\big(i_1, \ldots, i_{2r}\big)\Big(z_1^{n_1} \cdots z_s^{n_s}\Big)\left(y^{(1)}_{1,b_1^{(1)}} \cdots y^{(1)}_{t_1,b_{t_1}^{(1)}}\right) \cdots \left(y^{(r+1)}_{1,b_1^{(r+1)}} \cdots y^{(r+1)}_{t_{r+1},b_{t_{r+1}}^{(r+1)}}\right)$$

de g, com respeito a ordem $\leq_{(3)}$, onde $b_i^{(q)} = 0, 1, \ldots, p^n - 1,\ i = 1, \ldots, t_q$ e $q = 1, \ldots, r+1$. Notemos que o termo principal de cada polinômio de $\mathbb{M}_{r,l}$ pertencem a $\overline{\mathcal{M}}$.

Seja N um $\mathbb{A}$-submódulo de $\mathbb{M}_{r,l}$ fechado por todos os endomorfismos $\omega \in \Omega_{\mathbb{M}_{r,l}}$. E seja $\overline{\mathcal{M}}_N$ o conjunto de todos os termos principais dos polinômios de N. Claramente temos $\overline{\mathcal{M}}_N \subseteq \overline{\mathcal{M}}$ e, pelo Lema 2.4.2, o conjunto $(\overline{\mathcal{M}}, \preceq_{(3)})$ é parcialmente bem ordenado, então existe um subconjunto finito $S_0 = \{h_1, \ldots, h_s\}$ de $\overline{\mathcal{M}}_N$ com a seguinte propriedade: para qualquer $h \in \overline{\mathcal{M}}_N$ existe $h_i \in S_0$, para algum $i = 1, \ldots, s$, tal que $h_i \preceq_{(3)} h$. Seja $S = \{f_1, \ldots, f_s\}$ o conjunto de todos os polinômios de N tal que h_l é o termo principal do polinômio f_l, para cada $l = 1, \ldots, s$.

Lema 2.4.3 *O conjunto S gera N como um $\mathbb{A}$-submódulo de $\mathbb{M}_{r,l}$ fechado por todos os endomorfismos $\omega \in \Omega_{\mathbb{M}_{r,l}}$.*

Demonstração: Suponhamos por absurdo que S não gera N como um $\mathbb{A}$-submódulo de $\mathbb{M}_{r,l}$ fechado por todos os endomorfismos $\omega \in \Omega_{\mathbb{M}_{r,l}}$. E seja N_0 o $\mathbb{A}$-submódulo de $\mathbb{M}_{r,l}$ gerado por S, como um $\mathbb{A}$-submódulo de $\mathbb{M}_{r,l}$ fechado por todos endomorfismos $\omega \in \Omega_{\mathbb{M}_{r,l}}$. Assim, exite f um polinômio em N tal que $f \notin N_0$ e com a seguinte propriedade: f é o polinômio com o menor termo principal entre os polinômios de N que não pertencem a N_0.

Seja $h = (i_1, \ldots, i_{2r})m_0 m_1 \cdots m_{r+1}$ o termo principal de f. Então, para algum $l = 1, \ldots, s$, existe $h_l \in S_0$, com $h_l = (i'_1, \ldots, i'_{2r})m'_0 m'_1 \cdots m'_{r+1}$, tal que $h_l \preceq_{(3)} h$. Por definição de $\preceq_{(3)}$, existem um endomorfismos $\omega \in \Omega_{\mathbb{M}_{r,l}}$, onde $\omega = \psi_{i_s,j_s} \circ \ldots \circ \psi_{i_1,j_1} \circ \pi$, com $\{j_1, \ldots, j_r\} \cap \{i_1, \ldots, i_{2r}\} = \emptyset$, e g um monômio em $\mathbb{A}$, tais que

1) $\pi\Big((i'_1, \ldots, i'_{2r})\Big) = (i_1, \ldots, i_{2r})$;

2) $\omega(m'_0)g = m_0$;

3) $\omega(m'_q) = m_q$, para cada $q = 1, \ldots, r+1$.

Ou seja, o termo principal de $\omega(f_l)$ é igual a h. Logo, o termo principal de $f - \omega(f_l)$ é menor que o termo principal de f e, pela nossa suposição, $f - \omega(f_l)$ pertence a N_0. Do fato que N_0 é gerado por S, como um $\mathbb{A}$-submódulo de $\mathbb{M}_{r,l}$ fechado por todos os endomorfismos $\omega \in \Omega_{\mathbb{M}_{r,l}}$, segue que $\omega(f_l) \in N_0$, consequentemente, $f \in N_0$, o que contraria a escolha do polinômio f. Portanto, N é gerado por S, como um $\mathbb{A}$-submódulo de $\mathbb{M}_{r,l}$ fechado por todos os endomorfismos $\omega \in \Omega_{\mathbb{M}_{r,l}}$. $\blacksquare$

Capítulo 3

As álgebras universais associativas Lie nilpotentes e fortemente Lie nilpotentes.

Seja K um anel associativo comutativo unitário e seja $A = K\langle X\rangle$ a K-álgebra associativa unitária livre, livremente gerada pelo conjunto $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Lembramos que, no Capítulo 2, definimos o ideal bilateral $T^{(n)}$, para cada $n \geq 1$ em A por $T^{(n)} = T^{(n)}(A) = AL^{(n)}(A)A$, onde $L^{(n)}(A)$ é o K-submódulo de A gerado por todos os comutadores $[a_1, \ldots, a_n]$, onde $a_i \in A$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Lembramos também que definimos indutivamente o ideal bilateral $R^{(m)}(A)$, para $m \geq 0$ em A por $R^{(0)}(A) = A$ e $R^{(m)} = R^{(m)}(A) = A\Big[R^{(m-1)}(A), A\Big]A$, para $m \geq 1$. Lembramos ainda que se $X = X_k = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$ então escrevemos $A_k, T_k^{(n)}, L_k^{(n)}$ e $R_k^{(m)}$ para representar, respectivamente, $A = K\langle X\rangle, T^{(n)}(K\langle X\rangle), L^{(n)}(K\langle X\rangle)$ e $R^{(m)}(K\langle X\rangle)$.

Neste capítulo, nosso objetivo é demonstrar o segundo resultado principal deste trabalho, ou seja, demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 3 *Seja K um anel associativo comutativo unitário e seja $A_3 = K\langle X_3\rangle$ a K-álgebra associativa unitária livre, livremente gerada pelo conjunto $X_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$. Então, para cada inteiro positivo n, temos*

$$T_3^{(n)} = R_3^{(n-1)}.$$

A demonstração do Teorema 3 será feita por indução em n. Na seção 3.2, vamos demonstrar a base de indução e, na seção 3.3, o passo de indução. A seguir veremos a relação entre os ideais $R^{(m)}$ e $T^{(n)}$.

3.1 A relação entre os ideais $T^{(m)}$ e $R^{(n)}$

Lembramos que, por definição, $T^{(1)} = A$ e $T^{(n)}$ $(n \geq 2)$ é o ideal bilateral em A gerado, como um ideal bilateral, por todos os comutadores $[a_1, \ldots, a_n]$, onde $a_i \in A$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Desde que o comutador $[a_1, \ldots, a_n]$ é linear em cada entrada, podemos considerar que os a_i $(i = 1, \ldots, n)$ são monômios em A. Desta forma, os elementos de $T^{(n)}$ são combinações lineares de elementos da forma $b[a_1, \ldots, a_n]c$, onde $b, c \in A$ e os a_i $(i = 1, \ldots, n)$ são monômios em A. Como

$$b[a_1, \ldots, a_n]c = bc[a_1, \ldots, a_n] + b\Big[[a_1, a_2], a_3, \ldots, a_n\Big],$$

então $T^{(n)}$ é gerado, como um K-módulo, por todos os elementos da forma $b[a_1, \ldots, a_n]$, onde $b \in A$ e os a_i $(i = 1, \ldots, n)$ são monômios em A.

Para os ideais $T^{(m)}$ e $R^{(n)}$ vale a seguinte proposição.

Proposição 3.1.1 *Seja K um anel associativo comutativo unitário e seja $A = K\langle X \rangle$ a K-álgebra associativa unitária livre, livremente gerada por X. Então, para cada inteiro positivo n,*

$$T^{(n)} \subseteq R^{(n-1)}.$$

Demonstração: A demonstração será feita usando indução em n. A base de indução é válida, pois temos que

$$T^{(1)} = A = R^{(0)}.$$

A nossa hipótese de indução é que a inclusão $T^{(m)} \subseteq R^{(m-1)}$ é válida sempre que $m \leq n$. O passo de indução será mostrar que $T^{(n+1)} \subseteq R^{(n)}$. Por definição de $L^{(n)}$ e $T^{(n)}$ valem as as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} T^{(n+1)} &= AL^{(n+1)}A \\ &= A\Big[L^{(n)}, A\Big]A. \end{aligned}$$

Claramente temos a inclusão

$$T^{(n+1)} \subset A\Big[T^{(n)}, A\Big]A.$$

Pela hipótese de indução, temos que

$$A\Big[T^{(n)}, A\Big]A \;\subseteq\; A\Big[R^{(n-1)}, A\Big]A,$$

ou seja, vale que

$$T^{(n+1)} \;\subset\; R^{(n)}.$$

Portanto, $T^{(n)} \subseteq R^{(n-1)}$, para cada inteiro positivo n. ■

Um dos nossos objetivos neste trabalho é demonstrar a igualdade $T_3^{(n)} = R_3^{(n-1)}$, para $n \geq 1$. Pelo Lema 1.5.6, temos que $R_3^{(m)} = R^{(m)} \cap A_3$ $(m \geq 0)$ e, pelo Lema 1.6.1, temos que $T_3^{(n)} = T^{(n)} \cap A_3$ $(n \geq 1)$. Logo, se $T_3^{(n)} = R_3^{(n-1)}$ $(n \geq 1)$, então $T_2^{(n)} = R_2^{(n-1)}$ $(n \geq 1)$, ou seja, a igualdade $T_3^{(n)} = R_3^{(n-1)}$, para todos $n \geq 1$, implica o seguinte teorema que também iremos demonstrar.

Teorema 3.1.2 *Seja K um anel associativo comutativo unitário e seja $A_2 = K\langle X_2\rangle$ a K-álgebra associativa unitária livre, livremente gerada por X_2. Para cada inteiro positivo n, temos*

$$T_2^{(n)} = R_2^{(n-1)}.$$

Demonstração: A demonstração será feita por indução em n. A base de indução é clara, ou seja, $T_2^{(1)} = A_2 = R_2^{(0)}$. A nossa hipótese de indução é que $T_2^{(n)} = R_2^{(n-1)}$, sempre que $n \leq m$. O passo de indução será mostrar que $T_2^{(m+1)} = R_2^{(m)}$. Pela Proposição 3.1.1, temos a inclusão $T_2^{(m+1)} \subseteq R_2^{(m)}$ $(m \geq 1)$, faltando assim demonstrar que $R_2^{(m)} \subseteq T_2^{(m+1)}$. Por definição, $R_2^{(m)} = A_2\Big[R_2^{(m-1)}, A_2\Big]A_2$ $(m \geq 0)$ e, por hipótese de indução, $R_2^{(m-1)} = T_2^{(m)}$. ■

Lembramos que se $v = [x_1, x_2][x_3, x_4]$ então $v \in R_4^{(2)}$ mas $v \notin T_4^{(3)}$, logo $T_4^{(3)} \subsetneq R_4^{(2)}$. Isso implica que $T_k^{(3)} \subsetneq R_k^{(2)}$ para todo $k \geq 4$.

O seguinte lema foi provado por Dangoviski em [17, Theorem 3.2] para corpos de características diferentes de 2 e 3. Entretanto, demonstramos que o lema é válido para anéis associativo comutativo unitário quaisquer. Este lema será usado para concluir a demonstração do Teorema 3.1.2.

Lema 3.1.3 *Seja K um anel associativo comutativo unitário e seja $A_k = K\langle X_k\rangle$ a K-álgebra associativa unitária livre, livremente gerada por $X_k = \big\{x_1, \ldots, x_k\big\}$. Então, para cada inteiro $m \geq 1$, temos*

$$\Big[T_2^{(m)}, A_2\Big] \subset T_2^{(m+1)}.$$

Demonstração: Observamos que cada elemento de $\left[T_2^{(m)}, A_2\right]$ pode ser escrito como soma de elementos da forma $v = \left[a[u,b],c\right]$, onde $a,b,c \in A_2$ e $u \in L_2^{(m-1)}$. Usando a identidade $[xy,z] = x[y,z] + [x,z]y$, escrevemos

$$v \;=\; [a,c][u,b] + a\big[[u,b],c\big].$$

O comutador $[u,b,c] \in L_2^{(m+1)}$, assim temos

$$v \;\equiv\; [a,c][u,b] \pmod{T_2^{(m+1)}}.$$

Se a,b ou c pertencem ao anel K então $[a,c][u,b] = 0$, pois K é comutativo. Daí, $v \in T_2^{(m+1)}$. Caso contrário, se $a,b,$ e c não pertencem a K, pela bilinearidade da operação comutador $[,]$, podemos considerar a,b e c monômios em A_2. Digamos que $a = x_{i_1}\cdots x_{i_r},\ b = x_{j_1}\cdots x_{j_s},\ c = x_{k_1}\cdots x_{k_t}$. Então temos

$$\begin{aligned}
[a,c] &= \left[x_{i_1}\cdots x_{i_r}, x_{k_1}\cdots x_{k_t}\right]\\
&= \sum_{p=1}^{r}\sum_{q=1}^{t} x_{i_1}\cdots x_{i_{p-1}}x_{k_1}\cdots x_{k_{q-1}}\left[x_{i_p},x_{k_q}\right]x_{k_{q+1}}\cdots x_{k_t}x_{i_{p+1}}\cdots x_{i_r}
\end{aligned}$$

Usando que $[x_i,x_i] = 0$, para $i = 1,2$ e que $[x_2,x_1] = -[x_1,x_2]$ temos (usaremos novamente i como índice)

$$[a,c] \;=\; \sum_{p=1}^{l}(\pm)x_{i_1}\cdots x_{i_{p-1}}[x_1,x_2]x_{i_{p+1}}\cdots x_{i_l}.$$

Temos ainda,

$$\begin{aligned}
[u,b] &= \left[u, x_{j_1}\cdots x_{j_s}\right]\\
&= \sum_{m=1}^{s} x_{j_1}\cdots x_{j_{m-1}}\left[u,x_{j_m}\right]x_{j_{m+1}}\cdots x_{j_s}.
\end{aligned}$$

Aplicando a identidade $ab = ba + [a,b]$ em $x_{j_1}\cdots x_{j_{p-1}}[u,x_{j_p}]$ obtemos

$$x_{j_1}\cdots x_{j_{p-1}}\left[u,x_{j_p}\right] = \left[u,x_{j_p}\right]x_{j_1}\cdots x_{j_{p-1}} - \left[\left[u,x_{j_p}\right], x_{j_1}\cdots x_{j_{p-1}}\right].$$

Pelo Lema 1.6.5, $\left[\left[u,x_{j_p}\right], x_{j_1}\cdots x_{j_{p-1}}\right] \in T_2^{(m+1)}$, logo

$$x_{j_1}\cdots x_{j_{p-1}}\left[u,x_{j_p}\right] \equiv \left[u,x_{j_p}\right]x_{j_1}\cdots x_{j_{p-1}} \pmod{T_2^{(m+1)}}.$$

Daí, segue que

$$x_{j_1}\cdots x_{j_{p-1}}\left[u,x_{j_p}\right]x_{j_{p+1}}\cdots x_{j_s} \equiv \left[u,x_{j_p}\right]x_{j_1}\cdots x_{j_{p-1}}x_{j_{p+1}}\cdots x_{j_s} \pmod{T_2^{(m+1)}},$$

isto mostra que

$$[u,b] \equiv \sum_{p=1}^{s} \left[u, x_{j_p}\right] x_{j_1} \cdots x_{j_{p-1}} x_{j_{p+1}} \cdots x_{j_s} \pmod{M_2^{(m+1)}}$$

Logo, $[a,c][u,b]$ pode ser escrito como soma de produtos do tipo

$$x_{j_1} \cdots x_{j_{t-1}} \left[x_1, x_2\right] \left[u, x_{j_p}\right] x_{j_{t+1}} \cdots x_{j_s}$$

módulo $T_2^{(m+1)}$, onde $x_{j_p} \in X_2$, com $p = 1, \ldots, s$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $x_{j_p} = x_2$. Usando as igualdades $[x_1,x_2][u,x_2] = -[x_1,x_2][x_2,u]$ e $[ab,c,d] = a[b,c,d] + [a,c,d]b + [a,d][b,c] + [a,c][b,d]$, obtemos a igualdade

$$[x_1,x_2][u,x_2] = -[x_1x_2,x_2,u] + x_1[x_2,x_2,u] + [x_1,x_2,u]x_2 + [x_1,u][x_2,x_2]$$

Pelo Lema 1.6.5, os polinômios $[x_1x_2,x_2,u]$ e $[x_1,x_2,u]$ pertencem a $T_2^{(m+1)}$. É fácil verificar que os demais polinômios são nulos. Assim, $[x_1,x_2][u,x_2] \in T_2^{(n+1)}$. Logo, $v \in T_2^{(m+1)}$. ■

Acabamos de provar que $\left[T_2^{(m)}, A_2\right] \subset T_2^{(m+1)}$ $(m \geq 1)$, ou seja, acabamos de provar o Teorema 3.1.2 como queríamos.

Observamos que, por um lado, pelo Lema 3.1.3, $\left[T_2^{(n)}, A_2\right] \subseteq T_2^{(n+1)}$ e, pelo fato de $T_2^{(n+1)}$ ser um ideal bilateral em A_2, temos que

$$A_2 \left[T_2^{(n)}, A_2\right] A_2 \subseteq T_2^{(n+1)}.$$

Por outro lado, pela definição do ideal bilateral $T_2^{(n+1)}$, temos que

$$T_2^{(n+1)} = A_2 L_2^{(n+1)} A_2,$$

onde $L_2^{(n+1)} = \left[L_2^{(n)}, A_2\right]$. Claramente vale a inclusão $\left[L_2^{(n)}, A_2\right] \subseteq \left[T_2^{(n)}, A_2\right]$ $(n \geq 1)$. Logo, $T_2^{(n+1)} \subseteq A_2 \left[T_2^{(n)}, A_2\right] A_2$ $(n \geq 1)$.

Portanto, temos a igualdade

$$T_2^{(n+1)} = A_2 \left[T_2^{(n)}, A_2\right] A_2 \ (n \geq 1).$$

3.2 A demonstração do Teorema 3: a base de indução

Nesta seção vamos demonstrar o Teorema 3 nos casos $n = 1, 2, 3, 4, 5$, que será nossa base de indução na demonstração do mesmo. Pela Proposição 3.1.1, temos a inclusão $T_3^{(n)} \subseteq R_3^{(n-1)}$, para $n \geq 1$, faltando assim demonstrar que $R_3^{(n)} \subseteq T_3^{(n)}$ $(n = 1, 2, 3, 4, 5)$. Recordamos que, pela Proposição 1.5.5, o ideal bilateral $R_3^{(n-1)}$ é gerado, como um ideal bilateral em A_3, por todos os produtos de comutadores de peso igual a $n - 1$ $(n \geq 1)$.

A seguinte observação será útil no decorrer desta seção. Ela usa o fato que X_3 contem 3 elementos distintos.

Observação 3.2.1 *Seja $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \{1, 2, 3\}$, onde $k_1 \neq k_2$ e $k_3 \neq k_4$. Então, para algum $k \in \{k_1, k_2\}$ existe $l \in \{k_3, k_4\}$ tal que $k = l$. Sem perda de generalidade, podemos considerar que $k_1 = k_3$ ou $k_2 = k_4$. Assim,*

i) $\left[k_{i_1}, k_{i_2}\right]\left[k_{i_3}, k_{i_4}\right] + \left[k_{i_1}, k_{i_3}\right]\left[k_{i_2}, k_{i_4}\right] = \left[k_{i_1}, k_{i_2}\right]\left[k_{i_3}, k_{i_4}\right],$

ii) $\left[k_{i_1}, k_{i_2}\right]\left[k_{i_3}, k_{i_4}, k_5\right] + \left[k_{i_1}, k_{i_3}\right]\left[k_{i_2}, k_{i_4}, k_5\right] = \left[k_{i_1}, k_{i_2}\right]\left[k_{i_3}, k_{i_4}, k_5\right].$

Para $n = 1, 2$, claramente temos $R_3^{(n-1)} \subseteq T_3^{(n)}$.

Seja $n = 3$. Pela Proposição 1.6.2, o ideal $T_3^{(3)}$ é gerado, como um ideal bilateral, por todos os polinômios (1.9) e (1.10). Pela Proposição 1.5.5, o ideal $R_3^{(2)}$ é gerado, como um ideal bilateral, por todos os polinômios

$$\left[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\right] \qquad \text{e} \qquad \left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}\right],$$

onde $x_{i_j} \in X_3$, para $j = \{1, 2, 3, 4\}$. Claramente o polinômio $\left[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\right]$ pertence a $T_3^{(3)}$, pois é do tipo (1.9) e, pela Observação 3.2.1, item i), temos

$$\left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}\right] + \left[x_{i_1}, x_{i_3}\right]\left[x_{i_2}, x_{i_4}\right] = \left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}\right].$$

Logo, $\left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}\right]$ pertence a $T_3^{(3)}$.

Portanto, $R_3^{(2)} \subseteq T_3^{(3)}$.

Seja $n = 4$. Pela Proposição 1.6.3, o ideal $T_3^{(4)}$ é gerado, como um ideal bilateral em, por todos os polinômios dos tipos (1.11)-(1.15). Pela Proposição 1.5.5, o ideal $R_3^{(3)}$ é gerado, como um ideal bilateral, por todos os polinômios

$$\left[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}\right], \tag{3.1}$$

$$\big[x_{i_1}, x_{i_2}\big]\big[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}\big], \tag{3.2}$$

$$\big[x_{i_1}, x_{i_2}\big]\big[x_{i_3}, x_{i_4}\big]\big[x_{i_5}, x_{i_6}\big], \tag{3.3}$$

onde $x_{i_j} \in X_3$, para $j = 1, \ldots, 6$. Claramente o polinômio $\big[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}\big]$ pertence a $T_3^{(4)}$, pois é do tipo (1.11). Pela Observação 3.2.1, item ii), temos

$$\big[x_{i_1}, x_{i_2}\big]\big[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}\big] + \big[x_{i_1}, x_{i_3}\big]\big[x_{i_2}, x_{i_4}, x_{i_5}\big] = \big[x_{i_1}, x_{i_2}\big]\big[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}\big].$$

Logo, $\big[x_{i_1}, x_{i_2}\big]\big[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}\big]$ pertence a $T_3^{(4)}$. Novamente pela Observação 3.2.1, item ii), temos

$$\Big(\big[x_{i_1}, x_{i_2}\big]\big[x_{i_3}, x_{i_4}\big] + \big[x_{i_1}, x_{i_3}\big]\big[x_{i_2}, x_{i_4}\big]\Big)\big[x_{i_5}, x_{i_6}\big] = \big[x_{i_1}, x_{i_2}\big]\big[x_{i_3}, x_{i_4}\big]\big[x_{i_5}, x_{i_6}\big].$$

Segue então que o polinômio $\big[x_{i_1}, x_{i_2}\big]\big[x_{i_3}, x_{i_4}\big]\big[x_{i_5}, x_{i_6}\big]$ pertence a $T_3^{(4)}$.

Portanto, $R_3^{(3)} \subseteq T_3^{(4)}$.

Seja $n = 5$. Pela Proposição 1.6.4, o ideal $T_3^{(5)}$ é gerado, como um ideal bilateral, por todos os polinômios dos tipos (1.16)-(1.23). Pela Proposição 1.7, o ideal $R_3^{(4)}$ é gerado, como um ideal bilateral, por todos os polinômios

$$\big[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}\big], \tag{3.4}$$

$$\big[x_{i_1}, x_{i_2}\big]\big[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}\big], \tag{3.5}$$

$$\big[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\big]\big[x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}\big], \tag{3.6}$$

$$\big[x_{i_1}, x_{i_2}\big]\big[x_{i_3}, x_{i_4}\big]\big[x_{i_5}, x_{i_6}, x_{i_7}\big], \tag{3.7}$$

$$\big[x_{i_1}, x_{i_2}\big]\big[x_{i_3}, x_{i_4}\big]\big[x_{i_5}, x_{i_6}\big]\big[x_{i_7}, x_{i_8}\big], \tag{3.8}$$

onde $x_{i_j} \in X_3$, para $j = 1, \ldots, 8$. Claramente os polinômios $\big[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}\big]$ e $\big[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\big]\big[x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}\big]$ pertencem a $T_3^{(5)}$, pois são dos tipos (1.16) e (1.18), respectivamente. Pela Observação 3.2.1, item i), temos

$$\Big(\big[x_{i_1}, x_{i_2}\big]\big[x_{i_3}, x_{i_4}\big] + \big[x_{i_1}, x_{i_3}\big]\big[x_{i_2}, x_{i_4}\big]\Big)\big[x_{i_5}, x_{i_6}, x_{i_7}\big] = \big[x_{i_1}, x_{i_2}\big]\big[x_{i_3}, x_{i_4}\big]\big[x_{i_5}, x_{i_6}, x_{i_7}\big],$$

ou seja, o polinômio $\big[x_{i_1}, x_{i_2}\big]\big[x_{i_3}, x_{i_4}\big]\big[x_{i_5}, x_{i_6}, x_{i_7}\big]$ pertence a $T_3^{(5)}$. Novamente pela Observação 3.2.1, item i),

$$\Big(\big[x_{i_1}, x_{i_2}\big]\big[x_{i_3}, x_{i_4}\big] + \big[x_{i_1}, x_{i_3}\big]\big[x_{i_2}, x_{i_4}\big]\Big)\Big(\big[x_{i_5}, x_{i_6}\big]\big[x_{i_7}, x_{i_8}\big] + \big[x_{i_5}, x_{i_7}\big]\big[x_{i_6}, x_{i_8}\big]\Big) =$$

$$= \left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}\right]\left[x_{i_5}, x_{i_6}\right]\left[x_{i_7}, x_{i_8}\right],$$

ou seja, o polinômio $\left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}\right]\left[x_{i_5}, x_{i_6}\right]\left[x_{i_7}, x_{i_8}\right]$ pertence a $T_3^{(5)}$.

Falta mostrar apenas que o polinômio $\left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}\right]$ pertencem a $T_3^{(5)}$. Seja $I_3^{(5)}$ um subespaço de $T_3^{(5)}$ gerado, como um subespaço, por todos os polinômios

$$\left[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}\right], \tag{3.9}$$

$$\left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}\right] + \left[x_{i_6}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_5}, x_{i_4}, x_{i_1}\right], \tag{3.10}$$

$$\left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}\right] + \left[x_{i_3}, x_{i_4}\right]\left[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_5}, x_{i_6}\right], \tag{3.11}$$

onde $x_{i_j} \in X_3$, para $j = 1, \ldots, 8$.

Vale o seguinte lema.

Lema 3.2.2 $I_3^{(5)} \subset T_3^{(5)}$.

Demonstração: Por definição do ideal $T_3^{(6)}$ o polinômio $\left[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}\right]$ pertence a $T_3^{(6)} \subset T_3^{(5)}$. O polinômio $\left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}\right] + \left[x_{i_6}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_5}, x_{i_4}, x_{i_1}\right]$ pertence a $T_3^{(5)}$, pois ele é do tipo (1.17). Pela Observação 3.2.1, item i), temos

$$\Big[\left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}\right] + \left[x_{i_1}, x_{i_3}\right]\left[x_{i_2}, x_{i_4}\right], x_{i_5}, x_{i_6}\Big] = \Big[\left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}\right], x_{i_5}, x_{i_6}\Big].$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\Big[\left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}\right], x_{i_5}, x_{i_6}\Big] &= \left[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_5}, x_{i_6}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}\right] + \left[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_5}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_6}\right] + \\ &+ \left[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_6}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}\right] + \left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}\right].\end{aligned}$$

Os polinômios $\left[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_5}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_6}\right]$ e $\left[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_6}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}\right]$ pertencem a $T_3^{(5)}$, pois são do tipo (1.18). Logo, o polinômio

$$\left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}\right] + \left[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_5}, x_{i_6}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}\right]$$

pertence a $T_3^{(5)}$. Podemos reescrever

$$\left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}\right] + \left[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_5}, x_{i_6}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}\right] =$$

$$\left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}\right] + \left[x_{i_3}, x_{i_4}\right]\left[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_5}, x_{i_6}\right] + \Big[\left[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_5}, x_{i_6}\right], \left[x_{i_3}, x_{i_4}\right]\Big]$$

Pelo Lema 1.6.5, temos

$$\left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}\right] + \left[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_5}, x_{i_6}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}\right] \equiv$$

$$\equiv \left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}\right] + \left[x_{i_3}, x_{i_4}\right]\left[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_5}, x_{i_6}\right] \pmod{T_3^{(5)}}.$$

Logo,

$$\left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}\right] + \left[x_{i_3}, x_{i_4}\right]\left[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_5}, x_{i_6}\right] \in T_3^{(5)}.$$

Portanto, $I_3^{(5)} \subseteq T_3^{(5)}$. ■

Vale também o seguinte lema.

Lema 3.2.3 *Para todo $x_{i_j} \in \{x_1, x_2, x_3\}$, com $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, temos*

$$\left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}\right] \in T_3^{(5)}.$$

Demonstração: Pelo Lema 1.6.8, temos

$$\left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}\right] \equiv (-1)^{\sigma}\left[x_{\sigma(i_1)}, x_{\sigma(i_2)}\right]\left[, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{\sigma(i_6)}\right] \pmod{T_3^{(5)}},$$

onde $\sigma \in S_{\{i_1, i_2, i_6\}}$. Claramente se $i_1 = i_2$, $i_1 = i_6$, ou $i_2 = i_6$, então

$$\left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}\right] \in T_3^{(5)}.$$

Caso contrário, devemos ter apenas um dos seguintes casos: $i_1 \in \left\{i_3, i_4\right\}$, $i_2 \in \left\{i_3, i_4\right\}$ ou $i_6 \in \left\{i_3, i_4\right\}$.

Caso 1: $i_1 \in \left\{i_3, i_4\right\}$. Pela definição do subespaço $I_3^{(5)}$, temos

$$\begin{aligned}\left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}\right] &\equiv -\left[x_{i_6}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_1}\right] \pmod{I_3^{(5)}}\\ &\equiv -\left[x_{i_3}, x_{i_4}\right]\left[x_{i_6}, x_{i_2}, x_{i_5}, x_{i_1}\right] \pmod{I_3^{(5)}}\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.2.2, segue que

$$\left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}\right] \equiv -\left[x_{i_3}, x_{i_4}\right]\left[x_{i_6}, x_{i_2}, x_{i_5}, x_{i_1}\right] \pmod{T_3^{(5)}}.$$

Pelo Lema 1.6.6, concluímos que

$$\left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}\right] \equiv 0 \pmod{I_3^{(5)}},$$

pois $i_1 \in \left\{i_3, i_4\right\}$. Logo, $\left[x_{i_1}, x_{i_2}\right]\left[x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}\right] \in T_3^{(5)}$.

Caso 2: $i_2 \in \{i_3, i_4\}$. Pela definição do subespaço $I_3^{(5)}$, temos

$$\begin{aligned}[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}] &= -[x_{i_2}, x_{i_1}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}] \\ &\equiv [x_{i_6}, x_{i_1}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_2}] \pmod{I_3^{(5)}} \\ &\equiv -[x_{i_3}, x_{i_4}][x_{i_6}, x_{i_2}, x_{i_5}, x_{i_1}] \pmod{I_3^{(5)}}\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.2.2, segue que

$$[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}] \equiv -[x_{i_3}, x_{i_4}][x_{i_6}, x_{i_1}, x_{i_5}, x_{i_2}] \pmod{T_3^{(5)}}.$$

Pelo Lema 1.6.6, concluímos que

$$[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}] \equiv 0 \pmod{I_3^{(5)}},$$

pois $i_1 \in \{i_3, i_4\}$. Logo, $[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}] \in T_3^{(5)}$.

Caso 3: $i_6 \in \{i_3, i_4\}$. Pela definição do subespaço $I_3^{(5)}$, temos

$$[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}] \equiv -[x_{i_3}, x_{i_4}][x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_5}, x_{i_6}] \pmod{I_3^{(5)}}.$$

Pelo Lema 3.2.2, segue que

$$[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}] \equiv -[x_{i_3}, x_{i_4}][x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_5}, x_{i_6}] \pmod{T_3^{(5)}}.$$

Pelo Lema 1.6.6, concluímos que

$$[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}] \equiv 0 \pmod{I_3^{(5)}},$$

pois $i_6 \in \{i_3, i_4\}$. Logo, $[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}] \in T_3^{(5)}$.

Portanto,

$$[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}] \in T_3^{(5)},$$

para todo $x_i \in X_3$. ■

3.3 A demonstração do Teorema 3: o passo de indução

Na seção 3.2 demonstramos o Teorema 3 nos casos $n = 1, 2, 3, 4, 5$ e usaremos como base de indução para a demonstração do teorema. Nesta seção vamos demonstrar o passo de indução, ou seja, vamos demonstrar que $T_3^{(m+1)} = R_3^{(m)}$ sempre que

$T_3^{(n)} = R_3^{(n-1)}$, para $m \geq n$. Pela Proposição 3.1.1, temos a inclusão $T_3^{(m+1)} \subseteq R_3^{(m)}$, para $m \geq 0$, faltando assim demonstrar a outra inclusão, ou seja, demonstrar que $R_3^{(m)} \subseteq T_3^{(m+1)}$. Por definição $R_3^{(m)} = A_3\Big[R_3^{(m-1)}, A_3\Big]A_3$ ($m \geq 1$) e, pela hipótese de indução, $R_3^{(m-1)} = T_3^{(m)}$, logo, para concluir a demonstração do Teorema 3 é suficiente demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 3.3.1 *Para todo inteiro positivo m, temos*

$$\Big[T_3^{(m)}, A_3\Big] \subseteq T_3^{(m+1)}.$$

Lembramos que o ideal bilateral $T_3^{(m)}$ pode ser visto como um ideal unilateral, ou seja, $T_3^{(m)} = L_3^{(m)}A_3$. Assim, para demonstrar a Proposição 3.3.1 é suficiente verificar que

$$\big[v_m b, c\big] \in T_3^{(m+1)},$$

para cada $v_m = \big[a_1, \dots, a_m\big] \in L_3^{(m)}$ e para todos $b, c \in A_3$. Pela identidade $[xy, z] = x[y, z] + [y, z]x$, temos que

$$\big[v_m b, c\big] = v_m[b, c] + [v_m, c]b.$$

Desde que $[v_m, c]b \in T_3^{(m+1)}$, para cada $v_m = \big[a_1, \dots, a_m\big] \in L_3^{(m)}$ e para todos $b, c \in A_3$, então para demonstrar a Proposição 3.3.1 e, consequentemente demonstrar o Teorema 3, é suficiente provar o seguinte lema.

Lema 3.3.2 *Para todo $v_m = \big[a_1, \dots, a_m\big] \in L_3^{(m)}$, onde $a_i \in A_3$, para $i = 1, \dots, m$ $(m \geq 2)$ e para todos $c, d \in A_3$, temos*

$$v_m[c, d] \in T_3^{(m+1)}.$$

Vamos assumir o seguinte lema que será demonstrado adiante.

Lema 3.3.3 *Para todo $v_{m-3} = \big[b_1, \dots, b_{m-3}\big] \in L_3^{(m-3)}$, onde $b_i \in A_3$, para $i = 1, \dots, m-3$ $(m \geq 4)$, para todos $a_1, a_2, a_3, a_4, b \in A_3$ e para toda permutação $\sigma \in S_4$, temos*

$$\big[v_{m-3}, a_{\sigma(1)}, b, a_{\sigma(2)}\big]\big[a_{\sigma(3)}, a_{\sigma(4)}\big] \equiv (-1)^{\sigma}\big[v_{m-3}, a_1, b, a_2\big]\big[a_3, a_4\big] \pmod{T_3^{(m+1)}}.$$

Notemos que se o Lema 3.3.3 for demonstrado, então o Lema 3.3.2 será demonstrado também e, consequentemente o Teorema 3. Uma consequência do Lema 3.3.3 é o seguinte corolário.

Corolário 3.3.4 *Para todo* $v_{m-3} = \big[b_1, \ldots, b_{m-3}\big] \in L_3^{(m-3)}$, *onde* $b_i \in A_3$, *para* $i = 1, \ldots, m-3$ $(m \geq 4)$, *para todos* $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4} \in X_3$ *e* $b \in A_3$, *temos*

$$\big[v_{m-3}, x_{i_1}, b, x_{i_2}\big]\big[x_{i_3}, x_{i_4}\big] \in T_3^{(m+1)}.$$

Demonstração: Sejam $v_{m-3} = \big[b_1, \ldots, b_{m-3}\big] \in L_3^{(m-3)}$ ($b_i \in A_3$ e $m \geq 4$) e sejam $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4} \in X_3$, $b \in A_3$ e $\sigma \in S_4$. Pelo Lema 3.3.3, temos

$$\big[v_{m-3}, x_{\sigma(i_1)}, b, x_{\sigma(i_2)}\big]\big[x_{\sigma(i_3)}, x_{\sigma(i_4)}\big] \equiv (-1)^{\sigma}\big[v_{m-3}, x_{i_1}, b, x_{i_2}\big]\big[x_{i_3}, x_{i_4}\big] \pmod{T_3^{(m+1)}}.$$

Desde que $x_{\sigma(i_1)}, x_{\sigma(i_2)}, x_{\sigma(i_3)}, x_{\sigma(i_4)} \in X_3$, para cada $j \in \{1,2,3\}$ existe $k \in \{1,2,3,4\}$ tal que $x_{\sigma(i_j)} = x_{\sigma(i_k)}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $x_{\sigma(i_3)} = x_{\sigma(i_4)}$, assim

$$\big[v_{m-3}, x_{i_1}, b, x_{i_2}\big]\big[x_{i_3}, x_{i_4}\big] \equiv 0 \pmod{T_3^{(m+1)}},$$

o que termina a prova do Corolário 3.3.4. ■

Uma consequência do Corolário 3.3.4 é o seguinte corolário.

Corolário 3.3.5 *Para todo* $v_{m-3} = \big[b_1, \ldots, b_{m-3}\big] \in L_3^{(m-3)}$, *onde* $b_i \in A_3$, *para* $i = 1, \ldots, m-3$ $(m \geq 4)$ *e para todos* $a_1, a_2, a_3, a_4, b \in A_3$, *temos*

$$\big[v_{m-3}, a_1, b, a_2\big]\big[a_3, a_4\big] \in T_3^{(m+1)}.$$

Demonstração: Sejam $v_{m-3} = \big[a_{i_1}, \ldots, a_{i_{m-3}}\big] \in L_3^{(m-3)}$, onde $b_i \in A_3$ e $m \geq 4$ e sejam $a_1, a_2, a_3, a_4, b \in A_3$. Temos que

$$\big[v_{m-3}, a_1, b, a_2\big]\big[a_3, a_4\big]$$

é uma combinação linear, módulo $T_3^{(m+1)}$, de produtos da forma

$$\big[v_{m-3}, x_{i_1}, b, x_{i_2}\big]c\big[x_{i_3}, x_{i_4}\big]d,$$

onde c e d são monômios em A_3. Temos que

$$\big[v_{m-3}, x_{i_1}, b, x_{i_2}\big]c\big[x_{i_3}, x_{i_4}\big]d = \big[v_{m-3}, x_{i_1}, b, x_{i_2}\big]\big[x_{i_3}, x_{i_4}\big]cd - \big[v_{m-3}, x_{i_1}, b, x_{i_2}\big]\big[x_{i_3}, x_{i_4}, c\big]d.$$

Daí, pelo Corolário 1.6.9, temos

$$\big[v_{m-3}, x_{i_1}, b, x_{i_2}\big]c\big[x_{i_3}, x_{i_4}\big]d \equiv \big[v_{m-3}, x_{i_1}, b, x_{i_2}\big]\big[x_{i_3}, x_{i_4}\big]e \pmod{T_3^{(m+1)}},$$

onde c, d, e são monômios em A_3. Pelo Corolário 3.3.4, segue que

$$\left[v_{m-3}, a_1, b, a_2\right]\left[a_3, a_4\right] \in T_3^{(m+1)}.$$

Como queríamos demonstrar. ■

Lembramos que para concluir a demonstração do Teorema 3 é suficiente demonstrar o Lema 3.3.3 e, para demonstrar o Lema 3.3.3 basta demonstrar o seguinte lema.

Lema 3.3.6 *Para todo $v_{m-3} = \left[b_1, \ldots, b_{m-3}\right] \in L_3^{(m-3)}$, onde $b_i \in A_3$, para $i = 1, \ldots, m-3$ $(m \geq 4)$ e para todos $a_1, a_2, b, c, d \in A_3$, temos*

$$\left[v_{m-3}, a_1, b, a_2\right]\left[c, d\right] + \left[v_{m-3}, a_2, b, a_1\right]\left[c, d\right] \equiv 0 \pmod{T_3^{(m+1)}}.$$

O Lema 3.3.6 é equivalente ao lema seguinte.

Lema 3.3.7 *Para todo $v_{m-3} = \left[b_1, \ldots, b_{m-3}\right] \in L_3^{(m-3)}$,onde $b_i \in A_3$, para $i = 1, \ldots, m-3$ $(m \geq 4)$ e para todos $x \in X_3$ e $b, c, d \in A_3$, temos*

$$\left[v_{m-3}, x, b, x\right]\left[c, d\right] \equiv 0 \pmod{T_3^{(m+1)}}.$$

Demonstração: Sejam $v_{m-3} = \left[b_1, \ldots, b_{m-3}\right] \in L_3^{(m-3)}$ $(b_i \in A_3, m \geq 4)$, $x \in X_3$ e $b, c, d \in A_3$. Temos que

$$\begin{aligned} \left[[v_{m-3}, x][c, d], b, x\right] &= [v_{m-3}, x, b, x][c, d] + [v_{m-3}, x, b][c, d, x] + \\ &+ [v_{m-3}, x, x][c, d, b] + [v_{m-3}, x][c, d, b, x]. \end{aligned}$$

Por hipótese de indução, temos que $R_3^{(m-2)} = T_3^{(m-1)}$, o que equivale a $\left[T_3^{(m-2)}, A_3\right] \subseteq T_3^{(m-1)}$, ou seja, o elemento $[v_{m-3}, x][c, d] \in T_3^{(m-1)}$. Pelo Lema 1.6.10, o elemento $\left[[v_{m-3}, x][c, d], b, x\right] \in T_3^{(m+1)}$. Pelo corolário 1.6.9, os elementos $[v_{m-3}, x, b][c, d, x]$ e $[v_{m-3}, x, x][c, d, b] \in T_3^{(m+1)}$. Ou seja,

$$[v_{m-3}, x, b, x][c, d] \equiv -[v_{m-3}, x][c, d, b, x] \pmod{T_3^{(m+1)}}.$$

Por fim, pela Proposição 1.6.11,

$$[v_{m-3}, x][c, d, b, x] \in T^{(m+1)}.$$

Logo,

$$[v_{m-3}, x, b, x][c, d] \equiv 0 \pmod{T_3^{(m+1)}}.$$

Como queríamos provar. ■

Acabamos de demonstrar o Lema 3.3.7 e com isso demonstramos o Lema 3.3.6 e, consequentemente, concluímos a demonstração do Teorema 3.

Uma consequência do Teorema 3 é o seguinte corolário.

Corolário 4 *Suponha que $k = 2$ ou $k = 3$. Então o grupo aditivo do anel quociente $\mathbb{Z}\langle X_k \rangle / T_k^{(n+1)}$ é abeliano livre.*

Demonstração: Para $k = 3$, pelo Teorema 3, o grupo aditivo do anel quociente $\mathbb{Z}\langle X_3 \rangle / T_3^{(n)}$ coincide com o grupo aditivo do anel quociente $\mathbb{Z}\langle X_3 \rangle / R_3^{(n-1)}$ e, pelo teorema principal de[73], segue o resultado.

Para $k = 2$, pelo Teorema 3.1.2 (que é uma consequência do Teorema 3), o grupo aditivo do anel quociente $\mathbb{Z}\langle X_2 \rangle / T_2^{(n)}$ coincide com o grupo aditivo do anel quociente $\mathbb{Z}\langle X_2 \rangle / R_2^{(n-1)}$ e, novamente pelo teorema principal de RT, segue o resultado. ■

Bibliografia

[1] N. Abughazalah, P. Etingof, *On properties of the lower central series of associative algebras*, Journal of Algebra and Its Applications **15** (2016) 1650187.

[2] E.V. Aladova, A. Krasilnikov, *Polynomial identities in nil-algebras*, Transactions of the American Mathematical Society **361** (2009) 5629-5646.

[3] B. Amberg, Ya. Sysak, *Associative rings whose adjoint semigroup is locally nilpotent*, Archiv der Mathematik **76** (2001) 426-435.

[4] N. Arbesfeld, D. Jordan, *New results on the lower central series quotients of a free associative algebra*, Journal of Algebra **323** (2010) 1813-1825.

[5] M. Balagovic, A. Balasubramanian, *On the lower central series quotients of a graded associative algebra*, Journal of Algebra **328** (2011) 287-300.

[6] A. Bapat, D. Jordan, *Lower central series of free algebras in symmetric tensor categories*, Journal of Algebra **373** (2013) 299-311.

[7] Yu.A. Bakhturin, *Identical relations in Lie algebras*, VNU Science Press BV (1987) (translated from the Russian).

[8] C. Bekh-Ochir, S.A. Rankin, *The central polynomials of the infinite dimensional unitary and nonunitary Grassmann algebras*, Journal of Algebra and Its Applications **9** (2010) 235-249.

[9] A.Ya. Belov, *On non-Specht varieties*, Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika **5** (1999) 47-66 (in Russian).

[10] S. Bhupatiraju, P. Etingof, D. Jordan, W. Kuszmaul, J. Li *Lower central series of a free associate algebra over the integers and finite fields*, Journal of Algebra **372** (2012) 251-274.

[11] A. Brandão Jr., P. Koshlukov, A. Krasilnikov, E. A. Silva, *The central polynomials for the Grasmann algebra*, Israel Journal of Mathematics **179** (2010) 127-144.

[12] R.M. Bryant, M. F. Newman, *Some finintely based varieties of groups*, Journal of the Australian Mathematics Society (3) **28** (1974) 237-252.

[13] D.E. Cohen, *On the laws of a metabelian variety*, Journal of Algebra **5** (1967) 267-273.

[14] J. Colombo, P. Koshlukov, *Central polynomials in the matrix algebra of order two*, Linear Algebra and its Applications **377** (2004) 53-67.

[15] K. Cordwel, T. Fei, K. Zhou, *On lower central series quotients of finitely generated algebras over* $\mathbb{Z}$, Journal of Algebra **423** (2015).

[16] E.A. Costa, A. Krasilnikov, *Relations in universal Lie nilpotent associative algebras of class 4*, Comunications in Algebras **46** (2018) 1367-1386.

[17] R.R. Dangovski, *On the maximal containments of lower central series ideals*, arXiv: 1509.08030v2 [math. RA] (2016).

[18] G. Deryabina, *Products of several commutators in a Lie nilpotent associative algebra*, International Journal of Algebra and Computation **27** (2017) 1027-1040.

[19] G. Deryabina, A. Krasilnikov, *The torsion subgroup of the additive group of a Lie nilpotent associative ring of class 3*, Journal of Algebra **428** (2015) 230-255.

[20] G. Deryabina, A. Krasilnikov, *Products of commutators in a Lie nilpotent*, Journal of Algebra **469** (2017) 84-95.

[21] G. Deryabina, A. Krasilnikov, *some products of commutators in an associative ring*, International Journal of Algebra and Computation, to appear, DOI:10.1142/S0218196719500048.

[22] C.W.G. Dias Jr, A. Krasilnikov, *On Lie nilpotent associative algebras*, arXiv: 1709.05728v1 [math. RA] (2017).

[23] G. Dobrovolska, P. Etingof, *An upper bound for the lower central series quotients of a free associative algebra*, International Mathematics Research Notices IMRN (2008) nº **12**, Art. ID rnn039, 10.

[24] G. Dobrovolska, J. Kim, X. Ma, *On the lower central series of an associative algebra*, Journal of Algebra **320** (2008) 213-237.

[25] M.P. Drazin, K.W. Gruenberg, *Commutators in associative rings*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **49** (1953) 590-594.

[26] V. Drensky, *A minimal basis of identities for a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0*, Algebra and Logic **20** (1981) 188-194.

[27] V. Drensky, *Free Algebras and PI-Algebras. Graduate Course in Algebras*, Springer Singapore 1999.

[28] P. Etingof, J. Kim, X. Ma, *On universal Lie nilpotent associatives algebras*, Journal of Algebra **321** (2009) 697-703.

[29] B. Feigin, B. Shoikhet, *On [A,A]/[A,A,A] and on W_n-action on the consecutive commutators of free associative algebras*, Mathematical Research Letter **14** (2007) 781-795.

[30] A. Garcia, Y. Lequain, *Elementos de Ágebra*, 5 Ed. Rio de Janeiro: Impa (2008).

[31] A. Giambruno, P. Koshlukov, *On the identities of the Grassmann algebras in characteristic p>0*, Israel Journal of Mathematics **122** (2001) 305-316.

[32] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial Identities and Asymptotic Methods, Mathematical Surveys and Monographs*, American Mathematical Society Providence RI 2005.

[33] D.J. Gonçalves, A. Krasilnikov, I. Sviridova, *Limit T-subalgebras in free associative algebras*, Journal of Algebra **412** (2014) 264-280.

[34] D.J. Gonçalves, A. Krasilnikov, I. Sviridova, *Limit T-subspaces and central polynomials in n variables of the Grasmann algebra*, Journal of Algebra **371** (2012) 156-174.

[35] A.S. Gordienko, *Codimensions of commutators of lengh 4*, Russian Mathematical Surveys **62** (2007) 187-188.

[36] A.V. Grishin, *Examples of T-spaces and T-ideals of characteristic 2 without the finite basis property*, Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika **5** (1999) 101-118 (in Russian).

[37] A.V. Grishin, *On the structure of the centre of a relatively free Grassmann algebra*, Russian Mathematical Surveys **65** (2010) 781-782.

[38] A.V. Grishin, S.V. Pchelintsev, *On centres of relatively free associative algebras with a Lie nilpotency identity*, Sbornik Mathematics **206** (2015) 113-130.

[39] A.V. Grishin, L.M. Tsybulya, *On the T-space and multiplicative structure of a relatively free Grassmann algebra*, Sbornik Mathematics **200** (2009), no. 9-10, 1299-1338.

[40] A.V. Grishin, L.M. Tsybulya, A.A. Shokola, *On T-space and relations in relatively free, Lie nilpotent, associative algebras*, Journal of Mathematical Sciences **177** (2011), no. 6, 868-877.

[41] C.K. Gupta, A. Krasilnikov, *A solution of a problem of Plotkin an Vovsi and an application to varieties of groups*, Journal of the Australian Mathematics Society **67** (1999) 329-355.

[42] N.D. Gupta, F. Levin, *On the Lie ideals of a ring*, Journal of Algebra **81** (1983) 225-231.

[43] P. Hall, *A contribution to the theory of groups of prime-power order*, Proceedings of the London Mathematical Society **36** (1933) 29-95.

[44] G. Higman, *Ordering by divisibility in abstract algebras*, Proceedings of the London Mathematical Society **2** (1952) 326-336.

[45] C.J. Hillar, S. Sullivant, *Finite Grobner bases in infinite dimensional polynomial rings and apllications*, Advances in Mathematics **229** (2012) 1-25.

[46] S.A. Jennings, *Central chains of ideal in an associative ring*, Duke Mathematical Journal **9** (1942) 341-355.

[47] S.A. Jennings, *On rings whose associated Lie rings are nilpotent*, Bulletin of the American Mathematical Society **53** (1947) 593-597.

[48] D. Jordan, H. Orem, *An algebro-geometric construction of lower central series of associative algebras*, International Mathematics Ressearch Notices IMRN **15** (2015) 6330-6352.

[49] M. Kapranov, *Noncommutative geometry based on commutator expansions*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **505** (1998) 73-118.

[50] A.R. Kemer, *Finite basability of identities of associative algebras*, Algebra and Logic **26** (1987) n. 5, 597-641 (in Russian).

[51] G. Kerchev, *On the filtration of a free algebra by its associative lower central series*, Journal of Algebra **375** (2013) 322-327.

[52] P. Koshlukov, *Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic $p \neq 2$*, Journal of Algebra **241** (2001) 410-434.

[53] D. Krakowski, A. Regev, *The polynomial identities of the Grassmann algebra*, Transactions of the American Mathematical Society **181** (1973) 429-438.

[54] A. Krasilnikov, *Identities of Lie algebras with nilpotent commutator ideal over a field of finite characteristic*, Mathematical Notes (1992) 255-258.

[55] A. Krasilnikov, *On the identies of representations of groups by triangular matrices over a commutative ring*, Contemporary Mathematics **131** (1992) 217-225.

[56] A. Krasilnikov, *On identities of triangulable matrix representations of groups*, Transactions of the Moscow Mathematical Society **(1991)** 233-249.

[57] A. Krasilnikov, *The identities of a group with nilpotent commutator subgroup are finitely based*, Mathematics of the USSR-Izvestiya **37** (1991) 539-553.

[58] A. Krasilnikov, *On the laws of finite dimensional representations of solvable Lie algebras and groups*, Lecture Notes in Mathematics 1352 (1988) 114-129.

[59] A. Krasilnikov, *The additive group of a lie nilpotent associative ring*, Journal of Algebra **392** (2013) 10-22.

[60] A.N. Krasil'nikov, *On the semigroup nilpotency and the Lie nilpotency of associative algebras*, Mathematical Notes **62** (1997) 426-433.

[61] V.N. Latyshev, *On the choice of basis in a T-ideal*, Sibirskii Matematicheskii Zhurnal **4** (1963) 1122-1127. (in Russian)

[62] V.N. Latyshev, *On finite generation of a T-ideal with the element* $[x_1, x_2, x_3, x_4]$, Sibirskii Matematicheskii Zhurnal **4** (1963) 1122-1127. (in Russian)

[63] S. Okhitin, *Central polynomials of the algebra of second order matrices*, Moscow University Mathematics Bulletin **43** (4) (1988) 49-51.

[64] S. Pchelintsev, *Relatively free associative algebras of ranks 2 and 3 with Lie nilpotency identity and systems of generators of some T-spaces*, arXiv:1801.07771 [math. RA] (2018).

[65] V.M. Petrogradsky, *Codimension Growth of strong Lie nilpotent associative algebras*, Comunications in Algebra **39** (2001) 918-928.

[66] Yu.P. Razmyslov, *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero*, Algebra and Logic **12** (1973) 47-63.

[67] D.M. Riley, V. Tasic, *Malcev nilpotent algebras*, Archiv der Mathematik **72** (1999) 22-27.

[68] V.V. Shchigolev, *Examples of infinitely based T-ideals*, Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika **5** (1999) 307-312 (in Russian).

[69] V.V. Shchigolev, *Examples of T-spaces with an infinite basis*, Sbornik Mathematics **191** (2000) 459-476.

[70] V.V. Shchigolev, *Finite basis property of T-spaces over fields of characteristic zero*, Izvestiya Mathematics **65** (2001) 1041-1071.

[71] W. Specht, *Gesetze in ringen*, Mathemathematische Zeitschrift **52** (1950) 557-589.

[72] The Kourocka Notebook, *Unsolved Problens in Group Theory*, arXiv:1401.0300v14 [math. GR] 5 Oct 2018.

[73] R. Tyler, *On the lower central factors of a free associative ring*, Canadian Journal of Mathematics **27** (1975) 434-438.

[74] I.B. Volichenko, *The T-ideal generated by the element* $[x_1, x_2, x_3, x_4]$, Preprint **22** (1978) Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Belorussian SSR.

[75] S.M. Vovsi, *Topics in varieties of group representations*, London Mathematical Society Lecture Note Series **163** Cambridge University Press, (1991).