



Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

Carlos Henrique Moraes Santos

# Dinâmica e Estabilidade da Interação de Dois Dipolos Magnéticos

Brasília-DF  
Fevereiro de 2019

Carlos Henrique Moraes Santos

# Dinâmica e Estabilidade da Interação de Dois Dipolos Magnéticos

Dissertação de mestrado apresentada ao curso de mestrado acadêmico em Matemática da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Universidade de Brasília

Orientador: Prof. Dr. Yuri Dumaresq Sobral

Brasília-DF  
Fevereiro de 2019

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Sd Santos, Carlos Henrique Moraes  
Dinâmica e Estabilidade da Interação de Dois Dipolos  
Magnéticos / Carlos Henrique Moraes Santos; orientador Yuri  
Dumaresq Sobral. -- Brasília, 2019.  
82 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) --  
Universidade de Brasília, 2019.

1. Dipolos magnéticos. 2. Pontos de equilíbrio. 3. Bacia  
de atração. 4. Funções elípticas. 5. Sistemas dinâmicos. I.  
Sobral, Yuri Dumaresq, orient. II. Título.

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Dinâmica e Estabilidade da Interação de Dois Dipolos Magnéticos

por

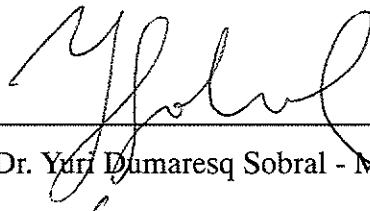
**Carlos Henrique Moraes Santos**

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade  
de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

**MESTRE EM MATEMÁTICA**

Brasília, 01 de fevereiro de 2019.

Comissão Examinadora:



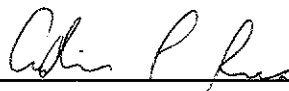
---

Prof. Dr. Yuri Dumaesq Sobral - MAT/UnB (Orientador)



---

Prof. Dr. Lucas Conque Seco Ferreira – MAT/UnB (Membro)



---

Prof. Dr. Adriano Possebon Rosa – ENM/UnB (Membro)

*Este trabalho é dedicado a Marisa Consiglieri Santos e Giovana Silva Sousa.*

# Agradecimentos

Ao final deste trabalho, tenho muito a agradecer:

À Marisa, filha amada, que, desde o nascimento, é a motivação para todas as minhas conquistas;

À Giovana, o amor da minha vida, pelo incentivo e por ter suportado minha ausência nas intermináveis horas de estudo;

À Claudete e ao Carlos Alberto, mãe e pai, que sempre acreditaram em mim e me incentivaram em tudo;

À Anna Carolina e à Fabiana, minhas irmãs, por todo o carinho e compreensão;

À Sr<sup>a</sup>. Conceição e ao Sr. João, sogros queridos, pelo tratamento especial que sempre me deram;

Ao Prof. Dr. Yuri Dumaresq Sobral, orientador desta dissertação, pelos ensinamentos, pela paciência, pelas intervenções minuciosas e pela confiança no meu trabalho;

Ao Prof. Dr. Lucas Conque Seco Ferreira, pelos ensinamentos e observações na confecção deste trabalho;

A todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para mais essa conquista.

# Resumo

Nesta dissertação discutiremos sobre a dinâmica e estabilidade da interação de dois dipolos magnéticos. Apresentaremos a formulação do modelo matemático dessa interação para sistemas conservativos, dissipativos e na presença de um campo aplicado, bem como, obteremos solução analítica do movimento rotacional de dipolos magnéticos para casos especiais em termos de funções elípticas. Caracterizaremos a dinâmica dos equilíbrios dos casos conservativo, amortecido e na presença de um campo aplicado e estudaremos quantitativamente as bacias de atração dos pontos de equilíbrio nos dois últimos casos.

**Palavras-chave:** dipolos magnéticos, pontos de equilíbrio, bacia de atração, funções elípticas, sistemas dinâmicos.

# Abstract

In this work we discuss the dynamics and stability of the interaction of two magnetic dipoles. We present the formulation of the mathematical model of this interaction for conservative and dissipative systems and in the presence of an applied magnetic field. We obtain analytical solutions of the rotational movement of magnetic dipoles for special cases in terms of elliptic functions. We characterize the dynamics of the conservative case, the damped case and in the presence of an applied field and we quantitatively study the basins of attraction of the equilibrium points in the last two cases.

**Keywords:** magnetic dipoles, equilibrium points, basin of attraction, elliptic functions, dynamical systems.



# Sumário

	Lista de ilustrações . . . . .	9
1	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>12</b>
1.1	Revisão Bibliográfica . . . . .	12
1.2	Objetivos Gerais . . . . .	19
1.3	Objetivos Específicos . . . . .	19
2	<b>FUNDAMENTOS TEÓRICOS . . . . .</b>	<b>21</b>
2.1	<b>Mecânica e Magnetismo . . . . .</b>	<b>21</b>
2.1.1	Mecânica . . . . .	21
2.1.2	Magnetismo e Mecânica . . . . .	29
2.2	<b>Teoria de Estabilidade . . . . .</b>	<b>31</b>
2.3	<b>Funções Elípticas . . . . .</b>	<b>38</b>
2.4	<b>Métodos Numéricos . . . . .</b>	<b>44</b>
2.4.1	Método de Runge-Kutta-Fehlberg . . . . .	44
2.4.2	Bacias de Atração . . . . .	46
3	<b>PROBLEMA CONSERVATIVO . . . . .</b>	<b>49</b>
3.1	O Modelo . . . . .	49
3.2	<b>Soluções Analíticas . . . . .</b>	<b>51</b>
3.2.1	Apenas um dipolo livre para girar . . . . .	51
3.2.2	Caso Especial . . . . .	53
3.2.3	Dipolos idênticos livres para girar . . . . .	57
3.3	<b>Nota sobre a adimensionalização das equações . . . . .</b>	<b>58</b>
3.4	<b>Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio . . . . .</b>	<b>62</b>
4	<b>PROBLEMA AMORTECIDO . . . . .</b>	<b>66</b>
4.1	O Modelo . . . . .	66
4.2	Bacias de atração . . . . .	68
5	<b>PROBLEMA NA PRESENÇA DE CAMPO MAGNÉTICO EX- TERNO . . . . .</b>	<b>76</b>
5.1	O Modelo . . . . .	76
5.2	Bacias de Atração . . . . .	81
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>83</b>

# Lista de ilustrações

Figura 1	– Configurações de equilíbrio obtidas para diferentes quantidades de agulhas imantadas boiando em águas, sob efeito de de um ímã superposto ao plano da água (MAYER, 1878). . . . .	13
Figura 2	– Diagrama de bifurcação da componente $x$ normalizada da magnetização total, $M_x/M_s$ , como uma função de $h$ para $m/(d^3H_0 = 1)$ e $J/(mH_0) = 1$ . Detalhes e identificação dos parâmetros em Laroze e Perez (2008). . . . .	15
Figura 3	– Retrato de formações de cadeias típicas nos quatro números de Mason. O número de partículas é 40, correspondendo à fração de área de 31,4%. (a) quatro cadeias igualmente espaçadas no início, com cada cadeia consistindo de 10 partículas, e formações de cadeias típicas com (b) $Mn = 0.0016$ , (c) $Mn = 0.016$ , (d) $Mn = 0.16$ e (e) $Mn = 1.6$ . (KANG; HULSEN; TOONDER, 2012) . . . . .	16
Figura 4	– Trajetória da partícula teste para configuração 1 e $\Psi_m = 100$ . (a) Uma trajetória difusiva típica e (b) uma trajetória agregativa típica. A segunda partícula é mostrada somente no momento de encontro. O tamanho dos pontos não representa os raios atuais das partículas. (CUNHA; GONTIJO; SOBRAL, 2013) . . . . .	16
Figura 5	– Configuração de momento magnético minimal no aglomerado triangular para diferentes valores do campo magnético adimensional $\alpha$ . (a) $\alpha = 0$ . (b) $\alpha = 1$ . (c) $\alpha = 1.5$ e (d) $\alpha = 2$ . (ROSA; CUNHA; CENICEROS, 2017) . . . . .	17
Figura 6	– Energia mínima local na configuração de momento magnético em um campo aplicado nulo para o 11-tágono [ $\Phi = -15.683$ ]. A energia mínima global é $\Phi = -25.241$ . (ROSA; CUNHA; CENICEROS, 2017) . . . . .	18
Figura 7	– (a) Visão esquemática 2D da interação de dois ímãs estudada no artigo. (b) Esquema da configuração experimental. (PLIHON et al., 2016) . . . . .	19
Figura 8	– Movimento de um corpo rígido no espaço. . . . .	27
Figura 9	– Campo de um dipolo magnético. (CULLITY; GRAHAM, 2009) . . . . .	31
Figura 10	– Equilíbrio estável (diagrama da esquerda) e equilíbrio assintoticamente estável (diagrama da direita). . . . .	33
Figura 11	– Conjunto $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \cup \mathcal{A}_-$ . . . . .	37
Figura 12	– Gráfico da $K(m)$ . . . . .	40
Figura 13	– Gráficos das funções elípticas de Jacobi sn, cn e dn, em cada coluna, respectivamente, com $m = 0.85$ , $m = 0.998$ e $m = 1$ . . . . .	41
Figura 14	– Elipse com excentricidade $k = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$ , eixo menor medindo 1 e eixo maior medindo $a \geq 1$ . . . . .	42

Figura 15 – Dois dipolos magnéticos $\mathbf{m}_i$ , $i \in \{1, 2\}$ , separados por uma distância $r$ , com $O$ a origem do sistema de coordenadas, $\hat{\mathbf{r}}$ sendo o vetor posição unitário e $\boldsymbol{\theta}_i$ é o vetor ângulo de rotação do dipolo magnético $i$ em relação ao eixo $x$ . . . . .	49
Figura 16 – Soluções da equação $\sin(\tilde{\theta} - \tilde{\psi}) + 3 \sin(\tilde{\theta} + \tilde{\psi}) = 0$ . . . . .	52
Figura 17 – Retrato de fase do sistema (3.21) com $\frac{\alpha}{I_2} = 1 \text{ Hz}^2$ e $\tilde{\psi} = \pi$ . Os números representam diferentes valores de constante. . . . .	53
Figura 18 – Oscilação não-linear de $\theta_2$ com $\theta_1 = 0$ fixo, momentos de dipolo unitários e distância 0.4. A curva pontilhada é de uma função seno. . . . .	56
Figura 19 – Evolução temporal de $\theta_1$ e de $\theta_2$ , sob as hipóteses da Sec. 3.2.3, com $r$ (em metros) igual a 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente, em cada linha. . . . .	60
Figura 20 – Espaço de configurações e espaço de velocidades do sistema, sob as hipóteses da Sec. 3.2.3, com $t$ (em segundos) variando de 0 a 200, com $r$ (em metros) igual a 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente. . . . .	61
Figura 21 – Soluções de equilíbrio no espaço de configurações, onde as linhas cheias e tracejadas são, respectivamente, as soluções da primeira e segunda equações de (3.73). . . . .	62
Figura 22 – Gráfico da Energia Potencial no plano de configurações. . . . .	64
Figura 23 – Pontos de equilíbrio, curvas de nível da energia potencial no plano de configurações e regiões de decrescimento da energia potencial nas selas (região hachurada). . . . .	65
Figura 24 – Curvas de nível 0 da função $g$ em (3.81) e regiões de decrescimento da energia potencial nas selas (região hachurada). . . . .	65
Figura 25 – Evolução temporal de $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ com $\frac{\alpha}{I_1} = 1 \text{ Hz}^2 = \frac{\alpha}{I_2}$ e $\xi_1 = 1 \text{ Hz} = \xi_2$ , e condições iniciais $\theta_1(0) = 0$ e $\theta_2(0) = 1.51$ . . . . .	67
Figura 26 – Energia potencial no espaço de configurações e evoluções temporais da condição inicial $(0.5, 2.4, 0, 0)$ no espaço de configurações e evolução temporal da energia potencial, com $\frac{\alpha}{I_1} = 1 \text{ Hz}^2 = \frac{\alpha}{I_2}$ e $\xi_1 = 1 \text{ Hz} = \xi_2$ . . . . .	68
Figura 27 – Percentual de pontos tipo $A$ versus o número de pontos da malha $N \times N$ , para três tolerâncias. . . . .	70
Figura 28 – Bacia de atração dos pontos $(\cdot, \cdot, 0, 0)$ em uma malha $81 \times 81$ com tolerância $10^{-3}$ . . . . .	70
Figura 29 – Bacia de atração dos pontos $(\cdot, \cdot, 0, 0)$ em uma malha $80 \times 80$ com tolerância $10^{-3}$ , iniciando o algoritmo no tempo 0. . . . .	71
Figura 30 – Bacia de atração dos pontos $(\cdot, \cdot, 0, 0)$ em uma malha $80 \times 80$ com tolerância $10^{-3}$ , na superfície de $\mathbb{T}^2$ , iniciando o algoritmo no tempo 0. . . . .	72
Figura 31 – Energia potencial no espaço de configurações e evoluções temporais de condição iniciais na fronteira das bacias de atrações de pontos de equilíbrios assintoticamente estáveis, com $\frac{\alpha}{I_1} = 1 = \frac{\alpha}{I_2}$ e $\xi_1 = 1 = \xi_2$ . . . . .	73

Figura 32 – Bacias de atração com diferentes condições iniciais, onde $I_1 = I_2$ , juntamente com seu histograma de frequência de cada tipo de ponto. De cima para baixo, temos as seguintes condições iniciais, respectivamente: $(\cdot, \cdot, 0, -20)$ ; $(\cdot, \cdot, 20, -20)$ ; $(\cdot, \cdot, 10, 5)$ ; $(\cdot, \cdot, 3, 17)$ . . . . .	74
Figura 33 – Bacias de atração da configuração inicial $(\cdot, \cdot, 0, 0)$ , com $I_1 \neq I_2$ , juntamente com seu histograma de frequência de cada tipo de equilíbrio. Neste caso, $\hat{I} = 20$ . . . . .	75
Figura 34 – Dois dipolos magnéticos sujeitos a um campo externo $\mathbf{B}$ homogêneo. . . . .	76
Figura 35 – Evolução temporal de $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ com $\xi_1 = \xi_2$ e $\gamma$ muito grande na direção $\alpha = \pi/4$ . . . . .	77
Figura 36 – Pontos de equilíbrio no espaço de configurações para o campo externo $\mathbf{B}$ com diferentes intensidades e $\theta^* = \frac{\pi}{2}$ , juntamente algumas curvas de nível do potencial. Da esquerda para a direita, de cima para baixo, $\mathbf{B}$ toma os valores (em tesla) de 0 a 4, 2, variando 0, 6 de uma para a outra. . . . .	79
Figura 37 – Pontos de equilíbrio no espaço de configurações para o campo externo $\mathbf{B}$ com intensidade 1 T em diferentes ângulos $\theta^*$ , juntamente algumas curvas de nível do potencial. Da esquerda para a direita, de cima para baixo, $\theta^*$ toma os valores de 0 a 3, 6 radianos, variando 0, 4 de uma para a outra. . . . .	80
Figura 38 – Bacias de atração dos pontos $(\cdot, \cdot, 0, 0)$ no espaço de configurações para o campo externo $\mathbf{B}$ com diferentes intensidades e $\theta^* = \frac{\pi}{2}$ , juntamente com as curvas solução do sistema algébrico $\nabla U = 0$ . Da esquerda para a direita, de cima para baixo, $B$ toma os valores (em tesla) de 0 a 2, 4, variando 0, 6 de uma para a outra, e na última imagem o valor de $B$ é 4,2 T. . . . .	81

# 1 Introdução

## 1.1 Revisão Bibliográfica

Desde a Antiguidade Grega se tem conhecimento de fenômenos magnéticos em que um tipo de pedra, a magnetita, atraía o ferro (ASSIS, 1995). Mas, segundo Whittaker (1910), o uso de ímãs na navegação marítima parece não derivar da antiguidade clássica, mas que certamente já era sabido no tempo das Cruzadas. Inclusive, magnetismo foi uma das poucas ciências que progrediram na Idade Média (WHITTAKER, 1910). No entanto, o conhecimento e desenvolvimento mais amplo do magnetismo se deu com o tratado publicado no final do século XV por William Gilbert (1540-1603) em que observa que a Terra atua como um grande ímã (ASSIS, 1995). Durante o século XVIII, estudos sistemáticos realizados por diversos cientistas como André-Marie Ampère (1775–1836), Hans Christian Orsted (1777–1851), Jean Baptiste Biot (1774–1862), Félix Savart (1791–1841) e James Clerk Maxwell (1831–1879), estabeleceram leis qualitativas, quantitativas e a relação entre os fenômenos elétricos e os fenômenos magnéticos, que passaram a se chamar eletromagnéticos ou eletrodinâmicos, a depender da teoria.

Desta mesma época, encontra-se o trabalho de Alfred Marshall Mayer (1836–1897) (MAYER, 1878) em que estudou configurações de equilíbrio e estabilidade de agulhas imantadas presas a cortiças, boiando em água, sob o efeito de um ímã. Mayer varia a quantidade de agulhas imantadas de 2 a 20 e registra as configurações de equilíbrio obtidas e compara a estabilidade das diferentes configurações obtidas para um mesmo número de agulha, conforme a Figura 1. Sobre os diferentes arranjos, ele aponta que

As configurações de mesmo número de ímãs são rotuladas por *a*, *b*, *c*, para indicar seus graus de estabilidade; sendo *a* sempre a forma mais estável. Eu rotulei, no entanto, a configuração de 8 ímãs na ordem de seu aumento de área, de maneira que elas sirvam melhor para o propósito de ilustrar os fenômenos de isomerismo. Realmente, *8c* é mais estável que *8b*. (MAYER, 1878)

Mayer observa que pequenas perturbações no sistema, quando em uma configuração menos estável, acarreta em uma reestruturação para uma configuração mais estável. Diante disso, ele sugere um paralelo com três tipos de fenômenos físicos associados à estrutura molecular, que podem ser ilustrados por este comportamento:

1. Equilíbrio molecular instável: minúsculas mudanças de pressão, temperatura, luz etc., podem causar um novo arranjo molecular, como a repentina solidificação da água líquida à temperatura abaixo de 0°C quando agitada, ou como a solidificação de uma solução supersaturada de sulfato de sódio quando um cristal dessa substân-

cia é solta sobre ela;

2. Expansão na solidificação: como se pode observar com a água, bismuto, antimônio, ferro fundido etc.
3. Alotropia e isomerismo: pela ação da pressão, temperatura, eletricidade etc., compostos químicos com diferentes propriedades físicas e químicas apresentam as mesmas fórmulas estruturais, como, por exemplo, o grafite e o diamante.

No entanto, ressalta que

(...) o paralelismo acima é dado meramente como *ilustração* de como os nossos experimentos podem servir para explicar e ilustrar os fenômenos sob a assunção da hipótese atômica e sobre a suposição de que a ação a qual, nos experimentos, toma lugar em um *plano*, pode similarmente tomar lugar entre pontos que se atraem e se repelem no espaço de três dimensões. (MAYER, 1878)

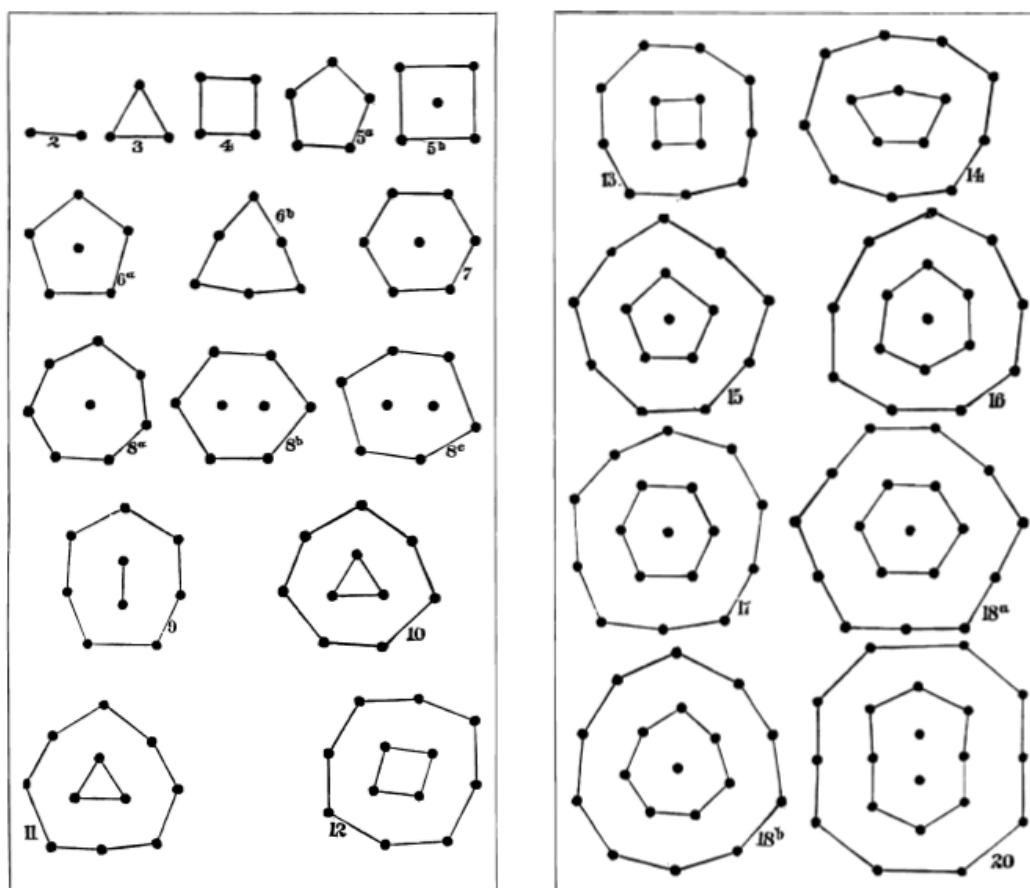


Figura 1 – Configurações de equilíbrio obtidas para diferentes quantidades de agulhas imantadas boiando em águas, sob efeito de de um ímã superposto ao plano da água (MAYER, 1878).

Em linhas gerais, Mayer (1878) percebe que configurações espaciais de ímãs apresentam diferentes equilíbrios, uns mais estáveis que outros, apresentando grande sensibilidade a perturbações, e que isso pode ser a causa de fenômenos físicos como o equilíbrio molecular instável, expansão na solidificação, alotropia e isomerismo. Apesar de que ao final do século XIX já estivessem sido estabelecidas leis de interação entre dipolos magnéticos, nesse período também se davam os primeiros avanços nos estudos de equilíbrio de três corpos por Henri Poincaré (1854–1912), não sendo, portanto, nenhum demérito o trabalho de Mayer (1878) restringir-se a uma análise descritiva.

Sob o aspecto matemático, o estudo de equilíbrios e da dinâmica de dipolos magnéticos necessita de técnicas para extrair informações quantitativas e qualitativas de equações diferenciais não-lineares. Daí surge a dificuldade em se obter soluções analíticas descrevendo a dinâmica, e estudos experimentais e numéricos são algumas opções.

Laroze et al. (2008) estudaram a interação de duas partículas magnéticas na presença de um campo magnético aplicado externo e em um cenário tri-dimensional, interessados nas potenciais aplicações deste estudo para a indústria de memória de computadores. De fato, fenômenos de histerese e de reversão de magnetização de elementos de memória devem ser levados em consideração na hora de conceber as memórias físicas que hoje são amplamente utilizadas em equipamentos eletrônicos.

A formulação utilizada pelos autores foi a proposta por Landau e Lifshitz (1935) em que a dinâmica é associada aos gradientes do hamiltoniano do sistema. A partir deste modelo, os autores obtiveram uma equação dinâmica para a magnetização  $\mathbf{M}$  do sistema de duas partículas magnéticas de momentos de dipolo  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ , que foi definida simplesmente como  $\mathbf{M} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2$ . Os resultados apresentados mostram que, dependendo das configurações do sistema, a magnetização do sistema não atinge um estado saturado na ausência de um campo externo aplicado mas, à medida em que a intensidade do campo magnético aplicado aumenta, a saturação é obtida, algumas vezes seguida de um transiente de oscilações fortemente não-lineares, em tempos característicos cada vez mais curtos.

Neste trabalho, não houve ênfase no estudo dos aspectos matemáticos da magnetização de saturação do sistema (caracterização dos pontos de equilíbrio do sistema, por exemplo). Em um trabalho paralelo, Laroze e Perez (2008) investigaram a dinâmica das interações magnéticas de quatro partículas magnéticas dispostas em um círculo e observaram um comportamento caótico para a magnetização total do sistema para intensidades pequenas de campos magnéticos aplicados. Mesmo para intensidades mais importantes, o sistema não evoluiu no tempo físico analisado para um estado permanente estacionário. De fato, os autores conseguiram caracterizar uma estrutura muito similar à duplicação de períodos nas oscilações da magnetização à medida em que a intensidade do campo magnético aplicado aumenta Fig. 2, e conjecturaram que o comportamento do sistema pode, de fato, ser caótico.

Alguns trabalhos mais recentes já começam a investigar configurações de partículas

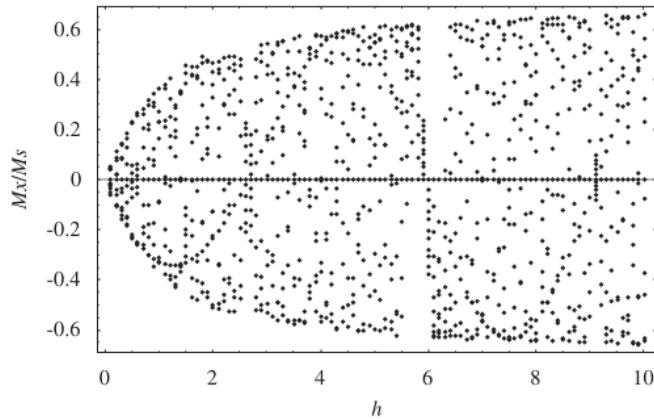


Figura 2 – Diagrama de bifurcação da componente  $x$  normalizada da magnetização total,  $\mathbf{M}_x/M_s$ , como uma função de  $h$  para  $m/(d^3 H_0 = 1)$  e  $J/(mH_0) = 1$ . Detalhes e identificação dos parâmetros em Laroze e Perez (2008).

magnéticas no seio de um escoamento fluido, na tentativa de compreender melhor a formação de agregados de partículas magnéticas em fluidos magnéticos. Kang, Hulsen e Toonder (2012) estudaram a dinâmica de cadeias lineares de partículas magnéticas na presença de um campo magnético e de um escoamento de cisalhamento simples. O número de Mason, definido como a razão das forças de cisalhamento e forças magnéticas, é o parâmetro adimensional que governa o problema e é dado por

$$Mn = \frac{\eta \dot{\gamma}}{\mu_0 H_c^2}, \quad (1.1)$$

em que  $\eta$  é a viscosidade do fluido,  $\dot{\gamma}$  a taxa de cisalhamento do escoamento, e  $\mu_0 H_c^2$  é uma escala característica de campo magnético aplicado, onde  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo. Estes autores observaram que, para certos valores do número de Mason, as cadeias de partículas podem sofrer uma rotação e permanecer em uma posição inclinada de equilíbrio no escoamento, ou pode rotacionar como um corpo rígido no escoamento. Dependendo dos valores de Mn, porém, podem ser observadas rupturas das cadeias de partículas e diversas configurações finais podem ser observadas como, por exemplo, a ruptura da cadeia no seu centro, a formação de ramificações das cadeias de partículas ou, ainda, o fracionamento da cadeia em diversos aglomerados contendo poucas partículas cada um, Fig. 3.

Cunha, Gontijo e Sobral (2013) estudaram a interação entre hidrodinâmica e interações magnéticas em uma configuração de sedimentação de duas partículas de tamanhos diferentes em um fluido muito viscoso (regime de Stokes), com o objetivo de compreender a formação de agregados em ferrofluidos. Foi dado um passo importante neste trabalho na direção de considerar condições mais realistas de interação de partículas magnéticas no seio de fluidos magnéticos. Este estudo se baseou na análise das trajetórias de partículas que sedimentam com velocidades distintas, determinando o desvio residual em  $t \rightarrow \infty$  que a partícula mais rápida sofre devido à interação com a partícula mais lenta.



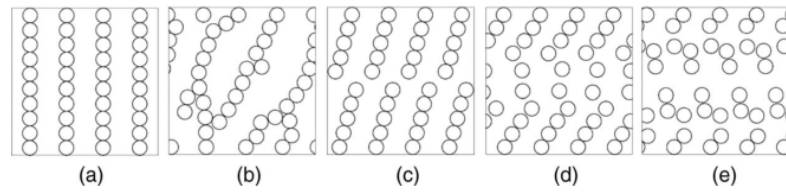


Figura 3 – Retrato de formações de cadeias típicas nos quatro números de Mason. O número de partículas é 40, correspondendo à fração de área de 31,4%. (a) quatro cadeias igualmente espaçadas no início, com cada cadeia consistindo de 10 partículas, e formações de cadeias típicas com (b)  $Mn = 0.0016$ , (c)  $Mn = 0.016$ , (d)  $Mn = 0.16$  e (e)  $Mn = 1.6$ . (KANG; HULSEN; TOONDER, 2012)

Observou-se que a simetria das interações entre as partículas (i.e., zero desvio em  $t \rightarrow \infty$ ) observada no caso puramente hidrodinâmico, é quebrada pelas interações magnéticas entre as partículas. De fato, foi verificado que, em algumas condições de intensidade de momento de dipolo das partículas, havia a formação de um agregado das duas partículas, isto é, as partículas se atraem irreversivelmente durante o processo de sedimentação, Fig. 4.

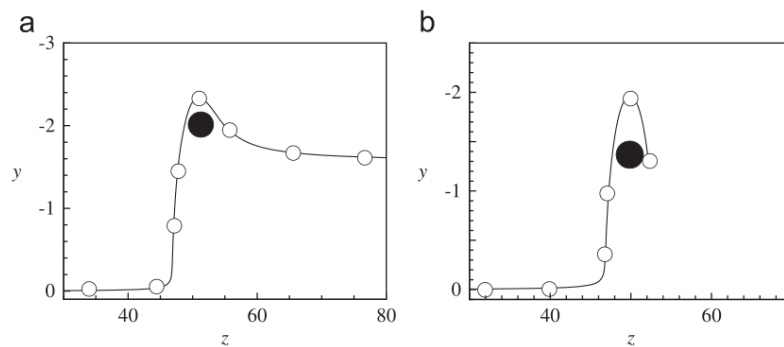


Figura 4 – Trajetória da partícula teste para configuração 1 e  $\Psi_m = 100$ . (a) Uma trajetória difusiva típica e (b) uma trajetória agregativa típica. A segunda partícula é mostrada somente no momento de encontro. O tamanho dos pontos não representa os raios atuais das partículas. (CUNHA; GONTIJO; SOBRAL, 2013)

Voltando a trabalhos de cunho puramente magnético, mais recentemente, Rosa, Cunha e Ceniceros (2017) estudaram as configurações de equilíbrio de arranjos poligonais regulares de partículas magnéticas através de simulações computacionais do tipo Monte-Carlo. Fixadas as partículas, as simulações determinavam as orientações dos momentos de dipolos das partículas que minimizavam a energia potencial magnética do sistema, com ou sem um campo magnético externo aplicado. Com este algoritmo, os mínimos globais do funcional foram encontrados e as configurações de equilíbrio foram encontradas. Foi observado que o equilíbrio na ausência de campo magnético externo corresponde sempre

a uma configuração de momentos tangenciais à circunferência que contém os centros das partículas. Porém, a aplicação de um campo magnético vertical altera significativamente as condições de equilíbrio dos arranjos, conforme ilustrado na Fig. 5. Um valor crítico de campo magnético foi obtido para o qual a saturação da magnetização total do arranjo foi encontrada. Finalmente, outro resultado interessante deste trabalho foi a determinação de mínimos locais para alguns arranjos de partículas e pôde-se observar que as configurações de equilíbrio tinham alguns momentos de dipolo com grandes desvios da configuração tangencial esperada, conforme ilustrado na Fig. 6. A estabilidade dos diversos equilíbrios deste sistema, porém, não foi investigada pelos autores.

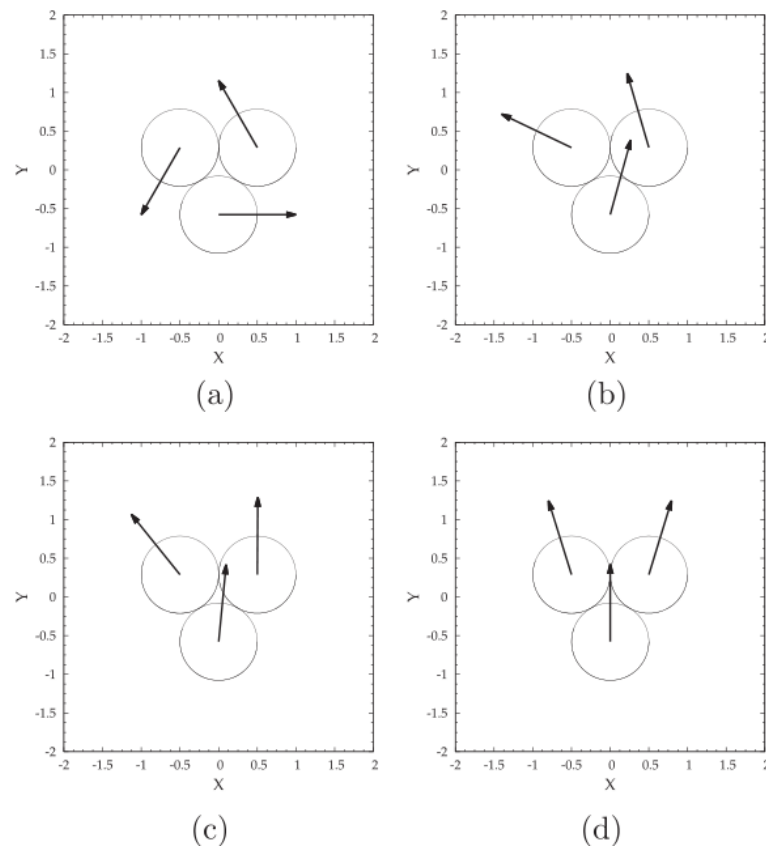


Figura 5 – Configuração de momento magnético minimal no aglomerado triangular para diferentes valores do campo magnético adimensional  $\alpha$ . (a)  $\alpha = 0$ . (b)  $\alpha = 1$ . (c)  $\alpha = 1.5$  e (d)  $\alpha = 2$ . (ROSA; CUNHA; CENICEROS, 2017)

Na direção desta dissertação, encontra-se o trabalho experimental de Plihon et al. (2016), o qual explora a influência do ruído sobre um sistema multi-estável de dois dipolos magnéticos acoplados. O aparato experimental utilizado é esquematicamente mostrado na Fig. 7; o qual, simplificada, consiste de dois ímãs de neodímio circulares bem finos, com momentos de dipolo magnético  $\mathcal{M}_1$  e  $\mathcal{M}_2$ , posicionados sob o mesmo plano, fixados em eixos de rotação paralelos a uma distância fixa, onde ao eixo 1 pode-se adicionar um torque externo por meio de um sistema magnético quadrupolar. No experimento, é aplicado um toque externo  $\mathcal{A}$  ao sistema de dipolos magnéticos variante no tempo de

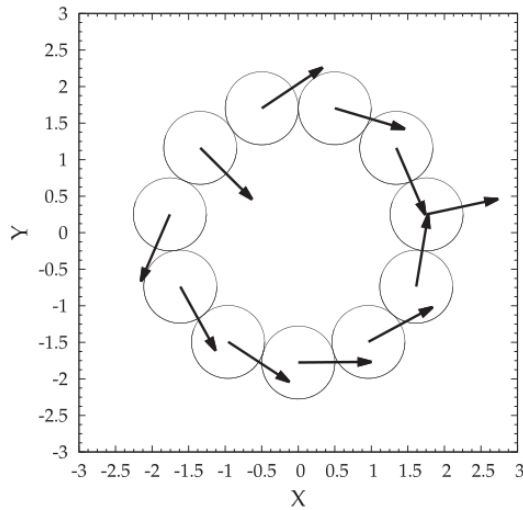


Figura 6 – Energia mínima local na configuração de momento magnético em um campo aplicado nulo para o 11-tágono [ $\Phi = -15.683$ ]. A energia mínima global é  $\Phi = -25.241$ . (ROSA; CUNHA; CENICEROS, 2017)

maneira que  $\mathcal{A}(t)$  seja um processo Gaussiano  $\delta$ -correlacionado, com média  $\langle \mathcal{A} \rangle$  e desvio padrão  $\tilde{\mathcal{A}}$ . Com a flutuação do torque externo, observa-se dois comportamentos distinto:

(...) os dipolos flutuam em volta de seus pontos fixos estáveis (tipicamente para baixas amplitudes das flutuações) ou eles podem exibir reversões estocásticas entre pontos fixos estáveis (quando flutuações são fortes o bastante para conduzir o sistema fechado para pontos fixos instáveis). (PLIHON et al., 2016)

Estes comportamentos são explicados pelos níveis de energia potencial envolvidos e pelas bacias de atração dos pontos fixos, que são modificadas por  $\langle \mathcal{A} \rangle$ . Por fim, Plihon et al. (2016) apontam que o experimento foi projetado para desenvolver um modelo simples da dinâmica de reversão caótica do experimento VKS (Von Kármán *sodium*), o qual, sob parâmetros específicos, apresenta um campo magnético com dinâmica complexa, incluindo reversões aleatórias e repentinas entre polaridades opostas.

O objetivo deste trabalho é analisar os aspectos matemáticos do modelo de interação de dois dipolos magnéticos sob algumas hipóteses, de um ponto de vista determinístico.

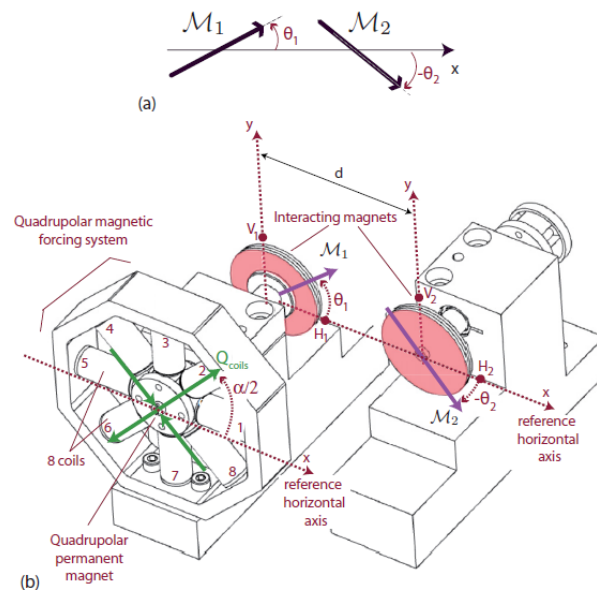


Figura 7 – (a) Visão esquemática 2D da interação de dois ímãs estudada no artigo. (b) Esquema da configuração experimental. (PLIHON et al., 2016)

## 1.2 Objetivos Gerais

À luz do problema de formação de agregados em fluidos magnéticos, este trabalho visa compreender quais são os mecanismos de interação entre duas partículas magnéticas fixas, livre para girar, e analisar quais são as configurações de equilíbrio mais frequentes deste sistema. Este trabalho dá um passo inicial na definição mais formal dos equilíbrios existentes e propõe uma análise quantitativa do comportamento do sistema quando este é conservativo, dissipativo ou se encontra na presença de um campo aplicado.

## 1.3 Objetivos Específicos

1. Formulação do modelo matemático da interação de duas partículas magnéticas para sistemas conservativos, dissipativos e na presença de um campo aplicado;
2. Solução analítica do movimento rotacional de dipolos magnéticos para casos especiais em termos de funções elípticas;
3. Identificação de parâmetros físicos do problema e suas relações com os parâmetros intrínsecos das funções elípticas;
4. Caracterização dinâmica dos equilíbrios do caso de sistema conservativo;
5. Caracterização dinâmica dos equilíbrios no caso amortecido e estudo quantitativo das bacias de atração de cada ponto de equilíbrio;

6. Caracterização dinâmica dos equilíbrios no caso com campo aplicado e estudo quantitativo das bacias de atração de cada ponto de equilíbrio.

## 2 Fundamentos Teóricos

### 2.1 Mecânica e Magnetismo

#### 2.1.1 Mecânica

A Mecânica é o ramo do conhecimento que trata do equilíbrio e do movimento dos corpos (ASSIS, 2013). Existem diferentes formulações da mecânica como uma teoria axiomática, como por exemplo, as mecânicas newtoniana, lagrangiana, hamiltoniana, einsteiniana, etc.<sup>1</sup> Realizaremos esta dissertação sob o prisma da mecânica clássica, e não a apresentaremos do ponto de vista axiomático e autocontido, e sim, somente nos ateremos a expor definições e resultados necessário para o desenvolvimento do trabalho.

Nosso primeiro objetivo é descrever o movimento resultante da interação entre dois corpos pontuais. Assim, consideraremos sempre que o sistema de referências é inercial, ou seja, a cada um dos corpo se aplicam as *leis de Newton*. Antes de enunciar estas três leis do movimento, daremos algumas definições convenientes matematicamente, adaptadas de Lopes (2013):

**Definição 1.** Considere um corpo pontual de massa inercial constante  $M$  e velocidade  $\mathbf{v}$  em relação a um referencial inercial. Definimos a *quantidade de movimento*  $\mathbf{p}$  deste corpo como

$$\mathbf{p}(t) = M\mathbf{v}(t). \quad (2.1)$$

**Definição 2.** Seja  $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função que descreve a posição  $\mathbf{x}(t)$  em  $\mathbb{R}^n$  de uma partícula de massa  $M$  sob a ação de um campo vetorial  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  que descreve a força resultante  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$  aplicada na partícula de massa  $M$  quando na posição  $\mathbf{x}$ , com velocidade  $\dot{\mathbf{x}}$ , e no tempo  $t$ . O campo  $\mathbf{f}$  é chamado *campo de forças*.

A *primeira lei de Newton*, conhecida como *lei de inércia*, estabelece que “todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que seja forçado a mudar aquele estado por forças imprimidas sobre ele” (NEWTON, 2012).

A *segunda lei de Newton* estabelece que um corpo pontual sob a ação de campo de forças  $\mathbf{f}$  obedece a equação

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (2.2)$$

Caso a massa inercial  $M$  do corpo seja constante, temos que

$$\mathbf{f} = M\mathbf{a}, \quad (2.3)$$

---

<sup>1</sup> Inclusive, aqui no Brasil, desenvolveu-se nos últimos anos, uma teoria mecânica, chamada Mecânica Relacional, que implementa quantitativamente o Princípio de Mach (ASSIS, 2013).

onde  $\mathbf{a}$  é a aceleração  $\ddot{\mathbf{x}}$  do corpo.

A *terceira lei de Newton* ou *lei de ação e reação* estabelece que, dados dois corpos  $A$  e  $B$  que interagem entre si,

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}, \quad (2.4)$$

onde  $\mathbf{F}_{AB}$  é a força exercida pelo corpo  $A$  sobre o corpo  $B$  e  $\mathbf{F}_{BA}$  é a força exercida pelo corpo  $B$  sobre o corpo  $A$ . Note que aqui fizemos uma distinção entre uma força  $\mathbf{F}$  aplicada em uma partícula e o campo de forças  $\mathbf{f}$  para enfatizar o caráter de uma função vetorial, que será útil à frente, em uma notação mais concisa. Cabe ressaltar que, “sempre que Newton utilizou a terceira lei, as forças entre os corpos estavam direcionadas ao longo da linha reta que os une, como na lei da gravitação” (ASSIS, 2013). No entanto, em algumas situações, é necessário enfraquecer esta hipótese, o que nos leva à seguinte definição:

**Definição 3.** À terceira lei de Newton conforme (2.4), chamaremos de *princípio de ação e reação na forma fraca*. Se, adicionalmente à (2.4), é imposto que as forças  $\mathbf{F}_{AB}$  e  $\mathbf{F}_{BA}$  estejam ao longo da reta unindo  $A$  e  $B$ , chamaremos estas condições de *princípio de ação e reação na forma forte*.

Estes postulados de Newton estabelecem como será o movimento, em relação a referenciais inerciais, de um corpo sob a ação de forças. Agora, sobre a natureza das forças, podemos afirmar, além das leis do movimento, que elas se somam como vetores e que podem ter origem de diversos tipos de interação: gravitacional, eletromagnética, nuclear, etc.

Antes de passarmos para o estudo de sistemas com vários corpos interagindo, faremos algumas definições para fixar as nomenclaturas.

**Definição 4.** Chamaremos de *sistema mecânico* ao sistema físico que satisfaz a equação diferencial de segunda ordem

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t). \quad (2.5)$$

**Definição 5.** Um campo de forças que depende do tempo  $t$ , ou seja, um sistema do tipo  $\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ , com  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , é dito *não-autônomo*. Os campos que não dependem de  $t$  são ditos *autônomos*.

**Definição 6.** Se  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  é um campo de forças autônomo, o espaço da variável  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  é chamado de *espaço de configurações* do sistema mecânico, o espaço da variável  $\dot{\mathbf{x}}$  é chamado de *espaço de velocidades* do sistema mecânico, enquanto o espaço das variáveis  $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \in \mathbb{R}^{2n}$  é chamado de *espaço de fase* do sistema.

Em realidade, quando se trata de um sistema com mais de um corpo, a notação segue a mesma; o que vai mudar nas equações são as dimensões do domínio e da imagem do campo de forças. Por exemplo, para descrever um sistema mecânico composto de um

único corpo no espaço tridimensional, nos é suficiente, para o caso não-autônomo, um campo de forças  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , em que o corpo dotado de massa  $M$ , na posição  $\mathbf{x}(t)$  e velocidade  $\dot{\mathbf{x}}(t)$ , no tempo  $t$  está sob a ação de uma força dada por (2.5). Se o sistema mecânico é autônomo, podemos diminuir uma dimensão no domínio.

Se o sistema mecânico é composto de  $n$  corpos no espaço tridimensional de massas  $M_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , no caso não-autônomo, necessitamos de um campo de forças  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{6n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$  para descrever completamente o sistema, já que em  $\mathbf{f}$  expressamos em uma notação enxuta todos os campos de forças que atuam individualmente em cada um dos  $n$  corpos, da seguinte maneira: seja  $\mathbf{f}_i : \mathbb{R}^{6n+1} \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo de forças atuando no corpo  $M_i$ , as equações que descrevem o sistema mecânico no tempo  $t$  são dadas por

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1(\mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), t) &= M_1 \ddot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \mathbf{f}_2(\mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), t) &= M_2 \ddot{\mathbf{x}}_2(t) \\ &\vdots \\ \mathbf{f}_n(\mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), t) &= M_n \ddot{\mathbf{x}}_n(t) \end{cases}, \quad (2.6)$$

onde  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  e  $\dot{\mathbf{X}} = (\dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2, \dots, \dot{\mathbf{x}}_n)$ . Assim, tomando  $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$  e  $\ddot{\mathbf{X}} = (\ddot{\mathbf{x}}_1, \ddot{\mathbf{x}}_2, \dots, \ddot{\mathbf{x}}_n)$ , temos que

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), t) = \mathcal{M} \ddot{\mathbf{X}}(t), \quad (2.7)$$

onde

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_n \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Note que mudamos a notação do vetor para  $\mathbf{X}$  com o intuito de enfatizar que se trata de um vetor de vetores posição e continuamos, no caso autônomo, chamando o espaço da variável  $\mathbf{X}$  de espaço de configurações, o espaço da variável  $\dot{\mathbf{X}}$  de espaço de velocidades e o espaço das variáveis  $(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$  de espaço de fase do sistema.

Um tipo bem especial de sistema, que simplifica bastante sua análise, é aquele em que as forças que atuam nos corpos internos ao sistema são provenientes unicamente de interações entre corpos do próprio sistema. Este tipo de sistema recebe uma denominação especial, conforme definição abaixo, e apresenta propriedades muito importantes, conforme definições e proposições, a seguir:

**Definição 7.** Seja  $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$  um campo de forças de um sistema mecânico de  $n$  partículas. Se não existe um campo externo agindo sobre todo o sistema (ou seja, existe somente as forças internas de interação), dizemos que o sistema constituído destas  $n$  partículas é um *sistema fechado*.



**Definição 8.** Dado um sistema mecânico composto de  $n$  corpos, define-se o *momento linear total*  $\mathbf{p}_T$  deste sistema por

$$\mathbf{p}_T = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i, \quad (2.9)$$

onde  $\mathbf{p}_i$  é a quantidade de movimento do  $i$ -ésimo corpo.

**Proposição 1.** *Considere um sistema mecânico fechado composto de  $n$  partículas. Se para este sistema é válido o princípio de ação e reação da forma fraca, então o momento linear total do sistema se conserva.*

*Demonstração.* Seja  $\mathbf{p}_T$  o momento linear total do sistema em questão. Assim,

$$\frac{d\mathbf{p}_T}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \quad (2.10)$$

$$= \sum_{i \neq 1} \mathbf{F}_{i1} + \sum_{i \neq 2} \mathbf{F}_{i2} + \cdots + \sum_{i \neq n} \mathbf{F}_{in} \quad (2.11)$$

$$= (\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31} + \cdots + \mathbf{F}_{n1}) + \cdots + (\mathbf{F}_{1n} + \mathbf{F}_{2n} + \cdots + \mathbf{F}_{n-1,n}) \quad (2.12)$$

$$= (\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12}) + (\mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{13}) + \cdots + (\mathbf{F}_{n,n-1} + \mathbf{F}_{n-1,n}) \quad (2.13)$$

$$= 0, \quad (2.14)$$

pois,  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$  pela 3ª lei de Newton, com  $\mathbf{f}_i$  sendo a força resultante na  $i$ -ésima partícula. Portanto, o momento linear total do sistema se conserva.  $\square$

**Corolário 1.** *Um sistema mecânico fechado em que é válido o princípio de ação e reação da forma fraca tem o somatório das forças nulo.*

**Definição 9.** Dado um sistema mecânico composto de  $n$  partículas, define-se o *momento angular total*  $\mathbf{L}_T$  deste sistema por

$$\mathbf{L}_T = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i, \quad (2.15)$$

onde  $\mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{p}_i$  são, respectivamente, a posição e o momento linear da  $i$ -ésima partícula. À  $i$ -ésima parcela da somatória acima, chamamos de o *momento angular* da  $i$ -ésima partícula.

**Proposição 2.** *Considere um sistema mecânico fechado composto de  $n$  partículas. Se para este sistema é válido princípio de ação e reação na forma forte, então o momento angular total do sistema se conserva.*

*Demonstração.* Seja  $\mathbf{L}_T$  o momento angular total do sistema em questão. Assim,

$$\frac{d\mathbf{L}_T}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \times (M_i \mathbf{a}_i) \quad (2.16)$$

$$= \mathbf{x}_1 \times (\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31} + \cdots + \mathbf{F}_{n1}) + \cdots + \mathbf{x}_n \times (\mathbf{F}_{1n} + \mathbf{F}_{2n} + \cdots + \mathbf{F}_{n-1,n}). \quad (2.17)$$

Definindo  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$  o vetor deslocamento de  $j$  para  $i$  e usando a 3ª lei de Newton ( $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ ), temos que

$$\frac{d\mathbf{L}_T}{dt} = \mathbf{r}_{12} \times \mathbf{F}_{21} + \mathbf{r}_{13} \times \mathbf{F}_{31} + \cdots + \mathbf{r}_{n-1,n} \times \mathbf{F}_{n,n-1}. \quad (2.18)$$

Agora, definindo  $\hat{\mathbf{r}}_{ij} = \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}}$  e como  $\mathbf{F}_{ij} = F_{ij}\hat{\mathbf{r}}_{ij}$ , pois vale a forma forte da Def. 3, temos que

$$\frac{d\mathbf{L}_T}{dt} = \mathbf{r}_{12} \times F_{21}\hat{\mathbf{r}}_{21} + \mathbf{r}_{13} \times F_{31}\hat{\mathbf{r}}_{31} + \cdots + \mathbf{r}_{n-1,n} \times F_{n,n-1}\hat{\mathbf{r}}_{n,n-1} \quad (2.19)$$

$$= 0. \quad (2.20)$$

Portanto, o momento angular total do sistema se conserva.  $\square$

A mecânica newtoniana é, conforme fizemos até agora, baseada nos conceitos de força e aceleração. No entanto, existe outra formulação baseada na ideia de energia (ASSIS, 2013). Com vistas a transitar nessas duas formulações quando conveniente for, utilizaremos os conceitos de energias conforme as seguintes definições:

**Definição 10.** Sejam um sistema mecânico composto de  $n$  partículas no espaço de dimensão  $\ell$  e um campo de forças autônomo  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{2n\ell} \rightarrow \mathbb{R}^{n\ell}$  tal que

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}) = (\mathbf{f}_1(\mathbf{X}), \mathbf{f}_2(\mathbf{X}), \dots, \mathbf{f}_n(\mathbf{X})), \quad (2.21)$$

com  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ . Dizemos que um sistema mecânico é *conservativo* se existem  $n$  funções escalares  $U_i : \mathbb{R}^{n\ell} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que seus gradientes satisfazem

$$\nabla U_i(\mathbf{X}) = -\mathbf{f}_i(\mathbf{X}), \quad (2.22)$$

para qualquer  $\mathbf{X}$  no espaço de configurações. Dizemos que  $U = \sum_{i=1}^n U_i$  é um *potencial* do sistema mecânico.

**Definição 11.** Seja  $\mathbf{f}$  um campo de forças de um sistema mecânico composto por  $n$  corpos. A *energia cinética* do sistema mecânico  $\mathcal{M}\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$ , com  $\mathcal{M}$  conforme (2.8) e  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ , é dada por

$$K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) = K(\dot{\mathbf{X}}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M_i \langle \dot{\mathbf{x}}_i, \dot{\mathbf{x}}_i \rangle, \quad (2.23)$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno usual.

Se  $U$  é um potencial de  $\mathbf{f}$ , então a *energia total mecânica* do sistema mecânico é dada pela soma da energia potencial com a energia cinética, ou seja

$$E_T(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) = K(\dot{\mathbf{X}}) + U(\mathbf{X}). \quad (2.24)$$

**Teorema 1.** *A energia total mecânica de um sistema conservativo é constante numa trajetória  $(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$ .*

*Demonstração.*

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M_i \langle \dot{\mathbf{x}}_i, \dot{\mathbf{x}}_i \rangle + U(\mathbf{X}) \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M_i \langle \dot{\mathbf{x}}_i, \dot{\mathbf{x}}_i \rangle \right) + \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n U_i(\mathbf{x}_i) \right) \quad (2.25)$$

$$= \sum_{i=1}^n \langle M_i \ddot{\mathbf{x}}_i, \dot{\mathbf{x}}_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \nabla U_i(\mathbf{x}_i), \dot{\mathbf{x}}_i \rangle, \quad (2.26)$$

onde o segundo termo do lado direito da equação é obtido pela Regra da Cadeia. Assim,

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M_i \langle \dot{\mathbf{x}}_i, \dot{\mathbf{x}}_i \rangle + U(\mathbf{X}) \right) = \sum_{i=1}^n \langle M_i \ddot{\mathbf{x}}_i + \nabla U_i(\mathbf{x}_i), \dot{\mathbf{x}}_i \rangle \quad (2.27)$$

$$= \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) - \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i), \dot{\mathbf{x}}_i \rangle \quad (2.28)$$

$$= 0, \quad (2.29)$$

□

Também chamamos a energia total de hamiltoniano do sistema, denotando-se por  $H$ , e comumente utilizamos o espaço de fase  $(\mathbf{X}, \mathbf{L})$ , onde  $\mathbf{L}$  é espaço dos momentos lineares do sistema, para descrever e/ou estudar o sistema. De uma forma bem sucinta, o sistema mecânico que antes expressávamos como uma equação diferencial de segunda ordem, no formalismo hamiltoniano, torna-se uma equação diferencial de primeira ordem. De fato, tomando

$$H(\mathbf{X}, \mathbf{L}) = K(\mathbf{L}) + U(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2M_i} \langle \dot{\mathbf{L}}_i, \dot{\mathbf{L}}_i \rangle + U_i(\mathbf{x}_i) \quad (2.30)$$

podemos transformar (2.7) com campo conservativo em 1<sup>a</sup> ordem, por meio das equações de Hamilton, em um sistema do tipo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{L}_i} \\ \dot{\mathbf{L}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_i} \end{cases}. \quad (2.31)$$

Logo, para  $\mathbf{Y} = (\mathbf{X}, \mathbf{L})$ , temos uma forma bem compacta para expressar (2.31), isto é:

$$\dot{\mathbf{Y}} = J \nabla H(\mathbf{Y}), \quad (2.32)$$

onde  $\nabla$  de  $H$  é com respeito à  $X$  e  $L$ , e

$$J = \left( \begin{array}{c|c} 0 & \mathcal{I} \\ \hline -\mathcal{I} & 0 \end{array} \right), \quad (2.33)$$

em que  $0$  e  $I$  são, respectivamente, as matrizes quadradas de mesmo tamanho nula e identidade.

Apesar de, até o momento, terem sido feitas considerações de modo a se manter a generalidade, o desenvolvimento desta dissertação se dará com corpos não-pontuais no plano. Assim, para manter a simplicidade na notação e a clareza na abordagem, passaremos agora para um domínio 2D. Além da translação do corpo no espaço, quando tratamos de corpos não-pontuais, aparece um ingrediente a mais em sua cinemática: a rotação. Para fixarmos a notação e nomenclatura, faremos uma breve exposição das definições e resultados acerca desse fator adicional.

**Definição 12.** Considere um corpo  $\mathcal{B}$  composto de  $n$  partículas. Sejam  $\mathbf{x}_i$  o vetor posição da  $i$ -ésima partícula e  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$  o vetor deslocamento do ponto  $\mathbf{x}_j$  para o ponto  $\mathbf{x}_i$ . Chamamos  $\mathcal{B}$  de *corpo rígido* se  $\mathbf{r}_{ij}$  é constante no tempo, para todo  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Note que, para caracterizar o movimento de um corpo rígido no plano, são necessárias três coordenadas, quais sejam, duas para descrever a translação de um ponto fixo no corpo rígido e uma para descrever a rotação do corpo fixo, conforme Fig. 8. Descrever o movimento de um corpo rígido no espaço 3D requer 6 coordenadas e uma álgebra mais elaborada, uma vez que a composição de rotações não é comutativa. Detalhes sobre este tema podem ser encontrados em Gallardo-Alvarado (2016).

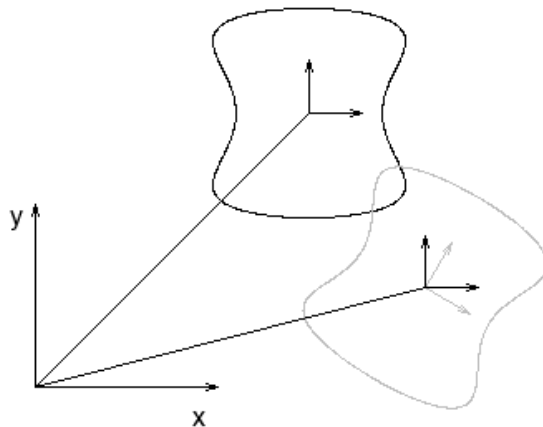


Figura 8 – Movimento de um corpo rígido no espaço.

Se, além de ser planar, o corpo rígido estiver rotacionando em torno de um eixo fixo, podemos descrever o seu movimento e sua dinâmica somente em termos das grandezas angulares da mesma maneira que o fizemos com a translação pura, como mostraremos a seguir.

**Definição 13.** Seja  $\mathcal{B}$  um corpo rígido planar, composto de  $n$  partículas, fixo a um ponto  $O$  do plano, sendo permitido somente a rotação em torno do ponto e tal que nenhuma

partícula de  $\mathcal{B}$  está em  $O$ . Considerando o plano como os pontos  $(\cdot, \cdot, 0)$ , o ponto  $O$  como a origem do sistema de coordenadas e os vetores  $\boldsymbol{\theta} = (0, 0, \theta)$  e  $\boldsymbol{\nu} = \dot{\boldsymbol{\theta}}$ , onde  $\theta$  é o *ângulo de rotação* e  $\dot{\theta}$  é a *velocidade angular* em relação a um dos eixos coordenados do plano. Se  $\mathbf{x}_i(t)$  é o deslocamento da partícula  $i$ , então definimos o *momento de inércia*  $I$  de  $\mathcal{B}$  como

$$I = \sum_{i=1}^n M_i \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle. \quad (2.34)$$

Se uma força externa  $\mathbf{F}$ , paralela ao plano, é aplicada em  $\mathcal{B}$  em um ponto  $\mathbf{x}$ , então definimos o *torque*  $\boldsymbol{\tau}$  aplicado em  $\mathcal{B}$  como

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{x} \times \mathbf{F}. \quad (2.35)$$

**Proposição 3.** *Sob as hipóteses da Def. 13, temos que*

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\nu}, \quad (2.36)$$

$$\dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\tau} = I\dot{\boldsymbol{\nu}}, \quad (2.37)$$

onde  $\mathbf{L}$  é o *momento angular total* de  $\mathcal{B}$ .

*Demonstração.* Temos que

$$\mathbf{x}_i(t) = r_i(\sin(\theta + \theta_i), \cos(\theta + \theta_i), 0), \quad (2.38)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = r_i\dot{\theta}(\cos(\theta + \theta_i), -\sin(\theta + \theta_i), 0), \quad (2.39)$$

e

$$\mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i = (0, 0, r_i^2\dot{\theta}) = r_i^2\boldsymbol{\nu} \quad (2.40)$$

onde  $r_i^2 = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle$ ,  $\theta$  é o *ângulo de rotação* em função do tempo  $t$  e  $\theta_i$  é o *ângulo inicial* em  $t = 0$  da  $i$ -ésima partícula. Logo, a primeira igualdade segue de

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \times M_i \dot{\mathbf{x}}_i \quad (2.41)$$

$$= \sum_{i=1}^n M_i r_i^2 \boldsymbol{\nu} \quad (2.42)$$

$$= I\boldsymbol{\nu}. \quad (2.43)$$

A segunda igualdade segue de

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \times M_i \dot{\mathbf{x}}_i \right) \quad (2.44)$$

$$= \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \times M_i \ddot{\mathbf{x}}_i \quad (2.45)$$

$$= \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i \quad (2.46)$$

$$= \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\tau}_i \quad (2.47)$$

$$= \boldsymbol{\tau}. \quad (2.48)$$

□

### 2.1.2 Magnetismo e Mecânica

Eletromagnetismo clássico é o ramo do conhecimento que trata de uma maneira unificada das interações entre cargas elétricas, ímãs, correntes elétricas e da radiação eletromagnética (ASSIS, 1995). Usualmente, utiliza-se do conjunto de equações de Maxwell para descrever como os campos elétricos e magnéticos são gerados, juntamente com a força de Lorentz, que descreve como é a interação desses campos com as cargas elétricas. Assim, essas equações formam um conjunto de axiomas capazes de descrever a natureza eletromagnética no vácuo para meios não magnetizáveis. São elas (ASSIS, 1995)<sup>2</sup>:

$$\mathbf{f}_L = q\mathbf{E} + q\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}, \quad (\text{Força de Lorentz})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (\text{lei de Gauss})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{lei de Faraday})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (\text{lei circuital magnética})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{lei da ausência de monopolos magnéticos})$$

onde a  $q$  é uma carga elétrica,  $\rho$  a densidade de carga elétrica,  $\varepsilon_0$  é a constante de permissividade elétrica do vácuo ( $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$ ),  $\mu_0$  é a constante de permeabilidade magnética do vácuo ( $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg m C}^{-2}$ ),  $\mathbf{J}$  é a densidade de corrente e

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (2.49)$$

Dado que a natureza magnética se manifesta de maneiras diferentes (ímãs permanentes que se atraem, efeito magnético devido a passagem de corrente contínua em um fio e

<sup>2</sup> O sistema de unidades utilizado nas equações dessa seção é o S.I.

força eletromotriz devida a variação de movimento de um ímã), definimos três campos responsáveis pela interação magnética. Um deles, usualmente denotado por  $\mathbf{B}$  e chamado de *indução magnética* ou de *densidade de fluxo magnético*, é o campo que surge na *lei de Biot-Savart*, expressa por

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \quad (2.50)$$

onde  $\mu_0$  é a constante de permeabilidade magnética do vácuo,  $i$  é a corrente elétrica no circuito  $C$ ,  $d\mathbf{l}$  é o elemento vetorial de linha e  $\hat{\mathbf{r}}$  o vetor posição unitário. Assim, estendendo esta lei a efeitos de magnéticos em ímãs permanentes, supondo que são manifestação de correntes no interior dos materiais com esta propriedade, define-se o campo magnético  $\mathbf{M}$ , chamado de *magnetização* gerado no interior dos materiais magnéticos, o qual é expresso por

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_{int}, \quad (2.51)$$

onde  $\mathbf{B}_{int}$  é a indução magnética devido as correntes no interior dos materiais magnéticos. Por fim, ao saldo da indução magnética e da magnetização, chamamos de *campo aplicado*  $\mathbf{H}$  e é dado por

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}. \quad (2.52)$$

Logo, no vácuo ou para materiais não magnetizáveis, temos a relação

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (2.53)$$

Saindo da teoria geral, em vistas ao instrumental necessário para nosso trabalho, será útil condensar (2.50) em termos puramente magnéticos para utilizá-la com ímãs permanentes, por exemplo. Portanto, define-se o *momento de dipolo magnético total* associado à corrente como

$$\mathbf{m} = i\mathbf{S}, \quad (2.54)$$

onde  $\mathbf{S}$  é a área orientada compreendida pelo circuito. Logo, a partir do torque realizado em um material magnético em decorrência de um campo magnético externo  $\mathbf{B}_{ext}$  conhecido, podemos mensurar o seu momento de dipolo magnético (CULLITY; GRAHAM, 2009), uma vez que

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_{ext}. \quad (2.55)$$

Desenvolvendo (2.50) para uma espira circular como dipolo magnético, obtemos o chamado *campo de dipolo magnético* dado pela seguinte equação, quando a distância  $r$  é muito maior que o raio da espira:

$$\mathbf{B} = \frac{3\mu_0}{4\pi r^3} \left[ (\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{3} \mathbf{m} \right]. \quad (2.56)$$

Assim, considerando dois dipolos magnéticos  $\mathbf{m}_1$  e  $\mathbf{m}_2$  de dimensões desprezíveis em comparação com a distância  $r$  que os separam, temos que o torque  $\boldsymbol{\tau}_{21}$  em  $\mathbf{m}_2$  devido  $\mathbf{m}_1$

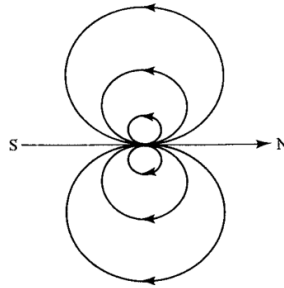


Figura 9 – Campo de um dipolo magnético. (CULLITY; GRAHAM, 2009)

é

$$\boldsymbol{\tau}_{21} = \mathbf{m}_2 \times \mathbf{B}_{21} \quad (2.57)$$

$$= \frac{3\mu_0}{4\pi r^3} \left[ (\mathbf{m}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{m}_2 \times \hat{\mathbf{r}}) - \frac{1}{3}(\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_1) \right]. \quad (2.58)$$

Essa será a expressão mais importante para nosso trabalho.

Conforme demonstrado por Yung, Landecker e Villani (1998), temos também que, considerando dois dipolos magnéticos  $\mathbf{m}_1$  e  $\mathbf{m}_2$  de dimensões desprezíveis em comparação com a distância  $r$  que os separam, a força  $F_{21}$  em  $\mathbf{m}_2$  devido  $\mathbf{m}_1$  é dada por

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{3\mu_0 m_1 m_2}{4\pi r^4} [\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{m}}_1 \cdot \hat{\mathbf{m}}_2) + \hat{\mathbf{m}}_1(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{m}}_2) + \hat{\mathbf{m}}_2(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{m}}_1) - 5\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{m}}_1)(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{m}}_2)]. \quad (2.59)$$

Note que, em geral, para o par de forças da interação entre dipolos magnéticos não vale o princípio de ação e reação na forma forte.

## 2.2 Teoria de Estabilidade

Desenvolveremos nesta seção as definições e resultados teóricos necessários para o estudo da estabilidade do sistema mecânico de dois dipolos interagindo.

Existem configurações do estado do sistema que têm papel fundamental no comportamento dele a longo prazo, podendo, em alguns casos, ser o destino de todas as suas soluções. Esses pontos são os pontos de equilíbrio do sistema. Veremos que, apesar de serem facilmente detectados, podem existir grandes dificuldades para descrever seu comportamento.

**Definição 14.** Seja  $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\mathbf{Y})$  um sistema de equações autônomas em  $\mathbb{R}^n$ . Um vetor  $\mathbf{Y}_0$  tal que  $\mathbf{f}(\mathbf{Y}_0) = 0$  é chamado *ponto de equilíbrio* do sistema. Um ponto de equilíbrio corresponde a uma solução constante  $\mathbf{Y}(t) \equiv \mathbf{Y}_0$  do sistema.

**Definição 15.** Um sistema de equações diferenciais é chamado *sistema linear homogêneo* quando pode ser escrito na forma  $\dot{\mathbf{Y}} = \mathcal{M}(t)\mathbf{Y}$ , onde  $\mathcal{M}(t)$  é uma matriz  $n \times n$  com coeficientes dependentes de  $t$ .



**Definição 16.** Sejam  $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de vetores e  $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\mathbf{Y})$ . Suponha que  $\mathbf{f}(\mathbf{Y}_0) = 0$ . Denotemos por  $D\mathbf{f}_{\mathbf{Y}_0}$  a matriz jacobiana de  $\mathbf{f}$  avaliada em  $\mathbf{Y}_0$ , isto é,

$$D\mathbf{f}_{\mathbf{Y}_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial_1}(\mathbf{Y}_0) & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial_2}(\mathbf{Y}_0) & \dots & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial_n}(\mathbf{Y}_0) \\ \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial_1}(\mathbf{Y}_0) & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial_2}(\mathbf{Y}_0) & \dots & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial_n}(\mathbf{Y}_0) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial_1}(\mathbf{Y}_0) & \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial_2}(\mathbf{Y}_0) & \dots & \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial_n}(\mathbf{Y}_0) \end{pmatrix}, \quad (2.60)$$

onde  $\frac{\partial}{\partial_i}$  é a derivada parcial em relação à  $i$ -ésima variável. Então, o sistema linear de equações diferenciais

$$\dot{\mathbf{Z}} = D\mathbf{f}_{\mathbf{Y}_0} \mathbf{Z} \quad (2.61)$$

é chamado de *sistema linearizado* em  $\mathbf{Y}_0$ .

Como buscamos característica gerais do sistema, denotamos as soluções do problema de valor inicial com uma maneira especial, como se segue. Supomos  $\mathbf{f}$  de classe  $C^1$  para garantir existência e unicidade de soluções e assim poder falar do fluxo do campo:

**Definição 17.** Seja  $\phi_t(\mathbf{Y}_0)$  a solução de  $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\mathbf{Y})$  com  $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0$ . A função  $\phi(\mathbf{Y}_0, t) = \phi_t(\mathbf{Y}_0)$  é chamada o *fluxo* da equação diferencial, enquanto que  $\phi_t$  é chamado de *mapeamento* no tempo  $t$  do fluxo.

Costuma-se utilizar a notação indexada  $\phi_t(\mathbf{Y})$  ao invés de  $\phi(\mathbf{Y}, t)$  para enfatizar a operação de grupo com a composição de função  $\circ$ , uma vez que  $\phi_0 = \mathcal{I}$ ,  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$  e, conseqüentemente,  $\phi_t \circ \phi_{-t} = \mathcal{I}$ , onde  $\mathcal{I}$  é a identidade.

Podemos mostrar que o fluxo  $\phi$  está sempre definido em um aberto e é sempre contínuo nesse aberto. Para demonstração e mais detalhes ver Doering e Lopes (2014).

As próximas definições darão os instrumentos para que possamos classificar diferentes tipos de sistemas com propriedades em comum.

**Definição 18.** Sejam  $\mathbf{f}_1 : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{f}_2 : \Psi \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dois campos de vetores em  $\mathbb{R}^n$ , com fluxos  $\phi_t^1$  e  $\phi_t^2$ , respectivamente. Dizemos que os campos  $\mathbf{f}_1$  e  $\mathbf{f}_2$ , ou então que os fluxos  $\phi_t^1$  e  $\phi_t^2$ , são *localmente conjugados* se existe um homeomorfismo  $h : \Omega \rightarrow \Psi$  tal que

$$\phi_t^2(h(\mathbf{Y}_0)) = h(\phi_t^1(\mathbf{Y}_0)), \quad (2.62)$$

para  $Y_0 \in \Omega$  e  $t$  suficientemente próximo de 0. O homeomorfismo  $h$  é chamado de *conjugação*.

**Definição 19.** Dizemos que um ponto de equilíbrio  $\mathbf{Y}_0$  de um sistema não-linear é *hiperbólico* se todos os autovalores de  $D\mathbf{f}_{\mathbf{Y}_0}$  têm parte real não nulas.

**Definição 20.** Seja  $\mathbf{Y}_0 \in \mathbb{R}^n$  um ponto de equilíbrio da equação diferencial  $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\mathbf{Y})$ . Dizemos que  $\mathbf{Y}_0$  é um *equilíbrio estável* se, para toda vizinhança  $\mathcal{O}$  de  $\mathbf{Y}_0$  em  $\mathbb{R}^n$ , existe uma vizinhança  $\mathcal{O}_1$  de  $\mathbf{Y}_0$  em  $\mathcal{O}$  tal que toda solução  $\mathbf{Y}(t)$  com  $\mathbf{Y}(0) \in \mathcal{O}_1$  está definida e permanece em  $\mathcal{O}$  para todo  $t > 0$  (Fig. 10). Dizemos que  $\mathbf{Y}_0$  é um *equilíbrio assintoticamente estável* se  $\mathcal{O}_1$  pode ser escolhida tal que, adicionalmente à propriedade de estabilidade, tivermos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}_0. \tag{2.63}$$

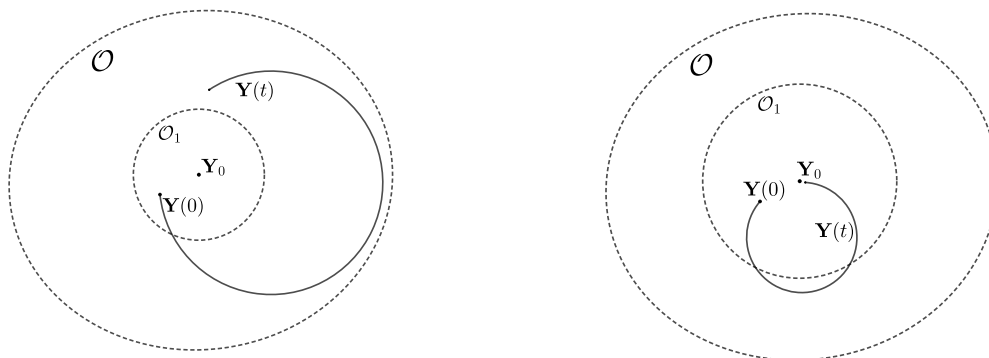


Figura 10 – Equilíbrio estável (diagrama da esquerda) e equilíbrio assintoticamente estável (diagrama da direita).

**Definição 21.** Seja  $\mathbf{Y}_0 \in \mathbb{R}^n$  um ponto de equilíbrio da equação diferencial  $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\mathbf{Y})$ . Dizemos que  $\mathbf{Y}_0$  é um *equilíbrio instável* se não é um equilíbrio estável. Dizemos que  $\mathbf{Y}_0$  é um *equilíbrio indiferente* se é um equilíbrio estável que não é assintoticamente estável.

O próximo teorema é um importante resultado pela sua utilidade no problema de estabilidade e pela simplicidade de aplicação. Para ler a demonstração, consultar Hartman (1963).

**Teorema 2** (Teorema de Linearização). *Suponha que o sistema  $n$ -dimensional  $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\mathbf{Y})$  tenha um ponto de equilíbrio em  $\mathbf{Y}_0$  que é hiperbólico. Então, o fluxo não-linear é conjugado ao fluxo do sistema linearizado em uma vizinhança de  $\mathbf{Y}_0$ .*

A simplicidade de aplicação do teorema reside no fato de que o comportamento nas vizinhanças um ponto de equilíbrio hiperbólico, com respeito a estabilidade, é obtido analisando os autoespaços do sistema linearizado. Já a classificação de pontos de equilíbrio não-hiperbólicos pode ser bem trabalhosa, como veremos adiante.

Existem também propriedades da equação diferencial que podem impossibilitar a existência de alguns tipos de equilíbrios, como veremos na próxima proposição.

**Definição 22.** Uma *integral primeira* de uma equação diferencial autônoma de primeira ordem  $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\mathbf{Y})$ , definida em um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , é uma função  $W : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que é diferenciável e não constante em qualquer aberto contido em  $\Omega$ , mas que é constante ao longo de cada trajetória da equação diferencial. Dizemos que  $k$  integrais primeiras  $W_1, W_2, \dots, W_k$  são *linearmente independentes* se, para todo  $\mathbf{Y} \in \Omega - \{\mathbf{Y} | \mathbf{f}(\mathbf{Y}) = 0\}$ , os vetores

$$\nabla W_1(\mathbf{Y}), \nabla W_2(\mathbf{Y}), \dots, \nabla W_k(\mathbf{Y}) \quad (2.64)$$

são linearmente independentes.

Note que, do Teorema da Função Implícita (LIMA, 2014),  $n - 1$  integrais primeiras linearmente independentes permitem identificar as curvas soluções em  $\mathbb{R}^n$  da equação diferencial em  $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\mathbf{Y})$  (DOERING; LOPES, 2014)[p.172].

**Proposição 4.** *Se existe um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para o campo  $\mathbf{f}$  então a equação diferencial  $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\mathbf{Y})$  não possui integrais primeiras.*

*Demonstração.* O argumento da prova foi retirado de Lopes (2013).

Mostraremos que qualquer função diferenciável  $W$  que é constante ao longo das trajetórias de  $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\mathbf{Y})$ , é necessariamente constante na vizinhança de pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis.

Sejam  $\mathbf{Y}_0$ ,  $\mathcal{O}_1$  e  $W$ , respectivamente, um ponto de equilíbrio assintoticamente estável da equação diferencial, uma vizinhança de  $\mathbf{Y}_0$  e uma função constante ao longo das trajetórias de  $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\mathbf{Y})$ . Dado  $\mathcal{O}$ , da assintoticidade estável de  $\mathbf{Y}_0$ , existe  $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$  vizinhança de  $\mathbf{Y}_0$ , tal que, para todo  $\mathbf{Y} \in \mathcal{O}_1$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}_0, \quad (2.65)$$

onde  $\phi_t$  é o fluxo da equação diferencial. Da continuidade de  $W$ , temos que

$$W \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(\mathbf{Y}) \right) = W(\mathbf{Y}_0). \quad (2.66)$$

Como  $W(\phi_t(\mathbf{Y}))$  é constante, então  $W(\phi_t(\mathbf{Y})) = W(\mathbf{Y}_0)$ . Logo,  $W$  é constante em um aberto no domínio, pois  $\mathbf{Y}$  é arbitrário. Portanto  $W$  não é uma integral primeira de  $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\mathbf{Y})$ .  $\square$

Para sistemas Hamiltonianos, temos um corolário imediato da proposição acima, uma vez que  $H$  é uma integral primeira.

**Corolário 2.** *Sistemas Hamiltonianos não possuem equilíbrios assintoticamente estáveis.*

Muitas vezes, na classificação da estabilidade de pontos de equilíbrio, trabalhar com a própria equação diferencial torna-se infrutífero. Em alguns casos, podemos utilizar-nos de funções auxiliares que nos possibilitam distinguir entre estabilidade e instabilidade dos equilíbrios. A ideia é utilizar-se de uma generalização do conceito de energia (HALE, 1980).

**Definição 23.** Sejam  $\mathbf{Y}_0$  um ponto de equilíbrio para o campo  $\mathbf{f}$  e  $V : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua na vizinhança  $\mathcal{B}$  de  $\mathbf{Y}_0$  em  $\mathbb{R}^n$  e diferenciável em  $\mathcal{B} - \{\mathbf{Y}_0\}$ . Dizemos que  $V$  é uma *função de Liapunov* para  $\mathbf{f}$  em  $\mathbf{Y}_0$  se  $V(\mathbf{Y}_0) = 0$  e, para cada  $\mathbf{Y} \in \mathcal{B} - \{\mathbf{Y}_0\}$ , valem

- a)  $V(\mathbf{Y}) > 0$ ;
- b)  $\frac{d}{dt}V(\phi_t(\mathbf{Y})) \leq 0$ .

Se, além das condições acima, para cada  $\mathbf{Y} \in \mathcal{B} - \{\mathbf{Y}_0\}$  vale

- c)  $\frac{d}{dt}V(\phi_t(\mathbf{Y})) < 0$ ,

dizemos que  $V$  é uma *função de Liapunov estrita* para  $\mathbf{f}$  em  $\mathbf{Y}_0$ .

**Teorema 3** (Teorema de Estabilidade de Liapunov). *Seja  $\mathbf{Y}_0$  um ponto de equilíbrio de  $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\mathbf{Y})$ . Se existir uma função de Liapunov para  $\mathbf{f}$  em  $\mathbf{Y}_0$ , então  $\mathbf{Y}_0$  é um ponto de equilíbrio estável. Se existir uma função de Liapunov estrita para  $\mathbf{f}$  em  $\mathbf{Y}_0$ , então  $\mathbf{Y}_0$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Hirsch, Smale e Devaney (2013). Do Teo. 3, temos a seguinte proposição:

**Proposição 5.** *Considere um sistema mecânico conservativo com potencial  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\Omega$  aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Se  $\mathbf{X}_0$  é um ponto de mínimo local estrito para  $U$  então  $\mathbf{Y}_0 = (\mathbf{X}_0, \mathbf{L}_0)$ , com  $\mathbf{L}_0 = 0$ , é um ponto de equilíbrio estável para  $\mathbf{f}$ .*

*Demonstração.* Esta demonstração foi adaptada de Lopes (2013).

Seja  $V(\mathbf{X}, \mathbf{L}) = E_T(\mathbf{X}, \mathbf{L}) - U(\mathbf{X}_0) = K(\mathbf{L}) + U(\mathbf{X}) - U(\mathbf{X}_0)$ . Então  $V(\mathbf{Y}_0) = V(\mathbf{X}_0, 0) = 0$  e, como  $\mathbf{X}_0$  é mínimo local estrito para  $U$ , existe uma vizinhança  $\mathcal{B}_1$  de  $\mathbf{X}_0$  tal que  $U(\mathbf{X}) - U(\mathbf{X}_0) > 0$  para qualquer  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_1 - \{\mathbf{X}_0\}$ . Segue-se que  $V(\mathbf{X}, \mathbf{L}) = K(\mathbf{L}) + U(\mathbf{X}) - U(\mathbf{X}_0) > 0$  para qualquer  $(\mathbf{X}, \mathbf{L}) \in \mathcal{B}_1 \times \mathbb{R}^n - \{\mathbf{Y}_0\}$ . Como a energia é constante ao longo das soluções, temos que

$$\frac{d}{dt}V(\phi_t(\mathbf{X}, \mathbf{L})) = \frac{d}{dt}E_T(\mathbf{X}, \mathbf{L}) = 0, \quad (2.67)$$

para qualquer  $(\mathbf{X}, \mathbf{L}) \in \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \mathbb{R}^n$ . Pelo teorema de Liapunov,  $\mathbf{X}_0 = (\mathbf{X}_0, \mathbf{0})$  é um ponto de equilíbrio estável para  $\mathbf{f}$ .  $\square$

Frisamos que obter a instabilidade de pontos que não são mínimos locais do potencial é um problema relevante conhecido como “Inversão do Teorema de Lagrange-Dirichlet” (NEGRINI, 1995) e, para o caso do potencial em questão, utilizaremos resultados de Nikolay Gur’yevich Chetaev (1902–1959) (ROUCHE; HABETS; LALOY, 1977) nos pontos críticos do tipo máximo e sela do potencial.

**Definição 24.** Sejam  $\mathbf{Y}_0$  um ponto de equilíbrio para o campo  $\mathbf{f}$  e  $V : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e diferenciável no aberto  $\mathcal{B}$ , tal que  $\mathbf{Y}_0 \in \bar{\mathcal{B}}$ . Dizemos que  $V$  é uma *função de Chetaev* para  $\mathbf{f}$  em  $\mathbf{Y}_0$  se  $V(\mathbf{Y}_0) = 0$  e, para cada  $\mathbf{Y} \in \mathcal{B} - \{\mathbf{Y}_0\}$ , valem

- a)  $V(\mathbf{Y}) > 0$ ;
- b)  $\frac{d}{dt}V(\phi_t(\mathbf{Y})) > 0$ .

A demonstração deste próximo teorema pode ser encontrada em Rouche, Habets e Laloy (1977).

**Teorema 4.** *Seja  $\mathbf{Y}_0$  um ponto de equilíbrio de  $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\mathbf{Y})$ . Se existir uma função de Chetaev para  $\mathbf{f}$  em  $\mathbf{Y}_0$ , então  $\mathbf{Y}_0$  é um ponto instável.*

Note que a dificuldade na aplicação desse teorema é encontrar a função  $\mathbf{f}$  e o aberto  $\mathcal{B}$ .

**Proposição 6.** *Considere um sistema Hamiltoniano com  $H(\mathbf{X}, \mathbf{L}) = K(\mathbf{X}, \mathbf{L}) + U(\mathbf{X})$ . Suponha que a energia cinética é  $K(\mathbf{X}, \mathbf{L}) = \frac{1}{2}\mathbf{L}^T \mathcal{M}(\mathbf{X})\mathbf{L}$  com  $\mathcal{M}(\mathbf{X})$  uma matriz simétrica,  $C^1$  e  $\mathcal{M}(\mathbf{0})$  uma matriz positiva definida e que a energia potencial  $U(\mathbf{X})$  é  $C^1$ , com  $U(-\mathbf{X}) = U(\mathbf{X})$ ,  $U(\mathbf{0}) = 0$  e  $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Se existe uma bola  $\mathcal{B}_\varepsilon$  de raio  $\varepsilon > 0$ , com  $\bar{\mathcal{B}}_\varepsilon \subset \Omega$ , tal que*

- (i)  $\mathcal{A} = \{\mathbf{X} \in \mathcal{B}_\varepsilon : U(\mathbf{X}) < 0\} \neq \emptyset$ ;
- (ii)  $\mathbf{0} \in \partial\mathcal{A}$  (fronteira de  $\mathcal{A}$ );
- (iii)  $\langle \frac{\partial U}{\partial \mathbf{X}}, \mathbf{X} \rangle \neq 0$  para todo  $\mathbf{X} \in \mathcal{A}$ .

Então a origem  $\mathbf{X} = \mathbf{L} = \mathbf{0}$  é instável.

*Demonstração.* Esta demonstração foi adaptada de Rouche, Habets e Laloy (1977).

Dado o conjunto  $\mathcal{A}$ , denotemos por  $\mathcal{A}_+$  e  $\mathcal{A}_-$  as componentes conexas de  $\mathcal{A}$  tais que  $\langle \frac{\partial U}{\partial \mathbf{X}}, \mathbf{X} \rangle > 0$  e  $\langle \frac{\partial U}{\partial \mathbf{X}}, \mathbf{X} \rangle < 0$ , respectivamente, conforme ilustrado na Fig. 11. Tome

$$\mathcal{D} := \{(\mathbf{X}, \mathbf{L}) : \mathbf{X} \in \mathcal{A}_-, H(\mathbf{X}, \mathbf{L}) > 0, \langle \mathbf{X}, \mathbf{L} \rangle > 0\}. \quad (2.68)$$

Assim,

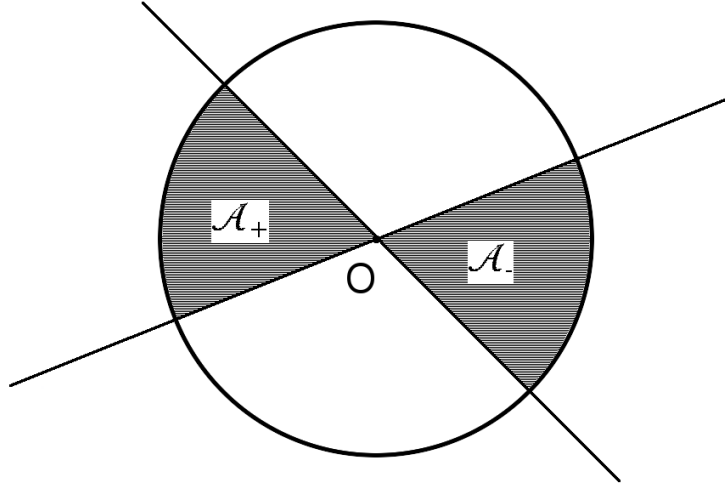
$$H(\mathbf{0}, \mathbf{L}) = K(\mathbf{0}, \mathbf{L}) - U(\mathbf{0}) = \frac{1}{2}\mathbf{L}^T \mathcal{M}(\mathbf{0})\mathbf{L} > 0, \quad (2.69)$$

para qualquer  $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$ . Logo,  $H(\mathbf{X}, \mathbf{L}) > 0$  para  $\|\mathbf{X}\| < \varepsilon'$  e para qualquer  $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$ .

Como  $H(\mathbf{X}, \mathbf{L}) = H(\mathbf{X}, -\mathbf{L})$ , então  $\mathcal{D}$  é não-vazio. Claramente  $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \in \partial\mathcal{D}$ , pois  $\mathbf{0} \in \partial\mathcal{A}_-$ , por hipótese, e  $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$  está na fronteira de  $\{H(\mathbf{X}, \mathbf{L}) > 0\}$  e  $\{\langle \mathbf{X}, \mathbf{L} \rangle > 0\}$ .

A função  $V = \langle \mathbf{X}, \mathbf{L} \rangle H$  é tal que, para todo  $(\mathbf{X}, \mathbf{L}) \in \mathcal{D}$ , temos

- (a)  $V(\mathbf{X}, \mathbf{L}) > 0$ ;


 Figura 11 – Conjunto  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \cup \mathcal{A}_-$ .

(b) A derivada da função  $V$  é dada por

$$\dot{V} = \left( \langle \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{L} \rangle + \langle \mathbf{X}, \dot{\mathbf{L}} \rangle \right) H \quad (2.70)$$

$$= \left( \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{L}}, \mathbf{L} \right\rangle - \left\langle \mathbf{X}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}} \right\rangle \right) H \quad (2.71)$$

$$= \left( \left\langle \frac{\partial K}{\partial \mathbf{L}}, \mathbf{L} \right\rangle - \left\langle \mathbf{X}, \frac{\partial K}{\partial \mathbf{X}} \right\rangle - \left\langle \mathbf{X}, \frac{\partial U}{\partial \mathbf{X}} \right\rangle \right) H \quad (2.72)$$

$$= \left( 2K - \left\langle \mathbf{X}, \frac{\partial K}{\partial \mathbf{X}} \right\rangle - \left\langle \mathbf{X}, \frac{\partial U}{\partial \mathbf{X}} \right\rangle \right) H \quad (2.73)$$

$$> 0, \quad (2.74)$$

pois  $K$  e  $\frac{\partial K}{\partial \mathbf{X}}$  são quadráticas em  $\mathbf{L}$  e  $\langle \mathbf{X}, \frac{\partial U}{\partial \mathbf{X}} \rangle < 0$ , por hipótese.

Assim, definimos

$$S(\mathbf{X}, \mathbf{L}) := 2K - \left\langle \frac{\partial K}{\partial \mathbf{X}}, \mathbf{X} \right\rangle = \mathbf{L}^T A(\mathbf{X}) \mathbf{L}, \quad (2.75)$$

com  $A(\mathbf{X})$  uma matriz simétrica contínua em  $\mathbf{X}$ . Logo,  $S(\mathbf{0}, \mathbf{L}) = \mathbf{L}^T \mathcal{M}(\mathbf{0}) \mathbf{L}$  e  $A(\mathbf{0}) = \mathcal{M}(\mathbf{0})$ . Portanto,  $S(\mathbf{X}, \mathbf{L}) > 0$  para  $\|\mathbf{X}\| < \varepsilon''$  e qualquer  $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$ .

Tomando  $\varepsilon$  de  $A$  menor que  $\varepsilon'$  e  $\varepsilon''$ , temos que  $V, \dot{V} > 0$  em  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D} \neq \emptyset$  e  $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \in \partial \mathcal{D}$ .

Se  $\langle \frac{\partial U}{\partial \mathbf{X}}, \mathbf{X} \rangle > 0$  em uma componente  $\mathcal{A}_+$  de  $\mathcal{A}$ , então, de  $U(-\mathbf{X}) = U(\mathbf{X})$ , temos que

$$\left\langle \frac{\partial U(-\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}, -\mathbf{X} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial U(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}, \mathbf{X} \right\rangle \quad (2.76)$$

$$< 0 \quad (2.77)$$

e  $-\mathcal{A} = \mathcal{A}$ . Assim, existe  $-\mathcal{A}_+ = \mathcal{A}_-$  componente de  $\mathcal{A}$  onde  $\langle \frac{\partial U}{\partial \mathbf{X}}, \mathbf{X} \rangle < 0$ .  $\square$

Além de classificar os pontos de equilíbrio, saber quando os equilíbrios mudam seu comportamento e quais pontos do espaço de fase convergem a eles é uma informação importante no estudo da dinâmica e no comportamento de longo prazo do sistema. A definição e proposição a seguir estão relacionados com esse contexto.

**Definição 25.** Seja  $\mathbf{Y}_0$  um ponto de equilíbrio do sistema. Chamamos de *bacia de atração* de  $\mathbf{Y}_0$  o conjunto de todas as condições iniciais para as quais as trajetórias do sistema tendem ao ponto  $\mathbf{Y}_0$ .

**Proposição 7.** *Seja  $\mathbf{Y}_0$  um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Se  $\mathfrak{B}$  é a bacia de atração de  $\mathbf{Y}_0$ , então  $\mathfrak{B}$  é um conjunto não-vazio e aberto.*

*Demonstração.* Esta demonstração foi adaptada de Doering e Lopes (2014).

Como  $\mathbf{Y}_0$  é ponto de equilíbrio, temos que  $\mathbf{Y}_0 \in \mathfrak{B}$ , de modo que a bacia de atração é não-vazia.

Para a segunda parte da proposição, devemos mostrar que, se  $\mathbf{Z} \in \mathfrak{B}$ , então existe um aberto  $\mathcal{W}$  contendo  $\mathbf{Z}$  tal que todos os seus pontos também tendem a  $\mathbf{Y}_0$ . Tome  $\mathcal{W}_0$  uma vizinhança de  $\mathbf{Y}_0$  tal que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \phi_s(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}_0 \quad (2.78)$$

para cada ponto  $\mathbf{Y} \in \mathcal{W}_0$ . A existência de  $\mathcal{W}_0$  é assegurada pela estabilidade assintótica de  $\mathbf{Y}_0$ . Como  $\mathbf{Z} \in \mathfrak{B}$ , temos que  $\mathbf{Y} = \phi_{t_0}(\mathbf{Z}) \in \mathcal{W}_0$  para algum  $t_0$  suficientemente grande e, como  $\phi_{t_0}(\mathbf{Z})$  é contínua em  $\mathbf{Z}$ , existe uma vizinhança  $\mathcal{W}$  de  $\mathbf{Z}$  tal que  $\phi_{t_0}(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}_0$ . Agora, dado  $\mathbf{U} \in \mathcal{W}$ , temos que  $\lim \phi_t(\mathbf{U}) = \lim \phi_s(\phi_{t_0}(\mathbf{U})) = \mathbf{Y}_0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , pois  $\phi_{t_0}(\mathbf{U}) \in \mathcal{W}_0$  e  $s = t - t_0 \rightarrow +\infty$ . Portanto,  $\mathfrak{B}$  é aberto.  $\square$

**Definição 26.** Seja  $\mathbf{f}_\lambda(X)$  uma família de campos autônomos de  $\mathbb{R}^n$  à  $k$ -parâmetros ( $\lambda \in \Lambda \subseteq \mathbb{R}^k$ ). O  $\lambda_0 \in \Lambda$  é uma *bifurcação* do sistema quando em toda vizinhança de  $\lambda_0$  em  $\Lambda$  existem parâmetros  $\lambda_1, \lambda_2$  tais que  $\mathbf{f}_{\lambda_1}, \mathbf{f}_{\lambda_2}$  não são conjugados.

Ou seja, em uma bifurcação, pequenas mudanças nos parâmetros modificam drasticamente o comportamento de longo prazo do sistema.

## 2.3 Funções Elípticas

Explanaremos brevemente alguns aspectos das funções elípticas, as quais nos serão úteis nas soluções analíticas de alguns casos de configurações de dipolos. Primeiramente, definiremos as integrais elípticas e as funções elípticas de Jacobi conforme Abramowitz e Stegun (1972):

**Definição 27.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada *integral elíptica* se for da forma

$$f(t) = \int_c^t R(x, y) dx, \quad (2.79)$$

com  $c$  constante,  $R(x, y)$  igual a uma função racional de  $x$  e  $y$ , onde  $y^2$  é um polinômio cúbico ou quártico em  $x$ .

Por exemplo, tome  $R(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x + y^2}$ , onde  $y^2 = x^3 + 1$ . Assim, temos que

$$f(t) = \int_c^t R(x, y) dx \quad (2.80)$$

$$= \int_c^t \frac{x^2 + y^2}{x + y^2} dx \quad (2.81)$$

$$= \int_c^t \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^3 + x + 1} dx \quad (2.82)$$

é uma integral elíptica.

*Observação.* As integrais elípticas não podem, em geral, ser expressas em termos de funções elementares, exceto nos seguintes casos:

1. Quando  $R(x, y)$  não contém potências ímpares de  $y$ ;
2. Quando o polinômio  $y^2$  tiver um fator repetido.

**Definição 28.** Seja  $m \in [0, 1]$ . Chama-se *integral elíptica de primeira espécie* àquelas integrais da forma

$$F(\varphi|m) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}}. \quad (2.83)$$

A constante  $m$  é chamada de *parâmetro* da função elíptica e  $\varphi$  sua *amplitude*. Se tomarmos  $m = \sin^2 \alpha$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi]$ , podemos escrever a integral como

$$F(\varphi|\alpha) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta}}. \quad (2.84)$$

Neste caso,  $\alpha$  é chamado de *ângulo modular* da função elíptica. Finalmente, se tomarmos  $x = \sin \varphi$ , podemos escrever a integral elíptica de primeira espécie como

$$F(x|m) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - mt^2)}}. \quad (2.85)$$

**Definição 29.** Chama-se *integral elíptica de segunda espécie* àquelas com o formato

$$E(\varphi|\alpha) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta} d\theta, \quad (2.86)$$

ou ainda,

$$E(x|m) = \int_0^x \sqrt{\frac{1 - mt^2}{1 - t^2}} dt, \quad (2.87)$$

onde  $x = \sin \varphi$ .



**Definição 30.** Seja  $n \in \mathbb{R}$ . Chama-se *integral elíptica de terceira espécie* àquelas com o formato

$$\Pi(n; \varphi | \alpha) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{(1 - n \sin^2 \theta) \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta}}, \quad (2.88)$$

ou ainda,

$$\Pi(n; x | m) = \int_0^x \frac{dt}{(1 - nt^2) \sqrt{(1 - t^2)(1 - mt^2)}} \quad (2.89)$$

onde  $x = \sin \varphi$ . A constante  $n$  é chamada de *característica* e pode assumir qualquer valor real.

**Definição 31.** As integrais elípticas são chamadas completas quando a amplitude é  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Assim, temos que a *integral elíptica completa de primeira espécie* é

$$K(m) = K = F\left(\frac{\pi}{2} | m\right) \quad (2.90)$$

e que a *integral elíptica completa de segunda espécie* é

$$E(m) = E(K | m). \quad (2.91)$$

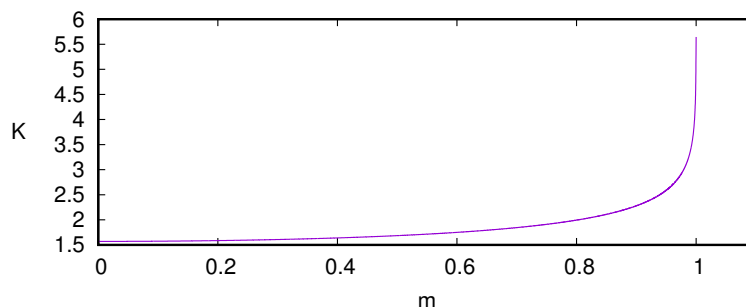


Figura 12 – Gráfico da  $K(m)$ .

*Observação.* Utilizando-se as devidas fórmulas de reduções e transformações, toda integral elíptica pode ser expressa como o somatório de integrais de funções racionais sobre  $x$  com integrais elípticas de primeira, segunda e terceira espécies.

**Definição 32.** Sejam  $m \in [0, 1]$  dado e  $u(\varphi) = F(\varphi | m)$ . A função inversa de  $u(\varphi)$  é chamada *amplitude* e é representada por

$$\varphi = \text{am}(u). \quad (2.92)$$

A função

$$\Delta(\varphi) = \sqrt{1 - m \sin^2 \varphi} \quad (2.93)$$

é chamada de *delta amplitude*.

**Definição 33.** Seja  $m \in [0, 1]$  dado e seja  $u(\varphi) = F(\varphi|m)$ . As funções elípticas de Jacobi denotadas por  $\text{sn}$ ,  $\text{cn}$  e  $\text{dn}$  são definidas como

$$\text{sn}(u) = \sin \varphi, \tag{2.94}$$

$$\text{cn}(u) = \cos \varphi, \tag{2.95}$$

$$\text{dn}(u) = \Delta(\varphi). \tag{2.96}$$

*Observação.* Note que as funções elípticas dependem do argumento  $u$  e do módulo  $m$ , conforme ilustrado na Fig. 13. Por isso, a notação padrão é  $\text{sn}(u|m)$ , por exemplo. Mas, por motivos de clareza, quando não forem necessários  $u$  e  $m$  para o entendimento, os omitiremos. Observe também que, quando  $m = 0$ ,  $\text{sn} = \sin$ ,  $\text{cn} = \cos$  e  $\text{dn} \equiv 1$ . Além disso, assim como as identidades trigonométricas, diretamente das definições obtemos as relações abaixo:

$$\text{sn}(0|m) = 0, \text{cn}(0|m) = 1, \text{dn}(0|m) = 1, \tag{2.97}$$

$$\text{sn}^2 + \text{cn}^2 = 1, \tag{2.98}$$

$$\text{dn}^2 + m \text{sn}^2 = 1, \tag{2.99}$$

$$\frac{d}{du} \text{sn} = \text{cn} \text{dn}, \tag{2.100}$$

$$\frac{d}{du} \text{cn} = -\text{sn} \text{dn}, \tag{2.101}$$

$$\frac{d}{du} \text{dn} = -m \text{sn} \text{cn}. \tag{2.102}$$

Note também, que se, ao invés da definição que utilizamos, considerarmos inicialmente funções que satisfazem (2.97) (2.98) (2.99) e (2.100), obtemos, via série de Maclaurin, as funções elípticas de Jacobi, conforme encontra-se em Dixon (1894).

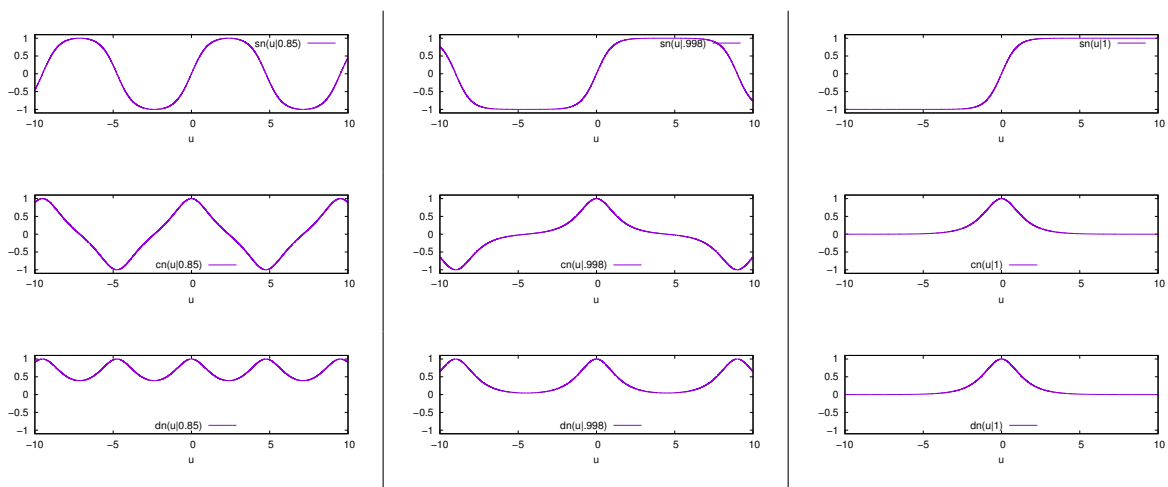


Figura 13 – Gráficos das funções elípticas de Jacobi  $\text{sn}$ ,  $\text{cn}$  e  $\text{dn}$ , em cada coluna, respectivamente, com  $m = 0.85$ ,  $m = 0.998$  e  $m = 1$ .

A fim de obtermos alguma intuição a respeito das funções elípticas acima, iremos obtê-las geometricamente, conforme Schwalm (2015).

Em analogia às funções trigonométricas obtidas no círculo unitário, considere uma elipse de excentricidade  $k = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$  com o eixo menor normalizado e  $a \geq 1$ , como ilustrada na Fig. 14:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + y^2 = 1. \quad (2.103)$$

Assim, para um ponto  $P = (x, y)$  na elipse, seja  $u_P$  o argumento nesse ponto (inicialmente

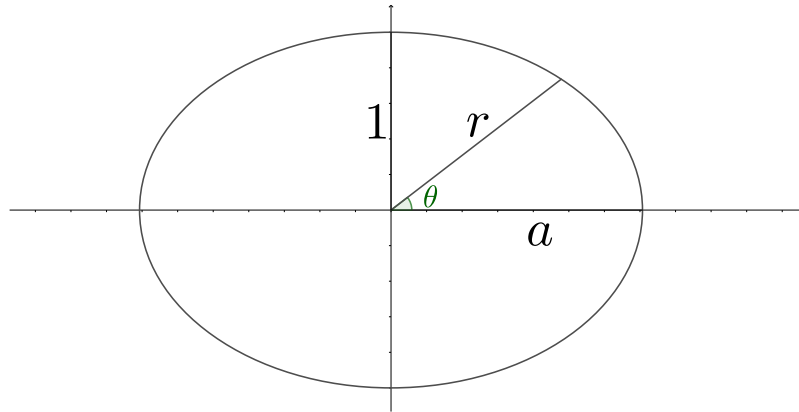


Figura 14 – Elipse com excentricidade  $k = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$ , eixo menor medindo 1 e eixo maior medindo  $a \geq 1$ .

não nos preocupemos em como obtê-lo). Tome as funções e definições a seguir:

$$\operatorname{sn}(u_P) = y, \quad (2.104)$$

$$\operatorname{cn}(u_P) = \frac{x}{a}, \quad (2.105)$$

$$\operatorname{dn}(u_P) = \frac{r}{a}. \quad (2.106)$$

Obtemos, a partir das definições, de (2.103) e da relação geométrica  $x^2 + y^2 = r^2$ , as equações (2.97), (2.98) e (2.99), onde  $m = k^2$ . Agora, tome

$$u = u_P = \int_0^{\theta(P)} r(\theta) d\theta. \quad (2.107)$$

Logo,  $du = r d\theta$  e obtemos (2.100), (2.101), (2.102). Portanto, novamente obtemos as funções elípticas de Jacobi  $\operatorname{sn}(u|m)$ ,  $\operatorname{cn}(u|m)$  e  $\operatorname{dn}(u|m)$ .

Assim como as funções trigonométricas, podemos considerar as funções recíprocas e os quocientes entre funções, conforme notação a seguir:

$$\operatorname{ns} = (\operatorname{sn})^{-1}, \quad (2.108)$$

$$\operatorname{nc} = (\operatorname{cn})^{-1}, \quad (2.109)$$

$$\operatorname{nd} = (\operatorname{dn})^{-1}, \quad (2.110)$$

$$\operatorname{sc} = \frac{\operatorname{sn}}{\operatorname{cn}}, \quad (2.111)$$

$$\operatorname{cs} = \frac{\operatorname{cn}}{\operatorname{sn}}, \quad (2.112)$$

$$\operatorname{sd} = \frac{\operatorname{sn}}{\operatorname{dn}}, \quad (2.113)$$

$$\operatorname{ds} = \frac{\operatorname{dn}}{\operatorname{sn}}, \quad (2.114)$$

$$\operatorname{cd} = \frac{\operatorname{cn}}{\operatorname{dn}}, \quad (2.115)$$

$$\operatorname{dc} = \frac{\operatorname{dn}}{\operatorname{cn}}. \quad (2.116)$$

Por fim, note que as equações elípticas de Jacobi satisfazem equações do tipo

$$\left(\frac{d}{du} \operatorname{zn}\right)^2 = A \operatorname{zn}^4 + B \operatorname{zn}^2 + C, \quad (2.117)$$

onde  $\operatorname{zn} = \operatorname{zn}(u|m)$  é uma das doze funções elípticas e os coeficiente  $A$ ,  $B$  e  $C$  são funções do parâmetro  $m$  que caracteriza a função elíptica particular. Por exemplo,

$$\frac{d}{du} \operatorname{cn} = \operatorname{sn} \operatorname{dn} = \sqrt{1 - \operatorname{cn}^2} \sqrt{1 - m(1 - \operatorname{cn}^2)}, \quad (2.118)$$

$$\left(\frac{d}{du} \operatorname{cn}\right)^2 = (1 - \operatorname{cn}^2)(1 - m + m \operatorname{cn}^2) = -m \operatorname{cn}^4 + (2m - 1) \operatorname{cn}^2 + (1 - m). \quad (2.119)$$

Logo,  $A = -m$ ,  $B = (2m - 1)$  e  $C = (1 - m)$ .

Tabela 1 – Coeficientes de (2.117) para cada uma das doze funções elípticas de Jacobi (SCHWALM, 2015).

	A	B	C
sn	$m$	$-(1 + m)$	1
cn	$-m$	$-(1 - 2m)$	$(1 - m)$
dn	$-1$	$(2 - m)$	$-(1 - m)$
ns	1	$-(1 + m)$	$m$
nc	$(1 - m)$	$-(1 - 2m)$	$-m$
nd	$-(1 - m)$	$(2 - m)$	$-1$
sc	$(1 - m)$	$(2 - m)$	1
cs	1	$(2 - m)$	$(1 - m)$
sd	$-m(1 - m)$	$-(1 - 2m)$	1
ds	1	$-(1 - 2m)$	$-m(1 - m)$
cd	$m$	$-(1 + m)$	1
dc	1	$-(1 + m)$	$m$

## 2.4 Métodos Numéricos

Nesta seção explicitaremos os métodos numéricos e algoritmos utilizados na obtenção dos dados deste trabalho.

### 2.4.1 Método de Runge-Kutta-Fehlberg

Uma vez que a maioria das equações encontradas na prática não podem ser solucionadas analiticamente, os métodos numéricos são os recursos que nos possibilitam estudar essas equações (FRANCO, 2006). No entanto, necessitamos ter algum controle sobre a confiabilidade do método, ou seja, de uma tolerância de divergência da solução teórica.

**Definição 34.** Seja

$$\begin{cases} \dot{y} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.120)$$

um Problema de Valor Inicial (PVI), onde  $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Considere  $\{x_n\}$  uma sequência de pontos em  $[a, b]$  e um método de aproximação definido pela relação

$$y_{n+1} - y_n = h\varphi(x_n, y_n, h), \quad (2.121)$$

onde  $h$  é o tamanho do passo e  $y_n$  é uma aproximação em  $x_n$  para a solução teórica  $y(x_n)$ . Definimos que o método é de *ordem*  $q$ , se  $q$  é o maior inteiro tal que

$$y(x + h) - y(x) - h\varphi(x, y(x), h) = O(h^{q+1}). \quad (2.122)$$

No desenvolvimento deste trabalho, o método de obtenção de solução numérica de PVI utilizado foi o Método Runge-Kutta-Fehlberg interno ao Maple 2016 (WATERLOO MAPLE INC., 2016). Trata-se de um método que combina as técnicas de Runge-Kutta de

quarta e quinta ordens para monitorar erros e efetuar uma estratégia dinâmica de redução de passos. Seja um PVI conforme (2.120). Esta técnica utiliza um método Runge-Kutta com erro de truncamento local de ordem cinco, dado por

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6, \quad (2.123)$$

para estimar o erro local em um método Runge-Kutta de ordem quatro (BURDEN; FAIRES; BURDEN, 2016) dado por

$$y_{i+1} = y_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5, \quad (2.124)$$

onde as equações dos coeficientes  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$  são mostradas no algoritmo a seguir. Assim, o método que utilizamos neste trabalho é de ordem 4.

Explicaremos o algoritmo do método a seguir. Para aproximar a solução do PVI da equação (2.120) com um truncamento local dentro de uma determinada tolerância (BURDEN; FAIRES; BURDEN, 2016), fazemos:

**Input:** pontos extremos  $a, b$ ; condição inicial  $y_0$ ; tolerância  $TOL$ ; tamanho máximo do passo  $hmax$ ; tamanho mínimo do passo  $hmin$ .

**Output:**  $x_n, y_n, h$ , onde  $y_n$  aproxima  $y(x_n)$  e o passo de tamanho  $h$  foi usado, ou uma mensagem de que o tamanho mínimo de passo foi excedido.

1: Atribua  $x_n := a$ ;

$y_n := y_0$ ;

$h := hmax$ ;

$FLAG := 1$ ;

2: OUTPUT( $x_n, y_n$ );

3: **while** FLAG=1 **do**

4:  $k_1 := hf(x_i, y_i)$ ;

$$k_2 := hf\left(x_i + \frac{h}{4}, y_i + \frac{1}{4}k_1\right);$$

$$k_3 := hf\left(x_i + \frac{3h}{8}, y_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right);$$

$$k_4 := hf\left(x_i + \frac{12h}{13}, y_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right);$$

$$k_5 := hf\left(x_i + h, y_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4101}k_4\right);$$

$$k_6 := hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right)$$

$$R := \frac{1}{h} \left| \frac{1}{360}k_1 - \frac{128}{4275}k_3 - \frac{2197}{75240}k_4 + \frac{1}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \right|;$$

// Note que o erro de truncamento local  $R = \frac{1}{h}|\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}|$  em (2.123) e (2.124).

```

5:  if  $R \leq TOL$  then
6:      Atribua  $x_n := x_n + h$ ; // (Aproximação aceita.)
           $y_n := y_n + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$ ;
          OUTPUT( $x_n, y_n, h$ );
7:  end if
8:  Atribua  $\delta := 0.84 \left( \frac{TOL}{R} \right)^{\frac{1}{4}}$ ;
9:  if  $\delta \leq 0.1$  then
10:      $h := 0.1h$ ;
11:  else if  $\delta \geq 4$  then
12:      $h := 4h$ ;
13:  else
14:     Atribua  $h := \delta h$ ;
15:  end if
16:  if  $h > hmax$  then
17:      $h := hmax$ ;
18:  end if
19:  if  $X_n \geq b$  then
20:      $FLAG := 0$ ;
21:  else if  $x_n + h > b$  then
22:     Atribua  $h := b - x_n$ ;
23:  else if  $h < hmin$  then
24:     Atribua  $FLAG := 0$ ;
25:     OUTPUT('minimo de  $h$  excedido'); // (Procedimento completado com insu-
        cesso.)
26:  end if
27: end while
28: STOP.

```

### 2.4.2 Bacias de Atração

Com vistas a entender a dinâmica da interação de dois dipolos magnéticos com amortecimento, utilizaremos um estudo numérico das bacias de atração do sistema mecânico. Esta ferramenta nos possibilitará apontar quais são os equilíbrios mais frequentes do sistema. Descreveremos a seguir o algoritmo utilizado para obter numericamente a bacia de atração. Para tanto, considere que a função  $dsolve(sys\_ode, ic)$  retorna um procedimento para calcular a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias  $sys\_ode$  sob as condições iniciais  $ic$ ; a função  $H(x)$  calcula o Hamiltoniano do sistema no ponto  $x$ ; a função  $|\cdot|$  é a função módulo usual; e a função  $numelems(x)$  retorna o comprimento do

array  $x$ . O algoritmo integra um PVI em uma malha especificada de condições iniciais até que duas condições sejam satisfeitas:

- i) se a solução  $s$  do PVI, no tempo  $t$ , tiver o Hamiltoniano próximo do Hamiltoniano de algum ponto de equilíbrio;
- ii) se a mesma solução estiver perto daquele ponto de equilíbrio.

**Input:** ponto inicial da malha  $[xmin, ymin]$ ; ponto final da malha  $[xmax, ymax]$ ; quantidade  $passos$  de subdivisões da malha; tempo  $t_0$  da primeira verificação das condições de parada do algoritmo; array  $eq$  de todos os pontos de equilíbrio do sistema; tolerância  $TOL$  de aproximação.

**Output:** arquivo  $data$  classificando cada ponto  $[x, y]$  da malha.

```

1:  $xpasso := \frac{xmax - xmin}{passos}$ ;
    $ypasso := \frac{ymax - ymin}{passos}$ ;
2: for  $l = 0$  to  $passos - 1$  do
3:   for  $m = 0$  to  $passos - 1$  do
4:      $ic := [xmin + l \cdot xpasso, ymin + m \cdot ypasso, 0, 0]$ ;
      $s := dsolve(\{sys\_ode, ic\})$ ; // Solução do PVI
      $FLAG1 := \mathbf{true}$ ;
      $FLAG2 := \mathbf{true}$ ;
      $t := t_0$ ; // Tempo da primeira verificação
5:     while  $(FLAG1 = \mathbf{true})$  and  $(FLAG2 = \mathbf{true})$  do
6:        $FLAG1 := \mathbf{true}$ 
7:       for  $i := 1$  to  $numelems(eq)$  do
8:          $FLAG1 := (|H(s(t)) - H(eq[i])| > TOL)$ ; // Atribui true se o Hamiltoniano
           do ponto  $s(t)$  estiver longe do Hamiltoniano do equilíbrio  $eq[i]$ .
9:       end for
10:       $FLAG2 := \mathbf{true}$ ;
       $tipo := 0$ ;
11:      while  $FLAG2$  and  $tipo \leq numelems(eq)$  do
12:         $tipo := tipo + 1$ ;  $FLAG2 := (|s(t)[1] - eq[tipo][1]| > TOL)$  or  $(|s(t)[2] - eq[tipo][2]| > TOL)$  // Atribui true se a coordenada  $x$  ou  $y$  do ponto  $s(t)$ 
           estiver longe das respectivas coordenadas do equilíbrio  $eq[tipo]$ .
13:      end while
14:       $t := t + 1$ ;
15:    end while
16:    print  $data$  " $ic[1], ic[2], tipo$ " // Grava classificação no arquivo  $data$ 
17:  end for

```



18: **end for**

19: **return** *data*

## 3 Problema Conservativo

### 3.1 O Modelo

Considere dois dipolos magnéticos planares, parados em relação a um referencial inercial, de dimensões desprezíveis em comparação com a distância  $r$  que os separa e com momentos magnéticos  $\mathbf{m}_1$  e  $\mathbf{m}_2$ . Tomando o dipolo 1 como origem  $O$  do sistema de coordenadas e a reta que os une como o eixo  $x$ , com  $\hat{\mathbf{r}}$  o vetor posição unitário. Façamos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  serem os ângulos vetoriais de rotação dos dipolos 1 e 2, respectivamente, em relação ao eixo  $x$  do sistema de coordenadas, conforme esquematizado na Fig. 15.

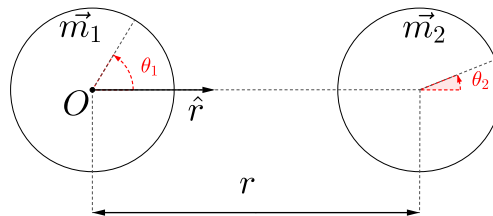


Figura 15 – Dois dipolos magnéticos  $\mathbf{m}_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , separados por uma distância  $r$ , com  $O$  a origem do sistema de coordenadas,  $\hat{\mathbf{r}}$  sendo o vetor posição unitário e  $\theta_i$  é o vetor ângulo de rotação do dipolo magnético  $i$  em relação ao eixo  $x$ .

Considerando a lei de Biot-Savart, (2.50), como a lei de interação eletromagnética entre os dipolos magnéticos, temos que o torque  $\boldsymbol{\tau}_{21}$  em  $\mathbf{m}_2$  devido  $\mathbf{m}_1$  é

$$\boldsymbol{\tau}_{21} = \mathbf{m}_2 \times \mathbf{B}_{21} \quad (3.1)$$

$$= \frac{3\mu_0}{4\pi r^3} \left[ (\mathbf{m}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{m}_2 \times \hat{\mathbf{r}}) - \frac{1}{3}(\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_1) \right], \quad (3.2)$$

onde  $B_{21}$  é o campo magnético do dipolo 2 interagindo com o dipolo 1.

Uma vez que os dipolos magnéticos estão restritos ao plano, as intensidades dos momentos magnéticos dos dipolos são

$$m_1 = (m_1 \cos \theta_1, m_1 \sin \theta_1) \quad (3.3)$$

$$m_2 = (m_2 \cos \theta_2, m_2 \sin \theta_2). \quad (3.4)$$

Estar no plano também nos permite relacionar o torque com a aceleração angular dos dipolos, conforme Prop. 3, obtendo

$$\boldsymbol{\tau}_{21} = I_2 \frac{d^2 \boldsymbol{\theta}_2}{dt^2}, \quad (3.5)$$

onde  $I_2$  é o momento de inércia do dipolo 2. Assim, de (3.2) e (3.5), temos que

$$I_2 \frac{d^2 \boldsymbol{\theta}_2}{dt^2} = \frac{3\mu_0}{4\pi r^3} \left[ (\mathbf{m}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{m}_2 \times \hat{\mathbf{r}}) - \frac{1}{3}(\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_1) \right]. \quad (3.6)$$

Portanto, como os vetores resultantes de (3.6) são sempre perpendiculares ao plano, podemos, por (3.3) e (3.4), utilizar a equação na forma escalar

$$I_2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} = \frac{3\mu_0}{4\pi r^3} [(m_1 \cos \theta_1)(-m_2 \sin \theta_2) - \frac{1}{3}(m_1 m_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 - m_1 m_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2)]. \quad (3.7)$$

Logo,

$$I_2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} = -\frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi r^3} (2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2). \quad (3.8)$$

Procedendo da mesma maneira com o outro dipolo magnético, obtemos

$$I_1 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} = -\frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi r^3} (2 \cos \theta_2 \sin \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_1). \quad (3.9)$$

Assim, o sistema mecânico obtido pela interação de dois dipolos magnéticos é

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_1 = -\alpha (2 \cos \theta_2 \sin \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_1) \\ I_2 \ddot{\theta}_2 = -\alpha (2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2) \end{cases}, \quad (3.10)$$

onde

$$\alpha = \frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi r^3}. \quad (3.11)$$

Matematicamente, a interação é regida por um sistema de equações diferenciais ordinárias autônomas não-lineares.

Note que em geral,  $\boldsymbol{\tau}_{12} \neq \boldsymbol{\tau}_{21}$ , ou seja, o sistema não é fechado. No entanto, conforme demonstrado em Landecker, Villani e Yung (1999), caso os dipolos estejam livres para translação, este sistema torna-se fechado e não viola a conservação do momento angular, pois deve-se considerar também os torques com relação ao centro de massa do sistema proveniente das forças entre dipolos (que não são paralelas a  $\mathbf{r}$ ).

Observe também que o torque  $\boldsymbol{\tau}$  do sistema é dado por

$$\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\tau}_{12}, \boldsymbol{\tau}_{21}) = -\nabla U(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2), \quad (3.12)$$

onde

$$U(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2) = \alpha (\sin \theta_1 \sin \theta_2 - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2) \quad (3.13)$$

é a energia potencial magnética do sistema. Logo, da Def. 10, o sistema é conservativo, com energia total dada por

$$E_T = K + U = \frac{1}{2}(I_1 \dot{\theta}_1^2 + I_2 \dot{\theta}_2^2) + \alpha (\sin \theta_1 \sin \theta_2 - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2), \quad (3.14)$$

onde  $K$  é a energia cinética de rotação do sistema.

A fim de obtermos a formulação hamiltoniana do sistema em questão, sejam  $L_1$  e  $L_2$  o momento angular dos dipolos 1 e 2, respectivamente. O hamiltoniano do sistema é

$$H(\theta_1, \theta_2, L_1, L_2) = \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \alpha(\sin \theta_1 \sin \theta_2 - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2). \quad (3.15)$$

Assim, o sistema pode ser descrito por

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial L_i} \\ \dot{L}_i = -\frac{\partial H}{\partial \theta_i} \end{cases}, \quad (3.16)$$

onde  $i \in \{1, 2\}$ . Logo, o sistema em termos de  $\mathbf{Y} = (\theta_1, \theta_2, L_1, L_2)$  é

$$\dot{\mathbf{Y}} = J \nabla H(\mathbf{Y}), \quad (3.17)$$

onde

$$J = \left( \begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & & & 1 \\ \hline & & -1 & \\ & & & -1 \end{array} \right). \quad (3.18)$$

## 3.2 Soluções Analíticas

Nesta seção, buscaremos expressões fechadas para casos particulares de sistemas com dois dipolos magnéticos.

### 3.2.1 Apenas um dipolo livre para girar

Considere, agora, o sistema mecânico com  $\mathbf{m}_1$  fixo para rotação e translação e  $\mathbf{m}_2$  fixo para translação. Assim, a equação do sistema, conforme obtido em (3.16), é

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = 0 \\ \dot{\theta}_2 = \frac{L_2}{I_2} \\ \dot{L}_1 = 0 \\ \dot{L}_2 = -\alpha(\sin \tilde{\psi} \cos \theta_2 + 2 \cos \tilde{\psi} \sin \theta_2) \end{cases}, \quad (3.19)$$

com  $\tilde{\psi}$  o ângulo constante de  $\vec{m}_1$ .

Fazendo  $\theta_2 = \theta$ ,  $L_2 = I_2 \nu$  e utilizando a identidade

$$4 \cos \tilde{\psi} \sin \theta + 2 \sin \tilde{\psi} \cos \theta = \sin(\theta - \tilde{\psi}) + 3 \sin(\theta + \tilde{\psi}), \quad (3.20)$$

temos que

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \nu \\ \dot{\nu} = -\frac{\alpha}{2I_2}[\sin(\theta - \tilde{\psi}) + 3\sin(\theta + \tilde{\psi})] \end{cases} \quad (3.21)$$

Voltando à variável original  $\theta$  e seguindo o raciocínio análogo ao desenvolvido por Figueiredo e Neves (2015) para o caso do pêndulo mecânico, multiplicando a segunda equação de (3.21) por  $\dot{\theta}$ , temos:

$$2I_2\ddot{\theta}\dot{\theta} + \alpha\dot{\theta}\sin(\theta - \tilde{\psi}) + 3\alpha\dot{\theta}\sin(\theta + \tilde{\psi}) = 0, \quad (3.22)$$

de onde

$$I_2\dot{\theta}^2 - \alpha\cos(\theta - \tilde{\psi}) - 3\alpha\cos(\theta + \tilde{\psi}) = c, \quad (3.23)$$

com  $c$  sendo uma constante que pode ser obtida a partir das condições iniciais. Note que toda solução de (3.21) é também solução de (3.23), pois partindo de (3.21) e manipulando a expressão, obtém-se:

$$2I_2\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \alpha\frac{d}{d\theta}(\cos(\theta - \tilde{\psi}) + 3\cos(\theta + \tilde{\psi})), \quad (3.24)$$

de onde, fazendo a substituição  $\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$  e integrando; obtemos (3.23).

Agora, se  $\theta(t)$  é solução de (3.23), então, derivando (3.23), obtemos a equação (3.22), a qual implica que  $\theta(t)$  é solução de (3.21) ou  $\dot{\theta} = 0$ . Neste último caso, temos que  $\theta(t) = \tilde{\theta} = \text{constante}$ , a qual só será solução de (3.21) se

$$\sin(\tilde{\theta} - \tilde{\psi}) + 3\sin(\tilde{\theta} + \tilde{\psi}) = 0. \quad (3.25)$$

As curvas definidas por (3.25) no plano  $\tilde{\psi}$ ,  $\tilde{\theta}$  encontram-se na Fig. 16.

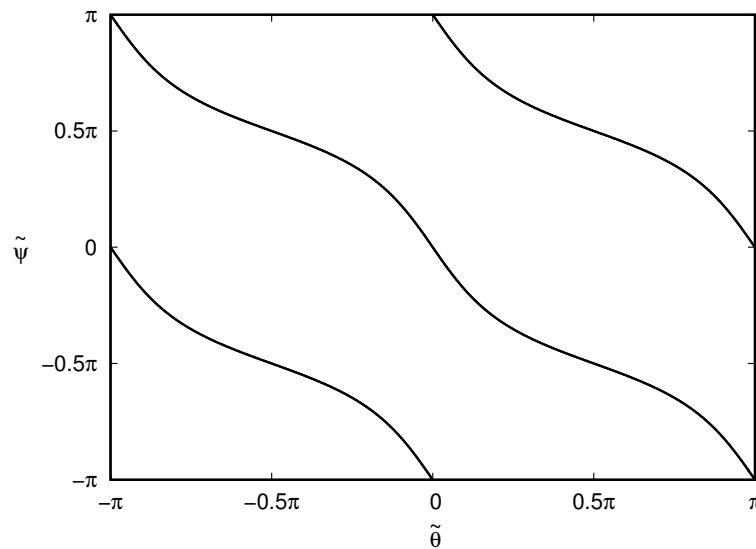


Figura 16 – Soluções da equação  $\sin(\tilde{\theta} - \tilde{\psi}) + 3\sin(\tilde{\theta} + \tilde{\psi}) = 0$ .

Portanto, as soluções não constantes de (3.21) são as mesmas da (3.23) e as soluções constantes de (3.21) são as configurações de equilíbrio do sistema dadas por (3.25). Dessa maneira, podemos trabalhar com a equação (3.23) com esta ressalva sobre as soluções constantes.

Conforme (3.23), obtemos

$$\dot{\theta}^2 - \frac{\alpha}{I_2} [\cos(\theta - \tilde{\psi}) + 3 \cos(\theta + \tilde{\psi})] = C, \quad (3.26)$$

onde  $C \geq -4\frac{\alpha}{I_2}$  é uma constante que depende das condições iniciais (a desigualdade segue do fato de que  $\nu^2 \geq 0$ ). O retrato de fase do sistema segue na Fig. 17. Note que a energia total do sistema é uma integral primeira, logo, o sistema é integrável. De (3.26), temos

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{C + \frac{\alpha}{I_2} [\cos(\theta - \tilde{\psi}) + 3 \cos(\theta + \tilde{\psi})]}, \quad (3.27)$$

que é uma equação diferencial separável. Assim, integrando-a, obtemos

$$\int_0^\theta \left( C + \frac{\alpha}{I_2} [\cos(\theta - \tilde{\psi}) + 3 \cos(\theta + \tilde{\psi})] \right)^{-\frac{1}{2}} d\theta = t + k, \quad (3.28)$$

onde  $k$  é uma constante. Observe que a equação integral (3.28) fornece  $\theta(t)$  implicitamente. Para um caso especial ( $\tilde{\psi} = 0$ ) obtemos diretamente  $\theta$  em termos de funções conhecidas, como veremos a seguir.

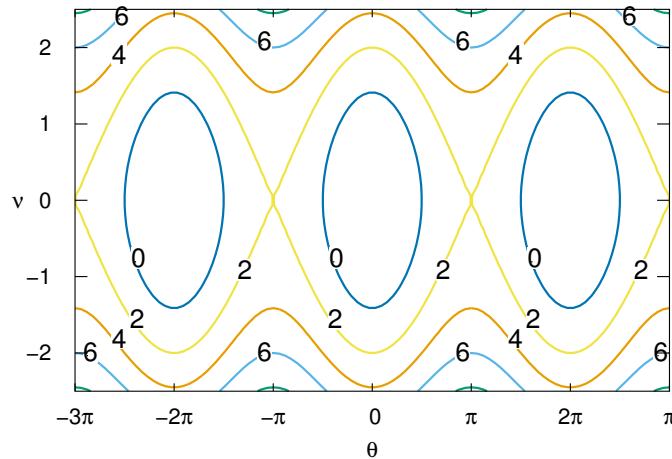


Figura 17 – Retrato de fase do sistema (3.21) com  $\frac{\alpha}{I_2} = 1 \text{ Hz}^2$  e  $\tilde{\psi} = \pi$ . Os números representam diferentes valores de constante.

### 3.2.2 Caso Especial

Se, no caso simplificado, tomarmos  $\tilde{\psi} = 0$ , então, de (3.19), resgatamos a equação do pêndulo

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0, \quad (3.29)$$

com

$$\omega = \sqrt{\frac{2\alpha}{I_2}}, \quad (3.30)$$

a frequência do pêndulo linear, e condições iniciais  $\theta(0) = \theta_0$  e  $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$ . Para resolvê-la, primeiro tomemos a expressão da conservação da energia (3.23):

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega^2 \cos \theta = \frac{1}{2}\dot{\theta}_0^2 - \omega^2 \cos \theta_0, \quad (3.31)$$

de onde, usando a fórmula do ângulo duplo para  $\theta$ , obtém

$$\dot{\theta}^2 = 4\omega^2 \left[ \left( \frac{\dot{\theta}_0}{2\omega} \right)^2 + \sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (3.32)$$

Agora, fazendo  $y = \sin \frac{\theta}{2}$ , temos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}\dot{\theta} \cos \frac{\theta}{2}, \quad (3.33)$$

e, portanto,

$$\left( \frac{dy}{dt} \right)^2 = \frac{\dot{\theta}^2}{4} \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (3.34)$$

$$= \frac{\dot{\theta}^2}{4} (1 - y^2). \quad (3.35)$$

Assim, de (3.32) e (3.35), temos que

$$\frac{\dot{\theta}^2}{4} (1 - y^2) = \omega^2 \left[ \left( \frac{\dot{\theta}_0}{2\omega} \right)^2 + \sin^2 \frac{\theta_0}{2} - y^2 \right] (1 - y^2), \quad (3.36)$$

que pode ser reescrita em termos de  $y$  apenas e das condições iniciais do sistema:

$$\left( \frac{dy}{dt} \right)^2 = \omega^2 y^4 - \omega^2 \left[ 1 + \left( \frac{\dot{\theta}_0}{2\omega} \right)^2 + \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right] y^2 + \omega^2 \left[ \left( \frac{\dot{\theta}_0}{2\omega} \right)^2 + \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right]. \quad (3.37)$$

Note que a EDO acima é da forma (2.117) e que o sinal dos coeficientes só são compatíveis, pela Tab. 1, com as funções sn, ns, cd e dc, pois o coeficiente do termo quártico é positivo, o coeficiente do termo quadrático é negativo e termo constante é positivo.

Utilizando as identidades das funções elípticas e testando  $z = A \operatorname{sn}(\phi + bt|m)$ , com  $\phi$  constante, temos

$$\left( \frac{dz}{dt} \right)^2 = A^2 b^2 \operatorname{cn}^2(\phi + bt|m) \operatorname{dn}^2(\phi + bt|m) \quad (3.38)$$

$$= A^2 b^2 [1 - \operatorname{sn}^2(\phi + bt|m)][1 - m \operatorname{sn}^2(\phi + bt|m)] \quad (3.39)$$

$$= A^2 b^2 \left[ 1 - \left( \frac{z}{A} \right)^2 \right] \left[ 1 - m \left( \frac{z}{A} \right)^2 \right] \quad (3.40)$$

$$= \frac{b^2 m}{A^2} z^4 - b^2 (1 + m) z^2 + A^2 b^2. \quad (3.41)$$

Logo, comparando termo a termo (3.37) e (3.41), obtemos o sistema

$$\begin{cases} \omega^2 = \frac{b^2 m}{A^2} \\ \omega^2 \left[ 1 + \left( \frac{\dot{\theta}_0}{2\omega} \right)^2 + \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right] = b^2(1+m) \\ \omega^2 \left[ \left( \frac{\dot{\theta}_0}{2\omega} \right)^2 + \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right] = A^2 b^2 \end{cases} . \quad (3.42)$$

Assim, temos que  $b = \omega$  e  $m = A^2 = \left( \frac{\dot{\theta}_0}{2\omega} \right)^2 + \sin^2 \frac{\theta_0}{2}$  satisfazem (3.42). Daí, se  $m \leq 1$ , condição que justificaremos mais a frente, então

$$y(t) = \sqrt{m} \operatorname{sn}(\phi + \omega t | m) \quad (3.43)$$

é solução de (3.37) e, portanto,

$$\theta(t) = 2 \arcsin[\sqrt{m} \operatorname{sn}(\phi + \omega t | m)]. \quad (3.44)$$

Como

$$\theta_0 = \theta(0) = 2 \arcsin[\sqrt{m} \operatorname{sn}(\phi | m)], \quad (3.45)$$

então

$$\operatorname{sn}(\phi | m) = \frac{\sin \frac{\theta_0}{2}}{\sqrt{m}} \quad (3.46)$$

e de Def. 33, temos que

$$\phi = F \left( \arcsin \frac{\sin \frac{\theta_0}{2}}{\sqrt{m}} \middle| m \right). \quad (3.47)$$

Portanto,

$$\theta(t) = 2 \arcsin \left\{ \sqrt{m} \operatorname{sn} \left[ F \left( \arcsin \frac{\sin \frac{\theta_0}{2}}{\sqrt{m}} \middle| m \right) + \omega t | m \right] \right\}, \quad (3.48)$$

onde  $m = \left( \frac{\dot{\theta}_0}{2\omega} \right)^2 + \sin^2 \frac{\theta_0}{2}$ , é a solução de (3.23) quando  $\tilde{\psi} = 0$ . Uma vez encontrada uma solução, o Teorema de Existência e Unicidade de soluções de EDO nos garante que ela é única.

*Observação.* Toma-se a condição de que

$$\left( \frac{\dot{\theta}_0}{2\omega} \right)^2 + \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \leq 1 \quad (3.49)$$

porque, caso contrário, a função  $\operatorname{sn} \left( \phi + \omega t \middle| \left( \frac{\dot{\theta}_0}{2\omega} \right)^2 + \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right)$  tomaria valores com parte imaginária não nula. Note que, se  $\dot{\theta}_0 = 0$ , então a condição é sempre satisfeita qualquer



que seja  $\theta_0$ . No entanto, a condição também é satisfeita para uma classe maior de casos em que  $\dot{\theta}_0 \leq 2\omega \cos \frac{\theta_0}{2}$ . Esta condição é equivalente a estabelecer que as condições iniciais não farão com que o dipolo complete uma ou mais voltas inteiras, como mostraremos a seguir.

Seja  $W_{\theta_0}^\pi$  o trabalho do torque magnético exercido no dipolo ao varrer o ângulo de  $\theta_0$  a  $\pi$ , que é o equilíbrio instável, no sentido positivo. Assim, a energia cinética disponível da velocidade angular inicial deve ser menor ou igual ao módulo de  $W_{\theta_0}^\pi$ , uma vez, neste caso, o trabalho é negativo, para que não ultrapasse a configuração de equilíbrio instável e, conseqüentemente, complete a volta. Logo,

$$0 \geq W_{\theta_0}^\pi + K \quad (3.50)$$

$$= \int_{\theta_0}^{\pi} \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta} + \frac{I_2 \dot{\theta}_0^2}{2} \quad (3.51)$$

$$= -2\alpha(1 + \cos \theta_0) + \frac{I_2 \dot{\theta}_0^2}{2} \quad (3.52)$$

$$= -1 + \left( \frac{\dot{\theta}_0}{2\omega} \right)^2 + \sin^2 \frac{\theta_0}{2}, \quad (3.53)$$

como queríamos.

Os parâmetros físicos e a condição inicial têm papéis bem específicos no comportamento do sistema. A amplitude de oscilação do dipolo depende exclusivamente da condição inicial e a frequência linear depende dos demais parâmetros físicos, pela relação

$$\omega = \sqrt{\frac{2\mu_0 m_1 m_2}{I_2 r^3}}. \quad (3.54)$$

Somente o momento de inércia do dipolo fixo não interfere nas características da solução. Uma vez que quando o módulo  $m$  tende a zero, a função elíptica  $\text{sn}$  tende para o seno, conforme era de se esperar que, para pequenas amplitudes, a solução se aproximasse da solução do pêndulo linear. Apresentamos como exemplo, na Fig. 18, a oscilação para grandes amplitudes.

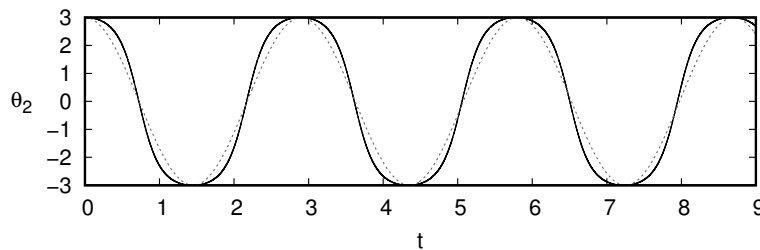


Figura 18 – Oscilação não-linear de  $\theta_2$  com  $\theta_1 = 0$  fixo, momentos de dipolo unitários e distância 0.4. A curva pontilhada é de uma função seno.

### 3.2.3 Dipolos idênticos livres para girar

Nesta seção, obteremos uma solução analítica para um caso mais geral que aquela obtida anteriormente. Para tanto, utilizaremos o desenvolvimento de Pollack e Stump (1997).

Considere  $\zeta = \theta_1 + \theta_2$  e  $\eta = \theta_1 - \theta_2$ . Assim, reescrevendo o sistema (3.10) em termos das novas variáveis, obtemos:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\zeta} \\ \ddot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

$$= \frac{\alpha}{I_1 I_2} \begin{pmatrix} I_2(-2 \cos \theta_2 \sin \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_1) + I_1(-2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2) \\ I_2(-2 \cos \theta_2 \sin \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_1) - I_1(-2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2) \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

$$= \frac{\alpha}{I_1 I_2} \begin{pmatrix} -(2I_1 + I_2) \cos \theta_1 \sin \theta_2 - (I_1 + 2I_2) \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ (2I_1 - I_2) \cos \theta_1 \sin \theta_2 + (I_1 - 2I_2) \sin \theta_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

Se  $I_1 = I = I_2$ , obtemos um sistema de equações diferenciais não-lineares autônomas desacopladas que já sabemos solucionar:

$$\begin{cases} \ddot{\zeta} = -\omega_{0\zeta}^2 \sin \zeta \\ \ddot{\eta} = -\omega_{0\eta}^2 \sin \eta \\ \zeta(0) = \zeta_0 \\ \eta(0) = \eta_0 \end{cases}, \quad (3.58)$$

em que  $\omega_{0\zeta} = \sqrt{3\frac{\alpha}{I}}$  e  $\omega_{0\eta} = \sqrt{\frac{\alpha}{I}}$ .

Poderíamos, igualmente como em (3.48), considerar que

$$\left( \frac{\dot{\zeta}_0}{2\omega_{0\zeta}} \right)^2 + \sin^2 \frac{\zeta_0}{2} \leq 1 \quad (3.59)$$

e

$$\left( \frac{\dot{\eta}_0}{2\omega_{0\eta}} \right)^2 + \sin^2 \frac{\eta_0}{2} \leq 1; \quad (3.60)$$

no entanto, daremos aqui outra opção de abordagem que é equivalente àquela.

Suponha que as condições iniciais dos dipolos são tais que  $\zeta(t)$  e  $\eta(t)$  oscilem sem completar voltas inteiras, ou seja, existem ângulos máximos  $\zeta_m$  e  $\eta_m$  tal que  $\zeta(t) \leq \zeta_m$  e  $\eta(t) \leq \eta_m$  para qualquer  $t$  e que periodicamente  $(\zeta, \dot{\zeta}) = (\zeta_m, 0)$  e  $(\eta, \dot{\eta}) = (\eta_m, 0)$ . Assim, de (3.48), temos que

$$\begin{cases} \zeta(t) = 2 \arcsin \left[ \sin \frac{\zeta_m}{2} \operatorname{sn} \left( \phi_\zeta + \omega_{0\zeta} t \mid \sin^2 \frac{\zeta_m}{2} \right) \right] \\ \eta(t) = 2 \arcsin \left[ \sin \frac{\eta_m}{2} \operatorname{sn} \left( \phi_\eta + \omega_{0\eta} t \mid \sin^2 \frac{\eta_m}{2} \right) \right] \end{cases}, \quad (3.61)$$

onde  $\phi_\zeta = F \left( \arcsin \frac{\sin \frac{\zeta_0}{2}}{\sin \frac{\zeta_m}{2}} \middle| \sin^2 \frac{\zeta_m}{2} \right)$  e  $\phi_\eta = F \left( \arcsin \frac{\sin \frac{\eta_0}{2}}{\sin \frac{\eta_m}{2}} \middle| \sin^2 \frac{\eta_m}{2} \right)$ .

Note que, da definição de  $\text{sn}(u|m)$ , seu período é  $K(m)$ , conforme Def. 31. Assim,  $\zeta(t)$  e  $\eta(t)$  têm períodos

$$T_\zeta = \frac{4}{\omega_{0\zeta}} K \left( \sin^2 \frac{\zeta_m}{2} \right) \quad (3.62)$$

e

$$T_\eta = \frac{4}{\omega_{0\eta}} K \left( \sin^2 \frac{\eta_m}{2} \right), \quad (3.63)$$

respectivamente.

Portanto, como  $\theta_1 = \frac{\zeta \pm \eta}{2}$  e  $\theta_2 = \frac{\zeta - \eta}{2}$ , temos que a solução é

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \arcsin \left[ \sin \frac{\zeta_m}{2} \text{sn} \left( \phi_\zeta + \omega_{0\zeta} t \middle| \sin^2 \frac{\zeta_m}{2} \right) \right] + \arcsin \left[ \sin \frac{\eta_m}{2} \text{sn} \left( \phi_\eta + \omega_{0\eta} t \middle| \sin^2 \frac{\eta_m}{2} \right) \right] \\ \theta_2(t) = \arcsin \left[ \sin \frac{\zeta_m}{2} \text{sn} \left( \phi_\zeta + \omega_{0\zeta} t \middle| \sin^2 \frac{\zeta_m}{2} \right) \right] - \arcsin \left[ \sin \frac{\eta_m}{2} \text{sn} \left( \phi_\eta + \omega_{0\eta} t \middle| \sin^2 \frac{\eta_m}{2} \right) \right] \end{cases} \quad (3.64)$$

Note que, uma vez que

$$\frac{\omega_{0\zeta}}{\omega_{0\eta}} = \sqrt{3}, \quad (3.65)$$

temos que  $\theta_1(t)$  e  $\theta_2(t)$  não são periódicos. Igualmente como no caso em que um dos dipolos está fixo, as frequências que compõem o movimento dos dois dipolos deste caso somente dependem das condições iniciais.

### 3.3 Nota sobre a adimensionalização das equações

Observe que, no caso geral, partindo de (3.10) e tomando a escala do tempo segundo um período característico  $T$  do sistema, de maneira a adimensionalizar o tempo, temos

$$\begin{cases} I_1 \frac{d^2 \theta_1}{d\left(\frac{t^*}{T^*}\right)^2} = -\alpha f(\theta_1, \theta_2) \\ I_2 \frac{d^2 \theta_2}{d\left(\frac{t^*}{T^*}\right)^2} = -\alpha f(\theta_2, \theta_1) \end{cases}, \quad (3.66)$$

onde

$$f(x, y) = 2 \cos y \sin x + \sin y \cos x. \quad (3.67)$$

Logo,

$$\begin{cases} \frac{I_1 I_2 T^{*2} 4\pi r^3}{I_2 \mu_0 m_1 m_2} \ddot{\theta}_1 = -f(\theta_1, \theta_2) \\ \frac{I_2 T^{*2} 4\pi r^3}{\mu_0 m_1 m_2} \ddot{\theta}_2 = -f(\theta_2, \theta_1) \end{cases}. \quad (3.68)$$

Assim,

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \frac{I_2}{I_1} \frac{\mu_0 m_1 m_2}{I_2 T^{*2} 4\pi r^3} f(\theta_1, \theta_2) = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{\mu_0 m_1 m_2}{I_2 T^{*2} 4\pi r^3} f(\theta_2, \theta_1) = 0 \end{cases} . \quad (3.69)$$

Portanto,

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \hat{I} \hat{\omega}^2 f(\theta_1, \theta_2) = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \hat{\omega}^2 f(\theta_2, \theta_1) = 0 \end{cases} , \quad (3.70)$$

onde  $\hat{\omega} = \sqrt{\frac{\mu_0 m_1 m_2}{I_2 T^{*2} 4\pi r^3}}$  é uma frequência adimensional e  $\hat{I} = \frac{I_2}{I_1}$  é a razão dos momentos de inércia. Se escolhermos  $T^* = \sqrt{\frac{\mu_0 m_i m_2}{I_2 4\pi r^3}}$ , que está relacionada com a frequência em (3.30), teremos

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \hat{I}(2 \cos \theta_2 \sin \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_1) = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + 2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2 = 0 \end{cases} , \quad (3.71)$$

o que nos deixa claro que, dadas as condições iniciais, o único fator físico que alterará o movimento nesta escala de tempo adimensional, no caso geral, é a razão entre os momentos de inércia  $\hat{I}$ .

Agora, no caso específico em que  $I_1 = I = I_2$ , nesta escala de tempo adimensional, após escolhidas as condições iniciais, o movimento estará completamente definido, independente dos outros parâmetros físicos (momentos de dipolo magnético e distância entre os dipolos), conforme ilustrado na Fig. 19 e Fig. 20, obtidas das mesmas condições iniciais, para distâncias diferentes, até um tempo  $t = 200$  s. Note que na Fig. 20 os traçados no plano de configurações seguem os mesmos, só que com velocidades distintas; já o plano de velocidades é reduzido proporcionalmente à escala do tempo, como era de se esperar.

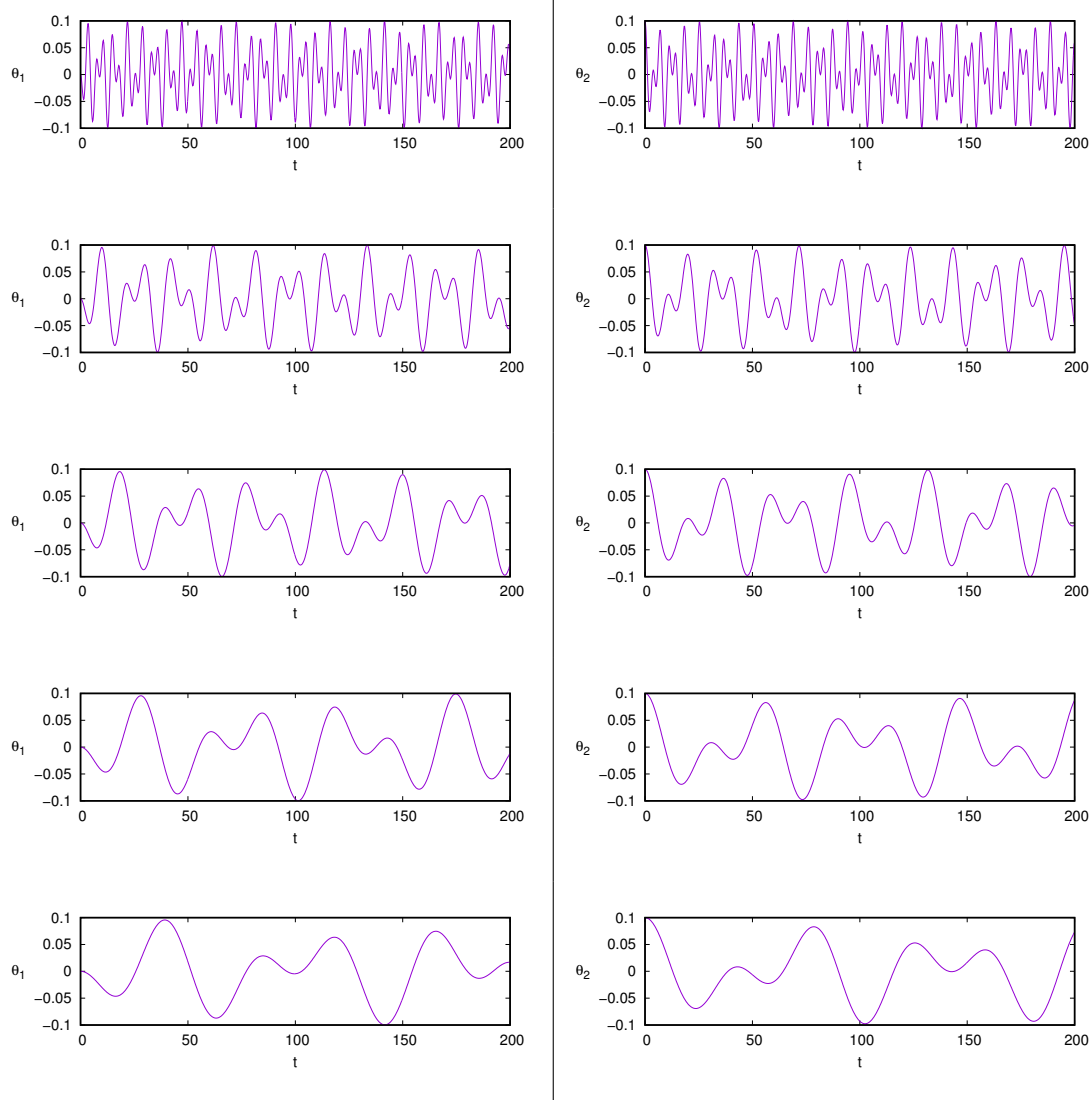


Figura 19 – Evolução temporal de  $\theta_1$  e de  $\theta_2$ , sob as hipóteses da Sec. 3.2.3, com  $r$  (em metros) igual a 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente, em cada linha.

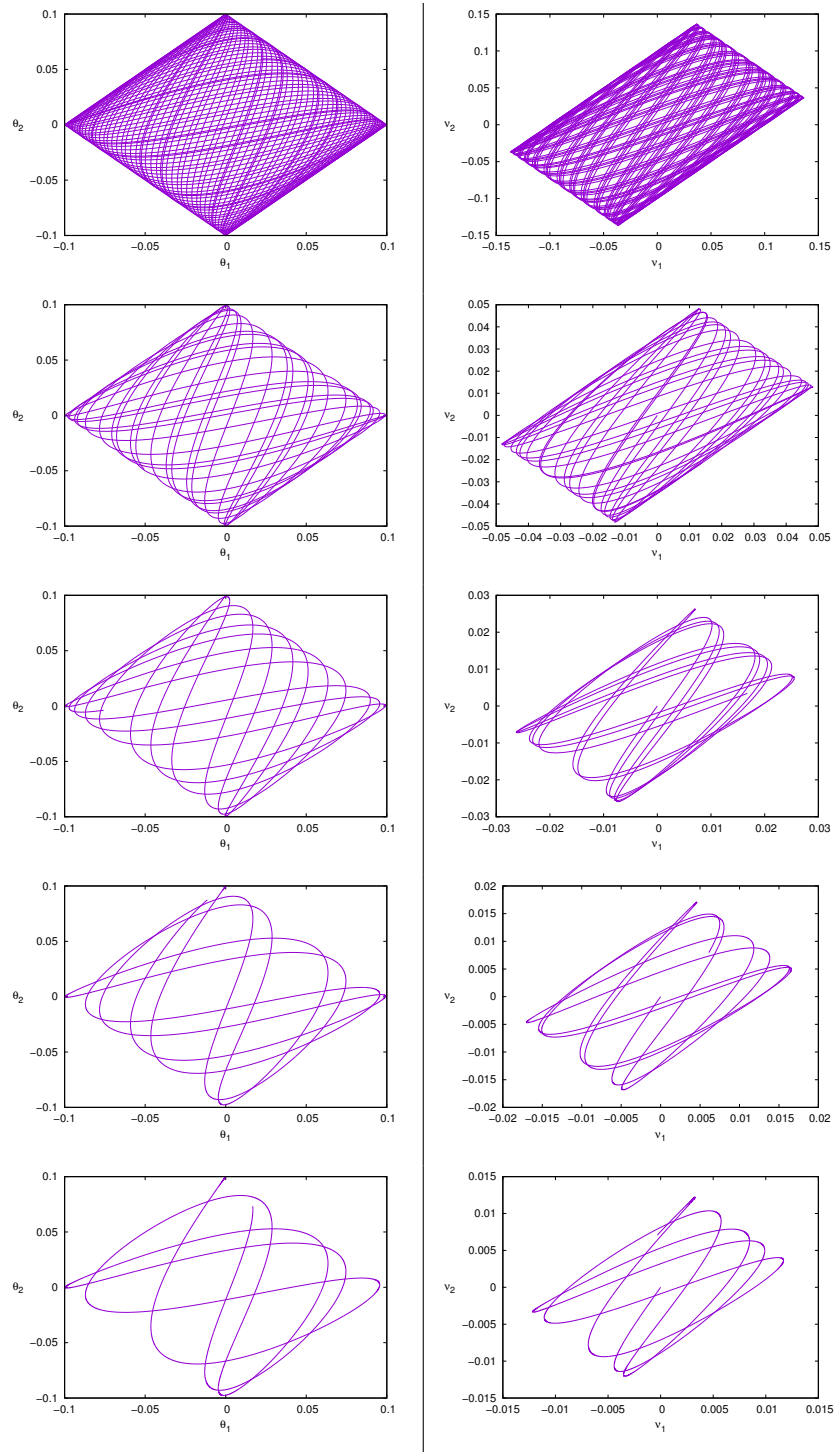


Figura 20 – Espaço de configurações e espaço de velocidades do sistema, sob as hipóteses da Sec. 3.2.3, com  $t$  (em segundos) variando de 0 a 200, com  $r$  (em metros) igual a 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente.

### 3.4 Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio

Nesta seção, identificaremos os pontos de equilíbrio do sistema e os classificaremos segundo a sua estabilidade.

A partir de (3.17), obtemos que os pontos de equilíbrio do sistema são os pontos críticos de  $H$ :

$$\nabla H = 0 \iff \tag{3.72}$$

$$\iff \begin{cases} \cos \theta_1 \sin \theta_2 + 2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 = 0 \\ \cos \theta_2 \sin \theta_1 + 2 \sin \theta_2 \cos \theta_1 = 0 \\ L_1 = 0 \\ L_2 = 0 \end{cases} . \tag{3.73}$$

As soluções deste sistema algébrico não-linear são os pontos  $\mathbf{Y}_0 = (\cdot, \cdot, 0, 0)$  tais que as duas primeiras coordenadas são as interseções das curvas dadas pelas duas primeiras equações no espaço de configurações  $(\theta_1, \theta_2)$ , como apresentado na Fig. 21. Observe que cada coordenada angular é periódica de período  $2\pi$ . Assim, nos restringiremos à seção do espaço de configurações  $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ . Logo, a topologia do espaço de fase será  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ , onde o toro  $\mathbb{T}^2$  é o espaço de configurações.

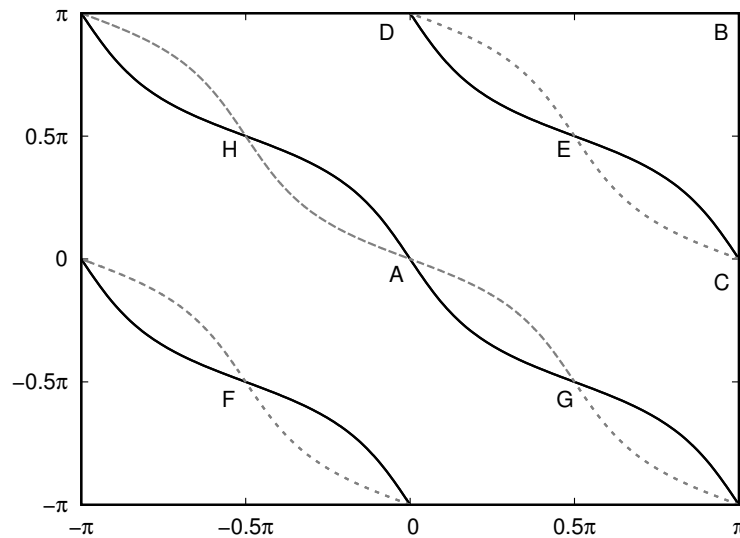


Figura 21 – Soluções de equilíbrio no espaço de configurações, onde as linhas cheias e tracejadas são, respectivamente, as soluções da primeira e segunda equações de (3.73).

Claramente, pelo cálculo direto do sistema, temos que os pontos de equilíbrio são  $A = (0, 0, 0, 0)$ ,  $B = (\pi, \pi, 0, 0)$ ,  $C = (\pi, 0, 0, 0)$ ,  $D = (0, \pi, 0, 0)$ ,  $E = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0, 0)$ ,  $F = (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0, 0)$ ,  $G = (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0, 0)$ ,  $H = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0, 0)$ .

A matriz do problema linearizado é

$$D\mathbf{f}_{\mathbf{Y}}^H = J(\text{Hess } H)\mathbf{Y} \quad (3.74)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_2} \\ \alpha(\sin \theta_1 \sin \theta_2 - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2) & \alpha(2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 - \cos \theta_1 \cos \theta_2) & 0 & 0 \\ \alpha(2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 - \cos \theta_1 \cos \theta_2) & \alpha(\sin \theta_1 \sin \theta_2 - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.75)$$

onde  $\mathbf{Y} = (\theta_1, \theta_2, L_1, L_2)$ . Assim, para cada ponto de equilíbrio, podemos verificar seus autovalores.

No ponto  $\mathbf{Y}_0 = (0, \pi, 0, 0)$ , obtemos

$$D\mathbf{f}_{\mathbf{Y}_0}^H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_2} \\ 2\alpha & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 2\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.76)$$

A equação característica da matriz é

$$\lambda^4 - 2\lambda^2(\beta_1 + \beta_2) + 3\beta_1\beta_2 = 0, \quad (3.77)$$

que é uma biquadrada, onde  $\beta_i = \frac{\alpha}{I_i}$ . Fazendo  $\lambda^2 = \psi$ , temos que  $\psi^2 - 2\psi(\beta_1 + \beta_2) + 3\beta_1\beta_2 = 0$ , cujo discriminante é

$$\Delta_\psi = 4[(\beta_1 - \beta_2)^2 + \beta_1\beta_2] > 0. \quad (3.78)$$

Note que a soma e o produto das raízes de  $\psi$  são positivos. Logo,  $D\mathbf{f}_{\mathbf{Y}_0}$  tem quatro autovalores reais e distintos: dois positivos e dois negativos. Portanto,  $\mathbf{Y}_0$  é um ponto de equilíbrio hiperbólico e do tipo sela. Pelo Teo. 2,  $\mathbf{Y}_0$  é ponto de equilíbrio instável.

Desenvolvendo da mesma maneira para os outros pontos de equilíbrio, obtemos que somente os pontos  $C$  e  $D$  são hiperbólicos, conforme Tab. 2. Descrevendo a notação utilizada na tabela, utilizamos  $\mathbb{R}_+^*$  e  $\mathbb{R}_-^*$  para denotar que o autovalor em questão pertence ao conjunto dos números reais positivos e ao conjunto dos números reais negativos, respectivamente. Utilizamos  $\mathbb{R}_+^*i$  e  $\mathbb{R}_-^*i$  para denotar que o autovalor em questão é um número imaginário puro dado por um número real positivo multiplicado por  $i$  e dado por um número real negativo multiplicado por  $i$ , respectivamente.

Assim, os pontos  $C$  e  $D$ , pelo Teo. 2, são instáveis e, uma vez que o sistema mecânico é hamiltoniano, já podemos descartar a possibilidade dos outros equilíbrios serem assintoticamente estáveis, pela Prop. 4. Da Prop. 5, os pontos  $A$  e  $B$  são estáveis, pois são mínimos locais da energia potencial, como ilustrado nas Fig. 22 e Fig. 23.

Podemos classificar os demais pontos ( $E, F, G, H$ ) aplicando a Prop. 6. Note que todos estes pontos de equilíbrio são pontos críticos do potencial, então

$$\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}}(\theta_{01}, \theta_{02}) = 0, \quad (3.79)$$



Tabela 2 – Classificação dos pontos de equilíbrio quanto a hiperbolicidade.

Pontos	Polinômio Característico	Autovalores	Tipo
$A$ e $B$	$\lambda^4 + 2\lambda^2(\beta_1 + \beta_2) + 3\beta_1\beta_2$	$\mathbb{R}_+^* i, \mathbb{R}_+^* i, \mathbb{R}_-^* i, \mathbb{R}_-^* i$	Não-hiperbólico
$C$ e $D$	$\lambda^4 - 2\lambda^2(\beta_1 + \beta_2) + 3\beta_1\beta_2$	$\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*, \mathbb{R}_-^*$	Hiperbólico
$E$ e $F$	$\lambda^4 + \frac{1}{2}\lambda^2(\beta_1 + \beta_2)$	$0, 0, \mathbb{R}_+^* i, \mathbb{R}_-^* i$	Não-hiperbólico
$G$ e $H$	$\lambda^4 + \frac{3}{2}\lambda^2(\beta_1 + \beta_2)$	$0, 0, \mathbb{R}_+^* i, \mathbb{R}_-^* i$	Não-hiperbólico

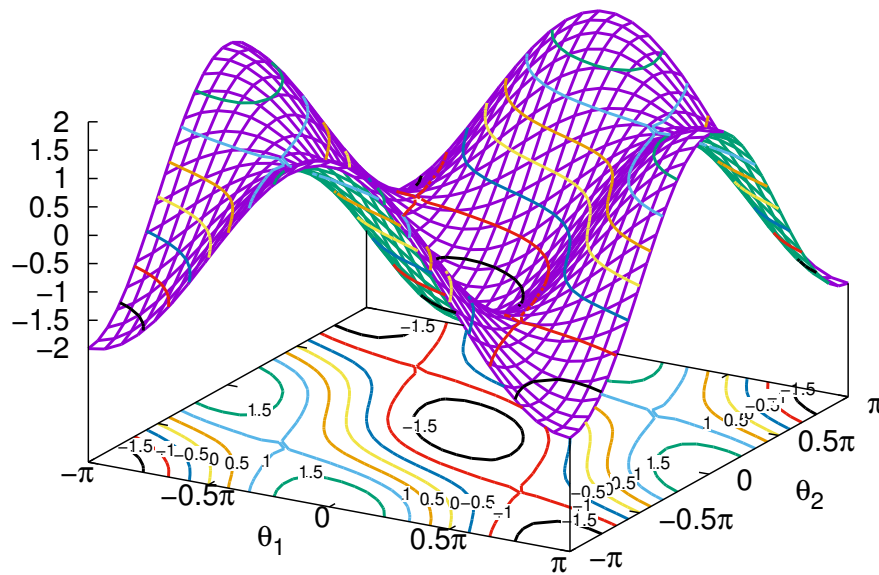


Figura 22 – Gráfico da Energia Potencial no plano de configurações.

onde  $(\theta_{01}, \theta_{02}, 0, 0)$  é ponto de equilíbrio. Também temos que

$$\left\langle \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta} \right\rangle = \theta_1 \alpha (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + 2 \sin \theta_1 \cos \theta_2) + \theta_2 \alpha (\cos \theta_2 \sin \theta_1 + 2 \sin \theta_2 \cos \theta_1) \neq 0 \quad (3.80)$$

nas proximidades de 0, conforme Fig. 24 curva de nível 0 da função

$$g(\theta_1, \theta_2) = \theta_1 \alpha (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + 2 \sin \theta_1 \cos \theta_2) + \theta_2 \alpha (\cos \theta_2 \sin \theta_1 + 2 \sin \theta_2 \cos \theta_1). \quad (3.81)$$

Portanto, a menos de translação de  $H$ , as hipóteses do Prop. 6 são satisfeitas nas regiões hachuradas  $\mathcal{A}$  indicadas na Fig. 24.

Assim, obtemos as seguintes classificações da Tab. 3 para pontos os pontos de equilíbrio do sistema.

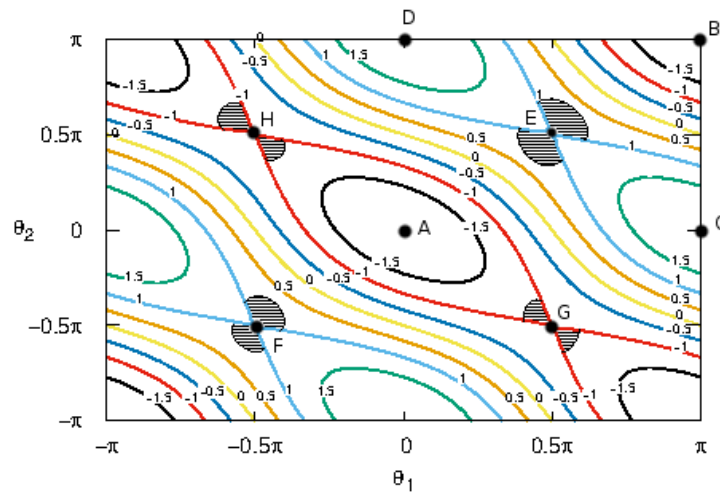


Figura 23 – Pontos de equilíbrio, curvas de nível da energia potencial no plano de configurações e regiões de decrescimento da energia potencial nas selas (região hachurada).

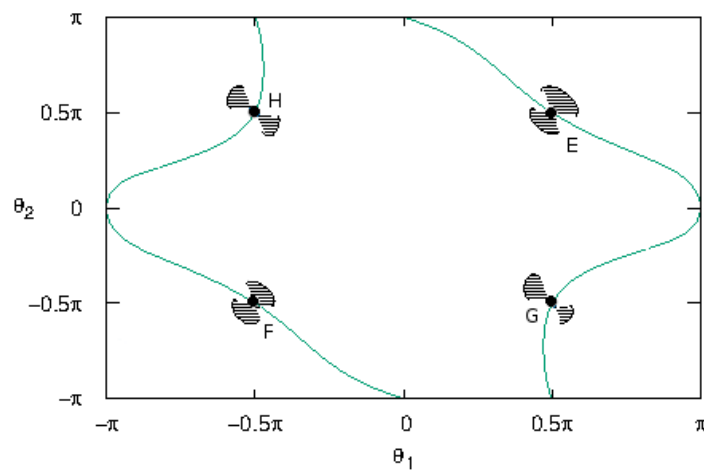


Figura 24 – Curvas de nível 0 da função  $g$  em (3.81) e regiões de decrescimento da energia potencial nas selas (região hachurada).

Tabela 3 – Classificações dos pontos de equilíbrio quanto a estabilidade.

Ponto	Estabilidade
$A$	Indiferente
$B$	Indiferente
$C$	Instável hiperbólico
$D$	Instável hiperbólico
$E$	Instável
$F$	Instável
$G$	Instável
$H$	Instável

## 4 Problema Amortecido

Trataremos, neste capítulo, do estudo numérico da mesma configuração de dois dipolos magnéticos, adicionando-se a hipótese de um amortecimento homogêneo e proporcional a velocidade angular.

### 4.1 O Modelo

Suponha que o sistema tenha um amortecimento  $\xi$  proporcional à velocidade angular dos dipolos. Ou seja, existe uma resistência ao movimento de rotação dos dipolos, oferecida pelo meio no qual os dipolos estão imersos, por exemplo, o ar ou um líquido. Esta resistência é dada por torques de atritos externos ao sistema composto pelos dois dipolos. Para cada dipolo, o balanço de torques é

$$I_i \ddot{\theta}_i = \sum \boldsymbol{\tau}_i \quad (4.1)$$

$$= \boldsymbol{\tau}_{mag}^i + \boldsymbol{\tau}_{atr}^i \quad (4.2)$$

$$= \mathbf{m}_i \times \mathbf{B}_{ij} - \xi \dot{\theta}_i, \quad (4.3)$$

onde  $\xi$  é o coeficiente de amortecimento do sistema,  $\boldsymbol{\tau}_{mag}^i$  e  $\boldsymbol{\tau}_{atr}^i$ , são, respectivamente, o torque magnético e o torque de atrito do dipolo, com  $i, j \in \{1, 2\}$ . Assim, de (3.10) e fazendo  $\dot{\theta}_i = \nu_i$ , temos

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \nu_1 \\ \dot{\theta}_2 = \nu_2 \\ \dot{\nu}_1 = -\frac{\alpha}{I_1}(2 \cos \theta_2 \sin \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_1) - \xi_1 \nu_1 \\ \dot{\nu}_2 = -\frac{\alpha}{I_2}(2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2) - \xi_2 \nu_2 \end{cases}, \quad (4.4)$$

onde  $\xi_i = \frac{\xi}{I_i}$ , com  $i \in \{1, 2\}$ . Ou seja, reescrevendo o sistema de forma compacta,

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\mathbf{Y}) = J \nabla H(\mathbf{Y}) - \Xi \mathbf{Y}, \quad (4.5)$$

onde  $\mathbf{Y} = (\theta_1, \theta_2, L_1, L_2)$  e o Hamiltoniano é dado por

$$H(\theta_1, \theta_2, L_1, L_2) = \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \alpha(\sin \theta_1 \sin \theta_2 - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2). \quad (4.6)$$

A matriz  $J$  é dada por

$$J = \left( \begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & & & 1 \\ \hline & & -1 & \\ & & & -1 \end{array} \right) \quad (4.7)$$

e a matriz de amortecimento  $\Xi$  é dado por

$$\Xi = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \xi_1 \\ & & & \xi_2 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

onde os termos que não aparecem são nulos. Logo, os pontos de equilíbrios continuam sendo os pontos críticos de  $H$  obtidos no caso conservativo, pois, como no equilíbrio as velocidades angulares são nulas, o termo de amortecimento desaparece.

Observe que

$$\dot{H}(X) = \langle \nabla H(X), \dot{X} \rangle \quad (4.9)$$

$$= -\frac{\xi_1 L_1^2}{I_1} - \frac{\xi_2 L_2^2}{I_2} \quad (4.10)$$

$$\leq 0. \quad (4.11)$$

Logo, pelo Teo. 3, utilizando  $H$  como função de Lyapunov, os mínimos de  $H$  (pontos  $A$  e  $B$ ) continuam sendo estáveis, no entanto, agora eles são assintoticamente estáveis, conforme pode-se observar na Fig. 25. Note que  $H$  decresce em todas as trajetórias, conforme (4.9), e é nula nos pontos de equilíbrio; assim, utilizando-se do Teo. 4, com  $V = -H + k$ , onde  $k$  é uma constante escolhida convenientemente para que a primeira condição no teorema seja satisfeita, temos que o restante dos pontos de equilíbrio ( $C, D, E, F, G$  e  $H$ ) são instáveis.

Se observarmos somente a energia potencial no espaço de configurações, a partir de (4.4), temos que as coordenadas  $\theta_1$  e  $\theta_2$  dos pontos de equilíbrio são pontos críticos de  $U(\theta_1, \theta_2)$  e que aos mínimos correspondem os equilíbrios assintoticamente estáveis, conforme podemos observar Fig. 26.

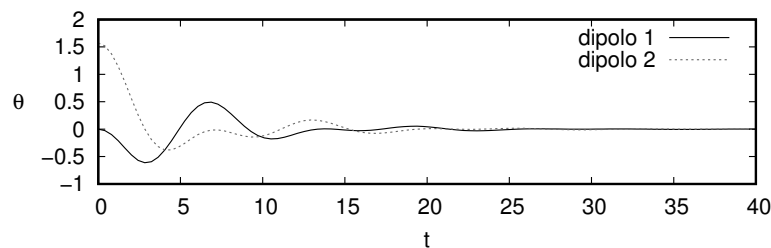


Figura 25 – Evolução temporal de  $\theta_1(t)$  e  $\theta_2(t)$  com  $\frac{\alpha}{I_1} = 1 \text{ Hz}^2 = \frac{\alpha}{I_2}$  e  $\xi_1 = 1 \text{ Hz} = \xi_2$ , e condições iniciais  $\theta_1(0) = 0$  e  $\theta_2(0) = 1.51$ .

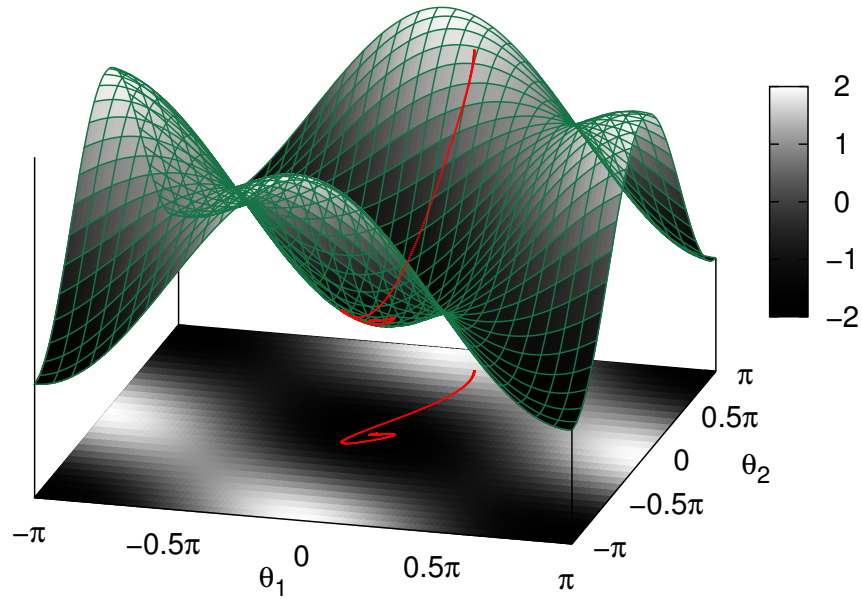


Figura 26 – Energia potencial no espaço de configurações e evoluções temporais da condição inicial  $(0.5, 2.4, 0, 0)$  no espaço de configurações e evolução temporal da energia potencial, com  $\frac{\alpha}{I_1} = 1 \text{ Hz}^2 = \frac{\alpha}{I_2}$  e  $\xi_1 = 1 \text{ Hz} = \xi_2$ .

## 4.2 Bacias de atração

Uma vez inserido o amortecimento no nosso modelo, podemos estudar as bacias de atração dos pontos de equilíbrio do sistema. Vamos comparar o tamanho das bacias de atração de cada um dos pontos de equilíbrio, tendo como métrica da área ocupada pela bacia de um equilíbrio, em um plano do espaço de fase. Para isto, tomamos a quantidade de pontos de uma malha no espaço de configurações do algoritmo que convergem, sob uma certa tolerância, para esse equilíbrio. A tolerância e o tamanho da malha que devemos utilizar no algoritmo das bacias de atração devem ser verificadas segundo a convergência.

Testamos a convergência do tamanho das bacias de atração dos pontos de equilíbrio para os pontos  $(\cdot, \cdot, 0, 0)$  do espaço de fase para algumas malhas, com as tolerâncias de  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$  e  $10^{-4}$ , conforme Tab. 4 e Tab. 5, Tab. 6. Devido as simetrias do problema, acreditamos que as bacias de atração dos equilíbrios estáveis devam ter a mesma quantidade de pontos, no entanto não obtivemos a demonstração formal disso. Os dados numéricos dão bons indícios de que isso seja fato.

Devido ao custo computacional, a maior malha e menor tolerância com as quais obtivemos a bacia de atração dos pontos  $(\cdot, \cdot, 0, 0)$  foi a  $301 \times 301$ , com tolerância  $10^{-5}$ , conforme Tab. 6. Logo, consideraremos este caso como o valor teórico a ser alcançado. Para o nosso trabalho, serão utilizadas malhas  $81 \times 81$  com tolerância  $10^{-3}$ , tendo em

Tabela 4 – Convergência do tamanho percentual das bacias de atração para uma tolerância de  $10^{-2}$ .

Malha	Tipo A	Tipo B	Tipo G	Tipo H
$21 \times 21$	43.537	52.380	2.040	2.040
$41 \times 41$	46.519	51.219	1.130	1.130
$61 \times 61$	47.621	50.819	0.779	0.779
$81 \times 81$	48.193	50.617	0.594	0.594
$101 \times 101$	48.544	50.495	0.480	0.480

Tabela 5 – Convergência do tamanho percentual das bacias de atração para uma tolerância de  $10^{-3}$ .

Malha	Tipo A	Tipo B
$21 \times 21$	47.619	52.380
$41 \times 41$	48.780	51.219
$61 \times 61$	49.180	50.819
$81 \times 81$	49.382	50.617
$101 \times 101$	49.504	50.495

Tabela 6 – Convergência do tamanho percentual das bacias de atração para uma tolerância de  $10^{-4}$ .

Malha	Tipo A	Tipo B
$21 \times 21$	47.619	52.380
$41 \times 41$	48.780	51.219
$61 \times 61$	49.180	50.819
$81 \times 81$	49.382	50.617
$101 \times 101$	49.504	50.495

vista que com esses valores, o tempo de processamento ficou dentro das nossas expectativas (aproximadamente 24 minutos para cada bacia de atração) e obtivemos um erro no tamanho das bacias de atração de 0.9% do valor teórico. Nota-se que há uma tendência de convergência dos percentuais de cada tipo de ponto para o valor teórico, tanto à medida em que a malha aumenta, quanto à medida em que a tolerância diminui, conforme Fig. 27.

Tabela 7 – Convergência do tamanho percentual das bacias de atração para uma tolerância de  $10^{-5}$ .

Malha	Tipo A	Tipo B
$301 \times 301$	49.833	50.166

As bacias de atração dos pontos  $(\cdot, \cdot, 0, 0)$  do espaço de fase têm 3240 pontos da malha pertencentes à bacia de atração do equilíbrio  $A$ , os quais chamamos de pontos tipo  $A$ ; 3321 pontos tipo  $B$ , e nenhum ponto nas demais bacias de atração, conforme Fig. 28.

Observa-se, que o algoritmo não foi capaz de capturar os pontos das bacias de atração dos pontos instáveis, uma vez que, conforme Prop. 7, as bacias de atração dos pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis são conjuntos abertos do espaço de fase. Logo,

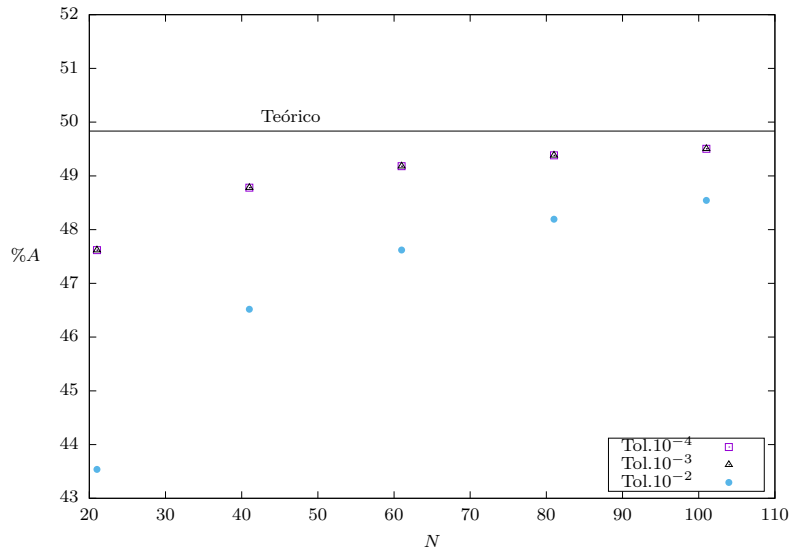


Figura 27 – Percentual de pontos tipo  $A$  versus o número de pontos da malha  $N \times N$ , para três tolerâncias.

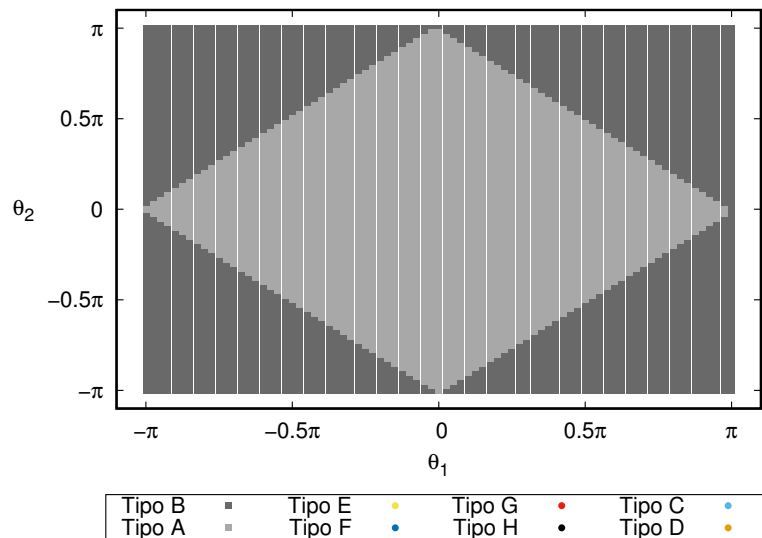


Figura 28 – Bacia de atração dos pontos  $(\cdot, \cdot, 0, 0)$  em uma malha  $81 \times 81$  com tolerância  $10^{-3}$ .

quando nos restringimos a um plano  $(\theta_1, \theta_2, \cdot, \cdot)$  específico, as bacias de atração dos pontos assintoticamente estáveis são abertos do espaço de configurações. Daí, tem-se que as fronteiras das bacias de atração dos pontos de equilíbrios assintoticamente estáveis pertencem à bacia de atração de algum ponto de equilíbrio instável. O fato do algoritmo não capturar estes pontos das bacias de atração dos pontos instáveis, se dá por algumas razões:

- A malha é discreta e, por maior que seja, restarão pontos não classificados.
- No caso que utilizamos para criar a Fig. 28,  $I_1 = 1 = I_2$ , temos que, ou os pontos

não capturados são instáveis em todas as direções do plano de fase (ponto  $C$  e  $D$ ) ou eles são do tipo de um equilíbrio que é instável em somente uma direção do plano de fase (ponto  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$ ), conforme cálculo dos autovalores da linearização nas proximidades deles. Assim, no caso do ponto  $C$  e  $D$ , eles somente deveriam ser capturados se a malha tivesse um ponto mais próximo que a tolerância e se o tempo escolhido para iniciar a primeira verificação do algoritmo fosse suficientemente pequeno. Escolhemos não iniciar a primeira iteração no tempo 0 e sim no tempo 10 da solução numérica justamente para não criar este artefato numérico.

- Já os demais pontos (tipo  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$ ) não foram capturados porque a condição para tal seria que a malha contivesse pontos na reta da direção estável desses equilíbrios e que o erro numérico acumulado não fosse suficiente para ultrapassar a tolerância do algoritmo.

Aumentando a tolerância do algoritmo ou diminuindo o tempo de início da primeira verificação do algoritmo, podemos ter uma ideia de como poderia ser a bacia de atração dos pontos instáveis, conforme Fig. 29 e Fig. 30.

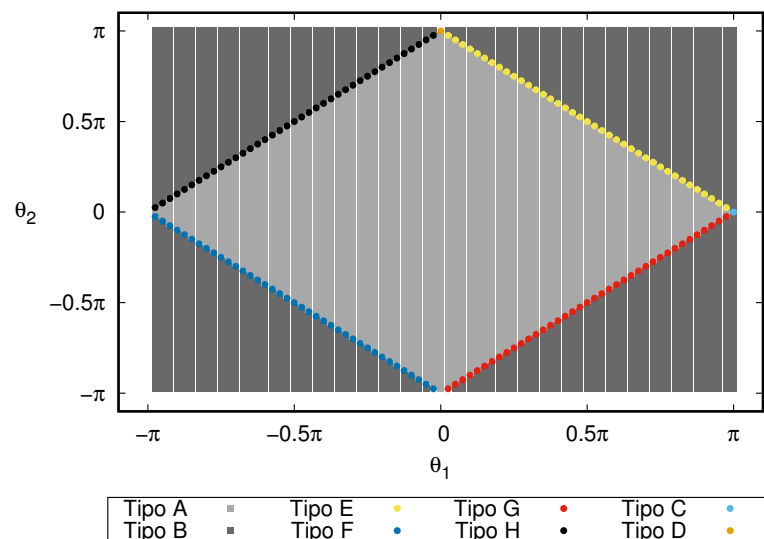


Figura 29 – Bacia de atração dos pontos  $(\cdot, \cdot, 0, 0)$  em uma malha  $80 \times 80$  com tolerância  $10^{-3}$ , iniciando o algoritmo no tempo 0.

Tomando algum destes pontos da malha e utilizando-os como condição inicial da solução numérica, observamos que a solução na fronteira das bacias de atração dos pontos de equilíbrio estáveis, no plano de fase, segue um traçado aparentemente da maneira que esperávamos, conforme Fig. 31. Esta figura mostra a evolução, na superfície da energia potencial magnética, de trajetórias do sistema a partir de condições iniciais pertencentes às bacias de atração de pontos de equilíbrio instáveis. Portanto, fica evidente que alguns destes pontos instáveis têm uma estrutura similar a uma sela, com uma direção de atração (ou estável).



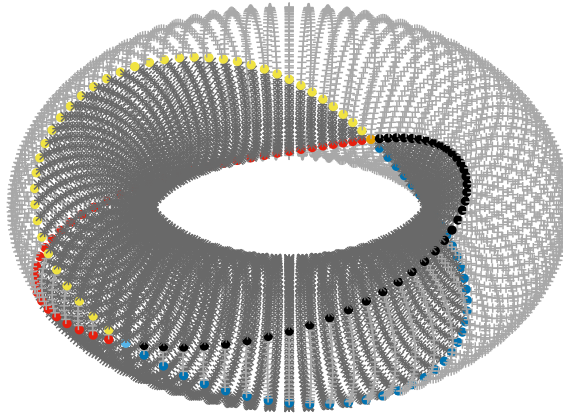


Figura 30 – Bacia de atração dos pontos  $(\cdot, \cdot, 0, 0)$  em uma malha  $80 \times 80$  com tolerância  $10^{-3}$ , na superfície de  $\mathbb{T}^2$ , iniciando o algoritmo no tempo 0.

Porém, como a Fig. 28 revela, a correta predição das bacias de atração dos pontos de equilíbrio instáveis é uma tarefa difícil. Estas bacias deveriam, à priori, ser retas ou pontos isolados, e portanto, deveriam ter medida zero. A maneira escolhida neste trabalho, porém, não atribui medida zero a estas estruturas, pois reflete diretamente a contagem de pontos no espaço de configurações cujas trajetórias tendem ao equilíbrio em  $t \rightarrow \infty$ .

Por outro lado, devemos ter em mente que é possível que escolhas arbitrárias de discretização do espaço de configurações  $(\theta_1, \theta_2)$ , bem como erros intrínsecos aos métodos numéricos, podem afetar também a contagem de pontos pertencentes às bacias dos pontos de equilíbrio instáveis.

Note que, a cada par de velocidades angulares iniciais, podemos obter uma bacia de atração distinta, como por exemplo a Fig. 32. No entanto, observando a frequência dos tipos de pontos, temos menos de 2% de discrepância do valor teórico. Isto nos faz concluir que há somente uma translação da bacia de atração com relação à bacia de  $(\cdot, \cdot, 0, 0)$ .

Quando verificamos a influência dos parâmetros físicos nas bacias de atração, verificamos que a razão dos momentos de inércia dos dipolos modifica consideravelmente a bacia de atração, de maneira que o dipolo com maior inércia carrega o sistema para o equilíbrio cuja coordenada correspondente esteja mais próximo dele. Por exemplo, na Fig. 33, temos que o dipolo 2 tem momento de inércia vinte vezes maior que o momento de inércia do dipolo 1. Assim, em uma análise qualitativa, se a condição inicial está acima da faixa

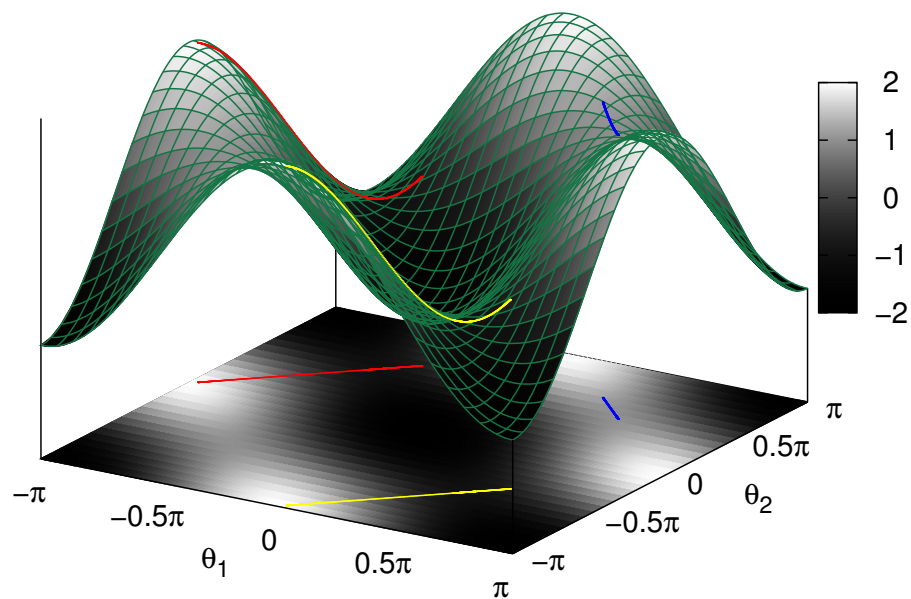


Figura 31 – Energia potencial no espaço de configurações e evoluções temporais de condição iniciais na fronteira das bacias de atrações de pontos de equilíbrios assintoticamente estáveis, com  $\frac{\alpha}{I_1} = 1 = \frac{\alpha}{I_2}$  e  $\xi_1 = 1 = \xi_2$ .

$\theta_2 = \frac{\pi}{2}$  ou abaixo de  $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$ , então o sistema segue para o equilíbrio assintoticamente estável  $(\pi, \pi, 0, 0)$ , cuja a segunda coordenada no espaço de configurações está mais próxima de  $\theta_2$ . Uma irrelevante discrepância na frequência dos pontos de tipo  $A$  e  $B$  em comparação com o valor teórico também foi observado nesse caso.

Assim, para o caso de dois dipolos com movimento angular amortecido e na ausência de campo externo, concluímos que:

- No caso em que  $I_1 = I_2$ , as bacias de atração dos pontos instáveis ou são compostas unicamente pelo equilíbrio ou está contido em uma reta;
- As bacias de atração dos pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis apresentam o mesmo tamanho, independente dos parâmetros físicos e da seção do plano de fase paralela ao plano  $(\cdot, \cdot, 0, 0)$  que se faz a medida;
- O único parâmetro que modifica a disposição das bacias de atração é a razão dos momentos de inércia dos dipolos.

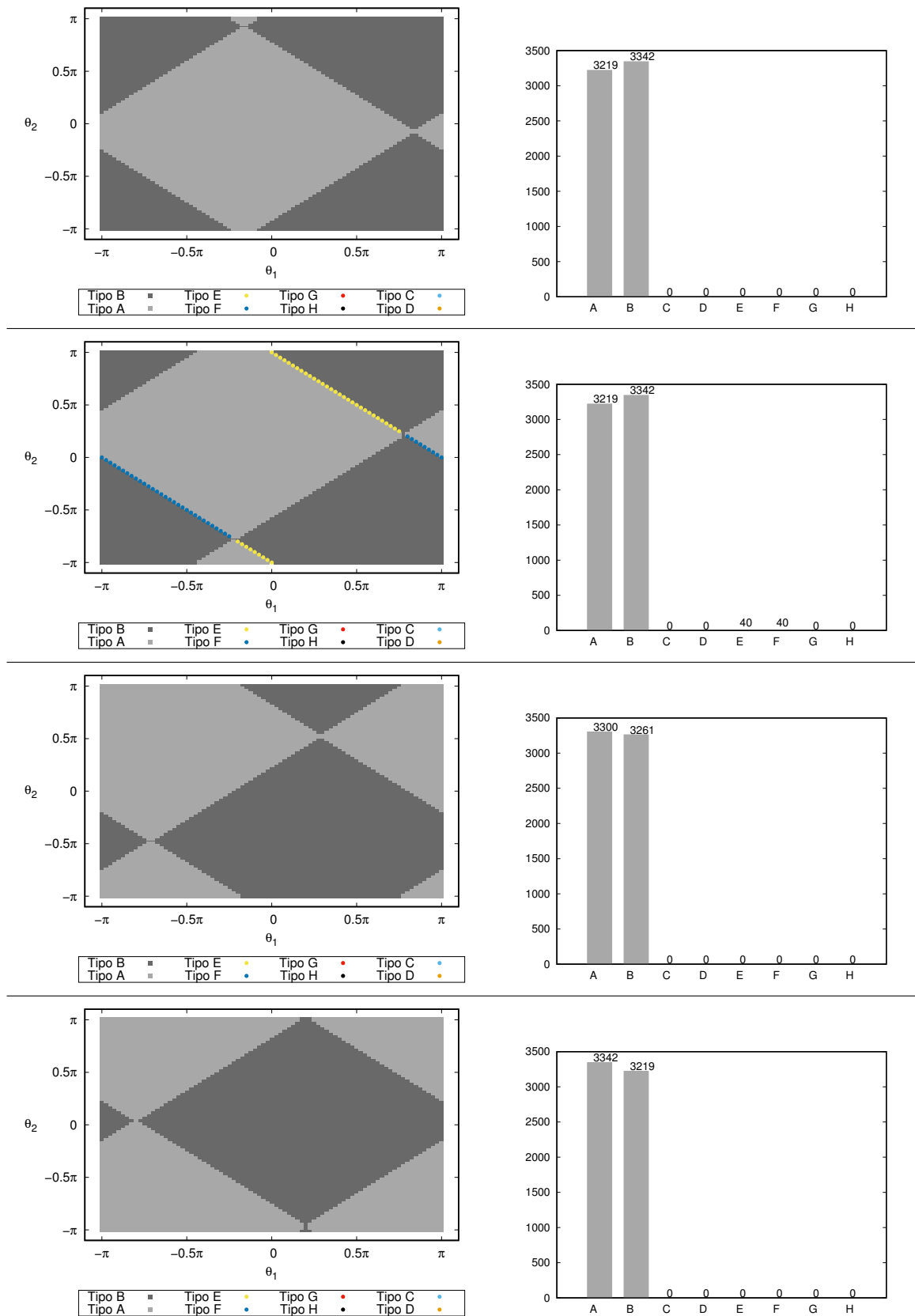


Figura 32 – Bacias de atração com diferentes condições iniciais, onde  $I_1 = I_2$ , juntamente com seu histograma de frequência de cada tipo de ponto. De cima para baixo, temos as seguintes condições iniciais, respectivamente:  $(\cdot, \cdot, 0, -20)$ ;  $(\cdot, \cdot, 20, -20)$ ;  $(\cdot, \cdot, 10, 5)$ ;  $(\cdot, \cdot, 3, 17)$ .

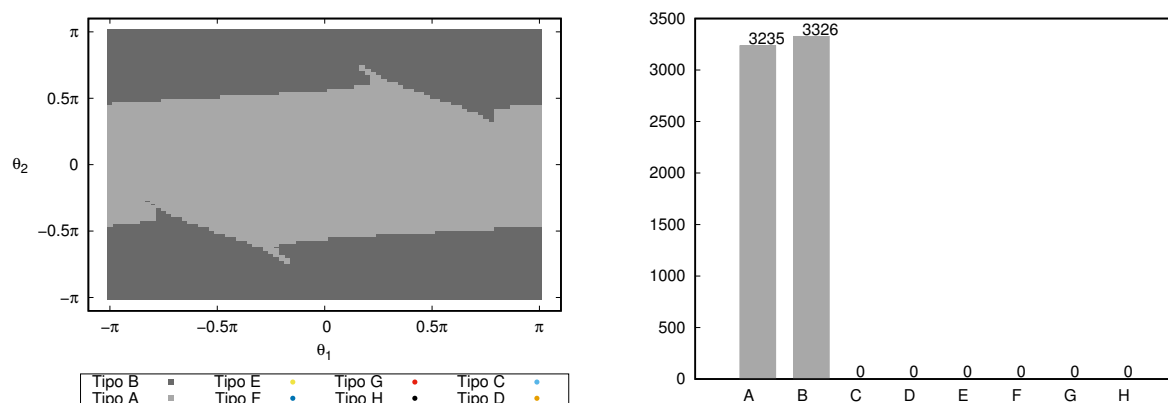


Figura 33 – Bacias de atração da configuração inicial  $(\cdot, \cdot, 0, 0)$ , com  $I_1 \neq I_2$ , juntamente com seu histograma de frequência de cada tipo de equilíbrio. Neste caso,  $\hat{I} = 20$ .

## 5 Problema na Presença de Campo Magnético Externo

Trataremos, neste capítulo, do estudo numérico da mesma configuração de dois dipolos magnéticos com amortecimento, adicionando-se a hipótese de um campo magnético externo.

### 5.1 O Modelo

Suponha agora que o sistema amortecido esteja sujeito a um campo magnético externo homogêneo  $\mathbf{B}$  com direção no plano dos dipolos, como esquematizado na Fig. 34. O sistema composto pelos dois dipolos está sujeito a um torque externo proveniente da ação do campo externo. Para cada dipolo, o balanço de torques é

$$I_i \ddot{\theta}_i = \sum \tau_i \quad (5.1)$$

$$= \tau_{mag}^i + \tau_{mag}^{ext} + \tau_{atr}^i \quad (5.2)$$

$$= \mathbf{m}_i \times (\mathbf{B}_{ij} + \mathbf{B}) - \xi \dot{\theta}_i, \quad (5.3)$$

onde  $\tau_{mag}^i$ ,  $\tau_{mag}^{ext}$  e  $\tau_{atr}^i$ , são, respectivamente, o torque magnético devido a interação com o outro dipolo, o torque magnético externo e o torque de atrito do dipolo, com  $i, j \in \{1, 2\}$ .

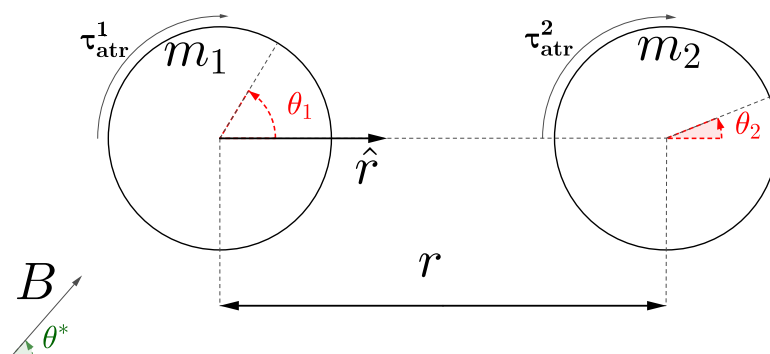


Figura 34 – Dois dipolos magnéticos sujeitos a um campo externo  $\mathbf{B}$  homogêneo.

Temos, então, que  $\mathbf{B} = (B \cos \theta^*, B \sin \theta^*)$ . Assim, obtemos

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \nu_1 \\ \dot{\theta}_2 = \nu_2 \\ \dot{\nu}_1 = -\beta_1(2 \cos \theta_2 \sin \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_1) + \gamma_1 \sin(\theta^* - \theta_1) - \xi_1 \nu_1 \\ \dot{\nu}_2 = -\beta_2(2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2) + \gamma_2 \sin(\theta^* - \theta_2) - \xi_2 \nu_2 \end{cases}, \quad (5.4)$$

onde  $\gamma_i = \frac{m_i B}{I_i}$  é um parâmetro de intensidade de campo aplicado, com  $i \in \{1, 2\}$ . Ou seja,

$$\dot{\mathbf{Y}} = F(\mathbf{Y}) = J\nabla H(\mathbf{Y}) - \Xi \mathbf{Y}, \quad (5.5)$$

onde  $\mathbf{Y} = (\theta_1, \theta_2, L_1, L_2)$  e, assim, o Hamiltoniano do sistema é dado por:

$$\begin{aligned} H(\theta_1, \theta_2, L_1, L_2) = \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \alpha(\sin \theta_1 \sin \theta_2 - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2) - m_1 B \cos(\theta^* - \theta_1) - \\ - m_2 B \cos(\theta^* - \theta_2), \end{aligned} \quad (5.6)$$

com  $J$  e  $\Xi$  dados pelas equações (4.7) e (4.8), respectivamente.

Novamente obtemos que

$$\dot{H}(X) = \langle \nabla H(X), \dot{X} \rangle \quad (5.7)$$

$$= -\frac{\xi_1 L_1^2}{I_1} - \frac{\xi_2 L_2^2}{I_2} \quad (5.8)$$

$$\leq 0. \quad (5.9)$$

No entanto, agora os pontos críticos do Hamiltoniano dependem da intensidade e da direção do campo externo, assim como a sua estabilidade, conforme pode-se observar em Fig. 35, Fig. 36 e Fig. 37.

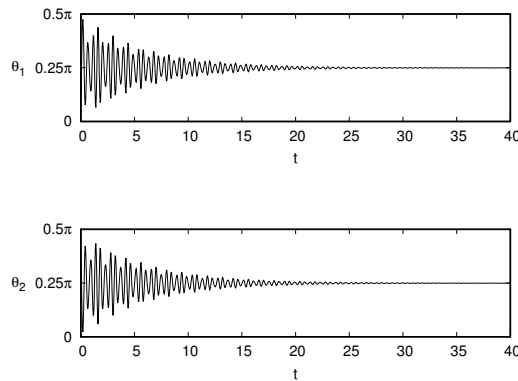


Figura 35 – Evolução temporal de  $\theta_1(t)$  e  $\theta_2(t)$  com  $\xi_1 = \xi_2$  e  $\gamma$  muito grande na direção  $\alpha = \pi/4$ .

Neste caso, a presença do campo externo pode fazer o sistema bifurcar em alguns valores de  $B$  e de  $\theta^*$ , como revelado nas Fig. 36 e Fig. 37, quando se acompanha a evolução dos pontos de equilíbrio. Em dois momentos, por exemplo, há o colapso de três pontos de equilíbrios, dois estáveis e um instável, tornando-se somente um equilíbrio estável.

No nosso modelo, em que a interação se dá somente pelo campo  $\mathbf{B}$  da lei de Biot-Savart e pela presença de um campo externo, não existe um mecanismo de irradiação de energia por efeitos puramente magnéticos. No entanto, conforme exposto por Pollack e Stump (1997), outro efeito magnético decorrente da oscilação de dipolos magnéticos é o *amortecimento de radiação* decorrente da variação do momento magnético total do sistema. Portanto, para possibilitar a possível inclusão deste efeito no nosso modelo, a hipótese do amortecimento mecânico foi mantida.

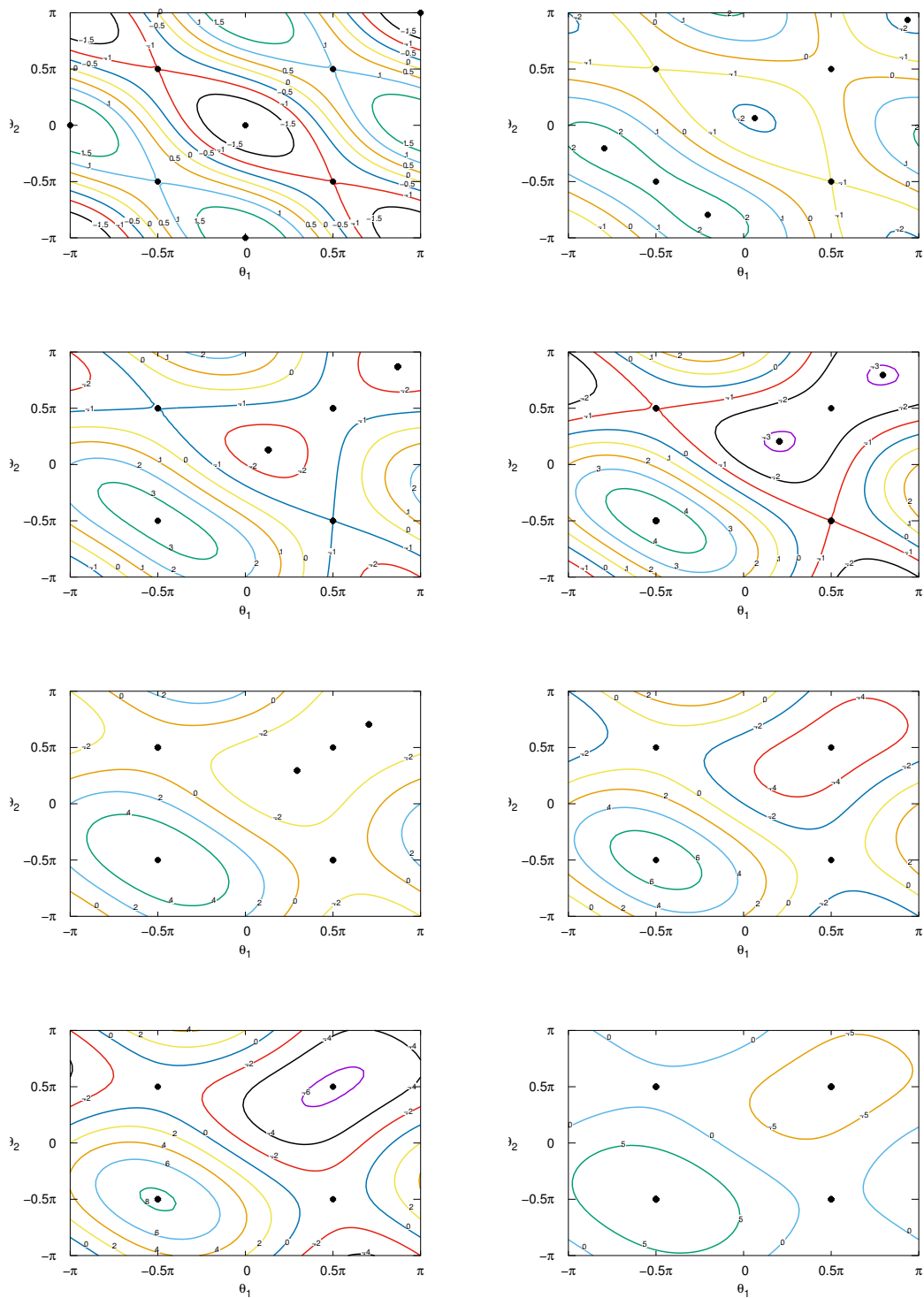


Figura 36 – Pontos de equilíbrio no espaço de configurações para o campo externo  $B$  com diferentes intensidades e  $\theta^* = \frac{\pi}{2}$ , juntamente algumas curvas de nível do potencial. Da esquerda para a direita, de cima para baixo,  $B$  toma os valores (em tesla) de 0 a 4, 2, variando 0, 6 de uma para a outra.



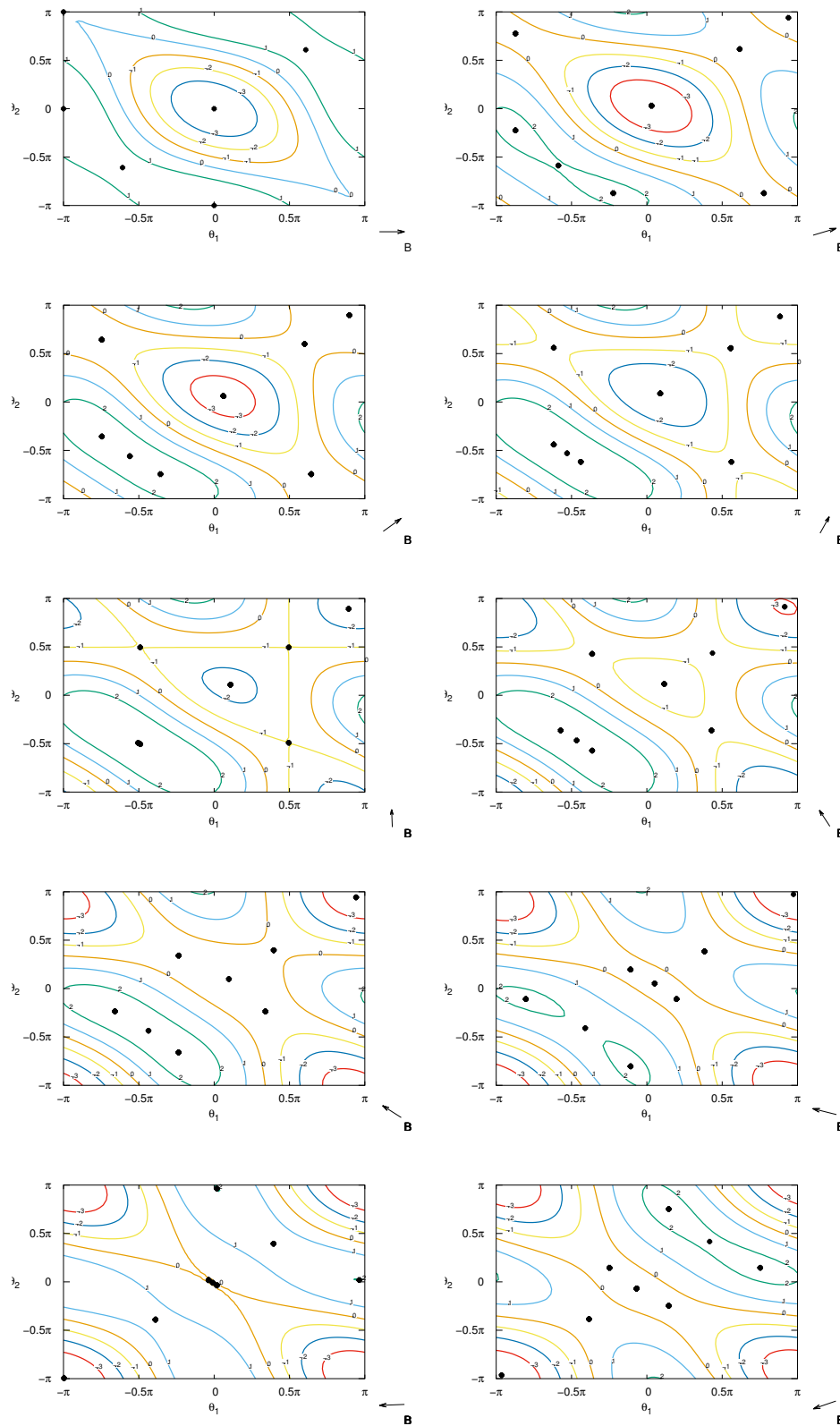


Figura 37 – Pontos de equilíbrio no espaço de configurações para o campo externo  $\mathbf{B}$  com intensidade 1 T em diferentes ângulos  $\theta^*$ , juntamente algumas curvas de nível do potencial. Da esquerda para a direita, de cima para baixo,  $\theta^*$  toma os valores de 0 a 3,6 radianos, variando 0,4 de uma para a outra.

## 5.2 Bacias de Atração

Dada a presença do termo de amortecimento, novamente se faz possível o estudo das bacias de atração. Notamos que, com a presença do campo externo, não mais se mantém o tamanho das bacias de atração. Quando o campo externo é suficientemente intenso em comparação com as intensidades dos momentos de dipolos, o único equilíbrio estável existente é aquele tendendo ao alinhamento dos dipolos com o campo externo, como era de se esperar.

Apesar de obtermos belas imagens nas representações de bacias da atração dos pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis quando o campo externo ainda não é suficientemente intenso para eliminar os demais equilíbrios estáveis, não encontramos nenhuma regularidade nessas estruturas e estudos adicionais são necessários neste ponto.

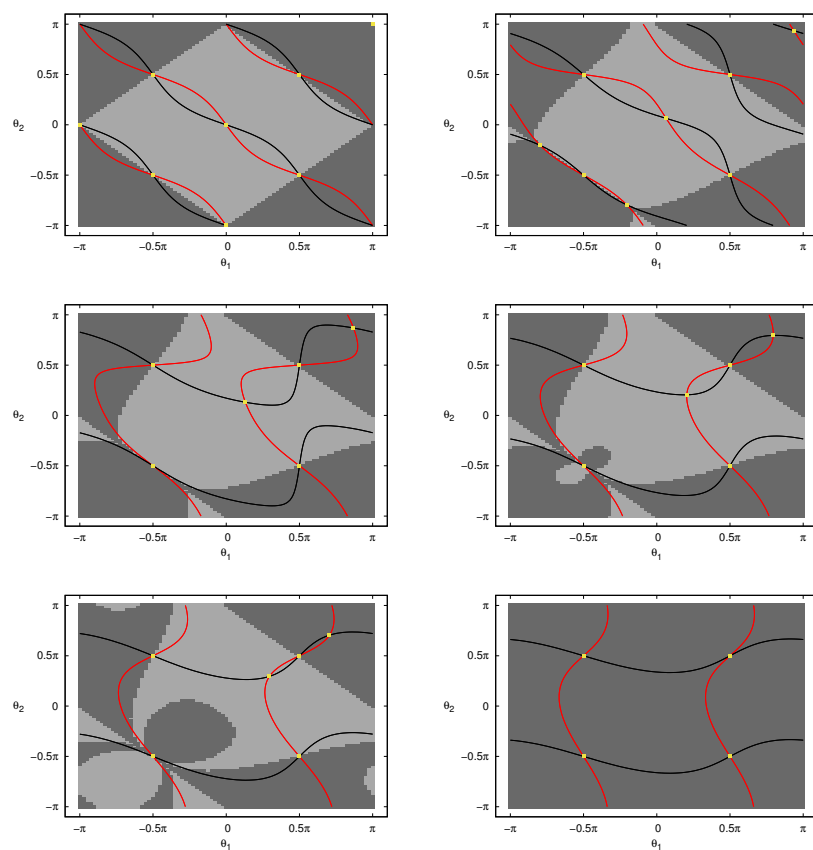


Figura 38 – Bacias de atração dos pontos  $(\cdot, \cdot, 0, 0)$  no espaço de configurações para o campo externo  $\mathbf{B}$  com diferentes intensidades e  $\theta^* = \frac{\pi}{2}$ , juntamente com as curvas solução do sistema algébrico  $\nabla U = 0$ . Da esquerda para a direita, de cima para baixo,  $B$  toma os valores (em tesla) de 0 a 2, 4, variando 0,6 de uma para a outra, e na última imagem o valor de  $B$  é 4,2 T.

## Conclusão

Neste trabalho realizamos o estudo das soluções analíticas da interação de dois dipolos a uma distância fixa e a influência dos parâmetros físicos nas características da solução. Verificamos que, nos casos em que um dos dipolos está fixo, sob condições iniciais que não permitam o dipolo livre dar voltas completas, o seu movimento é periódico, governado pela equação do pêndulo simples não-linear, cuja a amplitude só depende das condições iniciais e a frequência depende dos demais parâmetros físicos. No caso em que temos dois dipolos idênticos, também sob algumas hipóteses que restringem seus movimentos, temos que a amplitude de seus movimentos conjugados,  $\zeta$  e  $\eta$ , também só dependem das condições iniciais do sistema. Quanto às frequências que compõem as soluções, elas dependem dos demais parâmetros físicos. Sob as hipóteses de que  $I_1 = I_2$ , obtivemos, numericamente, que as bacias de atração dos pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis não mudam de tamanho nem de forma quando tomamos condições iniciais com velocidades não-nulas, apenas se tratando de translações do caso em que o plano é o das velocidades angulares nulas.

Sob condições um pouco mais gerais, mas ainda sem amortecimento, dadas as condições primeiras do sistema, em uma escala de tempo adimensional, a dinâmica somente depende da razão entre os momentos de inércia,  $\hat{I}$ . Da mesma maneira, o tamanho das bacias de atração dos pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis mostraram-se, numericamente, não variar, ao se observar também planos do espaço de fase paralelos a  $(\cdot, \cdot, 0, 0)$ , no entanto, deixam de ser apenas translações e modifica-se o seu formato.

O sistema composto pelos dois dipolos, quando na presença de um campo externo e com amortecimento, pode ter comportamentos bem diferentes, a depender da intensidade do campo externo e da sua orientação. Neste caso, não pudemos descrever nenhuma regularidade nas bacias de atração.

As evidências numéricas não foram abordadas analiticamente e estudos futuros necessitam ser realizados nesses assuntos, assim como uma possível mudança de abordagem no estudo da interação de dipolos na presença de campo magnético externo. Um próximo passo natural é a passagem para um sistema com três dipolos e seu estudo na formação de agregados.

# Referências

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions*. [S.l.]: National Bureau of Standards, 1972.
- ASSIS, A. K. T. *Eletrodinâmica de Weber*. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.
- ASSIS, A. K. T. *Mecânica Relacional e Implementação do Princípio de Mach com a Força de Weber Gravitacional*. [S.l.]: C. Roy Keys Inc., 2013.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D.; BURDEN, A. M. *Numerical Analysis*. 10. ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2016.
- CULLITY, D. B.; GRAHAM, C. D. *Introduction to Magnetic Materials*. 2. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009.
- CUNHA, F.; GONTIJO, R.; SOBRAL, Y. Symmetry breaking of particle trajectories due to magnetic interactions in a dilute suspension. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, v. 326, p. 240 – 250, 2013. ISSN 0304-8853. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304885312007202>>.
- DIXON, A. C. *The Elementary Properties of the Elliptic Functions*. [S.l.]: Macmillan and Co., 1894.
- DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações Diferenciais Ordinárias*. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- FIGUEIREDO, D. G. de; NEVES, A. F. *Equações Diferenciais Aplicadas*. 3. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2015.
- FRANCO, N. B. *Cálculo Numérico*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
- GALLARDO-ALVARADO, J. *Kinematic Analysis of Parallel Manipulators by Algebraic Screw Theory*. [S.l.]: Springer Nature, 2016.
- HALE, J. K. *Ordinary Differential Equations*. 2. ed. Flórida: Robert E. Krieger Publishing Company, 1980.
- HARTMAN, P. On the local linearization of differential equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, American Mathematical Society, v. 14, n. 4, p. 568–573, 1963. ISSN 00029939, 10886826. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2034276>>.
- HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. 3. ed. [S.l.]: Elsevier, 2013.
- KANG, T. G.; HULSEN, M. A.; TOONDER, J. M. J. den. Dynamics of magnetic chains in a shear flow under the influence of a uniform magnetic field. *Physics of Fluids*, v. 24, n. 4, p. 042001, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.4704822>>.
- LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. M. *Phys. Z. Sowjetunion*, v. 153, n. 8, 1935.

- LANDECKER, P. B.; VILLANI, D. D.; YUNG, K. W. An analytic solution for the torque between two magnetic dipoles. *Magnetic and Electrical Separation*, v. 10, p. 29–33, 1999.
- LAROZE, D.; PEREZ, L. Classical spin dynamics of four interacting magnetic particles on a ring. *Physica B: Condensed Matter*, v. 403, n. 2, p. 473 – 477, 2008. ISSN 0921-4526. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921452607006187>>.
- LAROZE, D. et al. Dynamics of two interacting dipoles. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, v. 320, n. 8, p. 1440 – 1448, 2008. ISSN 0304-8853. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304885307009882>>.
- LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 11. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2014. v. 2.
- LOPES, A. O. *Introdução à Mecânica Clássica*. 1. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2013.
- MAYER, A. M. Floating magnets. *American Journal of Science and Arts*, p. 247–256, 10 1878.
- NEGRINI, P. On the inversion of lagrange-dirichlet theorem. *Resenhas*, IME-USP, v. 2, n. 1, p. 83–114, 1995.
- NEWTON, S. I. *Principia:Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*: Livro 1. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2012.
- PLIHON, N. et al. Stochastic reversal dynamics of two interacting magnetic dipoles: A simple model experiment. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 94, p. 012224, Jul 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.94.012224>>.
- POLLACK, G. L.; STUMP, D. R. Two magnets oscillating in each other's fields. *Canadian Journal of Physics*, v. 75, p. 313–324, 1997.
- ROSA, A. P.; CUNHA, F. R.; CENICEROS, H. D. On minimal energy dipole moment distributions in regular polygonal agglomerates. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, v. 421, p. 269 – 282, 2017. ISSN 0304-8853. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304885316317073>>.
- ROUCHE, N.; HABETS, P.; LALOY, M. *Stability theory by Liapunov's direct method*. New York: Springer-Verlag, 1977.
- SCHWALM, W. *Lectures on Selected Topics in Mathematical Physics: Elliptic Functions and Elliptic Integrals*. [S.l.]: Morgan & Claypool Publishers, 2015. (IOP Concise Physics). ISBN 9781681740386.
- WATERLOO MAPLE INC. *The Maple Help System*. Toronto, 2016.
- WHITTAKER, E. T. *A History of the Theories of Aether and Electricity from the Age of Descartes to the Close of the Nineteenth Century*. [S.l.]: Longmans, Green and Company, 1910.
- YUNG, K. W.; LANDECKER, P. B.; VILLANI, D. D. An analytic solution for the force between two magnetic dipoles. *Magnetic and Electrical Separation*, v. 9, p. 39–52, 1998.