

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO  
TURBULENTO EM CANAL COM PAREDE RUGOSA  
VIA O MÉTODO LATTICE BOLTZMANN**

Vanderlino Coelho Barreto Neto

Brasília, Novembro de 2018

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO  
TURBULENTO EM CANAL COM PAREDE RUGOSA  
VIA O MÉTODO LATTICE BOLTZMANN**

**Vanderlino Coelho Barreto Neto**

*Relatório submetido ao Departamento de Engenharia  
Mecânica como requisito parcial para obtenção  
do grau de Mestre em Ciências Mecânicas*

Banca Examinadora

Prof. Francisco Ricardo da Cunha, ENM/UnB \_\_\_\_\_  
*Orientador*

Prof. Taygoara Felamingo de Oliveira, \_\_\_\_\_  
ENM/UnB  
*Examinador interno*

Prof. Yuri Dumaresq Sobral, MAT/UnB \_\_\_\_\_  
*Examinador externo*

Coelho Barreto Neto, Vanderlino  
Modelagem e simulação de escoamento turbulento em canal  
com parede rugosa via o Método Lattice Boltzmann /  
Vanderlino Coelho Barreto Neto; orientador Francisco  
Ricardo da Cunha. -- Brasília, 2018.  
91 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Ciências Mecânicas) --  
Universidade de Brasília, 2018.

1. Método Lattice Boltzmann . 2. suspensão de partícula.  
3. escoamento turbulento. I. Ricardo da Cunha, Francisco,  
orient. II. Modelagem e simulação de escoamento turbulento  
em canal com parede rugosa via o Método Lattice Boltzmann.  
III. ENM/FT/UnB. IV. ENM-DM 302/2018.

---

## RESUMO

O trabalho apresentando nessa dissertação estuda os efeitos das perturbações provocadas pela presença da rugosidades na superfície inferior no escoamento de um fluido. Para simular o problema do escoamento é utilizado o Método Lattice Boltzmann(MLB).

Antes de iniciar o estudo em si, são realizadas simulações para validar o programa Palabos, que é o *framework* com a implementação do MLB. Para cumprir a etapa de validação, são realizadas duas simulações utilizando o Palabos. A primeira etapa simula o problema da cavidade com contorno móvel, em que os resultados obtidos são comparados com dados já validados na literatura. A segunda etapa simula o problema do escoamento laminar em canal fechado. É desenvolvida uma solução analítica do problema, por meio de uma análise assintótica, e a partir dessa solução é feita a comparação com os resultados obtidos na simulação, para efeito de validação.

Finalizadas as validações, inicia-se o estudo dos efeitos das perturbações no escoamento, provocados pela presença de uma contorno rugoso. O problema a ser estudado é o escoamento em regime turbulento, em canal aberto, com presença de rugosidades na superfície inferior. Para efeito de comparação é simulado o escoamento no canal aberto, na ausência de rugosidade, em que é avaliada a perda de carga do escoamento pela vazão do escoamento e o pelo fator de atrito. Em seguida, são simulados dois casos com diferentes topologias de rugosidade.

A partir dos resultados desses três ensaios, são analisadas a perda de carga do escoamento, avaliando-se a velocidade média do escoamento, a vazão do escoamento e o fator de atrito do escoamento. Também são analisados os efeitos turbulentos, observando a intensidade das flutuações no escoamento, calculando e apresentando os tensores de tensões de Reynolds.

---

## ABSTRACT

The work presented in this dissertation studies the effects of perturbation in fluid flowing on channel, this perturbation is caused by the roughness on floor of the channel, to simulate the flow problem is used the Lattice Boltzmann Method.

Before starting the study, simulations to validate the program Palabos are performed. The first step simulate the cavity flow problem, where the results obtained are compared with valid data. the second step simulate the laminar flow on closed channel, is developed the analytical solution of problem and with this solution is parallel the results obtained in the simulation.

Finished validations, is started the study of effects of perturbation on flow. The problem to be studied is the turbulent flow on open channel with roughness on floor. For comparison level, is simulate the flow on open channel without roughness. Next, two cases with different bed forms of roughness are simulated. With the results of these three simulations is analyzed the load loss of flow by the mean velocity, the flow rate and the friction factor. Also are analyzed the turbulent effects observing the intensity of the turbulent fluctuations.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA PROPOSTO	1
1.2	OBJETIVO	3
1.3	DESCRIÇÃO DO RELATÓRIO CIENTÍFICO	3
<b>2</b>	<b>CONCEITOS FUNDAMENTAIS</b>	<b>5</b>
2.1	SEDIMENTAÇÃO E SUSPENSÃO	5
2.2	ESCOAMENTO EM REGIME TURBULENTO	8
2.2.1	TURBULÊNCIA	8
2.2.2	TEORIA DA DIFUSIVIDADE PARA SUSPENSÃO DE PARTÍCULA	9
2.3	CARACTERIZAÇÃO DO ESCOAMENTO	10
2.3.1	NÚMERO DE REYNOLDS	10
2.3.2	VAZÃO DO ESCOAMENTO	10
2.3.3	FATOR DE ATRITO	11
<b>3</b>	<b>MÉTODO LATTICE-BOLTZMANN</b>	<b>12</b>
3.1	FORMULAÇÃO DA LATTICE	12
3.1.1	FORMULAÇÃO BIDIMENSIONAL	13
3.1.2	FORMULAÇÃO TRIDIMENSIONAL	14
3.2	FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO	15
3.3	EQUAÇÕES DE LATTICE BOLTZMANN	16
3.4	TERMO DE COLISÃO	17
3.5	REPRESENTAÇÃO COM EQUAÇÕES MACROSCÓPICAS	18
3.6	MÉTODO LATTICE-BOLTZMANN	21
3.7	SIMULAÇÃO DE REGIME TURBULENTO (MODELO DE SMAGORINSKY)	21
3.8	CONDIÇÕES DE FRONTEIRA	23
3.8.1	CONDIÇÃO DE DESLIZAMENTO	23
3.8.2	CONDIÇÕES DE PAREDE	23
3.8.3	SUPERFÍCIE LIVRE	24
3.8.4	CONDIÇÃO PERIÓDICA	25
3.9	UNIDADES LATTICE	26
3.9.1	FORMULAÇÃO ADIMENSIONAL	26
3.9.2	DISCRETIZAÇÃO DO SISTEMA ADIMENSIONALIZADO	27

3.10	FORÇAMENTO .....	28
3.11	IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO .....	29
3.12	PALABOS .....	31
<b>4</b>	<b>VALIDAÇÃO.....</b>	<b>33</b>
4.1	CAVIDADE COM CONTORNO SUPERIOR MÓVEL .....	33
4.2	VALIDAÇÃO DO ESCOAMENTO EM REGIME TURBULENTO .....	37
<b>5</b>	<b>ESCOAMENTO EM CANAL COM SUPERFÍCIE RUGOSA .....</b>	<b>39</b>
5.1	SOLUÇÃO ANALÍTICA DO ESCOAMENTO LAMINAR .....	39
5.1.1	SOLUÇÃO ANALÍTICA DO ESCOAMENTO EM CANAL FECHADO RUGOSO .....	40
5.1.1.1	SOLUÇÃO $O(1)$ : $u_{0,0}$ .....	43
5.1.1.2	SOLUÇÃO $O(\varepsilon)$ : $u_{0,1}$ .....	46
5.1.1.3	SOLUÇÃO $O(\varepsilon^2)$ : $u_{0,2}$ .....	50
5.1.2	SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO EM CANAL FECHADO RUGOSO.....	53
5.1.2.1	SIMULAÇÃO PARA SUPERFÍCIE NÃO RUGOSA .....	54
5.1.2.2	SIMULAÇÃO PARA SUPERFÍCIE RUGOSA .....	56
5.2	SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO TURBULENTO .....	58
5.2.1	CANAL COM SUPERFÍCIE LISA .....	59
5.2.2	CANAL COM RUGOSIDADE TRIANGULAR.....	64
5.2.3	CANAL COM RUGOSIDADE SENOIDAL .....	68
5.2.4	ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	73
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>76</b>
6.1	TRABALHOS FUTUROS .....	77
6.1.1	EQUAÇÃO DA ADVECÇÃO E DIFUSÃO .....	77
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>79</b>
	<b>ANEXOS.....</b>	<b>81</b>

# LISTA DE FIGURAS

1.1	Canal de água construído nos muros da cidade de Machu Picchu.....	1
1.2	Escoamento de água em canal aberto. ....	2
1.3	Representação ilustrativa de um canal aberto, de inclinação $\theta$ e velocidade $u$ .....	3
2.1	Etapas da erosão.....	5
2.2	Fotos tiradas de satélite: (a) dunas dos Lenções Maranhenses; (b) dunas do Deserto da Namíbia(África) .....	6
2.3	Campos de plantação de arroz: (a) Filipinas; (b) China .....	7
2.4	Reservatório da CAESB .....	7
2.5	Difusão de partícula concentrada em escoamento turbulento, [1] .....	9
3.1	Lattice de modelo D2Q5 .....	13
3.2	Histograma da $f_i$ de lattice modelo D2Q5, [2] .....	13
3.3	Estrutura Lattice D2Q9.....	14
3.4	Estrutura da Lattice modelo D3Q19.....	15
3.5	Sistema bifásico. Fluido(azul) escoando sob um gás(cinza).....	24
3.6	Formulação da estrutura da superfície livre.....	24
3.7	Representação da atualização das lattices para a periodicidade .....	25
3.8	Canal inclinado no plano XY .....	28
3.9	Canal inclinado no planos X'Y' .....	28
3.10	Fluxograma do MLB.....	29
3.11	Função para calcular a $f_{eq}$ .....	30
3.12	Inicialização da lattices.....	30
3.13	Função para calcular o operador BGK. ....	31
3.14	Função para determinar a função de probabilidade pós colisão.....	31
3.15	Aplicando as condições de não deslizamento: (a) no topo da cavidade, onde $\mathbf{u} = (1, 0)$ ; (b), (c) e (d) são para as paredes, onde a $\mathbf{u} = (0, 0)$ .....	31
4.1	Cavidade com tampa móvel.....	34
4.2	Evolução da velocidade $u$ no centro da cavidade .....	35
4.3	Perfis de velocidade: componente $v$ no eixo $x$ ; componente $u$ no eixo $x$ . Os valores em $\Delta$ são retirados de [3] .....	35
4.4	Erro percentual da velocidade $u$ , $\frac{u - U_{Ert}}{U_{Ert}}$ .....	36
4.5	Perfis de velocidade $u$ para diferente $N(40, 80, 160, 240)$ e mais o de referência,[3] ....	36



4.6	Perfis do escoamento da simulação de validação:(a) velocidade média normalizada, $\bar{u}/U$ ; e produto médio das flutuações de velocidade normalizado, $\overline{u'v'}/\bar{U}^2$ .....	38
5.1	Canal fechado com rugosidade senoidal na superfície inferior .....	40
5.2	Perfil de velocidade de $u_{0,0}$ para diferentes valores de $n$ .....	46
5.3	Perfil de velocidade de $u_{0,0} + u_{0,1}$ para diferentes valores de $n$ .....	49
5.4	Perfil de velocidade de $u_{0,0} + u_{0,1} + u_{0,2}$ para diferentes valores de $n$ .....	52
5.5	Perfil de velocidade, com $n = 5$ , de: $u_{0,0}$ ; $u_{0,0} + u_{0,1}$ ; e $u_{0,0} + u_{0,1} + u_{0,2}$ .....	53
5.6	Geometria de controle, canal quadrado sem rugosidade, de dimensão L .....	54
5.7	Perfil de velocidade para diferentes Reynolds. A linha representa a solução analítica $u_{0,0}(x, y)$ e os quadrados os resultados obtidos pelo Palabos .....	55
5.8	Resultados para avaliar a coerência dos resultados .....	56
5.9	Geometria de controle, canal quadrado com rugosidade, de dimensão L .....	56
5.10	Perfil de velocidade para diferentes Reynolds. A linha é solução analítica do problema e os pontos são os resultados obtidos pelo Palabos .....	57
5.11	Resultados para avaliar a coerência dos resultados .....	58
5.12	Canal aberto com suas dimensões físicas e localização da perfis.....	59
5.13	Canal com superfície lisa .....	60
5.14	Velocidade média $\bar{\mathbf{u}}$ , com as linhas corrente, para inclinação do canal $\theta = 0, 175$ .....	60
5.15	Perfis da velocidade média $\bar{u}$ , para inclinação do canal $\theta = 0, 175$ .....	61
5.16	Perfis da velocidade média $\bar{v}$ , para inclinação do canal $\theta = 0, 175$ .....	61
5.17	Valor absoluto da vorticidade média do escoamento, na direção $\mathbf{z}$ , para o canal inclinado à $0,175^\circ$ .....	62
5.18	Seção transversal do produto $u'v'$ no instante 180 segundos, no perfil médio do escoamento, para o canal inclinado à $0,175^\circ$ .....	62
5.19	Perfis do tensor de tensões de Reynolds médio, $\overline{\rho u'v'}$ , para a inclinação do canal $\theta = 0, 175$ .....	63
5.20	Perfis da velocidade média $\bar{u}$ , da velocidade média $\bar{v}$ e tensor de tensões $\overline{\rho u'v'}$ , para inclinação do canal $\theta = 0, 115$ na posição 3 .....	63
5.21	Canal com superfície triangular .....	64
5.22	Velocidade média do escoamento, $\bar{\mathbf{u}}$ , com as linhas corrente, para o canal inclinado à $0,175^\circ$ .....	65
5.23	Valor absoluto da vorticidade média do escoamento, na direção $\mathbf{z}$ , para o canal inclinado à $0,175^\circ$ .....	65
5.24	Perfis de velocidade média $\bar{u}$ do escoamento com o canal inclinado à $0,175^\circ$ .....	66
5.25	Perfis de velocidade média $\bar{v}$ do escoamento com o canal inclinado à $0,175^\circ$ .....	66
5.26	Seção transversal do produto $u'v'$ no instante 180 segundos, no perfil médio do escoamento com o canal inclinado à $0,175^\circ$ .....	67
5.27	Perfis do tensor de tensões de Reynolds, $\overline{\rho u'v'}$ , do escoamento com o canal inclinado à $0,175^\circ$ .....	68
5.28	Canal com superfície senoidal .....	69

5.29	Velocidade média $\bar{u}$ do escoamento com o canal inclinado à $0,175^\circ$ , com as linhas de corrente, .....	69
5.30	Perfis de velocidade média $\bar{u}$ do escoamento com o canal inclinado à $0,175^\circ$ .....	70
5.31	Perfis de velocidade média $\bar{v}$ do escoamento com o canal inclinado à $0,175^\circ$ .....	70
5.32	Valores do produto $u'v'$ no instante 180 segundos, no perfil médio do escoamento com o canal inclinado à $0,175^\circ$ .....	71
5.33	Perfis do tensor de tensões de Reynolds, $\overline{\rho u'v'}$ , do escoamento com o canal inclinado à $0,175^\circ$ .....	71
5.34	Perfis da velocidade média $\bar{u}$ , da velocidade média $\bar{v}$ e tensor de tensões $\overline{\rho u'v'}$ , para inclinação do canal $\theta = 0,057$ na posição 3 .....	72
5.35	Perfis da velocidade média $\bar{u}$ , da velocidade média $\bar{v}$ e tensor de tensões $\overline{\rho u'v'}$ , para inclinação do canal $\theta = 0,045$ na posição 3 .....	73
5.36	Perfis de $\mu$ nos canais liso, senoidal e triangular, para a mesma inclinação $\theta = 0,115^\circ$ .....	74
5.37	Perfis de $-\overline{\rho u'v'}$ nos canais liso, senoidal e triangular, para Re próximos de 11700 ....	74

# LISTA DE TABELAS

3.1	Valores de $w$ para os respectivos índices.....	14
3.2	Valores de $w$ para os respectivos índices.....	15
4.1	Sumário do valores da velocidade $u$ , para diferentes $N$ , e análise de convergência.....	37
4.2	Sumario comparativo com as informações do Caso 5,[4], e simulação de validação.....	38
5.1	Sumário dos resultados obtidos nas simulações .....	73

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Símbolos Latinos

$A$	Área	[m <sup>2</sup> ]
$h$	amplitude da rugosidade	[kJ/kg]
$Q$	Vazão volumétrica	[m <sup>3</sup> /s]
$f$	função distribuição de probabilidade	
$U$	Velocidade do escoamento	[m/s]
$u$	Componente horizontal da velocidade	[m/s]
$\bar{u}$	Componente horizontal da velocidade média	[m/s]
$u'$	Componente horizontal da flutuação de velocidade	[m/s]
$v$	Componente vertical da velocidade	[m/s]
$\bar{v}$	Componente vertical da velocidade média	[m/s]
$v'$	Componente vertical da flutuação de velocidade	[m/s]

## Símbolos Gregos

$\alpha$	inverso do período	[1/s]
$\Delta$	Varição entre duas grandezas similares	
$\rho$	Massa específica	[m <sup>3</sup> /kg]
$\nu$	Viscosidade cinemática	
$\tau$	tempo de relaxação	[s]
$\theta$	inclinação do canal	[°]

## Grupos Adimensionais

$Nu$	Número de Nusselt
$Re$	Número de Reynolds

## Subscritos

$eq$	equilíbrio
$neq$	não-equilíbrio
$i$	índice dos vetores velocidade

## Sobrescritos

$n$	número de interações
–	Valor médio

## Siglas

MLB	Método Lattice Boltzmann
LG	Lattice Gases automata
SM	Smagorisky Model

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 Apresentação do Problema Proposto

Na indústria, quando é necessário que seja alcançada uma mistura mais homogênea ou a suspensão de algum tipo de pequeno corpo em um fluido, são construídas pequenas formas geométricas no fundo da estrutura, que são responsáveis pelo transporte e mistura. Essas formas podem ser chamadas de rugosidades, no qual essa superfície rugosa é responsável por perturbar o escoamento. Devido a essa perturbação, o fluido se movimenta de forma diferente, em comparação ao seu deslocamento sem a presença dessas rugosidades, conseqüentemente, resultando em um mistura mais eficiente ou um aumento na concentração de pequenas suspensões no fluido. Assim, sabendo apontar quais foram os efeitos dessas rugosidades no fluido e ao final relacioná-los com a difusão e a concentração do material, pode ser estudado uma forma de otimizar os processos de mistura ou suspensão material.



Figura 1.1: Canal de água construído nos muros da cidade de Machu Picchu.

Na arquitetura inca são identificadas construções, onde provavelmente foram utilizadas no transporte de água, aquedutos, sendo presentes na cidade de Machu Picchu, figura 1.1. Nessas estruturas são identificadas rochas descoladas mais à frente, formando um degrau, e em outros canais, na maioria sendo mais íngremes, há pequenos reservatórios. Lembrando que a cidade perdida dos Incas fica localizada em regiões montanhosas, caso a água captada fosse escoando em canais completamente lisos, provavelmente o líquido poderia espirar para fora dos canais por causa da sua velocidade, em pontos mais a baixo. Talvez, esses pequenos degraus ou reservatórios possam ter sido colocados não apenas para facilitar na retirada de água dos canais, mas também para diminuir a velocidade do fluido, figura 1.2.



Figura 1.2: Escoamento de água em canal aberto.

Observando um problema na área das ciências geográficas, as enxurradas são acidentes naturais comuns, tendo como característica o regime do escoamento ser turbulento, com grande concentração de partículas suspensas e escoam sobre superfícies com presenças de saltos ou dunas, onde essas imperfeições podem ser consideradas como rugosidades da superfície. O objetivo final do estudo nessa área é conseguir estimar a concentração de partículas suspensas no escoamento, a vazão aproximada da enxurrada e por fim sua quantidade de movimento. E então, a partir dessas informações, conseguir avaliar quais serão os prováveis danos ou projetar algum sistema de contenção.

A partir das questões apresentadas acima e apoiado no trabalho "*The effects of bed form roughness on total suspended load via the Lattice Boltzmann Method*", [4], o estudo apresentado nesse trabalho tem como finalidade avaliar os efeitos da rugosidade em um escoamento.

O problema deste trabalho é elaborado com base na formulação proposta no artigo, que é o fluido escoando em uma geometria com inclinação,  $\theta$ , onde a superfície inferior tem uma forma, sendo definida como rugosidade. Por este canal escoam um fluido e sua superfície é livre, isto é, o topo da estrutura é aberto. Com base nessa formatação da geometria de controle do problema, define-se o canal por onde ocorre o escoamento. O esquema meramente ilustrativo do canal é

apresentado na figura 1.3.

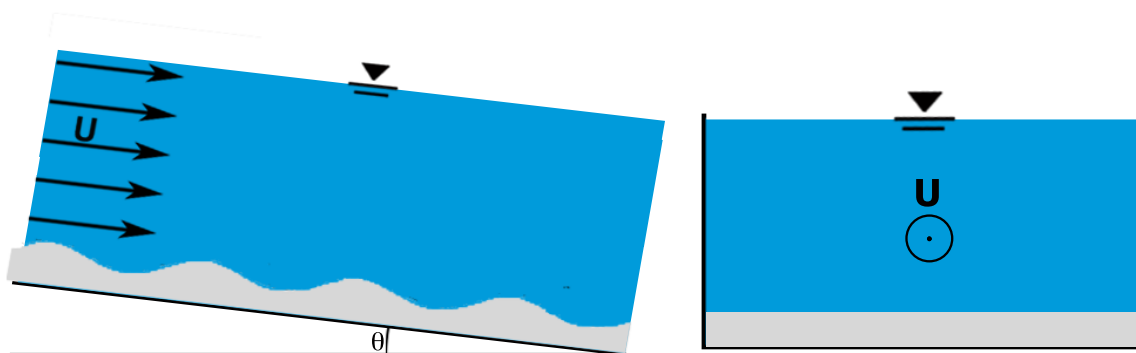


Figura 1.3: Representação ilustrativa de um canal aberto, de inclinação  $\theta$  e velocidade  $u$

O método numérico utilizado para simular os escoamentos será o Método Lattice Boltzmann (MLB). A escolha desse método se dá pelo fato do MLB utilizar uma estrutura chamada lattices, que define a malha do método numérico. A lattice é definida como uma unidade com os vetores velocidade de deslocamento com direções definidas. Por conta disso, o método Lattice Boltzmann é um método numérico ágil e está sendo bastante utilizado por ser facilmente paralelizável, [2] e [5], em que o foco é acelerar o cálculo de simulações refinadas.

## 1.2 Objetivo

Este trabalho tem como objetivo verificar os efeitos causados pela perturbação provocada pela rugosidade na superfície inferior do canal no escoamento de fluido. Para julgar os efeitos da rugosidade no escoamento, são avaliados a vazão do escoamento, o fator de atrito e a intensidade dos efeitos turbulentos produzidos pela rugosidade.

Para alcançar esse objetivo, antes, é definido a etapa de validação. O MLB é validado em diferentes etapas, sendo elas: validação utilizando o problema da cavidade com contorno móvel, utilizando como referência o artigo [3]; simular um escoamento em regime laminar, onde é utilizado de uma solução analítica, para validar os resultados obtidos na simulação; e simular o escoamento em regime turbulento, nessa, é implementado na simulação o modelo de Smagorinsky no Método Lattice Boltzmann, os resultados são validados ao comparar com os resultados do caso 5 do artigo [4].

## 1.3 Descrição do Relatório Científico

Para alcançar os objetivos apresentados acima é necessário revisar os conceitos que fundamentam a teoria por trás de cada assunto, o qual é feito no capítulo 2.



Inicia-se apresentando os conceitos de sedimentação e suspensão de partículas, dada a necessidade de entender a física do problema. Depois, já com os dados obtidos, saber como apresentá-los para a melhor compreensão e análise final. Este conteúdo está presente no subcapítulo 2.1.

Em seguida, são apresentadas as características do escoamento turbulento, com teorias e formulação de turbulência. A partir de então, é abordada a teoria estatística utilizada para representar os efeitos turbulentos no escoamento. Com base na formulação estatística, é apresentada a teoria do tensor de tensões e sua relação com o coeficiente de difusividade. Esse assunto está apresentado no subcapítulo 2.2.

Finalizada a seção de revisão, são apresentados alguns conceitos fundamentais da dinâmica dos fluidos, que são utilizados neste trabalho, como formulação do número de Reynolds e a compreensão dos seus valores. Também, são apresentadas algumas expressões utilizadas para quantificar os resultados obtidos, como o cálculo numérico da vazão, a velocidade do escoamento e o fator de atrito em paredes, que são discutidos no subcapítulo 2.3.

No capítulo 3, é apresentado o desenvolvimento para chegar na equação utilizada para se implementar o Método Lattice Boltzmann, sendo explanada a equação de Boltzmann, o operador de colisão, a obtenção da equação da continuidade e da equação de Navier-Stokes, para apresentar a equação de Lattice Boltzmann. Depois, são apresentadas as condições de contorno que são utilizadas nas simulações e, por fim, um roteiro breve com a implementação do MLB para o problema da cavidade.

No capítulo seguinte, cap. 4, são realizadas as validações do Método Lattice Boltzmann. A ordem para a validação será: No subcapítulo 4.1, é utilizado o problema da cavidade com tampa móvel, onde os resultados da simulação do MLB são validados ao comparar com os resultados apresentados no artigo [3].

As simulações do escoamento no canal começam no capítulo 5. No subcapítulo 5.1.1 é apresentado o estudo do escoamento em regime laminar, em um canal fechado com rugosidade na superfície inferior. Essa fase do estudo tem como objetivo resolver o problema de escoamento laminar, resolvendo-o de forma analítica, utilizando análise assintótica, assumindo o escoamento em *creeping flow*,  $Re \ll 1$ , e a amplitude da rugosidade muito pequena. Assim, podemos comparar a solução analíticas com os resultados da simulação numérica.

No subcapítulo 5.2 são realizadas as simulações do escoamento em regime turbulento, em um canal aberto com rugosidade na superfície inferior, tendo como referência o artigo [4]. Como já apresentado no subcapítulo 1.1, essa fase do estudo tem como objetivo resolver o problema de escoamento turbulento utilizando somente o método numérico de Lattice Boltzmann. Também estão presentes nesse capítulo os resultados obtidos nas simulações, juntamente com análise e interpretação dos dados.

Finalizando com o capítulo de conclusão, cap. 6, onde são feitas as interpretações finais dos resultados. A apresentação dos trabalhos futuros está acompanhando a conclusão, pois as últimas discussões do trabalho estão ligadas às próximas etapas do estudo.

## Capítulo 2

# Conceitos Fundamentais

### 2.1 Sedimentação e Suspensão

O desgaste da terra, erosão, ocorre dado um conjunto de ações no solo. O processo de erosão se inicia com rupturas de porções de terra, que se desprendem e se desgastam. Esses pedaços se chocam, atritando umas contra as outras, produzindo pequenos granulados. Esse granulados são transportados, podendo ser levados por vento ou por água. Futuramente, porções desses aglomerado de terra podem se depositar em outros locais, se sedimentando e formando alguma outra porção de terra, compactada, ou continuando soltos, como nas dunas [1].

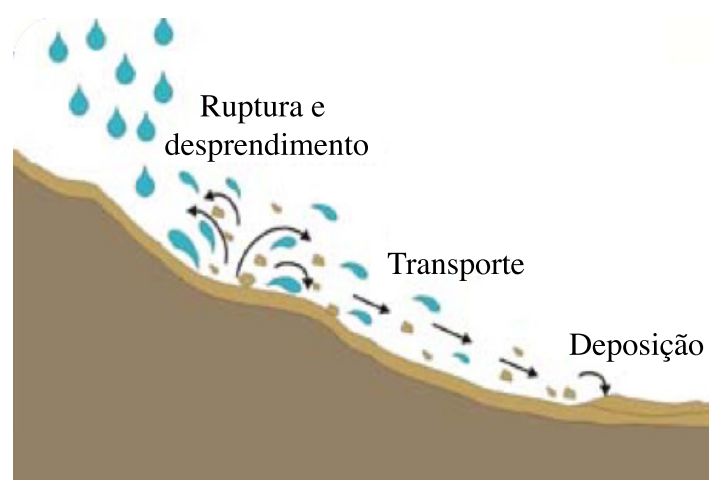


Figura 2.1: Etapas da erosão

A duna é um tipo de formação geográfica, gerada pelo transporte de pequenas partículas de areia, ao serem transportadas pelo vento figura 2.2a. As dunas estão presentes em variadas regiões, que apresentam com fortes ventos.

O transporte do material se dá pelos fortes escoamentos de ventos, em que as flutuações turbulentas ajudam a suspender os grãos de areia que, por fim, são arrastadas pelo escoamento médio.

Os ventos constantes, carregando a areia, criam novos bancos de areia e, em alguns casos,



Figura 2.2: Fotos tiradas de satélite: (a) dunas dos Lenções Maranhenses; (b) dunas do Deserto da Namíbia(África) .

podem passar a impressão de que as dunas estão se movendo por inteiro, modificando a paisagem.

O deslizamento de terra é o deslocamento do solo comumente causado por chuvas, quando uma quantidade elevada de água infiltrou-se no solo, diminuindo a fixação entre as porções de solo ou subsolo. Com isso, essa diminuição da sustentação, possibilita o movimento do material superficial, dada a ação da gravidade.

Os deslizamentos de terra são mais frequentes em regiões de encosta e morros, visto que são regiões com presença de corte ou terrenos mais íngreme. Porém, existem ações que podem influenciar na ocorrência desse desprendimento de terra, como a vibração provocada por máquinas pesadas, erupção de vulcões e o desmatamento de vegetação natural, sendo esta a influência predominante.

O desmatamento é a intervenção que mais favorece para o aumento das ocorrência de deslizamento. Isto porque, ao retirar a vegetação, a água consegue infiltrar no solo mais facilmente, até camadas mais profundas, deixando o solo mais suscetível a deslizamentos. Durante um deslizamento, as maiores partes do material que compõem a mistura vão se sedimentando, enquanto o escoamento vai perdendo velocidade. Com isso, o transporte das partes suspensas no meio ocorre por uma grande extensão.

As enxurradas podem ser comuns em regiões de morros ou encosta, com plantações em áreas alagadas e reservatórios de água, como, por exemplos, plantações de cereais e lagoas naturais e artificiais, respectivamente. Nesse tipo de região, a água é transportada mais lentamente e pela superfície, facilitando a sedimentação, havendo uma quantidade relevante de sedimentos e em diversos tamanho. Quando ocorre alguma chuva ou uma precipitação, não controladas, ocorre o escoamento do fluido mais facilmente e com velocidade elevada, dado o volume de água presente.

Assim, o carregamento de sedimentos nas enxurradas ocorre em função da velocidade do escoamento superficial da água e a turbulência gerada, que são influenciados pelo tipo de reservatório e pela rugosidade superficial e declividade do terreno, respectivamente [6].

Um outro caso, que foge da linha dos fatos apresentados acima, é o processo de tratamento de água, onde a sedimentação das partículas é uma das etapas necessária para a purificação.



(a)

(b)

Figura 2.3: Campos de plantação de arroz: (a) Filipinas; (b) China

Durante o processo de tratamento, é necessário que haja a maior retirada de materiais depositados na água. Em alguns métodos, a primeira etapa é a sedimentação dos materiais em grandes tanques. A água é admitida e retirada dos tanques de forma lenta, escoando de maneira que não sejam produzidas grandes velocidades (perturbações). Com isso, o material pode se sedimentar no fundo do escoamento.



Figura 2.4: Reservatório da CAESB

Após um tempo necessário para a sedimentação, o fluido é retirado do tanque por cima. Pois, a seção de fluido estacionado na parte superior do tanque, será a com a menor quantidade de partículas dispersas.

## 2.2 Escoamento Em Regime Turbulento

O transporte por difusão de partículas é causado, predominantemente, por causa das flutuações de velocidade no escoamento ao interagir com as partículas, como são apresentado no subcapítulo 2.2.2. Assim, afirmamos que há uma relação direta entre a difusão no fluido com as flutuações turbulentas do escoamento. Portanto precisamos descrever a natureza destas flutuações antes de avançarmos neste trabalho.

### 2.2.1 Turbulência

O regime turbulento é caracterizado como um escoamento instável, com comportamento aleatório. A turbulência é um fenômeno dissipativo, isto é, ao interromper o forçamento que gera o escoamento, este deixa de ser turbulento rapidamente.

Também há as múltiplas escalas do escoamento, como as grandes escalas que estão associadas ao forçamento do escoamento e as pequenas escalas que são responsáveis pela dissipação turbulenta. Trabalhar com essa grande diferença de grandezas, é uma dificuldade inerente na simulação de escoamentos turbulentos.

Dado que o escoamento turbulento se desenvolve de maneira aleatória, uma forma de estudar a turbulência é através de uma abordagem estatística, [7]. Para isso, o vetor velocidade do escoamento turbulento é decomposto em dois termos:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}', \quad (2.1)$$

o termo  $\bar{\mathbf{u}}$  é a velocidade média e o termo  $\mathbf{u}'$  é a flutuação ao redor dessa média.

Ao apresentar a velocidade do escoamento desta forma, verifica-se duas medidas para velocidade. O primeiro termo é um termo filtrado (média temporal), de maior escala, que é denominado como velocidade média,  $\bar{\mathbf{u}}$ , [7]:

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{S} \int_0^S \mathbf{u}(\mathbf{x}, t + s') ds', \quad (2.2)$$

em que,  $S$  é o tempo físico analisado e  $s'$  o passo temporal. Para  $ds'$  discreto, a velocidade média pode ser calculada pela expressão simplificada:

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (2.3)$$

sendo  $n$  o número de valores avaliados.

A flutuação de velocidade,  $\mathbf{u}'$ , é calculada pela expressão:

$$\mathbf{u}'_n = \mathbf{u}_n - \bar{\mathbf{u}}. \quad (2.4)$$

em que,  $\mathbf{u}_n$  é o valor da velocidade instantânea.

Partindo do vetor de flutuação de velocidade em um escoamento bidimensional, escrevemos,

$$\mathbf{u}' = u' \mathbf{e}_x + v' \mathbf{e}_y, \quad (2.5)$$

no qual, podemos construir o tensor de Reynolds das flutuações a partir do produto vetorial das flutuações de velocidade.

$$\mathbf{u}' \times \mathbf{u}' = \begin{bmatrix} u'u' & u'v' \\ v'u' & v'v' \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

### 2.2.2 Teoria da difusividade para suspensão de partícula

O arrasto produzido pelo escoamento do fluido nas partículas é uma das formas de se transportar sedimentos. Assim, ao avaliar somente essa forma de transporte, temos uma situação onde os sedimentos, de forma majoritária, são transportados no seio do canal. Porém, a presença de rugosidades no fundo de canais, ou quando há grandes declividades no trajeto do escoamento, produzem a suspensão dos sedimentos, o que por sua vez, facilita o transporte das partes e diminui a sedimentação.

A suspensão dos sedimentos é consequência da turbulência produzida no escoamento. O efeito turbulento é originado pela elevada velocidade do fluido, pela rugosidade no fundo do canal. A turbulência e a vorticidade são resultantes da interação com o fundo rugoso, que ao suspender as partículas, produz o aumento da dispersão de sedimentos no fluido, durante a evolução do escoamento.

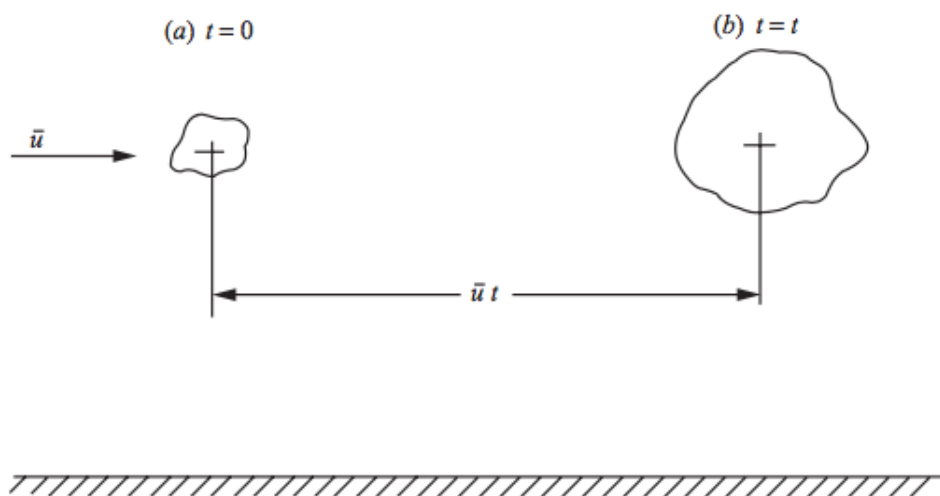


Figura 2.5: Difusão de partícula concentrada em escoamento turbulento, [1] .

Uma forma de exemplificar a difusividade, é acompanhar um aglomerado de sedimentos sendo transportado pelo fluido, em escoamentos turbulentos, fig. 2.5.

Tomando como referência o volume do aglomerado, no exato momento em que é suspenso pelo fluido e assumindo o tempo  $t$  igual a zero. Observando esse conjunto de sedimentos se deslocando, ao percorrer um distância  $\bar{u}t$ , observa-se que os sedimentos pertencentes somente ao aglomerado, agora ocupam a vizinhança do volume de referência, onde, anteriormente não tinham sedimentos. O volume ocupado pelos sedimentos, depois do deslocamento, é maior do que o volume inicial do

aglomerado. Isso se dá pela difusividade turbulenta do escoamento, resultado das flutuações de velocidade, [1].

## 2.3 Caracterização do escoamento

### 2.3.1 Número de Reynolds

O número de Reynolds,  $Re$ , é um parâmetro adimensional, que identifica o regime de escoamento do fluido, no qual ele associa forças de inércia com as forças viscosas do fluido. A expressão utilizada para determinar o número de Reynolds é:

$$Re = \frac{\rho \mathbf{U} L}{\mu}, \quad (2.7)$$

em que,  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $\mathbf{U}$  é uma velocidade constante do escoamento,  $L$  uma escala de comprimento do canal e  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido.

O escoamento está em regime laminar quando o número de Reynolds do escoamento é menor que 2000,  $Re < 2000$ . Para  $2000 < Re < 4000$ , define-se que o escoamento está em regime transiente e, para  $Re > 4000$ , é definido que o escoamento está em regime turbulento, [8].

Para calcular o número de Reynolds dos escoamentos simulados, a velocidade  $\mathbf{U}$  utilizada é a velocidade média do escoamento,  $\bar{\mathbf{U}}$ . Para calcular a velocidade média, primeiro calcula-se a velocidade média em cada secção, depois, é calculada a média desses valores calculados.

$$\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{u}}. \quad (2.8)$$

### 2.3.2 Vazão do Escoamento

A diminuição da vazão do escoamento é um sinal de perda de carga. Como comentado no capítulo 1.1, em alguns casos, é desejável que ocorra essa perda de carga.

Para calcular vazão dos escoamentos simulados, primeiro definimos uma seção transversal no sentido do escoamento, avaliamos a velocidade do escoamento em torno desta seção. A partir disso, assumindo que o escoamento está deslocando no sentido do eixo  $x$ , a vazão pode ser calculada a partir da expressão:

$$Q = \int_0^Y \int_0^Z \mathbf{U}(z, y) dz dy, \quad (2.9)$$

onde,  $\mathbf{U}(z, y)$  é a velocidade do escoamento e os limite de integração são definidos pela dimensão da seção transversal do escoamento.

Assumindo que o perfil de velocidade do escoamento na direção vertical não varie por toda a largura  $W$  do canal, podemos reescrever a equação da seguinte forma

$$Q = W \int_0^y \mathbf{U}(y) dy = W\dot{Q}. \quad (2.10)$$

### 2.3.3 Fator de atrito

Em escoamentos com valores altos do número de Reynolds, principalmente quando o escoamento está em regime turbulento, há elevados gradientes de velocidade perto das paredes do escoamento. Fundamentada na variação de velocidade na direção da sua componente normal, a tensão de cisalhamento no fluido é calculada pela expressão,

$$\tau_{parede} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_w. \quad (2.11)$$

A média das tensões de cisalhamento,  $\bar{\tau}_{parede}$ , na parede está associada ao fator de atrito do escoamento,

$$f_{at} = 8 \frac{\bar{\tau}_{parede}}{\rho \bar{U}^2}. \quad (2.12)$$

Esta é uma forma de avaliar a perda de carga de um escoamento, desde que, quanto maior o fator de atrito, maior a perda de carga.



## Capítulo 3

# MÉTODO LATTICE-BOLTZMANN

O Método Lattice Boltzmann foi criado com base no *Lattice Gas Automata*. A equação de Boltzmann foi formulada pelo físico Ludwig Edward Boltzmann com o objetivo de encontrar uma formulação que fosse possível relacionar a dinâmica molecular, na escala microscópica, com os modelos físicos macroscópicos. Para isso, Boltzmann, com base neste conceito utilizou uma modelagem mecânica estatística para representar o deslocamento das partículas, [9].

### 3.1 Formulação da Lattice

A lattice pode ser exemplificada como sendo uma partícula com direção e sentido de deslocamento bem definidos, assim, a quantidade de vetores velocidade é fixa e com direção e sentido definidos. Os deslocamentos da lattice sempre estão direcionados para outra lattice, na sua vizinhança, formando assim uma malha, que por sua vez, é a malha estrutural das simulações.

A Método Lattice Boltzmann utiliza a estrutura de lattices para definir sua geometria de controle, com isso, podemos afirmar que o MLB é um método com descrição Euleriana, dado que as lattices são fixas no escoamento. A análise do movimento por meio de lattices, utiliza uma abordagem estatística, na qual é avaliada a probabilidade de partículas presentes na região da lattice se deslocarem nas direções determinadas, essa probabilidade do deslocamento é dada pela função de distribuição de velocidade,  $f_i$ , onde  $i$  é índice referente a cada direção.

A malha da simulação é construída pelo tipo de modelo da lattice, que no caso está associado ao número de dimensões do problema,  $n$ , e o número de vetores velocidade que definem as direções do deslocamento,  $m$ . Assim, os modelos de lattice são classificados como  $DnQm$ , exemplificando, uma Lattice bidimensional com cinco vetores velocidade é uma Lattice D2Q5, fig. 3.1, [10].

Exemplificado o que é a função distribuição da lattice, utilizando o modelo D2Q5, na figura 3.2 é apresentado um histograma dos valores das  $f_i$ . Para esse modelo de lattice, a  $f_0$ , posicionada no centro da lattice, representa a probabilidade da lattice não se deslocar, a  $f_1$  a probabilidade da lattice se deslocar para direita, a  $f_2$  a probabilidade da lattice subir,  $f_3$  a probabilidade da lattice se deslocar para esquerda e  $f_4$  a probabilidade da lattice se deslocar para baixo.

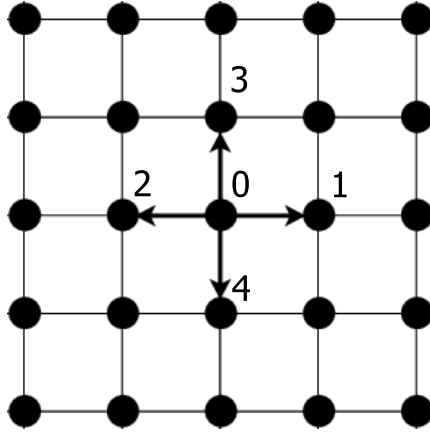


Figura 3.1: Lattice de modelo D2Q5

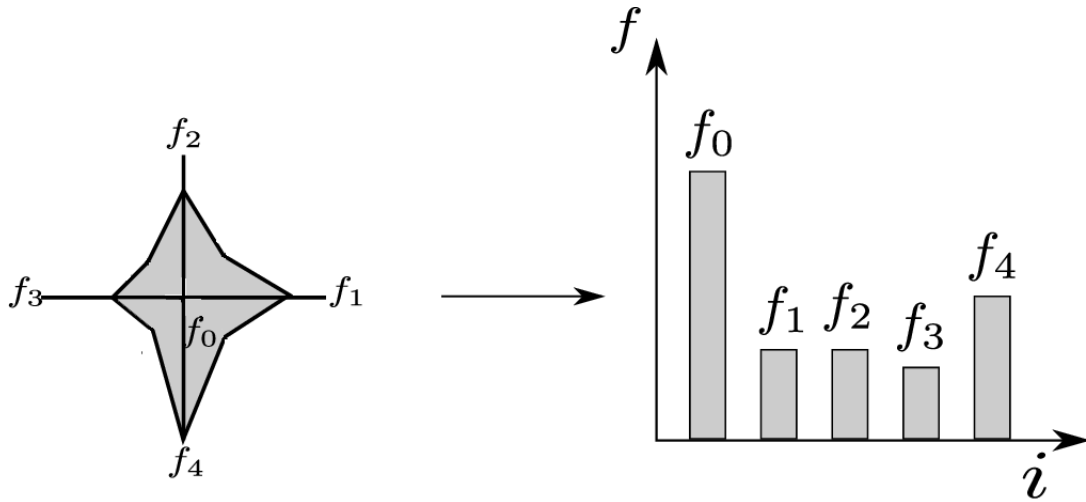


Figura 3.2: Histograma da  $f_i$  de lattice modelo D2Q5, [2]

A partir dessa introdução sobre a lattice, é apresentado os modelos de lattice que são utilizados nesse trabalho. Nas simulações bidimensionais, é adotado o modelo D2Q9, seção 3.1.1, e nas simulações tridimensionais é adotado o modelo D3Q19, seção 3.1.2 .

### 3.1.1 Formulação bidimensional

As simulações bidimensionais neste trabalho são realizadas utilizando o modelo com nove componentes de velocidade, modelo D2Q9, fig. 3.3. Assumindo a  $\mathbf{c}_0$  está no centro do plano,  $(0,0)$ , as velocidades  $c(0,0)$ ,  $c(1,0)$ ,  $c(0,1)$ ,  $c(-1,0)$ ,  $c(0,-1)$ ,  $c(1,1)$ ,  $c(-1,1)$ ,  $c(-1,-1)$  e  $c(1,-1)$  são correspondentes as funções  $f_0$ ,  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ ,  $f_4$ ,  $f_5$ ,  $f_6$ ,  $f_7$  e  $f_8$ , respectivamente, sendo que oito dessas componentes de velocidade estão direcionadas para as lattices vizinhas

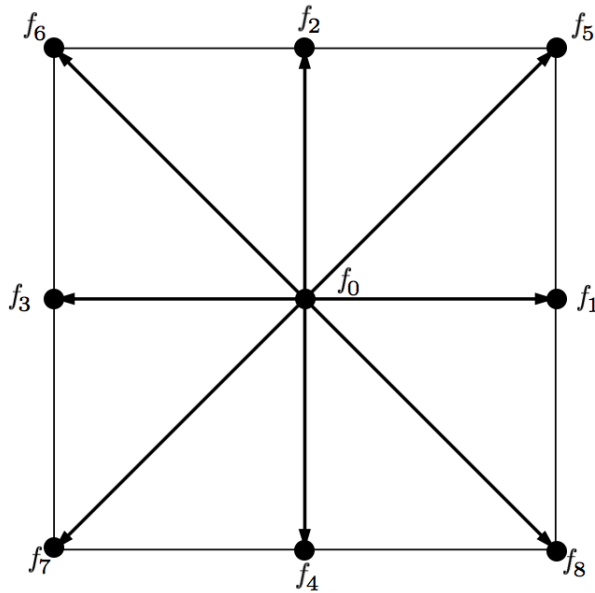


Figura 3.3: Estrutura Lattice D2Q9

As funções referentes ao deslocamento da lattice no sentido diagonal devem ser corrigidas, pois há diferença de distâncias entre as lattices vizinhas. Essa correção é feita pelo termo de ponderação  $w_i$ , para o modelo D2Q9, como há duas distâncias diferentes e o próprio elemento, existem três valores distintos para  $w_i$ , tabela 3.1.

Tabela 3.1: Valores de  $w$  para os respectivos índices

$i$	$w_i$
0	12 / 36
1 - 4	2 / 36
5 - 8	1 / 36

### 3.1.2 Formulação Tridimensional

As simulações deste trabalho, utilizando uma malha em tridimensional, utilizam um modelo que dispõe de 19 componentes de velocidade, figura 3.4. Essa maior quantidade de vetores velocidade justifica-se pelo maior número de elementos lattice nas vizinhanças de um elemento. Esse modelo é escolhido, pensando em manter a coerência com os trabalhos de referências, [4].

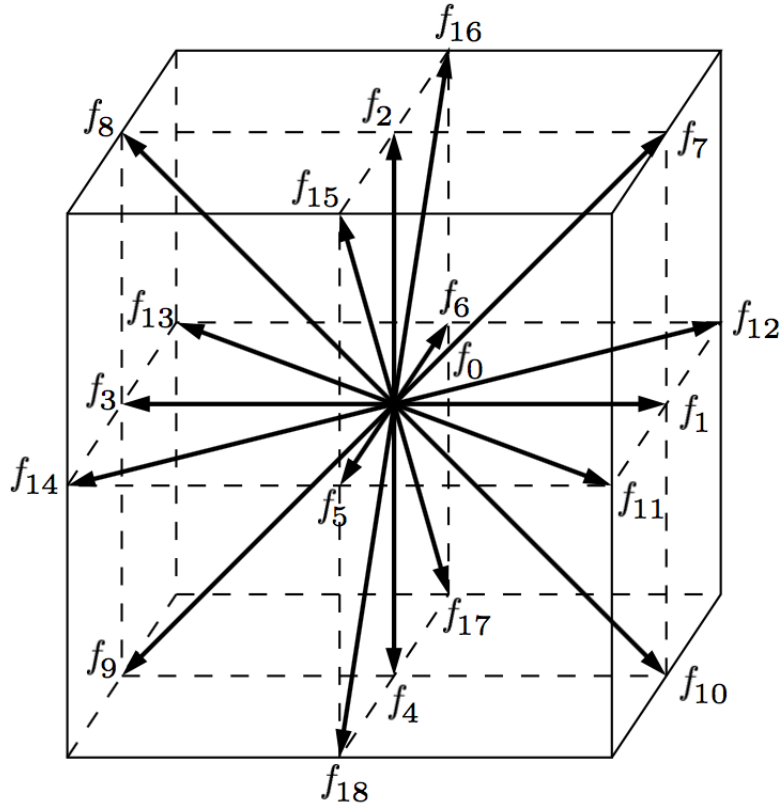


Figura 3.4: Estrutura da Lattice modelo D3Q19

Assumindo a  $\mathbf{c}_0$  está no centro do plano,  $(0,0,0)$ , as velocidades  $c(0,0,0)$ ,  $c(1,0,0)$ ,  $c(0,1,0)$ ,  $c(-1,0,0)$ ,  $c(0,-1,0)$ ,  $c(0,0,1)$ ,  $c(0,0,-1)$ ,  $c(1,1,0)$ ,  $c(-1,1,0)$ ,  $c(-1,-1,0)$ ,  $c(1,-1,0)$ ,  $c(1,0,1)$ ,  $c(1,0,-1)$ ,  $c(-1,0,-1)$ ,  $c(-1,0,1)$ ,  $c(0,1,1)$ ,  $c(0,1,-1)$ ,  $c(0,-1,-1)$  e  $c(0,-1,1)$  são correspondentes as funções  $f_0$ ,  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ ,  $f_4$ ,  $f_5$ ,  $f_6$ ,  $f_7$ ,  $f_8$ ,  $f_9$ ,  $f_{10}$ ,  $f_{11}$ ,  $f_{12}$ ,  $f_{13}$ ,  $f_{14}$ ,  $f_{15}$ ,  $f_{16}$ ,  $f_{17}$  e  $f_{18}$  respectivamente.

No modelo da Lattice D3Q19, há três distâncias diferentes nas direções avaliadas, logo, é necessário três valores para o fator de ponderação, tabela 3.2.

Tabela 3.2: Valores de  $w$  para os respectivos índices

$i$	$w_i$
0	12 / 36
1 - 6	2 / 36
7 - 18	1 / 36

### 3.2 Função distribuição

A função distribuição de equilíbrio,  $f_i^{eq}$ , é obtida pelo truncamento da distribuição de Maxwell Boltzmann, até o termo  $O(\mathbf{u}^2)$ , [11] :

$$f_i^{eq} = \rho [a + b\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u} + c(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2 - d\mathbf{u}^2], \quad (3.1)$$

onde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são constantes da lattice. Para uma malha modelada por lattice D2Q9, a função de distribuição do equilíbrio é escrita como, [11]:

$$f_i^{eq} = w_i \rho \left[ 1 + \frac{1}{c_s^2} e_i \cdot u + \frac{1}{2c_s^4} (e_i \cdot u)^2 - \frac{1}{2c_s^2} u^2 \right], \quad (3.2)$$

onde,  $c_s$  é a constante relacionada a velocidade da lattice, sendo definida como  $c_s = 1/\sqrt{3}$ .  $w_i$  é uma constante de ponderação, dado a diferença de distâncias entre as lattices da malha, no qual, cada modelo de lattice dispõe de seus valores de ponderação para cada vetor velocidade.

### 3.3 Equações de Lattice Boltzmann

Apresentamos a equação de Lattice Boltzmann, como uma equação cinemática discreta, em função da distribuição de probabilidade da partícula, a partir da equação da evolução do método *Lattice Gas Automata*, [11]:

$$f_i(\mathbf{x} + c_i \Delta x, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = \Omega_i(f(\mathbf{x}, t)), \quad (3.3)$$

na qual,  $f_i$  é a função distribuição de velocidade e  $\Omega_i$  é o operador de colisão, que representa a taxa de variação da distribuição após uma colisão. Ambos estão relacionados às direções definidas, dado os respectivos índices  $i$ .  $\Delta x$  e  $\Delta t$  são os passos espaciais e temporais da equação, depois da colisão, e, por sua vez,  $c_i$  é a velocidade de avanço do método, sendo definido como  $|c_i| = \Delta x / \Delta t$ .

Realizando a expansão de  $f_i(\mathbf{x} + c_i \Delta x, t + \Delta t)$  pela serie de Taylor, no tempo e no espaço, truncando na segunda ordem das derivadas:

$$f_i(\mathbf{x} + c_i \Delta x, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) + \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} + c_i \cdot \nabla f_i \right) + \left( c_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{1}{2} c_i c_i : \nabla \nabla f_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} \right), \quad (3.4)$$

substituindo a expansão na equação 3.3 conseguimos obter a formulação continua da equação cinemática para  $f_i$ :

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial t} + c_i \cdot \nabla f_i \right) + \left( c_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{1}{2} c_i c_i : \nabla \nabla f_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} \right) = \Omega_i(f) \quad (3.5)$$

A partir da expansão de Chapman-Enskog, que propõe uma separação de múltiplas escalas, de forma a representar fenômenos com diferentes escalas temporais, os fenômenos rápidos são representados na escala de tempo  $t_1$ , a qual é associada a escala temporal da convecção, e os fenômenos lentos são representados na escala de tempo  $t_2$ , associados à escala temporal da difusão, lembrando que a difusão é um fenômeno mais lento que o da convecção. Dessa forma, dizemos que  $f_i(\mathbf{x}, t) \rightarrow f_i(\mathbf{x}, t_1, t_2)$ .

As derivadas parciais no espaço e no tempo podem ser escritas em termo de um parâmetro pequeno,  $\epsilon$ , sendo esse um termo associado aos incrementos de mesma ordem. A expansão da derivada temporal, truncando no termo ordem  $\epsilon^2$ , se dá na forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2}, \quad (3.6)$$

a expansão da derivada espacial é truncando no termo ordem um da expansão:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial}{\partial x^1}. \quad (3.7)$$

Da mesma forma, podemos expandir a  $f_i$  em função de  $\epsilon$ :

$$f_i = f_i^{eq} + \epsilon f_i^{neq}, \quad (3.8)$$

sendo

$$f_i^{neq} = f_i^1 + \epsilon f_i^2. \quad (3.9)$$

Calculando o momento da função distribuição de velocidade no equilíbrio,  $f_i^{eq}$ , confirmamos que há a conservação da massa,  $\rho$ , e a conservação da quantidade de movimento,  $\rho \mathbf{u}$ , [11]:

$$\rho = \sum_i f_i^{eq} \quad \text{e} \quad \rho \mathbf{u} = \sum_i \mathbf{c}_i f_i^{eq}. \quad (3.10)$$

Contudo, o mesmo não é válido para a função distribuição fora do equilíbrio,

$$\sum_i f_i^1 = \sum_i f_i^2 = 0 \quad \text{e} \quad \sum_i \mathbf{c}_i f_i^1 = \sum_i \mathbf{c}_i f_i^2 = 0. \quad (3.11)$$

Utilizando as expansões definidas acima, termos 3.6, 3.7 e 3.8, reescrevemos a equação 3.5, até o termo ordem  $\epsilon^2$ :

$$\begin{aligned} & \epsilon \left( \frac{\partial f_i^{eq}}{\partial t^1} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla f_i^{eq} \right) + \dots \\ & + \epsilon^2 \left( \frac{\partial f_i^1}{\partial t^1} + \frac{\partial f_i^{eq}}{\partial t^2} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla f_i^1 + \frac{1}{2} \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i : \nabla \nabla f_i^{eq} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla \frac{\partial f_i^{eq}}{\partial t^1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_i^{eq}}{\partial t^{12}} \right) = \Omega_i \end{aligned} \quad (3.12)$$

### 3.4 Termo de Colisão

Para desenvolver a 3.12, é preciso definir o termo de colisão  $\Omega_i$ . Expandindo o termo de colisão pela série de Taylor em função de  $f_i$ , truncando a expansão no termo ordem  $\epsilon^2$  encontramos:

$$\Omega_i(f) = \Omega_i(f^{eq}) + \epsilon \frac{\partial \Omega_i(f^{eq})}{\partial f_j} f_j^{(1)} + \epsilon^2 \left( \frac{\partial \Omega_i(f^{eq})}{\partial f_j} f_j^{(2)} + \frac{\partial^2 \Omega_i(f^{eq})}{\partial f_j \partial f_k} f_j^{(1)} f_k^{(1)} \right) \quad (3.13)$$

onde, o termo:

$$\frac{\partial \Omega_i(f^{eq})}{\partial f_j} \equiv \mathbf{M}_{ij}, \quad (3.14)$$

é denominado como matrix de colisão, [12]. Se consideramos localmente que a distribuição de relaxação tende a um estado de equilíbrio, podendo ser representando por uma única taxa de relaxação,  $\tau$ , assumimos que:

$$\mathbf{M}_{ij} = -\frac{1}{\tau} \mathbf{I}. \quad (3.15)$$

Observando a equação 3.12 e levando em consideração que  $\epsilon$  é um termo muito pequeno, determinamos que :

$$\Omega_i(f^{eq}) = 0. \quad (3.16)$$

Substituindo o termo 3.15 e 3.16 em 3.13, encontramos um fator de colisão simplificado, do qual esse foi proposto por Bhatnagar, Gross e Krook, [13], o termo de colisão BGK da lattice:

$$\Omega_i(f) = -\frac{1}{\tau} \left( \epsilon f_i^{(1)} + \epsilon^2 f_i^{(2)} \right), \quad (3.17)$$

Com base na expansão Chapman Enskog de  $f_i$ , substituindo o termo 3.9 em 3.8 e separando os termos de não-equilíbrio,

$$\epsilon f_i^{(1)} + \epsilon^2 f_i^{(2)} = -(f_i^{eq} - f_i) \quad (3.18)$$

substituindo a igualdade na equação 3.17, chegamos na forma do operador BGK que é utilizada na implementação do Método Lattice Boltzmann:

$$\Omega_i(f) = \frac{1}{\tau} (f_i^{eq} - f_i). \quad (3.19)$$

### 3.5 Representação Com Equações Macroscópicas

Definido o termo de colisão BGK, 3.17, substituindo-o na equação 3.12 e simplificando a ordem  $\epsilon$  da igualdade, chegamos na equação:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial f^{eq}}{\partial t^1} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla f^{eq} \right) + \dots \\ & + \epsilon \left( \frac{\partial f^1}{\partial t^1} + \frac{\partial f^{eq}}{\partial t^2} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla f^1 + \frac{1}{2} \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i : \nabla \nabla f^{eq} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla \frac{\partial f^{eq}}{\partial t^1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^{eq}}{\partial t^{12}} \right) = \\ & = -\frac{1}{\tau} \left( f_i^{(1)} - \epsilon f_i^{(2)} \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Avaliando do termo ordem um da equação 3.20:

$$\left( \frac{\partial f^{eq}}{\partial t^1} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla f^{eq} \right) = -\frac{f_i^{(1)}}{\tau}, \quad (3.21)$$

calculando a quantidade de movimento dos termos da igualdade,

$$\sum_i \frac{\partial f^{eq}}{\partial t^1} = \frac{\partial \rho}{\partial t^1} \quad ; \quad \sum_i \mathbf{c}_i \cdot \nabla_1 f^{eq} = \rho \nabla_1 \cdot \mathbf{u} \quad \text{e} \quad \sum_i \frac{f_i^{(1)}}{\tau} = 0, \quad (3.22)$$

chegamos na igualdade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t^1} + \rho \nabla_1 \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.23)$$

Aplicando a derivada parcial  $\frac{\delta}{\delta t^1}$  no termo ordem um e reescrevendo-o, chegamos na relação:

$$\frac{\partial^2 f^{eq}}{\partial t^{12}} = -\mathbf{c}_i \cdot \nabla \frac{\delta f^{eq}}{\delta t^1} - \frac{1}{\tau} \frac{\delta f_i^{(1)}}{\delta t^1} \quad (3.24)$$

substituindo no termo ordem dois, encontramos:

$$\left(1 - \frac{1}{2\tau}\right) \frac{\partial f_i^1}{\partial t^1} + \frac{\partial f^{eq}}{\partial t^2} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla f^1 + \frac{1}{2} \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i : \nabla \nabla f^{eq} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_i \cdot \nabla \frac{\delta f^{eq}}{\delta t^1} = -\frac{1}{\tau} f_i^{(2)}, \quad (3.25)$$

em seguida, operando  $\mathbf{c}_i \cdot \nabla$  no termo ordem um encontramos a relação:

$$\mathbf{c}_i \mathbf{c}_i : \nabla \nabla f^{eq} = -\mathbf{c}_i \cdot \nabla \frac{\partial f^{eq}}{\partial t^1} - \mathbf{c}_i \cdot \nabla \frac{f_i^{(1)}}{\tau}, \quad (3.26)$$

substituindo na igualdade 3.25

$$\left(1 - \frac{1}{2\tau}\right) \left(\frac{\partial f_i^1}{\partial t^1} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla f^1\right) + \frac{\partial f^{eq}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\tau} f_i^{(2)}. \quad (3.27)$$

Calculando o momento de ordem zero, sabendo não a conservação da massa para os termos de  $f^1$  e  $f^2$ , igualdades 3.11, encontramos:

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial t^2} f^{eq} = 0. \quad (3.28)$$

Calculando o momento de ordem zero da expansão 3.6 de  $f_i$  para os termos  $f^{eq}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_i f_i = \epsilon \frac{\partial}{\partial t^1} \sum_i f^{eq} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t^2} \sum_i f^{eq} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t^1} \sum_i f^{eq}, \quad (3.29)$$

dessa forma, chegamos a igualdade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \rho}{\partial t^1}. \quad (3.30)$$

e lembrando que  $\frac{\partial}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial}{\partial x^1}$ , igualdade 3.7, podemos reescrever 3.23 como sendo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.31)$$

conseguindo apresentar a equação da continuidade a partir da equação de Lattice Boltzmann, [11].

Substituindo a expressão 3.27 na equação 3.20 e calculando o momento de primeira ordem, chegamos na expressão:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_i \mathbf{c}_i f^{eq} + \nabla \cdot \sum_i \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i f^{eq} + \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right) \left(\nabla \cdot \sum_i \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i f_i^1\right) = 0. \quad (3.32)$$

no qual, o termo  $\sum_i \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i$  é o momento de segunda ordem. A partir do valor de  $f^{eq}$ , eq. (3.2), conseguimos calcular o segundo termo da igualdade acima:

$$\frac{1}{\rho} \sum_i \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i f^{eq} = \sum_i \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i w_i \left[1 + \frac{1}{c_s^2} e_i \cdot u + \frac{1}{2c_s^4} (e_i \cdot u)^2 - \frac{1}{2c^2} u^2\right] = c_s^2 \mathbf{I} + \rho \mathbf{u} \mathbf{u}. \quad (3.33)$$

Para calcular o terceiro termo da igualdade, primeiro determinamos a valor de  $f^1$ , utilizando o termo ordem zero da equação, termo 3.21, substituindo  $f^{eq}$  pela expressão 3.2,

$$\begin{aligned} f_i^{(1)} &= -\tau \left(\frac{\partial}{\partial t^1} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla\right) f^{eq} = \\ &= -\tau w_i \left(\frac{\partial}{\partial t^1} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla\right) \left[1 + \frac{1}{c_s^2} e_i \cdot u + \frac{1}{2c_s^4} (e_i \cdot u)^2 - \frac{1}{2c^2} u^2\right], \end{aligned} \quad (3.34)$$



calculando o momento de segunda ordem de  $f^1$ ,

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i f_i^1 &= \\ &= - \sum_i \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i \tau w_i \left( \frac{\partial}{\partial t^1} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla \right) \left[ 1 + \frac{1}{c_s^2} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2c_s^4} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{1}{2c^2} u^2 \right] = \\ &= -\tau \rho c_s^2 [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Com os termos de momento de segunda ordem calculados, substituindo-os em 3.32:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho c_s^2 \mathbf{I} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \mathbf{u} - \left( 1 - \frac{1}{2\tau} \right) (\tau \rho c_s^2) (\nabla \cdot [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]) = 0, \quad (3.36)$$

fazendo algumas manipulações algébricas e sabendo que a pressão é definida como:

$$p = \rho c_s^2, \quad (3.37)$$

no qual a constante da velocidade de som,  $c_s$ , é dada por:

$$c_s = 1/\sqrt{3}, \quad (3.38)$$

e a viscosidade cinemática é definida como:

$$\nu = c_s^2 (\tau - 1/2), \quad (3.39)$$

assim, a partir dessas igualdades, chegamos na expressão:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \mathbf{u} = -\nabla \cdot \mathbf{p} + \rho \nu (\nabla \cdot [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]). \quad (3.40)$$

Dessa forma, obtemos a formulação da equação de Navier-Stokes, por meio da equação de Lattice Boltzmann, deixando evidente a dependência da viscosidade cinemática do fluido no termo dissipativo da equação, que por sua vez, a viscosidade é definida pelo tempo de relaxação do fluido.

Analisando o quarto termo da igualdade 3.40 e aplicando o produto  $\nabla \cdot$ :

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}^T). \quad (3.41)$$

desenvolvendo cada termo separadamente, chegamos nas igualdades:

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}) = \nabla^2 \mathbf{u} \quad \text{e} \quad \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}^T) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (3.42)$$

Substituindo os termos desenvolvidos 3.42 na igualdade 3.40, chegamos na expressa da equação de Lattice Boltzmann com o termo  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  explícito, sendo essa referente à compressibilidade do escoamento:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \mathbf{u} = -\nabla \cdot \mathbf{p} + \rho \nu (\nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla^2 \mathbf{u}). \quad (3.43)$$

Mesmo assumindo no início da resolução a hipótese de incompressibilidade, podemos afirma que a Equação Lattice Boltzmann carrega um termo compressível. Assim, ao implementar o MLB, estamos assumindo que há compressibilidade da lattice. Então, para que esse termo não seja relevante devemos assumir um tempo de relação adequado para que os termos compressíveis sejam desconsiderados.

### 3.6 Método Lattice-Boltzmann

O Método Lattice-Boltzmann foi desenvolvido com base da equação de Boltzmann, eq. (3.3), onde, o termo de colisão utilizado é o operador de BGK, eq. (3.19), dessa forma, chegamos na equação discretizando do método:

$$\frac{f_i(x, t + \Delta t) - f_i(x, t)}{\Delta t} + \mathbf{c}_i \cdot \frac{f_i(x + \Delta x, t + \Delta t) - f_i(x, t + \Delta t)}{\Delta x} = \frac{1}{\tau} (f_i^{eq}(x, t) - f_i(x, t)). \quad (3.44)$$

Assumindo que  $\Delta x = c_i \Delta t$  e substituindo na igualdade acima, realizando as devidas simplificações, chegamos na igualdade,

$$f_i(x + \Delta x, t + \Delta t) - f_i(x, t) = -\frac{\Delta t}{\tau} [f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)]. \quad (3.45)$$

Reformulando a equação acima, deixando em evidência o termos  $f_i(x + \Delta x, t + \Delta t)$ , que representa a distribuição de probabilidade após a colisão das partículas, em função de  $f_i(x, t)$  e do operador BGK.

$$f_i(x + \Delta x, t + \Delta t) = f_i(x, t) - \frac{\Delta t}{\tau} [f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)]. \quad (3.46)$$

Ajustando as constantes, onde,  $\tau\omega = \Delta t$ , a  $f_i(x + \Delta x, t + \Delta t)$  também pode ser escrito na forma,

$$f_i(x + \Delta x, t + \Delta t) = f_i(x, t) [1 - \omega] + \omega f_i^{eq}(x, t). \quad (3.47)$$

### 3.7 Simulação de Regime Turbulento (Modelo de Smagorinsky)

Em um escoamento de regime turbulento, os efeitos convectivos, produzidos pela turbulência, são de ordens bem superior que os efeitos difusivos. Simulações com esse tipo de características são denominado de Simulação de Larga Escala, do inglês *Large eddy Simulation* (LES).

Dado o problema de simular escoamentos com diferentes ordens de escala, em 1963, Joseh Smagorinsky propôs um método de modelagem para as simulações de escoamento em regime turbulento, [14], onde, os efeitos das pequenas escala de turbulência no escoamento são modelados em decorrência dos desenvolvimentos dos fenômenos de maiores escalas, [15] e [16].

O modelo de Smagorisky é deduzido utilizando um fator de dimensão da malha,  $\Delta$ , e um termo na escala de velocidade relacionado à taxa de deformação. Considerando uma sub-escala no regime turbulento, referente aos resíduos de velocidade, para o modelo padrão de Smagorinsky (SGS) definimos a viscosidade cinemática turbulenta, relacionada aos movimentos residuais:

$$\nu_{tb} = C_s^2 \Delta^2 |\mathbf{S}|, \quad (3.48)$$

onde  $C_s$  é a constante de Smagorisky e  $\Delta$  é uma dimensão espacial da malha, sendo que sua dimensão é da mesma ordem que o espaçamento da lattice,  $\delta_x$ . O termo  $\bar{\mathbf{S}}$  é definido como sendo:

$$|\mathbf{S}| = (2S_{\alpha\beta}S_{\alpha\beta})^{1/2}, \quad (3.49)$$

sabendo que  $\mathbf{S}$  a parte simétrica do tensor taxa de deformação da velocidade:

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (3.50)$$

Assumindo que a viscosidade cinemática total seja :

$$\nu_{\text{total}} = \nu_0 + \nu_{tb} = c_s^2 \left( \tau_{\text{total}} - \frac{1}{2} \right), \quad (3.51)$$

em que  $\nu_0$  é a viscosidade cinemática molecular e  $\nu_{tb}$  é a viscosidade turbulenta. Sabendo que  $\nu_0$  é função do tempo de relaxação da lattice,  $\tau_0$ , sendo descrito pela expressão:

$$\nu_0 = c_s^2 \left( \tau_0 - \frac{1}{2} \right). \quad (3.52)$$

Dessa forma, devemos determinar o valor da viscosidade total, pois  $\tau_{\text{total}}$  deverá ser o tempo de relaxação utilizado no termo que colisão, eq.(3.17), para o modelo de Smagorinsky.

A partir da expansão Chapman-Enskog, aplicada nos termos de função distribuição de probabilidade, da equação de Lattice Boltzmann, igualdade 3.8, calculamos o momento de segunda ordem da função distribuição de não-equilíbrio,  $f^{neq}$ ,

$$\pi^{neq} = \sum_i \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i f^{neq} = \sum_i \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i (f_i - f_i^{eq}) = 2c_s^2 \rho \tau_{\text{total}} S. \quad (3.53)$$

Calculando a norma de  $\pi^{neq}$

$$\prod = \sqrt{\pi^{neq} \pi^{neq}} = c_s^2 \rho \tau_{\text{total}} |\mathbf{S}| \quad (3.54)$$

reescrevendo a igualdade, deixando em evidência o termo  $|\mathbf{S}|$  e substituindo-o na viscosidade turbulenta, eq.(3.48), conseguimos retirá-lo do termo  $\nu_{tb}$ :

$$\nu_{tb} = C_s^2 \Delta^2 \prod (c_s^2 \rho \tau_{\text{total}})^{-1}. \quad (3.55)$$

Com os termos  $\nu_0$  e  $\nu_{tb}$  escritos somente em função de constantes pré-determinadas, substituindo-os na 3.51 e manipulando algebricamente, encontramos a expressão para determinar o valor de  $\tau_{\text{total}}$ :

$$\tau_{\text{total}} = \frac{\tau_0 + \sqrt{\tau_0^2 + 2C_s^2 \Delta^2 \prod (\rho c_s^4)^{-1}}}{2}. \quad (3.56)$$

Assim, o tempo de relaxação utilizado para calcular o operador BGK, no Método Lattice Boltzmann com modelo de Smagorinsky, é o tempo de relaxação total,  $\tau_{\text{total}}$ .

A constante de Smagorinsky está relacionada ao número de Reynolds, ao formato da geometria de controle da simulação, à resolução da malha e às constantes materiais, sendo assim, um termo complicado de determinar. O valor da constante de Smagorinsky é o mesmo adotado no artigo de referência, [4],  $C_s = 0,11$ , mantendo a coerência na simulações, com objetivo de uma melhor comparação dos resultados.

## 3.8 Condições de Fronteira

As superfícies e os volumes de controle do problema apresentam as seguintes condições de contorno: condição de deslizamento; condição de não deslizamento; condição de superfície livre; e condição periódica. A partir de um problema, relacionando-o com as respectivas condições, a simulação numérica é construída. A seguir, detalharemos como implementá-las no MLB.

### 3.8.1 Condição de deslizamento

A condição de deslizamento é utilizada necessariamente para restringir a região de controle. Ou seja, a velocidade normal a uma região particular deve sempre ser zero, condição de impenetrabilidade, porém, as outras componentes da velocidade não devem ser influenciadas.

Exemplificando, em um escoamento bidimensional, a condição de contorno de deslizamento é calculada,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (3.57)$$

discretizando a igualdade, apresentamos a expressão na forma:

$$\Delta u / \Delta y = 0. \quad (3.58)$$

Assim, utilizando diferenças finitas, utilizando os índices  $n$ ,  $a$  e  $b$  para representar o número da interação e a posição dos elementos no sentido horizontal e vertical, respectivamente,

$$\frac{u^n_{a,b} - u^n_{a,b-1}}{y_b - y_{b-1}} = 0, \quad (3.59)$$

simplificando,

$$u^n_{a,b} = u^n_{a,b-1} \quad (3.60)$$

chegamos na expressão utilizada para representar a condição de contorno.

### 3.8.2 Condições de parede

A condição de parede é utilizada para representar um limite ou obstáculo na malha, uma parede, como o próprio nome sugere. Assim, essa é especificada por ter uma condição de não deslizamento:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \neq 0, \quad \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{parede}} = 0, \quad (3.61)$$

Uma outra característica da condição de parede, é a condição de impenetrabilidade. A velocidade normal ao plano da parede é nula. Finalizando, o gradiente de pressão e velocidade, entre os elementos da parede, são iguais a zero. O canal, que define a geometria de controle do problema, tem uma superfície rugosa. Onde, os elementos da malha, que representam essa rugosidade, são

configurados com a condição de parede, tendo velocidade nula. As paredes laterais, também, são configuradas como sendo paredes fixas, velocidade igual a zero.

A condição de parede, para o topo da geometria de controle, em um dos casos, tem velocidade igual a  $U$ , sendo esse diferente de zero. Em outro caso a velocidade é igual a zero.

### 3.8.3 Superfície livre

O fluido ao escoar em canais abertos sofre a influência do meio acima dele, fig. 3.5. Para esse tipo de escoamento, as simulações utilizam a condição de superfície livre, para reproduzir tal condição de escoamento.

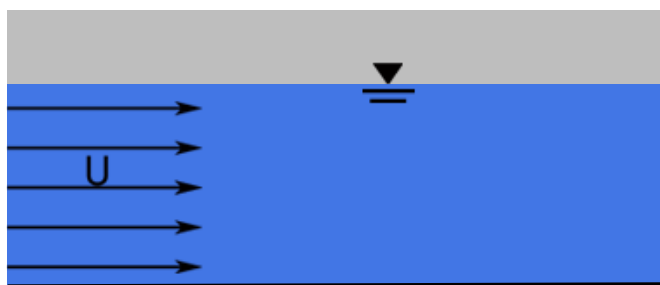


Figura 3.5: Sistema bifásico. Fluido(azul) escoando sob um gás(cinza)

Uma forma de representar o problema de escoamento em canal aberto é considerado um escoamento com duas fases, dado que, é necessário analisar a interação entre os dois fluidos.

A malha terá três tipos de elementos distintos: os que representam completamente o fluido; os que represente completamente o meio acima do escoamento, um gás por exemplo; e os elementos da interface, que tem a função probabilidade com o vetor velocidade apontando no sentido de direção para elementos do fluido e para o gás, figura 3.6.



Figura 3.6: Formulação da estrutura da superfície livre

Detalhes desta condição de fronteira pode ser encontrado em [4].

### 3.8.4 Condição periódica

Estudar a evolução do escoamento do fluido, decorre da necessidade de avaliar a forma que o escoamento se desenvolve, desde o seu repouso até o momento em que o escoamento está plenamente desenvolvido.

O problema proposto neste trabalho, apresenta, como condição inicial, o fluido partindo do repouso,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0$ . Para iniciar o escoamento do fluido, assume-se um forçamento. A partir do repouso, é acompanhado a evolução do escoamento.

A simulação, para este caso, poderá ser realizada utilizando uma geometria de controle com um número de elementos bem grande, na direção do escoamento, porém, isso traria um custo computacional elevado. Uma outra maneira de resolver este problema, é utilizar uma condição de contorno periódica, na geometria de controle, que garante que o escoamento seja cíclico, como apresentado na figura abaixo.

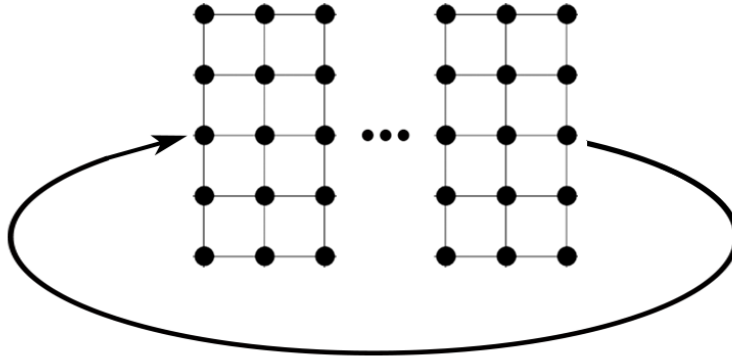


Figura 3.7: Representação da atualização das lattices para a periodicidade

A condição periódica consiste em atualizar as funções probabilidade das lattice a cada interação. No final da cada interação que determina a  $f_i^n$ , onde,  $i$  corresponde ao índice do vetor velocidade e  $n$  o número da interação, todas distribuições das lattice são transladadas no sentido do escoamento, aplicando a igualdade:

$$f_i^n(x) = f_i^n(x + \delta_x, y, z). \quad (3.62)$$

Assim, os elementos situados ao final da lattice,  $f_i(1, y)$ , serão os primeiros elementos do início da lattice, na interação seguinte, antes de serem operados.

$$f_i^n(0, y) = f_i^n(1, y) \quad (3.63)$$

Porém, para se utilizar a condição de borda periódica, é necessário que a topologia da lattice seja igual no início e no final da lattice, isto é, os elementos devem ser coincidentes. Neste trabalho, aplica-se a condição de contorno periódica na direção do escoamento, eixo  $\mathbf{x}$ .

### 3.9 Unidades Lattice

As simulações numéricas, a princípio, devem representar de forma fidedigna um comportamento físico real. Caso os resultados encontrados não sejam coerentes com experimentos ou a teoria, não há utilidade na simulação. Durante a implementação de um código, um problema recorrente é na escolha quantitativa da unidade da simulação.

A escolha da unidade é determinada de forma que a simulação deve ser equivalente ao modelo físico real, dimensão e ordem de grandeza das variáveis. Assim, as ordens de grandeza dos parâmetros de entrada, na simulação numérica, devem estar bem definidos, no âmbito de se garantir a acurácia do método, onde, a resolução da malha deve ser suficiente, para resolver o problema, e o ganho do passo de tempo deve ser reduzido, de forma que as propriedades físicas da simulação sejam garantidas, [17].

Para o primeiro passo, a equação física do sistema é convertida para sua forma adimensionalizada, onde estará independente das escalas físicas. A transição do sistema físico para o sistema adimensionalizado é realizado através da escolha de uma escala de comprimento,  $l_0$ , e uma escala de tempo  $t_0$ .

Em seguida, no segundo passo, o sistema adimensionalizado é convertido em um sistema discreto, sendo dependente dos parâmetros de simulação. A transição, para o sistema Lattice Boltzmann, ocorre através da escolha do intervalo de espaço discreto,  $\delta_x$ , e o intervalo de tempo,  $\delta_t$ .

A equação discreta de Boltzmann para resolver problemas macroscópicos de escoamentos, se assemelha a equação de Navier-Stokes. Dessa forma, a dependência do parâmetro adimensional deve ser mantida, como a solução da equação de Navier-Stokes depende somente do número de Reynolds, nas etapas de adimensionalização e discretização do sistema, deve ser mantida a relação com  $Re$ , [17].

$$\text{Sistema físico} \xleftrightarrow{Re, l_0, t_0} \text{Sistema adimensionalizado} \xleftrightarrow{Re, \delta_x, \delta_t} \text{Sistema discreto} \quad (3.64)$$

Os passos de mudança de escala dos sistema são reversíveis, pois assim é possível dimensionar para o sistema físico, os resultados calculados pelo MLB. Dessa forma, tanto qualitativamente quanto quantitativamente, encontra-se resultados numéricos coerentes a um experimento real.

#### 3.9.1 Formulação adimensional

As equações que apresentam o problema devem ser passadas para sua forma adimensional. Para isso, as variáveis que compõem a equação devem ser representadas pelas escalas principais que configuram o escoamento, a escala de comprimento,  $l_0$  e escala temporal  $t_0$ .

$$u_a = \frac{t_0}{l_0} u_f, \quad a_a = \frac{t_0^2}{l_0} a_f \quad \text{e} \quad p_a = \frac{1}{\rho_0} \frac{t_0^2}{l_0^2} p_f \quad (3.65)$$

Dessa maneira, conseguimos apresentar as variáveis do problema, baseado em uma análise

dimensional. As variáveis com índice "f", são as variáveis na escala física, enquanto o índice "a" apresenta as variáveis na forma adimensionalizada.

Onde, o número de Reynolds adimensionalizado deve ser posto como,

$$Re = \frac{l_0^2}{t_0 \nu}, \quad (3.66)$$

sendo avaliado em qualquer unidade de medida. Obedecendo as mesmas hipóteses da equação de Navier-Stokes, dois escoamentos com a mesma geometria são equivalentes, caso tenham o mesmo número de Reynolds.

$$\nu_d \equiv 1/Re, \quad \text{para } l_0 = t_0 = 1. \quad (3.67)$$

### 3.9.2 Discretização do sistema adimensionalizado

O intervalo de espaço discreto,  $\delta_x$ , e o intervalo de tempo discreto,  $\delta_t$ , são os termos utilizados para a discretização do sistema adimensional. O termo  $\delta_x$  é definido como a razão entre o comprimento adimensional e o número de células usadas para discretizar este comprimento. Da mesma forma, o termo  $\delta_t$  é definido como sendo o tempo de referência dividido pelo número de interações  $N_{inter}$  utilizado para resolver esse tempo.

Lembrando que as unidades das variáveis estão adimensionalizadas, apresentamos os parâmetros discretizados como sendo,

$$\delta_x = \frac{L}{N} = \frac{1}{N} \quad \text{e} \quad \delta_t = \frac{t}{N_{inter}} = \frac{1}{N_{inter}} \quad (3.68)$$

Discretizando as outras variáveis que compõem o sistema, onde, as variáveis com o índice  $lb$  são as variáveis discretizadas, que são utilizadas no método Lattice Boltzmann.

$$u_{lb} = \frac{\delta_t}{\delta_x} u_d, \quad a_{lb} = \frac{\delta_t^2}{\delta_x} a_d \quad \text{e} \quad p_{lb} = \frac{1}{\rho_{lb}} \frac{\delta_t^2}{\delta_x^2} p_d \quad (3.69)$$

Então, apresentamos o número de Reynolds em função dos parâmetros discretos,

$$Re = \frac{\delta_x^2}{\delta_t \nu_{lb}}, \quad (3.70)$$

Como no sistema adimensional, a viscosidade cinemática adimensional é equivalente ao inverso de Re,

$$\nu_d \equiv 1/Re \quad (3.71)$$

podemos utilizar da relação de equivalência para determinar o termo de viscosidade cinemática discretizado,



$$\nu_d \equiv \frac{\delta_t}{\delta_x^2} \nu_{lb} \quad (3.72)$$

### 3.10 Forçamento

O fluido é capaz de escoar em canais inclinados dada a ação da força peso,  $\mathbf{F}_g$ , sobre ele,

$$\mathbf{F}_g = m \mathbf{g} \quad (3.73)$$

em que  $m$  é massa do fluido e  $\mathbf{g}$  é a aceleração da gravidade. Isso acontece pois, o peso do fluido, em contato com a superfície inferior do canal, produz duas resultantes, sendo uma no sentido normal à superfície inferior e outro tangencial a mesma superfície. A partir disso, utilizando da inclinação do canal, pode-se modificar o forçamento aplicado no fluido. Assumindo um canal com inclinação  $\theta$ , figura 3.8.

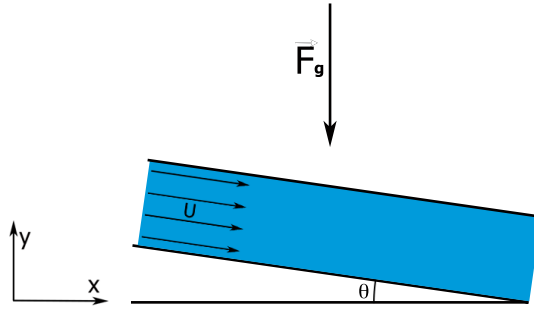


Figura 3.8: Canal inclinado no plano XY

Assumindo um novo plano cartesiano  $x'y'$ , em que este plano está rotacionado em  $\theta$  em relação ao plano  $xy$ . Decompondo a força  $\mathbf{F}_g$  em função da inclinação do canal nos eixos  $\mathbf{e}_{x'}$  e  $\mathbf{e}_{y'}$

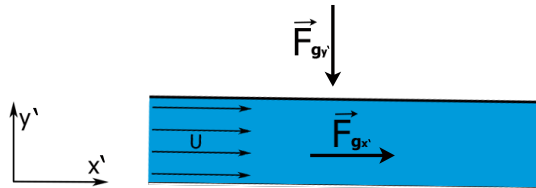


Figura 3.9: Canal inclinado no planos X'Y'

Decompondo a aceleração da gravidade eixos  $\mathbf{e}_{x'}$  e  $\mathbf{e}_{y'}$ ,

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{x'} + \mathbf{g}_{y'} = g \sin(\theta) \mathbf{e}_{x'} + g \cos(\theta) \mathbf{e}_{y'} \quad (3.74)$$

e substituindo na expressão 3.73, apresentamos os termos do forçamento que são atuantes no fluido.

$$\mathbf{F}_{\mathbf{g}_{x'}} = m \mathbf{g}_x = m g \sin(\theta) \mathbf{e}_{x'} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_{\mathbf{g}_{y'}} = m \mathbf{g}_y = m g \cos(\theta) \mathbf{e}_{y'} \quad (3.75)$$

Assim, ao modificar a inclinação  $\theta$  do canal, o forçamento no fluido também é modificado.

### 3.11 Implementação do Método

O Método Lattice Boltzmann opera utilizando duas sub-rotinas principais,

A implementação do método, separando o código em sub-rotinas, exige a inicialização das lattices, atendendo as condições de contorno e as condições iniciais, o cálculo de colisão entre as lattices e o cálculo do *streaming* das lattices, dado a propagação das colisões.

Em seguida, implementa as sub-rotinas necessárias para a recursividade do código, aplica-se as restrições de deslocamento, conforme as condições de contorno da região de controle, definindo uma interação do método e construindo a rotina do MLB, [10] e [18]. Por fim, utilizando um método de parada, avalia-se a repetição da rotina ou a finalização do *loop*.

Exemplificando o Método Lattice Boltzmann, em um fluxograma do código do programado.

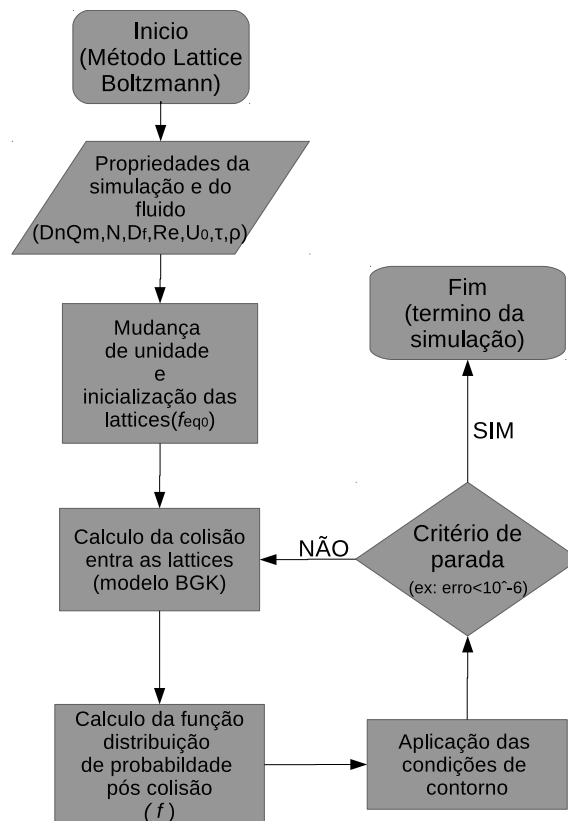


Figura 3.10: Fluxograma do MLB

Neste trabalho, o método é implementando utilizando a linguagem de programação C++, seguindo o modelo de programação estruturada. Separando em funções cada sub-rotina, sendo

elas: inicialização da propriedades do fluido, cálculo de colisão, cálculo da propagação e aplicação das condições de contorno.

O programa é escrito utilizando o modelo D2Q9 para a estrutura da lattice, fig. 3.3. A região de contorno seguirá o problema da cavidade com tampa móvel, subcapítulo 4.1, definindo as condições de contorno.

Primeiro, inicializa-se as lattices, calculando a função distribuição de probabilidade no equilíbrio, eq. 3.2, seguindo as condições iniciais do problema,  $\mathbf{u} = (0, 0)$ .

```
double feq(double RHO, double U, double V, int k){
    double cu, U2;
    cu = cx[k]*U+cy[k]*V; // c.u
    U2 = U*U+V*V; // u^2
    return w[k]*RHO*(1.0+3.0*cu+4.5*cu*cu-1.5*U2); //calcular o f no equilibrio
}
```

Figura 3.11: Função para calcular a  $f_{eq}$

```
void Inicializacao(){
    int j, i, k;
    for (j=0; j<=Ny; j++){
        for (i=0; i<=Nx; i++){
            rho[j][i] = 1.0; //Massa específica
            ux[j][i] = 0.0; //Velocidade u inicial
            uy[j][i] = 0.0; //Velocidade v inicial
            for (k=0; k<Q; k++){
                f[j][i][k] = feq(rho[j][i], ux[j][i], uy[j][i], k);
            }
        }
    }
}
```

Figura 3.12: Inicialização da lattices.

Em seguida, é calculada a colisão entre as lattices, com exceção das lattices que compõem o contorno da região de controle. A colisão é calculada utilizando o operador BGK, eq. 3.17, apresentado no subcapítulo 3.4,

Posteriormente, é calculada a função de probabilidade de deslocamento após a colisão, equação 3.46.

A última etapa para implementar o método é calcular a  $f_i$  nas condições de contorno da cavidade, impondo propriedades dos vetores das funções de probabilidade. Lembrando que os elementos no topo da cavidade estão com velocidade  $\mathbf{u} = (1, 0)$  e nas demais paredes  $\mathbf{u} = (0, 0)$  e com condição de não deslizamento.

A partir dessas sub-rotinas, a parte principal do programa para a simulação utilizando o Método Lattice Boltzmann, pode ser escrito.

```

void Colisao(){
    int j, i, k;
    double FEQ;

    for (j=0; j<=Ny; j++){
        for (i=0; i<=Nx; i++){
            for (k=0; k<Q; k++){

                FEQ = feq(rho[j][i], ux[j][i], uy[j][i], k); //f no equilíbrio
                TBGK[j][i][k] = (f[j][i][k]-FEQ)/tau; //calcular o operador BGK
            }
        }
    }
}

```

Figura 3.13: Função para calcular o operador BGK.

```

void CalculodaF(){
    int j, i, k;

    for (j=0; j<=Ny; j++){
        for (i=0; i<=Nx; i++){
            for (k=0; k<Q; k++){

                f_post[j][i][k] = f[j][i][k]-TBGK[j][i][k];
            }
        }
    }
}

```

Figura 3.14: Função para determinar a função de probabilidade pós colisão.

<pre> // j=Ny: Topo da cavidade(u=(1,0)=uw) for (i=0; i&lt;=Nx; i++){     f[Ny][i][4] = f_post[Ny][i][2];     f[Ny][i][7] = f_post[Ny][i][5]+6*rho[Ny][i]*w[7]*cx[7]*uw;     f[Ny][i][8] = f_post[Ny][i][6]+6*rho[Ny][i]*w[8]*cx[8]*uw; } </pre>	<pre> // j=0: Chão da cavidade for (i=0; i&lt;=Nx; i++){     f[0][i][2] = f_post[0][i][4];     f[0][i][5] = f_post[0][i][7];     f[0][i][6] = f_post[0][i][8]; } </pre>
(a)	(b)
<pre> // i=0: Parede esquerda for (j=0; j&lt;=Ny; j++){     f[j][0][1] = f_post[j][0][3];     f[j][0][5] = f_post[j][0][7];     f[j][0][8] = f_post[j][0][6]; } </pre>	<pre> // i=Nx: Parede direita for (j=0; j&lt;=Ny; j++){     f[j][Nx][3] = f_post[j][Nx][1];     f[j][Nx][7] = f_post[j][Nx][5];     f[j][Nx][6] = f_post[j][Nx][8]; } </pre>
(c)	(d)

Figura 3.15: Aplicando as condições de não deslizamento: (a) no topo da cavidade, onde  $\mathbf{u} = (1, 0)$ ; (b), (c) e (d) são para as paredes, onde  $\mathbf{u} = (0, 0)$

## 3.12 Palabos

O Palabos é uma estrutura de bibliotecas que tem como propósito geral realizar simulações de dinâmica de fluidos. O *kernel* da estrutura é baseado no método de solução de Lattice Boltz-

mann. Os programas presentes nas bibliotecas são escritos em C++, podendo interagir com outras interfaces, de forma secundária.

A parte principal do *framework* foi projetado na University of Geneva, na Suíça, pelo Grupo de Ciência e Computação Paralela. Sendo assim, foram os pioneiros na área de dinâmica dos fluidos computacional e modelagem Lattice Boltzmann. O grupo produziu a teoria por de baixo no *kernel* do Palabos, implementando o Método Lattice Boltzmann, juntamente com a metodologia para a paralelização do método. Ainda mais, o grupo desenvolve continuamente novos modelos e abordagens no campo da dinâmica dos fluidos.

## Capítulo 4

# VALIDAÇÃO

Para o desenvolvimento deste trabalho, as primeiras simulações possuem o objetivo de validar os resultados calculados pelo programa Palabos. Essa etapa é necessária para que possamos garantir que há coerência dos resultados calculados, comparando-os com resultados já validados ou com os resultados analíticos. Assim, podemos afirmar que os resultados encontrados, nas simulações seguintes, também serão coerentes e válidos

A primeira etapa no processo de validação vai abordar o problema da cavidade com tampa móvel. Este caso foi escolhido por ser um problema bem posto e com uma grande disponibilidade de resultados validados e com diferentes características de escoamento. Os resultados produzidos pelo Palabos serão comparados com os resultados apresentados no artigo "Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity ow at high Reynolds numbers", [3].

A segunda etapa da validação vai simular um escoamento em regime turbulento em um canal com superfície inferior triangular. O objetivo da simulação é comparar os resultados obtidos pelo Palabos com o caso 5 do artigo de referência "*The effects of bed form roughness on total suspended load via the Lattice Boltzmann Method*", [4].

### 4.1 Cavidade com Contorno Superior Móvel

Antes de iniciar, faz-se necessária uma breve explicação sobre o problema da cavidade com tampa móvel. Defini-se a cavidade como sendo uma área de controle quadrada, de lado  $\mathbf{L}$ . As paredes laterais e a parede inferior da cavidade têm condição de não-deslizamento, ou seja, a velocidade do fluido nessas paredes é igual a zero. Na parede superior, também há a condição de não-deslizamento, porém com uma imposição de velocidade  $\mathbf{U}$ , somente na componente horizontal da velocidade,  $\mathbf{u}$ , mantendo a componente na direção vertical,  $\mathbf{v}$ , igual a zero.

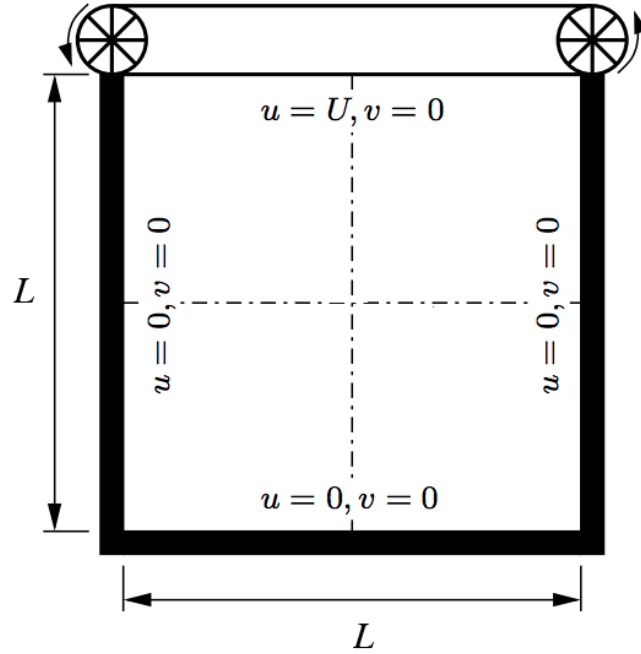


Figura 4.1: Cavidade com tampa móvel

A primeira simulação tem como objetivo verificar o funcionamento do programa Palabos, se as condições de contorno da cavidade estão sendo aplicadas corretamente e de comparar os resultados calculados com os resultados fornecido pela referência. Os valores para o número de Reynolds e a resolução da malha são escolhidas seguindo a referência escolhida. A malha utilizada será uniforme, com o número de elementos por lado,  $\mathbf{N}$ , igual a 601 elementos e o número de Reynolds igual a 1000.

O tempo físico da simulação será de 60 segundos, valor escolhido para avaliar se o escoamento atinge um regime permanente. A figura 4.2 apresenta a medição da velocidade do fluido no centro da cavidade, durante todo o tempo de simulação.

O passo de interação é calculado pelo próprio Palabos, para garantir a consistência do método numérico, em função do número de Reynolds, número de elemento da malha, para assim, garantir a coerência dos resultados.

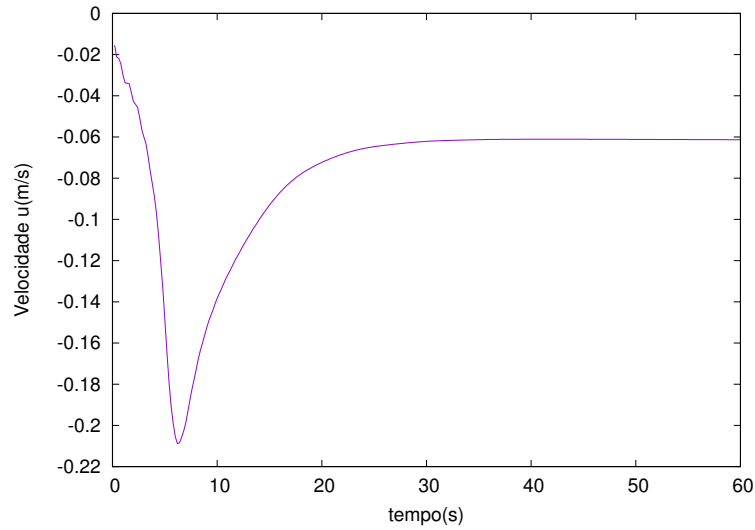


Figura 4.2: Evolução da velocidade  $u$  no centro da cavidade

A análise será realizada a partir dos perfis de velocidade do fluido, avaliando as componentes de velocidade separadamente. Os perfis de velocidade estão localizados nos eixos centrais da cavidade, onde os valores da componente  $u$  são apresentado percorrendo o eixo  $y$  e os valores da componente  $v$  são apresentado percorrendo o eixo  $x$ .

As figuras 4.3a e 4.3b mostram a sobreposição dos valores calculados pelo Palabos com os dados fornecidos pela referência [3]. Avaliando qualitativamente os gráficos, os resultados encontrados parecem ser coerentes, pois os valores calculados estão bem próximos aos resultados validados do artigo de referência.

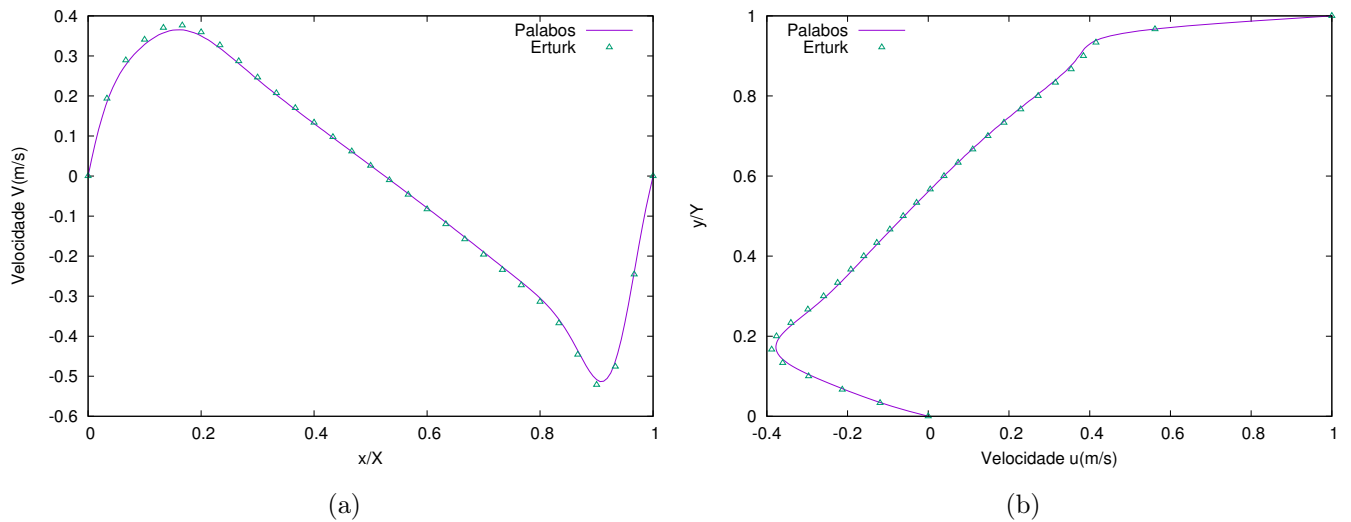


Figura 4.3: Perfis de velocidade: componente  $v$  no eixo  $x$ ; componente  $u$  no eixo  $x$ . Os valores em  $\triangle$  são retirados de [3]

As figuras 4.4a e 4.4b apresentam os erros percentuais da velocidade  $\mathbf{u}$ , na região central da cavidade, ao longo do eixo  $x$ . Os erros percentuais dos resultados,  $\frac{u - U_{Ert}}{U_{Ert}}$ , nas regiões analisadas,



são inferiores a 2%, onde, nas imagens foram traçados linhas meramente ilustrativas para indicar 1% e 2% de erro, nas figuras 4.4a e 4.4b respectivamente. Desta forma, fica mais evidente que há a coerência dos resultados calculados pelo Palabos.

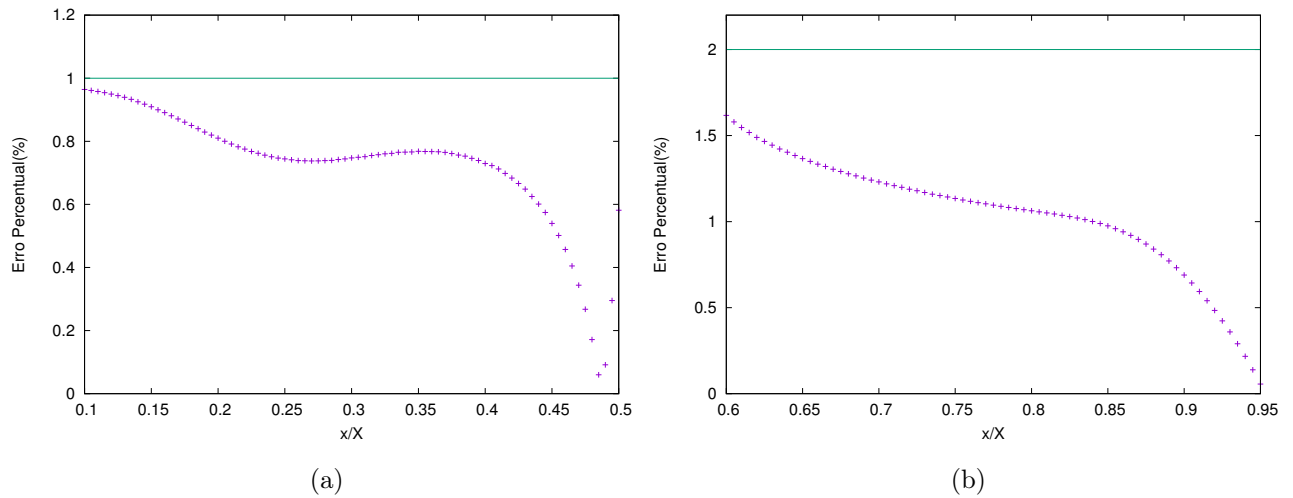


Figura 4.4: Erro percentual da velocidade  $u$ ,  $\frac{u - U_{Ert}}{U_{Ert}}$ .

O segundo teste tem como finalidade avaliar a convergência dos resultados ao refinar a malha da cavidade. Objetiva-se, assim, estipular um número mínimo de elementos para a malha das simulações, onde os resultados ainda sejam coerentes, visando diminuir o custo computacional.

A cavidade permanece com a forma quadrada, porém, aumenta-se o número de elementos por lado da malha. Ainda, são feitas simulações com N iguais a 40, 80, 160 e 320 640 elementos por lado e comprar os resultados calculados, em seguida compararemos os erros percentuais.

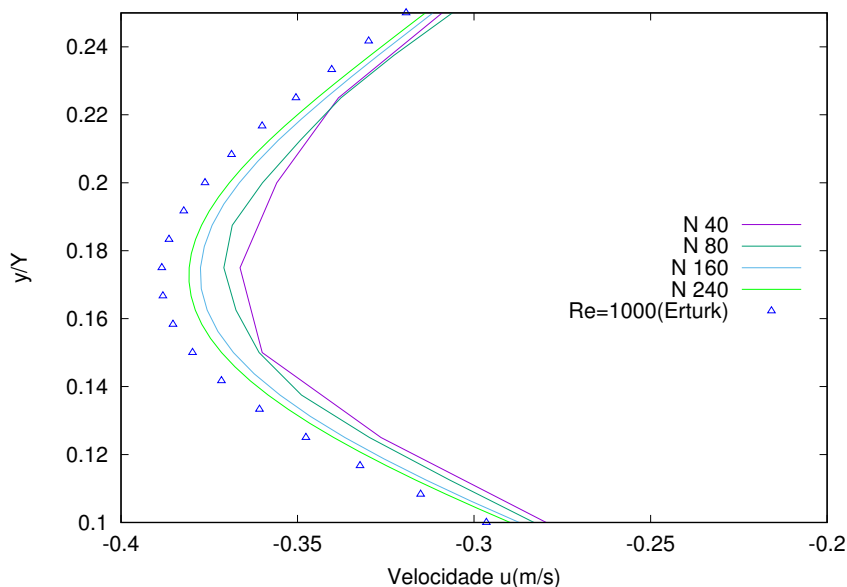


Figura 4.5: Perfis de velocidade  $u$  para diferente N(40, 80, 160 ,240) e mais o de referência,[3]

Avaliando a acurácia do método Lattice Boltzmann, utilizando o valor do componente horizontal da velocidade,  $u$ , na posição  $(0, 25, 0, 25)$  da cavidade. No refinamento da malha, o número de lattices foi dobrando, assim, é utilizando a expressão  $\frac{u_h - U_{Erturk}}{u_{h/2} - U_{Erturk}}$  para analisar a convergência dos resultados, onde  $U_{Erturk}$  é a velocidade de referência para a análise.

Tabela 4.1: Sumário do valores da velocidade  $u$ , para diferentes  $N$ , e análise de convergência

$N$	$u$	$u_h - U_{Erturk}$	$\frac{u_h - U_{Erturk}}{u_{h/2} - U_{Erturk}}$
40	-0.3599868	0.0197562	1.048
80	-0.3608966	0.0188464	1.629
160	-0.3681707	0.0115723	1.818
320	-0.3733788	0.0063642	1.898
640	-0.37639	0.003353	
$U_{Erturk}$	-0379743		

A partir dos resultados da análise da acurácia, percebemos que os valores convergem, assim, afirmamos que o método é convergente. Porém, a convergência do método lattice boltzmann depende do tempo de relaxação da lattice. Lembrando que a equação de Lattice Boltzmann é diferente da equação de Navier Stokes, sendo, na verdade, uma boa aproximação para escoamento incompressíveis e  $|\nabla \cdot u| \ll 1$ . Caso o tempo de relaxação seja grande, consideramos que há compressibilidade do material, descumprindo a hipótese da incompressibilidade, sendo inconsistente com a aproximação com Navier Stokes. Ainda mais, na simulação, o passo no tempo não representaria de fato o deslocamento da lattice. Portanto, na implementação da simulação, deve-se garantir que o tempo de relaxação da lattice seja pequeno, para se garantir que o incremento do tempo,  $\delta_t$ , possa acompanhar a propagação da colisão.

## 4.2 Validação do Escoamento em regime turbulento

O procedimento para validar o programa Palabos, para as simulações em regime turbulento, é o de replicar a simulação de um problema já validado e comparar os resultados obtidos. O problema utilizado é o caso 5 do artigo "*The effects of bed form roughness on total suspended load via the Lattice Boltzmann Method*", [4], no qual, caso 5 simula o escoamento em um canal aberto, com superfície inferior triangular, onde o canal está inclinada à  $0,172^\circ$ .

A simulação de validação é configurada com as mesmas características do caso 5 do artigo, porém, devido ao gasto computacional, o tempo físico simulado é de 200 segundos, diferentemente do artigo que simula 360 segundos. A tabela 4.2 apresenta os resultados mais relevantes para a comparação das simulações, sendo que no artigo são apresentados a velocidade do escoamento,  $U$ , o número de Reynolds do escoamento e o fator de atrito. Também são apresentados o tempo físico de simulação e o tempo gasto para concluir a simulação.

Tabela 4.2: Sumario comparativo com as informações do Caso 5,[4], e simulação de validação.

Superfície	N	Nx x Ny x Nz	U(cm)	Re	$F_{at}$	$T_{fisico}(s)$	$T_{simulacao}(h)$
Caso 5	67	150 x 80 x 257	19,57	11744	0,369	360	57,1
Validação	67	150 x 80 x 257	19,39	11638	0,361	160	113,8

Os resultados obtidos na simulação de validação estão próximos aos valores apresentados do Caso 5 da referência, demonstrando que há a coerência entre as simulações. Seguindo com a validação, são apresentados os perfis de velocidade média normalizado,  $\bar{u}/U$ , e o produto médio das flutuações de velocidade normalizado,  $\overline{u'v'}/\bar{U}^2$ .

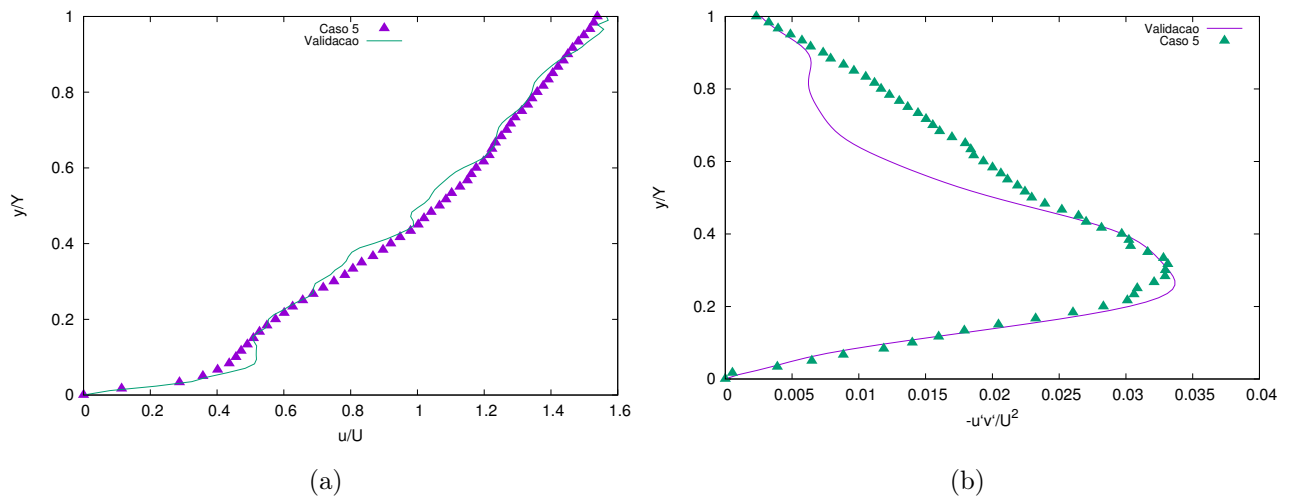


Figura 4.6: Perfis do escoamento da simulação de validação:(a) velocidade média normalizada,  $\bar{u}/U$ ; e produto médio das flutuações de velocidade normalizado,  $\overline{u'v'}/\bar{U}^2$ .

Os perfis apresentados na figura 4.6 estão coerente com os respectivos contidos no artigo de referência [4]. O formato dos perfis são semelhantes, porem, dado a perda estatística, algumas regiões do perfil não são coerentes.

## Capítulo 5

# ESCOAMENTO EM CANAL COM SUPERFÍCIE RUGOSA

Neste capítulo são analisados o efeitos da rugosidade, localizada na superfície inferior do canal, em um escoamento. Para essa análise, o problema é estudado em duas situações: primeiro, assumimos o problema para o escoamento regime laminar com baixo número de Reynolds  $e$ ; segundo, assumimos o problema para o escoamento em regime turbulento.

Para resolver o problema do escoamento laminar, o primeiro estudo, para resolver o problema do escoamento laminar, utiliza do método de solução analítica e o Método Lattice Botzmann, assim, utilizando a solução analítica como referência, analisa-se os efeitos da rugosidade no escoamento laminar. O segundo estudo, para resolver o problema do escoamento turbulento, simula três casos com diferentes três formas diferentes de rugosidade, para uma mesma inclinação do canal, e, para uma mesma forma de rugosidade, diferentes inclinações do canal, como forma de conseguir avaliar os efeitos da rugosidade no escoamento turbulento.

### 5.1 Solução Analítica do Escoamento Laminar

Iniciamos esta seção apresentando a representação do canal, que é utilizado para as simulações do escoamento laminar, figura 5.1. Nessa etapa é utilizado um canal fechado, assim, há uma parede na parte superior do canal. Porém, para se assemelhar com a geometria proposta na introdução do relatório, fig. (1.3), assumimos a condição de deslizamento nesta parede.

A superfície inferior segue um perfil senoidal,  $y = \varepsilon \sin(2\pi x/\alpha)$  de amplitude  $\varepsilon$ , onde o canal tem altura igual a  $L$ , assim a menor distância entre a superfície superior e a inferior é  $L - \varepsilon$  e a maior distância é  $L + \varepsilon$ . O escoamento está plenamente desenvolvido, logo, a velocidade independe do tempo e  $\mathbf{u}(1, y) = \mathbf{u}(0, y)$ . Para completar a descrição do canal, assumimos que o fluido desliza na parede superior, matematicamente essa condição é representada como  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ , essa condição está melhor explicada no subcapítulo 3.8.1.

Partindo da hipótese que o regime do escoamento é laminar, assumimos que o número de

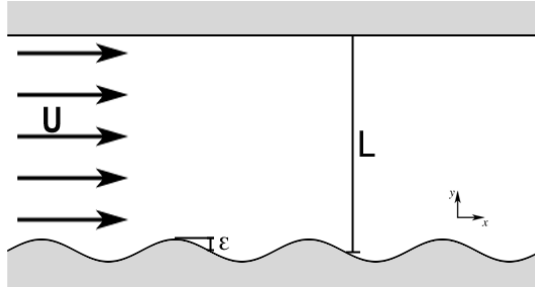


Figura 5.1: Canal fechado com rugosidade senoidal na superfície inferior

Reynolds do escoamento seja muito pequeno,  $Re \ll 1$ , e especificamos que os valores utilizado no problema sejam 0,01, 0,02, 0,04, 0,06 0,08 e 0,1. Uma outra hipótese para o problema é que a rugosidade é uma perturbação no escoamento, assim sendo a amplitude  $\varepsilon$  da rugosidade deve ser bem menor que a altura do escoamento,  $L$ ,  $\varepsilon \ll L$ , ou seja,  $\frac{\varepsilon}{L} \ll 1$ . Por conta da resolução da malha, assumimos que  $\frac{\varepsilon}{L} = 0,1$ . Com essas duas hipóteses, podemos utilizar como ferramenta para a solução do problema analítico o método da expansão assintótica, em que a velocidade do escoamento,  $\mathbf{u}(x, y)$ , é escrita como uma expansão em termos de  $Re$  e de  $\varepsilon$ .

### 5.1.1 Solução Analítica do Escoamento em Canal Fechado Rugoso

Iniciamos a resolução analítica, para resolver o problema do escoamento laminar no canal com superfície rugosa, apresentando a equação de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla \mathbf{p} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g}, \quad (5.1)$$

juntamente com a equação da continuidade:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5.2)$$

onde,  $\mathbf{u}$  é o vetor velocidade fluido,  $\mathbf{p}$  é o vetor pressão e  $\mathbf{g}$  é o vetor gravidade. Os escalares  $\rho$  e  $\nu$  são as constantes materiais do fluidos, massa específica e viscosidade cinemática respectivamente.

Avaliando a equação 5.1 somente na direção  $x$  e assumindo que o escoamento seja permanente, incompressível, a componente vertical da velocidade seja aproximadamente zero e o escoamento esteja plenamente desenvolvido. As derivadas temporais são iguais a zero e a aceleração do escoamento é descrita, exclusivamente, pelos termos convectivos não nulos, isto é:

$$x : \quad u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g_x. \quad (5.3)$$

Assumindo as seguintes mudanças de escala dos termos  $u$ ,  $x$  e  $p$ , respectivamente,

$$\mathbf{u} = \frac{u}{U}, \quad \mathbf{x} = \frac{x}{H}, \quad \mathbf{p} = \frac{p}{P}$$

e reescrevendo a equação 5.3, chegamos na expressão

$$x : \quad \frac{U^2}{H} u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{P}{H} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{P}{H^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} \right) + g_x \quad (5.4)$$

rearranjando a igualdade, deixando-a em função da aceleração convectiva, obtemos,

$$x : \quad u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{P}{U^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{1}{H U} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} \right) + \frac{H}{U^2} g_x \quad (5.5)$$

Assumindo as relações

$$P = \rho U^2 ; \quad Fr_x = \frac{\sqrt{g_x H}}{U} ; \quad \frac{1}{Re} = \frac{\nu}{H U}$$

e reescrevendo-as na equação 5.5

$$x : \quad u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} \right) + Fr_x^2, \quad (5.6)$$

multiplicando a igualdade por  $Re$ ,

$$x : \quad Re u \frac{\partial u}{\partial x} = -Re \frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} \right) + Re Fr_x^2. \quad (5.7)$$

Escrevendo os termos de forçamento com um único termo  $G$  e substituindo-o na equação 5.7 , chegamos na igualdade na forma que iremos trabalhar.

$$-G = -Re \frac{\partial p}{\partial x} + Re Fr_x^2$$

$$x : \quad Re u \frac{\partial u}{\partial x} = -G + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} \right) \quad (5.8)$$

Agora, descrevemos as características do volume de controle do problema analítico, para definirmos as condições de contorno do problema. A superfície rugosa tem condição de não deslizamento, logo, a velocidade do fluido, em contato com a superfície, é nula. A rugosidade descreve um perfil senoidal, onde sua amplitude e a relação de período do seno são representados pelas constantes  $\varepsilon$  e  $\alpha$ , respectivamente.

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{em} \quad y = \varepsilon \sin \left( \frac{2\pi}{\alpha} x \right) \quad (5.9)$$

A parede superior é plana, não há a presença da rugosidade, e nela assumimos a condição de deslizamento, ou seja, a derivada da velocidade do fluido na parede é igual a zero, avaliando-a na direção  $y$ .

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = 0 \quad \text{em} \quad y = H \quad (5.10)$$

Assumindo que o número de Reynolds do escoamento seja muito pequeno,  $Re \ll 1$ , e partindo do pressuposto que podemos escrever a velocidade  $\mathbf{u}$  como uma expressão assintótica em termos de  $Re$ , de forma que:

$$\mathbf{u}(x, y) = u_0 + Re u_1 + Re^2 u_2 + \dots \quad (5.11)$$

Substituindo a velocidade  $\mathbf{u}$  da equação 5.8, pela sua forma expandido, chegamos na seguinte expressão.

$$Re(u_0 + Re u_1 + Re^2 u_2 + \dots) \frac{\partial(u_0 + Re u_1 + Re^2 u_2 + \dots)}{\partial x} = -G + \nabla^2(u_0 + Re u_1 + Re^2 u_2 + \dots) \quad (5.12)$$

Rearranjando a expressão anterior, separando os termos em função das ordens do numero de Reynolds,

$$Re u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + Re^2 \left( u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + Re \nabla^2 u_1 + Re^2 \nabla^2 u_2 + \dots = -G + \nabla^2 u_0 \quad (5.13)$$

Como assumimos que o  $Re$  do escoamento é muito pequeno,  $Re \ll 1$ , iremos considerar, inicialmente, somente os termos da *leader order* da equação 5.13,

$$\nabla^2 u_0 - G = 0. \quad (5.14)$$

A amplitude do perfil senoidal,  $\varepsilon$ , é um dos fatores que influenciam na intensidade de perturbação no escoamento. Assim, podemos expandir a velocidade  $u_0$  em função de  $\varepsilon$ , onde  $u_0$  é o somatório de  $u$  parciais, associados a uma ordens de  $\varepsilon$ .

$$u_0(x, y) = u_{0,0}(x, y) + \varepsilon u_{0,1}(x, y) + \varepsilon^2 u_{0,2}(x, y) + \dots \quad (5.15)$$

Substituindo a expansão na equação 5.14.

$$x : \quad \nabla^2 (u_{0,0} + \varepsilon u_{0,1} + \varepsilon^2 u_{0,2} + \dots) - G = 0 ; \quad (5.16)$$

A superfície senoidal desenvolve-se pelo eixo  $x$ , assim, descrevemos  $y$  como sendo a função seno de  $x$ . Então,  $u(x, y)$  na superfície pode ser definido como sendo  $u(x, \varepsilon \sin(kx))$ . Reescrevendo a expansão 5.15, somente para a velocidade do fluido na superfície.

$$u(x, \varepsilon \sin((2\pi\alpha x))) = u_{0,0}(x, \varepsilon \sin((2\pi\alpha x))) + \varepsilon u_{0,1}(x, \varepsilon \sin((2\pi\alpha x))) + \varepsilon^2 u_{0,2}(x, \varepsilon \sin((2\pi\alpha x))) + \dots \quad (5.17)$$

Expandindo os termos  $u_0$ , utilizando a serie de Taylor e, em seguida, organizando os termos como critério as ordens de  $\varepsilon$ .

$$\begin{aligned}
u_0(x, \varepsilon \sin(2\pi\alpha x)) &= u_0 + \varepsilon \sin(2\pi\alpha x) \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\varepsilon^2 \sin^2(2\pi\alpha x)}{2!} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \dots \\
&\varepsilon \left( u_1 + \varepsilon \sin(2\pi\alpha x) \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\varepsilon^2 \sin^2(2\pi\alpha x)}{2!} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) + \dots \\
&\varepsilon^2 \left( u_2 + \varepsilon \sin(2\pi\alpha x) \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\varepsilon^2 \sin^2(2\pi\alpha x)}{2!} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) + \dots, \quad (5.18)
\end{aligned}$$

de onde:

$$\begin{aligned}
u(x, \varepsilon \sin(2\pi\alpha x)) &= u_0 + \varepsilon \left( \sin(2\pi\alpha x) \frac{\partial u_0}{\partial y} + u_1 \right) + \\
&\varepsilon^2 \left( \sin^2(2\pi\alpha x) \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \sin(2\pi\alpha x) \frac{\partial u_1}{\partial y} + u_2 \right) + \dots \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Como a condição de deslizamento, no topo do volume de controle, nos garante que a derivada da velocidade na direção  $y$  é nula.

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=1} = \frac{\partial u_0}{\partial y} \Big|_{y=1} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{y=1} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \Big|_{y=1} + \dots = 0 \quad (5.20)$$

As condições de contorno definidas, agora podemos resolver o problema, separadamente pelas respectivas ordens de  $\varepsilon$ . Começamos resolvendo a *leading order*

#### 5.1.1.1 Solução $O(1)$ : $u_{0,0}$

$$\begin{aligned}
O(1) : \quad \nabla^2 u_{0,0} - G &= 0 \\
\text{C.C.} : \quad u_{0,0}(x, 0) &= 0; \\
\frac{\partial u_{0,0}(x, 1)}{\partial y} &= 0; \\
u_{0,0}(0, y) &= u_{0,0}(1, y)
\end{aligned}$$

A equação de  $O(1)$  apresenta o forçamento  $-G$ , assim, um modo de resolver o problema é separarmos a resolução da equação em partes. Primeiro resolvemos o problema na forma homogêneo,  $-G = 0$ , e, em seguida, resolvemos na forma não-homogêneo, com  $-G \neq 0$ . A solução final será a combinação das duas soluções.

Iniciamos a resolução da equação, utilizando o método das separações de variáveis, resolvendo o problema homogêneo,

$$\nabla^2 u_{0,0} = 0 \quad (5.21)$$

Como  $u$  é função de  $x$  e  $y$ , utilizamos o método da separação de variáveis e definimos  $u$  como um produto de duas funções,  $P(x)$  e  $Q(y)$ . Depois, resolvendo  $\nabla^2 u$  e agrupando os termos de mesma variável, definindo uma constante  $k$ .



$$u_{0,0}(x, y) = P(x)Q(y), \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial^2 u_{0,0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{0,0}}{\partial y^2} = 0 \quad (5.23)$$

$$\frac{P''}{P} = -\frac{Q''}{Q} = k^2 \quad (5.24)$$

onde  $k$  é uma constante a ser definida.

Primeiro, resolvemos a equação para  $Q(y)$ ,

$$-\frac{Q''}{Q} = k^2 \quad (5.25)$$

pois as condições de contorno são dependentes de  $y$ . Assumimos a solução para  $Q$ , na forma,

$$Q(y) = C_1 \sin(ky) + C_2 \cos(ky). \quad (5.26)$$

Depois, aplicando as condições de contorno, chegamos à solução de  $Q_n$ , para  $n \in \mathbb{N}$

$$Q_n(y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1n} \sin\left(\frac{\pi + 2n\pi}{2} y\right); \quad n \geq 0 \quad (5.27)$$

Substituindo a solução de  $Q$  na equação 5.22 e deixa-se para ser definido o valor da constante  $C_{1n}$ , no calculo de função  $P(x)$ .

$$u_{0,0}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \sin\left(\frac{\pi + 2n\pi}{2} y\right) \quad (5.28)$$

Retornando ao problema, agora, na forma não-homogênea, onde  $-G \neq 0$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n'' \sin\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2} y\right) - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\pi + 2\pi n}{2}\right]^2 P_n \sin\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2} y\right) = -G \quad (5.29)$$

Os termos à esquerda da igualdade são descritos com um somatório de senos, por consequência,  $-G$  também deve ser um somatório de senos, para manter a consistência da igualdade. Assim, escrevendo  $-G$  com sendo,

$$-G = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \sin\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2} y\right) \quad (5.30)$$

e substituindo-o em 5.29.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ P_n'' - \left[\frac{\pi + 2\pi n}{2}\right] P_n \right\} \sin\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2} y\right) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \sin\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2} y\right) \quad (5.31)$$

Os coeficiente  $g_n$  são calculados usando-se séries de Fourier, obtendo,

$$\begin{aligned}
g_n &= \frac{\int_0^1 G \sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{2}y\right) dy}{\int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi+2\pi n}{2}y\right) dy} \\
&= \frac{-G \frac{1}{\frac{\pi+2\pi n}{2}} \cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2}y\right) \Big|_0^1}{\frac{1}{2}y \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{2}y\right)}{\frac{\pi+2\pi n}{2}} \Big|_0^1} \\
&= \frac{4G}{\pi + 2\pi n}
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Substituindo os valores calculados na igualdade acima e aplicando-os na equação 5.31, encontramos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ P_n'' - \left(\frac{\pi + 2\pi n}{2}\right)^2 P_n - \frac{4G}{\pi + 2\pi n} \right] \sin\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2}y\right) = 0. \tag{5.33}$$

A igualdade só pode ser válida, se o termo em colchetes for, também, igual a zero. Depois, separamos os termos de  $x$  e resolvemos P.

$$P_n'' - \left(\frac{\pi + 2\pi n}{2}\right)^2 P_n - \frac{4G}{\pi + 2\pi n} = 0; \tag{5.34}$$

$$P_n'' - \left(\frac{\pi + 2\pi n}{2}\right)^2 P_n = \frac{4G}{\pi + 2\pi n} \tag{5.35}$$

Resolvendo a equação 5.35, encontramos a solução de P.

$$P_n(x) = c_1 e^{\frac{\pi+2\pi n}{2}} + c_2 e^{-\frac{\pi+2\pi n}{2}} + \frac{16G}{(\pi + 2\pi n)^3} \tag{5.36}$$

Retornando para  $u_{0,0}$ , agora com as funções  $Q$  e  $P$  já calculadas, porém, com as constantes  $c_1$  e  $c_2$  ainda não definidas.

$$u_{0,0}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ c_1 e^{\frac{\pi+2\pi n}{2}} + c_2 e^{-\frac{\pi+2\pi n}{2}} + \frac{16G}{(\pi + 2\pi n)^3} \right] \sin\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2}y\right) \tag{5.37}$$

Utilizando a condição contorno periódica, onde  $u(0, y) = u(1, y)$ , encontramos que as constantes  $c_1$  e  $c_2$  são iguais a zero. Finalizando, encontramos a solução de  $u_{0,0}$ .

$$u_{0,0}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16G}{(\pi + 2\pi n)^3} \sin\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2}y\right) \tag{5.38}$$

A figura 5.2 apresenta um gráfico da solução de  $u_{0,0}$ , assumindo  $G$  igual a  $-1$  e  $n_s$  iguais a  $1, 5, 10$  e  $20$ . Nessa figura verificamos que para  $n < 5$ , o resultado converge. Assim, para diminuir o custo computacional, será adotado  $n = 5$ .

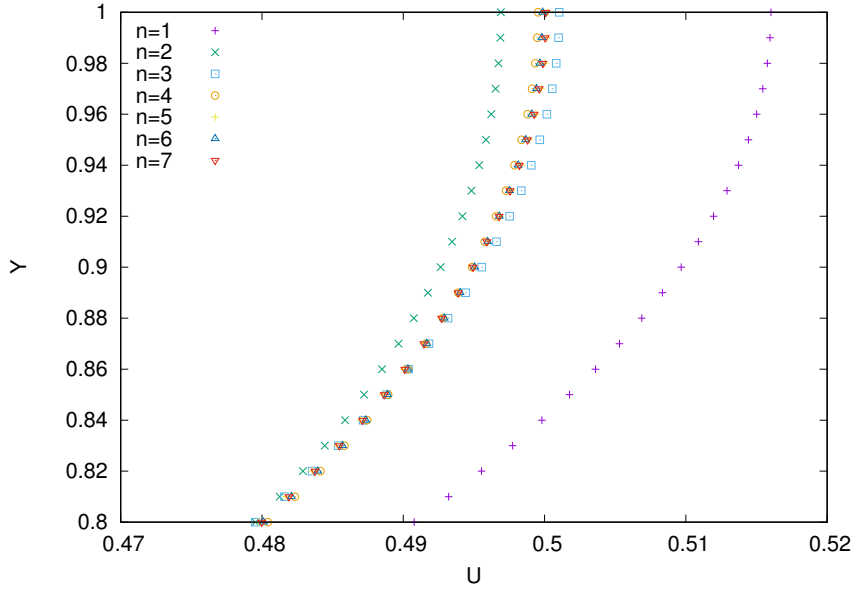


Figura 5.2: Perfil de velocidade de  $u_{0,0}$  para diferentes valores de  $n$

### 5.1.1.2 Solução $O(\varepsilon)$ : $u_{0,1}$

Dando continuidade na resolução do problema, iniciamos, apresentando o problema  $O(\varepsilon)$  de  $u_0$ , juntamente com sua condição de contorno.

$$\begin{aligned}
 O(\varepsilon) : \quad & \nabla^2 u_{0,1} = 0; \\
 \text{C.C.} : \quad & u_{0,1}(x, 0) + \sin(2\pi\alpha x) \frac{\partial u_{0,0}(x, 0)}{\partial y} = 0; \\
 & \frac{\partial u_{0,1}(x, 1)}{\partial y} = 0; \\
 & u_{0,1}(0, y) = u_{0,1}(1, y)
 \end{aligned}$$

Utilizando o método da separação de variáveis em  $u_{0,1}$  e, em seguida, substituindo no  $\nabla^2 u_{0,1}$ , é possível separar os termos de mesma variável na igualdade. Assim, podemos construir novamente uma fatoração para  $u_{0,1}(x, y)$

$$u_{0,1}(x, y) = P(x)Q(y); \quad (5.39)$$

de onde

$$\frac{\partial^2 u_{0,1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{0,1}}{\partial y^2} = 0; \quad (5.40)$$

repetindo o procedimento padrão em separação de variáveis

$$-\frac{P''}{P} = \frac{Q''}{Q} = k^2. \quad (5.41)$$

As condições de contorno do problema, em  $y$  igual a zero e a um, estão bem definidas. Assim, abordamos primeiro a igualdade entre os termos de  $y$  e a constante  $k$ ,

$$\frac{Q''}{Q} = k^2; \quad (5.42)$$

$$Q'' = k^2 Q. \quad (5.43)$$

Assumindo a solução de  $Q(y)$  como sendo,

$$Q(y) = c_1 \cosh(ky) + c_2 \sinh(ky), \quad (5.44)$$

e substituindo a mesma solução, na equação 5.39, conseguimos escrever  $u_{0,1}$  em função de  $P(x)$  e duas constantes  $c_1$  e  $c_2$ :

$$u_{0,1}(x, y) = P(x) Q(y) = P(x) [c_1 \cosh(ky) + c_2 \sinh(ky)]. \quad (5.45)$$

Para determinar os valores das constantes, primeiro, aplicamos a condições de contorno em  $y = 0$ ,

$$\begin{aligned} u_{0,1}(x, 0) &= P(x) Q(0) \\ &= P(x) [c_1 \cosh(k0) + c_2 \sinh(k0)] \\ &= P(x) c_1. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Com isso, conseguimos relacionar  $u_{0,1}(x, 0)$  com  $P(x)$  e a  $c_1$ , somente. Agora, utilizando a condição de contorno de  $u_{0,1}$  em  $y = 0$ ,

$$u_{0,1}(x, 0) + \sin(2\pi\alpha x) \frac{\partial u_{0,0}(x, 0)}{\partial y} = 0. \quad (5.47)$$

Reescrevendo a igualdade acima, de modo que  $u_{0,1}(x, 0)$  fique em função da componente calculada anteriormente,  $u_{0,0}(x, 0)$ .

$$u_{0,1}(x, 0) = -\sin(2\pi\alpha x) \frac{\partial u_{0,0}(x, 0)}{\partial y} = -\sin(2\pi\alpha x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8G}{(\pi + 2\pi n)^2} \quad (5.48)$$

Substituindo  $u_{0,1}(x, 0)$ , encontrado na equação 5.48, na igualdade 5.46, obtemos:

$$P(x)c_1 = \sin(2\pi\alpha x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8G}{(\pi + 2\pi n)^2} \quad (5.49)$$

de onde, podemos determinar o valor da constante  $c_1$ .

$$c_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8G}{(\pi + 2\pi n)^2}. \quad (5.50)$$

Para  $y = 1$ , avalia-se a derivada parcial de  $u_{1,0}(x, y)$ :

$$\frac{\partial u_{0,1}(x, y)}{\partial y} = P(x) k [c_1 \sinh(ky) + c_2 \cosh(ky)]. \quad (5.51)$$

Utilizando a condição de contorno na expressão derivada acima,

$$\frac{\partial u_{0,1}(x, 1)}{\partial y} = P(x) k [c_1 \sinh(k) + c_2 \cosh(k)] = 0. \quad (5.52)$$

O valor da função  $P(x)$  deve ser diferente de zero, a fim do problema não possuir solução trivial. Com isso, para que a igualdade seja válida,

$$c_1 \sinh(k) + c_2 \cosh(k) = 0. \quad (5.53)$$

Dessa forma, conseguimos determinar o valor da constante  $c_2$ ,

$$\begin{aligned} c_1 \sinh(k) + c_2 \cosh(k) &= 0; \\ c_2 \cosh(k) &= -c_1 \sinh(k); \\ c_2 &= -c_1 \tanh(k). \end{aligned} \quad (5.54)$$

Determinado os valores das constantes  $c_1$  e  $c_2$ , a função  $Q(y)$  é descrita como sendo,

$$Q(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8G}{(\pi + 2\pi n)^2} (\cosh(ky) - \tanh(k) \sinh(ky)) \quad (5.55)$$

Para definir a forma da função  $P(x)$ , retomamos a equação 5.41, agora, resolvendo a igualdade da  $P(x)$  com a constante  $k$ .

$$\frac{-P''}{P} = k^2, \quad (5.56)$$

onde,

$$-P'' = k^2 P. \quad (5.57)$$

A função  $P(x)$  admite a solução,

$$P(x) = p_1 \cos(kx) + p_2 \sin(kx). \quad (5.58)$$

Porem, para garantir a coerência da igualdade 5.50, dada a condição de contorno do problema,

$$P(x) = \sin(2\pi\alpha x). \quad (5.59)$$

Dessa forma, substituindo a solução de  $P(x)$ , acima, na equação 5.59, pode ser definido os valores das constantes  $p_1$ ,  $p_2$  e  $k$ .

$$p_1 \cos(kx) + p_2 \sin(kx) = \sin(2\pi\alpha x) \leftrightarrow p_1 = 0; p_2 = 1; k = 2\pi\alpha \quad (5.60)$$

Finalizando a solução de  $u_{0,1}$ , ao substituir os valores calculados das funções  $P(x)$  e  $Q(y)$  na equação 5.39, escrevemos  $u_{0,1}$  como sendo,

$$u_{0,1} = \sin(2\pi\alpha x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8G}{(\pi + 2\pi n)^2} (\cosh(2\pi\alpha y) - \tanh(2\pi\alpha) \sinh(2\pi\alpha y)) \quad (5.61)$$

Dispondo os valores de  $u_{0,0}$  e  $u_{0,1}$  na expansão  $u_0(x, y)$ , equação 5.15, chegamos na solução ordem  $\varepsilon$  para  $Re = 0$ :

$$u_0(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16G}{(\pi + 2\pi n)^3} \sin\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2} y\right) + \varepsilon \sin(2\pi\alpha x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8G}{(\pi + 2\pi n)^2} (\cosh(2\pi\alpha y) - \tanh(2\pi\alpha) \sinh(2\pi\alpha y)) \quad (5.62)$$

Reproduzindo graficamente a expansão  $u_0(x, y)$ , figura 5.3, somente com os termos  $u_{0,0}(x, y)$  e  $u_{0,1}(x, y)$ . Admitindo  $\varepsilon = 0, 1$  e  $x = \pi/4$ .

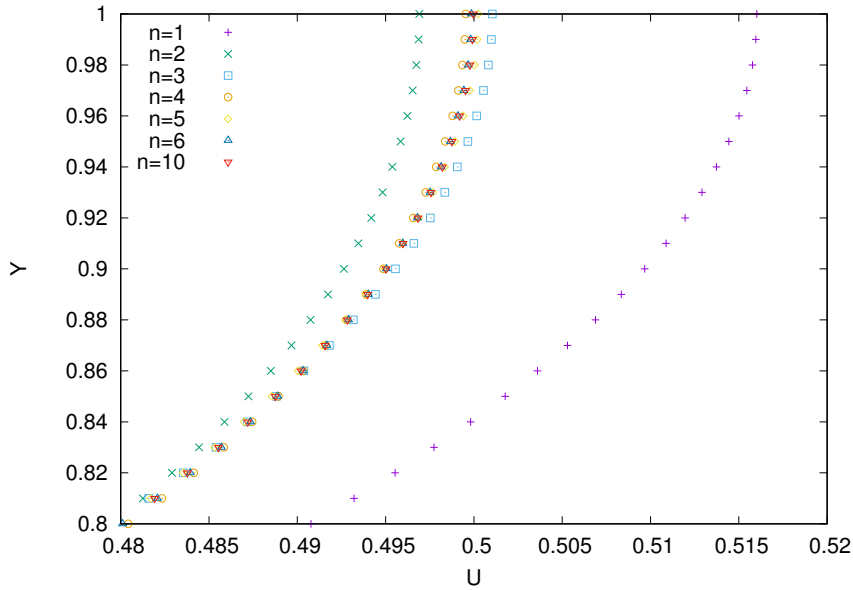


Figura 5.3: Perfil de velocidade de  $u_{0,0} + u_{0,1}$  para diferentes valores de  $n$

### 5.1.1.3 Solução $O(\varepsilon^2)$ : $u_{0,2}$

Dando continuidade a resolução da expansão  $u_0$ , partimos para a calculo do termo  $u_{0,2}$ , termo  $O(\varepsilon^2)$  da expansão. O problema para esta ordem é:

$$\begin{aligned} O(\varepsilon) : \quad \nabla^2 u_{0,2} &= 0; \\ \text{C.C.} : \quad u_{0,2}(x, 0) + \sin(2\pi\alpha x) \frac{\partial u_{0,1}(x, 0)}{\partial y} + \frac{\sin^2(2\pi\alpha x)}{2!} \frac{\partial^2 u_{0,0}(x, 0)}{\partial y^2} &= 0; \\ \frac{\partial u_{0,2}(x, 1)}{\partial y} &= 0; \\ u_{0,2}(0, y) &= u_{0,2}(1, y) \end{aligned}$$

Empregando o mesmo método, utilizado no calculo dos termos anteriores de  $u_{0,0}(x, y)$  e  $u_{0,1}(x, y)$ , para a resolução. Usando o método da separação de variáveis em  $u_{0,2}(x, y)$ , calculando  $\nabla^2 u_{0,2}$  e separando os termos de mesmo variável. Assim, chegamos na relação de igualdade com uma constante arbitrária  $k$ .

$$-\frac{P''}{P} = \frac{Q''}{Q} = k^2 \quad (5.63)$$

Resolvendo a igualdade a cima, para o problema de  $Q(y)$ ,

$$\frac{Q''}{Q} = k^2, \quad (5.64)$$

assumindo a solução semelhante a equação 5.44 e substituindo em  $u_{0,2}(x, y)$

$$u_{0,2}(x, y) = P(x)Q(y) = P(x) [c_1 \cosh(ky) + c_2 \sinh(ky)] \quad (5.65)$$

Calculando  $u_{0,2}(x, 0)$ , utilizando a respectiva condição de contorno.

$$\begin{aligned} u_{0,2}(x, 0) &= -\sin(2\pi\alpha x) \frac{\partial u_{0,1}(x, 0)}{\partial y} - \frac{\sin^2(2\pi\alpha x)}{2!} \frac{\partial^2 u_{0,0}(x, 0)}{\partial y^2}; \\ &= -\sin(2\pi\alpha x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8G}{(\pi + 2\pi n)^2} (2\pi\alpha) (\sinh(2\pi\alpha 0)) + \dots \\ &\quad - \sin(2\pi\alpha x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8G}{(\pi + 2\pi n)^2} (2\pi\alpha) (-\tanh(2\pi\alpha) \cosh(2\pi\alpha 0)) + \dots \\ &\quad - \frac{\sin^2(2\pi\alpha x)}{2!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4G}{\pi + 2\pi n} \sin\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2} 0\right) \\ &= \sin(2\pi\alpha x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8G}{(\pi + 2\pi n)^2} (2\pi\alpha) \tanh(2\pi\alpha) \end{aligned} \quad (5.66)$$

Substituindo  $u_{0,2}(x,0)$ , equação 5.65, para  $y$  igual a zero, no resultado encontrado acima, equação 5.66:

$$P(x) [c_1 \cosh(k0) + c_2 \sinh(k0)] = \sin(2\pi\alpha x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8G}{(\pi + 2\pi n)^2} (2\pi\alpha) \tanh(2\pi\alpha) \quad (5.67)$$

$$P(x)c_1 = \sin(2\pi\alpha x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8G}{(\pi + 2\pi n)^2} (2\pi\alpha) \tanh(2\pi\alpha),$$

definição a solução da constante  $c_1$  como,

$$c_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8G}{(\pi + 2\pi n)^2} (2\pi\alpha) \tanh(2\pi\alpha). \quad (5.68)$$

Agora, calculando a derivada parcial de  $u_{0,2}(x,1)$  na direção  $y$ , a partir da condição de contorno para  $y = 1$ ,

$$\frac{\partial u_{0,2}(x,1)}{\partial y} = P(x) Q'(1) = 0, \quad (5.69)$$

considerando a solução não trivial para o caso, portanto,  $Q'(0)$  tem que ser igual zero. Calculando  $Q'(y)$  e, em seguida, igualando a zero,

$$Q'(1) = c_1 k \sinh(k1) + c_2 k \cosh(k1) = 0. \quad (5.70)$$

Partindo da igualdade a cima, é possível determinar a relação de  $c_1$  e  $c_2$ . Determinada as constantes, finaliza-se o calculo de  $Q(y)$  :

$$c_2 = -c_1 \tanh(k) \quad (5.71)$$

$$Q(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8G}{(\pi + 2\pi n)^2} (2\pi\alpha) \tanh(2\pi\alpha) [\cosh(ky) - \tanh(k) \sinh(ky)] \quad (5.72)$$

Resolvendo a igualdade 5.63, para o problema de  $P(x)$ ,

$$-P'' = Pk^2, \quad (5.73)$$

onde, uma solução possível para  $P$  é,

$$\mathbf{P}(x) = p_1 \cos(kx) + p_2 \sin(kx). \quad (5.74)$$

Avaliando a expressão 5.67, agora, com o valor da constante  $c_1$  já determinado, podemos atribuir a função seno a  $P(x)$ ,

$$P(x) = \sin(2\pi\alpha x). \quad (5.75)$$

Dessa forma, determina-se os valores das constantes  $p_1$  e  $p_2$  da solução de  $P(x)$ , 5.74, juntamente com o constante  $k$ , 5.63.



$$p_1 \cos(kx) + p_2 \sin(kx) = \sin(2\pi\alpha x) \leftrightarrow p_1 = 0; p_2 = 1; k = 2\pi\alpha \quad (5.76)$$

Calculadas as funções separadas e reagrupando-as, chegamos expressão final de  $u_{0,2}$ :

$$u_{0,2} = \sin(2\pi\alpha x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8G}{(\pi + 2\pi n)^2} (2\pi\alpha) \tanh(2\pi\alpha) [\cosh(2\pi\alpha y) - \tan(2\pi\alpha) \sinh(2\pi\alpha y)] \quad (5.77)$$

Reproduzindo graficamente a expansão  $u_0(x, y)$ , figura 5.4, agora, com os termos  $u_{0,0}(x, y)$ ,  $u_{0,1}(x, y)$  e  $u_{0,2}(x, y)$ . Admitindo  $\varepsilon = 0,1$  e  $x = \pi/4$ , figura 5.4.

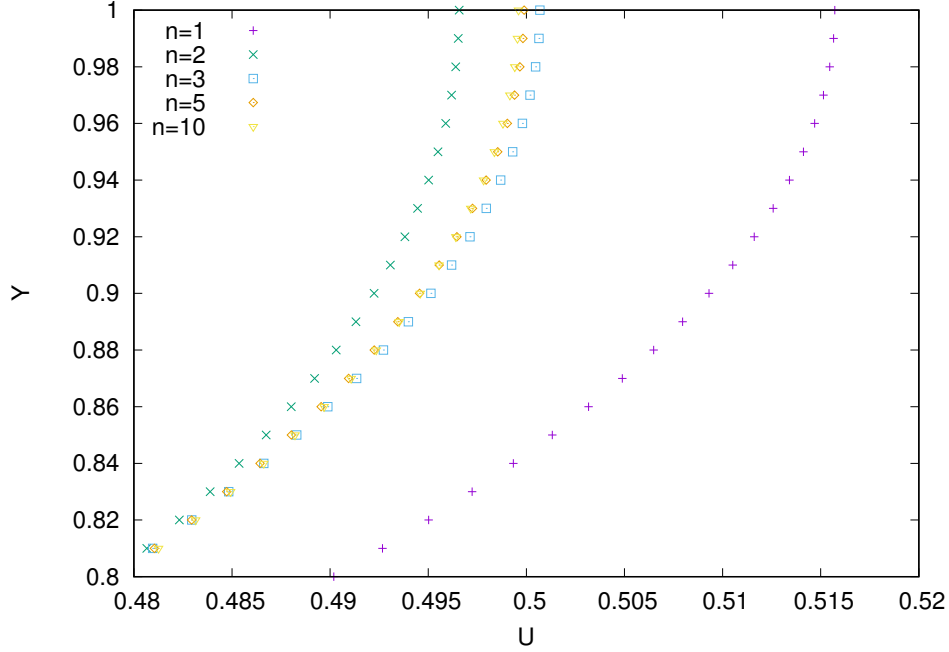


Figura 5.4: Perfil de velocidade de  $u_{0,0} + u_{0,1} + u_{0,2}$  para diferentes valores de  $n$

Assumindo que a solução para  $u_0(x, y)$  seja somente até o termo ordem  $\varepsilon^2$ , determinamos solução do termo *leading order* de Re do  $u(x, y)$ , figura 5.4.

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16G}{(\pi + 2\pi n)^3} \sin\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2} y\right) + \\ &+ \varepsilon \sin(2\pi\alpha x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8G}{(\pi + 2\pi n)^2} (\cosh(2\pi\alpha y) - \tanh(2\pi\alpha) \sinh(2\pi\alpha y)) + \\ &+ \varepsilon^2 \sin(2\pi\alpha x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8G}{(\pi + 2\pi n)^2} (2\pi\alpha) \tanh(2\pi\alpha) [\cosh(2\pi\alpha y) - \tan(2\pi\alpha) \sinh(2\pi\alpha y)] \end{aligned} \quad (5.78)$$

Apresentando no mesmo gráfico os perfis de velocidade da solução de  $u_0(x, y)$  utilizando somente o termo ordem 1 de  $\varepsilon$ , a solução até o termo  $\varepsilon$  e a solução até o termo  $\varepsilon^2$ , utilizando o valor de  $n$

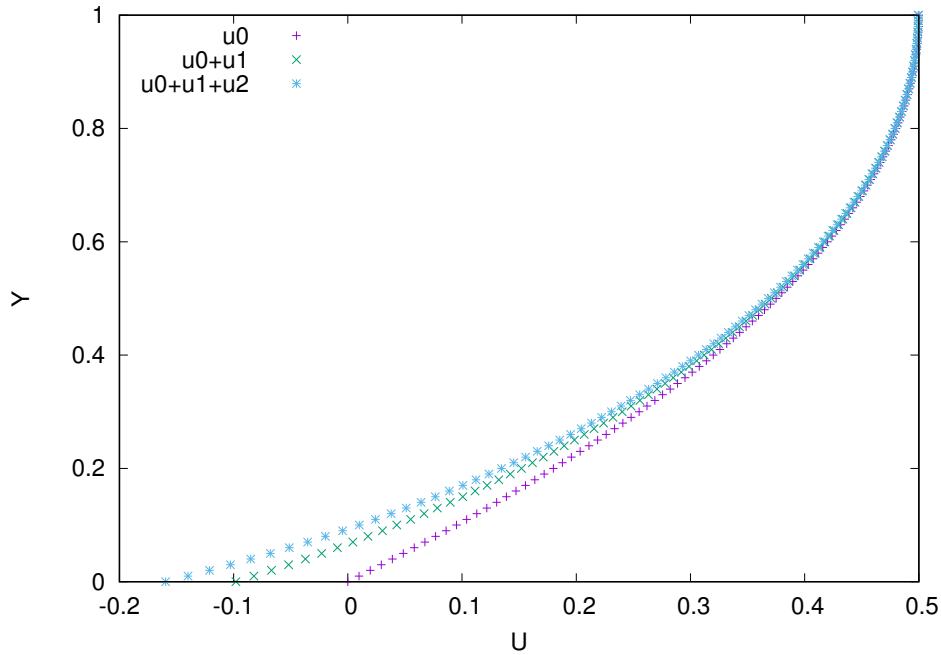


Figura 5.5: Perfil de velocidade, com  $n = 5$ , de:  $u_{0,0}$ ;  $u_{0,0} + u_{0,1}$ ; e  $u_{0,0} + u_{0,1} + u_{0,2}$

igual a 10, o perfil senoidal da superfície com um período,  $\alpha = 1$ , e a posição em  $x = 0,25$ , topo da superfície senoidal.

Pelos perfis verificamos que na solução *leading order*, a velocidade do escoamento no chão é igual a zero, nas outras soluções a velocidade é negativa, isso dá pelo modo da solução representar o escoamento, tendo em vista, que na solução analítica, o formato da superfície não é considerado. Assim, para computar a perturbação da rugosidade no escoamento, a velocidade do escoamento, perto da superfície, é bem inferior em comparação com o escoamento sem a rugosidade.

### 5.1.2 Simulação Numérica Do Escoamento Em Canal Fechado Rugoso

Para essa parte da resolução do problema do escoamento laminar, os resultados são obtidos por simulação numérica. Onde o Método Lattice Boltzmann é o utilizado para simular os escoamentos, no qual o método está implementado no programa Palabos. Tendo como referência o resultados analítico, é realizada a validação do MLB para escoamento laminar com baixo número de Reynolds.

A geometria de controle utilizada na simulação numérica segue as mesmas características que a geometria utilizada na resolução analítico. As condições de contorno também são mantidas, assim, a superfície superior do canal terá condição de deslizamento e o perfil senoidal da superfície inferior terá uma forma senoidal.

Como o objetivo da simulação do escoamento em regime laminar não é somente para validação, são realizadas duas simulações, uma do canal sem a rugosidade e outra com a rugosidade senoidal, com isso, ao comparar os resultados das duas simulações, analisar a perda de carga do escoamento. Para isso, os resultados encontrados na simulação com o canal sem rugosidade são comparados

com o termo *leading order* solução analítica de  $\mathbf{u}(x, y)$ , equação 5.38. Em seguida, os resultados encontrados na simulação com o canal rugoso são comparados com a solução final encontrada, equação 5.78.

Para produzir o perfil de velocidade do escoamento, utilizando as soluções analítica calculada, é utilizado o valor da pressão hidrostática,  $G$ , do escoamento simulado, dado a dependência do valor de  $G$  nas equações 5.38 e 5.78, sendo as soluções para  $u_{0,0}$  e de  $u$  até a segunda ordem, respectivamente.

### 5.1.2.1 Simulação para superfície não rugosa

Para essa seção são analisados os resultados obtidos ao simular o escoamento laminar no canal com superfície não rugosa. Como, ao calcular o termo *leading order* da expansão assintótica de  $\mathbf{u}(x, y)$  em função de  $\varepsilon$ , encontramos a solução  $\mathbf{u}(x, y)$  sem a perturbação da rugosidade, podemos assimilar a solução com o problema de superfície lisa. Dessa forma, com os resultados obtidos na simulação, utilizando o MLB, ao compará-los com os resultados utilizando a equação 5.38, solução  $O(1)$  em  $\varepsilon$ , podemos avaliar se o método de solução numérica pode representar de forma consistente um método de solução analítico.

A geometria para essa simulação está representada na figura 5.6, nela são apresentadas as características do canal. A geometria de controle representa um canal fechado de perfil quadrada, de tamanho  $L = 1$ , valor adimensionado, seguindo a mesma geometria do problema analítico, e a superfície inferior é plana.

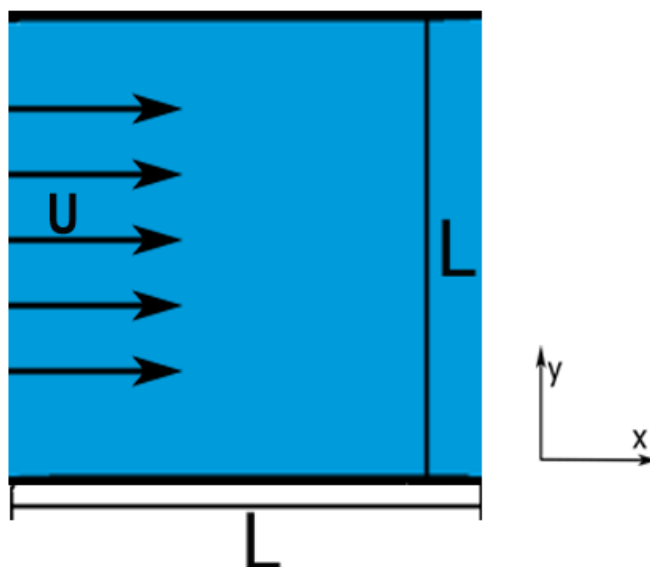


Figura 5.6: Geometria de controle, canal quadrado sem rugosidade, de dimensão  $L$

Uma das hipóteses do problema analítico é o número de Reynolds bem pequeno,  $Re \ll 1$ , dessa forma o  $Re$  é tratado como uma assintotissidade da velocidade  $\mathbf{u}$ . Então, os valores de referência para o número de Reynolds do escoamento são 0,01, 0,02 0,04 0,06 0,08 e 0,1, obedecendo a

hipótese.

Com os resultados obtidos pela simulação, traçamos os perfis de velocidade do escoamento, sendo comparados com os perfis de velocidade obtidos pela solução analítica, para os respectivos valores de Reynolds.

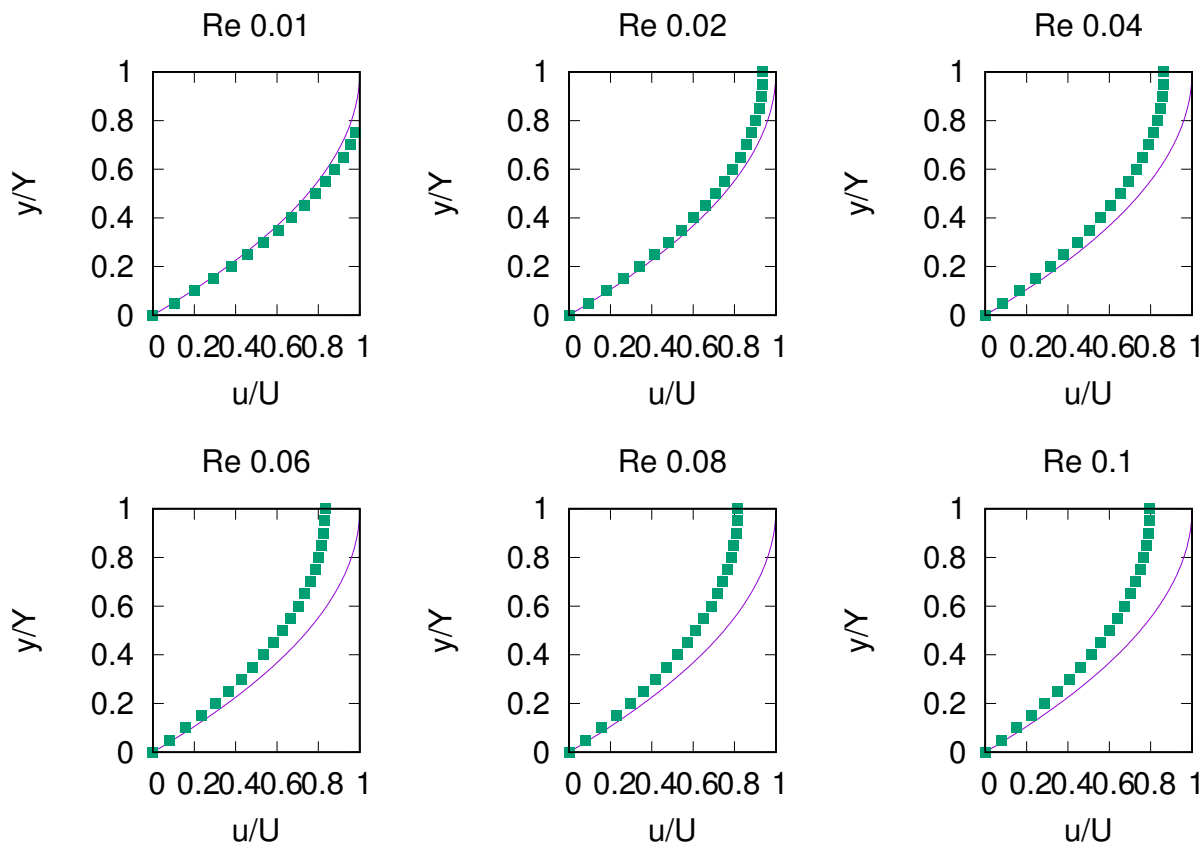


Figura 5.7: Perfil de velocidade para diferentes Reynolds. A linha representa a solução analítica  $u_{0,0}(x, y)$  e os quadrados os resultados obtidos pelo Palabos

Observando a figura 5.7, podemos notar uma diferença entre os perfis de velocidade, no qual, essa diferença aumenta conforme o Re cresce. Como assumimos que o Re é uma assintotissidade na velocidade do escoamento, ao simular o escoamento para Re mais próximos de 1, a solução assintótica perde as características.

A partir dos valores de velocidade dos dois perfis, calcula-se a vazão dos escoamentos da solução analítica e numérica, fazendo integração do perfil, equação 2.10. Com as curvas da vazão, podemos avaliar a diferença entre as vazões e, em seguida, para ter uma avaliação quantitativa, calcular o erro da vazão do escoamento simulado, utilizando como referência a vazão do escoamento analítico.

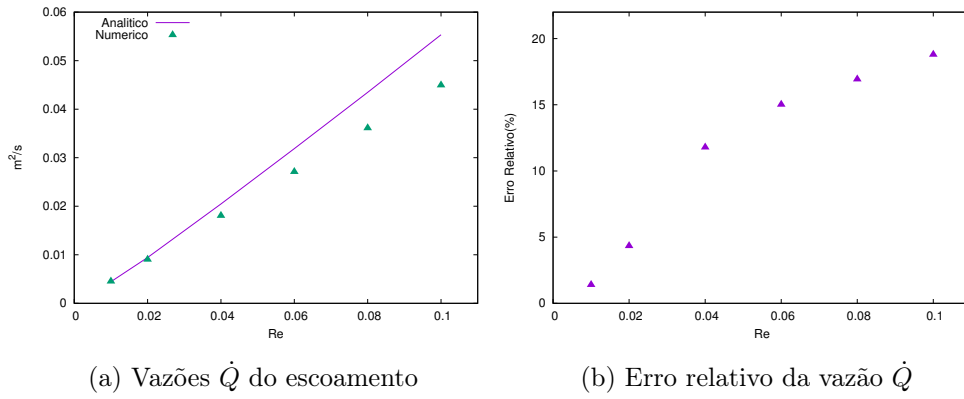


Figura 5.8: Resultados para avaliar a coerência dos resultados

Pode-se notar que a curva da vazão do escoamento analítico cresce de forma linear em quanto a vazão do escoamento simulado sofre um decaimento. Este decaimento na vazão está associado as tensões viscosas do fluido, que por sua vez, se tornam mais influentes quanto maior for o  $Re$ . Na solução analítica, não é considerado as tensões viscosas, logo, a vazão do escoamento cresce de forma linear.

### 5.1.2.2 Simulação para superfície rugosa

Nessa seção são simulado os escoamentos em regime laminar no canal com superfície rugosa. Os resultados obtidos nas simulações são comparados com a solução analítica, a partir do truncamento da expansão de  $\mathbf{u}(x, y)$  até o termo  $O(\varepsilon^2)$ , equação 5.78.

A geometria para essa simulação está apresentada na figura 5.9, sendo um canal fechado de perfil quadrada, com  $L = 1$ , com uma rugosidade senoidal, representada por  $y = \varepsilon \sin(2\pi x/\alpha)$ , com amplitude  $\varepsilon = 0.1$  e de um período de função,  $\alpha = 1$ . Lembrando que, dada uma das hipóteses do problema  $Re \ll 1$ , então são simulado escoamento com o número de Reynolds do escoamento bem próximos a 0,01, 0,02 0,04 0,06 0,08 e 0,1.

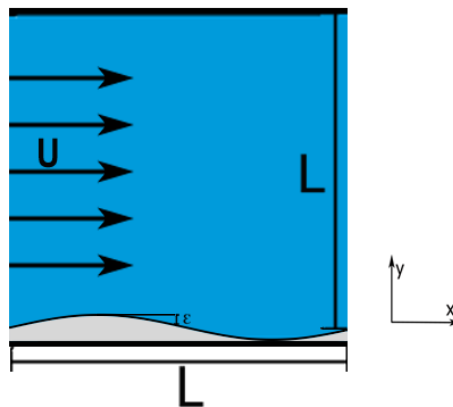


Figura 5.9: Geometria de controle, canal quadrado com rugosidade, de dimensão  $L$

Novamente, traçamos os perfis de velocidade do escoamento, combinando os resultados obtidos na simulação e na solução analítica, separando-os pelos seus respectivos valores de  $Re$ .

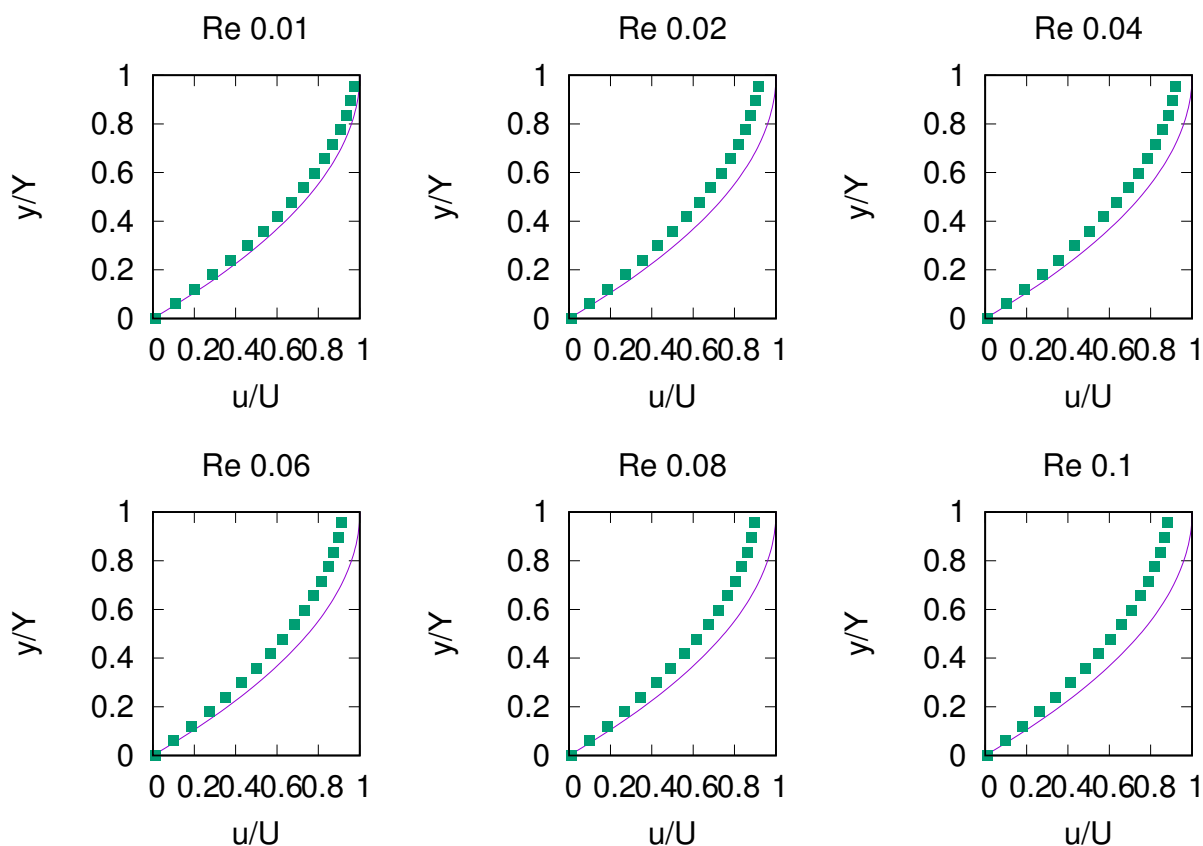


Figura 5.10: Perfil de velocidade para diferentes Reynolds. A linha é solução analítica do problema e os pontos são os resultados obtidos pelo Palabos

Comparando os perfis, percebe-se que há uma diferença entre eles e que esse distanciamento vai aumentando conforme o número de Reynolds cresce.

Para avaliar melhor essa diferença, calcula-se a vazão dos escoamentos da solução analítica e numérica, seguindo o mesmo método utilizado na seção anterior. Assim, com as curvas da vazão, podemos avaliar melhor a diferença dos perfis de velocidade. Também é calculado o erro da vazão do escoamento simulado, utilizando como referência a vazão do escoamento analítico.

Note que a curva da vazão do escoamento analítico cresce de forma mais linear enquanto a vazão do escoamento simulado sofre um decaimento. Este decaimento na vazão está associado às tensões viscosas do fluido, que, por sua vez, se tornam mais influentes quanto maior for o  $Re$ . Na solução analítica, não são consideradas as tensões viscosas, logo, a vazão do escoamento cresce de forma linear.

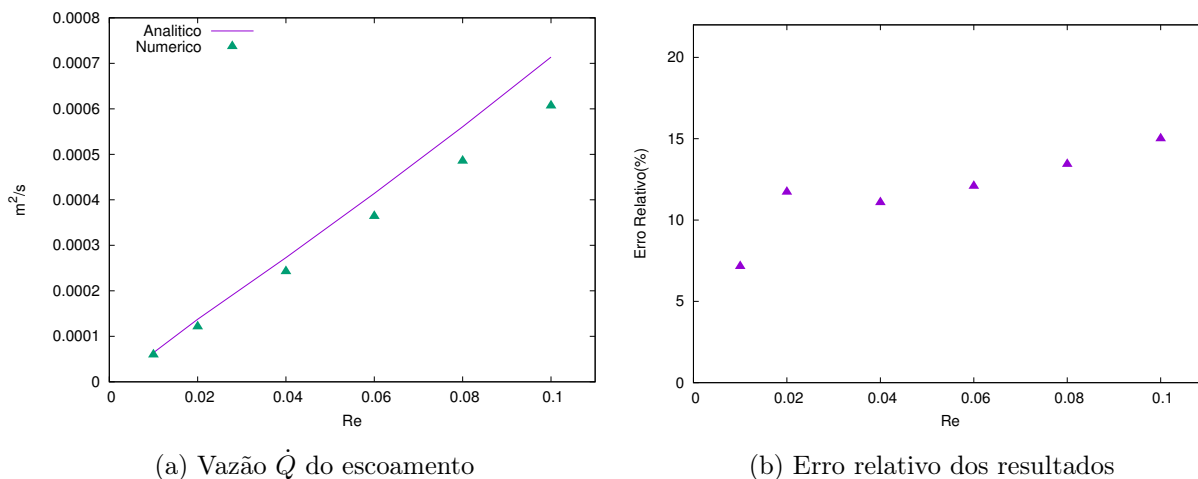


Figura 5.11: Resultados para avaliar a coerência dos resultados

## 5.2 Simulação Numérica do Escoamento Turbulento

As enxurradas são consideradas escoamentos em regime turbulento, pois há presença de grandes flutuações de velocidade no escoamento, o qual pode ser comprovado devido a uma grande quantidade de sedimentos suspensos no fluido. As simulações são focadas em conseguir obter informações do escoamento que possam quantificar a suspensão do escoamento, como as flutuações de velocidade, o tensor de tensões de Reynolds e o fator de atrito na superfície inferior do canal.

Os escoamentos são simulados utilizando o programa Palabos, no qual é implementado com o Método Lattice Boltzmann. Porém, para a simulação de escoamento turbulento, juntamente com o LB, é utilizado o modelo de Smagorisky. Como apresentado na seção 2.2 e juntamente no subcapítulo 3.7, o modelo de Smagorisky aborda o escoamento por meio de duas escalas, visando englobar todos os fenômenos do escoamento.

Como apresentado na Introdução, cap. 1, assumimos que o canal seja inclinado, para que, dessa forma, o forçamento aplicado no escoamento seja alterado, tendo como referência o ângulo de disposição da geometria. Como a inclinação está associada somente ao forçamento, o canal é representado sem a inclinação, o que facilita a apresentação das suas medidas.

A superfície inferior do canal tem três formas diferentes, a primeira superfície tem uma forma plana, sem rugosidade, a segunda superfície tem uma forma triangular periódica e a terceira superfície tem uma forma senoidal. Os esboços dos canais com as formas das superfícies inferiores são apresentados nas respectivas seções da simulação.

Algumas das informações do escoamento são apresentadas em forma de perfil, com localização fixa no canal. Adotando como referência um período de tamanho  $L$ , os perfis traçados das posições  $x = 0$ , entrada do escoamento,  $x = 0,25L$ ,  $x = 0,5L$  e  $x = 0,75L$ , lembrando que o escoamento é simulado com condição de periodicidade,  $\mathbf{u}(\mathbf{0}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{L}, \mathbf{y})$ .

O canal tem uma inclinação fixa de  $\theta = 0.115^\circ$ , com isso, utilizando as equações 3.75, o escoamento terá um aceleração constante no eixo  $x$  de  $1,4110^{-7} \text{ m/s}^2$ . As dimensões do canal,

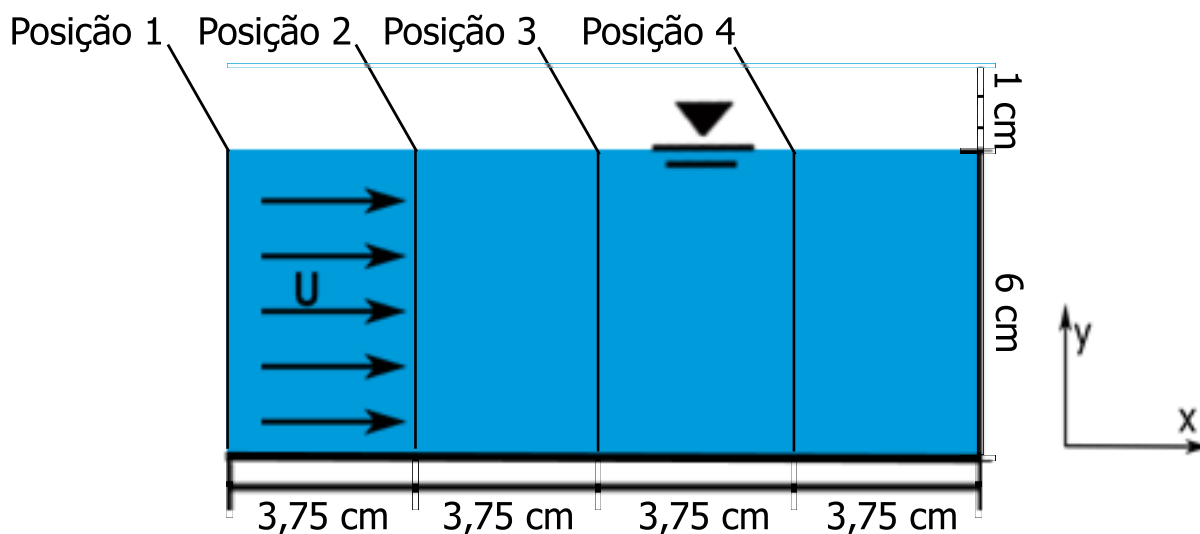


Figura 5.12: Canal aberto com suas dimensões físicas e localização da perfis.

como comprimento da geometria,  $C$ , altura da coluna de fluido,  $L$ , altura total da geometria,  $I$ , são 15cm, 6cm e 7cm respectivamente. Como serão simuladas três geometrias distintas, as dimensões específicas serão apresentadas posteriormente, nos respectivos subcapítulos.

$l(m)$	$x\ y\ z\ (m)$	$x/l\ y/l\ z/l$	$N$	$N_x\ X\ N_y\ X\ N_z$	$N_{total}$	$\Delta x(mm)$
0,06	0,15 x 0,07 x 0,24	2,5 x 1,16 x 4	67	168 x 76 x 268	3511872	0,89

Os perfis das velocidades do escoamento e os perfis do tensor de tensões do escoamento são respectivos à quatro posições, para  $x/H$  iguais a 0, 1, 1.5 e 2. A localização dessas posições podem ser identificadas no esquema que apresenta a geometria do problema, figura 5.12

### 5.2.1 Canal com superfície lisa

O primeiro teste simula o escoamento em um canal com superfície inferior plana, sem rugosidade, pensando em ter um escoamento sem a perturbações da rugosidade. O formato da geometria de controle segue as dimensões apresentadas na figura 5.12, com uma inclinação de  $\theta = 0.175^\circ$ .

O objetivo dessa simulação é estudar o escoamento desenvolvido, quando não há nenhuma interferência influenciando o deslocamento do fluido. Os resultados adquiridos nesses testes serão utilizados como referência, para assim, ao comparar os resultados com outras simulações, ser possível avaliar as consequências da perturbação provocada pela rugosidade no escoamento.



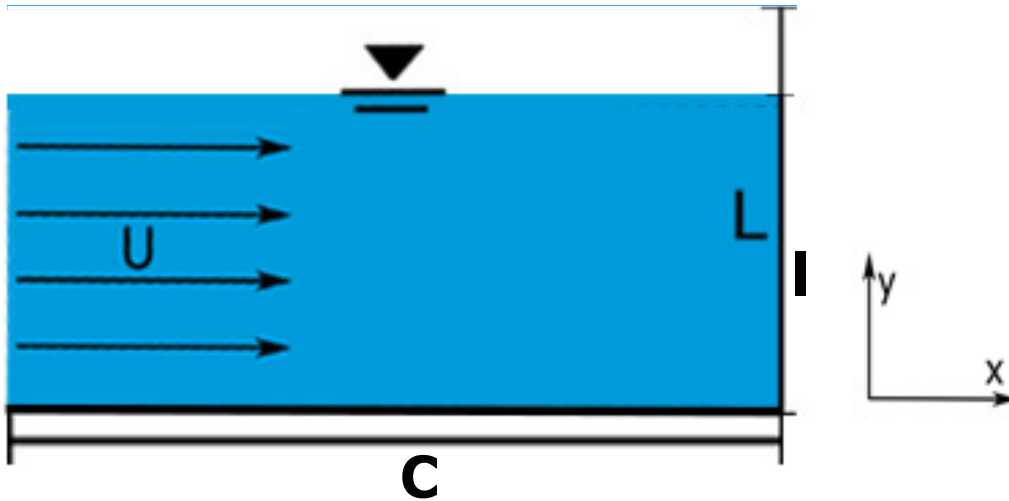


Figura 5.13: Canal com superfície lisa

Iniciando a apresentação dos resultados da simulação, a seção transversal do escoamento, plano normal ao escoamento, com o espectro da velocidade média do escoamento,  $\bar{u}$ , fig. (5.14), com as linhas de corrente do escoamento.

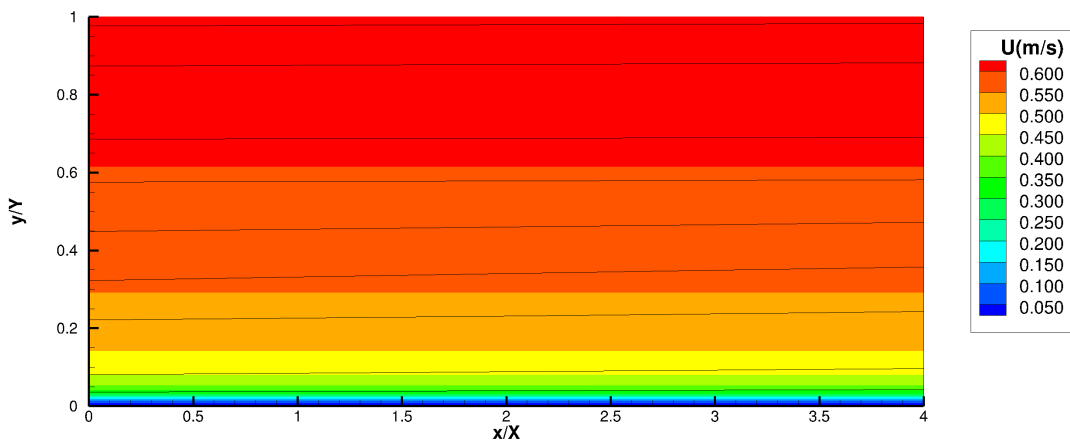


Figura 5.14: Velocidade média  $\bar{u}$ , com as linhas corrente, para inclinação do canal  $\theta = 0,175$

Percebe-se, pelas divisões de cores, que o escoamento tem o campo de velocidade bem definidas e que a velocidade do escoamento se desenvolve conforme se afasta da superfície inferior. Pelas linhas de corrente, figura 5.14, é visível que as linhas são paralelas.

Para uma melhor avaliação, são apresentados os perfis da velocidade média de  $u$ ,  $\bar{u}$  e os perfis da velocidade média de  $v$ ,  $\bar{v}$ , nas localidades definidas na figura 5.12.

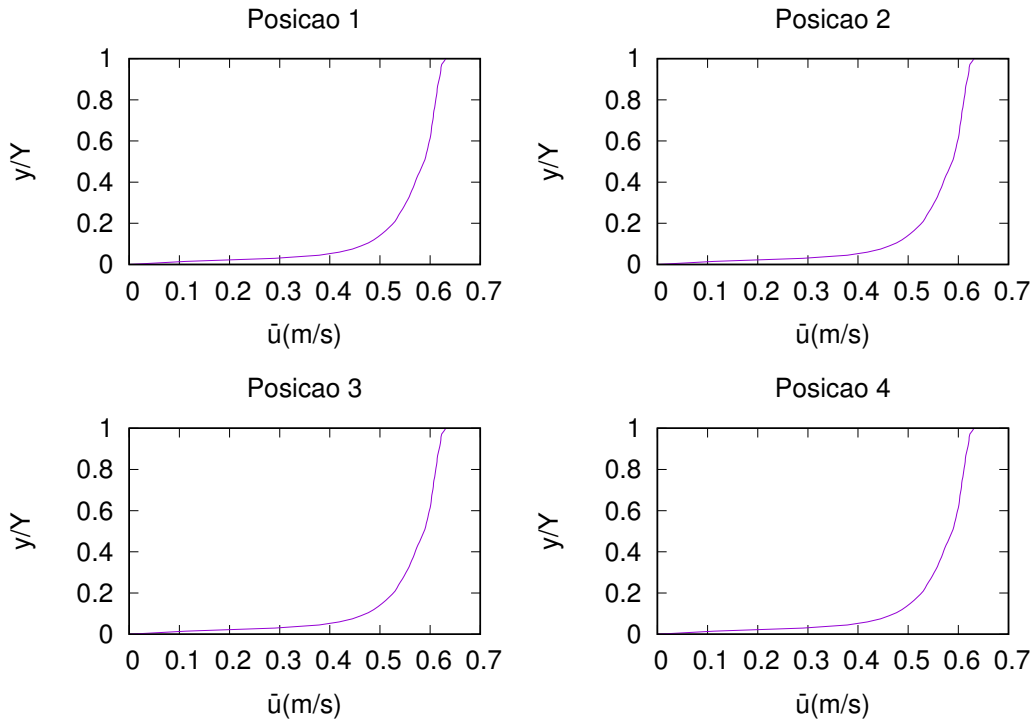


Figura 5.15: Perfis da velocidade média  $\bar{u}$ , para inclinação do canal  $\theta = 0,175$

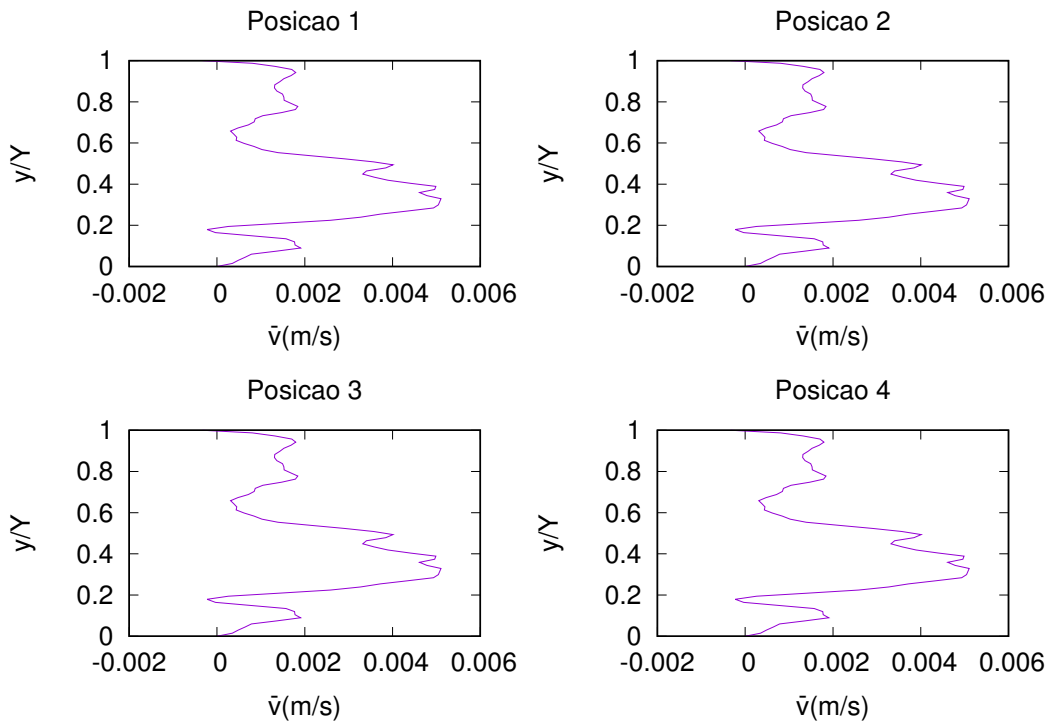


Figura 5.16: Perfis da velocidade média  $\bar{v}$ , para inclinação do canal  $\theta = 0,175$

Pelos gráficos, verifica-se que os perfis de velocidade são semelhantes, independentemente da posição. Comparando as escalas das velocidade  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$ , infere-se que a escala da velocidade  $\bar{v}$  é  $10^{-2}$  menor, assim, podemos interpretar que o escoamento médio na direção vertical é pouco relevante

para o escoamento. Calculando a média da velocidade média  $\bar{u}$ , determinamos que o número de Reynolds do escoamento é 34409, sendo um valor bem acima dos valores apresentados na referência [4].

Em seguida, apresenta-se o a seção transversal do escoamento com o valor absoluto da vorticidade na direção  $z$ ,  $w_f$ , fig.[ 5.17 ]. Os valores em regiões bem definidas do escoamento.

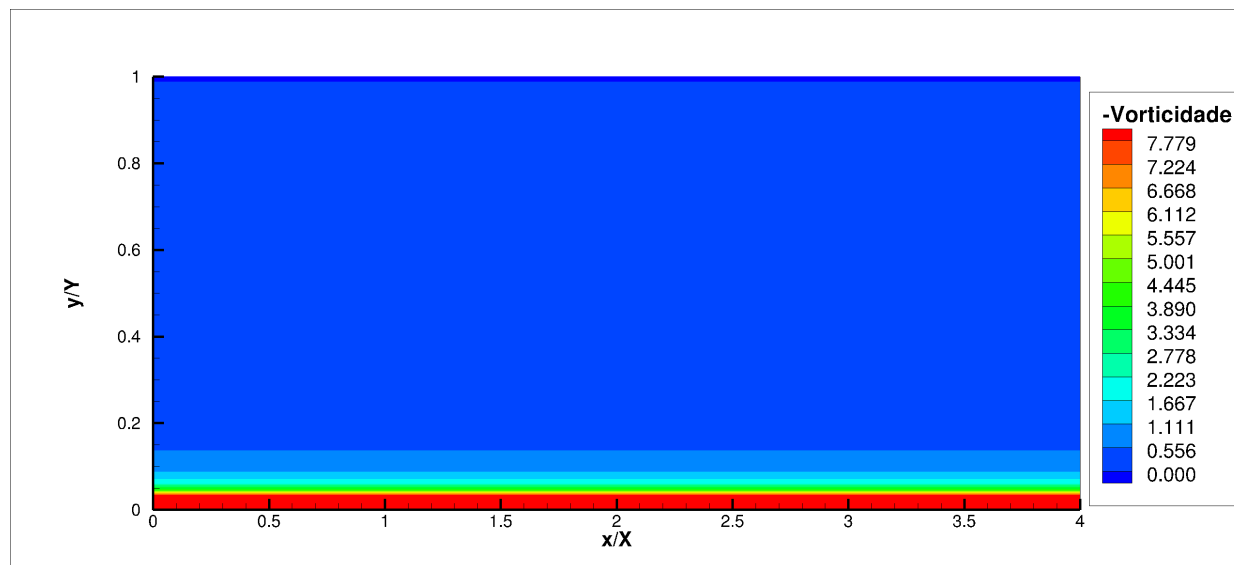


Figura 5.17: Valor absoluto da vorticidade média do escoamento, na direção  $z$ , para o canal inclinado à  $0,175^\circ$

Desenvolvendo a análise do escoamento, calcula-se as flutuações de velocidade do escoamento,  $u'$  e  $v'$ , e, em seguida calculando o tensor de tensões,  $\rho \overline{u'v'}$ . A figura a seguir, fig. [5.18], mostra o produto das flutuações de velocidade,  $u'v'$ , no tempo físico de 180 segundos.

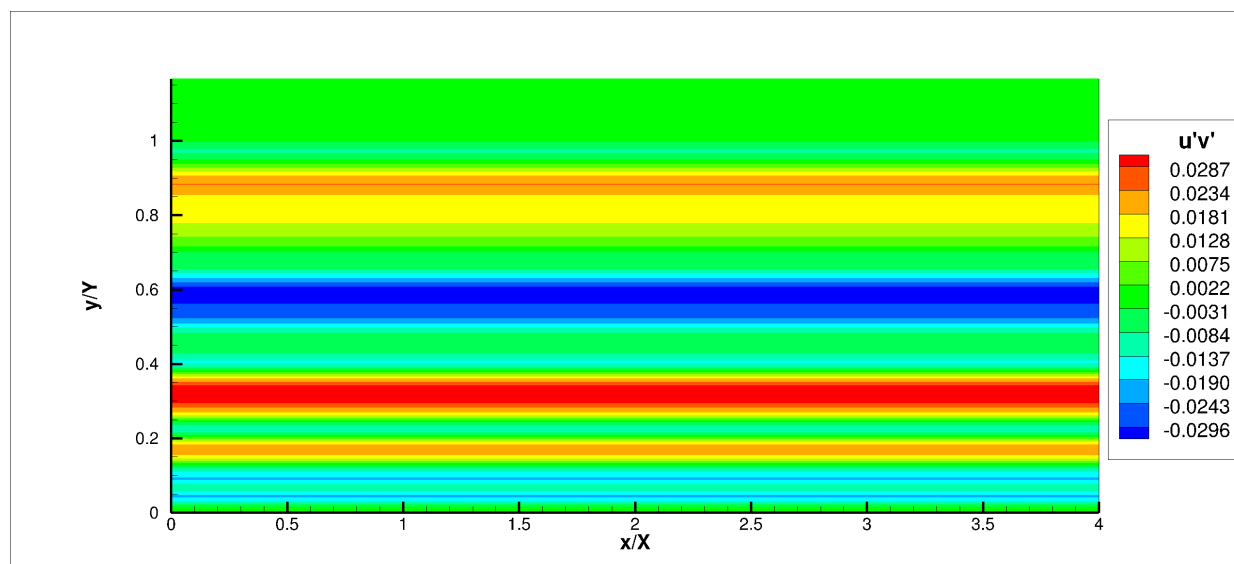


Figura 5.18: Seção transversal do produto  $u'v'$  no instante 180 segundos, no perfil médio do escoamento, para o canal inclinado à  $0,175^\circ$

Em seguida, com o objetivo de fazer a análise quantitativa das flutuações turbulentas do escoamento, são apresentados os perfis do tensor de tensões de Reynolds  $\rho u'v'$  para as posições predeterminadas.

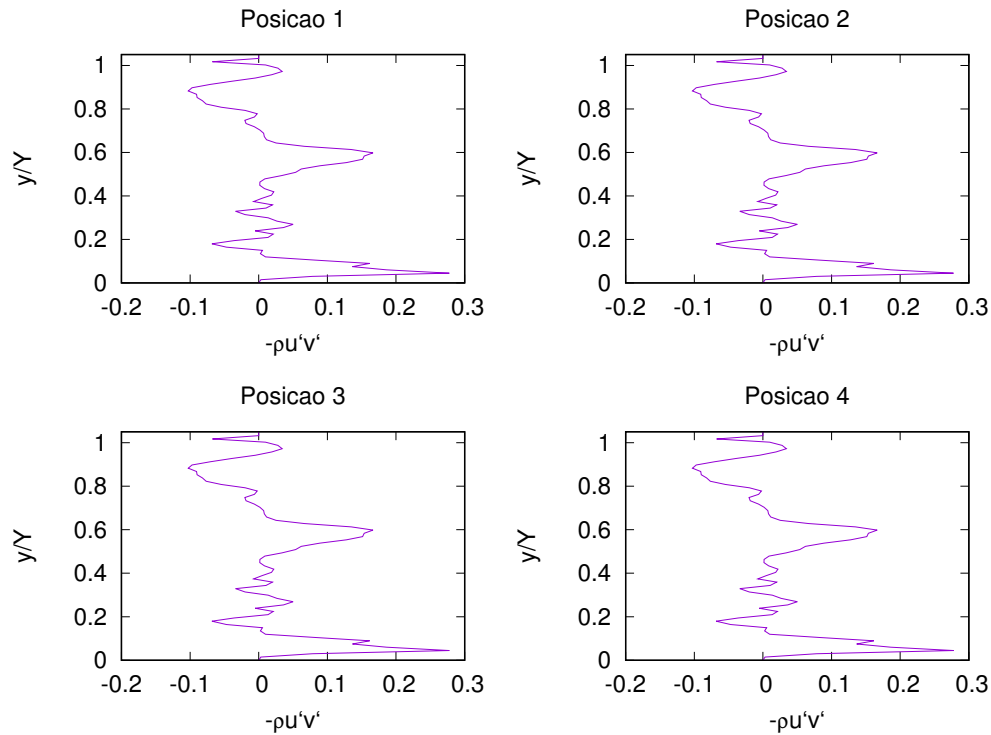


Figura 5.19: Perfis do tensor de tensões de Reynolds médio,  $\overline{\rho u'v'}$ , para a inclinação do canal  $\theta = 0,175$

Como o número de Reynolds do escoamento do canal com inclinação  $\theta = 0,115^\circ$  é maior em comparação com os valores dos escoamentos do artigo de referência, é simulado um novo escoamento com o canal inclinado com  $\theta = 0.057^\circ$ . Assim, são apresentados os perfis do componente horizontal da velocidade,  $u$ , do componente vertical da velocidade  $v$  e do tensor de tensões,  $\rho u'v'$ .

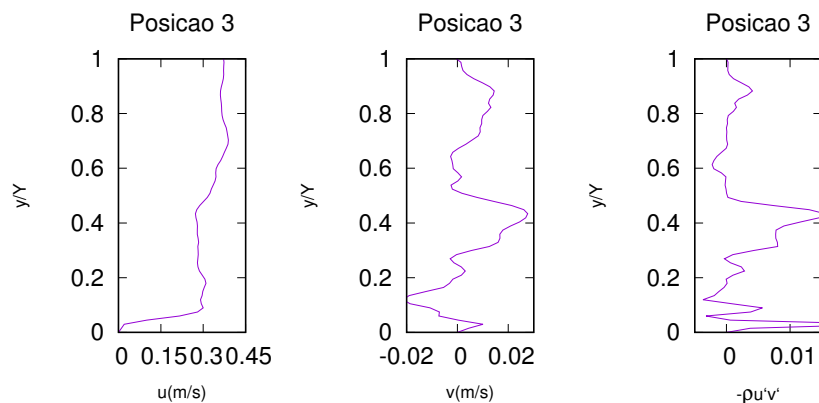


Figura 5.20: Perfis da velocidade média  $\bar{u}$ , da velocidade média  $\bar{v}$  e tensor de tensões  $\overline{\rho u'v'}$ , para inclinação do canal  $\theta = 0,115$  na posição 3

O número de Reynolds para esse escoamento é de 19134, sendo um valor mais próximo dos valores apresentados na referência, assim, sendo possível avaliar os escoamentos com o Re próximo.

### 5.2.2 Canal com Rugosidade Triangular

A simulação seguinte demonstra o escoamento em um canal com rugosidade triangular. Esse formato de rugosidade é escolhido com base no mesmo caso adotado para a validação turbulenta, 4.2. A estrutura da geometria de controle é mantida. Porém, são adicionadas duas seções de triângulo reto de altura 12cm, uma no começo da geometria e outra no final, como mostra a figura 5.21, dessa forma, ao juntar as duas seções formamos um triângulo equilátero.

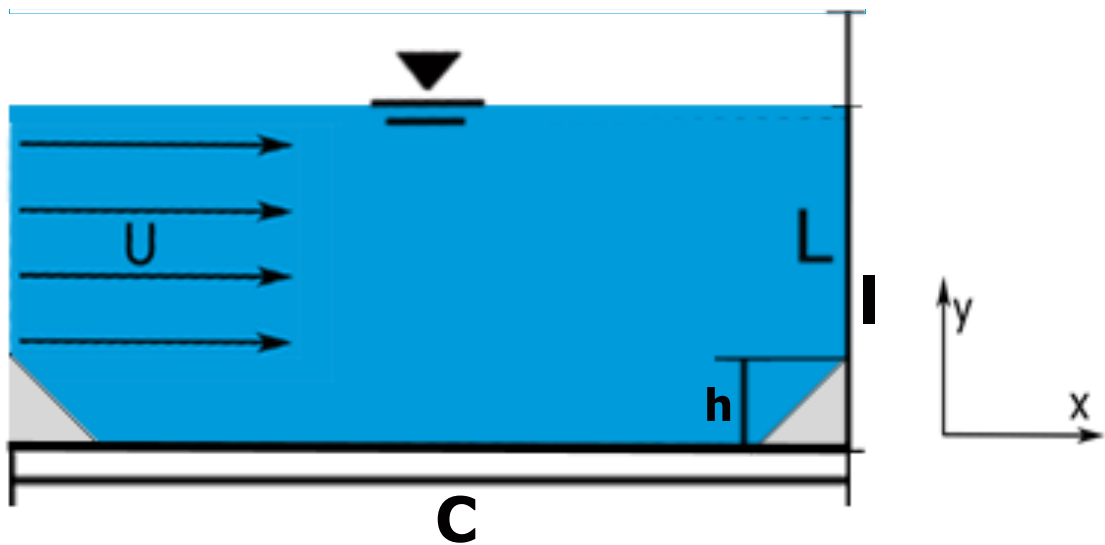


Figura 5.21: Canal com superfície triangular

O objetivo dessa simulação é estudar o efeito da rugosidade no escoamento, quando há a presença de uma rugosidade interferindo o deslocamento do fluido e nas propriedades do escoamento. Para isso são avaliadas a velocidade do escoamento, juntamente com a vazão e o número de Reynolds. Os resultados são apresentados na mesma ordem que na subseção 5.2.1. Inicialmente, é apresentado o espectro da velocidade média,  $\bar{u}$ , com as linhas de corrente e em seguida do espectro da inversa da vorticidade na direção  $z$ ,  $w_f$ .

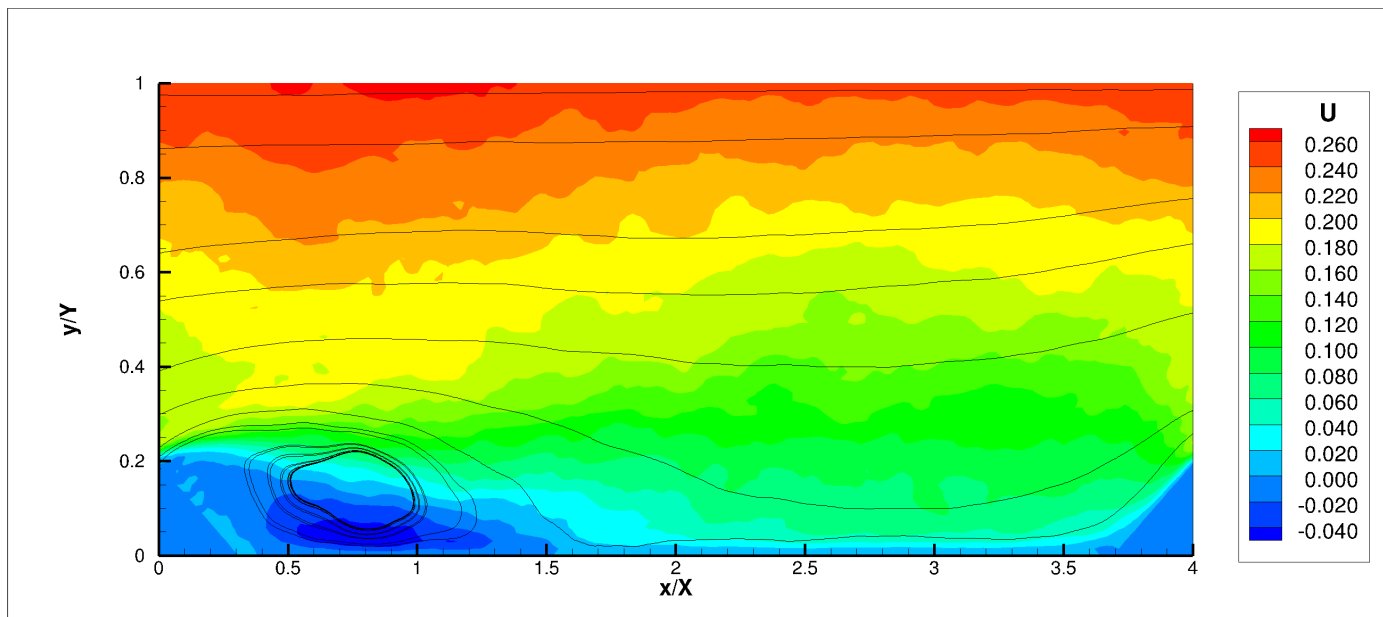


Figura 5.22: Velocidade média do escoamento,  $\bar{u}$ , com as linhas corrente, para o canal inclinado à  $0,175^\circ$

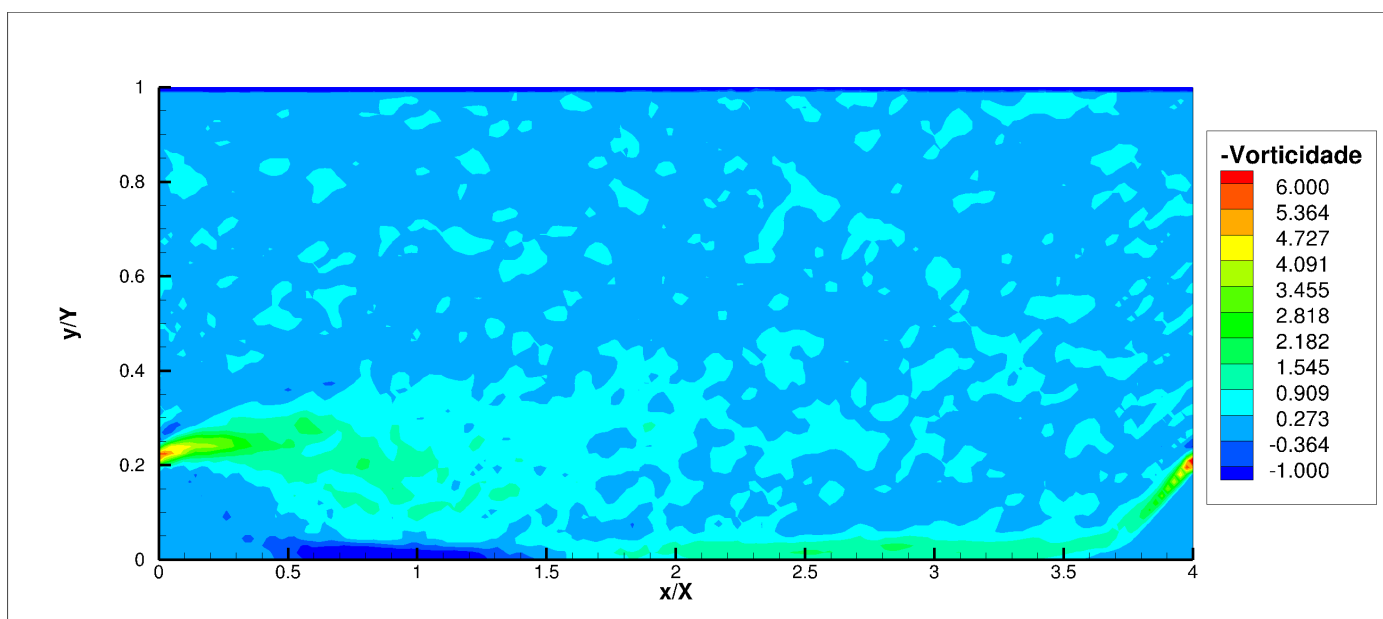


Figura 5.23: Valor absoluto da vorticidade média do escoamento, na direção  $z$ , para o canal inclinado à  $0,175^\circ$

Na figura 5.22, ao observar as linhas de corrente, podemos verificar que há uma região de recirculação bem próximo ao declive da rugosidade. Na figura 5.23 podemos verificar um ponto de vorticidade mais intensa no topo do triângulo. Em seguida, são apresentados os perfis de velocidade média  $\bar{u}$  e em seguida os perfis de  $\bar{v}$ .

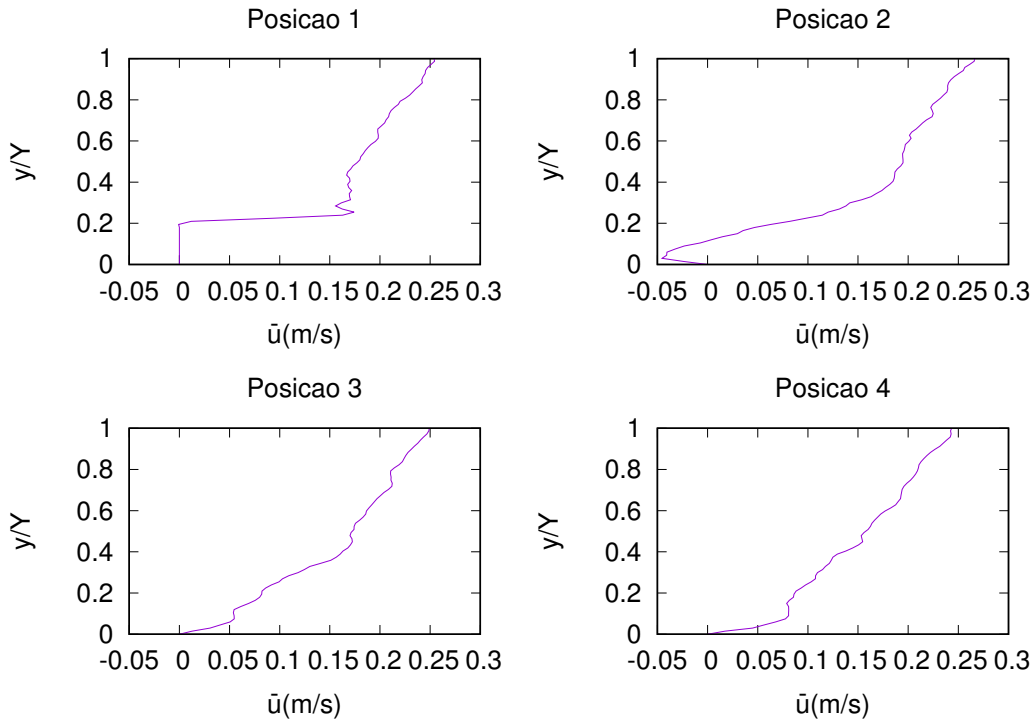


Figura 5.24: Perfis de velocidade média  $\bar{u}$  do escoamento com o canal inclinado à  $0,175^\circ$

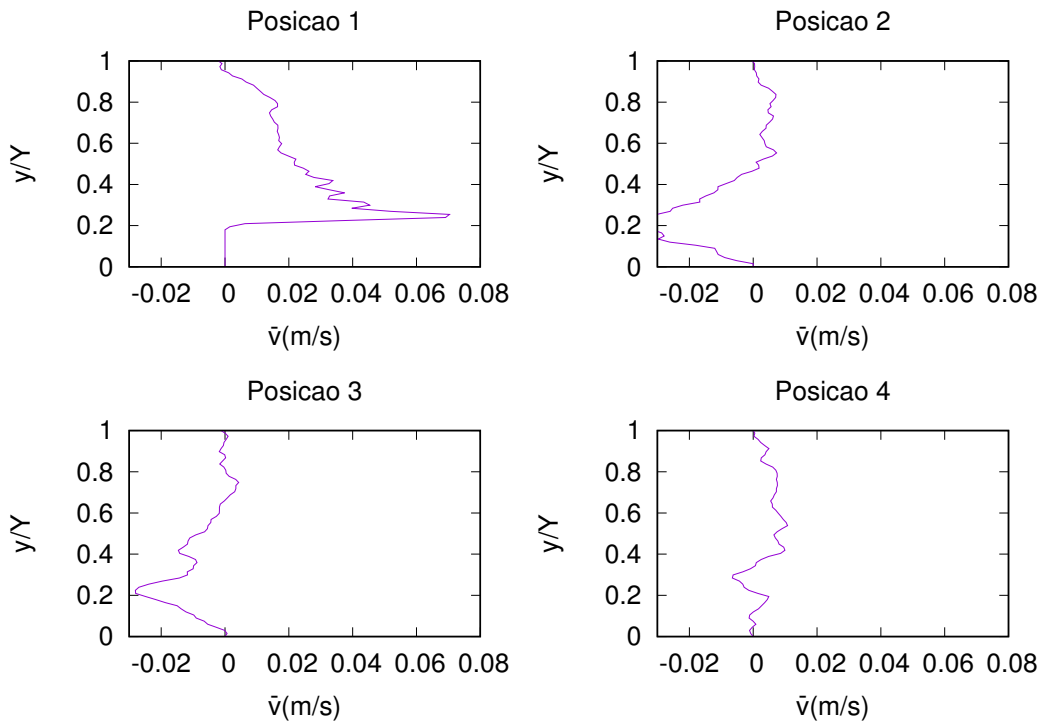


Figura 5.25: Perfis de velocidade média  $\bar{v}$  do escoamento com o canal inclinado à  $0,175^\circ$

Para esse canal, o  $Re$  do escoamento é de 9512, lembrando que as simulações tem o mesmo  $L$  e  $\rho$ , na simulação de superfície lisa, para a mesma inclinação, o número de Reynolds do escoamento é de 34409, assim, a velocidade do escoamento com rugosidade triangular é 70% menor. Concluindo,

assim, uma grande diminuição na vazão do escoamento.

Para verificar a produção de turbulência no escoamento, vamos apresentar as flutuações de velocidade do escoamento  $u'$  e  $v'$ . Primeiro, apresentamos a seção média transversal dos valores do produto da flutuação dos componentes  $u'$  e  $v'$ , para verificarmos onde há a maior intensidade de flutuação de velocidade.

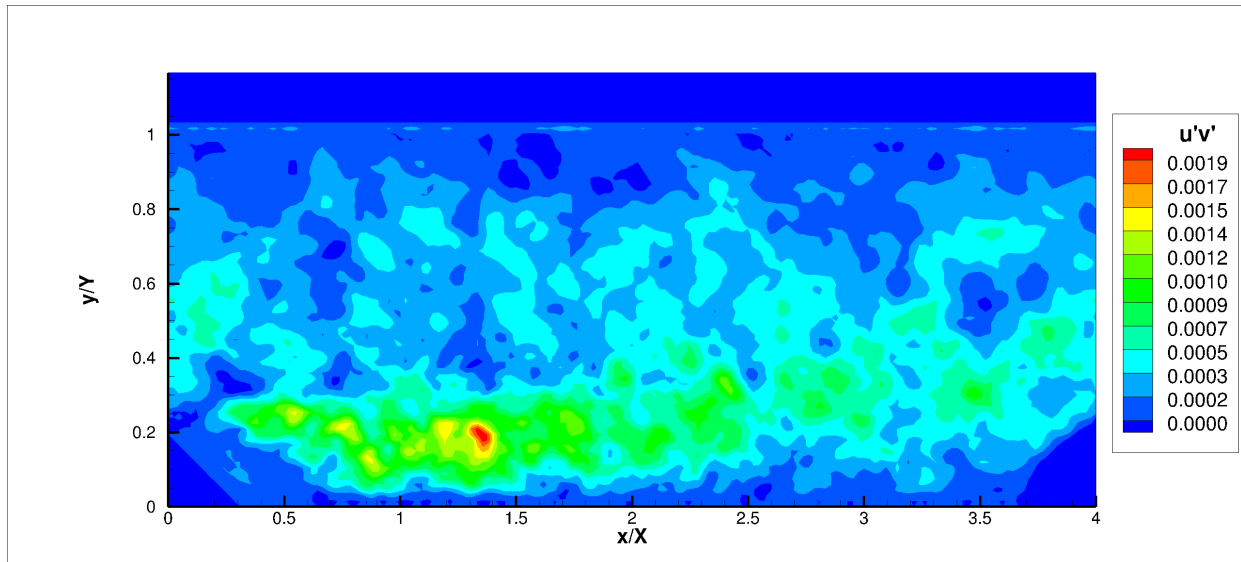


Figura 5.26: Seção transversal do produto  $u'v'$  no instante 180 segundos, no perfil médio do escoamento com o canal inclinado à  $0,175^\circ$

Neste gráfico fica evidente a presença de um região onde o valor do tensor é mais acentuado. Essa região de concentração de tensão está situada entre a região de recirculação e a região de fluxo do escoamento.

Avaliando melhor as flutuações de velocidade, calculamos o tensor de tensões. Seguem as figuras com os perfis do tensor tensões para as posições predeterminadas.



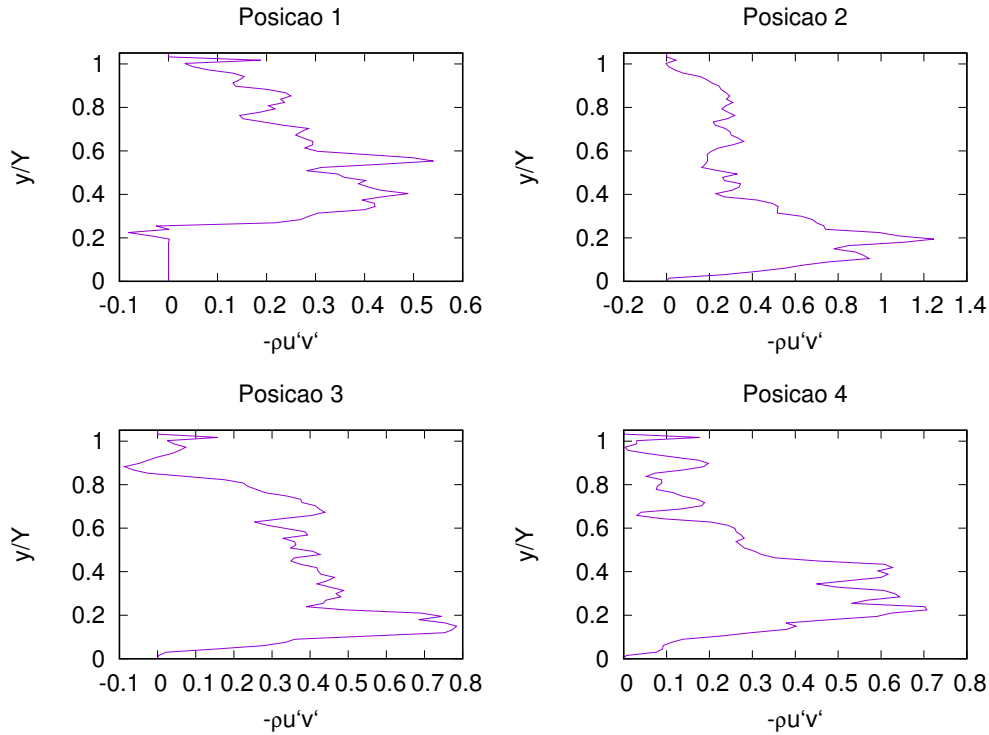


Figura 5.27: Perfis do tensor de tensões de Reynolds,  $\overline{\rho u'v'}$ , do escoamento com o canal inclinado à  $0,175^\circ$

Pelos perfis apresentados, é possível confirmar que na posição 2 o valor do tensor de tensões é mais elevado, sendo essa a posição de avaliação mais próxima a jusante da rugosidade. Comparando os valores do tensor desta simulação com os valores do tensor de tensões do escoamento sem rugosidade, podemos afirmar que há um aumento nos efeitos turbulentos, sendo o tensor de tensões do escoamento perturbado 3 vezes maior que o escoamento com superfície lisa.

### 5.2.3 Canal com Rugosidade senoidal

O terceiro problema simulado é o escoamento em um canal com rugosidade senoidal. Essa forma de rugosidade foi escolhida com o objetivo de dar continuidade a análise de perturbação proposto no capítulo 5.1.1. Lembrando que são avaliadas os efeitos de uma perturbação menor e mais contínua, sem ter perturbações de maior intensidade e localizados, como na rugosidade triangular. Também, como no seno há um região de vale, espera-se que nessa região ocorra um aumento nas tensões turbulentas, dado um possível aumento nas flutuações do componente vertical da velocidade,  $v$ .

As dimensões principais do canal são mantidas, porém, a superfície inferior descreve um perfil senoidal de um período,  $\alpha = 1$ , com a amplitude do seno de 12 mm,  $\varepsilon = 12$  mm, e distância entre o cume e o vale do seno igual a 24 mm,  $h = 24$  mm, figura 5.28.

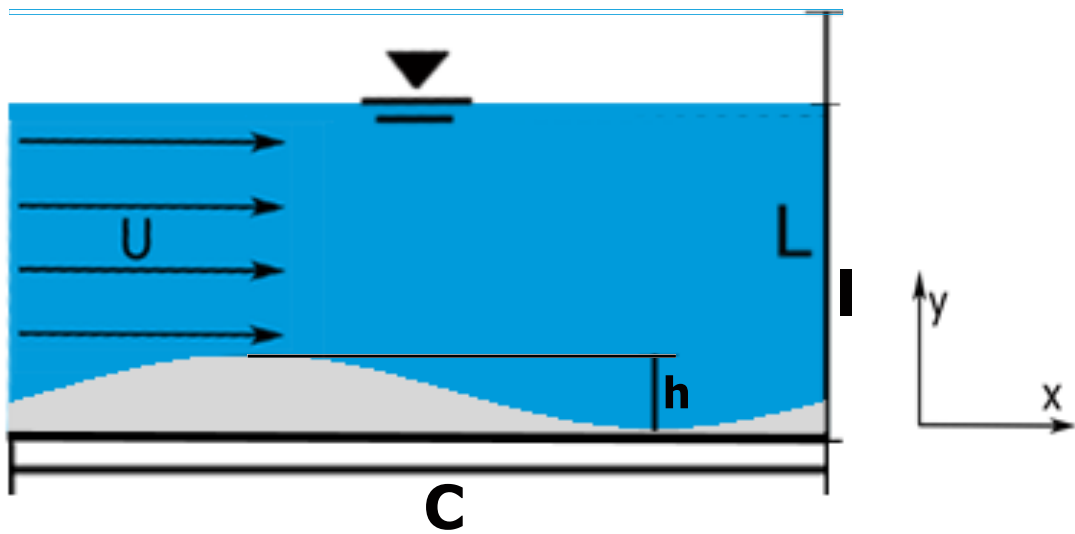


Figura 5.28: Canal com superfície senoidal

Inicia-se apresentando os valores da velocidade média,  $\bar{U}$  no plano médio transversal ao escoamento, juntamente com as linhas de corrente.

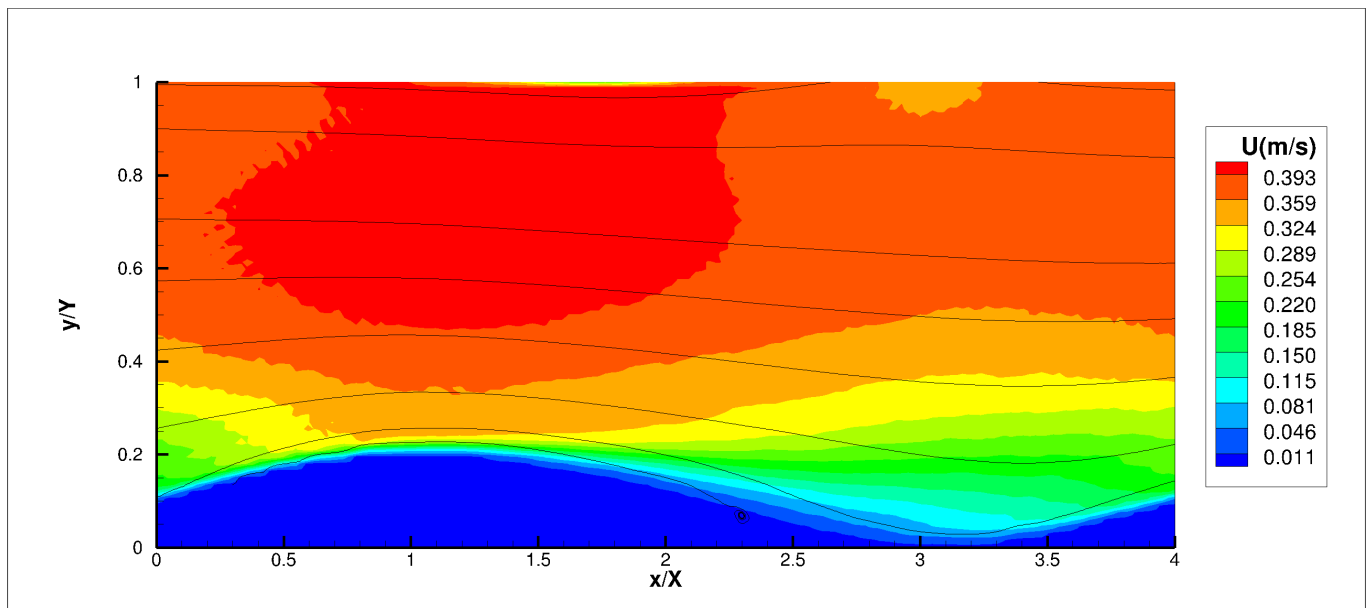


Figura 5.29: Velocidade média  $\bar{u}$  do escoamento com o canal inclinado à  $0,175^\circ$ , com as linhas de corrente,

A figura 5.29 demonstra o fluido acelerando no auge do perfil senoidal, onde o fluido atinge sua maior velocidade no topo do perfil, desacelerando na região de declive do perfil senoidal, aparecendo uma leve recirculação do escoamento. Em seguida, são apresentados os perfis de velocidade média  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$  do fluido, nas localidades pré-determinadas.

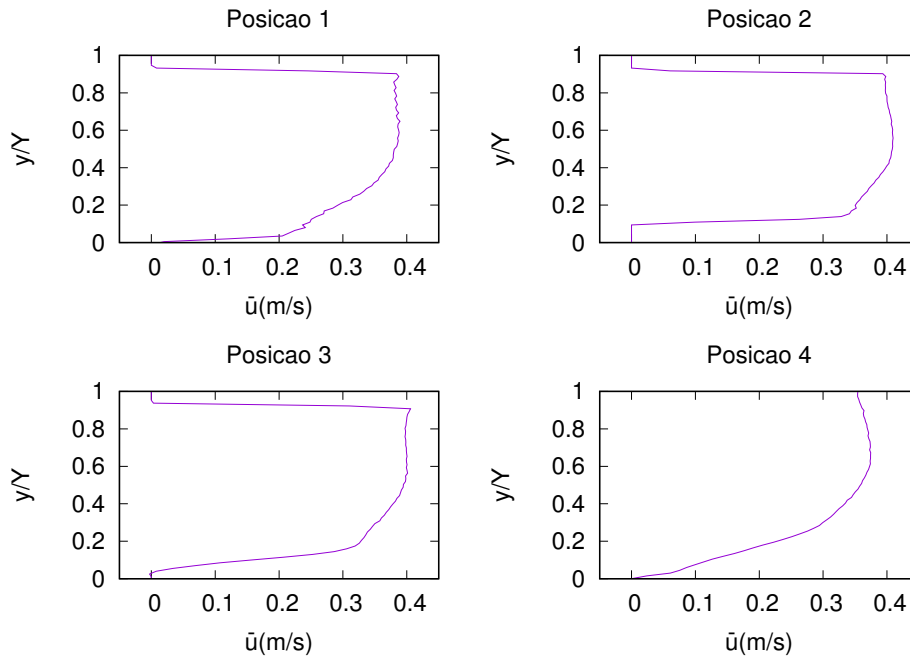


Figura 5.30: Perfis de velocidade média  $\bar{u}$  do escoamento com o canal inclinado à  $0,175^\circ$

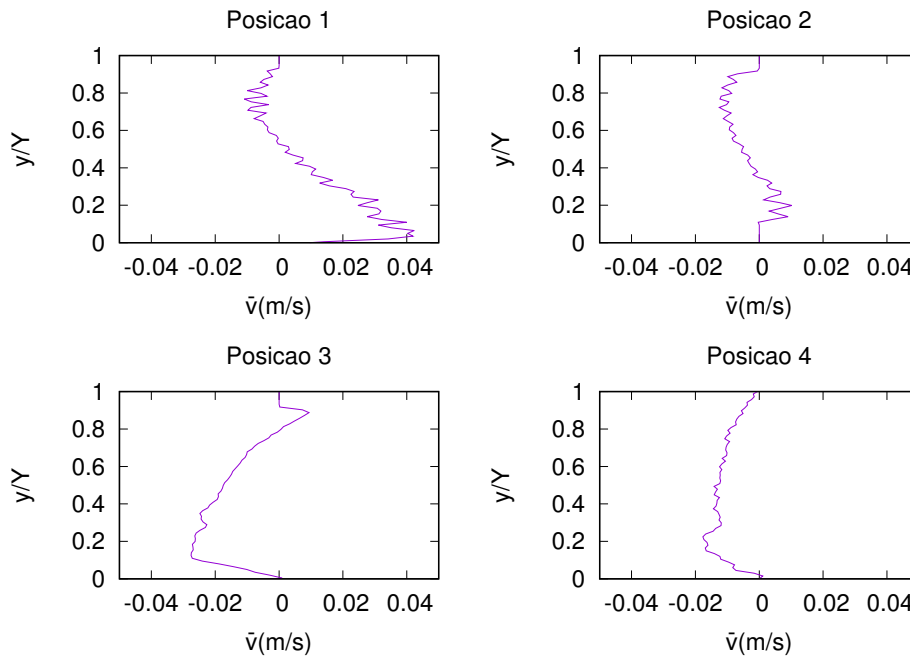


Figura 5.31: Perfis de velocidade média  $\bar{v}$  do escoamento com o canal inclinado à  $0,175^\circ$

As figuras 5.30 e 5.31 demonstram que há uma diferença na ordem de  $10^{-2}$  entre os componentes da velocidade,  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$ . Assim, podemos considerar que o deslocamento do escoamento na direção horizontal, mesmo com a perturbação. Porém, na posição 1, meio do auge, e na posição 2, meio do declive, a velocidade  $\mathbf{v}$  do escoamento é tem seus picos e, dessa forma, espera-se que próximo a essas posições ocorram flutuações turbulentas.

Para verificar se o perfil senoidal produziu flutuações no escoamento, primeiro, apresenta-se a seção média transversal dos valores do produto das flutuações dos componentes de velocidade,  $u'$  e  $v'$ , assim, podemos verificar onde há uma maior intensidade dos efeitos turbulentos.

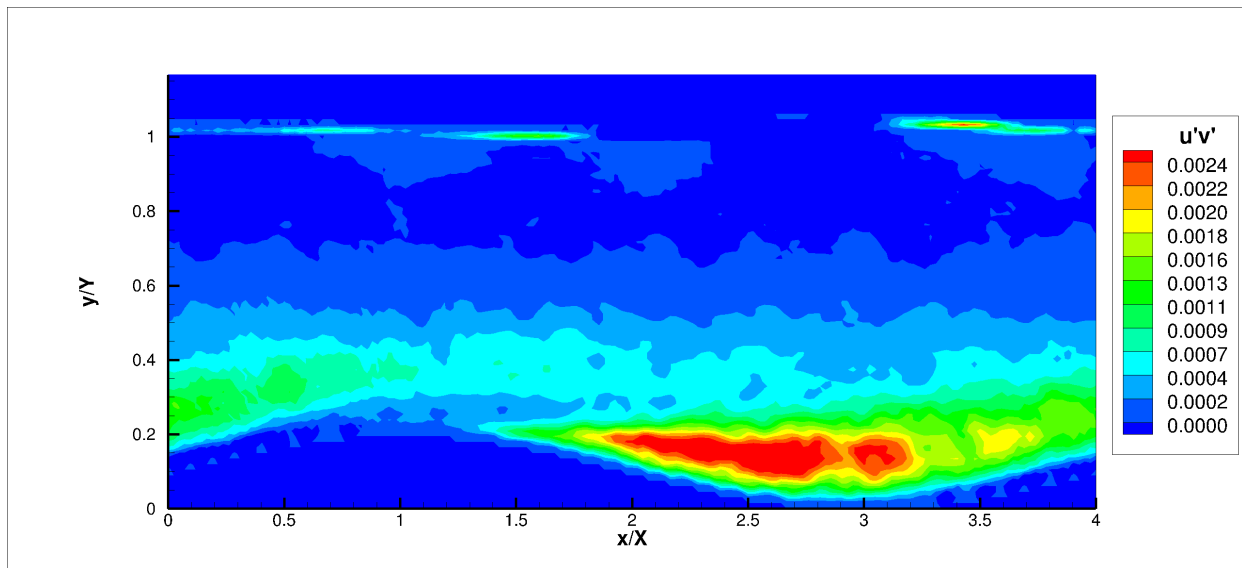


Figura 5.32: Valores do produto  $u'v'$  no instante 180 segundos, no perfil médio do escoamento com o canal inclinado à  $0,175^\circ$

A figura 5.32 apresenta uma flutuação de velocidade mais intensa no declive do escoamento. Em seguida, é calculado o tensor de tensões de Reynolds e são apresentados os valores em perfis nas posições pré determinadas.

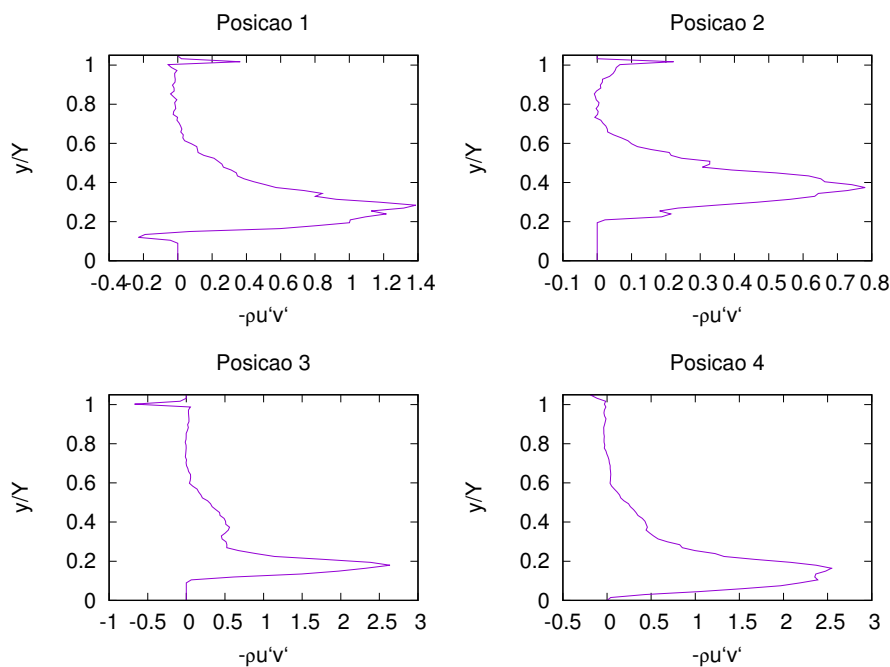


Figura 5.33: Perfis do tensor de tensões de Reynolds,  $\overline{\rho u'v'}$ , do escoamento com o canal inclinado à  $0,175^\circ$

A figura 5.33 demonstra que nas posições 3 e 4 há um aumento no valor do tensor de tensões. Dessa forma, é possível afirmar que o perfil senoidal promove um aumento no valor do tensor de tensão do escoamento.

O número de Reynolds do escoamento é 18654, não sendo tão próximo do Re dos escoamentos em canal com perfil triangular. Para realizar uma comparação mais consistente, o Re dos escoamentos devem ter valores próximos e, portanto, são realizadas outras duas simulações do canal com superfície senoidal, com a inclinação de  $\theta = 0,057^\circ$  e  $\theta = 0,045^\circ$ . A finalidade de diminuir a inclinação do canal é reduzir o forçamento na direção horizontal e, com isso, o escoamento alcançará velocidade menor que a do canal com inclinação  $\theta = 0,115^\circ$ .

Os resultados das simulações são apresentados de forma separada, somente com os perfis de velocidade média,  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$ , e o perfil do tensor de tensões de Reynolds. Os perfis apresentados são referentes as posições 3 e 4. Segue abaixo os perfis do escoamento no canal com a inclinação  $\theta = 0,057^\circ$ .

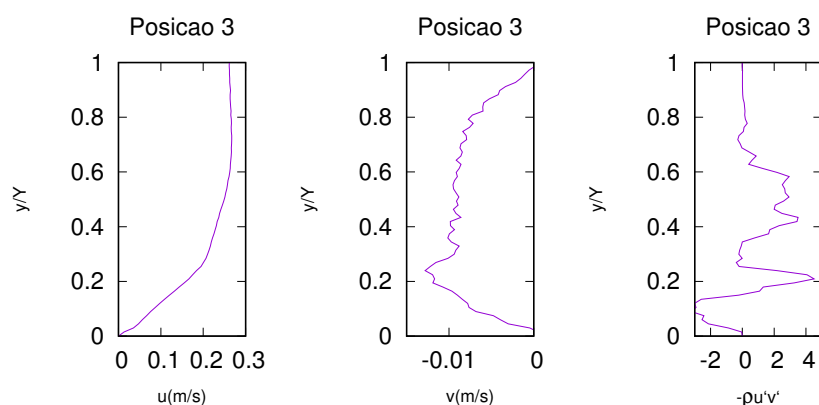


Figura 5.34: Perfis da velocidade média  $\bar{u}$ , da velocidade média  $\bar{v}$  e tensor de tensões  $\overline{\rho u'v'}$ , para inclinação do canal  $\theta = 0,057$  na posição 3

Como esperado, vemos uma redução nos valores da velocidade média e um redução dos picos do tensor de tensões. O Re do escoamento é de 13005, menor que o valor da simulação anterior, porém, ainda não é o ideal, então é simulado um novo escoamento com o canal inclinado à  $0,045^\circ$ .

Pelos valores dos perfis, a figura 5.35 demonstra que há a redução de velocidade do escoamento e de intensidade das tensões do tensor de Reynolds. O escoamento chega no Re de 11721, sendo um valor próximo ao Reynolds do escoamento em canal com superfície triangulo com inclinação de  $\theta = 0,045^\circ$ , Re igual a 11744.

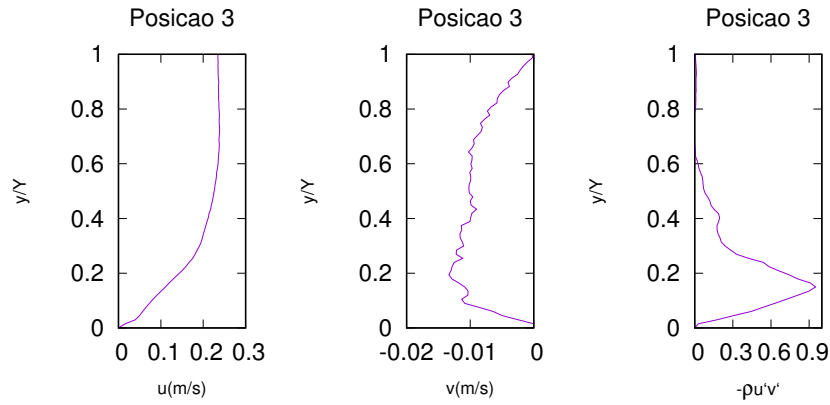


Figura 5.35: Perfis da velocidade média  $\bar{u}$ , da velocidade média  $\bar{v}$  e tensor de tensões  $\overline{\rho u'v'}$ , para inclinação do canal  $\theta = 0,045$  na posição 3

### 5.2.4 Análise dos Resultados

Nessa seção são analisados os resultados obtidos das seis simulações, comparando-os para assim alcançar uma melhor entendimento dos efeitos da superfície rugosa no escoamento. São comparados as informações do escoamento simulados, buscando relacioná-los como forma de obter uma melhor compreensão dos efeitos das perturbações atuante no escoamento, indicando alterações nos resultados encontrados na simulações.

A tabela 5.1 sintetiza os resultados obtidos nas simulações do canais com superfície lisa, triangular e senoidal. Nela são apresentados os respectivos valores de Reynolds do escoamento, a vazão por unidade de comprimento,  $\dot{Q}$ , a média do tensor de tensões de Reynolds,  $\bar{\tau}$ , e o coeficiente de atrito na superfície,  $F_{at}$ .

Tabela 5.1: Sumário dos resultados obtidos nas simulações

Superfície	Inclinação(°)	h/L	U (cm)	Re	$\dot{Q}$ (cm <sup>2</sup> /s)	$\bar{\tau}$	$F_{at}$
Lisa	0,115	0,0	56,381	34409	344,09	0,019	0,301
Lisa	0,057	0,0	31,892	19134	191,34	0,006	0,107
Triangular	0,172	0,2	19,393	11638	117,32	0,349	0,361
Triangular	0,115	0,2	15,855	9513	94,98	0,320	0,234
Senoidal	0,115	0,2	31,090	18654	176,30	0,351	0,414
Senoidal	0,057	0,2	21,674	13005	133,96	0,288	0,564
Senoidal	0,045	0,2	19,535	11721	120,61	0,175	0,637

Utilizando como ponto comum a inclinação do canal e como referência o canal com superfície lisa, ao comparar as vazões do escoamento, é verificada uma redução de aproximadamente de 72% para o canal com superfície triangular e de 48% para o canal com superfície senoidal. Essa maior redução na vazão do canal com superfície triangular é justificada pela produção de recirculação no escoamento, provocando uma maior perda de carga do escoamento.

A figura 5.36 demonstra, pela sobreposição dos perfis de  $\bar{u}$ , a diminuição da velocidade do

escoamento quando perturbado pela rugosidade na superfície inferior do canal. O resultados apresentados na imagem são das simulações com o canal de inclinação a  $0, 115^\circ$ . Das duas formas de superfície, a forma triangular apresenta a menor velocidade, sendo a essa a que apresenta maior perda de carga.

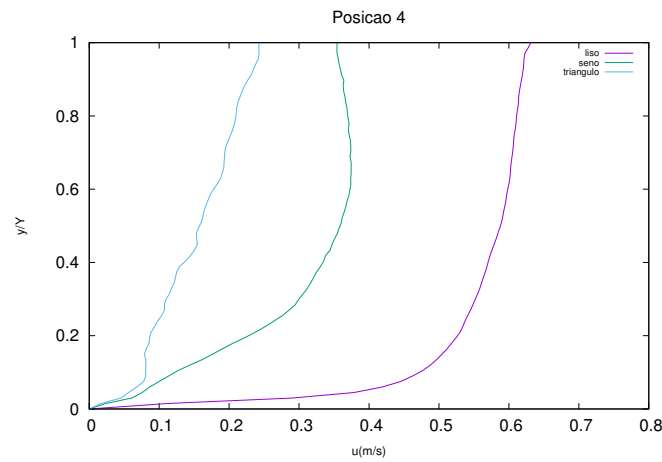


Figura 5.36: Perfis de  $\overline{u}$  nos canais liso, senoidal e triangular, para a mesma inclinação  $\theta = 0, 115^\circ$

Avaliando o tensor de tensões do escoamento, mesmo não conseguindo chegar em um valor de Reynolds próximo para o escoamento com superfície lisa, é nítido que as rugosidades perturbam o escoamento, produzindo turbulência, sendo verificado pela diferença entre os valores do tensor de tensões do escoamento para os canais com rugosidade.

A figura 5.37 apresenta os perfis do tensor tensões de Reynolds, demonstrando que no canal com superfície lisa as flutuações turbulentas são muito inferiores aos outros dois canais. Os valores de tensor de tesões são referentes as simulações com canal de superfície lisa, superfície senoidal e superfície triangular, com as inclinação de  $0, 057^\circ$ ,  $0, 045^\circ$  e  $0, 171^\circ$ , respectivamente.

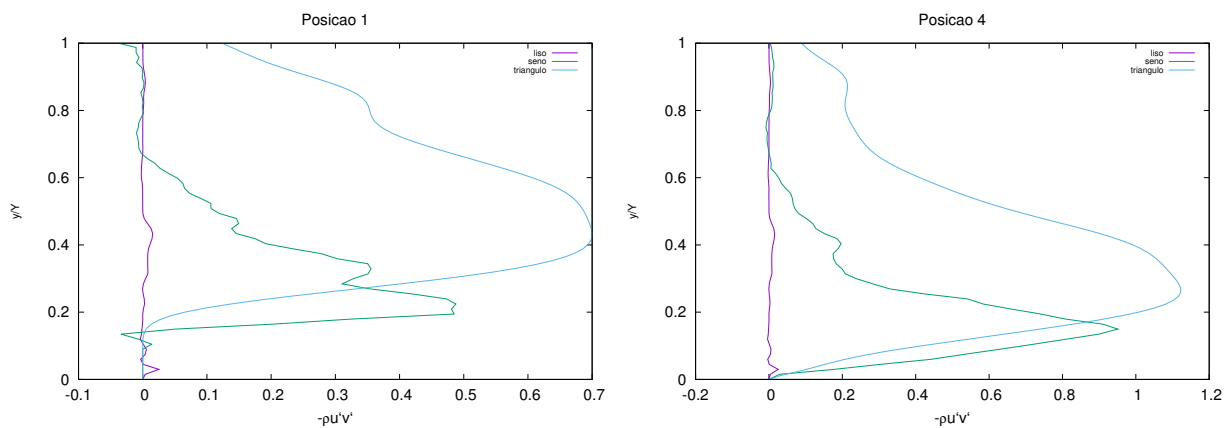


Figura 5.37: Perfis de  $-\overline{\rho u'v'}$  nos canais liso, senoidal e triangular, para Re próximos de 11700

Analisando o fator atrito, somente nas simulações dos canais com superfície rugosa, no esco-

amento com superfície triangular, o fator de atrito foi menor, comparada com o escoamento com superfície senoidal, mesmo com a presença de recirculação. Isso se dá pela geometria do perfil senoidal de regiões de auge e declive mais distribuídas pelo canal, não sendo somente em uma localidade. Ao calcular o cisalhamento do fluido na parede, em mais de 50 % do comprimento canal, o valor do cisalhamento é mais elevado, enquanto na superfície triangular, somente em 14% do comprimento do canal o cisalhamento do canal é mais relevante.



## Capítulo 6

# CONCLUSÃO

O propósito inicial deste trabalho foi o entendimento do Método Lattice Boltzmann, sendo esse um dos mais importantes. Ao implementar o método aqui demonstrado e após serem realizadas as simulações de teste, foi possível compreender algumas das suas limitações, dadas as características de sua formulação. Ao atribuir os valores das variáveis de entrada, nesse caso, o tempo de relaxação alto, se o de  $\tau$  for alto, os efeitos viscosos influenciam a simulação e, assim deve-se assumir a compressibilidade do escoamento. Dessa forma, o método se torna inconsistente e seu modelo não se aproxima mais da equação de Navier-Stokes.

No procedimento de validação, abordando o problema da cavidade com tampa móvel, foi utilizado o MLB, implementado no programa Palabos, utilizando uma malha quadrada com 1202 lattices, 601x601, mantendo as mesmas características da malha utilizada no trabalho de referência do Erturk, [3]. Ao comparar os perfis de velocidade da circulação de fluido na cavidade, de forma qualitativa, os resultados estavam coerentes com o de referência. Depois, calculando o erro dos resultados, o maior valor do erro percentual dos dados foi de 1,7%. Logo, pode-se afirmar que foram alcançados resultados satisfatórios. Em seguida, realizando um conjunto de simulações, para avaliar a convergência do método, ficou evidente que o MLB é convergente, porém, sendo condicionalmente convergente, dado a sua convergência depende do tempo de relaxação,  $\tau$ , utilizado nas simulações.

Abordando o problema de escoamento turbulento em canal aberto com rugosidade, em sua validação foram obtidos resultados semelhantes aos encontrados no trabalho de Yang Chau, [4]. Assim, evidenciando que o programa utilizando as bibliotecas do Palabos estão funcionando corretamente.

Na última etapa de validação, foi abordado o problema de escoamento laminar em canal fechado com rugosidade. Nessa etapa, os resultados obtidos na simulação numérica foram comparados com a solução calculada na resolução analítica. Ao comparar os valores da vazão do escoamento, para  $Re$  iguais a 0,01 e 0,02, o erro percentual foi inferior a 5%. Dessa forma, os resultados obtidos se mostraram satisfatórios, uma vez que o método assintótico se mostra mais coerente quanto melhor representar a hipótese,  $Re \ll 1$ .

## 6.1 Trabalhos Futuros

Recomenda-se desenvolver a equação da advecção, com objetivo de chegar na expressão que represente o problema proposto e, também, descrever a relação entre o termo coeficiente de difusividade,  $\mathbf{D}$ , da equação da advecção, com o tensor de tensões, do escoamento turbulento. A partir dessa relação, descrever a evolução da concentração de partícula suspensas no fluido induzidas por efeito das flutuações turbulentas.

Ainda, sugere-sea realização de outras simulações, tanto para diferentes inclinações do canal, quanto para encontrar escoamentos com o número de Reynolds próximos, onde os canais terão rugosidades diferentes, com o propósito de avaliar qual rugosidade produz mais turbulência no escoamento e quais serão os efeitos na concentração de partículas.

### 6.1.1 Equação da advecção e difusão

Dado que os sedimentos estão suspensos pelo fluido, assume-se que os mesmos são deslocadas de forma passiva, os sedimentos não exercem nenhuma influência no desenvolvimento do escoamento. Logo, somente o escoamento do fluido e a gravidade atuam na trajetória dos depósitos.

O transporte da partícula pode ser descrito pela equação de advecção e difusão,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}}_p \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot [\mathbf{D} \cdot \nabla \phi], \quad (6.1)$$

onde  $\phi$  a concentração da partícula e, por hipótese, a partícula é transportada de forma passiva.

O termo  $\mathbf{D}$  representa o tensor de difusividade da partícula, para um escoamento em duas dimensões, o tensor de difusividade é apresentado como:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{yx} & D_{yy} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Representando o problema de forma bidimensional, um secção no plano XY, no centro do canal, o termo  $u_p$  representa a velocidade média da partícula, sendo  $u_p$  igual a velocidade horizontal do escoamento e  $v_p$  igual a velocidade vertical do escoamento mais um termo de velocidade,  $-w_p \mathbf{e}_y$ , vindo do peso das partículas. Assim, escrevemos a velocidade com sendo

$$\bar{\mathbf{u}}_p = \bar{u} \mathbf{e}_x + (\bar{v} - w_p) \mathbf{e}_y \quad (6.3)$$

Abrindo a equação 6.1, partindo da hipótese que a concentração de partículas e o tensor de difusividade são homogêneos ao longo da direção  $\mathbf{e}_x$ , ou seja, a equação só é relevância em  $\mathbf{e}_y$ .

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\bar{v} - w_p) \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( D_{yx} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (6.4)$$

Assumindo que o escoamento está plenamente desenvolvido, a derivada temporal é igual a zero.

$$(\bar{v} - w_p) \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( D_{yx} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (6.5)$$

Retornando a equação 6.1, onde essa é descrita a partir da equação do transporte simplificada igualada ao termo não homogeneidade:

$$\nabla \cdot [\mathbf{D} \cdot \nabla \phi], \quad (6.6)$$

que está associada a difusividades mecânica dos sedimentos.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] VANONI, V. A. *Sedimentation engineering*. [S.l.], 2006.
- [2] VIGGEN, E. M. *The lattice Boltzmann method with applications in acoustics*. Dissertação (Mestrado) — Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, Fakultet for naturvitenskap og teknologi, Institutt for fysikk, 2009.
- [3] ERTURK, E.; CORKE, T. C.; GÖKÇÖL, C. Numerical solutions of 2-d steady incompressible driven cavity flow at high reynolds numbers. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Wiley Online Library, v. 48, n. 7, p. 747–774, 2005.
- [4] YANG, G. C.; KWOK, C. Y.; SOBRAL, Y. D. The effects of bed form roughness on total suspended load via the lattice boltzmann method. *Applied Mathematical Modelling*, v. 63, p. 591 – 610, 2018.
- [5] OLIVEIRA, F. M. C. de. *Estudo do Método Lattice Boltzmann aplicado à Fluidodinâmica: Uso de Simulador em GPU e Desenvolvimento de um Simulador em Linguagem C*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual De Campinas Faculdade De Engenharia Mecânica, 2012.
- [6] LOPES, P.; COGO, N.; CASSOL, E. Influencia da cobertura vegetal morta na reducao da velocidade da enxurrada e na distribuicao de tamanho dos sedimentos transportados. *Embrapa Semiárido-Artigo em periódico indexado (ALICE)*, Revista Brasileira de Ciência do Solo, Campinas, v. 11, n. 2, p. 193-197, 1987., 1987.
- [7] TENNEKES, H. et al. *A first course in turbulence*. [S.l.]: MIT press, 1972.
- [8] POPE, S. B. *Turbulent flows*. [S.l.]: IOP Publishing, 2001.
- [9] CERCIGNANI, C. The boltzmann equation. In: *The Boltzmann Equation and Its Applications*. [S.l.]: Springer, 1988. p. 40–103.
- [10] MOHAMAD, A. A. *Lattice Boltzmann method: fundamentals and engineering applications with computer codes*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.
- [11] CHEN, S.; DOOLEN, G. D. Lattice boltzmann method for fluid flows. *Annual review of fluid mechanics*, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 30, n. 1, p. 329–364, 1998.

- [12] HIGUERA, F. J.; JIMÉNEZ, J. Boltzmann approach to lattice gas simulations. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 9, n. 7, p. 663, 1989.
- [13] BHATNAGAR, P. L.; GROSS, E. P.; KROOK, M. A model for collision processes in gases. i. small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. *Physical review*, APS, v. 94, n. 3, p. 511, 1954.
- [14] SMAGORINSKY, J. General circulation experiments with the primitive equations: I. the basic experiment. *Monthly weather review*, v. 91, n. 3, p. 99–164, 1963.
- [15] RÖSLER, M. The smagorinsky turbulence model. 2015.
- [16] JOHN, V. *Large eddy simulation of turbulent incompressible flows: analytical and numerical results for a class of LES models*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- [17] LATT, J. Choice of units in lattice boltzmann simulations. *Freely available online at [http://lbmethod.org/\\_media/howtos:lbunits.pdf](http://lbmethod.org/_media/howtos:lbunits.pdf)*, 2008.
- [18] KRÜGER, T. et al. *The lattice Boltzmann method*. [S.l.]: Springer, 2017.

# ANEXOS