Sobre o sistema de Schrödinger-Poisson no plano

Gabriel Nóbrega Bufolo
Orientador: Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

Universidade de Brasília

Essa dissertação é submetida para o grau de
Mestre em Matemática

Julho 2018

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Sobre o Sistema de Schrödinger- Poisson no plano

por

Gabriel Nóbrega Bufolo*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 15 de agosto de 2018.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo- MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado– MAT/UnB (Membro)

Prof. Dr. Gaetano Siciliano – USP (Membro)

* O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B929s

Bufolo, Gabriel Nóbrega
Sobre o sistema de Schrödinger-Poisson no plano / Gabriel Nóbrega Bufolo; orientador Giovany de Jesus Malcher Figueiredo. -- Brasília, 2018.
162 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2018.

1. Análise. 2. Equações diferenciais parciais elípticas. 3. Equação de Schrödinger-Poisson. 4. On the planar Schrödinger-Poisson system. I. Figueiredo, Giovany de Jesus Malcher, orient. II. Título.

Resumo

Foi feito um estudo detalhado da maior parte das ideias e resultados expostos nas quatro primeiras seções do artigo "On the planar Schrödinger-Poisson syste", de autoria de S. Cingolani e T. Weth, publicado em jan. de 2016 no *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, v. 33, n. 1, pp. 167 – 197. O principal resultado deste trabalho (que foi originalmente demonstrado no artigo citado) é a existência e caracterização variacional das soluções fracas de

$$-\Delta u + a(x)u + [\ln(|\cdot|) * |u|^2]u = b|u|^{p-2}u,$$

sendo $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, $b \in (0, \infty)$, $p \in [4, \infty)$ e $a \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ contínua, $\mathbb{Z}^2$ periódica e satisfazendo $\inf_{\mathbb{R}^2} a > 0$.

Palavras-chave: Schrödinger-Poisson; On the planar Schrödinger-Poisson system

Agradecimentos

Depois de enfrentar incalculáveis cálculos, faltam-me palavras para agradecer a tantos que estiveram ao meu lado nesta jornada.

Peço desculpas pela possível omissão de algum nome. Afinal, foram tantos...

Ao Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo, meu orientador neste mestrado, por me aceitar como seu orientando e por guiar-me até o fim, apesar de meus desacertos e descuidos. Por tais, com humildade, peço desculpas.

A Renato Bufolo, meu Pai, por sustentar nosso Lar e manter os pés firmes no chão por mim. O seu "braço forte, mão amiga" no dia de minha defesa me ajudou a manter o controle.

A Roberta de Farias Nóbrega Bufolo, minha Mãe, por zelar pelo nosso Lar e sempre se preocupar com meu bem estar. Quando eu precisei, você chorou comigo e depois enxugou minhas lágrimas.

A Dayane Cristina Santos Ferreira, minha namorada, por, diariamente, proporcionar-me momentos maravilhosos. Te "amodoro"!

A Laurence Nóbrega, meu avô, por estar sempre disposto a ouvir, aconselhar e continuar me incentivando a seguir em frente. "Conosco, ninguém podemos"!

A Lúcia Maria de Farias Nóbrega, minha avó, por todas suas rezas. Não há quem possa com suas novenas!

A Claúdia Maria de Farias Nóbrega, minha tia, por, com meus avós, integrar minha torcida lá em Natal. Longe dos olhos, perto do coração.

A Ravena, minha irmã, que, mesmo com suas inúmeras dificuldades, motivou-me como pôde. I'm proud of you! Don't forget to take it easy, teacher!

Aos professores com os quais muito aprendi no mestrado, pelos seus ensinos.

Aos meus colegas de mestrado, cuja companhia tornou mais fácil todos os "apertos" da pós-graduação.

Aos Profs. Drs. Celius Antônio Magalhães, Gaetano Siciliano, Giovany de Jesus Malcher Figueiredo, Leandro Martins Cioletti, Liliane de Almeida Maia e Marcelo Fernandes Furtado pelas valiosas referências bibliográficas oferecidas de bom grado.

A Deivid Rodrigues do Vale e ao Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo, pela ajuda com as revisões.

A Dayane Cristina Santos Ferreira, Deivid Rodrigues do Vale, Edna Maria Gomes da Silva, Gabriel Ferreira Silva, Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo, Igor Figueira Pinheiro da Silva, Ravena Nóbrega Bufolo, Renato Bufolo e Roberta de Farias Nóbrega Bufolo, pela paciência de assistir a ensaios da minha defesa.

Aos Profs. Drs. Gaetano Siciliano e Marcelo Fernandes Furtado, que integraram a banca do meu mestrado, pelas sugestões finais.

"Last, but not least", a Laurence Nóbrega e Renato Bufolo, por me ajudarem naquilo que o mestrado em matemática não me preparou: escrever agradecimentos.

Obrigado a todos!

Sumário

Notação e Convenções

Sejam H um espaço de Hilbert e $u, v \in H$. Denotaremos o produto interno de u e v em H por $\langle u, v \rangle_H$. Será feita uma exceção: Quando $H = H^1(\mathbb{R}^2)$, usaremos o produto interno que está definido no apêndice A (veja página 135) que será denotado por $\langle u, v \rangle$.

Sejam B um espaço de Banach e $u \in B$. A norma de u em B será representada por $\|u\|_B$. Faremos algumas exceções:

- Quando $B = H^1(\mathbb{R}^2)$, a denotaremos $\|u\|$.
- Quando $B = L^p(\mathbb{R}^2)$ (para $p \in [1, \infty]$), escreveremos $\|u\|_p$.

Sejam B um espaço de Banach, $u \in B$ e (u_n) uma sequência em B. A convergência de (u_n) para u com respeito à norma de B (formalmente, $\|u - u_n\|_B \to 0$) será escrita como $u_n \overset{B}{\to} u$. Além disso, denotaremos a convergência de (u_n) para u com respeito à topologia fraca de B por $u_n \overset{B}{\rightharpoonup} u$.

Sejam A, B espaços de Banach. Denotamos a inclusão contínua de A em B por $A \hookrightarrow B$ e a compacta por $A \overset{C}{\hookrightarrow} B$.

Sejam B um espaço de Banach, $u \in B$ e $F : B \to \mathbb{R}$ um funcional. Se F possui derivada de Gâteaux (Fréchet) em u ela será denotada por $DF(u)$ ($F'(u)$).

Sejam B um espaço de Banach e B' seu dual topológico, $F : B \to B'$ e $u, v \in B$. A aplicação de $F(u)$ em v será representada por $F(u)v$. O exemplo mais comum deste fato é a derivada de um funcional.

Sejam B um espaço de Banach e $F : B \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que F é continuamente diferenciável (em B) se F' existe e é contínua com respeito à $\|\cdot\|_B$. Naturalmente, se F é continuamente diferenciável (em B) então F é contínua com respeito à $\|\cdot\|_B$. Seja C um espaço de Banach tal que $B \subset C$. Além disso, F é continuamente diferenciável em C se F' existe e é contínua com respeito à $\|\cdot\|_C$. Novamente, se F é continuamente diferenciável em C então F é contínua com respeito à $\|\cdot\|_C$.

Seja $A \subset \mathbb{R}^2$. Denotamos a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^2$ por μ e a medida de Lebesgue de A por $\mu(A)$.

Seja A um conjunto qualquer e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função. Chamaremos as funções

$$f^+ : A \to \mathbb{R}; f^+(x) = \max\{f(x), 0\};$$
$$f^- : A \to \mathbb{R}; f^-(x) = \min\{f(x), 0\},$$

de parte positiva de f e parte negativa de f, respectivamente.

Seja A um conjunto qualquer e $B \subset A$. A função

$$1_B : A \to \mathbb{R}; 1_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

é chamada função indicadora de B.

Sejam A, B conjuntos quaisquer tais que $B \subset A$. Representaremos a função identidade por

$$id : B \to A; id(x) = x.$$

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho, buscamos fazer um estudo mais detalhado da maior parte das ideias e resultados expostos no artigo de Silvia Cingolani e Thobias Weth, cujo título é: "On the planar Schrödinger-Poisson system". (O artigo pode ser encontrado em [9].)

Como o nome sugere, tal artigo trata da equação de Schrödinger-Poisson, que é uma combinação de duas equações mais conhecidas: a equação de Schrödinger – um alicerce da mecânica quântica – e a equação de Poisson. Além disso, os autores optaram por incluir um termo não linear na equação que tem suas origens na equação de Gross-Pitaevskii. No entanto, a característica mais importante do artigo é tratar tal problema em dimensão dois, sendo um dos primeiros a encontrar resultados qualitativos para ele.

No que segue, introduziremos as equações citadas acima bem como suas motivações físicas e destacaremos a equação que foi estudada em [9]. Em seguida falaremos sobre as dificuldades enfrentadas e enunciaremos o principal resultado do trabalho.

1.1 A equação de Schrödinger

O comportamento de um sistema quântico é completamente descrito pela sua função de onda, denotada por $\Psi(r,t)$, sendo $r \in \mathbb{R}^d$ um vetor que descreve possíveis estados do sistema (chamado de graus de liberdade) e $t \in \mathbb{R}$ o tempo decorrido. Formalmente, temos que a função de onda é uma função de duas variáveis (uma delas um vetor em $\mathbb{R}^d$) que assume valores complexos, isto é, $\Psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. A interpretação mais comum para a função de onda é que $|\Psi(r,t)|^2$ é a densidade de probabilidade do sistema ser mensurado no estado r, no momento t.

O Hamiltoniano, denotado por $\hat{\mathcal{H}}$, é um operador que, geralmente, corresponde à energia total do sistema. Ele difere entre sistemas, pois sua expressão inclui a energia cinética das partículas e a energia potencial correspondente ao sistema.

A forma da equação de Schrödinger depende da situação física. A sua forma geral é a equação de Schrödinger dependente do tempo, que descreve de um sistema evoluindo com o tempo e cuja expressão é:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{\mathcal{H}}\Psi, \tag{1.1}$$

sendo i a unidade imaginária, $\hbar$ a constante de Planck reduzida.

A equação de Schrödinger dependente do tempo prevê que funções de onda podem formar ondas estacionárias, chamadas de estados estacionários. Tais estados são importantes não apenas porque descrevem orbitais atômicos e moleculares, mas também porque seu estudo simplifica a tarefa de encontrar soluções para a equação de Schrödinger dependente do tempo em qualquer estado. Estados estacionários também podem ser descritos por uma versão mais simples da equação de Schrödinger, a equação de Schrödinger independente do tempo:

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi = E\Psi, \tag{1.2}$$

sendo E uma constante real positiva que representa a energia total do sistema. Essa equação só pode ser usada quando o Hamiltoniano não depende explicitamente do tempo. No entanto, mesmo nesse caso, a função de onda ainda tem uma dependência do tempo.

De fato, funções de onda que formam ondas estacionárias (elas recebem esse nome, pois, $|\Psi(r,t)|^2$ é constante com relação à t) têm a forma $\Psi(r,t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}\psi(r)$. Supondo que $\hat{\mathcal{H}}(e^{-\frac{iEt}{\hbar}}\psi(r)) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}\hat{\mathcal{H}}(\psi(r))$ (essa suposição será válida para todos os Hamiltonianos que apresentaremos) e substituindo em (1.1), obtemos:

$$Ee^{-\frac{iEt}{\hbar}}\psi(r) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}\hat{\mathcal{H}}(\psi(r)),$$

o que mostra que funções de onda do tipo onda estacionária satisfazem (1.2). Além disso, dividindo a equação acima por $e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$, eliminamos a dependência temporal. Isso significa que podemos resolver (1.2) tomando $\psi = \psi(r)$ como incógnita.

Como dito anteriormente, cada sistema quântico possui seu próprio Hamiltoniano. Em sua forma geral, sua expressão é:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{T}} + \hat{\mathcal{V}}, \tag{1.3}$$

onde $\hat{\mathcal{T}}$ é o operador energia cinética do sistema e $\hat{\mathcal{V}}$ é o operador energia potencial do sistema. Para um sistema composto por uma partícula maciça se movendo à velocidade não relativística, o operador energia cinética assume a forma:

$$\hat{\mathcal{T}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta, \tag{1.4}$$

sendo m uma constante real positiva que representa a massa da partícula e Δ o operador Laplaciano. Já o operador energia potencial para um sistema constituído por uma partícula sujeita a um campo potencial invariante no tempo e externo ao sistema assume a forma:

$$\hat{\mathcal{V}} = V(r), \tag{1.5}$$

sendo $V(r)$ tal campo potencial. Considerando um sistema formado por uma partícula maciça movendo-se através de um campo potencial invariante no tempo e externo ao sistema com velocidade não relativística, seu Hamiltoniano será, de acordo com (1.3), a soma de (1.4) e (1.5), cuja forma é:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{T}} + \hat{\mathcal{V}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r).$$

Essa é a forma mais comum do Hamiltoniano utilizado em conjunto com (1.2).

1.2 A equação de Poisson

A equação de Poisson é uma equação parcial diferencial elíptica com diversas aplicações na física. Ela é usada, por exemplo, para descrever o campo potencial causado por uma distribuição de cargas ou por um corpo maciço. Conhecido o campo potencial, é possível calcular o campo eletrostático ou gravitacional.

Em sua forma geral, sua expressão é:

$$\Delta\phi = f, \tag{1.6}$$

sendo ϕ e f funções de alguma variedade (aqui, consideraremos somente os espaços $\mathbb{R}^d$) em $\mathbb{R}$. Normalmente, f é dado e ϕ é a incógnita.

Nos exemplos acima, a equação de Poisson assume, respectivamente, as seguintes formas:

$$\begin{aligned} \Delta\phi =& 4\pi G m\rho \\ &\text{e} \\ \Delta\phi =& -\frac{q\rho}{\epsilon}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

sendo G a constante universal da gravitação, ϵ a permissividade do meio, m a massa total do sistema, q a carga total do sistema e ρ a densidade normalizada (isto é, $\int \rho = 1$) de massa (na primeira equação) ou de carga (na segunda equação).

Para encontrar soluções de (1.6) encontra-se, primeiro, uma solução específica para a equação de Laplace (que é (1.6) com $f = \delta$, sendo δ a função delta de Dirac). Tal solução é chamada de solução fundamental da equação de Laplace, e sua expressão é:

$$\Phi_d(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln(|x|), & \text{se } d = 2; \\ \dfrac{1}{d(2-d)\alpha(d)}\dfrac{1}{|x|^{d-2}}, & \text{se } d \geq 3, \end{cases} \tag{1.8}$$

sendo $\alpha(d)$ o volume da esfera em $\mathbb{R}^d$. Munidos dessa solução fundamental, é possível mostrar que se f satisfaz algumas condições técnicas (ver [12]) então uma solução de (1.6) é:

$$\phi(x) = [\Phi_d * f](x),$$

sendo $*$ a operação de convolução.

Dessa forma, uma solução de (1.7) é:

$$\phi(x) = 4\pi G m[\Phi_d * \rho](x). \tag{1.9}$$

1.3 A equação de Schrödinger-Poisson

Em 1954, a equação de Schrödinger-Poisson foi introduzida com a finalidade estudar a mecânica quântica de um polaron em repouso (ver [20]). Tal equação é uma modificação não linear da equação de Schrödinger (tanto dependente como independente do tempo, mas aqui focaremos na versão independente) através da adição de um termo que representa a interação da partícula com algum campo proveniente da própria partícula. A inclusão de um termo de autointeração representa uma alteração fundamental da mecânica quântica. O leitor que desejar entender melhor a motivação física e/ou se aprofundar nas aplicações de tal equação pode encontrar mais detalhes em [4].

O campo proveniente da própria partícula pode ser de diversas naturezas. Os principais casos são gravitacional ou eletromagnético. Quando o campo estudado for gravitacional, a equação de Schrödinger-Poisson também pode ser chamada de equação de Schrödinger-Newton e quando ele for eletromagnético, de equação de Schrödinger-Maxwell. Neste trabalho, consideraremos apenas campos gravitacionais.

Para descrever a influência de um campo gravitacional em uma partícula, é necessário considerar a energia potencial proveniente do campo gravitacional em questão quando formos descrever a energia potencial do sistema. Assim, a energia potencial de um sistema composto por uma partícula maciça se movendo através de um campo potencial invariante no tempo e externo ao sistema com velocidades não relativísticas e incluindo a interação com um potencial gravitacional é:

$$\hat{\mathcal{V}} = V(r) + \hat{\mathcal{U}}, \tag{1.10}$$

sendo $\hat{\mathcal{U}}$ o operador energia potencial gravitacional do sistema, cuja expressão é:

$$\hat{\mathcal{U}} = m\phi, \tag{1.11}$$

sendo ϕ um potencial gravitacional que satisfaz (1.7).

Como estamos considerando o campo gravitacional proveniente da própria partícula, tomamos $\rho = |\psi|^2$ em (1.7). O tratamento do quadrado do valor absoluto da função de onda como uma densidade normalizada de massa tem a seguinte motivação: interpreta-se que a massa da partícula está espalhada no espaço de modo proporcional à probabilidade da partícula ser encontrada em cada região.

Fazendo $\rho = |\psi|^2$ em (1.9), substituindo a ϕ resultante em (1.11) e daí usando essa expressão em (1.10), obtemos:

$$\hat{\mathcal{V}} = V(r) + 4\pi G m^2 [\Phi_d * |\psi|^2].$$

Substituindo a equação acima e (1.4) em (1.3), o Hamiltoniano para um sistema composto por uma partícula maciça se movendo através de um campo potencial invariante no tempo e externo ao sistema com velocidade não relativística e incluindo a autointeração gravitacional é:

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r) + 4\pi G m^2 [\Phi_d * |\psi|^2].$$

Substituindo a equação acima em (1.2) obtemos a seguinte equação:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + (V(r) - E)\psi + 4\pi G m^2 [\Phi_d * |\psi|^2]\psi = 0, \tag{1.12}$$

que é chamada de equação de Schrödinger-Poisson.

1.4 A equação de Gross-Pitaevskii

O condensado de Bose-Einstein é um estado da matéria que surge quando um gás de bósons com baixa densidade é resfriado à temperaturas muito próximas do zero absoluto. Sob tais condições, uma grande parte dos bósons ocupam o estado quântico de menor energia. Quando isso ocorre, é possível assumir que todas as partículas possuem a mesma função de onda. Quando a distância média das partículas do gás é maior que a distância de dispersão, é possível aproximar o potencial real decorrente das interações entre as várias partículas por um pseudopotencial.

Adicionando este pseudopotencial à (1.5), obtemos:

$$\hat{\mathcal{V}} = V(r) + \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}|\psi|^2, \tag{1.13}$$

sendo a_s um número real (que pode ser negativo) que representa a distância de dispersão e o termo $\frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}|\psi|^2$ representa o pseudopotencial. Substituindo (1.4) e a equação acima em (1.3), o Hamiltoniano de uma partícula no condensado de Bose-Einstein pode ser aproximado por

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r) + \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}|\psi|^2.$$

Substituindo a equação acima em (1.2), obtemos a seguinte equação:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + (V(r) - E)\psi + \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}|\psi|^2\psi = 0, \tag{1.14}$$

que é conhecida como equação de Gross-Pitaevskii, atribuída aos artigos [13] e [21] de 1961.

Recentemente, artigos (ver [22]) têm substituído a potência quadrada no pseudopotencial por uma potência arbitrária. Neste trabalho, usaremos a potência $p-2$, com $p \in [2, \infty)$, ou seja, usaremos um pseudopotencial com a forma

$$\frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}|\psi|^{p-2}\psi.$$

Observe que o caso $p = 4$ se reduz à (1.14).

1.5 A equação estudada em [9]

Mais por curiosidade matemática que por motivação física, a equação estudada em [9] tem sua origem em uma combinação de (1.12) e (1.14):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + (V(r) - E)\psi + 4\pi G m^2[\Phi_d * |\psi|^2]\psi = -\frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}|\psi|^{p-2}\psi. \tag{1.15}$$

Existe uma grande quantidade de artigos tratando da existência de soluções para equações similares à acima no caso $d \geq 3$. Cingolani e Weth citam: [1], [8], [11], [16] e [18].

Artigos tratando da equação anterior para $d = 2$ são escassos. Em 2008, foi mostrado que se $V(r) \equiv 0$ e $d \leq 6$ então existe uma única solução positiva e esfericamente simétrica (ver [7]). Em 2011, foi provado que o problema de Cauchy para (1.12) está bem posto em um subespaço de $H^1(\mathbb{R}^2)$ (ver [17]).

Em [9], Cingolani e Weth consideraram o caso $d = 2$. Substituindo (1.8) em (1.15), obtemos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + (V(r) - E)\psi + 2Gm^2[\ln(|\cdot|) * |\psi|^2]\psi = -\frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}|\psi|^{p-2}\psi.$$

As constantes $\frac{\hbar^2}{2m}$ e $2Gm^2$ são irrelevantes para o estudo qualitativo que faremos (existência de soluções, caracterização variacional etc.), portanto, vamos considerá-las iguais a 1.

Considerando $a(r) = V(r)-E$ e $b = -\frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}$. (Optamos por manter a constante b pois o caso $b = 0$ ainda é um resultado original de [9].)

Também iremos usar a convenção menos física e mais matemática de denotar ψ por u e r por x. Dessa forma, a equação que de fato foi estudada em [9] é:

$$-\Delta u + a(x)u + [\ln(|\cdot|) * |u|^2]u = b|u|^{p-2}u, \tag{1.16}$$

sendo $a \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $p \in [2, \infty)$ e $b \in [0, \infty)$

1.6 O principal resultado da dissertação

Como dito anteriormente, a literatura a sobre equação de Schrödinger-Poisson com $d = 2$ é escassa. Um motivo para isso é que a solução fundamental da equação de Laplace sofre uma mudança drástica quando $d = 2$, como pode ser visto em (1.8). Em particular, $\lim_{t\to\infty} \Phi_d(t) = 0$, se $d \geq 3$, mas $\lim_{t\to\infty} \Phi_2(t) = \infty$.

Na prática, essa diferença faz com que o funcional associado ao problema

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + a(x)u^2)\,dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(x-y)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy - \frac{b}{p}\int_{\mathbb{R}^2} |u|^p\,dx$$

possa não estar bem definido em $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Inspirados em [24], Cingolani e Weth consideraram o funcional acima definido no subespaço

$$X := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2) \mid \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u^2(x)\,dx < +\infty \right\}$$

de $H^1(\mathbb{R}^2)$, munido da norma

$$\|u\|_X^2 = \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + a(x)u^2) + \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u^2\,dx.$$

Acontece que o funcional está bem definido em tal subespaço.

No entanto, algumas dificuldades tiveram que ser contornadas: a norma definida acima não é invariante por translação (mesmo se a for constante), o termo quadrático não é coercivo em X (mesmo se supusermos que $\inf_{\mathbb{R}^2} a > 0$) e a norma de X

não aparece explicitamente na expressão do funcional. Tais obstáculos obrigaram Cingolani e Weth a implementar novas ideias e estimativas à estrutura variacional proposta em [24]. Essas ideias e estimativas são a maior contribuição de [9].

Usando a notação usual para a variedade de Nehari, isto é,

$$\mathcal{N} := \{u \in X \setminus \{0\} \mid I'(u)u = 0\},$$

enunciamos o principal resultado do artigo deles que iremos provar neste trabalho.

Teorema 1. *Sejam $b \in [0, \infty)$, $p \in [4, \infty)$ e $a \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ contínua, $\mathbb{Z}^2$ periódica tal que $\inf_{\mathbb{R}^2} a > 0$. Então* (1.16) *admite $(\pm u_n)$ uma sequência em X de soluções fracas tal que $I(u_n) \to \infty$. Além disso, $I|_{\mathcal{N}}$ assume um mínimo global e todo minimizador u de $I|_{\mathcal{N}}$ é uma solução fraca de* (1.16) *que não muda de sinal e obedece a caracterização variacional*

$$I(u) = \inf_{u \in X} \sup_{t \in \mathbb{R}} I(tu).$$

Capítulo 2

A estrutura variacional do problema

O objetivo deste capítulo é introduzir de forma rigorosa os nossos objetos de estudo, estabelecer suas propriedades básicas e apresentar alguns resultados que serão ferramentas essenciais ao longo deste trabalho.

Na primeira seção, introduzimos o espaço X e estabelecemos várias de suas propriedades básicas, como o fato de ele ser completo e de que ele está compactamente imerso nos espaços $L^p(\mathbb{R}^2)$.

Na segunda seção, introduzimos o funcional I associado ao problema. Com o objetivo de simplificar o estudo de I e de explorar certas estimativas úteis, introduzimos antes os funcionais auxiliares V_1, V_2 e V_0, que farão parte da expressão de I. Além disso, estabelecemos várias propriedades básicas tanto de I, quanto dos funcionais auxiliares, como continuidade e diferenciabilidade.

Na terceira seção, estendemos o estudo das propriedades básicas de I à geometria do funcional. Mostraremos que ele satisfaz a primeira geometria do passo da montanha, estudaremos o comportamento de suas fibrações e examinaremos sua variedade de Nehari.

Na quarta seção, apresentamos dois lemas técnicos que, como dito anteriormente, serão ferramentas essenciais ao longo deste trabalho.

2.1 Um espaço apropriado para se buscar soluções

O primeiro obstáculo que qualquer um que pretenda estudar a equação (1.16) irá enfrentar é encontrar um espaço apropriado para definir um funcional associado ao problema. Por espaço apropriado, queremos dizer um espaço vetorial, munido de uma estrutura métrica e completo, onde o funcional só assuma valores finitos.

Alguém acostumado com problemas semelhantes certamente iria primeiro sugerir o espaço $H^1(\mathbb{R}^2)$ (com um produto interno adequado) para esse problema em particular. No entanto, como veremos rigorosamente na próxima seção, o funcional associado ao problema contem a parcela

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy \tag{2.1}$$

em sua expressão e tal parcela pode não estar bem definida para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Logo, o espaço $H^1(\mathbb{R}^2)$ não nos seria útil. Para contornar este problema, trabalharemos com o seguinte subespaço de $H^1(\mathbb{R}^2)$, que futuramente servirá de domínio para o funcional associado ao problema.

Notação.

$$X := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2) \mid \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u^2(x)\,dx < +\infty \right\}.$$

Para mostrar que X é um espaço vetorial, precisaremos do resultado a seguir.

Proposição 2.1.1. *Sejam $u, v \in X$. Então*

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u(x)v(x)\,dx \right| < +\infty.$$

Demonstração. Como $u \in X$, vale que

$$\begin{aligned} \|\ln(1+|\cdot|)^{\frac{1}{2}}u\|_2 &= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} (\ln(1+|x|)^{\frac{1}{2}}u(x))^2\,dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u(x)^2\,dx \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty. \end{aligned}$$

Dessa forma, $\ln(1+|\cdot|)^{\frac{1}{2}}u \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Pelo mesmo argumento, $\ln(1+|\cdot|)^{\frac{1}{2}}v \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Daí e pela Desigualdade de Hölder (veja F.8, na página 158), concluímos que

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u(x)v(x)\,dx \right| &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\ln(1+|x|)u(x)v(x)|\,dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\ln(1+|x|)^{\frac{1}{2}}u(x)||\ln(1+|x|)^{\frac{1}{2}}v(x)|\,dx \\ &\leq \|\ln(1+|\cdot|)^{\frac{1}{2}}u\|_2 \|\ln(1+|\cdot|)^{\frac{1}{2}}v\|_2 < +\infty \end{aligned}$$

□

Proposição 2.1.2. *O conjunto X é subespaço vetorial de $H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Demonstração. Sejam $u, v \in X$ e $r \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)(u+rv)^2(x)\,dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)(u^2(x) + 2ru(x)v(x) + r^2v^2(x))\,dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u^2(x)\,dx + 2r\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u(x)v(x)\,dx \\ &+ r^2\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)v^2(x)\,dx. \end{aligned}$$

Como $u, v \in X$ e pela Proposição 2.1.1, concluímos que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)(u+rv)^2(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u^2(x)\,dx + 2r\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u(x)v(x)\,dx$$
$$+ r^2\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)v^2(x)\,dx < \infty,$$

ou seja, $u + rv \in X$.

□

Como havíamos dito, o espaço X precisa de alguma estrutura métrica para nos ser útil. Mais adiante conseguiremos munimo-lo com um produto interno.

Precisamos antes introduzir a seguinte função, que será usada mais a frente como uma parcela do produto interno de X.

Notação.

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_* : X^2 \to \mathbb{R}; \langle u, v\rangle_* = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u(x)v(x)\,dx.$$

Observe que, pela Proposição 2.1.1, $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ está bem definido e só assume valores finitos. Como a notação indica, $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ é um produto interno em X. Este é o próximo resultado.

Proposição 2.1.3. *A função $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ é um produto interno em X.*

Demonstração. Sejam $u, v \in X$ e $r \in \mathbb{R}$.

(i)

$$\langle u, v\rangle_* = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u(x)v(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)v(x)u(x)\,dx = \langle v, u\rangle_*,$$

ou seja, $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ é simétrico.

(ii)

$$\begin{aligned}\langle u+rv, w\rangle_* &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)(u(x)+rv(x))w(x)\,dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u(x)w(x) + r\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)v(x)w(x)\,dx\,dx \\ &= \langle u, w\rangle_* + r\langle v, w\rangle_*,\end{aligned}$$

ou seja, $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ é linear.

(iii) Como u^2 e $\ln(1+|\cdot|)$ são não negativas, vale que

$$\langle u, u\rangle_* = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u^2(x)\,dx \geq 0.$$

Além disso, suponha que $\langle u, u \rangle_* = 0$. Então, por definição,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u^2(x)\,dx = 0.$$

Como $\ln(1+|\cdot|)$ e u^2 são não negativas deduzimos que $\ln(1+|x|)u^2(x) = 0$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^2$. Daí e como $\ln(1+|x|) = 0$ se, e somente se, $|x| = 0$, inferimos que $u^2(x) = 0$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^2$. Então, $u(x) = 0$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^2$, ou seja, u está na classe de equivalência de 0 em $H^1(\mathbb{R}^2)$, ou ainda, $u = 0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$.

□

Notação. *Denotaremos por* $\|\cdot\|_*$ *a norma proveniente de* $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$.

Em posse de $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$, podemos introduzir o produto interno que usaremos em X.

Notação.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_X : X^2 \to \mathbb{R}; \langle u, v \rangle_X = \langle u, v \rangle + \langle u, v \rangle_*.$$

De fato, $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ é produto interno pois é soma de produtos internos.

Além de uma estrutura métrica, precisaremos que X seja completo. Para demonstrar tal completude, usaremos espaços de Lebesgue ponderados.

Precisaremos primeiro entender a noção de medidas ponderadas. A medida de Lebesgue usual mede, intuitivamente, o "tamanho"de um conjunto. Já uma medida ponderada, mede o valor médio de uma função f, integrável e não negativa, sobre um conjunto. Desta forma, um espaço de Lebesgue mensurável nada mais que é um espaço de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$ munido de uma medida ponderada.

Como o uso de espaços de Lebesgue ponderados neste trabalho é restrita a essa demonstração e o conhecimento destes espaços nem é, rigorosamente, necessário para o entendimento dela, não nos delongaremos neles.

Iremos utilizar apenas um espaço de Lebesgue ponderado, cuja medida introduzimos a seguir.

Notação.

$$\nu : \mathcal{L} \to [-\infty, +\infty]; \nu(E) = \int_E \ln(1+|x|)\,dx,$$

sendo $\mathcal{L}$ *a* σ*-álgebra de Lebesgue sobre* $\mathbb{R}^2$.

Naturalmente, é necessário mostrar que tal função é uma medida sobre $\mathbb{R}^2$.

Proposição 2.1.4. *A função* ν *é uma medida sobre* $\mathbb{R}^2$.

Demonstração. Seja $E \in \mathcal{L}$. Então:

(i) Como $\ln(1+|\cdot|)$ é não negativa, temos que

$$\nu(E) = \int_E \ln(1+|x|)\,dx \geq \int_E 0\,dx = 0,$$

ou seja, ν é não negativa.

(ii) Pela definição da integral de Lebesgue, vale que

$$\nu(\emptyset) = \int_{\emptyset} \ln(1 + |x|)\, dx = 0.$$

(iii) Seja $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ uma coleção de conjunto dois a dois disjuntos de $\mathcal{L}$. Assim,

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} \ln(1 + |x|)\, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} \ln(1 + |x|)\, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i),$$

ou seja, ν é σ-aditiva.

□

Desta forma, a tripla $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}, \nu)$ constitui um espaço de medida. Além disso, observe que como mensurabilidade de uma função com respeito a um espaço de medida depende somente da σ-álgebra do espaço, temos que uma função é $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}, \nu)$-mensurável se, e somente se, ela é Lebesgue mensurável.

O espaço de Lebesgue ponderado que iremos utilizar é o espaço $L^2(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}, \nu)$. A escolha desse espaço de Lebesgue ponderado específico se deve à forma que sua norma assume, que elucidamos no próximo resultado.

Proposição 2.1.5. *Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função Lebesgue mensurável. Então $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}, \nu)} = \|u\|_*$.*

Demonstração. Seja $E \in \mathcal{L}$. Vamos mostrar que $\int_E u\, d\nu = \int_E \ln(1 + |x|) u(x)\, dx$.

Suponha que $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{E_i}$ sendo $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $(E_i)_{i=1}^{n}$ uma coleção finita de subconjuntos disjuntos de $\mathcal{L}$. Então,

$$\int_E u\, d\nu = \int_E \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{E_i}\, d\nu = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{E_i}\right) 1_E\, d\nu.$$

Por propriedades da função indicadora, deduzimos que

$$\int_E u\, d\nu = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{E_i}\right) 1_E\, d\nu = \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{E_i \cap E}\, d\nu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{\mathbb{R}^2} 1_{E_i \cap E}\, d\nu.$$

Pela definição de integral de Lebesgue de funções indicadoras, temos que

$$\int_E u\, d\nu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{\mathbb{R}^2} 1_{E_i \cap E}\, d\nu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu(E_i \cap E).$$

Pela definição de ν, vale que

$$\int_E u\, d\nu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu(E_i \cap E) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{E_i \cap E} \ln(1 + |x|)\, dx.$$

Pela definição da integral de Lebesgue sobre subconjuntos mensuráveis, temos que

$$\int_E u\, d\nu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{E_i \cap E} \ln(1+|x|)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|) 1_{E_i \cap E}\, dx.$$

Por propriedades da função indicadora, deduzimos que

$$\int_E u\, d\nu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|) 1_{E_i \cap E}\, dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|) 1_{E_i} 1_E\, dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_E u\, d\nu &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|) 1_{E_i} 1_E\, dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_E \ln(1+|x|) 1_{E_i}\, dx \\ &= \int_E \ln(1+|x|) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{E_i}\, dx \\ &= \int_E \ln(1+|x|) u(x)\, dx. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Suponha agora que u é uma função não negativa qualquer. Então existe (u_n) uma sequência de funções simples em $\mathbb{R}^2$ tal que $u_{n+1}(x) \geq u_n(x)$ e $u_n(x) \to u(x)$, para quase todo $x \in \mathbb{R}^2$. Desta forma,

$$\int_E u\, d\nu = \lim \int_E u_n\, d\nu.$$

Por (2.2), deduzimos que

$$\int_E u\, d\nu = \lim \int_E u_n\, d\nu = \lim \int_E \ln(1+|x|) u_n(x)\, dx.$$

Assim, concluímos que

$$\int_E u\, d\nu = \lim \int_E \ln(1+|x|) u_n(x)\, dx = \int_E \ln(1+|x|) u(x)\, dx.$$

Por fim, suponha que u é uma função qualquer. Como u^+ e u^- são funções positivas deduzimos, pela equação acima, que

$$\int_E u\, d\nu = \int_E u^+\, d\nu - \int_E u^-\, d\nu = \int_E \ln(1+|x|) u^+(x)\, dx - \int_E \ln(1+|x|) u^-(x)\, dx.$$

Como $\ln(1+|\cdot|)$ é não negativa, inferimos que

$$\int_E u\, d\nu = \int_E \ln(1+|x|) u^+(x)\, dx - \int_E \ln(1+|x|) u^-(x)\, dx$$

$$= \int_E (\ln(1+|x|)u(x))^+ \, dx - \int_E (\ln(1+|x|u(x))^- \, dx = \int_E \ln(1+|x|)u(x) \, dx.$$

Daí e pela definição de norma num espaço L^p, concluímos que

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2,\mathcal{L},\nu)} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} u^2 \, d\nu \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_E \ln(1+|x|)u^2(x) \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_*.$$

□

A expressão da norma do espaço $L^2(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}, \nu)$ o torna uma escolha natural para ser usado na demonstração da completude de X. Vamos finalmente demonstrar a completude de X.

Proposição 2.1.6. *O espaço X munido de $\|\cdot\|_X$ é completo.*

Demonstração. Pelo Teorema de Riesz-Fischer (veja F.5, na página 158), concluímos que $L^2(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}, \nu)$ é completo.

Pela definição dos espaços L^p e pela Proposição 2.1.5, inferimos que

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}, \nu) &= \{\overline{u} : \mathbb{R}^2 \to [-\infty, +\infty] \mid \|u\|_2^2 < \infty\} \\ &= \{\overline{u} : \mathbb{R}^2 \to [-\infty, +\infty] \mid \|u\|_*^2 < \infty\} \\ &= \left\{ \overline{u} : \mathbb{R}^2 \to [-\infty, +\infty] \mid \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u^2(x) \, dx < \infty \right\}, \end{aligned}$$

sendo $\overline{u}$ as classes de equivalência módulo medida nula.

Então, deduzimos que

$$X = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2) \mid \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u^2(x) \, dx < +\infty \right\} = H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}, \nu)$$

e que

$$\|u\|_X^2 = \|u\|^2 + \|u\|_*^2 = \|u\|^2 + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2,\mathcal{L},\nu)}^2.$$

Logo, X é completo.

□

Embora a função $\ln(1+|x|)$ seja de interesse especial nesse trabalho, acreditamos importante ressaltar que as únicas propriedades dela que usamos até agora são a mensurabilidade e não negatividade, isto é, se substituirmos $\ln(1+|x|)$ por uma $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mensurável e não negativa em todos os resultados acima, eles continuam sendo válidos.

Temos então um espaço que satisfaz as condições mínimas para definirmos um funcional associado ao problema. Na próxima seção, definiremos tal funcional e mostraremos que, quando tendo como domínio o espaço X, o funcional está bem definido e satisfaz propriedades importantes.

Antes disso, vamos estudar as imersões de X nos espaços de Sobolev usuais. O próximo resultado é bastante simples, mas, para fins de completude, resolvemos incluí-lo.

Proposição 2.1.7. *O espaço X está continuamente imerso em $H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Demonstração. Considere a função inclusão $i : X \to H^1(\mathbb{R}^2); i(u) = u$. Pela definição de $X \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$, temos que mostrar que i é contínua.

Sejam $u \in X$ e (u_n) uma sequência em X tal que $u_n \overset{X}{\to} u$. Pela definição de convergência em X, vale que $\|u_n - u\|_X \to 0$. Pela definição de $\|\cdot\|_X$, temos que $\|u_n - u\| + \|u_n - u\|_* \to 0$. Mas como normas são não negativas, concluímos que $\|u_n - u\| \to 0$. Pela definição de convergência em $H^1(\mathbb{R}^2)$, vale que $u_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\to} u$.

Desse modo, inferimos que

$$\lim\|i(u_n) - i(u)\| = \lim\|u_n - u\| = 0,$$

ou seja, $i(u_n) \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\to} I(u)$. Logo, i é contínua.

$\square$

O próximo resultado será usado extensivamente ao longo deste trabalho para obter subsequências $L^p(\mathbb{R}^2)$ convergentes de sequências limitadas em X.

Lema 2.1. *Seja $p \in [2, \infty)$. Então X está compactamente imerso em $L^p(\mathbb{R}^2)$.*

Demonstração. Vamos considerar dois casos: $p = 2$ e $p > 2$.

(i) $p = 2$

Suponha por absurdo que existem $v, (v_n) \in X$ tais que $v_n \overset{X}{\rightharpoonup} v$ e $v_n \overset{L^2(\mathbb{R}^2)}{\not\to} v$.

Defina $u_n \coloneqq v_n - v$. Assim, concluímos que $u_n \overset{X}{\rightharpoonup} 0$ e $u_n \overset{L^2(\mathbb{R}^2)}{\not\to} 0$. Daí existem $\epsilon \in (0, \infty)$ e uma subsequência de (u_n) (que ainda chamaremos de (u_n)) tal que $\|u_n\|_2 > \epsilon$.

Como $u_n \overset{X}{\rightharpoonup} 0$, pela Proposição 2.1.7, inferimos que $u_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\rightharpoonup} 0$. Dessa forma, para todo $R \in (0, \infty)$, deduzimos que $u_n \overset{H^1(B(0,R))}{\rightharpoonup} 0$. Como $B(0, R)$ é limitada, concluímos que, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov (veja F.6, na página 158), que $H^1(B(0, R)) \overset{C}{\hookrightarrow} L^2(B(0, R))$. Então, inferimos que $u_n \overset{L^2(B(0,R))}{\to} 0$.

Como $u_n \overset{L^2(B(0,R))}{\to} 0$, deduzimos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n\|_{L^2(B(0,R))} < \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}, \tag{2.3}$$

para todo $n \geq n_0$.

Como $u_n \overset{X}{\rightharpoonup} 0$, concluímos que existe $M > 0$ tal que $\|u_n\|_X \leq M$. Daí e como normas são não negativas, inferimos que

$$\|u_n\|_* \leq \|u_n\| + \|u_n\|_* = \|u_n\|_X \leq M. \tag{2.4}$$

Sejam $R \in (0, \infty)$ satisfazendo $R > \exp(\dfrac{2M^2}{\epsilon}) - 1$ e $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n \geq n_0$.

Pela definição de $\|\cdot\|_2$ e por propriedades da integral, deduzimos que

$$\|u_n\|_2^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^2} {u_n}^2(x)\, dx = \int\limits_{B(0,R)} {u_n}^2(x)\, dx + \int\limits_{B(0,R)^c} {u_n}^2(x)\, dx.$$

Como

$$\frac{1}{\ln(1+|x|)} \leq \frac{1}{\ln(1+R)}$$

para todo $x \in B(0,R)^c$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_2^2 &= \int\limits_{B(0,R)} {u_n}^2(x)\, dx + \int\limits_{B(0,R)^c} {u_n}^2(x)\, dx \\
&= \int\limits_{B(0,R)} {u_n}^2(x)\, dx + \int\limits_{B(0,R)^c} \frac{\ln(1+|x|)}{\ln(1+|x|)} {u_n}^2(x)\, dx \\
&\leq \int\limits_{B(0,R)} {u_n}^2(x)\, dx + \frac{1}{\ln(1+R)} \int\limits_{B(0,R)^c} \ln(1+|x|) {u_n}^2(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Como o integrando é positivo e pelas definições de $\|\cdot\|_{L^2(B(0,R))}$ e de $\|\cdot\|_*$, temos que

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_2^2 &\leq \int\limits_{B(0,R)} {u_n}^2(x)\, dx + \frac{1}{\ln(1+R)} \int\limits_{B(0,R)^c} \ln(1+|x|) {u_n}^2(x)\, dx \\
&\leq \int\limits_{B(0,R)} {u_n}^2(x)\, dx + \frac{1}{\ln(1+R)} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|) {u_n}^2(x)\, dx \\
&= \|u_n\|_{L^2(B(0,R))}^2 + \frac{1}{\ln(1+R)} \|u_n\|_*^2.
\end{aligned}$$

Por (2.3) e como $n \geq n_0$, inferimos que

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_2^2 &\leq \|u_n\|_{L^2(B(0,R))}^2 + \frac{1}{\ln(1+R)} \|u_n\|_*^2 \\
&< \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}^2 + \frac{1}{\ln(1+R)} \|u_n\|_*^2 \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{\ln(1+R)} \|u_n\|_*^2.
\end{aligned}$$

Por (2.4), deduzimos que

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_2^2 &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{\ln(1+R)} \|u_n\|_*^2 \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{M^2}{\ln(1+R)}.
\end{aligned}$$

Como $R > \exp(\dfrac{2M^2}{\epsilon}) - 1$ e o logaritmo é uma função crescente, concluímos que

$$\|u_n\|_2^2 < \frac{\epsilon}{2} + \frac{M^2}{\ln(1+R)}$$

$$
\begin{aligned}
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{M^2}{\ln(1+\exp(\frac{2M^2}{\epsilon})-1)} \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{M^2}{\ln(\exp(\frac{2M^2}{\epsilon}))} \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{M^2}{(\frac{2M^2}{\epsilon})} \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{(\frac{2}{\epsilon})} \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,
\end{aligned}
$$

o que é absurdo.

(ii) $p > 2$

Sejam $v \in X$ e (v_n) uma sequência em X tal que $v_n \overset{X}{\rightharpoonup} v$. Defina $u_n = v_n - v$. Desse modo $u_n \overset{X}{\rightharpoonup} 0$.

Como $X \subset H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^2)$, para todo $s \in [2, \infty)$, concluímos que $u_n \in L^{p+1}(\mathbb{R}^2)$ e que existe $C > 0$ tal que $\|u_n\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^2)} \leq C\|u_n\|$. Pela Desigualdade da Interpolação (veja F.7, na página 158), inferimos que existe $\theta \in [0, 1]$ tal que

$$\|u_n\|_p \leq \|u_n\|_2^\theta \|u_n\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^2)}^{1-\theta} \leq C\|u_n\|_2^\theta \|u_n\|^{1-\theta}.$$

Como $u_n \overset{X}{\rightharpoonup} 0$, pela Proposição 2.1.7, deduzimos que $u_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\rightharpoonup} 0$. Assim, existe $M > 0$ tal que $\|u_n\| < M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, concluímos que

$$\|u_n\|_p \leq C\|u_n\|_2^\theta \|u_n\|^{1-\theta} \leq M^{1-\theta} C\|u_n\|_2^\theta.$$

Como mostrado no caso $p = 2$, inferimos que $X \overset{C}{\hookrightarrow} L^2(\mathbb{R}^2)$. Daí e como $u_n \overset{X}{\rightharpoonup} 0$, deduzimos que $u_n \overset{L^2(\mathbb{R}^2)}{\rightarrow} 0$. Dessa forma, concluímos que

$$0 \leq \lim \|u_n\|_p \leq \lim M^{1-\theta} C\|u_n\|_2^\theta = 0.$$

Pelo Teorema do Confronto, segue que $\lim \|u_n\|_p = 0$. Então, $u_n \overset{L^p(\mathbb{R}^2)}{\rightarrow} 0$, ou seja, $v_n - v \overset{L^p(\mathbb{R}^2)}{\rightarrow} 0$, ou ainda, $v_n \overset{L^p(\mathbb{R}^2)}{\rightarrow} v$. Desse modo, inferimos que $X \overset{C}{\hookrightarrow} L^p(\mathbb{R}^2)$.

Como mostramos a imersão compacta para $p = 2$ e depois para $p \in (2, \infty)$ arbitrário, deduzimos que $X \overset{C}{\hookrightarrow} L^p(\mathbb{R}^2)$, para todo $p \in [2, \infty)$.

□

2.2 O funcional associado ao problema

Para utilizarmos os métodos variacionais, precisamos encontrar um funcional associado ao problema, isto é, um funcional cujos pontos críticos sejam soluções fracas do problema.

Mostraremos que o funcional

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy - \frac{b}{p}\|u\|_p^p$$

satisfaz tal condição.

No entanto, antes de estudar tal funcional, iremos estudar três funcionais auxiliares cujas utilidades se tornarão claras em breve.

Notação.

$$V_1 : X \to [0,\infty); V_1(u) = \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy;$$
$$V_2 : X \to [0,\infty); V_2(u) = \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy;$$
$$V_0 : X \to \mathbb{R}; V_0(u) = V_1(u) - V_2(u).$$

Não é evidente que os funcionais acima estão bem definidos. O problema é garantir que a expressão de cada funcional só atinge valores dentro do contradomínio. Em particular, precisamos garantir que as integrais na expressão de cada funcional são sempre finitas.

No entanto, para mostrar isso, precisaremos primeiro de duas desigualdades.

A desigualdade a seguir é uma estimativa para V_1.

Proposição 2.2.1. *Sejam $u, v, w, z \in X$. Então*

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}_2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u(x)v(x)w(y)z(y)\,dx\,dy\right| \leq$$
$$\leq \|u\|_*\|v\|_*\|w\|_2\|z\|_2 + \|u\|_2\|v\|_2\|w\|_*\|z\|_*.$$

Demonstração. Por propriedades da integral e pela positividade de $\ln(1+|x-y|)$, temos que

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u(x)v(x)w(y)z(y)\,dx\,dy\right| \leq$$
$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\ln(1+|x-y|)u(x)v(x)w(y)z(y)|\,dx\,dy =$$
$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)|u(x)v(x)||w(y)z(y)|\,dx\,dy.$$

Pela Proposição B.3 (veja página 146), concluímos que

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u(x)v(x)w(y)z(y)\,dx\,dy\right| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)|u(x)v(x)||w(y)z(y)|\,dx\,dy \leq$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} (\ln(1+|x|)+\ln(1+|y|))|u(x)v(x)||w(y)z(y)|\,dx\,dy.$$

Pela linearidades da integral, inferimos que

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u(x)v(x)w(y)z(y)\,dx\,dy \leq$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} (\ln(1+|x|)+\ln(1+|y|))|u(x)v(x)||w(y)z(y)|\,dx\,dy =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)|u(x)v(x)||w(y)z(y)|\,dx\,dy +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|y|)|u(x)v(x)||w(y)z(y)|\,dx\,dy =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} |w(y)z(y)|\,dy \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)|u(x)v(x)|\,dx +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|y|)|w(y)z(y)|\,dy \int_{\mathbb{R}^2} |u(x)v(x)|\,dx.$$

Pela Desigualdade de Hölder (veja F.8, na página 158), deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u(x)v(x)w(y)z(y)\,dx\,dy \leq$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^2} |w(y)z(y)|\,dy \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)|u(x)v(x)|\,dx +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|y|)|w(y)z(y)|\,dy \int_{\mathbb{R}^2} |u(x)v(x)|\,dx \leq$$
$$\leq \|w\|_2\|z\|_2 \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)|u(x)v(x)|\,dx +$$
$$+ \|u\|_2\|v\|_2 \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|y|)|w(y)z(y)|\,dy.$$

Usando a Desigualdade de Hölder (veja F.8, na página 158) como na Proposição 2.1.1, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u(x)v(x)w(y)z(y)\,dx\,dy \leq$$
$$\leq \|w\|_2\|z\|_2 \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)|u(x)v(x)|\,dx +$$

$$+\|u\|_2\|v\|_2 \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|y|)|w(y)z(y)|\,dy \le$$
$$\le \|u\|_*\|v\|_*\|w\|_2\|z\|_2 + \|u\|_2\|v\|_2\|w\|_*\|z\|_*\|w\|.$$

□

Já a próxima desigualdade é uma estimativa para V_2.

Proposição 2.2.2. *Sejam $u, v \in X$. Então existe $C \in (0,\infty)$ tal que*

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right) u(x)v(y)\,dx\,dy \right| \le C\|u\|_{\frac{4}{3}}\|v\|_{\frac{4}{3}}.$$

Demonstração. Sejam $r = s = 4/3, N = 2$ e $\mu = 1$. Note que

$$\frac{1}{s}+\frac{\mu}{N}+\frac{1}{r} = \frac{1}{\frac{4}{3}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4} = \frac{8}{4} = 2.$$

Como, por hipótese, $u, v \in X \subset H^1(\mathbb{R}^2) \subset L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^2) = L^r(\mathbb{R}^2) = L^s(\mathbb{R}^2)$, concluímos, pela Desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev (veja F.9, na página 158), que existe $C \in (0,\infty)$, independente de u, v, tal que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|u(x)v(y)|}{|x-y|}\,dx\,dy \le C\|u\|_{\frac{4}{3}}\|v\|_{\frac{4}{3}}. \tag{2.5}$$

Pela Proposição B.2 (veja página 145) e por propriedades da integral, inferimos que

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right) u(x)v(y)\,dx\,dy \right| \le \left| \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{u(x)v(y)}{|x-y|}\,dx\,dy \right|$$
$$\le \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|u(x)v(y)|}{|x-y|}\,dx\,dy.$$

Daí e por (2.5), deduzimos que

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right) u(x)v(y)\,dx\,dy \right| \le$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|u(x)v(y)|}{|x-y|}\,dx\,dy \le C\|u\|_{\frac{4}{3}}\|v\|_{\frac{4}{3}}.$$

□

Uma observação importante sobre a desigualdade acima é que ela nos permite estimar o valor de $V_2(u)$ em termos da norma de u em $L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)$, ou seja, o funcional V_2 estaria bem definido em $L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)$. E, de fato, no artigo original, o funcional V_2 tem $L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)$ como domínio. No entanto, achamos mais simples considerar V_2 em X e utilizar a estimativa em termos da norma de u em $L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)$ quando for necessário. Tal estimativa é o corolário a seguir.

Corolário 2.1. *Seja $u \in X$. Então existe $C \in (0, \infty)$ tal que*

$$V_2(u) \leq C\|u\|_{\frac{8}{3}}^4 < \infty.$$

Demonstração. Pela definição de V_2 e pela Proposição 2.2.2 concluímos que

$$V_2(u) = \left| \int\limits_{\mathbb{R}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1 + \frac{1}{|x-y|}\right) u^2(x)u^2(y)\, dx\, dy \right| \leq C\|u^2\|_{\frac{4}{3}}\|u^2\|_{\frac{4}{3}} = C\|u^2\|_{\frac{4}{3}}^2.$$

Desenvolvendo a expressão da norma, inferimos que

$$V_2(u) \leq C\|u^2\|_{\frac{4}{3}}^2 = C\left(\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} (u^2)^{\frac{4}{3}}\, dx\right)^{\frac{3}{4}}\right)^2 = C\left(\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} u^{\frac{8}{3}}\, dx\right)^{\frac{3}{8}}\right)^4 = C\|u\|_{L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)}^4.$$

Como $u \in L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)$, deduzimos que

$$V_2(u) \leq C\|u\|_{\frac{8}{3}}^4 < \infty.$$

□

Como dito previamente, os resultados anteriores serão utilizados para mostrar que os funcionais auxiliares estão bem definidos. Esse é o próximo resultado.

Proposição 2.2.3. *Os funcionais V_1, V_2 e V_0 estão bem definidos.*

Demonstração. A única coisa que precisamos mostrar é que o contradomínio é apropriado, isto é, que $V_1(u) \in [0, \infty)$, $V_2(u) \in [0, \infty)$ e $|V_0(u)| < \infty$, para todo $u \in X$.

Seja $u \in X$. Como o integrando na expressão de $V_1(u)$ é não negativo, concluímos que $V_1(u) \geq 0$.

Pela definição de V_1, temos que

$$\begin{aligned} V_1(u) &= \int\limits_{\mathbb{R}_2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x-y|)u^2(x)u^2(y)\, dx\, dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}_2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x-y|)u(x)u(x)u(y)u(y)\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.2.1, inferimos que

$$\begin{aligned} V_1(u) &= \int\limits_{\mathbb{R}_2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x-y|)u(x)u(x)u(y)u(y)\, dx\, dy \\ &\leq \|u\|_*\|u\|_*\|u\|_2\|u\|_2 + \|u\|_2\|u\|_2\|u\|_*\|u\|_*\|u\| = 2\|u\|_2^2\|u\|_*^2. \end{aligned}$$

Como $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$, deduzimos que existe $C_1 \in (0, \infty)$ tal que $\|u\|_2 \leq C\|u\|$. Assim, concluímos que

$$V_1(u) \leq 2\|u\|_2^2\|u\|_*^2 \leq C_1\|u\|^2\|u\|_*^2.$$

Mas como $u \in X$, inferimos que

$$\|u\|^2 + \|u\|_*^2 = \|u\|_X^2 < \infty,$$

ou seja, como normas são não negativas, deduzimos que $\|u\|^2, \|u\|_*^2 < \infty$. Daí, concluímos que

$$V_1(u) \leq C_1\|u\|^2\|u\|_*^2 < \infty,$$

ou seja, o contradomínio de V_1 é apropriado. Dessa forma, temos que V_1 está bem definido.

Como o integrando na expressão de $V_2(u)$ é não negativo, vale que $V_2(u) \geq 0$.

Pelo Corolário 2.1, inferimos que existe $C_2 \in (0, \infty)$ tal que

$$V_2(u) \leq C\|u\|_{\frac{8}{3}}^4 < \infty,$$

ou seja, o contradomínio de V_2 é apropriado. Então, temos que V_2 está bem definido.

Desse modo, vale imediatamente que V_0 está bem definido.

□

Para podermos entender alguns dos motivos de termos introduzido esses funcionais auxiliares, precisamos encontrar uma expressão explícita para V_0. Essa manipulação é o próximo resultado.

Proposição 2.2.4. *Seja $u \in X$. Então* $V_0(u) = \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy.$

Demonstração. Pelas definições de V_0, V_1 e V_2, temos que

$$\begin{aligned} V_0(u) &= V_1(u) - V_2(u) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy - \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Pela linearidade da integral, concluímos que

$$\begin{aligned} V_0(u) &= \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u^2(y) - \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\ln(1+|x-y|) - \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)\right)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Pela Proposição B.1 (veja página 145), inferimos que

$$\begin{aligned} V_0(u) &= \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\ln(1+|x-y|) - \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)\right)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy. \end{aligned}$$

□

Antes de prosseguirmos, é importante fazer algumas observações:

Primeiro, note que a expressão de V_0 aparece como a segunda parcela do funcional I que descrevemos no começo dessa seção.

Segundo, observe que essa mesma expressão foi mencionada no começo da seção anterior como sendo o motivo do funcional associado ao problema poder não estar bem definido em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Como mostramos que V_0 está bem definido em X e as outras parcelas de I são apenas normas que estão sempre bem definidas em $H^1(\mathbb{R}^2)$ (e, portanto, em X), temos que o funcional I, quando tendo X como domínio, estará bem definido. Logo, X é um bom espaço para tentarmos encontrar soluções do problema usando métodos variacionais.

Terceiro, observe que, por definição, $V_0 = V_1 - V_2$ e que tanto V_1 quanto V_2 são funções não negativas. Esse fato é o principal motivo de termos introduzido os funcionais auxiliares e será usado extensivamente nesse trabalho. Um exemplo disso será visto ainda nessa seção, quando formos estudar a semicontinuidade do funcional I.

Vamos agora calcular as derivadas de Gâteaux dos funcionais auxiliares.

Proposição 2.2.5. *Sejam $u, v \in X$. Então*

(i) $DV_1(u)v = 4\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u(y)v(y)\,dx\,dy;$

(ii) $DV_2(u)v = 4\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)u^2(x)u(y)v(y)\,dx\,dy;$

(iii) $DV_0(u)v = 4\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)u^2(x)u(y)v(y)\,dx\,dy;$

Demonstração. Pela definição da derivada de Gâteaux, temos que

$$
\begin{aligned}
DV_1(u)v &= \lim_{t\to 0}\frac{V_1(u+tv)-V_1(u)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)(u+tv)^2(x)(u+tv)^2(y)\,dx\,dy-\\
&-\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy.
\end{aligned}
$$

Pela linearidade da integral e colocando o logaritmo em evidência, concluímos que

$$
\begin{aligned}
DV_1(u)v = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} &\ln(1+|x-y|)(u+tv)^2(x)(u+tv)^2(y)\\
&-\ln(1+|x-y|)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy\\
&= \lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)\frac{1}{t}((u+tv)^2(x)(u+tv)^2(y)-u^2(x)u^2(y))\,dx\,dy.
\end{aligned}
$$

Desenvolvendo a expressão no integrando, inferimos que

$$
\frac{1}{t}((u+tv)^2(x)(u+tv)^2(y)-u^2(x)u^2(y)) =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{t}((u^2+2tuv+v^2)(x)(u^2+2tuv+v^2)(y)-u^2(x)u^2(y))\\
&= \frac{1}{t}((u^2(x)+2tu(x)v(x)+v^2(x))(u^2(y)+2tu(y)v(y)+v^2(y))-u^2(x)u^2(y)).
\end{aligned}
$$

Assim, deduzimos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{t}((u+tv)^2(x)(u+tv)^2(y)-u^2(x)u^2(y)) =\\
&= \frac{1}{t}(u^2(x)u^2(y)+2tu^2(x)u(y)v(y)+t^2u^2(x)v^2(y)\\
&+2tu(x)v(x)u^2(y)+4t^2u(x)v(x)u(y)v(y)+2t^3u(x)v(x)v^2(y)\\
&+t^2v^2(x)u^2(y)+2t^3v^2(x)u(y)v(y)+t^4v(x)v(y)-u^2(x)u^2(y)).
\end{aligned}
$$

Daí, concluímos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{t}((u+tv)^2(x)(u+tv)^2(y)-u^2(x)u^2(y)) =\\
&= \frac{1}{t}(2tu^2(x)u(y)v(y)+t^2u^2(x)v^2(y)2tu(x)v(x)u^2(y)+4t^2u(x)v(x)u(y)v(y)\\
&+2t^3u(x)v(x)v^2(y)+t^2v^2(x)u^2(y)+2t^3v^2(x)u(y)v(y)+t^4v(x)v(y))\\
&= (2u^2(x)u(y)v(y)+tu^2(x)v^2(y)+2u(x)v(x)u^2(y)+4tu(x)v(x)u(y)v(y)\\
&+2t^2u(x)v(x)v^2(y)+tv^2(x)u^2(y)+2t^2v^2(x)u(y)v(y)+t^3v(x)v(y)).
\end{aligned}
$$

Substituindo a expressão obtida de volta na expressão original, usando a linearidade da integral e passando o limite com t indo para 0, inferimos que

$$
\begin{aligned}
DV_1(u)v = 2&\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u(y)v(y)\,dx\,dy+\\
+2&\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(y)u(x)v(x)\,dx\,dy.
\end{aligned}
$$

Pelo Teorema de Fubini (veja F.10, na página 159), deduzimos que

$$
\begin{aligned}
DV_1(u)v &= 2\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u(y)v(y)\,dx\,dy+\\
&+2\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(y)u(x)v(x)\,dx\,dy\\
&= 2\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u(y)v(y)\,dx\,dy+\\
&+2\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|y-x|)u^2(y)u(x)v(x)\,dy\,dx.
\end{aligned}
$$

Renomeando as variáveis, concluímos que

$$
DV_1(u)v = 2\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u(y)v(y)\,dx\,dy+
$$

$$+ 2\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|y-x|)u^2(y)u(x)v(x)\,dy\,dx$$
$$= 4\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u(y)v(y)\,dx\,dy.$$

O cálculo para encontrar DV_2 e DV_0 é análogo.

□

O próximo passo é mostrar que os funcionais auxiliares são continuamente diferenciáveis em X. Isso será feito mostrando que suas derivadas de Gâteaux são contínuas e, portanto, são derivadas de Frechet.

Lema 2.2. *V_1 é continuamente diferenciável em X. Além disso, sejam $u, v \in X$. Então*

$$V_1{}'(u)v = 4\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u(y)v(y)\,dx\,dy.$$

Demonstração. Sejam $u, v \in X$ e (u_n) uma sequência em X tal que $u_n \xrightarrow{X} u$.

Pela Proposição 2.2.5, concluímos que

$$\begin{aligned}|DV_1(u_n)v - DV_1(u)v| &= \Bigg|4\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u_n^2(x)u_n(y)v(y)\,dx\,dy \\ &\quad - 4\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u(y)v(y)\,dx\,dy\Bigg| \\ &= 4\Bigg|\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u_n^2(x)u_n(y)v(y)\,dx\,dy \\ &\quad - \int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u(y)v(y)\,dx\,dy\Bigg|.\end{aligned}$$

Pela linearidade da integral e colocando os termos semelhantes em evidência, inferimos que

$$\begin{aligned}|DV_1(u_n)v - DV_1(u)v| &= 4\Bigg|\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u_n^2(x)u_n(y)v(y)\,dx\,dy \\ &\quad - \int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u(y)v(y)\,dx\,dy\Bigg| \\ &= 4\Bigg|\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u_n^2(x)u_n(y)v(y) - \\ &\quad - \ln(1+|x-y|)u^2(x)u(y)v(y)\,dx\,dy\Bigg| \\ &= 4\Bigg|\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)(u_n^2(x)u_n(y) - u^2(x)u(y))v(y)\,dx\,dy\Bigg|.\end{aligned}$$

Por propriedades da integral e pela positividade de $\ln(1+|x-y|)$, deduzimos que

$$\begin{aligned}|DV_1(u_n)v - DV_1(u)v| &= 4\left|\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)(u_n^2(x)u_n(y) - u^2(x)u(y))v(y)\,dx\,dy\right| \\ &\leq 4\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\ln(1+|x-y|)(u_n^2(x)u_n(y) - u^2(x)u(y))v(y)|\,dx\,dy \\ &= 4\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)|u_n^2(x)u_n(y) - u^2(x)u(y)||v(y)|\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Somando e subtraindo $u^2(x)u_n(y)$ na expressão da integral, concluímos que

$$\begin{aligned}&|DV_1(u_n)v - DV_1(u)v| \leq \\ &\leq 4\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)|u_n^2(x)u_n(y) - u^2(x)u(y)||v(y)|\,dx\,dy = \\ &= 4\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)|u_n^2(x)u_n(y) - u^2(x)u_n(y) + \\ &+ u^2(x)u_n(y) - u^2(x)u(y)||v(y)|\,dx\,dy = \\ &= 4\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)|u_n(y)(u_n^2(x) - u^2(x)) + u^2(x)(u_n(y) - u(y))||v(y)|\,dx\,dy = \\ &= 4\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)|u_n(y)(u_n(x) + \\ &+ u(x))(u_n(x) - u(x)) + u^2(x)(u_n(y) - u(y))||v(y)|\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Pela a desigualdade triangular e propriedades do valor absoluto, inferimos que

$$\begin{aligned}&|DV_1(u_n)v - DV_1(u)v| \leq \\ &\leq 4\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)|u_n(y)(u_n(x) + u(x))(u_n(x) - u(x)) + \\ &+ u^2(x)(u_n(y) - u(y))||v(y)|\,dx\,dy \leq \\ &\leq 4\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)(|u_n(y)(u_n(x) + u(x))(u_n(x) - u(x))| + \\ &+ |u^2(x)(u_n(y) - u(y))|)|v(y)|\,dx\,dy = \\ &= 4\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)(|u_n(y)||u_n(x) + u(x)||u_n(x) - u(x)| + \\ &+ u^2(x)|u_n(y) - u(y)|)|v(y)|\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Pela a linearidade da integral, deduzimos que

$$|DV_1(u_n)v - DV_1(u)v| \leq$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 4\int_{R^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)(|u_n(y)||u_n(x)+u(x)||u_n(x)-u(x)|+\\
&+u^2(x)|u_n(y)-u(y)|)|v(y)|\,dx\,dy=\\
&=4\int_{R^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)|u_n(y)||u_n(x)+u(x)||u_n(x)-u(x)||v(y)|+\\
&+\ln(1+|x-y|)u^2(x)|u_n(y)-u(y)||v(y)|\,dx\,dy=\\
&=4\int_{R^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)|u_n(y)||u_n(x)+u(x)||u_n(x)-u(x)||v(y)|\,dx\,dy+\\
&+4\int_{R^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(x)|u_n(y)-u(y)||v(y)|\,dx\,dy.
\end{aligned}
$$

Pela Proposição 2.2.1, concluímos que

$$
\begin{aligned}
&|DV_1(u_n)v-DV_1(u)v|\leq\\
&\leq 4\int_{R^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)|u_n(y)||u_n(x)+u(x)||u_n(x)-u(x)||v(y)|\,dx\,dy+\\
&+4\int_{R^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(x)|u_n(y)-u(y)||v(y)|\,dx\,dy\leq\\
&\leq \|u_n+u\|_*\|u_n-u\|_*\|u_n\|_2\|v\|_2+\|u_n+u\|_2\|u_n-u\|_2\|u_n\|_*\|v\|_*+\\
&+\|u\|_*\|u\|_*\|u_n-u\|_2\|v\|_2+\|u\|_2\|u\|_2\|u_n-u\|_*\|v\|_*.
\end{aligned}
$$

Reorganizando e pondo os termos similares em evidência, inferimos que

$$
\begin{aligned}
&|DV_1(u_n)v-DV_1(u)v|\leq\\
&\leq \|u_n+u\|_*\|u_n-u\|_*\|u_n\|_2\|v\|_2+\|u_n+u\|_2\|u_n-u\|_2\|u_n\|_*\|v\|_*+\\
&+\|u\|_*\|u\|_*\|u_n-u\|_2\|v\|_2+\|u\|_2\|u\|_2\|u_n-u\|_*\|v\|_*=\\
&=\|u_n+u\|_2\|u_n-u\|_2\|u_n\|_*\|v\|_*+\|u\|_*^2\|u_n-u\|_2\|v\|_2+\\
&+\|u_n+u\|_*\|u_n-u\|_*\|u_n\|_2\|v\|_2+\|u\|_2^2\|u_n-u\|_*\|v\|_*=\\
&=\|u_n-u\|_2(\|u_n+u\|_2\|u_n\|_*\|v\|_*+\|u\|_*^2\|v\|_2)+\\
&+\|u_n-u\|_*(\|u_n+u\|_*\|u_n\|_2\|v\|_2+\|u\|_2^2\|v\|_*).
\end{aligned}
$$

Pela desigualdade triangular, deduzimos que

$$
\begin{aligned}
&|DV_1(u_n)v-DV_1(u)v|\leq\\
&\leq \|u_n-u\|_2(\|u_n+u\|_2\|u_n\|_*\|v\|_*+\|u\|_*^2\|v\|_2)+\\
&+\|u_n-u\|_*(\|u_n+u\|_*\|u_n\|_2\|v\|_2+\|u\|_2^2\|v\|_*)\leq\\
&\leq \|u_n-u\|_2((\|u_n\|_2+\|u\|_2)\|u_n\|_*\|v\|_*+\|u\|_*^2\|v\|_2)+\\
&+\|u_n-u\|_*((\|u_n\|_*+\|u\|_*)\|u_n\|_2\|v\|_2+\|u\|_2^2\|v\|_*).
\end{aligned}
$$

Como normas são não negativas, concluímos que

$$
\begin{aligned}
&|DV_1(u_n)v-DV_1(u)v|\leq\\
&\leq \|u_n-u\|_2((\|u_n\|_2+\|u\|_2)\|u_n\|_*\|v\|_*+\|u\|_*^2\|v\|_2)+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\|u_n-u\|_*((\|u_n\|_*+\|u\|_*)\|u_n\|_2\|v\|_2+\|u\|_2^2\|v\|_*)\leq\\
&\leq \|u_n-u\|_2(((\|u_n\|_2+\|u_n\|_*)+\|u\|_2)(\|u_n\|_2+\|u_n\|_*)\|v\|_*+\|u\|_*^2\|v\|_2)+\\
&+\|u_n-u\|_*(((\|u_n\|_2+\|u_n\|_*)+\|u\|_*)(\|u_n\|_2+\|u_n\|_*)\|v\|_2+\|u\|_2^2\|v\|_*).
\end{aligned}
$$

Como $u_n \in X \subset H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$, inferimos que $\|u_n\|_2 \leq \|u_n\|$. Como $u_n \overset{X}{\to} u$, deduzimos que existe $C_1 \in (0,\infty)$ tal que $\|u_n\|_X \leq C$. Dessa forma, concluímos que

$$\|u_n\|_2+\|u_n\|_* \leq \|u_n\|+\|u_n\|_* = \|u_n\|_X \leq C_1.$$

Pela desigualdade acima, inferimos que

$$
\begin{aligned}
&|DV_1(u_n)v-DV_1(u)v|\leq\\
&\leq \|u_n-u\|_2(((\|u_n\|_2+\|u_n\|_*)+\|u\|_2)(\|u_n\|_2+\|u_n\|_*)\|v\|_*+\|u\|_*^2\|v\|_2)+\\
&+\|u_n-u\|_*(((\|u_n\|_2+\|u_n\|_*)+\|u\|_*)(\|u_n\|_2+\|u_n\|_*)\|v\|_2+\|u\|_2^2\|v\|_*)\leq\\
&\leq \|u_n-u\|_2((C_1+\|u\|_2)C_1\|v\|_*+\|u\|_*^2\|v\|_2)+\\
&+\|u_n-u\|_*((C_1+\|u\|_*)C_1\|v\|_2+\|u\|_2^2\|v\|_*).
\end{aligned}
$$

Defina $C_2 \coloneqq \max\{C_1, C_1+\|u\|_2, C_1+\|u\|_*, \|u\|_2, \|u\|_*\} < \infty$.
Majorando por C_2 e colocando termos similares em evidência, deduzimos que

$$
\begin{aligned}
&|DV_1(u_n)v-DV_1(u)v|\leq\\
&\leq \|u_n-u\|_2((C_1+\|u\|_2)C_1\|v\|_*+\|u\|_*^2\|v\|_2)+\\
&+\|u_n-u\|_*((C_1+\|u\|_*)C_1\|v\|_2+\|u\|_2^2\|v\|_*)\leq\\
&\leq \|u_n-u\|_2((C_2)C_2\|v\|_*+C_2^2\|v\|_2)+\\
&+\|u_n-u\|_*((C_2)C_2\|v\|_2+C_2^2\|v\|_*)=\\
&=C_2^2(\|u_n-u\|_2(\|v\|_2+\|v\|_*)+\|u_n-u\|_*(\|v\|_2+\|v\|_*)).
\end{aligned}
$$

Como $u_n \in X \subset H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$, concluímos que $\|u_n\|_2 \leq \|u_n\|$. Daí e pela definição de $\|\cdot\|_X$, inferimos que

$$
\begin{aligned}
|DV_1(u_n)v-DV_1(u)v| &\leq C_2^2(\|u_n-u\|_2(\|v\|_2+\|v\|_*)+\|u_n-u\|_*(\|v\|_2+\|v\|_*))\\
&\leq C_2^2(\|u_n-u\|_2(\|v\|+\|v\|_*)+\|u_n-u\|_*(\|v\|+\|v\|_*))\\
&= C_2^2(\|u_n-u\|_2\|v\|_X+\|u_n-u\|_*\|v\|_X)\\
&= C_2^2\|v\|_X(\|u_n-u\|_2+\|u_n-u\|_*).
\end{aligned}
$$

Como $u_n, u \in X \subset H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$, deduzimos que $\|u_n-u\|_2 \leq \|u_n-u\|$. Disso e pela definição de $\|\cdot\|_X$, concluímos que

$$
\begin{aligned}
|DV_1(u_n)v-DV_1(u)v| &\leq C_2^2\|v\|_X(\|u_n-u\|_2+\|u_n-u\|_*)\\
&\leq C_2^2\|v\|_X(\|u_n-u\|+\|u_n-u\|_*)\\
&= C_2^2\|u_n-u\|_X\|v\|_X.
\end{aligned}
$$

Com isso e como $u_n \overset{X}{\to} u$, inferimos que

$$
\begin{aligned}
\lim\|DV_1(u_n)v-DV_1(u)v\|_{X'} &= \lim \sup_{\substack{v\in X\\ \|v\|_X=1}} |DV_1(u_n)v-DV_1(u)v|\\
&\leq \lim \sup_{\substack{v\in X\\ \|v\|_X=1}} C_2^2\|v\|_X\|u_n-u\|_X
\end{aligned}
$$

$$= \lim \sup_{\substack{v \in X \\ \|v\|_X = 1}} C_2^2 \|u_n - u\|_X$$
$$= \lim C_2^2 \|u_n - u\|_X = 0,$$

ou seja $DV_1(u_n) \stackrel{X'}{\to} DV_1(u)$, ou ainda, DV_1 é contínua em X'.

Então, pela Proposição F.11 (veja página 159), deduzimos que $V_1' = DV_1$ e que V_1' é contínua em X.

Desse modo, concluímos que V_1 é continuamente diferenciável em X.

□

O próximo resultado mostra que V_2 é continuamente diferenciável em $L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)$ e mais: as derivadas de Fréchet em X e $L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)$ coincidem.

Lema 2.3. *V_2 é continuamente diferenciável em $L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)$ e em X. A derivada de Fréchet de V_2 é a mesma tanto em $L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)$ quanto em X. Além disso, sejam $u, v \in X$. Então*

$$V_2{}'(u)v = 4 \int\limits_{\mathbb{R}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1 + \frac{1}{|x-y|}\right) u^2(x)u(y)v(y)\, dx\, dy.$$

Demonstração. Vamos primeiro mostrar que V_2 é continuamente diferenciável em $L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)$.

Sejam $u, v \in X$ e (u_n) uma sequência em X tal que $u_n \stackrel{L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)}{\to} u$.

Pela Proposição 2.2.5, concluímos que

$$\begin{aligned}
|DV_2(u_n)v - DV_2(u)v| &= \Bigg| 4 \int\limits_{R^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1 + \frac{1}{|x-y|}\right) u_n^2(x)u_n(y)v(y)\, dx\, dy \\
&\quad - 4 \int\limits_{R^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1 + \frac{1}{|x-y|}\right) u^2(x)u(y)v(y)\, dx\, dy \Bigg| \\
&= 4 \Bigg| \int\limits_{R^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1 + \frac{1}{|x-y|}\right) u_n^2(x)u_n(y)v(y)\, dx\, dy \\
&\quad - \int\limits_{R^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1 + \frac{1}{|x-y|}\right) u^2(x)u(y)v(y)\, dx\, dy \Bigg|.
\end{aligned}$$

Pela linearidade da integral e colocando os termos similares em evidência, inferimos que

$$\begin{aligned}
|DV_2(u_n)v - DV_2(u)v| &= 4 \Bigg| \int\limits_{R^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1 + \frac{1}{|x-y|}\right) u_n^2(x)u_n(y)v(y)\, dx\, dy \\
&\quad - \int\limits_{R^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1 + \frac{1}{|x-y|}\right) u^2(x)u(y)v(y)\, dx\, dy \Bigg| \\
&= 4 \Bigg| \int\limits_{R^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1 + \frac{1}{|x-y|}\right) u_n^2(x)u_n(y)v(y) -
\end{aligned}$$

$$- \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right) u^2(x)u(y)v(y)\,dx\,dy\Bigg|$$

$$= 4\left|\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)(u_n^2(x)u_n(y)-u^2(x)u(y))v(y)\,dx\,dy\right|.$$

Por propriedades da integral e pela positividade de $\ln\left(1+\dfrac{1}{|x-y|}\right)$, deduzimos que

$$\begin{aligned}
|DV_2(u_n)v - DV_2(u)v| &= 4\left|\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)(u_n^2(x)u_n(y)-u^2(x)u(y))v(y)\,dx\,dy\right| \\
&\leq 4\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \left|\ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)(u_n^2(x)u_n(y)-u^2(x)u(y))v(y)\right|dx\,dy \\
&= 4\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)|u_n^2(x)u_n(y)-u^2(x)u(y)||v(y)|\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo $u^2(x)u_n(y)$ na expressão da integral, concluímos que

$$\begin{aligned}
&|DV_2(u_n)v - DV_2(u)v| \leq \\
&\leq 4\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)|u_n^2(x)u_n(y)-u^2(x)u(y)||v(y)|\,dx\,dy \\
&= 4\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)|u_n^2(x)u_n(y)-u^2(x)u_n(y)+ \\
&+ u^2(x)u_n(y)-u^2(x)u(y)||v(y)|\,dx\,dy \\
&= 4\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)|u_n(y)(u_n^2(x)-u^2(x))+u^2(x)(u_n(y)-u(y))||v(y)|\,dx\,dy \\
&= 4\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)|u_n(y)(u_n(x)+ \\
&+ u(x))(u_n(x)-u(x))+u^2(x)(u_n(y)-u(y))||v(y)|\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

Pela a desigualdade triangular e propriedades do valor absoluto, inferimos que

$$\begin{aligned}
&|DV_2(u_n)v - DV_2(u)v| \leq \\
&\leq 4\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)|u_n(y)(u_n(x)+u(x))(u_n(x)-u(x))+ \\
&+ u^2(x)(u_n(y)-u(y))||v(y)|\,dx\,dy \leq \\
&\leq 4\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)(|u_n(y)(u_n(x)+u(x))(u_n(x)-u(x))|+ \\
&+ |u^2(x)(u_n(y)-u(y))|)|v(y)|\,dx\,dy = \\
&= 4\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)(|u_n(y)||u_n(x)+u(x)||u_n(x)-u(x)|+
\end{aligned}$$

$$+ u^2(x)|u_n(y) - u(y)|)|v(y)|\,dx\,dy.$$

Pela a linearidade da integral, deduzimos que

$$\begin{aligned}
&|DV_2(u_n)v - DV_2(u)v| \leq \\
&\leq 4\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1 + \frac{1}{|x-y|}\right)(|u_n(y)||u_n(x) + u(x)||u_n(x) - u(x)| + \\
&+ u^2(x)|u_n(y) - u(y)|)|v(y)|\,dx\,dy = \\
&= 4\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1 + \frac{1}{|x-y|}\right)|u_n(y)||u_n(x) + u(x)||u_n(x) - u(x)||v(y)| + \\
&+ \ln\left(1 + \frac{1}{|x-y|}\right)u^2(x)|u_n(y) - u(y)||v(y)|\,dx\,dy = \\
&= 4\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1 + \frac{1}{|x-y|}\right)|u_n(y)||u_n(x) + u(x)||u_n(x) - u(x)||v(y)|\,dx\,dy + \\
&+ 4\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1 + \frac{1}{|x-y|}\right)u^2(x)|u_n(y) - u(y)||v(y)|\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

É um corolário da Desigualdade de Hölder (veja F.8, na página 158) que $|u_n+u||u_n-u|, |u_n||v|, u^2, |u_n - u||v| \in L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^2)$. Assim, pela Proposição 2.2.2, concluímos que existem constantes $C_1, C_2 \in (0,\infty)$ tais que

$$\begin{aligned}
&|DV_2(u_n)v - DV_2(u)v| \leq \\
&\leq 4\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1 + \frac{1}{|x-y|}\right)|u_n(y)||u_n(x) + u(x)||u_n(x) - u(x)||v(y)|\,dx\,dy + \\
&+ 4\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1 + \frac{1}{|x-y|}\right)u^2(x)|u_n(y) - u(y)||v(y)|\,dx\,dy \leq \\
&\leq C_1\|(u_n+u)(u_n-u)\|_{\frac{4}{3}}\|u_n v\|_{\frac{4}{3}} + C_2\|u^2\|_{\frac{4}{3}}\|(u_n-u)v\|_{\frac{4}{3}}.
\end{aligned}$$

Novamente pela Desigualdade de Hölder (veja F.8, na página 158), inferimos que

$$\begin{aligned}
|DV_2(u_n)v - DV_2(u)v| &\leq C_1\|(u_n+u)(u_n-u)\|_{\frac{4}{3}}\|u_n v\|_{\frac{4}{3}} + \\
&+ C_2\|u^2\|_{\frac{4}{3}}\|(u_n-u)v\|_{\frac{4}{3}} \\
&\leq C_1\|u_n+u\|_{\frac{8}{3}}\|u_n-u\|_{\frac{8}{3}}\|u_n\|_{\frac{8}{3}}\|v\|_{\frac{8}{3}} + \\
&+ C_2\|u_n\|_{\frac{8}{3}}^2\|u_n-u\|_{\frac{8}{3}}\|v\|_{\frac{8}{3}}.
\end{aligned}$$

Defina $C_3 := \max\{C_1, C_2\}$. Colocando termos semelhantes em evidência, deduzimos que

$$\begin{aligned}
|DV_2(u_n)v - DV_2(u)v| &\leq C_1\|u_n+u\|_{\frac{8}{3}}\|u_n-u\|_{\frac{8}{3}}\|u_n\|_{\frac{8}{3}}\|v\|_{\frac{8}{3}} + \\
&+ C_2\|u_n\|_{\frac{8}{3}}^2\|u_n-u\|_{\frac{8}{3}}\|v\|_{\frac{8}{3}} \\
&\leq C\|u_n+u\|_{\frac{8}{3}}\|u_n-u\|_{\frac{8}{3}}\|u_n\|_{\frac{8}{3}}\|v\|_{\frac{8}{3}} + \\
&+ C_3\|u_n\|_{\frac{8}{3}}^2\|u_n-u\|_{\frac{8}{3}}\|v\|_{\frac{8}{3}}
\end{aligned}$$

$$= C_3\|u_n - u\|_{\frac{8}{3}}\|u_n\|_{\frac{8}{3}}\|v\|_{\frac{8}{3}}(\|u_n + u\|_{\frac{8}{3}} + \|u_n\|).$$

Pela desigualdade triangular, concluímos que

$$\begin{aligned}|DV_2(u_n)v - DV_2(u)v| &\leq C_3\|u_n - u\|_{\frac{8}{3}}\|u_n\|_{\frac{8}{3}}\|v\|_{\frac{8}{3}}(\|u_n + u\|_{\frac{8}{3}} + \|u_n\|)\\ &\leq C_3\|u_n - u\|_{\frac{8}{3}}\|u_n\|_{\frac{8}{3}}\|v\|_{\frac{8}{3}}(\|u_n\|_{\frac{8}{3}} + \|u\|_{\frac{8}{3}} + \|u_n\|)\\ &= C_3\|u_n - u\|_{\frac{8}{3}}\|u_n\|_{\frac{8}{3}}\|v\|_{\frac{8}{3}}(\|u\|_{\frac{8}{3}} + 2\|u_n\|_{\frac{8}{3}}),\end{aligned}$$

ou seja,

$$|DV_2(u_n)v - DV_2(u)v| \leq C_3\|u_n - u\|_{\frac{8}{3}}\|u_n\|_{\frac{8}{3}}\|v\|_{\frac{8}{3}}(\|u\|_{\frac{8}{3}} + 2\|u_n\|_{\frac{8}{3}}). \tag{2.6}$$

Daí, por propriedades do limite e como $u_n \overset{L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)}{\to} u$, inferimos que

$$\begin{aligned}\lim\|DV_2(u_n) - DV_2(u)\|_{L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)'} &= \lim \sup_{\substack{v\in L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)\\ \|v\|_{\frac{8}{3}}=1}} |DV_2(u_n)v - DV_2(u)v|\\ &\leq \lim \sup_{\substack{v\in L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)\\ \|v\|_{\frac{8}{3}}=1}} (C_3\|u_n - u\|_{\frac{8}{3}}\|u_n\|_{\frac{8}{3}}\|v\|_{\frac{8}{3}}(\|u\|_{\frac{8}{3}} + 2\|u_n\|_{\frac{8}{3}}))\\ &= \lim \sup_{\substack{v\in L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)\\ \|v\|_{\frac{8}{3}}=1}} (C_3\|u_n - u\|_{\frac{8}{3}}\|u_n\|_{\frac{8}{3}}(\|u\|_{\frac{8}{3}} + 2\|u_n\|_{\frac{8}{3}}))\\ &= \lim(C_3\|u_n - u\|_{\frac{8}{3}}\|u_n\|_{\frac{8}{3}}(\|u\|_{\frac{8}{3}} + 2\|u_n\|_{\frac{8}{3}}))\\ &= \lim(C_3\|u_n - u\|_{\frac{8}{3}}\|u_n\|_{\frac{8}{3}})\lim(\|u\|_{\frac{8}{3}} + 2\|u_n\|_{\frac{8}{3}})\\ &= C_3\lim\|u_n - u\|_{\frac{8}{3}}\lim\|u_n\|_{\frac{8}{3}}(\lim\|u\|_{\frac{8}{3}} + 2\lim\|u_n\|_{\frac{8}{3}}) = 0,\end{aligned}$$

ou seja $DV_2(u_n) \overset{L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)'}{\to} DV_2(u)$, ou ainda, DV_2 é contínua em $L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)'$.

Dessa forma, pela Proposição F.11, deduzimos que $V_2' = DV_2$ e que V_2' é contínua em $L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)$.

Então, concluímos que V_2 é continuamente diferenciável em $L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)$.

Vamos agora mostrar que V_2 é continuamente diferenciável em X.

Sejam $u, v \in X$ e (u_n) uma sequência em X tal que $u_n \overset{X}{\to} u$. Pela Proposição 2.1.7, inferimos que $X \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)$, ou seja, $u_n \overset{L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)}{\to} u$ e existe $C_4 \in (0, \infty)$ tal que $\|v\|_{\frac{8}{3}} \leq C_4\|v\|_X$.

Por (2.6) e como $\|v\|_{\frac{8}{3}} \leq C_4\|v\|_X$, deduzimos que

$$\begin{aligned}|DV_2(u_n)v - DV_2(u)v| &\leq C_3\|u_n - u\|_{\frac{8}{3}}\|u_n\|_{\frac{8}{3}}\|v\|_{\frac{8}{3}}(\|u\|_{\frac{8}{3}} + 2\|u_n\|_{\frac{8}{3}})\\ &\leq C_3C_4\|u_n - u\|_{\frac{8}{3}}\|u_n\|_{\frac{8}{3}}\|v\|_X(\|u\|_{\frac{8}{3}} + 2\|u_n\|_{\frac{8}{3}}).\end{aligned}$$

Desse modo, por propriedades do limite e como $u_n \overset{L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)}{\to} u$, concluímos que

$$\lim\|DV_2(u_n) - DV_2(u)\|_{X'} = \lim \sup_{\substack{v\in X\\ \|v\|_X=1}} |DV_2(u_n)v - DV_2(u)v|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \lim \sup_{\substack{v \in X \\ \|v\|_X = 1}} \left(C_3 C_4 \|u_n - u\|_{\frac{8}{3}} \|u_n\|_{\frac{8}{3}} \|v\|_X (\|u\|_{\frac{8}{3}} + 2\|u_n\|_{\frac{8}{3}})\right) \\
&= \lim \sup_{\substack{v \in X \\ \|v\|_X = 1}} \left(C_3 C_4 \|u_n - u\|_{\frac{8}{3}} \|u_n\|_{\frac{8}{3}} (\|u\|_{\frac{8}{3}} + 2\|u_n\|_{\frac{8}{3}})\right) \\
&= \lim (C_3 C_4 \|u_n - u\|_{\frac{8}{3}} \|u_n\|_{\frac{8}{3}} (\|u\|_{\frac{8}{3}} + 2\|u_n\|_{\frac{8}{3}})) \\
&= \lim (C_3 C_4 \|u_n - u\|_{\frac{8}{3}} \|u_n\|_{\frac{8}{3}}) \lim (\|u\|_{\frac{8}{3}} + 2\|u_n\|_{\frac{8}{3}}) \\
&= C_3 C_4 \lim \|u_n - u\|_{\frac{8}{3}} \lim \|u_n\|_{\frac{8}{3}} (\lim \|u\|_{\frac{8}{3}} + 2 \lim \|u_n\|_{\frac{8}{3}}) = 0,
\end{aligned}
$$

ou seja $DV_2(u_n) \overset{X'}{\to} DV_2(u)$, ou ainda, DV_2 é contínua em X'.

Então, pela Proposição F.11, inferimos que $V_2' = DV_2$ e que V_2' é contínua em X.

Daí, concluímos que V_2 é continuamente diferenciável em X.

□

Corolário 2.2. *V_0 é continuamente diferenciável em X. Além disso, sejam $u, v \in X$. Então*

$$V_0{}'(u)v = 4 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|) u^2(x) u(y) v(y) \, dx \, dy.$$

Demonstração. O resultado segue imediatamente da definição de V_0 e pelos Lemas 2.2 e 2.3.

□

A seguir, apresentamos o funcional com que iremos trabalhar para encontrar soluções fracas do problema.

Notação. $I : X \to \mathbb{R}; I(u) = \dfrac{1}{2}\|u\|^2 + \dfrac{1}{4} V_0(u) - \dfrac{b}{p}\|u\|_p^p.$

Proposição 2.2.6. *O funcional I está bem definido.*

Demonstração. Como $X \subset H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$, concluímos que a expressão de I está bem definida.

Como todos os termos da expressão de I são finitos, inferimos que o contradomínio de I é apropriado, isto é, $I(u) \in \mathbb{R}$, para todo $u \in X$.

Desse modo, I está bem definido.

□

Como já mostramos que $V_0{}'$ existe, o próximo resultado segue imediatamente.

Corolário 2.3. *O funcional I é continuamente diferenciável em X. Além disso, sejam $u, v \in X$. Então*

$$I'(u)v = \langle u, v \rangle + \frac{1}{4} V_0{}'(u)v - b \int_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2} uv \, dx.$$

Demonstração. Como a derivada de Fréchet é linear, esse resultado é consequência direta de Proposição A.5 (veja página 138), do Corolário 2.2 e Proposição A.6 (veja página 140).

□

Vamos verificar que I é um funcional associado ao problema, isto é, que pontos críticos de I são soluções fracas do problema. Uma solução fraca do problema em questão é $u \in X$ tal que

$$\langle u, v\rangle + \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1 + \frac{1}{|x-y|}\right) u^2(x)u(y)v(y)\,dx\,dy = b\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2}uv\,dx,$$

para todo $v \in X$. Seja $u \in X$ ponto crítico de I e $v \in X$ qualquer. Então

$$\begin{aligned} 0 = I'(u)v &= \langle u, v\rangle + \frac{1}{4}V_0{}'(u)v - b\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2}uv\,dx \\ &= \langle u, v\rangle + \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1 + \frac{1}{|x-y|}\right) u^2(x)u(y)v(y)\,dx\,dy - b\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2}uv\,dx, \end{aligned}$$

portanto,

$$\langle u, v\rangle + \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1 + \frac{1}{|x-y|}\right) u^2(x)u(y)v(y)\,dx\,dy = b\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2}uv\,dx.$$

Mas, como v é arbitrário, essa última expressão é a definição de que u é uma solução fraca do problema.

Observe que, quando avaliado em u, o funcional V_0 é recuperado na expressão de $I'(u)$.

Corolário 2.4. *Seja $u \in X$. Então*

$$I'(u)u = \|u\|^2 + V_0(u) - b\|u\|_p^p.$$

Demonstração. Pelos Corolários 2.2 e 2.3 e pela definição de V_0, concluímos que

$$\begin{aligned} I'(u)u &= \langle u, u\rangle + \frac{1}{4}V_0'(u)u - b\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2}uu\,dx \\ &= \|u\|^2 + \frac{1}{4}4\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)u^2(x)u(y)u(y)\,dx\,dy - b\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2}u^2\,dx \\ &= \|u\|^2 + \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy - b\int_{\mathbb{R}^2} |u|^p\,dx \\ &= \|u\|^2 + V_0(u) - b\|u\|_p. \end{aligned}$$

□

Antes de encerrarmos a seção, vamos mostrar que I é semicontínuo inferiormente em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Para isso, precisaremos do seguinte resultado.

Proposição 2.2.7. *O funcional V_1 é sequencialmente fracamente semicontínuo em $H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Demonstração. Sejam $u \in X$ e (u_n) uma sequência em X tal que $u_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\rightharpoonup} u$.

Seja $R \in (0, \infty)$. Então

$$\begin{aligned} V_1(u_n) &= \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u_n^2(x)u_n^2(y)\,dx\,dy \\ &\geq \int\limits_{B(0,R)}\int\limits_{B(0,R)} \ln(1+|x-y|)u_n^2(x)u_n^2(y)\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Passando lim inf do dois lados e pela Proposição C.1 (veja página 147), concluímos que

$$\begin{aligned} \liminf V_1(u_n) &\geq \liminf \int\limits_{B(0,R)}\int\limits_{B(0,R)} \ln(1+|x-y|)u_n^2(x)u_n^2(y)\,dx\,dy \\ &= \lim \int\limits_{B(0,R)}\int\limits_{B(0,R)} \ln(1+|x-y|)u_n^2(x)u_n^2(y)\,dx\,dy \\ &= \int\limits_{B(0,R)}\int\limits_{B(0,R)} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que

$$\begin{aligned} &\lim_{R\to\infty} \int\limits_{B(0,R)}\int\limits_{B(0,R)} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Suponha por absurdo que existe (R_n) uma sequência em $\mathbb{R}$ monotonamente crescente satisfazendo $R_n \to \infty$ e tal que

$$\begin{aligned} &\lim \int\limits_{B(0,R_n)}\int\limits_{B(0,R_n)} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy \neq \\ &\neq \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Pela definição de integral de Lebesgue em subconjuntos mensuráveis, temos que

$$\begin{aligned} &\int\limits_{B(0,R_n)}\int\limits_{B(0,R_n)} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(x)1_{B(0,R_n)}(x)u^2(y)1_{B(0,R_n)}(y)\,dx\,dy = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} u^2(y)1_{B(0,R_n)}(y) \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(x)1_{B(0,R_n)}(x)\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Seja $y \in \mathbb{R}^2$. Para cada $x \in \mathbb{R}^2$, vale que

$$\ln(1 + |x - y|)u^2(x)1_{B(0,R_n)}(x) \geq 0.$$

Como (R_n) é monotonamente crescente, inferimos que

$$\ln(1 + |x - y|)u^2(x)1_{B(0,R_n)}(x) \leq \ln(1 + |x - y|)u^2(x)1_{B(0,R_{n+1})}(x),$$

e como $R_n \to \infty$, deduzimos que

$$\lim \left(\ln(1 + |x - y|)u^2(x)1_{B(0,R_n)}(x)\right) = \ln(1 + |x - y|)u^2(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Então, pelo Teorema da Convergência Monótona (veja F.3, na página 157), concluímos que

$$\lim \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x - y|)u^2(x)1_{B(0,R_n)}(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x - y|)u^2(x)\, dx. \tag{2.8}$$

Para cada $y \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$u^2(y)1_{B(0,R_n)}(y) \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x - y|)u^2(x)1_{B(0,R_n)}(x)\, dx \geq 0.$$

Como (R_n) é monotonamente crescente, inferimos que

$$\begin{aligned} &u^2(y)1_{B(0,R_n)}(y) \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x - y|)u^2(x)1_{B(0,R_n)}(x)\, dx \leq \\ &\leq u^2(y)1_{B(0,R_n)}(y) \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x - y|)u^2(x)1_{B(0,R_{n+1})}(x)\, dx, \end{aligned}$$

para todo $y \in \mathbb{R}^2$. Por (2.8) e como $R_n \to \infty$, deduzimos que

$$\begin{aligned} &\lim \left(u^2(y)1_{B(0,R_n)}(y) \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x - y|)u^2(x)1_{B(0,R_n)}(x)\, dx \right) = \\ &= \lim \left(u^2(y)1_{B(0,R_n)}(y)\right) \lim \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x - y|)u^2(x)1_{B(0,R_n)}(x)\, dx = \\ &= u^2(y) \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x - y|)u^2(x)\, dx, \end{aligned}$$

para quase todo $y \in \mathbb{R}^2$. Então, pelo Teorema da Convergência Monótona (veja F.3, na página 157), concluímos que

$$\begin{aligned} &\lim \int\limits_{B(0,R_n)} \int\limits_{B(0,R_n)} \ln(1 + |x - y|)u^2(x)u^2(y)\, dx\, dy = \\ &= \lim \int\limits_{\mathbb{R}^2} u^2(y)1_{B(0,R_n)}(y) \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x - y|)u^2(x)1_{B(0,R_n)}(x)\, dx\, dy = \end{aligned}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy,$$

o que é absurdo. Então vale (2.7).

Assim, inferimos que

$$\begin{aligned}
\liminf V_1(u_n) &= \lim_{R\to\infty} \liminf V_1(u_n) \\
&\geq \lim_{R\to\infty} \int\limits_{B(0,R)} \int\limits_{B(0,R)} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy = V_1(u).
\end{aligned}$$

□

Podemos agora mostrar o resultado proposto. Na demonstração do próximo resultado, usamos que V_0 pode ser escrito como uma subtração de termos não negativos $(V_1 - V_2)$. Ressaltamos novamente que esse é o principal motivo de termos introduzido os funcionais auxiliares V_1 e V_2 e que esse tipo de argumento será usado extensivamente nesse trabalho.

Lema 2.4. *O funcional I é sequencialmente semicontínuo inferiormente em $H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Demonstração. Sejam $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e (u_n) uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $u_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\to} u$.

Pelas definições de I e V_0, temos que

$$\begin{aligned}
\liminf I(u_n) &= \liminf \left(\frac{1}{2}\|u_n\|^2 + \frac{1}{4}V_0(u_n) - \frac{b}{p}\|u_n\|_p^p \right) \\
&= \liminf \left(\frac{1}{2}\|u_n\|^2 + \frac{1}{4}(V_1(u_n) - V_2(u_n)) - \frac{b}{p}\|u_n\|_p^p \right).
\end{aligned}$$

Pela superaditividade e linearidade para constantes positivas do $\liminf$, concluímos que

$$\begin{aligned}
&\liminf I(u_n) = \liminf \left(\frac{1}{2}\|u_n\|^2 + \frac{1}{4}(V_1(u_n) - V_2(u_n)) - \frac{b}{p}\|u_n\|_p^p \right) \\
&\geq \liminf \left(\frac{1}{2}\|u_n\|^2 \right) + \liminf \left(\frac{1}{4}(V_1(u_n) - V_2(u_n)) \right) + \liminf \left(-\frac{b}{p}\|u_n\|_p^p \right) = \\
&= \frac{1}{2}\liminf\|u_n\|^2 + \frac{1}{4}\liminf(V_1(u_n) - V_2(u_n)) + \frac{b}{p}\liminf(-\|u_n\|_p^p) \geq \\
&\geq \frac{1}{2}\liminf\|u_n\|^2 + \frac{1}{4}(\liminf V_1(u_n) + \liminf(-V_2(u_n))) + \frac{b}{p}\liminf(-\|u_n\|_p^p).
\end{aligned}$$

Pela hipótese de que $u_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\to} u$, inferimos que

$$\begin{aligned}
&\liminf I(u_n) \geq \\
&\geq \frac{1}{2}\liminf\|u_n\|^2 + \frac{1}{4}(\liminf V_1(u_n) + \liminf(-V_2(u_n))) + \frac{b}{p}\liminf(-\|u_n\|_p^p) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\lim\|u_n\|^2 + \frac{1}{4}(\liminf V_1(u_n) + \liminf(-V_2(u_n))) + \frac{b}{p}\liminf(-\|u_n\|_p^p) = \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}(\liminf V_1(u_n) + \liminf(-V_2(u_n))) + \frac{b}{p}\liminf(-\|u_n\|_p^p).
\end{aligned}
$$

Como $u_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\to} u$, deduzimos que $u_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\rightharpoonup} u$. Daí e pela Proposição 2.2.7, concluímos que $\liminf V_1(u_n) \geq V_1(u)$. Daí, inferimos que

$$
\begin{aligned}
\liminf I(u_n) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}(\liminf V_1(u_n) + \liminf(-V_2(u_n))) + \frac{b}{p}\liminf(-\|u_n\|_p^p) \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}(V_1(u) + \liminf(-V_2(u_n))) + \frac{b}{p}\liminf(-\|u_n\|_p^p).
\end{aligned}
$$

Como $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)$, deduzimos que $u_n \overset{L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)}{\to} u$. Disso e pelo Lema 2.3, concluímos que $\lim V_2(u_n) = V_2(u)$. Dessa forma, inferimos que

$$
\begin{aligned}
\liminf I(u_n) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}(V_1(u) + \liminf(-V_2(u_n))) + \frac{b}{p}\liminf(-\|u_n\|_p^p) \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}(V_1(u) + \lim(-V_2(u_n))) + \frac{b}{p}\liminf(-\|u_n\|_p^p) \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}(V_1(u) - V_2(u)) + \frac{b}{p}\liminf(-\|u_n\|_p^p).
\end{aligned}
$$

Como $p \geq 4$, deduzimos que $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$. Então, concluímos que $u_n \overset{L^p(\mathbb{R}^2)}{\to} u$. Desse modo, inferimos que $\lim\|u_n\|_p = \|u\|_p$. Assim, deduzimos que

$$
\begin{aligned}
\liminf I(u_n) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}(V_1(u) - V_2(u)) + \frac{b}{p}\liminf(-\|u_n\|_p^p) \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}(V_1(u) - V_2(u)) + \frac{b}{p}\lim(-\|u_n\|_p^p) \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}(V_1(u) - V_2(u)) - \frac{b}{p}\|u\|_p^p.
\end{aligned}
$$

□

2.3 A geometria do funcional

O próximo resultado é conhecido na literatura como a primeira geometria do passo da montanha.

Lema 2.5. *Existe* $R \in (0, \infty)$ *tal que se* $r \in (0, R]$ *então* $\inf_{\|u\|=r} I(u) > 0$ *e* $\inf_{\|u\|=r} I'(u)u > 0$.

Demonstração. Seja $u \in X$. Pelas definições de I e V_0, temos que

$$
\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}V_0(u) - \frac{b}{p}\|u\|_p^p \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}(V_1(u) - V_2(u)) - \frac{b}{p}\|u\|_p^p.
\end{aligned}
$$

Como V_1 é um funcional não negativo, concluímos que

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}(V_1(u) - V_2(u)) - \frac{b}{p}\|u\|_p^p \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{4}V_2(u) - \frac{b}{p}\|u\|_p^p. \end{aligned}$$

Como $X \subset H^1(\mathbb{R}^2) \subset L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)$, inferimos, pelo Corolário 2.1, que existe $C_1 \in (0, \infty)$ tal que $V_2(u) \leq C_1\|u\|_{L^{\frac{8}{3}}}^4$. Substituindo na expressão, deduzimos que

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{4}V_2(u) - \frac{b}{p}\|u\|_p^p \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{C_1}{4}\|u\|_{\frac{8}{3}}^4 - \frac{b}{p}\|u\|_p^p. \end{aligned}$$

Como $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)$, concluímos que existe $C_2 \in (0, \infty)$ tal que $\|u\|_{\frac{8}{3}} \leq C_2\|u\|$. Daí, inferimos que

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{C_1}{4}\|u\|_{\frac{8}{3}}^4 - \frac{b}{p}\|u\|_p^p \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{C_1C_2^4}{4}\|u\|^4 - \frac{b}{p}\|u\|_p^p. \end{aligned}$$

Como $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$, deduzimos que existe $C_3 \in (0, \infty)$ tal que $\|u\|_p \leq C_3\|u\|$. Dessa forma, concluímos que

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{C_1C_2^4}{4}\|u\|^4 - \frac{b}{p}\|u\|_p^p \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{C_1C_2^4}{4}\|u\|^4 - \frac{bC_3^p}{p}\|u\|^p. \end{aligned}$$

Colocando termos similares em evidência inferimos que

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{C_1C_2^4}{4}\|u\|^4 - \frac{bC_3^p}{p}\|u\|^p \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{C_1C_2^4}{4}\|u\|^4 - \frac{2bC_3^p}{2p}\|u\|^p \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2\left(1 - \frac{C_1C_2^4}{2}\|u\|^2 - \frac{2bC_3^p}{p}\|u\|^{p-2}\right). \end{aligned}$$

Defina $R_1 := \min\left\{\left(\frac{1}{2C_1C_2^4}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{p}{8bC_3^p}\right)^{\frac{1}{p-2}}\right\}$ e sejam $r \in (0, R_1)$ e $u \in X$ satisfazendo $\|u\| = r$.

Então, deduzimos que

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2\left(1 - \frac{C_1C_2^4}{2}\|u\|^2 - \frac{2bC_3^p}{p}\|u\|^{p-2}\right) \\ &= \frac{1}{2}r^2\left(1 - \frac{C_1C_2^4}{2}r^2 - \frac{2bC_3^p}{p}r^{p-2}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&> \frac{1}{2}r^2\left(1-\frac{C_1C_2^4}{2}R_1^2-\frac{2bC_3^p}{p}R_1^{p-2}\right)\\
&\geq \frac{1}{2}r^2\left(1-\frac{C_1C_2^4}{2}\left(\left(\frac{1}{2C_1C_2^4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2-\frac{2bC_3^p}{p}\left(\left(\frac{p}{8bC_3^p}\right)^{\frac{1}{p-2}}\right)^{p-2}\right)\\
&= \frac{1}{2}r^2\left(1-\frac{C_1C_2^4}{2}\frac{1}{2C_1C_2^4}-\frac{2bC_3^p}{p}\frac{p}{8bC_3^p}\right)\\
&= \frac{1}{2}r^2\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}r^2>0,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\inf_{\|u\|=r} I(u) \geq \frac{1}{4}r^2 > 0.$$

Pelo Corolário 2.4, concluímos que

$$I'(u)u = \|u\|^2 + V_0(u) - b\|u\|_p^p.$$

Pela definição de V_0, temos que

$$
\begin{aligned}
I'(u)u &= \|u\|^2 + V_0(u) - b\|u\|_p^p\\
&= \|u\|^2 + V_1(u) - V_2(u) - b\|u\|_p^p.
\end{aligned}
$$

Como $V_1(u)$ é não negativo, inferimos que

$$
\begin{aligned}
I'(u)u &= \|u\|^2 + V_1(u) - V_2(u) - b\|u\|_p^p\\
&\geq \|u\|^2 - V_2(u) - b\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)^p}.
\end{aligned}
$$

Pelas desigualdades envolvendo C_1, C_2 e C_3 acima e colocando termos similares em evidência, deduzimos que

$$
\begin{aligned}
I'(u)u &\geq \|u\|^2 - V_2(u) - b\|u\|_p^p\\
&\geq \|u\|^2 - C_1C_2^4\|u\|^4 - bC_3^p\|u\|^p\\
&\geq \|u\|^2(1 - C_1C_2^4\|u\|^2 - bC_3^p\|u\|^{p-2}).
\end{aligned}
$$

Defina $R_2 := \min\left\{\left(\frac{1}{4C_1C_2^4}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{1}{4bC_3^p}\right)^{\frac{1}{p-2}}\right\}$ e sejam $r \in (0, R_2)$ e $u \in X$ satisfazendo $\|u\| = r$.

Desse modo, concluímos que

$$
\begin{aligned}
I'(u)u &\geq \|u\|^2(1 - C_1C_2^4\|u\|^2 - bC_3^p\|u\|^{p-2})\\
&= r^2(1 - C_1C_2^4r^2 - bC_3^pr^{p-2})\\
&> r^2(1 - C_1C_2^4R_2^2 - bC_3^pR_2^{p-2})\\
&\geq r^2\left(1 - C_1C_2^4\left(\left(\frac{1}{4C_1C_2^4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 - bC_3^p\left(\left(\frac{1}{4bC_3^p}\right)^{\frac{1}{p-2}}\right)^{p-2}\right)\\
&= r^2(1 - C_1C_2^4\frac{1}{4C_1C_2^4} - bC_3^p\frac{1}{4bC_3^p})
\end{aligned}
$$

$$= r^2\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}r^2 > 0,$$

ou seja,

$$\inf_{\|u\|=r} I'(u)u \geq \frac{1}{2}r^2 > 0.$$

Basta então escolher $R \coloneqq \min\{R_1, R_2\}$.

□

Para continuarmos a falar da geometria de I, introduziremos o conceito de fibração.

Notação. *Seja* $u \in X \setminus \{0\}$. *Chamaremos a função* $\phi_u : (0,\infty) \to \mathbb{R}; \phi_u(t) = I(tu)$ *de* fibração de I em u.

Proposição 2.3.1. *Seja* $u \in X \setminus \{0\}$. *Então*

$$\begin{aligned}
\phi_u(t) &= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{t^4}{4}V_0(u) - \frac{bt^p}{p}\|u\|_p^p,\\
{\phi_u}'(t) &= t\|u\|^2 + t^3V_0(u) - bt^{p-1}\|u\|_p^p,\\
{\phi_u}'(t) &= I'(tu)(u).
\end{aligned}$$

Além disso, tanto ϕ_u *quanto* ${\phi_u}'$ *são funções contínuas.*

Demonstração. Pela definição de I, por propriedades da norma e como $t \in (0,\infty)$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\phi_u(t) = I(tu) &= \frac{1}{2}\|tu\|^2 + \frac{1}{4}V_0(tu) - \frac{b}{p}\|tu\|_p^p\\
&= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}V_0(tu) - \frac{b|t|^p}{p}\|u\|_p^p\\
&= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}V_0(tu) - \frac{bt^p}{p}\|u\|_p^p.
\end{aligned}$$

Pela definição de V_0 e pela linearidade da integral, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\phi_u(t) &= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}V_0(tu) - \frac{bt^p}{p}\|u\|_p^p\\
&= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)(tu)^2(x)(tu)^2(y)\,dx\,dy - \frac{bt^p}{p}\|u\|_p^p\\
&= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{t^4}{4}\int\limits_{R^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy - \frac{bt^p}{p}\|u\|_p^p\\
&= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{t^4}{4}V_0(u) - \frac{bt^p}{p}\|u\|_p^p.
\end{aligned}$$

Derivando a expressão obtida acima com respeito à t, obtemos

$${\phi_u}'(t) = t\|u\|^2 + t^3V_0(u) - bt^{p-1}\|u\|_p^p.$$

Por outro lado, derivando ϕ_u usando a regra da cadeia, temos que

$$\phi_u{}'(t) = I'(tu)(u).$$

Além disso, como $\|u\|^2, V_0(u)$ e $\|u\|_p^p$ são constantes e todos os expoentes são maiores que 1, concluímos que tanto ϕ_u quanto $\phi_u{}'$ são funções polinomiais e, portanto, contínuas.

$\square$

O próximo resultado trata do comportamento de ϕ'_u.

Lema 2.6. *Seja $u \in X \setminus \{0\}$. Então uma, e apenas uma, das afirmações abaixo é verdadeira:*

(i) Existe um único $t'_u \in (0, \infty)$ tal que $\phi'_u(t'_u) = 0$, $\phi'_u(t) > 0$ se $t \in (0, t'_u)$ e $\phi'_u(t) < 0$ se $t \in (t'_u, \infty)$. Além disso, $\lim\limits_{t\to\infty} \phi_u(t) = -\infty$.

(ii) A função ϕ'_u é positiva e monotonamente crescente. Além disso, $\lim\limits_{t\to\infty} \phi_u(t) = +\infty$.

Além disso, o item (i) do Lema 2.6 vale se, e somente se,

$$p > 4 \text{ e } b > 0 \tag{2.9}$$
$$\text{ou}$$
$$p > 4, b = 0 \text{ e } V_0(u) < 0 \tag{2.10}$$
$$\text{ou}$$
$$p = 4 \text{ e } V_0(u) - b\|u\|_p^p < 0. \tag{2.11}$$

Demonstração. Observe que os itens (i) e (ii) são disjuntos, isso é, eles não podem ocorrer simultaneamente.

Vamos primeiro mostrar que se alguma das hipóteses (2.9) a (2.11) é válida, então o item (i) ocorre.

Vamos então supor que vale (2.9).

Pela Proposição 2.3.1, pela definição de V_0 e como V_1 é não negativo, concluímos que

$$\begin{aligned}
\phi_u{}'(t) &= t\|u\|^2 + t^3 V_0(u) - bt|t|^{p-2}\|u\|_p^p \\
&= t\|u\|^2 + t^3(V_1(u) - V_2(u)) - bt|t|^{p-2}\|u\|_p^p \\
&\geq t\|u\|^2 - t^3 V_2(u) - bt|t|^{p-2}\|u\|_p^p.
\end{aligned}$$

Pelo Corolário 2.1, inferimos que existe $C_1 \in (0, \infty)$ tal que

$$\begin{aligned}
\phi'_u(t) &\geq t\|u\|^2 - t^3 V_2(u) - bt|t|^{p-2}\|u\|_p^p \\
&\geq t\|u\|^2 - C_1 t^3 \|u\|_{\frac{8}{3}}^4 - bt|t|^{p-2}\|u\|_p^p.
\end{aligned}$$

Pela Proposição 2.1.7, deduzimos que $X \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)$, ou seja, existe $C_2 \in (0, \infty)$ tal que $\|u\|_{\frac{8}{3}} \leq C_2\|u\|$. Assim, concluímos que

$$\phi'_u(t) \geq t\|u\|^2 - C_1 t^3 \|u\|_{\frac{8}{3}}^4 - bt|t|^{p-2}\|u\|_p^p$$

$$\geq t\|u\|^2 - C_1C_2^4t^3\|u\|^4 - bt|t|^{p-2}\|u\|_p^p.$$

Como $p > 4$, inferimos que $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$, ou seja, existe $C_3 \in (0, \infty)$ tal que $\|u\|_p \leq C_3\|u\|$. Daí, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\phi_u'(t) &\geq t\|u\|^2 - C_1C_2^4t^3\|u\|^4 - bt|t|^{p-2}\|u\|_p^p \\
&\geq t\|u\|^2 - C_1C_2^4t^3\|u\|^4 - bC_3^pt|t|^{p-2}\|u\|^p \\
&= t\|u\|^2(1 - C_1C_2^4t^2\|u\|^2 - bC_3^p|t|^{p-2}\|u\|^{p-2}).
\end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que se t estiver próximo o suficiente de 0 então ${\phi_u}'(t) \geq 0$.

Como $p > 4$, segue que $p - 1 > 3 > 1$. Dessa forma, quando $t \in (0, \infty)$ inferimos que

$$\phi_u'(t) = t\|u\|^2 + t^3V_0(u) - bt|t|^{p-2}\|u\|_p^p = t\|u\|^2 + t^3V_0(u) - bt^{p-1}\|u\|_p^p$$

.

é uma função polinomial com maior expoente t^{p-1}, pois $b \neq 0$. Como $b > 0$ e $\|u\|_p > 0$ (lembre que na definição de ϕ_u tomamos $u \neq 0$), segue que $-b\|u\|_p^p < 0$, que é o coeficiente do maior expoente. Como o coeficiente do maior expoente é negativo, deduzimos que $\lim_{t\to\infty} \phi_u'(t) = -\infty$.

Como ${\phi_u}'$ é contínua e $(0, \infty)$ é conexo, concluímos, pelo Teorema do Valor Intermediário, que existe $t_u' \in (0, \infty)$ tal que ${\phi_u}'(t_u') = 0$.

Vamos agora mostrar que tal t_u' é único. Pela Proposição 2.3.1 e como $t \in (0, \infty)$, inferimos que

$$\begin{aligned}
{\phi_u}'(t) &= t\|u\|^2 + t^3V_0(u) - bt|t|^{p-2}\|u\|_p^p \\
&= t\|u\|^2 + t^3V_0(u) - bt^{p-1}\|u\|_p^p,
\end{aligned}$$

isto é,

$${\phi_u}'(t) = t^3\left(\frac{\|u\|^2}{t^2} + V_0(u) - bt^{p-4}\|u\|_p^p\right).$$

Como $p > 4$, deduzimos que $p - 4 > 0$. Como u está fixado e é não nulo e b é não nulo, concluímos que $bt^{p-4}\|u\|_p^p$ é uma função crescente. Então, $-bt^{p-4}\|u\|_p^p$ é uma função decrescente. Além disso, como $\dfrac{1}{t^3}$ e $\dfrac{1}{t^2}$ são funções decrescentes, inferimos que $\left(\dfrac{\|u\|^2}{t^2} + V_0(u) - bt^{p-4}\|u\|_p^p\right)$ é uma função decrescente e, portanto, só pode se anular uma vez. Como $t > 0$, temos que ϕ_u' também só pode se anular uma vez. Portanto, t_u' é único.

Como, para t próximo o suficiente de 0, ${\phi_u}'(t) \geq 0$ e, além disso, $\lim_{t\to\infty} \phi_u'(t) = -\infty$, temos que $\phi_u'(t) > 0$ se $t \in (0, t_u')$ e $\phi_u'(t) < 0$ se $t \in (t_u', \infty)$.

Além disso, por Proposição 2.3.1, temos que

$$\phi_u(t) = \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{t^4}{4}V_0(u) - \frac{bt^p}{p}\|u\|_p^p.$$

Como $b > 0$ e $p > 4$, temos que a expressão acima é um polinômio cujo termo de maior expoente (p) tem coeficiente $(-\dfrac{b}{p}\|u\|_p^p)$ negativo. Logo, $\lim_{t\to\infty} \phi_u(t) = -\infty$.

Suponha agora que vale (2.10). Pela Proposição 2.3.1 e como $b = 0$, deduzimos que

$$\begin{aligned}\phi_u{}'(t) &= t\|u\|^2 + t^3V_0(u) - bt|t|^{p-2}\|u\|_p^p \\ &= t\|u\|^2 + t^3V_0(u) = t(\|u\|^2 + t^2V_0(u)).\end{aligned}$$

Como $t \neq 0$, concluímos que a expressão acima se anula para, e somente para,

$$t'_u = \sqrt{-\frac{\|u\|^2}{V_0(u)}}.$$

Como $\|u\| > 0$ e, por hipótese, $V_0(u) < 0$, inferimos que o valor acima está bem definido. Além disso, como supomos que $t > 0$, ele também é único.

Como $V_0(u) < 0$, temos que $\lim\limits_{t\to\infty} \phi_u{}'(t) = -\infty$ e como $\|u\|^2 > 0$ (pois $t > 0$), temos que, para t pequeno o suficiente, $\phi_u{}'(t) \geq 0$. Então $\phi'_u(t) > 0$ se $t \in (0, t'_u)$ e $\phi'_u(t) < 0$ se $t \in (t'_u, \infty)$.

Além disso, por Proposição 2.3.1 e como $b = 0$, temos que

$$\begin{aligned}\phi_u(t) &= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{t^4}{4}V_0(u) - \frac{bt^p}{p}\|u\|_p^p \\ &= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{t^4}{4}V_0(u).\end{aligned}$$

Como $V_0(u) < 0$, temos que a expressão acima é um polinômio cujo termo de maior expoente (4) tem coeficiente $(\frac{1}{4}V_0(u))$ negativo. Logo, $\lim\limits_{t\to\infty} \phi_u(t) = -\infty$.

Por fim, suponha que (2.11). Pela Proposição 2.3.1 e como $p = 4$, deduzimos que

$$\begin{aligned}\phi_u{}'(t) &= t\|u\|^2 + t^3V_0(u) - bt|t|^{p-2}\|u\|_p^p \\ &= t\|u\|^2 + t^3V_0(u) - bt|t|^2\|u\|_p^p \\ &= t\|u\|^2 + t^3V_0(u) - bt^3\|u\|_p^p \\ &= t\|u\|^2 + t^3(V_0(u) - b\|u\|_p^p) \\ &= t(\|u\|^2 + t^2(V_0(u) - b\|u\|_p^p)).\end{aligned}$$

Como $t \neq 0$, concluímos que a expressão acima se anula para, e somente para,

$$t'_u = \sqrt{-\frac{\|u\|^2}{V_0(u) - b\|u\|_p^p}}.$$

Como $\|u\| > 0$ e, por hipótese, $V_0(u) - b\|u\|_p^p < 0$, inferimos que o valor acima está bem definido. Além disso, como supomos que $t > 0$, ele também é único.

Como $V_0(u) - b\|u\|_p^p < 0$, temos que $\lim\limits_{t\to\infty} \phi_u{}'(t) = -\infty$ e como $\|u\|^2 > 0$ (pois $t > 0$), temos que, para t pequeno o suficiente, $\phi_u{}'(t) \geq 0$. Então $\phi'_u(t) > 0$ se $t \in (0, t'_u)$ e $\phi'_u(t) < 0$ se $t \in (t'_u, \infty)$.

Além disso, por Proposição 2.3.1 e como $p = 4$, temos que

$$\phi_u(t) = \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{t^4}{4}V_0(u) - \frac{bt^p}{p}\|u\|_p^p$$

$$= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{t^4}{4}(V_0(u) - b\|u\|_p^p).$$

Como $V_0(u) - b\|u\|_p^p < 0$, temos que a expressão acima é um polinômio cujo termo de maior expoente (4) tem coeficiente ($\frac{1}{4}(V_0(u) - b\|u\|_p^p)$) negativo. Logo, $\lim_{t\to\infty} \phi_u(t) = -\infty$.

Vamos agora mostrar que se nenhuma das hipóteses (2.9) a (2.11) é válida, então o item (ii) ocorre.

Suponha que não valem (2.9), (2.10) e (2.11). Então ou $p > 4$, $b = 0$ e $V_0(u) \geq 0$ ou $p = 4$ e $V_0(u) - b\|u\|_p^p > 0$.

Vamos supor primeiro que $p > 4$, $b = 0$ e $V_0(u) \geq 0$. Nesse caso, como $b = 0$ e por pela Proposição 2.3.1, temos que

$$\begin{aligned}
{\phi_u}'(t) &= t\|u\|^2 + t^3 V_0(u) - bt|t|^{p-2}\|u\|_p^p \\
&= t\|u\|^2 + t^3 V_0(u).
\end{aligned}$$

Como $\|u\|^2 > 0$ (pois $t > 0$) e $V_0(u) \geq 0$ temos que o polinômio acima é estritamente crescente. Como só estamos considerando $t > 0$, a função ${\phi_u}'$ também é sempre positiva.

Além disso, por Proposição 2.3.1 e como $b = 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\phi_u(t) &= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{t^4}{4}V_0(u) - \frac{bt^p}{p}\|u\|_p^p \\
&= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{t^4}{4}V_0(u).
\end{aligned}$$

Se $V_0(u) > 0$, temos que a expressão acima é um polinômio cujo termo de maior expoente (4) tem coeficiente ($\frac{V_0(u)}{4}$) positivo. Logo, $\lim_{t\to\infty} \phi_u(t) = +\infty$. Caso contrário, como $V_0(u) \geq 0$ por hipótese, temos que $V_0(u) = 0$. Daí, a expressão acima é um polinômio cujo termo de maior expoente (2) tem coeficiente ($\frac{1}{2}\|u\|^2$) positivo e $\lim_{t\to\infty} \phi_u(t) = +\infty$ do mesmo jeito.

Já se $V_0(u) - b\|u\|_p^p \geq 0$ deduzimos, pela Proposição 2.3.1 e como $p = 4$, que

$$\begin{aligned}
{\phi_u}'(t) &= t\|u\|^2 + t^3 V_0(u) - bt|t|^{p-2}\|u\|_p^p \\
&= t\|u\|^2 + t^3 V_0(u) - bt|t|^2\|u\|_p^p \\
&= t\|u\|^2 + t^3 V_0(u) - bt^3\|u\|_p^p \\
&= t\|u\|^2 + t^3(V_0(u) - b\|u\|_p^p).
\end{aligned}$$

Como $\|u\|^2 > 0$ (pois $t > 0$) e $V_0(u) - b\|u\|_p^p \geq 0$, temos que o polinômio acima é estritamente crescente. Como só estamos considerando $t > 0$, a função ${\phi_u}'$ também é sempre positiva.

Além disso, por Proposição 2.3.1 e como $p = 4$, temos que

$$\begin{aligned}
\phi_u(t) &= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{t^4}{4}V_0(u) - \frac{bt^p}{p}\|u\|_p^p \\
&= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{t^4}{4}(V_0(u) - b\|u\|_p^p).
\end{aligned}$$

Se $V_0(u) - b\|u\|_p^p > 0$, temos que a expressão acima é um polinômio cujo termo de maior expoente (4) tem coeficiente $(\frac{1}{4}(V_0(u) - b\|u\|_p^p))$ positivo. Logo, $\lim_{t\to\infty} \phi_u(t) = +\infty$. Caso contrário, como $V_0(u) - b\|u\|_p^p \geq 0$ por hipótese, temos que $V_0(u) - b\|u\|_p^p = 0$. Daí, a expressão acima é um polinômio cujo termo de maior expoente (2) tem coeficiente $(\frac{1}{2}\|u\|^2)$ positivo e $\lim_{t\to\infty} \phi_u(t) = +\infty$ do mesmo jeito.

□

O resultado acima descreveu o comportamento de ϕ_u'. O próximo corolário descreve a função ϕ_u.

Corolário 2.5. *Seja $u \in X \setminus \{0\}$. Então uma, e apenas uma, das afirmações abaixo é verdadeira:*

(i) Existe um único $t_u \in (0, \infty)$ tal que $\phi_u(t_u) = 0$, $\phi_u(t) > 0$ se $t \in (0, t_u)$ e $\phi_u(t) < 0$ se $t \in (t_u, \infty)$. Além disso, t_u' é ponto de máximo global de ϕ_u.

(ii) A função ϕ_u é positiva e monotonamente crescente.

Além disso, o item (i) vale se, e somente se, algumas das condições (2.9) *a* (2.11) *é satisfeita.*

Demonstração. Observe que os itens (i) e (ii) são disjuntos, isso é, eles não podem ocorrer simultaneamente.

Observe também que, como I é contínua em X e $I(0) = 0$, deduzimos, pela definição de ϕ, que $\lim_{t\to 0} \phi_u(t) = \lim_{t\to 0} I(tu) = I(0) = 0$.

Vamos primeiro mostrar que se alguma das hipóteses (2.9) a (2.11) é válida, então o item (i) ocorre.

Suponha que algumas das condições (2.9) a (2.11) é válida. Então, pelo Lema 2.6, ϕ_u satisfaz as condições descritas no item (i) do Lema 2.6.

Então, existe $t_u' \in (0, \infty)$ tal que ${\phi_u}'(t) > 0$, para todo $t \in (0, t_u')$. Daí, como sua derivada é sempre positiva em $(0, t_u')$, concluímos que ϕ_u é estritamente crescente lá. Como $\lim_{t\to 0} \phi_u(t) = 0$, concluímos que $\phi_u(t_u') > 0$.

Daí e como, pelo item (i) do Lema 2.6, $\lim_{t\to\infty} \phi_u(t) = -\infty$, deduzimos, pelo teorema do valor intermediário, que existe $t_u \in (t_u', \infty)$ (como $t_u' > 0$, inferimos que $t_u > 0$) tal que $\phi_u(t_u) = 0$.

Além disso, ainda pelo item (i) do Lema 2.6, deduzimos que ${\phi_u}'(t) < 0$, para todo $t \in (t_u', \infty)$. Então, concluímos que ϕ_u é estritamente decrescente em (t_u', ∞). Ou seja, ϕ_u é injetiva em (t_u', ∞). Logo, t_u é único.

Então o item (i) segue do fato de ϕ_u ser contínua, ter um único 0 e assumir algum valor positivo antes desse 0 e algum valor negativo depois desse 0.

Suponha agora que nenhuma das hipóteses (2.9) a (2.11) é válida. Então, pelo Lema 2.6, ϕ_u satisfaz as condições descritas no item (ii) do Lema 2.6.

Então, ϕ_u' é uma função positiva. Logo, ϕ_u é monotonamente crescente. Como $\lim_{t\to 0} \phi_u(t) = 0$, concluímos que ϕ_u é uma função positiva.

□

Mantendo a notação acima, a função t_u é contínua, como mostra o próximo resultado.

Proposição 2.3.2. *O mapa que associa a cada $u \in X \setminus \{0\}$ que satisfaz o item (i) do Corolário 2.5 o valor t_u é contínuo.*

Demonstração. Seja $u \in X \setminus \{0\}$ satisfazendo o item (i) do Corolário 2.5.

Seja (u_n) uma sequência em $X \setminus \{0\}$ tal que u_n satisfaz o item (i) do Corolário 2.5 e $u_n \overset{X}{\to} u$.

Suponha por absurdo que (t_{u_n}) não é limitada. Então existe uma subsequência de (u_n) (que ainda chamaremos de (u_n)) tal que $t_{u_n} \to \infty$ monotonamente.

Como, pelo item (i) do Lema 2.6, $\lim_{t\to\infty} \phi_u t = -\infty$, concluímos que existe $t_{neg} \in (0, \infty)$ tal que $\phi_u(t_{neg}) < 0$. Pela definição de ϕ e pelo Corolário 2.3, inferimos que $\lim \phi_{u_n}(t_{neg}) = \lim I(t_{neg}u_n) = I(t_{neg}u) = \phi_u(t_{neg})$, ou seja, $\phi_{u_n}(t_{neg}) \to \phi_u(t_{neg})$.

Como $t_{u_n} \to \infty$ monotonamente, deduzimos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_{u_n} > t_{neg}$ sempre que $n \in \mathbb{N}$ satisfaz $n \geq n_0$. Pelo item (i) do Lema 2.6 e pelas definições de t_{u_n} e de ϕ, concluímos que $\phi_{u_n}(t_{neg}) > 0$, sempre que $n \in \mathbb{N}$ satisfaz $n \geq n_0$.

Então, temos que $0 \leq \lim \phi_{u_n}(t_{neg}) = \phi_u(t_{neg}) < 0$, o que é absurdo. Desse modo, temos que (t_{u_n}) é limitada.

Considere uma subsequência de (t_{u_n}). Como a sequência original é limitada, a subsequência também o é. Assim, temos que existem $t_0 \in (0, \infty)$ e uma subsequência da subsequência de (t_{u_n}) (que ainda chamaremos de (t_{u_n})) tal que $t_{u_n} \to t_0$.

Daí, inferimos que

$$\begin{aligned} 0 \geq \|t_{u_n}u_n - t_0u\|_X &= \|t_{u_n}u_n - t_0u_n + t_0u_n - t_0u\|_X \\ &\leq \|t_{u_n}u_n - t_0u_n\|_X + \|t_0u_n - t_0u\|_X \\ &= \|(t_{u_n} - t_0)u_n\|_X + \|t_0(u_n - u)\|_X \\ &= |t_{u_n} - t_0|\|u_n\|_X + |t_0|\|u_n - u\|_X \to 0, \end{aligned}$$

pois (u_n) é limitada. Dessa forma, pelo Teorema do Confronto, deduzimos que $t_{u_n}u_n \overset{X}{\to} t_0u$.

Pelo Corolário 2.3, concluímos que $\lim I(t_{u_n}u_n) \to I(t_0u)$. Por outro lado, pela definição de t_{u_n}, inferimos que $I(t_{u_n}u_n) = 0$. Então, deduzimos que $I(t_0u) = 0$. Como u satisfaz o item (i) do Corolário 2.5 e pelo Corolário 2.5, concluímos que $t_0 = t_u$. Desse modo, inferimos que toda subsequência de (t_{u_n}) possui uma subsequência que converge para t_u. Assim, deduzimos que $t_{u_n} \to t_u$. Logo, o mapa é contínuo.

□

Associamos á I a variedade a seguir.

Notação. *Denominamos por* variedade de Nehari *o conjunto*

$$\mathcal{N} \coloneqq \{u \in X \setminus \{0\} \mid I'(u)u = 0\}.$$

Observe que todos os pontos críticos de I estão em $\mathcal{N}$. Os dois próximos resultados estabelecem propriedades dos elementos de $\mathcal{N}$.

Proposição 2.3.3. *Seja $u \in X \setminus \{0\}$ satisfazendo o item (i) do Lema 2.6. Então $t'_u u \in \mathcal{N}$. Além disso, $\sup_{t\in(0,\infty)} I(tu) = I(t'_u u)$.*

Demonstração. Como u satisfaz item (i) do Lema 2.6, concluímos, pelo Lema 2.6, que existe $t'_u \in (0,\infty)$ tal que ${\phi_u}'(t'_u) = 0$. Assim, pela linearidade de $I'(t'_u u)$ e pela Proposição 2.3.1, deduzimos que

$$I'(t'_u u)(t'_u u) = t'_u I'(t'_u u)(u) = t'_u {\phi_u}'(t'_u) = 0,$$

isto é, $t'_u u \in \mathcal{N}$, pela definição de $\mathcal{N}$.

Além disso, pelo item (i) do Lema 2.6, concluímos que ${\phi_u}'(t) > 0$ se $t \in (0, t'_u)$ e ${\phi_u}'(t) < 0$ se $t \in (t'_u, \infty)$. Daí, inferimos que t'_u é ponto de máximo global de ϕ. Daí e pela Proposição 2.3.1, deduzimos que

$$\sup_{t\in(0,\infty)} I(tu) = \sup_{t\in(0,\infty)} \phi_u(t) = \phi(t'_u u) = I(t'_u u).$$

□

Corolário 2.6. *Seja $u \in \mathcal{N}$. Então* $\sup_{t\in(0,\infty)} I(tu) = I(u)$.

Demonstração. Como $u \in \mathcal{N}$ e, pela Proposição 2.3.1, $\phi'_u(t) = I'(tu)(u)$, concluímos que $\phi'_u(1) = I'(u)u = 0$. Pelo Lema 2.6, inferimos que ${\phi_u}'(t) > 0$ se $t \in (0,1)$ e ${\phi_u}'(t) < 0$ se $t \in (1,\infty)$. Dessa forma, deduzimos que 1 é ponto de máximo global de ϕ. Daí e pela Proposição 2.3.1, concluímos que

$$\sup_{t\in(0,\infty)} I(tu) = \sup_{t\in(0,\infty)} \phi_u(t) = \phi(u) = I(u).$$

□

Os conjuntos a seguir nos ajudarão a entender melhor a variedade de Nehari.

Notação. *Considere os conjuntos* $\mathcal{N}^+ := \{u \in X \mid I'(u)u > 0\}$ *e* $\mathcal{N}^- := \{u \in X \mid I'(u)u < 0\}$.

Observe que, por construção, $X = \{0\} \cup \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N} \cup \mathcal{N}^-$ e esses conjuntos são dois a dois disjuntos. Dissemos que eles ajudarão a entender $\mathcal{N}$ pois a variedade de Nehari é a fronteira entre elas, que é o que mostraremos a seguir.

Proposição 2.3.4. *As seguintes igualdades são verdadeiras:* $\partial\mathcal{N}^- = \mathcal{N}$ *e* $\partial\mathcal{N}^+ = \{0\} \cup \mathcal{N}$.

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{N}$. Pela definição de $\mathcal{N}$, temos que $u \neq 0$ e $\phi'_u(1) = 0$. Então, pelo Lema 2.6, temos que $((1 - \frac{1}{n})u)$ é uma sequência em $\mathcal{N}^+$ que converge em X para u e $((1 + \frac{1}{n})u)$ é uma sequência em $\mathcal{N}^-$ que converge em X para u. Então $u \in \partial\mathcal{N}^-$ e $u \in \partial\mathcal{N}^+$.

Seja $u \in \partial\mathcal{N}^-$. Pela definição de fronteira, temos que existem (u_n) uma sequência em $\mathcal{N}^-$ e (u'_n) em $(\mathcal{N}^-)^C$ tais que $u_n \xrightarrow{X} u$ e $u'_n \xrightarrow{X} u$.

Como I' e $I'(u_n)$ são contínuas e

$$\begin{aligned} |I'(u_n)(u_n) - I'(u)u| &= |I'(u_n)(u_n) - I'(u_n)(u) + I'(u_n)(u) - I'(u)u| \\ &\leq |I'(u_n)(u_n) - I'(u_n)(u)| + |I'(u_n)(u) - I'(u)u|, \end{aligned}$$

temos que $I'(u_n)(u_n) \to I'(u)u$. Analogamente, $I'(u_n')(u_n') \to I'(u)u$.

Como $u_n \in \mathcal{N}^-$, temos que $I'(u_n)(u_n) < 0$. Daí, temos que $I'(u)u \leq 0$. Por outro lado, como $u_n' \in (\mathcal{N}^-)^C$, temos, pela definição de $\mathcal{N}^-$, que $I'(u_n)(u_n) \geq 0$. Dessa forma, $I'(u)u \geq 0$. Então $I'(u)u = 0$, isto é, $u \in \{0\} \cup \mathcal{N}$.

Seja $r \in (0, R)$, sendo R como no Lema 2.5 e suponha por absurdo que $u = 0$. Daí, como $\|u_n\|_X \to 0$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_{n_0}\| < r$. Pelo Lema 2.5, temos que $I'(u_{n_0})(u_{n_0}) > 0$, o que é absurdo. Logo, $u \neq 0$ e, portanto, $u \in \mathcal{N}$. Daí, concluímos que $\partial\mathcal{N}^- = \mathcal{N}$.

Seja $u \in \partial\mathcal{N}^+$. Pela definição de fronteira, temos que existem (u_n) uma sequência em $\mathcal{N}^+$ e (u_n') em $(\mathcal{N}^+)^C$ tais que $u_n \overset{X}{\to} u$ e $u_n' \overset{X}{\to} u$.

Como $u_n \in \mathcal{N}^+$, temos que $I'(u_n)(u_n) > 0$. Daí, temos que $I'(u)u \geq 0$. Por outro lado, como $u_n' \in (\mathcal{N}^+)^C$, temos, pela definição de $\mathcal{N}^+$, que $I'(u_n)(u_n) \leq 0$. Dessa forma, $I'(u)u \leq 0$. Então $I'(u)u = 0$, isto é, $u \in \{0\} \cup \mathcal{N}$.

Falta apenas mostrar que se $u = 0$, então $u \in \partial\mathcal{N}^+$. Mas isso decorre diretamente do Lema 2.5. Concluímos então que $\partial\mathcal{N}^+ = \{0\} \cup \mathcal{N}$.

□

2.4 Lemas técnicos

Antes de enunciarmos e provarmos os lemas técnicos, precisaremos do seguinte resultado de teoria da medida. Tal resultado é, essencialmente, um corolário do teorema de Egorov.

Proposição 2.4.1. *Sejam $u \in L^2(\mathbb{R}^2)\backslash\{0\}$ e (u_n) uma sequência em $L^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $u_n(x) \to u(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^2$. Então existem $M \in \mathbb{N}$, $\delta \in (0, \infty)$, $n_0 \in \mathbb{N}$ e $A \subset B(0, M)$ tais que A é mensurável, $\mu(A) > 0$ e $u_n(x) > \delta$ para todo $x \in A$ e todo $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n \geq n_0$.*

Demonstração. Por hipótese, $u \in L^2(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$. Desse modo, existe $\tilde{A} \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\mu(\tilde{A}) > 0$ e $u(x) \neq 0$, para todo $x \in \tilde{A}$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, defina $\tilde{A}_i := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |u(x)| > \frac{1}{i}\}$. Note que $\tilde{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i$ e que $\tilde{A}_i \subset \tilde{A}_{i+1}$.

Pela continuidade da medida, concluímos que

$$0 < \mu(\tilde{A}) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k\right) = \lim \mu(\tilde{A}_i),$$

ou seja, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(\tilde{A}_{i_0}) > 0$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, defina $\tilde{A}_{i_0,m} := B(0, m) \cap \tilde{A}_{i_0}$. Note que $\tilde{A}_{i_0} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \tilde{A}_{i_0,m}$, que $\tilde{A}_{i_0,m} \subset \tilde{A}_{i_0,m+1}$ e que $\mu(\tilde{A}_{i_0,m}) < \mu(B(0, m)) < \infty$.

Pela continuidade da medida, deduzimos que

$$0 < \mu(\tilde{A}_{i_0}) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \tilde{A}_{i_0,m}\right) = \lim \mu(\tilde{A}_{i_0,m}),$$

ou seja, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(\tilde{A}_{i_0,M}) > 0$.

Defina $\epsilon := \dfrac{\mu(\tilde{A}_{i_0,M})}{2} > 0$.

Como $u_n(x) \to u(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^2$, segue que $u_n|_{\tilde{A}_{i_0,M}} \to u|_{\tilde{A}_{i_0,M}}$ para quase todo $x \in \tilde{A}_{i_0,M}$. Daí e como $\mu(\tilde{A}_{i_0,M}) < \infty$, inferimos, pelo Teorema de Egorov (veja F.12, na página 159), que $u_n \to u$ quase uniformemente em $\tilde{A}_{i_0,M}$, ou seja, existe $E_\epsilon \subset \tilde{A}_{i_0,M}$ tal que E_ϵ é mensurável, $\mu(E_\epsilon) < \epsilon$ e $u_n|_{\tilde{A}_{i_0,M}} \to u|_{\tilde{A}_{i_0,M}}$ uniformemente em $\tilde{A}_{i_0,M} \setminus E_\epsilon$.

Defina $A := \tilde{A}_{i_0,M} \setminus E_\epsilon$. O conjunto A é mensurável e, pela definição de $\tilde{A}_{i_0,M}$, temos que $A \subset \tilde{A}_{i_0,M} \subset B(0, M)$.

Defina $\delta := \dfrac{1}{2i_0} > 0$.

Pela definição de convergência uniforme, vale que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|u_n(x) - u(x)| < \delta$ para todo $x \in A$ e para todo $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n \geq n_0$.

Sejam $x \in A$ e $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n \geq n_0$.

Assim, deduzimos que

$$|u(x)| - |u_n(x)| \leq ||u(x)| - |u_n(x)|| \leq |u(x) - u_n(x)| < \frac{1}{2n_0},$$

ou seja,

$$|u_n(x)| > |u(x)| - \frac{1}{2n_0}.$$

Como $x \in \tilde{A}_{i_0,M}$, concluímos que $u(x) \geq \dfrac{1}{n_0}$. Daí, inferimos que

$$|u_n(x)| > |u(x)| - \frac{1}{2n_0} \geq \frac{1}{n_0} - \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2n_0} = \delta.$$

Por fim, observe que, como $\mu(\tilde{A}_{i_0,M}) < \infty$ e $\mu(E_\epsilon) < \infty$) deduzimos que

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \mu(\tilde{A}_{i_0,M} \setminus E_\epsilon) = \mu(\tilde{A}_{i_0,M}) - \mu(E_\epsilon) \\
&> \mu(\tilde{A}_{i_0,M}) - \epsilon = \mu(\tilde{A}_{i_0,M}) - \frac{\mu(\tilde{A}_{i_0,M})}{2} \\
&= \frac{\mu(\tilde{A}_{i_0,M})}{2} > 0.
\end{aligned}$$

□

O primeiro lema técnico será utilizado para garantir convergência fraca em X.

Lema 2.7. *Sejam $u \in L^2(\mathbb{R}^2)\setminus\{0\}$, (u_n) uma sequência em $L^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $u_n(x) \to u(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^2$ e (v_n) uma sequência em $L^2(\mathbb{R}^2)$ limitada. Se*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x - y|)u_n^2(x)v_n^2(y)\, dx\, dy < \infty, \tag{2.12}$$

então $\|v_n\|_*$ é limitada.

Além disso, se

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u_n^2(x)v_n^2(y)\,dx\,dy \to 0 \ \textit{e} \ \|v_n\|_2 \to 0, \tag{2.13}$$

então $\|v_n\|_* \to 0$.

Demonstração. Sejam n_0, R, δ e A como na Proposição 2.4.1. Seja também $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n \geq n_0$.

Sejam $x \in A \subset B(0,R)$ e $y \in \mathbb{R}^2 \setminus B(0,2R)$. Temos que

$$|y| \geq 2R,$$

isto é,

$$|y| - |y| \geq 2R.$$

Como $y \in \mathbb{R}^2 \setminus B(0,2R)$, vale que $|y| \geq 2R$. Dessa forma, concluímos que

$$|y| - 2R \geq |y|.$$

Dividindo a expressão anterior por 2, inferimos que.

$$|y| - R \geq \frac{|y|}{2}. \tag{2.14}$$

Para todo $z \in [0,\infty)$, temos que

$$\frac{z^2}{4} \geq 0.$$

Somando $(z+1)$ de ambos os lados, deduzimos que

$$\frac{z^2}{4} + z + 1 \geq z + 1.$$

Como $\dfrac{z^2}{4} + z + 1 = (\dfrac{z}{2}+1)^2$, concluímos que

$$\left(\frac{z}{2}+1\right)^2 \geq 1 + z.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados, inferimos que

$$\left|\frac{z}{2}+1\right| \geq \sqrt{1+z}. \tag{2.15}$$

Como $|x-y| \in [0,\infty)$, por (2.14) e (2.15), deduzimos que

$$\begin{aligned} 1+|x-y| &\geq 1 + ||y|-|x|| = 1+|y|-|x| \geq 1+|y|-R \\ &\geq 1 + \frac{|y|}{2} \geq \sqrt{1+|y|} = (1+|y|)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Como o integrando é não negativo, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u_n^2(x)v_n^2(y)\,dx\,dy \geq \int_{\mathbb{R}^2/B(0,2R)}\int_{A} \ln(1+|x-y|)u_n^2(x)v_n^2(y)\,dx\,dy.$$

Pela Proposição 2.4.1, inferimos que $u_n(x) > \delta$ para todo $x \in A$ e $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n \geq n_0$. Daí e pela linearidade da integral, deduzimos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u_n^2(x)v_n^2(y)\,dx\,dy &\geq \int_{\mathbb{R}^2\setminus B(0,2R)}\int_A \ln(1+|x-y|)u_n^2(x)v_n^2(y)\,dx\,dy\\ &> \int_{\mathbb{R}^2\setminus B(0,2R)}\int_A \ln(1+|x-y|)\delta^2 v_n^2(y)\,dx\,dy\\ &= \delta^2\int_{\mathbb{R}^2\setminus B(0,2R)}\int_A \ln(1+|x-y|)v_n^2(y)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Por (2.14), propriedades do logaritmo e a linearidade da integral, concluímos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u_n^2(x)v_n^2(y)\,dx\,dy &> \delta^2\int_{\mathbb{R}^2\setminus B(0,2R)}\int_A \ln(1+|x-y|)v_n^2(y)\,dx\,dy\\ &\geq \delta^2\int_{\mathbb{R}^2\setminus B(0,2R)}\int_A \ln((1+|y|)^{\frac{1}{2}})v_n^2(y)\,dx\,dy\\ &= \delta^2\int_{\mathbb{R}^2\setminus B(0,2R)}\int_A \frac{1}{2}\ln(1+|y|)v_n^2(y)\,dx\,dy\\ &= \frac{\delta^2}{2}\int_{\mathbb{R}^2\setminus B(0,2R)}\int_A \ln(1+|y|)v_n^2(y)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Como o integrando não depende mais de x e pela linearidade da integral, inferimos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u_n^2(x)v_n^2(y)\,dx\,dy &> \frac{\delta^2}{2}\int_{\mathbb{R}^2\setminus B(0,2R)}\int_A \ln(1+|y|)v_n^2(y)\,dx\,dy\\ &= \frac{\delta^2}{2}\int_{\mathbb{R}^2\setminus B(0,2R)} \mu(A)\ln(1+|y|)v_n^2(y)\,dy\\ &= \frac{\mu(A)\delta^2}{2}\int_{\mathbb{R}^2\setminus B(0,2R)} \ln(1+|y|)v_n^2(y)\,dy.\end{aligned}$$

Pelas propriedades da integral e pela definição de $\|\cdot\|_*$, deduzimos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u_n^2(x)v_n^2(y)\,dx\,dy &> \frac{\mu(A)\delta^2}{2}\int_{\mathbb{R}^2\setminus B(0,2R)} \ln(1+|y|)v_n^2(y)\,dy\\ &= \frac{\mu(A)\delta^2}{2}\bigg(\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|y|)v_n^2(y)\,dy-\\ &-\int_{B(0,2R)} \ln(1+|y|)v_n^2(y)\,dy\bigg)\end{aligned}$$

$$= \frac{\mu(A)\delta^2}{2}\left(\|v_n\|_*^2 - \int\limits_{B(0,2R)} \ln(1+|y|)v_n^2(y)\,dy\right).$$

Se $y \in B(0,2R)$, temos que $|y| < 2R$. Então, pela linearidade da integral e pela definição de $\|\cdot\|_2$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u_n^2(x)v_n^2(y)\,dx\,dy &> \frac{\mu(A)\delta^2}{2}\left(\|v_n\|_*^2 - \int\limits_{B(0,2R)} \ln(1+|y|)v_n^2(y)\,dy\right)\\
&> \frac{\mu(A)\delta^2}{2}\left(\|v_n\|_*^2 - \int\limits_{B(0,2R)} \ln(1+2R)v_n^2(y)\,dy\right)\\
&= \frac{\mu(A)\delta^2}{2}\left(\|v_n\|_*^2 - \ln(1+2R)\int\limits_{B(0,2R)} v_n^2(y)\,dy\right)\\
&\geq \frac{\mu(A)\delta^2}{2}\left(\|v_n\|_*^2 - \ln(1+2R)\int\limits_{\mathbb{R}^2} v_n^2(y)\,dy\right)\\
&= \frac{\mu(A)\delta^2}{2}(\|v_n\|_*^2 - \ln(1+2R)\|v_n\|_2^2).
\end{aligned}$$

Reorganizando os termos da expressão e por (2.12), inferimos que

$$0 < \|v_n\|_* < \left(\frac{2\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u_n^2(x)v_n^2(y)\,dx\,dy}{\delta^2\mu(A)} + \ln(1+2R)\|v_n\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Além disso, se (2.13) vale, então o lado direito da desigualdade vai para 0 quando $n \to \infty$. Daí e pelo Teorema do Confronto, segue que $\|v_n\|_* \to 0$.

$\square$

O segundo lema técnico é a convergência a seguir.

Lema 2.8. *Sejam $u, z \in X$ e $(u_n), (v_n)$ e (w_n) sequências em X limitadas (em X) tais que $u_n \overset{X}{\rightharpoonup} u$. Então*

$$\lim \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)v_n(x)w_n(x)z(y)(u_n(y)-u(y))\,dx\,dy = 0.$$

Demonstração. Defina

$$\begin{aligned}
c_1 &:= \sup_{n\in\mathbb{N}}\|v_n\|_2\|w_n\|_2;\\
c_2 &:= \sup_{n\in\mathbb{N}}\|v_n\|_*\|w_n\|_*.
\end{aligned}$$

Como $(u_n), (v_n)$ e (w_n) são limitadas em X, existem $M_1 > 0, M_2 > 0$ e $M_3 > 0$ tais que

$$\begin{aligned}
&\|u_n\|_* \leq \|u_n\|_X < M_1;\\
&\|v_n\|_2 \leq \|v_n\| \leq \|v_n\|_X < M_2;\\
&\|v_n\|_* \leq \|v_n\|_X < M_2;\\
&\|w_n\|_2 \leq \|w_n\| \leq \|w_n\|_X < M_3;\\
&\|w_n\|_* \leq \|w_n\|_X < M_3,
\end{aligned}$$

Desse modo, concluímos que

$$\begin{aligned}
&c_1 \leq M_2 M_3 < \infty;\\
&c_2 \leq M_2 M_3 < \infty.
\end{aligned}$$

Como $u_n \overset{X}{\rightharpoonup} u$, pelo Lema 2.1, inferimos que $u_n \overset{L^2(\mathbb{R}^2)}{\to} u$. Assim, majorando por c_2 e passando o limite com $n \to \infty$, deduzimos que

$$0 \leq \lim \|v_n\|_* \|w_n\|_* \|z\|_2 \|u_n - u\|_2 \leq \lim c_2 \|z\|_2 \|u_n - u\|_2 = 0,$$

ou seja,

$$\lim \|v_n\|_* \|w_n\|_* \|z\|_2 \|u_n - u\|_2 = 0. \tag{2.16}$$

Se $x \in B(0, R)$ então $\ln(1 + |x|) \leq \ln(1 + R)$. Daí e pela linearidade da integral, concluímos que

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B(0,R)} \ln(1 + |x|)|z(x)||u_n(x) - u(x)|\,dx &\leq \int\limits_{B(0,R)} \ln(1 + R)|z(x)||u_n(x) - u(x)|\,dx\\
&= \ln(1 + R) \int\limits_{B(0,R)} |z(x)||u_n(x) - u(x)|\,dx.
\end{aligned}$$

Com o integrando é não negativo, inferimos que

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B(0,R)} \ln(1 + |x|)|z(x)||u_n(x) - u(x)|\,dx &\leq \ln(1 + R) \int\limits_{B(0,R)} |z(x)||u_n(x) - u(x)|\,dx\\
&\leq \ln(1 + R) \int\limits_{\mathbb{R}^2} |z(x)||u_n(x) - u(x)|\,dx.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Hölder (veja F.8, na página 158) com $p = q = 2$, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B(0,R)} \ln(1 + |x|)|z(x)||u_n(x) - u(x)|\,dx &\leq \ln(1 + R) \int\limits_{\mathbb{R}^2} |z(x)||u_n(x) - u(x)|\,dx\\
&\leq \ln(1 + R)\|z\|_2 \|u_n - u\|_2.
\end{aligned}$$

Como $u_n \overset{X}{\rightharpoonup} u$, pelo Lema 2.1, concluímos que $u_n \overset{L^2(\mathbb{R}^2)}{\to} u$. Disso e passando o limite com $n \to \infty$ dos dois lados, inferimos que

$$0 \leq \lim \int_{B(0,R)} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)|\,dx \leq \lim \ln(1+R)\|z\|_2\|u_n-u\|_2 = 0,$$

ou seja,

$$\lim \int_{B(0,R)} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)|\,dx = 0. \tag{2.17}$$

Pela Desigualdade de Hölder (veja F.8, na página 158) com $p=q=2$, deduzimos que

$$\int_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)|\,dx =$$

$$= \int_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)^{\frac{1}{2}}|z(x)| \ln(1+|x|)^{\frac{1}{2}}|u_n(x)-u(x)|\,dx \leq$$

$$\leq \|\ln(1+|\cdot|)^{\frac{1}{2}}|z|\|_{L^2(B(0,R)^C)}\|\ln(1+|\cdot|)^{\frac{1}{2}}|u_n-u|\|_{L^2(B(0,R)^C)} =$$

$$= \left(\int_{B(0,R)^C} (\ln(1+|x|)^{\frac{1}{2}}|z(x)|)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B(0,R)^C} (\ln(1+|x|)^{\frac{1}{2}}|u_n(x)-u(x)|)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\int_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|u_n(x)-u(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pela desigualdade triangular, concluímos que

$$\int_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)|\,dx \leq$$

$$\leq \left(\int_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|u_n(x)-u(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\int_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)(|u_n(x)|^2+|u(x)|^2)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\leq \left(\int_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)|u_n(x)|^2+\ln(1+|x|)|u(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pela linearidade da integral, inferimos que

$$\int_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)|\,dx \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)|u_n(x)|^2 + \ln(1+|x|)|u(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\int\limits_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)|u_n(x)|^2\, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)|u(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pela definição de $\|\cdot\|_*$, vale que

$$\int\limits_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)|\, dx \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)|u_n(x)|^2\, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)|u(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\int\limits_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} (\|u_n\|_*^2 + \|u\|_*^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Majorando por M_1, deduzimos que

$$\begin{aligned} &\int\limits_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)|\, dx \leq \\ &\leq \left(\int\limits_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} (\|u_n\|_*^2 + \|u\|_*^2)^{\frac{1}{2}} \leq \qquad (2.18) \\ &\leq \left(\int\limits_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} (M_1^2 + \|u\|_*^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Vamos agora mostrar que

$$\lim_{R\to\infty} \left(\int\limits_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} = 0. \qquad (2.19)$$

Suponha por absurdo que existe (R_n) uma sequência em $\mathbb{R}$, monotonamente crescente tal que $\lim R_n = \infty$ e

$$\lim \left(\int\limits_{B(0,R_n)^C} \ln(1+|x|)|z(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \neq 0.$$

Pela definição da integral de Lebesgue sobre subconjuntos mensuráveis, temos que

$$\left(\int\limits_{B(0,R_n)^C} \ln(1+|x|)|z(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} 1_{B(0,R_n)^C}(x)\ln(1+|x|)|z(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para cada $x \in \mathbb{R}^2$, vale que

$$1_{B(0,R_n)^C}(x)\ln(1+|x|)|z(x)|^2 \geq 0.$$

Como (R_n) é monotonamente crescente, concluímos que

$$1_{B(0,R_n)^C}(x)\ln(1+|x|)|z(x)|^2 \leq 1_{B(0,R_{n+1})^C}(x)\ln(1+|x|)|z(x)|^2,$$

e como $R_n \to \infty$, inferimos que

$$\lim 1_{B(0,R_n)^C}(x)\ln(1+|x|)|z(x)|^2 = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Então, pelo Teorema da Convergência Monótona (veja F.3, na página 157), deduzimos que

$$\lim\left(\int\limits_{B(0,R_n)^C} \ln(1+|x|)|z(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \lim\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} 1_{B(0,R_n)^C}(x)\ln(1+|x|)|z(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

o que é absurdo. Então, vale (2.19).

Como $\mathbb{R}^2 = B(0,R) \cup B(0,R)^C$, temos que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)|\,dx =$$
$$= \int\limits_{B(0,R)} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)|\,dx + \int\limits_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)|\,dx. \tag{2.20}$$

Como $\ln(1+|x-y|)$ é não negativo, por propriedades da integral e do valor absoluto, concluímos que

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)v_n w_n z(u_n-u)\,dx\,dy\right| \leq$$
$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\ln(1+|x-y|)v_n w_n z(u_n-u)|\,dx\,dy =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)|v_n||w_n||z||(u_n-u)|\,dx\,dy.$$

Pela Proposição 2.2.1, inferimos que

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)v_n w_n z(u_n-u)\,dx\,dy\right| \le$$
$$\le \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)|v_n||w_n||z||(u_n-u)|\,dx\,dy \le$$
$$\le \|v_n\|_2\|w_n\|_2 \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)|\,dx + \|v_n\|_*\|w_n\|_*\|z\|_2\|u_n-u\|_2.$$

Majorando por c_1 e por (2.20), deduzimos que

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)v_n w_n z(u_n-u)\,dx\,dy\right| \le$$
$$\le \|v_n\|_2\|w_n\|_2 \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)|\,dx + \|v_n\|_*\|w_n\|_*\|z\|_2\|u_n-u\|_2 \le$$
$$\le c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)|\,dx + \|v_n\|_*\|w_n\|_*\|z\|_2\|u_n-u\|_2 =$$
$$\le c_1 \left(\int\limits_{B(0,R)} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)|\,dx + \int\limits_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)|\,dx \right)$$
$$+ \|v_n\|_*\|w_n\|_*\|z\|_2\|u_n-u\|_2.$$

Passando o limite com $n \to \infty$ dos dois lados e usando a linearidade do limite, concluímos que

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)v_n w_n z(u_n-u)\,dx\,dy\right| \le$$
$$\le \Bigg(\lim c_1 \Bigg(\int\limits_{B(0,R)} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)|\,dx +$$
$$+ \int\limits_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)|\,dx \Bigg)$$
$$+ \|v_n\|_*\|w_n\|_*\|z\|_2\|u_n-u\|_2 \Bigg) =$$
$$= c_1 \Bigg(\lim \int\limits_{B(0,R)} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)|\,dx +$$
$$+ \lim \int\limits_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)|\,dx \Bigg) +$$
$$+ \lim(\|v_n\|_*\|w_n\|_*\|z\|_2\|u_n-u\|_2).$$

Por (2.16), inferimos que

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|) v_n w_n z (u_n - u) \, dx \, dy \right| \leq \\
&\leq c_1 \Bigg(\lim \int_{B(0,R)} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)| \, dx + \\
&+ \lim \int_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)| \, dx \Bigg) + \\
&+ \lim(\|v_n\|_* \|w_n\|_* \|z\|_2 \|u_n - u\|_2) = \\
&\leq c_1 \Bigg(\lim \int_{B(0,R)} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)| \, dx + \\
&+ \lim \int_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)| \, dx \Bigg).
\end{aligned}
$$

Por (2.17), deduzimos que

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|) v_n w_n z (u_n - u) \, dx \, dy \right| \leq \\
&\leq c_1 \Bigg(\lim \int_{B(0,R)} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)| \, dx + \\
&+ \lim \int_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)| \, dx \Bigg) = \\
&= c_1 \lim \int_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)| \, dx.
\end{aligned}
$$

Por (2.18), concluímos que

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|) v_n w_n z (u_n - u) \, dx \, dy \right| = \\
&\leq c_1 \lim \int_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)||u_n(x)-u(x)| \, dx \leq \\
&\leq c_1 \lim \left(\int_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} (M_1^2 + \|u\|_*^2)^{\frac{1}{2}} = \\
&= c_1 \left(\int_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} (M_1^2 + \|u\|_*^2)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Passando o limite com $R \to \infty$ e por (2.19), inferimos que

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \left| \int\limits_{\mathbb{R}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|) v_n w_n z (u_n - u)\, dx\, dy \right| = \\
&= \lim_{R\to\infty} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|) v_n w_n z (u_n - u)\, dx\, dy \right| \leq \\
&\leq c_1 \lim_{R\to\infty} \left(\int\limits_{B(0,R)^C} \ln(1+|x|)|z(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} (M_1^2 + \|u\|_*^2)^{\frac{1}{2}} = 0,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\lim \int\limits_{\mathbb{R}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|) v_n w_n z (u_n - u)\, dx\, dy = 0.
$$

$\square$

Capítulo 3

Uma condição de compacidade

O objetivo desse capítulo é estabelecer uma condição de compacidade. Grosso modo, tal condição afirma que se a for periódico e positivo então, a menos de translação, o funcional I satisfaz a condição de Cerami em níveis arbitrários. Esse resultado é a maior contribuição de [9], pois foi a maneira que os autores encontraram de contornar os problemas provenientes do uso do espaço X como domínio de I.

Na primeira seção, estudaremos propriedades de sequências de Cerami para o funcional I e o comportamento de I aplicado a translações de funções de X por elementos de $\mathbb{Z}^2$.

Na segunda seção, provaremos um lema técnico que será utilizado na seção seguinte.

Na terceira seção, como um passo intermediário na demonstração de nossa condição de compacidade, mostraremos que as sequências de Cerami para o funcional I são limitadas em $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Na quarta seção, enunciaremos e demonstraremos a condição de compacidade.

3.1 As hipóteses da condição de compacidade

Uma das hipóteses que precisaremos para a condição de compacidade é a de sequência de Cerami para o funcional I, que definimos a seguir.

Definição. Seja (u_n) uma sequência em X. Dizemos que (u_n) é uma *sequência de Cerami para o funcional* I se existe $d \in (0, \infty)$ tal que

$$\lim I(u_n) = d > 0 \text{ e } \lim \|I'(u_n)\|_{X'}(1 + \|u_n\|_X) = 0.$$

Essas sequências são candidatas muito boas para obtermos convergência para um ponto crítico. O próximo resultado esclarece essa afirmação.

Proposição 3.1.1. *Seja* (u_n) *uma sequência de Cerami para o funcional* I. *Então* $I'(u_n) \overset{X'}{\to} 0$.

Demonstração. Pela definição de sequência de Cerami para o funcional I e pela não negativade das normas, concluímos que

$$0 \leq \|I'(u_n)\|_{X'} \leq \lim(\|I'(u_n)\|_{X'} + \|I'(u_n)\|_{X'}\|u_n\|_X) = \lim \|I'(u_n)\|_{X'}(1 + \|u_n\|_X) = 0.$$

Logo, pelo Teorema do Confronto, $\lim \|I'(u_n)\|_{X'} = 0$.

□

A afirmação anterior fica agora mais clara: se uma sequência de Cerami para o funcional I possui subsequência convergente em X para algum u, então, pela continuidade de I em X, $I'(u) = 0$, isto é, u será ponto crítico do funcional I.

O próximo resultado não é consequência do anterior e seu uso ao longo do trabalho justifica a escolha de sequências de Cerami para o funcional I (em vez de, por exemplo, sequências de Palais-Smale para o funcional I).

Proposição 3.1.2. *Seja (u_n) uma sequência de Cerami para o funcional I. Então $I'(u_n)u_n \to 0$.*

Demonstração. Note que, pelo Lema 2.5 e pela definição de sequência de Cerami para o funcional I concluímos que

$$0 \leq \lim I'(u_n)u_n \leq \lim \|I'(u_n)\|_{X'} \|u_n\|_X \leq \lim \|I'(u_n)\|_{X'}(1 + \|u_n\|_X) = 0.$$

Logo, pelo Teorema do Confronto, $\lim I'(u_n)u_n = 0$.

□

Uma outra propriedade de sequências de Cerami para o funcional I que iremos utilizar será enunciada e provada a seguir.

Proposição 3.1.3. *Seja (u_n) uma sequência de Cerami para o funcional I. Então existem $C \in (0, \infty)$ e $n_C \in \mathbb{N}$ tais que $\|u_n\|_X \geq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n \geq n_0$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que existe uma subsequência de (u_n) (que ainda chamaremos de (u_n)) tal que $\|u_n\|_X \to 0$, ou seja, $u_n \stackrel{X}{\to} 0$.

Daí e pelo Corolário 2.3, concluímos que $I(u_n) \to 0$.

Por outro lado, como (u_n) é sequência de Cerami para o funcional I, deduzimos que $I(u_n) \to d > 0$, o que é absurdo.

□

Antes de continuar essa discussão, vamos definir o conceito de função $\mathbb{Z}^2$-periódica.

Definição. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to (0, \infty)$. Dizemos que f é $\mathbb{Z}^2$-*periódica* se

$$f(x + z) = f(x),$$

para todo, $x \in \mathbb{R}^2$ e $z \in \mathbb{Z}^2$.

A outra hipótese que precisaremos para a condição de compacidade é que a seja $\mathbb{Z}^2$ periódico.

Para podermos trabalhar com translações sem carregar muito as notações, introduzimos a notação a seguir.

Notação. *Seja $x \in \mathbb{R}^2$. Denotaremos a* função translação por x *como $\tau_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \tau_x(y) = (y - x)$. Em particular, uma função $u \in X$ transladada por um elemento $z \in \mathbb{Z}^2$ será denotada por $u \circ \tau_z$.*

Observe que, independente de a ser ou não $\mathbb{Z}^2$-periódico, os funcionais auxiliares satisfazem a seguinte invariância: o funcional aplicado à uma translação de uma função de $u \in X$ por um elemento de $z \in \mathbb{Z}^2$ tem o mesmo valor do funcional aplicado à u.

Proposição 3.1.4. *Sejam $u \in X$ e $z \in \mathbb{Z}^2$. Então*

(i) $V_1(u \circ \tau_z) = V_1(u)$;

(ii) $V_2(u \circ \tau_z) = V_2(u)$;

(iii) $V_0(u \circ \tau_z) = V_0(u)$.

Demonstração. Pela definição de V_1, temos que

$$V_1(u \circ \tau_z) = \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x-y|)(u \circ \tau_z)^2(x)(u \circ \tau_z)^2(y)\, dx\, dy.$$

Pela definição de τ_z, vale que

$$\begin{aligned} V_1(u \circ \tau_z) &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x-y|)(u \circ \tau_z)^2(x)(u \circ \tau_z)^2(y)\, dx\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x-y|)u(\tau_z((x)))^2 u(\tau_z((y)))^2\, dx\, dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x-y|)u^2(x-z)u^2(y-z)\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $v = x - z$, concluímos que

$$\begin{aligned} V_1(u \circ \tau_z) &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x-y|)u^2(x-z)u^2(y-z)\, dx\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |(v+z)-y|)u^2(v)u^2(y-z)\, dv\, dy. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $w = y - z$, inferimos que

$$\begin{aligned} V_1(u \circ \tau_z) &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |(v+z)-y|)u^2(v)u^2(y-z)\, dv\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |(v+z)-(w+z)|)u^2(v)u^2(w)\, dv\, dw = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |v+z-w-z|)u^2(v)u^2(w)\, dv\, dw = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |v-w|)u^2(v)u^2(w)\, dv\, dw. \end{aligned}$$

Renomeando v de x e w de y, deduzimos que

$$\begin{aligned} V_1(u \circ \tau_z) &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |v-w|)u^2(v)u^2(w)\, dv\, dw \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x-y|)u^2(x)u^2(y)\, dv\, dw = V_1(u). \end{aligned}$$

Mostrar que $V_2(u \circ \tau_z) = V_2(u)$ e que $V_0(u \circ \tau_z) = V_0(u)$ é análogo.

□

Supondo que a é $\mathbb{Z}^2$ periódico, podemos estender essa invariância para o funcional I, como mostra o próximo resultado.

Proposição 3.1.5. *Sejam $u \in X$ e $z \in \mathbb{Z}^2$. Se a é $\mathbb{Z}^2$-periódica então $I(u \circ \tau_z) = I(u)$.*

Demonstração. Pela definição de I, temos que

$$I(u \circ \tau_z) = \frac{1}{2}\|u \circ \tau_z\|^2 + \frac{1}{4}V_0(u \circ \tau_z) - \frac{b}{p}\|u \circ \tau_z\|_p^p.$$

Pelas Proposições 3.1.4, A.7 e A.8 (ver páginas 143 e 144), concluímos que

$$\begin{aligned} I(u \circ \tau_z) &= \frac{1}{2}\|u \circ \tau_z\|^2 + \frac{1}{4}V_0(u \circ \tau_z) - \frac{b}{p}\|u \circ \tau_z\|_p^p \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}V_0(u) - \frac{b}{p}\|u\|_p^p = I(u). \end{aligned}$$

□

Observe que, independente das propriedades de a, $\|\cdot\|_*$ não é $\mathbb{Z}^2$-periódica. As duas proposições a seguir tratam da paridade de I e $'$.

Proposição 3.1.6. *I é um funcional par.*

Demonstração. Seja $u \in X$. Então, temos que

$$\begin{aligned} I(-u) &= \frac{1}{2}\|-u\|^2 + \frac{1}{4}u_0(-u) - \frac{b}{p}\|-u\|_p^p = \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)(-u)^2(x)(-u)^2(y)\,dx\,dy - \frac{b}{p}\|u\|_p^p = \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy - \frac{b}{p}\|u\|_p^p = \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}u_0(u) - \frac{b}{p}\|u\|_p^p = I(u). \end{aligned}$$

□

Proposição 3.1.7. *Seja $u \in X$. Então $I'(-u) = -I'(u)$.*

Demonstração. Seja $v \in X$. Então

$$\begin{aligned} &I'(-u)v = \\ &= \langle -u, v\rangle + \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)(-u)^2(x)(-u(y))v(y)\,dx\,dy - b\int\limits_{\mathbb{R}^2} |-u|^{p-2}(-u)v\,dx = \\ &= -\langle u, v\rangle + \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} -\ln(|x-y|)u^2(x)u(y)v(y)\,dx\,dy - b\int\limits_{\mathbb{R}^2} -|u|^{p-2}uv\,dx = \\ &= -\langle u, v\rangle - \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)u^2(x)u(y)v(y)\,dx\,dy + b\int\limits_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2}uv\,dx = \end{aligned}$$

$$= -(\langle u, v\rangle + \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)u^2(x)u(y)v(y)\,dx\,dy - b\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2}uv\,dx) =$$
$$= -I'(u)v.$$

Como v é arbitrário em X, vale o resultado.

□

3.2 Um lema técnico sobre sequências de Cerami para o funcional I

O seguinte lema sobre sequências de Cerami para o funcional I será utilizado na próxima seção.

Lema 3.1. *Sejam (u_n) uma sequência de Cerami para o funcional I e (t_n) uma sequência em $[0,\infty)$ limitada. Então existem (r_n) uma sequência em $\mathbb{R}$ satisfazendo* $\lim r_n = 0$ *tal que*

$$I(t_n u_n) \leq I(u_n) + r_n.$$

Além disso, se $t_n \to 0$, então existe $\liminf I(t_n u_n)$ *e*

$$\liminf I(t_n u_n) \geq 0.$$

Demonstração. Pelo Corolário 2.4, concluímos que

$$I'(u_n)u_n = \|u_n\|^2 + V_0(u_n) - b\|u_n\|_p^p.$$

Reordenando os termos dessas expressão, inferimos que

$$V_0(u_n) = I'(u_n)u_n + b\|u_n\|_p^p - \|u_n\|^2. \tag{3.1}$$

Pela definição de ϕ_u e pela Proposição 2.3.1, temos que

$$I(t_n u_n) = \phi_{u_n}(t_n) = \frac{t_n^2}{2}\|u_n\|^2 + \frac{t_n^4}{4}V_0(u_n) - \frac{b|t_n^p|}{p}\|u_n\|_p^p.$$

Como $t_n \in [0,\infty)$, deduzimos que

$$\begin{aligned} I(t_n u_n) &= \frac{t_n^2}{2}\|u_n\|^2 + \frac{t_n^4}{4}V_0(u_n) - \frac{b|t_n^p|}{p}\|u_n\|_p^p \\ &= \frac{t_n^2}{2}\|u_n\|^2 + \frac{t_n^4}{4}V_0(u_n) - \frac{bt_n^p}{p}\|u_n\|_p^p. \end{aligned}$$

Por (3.1), concluímos que

$$\begin{aligned} I(t_n u_n) &= \frac{t_n^2}{2}\|u_n\|^2 + \frac{t_n^4}{4}V_0(u_n) - \frac{bt_n^p}{p}\|u_n\|_p^p \\ &= \frac{t_n^2}{2}\|u_n\|^2 + \frac{t_n^4}{4}(I'(u_n)u_n + b\|u_n\|_p^p - \|u_n\|^2) - \frac{bt_n^p}{p}\|u_n\|_p^p. \end{aligned}$$

Colocando termos semelhantes em evidência, inferimos que

$$
\begin{aligned}
I(t_n u_n) &= \frac{t_n^2}{2}\|u_n\|^2 + \frac{t_n^4}{4}(I'(u_n)u_n + b\|u_n\|_p^p - \|u_n\|^2) - \frac{bt_n^p}{p}\|u_n\|_p^p \\
&= \frac{t_n^2}{2}\|u_n\|^2 + \frac{t_n^4}{4}I'(u_n)u_n + \frac{bt_n^4}{4}\|u_n\|_p^p - \frac{t_n^4}{4}\|u_n\|^2 - \frac{bt_n^p}{p}\|u_n\|_p^p = \\
&= \left(\frac{t_n^2}{2} - \frac{t_n^4}{4}\right)\|u_n\|^2 + b\left(\frac{t_n^4}{4} - \frac{t_n^p}{p}\right)\|u_n\|_p^p + \frac{t_n^4}{4}I'(u_n)u_n.
\end{aligned}
$$

Simplificando, vale que

$$
I(t_n u_n) = \frac{-t_n^4 + 2t_n^2}{4}\|u_n\|^2 + b\frac{-4t_n^p + pt_n^4}{4p}\|u_n\|_p^p + \frac{t_n^4}{4}I'(u_n)u_n. \tag{3.2}
$$

Pela definição de I, temos que

$$
I(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 + \frac{1}{4}V_0(u_n) - \frac{b}{p}\|u_n\|_p^p.
$$

Por (3.1), deduzimos que

$$
\begin{aligned}
I(u_n) &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2 + \frac{1}{4}V_0(u_n) - \frac{b}{p}\|u_n\|_p^p \\
&= \frac{1}{2}\|u_n\|^2 + \frac{1}{4}(I'(u_n)u_n + b\|u_n\|_p^p - \|u_n\|^2) - \frac{b}{p}\|u_n\|_p^p.
\end{aligned}
$$

Colocando termos similares em evidência, concluímos que

$$
\begin{aligned}
I(u_n) &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2 + \frac{1}{4}(I'(u_n)u_n + b\|u_n\|_p^p - \|u_n\|^2) - \frac{b}{p}\|u_n\|_p^p \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\|u_n\|^2 + b\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p}\right)\|u_n\|_p^p + \frac{1}{4}I'(u_n)u_n.
\end{aligned}
$$

Simplificando, vale que

$$
\begin{aligned}
I(u_n) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\|u_n\|^2) + b\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p}\right)\|u_n\|_p^p + \frac{1}{4}I'(u_n)u_n \\
&= \frac{1}{4}\|u_n\|^2 + b\frac{p-4}{4p}\|u_n\|_p^p + \frac{1}{4}I'(u_n)u_n.
\end{aligned}
$$

Daí, inferimos que

$$
\begin{aligned}
I(t_n u_n) - I(u_n) = &\frac{-t_n^4 + 2t_n^2}{4}\|u_n\|^2 + b\frac{-4t_n^p + pt_n^4}{4p}\|u_n\|_p^p + \frac{t_n^4}{4}I'(u_n)u_n \\
&- \left(\frac{1}{2}\|u_n\|^2 + b\frac{p-4}{4p}\|u_n\|_p^p + \frac{1}{4}I'(u_n)u_n\right).
\end{aligned}
$$

Colocando os termos semelhantes em evidência e simplificando, deduzimos que

$$
\begin{aligned}
I(t_n u_n) - I(u_n) = &\frac{-t_n^4 + 2t_n^2}{4}\|u_n\|^2 + b\frac{-4t_n^p + pt_n^4}{4p}\|u_n\|_p^p + \frac{t_n^4}{4}I'(u_n)u_n \\
&- \left(\frac{1}{4}\|u_n\|^2 + b\frac{p-4}{4p}\|u_n\|_p^p + \frac{1}{4}I'(u_n)u_n\right) =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{-t_n^4 + 2t_n^2 - 1}{4}\|u_n\|^2 + b\frac{-4t_n^p + pt_n^4 - p + 4}{4p}\|u_n\|_p^p + \frac{t_n^4 - 1}{4}I'(u_n)u_n =$$
$$= \frac{-(t_n^2 - 1)^2}{4}\|u_n\|^2 - b\frac{4t_n^p - pt_n^4 + p - 4}{4p}\|u_n\|_p^p + \frac{t_n^4 - 1}{4}I'(u_n)u_n.$$

Vamos fazer uma análise de sinal de $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}; f(t) = \dfrac{4t^p - pt^4 + (p-4)}{4p}$. Como $p \geq 4$, vamos separar em dois casos: $p = 4$ e $p > 4$.

(i) $p = 4$

Então $f(t) = \dfrac{4t^4 - 4t^4 + (4-4)}{16} = 0 \geq 0$, para todo $t \in [0, \infty)$.

(ii) $p > 4$

Então f é um polinômio cujo maior expoente é p e o coeficiente desse maior expoente é 4, que é positivo. Logo, $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \infty$. Além disso, $f(0) = p - 4 > 0$ e $f(1) = 4 - p + (p-4) = 0$.

Considere agora $f'(t) = 4pt^{p-1} - 4pt^3 = 4p(t^{p-1} - t^3)$ a derivada de f. Temos que $f'(t) = 0$ se, e somente se, $t^{p-1} - t^3 = 0$, isto é, se $t = 0$ ou $t = 1$.

Considere agora $f'' = 4p((p-1)t^{p-2} - 3t^2)$ a segunda derivada de f. Vale que $f''(1) = 4p((p-1) - 3) > 4p((4-1) - 3) = p(3-3) = 0$. Dessa forma, $t = 1$ é um mínimo local. Como $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \infty$ e $f(0) > 0 = f(1)$, concluímos que $t = 1$ é o mínimo global de f. Logo, $f(t) \geq 0$, para todo $t \in [0, \infty)$.

Dessa forma, concluímos que f é uma função não negativa. Como $(t_n^2 - 1)^2$ também é não negativo, inferimos que

$$\begin{aligned} I(t_n u_n) - I(u_n) &= \frac{-(t_n^2 - 1)^2}{4}\|u_n\|^2 - b\frac{4t_n^p - pt_n^4 + p - 4}{4p}\|u_n\|_p^p + \frac{t_n^4 - 1}{4}I'(u_n)u_n \\ &\leq \frac{t_n^4 - 1}{4}I'(u_n)u_n, \end{aligned}$$

ou seja,

$$I(t_n u_n) \leq I(u_n) + \frac{t_n^4 - 1}{4}I'(u_n)u_n.$$

Defina $r_n := \dfrac{t_n^4 - 1}{4}I'(u_n)u_n$. Então, deduzimos que

$$I(t_n u_n) \leq I(u_n) + r_n. \tag{3.3}$$

Como (t_n) é limitado e (u_n) é sequência de Cerami para o funcional I, concluímos que

$$\lim r_n = \lim \left(\frac{t_n^4 - 1}{4}I'(u_n)u_n\right) = \lim \frac{t_n^4 - 1}{4} \lim I'(u_n)u_n = 0. \tag{3.4}$$

Suponha agora que $t_n \to 0$.
Vamos mostrar que existe $\liminf I(t_n u_n)$.

Como (u_n) é uma sequência de Cerami para o funcional I, temos que $I(u_n)$ é convergente e, portanto, limitada. Além disso, por (3.4), inferimos que (r_n) também é convergente e, portanto, limitada. Daí e por (3.3), deduzimos que $I(t_n u_n)$ é limitada superiormente.

Por (3.2), concluímos que

$$I(t_n u_n) = \frac{-t_n^4 + 2t_n^2}{4}\|u_n\|^2 + b\frac{-4t_n^p + pt_n^4}{4p}\|u_n\|_p^p + \frac{t_n^4}{4}I'(u_n)u_n.$$

Como $-t_n^4+2t_n^2 = t_n^2(2-t_n^2)$ e $-4t_n^p+pt_n^4 = t_n^4(p-4t_n^{p-4})$, inferimos que o sinal de $\dfrac{-t_n^4 + 2t_n^2}{4}\|u_n\|^2$ é positivo se $t_n < \sqrt{2}$ e o sinal de $\dfrac{-4t_n^p + pt_n^4}{4p}\|u_n\|_p^p$ é positivo se $t_n < (\frac{p}{4})^{\frac{1}{p-4}}$. Como $t_n \to 0$, deduzimos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n < \min\left\{\sqrt{2}, (\frac{p}{4})^{\frac{1}{p-4}}\right\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n \geq n_0$. Desse modo, concluímos que

$$\begin{aligned} I(t_n u_n) &= \frac{-t_n^4 + 2t_n^2}{4}\|u_n\|^2 + b\frac{-4t_n^p + pt_n^4}{4p}\|u_n\|_p^p + \frac{t_n^4}{4}I'(u_n)u_n \\ &\geq \frac{t_n^4}{4}I'(u_n)u_n, \end{aligned} \tag{3.5}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n \geq n_0$.

Como (u_n) é uma sequência de Cerami para o funcional I, vale que $I'(u_n)u_n$ é convergente e, portanto, limitada. Como $t_n \in [0, +\infty)$, inferimos que (t_n) também é limitada inferiormente. Assim, deduzimos que $\dfrac{t_n^4}{4}I'(u_n)u_n$ é limitada inferiormente. Disso e por (3.5) concluímos que $I(t_n u_n)$ é limitada inferiormente, para todo $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n \geq n_0$.

Como existem apenas finitos índices $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n \leq n_0$, inferimos que $I(t_n u_n)$ é limitada inferiormente.

Como $I(t_n u_n)$ é limitada superiormente e inferiormente, deduzimos que ela é limitada e, portanto, $\liminf I(t_n u_n)$ existe.

Vamos mostrar que $\liminf I(t_n u_n) \geq 0$.

Passando o lim inf dos dois lados de (3.5), pela Proposição 3.1.2 e como (t_n) é limitada, concluímos que

$$\begin{aligned} \liminf I(t_n u_n) &\geq \liminf \left(\frac{t_n^4}{4}I'(u_n)u_n\right) = \liminf \frac{t_n^4}{4} \liminf I'(u_n)u_n \\ &= \liminf \frac{t_n^4}{4} \lim I'(u_n)u_n = 0. \end{aligned}$$

□

3.3 Limitação das sequências de Cerami para o funcional I em $H^1(\mathbb{R}^2)$

Garantir que as sequências de Cerami para o funcional I são limitadas em $H^1(\mathbb{R}^2)$ quando o parâmetro a da norma de $H^1(\mathbb{R}^2)$ que estamos usando é $\mathbb{Z}^2$-periódico será um passo intermediário na prova da condição de compacidade.

Precisaremos mais adiante do próximo resultado, que é um corolário de Lema de Lions (veja F.13, na página 159).

Proposição 3.3.1. *Seja (u_n) uma sequência de Cerami para o funcional I tal que $\|u_n\| \to \infty$. Então*

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{z\in\mathbb{Z}^2} \int_{B(z,2)} \left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)^2 dx > 0.$$

Demonstração. Suponha por absurdo que

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{z\in\mathbb{Z}^2} \int_{B(z,2)} \left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)^2 dx = 0.$$

Daí, existe uma subsequência de (u_n) (que ainda chamaremos de (u_n)) tal que

$$\lim \sup_{z\in\mathbb{Z}^2} \int_{B(z,2)} \left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)^2 dx = 0.$$

Pela Proposição E.2 (veja página 155), concluímos que

$$\int_{B(x,2-\sqrt{2})} \left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)^2 dx \leq \int_{B(\lfloor x\rfloor,2)} \left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)^2 dx,$$

já que o integrando é não negativo. Dessa forma, inferimos que

$$0 \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \int_{B(x,2-\sqrt{2})} \left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)^2 dx \leq \sup_{z\in\mathbb{Z}^2} \int_{B(\lfloor x\rfloor,2)} \left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)^2 dx,$$

ou seja,

$$0 \leq \lim \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \int_{B(x,2-\sqrt{2})} \left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)^2 dx \leq \lim \sup_{z\in\mathbb{Z}^2} \int_{B(\lfloor x\rfloor,2)} \left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)^2 dx = 0,$$

ou ainda,

$$\lim \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \int_{B(x,2-\sqrt{2})} \left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)^2 dx = 0.$$

Daí e como $\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)$ é limitada, temos, pelo Lema de Lions (veja F.13, na página 159), que

$$\lim \left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right) = 0 \text{ em } L^s(\mathbb{R}^2), \text{ para todo } s > 2. \tag{3.6}$$

Seja $t \in (0, \infty]$. Já foi mostrado que

$$I\left(\frac{tu_n}{\|u_n\|}\right) = \frac{t^2}{2}\left\|\frac{u_n}{\|u_n\|}\right\|^2 + \frac{t^4}{4}V_0\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right) - \frac{b|t|^p}{p}\left\|\frac{u_n}{\|u_n\|}\right\|_p^p$$

$$= \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} V_0\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right) - \frac{b|t|^p}{p}\left\|\frac{u_n}{\|u_n\|}\right\|_p^p.$$

Pela definição de V_0 e como V_1 e t são não negativos, deduzimos que

$$I\left(\frac{tu_n}{\|u_n\|}\right) \geq \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4} V_2\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right) - \frac{b|t|^p}{p}\left\|\frac{u_n}{\|u_n\|}\right\|_p^p.$$

Defina $t_n := \dfrac{t}{\|u_n\|}$. Note que (t_n) é uma sequência em $[0,\infty)$ limitada e $t_n \to 0$.

Como (u_n) é sequência de Cerami para o funcional I, concluímos, pelo Lema 3.1, que existe $\liminf I(t_n u_n) = \liminf I\left(\dfrac{tu_n}{\|u_n\|}\right)$. Por (3.6), inferimos que $\dfrac{u_n}{\|u_n\|} \overset{L^2(\mathbb{R}^2)}{\to} 0$. Então, deduzimos que $\dfrac{tu_n}{\|u_n\|} \overset{L^2(\mathbb{R}^2)}{\to} 0$. Disso e pelo Lema 2.3, concluímos que $\lim V_2\left(\dfrac{tu_n}{\|u_n\|}\right) = V_2(0) = 0$. Ainda por (3.6), inferimos que $\dfrac{u_n}{\|u_n\|} \overset{L^p(\mathbb{R}^2)}{\to} 0$. Desse modo, podemos passar o $\liminf$ dos dois lados. Passando o $\liminf$ dos dois lados, por propriedades do $\liminf$ e usando os limites acima, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\liminf I\left(\frac{tu_n}{\|u_n\|}\right) &\geq \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4} V_2\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right) - \frac{b|t|^p}{p}\left\|\frac{u_n}{\|u_n\|}\right\|_p^p\right) \\
&= \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}\liminf\left(-V_2\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)\right) + \frac{b|t|^p}{p}\liminf\left(-\left\|\frac{u_n}{\|u_n\|}\right\|_p^p\right) \qquad (3.7) \\
&= \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}\lim\left(-V_2\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)\right) + \frac{b|t|^p}{p}\lim\left(-\left\|\frac{u_n}{\|u_n\|}\right\|_p^p\right) = \frac{t^2}{2}.
\end{aligned}$$

Redefina $t_n := \dfrac{\sqrt{4d}}{\|u_n\|}$. Note que (t_n) é uma sequência em $[0,\infty)$ limitada e $t_n \to 0$.

Pelo Lema 3.1 e como (u_n) é sequência de Cerami para o funcional I, concluímos que existe (r_n) uma sequência em $\mathbb{R}$ satisfazendo $\lim r_n = 0$ tal que

$$I\left(\frac{\sqrt{4d}u_n}{\|u_n\|}\right) = I\left(\frac{\sqrt{4d}}{\|u_n\|}u_n\right) = I(t_n u_n) \leq I(u_n) + r_n.$$

Passando o $\liminf$ dos dois lados, inferimos que

$$\begin{aligned}
\liminf I\left(\frac{\sqrt{4d}u_n}{\|u_n\|}\right) &\leq \liminf(I(u_n) + r_n) \\
&= \liminf I(u_n) + \liminf r_n = \lim I(u_n) + \lim r_n = d.
\end{aligned}$$

Combinando a desigualdade acima e (3.7), deduzimos que

$$d \geq \liminf I\left(\frac{\sqrt{4d}u_n}{\|u_n\|}\right) \geq \frac{\sqrt{4d}^2}{2} = 2d,$$

o que é absurdo.

□

O proposição acima será necessária para mostrar o próximo resultado, que trata da existência de uma subsequência fracamente convergente em $H^1(\mathbb{R}^2)$ de funções transladas por elementos de $\mathbb{Z}^2$. Esse resultado será usado diretamente na prova da limitação já citada.

Proposição 3.3.2. *Seja (u_n) uma sequência de Cerami para o funcional I tal que $\|u_n\| \to \infty$. Então existem $w \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$ e (z_n) uma sequência em $\mathbb{Z}^2$ tais que, a menos de subsequência, $\dfrac{u_n \circ \tau_{z_n}}{\|u_n\|} \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\rightharpoonup} w$.*

Demonstração. Seja

$$C := \min\left\{\frac{1}{2}, \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{z\in\mathbb{Z}^2} \int\limits_{B(z,2)} \left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)^2 (y)\, dy\right\}.$$

Pela Proposição 3.3.1, concluímos que

$$C > 0.$$

Pela definição de ínfimo, temos que

$$\sup_{z\in\mathbb{Z}^2} \int\limits_{B(z,2)} \left(\frac{u_m}{\|u_m\|}\right)^2 (y)\, dy \geq C.$$

Daí e pela definição de supremo é possível encontrar (z_k^m) uma sequência em $\mathbb{Z}^2$ monotonamente crescente que converge para o supremo, isto é

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{B(z_k^m,2)} \left(\frac{u_m}{\|u_m\|}\right)^2 (y)\, dy = \sup_{z\in\mathbb{Z}^2} \int\limits_{B(z,2)} \left(\frac{u_m}{\|u_m\|}\right)^2 (y)\, dy > C.$$

Assim, existe $k_m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int\limits_{B(z_{k_m}^m,2)} \left(\frac{u_m}{\|u_m\|}\right)^2 (y)\, dy > C. \tag{3.8}$$

Como o integrando é positivo, deduzimos que

$$\begin{aligned}\int\limits_{B(z_{k_m}^m,2)} \left(\frac{u_m}{\|u_m\|}\right)^2 (y)\, dy &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{u_m}{\|u_m\|}\right)^2 (y)\, dy \\ &= \left\|\frac{u_m}{\|u_m\|}\right\|_2 \leq \left\|\frac{u_m}{\|u_m\|}\right\| = 1.\end{aligned}$$

Defina $i_m := \displaystyle\int\limits_{B(z_{k_m}^m,2)} \left(\frac{u_m}{\|u_m\|}\right)^2 (y)\, dy$. Como mostrado acima, (i_m) é uma sequência em $[C, 1]$, que é compacto em $\mathbb{R}$. Daí, existe uma subsequência de (i_m) que é convergente em $[C, 1]$, ou seja, seu limite é não nulo. Essa subsequência de (i_m)

determina subsequências de $(z^n_{k_n})$ (que chamaremos de (z_n)) e de (u_n) (que ainda chamaremos de (u_n)).

Defina $w_n \coloneqq \dfrac{u_n}{\|u_n\|} \circ \tau_{z_n}$.

Pela Proposição A.8 (veja página 144), inferimos que $\|w_n\| = \left\| \dfrac{u_n}{\|u_n\|} \right\| = 1$, ou seja, (w_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Dessa forma, existe $w \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e uma subsequência de (w_n) (que ainda chamaremos de (w_n)) tal que $w_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\rightharpoonup} w$.

Como $H^1(\mathbb{R}^2) \overset{C}{\hookrightarrow} L^2(\mathbb{R}^2)$, deduzimos que $w_n \overset{L^2(\mathbb{R}^2)}{\rightarrow} w$.

Pela Proposição A.7 (veja página 143) e pela definição de $\|\cdot\|_2$, concluímos que

$$\|w_n\|_2^2 = \left\| \frac{u_n}{\|u_n\|} \right\|_2^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{u_m}{\|u_m\|} \right)^2 (y)\, dy.$$

Como o integrando é não negativo e por (3.8), inferimos que

$$\begin{aligned} \|w_n\|_2^2 &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{u_m}{\|u_m\|} \right)^2 (y)\, dy \\ &\geq \int\limits_{B(z^m_{k_m},2)} \left(\frac{u_m}{\|u_m\|} \right)^2 (y)\, dy > C > 0. \end{aligned}$$

Então, $\|w\|_2^2 \neq 0$, isto é, $w \neq 0$.

□

Mostraremos agora o resultado que dá nome a essa seção.

Lema 3.2. *Seja (u_n) uma sequência de Cerami para o funcional I. Então (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que existe uma subsequência de (u_n) (que ainda chamaremos de (u_n)) tal que $u_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\rightarrow} \infty$. Em particular, $\left(\dfrac{1}{\|u_n\|} \right) \rightarrow 0$, ou seja, $\left(\dfrac{1}{\|u_n\|} \right)$ é limitada.

Pela Proposição 3.3.2 segue que existem $w \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$ e (z_n) uma sequência em $\mathbb{Z}^2$ tais que, a menos de subsequência, $\dfrac{u_n}{\|u_n\|} \circ \tau_{z_n} \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\rightharpoonup} w$.

Para simplificar a notação, definimos $v_n \coloneqq \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$ e $w_n \coloneqq v_n \circ \tau_{z_n}$.

Substituindo a expressão de V_0 na expressão de I, concluímos que

$$V_1(w_n) = 4I(w_n) - 2\|w_n\| + V_2(w_n) + \frac{4b}{p}\|w_n\|^p.$$

Pela Proposição A.8 (veja página 144), inferimos que

$$V_1(w_n) = 4I(w_n) - 2\|w_n\| + V_2(w_n) + \frac{4b}{p}\|w_n\|^p$$

$$= 4I(w_n) - 2 + V_2(w_n) + \frac{4b}{p}\|w_n\|^p.$$

Pelo Corolário 2.1, deduzimos que existe $C_1 \in (0,\infty)$ tal que

$$\begin{aligned} V_1(w_n) &= 4I(w_n) - 2 + V_2(w_n) + \frac{4b}{p}\|w_n\|^p \\ &\leq 4I(w_n) - 2 + C_1\|w_n\|_{\frac{8}{3}}^4 + \frac{4b}{p}\|w_n\|^p. \end{aligned}$$

Como $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)$ e $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$, concluímos que existem $C_2, C_3 \in (0,\infty)$ tais que

$$\begin{aligned} V_1(w_n) &\leq 4I(w_n) - 2 + C\|w_n\|_{\frac{8}{3}}^4 + \frac{4b}{p}\|w_n\|^p \\ &\leq 4I(w_n) - 2 + C_1{C_2}^4\|w_n\|^4 + \frac{4b}{p}{C_3}^p\|w_n\|^p. \end{aligned}$$

Como (w_n) é fracamente convergente em $H^1(\mathbb{R}^2)$, inferimos que (w_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$, isto é, existe $C_4 \in (0,\infty)$ tal que $\|w_n\| < C_4$. Desse modo, deduzimos que

$$\begin{aligned} V_1(w_n) &\leq 4I(w_n) - 2 + C_1{C_2}^4\|w_n\|^4 + \frac{4b}{p}{C_3}^p\|w_n\|^p \\ &< 4I(w_n) - 2 + C_1{C_2}^4{C_4}^4 + \frac{4b}{p}{C_3}^p{C_4}^p. \end{aligned}$$

Defina $t_n := \dfrac{1}{\|u_n\|}$. Note que (t_n) é uma sequência em $[0,\infty)$ limitada e $t_n \to 0$.

Pela Proposição 3.1.5, concluímos que $I(w_n) = I(v_n) = I\left(\dfrac{1}{\|u_n\|}u_n\right) = I(t_n u_n)$. Assim, inferimos que

$$\begin{aligned} V_1(w_n) &< \left(4I(w_n) - 2 + C_1{C_2}^4{C_4}^4 + \frac{4b}{p}{C_3}^p{C_4}^p\right) \\ &= 4I(t_n u_n) - 2 + C_1{C_2}^4{C_4}^4 + \frac{4b}{p}{C_3}^p{C_4}^p. \end{aligned}$$

Como (u_n) é sequência de Cerami para o funcional I, temos, pelo Lema 3.1, que existe (r_n) uma sequência em $\mathbb{R}$ satisfazendo $\lim r_n = 0$ tal que

$$\begin{aligned} V_1(w_n) &< 4I(t_n u_n) - 2 + C_1{C_2}^4{C_4}^4 + \frac{4b}{p}{C_3}^p{C_4}^p \\ &\leq 4(I(u_n) + r_n) - 2 + C_1{C_2}^4{C_4}^4 + \frac{4b}{p}{C_3}^p{C_4}^p. \end{aligned}$$

Como (u_n) é sequência de Cerami para o funcional I, vale que $I(u_n)$ é convergente e, portanto, limitada, isto é, existe $C_5 \in (0,\infty)$ tal que $I(u_n) \leq C_5$. Daí, deduzimos que

$$V_1(w_n) < 4(I(u_n) + r_n) - 2 + C_1{C_2}^4{C_4}^4 + \frac{4b}{p}{C_3}^p{C_4}^p$$

$$\leq 4(C_5 + r_n) - 2 + C_1 {C_2}^4 {C_4}^4 + \frac{4b}{p} {C_3}^p {C_4}^p.$$

Como $\lim r_n = 0$, concluímos que (r_n) é limitada, isto é, existe $C_6 \in (0, \infty)$ tal que $r_n \leq C_6$. Dessa forma, inferimos que

$$\begin{aligned} V_1(w_n) &< 4(C_5 + r_n) - 2 + C_1 {C_2}^4 {C_4}^4 + \frac{4b}{p} {C_3}^p {C_4}^p \\ &\leq 4(C_5 + C_6) - 2 + C_1 {C_2}^4 {C_4}^4 + \frac{4b}{p} {C_3}^p {C_4}^p, \end{aligned}$$

ou seja

$$V_1(w_n) < C, \tag{3.9}$$

onde $C \coloneqq \max\{1, 4(C_5 + C_6) - 2 + C_1 {C_2}^4 {C_4}^4 + \frac{4b}{p} {C_3}^p {C_4}^p\} > 0$.

Vamos separar então em dois casos: $p > 4$ e $b > 0$, $b = 0$ ou $p = 4$.

(i) $p > 4$ e $b > 0$

Seja $t \in (0, \infty)$. Pela Proposição 3.1.5, concluímos que

$$I(tv_n) = I(tw_n) = \frac{t^2}{2} \|w_n\| + \frac{t^4}{4} V_0(w_n) - \frac{bt^p}{p} \|w_n\|_p^p.$$

Pela Proposição A.8 (veja página 144), inferimos que

$$\begin{aligned} I(tv_n) &= \frac{t^2}{2} \|w_n\| + \frac{t^4}{4} V_0(w_n) - \frac{bt^p}{p} \|w_n\|_p^p \\ &= \frac{t^2}{2} \|v_n\| + \frac{t^4}{4} V_0(w_n) - \frac{bt^p}{p} \|w_n\|_p^p = \\ &= \frac{t^2}{2} \left\| \frac{u_n}{\|u_n\|} \right\| + \frac{t^4}{4} V_0(w_n) - \frac{bt^p}{p} \|w_n\|_p^p = \\ &= \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} V_0(w_n) - \frac{bt^p}{p} \|w_n\|_p^p. \end{aligned}$$

Pela definição de V_0 e como V_2 e t são não negativos, deduzimos que

$$\begin{aligned} I(tv_n) &= \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} V_0(w_n) - \frac{bt^p}{p} \|w_n\|_p^p \\ &= \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} (V_1(w_n) - V_2(w_n)) - \frac{bt^p}{p} \|w_n\|_p^p \leq \\ &\leq \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} V_1(w_n) - \frac{bt^p}{p} \|w_n\|_p^p. \end{aligned}$$

Por (3.9), concluímos que

$$\begin{aligned} I(tv_n) &\leq \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} V_1(w_n) - \frac{bt^p}{p} \|w_n\|_p^p \\ &\leq \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} C - \frac{bt^p}{p} \|w_n\|_p^p. \end{aligned}$$

Redefina $t_n := \dfrac{t}{\|u_n\|}$. Note que (t_n) é uma sequência em $[0, \infty)$ limitada e $t_n \to 0$.

Pela definição de (v_n), temos que $tv_n = \dfrac{t}{\|u_n\|}u_n = t_n u_n$. Pelo Lema 3.1, concluímos que existe $\liminf I(tv_n)$. Pela Proposição A.7 (veja página 143), inferimos que $\|w_n\| = \|v_n\| = \left\|\dfrac{u_n}{\|u_n\|}\right\| = 1$. Então, deduzimos que (w_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Como $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$, concluímos que (w_n) é limitada em $L^p(\mathbb{R}^2)$. Desse modo, inferimos que existe $\liminf(-\|w_n\|_p^p)$. Podemos então passar o lim inf dos dois lados. Passando o lim inf dos dois lados e por propriedades do lim inf, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\liminf I(tv_n) &\leq \liminf \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}C - \frac{bt^p}{p}\|w_n\|_p^p\right) \\
&= \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}C + \frac{bt^p}{p}\liminf\left(-\|w_n\|_p^p\right).
\end{aligned}$$

Como $\liminf a_n \leq \limsup a_n$, para qualquer (a_n) sequência em $\mathbb{R}$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\liminf I(tv_n) &\leq \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}C + \frac{bt^p}{p}\liminf(-\|w_n\|_p^p) \\
&\leq \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}C + \frac{bt^p}{p}\limsup(-\|w_n\|_p^p).
\end{aligned}$$

Pela Proposição A.4 (veja página 138), inferimos que $\|w\|_p^p \leq \liminf \|w_n\|_p^p$, isto é, $\limsup(-\|w_n\|_p^p) = -\liminf \|w_n\|_p^p \leq -\|w\|_p^p$. Assim, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\liminf I(tv_n) &\leq \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}C + \frac{bt^p}{p}\limsup(-\|w_n\|_p^p) \\
&\leq \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}C - \frac{bt^p}{p}\|w\|_p^p. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Como $b > 0$ e $p > 4$, a expressão obtida em (3.10) é um polinômio cujo coeficiente do maior expoente é negativo, ou seja, seu limite quando $t \to \infty$ é $-\infty$. Como $t \in (0, \infty)$ foi escolhido arbitrariamente, podemos escolher $t_0 \in (0, \infty)$ grande o suficiente tal que

$$\liminf I\left(\frac{t_0}{\|u_n\|}u_n\right) = \liminf I(t_0 v_n) < -1.$$

Redefina $t_n := \dfrac{t_0}{\|u_n\|}$. Note que (t_n) é uma sequência em $[0, \infty)$ limitada e $t_n \to 0$.

Daí e como (u_n) é sequência de Cerami para o funcional I, concluímos, pelo Lema 3.1, que

$$\liminf I\left(\frac{t_0}{\|u_n\|}u_n\right) \geq 0,$$

o que é absurdo.

(ii) $b = 0$ ou $p = 4$.

Defina $\rho_n \coloneqq V_0(w_n) - b\|w_n\|_p^p$.

Seja $t \in (0, \infty)$. Pela Proposição 3.1.5, inferimos que

$$I(tv_n) = I(tw_n) = \frac{t^2}{2}\|w_n\|^2 + \frac{t^4}{4}V_0(w_n) - \frac{bt^p}{p}\|w_n\|_p^p.$$

Pela Proposição A.8 (veja página 144), deduzimos que

$$\begin{aligned}
I(tv_n) &= \frac{t^2}{2}\|w_n\|^2 + \frac{t^4}{4}V_0(w_n) - \frac{bt^p}{p}\|w_n\|_p^p \\
&= \frac{t^2}{2}\|v_n\|^2 + \frac{t^4}{4}V_0(w_n) - \frac{bt^p}{p}\|w_n\|_p^p = \\
&= \frac{t^2}{2}\left\|\frac{u_n}{\|u_n\|}\right\|^2 + \frac{t^4}{4}V_0(w_n) - \frac{bt^p}{p}\|w_n\|_p^p = \\
&= \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}V_0(w_n) - \frac{bt^p}{p}\|w_n\|_p^p.
\end{aligned}$$

Se $b = 0$, concluímos que $\rho_n = V_0(w_n)$ e que

$$\begin{aligned}
I(tv_n) &= \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}V_0(w_n) - \frac{bt^p}{p}\|w_n\|_p^p \\
&= \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}V_0(w_n) = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}\rho_n.
\end{aligned}$$

Se $p = 4$, inferimos que

$$\begin{aligned}
I(tv_n) &= \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}V_0(w_n) - \frac{bt^p}{p}\|w_n\|_p^p \\
&= \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}V_0(w_n) - \frac{bt^4}{4}\|w_n\|_p^p = \\
&= \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}(V_0(w_n) - b\|w_n\|_p^p) = \\
&= \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}\rho_n.
\end{aligned}$$

Então, em todos os casos que estamos tratando no momento, podemos usar a equação

$$I(tv_n) = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}\rho_n.$$

Pela definição de ρ_n, de V_0, como $b \in [0, \infty)$, como norma são não negativas e por propriedades do valor absoluto, deduzimos que

$$\begin{aligned}
|\rho_n| &= |V_0(w_n) - b\|w_n\|_p^p| \leq |V_0(w_n)| + |b\|w_n\|_p^p| \\
&= |V_1(w_n) - V_2(w_n)| + b\|w_n\|_p^p \leq |V_1(w_n)| + |V_2(w_n)| + b\|w_n\|_p^p.
\end{aligned}$$

Por (3.9), concluímos que

$$|\rho_n| \leq |V_1(w_n)| + |V_2(w_n)| + b\|w_n\|_p^p \leq C + |V_2(w_n)| + b\|w_n\|_p^p.$$

Pelo Corolário 2.1 e pelo fato de V_2 ser não negativa, inferimos que existe $C_7 \in (0, \infty)$ tal que

$$|\rho_n| \leq C + |V_2(w_n)| + b\|w_n\|_p^p \leq C + C_7\|w_n\|_{\frac{8}{3}}^4 + b\|w_n\|_p^p$$

Como $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)$ e $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$, deduzimos que existem $C_8, C_9 \in (0, \infty)$s tais que

$$|\rho_n| \leq C + C_7\|w_n\|_{\frac{8}{3}}^4 + b\|w_n\|_p^p \leq C + C_7{C_8}^4\|w_n\|^4 + b{C_9}^p\|w_n\|.$$

Pela Proposição A.8 (veja página 144), concluímos que

$$|\rho_n| \leq C + C_7{C_8}^4\|w_n\|^4 + b{C_9}^p\|w_n\| = C + C_7{C_8}^4 + b{C_9}^p,$$

ou seja, (ρ_n) é limitada. Portanto, existe uma subsequência de (w_n) (que ainda chamaremos de (w_n)) tal que ρ_n é convergente.

Suponha por absurdo que $\lim \rho_n \geq 0$.

Como (u_n) é uma sequência de Cerami para o funcional I, temos que existe $d \in (0, \infty)$ tal que $\lim I(u_n) = d$. Defina $t_0 := \sqrt{4d}$ e $t_n := \dfrac{t_0}{\|u_n\|}$. Note que (t_n) é uma sequência em $[0, \infty)$ limitada e $t_n \to 0$.

Daí e por definição, inferimos que $I(t_0 v_n) = I\left(\dfrac{t_0}{\|u_n\|}u_n\right) = I(t_n u_n)$. Disso e pelo Lema 3.1, deduzimos que existe (r_n) uma sequência em $\mathbb{R}$ satisfazendo $\lim r_n = 0$ tal que

$$I(u_n) + r_n \geq I(t_n u_n) = I(t_1 v_n) = \frac{t_1^2}{2} + \frac{t_1^4}{4}\rho_n.$$

Passando o limite com $n \to \infty$ dos dois lados e por propriedades do limite, concluímos que

$$\lim I(u_n) + \lim r_n = \lim(I(u_n) + r_n) \geq \lim\left(\frac{t_1^2}{2} + \frac{t_1^4}{4}\rho_n\right) = \frac{t_1^2}{2} + \frac{t_1^4}{4}\lim \rho_n.$$

Como $\lim I(u_n) = d$, $\lim r_n = 0$ e $\lim \rho_n \geq 0$, inferimos que

$$d = \lim I(u_n) + \lim r_n \geq \frac{t_1^2}{2} + \frac{t_1^4}{4}\lim \rho_n \geq \frac{{t_1}^2}{2}.$$

Pela definição de t_1, vale que

$$d \geq \frac{{t_1}^2}{2} = \frac{\left(\sqrt{4d}\right)^2}{2} = \frac{4d}{2} = 2d,$$

o que é absurdo. Daí, deduzimos que $\lim \rho_n < 0$.

Dessa forma, concluímos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho_n < 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n \geq n_0$. Então, se $n \in \mathbb{N}$ satisfaz $n \geq n_0$, inferimos que

$$I(tv_n) = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}\rho_n$$

é um polinômio cujo maior expoente é 4 e o coeficiente do maior expoente é $\rho_n < 0$. Logo, $\lim\limits_{t\to\infty} I(tv_n) = -\infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n \geq n_0$. Então existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $I(t_0 v_n) \leq -1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n \geq n_0$.

Redefina $t_n := \dfrac{t_0}{\|u_n\|}$. Note que (t_n) é uma sequência em $[0, \infty)$ limitada e $t_n \to 0$.

Pela definição de t_n, temos que $I(t_0 v_n) = I(t_n u_n)$. Pelo Lema 3.1, deduzimos que $\liminf I(t_n u_n) \geq 0$, o que contradiz o fato de $I(t_0 v_n) \leq -1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n \geq n_0$.

Como em todos os casos possíveis obtivemos uma contradição ao supor que (u_n) era ilimitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$, concluímos que (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$.

□

3.4 A condição de compacidade

Antes de mostrarmos a condição de compacidade, precisamos de mais alguns resultados auxiliares. O primeiro deles é outro corolário do Lema de Lions (veja F.13, na página 159) cujo enunciado é similar ao da seção anterior, mas a demonstração é bem diferente.

Proposição 3.4.1. *Seja (u_n) uma sequência de Cerami para o funcional I. Então*

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{z\in\mathbb{Z}^2} \int_{B(z,2)} u_n(y)^2\, dy > 0.$$

Demonstração. Suponha por absurdo que

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{z\in\mathbb{Z}^2} \int_{B(z,2)} u_n(y)^2\, dy = 0.$$

Por propriedades do $\liminf$, concluímos que existe uma subsequência de (u_n) (que ainda chamaremos de (u_n)) tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\mathbb{Z}^2} \int_{B(z,2)} u_n(y)^2\, dy = 0$$

e, pelo Lema 3.2, inferimos que (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Desse modo, pelo Lema de Lions (veja F.13, na página 159), deduzimos que

$$\lim u_n = 0 \text{ em } L^s(\mathbb{R}^2), \text{ para todo } s > 2. \tag{3.11}$$

Pelo Corolário 2.4, concluímos que

$$I'(u_n)u_n = \|u_n\|^2 + V_0(u_n) - b\|u_n\|_p^p.$$

Pela definição de V_0, temos que

$$I'(u_n)u_n = \|u_n\|^2 + V_1(u_n) - V_2(u_n) - b\|u_n\|_p^p.$$

Assim, inferimos que

$$\|u_n\|^2 + V_1(u_n) = I'(u_n)u_n + V_2(u_n) + b\|u_n\|_p^p.$$

Passando o limite com $n \to \infty$ dos dois lados e usando a linearidade do limite, deduzimos que

$$\begin{aligned}\lim\|u_n\|^2 + \lim V_1(u_n) &= \lim(\|u_n\|^2 + V_1(u_n)) = \lim(I'(u_n)u_n + V_2(u_n) + b\|u\|_p^p)\\ &= \lim I'(u_n)(u) + \lim V_2(u_n) + b\lim\|u_n\|_p^p.\end{aligned}$$

Por (3.11), concluímos que $u_n \overset{L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)}{\to} 0$. Daí e pelo Lema 2.3, inferimos que $\lim V_2(u_n) = V_2(0) = 0$. Assim, deduzimos que

$$\begin{aligned}\lim\|u_n\|^2 + \lim V_1(u_n) &= \lim I'(u_n)(u) + \lim V_2(u_n) + b\lim\|u_n\|_p^p\\ &= \lim I'(u_n)u_n + b\lim\|u_n\|_p^p.\end{aligned}$$

Ainda por (3.11), concluímos que $u_n \overset{L^p(\mathbb{R}^2)}{\to} 0$. Daí, inferimos que

$$\lim\|u_n\|^2 + \lim V_1(u_n) = \lim I'(u_n)u_n + b\lim\|u_n\|_p^p = \lim I'(u)(u).$$

Como (u_n) é de Cerami, pela Proposição 3.1.2, deduzimos que

$$\lim\|u_n\|^2 + \lim V_1(u_n) = \lim I'(u_n)u_n = 0$$

Como $\|\cdot\|$ e V_1 são não negativas, concluímos que

$$\lim\|u_n\|^2 = 0 \text{ e } \lim V_1(u_n) = 0,$$

ou seja,

$$\lim I(u_n) = 0,$$

o que é absurdo, pois (u_n) é uma sequência de Cerami para o funcional I.

□

Se o resultado acima remete ao primeiro resultado da seção anterior, o próximo resultado remeterá ao segundo resultado da seção anterior. Dentre as diferenças, a principal é que a convergência fraca agora ocorre em X.

Proposição 3.4.2. *Seja (u_n) uma sequência de Cerami para o funcional I. Então existem $u \in X \setminus \{0\}$ e (z_n) uma sequência em $\mathbb{Z}^2$ tais que, a menos de subsequência, $u_n \circ \tau_{z_n} \overset{X}{\rightharpoonup} u$.*

Demonstração. Primeiro, vamos mostrar que existem $w \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e (z_n) uma sequência em $\mathbb{Z}^2$ tal que, a menos de subsequência, $u_n \circ \tau_{z_n} \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\rightharpoonup} w$.

Pela Proposição 3.4.1, concluímos que existe $C_1 \in (0, \infty)$ tal que

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{z\in\mathbb{Z}^2} \int_{B(z,2)} u_n(y)^2\, dy > C_1.$$

Por propriedades do $\liminf$, inferimos que existe uma subsequência de (u_n) (que ainda chamaremos de (u_n)) tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\mathbb{Z}^2} \int\limits_{B(z,2)} u_n(y)^2\,dy = \liminf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{z\in\mathbb{Z}^2} \int\limits_{B(z,2)} u_n(y)^2\,dy > C_1.$$

Dessa forma, deduzimos que existe uma subsequência de (u_n) (que ainda chamaremos de (u_n)) tal que

$$\sup_{z\in\mathbb{Z}^2} \int\limits_{B(z,2)} u_n(y)^2\,dy > C_1.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, por propriedades do sup, concluímos que existe (z_k^n) uma sequência em $\mathbb{Z}^2$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{B(z_k^n,2)} u_n(y)^2\,dy = \sup_{z\in\mathbb{Z}^2} \int\limits_{B(z,2)} u_n(y)^2\,dy > C_1.$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe k_0^n tal que

$$\int\limits_{B(z_{k_0^n}^n,2)} u_n(y)^2\,dy > C_1.$$

Como u_n é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$, existe $C_2 \in (0,\infty)$ tal que

$$C_2 > \|u_n\|^2 \geq \|u_n\|_2^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^2} u_n^2(y)\,dy \geq \int\limits_{B(z_{k_0^n}^n,2)} u_n(y)^2\,dy.$$

Desse modo, inferimos que

$$\left(\int\limits_{B(z_{k_0^n}^n,2)} u_n(y)^2\,dy \right)$$

é uma sequência (indexada por n) em $[C_1, C_2]$.

Como $[C_1, C_2]$ é compacto, existe uma subsequência de

$$\left(\int\limits_{B(z_{k_0^n}^n,2)} u_n(y)^2\,dy \right)$$

que é convergente. Sejam (z_n) e (u_n) as subsequências induzidas por essa subsequência e seja $w_n := u_n \circ \tau_{z_n}$. Note então que

$$\left(\int\limits_{B(0,2)} w_n^2(y)\,dy \right)$$

é uma sequência em $[C_1, C_2]$.

Pela Proposição A.8 (veja página 144), deduzimos que $\|w_n\| = \|u_n\| < C_2$, ou seja, (w_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Assim, concluímos que existe $w \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que, a menos de subsequência, $w_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\rightharpoonup} w$. Além disso, pelo Teorema de Vainberg (veja F.14, na página 159), inferimos que, a menos de subsequência, $w_n(x) \to w(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^2$.

Vamos mostrar que w é não nulo. Como restrição de sequências fracamente convergentes ainda é fracamente convergente e o limite fraco é o mesmo, deduzimos que $w_n|_{B(0,2)} \overset{H^1(B(0,2))}{\rightharpoonup} w|_{B(0,2)}$. Como $B(0,2)$ é limitada, concluímos que $H^1(B(0,2)) \overset{C}{\hookrightarrow} L^2(B(0,2))$. Daí, $w_n|_{B(0,2)} \overset{L^2(B(0,2))}{\to} w|_{B(0,2)}$. Dessa forma, inferimos que

$$
\begin{aligned}
C_1 < \int_{B(0,2)} w_n^2(y)\, dy &= \|w_n\|_{L^2(B(0,2))} \\
&= \| w_n|_{B(0,2)}\|_{L^2(B(0,2))} \to \| w|_{B(0,2)}\|_{L^2(B(0,2))} = \|w\|_{L^2(B(0,2))},
\end{aligned}
$$

ou seja, $w \neq 0$.

Vamos mostrar que $w_n \overset{X}{\rightharpoonup} w$.

Pelo Corolário 2.4, deduzimos que

$$I'(u_n)u_n = \|u_n\|^2 + V_0(u_n) - b\|u_n\|_p^p.$$

Pela definição de V_0, vale que

$$
\begin{aligned}
I'(u_n)u_n &= \|u_n\|^2 + V_0(u_n) - b\|u_n\|_p^p \\
&= \|u_n\|^2 + V_1(u_n) - V_2(u_n) - b\|u_n\|_p^p.
\end{aligned}
$$

Então, concluímos que

$$
\begin{aligned}
V_1(u_n) &= I'(u_n)u_n - \|u_n\|^2 + V_2(u_n) + b\|u_n\|_p^p \\
&\leq I'(u_n)u_n + V_2(u_n) + b\|u_n\|_p^p.
\end{aligned}
$$

Pela Proposição 3.1.4, inferimos que

$$V_1(w_n) = V_1(u_n) \leq I'(u_n)u_n + V_2(u_n) + b\|u_n\|_p^p.$$

Pelo Corolário 2.1, deduzimos que existe $C_3 \in (0, \infty)$ tal que

$$
\begin{aligned}
V_1(w_n) &\leq I'(u_n)u_n + V_2(u_n) + b\|u_n\|_p^p \\
&\leq I'(u_n)u_n + C_1\|u_n\|_{\frac{8}{3}}^4 + b\|u_n\|_p^p.
\end{aligned}
$$

Como $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$ e $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)$, concluímos que existem C_4 e C_5 tais que

$$
\begin{aligned}
V_1(w_n) &\leq I'(u_n)u_n + C_1\|u_n\|_{\frac{8}{3}}^4 + b\|u_n\|_p \\
&\leq I'(u_n)u_n + C_1C_4\|u_n\|^4 + bC_5\|u_n\|^p.
\end{aligned}
$$

Pelos Lema 3.2 e Proposição 3.1.2, inferimos que $V_1(w_n)$ é limitada, ou seja, $\sup V_1(w_n) < \infty$, isto é,

$$\sup \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u_n^2(x)u_n^2(y)\,dx\,dy = V_1(u_n) = V_1(w_n) < \infty$$

Pelo Lema 2.7, deduzimos que $\|w_n\|_*$ é limitada. Como $\|w_n\|_X = \sqrt{\|w_n\|^2 + \|w_n\|_*}$ e já vimos que $\|w_n\|$ é limitada, concluímos que (w_n) limitada em X. Logo, existem $\tilde{w} \in B(0,R)$ e uma subsequência de (w_n) (que ainda chamaremos de (w_n)) tais que $w_n \overset{X}{\rightharpoonup} \tilde{w}$. Pelo Teorema de Vainberg (veja F.14, na página 159) inferimos que, a menos de subsequência, $w_n(x) \to \tilde{w}(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^2$. Desse modo, pela unicidade do limite quase certo, deduzimos que $\tilde{w} = w$.

Falta apenas mostrar que $w \in X$. Mas como X é Banach, concluímos que ele é fechado na topologia forte de $H^1(\mathbb{R}^2)$. Como X é espaço vetorial, inferimos que ele é convexo. Assim, deduzimos que X é fechado na topologia fraca de $H^1(\mathbb{R}^2)$. Como (w_n) é uma sequência em X, $w_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\rightharpoonup} w$ e X é fechado na topologia fraca de $H^1(\mathbb{R}^2)$, concluímos que $w \in X$.

□

A seguinte estimativa relaciona translações por sequências de elementos de $\mathbb{Z}^2$ e a norma de X.

Proposição 3.4.3. *Sejam $v \in X$, (u_n) uma sequência de Cerami para o funcional I e (z_n) uma sequência em $\mathbb{Z}^2$ tal que $(u_n \circ \tau_{z_n})$ é limitada em X. Então existe $C \in (0,\infty)$ tal que $\|v \circ \tau_{-z_n}\|_X \le C\|u_n\|_X$.*

Demonstração. Pelas definição de $\|\cdot\|_*$ e de τ_{-z_n}, temos que

$$\begin{aligned}\|v\circ\tau_{-z_n}\|_*^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|y|)[v\circ\tau_{-z_n}]^2(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|y|)(v(\tau_{-z_n}(y)))^2\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|y|)v^2(y+z_n)\,dy.\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $x = y + z_n$, concluímos que

$$\|v\circ\tau_{-z_n}\|_*^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|y|)v^2(y+z_n)\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-z_n|)v^2(x)\,dx.$$

Pela Proposição B.3 (veja página 146), inferimos que

$$\|v\circ\tau_{-z_n}\|_*^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-z_n|)v^2(x)\,dx \le \int_{\mathbb{R}^2} (\ln(1+|x|) + \ln(1+|z_n|))v^2(x)\,dx.$$

Pela linearidade da integral, deduzimos que

$$\|v\circ\tau_{-z_n}\|_*^2 \le \int_{\mathbb{R}^2} (\ln(1+|x|) + \ln(1+|z_n|))v^2(x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)v^2(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|z_n|)v^2(x)\,dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)v^2(x)\,dx + \ln(1+|z_n|)\int_{\mathbb{R}^2} v^2(x)\,dx.$$

Pelas definições de $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_*$, vale que

$$\begin{aligned}\|v\circ\tau_{-z_n}\|_*^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)v^2(x)\,dx + \ln(1+|z_n|)\int_{\mathbb{R}^2} v^2(x)\,dx\\ &= \|v\|_*^2 + \ln(1+|z_n|)\|v\|_2^2.\end{aligned}$$

Como normas são não negativas, $\ln(1+|z_n|)$ também é não negativo e pelas definições de $\|\cdot\|$ e de $\|\cdot\|_X$, concluímos que

$$\begin{aligned}\|v\circ\tau_{-z_n}\|_*^2 &\leq \|v\|_*^2 + \ln(1+|z_n|)\|v\|_2^2\\ &\leq \|v\|_*^2 + \|v\|^2 + \ln(1+|z_n|)\|v\|_2^2 + \ln(1+|z_n|)\|\nabla v\|_2^2 + \ln(1+|z_n|)\|v\|_*^2 =\\ &\leq \|v\|_X^2 + \ln(1+|z_n|)\|v\|^2 + \ln(1+|z_n|)\|v\|_*^2 =\\ &\leq \|v\|_X^2 + \ln(1+|z_n|)\|v\|_X^2 = (1+\|v\|_X^2)\ln(1+|z_n|) =\\ &= C_1\ln(1+|z_n|),\end{aligned}$$

onde $C_1 \coloneqq (1+\|v\|_X^2) \neq 0$.

Além disso, também temos a seguinte desigualdade:

$$\|u_n\|_*^2 \geq C_2\ln(1+|z_n|),$$

para algum $C_2 \in (0,\infty)$. Multiplicando a desigualdade acima por $C \coloneqq \dfrac{C_1}{C_2}$, temos que

$$C_1\ln(1+|z_n|) = \frac{C_1C_2}{C_2}\ln(1+|z_n|) \leq C\|u_n\|_*^2.$$

Combinando as duas desigualdades anteriores, temos que

$$\|v\circ\tau_{-z_n}\|_*^2 \leq C_1\ln(1+|z_n|) \leq C\|u_n\|_*^2.$$

Pela definição de $\|\cdot\|_X$ e pela Proposição A.8 (veja página 144), temos que

$$\|v\circ\tau_{-z_n}\|_X^2 \leq C_1\ln(1+|z_n|) \leq C\|u_n\|_X^2.$$

□

Em seguida, veremos um resultado técnico sobre uma convergência bem específica relacionada à sequência obtida no resultado anterior.

Proposição 3.4.4. *Seja (u_n) uma sequência de Cerami para o funcional I. Sejam $u \in X\backslash\{0\}$ e (z_n) uma sequência em $\mathbb{Z}^2$ tais que, a menos de subsequência, $u_n\circ\tau_{z_n} \xrightharpoonup{X} u$. Então*

$$I'(u_n\circ\tau_{z_n})(u_n\circ\tau_{z_n} - u) \to 0.$$

Demonstração. Fazendo uma mudança de variáveis adequada, temos que

$$I'(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u) = I'(u_n)(u_n - u \circ \tau_{-z_n}).$$

Isso junto com a definição de norma em espaço dual implica que

$$\begin{aligned} |I'(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u)| &= |I'(u_n)(u_n - u \circ \tau_{-z_n})| \\ &\leq \|I'(u_n)\|_{X'} \|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\|_X. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade triangular obtemos que

$$\begin{aligned} |I'(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u)| &\leq \|I'(u_n)\|_{X'} \|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\|_X \\ &\leq \|I'(u_n)\|_{X'} (\|u_n\|_X + \|u \circ \tau_{-z_n}\|_X) \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.4.3, temos que

$$\begin{aligned} |I'(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u)| &\leq \|I'(u_n)\|_{X'} (\|u_n\|_X + \|u \circ \tau_{-z_n}\|_X) \\ &\leq \|I'(u_n)\|_{X'} \|u_n\|_X (1 + C_3), \end{aligned}$$

donde concluímos que $\lim_{n \to \infty} I'(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u) = 0$, pois (u_n) é uma sequência de Cerami para o funcional I.

□

Finalmente, estamos preparados para enunciar e provar a condição de compacidade.

Lema 3.3. *Seja (u_n) uma sequência de Cerami para o funcional I. Então, a menos de subsequência, existem $u \in X \setminus \{0\}$ e (z_n) uma sequência em $\mathbb{Z}^2$ tais que u ponto crítico de I e*

$$u_n \circ \tau_{z_n} \xrightarrow{X} u.$$

Demonstração. Pela Proposição 3.4.2, concluímos que existem $u \in X \setminus \{0\}$ e (z_n) uma sequência em $\mathbb{Z}^2$ tais que, a menos de subsequência, $u_n \circ \tau_{z_n} \overset{X}{\rightharpoonup} u$.

Pelas propriedades do produto interno, pela definição de norma induzida por um produto interno e por propriedades do lim inf, inferimos que

$$\begin{aligned} \liminf \langle u_n \circ \tau_{z_n}, u_n \circ \tau_{z_n} - u \rangle &= \liminf(\langle u_n \circ \tau_{z_n}, u_n \circ \tau_{z_n} \rangle - \langle u_n \circ \tau_{z_n}, u \rangle) = \\ &= \liminf(\|u_n \circ \tau_{z_n}\|^2 - \langle u_n \circ \tau_{z_n}, u \rangle) = \\ &= \liminf \|u_n \circ \tau_{z_n}\|^2 + \liminf(-\langle u_n \circ \tau_{z_n}, u \rangle). \end{aligned}$$

Como $u_n \circ \tau_{z_n} \overset{X}{\rightharpoonup} u$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma transformação linear contínua deduzimos, pela definição de convergência fraca e de norma induzida, que

$$\begin{aligned} \liminf \langle u_n \circ \tau_{z_n}, u_n \circ \tau_{z_n} - u \rangle &= \liminf \|u_n \circ \tau_{z_n}\|^2 + \liminf(-\langle u_n \circ \tau_{z_n}, u \rangle) = \\ &= \liminf \|u_n \circ \tau_{z_n}\|^2 - \lim \langle u_n \circ \tau_{z_n}, u \rangle = \\ &= \liminf \|u_n \circ \tau_{z_n}\|^2 - \langle u, u \rangle = \\ &= \liminf \|u_n \circ \tau_{z_n}\|^2 - \|u\|^2, \end{aligned}$$

isto é

$$\liminf \langle u_n \circ \tau_{z_n}, u_n \circ \tau_{z_n} - u \rangle = \liminf \|u_n \circ \tau_{z_n}\|^2 - \|u\|^2. \qquad (3.12)$$

Observe que

$$\begin{aligned}(u_n \circ \tau_{z_n} - u)^2 + u(u_n \circ \tau_{z_n} - u) &= (u_n \circ \tau_{z_n})^2 - 2u(u_n \circ \tau_{z_n}) + u^2 + u(u_n \circ \tau_{z_n}) - u^2 \\ &= (u_n \circ \tau_{z_n})^2 - u(u_n \circ \tau_{z_n}) = (u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u).\end{aligned}$$

Daí, pelo Lema 2.2 e pela linearidade da integral, concluímos que

$$\begin{aligned}
&V_1'(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u) = \\
&= 4 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x-y|)\,(u_n \circ \tau_{z_n})^2(x)(u_n \circ \tau_{z_n})(y)(u_n \circ \tau_{z_n} - u)(y)\,dx\,dy = \\
&= 4 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x-y|)\,(u_n \circ \tau_{z_n})^2(x)((u_n \circ \tau_{z_n}(y) - u(y))^2 + u(y)(u_n \circ \tau_{z_n}(y) - u(y)))\,dx\,dy = \\
&= 4 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x-y|)\,(u_n \circ \tau_{z_n})^2(x)(u_n \circ \tau_{z_n}(y) - u(y))^2\,dx\,dy + \\
&+ 4 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x-y|)\,(u_n \circ \tau_{z_n})^2(x)u(y)(u_n \circ \tau_{z_n}(y) - u(y))\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

Como $(u_n \circ \tau_{z_n})$ é limitada e $u_n \circ \tau_{z_n} \stackrel{X}{\rightharpoonup} u$, inferimos, pelo Lema 2.8 e por propriedades do $\liminf$, que

$$\begin{aligned}
&\liminf V_1'(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u) = \\
&= \liminf \Bigg(4 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x-y|)\,(u_n \circ \tau_{z_n})^2(x)(u_n \circ \tau_{z_n}(y) - u(y))^2\,dx\,dy + \\
&+ 4 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x-y|)\,(u_n \circ \tau_{z_n})^2(x)u(y)(u_n \circ \tau_{z_n}(y) - u(y))\,dx\,dy \Bigg) = \\
&= 4 \liminf \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x-y|)\,(u_n \circ \tau_{z_n})^2(x)(u_n \circ \tau_{z_n}(y) - u(y))^2\,dx\,dy + \\
&+ 4 \liminf \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x-y|)\,(u_n \circ \tau_{z_n})^2(x)u(y)(u_n \circ \tau_{z_n}(y) - u(y))\,dx\,dy = \\
&= 4 \liminf \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x-y|)\,(u_n \circ \tau_{z_n})^2(x)(u_n \circ \tau_{z_n}(y) - u(y))^2\,dx\,dy + \\
&+ 4 \lim \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x-y|)\,(u_n \circ \tau_{z_n})^2(x)u(y)(u_n \circ \tau_{z_n}(y) - u(y))\,dx\,dy = \\
&= 4 \liminf \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x-y|)\,(u_n \circ \tau_{z_n})^2(x)(u_n \circ \tau_{z_n}(y) - u(y))^2\,dx\,dy,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}&\liminf V_1'(u_n\circ\tau_{z_n})(u_n\circ\tau_{z_n}-u)=\\&=4\liminf\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\ln\left(1+|x-y|\right)(u_n\circ\tau_{z_n})^2(x)(u_n\circ\tau_{z_n}(y)-u(y))^2\,dx\,dy\geq 0.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Pelo Lema 2.3 e pela Proposição 2.2.2, deduzimos que

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{4}V_2'(u_n\circ\tau_{z_n})(u_n\circ\tau_{z_n}-u)\right|=\\&=\left|\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)(u_n\circ\tau_{z_n})^2(x)(u_n\circ\tau_{z_n})(y)(u_n\circ\tau_{z_n}-u)(y)\,dx\,dy\right|\leq\\&\leq\|(u_n\circ\tau_{z_n})^2\|_{\frac{4}{3}}\|(u_n\circ\tau_{z_n})(u_n\circ\tau_{z_n}-u)\|_{\frac{4}{3}}.\end{aligned}$$

Pela definição das normas $L^p(\mathbb{R}^2)$ e pela Desigualdade de Hölder (veja F.8, na página 158), concluímos que

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{4}V_2'(u_n\circ\tau_{z_n})(u_n\circ\tau_{z_n}-u)\right|\leq\|(u_n\circ\tau_{z_n})^2\|_{\frac{4}{3}}\|(u_n\circ\tau_{z_n})(u_n\circ\tau_{z_n}-u)\|_{\frac{4}{3}}\\&=\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2}\left|(u_n\circ\tau_{z_n})^2\right|^{\frac{4}{3}}dx\right)^{\frac{3}{4}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2}|(u_n\circ\tau_{z_n})(u_n\circ\tau_{z_n}-u)|^{\frac{4}{3}}dx\right)^{\frac{3}{4}}=\\&=\left(\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2}|u_n\circ\tau_{z_n}|^{\frac{8}{3}}dx\right)^{\frac{3}{8}}\right)^2\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2}|u_n\circ\tau_{z_n}|^{\frac{4}{3}}|u_n\circ\tau_{z_n}-u|^{\frac{4}{3}}dx\right)^{\frac{3}{4}}\leq\\&=\|u_n\circ\tau_{z_n}\|_{\frac{8}{3}}^2\left(\|(u_n\circ\tau_{z_n})^{\frac{4}{3}}\|_2\|(u_n\circ\tau_{z_n}-u)^{\frac{4}{3}}\|_2\right)^{\frac{3}{4}}=\\&=\|u_n\circ\tau_{z_n}\|_{\frac{8}{3}}^2\|(u_n\circ\tau_{z_n})^{\frac{4}{3}}\|_2^{\frac{3}{4}}\|(u_n\circ\tau_{z_n}-u)^{\frac{4}{3}}\|_2^{\frac{3}{4}}=\\&=\|u_n\circ\tau_{z_n}\|_{\frac{8}{3}}^2\left(\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2}\left|(u_n\circ\tau_{z_n})^{\frac{4}{3}}\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{4}}\left(\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2}\left|(u_n\circ\tau_{z_n}-u)^{\frac{4}{3}}\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{4}}=\\&=\|u_n\circ\tau_{z_n}\|_{\frac{8}{3}}^2\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2}|u_n\circ\tau_{z_n}|^{\frac{8}{3}}dx\right)^{\frac{3}{8}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2}|u_n\circ\tau_{z_n}-u|^{\frac{8}{3}}dx\right)^{\frac{3}{8}}=\\&=\|u_n\circ\tau_{z_n}\|_{\frac{8}{3}}^2\|u_n\circ\tau_{z_n}\|_{\frac{8}{3}}\|u_n\circ\tau_{z_n}-u\|_{\frac{8}{3}}=\\&=\|u_n\circ\tau_{z_n}\|_{\frac{8}{3}}^3\|u_n\circ\tau_{z_n}-u\|_{\frac{8}{3}}.\end{aligned}$$

Como $u_n\circ\tau_{z_n}\overset{X}{\rightharpoonup}u$ inferimos que, a menos de subsequência, $(u_n\circ\tau_{z_n})$ é limitada em X. Como, pela Proposição 2.1.7, $X\hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^2)\hookrightarrow L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)$, deduzimos que $\|u_n\circ\tau_{z_n}\|_{\frac{8}{3}}^{p-1}$ é limitada. Além disso, como, pelo Lema 2.1, $X\overset{C}{\hookrightarrow}L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)$, concluímos que $u_n \circ \tau_{z_n} \overset{L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}^2)}{\to} u$, ou seja, $\|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_{\frac{8}{3}} \to 0$. Dessa forma, inferimos que

$$0 \leq \lim\left|\frac{1}{4}V_2'(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u)\right| \leq \lim\|u_n \circ \tau_{z_n}\|_{\frac{8}{3}}^3 \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_{\frac{8}{3}} = 0,$$

ou seja, pelo Teorema do Confronto, deduzimos que

$$\lim \frac{1}{4}V_2'(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u) = 0. \tag{3.14}$$

Por propriedades do valor absoluto e pela Desigualdade de Hölder (veja F.8, na página 158), concluímos que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^2} |u_n \circ \tau_{z_n}|^{p-2}(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u)\, dx\right| \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} ||u_n \circ \tau_{z_n}|^{p-2}(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u)|\, dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |u_n \circ \tau_{z_n}|^{p-1}|u_n \circ \tau_{z_n} - u|\, dx \leq \\
&\|(u_n \circ \tau_{z_n})^{p-1}\|_2 \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_2.
\end{aligned}$$

Daí e pela definição de norma em $L^p(\mathbb{R}^2)$, inferimos que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^2} |u_n \circ \tau_{z_n}|^{p-2}(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u)\, dx\right| \leq \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(|u_n \circ \tau_{z_n}|^{p-1}\right)^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_2 = \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^2} (|u_n \circ \tau_{z_n}|^{2(p-1)}\, dx\right)^{\frac{p-1}{2(p-1)}} \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_2 = \\
&= \|u_n \circ \tau_{z_n}\|_{2(p-1)}^{p-1} \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_2.
\end{aligned}$$

Como $u_n \circ \tau_{z_n} \overset{X}{\rightharpoonup} u$ deduzimos que, a menos de subsequência, $(u_n \circ \tau_{z_n})$ é limitada em X. Como, pela Proposição 2.1.7, $X \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^{2(p-1)}(\mathbb{R}^2)$, concluímos que $\|u_n \circ \tau_{z_n}\|_{2(p-1)}^{p-1}$ é limitada. Além disso, como, pelo Lema 2.1, $X \overset{C}{\hookrightarrow} L^2(\mathbb{R}^2)$, inferimos que $u_n \circ \tau_{z_n} \overset{L^2(\mathbb{R}^2)}{\to} u$, ou seja, $\|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_2 \to 0$. Então, deduzimos que

$$\begin{aligned}
&0 \leq \lim\left|\int_{\mathbb{R}^2} |u_n \circ \tau_{z_n}|^{p-2}(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u)\, dx\right| \leq \\
&\leq \lim\|u_n \circ \tau_{z_n}\|_{2(p-1)}^{p-1} \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_2 = 0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim \int\limits_{\mathbb{R}^2} |u_n \circ \tau_{z_n}|^{p-2}(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u)\,dx = 0. \tag{3.15}$$

Pela Proposição 3.4.4, pelo Corolário 2.3, pela definição de V_0 e por propriedades do lim inf, concluímos que

$$\begin{aligned}
0 &= \liminf I'(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u) = \\
&= \liminf \Bigg(\langle u_n \circ \tau_{z_n}, u_n \circ \tau_{z_n} - u \rangle + \frac{1}{4} V_0'(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u) - \\
&- b \int\limits_{\mathbb{R}^2} |u_n \circ \tau_{z_n}|^{p-2}(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u)\,dx \Bigg) = \\
&= \liminf \Bigg(\langle u_n \circ \tau_{z_n}, u_n \circ \tau_{z_n} - u \rangle + \\
&+ \frac{1}{4} \left(V_1'(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u) - V_2'(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u) \right) - \\
&- b \int\limits_{\mathbb{R}^2} |u_n \circ \tau_{z_n}|^{p-2}(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u)\,dx \Bigg) = \\
&= \Bigg(\liminf \langle u_n \circ \tau_{z_n}, u_n \circ \tau_{z_n} - u \rangle + \\
&+ \frac{1}{4} (\liminf V_1'(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u) + \liminf(-V_2'(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u))) + \\
&+ b \liminf \Bigg(- \int\limits_{\mathbb{R}^2} |u_n \circ \tau_{z_n}|^{p-2}(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u)\,dx \Bigg) \Bigg).
\end{aligned}$$

Daí e por (3.12) a (3.15), inferimos que

$$\begin{aligned}
0 &= \Bigg(\liminf \langle u_n \circ \tau_{z_n}, u_n \circ \tau_{z_n} - u \rangle + \\
&+ \frac{1}{4} (\liminf V_1'(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u) + \liminf(-V_2'(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u))) + \\
&+ b \liminf \Bigg(- \int\limits_{\mathbb{R}^2} |u_n \circ \tau_{z_n}|^{p-2}(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u)\,dx \Bigg) \Bigg) = \\
&= \Bigg(\liminf \|u_n \circ \tau_{z_n}\|^2 - \|u\|^2 + \\
&+ \frac{1}{4} \Bigg(4 \liminf \int\limits_{\mathbb{R}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x - y|)\,(u_n \circ \tau_{z_n})^2(x)(u_n \circ \tau_{z_n}(y) - u(y))^2\,dx\,dy - \\
&- \lim V_2'(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u) \Bigg) - \\
&- b \lim \int\limits_{\mathbb{R}^2} |u_n \circ \tau_{z_n}|^{p-2}(u_n \circ \tau_{z_n})(u_n \circ \tau_{z_n} - u)\,dx \Bigg) =
\end{aligned}$$

$$= \Bigg(\liminf \|u_n \circ \tau_{z_n}\|^2 - \|u\|^2 + \\ + \frac{1}{4}\Bigg(4 \liminf \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1+|x-y|\right)(u_n \circ \tau_{z_n})^2(x)(u_n \circ \tau_{z_n}(y) - u(y))^2\,dx\,dy\Bigg)\Bigg).$$

Como $u_n \circ \tau_{z_n} \overset{X}{\rightharpoonup} u$ e pela Proposição A.4 (veja página 138), deduzimos que

$$0 = \Bigg(\liminf \|u_n \circ \tau_{z_n}\|^2 - \|u\|^2 + \\ + \frac{1}{4}\Bigg(4 \liminf \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1+|x-y|\right)(u_n \circ \tau_{z_n})^2(x)(u_n \circ \tau_{z_n}(y) - u(y))^2\,dx\,dy\Bigg)\Bigg) \geq \\ \geq (\liminf \|u\|^2 - \|u\|^2) = 0,$$

ou seja, $\liminf \|u_n \circ \tau_{z_n}\| = \|u\|$ e

$$\liminf \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1+|x-y|\right)(u_n \circ \tau_{z_n})^2(x)(u_n \circ \tau_{z_n}(y) - u(y))^2\,dx\,dy = 0.$$

Como $\liminf \|u_n \circ \tau_{z_n}\| = \|u\|$ e por propriedades do $\liminf$, temos que existe uma subsequência de $(u_n \circ \tau_{z_n})$ (que ainda chamaremos de $(u_n \circ \tau_{z_n})$) tal que $\lim \|u_n \circ \tau_{z_n}\| = \|u\|$. Pelas propriedades do produto interno e pela definição de norma proveniente de produto interno, vale que

$$\begin{aligned} \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|^2 &= \langle u_n \circ \tau_{z_n} - u, u_n \circ \tau_{z_n} - u\rangle \\ &= \langle u_n \circ \tau_{z_n}, u_n \circ \tau_{z_n}\rangle - 2\langle u_n \circ \tau_{z_n}, u\rangle + \langle u, u\rangle = \\ &= \|u_n \circ \tau_{z_n}\|^2 - 2\langle u_n \circ \tau_{z_n}, u\rangle + \|u\|^2. \end{aligned}$$

Como $u_n \circ \tau_{z_n} \overset{X}{\rightharpoonup} u$ e pela Proposição 2.1.7, temos que $u_n \circ \tau_{z_n} \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\rightharpoonup} u$. Daí, do fato de $\langle \cdot, u\rangle$ ser um funcional linear contínuo, pela convergência acima e pela linearidade do limite, concluímos que

$$\begin{aligned} \lim \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|^2 &= \lim(\|u_n \circ \tau_{z_n}\|^2 - 2\langle u_n \circ \tau_{z_n}, u\rangle + \|u\|^2) \\ &= \lim \|u_n \circ \tau_{z_n}\|^2 - 2\lim\langle u_n \circ \tau_{z_n}, u\rangle + \lim \|u\|^2 \\ &= 2\|u\|^2 - 2\langle u, u\rangle = 0, \end{aligned}$$

logo $\|u_n \circ \tau_{z_n} - u\| \to 0$.

Como

$$\liminf \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1+|x-y|\right)(u_n \circ \tau_{z_n})^2(x)(u_n \circ \tau_{z_n}(y) - u(y))^2\,dx\,dy = 0$$

e por propriedades do $\liminf$, temos que existe uma subsequência de $(u_n \circ \tau_{z_n})$ (que ainda chamaremos de $(u_n \circ \tau_{z_n})$) tal que

$$\lim \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1+|x-y|\right)(u_n \circ \tau_{z_n})^2(x)(u_n \circ \tau_{z_n}(y) - u(y))^2\,dx\,dy = 0.$$

Daí, pelo Lema 2.7, temos que $\|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_* \to 0$. Então, $u_n \circ \tau_{z_n} \xrightarrow{X} u$.

Resta agora apenas mostrar que u é ponto crítico de I. Para isso, seja $v \in X$. Fazendo uma mudança de variáveis adequada, temos que

$$I'(u_n \circ \tau_{z_n})v = I'(u_n)(v \circ \tau_{-z_n}).$$

Isso junto com a definição de norma em espaço dual implica que

$$|I'(u_n \circ \tau_{z_n})v| = |I'(u_n)(v \circ \tau_{-z_n})| \leq \|I'(u_n)\|_{X'}\|v \circ \tau_{-z_n}\|_X.$$

Pela Proposição 3.4.3, temos que existe $C \in (0, \infty)$ tal que $\|v \circ \tau_{-z_n}\|_X \leq C\|u_n\|_X$. Daí e da desigualdade acima, temos que

$$|I'(u_n \circ \tau_{z_n})v| \leq \|I'(u_n)\|_{X'}\|v \circ \tau_{-z_n}\|_X \leq C\|I'(u_n)\|_{X'}\|u_n\|_X.$$

donde concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty} I'(u_n \circ \tau_{z_n})v = 0$, pois (u_n) é uma sequência de Cerami para o funcional I. Mas, como I' é contínua em X (pelo Corolário 2.3) e $u_n \circ \tau z_n \xrightarrow{X} u$, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} I'(u_n \circ \tau_{z_n})v = I'(u)v$. Logo, $I'(u)v = 0$. Como v foi escolhido arbitrariamente em X, segue que $I'(u) = 0$, ou seja, u é ponto crítico de I.

□

Capítulo 4

Soluções fracas via gênero de Krasnoselskii

O objetivo deste capítulo é utilizar a teoria do gênero de Krasnoselskii para encontrar soluções fracas de (1.16) quando o parâmetro a da norma de $H^1(\mathbb{R}^2)$ que estamos usando é $\mathbb{Z}^2$-periódico. Dessa forma, assumiremos pelo resto do capítulo que a é contínua e $\mathbb{Z}^2$ periódica. Ao longo do capítulo, estaremos usando os resultados e notações establecidos no apêndice D.

Na primeira seção, introduziremos os valores c_k e mostraremos que eles são sempre finitos.

Na segunda seção, caracterizaremos o valor c_1.

Na terceira seção, apresentaremos os conjuntos K_c e $A_{c,\rho}$ e mostraremos que podemos falar do gênero de Krasnoselskii de $A_{c,\rho}$.

Na quarta seção enunciaremos e provaremos um lema de deformação e o usaremos para mostrar que os valores c_k são valores críticos de I.

Na quinta seção, definiremos o conceito de mapa baricentro generalizado e o usaremos para definir os conjuntos K_c^β e $A_{c,\rho}^\beta$. Também mostraremos que o gênero de Krasnoselskii deles está bem definido.

Na sexta seção, mostraremos que o gênero de Krasnoselskii de $A_{c,\rho}$ é finito se ρ for pequeno o suficiente e usaremos esse resultado junto com o lema de deformação da seção anterior para mostrar que $c_k \to \infty$ quando $k \to \infty$.

Na sétima seção, demonstraremos o Teorema 1. As soluções fracas do problema serão os pontos críticos associados aos valores críticos c_k.

4.1 Os valores c_k

O conjunto a seguir é a união de todas as curvas de nível de I abaixo ou iguais ao nível c.

Notação. $I^c := \{u \in X \mid I(u) \leq c\}$, *onde* $c \in \mathbb{R}$.

Observe que quando $c \leq c'$ então $I^c \subset I^{c'}$. Em particular, se $c \geq 0$ então $I^0 \subset I^c$.

Consideraremos a seguir os menores valores c tais que I^c muda de gênero de Krasnoselskii relativo à I^0.

Notação. $c_k := \inf\{c \in [0,\infty) \mid \gamma_{I^0}(I^c) \geq k\}$, *onde* $k \in \mathbb{N}$.

Note que se $\epsilon \in (0, \infty)$, então $\gamma_{I^0}(I^{c_k+\epsilon}) \geq k$ e $\gamma_{I^0}(I^{c_k-\epsilon}) < k$.

Em seguida, mostraremos que os valores c_k são monótonos em k.

Proposição 4.1.1. *Sejam $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tais que $k_1 > k_2$. Então $c_{k_1} \geq c_{k_2}$.*

Demonstração. Note que $\{c \in (0, \infty) \mid \gamma_{I^0}(I^c) \geq k_1\} \subset \{c \in (0, \infty) \mid \gamma_{I^0}(I^c) \geq k_2\}$.

Então, por propriedades do ínfimo, concluímos que

$$c_{k_1} = \inf\{c \in (0, \infty) \mid \gamma_{I^0}(I^c) \geq k_1\} \geq \inf\{c \in (0, \infty) \mid \gamma_{I^0}(I^c) \geq k_2\} = c_{k_2}.$$

□

O objetivo do restante desta seção é mostrar que os valores c_k são sempre finitos. Para isso, precisaremos de vários resultados auxiliares.

O primeiro deles é um resultado sobre o sinal de V_0.

Proposição 4.1.2. *Seja $u \in X$ com suporte contido em $B\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$. Então $V_0(u) < 0$.*

Demonstração. Sejam $x, y \in B\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$. Então $|x|, |y| \leq \dfrac{1}{4}$.

Pela desigualdade triangular, concluímos que

$$|x - y| \leq |x| + |-y| = |x| + |y| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Por propriedades do logaritmo, inferimos que

$$\begin{aligned}
V_0(u) &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x - y|) u^2(x) u^2(y) \, dx \, dy \\
&= \int_{B(0,\frac{1}{4})} \int_{B(0,\frac{1}{4})} \ln(|x - y|) u^2(x) u^2(y) \, dx \, dy \leq \\
&\leq \int_{B(0,\frac{1}{4})} \int_{B(0,\frac{1}{4})} \ln\left(\frac{1}{2}\right) u^2(x) u^2(y) \, dx \, dy = \\
&= \int_{B(0,\frac{1}{4})} \int_{B(0,\frac{1}{4})} - \ln(2) u^2(x) u^2(y) \, dx \, dy = \\
&= - \int_{B(0,\frac{1}{4})} \int_{B(0,\frac{1}{4})} \ln(2) u^2(x) u^2(y) \, dx \, dy.
\end{aligned}$$

Como $u \neq 0$, u^2 é não negativo e $\ln(2) > 0$, deduzimos que

$$V_0(u) \leq - \int_{B(0,\frac{1}{4})} \int_{B(0,\frac{1}{4})} \ln(2) u^2(x) u^2(y) \, dx \, dy < 0.$$

□

Precisamos também estudar o comportamento do funcional I em subespaços específicos de X.

Pelo resto dessa seção, W denota qualquer subespaço k-dimensional de X tal que todo elemento de W tem suporte contido em $B\left(0, \frac{1}{4}\right)$, sendo $k \in \mathbb{N}$ arbitrário.

Uma consequência do resultado anterior é:

Proposição 4.1.3. $\sup\limits_{u \in W} I(u) < \infty$.

Demonstração. Vamos primeiro mostrar que existe $R \in (0, \infty)$ tal que $I(u) < 0$, para todo $u \in B_W(0,R)^C$. Suponha por absurdo que existe (u_n) uma sequência em W tal que $I(u_n) > 0$ e $\|u_n\| \to \infty$ monotonamente.

Se $p > 4$ e $b > 0$, estamos na hipótese descrita por (2.9) do Lema 2.6. Se $p > 4$ e $b = 0$, como, pela Proposição 4.1.2, $V_0(u) < 0$, estamos na hipótese descrita por (2.10) do Lema 2.6. Se $p = 4$ e $b \geq 0$, como, pela Proposição 4.1.2, $V_0(u) < 0$, concluímos que $V_0(u) - b\|u\|_p^p < 0$ e estamos na hipótese descrita por (2.11) do Lema 2.6. Então, temos que t_u (como no Corolário 2.5) está bem definido para todo $u \in W$.

Como W tem dimensão finita, $\partial B_W(0,1)$ é compacto. Como, por Proposição 2.3.2, t_u é contínua com respeito a u e $\partial B_W(0,1)$ é compacto, inferimos que t_u assume valor máximo em $\partial B_W(0,1)$, isto é, existe $u_0 \in \partial B_W(0,1)$ tal que $t_{u_0} \geq t_u$, para todo $u \in \partial B_W(0,1)$.

Como $\|u_n\| \to \infty$, deduzimos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_{n_0}\| > t_{u_0}$. Como $\dfrac{u_{n_0}}{\|u_{n_0}\|} \in \partial B_W(0,1)$, concluímos que

$$\|u_{n_0}\| > t_{u_0} \geq t_{\frac{u_{n_0}}{\|u_{n_0}\|}}.$$

Deste modo, pela definição de t_u e pelo Corolário 2.5, inferimos que $\phi_{\frac{u_{n_0}}{\|u_{n_0}\|}}(\|u_{n_0}\|) < 0$. Mas, pela definição de ϕ e por hipótese, deduzimos que

$$0 < I(u_{n_0}) = I\left(\|u_{n_0}\| \frac{u_{n_0}}{\|u_{n_0}\|}\right) = \phi_{\frac{u_{n_0}}{\|u_{n_0}\|}}(\|u_{n_0}\|) < 0,$$

o que é absurdo.

Como W tem dimensão finita, $B_W(0,R)$ é compacto. Como I é contínua e $B_W(0,R)$ é compacto, concluímos que I assume valor máximo em $B_W(0,R)$, isto é, existe $u_{max} \in B_W(0,R)$ tal que $I(u_{max}) \geq I(u)$, para todo $u \in \partial B_W(0,1)$.

Em particular, $I(u_{max}) \geq I(0) = 0 \geq I(u)$, para todo $u \in B_W(0,R)^C$. Assim, inferimos que $\sup\limits_{u \in W} I(u) = I(u_{max}) < \infty$, pois I só assume valores finitos.

□

No que segue, precisaremos do próximo resultado.

Proposição 4.1.4. *Existe* $R \in (0, \infty)$ *tal que* $\{u \in W \mid \|u\| \geq R\} \subset I^0$.

Demonstração. Suponha por absurdo que não fosse o caso, isto é, que pra todo $R \in (0, \infty)$, existe $u_R \in \{u \in W \mid \|u\| \geq R\}$ tal que $u_R \notin I^0$. Daí e pela definição de I^0, temos que existe (u_n) uma sequência em W tal que $I(u_n) > 0$ e $\|u_n\| \geq n$, ou seja, $\|u_n\| \to \infty$ monotonamente.

Se $p > 4$ e $b > 0$, estamos na hipótese descrita por (2.9) do Lema 2.6. Se $p > 4$ e $b = 0$, como, pela Proposição 4.1.2, $V_0(u) < 0$, estamos na hipótese descrita por (2.10) do Lema 2.6. Se $p = 4$ e $b \geq 0$, como, pela Proposição 4.1.2, $V_0(u) < 0$, concluímos que $V_0(u) - b\|u\|_p^p < 0$ e estamos na hipótese descrita por (2.11) do Lema 2.6. Então, temos que t_u (como no Corolário 2.5) está bem definido para todo $u \in W$.

Como W tem dimensão finita, $\partial B_W(0,1)$ é compacto. Como, por Proposição 2.3.2, t_u é contínua com respeito a u e $\partial B_W(0,1)$ é compacto, inferimos que t_u assume valor máximo em $\partial B_W(0,1)$, isto é, existe $u_0 \in \partial B_W(0,1)$ tal que $t_{u_0} \geq t_u$, para todo $u \in \partial B_W(0,1)$.

Como $\|u_n\| \to \infty$, deduzimos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_{n_0}\| > t_{u_0}$. Como $\dfrac{u_{n_0}}{\|u_{n_0}\|} \in \partial B_W(0,1)$, concluímos que

$$\|u_{n_0}\| > t_{u_0} \geq t_{\frac{u_{n_0}}{\|u_{n_0}\|}}.$$

Deste modo, pela definição de t_u e pelo Corolário 2.5, inferimos que $\phi_{\frac{u_{n_0}}{\|u_{n_0}\|}}(\|u_{n_0}\|) < 0$. Mas, pela definição de ϕ e por hipótese, deduzimos que

$$0 < I(u_{n_0}) = I\left(\|u_{n_0}\|\frac{u_{n_0}}{\|u_{n_0}\|}\right) = \phi_{\frac{u_{n_0}}{\|u_{n_0}\|}}(\|u_{n_0}\|) < 0,$$

o que é absurdo.

□

Um subconjunto particular de W será usado na demonstração da finitude dos valores c_k.

Notação. *Sejam $R \in (0,\infty)$ como no Lema 2.5 e $\chi : X \to X$; uma função ímpar e contínua tal que se $u \in I^0$ então $\chi(u) = u$. Definimos $\mathcal{O}_\chi := \{u \in W \mid \|\chi(u)\| < R\}$.*

Para encurtar enunciados, consideraremos que $\chi : X \to X$ é uma função ímpar e contínua tal que se $u \in I^0$ então $\chi(u) = u$, a não ser que seja dito o contrário.

Precisaremos das seguintes propriedades de $\mathcal{O}_\chi$:

Proposição 4.1.5. *O conjunto $\mathcal{O}_\chi$ é uma vizinhança de 0 em W.*

Demonstração. Suponha por absurdo que todo $U \subset W$ aberto (em W) satisfazendo $0 \in U$ temos que $U \not\subset O_\chi$. Daí, concluímos que $B\left(0,\dfrac{1}{n}\right) \not\subset O_\chi$, isto é, existe $u_n \in B\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$ tal que $u_n \notin O_\chi$. Então (u_n) é uma sequência em $W \setminus O_\chi$ tal que $u_n \xrightarrow{X} 0$.

Como $I(0) = 0$, inferimos que $0 \in I^0$, pela definição de I^0. Dessa forma, deduzimos que $\chi(0) = 0$.

Como χ é contínua em X e $u_n \xrightarrow{X} 0$, concluímos que $\chi(u_n) \xrightarrow{X} \chi(0) = 0$. Então, inferimos que $\|\chi(u_n)\|_X \to 0$. Daí e como $R \in (0,\infty)$, deduzimos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\chi(u_{n_0})\|_X < R$. Disso e pela definição de O_χ, concluímos que $u_{n_0} \in O_\chi$, o que é absurdo pois (u_n) é uma sequência em $W \setminus O_\chi$.

□

Proposição 4.1.6. *O conjunto $\mathcal{O}_\chi$ é limitado.*

Demonstração. Suponha por absurdo que para todo $R \in (0, \infty)$, existe $u \in \mathcal{O}_\chi$ tal que $\|u\| > R$. Desse modo, temos que existe $u \in \mathcal{O}_\chi$ tal que $\|u\| > \max\{R, R'\}$, onde R é como no Lema 2.5 e R' como na Proposição 4.1.4.

Pela Proposição 4.1.4, concluímos que $u \in I^0$. Assim, inferimos que $\chi(u) = u$. Daí, deduzimos que

$$\begin{aligned} \|\chi(u)\|_X = \|u\|_X &= \sqrt{\|u\|^2 + \|u\|_*^2} \\ &\geq \sqrt{\|u\|^2} = \|u\| > \\ &> \max\{R, R\} \geq R', \end{aligned}$$

o que é absurdo pois $u \in O_\chi$ e, pela definição de O_χ, inferimos que $\|\chi(u)\|_X < R'$.

□

Proposição 4.1.7. *O conjunto $\mathcal{O}_\chi$ é simétrico.*

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{O}_\chi$. Então $\|\chi(u)\| < R$.

Como χ é ímpar, temos que

$$\|\chi(-u)\| = \|-\chi(u)\| = \|\chi(u)\| < R,$$

ou seja, $-u \in \mathcal{O}_\chi$.

Dessa forma, concluímos que $\mathcal{O}_\chi$ é simétrico.

□

Proposição 4.1.8. *Seja $u \in \partial_W \mathcal{O}_\chi$. Então $\|u\| = R$.*

Demonstração. Como $u \in \partial_W \mathcal{O}_\chi$, concluímos que existem $u_n \in \mathcal{O}_\chi$ e $u'_n \in W \setminus \mathcal{O}_\chi$ tais que $u_n, u'_n \in B_W\left(u, \dfrac{1}{n}\right)$. Então, inferimos que (u_n) é uma sequência em $\mathcal{O}_\chi$ tal que $u_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\to} u$ e (u'_n) é uma sequência em $W \setminus \mathcal{O}_\chi$ tal que $u'_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\to} u$.

Como, pela Proposição 2.1.7, $X \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$ e como χ é contínua em X, deduzimos que χ contínua em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Desse modo, concluímos que $\chi(u_n) \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\to} \chi(u)$ e que $\chi(u'_n) \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\to} \chi(u)$. Assim, inferimos que $\|\chi(u_n)\| \to \|\chi(u)\|$ e que $\|\chi(u'_n)\| \to \|\chi(u)\|$.

Como $u_n \in \mathcal{O}_\chi$, temos, por definição, que $\|\chi(u_n)\| < R$. Daí, deduzimos que $\|\chi(u)\| \leq R$. Similarmente, como $u_n \in W \setminus \mathcal{O}_\chi$, concluímos que $\|\chi(u'_n)\| > R$. Dessa forma, inferimos que $\|\chi(u)\| \geq R$. Então, concluímos que $\|u\| = R$.

□

Precisaremos também do seguinte corolário do Teorema da Extensão de Tietze (veja F.15, na página 160).

Corolário 4.1. *Sejam T um espaço topológico normal, $A \subset T$ um subespaço fechado de T e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função ímpar e contínua. Então existe $\tilde{f} : T \to \mathbb{R}$ uma função ímpar e contínua tal que $\tilde{F}\Big|_A = f$.*

Demonstração. Pelo Teorema da Extensão de Tietze (veja F.15, na página 160), concluímos que existe $\tilde{f} : T \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\tilde{F}\Big|_A = f$.

Seja

$$\tilde{\tilde{f}} : T \to \mathbb{R}; \tilde{\tilde{f}}(x) = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(-x)}{2}.$$

Temos que $\tilde{\tilde{f}}$ é contínua, pois é composição de funções contínuas. Seja $x \in T$. Vale que

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{f}}(-x) &= \frac{\tilde{f}(-x) - \tilde{f}(-(-x))}{2} = \frac{\tilde{f}(-x) - \tilde{f}(x))}{2} \\ &= -\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(-x))}{2} = -\tilde{\tilde{f}}(x),\end{aligned}$$

ou seja, $\tilde{\tilde{f}}$ é ímpar. Seja $x \in A$. Temos que

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{f}}(x) &= \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(-x)}{2} = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{f(x) - (-f(x))}{2} \\ &= \frac{f(x) + f(x)}{2} = \frac{2f(x))}{2} = f(x),\end{aligned}$$

ou seja, $\tilde{\tilde{f}}\Big|_A = f$. Então $\tilde{\tilde{f}}$ é a função desejada.

□

Estamos agora prontos para mostrar que os valores c_k são sempre finitos.

Lema 4.1. *Seja $k \in \mathbb{N}$. Então $c_k < \infty$.*

Demonstração. Defina $c_W := \sup\limits_{u \in W} I(u)$. Note que, pela Proposição 4.1.3, temos que $c_W < \infty$. Além disso, como, por definição, $I^{c_w} = \{u \in X \mid I(u) \leq c_W\}$, vale que $W \subset I^{c_W}$

Suponha por absurdo que $\gamma_{I^0}(I^{c_W}) < k$. Então, pela definição de gênero relativo, temos que existem $U, V \in \mathcal{A}$ e $\chi : U \to I^0$ contínua e ímpar tais que $I^{c_W} \subset U \cup V$, $I^0 \subset U$, $\gamma(V) \leq k - 1$ e $\chi|_{I^0} = id$.

Como $U \subset X$ é fechado, concluímos, pelo Corolário 4.1, que existe uma extensão contínua e ímpar de χ para X (que ainda chamaremos de χ). Desse modo, $\mathcal{O}_\chi$ está bem definido.

Pelas Proposições 4.1.5 a 4.1.7, pela Proposição D.1 (veja página 149) e como a dimensão de W é k, inferimos que $\gamma(\partial_W \mathcal{O}_\chi) = k$.

Seja $u \in \partial_W \mathcal{O}_\chi$. Assim, pela Proposição 4.1.8, deduzimos que $\|u\| = R$, onde R é como no Lema 2.5. Pelo Lema 2.5, concluímos que $\inf\limits_{\|u\|=R} I(u) > 0$, ou seja, $I(u) > 0$. Logo, pela definição de I^0, $\chi(u) \notin I^0$. Daí, inferimos que $u \notin \chi^{-1}(I^0)$. Como a função χ original levava U em I^0, deduzimos que $U \subset \chi^{-1}(I^0)$. Dessa forma, concluímos que $u \notin U$, ou seja, $\partial_W \mathcal{O}_\chi \cap U = \emptyset$.

Daí e como $\partial_W \mathcal{O}_\chi \subset W \subset I^{c_W} \subset U \cup V$, inferimos que $\partial_W \mathcal{O}_\chi \subset V$.

Disso e pelo item (i) da proposição D.2(veja página 149), concluímos que

$$k = \gamma(\partial_W \mathcal{O}_\chi) \leq \gamma(V) = k - 1,$$

o que é absurdo. Então, inferimos que $\gamma_{I^0}(I^{c_W}) \geq k$.

Desse modo, deduzimos que $\gamma_{I^0}(I^{c_W}) \geq k$. Assim, pela definição de c_k e pela Proposição 4.1.3, concluímos que

$$c_k = \inf\{c \in \mathbb{N} \mid \gamma_{I^0}(I^c) \geq k\} \leq c_W < \infty.$$

□

4.2 Uma caracterização de c_1

Para simplificarmos a caracterização, iremos considerar o conjunto a seguir.

Notação. $\tilde{X} := \{u \in X \setminus \{0\} \mid \sup\limits_{t\in(0,\infty)} I(tu) < \infty\}$.

O próximo resultado deixa claro em que sentido o conjunto $\tilde{X}$ irá simplificar as demonstrações deste capítulo.

Proposição 4.2.1. $\inf\limits_{u\in X\setminus\{0\}} \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} I(tu) = \inf\limits_{u\in\tilde{X}} \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} I(tu)$.

Demonstração. Observe que, pela definição de inf, basta mostrar que existe algum $u \in X \setminus \{0\}$ tal que $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} I(tu) < \infty$. Pelo Lema 2.6, isso só vai ocorrer se alguma das condições (2.9) a (2.11) for válida.

Pela Proposição 4.1.2, é possível encontrar $u \in X \setminus \{0\}$ tal que $V_0(u) < 0$. Dessa forma, independente dos valores de p e b, alguma das condições (2.9) a (2.11) será satisfeita por u.

□

Para dar uma caracterização mais completa de c_1, mostraremos uma igualdade relacionando a variedade de Nehari e o nível minimax de I.

Proposição 4.2.2. $\inf\limits_{\mathcal{N}} I = \inf\limits_{u\in X\setminus\{0\}} \sup\limits_{t\in(0,\infty)} I(tu)$.

Demonstração. Pelas Proposições 2.3.3 e 4.2.1, concluímos que

$$\inf_{u\in X\setminus\{0\}} \sup_{t\in(0,\infty)} I(tu) = \inf_{u\in\tilde{X}} \sup_{t\in(0,\infty)} I(tu) = \inf_{u\in\tilde{X}} I(t'_u u).$$

Como, pela Proposição 2.3.3, $t'_u u \in \mathcal{N}$, inferimos, pela definição de inf, que

$$\inf_{u\in X\setminus\{0\}} \sup_{t\in(0,\infty)} I(tu) = \inf_{u\in\tilde{X}} I(t'_u u) \geq \inf_{\mathcal{N}} I. \tag{4.1}$$

Como $\mathcal{N} \subset X \setminus \{0\}$, concluímos que

$$\inf_{u\in\mathcal{N}} \sup_{t\in\mathbb{R}} I(tu) \geq \inf_{u\in X\setminus\{0\}} \sup_{t\in\mathbb{R}} I(tu).$$

Pelo Corolário 2.6, inferimos que

$$\inf_{u\in\mathcal{N}} I(u) = \inf_{u\in\mathcal{N}} \sup_{t\in\mathbb{R}} I(tu) \geq \inf_{u\in X\setminus\{0\}} \sup_{t\in\mathbb{R}} I(tu).$$

Como, pela Proposição 3.1.6, I é par, temos que

$$\inf_{u\in\mathcal{N}} I(u) \geq \inf_{u\in X\setminus\{0\}} \sup_{t\in\mathbb{R}} I(tu) = \inf_{u\in X\setminus\{0\}} \sup_{t\in(0,\infty)} I(tu). \tag{4.2}$$

Daí, por (4.1) e (4.2), deduzimos que

$$\inf_{\mathcal{N}} I = \inf_{u\in X\setminus\{0\}} \sup_{t\in(0,\infty)} I(tu).$$

□

O próximo resultado terá como consequência a positividade de c_1.

Proposição 4.2.3. $\inf\limits_{u \in X} \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} I(tu) > 0$.

Demonstração. Pela Proposição 4.2.1, basta mostrar que $\inf\limits_{u \in \tilde{X}} \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} I(tu) > 0$.

Suponha por absurdo que

$$\inf_{u \in \tilde{X}} \sup_{t \in \mathbb{R}} I(tu) = 0.$$

Então, existe (u_n) uma sequência em $\tilde{X}$ tal que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} I(tu_n) \to 0.$$

Pela Proposição 2.3.3, concluímos que existem $t_{u_n} \in (0, \infty)$ tais que

$$I(t_{u_n} u_n) = \sup_{t \in \mathbb{R}} I(tu_n) \to 0.$$

Defina $v_n := t_{u_n} u_n$. Então, pela Proposição 2.3.3, inferimos que $v_n \in \mathcal{N}$ e $I(v_n) \to 0$.

Como $v_n \in \mathcal{N}$ e pelo Corolário 2.6, deduzimos que

$$\sup_{t \in (0,\infty)} I(tv_n) = I(v_n).$$

Daí e pela definição de ϕ, concluímos que

$$\sup_{t \in (0,\infty)} \phi_{v_n}(t) = \phi_{v_n}(1).$$

Disso e novamente pela definição de ϕ, inferimos que

$$\phi_{v_n}(t) \leq \phi_{v_n}(1) = I(v_n) \to 0.$$

Seja $R \in (0, \infty)$ como em Lema 2.5 e defina $t_n := \dfrac{R}{2\|v_n\|}$.

Pelo Lema 2.5, deduzimos que $\inf\limits_{\|u\|=\frac{R}{2}} I(u) > 0$. Como $\phi_{v_n}(t_n) \leq \phi_{v_n}(1) \to 0$, concluímos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\phi_{v_{n_0}}(t_{n_0}) \leq \frac{1}{2} \inf_{\|u\|=\frac{R}{2}} I(u).$$

Pela definição de $\phi_{v_{n_0}}$, temos que $\phi_{v_{n_0}}(t_{n_0}) = I(t_{n_0} v_{n_0})$ e, pela definição de t_{n_0}, vale que $\|t_{n_0} v_{n_0}\| = \dfrac{R}{2}$, o que contrária a definição de inf.

□

O próximo resultado é a caracterização de c_1.

Lema 4.2.

$$c_1 = \inf_{\mathcal{N}} I = \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \sup_{t \in (0,\infty)} I(tu) > 0.$$

Demonstração. Pelas Proposições 4.2.2 e 4.2.3, resta apenas mostrar que $c_1 = \inf_{\mathcal{N}} I$.

Vamos primeiro mostrar que $c_1 \geq \inf_{\mathcal{N}} I$. Suponha por absurdo que $c_1 < \inf_{\mathcal{N}} I$ e seja $c \in (c_1, \inf_{\mathcal{N}} I)$.

Defina

$$\chi : I^c \to X; \chi(u) = \begin{cases} 0, \text{ se } u \in \{0\} \cup \mathcal{N}^+; \\ \min\{1, t_u\}u, \text{ se } u \in \mathcal{N}^-. \end{cases}$$

Vamos mostrar que χ está bem definida. Primeiro, observe que se $u \in I^c$, então $I(u) \leq c < \inf_{\mathcal{N}} I$. Logo, $u \notin \mathcal{N}$. Como $I^c \subset X = \{0\} \cup \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N} \cup \mathcal{N}^-$, temos que $u \in \{0\} \cup \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^-$. Logo, a definição por partes de χ faz sentido, não estamos ignorando nenhum caso. Além disso, para todo $u \in I^c$ está associado um valor $\chi(u) \in X$. Segundo, temos que se $u \in \mathcal{N}^-$, então, pela Proposição 2.3.1, $\phi'_u(1) = I'(u)(u) < 0$. Logo, vale o item (i) do Lema 2.6 e t_u está bem definido. Daí, concluímos que χ está bem definida.

Agora, vamos mostrar que χ é contínua. Como $\chi|_{\{0\}\cup\mathcal{N}^+}$ é constante, $\chi|_{\{0\}\cup\mathcal{N}^+}$ é contínua. Além disso, pela Proposição 2.3.2 e como a função mínimo é contínua, $\chi|_{\mathcal{N}^-}$ também é contínua. Mas, pela Proposição 2.3.4, temos que $\partial(\mathcal{N}^+ \cup \{0\}) = \mathcal{N} = \partial\mathcal{N}^-$ e, portanto, $(\mathcal{N}^+ \cup \{0\})$ e $\mathcal{N}^-$ são desconexos. Logo, χ é contínua.

Em seguida, vamos mostrar que χ é ímpar. O caso $u \in \{0\} \cup \mathcal{N}^+$ segue direto da definição de χ. Se $u \in \mathcal{N}^-$, então

$$\chi(-u) = t_{-u}(-u) = -t_{-u}u.$$

Como I é par, t_u também é. Então

$$\chi(-u) = -t_{-u}u = -t_u u = -\chi(u).$$

Finalmente, vamos mostrar que $\chi|_{I^0} = id$. De fato, se $u \in I^0$, então, pela definição de I^0, $I(u) \leq 0$, isto é, $\phi_u(1) \leq 0$. Então, pelo item (i) do Corolário 2.5, temos que $t'_u < t_u < 1$. Daí e por item (i) do Lema 2.6, temos que $\phi'_u(1) < 0$. Pela Proposição 2.3.1, temos que $0 > \phi'_u(1) = I'(u)(u)$. Logo, $u \in \mathcal{N}^-$, por definição. Como $t_u < 1$, temos que $\min\{1, t_u\} = 1$. Logo, $\chi(u) = u$.

Precisaremos também do fato de $c_1 \geq 0$. Suponha por absurdo que $c_1 < 0$. Então, pela definição de c_1, temos que $\gamma_{I^0}(I^0) \geq 1$. Mas, pela Proposição D.4 (veja página 151), temos que $\gamma_{I^0}(I^0) = 0$, o que é um absurdo. Logo, $c_1 \geq 0$.

Sejam $U = I^c$ e $V = \emptyset$. Como I é contínua e par, temos que $U = I^c \in \mathcal{A}$ e, por vacuidade, V também está em $\mathcal{A}$. Além disso, $I^c = U \cup V$ e, como $c \in (c_1, \inf_{\mathcal{N}} I)$ e $c_1 \geq 0$, temos que $c > 0$ e, portanto, $I^0 \subset I^c = U \cup V$. Como χ é ímpar e contínua e $\chi|_{I^0} = id$, temos que U e V formam uma cobertura de I^c relativa a I^0. Além disso, como $\gamma(\emptyset) = 0$, temos que o gênero dessa cobertura é 0. Logo, pela definição de gênero relativo, temos que $\gamma_{I^0}(I^c) = 0$, o que contraria o fato de $c > c_1$ e a definição de c_1. Logo, $c_1 \geq \inf_{\mathcal{N}} I$.

Vamos agora mostrar que $c_1 \leq \inf_{\mathcal{N}} I$. Como já mostramos que $\inf_{\mathcal{N}} I = \inf_{u \in X\setminus\{0\}} \sup_{t \in (0,\infty)} I(tu)$, é equivalente mostrar que $c_1 \leq \inf_{u \in X\setminus\{0\}} \sup_{t\in(0,\infty)} I(tu)$. Como já observado anteriormente, basta mostrar que $c_1 \leq \inf_{u\in\tilde{X}} \sup_{t\in\mathbb{R}} I(tu)$.

Seja $u_0 \in \tilde{X}$ e podemos supor, sem perda de generalidade, que $\|u_0\| = 1$. Como u_0 foi escolhido arbitrariamente em $\tilde{X}$, basta mostrar que $c_1 \leq \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} I(tu_0)$ e, pela definição de c_1, isso seguirá imediatamente se mostrarmos que $\gamma_{I^0}(I^{\sup_{t\in\mathbb{R}} I(tu_0)}) \geq 1$. Como $\{tu_0 \in X \mid t \in \mathbb{R}\} \cup I^0 \subset I^{\sup_{t\in\mathbb{R}} I(tu_0)}$ (pois já vimos que $I^{\sup_{t\in\mathbb{R}} I(tu_0)} > 0$), temos, pela Corolário D.1 (veja página 152), que $\gamma_{I^0}(\{tu_0 \in X \mid t \in \mathbb{R}\} \cup I^0) \leq \gamma_{I^0}(I^{\sup_{t\in\mathbb{R}} I(tu_0)})$. Assim, precisamos apenas mostrar que $\gamma_{I^0}(\{tu_0 \in X \mid t \in \mathbb{R}\} \cup I^0) \geq 1$.

Suponha então por absurdo que $\gamma_{I^0}(\{tu_0 \in X \mid t \in \mathbb{R}\} \cup I^0) = 0$. Então $U = \{tu_0 \in X \mid t \in \mathbb{R}\} \cup I^0$ e $V = \emptyset$ na definição de gênero relativo, já que $\emptyset$ é o único conjunto com gênero de Krasnoselskii nulo. Além disso, existe $\chi : \{tu_0 \in X \mid t \in \mathbb{R}\} \cup I^0 \to I^0$ ímpar e contínua tal que $\chi(u) = u$ para todo $u \in I^0$.

Defina $\alpha : (0, \infty) \to (0, \infty); \alpha(t) = \|\chi(tu_0)\|$. Como χ e $\|\cdot\|$ são contínuas, α também o é.

Como $u_0 \in \tilde{X}$, temos que ϕ_{u_0} satisfaz o item (i) do Corolário 2.5. Logo, existe $t_{neg} \in (t_{u_0,0}, \infty)$ tal que $\phi_{u_0}(t_{neg}) < 0$, isto é, $t_{neg}u_0 \in I^0$. Dessa forma, $\alpha(t_{neg}u_0) = \|t_{neg}u_0\| = |t|$. Por outro lado, $\alpha(0) = 0$, pois $0 \in I^0$. Da continuidade de α e do teorema do valor intermediário, temos que existe $t_R \in (0, t_{neg})$ tal que $R = \alpha(t_R) = \|\chi(t_R u_0)\|$, onde R é como em Lema 2.5. Mas daí, pelo Lema 2.5, temos que $I(\chi(t_R u_0)) > 0$, o que significa que $\chi(t_R u_0) \notin I^0$, o que é um absurdo.

Segue então que $c_1 \leq \inf\limits_{\mathcal{N}} I$ e, consequentemente, que $c_1 = \inf\limits_{\mathcal{N}} I$.

□

4.3 Os conjuntos K_c e $A_{c,\rho}$

O conjunto K_c é o conjunto dos pontos críticos de I no nível c.

Notação. $K_c \coloneqq \{u \in X \mid I'(u) = 0, I(u) = c\}$, *onde* $c \in (0, \infty)$.

Já o conjunto $A_{c,\rho}$ é a interseção de X com a união das bolas (em $H^1(\mathbb{R}^2)$) com centro em K_c e raio ρ.

Notação. $A_{c,\rho} \coloneqq \{u \in X \mid \|u - v\| \leq \rho$ *para algum* $v \in K_c\}$, *onde* $c, \rho \in (0, \infty)$.

Queremos mostrar que os conjuntos $A_{c,\rho}$ estão em $\mathcal{A}$, ou seja, que eles são simétricos e fechados. Para mostrar que eles são simétricos, precisaremos primeiro mostrar que os conjuntos K_c são simétricos.

Proposição 4.3.1. *Sejam* $c \in (0, \infty)$. *Então* K_c *é simétrico.*

Demonstração. Seja $u \in K_c$.

Pela definição de I, temos que

$$I(-u) = \frac{1}{2}\|-u\|^2 + \frac{1}{4}V_0(-u) - \frac{b}{p}\|-u\|_p^p.$$

Por propriedades da norma, concluímos que

$$\begin{aligned} I(-u) &= \frac{1}{2}\|-u\|^2 + \frac{1}{4}V_0(-u) - \frac{b}{p}\|-u\|_p^p \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}V_0(-u) - \frac{b}{p}\|u\|_p^p. \end{aligned}$$

Pela definição de V_0, vale que

$$
\begin{aligned}
I(-u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}V_0(-u) - \frac{b}{p}\|-\|_p^p \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)(-u)^2(x)(-u)^2(y)\,dx\,dy - \frac{b}{p}\|u\|_p^p = \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy - \frac{b}{p}\|u\|_p^p = \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}V_0(u) - \frac{b}{p}\|u\|_p^p = I(u).
\end{aligned}
$$

Como $u \in K_c$, temos, pela definição de K_c, que $I(u) = c$. Daí, inferimos que

$$I(-u) = I(u) = c.$$

Seja $v \in X$. Pelo Corolário 2.3, deduzimos que

$$
\begin{aligned}
I'(-u)v &= \langle -u, v\rangle + \frac{1}{4}V_0{}'(-u)v - b\int\limits_{\mathbb{R}^2} |-u|^{p-2}(-u)v\,dx \\
&= \langle -u, v\rangle + \frac{1}{4}V_0{}'(-u)v - b\int\limits_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2}(-u)v\,dx.
\end{aligned}
$$

Pelo Corolário 2.2, inferimos que

$$
\begin{aligned}
&I'(-u)v = \\
&= \langle -u, v\rangle + \frac{1}{4}V_0{}'(-u)v - b\int\limits_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2}(-u)v\,dx = \\
&= \langle -u, v\rangle + \frac{1}{4}4\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)(-u)^2(x)(-u)(y)v(y)\,dx\,dy - b\int\limits_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2}(-u)v\,dx = \\
&= \langle -u, v\rangle + \frac{1}{4}4\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)u^2(x)(-u)(y)v(y)\,dx\,dy - b\int\limits_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2}(-u)v\,dx.
\end{aligned}
$$

Pela linearidade da integral e do produto interno, concluímos que

$$
\begin{aligned}
&I'(-u)v = \\
&= \langle -u, v\rangle + \frac{1}{4}4\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)u^2(x)(-u)(y)v(y)\,dx\,dy - b\int\limits_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2}(-u)v\,dx = \\
&= -\langle u, v\rangle - \frac{1}{4}4\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)u^2(x)u(y)v(y)\,dx\,dy + b\int\limits_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2}uv\,dx = \\
&= -\left(\langle u, v\rangle + \frac{1}{4}4\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)u^2(x)u(y)v(y)\,dx\,dy - b\int\limits_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2}uv\,dx\right).
\end{aligned}
$$

Pelo Corolário 2.2, inferimos que

$$I'(-u)v =$$

$$= -\left(\langle u, v \rangle + \frac{1}{4} 4 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|) u^2(x) u(y) v(y) \, dx \, dy - b \int_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2} uv \, dx \right) =$$

$$= -\left(\langle u, v \rangle + \frac{1}{4} {V_0}'(u)(v) - b \int_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2} uv \, dx \right).$$

Pelo Corolário 2.3, deduzimos que

$$\begin{aligned} &I'(-u)v = \\ &= -\left(\langle u, v \rangle + \frac{1}{4} {V_0}'(u)v - b \int_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2} uv \, dx \right) = \\ &= -I'(u)v. \end{aligned}$$

Como $u \in K_c$, temos, pela definição de K_c, que $I'(u) = 0$. Dessa forma, concluímos que $I'(u)v = 0$, ou seja,

$$I'(-u)v = -I'(u)v = 0.$$

Então, inferimos que $-u \in K_c$.

□

Mostrado que os conjuntos K_c são simétricos, podemos concluir que os conjuntos $A_{c,\rho}$ também o são. De fato, esse é o próximo resultado.

Proposição 4.3.2. *Sejam $c, \rho \in (0, \infty)$. Então $A_{c,\rho}$ é simétrico.*

Demonstração. Seja $u \in A_{c,\rho}$. Então, pela definição de $A_{c,\rho}$, existe $v \in K_c$ tal que $\|u - v\| \leq \rho$.

Logo, pela Proposição 4.3.1, concluímos que $-v \in K_c$.

Como $-u \in X$ e

$$\|(-u) - (-v)\| = \|-u + v\| = \|v - u\| = \|u - v\| \leq \rho,$$

inferimos que $-u \in A_{c,\rho}$.

□

No que segue, mostraremos a invariância dos conjuntos K_c e $A_{c,\rho}$ por translações por elementos de $\mathbb{Z}^2$. A principal (mas não única) utilidade dessas invariâncias será mostrar que $A_{c,\rho}$ é fechado.

Proposição 4.3.3. *Sejam $c \in (0, \infty)$, $u \in K_c$ e $z \in \mathbb{Z}^2$. Então $u \circ \tau_z \in K_c$.*

Demonstração. Pela Proposição 3.1.5 e como $u \in K_c$, concluímos que

$$I(u \circ \tau_z) = I(u) = c.$$

Seja $v \in X$. Pelo Corolário 2.3, inferimos que

$$I'(u \circ \tau_z)v = \langle u \circ \tau_z, v \rangle + \frac{1}{4} {V_0}'(u \circ \tau_z)v - b \int_{\mathbb{R}^2} |u \circ \tau_z|^{p-2} (u \circ \tau_z) v \, dx.$$

Pela definição de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, temos que

$$\langle u \circ \tau_z, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla(u \circ \tau_z) \cdot \nabla v \, dx + \int_{\mathbb{R}^2} a[u \circ \tau_z] v \, dx.$$

Pela definição de τ_z, vale que

$$\begin{aligned}
\langle u \circ \tau_z, v \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla(u \circ \tau_z) \cdot \nabla v \, dx + \int_{\mathbb{R}^2} a[u \circ \tau_z] v \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \circ \tau_z) \cdot \nabla v \, dx + \int_{\mathbb{R}^2} a[u \circ \tau_z] v \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \circ \tau_z)(x) \cdot \nabla v(x) \, dx + \int_{\mathbb{R}^2} a(x)[u \circ \tau_z](x) v(x) \, dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u(\tau_z(x)) \cdot \nabla v(x) \, dx + \int_{\mathbb{R}^2} a(x) u(\tau_z(x)) v(x) \, dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u(x - z) \cdot \nabla v(x) \, dx + \int_{\mathbb{R}^2} a(x) u(x - z) v(x) \, dx.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $y = x - z$, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\langle u \circ \tau_z, v \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u(x - z) \cdot \nabla v(x) \, dx + \int_{\mathbb{R}^2} a(x) u(x - z) v(x) \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u(y) \cdot \nabla v(y + z) \, dy + \int_{\mathbb{R}^2} a(y + z) u(y) v(y + z) \, dy.
\end{aligned}$$

Como a é $\mathbb{Z}^2$-periódica, concluímos que

$$\begin{aligned}
\langle u \circ \tau_z, v \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u(y) \cdot \nabla v(y + z) \, dy + \int_{\mathbb{R}^2} a(y + z) u(y) v(y + z) \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u(y) \cdot \nabla v(y + z) \, dy + \int_{\mathbb{R}^2} a(y) u(y) v(y + z) \, dy.
\end{aligned}$$

Pela definição de τ_{-z}, temos que

$$\begin{aligned}
\langle u \circ \tau_z, v \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u(y) \cdot \nabla v(y + z) \, dy + \int_{\mathbb{R}^2} a(y) u(y) v(y + z) \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u(y) \cdot \nabla v(y - (-z)) \, dy + \int_{\mathbb{R}^2} a(y) u(y) v(y - (-z)) \, dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u(y) \cdot \nabla v(\tau_{-z}(y)) \, dy + \int_{\mathbb{R}^2} a(y) u(y) v(\tau_{-z}(y)) \, dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot (\nabla v \circ \tau_{-z}) \, dx + \int_{\mathbb{R}^2} a u (v \circ \tau_{-z}) \, dx =
\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla(v \circ \tau_{-z})\, dx + \int_{\mathbb{R}^2} au(v \circ \tau_{-z})\, dx,$$

onde renomeamos a variável y para x nos dois últimos passos. Pela definição de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, vale que

$$\begin{aligned}\langle u \circ \tau_z, v \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla(v \circ \tau_{-z})\, dx + \int_{\mathbb{R}^2} au(v \circ \tau_{-z})\, dx \\ &= \langle u, v \circ \tau_{-z} \rangle.\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.2, inferimos que

$$V_0{}'(u \circ \tau_z)v = 4 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)(u \circ \tau_z)^2(x)(u \circ \tau_z)(y)v(y)\, dx\, dy.$$

Pela definição de τ_z, temos que

$$\begin{aligned}V_0{}'(u \circ \tau_z)v &= 4 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)(u \circ \tau_z)^2(x)(u \circ \tau_z)(y)v(y)\, dx\, dy \\ &= 4 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)u^2(\tau_z(x))u(\tau_z(y))v(y)\, dx\, dy = \\ &= 4 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)u^2(x-z)u(y-z)v(y)\, dx\, dy.\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $\rho = x - z$, deduzimos que

$$\begin{aligned}V_0{}'(u \circ \tau_z)v &= 4 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)u^2(x-z)u(y-z)v(y)\, dx\, dy \\ &= 4 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(|(\rho+z)-y|)u^2(\rho)u(y-z)v(y)\, d\rho\, dy.\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $\theta = y - z$, concluímos que

$$\begin{aligned}V_0{}'(u \circ \tau_z)v &= 4 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(|(\rho+z)-y|)u^2(\rho)u(y-z)v(y)\, d\rho\, dy \\ &= 4 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(|(\rho+z)-(\theta+z)|)u^2(\rho)u(\theta)v(\theta+z)\, d\rho\, d\theta = \\ &= 4 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(|\rho+z-\theta-z|)u^2(\rho)u(\theta)v(\theta+z)\, d\rho\, d\theta = \\ &= 4 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(|\rho-\theta|)u^2(\rho)u(\theta)v(\theta+z)\, d\rho\, d\theta.\end{aligned}$$

Pela definição de τ_{-z}, vale que

$$V_0{}'(u \circ \tau_z)v = 4 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(|\rho-\theta|)u^2(\rho)u(\theta)v(\theta+z)\, d\rho\, d\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(|\rho-\theta|)u^2(\rho)u(\theta)v(\theta-(-z))\,d\rho\,d\theta = \\
&= 4\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(|\rho-\theta|)u^2(\rho)u(\theta)(v\circ\tau_{-z})(\theta)\,d\rho\,d\theta.
\end{aligned}
$$

Pelo Corolário 2.2 inferimos que

$$
\begin{aligned}
V_0{}'(u\circ\tau_z)v &= 4\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(|\rho-\theta|)u^2(\rho)u(\theta)(v\circ\tau_{-z})(\theta)\,d\rho\,d\theta \\
&= V_0{}'(u)(v\circ\tau_{-z}).
\end{aligned}
$$

Pela definição de τ_z, temos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |u\circ\tau_z|^{p-2}(u\circ\tau_z)v\,dx &= \int_{\mathbb{R}^2} |(u\circ\tau_z)(x)|^{p-2}(u\circ\tau_z)(x)v(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |u(\tau_z(x))|^{p-2}u(\tau_z(x))v(x)\,dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |u(x-z)|^{p-2}u(x-z)v(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Fazendo a mudança de variável $y = x - z$, deduzimos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |u\circ\tau_z|^{p-2}(u\circ\tau_z)v\,dx &= \int_{\mathbb{R}^2} |u(x-z)|^{p-2}u(x-z)v(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |u(y)|^{p-2}u(y)v(y+z)\,dy.
\end{aligned}
$$

Pela definição de τ_{-z}, vale que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |u\circ\tau_z|^{p-2}(u\circ\tau_z)v\,dx &= \int_{\mathbb{R}^2} |u(y)|^{p-2}u(y)v(y+z)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |u(y)|^{p-2}u(y)v(y-(-z))\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} |u(y)|^{p-2}u(y)v(\tau_{-z}(y))\,dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |u(y)|^{p-2}u(y)(v\circ\tau_{-z})(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2}u(v\circ\tau_{-z})\,dx,
\end{aligned}
$$

onde renomeamos a variável y para x no último passo.

Daí e pelo Corolário 2.3, concluímos que

$$
\begin{aligned}
I'(u\circ\tau_z)v &= \langle u\circ\tau_z, v\rangle + \frac{1}{4}V_0{}'(u\circ\tau_z)v - b\int_{\mathbb{R}^2} |u\circ\tau_z|^{p-2}(u\circ\tau_z)v\,dx = \\
&= \langle u, v\circ\tau_{-z}\rangle + \frac{1}{4}V_0{}'(u)(v\circ\tau_{-z}) - b\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2}u(v\circ\tau_{-z})\,dx =
\end{aligned}
$$

$I'(u)(v \circ \tau_{-z})$.

Como $u \in K_c$, temos, pela definição de K_c, que $I'(u) = 0$, ou seja, $I'(u)v = 0$, para todo $v \in X$. Daí, inferimos que

$$I'(u \circ \tau_z)v = I'(u)(v \circ \tau_{-z}) = 0.$$

Dessa forma, deduzimos que $u \circ \tau_z \in K_c$.

□

Proposição 4.3.4. *Sejam $c, \rho \in (0, \infty)$, $u \in A_{c,\rho}$ e $z \in \mathbb{Z}^2$. Então $u \circ \tau_z \in A_{c,\rho}$.*

Demonstração. Pela definição de $A_{c,\rho}$, temos que existe $v \in K_c$ tal que $\|u - v\| \leq \rho$.

Pela Proposição 4.3.3, concluímos que $v \circ \tau_z \in K_c$. Pela Proposição A.8 (veja página 144), inferimos que

$$\|u \circ \tau_z - v \circ \tau_z\| = \|(u - v) \circ \tau_z\| = \|u - v\| \leq \rho.$$

Então, deduzimos que $u \circ \tau_z \in A_{c,\rho}$.

□

Estamos prontos para mostrar que os conjuntos $A_{c,\rho}$ são fechados e, portanto, que eles estão em $\mathcal{A}$.

Proposição 4.3.5. *Sejam $c, \rho \in (0, \infty)$. Então $A_{c,\rho}$ é fechado em X.*

Demonstração. Seja $u \in X \setminus A_{c,\rho}$. Vamos primeiro mostrar que $\inf_{v \in K_c} \|u - v\| > \rho$. Para mostrar isso, precisaremos antes mostrar que existe $v_0 \in K_c$ tal que $\|u - v_0\| = \inf_{v \in K_c} \|u - v\|$.

Considere a interseção

$$\bigcap_{r > \inf_{v \in K_c} \|u - v\|} K_c \cap \overline{B(u, r)}.$$

Como K_c é fechado (é consequência imediatamente do fato de I ser continuamente diferenciável (pelo Corolário 2.3)) e $\overline{B(u, r)}$ é fracamente compacta, segue que $K_c \cap \overline{B(u, r)}$ é compacto, para todo $r > 0$. Além disso, $\overline{B(u, r_1)} \subset \overline{B(u, r_2)}$, se $r_1 \leq r_2$. Logo, pelo Teorema da Interseção de Cantor, temos que a interseção acima é não vazia. Seja então $v_0 \in K_c$ pertencente à essa interseção. Temos, por construção e pela definição de inf, que $\inf_{v \in K_c} \|u - v\| \leq \|u - v_0\| \leq \inf_{v \in K_c} \|u - v\|$. Logo, $\|u - v_0\| = \inf_{v \in K_c} \|u - v\|$.

Suponha agora, por absurdo, que $A_{c,\rho}$ não é fechado em X. Então existem $u \in X \setminus A_{c,\rho}$ e (u_n) uma sequência em $A_{c,\rho}$ tal que $u_n \overset{X}{\to} u$. Em particular, pela Proposição 2.1.7, temos que $u_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\to} u$.

Como $u \in X \setminus A_{c,\rho}$, temos que existe $v_0 \in K_c$ tal que $\|u - v_0\| = \inf_{v \in K_c} \|u - v\|$. Por outro lado, temos, pela definição de $A_{c,\rho}$, que $\|u - v\| > \rho$, para todo $v \in K_c$, em particular para $v = v_0$. Então $\inf_{v \in K_c} \|u - v\| = \|u - v_0\| > \rho$.

Mas, como $u_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\to} u$, temos que $\|u_n - v_0\| \to \|u - v_0\|$ e como $u_n \in A_{c,\rho}$, temos que $\|u_n - v_0\| \leq \rho$, o que é absurdo.

Portanto, $A_{c,\rho}$ é fechado em X.

□

4.4 Um lema de deformação

Antes de enunciarmos e provarmos o lema de deformação, precisamos estabelecer a notação a seguir e provar alguns resultados.

Notação. $\tilde{S}^{\delta}_{c,\rho} := \{u \in X \mid \|u - v\| \leq \delta,$ *para algum* $v \in X \setminus A_{c,\rho}\}$, *sendo* $c, \rho, \delta \in (0, \infty)$.

Proposição 4.4.1. *Sejam* $c, \rho \in (0, \infty)$. *Então existe* $\delta_{c,\rho} \in (0, \infty)$ *tal que se* $\delta \in (0, \delta_{c,\rho})$ *então* $\|I'(u)\|_{X'}(1 + \|u\|_X) \geq 8\delta$ *para todo* $u \in \tilde{S}^{2\delta}_{c,\rho}$ *satisfazendo* $c - 2\delta^2 \leq I(u) \leq c + 2\delta^2$.

Demonstração. Suponha por absurdo que para todo $\delta \in (0, \infty)$ existe $\delta' \in (0, \delta)$ tal que $\|I'(u)\|_{X'}(1 + \|u\|_X) < 8\delta$ para algum $u \in \tilde{S}^{2\delta}_{c,\rho}$ satisfazendo $c - 2\delta^2 \leq I(u_n) \leq c + 2\delta^2$. Dessa forma, concluímos que existe $\delta_n \in (0, \dfrac{1}{n})$ tal que $\|I'(u_n)\|_{X'}(1 + \|u_n\|_X) < 8\delta_n$ para algum $u_n \in \tilde{S}^{2\delta_n}_{c,\rho}$ satisfazendo $c - 2\delta_n^2 \leq I(u_n) \leq c + 2\delta_n^2$.

Como $u_n \in \tilde{S}^{2\delta_n}_{c,\rho}$ temos, pela definição de $\tilde{S}^{2\delta_n}_{c,\rho}$, que existe $(v_n) \subset X \setminus A_{c,\rho}$ tal que $\|u_n - v_n\| \leq 2\delta_n$.

Como $\delta_n \in (0, \dfrac{1}{n})$, inferimos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim \|I'(u_n)\|_{X'}(1 + \|u_n\|_X) < \lim 8\delta_n = 0 \text{ e} \\ c = \lim(c - 2\delta_n^2) \leq \lim I(u_n) \leq \lim(c + 2\delta_n^2) = c, \end{aligned}$$

ou seja, deduzimos que $\lim \|I'(u_n)\|_{X'}(1 + \|u_n\|_X) = 0$ e $\lim I(u_n) = c > 0$.

Pelo Lema 3.3, concluímos que existem $u \in X \setminus \{0\}$ e (z_n) uma sequência em $\mathbb{Z}^2$ tais que u é ponto crítico de I e, a menos de subsequência, $u_n \circ \tau_{z_n} \overset{X}{\to} u$. Então, pela Proposição 2.1.7, inferimos que, a menos de subsequência, $u_n \circ \tau_{z_n} \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\to} u$.

Somando e subtraindo o termo $u_n \circ \tau_{z_n}$ e pela desigualdade triangular, deduzimos que

$$\begin{aligned} \|v_n \circ \tau_{z_n} - u\| &= \|v_n \circ \tau_{z_n} - u_n \circ \tau_{z_n} + u_n \circ \tau_{z_n} - u\| \\ &\leq \|v_n \circ \tau_{z_n} - u_n \circ \tau_{z_n}\| + \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|. \end{aligned}$$

Pela Proposição A.8 (veja página 144) e como $\delta_n \in \left(0, \dfrac{1}{n}\right)$, concluímos que

$$\begin{aligned} \|v_n \circ \tau_{z_n} - u\| &\leq \|v_n \circ \tau_{z_n} - u_n \circ \tau_{z_n}\| + \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\| \\ &= \|(v_n - u_n) \circ \tau_{z_n}\| + \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\| = \\ &= \|v_n - u_n\| + \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\| \leq \\ &\leq 2\delta_n + \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\| < \\ &< \frac{2}{n} + \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|. \end{aligned}$$

Passando o limite com $n \to \infty$ e como $u_n \circ \tau_{z_n} \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\to} u$, inferimos que

$$\lim \|v_n \circ \tau_{z_n} - u\| \leq \lim \left(\frac{2}{n} + \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|\right)$$

$$\lim \frac{2}{n} + \lim \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\| = 0,$$

ou seja, a menos de subsequência, $v_n \circ \tau_{z_n} \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\to} u$.

Suponha por absurdo que $v_n \circ \tau_{z_n} \in A_{c,\rho}$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $v_{n_0} \circ \tau_{z_{n_0}} \in A_{c,\rho}$. Pela Proposição 4.3.4, concluímos que $v_{n_0} = v_{n_0} \circ \tau_{z_{n_0}} \circ \tau_{-z_{n_0}} \in A_{c,\rho}$. Mas $v_{n_0} \in X \setminus A_{c,\rho}$, isto é, $v_{n_0} \notin A_{c,\rho}$, o que é absurdo. Desse modo, inferimos que $v_n \circ \tau_{z_n} \notin A_{c,\rho}$.

Daí e pela definição de $A_{c,\rho}$, deduzimos que $\|v_n \circ \tau_{z_n} - v\| > \rho$ para todo $v \in K_c$. Assim, concluímos que

$$\|u - v\| = \lim \|v_n \circ \tau_{z_n} - v\| \geq \rho, \tag{4.3}$$

para todo $v \in K_c$.

Vamos agora mostrar que $u \in K_c$. Pela Proposição 3.1.5 concluímos que $I(u_n \circ \tau_{z_n}) = I(u_n)$. Disso e pelo Corolário 2.3, inferimos que

$$I(u) = I(\lim u_n \circ \tau_{z_n}) = \lim I(u_n \circ \tau_{z_n}) = \lim I(u_n) = c.$$

Como u é ponto crítico de I, deduzimos que $I'(u) = 0$. Daí, concluímos que $u \in K_c$.

Mas dessa forma, tomando $v = u$ em (4.3), inferimos que

$$0 = \|u - u\| \geq \rho > 0,$$

o que é absurdo.

□

Precisaremos também considerar uma classe de conjuntos semelhante à $\tilde{S}_{c,\rho}$.

Notação. $S^{\delta}_{c,\rho} \coloneqq \{u \in X \mid \|u - v\|_X \leq \delta,$ *para algum* $v \in X \setminus A_{c,\rho}\}$, *sendo* $c, \rho, \delta \in (0, \infty)$.

Observe que a única diferença entre $\tilde{S}_{c,\rho}$ e $S_{c,\rho}$ é que a norma considerada no último é a de X.

A próxima proposição é semelhante a proposição anterior. A única diferença é que trocamos os conjuntos $\tilde{S}^{\delta}_{c,\rho}$ pelos conjuntos $S^{\delta}_{c,\rho}$.

Proposição 4.4.2. *Sejam* $c, \rho \in (0, \infty)$. *Então existe* $\delta_{c,\rho} \in (0, \infty)$ *tal que se* $\delta \in (0, \delta_{c,\rho})$ *então* $\|I'(u)\|_{X'}(1 + \|u\|_X) \geq 8\delta$ *para todo* $u \in S^{2\delta}_{c,\rho}$ *satisfazendo* $c - 2\delta^2 \leq I(u) \leq c + 2\delta^2$.

Demonstração. Seja $\delta_{c,\rho}$ como na Proposição 4.4.1 e sejam $\delta \in (0, \min\{1, \delta_{c,\rho}\})$ e $u \in S^{2\delta}_{c,\rho}$, com u satisfazendo $c - 2\delta^2 \leq I(u) \leq c + 2\delta^2$.

Como $u \in S^{2\delta}_{c,\rho}$, temos, pela definição de $S^{2\delta}_{c,\rho}$, que existe $v \in X \setminus A_{c,\rho}$ tal que $\|u - v\|_X \leq \delta$.

Pela definição de $\|\cdot\|_X$, como normas são positivas e como $\delta \in (0, \min\{1, \delta_{c,\rho}\})$, concluímos que

$$\|u - v\|^2 \leq \|u - v\|^2 + \|u - v\|_*^2 = \|u - v\|_X^2 \leq \delta^2 < \delta.$$

Então, inferimos que $u \in \tilde{S}^{2\delta}_{c,\rho}$. Desse modo, pelo resultado anterior, deduzimos que $\|I'(u)\|_{X'}(1 + \|u\|_X) \geq 8\delta$.

□

Estamos agora preparados para demonstrar o lema de deformação.

Lema 4.3. *Seja* $c, \rho \in (0, \infty)$. *Então existem* $\epsilon_{c,\rho} \in (0, \infty)$ *e* $\psi : I^{c+\epsilon_{c,\rho}} \setminus A_{c,\rho} \to I^{c-\epsilon_{c,\rho}}$ *contínua e ímpar tal que* $\psi|_{I^0} = id$ *e* $I^0 \subset I^{c-\epsilon_{c,\rho}}$.

Demonstração. Seja $\delta_{\rho,c} \in (0, \infty)$ como na Proposição 4.4.2, $\delta \in (0, \delta_{c,\rho})$ tal que $\delta^2 < \dfrac{c}{2}$.

Defina $\epsilon := \delta^2$.

Pelo resultado da página 38 de [25], existe $\eta : [0, 1] \times X \to X$ contínua tal que:

(i) $\eta(t, u) = u$, se $t = 0$ ou $u \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$;

(ii) $\eta(1, I^{c+\epsilon} \cap (X \setminus A_{c,\rho})) \subset I^{c-\epsilon}$;

Além disso, como I é par (pela Proposição 3.1.6), é possível (ver página 82 [3]) modificar a demonstração do resultado acima e adicionar:

(iii) $\eta(t, -u) = -\eta(t, u)$, para todo $t \in [0, 1]$ e $u \in X$.

Considere então a função $\psi : I^{c+\epsilon} \setminus A_{c,\rho} \to I^{c-\epsilon}; \phi(u) = \eta(1, u)$. Observe que o item (ii) é equivalente à $\eta(1, I^{c+\epsilon} \setminus A_{c,\rho}) \subset I^{c-\epsilon}$, o que significa que ψ está bem definida. Como η é contínua, ψ também o é e, pelo item (iii), ϕ é ímpar. Além disso, como $\epsilon = \delta^2 < \dfrac{c}{2}$, temos que $0 \notin [c-2\epsilon, c+2\epsilon]$, donde temos que $I^0 \cap I^{-1}([c-2\epsilon, c + 2\epsilon]) = \emptyset$. Daí e pelo item (i), temos que $\phi|_{I^0} = id$ e, portanto, ψ é a função desejada.

□

A primeira, e principal, utilidade do lema de deformação acima é mostrar que os valores c_k são valores críticos do funcional I.

Corolário 4.2. *Seja* $k \in \mathbb{N}$. *Então* c_k *é valor crítico do funcional* I.

Demonstração. Suponha por absurdo que para todo $u \in X$ satisfazendo $I'(u) = 0$, temos que $I(u) \neq c_k$.

Sejam $\rho_{c_k} \in (0, \infty)$ como no Lema 4.3 e $\rho \in (0, \rho_{c_k})$.

Pela definição de K_{c_k}, vale que $K_{c_k} = \emptyset$. Daí e pela definição de $A_{c_k,\rho}$, temos que $A_{c_k,\rho} = \emptyset$. Disso e pelo Lema 4.3, concluímos que existem $\epsilon = \epsilon_{c_k,\rho} \in (0, \infty)$ e $\phi : I^{c_k+\epsilon} \to I^{c_k-\epsilon}$ contínua e ímpar tal que $\phi|_{I^0} = id$. Com isso e pela Proposição D.5 (veja página 151), inferimos que $\gamma_{I^0}(I^{c_k+\epsilon}) \leq \gamma_{I^0}(I^{c_k-\epsilon})$.

Como $c_k - \epsilon < c_k + \epsilon$, deduzimos que $I^{c_k-\epsilon} \subset I^{c_k+\epsilon}$. Daí e pelo Corolário D.1 (veja página 152), concluímos que $\gamma_{I^0}(I^{c_k-\epsilon}) \leq \gamma_{I^0}(I^{c_k+\epsilon})$.

Das duas desigualdades anteriores, inferimos que $\gamma_{I^0}(I^{c_k-\epsilon}) = \gamma_{I^0}(I^{c_k+\epsilon})$. Mas, pela definição de c_k, deduzimos que $\gamma_{I^0}(I^{c_k+\epsilon}) \geq k$ e que $\gamma_{I^0}(I^{c_k-\epsilon}) < k$, o que é absurdo.

Logo, c_k é valor crítico do funcional I.

□

4.5 Os conjuntos K_c^β e $A_{c,\rho}^\beta$

Definição. Seja $\beta : L^2(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$. Dizemos que β é um *mapa baricentro generalizado* se β for contínua, par e satisfaz

$$\beta(u \circ \tau_r) = r + \beta(u), \tag{4.4}$$

para todos $u \in L^2(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}, r \in \mathbb{R}^2$.

O próximo resultado garante que existe pelo menos um mapa baricentro generalizado.

Proposição 4.5.1. *Existe um mapa baricentro generalizado.*

Demonstração. Uma prova desse resultado pode ser encontrada em [5].

□

Até o fim dessa seção, assumimos que β é um mapa baricentro generalizado qualquer.

De posse da noção de mapa baricentro generalizado, introduzimos o seguinte conjunto, que é um análogo do conjunto K_c.

Notação. *Seja $c \in (0, \infty)$. Considere $K_c^\beta := K_c \cap \beta^{-1}([-4, 4]^2)$.*

A primeira grande utilidade do mapa baricentro generalizado é nos proporcionar um subconjunto compacto (em X) de K_c não trivial. De fato, esse é o próximo resultado.

Proposição 4.5.2. *Seja $c \in (0, \infty)$. Então K_c^β é compacto em X.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência em K_c^β. Pela definição de K_c^β, temos que $u_n \in K_c$. Daí e pela definição de K_c, vale que $I(u_n) = c$ e $I'(u_n) = 0$.

Pelo Lema 3.3, concluímos que existem $u \in X \setminus \{0\}$ e (z_n) uma sequência em $\mathbb{Z}^2$ tais que u é ponto crítico de I, a menos de subsequência, $u_n \circ \tau_{z_n} \overset{X}{\to} u$.

Como, pela Proposição 2.1.7, $X \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$, deduzimos que $u_n \circ \tau_{z_n} \overset{L^2(\mathbb{R}^2)}{\to} u$. Como u é não nulo, existe uma subsequência de $(u_n \circ \tau_{z_n})$ (que ainda chamaremos de $(u_n \circ \tau_{z_n})$) tal que $u_n \circ \tau_{z_n} \neq 0$.

Pela definição de mapa baricentro generalizado, temos que

$$\beta(u_n \circ \tau_{z_n}) = z_n + \beta(u_n).$$

Como $u_n \circ \tau_{z_n} \overset{L^2(\mathbb{R}^2)}{\to} u$ e, pela definição de mapa baricentro generalizado, β é contínuo, concluímos que

$$\beta(u) = \lim \beta(u_n \circ \tau_{z_n}) = \lim(z_n + \beta(u_n)) = \lim z_n + \lim \beta(u_n).$$

Como (u_n) é uma sequência em K_c^β e pela definição de K_c^β, vale que $(\beta(u_n))$ é uma sequência em $[-4, 4]^2$. Como $[-4, 4]^2$ é compacto em $\mathbb{R}^2$, inferimos que, a menos de subsequência, existe $r \in [-4, 4]$ tal que $\beta(u_n) \to r$. Assim, deduzimos que

$$\beta(u) = \lim z_n + \lim \beta(u_n) = \lim z_n + r,$$

ou seja,

$$\lim z_n = \beta(u) - r.$$

Defina $z \coloneqq \beta(u) - r$. Como (z_n) é uma sequência em $\mathbb{Z}^2$ convergente para z e $\mathbb{Z}^2$ é um subespaço fechado de $\mathbb{R}^2$, segue que $z \in \mathbb{Z}^2$.

Como a topologia induzida de $\mathbb{Z}^2$ é discreta, concluímos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z_n = z$, para todo $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n \geq n_0$.

Vamos mostrar que

$$\|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\|_X \to 0. \tag{4.5}$$

Pela definição de $\|\cdot\|_*$, temos que

$$\|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\|_*^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x|)(u_n - u \circ \tau_{-z_n})^2(x)\, dx.$$

Pela definição de τ_{-z_n}, vale que

$$\begin{aligned}
\|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\|_*^2 &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x|)(u_n - u \circ \tau_{-z_n})^2(x)\, dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x|)(u_n(x) - u(\tau_{-z_n}(x)))^2\, dx = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x|)(u_n(x) - u(x - (-z_n)))^2\, dx = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x|)(u_n(x) - u(x + z_n))^2\, dx.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = x + z_n$, inferimos que

$$\begin{aligned}
\|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\|_*^2 &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x|)(u_n(x) - u(x + z_n))^2\, dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |y - z_n|)(u_n(y - z_n) - u(y))^2\, dy.
\end{aligned}$$

Pela definição de τ_{z_n}, temos que

$$\begin{aligned}
\|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\|_*^2 &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |y - z_n|)(u_n(y - z_n) - u(y))^2\, dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |y - z_n|)(u_n(\tau_{z_n}(y)) - u(y))^2\, dy = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |y - z_n|)((u_n \circ \tau_{z_n})(y) - u(y))^2\, dy = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |y - z_n|)(u_n \circ \tau_{z_n} - u)^2(y)\, dy.
\end{aligned}$$

Pela Proposição B.3 (veja página 146), concluímos que

$$\begin{aligned}\|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\|_*^2 &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + \|y - z_n\|)(u_n \circ \tau_{z_n} - u)^2(y)\, dy \\ &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^2} (\ln(1 + |y|) + \ln(1 + \|z_n\|))(u_n \circ \tau_{z_n} - u)^2(y)\, dy.\end{aligned}$$

Pela linearidade da integral, inferimos que

$$\begin{aligned}\|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\|_*^2 &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^2} (\ln(1 + |y|) + \ln(1 + |z_n|))(u_n \circ \tau_{z_n} - u)^2(y)\, dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |y|)(u_n \circ \tau_{z_n} - u)^2(y)\, dy \\ &+ \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |z_n|)(u_n \circ \tau_{z_n} - u)^2(y)\, dy = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |y|)(u_n \circ \tau_{z_n} - u)^2(y)\, dy \\ &+ \ln(1 + |z_n|) \int\limits_{\mathbb{R}^2} (u_n \circ \tau_{z_n} - u)^2(y)\, dy.\end{aligned}$$

Pelas definições de $\|\cdot\|_*$ e $\|\cdot\|_2$, vale que

$$\begin{aligned}\|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\|_*^2 &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |y|)(u_n \circ \tau_{z_n} - u)^2(y)\, dy \\ &+ \ln(1 + |z_n|) \int\limits_{\mathbb{R}^2} (u_n \circ \tau_{z_n} - u)^2(y)\, dy \\ &= \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_*^2 + \ln(1 + |z_n|)\|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_2^2.\end{aligned}$$

Pela definição de $\|\cdot\|_X$, temos que

$$\begin{aligned}\|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\|_*^2 &\leq \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_*^2 + \ln(1 + |z_n|)\|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_2^2 \\ &\leq (\|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|^2 + \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_*^2) \\ &+ \ln(1 + |z_n|)(\|\nabla(u_n \circ \tau_{z_n} - u)\|_2^2 + \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_2^2) = \\ &= \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_X^2 + \ln(1 + |z_n|)(\|\nabla(u_n \circ \tau_{z_n} - u)\|_2^2 \\ &+ \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_2^2).\end{aligned}$$

Pela Proposição A.3 (veja página 137), deduzimos que existe $C \in (0, \infty)$ tal que

$$\begin{aligned}&\|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\|_*^2 \leq \\ &\leq \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_X^2 + \ln(1 + |z_n|)(\|\nabla(u_n \circ \tau_{z_n} - u)\|_2^2 + \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_2^2) \\ &\leq \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_X^2 + C\ln(1 + |z_n|)\|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|^2.\end{aligned}$$

Como normas são positivas e pela definição de $\|\cdot\|_X$, vale que

$$\|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\|_*^2 \leq$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_X^2 + C\ln(1+|z_n|)\|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|^2 \\
&\leq \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_X^2 + C\ln(1+|z_n|)(\|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|^2 + \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_*^2) = \\
&= \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_X^2 + C\ln(1+|z_n|)\|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_X^2) = \\
&= (1 + C\ln(1+|z_n|))\|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_X^2).
\end{aligned}
$$

Daí, como $z_n = z$ para todo $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n \geq n_0$, como $u_n \circ \tau_{z_n} \overset{X}{\to} u$ e pela linearidade do limite, concluímos que

$$
\begin{aligned}
\lim\|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\|_* &\leq \lim(1+\ln(1+|z_n|))\|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_X \\
&= \lim(1+\ln(1+|z_n|)) \lim\|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_X \\
&= (1+\ln(1+|z|)) \lim\|u_n \circ \tau_{z_n} - u\|_X = 0.
\end{aligned}
$$

Como $u_n \circ \tau_{z_n} \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\to} u$ e pela Proposição 2.1.7, inferimos que $u_n \circ \tau_{z_n} \overset{X}{\to} u$, ou seja, $\|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\| \to 0$.

Pela definição de $\|\cdot\|_X$ e pela Proposição A.8 (veja página 144), deduzimos que

$$
\begin{aligned}
\|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\|_X &= \|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\| + \|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\|_* \\
&= \|(u_n - u \circ \tau_{-z_n}) \circ \tau_{z_n}\| + \|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\|_* = \\
&= \|u_n \circ \tau_{z_n} - u \circ \tau_{-z_n} \circ \tau_{z_n}\| + \|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\|_* = \\
&= \|u_n \circ \tau_{z_n} - u\| + \|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\|_*,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\lim\|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\|_X &= \lim(\|u_n \circ \tau_{z_n} - u\| + \|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\|_*) \\
&= \lim\|u_n \circ \tau_{z_n} - u\| + \lim\|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\|_* = 0,
\end{aligned}
$$

ou ainda, vale (4.5).

Pela desigualdade triangular, concluímos que

$$
\begin{aligned}
\|u_n - u \circ \tau_{-z}\|_X &= \|u_n - u \circ \tau_{-z_n} + u \circ \tau_{-z_n} - u \circ \tau_{-z}\|_X \\
&\leq \|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\|_X + \|u \circ \tau_{-z_n} - u \circ \tau_{-z}\|_X.
\end{aligned}
$$

Como $z_n = z$ para todo $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n \geq n_0$, inferimos que

$$
\lim\|u \circ \tau_{-z_n} - u \circ \tau_{-z}\|_X = \|u \circ \tau_{-z} - u \circ \tau_{-z}\|_X = 0.
$$

Dessa forma, deduzimos que

$$
\begin{aligned}
\lim\|u_n - u \circ \tau_{-z}\|_X &\leq \lim(\|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\|_X + \|u \circ \tau_{-z_n} - u \circ \tau_{-z}\|_X) \\
&= \lim\|u_n - u \circ \tau_{-z_n}\|_X + \lim\|u \circ \tau_{-z_n} - u \circ \tau_{-z}\|_X = 0,
\end{aligned}
$$

ou seja, $u_n \overset{X}{\to} u \circ \tau_{-z}$.

Além disso, como $u \in K_c$ e pela Proposição 4.3.3, concluímos que $u \circ \tau_{-z} \in K_c$ e como β é contínua inferimos que $\beta(u \circ \tau_{-z}) = \lim \beta(u_n) \in [-4, 4]$. Então, $u \circ \tau_{-z} \in K_c^\beta$.

Desse modo, K_c^β é compacto em X.

□

O resultado acima tem três corolários importantes que mostraremos a seguir.

Corolário 4.3. *Seja* $c \in (0, \infty)$. *Então* $K_c^\beta \in \mathcal{A}$.

Demonstração. A simetria de K_c^β decorre diretamente da Proposição 4.3.1 e como, pela Proposição 4.5.2, K_c^β é compacto em X, então ele também será fechado em X.

□

Corolário 4.4. *Seja* $c \in (0, \infty)$. *Então* K_c^β *é compacto em* $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência em K_c^β. Pela Proposição 4.5.2, concluímos que existem $u \in K_c^\beta$ e uma subsequência de (u_n) (que ainda chamaremos de (u_n)) tais que $u_n \overset{X}{\to} u$. Daí e pela Proposição 2.1.7, inferimos que $u_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\to} u$. Logo, K_c^β é compacto em $H^1(\mathbb{R}^2)$.

□

Corolário 4.5. *Seja* $c \in (0, \infty)$. *Então* $\gamma(K_c^\beta) < \infty$.

Demonstração. Suponha por absurdo que $0 \in K_c^\beta$. Então, pela definição e K_c^β, temos que $0 \in K_c$. Assim, pela definição de K_c, vale que $I(0) = c > 0$, o que é absurdo.

Como $0 \notin K_c^\beta$ e, pela Proposição 4.5.2, K_c^β é compacto em X, concluímos, pelo item (iii) da proposição D.2(veja página 149), que $\gamma(K_c^\beta) < \infty$.

□

Consideraremos agora uma classe de conjuntos semelhante a $A_{c,\rho}$.

Notação. $A_{c,\rho}^\beta := \{u \in H^1(\mathbb{R}^2) \mid \|u - v\| \leq \rho$ *para algum* $v \in K_c^\beta\}$, *onde* $c, \rho \in (0, \infty)$.

Imediatamente vamos verificar que $A_{c,\rho}^\beta \in \mathcal{A}$ e que $A_{c,\rho}^\beta$ é $\mathbb{Z}^2$-invariante.

Proposição 4.5.3. *Sejam* $c, \rho \in (0, \infty)$. *Então* $A_{c,\rho}^\beta \in \mathcal{A}$.

Demonstração. Seja $u \in A_{c,\rho}^\beta$. Então, pela definição de $A_{c,\rho}^\beta$, existe $v \in K_c^\beta$ tal que $\|u - v\| \leq \rho$.

Como $v \in K_c^\beta$, temos, pela definição de K_c^β, que $v \in K_c$ e $v \in \beta^{-1}([-4, 4]^2)$, isto é, $\beta(v) \in [-4, 4]^2$. Como, pela definição de mapa baricentro generalizado, β é par, temos que $\beta(-v) = \beta(v) \in [-4, 4]^2$, ou seja, $-v \in \beta^{-1}([-4, 4]^2)$. Além disso, como, pela Proposição 4.3.1, K_c é simétrico, temos que $-v \in K_c$. Logo, $-v \in K_c^\beta = K_c \cap \beta^{-1}([-4, 4]^2)$.

Como $-u \in X$ e

$$\|(-u) - (-v)\| = \|-u + v\| = \|v - u\| = \|u - v\| \leq \rho,$$

inferimos que $-u \in A_{c,\rho}^\beta$.

A demonstração de que $A_{c,\rho}^\beta$ é fechado é idêntica a de que $A_{c,\rho}$ é fechada (confira Proposição 4.3.5), onde usamos que K_c^β é fechado em X (pois, pela Proposição 4.5.2, ele é compacto em X) no lugar de K_c ser fechado.

□

Vamos agora mostrar que, escolhendo corretamente o valor de ρ, conseguimos limitar o gênero de $A_{c,\rho}^\beta$ pelo gênero de K_c^β.

Proposição 4.5.4. *Seja $c \in (0,\infty)$. Então existe $\tilde{\rho} \in (0,\infty)$ tal que $\gamma(A_{c,\rho}^\beta) \leq \gamma(K_c^\beta)$.*

Demonstração. Se $\gamma(K_c^\beta) = 0$, então, pela definição de γ, temos que $K_c^\beta = \emptyset$. Daí, pela definição de $A_{c,\rho}^\beta$, vale que $A_{c,\rho}^\beta = \emptyset$. Dessa forma, pela definição de γ, temos que $\gamma(A_{c,\rho}^\beta) = 0$. Então, vale a proposição.

Suponha então, sem perda de generalidade, que $\gamma(K_c^\beta) > 0$.

Desse modo, pelo Corolário 4.5 e pela definição de γ , concluímos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma(K_c^\beta) = k$, ou seja, existe $h : K_c^\beta \to \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ ímpar e contínua (em X).

Suponha por absurdo que h não é contínua em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Então existem $u \in K_c^\beta$ e (u_n) uma sequência em K_c^β tal que $u_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\to} u$ mas $h(u_n) \not\to h(u)$.

Assim, concluímos que existe uma subsequência de (u_n) (que ainda chamaremos de (u_n)) cujas subsequências não satisfazem $\tilde{h}(u_n) \to h(u)$. Como K_c^β é compacto em X, inferimos que existem $\tilde{u} \in K_c^\beta$ e mais uma subsequência de (u_n) (que ainda chamaremos de (u_n)) tal que $u_n \overset{X}{\to} \tilde{u}$. Pela Proposição 2.1.7, deduzimos que $u_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\to} \tilde{u}$. Daí, pela unicidade do limite, concluímos que $\tilde{u} = u$. Como h é contínua em X e como $u_n \overset{X}{\to} \tilde{u}$, inferimos que $h(u_n) \to h(u)$, o que é absurdo. Dessa forma, deduzimos que h é contínua em $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Pelo Corolário 4.1, concluímos que existe $\tilde{h} : H^1(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^k$; tal que $\tilde{h}$ é ímpar, contínua em $H^1(\mathbb{R}^2)$ e satisfaz $\tilde{h}\Big|_{K_c^\beta} = h$. Então, inferimos que

$$\tilde{h}(K_c^\beta) = \tilde{h}\Big|_{K_c^\beta}(K_c^\beta) = h(K_c^\beta) \subset \mathbb{R}^k \setminus \{0\},$$

ou seja, $\{0\} \cap \tilde{h}(K_c^\beta) = \emptyset$, ou ainda, $\tilde{h}^{-1}(\{0\}) \cap K_c^\beta = \emptyset$. Como $\{0\}$ é fechado em $\mathbb{R}^k$ e $\tilde{h}$ é continua em $H^1(\mathbb{R}^2)$, concluímos que $\tilde{h}^{-1}(\{0\})$ é fechado em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Pelo Corolário 4.4 e pelo fato de que a distância entre dois conjuntos disjuntos, um compacto e um fechado, é não nula, inferimos que $d(\tilde{h}^{-1}(\{0\}), K_c^\beta) > 0$.

Defina

$$\rho := \frac{d(\tilde{h}^{-1}(\{0\}), K_c^\beta)}{2} > 0.$$

Suponha por absurdo que existe $u \in A_{c,\rho}^\beta$ tal que $\tilde{h}(u) = 0$, ou seja, $u \in \tilde{h}^{-1}(\{0\})$. Pela definição de $A_{c,\rho}^\beta$, temos que existe $v \in K_c^\beta$ tal que

$$d(u,v) = \|u - v\| \leq \rho = \frac{d(\tilde{h}^{-1}(\{0\}), K_c^\beta)}{2}.$$

Daí e pela definição de distância entre conjuntos, vale que

$$d(\tilde{h}^{-1}(\{0\}), K_c^\beta) \leq d(u,v) \leq \frac{d(\tilde{h}^{-1}(\{0\}), K_c^\beta)}{2},$$

o que é absurdo. Desse modo, deduzimos que $\tilde{h}(u) \neq 0$ para todo $u \in A_{c,\rho}^\beta$.

Defina $\tilde{\tilde{h}} : A_{c,\rho}^\beta \to \mathbb{R}^k \setminus \{0\}; \tilde{\tilde{h}}(u) = \tilde{h}(u)$. Temos que h está bem definida pois $A_{c,\rho}^\beta \subset H^1(\mathbb{R}^2)$ e $\tilde{h}(u) \neq 0$ para todo $u \in A_{c,\rho}^\beta$. Como $\tilde{h}$ é ímpar e contínua, concluímos que $\tilde{\tilde{h}}$ é ímpar e contínua.

Disso e pela definição de gênero, inferimos que $\gamma(A_{c,\rho}^\beta) \leq k = \gamma(K_c^\beta)$.

$\square$

4.6 Uma limitação para $\gamma(A_{c,\rho})$

Para simplificar a notação de objetos que virão a seguir, considere as seguintes constantes de $\mathbb{R}^2$.

Notação. *Para $i, j \in \{0,1\}$, sejam* $a_{i,j} := \left(\frac{i}{2}, \frac{j}{2}\right) \in \mathbb{R}^2$.

Os seguintes conjuntos terão um papel crucial na demonstração da limitação de $\gamma(A_{c,\rho})$.

Notação. *Sejam* $L := \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\} \mid |\beta(u) - \lfloor \beta(u) \rfloor|_{\max} \leq \frac{1}{2}\right\}$ *e* $i, j \in \{0,1\}$, *sendo* $\lfloor \cdot \rfloor$ *como no apêndice E. Considere o conjunto* $L_{i,j} := \{u \circ \tau_{a_{i,j}} \mid u \in L\}$. *Observe que* $L_{0,0} = L$.

De fato, o espaço $L^2(\mathbb{R}^2)$ está contido em sua união.

Proposição 4.6.1. $L^2(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\} \subset \bigcup_{i,j \in \{0,1\}} L_{i,j}$.

Demonstração. Seja $u \in L^2(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$.

Como o contradomínio de β é $\mathbb{R}^2$, podemos denotar por β_1 e β_2 as projeções de β. É o que faremos à seguir.

Então $|\beta(u) - \lfloor \beta(u) \rfloor|_{\max} = \max\{\beta_1(u) - \lfloor \beta_1(u) \rfloor, \beta_2(u) - \lfloor \beta_2(u) \rfloor\}$. Vamos considerar 4 casos:

(i) Suponha que $\beta_1(u) - \lfloor \beta_1(u) \rfloor < \frac{1}{2}$ e $\beta_2(u) - \lfloor \beta_2(u) \rfloor < \frac{1}{2}$.

Assim, concluímos que $|\beta(u) - \lfloor \beta(u) \rfloor|_{\max} = \max\{\beta_1(u) - \lfloor \beta_1(u) \rfloor, \beta_2(u) - \lfloor \beta_2(u) \rfloor\} < \frac{1}{2}$. Daí, inferimos que $u \in L = L_{0,0} \subset \bigcup_{i,j \in \{0,1\}} L_{i,j}$.

(ii) Suponha que $\beta_1(u) - \lfloor \beta_1(u) \rfloor \geq \frac{1}{2}$ e $\beta_2(u) - \lfloor \beta_2(u) \rfloor < \frac{1}{2}$.

Como β é um mapa baricentro generalizado, temos que

$$\begin{aligned}
|\beta(u \circ \tau_{-a_{1,0}}) - \lfloor \beta(u \circ \tau_{-a_{1,0}}) \rfloor|_{\max} &= |(-a_{1,0} + \beta(u)) - \lfloor -a_{1,0} + \beta(u) \rfloor|_{\max} \\
&= |-(\tfrac{1}{2}, 0) + \beta(u)) - \lfloor -(\tfrac{1}{2}, 0) + \beta(u) \rfloor|_{\max} \\
&= |(-\tfrac{1}{2}, 0) + \beta(u)) - \lfloor (-\tfrac{1}{2}, 0) + \beta(u) \rfloor|_{\max} \\
&= \max\{\beta_1(u) - \tfrac{1}{2} - \lfloor \beta_1(u) - \tfrac{1}{2} \rfloor, \beta_2(u) - \lfloor \beta_2(u) \rfloor\}.
\end{aligned}$$

Como $\beta_1(u) - \lfloor \beta_1(u) \rfloor \geq \frac{1}{2}$, deduzimos, pela Proposição E.3 (veja página 155), que $\beta_1(u) - \frac{1}{2} - \lfloor \beta_1(u) - \frac{1}{2} \rfloor < \frac{1}{2}$. Como, por hipótese, $\beta_2(u) - \lfloor \beta_2(u) \rfloor < \frac{1}{2}$, concluímos que $|\beta u \circ \tau_{a_{1,0}} - \lfloor \beta(u \circ \tau_{a_{1,0}}) \rfloor|_{\max} = \max\{\frac{1}{2} + \beta_1(u) - \lfloor \frac{1}{2} +$

$\beta_1(u)\rfloor, \beta_2(u) - \lfloor\beta_2(u)\rfloor\} < \dfrac{1}{2}$. Daí e pela definição de L, inferimos que $u \circ \tau_{-a_{1,0}} \in L$.

Disso e pela definição de $L_{0,1}$, deduzimos que $u = [u \circ \tau_{u\circ\tau_{-a_{1,0}}}]\tau_{u\circ\tau_{a_{1,0}}} \in L_{1,0} \subset \bigcup_{i,j\in\{0,1\}} L_{i,j}$.

(iii) $\beta_1(u) - \lfloor\beta_1(u)\rfloor < \dfrac{1}{2}$ e $\beta_2(u) - \lfloor\beta_2(u)\rfloor \geq \dfrac{1}{2}$.

Esse caso é exatamente análogo ao caso anterior, exceto que trocamos $a_{1,0}$ por $a_{0,1}$ e que $u \in L_{0,1} \subset \bigcup_{i,j\in\{0,1\}} L_{i,j}$.

(iv) $\beta_1(u) - \lfloor\beta_1(u)\rfloor \geq \dfrac{1}{2}$ e $\beta_2(u) - \lfloor\beta_2(u)\rfloor \geq \dfrac{1}{2}$.

Esse caso é exatamente análogo ao caso anterior, exceto que trocamos $a_{0,1}$ por $a_{1,1}$ e que $u \in L_{1,1} \subset \bigcup_{i,j\in\{0,1\}} L_{i,j}$.

Como em todos os casos temos que $u \in \bigcup_{i,j\in\{0,1\}} L_{i,j}$, vale o resultado.

□

As seguintes funções também serão indispensáveis para demonstrar a limitação de $\gamma(A_{c,\rho})$.

Notação. *Sejam* $h : L \to L; h(u) = u \circ \tau_{-\lfloor\beta(u)\rfloor}$ *e* $i, j \in \{0, 1\}$. *Considere* $h_{i,j} : L_{i,j} \to L_{i,j}; h_{i,j}(u) = [h(u \circ \tau_{-a_{i,j}})] \circ \tau_{a_{i,j}}$.

Para mostrar que $h_{i,j}$ está sempre bem definido, precisamos mostrar que L é invariante por translações por elementos de $\mathbb{Z}^2$.

Proposição 4.6.2. *Sejam* $u \in L$ *e* $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$. *Então* $u \circ \tau_z \in L$.

Demonstração. Como β é um mapa baricentro generalizado, temos que

$$|\beta(u) - \lfloor\beta(u \circ \tau_z)\rfloor|_{\max} = |q + \beta(u) - \lfloor(z + \beta(u))\rfloor|_{\max}.$$

Como $q \in \mathbb{Z}^2$, vale que $\lfloor z + \beta(u)\rfloor = z + \lfloor\beta(u)\rfloor$. Daí e como $u \in L$, concluímos que

$$\begin{aligned}
|\beta(u \circ \tau_z) - \lfloor\beta(u \circ \tau_z)\rfloor|_{\max} &= |z + \beta(u) - \lfloor(z + \beta(u))\rfloor|_{\max} \\
&= |z + \beta(u) - (z + \lfloor\beta(u)\rfloor)|_{\max} = \\
&= |z + \beta(u) - z - \lfloor\beta(u)\rfloor|_{\max} = \\
&= |\beta(u) - \lfloor\beta(u)\rfloor|_{\max} \leq \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

o que implica que $u \circ \tau_z \in L$.

□

Com o resultado anterior, mostraremos que $h_{i,j}$ está sempre bem definido.

Proposição 4.6.3. *Seja* $i, j \in \{0, 1\}$. *Então* $h_{i,j}$ *está bem definido.*

Demonstração. Para $u \in L$, temos que $-\lfloor \beta \rfloor u \in \mathbb{Z}^2$. Dessa forma, pela Proposição 4.6.2, concluímos que $h(L) \in L$. Desta forma, h está bem definido.

Seja $u \in L_{i,j}$. Como o domínio de h é L, precisamos mostrar que $u \circ \tau_{-a_{i,j}} \in L$. Pela definição de $L_{i,j}$, temos que existe $u' \in L$ tal que $u = u' \circ \tau_{a_{i,j}}$. Desse modo, deduzimos que $u \circ \tau_{-a_{i,j}} = [u' \circ \tau_{a_{i,j}}] \circ \tau_{-a_{i,j}} = u' \in L$. Além disso, precisamos mostrar que $h_{i,j}(u) \in L_{i,j}$. Como o domínio de h é L, concluímos que $h((-a_{i,j}) \in L$. Assim, pela definição de $h_{i,j}$ e de $L_{i,j}$, vale que $h_{i,j}(u) = [h(u \circ \tau_{-a_{i,j}})] \circ \tau_{a_{i,j}} \in L_{i,j}$. Concluímos então que $h_{i,j}$ está sempre bem definido.

$\square$

No que segue, queremos mostrar que $h_{i,j}$ satisfazem certas propriedades. Dividiremos essa demonstração em duas partes: primeiro mostraremos que h satisfaz essas condições e depois estenderemos elas à $h_{i,j}$.

Proposição 4.6.4. *Sejam $u \in L$ e $z \in \mathbb{Z}$. Então h é uma isometria ímpar que satisfaz $h(u \circ \tau_z) = h(u)$.*

Demonstração. Pela Proposição A.8 (veja página 144), concluímos que

$$\|h(u)\| = \|u \circ \tau_{-\lfloor \beta(u) \rfloor}\| = \|u\|,$$

ou seja, h é uma isometria.

Como β é par, inferimos que

$$\begin{aligned} h(-u) &= (-u) \circ \tau_{-\lfloor \beta(-u) \rfloor} = (-u) \circ \tau_{-\lfloor \beta(u) \rfloor} \\ &= -(u(x - (-\lfloor \beta(u) \rfloor))) = -u \circ \tau_{-\lfloor \beta(u) \rfloor} = -h(u), \end{aligned}$$

ou seja, h é ímpar.

Seja $z \in \mathbb{Z}^2$. Como β é um mapa baricentro generalizado, deduzimos que

$$\begin{aligned} h(u \circ \tau_z) &= [u \circ \tau_z] \circ \tau_{-\lfloor \beta(u \circ \tau_z) \rfloor} = [u \circ \tau_z] \circ \tau_{-\lfloor z + \beta(u) \rfloor} \\ &= [u \circ \tau_z] \circ \tau_{-(z + \lfloor \beta(u) \rfloor)} = [u \circ \tau_z] \circ \tau_{-z - \lfloor \beta(u) \rfloor} = \\ &= [u \circ \tau_z](x - (-z - \lfloor \beta(u) \rfloor)) = [u \circ \tau_z](x + z + \lfloor \beta(u) \rfloor) \\ &= u(x + z + \lfloor \beta(u) \rfloor - z) = u(x + \lfloor \beta(u) \rfloor) \\ &= u(x - (-\lfloor \beta(u) \rfloor)) = u \circ \tau_{-\lfloor \beta(u) \rfloor} = h(u), \end{aligned}$$

ou seja,

$$h(u \circ \tau_z) = h(u).$$

$\square$

Proposição 4.6.5. *Seja $i, j \in \{0, 1\}$, $u \in L_{i,j}$ e $z \in \mathbb{Z}$. Então $h_{i,j}$ é uma isometria ímpar que satisfaz $h_{i,j}(u \circ \tau_z) = h_{i,j}(u)$.*

Demonstração. Pelas Proposições 4.6.4 e A.8, concluímos que

$$\begin{aligned} \|h_{i,j}(u)\| &= \|[h(u \circ \tau_{-a_{i,j}})] \circ \tau_{a_{i,j}}\| \\ &= \|h(u \circ \tau_{-a_{i,j}})\| = \|h(u)\| = \|u\|, \end{aligned}$$

ou seja, $h_{i,j}$ é uma isometria.

Pela Proposição 4.6.4, inferimos que

$$\begin{aligned} h_{i,j}(-u) &= [h((-u)\circ\tau_{-a_{i,j}})]\circ\tau_{a_{i,j}} = [h(-u(x-(-a_{i,j})))]\circ\tau_{a_{i,j}} \\ &= [h(-(u\circ\tau_{-a_{i,j}}))]\circ\tau_{a_{i,j}} = [-h(u\circ\tau_{-a_{i,j}})]\circ\tau_{a_{i,j}} \\ &= [-h(u\circ\tau_{-a_{i,j}})](x-a_{i,j}) = -[h(u\circ\tau_{-a_{i,j}})](x-a_{i,j}) \\ &= -[h(u\circ\tau_{-a_{i,j}})]\circ\tau_{a_{i,j}}) = -h_{i,j}(u). \end{aligned}$$

ou seja, $h_{i,j}$ é ímpar.

Como composição de translações é comutativa e pela Proposição 4.6.4, deduzimos que

$$\begin{aligned} h_{i,j}(u\circ\tau_z) &= [h((u\circ\tau_z)\circ\tau_{-a_{i,j}})]\circ\tau_{a_{i,j}} = [h((u\circ\tau_{-a_{i,j}})\circ\tau_z)]\circ\tau_{a_{i,j}} \\ &= [h(u\circ\tau_{-a_{i,j}})]\circ\tau_{a_{i,j}} = h_{i,j}(u). \end{aligned}$$

□

O próximo resultado será usado para obter uma subsequência convergente de uma sequencia da forma $(\beta(h_{i,j}(u_n)))$.

Proposição 4.6.6. *Seja $i,j\in\{0,1\}$ e $u\in L_{i,j}$. Então $\beta(h_{i,j}(u))\in[0,2]$.*

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \beta(h_{i,j}(u)) &= \beta(h(u\circ\tau_{-a_{i,j}})\circ\tau_{a_{i,j}}) = \\ &= a_{i,j} + \beta(h(u\circ\tau_{-a_{i,j}})) = \\ &= a_{i,j} + \beta((u\circ\tau_{-a_{i,j}})\circ\tau_{-\lfloor\beta(u\circ\tau_{-a_{i,j}})\rfloor}) = \\ &= a_{i,j} + (-\lfloor\beta(u\circ\tau_{-a_{i,j}})\rfloor) + \beta(u\circ\tau_{-a_{i,j}}) = \\ &= a_{i,j} - \lfloor\beta(u\circ\tau_{-a_{i,j}})\rfloor + \beta(u\circ\tau_{-a_{i,j}}) = \\ &= a_{i,j} - \lfloor -a_{i,j} + \beta(u)\rfloor - a_{i,j} + \beta(u) = \\ &= \beta(u) - \lfloor\beta(u) - a_{i,j}\rfloor. \end{aligned}$$

Então, pela Proposição E.4 (veja página 156), concluímos que

$$0 \le |\beta(h_{i,j}(u))|_{\max} = |\beta(u) - \lfloor\beta(u)-a_{i,j}\rfloor|_{\max} \le 2.$$

□

Os conjuntos a seguir também serão importantes para demonstrar a limitação de $\gamma(A_{c,\rho})$.

Notação. *Sejam $i,j\in\{0,1\}$, $c\in(0,\infty)$ e $\tilde\rho$ como na Proposição 4.5.4. Considere o conjunto $A^c_{i,j} \coloneqq h^{-1}_{i,j}(A^\beta_{c,\tilde\rho}\cap L_{i,j})$.*

Precisaremos do resultados a seguir para analisar mais propriedades de $A^c_{i,j}$.

Proposição 4.6.7. *Sejam $i,j\in\{0,1\}$. Então $L_{i,j}$ é simétrico.*

Demonstração. Seja $v\in L_{i,j}$. Então, existe $u\in L$ tal que $v = u\circ\tau_{a_{i,j}}$. Pela definição de L, temos que $|\beta(u)-\lfloor\beta(u)\rfloor|_{\max}\le\frac{1}{2}$. Como β é um mapa baricentro generalizado, concluímos que β é par. Daí, inferimos que

$$|\beta(-u)-\lfloor\beta(-u)\rfloor|_{\max} = |\beta(u)-\lfloor\beta(u)\rfloor|_{\max} \le \frac{1}{2},$$

ou seja, $-u\in L$. Então $-v = (-u)\circ\tau_{a_{i,j}}\in L_{i,j}$.

□

Proposição 4.6.8. *Sejam $i, j \in \{0, 1\}$ e $c \in (0, \infty)$. Então $A^c_{i,j} \in \mathcal{A}$.*

Demonstração. Seja $v \in A^c_{i,j}$. Então, por definição, existe $u \in A^{\beta}_{c,\tilde{\rho}} \cap L_{i,j}$ tal que $h_{i,j}(u) = v$. Pelas Proposições 4.5.3 e 4.6.7, temos que $-u \in A^{\beta}_{c,\tilde{\rho}} \cap L_{i,j}$. Além disso, pela Proposição 4.6.5, $h_{i,j}$ é ímpar, ou seja, $h_{i,j}(-u) = -h_{i,j}(u) = -v$. Daí, concluímos da definição de $A^c_{i,j}$ que $-u \in A^c_{i,j}$, isto é, $A^c_{i,j}$ é simétrico.

Como, pela Proposição 4.5.3, $A^{\beta}_{c,\tilde{\rho}}$ é fechado, temos que $A^{\beta}_{c,\tilde{\rho}} \cap L_{i,j}$ é fechado na topologia induzida em $L_{i,j}$. Como $h_{i,j}$ é contínua, concluímos que $A^c_{i,j} = h^{-1}_{i,j}(A^{\beta}_{c,\tilde{\rho}} \cap L_{i,j})$ é fechado.

□

Vamos enfim mostrar a limitação de $\gamma A_{c,\rho}$.

Lema 4.4. *Seja $c \in (0, \infty)$. Então existe $\rho_c \in (0, \infty)$ tal que $\gamma(A_{c,\rho}) < \infty$, para todo $\rho \in (0, \rho_c)$.*

Demonstração. Seja $A = \bigcup_{i=0}^{1} \bigcup_{j=0}^{1} A^c_{i,j}$.

Vamos primeiro mostrar que existe $\rho_c \in (0, \infty)$ tal que $A^{\beta}_{c,\rho} \subset A$, para $\rho \in (0, \rho_c)$. Suponha por absurdo que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $\rho_n \in (0, \frac{1}{n})$ tal que $A^{\beta}_{c,\rho_n} \not\subset A$. Então, existe $u_n \in A^{\beta}_{c,\rho_n}$ tal que $u_n \notin A$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $u_n \in L_{0,0}$.

Pela definição de A^{β}_{c,ρ_n}, temos que existe $v_n \in K^{\beta}_c$ tal que $\|u_n - v_n\| \leq \rho_n < \frac{1}{n}$.

Considere então $\tilde{u}_n := u_n \circ \tau_{-\lfloor \beta(v_n) \rfloor}$ e $\tilde{v}_n := v_n \circ \tau_{-\lfloor \beta(v_n) \rfloor}$. Pela Proposição 4.6.2, temos que $\tilde{u}_n \in L_{0,0}$ e, pela Proposição 4.3.3, temos que $\tilde{v}_n \in K_c$. Pela Proposição A.8 (veja página 144), temos que $\|\tilde{u}_n - \tilde{v}_v\| = \|u_n - v_n\| < \frac{1}{n}$. Além disso, pelo fato de β ser um mapa baricentro generalizado, temos que

$$\beta(\tilde{v_n}) = \beta(v_n \circ \tau_{-\lfloor \beta(v_n) \rfloor}) = \beta(v_n) - \lfloor \beta(v_n) \rfloor.$$

Daí e pela Proposição E.1 (veja página 155), temos que $\beta(\tilde{v}_n) \in [0, 1]^2$. Daí, concluímos que $(\tilde{v}_n)$ é uma sequência em K^{β}_c. Como, pelo Corolário 4.4, K^{β}_c é compacto em $H^1(\mathbb{R}^2)$, temos que existem $v \in K^{\beta}_c$ e uma subsequência de $(\tilde{v}_n)$ (que ainda chamaremos de $(\tilde{v}_n)$) tal que $\tilde{v}_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\to} v$. Além disso, como β é contínua, temos que $\beta(v) \in [0, 1]^2$.

Pela desigualdade triangular, vale que

$$\|\tilde{u}_n - v\| = \|\tilde{u}_n - \tilde{v}_n + \tilde{v}_n - v\| \leq \|\tilde{u}_n - \tilde{v}_n\| + \|\tilde{v}_n - v\|.$$

Como $\|\tilde{u}_n - \tilde{v}_n\| < \frac{1}{n}$ e $\tilde{v}_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\to} v$, o lado direito dessa desigualdade vai para zero quando $n \to \infty$, o que significa que $\tilde{u}_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\to} v$. Como β é contínua, isso implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\beta(\tilde{u}_n) \in [-2, 2]^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n \geq n_0$.

Defina $w_n := \tilde{v}_n \circ \tau_{-\lfloor \beta(\tilde{u}_n) \rfloor}$. Pela Proposição 4.3.3 e pelo fato dos elementos de (w_n) serem translações dos elementos de $(\tilde{v}_n)$ (que estão em K_c), temos que $w_n \in K_c$. Além disso, pelo fato de β ser um mapa baricentro generalizado, temos que

$$\beta(\tilde{w_n}) = \beta(\tilde{v}_n \circ \tau_{-\lfloor \beta(\tilde{u}_n) \rfloor}) = \beta(\tilde{v}_n) - \lfloor \beta(\tilde{u}_n) \rfloor$$

Pelos resultados dos parágrafos anteriores temos, se $n \in \mathbb{N}$ satisfaz $n \geq n_0$, que $\beta(\tilde{w_n}) \in [-4,4]^2$. Isso significa que $w_n \in K_c^\beta$, para n grande o suficiente.

Observe que, como $\tilde{u}_n \in L_{0,0}$, podemos calcular $h_{0,0}(\tilde{u}_n)$. Então, pelas definições de $h_{0,0}$ e w_n e pela Proposição A.8 (veja página 144), temos que

$$\|h_1(\tilde{u}_n) - w_n\| = \|\tilde{u}_n \circ \tau_{-\lfloor\beta(\tilde{u}_n)\rfloor} - \tilde{v}_n \circ \tau_{-\lfloor\beta(\tilde{u}_n)\rfloor}\| = \|\tilde{u}_n - \tilde{v}_n\| < \frac{1}{n}.$$

Então, para $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n \geq \max\{n_0, \frac{1}{\tilde{\rho}}\}$, temos, pela definição de $A^\beta_{c,\tilde{\rho}}$, que $h_1(\tilde{u}_n) \in A^\beta_{c,\tilde{\rho}}$. Então, pela definição de $A^c_{0,0}$, $\tilde{u}_n \in A^c_{0,0}$. Como $A_{0,0}$ é invariante por translação, temos que $u_n \in A^c_{0,0} \subset A$, o que é absurdo.

Então, concluímos que deve existir um $\rho_c \in (0,\infty)$ tal que $A^\beta_{c,\rho} \subset A$, para $\rho \in (0,\rho_c)$.

Para $\rho \in (0,\rho_c)$, temos, pelos itens (i) e (ii) da proposição D.2 (veja página 149), Proposições 4.5.4 e D.3 e Corolário 4.5 que

$$\begin{aligned}\gamma A_{c,\rho} \leq \gamma(A) &= \gamma\Big(\bigcup_{i=0}^{1}\bigcup_{j=0}^{1} A^c_{i,j}\Big) \leq \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\gamma(A^c_{i,j})\\ &= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\gamma(h^{-1}_{i,j}(A^\beta_{c,\tilde{\rho}} \cap L_{i,j})) \leq \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\gamma(A^\beta_{c,\tilde{\rho}} \cap L_{i,j})\\ &\leq \gamma(A_{c,\tilde{\rho}}) \leq \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\gamma(K^\beta_c) = 4\gamma(K^\beta_c) < \infty,\end{aligned}$$

que é o que queríamos demonstrar.

□

Antes de aplicarmos o resultado acima aos valores c_k, precisaremos de mais um lema.

Lema 4.5. *Seja $c \in (0,\infty)$. Então existe $\rho'_c \in (0,\infty)$ tal que se $\rho \in (0,\rho'_c)$ então $A_{c,\rho} \cap I^0 = \emptyset$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que para todo $\rho \in (0,\infty)$ existe $\rho' \in (0,\infty)$ tal que $\rho' \in (0,\rho)$ e $A_{c,\rho'} \cap I^0 \neq \emptyset$. Então, concluímos que existe $\rho_n \in (0,\infty)$ tal que $\rho_n \in (0, \frac{1}{n})$ e $A_{c,\rho_n} \cap I^0 \neq \emptyset$. Seja então $u_n \in A_{c,\rho_n} \cap I^0$.

Como $u_n \in A_{c,\rho_n} \cap I^0 \subset A_{c,\rho_n}$, temos, pela definição de A_{c,ρ_n}, que existe $v_n \in K_c$ tal que $\|u_n - v_n\| \leq \rho_n$.

Como $v_n \in K_c$, vale, pela definição de K_c, que $I(v_n) = c$ e $I'(v_n) = 0$.

Pelo Lema 3.3, inferimos que existem $v \in X \setminus \{0\}$ e (z_n) uma sequência em $\mathbb{Z}^2$ tais que v é ponto crítico de I e, a menos de subsequência, $v_n \circ \tau_{z_n} \xrightarrow{X} v$. Então, pela Proposição 2.1.7, deduzimos que, a menos de subsequência, $v_n \circ \tau_{z_n} \xrightarrow{H^1(\mathbb{R}^2)} v$.

Somando e subtraindo o termo $v_n \circ \tau_{z_n}$ e pela desigualdade triangular, concluímos que

$$\begin{aligned}\|u_n \circ \tau_{z_n} - v\| &= \|u_n \circ \tau_{z_n} - v_n \circ \tau_{z_n} + v_n \circ \tau_{z_n} - v\|\\ &\leq \|u_n \circ \tau_{z_n} - v_n \circ \tau_{z_n}\| + \|v_n \circ \tau_{z_n} - v\|.\end{aligned}$$

Pela Proposição A.8 (veja página 144) e como $\rho_n \in (0, \frac{1}{n})$, inferimos que

$$\begin{aligned}
\|u_n \circ \tau_{z_n} - v\| &\leq \|u_n \circ \tau_{z_n} - v_n \circ \tau_{z_n}\| + \|v_n \circ \tau_{z_n} - v\| \\
&= \|(u_n - v_n) \circ \tau_{z_n}\| + \|v_n \circ \tau_{z_n} - v\| = \\
&= \|u_n - v_n\| + \|v_n \circ \tau_{z_n} - v\| \leq \rho_n + \|v_n \circ \tau_{z_n} - v\| \\
&< \frac{1}{n} + \|v_n \circ \tau_{z_n} - v\|.
\end{aligned}$$

Passando o limite com $n \to \infty$ e como $v_n \circ \tau_{z_n} \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\to} v$, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\lim\|u_n \circ \tau_{z_n} - v\| &\leq \lim\left(\frac{1}{n} + \|v_n \circ \tau_{z_n} - v\|\right) \\
&= \lim \frac{1}{n} + \lim\|v_n \circ \tau_{z_n} - v\| = 0,
\end{aligned}$$

ou seja, a menos de subsequência, $u_n \circ \tau_{z_n} \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\to} v$.

Como $u_n \in A_{c,\rho_{k_n}} \cap I^0 \subset I^0$, concluímos que $I(u_n) \leq 0$. Pela Proposição 3.1.5, inferimos que $I(u_n \circ \tau_{z_n}) = I(u_n) \leq 0$. Dai e pelo Lema 2.4, deduzimos que

$$I(v) \leq \liminf I(u_n \circ \tau_{z_n}) \leq 0.$$

Mas, pela Proposição 3.1.5 e pelo Corolário 2.3, concluímos que

$$0 \geq I(v) = I(\lim v_n \circ \tau_{z_n}) = \lim I(v_n \circ \tau_{z_n}) = c,$$

o que é absurdo pois $c \in (0, \infty)$.

□

Segue agora o seguinte resultado, que é uma corolário dos dois lemas acima mais o lema da deformação.

Corolário 4.6. $\lim_{k\to\infty} c_k = \infty$.

Demonstração. Suponha por absurdo que existe $M > 0$ tal que $c_k < M$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Pela Proposição 4.1.1, concluímos que c_k é monotonamente não decrescente. Desse modo, inferimos que existe $c \in [0, \infty)$ tal que $c_k \to c$.

Pelo Lema 4.4 deduzimos que existe $\rho_c \in (0, \infty)$ tal que se $\rho \in (0, \rho_c)$ então $\gamma(A_{c,\rho}) < \infty$. Pelo Lema 4.5 concluímos que existe $\rho'_c \in (0, \infty)$ tal que se $\rho \in (0, \rho'_c)$ então $A_{c,\rho} \cap I^0 \neq \emptyset$.

Defina $\rho''_c := \min\{\rho_c, \rho'_c\}$ e seja $\rho \in (0, \rho''_c)$. Evidentemente $\rho < \rho''_c \leq \rho_c$ e $\rho < \rho''_c \leq \rho'_c$ e portanto as afirmações do parágrafo anteriores são válidas para ρ.

Pelo Lema 4.3, existem $\epsilon = \epsilon_{c,\rho} \in (0, \infty)$ e $\phi : I^{c+\epsilon} \setminus A_{c,\rho} \to I^{c-\epsilon}$ contínua e ímpar tal que $\phi|_{I^0} = id$ e $I^0 \subset I^{c-\epsilon}$.

Pela Proposição D.6 (veja página 152) inferimos que

$$\gamma_{I^0}(I^{c+\epsilon} \setminus A_{c,\rho}) \leq \gamma_{I^0}(I^{c-\epsilon}).$$

Como $c_k \to c$ monotonamente não decrescente, deduzimos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c_{k_0} \geq c - \epsilon$. Daí e da definição de c_{k_0}, concluímos que

$$\gamma_{I^0}(I^{c+\epsilon} \setminus A_{c,\rho}) \leq \gamma_{I^0}(I^{c-\epsilon}) < k_0 < \infty$$

Pela Proposição D.6 (veja página 152) inferimos que

$$\gamma_{I^0}(I^{c+\epsilon}) = \gamma_{I^0}((I^{c+\epsilon} \setminus A_{c,\rho}) \cup A_{c,\rho}) \leq \gamma_{I^0}(I^{c+\epsilon} \setminus A_{c,\rho}) + \gamma(A_{c,\rho}).$$

Juntando as desigualdades acima, deduzimos que

$$\gamma_{I^0}(I^{c+\epsilon}) < \infty.$$

Como $c_k \to c$ monotonamente não decrescente, concluímos que $c + \epsilon > c \geq c_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Pela definição de c_k inferimos que $\gamma_{I^0}(I^{c+\epsilon}) \geq k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, o que é absurdo.

Logo, $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = \infty$.

□

4.7 Uma demonstração do Teorema 1

Teorema 1 (,). *Sejam $b \in [0, \infty)$, $p \in [4, \infty)$ e $a \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ contínua, $\mathbb{Z}^2$ periódica tal que $\inf\limits_{\mathbb{R}^2} a > 0$. Então (1.16) admite $(\pm u_n)$ uma sequência em X de soluções fracas tal que $I(u_n) \to \infty$. Além disso, $I|_{\mathcal{N}}$ assume um mínimo global e todo minimizador u de $I|_{\mathcal{N}}$ é uma solução fraca de (1.16) que não muda de sinal e obedece a caracterização variacional*

$$I(u) = \inf_{u\in X} \sup_{t\in\mathbb{R}} I(tu).$$

Demonstração. Pelo Corolário 4.6, podemos extrair uma subsequência de (c_k) (que ainda chamaremos de (c_k)) tal que $c_k \to \infty$ monotonamente. Pelo Corolário 4.2, concluímos que existe $u_k \in X$ tais que $I(u_k) = c_k \to \infty$ e $I'(c_k) = 0$. Como (c_k) é monótona, inferimos que $c_i \neq c_j$ sempre que $i \neq j$ e que $c_k \geq c_1 > 0$, onde a última desigualdade vem do Lema 4.2. Dessa forma, os valores (u_k) são distintos e não nulos, pois $I(0) = 0$. Pelas Proposições 3.1.6 e 3.1.7, deduzimos que as igualdades acima valem para $(\pm u_k)$. Além disso, pelo Lema 4.2, concluímos que

$$c_1 \inf_{u\in X\setminus\{0\}} \sup_{t\in(0,\infty)} I(tu)$$

e que

$$c_1 = \inf_{\mathcal{N}} I,$$

isto é, u_1 é um mínimo global de $I|_{\mathcal{N}}$.

Seja $u \in \mathcal{N}$ tal que $I(u) = \inf\limits_{\mathcal{N}} I$ e suponha por absurdo que u não é ponto crítico de I. Então, existe $v \in X$ tal que $I'(u)v \neq 0$. Como $I'(u)$ é linear, temos que $I'(u)(-v) = -I'(u)v$. Assim, podemos supor sem perda de generalidade que $I'(u)v < 0$.

Como, por Corolário 2.3, I' é contínua, temos que existem $\epsilon, \delta \in (0, \infty)$ tais que $I'(t(u + sv))v < 0$, para todo $t \in [1 - \delta, 1 + \delta]$, $s \in [-\epsilon, \epsilon]$.

Como $u \in \mathcal{N}$, temos, por Corolário 2.6 que $\phi'_u(1) = 0$. Pelo item (i) do Lema 2.6, temos que

$$\phi'_u(1 - \delta) > 0 > \phi'_u(1 + \delta)$$

Daí, pela Proposição 2.3.1, temos que

$$I'((1-\delta)u)u > 0 > I'((1+\delta)u)u.$$

Novamente pela continuidade de I', existe $\epsilon' \in (0, \infty)$ tal que

$$I'((1-\delta)(u+s'v))(u+s'v) > 0 > I'((1+\delta)(u+s'v))(u+s'v),$$

para todo $s' \in (0, \epsilon')$. Ainda pela continuidade de I', isso implica que, fixado um $s' \in (0, \min\{\epsilon, \epsilon'\})$, existe um $t' \in (1-\delta, 1+\delta)$ tal que

$$I'(t'(u+s'v))(u+s'v) = 0$$

e, pela linearidade de $I'(t'(u+s'v))$,

$$I'(t'(u+s'v))(t'(u+s'v)) = t'I'(t'(u+s'v))(u+s'v) = 0,$$

ou seja, $t'(u+s'v) \in \mathcal{N}$. Como $\phi_u'(1) = 0$, temos, pelo item (i) do Corolário 2.5, que 1 é o ponto de máximo global de ϕ_u, ou seja, $I(u) \geq I(t'u)$. Daí, temos que

$$I(t'(u+s'v)) - I(u) \leq I(t'(u+s'v)) - I(t'u).$$

No entanto, pelo teorema fundamental do cálculo e como $I'(t(u+sv))(v) < 0$, para todo $t \in [1-\delta, 1+\delta]$, $s \in [-\epsilon, \epsilon]$, temos que

$$I(t'(u+s'v)) - I(u) \leq I(t'(u+s'v)) - I(t'u) = \int_0^{s'} I'(t'(u+sv))v\,ds < 0,$$

ou seja,

$$I(t'(u+s'v)) < I(u),$$

e como $t'(u+s'v) \in \mathcal{N}$, isso contraria o fato de que $I(u) = \inf_{\mathcal{N}} I$. Daí, u é ponto crítico de I.

Resta agora apenas mostrar que u não muda de sinal. Pelo Corolário 2.4 e pela definição de V_0, temos que

$$\begin{aligned} I'(|u|)|u| &= \||u|\|^2 + \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)|u(x)|^2|u(y)|^2\,dx\,dy - b\||u|\|_p^p \\ &= \|u\|^2 + \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy - b\|u\|_p^p = I'(u)u = 0, \end{aligned}$$

pois $u \in \mathcal{N}$. Dessa forma, $|u| \in \mathcal{N}$. Daí, por teoria de regularidade elíptica e pelo princípio do máximo junto com o fato de $u \neq 0$, temos que u não muda de sinal.

$\square$

Apêndice A

Resultados sobre normas

Seja $a \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ como no Teorema 1.

Notação. *Definimos* $\langle \cdot, \cdot \rangle : (H^1(\mathbb{R}^2))^2 \to \mathbb{R}; \langle u, v\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla v + auv \, dx.$

Proposição A.1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *está bem definido.*

Demonstração. Sejam $u, v \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Daí, temos que $\langle u, v\rangle_{usual} < \infty$.

Pela definição de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e pela linearidade da integral, temos que

$$\langle u, v\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla v + auv \, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^2} auv \, dx.$$

Pela definição de ínfimo e pela linearidade da integral, temos que

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^2} auv \, dx \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^2} uv \inf_{x \in \mathbb{R}^2} a(x) \, dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \inf_{x \in \mathbb{R}^2} a(x) \int\limits_{\mathbb{R}^2} uv \, dx \\
&\leq \max\{1, \inf_{x \in \mathbb{R}^2} a(x)\} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \max\{1, \inf_{x \in \mathbb{R}^2} a(x)\} \int\limits_{\mathbb{R}^2} uv \, dx \\
&= \max\{1, \inf_{x \in \mathbb{R}^2} a(x)\} (\int\limits_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^2} uv \, dx) \\
&= \max\{1, \inf_{x \in \mathbb{R}^2} a(x)\} \langle u, v\rangle_{usual}.
\end{aligned}$$

Como $u, v \in H^1(\mathbb{R}^2)$, temos que

$$\langle u, v\rangle = \max\{1, \inf_{x \in \mathbb{R}^2} a(x)\} \langle u, v\rangle_{usual} < \infty.$$

□

Proposição A.2. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *é um produto interno em* $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração. Sejam $u, v, w \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e $r \in \mathbb{R}$. Então:

(i) Pela definição de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e pela comutatividade do produto, temos que

$$\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla v + auv\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla v \cdot \nabla u + avu\, dx = \langle u, v\rangle.$$

Logo, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é simétrico.

(ii) Pela definição de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, temos que

$$\langle u + rw, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla(u + rw) \cdot \nabla v + a(u + rw)v\, dx.$$

Pela linearidade do operador ∇, temos que

$$\begin{aligned}\langle u + rw, v\rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla(u + rw) \cdot \nabla v + a(u + rw)v\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u + r\nabla w) \cdot \nabla v + a(u + rw)v\, dx.\end{aligned}$$

Pela linearidade do produto interno e distributividade do produto, temos que

$$\begin{aligned}\langle u + rw, v\rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u + r\nabla w) \cdot \nabla v + a(u + rw)v\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla v + r\nabla w \cdot \nabla v + auv + rawv\, dx.\end{aligned}$$

Pela linearidade da integral, temos que

$$\begin{aligned}\langle u + rw, v\rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla v + r\nabla w \cdot \nabla v + auv + rawv\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla v + auv\, dx + k \int_{\mathbb{R}^2} \nabla w \cdot \nabla v + awv\, dx \\ &= \langle u, v\rangle + k\langle w, v\rangle,\end{aligned}$$

Logo, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é linear.

(iii) Pela definição de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, pela definição de inf e pela hipótese de que $\inf_{\mathbb{R}^2} a(x) > 0$, temos que

$$\begin{aligned}\langle u, u\rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla u + auu\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla u\|^2 + au^2\, dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla u\|^2 + u^2 \inf_{x \in \mathbb{R}^2} a(x)\, dx \geq 0.\end{aligned}$$

Além disso, pela definição de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, temos que se $\langle u, u \rangle = 0$ então $\int\limits_{\mathbb{R}^2} \|\nabla u\|^2 + au^2\, dx = 0$. Como $\|\nabla u\|^2 \geq 0$ e $au^2 \geq u^2 \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^2} a(x) > 0$, temos que $\|\nabla u(x)\| = 0$ e $u(x) = 0$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^2$. Logo, a classe de equivalência de u em $H^1(\mathbb{R}^2)$ é 0. Logo, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é positiva definida.

□

Notação. *Denotaremos a norma induzida de* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *por* $\|\cdot\|$

Nota. Pela definição de $\|u\|$, temos que

$$\|u\|^2 = \langle u, v \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla u + auu\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \|\nabla u\|^2 + au^2\, dx.$$

Proposição A.3. *As normas* $\|\cdot\|$ *e* $\|\cdot\|_{usual}$ *são equivalentes.*

Demonstração. Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$.

Como $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^2} a(x) > 0$, temos que $0 < \min\{1, \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^2} a(x)\} < \infty$. Como $a \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, temos que $0 < \max\{1, \|a\|_\infty\} < \infty$.

Pela definição de $\|\cdot\|_{usual}$, pela linearidade da integral e pelas definições de min e inf, temos que

$$\begin{aligned}
\min\{1, \inf_{x \in \mathbb{R}^2} a(x)\}\|u\|_{usual}^2 &= \min\{1, \inf_{x \in \mathbb{R}^2} a(x)\}(\int\limits_{\mathbb{R}^2} \|\nabla u\|^2 + u^2\, dx) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \min\{\inf_{x \in \mathbb{R}^2} a(x), 1\}\|\nabla u\|^2 + \min\{\inf_{x \in \mathbb{R}^2} a(x), 1\}u^2\, dx \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^2} \|\nabla u\|^2 + \inf_{x \in \mathbb{R}^2} a(x) u^2\, dx \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^2} \|\nabla u\|^2 + au^2\, dx = \|u\|^2.
\end{aligned}$$

Por outro lado, pelas definições de $\|\cdot\|_\infty$ e de max, e pela linearidade da integral, temos que

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \|\nabla u\|^2 + au^2\, dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^2} \|\nabla u\|^2 + \|a\|_\infty u^2\, dx \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^2} \|\nabla u\|^2 + \max\{1, \|a\|_\infty\} u^2\, dx \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^2} \max\{1, \|a\|_\infty\}\|\nabla u\|^2 + \max\{1, \|a\|_\infty\} u^2\, dx \\
&= \max\{1, \|a\|_\infty\} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \|\nabla u\|^2 + u^2\, dx \\
&= \max\{\|a\|_\infty, 1\}\|u\|_{usual}^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$C_1\|u\|_{usual} \leq \|u\| \leq C_2\|u\|_{usual},$$

onde $C_1 := \sqrt{\min\{1, \inf_{x\in\mathbb{R}^2} a(x)\}} \in \mathbb{R}$ positivo e $C_2 := \sqrt{\max\{1, \|a\|_\infty\}} \in \mathbb{R}$ positivo.

□

Proposição A.4. *Seja V um espaço vetorial normado munido de uma norma $\|\cdot\|_V$. Então $\|\cdot\|_V$ é sequencialmente fracamente semicontínua inferiormente em V.*

Demonstração. Suponha por absurdo que não fosse o caso. Então existem $u \in V$ e (u_n) uma sequência em V satisfazendo $u_n \overset{V}{\rightharpoonup} u$ tal que $\liminf\|u_n\|_V < \|u\|_V$.

Seja

$$\delta := \liminf\|u_n\|_V + \frac{\|u\|_V - \liminf\|u_n\|_V}{2} > 0.$$

Note que

$$\begin{aligned}\delta = \liminf\|u_n\|_V + \frac{\|u\|_V - \liminf\|u_n\|_V}{2} &= \frac{2\liminf\|u_n\|_V + \|u\|_V - \liminf\|u_n\|_V}{2} \\ = \frac{\liminf\|u_n\|_V + \|u\|_V}{2} < \frac{\|u_n\|_V + \|u\|_V}{2} &= \frac{2\|u\|_V}{2} = \|u\|_V.\end{aligned}$$

Por propriedades do lim inf, temos que $\liminf\|u_n\|_V$ é o menor ponto de acumulação da sequência $\|u_n\|_V$. Como $[0, \liminf\|u_n\|_V + \epsilon]$ é uma vizinhança de $\liminf\|u_n\|_V$, temos que existe uma subsequência $(u_n)'$ de (u_n) tal que $\|u'_n\|_V \in [0,\delta]$, ou seja, $u'_n \in \|\cdot\|_V^{-1}([0,\delta]) = \overline{B(0,\delta)}$. Note que, como $\delta < \|u\|_V$, temos que $u \notin \overline{B(0,\delta)}$.

Como os conjunto $\overline{B(0,\delta)}$ é fechado, o conjunto $\{u\}$ é compacto e ambos são convexos disjuntos, temos que, pelo Proposição F.2, existem $\epsilon \in \mathbb{R}$ positivo $T \in V'$ tal que $T(v) < \epsilon < T(u)$, para todo $v \in \overline{B(0,\delta)}$. Note que, como $u'_n \in \overline{B(0,\delta)}$, temos que $T(u'_n) < \epsilon$

Como $u_n \overset{V}{\rightharpoonup} u$ e (u'_n) é uma subsequência de (u_n), temos que $u'_n \overset{V}{\rightharpoonup} u$. Então, pela definição de convergência fraca, temos que $T(u'_n) \to T(u)$, o que contrária o fato de $T(u'_n) < \epsilon < T(u)$.

□

Proposição A.5. *Seja $F : X \to \mathbb{R}; F(u) = \|u\|^2$. Sejam $u, v \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Então $F'(u)(v) = 2\langle u, v\rangle$ e F é continuamente diferenciável em X.*

Demonstração. Pela definição da derivada de Gâteaux e de F, temos que

$$DF(u)(v) = \lim_{t\to 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\|u+tv\|^2 - \|u\|^2}{t}.$$

Pela definição de $\|\cdot\|$, temos que

$$DF(u)(v) = \lim_{t\to 0} \frac{\|u+tv\|^2 - \|u\|^2}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\langle u+tv, u+tv\rangle - \langle u, u\rangle}{t}.$$

Pela linearidade e comutatividade de $\langle\cdot,\cdot\rangle$, temos que

$$DF(u)(v) = \lim_{t\to 0} \frac{\langle u+tv, u+tv\rangle - \langle u, u\rangle}{t}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to 0} \frac{\langle u,u\rangle + \langle tv,u\rangle + \langle u,tv\rangle + \langle tv,tv\rangle - \langle u,u\rangle}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\langle u,u\rangle + t\langle v,u\rangle + t\langle u,v\rangle + t^2\langle v,v\rangle - \langle u,u\rangle}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\langle u,u\rangle + t\langle u,v\rangle + t\langle u,v\rangle + t^2\langle v,v\rangle - \langle u,u\rangle}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{2t\langle u,v\rangle + t^2\langle v,v\rangle}{t} = \lim_{t\to 0}(2\langle u,v\rangle + t\langle v,v\rangle) = 2\langle u,v\rangle.
\end{aligned}
$$

Seja agora (u_n) uma sequência em X tal que $u_n \overset{X}{\to} u$. pela Proposição 2.1.7, temos que $u_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\to} u$. Pelas definições de $\|\cdot\|_{X'}$ e de F, temos que

$$
\begin{aligned}
\lim\|DF(u_n) - DF(u)\|_{X'} &= \lim \sup_{\substack{v\in X \\ \|v\|_X=1}} |DF(u_n)(v) - DF(u)(v)| \\
&= \lim \sup_{\substack{v\in X \\ \|v\|_X=1}} |\langle u_n, v\rangle - \langle u,v\rangle|.
\end{aligned}
$$

Pela linearidade do produto interno, temos que

$$
\begin{aligned}
\lim\|DF(u_n) - DF(u)\|_{X'} &= \lim \sup_{\substack{v\in X \\ \|v\|_X=1}} |\langle u_n, v\rangle - \langle u,v\rangle| \\
&= \lim \sup_{\substack{v\in X \\ \|v\|_X=1}} |\langle u_n - u, v\rangle|.
\end{aligned}
$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz (veja F.1, na página 157), temos que

$$
\begin{aligned}
\lim\|DF(u_n) - DF(u)\|_{X'} &= \lim \sup_{\substack{v\in X \\ \|v\|_X=1}} |\langle u_n - u, v\rangle| \\
&\leq \lim \sup_{\substack{v\in X \\ \|v\|_X=1}} |(\|u_n - u\|\|v\|| = \\
&= \lim \sup_{\substack{v\in X \\ \|v\|_X=1}} \|u_n - u\|\|v\|.
\end{aligned}
$$

pela Proposição 2.1.7, temos que $X \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$, ou seja, existe $C \in \mathbb{R}$ positivo tal que $\|v\| \leq C\|v\|_X$. Daí, temos que

$$
\begin{aligned}
\lim\|DF(u_n) - DF(u)\|_{X'} &\leq \lim \sup_{\substack{v\in X \\ \|v\|_X=1}} \|u_n - u\|\|v\| \\
&leq \lim \sup_{\substack{v\in X \\ \|v\|_X=1}} \|u_n - u\|C\|v\|_X = C\lim\|u_n - u\|.
\end{aligned}
$$

Como $u_n \overset{X}{\to} u$ e pela Proposição 2.1.7, temos que $u_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\to} u$. Daí, temos que

$$
0 \leq \lim\|DF(u_n) - DF(u)\|_{X'} \leq C\lim\|u_n - u\| = 0.
$$

Pelo Teorema do Confronto, temos que

$$
\lim\|DF(u_n) - DF(u)\|_{X'} = 0,
$$

ou seja,

$$DF(u_n) \overset{X'}{\to} DF(u).$$

Daí, temos que DF é contínuo em u. Como u é arbitrário, temos que DF é contínua em X. Daí, pela Proposição F.11, temos que $F'(u)(v) = DF(u)(v) = 2\langle u, v\rangle$ e que F' é contínua em X', ou seja, F é continuamente diferenciável em X. $\square$

Proposição A.6. *Seja* $F : X \to \mathbb{R}; F(u) = \|u\|_p^p$. *Sejam* $u, v \in X$. *Então* $F'(u)(v) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2}uv\,dx$ *e* F *é continuamente diferenciável em* X.

Demonstração. Pela definição da derivada de Gâteaux e de F, temos que

$$DF(u)(v) = \lim_{t\to 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\|u+tv\|_p^p - \|u\|_p^p}{t}.$$

Pela definição de $\|\cdot\|_p$, temos que

$$DF(u)(v) = \lim_{t\to 0} \frac{\|u+tv\|_p^p - \|u\|_p^p}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^2} |u+tv|^p\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}^2} |u|^p\,dx}{t}.$$

Pela linearidadeda integral, temos que

$$DF(u)(v) = \lim_{t\to 0} \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^2} |u+tv|^p\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}^2} |u|^p\,dx}{t} = \lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|u+tv|^p - |u|^p}{t}\,dx.$$

Vamos agora mostrar que

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|u+tv|^p - |u|^p}{t}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2}uv\,dx. \tag{A.1}$$

Suponha por absurdo que não fosse o caso. Então existe (t_n) uma sequência em $\mathbb{R}$ satisfazendo $t_n \to 0$ tal que

$$\lim \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|u+t_nv|^p - |u|^p}{t_n}\,dx \neq \int\limits_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^{p-2}uv\,dx. \tag{A.2}$$

Daí, existe uma subsequência de (t_n) (que ainda chamaremos de (t_n)) tal que todas suas subsequências satisfazem (A.2). Sejam $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$ e $h_{t,x} : [0,1] \to \mathbb{R}; h(s) = |u(x) + stv(x)|^p$. Como $u(x)$ e $v(x)$ são constantes, temos que $h'_{t,x}(s) = p|u(x) + stv(x)|^{p-2}(|u(x)+stv(x)|)tv(x)$ e que $h'_{t,x}$ é contínua. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $s_{t,x} \in [0,1]$ tal que

$$\begin{aligned}
&|u(x) + tv(x)|^p - |u(x)|^p = \\
&= \frac{h_{t,x}(1) - h_{t,x}(0)}{1-0} = h'_{t,x}(s_{t,x}) \\
&= p|u(x) + s_{t,x}tv(x)|^{p-2}(|u(x) + s_{t,x}tv(x)|)tv(x),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{|u(x)+tv(x)|^p-|u(x)|^p}{t}=p|u(x)+s_{t,x}tv(x)|^{p-2}(|u(x)+s_{t,x}tv(x)|)v(x).$$

Por propriedades do valor absoluto, temos que

$$\begin{aligned}|\frac{|u(x)+tv(x)|^p-|u(x)|^p}{t}| &= |p|u(x)+s_{t,x}tv(x)|^{p-2}(|u(x)+s_{t,x}tv(x)|)v(x)| \\ &\leq p(|u(x)|+s_{t,x}|t||v(x)|)^{p-2}(|u(x)|+s_{t,x}|t||v(x)|)|v(x)|.\end{aligned}$$

Como $s_{t,x}\in[0,1]$, temos que

$$\begin{aligned}|\frac{|u(x)+tv(x)|^p-|u(x)|^p}{t}| &\leq p(|u(x)|+s_{t,x}|t||v(x)|)^{p-2}(|u(x)|+s_{t,x}|t||v(x)|)|v(x)| \\ &\leq p(|u(x)|+|t||v(x)|)^{p-2}(|u(x)|+|t||v(x)|)|v(x)| \\ &= p(|u(x)|+|t||v(x)|)^{p-1}|v(x)|.\end{aligned}$$

Manipulando, temos que

$$\begin{aligned}|\frac{|u(x)+tv(x)|^p-|u(x)|^p}{t}| &\leq p(|u(x)|+|t||v(x)|)^{p-1}|v(x)| \\ &\leq p(\max\{|u(x)|,|t||v(x)|\}+\max\{|u(x)|,|t||v(x)|\})^{p-1}|v(x)| \\ &= p(2\max\{|u(x)|,|t||v(x)|\})^{p-1}|v(x)| \\ &= 2^{p-1}p\max\{|u(x)|^{p-1},|t||v(x)|^{p-1}\}|v(x)| \\ &\leq 2^{p-1}p(|u(x)|^{p-1}+|t||v(x)|^{p-1})|v(x)| \\ &= 2^{p-1}p(|u(x)|^{p-1}|v(x)|+|t||v(x)|^p).\end{aligned}$$

Como (t_n) é convergente, existe $C\in\mathbb{R}$ positivo tal que $|t_n|<C$. Daí, temos que

$$\begin{aligned}|\frac{|u(x)+t_nv(x)|^p-|u(x)|^p}{t_n}| &\leq 2^{p-1}p(|u(x)|^{p-1}|v(x)|+|t_n||v(x)|^p) \\ &< 2^{p-1}p(|u(x)|^{p-1}|v(x)|+C|v(x)|^p).\end{aligned}$$

pela Proposição 2.1.7, temos que $X\hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^2)\hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^2)$, para todo $s\in[2,\infty)$. Daí, usando a Desigualdade de Hölder (veja F.8, na página 158), é temos que $|u|^{p-1}|v|,|v|^p\in L^1(\mathbb{R}^2)$. Daí $2^{p-1}p(|u(x)|^{p-1}|v(x)|+C|v(x)|^p)\in L^1(\mathbb{R}^2)$. Além disso, é temos que $\lim\dfrac{|u(x)+t_nv(x)|^p-|u(x)|^p}{t_n}=|u(x)|^{p-2}u(x)v(x)$. Então, pelo Teorema da Convergência Dominada (veja F.4, na página 157), temos que

$$\lim\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{|u+t_nv|^p-|u|^p}{t_n}\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^2}|u|^{p-2}uv\,dx,$$

o que é absurdo. Logo, vale (A.1).

Vamos agora mostrar que DF é contínua. Suponha por absurdo que não fosse o caso. Então, existe (u_n) uma sequência em X satisfazendo $u_n\overset{X}{\to}u$ tal que $DF(u_n)\overset{X'}{\not\to}DF(u)$. Daí existe uma subsequência de (u_n) (que ainda chamaremos de (u_n)) tal que todas suas subsequências satisfazem $DF(u_n)\overset{X'}{\not\to}DF(u)$. pela

Proposição 2.1.7, temos que $X \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^2)$, para todo $s \in [2, \infty)$, isto é, $u_n \overset{L^p(\mathbb{R}^2)}{\to} u$. Daí e pelo Teorema de Vainberg (veja F.14, na página 159), temos que, a menos de subsequência, $u_n(x) \to u(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^2$ e que existe $g \in L^p(\mathbb{R}^2)$ tal que $|u_n(x)| \leq g(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^2$. Daí, temos que

$$||u_n(x)|^{p-2}u_n(x) - |u(x)|^{p-2}u(x)|^{\frac{p}{p-1}} \to ||u(x)|^{p-2}u(x) - |u(x)|^{p-2}u(x)|^{\frac{p}{p-1}} = 0,$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^2$. Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
&(|u_n(x)|^{p-2}u_n(x) - |u(x)|^{p-2}u(x))^{\frac{p}{p-1}} = \\
&= (||u_n(x)|^{p-2}u_n(x) - |u(x)|^{p-2}u(x)|)^{\frac{p}{p-1}} \leq \\
&\leq (||u_n(x)|^{p-2}u_n(x)| + |-|u(x)|^{p-2}u(x)|)^{\frac{p}{p-1}} = \\
&= (|u_n(x)|^{p-2}|u_n(x)| + |u(x)|^{p-2}|u(x)|)^{\frac{p}{p-1}} = \\
&= (|u_n(x)|^{p-1} + |u(x)|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \leq \\
&\leq (g(x)^{p-1} + |u(x)|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \leq \\
&\leq (\max\{g(x)^{p-1}, |u(x)|^{p-1}\} + \max\{g(x)^{p-1}, |u(x)|^{p-1}\})^{\frac{p}{p-1}} = \\
&= (2\max\{g(x)^{p-1}, |u(x)|^{p-1}\})^{\frac{p}{p-1}} = \\
&= 2^{\frac{p}{p-1}} \max\{g(x)^p, |u(x)|^p\} \leq \\
&\leq 2^{\frac{p}{p-1}}(g(x)^p + |u(x)|^p).
\end{aligned}$$

onde $g^p, |u|^p \in L^1(\mathbb{R}^2)$, ou seja, $2^{\frac{p}{p-1}}(g(x)^{p-1} + |u(x)|^p) \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Daí, Teorema da Convergência Dominada (veja F.4, na página 157), temos que

$$\lim \int_{\mathbb{R}^2} (|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)^{\frac{p}{p-1}}\, dx \to 0. \tag{A.3}$$

Pela definição de $\|\cdot\|_{X'}$ e de F, temos que

$$\begin{aligned}
\lim\|DF(u_n) - DF(u)\|_{X'} &= \lim \sup_{\substack{v\in X \\ \|v\|_X=1}} |DF(u_n)(v) - DF(u)(v)| \\
&= \lim \sup_{\substack{v\in X \\ \|v\|_X=1}} |\int_{\mathbb{R}^2} |u_n|^{p-2}u_n v\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2}uv\, dx|.
\end{aligned}$$

Pela linearidade da integral, temos que

$$\begin{aligned}
\lim\|DF(u_n) - DF(u)\|_{X'} &= \lim \sup_{\substack{v\in X \\ \|v\|_X=1}} |\int_{\mathbb{R}^2} |u_n|^{p-2}u_n v\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2}uv\, dx| \\
&= \lim \sup_{\substack{v\in X \\ \|v\|_X=1}} |\int_{\mathbb{R}^2} |u_n|^{p-2}u_n v - |u|^{p-2}uv\, dx| = \\
&= \lim \sup_{\substack{v\in X \\ \|v\|_X=1}} |\int_{\mathbb{R}^2} (|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)v\, dx|.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Hölder (veja F.8, na página 158), temos que

$$\begin{aligned}\lim\|DF(u_n) - DF(u)\|_{X'} &= \lim \sup_{\substack{v\in X\\ \|v\|_X=1}} |\int_{\mathbb{R}^2} (|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)v\,dx| \\ &\leq \lim \sup_{\substack{v\in X\\ \|v\|_X=1}} \||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\|_{\frac{p}{p-1}}\|v\|_p.\end{aligned}$$

pela Proposição 2.1.7, temos que $X \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$, ou seja, existe $C \in \mathbb{R}$ positivo tal que $\|v\|_p \leq C\|v\|_X$. Daí, temos que

$$\begin{aligned}\lim\|DF(u_n) - DF(u)\|_{X'} &\leq \lim \sup_{\substack{v\in X\\ \|v\|_X=1}} \||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\|_{\frac{p}{p-1}}\|v\|_p \\ &\leq \lim \sup_{\substack{v\in X\\ \|v\|_X=1}} \||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\|_{\frac{p}{p-1}}C\|v\|_X = \\ &= C\lim\||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\|_{\frac{p}{p-1}}.\end{aligned}$$

Pela definição de $\|\cdot\|_{\frac{p}{p-1}}$ e por propriedades do limite, temos que

$$\begin{aligned}\lim\|DF(u_n) - DF(u)\|_{X'} &\leq C\lim\||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\|_{\frac{p}{p-1}} \\ &= C\lim(\int_{\mathbb{R}^2} (|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)^{\frac{p}{p-1}}\,dx)^{\frac{p-1}{p}} = \\ &= C(\lim\int_{\mathbb{R}^2} (|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)^{\frac{p}{p-1}}\,dx)^{\frac{p-1}{p}}.\end{aligned}$$

pela (A.3), temos que

$$0 \leq \lim\|DF(u_n) - DF(u)\|_{X'} \leq C(\lim\int_{\mathbb{R}^2} (|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)^{\frac{p}{p-1}}\,dx)^{\frac{p-1}{p}} = 0.$$

Pelo Teorema do Confronto, temos que

$$\lim\|DF(u_n) - DF(u)\|_{X'} = 0,$$

ou seja,

$$DF(u_n) \xrightarrow{X'} DF(u).$$

Daí, temos que DF é contínuo em u. Como u é arbitrário, temos que DF é contínua em X. Daí, pela Proposição F.11, temos que $F'(u)(v) = DF(u)(v) = 2\langle u, v\rangle$ e que F' é contínua em X', ou seja, F é continuamente diferenciável em X.

□

Proposição A.7. *Sejam $p \in [1, \infty)$, $u \in L^p(\mathbb{R}^2)$ e $z \in \mathbb{Z}^2$. Então $\|u \circ \tau_z\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} = \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$.*

Demonstração. Por definição, temos que

$$\|u \circ \tau_z\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} = (\int_{\mathbb{R}^2} (u \circ \tau_z)^p\,dx)^{\frac{1}{p}} = (\int_{\mathbb{R}^2} (u \circ \tau_z)^p(x)\,dx)^{\frac{1}{p}}$$

$$= (\int_{\mathbb{R}^2} u(\tau_z(x))^p \, dx)^{\frac{1}{p}} = (\int_{\mathbb{R}^2} u^p(x-z) \, dx)^{\frac{1}{p}}.$$

Fazendo a mudança de variável $y = x - z$ e pela definição de $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$, temos que

$$\begin{aligned} \|u \circ \tau_z\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} &= (\int_{\mathbb{R}^2} u^p(x-z) \, dx)^{\frac{1}{p}} = (\int_{\mathbb{R}^2} u^p(y) \, dy)^{\frac{1}{p}} \\ &= (\int_{\mathbb{R}^2} u^p \, dx)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

□

Proposição A.8. *Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e $z \in \mathbb{Z}^2$. Se a é $\mathbb{Z}^2$-periódica então $\|u \circ \tau_z\| = \|u\|$.*

Demonstração. Por definição, temos que

$$\begin{aligned} \|u \circ \tau_z\| &= (\int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla(u \circ \tau_z)\|^2 + a(u \circ \tau_z)^2 \, dx)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla u \circ \tau_z\|^2 + a(u \circ \tau_z)^2 \, dx)^{\frac{1}{2}} = \\ &= (\int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla u \circ \tau_z\|^2(x) + a(x)(u \circ \tau_z)^2(x) \, dx)^{\frac{1}{2}} = \\ &= (\int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla u(\tau_z(x))\|^2 + a(x)u(\tau_z(x))^2 \, dx)^{\frac{1}{2}} = \\ &= (\int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla u(x-z)\|^2 + a(x)u^2(x-z) \, dx)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $y = x - z$, temos que

$$\begin{aligned} \|u \circ \tau_z\| &= (\int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla u(x-z)\|^2 + a(x)u^2(x-z) \, dx)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla u(y)\|^2 + a(y+z)u^2(y) \, dy)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Como a é $\mathbb{Z}^2$ invariante, temos que $a(y+z) = a(y)$. Daí e pela definição de $\|\cdot\|$, temos que

$$\begin{aligned} \|u \circ \tau_z\| &= (\int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla u(y)\|^2 + a(y+z)u^2(y) \, dy)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla u(y)\|^2 + a(y)u^2(y) \, dy)^{\frac{1}{2}} = (\int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla u\|^2 + au^2 \, dx)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \|u\|. \end{aligned}$$

□

Apêndice B

Desigualdades envolvendo o logaritmo

Proposição B.1. *Sejam* $x, y \in \mathbb{R}^2$. *Então*

$$\ln(1 + |x - y|) - \ln\left(1 + \frac{1}{|x - y|}\right) = \ln(|x - y|).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\ln(1 + |x - y|) - \ln\left(1 + \frac{1}{|x - y|}\right) &= \ln\left((1 + |x - y|)\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{|x-y|}}\right)\right) \\
&= \ln\left((1 + |x - y|)\left(\frac{1}{\frac{1+|x-y|}{|x-y|}}\right)\right) \\
&= \ln\left((1 + |x - y|)\left(\frac{|x - y|}{1 + |x - y|}\right)\right) \\
&= \ln(|x - y|).
\end{aligned}$$

□

Proposição B.2. *Seja* $r \in (0, \infty)$. *Então* $\ln(1 + r) \leq r$.

Demonstração. Pelo Teorema de Taylor, inferimos que

$$\exp^r = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{r^i}{i}, \forall x \in \mathbb{R},$$

isto é,

$$\exp^r = 1 + r + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{r^i}{i}.$$

Como $r \geq 0$, temos que $\displaystyle\sum_{i=2}^{\infty} \frac{r^i}{i} \geq 0$. Daí, deduzimos que

$$\exp^r = 1 + r + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{r^i}{i} \geq 1 + r.$$

Aplicando o logarítmo natural dos dois lados da expressão e usando que $\ln(\exp^r) = r$, concluímos que

$$r = \ln(\exp^r) \geq \ln(1 + r).$$

$\square$

Proposição B.3. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^2$. Então*

$$\ln(1 + |x - y|) \leq \ln(1 + |x|) + \ln(1 + |y|).$$

Demonstração. Pela desigualdade triangular, deduzimos que

$$|x - y| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|.$$

Como $|x||y| \geq 0$ e o logarítmo natural é crescente, concluímos que

$$\begin{aligned}\ln(1 + |x - y|) &\leq \ln(1 + |x| + |y|) \leq \ln(1 + |x| + |y| + |x||y|) \\ &= \ln((1 + |x|)(1 + |y|)) = \ln(1 + |x|) + \ln(1 + |y|).\end{aligned}$$

$\square$

Apêndice C

Convergência de V_1 em domínio limitado

Proposição C.1. *Sejam $R \in (0, \infty)$, $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e (u_n) uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $u_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\rightharpoonup} u$. Então*

$$\lim \int\limits_{B(0,R)} \int\limits_{B(0,R)} \ln(1 + |x - y|)u_n^2(x)u_n^2(y)\, dx\, dy =$$

$$= \int\limits_{B(0,R)} \int\limits_{B(0,R)} \ln(1 + |x - y|)u^2(x)u^2(y)\, dx\, dy.$$

Demonstração. Suponha por absurdo que existe uma subsequência de (u_n) (que ainda chamaremos de (u_n)) tal que todas suas subsequências satisfazem

$$\lim \int\limits_{B(0,R)} \int\limits_{B(0,R)} \ln(1 + |x - y|)u_n^2(x)u_n^2(y)\, dx\, dy \neq \int\limits_{B(0,R)} \int\limits_{B(0,R)} \ln(1 + |x - y|)u^2(x)u^2(y)\, dx\, dy.$$

Como $u_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\rightharpoonup} u$, concluímos que $u_n|_{B(0,R)} \overset{H^1(B(0,R))}{\rightharpoonup} u|_{B(0,R)}$. Como $B(0, R)$ é limitado, inferimos que $H^1(B(0, R)) \overset{C}{\hookrightarrow} L^2(B(0, R))$. Dessa forma, deduzimos que que $u_n|_{B(0,R)} \overset{L^2(B(0,R))}{\to} u|_{B(0,R)}$. Pelo Teorema de Vainberg (veja F.14, na página 159), concluímos que, a menos de subsequência, $u_n(x) \to u(x)$ para quase todo $x \in B(0, R)$ e que existe $g \in L^2(B(0, R))$ tal que $|u_n(x)| \leq g(x)$, para quase todo $x \in B(0, R)$. Seja $y \in B(0, R)$. Então, inferimos que

$$\ln(1 + |x - y|)u_n^2(x) \to \ln(1 + |x - y|)u^2(x),$$

para quase todo $x \in B(0, R)$. Além disso, se $x \in B(0, R)$, deduzimos que

$$|\ln(1 + |x - y|)u_n^2(x)| \leq \ln(1 + 2R)g^2(x) \in L^1(B(0, R)).$$

Desse modo, pelo Teorema da Convergência Dominada (veja F.4, na página 157), concluímos que

$$\lim \int\limits_{B(0,R)} \ln(1 + |x - y|)u_n^2(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{B(0,R)} \ln(1+|x-y|)u^2(x)\,dx.$$

Assim, inferimos que

$$\begin{aligned}
&\lim \left(u_n^2(y) \int\limits_{B(0,R)} \ln(1+|x-y|)u_n^2(x)\,dx \right) = \\
&= \lim(u_n^2(y)) \lim \left(\int\limits_{B(0,R)} \ln(1+|x-y|)u_n^2(x)\,dx \right) = \\
&= u^2(y) \int \ln(1+|x-y|)u^2(x)\,dx.
\end{aligned}$$

para quase todo $y \in B(0,R)$. Além disso, se $y \in B(0,R)^2$, deduzimos que

$$\begin{aligned}
&\left| u_n^2(y) \int\limits_{B(0,R)} \ln(1+|x-y|)u_n^2(x)\,dx \right| \leq \\
&\leq g^2(y)\ln(1+2R) \int\limits_{B(0,R)} g^2(x)\,dx = \\
&= g^2(y)\ln(1+2R)\|g\|^2_{L^2(B(0,R))} \in L^1(B(0,R)).
\end{aligned}$$

Daí, pelo Teorema da Convergência Dominada (veja F.4, na página 157), concluímos que

$$\begin{aligned}
&\lim \int\limits_{B(0,R)} \int\limits_{B(0,R)} \ln(1+|x-y|)u_n^2(x)u_n^2(y)\,dx\,dy = \\
&= \lim \int\limits_{B(0,R)} u_n^2(y) \int\limits_{B(0,R)} \ln(1+|x-y|)u_n^2(x)\,dx\,dy = \\
&= \lim \int\limits_{B(0,R)} u^2(y) \int\limits_{B(0,R)} \ln(1+|x-y|)u^2(x)\,dx\,dy = \\
&= \lim \int\limits_{B(0,R)} \int\limits_{B(0,R)} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u^2(y)\,dx\,dy,
\end{aligned}$$

o que é absurdo.

$\square$

Apêndice D

Noções de teoria do gênero de Krasnoselskii

A teoria do gênero de Krasnoselskii estuda conjuntos com certas propriedades. Definimos uma delas em seguida.

Notação. *Seja $A \subset X$. Dizemos que A é simétrico se A satisfaz $u \in A \iff -u \in A$.*

A outra propriedade necessária para usarmos a teoria do gênero de Krasnoselskii é que o conjunto seja fechado. Como só iremos usar tal teoria para subconjuntos de X, podemos estabelecer a seguinte notação.

Notação. $\mathcal{A} := \{A \subset X \mid A$ *é fechado e simétrico*$\}$.

Então, para todos os fins desse trabalho, $\mathcal{A}$ é o espaço dos conjuntos que nos interessam e em que podemos usar a teoria do gênero de Krasnoselskii. Definimos agora o gênero de Krasnoselskii desses conjuntos.

Notação. *Seja $A \in \mathcal{A}$. Definimos o* gênero de Krasnoselskii de A*, denotado por $\gamma(A)$, da seguinte forma*

(i) $\gamma(\emptyset) = 0$;

(ii) Se $A \neq \emptyset$ e se o número a seguir existir, $\gamma(A)$ é o menor inteiro positivo k tal que exista uma $h : A \to \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$; ímpar, contínua (em X).

(iii) Se número acima não existe, $\gamma(A) = \infty$.

No que segue, estabelecemos as tais propriedades.

Proposição D.1. *Seja $W \subset X$ um subespaço de X de dimensão k e $A \in \mathcal{A}$ uma vizinhança simétrica e limitada do 0 em W. Então $\gamma(\partial A) = k$.*

Demonstração. Uma prova desse resultado pode ser encontrada na página 95 de [23]. $\square$

Proposição D.2. *Sejam $A, B \in \mathcal{A}$. Então:*

(i) Se $A \subset B$, então $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.

(ii) $\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$.

(iii) *Se* A *é compacto e* $0 \notin A$*, então* $\gamma(A) < \infty$ *e existe* $U \subset X$ *aberto em* X *tal que* $A \subset U$*,* $\overline{U} \in \mathcal{A}$ *e* $\gamma(\overline{U}) = \gamma(A)$*.*

Demonstração. Uma prova desse resultado pode ser encontrada na página 95 de [23].

□

Proposição D.3. *Sejam* $A \in \mathcal{A}$*,* $B \subset X$ *qualquer e* $\phi : B \to X$ *uma função ímpar e contínua. Então* $\gamma(\phi^{-1}(A)) \leq \gamma(A)$*.*

Demonstração. Vamos considerar 3 casos: $\gamma(A) = 0$, $\gamma(A) = \infty$ e $0 < \gamma(A) < \infty$.

(i) $\gamma(A) = 0$

Dessa forma, pela definição de γ, temos que $A = \emptyset$. Então, deduzimos que $\phi^{-1}(A) = \phi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Desse modo, concluímos que $\gamma(\phi^{-1}(A)) = \gamma(\emptyset) = \gamma(A)$.

(ii) $\gamma(A) = \infty$

O resultado segue trivialmente.

(iii) $0 < \gamma(A) < \infty$

Seja $k = \gamma(A)$. Pela definição de γ, temos que existe uma $h : A \to \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$; ímpar e contínua.

Defina $h' : \phi^{-1}(A) \to \mathbb{R}^k \setminus \{0\}; h'(u) = h(\phi(u))$. Como h e ϕ são ímpares e contínuas, concluímos que h' é ímpar e contínua.

Assim, pela definição de γ, vale que $\gamma(\phi^{-1}(A)) \leq k = \gamma(A)$.

□

Notação. *Sejam* $D, Y \in \mathcal{A}$ *satisfazendo* $D \subset Y$*. Dizemos que um par de conjuntos* $U, V \in \mathcal{A}$ *formam uma* cobertura de Y relativa a D *se satisfazem*

(i) $Y \subset U \cup V$*;*

(ii) $D \subset U$*;*

(iii) *Existe uma função* $\chi : U \to D$ *ímpar e contínua (em* X*) tal que* $\chi(u) = u$ *para todo* $u \in D$*;*

Para simplificar a notação e definição do conceito de gênero relativo de Krasnoselskii, fazemos a seguinte definição auxiliar.

Notação. *Sejam* $D, Y \in \mathcal{A}$ *satisfazendo* $D \subset Y$ *e sejam* $U, V \subset X$ *uma cobertura de* Y *relativa a* D*. Dizemos que o* gênero dessa cobertura de Y relativa a D *é* $k = \gamma(V)$*.*

Feita definição acima, definimos o conceito de gênero relativo de Krasnoselskii.

Notação. *Sejam* $D, Y \in \mathcal{A}$ *satisfazendo* $D \subset Y$*. Definimos o* gênero de Krasnoselskii de Y relativo a D*, denotado por* $\gamma_D(Y)$*, como* *(i) Quando existir alguma cobertura de Y relativa a D, definimos $\gamma_D(Y) = k$, onde k é o menor gênero dessas coberturas.*

(ii) Quando não existir nenhuma cobertura de Y relativa a D, definimos $\gamma_D(Y) = \infty$.

O gênero relativo de Krasnoselskii será o aspecto mais importante para esse trabalho de toda a teoria estudada nessa seção, pois o usaremos para definir uma sequência que, eventualmente, mostraremos ser de valores críticos.

A propriedade seguinte será usada para estabelecer a positividade do menor desses valores críticos.

Proposição D.4. *Seja $D \in \mathcal{A}$. Então $\gamma_D(D) = 0$.*

Demonstração. Basta tomar $U = D$, $V = \emptyset$ e $\chi = id$ na definição de gênero relativo e lembrar que $\gamma(\emptyset) = 0$. □

Vamos agora estabelecer a versão para o gênero relativo de Krasnoselskii de algumas das propriedades previamente mostradas para o gênero de Krasnoselskii.

Proposição D.5. *Sejam $D, Y, Z \in \mathcal{A}$ satisfazendo $D \subset Y$ e $D \subset Z$. Se existe uma $\phi : Y \to Z$ ímpar e contínua (em X) tal que $\phi(u) = u$, para todo $u \in D$, então $\gamma_D(Y) \leq \gamma_D(Z)$.*

Demonstração. Se $\gamma_D(Z) = \infty$, então o resultado segue trivialmente.

Suponha então, sem perda de generalidade, que $\gamma_D(Z) < \infty$. Daí, pela definição de $\gamma_D(Z)$, temos que existem $U, V \in \mathcal{A}$ que formam uma cobertura de Z relativa a D e o gênero de tal cobertura é $\gamma(V)$, ou seja, $\gamma_D(Z) = \gamma(V)$.

Pela definição uma cobertura de Z relativa a D, temos que existe $\chi : U \to D$ ímpar e contínua tal que $\chi(u) = u$, para todo $u \in D$.

Pela definição de γ_D, $\gamma_D(Y)$ é o menor gênero de todas as coberturas de Y relativas a D. Basta então mostrar que existe uma tal cobertura cujo gênero é menor que $\gamma_D(Z)$.

Defina $U' := \phi^{-1}(U \cap Z)$ e $V' := \phi^{-1}(V \cap Z)$. Como ϕ é ímpar e contínua, temos que $U', V' \in \mathcal{A}$.

Afirmamos que U' e V' formam uma cobertura de Y relativa à D. De fato

(i) Temos que

$$\begin{aligned} U' \cup V' &= \phi^{-1}(U \cap Z) \cup \phi^{-1}(V \cap Z) = \phi^{-1}((U \cap Z) \cup (V \cap Z)) \\ &= \phi^{-1}((U \cup V) \cap Z). \end{aligned}$$

Como o domínio de ϕ é Y e o contradomínio de ϕ é Z, inferimos que $Y = \phi^{-1}(Z)$. Como U e V formam uma cobertura de Z relativa a D, deduzimos que $Z \subset U \cup V$. Dessa forma, concluímos que

$$Y = \phi^{-1}(Z) = \phi^{-1}(Z \cap Z) \subset \phi^{-1}((U \cup V) \cap Z) = U' \cup V'.$$

(ii) Por hipótese, temos que $D \subset Z$. Como U, V que formam uma cobertura de Z relativa a D, concluímos que $D \subset U$. Então, inferimos que $D \subset U \cap Z$. Como $\phi(u) = u$, para todo $u \in D$, deduzimos que $D \subset \phi^{-1}(D)$. Desse modo, concluímos que

$$D \subset \phi^{-1}(D) \subset \phi^{-1}(U \cap Z) = U'.$$

(iii) Defina $\chi' : Y \to D; \chi'(u) = \chi(\phi(u))$. Note que χ' está bem definida. Como χ' é é composição de duas funções ímpares e contínuas, deduzimos que χ' é ímpar e contínua. Além disso, dado $u \in D$, como $\phi(u) = u$ e $\chi(u) = u$, concluímos que

$$\chi'(u) = \chi(\phi(u)) = \chi(u) = u.$$

Como $\gamma(V') = \gamma(\phi^{-1}(V \cap Z))$, temos, por definição, que o gênero da cobertura de Y relativa a D formada por U' e V' é $\gamma(\phi^{-1}(V \cap Z))$. Daí e pelo item (i) da proposição D.2(veja página 149), deduzimos que

$$\gamma(\phi^{-1}(V \cap Z)) = \gamma(\phi^{-1}(V) \cap \phi^{-1}(Z)) \leq \gamma(\phi^{-1}(V)).$$

Assim, pela Proposição D.3 e como $\gamma_D(Z) = \gamma(V)$, inferimos que

$$\gamma(\phi^{-1}(V \cap Z)) \leq \gamma(\phi^{-1}(V)) \leq \gamma(V) = \gamma_D(Z).$$

□

Corolário D.1. *Sejam $D \subset Y \subset Z \in \mathcal{A}$. Então $\gamma_D(Y) \leq \gamma_D(Z)$.*

Demonstração. Quando $D \subset Y \subset Z$, podemos considerar $\phi : Y \to Z; \phi(u) = u$ como a aplicação ímpar e contínua. Daí, obtemos a monotonicidade do gênero relativo, isto é, $D \subset Y \subset Z \implies \gamma_D(Y) \leq \gamma_D(Z)$.

□

Proposição D.6. *Sejam $D, Y, Z \in \mathcal{A}$ satisfazendo $D \subset Y$. Então $\gamma_D(Y \cup Z) \leq \gamma_D(Y) + \gamma(Z)$.*

Demonstração. Se $\gamma_D(Y) = \infty$, então o resultado segue trivialmente.

Suponha então, sem perda de generalidade, que $\gamma_D(Y) < \infty$. Dessa forma, pela definição de $\gamma_D(Y)$, temos que existem $U, V \in \mathcal{A}$ que formam uma cobertura de Y relativa a D e o gênero de tal cobertura é $\gamma(V)$, ou seja, $\gamma_D(Y) = \gamma(V)$.

Vamos agora mostrar que $\gamma_D(Y \cup Z) \leq \gamma(V \cup Z)$.

Se $\gamma(V \cup Z) = \infty$, então a desigualdade segue trivialmente.

Suponha então, sem perda de generalidade, que $\gamma(V \cup Z) < \infty$.

Daí e pela definição de γ_D, $\gamma_D(Y \cup Z)$ é o menor gênero de todas as coberturas de $Y \cup Z$ relativas a D. Basta então mostrar que existe uma tal cobertura cujo gênero é $\gamma(V \cup Z)$.

Defina $U' := U$ e $V' := V \cup Z$. Note que $U', V' \in \mathcal{A}$.

Afirmamos que U', V' formam uma cobertura de $Y \cup Z$ relativa a D. De fato

(i) Como $Y \subset U \cup V$, concluímos que

$$Y \cup Z \subset (U \cup V) \cup Z = U \cup (V \cup Z) = U' \cup V'.$$

(ii) $D \subset U = U'$;

(iii) Como U, V formam uma cobertura de Y relativa a D, concluímos que existe $\chi : U \to D$ ímpar e contínua (em X) tal que $\chi(u) = u$ para todo $u \in D$. Como $U' = U$, essa mesma χ pode ser escrita como $\chi : U' \to D$.

Como $\gamma(V') = \gamma(V \cup Z)$, temos, por definição, que o gênero da cobertura de $Y \cup Z$ relativa a D formada por U' e V' é $\gamma(V \cup Z)$, ou seja, $\gamma_D(Y \cup Z) \leq \gamma(V \cup Z)$.

Então, pelo item (ii) da proposição D.2(veja página 149), concluímos que

$$\gamma_D(Y \cup Z) \leq \gamma(V \cup Z) \leq \gamma(V) + \gamma(Z) = \gamma_D(Y) + \gamma(Z).$$

$\square$

Apêndice E

Propriedades da função $\lfloor\cdot\rfloor$

Notação. *Chamaremos a função* $\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}; \lfloor r\rfloor = \sup\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq r\}$ *de* função maior inteiro menor que.

A função $\lfloor\cdot\rfloor$ se estende naturalmente para $\mathbb{R}^2$:

Notação. *Seja* $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$*. Denotaremos por* $\lfloor x\rfloor$ *a aplicação de* $\lfloor\cdot\rfloor$ *a cada entrada de* x*, isto é,* $\lfloor x\rfloor := (\lfloor x_1\rfloor, \lfloor x_2\rfloor)$.

Proposição E.1. *Seja* $r \in \mathbb{R}$*. Então* $0 \leq r - \lfloor r\rfloor < 1$.

Demonstração. Pela definição de $\lfloor\cdot\rfloor$, temos que $\lfloor r\rfloor \leq r$. Logo, $0 \leq r - \lfloor r\rfloor$.

Suponha por absurdo que existe $r_0 \in \mathbb{R}$ tal que $r_0 - \lfloor r_0\rfloor \geq 1$, isto é, $r_0 \geq \lfloor r_0\rfloor + 1$.

Seja $z := \lfloor r_0\rfloor + 1$. Como $\lfloor r_0\rfloor \in \mathbb{Z}$, vale que $z \in \mathbb{Z}$. Além disso, note que $z \leq r_0$ e $z > \lfloor r_0\rfloor$, o que contraria a definição de $\lfloor\cdot\rfloor$.

□

Proposição E.2. *Seja* $x \in \mathbb{R}^2$*. Então* $B(x, 2-\sqrt{2}) \subset B(\lfloor x\rfloor, 2)$.

Demonstração. Seja $y \in B(x, 2-\sqrt{2})$.

Pela definição de $\lfloor\cdot\rfloor$ e pela Proposição E.1, deduzimos que

$$|x - \lfloor x\rfloor| = \sqrt{(x_1 - \lfloor x_1\rfloor)^2 + (x_2 - \lfloor x_2\rfloor)^2} \leq \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Daí e pela desigualdade triangular, concluímos que

$$|y - \lfloor x\rfloor| = |y - x + x - \lfloor x\rfloor| \leq |y - x| + |x - \lfloor x\rfloor| \leq 2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2,$$

ou seja, $y \in B(\lfloor x\rfloor, 2)$.

□

Proposição E.3. *Seja* $r \in \mathbb{R}$ *tal que* $r - \lfloor r\rfloor \geq \frac{1}{2}$*. Então* $\left(r - \frac{1}{2}\right) - \left\lfloor r - \frac{1}{2}\right\rfloor < \frac{1}{2}$.

Demonstração. Vamos primeiro mostrar que $\left\lfloor r - \frac{1}{2}\right\rfloor = \lfloor r\rfloor$. Por hipótese, temos que $r - \lfloor r\rfloor \geq \frac{1}{2}$, isto é,

$$\lfloor r\rfloor \leq r - \frac{1}{2}. \tag{E.1}$$

Pela Proposição E.1, concluímos que $r - \lfloor r \rfloor < 1$, isto é, $\lfloor r \rfloor + 1 > r$. Disso e por (E.1), inferimos que

$$\lfloor r \rfloor + 1 > r > r - \frac{1}{2},$$

ou seja, $\left\lfloor r - \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor r \rfloor$.

Desse modo, deduzimos que

$$\begin{aligned}\left(r - \frac{1}{2}\right) - \left\lfloor r - \frac{1}{2} \right\rfloor &= r - \frac{1}{2} - \left\lfloor r - \frac{1}{2} \right\rfloor \\ &= r - \frac{1}{2} - \lfloor r \rfloor = r - \lfloor r \rfloor - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Mas, pela Proposição E.1, concluímos que

$$\left(r - \frac{1}{2}\right) - \left\lfloor r - \frac{1}{2} \right\rfloor = r - \lfloor r \rfloor - \frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$\square$

Proposição E.4. *Seja* $r \in \mathbb{R}$. *Então* $r - \left\lfloor r - \frac{1}{2} \right\rfloor < 2$.

Demonstração. Vamos considerar dois casos: $r - \lfloor r \rfloor < \frac{1}{2}$, $r - \lfloor r \rfloor \geq \frac{1}{2}$

(i) Suponha que $r - \lfloor r \rfloor < \frac{1}{2}$. Assim, inferimos que $r - \frac{1}{2} < \lfloor r \rfloor$, ou seja, $\left\lfloor r - \frac{1}{2} \right\rfloor < \lfloor r \rfloor$. Como $r - \frac{1}{2} > r - 1$, deduzimos que

$$\left\lfloor r - \frac{1}{2} \right\rfloor \geq \lfloor r - 1 \rfloor = \lfloor r \rfloor - 1.$$

Daí, pela definição de $\lfloor \cdot \rfloor$, temos que $\left\lfloor r - \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor r \rfloor - 1$. Dessa forma, pela Proposição E.1, concluímos que

$$r - \left\lfloor r - \frac{1}{2} \right\rfloor = r - (\lfloor r \rfloor - 1) = (r - \lfloor r \rfloor) + 1 < 1 + 1 = 2.$$

(ii) Suponha que $r - \lfloor r \rfloor \geq \frac{1}{2}$. Então, inferimos que $r - \frac{1}{2} \geq \lfloor r \rfloor$. Desse modo, deduzimos que $\left\lfloor r - \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor r \rfloor$. Assim, pelo Proposição E.1, concluímos que

$$r - \left\lfloor r - \frac{1}{2} \right\rfloor = r - \lfloor r \rfloor < 1 < 2.$$

Como em todos os casos possíveis vale $r - \left\lfloor r - \frac{1}{2} \right\rfloor < 2$, a demonstração esta concluída.

$\square$

Apêndice F

Resultados clássicos

Proposição F.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Sejam H um espaço de Hilbert e $x, y \in H$. Então $\langle x, y\rangle_H \leq \|x\|_H \|y\|_H$, com a igualdade valendo se, e somente se, x e y são linearmente independentes.*

Demonstração. Uma prova desse resultado pode ser encontrada na página 172 de [10].

□

Proposição F.2 (Teorema de Hahn-Banach). *Sejam E um espaço vetorial normado e $A, B \subset E$ convexos não vazios disjuntos tais que A é fechado e B é compacto. Então existem $F \in E'$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\epsilon \in (0, \infty)$ tais que*

$$f(x) + \epsilon \leq \alpha \leq f(y) - \epsilon,$$

para todo $x \in A$ e $y \in B$.

Demonstração. Uma prova desse resultado pode ser encontrada na página 6 de [6].

□

Proposição F.3 (Teorema da Convergência Monótona). *Sejam M um espaço de medida, $f_n : M \to [0, \infty]$ uma sequência de funções mensuráveis satisfazendo $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, para todo $x \in M$. Seja $f : M \to [0, \infty]; f(x) = \lim f_n(x)$. Então*

$$\lim \int_M f_n \, d\mu = \int_M f \, d\mu.$$

Demonstração. Uma prova desse resultado pode ser encontrada na página 50 de [10].

□

Proposição F.4 (Teorema da Convergência Dominada). *Sejam M um espaço de medida, $f : M \to [0, \infty]$ uma função qualquer, (f_n) uma sequência em $L^1(M)$ e $g \in L^1(M)$ não negativa tais que $f_n(x) \to f(x)$ e $|f_n(x)| \leq g(x)$ para quase todo $x \in M$. Então $f \in L^1(M)$ e*

$$\lim \int_M f_n \, d\mu = \int_M f \, d\mu.$$

Demonstração. Uma prova desse resultado pode ser encontrada na página 55 de [10].

□

Proposição F.5 (Teorema de Riesz-Fischer). *Seja M um espaço de medida e $p \in \mathbb{R}$ tal que $p > 1$. Então $L^p(M)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Uma prova desse resultado pode ser encontrada na página 183 de [10].

□

Proposição F.6 (Teorema de Rellich-Kondrachov). *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1. Então, valem as seguintes imersões compactas:*

$$
\begin{aligned}
&W^{1,p}(\Omega) \overset{C}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \ \text{para todo } q \in [1, p^*), \ \text{onde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, && \text{se } p < n.\\
&W^{1,p}(\Omega) \overset{C}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \ \text{para todo } q \in [1, \infty), && \text{se } p = n.\\
&W^{1,p}(\Omega) \overset{C}{\hookrightarrow} \mathcal{C}(\overline{\Omega}), && \text{se } p > n.
\end{aligned}
$$

Demonstração. Uma prova desse resultado pode ser encontrada na página 285 de [6].

□

Proposição F.7 (Desigualdade da Interpolação). *Sejam M um espaço de medida e $p, q, r \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ satisfazendo $0 < p < r < q \leq \infty$. Então $L^p(M) \cap L^q(M) \subset L^r(M)$ e se $f \in L^p(M) \cap L^q(M)$ então existe $\theta \in (0, 1)$ tal que $\|f\|_r \leq \|f\|_p^\theta \|f\|_q^{1-\theta}$.*

Demonstração. Uma prova desse resultado pode ser encontrada na página 185 de [10].

□

Proposição F.8 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $p, q \in [1, \infty]$ tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável. Além disso, sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração. Uma prova desse resultado pode ser encontrada na página 92 de [6].
□

Proposição F.9 (Desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev). *Sejam $r, s > 1$ e $0 < \mu < N$ com $\dfrac{1}{s} + \dfrac{\mu}{N} + \dfrac{1}{r} = 2$. Se $f \in L^s(\mathbb{R}^N)$ e $h \in L^r(\mathbb{R}^N)$, então existe uma constante sharp $C(s, N, \mu, r) > 0$, independente de f e h, tal que:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)h(y)}{|x-y|^\mu} \, dx \, dy \leq C(s, N, \mu, r) ||f||_s ||h||_r.$$

Demonstração. Uma prova desse resultado pode ser encontrada em [15].

□

Proposição F.10 (Teorema de Fubini)**.** *Sejam* (X_1, Σ_1, μ_1) *e* (X_2, Σ_2, μ_2) *e suponha que* μ_1 *e* μ_2 *são* σ*-aditivas e completas. Sejam* μ *a medida produto de* μ_1 *e* μ_2*,* $A \subset X_1 \times X_2$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função mensurável* μ*-integrável. Então:*

$$\int_A f(x,y)\, d\mu = \int_{X_1} \left(\int_{A_{x_1}} f\, d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_{X_2} \left(\int_{A_{x_2}} f\, d\mu_1 \right) d\mu_2,$$

onde $A_{x_1} := \{x_2 \in X_2 \mid (x_1, x_2) \in A\}$*, para cada* $x_1 \in X_1$ *e* $A_{x_2} := \{x_1 \in X_1 \mid (x_1, x_2) \in A\}$*, para cada* $x_2 \in X_2$*.*

Demonstração. Uma prova desse resultado pode ser encontrada na página 359 de [14].

□

Proposição F.11. *Sejam* X, Y *espaços de Banach,* $U \subset X$ *aberto em* X *e* $u \in U$*. Suponha que* $F : U \to Y$ *possui derivada de Gâteaux contínua em* u*. Então* F *possui derivada de Fréchet contínua em* u *e as derivadas de Gâteaux e Fréchet em* u *coincidem.*

Demonstração. Uma prova desse resultado pode ser encontrada na página 14 de [2].

□

Proposição F.12 (Teorema de Egorov)**.** *Seja* M *um espaço de medida totalmente finito,* $f_n : M \to \mathbb{R}$ *uma sequência de funções mensuráveis e* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função mensurável tal que* $f_n(x) \to f(x)\mu$ *para quase todo* $x \in M$*. Então* $f_n \to f$ *quase uniformemente em* M*.*

Demonstração. Uma prova desse resultado pode ser encontrada na página 62 de [10].

□

Proposição F.13 (Lema de Lions)**.** *Seja* $r \in (0, \infty)$ *e* $q \in (2, 2^*)$*. Se* (u_n) *é limitada em* $H^1(\mathbb{R}^n)$ *e se*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B(y,r)} |u_n|^q\, d\mu = 0,$$

então $u_n \overset{L^p(\mathbb{R}^n)}{\to} 0$*, para todo* $p \in (2, 2^*)$*.*

Demonstração. Uma prova desse resultado pode ser encontrada na página 16 de [25].

□

Proposição F.14 (Teorema de Vainberg)**.** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*,* $p \in [1, \infty]$*,* $f \in L^p(\Omega)$ *e* (f_n) *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *tal que* $f_n \overset{L^p(\Omega)}{\to} f$*. Então existe* $h \in L^p(\Omega)$ *tal que, a menos de subsequência,*

(i) $f_n(x) \to f(x)$, *para quase todo* $x \in \Omega$;

(ii) $|f_n(x)| \leq h(x)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e para quase todo* $x \in \Omega$.

Demonstração. Uma prova desse resultado pode ser encontrada na página 94 de [6]. □

Proposição F.15 (Teorema da Extensão de Tietze)**.** *Sejam* T *um espaço topológico normal,* $A \subset T$ *um subespaço fechado de* T *e* $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então existe* $\tilde{f} : T \to \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que* $\tilde{F}\Big|_A = f$.

Demonstração. Uma prova desse resultado pode ser encontrada na página 219 de [19]. □

Proposição F.16 (Projeção sobre subespaços fechados)**.** *Seja* H *um espaço de Hilbert,* $A \subset H$ *um subespaço fechado e* $f \in H$*. Então existe um único* $P_A f \in A$ *tal que*

$$\langle f - P_A f, v \rangle_H = 0,$$

para todo $v \in A$.

Além disso, o operador $P_A : H \to A; P_A(f) = P_A f$ *(chamado de* operador projeção ortogonal*) é linear.*

Demonstração. Uma prova desse resultado pode ser encontrada na página 134 de [6]. □

Proposição F.17. *Seja* E *um espaço de Banach sobre* $\mathbb{R}$ *e* $I : E \to \mathbb{R}$ *um funcional continuamente diferenciável*

Bibliografia

[1] N. Ackermann, "On a periodic Schrödinger equation with nonlocal superlinear part", *Mathematische Zeitschrift*, v. 248, n. 2, pp. 423–443, out. de 2004.

[2] A. Ambrosetii e G. Prodi, *A Primer of Nonlinear Analysis*. Cambridge University Press, 1993, ISBN: 9780521373906.

[3] A. Amrbosetii e G. Prodi, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*. American Mathematical Society, 1986, ISBN: 0821807153.

[4] M. Bahrami, A. Großardt, S. Donadi e A. Bassi, "The Schrödinger–Newton equation and its foundations", *New Journal of Physics*, v. 16, n. 11, p. 115 007, nov. de 2014.

[5] T. Bartsch e T. Weth, "Three nodal solutions of singularly perturbed elliptic equations on domains without topology", *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, v. 22, n. 3, pp. 259–281, mai. de 2005.

[6] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011, ISBN: 9780387709130.

[7] P. Choquard, J. Stubbe, M. Vuffray et al., "Stationary solutions of the Schrödinger-Newton model—an ODE approach", *Differential and integral equations*, v. 21, n. 7-8, pp. 665–679, 2008.

[8] S. Cingolani, M. Clapp e S. Secchi, "Multiple solutions to a magnetic nonlinear Choquard equation", *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, v. 63, n. 2, pp. 233–248, abr. de 2012.

[9] S. Cingolani e T. Weth, "On the planar Schrödinger-Poisson system", *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, v. 33, n. 1, pp. 169–197, jan. de 2016.

[10] G. Folland, *Real analysis: modern techniques and their applications*. Wiley, 1999, ISBN: 9780471317166.

[11] J. Fröhlich e E. Lenzmann, "Mean-field limit of quantum Bose gases and nonlinear Hartree equation", *Sémin. Équ. Dériv. Partielles (Ecole Polytechnique)*, v. 19, n. 18, pp. 1–26, 2004.

[12] D. Gilbarg e N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, 2001, ISBN: 9783540411604.

[13] E. P. Gross, "Structure of a quantized vortex in boson systems", *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, v. 20, n. 3, pp. 454–477, mai. de 1961.

[14] A. N. Kolmogorov e S. V. Fomin, *Introductory Real Analysis*. Dover Publications, 1975, ISBN: 9780486612263.

[15] E. Lieb, “Sharp Constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and Related Inequalities”, *Annals of Mathematics*, v. 118, n. 2, pp. 349–374, set. de 1983.

[16] L. Ma e L. Zhao, “Classification of Positive Solitary Solutions of the Nonlinear Choquard Equation”, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, v. 195, n. 2, pp. 455–467, fev. de 2010.

[17] S. Masaki, “Energy Solution to a Schrödinger–Poisson System in the Two-Dimensional Whole Space”, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, v. 43, n. 6, pp. 2719–2731, dez. de 2011.

[18] V. Moroz e J. V. Schaftingen, “Groundstates of nonlinear Choquard equations: Existence, qualitative properties and decay asymptotics”, *Journal of Functional Analysis*, v. 265, n. 2, pp. 153–184, jul. de 2013.

[19] J. Munkres, *Topology*. Prentice Hall, 2000, ISBN: 9780131816299.

[20] S. Pekar, *Untersuchungen uber die Elektronentheorie der Kristalle*. Akademie-Verlag, 1954.

[21] L. P. Pitaevskii, “Vortex Lines in an Imperfect Bose Gas”, *Soviet Physics JETP-USSR*, v. 13, n. 2, pp. 646–651, fev. de 1961.

[22] D. Ruiz e G. Vaira, “Cluster solutions for the Schrödinger-Poisson-Slater problem around a local minimum of the potential”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, v. 27, n. 1, pp. 253–271, jan. de 2011.

[23] M. Struwe, *Variational Methods, Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*. Springer, 2008, ISBN: 9783540740131.

[24] J. Stubbe, “Bound states of two-dimensional Schrödinger-Newton equations”, *arXiv preprint arXiv:0807.4059*, 2008.

[25] M. Willem, *Minimax Theorems*. Springer, 1996, ISBN: 9781461241461.