

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE UnB GAMA-FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE
MATERIAIS DA ENGENHARIA

EFEITO DA VARIABILIDADE DOS PARÂMETROS DA CURVA S-
N SOBRE AS PREVISÕES DE VIDA DE COMPONENTES
ENTALHADOS SOB CARGAS MULTIAXIAIS

JÉSSICA NAYARA DIAS

ORIENTADOR (A): Dr. JORGE LUIZ DE ALMEIDA FERREIRA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS
DA ENGENHARIA

PUBLICAÇÃO: FGA.DM – 062A/2018

BRASÍLIA/DF: 07/2018

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE GAMA / FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE
MATERIAIS DA ENGENHARIA.**

Efeito da variabilidade dos parâmetros da curva s-n sobre as previsões de vida de componentes entalhados sob cargas multiaxiais.

JÉSSICA NAYARA DIAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA DA FACULDADE GAMA E FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA.

APROVADA POR:



Prof. Dr. JORGE LUIZ DE ALMEIDA FERREIRA
(Orientador)



Prof. Dr. DANIEL MONTEIRO ROSA
(Examinador Externo)



Prof. Dr. FÁBIO COMES DE CASTRO
(Examinador Externo)

FICHA CATALOGRÁFICA

JÉSSICA NAYARA DIAS

Efeito da variabilidade dos parâmetros da curva S-N sobre as previsões de vida de componentes entalhados sob cargas multiaxiais, [Distrito Federal] 2018.

134º.p. 210 x 297 mm (FGA/FT/UnB, Mestre, Integridade de Materiais da Engenharia, 2018).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade UnB Gama. Programa de Pós-Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia.

1. Fadiga Multiaxial

2. Método de Monte Carlo

3. Estatística

4. Teoria da Distância Crítica

I. FGA/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

DIAS, J. N. (2018). Efeito da variabilidade dos parâmetros da curva S-N sobre as previsões de vida de componentes entalhados sob cargas multiaxiais. Dissertação de Mestrado em Integridade de Materiais da Integridade da Engenharia, Publicação 062A/2018, Faculdade UnB Gama/FT/Universidade de Brasília, DF, 134.p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Jéssica Nayara Dias

TÍTULO: Efeito da variabilidade dos parâmetros da curva S-N sobre as previsões de vida de componentes entalhados sob cargas multiaxiais

GRAU: Mestre

ANO: 2018

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Jéssica Nayara Dias

Faculdade UnB/GAMA – Área Especial nº 01, Setor Central.

CEP 72.405-610 Brasília, DF – Brasil.

E-mail: jessicadias.engenharia@gmail.com

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, que diante de grandes lutas permitiu que maiores fossem as vitórias. Agradeço à Universidade de Brasília pelo acolhimento e qualidade de ensino. Ao meu orientador, Professor Jorge Luiz, por toda dedicação e amizade, por não se importar em transmitir seu conhecimento em prol do crescimento do outro, sem a ajuda desse incrível profissional, eu com certeza não teria chegado até aqui. Agradeço ainda aos professores do Programa de Pós-graduação em Integridade de Materiais da Engenharia e ao professor Fábio Comes de Castro, que não faz parte desse programa específico, mas que foi um dos que mais contribuíram com esse resultado. Deixo registrada aqui minha gratidão aos colegas, pelo ótimo convívio e auxílio, e a todos aqueles que trabalham na UnB e a fazem ser essa instituição que preza pelo ensino de qualidade acima de tudo e é, ao mesmo tempo, acolhedora e um segundo lar para todos que nela estudam.

Não poderia deixar de agradecer aos meus pais, Gislene e Adenilson, pois se hoje meus passos são firmes foi porque me ensinaram a caminhar. Ao meu filho, Arthur, agradeço acima de tudo pela compreensão, pois me ausentei muito durante esse processo e tive seu apoio em cada etapa. Agradeço àqueles que estão sempre ao meu lado, meu marido Cláudio, minha irmã Nayanne, meu cunhado Joas, minha avó Ivete e em especial ao meu sobrinho Pedro, que ainda não nasceu, mas que já traz esperança por dias melhores. Dedico esse trabalho àqueles que tanto fazem falta, meus avós Ivani e Benedito (in memoriam), desejo que estejam melhores ao lado do Pai, pois sem vocês aqui, a vida perdeu muito do seu brilho.

Por fim, agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pela concessão da bolsa durante todo o período de realização deste mestrado.

RESUMO

Este trabalho realizou uma análise do comportamento à fadiga de componentes estruturais submetidos a carregamentos multiaxiais. A Teoria da Distância Crítica (TDC) foi utilizada em conjunto com modelos de previsão de vida de fadiga multiaxial, de modo que, diferentemente do enfoque clássico, utiliza-se uma função que contém informações do tensor das tensões e admite-se que o comprimento característico, L , varia com a vida de fadiga. Neste sentido, o parâmetro de Smith-Watson-Topper, P_{SWT} , foi considerado como representativo da condição de falha e construiu-se algoritmos de pesquisa de plano crítico e de previsão de vida com base neste parâmetro. Além dos algoritmos que executam a previsão de vida considerando as curvas de distância crítica expressas em termos do parâmetro P_{SWT} , implementou-se o algoritmo para a previsão de vida segundo o método da curva de Wöhler modificada (MCWM). Para a validação do modelo foram utilizados resultados de testes de fadiga realizados por Sá (2017) em espécimes fabricados com a liga Al 7050-T7451, sob condições de carregamentos uniaxial (tração-compressão e torção) e multiaxial (torção-tração). A técnica de simulação de Monte Carlo também foi implementada visando avaliar o efeito da variabilidade do coeficiente das curvas de fadiga sobre o resultado das previsões de vida considerando condições multiaxiais. Por fim, a análise de sensibilidade indicou, dentre as variáveis de entrada do modelo, quais foram as que mais contribuíram para a variação no valor da vida prevista. Como resultado, foi possível estabelecer que o modelo baseado no parâmetro P_{SWT} apresentou melhores resultados para a previsão de vida em detrimento dos resultados obtidos segundo o MWCM, essa validação foi realizada com base nos resultados experimentais. A análise em termos probabilísticos permitiu avaliar a variabilidade dos resultados obtidos e a distribuição de probabilidade que melhor representou os dados gerados, que foi a lognormal. Dada a distribuição das vidas e dos parâmetros das curvas utilizadas na sua obtenção, a análise de sensibilidade constatou a grande interferência e importância das curvas de distância crítica *versus* vida no resultado das vidas estimadas pelos modelos.

Palavras-Chave: fadiga multiaxial, Teoria da Distância Crítica, estatística, método de Monte Carlo, análise de sensibilidade.

ABSTRACT

This work carried out an analysis of fatigue behavior of structural components submitted to multiaxial loads. The Theory of Critical Distance (TDC) was used combined with multiaxial fatigue life prediction models, so that, unlike the classic approach, a function that contains information on the tensor of the stresses is used and it is assumed that the length characteristic, L , varies with the fatigue life. The Smith-Watson-Topper parameter, P_{SWT} , was considered to be representative of the fault condition and a critical plan and life prediction algorithms based on this parameter were built. In addition to the algorithms that perform the life prediction considering the critical distance curves expressed in terms of the P_{SWT} parameter, the algorithm for life prediction was implemented according to the modified Wöhler curve method (MCWM). For the model validation, results of fatigue tests performed by Sá (2017) on specimens fabricated with the Al 7050-T7451 alloy were used under conditions of uniaxial (push-pull and torsion) and multiaxial (torsion-traction) loads. The Monte Carlo simulation technique was also implemented in order to evaluate the coefficient variability effect of the fatigue curve on the life predictions result considering multiaxial conditions. Finally, the sensitivity analysis indicated among the input variables of the model which ones contributed the most to the variation in the predicted life value. As a result, it was possible to establish that the model based on the P_{SWT} parameter presented better results for the life prediction to the detriment of the results obtained according to the MWCM, this validation was performed based on the experimental results. The analysis in probabilistic terms allowed to evaluate the obtained results variability and the probability distribution that better represented the data generated, which was lognormal. Assumed the distribution of lives and parameters of the curves used to obtain them, the sensitivity analysis verified the great interference and importance of the critical distance versus life curves in the results of the lives estimated by the models.

Keywords: multiaxial fatigue, Theory of Critical Distance, statistic, Monte Carlo method, sensitivity analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Superfícies de fratura: a) marcas de praia, b) marcas de estrias. (Adaptado de Dowling, 2013).....	22
Figura 2.2 – Curvas S-N para espécimes não entalhados de uma liga de alumínio em testes de flexão rotativa. Escalas linear para tensão, valores de N_f em escala linear em (a) e logarítmica em (b). (Dowling, 2013).....	23
Figura 2.3 – Efeito de um entalhe na curva S-N de uma liga de alumínio (Adaptado de Dowling, 2013).....	24
Figura 2.4 – Distribuição de tensões na raiz do entalhe em um componente submetido a carregamento	25
Figura 3.1 – Efeito da tensão normal na propagação de micro trincas (Socie; Marquis, 2000)	28
Figura 3.2 – Cubo de tensão com seus versores normais à superfície e suas componentes de tensão (Norton, 2013).....	29
Figura 3.3 – Componentes de tensão que atuam em um plano material Δ	30
Figura 3.4 – Componente do vetor tensão \mathbf{t} agindo no plano Δ	30
Figura 3.5 – Trajetória de carregamento ψ descrita pelo vetor tensão $\mathbf{t}(t)$	31
Figura 3.6 – Maior Projeção: Segmento AB	32
Figura 3.7 – Representação do crescimento da trinca devido a tensão e deformação normal (Socie; Marquis, 2000)	33
Figura 3.8 – Fluxograma que resume o procedimento recursivo para determinação do plano crítico.....	35
Figura 3.9 – Representação dos círculos de Mohr para carregamentos cíclicos completamente reversos: (a) tração/compressão; (b) torção.....	37
Figura 3.10 – Diagrama de Wöhler modificado (Adaptado de Susmel; Lazzarin, 2002).....	38
Figura 3.11 – Abordagem do Método do Ponto (TDC): Campo de tensão linear-elástica nas proximidades do entalhe.....	40
Figura 3.12 – Curvas de calibração de fadiga para espécimes planos e entalhados.....	41
Figura 4.1 – Inferência estatística do modelo (Portal Action, 2018).....	43
Figura 4.2 – Esquema representativo de um modelo de regressão linear simples	47
Figura 4.3 – Representação de uma F.D.P (Pinheiro et al., 2012)	50
Figura 4.4 - F.D.P de uma variável aleatória normal com média μ e desvio padrão σ (Pinheiro et al., 2012).....	51

Figura 4.5 - Curvas de densidade lognormal (Devore, 2006)	52
Figura 4.6 - Curvas de densidade de Weibull (Devore, 2006)	53
Figura 4.7 – Função densidade de probabilidade BS para o valor indicado de α com $\beta = 1,0$ (Adaptado de Leiva, 2016)	55
Figura 4.8 – F.D.P para as três formas básicas da distribuição GEV (Adaptado de Mathworks, 2018).....	56
Figura 5.1 – Procedimento recursivo para a realização da análise de sensibilidade	65
Figura 6.1 - Representação esquemática da Curva de Wöhler Modificada.....	72
Figura 6.2 – Representação da estrutura para a caracterização da curva $LSWT(\sigma) - N$	74
Figura 6.3 – Representação da Estrutura básica para a caracterização da curva $L - N$ para o MWCM.....	76
Figura 6.4 – Representação da previsão de vida segundo o modelo SWT.....	77
Figura 6.5 – Representação da previsão de vida segundo MWCM.....	78
Figura 6.6 – Fluxograma do processo de estimativa de vida útil de fadiga (modelo SWT)	80
Figura 6.7 – Fluxograma do processo de estimativa de vida útil de fadiga (MWCM)	82
Figura 7.1 – Relação entre vida em fadiga, N , e $PSWT$ (sob condições uni e multiaxiais).....	86
Figura 7.2 – Curvas de distância crítica <i>versus</i> vida para o modelo SWT: a) $LSWT\sigma - N$ (Estratégia A), b) $LSWT\tau - N$ (Estratégia B).....	88
Figura 7.3 – Curvas de distância crítica <i>versus</i> vida para o MWCM: a) $L\sigma - N$ (Estratégia A), b) $L\tau - N$ (Estratégia B).....	89
Figura 7.4 – F.D.P dos coeficientes Al da curva $L - N$: a) $LSWT\sigma - N$, b) $LSWT\tau - N$, c) $L\sigma - N$ e d) $L\tau - N$	90
Figura 7.5 – F.D.P dos expoentes bl da curva $L - N$: a) $LSWT\sigma - N$, b) $LSWT\tau - N$, c) $L\sigma -$ N e d) $L\tau - N$	91
Figura 7.6 – Diagrama vida experimental <i>versus</i> vida determinística estimada considerando as Estratégias A e B: (a) Modelo SWT e (b) MWCM.....	94
Figura 7.7 – Diagrama vida experimental <i>versus</i> vida probabilística estimada considerando as Estratégias A e B: (a) Modelo SWT e (b) MWCM.....	94
Figura 7.8 –F.D.P das distribuições de vida para $\sigma_{ag} = 11$ e $\tau_{ag} = 22$: a) Estratégia A – SWT; b) Estratégia B – SWT; c) Estratégia A – MWCM; d) Estratégia B – MWCM.	98
Figura 7.9 – Diagrama de caixa a distribuição das vidas em fadiga considerando $\sigma_{ag} = 11$ e $\tau_{ag} = 22$	98

Figura 7.10 – F.D.P das distribuições de vida para $\sigma_{ag} = 16$ e $\tau_{ag} = 20$: a) Estratégia A – SWT; b) Estratégia B – SWT; c) Estratégia A – MWCM; d) Estratégia B – MWCM.....	99
Figura 7.11 – Diagrama de caixa a distribuição das vidas em fadiga considerando $\sigma_{ag} = 16$ e $\tau_{ag} = 20$	99
Figura 7.12 – F.D.P das distribuições de vida para $\sigma_{ag} = 38$ e $\tau_{ag} = 19$: a) Estratégia A – SWT; b) Estratégia B – SWT; c) Estratégia A – MWCM; d) Estratégia B – MWCM.....	100
Figura 7.13 – Diagrama de caixa a distribuição das vidas em fadiga considerando $\sigma_{ag} = 38$ e $\tau_{ag} = 19$	100
Figura 7.14 – Vidas observadas <i>versus</i> mediada das vidas estimadas (SWT): a) Estratégia A e b) Estratégia B.....	102
Figura 7.15 – Vidas observadas <i>versus</i> mediada das vidas estimadas (MWCM): a) Estratégia A e b) Estratégia B.....	102
Figura 7.16 – Percentual de contribuição α_j de cada variável de entrada na vida prevista pelo modelo SWT quando $\sigma_{ag} = 11$ e $\tau_{ag} = 22$ para: a) Estratégia A e b) Estratégia B.....	104
Figura 7.17 – Percentual de contribuição α_j de cada variável de entrada na vida prevista pelo modelo SWT quando $\sigma_{ag} = 16$ e $\tau_{ag} = 20$ para: a) Estratégia A e b) Estratégia B.....	104
Figura 7.18 – Percentual de contribuição α_j de cada variável de entrada na vida prevista pelo modelo SWT quando $\sigma_{ag} = 38$ e $\tau_{ag} = 19$ para: a) Estratégia A e b) Estratégia B.....	104
Figura 7.19 – Percentual de contribuição α_j de cada variável de entrada na vida prevista pelo MWCM quando $\sigma_{ag} = 11$ e $\tau_{ag} = 22$ para: a) Estratégia A e b) Estratégia B.....	105
Figura 7.20– Percentual de contribuição α_j de cada variável de entrada na vida prevista pelo MWCM quando $\sigma_{ag} = 16$ e $\tau_{ag} = 20$ para: a) Estratégia A e b) Estratégia B.....	106
Figura 7.21– Percentual de contribuição α_j de cada variável de entrada na vida prevista pelo MWCM quando $\sigma_{ag} = 38$ e $\tau_{ag} = 19$ para: a) Estratégia A e b) Estratégia B.....	106
Figura 7.22 – Respostas da variável de saída N , para as entradas do modelo SWT quando $\sigma_{ag} = 11$ e $\tau_{ag} = 22$ em relação a: a) Estratégia A e a b) Estratégia B.....	108
Figura 7.23 – Respostas da variável de saída N , para as entradas do MWCM quando $\sigma_{ag} = 11$ e $\tau_{ag} = 22$ em relação a: a) Estratégia A e a b) Estratégia B.....	109
Figura 7.24 – Respostas da variável de saída N , para as entradas do modelo SWT quando $\sigma_{ag} = 16$ e $\tau_{ag} = 20$ em relação a: a) Estratégia A e a b) Estratégia B.....	110
Figura 7.25 – Respostas da variável de saída N , para as entradas do MWCM quando $\sigma_{ag} = 16$ e $\tau_{ag} = 20$ em relação a: a) Estrutura A e a b) Estrutura B.....	111

Figura 7.26 – Respostas da variável de saída N , para as entradas do modelo SWT quando $\sigma_{ag} = 38$ e $\tau_{ag} = 19$ em relação a: a) Estratégia A e a b) Estratégia B	112
Figura 7.27 – Respostas da variável de saída N , para as entradas do MWCM quando $\sigma_{ag} = 38$ e $\tau_{ag} = 19$ em relação a: a) Estratégia A e a b) Estratégia B	113
Figura I.1 – Valores críticos para a distribuição de Kolmogorov-Smirnov (D).....	125
Figura I.2 – Tabela contendo as aproximações quando $n > 40$ (Teste D)	125
Figura III.1 – Respostas das variáveis de saída Al e bl , para as entradas do modelo SWT quando $\sigma_{ag} = 11$ e $\tau_{ag} = 22$ considerando: a) Estratégia A e b) Estratégia B	129
Figura III.2 – Respostas das variáveis de saída Al e bl , para as entradas do MWCM quando $\sigma_{ag} = 11$ e $\tau_{ag} = 22$ considerando: a) Estratégia A e b) Estratégia B	130
Figura III.3 – Respostas das variáveis de saída Al e bl , para as entradas do modelo SWT quando $\sigma_{ag} = 16$ e $\tau_{ag} = 20$ considerando: a) Estratégia A e b) Estratégia B	131
Figura III.4 – Respostas das variáveis de saída Al e bl , para as entradas do MWCM quando $\sigma_{ag} = 16$ e $\tau_{ag} = 20$ considerando: a) Estratégia A e b) Estratégia B	132
Figura III.5 – Respostas das variáveis de saída Al e bl , para as entradas do modelo SWT quando $\sigma_{ag} = 38$ e $\tau_{ag} = 19$ considerando: a) Estratégia A e b) Estratégia B	133
Figura III.6 – Respostas das variáveis de saída Al e bl , para as entradas do MWCM quando $\sigma_{ag} = 38$ e $\tau_{ag} = 19$ considerando: a) Estratégia A e b) Estratégia B	134

LISTA DE TABELAS

Tabela 7.1 – Resumo dos resultados de regressão linear gerados para espécimes sem entalhe e V-entalhados sob carga de torção e tração-compressão	85
Tabela 7.2 – Resumo dos resultados de regressão linear gerados para a curva $PSWT - N$	86
Tabela 7.3 – Resumo das Incertezas relacionadas aos coeficientes das curvas de Wöhler.....	87
Tabela 7.4 – Síntese dos parâmetros estimados para as curvas de distância critica versus vida	88
Tabela 7.5 – Dados da vida para os carregamentos multiaxiais em análise considerando o modelo SWT.....	92
Tabela 7.6 – Dados da vida para os carregamentos multiaxiais em análise considerando o MWCM.....	93
Tabela 7.7 – Estudo da FDP que melhor representa o comportamento dos dados gerados para o modelo SWT.....	96
Tabela 7.8 – Estudo da FDP que melhor representa o comportamento dos dados gerados para o MWCM.....	96
Tabela II.1 - Resultados dos testes uniaxiais de fadiga realizados sob torção alternada, τ , e sob tração-compressão, σ , em relação ao número de ciclos necessários para falha, N_f , do componente.....	126
Tabela II.2 - Resultados de P_{SWT} em relação à vida de fadiga, N_f , sob condição de torção e tração-compressão, obtidas a partir dos resultados experimentais realizados com os espécimes não entalhados	126

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Coeficiente da curva de resistência à fadiga
α	Parâmetro de forma da distribuição de Weibull e da distribuição de BS
α	Nível de significância no teste de hipóteses estatística
α_j	Dispersão percentual de cada variável de saída na análise de sensibilidade
b	Expoente da curva de resistência à fadiga
β	Parâmetro de escala da distribuição de Weibull e da distribuição de BS
d	Margem de erro
D_{max}	Módulo da maior diferença no teste de Kolmogorov-Smirnov
D_t	Desvio máximo tabelado
Δ	Plano material
$\Delta\varepsilon_1/2$	Amplitude de deformação normal
ΔK_{th}	Faixa do limiar de propagação
$\Delta\sigma$	Variação de tensão
$\Delta\theta$	Incremento na coordenada esférica θ
$\Delta\phi$	Incremento na coordenada esférico ϕ
E	Módulo de elasticidade
$E(x)$	Valor esperado de x
ε	Deformação
$\varepsilon - N$	Abordagem de fadiga deformação-vida
ϵ	Erro aleatório
ξ	Parâmetro de forma da distribuição GVE
f	Função densidade de probabilidade
$(F_{esp})^2$	Função de distribuição normal acumulada esperada
(F_{obs})	Função da distribuição da frequência relativa observada acumulada e ajustada
ϕ	Coordenada esférica
G	Módulo de cisalhamento
γ	Parâmetro de posição da distribuição de Weibull
H_0	Hipótese nula no teste de hipóteses estatística
H_1	Hipótese alternativa no teste de hipóteses estatística
K	Fator de intensidade de tensão do material
K_c	Tenacidade à fratura
K_f	Fator de concentração de tensão em fadiga dinâmico
K_t	Fator de concentração de tensão em fadiga teórico
κ_τ	Coeficiente angular que caracteriza inclinação da Curva de Wöhler Modificada para um ρ específico
l	Posição da distância crítica
L	Comprimento característico do material
$L - N$	Curva de Distância crítica <i>versus</i> vida

$L_{SWT_\sigma} - N$	Curva de Distância crítica (obtida a partir do parâmetro SWT gerado com base em testes de fadiga em tração-compressão) <i>versus</i> vida
$L_{SWT_\tau} - N$	Curva de Distância crítica (obtida a partir do parâmetro SWT gerado com base em testes de fadiga em torção alternada) <i>versus</i> vida
$L_\sigma - N_f$	Curva de Distância crítica (obtida a partir do critério MWCM gerado com base em testes de fadiga em tração-compressão) <i>versus</i> vida
$L_\tau - N$	Curva de Distância crítica (obtida a partir do critério MWCM gerado com base em testes de fadiga em torção alternada) <i>versus</i> vida
λ	Tensão entre a amplitude de tensão cisalhante e normal
md	Mediana
μ	Média populacional
μ	Parâmetro de localização da distribuição GVE
$\mu_{y \cdot x_0}$	Intervalo de confiança para o valor médio de y
n	Tamanho das amostras em análise
\mathbf{n}	Vetor normal unitário
N_f	Número de ciclos para a falha
N_{Ref}	Número apropriado de ciclos até a falha
N_{trial}	Vida teste na análise
P_{SWT}	Parâmetro de Smith-Watson-Topper
$P_{SWT} - N_f$	Curva que correlaciona o parâmetro P_{SWT} com a vida do espécime plano
π	Constante matemática com valor aproximado 3,14159
ϕ	Ângulo <i>phi</i>
q	Sensibilidade do material ao entalhe
R	Razão de tensão
R	Razão de carregamento
r^2	Coefficiente de determinação
ρ	Coefficiente de correlação de Pearson
ρ	Coefficiente de correlação de Spearman
ρ	Razão entre a tensão normal máxima e amplitude da tensão cisalhante num plano crítico segundo o Método da Curva de Wöhler Modificada
S	Tensão nominal
s	Desvio padrão
s^2	Variância
S-N	Abordagem de fadiga tensão-vida
S_{ar}	Resistência à fadiga do espécime entalhado
S_f	Limite de fadiga (ou limite de resistência)
σ	Parâmetro de escala da distribuição GVE
σ	Tensão axial
σ_{1a}	Amplitude da tensão principal máxima
σ_a	Amplitude de tensão normal
σ_{ag}	Amplitude da tensão normal calculada em termos da área bruta da seção

$\sigma_{ag} - N$	Curva que representa o comportamento a fadiga do material na presença do entalhe
σ_{ar}	Resistência à fadiga do espécime plano
σ_{eff}	Tensão efetiva
σ_m	Tensão normal média
σ_{max}	Tensão normal máxima
σ_{min}	Tensão normal mínima
σ_n	Vetor tensão normal
$\sigma_{n,max}$	Máxima tensão normal
σ_{ref}	Resistência à fadiga do material de referência
$\sigma_u - N$	Curva de Wöhler do Material em condição de tração-compressão
$\sigma_{un} - N$	Curva do componente mecânico não entalhado em condição de tração-compressão
T	Tempo total até a falha do componente na distribuição BS
\mathbf{t}	Vetor tensão
$\mathbf{T}(t)$	Tensor das tensões
$\mathbf{t}(t)$	Vetor tensão resultante atuante no plano material Δ
τ	Tensões cisalhantes
$\boldsymbol{\tau}$	Vetor tensão cisalhante
τ_a	Amplitude de tensão cisalhante
τ_{ag}	Amplitude da tensão de cisalhamento calculada em termos da área bruta da seção
$\tau_{a,max}$	Máxima amplitude de tensão cisalhante
$\tau_{A,Ref}$	Tensão de cisalhamento de referência
$\tau_u - N$	Curva de Wöhler do Material em condição torção pura
$\sigma_{un} - N$	Curva do componente mecânico não entalhado em condição de torção
θ	Parâmetro utilizado na análise estatístico
θ	Ângulo <i>theta</i> .
$Var(x)$	Variância de x
W	Amplitude
W_t	Valores críticos para o teste de Shapiro-Wilk
\bar{x}	Média amostral
$\Phi(\cdot)$	Função de distribuição acumulada da normal padrão
ψ	Trajétoria fechada percorrida pelo vetor tensão resultante $\mathbf{t}(t)$
ψ_Δ	História de tensões cisalhantes
$\Omega's$	Coefficientes fixos que representam as variáveis de entrada na análise de sensibilidade

LISTA DE ABREVIATURAS

AM	Método da Área
BS	Distribuição de Birnbaum-Saunders
F.D.P	Função densidade de probabilidade
FS	Fatemi-Socie
GEV	Distribuição generalizada de valores extremos
<i>gl</i>	Graus de liberdade
IC	Intervalos de confiança
LM	Método da Linha
MWCM	Método da Curva de Whöler Modificada
PM	Método do ponto
QME	Quadrado médio dos erros
<i>S – N</i>	Curva tensão-vida
SQE	Soma dos quadrados dos erros
SQT	Soma total dos quadrados
SWT	Modelo de Smith-Watson-Topper
T-C	Tração-Compressão
TCL	Teorema Central do Limite
TDC	Teoria das distâncias críticas
Teste D	Teste de Kolmogorov-Smirnov
Teste W	Teste de Shapiro-Wilk
v.a.	Variável aleatória
VM	Método do volume

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	17
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E MOTIVAÇÃO	17
1.2 OBJETIVOS	18
1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	19
2 FADIGA	20
2.1 CONTEXTUALIZAÇÃO	20
2.2 MECANISMO DA FALHA POR FADIGA	21
2.2.1 Estágio I: Nucleação da Trinca	21
2.2.2 Estágio II: Propagação da Trinca	21
2.2.3 Estágio III: Fratura	22
2.3 CURVA S-N	22
2.4 DESCONTINUIDADES GEOMÉTRICAS	24
3 MODELO MULTIAXIAL E DISTÂNCIA CRÍTICA DEPENDENTE DA VIDA	26
3.1 FADIGA MULTIAXIAL	26
3.2 MODELOS BASEADOS EM PLANO CRÍTICO	27
3.2.1 conceitos preliminares	28
3.2.2 Modelo de Smith-Watson-Topper (SWT)	33
3.2.3 Método de Curva de Wöhler Modificado (MWCM)	36
3.3 TEORIA DA DISTÂNCIA CRÍTICA (TDC)	39
3.3.1 Extensão da TDC para a previsão da vida em fadiga	40
3.3.2 Comportamento da curva $L - Nf$ em relação aos parâmetros do modelo	41
4 ANÁLISE ESTATÍSTICA	43
4.1 CONTEXTUALIZAÇÃO	43
4.2 CONCEITOS IMPORTANTES	43
4.3 REGRESSÃO LINEAR	46
4.3.1 Obtenção de parâmetros	46
4.4 DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE	50
4.4.1 Distribuição normal	51
4.4.2 Distribuição lognormal	52
4.4.3 Distribuição Weibull	52
4.4.4 Distribuição Birnbaum-Saunders	54
4.4.5 Distribuição Generalizada de Valores Extremos	55
4.5 TESTE DE HIPÓTESES ESTATÍSTICAS	57
4.5.1 Teste de Kolmogorov-Smirnov (Teste D)	58
4.5.2 Teste de Shapiro-Wilk (Teste W)	59
4.6 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO	60
4.6.1 Descrição do Modelo	60
4.6.2 Cálculo de Integrais definidas	61

5 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	63
5.1 MÉTODOS DE ANÁLISE DE SENSIBILIDADE LOCAL.....	65
5.2 MÉTODOS DE ANÁLISE DE SENSIBILIDADE GLOBAL.....	66
5.2.1 Método baseado na Variância – Enfoque da técnica Monte Carlo	67
6 METODOLOGIA	70
6.1 CRITÉRIOS DE FADIGA MULTIAXIAL EM TERMOS DA TDC	71
6.1.1 Curva de correlação do parâmetro SWT em função da vida	71
6.1.2 Calibração da curva de Wöhler Modificada (CWM)	72
6.2. CONSTRUÇÃO DA CURVA DE DISTÂNCIA CRÍTICA VERSUS VIDA	73
6.2.1 Curva de Distância Crítica versus Vida segundo o modelo SWT	73
6.2.2 Curva de Distância Crítica versus Vida segundo o MWCM	75
6.3 PREVISÃO DETERMINÍSTICA DE VIDA EM FADIGA USANDO A CURVA DE DISTÂNCIA CRÍTICA VERSUS VIDA	76
6.3.1 Previsão determinística baseada no Modelo de SWT	76
6.3.2 Previsão determinística baseada no MWCM	77
6.4 MÉTODO DE MONTE CARLO NA CARACTERIZAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DA VIDA DE FADIGA USANDO O MODELO DE PREVISÃO DE VIDA PROPOSTO	79
6.4.1 Previsão probabilística baseada no Modelo de SWT	79
6.4.2 Previsão probabilística baseada no MWCM	81
6.5 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE PARA AVALIAR O EFEITO DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E DETERMINÍSTICAS NO PROCESSO DE PREVISÃO DE VIDA.....	83
7 RESULTADOS E DISCUSSÃO	84
7.1 CARACTERIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO DAS CURVAS DE FADIGA.....	84
7.2 COMPORTAMENTO DA CURVA DE DISTÂNCIA CRÍTICA VERSUS VIDA.....	87
7.3 ESTIMATIVA DE VIDA DE FADIGA EM COMPONENTES ENTALHADOS TESTADOS EM CONDIÇÕES DE CARGA MULTIAXIAL	91
7.4 ANÁLISE DA DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE DAS PREVISÕES DE VIDA	95
7.4.1 Comparação entre as distribuições de vida para diferentes combinações de esforços	97
7.5 RESPOSTA DA VIDA EM RELAÇÃO ÀS VARIÁVEIS DE ENTRADA – ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	103
7.5.1 Análise em termos de gráficos de dispersão	107
8 CONCLUSÕES	115
8.1 CONSIDERAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	118
REFERÊNCIAS	119
ANEXO I	125
ANEXO II	126
ANEXO III	128

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E MOTIVAÇÃO

A presença de descontinuidades geométricas em componentes de engenharia é inevitável, sendo esses entalhes considerados um problema na previsão de vida de fadiga dos mesmos (NICHOLAS, 2006; SUSMEL; TAYLOR, 2007; SOCIE, 1993). A presença de entalhes faz surgir uma concentração de tensões que acarretará em um comportamento de fadiga diferente do que acontece em espécimes sem detalhes geométricos. Assim, essa condição faz com que haja gradientes de tensões que vão da tensão máxima, na raiz do entalhe, para menores tensões localizadas abaixo do mesmo (NICHOLAS, 2006).

Entre os métodos mais utilizados que consideram o efeito do gradiente de tensões no limite de fadiga, destacam-se os propostos por Neuber (1958) e Peterson (1959). Segundo o método proposto por Neuber (1958), conhecido como Teoria das distâncias críticas (TDC), a tensão elástica no concentrador de tensões não atinge valores tão elevados como aqueles que a teoria mecânica dos meios contínuos prevê. A tensão efetiva que representa a tensão real deverá ser estimada próxima ao entalhe analisado sobre unidades materiais (cristais, partículas estruturais). Peterson (1959) propôs em sua abordagem que ao se analisar o limite de fadiga do material a tensão de referência deve ser calculada a uma dada distância a partir do ápice do concentrador de tensões (SUSMEL; TAYLOR, 2007).

A TDC tem vantagem sobre diversas outras abordagens uma vez que tanto o gradiente de tensões quanto o efeito do tamanho do concentrador são abordados (NICHOLAS, 2006). Quando se trata de espécimes entalhados sujeitos a carregamentos multiaxiais, há relativamente poucos dados experimentais se comparados aos componentes sem entalhes. Em contrapartida, há muitas estruturas com presença de entalhes que estão sujeitas a cargas multiaxiais, podendo ser uma combinação de flexão e torção ou tração e torção (SOCIE, 1993). Ao se avaliar a tensão para esse tipo de carregamento, Wang (2014) afirma que é importante salientar as diferenças entre as abordagens invariantes de tensão e os planos críticos. Para a caracterização de fadiga no local do concentrador de tensões em fadiga multiaxial, deve-se considerar o tamanho do entalhe, a forma, o gradiente de tensões, as cargas aplicadas e sua fase (SOCIE, 1993).

Neste trabalho, para previsão de vida em espécimes sujeitos a carregamentos multiaxiais são utilizados o modelo de Smith–Watson–Topper (SWT), proposto por Socie com base nos conceitos de fadiga multiaxial, e o método da curva de Wöhler modificada, MWCM, proposto

por Susmel e Lazzarin (2002), sendo essa uma técnica de fadiga multiaxial de alto ciclo baseada em curvas biparamétricas de Wöhler modificadas não convencionais.

O modelo SWT prevê que o plano de máxima deformação normal deve ser considerado como o plano crítico. Em contrapartida, o critério MWCM considera que a iniciação da trinca ocorre no plano que experimenta a máxima amplitude de tensão de cisalhamento, mas que existe a influência da tensão normal máxima no início e crescimento da trinca. Nesse sentido, a análise foi realizada visando definir qual, dentre esses dois métodos, apresentou melhores resultados nas previsões de vida, para as combinações de esforços propostas, em comparação com as vidas obtidas experimentalmente por Sá (2017).

Visando de que tanto previsões determinísticas quanto probabilísticas fossem realizadas para a vida dos componentes em estudo, a técnica de simulação de Monte Carlo foi utilizada. A técnica realiza essa previsão através da geração de números aleatórios, que posteriormente retornarão o valor esperado, no caso desse trabalho, a vida do componente. Uma análise sobre a distribuição de probabilidade que melhor se adequou às previsões de vida obtidas também foi realizada, de modo que a distribuição lognormal foi a que obteve melhores resultados.

Em termos da análise de sensibilidade, a principal variável de saída do modelo, a vida, foi analisada para saber quais das entradas causou maior impacto nos resultados obtidos. Essa análise garante que modelos futuros na mesma linha de pesquisa possam ser elaborados tomando precauções a cerca dessas componentes, que causam impactos negativos ou positivos no resultado final esperado. Constatou-se que a curva de distância crítica *versus* vida gerada pelos modelos causa um grande impacto na previsão de vida dos mesmos. Considerando que ambos os modelos foram capazes de realizar a previsão de vida e obter resultados satisfatórios, pode-se afirmar que a análise em termos numéricos da vida em fadiga utilizando os conceitos de distância crítica proporciona bons resultados. No entanto, o modelo SWT obteve melhores resultados em termos determinísticos e probabilísticos, sendo mais indicado para esse tipo de análise.

1.2 OBJETIVOS

Investigar o efeito da variabilidade dos parâmetros de caracterização do comportamento a fadiga do material sobre as previsões de vida de componentes submetidos a condições multiaxiais. Os aspectos considerados serão:

- a) Análise do efeito da presença de entalhes sobre as previsões de vida;

- b) Aplicação de modelos de previsão de vida de fadiga multiaxial baseados na Teoria de Plano Crítico associados com a Teoria das Distâncias Críticas;
- c) Adaptação dos algoritmos de previsão de vida para a realização de uma análise probabilística utilizando o método de Monte Carlo
- d) Análise da influência das incertezas associadas às propriedades mecânicas do material sobre a resistência a fadiga – Análise de sensibilidade;
- e) Validação dos modelos numéricos de previsão de vida utilizando resultados de testes experimentais realizados por Sá (2017) para a liga de alumínio 7050-T7451, que é um material usado na indústria aeronáutica.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O capítulo 2 apresenta conceitos, em termos gerais, sobre fadiga e as abordagens necessárias para compreender o tema tratado neste trabalho. O capítulo 3 aborda a fadiga em termos multiaxiais e a teoria da distância crítica conceitualmente e em termos da vida em fadiga.

No capítulo 4 é possível encontrar uma abordagem estatística necessária para entender os procedimentos que foram realizados neste trabalho, e como classificar as distribuições das vidas estimadas em termos probabilísticos. A análise de sensibilidade é tratada no capítulo 5 e apresenta ao leitor conceitos e justificativas para a aplicação desse método.

A metodologia é apresentada no capítulo 6, e mostra os procedimentos realizados na análise em detalhes, de modo a possibilitar a futuros pesquisadores reproduzir o que foi feito para enriquecer ainda mais esse campo de pesquisa. No capítulo 7 é possível ter acesso aos resultados e discussões acerca dos mesmos. A conclusão está no capítulo 8 deste trabalho, onde também são feitas algumas considerações para futuros trabalhos.

2 FADIGA

2.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Falhas mecânicas devido à fadiga têm causado preocupação na engenharia há mais de 150 anos. Acredita-se que os primeiros estudos sobre o assunto foram realizados por volta de 1828 por Albert W. A. J. Esse engenheiro alemão testou correntes de aço usadas em minas sob regime de carga cíclica. Em meados do século XIX já se estudava a fadiga em vários países em resposta a falhas de componentes como carruagens, eixos ferroviários, engrenagens, vigas, entre outros (DOWLING, 2013).

Fadiga é uma forma de falha que ocorre em estruturas submetidas a tensões dinâmicas e flutuantes (pontes, aeronaves, componentes de máquinas, entre outras). O termo "fadiga" se deve ao fato deste tipo de falha ocorrer normalmente após um longo período de esforço repetido ou ciclagem de tensão. Ainda que em tensões bem abaixo da resistência máxima de um dado material, os danos microscópicos resultantes do processo de fadiga podem se acumular levando ao desenvolvimento de trincas que resultam na falha do componente (DOWLING, 2013).

O processo é caracterizado pela iniciação de trinca, propagação e fratura final de um componente. Durante o carregamento cíclico, pode ocorrer deformação plástica no local de maior concentração de tensão. Essa deformação plástica induz o dano permanente ao componente e uma trinca se desenvolve. Com o aumento no número de ciclos com o carregamento, essa trinca irá se propagar e aumentar de tamanho, até que em um determinado número de ciclos, esse componente irá falhar (LEE, 2005). A distinção das fases é de difícil definição, uma vez que depende de características do material e da metodologia utilizada para tratar o problema.

Na literatura três métodos são frequentemente utilizados para estudar e prever a fadiga, são eles: abordagem pela tensão (curvas S-N), abordagem pela deformação (curvas ϵ -N) e a abordagem pela mecânica da Fratura. A abordagem pela tensão é aplicável, principalmente, quando grandes períodos de vida à fadiga são esperados, o método é válido enquanto as tensões e as deformações envolvidas permanecem no regime elástico. A abordagem pela deformação, por sua vez, é utilizada quando uma parcela considerável de deformação plástica e períodos curtos de vida à fadiga estão envolvidos (TEIXEIRA, 2004).

Para a caracterização do comportamento da vida em fadiga, Caixeta (2010) ressalta a importância do número de ciclos (N_f) necessários para causar a ruptura do material em um nível

específico de tensão. Em testes de fadiga há sempre uma variação considerável dos valores de N para vários corpos-de-prova sob o mesmo nível de tensão. Essa variação pode ser atribuída à sensibilidade da resistência a fadiga aos parâmetros relacionados ao ensaio e ao material utilizado, que não podem ser controlados de maneira precisa, fatores como: condições de moldagem dos corpos-de-prova, alinhamento do componente no equipamento de teste, frequência dos testes, entre outros, interferem nos resultados.

2.2 MECANISMO DA FALHA POR FADIGA

O processo de falha por fadiga pode ser dividido em três estágios: (I) nucleação da trinca, (II) propagação da trinca e (III) fratura devido ao crescimento instável da trinca.

2.2.1 Estágio I: Nucleação da Trinca

Em geral, trincas têm início em regiões com concentradores de tensão, planos cisalhantes localizados ou regiões de baixa resistência local. Garcia et al. (2000) afirma que para a nucleação de trincas de fadiga alguns fatores também são potenciais, como: vazios e inclusões preexistentes, contornos de grão, porosidade acentuada, defeitos de solidificação, concentração acentuada de defeitos na estrutura cristalina devido a processos de conformação e pontos de corrosão.

De modo geral, todos os componentes mecânicos apresentam alguma descontinuidade, que pode ser micro ou macroscópica. Esses detalhes geométricos podem ser induzidos durante a fabricação do componente ao ainda durante sua manufatura e representam uma condição onde a ocorrência de iniciação de trincas é frequente.

2.2.2 Estágio II: Propagação da Trinca

Após a nucleação da trinca ocorre sua propagação, processo no qual a trinca cresce de forma incremental à medida que aumenta o número de ciclos. Essa propagação inicial é lenta e se dá ao longo de planos cristalográficos em materiais policristalinos, onde a tensão de cisalhamento é máxima (ADRIANO, 2017). A esse processo inicial dá-se o nome de estágio de Propagação I.

A trinca passa a crescer mais rapidamente no estágio de Propagação II, que inicia quando o fator de intensidade de tensão atinge um determinado valor. Nesse estágio, a direção de propagação da trinca passa a ser aproximadamente perpendicular à carga aplicada. A

superfície fraturada passa a ter impressões, que podem ser marcas de praias ou estrias, e indicam a posição da trinca em um determinado instante do ciclo de carregamento (TAKAHASHI, 2014). Adriano (2017) salienta que embora as marcas de praia e as estrias apresentem aparência similar, forma de picos concêntricos que se expandem para fora do local onde iniciou em um padrão circular ou semicircular, elas são diferentes em origem e tamanho, conforme apresentado na Fig. 2.1, podendo existir centenas de estrias em uma marca de praia.

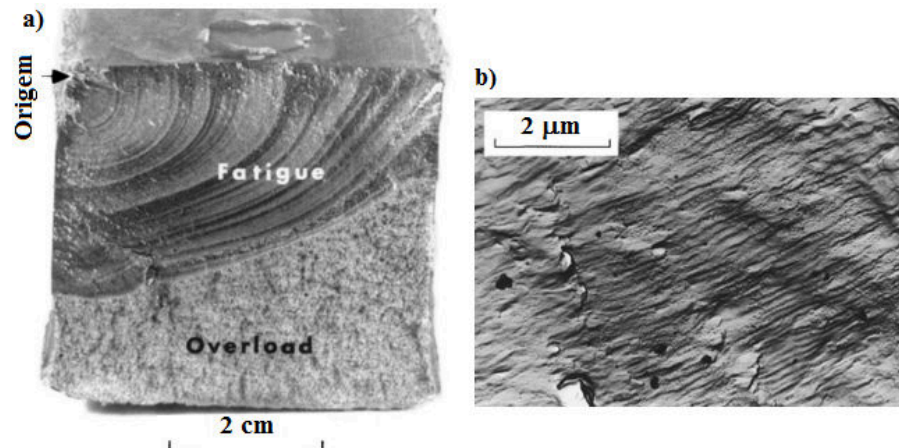


Figura 2.1 – Superfícies de fratura: a) marcas de praia, b) marcas de estrias. (Adaptado de Dowling, 2013)

2.2.3 Estágio III: Fratura

A trinca de estágio II continuará a crescer enquanto houver aplicação de tensão de tração cíclica. Enquanto o valor do fator de intensidade de tensão do material, K , for menor que K_c (tenacidade à fratura), considera-se que a trinca está em modo estável. Quando o valor de K se elevar até o atingir o valor de K_c , a trinca está propagando até a falha. Assim, a trinca se tornará grande o suficiente para o material não suportar o carregamento e sofrer uma fratura repentina (DOWLING, 2013).

2.3 CURVA S-N

As propriedades de fadiga dos materiais podem ser determinadas experimentalmente, assim como acontece com outras características mecânicas. Ao ser submetido a um carregamento cíclico, um corpo de prova está sujeito ao aparecimento de uma trinca de fadiga que poderá acarretar sua falha em um determinado número de ciclos N_f . Ao se repetir o teste em um nível maior de tensão, o valor de N_f será menor, ou seja, o componente terá sua vida reduzida para um carregamento de maior intensidade (DOWLING, 2013).

Quando testes são realizados para diferentes valores de tensão, é possível traçar uma curva que relaciona a amplitude da tensão nominal, σ_a ou S_a , ao logaritmo do número de ciclos, N_f , até a falha. Essa curva é chamada curva S-N (tensão-vida ou curva de Wöhler) e está representada na Fig. 2.2 em escala linear (a) e em escala logarítmica (b). Ao representar a curva S-N em escala logarítmica, os valores de N_f podem ser visualizados com maior precisão para vidas mais curtas, isso se deve à rápida mudança do valor de N_f com o nível de tensão.

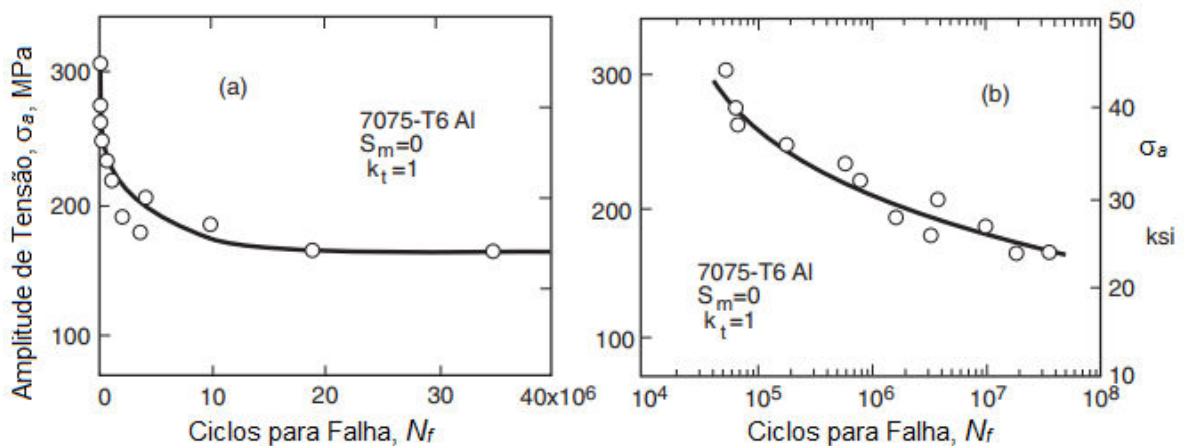


Figura 2.2 – Curvas S-N para espécimes não entalhados de uma liga de alumínio em testes de flexão rotativa. Escalas linear para tensão, valores de N_f em escala linear em (a) e logarítmica em (b). (Dowling, 2013)

Os testes que resultarão em uma determinada curva S-N podem ser realizados todos com tensão média zero, σ_m , ou todos com uma tensão média específica diferente de zero. As curvas também são comumente traçadas para um valor constante de razão de tensão, R , e pode-se utilizar $\Delta\sigma$ ou σ_{max} ao invés de amplitudes de tensão (DOWLING, 2013).

Existem muitos modelos que descrevem as curvas S-N, e estes geralmente implicam uma vida de fadiga mediana (STEPHENS et al., 2000). Basquin em 1910 sugeriu a seguinte relação de S-N, Eq. (2.1), para uma curva *log-log*:

$$\sigma_a = AN_f^b \quad (2.1)$$

Onde A é o coeficiente e representa o valor de σ_a em um ciclo, e b é o expoente ou inclinação da curva S-N *log-log*.

O comportamento da curva S-N varia para diferentes materiais e pode ser afetado por uma variedade de fatores. Procedimentos que alteram a microestrutura do material e suas propriedades mecânicas também podem afetar a curva S-N. Alguns importantes fatores que podem promover essa modificação no comportamento da curva S-N são: efeito da tensão média, presença de entalhe nos componentes, ambiente químico, temperatura, frequência cíclica e tensão residual (DOWLING, 2013).

2.4 DESCONTINUIDADES GEOMÉTRICAS

Descontinuidades geométricas em componentes de engenharia são inevitáveis, sendo considerados um problema na previsão de vida de fadiga dos mesmos (SOCIE, 1993; NICHOLAS, 2006; SUSMEL; TAYLOR, 2007). Essas características de design, que incluem ranhuras, furos, filetes, trincas, entre outros, fazem com que surja uma concentração de tensões locais, o que acarretará em uma redução na resistência à falha por fadiga e possível iniciação de trincas nesses pontos (DOWLING, 2013).

A Fig. 2.3 ilustra a curva S-N de uma liga de alumínio testada em flexão rotativa, espécimes com e sem entalhe, onde pode-se observar que a resistência à fadiga do componente entalhado é relativamente menor que a do componente não-entalhado.

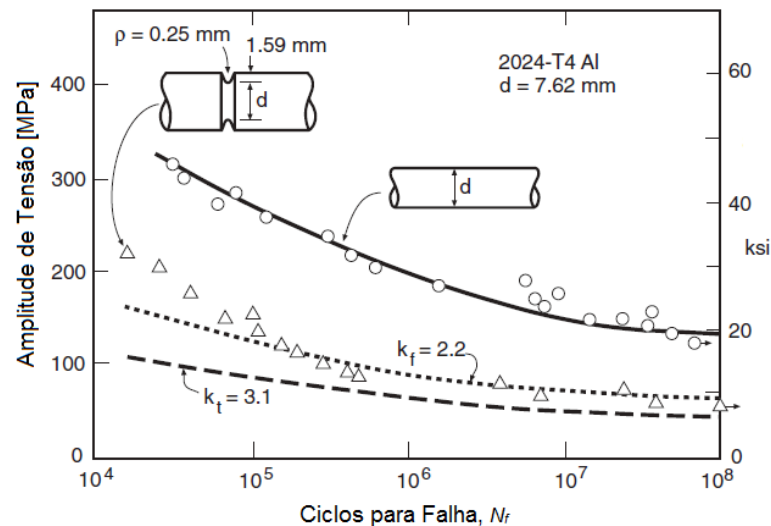


Figura 2.3 – Efeito de um entalhe na curva S-N de uma liga de alumínio (Adaptado de Dowling, 2013)

O fator de concentração de tensão, K_t , é utilizado para caracterizar a severidade de um entalhe. Em se tratando de resistência a fadiga na presença de entalhes, esse fator é de extrema importância. Esses fatores fornecem uma indicação do grau de concentração de tensão em um entalhe de contorno particular e são definidos como a razão entre a tensão de pico na raiz do entalhe (σ) e a tensão nominal (S), conforme a Eq. (2.2).

$$K_t = \frac{\sigma}{S} \quad (2.2)$$

De modo geral, apenas o K_t não é representativo do comportamento à fadiga de componentes entalhados, uma vez que ao se analisar somente a tensão de pico obtém-se um valor de resistência à fadiga inferior àquele obtido experimentalmente.

Algumas metodologias que avaliam o efeito de descontinuidades geométricas na falha por fadiga considerando o gradiente de tensões foram desenvolvidas. Algumas delas consideram que a análise de tensões deve ser realizada a uma dada distância da raiz do concentrador de tensões, conforme pode ser visto na Fig. 2.4.

Para cargas dinâmicas, o fator de concentração de tensão deve ser modificado de acordo com a sensibilidade do material aos entalhes, q , obtendo-se assim o fator de concentração de tensão em fadiga, K_f . De forma geral, os materiais apresentam diferentes valores de q , sendo aqueles mais dúcteis menos sensíveis ao entalhe em comparação com materiais frágeis (NORTON, 2013). Pode-se calcular q e K_f através das Eq. (2.3) e (2.4), respectivamente.

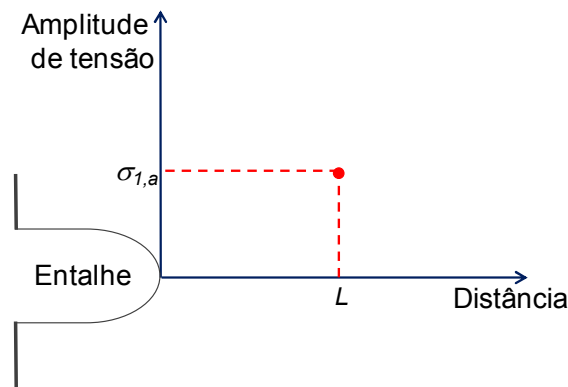


Figura 2.4 – Distribuição de tensões na raiz do entalhe em um componente submetido a carregamento

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \quad (2.3)$$

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) \quad (2.4)$$

Desse modo, K_t é o fator de concentração de tensões teórico (estático) e K_f é o fator de concentração de tensões em fadiga (dinâmico), que pode ainda ser calculado através da Eq. (2.5) apresentada a seguir.

$$K_f = \frac{\sigma_{ar}}{S_{ar}} \quad (2.5)$$

Onde σ_{ar} é a resistência à fadiga do espécime plano e a S_{ar} é a resistência à fadiga do espécime entalhado. Outra consideração importante é que os valores de K_t e K_f são próximos para entalhes não agudos. Para entalhes mais agudos, K_f é consideravelmente inferior, o que ocorre devido o gradiente de tensão ser maior em entalhes mais agudos (DOWLING, 2013).

3 MODELO MULTIAXIAL E DISTÂNCIA CRÍTICA DEPENDENTE DA VIDA

3.1 FADIGA MULTIAXIAL

Questões relativas a carregamentos multiaxiais começaram a ser estudadas cerca de 30 anos após Wöhler estabelecer o conceito de segurança para um nível de tensão onde falhas por fadiga não deveriam ocorrer (DANTAS, 2009). Os primeiros resultados só foram publicados em 1887 por Lanza e tratavam dos esforços torção e flexão.

Estados complexos de tensão causados por carregamentos cíclicos são muito comuns na engenharia. Dowling (2013) cita como exemplos as tensões biaxiais devido aos ciclos de pressurização em tubos ou tubulações, flexão e torção combinadas de eixos e flexão de chapas ou placas em torno de mais de um eixo. Para entender como as cargas externas se combinam para produzir tensões em locais susceptíveis de componentes mecânicos, é fundamental a compreensão e avaliação da fadiga multiaxial.

Cargas constantes que geram tensões médias também podem ser combinadas com cargas cíclicos. Diferentes fontes de carregamento podem diferir em fase ou frequência, ou ainda em ambos, o que agrava ainda mais o problema (DOWLING, 2013).

A previsão de vida de um componente submetido a carregamento multiaxial é mais difícil e requer mais atenção do que em um problema de fadiga uniaxial. Essa previsão só pode ser feita corretamente utilizando modelos específicos de fadiga multiaxial. Várias metodologias foram desenvolvidas para prever e estimar o dano em componentes mecânicos solicitados por esses carregamentos. Os modelos utilizados podem ser classificados, segundo Socie e Marquis (2000), como: Modelos baseados em tensão; modelos baseados em deformação e energia (subdivididos em modelos de energia, plano crítico e modelos de plano crítico e energia combinados) e modelos baseados em mecânica da fratura. Esses modelos surgem da necessidade de uma correta avaliação de carregamentos multiaxiais, uma vez que os experimentos que os caracterizam são relativamente escassos e a resistência de materiais submetidos a essas combinações de tensões são feitos a partir de dados de carregamentos uniaxiais.

Modelos de fadiga multiaxial baseados em deformação ganharam visibilidade na década de 70, uma vez que são mais úteis para análise de fadiga de baixo ciclo. Desde então, muitos estudos voltados ao desenvolvimento desses modelos foram realizados. No entanto, os modelos

baseados em tensão continuam a ser mais utilizados e são adequados para componentes que devem operar perto ou abaixo do limiar de fadiga (SOCIE E MARQUIS, 2000).

Dentre os modelos mais conhecidos e testados, Sines (1955) e Crossland (1956), propuseram critérios baseados nos invariantes do tensor tensão. Nos últimos anos, os critérios baseados na abordagem de plano crítico têm ganhado popularidade. Um modelo de plano crítico incorporará os parâmetros dominantes que regem qualquer tipo de crescimento de trinca. Os modelos bem-sucedidos devem ser capazes de prever a vida de fadiga e o (s) plano (s) de falha dominante (s), se destacam os modelos de Smith-Watson-Topper (1970), Brown-Miller (1973), Fatemi-Socie (1988) e Susmel-Lazzarin (2002).

3.2 MODELOS BASEADOS EM PLANO CRÍTICO

Baseando-se, principalmente, em dados observados experimentalmente, onde as trincas iniciam-se em planos materiais preferenciais (hipoteticamente devido a um maior acúmulo de dano de fadiga), desenvolveu-se o critério de plano crítico (SOCIE e MARQUIS, 2000; ARAÚJO et al., 2011; SHAMSAEI e FATEMI, 2009; YU et al., 2017). Segundo Shamsaei e Fatemi (2009), esses modelos são aplicáveis para previsão de vida tanto em condições de carregamento proporcionais, quanto não proporcionais, tendo ainda a capacidade de previsão de orientação da trinca.

Segundo o critério do plano crítico, o cálculo de resistência à fadiga faz uso da máxima amplitude de tensão cisalhante, $\tau_{a,max}$, e da máxima tensão normal, $\sigma_{n,max}$, (Findley, 1959; Mataka, 1977; McDiarmid, 1991, 1994). Independente do estado de tensão em um ponto material no qual se conduz a análise de tensão, sempre haverá dois ou mais planos materiais submetidos a máxima amplitude de tensão cisalhante. Assim, de acordo com Susmel e Lazzarin (2002), o critério utilizado para a definição do plano crítico é baseado na máxima tensão normal, pois esse plano será aquele onde o dano de fadiga atingirá seu maior valor.

Um dos precursores no desenvolvimento de modelos baseados em plano crítico foi Findley (1959), que propôs um modelo baseado em tensão na década de 1950. Findley identificou a tensão cíclica de cisalhamento e a tensão normal no plano de tensão cisalhante como os parâmetros que governam o dano à fadiga. Brown e Miller (1973) propuseram uma abordagem semelhante, porém em termos de deformação, onde a deformação de cisalhamento e a deformação normal no plano de cisalhamento máximo são os parâmetros governantes (STEPHENS et al., 2000).

O modelo de Fatemi e Socie (1988) é baseado na interpretação física do dano à fadiga. Neste modelo, os parâmetros que governam o dano à fadiga são a máxima amplitude de tensão cisalhante e a máxima tensão normal. Fatemi e Socie (1988) propuseram que as tensões normais aos planos críticos, favorecem a propagação de micro trincas uma vez que separam suas faces, diminuindo assim as forças de atrito e coesão, conforme pode ser visto na Fig. 3.1.

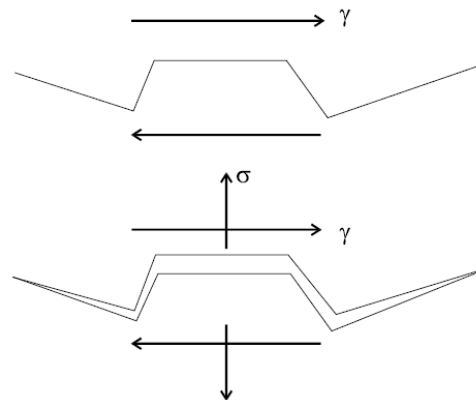


Figura 3.1 – Efeito da tensão normal na propagação de micro trincas (Socie; Marquis, 2000)

O parâmetro de Smith-Watson-Topper (SWT) pode ser usado como um modelo de danos, uma vez que os parâmetros que representam o modelo são a amplitude máxima de deformação principal e a máxima tensão normal ao plano (STEPHENS et al., 2000). O modelo é bastante semelhante ao de Fatemi-Socie, no entanto, segundo Shamsaei e Fatemi (2009), o parâmetro Smith-Watson-Topper é usado para materiais com modo de falha em tração e o parâmetro Fatemi-Socie para materiais com modo de falha de cisalhamento. Uma vantagem distinta desses modelos é o fato de que eles funcionam bem para materiais que apresentam endurecimento devido à não proporcionalidade do carregamento.

3.2.1 conceitos preliminares

Ao analisar o estado de tensões em um material, deve-se avaliar as tensões atuando em elementos extremamente pequenos dentro do corpo. Os elementos infinitesimais são normalmente modelados como cubos, conforme a Fig. 3.2 (NORTON, 2013). O estado de tensão em um dado ponto é descrito por meio de seis componentes, como mostra a Fig. 3.2 (a), onde as tensões normais são indicadas por σ e as tensões cisalhantes por τ , os índices indicam o plano em que a tensão está atuando e o eixo a que essa tensão é paralela.

As tensões normais atuam na direção perpendicular às faces do cubo e tendem a puxá-lo (tensão normal de tração, Fig. 3.2 (b)) ou empurrá-lo (tensão normal de compressão, Fig. 3.2 (c)). Por sua vez, as tensões de cisalhamento atuam na direção

paralela às faces do cubo aos pares e tendem a distorcer o cubo em um formato romboidal (NORTON, 2013).

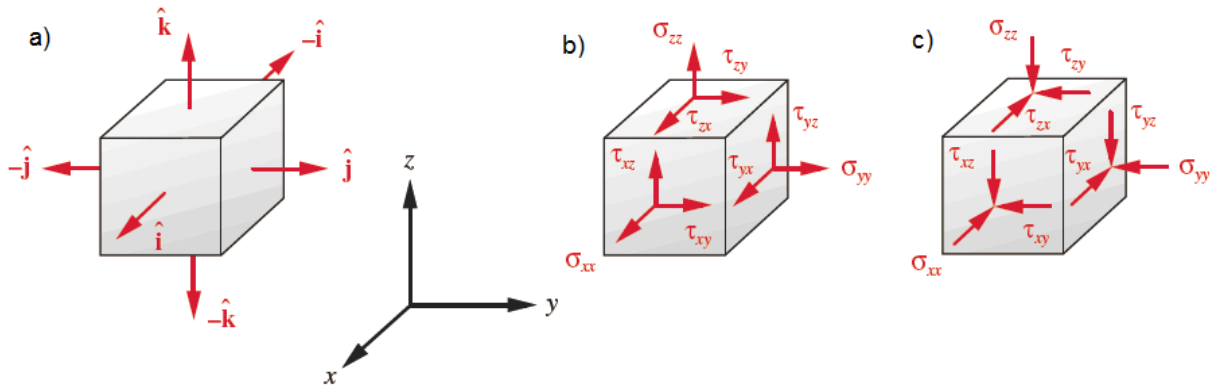


Figura 3.2 – Cubo de tensão com seus versores normais à superfície e suas componentes de tensão (Norton, 2013)

O estado de tensão de um ponto pode ser definido por meio de um tensor, conhecido como tensor das tensões, $\mathbf{T}(t)$, e seus termos são as componentes normal e cisalhante da tensão que atuam em um elemento infinitesimal.

$$\mathbf{T}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(t) & \tau_{xy}(t) & \tau_{xz}(t) \\ \tau_{xy}(t) & \sigma_{yy}(t) & \tau_{yz}(t) \\ \tau_{xz}(t) & \tau_{yz}(t) & \sigma_{zz}(t) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Em $\mathbf{T}(t)$, cada componente de tensão contém três elementos em sua notação, σ ou τ representam a magnitude, o primeiro subscrito representa a superfície onde atua, definida pela direção ao plano correspondente, e o segundo subscrito representa a direção de ação.

A Fig. 3.3 apresenta um esboço da representação das componentes de tensão que atuam em um plano material Δ , definido pelo vetor normal unitário \mathbf{n} , o volume material V está sujeito a um estado de tensões representado pelo tensor das tensões $\mathbf{T}(t)$, esse caso pode ser tratado como um estado de tensão bidimensional, e assim o tensor de tensão 2D será expresso pela Eq. (3.2).

$$\mathbf{T}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{xy}(t) \\ \tau_{xy}(t) & \sigma_{yy}(t) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Para garantir a condição de equilíbrio de esforços nos corpos, sobre o plano Δ , atuará o vetor tensão \mathbf{t} , que poderá ser decomposto na direção do vetor normal \mathbf{n} , em σ_n e na direção ortogonal a \mathbf{n} em $\boldsymbol{\tau}$, conforme mostra a Fig. 3.4.

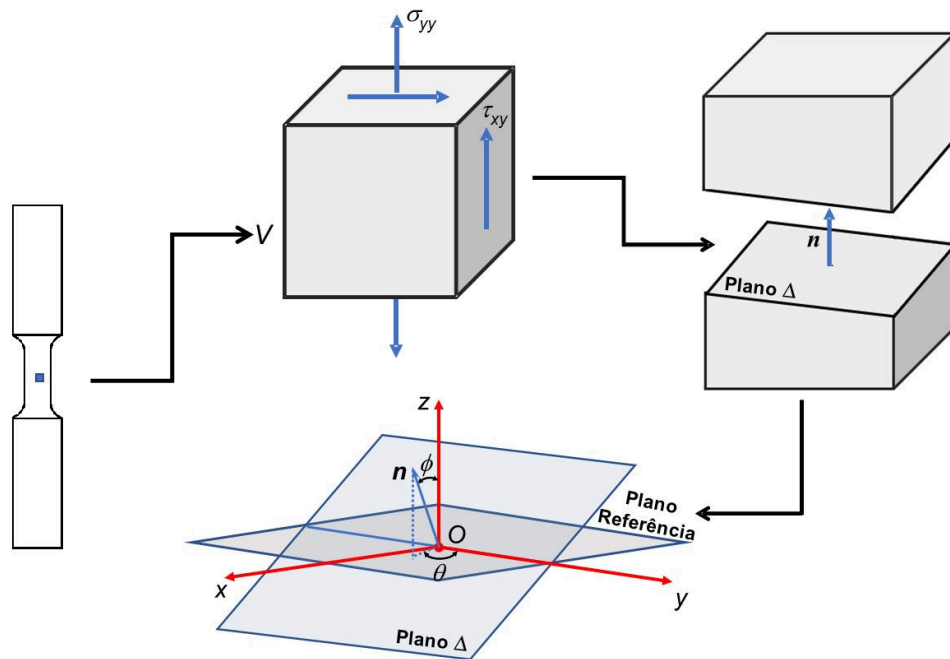


Figura 3.3 – Componentes de tensão que atuam em um plano material Δ

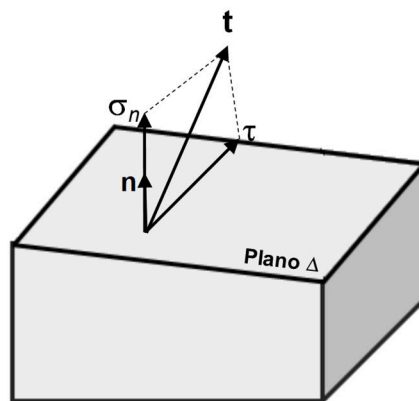


Figura 3.4 – Componente do vetor tensão \mathbf{t} agindo no plano Δ

O plano Δ é definido pelo vetor unitário \mathbf{n} , que é caracterizado pelas coordenadas esféricas ϕ e θ e pode ser calculado pela matriz da Eq. (3.3).

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sin(\phi) \cos(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Em termos geométricos, o ângulo θ fornece a orientação do plano de crescimento da trinca em relação ao eixo x , enquanto ϕ é o ângulo com que a trinca penetra a superfície. Usando conceitos básicos do teorema de Cauchy, pode-se inferir que o vetor tensão \mathbf{t} no plano Δ é dado pela Eq. (3.4).

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}(t)\mathbf{n} \quad (3.4)$$

O vetor tensão normal σ_n tem sua amplitude e seus valores médios obtidos de forma direta, pois durante um carregamento cíclico esse vetor varia em magnitude, mas não em direção (ARAÚJO et al., 2011). σ_n pode ser obtido pela projeção do vetor \mathbf{t} na direção de \mathbf{n} , ou seja, aplicando-se o produto escalar entre \mathbf{t} e \mathbf{n} , como apresentado na Eq. (3.5). Por sua vez, o vetor tensão cisalhante $\boldsymbol{\tau}$ tem sua magnitude e direção variando com o tempo, assim não é possível se obter de forma direta sua amplitude e valor médio. A Eq. (3.6) apresenta a componente da tensão cisalhante $\boldsymbol{\tau}$.

$$\sigma_n = \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{n} \quad (3.5)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{t} - \sigma_n \quad (3.6)$$

Considerando que o espécime está sujeito a uma história de carregamento periódico, pode-se assumir que o vetor tensão resultante atuante no plano material Δ , $\mathbf{t}(t)$, irá descrever uma curva fechada ψ . Como $\sigma_n(t)$ tem direção constante durante todo o ciclo de carregamento, para um determinado estado de tensões, o processo de iniciação das trincas por fadiga será governado pela maior amplitude de tensão cisalhante, $\tau_{a,max}$, que irá ocorrer em um plano material denominado plano crítico Δ_c (INÁCIO, 2008). A trajetória ψ que é percorrida pelo vetor tensão resultante $\mathbf{t}(t)$, devido a aplicação de uma história de carregamento periódico, pode ser vista na Fig. 3.5. Ao projetar-se ψ sobre o plano Δ obtém-se a história de tensões cisalhantes, representada por ψ_Δ , cuja análise permite quantificar informações sobre o comportamento da tensão cisalhante que tornam possível a construção de algoritmos de pesquisa de planos críticos.

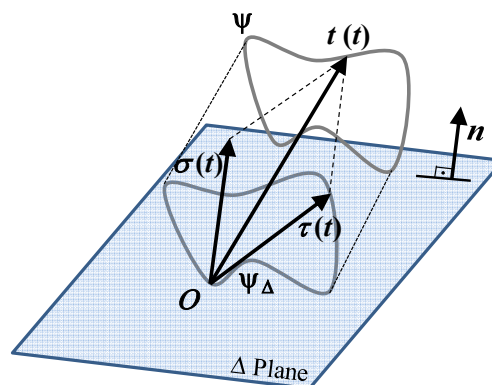


Figura 3.5 – Trajetória de carregamento ψ descrita pelo vetor tensão $\mathbf{t}(t)$

Para a determinação do plano crítico, várias técnicas podem ser utilizadas a fim de calcular a máxima amplitude de tensão cisalhante, $\tau_{a,max}$. Dentre estas, a mais popular foi proposta primeiro por Dang Van (1973) e mais tarde por Papadopoulos (1994). Trata-se do

Método da Menor Circunferência Circunscrita (MCC), onde o valor de $\tau_{a,max}$ é fornecido pelo raio da menor circunferência circunscrita à trajetória ψ .

Outras metodologias que podem ser utilizadas são: o Método da Maior Corda, discutido com maiores detalhes por Lemaitre e Chaboche (1990); o Método do Maior Retângulo Circunscrito (MRC), recentemente desenvolvido por Araújo et al. (2010), do Grupo de Mecânica dos Materiais da Universidade de Brasília; e ainda o critério da maior projeção, proposto por Grubisic e Simburger (1976), que será analisado a seguir como um exemplo de critério de pesquisa de plano crítico.

O critério da maior projeção irá assegurar que de todas as possíveis retas que se encontram no plano Δ e que passam pelo ponto O , seja escolhida aquela que ao projetar-se sobre ela a curva de carregamento ψ apresente a maior projeção. Ao se detectar qual a reta com a maior projeção (uma reta \overline{AB} qualquer), a amplitude de tensão equivalente será calculada pela metade dessa projeção, ou seja, $\tau_a = \overline{AB}/2$, a Fig. 3.6 ilustra a obtenção dessa reta, onde τ_m representa a tensão cisalhante média dada pelo segmento \overline{OM} , sendo M o ponto médio de \overline{AB} .

A fim de se estabelecer um número finito de planos a serem investigados, as coordenadas esféricas ϕ e θ podem ser analisadas em um determinado intervalo, realizando-se incrementos nesses ângulos, e assim, a máxima amplitude de tensão cisalhante, $\tau_{a,max}$, é a tensão cisalhante equivalente τ_a para cada um dos planos em análise, ϕ e θ , conforme apresenta a Eq. (3.7).

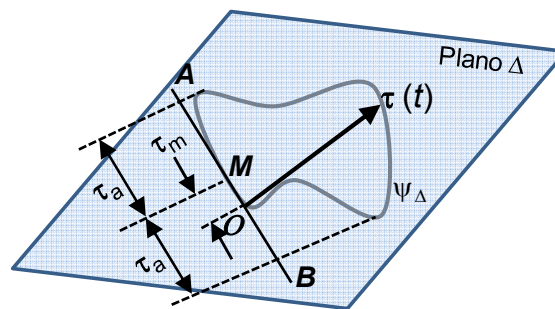


Figura 3.6 – Maior Projeção: Segmento \overline{AB}

$$\tau_{a,max} = \max_{\phi,\theta} \left(\frac{\overline{AB}}{2} \right) \quad (3.7)$$

O critério da maior projeção é utilizado nesse trabalho para a pesquisa de plano crítico quando se analisa o Método da Curva de Whöler Modificada (MWCM). Uma vez que o carregamento analisado está em fase, essa metodologia se mostra satisfatória.

3.2.2 Modelo de Smith-Watson-Topper (SWT)

Importantes modelos de planos críticos, como o de Brown-Miller e Fatemi-Socie, foram desenvolvidos utilizando materiais que falham predominantemente por cisalhamento (SOCIE; MARQUIS, 2000). No entanto, o modelo de Smith-Watson-Topper (1970) foi desenvolvido para descrever modos de iniciação de trinca governados pela deformação e tensão normais a um plano material.

Socie e Marquis (2000) citam como exemplos o ferro fundido ou aço inoxidável 304 sob determinadas condições de carregamento. Nesses materiais, as trincas nucleiam em cisalhamento, porém, a vida residual é controlada pelo crescimento de trincas em planos perpendiculares a máxima tensão e deformação principais, conforme mostra a Fig. 3.7.

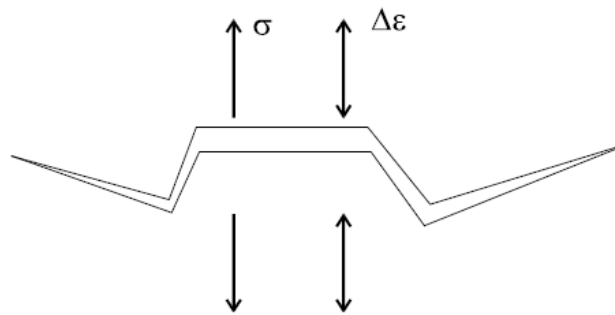


Figura 3.7 – Representação do crescimento da trinca devido a tensão e deformação normal (Socie; Marquis, 2000)

Smith, Watson e Topper (1970) originalmente propuseram um modelo uniaxial para considerar o efeito da tensão média na vida de fadiga. O Modelo dá uma boa estimativa do efeito da tensão média no regime de vida longa, mas é conservador na região de fadiga de baixo ciclo (INCE; GLINKA, 2011). A generalização do parâmetro de Smith-Watson-Topper, comumente chamado de parâmetro SWT, para fadiga multiaxial foi proposta por Socie com base nos conceitos de plano crítico (SOCIE, 1987, SOCIE; MARQUIS, 2000).

No modelo SWT, a tensão normal máxima, $\sigma_{n,max}$, e a amplitude de deformação normal, $\Delta\varepsilon_1/2$, que atuam em um plano material são as forças motrizes da fadiga nos metais. O parâmetro SWT (P_{SWT}) para carregamento multiaxial é calculado no plano em que o produto entre a tensão normal máxima e a deformação normal é máximo, conforme mostra a Eq. (3.8).

$$\frac{\Delta\varepsilon_1}{2} \sigma_{n,max} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^{2b} + \sigma'_f \varepsilon'_f (2N_f)^{b+c} \quad (3.8)$$

Para uma carga axial totalmente reversa, tanto a tensão normal máxima quanto os valores máximos da amplitude da deformação ocorrem no plano $\theta = 0$. Para uma carga de torção, os planos críticos são $\theta = \pm 45^\circ$.

Em seu trabalho, Sá (2017) assumiu que P_{SWT} pode ser tratado como um critério que representa a condição de falha e o relacionou a vida em fadiga, para um determinado corpo de prova. Assim, P_{SWT} passa a ser um parâmetro que varia com a vida de fadiga ($P_{SWT} - N$) capaz de caracterizar um espécime entalhado sujeito a um estado de tensão multiaxial, conforme apresentado na Eq. (3.9).

$$P_{SWT} = A_{SWT} N_f^{b_{SWT}} \quad (3.9)$$

onde A_{SWT} e b_{SWT} são constantes determinadas a partir de ensaios de fadiga em corpos de prova não entalhados (pontos críticos estão na superfície da região de ensaio).

Na análise de fadiga de alto ciclo pode-se assumir que as tensões são elásticas, de modo que a amplitude de deformação normal passa a ser expressa pela razão entre a amplitude de tensão pelo módulo de elasticidade do material, conforme a equação (3.10).

$$\frac{\Delta \varepsilon_1}{2} = \frac{\Delta \sigma_n}{E} \quad (3.10)$$

Assim, por intermédio da relação entre as equações (3.8), (3.9) e (3.10), obtêm-se uma função que correlaciona a máxima densidade de energia normal atuante no *hot-spot* com o número de ciclos necessários para induzir falha por fadiga no corpo de prova considerando a abordagem tensão-vida.

$$P_{SWT} = \sqrt{\frac{\Delta \sigma_n}{E} \sigma_{n,max}} = A_{SWT} N_f^{b_{SWT}} \quad (3.11)$$

3.2.2.1 Pesquisa de plano crítico segundo o modelo SWT

Conforme a Eq. (3.11), P_{SWT} varia com a vida de fadiga ($P_{SWT} - N_f$), de modo que esse parâmetro pode ser utilizado para a construção da curva de distância crítica em função do parâmetro, $L - N_f$. Para isso, realiza-se uma investigação incremental entre planos para a determinação da evolução do máximo valor de P_{SWT} , conforme os seguintes passos:

- a) A fim de se estabelecer um número finito de planos a serem investigados realiza-se uma investigação incremental entre os planos, onde os ângulos ϕ e θ são incrementados em $\Delta \phi$ e $\Delta \theta$ em intervalos de $\phi_{inicial}$ a ϕ_{final} para ϕ e de $\theta_{inicial}$ a θ_{final} para θ .
- b) Para a realização do processo, o ângulo ϕ é mantido fixo, inicialmente, enquanto o ângulo θ varia em um incremento $\Delta \theta$. Dentro do intervalo de investigação do ângulo realiza-se simultaneamente uma varredura no tempo e nesse processo calcula-se as componentes: vetor tensão resultando em Δ , $\mathbf{t}(t)$, o vetor tensão normal, $\sigma_n(t)$, bem como as componentes da tensão cisalhante no plano.

- c) Para cada incremento em $\Delta\theta$, após o cálculo de todas as componentes anteriores, uma análise sobre o valor da componente de tensão normal deve ser realizada, do modo que se o novo valor de σ_n calculado é maior que aquele calculado anteriormente, esse novo valor assume a posição de $\sigma_{n,max}$, ou seja, $\sigma_{n,max} = \max(\sigma_n)$.
- d) Finalizada a varredura do ângulo θ , adiciona-se o incremento $\Delta\phi$ ao ângulo ϕ , que foi previamente fixado, e novamente percorre-se o ângulo θ em seu intervalo. Esse processo é continuamente repetido até que o ângulo ϕ percorra todo seu intervalo, e dessa forma realiza-se a investigação em um número finito de planos.
- e) Finalizada a investigação entre os planos, a máxima amplitude de tensão normal, $\sigma_{n,max}$, é o máximo valor equivalente de σ_n para cada um dos planos em análise, ϕ e θ , o que é expresso pela Eq. (3.12).

$$\sigma_{n,max} = \max_{\phi, \theta}(\sigma_n) \quad (3.12)$$

- f) Tendo encontrado $\sigma_{n,max}$, e sabendo que o plano onde esse valor se encontra é aquele onde está o valor máximo do parâmetro SWT, $P_{SWT,max}$, ao término da investigação tem-se o plano crítico procurado.

O fluxograma da Figura 3.8 descreve os passos para determinar o plano crítico.

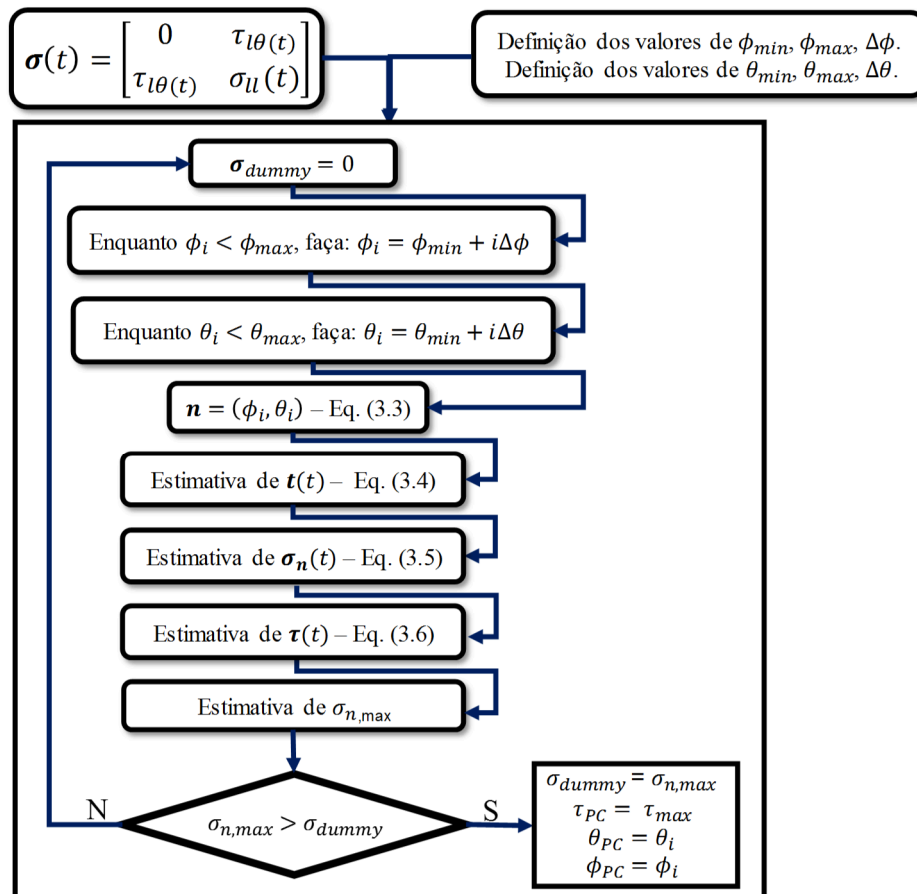


Figura 3.8 – Fluxograma que resume o procedimento recursivo para determinação do plano crítico

3.2.3 Método de Curva de Wöhler Modificado (MWCM)

Um dos problemas apresentados na análise de fadiga multiaxial é a previsão de vida dos componentes submetidos a esse tipo de carregamento. Dentre as metodologias desenvolvidas para resolver esse problema, Susmel e Lazzarin (2002) propuseram uma técnica de fadiga multiaxial de alto ciclo baseada em curvas biparamétricas de Wöhler modificadas não convencionais, conhecido como Método da Curva de Whöler Modificada (MWCM). Este critério deu resultados satisfatórios na estimativa do limite de fadiga multiaxial de amostras com entalhes suaves e contundentes submetidos a cargas em fase ou fora de fase (SUSMEL; TAYLOR, 2003).

Assim como no modelo SWT, a posição do plano material Δ é determinada por meio das coordenadas esféricas ϕ e θ . Nesse plano genérico Δ , em cada instante de tempo, t , é possível subdividir o estado de tensões em duas componentes, a tensão normal, $\sigma_n(t)$, e a tensão cisalhante, $\tau(t)$ (SUSMEL; LAZZARIN, 2012). O MWCM considera que a iniciação da trinca ocorre no plano que experimenta a máxima amplitude de tensão de cisalhamento, τ_a (cujas técnicas de obtenção estão descritas na sessão 3.2.1) no entanto, o início e o crescimento da trinca são influenciados pela tensão normal máxima a este plano, $\sigma_{n,max}$. A influência dessas duas componentes de tensão no dano por fadiga pode ser levada em consideração simultaneamente através da introdução da razão de tensão do plano de iniciação ρ , que avalia esse efeito combinado através da relação expressa na Eq. (3.13) (SUSMEL; TAYLOR, 2003).

$$\rho = \frac{\sigma_{n,max}}{\tau_a} \quad (3.13)$$

O parâmetro ρ permite levar em consideração a influência do ângulo de fase na resistência à fadiga multiaxial (SUSMEL; LAZZARIN, 2002). O MCWM considera que a resistência à fadiga de componentes sujeitos à carregamento cíclico pode ser prevista por meio da amplitude da tensão cisalhante no plano crítico, τ_a , e da razão de carregamento, ρ , na zona de processo.

Considerando um espécime submetido a um carregamento axial totalmente invertida ($R = -1, \sigma_{x,m} = 0, \sigma_{x,a} = cte$), as condições de tensão máxima e mínima são mostradas na Fig. 3.9 (a) para os círculos de Mohr relacionados a esse estado de tensões. Conforme pode ser visto na figura, a tensão de cisalhamento e a tensão normal calculada em relação ao plano de iniciação são as apresentadas na Eq. (3.14) (LAZZARIN; SUSMEL, 2003).

$$\tau_a = \frac{\sigma_{x,a}}{2} ; \sigma_{n,max} = \frac{\sigma_{x,a}}{2} \quad (3.14)$$

De modo que obtêm-se o valor de $\rho = 1$ quando se utiliza carregamento axial.

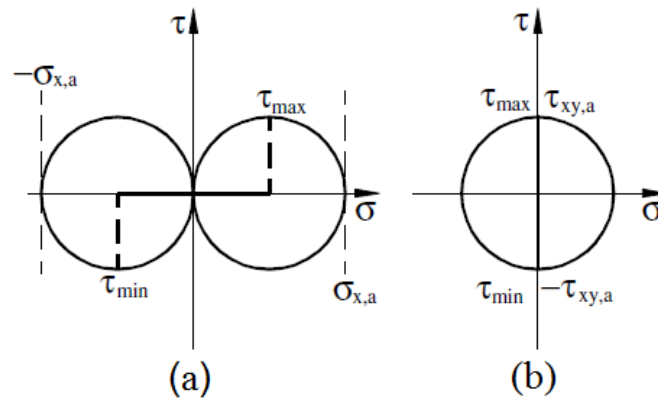


Figura 3.9 – Representação dos círculos de Mohr para carregamentos cíclicos completamente reversos: (a) tração/compressão; (b) torção

De modo semelhante, considerando um espécime submetido a uma carga torcional totalmente invertida ($R = -1$, $\tau_{xy,m} = 0$, $\tau_{xy,a} = cte$) é possível observar que os círculos de Mohr das condições de tensão máxima e mínima são coincidentes, Fig. 3.9 (b). Nesse caso, as componentes de tensão que fazem referência ao plano de iniciação apresentam os valores expressos na Eq. (3.15) (LAZZARIN; SUSMEL, 2003).

$$\tau_a = \tau_{xy,a} ; \sigma_{n,max} = 0 \quad (3.15)$$

Fazendo assim com que $\rho = 0$ para o carregamento torcional.

Graficamente, o modelo MWCM pode ser representado em um diagrama que relaciona τ_a ao número de ciclos até a falha N_f , conhecido como diagrama da curva de Wöhler modificada. Esse diagrama contém diferentes curvas de fadiga caracterizadas por diferentes valores de razão ρ (SUSMEL; TAYLOR, 2012).

De forma geral, cada curva de Wöhler modificado é definida pelo seu coeficiente de inclinação, k_τ , e por uma amplitude de tensão de cisalhamento de referência, $\tau_{A,Ref}$, extrapolada em um número apropriado de ciclos até a falha, N_{Ref} . Em termos do carregamento axial, a resistência à fadiga do material é representada por uma linha reta e descrita pelo coeficiente de inclinação $k_\tau(\rho = 1)$ e pela tensão de cisalhamento de referência $\tau_{A,Ref}(\rho = 1)$, conforme pode ser visto na Fig. 3.10. Para o caso em que o carregamento analisado é torção esses valores aparecem da seguinte forma: $k_\tau(\rho = 0)$ e $\tau_{A,Ref}(\rho = 0)$, o que também pode ser observado na Fig. 3.10. Ainda nessa figura, é possível observar que esperasse que as curvas modificadas de Wöhler se movam para baixo com o aumento de ρ .

Determinadas as constantes do material, qualquer curva intermediária pode ser obtida. Segundo Susmel e Taylor (2012) a partir do diagrama de Wöhler modificado, para a razão ρ

que caracteriza o histórico local de tensões avaliado, o número de ciclos até a falha pode ser diretamente previsto através da Eq. (3.16).

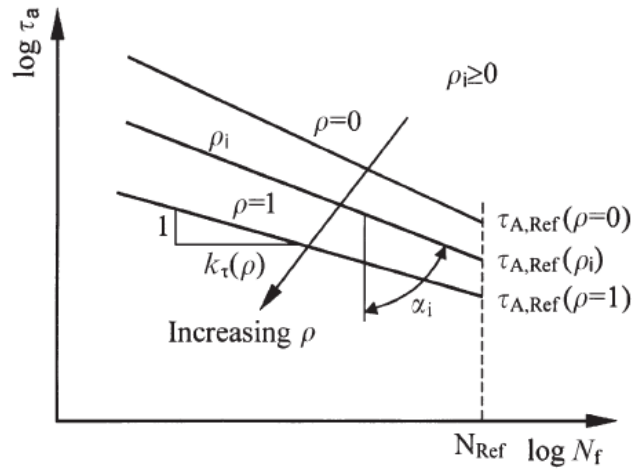


Figura 3.10 – Diagrama de Wöhler modificado (Adaptado de Susmel; Lazzarin, 2002)

$$N_f = N_{Ref} \left[\frac{\tau_{A,Ref}(\rho)}{\tau_a} \right]^{\kappa_\tau(\rho)} \quad (3.16)$$

Segundo Lazzarin e Susmel (2003) o grau de precisão das previsões de vida de fadiga aumenta com o número de curvas de fadiga utilizadas para calibrar o modelo. Os autores apresentam uma correlação com os resultados experimentais que foi obtida assumindo uma relação linear para a função $\tau_{A,Ref}(\rho)$, Eq (3.17).

$$\tau_{A,Ref}(\rho) = [\tau_{A,Ref}(\rho = 1) - \tau_{A,Ref}(\rho = 0)]\rho + \tau_{A,Ref}(\rho = 0) \quad (3.17)$$

Onde a resistência em termos dos carregamentos axiais e de torção são obtidas por ensaios experimentais. Em relação a $k_\tau(\rho)$, uma relação semelhante pode ser estabelecida, de modo que utilizando os valores de k_τ fornecidos pelas curvas de fadiga axial e torsional, a expressão para $k_\tau(\rho)$ é expressa da seguinte forma:

$$\kappa_\tau(\rho) = [\kappa_\tau(\rho = 1) - \kappa_\tau(\rho = 0)]\rho + \kappa_\tau(\rho = 0) \quad (3.18)$$

3.2.3.1 Pesquisa de plano crítico segundo o critério MWCM

De forma geral, o procedimento para a determinação do plano crítico quando se trabalha com o modelo MWCM é semelhante ao apresentado anteriormente para o modelo SWT. No entanto, esse método assume que o plano crítico é aquele submetido a maior amplitude de tensão cisalhante, τ_a , de forma que a máxima tensão normal neste plano, $\sigma_{n,max}$, exerce influência na iniciação e crescimento da trinca. Assim como no modelo SWT, a posição do plano material Δ é determinada por meio das coordenadas esféricas ϕ e θ , de modo que a

pesquisa busca o plano onde a tensão cisalhante, τ_a apresenta o seu maior valor para cada um dos planos em análise, ϕ e θ , conforme expresso na Eq. (3.19).

$$\tau_a = \max_{\phi, \theta}(\tau_a) \quad (3.19)$$

Onde o τ_a , será obtido utilizando o critério da maior projeção, que busca uma reta, no plano Δ , que ao ter a curva de carregamento ψ projetada sobre ela apresente a maior projeção, dentre todas as outras possíveis. A forma de calcular a amplitude de tensão equivalente e o máximo valor dessa tensão está descrita em detalhes no tópico 3.2.1 deste capítulo.

3.3 TEORIA DA DISTÂNCIA CRÍTICA (TDC)

Entre os métodos mais utilizados que consideram o efeito do gradiente de tensões no limite de fadiga, destacam-se os propostos por Neuber (1958) e Peterson (1959). Segundo o método proposto por Neuber (1958), conhecido como Teoria das distâncias críticas (TDC), a tensão elástica no concentrador de tensões não atinge valores tão elevados como aqueles que a teoria mecânica dos meios contínuos prevê. A tensão efetiva que representa a tensão real deverá ser estimada próxima ao entalhe analisado sobre unidades materiais (cristais, partículas estruturais). Peterson (1959) propôs em sua abordagem que ao se analisar o limite de fadiga do material a tensão de referência deve ser calculada a uma dada distância a partir do ápice do concentrador de tensões (SUSMEL; TAYLOR, 2007). A TDC tem vantagem sobre diversas outras abordagens uma vez que tanto o gradiente de tensões quanto o efeito do tamanho do concentrador são abordados (NICHOLAS, 2006).

De fato, o TCD não é um método, mas um grupo de métodos que possuem certas características em comum, principalmente o uso de um parâmetro de comprimento característico do material, a distância crítica L , que pode ser calculada a partir da Eq. (3.20).

$$L = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\Delta K_{th}}{\sigma_0} \right)^2 \quad (3.20)$$

A equação acima mostra que L depende de duas características: o limite de resistência à fadiga, σ_0 , e o valor do limiar do fator de intensidade de tensão para trincas longas, ΔK_{th} .

Na TDC, a falha por fadiga é esperada quando a tensão efetiva (σ_{eff}), em uma zona de processo, exceder a resistência à fadiga do material de referência (σ_{ref}). A σ_{ref} pode ser encontrada em um determinado ponto (método do ponto, PM), ou calculando-se uma média ao longo de uma linha (LM) ou sobre uma área (AM) ou volume (VM) (SUSMEL; TAYLOR, 2003). A posição da distância crítica, l , varia para cada método, entretanto, é possível mostrar

que o seu valor está associado ao parâmetro de El Haddad (1979), Eq. (30), por meio das relações apresentadas nas Eqs. (3.21), (3.22) e (3.23).

$$PM: \quad l = \frac{L}{2} \quad (3.21)$$

$$LM: \quad l = 2L \quad (3.22)$$

$$AM \text{ ou } VM: \quad l = L \quad (3.23)$$

Através da utilização do PM, por exemplo, a distância crítica pode ser encontrada para qualquer número de ciclos. Para um valor fixo de N_f , a distância da raiz do entalhe, $L_i(N_f)/2$, é aquela onde a amplitude da máxima tensão principal linear-elástica é igual à tensão aplicada em espécimes planos capaz de gerar falha. Essa distância crítica pode ser calculada por elementos finitos ou utilizando métodos analíticos e é representada pela Fig. 3.11.

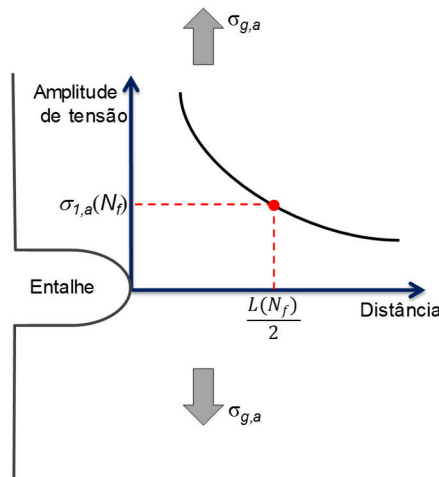


Figura 3.11 – Abordagem do Método do Ponto (TDC): Campo de tensão linear-elástica nas proximidades do entalhe

3.3.1 Extensão da TDC para a previsão da vida em fadiga

Susmel e Taylor (2007) reformularam a TDC estendendo a sua aplicação para a previsão de vida em fadiga em regime de ciclo médio. Esta extensão baseia-se na hipótese que comprimento característico, L , varia com a vida de fadiga conforme relação apresentada na Eq. (3.24). Uma das possíveis metodologias usadas para a obtenção das constantes A_l e b_l pode ser realizada por meio da calibração da curva L versus N_f , em que é necessário usar duas curvas de S-N (Uma gerada por meio de testes de espécimes não entalhados e a outra gerada por meio de teste de espécimes entalhados, conforme mostra a Fig. 3.12). Tipicamente essa calibração é realizada utilizando-se a amplitude da tensão principal máxima, σ_{1a} .

$$L(N_f) = A_l N_f^{b_l} \quad (3.24)$$

onde A_l e b_l são constantes materiais.

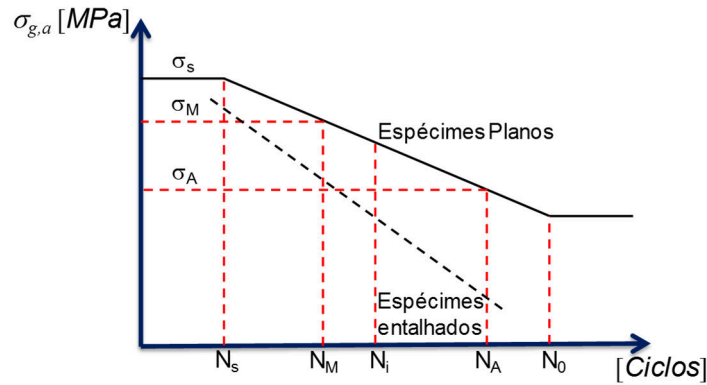


Figura 3.12 – Curvas de calibração de fadiga para espécimes planos e entalhados

3.3.2 Comportamento da curva $L - N_f$ em relação aos parâmetros do modelo

Considerando componentes submetidos a carregamentos do tipo tração-compressão e o critério MWCM, sabe-se que os parâmetros das curvas de fadiga dos espécimes planos, $\sigma_a = A_\sigma N_f^{b_\sigma}$, e daqueles na presença do entalhe agudo, $\sigma_{ag} = A_{\sigma_g} N_f^{b_{\sigma_g}}$, estão relacionados de forma direta ao comportamento da curva $L = A_l N_f^{b_l}$. Uma forma de estimar tal comportamento é estabelecendo uma relação dessa curva com os parâmetros das curvas $\sigma_a(N_f)$, $\sigma_{ag}(N_f)$ e $\sigma_{1a}(l)$, obtida via análise de elementos finitos, o que é feito nesse trabalho através do estabelecimento de duas relações: uma exponencial e outra linear.

Desse modo, considerando a análise em termos de uma relação exponencial, supõe-se que a variação de σ_{1a} (normalizada por σ_{ag}) em relação à distância da raiz do entalhe, l , pode ser dada pela Eq. (3.25).

$$\hat{\sigma}_{1a}(l) = A_{\sigma_{1a}} l^{b_{\sigma_{1a}}} \quad (3.25)$$

onde $A_{\sigma_{1a}}$ e $b_{\sigma_{1a}}$ são parâmetros que caracterizam o decaimento $\hat{\sigma}_{1a}(l)$. Considerando que $\sigma_{1a}(l)$ pode ser escrita como uma função da amplitude nominal da tensão calculada em termos da área bruta da seção, $\sigma_{ag}(N_f)$, por se tratar de uma análise no regime elástico, $\sigma_{1a}(l)$ passa a apresentar a forma expressa na Eq. (3.26).

$$\sigma_{1a}(l) = \sigma_{ag}(N_f) \hat{\sigma}_{1a}(l) = (A_{\sigma_g} N_f^{b_{\sigma_g}}) (A_{\sigma_{1a}} l^{b_{\sigma_{1a}}}) \quad (3.26)$$

sendo A_{σ_g} e b_{σ_g} o coeficiente e o expoente da curva de Wöhler para os espécimes entalhados. De acordo com o TCD, para uma dada vida N_f , a uma distância $l = L$, $\sigma_{1a}(L) = \sigma_a(N_f)$, de modo que a Eq. (3.26) passa a ter a forma da Eq. (3.27).

$$\sigma_{1a}(L) = \sigma_a(N_f) \rightarrow (A_{\sigma_g} N_f^{b_{\sigma_g}}) \cdot (A_{\sigma_{1a}} L^{b_{\sigma_{1a}}}) = A_\sigma N_f^{b_\sigma} \quad (3.27)$$

onde A_σ e b_σ são o coeficiente de fadiga e o expoente da curva de Wöhler para espécimes não entalhados. Considerando L como uma função do número de ciclos para a falha, N_f , obtêm-se a Eq. (3.28).

$$L(N_f) = \left(\frac{A_\sigma}{A_{\sigma_g} A_{\sigma_{1a}}} \right)^{\frac{1}{b_{\sigma_{1a}}}} N_f^{\left(\frac{b_\sigma - b_{\sigma_g}}{b_{\sigma_{1a}}} \right)} \quad (3.28)$$

Da Eq. (3.28) pode-se observar que o expoente da curva $L - N_f$ está associado a b_{σ_g} , b_σ e $b_{\sigma_{1a}}$, que são os expoentes das curvas de $\sigma_{\alpha_g}(N_f)$, $\sigma_\alpha(N_f)$ e $\sigma_{1a}(l)$, respectivamente.

Para o caso de torção pura, critério MWCM, a análise é análoga, de forma que σ_{α_g} passaria a ser expresso como τ_{α_g} . Em relação à mesma análise para o modelo SWT, a curva do material $\sigma_\alpha = A_\sigma N_f^{b_\sigma}$ passa a apresentar a forma $P_{SWT} = A_{P_{SWT}} N_f^{b_{P_{SWT}}}$, de modo que a equação resultante é a apresentada pela Eq. (3.29).

$$L(N_f) = \left(\frac{A_{P_{SWT}}}{A_{\sigma_g} A_{\sigma_{1a}}} \right)^{\frac{1}{b_{\sigma_{1a}}}} N_f^{\left(\frac{b_{P_{SWT}} - b_{\sigma_g}}{b_{\sigma_{1a}}} \right)} \quad (3.29)$$

Supõe-se agora que a variação de σ_{1a} apresenta um comportamento contínuo por partes, ou seja, por pequenos intervalos de l analisados, de forma a apresentar uma relação linear, dada pela Eq. (3.30).

$$\hat{\sigma}_{1a}(l) = A_{\sigma_{1a}} + b_{\sigma_{1a}} l \quad (3.30)$$

De maneira similar ao realizado para a relação exponencial na Eq. (3.25), para a análise em termos lineares $\sigma_{1a}(l)$ passa a apresentar a forma da Eq. (3.31).

$$\sigma_{1a}(l) = \sigma_{\alpha_g}(N_f) \hat{\sigma}_{1a}(l) = \left(A_{\sigma_g} N_f^{b_{\sigma_g}} \right) (A_{\sigma_{1a}} + b_{\sigma_{1a}} l) \quad (3.31)$$

Para o TDC em uma vida específica N_f e a uma distância crítica $l = L$, $\sigma_{1a}(L) = \sigma_\alpha(N_f)$:

$$\sigma_{1a}(L) = \sigma_\alpha(N_f) \rightarrow \left(A_{\sigma_g} N_f^{b_{\sigma_g}} \right) \cdot (A_{\sigma_{1a}} + b_{\sigma_{1a}} L) = A_\sigma N_f^{b_\sigma} \quad (3.32)$$

Como L é uma função de N_f , a relação procurada apresenta a forma da Eq. (3.33).

$$L(N_f) = \frac{A_\sigma}{b_l A_{\sigma_g}} N_f^{(b_\sigma - b_{\sigma_g})} - \frac{A_{\sigma_{1a}}}{b_{\sigma_{1a}}} \quad (3.33)$$

A Eq. (3.33) mostra que o expoente da curva $L - N_f$ não se comporta de forma constante, podendo apresentar uma dispersão significativa ao ser analisado em relação à outras variáveis. A Eq. (3.34) expressa essa relação para o caso SWT.

$$L(N_f) = \frac{A_{P_{SWT}}}{b_l A_{\sigma_g}} N_f^{(b_{P_{SWT}} - b_{\sigma_g})} - \frac{A_{\sigma_{1a}}}{b_{\sigma_{1a}}} \quad (3.34)$$

4 ANÁLISE ESTATÍSTICA

4.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

De modo geral, em alguma parte do seu trabalho, um pesquisador precisará analisar e entender um conjunto de dados que é relevante ao seu objeto de estudo em particular. Esses dados serão transformados em informações que poderão ser comparadas a outros resultados, ou ainda, utilizados para julgar uma dada teoria.

Os dados a serem analisados podem ser obtidos através de uma amostra da população em estudo, ou seja, a amostra fornece evidências que serão generalizadas à população, o que é feito através da inferência estatística. Bussab e Morettin (2010) afirmam que a inferência tem por objetivo a coleta, redução, análise e modelagem dos dados, a partir do que, faz-se a inferência para a população da qual os dados (a amostra) foram obtidos. Através da modelagem dos dados faz-se previsões, a partir das quais é possível tomar decisões. A Fig. 4.1 mostra um fluxograma com os principais tipos de inferência estatística: estimação de quantidades desconhecidas e testes de hipóteses.

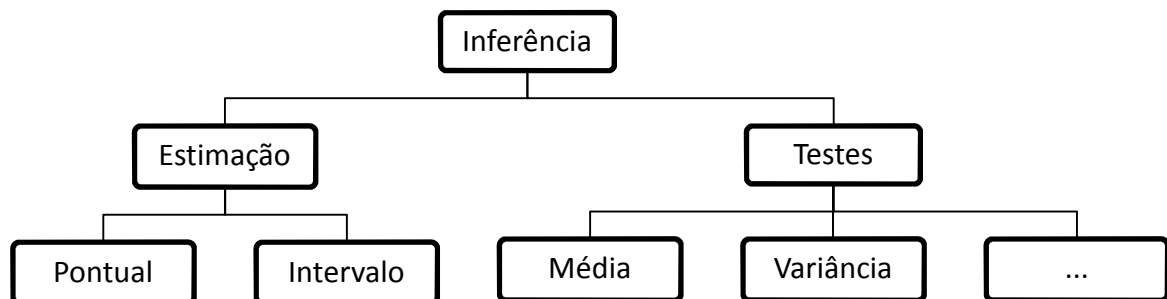


Figura 4.1 – Inferência estatística do modelo (Portal Action, 2018)

4.2 CONCEITOS IMPORTANTES

Segundo Pinheiro et al. (2009), variável aleatória (v.a.) é uma função que associa cada elemento de um espaço amostral a um número real. As variáveis aleatórias podem ser classificadas de acordo com a natureza do conjunto de valores reais que elas podem assumir em: variáveis aleatórias discretas e variáveis aleatórias contínuas. Pinheiro et al. (2012) afirma que sendo x uma v.a., a mesma será dita discreta se o número de valores que ela pode admitir é finito ou infinito enumerável (quando existe uma correspondência um a um entre os seus

elementos e os números naturais). Por sua vez, uma v.a. x será contínua, se admitir todos os possíveis valores dentro de um intervalo (ou conjunto de intervalos) de números reais.

Todos os elementos ou resultados estudados em um problema, constituem uma população, sendo qualquer subconjunto da população que contém os elementos a serem observados denominado amostra (PORTAL ACTION, 2018). Uma amostra aleatória é aquela onde todos os membros de uma população contêm chances iguais de serem selecionados (LARSON; FARBER, 2010).

O objetivo da inferência estatística é fazer afirmações sobre dada característica da população através da amostra, podendo essa característica ser representada por um v.a. O estabelecimento de uma amostra não seria necessário caso as informações sobre a distribuição de probabilidade, ou função densidade de probabilidade (F.D.P), da variável em questão estivessem disponíveis em um primeiro momento, ou seja, toda a informação desejada seria obtida por meio da distribuição da variável (BUSSAB; MORETTIN, 2010). Para Devore (2006), uma F.D.P de uma v.a. x será, uma função $f(x)$ tal que, para quaisquer dois números a e b , com $a \leq b$, a probabilidade de que um valor sorteado de x esteja no intervalo $[a, b]$ pode ser calculada pela Eq. (4.1).

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx \quad (4.1)$$

Uma característica de interesse é chamada de parâmetro e a característica da amostra correspondente é a estatística da amostra ou parâmetro de estimativa (BUSSAB; MORETTIN, 2010). Cada distribuição de probabilidade é inteiramente definida por diversos parâmetros específicos. Dentre os importantes parâmetros utilizados em uma análise estatística, têm-se a variância (s^2), a amplitude (W) e o desvio padrão (s). Esses parâmetros são conhecidos como medidas de dispersão e indicam o grau de espalhamento dos valores da amostra em torno de uma medida central (PINHEIRO et al, 2009). As características estatísticas mais comuns, média (\bar{x}), mediana (md) e moda representam as medidas de posição e são utilizadas para a orientação quanto à posição da distribuição em relação ao eixo horizontal do gráfico da curva de frequência (PORTAL ACTION, 2018).

A média populacional, relativa a todos os indivíduos que estão sendo estudados, é representada por μ . Porém, em geral somente uma amostra da população é analisada, de modo que a média dessa amostra é utilizada para tirar conclusões sobre a média da população. Desse modo, tendo uma amostra aleatória (x_1, x_2, \dots, x_n) , a média amostral, \bar{x} , é dada pela Eq. (4.2).

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (4.2)$$

A medida de dispersão mais simples de uma amostra é a amplitude, a diferença entre o maior e o menor valores da amostra. A variância é calculada pela fórmula apresentada na Eq. (4.3), e o desvio padrão é a raiz quadrada positiva da variância, Eq. (4.4).

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (4.3)$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (4.4)$$

Outro importante conceito para se analisar uma F.D.P é o de valor esperado. No caso das v.a. contínuas, que são analisadas nesse trabalho, o valor médio ou esperado de uma v.a. x com F.D.P $f(x)$ é dada pela Eq. (4.5).

$$E(x) = \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \quad (4.5)$$

Um parâmetro de interesse de uma distribuição de probabilidade analisada poderá ser representado ou estimado por uma função da amostra que é o chamado estimador pontual. Por sua vez, o valor numérico (único) que um estimador assume é denominado estimativa pontual (DEVORE, 2006).

O estimador pontual especifica um único valor, no entanto, não é possível quantificar o erro tendo somente a estimativa pontual. Para isso é necessário a construção de um intervalo de estimativas prováveis, o que é feito mediante os intervalos de confiança (IC) (BUSSAB; MORETTIN, 2010). Esses intervalos indicam a confiabilidade de uma estimativa e são baseados na distribuição amostral do estimador pontual.

Segundo Pinheiro et al. (2009) considerando um dado parâmetro θ , o qual se deseja obter o IC, uma estimativa pontual de θ é dada pela v.a. $\hat{\theta}$. Assim, $\hat{\theta}$ é o centro do IC procurado considerando uma margem de erro d , de forma que, o intervalo procurado é aquele que contenha o verdadeiro valor do parâmetro com probabilidade $1 - \alpha$, onde α é um valor prefixado, o que pode ser visto na Eq. (4.6).

$$P(\hat{\theta} - d \leq \theta \leq \hat{\theta} + d) = 1 - \alpha \quad (4.6)$$

onde o IC de θ é $[\hat{\theta} - d, \hat{\theta} + d]$, tal que a probabilidade da distância entre o estimador e o parâmetro ser menor que d é igual a $1 - \alpha$.

4.3 REGRESSÃO LINEAR

Em estatística, a análise de regressão linear investiga a relação entre duas ou mais variáveis relacionadas de maneira não-determinística. Para se realizar essa análise, a relação linear determinística é generalizada para uma relação probabilística, faz-se inferências sobre os parâmetros do modelo e por fim, obtêm-se uma medida quantitativa sobre a relação entre as variáveis estudadas.

Em fadiga, essa análise é realizada tendo como variáveis a tensão aplicada, representada por y na reta de regressão, e o número de ciclos para falha (N_f), representado por x . O procedimento estatístico realizado para a análise de regressão linear está explicitado no próximo tópico para o cálculo dos parâmetros associados às curvas de Wöhler ($\tau - N_f, \sigma - N_f$) e as curvas de P_{SWT} versus N_f , e dos seus respectivos erros padrões.

4.3.1 Obtenção de parâmetros

A fim de se obter os parâmetros das curvas de Wöhler ($\tau - N, \sigma - N$) e das curvas de P_{SWT} versus N , representadas na Eq. (4.7), uma rotina foi criada no *matlab*, onde os valores de tensão (τ e σ) e de N , obtidos experimentalmente por Sá (2017), foram linearizados através da aplicação da função logarítmica, Eq. (4.8), e um processo de regressão linear foi realizado.

$$\begin{cases} (a) & \tau = A_\tau N^{b_\tau} \\ (b) & \sigma = A_\sigma N^{b_\sigma} \\ (c) & P_{SWT} = A_{P_{SWT}} N^{b_{P_{SWT}}} \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} (a) & \log(\tau) = \log A_\tau + b_\tau \log N \\ (b) & \log(\sigma) = \log A_\sigma + b_\sigma \log N \\ (c) & \log(P_{SWT}) = \log A_{P_{SWT}} + b_{P_{SWT}} \log N \end{cases} \quad (4.8)$$

Nas equações acima A e b representam as constantes das curvas de fadiga que serão tratadas como parâmetros que definem a reta de regressão. Considerando duas variáveis x e y , se y é função linear de x , pode-se estabelecer uma regressão linear simples cujo modelo estatístico é representado pela Eq. (4.9), de forma que seus parâmetros estão relacionados aos da Eq. (4.8) da seguinte forma: $y = \log(\tau/\sigma/P_{SWT})$, $A = \log A$, $b = b$ e $x = \log N$.

$$y = A + bx \quad (4.9)$$

A generalização dessa característica para um modelo probabilístico requer uma interpretação apropriada, onde pressupõe-se que o valor esperado de y é uma função linear de x , mas que, para um dado x fixo, a variável y difere de seu valor esperado de uma quantidade aleatória, denominada desvio ou erro aleatório (ϵ). Assim, para qualquer valor fixo da variável

independente x , existem parâmetros A , b e σ^2 tais que a variável dependente está relacionada a x por meio da Eq. (4.10) do modelo (DEVORE, 2006).

$$y = A + bx + \epsilon \quad (4.10)$$

Onde ϵ é uma variável considerada normalmente distribuída com valor esperado, $E(\epsilon) = 0$ e variância, $V(\epsilon) = \sigma^2$ (WEISBERG, 2005). A interpretação geométrica dos parâmetros A , b e do erro aleatório ϵ pode ser vista no gráfico de dispersão, Fig. 4.2, que exhibe um padrão linear significativo.

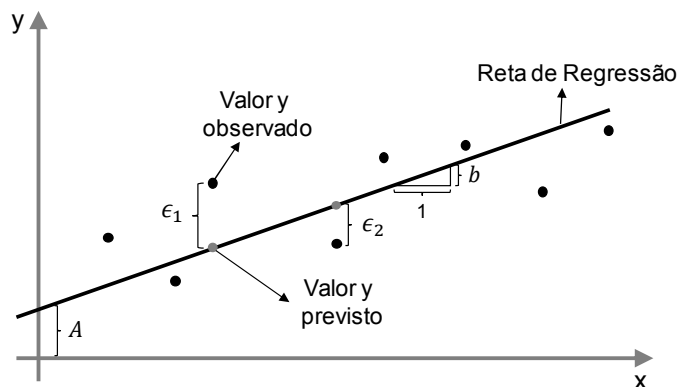


Figura 4.2 – Esquema representativo de um modelo de regressão linear simples

A reta de regressão deve ser tal que ofereça uma boa aderência aos pontos dos dados observados. Devore (2006) afirma que essa reta pode ser estimada utilizando o princípio dos mínimos quadrados, que remonta ao matemático alemão Gauss (1777–1855). Trata-se de um método cuja aplicação não é limitada às relações lineares (PORTAL ACTION, 2018).

De acordo com o princípio dos mínimos quadrados, uma reta oferece uma boa aderência aos dados, se as distâncias verticais (desvios) dos pontos observados em relação à reta são pequenas. Tendo que a medida da aderência é a soma dos quadrados desses desvios, a reta de melhor aderência será aquela que tem a menor soma de desvios quadrados (DEVORE, 2006), conforme a Eq. (4.11).

$$L = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (A + bx_i)]^2 \quad (4.11)$$

Segundo Portal Action (2018), as estimativas para os parâmetros A e b , representadas por \hat{A} e \hat{b} e denominadas estimativas dos mínimos quadrados, são aqueles valores que minimizam L . Assim, a reta de regressão estimada ou a reta dos mínimos quadrados é, portanto, a reta cuja equação terá a forma apresentada na Eq. (4.12).

$$\hat{y} = \hat{b}x + \hat{A} \quad (4.12)$$

Onde \hat{y} é um estimador pontual da média da variável y para um valor de x . Os valores de minimização de L são identificados tomando-se derivadas parciais de L em relação a \hat{A} e \hat{b} e posteriormente igualando-as a zero, obtendo assim as chamadas Equações Normais de Mínimos Quadrados, Eq. (4.13).

$$\begin{cases} n\hat{A} + \hat{b} \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ \hat{A} \sum_{i=1}^n x_i + \hat{b} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases} \quad (4.13)$$

Resolvendo o sistema da Eq. (4.13), e tendo que $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ e $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ são as médias de x e y , respectivamente, é possível obter o valor dos parâmetros \hat{A} e \hat{b} , Eqs. (4.14) e (4.15).

$$\hat{A} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - \hat{b} \sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x} \quad (4.14)$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \quad (4.15)$$

Na Eq. (4.15), a forma de cálculo de S_{xy} e S_{xx} é dada pela Eq. (4.16).

$$\begin{cases} S_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n} \\ S_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n} \end{cases} \quad (4.16)$$

As estimativas de mínimos quadrados da inclinação e da intercepção podem ser facilmente obtidas utilizando o Excel ou softwares estatísticos por intermédio de um conjunto de pares ordenados (x, y) (MCCOOL, 2012). A reta de regressão sempre passa pelo ponto (\bar{x}, \bar{y}) (LARSON; FARBER, 2010).

Segundo Mccool (2012), se os erros ϵ_i em cada valor de x_i tiverem um valor esperado de zero e não estiverem correlacionados, o teorema de Gauss-Markov afirma que essas estimativas lineares são imparciais e possuem a menor variância possível entre a classe de estimadores lineares. Sabe-se que a variância residual (dos valores de ϵ_i) é dada por σ^2 , esse parâmetro determina a variabilidade inerente no modelo de regressão (DEVORE, 2006).

Através de σ^2 é possível saber até que ponto cada curva normal se dispersa ao redor de seu valor médio (altura da reta). Assim, quando σ^2 for pequeno, um ponto observado (x, y) provavelmente ficará bem próximo da reta de regressão real, ao passo que para valores grandes de σ^2 o ponto pode se desviar consideravelmente do seu valor esperado (DEVORE, 2006). A

estimativa de σ^2 na análise de regressão tem por base elevar ao quadrado e somar os resíduos, na Eq. (4.17) a soma dos quadrados dos erros é representada por SQE .

$$SQE = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (\hat{A} + \hat{b}x_i)]^2 \quad (4.17)$$

No entanto, SQE é um estimador tendencioso, o que torna necessário a obtenção de um estimador não-tendencioso para σ^2 . Esse valor pode ser obtido pelo quadrado médio dos erros (QME) que pode ser calculado pela Eq. (4.18).

$$\hat{\sigma}^2 = QME = \frac{SQE}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2} \quad (4.18)$$

A equação acima apresenta $n - 2$ graus de liberdade (gl) associados à estimativa, ou seja, n casos menos 2 parâmetros na função média. Isso se deve ao fato dos parâmetros A e b serem estimados primeiro, o que resulta em uma perda de 2 gl (WEISBERG, 2005).

Uma das formas de avaliar a qualidade do ajuste do modelo é através do coeficiente de determinação, r^2 (PORTAL ACTION, 2018). Esse coeficiente indica a proporção da variação de y observada que pode ser explicada pelo modelo de regressão linear simples, variando entre $0 \leq r^2 \leq 1$. (HOFFMANN, 2016). Quanto maior o valor de r^2 , mais o modelo de regressão linear simples consegue explicar a variação y (DEVORE, 2006). A expressão que calcula esse valor está expressa na Eq. (4.19).

$$r^2 = 1 - \frac{SQE}{SQT} \quad (4.19)$$

Onde SQT (soma total dos quadrados) corresponde a quantidade de variação nos valores observados de y , e pode ser calculado pela Eq. (4.20).

$$SQT = S_{yy} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n} \quad (4.20)$$

Na regressão linear é importante avaliarmos se existe uma boa "correlação" entre a resposta e a variável explicativa. Isso pode ser feito utilizando, por exemplo, testes de hipóteses e intervalos de confiança (IC) para os parâmetros (PORTAL ACTION, 2018). O estabelecimento de um intervalo de confiança para o valor médio de y , aqui denominado $\mu_{y \cdot x_0}$, é de grande interesse, uma vez que uma estimativa pontual por si só não fornece qualquer informação sobre a precisão da estimativa de $\mu_{y \cdot x_0}$.

Tendo x_0 como um determinado valor da variável independente x e considerando que as estimativas \hat{A} e \hat{b} já tenham sido calculadas, uma estimativa pontual de $\mu_{y \cdot x_0}$ (que é o valor médio real de y quando $x = x_0$) será dada pela Eq. (4.21).

$$\hat{\mu}_{y \cdot x_0} = \hat{A} + \hat{b}x_0 = \hat{y}(x_0) \quad (4.21)$$

Dessa forma, um intervalo de confiança para um valor médio de y em regressão baseia-se nas propriedades da distribuição amostral da estatística $\hat{A} + \hat{b}x_0$, sendo essa relação uma função linear dos valores de (y_i) , conforme expresso na Eq. (4.22).

$$\hat{A} + \hat{b}x_0 = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})(x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right] y_i \quad (4.22)$$

Baseando-se na distribuição t , que é a distribuição apropriada para estimativas normais, para $n - 2$ graus de liberdade, e considerando $x_i = x_0$ (ponto em análise) é possível obter o intervalo de confiança para $\mu_{y \cdot x_0}$ através da Eq. (4.23).

$$IC = \hat{A} + \hat{b}x_0 \pm t_{(1-\frac{\alpha}{2}; n-2)} \sqrt{QME \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})(x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right)} \quad (4.23)$$

Onde a subtração é utilizada para a obtenção do intervalo inferior, e a soma para o intervalo superior.

4.4 DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

Como mencionado anteriormente, para cada variável aleatória x existe uma função $f(x)$, chamada função de densidade de probabilidade (F.D.P) ou distribuição de probabilidade, tal que para qualquer intervalo $[a, b]$, a probabilidade de que um valor sorteado de x esteja entre esse intervalo é representada por $P(a \leq x \leq b)$, que pode ser calculada através da Eq. (4.1). Esse valor de probabilidade é igual à área contida entre o intervalo e sob a curva que representa a função da F.D.P, conforme ilustrado na Fig. 4.3.

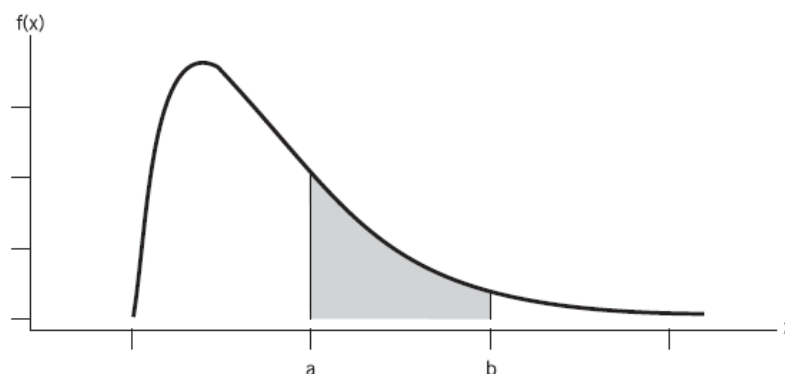


Figura 4.3 – Representação de uma F.D.P (Pinheiro et al., 2012)

Segundo Mccool (2012), todas as informações sobre uma v.a. contínua são incorporadas em sua função de densidade de probabilidade. O intervalo da v.a. pode ser finito, como ocorre para a v.a. uniforme, pode se estender por toda a reta real de menos a mais infinito, como acontece com a v.a. normal, ou pode ainda se estender apenas sobre a reta real positiva $(0, \infty)$, assim como com a maioria das distribuições que representam força ou comprimento da vida (exponencial, lognormal e Weibull). A seguir, são apresentadas algumas importantes distribuições que podem representar a vida em fadiga.

4.4.1 Distribuição normal

A distribuição normal, também chamada de gaussiana, tem uma grande relevância no cálculo de probabilidade e é, por isso, considerada a mais importante das distribuições. Segundo Pinheiro et al. (2012), a curva normal descreve de forma bastante adequada o comportamento de uma variável que se distribui de forma simétrica em relação a um valor central. Trata-se de uma distribuição de dois parâmetros, μ que especifica o seu valor central (média), e a variância σ^2 que define a sua variabilidade, com a função de densidade expressa na Eq. (4.24).

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right], \text{ para todo } x \text{ real} \quad (4.24)$$

Onde $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$, e denota a base do sistema de logaritmos naturais e é aproximadamente igual a 2,71828 e π representa a constante matemática com valor aproximado 3,14159. A notação $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ significa “a variável aleatória x tem distribuição Normal com parâmetros μ e σ^2 ”. Nesta distribuição, se $x \sim N(\mu, \sigma^2)$, então o valor esperado de x , denotado por $E(x) = \mu$, sua variância, $Var(x) = \sigma^2$ e seu desvio padrão, $DP(x) = \sigma$. A Fig. 4.4 mostra o aspecto visual da F.D.P de uma v.a. normal com média μ e desvio padrão σ .

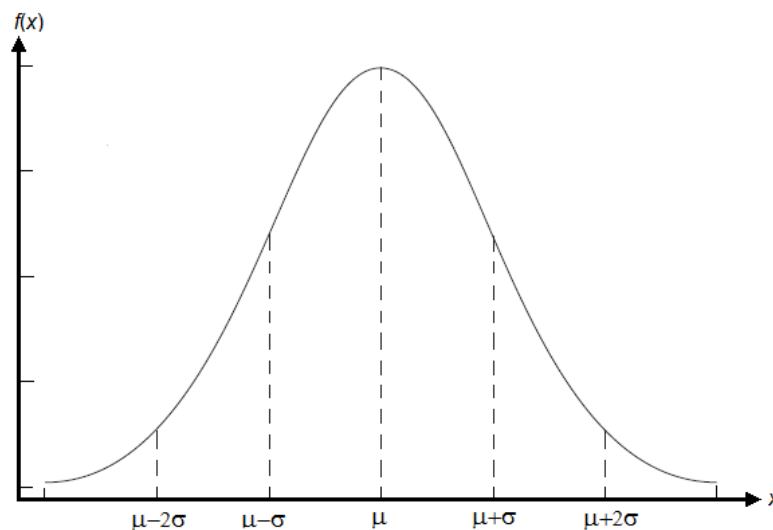


Figura 4.4 - F.D.P de uma variável aleatória normal com média μ e desvio padrão σ (Pinheiro et al., 2012)

4.4.2 Distribuição lognormal

A distribuição lognormal é usada frequentemente como modelo para diversas propriedades de materiais. De acordo com Devore (2006) uma v.a. não-negativa x possui uma distribuição lognormal se a v.a. $y = \ln(x)$ possui uma distribuição normal. Desse modo, x tem distribuição lognormal com parâmetros μ e σ^2 se y tiver distribuição normal com média μ e variância σ^2 . A F.D.P. resultante de x tem a forma apresentada na Eq. (4.25).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

Na equação, $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma^2 > 0$. A notação utilizada para a distribuição lognormal é $\ln x \sim N(\mu, \sigma^2)$, é importante ressaltar que os parâmetros μ e σ^2 não são a média e a variância de x e sim de $\ln x$. A média e a variância de x são dados pelas Eqs. (4.26) e (4.27), respectivamente.

$$E(x) = e^{\mu + \sigma^2/2} \quad (4.26)$$

$$Var(x) = e^{2\mu + \sigma^2} \{e^{\sigma^2} - 1\} \quad (4.27)$$

A Fig. 4.5 ilustra gráficos da F.D.P. lognormal para alguns valores de μ e σ . Conforme pode ser observado, embora a curva normal seja simétrica, a lognormal possui inclinação positiva (DEVORE, 2006).

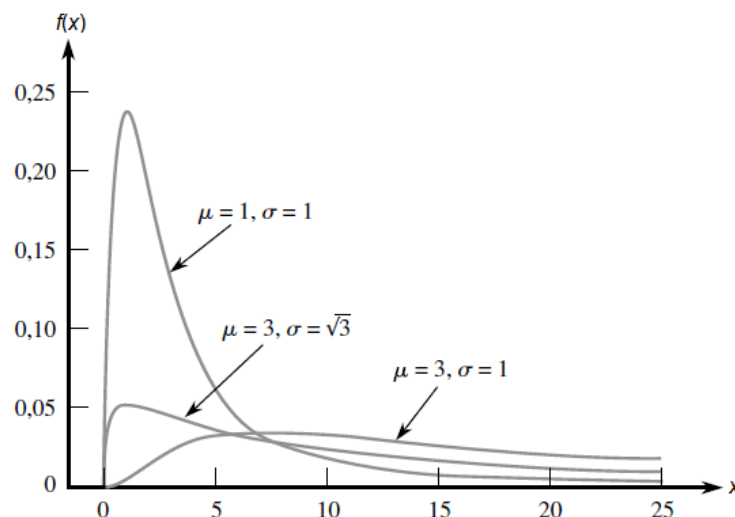


Figura 4.5 - Curvas de densidade lognormal (Devore, 2006)

4.4.3 Distribuição Weibull

Existem duas formas da distribuição de Weibull que podem ser distinguidas pela presença de dois ou três parâmetros (MCCOOL, 2012). Devore (2006) afirma que a família de

distribuições de Weibull foi apresentada pelo físico sueco Waloddi Weibull, em 1939 e possui diversas aplicações. Segundo Portal Action (2018) essa distribuição foi proposta em estudos relacionados ao tempo de falha devido a fadiga de metais e é, ainda hoje, muito utilizada para descrever o tempo de vida de produtos industriais.

Essa distribuição é bastante popular, uma vez que apresenta uma grande variedade de formas, todas com uma característica comum: a função de falha é monótona, ou seja, é estritamente crescente, estritamente decrescente ou constante (PORTAL ACTION, 2018).

Por definição, uma v.a. x tem distribuição de Weibull com parâmetros α e β (com $\alpha > 0$ e $\beta > 0$) se sua F.D.P for tal qual apresentada na Eq. (4.28).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} \left[\frac{x}{\beta} \right]^{\alpha-1} \exp \left[- \left(\frac{x}{\beta} \right)^\alpha \right], & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

Essa equação remete a uma distribuição com dois parâmetros. A função de distribuição acumulada (F.D.A) para os parâmetros α e β é dada pela Eq. (4.29).

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \exp \left[- \left(\frac{x}{\beta} \right)^\alpha \right], & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

Os parâmetros α e β podem variar para se obter diversos formatos de distribuições diferentes, assim como pode ser visto na Fig. 4.6. β , o parâmetro de escala, é conhecido como o valor característico ou, em aplicações de teste de vida, como a vida característica. Valores diferentes de β esticam ou comprimem o gráfico na direção de x . α , por sua vez, é o parâmetro de forma, e quando assume o valor $\alpha = 1$, a distribuição Weibull de dois parâmetros é reduzida à distribuição exponencial (MCCOOL, 2012).

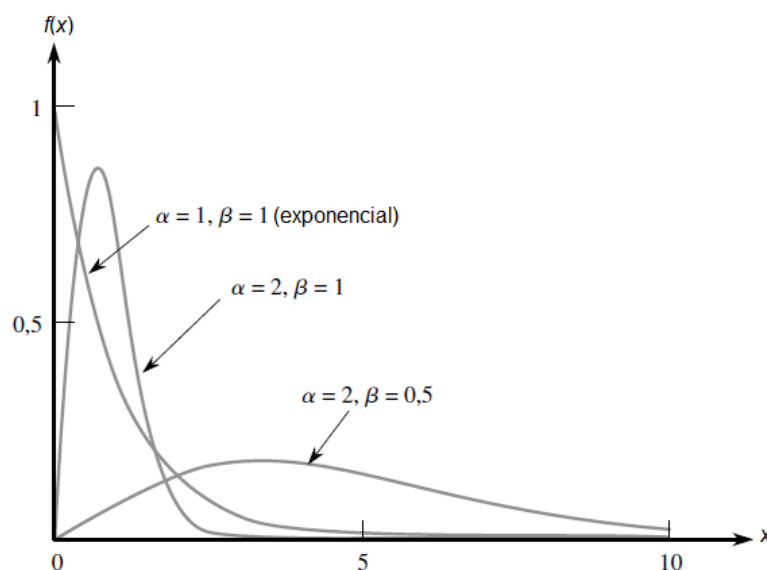


Figura 4.6 - Curvas de densidade de Weibull (Devore, 2006)

A média e a variância da distribuição de Weibull são dados pelas Eqs. (4.30) e (4.31), cujos cálculos necessitam da função gama.

$$\mu = \beta \Gamma \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \quad (4.30)$$

$$\sigma^2 = \beta^2 \left\{ \Gamma \left(1 + \frac{2}{\alpha} \right) - \left[\Gamma \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \right]^2 \right\} \quad (4.31)$$

Para $\alpha > 0$, a função gama $\Gamma(x)$ é definida pela Eq. (4.32).

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad (4.32)$$

Segundo Devore (2006) o menor valor possível de x pode ser um valor γ não assumido como zero. Essa quantidade é tida como mais um parâmetro, o que caracteriza a distribuição Weibull com três parâmetros. γ é conhecido como parâmetro de posição e controla a posição da curva sobre o eixo das abscissas, dessa forma, se for assumido que $\gamma = 3$, por exemplo, isso implicaria que as curvas da Fig. 4.6 seriam deslocadas 3 unidades para a direita. A F.D.P para uma distribuição weibull com três parâmetros é representada pela Eq. (4.33).

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left[\frac{x - \gamma}{\beta} \right]^{\alpha-1} \exp \left[- \left(\frac{x - \gamma}{\beta} \right)^{\alpha} \right] \quad (4.33)$$

Em geral, γ é desprezado na FDP e a mesma aparece na forma da Eq. (4.28), o que se deve ao fato de γ caracterizar a vida inicial do item em estudo. Considerando a presença do parâmetro γ , a F.D.A assume a forma apresentada na Eq. (4.34).

$$F(x) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{x - \gamma}{\beta} \right)^{\alpha} \right], \quad x > \gamma \quad (4.34)$$

4.4.4 Distribuição Birnbaum-Saunders

Motivado por problemas de vibração em aeronaves comerciais que causavam fadiga nos materiais, Birnbaum e Saunders (1969a, b) propuseram a distribuição de Birnbaum-Saunders (BS), também conhecida como distribuição da vida à fadiga. Trata-se de uma distribuição de dois parâmetros (α e β), onde α é o parâmetro de forma ($\alpha > 0$), e β é o parâmetro de escala ($\beta > 0$), e pode ser representada como BS (α, β) (CORDEIRO, 2011).

Considerando que T é o tempo total até a falha do componente e t uma variável real não negativa, T tem F.D.A dada pela Eq. (4.35).

$$F(t) = \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right], \quad t > 0 \quad (4.35)$$

onde $\Phi(\cdot)$ representa a função de distribuição acumulada da normal padrão. A notação $T \sim BS(\alpha, \beta)$ significa “ T segue uma distribuição BS, com parâmetros α e β ”. Por sua vez, a F.D.P de T é dada pela Eq. (4.36).

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\alpha^2} \left[\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2\right]\right) \frac{t^{-3/2}(t + \beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}}, \quad t > 0 \quad (4.36)$$

A Fig. 4.7 mostra gráficos da F.D.P da distribuição BS para diferentes valores do parâmetro de forma α , considerando o parâmetro de escala $\beta = 1$, sem perda de generalidade. Na figura, é possível notar que essa distribuição é contínua, unimodal e positiva (LEIVA, 2016).

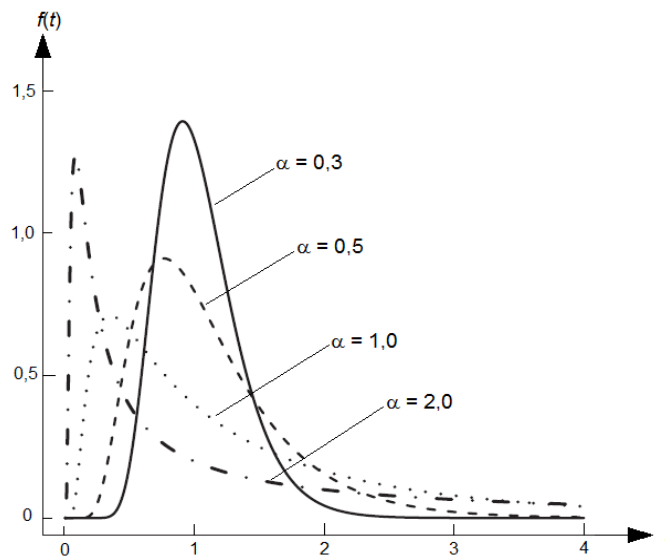


Figura 4.7 – Função densidade de probabilidade BS para o valor indicado de α com $\beta = 1,0$ (Adaptado de Leiva, 2016)

4.4.5 Distribuição Generalizada de Valores Extremos

Baseada na teoria do limite de Fisher e Tippet (1928), a distribuição generalizada de valores extremos (GEV) foi proposta por Jenkinson em 1955 e engloba as três distribuições de valores extremos padrão: Gumbel, Frechet e Weibull, que podem ainda ser chamadas de Tipos I, II e III. (BALI, 2003). Uma vez que a GEV engloba essas três distribuições, ela permite um intervalo contínuo de possíveis formas que inclui todas as três distribuições mais simples.

A GEV é frequentemente usada para modelar o menor ou maior valor entre um grande conjunto de valores aleatórios independentes, identicamente distribuídos, representando medidas ou observações (PROVOST et al., 2018).

Trata-se de uma distribuição caracterizada por três parâmetros (μ, σ, ξ) , onde μ é o parâmetro de localização, σ é o parâmetro de escala e ξ é o parâmetro de forma. A notação comumente utilizada é $x \sim GEV(\mu, \sigma, \xi)$. O valor de ξ dita o comportamento da cauda da função.

O intervalo de valores de μ , σ e ξ englobam cada um dos três tipos de distribuições. A função de distribuição acumulada (F.D.A) e a função densidade de probabilidade (F.D.P) da distribuição GEV, incluindo a distribuição de Gumbel como um caso limite em que $\xi \rightarrow 0$, são dadas respectivamente pelas Eqs. (4.37) e (4.38) (PROVOST et al., 2018).

$$F(x) = \begin{cases} \exp \left[- \left(1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1/\xi} \right], & \xi \neq 0 \\ \exp \left[- \exp \left(- \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right) \right], & \xi \rightarrow 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\left(\frac{1}{\xi}\right)-1} \exp \left[- \left(1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right], & \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} \exp \left[- \exp \left(- \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right) \right] \exp \left(- \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right), & \xi \rightarrow 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

Onde, o suporte da distribuição é dado pela Eq. (4.39).

$$x \in \begin{cases} \left(\mu - \frac{\sigma}{\xi}, \infty \right) & \xi > 0 \\ (-\infty, \infty) & \xi \rightarrow 0 \\ \left(-\infty, \mu - \frac{\sigma}{\xi} \right) & \xi < 0 \end{cases} \quad (4.39)$$

A Fig. 4.8 apresenta exemplos de F.D.P para as três formas básicas da distribuição generalizada de valores extremos. É possível observar que para $\xi > 0$, a distribuição tem densidade de probabilidade zero para x , de modo que $x < \mu - \sigma/\xi$, para $\xi < 0$, a distribuição tem densidade de probabilidade zero para $x > \mu - \sigma/\xi$ e para $\xi = 0$, não há limite superior ou inferior (MATHWORKS, 2018).

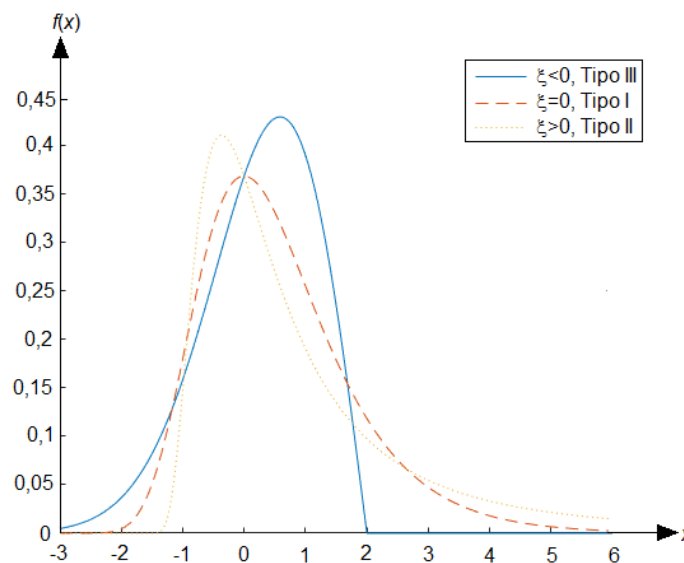


Figura 4.8 – F.D.P para as três formas básicas da distribuição GEV (Adaptado de Mathworks, 2018)

4.5 TESTE DE HIPÓTESES ESTATÍSTICAS

Decisões estatísticas são tomadas para se fazer inferências sobre características da população de interesse e têm como consequência a aceitação ou não da hipótese estatística (FONTELLES, 2012a). Assim, para se fazer inferências estatísticas, os testes de hipótese correlacionam um parâmetro amostral com o mesmo parâmetro da população estudada (FONTELLES, 2012b).

Conforme Pinheiro et al. (2009), uma característica da população que se deseja avaliar pode ser representada por uma v.a. contínua x , com função densidade de probabilidade f . Admitindo que f depende de um parâmetro θ com valor desconhecido, com base em um experimento que envolva a coleta de dados, duas afirmações a respeito do valor correto de θ podem ser feitas: a hipótese nula, H_0 e a hipótese alternativa, H_1 .

A hipótese nula, H_0 , é a primeira a ser formulada, de modo a ser submetida a um teste estatístico, para que, ao final da análise, essa hipótese seja rejeitada (em favor de H_1), se os dados forem incoerentes com suas previsões (sobre θ), ou confirmada como verdadeira, caso os dados encontrados sejam coerentes com ela (FONTELLES, 2012a). Formuladas as hipóteses estatísticas, deve-se estabelecer o nível de significância, α , que corresponde ao erro do tipo I máximo aceito ao se rejeitar a hipótese nula sendo ela verdadeira, ou seja, α está relacionado à H_0 . Usualmente, escolhe-se α igual a 0,01 ou 0,05 (Pinheiro et. al. 2009).

A próxima etapa consiste na escolha do teste estatístico. Segundo Fontelles (2012a), considerando o tipo de variável estudada, o teste estatístico a ser utilizado na análise pode ser do tipo paramétrico ou não-paramétrico. Os testes paramétricos são utilizados quando os dados coletados estão normalmente distribuídos. Testes não-paramétricos admitem que a distribuição dos dados não seja normal, ou que o pesquisador não tem elementos suficientes para fazer essa afirmação.

Um exemplo de teste de hipótese paramétrico é o teste t de student, pois exigem uma distribuição de probabilidade específica para a variável aleatória, no caso a distribuição Normal (TORMAN; COSTER; RIBOLDI, 2012). A fim de confirmar a normalidade dos dados, pode-se utilizar testes de aderência, como os testes de Anderson-Darling, Cramer-von Mises, Kolmogorov-Smirnov e Shapiro-Wilk, assim como recursos gráficos, como histograma e normal plot (LEOTTI; BIRCK; RIBOLDI, 2005).

Os testes de aderência, também conhecidos como Testes de Bondade de Ajuste (goodness of fit test) são utilizados para verificar se a distribuição de frequência dos dados

amostrais estudados segue a forma da curva de uma distribuição hipotética (FONTELLES, 2012b). Isso é importante uma vez que assumir que determinado grupo de dados se distribui conforme um modelo específico, permite realizar estimativas sobre esses dados sem precisar da totalidade de suas informações (LEOTTI; BIRCK; RIBOLDI, 2005).

O princípio básico de qualquer teste de aderência é que para uma amostra de tamanho n , observada a partir de uma v.a. x , as hipóteses a serem testadas assumem que x segue uma distribuição teórica (hipótese nula, H_0) ou que x não segue a distribuição (hipótese alternativa, H_1) (FONTELLES, 2012b). Dois importantes testes são discutidos nesse trabalho, os testes de Kolmogorov-Smirnov (Teste D) e Shapiro-Wilk (Teste W), ao passo que a análise é realizada utilizando o Teste D.

Ao se realizar um teste de hipóteses estatísticas, após a determinação do teste estatístico a ser utilizado, determina-se o valor crítico para aquele teste especificamente, ou seja, para cada tipo de teste e nível de significância pré-estabelecidos, há um valor crítico para a rejeição da hipótese nula. Por fim, calcula-se o valor do teste e realiza-se uma comparação com o valor crítico do teste. O resultado é dado por intermédio da comparação entre o valor calculado do teste e o valor crítico tabelado (PINHEIRO et al., 2009).

4.5.1 Teste de Kolmogorov-Smirnov (Teste D)

Trata-se de um teste de aderência não-paramétrico utilizado para determinar se uma distribuição de probabilidade analisada difere de uma distribuição teórica. O teste demonstra se um conjunto de dados amostrais provém ou não de uma determinada distribuição. Fontelles (2012b) descreve a execução do teste da seguinte forma:

Inicialmente, os valores observados devem ser normalizados. Calcula-se, então, o módulo da maior diferença (D_{max}) entre a função de distribuição normal acumulada esperada (F_{esp})² e a função da distribuição da frequência relativa observada acumulada e ajustada (F_{obs}) dos valores da amostra, conforme a Eq. (4.40). Obtém-se então o desvio máximo tabelado (D_t) que pode ser encontrado na tabela dos valores críticos da distribuição Kolmogorov-Smirnov para uma amostra com tamanho, $n \leq 100$, caso $n > 100$, D_t será calculado pela Eq. (4.41). Após a obtenção de (D_t), uma comparação é realizada desse valor com o valor de D_{max} , de modo que se diferença máxima calculada for maior que o desvio máximo tabelado ($D_{max} > D_t$) rejeita-se H_0 e afirma-se que não há concordância entre os valores observados e esperados. Caso contrário, $D_{max} < D_t$, a hipótese H_0 é aceita e conclui-se que os dados seguem a distribuição teórica esperada.

$$D_{max} = \max |F_{esp}(x) - F_{obs}(x)| + \frac{1}{2n}, \quad \text{sendo: } F_{obs} = \frac{(i - 0,5)}{n} \quad (4.40)$$

$$D_t = \sqrt{\frac{-\ln \frac{1}{2\alpha}}{2n}} \quad (4.41)$$

onde α é o nível de significância estabelecido e n o tamanho da amostra. Os valores críticos para a distribuição de Kolmogorov-Smirnov, D_t , encontram-se no Anexo I desse trabalho.

4.5.2 Teste de Shapiro-Wilk (Teste W)

O teste de Shapiro-Wilk foi publicado em 1965 e, originalmente, é restrito para um tamanho de amostra inferior a 50. O teste verifica se os dados seguem uma distribuição normal utilizando a assimetria ou curtose, ou ambos (ALTHOUSE; WARE; FERRON, 1998)

Assim como no teste de Kolmogorov-Smirnov, o teste de Shapiro-Wilk considera a hipótese nula, H_0 , como tendo sua amostra retirada de uma população normalmente distribuída (FONTELLES, 2012b). O cálculo de W pode ser obtido pela Eq. (4.42), conforme Althouse, Ware e Ferron, (1998)

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (4.42)$$

onde y_i é a i ésima estatística da ordem e \bar{y} é a média da amostra. A constante a é determinada pela fórmula da Eq. (4.43).

$$a_i = (a_1, \dots, a_n) = \frac{m^T V^{-1}}{(m^T V^{-1} V^{-1} m)^{1/2}} \quad (4.43)$$

onde, para uma amostra de tamanho n , $m = (m_1, \dots, m_n)^T$ são os valores esperados da estatística de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas da distribuição normal padrão e V é a matriz de covariância dessas estatísticas de ordem (ALTHOUSE; WARE; FERRON, 1998).

Assim como para o Teste D, existe uma tabela com os valores críticos (W_t) para o teste de Shapiro-Wilk, em função da amostra n e do valor de α pré-estabelecido. Se o valor calculado de W for menos que o valor de W_t , rejeita-se a hipótese H_0 e conclui-se que os dados não seguem a distribuição normal; caso contrário, aceita-se H_0 (FONTELLES, 2012b).

4.6 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

Simulações de Monte Carlo são experimentos com números aleatórios que tem como objetivo validar expressões matemáticas. Originado das pesquisas de Neumann e Ulam em 1949, o método foi baseado no comportamento aleatório típico de jogos de azar. O nome dado ao método se deve aos jogos de cassinos de Monte Carlo, Mônaco (SOBOL, 1994).

Trata-se de um tipo de matemática experimental, uma vez que faz inferência aos resultados de dados observados. Dessa forma, os dados em análise constituem um conjunto de números aleatórios e a forma como são manipulados computacionalmente, a fim de se chegar a um determinado resultado, constitui a técnica experimental. Uma vez que os resultados estão sujeitos a erros, o papel da simulação de Monte Carlo é obter um erro aceitavelmente pequeno sem produzir um esforço computacional considerado excessivo (HAMMERSLEY, 2006).

As expressões a serem analisadas podem ser integrais definidas, sistemas de equações ou modelos matemáticos mais complicados. Sendo que, o conjunto em análise pode ser descrito por uma densidade, que pode ser normalizada como densidade de probabilidade, e os métodos de Monte Carlo são utilizados para simular as propriedades desse conjunto (GENTLE, 2003).

De forma geral, a execução do método de Monte Carlo requer, inicialmente, o estabelecimento da população de interesse e seus respectivos parâmetros, como média, mediana, desvio padrão, etc. Outra característica importante a se identificar é a distribuição de probabilidade que essa população segue, que pode ser normal, lognormal, exponencial, entre outras (MULLER, 2008).

Ainda segundo Muller (2008), a obtenção de amostras aleatórias dessas populações é outro importante passo para executar essa metodologia, de modo que com essas amostras se calcule as estatísticas de interesse. As amostras são obtidas por intermédio da geração de números aleatórios computacionalmente, que, em geral, seguem uma distribuição Uniforme no intervalo $[0,1]$. Por fim, cria-se uma distribuição de frequência da estatística analisada, chamada de distribuição aleatória empírica, que pode ser comparada à distribuição aleatória teórica dessa estatística (PINHEIRO et al., 2012).

4.6.1 Descrição do Modelo

Dada uma v.a. x , a qual se deseja estimar um parâmetro θ , o experimento aleatório é construído associado a uma função densidade de probabilidade, F.D.P, tal que a esperança matemática de x seja o parâmetro procurado θ – Eq. (4.44).

$$E(x) = \theta \quad (4.44)$$

Dessa forma, de acordo com Lazo (2009), se o número de simulações que se deseja realizar é n , então serão gerados x_1, x_2, \dots, x_n , de modo que a média amostral desses valores, \bar{x} aproxima-se mais da esperança matemática de x , e conseqüentemente de θ , quanto maior for o valor de n (lei dos grandes números). Ou seja, podemos inferir que \bar{x} será usado como um estimador para θ (PAULA, 2014), o que pode ser visto na Eq. (4.45).

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i) = \theta \quad (4.45)$$

Considerando que $Var(x) = \sigma^2$, a variância da média amostral, \bar{x} , será calculada pela Eq. (4.46).

$$Var(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (4.46)$$

Para Lazo (2009), para a solução de problemas utilizando essa metodologia, devem ser determinadas uma v.a. e uma lei de probabilidade. A v.a. escolhida deve ser aquela que possui a menor variância, o que é comprovado pelo Teorema Central do Limite (TCL). O TCL especifica que para um valor grande de n , \bar{x} terá uma distribuição normal aproximada. Dessa forma, se σ/\sqrt{n} é pequeno, então \bar{x} tende a estar próximo de θ (PAULA, 2014). Esta abordagem que visa estimar um valor esperado caracteriza a simulação de Monte Carlo.

Cada execução, num total de n , da simulação de Monte Carlo resulta em uma nova e independente v.a. com média θ . Dessa forma, ao término das n execuções pré-estabelecidas, a média de n fornece uma estimativa de θ . No entanto, é importante saber qual o valor ideal de n , ou seja, quando se pode parar de gerar novos dados.

A fim de realizar uma simulação com resultados satisfatórios, é importante estabelecer previamente um valor aceitável, d , para o desvio padrão de \bar{x} , de modo que sejam gerados n dados nos quais o estimador σ/\sqrt{n} seja menor que o valor aceitável d (PAULA, 2014).

4.6.2 Cálculo de Integrais definidas

Dada a função $g(x)$ da qual se deseja calcular um parâmetro θ , tem-se que:

$$\theta = \int_0^1 g(x) dx \quad (4.47)$$

Considerando uma v.a. z , que segue uma distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$, a Eq. (4.47) poderá ser expressa na forma apresentada na Eq. (4.48).

$$\theta = \int_0^1 g(x)dx = E[g(z)] \quad (4.48)$$

A Lei dos Grandes Números prevê que a integração de uma função sobre um dado intervalo $[0,1]$ é realizada calculando a média dessa função de modo que a v.a. analisada segue uma distribuição uniforme no intervalo estipulado. Dessa forma, sabendo que a v.a. z segue esse princípio, $z \sim U[0,1]$, se os valores de z_1, z_2, \dots, z_n , são v.a. independentes, tem-se que $g(z_1), g(z_2), \dots, g(z_n)$ são v.a. independentes e identicamente distribuídas com média θ (PAULA, 2014), conforme a Eq. (4.49).

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(z_i) \rightarrow E[g(z)] = \theta \quad (4.49)$$

onde $n \rightarrow \infty$. Assim, Paula (2014) afirma que é possível aproximar o parâmetro procurado, θ , através da geração de n amostras z_i (utilizando um algoritmo de Monte Carlo) e tomar como aproximação o valor médio de $g(z_i)$.

5 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

O termo sensibilidade é definido, segundo EPA (2001) como a variação na saída de um modelo com relação a alterações nos valores da (s) entrada (s). Dessa forma, a análise de sensibilidade fornece uma classificação quantitativa das entradas do modelo com base em suas contribuições relativas para modelar a variabilidade e a incerteza do produto final.

A análise de sensibilidade é uma importante ferramenta na análise de risco, através dela é possível identificar as variáveis de exposição, modelos de probabilidade e os parâmetros que causam maior influência na estimativa. Pode-se afirmar que a análise de sensibilidade identifica variáveis e caminhos importantes que podem ser alvos para análise adicional e coleta de dados (EPA, 2001).

Para modelos em geral, os quais se deseja determinar o impacto de uma variável sob a análise de sensibilidade, esse processo possui inúmeras vantagens, dentre as quais pode-se destacar: a análise permite testar a robustez dos resultados do modelo na presença de incertezas; assegura uma maior compreensão das relações entre as variáveis de entrada e saída; ao final do processo tem-se a redução da incerteza; encontra erros existentes no modelo (através da atribuição de relações inesperadas entre variáveis); permite a simplificação do modelo (com a fixação das variáveis que não tem efeito na saída e identificação de partes redundantes); entre outras.

Sob uma perspectiva geral, as técnicas utilizadas nessa análise diferem quanto à forma na qual os parâmetros são variados, podendo ser classificadas em abordagem local ou global. Tian (2013) afirma que a análise de sensibilidade local foca os efeitos em torno de um caso base, variando um único parâmetro por vez em diferentes níveis, enquanto os demais parâmetros são mantidos constantes. Este tipo de técnica não permite explorar as interações entre os parâmetros. Já a análise de sensibilidade global varia todos os parâmetros simultaneamente, analisando a interação completa de todos os fatores.

A escolha da metodologia que será utilizada para a implementação da análise de sensibilidade requer o conhecimento das restrições de problemas e dos recursos disponíveis. Nesse sentido, importantes aspectos devem ser analisados antes da escolha, dentre os quais: verificação de entradas correlacionadas, linearidade do modelo, interações do modelo, saídas múltiplas, custo computacional, dentre outras.

Saltelli et al. (2004) afirma que a maioria dos métodos assume independência entre as entradas devido à dificuldade em lidar com a estimativa de medidas de sensibilidade para

entradas correlacionadas. No entanto, já existem análises onde se reconhece essa correlação para explicar melhor o comportamento do sistema.

Quanto a linearidade do modelo, abordagens baseadas na regressão linear, por exemplo, podem medir incorretamente a sensibilidade quando a resposta do modelo não é linear em relação às suas entradas. Abordagens baseadas em derivadas também não devem ser utilizadas quando o modelo possui linearidade desconhecida. No entanto, as medidas baseadas na variância são excelentes alternativas para um modelo de linearidade desconhecida, uma vez que nessas abordagens pode-se fixar e/ou priorizar fatores durante a análise (SALTELLI et al., 2008).

Ainda segundo Saltelli et al. (2008), as interações entre fatores ocorrem quando duas ou mais entradas, simultaneamente, provocam uma variação na saída maior que aquela que seria observada para cada uma dessas entradas individualmente. Métodos como os diagramas de dispersão e as perturbações um por vez negligenciam essas interações. Por sua vez, os efeitos das interações podem ser avaliados pelos métodos globais.

De forma geral, os métodos de análise de sensibilidade consideram uma única saída do modelo, ou, para aqueles com muitas saídas, selecionam uma como saída de interesse (SALTELLI et al., 2004). Uma alternativa para os modelos com saídas múltiplas é realizar diferentes análises considerando, em cada uma delas, uma determinada saída de interesse.

O custo computacional das abordagens utilizadas na análise são um importante aspecto, uma vez que estimar os coeficientes de sensibilidade leva muitas execuções do modelo. Quando o modelo tem um grande número de entradas aleatórias e quando uma única execução do modelo leva um tempo consideravelmente grande, o custo computacional pode ser um problema. Saltelli et al. (2008) cita como exemplo onde o custo computacional é um impasse as medidas baseadas em variância.

A maioria das abordagens para realizar uma análise de sensibilidade é realizada seguindo os seguintes passos (Fig. 5.1) segundo Marsden (2018):

- a) Estabelecimento do objetivo da análise: inicia-se estabelecendo um modelo de simulação que se deseja analisar;
- b) Definição dos parâmetros de entrada incertos que se deseja analisar e caracterização das distribuições de probabilidade para cada um dos fatores de entrada. Nessa etapa, se for o caso, deve-se estabelecer uma correlação entre fatores de entrada;
- c) Escolha de um método de análise de sensibilidade e propagação da variabilidade de entrada para a variabilidade de saída executando o modelo um grande número de vezes

com entradas retiradas das distribuições de probabilidade de entrada. (Baseado na análise desse trabalho, que é um método de simulação estocástica de Monte Carlo).

- d) Análise de incerteza: Avaliação de como a variabilidade nas entradas se propagam através modelo para a variabilidade nas saídas;
- e) Análise de sensibilidade: Analisar as saídas resultantes do modelo e estimar as medidas de sensibilidade de interesse, a contribuição relativa da variabilidade em cada uma das entradas para a variabilidade total do produto;
- f) A partir dos resultados da análise de sensibilidade, os resultados podem auxiliar a priorizar o esforço para reduzir as incertezas de entrada e melhorar o modelo de simulação, o que pode levar a uma nova iteração da análise.

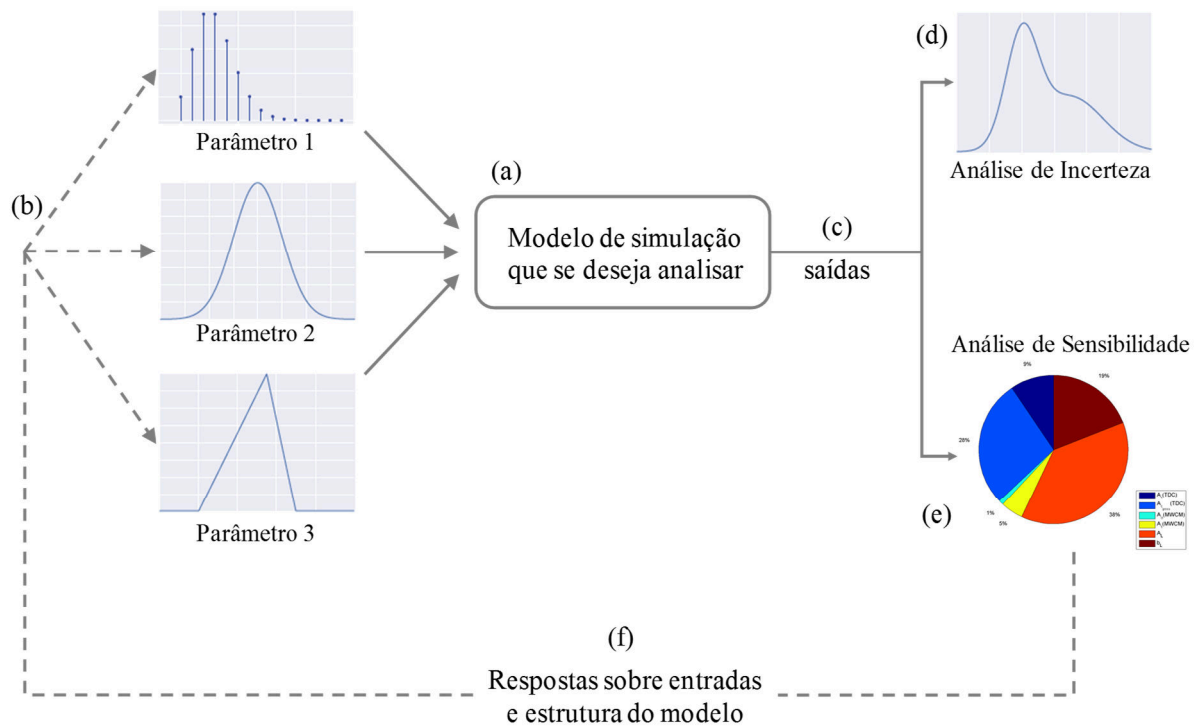


Figura 5.1 – Procedimento recursivo para a realização da análise de sensibilidade

5.1 MÉTODOS DE ANÁLISE DE SENSIBILIDADE LOCAL

A análise de sensibilidade local (também chamada análise de sensibilidade diferencial) pertence à classe dos métodos de um fator por vez (one-at-a-time). As medidas de sensibilidade são geralmente calculadas quando um fator é alterado e todos os outros são fixados (TIAN, 2013). Esses métodos costumam ser utilizados pela praticidade, pois, em caso de falha do modelo, o pesquisador imediatamente sabe qual é o fator de entrada responsável pelo problema. Como resultado, a escolha do caso base é muito importante nesse método.

A maioria das análises de sensibilidade encontradas na literatura são baseadas em derivadas. Segundo Saltelli et al. (2008), essa relação é bastante razoável, uma vez que a derivada parcial de uma saída, Y_j , em relação a um fator de entrada, X_i , pode ser pensada como uma definição matemática da sensibilidade de Y_j versus X_i . Nesse contexto, os métodos locais podem ser definidos segundo a expressão apresentada na Eq. (5.1).

$$\left| \frac{\partial Y_j}{\partial X_i} \right|_{x^0} \quad (5.1)$$

onde o sobre índice 0 indica que a derivada é tomada em algum ponto fixo no espaço da entrada (daí o "local").

Dentre as vantagens deste método, pode-se dizer que ele é muito simples em comparação com a análise de sensibilidade global, sendo facilmente aplicado e interpretado (TIAN, 2013). Abordagens baseadas em derivadas tem ainda a vantagem de apresentarem menor custo computacional, em comparação com a análise de sensibilidade global, precisam de menos execuções de simulação. No entanto, o pesquisador precisa intervir no programa, alterando a codificação, para realizar uma operação de maneira diferente (SALTELLI et al., 2008). Tian (2013) afirma que o método local explora apenas o espaço reduzido do fator de entrada em torno de um caso base, não considera interações entre as entradas, além de não explicar quantas variações das saídas são contabilizadas pelos fatores de entrada. A utilização desse método também é restrita quando a linearidade do modelo é desconhecida.

5.2 MÉTODOS DE ANÁLISE DE SENSIBILIDADE GLOBAL

Ao contrário dos métodos de análise de sensibilidade local, esses métodos avaliam o efeito das mudanças em todas as variáveis de entrada simultaneamente, ou seja, a análise de sensibilidade global aborda as influências das incertezas das entradas sobre todo o espaço de entrada (MARSDEN, 2018).

A abordagem global é considerada mais confiável em detrimento da abordagem local, uma vez que, em princípio, esses métodos exploram todo o intervalo de definição de cada fator (TIAN, 2013). Outra vantagem, é que cada "efeito" de um fator é, na verdade, uma média sobre os valores possíveis dos outros fatores. Esses métodos ainda fornecem o impacto do efeito de um fator de entrada na saída, fornecendo um modelo simplificado do mapeamento entrada-saída (SALTELLI et al., 2004). No entanto, os métodos globais também apresentam

desvantagens, como o fato de apresentarem uma alta demanda computacional em comparação à análise de sensibilidade local (TIAN, 2013).

Marsden (2018) cita como exemplos de modelos que a análise de sensibilidade global inclui os métodos de regressão, as abordagens baseadas em análise de variância (frequentemente usando métodos de Monte Carlo), e os métodos típicos implementados em pacotes de software (como o teste de sensibilidade de análise de Fourier, baseado em uma transformada de Fourier multidimensional, e o método de Sobol). Outras abordagens globais são os Métodos de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM), e os métodos de triagem (como o método de Morris) (SALTELLI et al., 2008).

5.2.1 Método baseado na Variância – Enfoque da técnica Monte Carlo

Nas medidas baseadas em variância, os modeladores estão dispostos – e geralmente ávidos – a realizar a análise sobre diferentes combinações de valores para as entradas incertas. Esses modelos estudam como a variação da saída depende dos fatores de entrada incertos e pode ser decomposta de acordo (SALTELLI et al., 2008).

De acordo com Ferreira (2003), trata-se de uma classe de métodos probabilísticos que quantificam as incertezas de entrada e saída como distribuições de probabilidade e decompõem a variância de saída em partes atribuíveis a variáveis de entrada e combinações de variáveis. Desse modo, a sensibilidade da saída para uma determinada entrada, é medida em termos da quantidade de variância na saída que foi causada por essa entrada.

A análise de sensibilidade busca meios de quantificar a incerteza de uma previsão do modelo, de modo que a variância pode ser utilizada como uma medida resumida de incerteza. Os métodos baseados em variância permitem a exploração completa do espaço de entrada, contabilizando interações e respostas não-lineares. Por estas razões, eles são amplamente utilizados quando é possível calculá-los. Alguns recursos de métodos baseados em variância são (SALTELLI et al., 2008):

- A medida de sensibilidade é independente do modelo;
- Capacidade de captar a influência de toda a gama de variação de cada fator de entrada;
- Análise dos efeitos de interação entre fatores de entrada;
- São capazes de lidar com grupos de fatores de entrada: fatores incertos podem pertencer a diferentes tipos lógicos e pode ser desejável decompor a incerteza de acordo com esses tipos.

No entanto, métodos baseados em variância têm como principal desvantagem o seu alto custo computacional. Esses métodos podem ser expressos como expectativas condicionais, isto é, considerando um modelo $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k)$, uma medida de sensibilidade da i -ésima variável X_i é expressa conforme a Eq. (5.2).

$$var_{X_i} = (E_{v \sim_i}(G|X_i)) \quad (5.2)$$

De modo que $v \sim_i$ denota o conjunto de todas as variáveis de entrada, exceto v_i . A equação (95) mede essencialmente a contribuição v_i para a incerteza (variância) em Y , como uma média em relação às variações de outras variáveis, sendo conhecida como índice de sensibilidade de primeira ordem ou índice de efeito principal (FERREIRA, 2003).

Ferreira (2003) ressalta ainda a existência de uma outra medida, o índice de efeito total, que dá a variância total em Y causada por v_i e suas interações com qualquer uma das outras variáveis de entrada, sendo ambas as quantidades padronizadas dividindo-se por $Var(Y)$.

A análise de sensibilidade segundo a abordagem da variância envolve a utilização de um método específico, que, normalmente, é o de Monte Carlo. A generalização do conceito da abordagem da variância baseada em Monte Carlo, e capaz de computar medidas de sensibilidade para grupos arbitrários de fatores, foi proposta pelo matemático russo I. M. Sobol, inspirado pelo trabalho de Cukier (SALTELLI et al., 2008).

Nesse modelo, as medidas estatísticas de sensibilidade são baseadas nos coeficientes de correlação de Pearson, Eq. (5.3), ou nos coeficientes da ordem de ranqueamento de Spearman, Eq. (5.4). A Eq. (5.5) é utilizada para normalizar os coeficientes de correlação, ρ_i , a fim de quantificar o percentual de contribuição de cada variável de entrada na dispersão de cada variável de saída, α_j (FERREIRA, 2003).

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2}} \quad (5.3)$$

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n^3 - n} \quad (5.4)$$

$$\alpha_j[\%] = \frac{100 \cdot \rho_j^2}{\sum_{j=1}^j \rho_j^2} \quad (5.5)$$

onde n é o tamanho das amostras geradas pelo método de Monte Carlo; j representa o número de v.a. que controlam o sistema analisado e d_i é a diferença entre os dois postos de cada observação.

O primeiro passo para a análise segundo o método de Monte Carlo é a determinação da F.D.P que as variáveis de entrada seguem. A partir de cada fator de entrada e sua respectiva

F.D.P são gerados dados aleatórios que, através de um modelo, são propagados para a grandeza de saída. Desse modo, constrói-se a F.D.P da grandeza de saída e a partir desta são retirados os parâmetros estatísticos desejados. O procedimento descrito anteriormente é repetido n vezes, de modo que serão gerados n valores de incerteza (GONÇALVES; TEIXEIRA; KALID, 2009).

Para estimar o comportamento das variáveis de saída, após o processo de geração dos números aleatórios, estima-se as medidas de correlação, ρ_i , entre cada variável de entrada e as variáveis de saída. Em seguida, os coeficientes de correlação de Pearson ou de Spearman entre as variáveis de entrada e as de saída são quantificados. O passo final é calcular o percentual de cada variável de entrada na dispersão de cada variável de saída através da Eq. (5.5).

Gonçalves, Teixeira e Kalid (2009) citam como vantagens de se utilizar essa abordagem, o fato de não ser necessário calcular as derivadas parciais do modelo (coeficientes de sensibilidade) e nem os graus efetivos de liberdade.

6 METODOLOGIA

Neste capítulo são apresentados as ferramentas e os passos necessários para a calibração da curva de distância crítica versus vida, que foi posteriormente utilizada na previsão de vida do componente mecânico. Foram utilizados dados experimentais de Sá (2017), que caracterizou o comportamento da liga Al 7050-T7451 sob condições de carregamento uni e multiaxial. Sá (2017) realizou ensaios em corpos de prova lisos (sem entalhe) e com entalhe tipo “V” sob condições de tração-compressão e torção alternada, de modo que obteve as curvas $\sigma - N$ e $\tau - N$, respectivamente. De posse das curvas Wöhler do material e do espécime com um entalhe agudo, em ambas as condições de carregamento, levantou-se o que é necessário para a construção da curva de distância crítica versus vida e a previsão de vida do componente foi obtida em termos dessa curva.

Uma particularidade da estratégia de validação do modelo proposto neste trabalho, é que não somente a previsão determinística da vida foi calculada. Para se ter uma melhor caracterização do comportamento da vida do componente em análise, utilizando simulação de Monte Carlo, uma estrutura probabilística foi criada, onde foram gerados números aleatórios para simular a situação física.

Toda a análise foi proposta em termos de duas metodologias de previsão de vida, o modelo SWT, em que o parâmetro SWT, P_{SWT} , varia com a vida de fadiga e é capaz de caracterizar um espécime entalhado sujeito a um estado de tensão multiaxial, e o critério MWCM, baseado em curvas biparamétricas de Wöhler modificadas não convencionais.

Duas estratégias de análise foram adotadas, uma que considera os métodos acima propostos em relação aos ensaios de tração-compressão, σ , denominada Estratégia A, e a outra que tem por objetivo realizar a análise em relação aos ensaios de torção, τ , Estratégia B.

A fim de validar o modelo de previsão de vida, as vidas estimadas, considerando os dois métodos propostos, foram comparadas analiticamente em termos determinísticos e probabilísticos com as vidas obtidas experimentalmente. As vidas estimadas tiveram ainda seu comportamento avaliado em termos da função de distribuição de probabilidade que melhor as representasse e as distribuições de vida, para combinações de esforços específicas, foram avaliadas para determinar qual o método, SWT ou MWCM, apresentou melhores resultados. Por fim, uma análise de sensibilidade foi realizada para classificar quais, dentre as variáveis de entrada do modelo, apresentaram maior interferência na variável de saída vida.

6.1 CRITÉRIOS DE FADIGA MULTIAXIAL EM TERMOS DA TDC

6.1.1 Curva de correlação do parâmetro SWT em função da vida

A TDC procura uma tensão efetiva com base em um procedimento de cálculo da média ao longo de um volume em torno do concentrador de tensões. Nesse processo, a falha por fadiga é esperada se essa tensão efetiva exceder a resistência à fadiga do material de referência. Métodos simplificados dessa ideia central foram formulados considerando a média ao longo de uma área (Método da Área), linha (Método da Linha) ou em um ponto (Método do Ponto). Como nesse trabalho o espécime analisado é simétrico, utiliza-se o Método do Ponto (PM), considerando que esse ponto está localizado a uma distância crítica, L , do entalhe.

Considerando uma função que pode ser escrita com base na máxima densidade de energia de tensão normal, nas condições específicas de fadiga, a função de falha passa a ter a forma apresentada na Eq. (3.11), onde o parâmetro do material é uma função do número de ciclos, $P_{SWT} - N$.

Para a construção da curva $P_{SWT} - N$ são necessários resultados da vida de fadiga observada experimentalmente em corpos de prova não entalhados. Nesse sentido, resultados dos testes realizados por Sá (2017) foram utilizados. Em seu trabalho, Sá (2017) realizou ensaios uniaxiais em tração-compressão e torção pura e ensaios multiaxiais com uma combinação desses dois esforços, de modo que para o carregamento axial, o plano crítico está orientado a um ângulo $\theta = 0$ e para torção, esse plano se apresenta a $\theta = 45^\circ$. O algoritmo descrito abaixo apresenta a rotina para obtenção da curva de calibração $P_{SWT} - N$:

- a) O resultado de ensaios de fadiga em um espécime liso (sem entalhe) foi utilizado, de modo que se identificou o respectivo parâmetro de SWT associado a esse espécime, que pode ser obtido pela Eq. (3.11);
- b) Considerando que foram realizados ensaios de fadiga em condições uniaxiais de tração-compressão, uniaxiais em torção e multiaxiais em tração-compressão e torção (simultaneamente), o procedimento descrito em (a) foi realizado para todos os espécimes testado
- c) s em todas essas condições de carregamento;
- d) Para construção da curva $P_{SWT} - N$, considerou-se todos os resultados obtidos para as três condições de carregamento propostas, e o ajuste foi realizado utilizando o método dos mínimos quadrados;

- e) De posse da curva $P_{SWT} - N$, obteve-se o coeficiente, $A_{P_{SWT}}$, e o expoente, $b_{P_{SWT}}$, que a caracterizam (procedimento descrito no item 4.3.1 deste trabalho) e são necessários para a alimentação da rotina de previsão de vida.

Uma importante consideração é que a curva $P_{SWT} - N$ utilizada para construção da curva de distância crítica versus vida que considera os ensaios em tração-compressão é a mesma curva utilizada para a construção dessa curva tendo por base os ensaios em torção.

6.1.2 Calibração da curva de Wöhler Modificada (CWM)

A calibração da curva de Wöhler Modificada (CWM) requer resultados experimentais de curvas de fadiga geradas por ensaios em espécimes sem entalhe. Neste trabalho, utilizou-se as curvas de $\sigma - N$ e $\tau - N$ obtidas por Sá (2017). A CWM estabelece uma relação entre a amplitude de tensão cisalhante no plano crítico, τ_a^c , e a vida à fadiga de um determinado componente, N_f , para um ρ específico. Cada CWM é definida pelo seu declive inverso negativo, k_τ , e por uma amplitude de tensão de cisalhamento de referência, $\tau_{A,Ref}$, extrapolada em um número apropriado de ciclos até a falha, N_{Ref} . Considerando $\rho = \sigma_{n,máx}/\tau_a^c$, os passos seguidos para a calibração dessa curva, foram:

- Foram utilizados os resultados dos testes uniaxiais realizados em tração-compressão e torção por Sá (2017). Obteve-se os valores de $\rho = 1$, para os testes realizados em tração-compressão, e $\rho = 0$ para os testes realizados em torção, com base na análise do círculo de Mohr apresentada (item 3.2.3).
- Utilizando as Eq. (3.17), que possibilita o cálculo de $\tau_{A,Ref}(\rho)$ e a Eq. (3.18) para calcular $k_\tau(\rho)$, é possível estimar a vida a fadiga de um determinado componente submetido a carregamento multiaxial através da Eq. (3.16).

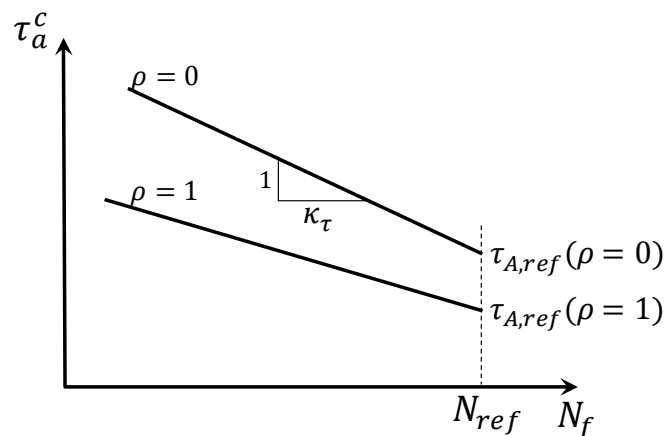


Figura 6.1 - Representação esquemática da Curva de Wöhler Modificada

6.2. CONSTRUÇÃO DA CURVA DE DISTÂNCIA CRÍTICA VERSUS VIDA

6.2.1 Curva de Distância Crítica versus Vida segundo o modelo SWT

Importantes informações a respeito do dano à fadiga podem ser obtidas através da análise do campo de tensões na proximidade de um concentrador de tensões. Partindo desse pressuposto, a curva de distância crítica versus vida ($L - N$) foi construída. O intuito da análise em termos da curva $L - N$, é combina-la com modelos de fadiga multiaxial e construir um procedimento de previsão de vida de componentes entalhados submetidos a carregamentos multiaxiais.

Nesse sentido, construiu-se curvas que correlacionam a distância crítica (baseada no parâmetro SWT – L_{SWT}) com a vida de espécimes entalhados, estratégia similar àquela proposta por Susmel e Taylor (2007), cujo esquema representativo dos passos seguidos pode ser visto na Fig. 6.2. Esse esquema representa a obtenção da curva $L_{SWT}(\sigma) - N$, onde ' σ ' indica que a curva foi construída com base nos ensaios realizados em tração-compressão, o que é chamado nesta análise de Estratégia A.

Apesar de a curva de distância crítica versus vida ser, geralmente, determinada considerando ensaios de tração-compressão, neste trabalho essa curva também foi construída com base nos resultados dos ensaios de torção, $L_{SWT}(\tau) - N$, Estratégia B.

O procedimento de construção da curva $L_{SWT}(\sigma) - N$, requer duas curvas: a curva $P_{SWT} - N$ (Fig. 6.2 (a)), que representa o comportamento do material e está associada ao parâmetro SWT, e a curva $\sigma_{ag} - N$ (Fig. 6.2 (b)), que relaciona as tensões necessárias para induzir falha por fadiga no espécime com entalhe quando submetido ao carregamento tração-compressão. Os seguintes passos, necessários para obtenção dessa curva, representam a Estratégia A e podem ser vistos na Fig. 6.2.

- a) O intervalo de vida em que a curva $L_{SWT}(\sigma) - N$ foi estimada foi definido, (na Fig. 6.2 – N_1 e N_2). Esse intervalo foi baseado nos dados experimentais disponíveis das curvas $P_{SWT} - N$ e $\sigma_{ag} - N$;
- b) Calculou-se o nível de tensão remota relacionado a uma determinada vida N_i , onde se observou falha no espécime entalhado, de modo a se obter o par (N_i, σ_{agi}) ;
- c) Obteve-se a distribuição das tensões na região próxima à raiz do concentrador de tensões, Fig. 29 (c). Neste trabalho o campo de tensões foi obtido via elementos finitos, por meio de uma análise numérica baseada na mecânica linear-elástica;

- d) Uma pesquisa de plano crítico foi realizada, a fim de obter a evolução do máximo valor do parâmetro SWT na região analisada, (curva $P_{SWT} - l$), a posição l corresponde à distância crítica segundo o Método do Ponto, Fig. 29 (d);
- e) Por fim, identificou-se a coordenada L_{SWT} em que o valor da função $P_{SWT}(l)$ se iguala ao de $P_{SWT}(N_i)$, de modo que esse valor representa um ponto da curva $L_{SWT}(\sigma) - N$, Fig. 29 (e);
- f) O procedimento foi repetido para a obtenção dos outros pontos e então os parâmetros da curva $L_{SWT}(\sigma) - N$ foram estimados por uma técnica de regressão não linear.

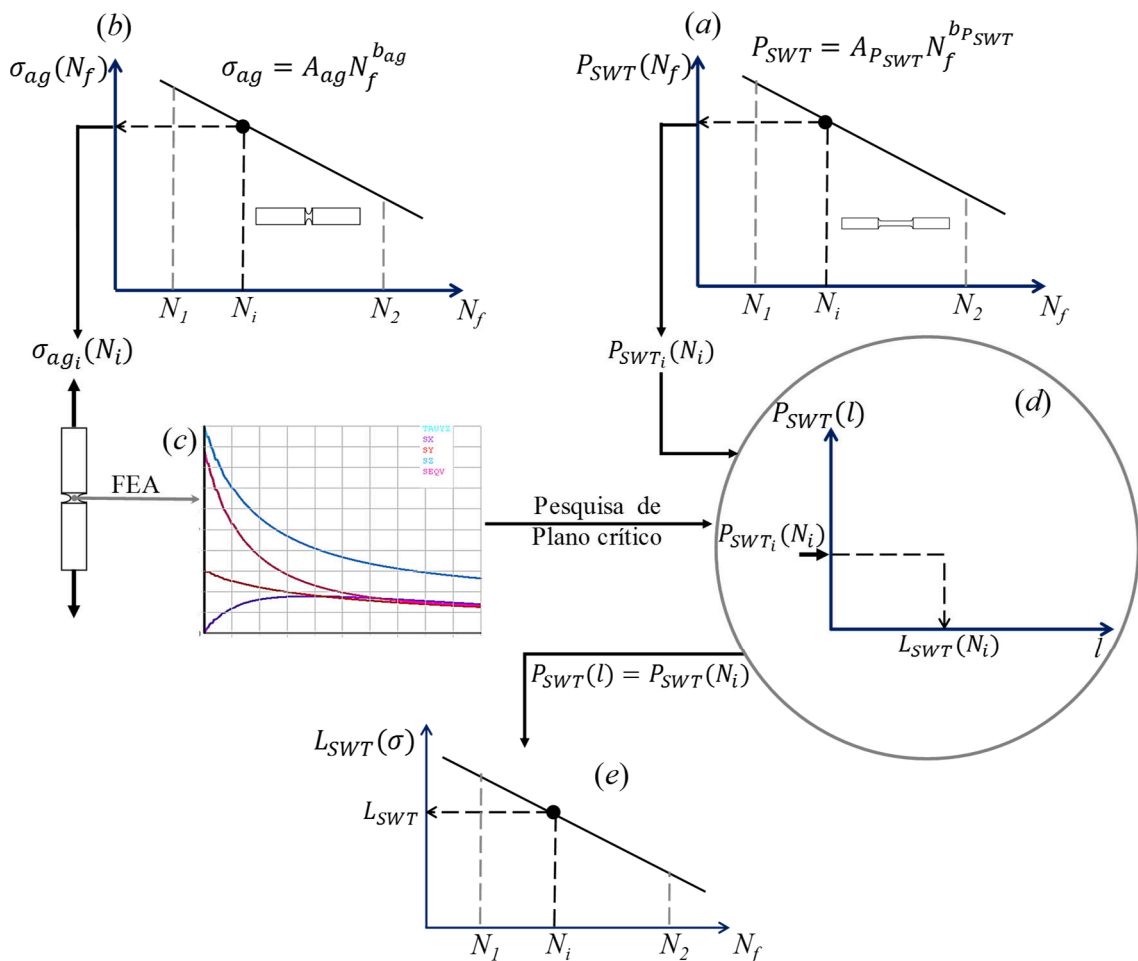


Figura 6.2 – Representação da estrutura para a caracterização da curva $L_{SWT}(\sigma) - N$

Considerando a Estratégia B, a obtenção da curva $L_{SWT}(\tau) - N$ pode ser obtida de forma análoga à apresentada para a Estratégia A. Entretanto, ao invés de solicitar o espécime no sentido axial, o carregamento é torcional, utilizando-se, portanto, dados experimentais da curva $\tau_{ag} - N$ para o espécime entalhado e a curva $P_{SWT} - N$, que é a mesma em ambas as estratégias.

6.2.2 Curva de Distância Crítica versus Vida segundo o MWCM

Em uma estratégia similar à proposta para o modelo SWT, construiu-se uma curva que correlaciona a distância crítica com a vida de espécimes entalhados considerando o MWCM, a curva $L - N$. A investigação foi feita considerando testes realizados sob tração-compressão, o que foi chamado de Estratégia A, e tem como resultado a construção da curva $L_\sigma - N$, e ainda segundo os resultados dos testes em torção, Estratégia B, que resulta na curva $L_\tau - N$.

Considerando a Estratégia A, em que $L_\sigma = A_l N^{b_l}$, os procedimentos para construção dessa curva requerem duas curvas de fadiga geradas por testes em espécimes lisos e entalhados sob as condições de carregamento tração-compressão. A Fig. 30 representa a estrutura básica para a construção dessa curva, onde os seguintes passos apresentam essa metodologia:

- a) A faixa de vida em análise foi definida, entre N_1 e N_2 , intervalo esse que depende dos dados experimentais das curvas $\sigma - N$ utilizadas na análise;
- b) Para uma vida específica N_i , determinou-se as tensões necessárias para induzir falha por fadiga nos espécimes com entalhe, $\sigma_{ag}(N_i)$, Fig. 6.3 (a), e sem entalhe, $\sigma_a(N_i)$, Fig. 6.3 (d);
- c) Para a vida N_i , extraiu-se a resistência à fadiga dos espécimes entalhados, calculada em termos da área bruta da seção da amostra, $\sigma_{ag}(N_i)$, que foi utilizada como condição de carregamento para o espécime em análise, Fig. 6.3 (b);
- d) Conforme Susmel e Taylor (2003), para calibrar a curva de distância crítica é necessário utilizar a amplitude da tensão principal máxima, σ_{1a} , como a tensão efetiva. Desse modo, uma análise de elementos finitos foi realizada a fim de obter o campo de tensões na região próxima à raiz do concentrador de tensões, $\sigma_{1a}(l)$, Fig. 6.3 (c).
- e) Obtida a curva que relaciona σ_{1a} a l , encontrou-se a distância L , na qual o valor de σ_{1a} é igual à resistência à fadiga para o espécime liso naquela mesma vida N_i analisada, ou seja $\sigma_{1a}(L) = \sigma_a(N_i)$, Fig. 6.3 (d). Essa posição, L , corresponde à distância crítica segundo o Método do Ponto;
- f) O par obtido (L, N_i) representa um ponto no gráfico da curva $L_\sigma - N$ que se deseja estimar, Fig. 6.3 (e). Para a obtenção dos outros pontos, o procedimento foi repetido.

Considerando a Estratégia B, a curva $L_\tau - N$ é obtida seguindo estes mesmos passos anteriormente descritos, porém utilizando como referência as curvas $\tau - N$ para os espécimes com e sem entalhe. Em torção, a tensão efetiva considerada é a amplitude máxima de tensão de cisalhamento, τ_a , ou invés de σ_{1a} .

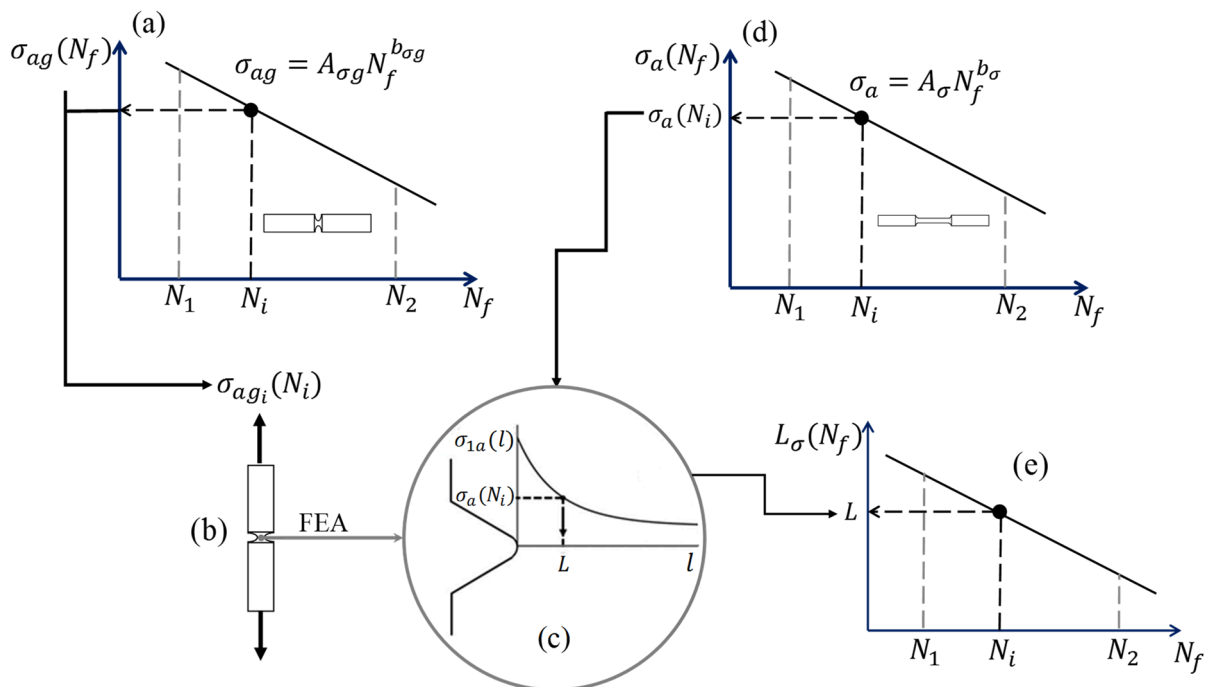


Figura 6.3 – Representação da Estrutura básica para a caracterização da curva $L - N$ para o MWCM

6.3 PREVISÃO DETERMINÍSTICA DE VIDA EM FADIGA USANDO A CURVA DE DISTÂNCIA CRÍTICA VERSUS VIDA

6.3.1 Previsão determinística baseada no Modelo de SWT

Com base no modelo SWT, a metodologia para previsão de vida neste trabalho baseia-se na curva $L_{SWT} - N$, cujo procedimento de obtenção está descrito no item 6.2.1. De forma geral, essa proposta não difere daquela proposta por Susmel e Taylor (2007) que visa a determinação da vida à fadiga de componentes entalhados submetidos a carregamentos complexos do tipo multiaxiais.

Duas curvas são necessárias para a previsão de vida, a curva $P_{SWT} - N$ (que caracteriza o comportamento do material) e a curva $L_{SWT} - N$ (que caracteriza o comportamento do comprimento característico com a vida de fadiga). Desse modo, considerando um componente entalhado submetido a carregamentos multiaxiais, a previsão de vida foi obtida conforme os seguintes passos (desenvolvidos para o método do ponto) para a Estratégia A, que considera o resultado dos testes realizados sob tração-compressão:

- Na curva $P_{SWT} - N$, identificou-se o parâmetro SWT correspondente à uma vida N_i , $P_{SWT}(N_i)$, conforme exemplificado na Fig. 6.4 (a);

- b) Paralelamente, identificou-se a distância crítica correspondente à vida N_i na curva $L_{SWT}(\sigma) - N$, $L_{SWT}(\sigma)(N_i)$, Fig. 6.4 (b);
- c) Na curva que apresenta o campo de tensões na proximidade da raiz do entalhe em função do parâmetro SWT, $P_{SWT} - l$, Fig. 6.4 (c), encontre a posição L_{SWT} onde ocorre $P_{SWT}(N_i)$;
- d) Se a posição L_{SWT} onde ocorre $P_{SWT}(N_i)$ coincide com $L_{SWT}(\sigma)(N_i)$, então N_i é a vida estimada. Caso contrário, realiza-se um incremento em N_i e repete-se os passos de “b” a “d” até que haja convergência entre as vidas, Fig. 6.4 (d).

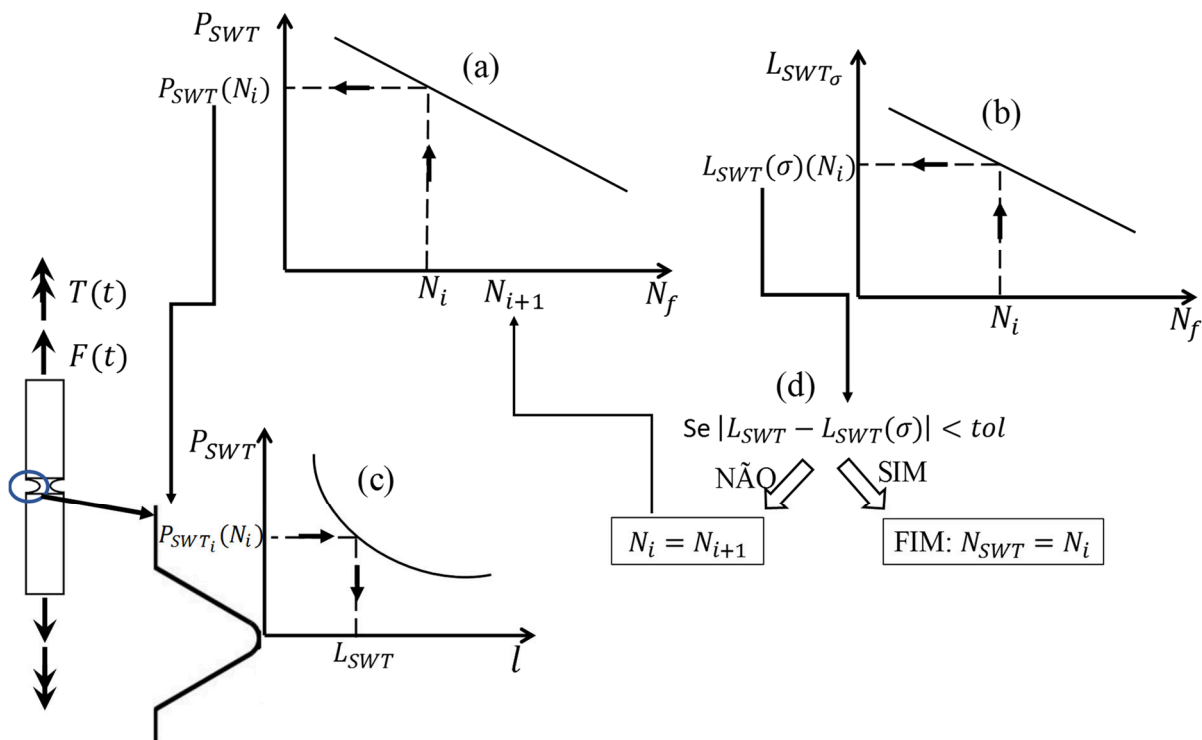


Figura 6.4 – Representação da previsão de vida segundo o modelo SWT

Considerando a Estratégia B, o mesmo procedimento foi realizado para a previsão determinística de vida em termos da condição de carregamento torção.

6.3.2 Previsão determinística baseada no MWCM

A metodologia apresentada tem por objetivo a determinação de vida à fadiga de componentes entalhados submetidos a carregamentos multiaxiais complexos. Considerando a Estratégia A, foram utilizadas as curvas de Wöhler do Material em condições de tração-compressão $\sigma_u - N$ ($\rho = 1$) e torção pura $\tau_u - N$ ($\rho = 0$), bem como a curva $L_\sigma - N$. A Fig. 6.5 apresenta um esquema representativo da previsão de vida para o componente entalhado (Fig. 6.5 (a)), que seguiu os seguintes passos:

- Determinou-se a distribuição das tensões elásticas na proximidade da raiz do entalhe por meio de análise de elementos finitos (FEA), Fig. 6.5 (b);
- A uma distância arbitrária, l , da raiz do entalhe, estimou-se o tensor das tensões e utilizando o método de pesquisa de plano crítico descrito no item 3.2.3.1 (capítulo 3), encontrou-se a amplitude da tensão cisalhante (τ_a^c) e a tensão normal máxima ($\sigma_{n,max}$) nesse plano, Fig. 6.5 (c). Através desses valores, calculou-se ρ , Eq. (3.13);
- Traçado o diagrama de Wöhler modificado considerando as curvas $\sigma_u - N$ ($\rho = 1$) e $\tau_u - N$ ($\rho = 0$), e obtido o valor de ρ no passo anterior, a vida do componente, $N(l)$, foi obtida a partir da amplitude de tensão cisalhante máxima, τ_a^c , conforme Fig. 6.5 (d);
- Para a vida estimada no passo anterior, obteve-se, a partir da curva $L_\sigma - N$ a distância crítica hipotética, $L_{trial}(N)$, Fig. 6.5 (e);
- Verificou-se a seguinte condição: Se $|l - L_{trial}| \leq TOL$, tem-se que a vida do componente estrutural em análise é $N_{f,e} = N(l)$. Caso contrário, faz-se $l = L_{trial}$ e volta-se ao passo b).

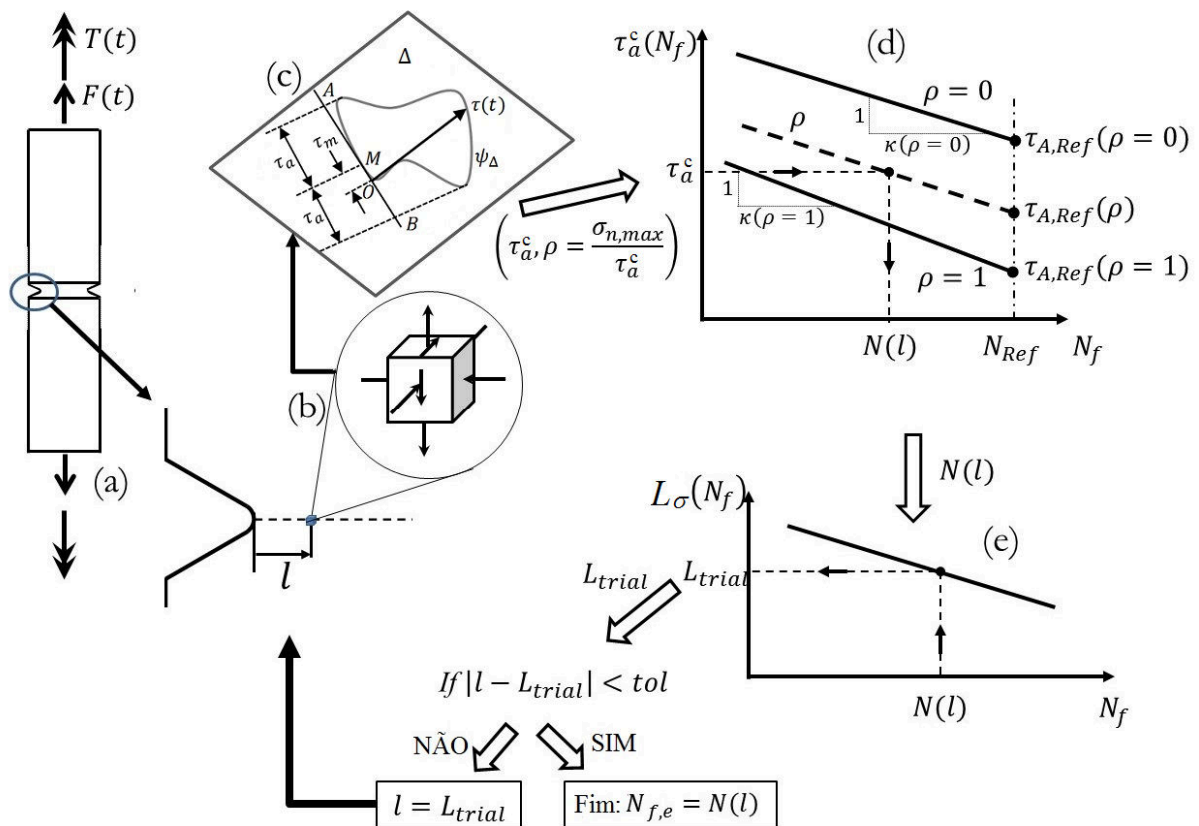


Figura 6.5 – Representação da previsão de vida segundo MWCM

De modo análogo a esse procedimento, considerando a Estratégia B, foram realizadas as previsões baseadas na curva $L_\tau - N$.

6.4 MÉTODO DE MONTE CARLO NA CARACTERIZAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DA VIDA DE FADIGA USANDO O MODELO DE PREVISÃO DE VIDA PROPOSTO

O problema de previsão de vida sob condições multiaxiais analisado foi modificado a fim de apresentar uma estrutura probabilística e, utilizando simulação de Monte Carlo, foram gerados números aleatórios para simular a situação física.

6.4.1 Previsão probabilística baseada no Modelo de SWT

A previsão de vida do componente mecânico analisado em termos probabilísticos, e os parâmetros que alimentam a rotina foram obtidos conforme o fluxograma da Fig. 6.6, que apresenta as etapas considerando a Estratégia A. Para essa análise, que considera os resultados dos ensaios realizados sob tração-compressão, assumiu-se que as fontes de incerteza que afetam a previsão de vida estão relacionadas a curva que caracteriza o material ($P_{SWT} - N$), obtida através dos passos descritos na seção 6.1.1, a curva de fadiga para o espécime entalhado, $\sigma_{ag} - N$, obtida experimentalmente por Sá (2017), e a curva de distância crítica versus vida, $L_{SWT}(\sigma) - N$. Assim, tem-se que as Eqs. (6.1) a (6.3) controlam o processo de previsão de vida em fadiga.

$$P_{SWT} = A_{P_{SWT}} N_f^{b_{P_{SWT}}} \quad (6.1)$$

$$\sigma_{ag} = A_{\sigma_g} N_f^{b_{\sigma_g}} \quad (6.2)$$

$$L_{SWT} = A_l N_f^{b_l} \quad (6.3)$$

Os parâmetros da Eq. (6.3) foram obtidos a partir das Eqs. (6.1) e (6.2), através do procedimento apresentado no item 6.2.1. Dessas curvas, as constantes $A_{P_{SWT}}$ e A_{σ_g} foram consideradas variáveis aleatórias primárias com suas respectivas incertezas, $\epsilon_{P_{SWT}}$ e $\epsilon_{A_{\sigma_g}}$, e os expoentes $b_{P_{SWT}}$ e b_{σ_g} variáveis determinísticas primárias. De tal forma que os parâmetros secundários, A_l e b_l são avaliados dinamicamente durante o processo de previsão da vida.

O processo de identificação dos parâmetros da curva, aleatórios e determinísticos, e das incertezas associadas as curvas, foram realizados através de uma análise estatística, onde um processo de regressão linear foi realizado e as etapas que descrevem o procedimento estão descritas no item 4.3.1 do capítulo 4 deste trabalho. Como trata-se de uma previsão probabilística, a rotina foi construída de modo a gerar 10.000 previsões estocásticas de vida. Os passos realizados para essa previsão foram os seguintes:

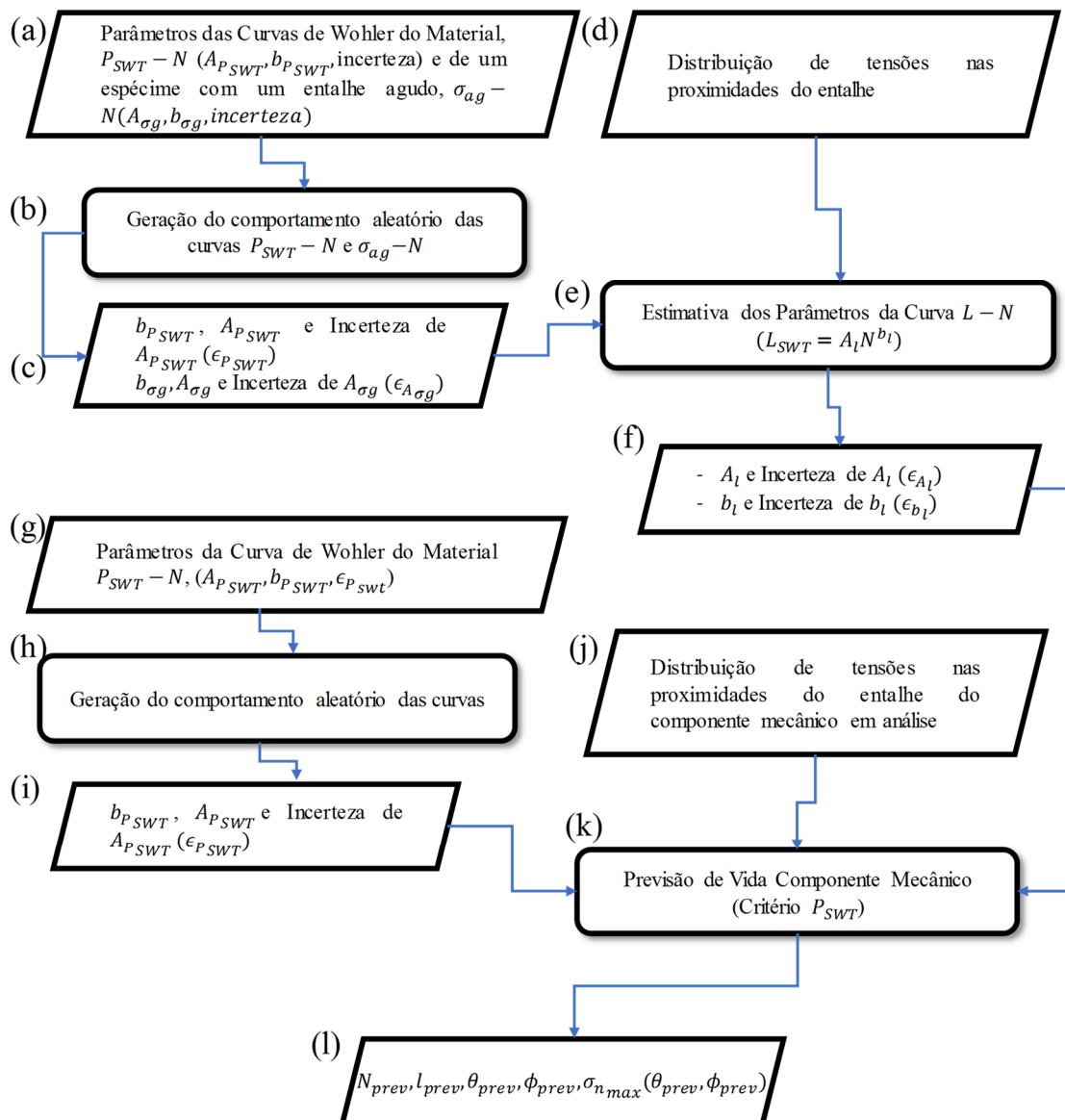


Figura 6.6 – Fluxograma do processo de estimativa de vida útil de fadiga (modelo SWT)

- a) Os parâmetros das curvas $P_{SWT} - N$, que são $A_{P_{SWT}}, b_{P_{SWT}}$ e a incerteza associada ao coeficiente $A_{P_{SWT}}$ foram identificados, assim como os parâmetros da curva $\sigma_{ag} - N$, $A_{\sigma_g}, b_{\sigma_g}$ e a incerteza associada a A_{σ_g} , Fig. 6.6 (a);
- b) O campo de tensões na região próxima à raiz do concentrador de tensões, Fig. 6.6 (d), foi obtido via elementos finitos, por meio de uma análise numérica baseada na mecânica linear-elástica;
- c) Os passos descritos em (a), (b) e (c) reúnem o que é necessário para a obtenção da curva $L_{SWT}(\sigma) - N$, Fig. 6.6 (e). A construção dessa curva foi realizada conforme descrito no item 6.2.1 deste trabalho;

- d) Obtida a curva $L_{SWT}(\sigma) - N$, seu comportamento aleatório foi estabelecido, de modo que A_l e b_l foram consideradas v.a. com suas respectivas incertezas, ϵ_{A_l} , e ϵ_{b_l} , Fig. 6.6 (f) e então, após a etapa de previsão de vida foi iniciada;
- e) Encontrados os parâmetros das curvas $L_{SWT}(\sigma) - N$ e $P_{SWT} - N$, Fig. 6.6 (g), (h) e (i), e tendo a distribuição de tensões na raiz do entalhe agudo já estabelecida (que será necessária também nessa etapa), Fig. 6.6 (j), foi realizada a previsão de vida do componente mecânico, Fig. 6.6 (k), conforme descrito em detalhes na seção 6.3.1 deste trabalho;
- f) Desse processo de previsão de vida, foram obtidas 10000 previsões cuja mediana foi comparada com a vida determinística e com a obtida experimentalmente. Os resultados, que serão avaliados em relação ao seu comportamento na análise de sensibilidade, são: $N_{prev}, l_{prev}, \theta_{prev}, \phi_{prev}, \sigma_{n,max}(\theta_{prev}, \phi_{prev})$, Fig. 6.6 (l).

Para previsão probabilística de vida considerando a Estratégia B, os passos são semelhantes, no entanto considera-se a curva $\tau - N$ para espécimes lisos e entalhados.

6.4.2 Previsão probabilística baseada no MWCM

Para a obtenção da previsão de vida de um componente mecânico utilizando o MWCM, as etapas são apresentadas na Fig. 6.7 para a Estratégia A da análise, que considera os ensaios realizados em condição de carregamento tração-compressão.

De forma análoga ao que foi realizado para o modelo SWT, o processo de identificação dos parâmetros das curvas, aleatórios e determinísticos, e das incertezas associadas, foram realizados através de uma análise estatística, onde um processo de regressão linear foi realizado e as etapas que descrevem o procedimento estão descritas no item 4.3.1 do capítulo 4 deste trabalho. Após a identificação desses parâmetros, os mesmos alimentam a rotina que gera 10.000 previsões estocásticas. Os seguintes passos foram seguidos para a previsão de vida segundo esse critério:

- a) Inicialmente, a curva de Wöhler que caracteriza o comportamento do material, $\sigma_a - N$ e a curva do componente mecânico com a presença do entalhe agudo, $\sigma_{ag} - N$, ambas obtidas experimentalmente por Sá (2017), tiveram seus parâmetros e as incertezas relacionadas aos coeficientes das curvas estimados, Fig. 6.7 (a), (b) e (c);
- b) Utilizando um software de elementos finitos, obteve-se o campo de tensões na região próxima à raiz do concentrador de tensões, Fig. 6.7 (d);

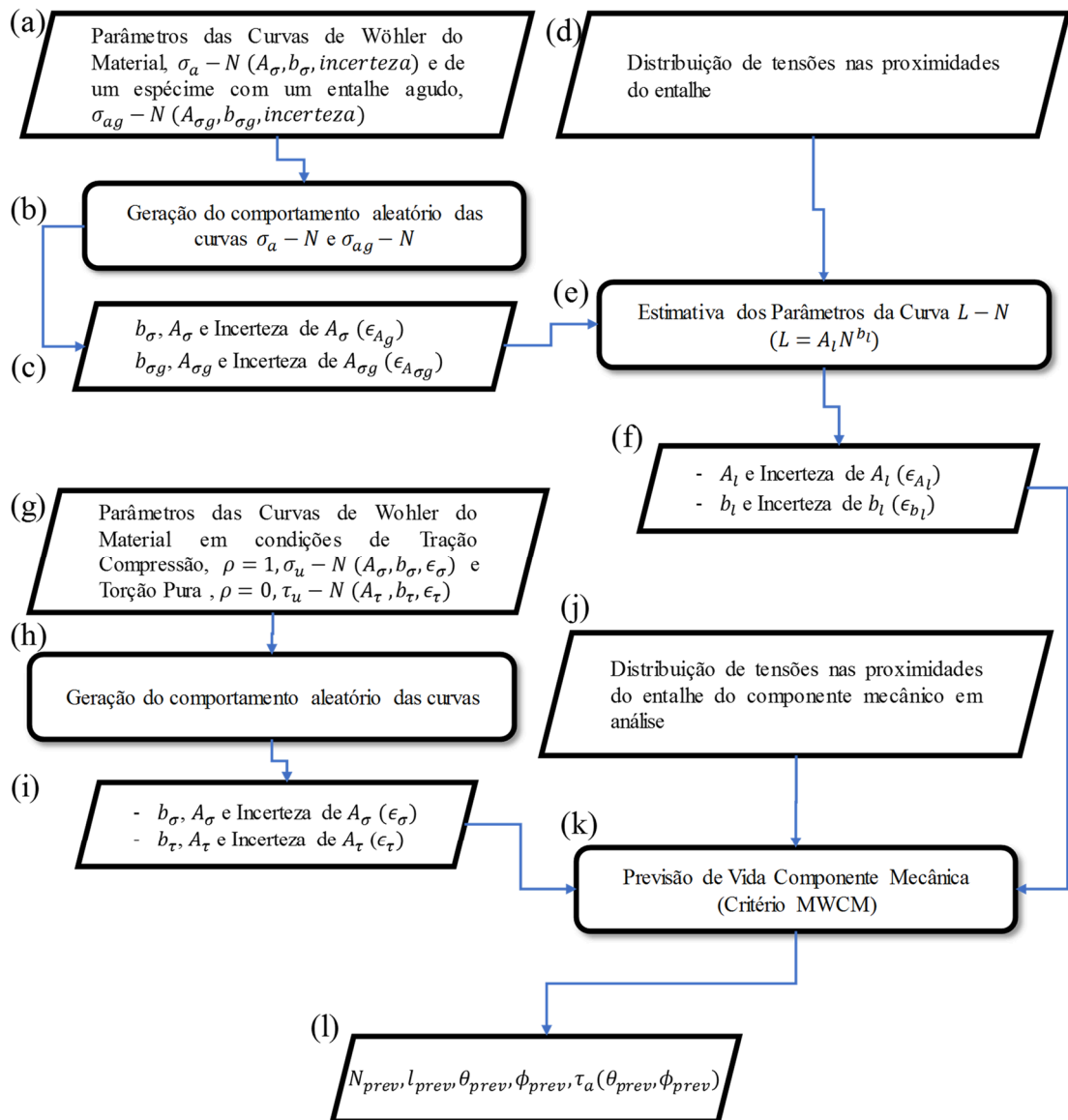


Figura 6.7 – Fluxograma do processo de estimativa de vida útil de fadiga (MWCM)

- c) Construiu-se a curva de distância crítica versus vida, $L_\sigma - N$, Fig. 6.7 (e), conforme o procedimento descrito no item 6.2.2;
- d) Por uma técnica de regressão não linear, obteve-se os valores de A_l e b_l , que tiveram seu comportamento aleatório estabelecido com suas respectivas incertezas, ϵ_{A_l} , e ϵ_{b_l} , Fig. 6.7 (f);
- e) Obtida a curva $L_\sigma - N$ e seus parâmetros, outras duas curvas são necessárias para o processo de previsão de vida, as curvas de Wöhler do Material em condições de tração-compressão $\sigma_u - N$ ($\rho = 1$) e torção pura $\tau_u - N$ ($\rho = 0$), Fig. 6.7 (g), ambas obtidas experimentalmente por Sá (2017);
- f) Os passos seguintes apresentados na Fig. 6.7, (h) e (i), são referentes a obtenção dos parâmetros aleatórios e determinísticos das curvas $\sigma_u - N$ e $\tau_u - N$;

- g) Com a distribuição de tensões nas proximidades do entalhe, Fig. 6.7 (j), e os parâmetros relativos às curvas $\sigma_u - N$, $\tau_u - N$ e $L_\sigma - N$, realizou-se a previsão de vida segundo o MWCM, cujos passos estão descritos em detalhes na seção 6.3.2;
- h) Desse processo de previsão de vida, foram obtidas 10000 previsões cuja mediana foi comparada com a vida determinística e com a obtida experimentalmente. Os resultados, que serão avaliados em relação ao seu comportamento na análise de sensibilidade, são: $N_{prev}, l_{prev}, \theta_{prev}, \phi_{prev}, \tau_a(\theta_{prev}, \phi_{prev})$, Fig. 6.7 (l).

Para previsão probabilística de vida considerando a Estratégia B, os passos são semelhantes, no entanto considera-se a curva $\tau - N$ para espécimes lisos e entalhados.

6.5 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE PARA AVALIAR O EFEITO DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E DETERMINÍSTICAS NO PROCESSO DE PREVISÃO DE VIDA

Um algoritmo foi criado com o intuito de avaliar a influência das variáveis de entrada do modelo nas variáveis de saída. Isso foi feito de modo a reduzir a incerteza do sistema através da identificação daqueles parâmetros que causam maior impacto e devem receber maior atenção.

A rotina recebe as v.a. de entrada e as de saída, que terão seu comportamento estimado na análise. As medidas estatísticas de sensibilidade são baseadas nos coeficientes de correlação de Pearson e/ou nos coeficientes de correlação da ordem de ranqueamento de Spearman. Dessa forma, estimou-se os coeficientes de correlação (ρ_j) de Pearson e de Spearman entre cada parâmetro de entrada (chamados de X_i) e os de saída (Y_i). Ao final, calculou-se o percentual de contribuição (α_j) de cada variável de entrada na dispersão de cada variável de saída, processo descrito na sessão 5.2.1 desse trabalho.

A análise da contribuição das variáveis de entrada em relação as de saída é exposta ainda com a apresentação de gráficos de dispersão. Essa metodologia foi escolhida nesse trabalho porque dá uma indicação visual direta da sensibilidade.

7 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Este capítulo apresenta os resultados obtidos com a metodologia de previsão de vida desenvolvida. Primeiramente, são apresentados os resultados obtidos experimentalmente por Sá (2017). Dados das curvas de distância crítica versus vida obtidas, $L - N$, são apresentados a seguir, de modo que essa curva é utilizada no processo de previsão de vida.

Toda análise numérica de previsão de vida foi realizada em termos determinísticos e probabilísticos e, para validar o modelo, essas previsões foram comparadas com aquelas obtidas experimentalmente por Sá (2017). Avaliou-se ainda qual das metodologias de previsão de vida utilizadas, SWT e MWCM, apresentou melhores estimativas em comparação com as vidas obtidas experimentalmente.

Em termos probabilísticos, as vidas estimadas tiveram ainda seu comportamento avaliado em termos da função de distribuição de probabilidade que melhor as representasse. As distribuições de vida, para combinações de esforços específicas, também foram avaliadas para determinar qual o método, SWT ou MWCM, apresentou melhores resultados.

Uma análise de sensibilidade foi realizada com os resultados da previsão de vida. Essa análise é muito importante, uma vez que determina quais, dentre as variáveis de entrada do modelo, apresentaram maior interferência na variável de saída vida.

7.1 CARACTERIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO DAS CURVAS DE FADIGA

Resultados experimentais de Sá (2017) foram utilizados para a validação e análise da metodologia proposta nesse estudo. Em seu trabalho, Sá (2017) avalia experimentalmente o comportamento de fadiga da liga Al 7050-T7451 sob condições de carregamento multiaxial em fase, estratégia essa que foi proposta anteriormente por Susmel e Taylor (2007). Detalhes sobre as propriedades mecânicas desse material e a metodologia experimental utilizadas podem ser pesquisadas no trabalho de Sá (2017).

Em seu programa experimental, Sá (2017) realizou ensaios para a caracterização do comportamento a fadiga da liga Al 7050-T7451 e para a calibração das curvas de distância crítica. A razão de carregamento utilizada foi $R = -1$. A Tabela A.1 (Anexo II) apresenta os resultados dos testes uniaxiais de fadiga realizados sob torção alternada, τ , e sob tração-compressão, σ , em relação ao número de ciclos necessários para falha, N_f , do componente. No

caso dos espécimes entalhados (V entalhado), essas tensões nominais foram calculadas em termos da área bruta da amostra.

A Tabela A.2 (Anexo II) apresenta os resultados de P_{SWT} em relação à vida a fadiga, N , sob condição de torção e tração-compressão, obtidas a partir dos resultados experimentais realizados com os espécimes não entalhados.

Conforme descrito na ASTM E739 (1998), a distribuição da vida de fadiga (em qualquer teste) é desconhecida. Com a finalidade de simplificar a análise (enquanto mantém os procedimentos estatísticos), é assumido que os logaritmos das vidas de fadiga são normalmente distribuídos, ou seja, a vida de fadiga é log-normalmente distribuída e a variância do log da vida é constante em todo o intervalo da variável independente usada no teste (a dispersão no $\log N$ é assumida como a mesma em níveis baixos e elevados de σ ou τ). Nesse sentido, para obter os parâmetros das curvas de fadiga, os valores da tensão nominal e de N , obtidos experimentalmente, foram linearizados através da aplicação da função logarítmica e um processo de regressão linear foi realizado (o processo é descrito no item 4.3 deste trabalho).

A síntese dos resultados gerados, realizada de acordo com o procedimento estatístico, estão resumidos na Tabelas 7.1 para os casos de torção e tração-compressão. Nesta tabela, $\log(A)$ e b representam os valores médios da distribuição gaussiana, o erro padrão dos coeficientes e expoentes também são apresentados.

Tabela 7.1 – Resumo dos resultados de regressão linear gerados para espécimes sem entalhe e V-entalhados sob carga de torção e tração-compressão

Tipo de Espécime	Condições de Carregamento	Nº Dados	Parâmetros da Curva de Wöhler				
			Log (A)	Erro Padrão	b	Erro Padrão	R^2
Liso	Torção	17	3,1135	0,0921	-0,1868	0,0152	0,9100
	Tração-Compressão	15	2,7054	0,1266	-0,0978	0,0234	0,5412
Entalhe em V	Torção	11	2,4406	0,1832	-0,1561	0,0296	0,7553
	Tração-Compressão	14	2,2112	0,1190	-0,1247	0,0230	0,7099

A Tabela 7.2 apresenta os parâmetros da curva P_{SWT} versus N , que também foram estimados usando uma técnica de regressão linear. Essa curva foi construída com base nos ensaios realizados por Sá (2017) em espécimes não entalhados submetidos a condições uniaxiais (torção e tração-compressão) e multiaxiais (combinação desses esforços). Dessa forma, os parâmetros apresentados nesta tabela consideram simultaneamente todos os ensaios propostos. A curva $P_{SWT} - N$ obtida pode ser observada na Fig. 7.1.

Tipo de Espécime	Condições de Carregamento	Nº Dados	Parâmetros da Curva de Wöhler				
			Log (A)	Erro Padrão	b	Erro Padrão	R ²
Liso	Torção e Tração-Compressão	42	1,1923	0,1543	-0.3274	0,0267	0,7902

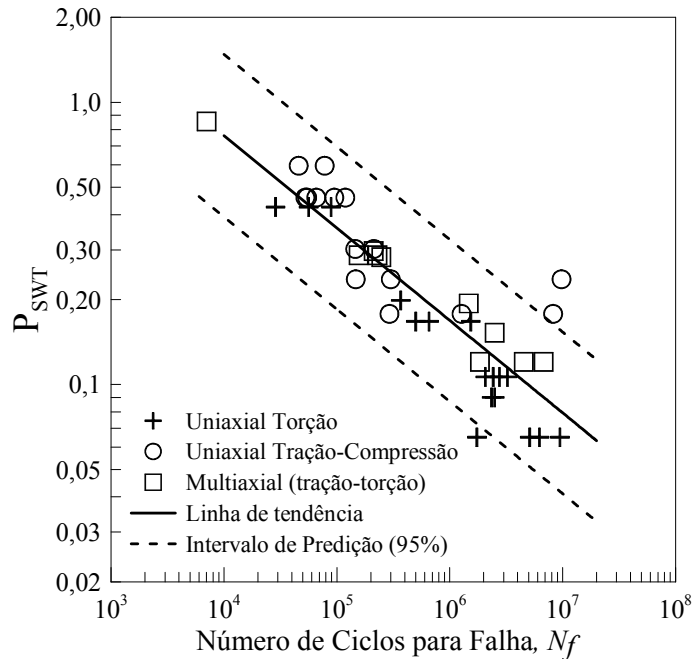


Figura 7.1 – Relação entre vida em fadiga, N , e P_{SWT} (sob condições uni e multiaxiais)

A equação que descreve o modelo de regressão linear utilizado neste trabalho tem a forma $y = A + bx + \epsilon$, que apresenta a existência de um desvio ou erro aleatório, ϵ . Esse desvio aleatório indica que, para um dado x fixo, a variável y difere de seu valor esperado de uma quantidade aleatória, que é o valor de ϵ .

Neste trabalho, o modelo de regressão linear representa as curvas de fadiga, $y = \log(\tau/\sigma/P_{SWT})$, $A = \log A$, $b = b$ e $x = \log N_f$, desse modo, considerou-se que a incerteza de y é uma distribuição com média $\log(A)$ e desvio padrão ϵ . Esse desvio indica que os valores de A podem estar acima da reta de regressão real ($\epsilon > 0$) ou abaixo desta ($\epsilon < 0$) e foi obtido pela Eq. (7.1). Os valores relacionados às incertezas para cada uma das curvas de Wöhler estão dispostos na Tabela 7.3.

$$\epsilon = \sqrt{QME \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})(x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right)} \quad (7.1)$$

Tabela 7.3 – Resumo das Incertezas relacionadas aos coeficientes das curvas de Wöhler

Curva	Média	Desvio Padrão ϵ
$\sigma_a = A_\sigma N_f^{b_\sigma}$	$\log A_\sigma$	0.025
$\tau_a = A_\tau N_f^{b_\tau}$	$\log A_\tau$	0.015
$\sigma_{ag} = A_{\sigma g} N_f^{b_{\sigma g}}$	$\log A_{\sigma g}$	0.031
$\tau_{ag} = A_{\tau g} N_f^{b_{\tau g}}$	$\log A_{\tau g}$	0.025
$P_{SWT} = A_{P_{SWT}} N_f^{b_{P_{SWT}}}$	$\log A_{P_{SWT}}$	0.031

7.2 COMPORTAMENTO DA CURVA DE DISTÂNCIA CRÍTICA VERSUS VIDA

Tendo definido o comportamento a fadiga da liga Al 7050-T7451, através dos ensaios realizados por Sá (2017), e determinado o campo de tensões na região próxima à raiz do entalhe, procedeu-se a calibração das curvas de distância crítica versus vida, $L - N$.

Para a construção da curva $L - N$, a rotina foi alimentada com os parâmetros das curvas de fadiga, obtidos por regressão linear e apresentados nas Tabelas 7.1 e 7.2. Foram construídas um total de quatro curvas de distância crítica versus vida, para cada combinação de esforços, considerando dois critérios distintos. O primeiro critério foi o modo de falha: tensão principal, no qual se utilizou o parâmetro SWT, e tensão cisalhante, onde o critério adotado foi o MWCM. O segundo critério adotado foi a condição de carregamento do ensaio, de modo que para o modelo SWT, tem-se: tração-compressão (denominada Estratégia A – $L_{SWT}(\sigma) - N_f$) e torção alternada (Estratégia B – $L_{SWT}(\tau) - N_f$), e de modo similar para o critério MWCM: tração-compressão (Estratégia A – $L_\sigma - N_f$) e torção (Estratégia B – $L_\tau - N_f$). A metodologia para construção da curva de distância crítica versus vida (baseada no parâmetro SWT) está descrita no item 6.2.1 do capítulo 6 deste trabalho. Neste mesmo capítulo, o item 6.2.2 descreve a metodologia para obtenção desta curva em termos do critério MWCM.

Na Tabela 7.4 são apresentados os parâmetros das curvas de distância crítica versus vida obtidos a partir do processo de calibração dos modelos. Esses parâmetros são apresentados em termos determinísticos e probabilísticos, o que se deve ao fato deste trabalho realizar a previsão de vida segundo esses dois modelos. Nesta tabela, são apresentados ainda a média dos parâmetros obtidos e os coeficientes de variação percentual em relação às médias, C.V (%).

Tabela 7.4 – Síntese dos parâmetros estimados para as curvas de distância crítica versus vida

Modelo	Parametro de interesse	Curva de Fadiga		Identificação do Modelo	Estimativa dos Parâmetros							
		Material	Espécime Entalhado		Determinístico		Probabilísticos Mediana		Média		C.V. (%)	
					A	b	A	b	A	b	A	b
P_{SWT}	P_{SWT}	Todos os	$\sigma_{ag} - N$	$L_{P_{SWT}}(\sigma) \times N$	0,159	0,074	0,159	0,074	0,160	0,075	12,9	2,2
		Ensaio	$\tau_{ag} - N$	$L_{P_{SWT}}(\tau) \times N$	0,297	0,017	0,294	0,015	0,302	0,016	14,7	11,6
Clássico	σ_{1a}	$\sigma_a - N$	$\sigma_{ag} - N$	$L_{\sigma} \times N$	0,646	-0,050	0,649	-0,050	0,660	-0,505	18,1	1,5
	τ_a	$\tau_a - N$	$\tau_{ag} - N$	$L_{\tau} \times N$	0,205	0,061	0,205	0,061	0,207	0,061	15,3	2,6

As curvas de distância crítica *versus* vida obtidas, considerando a faixa de 10^4 a 2.10^6 vidas, com base no parâmetro P_{SWT} são apresentadas na Fig. 7.2. Nesta figura, a linha contínua representa a mediana dos dados enquanto as linhas tracejadas representam o intervalo de predição de L , onde a curva superior é de 95% e a inferior de 5%. A curva $L_{SWT}(\sigma) - N$, em (a), foi obtida através dos testes em tração-compressão, Estratégia A, e a curva $L_{SWT}(\tau) - N$, em (b) com os dados dos testes em torção, Estratégia B.

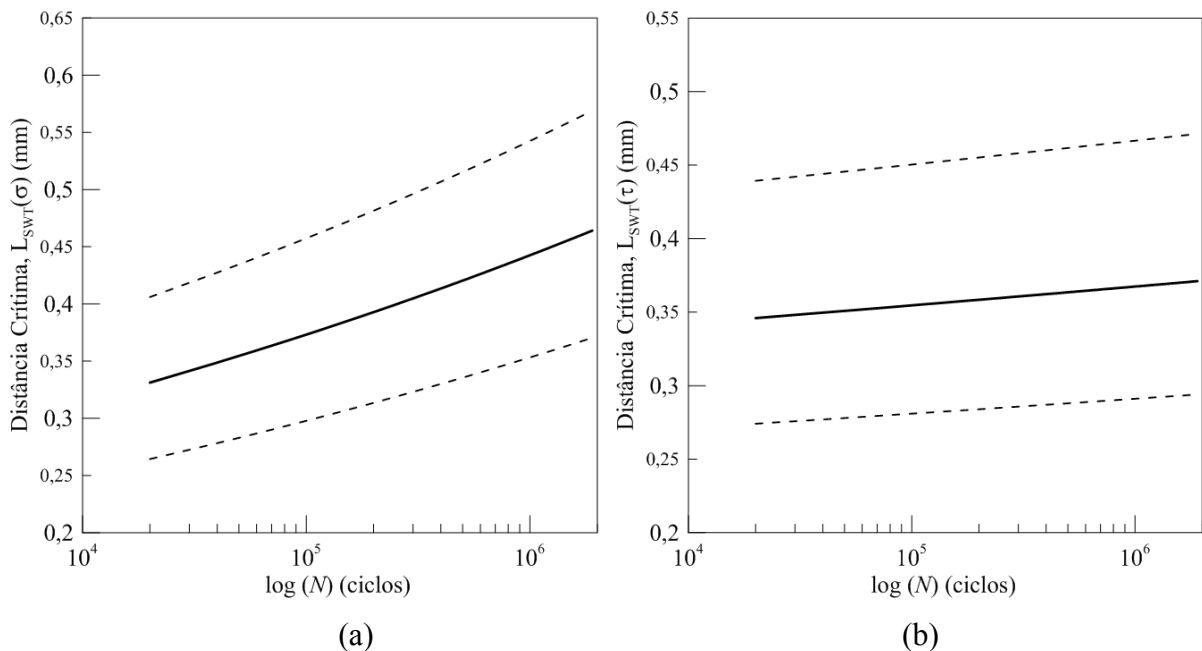


Figura 7.2 – Curvas de distância crítica *versus* vida para o modelo SWT: a) $L_{SWT}(\sigma) - N$ (Estratégia A), b) $L_{SWT}(\tau) - N$ (Estratégia B)

Para o MWCM, as curvas de $L - N$ obtidas, nesta mesma faixa de vida, de 10^4 a 2.10^6 vidas, podem ser vistas na Fig. 7.3. Nesta figura, a curva $L_{\sigma} - N$, em (a), foi obtida pela Estratégia A, e a curva $L_{\tau} - N$, em (b) pela Estratégia B. As curvas $L - N$ apresentadas nas Figs. 7.2 e 7.3 foram construídas considerando o comportamento aleatório de A_l , e determinístico de b_l , obtido com base na mediana dos valores de b_l para as três curvas apresentadas.

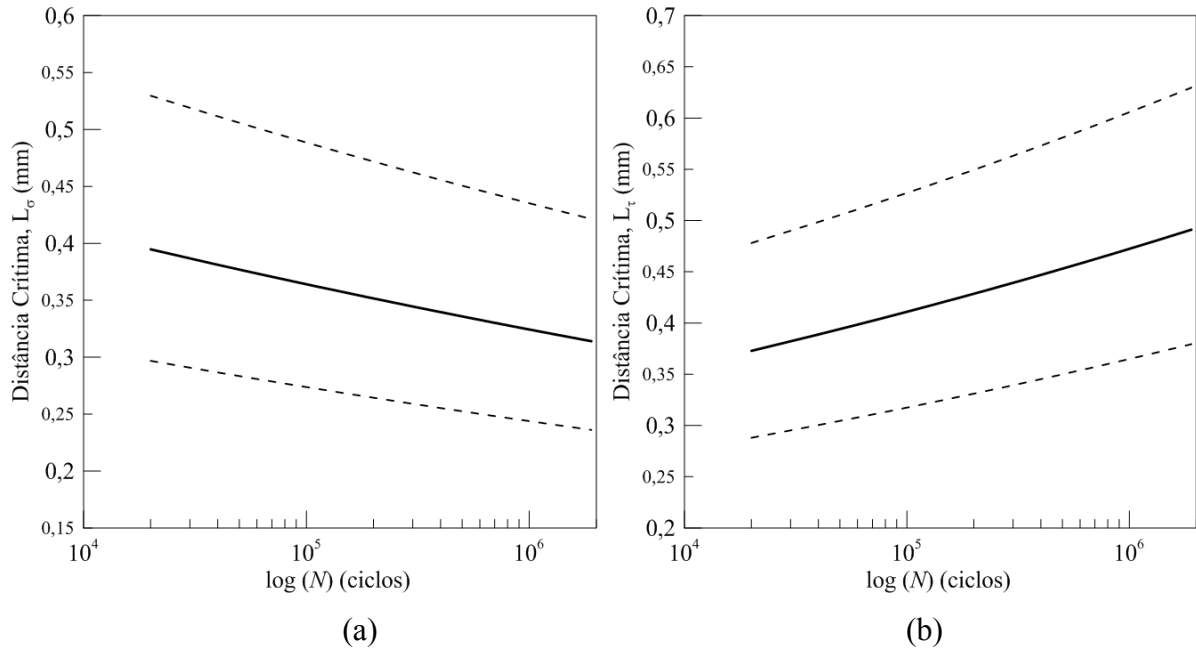


Figura 7.3 – Curvas de distância crítica *versus* vida para o MWCM: a) $L_\sigma - N$ (Estratégia A), b) $L_\tau - N$ (Estratégia B)

Analisando as curvas obtidas e apresentadas nas Figs. 7.2 e 7.3, é possível observar que as curvas apresentadas para a Estratégia A, calibrada com base em ensaios de tração-compressão, apresentaram um comportamento diferente para os modelos analisados, de modo que para o modelo SWT essa curva apresenta um aspecto ascendente com o aumento da vida e para o MWCM esse aspecto é descendente. Para a Estratégia B, calibrada com ensaios em torção, as curvas apresentam um aspecto ascendente com o aumento da vida.

Para avaliar o comportamento das curvas $L - N$ obtidas, a função distribuição de probabilidade (F.D.P) dos parâmetros A_l e b_l foram traçados, de modo que, o tamanho das amostras utilizadas foi de 35.000 pontos. A F.D.P para os coeficientes A_l podem ser visualizados na Fig. 7.4 para as curvas $L_{SWT}(\sigma) - N$ (em (a)) e $L_{SWT}(\tau) - N$ (em (b)), referentes ao modelo SWT, e para as curvas $L_\sigma - N$ (em (c)) e $L_\tau - N$ (em (d)), referentes ao MWCM.

Para os coeficientes das curvas (b_l), a função distribuição de probabilidade (F.D.P) são apresentados na Fig. 7.5 da seguinte forma: em (a) para a curva $L_{SWT}(\sigma) - N$ e em (b) para a curva $L_{SWT}(\tau) - N$, referentes ao modelo SWT, em (c) para a curva $L_\sigma - N$ e em (d) para $L_\tau - N$, referentes ao MWCM.

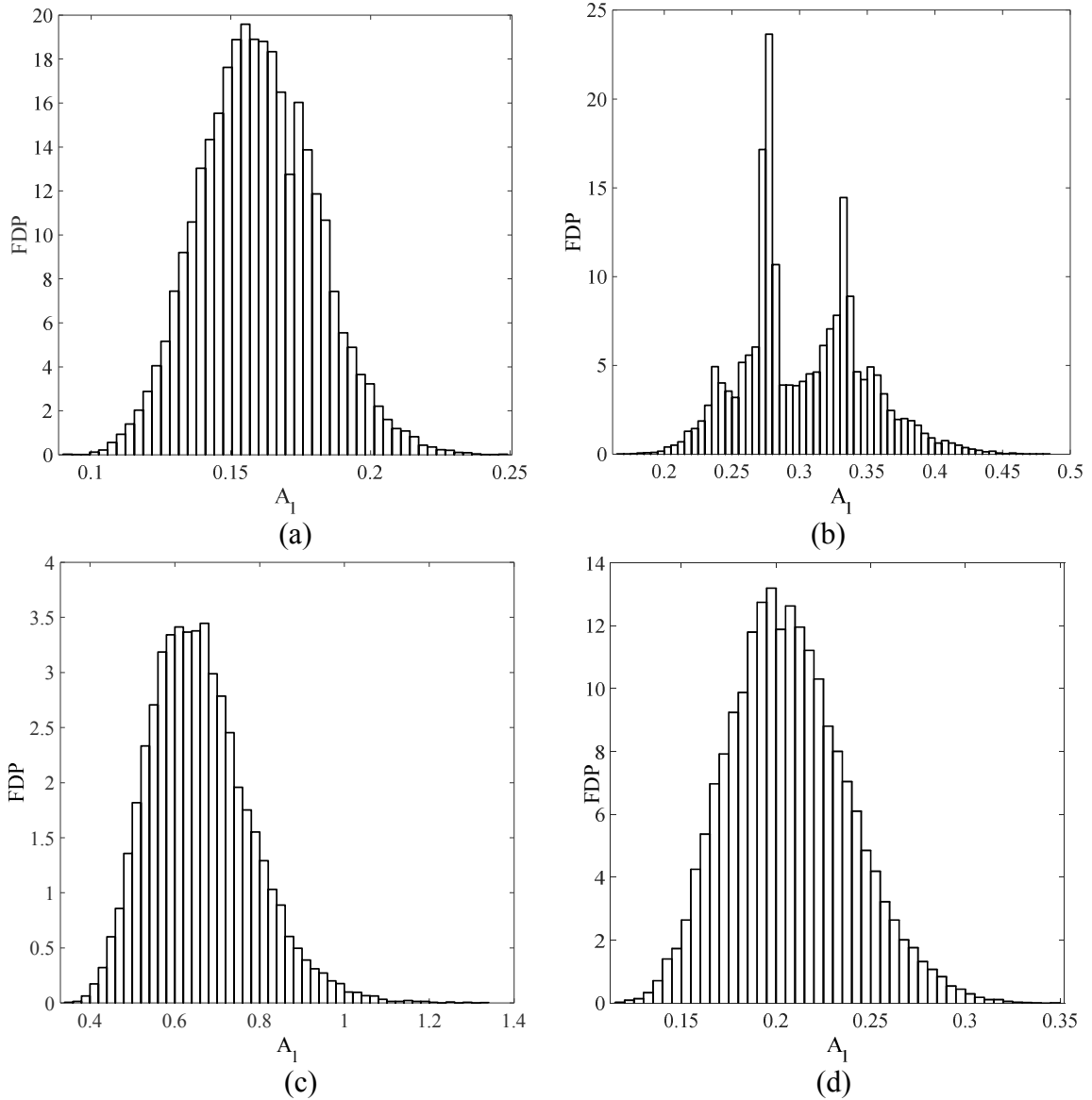
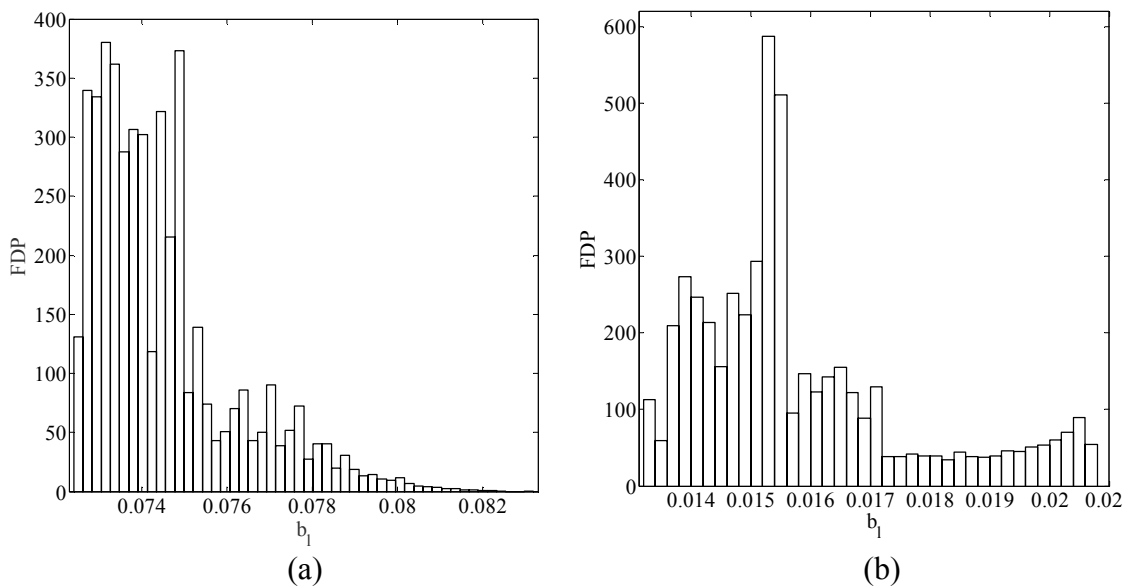


Figura 7.4 – F.D.P dos coeficientes A_1 da curva $L - N$: a) $L_{SWT}(\sigma) - N$, b) $L_{SWT}(\tau) - N$, c) $L_\sigma - N$ e d) $L_\tau - N$



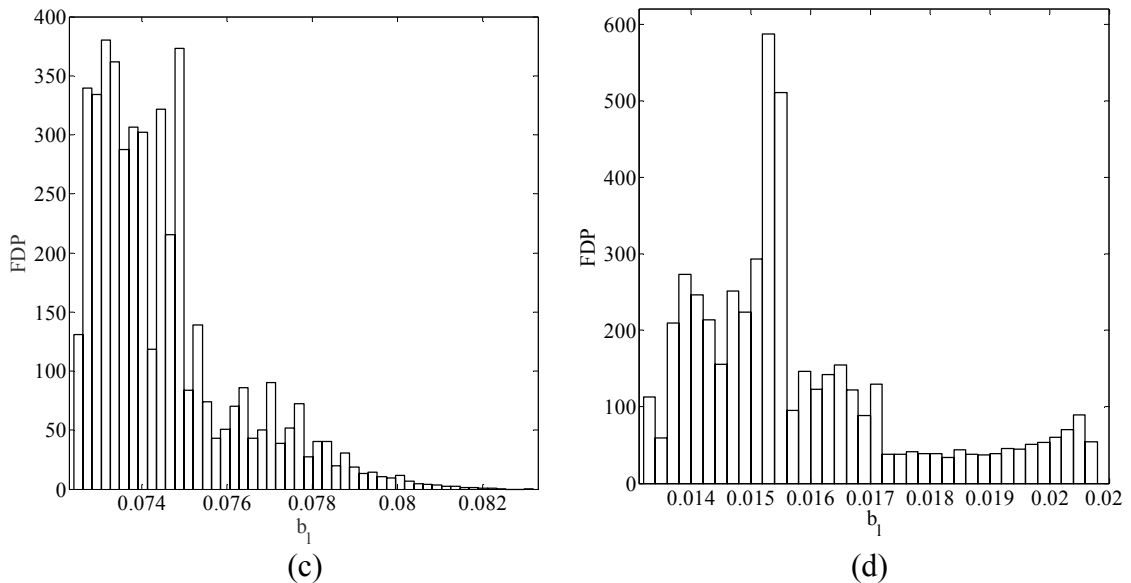


Figura 7.5 – F.D.P dos expoentes b_l da curva $L - N$: a) $L_{SWT}(\sigma) - N$, b) $L_{SWT}(\tau) - N$, c) $L_\sigma - N$ e d) $L_\tau - N$

A análise da distribuição dos coeficientes A_l para cada uma dessas curvas permite a observação de que, para a curva $L_{SWT}(\tau) - N$ em (b), o comportamento obtido não está dentro do esperado, de modo que se apresentou muito diferentes daquele para as demais curvas. Em relação ao expoente dessas curvas, esse comportamento não uniforme foi observado em todas as F.D.P para ambos os modelos, SWT e MWCM.

Na seção 3.3.2 desse trabalho, uma relação linear foi desenvolvida para avaliar o comportamento do coeficiente e do expoente da curva $L - N$ em relação aos parâmetros das curvas de calibração que são utilizadas na sua construção. De forma geral, o resultado dessa análise mostrou que b_l , não se comporta de forma constante quando a variação de σ_{1a} é analisada com um comportamento contínuo por partes, Eq. (3.33). Dessa forma, quando a análise dessa resposta é realizada considerando pequenos intervalos de l , b_l pode apresentar uma dispersão significativa. Outra importante consideração é que, para as F.D.P de b_l obtidas, o intervalo analisado é muito pequeno, ou seja, não ocorre uma grande variação nesses valores.

Para as F.D.P apresentadas nas Figs. 7.4 e 7.5, foram testadas as distribuições de probabilidade normal, lognormal e GVE, no entanto, os testes de hipóteses realizados utilizando essas distribuições foram rejeitados.

7.3 ESTIMATIVA DE VIDA DE FADIGA EM COMPONENTES ENTALHADOS TESTADOS EM CONDIÇÕES DE CARGA MULTIAXIAL

Para caracterização do comportamento a fadiga da liga 7050-T7451, Sá (2017) realizou uma série de ensaios em condições de carregamentos multiaxiais (cargas combinadas de torção

e tração-compressão). As vidas estimadas (previsões determinísticas) foram calculadas considerando o procedimento presente na seção 6.3.1 para o modelo SWT e na seção 6.3.2 para o MWCM. As previsões probabilísticas da vida foram obtidas conforme descrito nas seções 6.4.1 e 6.4.2 para o modelo SWT e o MWCM, respectivamente. O tamanho amostral utilizado nas previsões probabilísticas foi de 10.000 previsões.

A Tabela 7.5 apresenta as previsões determinísticas e a mediana das previsões probabilísticas obtidas para o modelo SWT. Os resultados são apresentados para os dois critérios utilizados na análise: a Estratégia A, construída com base nos resultados dos testes realizados em tração-compressão, e a Estratégia B, que utiliza os dados dos testes realizados em torção. Nesta tabela também são apresentados os resultados obtidos experimentalmente por Sá (2017). Para o modelo MWCM, as vidas previstas pelos modelos determinísticos e probabilísticos (mediana), considerando as Estratégias A e B, são apresentados na Tabela 7.6.

Tabela 7.5 – Dados da vida para os carregamentos multiaxiais em análise considerando o modelo SWT

σ_{ag} [MPa]	τ_{ag} [MPa]	Vida Experimental	Previsão Probabilística (Mediana)		Previsão Determinística																																																																											
			Estratégia A	Estratégia B	Estratégia A	Estratégia B																																																																										
11,0	22,0	5,84E+06	3,30E+06	1,56E+06	3,35E+06	1,53E+06																																																																										
		3,34E+06					13,0	26,0	3,28E+05	9,03E+05	5,28E+05	8,96E+05	5,23E+05	7,24E+05	16,0	32,0	2,32E+05	1,74E+05	1,40E+05	1,75E+05	1,38E+05	2,42E+05	18,0	36,0	3,19E+04	6,98E+04	6,55E+04	6,91E+04	6,52E+04	1,04E+05	16,0	20,0	5,74E+06	2,32E+06	1,16E+06	2,32E+06	1,14E+06	3,45E+06	18,4	23,0	2,11E+06	7,60E+05	4,76E+05	7,75E+05	4,65E+04	1,76E+06	25,6	32,0	1,13E+05	5,92E+04	5,69E+04	5,76E+04	5,63E+04	9,91E+04	25,2	12,6	8,02E+05	2,73E+06	1,35E+06	2,77E+06	1,34E+06	2,16E+06	30,0	15,0	1,84E+05	6,94E+05	4,44E+05	7,11E+05	4,36E+05	8,63E+05	36,6	18,3	8,82E+04	1,50E+05	1,24E+05	1,49E+05	1,21E+05	9,11E+04	38,0	19,0
13,0	26,0	3,28E+05	9,03E+05	5,28E+05	8,96E+05	5,23E+05																																																																										
		7,24E+05					16,0	32,0	2,32E+05	1,74E+05	1,40E+05	1,75E+05	1,38E+05	2,42E+05	18,0	36,0	3,19E+04	6,98E+04	6,55E+04	6,91E+04	6,52E+04	1,04E+05	16,0	20,0	5,74E+06	2,32E+06	1,16E+06	2,32E+06	1,14E+06	3,45E+06	18,4	23,0	2,11E+06	7,60E+05	4,76E+05	7,75E+05	4,65E+04	1,76E+06	25,6	32,0	1,13E+05	5,92E+04	5,69E+04	5,76E+04	5,63E+04	9,91E+04	25,2	12,6	8,02E+05	2,73E+06	1,35E+06	2,77E+06	1,34E+06	2,16E+06	30,0	15,0	1,84E+05	6,94E+05	4,44E+05	7,11E+05	4,36E+05	8,63E+05	36,6	18,3	8,82E+04	1,50E+05	1,24E+05	1,49E+05	1,21E+05	9,11E+04	38,0	19,0	9,11E+04	1,12E+05	9,74E+04	1,11E+05	9,59E+04	6,00E+04		
16,0	32,0	2,32E+05	1,74E+05	1,40E+05	1,75E+05	1,38E+05																																																																										
		2,42E+05					18,0	36,0	3,19E+04	6,98E+04	6,55E+04	6,91E+04	6,52E+04	1,04E+05	16,0	20,0	5,74E+06	2,32E+06	1,16E+06	2,32E+06	1,14E+06	3,45E+06	18,4	23,0	2,11E+06	7,60E+05	4,76E+05	7,75E+05	4,65E+04	1,76E+06	25,6	32,0	1,13E+05	5,92E+04	5,69E+04	5,76E+04	5,63E+04	9,91E+04	25,2	12,6	8,02E+05	2,73E+06	1,35E+06	2,77E+06	1,34E+06	2,16E+06	30,0	15,0	1,84E+05	6,94E+05	4,44E+05	7,11E+05	4,36E+05	8,63E+05	36,6	18,3	8,82E+04	1,50E+05	1,24E+05	1,49E+05	1,21E+05	9,11E+04	38,0	19,0	9,11E+04	1,12E+05	9,74E+04	1,11E+05	9,59E+04	6,00E+04										
18,0	36,0	3,19E+04	6,98E+04	6,55E+04	6,91E+04	6,52E+04																																																																										
		1,04E+05					16,0	20,0	5,74E+06	2,32E+06	1,16E+06	2,32E+06	1,14E+06	3,45E+06	18,4	23,0	2,11E+06	7,60E+05	4,76E+05	7,75E+05	4,65E+04	1,76E+06	25,6	32,0	1,13E+05	5,92E+04	5,69E+04	5,76E+04	5,63E+04	9,91E+04	25,2	12,6	8,02E+05	2,73E+06	1,35E+06	2,77E+06	1,34E+06	2,16E+06	30,0	15,0	1,84E+05	6,94E+05	4,44E+05	7,11E+05	4,36E+05	8,63E+05	36,6	18,3	8,82E+04	1,50E+05	1,24E+05	1,49E+05	1,21E+05	9,11E+04	38,0	19,0	9,11E+04	1,12E+05	9,74E+04	1,11E+05	9,59E+04	6,00E+04																		
16,0	20,0	5,74E+06	2,32E+06	1,16E+06	2,32E+06	1,14E+06																																																																										
		3,45E+06					18,4	23,0	2,11E+06	7,60E+05	4,76E+05	7,75E+05	4,65E+04	1,76E+06	25,6	32,0	1,13E+05	5,92E+04	5,69E+04	5,76E+04	5,63E+04	9,91E+04	25,2	12,6	8,02E+05	2,73E+06	1,35E+06	2,77E+06	1,34E+06	2,16E+06	30,0	15,0	1,84E+05	6,94E+05	4,44E+05	7,11E+05	4,36E+05	8,63E+05	36,6	18,3	8,82E+04	1,50E+05	1,24E+05	1,49E+05	1,21E+05	9,11E+04	38,0	19,0	9,11E+04	1,12E+05	9,74E+04	1,11E+05	9,59E+04	6,00E+04																										
18,4	23,0	2,11E+06	7,60E+05	4,76E+05	7,75E+05	4,65E+04																																																																										
		1,76E+06					25,6	32,0	1,13E+05	5,92E+04	5,69E+04	5,76E+04	5,63E+04	9,91E+04	25,2	12,6	8,02E+05	2,73E+06	1,35E+06	2,77E+06	1,34E+06	2,16E+06	30,0	15,0	1,84E+05	6,94E+05	4,44E+05	7,11E+05	4,36E+05	8,63E+05	36,6	18,3	8,82E+04	1,50E+05	1,24E+05	1,49E+05	1,21E+05	9,11E+04	38,0	19,0	9,11E+04	1,12E+05	9,74E+04	1,11E+05	9,59E+04	6,00E+04																																		
25,6	32,0	1,13E+05	5,92E+04	5,69E+04	5,76E+04	5,63E+04																																																																										
		9,91E+04					25,2	12,6	8,02E+05	2,73E+06	1,35E+06	2,77E+06	1,34E+06	2,16E+06	30,0	15,0	1,84E+05	6,94E+05	4,44E+05	7,11E+05	4,36E+05	8,63E+05	36,6	18,3	8,82E+04	1,50E+05	1,24E+05	1,49E+05	1,21E+05	9,11E+04	38,0	19,0	9,11E+04	1,12E+05	9,74E+04	1,11E+05	9,59E+04	6,00E+04																																										
25,2	12,6	8,02E+05	2,73E+06	1,35E+06	2,77E+06	1,34E+06																																																																										
		2,16E+06					30,0	15,0	1,84E+05	6,94E+05	4,44E+05	7,11E+05	4,36E+05	8,63E+05	36,6	18,3	8,82E+04	1,50E+05	1,24E+05	1,49E+05	1,21E+05	9,11E+04	38,0	19,0	9,11E+04	1,12E+05	9,74E+04	1,11E+05	9,59E+04	6,00E+04																																																		
30,0	15,0	1,84E+05	6,94E+05	4,44E+05	7,11E+05	4,36E+05																																																																										
		8,63E+05					36,6	18,3	8,82E+04	1,50E+05	1,24E+05	1,49E+05	1,21E+05	9,11E+04	38,0	19,0	9,11E+04	1,12E+05	9,74E+04	1,11E+05	9,59E+04	6,00E+04																																																										
36,6	18,3	8,82E+04	1,50E+05	1,24E+05	1,49E+05	1,21E+05																																																																										
		9,11E+04					38,0	19,0	9,11E+04	1,12E+05	9,74E+04	1,11E+05	9,59E+04	6,00E+04																																																																		
38,0	19,0	9,11E+04	1,12E+05	9,74E+04	1,11E+05	9,59E+04																																																																										
		6,00E+04																																																																														

Tabela 7.6 – Dados da vida para os carregamentos multiaxiais em análise considerando o MWCM

σ_{ag} [MPa]	τ_{ag} [MPa]	Vida Experimental	Previsão Probabilística (Mediana)		Previsão Determinística	
			Estratégia A	Estratégia B	Estratégia A	Estratégia B
11,0	22,0	5,84E+06	1,48E+06	7,46E+06	1,47E+06	1,01E+07
		3,34E+06				
13,0	26,0	3,28E+05	5,91E+05	1,99E+06	6,02E+05	3,58E+06
		7,24E+05				
16,0	32,0	2,32E+05	1,88E+05	3,96E+05	1,87E+05	9,83E+05
		2,42E+05				
18,0	36,0	3,19E+04	9,80E+04	1,47E+05	9,70E+04	3,12E+05
		1,04E+05				
16,0	20,0	5,74E+06	1,71E+06	1,15E+07	1,67E+06	1,46E+07
		3,45E+06				
18,4	23,0	2,11E+06	7,45E+05	3,22E+06	7,49E+05	5,51E+06
		1,76E+06				
25,6	32,0	1,13E+05	9,67E+04	1,65E+05	9,32E+04	5,56E+05
		9,91E+04				
25,2	12,6	8,02E+05	4,31E+06	7,21E+08	4,43E+06	1,89E+08
		2,16E+06				
30,0	15,0	1,84E+05	8,45E+05	8,35E+06	8,96E+04	1,51E+06
		8,63E+05				
36,6	18,3	8,82E+04	1,28E+05	3,59E+05	1,13E+05	2,13E+06
38,0	19,0	9,11E+04	8,90E+04	2,13E+05	8,66E+05	2,43E+07
		6,00E+04				

A fim de realizar uma análise comparativa dos dados expressos nas Tabelas 7.5 e 7.6, os diagramas vida de fadiga observada *versus* vida de fadiga estimada são apresentados. A Fig. 7.6 apresenta este diagrama considerando as vidas estimadas pelo modelo determinístico, para o modelo SWT (em (a)) e para MWCM (em (b)). Para as vidas estimadas pelo modelo probabilístico, o diagrama é apresentado na Fig. 7.7 para o modelo SWT (em (a)) e para MWCM (em (b)).

Avaliando a Fig. 7.6, em relação a proporção de previsões que se encontram numa faixa de variação da ordem de ± 3 vidas em relação a curva de correlação perfeita, segundo o modelo SWT (em (a)), verifica-se que 81,8% das previsões considerando a Estratégia A se encontram nessa faixa, enquanto cerca de 90,9% estão nesta mesma faixa considerando a Estratégia B. No entanto, para as previsões obtidas para o MWCM (em (b)), a Estratégia A apresentou 72,7% de concordância com as vidas experimentais, enquanto a Estratégia B somente 22,7%.

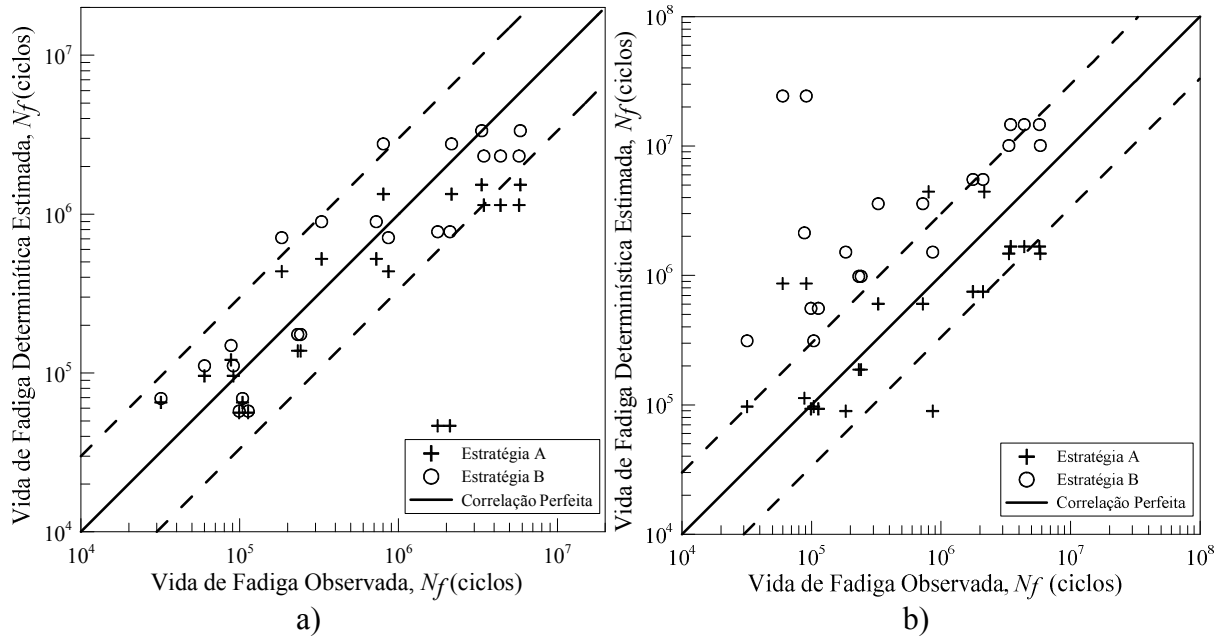


Figura 7.6 – Diagrama vida experimental *versus* vida determinística estimada considerando as Estratégias A e B: (a) Modelo SWT e (b) MWCM

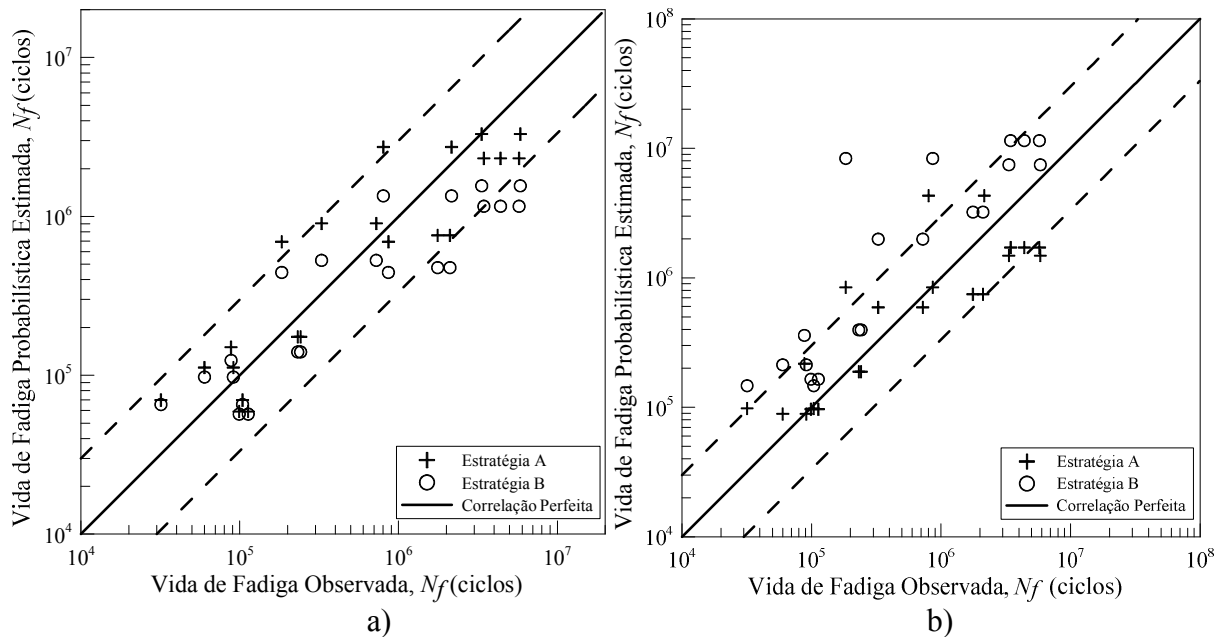


Figura 7.7 – Diagrama vida experimental *versus* vida probabilística estimada considerando as Estratégias A e B: (a) Modelo SWT e (b) MWCM

Em relações às previsões probabilísticas, Fig. 7.7, para o modelo SWT (em (a)), 90,9% das vidas estimadas pela Estratégia A se encontram na faixa de variação da ordem de ± 3 vidas em relação a curva de correlação perfeita. Para a Estratégia B, cerca de 72,7% das vidas estimadas estão nessa faixa. Considerando o MWCM (em (b)), das vidas estimadas pela Estratégia A, 81,8% encontram-se nessa faixa, pela Estratégia B esse valor é de 59,1%.

De forma geral, é possível afirmar que as previsões probabilísticas representam melhor as vidas observadas experimentalmente do que as determinísticas. Realizando uma comparação

entre as Figs. 7.6 e 7.7, é possível observar que as previsões para o modelo SWT, determinísticas e probabilísticas, apresentaram resultados melhores que as previsões para o MWCM. Em termos determinísticos, o modelo SWT apresentou um percentual de 86,3%, de todas as vidas, em concordância com as vidas obtidas experimentalmente, enquanto, para o MWCM, esse valor foi de 47,7%. Considerando a análise probabilística, esse percentual foi de 81,8% para o modelo SWT e 70,45% para o MWCM. A diferença observada na resposta dos modelos, pode indicar que o modelo de previsão de vida desenvolvida com base no parâmetro SWT seja mais indicado para descrever o comportamento da vida de fadiga da liga em estudo.

7.4 ANÁLISE DA DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE DAS PREVISÕES DE VIDA

As previsões probabilísticas de vida, obtidas considerando os espécimes sujeitos a carregamentos multiaxiais, tiveram seu comportamento analisado. O conjunto amostral, com 10.000 previsões estocásticas, foi avaliado em relação a função de distribuição de probabilidade que melhor representasse o comportamento dos dados gerados. A medida utilizada para indicar se os dados são ou não representados por dada distribuição foi o P-value. O P-value (P) é frequentemente utilizado para a interpretação do resultado do teste de hipótese realizado em trabalhos científicos, neste trabalho essa medida foi avaliada da seguinte forma:

- $P \leq 5\%$: evidência muito forte contra H_0 – hipótese rejeitada;
- $P > 5\%$: pouca ou nenhuma evidência real contra H_0 – hipótese aceita.

A Tabela 7.7 apresenta os P-value obtidos para as Estratégias A e B propostas segundo o modelo SWT para todas as combinações de σ_{ag} e τ_{ag} analisadas neste trabalho.

Avaliando os resultados para o modelo SWT, apresentados na Tabela 7.7, em termos percentuais, 72,7% dos casos foram representados pela distribuição lognormal na Estratégia A, enquanto para a Estratégia B esse valor foi de 100%. A distribuição B-S representou 9,1% dos dados gerados pela Estratégia A e 100% dos dados obtidos pela Estratégia B. Em relação à distribuição GVE, 27,3% dos dados gerados pela Estratégia A foram representadas por essa distribuição, enquanto na Estratégia B esse valor foi de 72,7%. A distribuição de Weibull não foi representativa de nenhuma das combinações de esforços para nenhuma das estratégias avaliadas. Observando as porcentagens obtidas, é possível afirmar que a distribuição lognormal foi a mais representativa dos dados gerados, uma vez essa hipótese foi aceita na maioria dos casos. Outra importante observação, é que os dados obtidos pela Estratégia B foram bem representados por três distribuições, lognormal, B-S e GVE, enquanto os dados gerados pela Estratégia A somente pela distribuição lognormal.

Tabela 7.7 – Estudo da FDP que melhor representa o comportamento dos dados gerados para o modelo SWT

σ_{ag} [MPa]	τ_{ag} [MPa]	P-value (SWT)							
		Estratégia A				Estratégia B			
		Lognormal	B-S	GVE	Weibull	Lognormal	B-S	GVE	Weibull
11,0	22,0	7,9%	12,6%	0,3%	0%	34,4%	31,0%	19,2%	0%
13,0	26,0	5,0%	0%	1,0%	0%	46,1%	47,5%	0,4%	0%
16,0	32,0	3,8%	0,2%	1,2%	0%	96,9%	79,9%	11,8%	0%
18,0	36,0	8,6%	0%	1,4%	0%	28,2%	51,1%	11,5%	0%
16,0	20,0	6,5%	0%	11,0%	0%	43,4%	59,7%	2,0%	0%
18,4	23,0	1,2%	0%	1,0%	0%	45,0%	31,7%	6,0%	0%
25,6	32,0	4,9%	0%	5,6%	0%	86,8%	72,8%	8,7%	0%
25,2	12,6	30,1%	0,3%	7,7%	0%	62,6%	70,3%	5,1%	0%
30,0	15,0	12,2%	0,5%	3,1%	0%	71,8%	48,7%	7,4%	0%
36,6	18,3	11,4%	0,5%	1,7%	0%	35,0%	5,1%	22,3%	0%
38,0	19,0	9,2%	2,5%	3,6%	0%	64,8%	11,5%	4,6%	0%

De forma análoga, a Tabela 7.8 apresenta os P-value obtidos considerando as Estratégias A e B propostas para o MWCM, considerando as combinações de esforços σ_{ag} e τ_{ag} .

Tabela 7.8 – Estudo da FDP que melhor representa o comportamento dos dados gerados para o MWCM

σ_{ag} [MPa]	τ_{ag} [MPa]	P-value (MWCM)							
		Estratégia A				Estratégia B			
		Lognormal	B-S	GVE	Weibull	Lognormal	B-S	GVE	Weibull
11,0	22,0	58,7%	31,4%	9,2%	0%	86,3%	47,5%	1,9%	0%
13,0	26,0	83,8%	13,2%	30,7%	0%	96,2%	14,5%	6,5%	0%
16,0	32,0	23,8%	4,4%	18,1%	0%	69,8%	17,7%	3,6%	0%
18,0	36,0	75,5%	13,7%	23,1%	0%	0%	0%	0%	0%
16,0	20,0	37,7%	11,8%	3,8%	0%	70,7%	25,7%	0,1%	0%
18,4	23,0	16,1%	20,1%	0,8%	0%	83,7%	31,8%	0,9%	0%
25,6	32,0	0,3%	1,0%	0,1%	0%	19,9%	13,9%	0,1%	0%
25,2	12,6	53,2%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
30,0	15,0	55,9%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
36,6	18,3	81,9%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
38,0	19,0	97,5%	0%	0%	0%	12,8%	0%	0%	0%

Para o MWCM, os resultados apresentados na Tabela 7.8 mostram que, em termos percentuais, a distribuição lognormal foi representativa das vidas obtidas pela Estratégia A em 90,9% dos casos analisados, e pela Estratégia B em 63,6%. A distribuição B-S foi aceita em 45,4% dos dados obtidos pela Estratégia A e 54,5% dos dados gerados pela Estratégia B. Para esse modelo, a distribuição GVE não apresentou bons resultados, sendo representativa de 36,4% do total dos casos avaliados na Estratégia A e 9,1% na Estratégia B. Assim como ocorreu para o modelo SWT, a distribuição de Weibull não representou os dados gerados em nenhuma

das estratégias (A e B) utilizadas. De forma geral, também para o MWCM, a distribuição lognormal foi a que melhor representou as vidas estimadas probabilisticamente.

As distribuições lognormal, B-S e Weibull são comumente utilizadas para caracterizar modelos de distribuição de vida em fadiga, no entanto, para a análise realizada neste trabalho, somente a distribuição lognormal obteve resultados satisfatórios. A distribuição B-S somente foi representativa dos resultados obtidos pela Estratégia B do modelo SWT e obteve um resultado razoável para a Estratégia B do MWCM. A distribuição de Weibull foi rejeitada para todos os casos analisados.

7.4.1 Comparação entre as distribuições de vida para diferentes combinações de esforços

Três combinações de carregamento foram escolhidas para uma análise mais detalhada das distribuições de probabilidade que melhor se adequaram aos resultados. E, posteriormente, para representar os comportamentos dessas vidas em relação às suas F.D.P:

- $\sigma_{ag} = 11$ e $\tau_{ag} = 22$: as vidas obtidas experimentalmente e as vidas previstas apresentaram valores bem próximos, sendo essa uma análise considerada bem sucedida;
- $\sigma_{ag} = 16$ e $\tau_{ag}=20$: foi realizado para essa condição uma quantidade de ensaios maior, além de apresentar a maior vida obtida experimentalmente;
- $\sigma_{ag} = 38$ e $\tau_{ag} = 19$: as vidas obtidas experimentalmente apresentaram o menor valor.

Os histogramas das F.D.P para as vidas previstas na análise, podem ser vistos a seguir. A Fig. 7.8 apresenta essa relação para a condição em que $\sigma_{ag} = 11$ e $\tau_{ag} = 22$ para as Estratégias A e B, modelo SWT em (a) e (b), respectivamente, e para o critério MWCM nas mesmas condições em (c) e (d). Com a intenção de comparar graficamente o comportamento dos dados gerados por simulação de Monte Carlo, procurou-se representar os dados por meio do diagrama de caixa apresentado na Fig. 7.9. Nesse gráfico estão representadas as seguintes informações: primeiro centil (a), primeiro quartil (b), mediana (c), terceiro quartil (d) e nonagésimo nono centil (e). Entre o primeiro e terceiro quartil, (b) e (d), estão os valores com maior ocorrência, os valores que estão abaixo do primeiro centil e acima do nonagésimo nono centil ultrapassam os limites superiores e inferiores pré-estabelecidos (inferior a 1% e superior a 99% das ocorrências). Na Fig. 7.10 são apresentados os histogramas para as vidas previstas quando $\sigma_{ag} = 16$ e $\tau_{ag} = 20$ e na Fig. 7.11 o diagrama de caixa com o comportamento dessas vidas nessa mesma condição. As Fig. 7.12 e 7.13 apresentam o histograma e o diagrama de caixa para as vidas previstas para a combinação de esforços $\sigma_{ag} = 38$ e $\tau_{ag} = 19$.

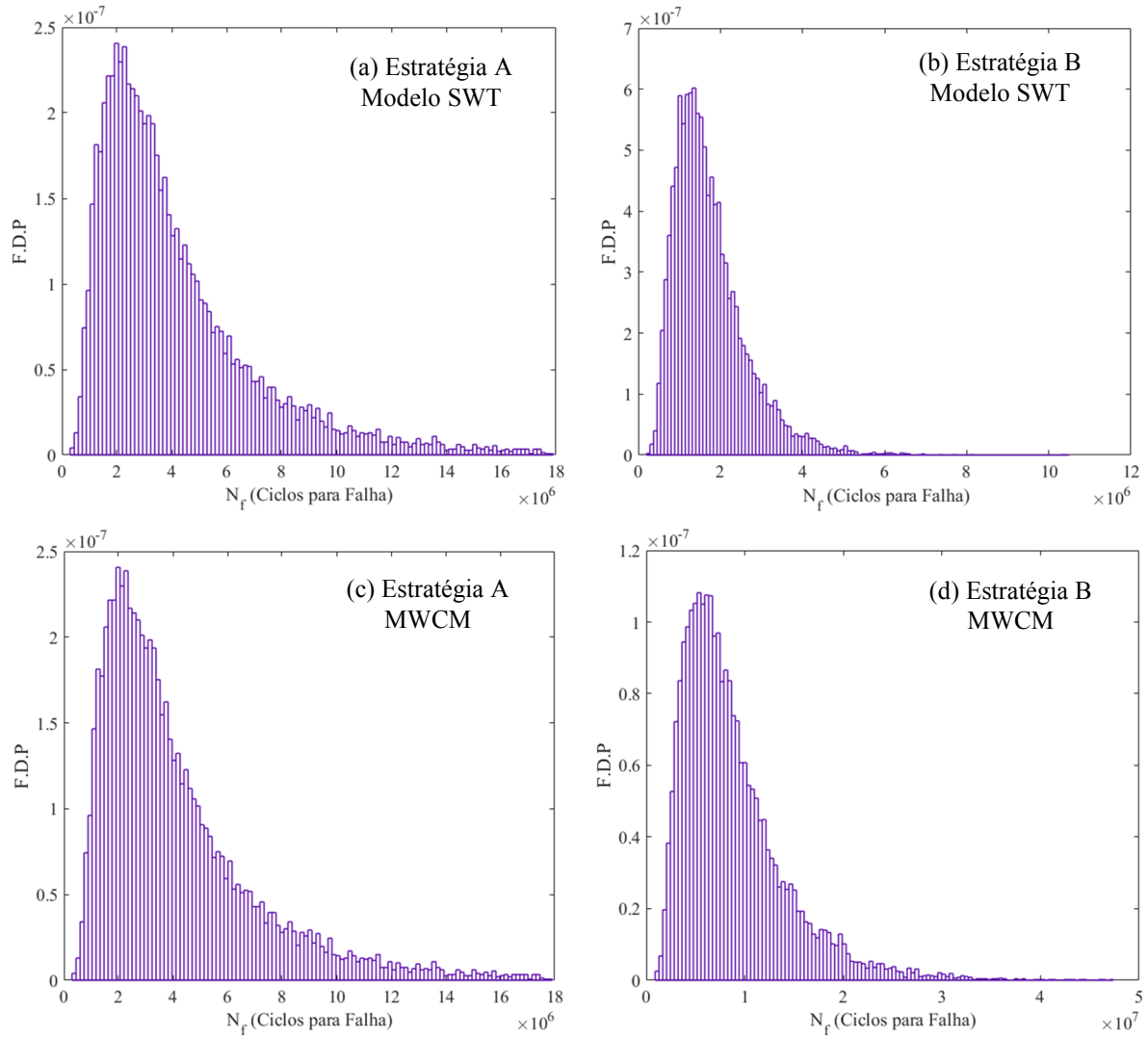


Figura 7.8 – F.D.P. das distribuições de vida para $\sigma_{ag} = 11$ e $\tau_{ag} = 22$: a) Estratégia A – SWT; b) Estratégia B – SWT; c) Estratégia A – MWCM; d) Estratégia B – MWCM.

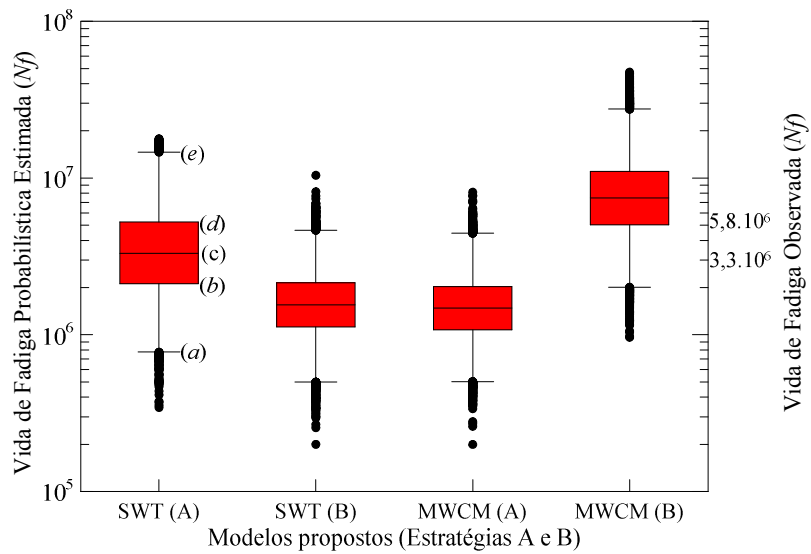


Figura 7.9 – Diagrama de caixa a distribuição das vidas em fadiga considerando $\sigma_{ag} = 11$ e $\tau_{ag} = 22$

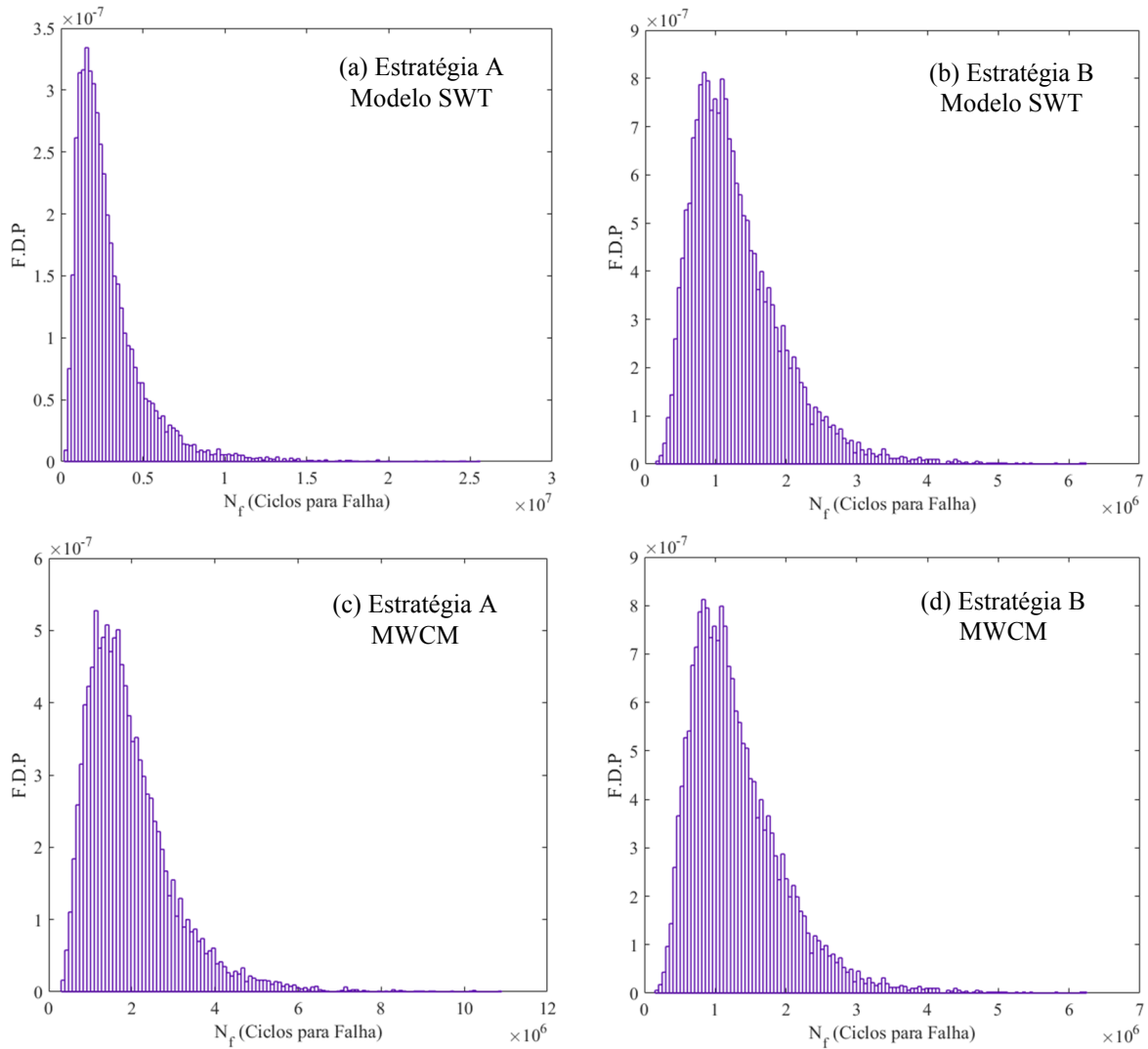


Figura 7.10 –F.D.P das distribuições de vida para $\sigma_{ag} = 16$ e $\tau_{ag} = 20$: a) Estratégia A – SWT; b) Estratégia B – SWT; c) Estratégia A – MWCM; d) Estratégia B – MWCM

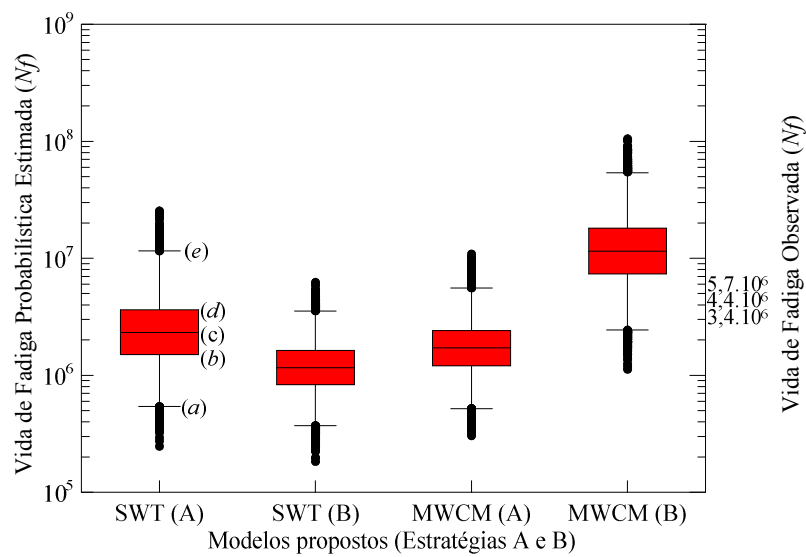


Figura 7.11 – Diagrama de caixa a distribuição das vidas em fadiga considerando $\sigma_{ag} = 16$ e $\tau_{ag} = 20$

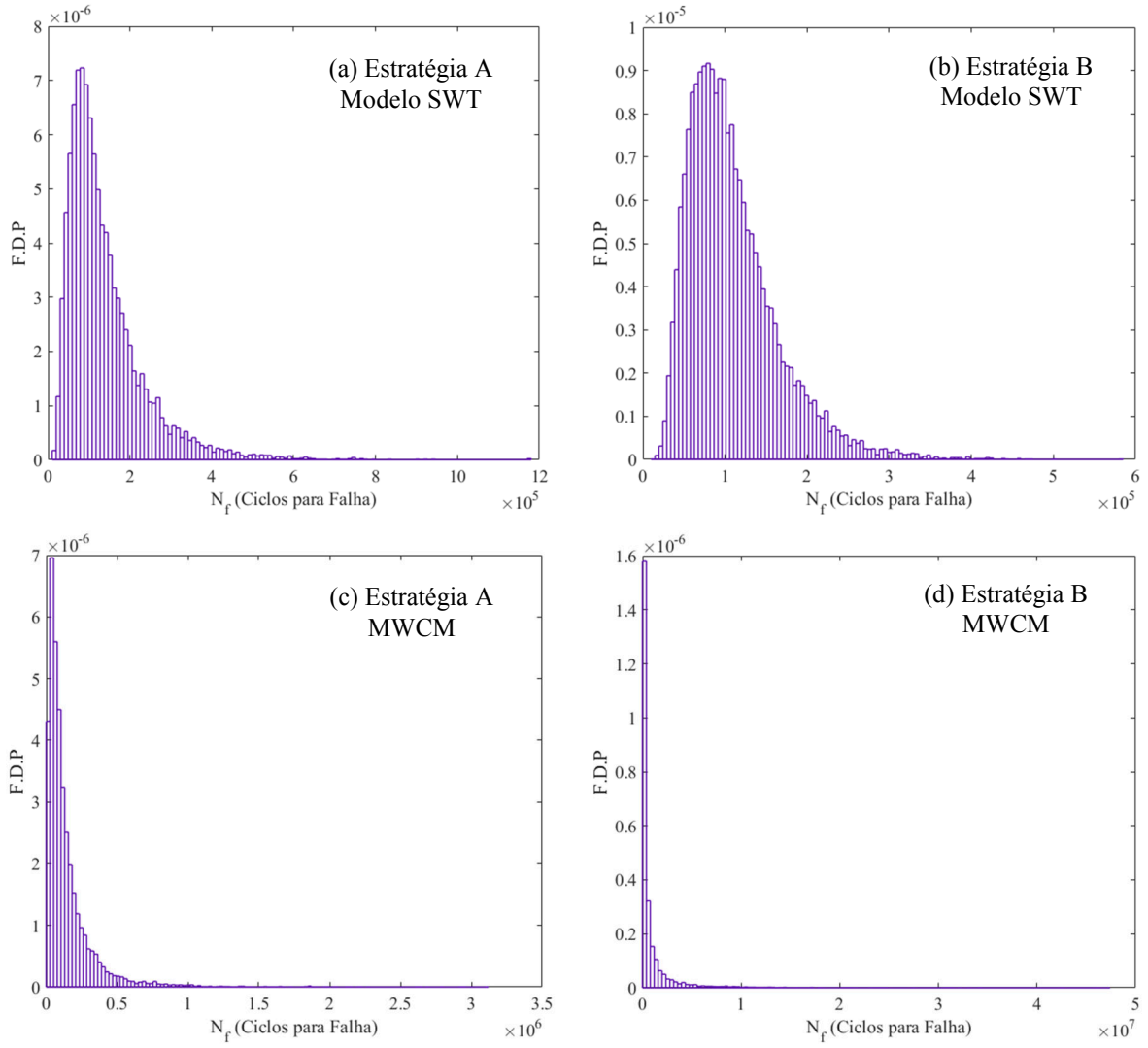


Figura 7.12 – F.D.P das distribuições de vida para $\sigma_{ag} = 38$ e $\tau_{ag} = 19$: a) Estratégia A – SWT; b) Estratégia B – SWT; c) Estratégia A – MWCM; d) Estratégia B – MWCM

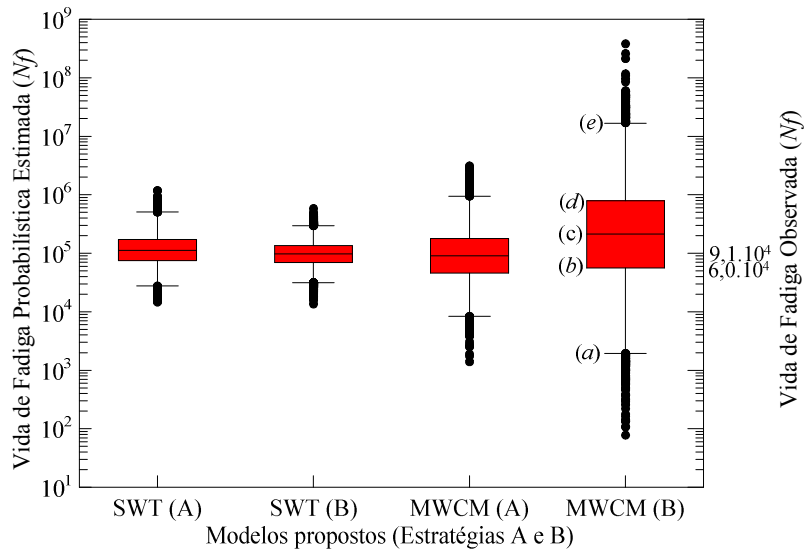


Figura 7.13 – Diagrama de caixa a distribuição das vidas em fadiga considerando $\sigma_{ag} = 38$ e $\tau_{ag} = 19$

As vidas observadas, obtidas por Sá (2017), foram apresentadas nos diagramas de caixa, Figs. 7.9, 7.11 e 7.13, de forma a permitir visualizar qual dos modelos apresentou resultados que se aproximaram mais das vidas reais.

Realizando uma comparação entre os histogramas obtidos em cada um dos carregamentos multiaxiais analisados e os diagramas de caixa apresentados logo abaixo para essas mesmas combinações de esforços, algumas observações podem ser feitas. Para os casos em que $\sigma_{ag} = 11 - \tau_{ag} = 22$ e $\sigma_{ag} = 16 - \tau_{ag} = 20$, as distribuições de vida de fadiga apresentaram um comportamento uniforme para os modelos SWT e MWCM, em ambas as estratégias de análise, conforme pode ser visto nas Figs. 7.8 e 7.10. Observando as Figs. 7.9 e 7.11, é possível afirmar que as vidas obtidas, em ambos os modelos, não apresentaram uma dispersão significativa. Ao realizar uma comparação com as vidas obtidas experimentalmente, expressas ao lado direito do gráfico, quando $\sigma_{ag} = 11 - \tau_{ag} = 22$, a Estratégia A do modelo SWT foi a que apresentou melhores resultados, uma vez que essas vidas se encontram entre o primeiro e terceiro quartil. Já para o caso em que $\sigma_{ag} = 16 - \tau_{ag} = 20$, os resultados não foram tão satisfatórios, no entanto a Estratégia A do modelo SWT continua sendo a que apresentou a faixa de valores com maior ocorrência (entre (b) e (d)) mais próxima das vidas obtidas experimentalmente.

Analisando as Figs. 7.12 e 7.13 ($\sigma_{ag} = 38$ e $\tau_{ag} = 19$) é possível observar que o modelo SWT manteve distribuições uniformes com vidas que vão de 10^4 a 2.10^6 em ambas as estratégias. No entanto, para o MWCM, a distribuição apresentou vidas que vão de 10^1 a 10^9 para a Estratégia B, que utiliza como dados as curvas experimentais de $\tau - N$, com uma grande quantidade de vidas estimadas ultrapassando os limites de 1% e 99% das ocorrências. No entanto, em relação as vidas observadas, as Estratégias A e B de ambos os modelos apresentaram a faixa de valores com maior ocorrência (entre (b) e (d)) próxima das vidas obtidas experimentalmente.

Graficamente, a qualidade das previsões de vida probabilísticas também será avaliada através do enraizamento das vidas reais contra a mediana das vidas previstas, conforme mostrado na Fig. 7.14, para o modelo SWT, e na Fig. 7.15, para o critério MWCM. Nesses gráficos, as linhas tracejadas paralelas à que passa pela origem representam faixas de variação da ordem de ± 3 vidas em relação a curva de correlação perfeita. Apresenta-se ainda os limites inferiores, representados pelo símbolo \triangleright , e os superiores representados por \triangleleft , estabelecidos de acordo com as vidas previstas considerando os níveis de 1% e 99% das ocorrências, respectivamente. Assim, esses limites estabelecem o intervalo no qual a associação das vidas

observadas com as vidas estimadas devem estar para que se possa considerar que o modelo de previsão é satisfatório.

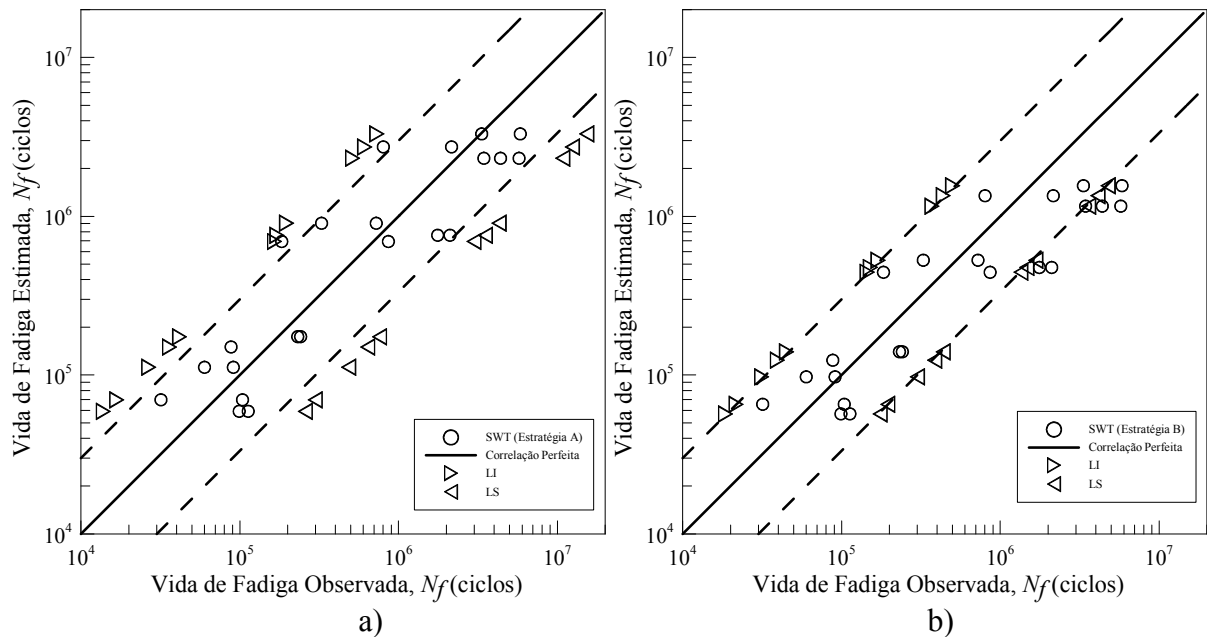


Figura 7.14 – Vidas observadas *versus* mediada das vidas estimadas (SWT): a) Estratégia A e b) Estratégia B

A Fig. 7.14 mostra que o modelo SWT apresentou bons resultados, que se encontram dentro dos limites inferiores e superiores pré-estabelecidos em 100% dos casos considerando a Estratégia A, em que os ensaios base para a previsão são realizados em tração-compressão. Em relação à Estratégia B, que considera torção como condição de carregamento, 77,3% dos casos analisados se encontram dentro desses intervalos.

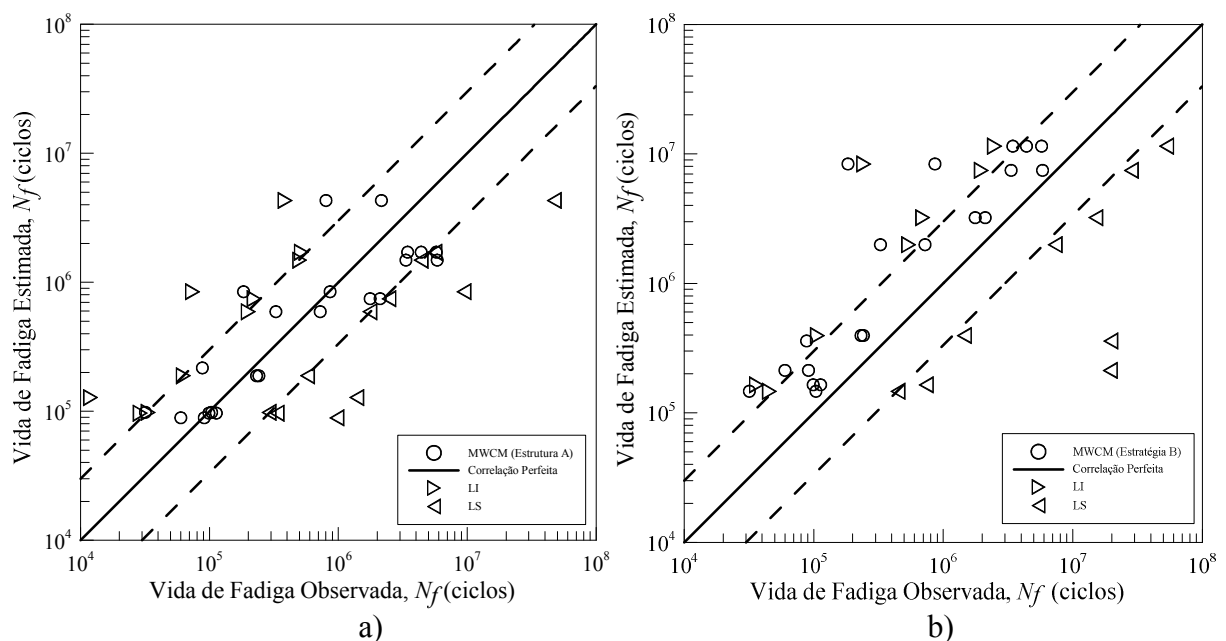


Figura 7.15 – Vidas observadas *versus* mediada das vidas estimadas (MWCM): a) Estratégia A e b) Estratégia B

Analisando a Fig. 7.15, em relação ao MWCM, 86,3% dos casos analisados na Estratégia A se encontram dentro dos limites superior e inferior pré-estabelecidos. Dentre os casos em que a relação entre as vidas observadas e estimadas não ficaram dentro desse intervalo, estão as combinações de carregamento em que $\sigma_{ag} = 11$ e $\tau_{ag} = 22$ e $\sigma_{ag} = 16$ e $\tau_{ag} = 20$. Em relação à Estratégia B, a concordância entre as vidas observadas e estimadas foi bem maior, apenas a condição em que $\sigma_{ag} = 18$ e $\tau_{ag} = 36$ apresentou uma combinação entre as vidas fora do intervalo sugerido.

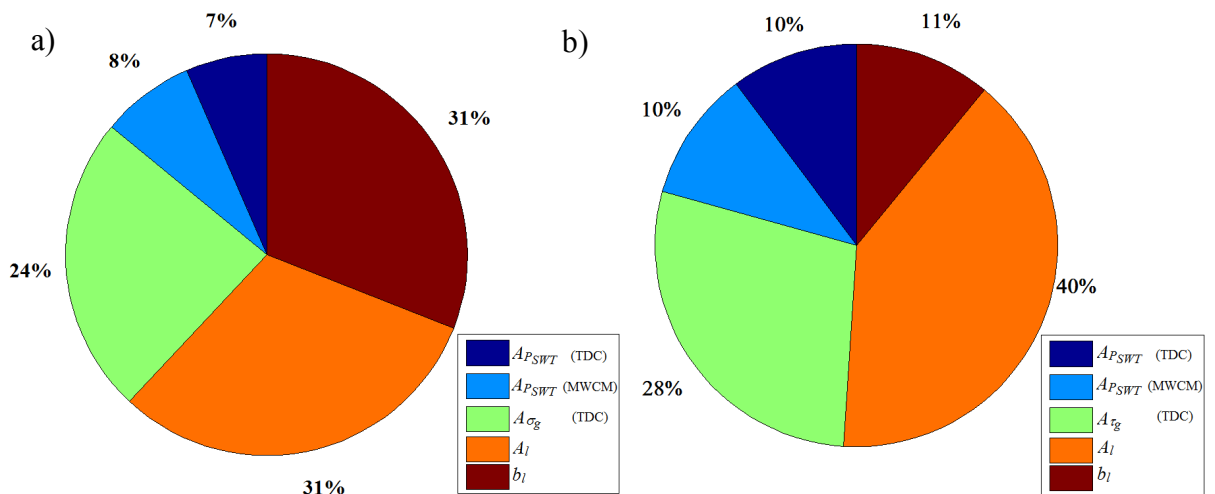
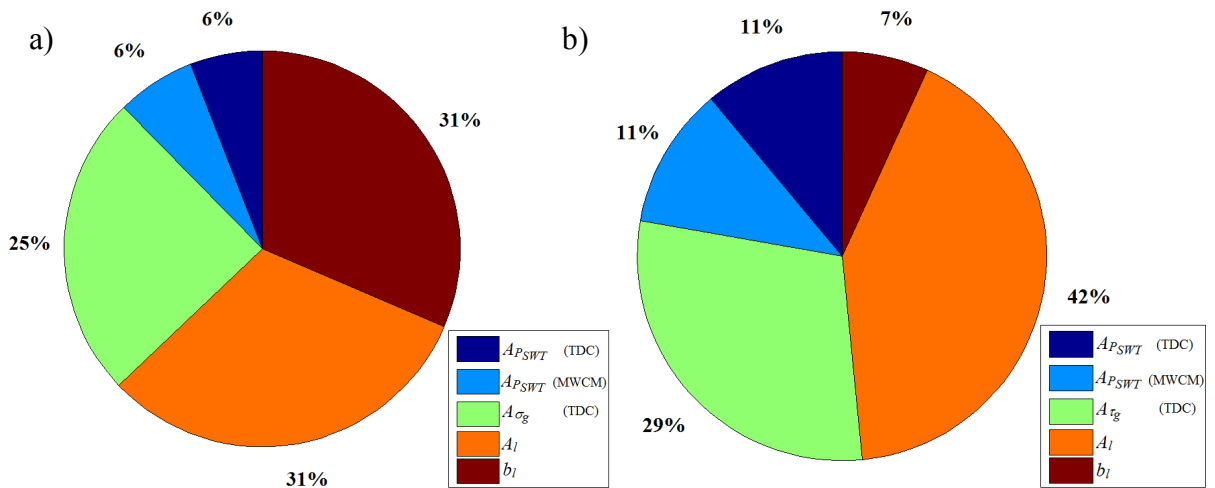
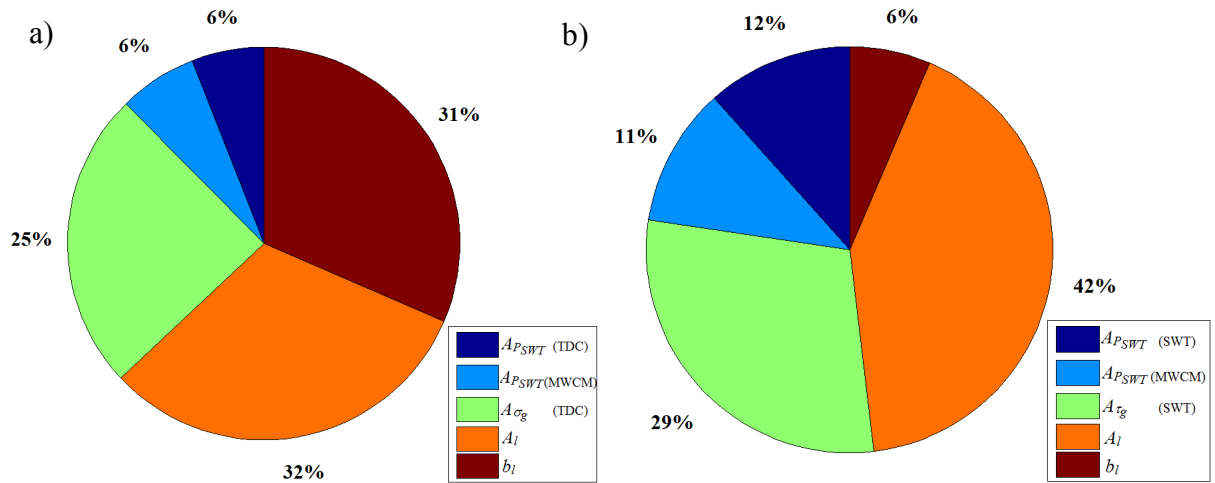
7.5 RESPOSTA DA VIDA EM RELAÇÃO ÀS VARIÁVEIS DE ENTRADA – ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Uma análise de sensibilidade foi realizada utilizando os dados gerados por simulação de Monte Carlo, onde calculou-se o valor de α_j , que expressa a contribuição percentual de cada variável de entrada em relação as vidas previstas pelo modelo.

A Fig. 7.16 apresenta a análise de sensibilidade realizada considerando o modelo SWT e a combinação de esforços $\sigma_{ag} = 11$ e $\tau_{ag} = 22$. Os parâmetros de entrada na rotina que realiza a previsão de vida segundo a Estratégia A são: $A_{P_{SWT}}$ e $A_{\sigma_{ag}}$, coeficientes das curvas $P_{SWT} - N$ e $\sigma_{ag} - N$ utilizadas em termos da TDC, $A_{P_{SWT}}$, coeficiente da curva de Wöhler do material $P_{SWT} - N$ e A_l e b_l , coeficiente e expoente da curva $L_{SWT}(\sigma) - N$. Esses parâmetros têm sua influência na vida prevista avaliada em termos percentuais na Fig. 7.16 (a). Para a Estratégia B, Fig. 7.16 (b), os parâmetros são para as curvas $\tau - N$.

Ainda em relação ao modelo de previsão de vida SWT, essa análise foi realizada considerando o carregamento multiaxial $\sigma_{ag} = 16$ e $\tau_{ag} = 20$, os resultados são apresentados na Fig. 7.17 em a) para a Estratégia A e em b) para a Estratégia B. Para a combinação de esforços $\sigma_{ag} = 38$ e $\tau_{ag} = 19$ a Fig. 7.18 apresenta os valores de α_j considerando as Estratégias A e B em (a) e (b), respectivamente.

Comparando os resultados apresentados nas Figs. 7.16, 7.17 e 7.18, é possível observar que os parâmetros de entrada apresentaram contribuição percentual em relação às vidas previstas muito próximas para as Estratégias A e B propostas no modelo SWT. No entanto, algumas importantes considerações a respeito dos resultados obtidos para as estratégias propostas podem ser feitas:



- Estratégia A: as variáveis que apresentaram maiores valores de α_j foram A_l e b_l , 31% do total, o que aconteceu nas três condições de carregamentos multiaxiais analisadas. Outra variável que contribuiu de forma significativa na previsão de vida foi $A_{\sigma g}$, em torno de 25% do resultado obtido se deve a essa constante para os três casos.
- Estrutura B: as variáveis de entrada que mais apresentaram interferência para o valor da vida prevista foram A_l , com pouco mais de 40% de contribuição nos três casos, e $A_{\tau g}$, com α_j em torno de 28%. Na Estratégia B, a contribuição percentual de b_l na vida prevista foi pequena, com uma média de 8%.

Os valores de α_j também foram calculados para os parâmetros relacionados à previsão de vida pelo MWCM. As variáveis de entrada, para a Estratégia A, são: A_σ e $A_{\sigma ag}$, constantes das curvas $\sigma_{un} - N$ e $\sigma_{ag} - N$, em termos da TDC, A_σ e A_τ , constantes das curvas de Wöhler do material em condições de tração-compressão e torção, respectivamente, e A_l e b_l , constante e expoente da curva $L_\sigma - N$. Na Fig. 7.19, em (a) essa análise é feita considerando a Estratégia A e em (b) considerando a Estratégia B, ambas para a condição de carregamento multiaxial $\sigma_{ag} = 11$ e $\tau_{ag} = 22$.

A Fig. 7.20 apresenta os resultados da análise de sensibilidade para MWCM considerando o carregamento multiaxial $\sigma_{ag} = 16$ e $\tau_{ag} = 20$. Para a condição em que $\sigma_{ag} = 38$ e $\tau_{ag} = 19$, os resultados são apresentados na Fig. 7.21.

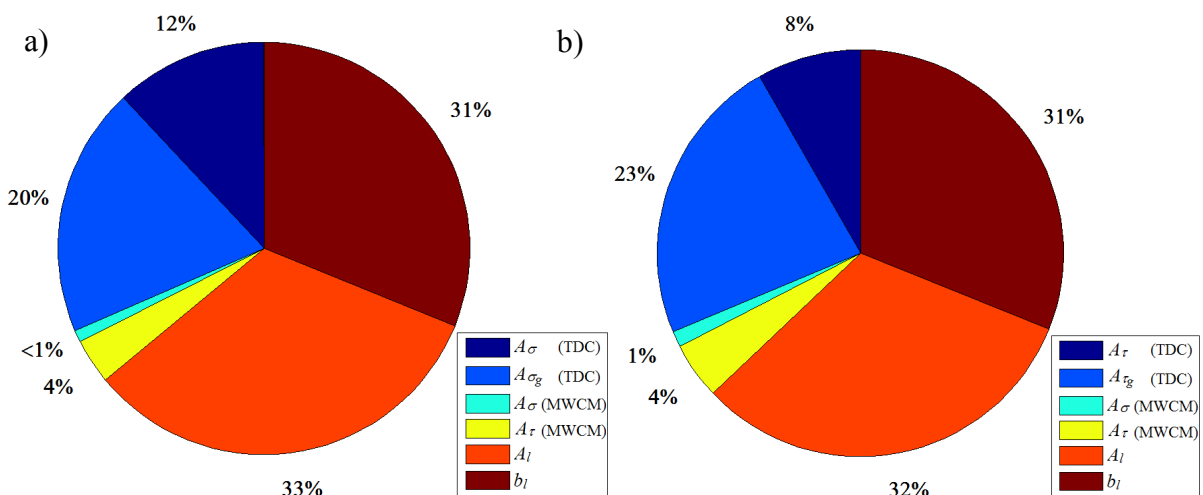


Figura 7.19 – Percentual de contribuição (α_j) de cada variável de entrada na vida prevista pelo MWCM quando $\sigma_{ag} = 11$ e $\tau_{ag} = 22$ para: a) Estratégia A e b) Estratégia B

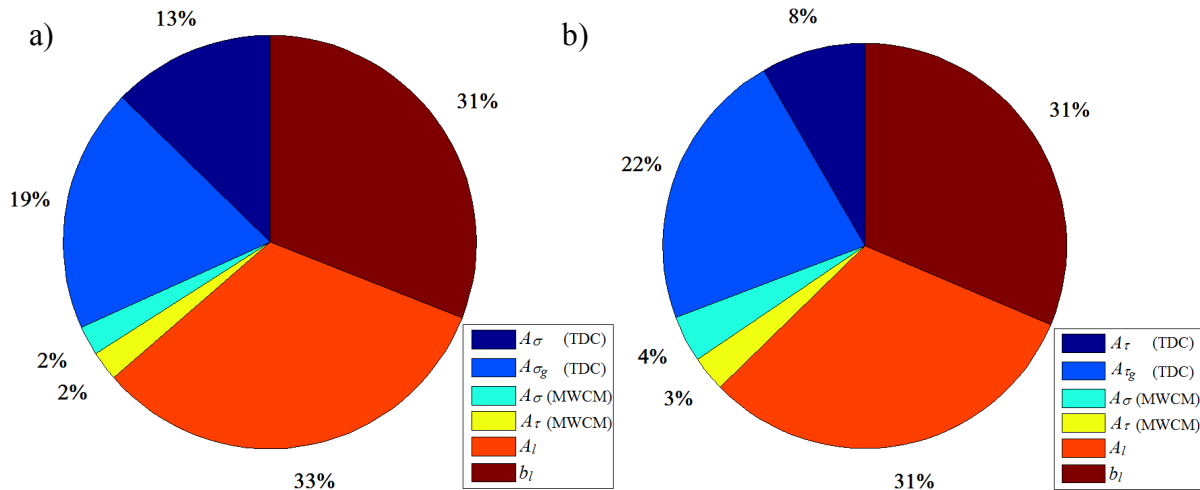


Figura 7.20– Percentual de contribuição (α_j) de cada variável de entrada na vida prevista pelo MWCM quando $\sigma_{ag} = 16$ e $\tau_{ag} = 20$ para: a) Estratégia A e b) Estratégia B

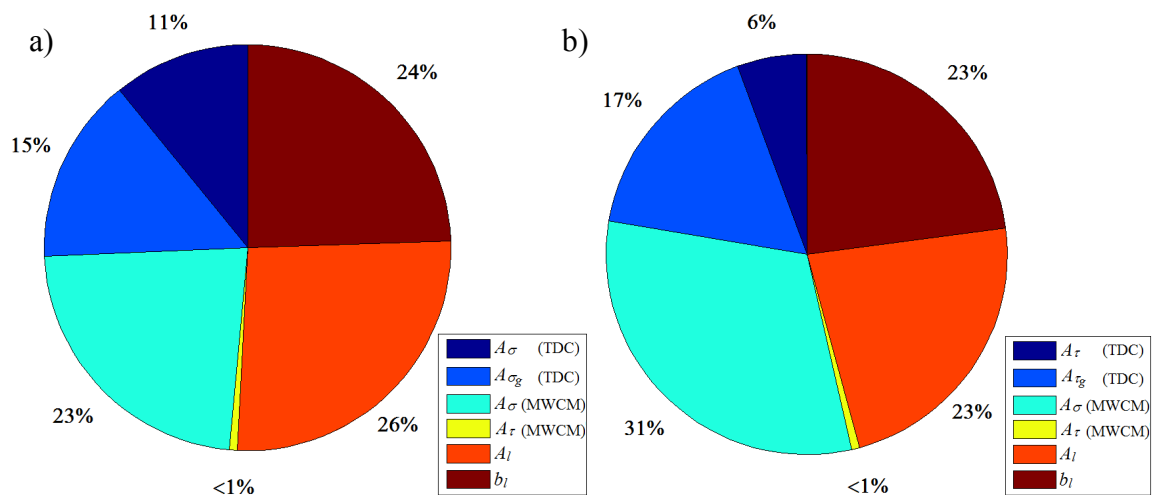


Figura 7.21– Percentual de contribuição (α_j) de cada variável de entrada na vida prevista pelo MWCM quando $\sigma_{ag} = 38$ e $\tau_{ag} = 19$ para: a) Estratégia A e b) Estratégia B

Para os resultados obtidos segundo o MWCM, Figs. 7.19, 7.20 e 7.21, importantes considerações a respeito dos resultados obtidos para as Estratégias A e B são:

- Estratégia A: as variáveis que apresentaram maior contribuição percentual na análise da vida prevista foram A_l (com uma média de 31%) e b_l (média de 28%) em todas as combinações de esforços;
- Estratégia B: as variáveis de entrada A_l e b_l apresentaram maiores valores de α_j para os dois primeiros casos, Figs. 7.19 e 7.20, para o caso onde $\sigma_{ag} = 38$ e $\tau_{ag} = 19$, Fig. 7.21, A_l e b_l apresentaram igual contribuição (23%) e A_σ (constante da curva de Wöhler do Material) foi a que mais contribuiu no valor da vida estimada para essa combinação de esforços, $\alpha_j = 31\%$.

7.5.1 Análise em termos de gráficos de dispersão

Por apresentarem uma indicação visual da sensibilidade que os parâmetros de entrada do modelo causam nas saídas, gráficos de dispersão foram construídos no intuito de avaliar as respostas das vidas, N , em relação às variáveis de entrada das curvas de calibração dos modelos.

Uma análise semelhante, com a construção de gráficos de dispersão, foi realizada para avaliar a resposta das variáveis de saída A_l e b_l , da curva de distância crítica versus vida, em relação aos parâmetros das curvas necessárias para a construção de $L - N$. Essa análise é de extrema importância uma vez que, neste trabalho, uma das principais etapas é o estudo do comportamento da vida de fadiga em termos da teoria da distância crítica (TDC). Nesse sentido, é possível afirmar que A_l e b_l possuem uma relação direta com o comportamento da vida prevista. Os resultados são apresentados no Anexo III, onde os gráficos expressam o comportamento de A_l e b_l em relação às entradas dos modelos de previsão de vida estudados: SWT e MWCM.

Para as vidas previstas pelo modelo SWT, os gráficos de dispersão que expressam a resposta de N para as Estratégias A e B propostas são apresentados na Fig. 7.22. Nesta figura a análise considera o carregamento multiaxial $\sigma_{ag} = 11$ e $\tau_{ag} = 22$. Ainda para esse carregamento, a Fig. 7.23 apresenta os gráficos de dispersão considerando o MWCM.

Análises similares foram realizadas para as combinações de esforços $\sigma_{ag} = 16$ e $\tau_{ag} = 20$ e para $\sigma_{ag} = 38$ e $\tau_{ag} = 19$. O intuito de apresentar essas três combinações de carregamento é analisar a resposta das vidas estimadas em relação às mesmas variáveis de entrada para outros valores de σ_{ag} e τ_{ag} .

A Fig. 7.24 apresenta os gráficos de dispersão para o carregamento multiaxial $\sigma_{ag} = 16$ e $\tau_{ag} = 20$, estes expressam a resposta de N para as Estratégias A e B considerando o modelo de previsão de vida SWT, para o MWCM estes resultados podem ser observados na Fig. 7.25. Para a combinação de esforços $\sigma_{ag} = 38$ e $\tau_{ag} = 19$, esses resultados estão dispostos na Fig. 7.26, para as Estratégias A e B do modelo SWT, e na Fig. 7.27, para as Estratégias A e B do MWCM.

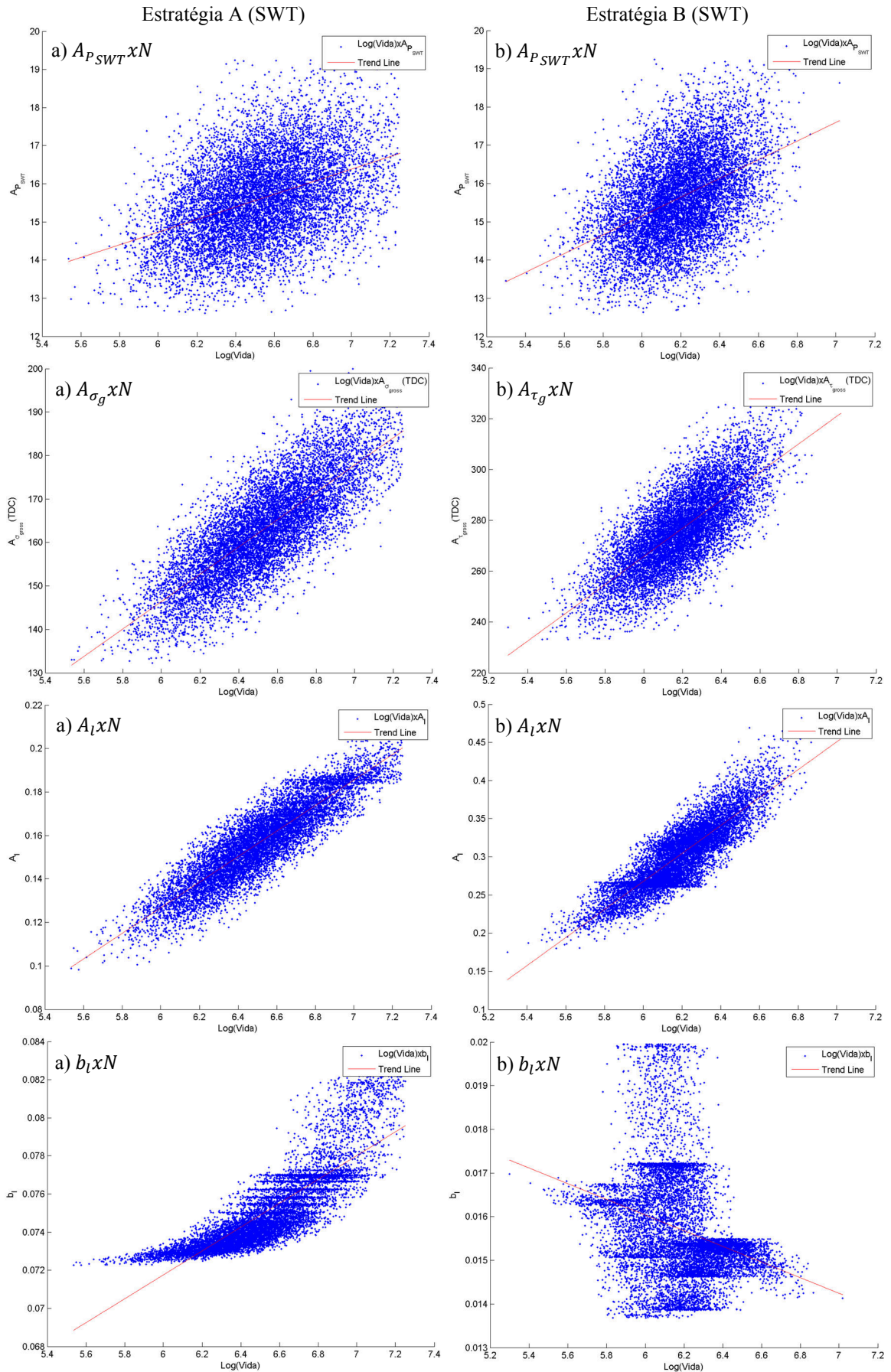


Figura 7.22 – Respostas da variável de saída N , para as entradas do modelo SWT quando $\sigma_{ag} = 11$ e $\tau_{ag} = 22$ em relação a: a) Estratégia A e b) Estratégia B

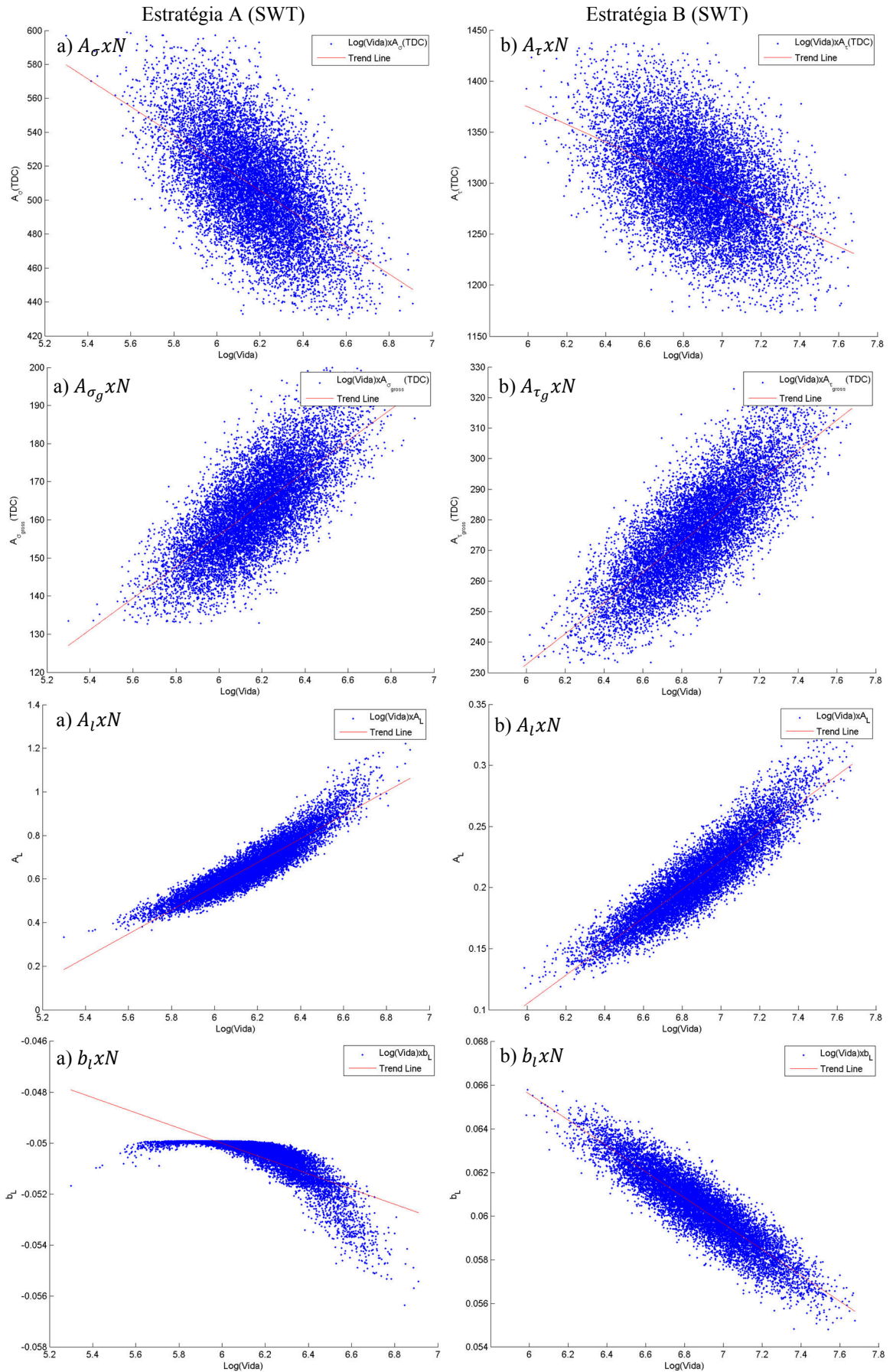


Figura 7.23 – Respostas da variável de saída N , para as entradas do MWCM quando $\sigma_{ag} = 11$ e $\tau_{ag} = 22$ em relação a: a) Estratégia A e a b) Estratégia B

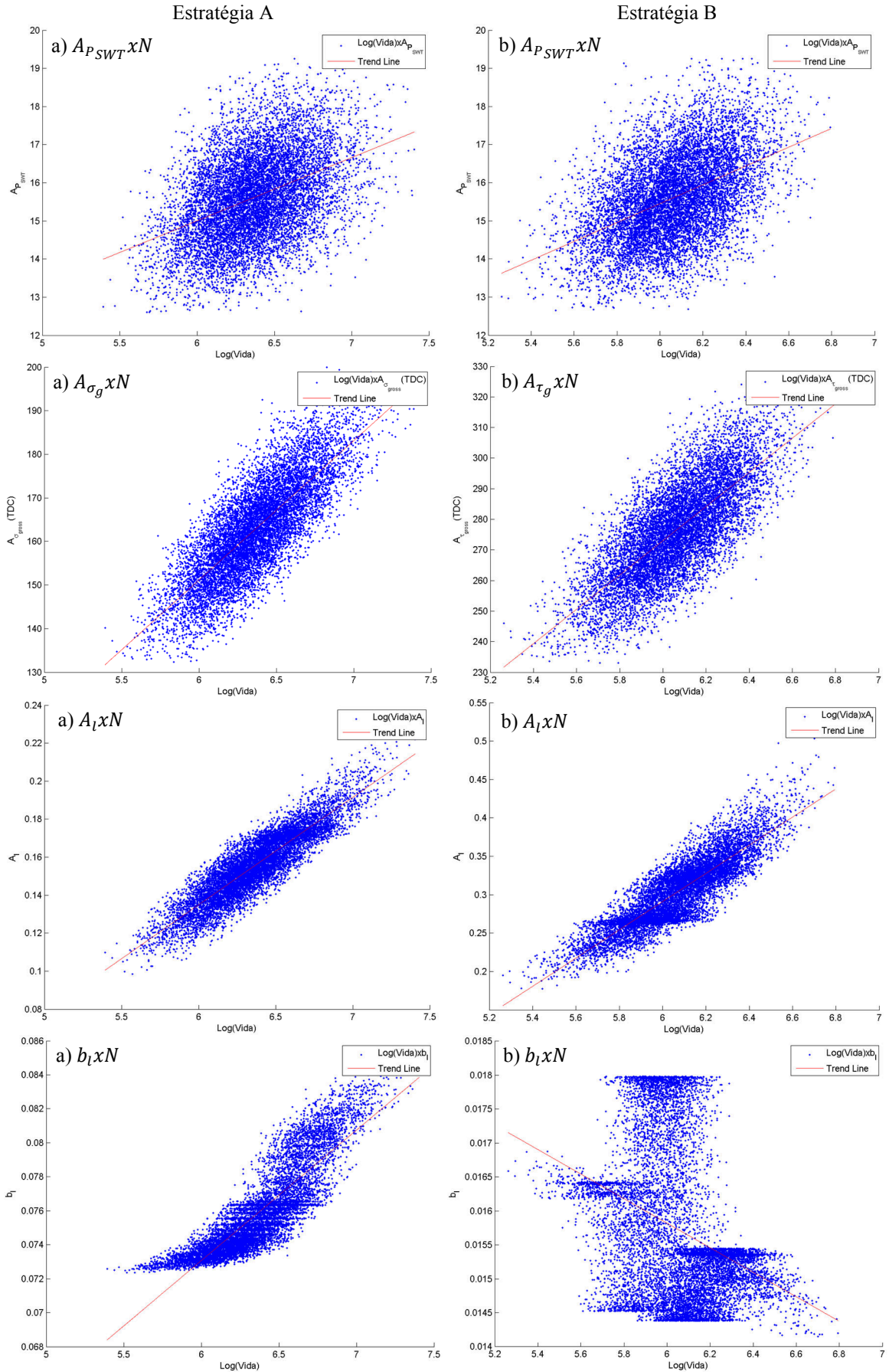


Figura 7.24 – Respostas da variável de saída N , para as entradas do modelo SWT quando $\sigma_{ag} = 16$ e $\tau_{ag} = 20$ em relação a: a) Estratégia A e b) Estratégia B

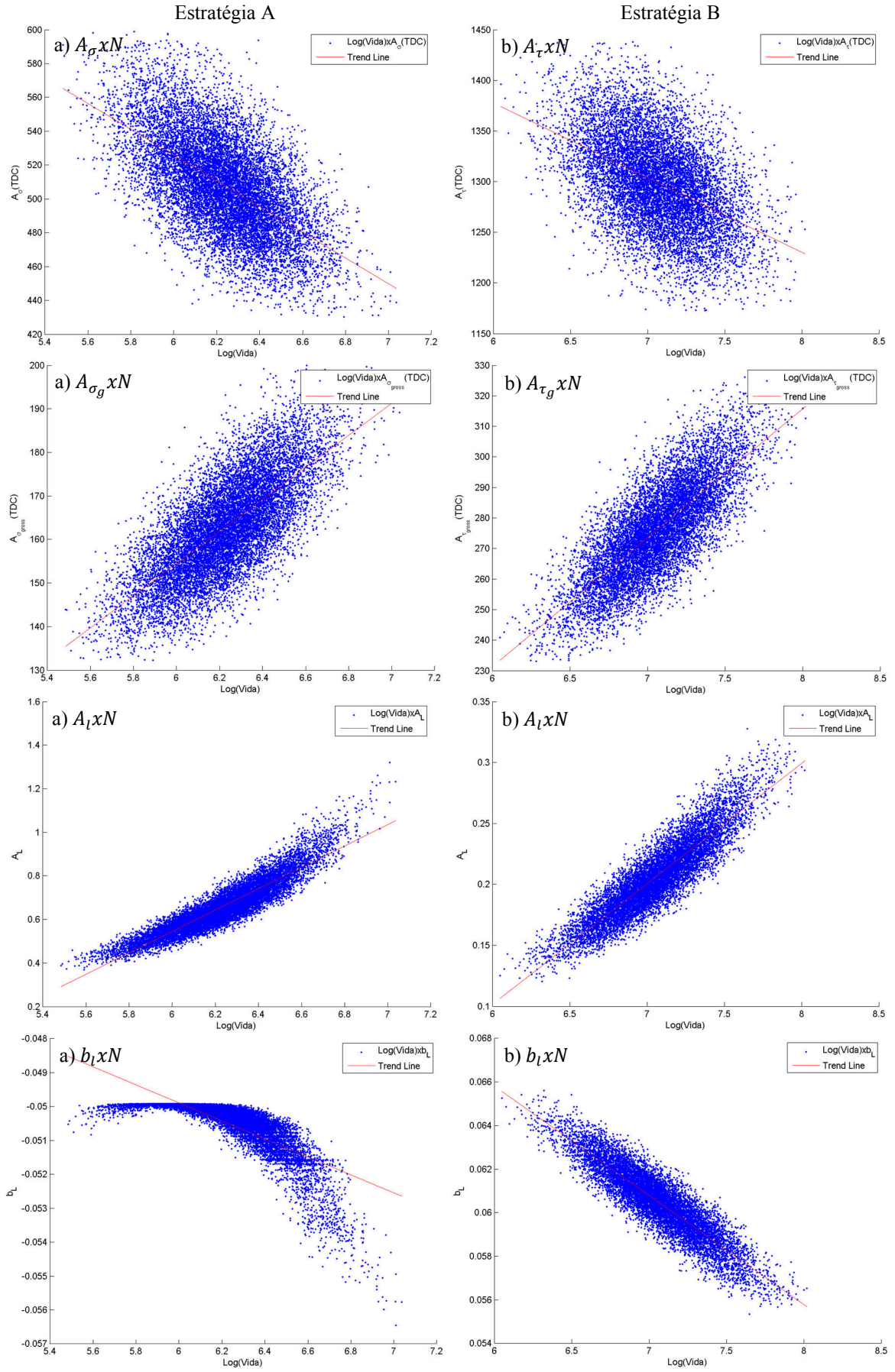


Figura 7.25 – Respostas da variável de saída N , para as entradas do MWCM quando $\sigma_{ag} = 16$ e $\tau_{ag} = 20$ em relação a: a) Estrutura A e b) Estrutura B

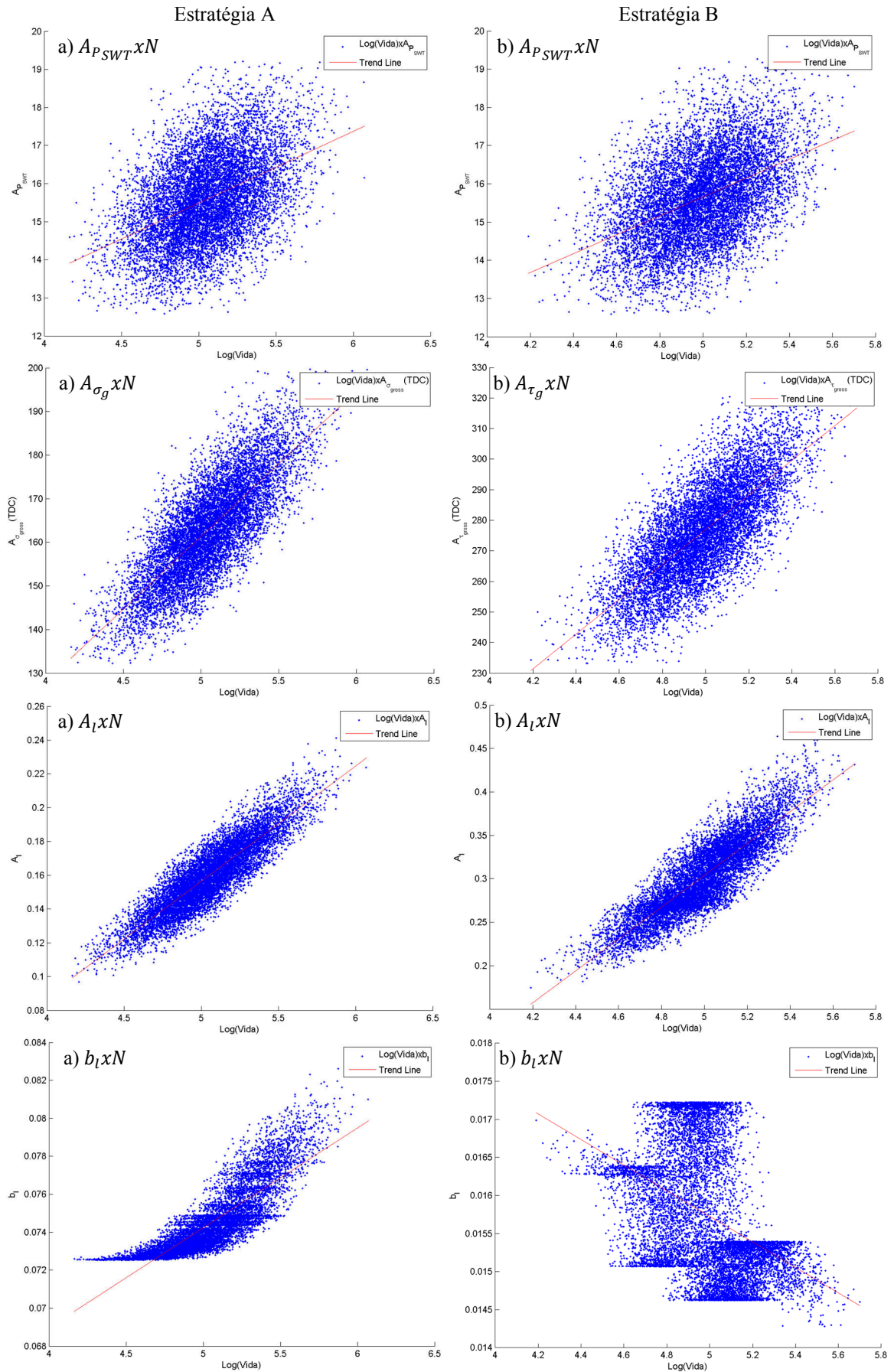


Figura 7.26 – Respostas da variável de saída N , para as entradas do modelo SWT quando $\sigma_{ag} = 38$ e $\tau_{ag} = 19$ em relação a: a) Estratégia A e b) Estratégia B

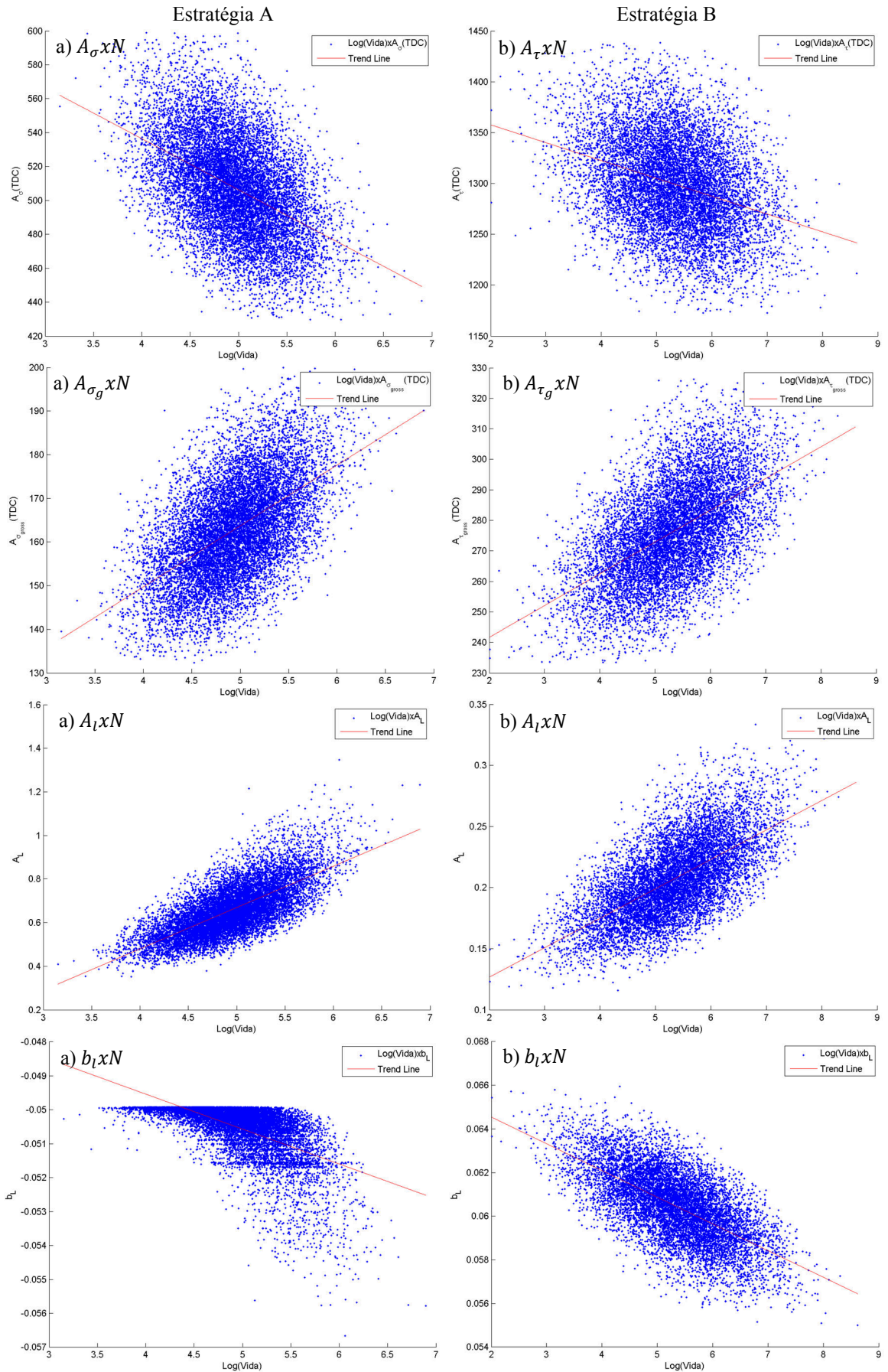


Figura 7.27 – Respostas da variável de saída N , para as entradas do MWCM quando $\sigma_{ag} = 38$ e $\tau_{ag} = 19$ em relação a: a) Estratègia A e b) Estratègia B

Analisando as Figs. 7.22, 7.24, 7.26, referentes ao modelo SWT é possível observar que os gráficos de dispersão, considerando as mesmas entradas, são bastante similares para as Estratégias A e B propostas. Porém isso não acontece quando as variáveis de entrada em análise são A_l e b_l (da curva $L - N$). O mesmo pode ser afirmado observando as Figs. 7.23, 7.25 e 7.27, referentes ao MWCM.

Em relação ao comportamento do expoente b_l , o mesmo apresenta uma dispersão considerável para ambas as estratégias propostas na análise pelo modelo SWT: Estratégia A que considera os ensaios de tração-compressão e Estratégia B que considera aqueles em torção. No entanto, para o MWCM, b_l somente apresentou grande dispersão em relação à Estratégia A, para a Estratégia B o comportamento está mais perto daquele a ser considerado ideal.

A seção 3.3.2 avalia o comportamento dos parâmetros da curva $L - N$ em relação aos parâmetros das curvas que são utilizadas para a sua calibração. Com base nessa análise, foi possível observar que ao avaliar a variação de σ_{1a} em relação a pequenos intervalos de l , conforme a relação linear apresentada na Eq. (3.30), o expoente da curva $L - N$, ou seja, b_l , pode apresentar uma dispersão significativa em um gráfico com outra variável, o que pode ser observado na análise das equações desenvolvidas (3.33) e (3.34). Essa pode ser uma das explicações em relação ao comportamento encontrada nos gráficos que relacionam a vida prevista ao expoente b_l . Observando os gráficos de dispersão apresentados em que a variável de entrada é b_l , é possível observar que o intervalo analisado de b_l no eixo das ordenadas é muito pequeno, ou seja, não ocorre uma grande variação nos valores obtidos desse expoente.

Ainda em relação à Eq. (3.33), é possível observar que o coeficiente A_l depende do expoente b_l e, portanto, uma dispersão nos valores de b_l podem influenciar no comportamento do coeficiente da curva $L - N$.

8 CONCLUSÕES

Considerando os resultados experimentais obtidos por Sá (2017), tomados por base para a validação dos resultados obtidos numericamente neste trabalho, verificou-se que:

1. Ambas as metodologias propostas se mostraram capazes de realizar previsões de vida para os espécimes entalhados submetidos a carregamentos multiaxiais;
2. Em relação aos resultados determinísticos da previsão de vida, para o modelo de fadiga multiaxial SWT, a Estratégia B obteve os melhores resultados, de modo que 90,9% das vidas estimadas estão numa faixa de variação da ordem de ± 3 vidas em relação a curva de correlação perfeita, enquanto para a Estratégia A, esse resultado foi de 81,8% dos dados nesta mesma faixa de variação;
3. Ainda em relação ao modelo de previsão de vida determinístico, utilizando o MWCM, os melhores resultados foram apresentados pela Estratégia A, onde 72,7% das vidas estimadas estão dentro da faixa pré-estabelecida que considera resultados satisfatórios, enquanto para a Estratégia B essa porcentagem foi de 22,7%;
4. As previsões de vida obtidas pelo modelo probabilístico, em contrapartida, apresentaram um resultado diferente, onde, para o modelo SWT, a Estratégia A obteve melhores resultados com 90,9% das vidas dentro da faixa de variação da ordem de ± 3 vidas em relação a curva de correlação perfeita. Para a Estratégia B, cerca de 72,7% das vidas estimadas estão nesta faixa;
5. Considerando o MWCM em relação às previsões probabilísticas, das vidas estimadas pela Estratégia A, 81,8% encontram-se nesta faixa, considerando a Estratégia B esse valor é de 59,1%;
6. Avaliando os resultados das previsões de vida obtidas para os casos determinísticos e probabilísticos, o modelo SWT consegue descrever melhor o fenômeno de fadiga multiaxial em fase quando comparado ao MWCM. Em termos determinísticos, o modelo SWT apresentou um percentual de 86,3% das vidas estimadas dentro da faixa de aceitação em relação aos resultados experimentais, enquanto, para o MWCM, esse valor foi de 47,7%. Considerando a análise probabilística, esse percentual foi de 81,8% para o modelo SWT e 70,45% para o MWCM;
7. Também é possível observar que as previsões probabilísticas, obtidas utilizando a técnica de simulação de Monte Carlo, representaram melhor as vidas observadas experimentalmente em detrimento das previsões determinísticas. Isso pode ter ocorrido

devido Monte Carlo ser um método numérico exato, que exige maior esforço computacional, porém, retorna resultados mais próximos dos reais;

8. O Método da Curva de Wöhler Modificado obteve bons resultados, no entanto isso não ocorreu para todos os carregamentos testados. Conforme apresentado, para o carregamento multiaxial $\sigma_{ag} = 38$ e $\tau_{ag} = 19$, por exemplo, a distribuição probabilística apresentou vidas que vão de 10^1 a 10^9 para a Estratégia B (dados em torção) com uma grande quantidade de vidas estimadas ultrapassando os limites de 1% e 99% das ocorrências;

Considerando a distribuição das vidas obtidas pelo modelo probabilístico e a análise realizada para determinar qual função de distribuição de probabilidade melhor representa o comportamento dos dados gerados, algumas importantes considerações são:

1. Estratégia A (SWT): 72,7% dos casos foram representados pela distribuição lognormal, 9,1% pela distribuição B-S, 27,3% dos dados gerados foram representados pela distribuição GVE e 0% pela distribuição Weibull três parâmetros;
2. Estratégia B (SWT): 100% dos casos foram representados pela distribuição lognormal, a distribuição B-S também representou 100% dos dados, 72,7% pela distribuição GVE, a distribuição de Weibull também não foi representativa desse modelo;
3. Estratégia A (MWCM): a distribuição lognormal foi representativa das vidas estimadas em 90,9% dos casos analisados, a distribuição B-S foi aceita em 45,4% dos dados obtidos, em relação a distribuição GVE era porcentagem foi de 36,4% e a distribuição de Weibull não foi representativa dos dados gerados;
4. Estratégia B (MWCM): 63,6% dos casos foram representados pela distribuição lognormal, 54,5% pela distribuição B-S, a distribuição GVE representou 9,1% das vidas estimadas e a distribuição de Weibull também não foi representativa dos dados gerados;
5. Em termos gerais, para o modelo SWT e para o MWCM, a distribuição lognormal foi a mais representativa dos dados gerados, uma vez essa hipótese foi aceita na maioria dos casos.

A análise de sensibilidade identificou a influência dos parâmetros das curvas de fadiga, que são as variáveis de entrada utilizadas para alimentar os modelos de previsão de vida, nos resultados obtidos. Considerando essa análise, para as combinações de esforço analisadas, verificou-se que:

1. O modelo SWT apresentou uma uniformidade em relação às variáveis que mais interferiram no resultado da previsão de vida, ou seja, para todos os carregamentos

multiaxiais testados os resultados foram muito semelhantes para cada uma das Estratégias A e B analisadas;

2. Estratégia A (SWT): Em termos da contribuição percentual calculada, α_j , os parâmetros das curvas $L - N$ (A_l e b_l) foram os que mais influenciaram na resposta da vida estimada, em torno de 31% cada, o que totaliza 62% da influência na resposta somente considerando a curva de distância crítica *versus* vida. A variável $A_{\sigma g}$ (coeficiente da curva de fadiga para o espécime entalhado), também apresentou uma contribuição significativa, em torno de 25% do resultado foi influenciado por essa variável;
3. Estrutura B (SWT): A_l apresentou uma contribuição percentual de cerca de 40% no resultado previsto enquanto $A_{\tau g}$ contribuiu com 28% desse resultado. Neste caso, a contribuição de b_l foi pequena, em torno de 8%;
4. Para o MWCM, os resultados obtidos foram diferentes para os carregamentos multiaxiais analisados, de modo que, em ambas as estratégias, os carregamentos em que o valor de $\sigma_{ag} < \tau_{ag}$ apresentaram um resultado diferente do que nos casos em que $\sigma_{ag} > \tau_{ag}$;
5. Estratégia A (MWCM): para os casos em que $\sigma_{ag} < \tau_{ag}$, a maior contribuição percentual na vida prevista foi proveniente dos parâmetros A_l e b_l , com uma contribuição média de 30% cada, $A_{\sigma g}$ também apresentou uma contribuição significativa, com α_j em torno de 20%. Para os casos em que $\sigma_{ag} > \tau_{ag}$, A_l e b_l apresentaram uma contribuição média de 25% cada e A_σ (constante da curva de Wöhler do Material) de 23%;
6. Estratégia B (MWCM): para os casos em que $\sigma_{ag} < \tau_{ag}$, a maior contribuição percentual nas vidas estimadas foi obtida por A_l e b_l , com valor superior a 30% para cada, $A_{\tau g}$ apresentou α_j em torno de 23% nesses casos. Para os casos em que $\sigma_{ag} > \tau_{ag}$, A_σ foi a variável que mais contribuiu no valor da vida estimada com α_j em torno de 31%, A_l e b_l contribuíram com pouco mais de 20% cada;
7. É possível concluir que, para as Estratégias A e B do modelo SWT, a contribuição de A_l e b_l juntas, totalizam mais de 50% de interferência nos resultados da previsão de vida, de modo que é possível afirmar que as curvas de distância crítica *versus* vida geradas durante a análise, $L_{SWT}(\sigma) - N$ e $L_{SWT}(\tau) - N$ foram cruciais nos resultados obtidos. Esse resultado foi seguido pelos coeficientes das curvas de fadiga dos

espécimes entalhados, $\sigma_{ag} - N$ e $\tau_{ag} - N$, que também contribuíram de forma significativa nesses resultados;

8. Apesar de os resultados para o MWCM terem sido influenciados pela magnitude dos carregamentos axiais e torcionais aplicados, a contribuição percentual de A_l e b_l das curvas de distância crítica *versus* vida geradas durante a análise, $L_\sigma - N$ e $L_\tau - N$, fizeram com que essa curva fosse também o fator de maior interferência nas previsões de vida obtidas para esse modelo considerando as duas estratégias propostas.

8.1 CONSIDERAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- I. Utilizar outros modelos de previsão de vida disponíveis na literatura para avaliar o comportamento da curva de distância crítica *versus* vida e a influência de seus parâmetros no resultado das vidas estimadas;
- II. Utilizar dados experimentais provenientes de análises que considerem outro tipo de entalhe e/ou outro material.

REFERÊNCIAS

ASTM E739-91. **Standard Practice for Statistical Analysis of Linear or Linearized Stress-Life (S-N) and Strain-Life (ϵ -N) Fatigue Data**, 1988.

Adriano, V. S. R. **Previsão de vida à fadiga em fios de alumínio liga, utilizados em cabos condutores, contendo descontinuidades geométricas**. 117 f. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Ciências Mecânicas – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, 2017.

Althouse, L.A., Ware, W.B.; Ferron, J.M. **Detecting departures from normality**: A Monte Carlo simulation of a new omnibus test based on moments. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA, 1988.

Araújo, J. A.; Dantas, A. P.; Castro, F. C.; Mamiya, E. N.; Ferreira, J. L. A. On the characterization of the critical plane with a simple and fast alternative measure of the shear stress amplitude in multiaxial fatigue. **International Journal of Fatigue**, v. 33, n. 8, p.1092-1100, ago. 2011.

Bali, T. G. **The generalized extreme value distribution**. **Economics Letters**, New York, v. 79, n. 3, p.423-427, jun. 2003.

Birnbaum, Z.W.; Saunders, S.C. Estimation for a family of life distributions with applications to fatigue. **Journal of Applied Probability**, Washington, v. 6, n. 02, p.328-347, ago. 1969a.

Birnbaum, Z.W.; Saunders, S.C. A new family of life distributions. **Journal of Applied Probability**, Washington, v. 6, n. 02, p.319-327, ago. 1969b.

Brown, M. W., Miller, K. J. **A theory for fatigue under multiaxial stress-strain conditions**. *Proc. Instit. Mech. Eng.* 187, 745–756, 1973.

Bussab, W. de O.; Morettin, P. A. **Estatística Básica**. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

Caixeta, E. C. **Investigação experimental da fadiga em lajes de pontes com ou sem pré-lajes**. 2010. 173 f. Dissertação (Mestrado) - Engenharia de Estruturas, Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

Castro, F. C.; Araújo, J. A.; Zouain, N. On the application of multiaxial high-cycle fatigue criteria using the theory of critical distances. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 76, n. 4, p. 512–524, 2009..

Cordeiro, G. M.; Lemonte, A. J. The β -Birnbaum–Saunders distribution: An improved distribution for fatigue life modeling. **Computational Statistics & Data Analysis**, Pernambuco, v. 55, n. 3, p.1445-1461, mar. 2011.

Dang Van K. **Sur la résistance à la fatigue des métaux**. *Sci Tech L’armement*. 47:429–53, 1973.

Dantas, A. P. **Proposta alternativa para cálculo da amplitude da tensão cisalhante e uso de algoritmos genéticos para determinação do plano crítico em fadiga multiaxial**. 158 f. Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Ciências Mecânicas, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, 2009.

Devore, J. L. **Probabilidade e Estatística: para Engenharia e Ciências**. [Tradução: Joaquim Pinheiro Nunes da Silva] São Paulo: Cengage Learning, 2006.

Dowling, N. E. **Mechanical Behavior of Materials: Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue**. 4. ed. Virginia: Pearson, 2013.

Fatemi, A.; Socie, D. F. **A Critical Plane Approach to Multiaxial Fatigue Damage Including Out-of-Phase Loading**, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Vol. 11, No. 3, 149-166, 1988.

Ferreira, C. C. **Análise de sensibilidade por meio de experimento fatorial de parâmetros de desempenho térmico de envoltórias de edificações residenciais**: contribuição à revisão das normas brasileiras. 2016. 437 f. Tese de Doutorado - Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2016.

Findley, W. N., A Theory for the Effect of Mean Stress on Fatigue of Metals Under Combined Torsion and Axial Load or Bending, **Journal of Engineering for Industry**, 301-306, 1959.

Fontelles, M. J. **Bioestatística**: Aplicada à Pesquisa Experimental. Vol. 1. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012a. 2 v.

Fontelles, M. J. **Bioestatística**: Aplicada à Pesquisa Experimental: Vol. 2. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012b. 2 v.

Garcia, A.; Spim, J. A.; Santos, C. A. dos. **Ensaio dos Materiais**. [Reimpr.]. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2000.

Gentle, J. E. **Random Number Generation and Monte Carlo Methods**. 2. ed. Heidelberg: Springer Science, 2003.

Gonçalves, G. A. A.; Teixeira, L. A.; Kalid, R. A. Análise da sensibilidade do método de Monte Carlo para a estimativa de incerteza de acordo com o número de dados aleatórios gerados. In: V Congresso Brasileiro de Metrologia, **Anais**. Salvador – BA, 2009.

Grubisic, V., Simburger, A. **Fatigue under combined out of fase multiaxial stress**. Proc. Int. Conf. Fatigue Testing and Design, Society of Environmental Engineers, 27. 1-27. 8. London, 1976.

Hammersley, J. M. Monte Carlo methods for solving multivariable problems. **Annals of The New York Academy of Sciences**, Oxford, England, v. 86, n. 3, p.844-874, 15 dez. 2006.

Hoffmann, R. **Análise de regressão: uma introdução à econometria**. 5. ed. Piracicaba, 2016.

Ince, A.; Glinka, G. **A modification of Morrow and Smith-Watson-Topper mean stress correction models**. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Waterloo, v. 34, n. 11, p.854-867, 28 abr. 2011.

Larson, R.; Farber, B. **Estatística Aplicada**. 4. ed. São Paulo: Pearson, 2010.

Lazo, P. P. D. Monte Carlo para problemas determinísticos: Sistemas lineares. **Synergismus Scyentifica UTFPR**, Cascavel, PR, v. 4, n. 2, p.1-8, 2009.

Lee, Y. L., Pan, J., Hathaway, R. B., Barkey, M. E. **Fatigue Testing and Analysis (Theory and Practice)**, Elsevier, Oxford, 2005.

Leiva, V. **The Birnbaum–Saunders Distribution**. Viña del Mar, Chile: Academic Press, 2016.

Lemaitre, J., Chaboche, J.L. **Mechanics of Solid Materials**, Cambridge University Press, 1990.

Leotti, V. B; Birck, A. R.; Riboldi, J. Comparação dos Testes de Aderência à Normalidade Kolmogorov-smirnov, Anderson-Darling, Cramer–Von Mises e Shapiro-Wilk por Simulação. 11º Simpósio de Estatística Aplicada à Experimentação Agronômica (SEAGRO). **Anais**. Londrina, PR, 2005.

Mann, T. **Fatigue assessment methods for welded structures and their application to an aluminium T-joint**, Doctoral (Thesis), Department of Engineering Design and Materials, Faculty of Engineering Science and Technology, Norwegian University of Science and Technology, 2006.

Marsden, E. **Sensitivity analysis for risk-related decision-making**. Disponível em: <<https://risk-engineering.org/static/PDF/slides-sensitivity-analysis.pdf>>. Acesso em: 26 abr. 2018.

Mathworks. **Generalized Extreme Value Distribution**. Disponível em: <<https://la.mathworks.com/help/stats/generalized-extreme-value-distribution.html>>. Acesso em: 30 mar. 2018.

Mccool, J. I. **Using the Weibull Distribution: Reliability, Modeling, and Inference**. New Jersey: Wiley, 2012.

McDiarmid, D. L., A General Criterion for High Cycle Multiaxial Fatigue Failure, **Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.** Vol 14, No. 4, 429-453, 1991.

McDiarmid, D. L. A shear stress based critical plane criterion of multiaxial fatigue failure for design and life prediction. **Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.** 17, 1475–1485, 1994.

Muller, A. **Simulação estocástica: o método de Monte Carlo**. 75 f. Dissertação de Mestrado – Curso de Bacharelado em Estatística, Universidade Federal do Paraná, Curitiba – PR, 2008.

Nicholas, T. **High Cycle Fatigue: A Mechanics of Materials Perspective**. Ohio, USA: Elsevier, 2006.

Norton, R. L. **Projeto de máquinas: uma abordagem integrada**, 2. ed., Porto Alegre: Bookman, 2004.

Paula, R. R. de. **Método de Monte Carlo e Aplicações**. 83 f. - Curso de Matemática Com ênfase em Matemática Computacional, Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda - RJ, 2014.

Papadopoulos IV. **A new criterion of fatigue strength for out-of phase bending and torsion of hard metals**. Int J Fatigue, 16:377–84, 1994.

Pereira, H. F. S. G. **Comportamento à fadiga de componentes estruturais sob a ação de solicitações de amplitude variável**. 292 f. Dissertação de Mestrado - Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, 2006.

Pinheiro, J. I. D.; Cunha, S. B.; Carvajal, S. S. R. Gomes, G. C. **Estatística Básica: A arte de trabalhar com dados**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2009.

Pinheiro, J. I. D.; Carvajal, S. S. R.; Cunha, S. B.; Gomes, G. C. **Probabilidade e estatística: Quantificando a incerteza**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012.

Portal Action. **Regressão linear simples**. Disponível em: <<http://www.portalaction.com.br/analise-de-regressao/regressao-linear-simples>>. Acesso em: 14 mar. 2018.

Provost, S. B.; Saboor, A.; Cordeiro, G. M.; Mansoor, M. On the q-generalized extreme value distribution. **REVSTAT – Statistical Journal**, v. 16, n. 1, p.45-70, jan. 2018.

Sá, M. V. C. **Estudo sobre o comportamento em fadiga da liga de alumínio 7050-t7451 na presença de entalhe e carregamento axial-torcional**. 122 f. Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Ciências Mecânicas, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, 2017.

Saltelli, A.; Tarantola, S.; Campolongo, F.; Ratto, M. **Sensitivity analysis in practice: a guide to assessing scientific models**. Ispra, Italy: Wiley, 2004.

Saltelli, A.; Ratto, M.; Andres, T.; Campolongo, F.; Cariboni, J.; Gatelli, D.; Saisana, M.; Tarantola, S. **Global Sensitivity Analysis. The Primer**. Ispra, Italy: Wiley, 2008.

Schütz, W. A history of fatigue. **Engineering Fracture Mechanics**, [S.l.], V. 54, n. 2, p.263-300, maio 1996. Elsevier BV. [http://dx.doi.org/10.1016/0013-7944\(95\)00178-6](http://dx.doi.org/10.1016/0013-7944(95)00178-6).

Shamsaei, N.; Fatemi, A. Effect of hardness on multiaxial fatigue behaviour and some simple approximations for steels. **Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.**, V. 32, n. 8, p.631-646, 2009.

Silva, B. L. da. **Uma metodologia de análise de confiabilidade à fadiga utilizando a teoria da distância crítica**. 176 f. Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Ciências Mecânicas, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

Smith, R.N., Watson, P. & Topper, T.H. **A stress-strain parameter for the fatigue of metals.** *Journal of Materials*, 5(4), pp. 767–778, 1970.

Sobol, Ilya M. **A Primer for the Monte Carlo Method.** Boca Raton: CRC Press, 1994.

Socie, D. **Critical Plane Approaches for Multiaxial Fatigue Damage Assessment, Advances in Multiaxial Fatigue.** ASTM STP 1191, McDowell, D.L. and Ellis, R. (eds). pp. 7–36, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1993.

Socie, D. F.; Marquis, G. B. **Multiaxial Fatigue.** Sae International, 2000.

Souza, E. D. de. **Um modelo de análise de confiabilidade sob condições de falha por fadiga - aplicação a pás de hidroturbinas kaplan.** 98 f. Dissertação de Mestrado - Programa de Pós-graduação em Integridade de Materiais da Engenharia, Universidade de Brasília, Brasília, 2013.

Souza, T. T. P. **Simulações Financeiras em GPU.** 140 f. Dissertação de Mestrado - Curso de Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

Stephens, R. I.; Fatemi, A.; Stephens, R. R.; Fuchs, H. O. **Metal Fatigue in Engineering.** 2. ed. New York: Wiley Interscience, 2000.

Susmel, L.; Lazzarin, P. A bi-parametric Wöhler curve for high cycle multiaxial fatigue assessment. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, Vicenza, v. 25, n. 1, p.63-78, jan. 2002.

Susmel, L.; Taylor, D. Two methods for predicting the multiaxial fatigue limits of sharp notches. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, Dublin, v. 26, n. 9, p.821-833, set. 2003.

Susmel, L.; Taylor, D. A novel formulation of the theory of critical distances to estimate lifetime of notched components in the medium-cycle fatigue regime. **Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct**, vol. 30, n. 7, p.567-581. Wiley-Blackwell, 2007.

Susmel, L., Taylor, D., A critical distance/plane method to estimate finite life of notched components under variable amplitude uniaxial/multiaxial fatigue loading. **International Journal of Fatigue**, v. 38, p.7–24, 2012.

Takahashi, B. X. **Metodologia moderna para análise de fadiga baseada em elementos finitos de componentes sujeitos a fadiga uni e multiaxial.** 2014. 338 f. Dissertação de Mestrado - Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

Teixeira, R. S. **Metodologia de análise de fadiga em componentes estruturais de aço baseada na mecânica da fratura.** 2004. 106 f. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2004.

Tian, Wei. **A review of sensitivity analysis methods in building energy analysis.** *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Cambridge, v. 20, p.411-419, abr. 2013.

Torman, V. B. L.; Coster, R.; Riboldi, J. Normalidade de variáveis: métodos de verificação e comparação de alguns testes não-paramétricos por simulação. **Rev. HCPA**, Porto Alegre, v. 32, n. 2, p.227-234, 2012.

Weisberg, Sanford. **Applied linear regression**. 3. ed. Minneapolis, Minnesota: Wiley, 2005.

Yu, Z.Y.; Zhu, S. P.; Liu, Q.; Liu, Y. **A New Energy-Critical Plane Damage Parameter for Multiaxial Fatigue Life Prediction of Turbine Blades**. *Materials*, Chengdu, China, V. 10, n. 5, p.513-530, 2007.

ANEXO I

n	α					n	α				
	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01		0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,900	0,95	0,975	0,990	0,995	21	0,226	0,259	0,287	0,321	0,344
2	0,684	0,776	0,842	0,900	0,929	22	0,221	0,253	0,281	0,314	0,337
3	0,565	0,636	0,708	0,785	0,829	23	0,216	0,247	0,275	0,307	0,330
4	0,493	0,565	0,624	0,689	0,734	24	0,212	0,242	0,269	0,301	0,323
5	0,447	0,509	0,563	0,627	0,669	25	0,208	0,238	0,264	0,295	0,317
6	0,410	0,468	0,519	0,577	0,617	26	0,204	0,233	0,259	0,290	0,311
7	0,381	0,436	0,483	0,538	0,576	27	0,200	0,229	0,254	0,284	0,305
8	0,358	0,410	0,454	0,407	0,542	28	0,197	0,225	0,250	0,279	0,300
9	0,339	0,387	0,430	0,480	0,513	29	0,193	0,221	0,246	0,275	0,295
10	0,323	0,369	0,409	0,457	0,489	30	0,190	0,218	0,242	0,270	0,290
11	0,308	0,352	0,391	0,437	0,468	31	0,187	0,214	0,238	0,266	0,285
12	0,296	0,338	0,375	0,419	0,449	32	0,184	0,211	0,234	0,262	0,281
13	0,285	0,325	0,361	0,404	0,432	33	0,182	0,208	0,231	0,258	0,277
14	0,275	0,314	0,349	0,390	0,418	34	0,179	0,205	0,227	0,254	0,273
15	0,266	0,304	0,338	0,377	0,404	35	0,177	0,202	0,224	0,251	0,269
16	0,258	0,295	0,327	0,366	0,392	36	0,174	0,199	0,221	0,247	0,265
17	0,250	0,286	0,318	0,355	0,381	37	0,172	0,196	0,218	0,244	0,262
18	0,244	0,279	0,309	0,346	0,371	38	0,170	0,194	0,215	0,241	0,258
19	0,237	0,271	0,301	0,337	0,361	39	0,168	0,191	0,213	0,238	0,255
20	0,232	0,265	0,294	0,329	0,352	40	0,165	0,189	0,210	0,235	0,252

Figura I.1 –Valores críticos para a distribuição de Kolmogorov-Smirnov (D)

Os valores tabelados correspondem aos pontos $D_{n,\alpha}$, tais que: $P(D_n \geq D_{n,\alpha}) = \alpha$.

Para $n > 40$, os valores críticos de D_n podem ser aproximados pelas seguintes expressões:

α				
0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
$\frac{1,07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,52}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,63}{\sqrt{n}}$

Figura I.2 – Tabela contendo as aproximações quando $n > 40$ (Teste D)

ANEXO II

Tabela II.1 - Resultados dos testes uniaxiais de fadiga realizados sob torção alternada, τ , e sob tração-compressão, σ , em relação ao número de ciclos necessários para falha, N_f , do componente

Torção alternada		Tração-Compressão	
τ_{ag}	N_f	σ_{ag}	N_f
20,07	4,70E+06	75,83	5,77E+03
20,07	1,79E+07	60,88	5,71E+03
25,11	3,57E+06	46,00	5,09E+04
25,11	4,55E+06	46,00	3,26E+04
30,19	1,11E+06	46,00	3,26E+04
30,19	1,32E+06	40,00	5,47E+04
35,30	7,00E+05	40,00	3,74E+04
40,31	1,30E+05	35,70	1,64E+06
40,31	1,40E+05	35,70	1,11E+05
40,3	1,30E+06	30,00	1,63E+05
35,3	1,54E+06	30,00	7,12E+04
		25,50	2,46E+05
		24,05	9,22E+06
		24,05	8,21E+06

Fonte: Sá (2017)

Tabela II.2 - Resultados de P_{SWT} em relação à vida de fadiga, N_f , sob condição de torção e tração-compressão, obtidas a partir dos resultados experimentais realizados com os espécimes não entalhados

N_f	σ_{un}	τ_{un}
8,23E+06	112	0
2,92E+05	112	0
1,27E+06	112	0
1,47E+05	129	0
3,00E+05	129	0
9,77E+06	129	0
1,45E+05	146	0
2,13E+05	146	0
5,45E+04	180	0
9,49E+04	180	0
1,19E+05	180	0
5,26E+04	180	0
6,57E+04	180	0
4,58E+04	205	0
7,80E+04	205	0
5,11E+06	0	67,72
9,47E+06	0	67,72
6,23E+06	0	67,72
1,74E+06	0	67,72

2,35E+06	0	79,67
2,50E+06	0	79,67
2,07E+06	0	86,60
2,42E+06	0	86,60
2,76E+06	0	86,60
3,24E+06	0	86,60
5,00E+05	0	108,63
6,54E+05	0	108,63
1,54E+06	0	108,63
3,68E+05	0	118,35
2,86E+04	0	173,21
5,63E+04	0	173,21
8,90E+04	0	173,21
1,85E+06	42,13	69,52
4,54E+06	42,13	69,52
6,78E+06	42,13	69,52
2,50E+06	47,46	78,31
1,47E+06	53,48	88,24
2,12E+05	57,50	115,00
2,47E+05	64,60	106,58
7,02E+03	112,38	185,42
1,56E+05	121,90	60,95
2,30E+05	121,90	60,95

Fonte: Sá (2017)

ANEXO III

Neste anexo são apresentadas as respostas das variáveis de saída A_l e b_l , da curva de distância crítica versus vida em relação às entradas dos critérios utilizados para previsão de vida neste trabalho: SWT e MWCM. As análises são realizadas considerando a Estratégia A e Estratégia B propostas, que consideram os resultados dos ensaios base nas condições de tração-compressão e torção pura, respectivamente.

Em relação ao modelo SWT, as variáveis de entrada são: $A_{P_{SWT}}$, das curvas de Wöhler do material, $A_{\sigma_{ag}}$ e $A_{\tau_{ag}}$, das curvas de fadiga para o componente entalhado. Para o critério MWCM, as variáveis de entrada são: A_{σ} e A_{τ} , das curvas de Wöhler do material, $A_{\sigma_{ag}}$ e $A_{\tau_{ag}}$, das curvas de fadiga para o componente entalhado. As Fig. III.1 e III.2 apresentam os resultados da sensibilidade das saídas em relação à essas entradas considerando $\sigma_{ag} = 11$ e $\tau_{ag} = 22$, para o modelo SWT e o MWCM, respectivamente.

As mesmas análises de respostas das variáveis de saída, A_l e b_l , em relação às entradas descritas anteriormente, foram realizadas para as combinações de esforços $\sigma_{ag} = 16$ e $\tau_{ag} = 20$, apresentadas na Fig. III.3 para o modelo SWT e na Fig. III.4 para o MWCM. Para os valores de $\sigma_{ag} = 38$ e $\tau_{ag} = 19$, os resultados são apresentados na Fig. III.5 para SWT e na Fig. III.6 para MWCM.

Realizando uma comparação entre o modelo SWT e o MWCM para a avaliação da melhor resposta das variáveis de saída A_l e b_l na análise de sensibilidade, algumas observações podem ser feitas:

- Em termos gerais, para ambas as análises os resultados foram satisfatórios, no entanto, os gráficos que trazem uma relação com o expoente das curvas $L - N_f$, b_l , apresentaram um comportamento que exigiu maior cuidado na avaliação;
- Para o critério MWCM, as análises realizadas para os espécimes testados em torção obtiveram melhores resultados, principalmente aqueles que trazem uma relação com a variável de entrada b_l .

O comportamento de b_l foi explicado na seção 7.4.1 deste trabalho e, no caso da análise em que b_l é uma variável de saída, a explicação não difere daquela apresentada quando se fez a análise com b_l como uma variável de entrada e avaliando a resposta da vida estimada.

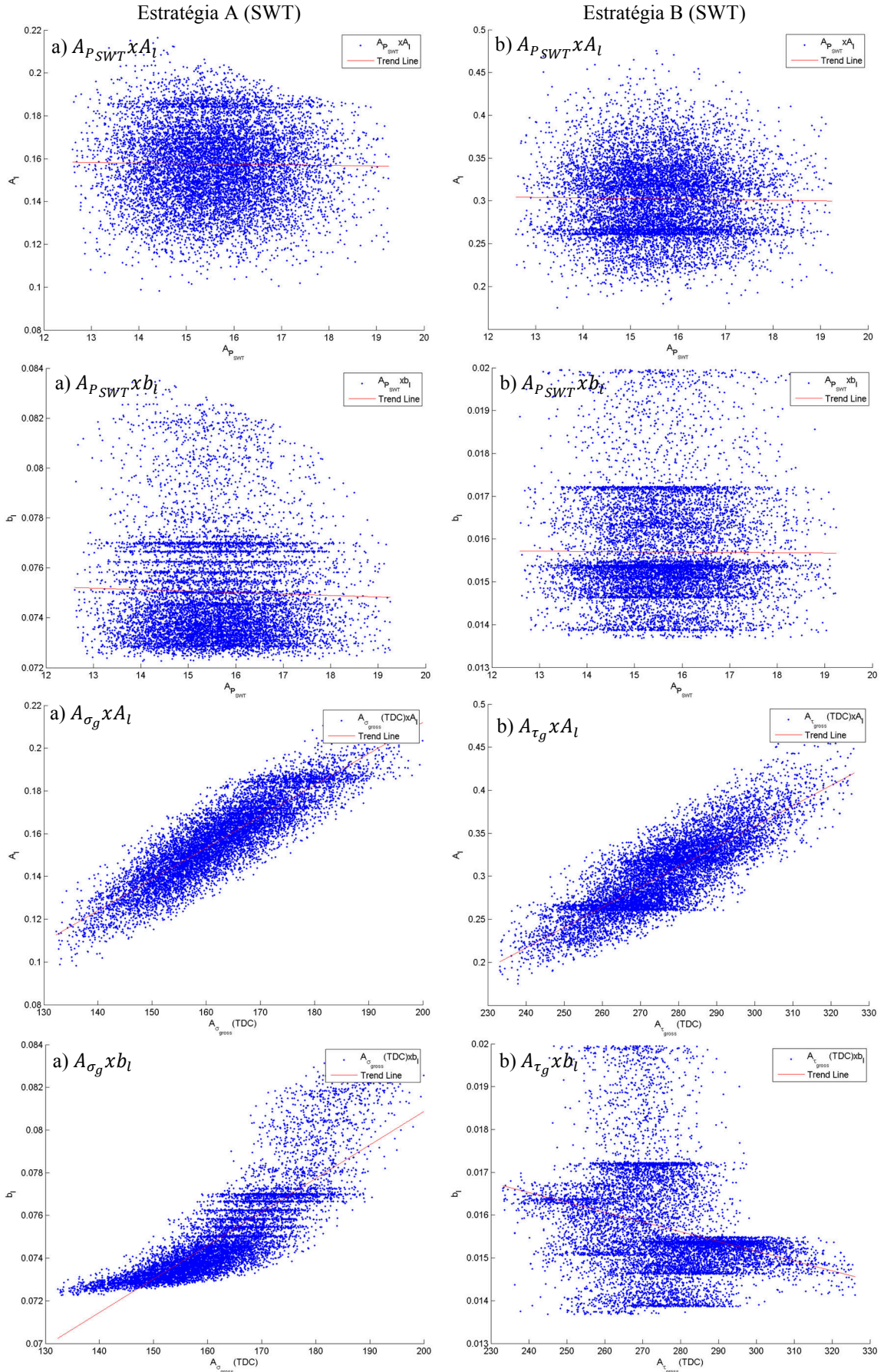


Figura III.1 – Respostas das variáveis de saída A_l e b_l , para as entradas do modelo SWT quando $\sigma_{ag} = 11$ e $\tau_{ag} = 22$ considerando: a) Estratégia A e b) Estratégia B

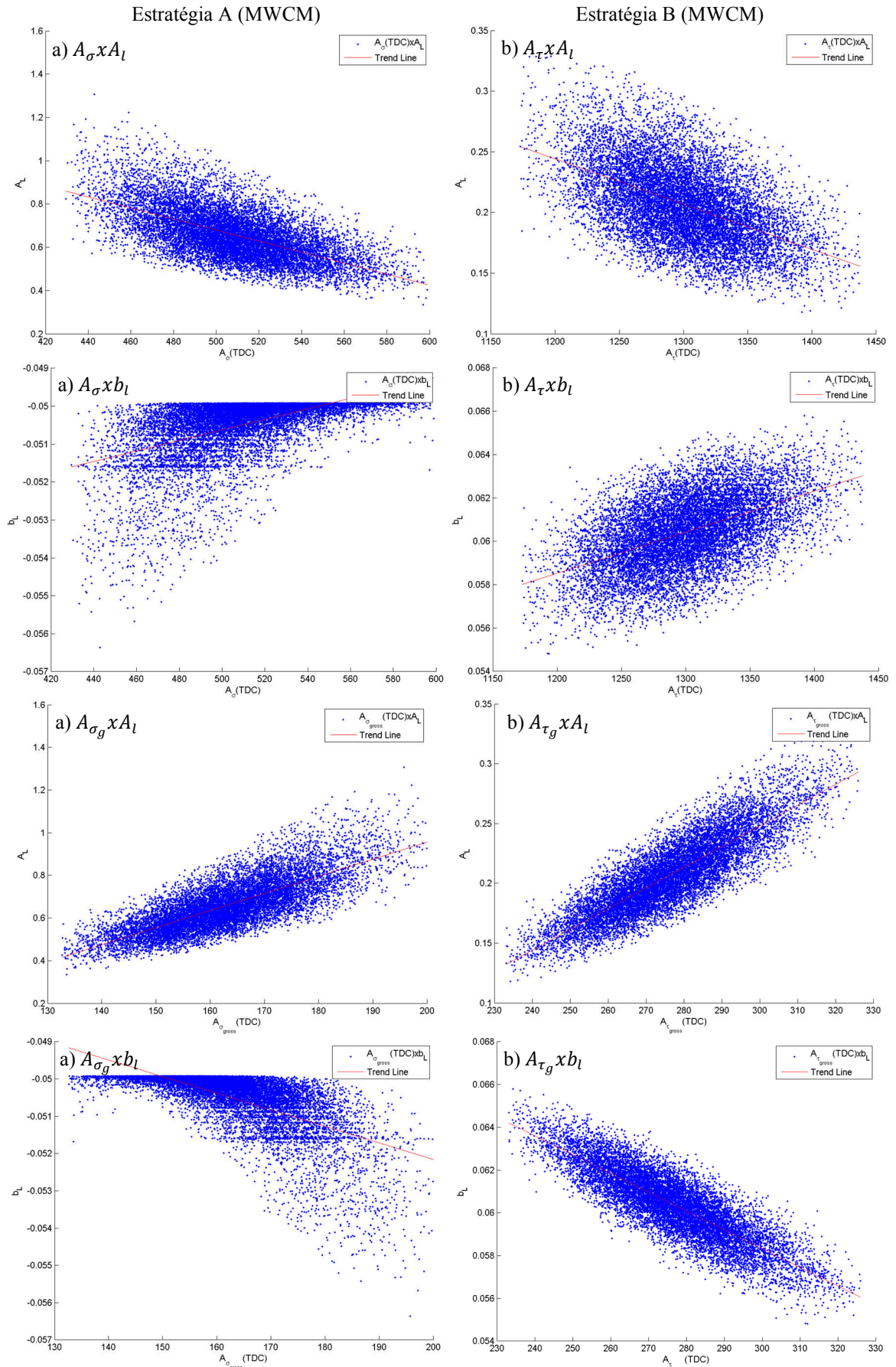


Figura III.2 – Respostas das variáveis de saída A_l e b_l , para as entradas do MWCM quando $\sigma_{ag} = 11$ e $\tau_{ag} = 22$ considerando: a) Estratégia A e b) Estratégia B

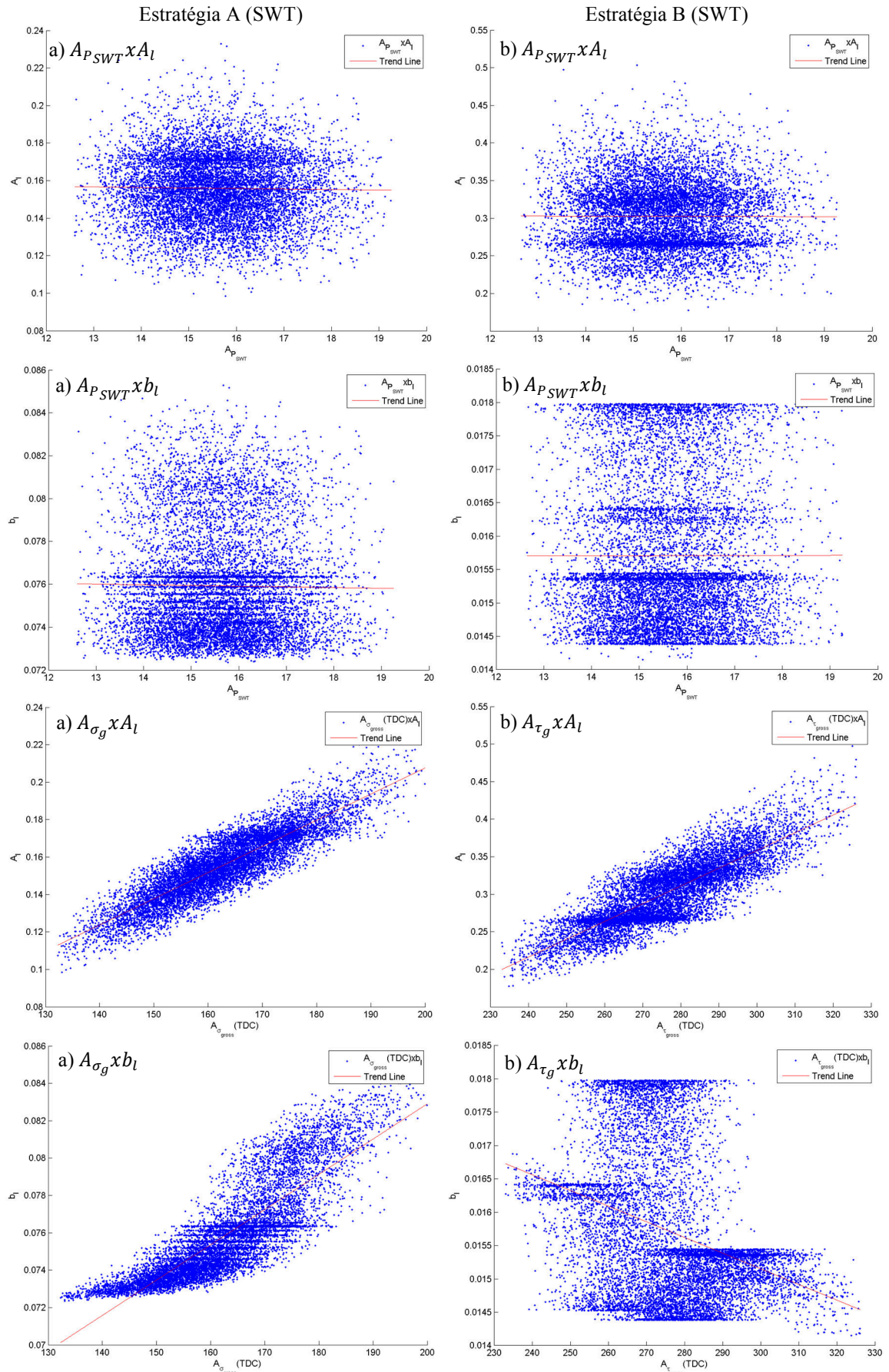


Figura III.3 – Respostas das variáveis de saída A_l e b_l , para as entradas do modelo SWT quando $\sigma_{ag} = 16$ e $\tau_{ag} = 20$ considerando: a) Estratègia A e b) Estratègia B

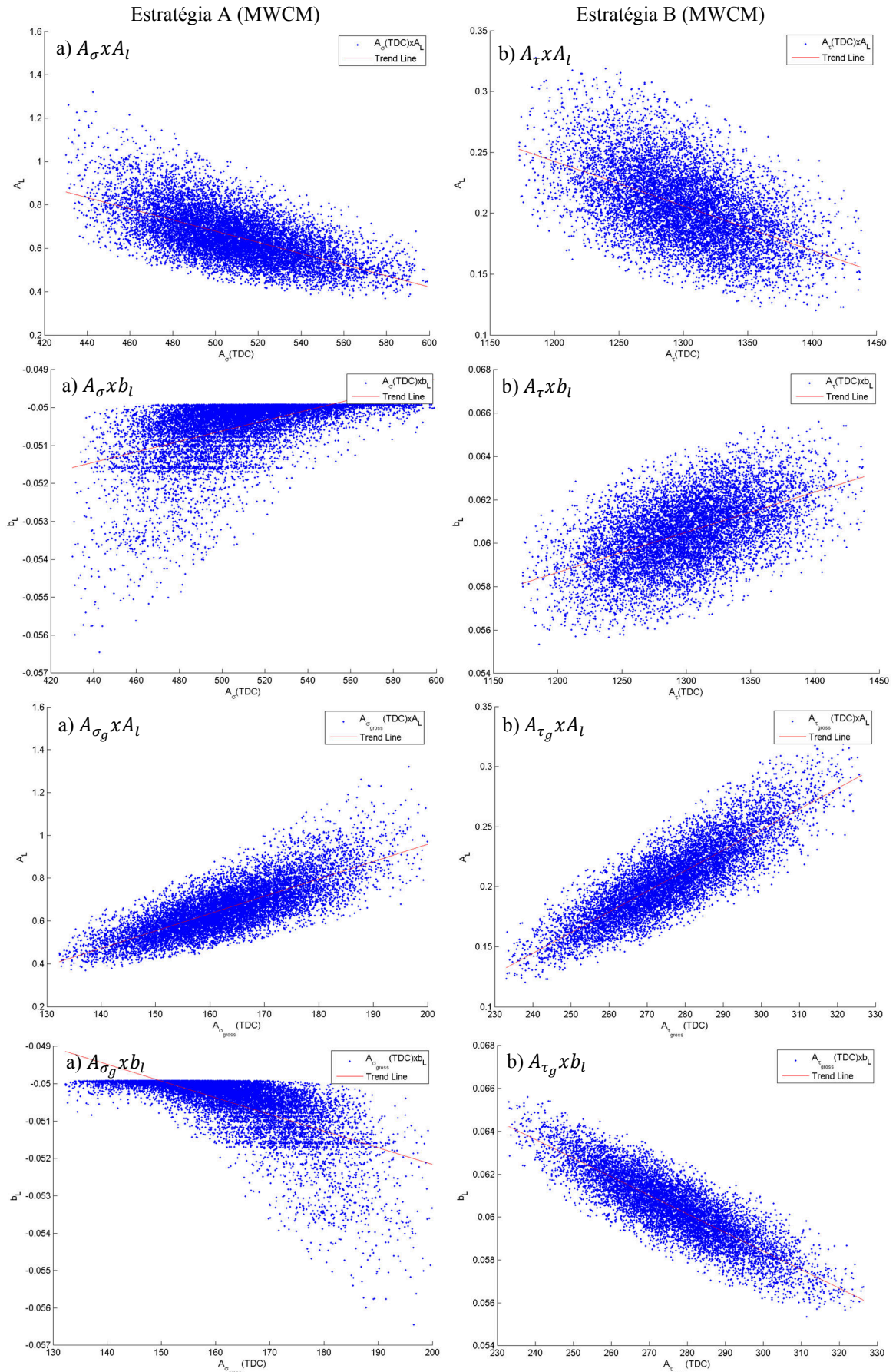


Figura III.4 – Respostas das variáveis de saída A_l e b_l , para as entradas do MWCM quando $\sigma_{ag} = 16$ e $\tau_{ag} = 20$ considerando: a) Estratégia A e b) Estratégia B

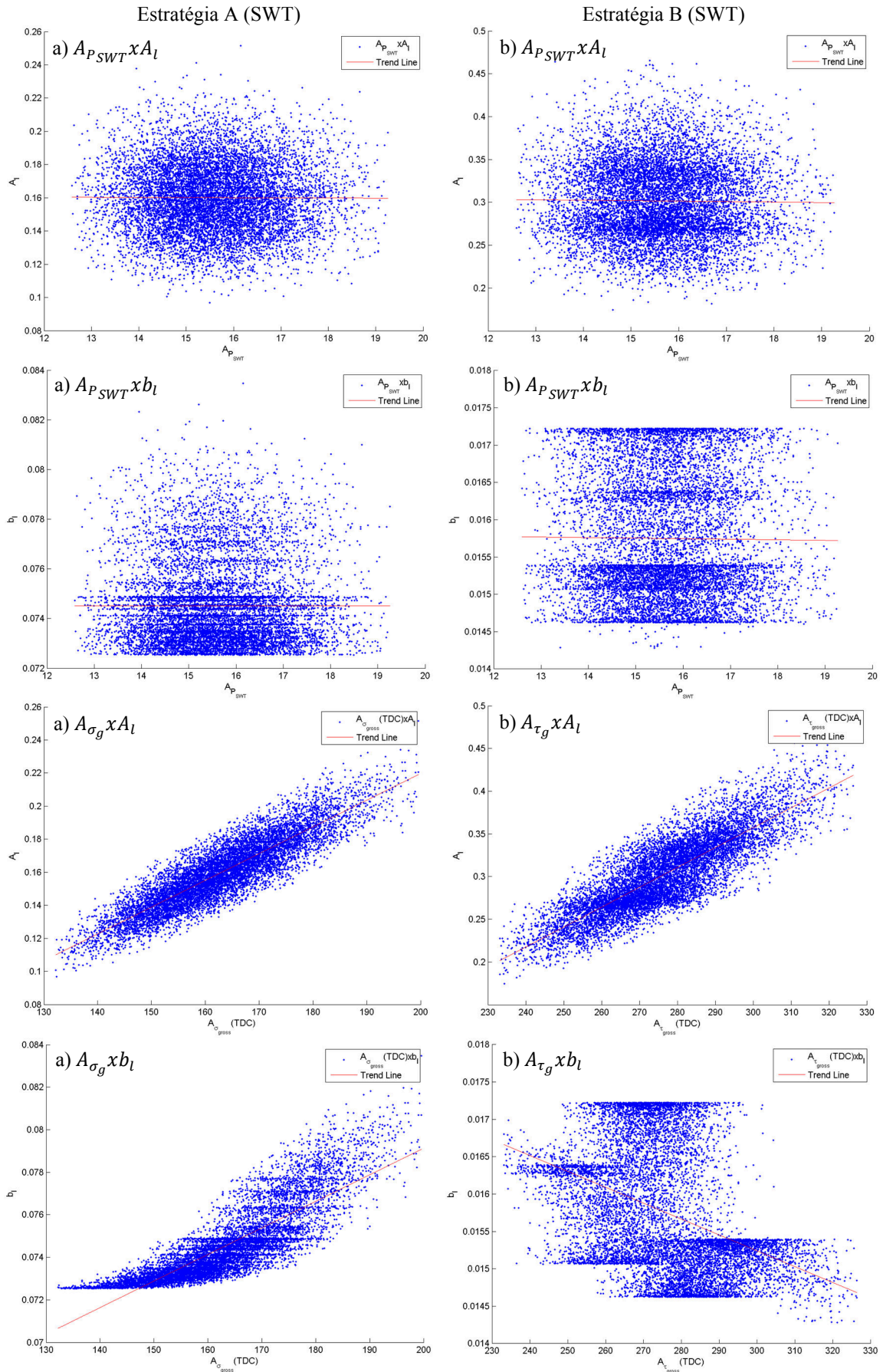


Figura III.5 – Respostas das variáveis de saída A_l e b_l , para as entradas do modelo SWT quando $\sigma_{ag} = 38$ e $\tau_{ag} = 19$ considerando: a) Estratégia A e b) Estratégia B

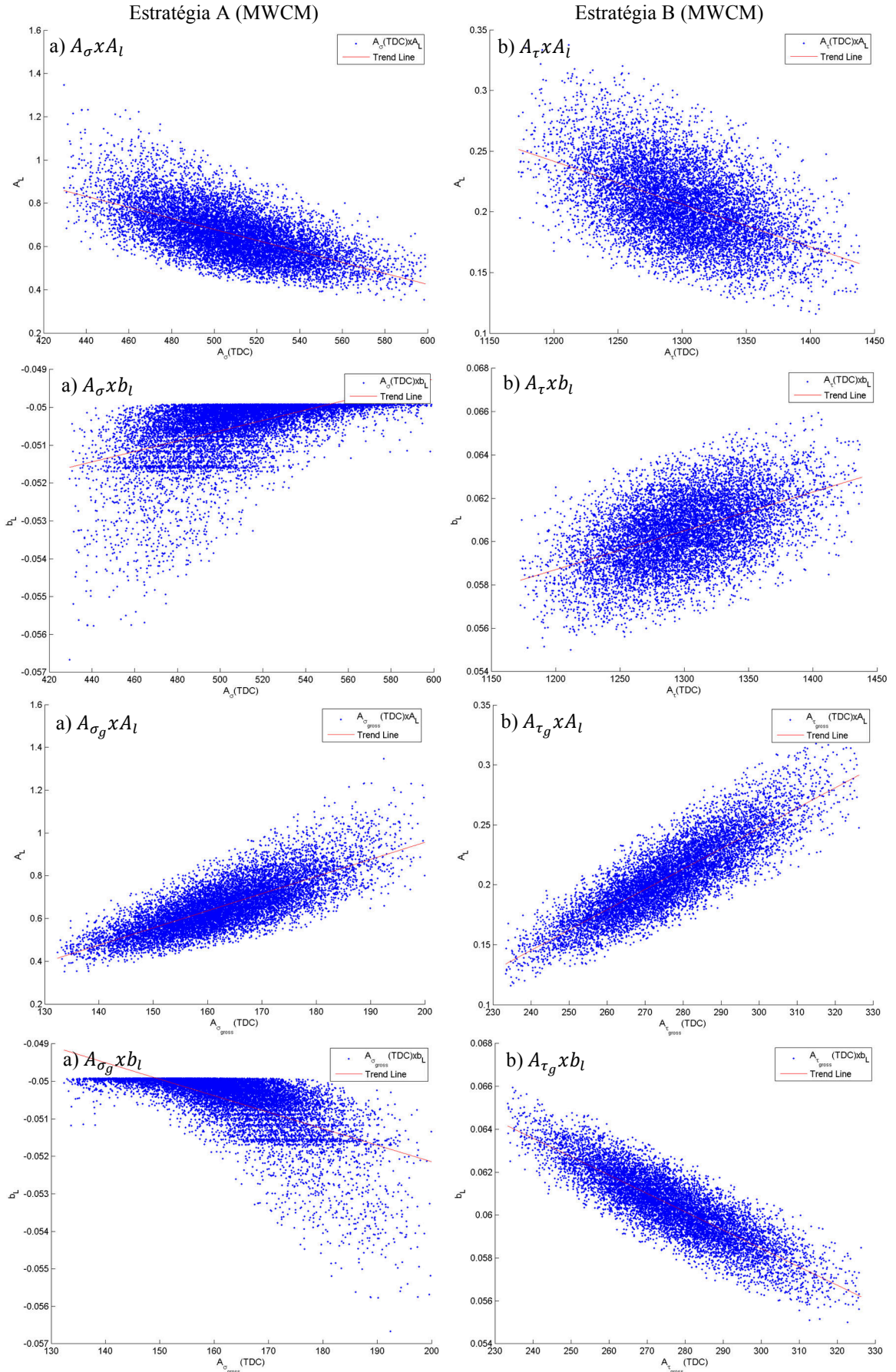


Figura III.6 – Respostas das variáveis de saída A_l e b_l , para as entradas do MWCM quando $\sigma_{ag} = 38$ e $\tau_{ag} = 19$ considerando: a) Estratégia A e b) Estratégia B