

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE DA ASSOCIAÇÃO DE PLACAS NO ESPAÇO
USANDO ELEMENTOS DE CONTORNO QUADRÁTICOS
DESCONTÍNUOS

DANILO DIEGO CHAVES MATEUS

ORIENTADOR: ÉDER LIMA DE ALBUQUERQUE

MESTRADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS
PUBLICAÇÃO: ENM-DM 287/2018
BRASÍLIA/DF: JULHO-2018

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE DA ASSOCIAÇÃO DE PLACAS NO ESPAÇO
USANDO ELEMENTOS DE CONTORNO QUADRÁTICOS
DESCONTÍNUOS

DANILO DIEGO CHAVES MATEUS

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências Mecânicas pelo Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília.

Banca Examinadora:

Prof. Éder Lima de Albuquerque, UnB/ENM

Prof. Adriano Todorovic Fabro, UnB/ENM

Prof. Gilberto Gomes, UnB/ENC

Brasília, 17 de julho de 2018.

FICHA CATALOGRÁFICA

Dedicatória

Primeiramente à Deus, minha família, amigos, namorada, colegas de trabalho pelo apoio, força, incentivo, companheirismo e amizade. Sem essas pessoas nada disso seria possível.

Agradecimentos

- Inicialmente, à Deus pela vida.
- À CAPES, pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.
- Ao meu orientador, Professor *Éder Lima de Albuquerque*, pela paciência, apoio, orientação, por tantos conhecimentos transmitidos.
- A minha mãe, Cleusa, aos meus irmãos, Rodrigo, Vinícius e Pollyana que, sempre incentivaram meus estudos, pelo apoio e participação em todas as minhas pequenas conquistas.
- À Patrícia, que sempre esteve ao meu lado, me incentivou e deu forças para continuar sempre. Aos meus amigos pelo conhecimento e por estarem sempre dispostos a me ajudar no que fosse necessário.
- A todos aqueles que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho e que aqui não foram citados.

A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo?.
(Albert Einstein)

Resumo

Mateus, Danilo Diego Chaves, *Análise da Associação de Placas no Espaço Usando Elementos de Contorno Quadráticos Desconcontínuos*. Brasília, 2018. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília.

Este trabalho apresenta uma formulação do método dos elementos de contorno para análise de estruturas formadas pela associação espacial de placas sob carregamento estático. As formulações dos elementos de contorno para flexão de placas e de elasticidade plana são associadas, obtendo-se uma estrutura plana denominada de macro-elemento. O contorno desta região é discretizado em elementos de contorno. Cada um destes elementos possuem três pontos de colocação (elementos de contorno quadráticos descontínuos), onde as equações integrais de contorno são aplicadas. Um macro-elemento contém quatro graus de liberdade por nó, sendo eles: os deslocamentos normal, tangencial e transversal e a rotação em torno da normal ao contorno. É feita uma associação dessas sub-regiões no espaço. As equações de cada sub-região, após as transformações de coordenadas, são acopladas através da compatibilidade de deslocamentos e rotações e equilíbrio de forças e momentos. A fim de calcular os elementos das matrizes de influência, as integrais de contorno ao longo dos elementos são obtidos numericamente. A principal contribuição deste trabalho é o uso de elementos de contorno quadráticos descontínuos na formulação do método dos elementos de contorno para a associação de placas no espaço. Com objetivo de validar a formulação desenvolvida, alguns exemplos numéricos são analisados e, os resultados obtidos são comparados com soluções disponíveis na literatura. É feita uma comparação dos resultados com trabalhos prévios nos quais foram utilizados elementos de contorno constantes. Os resultados tem boa concordância com resultados analíticos. Na comparação com elementos constantes, os elementos quadráticos descontínuos tem uma melhor aproximação dos resultados analíticos.

Palavras chaves: Método dos elementos de contorno, associação de placas, cascas, sub-regiões.

Abstract

Mateus, Danilo Diego Chaves, *Analysis of the association of plates in space using quadratic contour elements discontinuous*. Brazilia, 2018. Masters Dissertation, Faculty of Technology, University of Brazilia.

This work presents a formulation of the boundary element method for the analysis of structures formed by the spatial association of plates under static loading. Formulations of boundary elements for plate bending and plane elasticity are associated, obtaining a flat structure denominated macro-element. The contour of this region is discretized in boundary elements. Each of this element has three collocation points (quadratic boundary elements), where boundary integral equations are applied. A macro-element contains four degrees of freedom per node, being: the normal, tangential and transverse displacements and the rotation around the normal to the boundary. An association of these subregions is made in space. Equations of each sub-region, after the coordinate transformations, are coupled through the compatibility of displacements and rotations and balance of forces and moments. In order to calculate elements of influence matrices, boundary integrals along the elements are obtained numerically. The main contribution of this work is the use of discontinuous quadratic boundary elements in the formulation of the boundary element method for the association of plates in space. In order to validate the developed formulation, some numerical examples are analyzed and the obtained results are compared with solutions available in the literature. A comparison of the results with previous works in which constant boundary elements is carried out. The results have good agreement with analytical results. In the comparison with constant elements, the discontinuous quadratic elements have a better approximation of the analytical results.

Key words: Boundary element method, association of plates, shells, subregions.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	O método dos elementos de contorno	2
1.2	Considerações sobre placas	3
1.3	Objetivo	4
1.4	Motivação	5
1.5	Contextualização	5
1.6	Organização dos capítulos	7
2	Teoria da Elasticidade Linear	8
2.1	Introdução	8
2.2	Tensões e equilíbrio	9
2.3	Relação entre deformações e deslocamentos	11
2.4	Equações constitutivas	13
2.5	Equações de equilíbrio	13
2.6	Equações de compatibilidade	14
3	Integrais de contorno para elasticidade plana	16
3.1	Formulação integral de contorno para elasticidade	16
3.2	Soluções fundamentais	19
3.3	Equações integrais singulares	19
4	Integrais de Contorno para Teoria de Placas	22
4.1	Considerações gerais	22
4.2	Hipóteses básicas	23
4.2.1	Relações deslocamento-deformação e curvatura	23
4.2.2	Tensões e Resultantes de Tensões	25
4.3	Equações constitutivas	27
4.3.1	Equação diferencial	29
4.4	Cálculo da rigidez à flexão em direções arbitrárias	30
4.5	Condições de contorno	32

4.6	Soluções fundamentais isotrópicas	32
5	Equações do Método dos Elementos de Contorno para Placas de Kirchhoff	35
5.1	Formulação integral	35
5.2	Elementos Quadráticos	41
5.3	Equação matricial	44
5.4	Transformação das integrais de domínio em integrais de contorno . . .	50
5.5	Associação espacial de macro-elementos	53
5.5.1	Sistema de coordenadas	53
5.5.2	Compatibilização de momentos e rotações	55
5.5.3	Associação de macro-elementos via método de sub-regiões do MEC	56
6	Resultados Numéricos	59
6.1	Introdução	59
6.2	Associação em L	60
6.2.1	Associação em L em ângulos não-retos	63
6.3	Associação em L sob carregamento lateral	68
7	Considerações finais	70
7.1	Conclusões	70
7.2	Sugestões para trabalhos futuros	72

Símbolos

Letras gregas

α = Ângulo.

ε = Deformação normal.

ϕ = Ângulo.

Γ = Contorno.

γ = Deformação cisalhante.

μ = Raíz do polinômio característico.

ν = Razão de Poisson.

Ω = Domínio.

θ = Ângulo.

ρ = Distância.

σ = Tensão normal.

τ = Tensão cisalhante.

Letras arábicas

b = Força de corpo.

C, K = Constantes.

\mathbf{D} = Matriz de rigidez de flexão.

\mathbf{D}' = Matriz \mathbf{D} transformada.

d_i = Parte real de μ .

E = Módulo de elasticidade.

e_i = Parte imaginária de μ .

g = Força elementar.

M, m = Momentos.

N = Função de interpolação.

\mathbf{n} = Vetor normal ao contorno.

Q = Ponto campo.

\mathbf{Q} = Matriz de rigidez.

$\overline{\mathbf{Q}}$ = Matriz de rigidez transformada.

q = Força distribuída.

R_i = Função.

r_i, s_i, q_i, p_i = Constantes.

S_i = Função.

\mathbf{T} = Matriz de transformação.

t = Espessura da placa.

u, v = Deslocamentos no plano.

V = Força cortante equivalente de Kirchhoff.

w = Deslocamento transversal.

z = Distância transversal do plano médio à um ponto.

Subscritos

Γ = Contorno.

Ω = Domínio.

1, 2, 3 = Direções principais.

c = Compressão, elemento contínuo.

d = Elemento descontínuo.

L = Direção longitudinal às fibras.

n = Direção normal.

s = Direção tangencial.

T = Direção transversal às fibras.

t = Tração.

x, y, z = Eixos do sistema de coordenadas.

Sobrescritos

1, 2, 3 = Nós do elemento.

* = Soluções fundamentais.

Lista de Figuras

2.1	Estado geral de tensão.	10
2.2	Deformações: campo de deslocamentos.	12
2.3	Configuração deformada de um corpo	12
3.1	Ponto de carregamento (Q) e de deslocamento (P).	19
3.2	Ponto fonte localizado no contorno, circundado por uma região semi-circular.	20
4.1	Placa fina.	23
4.2	Resultantes de tensões.	25
4.3	Equilíbrio de forças e momentos em uma placa	28
4.4	Elemento de placa submetido a momentos nas bordas.	31
4.5	Elemento de placa submetido a momentos em direções arbitrárias.	31
4.6	Momento volvente no contorno. Paiva (1987)	32
5.1	Placa finita contida em uma placa infinita.	35
5.2	Canto i do contorno da placa.	39
5.3	Domínio bidimensional dividido em elementos de contorno.	42
5.4	Elemento quadrático descontínuo.	43
5.5	Transformação da integral de domínio em integral de contorno.	51
5.6	Sistema de Coordenadas.	54
5.7	Compatibilização de momentos e rotações nos macro-elementos (neste caso $\beta = 1$).	56
5.8	Associação de dois macro-elementos.	56
6.1	Dimensões e condições de contorno para a estrutura em L . Dirgantara and Aliabadi (2001).	60
6.2	(a) Distribuição do deslocamento total para a estrutura em L obtidos com a formulação do MEC de placa fina com 36 elementos. (b) Distribuição do deslocamento total para a estrutura em L obtidos com a formulação do MEC de placa fina com 792 elementos.	62

6.3	As dimensões e condições de contorno para a estrutura unida por um ângulo arbitrário θ Dirgantara and Aliabadi (2001).	63
6.4	Deslocamento total para a estrutura unida por um ângulo $\theta = 91^\circ$ obtido com o MEC para placa fina com 792 nós.	65
6.5	Deslocamento total para a estrutura unida por um ângulo $\theta = 95^\circ$ obtido com o MEC para placa fina com 792 nós.	66
6.6	Deslocamento total para a estrutura unida por um ângulo $\theta = 120^\circ$ obtido com o MEC para placa fina com 792 nós.	67
6.7	Estrutura L-shaped.	68
6.8	Resultados obtidos com MEC: placa fina	68
6.9	Resultados obtidos usando o MEF através do ANSYS com o elemento Shell181.	69

Lista de Tabelas

4.1	Condições de contorno.	32
6.1	Soluções analíticas e numéricas do deslocamento na direção z calculado na ponta da placa.	61
6.2	Resultados obtidos por Sousa (2016) para os deslocamentos da estrutura em L	61
6.3	Resultados obtidos para os deslocamentos da estrutura em L	61
6.4	Soluções analíticas do deslocamento para três diferentes ângulos calculados para um ponto na extremidade carregada da placa superior.	63
6.5	Soluções analíticas do deslocamento para três diferentes ângulos calculados para um ponto na extremidade carregada da placa superior.	64
6.6	Resultados obtidos Sousa (2016) para os deslocamentos da estrutura em L unida por um ângulo $\theta = 91^\circ$	64
6.7	Resultados obtidos para os deslocamentos da estrutura em L unida por um ângulo $\theta = 91^\circ$	64
6.8	Resultados obtidos por Sousa (2016) para os deslocamentos da estrutura em L unida por um ângulo $\theta = 95^\circ$	65
6.9	Resultados obtidos para os deslocamentos da estrutura em L unida por um ângulo $\theta = 95^\circ$	65
6.10	Resultados obtidos por Sousa (2016) para os deslocamentos da estrutura em L unida por um ângulo $\theta = 120^\circ$	66
6.11	Resultados obtidos para os deslocamentos da estrutura em L unida por um ângulo $\theta = 120^\circ$	66

Capítulo 1

Introdução

A necessidade de projetar teve início com as primeiras tentativas do homem em mudar o seu ambiente de forma a deixá-lo em melhores situações. A princípio, estruturas já existentes na natureza como pedaços de madeira e pedras eram aproveitadas como armas etc. Com objetivo de torná-las mais eficientes, o homem inventou maneiras de melhorar essas estruturas, por exemplo, atritando uma pedra de maneira a deixá-la com bordas mais afiadas, o que facilita o uso para corte. Com o passar do tempo, o ser humano de acordo com suas necessidades, tem produzido moradias, ferramentas auxiliares, meios de locomoção, computadores e máquinas modernas em geral. Com a evolução ao longo dos anos dos processos de concepção das manufaturas, os conhecimentos empírico/científico adquiridos pelo homem na transformação dos recursos de origem à ciência, hoje conhecida como, engenharia. Em linhas gerais, a engenharia aplica esses conhecimentos na produção de manufaturas.

A aplicação desses conhecimentos de forma correta em projetos de estruturas traz uma efetividade ao mesmo, levando em consideração as propriedades do material, bem como suas dimensões e geometria. Pode-se dizer que uma estrutura é segura se for de conhecimento quais tipos de esforços a estrutura está sofrendo e como ela reage a essas cargas. Essas definições passam pelo entendimento de como esses esforços são distribuídos na estrutura e também do conhecimento da resistência do material do qual ela é construída.

Os primeiros estudos que relacionam a aplicação de forças às deformações foram feitos por volta de 1678 por Robert Hooke, cujo sobrenome é extremamente familiar à maioria dos estudantes das engenharias mecânica, civil e relacionadas. Apesar desse longínquo início, grandes avanços na teoria da elasticidade não foram obtidos até o ano de 1821 quando Navier publicou seus estudos acerca das equações de equilíbrio. Este desenvolvimento foi seguido por Cauchy que estudou as equações básicas da elasticidade e desenvolveu o conceito de tensão em um ponto. Vários outros cientistas cujos nomes

figuram nos livros de teoria da elasticidade continuaram o desenvolvimento desta disciplina, entre os principais podemos citar, Bernoulli, Green, Saint-Venant, Betti, Airy, Kirchhoff, Lord Kelvin, Poisson, Lamé, Rayleigh, Timoshenko, Love. A totalidade destes autores desenvolveu a forte base matemática presente nos livros e formulações usadas atualmente, sendo muito dos seus desenvolvimentos homenageados em denominações como a viga de Timoshenko, teoria de placas de Kirchhoff-Love, princípio de Saint-Venant, coeficiente de Poisson, solução fundamental de Kelvin para elasticidade (Sadd, 2009).

Alguns modelos matemáticos foram desenvolvidos baseados em leis físicas do comportamento de sólidos e fluidos com o objetivo de prevenir que falhas em estruturas que possam ocasionar perdas humanas e materiais.

1.1 O método dos elementos de contorno

A partir da década de 1960, uma poderosa ferramenta despontou com força no mundo da engenharia, o computador, embora inicialmente apenas em institutos de pesquisa e universidade. A potencialidade de realizar repetidos cálculos em um tempo pequeno e de sistematizar certas atividades, levou os pesquisadores a aplicar alguns conceitos como análise matricial de estruturas a uma configuração mais abrangente. Surgiram assim, os métodos numéricos como: o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF), e o *Método das Equações Integrais*. Mas, este último, para distingui-lo dos outros métodos que envolviam equações integrais, ele foi finalmente chamado de *Método dos Elementos de Contorno*.

O Método de Elementos de Contorno (MEC), tem sido fonte de pesquisas científicas ao longo das últimas décadas, mas seu uso é consideravelmente menor quando comparado ao Método dos Elementos Finitos (MEF). Isso ocorre devido a extensa pesquisa já realizada, bem como a versatilidade e a adaptabilidade do MEF, que se tornou um método robusto e deu origem a vários programas comerciais, como o Nastran, Abaqus, Ansys, etc. Mesmo com essas características, o MEC oferece algumas vantagens, como a redução da dimensão do problema, uma vez que apenas o contorno é discretizado. Por exemplo, um problema bidimensional reduz-se somente a uma curva correspondente ao contorno do domínio que necessita ser discretizada em elementos e, um problema tridimensional reduz-se a uma superfície do domínio que precisa ser discretizada. Isto significa que, comparado à análise de um domínio tipo MEF, uma análise de contorno resulta em uma substancial redução na preparação dos dados e, um sistema algébrico de equações muito menor a ser resolvido numericamente. Também podem ser citadas desvantagens entre as quais, dificuldades no tratamento de problemas não-lineares, um

sistema de equações resultantes formado por uma matriz cheia e não simétrica, cujo tempo de solução cresce bastante com o tamanho do problema.

O MEC pode ser aplicado em uma ampla variedade de problemas de engenharia, tais como em estruturas, uma vez que sua aplicação prática é muito comum e o desenvolvimento de peças e componentes mais resistentes e leves é uma demanda constante. Esse tipo de configuração estrutural é aplicada nas mais diversas áreas, desde a engenharia civil, com coberturas e telhados sustentados por treliças, lages em prédios, vigas sustentadoras de edifícios e muitas outras. Nas telecomunicações e distribuição de energia com estruturas de antenas e torres de transmissão. Na engenharia mecânica como fuselagens de aviões, chassis automobilísticos e muitos outros.

1.2 Considerações sobre placas

A primeira teoria para descrição do comportamento de placas foi proposta por Kirchhoff (1850). Ela ficou conhecida como teoria de placas finas e é suficientemente precisa para a maioria das aplicações práticas. Esta teoria têm sido aplicada a problemas de flexão em elementos de contorno, assim como as teorias de placas com deformações cisalhantes, como por exemplo a teoria de Mindlin (1951) ou Reissner (1944). Shi and Bezzine (1990) apresentam uma análise por elementos de contorno de problemas de flexão de placa usando a solução fundamental proposta por Wu and Altiero (1981), baseadas nos pressupostos de flexão da placa de Kirchhoff.

Rajamohan and Raamachandran (1999) propuseram uma formulação na qual as singularidades são evitadas por pontos fontes colocados fora do domínio. Paiva et al. (2003) apresentaram um tratamento analítico para integrais singulares e hipersingulares da formulação proposta por Shi and Bezzine (1990).

Placas deformáveis por cisalhamento foram analisadas com o MEC por Rashed (2000), Weën (1982), Wang and Schweizerhof (1997) com a solução fundamental proposta por Wang and Schweizerhof (1995).

No MEC para flexão de placas, a presença de forças distribuídas no domínio geram as integrais de domínio na formulação. Para se resolver estas integrais, a forma de integração por células pode dar resultados precisos, como demonstrado por Shi and Bezzine (1990) para problemas de flexão em placas anisotrópicas. Entretanto, a discretização do domínio em células diminui uma grande vantagem que o método dos elementos de contorno têm, que é a possibilidade de se discretizar apenas o contorno. Uma forma diferente foi apresentada por Rajamohan and Raamachandran (1999) onde foi proposto o uso de soluções particulares para que se possa aproximar a discretização do domínio. No entanto, as soluções particulares precisam de uma função que satisfaça

a equação governante, que por sua vez, dependendo da complexidade, pode ser difícil de ser encontrada.

Venturini (1988) apresentou um método para problemas de flexão em placas isotrópicas, onde transformam as integrais de domínio em integrais de contorno, através do Método de Integração Radial (MIR). Posteriormente, Gao (2002) ampliou o método para problemas de elasticidade isotrópica tridimensional e Albuquerque et al. (2006) para placa de Kirchhoff anisotrópica.

A simplificação de hipóteses, com fim de analisar a placa como elemento bidimensional, gerou várias teorias para entender o comportamento de forma geral da superfície da estrutura. Kirchhoff (1850) estabeleceu as hipóteses fundamentais da teoria de placas finas através da derivada da energia potencial para uma placa inclinada e aplicando o princípio dos trabalhos virtuais, e com isso obtendo uma equação diferencial, onde a rigidez à flexão foi definida em termos do coeficiente de Poisson e do módulo de elasticidade. Além disso, Kirchhoff identificou que não havia compatibilidade entre a equação diferencial de quarta ordem e as três condições de contorno naturais proposta por Poisson (1829), no entanto ele mostrou que era possível reduzir a apenas duas condições de contorno naturais. Esta teoria despreza o efeito da deformação pelo esforço cortante, levando em conta que, retas normais ao plano médio antes da deformação, permanecem normais após a placa ser deformada. Como dito antes, as hipóteses de Kirchhoff resultaram na equação diferencial de quarta ordem, e o deslocamento é dado em função de duas coordenadas no plano médio da placa. Esta equação diferencial pode ser eficiente se utilizada para analisar placas finas para pequenos deslocamentos, tendo boa precisão com vários tipos de carregamentos e geometrias. No entanto, como citado anteriormente, essa teoria abrange a área de placas finas, caso essas placas sejam espessas ou moderadamente espessas há outras teorias que se enquadram bem melhor para esse tipo de comportamento, como a teoria de Mindlin (1951). Essa teoria assume que as distorções que ocorrem na espessura são constantes, as tensões são obtidas a partir da geometria imposta para as deformações.

1.3 Objetivo

Este trabalho tem como principal objetivo desenvolver uma formulação de elementos de contorno quadráticos descontínuos para a associação de placas no espaço.

1.4 Motivação

No trabalho prévio de Sousa (2016) foi desenvolvida uma formulação do MEC para associação de placas no espaço usando elementos de contorno constantes. Os resultados de Sousa (2016) convergiam para a solução analítica, porém não foi possível, para a maioria dos problemas obter um erro abaixo de 1%. A motivação deste trabalho veio no sentido de obter uma formulação com convergência mais rápida, usando elementos de contorno de alta ordem, no caso, elementos de contorno quadráticos descontínuos.

1.5 Contextualização

Neste trabalho, será abordada a associação de placas finas usando o MEC, com foco na análise estática. Para tanto, os seguintes tópicos serão revisados:

- As teorias desenvolvidas para placas e elementos planos.
- A associação de macro-elementos via sub-regiões.
- Limitações à aplicação do método de sub-regiões através do MEC.

Foi apresentado por Baiz and Aliabadi (2009a), uma formulação dos elementos de contorno de multi-região para a análise de instabilidades locais em placas e cascas. Cada sub-região é formada pelo acoplamento dos elementos de contorno de placa deformáveis ao cisalhamento e elasticidade plana. Integrais de domínio que aparecem na formulação são transformadas em integrais de contorno. Tensões de membrana em pontos discretos do domínio de cada sub-região (placa ou casca) na montagem são obtidas a partir do estado de pré-flambagem, resultando em um conjunto de equações lineares em função da deflexão e do fator de carga.

Di Pisa et al. (2010) aplica o método de elementos de contorno (MEC) para grandes deformações de placas sob cisalhamento em associação com multi-estruturas. Cada seção da placa é modelada como uma região (membrana) submetida a cargas sob flexão, momentos, deslocamentos, rotações, representados por trações e deslocamento com variáveis nodais generalizada no contorno. Termos não-lineares na formulação integral de contorno para cada seção que surge são devido à grande deformação e, são tratados como forças de corpo. Além disso, as integrais de domínio associadas são transformadas em integrais de contorno usando o método da reciprocidade dual. Derivadas de tensões e deflexão no contorno surgem na forma de termos não-lineares, e seus valores são avaliadas em pontos internos no domínio usando funções de base radial. Seções da placa são unidas ao longo de suas interfaces usando as condições de compatibilidade e de equilíbrio.

Tanaka et al. (1998) aplicou o método de elementos de contorno ao problema de vibração livre de estruturas finas de placas laminadas. As soluções fundamentais estática são utilizadas para a derivação das equações integrais no plano e fora do plano. Todas as equações integrais implementadas são regularizadas até uma ordem integrável e, em seguida, foram discretizadas por meio de elementos de contorno. Todo o sistema de equações para a associação elástica de estruturas de placa finas são obtidas através da montagem das componentes satisfazendo as condições de equilíbrio e compatibilidade na interface, bem como as condições de contorno.

Sousa (2016) desenvolveu uma formulação estática e dinâmica do método dos elementos de contorno para análise de estruturas formadas pela associação espacial de placas finas. As formulações dos elementos de contorno para elasticidade plana e flexão de placas finas de materiais isotrópicos são associadas, obtendo-se uma estrutura plana denominada de sub-região. Uma sub-região contém simultaneamente os estados de flexão em placas finas e de elasticidade plana (chapa) e possui quatro graus de liberdade por nó, sendo eles: deslocamento normal, tangencial e transversal e rotação normal. O modelo final assume uma associação dessas sub-regiões no espaço. Cada sub-região é tratada via MEC. As equações de cada sub-região, após as transformações de coordenadas, são acopladas através da compatibilidade de deslocamentos e rotações e equilíbrio de forças e momentos. A fim de calcular os elementos das matrizes de influência, as integrais de contorno ao longo dos elementos serão obtidos numericamente. Dessa forma, a principal contribuição deste trabalho é a associação da formulação do método dos elementos de contorno de placas finas e elasticidade plana para problemas estáticos onde, somente o contorno será discretizado em elementos de contorno quadráticos descontínuos. Com objetivo de validar a formulação desenvolvida, vários exemplos numéricos são analisados e, os resultados obtidos são comparados com Ansys e soluções disponíveis na literatura.

Neste trabalho, será um paralelo da tese do Sousa (2016), mas com algumas diferenças. Será utilizado elementos de contornos quadráticos descontínuos, ao invés de elementos constantes. Será abordado somente a parte estática do problema, sem considerar a parte dinâmica. A razão para se usar elementos quadráticos é que os mesmos apresentam convergência mais rápida para as soluções analíticas. Conforme mostrado por Liu (2009) em alguns problemas de elasticidade plana, o uso de elementos constantes é inadequado, exigindo um grande número de elementos de contorno para se obter um erro satisfatório.

1.6 Organização dos capítulos

Nesta secção será mostrada a ordem de abordagem dos conteúdos em cada capítulo, seguindo a ordem como foi desenvolvido o trabalho.

No Capítulo 2 será abordado os conceitos básicos da teoria da elasticidade linear e plana para materiais isotrópicos.

No Capítulo 3 será mostrado conceitos da teoria da elasticidade plana para materiais isotrópicos, que será empregado nas formulações matemáticas para o desenvolvimento das equações integrais de contorno.

No Capítulo 4 será apresentado conceitos de placas, incluindo as definições e nomenclatura relacionadas. As hipóteses básicas em que se baseiam as teorias de placas serão relacionadas com a teoria de Kirchhoff. Será apresentada a obtenção das equações diferenciais e das soluções fundamentais isotrópicas.

No Capítulo 5 a formulação da integral de elemento de contorno é apresentada de forma detalhada. Será apresentada a obtenção da equação integral de contorno para deslocamentos. É descrito como calcular os termos das matrizes de influência, bem como a transformação das integrais de domínio em integrais de contorno. Além disso, desenvolve-se o conceito de associação tri-dimensional de elementos planos utilizando a técnica de sub-regiões do MEC.

No Capítulo 6 são apresentados resultados numéricos obtidos com as rotinas implementadas para associação de placas no plano e espaço considerando problemas estáticos.

Por fim, no Capítulo 7 são apresentadas as considerações finais e conclusões obtidas através da análise dos resultados apresentados neste trabalho.

Capítulo 2

Teoria da Elasticidade Linear

2.1 Introdução

A Elasticidade é uma parte da ciência que aborda, principalmente da determinação das tensões, deformações e distribuição de deslocamentos em um sólido elástico sob a influência de carregamentos. Para tal, modelos matemáticos foram desenvolvidos possibilitando a análise de problemas com aplicações práticas e teóricas na engenharia. Alguns exemplos são:

- Aplicações em engenharia aeronáutica e aeroespacial. A teoria desta disciplina também constitui a base para estudos mais avançados como plasticidade e viscoelasticidade, além do emprego de métodos computacionais para a solução de problemas com geometrias e carregamentos mais complicados. Nesta seção a teoria da elasticidade será abordada cobrindo os aspectos básicos das relações tensão deformação, relações cinemáticas e condições de equilíbrio onde as definições serão particularizadas para o caso da Elasticidade Plana e de Placas Espessas. A partir deste capítulo e ao longo do restante desta tese a notação indicial será utilizada. Índices com letras gregas (α, β) terão variação de 1 a 2, enquanto índices com letras romanas terão variação de 1 a 3.
- Análise estrutural no âmbito da engenharia mecânica como o projeto de peças e partes de máquinas e equipamentos, para as quais são levadas em consideração a análise de tensões, problemas de contato, fratura e fadiga.
- Análise estrutural no âmbito da engenharia civil com a determinação de tensões e deformações em elementos, como placas, cascas, vigas e aplicações em geomecânica envolvendo a análise de solo, rochas e concreto.

As teorias clássicas de placas e cascas são uma importante aplicação da teoria da

elasticidade, que lida com as relações de forças, deslocamentos, tensões, e deformação em um corpo elástico. Quando um corpo sólido é sujeito a forças externas, estas deformam-no, produzindo deformações e tensões internas. A deformação depende das condições de contorno do corpo, da carga aplicada, e das propriedades mecânicas do material. A teoria da elasticidade linear restringi-se a atenção para materiais lineares elásticos; isto é, as relações entre tensões e deformações são linear, e as deformações e tensões anulam-se quando as forças externas são removidas. A teoria clássica da elasticidade assume que o material é homogêneo e isotrópico, ou seja, as suas propriedades mecânicas são as mesmas em todas as direções e em todos os pontos.

Esta seção contém uma breve descrição da teoria da elasticidade linear e plana que será útil para o desenvolvimento da teoria de placa.

2.2 Tensões e equilíbrio

Nesta seção as definições e propriedades dos vetores de força de superfície e tensor de tensões serão estabelecidas, assim como as equações de equilíbrio de forças. Estas relações são outra parte das equações necessárias para a solução de um problema geral de elasticidade. A ideia geral por trás da relação entre forças de superfície, é que para que seja mantido o equilíbrio, a aplicação de forças externas induz o aparecimento de forças internas. Elas são convenientemente categorizadas em duas classes:

- Forças de corpo
- Forças de superfície

As forças de corpo são proporcionais à distribuição de massa do corpo e são resultado de um agente externo. São exemplos a força peso, que é gerada por campos gravitacionais, forças magneticamente induzidas e as inerciais. As forças de superfície, como o nome indica, sempre atuam na superfície do corpo.

Considere um corpo elástico sujeito a cargas externas que estão em equilíbrio. Depois, considere um ponto material em qualquer lugar no interior do corpo. Se atribuímos um sistema de coordenadas cartesianas com eixos x, y, z , como mostrado na Figura 2.1, com faces paralelas aos planos coordenados. Para efeitos de quantificação do modo como ocorre a transmissão de forças no interior de um sólido é necessário introduzir a noção de tensão, como foi definida por Cauchy. As tensões que atuam na face do elemento infinitesimal descrevem a intensidade das forças internas em um ponto da face do sólido. Estas tensões podem ser divididas em uma componente normal (tensão normal) e uma componente tangente (tensão de cisalhamento) à face. Como resultado, as três componentes da tensão, definidas por $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ para a face frontal no plano

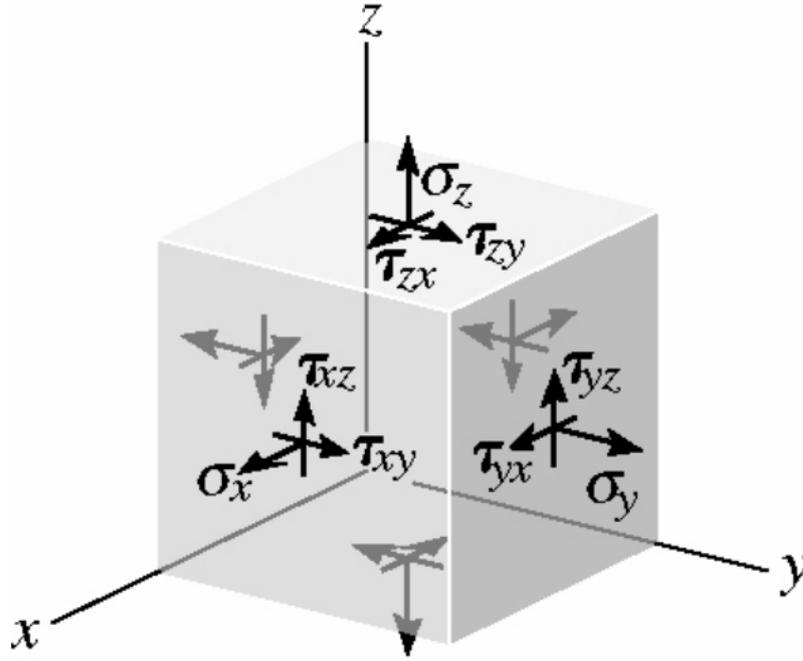


Figura 2.1: Estado geral de tensão.

xy , atuação sobre cada elemento. A notação subscrita pelos componentes de tensão é interpretada da seguinte forma: o primeiro índice indica o sentido de uma normal exterior à face na qual atua a componente de tensão; o segundo subscrito refere-se ao sentido da própria tensão.

Quando a posição relativa entre dois pontos quaisquer num corpo contínuo é alterada, é dito que o corpo sofreu deformação. Se a distância entre qualquer par de pontos no corpo permanece constante durante o movimento, o corpo é dito rígido. O movimento de corpo rígido é caracterizado apenas pela translação e rotação.

Em mecânica do contínuo, o **tensor tensão de Cauchy** σ , tensor tensão verdadeira ou simplesmente denominado tensor tensão, denominado em memória de Augustin-Louis Cauchy, é um tensor de segunda ordem, com nove componentes σ_{ij} , que define completamente o estado de tensão em um ponto no domínio de um material em sua configuração deformada. O tensor relaciona um vetor diretor de comprimento unitário \mathbf{n} com o vetor tensão $T^{\mathbf{n}}$ sobre uma superfície imaginária perpendicular a \mathbf{n} :

$$T^{(\mathbf{n})} = \mathbf{n} \cdot \sigma \quad T_j^{(n)} = \sigma_{ij} \cdot n_i. \quad (2.1)$$

Para os eixos coordenados da Figura 2.1, usando a *notação indicial*,

$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

o qual é simétrico em relação à diagonal principal devido a lei da reciprocidade das tensões de cisalhamento,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2.3)$$

Assim, apenas seis das nove componentes de tensão no tensor expresso pela Equação 2.2 são independentes. O tensor de tensão, \mathbf{T}_S , caracteriza completamente o estado tridimensional de tensão em um ponto do corpo sólido.

Para a análise de tensão de placas elásticas no estado plano de tensões, $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$. Assim, a Equação (2.2) pode ser simplificada por:

$$\mathbf{T}_S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}, \quad \text{onde } \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.4)$$

2.3 Relação entre deformações e deslocamentos

Os sólidos elásticos mudam de forma, ou seja, deformam-se quando sujeitos a um carregamento. Essas deformações podem ser quantificadas, uma vez que seja conhecido o campo de deslocamentos por todo o corpo. Deve ser levado em consideração que a hipótese de um meio contínuo estabelece que há um campo de deslocamentos abrangendo todos os pontos de um sólido elástico.

Observemos o corpo elástico mostrado na Figura 2.2, que é suportada de tal maneira que os deslocamentos do corpo rígido (translações e rotações) são evitadas. Assim, este corpo deforma-se sob a ação de forças exteriores e cada um dos pontos tem pequenos deslocamentos elásticos. Por exemplo, um ponto A tinha as coordenadas x, y, z no estado inicial não deformado. Após a deformação, esse ponto move-se para posição A^* e suas coordenadas tornam-se $x' = x + u$, $y' = y + v$, $z' = z + w$, onde u , v e w são as projeções do vetor deslocamento do ponto A , vetor AA' nos eixos coordenados x , y e z . No caso geral, u , v e w são funções de x , y e z .

As deformações decorrentes podem ser indicadas por meio de índices. Portanto, as deformações lineares são:

$$\epsilon_x = \frac{\delta(dx)}{dx}; \quad \epsilon_y = \frac{\delta(dy)}{dy} \quad \epsilon_z = \frac{\delta(dz)}{dz}, \quad (2.5)$$

estas equações são chamadas de *deformações lineares* numa direção qualquer. Na Equação (2.5), o termo $\delta(dx)$, pode ser expresso segundo series de Taylor, ou seja, $\delta(dx) = \frac{\partial u}{\partial x} dx$, etc; então, pode-se escrever

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (2.6)$$

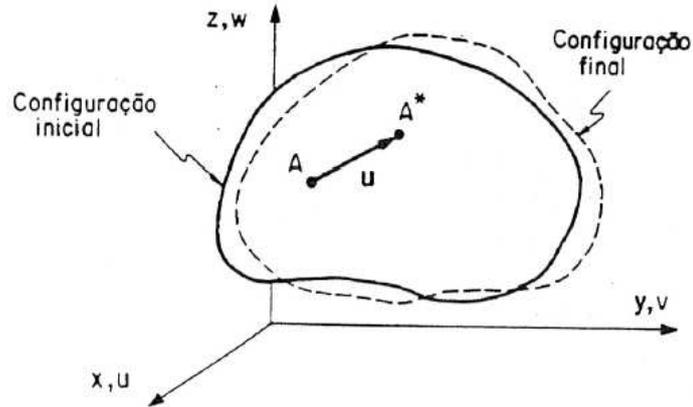


Figura 2.2: Deformações: campo de deslocamentos.

A deformação angular associada a um par de direções ortogonais quaisquer no ponto A são denominadas por γ_{xy} , γ_{xz} e γ_{yz} . O ângulo BAC na Figura 2.3, apresenta configuração deformada $B^*A^*C^*$. Assim, a deformação angular em função do plano de deslocamentos é:

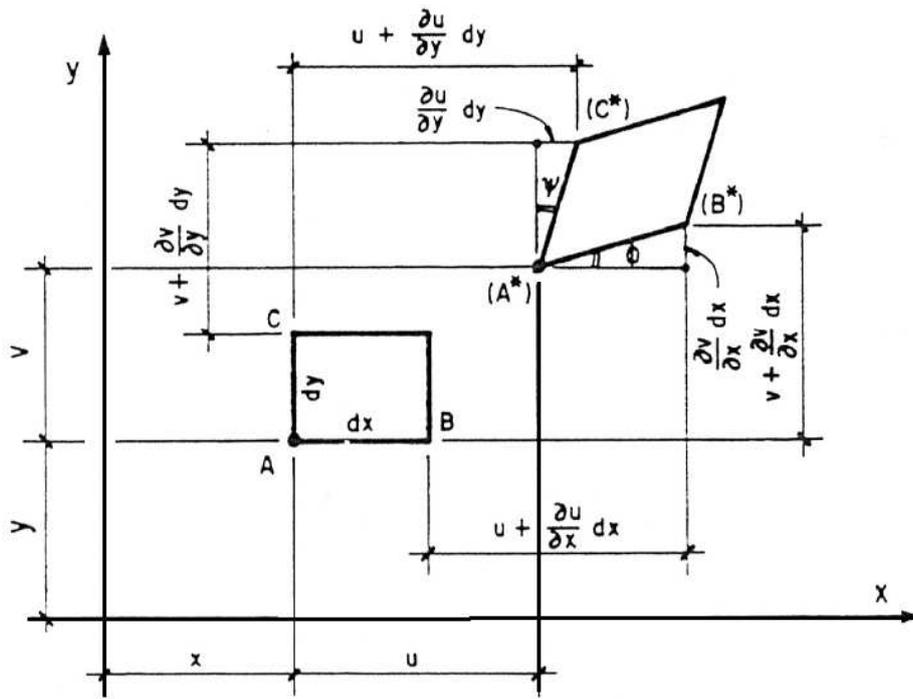


Figura 2.3: Configuração deformada de um corpo

$$\gamma_{xy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \frac{\partial v}{\partial y}}, \quad (2.7)$$

Limitando-se ao caso de pequenas deformações, pode-se omitir os termos $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ do denominador da expressão acima, obtendo-se

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.8)$$

Similarmente, pode-se obter γ_{xz} e γ_{yz} . A deformação angular é dada por:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (2.9)$$

Assim, o tensor de tensão observado na Equação (2.2), pode ser definido como tensor de deformação

$$\mathbf{T}_D = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Sabendo-se que, o tensor de deformação é simétrico, tem-se:

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}, \quad \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx}, \quad \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} \quad (2.11)$$

2.4 Equações constitutivas

Em elasticidade linear, o vetor de deslocamentos e suas derivadas são assumidos como infinitesimais. O tensor de deformação, considerando deslocamentos infinitesimais, pode ser escrito como:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)], \quad (2.12)$$

e

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}, \quad (2.13)$$

onde E , ν e G são os módulos de elasticidade, coeficiente de Poisson e módulo de cisalhamento. A relação entre E e G é dada por:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (2.14)$$

2.5 Equações de equilíbrio

As componentes de tensão introduzidas acima, devem satisfazer as equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + b_z &= 0,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

onde b_x , b_y e b_z são as forças de corpo. A Equação 2.15 pode ser escrita como:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0. \tag{2.16}$$

2.6 Equações de compatibilidade

Considerando que é necessário conhecer o valor das seis componentes do tensor de deformação, Equação (2.9), a Equação (2.10), contém apenas três componentes de deslocamentos: u_x , u_y , u_z . Assim, este sistema de equações não possui uma solução única, pelo que as componentes não podem ser independentes entre si. Estas equações adicionais são definidas como *equações de compatibilidade*. Eliminando-se as componentes de deslocamento por sucessivas diferenciações, as seguintes equações de compatibilidade são obtidas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z},
\end{aligned} \tag{2.17}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right] &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}, \\
\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right] &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right] &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z},
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Para o estado plano de tensões ($\sigma_z = 0, \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$), as condições de equilíbrio dada nas Equações (2.15) resulta em:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + b_y &= 0,
\end{aligned}
\tag{2.19}$$

e as equações de compatibilidade

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \varepsilon_z = 0)
\tag{2.20}$$

Capítulo 3

Integrais de contorno para elasticidade plana

Neste capítulo serão apresentadas as equações de equilíbrio da formulação de elasticidade plana isotrópica, a identidade Somigliana que permite obter os valores dos deslocamentos e o tipo de elemento de contorno utilizado neste trabalho.

3.1 Formulação integral de contorno para elasticidade

Nesta seção a formulação do método dos elementos de contorno para elasticidade será desenvolvida. Os itens a serem abordados englobam a obtenção da equação integral de contorno (*EIC*), a obtenção da solução fundamental e a especialização da *EIC* para um ponto qualquer, dentro do domínio, exatamente no contorno ou externo a ele.

Entre as possibilidades de obtenção das equações integrais de contorno para elasticidade, pode-se utilizar o teorema da reciprocidade de Betti. A formulação é obtida a partir deste teorema, considerando dois estados equilibrados, um no domínio do problema e o outro naquele conhecido como espaço fundamental, com variáveis (u_i, t_i, b_i) e (u_i^*, t_i^*, b_i^*) , respectivamente, onde u_i e u_i^* são os deslocamentos, t_i e t_i^* são as forças de superfície, e b_i e b_i^* são as forças de corpo.

Assumindo-se uma função vetorial contínua u_i^* , que representa o deslocamento de um estado elasto-estático definido sobre um domínio Ω e contorno Γ , como sendo uma função peso da equação de equilíbrio (2.19), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = 0 \quad (3.1)$$

Pela regra de derivação do produto de duas funções tem-se:

$$(\sigma_{ij} u_i^*)_{,j} = \sigma_{ij,j} u_i^* + \sigma_{ij} u_{i,j}^* \quad (3.2)$$

Pode-se escrever $u_{i,j}^*$ como a soma de um tensor simétrico e um anti-simétrico, da forma

$$u_{i,j}^* = \frac{1}{2}(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) + \frac{1}{2}(u_{i,j}^* - u_{j,i}^*) = \varepsilon_{ij}^* + \omega_{ij}^* \quad (3.3)$$

sendo que ε_{ij}^* e ω_{ij}^* representam os tensores deformação (simétrico) e de corpo rígido (anti-simétrico), respectivamente, do estado elástico " *".

Substituindo (3.3) em (3.2) tem-se

$$(\sigma_{ij}u_i^*)_{,j} = \sigma_{ij,j}u_i^* + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* + \sigma_{ij}\omega_{ij}^* \quad (3.4)$$

sendo σ_{ij} um tensor simétrico. O produto de um tensor simétrico por um anti-simétrico é nulo. Desta forma, a equação (3.4) torna-se

$$\sigma_{ij,j}u_i^* = (\sigma_{ij}u_i^*)_{,j} - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* \quad (3.5)$$

Substituindo a equação (3.5) na equação (3.1) tem-se

$$- \int_{\Omega} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} (\sigma_{ij}u_i^*)_{,j} d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = 0 \quad (3.6)$$

Pelo teorema de Green, onde Γ é o contorno, tem-se:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij}u_i^*)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}u_i^*)n_j d\Gamma = \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma \quad (3.7)$$

onde

$$t_i = \sigma_{ij}n_j \quad (3.8)$$

Substituindo (3.7) em (3.6), tem-se

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega \quad (3.9)$$

Se partirmos da equação (2.16) como sendo a correspondente ao estado u_i^* e a função de interpolação da equação (3.1) como sendo u_i , obtém-se, de forma análoga a anterior

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega \quad (3.10)$$

Pelo Teorema Betti dois estados de um mesmo material podem ser relacionados por $\sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^*$. Desta forma, igualando-se as equações (3.10) e (3.9), tem-se

$$\int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} u_i^* b_i d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_i b_i^* d\Omega \quad (3.11)$$

A equação integral (3.11) relaciona dois estados quaisquer de tensões. Para que se possa tratar problemas de elasticidade em meio contínuo, será adotado que um destes estados é conhecido, e o outro se deseja determinar. No caso de elementos de contorno, o estado conhecido é o chamado estado fundamental que corresponde a resposta de um corpo infinito sujeito a uma carga concentrada unitária em um ponto \mathbf{x}' . A representação matemática de uma carga concentrada unitária é dada pelo delta de Dirac, que é definido como

$$\begin{cases} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \infty & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{x}' \\ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0 & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\Omega = 1 \end{cases} \quad (3.12)$$

A razão da escolha do estado fundamental deve-se ao fato que a função delta de Dirac reduz o número de integrais de domínio, pois esta possui a propriedade

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\Omega = f(\mathbf{x}') \quad (3.13)$$

para um dado ponto $\mathbf{x}' \in \Omega$.

Considerando o estado " * " como sendo o estado fundamental de um problema estático livre de forças de corpo ($b_i^* = 0$), a equação (3.11) pode ser escrita como

$$\int_{\Gamma} T_{ik} u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i U_{ik} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i U_{ik} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta_{ik}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') u_i d\Omega \quad (3.14)$$

onde U_{ik} e T_{ik} representam respectivamente deslocamentos e forças de superfície na direção k , num ponto \mathbf{x} , devido a uma força concentrada unitária aplicada de forma estática num ponto \mathbf{x}' numa direção i . Por serem soluções do estado fundamental, U_{ik} e T_{ik} são chamadas soluções fundamentais de deslocamentos e forças de superfície, respectivamente.

Devido a propriedade (3.13), a equação (3.14) pode ser escrita como

$$u_k + \int_{\Gamma} T_{ik} u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ik} t_i d\Gamma - \int_{\Omega} b_i U_{ik} d\Omega \quad (3.15)$$

Esta equação também é conhecida como Identidade de Somigliana e permite obter os valores dos deslocamentos u em qualquer ponto P do domínio Ω do problema, considerando-se que os valores de deslocamentos u_i e forças de superfície t_i no contorno da geometria e as forças de corpo b_i são conhecidos.

Considerando que as forças de corpo b_i são nulas, pode-se escrever:

$$u_k + \int_{\Gamma} T_{ik} u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ik} t_i d\Gamma \quad (3.16)$$

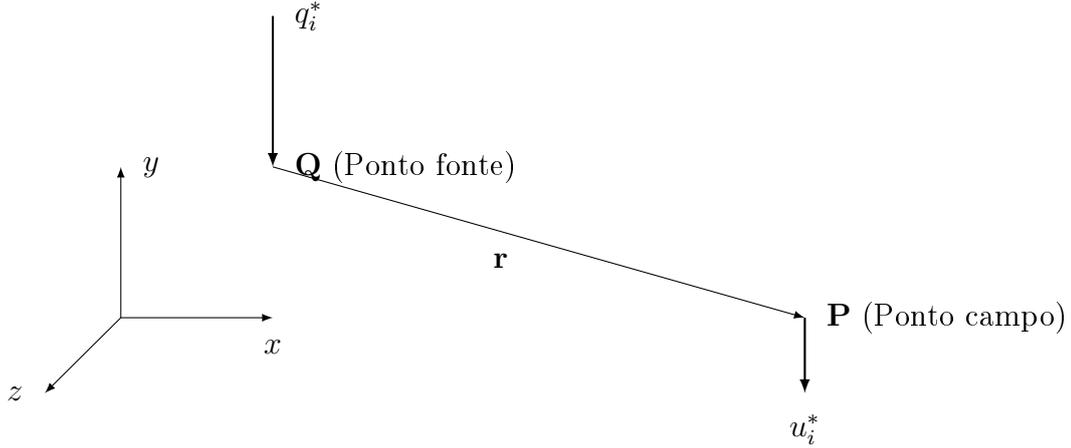


Figura 3.1: Ponto de carregamento (Q) e de deslocamento (P).

3.2 Soluções fundamentais

A solução fundamental tem papel crucial para as formulações do MEC. Sua existência faz com que seja possível aplicar a técnica e a sua definição está relacionada com o desenvolvimento matemático que resulta na identidade de Somigliana. Para um estado plano de tensões as soluções fundamentais, conforme Figura 3.1 para os deslocamentos e forças de superfícies são dadas, respectivamente, por:

$$U_{ij}(X, x) = \frac{1}{8\pi\mu}(1 - \nu)(3 - 4\nu) \log \frac{1}{R} \delta_{ij} + R_{,i}R_{,j} \quad (3.17)$$

$$T_{ij}(X, x) = \frac{-1}{4\pi(1 - \nu)R} [(1 - 2\nu)\delta_{ij} + 2R_{,i}R_{,j}] \frac{\partial R}{\partial n} - (1 - 2\nu)(R_{,i}n_j - R_{,j}n_i) \quad (3.18)$$

Observe que tanto a solução fundamental de deslocamentos quanto a de forças de superfície são singulares quando o ponto fonte Q tende ao ponto campo P . No caso da solução fundamental de deslocamentos a singularidade é fraca ($\ln r$). Já no caso da solução fundamental de forças de superfície tem-se uma singularidade forte ($1/r$), conforme Brebbia and Dominguez (1989). As formas como estas singularidades serão tratadas é mostrada na seção abaixo.

3.3 Equações integrais singulares

Como a equação integral (3.16) tem ponto fonte interno, já que foi escrita para um ponto no interior do domínio, a equação têm somente integrandos regulares. Considere agora o limite da transição quando o ponto fonte tende ao contorno. Esta operação pode ser implementada colocando o ponto fonte no contorno e diminuindo o domínio

do problema por uma região semi-circular, com contorno Γ_ϵ^* e raio ϵ , centrado no ponto fonte, conforme mostrado na Figura 3.2. Com esta configuração, o contorno completo é dividido em duas partes, na forma

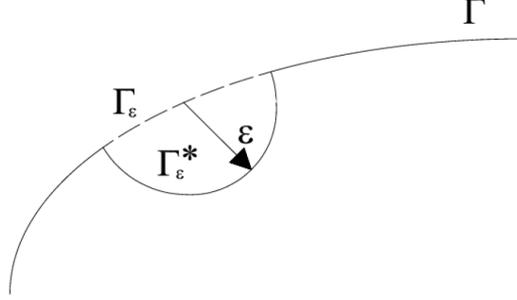


Figura 3.2: Ponto fonte localizado no contorno, circundado por uma região semi-circular.

$$\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*) \quad (3.19)$$

onde ϵ é o raio do semi-círculo de centro no ponto fonte, pertencendo ao contorno Γ (Figura 3.2). A equação (3.16) é, então, reescrita como:

$$u_l + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*} T_{li} u_i d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*} U_{li} t_i d\Gamma \quad (3.20)$$

A integral do lado direito da equação (3.20) contém um integrando de singularidade fraca da ordem $\ln(1/r)$ e é integrável como uma integral imprópria. A integral do lado esquerdo tem uma singularidade forte, de ordem $1/r$, que pode ser regularizada com o primeiro termo da expansão de Taylor em torno do ponto fonte, ou seja

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*} T_{li} u_i(\mathbf{z}) d\Gamma &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon^*} T_{li} [u_i(\mathbf{z}) - u_i(\mathbf{z}')] d\Gamma + \\ &u_i(\mathbf{z}') \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon^*} T_{li} d\Gamma + \\ &\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} T_{li} u_i(\mathbf{z}) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.21)$$

Assumindo que os deslocamentos são contínuos no ponto fonte, o primeiro termo do lado direito da equação (3.21) é integrável e desaparece no processo de limite. O segundo termo da equação representa um salto nos deslocamentos dado por $A_{ij}(\mathbf{z}')u_j(\mathbf{z}')$,

no qual $A_{ij}(\mathbf{z}')$ é uma constante que depende da geometria local e das constantes elásticas. Finalmente, o terceiro termo do lado direito da equação resulta numa integral imprópria que é calculada no sentido do valor principal de Cauchy. Portanto, quando $\epsilon \rightarrow 0$, o ponto fonte tende ao contorno e, no limite, a equação (3.20) pode ser escrita na forma

$$c_{li}u_i + \int T_{li}u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{li}t_i d\Gamma \quad (3.22)$$

onde \int representa integral no sentido do valor principal de Cauchy e o coeficiente $c_{li}(\mathbf{z}')$ é dado por $\frac{1}{2}\delta_{li}$, no qual δ_{ij} representa o delta de Kronecker.

Capítulo 4

Integrais de Contorno para Teoria de Placas

Nesta seção, serão apresentadas algumas considerações gerais sobre placas, incluindo as definições e nomenclatura relacionadas. As hipóteses básicas em que se baseiam as teorias de placas serão introduzidas. Uma vez introduzidas, estas hipóteses serão relacionadas com a teoria de *Kirchhoff*. Com base nesta teoria, serão obtidas as equações constitutivas de placas. Será mostrado o cálculo da rigidez à flexão em direções arbitrárias. Além disso, serão relacionadas as variáveis referentes às três principais condições de contorno: livre, apoiada e engastada. Não obstante, mostrar-se-á a obtenção das equações diferenciais e soluções fundamentais isotrópicas.

4.1 Considerações gerais

Dentre os elementos estruturais de superfície, a placa é um dos mais utilizados nas estruturas usuais. Esse elemento estrutural é usualmente definido como sendo um corpo limitado por duas superfícies planas, sendo admissíveis casos de pequena curvatura. Uma de suas características é que a distância entre as duas superfícies, chamada espessura, é pequena quando comparada com as demais dimensões do corpo. O plano equidistante às duas superfícies que definem a placa é denominado superfície média da placa. O carregamento é sempre transversal ao plano médio, conforme Figura 4.1, podendo ou não estar combinado com outro carregamento contido no plano médio.

Neste trabalho, será considerada apenas placas finas (os efeitos da deformação por cisalhamento na direção transversal não são consideradas) e isotrópicas submetida a carregamento transversal e ortogonal ao plano médio da placa e, na eventualidade da existência de um carregamento contido no plano médio, seu efeito deverá ser analisado pela teoria de estado plano de tensões

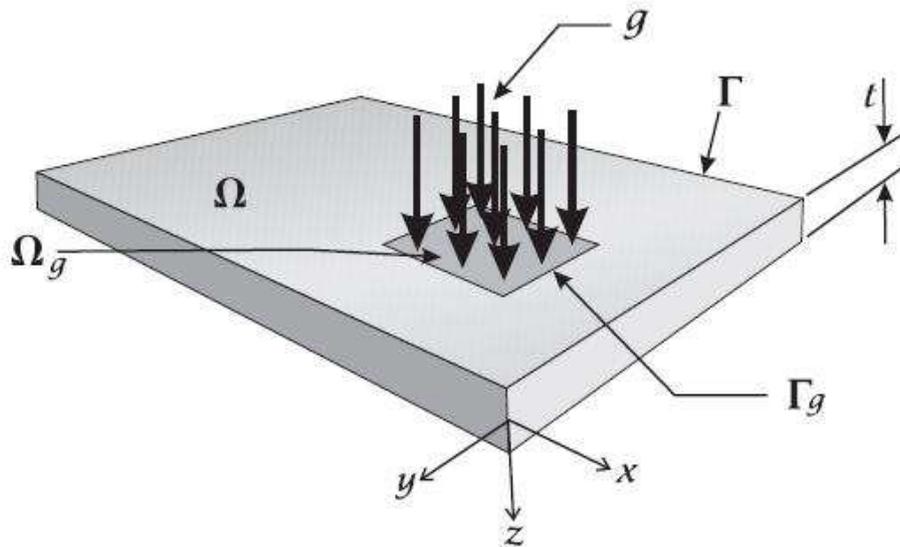


Figura 4.1: Placa fina.

4.2 Hipóteses básicas

As seguintes hipóteses são necessárias para se escreverem as equações diferenciais básicas das placas finas:

- o material no qual é feita a placa é elástico-linear;
- os deslocamentos transversais são pequenos quando comparados com a espessura da placa;
- não há deformação do plano médio da placa;
- os pontos situados inicialmente em uma normal ao plano médio da placa permanecem, depois da flexão, em uma normal à sua superfície elástica, que é o plano médio deformado;
- as tensões normais na direção transversal à placa são desprezíveis (estado plano de tensões).

4.2.1 Relações deslocamento-deformação e curvatura

Como consequência das hipóteses de *Kirchhoff*, as relações de extensão-deslocamento observadas na Equações (2.6) e (2.9) resultam:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4.1)$$

e

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad (4.2)$$

onde

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \quad (4.3)$$

Integrando-se ε_z da Equação (4.1), tem-se:

$$w = w(x, y) \quad (4.4)$$

indicando que a deflexão lateral não varia na espessura da placa.

Da mesma forma, integrando as expressões de γ_{xz} e γ_{yz} , tem-se:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + u_0(x, y); \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_0(x, y) \quad (4.5)$$

Torna-se claro que $u_0(x, y)$ e $v_0(x, y)$ representam, respectivamente, os valores de u e de v na superfície média. Conclui-se que $u_0 = v_0 = 0$. Assim,

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4.6)$$

Substituindo as Equações (4.6) nas Equações (4.1) e (4.2) de extensões, obtém-se:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4.7)$$

A curvatura plana é definida como a taxa de variação do ângulo de declive da curva em relação à distância ao longo da curva. As derivadas parciais das Equações (4.7) representam as curvaturas da placa. Assim, as curvaturas κ na superfície média em planos paralelos ao plano xz , yz e xy são, respectivamente

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \kappa_x, \\ \frac{1}{r_y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = \kappa_y, \\ \frac{1}{r_{xy}} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = \kappa_{xy} \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde $\kappa_{xy} = \kappa_{yx}$.

A última expressão também é conhecida como a torção do plano médio em relação aos eixos x e y .

Assim, as relações extensão-curvatura da placa podem representar-se na seguinte forma:

$$\varepsilon_x = -z\kappa_x, \quad \varepsilon_y = -z\kappa_y, \quad \gamma_{xy} = -2z\kappa_{xy}. \quad (4.9)$$

4.2.2 Tensões e Resultantes de Tensões

No caso de um estado de tensão tridimensional, as tensões e as deformações estão relacionadas pela *lei de Hooke* generalizada, válida para um material isotrópico homogêneo como observado nas Equações (2.12) e (2.13). Substituindo $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$, obtêm-se as relações tensão-extensão da placa fina:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x - \nu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y - \nu\varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}. \quad (4.10)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson.

Introduzindo as curvaturas da placa, as Equações (4.10) ficam com a forma seguinte:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2}(\kappa_x + \nu\kappa_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2}(\kappa_y + \nu\kappa_x) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1-\nu} \kappa_{xy} = -\frac{Ez}{1-\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Pode-se observar que a tensão desaparece na superfície média e varia linearmente ao longo da espessura da placa.

As tensões distribuídas pela espessura da placa produzem momentos fletores, momentos torsores e forças de corte verticais, Figura 4.2. Estes momentos e forças por unidade de comprimento são conhecidas por *resultantes de tensões*.

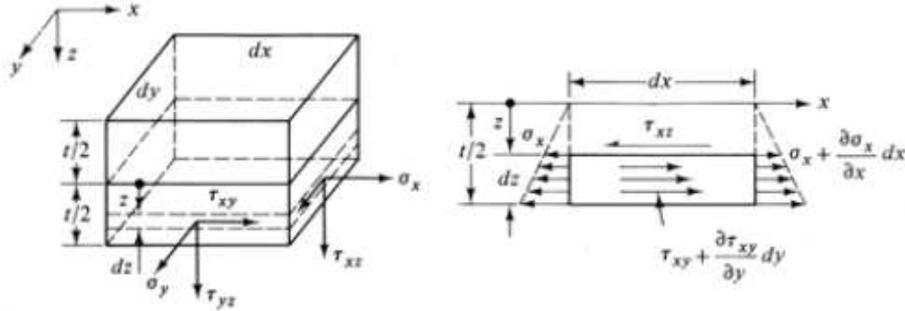


Figura 4.2: Resultantes de tensões.

Da Figura 4.2, para a tensão σ_x , tem-se:

$$\int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_x dy dz = dy \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_x dz = M_x dy \quad (4.12)$$

Da mesma forma, para as outras tensões obtêm-se as seguintes resultantes de tensão:

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} z dz \quad (4.13)$$

onde $M_{xy} = M_{yx}$.

Para as forças cortantes por unidade de comprimento, tem-se:

$$\begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} z dz \quad (4.14)$$

É importante notar que apesar da teoria de placas finas omitir o efeito das deformações $\gamma_{xz} = \tau_{xz}/G$ e $\gamma_{yz} = \tau_{yz}/G$ na flexão, as forças verticais Q_x e Q_y não são desprezáveis.

Substituindo as equações das tensões em função dos deslocamentos nas equações dos momentos, pode-se deduzir as fórmulas dos momentos fletores e torsões em função das curvaturas e deflexões.

$$\begin{aligned} M_x &= -D(\kappa_x + \nu\kappa_y) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D(\kappa_y + \nu\kappa_x) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -D(1 - \nu)\kappa_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde D é a rigidez de flexão dada por

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (4.16)$$

Substituindo as equações dos momentos nas equações das tensões, pode-se obter as tensões em função dos momentos.

$$\sigma_x = \frac{12M_x z}{t^3}, \quad \sigma_y = \frac{12M_y z}{t^3}, \quad \tau_{xy} = \frac{12M_{xy} z}{t^3}. \quad (4.17)$$

A tensão máxima ocorre nas superfícies superior e inferior ($z = \pm t/2$) da placa. Desta análise pode observa-se que existe uma correspondência direta entre os momentos e as tensões. Conclui-se que as equações de transformação das tensões e dos momentos são análogas.

A análise do círculo de Mohr e todas as conclusões sobre as tensões podem ser aplicadas aos momentos. A determinação das tensões σ_z , τ_{xz} e τ_{yz} através da lei de Hooke não é possível porque não se relacionam com as extensões.

Através das Equações diferenciais de equilíbrio (2.15) as demais componentes de tensões podem ser calculadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

As tensões de cisalhamento τ_{xz} e τ_{yz} das Equações (4.18) depois de integrar, são dadas por:

$$\begin{aligned}
\tau_{xz} &= \int_z^{t/2} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{t^2}{4} - z^2 \right) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right], \\
\tau_{yz} &= \int_z^{t/2} \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) dz = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{t^2}{4} - z^2 \right) \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right].
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Pode-se observar que as distribuições de τ_{xz} e τ_{yz} na espessura da placa variam de acordo com uma lei parabólica.

A componente σ_z é obtida usando a terceira equação de equilíbrio, substituindo para τ_{xz} e τ_{yz} e integrando.

$$\sigma_z = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{t^3}{12} - \frac{t^2 z}{4} + \frac{z^3}{3} \right) \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \tag{4.20}$$

A tensão normal σ_z varia na forma de uma parábola cúbica ao longo da espessura da placa. As tensões cisalhante na direção z são consideradas muito pequenas quando comparadas com as outras tensões.

4.3 Equações constitutivas

As componentes da tensão (resultantes de tensão) variam, geralmente, de ponto para ponto numa placa carregada. Essas variações são governadas pelas condições de equilíbrio da estática. O cumprimento destas condições estabelece certas relações conhecidas por *equações de equilíbrio*.

A Figura 4.3 mostra um elemento de dimensões dx e dy extraído de uma placa submetida a uma carga $q = q(x, y)$. Nessa figura indicam-se os esforços internos por unidade de comprimento segundo os sentidos considerados positivos.

Assume-se que a inclusão do peso da placa, sendo um valor pequeno, no carregamento q não afeta a precisão do resultado. Além disso, assume-se que as componentes de força e de momento estão distribuídas uniformemente em cada uma das faces. Na

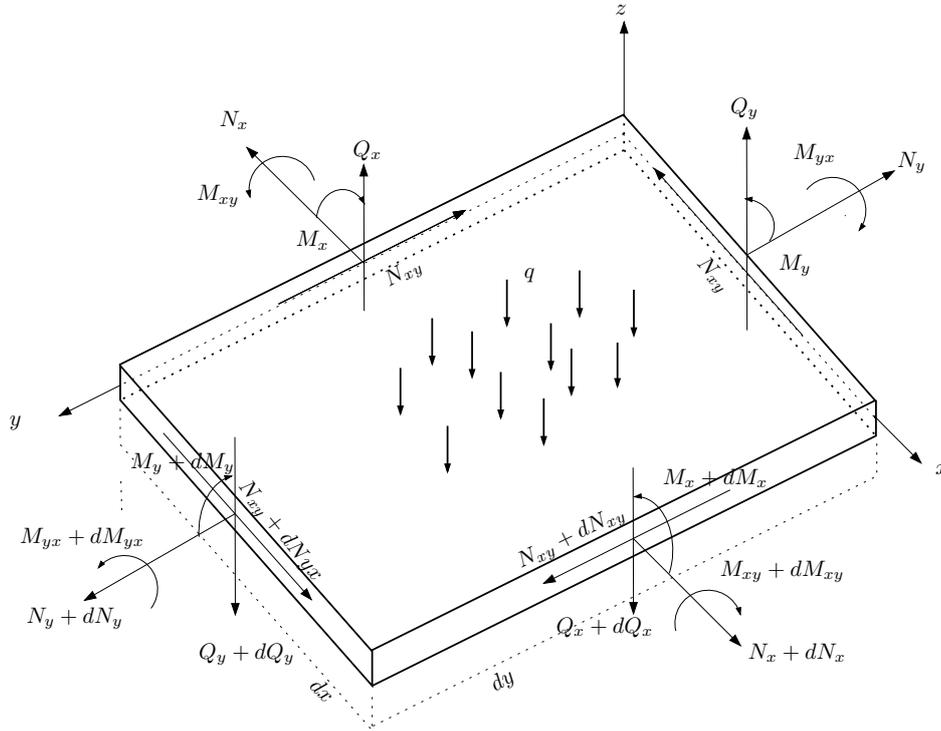


Figura 4.3: Equilíbrio de forças e momentos em uma placa

Figura 4.3, elas estão representadas por um vetor único de valores médios, aplicado no centro de cada face. Com uma mudança de posição, por exemplo, da face esquerda para a face direita, a componente do momento M_x que atua na face negativa de x varia em valor relativamente à face positiva de x . Esta variação pode ser representada por uma *série de Taylor* truncada.

$$M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \quad (4.21)$$

Usa-se a derivada parcial, pois M_x é função de x e y . Tratando todas as componentes de forma similar, obtém-se o estado das resultantes de tensão a partir da Figura 4.3.

O equilíbrio de forças na direção w nesse elemento é dado por

1. O somatório de forças no eixo z

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy + q dx dy = 0 \quad (4.22)$$

a partir do qual

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0. \quad (4.23)$$

2. O somatório de momentos sobre o eixo x

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dxdy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dxdy - Q_y dxdy = 0, \quad (4.24)$$

ou

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0, \quad (4.25)$$

3. O somatório de momentos sobre o eixo y

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0. \quad (4.26)$$

As seguintes expressões, equações (4.25) e (4.26), que são as forças de cisalhamento Q_x and Q_y podem ser expressas em termos dos momentos:

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \\ Q_y &= \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

4.3.1 Equação diferencial

Conforme mostrado por Fernandes (1974), as derivadas das Equações (4.15) são dadas por:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right), \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right), \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right). \quad (4.31)$$

Substituindo as expressões, Equações (4.28) a (4.31), nas Equações (4.25) a (4.26), obtém-se Q_x e Q_y em função do deslocamento w ,

$$\begin{aligned} Q_x &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \\ Q_y &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right), \end{aligned} \quad (4.32)$$

Considerando-se a simetria de momentos $M_{xy} = M_{yx}$. Substituindo as Equações (4.32) nas Equações (4.23), encontra-se o seguinte:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q(x, y). \quad (4.33)$$

Finalmente, introduzindo-se as expressões de M_x , M_y e M_{xy} das Equações (4.15) na Equação (4.33), obtém-se

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \quad (4.34)$$

Esta é a *equação diferencial de deslocamento* para análise de flexão de placas finas baseado na Teoria de Kirchhoff. Essa equação foi obtida por Lagrange in 1811. Matematicamente, a equação diferencial (4.34) pode ser classificada como uma equação diferencial linear parcial de quarta ordem com coeficientes constantes.

A equação (4.34) pode ser reescrita, obtendo-se:

$$\nabla^2(\nabla^2 w) = \nabla^4 w = \frac{q}{D}, \quad (4.35)$$

onde

$$\nabla^4(\cdot) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \quad (4.36)$$

é comumente chamado de *operador biharmônico*.

4.4 Cálculo da rigidez à flexão em direções arbitrárias

Ao aplicarem-se momentos M_x e M_y em planos perpendiculares entre si, surgem momentos de flexão e de torção em dois planos arbitrários e perpendiculares entre si. Tomando um elemento $ABCD$ de uma placa solicitada nas bordas por momentos M_x e M_y , observa-se que, as faces desse elemento estão submetidas a M_x e M_y , Figura 4.4.

Como mostrado na Figura 4.5, tomando-se os eixos n e t perpendiculares entre si e, formando o ângulo α com os eixos x e y , respectivamente, os momentos provocados por M_x e M_y em planos paralelos a essas direções serão M_n e M_{nt} .

O momento fletor M_n e o momento volvente M_{nt} são considerados positivos pela regra da mão direita de acordo com os eixo n e t .

Fazendo-se o equilíbrio de momentos em torno do eixo t tem-se M_n ,

$$M_n = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (4.37)$$

e, fazendo-se o equilíbrio em torno do eixo n tem-se M_{nt}

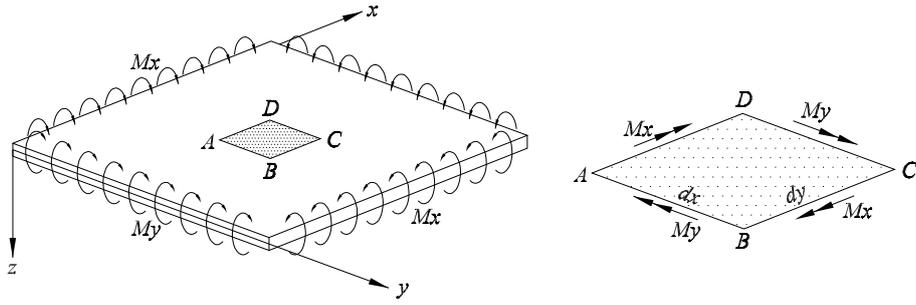


Figura 4.4: Elemento de placa submetido a momentos nas bordas.

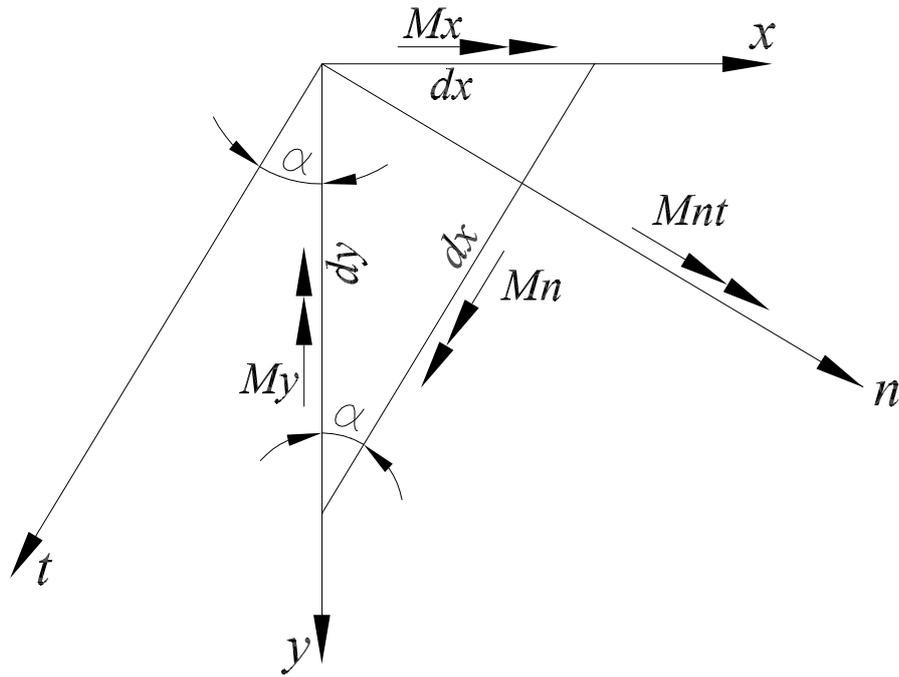


Figura 4.5: Elemento de placa submetido a momentos em direções arbitrárias.

$$M_{nt} = (M_y - M_x) \operatorname{sen} \alpha \operatorname{coss} \alpha + M_{xy} (\operatorname{coss}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \quad (4.38)$$

Da mesma forma, a força cortante Q_n pode ser escrita como:

$$Q_n = Q_x \operatorname{coss} \alpha + Q_y \operatorname{sen} \alpha \quad (4.39)$$

Kirchhoff (1850), mostrou que as condições de contorno de força cortante Q_n e momento volvente M_{nt} , Figura 4.6, podem ser escritas como uma única condição de contorno dada por

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \quad (4.40)$$

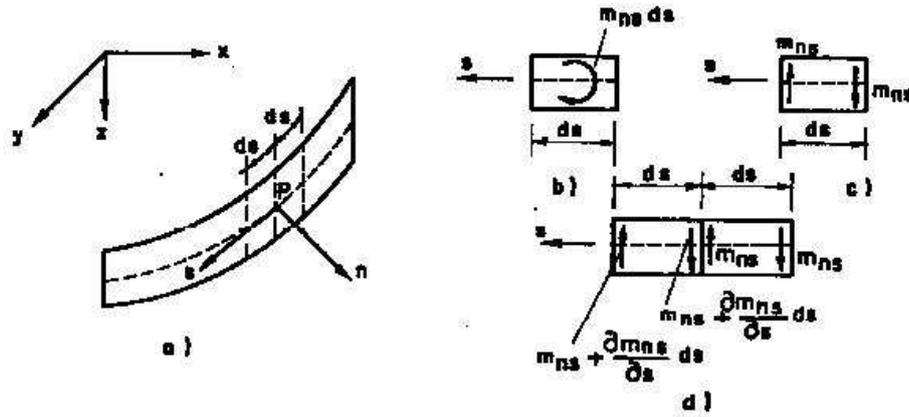


Figura 4.6: Momento volvente no contorno. Paiva (1987)

Portanto, as condições de contorno de deslocamentos são a deflexão w e a rotação $\frac{\partial w}{\partial n}$ e as condições de contorno de carregamento são a força cortante equivalente V_n e o momento fletor M_n .

4.5 Condições de contorno

Para solucionar o problema de placas, é necessária a prescrição das condições de contorno do problema em questão. Considerando-se o sistema de coordenadas genérico nt , conforme Figura 4.6, as condições de contorno podem ser estabelecidas segundo a Tabela 4.1 abaixo:

Tabela 4.1: Condições de contorno.

Condições de contorno	Conhecidas	Desconhecidas
Engastada	$w = 0$ $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$	V_n M_n
Apoiada	$w = 0$ $M_n = 0$	$\frac{\partial w}{\partial n}$ V_n
Livre	$V_n = 0$ $M_n = 0$	w $\frac{\partial w}{\partial n}$

Com relação às condições de contorno, a teoria de *Kirchhoff* determina que apenas duas condições são suficientes para a completa determinação de w .

4.6 Soluções fundamentais isotrópicas

Na formulação das equações integrais do método dos elementos de contorno, por meio do teorema da reciprocidade, dois estados de tensão num corpo são relacionados. Um estado de tensão, é conhecido e, o outro necessita ser determinado. O estado a ser

determinado está relacionado com o problema a ser resolvido, ou seja, com a análise a ser realizada. O problema a ser resolvido pode ser representado por um meio, um corpo ou uma peça mecânica, o qual tem geometria, carregamentos e condições de contorno definidos. O estado conhecido é dado pela resposta de um corpo de domínio infinito, cujas propriedades do material são as mesmas do estado a ser determinado à aplicação de uma carga concentrada unitária e pontual. À esta resposta, é dado o nome de *solução fundamental*.

A formulação do método dos elementos de contorno requer o conhecimento da solução fundamental. No caso particular de placas, a solução fundamental é dada pelo deslocamento w em um ponto $P(x, y)$ qualquer do domínio, chamado de ponto campo, devido a aplicação de uma carga unitária q em um ponto $Q(x_0, y_0)$ qualquer, chamado ponto fonte conforme Figura 3.1.

A solução fundamental do deslocamento transversal de placas fletidas é calculada fazendo o termo não-homogêneo da equação diferencial (4.34) igual a uma força concentrada dada por uma função delta de Dirac $\delta(Q, P)$. Esta solução fundamental é dada por:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 [\ln r], \quad (4.41)$$

onde $r^2 = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]$ é a distância do ponto fonte ao ponto campo. Essa escolha, deve-se ao método dos elementos de contorno exigir a utilização de diversas derivadas da solução fundamental w . As demais soluções fundamentais, são derivadas desta, conforme Paiva (1987) e, dadas por:

$$V_n^* = \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}) [-3 + \nu + 2(1 - \nu)(\mathbf{s}\cdot\mathbf{r})^2], \quad (4.42)$$

$$m_n^* = -\frac{1}{8\pi} [2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})^2(1 - \nu) + 2\nu + (1 + \nu)(1 + 2\ln r)], \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{1}{8\pi D_{22}} [(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})r(1 + 2\ln r)], \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = -\frac{1}{8\pi D_{22}} [(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})r(1 + 2\ln r)], \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_n^*}{\partial m} = & -\frac{1}{4\pi r^2} [(-\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} + 2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}))(3 - \nu) + \\ & 2(1 - \nu)(\mathbf{s}\cdot\mathbf{r})(2\mathbf{m}\cdot\mathbf{s}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}) + (\mathbf{m}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}) - 4(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}))], \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial m_n^*}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r} [-2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})(-\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} + \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}))(1 - \nu) + \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(1 + \nu)], \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial n \partial m} = -\frac{1}{4\pi D} [\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}) + (\mathbf{m}\cdot\mathbf{n})\ln r]. \quad (4.48)$$

onde \mathbf{n} é o vetor unitário normal ao contorno no ponto campo, \mathbf{m} é o vetor unitário normal ao contorno no ponto fonte, \mathbf{s} é o vetor unitário tangente ao contorno no ponto

fonte e \mathbf{r} é o vetor unitário na direção da reta que passa pelo ponto fonte e ponto campo.

Capítulo 5

Equações do Método dos Elementos de Contorno para Placas de Kirchhoff

Neste capítulo, será apresentada de forma detalhada a formulação para obtenção da equação integral de contorno.

5.1 Formulação integral

Para a determinação da equação integral para pontos do domínio da placa, seja uma placa de domínio finito Ω e contorno Γ contida em outra de domínio infinito Ω_∞ e contorno Γ_∞ . Conforme a Figura 5.1, a placa finita está submetida a um carregamento q distribuído em uma área Ω_q , Paiva (1987).

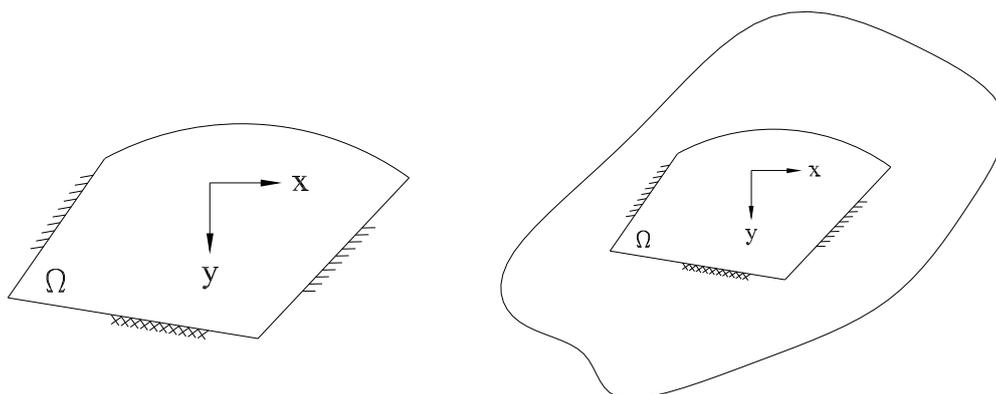


Figura 5.1: Placa finita contida em uma placa infinita.

O teorema de Betti, Kane (1993), é obtido considerando-se que a placa de domínio finito é submetida a dois carregamentos não simultâneos q e q^* , associados a superfícies elásticas w e w^* , respectivamente. São identificados dois estados de tensão σ e σ^* , com

seus respectivos estados de deformação ε e ε^* . Podemos relacionar dois estados de tensão-deformação de um material linear como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega. \quad (5.1)$$

Escrevendo o lado direito da Equação (5.1) na notação de von Karman, temos:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_x \varepsilon_x^* + \sigma_y \varepsilon_y^* + \sigma_z \varepsilon_z^* + \tau_{xy} \gamma_{xy}^* + \tau_{xz} \gamma_{xz}^* + \tau_{yz} \gamma_{yz}^*) d\Omega \quad (5.2)$$

Desconsiderando as tensões normais à superfície média da placa (estado plano de tensões), a Equação (5.2) é escrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_x \varepsilon_x^* + \sigma_y \varepsilon_y^* + \tau_{xy} \gamma_{xy}^*) d\Omega. \quad (5.3)$$

Para obter as equações do método dos elementos de contorno, é necessário transformar as integrais de domínio em integrais de contorno. Para isso, considere duas funções $f(x)$ e $g(x)$. A derivada de seu produto pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial x} [f(x)g(x)] = \frac{\partial f(x)}{\partial x} g(x) + \frac{\partial g(x)}{\partial x} f(x). \quad (5.4)$$

Usando a propriedade de derivação (5.4), pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{\partial m_x}{\partial x} \right] d\Omega. \quad (5.5)$$

Usando o teorema de Green (Kane, 1994), a Equação (5.5) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = - \int_{\Gamma} m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{\partial m_x}{\partial x} d\Omega. \quad (5.6)$$

Aplicando a propriedade de derivação (5.4) no segundo termo do lado direito da Equação (5.6), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = - \int_{\Gamma} m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha d\Gamma + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(w^* \frac{\partial m_x}{\partial x} \right) - w^* \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} \right] d\Omega. \quad (5.7)$$

Depois, usando o teorema de Green, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left(-m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + w^* \frac{\partial m_x}{\partial x} \cos \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} w^* \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} d\Omega. \quad (5.8)$$

Seguindo um procedimento similar, podemos mostrar que:

$$\int_{\Omega} \sigma_y \varepsilon_y^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left(-m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha + w^* \frac{\partial m_y}{\partial y} \sin \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} w^* \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} d\Omega, \quad (5.9)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tau_{xy} \gamma_{xy}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left(-m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha - m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha + w^* \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \sin \alpha + \right. \\ \left. w^* \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \cos \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} 2w^* \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} d\Omega. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Assim, a Equação (5.3) é escrita como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = - \int_{\Gamma} \left(m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha + m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha + \right. \\ \left. m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} w^* \left[\left(\cos \alpha \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right) \left(\sin \alpha \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right) \right] d\Gamma - \\ \int_{\Gamma} w^* \left(\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} \right) d\Gamma. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Substituindo as Equações (4.25) e (3.5) e usando a Equação (4.39), a Equação (5.11) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = - \int_{\Gamma} \left(m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha + m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha + \right. \\ \left. m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} w^* q_n d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Da relação entre dois sistemas de coordenadas (x, y) e (n, s) tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^*}{\partial x} &= \frac{\partial w^*}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s} \sin \alpha, \\ \frac{\partial w^*}{\partial y} &= \frac{\partial w^*}{\partial n} \sin \alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Substituindo as Equações (5.13) na Equação (5.12) tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega &= \int_{\Gamma} \left[m_x \cos \alpha \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s} \sin \alpha \right) + \right. \\
& m_y \sin \alpha \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \sin \alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s} \cos \alpha \right) + m_{xy} \cos \alpha \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \sin \alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s} \cos \alpha \right) + \\
& \left. m_{xy} \sin \alpha \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s} \sin \alpha \right) \right] d\Gamma + \int_{\Gamma} w^* q_n d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \quad (5.14)
\end{aligned}$$

Depois de algumas manipulações algébricas, a Equação (5.14) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega &= \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial w^*}{\partial n} (m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha + 2m_{xy} \sin \alpha \cos \alpha) + \right. \\
& \left. \frac{\partial w^*}{\partial s} [m_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (m_y - m_x) \sin \alpha \cos \alpha] \right\} d\Gamma + \\
& \int_{\Gamma} w^* q_n d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \quad (5.15)
\end{aligned}$$

Substituindo as Equações (4.37) e (4.38) na Equação (5.15), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left(m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} + m_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} - q_n w^* \right) d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \quad (5.16)$$

Calculando o segundo termo da primeira integral do lado direito da Equação (5.16), temos:

$$\int_{\Gamma} m_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} d\Gamma = m_{ns} w^* \Big|_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_{\Gamma} \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma, \quad (5.17)$$

onde Γ_1 e Γ_2 são as coordenadas dos extremos do contorno onde a integração está sendo realizada.

No caso de um contorno fechado sem canto, isto é, a função que descreve a curva de contorno e suas derivadas são contínuas, o primeiro termo do lado direito da Equação (5.17) desaparece. No caso onde há cantos, a Equação (5.17) pode ser escrita como:

$$\int_{\Gamma} m_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} d\Gamma = - \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^* - \int_{\Gamma} \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma, \quad (5.18)$$

onde

$$R_{c_i} = m_{ns_i}^+ - m_{ns_i}^-, \quad (5.19)$$

e os termos w_{c_i} , $m_{ns_i}^+$, $m_{ns_i}^-$ são, respectivamente, os valores de deslocamentos e momentos depois e antes do canto i da placa (Figura 5.2), N_c é o número total de cantos no contorno, conforme Paiva (1987).

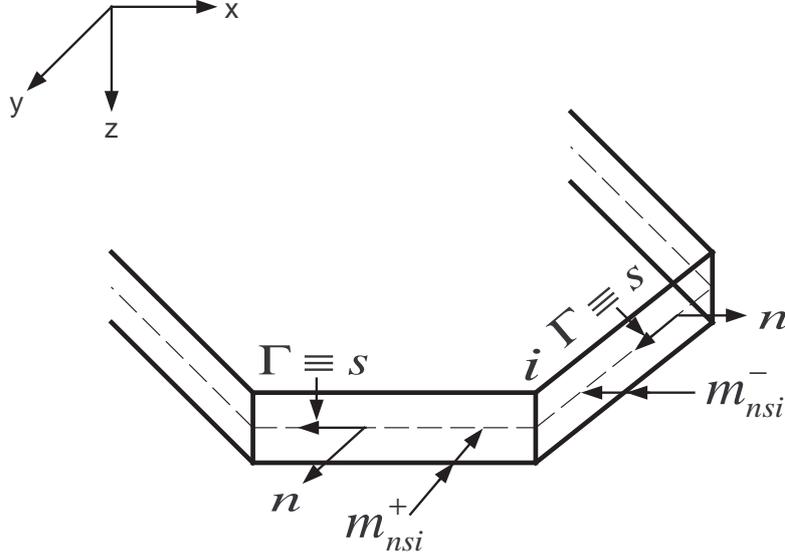


Figura 5.2: Canto i do contorno da placa.

Das Equações (5.16) e (5.18), pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left(q_n w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^* + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \quad (5.20)$$

Das Equações (5.20) e (4.40), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left(V_n w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^* + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \quad (5.21)$$

Seguindo um procedimento similar àquele usado para obter a Equação (5.21), o lado esquerdo da Equação (5.1) pode ser escrito como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} \left(V_n^* w - m_n \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^* w_{c_i} + \int_{\Omega} g^* w d\Omega. \quad (5.22)$$

Substituindo as Equações (5.21) e (5.22) na Equação (5.1), pode-se escrever:

$$\int_{\Gamma} \left(V_n w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^* + \int_{\Omega} g w^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left(V_n^* w - m_n \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^* w_{c_i} + \int_{\Omega} g^* w d\Omega. \quad (5.23)$$

A Equação (5.23) relaciona dois estados de um material elástico. Para aplicar esta equação para resolver problemas de flexão, precisamos considerar um dos estados como conhecido e o outro como o estado que queremos analisar. Para obter a equação integral de contorno, o estado conhecido é ajustado para que a integral de domínio dada por:

$$\int_{\Omega} g^* w d\Omega \quad (5.24)$$

desapareça. Usando as propriedades da função delta de Dirac $\delta(P, Q)$, de forma que $g^* = \delta(P, Q)$, a integral (5.24) é escrita como:

$$\int_{\Omega} \delta(P, Q) w(P) d\Omega(P) = w(Q), \quad (5.25)$$

onde Q é o ponto onde a carga é aplicada, conhecido como ponto fonte, e P é o ponto onde o deslocamento é observado, conhecido como ponto campo. O estado correspondente a um material linear sob carregamento de uma função delta de Dirac é conhecido como um estado fundamental e as variáveis da Equação (5.23) relacionadas a este estado (w^* , V_n^* e m_n^*) são conhecidas como soluções fundamentais, as quais são calculadas analiticamente a partir da Equação (4.42).

Considerando o estado "*" como o estado fundamental, a Equação (5.23) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} Kw(Q) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - m_n^*(Q, P) \frac{\partial w(P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^*(Q, P) w_{c_i}(P) = \\ \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w^*(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P) w_{c_i}^*(Q, P) + \\ \int_{\Omega} g(P) w^*(Q, P) d\Omega. \end{aligned} \quad (5.26)$$

A Equação (5.26) é a equação de placas finas para deslocamentos em pontos do domínio da placa. Esta equação fornece deslocamentos em todos os pontos do domínio da placa a partir das cortantes equivalentes (V_n), momentos de flexão na direção normal (m_n), reação de canto (R_{c_i}), deslocamentos (w) e rotações em relação à normal ($\partial w / \partial n$) conhecidos no contorno.

A constante K é introduzida para se considerar que a função delta de Dirac pode ser aplicada no domínio, no contorno ou fora do domínio. Se a função delta de Dirac é aplicada em um ponto onde o contorno é suave, então $K = 1/2$. As variáveis da equação (5.26) são deslocamentos $w(P)$, rotações $\frac{\partial w(P)}{\partial n}$, momentos $m_n(P)$, e forças $V_n(P)$. Para uma dada condição de contorno, algumas destas variáveis são conhecidas

e outras desconhecidas. Para se ter um número de equações igual ao número de variáveis desconhecidas, é necessário escrever a equação integral correspondente a derivada do deslocamento $w(Q)$ em relação ao sistema de coordenadas cartesiano fixo no ponto de origem, isto é, o ponto onde o delta de Dirac do estado fundamental é aplicado. As direções dos eixos deste sistema de coordenadas são coincidentes com as direções normal e a tangente ao contorno no ponto fonte. Para problemas de flexão em placas isotrópicas tem-se que a equação integral de contorno escrita em termos de quatro valores de contorno básicos, isto é, deflexão w , inclinação da normal $\partial w/\partial n$, força cortante V_n e momento fletor m_n . Em um problema bem colocado dois destes quatro valores são incógnitas do problema e dois são condições de contorno conhecidas.

Pode-se verificar que num problema de flexão em placas há sempre duas incógnitas a serem determinadas em qualquer ponto do contorno e conseqüentemente, a solução do problema requer que uma segunda equação seja estabelecida.

A segunda equação integral de contorno é obtida da derivada da Equação (5.26) em relação à direção n_1 normal ao contorno no ponto fonte e também corresponde à solução do binário unitário.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial w(Q)}{\partial n_1} + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V^*}{\partial n_1}(Q, P) w(P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\ \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R^* c_i}{\partial n_1}(Q, P) w_{c_i}(P) = \int_{\Gamma} \left\{ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n_1}(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial}{\partial n_1} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n_1}(Q, P) \right] \right\} d\Gamma(P) + \\ \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P) \frac{\partial w_{c_i}^*}{\partial n_1}(Q, P) + \int_{\Omega} g(P) \frac{\partial w^*}{\partial n_1}(Q, P) d\Omega. \end{aligned} \quad (5.27)$$

É importante dizer que é possível usar apenas a Equação (5.26) em uma formulação de elementos de contorno usando como pontos fonte os nós do contorno e um número igual de pontos externos ao domínio do problema.

5.2 Elementos Quadráticos

Uma vez que é muito difícil encontrar soluções analíticas gerais para as equações integrais de contorno (5.26) e (5.27), torna-se necessário o uso de soluções numéricas. Quando soluções numéricas são usadas, o contorno é aproximado por elementos discretos. Estes elementos discretos são chamados elementos de contorno.

Considere a Figura 5.3 onde o contorno de uma placa é aproximado por uma série de segmentos (elementos de contorno) Γ_i , cujo número e forma são escolhidos para representá-lo adequadamente.

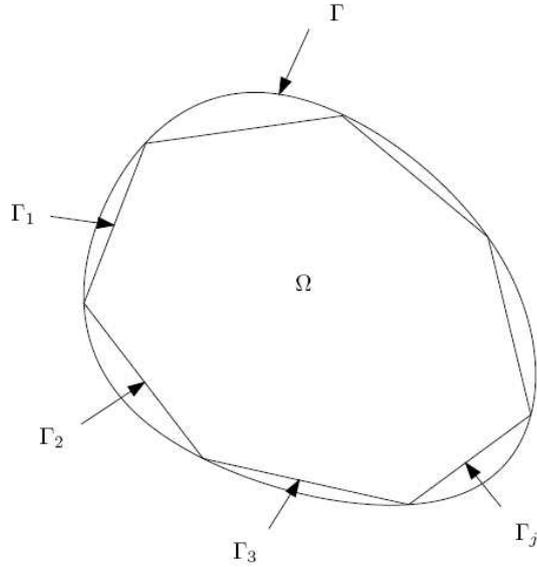


Figura 5.3: Domínio bidimensional dividido em elementos de contorno.

A cada elemento de contorno associam-se um ou mais pontos chamados nós ou pontos nodais e os valores das variáveis associadas a eles são denominados valores nodais. Os deslocamentos e esforços ao longo de cada elemento serão aproximados por funções polinomiais em função das quais é definido o número de pontos nodais do elemento.

Visando aumentar a convergência dos resultados para a formulação apresentada aqui, foram implementados os elementos quadráticos, os quais são os mais simples capazes de representar qualquer contorno curvo. Como a formulação tem integrais com integrandos singulares, estas integrais precisam ser calculadas no sentido de Cauchy, no caso de singularidades fortes, ou no sentido de Hadamard, no caso de hipersingularidades. A integração no sentido de Hadamard requer a continuidade de Holder nos nós. Devido a esse fato, os elementos descontínuos são fortemente indicados. Neste trabalho são usados os elementos quadráticos descontínuos para representar os elementos físicos e os elementos quadráticos contínuos para representar os elementos geométricos.

Nos elementos quadráticos, os deslocamentos e as forças podem ser representados como:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} & 0 \\ 0 & N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w^{(1)} \\ \frac{\partial w^{(1)}}{\partial n} \\ w^{(2)} \\ \frac{\partial w^{(2)}}{\partial n} \\ w^{(3)} \\ \frac{\partial w^{(3)}}{\partial n} \end{Bmatrix} \quad (5.28)$$

$$\begin{Bmatrix} V_n \\ m_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} & 0 \\ 0 & N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_n^{(1)} \\ m_n^{(1)} \\ V_n^{(2)} \\ m_n^{(2)} \\ V_n^{(3)} \\ m_n^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (5.29)$$

Nos elementos quadráticos descontínuos os nós são colocados em $\xi = -2/3$, $\xi = 0$ e $\xi = +2/3$, como mostrado na Figura 5.4. As funções de forma são dadas por:

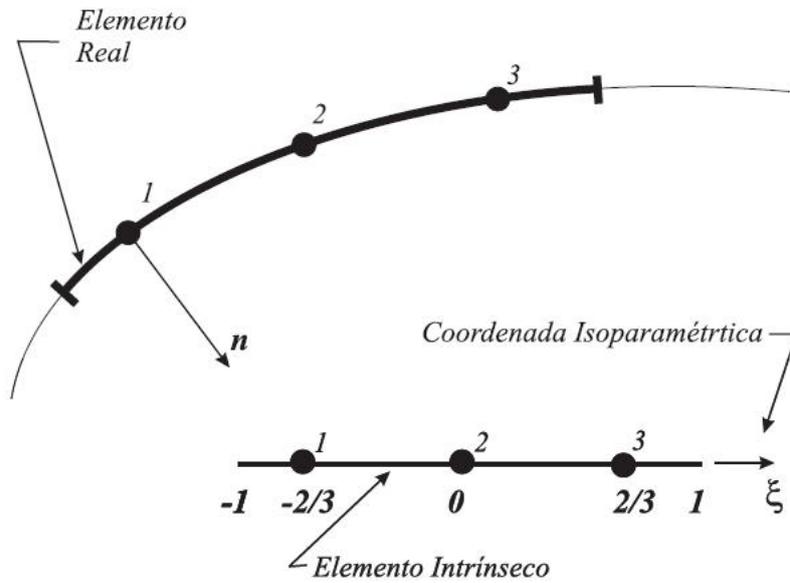


Figura 5.4: Elemento quadrático descontínuo.

$$N_d^{(1)} = \xi \left(\frac{9}{8}\xi - \frac{3}{4} \right); \quad (5.30)$$

$$N_d^{(2)} = \left(1 - \frac{3}{2}\xi \right) \left(1 + \frac{3}{2}\xi \right); \quad (5.31)$$

$$N_d^{(3)} = \xi \left(\frac{9}{8}\xi + \frac{3}{4} \right). \quad (5.32)$$

onde ξ é a coordenada adimensional ao longo do elemento (Figura 5.4).

A geometria do elemento também pode ser considerada como quadrática e é representada por coordenadas nodais na forma:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_c^{(1)} & 0 & N_c^{(2)} & 0 & N_c^{(3)} & 0 \\ 0 & N_c^{(1)} & 0 & N_c^{(2)} & 0 & N_c^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)} \\ x_1^{(3)} \\ x_2^{(1)} \\ x_2^{(2)} \\ x_2^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (5.33)$$

porém, utilizando as funções de forma para elementos quadráticos contínuos dadas por:

$$N_c^{(1)} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1); \quad (5.34)$$

$$N_c^{(2)} = (1 - \xi^2); \quad (5.35)$$

$$N_c^{(3)} = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1). \quad (5.36)$$

5.3 Equação matricial

Com o objetivo de calcular as variáveis de contorno desconhecidas, o contorno Γ é discretizado em N_e elementos de contorno quadráticos, N_c são números de cantos e as variáveis de contorno u_x , u_y , t_x e t_y são interpoladas ao longo de cada elemento. Tomando um nó d como o ponto fonte, as equações (5.26) e (5.27) podem ser escritas na forma matricial como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \{ u \} + \sum_{i=1}^{N_e} \left([h_e] \{ u_e \} \right) = \\ \sum_{i=1}^{N_e} \left([g_e] \{ t_e \} \right) + \\ \sum_{i=1}^{N_c} \left(\{ R \} w_c^{(i)} \right) + \sum_{i=1}^{N_c} \left(\{ C \} R_c^{(i)} \right) + \{ P \}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Onde os termos da equação matricial(5.37) são integrais dadas por:

$$\{ u \} = \begin{Bmatrix} u_x^{(d)} \\ u_y^{(d)} \\ w^{(d)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(d)} \end{Bmatrix} \quad (5.38)$$

$$[h_e] = \begin{bmatrix} h_{1,1}^{(i,d)} & h_{1,2}^{(i,d)} & h_{1,3}^{(i,d)} & h_{1,4}^{(i,d)} & h_{1,5}^{(i,d)} & h_{1,6}^{(i,d)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_{2,1}^{(i,d)} & h_{2,2}^{(i,d)} & h_{2,3}^{(i,d)} & h_{2,4}^{(i,d)} & h_{2,5}^{(i,d)} & h_{2,6}^{(i,d)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{3,7}^{(i,d)} & h_{3,8}^{(i,d)} & h_{3,9}^{(i,d)} & h_{3,10}^{(i,d)} & h_{3,11}^{(i,d)} & h_{3,12}^{(i,d)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{4,7}^{(i,d)} & h_{4,8}^{(i,d)} & h_{4,9}^{(i,d)} & h_{4,10}^{(i,d)} & h_{4,11}^{(i,d)} & h_{4,12}^{(i,d)} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

$$\{ u_e \} = \begin{Bmatrix} u_x^{(i,1)} \\ u_y^{(i,1)} \\ w^{(i,1)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(i,2)} \\ u_x^{(i,2)} \\ u_y^{(i,2)} \\ w^{(i,2)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(i,2)} \\ u_x^{(i,3)} \\ u_y^{(i,3)} \\ w^{(i,3)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(i,3)} \end{Bmatrix} \quad (5.40)$$

$$[g_e] = \begin{bmatrix} g_{1,1}^{(i,d)} & g_{1,2}^{(i,d)} & g_{1,3}^{(i,d)} & g_{1,4}^{(i,d)} & g_{1,5}^{(i,d)} & g_{1,6}^{(i,d)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{2,1}^{(i,d)} & g_{2,2}^{(i,d)} & g_{2,3}^{(i,d)} & g_{2,4}^{(i,d)} & g_{2,5}^{(i,d)} & g_{2,6}^{(i,d)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{3,7}^{(i,d)} & g_{3,8}^{(i,d)} & g_{3,9}^{(i,d)} & g_{3,10}^{(i,d)} & g_{3,11}^{(i,d)} & g_{3,12}^{(i,d)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{4,7}^{(i,d)} & g_{4,8}^{(i,d)} & g_{4,9}^{(i,d)} & g_{4,10}^{(i,d)} & g_{4,11}^{(i,d)} & g_{4,12}^{(i,d)} \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

$$\{ t_e \} = \begin{pmatrix} t_x^{(i,1)} \\ t_y^{(i,1)} \\ V_n^{(i,1)} \\ m_n^{(i,1)} \\ t_x^{(i,2)} \\ t_y^{(i,2)} \\ V_n^{(i,2)} \\ m_n^{(i,2)} \\ t_x^{(i,3)} \\ t_y^{(i,3)} \\ V_n^{(i,3)} \\ m_n^{(i,3)} \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

$$\{ R \} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_3^{(i,d)} \\ R_4^{(i,d)} \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

$$\{ C \} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_3^{(i,d)} \\ C_4^{(i,d)} \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

$$\{ P \} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P_3^{(d)} \\ P_4^{(d)} \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

$$h_{1,1}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(1)} t_{11}^* d\Gamma, \quad h_{1,2}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(1)} t_{12}^* d\Gamma, \quad (5.46)$$

$$h_{1,3}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(2)} t_{11}^* d\Gamma, \quad h_{1,4}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(2)} t_{12}^* d\Gamma, \quad (5.47)$$

$$h_{1,5}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(3)} t_{11}^* d\Gamma, \quad h_{1,6}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(3)} t_{12}^* d\Gamma, \quad (5.48)$$

$$h_{2,1}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(1)} t_{21}^* d\Gamma, \quad h_{2,2}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(1)} t_{22}^* d\Gamma, \quad (5.49)$$

$$h_{2,3}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(2)} t_{21}^* d\Gamma, \quad h_{2,4}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(2)} t_{22}^* d\Gamma, \quad (5.50)$$

$$h_{2,5}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(3)} t_{21}^* d\Gamma, \quad h_{2,6}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(3)} t_{22}^* d\Gamma, \quad (5.51)$$

$$h_{3,7}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(1)} V_n^* d\Gamma, \quad h_{3,8}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(1)} m_n^* d\Gamma, \quad (5.52)$$

$$h_{3,9}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(2)} V_n^* d\Gamma, \quad h_{3,10}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(2)} m_n^* d\Gamma, \quad (5.53)$$

$$h_{3,11}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(3)} V_n^* d\Gamma, \quad h_{3,12}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(3)} m_n^* d\Gamma, \quad (5.54)$$

$$h_{4,7}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(1)} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \quad h_{4,8}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(1)} \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \quad (5.55)$$

$$h_{4,9}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(2)} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \quad h_{4,10}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(2)} \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \quad (5.56)$$

$$h_{4,11}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(3)} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \quad h_{4,12}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(3)} \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \quad (5.57)$$

$$g_{1,1}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(1)} u_{11}^* d\Gamma, \quad g_{1,2}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(1)} u_{12} d\Gamma, \quad (5.58)$$

$$g_{1,3}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(2)} u_{11}^* d\Gamma, \quad g_{1,4}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(2)} u_{12} d\Gamma, \quad (5.59)$$

$$g_{1,5}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(3)} u_{11}^* d\Gamma, \quad g_{1,6}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(3)} u_{12} d\Gamma, \quad (5.60)$$

$$g_{2,1}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(1)} u_{21} d\Gamma, \quad g_{2,2}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(1)} u_{22} d\Gamma, \quad (5.61)$$

$$g_{2,3}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(2)} u_{21} d\Gamma, \quad g_{2,4}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(2)} u_{22} d\Gamma, \quad (5.62)$$

$$g_{2,5}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(3)} u_{21} d\Gamma, \quad g_{2,6}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(3)} u_{22} d\Gamma, \quad (5.63)$$

$$g_{3,7}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(1)} w^* d\Gamma, \quad g_{3,8}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(1)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, \quad (5.64)$$

$$g_{3,9}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(2)} w^* d\Gamma, \quad g_{3,10}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(2)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, \quad (5.65)$$

$$g_{3,11}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(3)} w^* d\Gamma, \quad g_{3,12}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(3)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, \quad (5.66)$$

$$g_{4,7}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(1)} \frac{\partial w^*}{\partial n_1} d\Gamma, \quad g_{4,8}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(1)} \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial m_n^*}{\partial n} d\Gamma, \quad (5.67)$$

$$g_{4,9}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(2)} \frac{\partial w^*}{\partial n_1} d\Gamma, \quad g_{4,10}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(2)} \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial m_n^*}{\partial n} d\Gamma, \quad (5.68)$$

$$g_{4,11}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(3)} \frac{\partial w^*}{\partial n_1} d\Gamma, \quad g_{4,12}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N^{(3)} \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial m_n^*}{\partial n} d\Gamma, \quad (5.69)$$

$$C_3^{(i,d)} = w_{ci}^*, \quad C_4^{(i,d)} = \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial n_1}, \quad (5.70)$$

$$R_3^{(i,d)} = R_{ci}^*, \quad R_4^{(i,d)} = \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial n_1}, \quad (5.71)$$

$$P_3^{(d)} = \int_{\Omega} g w^* d\Omega, \quad P_4^{(d)} = \int_{\Omega} g \frac{\partial w}{\partial n_1} d\Omega. \quad (5.72)$$

sendo o contorno Γ dado por:

$$\Gamma = \sum_{e=1}^{N_e} \Gamma_e, \quad (5.73)$$

onde, N_e é o número de elementos.

O desenvolvimento das integrais ao longo do elemento na equação (5.37) requer o uso do jacobiano, já que as funções de forma são expressas em termos da coordenada adimensional e as integrais são resolvidas ao longo do contorno Γ_e . O jacobiano desta transformação é dado por:

$$J(\xi) = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} = \frac{d\Gamma_e}{d\xi}. \quad (5.75)$$

Assim:

$$d\Gamma_e = J(\xi)d\xi. \quad (5.76)$$

A equação matricial (5.37) tem duas equações e $6N_e + N_c$ variáveis desconhecidas. Para se obter um sistema linear solucionável, o ponto fonte é colocado sucessivamente em cada nó do contorno ($d = 1, \dots, 12N_e$) bem como em cada nó de canto ($d = 12N_e + 1, \dots, 6N_e + N_c$). É importante notar que enquanto ambas as equações, (5.26) e (5.27), são usadas para cada nó de contorno (fornecendo as primeiras $12N_e$ equações), somente a equação (5.26) é usada para cada canto (fornecendo outras N_c equações). Então, a seguinte equação matricial é obtida:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}' & \mathbf{R}' \\ \mathbf{H}'' & \mathbf{R}'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{bn} \\ \mathbf{w}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}' & \mathbf{C}' \\ \mathbf{G}'' & \mathbf{C}'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{bn} \\ \mathbf{V}_c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{bn} \\ \mathbf{P}_c \end{Bmatrix}, \quad (5.77)$$

onde, \mathbf{w}_{bn} contém o deslocamento transversal e a rotação de cada nó de contorno, \mathbf{V}_{bn} contém as forças de superfície e o momento tissor de cada nó de contorno, \mathbf{P}_{bn} contém a integral de domínio para cada nó de contorno, \mathbf{w}_c contém o deslocamento transversal de cada canto, \mathbf{V}_c contém a reação de canto para cada canto, \mathbf{P}_c contém a integral de domínio para cada canto. Os termos \mathbf{H}' , \mathbf{C}' , \mathbf{R}' e \mathbf{G}' são matrizes que contém os respectivos termos da equação (5.37) escritos para os N_e nós de contorno. Os termos \mathbf{H}'' , \mathbf{C}'' , \mathbf{R}'' e \mathbf{G}'' são matrizes que contém os respectivos primeiros termos da equação (5.37) escrita para os N_c cantos.

A equação (5.77) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{H}\mathbf{w} = \mathbf{G}\mathbf{V} + \mathbf{P}, \quad (5.78)$$

onde,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}' & \mathbf{R}' \\ \mathbf{H}'' & \mathbf{R}'' \end{bmatrix}, \quad (5.79)$$

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{bn} \\ \mathbf{w}_c \end{Bmatrix}, \quad (5.80)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}' & \mathbf{C}' \\ \mathbf{G}'' & \mathbf{C}'' \end{bmatrix}, \quad (5.81)$$

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{bn} \\ \mathbf{V}_c \end{Bmatrix}, \quad (5.82)$$

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{bn} \\ \mathbf{P}_c \end{Bmatrix}. \quad (5.83)$$

Para resolver a equação (5.78) é necessário levar em conta as condições de contorno.

5.4 Transformação das integrais de domínio em integrais de contorno

A aplicação do método dos elementos de contorno requer, preferencialmente, que a solução fundamental para o problema em consideração seja conhecida. Essa solução fundamental deve levar em conta todos os termos da equação governante de forma a obter uma formulação onde apenas o contorno é discretizado. Quando isso não for possível, os termos não considerados na obtenção da solução fundamental produzirão integrais de domínio que preferencialmente, devem ser transformadas em integrais de contorno. A primeira alternativa é fazer a transformação exata da integral de domínio em integral de contorno. Porém, isto só é possível quando os termos não considerados são funções apenas da geometria (carregamento distribuído, por exemplo). A segunda alternativa é transferir os efeitos da integral de domínio para o contorno usando-se o método de elementos de contorno de reciprocidade dual ou da integração radial. Estes procedimentos são mais gerais e podem ser empregados para quaisquer termos. No caso deste trabalho, as integrais de domínio provenientes da carga distribuída serão transformadas em integrais de contorno por transformação exata.

Como pode ser observado nas equações (5.26) e (5.27), há integrais de domínio na formulação devido a carga distribuída no domínio e aos termos de inércia. Estas integrais podem ser calculadas por integração direta, através de células, na área Ω_g (veja Figura 4.1). Contudo, a formulação dos elementos de contorno perde seu principal atrativo que é a discretização somente do contorno. Neste trabalho, as integrais de domínio oriundas das cargas distribuídas são transformadas em integrais de contorno por uma transformação exata.

Considere a placa da Figura 4.1 sob um carregamento g aplicado em uma área Ω_g . Assumindo que o carregamento g tem uma distribuição linear ($Ax + By + C$) na área Ω_g , a integral de domínio pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega_g} gw^* d\Omega = \int_{\Omega_g} (Ax + By + C)w^* \rho d\rho d\theta, \quad (5.84)$$

ou

$$\int_{\Omega_g} gw^* d\Omega = \int_{\theta} \int_0^r (Ax + By + C)w^* \rho d\rho d\theta, \quad (5.85)$$

onde, r é o valor de ρ em um ponto do contorno Γ_g .

Definindo F^* como a seguinte integral:

$$F^* = \int_0^r (Ax + By + C)w^* \rho d\rho, \quad (5.86)$$

pode-se escrever:

$$\int_{\Omega_g} gw^* d\Omega = \int_{\theta} F^* d\theta. \quad (5.87)$$

Considerando um ângulo infinitesimal $d\theta$ (Figura 5.5), a relação entre o comprimento do arco $rd\theta$ e o comprimento infinitesimal do contorno $d\Gamma$, pode ser escrito como:

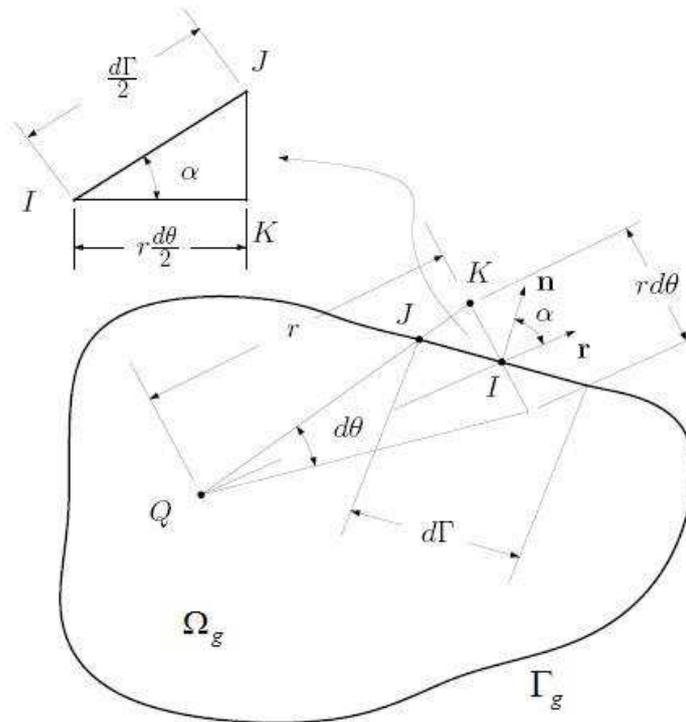


Figura 5.5: Transformação da integral de domínio em integral de contorno.

$$\cos \alpha = \frac{r \frac{d\theta}{2}}{\frac{d\Gamma}{2}}, \quad (5.88)$$

ou

$$d\theta = \frac{\cos \alpha}{r} d\Gamma. \quad (5.89)$$

Usando as propriedades do produto interno dos vetores unitários \mathbf{n} e \mathbf{r} , indicados na (Figura 5.5), podemos escrever:

$$d\theta = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma. \quad (5.90)$$

Finalmente, substituindo a equação (5.90) na equação (5.87), a integral de domínio da equação (5.26) pode ser escrita como uma integral de contorno dada por:

$$\int_{\Omega_g} gw^* d\Omega = \int_{\Gamma_g} \frac{F^*}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma. \quad (5.91)$$

Sabendo que

$$x = \rho \cos \theta \quad (5.92)$$

e

$$y = \rho \sin \theta. \quad (5.93)$$

Seguindo um procedimento similar para obter a equação (5.86), o termo de domínio da equação (5.27) pode ser escrito como:

$$\int_{\Omega_g} g \frac{\partial w^*}{\partial n_1} d\Omega = \int_{\theta} G^* d\theta, \quad (5.94)$$

onde

$$G^* = \int_0^r (Ax + By + C) \frac{\partial w^*}{\partial n_1} \rho d\rho \quad (5.95)$$

Embora neste trabalho as cargas de domínio são consideradas como linearmente distribuídas, o procedimento apresentado nesta seção pode ser estendido para outras cargas de ordem superior.

O último termo da equação (5.27) pode ser transformado de uma integral de domínio para uma integral de contorno, seguindo um processo similar. Então:

$$\int_{\Omega_g} g \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} d\Omega = \int_{\theta} H^* d\theta, \quad (5.96)$$

onde

$$H^* = \int_0^r (Ax + By + C) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \rho d\rho \quad (5.97)$$

5.5 Associação espacial de macro-elementos

Neste seção, é desenvolvida a formulação para associação espacial de macro-elementos através da técnica de sub-regiões do MEC.

A análise de estruturas tridimensionais formadas por elementos estruturais planos é feita admitindo-se que cada elemento que compõem essas estruturas seja analisado como um macro-elemento. A principal característica deste macro-elemento, é a superposição do estado plano de tensão e de flexão de placas finas.

As equações integrais de flexão de placas finas e estado plano de tensão em um macro-elemento são discretizadas em elementos de contorno quadráticos descontínuos. Em seguida, a técnica de sub-regiões é aplicada no desenvolvimento da formulação para associação de macro-elementos no espaço. O sistema algébrico para a estrutura é obtido através da associação dos sistemas de equações de cada macro-elemento individual. A junção destes sistemas de equações é feita através de imposições de equilíbrio e compatibilidade de esforços e deslocamentos entre as interfaces (arestas comuns).

5.5.1 Sistema de coordenadas

Uma das principais características das equações integrais de flexão de placas e estado plano de tensão é que o deslocamento de um ponto é descrito em função de sua posição relativa aos demais pontos do problema. Portanto, as relações entre as forças e os deslocamentos no contorno serão preservadas independentemente do sistema de coordenadas usado para a montagem das matrizes do problema. Assim, cada macro-elemento pode possuir seu próprio sistema de coordenadas, no qual suas equações integrais são escritas.

Quando se tem a associação de macro-elementos, o sistema de coordenadas pode não ser o mesmo para cada macro-elemento. Como se deseja compatibilizar forças e deslocamentos de vários macro-elementos, resolvendo-os simultaneamente, é necessário escrever essas incógnitas em um mesmo sistema global de coordenadas. Assim, torna-se necessário escrever equações de transformação de coordenadas para cada macro-elemento, relacionando-se os sistemas local e global de coordenadas.

Considere o sistema de coordenadas da Figura 5.6. Seja U' o vetor de deslocamentos no ponto Q expresso no sistema local de coordenadas da seguinte forma:

$$U' = \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ w' \\ \theta' \end{Bmatrix}, \quad (5.98)$$

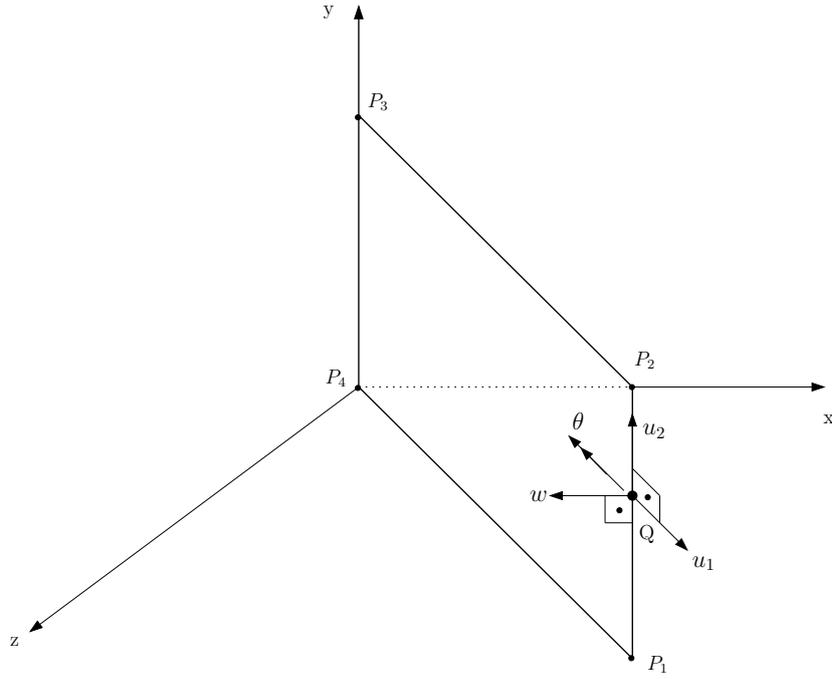


Figura 5.6: Sistema de Coordenadas.

onde u'_1 , u'_2 e w' são os deslocamentos nas direções dos vetores \mathbf{n} , \mathbf{l} e \mathbf{m} . A rotação θ é dada por $\theta = \frac{\partial w}{\partial n}$.

O vetor \mathbf{n} é dado por:

$$\mathbf{n} = \frac{P_2 - P_1}{\|P_2 - P_1\|} = \{n_1, n_2, n_3\}, \quad (5.99)$$

onde P_2 e P_1 são as coordenadas dos pontos que definem a primeira aresta do macro-elemento. Convém lembrar que neste trabalho todas as arestas são retilíneas.

Um vetor \mathbf{l}' (que pode ou não coincidir com o vetor \mathbf{l}) é calculado como:

$$\mathbf{l}' = \frac{P_3 - P_2}{\|P_3 - P_2\|} = \{l'_1, l'_2, l'_3\}, \quad (5.100)$$

onde P_3 é o terceiro ponto que define o macro elemento e, juntamente com P_2 , define a segunda aresta do macro elemento. Caso a segunda aresta não seja ortogonal a primeira aresta, o vetor \mathbf{l}' não irá coincidir com o vetor \mathbf{l} que será calculado a seguir.

O vetor \mathbf{m} , perpendicular ao macro-elemento, é dado por:

$$\mathbf{m} = \mathbf{n} \times \mathbf{l}' = \{m_1, m_2, m_3\}, \quad (5.101)$$

O vetor \mathbf{l} é dado por:

$$\mathbf{l} = \mathbf{m} \times \mathbf{n} = \{l_1, l_2, l_3\}, \quad (5.102)$$

Passando ao sistema global de coordenadas, o vetor de deslocamentos é expresso como:

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ w \\ \theta \end{Bmatrix}. \quad (5.103)$$

Os deslocamentos u_1, w, u_2 , no sistema global de coordenadas, podem ser escritos em termos dos deslocamentos u'_1, w', u'_2 no sistema local, como:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ w \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & m_1 & l_1 & 0 \\ n_2 & m_2 & l_2 & 0 \\ n_3 & m_3 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ w' \\ \hat{\theta} \end{Bmatrix}, \quad (5.104)$$

onde β depende da orientação dos macro-elementos que dividem a interface (veja a seção 5.5.2).

De maneira compacta:

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{u}', \quad (5.105)$$

onde \mathbf{T} é a matriz que transforma o vetor de deslocamento \mathbf{u}' escrito em coordenadas locais em um vetor \mathbf{u} expresso em coordenadas globais.

Adotando o mesmo procedimento para descrever o vetor de esforços \mathbf{t} em coordenadas globais, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ V_n \\ M_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & m_1 & l_1 & 0 \\ n_2 & m_2 & l_2 & 0 \\ n_3 & m_3 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ M'_n \\ t'_2 \\ V'_n \end{Bmatrix}, \quad (5.106)$$

5.5.2 Compatibilização de momentos e rotações

Na associação de macro-elementos aparecem na interface momentos de flexão e rotações em torno da interface. As direções destes momentos e rotações não são alterados com a aplicação da matriz de transformação apresentada na seção anterior pois ambos são em torno da interface (aresta comum). O sentido, porém, pode-se inverter dependendo do sentido das arestas que compõe a interface. Adota-se $\beta = 1$ na matriz

de transformação dos dois macro elementos se os momentos locais e as rotações têm sentidos opostos. Caso contrário, adota-se $\beta = 1$ no primeiro macro elemento e $\beta = -1$ no segundo. O mesmo se faz com a rotação $\frac{\partial v}{\partial n}$ (veja figura 5.7).

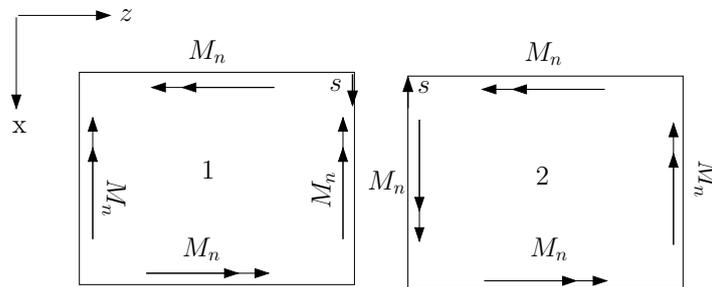


Figura 5.7: Compatibilização de momentos e rotações nos macro-elementos (neste caso $\beta = 1$).

5.5.3 Associação de macro-elementos via método de sub-regiões do MEC

Seja a associação plana de dois macro-elementos conforme a Figura 5.8. De acordo com o que foi desenvolvido em capítulos anteriores, o vetor de deslocamentos em um dado nó no contorno de um macro-elemento, possui 4 graus de liberdade, dois referentes ao estado plano e dois referente à flexão de placas. Sabe-se que, em nós pertencentes a interface dos macro-elementos existem 8 variáveis desconhecidas ($u_1, u_2, w, \theta, t_1, t_2, V_n$ e M_n). Através da aplicação das condições de equilíbrio e continuidade de deslocamentos na interface, as variáveis desconhecidas são reduzidas a 4 (Sanches, 2002).

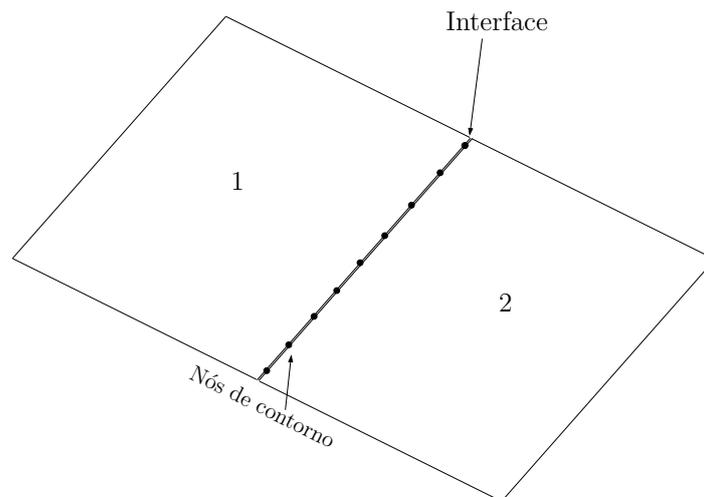


Figura 5.8: Associação de dois macro-elementos.

As condições de continuidade de deslocamento são dadas por:

$$\begin{aligned}
u_i^1 &= u_i^2, \\
w_i^1 &= w_i^2, \\
\theta_i^1 &= \theta_i^2
\end{aligned} \tag{5.107}$$

Para as condições equilíbrio de forças de superfície t_i , esforço cortante V_n e momentos, M_i Baiz and Aliabadi (2009b); Pisa (2005):

$$\begin{aligned}
t_i^1 + t_i^2 + t_i &= 0 \\
V_n^1 + V_n^2 + V_n &= 0 \\
M_n^1 + M_n^2 + M_n &= 0
\end{aligned} \tag{5.108}$$

onde os índices superiores referem-se ao número de macro-elemento.

Nas equações apresentadas em (5.108), a terceira parcela de cada equação refere-se aos esforços na aresta. Estas forças relacionam-se com os esforços da interface, ou quando o deslocamento é incógnito, a força é conhecida ou vice-versa, ou seja, não há aumento do número de incógnitas. O sistema final de equações algébricas obtido após o cálculo das integrais pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{H} \mathbf{U} = \mathbf{G} \mathbf{T} + \mathbf{b}, \tag{5.109}$$

onde as matrizes elementares que fazem parte das matrizes finais \mathbf{H} e \mathbf{G} da Equação (5.109), são montadas a partir das equações de transformação de coordenadas locais em globais mostrada na seção 5.5.1.

Usando a técnica de sub-regiões do MEC, a equação matricial correspondente ao macro-elemento 1 pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^1 & \mathbf{H}_{1i}^1 \\ \mathbf{H}_{i1}^1 & \mathbf{H}_{ii}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^1 & \mathbf{G}_{1i}^1 \\ \mathbf{G}_{i1}^1 & \mathbf{G}_{ii}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_A \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_A^1 \end{Bmatrix} \tag{5.110}$$

da mesma forma, para o macro-elemento 2, têm-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^2 & \mathbf{H}_{1i}^2 \\ \mathbf{H}_{i1}^2 & \mathbf{H}_{ii}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^2 & \mathbf{G}_{1i}^2 \\ \mathbf{G}_{i1}^2 & \mathbf{G}_{ii}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_A \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_A^2 \end{Bmatrix} \tag{5.111}$$

Os termos \mathbf{H}_{ij}^2 e \mathbf{G}_{ij}^2 , são as matrizes de influência das formulações de flexão de placas e elasticidade plana, como abordado em Dirgantara and Aliabadi (2001), sendo:

1. \mathbf{U}_1 e \mathbf{U}_2 os deslocamentos nodais sobre o contorno dos macro-elementos 1 e 2, respectivamente.

2. \mathbf{T}_1 e \mathbf{T}_2 os esforços nodais sobre o contorno dos macro-elementos 1 e 2, respectivamente.
3. \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 as integrais devido às forças de corpo.
4. \mathbf{U}_A , \mathbf{T}_A e \mathbf{b}_A os deslocamentos, esforços nodais e as integrais devido as forças de corpo na aresta da interface, respectivamente.
5. \mathbf{H}_{ij}^k e \mathbf{G}_{ij}^k sub-matrizes, dos efeitos i em j do macro elemento k .

Arranjando as equações de diferentes regiões em um único sistema, a forma matricial para as placas associadas fica:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^{(1)} & \mathbf{H}_{12}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{12}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_2^{(2)} & -\mathbf{H}_{21}^{(2)} & \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{21}^{(2)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{12} & \mathbf{E}_{21} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_{12}^{(1)} \\ u_2^{(2)} \\ u_{21}^{(2)} \\ t_{12}^{(1)} \\ t_{21}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_2^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(2)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.112)$$

na qual o sobre escrito (i) indica a sub região do problema, os sub escritos 1 e 2 indicam os elementos das matrizes e vetores pertencentes somente àquela região. Os sub escritos cruzados 12 e 21 indicam elementos das matrizes e vetores pertencentes à região 1 e na interface com a 2 e vice versa. As matrizes \mathbf{E}_{12} e \mathbf{E}_{21} são devido às condições de equilíbrio, \mathbf{C}_{12} e \mathbf{C}_{21} são aquelas devido às condições de compatibilidade, dadas por:

$$\mathbf{E}_{12} = \mathbf{E}_{21} = \mathbf{C}_{12} = \mathbf{T} \quad (5.113)$$

$$\mathbf{C}_{21} = -\mathbf{T} \quad (5.114)$$

Capítulo 6

Resultados Numéricos

6.1 Introdução

Nesta seção serão apresentados exemplos numéricos usando elementos quadráticos descontínuos com objetivo de validar a formulação de sub-regiões para associação de placas.

Os problemas apresentados aqui foram, em sua maioria, analisados anteriormente em Dirgantara and Aliabadi (2001) usando uma formulação de placas deformáveis pelo cisalhamento.

As respostas serão comparados com soluções analíticas, sempre que estas estiverem disponíveis. Os erros relativos apresentados neste capítulo foram obtidos a partir da equação (6.1):

$$\text{Erro}(\%) = \left| \frac{R^{num} - R^{an}}{R^{an}} \right| \times 100\% \quad (6.1)$$

onde R^{num} é a resposta numérica e R^{an} a analítica.

6.2 Associação em L

Este modelo é composto por duas placas associadas de maneira a formar uma estrutura em L . Este problema foi resolvido em Sousa (2016), Costa (2015) e Dirgantara and Aliabadi (2001), todos estes trabalhando com o método dos elementos de contorno. Nos trabalhos de Costa (2015) e Dirgantara and Aliabadi (2001) é usada a formulação do método dos elementos de contorno aplicado à teoria de placas de primeira ordem (teoria de placas de Reissner) com elementos constantes, lineares e quadráticos descontínuos. Neste caso, é esperado que os resultados desta formulação se aproximem da solução de Timoshenko. Já no trabalho de Sousa (2016) e neste trabalho, é usada a teoria clássica de placas (teoria de ordem 0 ou de Kirchhoff-Love). Neste caso, é esperado que os resultados desta formulação se aproximem da solução de Euler-Bernoulli (teoria clássica de vigas). As soluções analíticas apresentadas neste capítulo são dadas em Dirgantara and Aliabadi (2001).

O modelo foi discretizado usando duas sub regiões. As propriedades e dimensões são dadas na Figura 6.1, onde $L_1 = 1$ m, $L_2 = 1$ m, $L_3 = 2$ m, $t_1 = 0,1$ m e $t_2 = 0,1$ m, onde t_1 e t_2 são as espessuras das placas. A carga é distribuída ao longo da aresta superior, orientada na direção z com valor $q = 1$ N/m. As propriedades mecânicas são $E = 100$ kPa and $\nu = 0.0$.

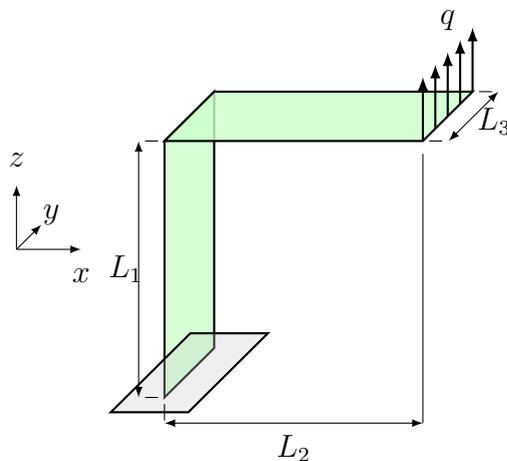


Figura 6.1: Dimensões e condições de contorno para a estrutura em L . Dirgantara and Aliabadi (2001).

A distribuição dos deslocamentos pode ser visualizada na Figura 6.2,(a) com 36 elementos de contorno e (b) com 792 elementos de contorno. A Tabela 6.1 apresenta os resultados para os deslocamentos na direção z citados em Dirgantara and Aliabadi (2001) para um ponto na extremidade da placa superior ($x = L_2$), na mesma aresta que recebe o carregamento. Aplicando as propriedades do problema, é possível encontrar

Tabela 6.1: Soluções analíticas e numéricas do deslocamento na direção z calculado na ponta da placa.

Método de Solução	Deslocamento na direção z
Costa (2015)	0,1583
Solução de Euler-Bernouli	0,1600
Solução de Timoshenko	0,1604

Tabela 6.2: Resultados obtidos por Sousa (2016) para os deslocamentos da estrutura em L .

Números de Elementos	Deslocamento (m)	Erro (%) Timoshenko
40	0,1523	5,0499
80	0,1540	3,9900
160	0,1557	2,9302
400	0,1575	1,8080
800	0,1583	1,3092

os seguintes resultados, conforme observado na Figura 6.2.

A tabela 6.2 apresenta os resultados obtidos por Sousa (2016), e os seus erros comparados as soluções analíticas apresentadas. Pode-se observar que não foi possível obter erros abaixo de 1%, devido ao tipo de elemento utilizado (constante). Mesmo com mais refinamento da malha, não foi possível uma melhora no erro.

A tabela 6.3 apresenta os resultados obtidos neste trabalho, e os seus erros comparados as soluções analíticas apresentadas. Pode-se observar que foi possível obter erros abaixo de 1%, devido ao tipo de elemento utilizado (quadrático descontínuo). Comparando os resultados do erro deste trabalho em relação a Sousa (2016), pode-

Tabela 6.3: Resultados obtidos para os deslocamentos da estrutura em L .

Números de Nós	Deslocamento (m)	Erro (%) Timoshenko
36	0,1736	9.2893
72	0,1690	5.3616
156	0,1653	3.0549
396	0,1626	1.3716
792	0,1616	0.7481

se observar que os elementos quadráticos convergem para valores mais próximos da solução analítica que os elementos constantes.

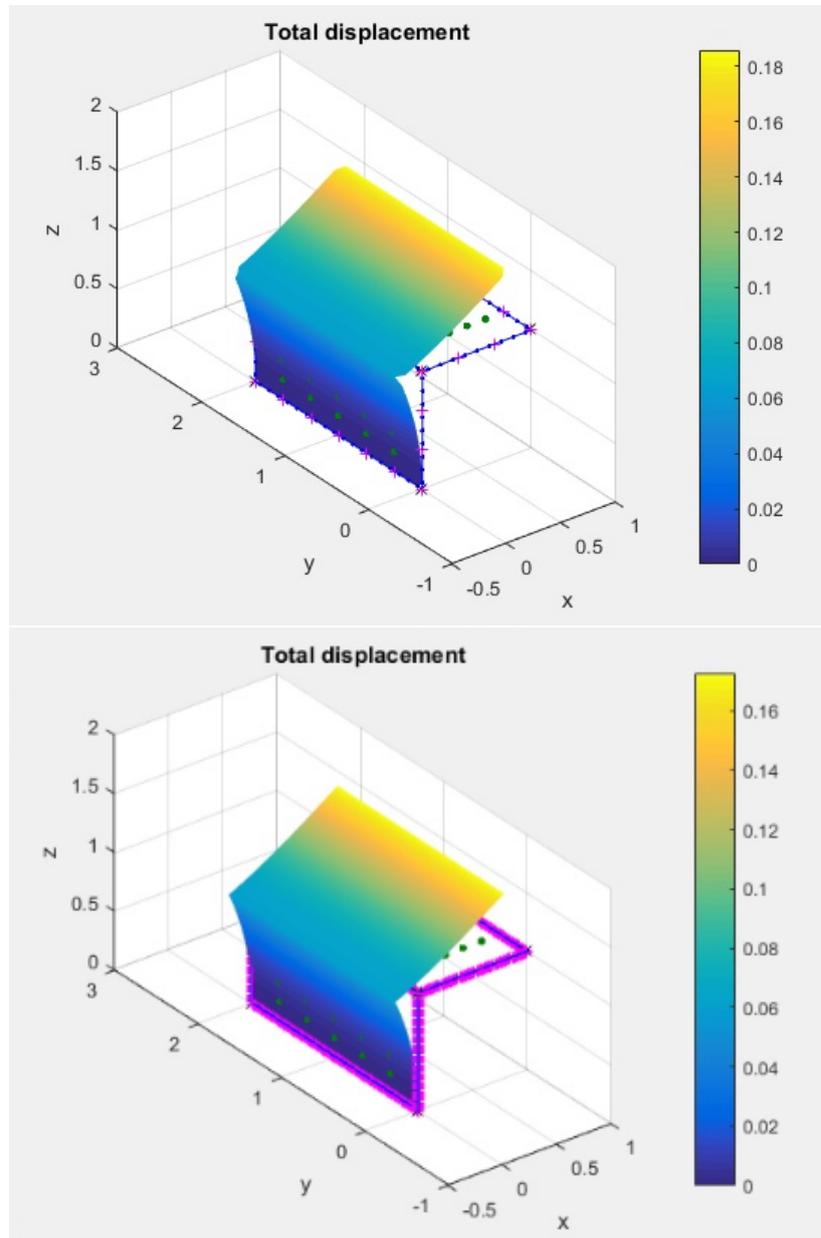


Figura 6.2: (a) Distribuição do deslocamento total para a estrutura em L obtidos com a formulação do MEC de placa fina com 36 elementos. (b) Distribuição do deslocamento total para a estrutura em L obtidos com a formulação do MEC de placa fina com 792 elementos.

Pode-se observar que na Figura 6.2 (a), o deslocamento apresenta-se ligeiramente maior que a solução analítica. Já na 6.2 (b), onde a malha foi refinada, tem-se deslocamento mais próximos a solução analítica.

Tabela 6.4: Soluções analíticas do deslocamento para três diferentes ângulos calculados para um ponto na extremidade carregada da placa superior.

Deslocamento, direção x_3	$\theta = 91^\circ$	$\theta = 95^\circ$	$\theta = 120^\circ$
Costa (2015)	0,16136	0,16493	0,16483
Solução de Euler-Bernouli	0,16102	0,16460	0,16455
Solução de Timoshenko	0,16142	0,16497	0,16476

6.2.1 Associação em L em ângulos não-retos

Este exemplo é uma variação do problema anterior, com a diferença que o ângulo de junção entre as placas pode ter valores superiores a 90° . Estes exemplos são utilizados para demonstrar a capacidade da formulação em modelar estruturas de placas associadas por um ângulo arbitrário. O modelo foi discretizado usando duas sub regiões. As propriedades e dimensões são mostradas na Figura 6.3, na qual $L_1 = 1$ m, $L_2 = 1$ m, $L_3 = 2$ m, $t_1 = 0,1$ m e $t_2 = 0,1$ m, onde t_1 e t_2 são as espessuras das placas. A carga distribuída na borda superior tem valor $q = 1$ N/m. As propriedades mecânicas são $E = 100$ kPa e $\nu = 0.0$.

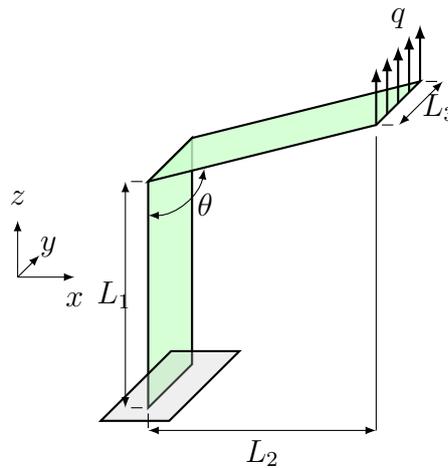


Figura 6.3: As dimensões e condições de contorno para a estrutura unida por um ângulo arbitrário θ Dirgantara and Aliabadi (2001).

Para este caso, os resultados segundo Dirgantara and Aliabadi (2001) para um ponto na extremidade carregada da placa superior são reunidos na Tabela 6.4.

Os resultados obtidos por Sousa (2016) usando elementos de contorno constantes são apresentados, comparados com as soluções analíticas de Timoshenko nas Tabelas 6.6, 6.8 e 6.10. Todos os erros obtidos para estes casos ficaram abaixo de 5% em relação à solução analítica de Bernoulli-Euler. Além disso, refinando a malha, a diferença tende aos valores analíticos. Porém, a convergência é lenta quando os resultados estão um

Tabela 6.5: Soluções analíticas do deslocamento para três diferentes ângulos calculados para um ponto na extremidade carregada da placa superior.

Deslocamento, direção x_3	$\theta = 91^\circ$	$\theta = 95^\circ$	$\theta = 120^\circ$
Costa (2015)	0,16136	0,16493	0,16483
Solução de Euler-Bernouli	0,16102	0,16460	0,16455
Solução de Timoshenko	0,16142	0,16497	0,16476

pouco acima de 1%.

Os resultados obtidos neste trabalho usando elementos quadráticos descontínuos são mostrados nas tabelas 6.7, 6.9 e 6.11. Conforme pode ser notado, os erros convergem mais rapidamente para a solução analítica quando comparado com elementos constantes sendo facilmente obtidos erros abaixo de 1%.

Tabela 6.6: Resultados obtidos Sousa (2016) para os deslocamentos da estrutura em L unida por um ângulo $\theta = 91^\circ$.

Números de Elementos	Deslocamento (m)	Erro (%) Timoshenko
40	0,1533	5,0304
80	0,1550	3,9772
160	0,1568	2,8621
400	0,1585	1,8089
800	0,1593	1,3133

Tabela 6.7: Resultados obtidos para os deslocamentos da estrutura em L unida por um ângulo $\theta = 91^\circ$.

Números de Nós	Deslocamento (m)	Erro (%) Timoshenko
36	0,1746	8,1650
72	0,1700	5,3153
156	0,1663	3,0232
396	0,1637	1,4125
792	0,1626	0,7310

As Figuras 6.4, 6.5 e 6.6 apresentam a distribuição de deslocamento total para a estrutura com as duas placas unidas por ângulos de 91° , 95° e 120° .

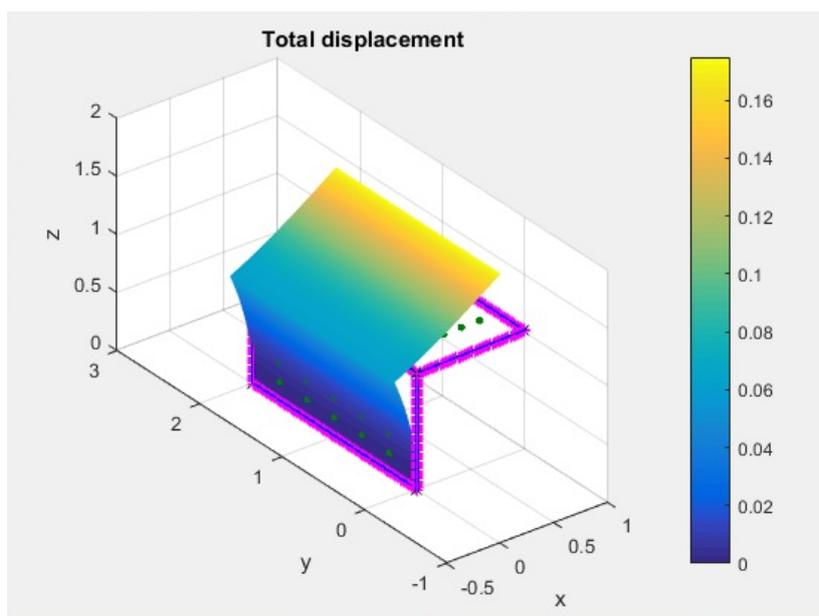


Figura 6.4: Deslocamento total para a estrutura unida por um ângulo $\theta = 91^\circ$ obtido com o MEC para placa fina com 792 nós.

Tabela 6.8: Resultados obtidos por Sousa (2016) para os deslocamentos da estrutura em L unida por um ângulo $\theta = 95^\circ$.

Números de Elementos	Deslocamento (m)	Erro (%) Timoshenko
40	0,1567	5,0130
80	0,1585	3,9219
160	0,1628	2,8308
400	0,1620	1,8003
800	0,1628	1,3154

Tabela 6.9: Resultados obtidos para os deslocamentos da estrutura em L unida por um ângulo $\theta = 95^\circ$.

Números de Nós	Deslocamento (m)	Erro (%) Timoshenko
36	0,1782	8,0196
72	0,1736	5,2313
156	0,1699	2,9884
396	0,1699	1,4124
792	0,1662	0,7456

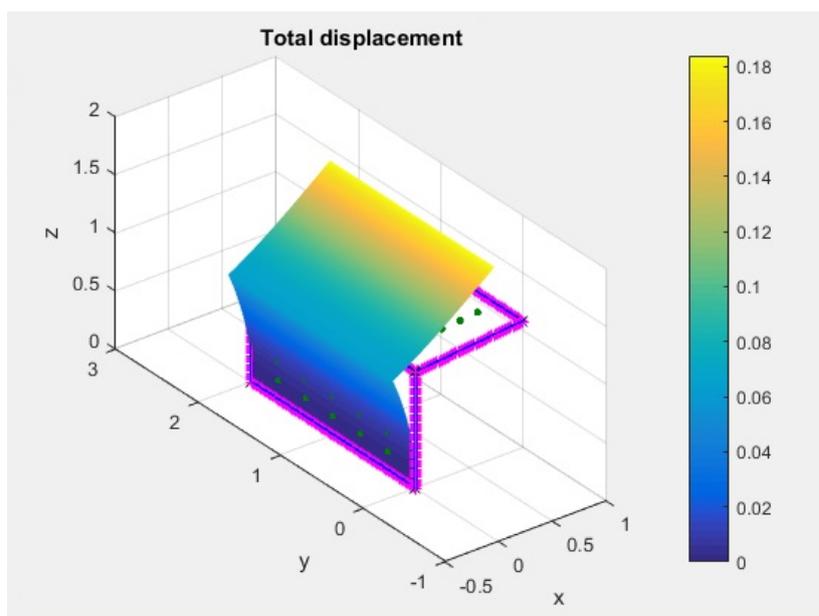


Figura 6.5: Deslocamento total para a estrutura unida por um ângulo $\theta = 95^\circ$ obtido com o MEC para placa fina com 792 nós.

Tabela 6.10: Resultados obtidos por Sousa (2016) para os deslocamentos da estrutura em L unida por um ângulo $\theta = 120^\circ$.

Números de Elementos	Deslocamento (m)	Erro (%) Timoshenko
40	0,1567	4,8920
80	0,1586	3,7388
160	0,1604	2,6463
400	0,1622	1,5538
800	0,1630	1,0682

Tabela 6.11: Resultados obtidos para os deslocamentos da estrutura em L unida por um ângulo $\theta = 120^\circ$.

Números de Nós	Deslocamento (m)	Erro (%) Timoshenko
36	0,1768	7,3076
72	0,1727	4,8191
156	0,1693	2,7555
396	0,1669	1,2989
792	0,1660	0,7526

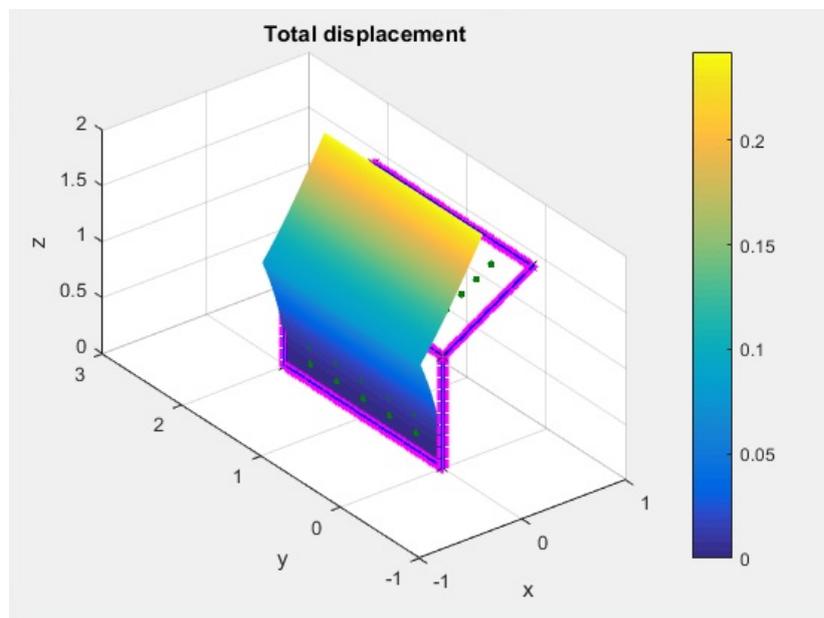


Figura 6.6: Deslocamento total para a estrutura unida por um ângulo $\theta = 120^\circ$ obtido com o MEC para placa fina com 792 nós.

6.3 Associação em L sob carregamento lateral

Este problema foi analisado por Costa (2015) e Sousa (2016). Este modelo foi discretizado usando duas sub-regiões. As propriedades geométricas são: $L_1 = 1,0$ m, $L_2 = 2,0$ m, $L_3 = 1,0$ m e espessura $t = 0,1$ m. As propriedades mecânicas são: $E = 100$ kPa, $\nu = 0,0$ e $q = 10$ N/m. Como é possível observar, o carregamento colocado na lateral impõe uma rotação ao redor do eixo z da placa superior. Os resultados são apresentados na Figura 6.8 comparados com os resultados obtidos por Costa (2015). A figura 6.9 mostra o mesmo problema analisado no programa comercial ANSYS. Conforme pode ser notado, há uma boa concordância com o ANSYS e com os resultados obtidos por Costa (2015), embora a deformação na direção z da placa horizontal apresente sinal oposto ao encontrado por Costa (2015).

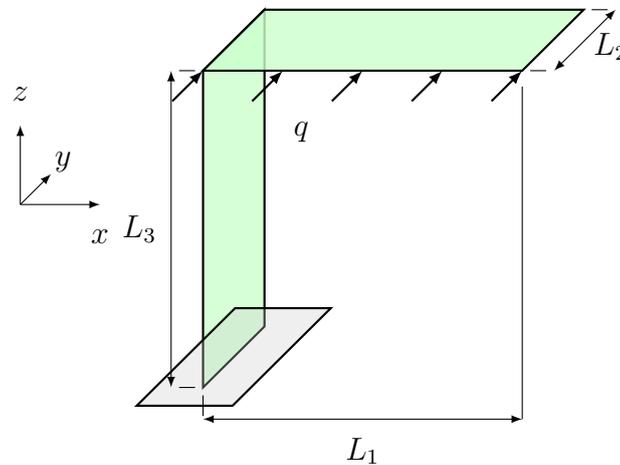
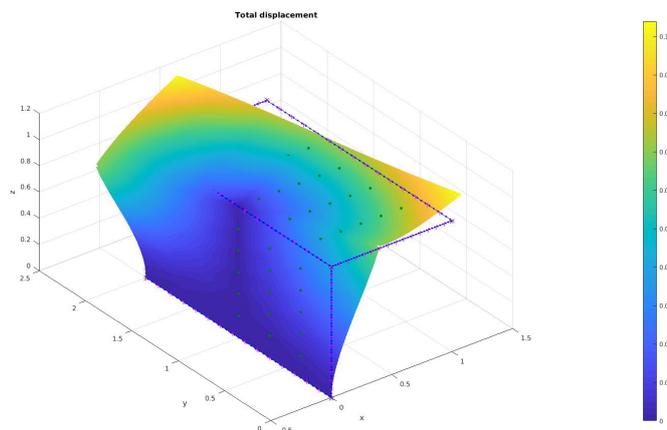


Figura 6.7: Estrutura L-shaped.



(a)

Figura 6.8: Resultados obtidos com MEC: placa fina

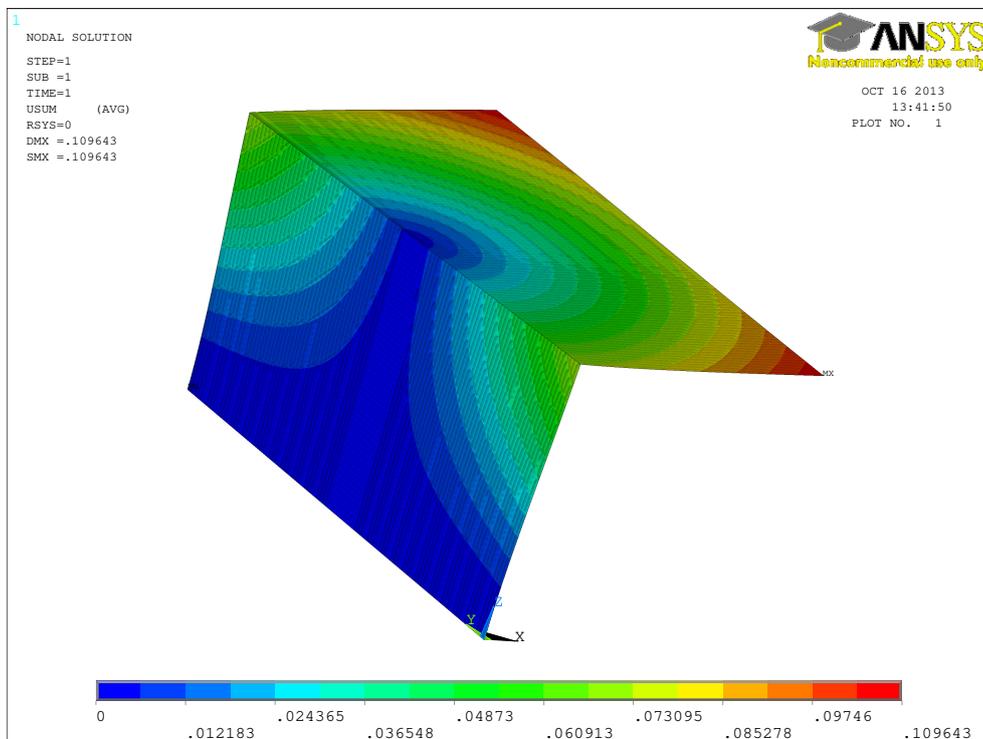


Figura 6.9: Resultados obtidos usando o MEF através do ANSYS com o elemento Shell181.

Números de Nós	Deslocamento MEF (m)	Deslocamento MEC (m)	Erro (%)
792	0,1096	0,1089	0.4314

Capítulo 7

Considerações finais

7.1 Conclusões

Uma formulação do método dos elementos de contorno para o cálculo de deslocamentos em problemas isotrópicos foi desenvolvida para análise de estruturas formadas pela associação espacial de placas sob carregamento estático. As formulações de elasticidade plana e de flexão de placas finas (placas de Kirchhoff) foram usadas simultaneamente. Com isso, obteve-se uma formulação com quatro graus de liberdade por nó, sendo os dois deslocamentos provenientes da formulação de elasticidade plana e, o deslocamento transversal e a rotação normal provenientes da formulação de placas finas. Foram utilizados elementos de contorno quadrático descontínuos e os resultados foram comparados com resultados obtidos usando elementos constantes. As integrais de domínio que surgem devido a cargas distribuídas foram transformadas para integrais de contorno. Obteve-se, assim, uma formulação para problemas estáticos onde somente os contornos das placas, ou seja, suas arestas, são discretizados.

No arranjo tridimensional, cada placa foi definida como uma sub-região e os termos locais foram calculados de maneira independente em coordenadas locais. As condições de compatibilidade de equilíbrio e deslocamentos foram impostas, acoplando assim todas as sub-regiões. Finalmente, o sistema global foi montado e as condições de contorno impostas.

Alguns testes numéricos de problemas com associação de placas no espaço foram utilizados para validação. Foram analisadas a sensibilidade da resposta em relação a quantidade de elementos de contorno usada na discretização das placas. Foi observado uma convergência dos resultados para as soluções analíticas conforme os resultados fossem obtidos com malhas mais refinadas. Em geral, para se obter boa concordância com os resultados analíticos (com erros abaixo de 1%), não foi necessário o uso de um grande número de elementos de contorno. Este fato pode ser explicado pelo uso de

elementos de alta ordem (elementos quadráticos descontínuos).

Os resultados foram comparados com soluções analíticas e numéricas encontradas em Sousa (2016), onde se usou elementos de contorno constantes na discretização dos problemas. Foi observado que houve uma convergência melhor do resultado com elementos quadráticos descontínuos, obtendo erros em relação a Timoshenko (1959) menores que 1%, o que não foi possível utilizando elementos constantes no trabalho de Sousa (2016), mesmo refinando bastante a malha.

7.2 Sugestões para trabalhos futuros

Neste trabalho apenas o cálculo de deslocamentos e forças de superfície foram realizados para problemas estáticos usando elementos quadráticos descontínuo. Desta maneira sugere-se como possibilidade de trabalhos futuros:

- Estender a análise para a formulação dinâmica.
- A inclusão do cálculo de tensões;
- Extensão da formulação para análise modal de estruturas constituídas pela associação de placas planas no espaço.
- Extensão da formulação para a análise flambagem linear de estruturas constituídas pela associação de placas planas no espaço.
- Extensão da formulação para análise de pós-flambagem de estruturas constituídas pela associação de placas planas no espaço.
- Extensão da formulação para análise de estruturas constituídas pela associação de placas planas no espaço considerando deformações finitas (grandes deslocamentos/deformações).
- Extensão da formulação para análise de estruturas de materiais anisotrópicos.
- Uso de NURBS como função de forma (elementos de contorno isogeométrico).

Referências Bibliográficas

- E. L. Albuquerque, P. Sollero, W. Venturini, and M. H. Aliabadi. Boundary element analysis of anisotropic kirchhoff plates. *International Journal of Solids and Structures*, 43:4029–4046, 2006.
- P. M. Baiz and M. H. Aliabadi. Local buckling of thin-walled structures by the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33:302–313, 2009a.
- P.M. Baiz and M.H. Aliabadi. Local buckling of thin-walled structures by the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33(3):302 – 313, 2009b. ISSN 0955-7997.
- C. Brebbia and J. Dominguez. *Boundary Element an Introductory Course*. Computation Mechanics Publications, Southampton, Boston, second edition, 1989.
- D. I. G. Costa. *Nova formulação do Método dos Elementos de Contorno para Associação de Placas Espessas*. PhD thesis, Universidade de Brasília, Campus Darcy Ribeiro, 2015.
- C. Di Pisa, M. H. Aliabadi, and A. Young. Boundary element method analysis of assembled plate structures undergoing large deflection. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 45:179–195, 2010.
- T. Dirgantara and M. H. Aliabadi. Boundary element analysis of assembled plate structures. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 17(10):749–760, 2001. ISSN 1099-0887. doi: 10.1002/cnm.446.
- G. B. Fernandes. *Introdução a Teoria das Placas Elásticas*. Universidade Estadual de Campinas, Limeira-SP, 1974.
- X. Gao. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary only discretization. *Engn. Analysis with Boundary Elements*, 26:905–916, 2002.

- James H. Kane. *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. Prentice Hall, New Jersey, 1993.
- G. R. Kirchhoff. On the equilibrium and motion of an elastic plate. *J. Math.*, 40:51–58, 1850. In German.
- Y. Liu. *Fast Multipole Boundary Element Method: Theory and Applications in Engineering*. Cambridge University Press, 2009. ISBN 9780521116596.
- R. D. Mindlin. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics.*, 18:31–38, 1951.
- J. B. Paiva. *Boundary element formulation for plate bending and its application in engineering*. PhD thesis, University of São Paulo, São Carlos School of Engineering, 1987. In Portuguese.
- W. P. Paiva, P. Sollero, and E. L. Albuquerque. Treatment of hypersingularities in boundary element anisotropic plate bending problems. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 1:49–73, 2003.
- C. Di Pisa. *Boundary Element Analysis of Multi-layered Panels and Structures*. Phd, 2005.
- S. D. Poisson. Tmemoire sur l’equilibre et le mouvement des corps solides. *Journal of Mathematics Physics*, 12:8, 1829.
- C. Rajamohan and J. Raamachandran. Bending of anisotropic plates by charge simulation method. *Advances in Engn. Software*, 30:369–373, 1999.
- Y.F. Rashed. *Boundary element formulations for thick plates*. Topics in engineering. WIT Press, 2000. ISBN 9781853126284.
- E. Reissner. On the theory of bending elastic plates. *J. of Mathematical Physics*, 23:184, 1944.
- M.H. Sadd. *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*. Elsevier Science, 2009. ISBN 9780080922416.
- G. Shi and G. Bezzine. Buckling analysis of orthotropic plates by boundary element method. *Mechanics Research Communications*, 26:1351–1370, 1990.
- K. R. P. Sousa. *Implementação de formulações do método dos elementos de contorno para a associação de placas no espaço*. Phd, 2016.

- M. Tanaka, T. Matsumoto, and A. Shiozaki. Application of boundary-domain element method to the free vibration problem of plate structures. *Computers and Structures*, 66(6):725 – 735, 1998. ISSN 0045-7949. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949\(97\)00129-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949(97)00129-6).
- S. Timoshenko. *Theory Of Plates ans Shells*. Engineering societies monographs. McGraw-Hill Book Company, 1959. ISBN 0-07-085820-9.
- W. S. Venturini. *A study of boundary element method and its application on engineering problems*. PhD thesis, University of São Paulo, São Carlos School of Engineering, 1988. In Portuguese.
- J. Wang and K. Schweizerhof. The fundamental solution of moderately thick laminated anisotropic shallow shells. *Int. J. Engng. Sci.*, 33:995–1004, 1995.
- J. Wang and K. Schweizerhof. Free vibration of laminated anisotropic shallow shells including transverse shear deformation by the boundary-domain element method. *Computers and Structures*, 62:151–156, 1997.
- F. Vander Weën. Application of the boundary integral equation method to reissner’s plate model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18(1): 1–10, 1982. ISSN 1097-0207. doi: 10.1002/nme.1620180102. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620180102>.
- B. C. Wu and N. J. Altiero. A new numerical method for the analysis of anisotropic thin plate bending problems. *Computer Meth. in Appl. Mechanics and Engineering*, 25:343–353, 1981.