



Universidade de Brasília

Instituto de Física

Pós-graduação em Física

**ESTRUTURA DE FASE PARA A
TEORIA QUÂNTICA DE CAMPO
ESCALAR EM DUAS
DIMENSÕES E MODELO DE
MATRIZES**

Dionio Ellysson Alencar Torres

Dissertação de Mestrado

Brasília - DF
março de 2018

Universidade de Brasília
Instituto de Física

Dionio Ellysson Alencar Torres

**ESTRUTURA DE FASE PARA A TEORIA
QUÂNTICA DE CAMPO ESCALAR EM DUAS
DIMENSÕES E MODELO DE MATRIZES**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Instituto de Física da Universidade de Brasília como requisito para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: *Prof. Aleksandr Nikolaievich Pinzul*

Brasília - DF
março de 2018

Às minhas queridas avós Terezinha e Raimunda

Agradecimentos

Meus agradecimentos a **Deus** pela oportunidade de existir e de me permitir crescer a cada dia. Por me dar sempre novas oportunidades de estudar, de trabalhar, de cultivar amizades e de recomeçar.

A **Jesus** por me aceitar na sua seara Divina, por me ouvir, por me fortalecer e ajudar na renovação da minha fé. Por ter deixado um exemplo de amor a inspirar tantos corações.

Ao apóstolo **Paulo de Tarso** pelo exemplo de transformação. Pela coragem e determinação em praticar e ensinar o amor pelas vias cristãs. E por mostrar que é possível um homem com suas fragilidades se transformar em luz a partir da disciplina, da vontade e da busca de sua comunhão com Deus através de Jesus.

Aos meus pais **Luso Ribeiro Torres Filho** e **Antônia Hilma Silva Alencar** pelos cuidados e pelo amor que desvelaram a mim. Por diversos momentos em que me auxiliaram em meu crescimento. Enfim, por tudo.

A todos os meus irmãos que me acompanham a caminhada, **Dê Angeles**, **Dê Anny**, **Ianne**, **Júnior** e madrastra **Maria Nice de Jesus** por compartilhar comigo todos esses momentos de constante aprendizado.

Ao professor **Aleksandr Nikolaievich Pinzul** por ter aceitado me orientar, pela disponibilidade em me receber para tirar dúvidas e por todo o apoio e suporte durante esses dois anos.

Aos amigos do módulo da física **Alan**, **Antônio**, **Emanoel**, **Yuri** pelas parcerias durante os meus estudos.

Por fim, ao **Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico** (CNPq) pela disponibilização de uma bolsa de estudos.

"O que a gente não pode mesmo, nunca, de jeito nenhum... é amar mais ou menos, sonhar mais ou menos, ser amigo mais ou menos, namorar mais ou menos, ter fé mais ou menos e acreditar mais ou menos. Senão a gente corre o risco de se tornar uma pessoa mais ou menos..."

—CHICO XAVIER

Resumo

A teoria quântica de campos (TQC) tem sido uma ferramenta muito útil para descrever a natureza das estruturas microscópicas. Em particular, uma das suas formas, o Modelo Padrão, bem como algumas de suas extensões, fornecem os melhores resultados do mundo microscópico que se pode observar. Mas apesar desse sucesso, o conhecimento que se tem do universo, cerca de 5% , é relativamente pouco, constituindo isso uma motivação para a busca de novos métodos e ideias que possam lançar luz sobre uma física cada vez mais geral. A ideia não é buscar dispensar a TQC, muito pelo contrário, é buscar alguma teoria que possa lhe complementar, alguma espécie de generalização da teoria.

Por outro lado, há modelos mais simples e muito úteis à TQC, visto que alguns resultados só podem ser obtidos por meio deles. Isso tem a ver com o fato das teorias serem tipicamente muito complicadas e, portanto, esses tão conhecidos "toy models" são muito importantes se queremos estudar alguns efeitos não triviais. Assim, a TQC escalar bidimensional traz um desses resultados que é importante para essa dissertação. Alguns modelos mostram que sistemas como esses sofrem transições de fase de primeira ordem e apresentam duas fases no diagrama de fases [6]. Dessa forma, o presente trabalho faz um estudo dessa teoria, abordando como um de seus pontos fundamentais a estrutura de fases e a existência de ponto crítico.

Um importante passo para a generalização da TQC vem sendo dado pela teoria quântica de campos não comutativa (TQCNC), teoria esta que tem como um dos seus motivadores a teoria da Gravitação Quântica. Na TQCNC os campos são transformados em matrizes de dimensão finita ou infinita, onde a teoria de campos passa a ser tratada como modelo de matrizes. Dessa forma, acredita-se que o regime comutativo da teoria é obtivo para grandes valores da dimensão da matriz. O ponto principal é observar as estruturas de fases da TQCNC e verificar se tal limite recupera as informações da respectiva TQC escalar bidimensional comutativa. Alguns indícios, tanto por análise numérica ou por métodos de aproximação, levam a crer que não [5], porque para valores grandes da dimensão da matriz, chega-se a observar a existência de três fases, (fato esse que será estudado no presente trabalho através da análise do respectivo diagrama de fases), e não duas como era de se esperar. Acredita-se que a existência de uma terceira fase se deve a uma espécie de mistura entre o ultravioleta e infravermelho, mais conhecido com "IR/UV mixture" [8]. O que traz um certo problema para a teoria e a necessidade de resolver a questão analiticamente.

Palavras-chave: Teoria Quântica de Campos Bidimensional, Modelo de Matrizes, Ação Efetiva.

Abstract

The quantum field theory (QFT) has been a very useful tool to describe the nature of microscopic structures. In particular, one of its forms, the Standard Model, as well as some of its extensions, provide the best results from the microscopic world you can see. But despite this success, the knowledge of the universe, around 5% , is relatively little, and therefore there is a great motivation agent for the search for new methods and ideas that can shed light on a new physics. The idea is not to try to dismiss QFT, quite the contrary, is to seek some theory that can complement it, some kind of generalization of the theory.

On the other hand, there are simpler and very useful models of QFT and some results can only be obtained through them. This has to do with the fact that theories are typically very complicated and therefore these so-called "toy models" are very important if we want to study some non-trivial effects. Thus, the two-dimensional scalar QFT brings one of these results that is important for this dissertation. Some models show that systems like these undergo first order phase transitions and present two phases in the phase diagram [6]. Thus, the present work makes a study of this theory, addressing as one of its fundamental points the structure of phases and the existence of critical points.

An important step towards the generalization of QFT has been given by non-commutative quantum field theory (NCQFT), theory that has as one of its motivators the theory of Quantum Gravity. In NCQFT, fields are transformed into finite or infinite-dimensional matrices where field theory is treated as a matrix model. Thus, it is believed that the commutative regime of the theory is obtained for large values of the matrix dimension. The main point is to observe the phase structures of the NCQFT and to verify if such limit recovers the information of the respective two-dimensional commutative scalar QFT. Some clues, either by numerical analysis or by methods of approximation, lead one to believe that it is not the case [5], because for large values of the matrix dimension, we can observe the the existence of three phases (evidence that it will be studied in this present work), not two as was be expected. It is believed that the existence of a third phase is due to a kind of mixture between the ultraviolet and the infrared, better known as "IR / UV mixing", [8]. Which brings a certain problem to the theory and the need to solve the question analytically.

Keywords: Two-Dimensional Quatum Field Theory, Matrix Model, Effective Action.

Sumário

1	Introdução	1
2	Da Mecânica Clássica à TQC	3
2.1	Pontos comuns	3
2.2	Mecânica Clássica	3
2.3	Mecânica Quântica	5
2.3.1	Oscilador Harmônico Simples	9
2.4	Modelo de Ising e Campos em Rede	16
2.5	Desigualdade FKG	18
2.5.1	Teorema	18
2.6	Teoria Quântica de Campos	20
2.6.1	Campos Euclidianos	21
2.6.1.1	Axioma (Analiticidade)	23
2.6.1.2	Axioma (Regularidade)	24
2.6.1.3	Axioma (Invariância)	24
2.6.1.4	Axioma (Positividade da Reflexão)	24
2.6.1.5	Axioma (Ergodicidade)	25
2.6.2	Axiomas para o Espaço de Minkowski	27
2.6.2.1	Covariância	27
2.6.2.2	Observáveis	27
2.6.2.3	Localidade	27
2.6.2.4	Vácuo	28
2.6.3	Medida Gaussiana	28
2.6.4	Espaço de Fock e ordenamento de Wick	29
2.6.5	Construção de uma medida $d\mu$ a partir de um potencial V	31
3	Transição de Fase	33
3.1	Modelos clássicos para a análise da transição de fase em TQC	33
3.2	Outras formas de verificação de transição de fase em TQC	36
3.3	Teorema para a existência de transição de fases	37
3.3.1	Lema	38
3.4	A existência de duas fases para o campo escalar no espaço comutativo bidimensional	39

3.4.1	Teorema	39
4	Ponto Crítico da interação ϕ^4	42
4.1	Uma fronteira para a constante de acoplamento	44
4.1.1	Teorema	45
4.2	A existência do ponto crítico para a interação ϕ^4	47
4.2.1	Teorema	49
4.2.2	Corolário	54
5	Diagrama de fases da teoria do campo escalar ϕ^4 na esfera difusa e modelos de matrizes	55
5.1	Teoria do campo escalar na esfera difusa	55
5.2	Formulação do modelo de matrizes para a teoria do campo escalar na esfera difusa	58
5.3	Técnicas básicas para o modelo de matrizes	60
5.3.1	Método do ponto de sela	60
5.3.2	Caso em que $S_{\text{eff}} = 0$	61
5.3.3	Semicírculo de Wigner	62
5.3.4	Teoria da perturbação e método aproximativo para S_{eff}	63
5.3.5	Aproximação não perturbativa	68
5.3.6	Diagrama de fases	71
6	Conclusões e perspectivas	74

Lista de Figuras

2.1	Ilustração das relações entre $\mathcal{E}_+ e \mathcal{H}$	26
3.1	Ilustração com os sinais para σ em cada quadrado de área unitária em uma configuração arbitrária para Γ	41
4.1	Diagrama de fases para a água	42
4.2	Gráfico para a função do tipo $V(\phi) = \phi^4 - \phi^2$	43
4.3	Gráfico para a função do tipo $V(\phi) = \phi^4$	43
4.4	Gráfico para a função do tipo $V(\phi) = \phi^4 + \phi^2$	44
5.1	Diagrama de fases para a teoria ϕ^4 em coordenadas esféricas difusas. O eixo das abscissas representa o parâmetro $-r$ e o das ordenadas, o parâmetro de acoplamento g	58
5.2	Diagrama de fases para a aproximação não perturbativa do campo escalar ϕ^4 na esfera difusa. A linha tracejada vermelha é a curva da equação (5.42) e a preta é obtida numericamente para a fronteira entre dois cortes simétricos e um corte antissimétrico.	72

Introdução

A teoria quântica de campos (TQC) surgiu juntando o que se conhecia de relatividade restrita com a teoria dos campos clássicos e a mecânica quântica, que de certa forma, seria uma generalização para essas respectivas teorias [16].

Muito se sabe das conquistas alcançadas pela (TQC) em descrever a natureza e o comportamento do universo microscópico, na sua maior parte essas conquistas têm sido alcançadas dentro de teorias perturbativas, pois o controle feito pela teoria não perturbativa é muito ruim: muitas vezes surgem expressões com soluções bem complicadas. De qualquer forma, há ainda muito a ser compreendido pela ciência. Um dos maiores exemplos são a matéria escura e a energia escura, aos quais ainda sabemos muito pouco sobre, deixando cerca de apenas 5% de um universo conhecido.

Não se pensa em descartar a TQC, porque ela descreve com grande acurácia o mundo microscópico observado, basta observar o sucesso do Modelo Padrão de partículas, mas encontrar teorias que possam abranger ela sob uma ótica mais geral ou, quem sabe, sobre uma nova visão física. Nesse caminho, existem os chamados "toy-models", que são modelos simplificados da TQC, cujos alguns resultados da teoria só conseguem ser reproduzidos por meio deles. Um desses resultados é a da teoria quântica de campos escalar bidimensional (2-TQCE), cujo espaço ao qual ela está inserida é comutativo [6]. Alguns daqueles modelos simplificados mostram, ao se estudar o diagrama de fases dessa teoria, que o sistema sofre uma transição de fase de primeira ordem, apresentando, assim, duas fases: fase de desordem e fase de ordem uniforme. Na primeira, o campo oscila em torno de $\phi = 0$; na segunda, o campo oscila em torno de um mínimo do potencial, tal que nesse ponto $\phi \neq 0$.

Entende-se a necessidade de generalização da TQC e uma das teorias que motivam a busca por isso é a da Gravitação Quântica. Quem está nesse caminho é a teoria quântica de campos não comutativa (TQCNC), que possui espaços onde os campos apresentam finitos graus de liberdade.

Um dos espaços não comutativos mais simples é a da esfera difusa, onde a álgebra das coordenadas obedece a álgebra do momento angular. Os campos são transformados em matrizes e assim a teoria quântica se torna um estudo de modelo de matrizes. Modelos estes, utilizados em vários contextos da física como a modelagem de variedades Riemannianas para teoria de cordas [10], sistemas de matéria condensada [11], caos quântico [12], etc.

Uma mudança fundamental no modelo de matrizes para a 2-TQCE são as derivadas

se transformando em comutadores e integrais em traços de matrizes. Nessa passagem, o termo cinético (Laplaciano) não é invariante sobre conjugações unitárias, ao contrário dos termos restantes que compõem a ação do sistema, o que faz com que o modelo não seja trivial para ser resolvido. Ao se estudar o diagrama de fases do modelo de matriz para a correspondente 2-TQCE em limites que se espera recuperar a teoria comutativa, e onde os resultados são reproduzidos numericamente ou por aproximação, conforme dito no resumo, verifica-se a existência de três fases: solução de um corte simétrico; solução de dois cortes simétricos e solução de um corte antissimétrico. Todas essas fases a depender de dois parâmetros, um associado ao termo de massa e outro, ao termo de interação ϕ^4 .

A grande questão é essa contradição existente no modelo de matrizes, que através dos métodos mencionados não consegue recuperar as duas fases do diagrama, e desta forma, sendo necessária uma solução analítica para melhor entender a teoria e solucionar essa discrepância.

Começaremos fazendo uma rápida revisão da mecânica clássica e da quântica nas primeiras seções do capítulo 2. Nas seções seguintes, 2.4 e 2.5, será feita uma breve introdução a assuntos e teoremas a serem utilizados no decorrer desse trabalho. Na última seção desse capítulo, 2.6, será estudado a teoria quântica de campos em um nível fundamental, estruturando-a através de postulados em termos da medida $d\mu$. Depois, no capítulo 3, mostraremos um teorema que irá demonstrar a existência das duas fases para a teoria comutativa do campo escalar. Nossas atenções irão em seguida para a existência do ponto crítico desse campo no capítulo 4. E por fim, nos capítulos restantes, será apresentado o respectivo modelo de matrizes para essa teoria e principalmente a integral que esperamos resolver, que é o chamado termo de ação efetiva S_{eff} , sendo mostrado alguns métodos aproximativos de solução e em seguida mostrado o respectivo diagrama de fases. Esse termo de ação efetiva, ou como será visto, termo cinético, que é um dos principais objetos de nossa atenção, depois de alguns trabalhos algébricos é dado pela seguinte integral

$$\int dU \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \left(U \Delta U^* [L_i, [L_i, U \Delta U^*]] \right) \right\} = e^{-S_{eff}(\zeta_i)},$$

onde o símbolo Δ representa uma matriz diagonalizada. Essa dedução será feita no capítulo 5.

Da Mecânica Clássica à TQC

2.1 Pontos comuns

A mecânica clássica pode ser vista como um limite da mecânica quântica quando o $\hbar \rightarrow 0$ (basta lembrar por exemplo de relações importantes que diferem uma da outra, como por exemplo a relação de comutação $[x, P] = i\hbar$ ou o princípio de incerteza $\Delta x \Delta P \leq \hbar/2$), assim como a mecânica não relativística é encontrada no limite de $c \rightarrow \infty$ da mecânica relativística, onde as transformações de Lorentz são substituídas pelas de Galileu [17]. A teoria de campos quântica possui vários elementos dessas duas teorias: mecânica quântica e relatividade restrita (RR) [6], no sentido de que a TQC usa resultados da RR, bem como algumas regras fundamentais da mecânica quântica, como as de quantização canônica, por exemplo, quando promove aos campos clássicos o status de operador que obedecem a regras de comutação. Dessa forma, vamos revisar um pouco cada uma dessas teorias para se entender a TQC escalar em duas dimensões e enfim seguirmos para o respectivo modelo de matrizes.

2.2 Mecânica Clássica

Considere um sistema de n partículas, onde cada uma possui massa m_j , sujeitas a um campo com energia potencial independente do tempo V . O espaço de fase associado a esse sistema, $\Upsilon = R^{6n}$, é a soma direta do espaço de configuração $Q = R^{3n}$ com o espaço formado pelos respectivos momentos conjugados $P = R^{3n}$. Uma observável clássica, $B(q, p)$, é uma função de q and p no espaço de fase Υ .

Tanto em mecânica clássica quanto em mecânica estatística, a dinâmica descrita por um ponto ou por uma distribuição de probabilidade é ditada por uma observável chamada Hamiltoniana

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m_i} + V(q). \quad (2.1)$$

Uma vez que em um certo tempo t_0 , se tenha a posição q_0 e o momento p_0 , encontra-se a curva $(q(t), p(t))$ integrando as equações de Hamilton para cada partícula, indexada

por i ,

$$\frac{d\vec{q}_i(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\vec{p}_i}{m_i}, \quad (2.2)$$

$$\frac{d\vec{p}_i(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\vec{\nabla}_{q_i} V = \vec{F}_i, \quad (2.3)$$

pode-se calcular a evolução temporal de qualquer observável $B(q(t), p(t))$ a partir das equações (2.2) e (2.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_t(q, p)}{\partial t} &= \frac{\partial B(q(t), p(t))}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \left\{ \vec{\nabla}_{q_i} B \cdot \frac{d\vec{q}_i}{dt} + \vec{\nabla}_{p_i} B \cdot \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \vec{\nabla}_{q_i} B \cdot \frac{\vec{p}_i}{m_i} + \vec{\nabla}_{p_i} B \cdot \vec{F}_i \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\vec{p}_i}{m_i} \cdot \vec{\nabla}_{q_i} + \vec{F}_i \cdot \vec{\nabla}_{p_i} \right\} B_t(q, p). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Nomeando o termo entre chaves, um campo vetorial, por D_H , a equação (2.4) fica

$$\frac{\partial B_t(q, p)}{\partial t} = D_H B_t(q, p). \quad (2.5)$$

Assumindo a integrabilidade da equação (2.5), é fácil ver que uma solução para ela é

$$B_t(q, p) = e^{(t-t_0) \cdot D_H} B(q, p) = B(q(t), p(t)), \quad (2.6)$$

já que o operador D_H não depende explicitamente do tempo. Essa última equação, inclusive, pode ser vista como uma definição de B_t .

Na seção 2.6, onde será revisada a TQC, uma estrutura que será bastante explorada é a de medida $d\mu$. A seguir, será mostrada uma medida muito simples com o propósito mais de familiaridade e uso de uma medida em mecânica clássica, que é a medida de Liouville.

Define-se a medida de Liouville como

$$d\mu = \prod_{i=1}^n dp_i dq_i. \quad (2.7)$$

E qualquer volume $\mu(\Omega)$ limitado no espaço de fase $\Omega \subset \Upsilon$, que é definido pela integral

$$\mu(\Omega) = \int_{\Omega} d\mu = \int_{\Omega(t)} d\mu = \mu(\Omega(t)) \quad (2.8)$$

não muda sobre a dinâmica temporal das equações de Hamilton. Isso é provado no teorema de Liouville para a mecânica [18].

Uma formulação equivalente para a dinâmica das observáveis é dada utilizando-se

os parênteses de Poisson, definido para duas observáveis A e B

$$\{A, B\} = \sum_{i=1}^n \{ \vec{\nabla}_{q_i} A \cdot \vec{\nabla}_{p_i} B - \vec{\nabla}_{q_i} B \cdot \vec{\nabla}_{p_i} A \}. \quad (2.9)$$

Desta forma, a equação (2.5) pode ser reescrita

$$\frac{\partial B_t(q, p)}{\partial t} = -\{H, B\}. \quad (2.10)$$

Além dos observáveis, um outro conceito importante é o de estado. Trantando-se de sistemas onde é aplicado os conceitos da mecânica clássica, um estado puro é definido por um ponto no espaço de fase.

Em mecânica estatística, temos a distribuição de probabilidade, $d\rho(q(t), p(t))$, ao invés de apenas pontos no espaço de fase, com a normalização

$$\int d\rho(q, p) = 1. \quad (2.11)$$

Assim, uma das buscas da mecânica estatística é pelas médias das grandezas medidas B . Elas são definidas de acordo com expressão

$$\langle B \rangle = \int B(q, p) d\rho(q, p). \quad (2.12)$$

Essa definição de média, ou de valor esperado, como em mecânica quântica, continuará sendo utilizada por nós no decorrer desse trabalho.

2.3 Mecânica Quântica

Quando se trata de átomos e moléculas, a mecânica clássica já se mostrou insuficiente para explicar os fenômenos. Por exemplo, considere o átomo de hidrogênio composto por um próton e um elétron, cada um com carga e de sinais opostos. O potencial de interação entre eles é o atrativo coulombiano

$$V = -\frac{e^2}{r}. \quad (2.13)$$

De acordo com a teoria clássica, além do elétron e do próton orbitarem em torno de um centro de massa em comum, o elétron, por possuir menos massa, orbita o próton. Por esse motivo, o elétron deveria emitir radiação de maneira contínua, visto que é uma partícula carregada, caindo em direção ao próton no tempo de 10^{-10} segundos.

Dessa forma, a mecânica quântica surgiu para explicar a estabilidade entre átomos e moléculas, assim como o espectro discreto observado por irradiações de átomos excitados.

Ela será apresentada aqui na forma de postulados, que terão caráter gerais, e teoremas, com funcionalidade em casos especiais. Não será pretendido derivá-los aqui.

Numa perspectiva mais geral, a mecânica quântica costuma ser pensada como uma extensão da mecânica clássica, ou em outras palavras, no limite onde a constante de Planck $h \rightarrow 0$ os sistemas podem ser estudados classicamente.

Agora serão estudados os postulados que formam a base da teoria. Para o primeiro, será definido o espaço de Hilbert.

Definição. Espaço de Hilbert \mathcal{H} é um espaço vetorial em \mathbb{C} com um produto interno positivo definido. Isso significa que para dois vetores θ e χ quaisquer desse espaço, tem-se $\langle \theta, \chi \rangle \geq 0$ (obs. partimos do pressuposto que o leitor já tem certa familiaridade com a notação de Dirac [20]). Tal produto traz a norma de um vetor θ definida por $\|\theta\| = \sqrt{\langle \theta, \theta \rangle}$. O espaço de Hilbert é completo em termos de sua norma, ou seja, se a sequência

$$\|\theta_n - \theta_m\| \rightarrow 0$$

então há $\theta \in \mathcal{H}$ tal que $\theta_n \rightarrow \theta$.

Postulado 1

Estados puros de um sistema mecânico quântico são representados por vetores unitários com fase arbitrária no espaço de Hilbert \mathcal{H} , ou seja, por raios. Esses estados são definidos como estados com números quânticos definidos.

Se um sistema quântico se encontra em um estado caracterizado pelo vetor $|\theta\rangle$, a probabilidade dele ser encontrado em outro estado $|\chi\rangle$ é dada pelo quadrado da amplitude de transição $\langle \chi, \theta \rangle$. (Obs. Para simplificar a notação, algumas vezes um estado representado por um vetor de estado $|\theta\rangle$ poderá ser escrito apenas com a letra θ).

Postulado 2

Observáveis são operadores auto adjuntos (obs. Um operador A é auto adjunto se $A = A^*$). Para uma observável A , o seu valor esperado em um estado θ é dado por

$$E_\theta(A) = \frac{\langle \theta, A\theta \rangle}{\langle \theta, \theta \rangle}. \quad (2.14)$$

Postulado 3

Os operadores Hamiltoniano \mathbf{H} , momento linear \mathbf{P} e momento angular \mathbf{J} são os geradores infinitesimais dos grupos unitários $\exp\left(-\frac{i\mathbf{H}t}{\hbar}\right)$, $\exp\left(-\frac{i\mathbf{P}\cdot q}{\hbar}\right)$ e $\exp\left(-\frac{i\mathbf{J}\cdot a}{\hbar}\right)$, respectivamente, aos quais correspondem, na mesma ordem, às translações temporais, espaciais e angulares (as letras escritas em negrito representam operadores).

A dinâmica de um sistema quântico é determinado pelo grupo de translação temporal

$U(t)$, onde se pode descrevê-lo de duas formas distintas: a descrição de Schrodinger ou a de Heisenberg. Na primeira, as observáveis não variam no tempo, enquanto que os vetores de estado $\theta = \theta(t)$ variam de acordo com a relação [19]

$$\theta(t) = \exp\left(-\frac{i\mathbf{H}t}{\hbar}\right)\theta \quad (2.15)$$

e obedecendo a equação de Schrodinger

$$i\hbar \frac{d\theta(t)}{dt} = \mathbf{H}\theta(t). \quad (2.16)$$

Por outro lado, na descrição de Heisenberg, quem variam no tempo são as observáveis de acordo com a equação [19]

$$A(t) = \exp\left(\frac{i\mathbf{H}t}{\hbar}\right) A \exp\left(-\frac{i\mathbf{H}t}{\hbar}\right) \quad (2.17)$$

obedecendo a equação de Heisenberg

$$i\hbar \frac{dA(t)}{dt} = -[A(t), \mathbf{H}]. \quad (2.18)$$

A relação entre as descrições é dada entre seus valores esperados

$$\begin{aligned} E_{\theta(t)}(A) &= E_{\theta}(A(t)) \\ \langle \theta(t), A\theta(t) \rangle &= \langle \theta, A(t)\theta \rangle. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Através da equação (2.15), pode-se ver que a amplitude de transição $\langle \chi(t), \theta(t) \rangle$ de um estado θ para outro estado χ não depende do tempo

$$\langle \chi(t), \theta(t) \rangle = \langle \chi | \exp\left(\frac{i\mathbf{H}t}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{i\mathbf{H}t}{\hbar}\right) | \theta \rangle = \langle \chi, \theta \rangle.$$

Definição. $L_N(X, d\nu)$ é o espaço das funções, ou funcionais, integráveis sobre a medida $d\nu$ no espaço X até a potência de ordem N , ou seja, os funcionais da forma

$$\int |f|^N d\nu$$

existem para todo N no conjunto dos naturais positivos.

Exemplo: álgebra dos operadores q e P em mecânica quântica

Considere um sistema de n partículas sujeitas a um potencial V . O espaço de Hilbert em questão é

$$\mathcal{H} = L_2(Q, d\nu),$$

em que $Q = R^{3n}$ é o espaço de configuração do sistema de partículas. Nesse caso, o quadrado de uma função $\psi(q)$, chamada função de onda, tem a interpretação de ser a distribuição de probabilidade $\rho(q) = |\psi(q)|^2$ para a posição das partículas em Q .

Considere que esse sistema esteja em um estado θ . Expandindo esse estado na base das posições, tem-se

$$|\theta\rangle = \int dq |q\rangle \langle q, \theta|. \quad (2.20)$$

De acordo com o postulado 3, o gerador de translações espaciais é o momento linear. Assim, a ação do grupo unitário $\exp\left(-\frac{i\mathbf{P}\cdot\Delta q}{\hbar}\right)$ para pequenos deslocamentos Δq sobre um vetor de estado $|q\rangle$ é definido por

$$\tau(\Delta q)|q\rangle = \left(1 - i\frac{\mathbf{P}\cdot\Delta q}{\hbar}\right)|q\rangle = |q + \Delta q\rangle. \quad (2.21)$$

Assim, aplicando-o na equação (2.20), na coordenada q_i

$$\begin{aligned} & \left(1 - i\frac{\mathbf{P}_i\Delta q_i}{\hbar}\right)|\theta\rangle = \int dq_i |q_i + \Delta q_i\rangle \langle q_i, \theta| \\ & = \int dq_i |q_i\rangle \langle q_i - \Delta q_i, \theta| = \int dq_i |q_i\rangle \left(\langle q_i, \theta| - \frac{\partial \langle q_i, \theta|}{\partial q_i} \Delta q_i\right) \\ & \Rightarrow \langle q_i, \mathbf{P}_i \theta \rangle = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \langle q_i, \theta \rangle}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

O mesmo resultado é análogo às outras direções perpendiculares à direção da coordenada q_i , assim, de forma compacta, tem-se

$$\mathbf{P} = \frac{\hbar}{i} \nabla_q. \quad (2.22)$$

Substituindo o operador momento \mathbf{P} no Hamiltoniano desse sistema, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \sum \frac{\mathbf{P}_j^2}{2m_j} + V(\mathbf{q}) \\ \mathbf{H} &= -\sum \frac{\hbar^2}{2m_j} \nabla_{q_i}^2 + V(q), \end{aligned} \quad (2.23)$$

em que o símbolo ∇^2 representa o laplaciano. A partir do postulado 3, pode-se encontrar também a relação de comutação entre os operadores \mathbf{q} e \mathbf{P} . Para isso, considere o operador de translação espacial $\tau(dq')$ atuando num vetor de estado que caracteriza a posição do sistema, $|q'\rangle$, e o operador posição \mathbf{q} . Assim

$$\mathbf{q}\tau(dq')|q'\rangle = \mathbf{q}|q' + dq'\rangle = (q' + dq')|q' + dq'\rangle$$

$$\tau(dq')\mathbf{q}|q' \rangle = q'|q' \rangle + dq' \rangle .$$

Subtraindo as duas igualdades acima, e expandindo o vetor de estado deslocado até primeira ordem, tem-se

$$\mathbf{q}\tau(dq')|q' \rangle - \tau(dq')\mathbf{q}|q' \rangle = dq'|q' \rangle$$

$$[\mathbf{q}, \tau(dq')]|q' \rangle = dq'|q' \rangle .$$

Substituindo o operador de translação espacial pelo gerador das translações espaciais \mathbf{P} sobre \hbar , tem-se

$$[\mathbf{q}_i, \mathbf{P}_j] = i\hbar\delta_{ij}. \quad (2.24)$$

Por outro lado, de acordo com [20] todos os componentes do vetor operador posição possuem o mesmo autoestado, da mesma forma que os componentes do vetor operador momento linear possuem o mesmo autoestado em comum. Sendo assim

$$[\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j] = 0 , \quad (2.25)$$

$$[\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j] = 0 . \quad (2.26)$$

Espaços onde a álgebra das coordenadas obedece a equação (2.25) são chamados de espaços comutativos. Eles são estudados na primeira parte desse trabalho, como os espaços Euclidianos, por exemplo.

No caso acima, não foi considerado interações com o spin da partícula. Para fazer essa generalização, o espaço de Hilbert é representado por um produto tensorial entre o espaço das configurações e o espaço dos spins S , e denotamos por $\otimes L_2(Q, S)$.

Postulado 4

Um vetor de estado $\theta \in \mathcal{H}$ é simétrico sobre a permutação de idênticos bosons e antissimétrico sobre a permutação de idênticos férmions.

O Hamiltoniano em mecânica quântica tem uma interpretação diferente do que na clássica. Ele possui valores discretos para os estados ligados e contínuo para os seus auto-estados de espalhamento. O estado de energia mais baixa é chamado de estado fundamental Ω e os demais $\Omega_2, \Omega_3, \dots$ são os primeiro estado excitado, segundo estado excitado, ...

2.3.1 Oscilador Harmônico Simples

O oscilador harmônico simples tem um papel importante para a teoria de campos, o campo quântico livre pode ser descrito como uma composição de infinitos osciladores

harmônicos [16]. Dessa forma, os campos interagentes seriam coleções de osciladores não harmônicos ou ainda podem ser vistos como perturbações não harmônicas dos osciladores harmônicos [6].

O Hamiltoniano para o oscilador harmônico simples é

$$H_{osc} = \frac{p^2}{2m} + k \frac{q^2}{2}.$$

A frequência do oscilador é $\mu = (k/m)^{1/2}$ (obs. na literatura, é comum os livros apresentarem a frequência com a letra ω). Simplifiquemos o Hamiltoniano realizando uma mudança de variáveis das antigas p e q para novas P e Q , definindo-as da seguinte forma

$$Q = \frac{m\mu^{1/2}}{\hbar} q \quad , \quad P = (m\mu\hbar)^{-1/2} p. \quad (2.27)$$

Desta forma, tem-se

$$H = \frac{P^2}{2} + \frac{Q^2}{2}. \quad (2.28)$$

A relação entre os dois Hamiltonianos é dada por

$$\begin{aligned} H &= \frac{P^2}{2} + \frac{Q^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{p}{\sqrt{m\mu\hbar}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left[q \left(\frac{m\mu}{\hbar} \right)^{1/2} \right]^2 \\ &= \frac{p^2}{2\hbar\mu m} + \frac{kq^2}{2\hbar\mu} \\ &= (\hbar\mu)^{-1} \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} \right) \\ &= (\hbar\mu)^{-1} H_{osc}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Pode-se obter também a relação de comutação entre os novos operadores Q e P . Para tal propósito, usa-se as relações de comutação (2.24). Logo

$$\begin{aligned} [Q, P] &= \left(\frac{m\mu}{\hbar} \right)^{1/2} q (m\mu\hbar)^{-1/2} p - (m\mu\hbar)^{-1/2} p \left(\frac{m\mu}{\hbar} \right)^{1/2} q \\ &= \hbar^{-1} [q, p] \\ &= i. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Assim, na representação de Schrodinger, os operadores no espaço $L_2(dy)$ que satisfazem a relação de comutação acima são

$$P = -i \frac{d}{dy} \quad \text{e} \quad Q = y. \quad (2.31)$$

Em mecânica quântica, assim como em TQC, algumas vezes é preferível trabalhar com os operadores de criação A^* e aniquilação A ao invés de posição e momento. O

Hamiltoniano, por exemplo, pode ser escrito de uma maneira mais simples, obtendo-se em poucos passos os seus autovalores [19]. Assim, definem-se os operadores

$$A^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP) \quad \text{e} \quad (2.32)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP). \quad (2.33)$$

Com essas duas equações e a relação de comutação (2.30) é fácil ver que

$$[A, A^*] = 1. \quad (2.34)$$

Da mesma forma, mas também usando as definições para P e Q em termos de A e A^* , podemos reescrever H

$$H = A^*A + \frac{1}{2}. \quad (2.35)$$

Utilizando esse hamiltoniano, segue

$$[H, A] = -A \quad \text{e} \quad [H, A^*] = A^*. \quad (2.36)$$

Se definirmos $A\Omega_0 = 0$, Ω_0 é o estado de vácuo ou estado fundamental do sistema, então $H\Omega_0 = \left(A^*A + \frac{1}{2}\right)\Omega_0 = \frac{1}{2}\Omega_0$, ou seja, o estado Ω_0 é auto-estado do operador H com autovalor $1/2$. Usando a representação de Schrodinger, pode-se obter a forma explícita desse autoestado

$$A\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP)\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y + \frac{d}{dy}\right)\Omega_0 = 0$$

cuja solução é uma curva gaussiana

$$\Omega_0 = \pi^{-1/4}e^{-y^2/2}. \quad (2.37)$$

A constante foi escolhida considerando a norma unitária $||\Omega_0|| = 1$.

Proposição

O operador H_{osc} tem como espectro $\hbar\mu\left(n + \frac{1}{2}\right)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Demonstração

Primeiramente, calculemos

$$\begin{aligned}
H (A^*)^n \Omega_0 &= (A^*)^n H \Omega_0 + n (A^*)^n \Omega_0 \\
&= (A^*)^n \left(A^* A + \frac{1}{2} \right) \Omega_0 + n (A^*)^n \Omega_0 \\
&= \frac{1}{2} (A^*)^n \Omega_0 + n (A^*)^n \Omega_0 \\
&= \left(\frac{1}{2} + n \right) ((A^*)^n \Omega_0).
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Dessa forma, com $n = 0, 1, 2, \dots$ e usando a equação (2.29) tem-se o espectro de H_{osc} e a prova está concluída.

Essas funções $(A^*)^n \Omega_0$ têm características especiais. Sua normalização segue

$$\begin{aligned}
\|\Omega_n\|^2 &= \langle \Omega_0, A^n (A^*)^n \Omega_0 \rangle \\
&= \langle \Omega_0, A^{n-1} [A, (A^*)^n] \Omega_0 \rangle.
\end{aligned}$$

Calculando a ação do comutador na função Ω_0

$$\begin{aligned}
[A, (A^*)^n] \Omega_0 &= [A, A^* (A^*)^{n-1}] \Omega_0 \\
&= \left(A^* [A, (A^*)^{n-1}] + (A^*)^{n-1} \right) \Omega_0.
\end{aligned}$$

Procedendo da mesma maneira n vezes, o primeiro termo some e ficamos com

$$= n \langle \Omega_0, A^{n-1} (A^*)^{n-1} \Omega_0 \rangle.$$

Aplicando o mesmo procedimento até o último expoente de A

$$\|\Omega_n\|^2 = n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!, \tag{2.39}$$

tem-se assim a função

$$\Omega_n = (n!)^{-1/2} (A^*)^n \Omega_0. \tag{2.40}$$

Podemos estudar também a ação dos operadores A e A^* sobre as autofunções Ω_n

$$\begin{aligned}
A^* \Omega_n &= \frac{1}{\sqrt{n!}} (A^*)^{n+1} \Omega_0 \\
&= \frac{\sqrt{(n+1)!}}{\sqrt{n!}} \Omega_{n+1} \\
&= \sqrt{n+1} \Omega_{n+1}
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned}
A\Omega_n &= \frac{1}{\sqrt{n!}} A (A^*)^n \Omega_0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}} (1 + A^*A) (A^*)^{n-1} \Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(2 (A^*)^{n-1} + (A^*)^2 A (A^*)^{n-2} \right) \Omega_0.
\end{aligned}$$

Onde foram usadas (2.34) e (2.40). Procedendo da mesma forma n vezes, o último termo desaparece pela ação de A no estado Ω_0 .

$$= \frac{1}{\sqrt{n!}} n \left((A^*)^{n-1} \Omega_0 \right) = \frac{n}{\sqrt{n!}} \sqrt{(n-1)!} \Omega_{n-1}$$

$$A\Omega_n = \sqrt{n} \Omega_{n-1}. \quad (2.42)$$

E por último

$$A^* A \Omega_n = n \Omega_n. \quad (2.43)$$

Com as relações obtidas nas equações (2.38), (2.40), (2.41) e (2.42), pode-se pensar no estado Ω_n como sendo um oscilador harmônico de número quântico n , com a energia de cada quantum do sistema sendo $\hbar\mu$. O operador A^* adiciona um quantum, ou uma partícula ao sistema, adicionando $\hbar\mu$ de energia. O operador adjunto A absorve ou aniquila um quantum, ou uma partícula do sistema.

Para qualquer estado $\theta = \sum C_n \Omega_n$, em que a base $\{\Omega_n\}$ é ortonormal, $|C_n|^2$ é a probabilidade de encontrar o sistema no estado de número quântico n [20]. E

$$\langle \theta, A^* A \theta \rangle = \sum_n \langle \Omega_n | |C_n|^2 A^* A | \Omega_n \rangle = \sum_n n |C_n|^2 \quad (2.44)$$

é o número esperado do quanta no estado θ . O operador $A^* A$ é o operador que mede o número do quanta.

A definição seguinte é importante para escrevermos explicitamente a forma algébrica das autofunções $\Omega_n(y)$.

Definição. O Polinômio de Hermite é dado por

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^j c_{n,j} x^{n-2j}, \quad (2.45)$$

onde

$$c_{n,j} = \frac{n!}{(n-2j)! 2^j j!}. \quad (2.46)$$

Será mostrado que esses polinômios são as soluções para as autofunções, ou funções de onda, $\Omega_n(y)$, ou seja, podemos escrever as funções de onda $\Omega_n(y)$ em termos dos

polinômios de Hermite. Esse é o resultado da proposição a seguir, que diz que

$$\Omega_n(y) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (A^*)^n \Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{n!}} P_n(\sqrt{2}y) \Omega_0(y).$$

Para chegarmos nela, porém, será preciso demonstrar dois lemas antes, necessários à sua demonstração.

Lema

$$c_{n,j} = \left(1 - \frac{2j}{n+1}\right) c_{n+1,j} = \frac{2(j+1) c_{n+1,j+1}}{(n+1)(n-2j)}. \quad (2.47)$$

Demonstração

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2j}{n+1}\right) c_{n+1,j} &= \left(1 - \frac{2j}{n+1}\right) \left(\frac{(n+1)!}{(n+1-2j)! 2^j j!}\right) \\ &= \left(\frac{n+1-2j}{n+1}\right) \left(\frac{(n+1)!}{(n+1-2j)! 2^j j!}\right) = \frac{n!}{(n-2j)! 2^j j!} = c_{n,j}. \end{aligned}$$

Além disso

$$\begin{aligned} \frac{2(j+1)}{(n+1)(n-2j)} c_{n+1,j+1} &= \frac{2(j+1)}{(n+1)(n-2j)} \frac{(n+1)!}{[n+1-2(j+1)]! 2^{j+1} (j+1)!} \\ &= \frac{2(j+1)}{(n-2j)} \frac{n!}{[n-2j+1]! 2^j 2(j+1)j!} = c_{n,j}. \end{aligned}$$

c.q.d

Lema

$$\left(x - \frac{d}{dx}\right) P_n(x) = P_{n+1}(x). \quad (2.48)$$

Demonstração.

Usando a definição (2.45)

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{d}{dx}\right) \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j c_{n,j} x^{n-2j} &= \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j c_{n,j} [x^{n+1-2j} - (n-2j) x^{n+1-2(j+1)}] \\ &= \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j c_{n,j} x^{n+1-2j} - \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j c_{n,j} (n-2j) x^{n+1-2(j+1)}. \end{aligned}$$

Utilizando o lema (2.47), tem-se

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^j \left(1 - \frac{2j}{n+1}\right) c_{n+1,j} x^{n+1-2j} - \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^j \frac{2(j+1)}{(j+1)(n-2j)} c_{n+1,j+1} (n-2j) x^{n+1-2(j+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^j c_{n+1,j} x^{n+1-2j} - \sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^j \frac{2j}{(n+1)} c_{n+1,j} x^{n+1-2j} - \sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^{j+1} \frac{2j}{(n+1)} c_{n+1,j} x^{n+1-2j} \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^j c_{n+1,j} x^{n+1-2j} = P_{n+1}.
\end{aligned}$$

c.q.d

Proposição

$$\Omega_n(y) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (A^*)^n \Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{n!}} P_n(\sqrt{2}y) \Omega_0(y). \quad (2.49)$$

Demonstração.

Procedemos por indução. A igualdade é válida para $n = 0$. Acreditando ser válido para n , tem-se a partir de (2.41)

$$\begin{aligned}
\Omega_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} A^* \Omega_n \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \frac{1}{\sqrt{n!}} A^* P_n(\sqrt{2}y) \Omega_0(y) = \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} A^* P_n(\sqrt{2}y) \Omega_0(y).
\end{aligned}$$

Na representação de Schrödinger, a partir de (2.32)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (Q - iP) \right] P_n(\sqrt{2}y) \Omega_0(y) \\
&= \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} \left[\sqrt{2}y P_n(\sqrt{2}y) - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dP_n(\sqrt{2}y)}{dy} \right] \Omega_0(y).
\end{aligned}$$

E portanto, através do lema (2.48) tem-se

$$\Omega_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} P_{n+1}(\sqrt{2}y) \Omega_0(y).$$

c.q.d

2.4 Modelo de Ising e Campos em Rede

Vamos agora considerar sistemas com muitos graus de liberdade. Podemos caracterizar um sistema através de uma variável arbitrária $\xi = \xi_i$, que é função de cada ponto i desse espaço. A partir dela, pode-se também diferenciar interações fracas das interações fortes. No caso das primeiras, a variável ξ_i é quase independente da variável $\xi_j, j \neq i$, que caracteriza as circunvizinhanças. Assim, o método que lida com esses acoplamentos é o método de expansões com interação zero [6]. Diferentemente, no outro caso, tem-se que a variação de uma delas ξ_i implica na variação de um número limitado de pontos ξ_j . Eles são chamados de fenômenos cooperativos e são tratados com o Modelo de Ising ou Campos em Rede.

Em um sólido, como um cristal por exemplo, usa-se o modelo de redes. Cada ponto da rede pode representar um átomo ou grupo de átomos, cujo o conjunto, em termos de teoria quântica de campos, é designado pelo espaço Z^d , o que é na prática uma aproximação do conjunto R^d . Em cada ponto $i \in Z^d$, a variável $\xi_i \in X_i$ pode, por exemplo, medir a intensidade do campo, a direção do momento magnético do átomo, ou seja, ξ_i define o estado na localização i e X_i seria o espaço de estados. No presente trabalho, escolhemos esse espaço como sendo real para todo i .

Outro ponto que é fundamental nas nossas apresentações será o que chamaremos de medida. Em termos simples, uma medida $d\mu$ indica sobre qual termo e variável devemos realizar uma integração como, por exemplo, o cálculo do valor esperado de uma grandeza que é definida através da expressão

$$\langle G(x) \rangle = \int G(x) d\mu. \quad (2.50)$$

Com a medida, pode-se calcular também o produto interno de um determinado espaço.

A forma como está escrita a medida $d\mu$ é uma forma compacta e que traz em si mais informações a depender do sistema em questão. Por exemplo, a seguir será apresentado uma medida que tem o caráter discreto quando usada em um espaço Z^d , equação (2.51), mas ela também pode ser apresentada em um espaço contínuo R^d , equação (2.54). Em ambos os casos, a medida $d\mu$ já traz em si mesma o fator de normalização e por isso não há a necessidade de colocá-lo na definição de medida acima.

Vamos ilustrar à essa ideia de notação compacta atribuída à definição da medida $d\mu$ um exemplo simples. Considere que temos a função $G(x) = F(x)e^{-x^2}$, em que a função $G(x)$ representa alguma força unidimensional atuando em um corpo, como função da distância x , em relação a algum referencial. Logo o trabalho realizado pela força é dado por $\int F(x)e^{-x^2} dx$. Nesse caso, uma medida possível seria $d\mu = dx$, pois estamos realizando uma integração sobre dx . Por outro lado, poderíamos, sem nenhum prejuízo, anexar o termo exponencial, e^{-x^2} , que é característico a todas forças $G(x)$, ao termo de

integração dx . Dessa forma, o trabalho realizado seria dado por $\int F(x) d\mu(x)$, onde a nova medida, que agora é função da variável x , seria $d\mu(x) = e^{-x^2} dx$. Assim, a forma como cada medida é definida, depende de como a teoria é construída.

Foi falado que um dos modelos usado para descrever fenômenos cooperativos, como em sólidos, por exemplo, é o modelo de campo em redes, ele é definido através da medida

$$d\mu_i = \frac{e^{P(\xi_i)} d\xi_i}{\int e^{P(\xi_i)} d\xi_i}. \quad (2.51)$$

Em que P é um polinômio semilimitado, isso significa que ele possui uma fronteira superior ou inferior na sua imagem. Por outro lado, em um limite especial, tem-se o modelo de Ising para um sistema submetido a um campo externo de intensidade h . Esse modelo é definido através da expressão

$$d\mu_i = e^{h\xi_i} \frac{\delta_{-1}(\xi_i) + \delta_{+1}(\xi_i)}{2 \cosh h} d\xi_i, \quad (2.52)$$

onde $\delta_{\pm 1}(\xi) = \delta(\xi \mp 1)$.

Considere Δ um operador finitamente diferenciável em Z^d , tal que a sua atuação no produto interno em $l_2(Z^d)$, as sequências de quadrado integráveis, é definido como

$$\langle \xi, \Delta \xi \rangle = - \sum_{i \in Z^d} \sum_{\nu=1}^d (\xi_{i+e_\nu} - \xi_i)^2. \quad (2.53)$$

e_ν é o vetor unitário na direção da coordenada ν .

Considere agora que o sistema encontra-se limitado em uma região finita do espaço $\Lambda \in R^d$. Seja assim $\Delta_{\partial\Lambda}$ um operador diferencial de segunda ordem com as condições de fronteira de Dirichlet na fronteira $\partial\Lambda$ [ver seção (2.6.5) para maiores detalhes sobre esse tipo de condição de fronteira]. Assim

$$d\mu_\Lambda = e^{-\beta \langle \xi, \Delta_{\partial\Lambda} \xi \rangle / 2} \prod_{i \in \Lambda} d\mu_i. \quad (2.54)$$

E no limite do infinito

$$d\mu = \lim_{\Lambda \uparrow R^d} \frac{d\mu_\Lambda}{\int d\mu_\Lambda}. \quad (2.55)$$

Em que $\beta = \frac{1}{kT}$, k sendo a constante de Boltzman e T a temperatura do sistema.

Essas construções são de caráter geral e dependem de cada sistema analisado. Na seção seguinte, será utilizada a medida do campo em rede, equação (2.51), para o cálculo do valor esperado de uma grandeza física arbitrária, ou do produto de mais de uma grandeza, e isso será útil na demonstração de uma desigualdade chamada de FKG (sigla que significa Fortuin–Kasteleyn–Ginibre, devido às contribuições de Cees M. Fortuin,

Pieter W. Kasteleyn e Jean Ginibre) ao qual será apresentada também na próxima seção. E na seção onde será estudada a TQC, 2.6, voltaremos a falar sobre a definição e a aplicação de uma medida $d\mu$.

2.5 Desigualdade FKG

Como exemplo de cálculo e uso das medidas definidas na seção anterior, iremos demonstrar uma desigualdade fundamental, FKG. Essa desigualdade será de grande importância para a demonstração da existência de transição de fase em um sistema, capítulo 3. Ela será apresentada aqui na forma de um teorema. E para tal, é necessário definir ordem em um espaço R^n

Definição. Existe uma ordem em R^n sempre que houver

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \leq \chi = (\chi_1, \dots, \chi_n) \Leftrightarrow \xi_i \leq \chi_i \quad (2.56)$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Assim, uma função $F = F(\xi)$ é monótona se é monótona com respeito a equação (2.56), ou seja, $F(\xi) \leq F(\chi)$ se $\xi \leq \chi$.

2.5.1 Teorema

Sejam F e G funções monótonas crescentes em ξ . E seja o valor esperado \langle, \rangle definido pelas igualdades (2.51) e (2.54), ou seja, integrada sobre a medida $d\mu$ em um campo em rede. Então

$$\langle F \rangle \langle G \rangle \leq \langle FG \rangle .$$

Demonstração.

Primeiramente, dupliquemos a variável ξ para ξ e χ . Isso não fará diferença na demonstração. Além disso, é suficiente mostrar que a desigualdade a seguir, (2.57), é válida

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle [F(\xi) - F(\chi)] [G(\xi) - G(\chi)] \rangle & (2.57) \\ &= \langle F(\xi)G(\xi) - F(\xi)G(\chi) - F(\chi)G(\xi) + F(\chi)G(\chi) \rangle \\ &= \langle F(\xi)G(\xi) \rangle - \langle F(\xi) \rangle \langle G(\chi) \rangle - \langle F(\chi) \rangle \langle G(\xi) \rangle + \langle F(\chi)G(\chi) \rangle . \end{aligned}$$

Seja $n = |\Lambda|$ o número de pontos que fazem parte da rede Λ . Iremos proceder por indução. Para $n = 1$, tem-se que $F(\xi) - F(\chi)$ e $G(\xi) - G(\chi)$, por F e G serem monótonas, possuem o mesmo sinal e portanto satisfazem a desigualdade (2.57). Agora,

assuma que o teorema é válido para $n - 1$ pontos da rede Λ e escreva

$$\begin{aligned}\xi &= (\tilde{\xi}, \xi_n) \\ \chi &= (\tilde{\chi}, \chi_n),\end{aligned}$$

onde $\tilde{\xi} = \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$. Escrevendo a expressão (2.57) na forma de integrais iteradas, temos que as integrais nas variáveis $d\tilde{\xi}$ e $d\tilde{\chi}$ são não negativas pela nossa hipótese. Assim, é necessário mostrar que no ponto n da rede Λ vale a expressão

$$0 \leq \langle [F(\xi) - F(\chi)] [G(\xi) - G(\chi)] \rangle_{\alpha\gamma} \quad (2.58)$$

com as normalizações

$$Z(\alpha) = \langle \delta(\xi_n - \alpha) \rangle \quad (2.59)$$

$$\langle F \rangle_{\xi_n} = \langle F \rangle_{\alpha} = \frac{\langle \delta(\xi_n - \alpha) F(\xi) \rangle}{Z(\alpha)} \quad (2.60)$$

e com a notação $\langle \cdot \rangle_{\xi_n = \alpha, \chi_n = \gamma} = \langle \cdot \rangle_{\alpha, \gamma}$.

Por outro lado, podemos reescrever a expressão (2.58) da seguinte forma

$$\begin{aligned}& \langle FG \rangle_{\alpha} + \langle FG \rangle_{\gamma} - \langle F \rangle_{\gamma} \langle G \rangle_{\alpha} - \langle F \rangle_{\alpha} \langle G \rangle_{\gamma} \\ &= \langle FG \rangle_{\alpha} - \langle F \rangle_{\alpha} \langle G \rangle_{\alpha} + \langle F \rangle_{\alpha} \langle G \rangle_{\alpha} + \langle FG \rangle_{\gamma} - \\ & - \langle F \rangle_{\gamma} \langle G \rangle_{\gamma} + \langle F \rangle_{\gamma} \langle G \rangle_{\gamma} - \langle F \rangle_{\alpha} \langle G \rangle_{\gamma} - \langle F \rangle_{\gamma} \langle G \rangle_{\alpha} \\ &= \{ \langle FG \rangle_{\alpha} - \langle F \rangle_{\alpha} \langle G \rangle_{\alpha} \} + \{ \langle FG \rangle_{\gamma} - \langle F \rangle_{\gamma} \langle G \rangle_{\gamma} \} + \\ & + \{ \langle F \rangle_{\alpha} - \langle F \rangle_{\gamma} \} \{ \langle G \rangle_{\alpha} - \langle G \rangle_{\gamma} \}.\end{aligned}$$

Os primeiros dois termos da igualdade acima são não negativos pela hipótese da indução. O trabalho então se restringe a mostrar que os fatores do terceiro termo possuem o mesmo sinal. Para isso, temos, usando (2.59) e (2.60)

$$\begin{aligned}\frac{d \langle F \rangle_{\alpha}}{d\alpha} &= \frac{d \langle \delta(\xi_n - \alpha) F(\xi) \rangle}{d\alpha Z(\alpha)} \\ &= \frac{1}{Z} \frac{d}{d\alpha} \langle \delta(\xi_n - \alpha) F(\xi) \rangle - \frac{1}{Z^2(\alpha)} \langle \delta(\xi_n - \alpha) F(\xi) \rangle \frac{dZ(\alpha)}{d\alpha}.\end{aligned} \quad (2.61)$$

Derivando

$$\begin{aligned}\frac{dZ(\alpha)}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha} \langle \delta(\xi_n - \alpha) \rangle \\ &= \frac{d}{d\alpha} \int \delta(\xi_n - \alpha) e^{-\beta \langle \xi, \Delta \xi \rangle / 2} \prod_i d\mu_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{d\alpha} \int \delta(\xi_n - \alpha) e^{(\beta/2) \sum_{i \in \Lambda} \sum_{\nu=1}^d (\xi_{i+e_\nu} - \xi_i)^2} \prod_i d\tilde{\mu}_i d\mu_n \\
&= \frac{d}{d\alpha} \int \delta(\xi_n - \alpha) e^{(\beta/2) \sum_{i \in \bar{\Lambda}} \sum_{\nu=1}^d (\tilde{\xi}_{i+e_\nu} - \tilde{\xi}_i)^2 + (\beta/2) \sum_l (\xi_l - \xi_n)^2} \prod_i d\tilde{\mu}_i d\mu_n \\
&= \frac{d}{d\alpha} \int e^{(\beta/2) \sum_{i \in \bar{\Lambda}} \sum_{\nu=1}^d (\tilde{\xi}_{i+e_\nu} - \tilde{\xi}_i)^2 + (\beta/2) \sum_l (\xi_l - \alpha)^2} \prod_i d\tilde{\mu}_i \\
&= \int \beta \sum_l (\xi_l - \alpha) e^{(\beta/2) \sum_{i \in \bar{\Lambda}} \sum_{\nu=1}^d (\tilde{\xi}_{i+e_\nu} - \tilde{\xi}_i)^2 + (\beta/2) \sum_l (\xi_l - \alpha)^2} \prod_i d\tilde{\mu}_i \\
&= \int \beta \sum_l (\xi_l - \alpha) \delta(\xi_n - \alpha) e^{(\beta/2) \sum_{i \in \bar{\Lambda}} \sum_{\nu=1}^d (\tilde{\xi}_{i+e_\nu} - \tilde{\xi}_i)^2 + (\beta/2) \sum_l (\xi_l - \xi_n)^2} \prod_i d\tilde{\mu}_i d\mu_n \\
&= \beta \left\langle \sum_l (\xi_l - \alpha) \right\rangle_\alpha Z(\alpha).
\end{aligned}$$

O somatório é tomado sobre todos os pontos da vizinhança do ponto n .

Agora, derivando o primeiro termo de (2.61), temos que aplicar a regra da cadeia porque após o cálculo da integral na delta, F passa a depender também de α , logo

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\alpha} \int \delta(\xi_n - \alpha) F(\xi) e^{-\beta \langle \tilde{\xi}, \Delta \tilde{\xi} \rangle / 2 - \beta \langle \xi_n, \Delta \xi_n \rangle / 2} \prod_i d\tilde{\mu}_i d\mu_n = \\
&= \frac{d}{d\alpha} \int F(\xi)_\alpha e^{-\beta \langle \tilde{\xi}, \Delta \tilde{\xi} \rangle / 2 - \beta \langle \alpha_n, \Delta \alpha_n \rangle / 2} \prod_i d\tilde{\mu}_i \\
&\int \left(\frac{dF}{d\xi_n} + F(\xi)_\alpha \frac{d}{d\alpha} e^{-\beta \langle \tilde{\xi}, \Delta \tilde{\xi} \rangle / 2 - \beta \langle \alpha_n, \Delta \alpha_n \rangle / 2} \right) \delta(\xi_n - \alpha) \prod_i d\tilde{\mu}_i d\mu_n \\
&= Z \left\langle \frac{dF}{d\xi_n} \right\rangle + Z \left\langle \sum_l (\xi_l - \alpha) F(\xi) \right\rangle_\alpha.
\end{aligned}$$

Enfim, juntando esses resultados, obtém-se para a equação (2.61)

$$\frac{d}{d\alpha} \langle F \rangle_\alpha = \beta \sum_l \left\{ \langle (\xi_l - \alpha) F(\xi) \rangle_\alpha - \langle \xi_l - \alpha \rangle_\alpha \langle F \rangle_\alpha \right\} + \left\langle \frac{dF}{d\xi_n} \right\rangle_\alpha.$$

Uma vez que a função linear $\xi_l - \alpha$ é monótona, a hipótese indutiva se aplica novamente. Assim segue que $\langle F \rangle_\alpha$ é monótona crescente. O mesmo se aplica para $\langle G \rangle_\alpha$. Assim fica demonstrado o teorema.

2.6 Teoria Quântica de Campos

A primeira noção do estudo de campos começa como um objeto matemático que assume valores contínuos em um espaço real, usado para quantificar uma grandeza física invisível aos olhos humanos. Como exemplo, tem-se o campo eletromagnético, originado

por partículas carregadas e o campo gravitacional, originado por partículas massivas. Essa noção de campo, posteriormente, evoluiu para descrever o comportamento de partículas em experimentos de decaimentos e espalhamentos. Ainda aqui, tinha-se o uso do campo como um objeto matemático que assumia valores reais e contínuos, originado a partir da quantização canônica adotada pelos físicos quânticos no início do séc. XX. Os campos desse tipo mais conhecidos são os campos de Klein-Gordon e o de Dirac. Mas logo percebeu-se que haviam inconsistências em adotar tais campos, como o surgimento, por exemplo, de energias negativas, como no caso do campo de Klein-Gordon, ou problemas de causalidade. Uma saída para esses problemas foi a quantização dos campos, onde foram impostas relações de comutação e anticomutação na álgebra deles, de acordo com a estatística obedecida por cada um. Uma outra foi o surgimento de uma nova classe de partículas, chamada de antipartículas.

Embora muitos autores prefiram iniciar um estudo de teoria quântica de campos através das relações de comutação, aqui, os axiomas apresentados não versarão diretamente a partir de tal álgebra, mas será construída uma teoria quântica com axiomas que norteiam o comportamento matemático de um objeto chamado de medida $d\mu$.

No presente estudo, serão apresentados, assim, dois tipos de campos quânticos, que passaremos a chamar apenas de campos, a depender do sistema de coordenadas adotada: o campo Euclidiano, que assume valores reais, mas onde a coordenada temporal tem a forma imaginária it , e o campo de Minkowski, com coordenada de tempo real.

2.6.1 Campos Euclidianos

A métrica Euclidiana é conhecida desde antes do surgimento da teoria da relatividade. É o tipo mais simples por apresentar o valor 1 em toda a sua diagonal. Em um espaço-tempo de 4 dimensões, por exemplo, ela tem a forma

$$\text{diag}(1, 1, 1, 1).$$

Outra métrica bastante simples é a de Minkowski. Ela apresenta o valor -1 em uma coordenada e o valor 1 nas demais. Em quatro dimensões é escrita como

$$\text{diag}(-1, 1, 1, 1).$$

Pode-se usar essa métrica para definir um operador diferencial de segunda ordem chamado de operador de onda \square . Assim, sua definição se dá de acordo com a expressão

$$\square = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_{d-1}^2}. \quad (2.62)$$

Pode-se também escrever essa expressão com base na métrica Euclidiana. Para isso, é necessário fazer uma transformação na coordenada temporal definindo a coordenada $x_0 = it$. Observe que fazendo isso, a equação (2.62) tem a forma de um Laplaciano

$$\Delta = \sum_{i=0}^{d-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \quad (2.63)$$

Tem-se, então, exatamente duas expressões iguais, só que escrita de duas formas diferentes, ou melhor, escritas a partir de duas métricas distintas. Na equação (2.62), tem-se que a coordenada temporal assume valores reais, e a métrica, como já dissemos, é de Minkowski. Já na equação (2.63), a coordenada tempo é imaginária $x_0 = it$ e a métrica é Euclidiana. Cada métrica define, assim, o seus respectivos espaços Euclidianos ou de Minkowski e o tipo de campo, respectivamente. Assim, campos que possuem coordenada de tempo imaginário são chamados de campos Euclidianos.

Por outro lado, os campos Euclidianos são definidos também pelas medidas de probabilidade $d\mu(\phi) = d\mu$ assumindo valores reais no espaço das distribuições reais, que denotaremos por $\mathcal{D}'(R^d)$ (a definição de distribuição se encontra logo a seguir), em que d é a dimensão do espaço-tempo. Eles apresentam dessa forma infinitos valores. E é por esse motivo que se diz que os campos apresentam infinitos graus de liberdade.

Antes de introduzir os axiomas que regem os campos Euclidianos, são necessárias algumas definições.

Por $\mathcal{D}(R^d)$ nós denotaremos o espaço das funções $f \in C^\infty$, infinitamente diferenciáveis, $R^d \rightarrow \mathbb{C}$, ao qual o suporte de cada função é um subconjunto compacto de R^d , ou seja, um subconjunto fechado e limitado (falar em suporte de uma função em um certo intervalo, significa que a função é nula quando calculada fora do respectivo intervalo). Por outro lado, os funcionais contínuos e lineares $\mathcal{D}(R^d) \rightarrow \mathbb{C}$ serão chamados de distribuições, sendo seu respectivo espaço denotado por $\mathcal{D}'(R^d)$.

Será introduzida como gerador funcional a transformada de Fourier inversa da medida $d\mu$ no espaço $\in \mathcal{D}'(R^d)$

$$S\{f\} = \int e^{i\phi(f)} d\mu.$$

Esse funcional tem importância vital. Ele será usado como referência para a aplicação dos axiomas, já que nele estão incluídas tanto a medida quanto o campo.

O termo $\phi(f)$, presente no funcional, é um pairing canônico entre o campo $\phi \in \mathcal{D}'(R^d)$ e uma função teste que assume valores reais, $f \in \mathcal{D}(R^d)$

$$\phi(f) = \langle \phi, f \rangle = \int \phi(x) f(x) dx. \quad (2.64)$$

O funcional $S\{f\}$ satisfaz as três condições:

1. Para toda sequência de funções $f_n \in \mathcal{D}$, quando $f_n \rightarrow f$ para alguma função $f \in \mathcal{D}$, tem-se $S\{f_n\} \rightarrow S\{f\}$.
2. O gerador funcional é positivo definido, ou seja, para todas as sequências de funções $f_n \in \mathcal{D}$ e números complexos $c_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \dots, N$, tem-se $\sum_{i=1, j=1}^N \bar{c}_i c_j S\{f_i - \bar{f}_j\} \geq 0$.
(a barra superior sobre f e o número complexo c indica que temos que tomar o conjugado complexo)
3. Normalização unitária, ou seja, $S\{0\} = 1$

Os axiomas a seguir irão caracterizar a medida $d\mu$, e portanto, os campos Euclidianos. Ao todo são cinco: analiticidade, regularidade, invariância, positividade da reflexão e ergodicidade.

2.6.1.1 Axioma (Analiticidade)

O funcional $S\{f\}$ é completamente analítico. Isso significa que para qualquer conjunto finito de funções testes $f_j \in \mathcal{D}(R^d)$ e de números complexos $z = \{z_1, z_2, \dots, z_N\}$, tem-se que o funcional do somatório

$$S\left\{\sum_{j=1}^N z_j f_j\right\}$$

é uma função analítica em C^N . Isso é equivalente a enunciar que a medida de probabilidade $d\mu$ decai mais rapidamente que uma função exponencial [6]. Por esse motivo, será conveniente definir a distribuição $d\mu$ dentro do espaço das distribuições que decaem rapidamente no infinito, \mathcal{S}' . Para definir esse espaço, será necessário uma outra definição

Definição. Um espaço de Schwarz \mathcal{S} é o espaço das funções φ

$$\mathcal{S} = \left\{ \varphi \in C^\infty : \|\varphi\|_{\alpha\beta} < \infty \right\}$$

com

$$\|\varphi\|_{\alpha\beta} = \sup_{x \in R} |x^\alpha \partial^\alpha f(x)|$$

e sendo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Dito em outras palavras, é o espaço das funções φ que, juntamente com suas derivadas, existem em qualquer ponto do espaço considerado e vão a zero rapidamente. Um exemplo em uma dimensão para o espaço real seria uma Gaussiana $f(x) = e^{-ax^2}$, onde todas as derivadas existem para todo x real e decrescem mais rapidamente que a função $1/x^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Definição. Defini-se o dual do espaço de Schwarz, nomeado espaço de Schwarz das distribuições temperadas (ou "bem comportadas "), denotado por \mathcal{S}' , o espaço de

todos os funcionais lineares contínuos u

$$u \in \mathcal{S} \Leftrightarrow u : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C},$$

onde existe um número real $k > 0$, tal que

$$|u(\varphi)| \leq k \|\varphi\| \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

O que equivale a dizer que quando $\varphi \rightarrow 0$, tem-se $u(\varphi) \rightarrow 0$.

2.6.1.2 Axioma (Regularidade)

Para algum p , tal que $1 \leq p \leq 2$, e para algum número complexo c , tem-se

$$|S\{f\}| \leq e^{c(\|f\|_{L_1} + \|f\|_{L_p}^p)},$$

em que $\|f\|_{L_p}^p = \int |f|^p dx$. Esse axioma vai garantir que a medida $d\mu$ será bem definida no espaço das distribuições temperadas \mathcal{S}' , assim seremos capazes de integrar os funcionais dos campos sobre todo o espaço.

2.6.1.3 Axioma (Invariância)

O funcional $S\{f\}$ é invariante sobre as transformações Euclidianas E no espaço R^d (translações, rotação e reflexão), ou seja, $S\{Ef\} = S\{f\}$. Com isso, quer-se dizer que a forma como uma simetria Euclidiana atua no funcional gerador $S\{f\}$ é definida como uma atuação apenas nas funções teste f . De forma equivalente, $d\mu$ é uma medida que também é um invariante sobre essas mesmas simetrias Euclidianas E , o que em outras palavras é $Ed\mu = d\mu$.

Para o próximo axioma é necessário definir um novo conjunto \mathcal{A} , na qual mapeia os campos $\phi \in \mathcal{D}'(R^d)$ ao corpo dos complexos \mathbb{C} da seguinte maneira

$$\mathcal{A} = \left\{ A(\phi) = \sum_{j=1}^N c_j e^{i\phi(f_j)}; c_j \in \mathbb{C} e f_j \in \mathcal{D}(R^d) \right\}. \quad (2.65)$$

Dessa forma, \mathcal{A} é um conjunto de funcionais exponenciais.

2.6.1.4 Axioma (Positividade da Reflexão)

Seja o subconjunto $\mathcal{A}_+ \subset \mathcal{A}$ formado pelos elementos que são funcionais exponenciais $A(\phi)$, de tal forma que as funções f sejam suportadas pelo conjunto $R^d = \{\mathbf{x}, t : t > 0\}$.

Em outras palavras, é um conjunto onde as funções testes apresentam como domínio apenas o semiespaço com tempo positivo. Seja também o operador θ cuja operação é a de mudar o sentido do tempo, ou seja, $\theta : \{\mathbf{x}, t\} \rightarrow \{\mathbf{x}, -t\}$. O axioma então é

$$0 \leq \langle \theta A, A \rangle = \int (\theta A)^{-} A d\mu. \quad (2.66)$$

O traço no canto direito superior dentro da integral significa o complexo conjugado do termo entre parêntesis.

2.6.1.5 Axioma (Ergodicidade)

O subgrupo das translações temporais $T(s)$ atua de forma ergódica na medida de probabilidade $d\mu$, ou seja, para todas os funcionais integráveis $A(\phi)$ sob a medida $d\mu$ vale a relação

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t T(s) A(\phi) T(s)^{-1} ds = \int A(\phi) d\mu(\phi).$$

Esse último axioma tem uma aplicação física importante no estudo da teoria de transição de fases para campos quânticos, é o fato de que se uma medida $d\mu$ satisfaz esse axioma, então o vácuo relacionado a essa medida é único [6], isso significa que a medida está associada a uma sistema com uma única fase (fase pura), ou seja, tal unicidade tem implicação direta na questão da transição de fase de um sistema. Isso será visto com mais detalhes no capítulo 3.

Agora será construído um espaço de atuação para esses campos Euclidianos ϕ , ou melhor, para os funcionais exponenciais da forma $A(\phi)$. Primeiramente, esse espaço é denotado por \mathcal{E} e definido como o espaço \mathcal{A} , contendo a operação de produto interno definido pela equação (2.66). De forma sintetizada, a notação que usaremos para tal espaço é $\mathcal{E} = L_2(\mathcal{D}'(R^d), d\mu)$, que significa de quadrado integrável sobre a medida $d\mu$ em $\mathcal{D}'(R^d)$.

É possível fazer uma correspondência de vetores entre o espaço de Hilbert e o espaço \mathcal{E} , ou ainda melhor, pode-se construir um espaço de Hilbert \mathcal{H} a partir de um subconjunto seu $\mathcal{E}_+ \subset \mathcal{E}$. Para tal construção, considere primeiro o subespaço de \mathcal{E} formado com todos os elementos $A(\phi) \in \mathcal{A}_+$ e que possuem a mesma operação de produto interno que o espaço \mathcal{E} . Ele será denotado por \mathcal{E}_+ .

Definimos uma forma bilinear b no espaço $\mathcal{E}_+ \otimes \mathcal{E}_+$ por

$$b(A, B) = \langle \theta A, B \rangle_{L_2} = \int (\theta A)^{-} B d\mu = \langle \theta A, B \rangle_{\mathcal{E}}. \quad (2.67)$$

A partir do axioma da positividade da reflexão, segue que $b(A, B) \geq 0$. Seja ainda o espaço nulo \mathcal{N} dos vetores de \mathcal{E}_+ que apresentam valor nulo na equação (2.67), ou seja,

onde $b(B, B) = 0, \forall B \in \mathcal{N}$. Dessa forma, o espaço de \mathcal{H} é o espaço formado pelos vetores $A + \mathcal{N}$, tal que se $A \in \mathcal{E}_+$ e $B \in \mathcal{N}$ então $[A + B] \in \mathcal{H}$. Ele é completado a partir da classe de equivalência $\mathcal{E}_+/\mathcal{N}$ na métrica definida pela equação (2.67). Assim, a relação entre os dois espaços é feita a partir da inclusão da classe de equivalência \mathcal{N} . Ou de forma equivalente, e mais formal, defina a operação de incorporação canônica $\hat{\cdot} : \mathcal{E}_+ \rightarrow \mathcal{H}$, tal que, $A^\wedge = A + \mathcal{N} \in \mathcal{H}$. Essa incorporação $\hat{\cdot}$ faz o mapeamento de vetores $A \in \mathcal{E}_+$ em vetores $A + \mathcal{N}$ no espaço de Hilbert.

De forma análoga, pode-se usar $\hat{\cdot}$ para transformar operadores S que atuam em \mathcal{E}_+ em operadores S^\wedge , que atuam em \mathcal{H} . Para isso, basta definir o operador S^\wedge da seguinte maneira

$$S^\wedge A^\wedge = (SA)^\wedge \quad (2.68)$$

ou ainda, de forma semelhante, tendo em vista que

$$\langle A^\wedge, B^\wedge \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \theta A, B \rangle_{\mathcal{E}} \quad (2.69)$$

a ação de S^\wedge pode assim ser definida

$$\langle A^\wedge, S^\wedge B^\wedge \rangle_{\mathcal{H}} = \langle A^\wedge, (SB)^\wedge \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \theta A, SB \rangle_{\mathcal{E}}. \quad (2.70)$$

Diagramaticamente, fica assim

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_+ & \xrightarrow{S} & \mathcal{E}_+ \\ \downarrow \hat{\cdot} & & \downarrow \hat{\cdot} \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{S^\wedge} & \mathcal{H} \end{array}$$

Figura 2.1 Ilustração das relações entre \mathcal{E}_+ e \mathcal{H}

Sendo que $S : \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{E}_+ \rightarrow \mathcal{E}_+$ e $S : \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$. Onde $\mathcal{D}(S)$ é o domínio do não limitado operador S , cuja a definição encontra-se logo a seguir na equação (2.71).

Definição. Um operador S é não limitado quando atuando em um estado, ou vetor A , existe uma constante real c tal que

$$\|SA\| > c\|A\|. \quad (2.71)$$

2.6.2 Axiomas para o Espaço de Minkowski

Os campos de Minkowski possuem coordenada temporal real em contraposição aos campos Euclidianos, que possuem tempo imaginário puro. Assim, para ir de um campo imaginário para um campo de tempo real basta fazer uma transformação $t \rightarrow -it$ na coordenada tempo no espaço Euclidiano.

Pode-se demonstrar que para campos Euclidianos a evolução temporal no espaço de Hilbert se dá por meio do operador $T(t) = e^{it\mathbf{H}}$, em que \mathbf{H} é o Hamiltoniano, autoadjunto, do sistema e a medida $d\mu$ no espaço \mathcal{D}' obedece aos axiomas de positividade da reflexão, 2.6.1.4, invariância na translação do tempo e reflexão [6]. Para o caso de um vetor $x = (\mathbf{x}, t)$ no espaço de Minkowski, o campo de tempo real $\phi(\mathbf{x}, t)$ evolui no tempo de acordo com a expressão

$$\phi(\mathbf{x}, t) = e^{it\mathbf{H}} \phi(\mathbf{x}, 0) e^{-it\mathbf{H}}. \quad (2.72)$$

É importante salientar que a definição do pairing $\phi(f)$ definida no espaço Euclidiano continua válida aqui no espaço de Minkowski, ou seja, $\phi(f) = \int \phi(x) f(x) d\mu$. Esse campo obedece aos axiomas 2.6.1.1 (*analiticidade*), 2.6.1.2 (*regularidade*), 2.6.1.3 (invariância), e 2.6.1.4 (positividade da reflexão), e se f é real, o campo é auto-adjunto e portanto uma observável. Fisicamente, ele mede a intensidade do campo ϕ na posição x no espaço-tempo.

Passemos aos axiomas do espaço de Minkowski.

2.6.2.1 Covariância

Existe no espaço de Hilbert \mathcal{H} , espaço dos estados quânticos, uma representação unitária do grupo das transformações de Lorentz $U(g)$. Para os geradores ($H = P_0, \mathbf{P}$) do subgrupo das translações, o espectro está dentro do cone $p_0^2 - \mathbf{p}^2 \geq 0$, onde $p_0 \geq 0$. Existe um vetor Ω , chamado de vácuo, que é invariante sobre a ação de $U(g)$.

2.6.2.2 Observáveis

Os operadores de campo $\phi(f)$, onde $f \in \mathcal{S}(R^d)$, são densamente definidos no espaço de Hilbert \mathcal{H} . Da mesma forma também o é o subespaço definido pelos vetores $\phi(f_1), \dots, \phi(f_n)\Omega$, onde $n \geq 0$ e $f_i \in \mathcal{S}(R^d)$. O campo $\phi(f)$ é covariante sobre a ação de $U(g)$.

2.6.2.3 Localidade

Se o suporte das funções f e h são do tipo espaço, ou seja, $\mathbf{x}^2 - t^2 \geq 0$, então $\phi(f)\phi(h) = \phi(h)\phi(f)$.

2.6.2.4 Vácuo

O vetor vácuo Ω é o único estado, a menos de um fator multiplicativo de fase, no espaço de Hilbert \mathcal{H} que é invariante sobre translações no tempo.

Existe um teorema, [6], onde para uma dada distribuição $d\mu$ no espaço $\mathcal{D}'(R^d)$ que satisfaça aos axiomas 2.6.1.1 (*analiticidade*), 2.6.1.2 (*regularidade*), 2.6.1.3 (invariância), e 2.6.1.4 (positividade da reflexão), então o campo de tempo real ϕ que é determinado por $d\mu$ satisfaz os axiomas acima 2.6.2.1 (covariância), 2.6.2.2 (observáveis), 2.6.2.3 (*localidade*). Ainda o mesmo teorema afirma que o axioma 2.6.1.5 (*ergodicidade*) é satisfeito se e somente se o axioma 2.6.2.4 (vácuo) é satisfeito.

Antes do estudo da transição de fase, faz-se necessárias ainda algumas definições e construções.

2.6.3 Medida Gaussiana

A medida Gaussiana é definida como

$$d\nu = \prod_{i=1}^n e^{-a_i x_i^2} dx_i, \quad (2.73)$$

em que o índice n pode ser infinito ou não.

Uma forma bilinear t associada a um operador A é o mapa

$$t : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \rightarrow \vartheta$$

com ϑ indicando um escalar complexo. Esse mapa é linear no segundo fator e conjugado linear, no primeiro. Assim, considere uma forma bilinear associada a um operador C no espaço $\mathcal{S}(R^d) \otimes \mathcal{S}(R^d)$ escrito como

$$C(f, g) = \langle f, Cg \rangle .$$

Com essa expressão, define-se a função geradora de uma medida Gaussiana $d\phi_C$ no espaço $\mathcal{S}'(R^d)$ através de

$$S\{f\} = e^{-\langle f, Cf \rangle / 2} = \int e^{i\phi(f)} d\phi_C. \quad (2.74)$$

Se denotarmos $q_j = \phi(f_j)$ para $j = 1, 2, \dots, n$ a referida medida Gaussiana pode ser escrita explicitamente como

$$d\phi_C = (\det C)^{1/2} (2\pi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{ij} q_i C_{ij}^{-1} q_j\right) \prod_{i=1}^n dq_i,$$

onde C é a matriz $C_{ij} = \langle f_i, C f_j \rangle$ e C^{-1} é a sua inversa. A indicação no canto inferior direito para a medida Gaussiana $d\phi_C$, refere-se à dependência da respectiva matriz formada através do operador C .

Na linguagem corrente de teoria quântica de campos, o termo $C(x, y) = \langle y, C x \rangle$ é conhecido como propagador. Além disso, ele também aparece como função de Green para a equação de Laplace

$$(-\Delta + m^2) C(x, y) = \delta(x - y) \quad (2.75)$$

Ele também é chamado de Covariância livre e denotado por C_ϕ . É comum escrever o operador C como $(-\Delta + m^2)^{-1}$..

2.6.4 Espaço de Fock e ordenamento de Wick

Seja \mathcal{S} um espaço de Hilbert real. Uma representação das relações de comutação canônicas sobre \mathcal{S} é um par de mapas lineares $f \rightarrow a(f)$ e $g \rightarrow a^*(g)$ do espaço \mathcal{S} para os operadores a e a^* no denso domínio \mathcal{D} de um complexo espaço de Hilbert \mathcal{H} , tal que sejam satisfeitas as seguintes relações para $A, A_1, A_2 \in \mathcal{D}$ e para todos $f, g \in \mathcal{S}$

$$a(f) \mathcal{D} \subset \mathcal{D}, \quad a^*(f) \mathcal{D} \subset \mathcal{D}, \quad (2.76)$$

$$\langle A_1, a(f) A_2 \rangle = \langle a^*(g) A_1, A_2 \rangle, \quad (2.77)$$

$$[a(f), a(g)] = [a^*(f), a^*(g)] = 0, \quad (2.78)$$

$$[a(f), a^*(g)]A = \langle f, g \rangle A. \quad (2.79)$$

Essa representação é chamada representação de Fock para bósons se existir um vetor unitário $\Omega \in \mathcal{H}$ tal que

$$a(f) \Omega = 0$$

para todo $f \in \mathcal{S}$ e tal que \mathcal{D} é subespaço gerado pela expansão de $a^*(f_1) \dots a^*(f_n) \Omega$, com $n = 0, 1, \dots$

Considere o espaço $\mathcal{H} = L_2(\mathcal{S}'(R^d), d\phi_C)$ com $\Omega = 1$ e \mathcal{D} sendo o espaço das funções polinomiais em $\mathcal{S}'(R^d)$. Defina $\phi(f)$ como um operador multiplicativo no espaço de Hilbert com domínio em \mathcal{D} e

$$\pi(f) = -i \langle f, \frac{\delta}{\delta\phi} \rangle + 2^{-1} i \phi(C^{-1}f), \quad (2.80)$$

em que C^{-1} é um operador que atua de $\mathcal{S}'(R^d)$ em $\mathcal{S}'(R^d)$. É possível mostrar [6], que

as seguintes relações são satisfeitas

$$[\phi(f), \pi(g)] = i \langle f, g \rangle, \quad (2.81)$$

$$[\phi(f), \phi(g)] = [\pi(f), \pi(g)] = 0. \quad (2.82)$$

Suponha ainda que C , operador covariância, possua raiz quadrada, onde $C^{\pm 1/2}$ são operadores que atuam de $\mathcal{S}(R^d)$ em $\mathcal{S}(R^d)$. Desta forma, definem-se

$$a(f) = \frac{1}{2} \phi(C^{-1/2} f) + i\pi(C^{1/2} f), \quad (2.83)$$

$$a^*(f) = \frac{1}{2} \phi(C^{-1/2} f) - i\pi(C^{1/2} f). \quad (2.84)$$

a e a^* definem uma representação de Fock de relações de comutação canônicas [6].

Para o caso do espaço de Fock para partículas fermiônicas, considere que \mathcal{F}_n seja o espaço das funções simétricas que são L_2 no espaço R^{nd} com \mathcal{F}_0 sendo os números complexos. Considere ainda que

$$\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n, \quad (2.85)$$

com $\Omega = 1 \in \mathcal{F}_0$. $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$ é um espaço que representa a partícula n . E para $f = \{f_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}$, sendo $f_n \in \mathcal{F}_n$, então o operador

$$Nf = \{nf_n\}_{n=0}^{\infty}$$

com domínio

$$\mathcal{D}(N) = \left\{ f : f \in \mathcal{F}, \sum n^2 \|f_n\|^2 < \infty \right\}$$

chama-se operador número. Por outro lado, seja E_n a projeção ortogonal do espaço \mathcal{F} em \mathcal{F}_n , ou seja, dentre todas as funções de \mathcal{F} , o projetor seleciona apenas as funções $f_n \in \mathcal{F}_n$. Logo a ortogonalização de monômios até o grau n tem a seguinte definição

$$: \phi(f_1) \phi(f_2) \dots \phi(f_n) := E_n \phi(f_1) \phi(f_2) \dots \phi(f_n). \quad (2.86)$$

Para o caso em que $f_1 = \dots = f_n = f$

$$: \phi(f)^n := E_n \phi(f)^n = c^{n/2} P_n(c^{-1/2} \phi(f)) = c^{n/2} \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^j n!}{(n-2j)! j! 2^j} \phi(x)^{n-2j},$$

$P_n(x)$ são os polinômios de Hermite e

$$c = \langle f, Cf \rangle = \int \phi(f)^2 d\phi_c.$$

A expressão (2.86) define o ordenamento de Wick. Algumas vezes a dependência do ordenamento pela covariância C é explicitado com a notação $:\phi(f)^n:_C$.

O espaço de Fock para férmions é o espaço \mathcal{F} , equação (2.85), onde

$$\mathcal{F}_n = A_n [\otimes^n \mathcal{F}_1]$$

para \mathcal{F}_1 sendo um espaço de Hilbert, A_n , o operador de projeção antissimétrico, e o índice n sobre o produto tensorial representando um produto de n cópias do espaço \mathcal{F}_1 e $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$ define o estado de n partículas. Sendo $f \in \mathcal{F}_n$ e $g \in \mathcal{F}_1$, os operadores a e a^* são definidos como

$$\begin{aligned} a^*(g) f(x_1, \dots, x_{n+1}) &= (n+1)^{1/2} A_{n+1} g(x_{n+1}) f(x_1, \dots, x_n), \\ a(g) f(x_1, \dots, x_{n-1}) &= (n)^{1/2} \int g(x_n)^- f(x_1, \dots, x_n) dx_n. \end{aligned}$$

com as relações de anticomutação

$$\{a(f), a(g)\} = \{a^*(f), a^*(g)\} = 0, \quad (2.87)$$

$$\{a(f), a^*(g)\} = \langle f, g \rangle. \quad (2.88)$$

O produto interno acima é feito em \mathcal{F}_1 e para $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ e com o produto interno feito em \mathcal{F} vale

$$\langle A_1, a(f) A_2 \rangle = \langle a^*(f) A_1, A_2 \rangle,$$

$$a(f) \Omega = 0,$$

$$a^*(g) \Omega = g \in \mathcal{F}_1.$$

2.6.5 Construção de uma medida $d\mu$ a partir de um potencial V

Essa seção será útil para a demonstração da existência de duas fases para a TQC escalar bidimensional, que será estudada na seção (3.4). Mas antes de construirmos a medida que usaremos na referida seção, será preciso definir alguns termos.

Definição. O domínio de um operador Laplaciano Δ são todas as funções $f(x) \in L_2$, tal que $\nabla f \in L_2$.

Definição. Condições de fronteira de Dirichlet para um operador C na fronteira $\partial\Lambda$ de um volume finito Λ significa que as funções $f(x)$ no domínio do operador $\Delta_{\partial\Lambda}$ se anulam quando $x \in \partial\Lambda$. Para o operador C com as condições de Dirichlet atuando na fronteira, escrevemos $C_{\partial\Lambda} = (-\Delta_{\partial\Lambda} + m^2)^{-1}$.

Define-se uma medida $d\mu_\Lambda$ num volume finito Λ com condições de fronteira de Dirichlet na fronteira $\partial\Lambda$ pela expressão

$$d\mu_\Lambda = \frac{1}{Z} e^{-V(\Lambda)} d\phi_{C_{\partial\Lambda}}, \quad (2.89)$$

onde

$$V(\Lambda) = \int : P(\phi(x)) :_{C_\phi} dx, \quad (2.90)$$

sendo P um polinômio limitado inferiormente e o fator de normalização dado por

$$Z = Z(\Lambda) = \int e^{-V(\Lambda)} d\phi_{C_{\partial\Lambda}}. \quad (2.91)$$

O ordenamento de Wick é feito com respeito à covariância livre $C_\phi = (-\Delta + m^2)^{-1}$.

Transição de Fase

Considere um campo quântico ϕ determinado pela medida $d\mu$ definida no espaço \mathcal{S}' , tal que ela satisfaça os axiomas 2.6.1.1 até ao 2.6.1.4 da seção 2.6, em outras palavras, trataremos de campos Euclidianos. Dessa forma, a medida $d\mu$ pode ser decomposta em somas de termos irredutíveis, em que cada um separadamente satisfaz aos cinco axiomas, do 2.6.1.1 ao 2.6.1.5. O último desses axiomas, o axioma da ergodicidade, é o que caracteriza o que se chama fase pura. Vê-se que por esse axioma a fase pura não apresenta mais de um vácuo [6]. Assim, tem-se uma mistura, ou mais comumente, transição de fase, quando a medida $d\mu$ pode ser escrita como uma soma desses termos irredutíveis, fases puras, com um único vácuo, cada. Nesse capítulo será abordado algumas formas pra sabermos se um sistema apresenta ou não transição de fase.

3.1 Modelos clássicos para a análise da transição de fase em TQC

Como ilustração simples de transição de fase, serão analisados sistemas cujas análises são feitas com base em métodos aproximativos chamados de modelos clássicos para a teoria de campos. Considere uma situação em que um sistema é caracterizado por uma variável de Ising ξ , equação (2.52), assumindo os valores ± 1 em cada ponto do campo em rede. Viu-se na seção 2.4, que fenômenos descritos pelo modelo de Ising são os cooperativos e, portanto, nesse sistema cada ponto i interfere em um outro ponto $j \neq i$. Logo, a medida que descreve o comportamento desse sistema é

$$d\mu = \alpha d\mu_+ + (1 - \alpha) d\mu_- \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

tal que

$$\langle \xi_i \rangle_{+} = \int \xi_i d\mu_+ > 0,$$

$$\langle \xi_i \rangle_{-} = \int \xi_i d\mu_- < 0.$$

Podem-se, assim, serão associadas as medidas $d\mu_+$ e $d\mu_-$ aos pontos da rede em que a variável de Ising, em quase todos os pontos, apresenta valores $+1$ ou -1 , respectivamente.

Portanto, $d\mu$ representa uma transição de fase ou uma mistura das fases puras, ou irreduzíveis, $d\mu_+$ e $d\mu_-$.

Quando há a presença de interação do sistema com campos externos, informações extras precisam ser acrescentadas na medida. Conseqüentemente, os cálculos ficam mais trabalhosos e então se buscam técnicas que simplifiquem o problema, como a linearização de polinômios que descrevem a interação e a descrição do campo médio para a medida.

Um caso simples que podemos estudar onde essas técnicas podem ser usadas é a da seguinte medida

$$d\mu = \frac{1}{Z} \exp \left\{ - \left[\sum_{i \in Z^d} \left(\frac{1}{2} (\nabla \xi_i)^2 + P(\xi_i) \right) \right] \right\} \prod_{i \in Z^d} d\xi_i. \quad (3.1)$$

Essa expressão se refere a um sistema genérico descrito por um campo em rede, em que $P(\xi)$ é um polinômio que caracteriza possíveis interações que podem acontecer nesse sistema, Z é a constante de normalização e o índice i do somatório se refere a cada ponto da rede. Faremos aqui para o caso discreto em que $i \in Z^d$, mas o mesmo vale para campos ϕ contínuos.

Na técnica do campo médio, espera-se que a medida $d\mu$ concentre valores nas proximidades dos pontos de máximo do expoente, assim como uma função gaussiana concentra seu valor em ponto extremo. No caso da distribuição acima esses pontos são conseguidos nos pontos mínimos de

$$\sum_{i \in Z^d} \left(\frac{1}{2} (\nabla \xi_i)^2 + P(\xi_i) \right),$$

ou seja, nos mínimos globais ξ^c do polinômio $P(\xi)$. Esses mínimos são chamados de valores clássicos de ξ . Assim, em cada ponto i da rede, faz-se $\xi_i = \xi^c$. Se o polinômio apresenta um único mínimo global, então existe apenas uma única fase, caso contrário, cada mínimo global $\xi^c, \xi^{c'}, \dots$ indicará uma fase diferente, e portanto, tem-se a ocorrência de transição de fase com distintas medidas de volume infinito, ou em outras palavras, $d\mu$ pode ser escrito como

$$d\mu = \alpha_{\xi^c} d\mu_{\xi^c} + \alpha_{\xi^{c'}} d\mu_{\xi^{c'}} + \dots$$

Será visto no capítulo 5 uma técnica muito parecida, só que ao invés de tomarmos os mínimos do polinômio, será tomado o extremo da equação (3.1), derivando seu expoente. Ela será chamado de método de ponto de sela.

Como qualquer medida de aproximação, a técnica do campo médio apresenta suas limitações. Normalmente, ela é válida quando o polinômio apresenta uma grande barreira de potencial. O significado dessa afirmação pode ser analisada por meio de flutuações em

torno do ponto de mínimo. Considere que essa flutuação seja escrita como

$$\chi_i = \xi_i - \xi^c. \quad (3.2)$$

Expandindo o polinômio em termos dessa variável, em torno de ξ^c , obtém-se

$$\begin{aligned} P(\chi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}(\xi^c) (\xi - \xi^c)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}(\xi^c) \chi^n = P(\xi^c) + \frac{P''(\xi^c) \chi^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

O termo de derivada primeira em ξ^c não foi colocado porque trata-se de um ponto crítico, onde a primeira derivada é nula. Para este polinômio, se $P''(\xi^c) \gg P^{(j)}(\xi^c)$, $\forall j \in N \geq 3$, e $|P^{(j)}(\xi^c)| \leq a P^{(n)}(\xi^c)$, para $3 \leq j < n = \deg P$, diz-se que a barreira de potencial de P que separa dois mínimos ξ^c e $\xi^{c'}$ é suficientemente alta e larga e portanto aproximação por campo médio é considerada razoável. Nesse caso, o polinômio é escrito apenas como

$$P_{\text{SC}} = P(\xi^c) + \frac{P''(\xi^c) \chi^2}{2!}.$$

Utilizando essa igualdade em (3.1), a medida $d\mu$ associada a ela é

$$d\mu_{\text{SC}} = \frac{1}{Z} \exp \left\{ - \left[\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \left(\frac{1}{2} (\nabla \chi_i)^2 + P(\xi^c) + \frac{P''(\xi^c) \chi_i^2}{2!} \right) \right] \right\} \prod_{i \in \mathbb{Z}^d} d\chi_i.$$

Observa-se que essa medida é Gaussiana e portanto $\langle \chi_i \rangle_{\text{SC}} = 0$, o que também corresponde dizer, a partir da definição feita pela equação (3.2), que $\langle \xi \rangle_{\text{SC}} = \xi^c$. Essa aproximação é chamada de semiclássica, justificando o índice SC no qual ela é considerada. Algumas vezes a adição de termos de ordem mais alta no polinômio na teoria semiclássica, pode acontecer a igualdade do polinômio em pontos distintos, $P(\xi^c) = P(\xi^{c'})$. Isso elimina a transição de fase. Entretanto, nesse caso, P e $d\mu$ estão pertos de transição de fase, no sentido de que para algum polinômio efetivo $P_{\text{eff}} = P + \delta P$, sendo δP pequeno comparado ao polinômio P , a transição de fase ocorre.

Outro ponto que algumas vezes se associa a transição de fase, é quando se aplica algum grupo de simetria a medida e verifica-se que há transição de fase. Isso é chamado de transição de fase com quebra de simetria. Lembrando que grupo de simetria é o conjunto formado por elementos que quando aplicados ao sistema, seja em coordenadas, seja no campo, ou em alguma variável do sistema, a ação fica invariante. Isso se aplica por exemplo a sistemas com graus de liberdade infinito como os campos ϕ tratados aqui, onde as funções obedecem a uma álgebra de coordenadas que comutam entre si. Para ilustrar, considere o modelo de Ising, equação (2.52), com $h = 0$. A transformação $\xi \rightarrow -\xi$ deixa a ação invariante. Entretanto, quando $\beta > \beta_c$, existem duas fases puras $d\mu_{\pm}$. Aqui,

fazer uma mudança de $\xi \rightarrow -\xi$ leva de um estado fundamental para outro, ou seja, $\int \xi d\mu_+ \neq \int \xi d\mu_-$, de fato $\int \xi d\mu_+ = - \int \xi d\mu_-$.

3.2 Outras formas de verificação de transição de fase em TQC

Um objeto que é muito importante para o estudo das transições de fase em teoria quântica de campos é a medida de probabilidade $d\mu$. Na prática, ela é construída a partir de uma Lagrangiana \mathcal{L} , ou interação $V(\phi)$, e uma condição de fronteira. E de acordo com a escolha da condição, uma nova medida $d\tilde{\mu}$ (fase ou mistura de fases puras) pode ser construída para um mesmo \mathcal{L} [6]. Assim, diz-se que \mathcal{L} tem uma transição de fase de primeira ordem.

Uma outra forma de se verificar transições de fase de primeira ordem é através da análise de descontinuidades em funções de estado do sistema. Por exemplo, considere um volume finito do espaço-tempo Λ com uma medida $d\mu_\Lambda$. Assim, a energia livre por unidade de volume é definida

$$a_\Lambda(h) = |V|^{-1} \ln \left\{ \int e^{h \int_\Lambda \phi(x) dx} d\mu_\Lambda \right\}, \quad (3.3)$$

onde a medida $d\mu_\Lambda$ é a mesma construída na seção 2.6.5. Existe um teorema [6], o qual mostra que para $\Lambda \uparrow R^2$, tem-se $a_\Lambda(h) \rightarrow a(h)$ e a partir daí é possível mostrar [6] que $da/dh = \langle \phi(x) \rangle_h$, onde a medida para esse valor esperado é dada por $\exp\left(h \int \phi(x) dx\right) d\mu$ e a normalização, $\int \exp\left(h \int \phi(x) dx\right) d\mu$. Havendo um ponto de descontinuidade no ponto h_0 da função $\frac{da}{dh}$, esse ponto é uma transição de fase de primeira ordem e tem pelo menos duas fases.

A transição de fases pode ter ainda um terceiro ponto de vista. Ao invés de variarmos as condições de fronteira, como no primeiro caso, considere uma variação na Lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \delta\mathcal{L}$. Se a medida

$$d\mu_{\mathcal{L}} = d\mu_{\mathcal{L}_0 + \delta\mathcal{L}}$$

é descontínua em $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$, então distintas fases

$$d\mu_{\mathcal{L}} = \lim_{j \rightarrow \infty} d\mu_{\mathcal{L}_0 + \delta\mathcal{L}_j}$$

podem ser construídas a partir da Lagrangiana \mathcal{L}_0 por diferentes escolhas para a sequência $\delta\mathcal{L}_j \rightarrow 0$. Assim, estuda-se transições de fase fazendo-se variar parâmetros contínuos

(como a lagrangiana) produzindo-se descontinuidades.

O principal significado para a transição de fase em Teoria Quântica de Campos é aquele aplicado ao problema de longas distâncias para o campo (como por exemplo o espalhamento). Assim sendo, o próximo teorema traz que é necessário e suficiente que, em longas distâncias, $|x - y| \rightarrow \infty$, para haver transição de fase, uma função especial chamada de função truncada de Schwinger não pode ser nula. Então, podemos assim defini-la para o caso de dois pontos x e y

$$S_2(x - y) = \langle \phi(x) \phi(y) \rangle^T = \langle \phi(x) \phi(y) \rangle - \langle \phi(x) \rangle \langle \phi(y) \rangle, \quad (3.4)$$

onde T significa truncada, ou para o caso de quatro pontos x_1, x_2, x_3 e x_4 , essa função por ser assim definida

$$\begin{aligned} & \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \rangle^T = \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \rangle - \\ & - \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle \langle \phi(x_3) \phi(x_4) \rangle - \langle \phi(x_1) \phi(x_3) \rangle \langle \phi(x_2) \phi(x_4) \rangle \\ & - \langle \phi(x_1) \phi(x_4) \rangle \langle \phi(x_2) \phi(x_3) \rangle. \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.3 Teorema para a existência de transição de fases

Seja uma medida $d\mu$ no espaço \mathcal{S}' , satisfazendo aos axiomas 2.6.1.1 (analiticidade), 2.6.1.2 (regularidade), 2.6.1.3 (invariância), 2.6.1.4 (positividade da reflexão) e a desigualdade FKG. A função Schwinger de dois pontos truncada, $S_2(x - y)$, tende a zero quando $|x - y| \rightarrow \infty$ se e somente se vale o axioma 2.6.1.5 (ergodicidade), ou seja, o vácuo é único.

Demonstração.

(\Rightarrow)

Considere duas funções

$$\sigma(x) = \begin{cases} x, & \text{se } |x| \leq 1 \\ \text{sgn}x, & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

e

$$\rho(x) = \frac{1}{2} (1 + \sigma(x)). \quad (3.7)$$

E para uma função f não negativa no espaço \mathcal{S} considere que

$$\sigma(f) = \sigma(\phi(f)),$$

$$\rho(f) = \rho(\phi(f)). \quad (3.8)$$

Antes de dar continuidade a demonstração, será preciso demonstrar um lema.

3.3.1 Lema

Dada as definições acima para σ e ρ , tem-se que $\phi(f) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \sigma[\lambda^{-1}f]$.

Demonstração do lema 3.3.1. Defina a seguinte função

$$\lambda \sigma(\lambda^{-1}x) = \begin{cases} x, & \text{se } |x| \leq \lambda \\ \lambda \operatorname{sgn}x, & \text{se } |x| \geq \lambda \end{cases}. \quad (3.9)$$

Observe que quando $\lambda \rightarrow \infty$ essa função tende a x , ou seja, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \sigma(\lambda^{-1}x) = x$. $\forall f \in \mathcal{S}$ segue que $\phi(f) \in \mathcal{S}'$ para um campo real e além disso, ele é limitado

$$|\phi(f)| < C\|f\| \Rightarrow \exists \lambda : |\phi(f)| < \lambda$$

e portanto, a partir da primeira linha de (3.9)

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \sigma(\lambda^{-1}\phi(f)) = \phi(f).$$

E o lema fica assim demonstrado.

A partir do lema 3.3.1, ou melhor, da identidade demonstrada nele, pode-se concluir que o produto de σ 's ou ρ 's expande o espaço \mathcal{E} , de acordo com a definição desse espaço na seção 2.6.1. Se a função f está restringida ao suporte compacto R_+ , esse mesmo produto expande \mathcal{E}_+ . Fazendo o mapeamento $\hat{\cdot} : \mathcal{E}_+ \rightarrow \mathcal{E}_+/\mathcal{N} \subset \mathcal{H}$, o mesmo produto também expande \mathcal{H} . Considere que o estado ψ seja a imagem desse produto. Para continuar a demonstração, será considerado válida a seguinte assertiva, demonstrada em [22]

$$\langle \psi, e^{-tH}\psi \rangle - \langle \psi, \Omega \rangle^2 \leq \langle \phi(f)^\wedge \Omega, e^{-tH}\phi(f)^\wedge \Omega \rangle - \langle \phi(f)^\wedge \Omega, \Omega \rangle^2.$$

O estado $\Omega \in \mathcal{H}$ representa o vácuo. Assim $P_\Omega = |\Omega\rangle\langle\Omega|$ representa a projeção ortogonal em Ω e $e^{-tH}\Omega = \Omega$. Com essa definição, a assertiva acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \langle \psi, e^{-tH}\psi \rangle - \langle \psi, \Omega \rangle^2 &= \langle \psi, e^{-tH}\psi \rangle - \langle \psi, e^{-tH}P_\Omega\psi \rangle \\ &\leq \langle \phi(f)^\wedge \Omega, e^{-tH}\phi(f)^\wedge \Omega \rangle - \langle \phi(f)^\wedge \Omega, e^{-tH}P_\Omega\phi(f)^\wedge \Omega \rangle \\ \Rightarrow \langle \psi, e^{-tH}(1 - P_\Omega)\psi \rangle &\leq \langle \phi(f)^\wedge \Omega, e^{-tH}(1 - P_\Omega)\phi(f)^\wedge \Omega \rangle \\ &= \int S_2(x - y) f(x) f(y) dx dy, \end{aligned}$$

onde $S_2(x - y)$ é exatamente a função truncada de dois pontos (3.4). Observe que quando

essa função tende a zero, não há vetores nulos para o operador H no subespaço $(1 - P_\Omega) \mathcal{H}$, e assim segue que não há outro vácuo. Para a demonstração da volta (\Leftarrow) ver [22]

3.4 A existência de duas fases para o campo escalar no espaço comutativo bidimensional

Temos estudado, até aqui, alguns métodos mais gerais para o estudo da transição de fases. Nessa seção, seremos mais específicos a esse respeito. Vamos trabalhar com um polinômio V que descreve a interação a que o sistema está submetido através do termo ϕ^4 mais um termo associado a massa do campo que é o termo ϕ^2 . Essa função V é dada por

$$V(\phi) = \lambda : (\phi^2 - \lambda^{-1})^2 :_{\lambda^{1/2}} . \quad (3.10)$$

O índice inferior direito apenas faz uma menção de que o ordenamento de Wick é feito levando-se em consideração que $C = (\Delta - \lambda)^{-1}$.

Esse é um tipo de interação bastante estudada, e que é objeto do nosso estudo. Será mostrado no próximo teorema que para um sistema bidimensional sujeito ao potencial dado pela equação (3.10) existe mais de uma fase. Esse teorema é bem geral, mas o ponto é que para esse sistema ϕ^4 , múltiplas fases significam duas. Em uma delas, o campo oscila em torno de zero, em um mínimo de potencial, e na outra, o campo oscila em torno de outro valor que é diferente de zero, assim não existindo uma terceira possibilidade de fase [5].

3.4.1 Teorema

Considere a medida $d\mu$, construída na seção (2.6.5), com o potencial V referido em (3.10). Se $\lambda > 0$ for suficientemente pequeno, então a medida $d\mu$ possui múltiplas fases.

Demonstração.

Considere o plano R^2 coberto por uma rede de quadrados de áreas unitárias Δ_i . E que o campo médio nessa pequena região seja dado por

$$\phi(\Delta) = \int_{\Delta} \phi(x) dx.$$

Com esse campo, defina a variável $\sigma(\Delta) = \text{sgn } \phi(\Delta)$. $\sigma(\Delta)$ é o que se chama de variável de Ising, porque assume os valores ± 1 na rede. A partir da simetria de $d\mu$ quando

$\phi \rightarrow -\phi$, chega-se ao valor esperado

$$\langle \sigma(\Delta) \rangle = \int \sigma(\Delta) d\mu = 0.$$

Como aqui trata-se de um plano, a fronteira de fase, isto é, a região do espaço onde, nesse caso, $\sigma(\Delta)$ muda de sinal, é um conjunto de linhas.

Para a continuação da demonstração, será usado o fato, ver [22], de que para λ pequeno

$$\text{Pr}(\Gamma) = \int_{\Gamma} d\mu \leq e^{-\text{cte}|\Gamma|O(\lambda^{-1/2})}, \quad (3.11)$$

Γ é o conjunto finito de segmentos de linhas da rede. Este símbolo também representa um subconjunto da fronteira de fase, a configuração do campo. $|\Gamma|$ é o número de segmentos da fronteira de fase. A figura a seguir mostra um exemplo de configuração Γ . A constante é independente de $|\Gamma|$ e λ . Devido a esse teorema não teremos que nos preocupar com fronteiras infinitas, $\text{Pr}(\Gamma) = 0$ se $|\Gamma| \rightarrow \infty$.

Agora será usado o teorema (3.3), ou seja, mostrando que para $\text{dist}(\Delta, \Delta') \rightarrow \infty$ tem-se que $\langle \sigma(\Delta) \sigma(\Delta') \rangle \rightarrow 0$, e portanto o vácuo não é único, ou em outras palavras, há mais de uma fase para o sistema.

Seja

$$\rho_{\pm}(\Delta) = \frac{1}{2}(1 \pm \sigma(\Delta)).$$

Uma vez que $\langle \sigma(\Delta) \rangle = 0$,

$$\begin{aligned} \langle \rho_+(\Delta) \rho_-(\Delta) \rangle &= \left\langle \frac{1}{2}(1 + \sigma(\Delta)) \frac{1}{2}(1 - \sigma(\Delta)) \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle 1 - \sigma(\Delta) + \sigma(\Delta) - \sigma(\Delta)\sigma(\Delta) \rangle = \frac{1}{4} \langle 1 \rangle - \frac{1}{4} \langle \sigma(\Delta)\sigma(\Delta) \rangle. \end{aligned}$$

Segue assim que

$$1 - 4 \langle \rho_+(\Delta) \rho_-(\Delta) \rangle = \langle \sigma(\Delta)\sigma(\Delta) \rangle.$$

Com essa última relação, a demonstração se resume a mostrar que

$$\langle \rho_+(\Delta) \rho_-(\Delta') \rangle \leq e^{-O(\lambda^{-1/2})}.$$

Isto é, para λ pequeno, o número $\langle \rho_+(\Delta) \rho_-(\Delta') \rangle$ é também um número pequeno e portanto, $\langle \sigma(\Delta) \sigma(\Delta') \rangle$ não se tornaria zero.

O diagrama a seguir ilustra os possíveis valores para ρ_+ e ρ_- numa região de quadrados de áreas unitárias. Os quadrados positivos e negativos indicam os valores +1 ou -1 para a variável σ , respectivamente.

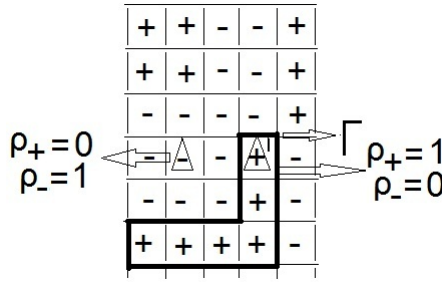


Figura 3.1 Ilustração com os sinais para σ em cada quadrado de área unitária em uma configuração arbitrária para Γ

Observe que o produto $\rho_+(\Delta)\rho_-(\Delta') \neq 0$ apenas nas configurações de campo onde Δ e Δ' estão em espaços com sinais diferentes, ou seja, onde exista um Γ entre eles, como na figura. Dessa forma

$$\langle \rho_+(\Delta)\rho_-(\Delta') \rangle \leq \sum_{\{\Gamma: \Delta \subset \text{Int}\Gamma \text{ ou } \Delta' \subset \text{Int}\Gamma\}} \text{Pr}(\Gamma).$$

Observe também que $|\Gamma|$ tem comprimento $|\Gamma| \geq 4$. E de que o número de possíveis Γ 's que se consegue construir de comprimento igual a n é no máximo $n^2 3^n$. Para ver isso, note primeiro que Γ tem que ser uma curva fechada. Segundo, o número possível de pontos aos quais se pode começar a desenhar Γ de comprimento n é igual a n^2 . Após começar o desenho, há em cada ponto seguinte três possibilidades de continuar o trajeto, e como existem n pontos, segue que o número das possibilidades até fechar a curva é igual a 3^n . E portanto o número máximo de Γ 's é igual a $n^2 3^n$.

Assim, usando-se a equação (3.11)

$$\begin{aligned} \langle \rho_+(\Delta)\rho_-(\Delta') \rangle &\leq \sum_{n=4}^{\infty} n^2 3^n e^{-nO(\lambda^{-1/2})} \\ &= \sum_{n=4}^{\infty} n^2 e^{-n\{O(\lambda^{-1/2}) - \ln 3\}} = \sum_{n=4}^{\infty} n^2 e^{-nO(\lambda^{-1/2})}. \end{aligned}$$

Agora, defina $O(\lambda^{-1/2}) = x$. Logo, tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{n=4}^{\infty} n^2 e^{-nx} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} e^{-nx} \\ &= \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} \right) \simeq e^{-x}. \end{aligned}$$

c.q.d

Ponto Crítico da interação ϕ^4

Um ponto crítico é um ponto de fronteira do espaço das transições de fase, ou seja, do espaço que contempla todos os pontos onde existe mais de uma fase.

Como exemplo, considere o diagrama de fases da água.

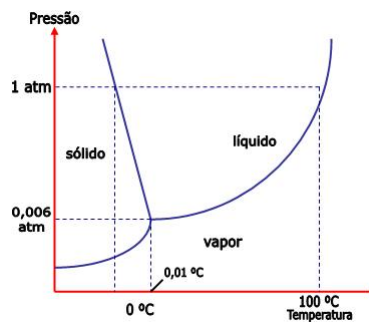


Figura 4.1 Diagrama de fases para a água

Observe a linha violeta que separa as regiões, ou fases, líquido e vapor. Esse conjunto contínuo de pontos é o espaço da transição de fase dos estados líquido-vapor. Veja que o ponto onde a água tem como temperatura $0,01^\circ C$ estabelece uma fronteira para esse espaço tal que para temperaturas abaixo desse valor, mantida a mesma pressão, o estado deixa de ser de transição de fase para ser fase pura, ou seja, sólido, como se pode ver na figura anterior. Assim, esse ponto seria um ponto crítico. No caso em questão, esse ponto é crítico também para os espaços de transição de fase sólido-líquido e sólido-vapor, e por esse motivo ele é chamado de ponto crítico triplo ou simplesmente ponto triplo.

Nesse capítulo, será feito um estudo sobre o ponto crítico para campos quânticos onde o termo de interação $V(\phi)$ é dado pelo polinômio da forma

$$V(\phi) = \lambda\phi^4 + \sigma\phi^2 - \mu\phi, \tag{4.1}$$

onde os parâmetros $\lambda, \sigma, \mu \in R$ e $\lambda > 0$. O último termo indica algum acoplamento desse campo com algum campo externo e o termo do meio é um termo associado a massa do campo. Portanto, essa interação trata de uma partícula massiva acoplada a um campo externo. Chamaremos essa interação de ϕ^4 .

Se analisarmos essa interação primeiramente de maneira clássica, como foi feito no capítulo 3, verifica-se para $\mu = 0$ três possíveis casos onde o sistema pode ser encontrado, a depender do sinal do parâmetro σ , mantendo-se $\lambda > 0$ e constante.

Para $\sigma < 0$, o gráfico da interação V tem a forma de

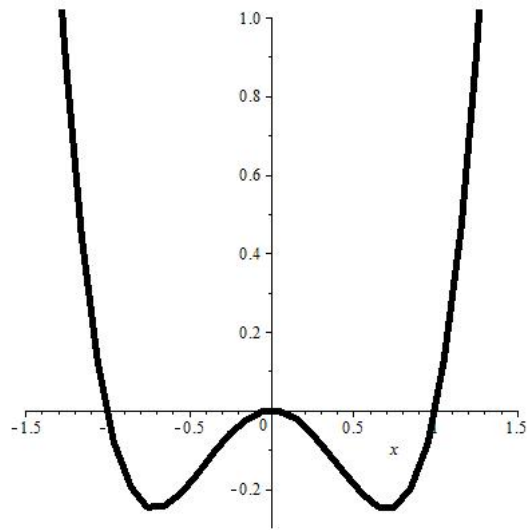


Figura 4.2 Gráfico para a função do tipo $V(\phi) = \phi^4 - \phi^2$

Essa interação terá dois mínimos globais e, portanto, duas fases.

Para $\sigma = 0$, tem-se o gráfico da figura 4.3

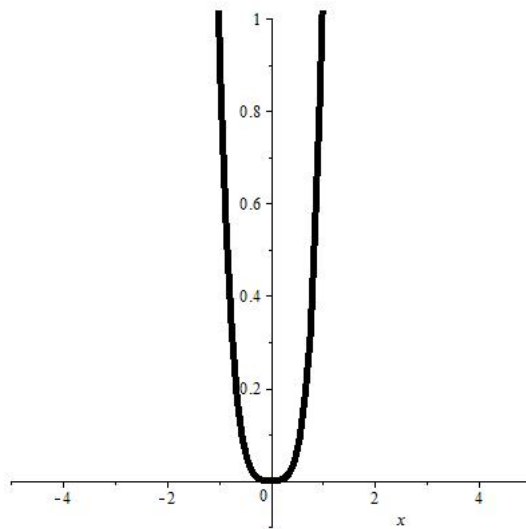


Figura 4.3 Gráfico para a função do tipo $V(\phi) = \phi^4$

Para esse valor do parâmetro $\sigma = 0$, observa-se apenas uma fase.

E, finalmente, quando $\sigma > 0$, o gráfico da interação terá a forma do gráfico mostrado na figura 4.4

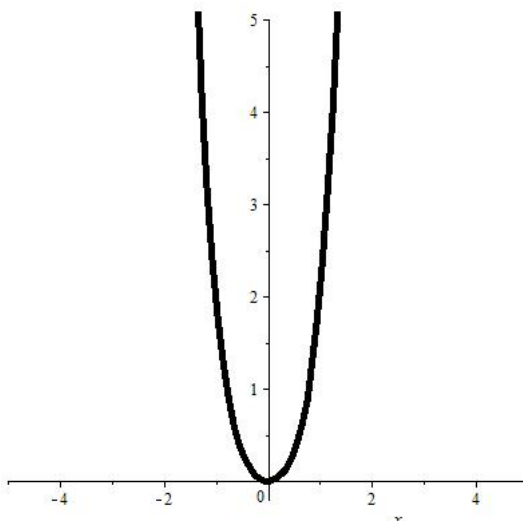


Figura 4.4 Gráfico para a função do tipo $V(\phi) = \phi^4 + \phi^2$

Os valores do parâmetro σ constituem o espaço das transições de fase. Observe que a partir de um determinado valor para esse parâmetro σ , tem-se uma fronteira entre os casos onde o sistema apresenta duas fases, $\sigma < 0$, daquele em que apresenta uma fase, onde $\sigma > 0$. Segue, pela definição, que $\sigma = 0 = \sigma_c$ é o ponto crítico desse sistema.

Na teoria quântica de campos, para a existência da transição de fase é necessária a análise de certas condições a que o sistema está submetido. Por exemplo, no teorema 3.3, a função de dois pontos truncada de Schwinger tem que ser diferente de zero a longas distâncias. Por outro lado, ao analisarmos o caso especial da interação ϕ^4 , para $0 < \lambda \ll 1$, no teorema 3.4.1, viu-se que o sistema possui duas fases. Dessa forma, o ponto crítico para a interação ϕ^4 com $\mu = 0$ (necessário para que haja transição de fase, devido ao teorema de Lee-Yang [6]), fixado um valor para λ , como o menor valor do parâmetro σ para o qual o sistema possui uma única fase (obs. dizer que fixado um valor negativo para σ haverá transição de fase para $0 < \lambda \ll 1$ é equivalente a afirmar que há transição de fase para $|\sigma| \gg 1$).

4.1 Uma fronteira para a constante de acoplamento

Até agora, foi discutido, para um dado λ , valores do parâmetro σ para verificar se um sistema sob a interação (4.1) apresenta ou não transição de fase. Mas haveria algum limite para essa constante de acoplamento λ tal que existisse ainda o ponto crítico σ_c ? Em outras palavras, há alguma fronteira para aquele parâmetro? A resposta é sim, existe um fronteira.

Após algumas correções usando a teoria quântica de campos, com métodos de

renormalização que ajustam os problemas de infinitos na teoria, a constante de acoplamento, λ_{fis} , que é a constante que pode ser medida, é definida como [6]

$$\lambda_{\text{fis}} = -m^{d-4} \chi^{-4} \int \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_4) \rangle^T dx_1 dx_2 dx_3, \quad (4.2)$$

onde, após escrever a função de Schwinger como uma transformada de Fourier, tem-se

$$\begin{aligned} \chi &= \int \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle^T dx_1 = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \int e^{ipx} \frac{1}{p^2 + m^2} d\rho(m^2) d^4p d^4x \\ &= \int \int \frac{1}{p^2 + m^2} \delta^{(4)}(p) d\rho(m^2) d^4p = \int_0^\infty \frac{d\rho(a)}{a} \end{aligned} \quad (4.3)$$

e $d\rho$ é a medida espectral de Lehmann [6], com $a = m^2$.

4.1.1 Teorema

Assumindo as afirmativas acima e de que a renormalização de força de campo própria foi realizada

$$0 \leq \lambda_{\text{fis}} \leq \text{cte},$$

onde a constante adimensional cte é independente de qualquer parâmetro.

Antes de partirmos para a demonstração, iremos falar de uma importante desigualdade chamada primeira desigualdade de Griffiths, ao qual não iremos demonstrá-la aqui, mas pode ser encontrada em [23]. Usaremos aqui o campo ϕ definindo a notação $\phi_A = \prod_n \phi_n^{a_n}$, onde n é um número natural par. O hamiltoniano H aqui é definido por $H = -\sum_A J_A \phi_A$, em que $J_A > 0$, para todo A . Além disso, o valor esperado de uma função $F(\phi)$ é escrito como

$$\langle F \rangle = \frac{\int F(\phi) e^{-H(\phi)} d\mu(\phi)}{\int e^{-H(\phi)} d\mu(\phi)} = \frac{\int F(\phi) e^{-H(\phi)} d\mu(\phi)}{Z}$$

onde $d\mu(\phi) = \prod_{i=1}^n d\mu_i(\phi_i)$. A primeira desigualdade de Griffiths afirma que para um Hamiltoniano H definido acima, para a medida $d\mu_i(\phi_i)$ simétrica sobre $\phi_i \rightarrow -\phi_i$ e para

$$\int |\phi|^N e^{|H(\phi)|} d\mu(\phi) < \infty$$

então $0 \leq \langle \phi_A \rangle$. Com posse dessa desigualdade passamos para a demonstração.

Demonstração do teorema 4.1.1

Usando a primeira desigualdade de Griffiths, vê-se que $\langle \phi \rangle = 0$ e

$$\begin{aligned}
\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle^T &= \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle - \langle \phi(x_1) \rangle \langle \phi(x_2) \rangle = \\
&= \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle - \langle \phi_A \rangle \langle \phi_B \rangle \geq 0 \\
&\Rightarrow \chi \geq 0.
\end{aligned}$$

Além disso, tem-se a segunda desigualdade de Griffiths, que diz que sobre as mesmas hipóteses da primeira desigualdade, ver [23]

$$0 \leq \langle \phi_A \phi_B \rangle - \langle \phi_A \rangle \langle \phi_B \rangle \leq \sum \langle \phi_{A_1} \phi_{B_1} \rangle \langle \phi_{A_2} \phi_{B_2} \rangle, \quad (4.4)$$

onde a soma corre sobre toda a partição $A = (A_1, A_2)$ e $B = (B_1, B_2)$. A_1 e B_1 são notações condensadas que representam um número m ímpar de termos, ou seja, $\phi_{A_1} = \phi_1 \dots \phi_m$, em que m é ímpar. Esse resultado se aplica ao campo com interação do tipo ϕ^4 com $\mu = 0$.

Vamos usar a segunda desigualdade de Griffiths (4.4) para verificar que

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_4) \rangle^T \leq 0.$$

Para ver isso, chame $\phi_A = \phi_1 \phi_2$ e $\phi_B = \phi_3 \phi_4$. Além disso, sempre que possível escreve-se, por motivo de simplicidade, 1 para $\phi(x_1)$, e.t.c. Logo a função Schwinger truncada de quatro pontos (3.5)

$$\langle 1234 \rangle^T = \langle 1234 \rangle - \langle 12 \rangle \langle 34 \rangle - \langle 13 \rangle \langle 24 \rangle - \langle 14 \rangle \langle 23 \rangle$$

pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\langle \phi_A \phi_B \rangle^T &= \langle \phi_A \phi_B \rangle - \langle \phi_A \rangle \langle \phi_B \rangle - \\
&- \langle \phi_{A_1} \phi_{B_1} \rangle \langle \phi_{A_2} \phi_{B_2} \rangle - \langle \phi_{A_1} \phi_{B_2} \rangle \langle \phi_{A_2} \phi_{B_1} \rangle \\
&= \langle \phi_A \phi_B \rangle - \langle \phi_A \rangle \langle \phi_B \rangle - \\
&- \sum \langle \phi_{A_1} \phi_{B_1} \rangle \langle \phi_{A_2} \phi_{B_2} \rangle.
\end{aligned}$$

Por (4.4), $\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_4) \rangle^T \leq 0$. Usando esse resultado e o fato de que $\chi \geq 0$, segue pela definição de λ_{fis} que $\lambda_{\text{fis}} \geq 0$ e o limite inferior do teorema está demonstrado.

Usando-se a segunda desigualdade de Griffiths,

$$\begin{aligned}
0 \leq \langle \phi_A \phi_B \rangle - \langle \phi_A \rangle \langle \phi_B \rangle &= \langle 1234 \rangle - \langle 12 \rangle \langle 34 \rangle = \\
&= \langle 1234 \rangle^T + \langle 13 \rangle \langle 24 \rangle + \langle 14 \rangle \langle 23 \rangle \\
&\Rightarrow - \langle 1234 \rangle^T \leq \langle 13 \rangle \langle 24 \rangle + \langle 14 \rangle \langle 23 \rangle
\end{aligned}$$

E como $\langle 1234 \rangle^T \leq 0$

$$0 \leq - \langle 1234 \rangle^T \leq \langle 13 \rangle \langle 24 \rangle + \langle 14 \rangle \langle 23 \rangle .$$

Note que essa última desigualdade poderia valer também para

$$0 \leq - \langle 1234 \rangle^T \leq \langle 12 \rangle \langle 34 \rangle + \langle 14 \rangle \langle 23 \rangle$$

ou

$$0 \leq - \langle 1234 \rangle^T \leq \langle 12 \rangle \langle 34 \rangle + \langle 13 \rangle \langle 24 \rangle .$$

Por essa equivalência de desigualdade, aplica-se a simetrização

$$\begin{aligned} 0 \leq - \langle 1234 \rangle^T \leq (\langle 13 \rangle \langle 24 \rangle + \langle 14 \rangle \langle 23 \rangle)^{1/3} \\ (\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle + \langle 14 \rangle \langle 23 \rangle)^{1/3} (\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle + \langle 13 \rangle \langle 24 \rangle)^{1/3} . \end{aligned} \quad (4.5)$$

A partir das propriedades da função de Green $(-\Delta + a)^{-1}(x, y)$

$$\langle xy \rangle = \int_0^\infty (-\Delta + a)^{-1}(x, y) d\rho(a) \leq \text{cte} \chi |x - y|^{-d} e^{-m|x-y|/2} .$$

Inserindo esse resultado em (4.5) e usando a hipótese de renormalização de força do campo próprio

$$\chi = \int_{m^2}^\infty \frac{d\rho(a)}{a} \geq m^{-2} ,$$

chega-se ao resultado esperado $\lambda_{\text{fis}} \leq \text{cte}$. É um resultado importante pois, existindo uma fronteira para o parâmetro λ_{fis} , pode-se investigar agora a existência do ponto crítico para a interação ϕ^4 .

4.2 A existência do ponto crítico para a interação ϕ^4

Para o propósito seguinte, é necessário que se defina massa e uma grandeza chamada de magnetização. Começemos com esta última.

Assumindo que $\mu = 0$, e que o sistema possua, no máximo, duas fases, a magnetização é definida como

$$M(\sigma) = \pm \lim_{|x-y| \rightarrow \infty} \langle \phi(x) \phi(y) \rangle^{1/2} . \quad (4.6)$$

Na construção da medida feita no capítulo 2.6.5, apresentamos uma condição de fronteira onde a medida é simétrica pela reflexão do campo, ou seja, para $\phi \rightarrow -\phi$, tem-se $\langle \phi \rangle = \langle -\phi \rangle$, o valor esperado não muda pelo isomorfismo que leva o campo no seu oposto em sinal. Como consequência, usando a interação par ϕ^4 na sua forma em (4.1),

tem-se que

$$\begin{aligned} \langle \phi \rangle &= \frac{\int \phi e^{-K-iV(\phi)} d\mu}{\int e^{-K-iV(\phi)} d\mu} = \langle -\phi \rangle = \\ &= -\frac{\int \phi e^{-K-iV(-\phi)} d\mu}{\int e^{-K-iV(-\phi)} d\mu} = -\frac{\int \phi e^{-K-iV(\phi)} d\mu}{\int e^{-K-iV(\phi)} d\mu} = 0, \end{aligned}$$

em que K é o termo cinético, que também é par com respeito ao campo. Esse resultado tem como consequência o fato de que a magnetização, para sistemas com uma única fase, é igual a zero, pois usando-se o teorema 3.3, quando $|x - y| \rightarrow 0$, tem-se $\langle \phi(x) \phi(y) \rangle = 0$.

Para esse mesmo sistema, onde existam, no máximo, duas fases, a massa $m(\sigma)$ é definida como uma taxa de decaimento exponencial

$$\langle \phi(x) \phi(y) \rangle - M(\sigma)^2 = e^{-m(\sigma)|x-y|}. \quad (4.7)$$

Que também pode ser visto fisicamente como o estado de menor energia acima do vácuo. Por outro lado, já foi definido o ponto crítico, que no caso do presente trabalho é determinado pelos parâmetros do polinômio $V(\phi)$. Porém, uma questão fundamental a ser respondida é: para a interação do tipo ϕ^4 existe algum ponto crítico?

Bem, pode-se responder a essa pergunta estudando o comportamento da massa $m(\sigma)$ em função do parâmetro σ . Qual o seu valor para o caso de um sistema com uma única fase? Ou com duas fases? Há transição do mesmo sistema que possui duas fases para um sistema monofásico? Se essa transição existir de uma maneira suave, ou seja, se a função $m(\sigma)$ for contínua, então indentificaremos o ponto crítico e portanto a sua existência. Por simplicidade, consideraremos o espaço dos campos em rede.

Antes de prosseguirmos com a finalidade de mostrar a existência do ponto crítico, vamos definir, ou redefinir, algumas grandezas. A primeira, é a própria massa. Porém, tal definição é apresentada apenas para o propósito dessa seção. Suponha que exista um σ_c . Aplique o logaritmo \ln na equação (4.7) para o sistema com uma única fase, ou seja, $\sigma_c < \sigma$, onde a magnetização é nula. Tem-se

$$m(\sigma) = -\lim_{|x-y| \rightarrow \infty} \frac{\ln \langle \phi(x) \phi(y) \rangle}{|x-y|}. \quad (4.8)$$

Para o presente propósito, definamos massa como sendo essa equação (4.8). A partir dela, mostraremos que o ponto crítico existe mostrando que $m(\sigma)$ é uma função contínua e que ela vai a zero quando $\sigma \downarrow \sigma_c$.

A segunda importante definição é a da pseudo massa $\tilde{m} = \tilde{m}(x, y, \sigma, \Lambda)$, definida em um intervalo finito $a \leq \sigma \leq b$ como única solução da equação

$$\frac{Ae^{-\tilde{m}|x-y|}}{1 + (\tilde{m}|x-y|)^\alpha} = \langle \phi(x) \phi(y) \rangle_{\sigma, \Lambda}, \quad (4.9)$$

em que A é o supremo da função de correlação entre dois pontos

$$A = 2 \left(\sup_{\sigma \in [a, b], \Lambda \subset R^d, x, y \in \Lambda} \langle \phi(x) \phi(y) \rangle_{\sigma, \Lambda} \right) \quad (4.10)$$

em um dado volume finito Λ e α é uma constante escolhida tal que

$$d < 2\alpha$$

e

$$d - 1 \leq \alpha. \quad (4.11)$$

De acordo com a definição do valor esperado $\langle \cdot \rangle_{\sigma, \Lambda}$ para os campos em rede, equação (3.1), o valor do parâmetro

$$\begin{aligned} A &= 2 \sup \langle \phi(x) \phi(y) \rangle_{\sigma, \Lambda} = 2 \sup \int \phi(x) \phi(y) d\mu \\ &= 2 \sup \frac{1}{Z} \int \phi(x) \phi(y) \exp \left\{ - \left[\sum_{z \in \Lambda} \left(\frac{1}{2} (\nabla \phi(z))^2 + \lambda \phi(z)^4 + \sigma \phi(z)^2 \right) \right] \right\} \prod_{z \in \Lambda} d\phi(z) \\ &= \frac{2}{Z'} \int \phi(x)^2 \exp \left\{ - \left[\sum_{z \in R^d} \left(\frac{1}{2} (\nabla \phi(z))^2 + \lambda \phi(z)^4 + a \phi(z)^2 \right) \right] \right\} \prod_{z \in R^d} d\phi(z), \end{aligned}$$

em que o fator de normalização Z' tem a mesma forma de Z com o parâmetro $\sigma = a$ e $z \in R^d$.

Observe que para $x > 0$

$$\frac{d}{dx} \frac{e^{-x}}{1 + |x|^\alpha} < 0. \quad (4.12)$$

Tem-se a garantia da existência da pseudo massa \tilde{m} para $x \neq y$.

Considere que

$$\tilde{m}(\sigma, \Lambda) = \inf_{x \neq y \in \Lambda} \tilde{m}(x, y, \sigma, \Lambda) \quad (4.13)$$

e

$$\tilde{m}(\sigma) = \inf_{\Lambda} \tilde{m}(\sigma, \Lambda) = \lim_{\Lambda \uparrow R^2} \tilde{m}(\sigma, \Lambda). \quad (4.14)$$

Com essas definições estabelecidas, enunciemos o seguinte teorema

4.2.1 Teorema

$\tilde{m}(\sigma, \Lambda)$ é função contínua em σ e estritamente positiva para um volume limitado e conectado Λ . Além disso,

$$0 \leq \tilde{m}(\sigma) \leq m(\sigma) \leq \text{cte } \tilde{m}(\sigma) \quad (4.15)$$

e

$$0 = \tilde{m}(\sigma) \quad \text{se } \sigma \leq \sigma_c. \quad (4.16)$$

Demonstração.

A função de correlação entre dois pontos $\langle \phi(x) \phi(y) \rangle_{\sigma, \Lambda} > 0$, ver [6]. Daí segue que

$$\begin{aligned} \langle \phi(x) \phi(y) \rangle_{\sigma, \Lambda} &= \frac{Ae^{-\tilde{m}|x-y|}}{1 + (\tilde{m}|x-y|)^\alpha} > 0 \\ \Rightarrow 1 + (\tilde{m}|x-y|)^\alpha &> 0 \\ \Rightarrow (\tilde{m})^\alpha &> -\frac{1}{(|x-y|)^\alpha} \end{aligned}$$

para todo $x, y \in \Lambda$. Escolhendo $|x-y| \rightarrow \infty$, segue que $\tilde{m} \geq 0$. Por outro lado, para $\sigma < \sigma_c$, a partir da definição de massa, equação (4.8), quando $|x-y| \rightarrow \infty$, a função de correlação tende a um valor constante c e, por consequência, o logaritmo dessa constante também é uma constante. No limite, constante dividida por infinito vai a zero. E portanto, a massa é zero.

Para provar a desigualdade $\tilde{m}(\sigma) \leq m(\sigma)$ iremos mostrar que é válida a seguinte desigualdade: $\tilde{m}(\sigma) \leq m(\sigma) + \epsilon$. Se ela será válida para qualquer $\epsilon > 0$, então também é válida para $\epsilon \rightarrow 0$ e portanto a anterior desigualdade é satisfeita. Pode-se fixar x e y tal que

$$e^{-(m+\epsilon)|x-y|} \leq \frac{1}{2A} \langle \phi(x) \phi(y) \rangle_\sigma$$

seja satisfeita. Da mesma forma, pode-se escolher o volume Λ tal que

$$\frac{1}{2A} \langle \phi(x) \phi(y) \rangle_\sigma \leq \frac{1}{A} \langle \phi(x) \phi(y) \rangle_{\sigma, \Lambda}.$$

Usando a definição de pseudo massa, equação (4.9), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \langle \phi(x) \phi(y) \rangle_{\sigma, \Lambda} &= \frac{e^{-\tilde{m}(x,y,\sigma,\Lambda)|x-y|}}{1 + (\tilde{m}(x,y,\sigma,\Lambda)|x-y|)^\alpha} \leq e^{-\tilde{m}(x,y,\sigma,\Lambda)|x-y|} \leq e^{-\tilde{m}(\sigma)|x-y|} \\ \Rightarrow \tilde{m}(\sigma)|x-y| &\leq (m(\sigma) + \epsilon)|x-y| \\ \Rightarrow m(\sigma) &\leq (m(\sigma) + \epsilon). \end{aligned}$$

A demonstração para $m(\sigma) \leq \text{cte } \tilde{m}(\sigma)$ pode ser encontrada em [6]. Para mostrar que a pseudo massa é uma função contínua, usaremos a seguinte definição.

Definição. Uma função real $\tilde{m}(\sigma)$ é Lipschitz contínua numa variável real $\sigma \in [a, b]$ se existe uma constante $K > 0$ tal que $\frac{d\tilde{m}}{d\sigma} \leq K$.

Observe que o fato da derivada $\frac{d\tilde{m}}{d\sigma}$ ser finita para uma função Lipschitz contínua é suficiente para assegurar a continuidade da função $\tilde{m}(\sigma)$.

Como $\tilde{m}(\sigma, \Lambda)$ é a menor função para as variáveis x e y , de acordo com a definição,

mostremos a continuidade de Lipschitz para cada função que coincide com \tilde{m} , ou seja, para $x_0 \neq y_0$,

$$\tilde{m}(x_0, y_0, \sigma, \Lambda) = \tilde{m}(\sigma, \Lambda).$$

Demonstrando a Lipschitz continuidade para todos os $\tilde{m}(x_0, y_0, \sigma, \Lambda)$, então $\tilde{m}(\sigma)$ é Lipschitz contínua.

Dessa forma, aplicando logaritmo \ln na equação que define pseudo massa, (4.9), obtém-se

$$\tilde{m}|x_0 - y_0| - \ln A + \ln [1 + (\tilde{m}|x_0 - y_0|)^\alpha] = -\ln \langle \phi(x) \phi(y) \rangle_{\sigma, \Lambda}.$$

Derivando a equação acima em relação a σ

$$\frac{d\tilde{m}}{d\sigma}|x_0 - y_0| + \frac{\alpha\tilde{m}|x_0 - y_0|^{\alpha-1}}{1 + (\tilde{m}|x_0 - y_0|)^\alpha} \frac{d\tilde{m}}{d\sigma}|x_0 - y_0| = -\frac{d}{d\sigma} \ln \langle \phi(x) \phi(y) \rangle_{\sigma, \Lambda}.$$

Façamos a derivada do segundo membro da equação acima

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\sigma} \ln \langle \phi(x_0) \phi(y_0) \rangle_{\sigma, \Lambda} &= -\frac{1}{\langle \phi(x_0) \phi(y_0) \rangle_{\sigma, \Lambda}} \frac{d}{d\sigma} \langle \phi(x_0) \phi(y_0) \rangle_{\sigma, \Lambda} \\ &= -\frac{1}{\langle \phi(x_0) \phi(y_0) \rangle_{\sigma, \Lambda}} \frac{d}{d\sigma} \frac{\int \phi(x_0) \phi(y_0) d\mu}{\int d\mu}, \end{aligned}$$

$$\text{em que } d\mu = \exp \left\{ - \left[\sum_{z \in \Lambda} \left(\frac{1}{2} (\nabla \phi(z))^2 + \lambda \phi(z)^4 + \sigma \phi(z)^2 \right) \right] \right\} \prod_{z \in \Lambda} d\phi(z).$$

Aplicando a regra de Leibniz na última equação

$$= \frac{1}{\langle \phi(x_0) \phi(y_0) \rangle (\int d\mu)^2}.$$

$$\begin{aligned} &\cdot \left[\left(\sum_{z \in \Lambda} \int \phi(x_0) \phi(y_0) \phi(z)^2 d\mu \right) \int d\mu - \int \phi(x_0) \phi(y_0) d\mu \left(\sum_{z \in \Lambda} \int \phi(z)^2 d\mu \right) \right] \\ &= \sum_{z \in \Lambda} \left(\frac{\langle \phi(x_0) \phi(y_0) \phi(z) \phi(z) \rangle - \langle \phi(x_0) \phi(y_0) \rangle \langle \phi(z)^2 \rangle}{\langle \phi(x_0) \phi(y_0) \rangle} \right). \end{aligned}$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} &\frac{d\tilde{m}}{d\sigma}|x_0 - y_0| + \frac{\alpha\tilde{m}|x_0 - y_0|^{\alpha-1}}{1 + (\tilde{m}|x_0 - y_0|)^\alpha} \frac{d\tilde{m}}{d\sigma}|x_0 - y_0| = \\ &= \sum_{z \in \Lambda} \left(\frac{\langle \phi(x_0) \phi(y_0) \phi(z) \phi(z) \rangle - \langle \phi(x_0) \phi(y_0) \rangle \langle \phi(z)^2 \rangle}{\langle \phi(x_0) \phi(y_0) \rangle} \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Para o próximo passo dessa demonstração, é necessário mostrar que $\frac{d\tilde{m}}{d\sigma} \geq 0$. Diferenciando a equação (4.9) em relação a σ e aplicando a regra da cadeia

$$A \frac{d}{d\sigma} \frac{e^{-\tilde{m}|x_0-y_0|}}{1 + (\tilde{m}|x_0-y_0|)} = \frac{d}{d\sigma} \langle \phi(x_0) \phi(y_0) \rangle_{\sigma, \Lambda}, \quad (4.18)$$

$$A \frac{d}{dx} \left[\frac{e^{-x}}{1+x^\alpha} \right]_{x=\tilde{m}|x_0-y_0|} \frac{d}{d\sigma} \tilde{m}|x_0-y_0| = \frac{d}{d\sigma} \langle \phi(x_0) \phi(y_0) \rangle_{\sigma, \Lambda}.$$

Pode-se agrupar alguns termos do primeiro membro em uma única função $F(\sigma) \leq 0$, utilizando (4.12), para reescrever a equação acima como

$$F(\sigma) (d\tilde{m}/d\sigma) = \frac{d}{d\sigma} \langle \phi(x_0) \phi(y_0) \rangle_{\sigma, \Lambda}.$$

Existe um teorema, sob as condições que foram adotadas aqui, ver [22], que afirma que o lado direito dessa equação é negativo, ou seja, a função de correlação de dois pontos é decrescente em σ . Usando-se esse fato, obtém-se o resultado desejado

$$\frac{d\tilde{m}}{d\sigma} \geq 0. \quad (4.19)$$

Desse resultado, segue que o segundo termo da equação (4.17)

$$\frac{\alpha \tilde{m} |x_0 - y_0|^{\alpha-1}}{1 + (\tilde{m} |x_0 - y_0|)^\alpha} \frac{d\tilde{m}}{d\sigma} |x_0 - y_0| \geq 0.$$

Usando esse resultado e a equação (4.17)

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{m}}{d\sigma} |x_0 - y_0| &\leq \frac{d\tilde{m}}{d\sigma} |x_0 - y_0| + \frac{\alpha \tilde{m} |x_0 - y_0|^{\alpha-1}}{1 + (\tilde{m} |x_0 - y_0|)^\alpha} \frac{d\tilde{m}}{d\sigma} |x_0 - y_0| \\ &= \sum_{z \in \Lambda} \left(\frac{\langle \phi(x_0) \phi(y_0) \phi(z) \phi(z) \rangle - \langle \phi(x_0) \phi(y_0) \rangle \langle \phi(z)^2 \rangle}{\langle \phi(x_0) \phi(y_0) \rangle} \right). \end{aligned}$$

Através da equação (4.4), a soma acima tem como fronteira

$$\begin{aligned} &\sum_{z \in \Lambda} \left(\frac{\langle \phi(x_0) \phi(y_0) \phi(z) \phi(z) \rangle - \langle \phi(x_0) \phi(y_0) \rangle \langle \phi(z)^2 \rangle}{\langle \phi(x_0) \phi(y_0) \rangle} \right) \leq \\ &\leq \sum_{z \in \Lambda} \left(\frac{\langle \phi(x_0) \phi(z) \rangle \langle \phi(y_0) \phi(z) \rangle + \langle \phi(x_0) \phi(z) \rangle \langle \phi(y_0) \phi(z) \rangle}{\langle \phi(x_0) \phi(y_0) \rangle} \right) \\ &= 2 \sum_{z \in \Lambda} \frac{\langle \phi(x_0) \phi(z) \rangle \langle \phi(y_0) \phi(z) \rangle}{\langle \phi(x_0) \phi(y_0) \rangle}. \end{aligned}$$

Sabe-se que, a partir da definição do parâmetro A , equação (4.10), quando $z = x_0$

ou y_0 , a igualdade acima é limitada por

$$\begin{aligned} &\leq 2A + 2 \sum_{z \in \Lambda, z \neq x_0, y_0} \frac{\langle \phi(x_0) \phi(z) \rangle \langle \phi(y_0) \phi(z) \rangle}{\langle \phi(x_0) \phi(y_0) \rangle} \\ \Rightarrow \frac{d\tilde{m}}{d\sigma} |x_0 - y_0| &\leq 2A + 2 \sum_{z \in \Lambda, z \neq x_0, y_0} \frac{\langle \phi(x_0) \phi(z) \rangle \langle \phi(y_0) \phi(z) \rangle}{\langle \phi(x_0) \phi(y_0) \rangle}. \end{aligned}$$

A partir da definição de pseudo massa, (4.9)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d\tilde{m}}{d\sigma} |x_0 - y_0| &\leq 2A + 2 \sum_{z \in \Lambda, z \neq x_0, y_0} \frac{Ae^{-\tilde{m}|x_0-z|}}{1 + (\tilde{m}|x_0-z|)^\alpha} \cdot \frac{Ae^{-\tilde{m}|y_0-z|}}{1 + (\tilde{m}|y_0-z|)^\alpha} \cdot \frac{1 + (\tilde{m}|x_0-y_0|)^\alpha}{Ae^{-\tilde{m}|x_0-y_0|}} \\ &= 2A + 2 \sum_{z \in \Lambda, z \neq x_0, y_0} \frac{Ae^{-\tilde{m}(|x_0-z|+|y_0-z|)}}{1 + (\tilde{m}|x_0-z|)^\alpha} \cdot \frac{1}{1 + (\tilde{m}|y_0-z|)^\alpha} \cdot \frac{1 + (\tilde{m}|x_0-y_0|)^\alpha}{e^{-\tilde{m}|x_0-y_0|}}. \end{aligned}$$

O próximo passo vem a partir da desigualdade triangular

$$\begin{aligned} |x_0 - z| + |y_0 - z| &\geq |x_0 - z + z - y_0| = |x_0 - y_0| \\ \Rightarrow |x_0 - z| + |y_0 - z| &\geq |x_0 - y_0| \\ \Rightarrow e^{-\tilde{m}(|x_0-z|+|y_0-z|)} &\leq e^{-\tilde{m}|x_0-y_0|}. \end{aligned}$$

E portanto

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{m}}{d\sigma} |x_0 - y_0| &\leq 2A + 2 \sum_{z \in \Lambda, z \neq x_0, y_0} \frac{Ae^{-\tilde{m}|x_0-y_0|}}{1 + (\tilde{m}|x_0-z|)^\alpha} \cdot \frac{1}{1 + (\tilde{m}|y_0-z|)^\alpha} \cdot \frac{1 + (\tilde{m}|x_0-y_0|)^\alpha}{e^{-\tilde{m}|x_0-y_0|}}, \\ \frac{d\tilde{m}}{d\sigma} |x_0 - y_0| &\leq 2A + 2 \sum_{z \in \Lambda, z \neq x_0, y_0} \frac{A}{1 + (\tilde{m}|x_0-z|)^\alpha} \cdot \frac{1 + (\tilde{m}|x_0-y_0|)^\alpha}{1 + (\tilde{m}|y_0-z|)^\alpha} \\ &\leq 2A + 2 \sum_{z \in \Lambda, z \neq x_0, y_0} \frac{A}{(\tilde{m}|x_0-z|)^\alpha} \cdot \frac{1 + (\tilde{m}|x_0-y_0|)^\alpha}{(\tilde{m}|y_0-z|)^\alpha}. \end{aligned}$$

Reescrevendo

$$1 + (\tilde{m}|x_0 - y_0|)^\alpha = (\tilde{m}|x_0 - y_0|)^\alpha \left(1 + \frac{1}{(\tilde{m}|x_0 - y_0|)^\alpha} \right) = cte' |x_0 - y_0|^\alpha,$$

tem-se

$$\frac{d\tilde{m}}{d\sigma} |x_0 - y_0| \leq 2A + 2 (\tilde{m})^{-2\alpha} \cdot cte \cdot |x_0 - y_0|^\alpha \sum_{z \in \Lambda, z \neq x_0, y_0} \frac{1}{|x_0 - z|^\alpha |y_0 - z|^\alpha}.$$

De acordo com [6]

$$\sum_{z \in \Lambda, z \neq x_0, y_0} \frac{1}{|x_0 - z|^\alpha |y_0 - z|^\alpha} \leq \frac{|x_0 - y_0|^d}{|x_0 - y_0|^{2\alpha}}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{dm\tilde{}}{d\sigma} |x_0 - y_0| &\leq 2A + 2(m\tilde{})^{-2\alpha} \cdot \text{cte} \cdot |x_0 - y_0|^\alpha \frac{|x_0 - y_0|^d}{|x_0 - y_0|^{2\alpha}} \\ &= 2A + 2(m\tilde{})^{-2\alpha} \cdot \text{cte} \cdot |x_0 - y_0|^{d-\alpha} \\ \Rightarrow (m\tilde{})^{2\alpha} \frac{dm\tilde{}}{d\sigma} &\leq \frac{2A(m\tilde{})^{2\alpha}}{|x_0 - y_0|} + 2 \cdot \text{cte} \cdot |x_0 - y_0|^{d-\alpha-1} \\ &\Rightarrow (m\tilde{})^{2\alpha} \frac{dm\tilde{}}{d\sigma} \leq \text{cte}'' . \end{aligned}$$

Em que cte'' é independente de σ . E a demonstração do teorema está completa. É importante que $d - \alpha - 1 < 0$, como foi afirmado em (4.11), caso contrário, a derivada da pseudomassa em relação a σ pode ir para o infinito quando $|x_0 - y_0| \rightarrow 0$. A consequência desse teorema é praticamente trivial.

4.2.2 Corolário

A massa $m(\sigma)$ é uma função contínua de σ . E quando $\sigma \downarrow \sigma_c$, $m \rightarrow 0$.

Demonstração. A continuidade parte da equação (4.15). E quando a pseudo massa $m\tilde{}$ = 0, pela mesma equação, verifica-se que $m = 0$, já que $m(\sigma) \leq \text{cte } m\tilde{}$.

c.q.d

Sabe-se que a teoria quântica de campos comutativa (TQCC) apresenta alguns problemas com relação à divergência na região do ultravioleta (UV) e por isso são adotadas medidas para controlá-las como, por exemplo, a renormalização. Nesse cenário, a teoria quântica de campos não comutativa (TQCNC), ao qual passaremos a falar no próximo capítulo, é uma candidata natural para regular essas divergências da teoria comutativa. Isso porque ela será contruída utilizando matrizes, ou modelo de matrizes, que, sendo finitas deveriam ser completamente livre dessas divergências. Essa seria assim uma outra importante utilidade para a busca de uma generalização da teoria quântica de campos, como mencionado na introdução do presente trabalho. A questão é verificar se é possível recuperar a teoria comutativa no limite de fazer a ordem das matrizes $N \rightarrow \infty$. Como esse limite é não trivial (e não perturbativo) é desejável verificar algumas características de ambos os modelos sobre o limite mencionado. Assim, a estrutura de fase, se apresentando em um regime não perturbativo, é um lugar perfeito para checar tal limite e então observar se as informações do modelo comutativo são recuperadas. Dessa forma, passemos agora ao estudo da TQCNC.

Diagrama de fases da teoria do campo escalar ϕ^4 na esfera difusa e modelos de matrizes

Neste capítulo será feita uma passagem de uma álgebra de um espaço comutativo da TQC para uma álgebra não comutativa. Será utilizado para esse fim, o sistema de coordenadas na esfera difusa. A partir desse, pode-se fazer uma extensão, através de um parâmetro N , recuperando-se, assim, o caso do espaço comutativo. Será mostrado o diagrama de fases para a TQCNC e assim, será verificado o surgimento de uma transição de fase a mais em relação a TQC comutativa que estudamos até aqui. Em seguida, será apresentado um modelo de matriz para a teoria não comutativa do campo escalar ϕ^4 e algumas técnicas básicas que buscam lidar com tal modelo, como a teoria da perturbação e métodos de aproximação não perturbativa.

5.1 Teoria do campo escalar na esfera difusa

Definição. A esfera difusa S_f^2 é um espaço não comutativo ao qual a álgebra das funções é gerada pelas "coordenadas"

$$x_i x^i = \rho^2,$$

$$[x_i, x_j] = x_i x_j - x_j x_i = i\theta \epsilon_{ijk} x_k. \quad (5.1)$$

Observe que as coordenadas cartesianas x_i obedecem a mesma álgebra do momento angular. Isso serve pra gente fazer a seguinte analogia. O operador de momento angular L que possui o valor de momento angular orbital igual a j , possui como projeção num eixo arbitrário os possíveis valores $-j \leq m \leq j$, constituindo assim $2j + 1$ possibilidades diferentes para essa projeção. Por satisfazer a álgebra do momento, pode-se pensar em x_i como inseridos em um espaço de dimensão $N = 2j + 1$ pertencendo ao grupo $SU(N)$, ou seja, x_i pode ser visto como uma matriz $N \times N$ de determinante unitário com

$$x_i = \frac{2R}{\sqrt{N^2 - 1}} L_i,$$

$$\theta = \frac{2R}{\sqrt{N^2 - 1}},$$

$$\rho^2 = \frac{4R^2}{N^2 - 1}j(j+1) = \frac{4R^2}{4j(j+1)}j(j+1) = R^2.$$

Em que L_i são os geradores do grupo, com $i = 1, 2, 3$ e R pode ser interpretado como sendo o raio da esfera. Veja que para recuperarmos o regime clássico, temos que $N \rightarrow \infty$ e assim a superfície torna a ser uma esfera, já que $\theta \rightarrow 0$. Além disso, observe que ao se falar em regime clássico, o comutador vai pra zero com o parâmetro de não comutatividade θ indo para zero.

Como dissemos, a álgebra das funções no espaço S_f^2 é gerado pelas coordenadas x'_i s. Assim, essas funções e, portanto os campos escalares como o ϕ , são dadas por matrizes $N \times N$ hermitianas, que serão representadas pela letra M . Dessa forma, nessa seção o campo escalar será transformado em uma matriz M .

A ação para o espaço Euclidiano comutativo de um campo massivo sob a interação de um potencial do tipo ϕ^4 é dado por

$$S = \int d\mu \left[\frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + \sigma\phi^2 + \lambda\phi^4 \right].$$

No caso dos espaços difusos, espaços não comutativos, o campo é representado por matrizes $M_{N \times N}$, integrais sobre a superfície esférica se transformam em traço de matriz e derivadas, em comutadores [5]

$$\partial_i \phi \rightarrow -i [L_i, M],$$

$$\int_{S^2} d^2x \phi \rightarrow \frac{4\pi R^2}{N} \text{Tr} M.$$

Substituindo essas transformações na ação S e absorvendo o fator de volume na definição de campo e dos parâmetros de massa e acoplamento, tem-se

$$S(M) = \text{Tr} \left(-\frac{1}{2} [L_i, M] [L_i, M] + \frac{1}{2} r M^2 + V(M) \right). \quad (5.2)$$

A partir desse ponto, usaremos a letra r como parâmetro de massa e a letra g como parâmetro de acoplamento de interação do campo, em substituição a σ e λ da teoria comutativa, respectivamente. É um padrão usado por vários autores para diferenciar uma teoria da outra. Usando a propriedade cíclica do traço de uma matriz, o termo cinético pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} -\text{Tr} \{ (L_i M - M L_i) (L_i M - M L_i) \} &= \text{Tr} \{ M L_i L_i M - M L_i M L_i - M L_i M L_i + M M L_i L_i \} \\ &= \text{Tr} \{ M L_i [L_i, M] - M [L_i, M] L_i \} = \text{Tr} \{ M [L_i, [L_i, M]] \}. \end{aligned}$$

Logo

$$S(M) = Tr \left(\frac{1}{2} M [L_i, [L_i, M]] + \frac{1}{2} r M^2 + V(M) \right). \quad (5.3)$$

Assim, para o campo escalar na forma matricial M , a dinâmica da teoria é

$$\langle F \rangle = \frac{\int F(M) e^{-S(M)} dM}{\int e^{-S(M)} dM} \quad (5.4)$$

em que

$$dM = 2 \prod_{i \leq j} dM_{ij}.$$

O número 2 refere-se ao fato da matriz M ser hermitiana e também ao produto se dar para $i \leq j$. Observe que essa integral possui como índice de integração todos os elementos da matriz M .

O termo que aparece com os comutadores na equação (5.3) é a parte cinética da ação, pois como já foi dito, eles representam a derivada na ação.

Até agora, havíamos estudado uma teoria quântica de campos comutativa, ou seja, um espaço comutativo definido por uma álgebra comutativa de funções (coordenadas), assim $[x_i, x_j] = 0$. Viu-se no teorema 3.4.1 a existência de duas fases. E de acordo com [5], para essa teoria ϕ^4 comutativa, as duas fases no diagrama se distinguem uma da outra a depender em torno de qual valor oscila o campo. Se houver uma oscilação do campo em torno de $\phi = 0$ então a fase é chamada de desordem. Mas se há uma oscilação do campo em torno de outro valor diferente de zero, sendo este ponto o de mínimo do pontencial, então essa fase será chamada de fase de ordem uniforme.

Para a teoria ϕ^4 não comutativa, a que estamos lidando nessa seção, onde $[x_i, x_j] \neq 0$, existe ainda uma terceira fase, fase de ordem não uniforme. Para ela, não há oscilação do campo em nenhum ponto do espaço. Isso é uma consequência da não-localidade da teoria, sendo ainda um resultado da mistura que ocorre entre o infravermelho e o ultravioleta.

A seguir o diagrama de fases para essa teoria, obtida numericamente [2, 24].

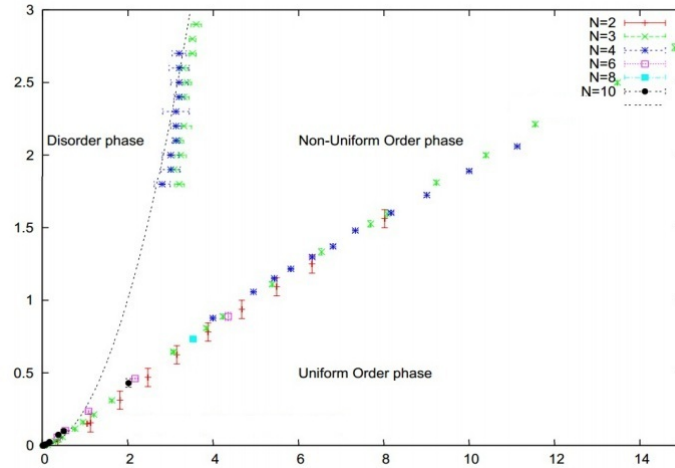


Figura 5.1 Diagrama de fases para a teoria ϕ^4 em coordenadas esféricas difusas. O eixo das abscissas representa o parâmetro $-r$ e o das ordenadas, o parâmetro de acoplamento g

Simulações, às quais geraram o gráfico mostrado na figura 5.1, mostram que as três fases continuam a existir no limite comutativo e que a localização do ponto triplo para a constante de acoplamento está no intervalo [5]

$$g_c \in [0, 125; 0, 15]. \quad (5.5)$$

5.2 Formulação do modelo de matrizes para a teoria do campo escalar na esfera difusa

O primeiro cuidado que é necessário ter é diagonalizar a matriz M que representa o campo. Dessa forma, através do método de diagonalização padrão, para alguma matriz $U \in SU(N)$ e $\Delta = \text{diag}(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$, a matriz hermitiana $M = M^*$ pode ser reescrita como $M = U\Delta U^*$. Fazendo então essa transformação, tem-se

$$\int dM = \int J dU \left(\prod_{i=1}^N d\zeta_i \right) = \int dU \left(\prod_{i=1}^N d\zeta_i \right) \left(\prod_{i<j} (\zeta_i - \zeta_j)^2 \right),$$

em que $J = \left(\prod_{i<j} (\zeta_i - \zeta_j)^2 \right)$, o Jacobiano da transformação é o determinante de Vandermonde.

Substituindo essa transformação $M \rightarrow U\Delta U^*$ na equação (5.4), e colocando a letra D para representar o determinante de Vandermonde pra economizar espaço, tem-se

$$\langle F \rangle = \frac{\int F(U\Delta U^*) D \cdot e^{-S(U\Delta U^*)} dU \left(\prod_{i=1}^N d\zeta_i \right)}{\int D \cdot e^{-S(U\Delta U^*)} dU \left(\prod_{i=1}^N d\zeta_i \right)}$$

$$= \frac{\int F(U\Delta U^*) D \cdot e^{-\text{Tr}\left(\frac{1}{2}(U\Delta U^*)[L_i, [L_i, (U\Delta U^*)]] + \frac{1}{2}r(U\Delta U^*)^2 + V((U\Delta U^*))\right)} dU \left(\prod_{i=1}^N d\zeta_i\right)}{\int D \cdot e^{-\text{Tr}\left(\frac{1}{2}(U\Delta U^*)[L_i, [L_i, (U\Delta U^*)]] + \frac{1}{2}rM^2 + V((U\Delta U^*))\right)} dU \left(\prod_{i=1}^N d\zeta_i\right)}.$$

A função F será escrito em função do traço da matriz M . Portanto, conhecendo a propriedade cíclica do traço de produto de matrizes, a função F pode ser escrita como

$$F = F(\text{tr}U\Delta U^*) = F(\text{tr}U^*U\Delta) = F(\text{tr}\Delta) = F(\zeta_i).$$

É um pouco de abuso de notação, mas $F(\zeta_i)$ significa que a função depende dos autovalores da matriz diagonalizada M . Dessa forma a função F não depende da matriz U , apenas dos autovalores da matriz Δ . Foi usado ainda a unitariedade da matriz U , ou seja, $UU^* = U^*U = I$. Iremos também ignorar o fator de normalização, a função de partição que fica no denominador do valor esperado de F , por ser apenas um número e não depender de F . Portanto

$$\langle F \rangle \sim \int F(\zeta_i) D \cdot e^{-\text{Tr}\left(\frac{1}{2}(U\Delta U^*)[L_i, [L_i, (U\Delta U^*)]] + \frac{1}{2}r(U\Delta U^*)^2 + V((U\Delta U^*))\right)} dU \left(\prod_{i=1}^N d\zeta_i\right). \quad (5.6)$$

Para continuar a simplificar a equação acima, usaremos a identidade demonstrada a seguir

$$\text{tr}(U\Delta U^*)^k = \text{tr}\Delta^k = \sum_{i=1}^N \zeta_i^k. \quad (5.7)$$

O potencial V estudado aqui é o do campo escalar $V = gM^4$. Usando a identidade acima podemos reescrever

$$\text{tr}V(U\Delta U^*) = \text{tr}g(U\Delta U^*)^4 = g \sum_{i=1}^N \zeta_i^4. \quad (5.8)$$

Da mesma forma

$$\text{tr}\left[\frac{1}{2}r(U\Delta U^*)^2\right] = \frac{1}{2}r \sum_{i=1}^N \zeta_i^2. \quad (5.9)$$

Se abrirmos a parte cinética, que são os comutadores, do expoente da equação (5.6), veremos que a propriedade cíclica dos traços não irá anular a matriz U desse termo. Assim, este será o único termo que dependerá de U . E desta forma, a equação (5.6) fica

$$\langle F \rangle \sim \int F(\zeta_i) D \cdot e^{-[(1/2)r \sum \zeta_i^2 + g \sum \zeta_i^4]} \left[\int dU e^{-(1/2)\text{Tr}(U\Delta U^*[L_i, [L_i, U\Delta U^*]])} \right] \left(\prod_{i=1}^N d\zeta_i\right).$$

Integrando o termo acima entre colchetes em relação a U , haverá um termo resultante que dependerá apenas dos autovalores da matriz M diagonalizada, ou seja, dos autovalores ζ_i . Desta forma podemos rescrever esse termo resultante

$$\int dU \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \left(U \Delta U^* [L_i, [L_i, U \Delta U^*]] \right) \right\} = e^{-S_{\text{eff}}(\zeta_i)}. \quad (5.10)$$

O determinante de Vandermonde D pode também ser reescrito como

$$\begin{aligned} D &= \prod_{i < j} (\zeta_i - \zeta_j)^2 = e^{\ln \prod_{i < j} (\zeta_i - \zeta_j)^2} \\ &= e^{\sum_{i < j} \ln(\zeta_i - \zeta_j)^2} = e^{2 \sum_{i < j} \ln|\zeta_i - \zeta_j|}. \end{aligned}$$

Substituindo esse resultado e a equação (5.10) na expressão para o valor esperado de F , tem-se

$$\langle F \rangle \sim \int \left(\prod_{i=1}^N d\zeta_i \right) F(\zeta_i) e^{-\left[S_{\text{eff}}(\zeta_i) + \frac{1}{2} r \sum \zeta_i^2 + g \sum \zeta_i^4 - 2 \sum_{i < j} \ln|\zeta_i - \zeta_j| \right]}. \quad (5.11)$$

A forma geral dos modelos de matrizes para a teoria quântica de campos para o campo escalar ϕ^4 na esfera difusa está resumida nas duas equações acima (5.10) e (5.11).

O próximo passo para a física teórica nessa área em particular é resolver essa integral de linha nas variáveis ζ_i quando considerado $S_{\text{eff}}(\zeta_i) \neq 0$ (esse termo será chamado de ação efetiva). Não há solução analítica para ela. Entretanto, será apresentado um modelo de matrizes para lidar com esse problema chamado de modelo de matrizes de múltiplos traços.

5.3 Técnicas básicas para o modelo de matrizes

Será mostrado algumas ferramentas para lidar com a integral (5.11) e depois obter o diagrama de fases a partir do modelo de matrizes.

5.3.1 Método do ponto de sela

Definamos todos os termos que se encontram entre colchetes como uma função W

$$W(\zeta_i) = S_{\text{eff}}(\zeta_i) + \frac{1}{2} r \sum \zeta_i^2 + g \sum \zeta_i^4 - 2 \sum_{i < j} \ln|\zeta_i - \zeta_j|.$$

De acordo com R.F. Picken [3], para valores grandes de N , para simplificar a integração, pode-se fazer uma expansão em série de Taylor para a função W em torno dos

autovalores que extremizam a função W . Chame eles de $(\zeta_1^0, \dots, \zeta_N^0) = (\zeta_i^0)$. Assim, para cada ζ_k

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_k} \left\{ S_{\text{eff}}(\zeta_i) + \frac{1}{2}r \sum \zeta_i^2 + g \sum \zeta_i^4 - 2 \sum_{i < j} \ln(\zeta_i - \zeta_j) \right\}_{\zeta_k^0} = 0. \quad (5.12)$$

Depois, expandi-se W usando a fórmula da expansão em série de Taylor para várias variáveis até a segunda ordem

$$W(\zeta_i) = W(\zeta_i^0) + \sum_{k=1}^N \frac{\partial W}{\partial \zeta_k}(\zeta_i^0) (\zeta_k - \zeta_k^0) + \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^N \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta_k \partial \zeta_j}(\zeta_i^0) (\zeta_k - \zeta_k^0) (\zeta_j - \zeta_j^0). \quad (5.13)$$

Substitui-se essa expansão no expoente da equação (5.11). Esse é o conhecido método de aproximação de ponto de sela. Com essa ferramenta, a equação (5.12) torna-se então uma condição para a distribuição dos autovalores da matriz M para altos valores de N no modelo que estamos considerando.

5.3.2 Caso em que $S_{\text{eff}} = 0$

Se desconsiderarmos a parte associada a energia cinética, ou seja, se $S_{\text{eff}}(\zeta_i) = 0$, o problema é equivalente a encontrar o equilíbrio de N partículas sujeitas ao potencial $\frac{1}{2}rx^2 + gx^4$. E essa solução já é conhecida [7]. Se $r > 0$, haverá apenas um mínimo em $x = 0$, como visto no gráfico da figura 4.4. Nesse caso, as partículas se situarão em torno desse ponto, repelindo-se através de uma força simétrica de interação repulsiva, devido ao termo logaritmo proveniente do determinante de Vandermonde. Essa solução recebe o nome de solução de um corte. Se $r < 0$ o potencial tem assim dois mínimos, veja figura 4.2. A depender do quanto r é negativo, pode-se ter uma alta barreira entre os dois mínimos tal que as partículas se dividem em dois intervalos simétricos. E então a solução é chamada de solução de dois cortes. Diminuindo-se ainda mais o valor de $r < 0$, em relação a solução de dois cortes, pode-se ter uma terceira solução chamada de solução de um corte antissimétrico. Ela surge em paredes de potencial ainda mais fundas que a anterior e dessa forma as partículas ficam confinadas em um dos poços de potencial.

De acordo com Tekel [1, 7], a linha divisória entre a solução de um corte e a solução de dois cortes simétricos, para o caso onde não há termo cinético, $S_{\text{eff}} = 0$, é dada por

$$r = -4\sqrt{g}. \quad (5.14)$$

E a linha divisória entre a solução de dois cortes e a solução de um corte antissimétrico é

$$r = -2\sqrt{15}\sqrt{g}. \quad (5.15)$$

Esses são assim as possíveis fases para o modelo de matrizes. É claro que $S_{\text{eff}}(\zeta_i) \neq 0$ vai deformar essas linhas e, como dissemos, é esse o justo desafio que se busca resolver analiticamente.

Qual a ligação entre as fases para o modelo de matrizes e a respectiva teoria quântica que ela descreve? A fase de desordem da teoria de campos corresponde à fase de um corte simétrico, pois ambas possuem o mínimo em torno de zero. A fase de um corte antissimétrico corresponde a fase de ordem uniforme, já que a oscilação do campo se dá em torno de outro mínimo diferente de zero. E por fim, a fase de dois cortes simétricos corresponde a terceira fase para as teorias não comutativas, ou seja, a fase de ordem não uniforme.

5.3.3 Semicírculo de Wigner

Um resultado muito importante para vários métodos aproximativos que buscam encontrar o diagrama de fases para a teoria quântica escalar na esfera difusa, está no fato de que, ao se calcular traços de campos na forma de matrizes, $T_m = \text{Tr}(M^m)$, (para mais detalhes, ver [13]), com campos livres, $g = 0$, para valores grandes de N , a distribuição de autovalores $\rho(\zeta)$, também chamado de função densidade, tem a forma de um semicírculo de Wigner

$$\rho(\zeta) = \frac{N}{2\pi a^2} \sqrt{4a^2 - \zeta^2}. \quad (5.16)$$

A variável ζ representa os autovalores da matriz M . A distribuição tem assim o papel de informar como os autovalores se distribuem no espectro da observável M , como em mecânica quântica. A equação acima define o que é um semicírculo de Wigner. Observe que se trata de uma curva que é de fato um semicírculo de raio $2a$, ou seja, uma limitação para a distribuição dos autovalores no espectro de M . Esse raio, chamado de raio do semicírculo de Wigner, tem a seguinte definição

$$R_W = 2a = 2\sqrt{\frac{f(r)}{N}}, \quad (5.17)$$

em que a função f para ações em que o termo cinético é dado por um laplaciano ∇^2 para matrizes M com N grande é dado por

$$f(r) = \ln\left(1 + \frac{N^2}{r}\right). \quad (5.18)$$

Além disso, nas mesmas hipóteses acima, cuja distribuição é o semicírculo de Wigner, os coeficientes da equação de ponto de sela (5.12) de ordem quadrática ou superior são todos nulos.

5.3.4 Teoria da perturbação e método aproximativo para S_{eff}

Como S_{eff} depende apenas dos autovalores da matriz M , de uma forma geral, pode-se dizer que S_{eff} depende de $T_n = \text{Tr}(M^n)$. A ação efetiva pode ficar ainda mais geral se notarmos que a matriz identidade na esfera difusa se refere a um campo constante, e portanto, nula dentro do termo cinético, que é uma derivada. Logo, $S_{\text{eff}} = S_{\text{eff}}(\{t_n\})$, tal que

$$t_n = \text{Tr} \left(M - \frac{1}{N} \text{Tr} M \right)^n, \quad (5.19)$$

onde $n > 1$. E uma vez que o termo cinético é par em M , veja equação (5.2), tem-se

$$S_{\text{eff}}(\{t_n\}) = S_{\text{eff}}\left(\{(-1)^n t_n\}\right). \quad (5.20)$$

Quando N é grande, o potencial efetivo é dominado pela configuração de equilíbrio de M , e como todos os termos da ação total $S(M)$ são pares em M , e assumindo que o vácuo respeita essa condição, a distribuição de autovalores deve obedecer $\rho(-\zeta) = \rho(\zeta)$ e assim segue que não há momentos t_n ímpares. Dessa forma a ação efetiva depende apenas dos t_{2n} pares. Assim, denotaremos a ação efetiva agora como $S_{\text{eff}} = S_p = S_p(\{t_{2n}\})$. Observe ainda que pela definição da equação (5.19), pode-se inferir que $t_{2n} = t_{2n}(\zeta_i^0, \zeta_i^2, \dots, \zeta_i^{2n})$.

A equação de ponto de sela (5.12), ou também chamada de equação de movimento, com essas observações fica assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta_k} \left\{ S_p \left\{ t_{2n}(\zeta_i^0, \zeta_i^2, \dots, \zeta_i^{2n}) \right\} + \frac{1}{2} r \sum \zeta_i^2 + g \sum \zeta_i^4 - \frac{2}{N^2} \sum_{i < j} \ln(\zeta_i - \zeta_j) \right\}_{\zeta_k^0} &= 0 \\ &= \sum_n \frac{\partial S_p}{\partial t_{2n}} \frac{\partial \zeta_i^{2n}}{\partial \zeta_k} + \frac{r}{2} \zeta_k - \frac{2}{N^2} \sum_{k(\neq i)} \frac{1}{\zeta_i - \zeta_k} = 0 \\ &\Rightarrow \sum_n \frac{\partial S_p}{\partial t_{2n}} 2n \zeta_i^{2n-1} - \frac{2}{N^2} \sum_{k(\neq i)} \frac{1}{\zeta_i - \zeta_k} = 0, \end{aligned} \quad (5.21)$$

onde o termo com o parâmetro de massa foi incluído no primeiro somatório. De acordo com Alexios Polychronakos [9], como já comentamos na seção 5.3.3, na ausência de interações, $g = 0$, a distribuição dos autovalores é um semicírculo de Wigner, e o mesmo autor afirma que para $n > 1$ na equação (5.21), ou seja, para os termos cúbicos ou de ordem mais elevada, o surgimento desses termos deformariam o semicírculo de Wigner. Assim, esses termos devem desaparecer quando calculados nessa distribuição semicircular. Por esse motivo, os coeficientes da equação acima estão sujeitos a condição

$$\left(\frac{\partial S_p}{\partial t_{2n}} \right)_w = 0 \quad (5.22)$$

para $n > 1$ e onde o índice w denota que os momentos são calculados no semicírculo de

Wigner. Expandindo em termos da série de Taylor para várias variáveis, equação (5.13), a ação efetiva em termos de seus momentos pares t_{2n} , obtém-se

$$\begin{aligned} S_p = & a_2 t_2 + (a_4 t_4 + a_{22} t_2^2) + (a_6 t_6 + a_{42} t_4 t_2 + a_{222} t_2^3) \\ & + (a_8 t_8 + a_{62} t_6 t_2 + a_{44} t_4^2 + a_{422} t_4 t_2^2 + a_{2222} t_2^4) \\ & + (a_{10} t_{10} + a_{82} t_8 t_2 + a_{64} t_6 t_4 + a_{622} t_6 t_2^2 + a_{442} t_4^2 t_2 + a_{4222} t_4 t_2^3 + a_{22222} t_2^5) + \dots, \end{aligned} \quad (5.23)$$

onde os coeficientes a 's de cada termo t representam as respectivas derivadas da expansão. Aplicando o vínculo da equação (5.22) na série perturbativa (5.23)

$$\frac{\partial S_p}{\partial t_4} = a_4 + a_{42} t_2 + 2a_{44} t_4 + a_{422} t_2^2 + a_{64} t_6 + 2a_{442} t_4 t_2 + a_{4222} t_2^3 \dots = 0,$$

$$\frac{\partial S_p}{\partial t_6} = a_6 + a_{62} t_2 + a_{64} t_4 + a_{622} t_2^2 + 2a_{66} t_6 + \dots = 0,$$

$$\frac{\partial S_p}{\partial t_8} = a_8 + a_{82} t_2 + a_{84} t_4 + a_{822} t_2^2 + a_{86} t_6 + \dots = 0.$$

Como a distribuição $\rho(\zeta)$ satisfaz a distribuição de Wigner, esse método também é chamado de método autoconsistente da ação efetiva, ou método "bootstrap" [9], os momentos possuem a seguinte relação [7, 9]

$$t_{2n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} t_2^n. \quad (5.24)$$

De onde se pode tirar que $t_4 = 2t_2^2$ e $t_6 = 5t_2^3$. Com isso, as equações de vínculo acima ficam

$$a_4 + a_{42} t_2 + 4a_{44} t_2^2 + a_{422} t_2^2 + 5a_{64} t_2^3 + 4a_{442} t_2^3 + a_{4222} t_2^3 \dots = 0,$$

$$a_6 + a_{62} t_2 + 2a_{64} t_2^2 + a_{622} t_2^2 + 10a_{66} t_2^3 + \dots = 0,$$

$$a_8 + a_{82} t_2 + 2a_{84} t_2^2 + a_{822} t_2^2 + 5a_{86} t_2^3 + \dots = 0.$$

Cada equação acima é linearmente independente em termo de suas potências, assim, cada equação será zero se os coeficientes de cada ordem de potência for zero. Isso implica em

$$a_4 = a_6 = a_8 = a_{42} = a_{62} = a_{82} = 0,$$

$$4a_{44} + a_{422} = 2a_{64} + a_{622} = 5a_{64} + 4a_{442} + a_{4222} = 0. \quad (5.25)$$

Observe que para $n = 1$ não há vínculos e logo todos os termos da forma $a_2 t_2$, $a_{22} t_2^2$, $a_{222} t_2^3$, ... não possuem nenhum vínculo. Dessa forma agrupemos todos esses termos em uma única função $\frac{1}{2} F(t_2)$. Usando os resultados obtidos a partir das equações de vínculos

(5.25) na equação (5.23)

$$S_p = \frac{1}{2}F(t_2) + a_{44}t_4^2 + a_{422}t_2^2t_4 + a_{64}t_6t_4 + a_{622}t_6t_2^2 + a_{442}t_4^2t_2 + a_{4222}t_4t_2^3 + \dots$$

Por conveniência, vamos adicionar alguns termos e subtrair os mesmos para reescrever a equação acima

$$S_p = \frac{1}{2}F(t_2) + a_{44}t_4^2 + a_{44}t_4^2 - a_{44}t_4^2 + a_{422}t_4t_2^2 + a_{64}t_6t_4 + a_{64}t_6t_4 - a_{64}t_6t_4 \\ + a_{622}t_6t_2^2 + a_{442}t_4^2t_2 + a_{442}t_4^2t_2 - a_{442}t_4^2t_2 + a_{4222}t_4t_2^3 + \dots$$

Renomeando os coeficientes $a_{44} = b_1$, $a_{442} = b_2$ e $a_{64} = c$, as equações de vínculo (5.25), são reescritas como

$$4a_{44} = -a_{422} = 4b_1, \\ 2a_{64} = -a_{622} = 2c, \\ a_{4222} = -5c - 4b_2.$$

Usando isso e substituindo alguns termos da série perturbativa por $t_4 = 2t_2^2$ e $t_6 = 5t_2^3$, tem-se

$$S_p = \frac{1}{2}F(t_2) + b_1t_4^2 + 4b_1t_2^4 - 4b_1t_2^4 - 4b_1t_4t_2^2 + ct_6t_4 + 10ct_2^5 - 10ct_2^5 \\ - 2ct_6t_2^2 + b_2t_4^2t_2 + 4b_2t_2^5 - 4b_2t_2^5 - 5ct_4t_2^3 - 4b_2t_4t_2^3, \\ S_p = \frac{1}{2}F(t_2) + b_1t_4^2 - 4b_1t_4t_2^2 + 4b_1t_2^4 + b_2t_2t_4^2 - 4b_2t_4t_2^3 \\ + 4b_2t_2^5 + ct_6t_4 - 2ct_6t_2^2 - 5ct_4t_2^3 + 10ct_2^5 - 4b_1t_2^4 - 10ct_2^5 - 4b_2t_2^5 + \dots, \\ S_p = \frac{1}{2}F(t_2) + (b_1 + b_2t_2)(t_4 - 2t_2^2)^2 + c(t_6 - 5t_2^3)(t_4 - 2t_2^2). \quad (5.26)$$

Os termos de momento t_{2n} , $n \geq 2$, só aparecem a partir da oitava ordem. Então até a sexta ordem só aparecem termos de momento t_2 . Daí se conclui que a ação efetiva em série perturbativa até a sexta ordem é função apenas de t_2

$$S_p = \frac{1}{2}F(t_2).$$

Somos levados a concluir que para distribuições perto do semicírculo de Wigner, o termo de ação efetiva cinético para a distribuição de autovalores simétricos pode ser aproximado por uma função de t_2 , ao qual a partir de agora chamaremos apenas de t

$$S_p = \frac{1}{2}F(t). \quad (5.27)$$

Da definição dada pela equação (5.19), para $n = 2$

$$t = t_2 = \text{Tr} \left(M - \frac{1}{N} \text{Tr} M \right)^2 = \text{Tr} M^2 - \frac{2}{N} (\text{Tr} M)^2 + \frac{1}{N^2} (\text{Tr} M)^2 \text{Tr} 1.$$

Sabendo que $\text{Tr} 1 = N$, tem-se

$$t = \text{Tr} (M^2) - \frac{1}{N} (\text{Tr} M)^2. \quad (5.28)$$

Uma função para $F(t)$

Para encontrar $F(t)$, aplicaremos o método autoconsistente da ação efetiva, ou como dito anteriormente, o método "bootstrap" [9]. Isso significa, que para um campo livre, $g = 0$, exigimos que a distribuição de autovalores continua o semicírculo de Wigner

$$\rho(\zeta) = \frac{\omega}{2\pi} \sqrt{\frac{4N}{\omega} - \zeta^2},$$

onde $\omega = F'(t) + r$ e o raio de Wigner sendo dado por $2a = 2\sqrt{N/\omega}$. Para valores grandes de N , podemos ainda considerar apenas o primeiro termo da equação (5.28), o somatório proveniente do traço se transforma em uma integral, aparecendo a distribuição para cada autovalor ζ . Assim

$$\begin{aligned} t &= \int \zeta^2 \rho(\zeta) d\zeta \quad (5.29) \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \int \zeta^2 \sqrt{\frac{4N}{\omega} - \zeta^2} d\zeta = \frac{N^2}{\omega} \\ \Rightarrow t &= \frac{N^2}{F'(t) + r} \Rightarrow F'(t) + r = \frac{N^2}{t}. \end{aligned}$$

Comparando o raio de Wigner acima com a sua própria definição dada pela equação (5.17)

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{f(r)}{N}} &= \sqrt{\frac{N}{\omega}} \\ \Rightarrow f(r) &= \frac{N^2}{\omega} = t. \end{aligned}$$

Juntando esses resultados, tem-se o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} F'(t) + r &= \frac{N^2}{t}, \\ t &= f(r). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Vamos substituir o valor que obtivemos na equação (5.18) na segunda equação acima

$$t = f(r) = \ln \left(1 + \frac{N^2}{r} \right)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow e^t &= 1 + \frac{N^2}{r} \\ \Rightarrow r &= \frac{N^2}{e^t - 1}.\end{aligned}$$

Substituindo na primeira equação do sistema (5.30)

$$\begin{aligned}\frac{dF(t)}{dt} + \frac{N^2}{e^t - 1} &= \frac{N^2}{t}, \\ \frac{dF(t)}{dt} &= \frac{N^2}{t} + \frac{N^2}{1 - e^t} = N^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} \right).\end{aligned}$$

Integrando ambos os lados com respeito da variável t , obtém-se

$$F(t) = N^2 \ln \frac{t}{1 - e^{-t}}. \quad (5.31)$$

Podemos ainda, reescrever a solução (5.31) em uma forma mais conveniente para os nossos propósitos. Mas antes vamos demonstrar uma identidade.

$$-\ln(1 - e^{-t}) = -\ln \left[e^{-t/2} (e^{t/2} - e^{-t/2}) \right] = \frac{t}{2} - \ln(e^{t/2} - e^{-t/2}).$$

Colocando esse resultado na equação (5.31)

$$\begin{aligned}F(t) &= N^2 \left[\ln(t) - \ln(1 - e^{-t}) \right] = N^2 \left[\ln(t) + \frac{t}{2} - \ln(e^{t/2} - e^{-t/2}) \right], \\ F(t) &= N^2 \left[\frac{t}{2} - \ln \left(\frac{e^{t/2} - e^{-t/2}}{t} \right) \right].\end{aligned} \quad (5.32)$$

Série perturbativa para $F(t)$

Agora, iremos expandir os termos do logaritmo natural de $F(t)$. Para tal prosseguimento

$$\begin{aligned}\ln \left(\frac{e^{t/2} - e^{-t/2}}{t} \right) &= \ln \left(\frac{\sinh(t/2)}{t/2} \right) = \ln \left(\frac{\sinh(y)}{y} \right) = \ln \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k+1}}{y(2k+1)!} \right) \\ &= \ln \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k}}{(2k+1)!} \right) = \ln \left(1 + \frac{(t/2)^2}{6} + \frac{(t/2)^4}{120} + \frac{(t/2)^6}{5040} + \dots \right).\end{aligned}$$

Chame

$$Z = \frac{(t/2)^2}{6} + \frac{(t/2)^4}{120} + \frac{(t/2)^6}{5040}$$

e usemos a expansão para logaritmo natural dada pela fórmula

$$\ln(1 + Z) = Z - \frac{Z^2}{2} + \frac{Z^3}{3} - \frac{Z^4}{4} + \dots$$

para obter

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{e^{t/2} - e^{-t/2}}{t}\right) &= \frac{t^2}{24} + \frac{t^4}{1920} + \frac{t^6}{322560} - \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{24} + \frac{t^4}{1920} + \frac{t^6}{322560} + \dots\right)^2 + \dots \\ &= \frac{t^2}{24} + \frac{t^4}{1920} - \frac{t^4}{1152} + \frac{t^6}{322560} - \frac{t^6}{92160} + \dots = \frac{t^2}{24} - \frac{t^4}{2880} - \frac{t^6}{129024} + \dots \end{aligned}$$

A equação (5.32) assim fica

$$F(t) = N^2 \left[\frac{t}{2} - \left(\frac{t^2}{24} - \frac{t^4}{2880} - \frac{t^6}{129024} + \dots \right) \right].$$

Logo, até a décima segunda ordem em termos dos autovalores da matriz M , a função $F(t)$ pode ser escrita como

$$F(t) = N^2 \left[\frac{t}{2} - \frac{t^2}{24} + \frac{t^4}{2880} + \frac{t^6}{129024} \right]. \quad (5.33)$$

Infelizmente, essa série perturbativa não reproduz um diagrama de fases aproximadamente igual ao obtido numericamente [5], nem mesmo pode-se obter algum ponto triplo a partir das equações que representam as transições de fases [1, 4]. Entretanto, nossos cálculos não estão ao todo perdidos. Será buscado um método não perturbativo para a função $F(t)$. E veremos que é possível obter um diagrama de fases para o campo ϕ^4 na esfera difusa com seu respectivo ponto triplo, pelo menos numericamente.

5.3.5 Aproximação não perturbativa

Primeiramente, definamos a função complexa $u(z)$

$$u(z) = \int \frac{\rho(s)}{z-s} ds, \quad (5.34)$$

em que a integral é realizada em termos do suporte de $\rho(s)$, ou seja, é uma função analítica no plano complexo com um ou mais cortes no eixo real, a depender de que suporte é escolhido para a distribuição.

A equação de ponto de sela (5.12), para N grande e expressa em termos da distribuição fica na seguinte forma

$$\left[F' \left(\sum \zeta^2 \right) \right] \zeta + r\zeta + g\zeta^3 = 2 \int \frac{\rho(s)}{\zeta-s} ds,$$

$$\left[F'(t) + r \right] \zeta + g\zeta^3 = 2 \int \frac{\rho(s)}{\zeta - s} ds, \quad (5.35)$$

onde o fator 4 foi incluído no parâmetro de acoplamento g , ao qual ainda chamaremos de g . Perto do eixo real temos para a função $u(\zeta)$ a equação da continuidade

$$u(\zeta + i\epsilon) + u(\zeta - i\epsilon) = \left[F'(t) + r \right] \zeta + g\zeta^3. \quad (5.36)$$

Teorema de Sokhotski-Plemelj

Por outro lado, o teorema de Sokhotski-Plemelj para integrais do tipo (5.34) afirma que para funções complexas ρ que são definidas e contínuas na reta real, e $a, b \in \mathbb{R}$, tais que $a < 0 < b$ e ζ um parâmetro, vale a seguinte igualdade

$$u(\zeta \pm i\epsilon) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{\rho(s)}{s - (\zeta \pm i\epsilon)} ds = \mp i\pi\rho(\zeta) - \mathcal{P} \int_a^b \frac{\rho(s)}{s - \zeta} ds,$$

em que \mathcal{P} representa o valor principal da respectiva integral e para essa integral, tem-se $a + \xi < 0 < b + \xi$. Com esse teorema

$$u(\zeta + i\epsilon) - u(\zeta - i\epsilon) = -2i\pi\rho(\zeta).$$

Condições para o suporte da distribuição

A partir de agora, para resolver a equação de movimento (5.36), temos que colocar condições sobre o suporte da distribuição $\rho(\zeta)$. Quando o potencial apresenta um único mínimo, então é exigido que a distribuição tenha suporte e seja contínua em um intervalo limitado $[c, d]$, simétrico em torno de zero, no eixo real. Diz-se que a solução para a equação (5.36) é a solução de um corte. Porém, quando o potencial apresenta dois mínimos, e dependendo dos parâmetros r e g , o gás de partículas pode-se dividir e se distribuir em torno dos dois mínimos de potencial, aqui temos a solução de dois cortes. Nesse caso, o suporte para a distribuição é a união de intervalos no eixo real. No caso da solução de um corte simétrico, a solução é conhecida [7] e é dada pela integral na curva com suporte C

$$u(z) = \frac{1}{2} \oint_C \frac{ds}{2\pi i} \frac{F'(t)s + rs + gs^3}{s - z} \sqrt{\frac{(z - c)(z - d)}{(s - c)(s - d)}}.$$

No nosso caso em questão, o raio de Wigner é igual a $2a$, portanto, o intervalo suporte para a distribuição $\rho(\zeta)$, na solução de um corte simétrico, é dado pelo intervalo

$[c, d] = [-2a, 2a]$. Substituindo isso na solução acima, ficamos com a solução para u dada por

$$u(z) = \frac{1}{4\pi i} \oint_C ds \frac{F'(t) s + rs + gs^3}{s - z} \sqrt{\frac{(z + 2a)(z - 2a)}{(s + 2a)(s - 2a)}},$$

$$u(z) = \frac{\sqrt{4a^2 - z^2}}{4\pi i} \oint_C ds \frac{[F'(t) + r] s + gs^3}{(s - z) \sqrt{4a^2 - s^2}}. \quad (5.37)$$

onde o contorno para C é no sentido horário sobre o domínio da distribuição ρ no eixo real, mas sem incluir o polo $s = z$. Observe que as equações (5.34) e (5.37) são as mesmas, pois a segunda é solução da primeira. Vamos usar esse fato expandindo ambas as integrais e igualando as duas séries de Laurent termo a termo.

Uma fórmula que usaremos nos passos seguintes vem do resultado da integral de Cauchy [14,15]. Para todo ponto z_0 no interior de uma curva fechada C no plano complexo

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (5.38)$$

Outro resultado importante para o próximo passo é a série de Laurent. Suas condições são as seguintes: $\forall f(z)$ regular no anel $0 < |z| < R$, R uma constante real, tem-se que a série de Laurent para uma função complexa $f(z)$ em torno de um ponto $z_0 = 0$ no plano complexo é

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k z^k,$$

onde

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{u(z)}{z^{k+1}} dz.$$

Nossa intenção agora não é exatamente estudar a função escrita como uma série, mas apenas expandir a função $u(z)$, comparar coeficientes e montar um sistema de equações. Começamos calculando os coeficientes para a expansão dessa função no caso assintótico $z \rightarrow \infty$, onde a função $u(z)$ é dada pela equação (5.34)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{u(z)}{z - 0} dz = - \int \frac{\rho(s)}{s} ds = 0.$$

A última integral é zero porque a distribuição é uma função par, o que deixa o integrando sendo uma função ímpar. Como a integração é feita em um intervalo simétrico, obtém-se zero para a integral.

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C u(z) dz = - \int \rho(s) ds = -1.$$

No último passo, foi usado a condição de norma unitária para a distribuição.

Pelo mesmo motivo encontrado no coeficiente a_0 ser nulo, tem-se que $a_2 = 0$, pois teremos que integrar uma função ímpar em um intervalo simétrico. Logo, calculemos o

próximo coeficiente.

$$a_{-3} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^2 u(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^2 \left[\int \frac{\rho(s)}{z-s} ds \right] dz = - \int z^2 \rho(z) dz = -t.$$

Foi usado na última igualdade a definição para t a partir da equação (5.29). Com esses resultados, a expansão em torno de $z_0 = 0$ é

$$u(z) = \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-3}}{z^3} + O(z^{-4}) = -\frac{1}{z} - \frac{t}{z^3} + O(z^{-4}).$$

O mesmo será feito para expandir a equação (5.37) usando os mesmos procedimentos e lembrando o raio de Wigner para a distribuição. Dessa forma igualamos os coeficientes dos termos z^{-1} e z^{-3} das duas expansões, encontrando respectivamente [9]

$$a^2 [F'(t) + r] + 3ga^4 = 1$$

e

$$t = a^2 + ga^6.$$

A partir da equação (5.31)

$$F'(t) = \frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}.$$

Dessa forma, temos o seguinte sistema de equações transcendentais

$$a^2 \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{e^t - 1} + r \right] + 3ga^4 = 1 \quad (5.39)$$

e

$$t = a^2 + ga^6. \quad (5.40)$$

Essas equações determinam t e a . É um sistema que não dá para resolver analiticamente. Mas resolvendo-o numericamente [9], pode-se obter a partir de (5.29)

$$\rho(\zeta) = \frac{\sqrt{4a^2 - \zeta^2}}{2\pi a^2} (ga^2 \zeta^2 - ga^4 + 1). \quad (5.41)$$

5.3.6 Diagrama de fases

Já dissemos que para certo valor do parâmetro r em função de g , o sistema passa da solução de um corte para a solução de dois cortes, isso dito em termos da distribuição ρ . O que quer dizer, em outras palavras, que isso ocorrerá quando as partículas se espalharem formando dois mínimos em torno do potencial, ou seja, quando para $\zeta = 0$ tivermos $\rho(\zeta) = 0$, teremos transição de fase entre as fases de um e dois cortes simétricos. Dessa forma, tem-se a partir de (5.41)

$$\rho(\zeta = 0) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{4a^2}}{2\pi a^2} (-ga^4 + 1) = 0 \Rightarrow ga^4 = 1 \Rightarrow a = g^{-1/4} .$$

Substituindo o resultado acima na equação (5.40)

$$t = a^2 + ga^6 = g^{-1/2} + gg^{-3/2} = 2g^{-1/2} .$$

Então a equação (5.39) nos dá a curva de transição de fases entre a solução de um corte e a solução de dois cortes

$$\begin{aligned} a^2 \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{e^t - 1} + r \right] + 3ga^4 &= 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{g^{1/2}} \frac{1}{2g^{-1/2}} - \frac{1}{g^{1/2}} \frac{1}{e^{2g^{-1/2}} - 1} + \frac{1}{g^{1/2}} + \frac{r}{g^{1/2}} &= -2 \\ -\frac{1}{e^{2g^{-1/2}} - 1} + r &= -\frac{5}{2}g^{1/2} , \\ r &= -\frac{5}{2}\sqrt{g} + \frac{1}{e^{2g^{-1/2}} - 1} . \end{aligned} \quad (5.42)$$

O regime assimétrico não pode ser resolvido por meio da equação (5.41), já que ela teve como pré requisito a simetria da distribuição. No entanto, o problema pode ser resolvido numericamente [1] e colocaremos aqui apenas os resultados que foram obtidos por J. Tekel no artigo citado através do seguinte gráfico de transição de fases para a aproximação não perturbativa

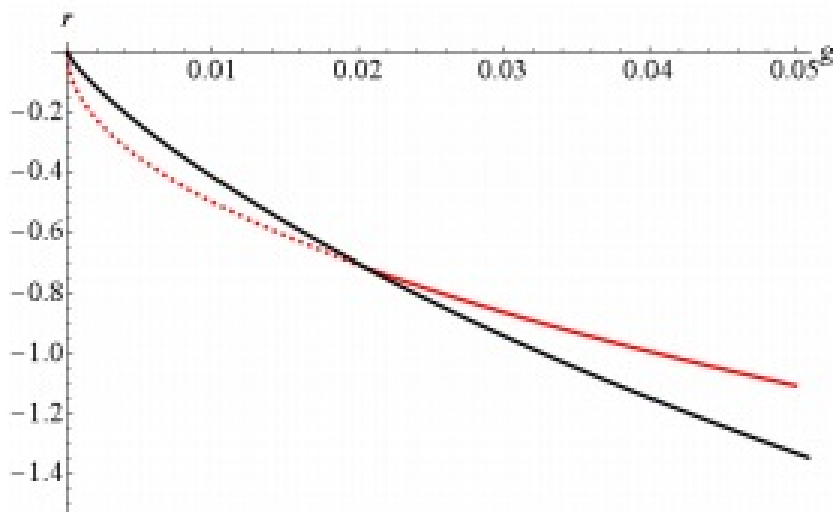


Figura 5.2 Diagrama de fases para a aproximação não perturbativa do campo escalar ϕ^4 na esfera difusa. A linha tracejada vermelha é a curva da equação (5.42) e a preta é obtida numericamente para a fronteira entre dois cortes simétricos e um corte antissimétrico.

O ponto crítico triplo para o acoplamento é dado por

$$g_c \cong 0,02.$$

Esse resultado difere daquele em (5.5) por um fator de aproximadamente 7, onde a integral da ação efetiva foi calculada exata, significando que não se trata de uma boa aproximação. E esse é mais um motivo de estudarmos uma forma de resolver a integral

relacionado a ação efetiva analiticamente, ou ainda, uma indicação da necessidade de novas ideias para resolver essa discrepância.

Conclusões e perspectivas

Como mencionado na introdução desse trabalho, há muito ainda o que se descobrir e se conhecer a respeito do universo, afinal de contas, é ainda uma fração muito pequena de todo o universo observado ao qual temos conhecimento. A busca por teorias que buscam generalizações é uma dessas tentativas de aumentar a nossa compreensão a cerca dos fenômenos da Natureza.

A teoria quântica de campos não comutativa (TQCNC) tenta realizar esse papel de generalizar a teoria quântica de campos. É uma grande motivação para o estudo e desenvolvimento da TQCNC é porque queremos fazer um espaço-tempo não comutativo, que é um dos interesses da Gravitação Quântica.

O modelo de matrizes é um exemplo bem específico de TQCNC, em que mudanças fundamentais acompanham tal teoria em relação a respectiva TQC ao qual ela tem correspondência. Por exemplo, os campos são interpretados como matrizes de dimensão N finita ou infinita. E viu-se que para $N \rightarrow \infty$ o regime comutativo deveria ser recuperado. O problema é que analisando o diagrama de fases de ambas as teorias, pudemos ver que isso não é bem verdade, pois foi verificado que há ainda divergências nos respectivos diagramas: na TQC escalar bidimensional, o sistema sofre transição de fase de primeira ordem e chega a apresentar duas fases; já na respectiva TQCNC, foi verificado o surgimento de uma fase a mais.

Para entender o que está acontecendo, precisamos desenvolver alguns métodos analíticos de como se calcular as integrais matriciais na presença do termo cinético, ou como foi chamado durante esse trabalho, a integral onde surge a ação efetiva. Isso é a nossa motivação e o próximo passo nessa pesquisa.

Referências Bibliográficas

- [1] TEKEL, J. Phase diagram of scalar field theory on fuzzy sphere and multitrace matrix models: arXiv preprint arXiv:1601.05628, 2016.
- [2] GARCÍA, F.; MARTIN, D.; O'CONNOR. Simulation of a scalar field on a fuzzy sphere, Internat. J. Modern Phys, 2009.
- [3] PICKEN, R. The Duistermaat-Heckman integration formula on flag manifolds: Journal of mathematical physics, 1990.
- [4] SÄMANN, C. Bootstrapping fuzzy scalar field theory: Journal of High Energy Physics, 2015.
- [5] TEKEL, J. Phase diagram of scalar field theory on fuzzy sphere and multitrace matrix models: PoS CORFU 2015, 123, 2016.
- [6] GLIMM, J.; JAFFE, A. Quantum Physics, a functional integral point of view: Springer Verlag, 1987.
- [7] TEKEL, J. Phase structure of fuzzy field theories and multitrace matrix models: Acta Phys. Slov, 2015.
- [8] RAAMSDONK, M. V. ; SEIBERG. N. Comments on noncommutative perturbative dynamics: JHEP, 2000.
- [9] POLYCHRONAKOS, A. Effective action and phase transitions of scalar field on the fuzzy sphere: Physical Review D, 2013.
- [10] KLEBANOV, I.R. String Theory in Two Dimensions in String Theory and Quantum Gravity: River Edge, NJ: World Scientific, 1992.
- [11] GUHR, T.; GROELING A. M.; WEIDENMULLER H. A.: Phys. Rep. 299, 189, 1998.
- [12] BERRY, M. V.; M. Tabor, Proc. R. Soc. London, Ser. A 356, 375 ,1977; BOHIGAS, O.; GIANNONI, M. J.; SCHMIT, C.: Phys. Rev. Lett. 52, 1,1984.
- [13] NAIR, V.P.; POLYCHRONAKOS, A.P.; TEKEL, J.: Phys. Rev. D85, 2012.
- [14] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. Mathematical Methods for Physicists. 6th ed. Amsterdã: Academic Press, 2005.
- [15] BROWN, James Ward; CHURCHILL, Ruel V. Complex Variable and Applications. 7th ed. Boston: McGrall-Hill, 2003.
- [16] RYDER, L. H. Quantum field theory: Cambridge university press, 1996.
- [17] GRIFFITHS, D. J.Griffiths. Eletrodynamics: Pearson Addison Wesley, 2011.
- [18] ARNOLD, V. I. Mathematical methods of classical mechanics: Springer Velag, 1989.
- [19] SAKURAI J.J. Modern Quantum Mechanics: San Fu Tuan, editor, 1994.

-
- [20] TANNOUDJ, C.C.; DIN, B.; LALVE, F. Frank. Quantum Mechanics: John Wiley & Sons, 1991.
- [21] PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. An introduction to quantum field theory: Avalon Publishing, 1995.
- [22] GLIMM, J.; JAFFE, A. Quantum Physics: a functional integral point of view, p. 318 to p. 321 and p. 340: Spinger-Verlag, 1987.
- [23] GLIMM, J.; JAFFE, A. Quantum Physics: a functional integral point of view, p.58 to p.62: Spinger-Verlag, 1987.
- [24] GARCÍA, F.; MARTIN, D.; O'CONNOR. Simulation of a scalar field on a fuzzy sphere: Proceedings of Science LAT 2005 (2006).

