

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CID DIAS FERRAZ MACHADO

# **Hipersuperfícies Weingarten de Tipo Esférico**

Brasília  
2018

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**AUTORIZAÇÃO PARA PUBLICAÇÃO DE TESE EM  
FORMATO ELETRÔNICO**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, **AUTORIZO** o Instituto de Exatas da Universidade de Brasília – UnB a reproduzir, inclusive em outro formato ou mídia e através de armazenamento permanente ou temporário, bem como a publicar na rede mundial de computadores (*Internet*) e na biblioteca virtual da UnB, entendendo-se os termos “reproduzir” e “publicar” conforme definições dos incisos VI e I, respectivamente, do artigo 5º da Lei nº 9610/98 de 10/02/1998, a obra abaixo especificada, sem que me seja devido pagamento a título de direitos autorais, desde que a reprodução e/ou publicação tenham a finalidade exclusiva de uso por quem a consulta, e a título de divulgação da produção acadêmica gerada pela Universidade, a partir desta data.

**Título:** Hipersuperfícies Weingarten de Tipo Esférico

**Autor(a):** Cid Dias Ferraz Machado

Brasília, 29 de Março de 2018.

---

Cid Dias Ferraz Machado – Autor

---

Dr. Carlos M. Carrión Riveros – Orientador

CID DIAS FERRAZ MACHADO

# Hipersuperfícies Weingarten de Tipo Esférico

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Exatas da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Programa de Pós-Graduação em Matemática.

**Área de concentração:** Geometria.

**Orientador:** Prof. Dr. Carlos M. Carrión Riveros

Brasília  
2018

CID DIAS FERRAZ MACHADO

# Hipersuperfícies Weingarten de Tipo Esférico

Tese defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Exatas da Universidade de Brasília como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Programa de Pós-Graduação em Matemática, aprovada em 29 de Março de 2018, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

---

**Prof. Dr. Carlos M. Carrión Riveros**  
Departamento de Matemática – UnB  
Presidente da Banca

---

**Prof. Xia Changyu**  
Departamento de Matemática – UnB

---

**Prof. Armando M. Vasquez Corro**  
Instituto de Matemática e Estatística – UFG

---

**Prof. Marco A. Lázaro Velasquez**  
Departamento de Matemática – UFCG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

**Cid Dias Ferraz Machado**

Graduou-se em Matemática (Licenciatura) na UFG-Universidade Federal de Goiás em 2011. Durante a graduação foi monitor no Departamento de Matemática da UFG, com bolsa da CNPq, e professor da rede estadual de ensino do estado de Goiás. Em 2014, formou em Mestrado em Matemática pela UFG.

Em memória ao meu pai.

---

## Agradecimentos

---

Agradeço ao professor Dr. Carlos Carrion por me orientar na produção deste trabalho.

Agradeço aos professores e funcionários do IE-Unb pelo apoio, em especial, a Claudia Queiroz, a Bruna Vasconcelos, e aos professores Dr. João Paulo, Dr. Jiazheng Zhou, Dr. Xia Changyu, Dr. Marcelo Furtado e também ao professor Dr. Armando Corro da UFG.

Agradeço aos colegas de estudo Bruno de Paula, Laís Moreira, Alex Carrazedo, Hiuri Reis, Valter Borges, Juliana Canella, Daiane Soares, Marcos Duarte, Adriano Bezerra, Henrique Zanata, Bruno Trindade, Eduardo Antonio, Bruno Xavier e Lucimeire Carvalho por terem me ajudado nesses 4 anos de percurso, e em especial aos meus colegas de sala Camila Vieira, Dióscoros Brito, Elson Leal e Alex Moura. A Camila Vieira, um agradecimento especial por ter ajudado nas figuras.

Um agradecimento especial a minha querida namorada Gabriella Paixão, que me apoiou durante a realização deste trabalho.

Finalmente agradeço a minha família, pois sem a ajuda deles eu não teria conseguido terminar esta tese, em especial, a minha mãe Alaide Dias Ferraz, que sempre esteve ao meu lado, e ao meu falecido pai Nilton Pereira Machado por todo o apoio que me prestou em vida.

A geometria é a arte de pensar certo desenhando mal

**Henri Poincaré,**  
*matemático francês.*



---

## Resumo

---

Machado, Cid Dias Ferraz. **Hipersuperfícies Weingarten de Tipo Esférico**. Brasília, 2018. 69p. Tese de Doutorado Relatório de Graduação. Departamento de Matemática, Instituto de Exatas, Universidade de Brasília.

Neste trabalho generalizamos uma parametrização obtida por Corro em [6] no espaço Euclidiano tridimensional, e usamos essa parametrização para estudar uma classe de hipersuperfícies orientadas no espaço Euclidiano, ditas hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico, satisfazendo uma relação especial tipo Weingarten entre as  $r$ -ésimas curvaturas médias. Classificamos as hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico de rotação. Estudamos uma classe de hipersuperfícies chamadas hipersuperfícies tipo esférico, e mostramos que no caso bidimensional, esta classe coincide com as superfícies Weingarten de tipo esférico. Também damos uma caracterização de uma classe de hipersuperfícies de Dupin e estudamos superfícies com invariantes de Laplace nulo, além de dar uma caracterização das superfícies mínimas de Laguerre.

### Palavras-chave

Hipersuperfícies, congruência de esferas, superfícies de tipo esférico

---

## Abstract

---

Machado, Cid Dias Ferraz. **Weingarten hypersurfaces of spherical type**. Brasília, 2018. 69p. PhD. Thesis Relatório de Graduação. Departamento de Matemática, Instituto de Exatas, Universidade de Brasília.

We generalize a parameterization obtained by Corro in [6] in the three-dimensional Euclidean space, and we use this parameterization to study a class of oriented hypersurfaces in Euclidean space, called of Weingarten hypersurface of spherical type, satisfying a special relation between the  $r$ th mean curvatures. We classify the Weingarten hypersurface of spherical type of rotation. We studied a class of hypersurfaces called hypersurfaces of spherical type, and we show that in the two-dimensional case, this class coincides with the Weingarten surfaces of spherical type. We also give a characterization of Dupin hypersurfaces and study surfaces with Laplace invariants null, as well as characterize the Laguerre minimal surfaces.

### Keywords

Hypersurfaces, congruence of spheres, surface of spherical type

---

# Sumário

---

Lista de Figuras	<b>10</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>14</b>
1.1 Hipersuperfícies no Espaço Euclidiano	14
1.2 Os invariantes de Laplace n-dimensionais	17
1.3 Funções Holomorfas	18
1.4 O operador de Laplace-Beltrami	21
<b>2 Desenvolvimento</b>	<b>23</b>
2.1 Congruências de Esferas	23
2.2 Hipersuperfícies Weingarten de Tipo Esférico	34
2.2.1 Hipersuperfície Weingarten de Tipo Esférico de Rotação	45
2.3 Hipersuperfície de Tipo Esférico	53
<b>3 Outras aplicações da parametrização (2-2)</b>	<b>57</b>
3.1 Hipersuperfícies de Dupin	57
3.2 Superfícies com invariantes de Laplace nulo	59
3.3 Superfícies mínimas de Laguerre	65
Referências Bibliográficas	<b>68</b>

---

## Lista de Figuras

---

2.1	A superfície de tipo esférico gerada por $f(u_1, u_2)$ .	39
2.2	A superfície de tipo esférico gerada por $f(u_1, u_2)$ vista por outro ângulo.	39
2.3	A superfície de tipo esférico gerada por $g(u_1, u_2)$ .	39
2.4	A superfície de tipo esférico gerada por $g(u_1, u_2)$ vista por outro ângulo.	40
2.5	Nesta figura temos a curva e a superfície Weingarten de tipo esférico de rotação do exemplo 2.21 com $C = D = 1$ . Observe que a curva possui dois pontos que cortam o eixo de rotação e uma singularidade no 4 <sup>a</sup> quadrante, o que condiz com as duas singularidades isoladas e um círculo de singularidades que a superfície possui.	49
2.6	Nesta figura temos a curva e a superfície Weingarten de tipo esférico de rotação do exemplo 2.21 com $C = 1$ e $D = 0$ . Observe que a curva possui uma singularidade no 4 <sup>a</sup> quadrante, o que condiz com o círculo de singularidades que a superfície possui.	50
2.7	Curva mostrando a interseção entre a reta $-8C^2u_1 - 4C^2 - 4CD$ , com $C = D = 1$ , e a curva exponencial $e^{2u_1}$ .	53
2.8	Figura mostrando as três situações que podem ocorrer, entre a reta $8C^2u_1 - 4C^2 + 4CD$ e a curva exponencial $e^{2u_1}$ . No caso de duas interseções temos $C = D = 1$ . No caso de uma interseção temos $C = 1$ e $D = 2 - 2\ln(2)$ . No caso em que não temos interseção temos $C = 1$ e $D = 0$ .	53
2.9	Nesta figura temos a curva e a superfície Weingarten de tipo esférico de rotação do exemplo 2.21 com $C = 1$ e $D = 2 - 2\ln(2)$ . Observe que a curva possui um pontos que encontra o eixo de rotação e uma singularidade no 4 <sup>a</sup> quadrante, o que condiz com a singularidade isolada e com o círculo de singularidades que a superfície possui.	54
3.1	Plano ondulado reto	63
3.2	Plano curvo	64
3.3	Plano com bolhas	64
3.4	Funil	65
3.5	Plano ondulado sem a origem	65
3.6	Colar de esferas	66

---

## Introdução

---

As superfícies  $M^2$  que satisfazem uma relação funcional da forma  $W(H, K) = 0$ , onde  $H$  e  $K$  denotam as curvaturas médias e Gaussianas das superfícies  $M^2$ , respectivamente, são chamadas superfícies Weingarten. Exemplos de superfícies Weingarten são as superfícies de revolução e as superfícies de curvatura média ou Gaussiana constante. Uma classe importante são as superfícies que satisfazem uma relação linear da forma

$$aH + bK + c = 0,$$

onde  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $a^2 + b^2 \neq 0$ . Essas superfícies são chamadas superfícies Weingarten linear. Veja [11].

Casos particulares de superfícies Weingarten foram estudados por vários autores, como por exemplo Schief [17], que estudou as superfícies  $M^2 \subset \mathbb{R}^3$  que satisfazem uma relação Weingarten da forma  $(\mu^2 \pm \rho^2)K + 2\mu H + 1 = 0$ , onde  $\mu, \rho : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são funções harmônicas (em certo sentido) definidas sobre a superfície.

Em [6], Corro apresentou uma maneira de parametrizar superfícies como envelopes de uma congruência de esferas na qual um envelope está contido em um plano e com função raio  $h$  associada a um sistema de tipo hidrodinâmico. Como aplicação, ele estuda as superfícies no espaço hiperbólico que satisfazem a igualdade

$$2ach^{\frac{2(c-1)}{c}}(H-1) + (a+b-ach^{\frac{2(c-1)}{c}})K_I = 0,$$

onde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a+b \neq 0$ ,  $c \neq 0$ ,  $H$  é a curvatura média e  $K_I$  é a curvatura Gaussiana. Esta classe de superfícies incluem as superfícies de Bryant e as superfícies flat do espaço hiperbólico, e são chamadas de superfície Weingarten generalizada do tipo Bryant.

Fernandes [9] estudou as superfícies  $M^2$  no espaço hiperbólico que satisfazem a relação  $2(H-1)e^{2\mu} + K_I(1-e^{2\mu}) = 0$ , onde  $\mu$  é uma função harmônica com respeito a forma quadrática  $\sigma = -K_I I + 2(H-1)II$ , e  $I$  e  $II$  representam a primeira e segunda forma quadrática de  $M^2$ . Estas superfícies são ditas Superfícies Weingarten generalizada tipo harmônico.

Em [7], Dias estudou uma classe de superfícies orientadas  $M^2 \subset \mathbb{R}^3$  que cumprem uma relação da forma  $2\Psi_\nu H + \Delta_\nu K = 0$ , onde  $\Psi_\nu, \Delta_\nu : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  são dadas por

$\Psi_v(p) = \langle p - v, N(p) \rangle$ ,  $\Delta_v(p) = \langle p - v, p - v \rangle$  e  $v \in \mathbb{R}^3$  é um vetor fixo.

Uma superfície orientada  $\Psi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  com curvatura Gaussiana não nula  $K$  e curvatura média  $H$  é chamada uma *superfície mínima de Laguerre* se

$$\Delta_{III} \left( \frac{H}{K} \right) = 0,$$

onde  $\Delta_{III}$  é o laplaciano com respeito a terceira forma fundamental  $III$  de  $\Psi$ . O estudo dessas superfícies foi feita por W. Blaschke [1, 3, 2, 4], onde tais superfícies aparecem como pontos críticos do funcional

$$L(\Psi) = \int \frac{H^2 - K}{K} dM,$$

onde  $dM$  é o elemento de área da superfície.

Em [12], os autores estudam superfícies mínimas de Laguerre como gráficos de funções biarmônicas no modelo isotrópico da Geometria de Laguerre. Em particular estudam as superfícies mínimas de Laguerre de tipo esférico, a saber as superfícies  $M^2$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que o conjunto de esferas de centro  $p + \frac{H(p)}{K(p)}N(p)$ ,  $p \in M^2$ , tangenciam a um plano fixo orientado.

Em [10], os autores estudam uma classe de hipersuperfícies orientadas  $M^n$  no espaço hiperbólico  $(n+1)$ -dimensional que satisfazem uma relação Weingarten na forma

$$\sum_{r=0}^n (c - n + 2r) \binom{n}{r} H_r = 0,$$

onde  $c$  é uma constante real e  $H_r$  é a  $r$ -ésima curvatura média da hipersuperfície  $M^n$ . Eles mostram como esta classe de hipersuperfície é caracterizada por uma aplicação harmônica derivada das duas aplicações de Gauss hiperbólica. Olhando estas hipersuperfícies como ortogonais para uma congruência de geodésicas, eles também mostram a relação de tais hipersuperfícies com as soluções da equação  $\Delta u + ku^{\frac{n+2}{n-2}} = 0$ , onde  $k \in \{-1, 0, 1\}$ .

Neste trabalho, motivado pelo trabalho de [6], apresentaremos uma maneira de parametrizar hipersuperfícies como envelopes de congruência de esferas na qual um envelope está contido em um hiperplano e com função raio  $h$  relacionado com um sistema de tipo hidrodinâmico. Com essa parametrização, apresentamos duas generalizações das superfícies de tipo esférico estudadas em [12], a saber as hipersuperfícies Weingarten tipo esférico e as hipersuperfícies de tipo esférico. As hipersuperfícies do espaço euclidiano  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  que satisfazem uma relação de Weingarten da forma

$$\sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} r f^{r-1} H_r \binom{n}{r} = 0,$$

onde  $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$  e  $H_r$  são as  $r$ -ésimas curvaturas médias de  $M^n$ , serão chamadas de *hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico*. Daremos uma caracterização destas hipersuperfícies por meio de aplicações harmônicas, e com esta caracterização daremos exemplos de tais hipersuperfícies. Definindo as hipersuperfícies de tipo esférico como as hipersuperfícies  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  tais que existem um hiperplano  $\Pi$  tal que para todo ponto  $p \in M^n$  o conjunto de esferas de centro

$$p + \frac{H_{n-1}(p)}{H_n(p)}N(p)$$

e raio  $h = \frac{H_{n-1}}{H_n}$ , tangenciam  $\Pi$ , obteremos uma caracterização dessas hipersuperfícies que nos permite mostrar que as classes de hipersuperfície Weingarten de tipo esférico e de tipo esférico coincidem no caso bidimensional. Observamos que em [16], o autor estuda hipersuperfícies de tipo esférico onde a função raio  $h = \frac{H_{n-1}}{H_n}$  é harmônica.

No Capítulo 1, apresentamos alguns resultado que utilizaremos no decorrer da tese. Primeiro definiremos as hipersuperfícies do  $\mathbb{R}^{n+1}$ , nosso principal objeto de estudo, e depois definiremos alguns conceitos importantes relacionados. Depois apresentaremos os invariantes de Laplace de um sistema de equações diferenciais estudado em [13]. Também apresentamos algumas propriedades das funções holomorfas e suas relações com as funções harmônicas. Por último definiremos o operador de Laplace-Beltrami, que generaliza o operador Laplaciano.

No Capítulo 2, obtemos uma generalização do resultado obtido por Corro em [6]. Definimos as hipersuperfície Weingarten de tipo esférico e caracterizamos uma classe de hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico, utilizando a parametrização citada acima, como hipersuperfícies geradas pela congruência de esferas tais que a função raio  $h$  seja harmônica, desde que o hiperplano tangente a congruência de esferas seja parametrizado pela identidade. Além de darmos exemplos de tais hipersuperfícies, mostraremos que as superfícies Weingarten de tipo esférico são superfícies mínimas de Laguerre. Também classificaremos as hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico de rotação. Ao final deste capítulo estudaremos as hipersuperfícies de tipo esférico e mostraremos a equivalência no caso bidimensional com as superfícies Weingarten de tipo esférico.

No Capítulo 3, daremos outras aplicações da parametrização citada acima. Aproveitando nossa parametrização por congruência de esferas, daremos uma caracterização de uma classe de hipersuperfícies de Dupin geradas por esta parametrização, e mostraremos uma relação com as hipersuperfícies de tipo esférico. Também apresentaremos uma representação de uma classe de superfícies parametrizadas por linhas de curvatura com invariantes de Laplace nulos. Finalmente daremos uma caracterização de uma classe de superfícies mínimas de Laguerre.

## Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e fatos que serão utilizados no decorrer desta tese sem maiores detalhes. Os detalhes poderão ser encontrados nas referências citadas ao longo do capítulo.

Denotaremos por  $\mathbb{R}^n$  o *espaço Euclidiano  $n$ -dimensional* e por  $u = (u_1, \dots, u_n)$  suas coordenadas. Dadas uma função diferenciável  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , a derivada parcial de  $f$  relativa a  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , será denotada por  $f_{,i}$ .

### 1.1 Hipersuperfícies no Espaço Euclidiano

**Definição 1.1** Seja  $M^n$  um subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \geq 2$ . Dizemos que  $M^n$  é uma *hipersuperfície* de  $\mathbb{R}^{n+1}$  se, para cada  $p \in M^n$ , existem uma vizinhança  $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$  de  $p$ , um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  e um homeomorfismo diferenciável  $X : U \rightarrow V \cap M^n$  tal que a diferencial  $dX_q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  é injetora para todo  $q \in U$ .

A aplicação  $X$  é chamada uma *parametrização* de  $M^n$ . Em termos de suas componentes, a parametrização  $X$  pode ser escrita por  $X(u) = (x_1(u), \dots, x_{n+1}(u))$ ,  $u = (u_1, \dots, u_n) \in U$ . Dessa forma,  $X$  é diferenciável se, e somente se,  $x_i$  for diferenciável para todo  $i = 1, \dots, n+1$ . Além disso, a diferencial  $dX_q$  é injetora se, e somente se, os vetores

$$X_{,i}(q) = \frac{\partial X}{\partial u_i}(q), \quad 1 \leq i \leq n,$$

são linearmente independentes.

Um *vetor tangente* a  $M^n$  em um ponto  $p \in M^n$  é um vetor tangente a uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M^n$ , com  $\alpha(0) = p$ . O conjunto de todos os vetores tangentes a  $M^n$  em  $p$ , denotado por  $T_p M^n$ , é chamado de *espaço tangente* a  $M^n$  em  $p$ . Se  $X$  é uma parametrização de  $M^n$  em  $p$ , então  $T_p M^n$  coincide com o subespaço vetorial gerado por  $X_{,i}(q)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , onde  $p = X(q)$ .

Dizemos que  $M^n$  é *orientável* se for possível determinar um campo vetorial diferenciável unitário  $N$  normal a  $T_p M^n$ , para cada  $p \in M^n$ . Neste caso, dizemos que



$N$  é a aplicação normal de Gauss de  $M^n$  e que tal campo determina uma orientação em  $M^n$ . Em coordenadas locais,

$$N_{,i} = \sum_{j=1}^n W_{ij} X_{,j}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

onde  $X$  é uma parametrização de  $M^n$ . A matriz  $W = (W_{ij})$  é chamada de *matriz de Weingarten* de  $M^n$ .

A primeira forma fundamental  $I$  de  $M^n$  é a restrição do produto interno canônico de  $\mathbb{R}^{n+1}$  aos espaços tangentes  $T_p M^n$ . Logo, para cada  $p \in T_p M^n$

$$I_p(w_1, w_2) = \langle w_1, w_2 \rangle, \quad w_1, w_2 \in T_p M^n.$$

A segunda forma fundamental  $II$  e a terceira forma fundamental  $III$  de  $M^n$  são definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} II_p(w_1, w_2) &= \langle -dN_p(w_1), w_2 \rangle, \\ III_p(w_1, w_2) &= \langle -dN_p(w_1), -dN_p(w_2) \rangle, \end{aligned}$$

onde  $p \in M^n$ ,  $w_1, w_2 \in T_p M^n$  e  $dN_p$  é a diferencial da aplicação normal de Gauss em  $p$ . Observe que, para cada  $p \in M^n$ ,  $-dN_p$  é auto-adjunta com respeito a primeira forma fundamental  $I$ . Consequentemente, a segunda e a terceira formas fundamentais são formas bilineares simétricas sobre  $T_p M^n$ , para todo  $p \in M^n$ .

As curvaturas principais  $k_1, \dots, k_n$  de  $M^n$ , em um ponto  $p$ , são os autovalores de  $-dN_p$ . Dessa forma, define-se a *curvatura média*  $H$  e a *curvatura de Gauss-Kronecker*  $K$  por

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i = \frac{1}{n} \text{tr}(-dN_p) \quad \text{e} \quad K = \prod_{i=1}^n k_i = \det(-dN_p),$$

onde  $\text{tr}(\cdot)$  e  $\det(\cdot)$  denotam, respectivamente, o traço e o determinante da matriz que representa  $-dN_p$ . Além disso, as  $r$ -ésimas curvaturas média  $H_r$  de  $M^n$ ,  $1 \leq r \leq n$ , são definidas por

$$H_r = \frac{S_r(W)}{\binom{n}{r}},$$

onde, para inteiros  $0 \leq r \leq n$ ,  $S_r(W)$ , é definido por

$$\begin{aligned} S_0(W) &= 1, \\ S_r(W) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} k_{i_1} \dots k_{i_r}. \end{aligned}$$

Observamos que  $H = H_1$  e  $K = H_n$ .

Se  $X : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \geq 2$ , é uma hipersuperfície parametrizada por linhas de curvaturas, com curvaturas principais distintas  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$ , então escrevemos, para  $1 \leq i, j \leq n$ ,

$$\begin{aligned}\langle X_{,i}, X_{,j} \rangle &= \delta_{ij} g_{ii}, \\ N_{,i} &= -k_i X_{,i}.\end{aligned}$$

**Lema 1.2** Os símbolos de Christoffel da métrica  $g_{ij}$  (veja [8]) são dados por

$$\Gamma_{ij}^k = 0 \text{ para } i, j, k \text{ distintos}; \quad (1-1)$$

$$\Gamma_{ij}^j = \frac{g_{jj,i}}{2g_{jj}} \text{ para todo } i, j; \quad (1-2)$$

$$\Gamma_{ii}^j = -\frac{g_{ii,j}}{2g_{jj}} = -\frac{g_{ii}}{g_{jj}} \Gamma_{ji}^i \text{ para } i \neq j. \quad (1-3)$$

*Demonstração.* Sabemos que  $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n (g_{jm,i} + g_{mi,j} - g_{ij,m}) g^{mk}$ ,  $i, j, k, m = 1, \dots, n$ , onde  $(g^{ij})$  é a inversa da matriz  $(g_{ij})$ . Como a parametrização  $X$  é ortogonal,  $g^{ij} = 0$ , para  $i \neq j$  e  $g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}}$ . Dessa forma,

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2g_{kk}} (g_{jk,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k}), \quad i, j, k = 1, \dots, n,$$

de onde seguem as expressões (1-1), (1-2) e (1-3).  $\square$

Segue do lema acima que os símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  de  $X$ , satisfazem

$$X_{,ij} - \Gamma_{ij}^i X_{,i} - \Gamma_{ij}^j X_{,j} = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq n. \quad (1-4)$$

**Definição 1.3** Uma transformação linear  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dita *ortogonal* se preserva o produto interno canônico de  $\mathbb{R}^n$ .

Dito de outra forma, uma transformação ortogonal é uma *isometria linear* de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$ . O conjunto de todas transformações ortogonais de  $\mathbb{R}^n$  forma o *grupo ortogonal*  $O(n)$ . Observe que  $O(n)$  pode ser visto como um subgrupo do grupo ortogonal  $O(n+1)$  das transformações ortogonais de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Os elementos de  $O(n)$  agem em  $\mathbb{R}^{n+1}$  rotacionando os pontos em torno de uma reta invariante dada, chamada de *eixo de rotação*. Dessa forma, a órbita de um ponto  $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ , pela ação de  $O(n)$ , é uma esfera  $(n-1)$ -dimensional centrada no eixo de rotação  $r$  e cujo raio é a distância de  $p$  à  $r$ .

**Definição 1.4** Uma hipersuperfície  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é dita de *rotação* se é invariante por  $O(n)$ , isto é, as seções ortogonais ao eixo de rotação  $r$  determinam em  $M^n$  esferas  $(n-1)$ -dimensionais centradas em  $r$ .

**Definição 1.5** Uma imersão  $X : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  é uma *hipersuperfície de Dupin* se cada curvatura principal é constante ao longo da correspondente linha de curvatura, isto é, se  $k_{i,i} = 0$ , onde  $k_i$  são as curvaturas principais de  $X$ .

## 1.2 Os invariantes de Laplace n-dimensionais

Considere o sistema linear de equações diferenciais parcial da forma

$$Y_{,kl} + a_{kl}^k Y_{,k} + a_{kl}^l Y_{,l} + c_{kl} Y = 0, \quad 1 \leq k \neq l \leq n, \quad (1-5)$$

onde  $Y$  é uma função real de várias variáveis  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , e os coeficientes  $a_{ij}^k$  e  $c_{ij}$ ,  $1 \leq i, j, k \leq n$ , são funções diferenciáveis de  $u_1, u_2, \dots, u_n$  que são simétricas nos pares de índices inferiores e satisfazem certas condições de compatibilidade.

A forma geral do sistema (1-5) é preservado por *transformações admissíveis*

$$Y = \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) \bar{Y}, \quad (1-6)$$

$$u_i = f_i(\bar{u}_i), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (1-7)$$

onde  $\varphi$  é uma função diferenciável e não nula, e  $f_i$  são funções diferenciáveis cujas derivadas parciais não se anulam. As transformações admissíveis (1-6) e (1-7), transformam o sistema (1-5) no sistema

$$\bar{Y}_{,kl} + \bar{a}_{kl}^k \bar{Y}_{,k} + \bar{a}_{kl}^l \bar{Y}_{,l} + \bar{c}_{kl} \bar{Y} = 0, \quad 1 \leq k \neq l \leq n,$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{a}_{lk}^l &= f_k' [a_{lk}^l + (\log \varphi)_{,k}], \\ \bar{c}_{lk} &= f_l' f_k' [c_{lk} + a_{lk}^l (\log \varphi)_{,l} + a_{lk}^k (\log \varphi)_{,k} + \frac{\varphi_{kl}}{\varphi}], \quad 1 \leq k \neq l \leq n. \end{aligned}$$

**Definição 1.6** Os *invariantes de Laplace n-dimensional de (1-5)* (Veja [13]), são as  $n(n-1)^2$  funções dadas por

$$m_{ij} = a_{ij,i}^i + a_{ij,j}^j - c_{ij}, \quad m_{ijk} = a_{kj}^k - a_{ij}^i, \quad k \neq i, j,$$

para todos os pares  $(i, j)$ , com  $1 \leq i \neq j \leq n$ .

**Lema 1.7** Os *invariantes de Laplace n-dimensionais do sistema (1-5)* satisfazem as

seguintes relações:

$$\begin{aligned} m_{ijk} + m_{kji} &= 0, \\ m_{ijk,k} - m_{ijk}m_{jki} - m_{kj} &= 0 \\ m_{ij,k} + m_{ijk}m_{ik} + m_{ikj}m_{ij} &= 0 \\ m_{ijk} - m_{ijl} - m_{ljk} &= 0, \\ m_{lik,j} + m_{ijl}m_{kil} + m_{ljk}m_{kij} &= 0, \end{aligned}$$

onde  $1 \leq i, j, k, l \leq n$ , com  $i, j, k$  e  $l$  distintos.

*Demonstração.* Veja [13]. □

**Observação 1.8** Observe que o sistema (1-4) é da forma (1-5). Logo podemos considerar os invariantes de Laplace  $n$ -dimensional do sistema (1-4), que podem ser escritos como

$$m_{ij} = -\Gamma_{ij,i}^i + \Gamma_{ij}^i \Gamma_{ij}^j \quad e \quad m_{ijk} = \Gamma_{ij}^i - \Gamma_{kj}^k. \quad (1-8)$$

## 1.3 Funções Holomorfas

Denotaremos por  $\mathbb{C}$  o corpo dos números complexos. Além disso, identificaremos  $\mathbb{C}$  com  $\mathbb{R}^2$  pelo isomorfismo  $z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C} \mapsto (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ .

Considere uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , onde  $U$  é um subconjunto aberto do plano complexo  $\mathbb{C}$ . Denotando por

$$\langle 1, f \rangle = \operatorname{Re}(f) \quad e \quad \langle i, f \rangle = \operatorname{Im}(f)$$

as partes real  $\operatorname{Re}(f)$  e imaginária  $\operatorname{Im}(f)$  de  $f$ , diremos que  $f$  é  $\mathbb{R}$ -diferenciável em  $z_0 = u_1^0 + iu_2^0 \in U$  se  $\langle 1, f \rangle$  e  $\langle i, f \rangle$  forem diferenciáveis em  $(u_1^0, u_2^0)$ . Por outro lado,  $f$  é dita *holomorfa* em  $z_0 \in U$  se existe o limite

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

O número complexo  $f'(z_0)$  é chamado de *derivada* de  $f$  em  $z_0$ . Se  $f$  for holomorfa em todos os pontos de  $U$ , diremos que  $f$  é uma função holomorfa.

Uma consequência importante das definições acima é o seguinte teorema, cuja demonstração pode ser vista em [14].

**Teorema 1.9** Dada uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , onde  $U$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{C}$ , as seguintes afirmações são equivalentes:

- $f$  é holomorfa em  $z_0 \in U$ ;
- $f$  é  $\mathbb{R}$ -diferenciável em  $z_0 \in U$  e as partes real e imaginária  $\langle 1, f \rangle$  e  $\langle i, f \rangle$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann

$$\langle 1, f \rangle_{,1} = \langle i, f \rangle_{,2} \text{ e } \langle 1, f \rangle_{,2} = -\langle i, f \rangle_{,1}, \quad (1-9)$$

em  $z_0$ ;

- $f$  possui derivada real em  $z_0 \in U$  e a diferencial  $df_{z_0}$  corresponde a multiplicação por um número complexo.

**Observação 1.10** Segue do teorema acima que a derivada de uma função holomorfa  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  é dada por

$$f' = f_{,1} = -if_{,2}.$$

**Definição 1.11** Dizemos que uma função real  $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é harmônica se  $\Delta h$  é identicamente nulo, isto é,

$$\Delta h(u_1, u_2) = h_{,11} + h_{,22} = 0,$$

para todo  $(u_1, u_2) \in U$ .

Observe que pelas equações de Cauchy-Riemann (1-9), a parte real  $\langle 1, f \rangle$  e imaginária  $\langle i, f \rangle$  de uma função holomorfa  $f$  são harmônicas. A recíproca deste resultado é vista no seguinte teorema, cuja demonstração pode ser obtida em [14].

**Teorema 1.12** Se  $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função harmônica, onde  $U$  é um aberto simplesmente conexo, então  $h$  é parte real de uma função holomorfa.

A identificação de  $\mathbb{C}$  com  $\mathbb{R}^2$  induz de maneira natural a noção de produto interno de funções holomorfas. Com efeito, dadas as funções holomorfas  $f, g : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  o produto interno  $\langle f, g \rangle$  é uma função real definida em  $U$  e dada por

$$\langle f, g \rangle = \langle 1, f \rangle \langle 1, g \rangle + \langle i, f \rangle \langle i, g \rangle.$$

Observe que a definição acima está de acordo com a notação já utilizada para representar as partes real e imaginária da função  $f$ . Caso  $g = 1$ ,  $\langle f, g \rangle$  resulta na parte real de  $f$  e, caso  $g = i$ ,  $\langle f, g \rangle$  resulta na parte imaginária de  $f$ .

**Proposição 1.13** Sejam  $f, g, h : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  funções holomorfas. Valem as seguintes propriedades:

i)  $\langle f, g \rangle_{,1} = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle$ ;

- ii)  $\langle f, g \rangle_2 = \langle if', g \rangle + \langle f, ig' \rangle$ ;  
 iii)  $\langle fh, g \rangle = \langle f, \bar{h}g \rangle$ ;  
 iv)  $\langle f, g \rangle + i\langle f, ig \rangle = f\bar{g}$ ;  
 v)  $\langle 1, f \rangle^2 - \langle i, f \rangle^2 = \langle 1, f^2 \rangle$ ;  
 vi)  $\langle 1, f \rangle \langle i, f \rangle = -\frac{1}{2} \langle 1, if^2 \rangle$ .

*Demonstração.* As propriedades i) e ii) seguem diretamente da Observação (1.10). Para demonstrarmos iii), note que

$$\begin{aligned} fh &= (\langle 1, f \rangle \langle 1, h \rangle - \langle i, f \rangle \langle i, h \rangle) + i(\langle 1, f \rangle \langle i, h \rangle + \langle i, f \rangle \langle 1, h \rangle) \\ \bar{h}g &= (\langle 1, h \rangle \langle 1, g \rangle + \langle i, h \rangle \langle i, g \rangle) + i(\langle 1, h \rangle \langle i, g \rangle - \langle i, h \rangle \langle 1, g \rangle) \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \langle fh, g \rangle &= (\langle 1, f \rangle \langle 1, h \rangle - \langle i, f \rangle \langle i, h \rangle) \langle 1, g \rangle + (\langle 1, f \rangle \langle i, h \rangle + \langle i, f \rangle \langle 1, h \rangle) \langle i, g \rangle \\ &= \langle 1, f \rangle (\langle 1, h \rangle \langle 1, g \rangle + \langle i, h \rangle \langle i, g \rangle) + \langle i, f \rangle (\langle 1, h \rangle \langle i, g \rangle - \langle i, h \rangle \langle 1, g \rangle) \\ &= \langle f, \bar{h}g \rangle. \end{aligned}$$

A propriedade iv) segue de

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle + i\langle f, ig \rangle &= (\langle 1, f \rangle \langle 1, g \rangle + \langle i, f \rangle \langle i, g \rangle) + i(-\langle 1, f \rangle \langle i, g \rangle + \langle i, f \rangle \langle 1, g \rangle) \\ &= (\langle 1, f \rangle + i\langle i, f \rangle) (\langle 1, g \rangle - i\langle i, g \rangle) \\ &= f\bar{g}. \end{aligned}$$

A propriedade v) segue de  $f^2 = (\langle 1, f \rangle^2 - \langle i, f \rangle^2) + 2i\langle 1, f \rangle \langle i, f \rangle$ . Além disso, temos que

$$if^2 = -2\langle 1, f \rangle \langle i, f \rangle + i(\langle i, f \rangle^2 - \langle 1, f \rangle^2),$$

de onde segue a propriedade vi). □

O seguinte lema foi obtido em [5].

**Lema 1.14** *Seja  $Y = (g, 0)$  uma parametrização ortogonal de  $\Pi = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 : u_3 = 0\}$  onde  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função holomorfa. Então  $\tilde{m}_{12} = 0$  se, e somente se,*

$$g(z) = \frac{z_1 z + z_2}{z_3 z + z_4}, \quad z_1 z_4 - z_2 z_3 \neq 0 \quad (1-10)$$

ou

$$g(z) = \frac{z_1 e^{\sqrt{-2}cz} + z_2}{z_3 e^{\sqrt{-2}cz} + z_4}, \quad z_1 z_4 - z_2 z_3 \neq 0, \quad c \neq 0, \quad (1-11)$$

onde  $z_i \in \mathbb{C}$ . Além disso, neste caso  $\tilde{m}_{12} = 0$  se, e somente se,  $\tilde{m}_{21} = 0$ .

## 1.4 O operador de Laplace-Beltrami

Nesta seção introduziremos o operador Laplaciano em uma variedade riemanniana qualquer.

**Definição 1.15** Seja  $f \in C^\infty(M^n, \mathbb{R})$ , ou seja,  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável. O *gradiente* de  $f$  é um campo diferenciável em  $M^n$ , satisfazendo

$$\langle \text{grad}(f(p)), v \rangle = df_p(v), \forall v \in T_p M^n.$$

**Definição 1.16** Denote por  $\chi(M)$  o conjunto dos campos de vetores de classe  $C^\infty(M)$  e seja  $Y \in \chi(M)$ . A *divergência* de  $Y$  é uma função real em  $M^n$ , dada por

$$\text{div}Y(p) = \text{tr}(F), \quad F(Z)(p) = \nabla_Z Y(p).$$

Agora podemos definir o operador de Laplace-Beltrami.

**Definição 1.17** O *operador de Laplace-Beltrami* é definido como

$$\Delta f = \text{div grad } f, \quad f \in C^\infty(M^n, \mathbb{R})$$

**Proposição 1.18** Seja  $M$  uma variedade Riemanniana com a matriz da métrica dada por  $g = (g_{ij})$ . Então, em coordenadas locais  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ , o operador de Laplace-Beltrami é dado por

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( g^{ij} \sqrt{\det g} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right),$$

onde  $g^{-1} = (g^{ij})$  e  $f \in C^\infty(M^n, \mathbb{R})$ .

*Demonstração.* Veja [15]. □

Finalizamos esta seção com as seguintes definições.

**Definição 1.19** Dizemos que uma superfície  $M^2 \in \mathbb{R}^3$  é uma *superfície mínima de Laguerre* se

$$\Delta_{III} \left( \frac{H}{K} \right) = 0,$$

onde  $H$  e  $K$  são as curvaturas média e Gaussiana de  $M^2$ , respectivamente, e  $III$  é a terceira forma fundamental de  $M^2$ .

**Definição 1.20** Dizemos que uma superfície  $M^2 \in \mathbb{R}^3$  é uma *superfície de tipo esférico* se existe uma congruência de esferas em  $\mathbb{R}^3$  com função raio  $h$  dado por

$$h = \frac{H}{K},$$

onde  $H$  e  $K$  são a curvatura média e Gaussiana da superfície  $M^2$ .



## Desenvolvimento

### 2.1 Congruências de Esferas

Uma família a  $n$ -parâmetros de esferas, cujos centros estão sob uma hipersuperfície  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , com função raio diferenciável  $h$  é chamada de uma *congruência de esferas* em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Uma hipersuperfície  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é dita *envelope* dessa congruência de esferas se para cada  $p \in M^n$ ,  $M^n$  é tangente a uma esfera da congruência de esferas. Se existir um difeomorfismo  $\Psi : M^n \rightarrow \tilde{M}^n$  entre duas hipersuperfícies  $M^n$  e  $\tilde{M}^n$  tais que

- i)  $p + h(p)N(p) = \Psi(p) + h(p)\tilde{N}(\Psi(p))$ , para todo  $p \in M^n$ ;
- ii) O conjunto  $p + h(p)N(p)$ ,  $p \in M^n$ , é uma hipersuperfície de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,

onde  $h : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável,  $N$  e  $\tilde{N}$  são as aplicações normais de Gauss de  $M^n$  e  $\tilde{M}^n$ , respectivamente, dizemos que  $M^n$  e  $\tilde{M}^n$  estão associadas por uma congruência de esferas.

**Lema 2.1** *Sejam  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientável,  $N$  a aplicação normal de Gauss de  $M^n$  e  $\Pi$  um hiperplano com vetor normal unitário  $\vartheta$  satisfazendo  $N \neq \vartheta$ ,  $\forall p \in M^n$ . Então existe uma congruência de esferas dada por uma função  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  que chamamos de **função raio**, em relação ao hiperplano  $\Pi$ , tal que  $M^n$  e  $\Pi$  são envelopes dessa congruência de esferas.*

*Demonstração.* Suponha que exista uma congruência de esferas onde  $M$  e  $\Pi$  são os envelopes desta congruência. Então

$$p + h(p)N(p) = Y(p) + h(p)\vartheta, \quad (2-1)$$

onde  $Y$  é uma parametrização de  $\Pi$ . Logo

$$Y(p) = p + h(p)(N(p) - \vartheta).$$

De (2-1) temos

$$\langle p, \vartheta \rangle + h(p)\langle N(p), \vartheta \rangle = \langle Y(p), \vartheta \rangle + h(p),$$

ou seja,

$$h(p) (\langle N(p), \vartheta \rangle - 1) = \langle Y(p), \vartheta \rangle - \langle p, \vartheta \rangle,$$

e daí

$$h(p) = \frac{\langle Y(p), \vartheta \rangle - \langle p, \vartheta \rangle}{\langle N(p), \vartheta \rangle - 1} ..$$

Observe que  $\langle Y(p), \vartheta \rangle$  é a distância da origem a  $\Pi$ . Essa distância não depende do ponto  $p$ . Para ver isso, considere  $p_1, p_2 \in M^n$ , e então

$$\langle Y(p_1), \vartheta \rangle - \langle Y(p_2), \vartheta \rangle = \langle Y(p_1) - Y(p_2), \vartheta \rangle = 0.$$

Deste modo, o conjunto de pontos  $\{p + h(p)N(p); p \in M^n\}$  forma uma hipersuperfície de  $\mathbb{R}^{n+1}$  e a aplicação  $Y : U \rightarrow \Pi$  dada por

$$Y(p) = p + h(p)(N(p) - \vartheta), \quad u \in U,$$

é um difeomorfismo sobre  $Y(U)$  satisfazendo  $p + hN = Y + h\vartheta$ . Portanto,  $M^n$  e  $\Pi$  estão localmente associados por uma congruência de esferas.  $\square$

**Observação 2.2** A função raio  $h$  em relação a um hiperplano  $\Pi$  definida no lema 2.1, é um invariante geométrico análogo as  $r$ -curvaturas média, no sentido de que não depende da parametrização da hipersuperfície  $M^n$ .

O seguinte teorema generaliza o resultado obtido por Corro em [6] para hipersuperfícies.

**Teorema 2.3** *Se uma hipersuperfície  $M^n$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \geq 2$ , é um envelope de congruências de esferas, em que o outro envelope está contido em um hiperplano  $\Pi = \{(u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : u_{n+1} = 0\}$  então, existe uma parametrização local ortogonal de  $\Pi$ ,  $Y : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Pi$  e uma função diferenciável  $h : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$ , dada por*

$$X(u) = Y(u) - \frac{2h(u)}{S} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,j} - e_{n+1} \right] \quad (2-2)$$

é uma parametrização de  $M^n$ , com  $e_{n+1} = (0, 0, \dots, 0, 1)$ ,  $L_{ij} = \langle Y_{,i}, Y_{,j} \rangle$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , e

$$S = \sum_{j=1}^n \frac{(h_{,j})^2}{L_{jj}} + 1. \quad (2-3)$$

Além disso, a aplicação de Gauss é dada por

$$N(u) = e_{n+1} + \frac{2}{S} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,j} - e_{n+1} \right] \quad (2-4)$$

e a matriz de Weingarten é dada por

$$W = 2V(SI - 2hV)^{-1}, \quad (2-5)$$

onde a matriz  $V = (V_{ij})$  é definida por

$$V_{ij} = \frac{1}{L_{jj}} \left( h_{,ij} - \sum_{l=1}^n \tilde{\Gamma}_{ij}^l h_{,l} \right), 1 \leq i, j \leq n, \quad (2-6)$$

sendo  $\tilde{\Gamma}_{ki}^l$  os símbolos de christoffel da métrica  $L_{ij}$ , e  $P$  é a condição de regularidade dada por

$$P = \det(SI - 2hV) \neq 0. \quad (2-7)$$

Além disso, as formas fundamentais I, II e III de  $X$  são dadas por

$$I = L - \frac{2h}{S} ((VL)^T + VL) + \left( \frac{2h}{S} \right)^2 VLV^T, \quad (2-8)$$

$$II = -\frac{2}{S} (VL)^T + \frac{4h}{S} VLV^T, \quad (2-9)$$

$$III = \frac{4}{S^2} VLV^T, \quad (2-10)$$

onde  $L$  é matriz da métrica  $(L_{ij})$ .

Reciprocamente, dada uma parametrização ortogonal do hiperplano  $\Pi$ ,  $Y : U \rightarrow \Pi$ , onde  $U$  é um aberto conexo de  $\mathbb{R}^n$  e uma função diferenciável  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ , então (2-2) define uma imersão em  $\mathbb{R}^{n+1}$  com aplicação de Gauss dada por (2-4) e (2-5)-(2-10) são satisfeitas.

*Demonstração.* Uma hipersuperfície  $M^n$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$  é um envelope de congruência de esferas, onde o outro envelope está contido em um hiperplano  $\mathbb{R}^n \cong \Pi$  se, e somente se, existe uma parametrização local ortogonal de  $\Pi$ ,  $Y : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Pi$  e uma função diferenciável  $h : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ , é uma parametrização de  $M$  satisfazendo

$$X(u) = Y(u) + h(u)(e_{n+1} - N(u)), \quad (2-11)$$

onde  $N$  é a aplicação de Gauss de  $X$ , dada por

$$N = \sum_{j=1}^n B_j Y_{,j} + B_{n+1} e_{n+1} \quad (2-12)$$

e com

$$\sum_{j=1}^n (B_j)^2 L_{jj} + (B_{n+1})^2 = 1. \quad (2-13)$$

Derivando (2-11), obtemos

$$X_{,i} = Y_{,i} + h_{,i}(e_{n+1} - N) - hN_{,i}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2-14)$$

Usando (2-12) e (2-14), temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle N, X_{,i} \rangle = B_i L_{ii} + h_{,i}(B_{n+1} - 1) \\ \Rightarrow B_i &= \frac{h_{,i}}{L_{ii}}(1 - B_{n+1}), \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad (2-15)$$

Observe que por (2-15) e (2-13),

$$\sum_{j=1}^n \frac{(h_{,j})^2}{L_{jj}^2} (1 - B_{n+1})^2 L_{jj} + (B_{n+1})^2 = 1,$$

e como,

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^n \frac{(h_{,j})^2}{L_{jj}^2} (1 - 2B_{n+1} + B_{n+1}^2) L_{jj} + (B_{n+1})^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{(h_{,j})^2}{L_{jj}} - 2B_{n+1} \sum_{j=1}^n \frac{(h_{,j})^2}{L_{jj}} + B_{n+1}^2 S, \end{aligned}$$

temos que

$$(S - 1) - 2B_{n+1}(S - 1) + B_{n+1}^2 S = 1. \quad (2-16)$$

As soluções da equação (2-16), onde a incógnita é  $B_{n+1}$ , são dadas por

$$B_{n+1} = \frac{2S - 2 \pm 2}{2S} = 1 - \frac{2}{S} \text{ ou } 1.$$

Se  $B_{n+1} = 1$ , então  $N = e_{n+1}$ , um absurdo. Logo

$$B_{n+1} = 1 - \frac{2}{S}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 N(u) &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{h_j}{L_{jj}} (1 - B_{n+1}) \right) Y_{,j} + B_{n+1} e_{n+1} \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,j} - \sum_{j=1}^n \frac{h_{,j}}{L_{jj}} B_{n+1} Y_{,j} + B_{n+1} e_{n+1} \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,j} - \sum_{j=1}^n \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \left( 1 - \frac{2}{S} \right) Y_{,j} + \left( 1 - \frac{2}{S} \right) e_{n+1} \\
 &= \frac{2}{S} \sum_{j=1}^n \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,j} + e_{n+1} - \frac{2}{S} e_{n+1}
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$N(u) = e_{n+1} + \frac{2}{S} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,j} - e_{n+1} \right].$$

Portanto, pela equação (2-11),

$$X(u) = Y(u) - \frac{2h(u)}{S} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{h_j}{L_{jj}} Y_{,j} - e_{n+1} \right].$$

Portanto, provamos as equações (2-2) e (2-3).

Vamos calcular a matriz de Weingarten. Considere as seguintes funções com valores vetoriais

$$C = Y + h e_{n+1} \quad e \quad D = \sum_{k=1}^n \frac{h_{,k}}{L_{kk}} Y_{,k} + \left( \frac{S}{2} - 1 \right) e_{n+1}.$$

Derivando as expressões acima e a expressão de  $S$ , temos

$$\begin{aligned}
 S_{,i} &= \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{(h_{,j})^2}{L_{jj}} + 1 \right\}_{,i} \\
 &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2h_{,k} h_{,ki}}{L_{kk}} - \frac{(h_{,k})^2 L_{kk,i}}{(L_{kk})^2} \right\}, \\
 C_{,i} &= Y_{,i} + h_{,i} e_{n+1}, \\
 D_{,i} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \left[ \frac{h_{,ki}}{L_{kk}} - \frac{h_{,k} L_{kk,i}}{(L_{kk})^2} \right] Y_{,k} + \frac{h_{,k}}{L_{kk}} Y_{,ki} \right\} + \frac{S_{,i}}{2} e_{n+1}.
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$D_{,i} = \sum_{k=1}^n \left\{ \left[ \frac{h_{,ki}}{L_{kk}} - \frac{h_{,k}L_{kk,i}}{(L_{kk})^2} \right] Y_{,k} + \frac{h_{,k}}{L_{kk}} Y_{,ki} + \left[ \frac{h_{,k}h_{,ki}}{L_{kk}} - \frac{(h_{,k})^2 L_{kk,i}}{2(L_{kk})^2} \right] e_{n+1} \right\}. \quad (2-17)$$

Agora observe que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{h_{,k}}{L_{kk}} Y_{,ki} &= \sum_{k=1}^n \frac{h_{,k}}{L_{kk}} \sum_{l=1}^n \tilde{\Gamma}_{ki}^l Y_{,l} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{h_{,k}}{L_{kk}} \tilde{\Gamma}_{ki}^k Y_{,k} + \sum_{k=1}^n \frac{h_{,k}}{L_{kk}} \sum_{l=1, l \neq k}^n \tilde{\Gamma}_{ki}^l Y_{,l}, \end{aligned}$$

onde  $\tilde{\Gamma}_{ki}^l$  são os símbolos de chistoffel da métrica  $L_{ij}$ . Usando as relações (1-1), (1-2) e (1-3), obtemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{h_{,k}}{L_{kk}} Y_{,ki} &= \sum_{k=1}^n \frac{h_{,k}L_{kk,i}}{2(L_{kk})^2} Y_{,k} + \sum_{k=1}^n \frac{h_{,k}}{L_{kk}} \sum_{l=1, l \neq k}^n \tilde{\Gamma}_{ki}^l Y_{,l} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{h_{,k}L_{kk,i}}{2(L_{kk})^2} Y_{,k} + \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{h_{,k}}{L_{kk}} \sum_{l=1, l \neq k}^n \tilde{\Gamma}_{ki}^l Y_{,l} + \sum_{l=1, l \neq i}^n \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \tilde{\Gamma}_{ii}^l Y_{,l} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{h_{,k}L_{kk,i}}{2(L_{kk})^2} Y_{,k} + \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{h_{,k}}{L_{kk}} \tilde{\Gamma}_{ki}^l Y_{,l} + \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \tilde{\Gamma}_{ii}^k Y_{,k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{h_{,k}L_{kk,i}}{2(L_{kk})^2} Y_{,k} + \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{h_{,k}}{L_{kk}} \frac{L_{ii,k}}{2L_{ii}} Y_{,i} + \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \frac{(-L_{ii})}{L_{kk}} \frac{L_{ii,k}}{2L_{ii}} Y_{,k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{h_{,k}L_{kk,i}}{2(L_{kk})^2} Y_{,k} + \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{L_{ii,k}}{2L_{ii}L_{kk}} (h_{,k}Y_{,i} - h_{,i}Y_{,k}). \end{aligned} \quad (2-18)$$

Usando esta última expressão (2-18) em (2-17), temos

$$\begin{aligned} D_{,i} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \left[ \frac{h_{,ki}}{L_{kk}} - \frac{h_{,k}L_{kk,i}}{(L_{kk})^2} \right] Y_{,k} + \frac{h_{,k}L_{kk,i}}{2(L_{kk})^2} Y_{,k} + \left[ \frac{h_{,k}h_{,ki}}{L_{kk}} - \frac{(h_{,k})^2 L_{kk,i}}{2(L_{kk})^2} \right] e_{n+1} \right\} + \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{L_{ii,k}}{2L_{ii}L_{kk}} (h_{,k}Y_{,i} - h_{,i}Y_{,k}) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{h_{,ki}}{L_{kk}} - \frac{h_{,k}L_{kk,i}}{2(L_{kk})^2} \right] (Y_{,k} + h_{,k}e_{n+1}) + \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{L_{ii,k}}{2L_{ii}L_{kk}} (h_{,k}Y_{,i} - h_{,i}Y_{,k}), \end{aligned}$$

e somando zero na igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
D_{,i} &= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{h_{,ki}}{L_{kk}} - \frac{h_{,k}L_{kk,i}}{2(L_{kk})^2} \right] (Y_{,k} + h_{,k}e_{n+1}) + \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{L_{ii,k}}{2L_{ii}L_{kk}} (h_{,k}Y_{,i} - h_{,i}Y_{,k}) \\
&- \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{L_{ii,k}}{2L_{ii}L_{kk}} h_{,i}h_{,k}e_{n+1} + \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{L_{ii,k}}{2L_{ii}L_{kk}} h_{,k}h_{,i}e_{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_{kk}} \left[ h_{,ki} - \frac{h_{,k}L_{kk,i}}{2L_{kk}} \right] (Y_{,k} + h_{,k}e_{n+1}) \\
&+ \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{L_{ii,k}}{2L_{ii}L_{kk}} h_{,k}(Y_{,i} + h_{,i}e_{n+1}) + \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{L_{ii,k}}{2L_{ii}L_{kk}} h_{,i}(-1)(Y_{,k} + h_{,k}e_{n+1}),
\end{aligned}$$

onde, para obter a segunda igualdade, separamos os termos dentro do parêntese no segundo somatório e juntamos com os dois somatórios de baixo. Daí, retirando o termo  $h_{,ii}$  do primeiro somatório e juntando com o segundo somatório, temos

$$\begin{aligned}
D_{,i} &= \frac{1}{L_{ii}} \left[ h_{ii} - \frac{h_{,i}L_{ii,i}}{2L_{ii}} + \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{L_{ii,k}}{2L_{ii}} h_{,k} \right] (Y_{,i} + h_{,i}e_{n+1}) \\
&+ \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{1}{L_{kk}} \left[ h_{ki} - \frac{h_{,k}L_{kk,i}}{2L_{kk}} h_i - \frac{L_{ii,k}}{2L_{ii}} h_{,i} \right] (Y_{,k} + h_{,k}e_{n+1}) \\
&= \frac{1}{L_{ii}} \left[ h_{ii} - h_{,i}\tilde{\Gamma}_{ii}^i - \sum_{k=1, k \neq i}^n \tilde{\Gamma}_{ii}^k h_{,k} \right] (Y_{,i} + h_{,i}e_{n+1}) \\
&+ \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{1}{L_{kk}} \left[ h_{ki} - \tilde{\Gamma}_{ki}^k h_k - \tilde{\Gamma}_{ik}^i h_{,i} \right] (Y_{,k} + h_{,k}e_{n+1}) \\
&= \frac{1}{L_{ii}} \left[ h_{ii} - \sum_{k=1}^n \tilde{\Gamma}_{ii}^k \right] (Y_{,i} + h_{,i}e_{n+1}) + \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{1}{L_{kk}} \left[ h_{ki} - \sum_{l=1}^n \tilde{\Gamma}_{ik}^l h_{,l} \right] (Y_{,k} + h_{,k}e_{n+1}).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$D_{,i} = V_{ii}C_{,i} + \sum_{k=1, k \neq i}^n V_{ik}C_{,k} = \sum_{k=1}^n V_{ik}C_{,k}. \quad (2-19)$$

Seguindo o raciocínio acima, também obtemos que

$$\begin{aligned}
S_{,i} &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{L_{kk}} \left[ h_{,ki} - \frac{h_{,k}L_{kk,i}}{2L_{kk}} \right] h_{,k} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{2}{L_{kk}} \left[ h_{,ki} - \frac{h_{,k}L_{kk,i}}{2L_{kk}} \right] h_{,k} + \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{L_{ii,k}}{L_{ii}L_{kk}} h_{,i}h_{,k} - \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{L_{ii,k}}{L_{ii}L_{kk}} h_{,i}h_{,k} \\
&= \frac{2}{L_{ii}} \left[ h_{,ii} - \frac{h_{,i}L_{ii,i}}{2L_{ii}} + \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{L_{ii,k}}{2L_{kk}} h_{,k} \right] h_{,i} \\
&+ \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{2}{L_{kk}} \left[ h_{ki} - \frac{h_{,k}L_{kk,i}}{2L_{kk}} - \frac{L_{ii,k}}{2L_{ii}} h_{,i} \right] h_{,k},
\end{aligned}$$

$$S_{,i} = 2V_{ii}h_{,i} + 2 \sum_{k=1, k \neq i}^n V_{ik}h_{,k} = 2 \sum_{k=1}^n V_{ik}h_{,k}. \quad (2-20)$$

Observe que

$$X = C - \frac{2h}{S}D \text{ e } N = \frac{2}{S}D. \quad (2-21)$$

Tomando as derivadas das duas expressões em (2-21) e usando em (2-19) e (2-20), segue que

$$\begin{aligned} X_{,i} &= C_{,i} - \frac{2(h_{,i}S - hS_{,i})D}{S^2} - \frac{2h}{S}D_{,i} \\ &= C_{,i} - \frac{2h_{,i}D}{S} + \frac{2hD}{S^2} \left( 2 \sum_{k=1}^n V_{ik}h_{,k} \right) - \frac{2h}{S} \sum_{k=1}^n V_{ik}C_{,k}, \\ X_{,i} &= C_{,i} - h_{,i}N + \frac{2h}{S} \left( \sum_{k=1}^n V_{ik} \right) \left( \frac{2D}{S}h_{,k} - C_{,k} \right), \end{aligned} \quad (2-22)$$

e

$$\begin{aligned} N_{,i} &= -\frac{2S_{,i}D}{S^2} + \frac{2D_{,i}}{S} \\ &= -\frac{2D}{S^2} \left( 2 \sum_{k=1}^n V_{ik}h_{,k} \right) + \frac{2}{S} \sum_{k=1}^n V_{ik}C_{,k}. \end{aligned}$$

Assim,

$$N_{,i} = \frac{2}{S} \left( \sum_{k=1}^n V_{ik} \right) \left( C_{,k} - \frac{2Dh_{,k}}{S} \right). \quad (2-23)$$

Logo, usando (2-22) e (2-23), concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{2h}{S} \sum_{k=1}^n V_{ik}N_{,k} + \frac{2}{S} \sum_{j=1}^n V_{ij}X_{,j} &= \frac{2h}{S} \sum_{k=1}^n V_{ik} \left( \frac{2}{S} \sum_{l=1}^n V_{kl} \left( C_{,l} - \frac{2Dh_{,l}}{S} \right) \right) \\ &\quad + \frac{2}{S} \sum_{j=1}^n V_{ij}X_{,j} \\ &= \frac{2}{S} \sum_{j=1}^n V_{ij} (C_{,j} - h_{,j}N) \\ &= \frac{2}{S} \sum_{j=1}^n V_{ij}C_{,j} - \frac{2}{S} \sum_{j=1}^n V_{ij}h_{,j}N \\ &= \frac{2}{S}D_{,i} - \frac{N}{S}S_{,i} \\ &= \frac{2}{S}D_{,i} - \frac{2}{S^2}DS_{,i} = N_{,i}, \end{aligned} \quad (2-24)$$

Lembrando que os coeficientes da matriz de Weingarten  $W$  são dados por  $N_{,i} =$



$\sum_{j=1}^n W_{ij}X_{,j}$ , multiplicamos (2-24) por S e chegamos na igualdade abaixo

$$S \left( \sum_{j=1}^n W_{ij}X_{,j} \right) - 2h \sum_{k=1}^n V_{ik} \left( \sum_{j=1}^n W_{kj}X_{,j} \right) = 2 \sum_{j=1}^n V_{ij}X_{,j}.$$

Como  $\{X_{,j}\}$  é uma base, podemos escrever

$$SW_{ij} - 2h \sum_{k=1}^n V_{ik}W_{kj} = 2V_{ij},$$

que em notação matricial é escrita como

$$(SI - 2hV)W = 2V,$$

e portanto

$$W = 2V(SI - 2hV)^{-1},$$

como queríamos demonstrar.

Para calcular a primeira forma fundamental, observe que de (2-22)

$$\begin{aligned} \langle X_{,i}, X_{,j} \rangle &= \langle C_{,i}, C_{,j} \rangle - h_{,j} \langle C_{,i}, N \rangle - h_{,i} \langle N, C_{,j} \rangle + h_{,i} h_{,j} \langle N, N \rangle \\ &+ \frac{2h}{S} \left\langle C_{,i}, \sum_{k=1}^n (V_{jk}) \left( \frac{2D}{S} h_{,k} - C_{,k} \right) \right\rangle + \frac{2h}{S} \left\langle C_{,j}, \sum_{k=1}^n (V_{ik}) \left( \frac{2D}{S} h_{,k} - C_{,k} \right) \right\rangle \\ &- h_{,i} \frac{2h}{S} \left\langle N, \sum_{k=1}^n (V_{jk}) \left( \frac{2D}{S} h_{,k} - C_{,k} \right) \right\rangle - h_{,j} \frac{2h}{S} \left\langle N, \sum_{k=1}^n (V_{ik}) \left( \frac{2D}{S} h_{,k} - C_{,k} \right) \right\rangle \\ &+ \frac{4h^2}{S^2} \left\langle \sum_{k=1}^n (V_{ik}) \left( \frac{2D}{S} h_{,k} - C_{,k} \right), \sum_{k=1}^n (V_{jk}) \left( \frac{2D}{S} h_{,k} - C_{,k} \right) \right\rangle, \end{aligned}$$

e como,

$$C_{,i} = Y_{,i} + h_{,i} e_{n+1}, \quad D = \sum_{i=1}^n \frac{h_{,i}}{L_{ii}} Y_{,i} + \left( \frac{S}{2} - 1 \right) e_{n+1},$$

temos,

$$\begin{aligned} \langle C_{,i}, C_{,j} \rangle &= \langle Y_{,i}, Y_{,j} \rangle + \langle Y_{,i}, h_{,j} e_{n+1} \rangle + \langle h_{,i} e_{n+1}, Y_{,j} \rangle + \langle h_{,i} e_{n+1}, h_{,j} e_{n+1} \rangle \\ &= L_{ij} + h_{,i} h_{,j}, \\ \langle D, C_{,i} \rangle &= \left\langle \sum_{l=1}^n \frac{h_{,l}}{L_{ll}} Y_{,l} + \left( \frac{S}{2} - 1 \right) e_{n+1}, Y_{,i} + h_{,i} e_{n+1} \right\rangle \\ &= \frac{h_{,i}}{L_{ii}} L_{ii} + \left( \frac{S}{2} - 1 \right) h_{,i} = \frac{S}{2} h_{,i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle C, i, N \rangle &= \langle Y_i + h_i e_{n+1}, N \rangle \\
&= \left\langle Y_i, \sum_{j=1}^n B_j Y_j + B_{n+1} e_{n+1} \right\rangle + \left\langle h_i e_{n+1}, \sum_{j=1}^n B_j Y_j + B_{n+1} e_{n+1} \right\rangle \\
&= B_i L_{ii} + h_i B_{n+1} = \left( \frac{h_i}{L_{ii}} (1 - B_{n+1}) \right) L_{ii} + h_i B_{n+1} = h_i, \\
\langle D, N \rangle &= \left\langle \sum_{l=1}^n \frac{h_l}{L_{ll}} Y_l + \left( \frac{S}{2} - 1 \right) e_{n+1}, \sum_{j=1}^n b_j Y_j + B_{n+1} e_{n+1} \right\rangle \\
&= \sum_{l=1}^n \frac{h_l}{L_{ll}} B_l L_{ll} + \left( \frac{S}{2} - 1 \right) B_{n+1} = \sum_{l=1}^n \frac{(B_l)^2}{1 - B_{n+1}} L_{ll} + \left( \frac{S}{2} - 1 \right) B_{n+1} \\
&= \frac{1 - B_{n+1}^2}{1 - B_{n+1}} + \left( \frac{S}{2} - 1 \right) B_{n+1} = 1 + B_{n+1} + \left( \frac{S}{2} - 1 \right) B_{n+1} = 1 + \frac{S}{2} B_{n+1} = \frac{S}{2}, \\
\langle D, D \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{L_{ii}} Y_i + \left( \frac{S}{2} - 1 \right) e_{n+1}, \sum_{j=1}^n \frac{h_j}{L_{jj}} Y_j + \left( \frac{S}{2} - 1 \right) e_{n+1} \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \frac{h_i}{L_{ii}} \frac{h_j}{L_{jj}} \langle Y_i, Y_j \rangle + \left( \frac{S}{2} - 1 \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \left( \frac{h_i}{L_{ii}} \right)^2 L_{ii} + \left( \frac{S}{2} - 1 \right)^2 \\
&= S - 1 + \left( \frac{S}{2} - 1 \right)^2 = \frac{S^2}{4}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\langle X, i, X, j \rangle &= L_{ij} + \frac{2h}{S} \sum_{k=1}^n V_{ik} \frac{2h_k}{S} \left( \frac{S}{2} h_{,i} - (L_{ik} - h_i h_{,k}) \frac{S}{2h_k} \right) \\
&\quad + \frac{2h}{S} \sum_{k=1}^n V_{jk} \frac{2h_k}{S} \left( \frac{S}{2} h_{,j} - (L_{jk} - h_j h_{,k}) \frac{S}{2h_k} \right) + \frac{4h^2}{S^2} \sum_{k,l=1}^n V_{ik} V_{jl} L_{kl} \\
&= L_{ij} + \frac{2h}{S} \sum_{k=1}^n V_{jk} h_{,k} h_{,i} + \frac{2h}{S} \sum_{k=1}^n V_{ik} h_{,k} h_{,j} \\
&\quad + \frac{2h}{S} \sum_{k=1}^n V_{jk} (-L_{ik} - h_i h_{,k}) + \frac{2h}{S} \sum_{k=1}^n V_{ik} (-L_{jk} - h_j h_{,k}) \\
&\quad + \frac{4h^2}{S^2} \sum_{k,l=1}^n V_{ik} V_{jl} L_{kl} \\
&= L_{ij} - \frac{2h}{S} (V_{ji} L_{ii} + V_{ij} L_{jj}) + \left( \frac{2h}{S} \right)^2 \sum_{k=1}^n V_{ik} V_{jk} L_{kk}.
\end{aligned}$$

Finalmente, a segunda e terceira forma fundamental são dadas por

$$\begin{aligned}
-\langle X_{,i}, N_{,j} \rangle &= -\left\langle C_{,i} - h_{,i}N + \frac{2h}{S} \left( \sum_{k=1}^n V_{ik} \right) \left( \frac{2D}{S} h_{,k} - C_{,k} \right), \frac{2}{S} \sum_{k=1}^n V_{jk} \left( C_{,k} - \frac{2Dh_{,k}}{S} \right) \right\rangle \\
&= -\left\langle C_{,i}, \frac{2}{S} \sum_{k=1}^n V_{jk} C_{,k} \right\rangle - \left\langle C_{,i}, -\frac{2}{S} \sum_{k=1}^n V_{jk} \frac{2D}{S} h_{,k} \right\rangle \\
&+ \left\langle h_{,i}N, \frac{2}{S} \sum_{k=1}^n V_{jk} C_{,k} \right\rangle - \left\langle h_{,i}N, \frac{2}{S} \sum_{k=1}^n V_{jk} \frac{2D}{S} h_{,k} \right\rangle \\
&- \left\langle \frac{2h}{S} \sum_{k=1}^n V_{jk} \left( \frac{2D}{S} h_{,k} - C_{,k} \right), \frac{2}{S} \sum_{k=1}^n V_{jk} \left( C_{,k} - \frac{2D}{S} h_{,k} \right) \right\rangle \\
&= -\frac{2}{S} \sum_{k=1}^n V_{jk} (L_{ik} - h_{,i}h_{,k}) + \frac{4}{S^2} \sum_{k=1}^n V_{jk} h_{,k} \frac{S}{2} h_{,i} \\
&+ \frac{4h}{S} \sum_{k,l=1}^n V_{jk} V_{ik} L_{kl} = -\frac{2}{S} \sum_{k=1}^n V_{jk} L_{ik} + \frac{4h}{S} \sum_{k,l=1}^n V_{jk} V_{ik} L_{kl} \\
&= -\frac{2}{S} V_{ji} L_{ii} + \frac{4h}{S} \sum_{k=1}^n V_{jk} V_{ik} L_{kk}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle N_{,i}, N_{,j} \rangle &= \left\langle \frac{2}{S} \sum_{k=1}^n V_{ik} \left( C_{,k} - \frac{2Dh_{,k}}{S} \right), \frac{2}{S} \sum_{k=1}^n V_{jk} \left( C_{,k} - \frac{2Dh_{,k}}{S} \right) \right\rangle \\
&= \frac{4}{S^2} \sum_{k,l=1}^n V_{ik} V_{jl} L_{kl} \\
&= \frac{4}{S^2} \sum_{k=1}^n V_{ik} V_{jk} L_{kk}.
\end{aligned}$$

□

**Corolário 2.4** *Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma parametrização de uma hipersuperfície  $M^n$  dada por (2-2). Então a sua curvatura de Gauss-Kronecker  $K$ , é dada por*

$$K = \frac{2^n}{P} \det(V).$$

*Demonstração.* Sendo  $W$  a matriz de Weingarten de associada a  $M^n$ , temos por (2-5)

$$K = \det(W) = \det(2V(SI - 2hV)^{-1}) = \frac{2^n}{P} \det(V).$$

□

**Corolário 2.5** *Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma parametrização de uma hipersuperfície  $M^n$  dada por (2-2). Então as seguintes condições são equivalentes:*

- $X$  está parametrizada por linhas de curvatura;
- $V_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ ;
- $N_{,i} = -k_i X_{,i}$ ,

onde  $k_i = \frac{2V_{ii}}{2hV_{ii} - S}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , são as curvaturas principais de  $X$ .

*Demonstração.* Pela equação (2-5), se  $V$  é diagonal, então a matriz de Weingarten  $W$ , também é diagonal. Portanto,  $V$  é diagonal se, e somente se,  $X$  está parametrizada por linhas de curvatura. Pela equação (2-24)

$$N_{,i} = \frac{2h}{S} V_{ii} N_{,i} + \frac{2}{S} V_{ii} X_{,i}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

e isolando  $N_{,i}$ , temos

$$\begin{aligned} N_{,i} &= \frac{\frac{2}{S} V_{ii} X_{,i}}{\left(1 - \frac{2h}{S} V_{ii}\right)} \\ &= \frac{2V_{ii}}{S - 2hV_{ii}} X_{,i}, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Como  $V$  é diagonal,  $V_{ii}$  são os autovalores da matriz  $V$ . Pela equação (2-5),

$$k_i = \frac{2V_{ii}}{2hV_{ii} - S}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2-25)$$

o que prova as duas últimas equivalências. □

**Observação 2.6** Observe que pela equação (2-25), temos que os autovalores  $\sigma_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , da matriz  $V$  são dados por

$$\sigma_i = \frac{Sk_i}{2hk_i - 2}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2-26)$$

onde  $k_i$  são os autovalores da matriz de Weingarten  $W$ .

## 2.2 Hipersuperfícies Weingarten de Tipo esférico

Nesta seção definiremos e caracterizaremos as hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico. Primeiro daremos uma caracterização delas por meio do traço de uma matriz, e depois por meio de funções harmônicas. Além de dar exemplos de hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico, mostraremos que no caso bidimensional, as superfícies Weingarten de tipo esférico são superfícies mínimas de Laguerre.

**Lema 2.7** Defina  $P_i$ , para  $1 \leq i \leq n$  e  $n \geq 2$ , por

$$P_i = (1 - hk_1)(1 - hk_2) \dots (\widehat{1 - hk_i}) \dots (1 - hk_n), \quad (2-27)$$

onde  $h, k_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  são funções definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  e " $\widehat{(\ )}$ " significa que o fator está ausente na expressão (2-27). Então

$$\begin{aligned} P_i = & 1 - h(S_1 - k_i) + h^2 \left( S_2 - \sum_{1 \leq j \leq n} k_j k_i \right) - h^3 \left( S_3 - \sum_{1 \leq l < j \leq n} k_l k_j k_i \right) \\ & + \dots + (-1)^{n-1} h^{n-1} \left( S_{n-1} - \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{n-2} \leq n} k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_{n-2}} k_i \right), \end{aligned}$$

onde, para  $1 \leq r \leq n$ ,

$$S_r = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} k_{i_1} \dots k_{i_r}.$$

*Demonstração.* Claramente a afirmação é verdadeira para  $n = 2$ . Suponha que a igualdade vale para  $n - 1$  e provemos para  $n$ . Denote por

$$\bar{S}_r(W) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n-1} k_{i_1} \dots k_{i_r},$$

com  $1 \leq r \leq n - 1$ . Então, usando a hipótese de indução, expandindo o produto, temos

$$\begin{aligned} P_i = & (1 - hk_1)(1 - hk_2) \dots (\widehat{1 - hk_i}) \dots (1 - hk_{n-1})(1 - hk_n) = \\ & [1 - h(\bar{S}_1 - k_i) + h^2 \left( \bar{S}_2 - \sum_{1 \leq j \leq n} k_j k_i \right) - h^3 \left( \bar{S}_3 - \sum_{1 \leq l < j \leq n} k_l k_j k_i \right) \\ & + \dots + (-1)^{n-2} h^{n-2} \left( \bar{S}_{n-2} - \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{n-3} \leq n-1} k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_{n-3}} k_i \right)] (1 - hk_n) \\ = & 1 - h(\bar{S}_1 - k_i) + h^2 \left( \bar{S}_2 - \sum_{1 \leq j \leq n} k_j k_i \right) - h^3 \left( \bar{S}_3 - \sum_{1 \leq l < j \leq n} k_l k_j k_i \right) \\ & + \dots + (-1)^{n-2} h^{n-2} \left( \bar{S}_{n-2} - \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{n-3} \leq n-1} k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_{n-3}} k_i \right) \\ & - hk_n + h^2 k_n (\bar{S}_1 - k_i) - h^3 k_n \left( \bar{S}_2 - \sum_{1 \leq j \leq n} k_j k_i \right) + h^4 k_n \left( \bar{S}_3 - \sum_{1 \leq l < j \leq n} k_l k_j k_i \right) \\ & + \dots + (-1)^{n-1} h^{n-1} k_n \left( \bar{S}_{n-2} - \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{n-3} \leq n-1} k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_{n-3}} k_i \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$P_i = 1 - h(S_1 - k_i) + h^2 \left( S_2 - \sum_{1 \leq j \leq n} k_j k_i \right) - h^3 \left( S_3 - \sum_{1 \leq l < j \leq n} k_l k_j k_i \right) \\ + \dots + (-1)^{n-1} h^{n-1} \left( S_{n-1} - \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{n-2} \leq n} k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_{n-2}} k_i \right),$$

onde para obter a última igualdade, juntamos  $(-1)^l h^l \bar{S}_l$  com  $h^l k_n \bar{S}_{l-1}$ .  $\square$

**Definição 2.8** Diremos que uma hipersuperfície  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \geq 2$ , é uma *hipersuperfície Weingarten de tipo esférico*, se as r-ésimas curvaturas de  $M^n$  satisfazem a relação

$$\sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} r f^{r-1} H_r \binom{n}{r} = 0, \quad (2-28)$$

para alguma função  $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ .

**Teorema 2.9** Seja  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \geq 2$ , é uma hipersuperfície como no Teorema 2.3. Então  $M^n$  é uma hipersuperfície Weingarten de tipo esférico se, e somente se,  $tr(V) = 0$ .

*Demonstração.* Sejam  $\sigma_i$  os autovalores da matriz  $V$  e  $k_i$  as curvaturas principais de  $M^n$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Pela equação (2-26) e como  $tr(V) = 0$ , temos que

$$\frac{k_1}{1 - hk_1} + \frac{k_2}{1 - hk_2} + \dots + \frac{k_n}{1 - hk_n} = 0,$$

ou seja,

$$\frac{k_1 P_1 + k_2 P_2 + \dots + k_n P_n}{(1 - hk_1)(1 - hk_2) \dots (1 - hk_n)} = 0,$$

onde os  $P_i$  são definidos em (2-27). Portanto

$$k_1 P_1 + k_2 P_2 + \dots + k_n P_n = 0.$$

Pelo Lema 2.7, a igualdade valerá se, e somente se, tivermos

$$k_1 \left[ 1 - h(S_1 - k_1) + h^2 \left( S_2 - \sum_{1 \leq j \leq n} k_j k_1 \right) + \dots + (-1)^{n-1} h^{n-1} \left( S_{n-1} - \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{n-2} \leq n} k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_{n-2}} k_1 \right) \right] + \dots + k_n \left[ 1 - h(S_1 - k_n) + h^2 \left( S_2 - \sum_{1 \leq j \leq n} k_j k_n \right) + \dots + (-1)^{n-1} h^{n-1} \left( S_{n-1} - \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{n-2} \leq n} k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_{n-2}} k_n \right) \right] = 0$$

e daí,

$$\begin{aligned}
(k_1 + \dots + k_n) &- h(k_1 S_1 - k_1^2 + k_2 S_1 - k_2^2 + \dots + k_n S_1 - k_n^2) \\
&+ h^2(k_1 S_2 - k_1 \sum k_{j_1} k_1 + \dots + k_n S_2 - k_n \sum k_{j_1} k_n) \\
&+ \dots + h^{n-1}(-1)^{n-1}(k_1 S_{n-1} - k_1 \sum k_{j_1} \dots k_{j_{n-2}} k_1 + \dots + k_n S_{n-1} \\
&- k_n \sum k_{j_1} \dots k_{j_{n-2}} k_n) = 0,
\end{aligned}$$

que é equivalente à

$$S_1 - h2S_2 + h^2 3S_3 + \dots + (-1)^{n-1} h^{n-1} n S_n = 0,$$

o que prova a equação (2-28). □

**Observação 2.10** Se  $n = 2$  e  $K \neq 0$  no Teorema 2.9, então a equação (2-28) se reduz à

$$2H - 2hK = 0 \Rightarrow h = \frac{H}{K}$$

onde  $H$  e  $K$  são as curvaturas média e Gaussiana da superfície  $M^2$ , respectivamente, e  $h$  é a função raio da congruência de esferas. Portanto,  $M^2$  é uma superfície de Tipo Esférico. É conhecido que essas superfícies são *superfícies mínimas de Laguerre*, isto é, que a curvatura média e Gaussiana dessas superfícies satisfazem  $\Delta_{III} \left( \frac{H}{K} \right) = 0$ . Observe também que, como  $h$  nos dá o raio da congruência de esferas, temos que  $H \neq 0$ .

**Teorema 2.11** *Sejam  $Y : U \rightarrow \Pi \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma parametrização do hiperplano  $\Pi$  dada por  $Y(u) = (u, 0)$ ,  $u \in U$ , e  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Então,  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  dada por (2-2) satisfaz*

$$tr(V) = \Delta h.$$

*Em particular,  $X(U)$  é uma hipersuperfície Weingarten de tipo esférico se, e somente se,  $h$  é uma função harmônica.*

*Demonstração.* Temos que a métrica  $L_{ij}$  de  $Y$  é dada por  $L_{ij} = \delta_{ij}$ . Daí segue que,  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = 0$ . Logo, usando a definição de  $V_{ij}$ ,

$$V_{ij} = \frac{h_{ij}}{L_{jj}} = h_{,ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

e portanto,  $tr(V) = \Delta h$ . Pelo Teorema 2.9,  $X(U)$  é uma hipersuperfície Weingarten de tipo esférico se, e somente se,  $\Delta h = 0$ . □

**Exemplo 2.12** Considere a função  $h : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$h(u_1, \dots, u_n) = c + \sum_{i=1}^n b_i u_i + \sum_{i,j=1, i \neq j}^n a_{ij} u_i u_j,$$

onde  $c, b_i$  e  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , são constantes reais. Como  $h$  é uma função harmônica em  $\mathbb{R}^n$  temos que substituindo  $h$  na parametrização (2-2) e escolhendo  $Y(u) = (u, 0)$ , temos que

$$\begin{aligned} X(u) &= (u, 0) - \frac{2h}{h_{,1}^2 + \dots + h_{,n}^2 + 1} (h_{,1}, \dots, h_{,n}, -1) \\ &= (u, 0) - \frac{2 \left( c + \sum_{i=1}^n b_i u_i + \sum_{i,j=1, i \neq j}^n a_{ij} u_i u_j \right)}{\left( b_1 + \sum_{j=2}^n a_{1j} u_j \right)^2 + \dots + \left( b_n + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} u_j \right)^2 + 1} (b_1 \\ &\quad + \sum_{j=2}^n a_{1j} u_j, \dots, b_n + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} u_j, -1), \end{aligned}$$

é uma hipersuperfície Weingarten de Tipo esférico.

**Exemplo 2.13** Considere a função complexa  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , dada por  $F(u_1, u_2) = F(z) = z^2 + z + 1$ . Então  $Re(F) = f(u_1, u_2) = u_1^2 - u_2^2 + u_1 + 1$  e  $Im(F) = g(u_1, u_2) = 2u_1 u_2 + u_2$ . Como  $Re(F)$  e  $Im(F)$  são funções harmônicas, temos que fazendo a função raio  $h$  da parametrização (2-2) igual a  $Re(F)$ , obtemos

$$\begin{aligned} X_1(u_1, u_2) &= (u_1, u_2, 0) - \frac{2f(u_1, u_2)}{f_{,1}^2 + f_{,2}^2 + 1} (f_{,1}, f_{,2}, -1) \\ &= (u_1, u_2, 0) - \frac{2u_1^2 - 2u_2^2 + 2u_1 + 2}{(2u_1 + 1)^2 + (2u_2)^2 + 1} (2u_1 + 1, 2u_2, -1) \end{aligned}$$

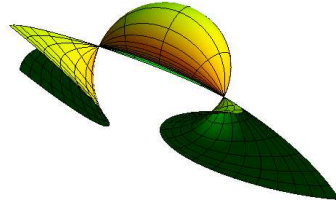
e fazendo a função raio igual a  $Im(F)$ , obtemos

$$\begin{aligned} X_2(u_1, u_2) &= (u_1, u_2, 0) - \frac{2g(u_1, u_2)}{g_{,1}^2 + g_{,2}^2 + 1} (g_{,1}, g_{,2}, -1) \\ &= (u_1, u_2, 0) - \frac{4u_1 u_2 + 2u_2}{(2u_2)^2 + (2u_1 + 1)^2 + 1} (2u_2, 2u_1 + 1, -1). \end{aligned}$$

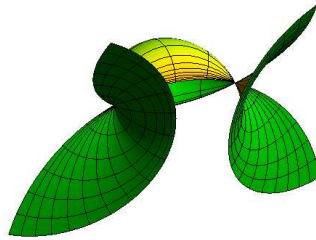
Pelo Teorema 2.11,  $X_1$  e  $X_2$  são parametrizações de superfícies Weingarten de tipo esférico (veja as figuras (2.1), (2.2), (2.3) e (2.4)).

**Exemplo 2.14** Seja  $Y : \mathbb{R}^n \rightarrow \Pi \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n = 2k$ , a parametrização do hiperplano  $\Pi$  dada por  $Y(u) = (g_1(z_1), g_2(z_2), \dots, g_k(z_k), 0)$ , onde  $g_r : U_r \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U_r$  aberto,  $u = (z_1, \dots, z_r, \dots, z_k)$ , com  $z_r = (u_{2r-1}, u_{2r})$ ,  $1 \leq r \leq k$ . Então a parametrização  $X$  dada por (2-2) satisfaz as equações (2-29), (2-30), (2-31), (2-32), (2-33) e (2-34) abaixo.

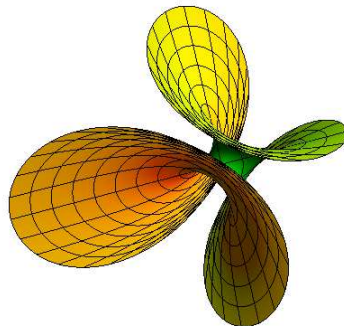




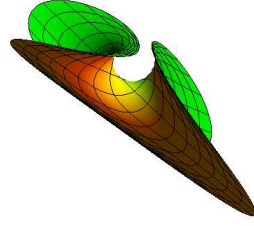
**Figura 2.1:** A superfície de tipo esférico gerada por  $f(u_1, u_2)$ .



**Figura 2.2:** A superfície de tipo esférico gerada por  $f(u_1, u_2)$  vista por outro ângulo.



**Figura 2.3:** A superfície de tipo esférico gerada por  $g(u_1, u_2)$ .



**Figura 2.4:** A superfície de tipo esférico gerada por  $g(u_1, u_2)$  vista por outro ângulo.

De fato, derivando  $Y$  em relação a  $u_{2r-1}$  e  $u_{2r}$ , temos

$$Y_{,2r-1} = (0, 0, \dots, g'_r, \dots, 0)$$

$$Y_{,2r} = (0, 0, \dots, ig'_r, \dots, 0).$$

Logo,  $L_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ , e escrevendo  $L_{ii} = L_i$ ,  $1 \leq i, j \leq 2k$ , temos que

$$L_{2r} = L_{2r-1} = |g'_r|^2.$$

Observe que,

$$\tilde{\Gamma}_{2r-12r}^{2r-1} = \frac{L_{2r-1,2r}}{2L_{2r-1}} = \frac{\|g'_r\|_{,2r}^2}{2\|g'_r\|^2} = \frac{\langle ig''_r, g'_r \rangle}{\|g'_r\|^2},$$

$$\tilde{\Gamma}_{2r-12r-1}^{2r} = \frac{-L_{2r-1,2r}}{2L_{2r}} = -\frac{\langle ig''_r, g'_r \rangle}{\|g'_r\|^2},$$

$$\tilde{\Gamma}_{2r2r-1}^{2r} = \frac{L_{2r,2r-1}}{2L_{2r}} = \frac{\langle g''_r, g'_r \rangle}{\|g'_r\|^2},$$

$$\tilde{\Gamma}_{2r2r}^{2r-1} = -\frac{L_{2r,2r-1}}{2L_{2r-1}} = -\frac{\langle g''_r, g'_r \rangle}{\|g'_r\|^2},$$

$$\tilde{\Gamma}_{2r-12r-1}^{2r-1} = \frac{L_{2r-1,2r-1}}{2L_{2r-1}} = \frac{\langle g''_r, g'_r \rangle}{\|g'_r\|^2},$$

$$\tilde{\Gamma}_{2r2r}^{2r} = \frac{L_{2r,2r}}{2L_{2r}} = \frac{\langle ig''_r, g'_r \rangle}{\|g'_r\|^2},$$

e  $\tilde{\Gamma}_{ij}^l = 0$ ,  $1 \leq i, j, l \leq n$ , nos casos restantes. Logo, se  $1 \geq i \neq j \geq n$ , temos

$$\begin{aligned} V_{ij} = V_{2r-12r} &= \frac{1}{L_{2r}} \left( h_{,2r-1\ 2r} - \tilde{\Gamma}_{2r-12r}^{2r-1} h_{,2r-1} - \tilde{\Gamma}_{2r-12r}^{2r} h_{,2r} \right) \\ &= \frac{1}{\|g'_r\|^2} \left( h_{,2r-12r} - \frac{\langle ig''_r, g'_r \rangle}{\|g'_r\|^2} h_{,2r-1} - \frac{\langle g''_r, g'_r \rangle}{\|g'_r\|^2} h_{,2r} \right) \end{aligned} \quad (2-29)$$

$$= V_{2r2r-1} = V_{ji}, \quad (2-30)$$

e nos outros casos em que  $i \neq j$ , temos

$$V_{ij} = \frac{h_{,ij}}{L_j} = \frac{h_{,ij}}{\|g'_j\|^2}, \quad \text{se } j = 2r-1 \text{ ou } j = 2r. \quad (2-31)$$

Nos casos restantes, vale

$$\begin{aligned} V_{2r-12r-1} &= \frac{1}{L_{2r-1}} \left( h_{,2r-12r-1} - \tilde{\Gamma}_{2r-12r-1}^{2r-1} h_{,2r-1} - \tilde{\Gamma}_{2r-12r-1}^{2r} h_{,2r} \right) \\ &= \frac{1}{\|g'_r\|^2} \left( h_{,2r-12r-1} - \frac{\langle g''_r, g'_r \rangle}{\|g'_r\|^2} h_{,2r-1} + \frac{\langle ig'_r, g'_r \rangle}{\|g'_r\|^2} h_{,2r} \right) \end{aligned} \quad (2-32)$$

e

$$\begin{aligned} V_{2r2r} &= \frac{1}{g'_r} \left( h_{,2r2r} - \tilde{\Gamma}_{2r2r}^{2r-1} h_{,2r-1} - \tilde{\Gamma}_{2r2r}^{2r} h_{,2r} \right) \\ &= \frac{1}{\|g'_r\|^2} \left( h_{,2r2r} + \frac{\langle g''_r, g'_r \rangle}{\|g'_r\|^2} h_{,2r-1} - \frac{\langle ig''_r, g'_r \rangle}{\|g'_r\|^2} h_{,2r} \right). \end{aligned} \quad (2-33)$$

Portanto,

$$\sum_{r=1}^k (V_{2r-12r-1} + V_{2r2r}) = \sum_{r=1}^k \frac{1}{\|g'_r\|^2} (h_{,2r-12r-1} + h_{,2r2r}). \quad (2-34)$$

**Proposição 2.15** *Seja  $Y : \mathbb{R}^n \rightarrow \Pi \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n = 2k$ , uma parametrização do hiperplano  $\Pi$  dada por  $Y(u) = (g_1(z_1), g_2(z_2), \dots, g_k(z_k), 0)$ , onde  $g_r : U_r \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U_r$  aberto,  $u = (z_1, \dots, z_r, \dots, z_k)$ , com  $z_r = (u_{2r-1}, u_{2r})$ ,  $1 \leq r \leq k$ .*

*Se  $h : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por*

$$h(u) = \sum_{r=1}^k h^r(z_r),$$

*onde  $h^r$  satisfaz*

$$h^r_{, (2r-1)(2r)} - \tilde{\Gamma}_{(2r-1)(2r)}^{2r} h^r_{,2r} - \tilde{\Gamma}_{(2r-1)(2r)}^{2r-1} h^r_{,2r-1} = 0, \quad (2-35)$$

*então  $X$  dada por (2-2) é uma hipersuperfície parametrizada por linhas de curvatura.*

Além disso,  $X$  é uma hipersuperfície Weingarten de tipo esférico se, e somente se,

$$\sum_{r=1}^k \frac{\Delta h^r}{\|g'_r\|^2} = 0.$$

*Demonstração.* De fato, como vimos no exemplo anterior, se vale a equação (2-35), temos que  $V_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ . Portanto, pelo Corolário 2.5,  $X$  é parametrizada por linhas de curvatura. Além disso, podemos escrever

$$V = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} & 0 \\ 0 & V_{22} \end{pmatrix} & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \begin{pmatrix} V_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & V_{nn} \end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & V_k \end{pmatrix},$$

pois, podemos ver cada matriz  $V_r$ ,  $r = 1, \dots, k$ , como a matriz  $V$  dada pelo Teorema 2.3, da superfície  $Y_r(z_r) = (g_r(z_r), 0)$ , onde  $Y_r : U_r \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Pelas equações (2-32) e (2-33) do exemplo anterior, para  $r = 1, \dots, k$ ,

$$V_{(2r-1)(2r-1)} + V_{(2r)(2r)} = \frac{h_{(2r-1)(2r-1)}}{\|g'_r\|^2} + \frac{h_{(2r)(2r)}}{\|g'_r\|^2} = \frac{\Delta h^r}{\|g'_r\|^2}.$$

Portanto,  $tr(V) = 0$  se, e somente se,

$$\sum_{r=1}^k \frac{\Delta h^r}{\|g'_r\|^2} = tr(V_1) + \cdots + tr(V_k) = 0.$$

□

Em dimensão 2 vale a seguinte generalização do Teorema 2.11.

**Teorema 2.16** *Sejam  $Y : U \rightarrow \Pi$  uma parametrização do plano  $\Pi = \{(u_1, u_2, u_3) : u_3 = 0\}$ , dada por  $Y(u) = (g(u), 0)$ ,  $g : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa,  $u \in U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $u = (u_1, u_2)$  e  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Então a imersão  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por (2-2) satisfaz*

$$tr(V)\|g'\|^2 = \Delta h. \quad (2-36)$$

Em particular,  $X(U)$  é uma superfície Weingarten de tipo esférico se, e somente se,  $h$  é

uma função harmônica.

*Demonstração.* Pelas equações (2-32) e (2-33) do exemplo (2.14) acima, temos que

$$\begin{aligned} V_{11} + V_{22} &= \frac{1}{\|g'\|^2} \left( h_{,11} - \frac{\langle g'', g' \rangle}{\|g'\|^2} h_{,1} + \frac{\langle ig', g' \rangle}{\|g'\|^2} h_{,2} \right) \\ &+ \frac{1}{\|g'\|^2} \left( h_{,22} + \frac{\langle g'', g' \rangle}{\|g'\|^2} h_{,1} - \frac{\langle ig'', g' \rangle}{\|g'\|^2} h_{,2} \right) \\ &= \frac{1}{\|g'\|^2} (h_{,11} + h_{,22}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{tr}(V) = V_{11} + V_{22} &= \frac{1}{\|g'\|^2} (h_{,11} + h_{,22}) \\ &= \frac{\Delta h}{\|g'\|^2}, \end{aligned}$$

o que prova a equação (2-36). Desta equação segue que  $\text{tr}(V) = 0$  se, e somente se,  $h$  é harmônica. Usando o Teorema 2.9 segue o resultado.  $\square$

**Proposição 2.17** *Seja  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície como no Teorema 2.3 e  $L$  a matriz da métrica do hiperplano parametrizado por  $Y$ . Então*

$$\Delta_{III}(f) = \frac{\left(\frac{S^2}{4}\right)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{L_1 L_2 \dots L_n} |\det(V)|} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \left(\frac{4}{S^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} \frac{\overline{C_{ji}}}{\sqrt{L_1 L_2 \dots L_n} |\det(V)|} f_{,j} \right), \quad (2-37)$$

onde  $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$  e  $(\overline{C_{ij}})$  é a matriz dos cofatores da matriz  $VLV^T$ .

*Demonstração.* Seja  $Y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma parametrização local ortogonal do hiperplano associado a hipersuperfície  $M$ . Pela equação (2-10),

$$\det(III) = \left(\frac{4}{S^2}\right)^n L_1 L_2 \dots L_n (\det(V))^2.$$

Logo, sendo  $(\overline{g^{ij}})$  a matriz inversa da matriz  $(\overline{g_{ij}}) = III$ , e usando a Proposição 1.18,

obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta_{III}(f) &= \frac{1}{\sqrt{\det(\overline{g_{ij}})}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \overline{g^{ij}} \sqrt{\det(\overline{g_{ij}})} \frac{\partial f}{\partial u_j} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(III)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \overline{g^{ij}} \left( \frac{4}{S^2} \right)^{\frac{n}{2}} |\det(V)| \sqrt{L_1 L_2 \dots L_n} f_{,j} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(III)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \frac{C_{ji}}{\det(III)} \left( \frac{4}{S^2} \right)^{\frac{n}{2}} |\det(V)| \sqrt{L_1 L_2 \dots L_n} f_{,j} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(III)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \frac{C_{ji}}{\sqrt{L_1 L_2 \dots L_n} (\det(V))^2} \left( \frac{4}{S^2} \right)^{\frac{n}{2}} |\det(V)| f_{,j} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(III)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \left( \frac{S^2}{4} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{C_{ji}}{\sqrt{L_1 L_2 \dots L_n} |\det(V)|} f_{,j} \right).
\end{aligned}$$

Podemos escrever  $C_{ij} = \left( \frac{4}{S^2} \right)^{n-1} \overline{C_{ij}}$ , onde  $(\overline{C_{ij}})$  é o cofator da matriz  $VLV^T$ , pois o cofator é um determinante  $(n-1) \times (n-1)$ . Portanto a proposição está provada.  $\square$

**Proposição 2.18** *Sejam  $X : U \rightarrow M^2 \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície como no Teorema 2.3 e  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  a função associada a parametrização  $X$ . Suponha que  $Y = (g, 0)$  seja uma parametrização ortogonal do plano associado a  $X$ , sendo  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa. Se  $\text{tr}(V) = 0$ , então*

$$\Delta_{III}(h) = \frac{S^2}{4|g'|^2 |\det(V)|} \Delta h. \quad (2-38)$$

Portanto, se  $M^2$  é uma superfície Weingarten de tipo esférico, então  $M^2$  é uma superfície mínima de Laguerre.

*Demonstração.* Agora, sendo  $III = (\overline{g_{ij}})$ , temos que a matriz de  $(\overline{g_{ij}})$  é dada por:

$$\begin{aligned}
(\overline{g_{ij}}) &= \frac{4}{S^2} \begin{pmatrix} V_{11}^2 L_{11} + V_{12}^2 L_{22} & V_{11} V_{21} L_{11} + V_{12} V_{22} L_{22} \\ V_{21} V_{11} L_{11} + V_{22} V_{12} L_{22} & V_{21}^2 L_{11} + V_{22}^2 L_{22} \end{pmatrix} \\
&= \frac{4}{S^2} \begin{pmatrix} (V_{11}^2 + V_{12}^2) \|g'\|^2 & V_{12} (V_{11} + V_{22}) \|g'\|^2 \\ V_{12} (V_{11} + V_{22}) \|g'\|^2 & (V_{12}^2 + V_{22}^2) \|g'\|^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{4}{S^2} \begin{pmatrix} (V_{11}^2 + V_{12}^2) \|g'\|^2 & 0 \\ 0 & (V_{12}^2 + V_{22}^2) \|g'\|^2 \end{pmatrix}. \quad (2-39)
\end{aligned}$$

Pela Proposição 2.17, temos

$$\begin{aligned}\Delta_{III}(h) &= \frac{\frac{S^2}{4}}{\sqrt{|g'|^4|\det(V)|}} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \frac{\overline{C_{ji}}}{\sqrt{|g'|^4|\det(V)|}} h_{,j} \right) \\ &= \frac{S^2}{4|g'|^2|\det(V)|} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \frac{\overline{C_{ji}}}{|g'|^2|\det(V)|} h_{,j} \right).\end{aligned}$$

Como  $\overline{C_{ji}}$  é o cofator da matriz  $VLV^T$  e  $\overline{g_{ij}} = \frac{4}{S^2}VLV^T$ , temos pela equação (2-39),

$$\begin{aligned}\Delta_{III}(h) &= \frac{S^2}{4|g'|^2|\det(V)|} \left( \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{\overline{C_{11}}}{|g'|^2|\det(V)|} h_{,1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{\overline{C_{22}}}{|g'|^2|\det(V)|} h_{,2} \right) \right) \\ &= \frac{S^2}{4|g'|^2|\det(V)|} \left( \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{V_{12}^2 + V_{22}^2}{|\det(V)|} h_{,1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{V_{12}^2 + V_{11}^2}{|\det(V)|} h_{,2} \right) \right) \\ &= \frac{S^2}{4|g'|^2|\det(V)|} \left( \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{V_{12}^2 + V_{22}^2}{|V_{11}V_{22} - V_{12}^2|} h_{,1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{V_{12}^2 + V_{11}^2}{|V_{11}V_{22} - V_{12}^2|} h_{,2} \right) \right) \\ &= \frac{S^2}{4|g'|^2|\det(V)|} \left( \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{V_{12}^2 + V_{22}^2}{|-V_{22}^2 - V_{12}^2|} h_{,1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{V_{12}^2 + V_{11}^2}{|-V_{11}^2 - V_{12}^2|} h_{,2} \right) \right) \\ &= \frac{S^2}{4|g'|^2|\det(V)|} (h_{,11} + h_{,22}).\end{aligned}$$

Agora, temos pelo Teorema 2.9 que  $M^2$  é uma superfície Weingarten de tipo esférico se, e somente se,  $tr(V) = 0$ . Portanto  $h = \frac{H}{K}$ . Pelo Teorema 2.16, como  $Y = (g, 0)$ , segue que  $\Delta h = 0$ . Assim, usando a equação (2-38) segue que  $\Delta_{III} \left( \frac{H}{K} \right) = 0$ , o que prova que  $M^2$  é uma superfície mínima de Laguerre.  $\square$

## 2.2.1 Hipersuperfície Weingarten de Tipo Esférico de Rotação

O seguinte teorema caracteriza as hipersuperfícies de rotação em  $\mathbb{R}^{n+1}$  obtidas pela parametrização (2-2).

**Teorema 2.19** *Sejam  $Y : U \rightarrow \Pi$  a parametrização do hiperplano  $\Pi$  dada por  $Y(u) = (u, 0)$ ,  $u \in U$ ,  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  a imersão dada por (2-2) com normal de Gauss  $N$  dada por (2-4). Nessas condições  $X(U)$  é uma hipersuperfície de rotação se, e somente se,  $h$  é uma função radial.*

*Demonstração.* Suponha que  $X(U)$  seja uma hipersuperfície de rotação. Sem perda de generalidade, podemos supor que o eixo de rotação é o eixo  $x_{n+1}$ . Dessa forma, as seções ortogonais ao eixo  $x_{n+1}$  determinam em  $X(U)$  esferas  $(n-1)$ -dimensionais centradas no eixo  $x_{n+1}$ . Observe ainda que ao longo dessas esferas o ângulo entre  $X$  e  $N$  deve ser

constante, isto é,  $\langle X, N \rangle = k$ , onde  $k$  é uma constante. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \langle X, N \rangle &= \langle Y, N \rangle + h \langle e_{n+1}, N \rangle - h \\
 &= \left\langle u, \frac{2}{|\nabla h|^2 + 1} \sum_{j=1}^n h_j e_j \right\rangle + h \left( 1 - \frac{2}{|\nabla h|^2 + 1} \right) - h \\
 &= \frac{2}{|\nabla h|^2 + 1} \langle u, \nabla h \rangle + h \left( 1 - \frac{2}{|\nabla h|^2 + 1} \right) - h \\
 &= \frac{2}{|\nabla h|^2 + 1} \langle u, \nabla h \rangle - \frac{2}{|\nabla h|^2 + 1} h \\
 &= \frac{2}{|\nabla h|^2 + 1} (\langle u, \nabla h \rangle - h),
 \end{aligned}$$

e portanto

$$k = \frac{2}{S} (\langle u, \nabla h \rangle - h).$$

Como,  $|X|^2$  é constante ao longo das seções ortogonais ao eixo de rotação, temos que

$$\begin{aligned}
 c &= \langle X, X \rangle \\
 &= |u|^2 - \frac{4h}{S} \langle u, \nabla h \rangle + \frac{4h^2}{S^2} \langle \nabla h - e_{n+1}, \nabla h - e_{n+1} \rangle \\
 &= |u|^2 - \frac{4h}{S} (\langle u, \nabla h \rangle - h),
 \end{aligned}$$

onde  $c$  é uma constante.

Logo

$$c = |u|^2 - 2k.h \Rightarrow h = \frac{|u|^2 - c}{2k},$$

e portanto  $h$  é uma função radial.

Reciprocamente, suponha agora que  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função radial, isto é,  $h(u) = J(|u|^2)$ ,  $u = (u_1, \dots, u_n) \in U$ , para alguma função diferenciável  $J$ . Temos que

$$\begin{aligned}
 X &= \left( u - \frac{2J}{1 + 4(J')^2 |u|^2} \sum_{j=1}^n 2u_j J' e_j, \frac{2J}{1 + 4(J')^2 |u|^2} \right) \\
 &= \left( u - \frac{2J}{1 + 4(J')^2 |u|^2} 2J' u, \frac{2J}{1 + 4(J')^2 |u|^2} \right)
 \end{aligned}$$



Assim, se  $\frac{2J}{1+4(J')^2|u|^2} = q$  for constante ao longo do círculo  $|u|^2$ , temos

$$\begin{aligned} \left| \left( 1 - \frac{2J}{1+4(J')^2|u|^2} 2J' \right) u \right|^2 &= |(1 - 2qJ')u|^2 \\ &= (1 - 2qJ')|u|^2 \\ &= (1 - 2qJ')t. \end{aligned}$$

Portanto, as seções ortogonais ao eixo  $x_{n+1}$  determinam em  $X(U)$  esferas  $(n-1)$ -dimensionais centradas no eixo  $x_{n+1}$ .  $\square$

A seguinte proposição classifica as hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico de rotação.

**Proposição 2.20** *Sejam  $Y : U \rightarrow \Pi$  a parametrização do hiperplano  $\Pi$  dada por  $Y(u) = (u, 0)$ ,  $u \in U$ ,  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  a imersão dada por (2-2) com normal de Gauss  $N$  dada por (2-4). Nessas condições  $X(U)$  é uma hipersuperfície Weingarten de tipo esférico de rotação se, e somente se,  $h(u)$  é dada por*

$$h(u) = \begin{cases} C \ln(u_1^2 + u_n^2) + D, & \text{se } n = 2, \\ \frac{2C}{2-n} (u_1^2 + \dots + u_n^2)^{\frac{2-n}{2}} + D, & \text{se } n \neq 2, \end{cases}$$

onde  $C$  e  $D$  são constantes, com  $C > 0$ .

*Demonstração.* Se  $X(U)$  é uma hipersuperfície de rotação, então pelo Teorema 2.19  $h(u)$  é uma função radial, ou seja, podemos escrever  $h(u) = J(t)$ , onde  $u = (u_1, \dots, u_n)$  e  $t = |u|^2$ . Portanto,

$$h_{,i} = 2J'(t)u_i \Rightarrow h_{ii} = 4J''(t)u_i^2 + 2J'(t).$$

Pelo Teorema 2.11,  $h$  é uma função harmônica, e portanto

$$4J''(t)t + 2J'(t)n = 0,$$

que pode ser reescrita na forma

$$\frac{J''(t)}{J'(t)} = -\frac{2n}{4t}, \quad t > 0.$$

Fazendo  $(\ln J'(t))' = \frac{J''(t)}{J'(t)}$ , e integrando a equação acima no intervalo  $(t_0, t)$ ,  $t_0 > 0$ ,

obtemos

$$\begin{aligned}\ln J'(t) &= -\frac{n}{2} \int_{t_0}^t \frac{1}{t} dt + A \\ &= -\frac{n}{2} \ln t + A,\end{aligned}$$

onde  $A$  é uma constante qualquer. Logo

$$\ln J'(t) + \ln t^{\frac{n}{2}} = A,$$

ou seja,

$$\ln(J'(t)t^{\frac{n}{2}}) = A.$$

Usando a função exponencial na igualdade acima, obtemos

$$J'(t)t^{\frac{n}{2}} = e^A,$$

e daí

$$J'(t) = Ct^{-\frac{n}{2}}, \quad (2-40)$$

onde  $C > 0$  é uma constante. Agora, se  $n = 2$  integramos a equação (2-40), e obtemos que

$$J(t) = C \ln t + D,$$

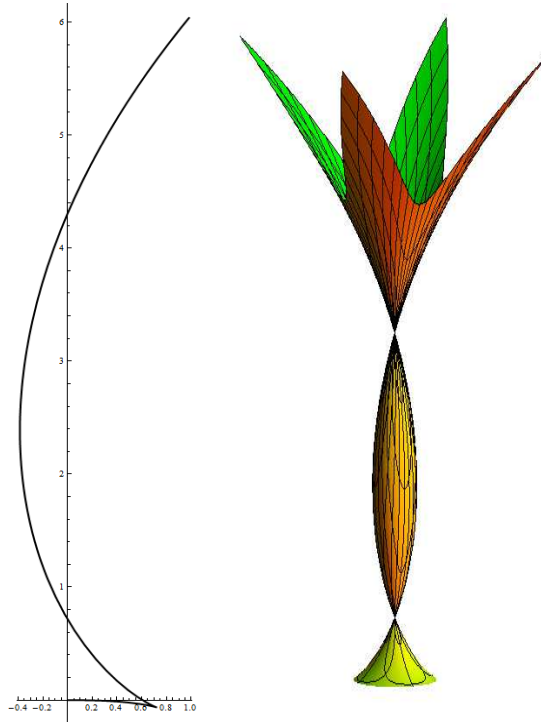
onde  $C$  e  $D$  são constantes, com  $C > 0$ . Se  $n \neq 2$ , integramos a equação (2-40) e obtemos

$$J(t) = C \frac{t^{1-\frac{n}{2}}}{1-\frac{n}{2}} + D,$$

onde  $C$  e  $D$  são constantes. □

**Exemplo 2.21** Fazendo  $Y(u) = (u, 0)$  e  $h(u) = C \ln(u_1^2 + u_2^2) + D$  na parametrização (2-2), obtemos que

$$\begin{aligned}X(u_1, u_2) &= Y(u) - \frac{2(C \ln(u_1^2 + u_2^2) + D)}{h_{,1}^2 + h_{,2}^2 + 1} [h_{,1}Y_{,1} + h_{,2}Y_{,2} - e_3] \\ &= Y(u) - \frac{2(C \log(u_1^2 + u_2^2) + D)}{\left(\frac{2Cu_1}{u_1^2 + u_2^2}\right)^2 + \left(\frac{2Cu_2}{u_1^2 + u_2^2}\right)^2 + 1} \left(\frac{2Cu_1}{u_1^2 + u_2^2}, \frac{2Cu_2}{u_1^2 + u_2^2}, -1\right) \\ &= Y(u) - \frac{2(C \log(u_1^2 + u_2^2) + D)(u_1^2 + u_2^2)}{4C^2(u_1^2 + u_2^2) + (u_1^2 + u_2^2)^2} (2Cu_1, 2Cu_2, -(u_1^2 + u_2^2)) \\ &= Y(u) - \frac{2(C \log(u_1^2 + u_2^2) + D)}{4C^2 + u_1^2 + u_2^2} (2Cu_1, 2Cu_2, -(u_1^2 + u_2^2)),\end{aligned}$$



**Figura 2.5:** Nesta figura temos a curva e a superfície Weingarten de tipo esférico de rotação do exemplo 2.21 com  $C = D = 1$ . Observe que a curva possui dois pontos que cortam o eixo de rotação e uma singularidade no 4ª quadrante, o que condiz com as duas singularidades isoladas e um círculo de singularidades que a superfície possui.

representa uma superfície Weingarten de tipo esférico de rotação.

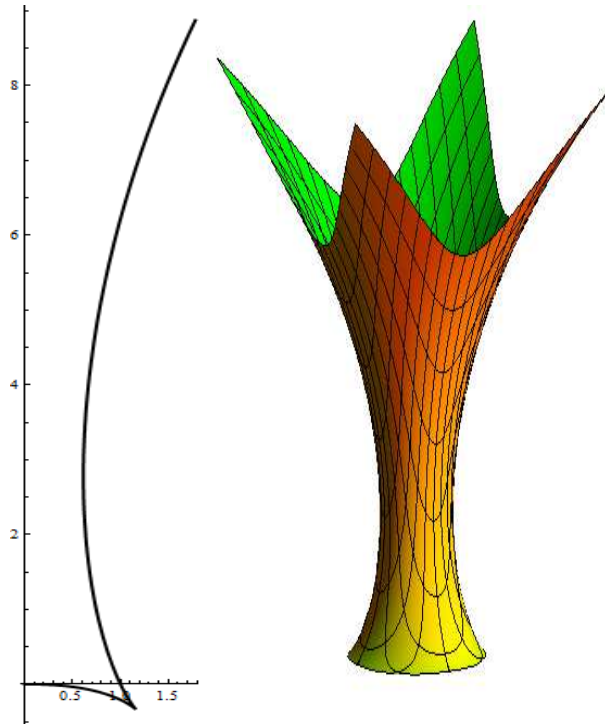
**Teorema 2.22** *Sejam  $Y : U \rightarrow \Pi$  a parametrização do plano  $\Pi$  dada por  $Y(u) = (u, 0)$ ,  $u \in U$ ,  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  a imersão dada por (2-2) com normal de Gauss  $N$  dada por (2-4). Nessas condições, se  $X(U)$  é uma superfície Weingarten de tipo esférico de rotação então  $X(U)$  pode ser localmente parametrizada por*

$$X(u) = \left( \frac{(1 - 2u_1)4C^2 - 4CD + e^{2u_1}}{4C^2 + e^{2u_1}} e^u, \frac{4Cu_1 + 2D}{4C^2 + e^{2u_1}} e^{2u_1} \right), \quad (2-41)$$

onde  $C$  e  $D$  são constantes com  $C > 0$ . Além disso,  $X(U)$  sempre possui um círculo de singularidades e, no máximo, duas singularidades isoladas.

*Demonstração.* Pela Proposição 2.20, se escolhermos  $Y(w) = (w, 0)$  e  $h(w) = C \ln(|w|^2) + D$ ,  $w \in \mathbb{C}$ , onde  $C$  e  $D$  são constantes, então 2-2 é a parametrização de uma superfície de revolução. Fazendo a mudança de parâmetros

$$w = e^u, \quad u = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C},$$



**Figura 2.6:** Nesta figura temos a curva e a superfície Weingarten de tipo esférico de rotação do exemplo 2.21 com  $C = 1$  e  $D = 0$ . Observe que a curva possui uma singularidade no 4<sup>a</sup> quadrante, o que condiz com o círculo de singularidades que a superfície possui.

teremos que  $Y = (e^u, 0)$  e  $h(u) = 2Cu_1 + D$ , pois  $|e^u| = e^{u_1}$ . Consequentemente,  $h_{,2} = 0$ . Substituindo esses dados em (2-2), temos

$$\begin{aligned} X(u) &= (e^u, 0) - \frac{2(2Cu_1 + D)}{\frac{h_{,1}^2}{L_{11}} + 0 + 1} \left[ \frac{h_{,1}}{L_{11}} Y_{,1} - e_3 \right] \\ &= (e^u, 0) - \frac{2(2Cu_1 + D)}{4C^2 + L_{11}} [2CY_{,1} - L_{11}e_3] \\ &= (e^u, 0) - \frac{2(2Cu_1 + D)}{4C^2 + e^{2u_1}} [2CY_{,1} - e^{2u_1}e_3]. \end{aligned}$$

Como,

$$Y(u_1, u_2) = (e^{u_1} \cos(u_2), e^{u_1} \sin(u_2), 0) = Y_{,1},$$

temos que

$$\begin{aligned}
X(u) &= (e^u, 0) - \frac{2(2Cu_1 + D)}{4C^2 + e^{2u_1}} [2C(e^u, 0) - (0, 0, e^{2u_1})] \\
&= \left( e^u - \frac{4Cu_1 + 2D}{4C^2 + e^{2u_1}} 2Ce^u, \frac{4Cu_1 + 2D}{4C^2 + e^{2u_1}} e^{2u_1} \right) \\
&= \left( \left( 1 - \frac{8C^2u_1 + 4CD}{4C^2 + e^{2u_1}} \right) e^u, \frac{4Cu_1 + 2D}{4C^2 + e^{2u_1}} e^{2u_1} \right) \\
&= \left( \frac{(1 - 2u_1)4C^2 - 4CD + e^{2u_1}}{4C^2 + e^{2u_1}} e^u, \frac{4Cu_1 + 2D}{4C^2 + e^{2u_1}} e^{2u_1} \right).
\end{aligned}$$

Como,

$$\begin{aligned}
V_{11} &= \frac{1}{L_{11}} (h_{,11} - \tilde{\Gamma}_{11}^1 h_{,1} - \tilde{\Gamma}_{11}^2 h_{,2}) = -\frac{\tilde{\Gamma}_{11}^1 h_{,1}}{L_{11}} = -\frac{2C}{e^{2u_1}}, \\
V_{22} &= \frac{1}{L_{22}} (-\tilde{\Gamma}_{22}^1 h_{,1}) = -\frac{\tilde{\Gamma}_{22}^1 2C}{e^{2u_1}} = \frac{2C}{e^{2u_1}},
\end{aligned}$$

e  $V_{12} = V_{21} = 0$ , usando a equação (2-7) temos que

$$\begin{aligned}
P &= \det(SI - 2hV) = \det \left( \left( \frac{4C^2}{e^{2u_1}} + 1 \right) I - (4Cu_1 + 2D)V \right) \\
&= \left( \frac{4C^2}{e^{2u_1}} + 1 + \frac{2C}{e^{2u_1}} (4Cu_1 + 2D) \right) \left( \frac{4C^2}{e^{2u_1}} + 1 - \frac{2C}{e^{2u_1}} (4Cu_1 + 2D) \right) \\
&= \frac{1}{e^{4u_1}} (4C^2 + 4CD + 8C^2u_1 + e^{2u_1})(4C^2 - 4CD - 8C^2u_1 + e^{2u_1}).
\end{aligned}$$

Observe que  $X(U)$  é regular apenas nos pontos em que  $P \neq 0$ . Temos que  $P = 0$  se, e somente se,

$$(4C^2 + 4CD + 8C^2u_1 + e^{2u_1}) = 0, \quad (2-42)$$

ou

$$(4C^2 - 4CD - 8C^2u_1 + e^{2u_1}) = 0. \quad (2-43)$$

No primeiro caso, podemos reescrever a expressão (2-42) como  $e^{2u_1} = -8C^2u_1 - 4C^2 - 4CD$ . Como a reta  $-8C^2u_1 - 4C^2 - 4CD$  possui coeficiente angular negativo, temos que ela sempre intersecta a curva exponencial  $e^{2u_1}$  em 1 ponto, digamos  $u_1 = u_1^0$  (veja a figura 2.7). Afirmamos que o ponto  $u_1^0$  sempre gera um círculo de singularidades da superfície  $X(U)$ . De fato por (2-41), a curva geradora é dada por

$$\alpha(u_1) = X(u_1, 0) = \left( \frac{(1 - 2u_1)4C^2 - 4CD + e^{2u_1}}{4C^2 + e^{2u_1}} e^{u_1}, 0, \frac{4Cu_1 + 2D}{4C^2 + e^{2u_1}} e^{2u_1} \right). \quad (2-44)$$

Derivando a expressão (2-44) em relação a  $u_1$ , temos que o vetor tangente da curva

geradora é

$$\begin{aligned}
\alpha'(u_1) &= \left( \frac{(-8C^2 + 2e^{2u_1})(4C^2 + e^{2u_1}) - ((1 - 2u_1)4C^2 - 4CD + e^{2u_1})(2e^{2u_1})}{(4C^2 + e^{2u_1})^2} e^{u_1} \right. \\
&+ \frac{(1 - 2u_1)4C^2 - 4CD + e^{2u_1}}{4C^2 + e^{2u_1}} e^{u_1}, 0, \frac{(4C)(4C^2 + e^{2u_1}) - (4Cu_1 + 2D)(2e^{2u_1})}{(4C^2 + e^{2u_1})^2} e^{2u_1} \\
&+ \left. \frac{4Cu_1 + 2D}{4C^2 + e^{2u_1}} 2e^{2u_1} \right) \\
&= \left( \frac{(2e^{2u_1} - 8C^2)(4C^2 + e^{2u_1}) - ((1 - 2u_1)4C^2 - 4CD + e^{2u_1})(e^{2u_1} - 4C^2)}{(4C^2 + e^{2u_1})^2} e^{u_1}, \right. \\
&+ 0, \frac{e^{2u_1}4C(4C^2 + e^{2u_1}) + (4Cu_1 + 2D)(-2e^{4u_1} + 8C^2e^{2u_1} + 2e^{4u_1})}{(4C^2 + e^{2u_1})^2} \left. \right) \\
&= \left( \frac{(-4C^2 + e^{2u_1})2(4C^2 + e^{2u_1}) - ((1 - 2u_1)4C^2 - 4CD + e^{2u_1})(e^{2u_1} - 4C^2)}{(4C^2 + e^{2u_1})^2} e^{u_1}, \right. \\
&+ 0, \frac{4Ce^{2u_1}(4C^2 + e^{2u_1} + 4C^2u_1 + 4CD)}{(4C^2 + e^{2u_1})^2} \left. \right) \\
&= \left( \frac{(e^{2u_1} - 4C^2)(8C^2 + 2e^{2u_1} - 4C^2 + 8C^2u_1 + 4CD - e^{2u_1})}{(4C^2 + e^{2u_1})^2} e^{u_1}, \right. \\
&+ 0, \frac{4Ce^{2u_1}(4C^2 + e^{2u_1} + 4C^2u_1 + 4CD)}{(4C^2 + e^{2u_1})^2} \left. \right) \\
&= \left( \frac{(e^{2u_1} - 4C^2)(4C^2 + 4CD + e^{2u_1} + 8C^2u_1)}{(4C^2 + e^{2u_1})^2} e^{u_1}, \right. \\
&+ 0, \frac{4Ce^{2u_1}(4C^2 + e^{2u_1} + 4C^2u_1 + 4CD)}{(4C^2 + e^{2u_1})^2} \left. \right).
\end{aligned}$$

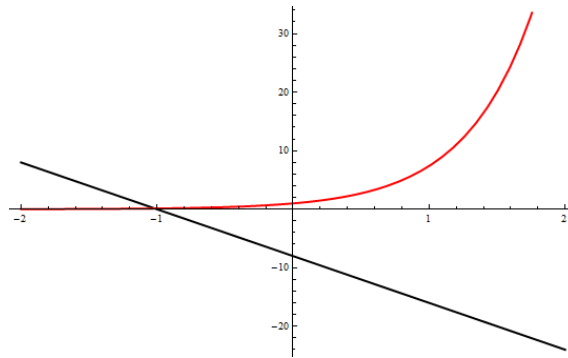
Portanto, no ponto  $u_1^0$  o vetor tangente é nulo. Isso prova que o ponto  $u_1^0$  gera um círculo de singularidades.

Agora no segundo caso, temos  $e^{2u_1} = 8C^2u_1 - 4C^2 + 4CD$ . A reta  $8C^2u_1 - 4C^2 + 4CD$  tem coeficiente angular positivo, e portanto esta reta e a curva exponencial  $e^{2u_1}$  podem ter no máximo duas interseções (veja a figura 2.8).

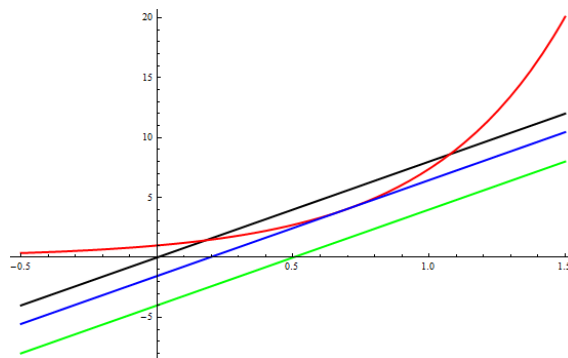
□

**Exemplo 2.23** Para que encontrar as constantes  $C$  e  $D$  que geram a superfície de rotação com uma singularidade isolada, vamos encontrar a relação de dependência entre as constantes  $C$  e  $D$ . Pela equação (2-43), para que a reta  $8C^2u_1 - 4C^2 + 4CD$  seja tangente a curva exponencial  $e^{2u_1}$  em um ponto  $u_1^0$ , o coeficiente angular desta reta em  $u_1^0$  deve ser igual a  $2e^{2u_1^0}$ , ou seja,  $8C^2 = 2e^{2u_1^0}$ . Logo,  $u_1^0 = \ln(2C)$ . Substituindo  $u_1^0$  na equação (2-43), temos

$$e^{2\ln(2C)} = 8C^2\ln(2C) - 4C^2 + 4CD,$$



**Figura 2.7:** Curva mostrando a interseção entre a reta  $-8C^2u_1 - 4C^2 - 4CD$ , com  $C = D = 1$ , e a curva exponencial  $e^{2u_1}$ .



**Figura 2.8:** Figura mostrando as três situações que podem ocorrer, entre a reta  $8C^2u_1 - 4C^2 + 4CD$  e a curva exponencial  $e^{2u_1}$ . No caso de duas interseções temos  $C = D = 1$ . No caso de uma interseção temos  $C = 1$  e  $D = 2 - 2\ln(2)$ . No caso em que não temos interseção temos  $C = 1$  e  $D = 0$ .

ou seja,

$$4CD = 8C^2 + 8C^2 \ln(2C).$$

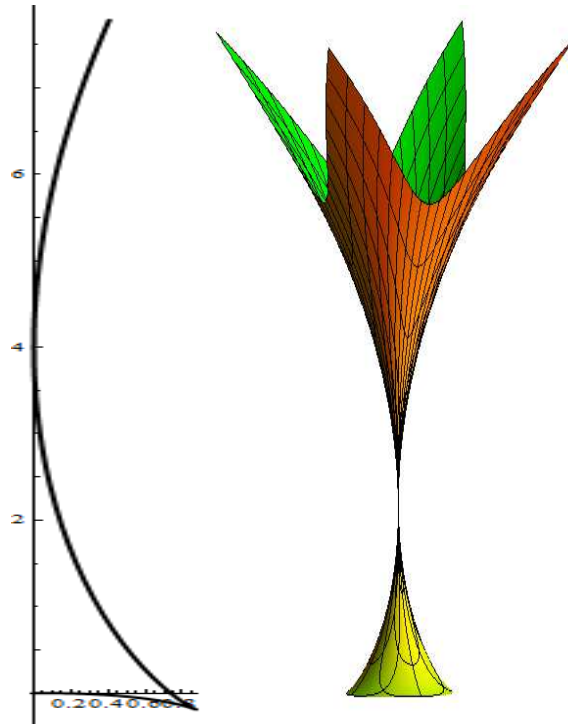
Portanto,

$$D = 2C + 2C \ln(2c). \quad (2-45)$$

Assim, escolhendo  $C = 1$  a equação (2-45) nos dá  $D = 2 - 2\ln(2)$ . A figura 2.9 mostra a curva geradora da superfície gerada pela parametrização do exemplo 2.21, quando escolhemos  $C = 1$  e  $D = 2 - 2\ln(2)$ .

## 2.3 Hipersuperfície de Tipo Esférico

**Definição 2.24** Dizemos que uma hipersuperfície  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é uma *hipersuperfície de tipo esférico*, se existe um hiperplano  $\Pi$  tal que para todo ponto  $p \in M^n$  o conjunto de



**Figura 2.9:** Nesta figura temos a curva e a superfície Weingarten de tipo esférico de rotação do exemplo 2.21 com  $C = 1$  e  $D = 2 - 2\ln(2)$ . Observe que a curva possui um pontos que encontra o eixo de rotação e uma singularidade no 4<sup>a</sup> quadrante, o que condiz com a singularidade isolada e com o círculo de singularidades que a superfície possui.

esferas de centro

$$p + \frac{H_{n-1}(p)}{H_n(p)}N(p)$$

e raio

$$h = \frac{H_{n-1}}{H_n},$$

tangenciam  $\Pi$ .

Em [16], o autor estuda hipersuperfícies de tipo esférico onde a função raio  $h = \frac{H_{n-1}}{H_n}$  é harmônica.

**Proposição 2.25** *Seja  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \geq 2$ , uma hipersuperfície como no Teorema 2.3. Então*

$$\text{tr}(V^{-1}) = \frac{2n}{S} \left( h - \frac{H_{n-1}}{H_n} \right). \quad (2-46)$$

*Demonstração.* Primeiramente, observe que se denotarmos os autovalores de  $V$  por  $\sigma_i$ ,



$1 \leq i \leq n$ , então os autovalores de  $V^{-1}$  são dados por  $1/\sigma_i$ . Portanto, pela equação (2-26)

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tr}(V^{-1}) &= \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} + \dots + \frac{1}{\sigma_n} \\
 &= \frac{2hk_1 - 2}{Sk_1} + \frac{2hk_2 - 2}{Sk_2} + \dots + \frac{2hk_n - 2}{Sk_n} \\
 &= \frac{(2hk_1 - 2)k_2 \dots k_n + \dots + (2hk_n - 2)k_1 k_2 \dots k_{n-1}}{S(k_1 k_2 \dots k_n)} \\
 &= \frac{2nhH_n - 2(k_2 \dots k_n + \dots + k_1 k_2 \dots k_{n-1})}{SH_n} \\
 &= \frac{2n}{S} \left( h - \frac{H_{n-1}}{H_n} \right).
 \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.26** *Seja  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \geq 2$ , uma hipersuperfície como no Teorema 2.3. Então  $X$  é uma hipersuperfície de tipo esférico se, e somente se,  $\operatorname{tr}(V^{-1}) = 0$ .*

*Demonstração.* Segue diretamente da proposição 2.25 acima, fazendo  $\operatorname{tr}(V^{-1}) = 0$  na equação (2-46) e então, obtendo que

$$h = \frac{H_{n-1}}{H_n}.$$

□

**Corolário 2.27** *Seja  $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ , uma superfície como no Teorema 2.3. Então  $X$  é uma superfície de tipo esférico se, e somente se,  $X$  é uma superfície Weingarten de tipo esférico.*

*Demonstração.* Observe que como  $V$  é uma matriz quadrada de ordem 2, então  $\operatorname{tr}(V) = 0$  se, e somente se,  $\operatorname{tr}(V^{-1}) = 0$ . Portanto, usando os Teoremas 2.9 e 2.26, obtemos o resultado desejado. □

**Observação 2.28** Pelo corolário 2.27 obtemos que para  $n = 2$ , as classes de superfícies Weingarten de tipo esférico e as superfícies de tipo esférico coincidem. Além disso elas são superfícies de tipo esférico usual.

**Exemplo 2.29** Seja  $X$  a parametrização (2-2). Se  $Y(u) = (u, 0)$ , então temos que  $V_{ij} = h_{,ij}$ . Logo se supormos que  $X$  é parametrizada por linhas de curvatura, teremos que

$h_{,ij} = 0$ . Logo  $h$  é de variáveis separáveis, ou seja,

$$h(u) = \sum_{i=1}^n f_i(u_i).$$

Agora observe que, com essas hipóteses

$$\text{tr}(V^{-1}) = \frac{1}{V_{11}} + \dots + \frac{1}{V_{nn}}. \quad (2-47)$$

Logo,  $\text{tr}(V^{-1}) = 0$  se, e somente se,

$$\sum_{i=1}^n V_{11} V_{22} \dots \widehat{V_{ii}} \dots V_{nn} = 0, \quad (2-48)$$

onde  $\widehat{\phantom{x}}$  significa que o fator está ausente na expressão (2-48). Derivando (2-48) em relação a variável  $u_i$ , temos

$$\sum_{j \neq i, j=1}^n f_1'' \dots f_i''' \dots \widehat{f_j''} \dots f_n'' = 0,$$

ou seja, ou  $f_i''' = 0$  ou

$$\sum_{j \neq i, j=1}^n f_1'' \dots \widehat{f_j''} \dots f_n'' = 0.$$

Se  $f_i''' = 0$ , então temos que

$$f_i(u_i) = a_i u_i^2 + b_i u_i + c_i, \quad a_i \neq 0,$$

e daí,

$$h(u) = \sum_{i=1}^n a_i u_i^2 + b_i u_i + c_i. \quad (2-49)$$

Derivando (2-49) e substituindo em (2-47) obtemos que  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2a_i} = 0$ .

Se  $\sum_{j \neq i, j=1}^n f_1'' \dots f_i''' \dots \widehat{f_j''} \dots f_n'' = 0$  obtemos  $f_i'' = 0, \forall i = 1, \dots, n$ , o que não pode ocorrer. Portanto  $X$  é uma hipersuperfície de tipo esférico.

No próximo capítulo veremos que as hipersuperfícies geradas pelo Teorema 2.3 escolhendo  $Y(u) = (u, 0)$  e  $h$  como na equação (2-49), são hipersuperfícies de Dupin.

## Outras aplicações da parametrização (2-2)

---

Nesta seção daremos alguns outros resultados usando a parametrização (2-2).

### 3.1 Hipersuperfícies de Dupin

Usando a parametrização dada em (2-2) obtemos o seguinte resultado que fornece uma caracterização de uma classe de hipersuperfícies de Dupin parametrizadas por linhas de curvatura.

**Proposição 3.1** *Sejam  $Y : U \rightarrow \Pi$  a parametrização ortogonal do hiperplano  $\Pi$ ,  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  a imersão dada por (2-2). Nessas condições  $X(U)$  é uma hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura se, e somente se,*

$$h_{,iii} - \sum_{l=1}^n \tilde{\Gamma}_{ii,i}^l h_{,l} - \sum_{l=1}^n \tilde{\Gamma}_{ii}^l h_{,li} + 2\tilde{\Gamma}_{ii}^i (h_{,ii} - \sum_{l=1}^n \tilde{\Gamma}_{ii}^l h_{,l}) = 0, \quad (3-1)$$

onde  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$  é o símbolo de Christoffel  $Y$ , com  $1 \leq i, j, k \leq n$ .

*Demonstração.* Como  $X(U)$  é uma hipersuperfície de Dupin se, e somente se,  $k_{i,i} = 0$  onde  $k_i$  é a  $i$ -ésima curvatura principal de  $X$ , e  $X(U)$  está parametrizada por linhas de curvatura, vamos derivar (2-25),

$$k_i = \frac{2V_{ii}}{2hV_{ii} - S},$$

onde  $V_{ii}$  é dada por (2-6),  $1 \leq i \leq n$ . Derivando a igualdade acima temos que

$$\begin{aligned} k_{i,i} &= \frac{2V_{ii,i}(2hV_{ii} - S) - 2V_{ii}(2h_{,i}V_{ii} + 2hV_{ii,i} - S_{,i})}{(2hV_{ii} - S)^2} \\ &= \frac{4V_{ii,i}V_{ii}h - 2SV_{ii,i} - 4V_{ii}^2h_{,i} - 4hV_{ii}V_{ii,i} + 2V_{ii}S_{,i}}{(2hV_{ii} - S)^2} \\ &= \frac{2V_{ii}S_{,i} - 2SV_{ii,i} - 4V_{ii}^2h_{,i}}{(2hV_{ii} - S)^2} \\ &= \frac{-2SV_{ii,i}}{(2hV_{ii} - S)^2}, \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato que  $S_{,i} = 2V_{ii}h_{,i}$ . De fato, pela equação (2-20)

$$S_{,i} = 2 \sum_{k=1}^n V_{ik}h_{,k},$$

e como  $X$  é parametrizada por linhas de curvatura,  $V_{ij} = 0$ , se  $i \neq j$ , de onde segue o afirmado. Logo,  $k_{i,i} = 0$  se, e somente se,

$$2SV_{ii,i} = 0, \quad (3-2)$$

ou seja, a equação (3-2) é equivalente à  $V_{ii,i} = 0$ . Derivando  $V_{ii}$  (a igualdade (2-6)), temos

$$V_{ii,i} = \frac{-L_{ii,i}}{L_{ii}^2} (h_{,ii} - \sum_{l=1}^n \tilde{\Gamma}_{ii}^l h_{,l}) + \frac{1}{L_{ii}} (h_{,iii} - \sum_{l=1}^n \tilde{\Gamma}_{ii,i}^l h_{,l} - \sum_{l=1}^n \tilde{\Gamma}_{ii}^l h_{,li}),$$

e como  $\tilde{\Gamma}_{ii}^i = \frac{-L_{ii,i}}{2L_{ii}}$ , segue que  $X(U)$  é uma hipersuperfície de Dupin se, e somente se, vale a igualdade (3-1).  $\square$

**Corolário 3.2** *Sejam  $Y : U \rightarrow \Pi$  a parametrização do hiperplano  $\Pi$  dada por  $Y(u) = (u, 0)$ ,  $u \in U$ ,  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  a imersão dada por (2-2). Nessas condições  $X(U)$  é uma hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura se, e somente se,*

$$h(u) = \sum_{i=1}^n a_i u_i^2 + b_i u_i + c_i, \quad a_i \neq 0,$$

com  $1 \leq i \leq n$ .

*Demonstração.* Como os símbolos de Christoffel da métrica  $L_{ij}$  são zeros, temos que a equação (3-1) se reduz a  $h_{,iii} = 0$ . Também temos que  $V_{ij} = h_{,ij} = 0$ , e daí  $h$  é de variáveis

separáveis, ou seja,

$$h(u) = \sum_{i=1}^n f_i(u_i).$$

Derivando  $h$  e usando que  $h_{,iii} = 0$ , obtemos o resultado.  $\square$

**Observação 3.3** Pelo corolário 3.2, se  $a_i > 0$  ou  $a_i < 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ , obtemos uma hipersuperfície de Dupin cujo  $tr(V) = \sum_{i=1}^n 2a_i \neq 0$ . Logo  $X$  não é uma hipersuperfície Weingarten de tipo esférico. Além disso usando o exemplo 2.29,  $X$  é uma hipersuperfície de tipo esférico generalizado com a condição  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2a_i} = 0$ .

**Exemplo 3.4** Escolhendo  $Y(u) = (u, 0)$  e

$$h(u_1, u_2) = \sum_{i=1}^2 a_i u_i^2 + b_i u_i + c_i,$$

onde  $a_i, b_i$  e  $c_i$  são constantes, na parametrização (2-2) temos que

$$X(u) = (u_1, u_2, 0) - \frac{2(a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 + b_1 u_1 + b_2 u_2 + c_1 + c_2)}{(2a_1 u_1 + b_1)^2 + (2a_2 u_2 + b_2)^2 + 1} (2a_1 u_1 + b_1, 2a_2 u_2 + b_2, -1)$$

nos dá uma superfície de Dupin. Então

- Se  $a_1 = a_2 = 0$  e escolhermos para as constantes  $b_1, b_2, c_1$  e  $c_2$  valores arbitrários teremos que  $X$  gera um plano;
- Se  $a_1$  e  $a_2$  forem diferentes de zero, e as outras constantes tiverem valores arbitrários, temos que  $X$  gera uma esfera.

Se somente uma das constantes  $a_1$  e  $a_2$  for zero, então teremos

- Um cilindro caso somente uma das constantes  $b_1$  ou  $b_2$  for zero, com  $c_1$  e  $c_2$  constantes arbitrárias;
- Um cone caso as duas constantes  $b_1$  e  $b_2$  forem diferente de zero, com  $c_1$  e  $c_2$  constantes arbitrárias.

## 3.2 Superfícies com invariantes de Laplace nulo

Usando a parametrização dada em (2-2) obtemos uma representação para uma classe de superfícies parametrizadas por linhas de curvatura com invariantes de Laplace nulos (veja a seção para a definição desses invariantes).

**Teorema 3.5** *Seja  $M^2$  uma superfície orientável como no Teorema 2.3 parametrizada por linhas de curvatura. Se o invariante de Laplace  $\tilde{m}_{12}$  da equação  $V_{12} = 0$  for nulo,*

então existe funções reais  $f_i(u_i)$ ,  $f_j(u_j)$ , e uma função holomorfa  $g : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \Pi$  dada por (1-10) ou (1-11) tal que  $M^2$  é localmente parametrizado por

$$X(u) = (g, 0) - \frac{2h}{S} \left( \frac{g'}{|g'|^2} \cdot (h_{,1} + ih_{,2}), -1 \right),$$

onde  $u = (u_1, u_2) \in U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $|g'| \neq 0$ ,

$$S = \frac{|\nabla h|^2}{|g'|^2} + 1,$$

e

$$h = |g'| [f_i(u_i) + f_j(u_j)].$$

A Aplicação normal de Gauss é dada por

$$N(u) = \left( 0, 0, 1 - \frac{2}{S} \right) + \frac{2}{S} \left( \frac{g'}{|g'|^2} \cdot (h_{,1} + ih_{,2}), 0 \right).$$

Além disso, os coeficientes da primeira, segunda e terceira forma fundamental de  $X$  são dadas por

$$a_{11} = |g'|^2 \left( 1 - \frac{4h}{S} V_{11} + \left( \frac{2h}{S} \right)^2 V_{11}^2 \right), \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = |g'|^2 \left( 1 - \frac{4h}{S} V_{22} + \left( \frac{2h}{S} \right)^2 V_{22}^2 \right), \quad (3-3)$$

$$b_{11} = |g'|^2 \left( -\frac{2}{S} V_{11} + \frac{4h}{S} V_{11}^2 \right), \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = |g'|^2 \left( -\frac{2}{S} V_{22} + \frac{4h}{S} V_{22}^2 \right), \quad (3-4)$$

$$c_{11} = \frac{4}{S^2} |g'|^2 V_{11}^2, \quad c_{12} = 0, \quad c_{22} = \frac{4}{S^2} |g'|^2 V_{22}^2, \quad (3-5)$$

onde

$$V_{11} = \frac{1}{|g'|^2} \left[ h_{,11} - \left\langle \frac{g''}{g'}, \nabla h \right\rangle \right], \quad (3-6)$$

$$V_{22} = \frac{1}{|g'|^2} \left[ h_{,22} + \left\langle \frac{g''}{g'}, \nabla h \right\rangle \right]. \quad (3-7)$$

*Demonstração.* Faça  $n = 2$  no Teorema 2.3 e seja  $Y = (g, 0)$ , uma parametrização ortogonal do plano  $\Pi = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 : u_3 = 0\}$ , onde  $g$  é uma função holomorfa. Logo,  $L_{11} = L_{22} = |g'|^2$  e pela equação (2-3), temos

$$S = \frac{(h_{,1})^2}{|g'|^2} + \frac{(h_{,2})^2}{|g'|^2} + 1 = \frac{|\nabla h|^2}{|g'|^2} + 1.$$

Usando as equações (2-2) e (2-4), obtemos

$$\begin{aligned} X &= (g, 0) - \frac{2h}{S} \left[ \frac{h_{,1}}{|g'|^2} Y_{,1} + \frac{h_{,2}}{|g'|^2} Y_{,2} - e_{n+1} \right] \\ &= (g, 0) - \frac{2h}{S} \left( \frac{g'}{|g'|^2} \cdot (h_{,1} + ih_{,2}), -1 \right), \\ N &= e_{n+1} + \frac{2}{S} \left( \frac{h_{,1}}{|g'|^2} Y_{,1} + \frac{h_{,2}}{|g'|^2} Y_{,2} - e_{n+1} \right) \\ &= \left( 0, 0, 1 - \frac{2}{S} \right) + \frac{2}{S} \left( \frac{g'}{|g'|^2} \cdot (h_{,1} + ih_{,2}), 0 \right). \end{aligned}$$

Observe que

$$\tilde{\Gamma}_{ii}^i = \frac{|g'|_{,i}}{|g'|}, \quad \tilde{\Gamma}_{ij}^i = \frac{|g'|_{,j}}{|g'|} = -\tilde{\Gamma}_{ii}^j, \quad (3-8)$$

onde  $1 \leq i \neq j \leq 2$ .

Como  $M^2$  é parametrizada por linhas de curvatura, vale pelo Corolário 2.5,

$$V_{ij} = h_{,ij} - \tilde{\Gamma}_{ij}^i h_{,i} - \tilde{\Gamma}_{ij}^j h_{,j} = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq 2.$$

Além disso, temos que o invariante de Laplace  $\tilde{m}_{12} = 0$  e portanto, as soluções desta equação são dadas por (veja [13])

$$h = e^{\int \tilde{\Gamma}_{ij}^i du_j} \left[ \int e^{-\int \tilde{\Gamma}_{ij}^i du_j + \int \tilde{\Gamma}_{ji}^j du_i} \tilde{f}_j(u_j) du_j + f_i(u_i) \right], \quad 1 \leq i \neq j \leq 2.$$

ou seja,

$$\begin{aligned} h &= e^{\int \frac{L_{ii,j}}{2L_{ii}} du_j} \left[ \int e^{-\int \frac{L_{ii,j}}{2L_{ii}} du_j + \int \frac{L_{jj,i}}{2L_{jj}} du_i} \tilde{f}_j(u_j) du_j + f_i(u_i) \right] \\ &= e^{\int \frac{1}{2} (\ln L_{ii})_{,j} du_j} \left[ \int e^{-\int \frac{1}{2} (\ln L_{ii})_{,j} du_j + \int \frac{1}{2} (\ln L_{jj})_{,i} du_i} \tilde{f}_j(u_j) du_j + f_i(u_i) \right] \\ &= e^{\frac{1}{2} \ln L_{ii}} \left[ \int e^{-\frac{1}{2} \ln L_{ii} + \frac{1}{2} \ln L_{jj}} \tilde{f}_j(u_j) du_j + f_i(u_i) \right] \\ &= |g'| \left[ \int \tilde{f}_j(u_j) du_j + f_i(u_i) \right] \\ &= |g'| [f_j(u_j) + f_i(u_i)]. \end{aligned}$$

Como  $\tilde{m}_{12} = 0$ , onde, pela equação (1-8),

$$\tilde{m}_{12} = -\tilde{\Gamma}_{12,1}^1 + \tilde{\Gamma}_{12}^2 \tilde{\Gamma}_{12}^1, \quad (3-9)$$

temos que

$$\begin{aligned}
0 &= -\left(\frac{L_{11,2}}{2L_{11}}\right)_{,1} + \frac{L_{22,1} L_{11,2}}{2L_{22} 2L_{11}} \\
&= -\left(\frac{|g'|_{,2}^2}{2|g'|^2}\right)_{,1} + \frac{|g'|_{,1}^2 |g'|_{,2}^2}{2|g'|^2 2|g'|^2} \\
&= -\left(\frac{\langle ig'', g' \rangle}{|g'|^2}\right)_{,1} + \frac{\langle g'', g' \rangle \langle ig'', g' \rangle}{|g'|^2 |g'|^2} \\
&= -\frac{\langle ig'', g' \rangle_{,1} \langle g', g' \rangle - \langle ig'', g' \rangle 2 \langle g'', g' \rangle}{|g'|^4} + \frac{\langle g'', g' \rangle \langle ig'', g' \rangle}{|g'|^4} \\
&= \frac{3 \langle g'', g' \rangle \langle ig'', g' \rangle}{|g'|^4} - \frac{\langle ig'', g' \rangle_{,1}}{|g'|^2}.
\end{aligned}$$

Como  $\langle g'', ig'' \rangle = 0$  e  $|g'|^2 = g' \bar{g}'$ , obtemos que

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{3 \langle g'', g' \rangle \langle ig'', g' \rangle}{|g'|^4} - \frac{\langle ig''', g' \rangle}{|g'|^2}, \\
&= 3 \langle g'', \frac{1}{g'} \rangle \langle ig'', \frac{1}{g'} \rangle - \langle ig''', \frac{1}{g'} \rangle \\
&= 3 \langle 1, \frac{g''}{g'} \rangle \langle 1, i \frac{g''}{g'} \rangle - \langle 1, i \frac{g'''}{g'} \rangle \\
&= \frac{3}{2} \langle 1, i \left(\frac{g''}{g'}\right)^2 \rangle - \langle 1, i \frac{g'''}{g'} \rangle \\
&= \left\langle 1, i \left( \frac{3}{2} \left(\frac{g''}{g'}\right)^2 - \frac{g'''}{g'} \right) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Esta última igualdade é verdadeira se, e somente se,

$$\frac{3}{2} \left(\frac{g''}{g'}\right)^2 - \frac{g'''}{g'} = c,$$

onde  $c$  é uma constante. Mas, como

$$\left(\frac{g''}{g'}\right)' = \frac{g'''}{g'} - \left(\frac{g''}{g'}\right)^2,$$

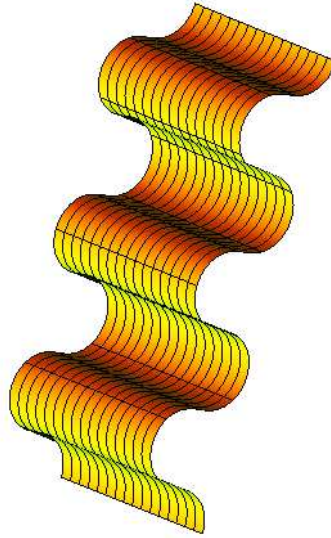
vemos que a equação (3-10) é equivalente à equação

$$\left(\frac{g''}{g'}\right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{g''}{g'}\right)^2 = c. \quad (3-10)$$

As soluções da equação (3-10), são dadas pelo lema 1.14 (Veja [5]).

Finalmente, usando as equações (2-6), (2-8)-(2-10) e (3-8) obtemos as equações





**Figura 3.1:** Plano ondulado reto

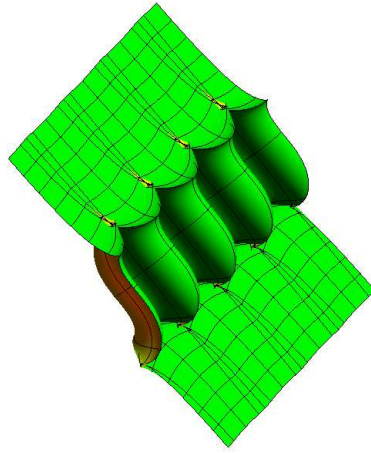
(3-3)-(3-5). □

**Exemplo 3.6** Escolhendo  $g(z) = z_1z + z_2$ , onde  $z_1 = a_1 + ib_1$  e  $z_2 = a_2 + ib_2$ , e  $f_1(u_1) = c_1u_1^2 + c_2u_1 + c_3$  e  $f_2(u_2) = d_1u_2^2 + d_2u_2 + d_3$ , obtemos pelo Teorema 3.5 o plano, a esfera, o cilindro, o cone e a superfície com duas singularidades apresentada no exemplo 2.13, quando escolhermos valores arbitrários para as constantes  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3$ . Neste caso obtemos superfícies de Dupin.

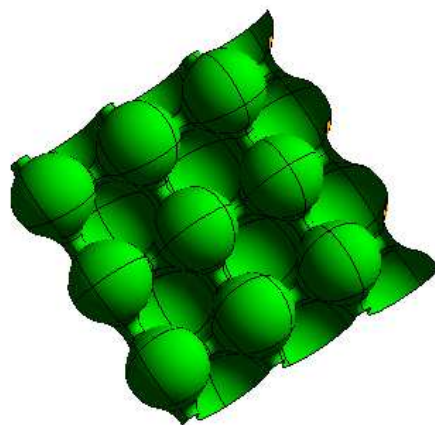
**Exemplo 3.7** Escolhendo  $g(z) = z_1z + z_2$ , onde  $z_1 = a_1 + ib_1$  e  $z_2 = a_2 + ib_2$ , e  $f_2(u) = \cos u_2$ , obtemos pelo Teorema 3.5 os seguintes exemplos de superfícies, quando escolhermos valores arbitrários para as constantes  $a_1, a_2, b_1, b_2$ :

- Um plano ondulado reto (figura 3.1) se escolhermos  $f_1(u_1) = c_1u_1^3 + c_2u_1^2, \forall u \in U$  e  $a_1 = a_2 = 1$  e  $b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 0$ ;
- Um plano curvo (figura 3.2) se escolhermos  $f_1(u_1) = c_1u_1^3 + c_2u_1^2$  com  $a_1 = a_2 = -1, b_1 = b_2 = 1$  e  $c_1 = c_2 = 1/100$ ;
- Um plano com bolhas (figura 3.3) se escolhermos  $f_1(u_1) = \sin u_1$ , com  $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 1$ .

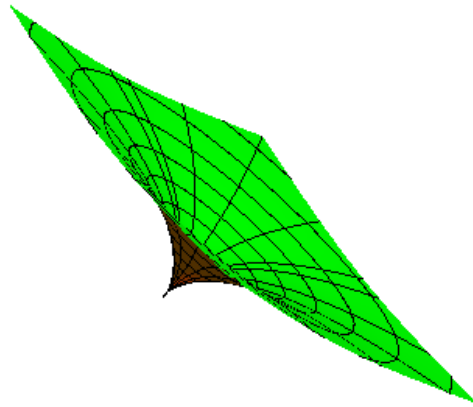
**Exemplo 3.8** Escolhendo  $g(z) = z_1e^{\sqrt{-2}cz}$ , onde  $z_1 = a_1 + ib_1$ , e  $f_2(u_2) = \cos(bu_2)$ , obtemos pelo Teorema 3.5 os seguintes exemplos de superfícies, quando escolhermos valores arbitrários para as constantes  $a_1, b_1, b, c$ :



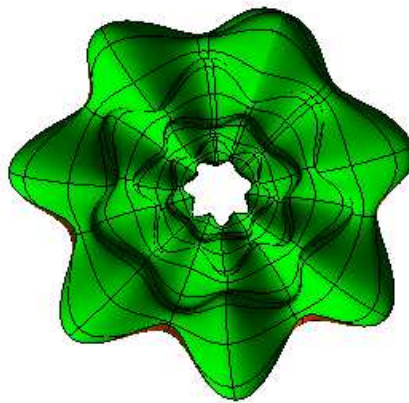
**Figura 3.2:** *Plano curvo*



**Figura 3.3:** *Plano com bolhas*



**Figura 3.4:** *Funil*

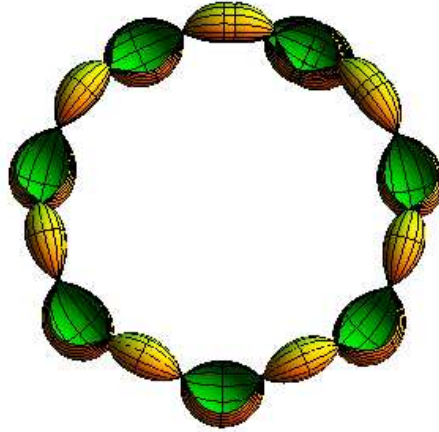


**Figura 3.5:** *Plano ondulado sem a origem*

- Um "funil"(figura 3.4) se  $a_1 = b_1 = 1$ ,  $b = 0$  e  $c = -1$ , onde  $f_1(u_1) = e^{u_1}$ ;
- Se fizermos  $f_1(u_1) = \sin(u_1)$ , obtemos um "plano ondulado sem a origem"(figura 3.5), se  $a_1 = b_1 = 1$ ,  $b = 0$  e  $c = -1$ ;
- Se fizermos  $f_1(u_1) = u_1^2$ , obtemos um colar de "esferas" com singularidades (figura 3.6), se  $a_1 = b_1 = 1/100$ ,  $b = 1$  e  $c = -1/100$ .

### 3.3 Superfícies mínimas de Laguerre

O seguinte teorema fornece uma outra caracterização das superfícies mínimas de Laguerre usando a parametrização (2-2).



**Figura 3.6:** Colar de esferas

**Teorema 3.9** *Sejam  $Y = (g, 0)$  uma parametrização ortogonal do plano  $\Pi$ , com  $g$  holomorfa, e  $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Considere  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por (2-2) parametrizada por linhas de curvatura. Então,  $X$  é uma superfície mínima de Laguerre se, e somente se,*

$$\left( \frac{V_{22}}{V_{11}} F_{,1} \right)_{,1} + \left( \frac{V_{11}}{V_{22}} F_{,2} \right)_{,2} = 0, \quad (3-11)$$

onde  $F = h - \frac{S(V_{11}+V_{22})}{4V_{11}V_{22}}$ ,  $V_{11}$  e  $V_{22}$  são dados por (3-6) e (3-7).

Em particular se  $V_{11} = V_{22}$ , então  $X$  é uma superfície mínima de Laguerre se, e somente se,  $h - \frac{S}{2V_{11}}$  é harmônica.

*Demonstração.* Por (2-39), temos que

$$(\overline{g_{ij}}) = \frac{4}{S^2} \begin{pmatrix} V_{11}^2 \|g'\|^2 & 0 \\ 0 & V_{22}^2 \|g'\|^2 \end{pmatrix}.$$

De (2-8) segue que a curvatura média e a curvatura Gaussiana são dadas por

$$H = -\frac{\text{Str}(V) - 4h \det(V)}{P} \quad (3-12)$$

e

$$K = \frac{4}{P} \det(V). \quad (3-13)$$

Como  $V_{12} = 0$ , segue de (3-12) e (3-13), que

$$\frac{H}{K} = h - \frac{S(V_{11} + V_{22})}{4V_{11}V_{22}} = F.$$

Agora, usando (3-11) e (2-37), obtemos

$$\begin{aligned}\Delta_{III}\left(\frac{H}{K}\right) = \Delta_{III}(F) &= \frac{S^2}{4|g|^2 \det(V)} \left[ \left( \frac{V_{22}^2}{\det(V)} F_{,1} \right)_{,1} + \left( \frac{V_{11}^2}{\det(V)} F_{,2} \right)_{,2} \right] \\ &= \frac{S^2}{4|g|^2 \det(V)} \left[ \left( \frac{V_{22}}{V_{11}} F_{,1} \right)_{,1} + \left( \frac{V_{11}}{V_{22}} F_{,2} \right)_{,2} \right].\end{aligned}$$

Assim,  $\Delta_{III}\left(\frac{H}{K}\right) = 0$  se, e somente se, (3-11) é satisfeita. Agora, se  $V_{11} = V_{22}$ , obtemos que  $F = h - \frac{S}{2V_{22}}$  e de (3-11) obtemos que  $F_{,11} + F_{,22} = 0$ , ou seja,

$$\Delta_{III}(F) = \left( h - \frac{S}{2V_{22}} \right)_{,11} + \left( h - \frac{S}{2V_{22}} \right)_{,22} = 0.$$

Portanto,  $F = h - \frac{S}{2V_{22}}$  é harmônica. □

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] BLASCHKE, W. **Über die geometrie von laguerre:i. grundformeln der flachentheorie.** *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 3:176–194, 1924.
- [2] BLASCHKE, W. **Über die geometrie von laguerre:iii. beiträge zur flächentheorie.** *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 4:176–194, 1924.
- [3] BLASCHKE, W. **Über die geometrie von laguerre:ii. flachentheorie in ebeneukordinaten.** *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 3:1–12, 1925.
- [4] BLASCHKE, W. in: G. van der Waerden, J. Thomsen (eds), **Vorlesungen über differentialgeometrie and geometrische grundlagen von einsteins relativitätstheorie.** Springer, Berlin, B.3, 1929.
- [5] CARRION, CARLOS; VASQUEZ, A. **Hypersurfaces with planar lines of curvature in euclidean space.** *Selecciones Matemáticas*, v. 4:30–37, 2017.
- [6] CORRO, A. V. **Generalized weingarten surfaces of bryant type in hyperbolic 3-space.** *Matemática Contemporânea*, 30:71–89, 2006.
- [7] DIAS, D. G. **Classes de hipersuperfícies weingarten generalizada no espaço euclidiano.** [Tese de Doutorado], Goiânia:IME–UFG, 2014.
- [8] DO CARMO, M. P. **Geometria Riemanniana.** IMPA, Rio de Janeiro, 2003.
- [9] FERNANDES, K. V. **Superfícies weingarten generalizada do tipo harmônico no espaço hiperbólico.** [Tese de Doutorado], Goiânia:IME–UFG, 2013.
- [10] FERREIRA, W.; ROITMAN, P. **Hypersurfaces in hyperbolic space associated with the conformal scalar curvature equation  $\delta u + ku^{\frac{n+2}{n-2}} = 0$ .** *Dif. Geom. and its Appl.*, 27:279–295, 2009.
- [11] GÁLVEZ, J. A.; MARTÍNEZ, A.; MILÁN, F. **Complete linear weingarten surfaces of bryant type. a plateau problem at infinity.** *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356:3405–3428, 2004.

- [12] H. POTTMAN, P. GROHS, N. J. M. **Laguerre minimal surfaces, isotropic geometry and linear elasticity**. *Adv. Comput. math.*, 31(4):391–419, 2009.
- [13] KAMRAN, N.; TENENBLAT, K. **Laplace transformation in higher dimensions**. *Duke Math. J.*, 84:237–266, 1996.
- [14] LINS NETO, A. **Funções de uma variável complexa**. *Rio de Janeiro:IMPA*, p. 468, 2008.
- [15] MIYAGAKI, O. H. **Equações Elípticas Modeladas em Variedades Riemannianas: Uma introdução**. Preprint, 2004.
- [16] RUYS, W. D. S. **Hipersuperfícies associadas a aplicações biharmônicas**. [Tese de Doutorado], Goiânia:IME–UFG, 2017.
- [17] SCHIEF, W. K. **On laplace-darboux-type sequences of generalized weingarten surfaces**. *Communications in Analysis and Geometry*, 41(9):6566–6599, 2000.