



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
Departamento de Economia

Rodrigo Otavio Curvello Wutke

**Guerra de Desgaste:
Análise de Jogos Evolucionários pela Economia
Computacional Baseada em Agentes**

Brasília

2018

Rodrigo Otavio Curvello Wutke

**Guerra de Desgaste:
Análise de Jogos Evolucionários pela Economia
Computacional Baseada em Agentes**

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Economia pela Universidade de Brasília

Universidade de Brasília – UnB
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
Departamento de Economia

Orientador: Bernardo Mueller

Brasília
2018

Rodrigo Otavio Curvello Wutke

Guerra de Desgaste:

Análise de Jogos Evolucionários pela Economia Computacional Baseada em Agentes

/ Rodrigo Otavio Curvello Wutke. – Brasília, 2018-

58 p.; 30 cm.

Orientador: Bernardo Mueller

Dissertação – Universidade de Brasília – UnB

Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade

Departamento de Economia, 2018.

1. Guerra de Desgaste. 2. Modelos Baseados em Agentes. I. Bernardo Mueller.
II. Universidade Brasília. III. Faculdade de Administração, Contabilidade e
Economia. IV. Título

Rodrigo Otavio Curvello Wutke

**Guerra de Desgaste:
Análise de Jogos Evolucionários pela Economia
Computacional Baseada em Agentes**

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Economia pela Universidade de Brasília

Trabalho aprovado. Brasília, 25 de abril de 2018:

Bernardo Mueller
Orientador

Daniel Oliveira Cajueiro
Convidado

Bernardo Alves Furtado
Convidado

Brasília
2018

Resumo

Nesta dissertação, contextualizamos a Guerra de Desgaste como um jogo evolucionário e apresentamos os desenvolvimentos da teoria da Complexidade nas Ciências Econômicas e o uso de Modelos Baseados em Agentes, apoiado pelo desenvolvimento de um modelo desse tipo. Nosso objetivo é ilustrar que é possível revisitar problemas econômicos e encontrar resultados diferentes dos previstos pela teoria econômica tradicional. Inicialmente, fazemos uma revisão de literatura sobre a Guerra de Desgaste e sobre a Complexidade na teoria econômica. Em seguida, descrevemos os principais aspectos da teoria dos jogos evolucionários e da Economia Computacional Baseada em Agentes. Por fim, desenvolvemos um Modelo Baseado em Agentes que interpreta a Guerra de Desgaste e comparamos os resultados obtidos com aqueles previstos na literatura tradicional. Diferentemente do que se previa, para determinadas configurações de parâmetros é possível identificar a emergência de comportamentos complexos.

Palavras-chave: guerra de desgaste. modelos baseados em agentes. complexidade.

Abstract

In this thesis, we contextualize the War of Attrition as an evolutionary game and present the developments of Complexity theory in Economics and the use of Agent-based Models, supported by the development of a model of this type. Our goal is to illustrate that it is possible to revisit economic issues in order to find different outcomes from those predicted by traditional economic theory. Initially, we present a literature review on the War of Attrition and on Complexity in Economics. Next, we describe the main aspects of evolutionary game theory and of Agent-based Computational Economics. Finally, we developed an Agent-Based Model interpreting the War of Attrition and compared the results obtained with those predicted in traditional literature. Differently from what was predicted, for certain parameter configurations it is possible to identify the emergence of complex behaviors.

Keywords: war of attrition. agent-based models. complexity.

Sumário

	Introdução	11
1	REVISÃO DE LITERATURA	13
1.1	A Guerra de Desgaste	13
1.2	Economia da Complexidade	14
1.2.1	A teoria econômica tradicional e seus pressupostos	14
1.2.2	Economia como um Sistema Complexo Adaptável	17
2	JOGOS EVOLUCIONÁRIOS E A ECONOMIA COMPUTACIONAL BASEADA EM AGENTES	21
2.1	Teoria dos Jogos Evolucionários	21
2.2	Economia Computacional Baseada em Agentes	24
2.3	Modelos Baseados em Agentes de Jogos Evolucionários	28
2.3.1	O Dilema dos Prisioneiros	28
2.3.2	<i>Hawks and Doves</i> revisitado	31
3	A GUERRA DE DESGASTE COMO UM MODELO BASEADO EM AGENTES	35
3.1	Modelo teórico	35
3.2	O Modelo	37
3.2.1	Processos do modelo	39
3.3	Análise de cenários	43
3.3.1	Primeiro caso: $m < (V/2)$	43
3.3.2	Segundo caso: $m \geq V$	44
3.3.3	Terceiro caso: “The Interesting In Between” ou $valor > custo \geq valor/2$	47
3.4	Análise comparativa dos modelos	50
	Conclusão	53
	REFERÊNCIAS	55

Introdução

No início dos anos 70, com o auxílio das ferramentas da teoria dos jogos, biólogos começaram a analisar as interações dos animais. Providos da teoria de Darwin, os pesquisadores das Ciências Biológicas desenvolveram novas ferramentas para o estudo dos jogos, criando um novo ramo dessa teoria. Um dos primeiros jogos evolucionários estudados nessa época foi a Guerra de Desgaste (*War of Attrition*). Esse jogo consiste na disputa de animais por algum prêmio, como a fêmea desejada ou o território mais adequado à reprodução, e o vencedor é aquele que desiste por último. Mecanismo existente em diversos momentos do comportamento humano, a Guerra de Desgaste pode ser usada em leilões, competições físicas, atividades de lóbi e corridas armamentistas, de forma que a sua análise é muito importante.

A Guerra de Desgaste não é um problema novo na academia e, portanto, foi extensivamente analisada pelos métodos tradicionais. Entretanto, novas formas de se abordar os problemas econômicos estão se popularizando, especialmente após o contato da Teoria da Complexidade com a teoria econômica. Ela pretende estudar as Ciências Econômicas como um sistema complexo adaptável, onde interações entre os agentes produzem padrões incompreensíveis ao olhar microscópico. O estudo da Economia como um sistema complexo não é novidade. Ao longo das três últimas décadas, diversos pesquisadores, com destaque aos filiados ao *Santa Fe Institute*, vêm desenvolvendo e aplicando métodos nesse âmbito, de modo a abarcar não só os conhecimentos da área econômica, mas também métodos de outras ciências, como a Biologia e a Física.

Dentre os diversos métodos que a Economia da Complexidade proporcionou aos economistas, os Modelos Baseados em Agentes (ABMs) estão entre os mais destacados. Os ABMs usam o poder computacional, cada dia mais presente na vida humana, para programar o comportamento de agentes heterogêneos e para observar os padrões emergentes de sua interação. Essas características, diferente das presentes nos modelos teóricos que permearam as Ciências Econômicas ao longo do século XX, permitem que diversos problemas antigos sejam reavaliados e que novas conclusões sejam formuladas.

No primeiro capítulo, discutiremos a origem da Guerra de Desgaste e como ela costuma ser abordada na literatura. Além disso, debateremos motivos para considerar abordagens complementares à tradição da Economia, momento em que defenderemos a abordagem dos sistemas complexos adaptáveis como opção viável. No segundo capítulo, comentaremos o desenvolvimento da teoria dos jogos evolucionários e o uso de ABMs na Economia, traçando um panorama histórico e analisando alguns modelos que conciliaram essa ferramenta com as características de jogos evolucionários. Por fim, em nosso terceiro

capítulo, apresentamos o desenvolvimento de um ABM que representa a Guerra de Desgaste. Com essa análise, poderemos comparar os resultados obtidos com aqueles previstos nos modelos tradicionais e verificar se, de fato, abordagens complementares ao problema podem trazer conclusões novas e relevantes.

Dessa forma, esta dissertação tem como principal objetivo contrapor resultados da observação de um ABM às conclusões acerca do jogo evolucionário que o inspirou. Com isso, buscamos ilustrar como, por meio de abordagens alternativas, as Ciências Econômicas podem encontrar intuições diferentes para questionamentos já abordados na ciência. A possibilidade de análise por métodos novos contribui complementando e tornando mais robusto o conjunto de ferramentas que pesquisadores e formuladores de políticas públicas fazem uso no processo de tomada de decisão.

1 Revisão de Literatura

1.1 A Guerra de Desgaste

A Guerra de Desgaste (*War of Attrition*, GD) é um mecanismo de teoria dos jogos, abordado principalmente no campo dos jogos evolucionários, primeiramente introduzido no campo da Biologia em [Maynard Smith \(1974\)](#), com o intuito de modelar a competição entre animais. O jogo consiste em dois indivíduos disputando algum tipo de prêmio (no caso dos animais, geralmente é um território ou a fêmea desejada para reprodução), e o vencedor será aquele que estiver disposto a continuar por mais tempo. Existe um custo associado a permanecer disputando o prêmio, de outro modo ambos permaneceriam para sempre.

Esse tipo de jogo pertence à categoria de jogos com opção de saída ou jogos de parada ótima (*optimal stopping games*), de forma similar ao modelo proposto por [Casas-Arce \(2010\)](#). Dessa forma, a cada momento os agentes possuem apenas duas ações disponíveis: parar ou não parar. De maneira similar, a GD pode ser comparada com jogos de barganha não-cooperativa, como apresentado, por exemplo, em [Ordover e Rubinstein \(1986\)](#). Nesse caso, as únicas diferenças estão no tempo, que é discreto no caso de [Ordover e Rubinstein \(1986\)](#) e contínuo na GD, e na informação, que é assimétrica no jogo de barganha não-cooperativa.

Na economia, a GD é geralmente associada a um leilão de lance selado de segundo preço do tipo *all-pay*, ou seja, todos pagam ([KRISHNA; MORGAN, 1997](#)). Nesse tipo de leilão, caso haja apenas dois jogadores, aquele que anunciar um lance mais alto receberá o item leiloado e deverá pagar valor equivalente ao lance do perdedor, que, por sua vez, também deverá pagar seu próprio lance. Dessa forma, ambos pagam exatamente a mesma quantia, porém aquele que estava disposto a pagar valor mais alto recebe o bem leiloado. Leilões em que todos pagam, de modo geral, apresentam características semelhantes a diversos fenômenos econômicos e sociais, como a atividade de lóbi e até mesmo corridas armamentistas ([KRISHNA; MORGAN, 1997](#))

Desde sua introdução por Maynard Smith, a GD foi empregada em situações econômicas diversas. O trabalho de [Fudenberg e Tirole \(1986\)](#) foi um dos primeiros a modelar a GD como um problema econômico ao compará-la com a decisão de empresas de sair de um mercado. Já [Goeree et al. \(2005\)](#) sugerem que esse formato de jogo pode ser aplicado a arrecadações de fundos (para caridade, por exemplo, ou para a provisão de algum bem público) e, em geral, é mais vantajoso que outros métodos para essa finalidade.

Com o decorrer dos anos, várias análises teóricas sobre o mecanismo da GD foram

propostas em diferentes áreas. Na Economia, sobressaem-se os trabalhos de [Krishna e Morgan \(1997\)](#) e [Krishna \(2002\)](#), que abordam uma versão mais complicada e realista do mecanismo, ao considerar o caso com n competidores e apreciações diferentes para o bem leiloado. O trabalho desses autores é o ponto de partida para as análises modernas desse tipo de mecanismo, é o modelo base sobre o qual os desenvolvimentos de outros pesquisadores se baseiam e é, portanto, o mais relevante na literatura econômica.

Outros trabalhos mais recentes revisitaram o problema, particularmente [Bos \(2012\)](#) e [Odegaard e Anderson \(2014\)](#). [Bos \(2012\)](#) expande o modelo desenvolvido por [Krishna e Morgan \(1997\)](#), ao incluir estocasticidade no número de agentes. O autor parte da plausível premissa de que, com frequência, as pessoas não sabem o número exato de concorrentes que enfrentarão nesse tipo de mecanismo, especialmente pela característica de lance selado. Já o trabalho de [Odegaard e Anderson \(2014\)](#) defende que o mecanismo examinado por Krishna e Morgan é semelhante a uma modalidade de leilões que só seria criada no século XXI, os *penny auctions* ou leilões de centavos. Nesse tipo de leilão, cada agente compra antecipadamente um pacote com determinado número de lances que poderão despendem em leilões diversos. Em dado leilão, cada lance gera, necessariamente, o incremento de um centavo ao preço de venda do produto. O leilão possui um horário demarcado para seu término, que é sujeito a acréscimos, enquanto houver lances; pode-se afirmar, portanto, que o leilão apenas termina quando não há mais consumidores dispostos a gastar um de seus lances para prosseguir. Qualquer agente pode dar um lance a qualquer momento, fato que dificulta a precisão da estimação do número de agentes participantes por qualquer um deles, de maneira compatível com o trabalho de [Bos \(2012\)](#). O problema dos licitantes está associado ao seu valor interno em relação ao bem leiloado, ao preço do pacote de lances e às expectativas no que concerne à disposição dos demais agentes a gastar lances adicionais.

Como apresentamos, a Guerra de Desgaste foi abordada extensivamente pelos métodos microeconômicos tradicionais, de modo que as contribuições para esse modelo desde [Krishna e Morgan \(1997\)](#) estiveram sempre relacionadas a pequenas alterações nos pressupostos. Por esse motivo, com a intenção de mudar a ótica de análise do problema, exploraremos motivos pelos quais essa estratégia pode ser vantajosa e discutiremos de que forma seria possível seguir por esse caminho.

1.2 Economia da Complexidade

1.2.1 A teoria econômica tradicional e seus pressupostos

O uso de matemática sofisticada inspirada nos princípios da física para a modelagem do comportamento econômico pode ser remontado a Walras no clássico livro *Elementos de Economia Política Pura*, que deu início ao Marginalismo. Junto a Walras, outros autores, como Jevons e Pareto, contribuíram para o desenvolvimento de uma teoria econômica

que buscava o equilíbrio do mercado. Por meio de trocas voluntárias, os participantes da economia chegariam a um estado, chamado por Walras de ponto de equilíbrio geral, onde todos estão tão satisfeitos quanto possível, dados os recursos disponíveis (BEINHOCKER, 2006). Diversos economistas utilizaram a base estabelecida pela economia marginalista para desenvolver teorias mais complexas. Beinhocker (2006) destaca as contribuições de Marshall e Hicks e o esforço coletivo dos economistas na construção da base da teoria econômica com a chamada Síntese Neoclássica.

A busca de um equilíbrio na Economia tornou-se o objetivo de muitos pesquisadores. Ela foi e, para muitos, ainda é, o objetivo que norteava o desenvolvimento do arcabouço teórico da ciência. A prova de existência de equilíbrio geral de Arrow-Debreu em seu artigo de 1954, “*Existence of Equilibrium for a Competitive Economy*”, é um dos pontos marcantes da teoria econômica no século XX, uma consequência direta do padrão estabelecido pelos economistas. Ela é uma prova rigorosa do argumento que Walras desenvolvera 80 anos antes.

A centralidade do equilíbrio geral na economia fez que muitos economistas buscassem desenvolver modelos macroeconômicos que fossem consistentes com o trabalho de Arrow e Debreu (1954), porque acreditavam que a teoria econômica, enfim, evoluiria paralelamente à aplicação prática da ciência. Esse desenvolvimento, como relata Colander (2000), foi importante para que, no fim dos anos 70 e ao longo dos anos 80, os Novos Clássicos criticassem o estado-das-artes da macroeconomia à época, indicando que o caminho a ser seguido era por modelos microfundamentados, ou seja, modelos em que o comportamento do agregado deve ser compatível com o comportamento dos agentes individualmente.

Arthur (2015) comenta que vários economistas, ele incluído, têm objeções em relação à construção neoclássica que a noção de equilíbrio na economia trouxe. O autor elogia a elegância do conceito, mas critica a falta de realismo em seus pressupostos. Como relata Beinhocker (2006), uma das primeiras críticas desse tipo foi a de Poincaré, famoso matemático francês, ao trabalho de Walras. Poincaré era particularmente cético quanto à capacidade dos agentes econômicos de prever o futuro perfeitamente.

Em resposta a esse tipo de crítica, Friedman (1953) apresenta a linha de raciocínio que respaldou a continuidade do desenvolvimento de modelos com pressupostos pouco realistas. O autor defende que não há problema em usar tais simplificações desde que os modelos estejam apresentando previsões corretas. Em outras palavras, não importa se os agentes não têm racionalidade perfeita na prática, basta que o mercado funcione como se eles tivessem. Contrapondo-se a Friedman, Herbert Simon argumenta que o propósito de uma teoria científica não é fazer previsões, mas explicar fenômenos (ARCHIBALD; SIMON; SAMUELSON, 1963, p. 229–231). Para Simon, as previsões são apenas testes para verificar se as explicações estão corretas.

Apesar de não apresentarem previsões perfeitas ou de não modelarem com exatidão o comportamento humano, as teorias das Ciências Econômicas conseguiram explicar diversos mecanismos práticos das economias. Os pressupostos, muitas vezes distantes da realidade, são importantes para que os problemas possam ser solucionados, de maneira similar à simplificação que um mapa representa de um território.

Mesmo assim, ao longo dos anos, uma parcela dos pesquisadores na economia buscou maneiras de relaxar as hipóteses dos modelos e de torná-los mais próximos da realidade. O trabalho clássico de [Simon \(1955\)](#), agraciado anos depois com o Prêmio Nobel, apresentou a abordagem da racionalidade limitada, reconhecendo que os seres humanos não são perfeitamente racionais durante a maior parte do tempo. Daniel Kahneman e Amos Tversky foram responsáveis pelo artigo seminal sobre Teoria dos Prospectos ([KAHNEMAN; TVERSKY, 1979](#))¹, onde abordam uma série de vieses comportamentais que as pessoas enfrentam ao tomarem decisões que envolvem riscos. Richard Thaler, receptor do Nobel de 2017, é mais um dos expoentes da Economia Comportamental a ter reconhecimento na profissão².

Outras vertentes também buscaram expandir as possibilidades da Economia tradicional. O trabalho de Ronald Coase³, por exemplo, que lhe rendeu o Nobel em 1991, pôs em evidência o problema dos custos de transação, questão que seria abordada mais adiante por diversos autores, particularmente Oliver E. Williamson⁴, vencedor do prêmio em 2009. Também trabalhando com economia institucional, são notáveis os trabalhos de Douglass North (prêmio Nobel de 1993), Elinor Ostrom (prêmio Nobel de 2009), Daron Acemoglu, entre outros.

Esses esforços representaram valiosas contribuições à teoria econômica. Não por romperem completamente com a Economia tradicional, mas por acrescentarem ferramentas complementares, os desenvolvimentos desses estudiosos foram responsáveis por criar um contra-ponto ao *mainstream* que permitiu um entendimento mais completo aos fenômenos econômicos. Quanto maior o ferramental disponível à ciência, melhores análises e previsões de cenários poderão ser feitas e, nesse aspecto, as possibilidades ainda não foram esgotadas. Por exemplo, que respostas seriam encontradas, caso a economia pudesse ser modelada de maneira mais *complexa*, a fim de minimizar os pressupostos? Como isso poderia ser feito? Na próxima seção apresentaremos uma abordagem ao estudo da economia que fornece alternativas interessantes e promissoras aos métodos já incorporados pela Teoria Econômica.

¹ Daniel Kahneman recebeu o Prêmio Nobel por esse trabalho em 2002; Amos Tversky, falecido em 1996, não foi laureado, uma vez que o prêmio não pode ser concedido postumamente.

² Um relato mais detalhado de suas contribuições e experiências pode ser encontrado em [Thaler \(2015\)](#)

³ Mais especificamente, [Coase \(1960\)](#)

⁴ Por exemplo, [Williamson \(1981\)](#) e [Williamson \(2002\)](#)

1.2.2 Economia como um Sistema Complexo Adaptável

O trabalho clássico de Adam Smith, *A Riqueza das Nações*⁵, de 1776, apresentou os princípios que movem a economia na visão do autor. Ele explica que os interesses particulares dos indivíduos, e não sua benevolência, promovem o bem-estar da sociedade de maneira mais eficaz do que se essa fosse a intenção deles. Em outras palavras, Adam Smith acreditava que a economia consistia de diversos agentes heterogêneos seguindo regras simples e que, por meio de sua interação, levam à emergência⁶ de um comportamento coletivo que difere da simples soma das partes, sem qualquer tipo de coordenação ou controle central. Como vimos na seção anterior, a Economia precisou se apoiar em hipóteses que simplificavam o comportamento humano para que fosse possível desenvolver modelos e chegar a conclusões úteis. Isso afastou, de certa forma, o desenvolvimento teórico da Economia de conceitos importantes, por exemplo a emergência.

Philip Anderson, vencedor do Prêmio Nobel de Física de 1977, critica em [Anderson \(1972\)](#) dilema análogo nas Ciências Naturais, explicando que, em muitos casos, o todo é não só mais do que, mas também muito diferente da soma das partes. A crítica teve grande impacto, especialmente entre os físicos, como Anderson. [Schweber \(1993\)](#) relata que algumas áreas da Física, como a Teoria Quântica de Campos e o uso de métodos de grupo de renormalização, apresentaram resultados que apoiam fortemente o entendimento de Anderson.

O distanciamento dos métodos entre as ciências naturais, especialmente a Física, e a Economia fica claro na conferência do *Santa Fe Institute* entre economistas e físicos, em 1987, organizada por dois grandes nomes das duas áreas: Kenneth Arrow e Philip Anderson. [Beinhocker \(2006\)](#) explica que ambos os lados se impressionaram com o que foi apresentado pela equipe oposta, mas o que mais chamou a atenção dos físicos foi a rusticidade dos métodos matemáticos empregados pelos economistas.

Esse foi o primeiro grande contato da Economia com os estudiosos da chamada *Teoria da Complexidade*. O *Santa Fe Institute* não era apenas um centro de físicos, mas também era, na época, uma pequena organização privada formada por pesquisadores de diversas áreas com o intuito de estudar os aspectos dos sistemas complexos e a Economia estava entre as ciências que despertavam interesse do grupo. Uma das palestras, ministrada por John H. Holland, demonstrava como uma economia era um exemplo perfeito daquilo que o instituto chamava de “sistema complexo adaptável” ([WALDROP, 1992](#)).

Para concluir se economias são, de fato, sistemas complexos adaptáveis, é necessário conhecer o que os define, e faremos isso usando a caracterização de Holland relatada por [Waldrop \(1992\)](#). Primeiro, cada um desses sistemas é uma rede de muitos agentes agindo paralelamente. Na economia, esses agentes são indivíduos, famílias, firmas ou mesmo países.

⁵ [Smith \(2012\)](#)

⁶ Do inglês *emergence*, ou algo que surge.

Seja qual for o tipo de agente analisado, ele está inserido em um ambiente produzido por sua interação com os outros agentes no sistema e, por isso mesmo, nada nesse ambiente é fixo. Além disso, o controle de um sistema complexo tende a ser dispersado, emergindo da competição e da cooperação entre os agentes.

Segundo, sistemas complexos adaptáveis têm muitos níveis de organização, onde os agentes de cada nível, em conjunto, constroem o nível de cima. Dessa forma, um grupo de trabalhadores compõem um departamento, um grupo de departamentos forma uma divisão e assim por diante com empresas, setores da economia, economias nacionais e, finalmente, a economia mundial. Esses níveis de organização estão sempre se reorganizando conforme se ganha experiência: firmas promovem bons trabalhadores e, às vezes, modificam sua estrutura organizacional para aumentar a eficiência; países estabelecem novos parceiros comerciais ou se inserem em novos blocos econômicos.

Terceiro, todos os sistemas complexos adaptáveis antecipam, de certa forma, o futuro. Holland explica que os sistemas estão constantemente fazendo previsões baseadas em vários modelos internos sobre o mundo, ou seja, fundamentadas em pressupostos implícitos ou explícitos sobre como o mundo funciona. Esses modelos estão sempre em evolução, eles podem ser testados, refinados e rearranjados conforme o sistema adquire experiência.

Por fim, sistemas complexos adaptáveis têm, tipicamente, vários nichos; cada um pode ser explorado por um agente adaptado para ocupá-lo. Assim, a economia tem lugar para programadores, encanadores e advogados, da mesma forma que a floresta tem lugar para diversos tipos de animais. Mais que isso, ao se preencher um nicho, outros são criados. Por isso é tão complicado encontrar o equilíbrio de um sistema complexo adaptável: ele está sempre se desenvolvendo, sempre em transição. Dessa forma, os agentes não conseguem otimizar sua utilidade, já que o espaço de possibilidades é muito vasto; o máximo que conseguem fazer é melhorar e se adaptar relativamente ao que os outros agentes estão fazendo. Em síntese, os sistemas complexos adaptáveis se caracterizam, principalmente, por sua mudança incessante.

Essa caracterização de Holland é evidentemente mais próxima da economia real do que a abordagem tradicional da academia. Isso não é nenhuma surpresa, uma vez que a Economia tradicional busca as simplificações dos pressupostos para permitir a exploração matemática dos problemas econômicos. Contudo, já ao fim dos anos 80, os novos métodos matemáticos e o poder computacional disponíveis permitiam que o estudo da Economia se tornasse mais realista.

O surgimento da complexidade nas Ciências Econômicas trouxe diferenças relevantes em relação à Economia tradicional. Como apresenta [Beinhocker \(2006\)](#), na Economia da Complexidade os sistemas são abertos, dinâmicos, não lineares e estão geralmente fora de equilíbrio; os agentes são modelados individualmente, usam regras indutivas para

tomar decisões, cometem erros, aprendem e se adaptam ao longo do tempo; existem interações explícitas e diretas entre os agentes, formando redes; não se distingue a micro da macroeconomia, uma vez que os padrões do conjunto emergem do comportamento e das interações dos agentes; e os sistemas crescem em ordem e complexidade devido a processos evolucionários.

A Economia da Complexidade é uma maneira nova de enxergar a economia. Ela traz ferramentas e métodos que podem ser acrescentados àqueles da teoria econômica tradicional, como as regressões econométricas e as análises equacionais estáticas. Com um arcabouço mais amplo, os economistas podem alcançar novos patamares no entendimento dos fenômenos econômicos e sociais, o permitindo que se encontrem soluções mais eficazes a todas as áreas de aplicação da Economia.

2 Jogos Evolucionários e a Economia Computacional Baseada em Agentes

2.1 Teoria dos Jogos Evolucionários

Na década de 1970, a aplicação da então já conhecida teoria dos jogos a contextos biológicos trouxe à tona questões relacionadas à evolução das populações de agentes. Nos modelos mais utilizados na teoria dos jogos tradicional, os jogos consistem, geralmente, de dois ou três agentes cujo comportamento é, muitas vezes, generalizado para N ou infinitos agentes. No âmbito dos jogos evolucionários, as análises permeiam, necessariamente, populações numerosas de agentes. A teoria dos jogos evolucionários foi desenvolvida com o objetivo de entender o surgimento de alguns equilíbrios naturais em populações na natureza, como a razão entre machos e fêmeas de uma espécie ou as estratégias usadas em conflitos (SIGMUND, 2011; MAYNARD SMITH; PRICE, 1973).

O interesse nos jogos evolucionários por parte das Ciências Sociais, especialmente entre economistas e sociólogos, vem aumentando devido a três fatores principais⁷: (i) o conceito de evolução não precisa estar atrelado, necessariamente, a espécies, mas pode representar também mudanças nas culturas ou nas normas das sociedades; (ii) os pressupostos de racionalidade nos jogos evolucionários são, em muitos casos, mais adequados à modelagem de sistemas sociais que aqueles presentes na teoria dos jogos tradicional; (iii) a dinâmica evolucionária desse tipo de jogo preenche uma lacuna existente na teoria tradicional.

Em relação aos aspectos que a teoria dos jogos evolucionários pode complementar à teoria dos jogos tradicional, podemos destacar três principais (ALEXANDER, 2009). O primeiro deles é o problema da seleção de equilíbrio. Muitos jogos possuem mais de um equilíbrio de Nash⁸, de modo que agentes racionais teriam dificuldade para decidir qual estratégia usar, uma vez que não sabem *ex-ante* qual estratégia os outros jogadores escolherão. Esse dilema pode ser resolvido pela evolução das estratégias ao longo do tempo. O segundo aspecto que pode ser aprimorado está relacionado à racionalidade dos agentes. Como sabemos, as pessoas são, quase sempre, bem menos racionais do que a teoria econômica pressupõe. Assim, o processo de evolução e de eliminação das estratégias inferiores pode alcançar sucesso maior ao prever as decisões dos indivíduos do que simplesmente assumir que todos agem com racionalidade perfeita. O terceiro ponto se refere ao comportamento dinâmico da teoria dos jogos evolucionários. A teoria dos jogos

⁷ Alexander (2009)

⁸ Nash (1950) ou, para uma explicação mais acessível, Varian (2012).

tradicional é estática no sentido de que toda deliberação racional e estratégica é concebida antes que o jogo possa ser jogado, mesmo que seja um jogo na forma extensiva. Dessa forma, todas as ações tomadas pelos agentes estão decididas desde o princípio, uma vez que cada agente sabe o que os demais podem fazer. Com a teoria dos jogos evolucionários é possível encontrar uma dinâmica onde os indivíduos consideram os resultados das interações e mudam seu comportamento em resposta a isso.

O primeiro trabalho a abordar problemas biológicos pela ótica da teoria dos jogos tradicional foi [Lewontin \(1961\)](#), com sua interpretação estratégica da teoria da evolução. Não muito tempo depois, o trabalho de [Maynard Smith e Price \(1973\)](#) popularizou o conceito de Estratégias Evolucionariamente Estáveis (ESS), que remete à ideia de equilíbrio estabelecida por trabalhos seminais, como o de [Nash \(1950\)](#).

[Sigmund \(2011\)](#) fornece uma descrição de jogos populacionais útil ao prosseguimento de nosso trabalho. Suponha uma população de jogadores, cada um com uma dada estratégia. De tempos em tempos, dois jogadores se encontram aleatoriamente e jogam de acordo com suas estratégias. O resultado de cada encontro gera *payoffs* que, para a compatibilidade com a característica evolucionária, não são refletidos em utilidade, mas em *fitness*, aptidão, isto é, capacidade de se reproduzir. Se supusermos que as estratégias podem ser repassadas para seus descendentes, poderemos concluir que as estratégias mais bem-sucedidas se espalharão com maior facilidade.

Existem, segundo [Alexander \(2009\)](#), duas formas de aplicar a teoria dos jogos evolucionários. A primeira delas segue o trabalho de [Maynard Smith e Price \(1973\)](#), usando o conceito de ESS como ferramenta principal de análise, enquanto a segunda forma desenvolve um modelo do processo pelo qual a frequência de estratégias muda na população de modo a estudar as propriedades da dinâmica evolucionária dentro do modelo. Portanto, podemos considerar a abordagem de Smith e Price como uma análise estática da estabilidade evolucionária em determinado contexto, uma vez que ela geralmente não se preocupa com o processo pelo qual as estratégias mudam na população. A segunda abordagem, em contraste, não tenta encontrar uma estabilidade evolucionária, mas, sim, os padrões que o processo de interações apresenta.

É necessário entender o conceito de ESS para enxergar essas diferenças de maneira mais clara. Uma estratégia σ é uma ESS se uma de duas condições se sustenta: (i) σ obtém resultados melhores jogando contra σ (outro jogador com estratégia idêntica) do que qualquer outra estratégia também jogando contra σ , ou (ii) existe uma outra estratégia (muitas vezes chamada de mutante) que se sai tão bem contra σ quanto a própria σ , mas σ se sai melhor jogando contra essa estratégia mutante do que ela mesma se sairia nessa situação. Matematicamente:

$$\Delta F(\sigma, \sigma) > \Delta F(\mu, \sigma)$$

ou

$$\Delta F(\sigma, \sigma) = \Delta F(\mu, \sigma) \quad \text{e} \quad \Delta F(\sigma, \mu) > \Delta F(\mu, \mu)$$

onde $F(s)$ é o *payoff* de um indivíduo seguindo a estratégia s , $\Delta F(s_1, s_2)$ é o *payoff* obtido por um jogador seguindo a estratégia s_1 contra outro jogador seguindo a estratégia s_2 , σ é a ESS e μ é a estratégia mutante.

Essa definição formal de ESS é derivada de uma simples propriedade que garante a estabilidade evolucionária: se uma estratégia é dominante na população (praticamente todos os membros a seguem), outra estratégia não poderá invadir.

Para observar como a população de indivíduos que jogam repetidamente determinado jogo evolui, de maneira menos estática, o trabalho de [Taylor e Jonker \(1978\)](#) apresenta a dinâmica de replicação (*replicator dynamics*). Essa dinâmica permite a modelagem de uma população de indivíduos jogando determinado jogo e fornece o ferramental para a análise do caso contínuo para a teoria dos jogos evolucionários.

Seguindo [Hofbauer e Sigmund \(2003\)](#), descreveremos a construção da equação de replicação matematicamente. Considere uma população com n tipos de agentes e seja x_i a frequência de cada tipo i . Assim, o estado da população é dado por $\mathbf{x} \in S_n$. Suponha agora que os x_i são funções do tempo t diferenciáveis. Se os indivíduos se encontram aleatoriamente e então disputam um jogo simétrico com matriz de *payoffs* A , então $(A\mathbf{x})_i$ é o *payoff* esperado para um indivíduo do tipo i e $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é o *payoff* médio no estado \mathbf{x} da população. Supondo que a taxa de crescimento *per capita*, isto é, a derivada logarítmica $(\log x_i) = \dot{x}_i/x_i$, é dada pela diferença entre o *payoff* do tipo i e o *payoff* médio na população. Dessa forma, a equação de replicação é:

$$\dot{x}_i = x_i((A\mathbf{x})_i - \mathbf{x}^T A\mathbf{x})$$

De maneira simplificada, a dinâmica de replicação consiste em equações diferenciais que permitem compreender como ocorre a variação nas proporções de tipos de agentes a cada período baseando-se nos *payoffs* auferidos. Por se tratar de equações não lineares, é geralmente difícil obter uma solução exata, portanto é comum o uso da equação para análises de estabilidade. Algumas vezes a solução da equação será dada por um conjunto de ESS da população, mas como [Alexander \(2009\)](#) explica, essa associação nem sempre será verdadeira, especialmente quando existem mais de dois tipos de indivíduos. Essa relação fica ainda mais fraca quando não usamos a equação de replicação para modelar a dinâmica e, em vez disso, usamos, por exemplo, modelos computacionais que simulam a interação local.

O uso de modelos computacionais de interação local, mais especificamente modelos baseados em agentes (ABMs), pode revelar estados de estabilidade diferentes das ESS e dependentes dos *payoffs* envolvidos. Esses modelos têm a capacidade de simular a cada

momento a posição e as ações tomadas por centenas e até milhares de agentes, fornecendo um método capaz de mostrar com extrema rapidez e de maneira mais compreensiva a evolução da população de agentes e as mudanças nas estratégias dominantes. Discutiremos esse tipo de abordagem mais detalhadamente nas seções 2.2 e 2.3, uma vez que esse é o método empregado para a análise do modelo de interesse no [Capítulo 3](#).

A teoria dos jogos evolucionários já foi empregada com sucesso a diversos problemas econômicos, como na provisão de bens públicos ([CLEMENS; RIECHMANN, 2006](#); [HAUERT; SZABÓ, 2003](#)), na explicação do efeito dotação ([GINTIS, 2007](#)) e até mesmo no mais clássico problema da teoria dos jogos tradicional, o Dilema dos Prisioneiros ([LINDGREN; NORDAHL, 1994](#)). Dessa forma, o estudo dos jogos evolucionários pode ser uma ferramenta complementar às demais análises, ao trazer novas interpretações e até mesmo novos entendimentos a problemas conhecidos da teoria econômica.

2.2 Economia Computacional Baseada em Agentes

É notável a evolução da computação, especialmente nas últimas duas décadas, e o impacto que ela causou nos vários aspectos da vida humana. Não poderia ser diferente com a ciência. Tanto no conteúdo abordado pela ciência quanto nos métodos empregados, o poder computacional moderno causou um impacto considerável. A cada dia, o acesso à tecnologia computacional se torna mais amplo e menos custoso, o que permite que pesquisadores possam realizar com mais facilidade cálculos e simulações que não eram factíveis até então. Nesse contexto, surge uma área de pesquisa nas Ciências Econômicas dedicada a empregar métodos intensivos em capacidade de processamento, a Economia Computacional Baseada em Agentes (ACE) ([TESFATSION, 2002](#)).

Como já discutimos no [Capítulo 1](#), economias de mercado descentralizadas são exemplos excelentes de sistemas complexos adaptáveis, uma vez que consistem em grandes números de agentes envolvidos em interações locais paralelas. Essas interações, comenta [Tefatsion \(2002\)](#), dão origem a regularidades macroeconômicas, como protocolos compartilhados de mercado e normas comportamentais que, por sua vez, interferem no modo como as interações locais ocorrem. O resultado disso é um sistema dinâmico de cadeias causais conectando ações individuais, redes de interação e resultados de bem-estar social.

Como forma de tentar estudar as características das economias como sistemas complexos de maneira abrangente e menos dependente de pressupostos, surge a ACE. Explica [Tefatsion \(2006\)](#) que a metodologia da ACE é uma abordagem inspirada nos métodos biológicos de cultura *in vitro* de microrganismos, em que o pesquisador constrói computacionalmente um mundo econômico composto de múltiplos agentes interativos. Feito isso, ele para e observa o desenvolvimento de seu mundo ao longo do tempo.

Esse tipo de criação computacional que simula um ambiente onde ocorrem as inte-

rações é comumente chamado de Modelo Baseado em Agentes (ABM). O desenvolvimento dos ABMs, relata [Macy e Falache \(2009\)](#), originou-se da Ciência da Computação e da área de inteligência artificial para o estudo de sistemas complexos adaptáveis compostos por grandes quantidades de indivíduos autônomos e independentes. Como o nome indica, os ABMs têm como base agentes, entidades computacionais que possuem variáveis de estado e valores diversos, como posição em um dado momento, idade, riqueza, memória e metabolismo ([WILENSKY; RAND, 2015](#)). Cada agente realiza seus próprios cálculos e tem conhecimento sobre sua localização, mas ele também troca informações com outros agentes e reage às suas ações. Por serem formalmente representados e codificados num programa computacional, os agentes interagem em um processo passo-a-passo a partir de dadas condições iniciais, o que gera toda a dinâmica do modelo ([MACY; FALACHE, 2009](#)).

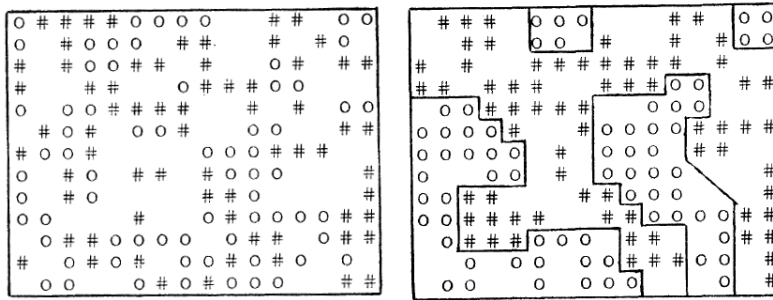
A análise de [Macy e Falache \(2009\)](#) é abrangente na caracterização dos agentes nos ABMs, explicando que eles são inerentemente sociais e possuem uma arquitetura cognitiva e uma arquitetura social. Pelo lado cognitivo, os agentes são heurísticos, logo seguem regras comportamentais simples como hábitos, rotinas e normas, e são adaptáveis, no sentido de que ações têm consequências e os agentes aprendem e evoluem por meio dessas experiências. Socialmente, os agentes são: autônomos, uma vez que têm controle sobre seus objetivos, comportamentos e estados internos e agem no intuito de alcançar esses objetivos; interdependentes, pois as ações dos agentes dependem de como eles percebem o ambiente em que se encontram, e esse ambiente é, por sua vez, modificado pelas ações dos demais agentes; heterogêneos, o que relaxa a hipótese de uma população com agente representativo, comum na Economia tradicional; e, por fim, conectados por redes, de modo que as dinâmicas populacionais são uma propriedade emergente das interações locais. Vale ressaltar que nem sempre os agentes possuirão todas as características descritas por [Macy e Falache \(2009\)](#). Muitos modelos não incorporam redes, por exemplo, e outros interferem na autonomia dos agentes, ao adaptar uma espécie de controle central.

Em um primeiro momento, o desenvolvimento de ABMs foi estruturado pelos autômatos celulares, introduzidos por John von Neumann na década de 1950. O objetivo, na época, era estudar as propriedades de autorreplicação e autorreprodução dos autômatos para compreender a evolução biológica e a capacidade de organização do cérebro humano. Os autômatos celulares são estruturas matemáticas discretas, em que a interação entre células vizinhas é o ponto principal para a evolução da estrutura. Dentre os trabalhos mais relevantes no campo dos autômatos celulares, destacamos o *Game of Life* (Jogo da Vida) de John Conway⁹ e a análise dos autômatos celulares elementares de Stephen Wolfram¹⁰. Uma importante característica de complexidade que pode ser observada com os autômatos celulares de Conway e Wolfram é a emergência, pois mesmo programas baseados em regras

⁹ Para a primeira aparição do Jogo da Vida, leia [Gardner \(1970\)](#)

¹⁰ Especialmente [Wolfram \(1983\)](#) e [Wolfram \(2002\)](#).

Figura 1 – Modelo de Schelling



Fonte: Schelling (1971)

Nota: A imagem da esquerda representa o momento inicial, enquanto a da direita representa um equilíbrio.

muito simples podem gerar um comportamento imprevisto.

Segundo Chen (2012), o primeiro modelo de ACE foi o trabalho de Thomas Schelling sobre segregação (SCHELLING, 1969; SCHELLING, 1971; SCHELLING, 1978). Usando autômatos celulares (embora o autor ainda não soubesse o que eram autômatos celulares na época, e, portanto, tenha usado o termo “modelo tabuleiro de damas”), Schelling mostra como pode ser formado o processo de distribuição de indivíduos membros de dois grupos reconhecíveis em diferentes bairros. A construção da área onde o modelo de Schelling é aplicado é dada da seguinte forma: uma área (geralmente quadrada) é dividida em quadrados menores como um tabuleiro de damas, porém sem as cores alternadas, e são distribuídos indivíduos representando cada etnia aleatoriamente no tabuleiro, mas deixando espaços vazios para que os indivíduos possam se mover (Schelling recomenda entre 25% e 30% de espaços desocupados). O movimento ocorre quando um indivíduo descontente com sua vizinhança, representada pelos oito quadrados com que faz fronteira (vizinhança de Moore), se desloca para o espaço desocupado mais próximo que o cerca e que tenha a vizinhança que mais lhe agrada. Em grande parte das simulações realizadas, Schelling conseguiu observar uma clara separação entre os membros das duas etnias, padrão que podemos observar na Figura 1.

Já em meados da década de 1990, no segundo momento destacado por Chen e Venkatachalam (2017), os ABMs passaram a ser usados com mais frequência nas Ciências Sociais, especialmente na Economia, que produziu alguns modelos em áreas como mercados de leilões duplos, mercados financeiros e macroeconomia. Nessa época havia a preocupação dos economistas em modelar com precisão mecanismos de mercado e o comportamento dos agentes. Um exemplo de destaque do período é o modelo *The El Farol Problem* de W. Brian Arthur¹¹, que ilustra um contexto de racionalidade limitada e de aprendizagem dos agentes ao tentar modelar a taxa de comparecimento a um bar americano. Nesse modelo,

¹¹ Arthur (1994)

existem 100 pessoas que decidem independentemente a cada semana se irão ou não ao bar, que oferece entretenimento em uma noite determinada. O espaço é limitado, assim sendo, as pessoas preferem que ele não esteja muito cheio, o que é determinado no modelo pela presença de 60% ou mais das 100 pessoas. Os agentes não sabem antecipadamente qual será o nível de presença no bar, logo um indivíduo decidirá ir caso acredite que menos de 60 pessoas estarão no bar; caso contrário, decide ficar em casa. A única informação disponível aos agentes é a quantidade de pessoas que visitaram o bar nas semanas anteriores. Os agentes formam suas previsões seguindo algumas hipóteses dentre as diversas possíveis. Uma hipótese prevê que o número da semana anterior se repetirá, outra baseia sua previsão na média das últimas quatro semanas, e, além dessas, existem várias outras com características semelhantes. Cada agente possui algumas dessas hipóteses e forma sua previsão de acordo com aquela que, naquele momento, acertou mais vezes no passado. A cada tomada de decisão os agentes aprendem o que de fato aconteceu e atualizam suas previsões para a próxima rodada. Ao realizar a simulação computacional, Brian Arthur observa que não existe um comportamento cíclico e a média de frequência no bar sempre converge para 60. Isso acontece porque os mecanismos de previsão dos agentes se organizam de tal forma que, em média, 40% estão prevendo números acima de 60 e 60% estão prevendo números abaixo de 60. Essa organização é decorrente da validação dos mecanismos por sua frequência de acertos.

Não muito depois do trabalho de Brian Arthur, surge o famoso modelo *Sugarscape* em Epstein e Axelrod (1996). Originalmente, o modelo consistia em uma grade celular de tamanho 50x50, onde cada célula contém determinada quantidade de açúcar (que pode ser interpretado como riqueza) que será útil à sobrevivência de cada agente. Os agentes são dispostos aleatoriamente na grade no início da simulação. A cada turno, eles olham ao seu redor e se movem para a célula onde há maior quantidade de açúcar. Os indivíduos possuem duas características que podem ajudar ou atrapalhar sua sobrevivência: visão e metabolismo. Com maior visão, os agentes podem enxergar mais longe e encontrar células mais abastadas de açúcar que os demais. O metabolismo, contrariamente, quanto maior, mais alto será o custo para um agente se manter vivo a cada turno, uma vez que, caso a contagem de açúcar do agente venha a ser inferior a zero ao fim do turno, ele perecerá. Essas duas características tendem a realizar um papel darwiniano na sociedade: os agentes mais aptos sobrevivem com mais facilidade. No entanto, outros fatores, como a sorte de iniciar já em um local com abundância de açúcar ou até mesmo a direção para onde decidem se mover na primeira rodada, são decisivos para o resultado final. Independente das características dos indivíduos que conseguiram prosperar, a distribuição de açúcar na população é altamente desigual: poucos agentes são muito ricos e a grande maioria apenas sobrevive. A conclusão que os autores chegaram com essa versão inicial é a de que, mesmo nesse modelo computacional, a riqueza não é criada por uma simples relação de causa e efeito. Não é fácil encontrar soluções para a pobreza e para a desigualdade mesmo

em versões tão simplificadas da realidade. A introdução de outras características, como a reprodução dos agentes e o comércio, apenas confirmou esses resultados.

Os trabalhos desenvolvidos desde os anos 70 na ACE trouxeram novos meios de observar antigos problemas. Ainda longe de ser popular entre os acadêmicos, o uso de ABMs representa uma alternativa a métodos mais usados e podem revelar conclusões inéditas ou replicar comportamentos humanos que não poderiam ser explicados por simples equações. Certamente ainda há muito o que se evoluir na área da ACE, mas a disposição de ferramentas intensivas em poder computacional pode representar uma valiosa adição aos tomadores de decisões.

2.3 Modelos Baseados em Agentes de Jogos Evolucionários

Os esforços nas últimas décadas para a inserção dos ABMs na Economia originaram vários modelos como respostas aos mais diversos problemas. Desde a racionalidade envolvida na decisão de ir ou não a um bar ([ARTHUR, 1994](#)) até a origem da riqueza ([EPSTEIN; AXELROD, 1996](#)) ou a geração de bolhas em mercados financeiros ([GEANAKOPOLOS et al., 2012](#)), os ABMs foram usados como instrumento para a reavaliação de questões antigas e que, em muitos casos, já tinham alguma interpretação pela Economia tradicional. Entre os pontos onde a transição de modelos estáticos baseados unicamente em equações para a abordagem computacional com interação de agentes é mais natural, destacam-se os modelos de teoria dos jogos evolucionários. Como descrevemos na [seção 2.1](#), esse tipo de modelo consiste em uma grande população de indivíduos com diferentes estratégias. Ao trazer os modelos evolucionários para os ambientes computacionais, a análise das ESS perde parte da importância em favor do estudo com maior propriedade da evolução dos tipos de agente ao longo do tempo.

Nesta seção, analisaremos alguns dos ABMs que representam modelos de teoria dos jogos evolucionários como exemplos de sua implementação na teoria econômica.

2.3.1 O Dilema dos Prisioneiros

Em 1980, Robert Axelrod buscou responder quando uma pessoa deveria cooperar com as outras e quando ela deveria ser egoísta sabendo que estava num contexto onde aquela interação aconteceria repetidas vezes ([AXELROD, 1984](#)). Essa pergunta, aplicável a diversos contextos econômicos e sociais, foi abordada por Axelrod com a análise do Dilema dos Prisioneiros¹² jogado repetidamente entre os mesmos jogadores. Para encontrar as melhores estratégias, o autor organizou um torneio computacional e solicitou a pesquisadores de diversas áreas do conhecimento que submetessem as estratégias que competiriam. Com 14 estratégias participando de um torneio onde todas jogavam contra todas em uma

¹² Veja [Varian \(2012\)](#) para uma explicação mais detalhada.

espécie de “pontos corridos”, o vencedor foi o psicólogo matemático Anatol Rapoport, com a mais simples das estratégias: o *Tit for Tat*. A estratégia de Rapoport consistia em iniciar o jogo cooperando e depois repetir a ação do adversário no turno anterior. Axelrod divulgou os resultados de seu torneio e organizou uma segunda edição. Dessa vez foram submetidas 62 estratégias diferentes, mas, para a surpresa do pesquisador, o *Tit for Tat* de Rapoport foi a estratégia vencedora novamente.

Um ano depois Axelrod se uniu a William Hamilton, um biólogo, para remodelar o Dilema dos Prisioneiros como um jogo evolucionário com propriedades semelhantes às descritas em [Maynard Smith e Price \(1973\)](#) e [Maynard Smith \(1982\)](#). Diversos jogadores com diferentes estratégias interagem num ambiente, formando uma população. Nesse contexto, [Axelrod e Hamilton \(1981\)](#) mostram que, de fato, o *Tit for Tat* é uma ESS, mas não é a única. A estratégia *All D*, que consiste em não cooperar em qualquer situação, também é ESS, o que remete ao jogo estático do Dilema dos Prisioneiros, em que não cooperar era o único equilíbrio de Nash.

Já com mais capacidade computacional que Axelrod, [Lindgren e Nordahl \(1994\)](#) desenvolveu um ABM composto por uma grade celular em que cada célula representa um agente. Nesse dispositivo, cada agente interage com seus vizinhos imediatamente acima, abaixo e aos lados (vizinhança de von Neumann com distância de *Manhattan* igual a 1). Para analisar diferentes cenários, os autores escolhem *payoffs* variados para o jogo, mas sempre respeitando a estrutura:

		Jogador 2	
		Cooperar	Não cooperar
Jogador 1	Cooperar	R, R	S, T
	Não cooperar	T, S	P, P

Fonte: [Lindgren e Nordahl \(1994\)](#)

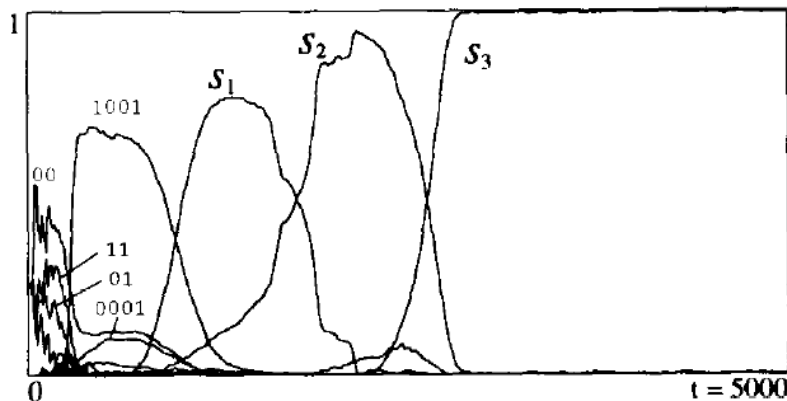
onde $T > R > P > S$ e $2R > T + S$. Com essas condições, é possível simular diversos cenários e obter resultados diferentes, sem perder as propriedades principais do Dilema dos Prisioneiros.

As estratégias são representadas, segundo os autores, como genomas. Cada estratégia é uma sequência composta de 1s e 0s que determinam a próxima ação do agente dado o histórico do jogo, sendo 1 a representação da ação C (cooperar) e 0 a representação da ação D (não cooperar, ou *defect*). Por exemplo, estratégias de memória 1 teriam o primeiro caractere referente a que ação tomar quando seu adversário jogar 0, e o segundo caractere seria que ação tomar quando seu adversário jogar 1. Desse modo, 00 seria a estratégia de nunca cooperar, enquanto 11 seria a estratégia de cooperar sempre e 01 seria equivalente ao *Tit for Tat*. Estratégias mais complicadas levariam em conta mais turnos do histórico para definir a próxima ação, ou seja, teriam memória maior. Por levar em consideração

as últimas ações de ambos os jogadores envolvidos na interação, as estratégias crescem em potências de 2 em relação à memória. Portanto, uma estratégia de memória 4 teria $2^4 = 16$ caracteres. Além disso, estratégias com memórias maiores apenas surgem por meio da mutação das estratégias mais simples, ou seja, no primeiro momento todas as estratégias possuem apenas 2 caracteres.

O principal exemplo de Lindgren e Nordahl (1994) fixa os *payoffs* em $(R,S,T,P) = (1,0,\frac{5}{3},\frac{1}{3})$ e algumas probabilidades para mutações das estratégias¹³ que, somadas, equivalem a 1,4%. No início a dominância é compartilhada entre 00, 11 e 01. Pouco depois, é possível notar o surgimento da estratégia 1001 que se espalha rapidamente e quase domina a grade celular. Nenhuma estratégia de memória 3 conseguiu invadir o cenário, mas pelo menos duas de memória 4 foram capazes. A primeira a surgir no modelo foi $s_1 = 1001000100010001$, que praticamente tomou conta da grade, exceção feita por algumas ilhas estáveis da estratégia 1001. Após determinado tempo, surge $s_2 = 1001000100011001$, outra estratégia de memória 4 que consegue invadir o estado de domínio de s_1 . Por fim, a estratégia $s_3 = 10010000000010011001000100011001$, de memória 5, consegue alcançar um estado homogêneo e foi resistente a todos os tipos de mutantes que surgiram na escala temporal de 10^5 gerações¹⁴ Para as primeiras 5000 gerações, a proporção das estratégias é representada na Figura 2.

Figura 2 – Densidade populacional no Dilema dos Prisioneiros



Fonte: Lindgren e Nordahl (1994)

Nota: $s_1 = 1001000100010001$, $s_2 = 1001000100011001$, $s_3 = 10010000000010011001000100011001$

Lindgren e Nordahl (1994) analisam outras configurações de parâmetros, cada uma apresentando resultados diferentes e comparáveis. Mesmo simulações com parâmetros idênticos apresentavam, por vezes, caminhos evolucionários diferentes. Os autores ressaltam que mesmo os jogos que são considerados resolvidos, como o próprio Dilema dos Prisioneiros,

¹³ Os autores descrevem os possíveis tipos de mutação, mas, para nossa análise, a diferenciação é desnecessária.

¹⁴ Os autores não investigaram escalas maiores de tempo.

podem muitas vezes apresentar novas características e novos resultados quando considerados na forma de jogos repetidos ou evolucionários.

2.3.2 *Hawks and Doves* revisitado

Um dos primeiros jogos evolucionários a serem estudados, também por John Maynard Smith, foi o jogo *Hawk-Dove*¹⁵.

Suponha que dois animais disputam um recurso de valor V , que pode ser um território favorável à reprodução, por exemplo. Nesse território favorável, os animais se reproduzem 5 vezes, enquanto os demais animais se reproduzem apenas 3 vezes. Assim, $V = 5 - 3 = 2$. Nesse jogo, existem dois jogadores com duas possíveis ações: jogar H (*Hawk*) ou jogar D (*Dove*). Quando joga H , o indivíduo ataca seu adversário e só desiste quando se machuca ou quando o adversário se retira. Ao jogar D , o indivíduo não ataca e, se for atacado, se retira. Com essas informações, e sabendo que machucar-se gera um custo C , podemos montar a matriz de *payoffs*, idêntica para ambos os jogadores:

	H	D
H	$\frac{1}{2}(V - C), \frac{1}{2}(V - C)$	$V, 0$
D	$0, V$	$(V/2), (V/2)$

Fonte: [Maynard Smith \(1982\)](#)

Pela definição de ESS é fácil ver, e [Maynard Smith \(1982\)](#) demonstra, que H é uma ESS se $\frac{1}{2}(V - C) > 0$, de modo que $V > C$. Se $V < C$, não existe ESS em estratégias puras¹⁶. Note que, supondo o jogo estático, o Equilíbrio de Nash em estratégias puras é, também, quando ambos jogam H .

Em estratégias mistas, é necessário encontrar as frequências p e $1 - p$ da população que equilibram os *payoffs* esperados. [Maynard Smith \(1982\)](#) demonstra com simplicidade que, nesse caso, existe uma ESS quando a frequência de H é $p = V/C$.

[Killingback e Doebeli \(1996\)](#) formularam um ABM que simula o jogo *Hawk-Dove* de Maynard Smith. Essa representação usa o sistema de grade celular e, diferentemente do modelo de [Lindgren e Nordahl \(1994\)](#) -mas da mesma forma que o trabalho de [Schelling \(1971\)](#)-, a interação ocorre com a vizinhança de Moore.

De um modo geral, o modelo de [Killingback e Doebeli \(1996\)](#) apresentou alta sensibilidade às configurações iniciais. Pequenas alterações no posicionamento inicial dos *Hawks* e dos *Doves* resultaram em padrões muito diferentes após o mesmo número de gerações. Mudanças na relação entre V e C também foram responsáveis por variações na dinâmica do modelo. Mesmo assim, foi possível constatar algumas características consistentes. Ao se fixar $V > C$, qualquer configuração inicial do modelo resultava na

¹⁵ Traduzindo literalmente, Gavião-Pomba.

¹⁶ Curiosamente, o autor não explica o que acontece quando $V = C$.

extinção de todos os *Doves*, o que é consistente com o modelo clássico. No extremo oposto, quando C é muito maior que V , a população se torna praticamente toda composta por *Doves*, o que também foi previsto no modelo original. Quando C é maior que V , mas a diferença é pequena, o modelo pode apresentar uma diversidade de comportamentos de variadas complexidades. Outra conclusão do ABM é que, em geral, a proporção de *Hawks* é menor que a prevista pelo modelo de [Maynard Smith \(1982\)](#).

Tanto o modelo clássico como seu respectivo ABM receberam extensões na forma de estratégias extras. Particularmente importante é a estratégia R , de *Retaliator*¹⁷, que, como o nome indica, age de acordo com seu adversário. Contra um *Dove*, o *Retaliator* agirá como *Dove* e contra um *Hawk*, agirá como um *Hawk*. Com a adição da estratégia R , a nova matriz de *payoffs* pode ser descrita da seguinte forma:

	H	D	R
H	$\frac{1}{2}(V - C), \frac{1}{2}(V - C)$	$V, 0$	$\frac{1}{2}(V - C) + \varepsilon, \frac{1}{2}(V - C) - \varepsilon$
D	$0, V$	$(V/2), (V/2)$	$(V/2) - \varepsilon, (V/2) + \varepsilon$
R	$\frac{1}{2}(V - C) - \varepsilon, \frac{1}{2}(V - C) + \varepsilon$	$(V/2) + \varepsilon, (V/2) - \varepsilon$	$(V/2), (V/2)$

Fonte: [Maynard Smith \(1982\)](#), [Killingback e Doebeli \(1996\)](#), [Zeeman \(1981\)](#)

O parâmetro $\varepsilon \geq 0$ foi introduzido por [Zeeman \(1981\)](#) para permitir que o *Retaliator* descobrisse que seu adversário *Dove* jamais lutaria e, assim, pudesse explorá-lo. Similarmente, quando o *Retaliator* enfrentasse um *Hawk*, este poderia atacar primeiro e obter a vantagem. Se $\varepsilon = 0$ teríamos o modelo como foi originalmente proposto.

Vamos primeiro considerar o modelo clássico de [Zeeman \(1981\)](#), [Maynard Smith \(1982\)](#). Para $\varepsilon = 0$, a única ESS é a estratégia mista que combina em partes iguais *Hawks* e *Doves*. Se considerarmos $\varepsilon > 0$, existem duas ESS: (i) a estratégia mista de *Hawks* e *Doves* e (ii) apenas *Retaliators*.

O ABM de [Killingback e Doebeli \(1996\)](#) encontrou resultados um pouco diferentes. Se $\varepsilon > 0$, apenas *Retaliators* sobrevivem, de tal modo que a ESS mista de *Hawks* e *Doves* não existe nesse contexto. Fixando $\varepsilon = 0$, o resultado é ainda mais inesperado: uma população dividida entre *Retaliators* e *Doves* entra em equilíbrio, o que é bem diferente do resultado previsto onde resistiriam apenas *Hawks* e *Doves*. Mesmo a relação entre V e C pouco afeta as proporções observadas. Quando C é muito alto, alguns *Hawks* conseguem resistir. Conforme V se torna relativamente grande em comparação a C , todos os *Hawks* morrem. A explicação para esse comportamento contra-intuitivo é que os custos mais baixos favorecem os jogadores *Retaliators*. Se o custo é elevado, a vantagem dos *Retaliators* diminui e a quantidade maior de *Doves* permite que alguns *Hawks* sobrevivam.

Uma das importantes conclusões de [Killingback e Doebeli \(1996\)](#) é a de que a inclusão de uma nova estratégia é capaz de tornar o comportamento do modelo mais

¹⁷ Traduzindo literalmente, Retaliador.

simples e previsível. Por serem capazes de explorar os demais jogadores, os *Retaliators* facilitam a eliminação de *Hawks* e tornam o modelo menos dinâmico. O sucesso dos *Retaliators* em um ABM que possui espacialidade como uma das principais características ilustra o fato fundamental de que estratégias ineficientes na análise clássica da teoria dos jogos evolucionários podem prosperar nesse tipo de cenário.

3 A Guerra de Desgaste como um Modelo Baseado em Agentes

3.1 Modelo teórico

O modelo que adaptaremos como um ABM, a Guerra de Desgaste (GD), foi primeiramente apresentado em [Maynard Smith \(1974\)](#) como um jogo evolucionário e, posteriormente, revisitado em [Maynard Smith \(1982\)](#). [Krishna e Morgan \(1997\)](#) trouxe o problema para a teoria econômica ao modelá-lo como um leilão, mecanismo componente da teoria dos jogos tradicional. Nesta seção analisaremos o modelo proposto em sua descrição original como um jogo evolucionário e sua interpretação pela teoria dos leilões.

Considere dois jogadores, A e B , com custos (lances) m_A e m_B respectivamente, e o prêmio (objeto leilado) com valor V para ambos. Nesse contexto, os *payoffs* do jogo são descritos da seguinte forma:

	Jogador A	Jogador B
$m_A > m_B$	$V - m_B$	$-m_B$
$m_A = m_B$	$(V/2) - m_B$	$(V/2) - m_B$
$m_A < m_B$	$-m_A$	$V - m_A$

Fonte: [Maynard Smith \(1982\)](#)

[Maynard Smith \(1982\)](#) demonstra que não há uma ESS para esse modelo em estratégias puras. O argumento é simples. Suponha que os membros de uma população jogam M e seus *payoffs* esperados são todos iguais a $(V/2) - M$. Uma nova estratégia na população (mutante) jogando um valor marginalmente maior poderia invadir, ao obter um *payoff* de $V - M$; se $M > V/2$, uma nova estratégia onde se joga 0 poderia invadir.

Assim sendo, para que exista uma ESS ela deverá ser mista. Seja I a estratégia definida pela função densidade de probabilidade $p(x)$, ou seja, a probabilidade de se aceitar um custo entre x e $x + \delta x$ é $p(x)\delta x$.

Baseando-se no teorema de Bishop-Cannings¹⁸, que determina que, se m é uma estratégia pura no suporte de I (isto é, $p(m) \neq 0$), então $E(m, I)$ é constante. Portanto,

$$E(m, I) = \int_0^m (V - x)p(x)dx - \int_m^\infty mp(x)dx.$$

Precisamos encontrar $p(x)$ tal que $\partial E(m, I)/\partial m = 0$, sujeito à restrição $\int_0^\infty p(x)dx = 1$. Dessa forma:

¹⁸ [Bishop e Cannings \(1978\)](#)

$$p(x) = (1/V)e^{-x/V}.$$

Isso implica que $I = p(x)$ é uma estratégia de equilíbrio, e Bishop e Cannings (1978) provam que ela é evolucionariamente estável. Essa estratégia determina a extensão de tempo para a qual o indivíduo está preparado a continuar ou, mais especificamente, o custo que ele está preparado a aceitar.

O trabalho de Krishna e Morgan (1997), além de propor um modelo mais generalizado, aborda o problema pela ótica da teoria dos leilões, trabalhando conceitos da teoria dos jogos tradicional, como o Equilíbrio de Nash.

Existe um bem a ser leilado e n licitantes (jogadores). Cada licitante i recebe um sinal, X_i antes do leilão que afeta o valor, V_i , do bem. Assim, cada jogador avalia o bem de forma diferente, portanto o valor obtido em caso de vitória no leilão será diferente. Defina, ainda, a variável aleatória $Y_1 = \max\{X_{-i}\}$, em que $-i$ são todos os jogadores diferentes de i . Dessa forma, se cada licitante i declara um lance b_i , os *payoffs* associados ao jogo serão:

$$u_i((b_i(V_i), b_{-i}(V_{-i})), (V_i, V_{-i})) = \begin{cases} V_i - \max b_{-i}(V_{-i}) & \text{se } b_i(V_i) > \max b_{-i}(V_{-i}) \\ \frac{1}{\#\{k: b_k = b_i\}} V_i - b_i(V_i) & \text{se } b_i(V_i) = \max b_{-i}(V_{-i}) \\ -b_i(V_i) & \text{se } b_i(V_i) < \max b_{-i}(V_{-i}) \end{cases}$$

em que v_i é o valor do bem para o jogador i e $\#\{k : b_k = b_i\}$ representa o número de jogadores que declaram lance idêntico ao jogador i . Defina ainda $v(x, y) = E[V_1 | X_1 = x, Y_1 = y]$.

Maximizando o *payoff* esperado, é possível encontrar o equilíbrio simétrico:

$$\beta(x) = \int_{-\infty}^x v(t, t) \lambda(t | t) dt$$

onde $\lambda(\cdot | x)$ é a taxa de risco de Y_1 , definida por:

$$\lambda(y | x) = \frac{f(y | x)}{1 - F(y | x)}.$$

Essa taxa de risco representa a frequência com que o lance do jogador será inferior ao maior lance declarado pelos demais agentes.

Assim sendo, podemos concluir que a estratégia simétrica de equilíbrio representa o lance que todos os jogadores racionais decidirão declarar, baseando-se no valor esperado referente à sua própria avaliação do bem.

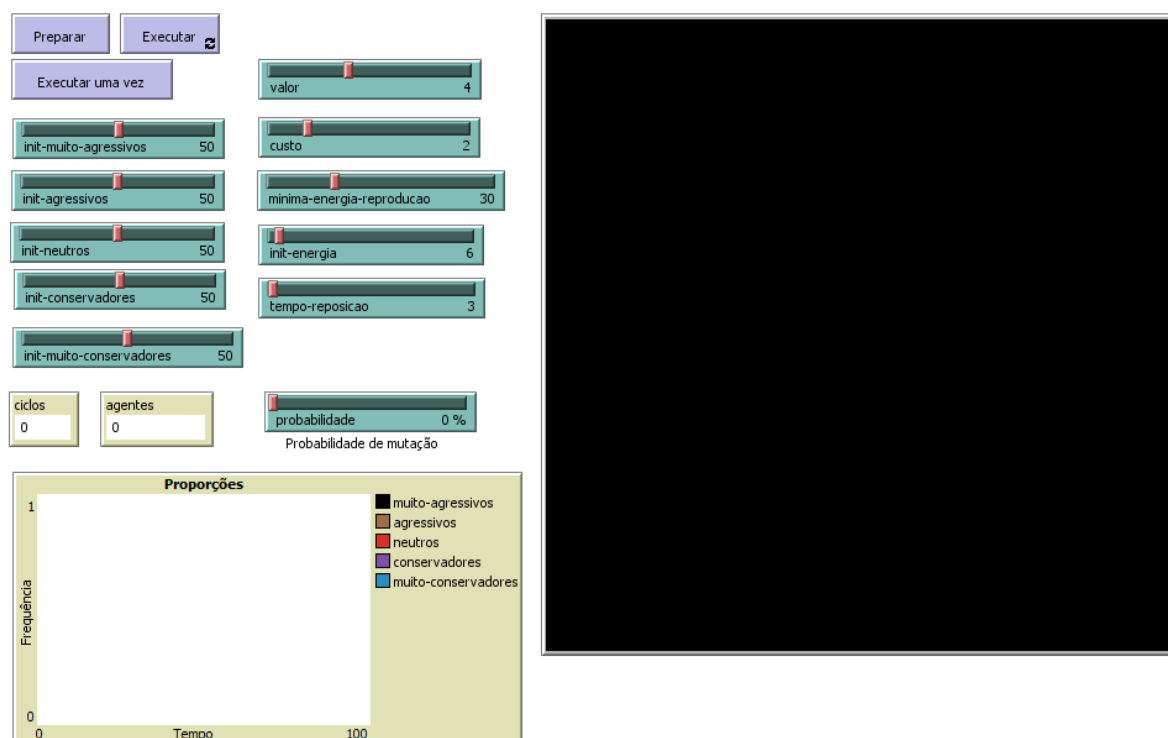


Figura 3 – Interface do usuário do modelo

Fonte: elaboração própria com uso do *NetLogo*

3.2 O Modelo

Para representar a Guerra de Desgaste como um ABM, usaremos o programa computacional *NetLogo*¹⁹.

Nosso ABM²⁰ é constituído por quatro etapas do comportamento dos agentes: movimentação, coleta ou dispêndio de energia, reprodução e morte. É importante notar que a etapa de coleta ou dispêndio de energia é baseada nos *payoffs* da GD tais quais descritos em [Maynard Smith \(1982\)](#). A cada ciclo, os agentes “tentam” realizar cada uma dessas etapas, mas podem não atingir as condições necessárias para uma ou mais delas. Existem diversas variáveis que interferem na criação do ambiente e na interação dos agentes em nosso modelo. Várias dessas variáveis são predeterminadas pelo usuário, algumas são definidas arbitrariamente e outras são tomadas ao acaso pelo próprio modelo. Na [Figura 3](#) é possível observar todos os controles disponíveis, bem como os dispositivos de análise (gráfico, contadores, representação gráfica do mundo). No [Quadro 1](#) estão listados e descritos todos os parâmetros acessíveis ao usuário.

Como é possível notar no [Quadro 1](#), diferentemente da descrição de [Maynard Smith \(1974\)](#), em que existiam dois jogadores que se deparavam com um contínuo de estratégias

¹⁹ [Wilensky \(1999\)](http://ccl.northwestern.edu/netlogo/), disponível em <<http://ccl.northwestern.edu/netlogo/>>.

²⁰ Pode ser acessado integralmente em <<https://goo.gl/n2AAt3>>.

Quadro 1 – Parâmetros do modelo acessíveis ao usuário






Parâmetro	Definição	Intervalo	Padrão
init-muito-agressivos	quantidade inicial de agentes do tipo “muito-agressivo”	[0, 100]	50
init-agressivos	quantidade inicial de agentes do tipo “agressivo”	[0, 100]	50
init-neutros	quantidade inicial de agentes do tipo “neutro”	[0, 100]	50
init-conservadores	quantidade inicial de agentes do tipo “conservador”	[0, 100]	50
init-muito-conservadores	quantidade inicial de agentes do tipo “muito-conservador”	[0, 100]	50
valor	valor (energia, payoff, etc) que cada espaço possui antes de ser disputado pelos agentes ou depois que se passou o tempo de reposição	[0, 10]	4
custo	valor de referência para as estratégias dos diferentes tipos de agentes (mais detalhes no Quadro 2)	[0, 10]	2
minima-energia-reproducao	quantidade mínima de energia (valor) que um agente necessita para se reproduzir	[0, 100]	30
init-energia	quantidade inicial de energia (valor) de cada agente	[0, 100]	6
tempo-reposicao	tempo necessário para a reposição de um espaço após seu consumo pelos agentes	[0, 100]	3
probabilidade	probabilidade de mutação, ou seja, o agente criado pela reprodução segue uma estratégia diferente da de seu criador	[0%, 80%]	0%

Fonte: Elaboração própria

para escolher, nosso modelo conta com um grande número de agentes divididos em cinco tipos diferentes, cada tipo com uma estratégia própria. O [Quadro 2](#) apresenta os detalhes de cada tipo de agente. Os agentes do tipo “muito-agressivos” serão aqueles que, dentro daquela população, estarão dispostos a jogar valores mais altos. No outro extremo, os agentes “muito-conservadores” nunca estarão dispostos a disputar o prêmio. Entre esses dois tipos, temos os “agressivos”, “neutros” e “conservadores”, que apresentam estratégias intermediárias, ponderadas pelo parâmetro *custo*. Os nomes dados aos tipos de agentes têm o intuito de refletir seu comportamento em relação ao jogo, visto que, ao passo que anunciar lances mais altos aumenta a probabilidade de vitória no jogo, essa estratégia também acarreta prejuízos maiores em caso de derrota.

Outra diferença entre o modelo original e o ABM adaptado ao *NetLogo* está relacionada ao prêmio disputado pelos agentes. Tínhamos, quando se considerava a situação biológica, uma disputa territorial e, em um cenário econômico, um item leilado. Para explorar as características evolutivas dos ABMs, em especial a capacidade de manutenção e de reprodução de determinada estratégia, os agentes disputarão energia. Em nossa

Quadro 2 – Tipos de Agentes

Cor	Tipo de agente	Estratégia
	“muito-agressivos”	$m = custo$
	“agressivos”	$m = 0,75 * custo$
	“neutros”	$m = 0,5 * custo$
	“conservadores”	$m = 0,25 * custo$
	“muito-conservadores”	$m = 0$

Fonte: elaboração própria

representação, cada espaço ocupável possui, a princípio, uma quantidade de energia definida pelo usuário do modelo. Quando um agente consome a energia de determinado lugar, este se tornará vazio por tempo definido pelo usuário do programa. Ao fim desse tempo, o espaço voltará a possuir a quantidade original de energia. Visualmente, um espaço com energia possui um tom escuro de verde e, quando seu estoque fora consumido e ainda não restabelecido, o espaço apresenta um tom mais claro de verde.

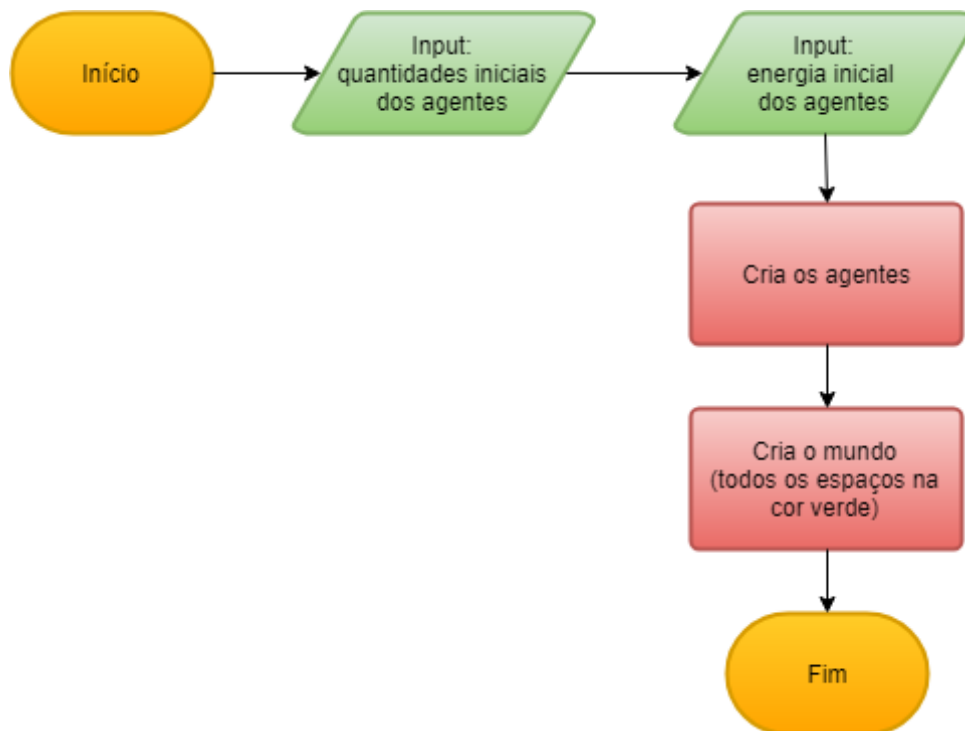
Para verificar o sucesso de determinada estratégia, nosso modelo possui um mecanismo de reprodução. Ao alcançar uma quantidade mínima de energia escolhida pelo usuário, o agente se reproduz. O novo indivíduo será idêntico ao seu gerador ou, com probabilidade predeterminada, será de tipo diferente. Esse segundo caso é chamado de mutação e terá como principal propósito demonstrar que, em algumas situações, uma estratégia inexistente no momento inicial poderá surgir e invadir o ambiente. Outra característica que a mutação poderá apresentar é a de manter uma população existente e em um nível relevante quando, em outras situações, ela teria sido extinta. De maneira oposta, para verificar o fracasso de determinada estratégia e para controlar o tamanho da população, um agente que chegar a uma quantidade negativa de energia será eliminado do modelo

3.2.1 Processos do modelo

Agora que os parâmetros e os agentes estão devidamente descritos, podemos prosseguir para o funcionamento do modelo. O primeiro estágio na aplicação do ABM consiste na criação do ambiente onde as interações ocorrerão e na criação dos agentes. A [Figura 4](#) mostra como essa etapa ocorre por meio do uso do botão “Preparar”. A [Figura 5](#) mostra o ambiente do modelo no momento inicial com quantidades idênticas para cada tipo de agente, criado pelo processo descrito na [Figura 4](#). O fluxograma apresentado na [Figura 6](#) descreve passo a passo um ciclo do modelo, executado ao pressionar o botão “Executar uma vez” em sua interface. O botão “Executar” segue o mesmo processo, mas processa o algoritmo indefinidamente até que o usuário aperte novamente o botão e encerre o comando.

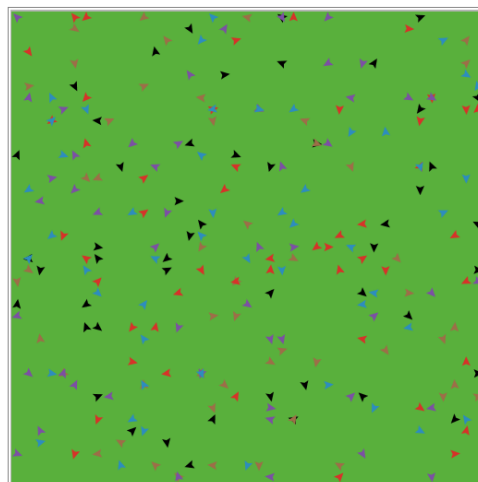
O fluxograma de execução do algoritmo pode ser dividido em quatro seções distintas. Na [Figura 6](#) as letras A, B, C e D representam os processos de movimento, de coleta e/ou

Figura 4 – Fluxograma da preparação do modelo



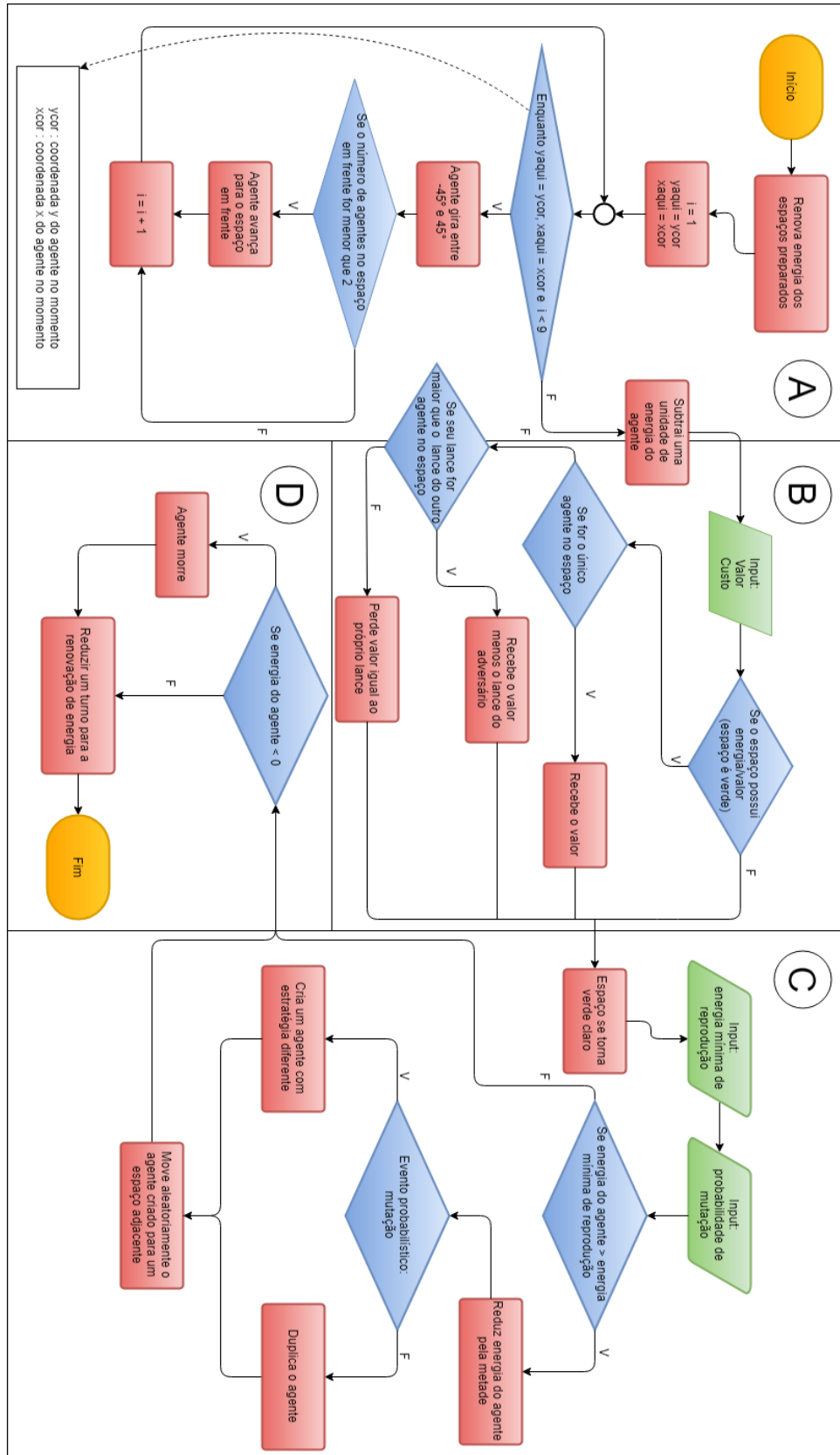
Fonte: elaboração própria

Figura 5 – Momento Inicial



Fonte: elaboração própria com uso do *NetLogo*

Figura 6 – Fluxograma do modelo



Fonte: elaboração própria

dispêndio de energia, de reprodução e de morte dos agentes respectivamente. Descreveremos mais detalhadamente cada uma dessas etapas nos próximos parágrafos.

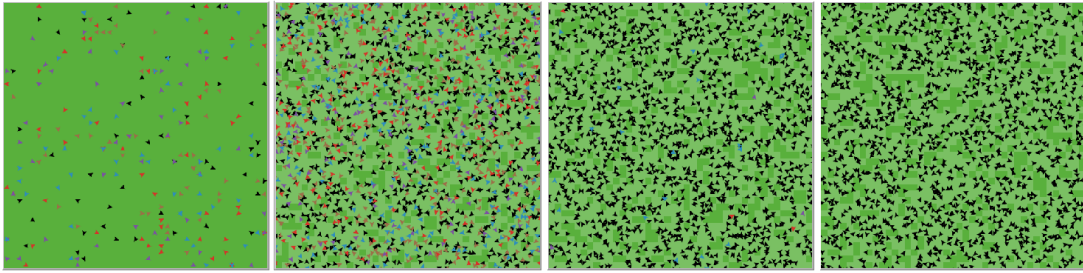
A primeira ação que o algoritmo executa é a renovação de energia dos espaços que já alcançaram o tempo necessário estabelecido pelo usuário. Essa ação não realiza nada no primeiro ciclo, uma vez que todos os espaços ainda possuem energia. O movimento dos agentes, detalhado na seção A do fluxograma, ocorre de maneira pseudo randômica pelo ambiente. O agente permanece em um *loop* que o faz procurar espaços ao seu redor que tenham um ou nenhum agente. Caso o agente encontre um lugar que respeite essa restrição, ele se moverá; caso contrário, continuará procurando. Se o agente não obtiver sucesso em encontrar um espaço vago dentro de 9 tentativas, ele permanecerá onde está e o algoritmo passará para a etapa seguinte. Movendo-se ou não, é descontada uma unidade de energia do agente ao fim do *loop*.

Após movimentar-se, o agente disputará energia na seção B do fluxograma. O algoritmo primeiramente verifica se existe ou não energia no espaço onde o agente se encontra. Não existindo, o modelo prossegue para a etapa de reprodução. Se houver energia disponível no espaço, ele a captará imediatamente se for o único indivíduo no espaço ou a disputará com o outro agente com quem divide o espaço. Caso exista a disputa, ela se dará seguindo as regras da GD de Maynard Smith, e as estratégias utilizadas serão as correspondentes a cada tipo de agente, como descrito no [Quadro 2](#). Ao final da disputa, a energia líquida correspondente a cada agente será igual aos *payoffs* do jogo. Ao fim da etapa descrita em B, o espaço ocupado é pintado de verde escuro para representar sua indisponibilidade de energia.

A etapa representada na seção C é referente à reprodução dos agentes. Nesse ponto, o algoritmo verifica se o agente possui energia suficiente para se reproduzir. Se a resposta for negativa, o processo segue diretamente para a seção D. No caso de a quantidade de energia ser suficiente para a reprodução, o agente perderá metade de sua energia para que se reproduza. O próximo passo é realizar o teste de mutação. Com probabilidade previamente estabelecida pelo usuário do modelo, o algoritmo verifica se haverá ou não mutação durante a reprodução. Se o resultado for negativo, uma cópia idêntica do agente será criada; no caso contrário, um agente de tipo diferente, embora com a mesma quantidade de energia, será gerado. Independente da ocorrência de mutação, o agente criado será alocado em um espaço adjacente ao de seu gerador.

Por fim, a seção D apresenta o método de perecimento dos agentes. O algoritmo simplesmente testa se a quantidade de energia pertencente ao agente é inferior a zero. Se essa condição for atendida, o agente morre. Em seguida, o modelo reduz um turno para a renovação de energia dos espaços consumidos, e o processo é encerrado.

Figura 7 – Configurações padrão



Fonte: elaboração própria com uso do *NetLogo*

Nota: Da esquerda para a direita, $t = 0$, $t = 100$, $t = 300$ e $t = 650$

3.3 Análise de cenários

Analisaremos a seguir os padrões observados para diferentes configurações iniciais do modelo. Os dois primeiros cenários representam situações controladas com padrões claros e dificilmente abaláveis. O terceiro caso apresenta uma estabilidade menor, portanto justifica uma análise mais aprofundada.

3.3.1 Primeiro caso: $m < (V/2)$

Nossa primeira análise do modelo terá as condições iniciais padrão tais quais descritas no [Quadro 1](#). Nesse caso, arbitrariamente escolhemos $valor = 4$ e $custo = 2$, de modo que os agentes possam se reproduzir e perecer a taxas compreensíveis. Nessa primeira simulação, fixamos a probabilidade de mutação em zero, e cada tipo de agente possui exatamente 50 indivíduos. Além disso, os agentes precisam de 30 unidades de energia para se reproduzir, e a energia é restabelecida nos espaços onde foi consumida a cada três ciclos. Podemos observar o que acontece na [Figura 7](#).

Observe que, logo nos primeiros 100 ciclos, os indivíduos classificados como “muito-agressivos” demonstram dominância na população. Esse padrão se mantém até que, por volta dos 650 ciclos, a comunidade é totalmente preenchida por esse tipo de agente. Além disso, podemos perceber pouca diferença na densidade populacional entre o $t = 100$ e o $t = 650$. Isso ocorre pelas limitações físicas do ambiente: não há energia suficiente para sustentar uma população maior que a alcançada, que fica em torno de 1340 indefinidamente (para as configurações atuais de valor, custo etc.).

Com sucessivas simulações para valores diversos de $valor$ e $custo$, podemos concluir que a estratégia que apresentar comportamento mais agressivo conseguirá dominar a população sempre que $m < (valor/2)$, desde que os demais parâmetros não impeçam o modelo de funcionar corretamente (por exemplo, alterações desproporcionais no tempo de reposição dos espaços podem provocar a eliminação de todos os agentes). Alterações

na taxa de reprodução dos agentes, no tempo de reposição dos espaços ou em outros parâmetros apenas alteram a velocidade com que essa situação ocorre. Isso não quer dizer, porém, que necessariamente o tipo de agente a dominar a população será o dos “muito-agressivos”. Caso a quantidade inicial de agentes desse tipo seja fixada em zero, os agentes “agressivos” terão o domínio e assim sucessivamente. Essa característica é compatível com o modelo teórico apresentado na [seção 3.1](#).

Sabemos que, no modelo teórico, não existe uma ESS em estratégias puras, o que significa que, para $m < (V/2)$, uma estratégia com m marginalmente maior que a estratégia dominante pode invadir a população. Demonstraremos que essa propriedade também é válida no ABM.

Na ausência de indivíduos do tipo “muito-agressivos”, a população acabará dominada por agentes “agressivos”, como vimos no primeiro cenário. Para verificar que essa estratégia não é estável, mostraremos que a inserção dos indivíduos “muito-agressivos” por meio da mutação, que ocorre aleatoriamente no momento da reprodução, produzirá uma nova estratégia que conseguirá invadir o ambiente. A simulação é feita de acordo com os valores padrão do [Quadro 1](#), exceto pela quantidade inicial de agentes “muito agressivos”, fixada em zero, e pela probabilidade de mutação, arbitrariamente definida em 1%²¹.

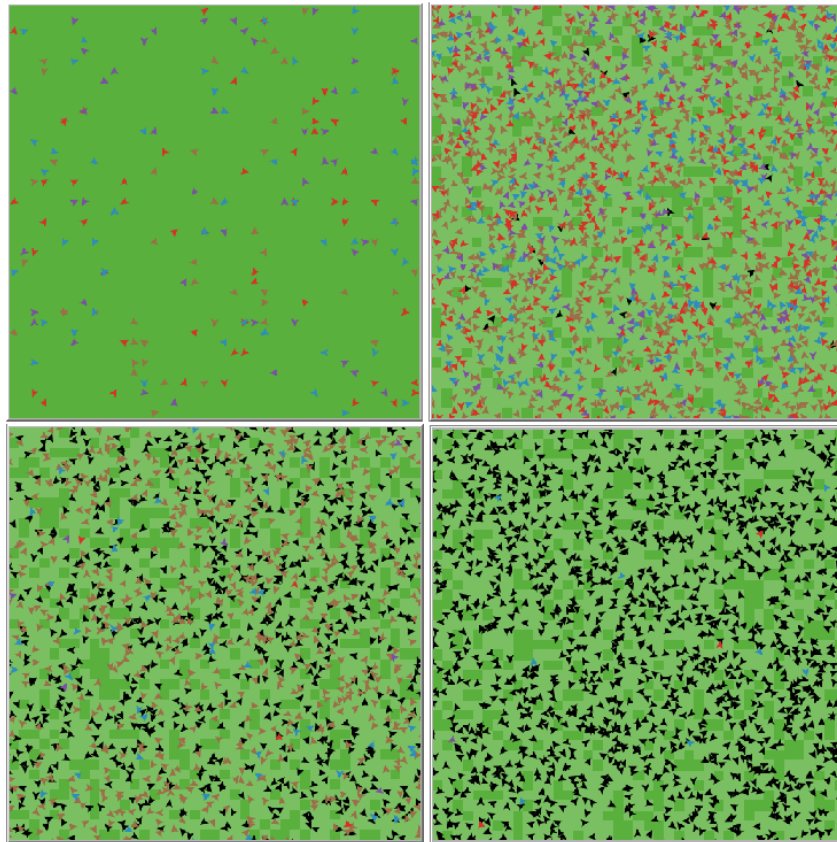
Pela [Figura 8](#), podemos ver que o modelo é iniciado sem agentes do tipo “muito-agressivos”. No momento $t = 100$ já é possível ver alguns agentes desse tipo, provenientes da mutação. Como a probabilidade de um agente de tipo diferente de seu criador ser gerado foi predefinida em 1%, a quantidade de agentes do tipo “muito-agressivos” é relativamente pequena. Já no ciclo 285, a nova estratégia é a mais numerosa no ambiente e, no momento 600, é praticamente a única sobrevivente (a mutação impede que a eliminação das demais estratégias seja completa). A [Figura 9](#) apresenta graficamente a invasão.

3.3.2 Segundo caso: $m \geq V$

Numa situação extrema, podemos supor que $m \geq V \geq (V/2)$. Esse comportamento claramente não se sustenta a longo prazo no modelo teórico de Maynard Smith, pois, caso a população seja inteiramente composta por agentes “muito-agressivos”, o *payoff* para todos os jogos seria negativo, de modo que seria melhor nem participar do jogo. Entretanto, esse comportamento ocorre em certos cenários na prática, um fenômeno chamado *Winner's Curse*, ou maldição do vencedor ([THALER, 1988](#)). Não é raro que, em leilões, o lance vencedor seja superior ao valor do prêmio, o que acontece quase sempre por causa de assimetria de informação. Dessa forma, podemos mostrar o que isso representa por meio de nosso ABM.

²¹ Essa probabilidade apenas implica que o indivíduo criado será de outro tipo, não necessariamente “muito-agressivo”.

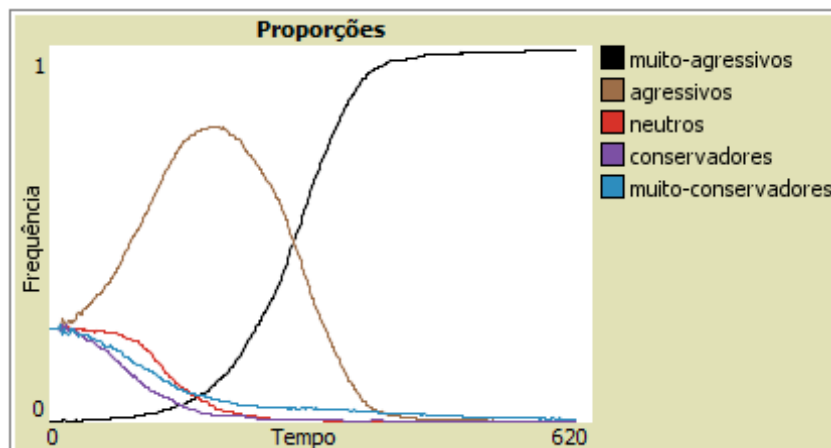
Figura 8 – Introdução da mutação



Fonte: elaboração própria com uso do *NetLogo*

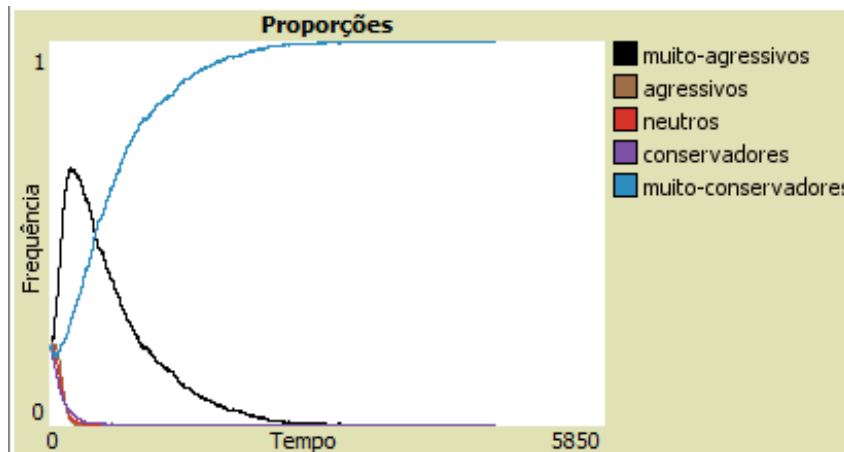
Nota: Da esquerda para a direita, de cima para baixo, $t = 0$, $t = 100$, $t = 285$ e $t = 600$

Figura 9 – Introdução da mutação – gráfico



Fonte: elaboração própria com uso do *NetLogo*

Figura 10 – Dominância dos “muito-conservadores” – gráfico

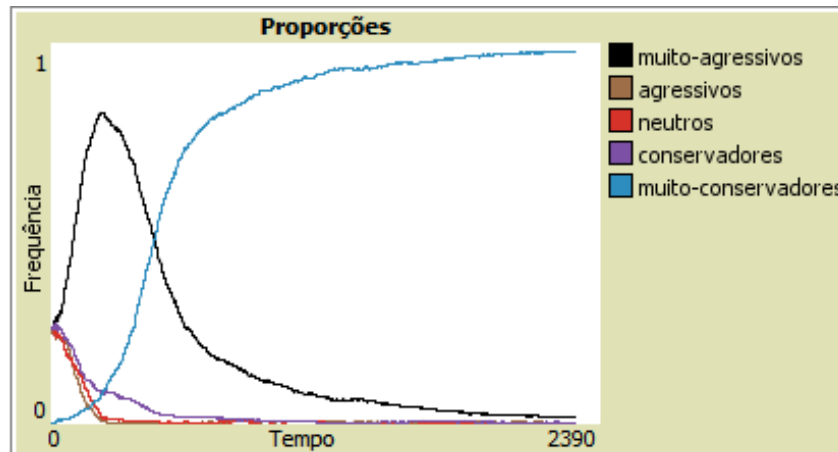


Fonte: elaboração própria com uso do *NetLogo*

Como nos outros cenários, o primeiro teste é feito com os valores padrão, exceto o *custo*, fixado em 4, de maneira que $m = valor$ para os jogadores “muito-agressivos”. Ao fazer isso, a dinâmica do modelo muda contundentemente. Ao longo dos primeiros 300 ciclos, os jogadores “muito-agressivos” demonstram comportamento similar ao observado nas outras análises, reproduzindo-se mais rapidamente que os demais tipos. Isso acontece, pois, em um primeiro momento, eles são capazes de explorar os demais agentes que jogam valores superiores a zero. Conforme os agentes que declaram lances inferiores aos dos agentes “muito-agressivos” vão sendo eliminados, a expansão proporcional destes se desacelera, chegando, eventualmente a um pico e, logo em seguida, ao declínio. No outro extremo, os agentes “muito-conservadores”, que sempre jogam zero, após um início de pequeno decréscimo em proporção relativa, ganham espaço a uma taxa idêntica àquela em que os “muito-agressivos” perdem espaço e conseguem se tornar a maioria dos agentes do modelo pouco após essa mudança na dinâmica. Desse ponto em diante, o modelo segue a tendência: nenhum tipo de agente sofre mudanças significativas de trajetória e, após cerca de 4500 ciclos, os indivíduos do tipo “muito-agressivos” são extintos, assim como todos os outros que não eram “muito-conservadores”. O comportamento descrito pode ser visto em maiores detalhes na [Figura 10](#). Como mostra a [Figura 11](#), quando não existem agentes “muito-conservadores” em um primeiro momento e os mesmos surgem por meio da mutação, a invasão também se concretiza. De forma análoga, quando $m > valor$, a mesma situação ocorre e de maneira ainda mais rápida.

Deve ser ressaltado que, nesse cenário em que $custo = V$, os tipos intermediários de agentes, “conservadores”, “neutros” e “agressivos”, que têm $m < V$, na ausência dos indivíduos “muito-agressivos” poderiam eliminar os agentes “muito-conservadores”, como já foi mostrado na primeira situação apresentada. Isso significa que, ao explorar os agentes que jogam valores menores de m , os indivíduos “muito-agressivos” permitem que a estratégia com potencial para invasão prevaleça.

Figura 11 – Invasão dos “muito-conservadores” – gráfico



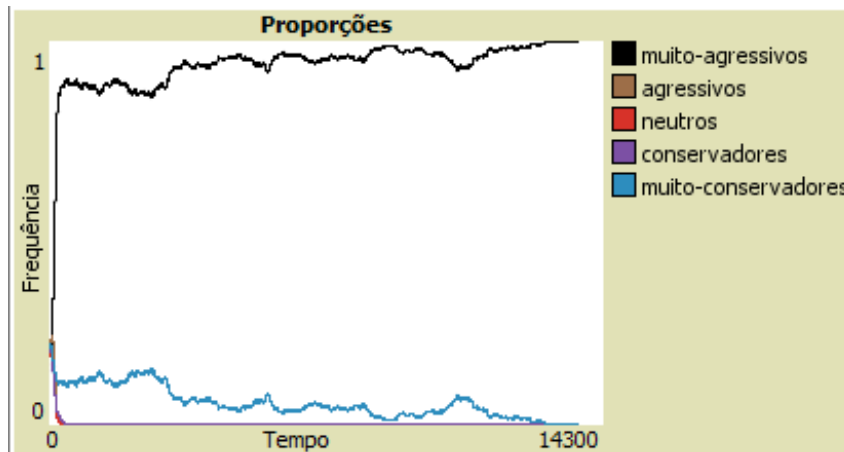
Fonte: elaboração própria com uso do *NetLogo*

3.3.3 Terceiro caso: “The Interesting In Between” ou $valor > custo \geq valor/2$

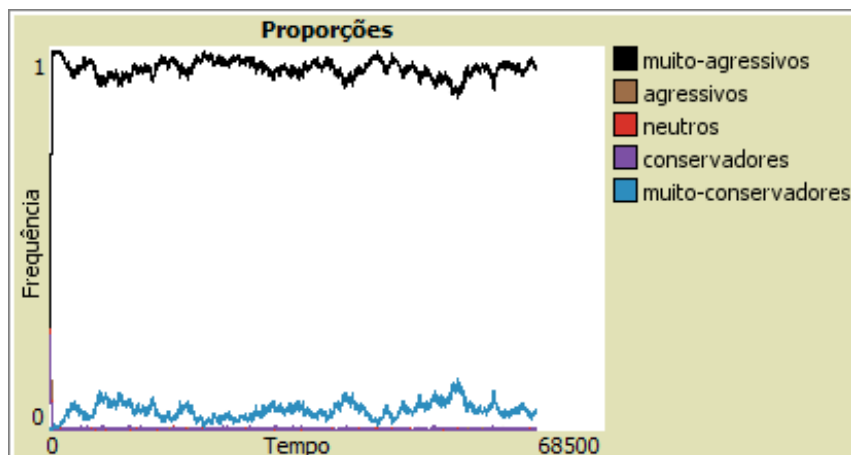
Popularizada por [Miller e Page \(2007\)](#), a expressão *Interesting In Between* é usada para descrever uma das características mais importantes da complexidade: seu posicionamento entre o equilíbrio e o caos. Muitas vezes, o que se deseja estudar está entre duas situações extremas e não apresenta um comportamento intermediário, mas segue uma dinâmica inédita, sendo mais difícil de ser compreendido. Sob alguns aspectos, os dois primeiros casos analisados se enquadram nessa definição: não são apenas dois agentes interagindo, tampouco infinitos; o comportamento do coletivo não é simples, mas padrões são facilmente observáveis. Nosso terceiro caso, sob certas condições, vai além e pode revelar algumas propriedades mais interessantes.

Diferentemente do que prevê [Maynard Smith \(1982\)](#), não será sempre que os jogadores “muito-conservadores” dominarão a população nesse intervalo de valores. Mais especificamente, para os parâmetros padrão ou transformações crescentes e proporcionais ao *custo* e ao *valor*, os agentes “muito-agressivos” dominam situações onde $custo \leq 3/4 * valor$. Quanto mais próximo o *custo* for de $3/4$ do *valor*, mais ciclos serão necessários para a eliminação total dos agentes “muito-conservadores”. Na [Figura 12](#) é possível observar essa dinâmica e como, por algum tempo, o modelo parecia indicar estabilidade na proporção dos agentes.

Não é por acaso que o modelo aparenta se estabilizar por certo tempo. A tendência à eliminação total dos agentes “muito-conservadores” existe, mas só é concretizada em momentos onde a quantidade desses agentes oscilou para baixo por diversos motivos. Essas oscilações esporádicas que alteram a média de agentes “muito-conservadores” ao longo do tempo têm tendência majoritariamente negativa na quantidade de agentes, por isso

Figura 12 – $custo = 3$; $valor = 4$ – gráfico

Fonte: elaboração própria com uso do *NetLogo*

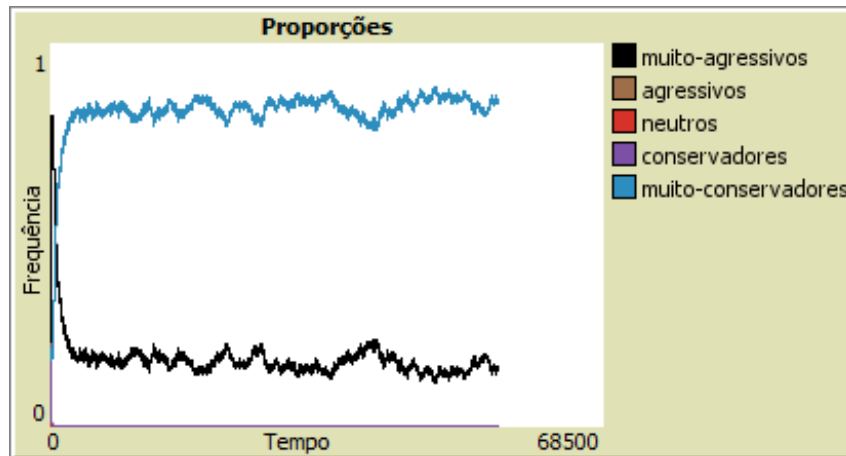
Figura 13 – $custo = 3$; $valor = 4$ – gráfico

Fonte: elaboração própria com uso do *NetLogo*

a situação contrária, em que ocorre o crescimento e subsequente domínio desse tipo de agentes, é impossível. De fato, é possível manter uma proporção significativa de agentes “muito-conservadores” por tempo indeterminado, bastando apenas combater os momentos onde essa população naturalmente se reduziria. Isso é possível por meio da mutação. A [Figura 13](#) representa uma situação com configurações idênticas às da [Figura 12](#), exceto pela quantidade inicial de agentes “muito-conservadores”, fixada em zero, e pela probabilidade de mutação, de 1%.

A mutação concede menor estabilidade ao modelo, mas permite que a população de agentes “muito-conservadores” exista indefinidamente. Ainda que, eventualmente, a população desse tipo de agente volte a zero (altamente improvável), a mutação permitirá que eles sejam reintroduzidos ao modelo de forma idêntica ao ocorrido no momento inicial.

A imprevisibilidade do modelo aumenta consideravelmente para casos onde $valor >$

Figura 14 – $custo = 7,5$; $valor = 8$ – gráfico

Fonte: elaboração própria com uso do *NetLogo*

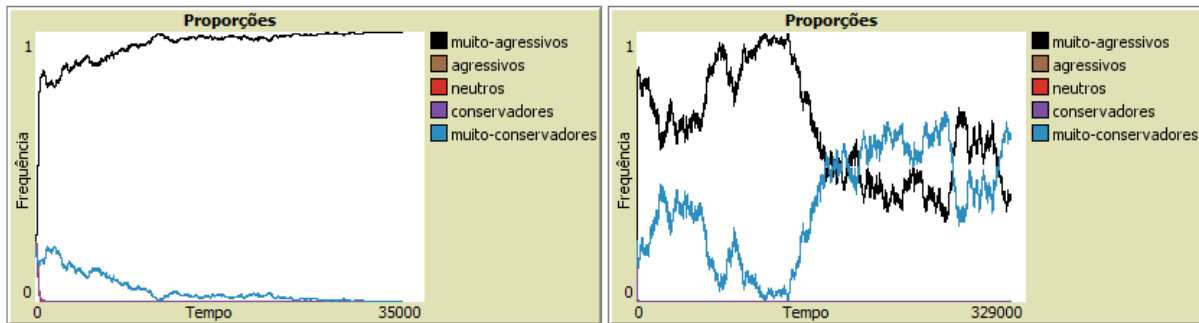
$custo > 3/4 * valor$. Em geral, quanto mais perto do *valor* estiver o *custo*, mais fácil será o domínio dos agentes “muito-conservadores”. Entretanto, é possível encontrar diversos padrões inesperados entre um extremo e outro. A primeira consideração que devemos fazer está relacionada à fronteira entre o domínio dos agentes “muito-agressivos” e o domínio dos agentes “muito-conservadores”. Para a configuração inicial padrão e qualquer transformação crescente dela, é muito difícil, talvez impossível, encontrar o *custo* exato que delimita essa fronteira. Por exemplo, para $valor = 4$, um *custo* de 3,02695 gera o domínio de agentes “muito-agressivos”, enquanto um *custo* de 3,02697 permite o domínio de agentes “muito-conservadores”. Não fica evidente se existe algum valor para o qual essa configuração poderia alcançar um equilíbrio.

Isso não quer dizer que não exista nenhuma configuração para a qual diferentes tipos de agentes possam coexistir. Deixando de lado a proporção entre os parâmetros ajustáveis do modelo, podemos encontrar situações que apresentam dinâmicas até o momento inéditas. Tome, por exemplo, um cenário onde os parâmetros seguem o [Quadro 1](#), exceto o *valor*, fixado em 8, e o *custo*, 7,5. Podemos observar o que acontece nessa situação na [Figura 14](#).

Após um início de aparente domínio dos agentes “muito-agressivos” e a subsequente ascensão dos agentes “muito-conservadores”, nenhuma mudança significativa ocorre na dinâmica. Os “muito-conservadores” mantêm-se em torno de 84% da população e os “muito-agressivos” com os 16% restantes.

Por fim, existe outra característica que deve ser ressaltada para essa seção intermediária do modelo. Para certas configurações de parâmetros, foi possível observar dinâmicas completamente diferentes em testes separados a partir de condições iniciais idênticas. A [Figura 15](#) mostra duas simulações distintas onde $valor = 9$ e $custo = 8,07$.

Observe que no primeiro teste a população de agentes “muito-conservadores” não

Figura 15 – $custo = 8,07$; $valor = 9$ – gráfico

Fonte: elaboração própria com uso do *NetLogo*

demorou a ser extinta e apresentou trajetória semelhante à observada para $custo = 3/4 * valor$. No segundo teste, o que se observa é uma dinâmica drasticamente diferente. Após um início de alta volatilidade nas proporções, que culminou em um ponto onde os agentes “muito-conservadores” representaram uma parcela inferior a 1% da população, os dois principais tipos de agentes alcançam uma espécie de estabilidade onde se alternam na condição de maioria da população. Note que esse teste poderia ter alcançado resultado análogo ao primeiro, caso a população tivesse sido completamente dominada por agentes “muito-agressivos”, o que, por muito pouco, não aconteceu por volta dos 110 mil ciclos. Também não é possível garantir que a situação de alternância na dominância do modelo ocorreria para sempre. Podemos observar que a proporção relativa alcançada pelos agentes “muito-agressivos” pouco antes do fim da simulação é equivalente à verificada na casa dos 20 mil ciclos, antes da escalada e conseqüente pico de densidade desse tipo de agente no modelo.

O comportamento observado com essa configuração está relacionado, entre outros fatores, à sorte. Desde o posicionamento inicial dos agentes e a direção para a qual se movimentam até a região onde se concentram são fatores importantes que permitem esclarecer a existência de situações completamente diferentes partindo de uma mesma configuração de parâmetros.

Fica claro, nesse ponto, que o terceiro caso não é tão simples quanto os dois primeiros. De fato, é uma representação fiel do princípio de [Miller e Page \(2007\)](#), *The Interesting In Between*, não apenas por se encontrar entre dois cenários de mais simples compreensão, mas também por apresentar propriedades que não podem ser deduzidas das análises prévias.

3.4 Análise comparativa dos modelos

Os resultados observados após sucessivos testes do ABM apresentam padrões interessantes, por mais que duas simulações jamais sejam idênticas. Esses padrões observados

nos permitem verificar semelhanças e diferenças entre a nossa interpretação e o modelo de origem.

No primeiro cenário que analisamos, onde $custo < valor/2$, concluímos que, para quaisquer parâmetros estabelecidos, os agentes “muito-agressivos” estariam em vantagem em relação aos demais por declararem lances mais altos, mas que, ao mesmo tempo, esses lances não seriam altos o suficiente para que houvesse um prejuízo esperado a cada disputa. [Maynard Smith \(1982\)](#) previa esse comportamento, como já discutimos.

O segundo cenário também é contemplado pela análise do modelo teórico. [Maynard Smith \(1982\)](#) descreve que, para lances maiores que a metade do prêmio disputado ($m \geq V/2$ ou, no nosso modelo, $custo \geq valor/2$), agentes usando como estratégia declarar lances iguais a zero poderiam invadir a população. Nosso segundo cenário é representado por situações onde²² $custo \geq valor$ e $valor > valor/2$, de modo que está contido nessa delimitação e, para todos os cenários analisados, obedece à dinâmica proposta pelo autor.

A discussão toma um rumo diferente na região onde $valor > custo \geq valor/2$. Como demonstramos, em qualquer cenário onde os parâmetros não interferem diretamente na eternidade do modelo, os agentes que apresentam estratégias entre $valor/2$ e $3/4$ de $valor$ não são dominados por aqueles que jogam zero. Exatamente o oposto acontece: os agentes “muito-agressivos” permanecem dominando completamente o ambiente.

Vimos também que, no intervalo restante, onde $valor > custo > 3/4 * valor$, diversas situações novas emergiram. Sob certas condições foi possível encontrar estabilidade nas proporções entre os agentes e sob outras pudemos verificar o papel da sorte no modelo. Nenhuma dessas situações, no entanto, foi prevista por Smith.

Em relação ao que foi exposto por [Krishna e Morgan \(1997\)](#), as diferenças são ainda mais evidentes, o que pode ser parcialmente explicado pelas diferenças na concepção dos dois modelos. Entretanto, desconsiderando as disparidades irreconciliáveis dos modelos, podemos defender que a construção da estratégia simétrica de equilíbrio no trabalho de [Krishna e Morgan \(1997\)](#) faria que ela fosse dominada na maioria dos cenários, uma vez que consiste em ponderar o lance dado pelo risco de derrota no jogo, e, como vimos, estratégias com lances intermediários são sempre dominadas rapidamente.

²² Exceto para configurações extremas, como quando $valor = 0$, mas esses casos resultariam na eliminação de todos os agentes após poucos ciclos e não são relevantes para nossa análise.

Conclusão

A Guerra de Desgaste é um mecanismo que ocorre na natureza todos os dias, o tempo todo. Animais disputam territórios e recursos usando esse tipo de jogo com frequência, mesmo que sua limitada racionalidade não permita a elaboração de complicadas estratégias. Esse mecanismo não é, entretanto, exclusivo às interações naturais de animais. A interação humana já incorporou a Guerra de Desgaste em vários aspectos econômicos e sociais: de leilões e decisões de entrada e saída de empresas dos mercados a corridas armamentistas e mesmo competições de resistência em *reality shows*. Sua importância é reconhecida também pela ciência. A Guerra de Desgaste foi analisada pela ótica da teoria dos jogos pela primeira vez há mais de 40 anos e ainda recebe atenção de biólogos, sociólogos e economistas.

Problemas econômicos como a Guerra de Desgaste são frequentemente revisitados sob óticas diferentes, uma vez que surgem novos métodos de análise e ferramentas mais modernas são desenvolvidas. A chegada da teoria da complexidade às Ciências Econômicas proporcionou a importação de vários métodos que, até então, eram negligenciados por essa área do conhecimento. Uma das ferramentas de complexidade incorporadas na Economia com mais facilidade foi a Modelagem Baseada em Agentes, que deu origem à Economia Computacional Baseada em Agentes. Diversos problemas econômicos foram analisados por essa abordagem, com destaque para os modelos de teoria dos jogos evolucionários.

Nesta dissertação, formulamos um Modelo Baseado em Agentes que interpreta a Guerra de Desgaste por meio do uso do *software* computacional *NetLogo*. Por meio desse tipo de análise, foi possível verificar que algumas das conclusões de [Maynard Smith \(1982\)](#) não se confirmam, ao acrescentar espacialidade ao modelo. Nos casos mais extremos dos parâmetros, os comportamentos previstos por Maynard Smith se concretizam: quando o custo associado ao lance é muito baixo, os agentes mais agressivos ficam em vantagem e dominam a população e quando o custo é alto, agentes que decidem declarar lances iguais a zero se destacam e eliminam os demais. Em casos intermediários, comportamentos mais complexos e imprevisíveis foram observados, de maneira similar à descrita em [Killingback e Doebeli \(1996\)](#). Sob certas condições foi possível encontrar estabilidade nas proporções das estratégias e, sob outras, as proporções variavam incessantemente, trilhando um caminho imprevisível. Até mesmo o papel da sorte pôde ser observado, já que a mesma configuração de parâmetros apresentou situações opostas em simulações diferentes: em uma, os agentes mais agressivos foram capazes de dominar completamente a população, enquanto na outra aqueles que decidiam jogar zero sempre chegaram à totalidade.

Há ainda muito o que se explorar nos modelos da teoria econômica tradicional e

também nos modelos fora do *mainstream*, como os jogos evolucionários. Nosso trabalho, por exemplo, pode ser complementado de diversas formas. O modo que utilizamos para seccionar as possíveis estratégias, por exemplo, pode ser refinada para permitir o surgimento de estratégias novas conforme as gerações evoluem ao longo do tempo. Elaborar o modelo computacional usando como base a forma generalizada de [Krishna e Morgan \(1997\)](#) também poderia trazer novos resultados e conclusões.

Por fim, no mundo atual, em que avanços tecnológicos acontecem em alta velocidade, novos problemas econômicos se criam e novos métodos de análise são desenvolvidos para estudá-los, de maneira a possibilitar a reinvenção constante do estado-das-artes da teoria econômica. Esperamos que esta dissertação possa servir de inspiração a pesquisadores e curiosos na busca de novas formas de se enxergar velhos problemas.

Referências

- ALEXANDER, J. M. Evolutionary game theory. In: EDWARD, N. Z. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. [s.n.], 2009. Disponível em: <<https://goo.gl/JVRciH>>. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 23.
- ANDERSON, P. W. More is different. *Science*, v. 177, n. 4047, p. 393–396, 1972. Citado na página 17.
- ARCHIBALD, G. C.; SIMON, H. A.; SAMUELSON, P. A. Problems of methodology - discussion. *American Economic Review*, v. 53, n. 2, p. 227–236, 1963. Citado na página 15.
- ARROW, K.; DEBREU, G. Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica*, v. 22, n. 3, p. 265–290, 1954. Citado na página 15.
- ARTHUR, W. B. Bounded rationality and inductive behavior (the El Farol problem). *American Economic Review*, v. 84, p. 406–411, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 28.
- _____. Complexity economics: A different framework for economic thought. In: _____. *Complexity and the Economy*. New York: Oxford University Press, 2015. cap. 1, p. 1–29. Citado na página 15.
- AXELROD, R. M. *The Evolution of Cooperation*. New York: Basic Books, 1984. Citado na página 28.
- AXELROD, R. M.; HAMILTON, W. D. The evolution of cooperation. *Science*, v. 211, n. 4489, p. 1390–1396, 1981. Citado na página 29.
- BEINHOCKER, E. D. *Origin of Wealth: Evolution, Complexity, and the Radical Remaking of Economics*. 1. ed. Boston: Harvard Business School Press, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 15, 17 e 18.
- BISHOP, D. T.; CANNINGS, C. A generalized war of attrition. *Journal of Theoretical Biology*, v. 70, p. 85–124, 1978. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 36.
- BOS, O. Wars of attrition and all-pay auctions with stochastic competition. *European Journal of Operational Research*, v. 48, p. 83–91, 2012. Citado na página 14.
- CASAS-ARCE, P. Dismissals and quits in repeated games. *Economic Theory*, v. 43, p. 67–80, 2010. Citado na página 13.
- CHEN, S.-H. Varieties of agents in agent-based computational economics: A historical and an interdisciplinary perspective. *Journal of Economic Dynamics and Control*, v. 36, n. 1, p. 1–25, 2012. Citado na página 26.
- CHEN, S.-H.; VENKATACHALAM, R. Agent-based models and their development through the lens of networks. In: ARUKA, Y.; KIRMAN, A. (Ed.). *Economic Foundations for Social Complexity Science: Theory, sentiments, and empirical laws*. Singapore: Springer, 2017, (Evolutionary Economics and Social Complexity Science, v. 9). Citado na página 26.

- CLEMENS, C.; RIECHMANN, T. Evolutionary dynamics in public goods games. *Computational Economics*, v. 28, p. 399–420, 2006. Citado na página 24.
- COASE, R. The problem of social cost. *The Journal of Law and Economics*, v. 3, p. 1–44, 1960. Citado na página 16.
- COLANDER, D. The death of neoclassical economics. *Journal of the History of Economic Thought*, v. 22, n. 2, p. 127–143, 2000. Citado na página 15.
- EPSTEIN, J. M.; AXELROD, R. *Growing artificial societies: social science from the bottom up*. Cambridge: Brookings Institution Press, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- FRIEDMAN, M. The methodology of positive economics. In: _____. *Essays in Positive Economics*. Chicago: The University of Chicago Press, 1953. cap. 1, p. 3–43. Citado na página 15.
- FUDENBERG, D.; TIROLE, J. A theory of exit in duopoly. *Econometrica*, v. 54, n. 4, p. 943–960, 1986. Citado na página 13.
- GARDNER, M. Mathematical games — the fantastic combinations of john conway’s new solitaire game "life". *Scientific American*, v. 223, p. 120–123, 1970. Citado na página 25.
- GEANAKOPOLOS, J. et al. Getting at systemic risk via an agent-based model of the housing market. *American Economic Review*, v. 102, n. 3, p. 53–58, 2012. Citado na página 28.
- GINTIS, H. The evolution of private property. *Journal of Economic Behavior & Organization*, v. 64, p. 1–16, 2007. Citado na página 24.
- GOEREE, J. K. et al. How (not) to raise money. *Journal of Political Economy*, v. 113, n. 4, p. 33–50, 2005. Citado na página 13.
- HAUERT, C.; SZABÓ, G. Prisoner’s dilemma and public goods games in different geometries: Compulsory versus voluntary interactions. *Complexity*, v. 8, n. 4, p. 31–38, 2003. Citado na página 24.
- HOFBAUER, J.; SIGMUND, K. Evolutionary game dynamics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 40, n. 4, p. 479–519, 2003. Citado na página 23.
- KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica*, v. 47, n. 2, p. 263–292, 1979. Citado na página 16.
- KILLINGBACK, T.; DOEBELI, M. Spatial evolutionary game theory: Hawks and doves revisited. *Proceedings of the Royal Society B*, v. 263, p. 1135–1144, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 31, 32 e 53.
- KRISHNA, V. In: _____. *Auction Theory*. 2. ed. [S.l.]: Academic Press, 2002. p. 11–35. Citado na página 14.
- KRISHNA, V.; MORGAN, J. An analysis of the war of attrition and the all-pay auction. *Journal of Economic Theory*, v. 72, p. 343–362, 1997. Citado 6 vezes nas páginas 13, 14, 35, 36, 51 e 54.

LEWONTIN, R. C. Evolution and the theory of games. *Journal of Theoretical Biology*, v. 1, p. 382–403, 1961. Citado na página 22.

LINDGREN, K.; NORDAHL, M. G. Evolutionary dynamics of spatial games. *Physica D*, v. 75, p. 292–309, 1994. Citado 4 vezes nas páginas 24, 29, 30 e 31.

MACY, M.; FALACHE, A. Social dynamics from the bottom up: Agent-based models of social interaction. In: HEDSTRÖM, P.; BEARMAN, P. (Ed.). *The Oxford Handbook of Analytical Sociology*. New York: Oxford University Press, 2009. Citado na página 25.

MAYNARD SMITH, J. The theory of games and the evolution of animal conflicts. *Journal of Theoretical Biology*, v. 47, p. 209–221, 1974. Citado 3 vezes nas páginas 13, 35 e 37.

_____. The war of attrition. In: _____. *Evolution and the Theory of Games*. London: Cambridge University Press, 1982. cap. 3, p. 28–39. Citado 8 vezes nas páginas 29, 31, 32, 35, 37, 47, 51 e 53.

MAYNARD SMITH, J.; PRICE, G. R. The logic of animal conflict. *Nature*, v. 246, p. 15–18, 1973. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 29.

MILLER, J. H.; PAGE, S. E. In: _____. *Complex Adaptive Systems: An introduction to computational models of social life*. [S.l.]: Princeton University Press, 2007. p. 213–230. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 50.

NASH, J. F. Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America*, v. 36, n. 1, p. 48–49, 1950. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.

ODEGAARD, F.; ANDERSON, C. K. All-pay auctions with pre- and post-bidding options. *European Journal of Operational Research*, v. 239, p. 579–592, 2014. Citado na página 14.

ORDOVER, J. A.; RUBINSTEIN, A. A sequential concession game with asymmetric information. *The Quarterly Journal of Economics*, v. 101, n. 4, p. 879–888, 1986. Citado na página 13.

SCHELLING, T. C. Models of segregation. *American Economic Review*, v. 59, n. 2, p. 488–493, 1969. Citado na página 26.

_____. Dynamic models of segregation. *Journal of Mathematical Sociology*, v. 1, p. 143–186, 1971. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 31.

_____. *Micromotives and Macrobehavior*. New York: W. W. Norton & Company, 1978. Citado na página 26.

SCHWEBER, S. S. Physics, community and the crisis in physical theory. *Physics Today*, v. 46, n. 34, p. 34–40, 1993. Citado na página 17.

SIGMUND, K. Introduction to evolutionary game theory. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, v. 69, p. 1–25, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.

SIMON, H. A. A behavioral model of rational choice. *The Quarterly Journal of Economics*, v. 69, n. 1, p. 99–118, 1955. Citado na página 16.

- SMITH, A. *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*. Chicago: University of Chicago Press, 2012. Citado na página 17.
- TAYLOR, P. D.; JONKER, L. B. Evolutionary stable strategies and game dynamics. *Mathematical Biosciences*, v. 40, p. 145–156, 1978. Citado na página 23.
- TESFATSION, L. Agent based computational economics: Growing economies from the bottom-up. *Artificial Life*, v. 8, p. 55–82, 2002. Citado na página 24.
- _____. Agent-based computational economics: A constructive approach to economic theory. In: TEFATSION, L.; JUDD, K. L. (Ed.). *Handbook of Computational Economics*. Amsterdam: North-Holland, 2006. v. 2. Citado na página 24.
- THALER, R. H. Anomalies: The winner's curse. *Journal of Economic Perspectives*, v. 2, n. 1, p. 191–202, 1988. Citado na página 44.
- _____. *Misbehaving: Perspectives on the history of economic thought*. New York: W. W. Norton & Company, 2015. Citado na página 16.
- VARIAN, H. Leilões. In: _____. *Microeconomia: uma abordagem moderna*. 8. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012. cap. 17, p. 333–350. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 28.
- WALDROP, M. M. *Complexity*. New York: Simon & Schuster, 1992. Citado na página 17.
- WILENSKY, U. *NetLogo*. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL, 1999. Disponível em: <<http://ccl.northwestern.edu/netlogo/>>. Citado na página 37.
- WILENSKY, U.; RAND, W. *An Introduction to Agent-Based Modeling*. Cambridge: The MIT Press, 2015. Citado na página 25.
- WILLIAMSON, O. E. The economics of organization: The transaction cost approach. *The American Journal of Sociology*, v. 87, n. 3, p. 548–577, 1981. Citado na página 16.
- _____. The theory of the firm as governance structure: From choice to contract. *Journal of Economic Perspectives*, v. 16, n. 3, p. 171–195, 2002. Citado na página 16.
- WOLFRAM, S. Statistical mechanics of cellular automata. *Reviews of Modern Physics*, v. 55, n. 3, p. 601–644, 1983. Citado na página 25.
- _____. *A New Kind of Science*. Champaign: Wolfram Media, 2002. Citado na página 25.
- ZEEMAN, E. C. Dynamics of the evolution of animal conflicts. *Journal of Theoretical Biology*, v. 89, n. 2, p. 249–270, 1981. Citado na página 32.