

Superfícies com Curvatura Média ou Ângulo Constante em $\mathbb{N}il_3$



Daniel Cavalcante Oliveira

Orientador: Pedro Roitman

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Essa dissertação é submetida para o grau de
Mestre em Matemática

Fevereiro 2018

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Superfícies com Curvatura Média ou Ângulo Constante em Nil³

por

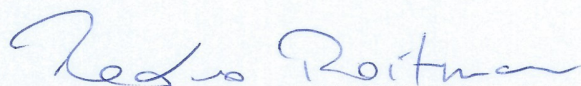
Daniel Cavalcante Oliveira*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

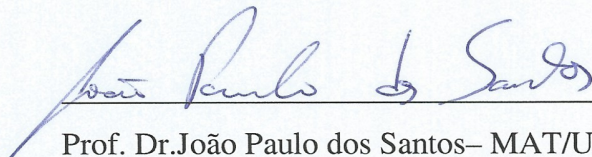
MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 09 de março de 2018.

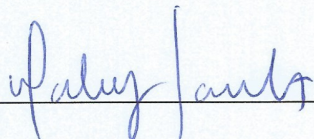
Comissão Examinadora:



Prof. Dr. Pedro Roitman - MAT/UnB (Orientador)



Prof. Dr. João Paulo dos Santos - MAT/UnB (Membro)



Prof. Dra. Walcy Santos - UFRJ (Membro)

* O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

CD184s Cavalcante Oliveira, Daniel
Superfícies com curvatura média ou ângulo constante em
Nil3 / Daniel Cavalcante Oliveira; orientador Pedro
Roitman. -- Brasília, 2018.
51 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) --
Universidade de Brasília, 2018.

1. Superfícies de curvatura média constante em Nil3. 2.
Superfícies de ângulo constante em Nil3. 3. Diferenciais
quadráticas holomorfas. I. Roitman, Pedro, orient. II.
Título.

Resumo

Trataremos dos espaços homogêneos a dois parâmetros $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, principalmente o grupo de Heisenberg $\mathbb{E}(0, \frac{1}{2})$. Falamos sobre superfícies de ângulo constante neste grupo e sua classificação. Exibiremos também algumas ferramentas necessárias ao longo do estudo e o principal objetivo deste trabalho será demonstrar uma generalização de uma proposição no espaço Euclidiano que nos dá condições para que uma superfície de curvatura média constante homeomorfa a um disco seja totalmente umbílica. Essa generalização se dá utilizando a diferencial de Abresch-Rosenberg [1] e os pares de Codazzi ([17], [11] e [19]).

Palavras-chave: superfícies de curvatura média constante, superfícies de ângulo constante, diferenciais quadráticas holomorfas, variedades homogêneas

Abstract

In this work, we talk about the two parameters family of homogeneous spaces $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, putting emphasis on the Heisenberg Group $\mathbb{E}(0, \frac{1}{2})$. We'll treat the concept of constant angle surfaces in this group and its classification. Also, by exhibiting a few necessary tools along the study, we prove a possible generalization of a known proposition in the euclidean space which gives us conditions to when a constant mean curvature surface homeomorphic to a bi-dimensional disk will be totally umbilical. This proposition's generalized version is given using the Abresch Rosenberg differential [1] and Codazzi pairs ([17], [11] e [19]).

Key words: constant mean curvature surfaces, constant angle surfaces, holomorphic quadratic differentials, homogeneous manifolds

Sumário

1	Espaços Homogêneos $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$	3
1.1	O Grupo de Heisenberg	3
1.2	O Espaço $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$	7
2	Superfícies de Ângulo Constante em Nil_3	10
2.1	Definições e Lema	10
2.2	O Teorema de Classificação	13
3	Diferenciais Quadráticas e Pares de Codazzi	17
3.1	A Diferencial de Hopf	18
3.2	Pares de Codazzi	23
3.3	A segunda forma fundamental de Abresch-Rosenberg	26
4	Um teorema do tipo Hopf em Nil_3	30
4.1	Linhas de Curvatura AR	30
4.2	Um teorema do tipo Hopf	38
5	Um elo entre a geometria euclidiana e a geometria de Nil_3	40
5.1	Relações entre métricas distintas	40
5.2	Aplicação ao Grupo de Heisenberg	43
5.3	Invariância por $SL_3(\mathbb{R})$	47
	Referências Bibliográficas	50

Introdução

A partir do início deste século, houve um aumento do interesse pelo estudo de superfícies imersas em variedades homogêneas de dimensão 3. Uma destas motivações, a partir dos trabalhos de Thurston, vem do fato destas geometrias homogêneas servirem de modelo para o estudo geral de variedades de dimensão 3. Uma outra motivação vem da descoberta de que métodos consagrados no estudo de superfícies em formas espaciais podem ser adaptados para ambientes mais gerais. Em particular, a descoberta de uma diferencial quadrática que é holomorfa quando uma superfície imersa em certos espaços homogêneos tem curvatura média constante, a chamada diferencial de Abresch Rosenberg, foi fundamental para que brotassem muitos trabalhos interessantes sobre superfícies nestes espaços.

Em nosso trabalho, apresentaremos alguns resultados referentes a superfícies imersas no espaço de Heisenberg, e em alguns casos mostramos como estes resultados se generalizam para uma classe mais ampla de espaços homogêneos, os chamados espaços $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

O grupo de Heisenberg é um exemplo de variedade Riemanniana homogênea que não possui curvatura seccional constante. Além disso, dentre as variedades homogêneas, seu grupo de isometrias possui dimensão 4, a maior possível para um espaço de curvatura seccional não constante [13]. Neste trabalho, apresentaremos algumas propriedades do grupo de Heisenberg e falaremos também sobre uma família de espaços na qual este grupo se inclui, a família de espaços $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

Nosso principal objetivo é mostrar como se generalizam ao grupo de Heisenberg alguns teoremas clássicos envolvendo superfícies de curvatura média constante imersas em \mathbb{R}^3 . Utilizando os pares de Codazzi ([17]) e a diferencial quadrática de Abresch-Rosenberg ([1]), mostraremos resultados chave dos trabalhos de Espinar e Trejos ([11]). Com essas ferramentas, mostramos teoremas tipo Hopf para superfícies com curvatura média constante, para o caso em que a superfície é homeomorfa a um disco e são impostas certas condições sobre a fronteira.

No capítulo 1, introduziremos formalmente o grupo de Heisenberg junto com a família de espaços $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Sempre que tivermos a oportunidade, alguns resultados serão mostrados de maneira geral para os espaços $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

Existe uma noção de superfícies de ângulo constante. Recentemente, classificou-se as superfícies de ângulo constante nos espaços produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (veja [7] e [8]). Logo depois, pelos mesmos autores, foram classificadas as superfícies de ângulo constante no grupo de Heisenberg, que denotaremos por Nil_3 . Este é o assunto do capítulo 2. Mostraremos com detalhes como esta classificação foi feita e exibiremos um exemplo não trivial de superfícies de ângulo constante.

O capítulo 3 introduz tanto conceitos conhecidos na literatura de superfícies de curvatura média constante como a diferencial de Hopf e a diferencial de Abresch Rosenberg. Seguindo Espinar e Trejos, introduzimos uma forma quadrática que, embora um tanto misteriosa, tem a propriedade fundamental de formar um par de Codazzi junto com a métrica de uma superfície com curvatura média constante em um espaço $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Além disso, a diferencial de Hopf associada a este par é justamente a diferencial de Abresch Rosenberg.

Uma superfície Σ imersa em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ é uma superfície AR se a diferencial de Abresch Rosenberg se anula em todo ponto. No capítulo 4 aplicaremos os resultados obtidos no capítulo anterior para provarmos o principal resultado do nosso trabalho:

Teorema. Seja $\omega : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$, $\tau \neq 0$, um H -disco com bordo regular. Suponha que o bordo esteja parametrizado por uma curva regular γ e que esta curva tenha um dos tipos abaixo

1. γ é a interseção tangente de uma imersão ω com uma superfície AR Ω com o mesmo vetor curvatura média.
2. γ é a interseção transversal com ângulo constante da imersão ω com uma superfície AR Ω com o mesmo vetor curvatura média e cuja função ângulo seja o oposto da função ângulo da imersão ω ao longo de γ .

Então $\omega(\mathbb{D})$ é parte de uma superfície AR em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

Finalmente, no capítulo 5, tentamos entender melhor a chamada segunda forma de Abresch Rosenberg para superfícies imersas em Nil_3 . Comparamos essa forma quadrática com a segunda forma fundamental da geometria euclidiana, e mostramos como essas duas formas quadráticas estão relacionadas de maneira inesperada. Utilizamos esta relação para fazer comentários sobre um funcional geométrico que está relacionado ao funcional área da geometria diferencial afim.

Ao leitor, informamos que para entender os conceitos introduzidos nos cinco capítulos acima descritos são necessários alguns conceitos básicos em geometria Riemanniana e um pouco de análise complexa. Utilizaremos, salvo menção em contrário, a notação do livro de Manfredo do Carmo, "Geometria Riemanniana"[9].

Capítulo 1

Espaços Homogêneos $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$

Neste capítulo, introduziremos a 3-variedade Nil_3 chamada de *grupo de Heisenberg* e faremos um estudo detalhado de algumas propriedades interessantes e que também são verificadas em uma família de espaços tridimensionais na qual Nil_3 está incluso. Nos referimos a esta família de espaços homogêneos como os espaços $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, onde κ e τ são parâmetros reais. A notação utilizada no estudo de Nil_3 será feita de tal modo que a generalização para os espaços $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ ocorrerá naturalmente. Salvo menção em contrário, ao longo do trabalho utilizaremos a notação do livro de Manfredo do Carmo, *Geometria Riemanniana* [9].

1.1 O Grupo de Heisenberg

Considere o espaço \mathbb{R}^3 das triplas de números reais. Seja g uma métrica Riemanniana definida em \mathbb{R}^3 . Chamamos de *grupo de Heisenberg* a variedade Riemanniana tridimensional dada por (\mathbb{R}^3, g) , onde g tem matriz g_{ij} , utilizando a identidade como sistema de coordenadas, dada por

$$g = \begin{bmatrix} 1 + \frac{y^2}{4} & -\frac{xy}{4} & \frac{y}{2} \\ -\frac{xy}{4} & 1 + \frac{x^2}{4} & -\frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} & -\frac{x}{2} & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

O grupo de Heisenberg possui uma estrutura de grupo (no sentido da álgebra) que está intimamente ligada com a métrica g . A cada ponto $p = (x, y, z) \in \text{Nil}_3$ associamos a matriz

invertível

$$p = \begin{bmatrix} 1 & x & z + \frac{xy}{2} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Com tal identificação, definimos o produto de dois elementos em Nil_3 como o produto de suas matrizes associadas. Isto é, se $p = (x, y, z)$ e $p' = (x', y', z')$ são elementos de Nil_3 , então seu produto $p \cdot p'$ é dado por

$$\begin{bmatrix} 1 & x & z + \frac{xy}{2} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x' & z' + \frac{x'y'}{2} \\ 0 & 1 & y' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x+x' & z+z' + \frac{(x+x')(y+y')}{2} \\ 0 & 1 & y+y' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{xy'-yx'}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, é o elemento $(x+x', y+y', z+z' + \frac{xy'-yx'}{2})$. Note que o grupo de Heisenberg não é comutativo.

Com tal produto, definimos a translação à esquerda de um elemento $p \in \text{Nil}_3$ por um elemento $a \in \text{Nil}_3$ por $a \cdot p$, isto é, o produto entre a e p .

Proposição 1.1.1. A métrica g é invariante por translações à esquerda, ou seja, se $a : p \mapsto a \cdot p$ é a aplicação de translação à esquerda, então

$$g_p(u, v) = g_{a \cdot p}(da_p(u), da_p(v)).$$

Demonstração. Seja $p = (x, y, z)$ e $a = (x_0, y_0, z_0)$. Então a aplicação $a : p \mapsto a \cdot p$ é dada por $a(x, y, z) = \left(x + x_0, y + y_0, z + z_0 + \frac{1}{2}(y_0x - x_0y) \right)$. Portanto, sua diferencial no ponto p é dada por

$$da_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{y_0}{2} & -\frac{x_0}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Se $u = (u_1, u_2, u_3)$, então $da_p(u) = (u_1, u_2, u_3 + \frac{1}{2}(u_1y_0 - u_2x_0))$. A partir dessas informações, a proposição segue de uma conta simples e direta envolvendo produto de matrizes. \square

Observação 1. Uma consequência imediata da proposição 1.1.1 é que as translações à esquerda são isometrias.

Note que a métrica g depende do ponto $p = (x, y, z) \in \text{Nil}_3$, o que não acontece, por exemplo, quando consideramos \mathbb{R}^3 com a métrica Euclidiana. Porém, se deslocarmos o ponto p na direção vertical $E_3 = (0, 0, 1)$, a métrica não se altera. Esse fenômeno está

relacionado com o conceito de submersões e é também uma característica dos espaços $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

De maneira geral, dizemos que uma aplicação diferenciável $\pi : M \rightarrow N$ entre duas variedades é uma *submersão* se sua diferencial $d\pi_p$ é sobrejetiva para todo ponto p em M . O *espaço vertical* \mathcal{V}_p é definido como o núcleo da aplicação $d\pi_p$, isto é, $\mathcal{V}_p = \ker d\pi_p$. Seu complemento ortogonal, denotado por \mathcal{H}_p , é chamado de *espaço horizontal*.

Uma submersão $\pi : M \rightarrow N$ é chamada de *submersão Riemanniana* se a diferencial $d\pi_p$ for uma isometria quando a restringimos ao subespaço $\mathcal{H}_p \subset T_p M$. Alguns autores usam o nome *fibrção Riemanniana* para se referirem a tais aplicações. Um exemplo de submersão Riemanniana é a aplicação

$$\begin{aligned} \pi : \text{Nil}_3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & (*) \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y), \end{aligned}$$

onde em \mathbb{R}^2 estamos considerando a métrica Euclidiana. Considere o referencial ortonormal em Nil_3 dado pelos campos

$$E_1 = \partial_x - \frac{y}{2}\partial_z, \quad E_2 = \partial_y + \frac{x}{2}\partial_z \quad \text{e} \quad E_3 = \partial_z. \quad (1.2)$$

Este referencial é obtido considerando a base canônica $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de \mathbb{R}^3 na origem e depois aplicando uma translação à esquerda para o ponto desejado. Curiosamente, o mesmo referencial é obtido aplicando o processo de Gram-Schmidt preservando o vetor $(0, 0, 1)$.

Observe que o campo $E_3(p)$ é um gerador do espaço vertical \mathcal{V}_p . Consequentemente, o espaço horizontal \mathcal{H} é gerado pelos campos E_1 e E_2 . Desta forma, verifica-se que para quaisquer campos X, Y em \mathcal{H} , teremos $\langle d\pi(X), d\pi(Y) \rangle = g(X, Y)$. Essa conta segue imediatamente da observação 2 abaixo.

Observação 2. Se $U = \sum_i u_i E_i$ e $V = \sum_i v_i E_i$, então $g(U, V) = \sum_i u_i v_i$.

Observação 3. Em relação ao referencial ortonormal introduzido em (1.2) e utilizando as propriedades do colchete $[\cdot, \cdot]$ obtemos as relações

$$[E_1, E_2] = E_3 \quad \text{e} \quad [E_1, E_3] = [E_2, E_3] = 0.$$

Definição 1.1.2. Dados dois campos X e Y em Nil_3 , podemos definir o seu produto vetorial como sendo o campo $X \wedge Y$ unicamente determinado pelas propriedades de ser ortogonal a ambos X e Y e que a base $\{X, Y, X \wedge Y\}$ tem orientação positiva.

Observação 4. Se $U = \sum_i u_i E_i$ e $V = \sum_i v_i E_i$, então

$$U \wedge V = (u_2 v_3 - u_3 v_2) E_1 - (u_1 v_3 - u_3 v_1) E_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) E_3.$$

Dizemos que um espaço \mathbb{E} é *homogêneo* se dados quaisquer dois pontos q e q' em \mathbb{E} , existe uma isometria $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ tal que $\varphi(q) = q'$. Como é conhecido, isometrias preservam o transporte paralelo, geodésicas e, mais geralmente, a conexão Riemanniana. Estas afirmações são consequências do seguinte teorema geral:

Proposição 1.1.3. Sejam M e \tilde{M} variedades Riemannianas, $\varphi : M \rightarrow \tilde{M}$ uma isometria e X, Y campos de vetores em M . Então

$$d\varphi_p(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{d\varphi_p(X)} d\varphi_p(Y) \quad \forall p \in M,$$

onde ∇ e $\tilde{\nabla}$ são as conexões Riemannianas de M e \tilde{M} respectivamente.

Afirmamos que o grupo de Heisenberg é um espaço homogêneo. De fato, dados q e q' em Nil_3 , considere a aplicação $q' \cdot q^{-1} : p \mapsto q' \cdot q^{-1} \cdot p$. Pela observação 1, tal aplicação é uma isometria e leva q a q' .

Denotaremos a conexão Riemanniana de Nil_3 pelo símbolo $\tilde{\nabla}$.

Teorema 1.1.4. Os símbolos de Christoffel $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = g(\tilde{\nabla}_{E_i} E_j, E_k)$ não nulos são dados por

$$\tilde{\Gamma}_{31}^2 = \tilde{\Gamma}_{12}^3 = -\tilde{\Gamma}_{32}^1 = -\tilde{\Gamma}_{21}^3 = \tilde{\Gamma}_{13}^2 = -\tilde{\Gamma}_{23}^1 = \frac{1}{2}. \quad (1.3)$$

A conexão definida por tais símbolos é a conexão Riemanniana de Nil_3 .

Na próxima seção, daremos uma prova mais geral deste resultado que vale para todos os espaços da família $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ mencionada na introdução deste capítulo.

Utilizando as equações dadas no teorema 1.1.4, verificamos facilmente que

Corolário 1.1.5. Com as notações acima, segue que

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{E_1} E_1 &= 0, & \tilde{\nabla}_{E_1} E_2 &= \frac{1}{2} E_3, & \tilde{\nabla}_{E_1} E_3 &= -\frac{1}{2} E_2, \\ \tilde{\nabla}_{E_2} E_1 &= -\frac{1}{2} E_3, & \tilde{\nabla}_{E_2} E_2 &= 0, & \tilde{\nabla}_{E_2} E_3 &= \frac{1}{2} E_1, \\ \tilde{\nabla}_{E_3} E_1 &= -\frac{1}{2} E_2, & \tilde{\nabla}_{E_3} E_2 &= \frac{1}{2} E_1, & \tilde{\nabla}_{E_3} E_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Demonstração. Verifiquemos um dos casos. Utilizando a convenção da soma de Einstein, temos

$$\tilde{\nabla}_{E_1} E_2 = \tilde{\Gamma}_{12}^k E_k = \tilde{\Gamma}_{12}^3 E_3 = \frac{1}{2} E_3.$$

□

1.2 O Espaço $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$

Nesta seção, trataremos de espaços homogêneos mais gerais que gozam de propriedades similares as que foram apresentadas no grupo de Heisenberg com respeito à métrica, sua conexão Riemanniana, fibras geodésicas etc.

Seja (\mathbb{E}, g) uma variedade Riemanniana tridimensional conexa e homogênea com grupo de isometrias de dimensão 4 e métrica Riemanniana g . Aqui tomaremos a variedade \mathbb{E} com modelo dado por $\mathbb{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \kappa(x^2 + y^2) > -4\}$.

A matriz da métrica g em coordenadas induzidas pela aplicação identidade é dada por

$$g = \begin{bmatrix} \frac{1 + \tau^2 y^2}{\left(1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)\right)^2} & \frac{-\tau^2 xy}{\left(1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)\right)^2} & \frac{\tau y}{\left(1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)\right)} \\ \frac{-\tau^2 xy}{\left(1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)\right)^2} & \frac{1 + \tau^2 x^2}{\left(1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)\right)^2} & \frac{-\tau x}{\left(1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)\right)} \\ \frac{\tau y}{\left(1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)\right)} & \frac{-\tau x}{\left(1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)\right)} & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

Sob tais condições, é possível mostrar que \mathbb{E} é uma fibração Riemanniana sobre uma 2-variedade de curvatura seccional constante κ . Além disso, as fibras são geodésicas e seus campos tangentes determinam um campo unitário ξ tangente às fibras que será chamado de campo vertical. No caso do grupo de Heisenberg, tínhamos que $\kappa = 0$. Ao comparar a matriz da métrica g com a matriz (1.1), verifica-se que $\tau = \frac{1}{2}$.

O campo ξ é tal que se $\tilde{\nabla}$ denota a conexão Riemanniana de \mathbb{E} e \wedge o seu produto vetorial (como na definição 1.1.2), então a constante τ é determinada pela equação

$$\tilde{\nabla}_X \xi = \tau X \wedge \xi,$$

onde X é um campo tangente à \mathbb{E} .

A título de curiosidade, o campo ξ é caracterizado pela seguinte proposição (veja, por exemplo, [18]).

Proposição 1.2.1. Para uma submersão Riemanniana $\pi : M \rightarrow N$ com fibras geodésicas, existe um único campo vetorial ξ tangente às fibras, que é um *campo de Killing*.

Naturalmente, nos referiremos ao espaço \mathbb{E} por $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Daqui em diante, tomaremos $k \neq 4\tau^2$. Caso $\kappa = 4\tau^2$, pela equação de Gauss (veja, por exemplo, [6] ou [12]), segue imediatamente que $\mathbb{E}(4\tau^2, \tau)$ possui curvatura seccional constante positiva igual a τ^2 e portanto $\mathbb{E} \cong \mathbb{S}^3 \setminus \{\infty\}$.

Se g é a métrica em \mathbb{E} e $\tilde{\nabla}$ é sua conexão Riemanniana, então podemos definir um referencial ortonormal (globalmente definido em \mathbb{E}) denotado por (E_1, E_2, E_3) com $E_3 = \xi$. Este referencial é obtido considerando os campos canônicos $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e aplicando uma isometria adequada ao ponto desejado. Em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, considere sua estrutura de grupo. A partir do produto interno canônico definido no espaço tangente à origem, podemos definir um produto interno em $T_p\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ a partir da equação

$$\langle u, v \rangle_p := \langle dL_p^{-1}(u), dL_p^{-1}(v) \rangle_0,$$

onde u e v são elementos de $T_p\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ e L_p é a translação à esquerda da origem ao ponto p . Assim, a isometria adequada referida anteriormente é simplesmente a translação à esquerda de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ (análogo ao caso do grupo de Heisenberg). Como observado em Nil_3 , ainda é verdade que o referencial invariante $\{E_j\}$ é obtido através do processo de ortonormalização de Gram-Schmidt preservando o campo $\xi = E_3 = (0, 0, 1)$. Explicitamente,

$$E_1 = \left(1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)\right) \partial_x - \tau y \partial_z, \quad E_2 = \left(1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)\right) \partial_y + \tau x \partial_z \quad \text{e} \quad E_3 = \partial_z.$$

Utilizando as propriedades do colchete $[\cdot, \cdot]$ e a fórmula

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$$

obtemos as relações

$$[E_1, E_2] = -\frac{\kappa}{2}yE_1 + \frac{\kappa}{2}xE_2 + 2\tau E_3 \quad \text{e} \quad [E_1, E_3] = [E_2, E_3] = 0. \quad (1.6)$$

Relativamente a este referencial ortonormal, temos

Teorema 1.2.2. Os símbolos de Christoffel $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = g(\tilde{\nabla}_{E_i} E_j, E_k)$ não nulos são dados por

$$\tilde{\Gamma}_{12}^3 = -\tilde{\Gamma}_{21}^3 = \tilde{\Gamma}_{23}^1 = \tilde{\Gamma}_{32}^1 = -\tilde{\Gamma}_{13}^2 = -\tilde{\Gamma}_{31}^2 = \tau.$$

Demonstração. Dado que $\tilde{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, pela fórmula de Koszul (ver [9])

$$\begin{aligned} 2g(Z, \tilde{\nabla}_Y X) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) + Zg(X, Y) \\ &\quad - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) - g([X, Y], Z) \end{aligned}$$

e lembrando que o referencial $\{E_j\}$ é ortonormal chega-se à relação

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = g(E_k, \tilde{\nabla}_{E_i} E_j) = -g([E_j, E_k], E_i) - g([E_i, E_k], E_j) - g([E_j, E_i], E_k).$$

O teorema estará verificado ao substituirmos as relações em (1.6) e simplificando as contas. \square

Como feito na seção sobre o grupo de Heisenberg, temos o seguinte corolário do teorema 1.2.2

Corolário 1.2.3. Com as notações acima, temos:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{E_1} E_1 &= \frac{\kappa}{2} y E_2, & \tilde{\nabla}_{E_1} E_2 &= -\frac{\kappa}{2} y E_1 + \tau E_3, & \tilde{\nabla}_{E_1} E_3 &= -\tau E_2, \\ \tilde{\nabla}_{E_2} E_1 &= -\frac{\kappa}{2} x E_2 - \tau E_3, & \tilde{\nabla}_{E_2} E_2 &= \frac{\kappa}{2} x E_1, & \tilde{\nabla}_{E_2} E_3 &= \tau E_1, \\ \tilde{\nabla}_{E_3} E_1 &= -\tau E_2, & \tilde{\nabla}_{E_3} E_2 &= \tau E_1, & \tilde{\nabla}_{E_3} E_3 &= 0. \end{aligned}$$

Capítulo 2

Superfícies de Ângulo Constante em Nil_3

Uma superfície Σ imersa em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ é denominada *de ângulo constante* se para cada ponto $p \in \Sigma$ seu vetor normal N faz um ângulo constante com o campo vertical E_3 . Em [12], os autores expandiram a classificação para superfícies de ângulo constante. Essas superfícies já haviam sido classificadas nos espaços produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Além de mostrarem que essas superfícies possuem curvatura Gaussiana constante, tal classificação para o espaços Nil_3 foi feita dando uma parametrização explícita. Apresentaremos tais resultados dando alguns detalhes que foram omitidos no artigo. Ao final, será exibido um exemplo não trivial de superfície de ângulo constante em Nil_3 que consta no artigo.

2.1 Definições e Lema

Nesta seção é estabelecida a notação que será utilizada no resto do trabalho.

Definição 2.1.1. Dizemos que uma superfície $\Sigma \subset \text{Nil}_3$ é de ângulo constante se o ângulo ν entre o vetor normal unitário N da superfície e o campo invariante à esquerda E_3 é constante.

Definimos o campo T como a projeção do campo E_3 sobre o plano tangente à Σ , isto é,

$$T := E_3 - \cos(\nu)N, \quad (2.1)$$

onde $\cos(\nu) = \langle E_3, N \rangle$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica de Nil_3 . Definimos o operador J pela equação $JX = N \wedge X$, ou seja, J faz a rotação por um ângulo de 90 graus no sentido anti-horário do campo X . Aqui o operador \wedge é o produto vetorial de Nil_3 definido no capítulo 1. Localmente podemos tomar sem perda de generalidade que o ângulo ν pertença ao intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Se $\nu \neq 0$, os campos T e JT formam uma base ortogonal local.

Definição 2.1.2. Considere a submersão Riemanniana $\pi : \text{Nil}_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde \mathbb{R}^2 é o espaço euclidiano de dimensão 2. Dizemos que uma superfície Σ é um *cilindro de Hopf* se $\Sigma = \pi^{-1}(\gamma)$ para alguma curva regular γ em \mathbb{R}^2 .

Para uma superfície Σ isometricamente imersa em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, apresentamos algumas fórmulas úteis. Elas podem ser encontradas em [12] e [6].

A equação de Codazzi, onde ∇ simboliza a conexão Riemanniana e S o operador forma ambos relativos à superfície Σ , é dada por:

$$\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y] = -4\tau^2 \cos \nu (\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y). \quad (2.2)$$

A curvatura intrínseca K e os dados da superfície Σ estão relacionados por

$$K = \det S + \tau^2 - 4\tau^2 \cos^2 \nu. \quad (2.3)$$

E também:

$$\nabla_X T = \cos \nu (SX - \tau JX), \quad (2.4)$$

$$X[\cos \nu] = -\langle SX - \tau JX, T \rangle. \quad (2.5)$$

Como consequência dessas fórmulas temos o seguinte lema:

Lema 2.1.3. Seja Σ uma superfície de ângulo constante em Nil_3 . As seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) Com respeito à base $\{T, JT\}$ (quando definida), o operador forma S é dado por

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\tau \\ -\tau & \lambda \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

para alguma função λ definida em Σ .

- (ii) A conexão Riemanniana da superfície é determinada por

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= -2\tau \cos \nu JT, & \nabla_{JT} T &= \lambda \cos \nu JT, \\ \nabla_T JT &= 2\tau \cos \nu T, & \nabla_{JT} JT &= -\lambda \cos \nu T. \end{aligned} \quad (2.7)$$

- (iii) A curvatura Gaussiana da superfície é uma constante negativa dada por

$$K = -4\tau^2 \cos^2 \nu. \quad (2.8)$$

(iv) A função λ satisfaz a equação diferencial parcial

$$T[\lambda] + \lambda^2 \cos v + 4\tau^2 \cos^3 v = 0. \quad (2.9)$$

Demonstração. Segue respectiva a prova de cada item:

(i) Relativamente à base $\{T, JT\}$, escrevemos

$$\begin{aligned} ST &= s_{11}T + s_{21}JT \\ S(JT) &= s_{12}T + s_{22}JT. \end{aligned}$$

onde $S = [s_{ij}]$.

Na equação (2.5), tomando $X = T$, vemos que $s_{11} = 0$. Por outro lado, fazendo $X = JT$, temos

$$0 = -\langle S(JT) - \tau J(JT), T \rangle = -\langle S(JT) + \tau T, T \rangle,$$

ou seja,

$$\langle S(JT), T \rangle = -\tau \langle T, T \rangle$$

que implica em $s_{12} = -\tau$ e pela simetria do operador forma, $s_{21} = -\tau$. Por último, defina $\lambda = \frac{\langle S(JT), JT \rangle}{\langle JT, JT \rangle}$.

(ii) Em (2.4), tome $X = T$. Segue que $\nabla_T T = -2\tau \cos v JT$, pois pelo item anterior, $S(T) = -\tau JT$. Analogamente, fazendo $X = JT$, temos que $\nabla_{JT} T = \lambda \cos v JT$. Suponha que $\nabla_T JT = aT + bJT$. Derivando a equação $\langle T, JT \rangle = 0$ com respeito ao campo T , obtemos que

$$\langle \nabla_T JT, T \rangle = -\langle \nabla_T T, JT \rangle = 2\tau \cos v \langle JT, JT \rangle.$$

que implica em $a = -2\tau \cos v$. Para ver que $b = 0$, basta derivar a equação $\langle JT, JT \rangle = \sin^2 v$ na direção do campo T . Segue que $\langle \nabla_T JT, JT \rangle = 0$, pois v é constante. Logo $b = 0$. A demonstração de que $\nabla_{JT} JT = -\lambda \cos v T$ é análoga.

(iii) Segue imediatamente da equação (2.3), pois $\det S = -\tau^2$.

(iv) Tomando $X = T$ e $Y = JT$ na equação (2.2), usando a simetria da conexão e sabendo que $\langle T, T \rangle = \sin^2 v$, obtemos

$$\nabla_T S(JT) - \nabla_{JT} ST - S(\nabla_T JT - \nabla_{JT} T) = 4\tau^2 \cos v \sin^2 v JT. \quad (2.10)$$

Pelas propriedades de conexão, temos que

$$\nabla_T S(JT) = -\tau \nabla_T T + \lambda \nabla_T JT + T(\lambda)JT = 2\tau^2 \cos v JT + 2\lambda \tau \cos v T + T(\lambda)JT.$$

Observamos que $\nabla_{JT} ST = \lambda \tau \cos v T$ pelos itens (i) e (ii). Também pelo item (ii), temos que

$$\begin{aligned} S(\nabla_T JT - \nabla_{JT} T) &= (-2\tau^2 \cos v - \lambda^2 \cos v) JT \\ \nabla_{JT} JT &= -\lambda \tau \cos v T. \end{aligned}$$

Substituindo essas informações na equação (2.10) e tomando a componente em JT , obtemos

$$2\tau^2 \cos v + T(\lambda) + 2\tau^2 \cos v + \lambda^2 \cos v = 4\tau^2 \cos v \sin^2 v,$$

No lado direito da igualdade, tome $\sin^2 v = 1 - \cos^2 v$. Fazendo os cancelamentos, obtemos a equação desejada.

□

2.2 O Teorema de Classificação

O próximo resultado classifica as superfícies de ângulo constante em Nil_3 e nos dá uma parametrização explícita utilizando o modelo de Nil_3 exibido no capítulo 1.

Teorema 2.2.1. Seja Σ uma superfície de ângulo constante em Nil_3 . Então Σ é isométrica a uma parte aberta de uma dos dois tipos de superfícies abaixo

- (i) um cilindro de Hopf.
- (ii) uma superfície dada por

$$F(u, v) = \left(\frac{1}{2\tau} \tan v \sin u + f_1(v), -\frac{1}{2\tau} \tan v \cos u + f_2(v), -\frac{1}{4\tau} \tan^2 v u - \frac{1}{2} \tan v \cos u f_1(v) - \frac{1}{2} \tan v \sin u f_2(v) - \tau f_3(v) \right),$$

onde $(f_1')^2 + (f_2')^2 = \sin^2 v$ e $f_3'(v) = f_1'(v)f_2(v) - f_1(v)f_2'(v)$.

Demonstração. Suponha que $v = \pi/2$. Então o campo E_3 é tangente à Σ em todo ponto da superfície. Isso implica que a superfície Σ contém parte das fibras da submersão $\pi : \text{Nil}_3 \rightarrow \mathbb{E}^2$. Localmente, isso significa que um aberto $U \subset \Sigma$ é “folheado” por fibras de π . Assim, basta

tomar uma curva $\tilde{\gamma}$ em U que seja transversal às fibras. Defina $\gamma = \pi(\tilde{\gamma})$. Segue que U está contido no cilindro de Hopf determinado por γ .

Se $\nu = 0$, então Σ seria uma superfície integral da distribuição gerada por E_1 e E_2 , mas como vimos na seção anterior, $[E_1, E_2] = 2\tau E_3$ e portanto a distribuição gerada por E_1 e E_2 não é integrável pelo teorema de Frobenius (contradição).

Suponha agora que $\nu \in (0, \frac{\pi}{2})$. A ideia será utilizar o referencial $\{T, JT\}$ para explicitarmos uma parametrização $F : U \rightarrow \Sigma$. Uma forma de fazer isso é impor que $F_u = T$ e $F_v = aT + bJT$ para funções a e b localmente definidas em Σ . Feito isso, restará apenas *integrarmos* tal distribuição. A discussão que se segue terá um caráter local, isto é, os abertos considerados são aqueles em que ν esteja no intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$.

Um jeito de explicitar tal parametrização é entendendo como se comporta o campo N normal unitário à Σ em termos do referencial E_j dado pelas equações em (1.2). Para isso, seja \tilde{N} a projeção de N no plano gerado por E_1 e E_2 e seja ϕ o ângulo entre \tilde{N} e o campo E_1 . Então

$$N = \sin \nu \cos \phi E_1 + \sin \nu \sin \phi E_2 + \cos \nu E_3.$$

Com esta notação, observe que T e JT podem ser escritos como

$$\begin{aligned} T &= -\sin \nu (\cos \nu \cos \phi E_1 + \cos \nu \sin \phi E_2 - \sin \nu E_3), \\ JT &= \sin \nu (\sin \phi E_1 - \cos \phi E_2). \end{aligned}$$

Afirmamos que valem as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} ST &= -\tilde{\nabla}_T N = (T[\phi] - \tau \sin^2 \nu + \tau \cos^2 \nu) JT, \\ S(JT) &= -\tilde{\nabla}_{JT} N = -\tau T + (JT)[\phi]JT. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Mostraremos apenas a primeira delas. A outra seguirá de maneira similar.

Note que, ao contrário de ν , ϕ não será necessariamente constante. Portanto, pelas propriedades da conexão Riemanniana obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_T N &= \sin \nu \tilde{\nabla}_T \cos \phi E_1 + \sin \nu \tilde{\nabla}_T \sin \phi E_2 + \cos \nu \tilde{\nabla}_T E_3 \\ &= \sin \nu \cos \phi \tilde{\nabla}_T E_1 - \sin \nu \sin \phi T(\phi) E_1 + \sin \nu \sin \phi \tilde{\nabla}_T E_2 \\ &\quad + \sin \nu \cos \phi T(\phi) E_2 + \cos \nu \tilde{\nabla}_T E_3 \\ &= \sin \nu \cos \phi \tilde{\nabla}_T E_1 + \sin \nu \sin \phi \tilde{\nabla}_T E_2 - T(\phi)JT + \cos \nu \tilde{\nabla}_T E_3, \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos a regra da cadeia e na terceira simplesmente evidenciamos o fator $T(\phi)$. Feito isso, nos resta mostrar que

$$\sin v \cos \phi \tilde{\nabla}_T E_1 + \sin v \sin \phi \tilde{\nabla}_T E_2 + \cos v \tilde{\nabla}_T E_3 = (\tau \sin^2 v - \tau \cos^2 v) JT. \quad (2.12)$$

Novamente, pelas propriedades de conexão e agora também utilizando os valores das equações em (1.4) chegamos às relações

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_T E_1 &= -\tau \sin^2 v E_2 + \tau \sin v \cos v \sin \phi E_3, \\ \tilde{\nabla}_T E_2 &= \tau \sin^2 v E_1 - \tau \sin v \cos v \cos \phi E_3, \\ \tilde{\nabla}_T E_3 &= -\tau \cos v JT. \end{aligned}$$

Portanto, substituindo esses valores no lado esquerdo de (2.12), verificamos a primeira igualdade.

Comparando as equações em (2.11) com o item (i) do lema, obtemos

$$\begin{cases} T[\phi] = -2\tau \cos^2 v, \\ (JT)[\phi] = \lambda. \end{cases} \quad (2.13)$$

A condição de integrabilidade deste sistema é dada justamente pela equação (iv).

Considere um sistema de coordenadas $(u, v) \mapsto F(u, v)$ em Σ tal que $\partial_u = T$ e $\partial_v = aT + bJT$ para funções a e b localmente definidas. Então

$$\begin{aligned} 0 &= [\partial_u, \partial_v] = [T, aT + bJT] \\ &= a[T, T] + T(a)T + b[T, JT] + T(b)JT \\ &= a[T, T] + \partial_u(a)T + b(\nabla_T JT - \nabla_{JT} T) + \partial_u(b)JT \\ &= (2b\tau \cos v + \partial_u a)T + (-\lambda b \cos v + \partial_u b)JT, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \partial_u a = -2b\tau \cos v, \\ \partial_u b = \lambda b \cos v. \end{cases} \quad (2.14)$$

Para resolver o sistema (2.14), observe que a equação (iv) com a notação acima se torna $\partial_u \lambda + \lambda^2 \cos v + 4\tau^2 \cos^3 v = 0$ que possui solução geral dada por

$$\lambda(u, v) = 2\tau \cos v (\varphi(v) - 2\tau \cos^2 v u),$$

para alguma função $\varphi(v)$. Com a função λ dada em função de (u, v) , podemos resolver o sistema (2.14). Dentre todas as possíveis soluções, precisamos apenas de uma. Por exemplo, tome

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \frac{1}{\cos v} \sin(\varphi(v) - 2\tau \cos^2 v u), \\ b(u, v) &= \cos(\varphi(v) - 2\tau \cos^2 v u). \end{aligned}$$

Daí, o sistema inicial (2.13) equivale a

$$\begin{cases} \partial_u \phi = -2\tau \cos^2 v, \\ \partial_v \phi = 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

A solução geral de (2.15) é dada por

$$\phi(u, v) = \phi(u) = -2\tau \cos^2 v u + c,$$

onde c é uma constante real.

Considerando as coordenadas dadas por $F = (F_1, F_2, F_3)$, temos explicitamente que

$$\begin{aligned} F_u &= (\partial_u F_1, \partial_u F_2, \partial_u F_3) = -\sin v (\cos v \cos \phi E_1 + \cos v \sin \phi E_2 - \sin v E_3), \\ F_v &= (\partial_v F_1, \partial_v F_2, \partial_v F_3) = \sin v ((-a \cos v \cos \phi + b \sin \phi) E_1 - (a \cos v \sin \phi + b \cos \phi) E_2 \\ &\quad + a \sin v E_3). \end{aligned}$$

Integração direta seguida de uma reparametrização $-2\tau \cos^2 v u + c \mapsto u$ nos dá a parametrização do teorema, onde $f_1(v)$ e $f_2(v)$ são funções primitivas de $\sin v(c - \varphi(v))$ e $\sin v \cos(c - \varphi(v))$ respectivamente. \square

Um exemplo não trivial é obtido tomando $f_1(v) = f_3(v) = 0$ e $f_2(v) = \frac{1}{\sqrt{2}}v$. Pelo teorema segue que a superfície parametrizada por

$$F(u, v) = \left(\frac{1}{2\tau} \sin u, -\frac{1}{2\tau} \cos u + \frac{1}{\sqrt{2}}v, -\frac{1}{4\tau}u - \frac{1}{2\sqrt{2}}v \sin u \right)$$

é uma superfície de ângulo constante em Nil_3 .

Capítulo 3

Diferenciais Quadráticas e Pares de Codazzi

Para uma superfície Σ no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 Heinz Hopf descobriu uma diferencial quadrática \mathcal{Q} definida globalmente em Σ que é holomorfa sempre que Σ tem curvatura média constante [14]. Com esta observação, foi possível mostrar que

Teorema 3.0.1. Uma superfície regular com curvatura média constante e homeomorfa a uma esfera é uma esfera redonda.

A diferencial quadrática \mathcal{Q} passou a ser conhecida pela diferencial de Hopf e hoje é uma ferramenta básica na teoria de superfícies de curvatura média constante imersas em espaços completos de curvatura seccional constante, as chamadas *formas espaciais*.

Embora ainda não caracterizamos a diferencial de Hopf, nem sempre é verdade que esta forma quadrática ainda será holomorfa para espaços mais gerais. Seguindo essa linha, Uwe Abresch e Harold Rosenberg desvendaram uma diferencial quadrática chamada de *diferencial de Abresch-Rosenberg* que é holomorfa quando a superfície em questão possui curvatura média constante nos espaços produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e outros espaços da família $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ [1].

Neste capítulo faremos uma breve introdução sobre a diferencial de Hopf relativa a uma superfície imersa em no espaço euclidiano e mostraremos como essa diferencial quadrática se relaciona com a curvatura média. Feito isso, aproveitaremos a notação estabelecida para falarmos um pouco sobre os Pares de Codazzi nos baseando no artigo [11] de autoria de Espinar e Trejos. Utilizando esta ferramenta, exibiremos uma prova do teorema 3.0.1. Por último, estudaremos a diferencial de Abresch-Rosenberg do ponto de vista de pares de Codazzi e introduziremos a segunda forma de Abresch Rosenberg para superfície com curvatura média constante H imersa em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ e mostraremos as suas propriedades fundamentais.

3.1 A Diferencial de Hopf

Considere $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular imersa no espaço euclidiano. Se $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$, $(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$ é uma parametrização local de Σ , definimos a *primeira forma quadrática* de Σ em relação à parametrização φ como

$$I(X(x, y), Y(x, y)) = E(x, y)dx^2 + 2F(x, y)dxdy + G(x, y)dy^2, \quad (3.1)$$

onde

$$\begin{aligned} E(x, y) &:= \langle \varphi_x(x, y), \varphi_x(x, y) \rangle, \\ F(x, y) &:= \langle \varphi_x(x, y), \varphi_y(x, y) \rangle \text{ e} \\ G(x, y) &:= \langle \varphi_y(x, y), \varphi_y(x, y) \rangle, \end{aligned}$$

com $X = a_1\varphi_x + a_2\varphi_y$ e $Y = b_1\varphi_x + b_2\varphi_y$ campos tangentes à Σ no ponto $\varphi(x, y)$. Uma maneira de interpretar os símbolos dx e dy seria utilizar a forma matricial de I :

$$I = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}.$$

Então redefinimos I por

$$I(X, Y) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

N é o campo normal unitário à Σ definido por

$$N(x, y) = \frac{\varphi_x \wedge \varphi_y}{\sqrt{EG - F^2}}. \quad (3.2)$$

Considerando a notação acima, a *segunda forma fundamental* é dada por

$$II(X(x, y), Y(x, y)) = e(x, y)dx^2 + 2f(x, y)dxdy + g(x, y)dy^2, \quad (3.3)$$

onde

$$\begin{aligned} e(x, y) &:= \langle \varphi_{xx}(x, y), N(x, y) \rangle, \\ f(x, y) &:= \langle \varphi_{xy}(x, y), N(x, y) \rangle \text{ e} \\ g(x, y) &:= \langle \varphi_{yy}(x, y), N(x, y) \rangle. \end{aligned}$$

Definição 3.1.1. Dizemos que uma parametrização φ é isotérmica se $E = G$ e $F = 0$ em todo ponto de U .

Para uma prova do teorema abaixo, veja [5].

Teorema 3.1.2. Dada uma superfície regular Σ no espaço euclidiano e $p \in \Sigma$, existe uma parametrização local isotérmica $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$ com $p \in \varphi(U)$.

É conhecido (ver [10]) que dada uma superfície Σ regular imersa no espaço euclidiano, os coeficientes da primeira e segunda forma satisfazem as equações de Codazzi-Mainardi

$$e_y - f_x = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2, \quad (3.4)$$

$$f_y - g_x = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2. \quad (3.5)$$

onde os coeficientes Γ_{ij}^k são os *símbolos de Christoffel* da superfície Σ . Pode-se mostrar que em uma parametrização isotérmica φ , as equações de Codazzi-Mainardi são (localmente) dadas por

$$\left(\frac{e-g}{2}\right)_x + f_y = EH_x \quad e \quad (3.6)$$

$$\left(\frac{e-g}{2}\right)_y - f_x = -EH_y. \quad (3.7)$$

Dada uma parametrização isotérmica $\varphi : U \rightarrow \Sigma$ e identificando $(x, y) \in U$ com $z = x + iy$, dizemos que z é o *parâmetro complexo local* correspondente à φ . Considere a função complexa localmente definida por

$$Q(z) = Q(x, y) = \frac{1}{4}(e - g - 2if). \quad (3.8)$$

Lema 3.1.3. A curvatura média H de Σ em $\varphi(U)$ é constante se, e somente se, Q é uma função holomorfa em $\varphi(U)$.

Demonstração. H constante implica que as equações de Codazzi-Mainardi em uma parametrização isotérmica (equações (3.6) e (3.7)) são dadas por

$$\left(\frac{e-g}{2}\right)_x + f_y = 0,$$

$$\left(\frac{e-g}{2}\right)_y - f_x = 0.$$

Por essas igualdades, vemos que Q satisfaz as equações de Cauchy-Riemann. Por outro lado, se Q é holomorfa, então as equações acima são satisfeitas. Isto é, $EH_x = 0$ e $EH_y = 0$. Como $E = G$ e $F = 0$, o coeficiente E não se anula. Concluimos que H_x e H_y são ambos constantes iguais a zero, ou seja, H é constante. \square

Consideraremos agora a forma quadrática I definida em (3.1) complexificada, isto é, dado um ponto p , I não mais será uma forma sobre o espaço tangente $T_p\Sigma \times T_p\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, mas sim uma aplicação bilinear sobre $\mathbb{C}T_p\Sigma \times \mathbb{C}T_p\Sigma$ com escalares complexos, onde

$$\mathbb{C}T_p\Sigma = \{X + iY \mid X, Y \in T_p\Sigma\}.$$

Seja z o parâmetro complexo associado à parametrização φ . Definimos

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \quad \text{e} \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y).$$

Em parâmetros complexos, temos que se X e Y são elementos de $\mathbb{C}T_p\Sigma$, então em p a primeira forma fundamental complexificada é dada por

$$I(X, Y) = P(z)dz^2 + 2\lambda|dz|^2 + \overline{P(z)}d\bar{z}^2, \quad (3.9)$$

onde

$$\begin{aligned} dz &= dx + idy, \\ d\bar{z} &= dx - idy, \\ |dz|^2 &= dx^2 + dy^2, \end{aligned} \quad (*)$$

e no ponto $z = x + iy$

$$P(z) = I(\partial_z, \partial_z)|_z \quad \text{e} \quad \lambda(z) = I(\partial_z, \partial_{\bar{z}})|_z.$$

Utilizando a multilinearidade de I e abrindo os operadores dz acima, vemos que localmente

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4}(E - G - 2iF), \\ \lambda &= \frac{1}{4}(E + G). \end{aligned}$$

Definição 3.1.4. Dizemos que um parâmetro complexo é conforme se sua parametrização associada for isotérmica.

Quando o parâmetro complexo é conforme, a primeira forma se simplifica bastante:

$$P = 0 \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{E}{2}.$$

Observação 5. Dada uma superfície Σ com cartas locais $\{\varphi_\alpha, U_\alpha\}$ e métrica g , é possível encontrar um atlas $\{\tilde{\varphi}_\alpha, \tilde{U}_\alpha\}$ tal que cada uma dessas parametrizações $\tilde{\varphi}_\alpha$ sejam isotérmicas e orientadas positivamente (veja [16]).

A estrutura descrita na observação 5 é chamada de estrutura conforme induzida pela métrica g . Com tal estrutura e identificando os abertos U_α como abertos de \mathbb{C} , temos que toda superfície Σ pode ser vista como uma *superfície de Riemann*. Ainda relacionado a estes conceitos, colocamos aqui para uso posterior o teorema da uniformização de Riemann [16]

Teorema 3.1.5. Se Σ é uma superfície no espaço euclidiano difeomorfa a uma esfera, então existe um difeomorfismo conforme $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \Sigma$ da esfera unitária \mathbb{S}^2 em Σ .

De maneira análoga ao que foi feito na primeira forma fundamental, definimos a *segunda forma fundamental complexificada* por

$$II(X, Y) = Q(z)dz^2 + 2\lambda(z)H(z)|dz|^2 + \overline{Q(z)}d\bar{z}^2. \quad (3.10)$$

Localmente Q e λ são dados por

$$Q(z) = \frac{1}{4}(e - g - 2if)$$

$$\lambda(z) = \frac{1}{4}(E + G).$$

Definição 3.1.6. Dada uma superfície Σ com métrica I e segunda forma fundamental II , definimos a diferencial de Hopf localmente por $Q(z)dz^2$ como na equação (3.10).

Mostraremos que a diferencial de Hopf está globalmente definida, ou seja, que se z e w são parâmetros isotérmicos locais que parametrizam um aberto $W \neq \emptyset$ de Σ , então

$$Q(z)dz^2 = \tilde{Q}(w)dw^2,$$

onde Q e \tilde{Q} são as diferenciais de Hopf com relação aos parâmetros z e w , respectivamente. Este é o conteúdo da proposição:

Proposição 3.1.7. A diferencial de Hopf independe da parametrização local e portanto está globalmente definida em Σ .

Demonstração. Consideraremos duas parametrizações isotérmicas $\phi : U \rightarrow \Sigma$ e $\psi : V \rightarrow \Sigma$ com parâmetros complexos associados $z = x + iy$ e $w = u + iv$, respectivamente. Uma conta simples mostra que

$$Q(z) = -\langle \phi_z, N_z \rangle = \frac{1}{4}(e - g - 2if)$$

$$\tilde{Q}(w) = -\langle \psi_w, N_w \rangle = \frac{1}{4}(\tilde{e} - \tilde{g} - 2i\tilde{f}),$$

onde N denota o vetor normal unitário de Σ e, por exemplo, $N_z = \frac{\partial N}{\partial z}$. Pela regra da cadeia, temos

$$\tilde{Q}(w)dw^2 = \tilde{Q}(w(z)) \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz^2.$$

Assim, nos resta mostrar que $\tilde{Q}(w(z)) \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 = Q(z)$.

Seja $h : x + iy \mapsto u + iv$ tal que $\phi = \psi \circ h$. É fácil mostrar que h satisfaz as equações de Cauchy-Riemann e portanto é holomorfa. Além disso, $h'(z) \neq 0$ em U . Mais ainda,

$$\phi_x = (\psi \circ h)_x = d\psi(u_x, v_x) = u_x \psi_u + v_x \psi_v. \quad (3.11)$$

Analogamente,

$$\phi_y = (\psi \circ h)_y = d\psi(u_y, v_y) = u_y \psi_u + v_y \psi_v. \quad (3.12)$$

Observamos que $w = h(x, y)$ pela escolha da notação. Assim,

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = \frac{1}{2}(u_x + v_y - iu_y + iv_x) = (u_x + iv_x),$$

onde na última igualdade usamos o fato de que h é holomorfa.

Considere o campo N como função de (u, v) . A fim de evitar confusão, defina $\tilde{N}(x, y) := N(h(x, y))$, isto é, o próprio campo N como função de (x, y) . Então

$$\tilde{N}_x = u_x N_u + v_x N_v$$

$$\tilde{N}_y = u_y N_u + v_y N_v.$$

Assim, os coeficientes da segunda forma são determinados pelas equações abaixo, onde utilizamos que $v_y = u_x$ e $u_y = -v_x$:

$$\begin{aligned} e &= \langle \phi_x, \tilde{N}_x \rangle = u_x^2 \tilde{e} + v_x^2 \tilde{g} + 2u_x v_x \tilde{f}, \\ f &= \langle \phi_x, \tilde{N}_y \rangle = -u_x v_x \tilde{e} + u_x v_x \tilde{g} + (u_x^2 - v_x^2) \tilde{f}, \\ g &= \langle \phi_y, \tilde{N}_y \rangle = v_x^2 \tilde{e} + u_x^2 \tilde{g} - 2u_x v_x \tilde{f}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} e - g - 2if &= (u_x^2 - v_x^2 + 2iu_x v_x)(\tilde{e} - \tilde{g} - 2i\tilde{f}) \\ &= (u_x + iv_x)^2 (\tilde{e} - \tilde{g} - 2i\tilde{f}) \\ &= \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 (\tilde{e} - \tilde{g} - 2i\tilde{f}). \end{aligned}$$

□

A diferencial de Hopf foi utilizada por Heinz Hopf para provar o teorema 3.0.1 enunciado na introdução. Daremos uma prova deste teorema utilizando os pares de Codazzi mais a frente.

3.2 Pares de Codazzi

Seja Σ uma superfície regular orientável. Um *par fundamental* em Σ é um par de formas quadráticas reais definidas em Σ onde I é uma métrica Riemanniana.

Um exemplo de par fundamental, como visto anteriormente, é quando Σ é uma variedade Riemanniana bidimensional imersa em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ com métrica induzida I e segunda forma fundamental II . Em coordenadas locais, escrevemos

$$I = Edx^2 + 2Fdx dy + Gdy^2, \quad (3.13)$$

$$II = edx^2 + 2fdx dy + gdy^2. \quad (3.14)$$

Para cada par fundamental (I, II) , podemos definir um operador auto-adjunto S em Σ que satisfaz

$$II(X, Y) = \langle S(X), Y \rangle = \langle X, S(Y) \rangle.$$

Tal operador é chamado de *operador forma*. Reciprocamente, dados I e S em Σ , podemos definir de maneira única a forma quadrática satisfazendo a igualdade acima. Daí, exibir um par fundamental (I, II) ou o par (I, S) não faz diferença, no sentido em que um determina o outro.

De maneira abstrata, definiremos as curvaturas principais, curvatura extrínseca e curvatura média do par (I, II) respectivamente pelos autovalores, o determinante e a metade do traço do operador forma S . Em coordenadas,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad \text{e} \quad H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2}. \quad (3.15)$$

Denotando a conexão Riemanniana de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ por $\tilde{\nabla}$, definimos uma conexão ∇ em Σ com a métrica I tomando a parte tangente de $\tilde{\nabla}$, como é feito usualmente. Explicitamente, se X e Y são campos tangentes à Σ e N é o vetor normal unitário usual, definimos

$$\nabla_X Y = \tilde{\nabla}_X Y - I(\tilde{\nabla}_X Y, N)N.$$

Seja $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$ uma parametrização isotérmica que leva (x, y) em $\varphi(x, y)$ e $z = x + iy$ é um parâmetro conforme local para Σ . Como foi feito na seção sobre a diferencial de Hopf, reescrevemos I e II da seguinte forma:

$$\begin{aligned} I &= 2\lambda |dz|^2, \\ II &= Q dz^2 + 2\lambda H |dz|^2 + \bar{Q} d\bar{z}^2, \end{aligned}$$

onde $\lambda = \frac{E}{2}$ e Q é a diferencial de Hopf usual.

Vimos que, em coordenadas locais e a menos de uma constante multiplicando, Q é dada por

$$Q(x, y) = \frac{1}{4} (e(x, y) - g(x, y) - 2if(x, y)).$$

Quando consideramos Σ uma superfície imersa no espaço *euclidiano*, a função complexa Q tem algumas propriedades interessantes. Por exemplo, suas raízes correspondem aos pontos umbílicos de Σ . Além disso, Q é holomorfa se, e somente se, H é constante (veja o lema 3.1.3).

Definição 3.2.1. Dizemos que um par fundamental (I, II) é um par de Codazzi se para quaisquer campos X e Y a equação abaixo é satisfeita

$$\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y] = 0.$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de Σ com respeito à métrica I e S é o operador forma associado ao par (I, II) .

Para entendermos parte da importância dos pares de Codazzi, temos o seguinte lema devido a T. K. Milnor [17]

Lema 3.2.2. Seja (I, II) um par fundamental. Então quaisquer duas das condições abaixo implicará na restante:

- (i) (I, II) é um par de Codazzi;
- (ii) H é constante;
- (iii) A diferencial de Hopf é holomorfa.

Demonstração. Afirmamos que (I, II) é par de Codazzi se, e somente se, $Q_{\bar{z}} = \lambda H_z$. De fato, se (I, II) é de Codazzi, então por definição os coeficientes da primeira e segunda forma (localmente) satisfazem

$$e_y - f_x = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 \quad (3.16)$$

$$f_y - g_x = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2.$$

Como o parâmetro considerado é conforme, temos que os símbolos de Christoffel de Σ são dados por

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} \frac{E_x}{E},$$

$$\Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} \frac{E_y}{E}.$$

Assim as condições de ser par de Codazzi se tornam

$$\begin{aligned} e_y - f_x &= \frac{1}{2} \frac{(e+g)E_y}{E}, \\ f_y - g_x &= -\frac{1}{2} \frac{(e+g)E_x}{E}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Por outro lado, λH_z depende dos coeficientes das formas fundamentais e suas derivadas. Isolando E_x e E_y nas equações (3.17) e substituindo em λH_z verifica-se através de força bruta que $\lambda H_z = Q_{\bar{z}}$. A outra direção da equivalência segue de maneira similar usando substituições e simplificações ao longo das contas.

O lema segue diretamente dessa equivalência, pois uma função w é holomorfa se e só se $w_{\bar{z}} = 0$. □

Como consequência, provaremos o teorema 3.0.1.

Prova de 3.0.1. Basta verificarmos que todos os pontos de uma H -superfície Σ homeomorfa à esfera no espaço euclidiano são umbílicos, ou seja, que $K = H^2$ em todo ponto. Daí seguirá que Σ está contida em uma esfera (redonda) ou um plano. Como Σ é homeomorfa à uma esfera, a segunda opção não pode acontecer.

De fato, como (I, II) já é um par de Codazzi, pelo lema acima segue que H é constante se, e somente se, a diferencial de Hopf é holomorfa. Pelo teorema 3.1.5, Σ pode ser parametrizada por \mathbb{S}^2 . Portanto, podemos pensar na diferencial de Hopf $Q(z)dz^2$ como se estivesse definida em \mathbb{S}^2 .

Considere $f_1 : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{C}$ e $f_2 : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} \rightarrow \mathbb{C}$ as projeções estereográficas. Sabemos que tais parametrizações são isotérmicas. Além disso, fazendo $z = f_1(x)$ e $w = f_2(x)$, temos que $w = \frac{1}{z}$ em $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$.

Considere $Q(z)dz^2$ e $\tilde{Q}(w)dw^2$ as representações locais da diferencial de Hopf nas cartas locais f_1 e f_2 respectivamente. Pelo lema 3.2.2, temos que Q e \tilde{Q} são holomorfas. Além disso, fazendo a mudança de coordenadas, vemos que

$$Q(z)dz^2 = Q(z(w)) \left(\frac{dz}{dw} \right)^2 dw^2 = Q(z(w)) \frac{1}{w^4} dw^2,$$

que implica em $Q(z) = w^4 \tilde{Q}(w)$. Como $\tilde{Q}(0)$ é regular, fazendo $w \rightarrow 0$ (ou equivalentemente $z \rightarrow \infty$) vemos que $Q(z) \rightarrow 0$ e concluímos que Q é limitada. Por definição Q é inteira e pelo teorema de Liouville segue que Q é identicamente nula. Localmente isso implica que $e = g$ e $f = 0$. Segue das equações (3.15) e tomando uma parametrização isotérmica que $K = H^2$. Como H e K não dependem da parametrização, temos que todo ponto de Σ é umbílico. \square

3.3 A segunda forma fundamental de Abresch-Rosenberg

Seja Σ uma superfície imersa em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ com curvatura média constante H . A estas superfícies chamaremos de H -superfícies. Em [1], U. Abresch e H. Rosenberg provaram a existência de uma diferencial quadrática holomorfa em qualquer H -superfície imersa em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. A esta diferencial chamaremos de *diferencial de Abresch-Rosenberg* ou simplesmente de *diferencial AR*. Em coordenadas, sua expressão é dada por

$$\mathcal{Q}^{\text{AR}} = Q^{\text{AR}} dz^2 = (2(H + i\tau)Q - (\kappa - 4\tau^2)t^2) dz^2,$$

onde Q é a diferencial de Hopf usual e $\mathbf{t} = \langle T, \partial_z \rangle$.

Em [11], dada uma H -superfície $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$, os autores revelaram um par fundamental (I, II_{AR}) associado ao par (I, II) relativo à superfície $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ de tal forma que a diferencial de Hopf de (I, II_{AR}) coincide com a diferencial AR.

Utilizaremos esses resultados para provar um teorema do tipo Hopf com fronteira que nos dá condições para a qual uma superfície Σ será totalmente umbílica no sentido da diferencial AR (veja introdução da seção 4.2).

Considere a constante complexa $w = \frac{1}{H + i\tau}$ e defina $\theta \in [0, 2\pi)$ por

$$e^{-2i\theta} = \frac{w}{\|w\|} = \frac{H - i\tau}{\sqrt{H^2 + \tau^2}}. \quad (3.18)$$

Definição 3.3.1. A segunda forma fundamental AR é dada por

$$II_{\text{AR}}(X, Y) = II(X, Y) - \alpha \langle T_\theta, X \rangle \langle T_\theta, Y \rangle + \frac{\alpha}{2} \langle T, T \rangle \langle X, Y \rangle. \quad (3.19)$$

Equivalentemente, o operador forma S_{AR} é definido por

$$S_{\text{AR}}(X) = A(X) - \alpha \langle T_\theta, X \rangle T_\theta + \frac{\alpha}{2} \langle T, T \rangle X, \quad (3.20)$$

onde θ é dado pela equação (3.18) e

$$\alpha = \frac{\kappa - 4\tau^2}{2\sqrt{H^2 + \tau^2}}, \quad (3.21)$$

$$T_\theta = \cos \theta T + \sin \theta JT. \quad (3.22)$$

Provaremos o seguinte resultado visto em [11]

Lema 3.3.2. As seguintes equações são verdadeiras para o par fundamental (I, II_{AR}) :

- (i) $II_{\text{AR}}(\partial_z, \partial_z) dz^2 = Q^{\text{AR}} dz^2$, onde z é um parâmetro conforme para I ;
- (ii) $H(I, II_{\text{AR}}) = H(I, II)$.

Demonstração. Seja $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ uma H -superfície e z um parâmetro local conforme. Defina $\theta \in [0, 2\pi)$ pela equação (3.18). Então, a menos de uma constante complexa $H + i\tau$, podemos redefinir a diferencial de Abresch-Rosenberg como

$$Q^{\text{AR}} dz^2 = \left(Q - \frac{\kappa - 4\tau^2}{2\sqrt{H^2 + \tau^2}} \left(e^{-i\theta} \mathbf{t} \right)^2 \right) dz^2. \quad (3.23)$$

Como o parâmetro z considerado é conforme, temos que

$$\begin{aligned}\langle JT, \partial_x \rangle &= \langle N \wedge T, \partial_x \rangle = \langle \partial_x \wedge N, T \rangle = -\langle \partial_y, T \rangle, \\ \langle JT, \partial_y \rangle &= \langle N \wedge T, \partial_y \rangle = \langle \partial_y \wedge N, T \rangle = \langle \partial_x, T \rangle.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\langle T_\theta, \partial_z \rangle &= \frac{1}{2} \langle \cos \theta T + \sin \theta JT, \partial_x - i\partial_y \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\cos \theta \langle T, \partial_x \rangle + \sin \theta \langle JT, \partial_x \rangle - i \cos \theta \langle T, \partial_y \rangle - i \sin \theta \langle JT, \partial_y \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\cos \theta \langle T, \partial_x \rangle - \sin \theta \langle T, \partial_y \rangle - i \cos \theta \langle T, \partial_y \rangle - i \sin \theta \langle T, \partial_x \rangle) \\ &= e^{-i\theta} \mathbf{t}.\end{aligned}$$

Lembrando que $Q = \langle A\partial_z, \partial_z \rangle$, concluímos a partir de (3.23) que

$$Q^{\text{AR}} dz^2 = \left(\langle A(\partial_z), \partial_z \rangle - \alpha \langle T_\theta, \partial_z \rangle^2 \right) dz^2.$$

Por outro lado, utilizando a equação (3.19), temos que

$$II_{\text{AR}}(\partial_z, \partial_z) dz^2 = \left(\langle A(\partial_z), \partial_z \rangle - \alpha \langle T_\theta, \partial_z \rangle^2 \right) dz^2 = Q^{\text{AR}} dz^2,$$

onde a primeira igualdade segue do fato de que $\langle \partial_z, \partial_z \rangle = E - G + 2iF = 0$, pois z é conforme.

Prosseguimos para a prova do segundo item. Novamente, pelo fato do parâmetro ser conforme, temos que as curvaturas médias de Nil_3 e AR são dadas por

$$H(I, II) = \frac{1}{2} \frac{(e+g)}{E} \quad \text{e} \quad H(I, II_{\text{AR}}) = \frac{1}{2} \frac{(e_{\text{AR}} + g_{\text{AR}})}{E}.$$

Assim, resta mostrar que

$$e + g = e_{\text{AR}} + g_{\text{AR}}. \tag{3.24}$$

Por definição, temos

$$\begin{aligned}e_{\text{AR}} &= II_{\text{AR}}(\partial_x, \partial_x) = e - \alpha \langle T_\theta, \partial_x \rangle^2 + \frac{\alpha |T|^2}{2} E \\ g_{\text{AR}} &= II_{\text{AR}}(\partial_x, \partial_x) = g - \alpha \langle T_\theta, \partial_y \rangle^2 + \frac{\alpha |T|^2}{2} E.\end{aligned}$$

Substituindo as duas equações acima em (3.24) e cancelando as parcelas $e + g$, obtemos

$$-\alpha (\langle T_\theta, \partial_x \rangle^2 + \langle T_\theta, \partial_y \rangle^2) + \alpha |T|^2 E = 0. \quad (3.25)$$

Mostrar o item 2, portanto, se torna equivalente a mostrar que

$$\langle T_\theta, \partial_x \rangle^2 + \langle T_\theta, \partial_y \rangle^2 \stackrel{?}{=} |T|^2 E, \quad (3.26)$$

já que $\alpha \neq 0$.

De fato, existem funções a e b tais que $T = a\partial_x + b\partial_y$. Então $JT = -b\partial_x + a\partial_y$. Daí

$$\begin{aligned} \langle T_\theta, \partial_x \rangle^2 &= (a \cos \theta - b \sin \theta)^2 E^2 \\ \langle T_\theta, \partial_y \rangle^2 &= (b \cos \theta + a \sin \theta)^2 E^2. \end{aligned}$$

Somando as duas equações logo acima obtemos a igualdade (3.26) desejada. Fica provado o segundo item. \square

Lema 3.3.3. Dada uma H -superfície $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$, $H^2 + \tau^2 \neq 0$, temos que a função \mathcal{Q}^{AR} é holomorfa se e somente se (I, II_{AR}) é um par de Codazzi.

Demonstração. Como H é constante, o lema é uma consequência imediata do lema 3.2.2, pois a diferencial de Hopf coincide com a diferencial AR que é holomorfa. \square

Observação 6. O expoente da equação (3.18) difere do que está escrito nos trabalhos de Espinar e Trejos ([11]) por um sinal. Isso se deve a nossa definição de produto vetorial \wedge dada na observação 4. De fato, se mantermos o sinal, não seria verdade que $e^{i\theta} \mathbf{t} = \langle T_\theta, \partial_z \rangle$. Além disso, a diferencial Q^{AR} não seria holomorfa.

Capítulo 4

Um teorema do tipo Hopf em Nil_3

Neste capítulo serão definidas quais condições uma curva γ em uma superfície $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ deverá satisfazer para ser uma linha de curvatura de Abresch-Rosenberg ou, abreviadamente, uma linha de curvatura AR. Estabeleceremos uma equivalência que relaciona tais linhas de curvatura AR com a diferencial de Abresch-Rosenberg da superfície. Isso até então de maneira geral. Por fim, mostraremos um teorema do tipo Hopf quando o espaço ambiente for do tipo Nil_3 , isto é, $\tau \neq 0$.

4.1 Linhas de Curvatura AR

Seja Σ uma superfície de curvatura média constante H em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Podemos definir o que são linhas de curvatura segundo o operador forma AR. Uma curva $\gamma = \gamma(t)$ em Σ será uma linha de curvatura com respeito ao operador forma S_{AR} se existe uma função real diferenciável $\lambda = \lambda(t)$ tal que $S_{\text{AR}}(\gamma') = \lambda \gamma'$, onde omitimos a dependência do parâmetro t . Neste caso, dizemos que γ é uma *linha de curvatura AR*. A próxima proposição estabelece uma equivalência entre linhas de curvatura AR e a diferencial de Abresch-Rosenberg que nos permitirá mais adiante provarmos uma generalização de um resultado clássico em geometria (veja o teorema 4.2.1).

Proposição 4.1.1. Considerando as notações acima, temos que γ é uma linha de curvatura AR se, e somente se, a parte imaginária de $\mathcal{Q}^{\text{AR}} dz^2$ se anula ao longo de γ .

Demonstração. Considere $z = x + iy$ um parâmetro local conforme para Σ em relação à primeira forma I e tome

$$e_{AR} = II_{AR}(\partial_x, \partial_x) = I(S_{AR}(\partial_x), \partial_x), \quad (4.1)$$

$$f_{AR} = II_{AR}(\partial_x, \partial_y) = I(S_{AR}(\partial_x), \partial_y), \quad (4.2)$$

$$g_{AR} = II_{AR}(\partial_y, \partial_y) = I(S_{AR}(\partial_y), \partial_y). \quad (4.3)$$

Suponha que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ seja linha de curvatura AR de Σ . Então $S_{AR}(\gamma') = \lambda \gamma'$. Em coordenadas locais (x, y) e escrevendo o operador forma S_{AR} na base $\{\partial_x, \partial_y\}$, reescrevemos tal condição por

$$\begin{bmatrix} e_{AR} & f_{AR} \\ f_{AR} & g_{AR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

onde omitimos a dependência do parâmetro t .

Manipulando a equação (4.4), obtemos as condições

$$x'e_{AR} + y'f_{AR} = \lambda x' \quad (4.5)$$

$$x'f_{AR} + y'g_{AR} = \lambda y'. \quad (4.6)$$

Fazendo uma multiplicação cruzada de (4.5) e (4.6), obtemos

$$x'y'e_{AR} + (y')^2 f_{AR} = x'y'g_{AR} + (x')^2 f_{AR}. \quad (4.7)$$

Localmente a parte imaginária de $Q_{AR}(\gamma(t))dz^2(\gamma'(t))$ é calculada como se segue. $dz^2(\gamma') = (dx + idy)^2(x', y') = (x')^2 - (y')^2 + 2ix'y'$. Pelo fato de que a diferencial AR coincide com a diferencial de Hopf do par (I, II_{AR}) , temos que $Q_{AR}(\gamma') = e_{AR} - g_{AR} + 2if_{AR}$ e portanto

$$\text{Im}(Q_{AR}(\gamma)dz^2(\gamma')) = ((x')^2 - (y')^2) f_{AR} + x'y'(e_{AR} - g_{AR}).$$

Por (4.7), vemos que $\text{Im}(Q_{AR}(\gamma)dz^2(\gamma'))$ é nula.

Suponha agora que a parte imaginária de Q_{AR} seja identicamente nula, ou seja, que (4.7) seja válida. Queremos definir uma função λ tal que (4.4) seja verdadeira. Suponha primeiramente que $x' \neq 0$ e $y' \neq 0$ para todo t em $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Então a equação (4.7) nos dá que

$$\frac{x'e_{AR} + y'f_{AR}}{x'} = \frac{x'f_{AR} + y'g_{AR}}{y'}.$$

Note que nos pontos em que $(x', y') \neq (0, 0)$,

$$\lambda := \frac{x' e_{AR} + y' f_{AR}}{x'} = \frac{x' f_{AR} + y' g_{AR}}{y'}$$

satisfaz as condições desejadas da proposição. De fato,

$$\begin{bmatrix} e_{AR} & f_{AR} \\ f_{AR} & g_{AR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' e_{AR} + y' f_{AR} \\ x' f_{AR} + y' g_{AR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x' e_{AR} + y' f_{AR}}{x'} x' \\ \frac{x' f_{AR} + y' g_{AR}}{y'} y' \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Considere agora os pontos $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ tais que $x' \neq 0$ e $y' = 0$. Por uma conta análoga ao que foi feita acima, vemos que $\lambda = e_{AR}$ satisfaz as condições acima. Para o último caso, tome $\lambda = g_{AR}$. Portanto, podemos redefinir a função λ por

$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{x'(t)e_{AR}(t) + y'(t)f_{AR}(t)}{x'(t)}, & \text{se } x'(t) \neq 0 \text{ e } y'(t) \neq 0; \\ e_{AR}(t), & \text{se } x'(t) \neq 0 \text{ e } y'(t) = 0; \\ g_{AR}(t), & \text{se } x'(t) = 0 \text{ e } y'(t) \neq 0. \end{cases}$$

Não é difícil ver que a função λ é contínua. Vamos discutir sua diferenciabilidade. Primeiramente, considere t_0 tal que $x'(t_0) \neq 0$ e $y'(t_0) = 0$. Então existe um aberto $I = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ tal que $x'(t) \neq 0$ para todo t neste aberto. Suponha que t_0 seja uma raiz isolada de y' em I . Então por continuidade, as derivadas laterais coincidem e assim λ é diferenciável em $t = t_0$. Seja agora t_0 tal que $y'(t_0 + \delta) = 0$ e $y'(t_0 - \delta) \neq 0$ para δ suficientemente pequeno. Neste caso, devemos verificar se as derivadas laterais no ponto t_0 coincidem, isto é, que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x'(t)e_{AR}(t) + y'(t)f_{AR}(t)}{x'(t)} \right) = \frac{d}{dt} e_{AR}(t)$$

em $t = t_0$. De fato,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x' e_{AR} + y' f_{AR}}{x'} \right) \Big|_{t_0} = e'_{AR} + \frac{y'' f_{AR}}{x'}. \quad (4.8)$$

Por outro lado, a derivada acima deve ser igual a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x' f_{AR} + y' g_{AR}}{y'} \right) \Big|_{t_0} = -\frac{y'' x' f_{AR}}{(y')^2} \Big|_{t_0}. \quad (4.9)$$

Como $e'_{\text{AR}}(t_0) + \frac{y''(t_0)f_{\text{AR}}(t_0)}{x'(t_0)}$ existe, segue que o lado direito de (4.9) existe e está bem definido em t_0 , o que implica em $y''(t_0) = 0$. Portanto, as derivadas laterais neste caso coincidem e λ é diferenciável em $t = t_0$. Os outros casos seguem de maneira similar. O mesmo acontece quando considerarmos os pontos em que $x' = 0$ e $y' \neq 0$. Segue que λ é diferenciável. \square

No espaço Euclidiano, se temos superfícies Σ_1 e Σ_2 que se intersectam ao longo de uma curva Γ sendo tal curva uma linha de curvatura de uma superfície, digamos Σ_1 , então é verdade que Γ também será linha de curvatura de Σ_2 . Um caso especial deste teorema foi provado por Joachimsthal [15] e mais tarde Bonnet [2] provou o caso geral em \mathbb{R}^3 .

O próximo lema ilustra um resultado deste tipo, mas considerando linhas de curvatura AR. Este é o principal resultado dessa seção. Seus corolários tratam de casos especiais em que as superfícies envolvidas deverão satisfazer as condições do lema.

Lema 4.1.2. Sejam Σ_i em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, $i = 1, 2$ duas H_i -superfícies tais que $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$. Seja $\Gamma \subset \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ uma curva regular de interseção transversal, isto é, que não é tangente. Suponha que ao longo de Γ as seguintes afirmações sejam verdadeiras:

(i) $\langle N_1, N_2 \rangle$ é constante.

$$(ii) \sqrt{H_1^2 + \tau^2} \langle T_{\theta_2}^2, N_1 \rangle \langle J_2 T_{\theta_2}^2, N_1 \rangle = \sqrt{H_2^2 + \tau^2} \langle T_{\theta_1}^1, N_2 \rangle \langle J_1 T_{\theta_1}^1, N_2 \rangle,$$

onde $e^{2i\theta_i} = \frac{H_i - i\tau}{\sqrt{H_i^2 + \tau^2}}$, $T_{\theta_i}^i = \cos \theta_i T_i + \sin \theta_i J T_i$ e $J_i T_{\theta_i}^i = N_i \wedge T_{\theta_i}^i$ para $i = 1, 2$. Então, Γ é uma linha de curvatura AR para Σ_1 se, e somente se, Γ é uma linha de curvatura AR de Σ_2 .

Demonstração. Suponha que γ seja linha de curvatura AR para Σ_2 . Como $\langle N_1, N_2 \rangle$ é constante ao longo de $\Gamma = \gamma(-\varepsilon, \varepsilon)$, onde γ é uma parametrização por comprimento de arco, derivando $\langle N_1, N_2 \rangle$ obtemos

$$\langle A_1(\gamma'), N_2(\gamma) \rangle + \langle N_1(\gamma), A_2(\gamma') \rangle = 0. \quad (4.10)$$

onde A_1 e A_2 são os respectivos operadores formas em relação às superfícies Σ_1 e Σ_2 . Utilizando a equação do operador forma S_{AR}^i dada em (3.20), temos que

$$A_i(X) = S_{\text{AR}}^i(X) + \alpha_i \langle T_{\theta_i}^i, X \rangle T_{\theta_i}^i - \frac{\alpha_i}{2} \langle T_i, T_i \rangle X.$$

Fazendo a substituição e usando que $\langle S_{\text{AR}}^2(\gamma'), N_1 \rangle = 0$, pois γ é linha de curvatura AR para Σ_2 , a equação (4.10) pode ser reescrita como

$$\alpha_1 \langle T_{\theta_1}^1, \gamma' \rangle \langle T_{\theta_1}^1, N_2 \rangle - \langle S_{\text{AR}}^1(\gamma'), N_2 \rangle - \alpha_2 \langle T_{\theta_2}^2, \gamma' \rangle \langle T_{\theta_2}^2, N_1 \rangle = 0, \quad (4.11)$$

onde $\alpha_i = \frac{\kappa - \tau^2}{2\sqrt{H_i^2 + \tau^2}}$ e $T_{\theta_i}^i = \cos \theta_i T_i + \sin \theta_i J T_i$, $i = 1, 2$.

Note que $N_1 \wedge N_2$ é paralelo à γ' . Faça $|N_1 \wedge N_2| = 1 - d^2$, onde d é o cosseno do ângulo de contato entre Σ_1 e Σ_2 , que é constante. Suponha que $(1 - d^2)^{-1} N_1 \wedge N_2 = \gamma'$. Se este não for o caso, bastaria reparametrizar γ' trocando t por $-t$.

Pelo fato da interseção ser transversal, o conjunto $\{N_1, N_2, \gamma'\}$ forma uma base para o espaço tangente $T_{\gamma(t)}\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ para cada t onde a interseção é transversal. Observamos que por propriedades de determinante $\langle T_{\theta_1}^1, N_1 \wedge N_2 \rangle = \langle N_2, T_{\theta_1}^1 \wedge N_1 \rangle = -\langle N_2, J_1 T_{\theta_1}^1 \rangle$ e analogamente $\langle T_{\theta_2}^2, N_1 \wedge N_2 \rangle = -\langle N_1, J_2 T_{\theta_2}^2 \rangle$ onde $J_i T_{\theta_i}^i = N_i \wedge T_{\theta_i}^i$, para $i = 1, 2$. Então

$$\langle T_{\theta_1}^1, \gamma' \rangle = (1 - d^2)^{-1} \langle T_{\theta_1}^1, N_1 \wedge N_2 \rangle = -(1 - d^2)^{-1} \langle J_1 T_{\theta_1}^1, N_2 \rangle, \quad (4.12)$$

$$\langle T_{\theta_2}^2, \gamma' \rangle = (1 - d^2)^{-1} \langle T_{\theta_2}^2, N_1 \wedge N_2 \rangle = -(1 - d^2)^{-1} \langle J_2 T_{\theta_2}^2, N_1 \rangle. \quad (4.13)$$

Portanto, substituindo (4.12) e (4.13) em (4.11):

$$\begin{aligned} \langle S_{AR}^1(\gamma'), N_2 \rangle &= \frac{(1 - d^2)^{-1}(\kappa - 4\tau^2)}{\sqrt{(H_1^2 + \tau^2)}} \langle T_{\theta_1}^1, N_2 \rangle \langle J_1 T_{\theta_1}^1, N_2 \rangle \\ &\quad - \frac{(1 - d^2)^{-1}(\kappa - 4\tau^2)}{\sqrt{(H_2^2 + \tau^2)}} \langle T_{\theta_2}^2, N_1 \rangle \langle J_2 T_{\theta_2}^2, N_1 \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde foi usada a segunda condição no teorema. Então $\langle S_{AR}^1(\gamma'), N_2 \rangle = 0$ ao longo de Γ . Logo, como já temos que $\langle S_{AR}^1(\gamma'), N_1 \rangle = 0$ ao longo de Γ , pois $\langle N_1, N_1 \rangle$ é constante, temos, pelo fato de que $\{N_1, N_2, \gamma'\}$ é base, que $S_{AR}^1(\gamma') = \lambda \gamma'$, ou seja, que Γ é uma linha de curvatura AR de Σ_2 . A demonstração da outra parte da equivalência é completamente análoga, bastando trocar os índices 1 por 2 na prova dada acima. \square

A segunda condição do lema anterior possui uma interpretação geométrica. Seja β o ângulo (orientado) entre T e X , isto é, $\langle T, X \rangle = |T| \cos \beta$. Então

$$2 \langle T_{\theta}, X \rangle \langle J T_{\theta}, X \rangle = |T|^2 \sin(2(\beta - \theta)).$$

Assim, fazendo ω_{ij} o ângulo orientado entre T_i e $N_j, i \neq j$, temos que a segunda condição no lema 4.1.2 pode ser escrita como

$$\frac{|T_1|^2}{\sqrt{H_1^2 + \tau^2}} \sin(2(\omega_{12} - \theta_1)) = \frac{|T_2|^2}{\sqrt{H_2^2 + \tau^2}} \sin(2(\omega_{21} - \theta_2)). \quad (4.14)$$

Esta condição não ajuda muito a interpretar “visualmente” a condição (ii) do lema 4.1.2, mas felizmente o autor em [19] também percebeu essa dificuldade e encontrou algumas condições geométricas que implicam na condição (ii) dentro dos corolários abaixo. Para isso, temos

Definição 4.1.3. Uma curva γ em uma superfície Σ em $M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ é *horizontal* se está contida em alguma fatia $M^2(\kappa) \times \{\xi_0\}$ para algum $\xi_0 \in \mathbb{R}$. Por outro lado, dizemos que γ é *vertical* se for uma curva integral do campo T .

Corolário 4.1.4. Sejam Σ_1 e Σ_2 duas superfícies de curvatura média constante em $M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ com curvaturas médias H_1 e H_2 , vetores normais N_1 e N_2 e funções ângulo v_1 e v_2 , respectivamente. Seja $\gamma \subset \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ uma curva regular. Suponha que Σ_1 e Σ_2 se intersectam transversalmente ao longo de γ em um ângulo constante e que γ seja linha de curvatura AR de Σ_1 . Assuma que ao longo de γ uma das seguintes condições é válida:

- (i) γ é uma curva horizontal de Σ_1 .
- (ii) γ é uma curva vertical de Σ_1 e Σ_2 .
- (iii) Se $H_1 = H_2 \neq 0$, $v_1 = -v_2$.

Então γ é uma linha de curvatura AR de Σ_2 .

Demonstração. Considerando cada caso, segue sua respectiva prova:

- (i) Suponha que γ esteja parametrizada pelo comprimento de arco. Em $M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ o ângulo θ é nulo, então $T_{\theta_1}^1 = T_1$ e $T_{\theta_2}^2 = T_2$. Observamos que os campos E_3, N_i e T_i estão sempre no mesmo plano. Logo, se γ' é perpendicular a algum deles, será perpendicular aos três. Pelas equações (4.12) e (4.13), temos que

$$\begin{aligned} (1 - d^2)^{-1} \langle J_1 T_{\theta_1}^1, N_2 \rangle &= -\langle T_1, \gamma' \rangle = -\langle E_3, \gamma' \rangle = 0, \\ (1 - d^2)^{-1} \langle J_2 T_{\theta_2}^2, N_1 \rangle &= \langle T_2, \gamma' \rangle = \langle E_3, \gamma' \rangle = 0. \end{aligned}$$

Segue trivialmente que a segunda condição do lema 4.1.2 é satisfeita.

- (ii) Neste caso, podemos assumir que γ foi parametrizada de tal modo que $\gamma' = T_1$ e além disso $\gamma' = \lambda T_2$, para alguma função λ que não se anula. Segue que T^1 é paralelo a T^2 e que

$$\langle T_1, N_2 \rangle = \langle T_2, N_1 \rangle = 0.$$

Novamente, a segunda condição do lema fica satisfeita.

- (iii) Por último, fica claro que a equação (4.14) é satisfeita, já que $v_1 = -v_2$, e esta implica na condição (ii) do lema.

Em qualquer caso, segue pelo lema 4.1.2 que γ é linha de curvatura AR de Σ_2 . \square

Corolário 4.1.5. Sejam Σ_1 e Σ_2 duas H -superfícies em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, $\tau \neq 0$, com vetores normais N_1 e N_2 e funções ângulo v_1 e v_2 , respectivamente. Seja $\gamma \subset \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ uma curva regular. Suponha que Σ_1 e Σ_2 se intersectam ao longo de γ em um ângulo constante. Assuma também que

- (i) Se ambas superfícies são tangentes ao longo de γ , então $N_1 = N_2$ em γ .
- (ii) Se a interseção for transversal, então $v_1 = -v_2$ ao longo de γ .

Então, Γ é uma linha de curvatura AR para Σ_1 se, e somente se, Γ é uma linha de curvatura AR de Σ_2 .

Demonstração. Seja $S_{AR}^i X = A_i(X) - \alpha_i \langle T_{\theta_i}^i, X \rangle T_{\theta_i}^i + \frac{\alpha_i |T_i|^2}{2} X - H_i X$ o operador forma de Abresch-Rosenberg (sem traço) de Σ_i , $i = 1, 2$ e J_1 e J_2 as rotações por um ângulo de noventa graus nos planos tangentes de Σ_1 e Σ_2 respectivamente.

No primeiro caso, temos que $T_{\theta_1}^1 = T_{\theta_2}^2$ ao longo de Γ já que $T_1 \equiv T_2$ e as superfícies possuem a mesma curvatura média H . Além disso, se $\gamma = \gamma(-\varepsilon, \varepsilon)$ então $J_1 \gamma'(t) = J_2 \gamma'(t)$ e portanto $II_{AR}^1(\gamma', J_1 \gamma') = II_{AR}^2(\gamma', J_2 \gamma')$ (omitindo o parâmetro da curva).

Suponha agora que estamos no caso 2, então $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ e, por hipótese, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Nos resta, portanto, verificar a segunda condição do lema 4.1.2

$$\sqrt{H^2 + \tau^2} \langle T_{\theta}^2, N_1 \rangle \langle J_2 T_{\theta}^2, N_1 \rangle = \sqrt{H^2 + \tau^2} \langle T_{\theta}^1, N_2 \rangle \langle J_1 T_{\theta}^1, N_2 \rangle. \quad (4.15)$$

Cancelando a raiz e expandindo a definição de T_{θ}^i chegamos à

$$\begin{aligned} \langle T_{\theta}^2, N_1 \rangle \langle J_2 T_{\theta}^2, N_1 \rangle &= -\cos \theta \sin \theta \langle T_2, N_1 \rangle^2 - \sin^2 \theta \langle J_2 T_2, N_1 \rangle \langle T_2, N_1 \rangle \\ &\quad + \cos^2 \theta \langle T_2, N_1 \rangle \langle J_2 T_2, N_1 \rangle + \sin \theta \cos \theta \langle J_2 T_2, N_1 \rangle^2, \end{aligned} \quad (4.16)$$

e do outro lado

$$\begin{aligned} \langle T_\theta^1, N_2 \rangle \langle J_1 T_\theta^1, N_2 \rangle &= -\cos \theta \sin \theta \langle T_1, N_2 \rangle^2 - \sin^2 \theta \langle J_1 T_1, N_2 \rangle \langle T_1, N_2 \rangle \\ &\quad + \cos^2 \theta \langle T_1, N_2 \rangle \langle J_1 T_1, N_2 \rangle + \sin \theta \cos \theta \langle J_1 T_1, N_2 \rangle^2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Orientamos γ de tal forma que $\{N_1, N_2, \gamma'\}$ seja uma base orientada positivamente de $T_{\gamma(t)}\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ para cada t onde a interseção é transversal, então as seguintes equações são verdadeiras

$$\begin{aligned} \langle J_1 T_1, N_2 \rangle &= -(1-d^2)^{-1} \langle \gamma', T_1 \rangle, \\ \langle J_2 T_2, N_1 \rangle &= (1-d^2)^{-1} \langle \gamma', T_2 \rangle. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ambas equações são obtidas de modo similar. Verificamos, por exemplo, a primeira delas:

$$\langle J_1 T_1, N_2 \rangle = \langle N_1 \wedge T_1, N_2 \rangle = -\langle N_1 \wedge N_2, T_1 \rangle = -\frac{1}{1-d^2} \langle \gamma', T_1 \rangle.$$

Utilizando a hipótese de que $v_1 = -v_2$, obtemos

$$\langle T_2, N_1 \rangle = \langle E_3 - v_2 N_2, N_1 \rangle = v_1 - v_2 d = -v_2 + v_1 d = -\langle T_1, N_2 \rangle.$$

E usando as definições de T_1, T_2 e γ'

$$\langle T_1, \gamma' \rangle = \langle E_3, \gamma' \rangle = \langle T_2, \gamma' \rangle.$$

Resumidamente,

$$\begin{aligned} \langle T_2, N_1 \rangle &= -\langle T_2, N_1 \rangle, \\ \langle T_1, \gamma' \rangle &= \langle T_2, \gamma' \rangle. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Relembrando, gostaríamos de mostrar que (4.16) e (4.17) constituem uma única equação. Pela primeira equação de (4.19), vemos que a primeira parcela de (4.16) é igual a primeira parcela de (4.17). Por um argumento similar e utilizando as equações (4.18), vemos que as últimas parcelas de (4.16) e (4.17) também são iguais. Nos resta mostrar que

$$\begin{aligned} &-\sin^2 \theta \langle J_1 T_1, N_2 \rangle \langle T_1, N_2 \rangle + \cos^2 \theta \langle T_1, N_2 \rangle \langle J_1 T_1, N_2 \rangle \\ &\quad \stackrel{?}{=} \\ &-\sin^2 \theta \langle J_1 T_1, N_2 \rangle \langle T_1, N_2 \rangle + \cos^2 \theta \langle T_1, N_2 \rangle \langle J_1 T_1, N_2 \rangle. \end{aligned}$$

Utilizando as equações (4.19) e (4.18) e fazendo a substituição, concluímos que a expressão acima é de fato uma igualdade. Fica verificada a segunda condição do lema 4.1.2.

Portanto, pelo lema, temos que γ é uma linha de curvatura AR de Σ_1 se e somente se o é uma linha de curvatura de Σ_2 . \square

4.2 Um teorema do tipo Hopf

Seja ω uma imersão do disco unitário \mathbb{D} no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , $\omega : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que seu bordo regular $\Gamma = \omega(\mathbb{S}^1)$ esteja contido em um plano P de \mathbb{R}^3 . Além disso, suponha que ao longo de Γ , o ângulo de interseção entre ω e P seja constante. Um resultado clássico em geometria afirma que sob essas condições a superfície ω será totalmente umbílica. Em uma das provas deste resultado, duas proposições são fundamentais:

1. O teorema de Joachimstahl que afirma que se duas superfícies em \mathbb{R}^3 se intersectam ao longo com uma curva regular Γ e o ângulo entre suas normais é constante ao longo de Γ , então Γ é linha de curvatura de uma se e só se é linha de curvatura da outra.
2. O princípio de reflexão de Schwarz: se f é uma função complexa definida no semi-plano superior $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ e que se estende ao eixo real tal que $f(z) \in \mathbb{R}$ para z real, então f pode ser estendida a uma função analítica no plano inteiro pela fórmula $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.

Em [19], Trejos provou uma generalização deste resultado clássico aos espaços $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ utilizando ideias similares ao caso euclidiano, isto é, utilizando o lema chave (veja 4.1.2), seus corolários e o princípio de reflexão de Schwarz. Abordaremos apenas o caso em que $\tau \neq 0$.

Pelo resto do capítulo denotaremos o disco unitário por $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Consideraremos $\omega : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ uma imersão com curvatura média constante H . Chamaremos este tipo de imersão de um H -disco. Além disso, assumiremos que o bordo Γ de $\omega(\mathbb{D})$ é uma curva diferenciável.

Teorema 4.2.1. Seja $\omega : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$, $\tau \neq 0$, um H -disco com bordo regular. Suponha que o bordo esteja parametrizado por uma curva regular γ e que esta curva tenha um dos tipos abaixo

1. γ é a interseção tangente de uma imersão ω com uma superfície AR Ω com o mesmo vetor curvatura média.
2. γ é a interseção transversal com ângulo constante da imersão ω com uma superfície AR Ω com o mesmo vetor curvatura média e cuja função ângulo seja o oposto da função ângulo da imersão ω ao longo de γ .

Então $\omega(\mathbb{D})$ é parte de uma superfície AR em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

Demonstração. Faça $\omega(\partial\mathbb{D}) = \Gamma$. Como Ω é uma superfície AR, então sua diferencial AR é totalmente nula e pela proposição 4.1.1, temos que Γ é linha de curvatura AR de Ω . Pelas hipóteses sobre o tipo de interseção e pelo corolário 4.1.5, temos que Γ é uma linha de curvatura AR da imersão ω e portanto a parte imaginária da diferencial AR da superfície $\omega(\mathbb{D})$ é nula ao longo de Γ .

Considere a aplicação de Möbius que leva o semiplano superior de \mathbb{C} no disco unitário \mathbb{D} com expressão dada por

$$f(z) = \frac{z-i}{1-iz}.$$

Essa aplicação leva a fronteira do disco na fronteira do semiplano. Pelo fato de f ser um difeomorfismo conforme, tome $Q^{\text{AR}} = Q^{\text{AR}} \circ f$ (definida no semiplano) e observe que pelo fato de Γ ser linha de curvatura de ω , podemos aplicar o princípio da reflexão de Schwarz à Q^{AR} para estender essa diferencial quadrática ao plano complexo \mathbb{C} . Utilizando a projeção estereográfica, puxamos o domínio de Q^{AR} à esfera unitária \mathbb{S}^2 (veja [16]). Como visto na prova do teorema de Hopf no capítulo anterior, uma diferencial quadrática holomorfa sobre a esfera tem que ser constante igual a zero. Segue que $\omega(\mathbb{D})$ é parte de uma superfície AR. \square

Observação 7. Em [19], encontra-se um teorema similar ao teorema 4.2.1 para o caso em que $\tau = 0$. As condições de interseção serão dadas pelas condições do corolário 4.1.4 e sua prova segue de maneira similar utilizando este corolário invés do corolário 4.1.5.

Capítulo 5

Um elo entre a geometria euclidiana e a geometria de Nil_3

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados gerais envolvendo duas métricas distintas agindo sob uma mesma variedade com a particularidade de não requerermos que tais métricas sejam conformes. Depois aplicaremos estes resultados para uma superfície imersa em no espaço euclidiano, denotado simplesmente por \mathbb{R}^3 , para obter uma relação geométrica entre a segunda forma AR e a segunda forma euclidiana. Por último, mostraremos uma relação inesperada entre a geometria diferencial afim e a geometria de Nil_3 .

5.1 Relações entre métricas distintas

Seja $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ a variedade com métrica Riemanniana dada em (1.5) com a condição adicional $\kappa^2 + \tau^2 \neq 0$. Daqui em diante denotaremos esta métrica por \langle, \rangle e seu determinante, isto é, o determinante da matriz em (1.5) será denotado por Δ . Considere uma superfície $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ com a métrica induzida. Então temos seus coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais dados por E, F e G , e, f e g . Denote por N seu campo normal unitário. Considere também em Σ a métrica induzida pela métrica Euclidiana, que passaremos a denotar por $\langle, \rangle_\varepsilon$. Neste caso, denotaremos os coeficientes das formas fundamentais, e também outras informações relacionadas, com um apóstrofo, isto é, E', F', G', N' etc. O principal resultado desta seção é o seguinte:

Proposição 5.1.1. Considerando as notações acima, temos que para qualquer campo X tangente à Σ , vale

$$\langle X, N \rangle = \sqrt{\Delta} \cdot \frac{\langle X, N' \rangle_\varepsilon}{\langle N', N \rangle_\varepsilon}. \quad (5.1)$$

Além disso,

$$\langle N', N \rangle_\varepsilon = \left(\frac{1}{\Delta} \frac{EG - F^2}{E'G' - (F')^2} \right)^{1/2}. \quad (5.2)$$

Como consequência imediata da prova desta proposição, temos

Corolário 5.1.2. Com as notações acima,

$$\langle N, N' \rangle \langle N, N' \rangle_\varepsilon = 1. \quad (5.3)$$

Para a prova destes resultados lembraremos alguns detalhes. No espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , o produto vetorial $X \wedge Y$ de dois campos tangentes é o único campo tal que $\{X, Y, X \wedge Y\}$ é uma base positiva para o espaço e que satisfaz $\langle X \wedge Y, Z \rangle_\varepsilon = \det(X, Y, Z)$ para todo $Z \in \mathbb{R}^3$. Aqui tal determinante é tomado assumindo que os campos envolvidos estejam escritos no referencial canônico do espaço Euclidiano que passaremos a denotar por E'_1, E'_2 e E'_3 . Já em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, consideraremos o referencial ortonormal dado por

$$E_1 = \left(1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2) \right) \partial_x - \tau y \partial_z, \quad E_2 = \left(1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2) \right) \partial_y + \tau x \partial_z \quad \text{e} \quad E_3 = \partial_z.$$

Definimos o produto vetorial de dois campos X e Y tangentes à variedade $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ como sendo o único campo $X \wedge Y$ tal que $\{X, Y, X \wedge Y\}$ é uma base positiva para o espaço e que satisfaz $\langle X \wedge Y, Z \rangle = \det(X, Y, Z)$ para todo campo tangente Z , porém agora para o cálculo de tal determinante, devemos considerar a representação dos campos envolvidos como na base E_1, E_2 e E_3 acima. Observe que ao considerarmos os campos X e Y na base $\{E_j\}$, tomar seu produto interno com a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ equivale a tomar o produto interno Euclidiano considerando a representação na base $\{E_j\}$. Por exemplo, se X é um vetor tangente em $T_p\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ e sua representação na base $\{E'_j\}$ é dada por $X = (x'_1, x'_2, x'_3)$ e na base $\{E_j\}$ é dada por $X = (x_1, x_2, x_3)$, então

$$\langle X, Y \rangle = (x'_1, x'_2, x'_3) \cdot [g_{ij}] \cdot (y'_1, y'_2, y'_3)^T = \sum_{i=1}^3 x_i y_i.$$

Isso pode ser verificado diretamente utilizando a matriz $[g_{ij}]$ da métrica dada em (1.5).

Feito isso, podemos provar o seguinte resultado:

Proposição 5.1.3. Com a notação acima e campos tangentes X, Y e Z , temos

$$\langle X \wedge Y, Z \rangle = \sqrt{\Delta} \langle X \wedge Y, Z \rangle_\varepsilon.$$

Demonstração. A primeira coisa que observamos é que a matriz β de mudança de base $\{E'_j\}$ para a base $\{E_j\}$ é simplesmente

$$\beta = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)\right) & 0 \\ -\tau y & \tau x & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

que possui determinante $\det \beta = (1 + \kappa(x^2 + y^2)/4)^2$ e o determinante da métrica \langle, \rangle é dado por $\Delta = (\det \beta)^2$. Assim, $\langle X \wedge Y, Z \rangle = \det(X, Y, Z)$ considerando os campos X, Y, Z escritos na base $\{E_j\}$. Observe que $X = \beta \cdot \beta^{-1}X$, e analogamente para Y e Z . Note que $\beta^{-1}X$ é simplesmente o campo X escrito na base $\{E'_j\}$. Então

$$\begin{aligned} \langle X \wedge Y, Z \rangle &= \det(X, Y, Z) \\ &= \det \beta \cdot \det(\beta^{-1}X, \beta^{-1}Y, \beta^{-1}Z) \\ &= \sqrt{\Delta} \langle X \wedge' Y, Z \rangle_{\varepsilon}. \end{aligned}$$

□

Podemos então fazer a

prova da proposição 5.1.1. Se (u, v) são coordenadas para a superfície Σ , então para qualquer campo X tangente à Σ , temos

$$\begin{aligned} \langle X, N \rangle &= \frac{1}{|\partial_u \wedge \partial_v|} \langle X, \partial_u \wedge \partial_v \rangle \\ &= \frac{1}{(EG - F^2)^{1/2}} \langle X, \partial_u \wedge \partial_v \rangle \\ &= \left(\frac{\Delta}{EG - F^2} \right)^{1/2} \langle X, \partial_u \wedge' \partial_v \rangle_{\varepsilon} \\ &= \sqrt{\Delta} \left(\frac{E'G' - (F')^2}{EG - F^2} \right)^{1/2} \langle X, N' \rangle_{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde na igualdade com estrela, usamos a proposição 5.1.3 e na última igualdade multiplicamos e dividimos por um mesmo fator apropriado, no caso, $(E'G' - F'^2)^{1/2}$.

Similarmente, temos

$$\begin{aligned}
 \langle N', N \rangle &= \frac{1}{(EG - F^2)^{1/2}} \langle \partial_u \wedge \partial_v, N' \rangle \\
 &= \left(\frac{\Delta}{EG - F^2} \right)^{1/2} \langle \partial_u \wedge \partial_v, N' \rangle_\varepsilon \\
 &= \left(\Delta \cdot \frac{E'G' - (F')^2}{EG - F^2} \right)^{1/2} \langle N', N' \rangle_\varepsilon \\
 &= \left(\Delta \cdot \frac{E'G' - (F')^2}{EG - F^2} \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Assim, fazendo uma simples substituição na equação (5.5), verificamos as duas igualdades da proposição. \square

Quanto à prova do corolário 5.1.2, basta repetir o desenvolvimento de $\langle N, N' \rangle_\varepsilon$ para $\langle N, N' \rangle$ e verificar diretamente que um é o inverso multiplicativo do outro.

5.2 Aplicação ao Grupo de Heisenberg

Quando o espaço $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ é o grupo de Heisenberg, isto é, $\kappa = 0$ e $\tau = 1/2$, temos que a matriz β da seção anterior tem determinante 1. A primeira equação da proposição 5.1.1 também fica mais simples. Nesta seção provaremos o seguinte resultado que relaciona as segundas formas euclidianas e de Abresch Rosenberg:

Proposição 5.2.1. Seja Σ uma superfície mínima em Nil_3 . Então

$$II_{\text{AR}}(X, Y) = \left(\frac{E'G' - (F')^2}{EG - F^2} \right)^{1/2} II_\varepsilon(X, Y). \quad (5.6)$$

Aqui os coeficientes com linha se referem à primeira forma Euclidiana e os coeficientes sem linha se referem à primeira forma de Nil_3 . II_ε é a segunda forma Euclidiana.

O resto desta seção será voltada para a prova da proposição acima.

Lema 5.2.2. Suponha que Σ seja orientável e esteja parametrizada por um sistema de coordenadas isotérmicas, isto é, $E = G$ e $F = 0$. Além disso, suponha que sejam satisfeitas

as hipóteses da proposição 5.2.1, trocando X e Y por ∂_x ou ∂_y então valem as igualdades:

$$\begin{aligned} II_{\text{AR}}(\partial_x, \partial_x) &= II(\partial_x, \partial_x) + \langle \partial_x, E_3 \rangle \langle \partial_y, E_3 \rangle, \\ II_{\text{AR}}(\partial_x, \partial_y) &= II(\partial_x, \partial_y) + \frac{\langle \partial_y, E_3 \rangle^2 - \langle \partial_x, E_3 \rangle^2}{2} \quad \text{e} \\ II_{\text{AR}}(\partial_y, \partial_y) &= II(\partial_y, \partial_y) - \langle \partial_x, E_3 \rangle \langle \partial_y, E_3 \rangle. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Demonstração. Pelo fato de $E = G$ e $F = 0$, temos que $\langle \partial_x \wedge N, T \rangle = -\langle \partial_y, T \rangle = -\langle \partial_y, E_3 \rangle$. Analogamente, $\langle \partial_y \wedge N, T \rangle = \langle \partial_x, T \rangle = \langle \partial_x, E_3 \rangle$. Assim, utilizando propriedades de determinante e o fato de que $\langle N \wedge T, \partial_x \rangle$ é um determinante, temos

$$\langle JT, \partial_x \rangle = \langle N \wedge T, \partial_x \rangle = \langle \partial_x \wedge N, T \rangle = -\langle \partial_y, E_3 \rangle, \quad (5.8)$$

$$\langle JT, \partial_y \rangle = \langle N \wedge T, \partial_y \rangle = \langle \partial_y \wedge N, T \rangle = \langle \partial_x, E_3 \rangle. \quad (5.9)$$

Como $H \equiv 0$ e em Nil_3 , $\kappa = 0$ e $\tau = \frac{1}{2}$, temos que os coeficientes na equação da segunda forma AR são dados por

$$\alpha = -1 \quad \text{e} \quad \theta \equiv -\frac{\pi}{4}.$$

Assim, abrindo as contas na expressão da segunda forma AR em (3.19) e usando as equações (5.8) e (5.9), obtemos

$$II_{\text{AR}}(\partial_x, \partial_y) - II(\partial_x, \partial_y) = \frac{1}{2} (\langle \partial_y, E_3 \rangle \langle \partial_y, E_3 \rangle - \langle \partial_x, E_3 \rangle \langle \partial_x, E_3 \rangle)$$

onde gostaríamos de chegar. Para provarmos o restante das equações em (5.7), escreva o campo ∂_x na base $\{T, JT\}$. Utilizando o teorema do triângulo retângulo, verifica-se com pouca dificuldade que

$$\langle \partial_x, \partial_x \rangle \langle T, T \rangle = \langle \partial_x, T \rangle^2 + \langle \partial_x, JT \rangle^2. \quad (5.10)$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\langle \partial_x, T - JT \rangle \langle \partial_y, T - JT \rangle - \langle T, T \rangle \langle \partial_x, \partial_y \rangle \\ &= \langle \partial_x, T \rangle^2 - 2 \langle \partial_x, JT \rangle \langle \partial_x, T \rangle + \langle \partial_x, JT \rangle^2 - \langle T, T \rangle \langle \partial_x, \partial_x \rangle. \\ &= -2 \langle \partial_x, T \rangle \langle \partial_x, JT \rangle, \end{aligned} \quad (5.11)$$

onde na última igualdade se utilizou a equação (5.10). Expandindo a expressão da segunda forma AR, utilizando (5.11) e lembrando do fator $1/2$, obtemos

$$\begin{aligned} II_{\text{AR}}(\partial_x, \partial_x) &= II(\partial_x, \partial_y) - \langle \partial_x, T \rangle \langle \partial_x, JT \rangle \\ &= II(\partial_x, \partial_x) + \langle \partial_x, E_3 \rangle \langle \partial_y, E_3 \rangle. \end{aligned}$$

Por analogia, trocando ∂_x por ∂_y e tomando cuidado com o sinal dos produtos vetoriais do tipo $\partial_x \wedge N$ que aparecem, obtemos

$$II_{AR}(\partial_y, \partial_y) = II(\partial_y, \partial_y) - \langle \partial_x, E_3 \rangle \langle \partial_y, E_3 \rangle.$$

□

A partir de agora, suponha que Σ seja uma superfície em Nil_3 que passa pela origem. Se este não for o caso, basta considerar um ponto $p \in \Sigma$ e tomar a translação à esquerda p^{-1} , que é uma isometria. Denotaremos a nova superfície assim obtida também pelo símbolo Σ .

Definimos o referencial Euclidiano por

$$E'_1 = \partial_x = (1, 0, 0) \quad E'_2 = \partial_y = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad E'_3 = \partial_z = (0, 0, 1).$$

Observação 8. Observe que pelo fato dos referenciais $\{E_j\}$ e $\{E'_j\}$ coincidirem na origem, o fato de $E = G$ e $F = 0$ implica em $E' = G'$ e $F' = 0$ na origem.

Neste caso, os símbolos de Christoffel não nulos relacionados ao referencial $\{E'_i\}$ na origem são dados por

$$\Gamma_{23}^1 = \Gamma_{32}^1 = -\Gamma_{13}^2 = -\Gamma_{31}^2 = \frac{1}{2}. \quad (5.12)$$

Com isto em mente e escrevendo $\partial_x = X^i E'_i$, $\partial_y = Y^j E'_j$ e $N = N^k E'_k$, podemos decompor a conexão ∇ de Nil_3 em

$$\nabla_{\partial_x} \partial_y = \left(X^i Y^j \Gamma_{ij}^k + X(Y^k) \right) E'_k = \nabla^\varepsilon_{\partial_x} \partial_y + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k E'_k,$$

onde ∇^ε é a conexão Euclidiana. Então

$$\begin{aligned} II(\partial_x, \partial_y) &= \langle \nabla^\varepsilon_{\partial_x} \partial_y, N \rangle + \langle X^i Y^j \Gamma_{ij}^k E'_k, N \rangle \\ &= \frac{\langle \nabla^\varepsilon_{\partial_x} \partial_y, N' \rangle_\varepsilon}{\langle N', N' \rangle_\varepsilon} - \frac{(X^2 Y^3 + X^3 Y^2) N^1 - (X^1 Y^3 + X^3 Y^1) N^2}{2}, \end{aligned}$$

onde na última igualdade utilizamos as relações em (5.12) e a proposição 5.1.1.

Observe que

$$\begin{aligned} (X^2 Y^3 + X^3 Y^2) N^1 - (X^1 Y^3 + X^3 Y^1) N^2 &= X^3 (Y^2 N^1 - Y^1 N^2) + Y^3 (X^2 N^1 - X^1 N^2) \\ &= \langle \partial_x, E'_3 \rangle \langle N \wedge \partial_y, E'_3 \rangle + \langle \partial_y, E'_3 \rangle \langle N \wedge \partial_x, E'_3 \rangle \\ &= \langle \partial_y, E'_3 \rangle^2 - \langle \partial_x, E'_3 \rangle^2. \end{aligned}$$

Então

$$II(\partial_x, \partial_y) = \frac{\langle \nabla^\varepsilon \partial_x \partial_y, N' \rangle_\varepsilon}{\langle N', N \rangle_\varepsilon} - \frac{\langle \partial_y, E'_3 \rangle^2 - \langle \partial_x, E'_3 \rangle^2}{2}. \quad (5.13)$$

Uma conta similar mostra que

$$II(\partial_x, \partial_x) = \frac{\langle \nabla^\varepsilon \partial_x \partial_x, N' \rangle_\varepsilon}{\langle N', N \rangle_\varepsilon} - \langle \partial_x, E'_3 \rangle \langle \partial_y, E'_3 \rangle \quad (5.14)$$

$$II(\partial_y, \partial_y) = \frac{\langle \nabla^\varepsilon \partial_y \partial_y, N' \rangle_\varepsilon}{\langle N', N \rangle_\varepsilon} + \langle \partial_x, E'_3 \rangle \langle \partial_y, E'_3 \rangle. \quad (5.15)$$

Com as duas equações acima, a equação (5.13) e o lema 5.2.2, segue, por linearidade, que

Lema 5.2.3. Se Σ é uma superfície que passa pela origem, então para quaisquer campos X e Y em $T_0\Sigma$, vale que

$$II_{\text{AR}}(X, Y) = \left(\frac{E'G' - (F')^2}{EG - F^2} \right)^{1/2} II_\varepsilon(X, Y). \quad (5.16)$$

Resta agora provarmos que vale a equação (5.16) para campos em $T_p\Sigma$ para qualquer $p \in \Sigma$ e com isto ficará provada a proposição 5.2.1.

De fato, seja Σ uma superfície que passa pela origem e considere φ a translação à esquerda de Nil_3 que leva $(0, 0, 0)$ à um ponto p qualquer. Vimos que φ é uma isometria de Nil_3 . Com isso, o lado esquerdo de (5.16) será preservado, isto é, $\varphi^* II_{\text{AR}}(X(0), Y(0)) = II_{\text{AR}}(\varphi^* X(p), \varphi^* Y(p))$, onde φ^* é o push-forward por φ .

Para vermos que o lado direito não mudará de forma, o reescrevemos da seguinte forma utilizando a proposição 5.1.1

$$\left(\frac{E'G' - (F')^2}{EG - F^2} \right)^{1/2} II_\varepsilon(X, Y) = \frac{\langle \nabla^\varepsilon_X Y, N' \rangle_\varepsilon}{\langle N', N \rangle_\varepsilon} = \langle \nabla^\varepsilon_X Y, N \rangle.$$

Observe que a isometria φ de Nil_3 é uma transformação linear composta com uma translação de \mathbb{R}^3 . Explicitamente, se $p = (a, b, c)$, sua diferencial é dada por

$$d\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b/2 & -a/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Denotando por ψ a parametrização local de Σ de um aberto contendo a origem do espaço, podemos parametrizar $\tilde{\Sigma} = \varphi(\Sigma)$ (que passa por p) por $\tilde{\psi} = \varphi \circ \psi$. Então denotamos os campos coordenados

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_x &= d(\varphi \circ \psi)(1, 0) = d\varphi(\partial_x), \\ \tilde{\partial}_y &= d(\varphi \circ \psi)(0, 1) = d\varphi(\partial_y). \end{aligned}$$

Uma conta direta mostra que $\varphi^* \nabla^\varepsilon_{\partial_x} \partial_y = \nabla^\varepsilon_{\tilde{\partial}_x} \tilde{\partial}_y$. Assim, por φ ser uma isometria de Nil_3 , segue

$$\varphi^* \langle \nabla^\varepsilon_{\partial_x} \partial_y, N \rangle = \langle \varphi^* \nabla^\varepsilon_{\partial_x} \partial_y, \tilde{N} \rangle = \langle \nabla^\varepsilon_{\tilde{\partial}_x} \tilde{\partial}_y, \tilde{N} \rangle = \frac{\langle \nabla^\varepsilon_{\tilde{\partial}_x} \tilde{\partial}_y, N' \rangle_\varepsilon}{\langle N', \tilde{N} \rangle_\varepsilon},$$

onde na última igualdade usamos a proposição 5.1.1. Por esta mesma proposição, vemos que o fator $1/\langle N', \tilde{N} \rangle_\varepsilon$ é o quociente entre os elementos de área. Assim terminamos a demonstração da proposição 5.2.1.

5.3 Invariância por $SL_3(\mathbb{R})$

O grupo de isometrias de Nil_3 é gerado pelas translações à esquerda, que possuem dimensão 3, e rotações em torno do eixo z que é uma transformação linear. Note que a expressão da segunda forma AR (3.19) é invariante por essas transformações. Portanto, concluímos que a integral abaixo é invariante pelas isometrias de Nil_3 :

$$\int_{\Sigma} K_{\text{AR}}^{(1/4)} dA_{\text{Nil}_3}, \quad (5.17)$$

onde estamos impondo que a curvatura extrínseca AR $K_{\text{AR}} = \frac{e_{\text{ARGAR}} - f_{\text{AR}}^2}{EG - F^2}$ é maior que zero e dA_{Nil_3} é o elemento de área de Nil_3 .

Note que pela equação (5.6), curvatura Euclidiana pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &= \frac{e'g' - f'^2}{E'G' - F'^2} = \left(\frac{EG - F^2}{E'G' - F'^2} \right) \frac{e_{AR}g_{AR} - f_{AR}^2}{E'G' - F'^2} \\ &= \left(\frac{EG - F^2}{E'G' - F'^2} \right)^2 K_{AR}, \end{aligned}$$

ou seja, tirando a raiz quarta e tomando a integral, obtemos

$$\int_{\Sigma} K_{AR}^{(1/4)} dA_{Nil_3} = \int_{\Sigma} K_\varepsilon^{(1/4)} dA_\varepsilon, \quad (5.18)$$

onde dA_ε é o elemento de área Euclidiano. Por esta igualdade, vemos que a integral (5.17) também é invariante por isometrias do espaço Euclidiano.

Aqui pode-se mostrar uma relação curiosa entre a geometria de Nil_3 e a geometria diferencial afim através de suas isometrias. Em [4], temos que as isometrias da geometria diferencial afim são dadas por transformações do tipo $Ax + b$ onde A é um elemento de $SL_3(\mathbb{R})$. Além disso, o autor do artigo mostra a seguinte relação entre os elementos de área da geometria diferencial afim e Euclidiana

$$dA_{afim} = K_\varepsilon^{(1/4)} dA_\varepsilon. \quad (5.19)$$

Com esta relação e a igualdade (5.18), obtemos que a integral (5.17) é invariante por um grupo de isometrias maior do que o esperado, isto é, do espaço ambiente. Fica provada a

Proposição 5.3.1. A integral em $\Sigma \subset Nil_3$ da raiz quarta da curvatura $K_{AR} > 0$

$$\int_{\Sigma} K_{AR}^{(1/4)} dA_{Nil_3} \quad (5.20)$$

é invariante pela ação do grupo $SL_3(\mathbb{R})$.

Observação 9. Observamos que em [4], o autor assumiu que a curvatura Euclidiana da superfície em questão é estritamente positiva e portanto também o fizemos aqui.

Observação 10. Uma situação bem conhecida onde se verifica que um funcional é invariante por um grupo maior de transformações acontece com o funcional de Willmore dado por

$$W = \int_{\Sigma} H^2 dA_\varepsilon.$$

Tal funcional é certamente invariante pelas rotações do espaço Euclidiano, mas em [3] provou-se que este funcional é invariante por um conjunto maior de transformações, isto é, além daquelas que são as isometrias do espaço ambiente.

Referências Bibliográficas

- [1] Abresch, U. and Rosenberg, H. (2005). Generalized hopf differentials. *Mat. Contemp*, 28(1):1–28.
- [2] Bonnet, O. (1853). Mémoire sur la théorie générale des surfaces. *J. Ecole Polytechnique* 35.
- [3] Bryant, R. (1984). A duality theorem for wilmore surfaces. *J. Differential Geometry* 20, pages 23 – 53.
- [4] Calabi, E. (1982). Hypersurfaces with maximally invariant area. *American Journal of Mathematics*, Vol. 104, No. 1, pages 91 – 126.
- [5] Chern, S.-S. (1955). An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 6(5):771–782.
- [6] Daniel, B. (2005). Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds. *arXiv preprint math/0503500*.
- [7] Dillen, F., Fastenakels, J., Van der Veken, J., and Vrancken, L. (2007). Constant angle surfaces in $s^2 \times \mathbb{R}$. *Monatshefte für Mathematik*, 152(2):89–96.
- [8] Dillen, F. and Munteanu, M. I. (2009). Constant angle surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Bull. Braz. Math. Soc*, 40(1):85–97.
- [9] do Carmo, M. P. (2015). *Geometria Riemanniana*. IMPA.
- [10] do Carmo, M. P. (2016). *Differential Geometry of Curves and Surfaces: Revised and Updated Second Edition*. Courier Dover Publications.
- [11] Espinar, J. M. and Trejos, H. A. (2015). The abresch-rosenberg shape operator and applications. *arXiv preprint arXiv:1512.02099*.
- [12] Fastenakels, J., Munteanu, M. I., and Van Der Veken, J. (2011). Constant angle surfaces in the heisenberg group. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 27(4):747–756.
- [13] Figueroa, C. B., Mercuri, F., and Pedrosa, R. (1999). Invariant surfaces of the heisenberg groups. *Annali di Matematica pura ed applicata (IV)*, vol CLXXVII, pages 173 – 194.
- [14] Hopf, H. (2003). *Differential geometry in the large: seminar lectures New York University 1946 and Stanford University 1956*, volume 1000. Springer.

-
- [15] Joachimsthal, F. (1846). Demonstrationes theorematum ad superficies curvas spectantium. *J. Reine Angew. Math.* 30, pages 347 – 350.
- [16] Jost, J. (2008). *Riemannian geometry and geometric analysis*, volume 42005. Springer.
- [17] Milnor, T. K. (1980). Abstract weingarten surfaces. *J. Differential Geom.* 15 (1980), no. 3, pages 365 – 380.
- [18] Plehnert, J. (2012). *Constant Mean Curvature Surfaces in Homogeneous Manifolds*. Logos Verlag Berlin.
- [19] Trejos, H. A. (2017). Capillary immersions in $e(k,t)$. *arXiv preprint arXiv:1703.07201*.