

**IMPLEMENTAÇÃO E APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO COM RECIPROCIDADE DUAL EM PROBLEMAS DE POTENCIAL**

ÉLIDA GOMES PIRES

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHERIA CIVIL E AMBIENTAL**

**IMPLEMENTAÇÃO E APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS
DE CONTORNO COM RECIPROCIDADE DUAL EM PROBLEMAS DE
POTENCIAL**

ÉLIDA GOMES PIRES

ORIENTADOR: DSc. GILBERTO GOMES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

PUBLICAÇÃO:

**BRASÍLIA/DF: MARÇO – 2018
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**IMPLEMENTAÇÃO E APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS
DE CONTORNO COM RECIPROCIDADE DUAL EM PROBLEMAS DE
POTENCIAL**

ÉLIDA GOMES PIRES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADA POR:

Prof. DSc. Gilberto Gomes
(Orientador)

Prof. DSc. Márcio Augusto Roma Buzar
(Examinador Externo)

Prof. PhD Luciano Mendes Bezerra
(Examinador Interno)

BRASÍLIA/DF, 23 DE MARÇO DE 2018.

FICHA CATALOGRÁFICA

PIRES, ÉLIDA GOMES.
IMPLEMENTAÇÃO E APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO COM RECIPROCIDADE DUAL EM PROBLEMAS DE POTENCIAL
[Distrito Federal] 2018.

xvii, 108 p., 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2018).
Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Método dos Elementos de Contorno	2. Método de Reciprocidade Dual
3. Potencial	4. Matlab.
I. ENC/FT/UnB	II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

PIRES, E. G. (2018). IMPLEMENTAÇÃO E APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM RECIPROCIDADE DUAL EM PROBLEMAS DE POTENCIAL. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil. Publicação E.DM - 5A/18, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 108 p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Élide Gomes Pires

TÍTULO: Implementação e aplicação do método dos elementos de contorno com reciprocidade dual em problemas de potencial.

GRAU: Mestre ANO: 2018

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Élide Gomes Pires
Rua E, L. 15, Qd. E, - Setor São Paulo
75.460-000 Nerópolis - GO- Brasil
E-mail: elidagomespires@hotmail.com

Dedico esta, bem como todas as minhas demais conquistas, aos meus amados pais Maria de Lourdes e Bertolino Pires.

AGRADECIMENTOS

Inicio meus agradecimentos à DEUS, por toda a força concedida na concretização desse sonho.

Aos meus pais, Maria de Lourdes e Bertolino Pires, meu infinito agradecimento. Sempre acreditaram em minha capacidade me dando forças para não desistir. Vocês nunca mediram esforços para realizar meus sonhos e vontades. Tudo o que pedi vocês sempre fizeram o possível e o impossível para tornar real. Obrigada pelo amor incondicional!

Ao meu irmão Erick que sempre está do meu lado me aconselhando, me apoiando e me ajudando nas minhas decisões. Obrigada pelo amor incondicional!

Ao meu orientador, Professor Gilberto Gomes, por toda a paciência, apoio e disponibilidade manifestada que contribuíram decisivamente para concluir essa dissertação (não há de existir palavras para agradecer...).

Aos meus amigos João Stival, Elizeth e Marcello pelo apoio e por entenderem a minha ausência nos momentos importantes. Obrigada pela amizade!

Ao meu amigo Robson pelo companheirismo, mas acima de tudo pela força, pela disponibilidade com que sempre me ajudou e pelo auxílio no mestrado. Obrigada pela amizade!

Aos meus amigos do mestrado, Ronivon, Stephanie, Fernanda, Ricardo, amigos que estiveram do meu lado durante essa fase, pela força e apoio em certos momentos difíceis.

A UnB e ao PECC pela estrutura e ao apoio proporcionado.

RESUMO

IMPLEMENTAÇÃO E APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM RECIPROCIDADE DUAL EM PROBLEMAS DE POTENCIAL

Autor: Élide Gomes Pires

Orientador: Gilberto Gomes

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, março de 2018

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é atualmente uma das técnicas de solução numérica mais importante para o tratamento de problemas físicos, cujos modelos matemáticos são conduzidos por equações diferenciais parciais. Seu princípio básico é apresentar uma solução aproximada do problema proposto através da discretização exclusiva no contorno físico envolvido, transformando as equações diferenciais que são válidas para cada domínio do problema em equações de fronteira integrais. Quando não é possível levar em consideração todos os termos da equação governante, termos não considerados na obtenção da solução fundamental irão produzir integrais de domínio que, de preferência, serão transformadas em integrais de fronteira. Uma alternativa é substituir os efeitos da integral de domínio pela integral de contorno usando o Método de Reciprocidade Dual (MRD).

Neste contexto, o presente trabalho propõe-se ao estudo e à aplicação do MEC/MRD em problemas de Potencial, regidos pela Equação de Poisson, no qual se fez uso da interface gráfica BEMLAB2D, para modelagem físico-geométrica do problema, bem como implementou-se um programa chamado BEMPOTENTIAL, escrito em linguagem MATLAB. Para validar e calibrar o programa implementado, exemplos clássicos da literatura aberta foram utilizados e, como aplicação final, a modelagem do fluxo de calor de uma placa de argamassa fissurada, submetida a um ciclo de aquecimento direto, objetivando analisar o comportamento térmico do corpo, especificamente a distribuição de temperatura em regime quase-transiente.

Palavras-Chaves: Método dos elementos de contorno; Método de Reciprocidade Dual; Potencial; MATLAB;

ABSTRACT

IMPLEMENTATION AND APPLICATION OF THE METHOD OF CONTOUR ELEMENT WITH DUAL RECIPROCITY IN POTENTIAL PROBLEMS

Author: Élide Gomes Pires

Supervisor: Gilberto Gomes

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasilia, march of 2018

The Boundary Element Method (BEM) is currently one of the most important numerical solution techniques for the treatment of physical problems, where mathematical models are generally driven by partial differential equations. Its basic principle is to present an approximate solution of the proposed problem through the exclusive discretization in the physical contour involved, in the BEM the differential equations valid for the domain of the problem into integral boundary equations. When it is not possible to take into account all the terms of the governing equation, terms not considered in obtaining the fundamental solution will produce domain integrals that will preferably be transformed into boundary integrals. An alternative is to replace the integral domain to the integrals boundary using the Dual Reciprocity Method (DRM).

In this context, the present work proposes the study and the application to the MEC / MRD in Potential problems, governed by the Poisson Equation. Graphical Interface BEMLAB2D has been used for physical modeling of the problem, and a new program named BEMPOTENTIAL, was written in MATLAB language. To validate and calibrate the implemented program, classic examples of the open literature were used and, as final application, the heat flow modeling of a cracked mortar board, submitted to a direct heating cycle, and the solution to analyze the thermal body behavior, specifically the temperature distribution without consideration of the transient.

Key words: Boundary Element Method, Dual Reciprocity Method, Potential, MATLAB.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1- Definição geométrica do problema (BREBBIA e DOMINGUEZ, 1989).....	7
Figura 2.2-Pontos de contorno para o caso bi e tridimensional, aumentado por um pequeno hemisfério ou semicírculo. (BREBBIA e DOMINGUEZ,1989)	10
Figura 2.3- Diferentes tipos de elementos de contorno: (a) Constante; (b) Linear; (c) Quadrático. (BREBBIA e DOMINGUEZ,1989)	11
Figura 3.1- Tela Inicial do BemLab2D	22
Figura 3.2- Módulo III – Boundary Condition	24
Figura 3.3- GUI-Temperature.....	24
Figura 3.4 - GUI-Flow	25
Figura 3.5- Estrutura modular para o programa BEMPOTENTIAL.....	26
Figura 3.6- A Janela de Comandos.....	34
Figura 4.1– Geometria do problema de Benchmark (Fonte: Partridge et.al, 1992)	35
Figura 4.2– Modelo geométrico, malha e condições de contorno do Exemplo 1.	36
Figura 4.3– Tipo de função b e correspondente valor.....	36
Figura 4.4- Modelo físico-geométrico e modelo discretizado para o exemplo 1.	37
Figura 4.5– Modelo físico-geométrico e modelo discretizado para o exemplo 2.	39
Figura 4.6 – Tipo de função b e correspondente valor.....	39
Figura 4.7- Gráfico comparativo dos resultados de fluxo em pontos do contorno obtidos pelo programa BEMPOTENCIAL e pela solução exata do exemplo 2.	40
Figura 4.8 - Gráfico comparativo dos resultados de temperatura em pontos internos obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata.	41
Figura 4.9 – Tipo de função $b = x^2$	42
Figura 4.10 - Gráfico comparativo dos resultados de fluxo em pontos do contorno obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata para $bx, y = -x$	43
Figura 4.11 - Gráfico comparativo dos resultados de temperatura em pontos internos obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata para $bx, y = -x$	44
Figura 4.12 Tipo de função $b = x^2$	45
Figura 4.13- Gráfico comparativo dos resultados de fluxo em pontos do contorno obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata para $bx, y = -x^2$	46
Figura 4.14 - Gráfico comparativo dos resultados de temperatura em pontos internos obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata para $bx, y = -x^2$	47
Figura 4.15 – Tipo de função $b = cte + x^2$	48

Figura 4.16- Gráfico comparativo dos resultados de fluxo em pontos do contorno obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata para $bx, y = 4-x^2$	49
Figura 5.1 - Detalhamento da placa.....	51
Figura 5.2. – (a) Cenário 1: Fissuras com fluxo zero ($q = 0$) - MPFA; (b) Cenário 2: Fissuras com fluxo diferente de zero ($q = cc4$) - MPFA	60
Figura 5.3. – Distribuição de temperaturas para o corte.....	67
Figura 5.4 – Solução de temperatura na faixa de contorno	68
Figura 5.5 – Valores de temperatura em pontos internos para cada alinhamento vertical e horizontal.....	68
Figura 5.6– Pontos do contorno da fissura F2 - MPFA.....	69
Figura 5.7 – Pontos do contorno da Fissura F1 – MPFA	70
Figura 5.8 – Comparativo entre o modelo referência e o modelo MPFA – F2.....	72
Figura 5.9 – Comparativo entre o modelo referência e o modelo MPFA – F1	72
Figura 5.10 – Pontos do contorno da fissura F2 - MPFR	73
Figura 5.11 Pontos do contorno da Fissura F1-MPFR	74
Figura 5.12 – Comparativo entre o modelo referência e o modelo MPFR – F2	57
Figura 5.13. – Comparativo entre o modelo referência e o modelo MPFR – F1	76
Figura 9.1 - Geometria da placa retangular com duas fissuras angulares	85
Figura 9.2 - Janela para entrada dos valores dos limites do visualizador do BemLab2D	86
Figura 9.3 - Janela para entrada para escolher a opção: Tipos de elementos	86
Figura 9.4 - Pontos de referência utilizados para a construção do modelo geométrica	87
Figura 9.5 - Caixa de diálogo das coordenadas X e Y	88
Figura 9.6 - Pontos de referência criados	88
Figura 9.7 - Segmentos de reta	89
Figura 9.8 - Definição de zona mestre do problema.....	89
Figura 9.9 - Janela para atribuir o número de elementos lineares em um segmento reto.....	90
Figura 9.10 - caixa de diálogo para inserir a coordenadas dos pontos internos	90
Figura 9.11 – Modelo geométrico final	91
Figura 9.12- Caixa de diálogo para inserir o valor da condição de contorno por linha	91

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1- Resultado da temperatura para o ponto interno.....	37
Tabela 4.2- Resultados de fluxo em pontos do contorno obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata.	40
Tabela 4.3 - Resultados de temperatura em pontos do internos obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata do exemplo 2.....	41
Tabela 4.4 - Resultados de fluxo em pontos do contorno obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata para $bx, y = -x$	43
Tabela 4.5 - Resultados de temperatura em pontos internos obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata para $bx, y = -x$	44
Tabela 4.6- Resultados de fluxo em pontos do contorno obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata para $bx, y = -x^2$	46
Tabela 4.7 - Resultados de temperatura em pontos internos obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata <i>para</i> $bx, y = -x^2$	47
Tabela 4.8 - Resultados de fluxo em pontos do contorno obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata <i>para</i> $bx, y = 4-x^2$	49
Tabela 4.9 - Resultados de temperatura em pontos internos obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata <i>para</i> $bx, y = 4-x^2$	50
Tabela 5.1 – Propriedades hidrotérmicas dos materiais (Fonte: Nascimento, 2016)	54
Tabela 5.2 - Pontos e Coordenadas dos alinhamentos horizontais (A, B, C, D e E) do modelo referência	56
Tabela 5.3 - Pontos e Coordenadas do alinhamento vertical (F) do modelo de referência	57
Tabela 5.4: Temperatura no Contorno com fluxo zero do modelo de referência.....	58
Tabela 5.5 - Resultados de temperatura dos alinhamentos (A, B, C, D e E) obtidos pelo BEMPOTENCIAL do modelo referência.....	58
Tabela 5.6 – Resultado da temperatura para o alinhamento vertical (F) do modelo referência	59
Tabela 5.7 - Temperatura no Contorno com fluxo zero do modelo I (MPFA)	61
Tabela 5.9 – Resultados de temperatura dos alinhamentos (A, B, C, D e E) obtidos pelo BEMPOTENCIAL do modelo I (MPFA) – cenário 1	61
Tabela 5.10 – Resultado da temperatura para o alinhamento vertical (F) do modelo I (MPFA) – cenário 1	62

Tabela 5.11 – Resultados de temperatura dos alinhamentos (A, B, C, D e E) obtidos pelo BEMPOTENCIAL do modelo I (MPFA) – cenário 2	62
Tabela 5.12 – Resultado da temperatura para o alinhamento vertical (F) do modelo I (MPFA) – cenário 2	62
Tabela 5.13 – Temperatura no Contorno com fluxo zero do modelo II (MPFR)	64
Tabela 5.14 – Resultados de temperatura dos alinhamentos (A, B, C, D e E) obtidos pelo BEMPOTENCIAL do modelo II (MPFR) – cenário 1	64
Tabela 5.15 – Resultado da temperatura para o alinhamento vertical (F) do modelo II (MPFR) – cenário 1	65
Tabela 5.15 – Resultados de temperatura dos alinhamentos (A, B, C, D e E) obtidos pelo BEMPOTENCIAL do modelo II (MPFR) – cenário 2	65
Tabela 5.16 – Resultado da temperatura para o alinhamento vertical (F) do modelo II (MPFR) – cenário 2	66
Tabela 6.1 – Valores de Temperatura em função de b	69
Tabela 6.2 – Pontos do contorno da Fissura F2 da placa MPFA e seus respectivos valores de temperatura calculados contra os do cenário 2	70
Tabela 6.3 – Pontos do contorno da fissura F2 da placa MPRA e seus respectivos valores de temperatura calculados contra os do cenário 2	71
Tabela 6.4 – Comparação da temperatura do modelo MPFA cenário 2 com a placa sem fissuras.	71
Tabela 6.5 – Comparativo de temperatura do ponto interno mais próximo da ponta das fissuras angulares e a placa referência	73
Tabela 6.6 – Pontos do contorno da Fissura F2 da placa MPFR e seus respectivos valores de temperatura calculados contra os do cenário 2	73
Tabela 6.7 – Pontos do contorno da fissura F1 da placa MPFR e seus respectivos valores de temperatura calculados contra os do cenário 2	74
Tabela 6.8 – Comparação da temperatura do modelo MPFR cenário 2 com a placa sem fissuras (com b original)	75
Tabela 6.9 – Comparativo de temperatura do ponto interno mais próximo da ponta das fissuras retangulares e a placa referência	76
Tabela 6.10 – Comparativo dos resultados de temperaturas dos dois modelos e a placa referência	77
Tabela 6.11 – Comparativo entre os pontos internos ao redor da fissura F1 da placa referência com os modelos MPFA e MPFR	77

Tabela 6.12 – Comparativo entre os pontos internos ao redor da fissura F2 da placa referência com os modelos MPFA e MPFR.....78

LISTA DE SÍMBOLOS

\vec{n}	Vetor normal do contorno
q	Fluxo
\bar{q}	Fluxo de calor prescrito
q^*	Solução fundamental do fluxo
u	Potencial
\bar{u}	Potencial prescrito
u^*	Solução fundamental do potencial
w	Função peso arbitrária
k	Condutividade térmica do material
x_1 e x_2	Coordenadas
G_{ij}	Matriz de potenciais
H_{ij}	Matriz de fluxos conhecidos

LETRAS GREGAS

σ	Constante de Stefan-Boltzman
Γ	Contorno
Ω	Domínio
Δ_i	Potencial unitário atuando no ponto “i”

OPERADORES MATEMÁTICOS

$\frac{\partial T}{\partial x}$	Gradiente de temperatura na seção
\int	Integral
$\nabla^2(\)$	Operador Laplaciano

LISTA DE ABREVIACÕES

F1	Fissura 1
F2	Fissura 2
GUI	Interface Gráfica de Usuário
MEC	Método Dos Elementos De Contorno
MEF	Método Dos Elementos Finitos
MRD	Método da Reciprocidade Dual

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	GENERALIDADES	1
1.2	MOTIVAÇÃO	3
1.3	OBJETIVOS	4
1.3.1	OBJETIVO GERAL	4
1.3.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	4
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	4
2	CONCEITOS INICIAIS.....	6
2.1	MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PROBLEMAS DE POTENCIAIS	6
2.1.1	EQUAÇÃO DE LAPLACE	6
2.1.2	RELAÇÕES BÁSICAS.....	7
2.1.3	SOLUÇÃO FUNDAMENTAL.....	8
2.1.4	EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO	9
2.1.5	DISCRETIZAÇÃO DO MEC	11
2.1.6	MONTAGEM da matriz H_{ij} e G_{ij}	12
2.1.7	EQUAÇÃO DE POISSON.....	14
2.1.7.1	Relações Básicas.....	14
2.2	MÉTODO DE RECIPROCIDADE DUAL.....	15
2.2.1	DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO DE MRD PARA A EQUAÇÃO DE POISSON.....	15
2.2.2	EQUAÇÃO MATRICIAL DE CONTORNO	16
2.2.3	O VETOR α	17
2.2.4	DIFERENTES EXPANSÕES DE f	18
3	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	21
3.1	A LINGUAGEM MATLAB	21
3.2	A PLATAFORMA BEMLAB2D	22
3.2.1	Adequação e Implementação do Módulo III.....	23
3.2.2	Geração do Arquivo de Dados	25
3.3	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	26
3.3.1	PROGRAMA PRINCIPAL.....	27

4	VALIDAÇÃO DO PROGRAMA	35
4.1	EXEMPLO 1 - O PROBLEMA DE BENCHMARK	35
4.2	EXEMPLO 2 - ROBLEMA DE TORÇÃO: $B = CTE$	37
4.3	EXEMPLO 3 - SOLUÇÕES PARA DIFERENTES FUNÇÕES $B(x,y)$	42
4.3.1	CASO $\nabla^2 u = -x$	42
4.3.2	CASO $\nabla^2 u = -x^2$	45
4.3.3	CASO $\nabla^2 u = a^2 - x^2$	48
5	ESTUDO DE CASO.....	51
5.1-	DADOS DO MODELO	51
5.2 –	MODELAGEM NUMÉRICA E COMPUTACIONAL.....	54
5.2.1 –	Modelo I – Placa com Fissura Angular (MPFA)	59
5.2.2 –	Modelo II – Placa com Fissura Retangular (MPFR).....	63
6	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	67
6.1 -	PLACA REFERÊNCIA.....	67
6.1.1	Verificação de sensibilidade da fonte b	68
6.2.	MODELO DE PLACA COM FISSURA ANGULAR (MPFA)	69
6.3.	MODELO DE PLACA COM FISSURA RETANGULAR (MPFR).....	73
6.4 -	DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	76
7	CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	79
7.1 -	SOBRE O PROGRAMA DESENVOLVIDO.....	79
7.2 –	SOBRE A APLICAÇÃO EM PLACAS FISSURADAS.....	79
7.3 -	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS:.....	80
8	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	81
9	APÊNDICES.....	85
9.1 -	APÊNDICE A.....	85
9.2 -	APÊNDICE B	92

1 INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) surgiu nos anos 60 sobre as clássicas integrais de contorno para problemas de potencial e de avaliação de tensão. Os primeiros a entenderem a utilização das integrais de contorno na discussão de problemas da engenharia como um método numérico de análise foram Jaswon e Symm (1963), onde os estudos eram baseados na utilização de uma série de fontes sobre o contorno, sendo os valores assumidos constantes em uma dada região ou elemento. Rizzo (1997) estudou essas equações integrais e foram aplicadas com sucesso em elasticidade bi e tridimensional e mais tarde Lachat (1976) fez um trabalho na Universidade de Southampton que foi determinante para a formulação do MEC.

Na visão matemática, os fenômenos físicos podem ser caracterizados por meio de equações diferenciais. Segundo LEITHOLD (1994), equações diferenciais têm grande aplicação na matemática, e as pesquisas sobre a evolução de certos fenômenos são susceptíveis de tratamento matemático, o que geralmente está relacionada às equações diferenciais. E ainda, de um modo mais claro, dada por GREENBERG (1998), problemas em ciência e engenharia, que tem formulação matemática, são direcionados por equações envolvendo derivadas de uma ou mais funções desconhecidas, denominadas equações diferenciais.

O MEC é na atualidade uma das principais técnicas de solução direcionada ao tratamento de problemas físicos, cujos modelos matemáticas são orientados por equações diferenciais parciais, usado em muitas áreas como placas, cascas, mecânica dos solos, mecânica da fratura, problemas de potencial, acústica, dentre outros. O Método dos Elementos de Contorno é um bem estabelecido método numérico, cuja principal característica é a redução na dimensão do problema (BREBBIA e DOMINGUEZ 1989).

Este método apresenta alguns benefícios em relação aos outros métodos numéricos comumente utilizados e conhecidos, como o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método das Diferenças Finitas (MDF). O MEC necessita de informação apenas do contorno do domínio para a solução da equação governante, reduzindo dessa maneira o número de incógnitas para sua solução e o trabalho de preparação de dados de entrada e de resultados.

Outras vantagens do MEC podem ser evidenciadas por Katsikadelis (2002), tais como a fácil aplicação das condições de contorno; aplicação em problemas com particularidades geométricas, aplicação do método em domínios infinitos e um esforço computacional pequeno devido à entrada de dados ser somente no contorno.

Por outro lado, vários problemas no ramo da engenharia podem ser representados pela teoria de potencial regida pela equação de Laplace, em que é um caso particular da equação de Poisson, na qual o termo de domínio possui valor nulo. Assim, uma das dificuldades encontradas pelos pesquisadores do MEC era a extensão da técnica a problemas de natureza não linear ou de dependência do tempo (GOMES, 2006). Em trabalhos iniciais com MEC, integrais de domínio foram resolvidas usando células internas (Telles,1981). Para esse tipo de problema, era necessário discretizar o domínio em uma série de células avaliando a integral de domínio da formulação do método pela aplicação da solução fundamental, tais como termos não fundamentais. Essa técnica requeria um número maior de dados para realizar o problema com uma complexidade de operações envolvidas, o que a torna pouco atrativa. Com sentido no tratamento das integrais de contorno, surgiram vários métodos apresentados por alguns autores, dentre os quais podemos citar: Método da Reciprocidade Múltipla, Técnica do Tensor de Galerkin, Expansões de Fourier, Método de Monte Carlo, Integração Analítica e Método da Reciprocidade Dual (MRD).

O Método de Reciprocidade Dual foi proposto por Nardini e Brebbia em 1982 e em um livro coletando aplicações por Partridge *et al.* em 1992. Esse método é o que mais alcançou sucesso entre as técnicas existentes para tratar das integrais de domínio. O MRD é uma técnica que transforma integral de domínio ao contorno em problemas de Elementos de Contorno e é utilizado onde não existe uma solução fundamental para o problema completo. O método também pode ser aplicado para construir soluções particulares para tratar termos não lineares, juntando as condições de contorno.

No presente trabalho, propõe-se a implementação e a aplicação do MEC/MRD em problemas de Potencial, regidos pela Equação de Poisson, no qual se fez uso da interface gráfica BEMLAB2D (Delgado Neto *et al.*, 2016), para modelagem físico-geométrica do problema, bem como implementou-se um programa chamado BEMPOTENTIAL, escrito em linguagem MATLAB. A fim de validar o estudo e calibrar o programa, exemplos clássicos da literatura aberta foram utilizados e, como aplicação final, a modelagem do fluxo de calor de uma placa de argamassa fissurada, submetida a um ciclo de aquecimento direto, objetivando analisar o

comportamento térmico do corpo, especificamente a distribuição de temperatura sem consideração do transiente.

1.2 MOTIVAÇÃO

O Método de Elementos de Contorno (MEC) é um método de fácil aplicação e uma de suas várias vantagens é apresentar uma solução aproximada do problema proposto através da discretização exclusiva no contorno físico envolvido. Outra vantagem é limitar em uma unidade a dimensão do problema. A aplicação do MEC procura, preferencialmente, que a solução fundamental para o problema em consideração seja conhecida (BREBBIA E DOMINGUEZ, 1992). Quando não for possível levar em conta todos os termos da equação governante, os termos não considerados na obtenção da solução fundamental irão gerar integrais de domínio que devem preferencialmente ser transformadas em integrais de contorno. Uma alternativa é substituir os efeitos da integral de domínio para o contorno usando-se Método de Reciprocidade Dual (Partridge et al., 1992). Esses procedimentos podem ser empregados para qualquer termo da equação de Poisson.

É importante conhecer o comportamento do fluxo de calor no objeto inspecionado em estudo. Segundo BAUER *et al.*(2016a) a investigação de falhas, ou anomalias por termografia, está associada à perturbação que tais defeitos causam no fluxo de calor em uma fachada, e ainda, como essa perturbação altera a temperatura superficial, que pode ser por termograma. Portanto, perante ao exposto, a modelagem numérica torna-se importante, à medida que essa pode auxiliar a compreensão dos resultados de comportamento de fluxo e temperatura de uma fachada, obtidos pela termografia, tal como reduzir o tempo gasto para se reproduzir corpos de prova que simulem o comportamento real do fluxo e de temperatura de uma fachada em laboratório, por exemplo.

Assim, o programa de Pós-graduação de Estruturas e Construção Civil (PECC) vem buscando a realização de estudos que relacionam as análises experimentais com as numéricas e no desenvolvimento de programas baseados neste método que possuam interfaces gráficas e processadores para modelagem numérica, na busca de demonstrar a eficiência tanto para modelagens fictícias, como para problemas reais analisados *in-loco* e/ou em laboratório.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 OBJETIVO GERAL

Este trabalho tem como objetivo geral fazer um estudo das formulações bidimensionais do método de elementos de contorno com reciprocidade dual para os problemas de potencial regidos pela equação de Poisson e, paralelamente a este, uma modelagem numérica baseada no MEC/MRD para avaliar o comportamento da temperatura em uma placa de argamassa fissurada.

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Os objetivos específicos são:

- Adaptação/Implementação do pré-processador BEMLAB2D para tratamento das condições de contorno específicas (Temperatura/Fluxo) em seu Módulo 3;
- Adaptação/Implementação do Arquivo de Dados junto ao BEMLAB2D para tratamento dos dados, na forma de um *neutral file*;
- Implementação do programa de análise BEMPOTENTIAL em linguagem MATLAB, baseado no programa em FORTRAN e devido a Partridge et al. (1992);
- Modelagem e análise em uma placa de argamassa fissurada com duas disposições geométricas.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho está dividido em sete capítulos. Neste capítulo apresenta-se a introdução dos assuntos abordados, assim como a motivação e objetivos da pesquisa.

O segundo capítulo abrange os principais conceitos envolvidos com o Método dos Elementos do Contorno com Reciprocidade Dual para problemas de potencial.

No terceiro capítulo será realizada uma breve abordagem sobre o MATLAB e a interface gráfica Bemlab2D, seguido da adaptação/implementação do Módulo III, bem como a descrição do programa desenvolvido.

No quarto capítulo serão apresentados exemplos clássicos da literatura para a validação do programa implementado. As tabelas e gráficos mostrarão resultados confrontando-os com a solução exata, quando possível.

No quinto capítulo são apresentados os resultados de temperatura obtidos na modelagem numérica de uma placa sem consideração de fissuras para fins de comparação e referência.

Mostra-se também duas disposições geométricas, uma com fissura angular e outra com fissura quadrangular, que foram discretizadas em elementos lineares no contorno do domínio e das fissuras, além de pontos internos.

O sexto capítulo trata da análise dos resultados do modelo estudado objetivando compreender o comportamento da temperatura.

No sétimo capítulo são apresentadas as conclusões do estudo e sugestões para pesquisas futuras.

2 CONCEITOS INICIAIS

Neste capítulo é descrito o Método dos Elementos de Contorno e o Método de Reciprocidade Dual para problemas específicos de potencial, considerando-se sua formulação integral tanto no contorno quanto no domínio. As fundamentações que se seguem vêm de estudos realizados nos textos de Brebbia e Dominguez (1992) e Partridge *et al* (1992).

2.1 MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PROBLEMAS DE POTENCIAIS

O MEC consiste basicamente na transformação da equação diferencial que governa o problema em uma equação integral. A superfície externa é dividida em uma série de elementos, cujas funções consideradas podem variar de diversas maneiras. Assim, as integrais no contorno são aproximadas por integrações efetuadas em cada elemento. Estas integrais geram coeficientes de importância entre os diversos elementos criando um sistema de equações que relacionam potenciais e fluxos em todos os elementos que aproximam o contorno. A formulação do MEC, de forma geral, pode ser obtida empregando-se a técnica de resíduos ponderados. Muitos são os trabalhos que tratam do problema de potencial via MEC, destacando-se, Brebbia e Nardini (1982), Brebbia e Dominguez (1997) e Hess e Smith (1967).

Será apresentado a seguir alguns conceitos básicos relacionados à teoria de potencial referentes às Equações de Laplace e Poisson. O modelo do MEC é construído considerando-se o acoplamento do Método de Reciprocidade Dual para tratamento do termo de domínio que surge da equação de Poisson.

2.1.1 EQUAÇÃO DE LAPLACE

A equação de Laplace serve como base para o progresso inicial do MEC aplicado a problemas de potencial. O primeiro passo para a dedução da integral de contorno é a escolha do método que vai ser empregado. Dentre esses métodos podem ser citados o método dos resíduos ponderados, o teorema de Betti, a identidade de Green e os princípios dos trabalhos virtuais. Nesse trabalho o método empregado é o método dos resíduos ponderados. É fundamental destacar que os elementos de contorno lineares e constantes foram primeiramente produzidos por BREBBIA (1989).

2.1.2 RELAÇÕES BÁSICAS

Seja uma função potencial “u” no domínio Ω , na qual corresponde a equação empregada:

$$\nabla^2 u = 0 \text{ em } \Omega. \quad (2.1)$$

Decorrentes das seguintes condições de contorno:

- 1) Condição de contorno “essencial” $u = \bar{u}$ determinado em Γ_1
- 2) Condição de contorno “natural” $q = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}$ determinado em Γ_2

Sendo, $\nabla^2(\) = \frac{\partial^2(\)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\)}{\partial y^2}$ chamado de operador de Laplace e x e y duas coordenadas. O domínio da equação que se atribui é o Ω , que é cercado pela curva Γ . O vetor normal guiado para fora do contorno é expresso como \hat{n} , conforme mostrado na Figura 2.1:

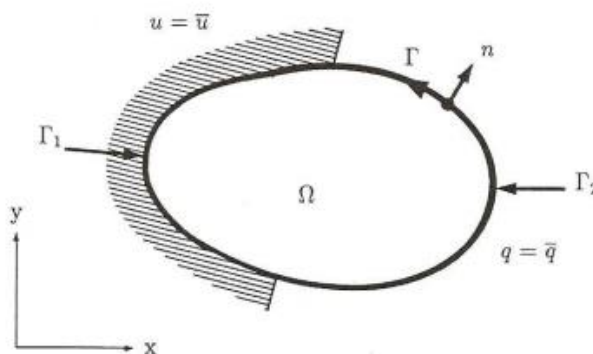


Figura 2.1- Definição geométrica do problema (BREBBIA e DOMINGUEZ, 1989)

A combinação das condições de contorno mostrada acima será mais complexa, como por exemplo:

$$\alpha u + \beta q = \gamma \quad (2.2)$$

onde: α , β e γ são parâmetros conhecidos e podem, simplesmente, serem introduzidos conforme Brebbia et al (1989).

Os erros introduzidos nas equações acima, se exato (porém um valor conhecido) de u e q for alterado pela solução aproximada, pode ser minimizada por intermédio da ponderação dos resíduos. Sendo R o resíduo, pode se escrever em geral que:

$$R = \nabla^2 u \neq 0 \text{ em } \Omega$$

$$R_1 = u - \bar{u} \neq 0 \text{ em } \Gamma_1$$

$$R_2 = q - \bar{q} \neq 0 \text{ em } \Gamma_2$$

Os resíduos mostrados acima ficam assim determinados:

$$\int_{\Omega} R u^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} R_2 u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} R_1 q^* d\Gamma \quad (2.3)$$

ou

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) u^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) q^* d\Gamma \quad (2.4)$$

O propósito deste procedimento é forçar os resíduos a zero em um sentido médio. Integrando por partes 2 vezes o termo da esquerda, obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^*) u d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma \quad (2.5)$$

A Equação (2.5) é o ponto de partida para a aplicação do MEC e se aplica apenas no contorno e não é utilizada como solução de problemas. Essa equação produz uma matriz singular que não permite que seja calculada a solução em pontos internos que é indispensável em alguns casos. O que se faz normalmente é escolher uma “solução fundamental” para a equação governante com o objetivo de impedir os problemas citados.

2.1.3 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

Aplicado em um dado ponto i , a solução fundamental é a solução para a equação governante no domínio infinito com potencial unitário. Segue a equação:

$$\nabla^2 u^* + \Delta_i = 0 \quad (2.6)$$

Onde: Δ_i representa a função delta de Dirac que caracteriza um potencial unitário atuando no ponto “ i ”, com as seguintes características:

$$\int_{\Omega} \Delta^i d\Omega = 1 \quad (2.7)$$

e

$$\int_{\Omega} u \Delta^i d\Omega = u_i \quad (2.8)$$

Então:

$$\int_{\Omega} u(\nabla^2 u^* + \Delta_i) d\Omega = \int_{\Omega} \nabla^2 u^* d\Omega + u_i \quad (2.9)$$

em que u_i é o valor da função incógnita no ponto 'i' de uso do potencial unitário.

Satisfeita a equação (2.6) , então:

$$\int_{\Omega} u(\nabla^2 u^*) d\Omega = \int_{\Omega} u(-\Delta_i) d\Omega = -u_i \quad (2.10)$$

Substituindo (2.10) em (2.6) temos:

$$u_i + \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma \quad (2.11)$$

Onde é válida em todo ponto em Ω .

Para o caso isotrópico bidimensional que a solução fundamental é dada por,

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (2.12)$$

E para meios tridimensionais a solução fundamental é dada pela equação:

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} \quad (2.13)$$

Onde r é a distância do ponto de aplicação da carga até o ponto considerado.

2.1.4 EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

A Equação (2.11) é válida a qualquer ponto do domínio. Para levantar o problema como uma técnica de contorno é necessário limitar a equação somente para os pontos do contorno. Uma forma simples de fazer isso é considerar que o ponto i está sobre o contorno, mas o domínio dele mesmo é aumentado por um esfera de raio ϵ (em 3D) conforme mostrado na Figura 2.2 (Para 2D o mesmo se aplica, só que em um semicírculo).

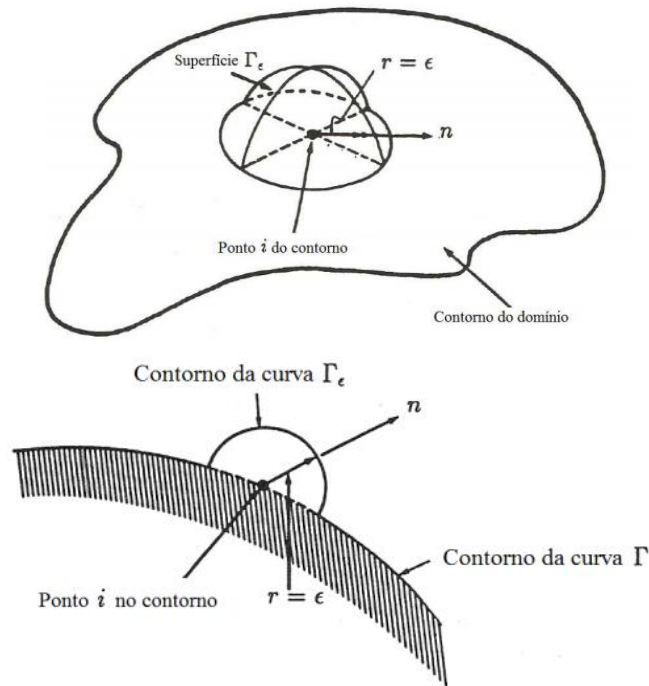


Figura 2.2-Pontos de contorno para o caso bi e tridimensional, aumentado por um pequeno hemisfério ou semicírculo. (BREBBIA e DOMINGUEZ,1989)

É possível simplificar a equação (2.11) fazendo $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, neste caso, temos:

$$u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma + \int_{\Omega} b u^* d\Omega = \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma \quad (2.14)$$

É consequência do termo b da equação de Poisson a integral no domínio Ω , $\int_{\Gamma} u^* q d\Gamma$, que terá a solução demonstrada posteriormente.

A equação (2.14) é semelhantemente deduzida para a equação de Laplace,

$$\nabla^2 u = 0$$

Onde fica assim definida:

$$u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma \quad (2.15)$$

2.1.5 DISCRETIZAÇÃO DO MEC

Vamos observar como a Equação (2.15) pode ser discretizada para encontrar o sistema de equações. Por questão de clareza, vamos admitir que o corpo é bidimensional e seu contorno é discretizado em pequenos segmentos chamados de elementos e , por sua vez, constituídos de N nós com funcionalidades constantes, lineares e quadráticos, de acordo com o mostrado na Figura 2.3.

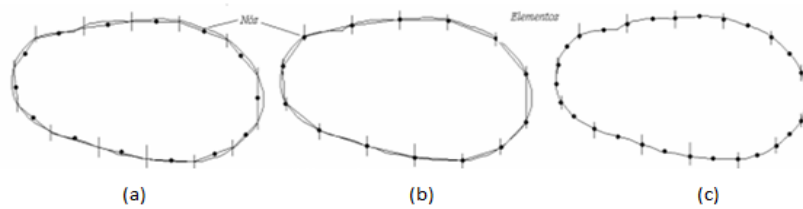


Figura 2.3-- Diferentes tipos de elementos de contorno: (a) Constante; (b) Linear; (c) Quadrático. (BREBBIA e DOMINGUEZ,1989)

A fim de simplificar a compreensão vamos “visualizar” a discretização com elementos constantes de geometria linear ou reta. Assim, para elementos de funcionalidade constante considerados aqui, o contorno Γ é suposto ser dividido em N elementos, $\Gamma_i=1,2,3,\dots,N$, temos,

$$\Gamma = \sum_{j=1}^N \Gamma_j \quad (2.16)$$

Os valores das variáveis “ u ” e “ q ” são constantes para cada elemento e igual ao valor no meio do nó. A Equação (2.15) pode ser discretizada para cada nó “ i ” antes de colocar qualquer condição de contorno e, portanto, a equação assume a forma,

$$\frac{1}{2} u_i + \sum_{j=1}^N u_j \int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^N q_j \int_{\Gamma_j} u^* q d\Gamma \quad (2.17)$$

Há dois tipos de integrais a serem admitidas sobre os elementos para montar uma equação que relaciona “ u ” e “ q ”, que segue:

$$\int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma \text{ e } \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \quad (2.18)$$

Essas integrais relacionam o nó “ i ” onde a solução fundamental está atuando com o outro nó “ j ”. Assim essas integrais serão chamadas de \overline{H}_{ij} e \overline{G}_{ij} , isto é:

$$\overline{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma \text{ e } \overline{G}_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \quad (2.19)$$

Onde:

i: posição unitária no contorno

j: índice associado ao nó do elemento que está sendo integrado

Aplicando uma fonte ou uma carga unitária “i”, calcula-se H_{ij} e G_{ij} . Logo, para um ponto particular “i”, pode-se escrever:

$$\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^N \overline{H}_{ij}u_j = \sum_{j=1}^N \overline{G}_{ij}q_j \quad (2.20)$$

2.1.6 MONTAGEM DA MATRIZ H_{ij} E G_{ij}

A cada um dos pontos em volta do contorno obtém-se um sistema de N equações, resultante da aplicação da equação (2.20), dado por,

$$\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^N u_j + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \overline{H}_{ij}u_j = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \overline{G}_{ij}q_j \quad (2.21)$$

Em um determinado momento, “i” será igual a “j”, pois o valor do índice “j” percorrerá todo o contorno, a partir do índice “i” fixado. Portanto, podemos escrever,

$$\sum_{i=1}^N \left(H_{ii} + \frac{1}{2} \right) u_i = \sum_{i=1}^N G_{ii} q_i \quad (2.22)$$

Chamando de:

$$H_{ii} = \overline{H}_{ij} + \frac{1}{2} \text{ para } i=j \quad (2.23)$$

e para índices diferentes $i \neq j$, temos:

$$H_{ii} = \overline{H}_{ij} \quad (2.24)$$

Assim, a Equação (2.18) pode ser escrita como,

$$\sum_{j=1}^N \overline{H}_{ij}u_j = \sum_{j=1}^N \overline{G}_{ij}q_j \quad (2.25)$$

Esta série de equações pode ser expressa na forma matricial como,

$$\mathbf{HU}=\mathbf{GQ} \quad (2.26)$$

Onde **H** e **G** são duas matrizes $N \times N$, e **U** e **Q** são vetores de comprimento N.

Observando que N_1 valores de u e N_2 valores de q são conhecidas em Γ_1 e Γ_2 respectivamente, ($\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$), então existem somente N valores desconhecidos no sistema de equações dado pela Equação (2.25). Para estabelecer essas condições de contorno temos de rearranjar o sistema movendo as colunas de \mathbf{H} e \mathbf{G} de um lado ao outro. Uma vez que todos os valores desconhecidos são passados para o lado esquerdo, podemos escrever,

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{y} \quad (2.27)$$

no qual \mathbf{x} é um vetor de valores nodais nos potenciais u e dos fluxos q desconhecidos no contorno, e \mathbf{y} é encontrado pela multiplicação da coluna correspondente da matriz resultante do rearranjo das colunas de \mathbf{H} e \mathbf{G} pelos valores conhecidos ou prescritos de u ou q resultante do rearranjo das linhas de \mathbf{U} e \mathbf{Q} . É interessante apontar que os valores desconhecidos são agora uma combinação do potencial e de suas derivadas, ao invés do potencial apenas, como acontece em elementos finitos, ou seja, um efeito do MEC de ser uma formulação mista e dá uma fundamental vantagem sobre o MEF.

Agora pode ser resolvida a Equação (2.27) e todos os valores de contorno são então conhecidos. Uma vez que isto é realizado, é possível organizar qualquer valor interno de u de suas derivadas. Os valores de u são calculados em qualquer ponto interno “i” usando a fórmula (2.27) o qual pode ser escrita como:

$$u_i = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma \quad (2.28)$$

Observe que agora a solução fundamental é considerada ser ativo sobre o ponto interno “i” e que todos os valores de u e q já são conhecidos. O processo é então de integração.

A mesma discretização é utilizada para integrais de contorno, isto é:

$$u_i = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j - \sum_{j=1}^N \overline{H}_{ij} u_j \quad (2.29)$$

Os coeficientes G_{ij} e H_{ij} foram calculados novamente para cada diferente ponto interno.

Os valores dos fluxos internos nas duas direções x_1 e x_2 , $q_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}$ e $q_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2}$, são calculados efetuando-se as derivadas em (2.28), isto é:

$$\begin{aligned} (q_{x_1})_i &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)_i = \int_{\Gamma_1} q \left(\frac{\partial u^*}{\partial x_1} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} u \left(\frac{\partial q^*}{\partial x_1} \right) d\Gamma \\ (q_{x_2})_i &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)_i = \int_{\Gamma_1} q \left(\frac{\partial u^*}{\partial x_2} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} u \left(\frac{\partial q^*}{\partial x_2} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.30)$$

Observando que as derivadas são efetuadas somente sobre as soluções fundamentais u^* e q^* conforme estamos calculando as variações de fluxo ao redor do ponto “i”.

2.1.7 EQUAÇÃO DE POISSON

Integrais de domínio em elementos de contorno podem surgir devido a uma variedade de efeitos, tais como as forças de corpo, estados iniciais, termos não lineares, entre outros. No que se segue será estudada a equação diferencial Poisson não-homogênea. A equação de Poisson possui várias aplicações dentro da teoria de potencial como, por exemplo, problema de torção, de condução do calor, de movimento de fluidos, de difusão, dentre outros.

2.1.7.1 RELAÇÕES BÁSICAS

Considera-se uma função “u”, a qual satisfaz a equação de Poisson:

$$\nabla^2 u = b \text{ em } \Omega \quad (2.31)$$

Onde b é considerado uma função conhecida.

De maneira similar, feito para Equação de Laplace na seção anterior, aplicando a formulação do Método dos Resíduos Ponderados para deduzir as equações integrais básicas, temos:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u - b) u^* d\Omega = \int_{\Gamma_1} (q - \bar{q}) u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} (u - \bar{u}) q^* d\Gamma \quad (2.32)$$

Que fazendo duas integrações por partes a partir da Equação (2.32), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla^2 u^*) u d\Omega - \int_{\Omega} b u^* d\Omega = & - \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma \end{aligned} \quad (2.33)$$

É uma importante equação, pois é o ponto de partida para a aplicação do método dos elementos de contorno com consideração da integral de domínio.

Utilizando a solução fundamental, originalmente usada para a equação de Laplace, i.e.

$$\nabla^2 u^* + \Delta_i = 0 \quad (2.34)$$

E substituindo a Equação (2.33) na Equação (2.34) e deslocando a equação resultante para o contorno, obtém-se:

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma + \int_{\Omega} b u^* d\Omega = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma \quad (2.35)$$

Embora a função b seja conhecida, a integral em Ω não introduz quaisquer novas incógnitas, o problema mudou na característica e agora precisamos efetuar uma integral de domínio, bem como as integrais de contorno. A constante c_i , como explicado anteriormente, depende apenas da geometria do contorno no ponto i em consideração.

2.2 MÉTODO DE RECIPROCIDADE DUAL

O MEC não tem capacidade de simular problemas onde o termo b apresentado na equação de Poisson não seja nulo. Para mudar esse problema Brebbia e Nardini (1982) desenvolveram o Método de Reciprocidade Dual. Uma das ideias centrais desse método é a análise da equação integral nos pontos no contorno através de elementos definidos apenas no contorno (GOMES, 2006).

O MRD encontra-se como uma técnica geral de transformação, sendo capaz de ser aplicado em muitos problemas. Nas seções seguintes apresentaremos a formulação do MRD para o caso de potencial.

2.2.1 DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO DE MRD PARA A EQUAÇÃO DE POISSON

Considere a equação $\Delta^2 u = b$ onde o potencial u pode ser escrito como:

$$u = \tilde{u} + \hat{u}$$

Onde \tilde{u} é a solução homogênea e \hat{u} é a solução particular da equação. Desse modo é válido mostrar:

$$\nabla^2 \hat{u} = b \quad (2.36)$$

Assim a integral de domínio fica:

$$\int_{\Omega} b u^* d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla^2 \hat{u}) u^* d\Omega \quad (2.37)$$

Integrando por partes e considerando a solução fundamental obtém-se,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b u^* d\Omega &= \int_{\Omega} (\nabla^2 \hat{u}) u^* d\Omega = \int_{\Omega} \hat{u} ((\nabla^2 u^*)) d\Omega + \int_{\Gamma} u^* \hat{q} d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* \hat{q} d\Gamma - \\ \int_{\Gamma} q^* \hat{u} d\Gamma &= -c_i \hat{u}_i + \int_{\Gamma} u^* \hat{q} d\Gamma - \int_{\Gamma} q^* \hat{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.38)$$

Geralmente, é difícil encontrar uma solução que satisfaça a essa equação, particularmente no caso de problemas não lineares ou dependente do tempo. O MRD propõe o uso de uma série de soluções específicas \hat{u}_j em vez de uma única função u_j . Considerando que se tem N nós no contorno e L nós internos, tem-se então N+L valores de \hat{u}_j .

2.2.2 EQUAÇÃO MATRICIAL DE CONTORNO

Segundo Partridge *et al* (1992), a seguinte aproximação para b é considerada,

$$b \cong \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f_j \quad (2.39)$$

onde α_j é um vetor de constante desconhecido que será determinado e f_j são funções de aproximação. A solução particular de \hat{u}_j e a função de aproximação f_j devem atender à relação,

$$\nabla^2 \hat{u}_j = f_j \quad (2.40)$$

Assim a integral do domínio pode ser escrita como,

$$\int_{\Omega} b u^* d\Omega = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \int_{\Omega} (\nabla^2 \hat{u}_j) u^* d\Omega \quad (2.41)$$

Integrando por partes e substituindo na equação integral de contorno inicialmente desenvolvida, obtém-se:

$$c_i \hat{u}_i + \int_{\Gamma} q^* u d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma \equiv \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_{ij} \left(c_i \hat{u}_{ij} + \int_{\Gamma} \hat{u}_j q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* \hat{q}_j d\Gamma \right) \quad (2.42)$$

O termo \hat{q}_j é definido como $\hat{q}_j = \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial n}$, onde n é o vetor normal ao contorno Γ , e tem sua expansão da seguinte forma:

$$\hat{q}_j = \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \quad (2.43)$$

Observe que a equação (2.42) não envolve mais a integral de domínio, pois o termo b foi substituído por integrais de contorno similares, que foi feito aproximando b pelo uso da equação (2.41) e usando a técnica dos resíduos ponderados para expressar os dois lados da equação resultante com integrais de contorno.

Agora é escrever a equação (2.41) de forma discretizada com somatórios sobre os elementos de contorno, substituindo as integrais. Dessa forma tem-se um nó i qualquer do contorno a seguinte equação:

$$\begin{aligned} c_i u_i + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u q^* d\Gamma - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u^* q d\Gamma = \\ = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(c_i \widehat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \widehat{u}_j q^* d\Gamma - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u^* \widehat{q}_j d\Gamma \right) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Nota-se que se \widehat{u} e \widehat{q} são funções conhecidas, visto que f é definido não há necessidade de aproximar suas variações para cada elemento do contorno usando funções de interpolações e valores nodais, como foi feito para u e q . Entretanto, fazer isso resulta que as mesmas matrizes H e G , já apresentadas, podem ser utilizadas nos dois lados da equação.

Fazendo os somatórios e aplicando a equação (2.44) em todos os nós do contorno, pode-se expor seus termos em forma de matriz. Igualmente se considera que os vetores \widehat{u}_j e \widehat{q}_j seja uma coluna das matrizes \widehat{U} e \widehat{Q} respectivamente. Deste modo podemos escrever a seguinte equação:

$$Hu - Gq = (H\widehat{U} - G\widehat{Q})\alpha \quad (2.45)$$

A equação (2.45) é a base para a aplicação do Método dos Elementos de Contorno com Reciprocidade Dual e envolve a discretização apenas no contorno.

2.2.3 O VETOR α

Pela equação (2.44)

$$b \cong \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f_j \quad (2.47)$$

Fazendo o valor de b para $N+L$ pontos distintos da equação (2.44) podem ser expressos na forma matricial abaixo:

$$b = F\alpha \quad (2.48)$$

Em que cada coluna de F equivale a um vetor de f_{ij} compondo os valores da função de aproximação a ser determinado no item 2.2.4.

Assim, a função b pode ser invertida para encontrar α :

$$\alpha = F^{-1}b \quad (2.49)$$

Como o lado direito da Equação (2.45) é um vetor conhecido, podemos escrever

$$Hu - Gq = d \quad (2.50)$$

Onde

$$d = (H\hat{U} - G\hat{Q})\alpha \quad (2.51)$$

O que demonstra que o vetor d pode ser obtido diretamente pela multiplicação de matrizes e vetores conhecidos.

Aplicando as condições de contorno na equação (2.50), obtemos:

$$Ax = y + d \quad (2.52)$$

Onde x contém N valores do contorno desconhecidos de u ou q .

Após obter a solução da equação (2.52) utilizando técnicas padrão, os valores de qualquer nó interno podem ser calculados a partir da equação (2.42) cada um envolvendo uma multiplicação de vetores e matrizes conhecidas, portanto essa equação se torna:

$$u_i = -\sum_{k=1}^N H_{ik} u_k + \sum_{k=1}^N G_{ik} q_k + \sum_{k=1}^{N+L} G_{ik} q_k + \sum_{j=1}^N \alpha_j (\hat{u} + \sum_{k=1}^N H_{ik} \hat{u}_{kj} - \sum_{k=1}^N G_{ik} \hat{q}_{kj}) \quad (2.53)$$

Agora o desenvolvimento de MRD para equações de Poisson está completo.

2.2.4 DIFERENTES EXPANSÕES DE f

A solução particular \hat{u} e sua derivada normal \hat{q} , que tem função de aproximação similar f usada na análise de MRD, não são limitadas pela formulação exceto quando a matriz resultante F seja não singular (Partridge *et al* 1992). Para determinar essas funções propõe-se uma expansão para f e então se calcula \hat{u} e \hat{q} , usando as equações (2.45) e (2.48) respectivamente.

Nardini e Brebbia (1983), criadores do método, propuseram os seguintes tipos de funções de f :

1. Elementos de triângulo de pascal;
2. Séries trigonométricas;
3. A função de distância r usada na definição da solução fundamental.

A função r foi adotada primeiro por Nardini e Brebbia (1983) e depois pela maioria dos pesquisadores por ser a alternativa mais simples e muito precisa (Partridge *et al* 1992).

Em problemas bidimensionais temos a definição de r como:

$$r^2 = r_x^2 + r_y^2 \quad (2.54)$$

Onde as componentes r_x e r_y são as componentes de r na direção dos eixos x e y .

A função \hat{q} será dado por:

$$\hat{q} = \frac{r}{3} [r_x \cos(n, x) + r_y \cos(n, y)] \quad (2.55)$$

Na equação anterior os cossenos diretores referem-se à direção normal externa no contorno em relação aos eixos x e y .

Segundo Partridge *et al* (1992) $f = r$ é uma componente da série:

$$f = 1 + r + r^2 + \dots + r^m \quad (2.56)$$

As funções correspondentes a Equação (2.56) são:

$$\hat{u} = \frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{9} + \dots + \frac{r^{m+2}}{(m+2)^2} \quad (2.57)$$

$$\hat{q} = (r_x \frac{\partial x}{\partial n} + r_y \frac{\partial y}{\partial n}) (\frac{1}{2} + \frac{r}{3} + \dots + \frac{r^m}{(m+2)}) \quad (2.58)$$

Em princípio, quaisquer combinações de termos podem ser selecionadas a partir da Equação (2.56). Para equações de Poisson serão considerados três casos:

1. $f=r$
2. $f=1+r$
3. $f=1$ em um nó e $f=r$ em nós restantes

Aqui, a função adotada no programa implementado foi $f=1+r$.

Note-se que para esse caso, temos:

$$\hat{u} = \frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{9} \quad (2.59)$$

e

$$\hat{q} = (r_x \frac{\partial x}{\partial n} + r_y \frac{\partial y}{\partial n}) (\frac{1}{2} + \frac{r}{3}) \quad (2.60)$$

3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Este capítulo apresenta o programa computacional, denominado *BEMPOTENTIAL.M*, desenvolvido e implementado em linguagem MATLAB para tratar problemas de Potencial regidos pela Equação de Poisson através do MEC/MRD. Este programa faz uso da Interface Gráfica BEMLAB2D (Delgado Neto,2016) para modelagem da malha com elementos de contorno e geração do arquivo de dados. Nas seções seguintes apresentaremos uma breve revisão sobre a linguagem MATLAB, as principais características do pré-processador (BEMLAB2D), seguido da adaptação/implementação do Módulo III, bem como a descrição do programa desenvolvido.

3.1 A LINGUAGEM MATLAB

O MATLAB (Matlab, 2016) vem de *Matrix Laboratory* devido ao programa ser destinado a fazer cálculos com matrizes. É um software que apresenta sua própria linguagem de programação, cujo elemento básico de informação é uma matriz que não requer dimensionamento. Esse sistema possibilita o desenvolvimento de muitos programas numéricos em pouco tempo com facilidade e precisão em comparação com que se gastaria para escrever um programa equivalente em linguagens tradicionais como Fortran, C/C++, Visual Basic, etc.

Ao longo dos anos o MATLAB vem sendo uma ferramenta de muita importância para os engenheiros e cientistas para estudos e elaboração de projetos e, assim, ele pode ser utilizado para as mais diversas funcionalidades, sejam elas computacionais, visualização ou ainda programação. O software possui mais de 500 funções (matemáticas, estatísticas e técnicas) que utilizam Álgebra Linear e operações com matrizes, análise de Fourier, estatística e soluções de equações diferenciais (HUNT, LIPSMAN, ROSENBERG, 2001).

As principais funcionalidades do MATLAB são:

- Muitos cálculos em pouco tempo;
- Cálculos matemáticos;
- Desenvolvimento de algoritmos;
- Modelagem, simulação e confecção de protótipos;
- Análise, simulação e confecção de dados;
- Gráficos científicos e de engenharia;

- Desenvolvimento de aplicações, incluindo a elaboração de interfaces gráficas com o usuário.

O MATLAB é uma ferramenta de grande importância para as disciplinas que tem como base de conhecimento nos métodos numéricos, desse modo, no Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC) sua utilização proporciona aos alunos uma maior proficiência com as técnicas de programação. Por esse aspecto, a ferramenta MATLAB foi utilizada neste trabalho devido à mesma também ser a linguagem por trás do BEMLAB2D.

3.2 A PLATAFORMA BEMLAB2D

Produzido por Delgado Neto et al (2016), O BemLab2D é uma interface gráfica implementada em MATLAB, que foca no pré-processamento e pós processamento com o objetivo de construir modelos e malhas genéricas de elementos de contorno, bem como visualização gráfica dos resultados e que, por meio das ferramentas botões, mouse e diálogos, podemos exportar arquivos de dados de entrada, assim como visualizar e exportar imagens dos modelos. A Figura 3.1 mostra a tela inicial do BemLab2D.

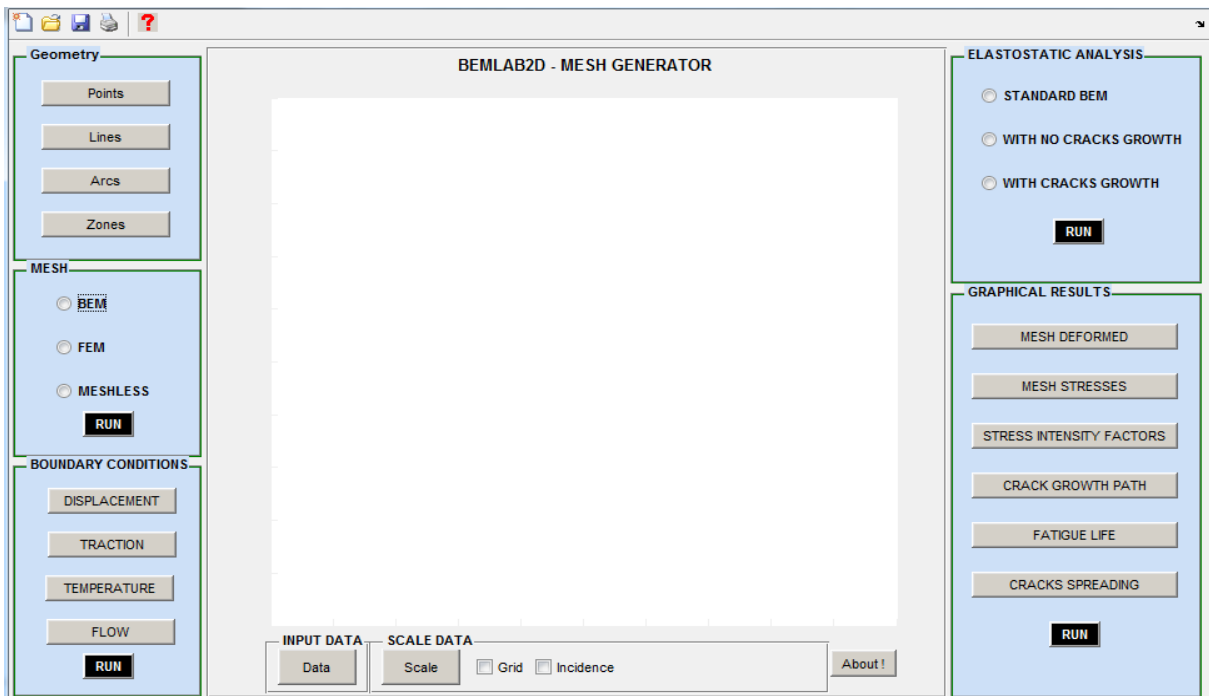


Figura 3.1- Tela Inicial do BemLab2D

O BemLab2D apresenta os seguintes módulos:

- GEOMETRY (Módulo I): Utilizado para a construção do modelo bidimensional do problema por meio de ferramentas de desenho (pontos de auxílio, linhas, arcos e definição de zonas);
- MESH (Módulo II): Utilizado para gerar a malha do problema. Há opções para gerar malhas de MEC, MEF e opção sem malha (*Meshless*). As duas últimas opções não serão tratadas aqui por fugirem do escopo deste trabalho;
- BOUNDARY CONDITIONS (Módulo III): Aqui são definidas as condições de contorno especificamente para o MEC. As duas últimas (Temperatura e Fluxo) serão objetos deste trabalho;
- ELASTOSTATIC ANALYSIS (Módulo IV): Aqui é definida o tipo de análise que será executado para o problema. Pode-se optar pela análise padrão do MEC, análise sem propagação de trinca e análise com propagação de trinca;
- GRAPHICAL RESULTS (Módulo V): Este módulo é responsável pela visualização dos resultados gerados pelo processador BemCracker2D, onde é possível visualizar a malha deformada, valores dos fatores de intensidade de tensão K , propagação da trinca etc.

Neste trabalho o programa BemLab2D foi utilizado para o pré-processamento, usando somente os três primeiros módulos (Geometry, Mesh, Boundary Conditions), com o objetivo de gerar o arquivo de dados de entrada e a visualização da malha para ser processado pelo programa *BEMPOTENTIAL.M*. As seções seguintes tratam da Adequação/Implementação dos botões (Temperature/Flow) e do modelo de arquivo de dados, tendo sido preservados os Módulos I e II.

3.2.1. ADEQUAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO DO MÓDULO III

A Plataforma BemLab2D foi pensada, inicialmente, para problemas elastostáticos e, por esse motivo, existiam apenas as condições de contorno do tipo deslocamento e tração (DISPLACEMENT/TRACTION). Assim, para tratar de problemas de Potencial, fez-se necessário adequar a GUI BemLab2D de forma a atender também esse tipo de análise, ou seja, inserir botões e diálogos que auxiliem na modelagem de natureza Potencial.

Os ícones desse módulo são todos do tipo *PushButton* e as informações são todas plotadas na área gráfica principal do BEMLAB2D, construindo, assim, o modelo físico-geométrico sobre a malha de MEC. Os ícones principais, no caso de Potencial, *TEMPERATURE* e *FLOW* tem

como prioridade acionar os respectivos Diálogos para inserção das condições de contorno. Uma apresentação do módulo III, incluindo as novas condições de contorno está na Figura 3.2.

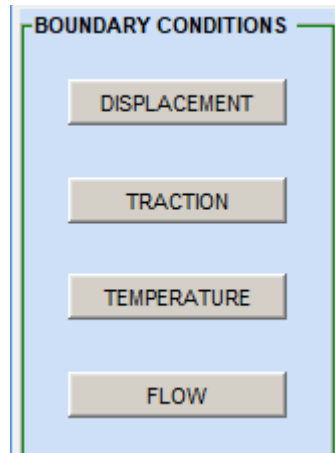


Figura 3.2- Módulo III – Boundary Condition

O ícone TEMPERATURE encontrado no Módulo III corresponde ao ícone que possibilita a inserção das condições de contorno do tipo temperatura no modelo físico-geométrico. Este ícone abre um diálogo onde são inseridas as temperaturas nos nós de cada elemento, conforme direção especificada (x ou y), ou direção normal quando de segmento curvo. O diálogo acionado pelo botão TEMPERATURE é apresentado na Figura 3.3 a seguir.

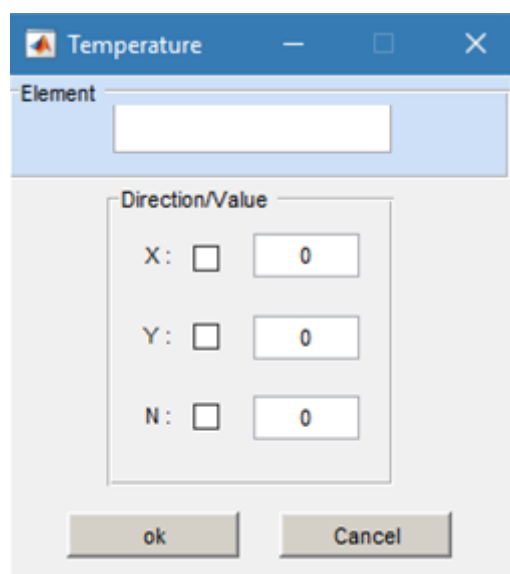


Figura 3.3- GUI-Temperature.

O ícone FLOW encontrado no Módulo III corresponde ao ícone que possibilita a inserção das condições de contorno do tipo fluxo no modelo físico-geométrico. Este ícone abre um diálogo, parecido com o diálogo anterior, onde são inseridos os fluxos nos nós de cada elemento, conforme direção especificada (x ou y), ou direção normal quando de segmento curvo. O diálogo acionado pelo botão FLOW é apresentado na Figura 3.4 a seguir.

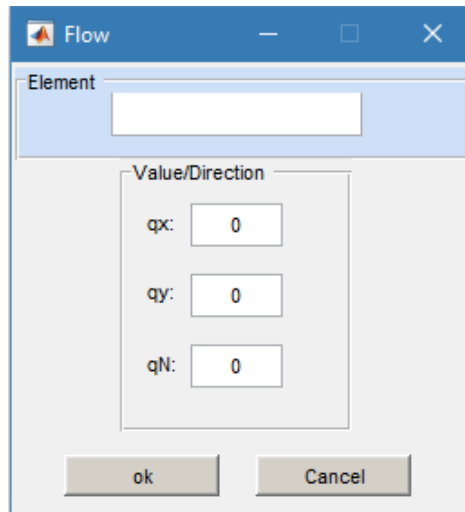


Figura 3.4 - GUI-Flow

Por fim, a implementação dos dois novos botões, bem como dos respectivos diálogos, é feita por intermédio da programação orientada a objetos, a partir da comunicação entre os *PushButton* e GUI's auxiliares com a *Axes*. As funções *Set* e *Get* são responsáveis por toda a comunicação entre as GUI's auxiliares e os *PushButton* transportando as informações de condições de contorno adotada para a malha de elementos de contorno.

3.2.2. GERAÇÃO DO ARQUIVO DE DADOS

A partir dos três primeiros módulos e do botão Run do Módulo III, um arquivo de dados é gerado, conforme padrão adotado para os problemas de Potencial. A seguir, apresentamos um esquema do modelo padrão gerado pelo BemLab2D para o programa de análise.

- Nome do arquivo: *arqbem.dat*
- Número de Nós, Elementos e Pontos Internos: *N NE PI*
- Coordenadas Nodais: *X Y*
- Coordenadas de Pontos Internos: *Xp Yp*
- Condições de Contorno: *TEMP/FLOW VALUE*

O Apêndice A apresenta o passo-a-passo explicando a utilização dos três primeiros modelos, a fim de que o leitor compreenda todo o processo de modelagem pelo BemLab2D, bem como um modelo do arquivo de dados gerado.

3.3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

O programa desenvolvido é chamado de BEMPOTENCIAL e permite o processamento da análise e a obtenção dos resultados para temperatura e fluxo dos problemas de potencial via MEC/MRD. Este programa é devido a Partridge et.al (1992), escrito em linguagem FORTRAN, e aqui foi implementado em MATLAB para se adequar ao BEMLAB2D.

Na Figura 3.5 o fluxograma mostra como o código foi organizado, sendo composto por um programa principal e sete funções, conforme descritos a seguir:

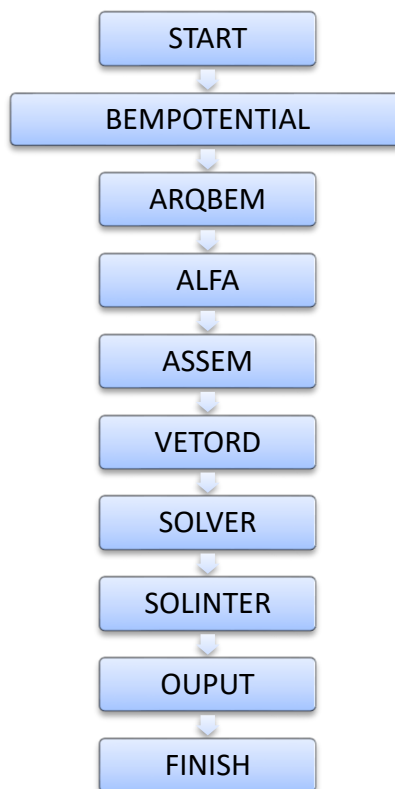


Figura 3.5- Estrutura modular para o programa BEMPOTENCIAL

3.3.1 PROGRAMA PRINCIPAL

BEMPOTENTIAL é o código principal que irá gerenciar cada uma das funções, ou métodos, da sequência. Ele diz a ordem que esses arquivos devem ser chamados e serve para organizar o código. A seguir é apresentado um fragmento de código dessa rotina.

```
clear all
clc
%% 01 arqbem - ler entrada de dados
filename = 'dados.txt';
[nn,ne,l,x,y,kode,con,u,q,le,dados] = arqbem(filename);

%% 02 alfa - cálculo do vetor alfa
alpha = alfa(nn,l,x,y);

%% 03 assem - cálculo das matrizes g e h: aplica condições de contorno
[gg,hh,xy,a] = assem(nn,ne,l,ni,poei,fdep,x,y,le,con,kode,q,u);
%% 04 vetord - cálculo do vetor adicional d
d = vetord (nn,ne,l,x,y,le,con,alpha,hh,gg);
% soma xy e d
for i=1:nn
xy(i)= xy(i)+d(i);
end

%% 05 solver - resolver para valores do contorno
nns = nn;
xys = xy;
as = a;
solxy = solver(nns,xys,as);

% solxy = a\xy;
for i= 1:nn
kk = kode (i);
if((kk == 0) || (kk == 2))
u(i) = solxy(i);
else
q(i) = solxy(i);
end
end

%% 06 interm - calcular os valores dos nós internos
solu= solinter (nn,d,q,hh,gg,ne,l);
```

3.2.2 FUNCTION ARQBEM ()

Essa rotina faz a leitura dos dados referentes ao problema, como número de nós, de elementos e pontos internos, bem como as condições de contorno (temperatura ou fluxo), por meio de um arquivo de dados gerados na fase de pré-processamento pelo BEMLAB2D (Apêndice A). A seguir é apresentado um fragmento de código para esta função.

```
% 01 _ entrada de dados
function [nn,ne,l,x,y,kode,con,u,q,le,dados] = arqbem(filename)
% filename = 'dados_data.txt';
dados = importdata(filename);

% número de nós do contorno (nn)
% número de elementos do contorno (ne)
% número de nós internos (l)
nn = dados(1,1);
ne = dados(1,2);
l = dados(1,3);

%% 2. linhas nn + l para definir coordenadas de cada nó. os nós de contorno são no sentido horário
% x = x coordenadas de nós
% y = y coordenadas de nós
x = dados(2:(nn+l+1),1);
y = dados(2:(nn+l+1),2);

%% 3. linhas para definir condições de contorno. um tipo de condição de contorno e um valor por linha
% kode = tipo de condição de contorno:
%   kode(i) = 0 --> livre
%   kode(i) = 1 --> u=temperatura, conhecidos no ponto i
%   kode(i) = 2 --> q=fluxo, conhecidos no ponto i
% val = valor da condição de contorno
kodec = dados((nn+l+2):length(dados),1);
valc = dados((nn+l+2):length(dados),2);
```

3.2.3 FUNCTION ALFA ()

Esta função é responsável pela construção do vetor α vide Equação (2.49). O tipo de função $b(x,y)$ a ser utilizado deve ser fornecido pelo usuário como um dado de entrada, e então incorporado, conforme um dos seguintes tipos:

- $b = cte$;
- $b = -x$;
- $b = -x^2$
- $b = cte - x^2$

onde, cte é uma constante e x corresponde a coordenada X, ou Y, conforme o tipo de geometria. Inicialmente, a matriz F é construída e α é obtido por eliminação de Gauss usando a função *Solver()* e armazenado no vetor ALPHA. A seguir é apresentado um fragmento de código dessa função.

```
function alpha = alfa(nn,l,x,y)
%=====
nh = nn;
nh = nh + 1;
bb=zeros(nh,1);
f=zeros(nh,nh);
alpha=zeros(nh,1);
disp('====funcao b====')
disp('=== constante (b=cte).....[1] ===')
disp('=== lin (b=x).....[2] ===')
disp('=== quad (b=x^2).....[3] ===')
disp('=== outra (b=cte+x^2).....[4] ===')
op = input('digite sua opcao: ');
cte=0;
if op==1||op==4
    cte=input('valor: ');

for i=1:nh
    xi = x(i);
    yi = y(i);
    bb(i) = fun_b(op,cte,x(i));
    for j =1:nh
        xj = x(j);
        yj = y(j);
        r = sqrt((xi-xj)^2 + (yi-yj)^2);
        f(i,j) = r + 1;
    end
end
end
```

3.2.4 FUNCTION ASSEM()

Esta função é responsável pela montagem das matrizes H e G e formação do sistema $Ax = y$ após aplicação das condições de contorno. Inicialmente, valores conhecidos de u são multiplicados pelo respectivo coeficiente de H e subtraídos da coordenada XY e valores conhecidos de q são multiplicadas pelo respectivo coeficiente de G e adicionado às coordenadas XY, formando o sistema $Hu = Gq$. Após a solução, este vetor conterà as incógnitas do problema. A seguir é apresentado um fragmento de código dessa função.

```

function [gg,hh,xy,a] = assem(nn,ne,l,ni,poei,fdep,x,y,le,con,kode,q,u )
%alocando vetores
xy=zeros(nn+1,1);
hh=zeros(nn+1,nn);
a=zeros(nn+1,nn);
gg=zeros(nn+1,ne);
format long
vpi = pi;
for j1 = 1:nn+1;
    xi = x(j1);
    yi = y(j1);
    xy(j1) = 0.;
    for j = 1:nn
        hh(j1,j) = 0.;
        a(j1,j) = 0.;
    end
end
cc = 0;
for j2 = 1:ne
    lj = le(j2);
    n1 = con(j2,1);
    n2 = con(j2,2);
    x1 = x(n1);
    y1 = y(n1);
    x2 = x(n2);
    y2 = y(n2);
    h1 = 0;
    h2 = 0;
    g1 = 0;
    g2 = 0;
    if(j1~=n1 || j1~=n2)

```

3.2.5 FUNCTION VETORD ()

Esta função é responsável pela montagem do vetor $d = (H\hat{U} - G\hat{Q})\alpha$, dado pela Equação (2.51), por meio de um processo multiplicativo entre matrizes. As matrizes G e H e o vetor α já foram armazenados pelas funções *Assem()* e *Alfa()*, respectivamente. Os vetores \hat{U} e \hat{Q} são as soluções particulares obtidas a partir da Equação (2.45).

O cálculo para obter o vetor d é feito da seguinte maneira:

- Calcular $\hat{Q}\alpha$.

O resultado é um vetor que é armazenado em QH. Os coeficientes de \hat{q} são armazenados em QH1 e QH2 para os nós no início e no fim de cada elemento, a fim de levar em consideração a possível descontinuidade no normal para fora do contorno.

- Calcular $G\hat{Q}\alpha$.

É armazenado o vetor resultante em D. A multiplicação é realizada tendo em consideração que G foi armazenado desmontado.

- Calcular $\widehat{U}\alpha$.

O vetor resultante é armazenado em UH. O valor de \widehat{u} para um dado nó é colocado em UH1. Este processo é mais simples do que o estágio 1, pois não há descontinuidade em \widehat{u} nós, por isso precisa ser feita nenhuma referência a elementos no cálculo.

- Calcular $H\widehat{U}\alpha$.

Aqui o resultado para $\widehat{U}\alpha$ é multiplicado por H.

- Calcular $c_i\widehat{u}_{ij}\alpha_j$

A colaboração desses termos deve ser levada em conta para os nós internos. Observa-se que como $c_i=1$ deste processo é equivalente a adicionar $\widehat{U}\alpha$ para D para os nós interiores.

Um fragmento da rotina da *function vetord ()* é apresentada a seguir:

```
function d = vetord (nn,ne,l,x,y,le,con,alpha,hh,gg)

% rotina usa f = 1 + r
% d é o vetor do rhs calculado nesta rotina
% inicializar matriz d
d=zeros (nn+1,1);
qh=zeros (2*ne,1);
uh=zeros (nn,1);
for k = 1:ne
    n1 = con(k,1);
    n2 = con(k,2);
    x1 = x(n1);
    x2= x(n2);
    y1 = y(n1);
    y2 = y(n2);
    lek = le(k);
    k1 = 2*k-1;
    k2 = 2*k;
    for j = 1:nn+1
        %alpha vector
        alphaj = alpha(j);
        % cálculo com o começo e o fim de cada elemento
        xp = x(j);
        yp = y(j);
        r1 = sqrt((x1-xp)^2 + (y1-yp)^2);
        r2 = sqrt((x2-xp)^2 + (y2-yp)^2);
        qh1 = (0.5 + r1/3.0)*((x1-xp)*(y1-y2)+(y1-yp)*(x2-x1))/lek;
        qh2 = (0.5 + r2/3.0)*((x2-xp)*(y1-y2)+(y2-yp)*(x2-x1))/lek;
        % multiply qhat by alpha; result in qh
        qh(k1) = qh(k1) + qh1 * alphaj;
        qh(k2) = qh(k2) + qh2 * alphaj;
    end
end
```

3.2.6 FUNCTION *SOLVER* ()

Esta é uma função padrão para resolução de sistema, sendo usada tanto a forma implícita do MATLAB quanto à forma implementada, conforme ilustrado no fragmento de código seguinte.

```
function solxy = solver(nns,xys,as)

% solução de eliminação de gauss não pivotal para ax = y
%% triangulize matriz completa nonsimétrica
for m=1:nns-1
    am = 1.0/as(m,m);
    for j = m+1:nns
        cd = as(m,j);
        as(m,j) = cd * am;
    end
    for n = m+1:nns
        alm = as(n,m);
        for kk = m+1:nns
            as(n,kk) = as(n,kk) - as(m,kk) * alm;
        end
    end
end
end
%% back substitution
for m=1:nns-1
    am = 1.0/as(m,m);
    xys(m) = xys(m) * am;
    for n = m+1:nns
        alm = as(n,m);
        xys(n) = xys(n) - xys(m) * alm;
    end
end
end
xys(nns) = xys(nns) / as(nns,nns);
ni = nns;
ni = ni - 1;
while(ni ~= 0)
    for j=ni+1:nns
        xys(ni) = xys(ni) - as(ni,j)*xys(j);
    end
    ni = ni - 1;
end
end
solxy = xys;

end
```


3.2.7 FUNCTION *SOLINTER* ()

Esta função é responsável por computar a solução em pontos internos, uma vez que os valores no contorno já são conhecidos.

```
function solu = solinter (nn,d,q,hh,gg,ne,l)
solu=zeros(nn+1,1);
% calcula valores de potencial em pontos internos uma vez conhece a solução
do contorno
for i = nn+1:nn+1
    solu(i) = 0;
    for k = 1:nn-1
        solu(i) = solu(i) + (gg(i,2*k) + gg(i,(2*k+1)))*q(k+1);
    end
    solu(i) = solu(i) + (gg(i,1)+gg(i,(2*ne)))*q(1);
    for k = 1:nn
        solu(i) = solu(i) - hh(i,k)*solu(k);
    end
    SOLU(I) = SOLU(I) + D(I);
end
end
```

3.2.8 FUNCTION *OUTPUT* ()

Esta função é responsável pela impressão dos resultados, seja para simples conferência (dados do modelo de elementos de contorno), seja para análise dos resultados (dados de temperatura e fluxo). A seguir é apresentado um fragmento de código dessa função.

```
function output (info,res,nep,nxytuq,nxy,enc)

%info=1 - imprime somente dados do modelo para conferencia
%res=1 - imprime somente resultados
format short
if(info==1 && res==0)
disp('numero de:')
disp('nos elementos pontos')
disp(nep)
disp('dados do contorno')
disp('no x y tipo u q')
```

```

disp(nxytuq)
disp('dados de pontos internos')
disp('no    x    y')
disp(nxy)
disp('dados dos elementos')
disp('elem no1    no2    compr')
disp(enc)
end
if(info==0 && res==1)
disp('resultados do contorno')
disp('no    temperatura    fluxo')
disp(nep)
disp('resultados em pontos internos')
disp('no    temperatura')
disp(enc)
end
end

```

Quando é executado o BEMPOTENCIAL, no Command Window (Janela de Comandos) o usuário entra com as opções 1, 2, 3 ou 4, conforme seja o tipo da função b a ser escolhida, e o MATLAB processa a resposta assim que a tecla “Enter” é pressionada e os resultados (temperatura e fluxo) são mostrados na tela, acompanhado da malha de elementos de contorno, como mostra a Figura 3.6.

```

Command Window
Iniciando processo...
...lendo dados!!
...calculando vetor alfa!!
=====Funcao b=====
=== Constante (b=cte).....[1] ===
=== Lin (b=X).....[2] ===
=== Quad (b=X^2).....[3] ===
=== Outra (b=cte+X^2).....[4] ===
Digite sua opcao: 1
...montando matrizes G e H!!
.....montando sistema Ax=y!!
...computando vetor D!!
.....acoplando vetor D ao sistema!!
...resolvendo o sistema por L2U!!
...organizando solucao de contorno!!
...computando solucao em pontos internos!!
...
...imprimindo resultados!!
RESULTADOS DO CONTOURNO
NO    TEMPERATURA    FLUXO
1.0000    40.9355    0
2.0000    41.1656    0
3.0000    41.5625    0
4.0000    41.9842    0
-----

```

Figura 3.6- A Janela de Comandos

4 VALIDAÇÃO DO PROGRAMA

Neste capítulo, serão apresentados exemplos clássicos da literatura para a validação do programa implementado. As tabelas e gráficos mostrarão resultados confrontando-os com a solução exata, quando possível. Todos os exemplos tiveram seus modelos gerados com uso da Interface Gráfica BEMLAB2D.

Para realizar a simulação numérica dos problemas-exemplos no programa BEMPOTENCIAL, primeiramente foi utilizado a GUI BEMLAB2D para a geração do modelo geométrico, da malha e para a inserção das condições de contorno, a fim de gerar o arquivo de dados a ser processado pelo programa.

4.1 EXEMPLO 1 - O PROBLEMA BENCHMARK

Este caso de validação é um dos testes NAFENS benchmark que consiste em uma análise térmica bidimensional, com as seguintes características ilustradas na Figura 4.1.

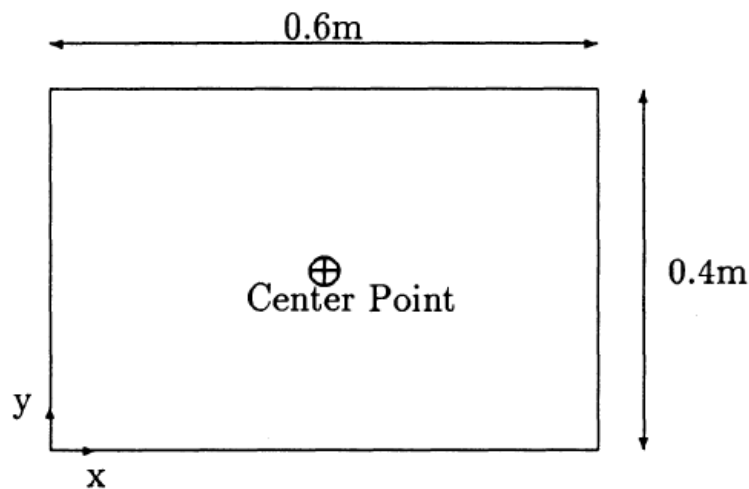


Figura 4.1– Geometria do problema benchmark (Fonte: Partridge et.al, 1992)

A Condutividade térmica é $K_x = K_y = 52 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ e existe uma fonte de calor de 1000000 W/m^3 (assumindo a espessura da unidade). As condições de contorno são todas de temperatura ($T = 0^\circ$) em todo o contorno. A solução exata de temperatura no ponto interno de coordenadas $(0.3; 0.2)$ é de $310,1^\circ \text{ C}$. Esse problema é governado pela equação de Poisson:

$$\nabla^2 u = -\frac{1000000}{52} \quad (4.1)$$

Para esse modelo foram usados 20 elementos lineares e um ponto interno central. Assim, a partir dos pontos de referência criados com base no plano cartesiano adotado, criou-se o modelo geométrico e, a partir deste, a malha de elementos de contorno seguida das condições de contorno do tipo temperatura, como ilustrado na Figura 4.2.

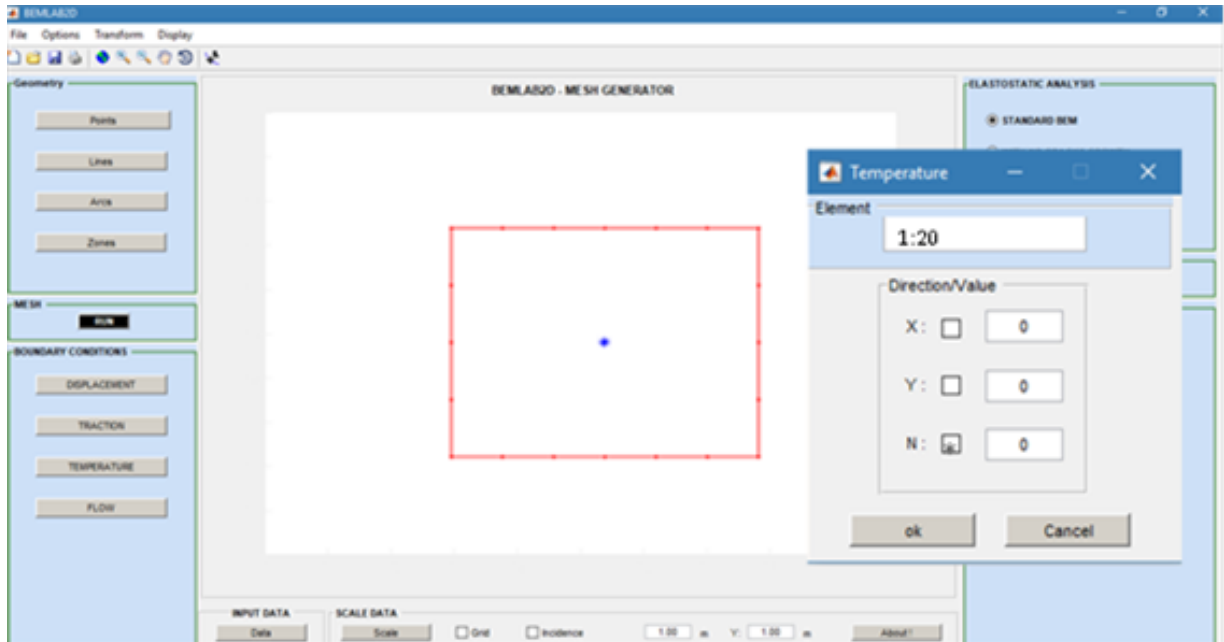


Figura 4.2– Modelo geométrico, malha e condições de contorno do Exemplo 1.

Para obter os resultados pelo programa basta executar o módulo BEMPOTENCIAL e escolher a opção 1 na janela de comando do MATLAB e entrar com o valor da constante a ser considerado, neste caso $b = -\frac{1000000}{52}$, como ilustrado na Figura 4.3.

```

Command Window

Iniciando processo...
...lendo dados!!
...calculando vetor alfa!!
=====Funcao b=====
=== Constante (b=cte).....[1] ===
=== Lin (b=X).....[2] ===
=== Quad (b=X^2).....[3] ===
=== Outra (b=cte+X^2).....[4] ===
Digite sua opcao: 1
fx Valor: -1000000/52
  
```

Figura 4.3– Tipo de função b e correspondente valor.

A Tabela 4.1 apresenta resultados de temperatura para o ponto central obtido pelo programa BEMPOTENTIAL comparados com a solução exata e o erro relativo mostrado em porcentagem.

Tabela 4.1- Resultado da temperatura para o ponto interno.

Ponto interno		Temperatura (°C)		Erro (%)
x	y	Exata	BEMPOTENCIAL	
0.3	0.2	310,10	311,82	0,5566%

4.2 EXEMPLO 2 - ROBLEMA DE TORÇÃO: $B = CTE$

Este exemplo, devido a Partridge et.al (1992), aborda um problema da torção de Saint-Venant de uma seção elíptica. O modelo físico-geométrico da Elipse contém eixo maior $a=2$ m e eixo menor $b=1$ m, conforme apresentado na Figura 4.4 (a). Em seu modelo discretizado, ilustrado na Figura 4.4 (b), foram utilizados 16 elementos de contornos lineares e 17 pontos internos. As condições de contorno são todas de temperatura ($T = 0^\circ$) em todo o contorno.

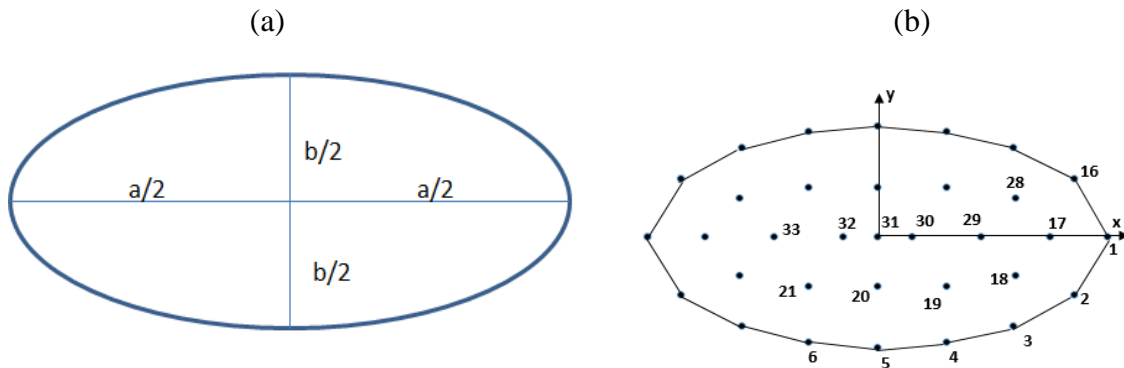


Figura 4.4- Modelo físico-geométrico e modelo discretizado para o exemplo 1.

Esse problema é orientado pela equação:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{G} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{G} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -2\theta \quad (4.2)$$

Onde G é o módulo de cisalhamento e θ é o ângulo de torção. A variável do problema é a função de tensão, tal que:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial v}{\partial y}, \tau_{yz} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.3)$$

Definindo $u = \frac{v}{G\theta}$ a Equação (4.2) pode ser escrito como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \quad (4.4)$$

que é o mesmo que a equação $\nabla^2 u = b$, com $b = -2$ e, portanto, uma função constante.

A equação da elipse é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.5)$$

Essa equação não só permite que as coordenadas dos nós do contorno da Figura 4.4 seja gerado, mas também aparece na solução exata para qual $G = \theta = 1$ é dado por:

$$u = -0,8 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (4.6)$$

Assim, pode ser visto que a equação acima satisfaz a condição de contorno $u = 0$ em Γ . A equação pode ser verificada pela substituição em $\nabla^2 u = b$. A solução para q é obtido começando em:

$$q = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \quad (4.7)$$

No caso de uma elipse, os cossenos de direção normal para qualquer ponto do contorno são dados por: $\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{x}{a}$ e $\frac{\partial y}{\partial n} = \frac{y}{b}$ tal que:

$$q = -0,2(x^2 + 8y^2) \quad (4.8)$$

Para solucionar esse problema com o programa BEMPOTENCIAL, primeiramente é preciso montar o modelo geométrico na interface gráfica BEMLAB2D para a discretização do mesmo, assim como foi descrito no Apêndice A, e após aplicação das condições de contorno, o arquivo de dados é gerado para o modelo ilustrado na Figura 4.5, onde a construção da malha gerou um total de 16 elementos lineares e 17 pontos internos.

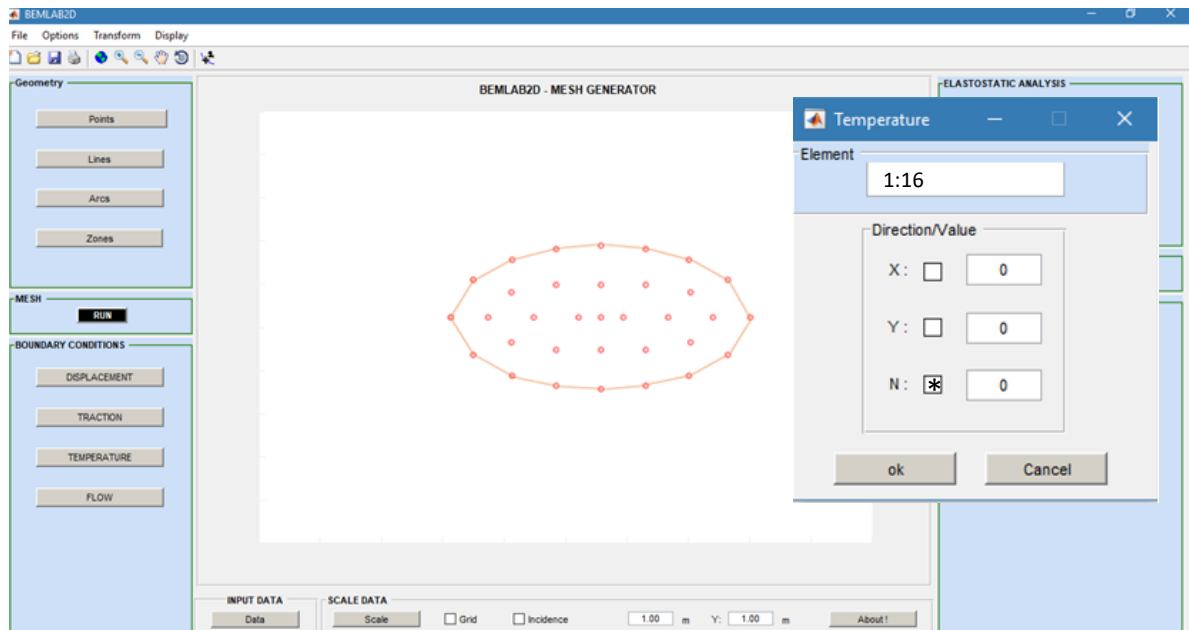


Figura 4.5– Modelo físico-geométrico e modelo discretizado para o exemplo 2.

Nota-se que para obter os resultados no programa basta executar o módulo BEMPOTENCIAL e digitar a opção 1 na janela de comando do MATLAB e entrar com o valor da constante a ser considerado, neste caso $b = -2$, como ilustrado na Figura 4.6.

```

Command Window

Iniciando processo...
...lendo dados!!
...calculando vetor alfa!!
=====Funcao b=====
=== Constante (b=cte).... [1] ===
=== Lin (b=X)..... [2] ===
=== Quad (b=X^2)..... [3] ===
=== Outra (b=cte+X^2)..... [4] ===
Digite sua opcao: 1
fx Valor: -2

```

Figura 4.6 – Tipo de função b e correspondente valor.

A Tabela 4.2 apresenta resultados de fluxo para pontos do contorno obtidos pelo programa BEMPOTENCIAL e comparados com a solução exata, onde se pode verificar os ótimos resultados, conforme ilustrado no gráfico da Figura 4.7. O erro de 14,9% nos pontos 1 e 9 podem ser melhorados com o uso de elementos quadráticos ou com uso de elementos descontínuos e, ainda, considerando nós duplos.

Tabela 4.2- Resultados de fluxo em pontos do contorno obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata.

Pontos do contorno	Coordenadas		FLUXO		
	X	Y	Programa BEMPOTENCIAL	Solução Exata	Erro (%)
1	2,00000	0,00000	-0,68079	-0,80000	14,90%
2	1,70571	-0,52215	-1,02039	-1,01811	0,22%
3	1,17880	-0,80784	-1,35918	-1,32209	2,81%
4	0,59761	-0,95431	-1,53248	-1,52856	0,26%
5	0,00000	-1,00000	-1,58851	-1,60000	0,72%
6	-0,59761	-0,95431	-1,53248	-1,52856	0,26%
7	-1,17880	-0,80784	-1,35918	-1,32209	2,81%
8	-1,70571	-0,52215	-1,02039	-1,01811	0,22%
9	-2,00000	0,00000	-0,68079	-0,80000	14,90%
10	-1,70571	0,52215	-1,02039	-1,01811	0,22%
11	-1,17880	0,80784	-1,35918	-1,32209	2,81%
12	-0,59761	0,95431	-1,53248	-1,52856	0,26%
13	0,00000	1,00000	-1,58851	-1,60000	0,72%
14	0,59761	0,95431	-1,53248	-1,52856	0,26%
15	1,17880	0,80784	-1,35918	-1,32209	2,81%
16	1,70571	0,52215	-1,02039	-1,01811	0,22%

O gráfico da Figura 4.7 ilustra o fluxo obtido nos pontos do contorno, onde pode-se verificar a boa precisão dos resultados, exceto para os pontos 1 e 9.

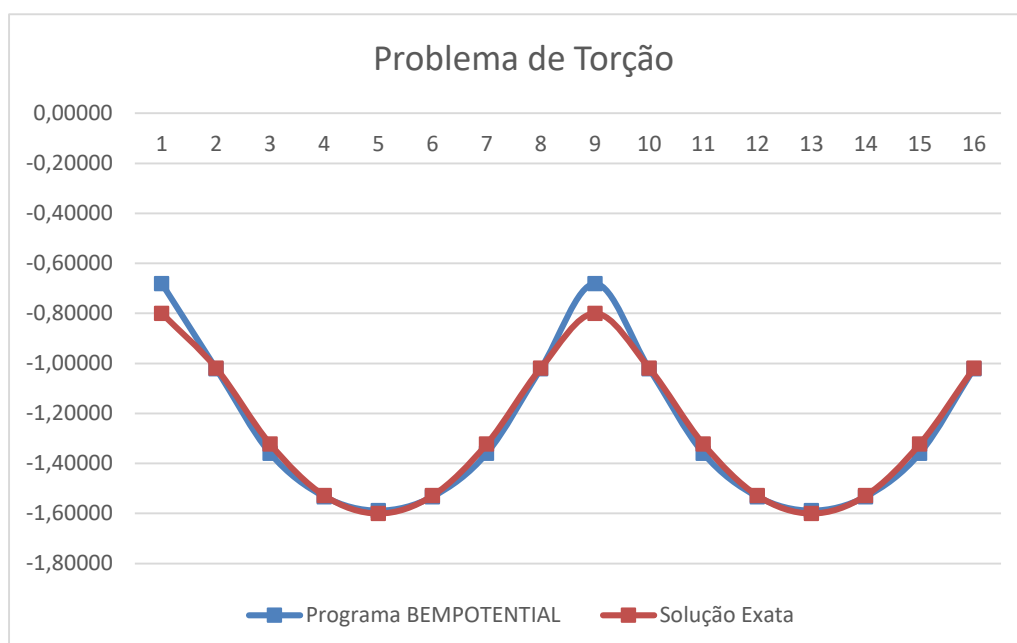


Figura 4.7- Gráfico comparativo dos resultados de fluxo em pontos do contorno obtidos pelo programa BEMPOTENCIAL e pela solução exata do exemplo 2.

Os resultados de temperaturas em pontos internos obtidos pelo programa BEMPOTENCIAL e comparados com a solução exata são apresentadas na Tabela 4.3, com as diferenças mostradas em porcentagem. Observa-se que a maior diferença encontrada foi de 1,34%, consideravelmente pequena, conforme ilustrado no gráfico da Figura 4.8.

Tabela 4.3 - Resultados de temperatura em pontos do internos obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata do exemplo 2.

Pontos internos	Coordenadas		TEMPERATURA		
	X	Y	Programa BEMPOTENCIAL	Solução Exata	Erro (%)
17	1,50000	0,00000	0,34911	0,3500	0,26%
18	1,20000	-0,35000	0,41827	0,4140	1,03%
19	0,60000	-0,45000	0,57360	0,5660	1,34%
20	0,00000	-0,45000	0,64632	0,6380	1,30%
21	-0,60000	-0,45000	0,57360	0,5660	1,34%
22	-1,20000	-0,35000	0,41827	0,4140	1,03%
23	-1,50000	0,00000	0,34911	0,3500	0,26%
24	-1,20000	0,35000	0,41827	0,4140	1,03%
25	-0,60000	0,45000	0,57360	0,5660	1,34%
26	0,00000	0,45000	0,64632	0,6380	1,30%
27	0,60000	0,45000	0,57360	0,5660	1,34%
28	1,20000	0,35000	0,41827	0,4140	1,03%
29	0,90000	0,00000	0,64336	0,6380	0,84%
30	0,30000	0,00000	0,78944	0,7820	0,95%
31	0,00000	0,00000	0,80768	0,8000	0,96%
32	-0,30000	0,00000	0,78944	0,7820	0,95%

O gráfico da Figura 4.8 ilustra a temperatura obtida nos pontos interno, onde pode-se verificar a boa precisão dos resultados.

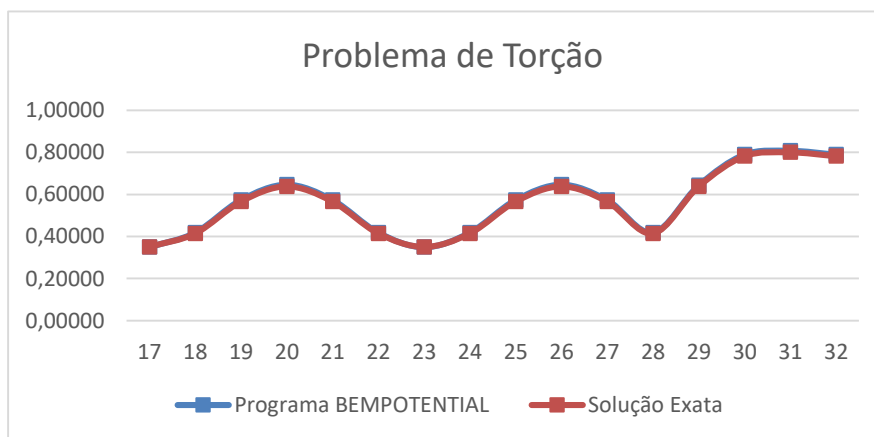


Figura 4.8 - Gráfico comparativo dos resultados de temperatura em pontos internos obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata.

4.3 EXEMPLO 3 - SOLUÇÕES PARA DIFERENTES FUNÇÕES $B(X,Y)$.

A mesma geometria do problema de torção, Figura 4.4 será utilizada em todos os casos dessa seção e serão modeladas usando a geometria do elemento mostrado na Figura 4.5 com condições de contorno $u=0$. Na equação governante, o tipo de função $b(x,y)$ a ser utilizado deve ser fornecido.

4.3.1 CASO $\nabla^2 u = -x$

A equação governante é (4.9)

$$\nabla^2 u = -x^2$$

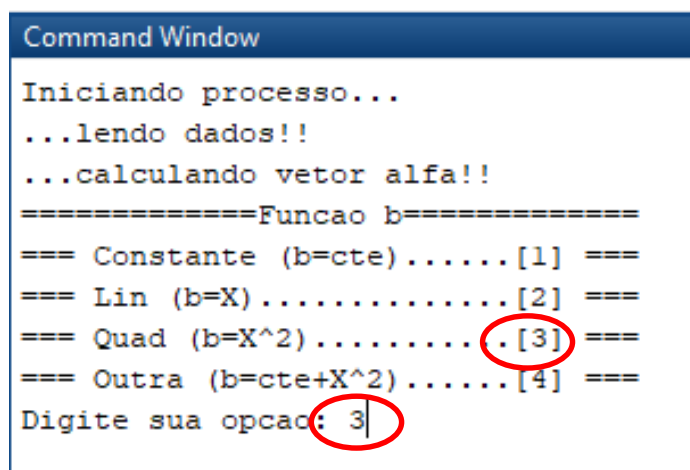
Para esse caso a solução exata é determinada por:

$$u = -\frac{1}{246} (50x^2 - 8y^2 - 33,6) \left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \right)$$

E para condição de contorno $u=0$ em Γ produz:

$$q = \frac{1}{246} (-50x^2 - 96xy^2 + 83,2x) \frac{x}{2} + \frac{1}{246} (-96x^2y + 32y^3 - 83,2y)y \quad (4.10)$$

Nota-se que para obter os resultados no programa basta executar o módulo BEMPOTENCIAL e digitar a opção 3 na janela de comando do MATLAB, conforme ilustrado na Figura 4.9.



```
Command Window
Iniciando processo...
...lendo dados!!
...calculando vetor alfa!!
=====Funcao b=====
=== Constante (b=cte).....[1] ===
=== Lin (b=X).....[2] ===
=== Quad (b=X^2).....[3] ===
=== Outra (b=cte+X^2).....[4] ===
Digite sua opcao: 3
```

Figura 4.9 – Tipo de função $b = x^2$

Resultados de fluxo obtidos pelo programa BEMPOTENTIAL e comparados com a solução exata são apresentados na Tabela 4.4 A média das diferenças absolutas encontradas é de 4,15%. A Tabela 4.5 apresenta os resultados para temperatura com a média das diferenças absolutas de 2,72%. Assim, analisando as Figuras 4.10 e 4.11, observamos que o erro encontrado é mínimo, o que demonstra a eficiência e a precisão do programa.

Tabela 4.4 - Resultados de fluxo em pontos do contorno obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata para $b(x, y) = -x$.

Pontos do contorno	Coordenadas		FLUXO		
	X	Y	Programa BEMPOTENCIAL	Exato	Erro (%)
1	2,00000	0,00000	-0,4974	-0,5714	13,00%
2	1,70571	-0,52215	-0,6351	-0,6202	2,40%
3	1,17880	-0,80784	-0,5863	-0,5566	5,34%
4	0,59761	-0,95431	-0,3340	-0,3262	2,37%
5	0,00000	-1,00000	0,0000	0,0000	0,00%
6	-0,59761	-0,95431	0,3340	0,3262	2,37%
7	-1,17880	-0,80784	0,5863	0,5566	5,34%
8	-1,70571	-0,52215	0,6351	0,6202	2,40%
9	-2,00000	0,00000	0,4974	0,5714	13,00%
10	-1,70571	0,52215	0,6351	0,6202	2,40%
11	-1,17880	0,80784	0,5863	0,5566	5,34%
12	-0,59761	0,95431	0,3340	0,3262	2,37%
13	0,00000	1,00000	0,0000	0,0000	0,00%
14	0,59761	0,95431	-0,3340	-0,3262	2,37%
15	1,17880	0,80784	-0,5863	-0,5566	5,34%
16	1,70571	0,52215	-0,6351	-0,6202	2,40%

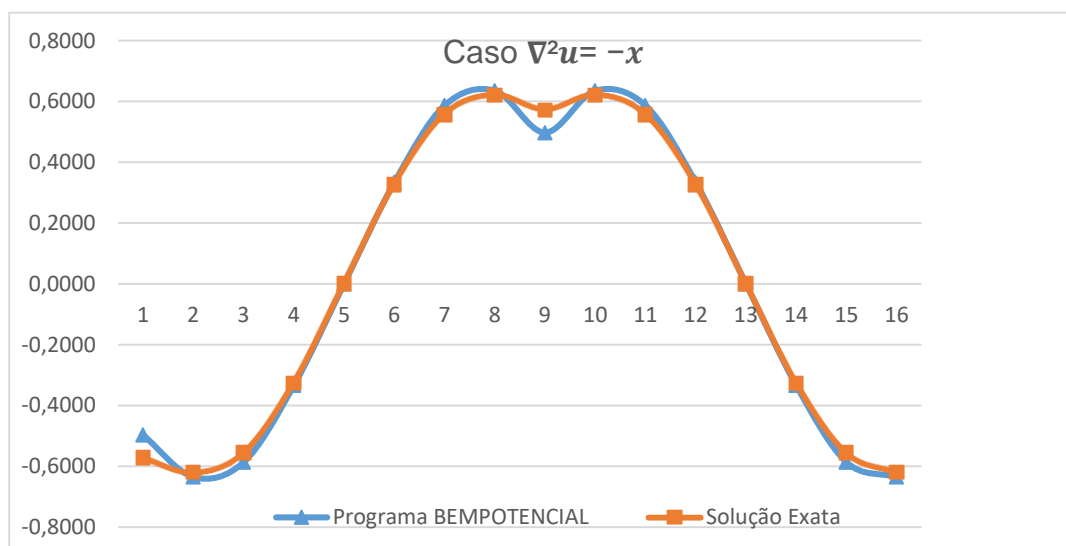


Figura 4.10 - Gráfico comparativo dos resultados de fluxo em pontos do contorno obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata para $b(x, y) = -x$.

Tabela 4.5 - Resultados de temperatura em pontos internos obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata para $b(x, y) = -x$.

Pontos internos	Coordenadas		TEMPERATURA		
	X	Y	Programa BEMPOTENCIAL	Exato	Erro (%)
17	1,50	0,00	0,2633	0,2598	1,33%
18	1,20	-0,35	0,2204	0,2201	0,15%
19	0,60	-0,45	0,1359	0,1437	5,48%
20	0,00	-0,45	0,0928	0,1037	0,00%
21	-0,60	-0,45	0,1359	0,1437	5,48%
22	-1,20	-0,35	0,2204	0,2201	0,15%
23	-1,50	0,00	0,2633	0,2598	1,33%
24	-1,20	0,35	0,2204	0,2201	0,15%
25	-0,60	0,45	0,1359	0,1437	5,48%
26	0,00	0,45	0,0928	0,1037	0,00%
27	0,60	0,45	0,1359	0,1437	5,48%
28	1,20	0,35	0,2204	0,2201	0,15%
29	0,90	0,00	0,2369	0,2402	1,37%
30	0,30	0,00	0,1428	0,1514	5,67%
31	0,00	0,00	0,1273	0,1366	0,00%
32	-0,30	0,00	0,1428	0,1514	5,67%
33	-0,90	0,00	0,2369	0,2402	5,67%

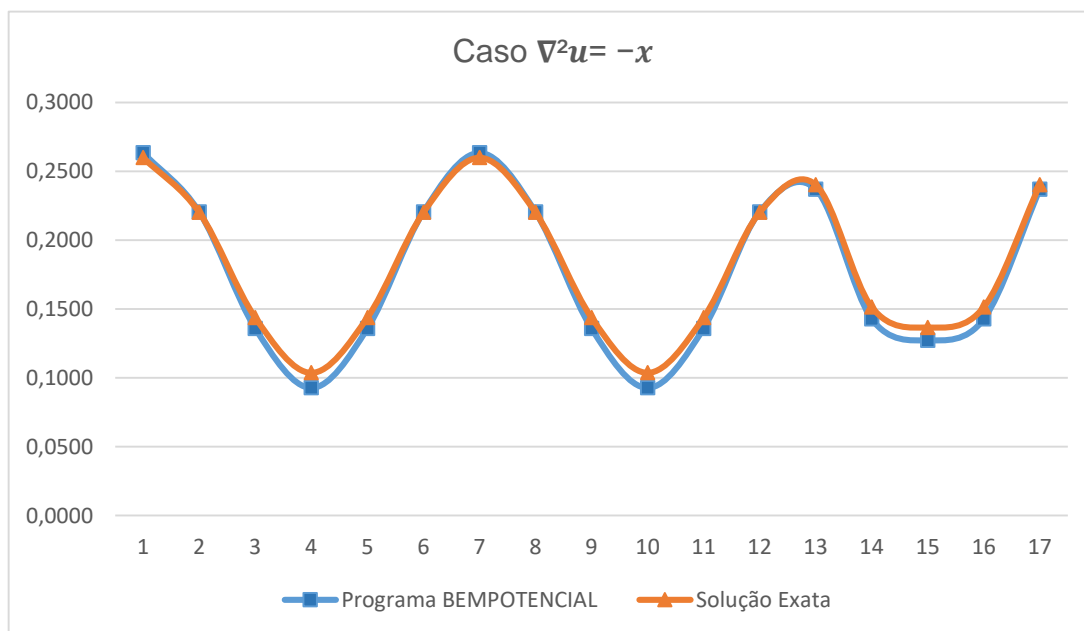


Figura 4.11 - Gráfico comparativo dos resultados de temperatura em pontos internos obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata para $b(x, y) = -x$.

4.3.2 CASO $\nabla^2 u = -x^2$

A equação governante é

$$\nabla^2 u = -x^2 \quad (4.11)$$

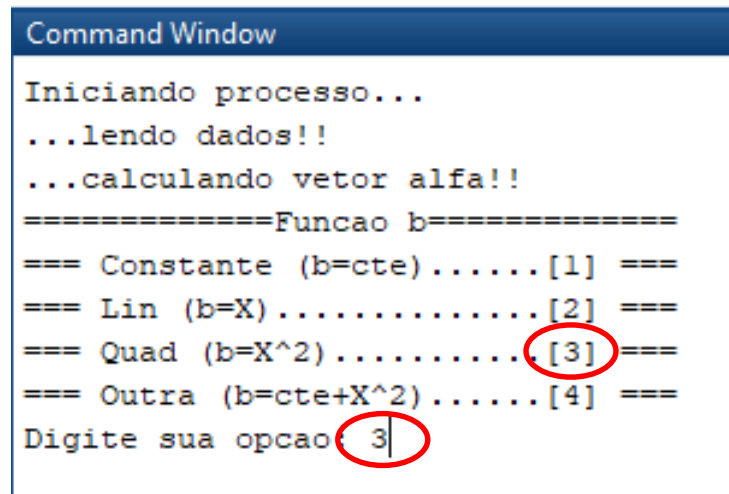
Para esse caso a solução exata é determinada por:

$$u = -\frac{1}{246}(50x^2 - 8y^2 - 33,6)\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1\right) \quad (4.12)$$

E para condição de contorno $u=0$ em Γ produz:

$$q = \frac{1}{246}(-50x^2 - 96xy^2 + 83,2x)\frac{x}{2} + \frac{1}{246}(-96x^2y + 32y^3 - 83,2y)y \quad (4.13)$$

Nota-se que para obter os resultados no programa basta executar o módulo BEMPOTENCIAL e digitar a opção 3 na janela de comando do MATLAB, conforme ilustrado na Figura 4.12.



```
Command Window
Iniciando processo...
...lendo dados!!
...calculando vetor alfa!!
=====Funcao b=====
=== Constante (b=cte).....[1] ===
=== Lin (b=X).....[2] ===
=== Quad (b=X^2).....[3] ===
=== Outra (b=cte+X^2).....[4] ===
Digite sua opcao 3
```

Figura 4.12 - Tipo de função $b = x^2$

Resultados de fluxo obtidos pelo BEMPONTECIAL e pela solução exata para esse caso são mostrados na Tabela 4.6 e os resultados para temperatura são apresentados na Tabela 4.7. A média das diferenças absolutas para fluxo é de 4,34% e média encontrada para temperatura é de 2,72%. O gráfico comparativo para fluxo e temperatura para esse caso, podem ser visualizados respectivamente nas Figuras 4.11 e 4.14, o que demonstra ótimos resultados encontrados.

Tabela 4.6- Resultados de fluxo em pontos do contorno obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata para $b(x, y) = -x^2$.

Pontos do contorno	Coordenadas		FLUXO		
	X	Y	Programa BEMPOTENCIAL	Exato	Erro (%)
1	2,00000	0,00000	-0,8276	-0,9496	13,00%
2	1,70571	-0,52215	-0,9521	-0,9151	4,05%
3	1,17880	-0,80784	-0,7022	-0,6574	6,81%
4	0,59761	-0,95431	-0,3430	-0,3431	0,02%
5	0,00000	-1,00000	-0,1979	-0,2081	0,00%
6	-0,59761	-0,95431	-0,3430	-0,3431	0,02%
7	-1,17880	-0,80784	-0,7022	-0,6574	6,81%
8	-1,70571	-0,52215	-0,9521	-0,9151	4,05%
9	-2,00000	0,00000	-0,8276	-0,9496	13,00%
10	-1,70571	0,52215	-0,9521	-0,9151	4,05%
11	-1,17880	0,80784	-0,7022	-0,6574	6,81%
12	-0,59761	0,95431	-0,3430	-0,3431	0,02%
13	0,00000	1,00000	-0,1979	-0,2081	0,00%
14	0,59761	0,95431	-0,3430	-0,3431	0,02%
15	1,17880	0,80784	-0,7022	-0,6574	6,81%
16	1,70571	0,52215	-0,9521	-0,9151	4,05%

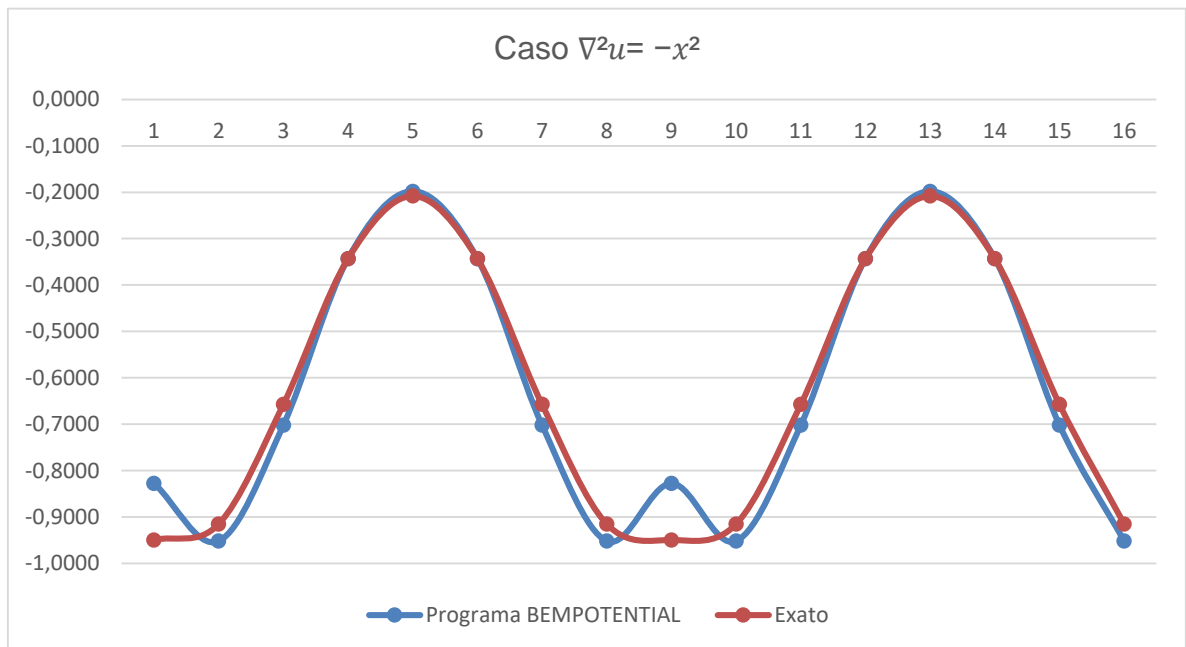


Figura 4.13 - Gráfico comparativo dos resultados de fluxo em pontos do contorno obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata para $b(x, y) = -x^2$

Tabela 4.7 - Resultados de temperatura em pontos internos obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata para $b(x, y) = -x^2$.

Pontos internos	Coordenadas		TEMPERATURA		
	X	Y	Programa BEMPOTENCIAL	Exato	Erro (%)
17	1,50	0,00	0,2633	0,2598	1,33%
18	1,20	-0,35	0,2204	0,2201	0,15%
19	0,60	-0,45	0,1359	0,1437	5,48%
20	0,00	-0,45	0,0928	0,1037	0,00%
21	-0,60	-0,45	0,1359	0,1437	5,48%
22	-1,20	-0,35	0,2204	0,2201	0,15%
23	-1,50	0,00	0,2633	0,2598	1,33%
24	-1,20	0,35	0,2204	0,2201	0,15%
25	-0,60	0,45	0,1359	0,1437	5,48%
26	0,00	0,45	0,0928	0,1037	0,00%
27	0,60	0,45	0,1359	0,1437	5,48%
28	1,20	0,35	0,2204	0,2201	0,15%
29	0,90	0,00	0,2369	0,2402	1,37%
30	0,30	0,00	0,1428	0,1514	5,67%
31	0,00	0,00	0,1273	0,1366	0,00%
32	-0,30	0,00	0,1428	0,1514	5,67%
33	-0,90	0,00	0,2369	0,2402	5,67%

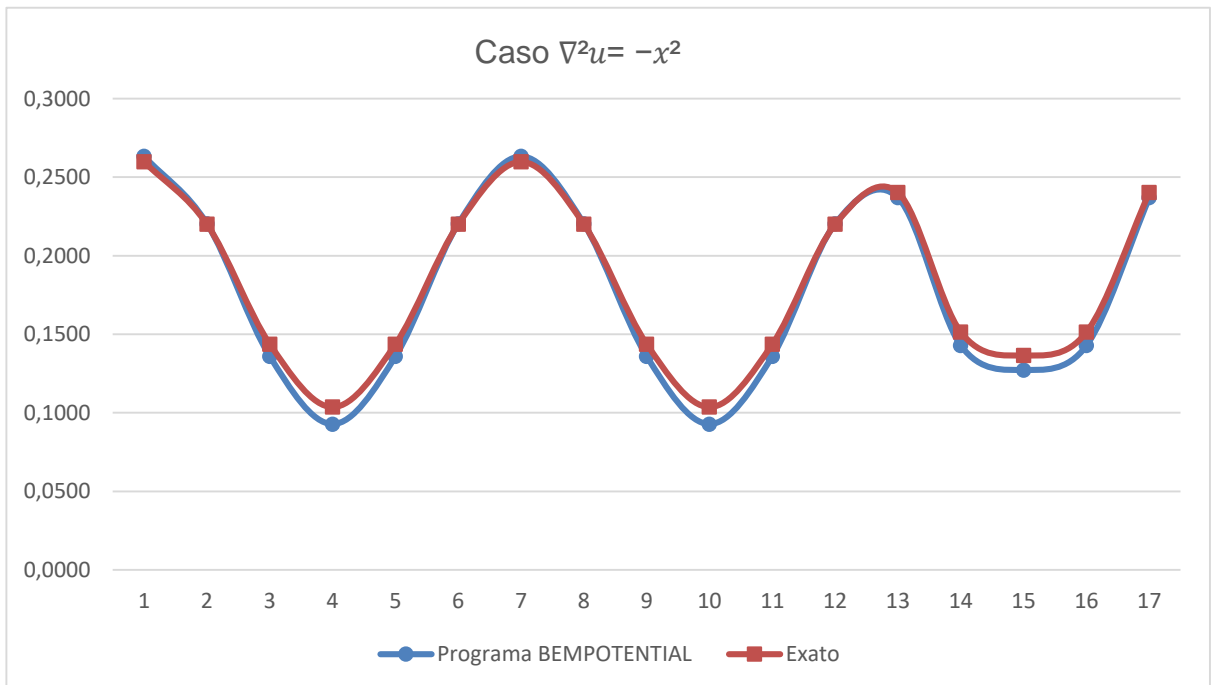


Figura 4.14 - Gráfico comparativo dos resultados de temperatura em pontos internos obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata para $b(x, y) = -x^2$.

4.3.3 CASO $\nabla^2 u = a^2 - x^2$

A equação governante é

$$\nabla^2 u = 4 - x^2 \quad (4.14)$$

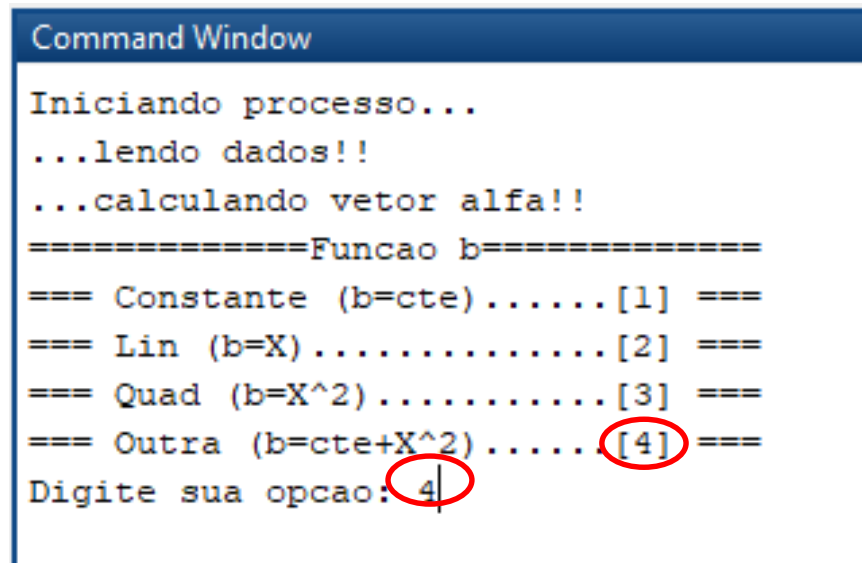
Para esse caso a solução exata é determinada por:

$$u = \left[1,6 - \frac{1}{246} (50x^2 - 8y^2 - 33,6) \left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \right) \right] \quad (4.15)$$

E para condição de contorno $u=0$ em Γ produz:

$$q = 0,4(x^2 + 8y^2) + \frac{1}{246} (-50x^2 - 96xy^2 + 83,2x) \frac{x}{2} + \frac{1}{246} (-96x^2y + 32y^3 - 83,2y)y \quad (4.16)$$

Nota-se que para obter os resultados no programa basta executar o módulo BEMPOTENCIAL e digitar a opção 4 na janela de comando do MATLAB, seguido do valor da constante, conforme mostrado na Figura 4.15.



```
Command Window
Iniciando processo...
...lendo dados!!
...calculando vetor alfa!!
=====Funcao b=====
=== Constante (b=cte) ..... [1] ===
=== Lin (b=X) ..... [2] ===
=== Quad (b=X^2) ..... [3] ===
=== Outra (b=cte+X^2) ..... [4] ===
Digite sua opcao: 4
```

Figura 4.15 – Tipo de função $b = cte + x^2$

Resultados de fluxo obtidos pelo BEMPONTECIAL e pela solução exata para esse caso são mostrados na Tabela 4.8 e os resultados para temperatura são apresentados na Tabela 4.9. A média das diferenças absolutas para fluxo é de 2,75 % e média encontrada para temperatura é de 3,01%. O gráfico comparativo para fluxo e temperatura para esse caso, podem ser visualizados respectivamente nas Figuras 4.16 e 4.17, o que demonstra uma diferença relativamente pequena.

Tabela 4.8 - Resultados de fluxo em pontos do contorno obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata para $b(x, y) = 4 - x^2$.

Pontos do contorno	Coordenadas		FLUXO		
	X	Y	Programa BEMPOTENCIAL	Exato	Erro (%)
1	2,00000	0,00000	0,5339	0,6504	13,00%
2	1,70571	-0,52215	1,0886	1,1211	2,90%
3	1,17880	-0,80784	2,0162	1,9868	1,48%
4	0,59761	-0,95431	2,7219	2,7140	0,02%
5	0,00000	-1,00000	2,9791	2,9919	0,00%
6	-0,59761	-0,95431	2,7219	2,7140	0,02%
7	-1,17880	-0,80784	2,0162	1,9868	1,48%
8	-1,70571	-0,52215	1,0886	1,1211	2,90%
9	-2,00000	0,00000	0,5339	0,6504	13,00%
10	-1,70571	0,52215	1,0886	1,1211	2,90%
11	-1,17880	0,80784	2,0162	1,9868	1,48%
12	-0,59761	0,95431	2,7219	2,7140	0,02%
13	0,00000	1,00000	2,9791	2,9919	0,00%
14	0,59761	0,95431	2,7219	2,7140	0,02%
15	1,17880	0,80784	2,0162	1,9868	1,48%
16	1,70571	0,52215	1,0886	1,1211	2,90%

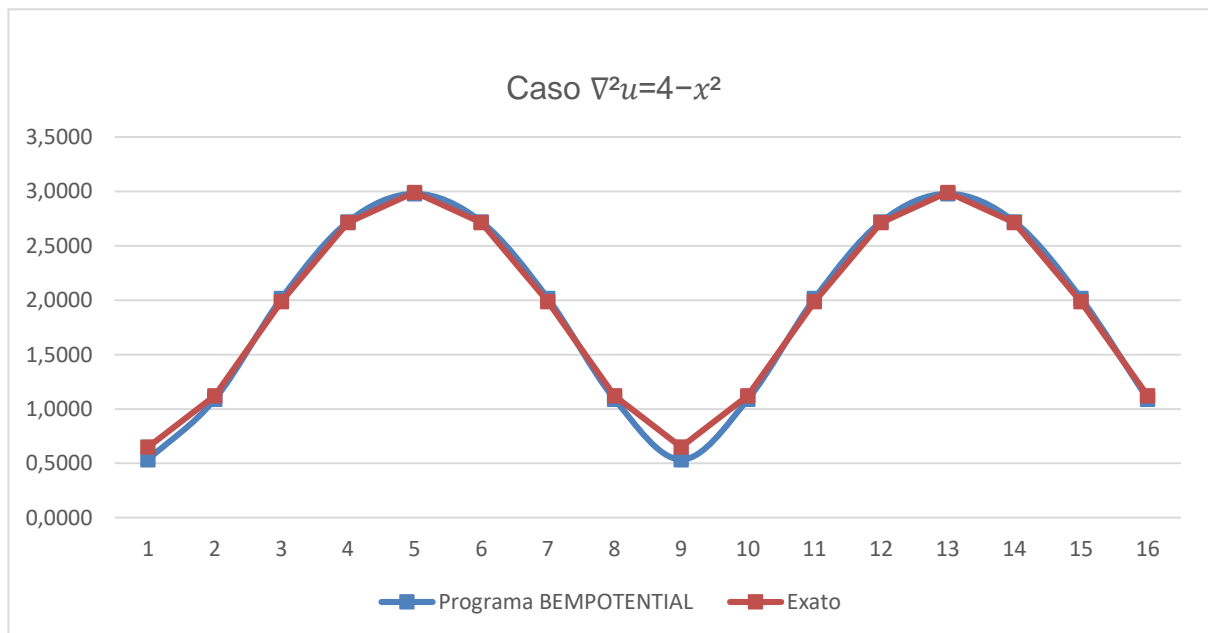


Figura 4.16- Gráfico comparativo dos resultados de fluxo em pontos do contorno obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata para $b(x, y) = 4 - x^2$.

Tabela 4.9 - Resultados de temperatura em pontos internos obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata para $b(x, y) = 4 - x^2$.

Pontos internos	Coordenadas		TEMPERATURA		
	X	Y	Programa BEMPOTENCIAL	Exato	Erro (%)
17	1,50	0,00	-0,4349	-0,4402	1,19%
18	1,20	-0,35	-0,6161	-0,6079	1,35%
19	0,60	-0,45	-1,0113	-0,9883	5,48%
20	0,00	-0,45	-1,1999	-1,1723	0,00%
21	-0,60	-0,45	-1,0113	-0,9883	5,48%
22	-1,20	-0,35	-0,6161	-0,6079	1,35%
23	-1,50	0,00	-0,4349	-0,4402	1,19%
24	-1,20	0,35	-0,6161	-0,6079	1,35%
25	-0,60	0,45	-1,0113	-0,9883	5,48%
26	0,00	0,45	-1,1999	-1,1723	0,00%
27	0,60	0,45	-1,0113	-0,9883	5,48%
28	1,20	0,35	-0,6161	-0,6079	1,35%
29	0,90	0,00	-1,0498	-1,0358	1,37%
30	0,30	0,00	-1,4361	-1,4126	5,67%
31	0,00	0,00	-1,4881	-1,4634	0,00%
32	-0,30	0,00	-1,4361	-1,4126	5,67%
33	-0,90	0,00	-1,0498	-1,0358	5,67%

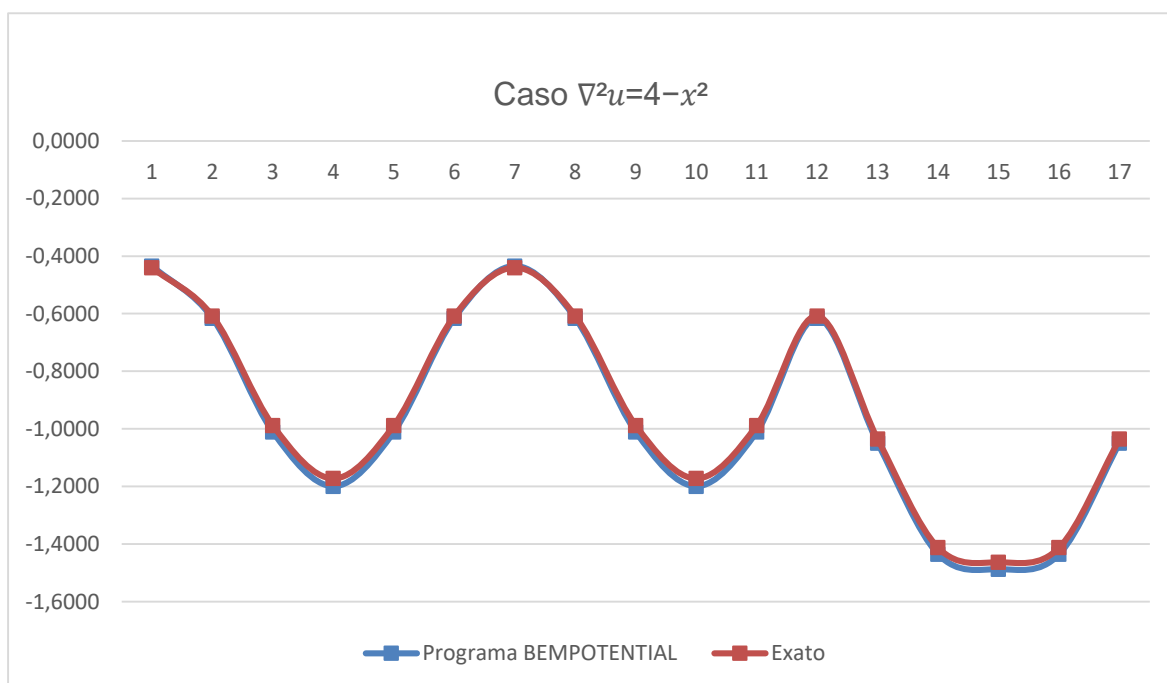


Figura 4.17 - Gráfico comparativo dos resultados de temperatura em pontos internos obtidos pelo BEMPOTENCIAL e pela solução exata para $b(x, y) = 4 - x^2$.

5 ESTUDO DE CASO

A proposta desse trabalho é validar o estudo e análise pelo MEC/MRD baseados em problemas regidos pela equação de Poisson ($\nabla^2 u = b$). Para esse estudo será modelado uma placa devido a Guimarães (2017), no qual o MEC com sub-regiões foi utilizado para problemas regidos pela equação de Laplace ($\nabla^2 u = 0$). Para isso foi modelado duas disposições geométricas, uma com fissura angular e outra com fissura quadrangular, as quais foram discretizadas em elementos lineares no contorno do domínio e em elementos das fissuras, além de pontos internos.

5.1- DADOS DO MODELO

A modelagem experimental foi desenvolvida no Laboratório de Termografia da Universidade de Brasília por BAUER (2016). O modelo consiste em uma placa de argamassa com dimensões **160 x 387 x 40 mm**, contendo duas fissuras de **160 x 2 mm**, e profundidade de **20** e **10 mm**, que correspondem respectivamente às fissuras F1 e F2. A mesma foi submetida a um ciclo de aquecimento direto, que possui duração de 240 minutos, de forma a simular que o calor recebido fluísse do exterior para o interior de um edifício através de uma fachada. A placa está presa numa base composta de cimento e areia, previamente moldada e endurecida (curada por 28 dias), além de ser envolvida em seguida, por uma camada de isopor, que determinará algumas condições de contorno do ensaio, como ilustrado na Figura 5.1.

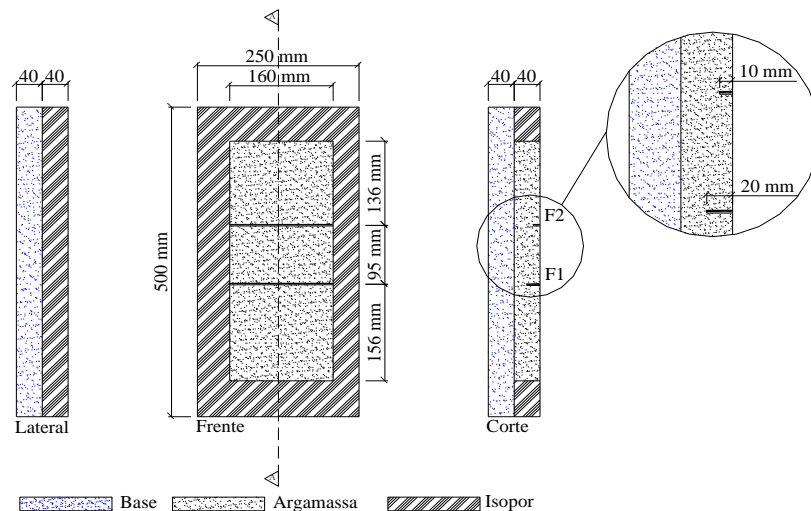


Figura 5.1 - Detalhamento da placa

(Fonte: GUIMARÃES, 2017)

A placa foi instrumentada no processo de moldagem com termopares, sendo que T1 e T2 localizam-se na face frontal, T3 no alinhamento da profundidade da fissura 2, T4, no alinhamento da profundidade da fissura 1, T5 na interface e T6 no fundo da base, conforme a Figura 5.2.

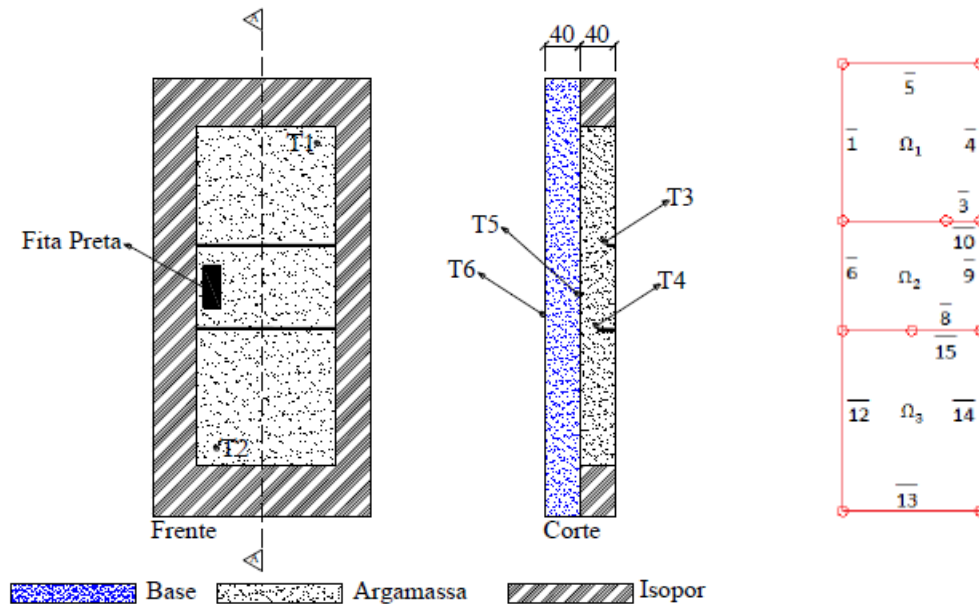


Figura 5.2 - Instrumentação e modelagem.

Fonte: GUIMARÃES, 2017

Para determinar qual o valor da condição de contorno de cada segmento, utilizaram-se como base os resultados experimentais obtidos pelos termopares (BAUER, 2016). Aqui será modelado apenas o corte para um tempo escolhido de 120 minutos, para o qual se adotaram as seguintes considerações:

- Nas linhas do contorno que representam a face (segmentos $\bar{4}$, $\bar{9}$ e $\bar{14}$), foi inserida a média da temperatura obtida pelos termopares da face, $T = 44,4^\circ\text{C}$ (cc1);
- Nas linhas do contorno superior e inferior, segmentos $\bar{5}$ e $\bar{13}$, foi determinado fluxo zero, $q = 0$ (cc2);
- Nas linhas do contorno que representam o fundo da placa (segmentos $\bar{1}$, $\bar{6}$ e $\bar{12}$), aplicou-se o valor obtido pelo termopar da interface do experimento, pois este estava localizado exatamente entre o fundo da placa e a base em que foi moldada, $T = 40,4^\circ\text{C}$ (cc3);

- Nos seguimentos que representam a fissura, (seguimentos $\bar{3}$, $\bar{8}$, $\bar{10}$ e $\bar{15}$), também foi inserido a média da temperatura da face, ou seja $T=44,4^{\circ}\text{C}$ (cc4).

Serão modeladas duas disposições geométricas em relação ao corte, como ilustrado nas Figuras 5.3 (a) e 5.3 (b), com o objetivo de analisar a distribuição de temperatura na presença de fissuras e para um tipo específico com condições de contorno conhecidas nesse tempo.

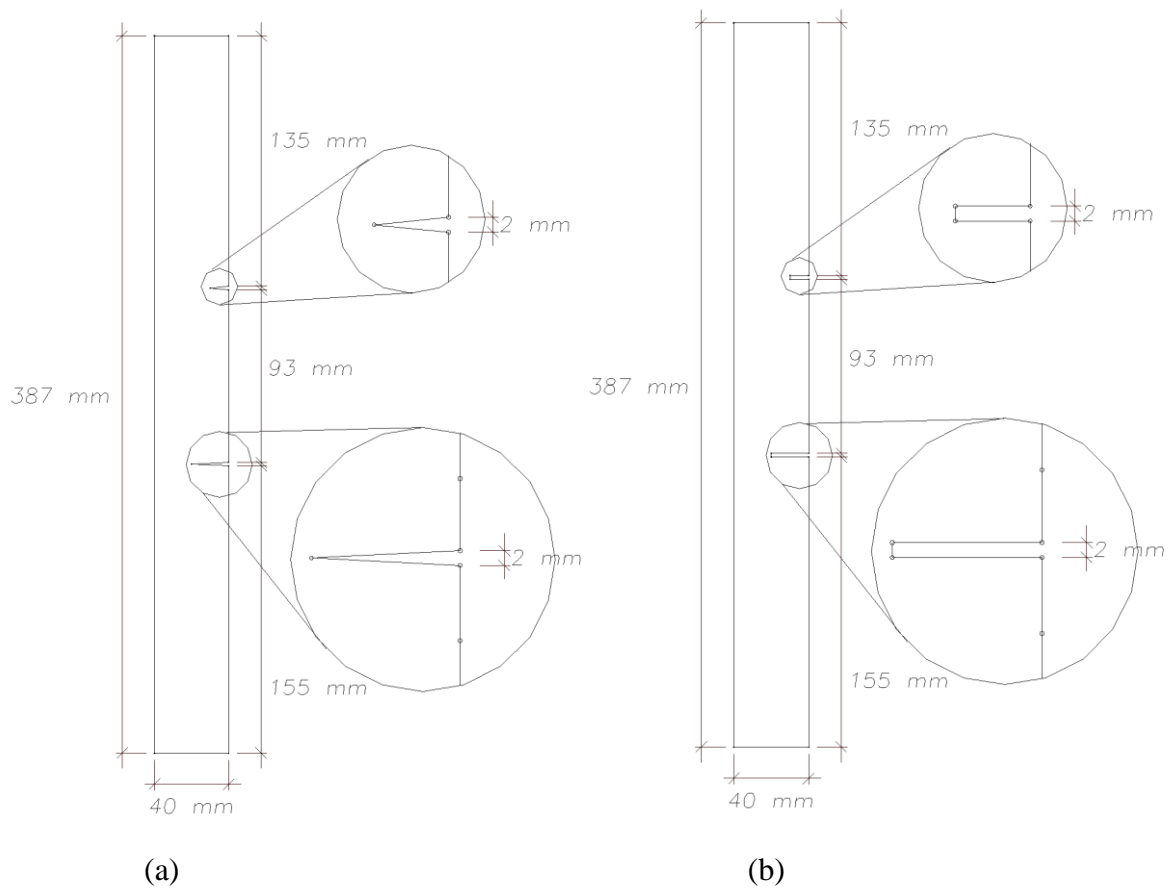


Figura 5.3 - Modelo da placa: (a) com fissura angular; (b) com fissura retangular.

As propriedades utilizadas da placa são devido a argamassa colante, conforme dados da Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Propriedades hidrotérmicas dos materiais

	Massa específica aparente	Porosidade	Calor Específico	Condutivida de térmica	Fator de resistência à difusão de vapor de água	Teor de umidade de referência	Umidade de saturação livre	Coefficiente de absorção de água
Símbolo	ρ	ξ	c	λ	μ	W_{ref}	W_f	Avalor
Unidade	kg/m ³	m ³ /m ³	J/kg.K	W/m.K	[-]	kg/m ³	kg/m ³	kg/m ² .√s
Placa cerâmica	1730	0,290	868	0,490	116*	1,4	192,0	0,001
Argamassa colante	1450	0,260	850	0,800	18	30,7	163,2	0,130
Argamassa externa e interna	1755	0,210	850	0,800	28	26,0	210,0	0,039
Bloco cerâmico	578	0,486	850	0,158	23	13,0	193,0	0,090

*Valor resultante do ensaio de permeabilidade para o sistema composto de placa cerâmica e rejunte, conforme Apêndice A

(Fonte: Nascimento, 2016)

5.2 – MODELAGEM NUMÉRICA E COMPUTACIONAL

Nesta seção, apresentamos a modelagem para o estudo de caso, considerando os dois modelos de placas fissuradas seguintes:

- Modelo I – Placa com Fissura Angular (MPFA)
- Modelo II – Placa com Fissura Retangular (MPFR)

Em todos os modelos, a GUI BemLab2D foi utilizada para geração de malha com elementos lineares, bem como do arquivo de dados necessário à análise pelo programa BEMPOTENCIAL. O valor da função b utilizado em todos os modelos, calculado conforme dados da Tabela 5,1, foi de 0,0010625 (w/m³)/(w/m°C).

Inicialmente, a placa estudada foi modelada sem consideração de fissuras para fins de comparação e como referência. A placa pode ser visualizada na Figura 5.4.

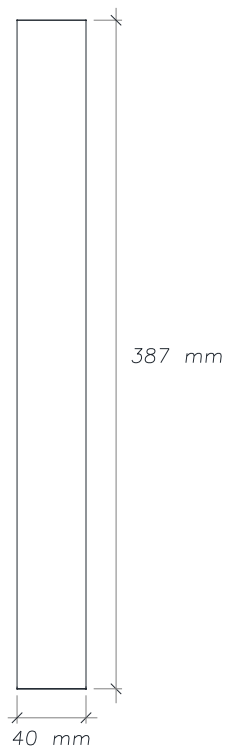


Figura 5.4 - Modelo da placa referência

A Figura 5.5 ilustra a malha do modelo de referência com 132 elementos lineares e 75 pontos internos.

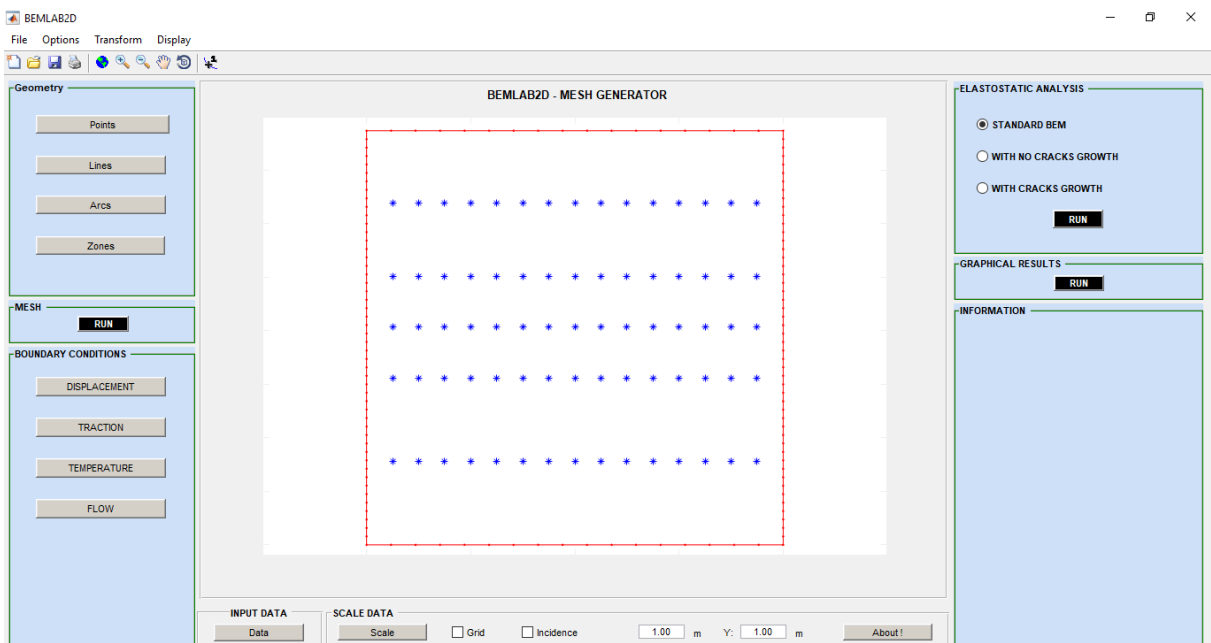


Figura 5.5 - Malha de elementos de contorno para o Modelo I.

Para fins de análise, foram considerados cinco alinhamentos horizontais (A, B, C, D e E) e um alinhamento vertical (F) para verificação do comportamento da temperatura no interior da placa, quando na presença das fissuras. A Figura 5.6 ilustra os alinhamentos da malha.

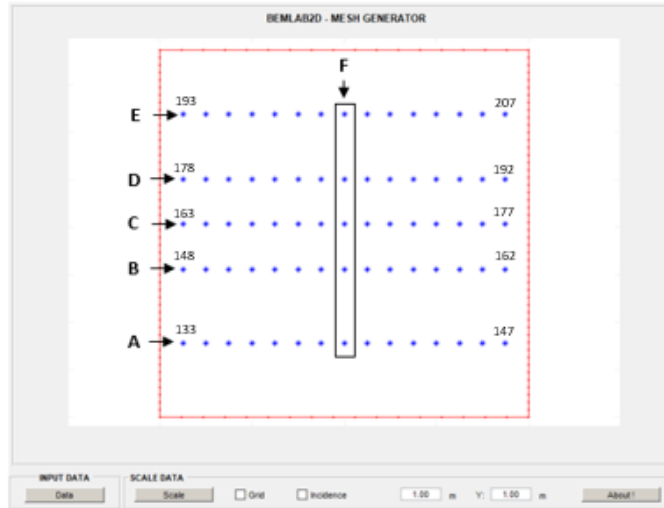


Figura 5.6 - Pontos de captação da temperatura do modelo I

A Tabela 5.2 apresenta os pontos e respectivas coordenadas para os alinhamentos horizontais e a Tabela 5.3, para o alinhamento vertical.

Tabela 5.2 - Pontos e Coordenadas dos alinhamentos horizontais (A, B, C, D e E) do modelo referência

Alinhamentos														
A			B			C			D			E		
Ponto	x	y	Ponto	x	y	Ponto	x	y	Ponto	x	y	Ponto	x	y
133	2,5	78	148	2,5	156	163	2,5	203,5	178	2,5	251	193	2,5	319
134	5	78	149	5	156	164	5	203,5	179	5	251	194	5	319
135	7,5	78	150	7,5	156	165	7,5	203,5	180	7,5	251	195	7,5	319
136	10	78	151	10	156	166	10	203,5	181	10	251	196	10	319
137	12,5	78	152	12,5	156	167	12,5	203,5	182	12,5	251	197	12,5	319
138	15	78	153	15	156	168	15	203,5	183	15	251	198	15	319
139	17,5	78	154	17,5	156	169	17,5	203,5	184	17,5	251	199	17,5	319
140	20	78	155	20	156	170	20	203,5	185	20	251	200	20	319
141	22,5	78	156	22,5	156	171	22,5	203,5	186	22,5	251	201	22,5	319
142	25	78	157	25	156	172	25	203,5	187	25	251	202	25	319
143	27,5	78	158	27,5	156	173	27,5	203,5	188	27,5	251	203	27,5	319
144	30	78	159	30	156	174	30	203,5	189	30	251	204	30	319
145	32,5	78	160	32,5	156	175	32,5	203,5	190	32,5	251	205	32,5	319
146	35	78	161	35	156	176	35	203,5	191	35	251	206	35	319
147	37,5	78	162	37,5	156	177	37,5	203,5	192	37,5	251	207	37,5	319

Tabela 5.3 - Pontos e Coordenadas do alinhamento vertical (F) do modelo de referência

Ponto	x	y
140	20	78
155	20	156
170	20	203,5
185	20	251
251	20	319

Para essa modelagem, adotamos as seguintes condições de contorno, a fim de preservar as mesmas características dos modelos com fissuras a serem analisados:

- Nas linhas do contorno que representam o fundo da placa (seguimento $\bar{1}$) e face da placa (seguimento $\bar{3}$) foram inseridas as condições de contorno cc3 e cc4, respectivamente;
- Nas linhas do contorno superior e inferior (seguimentos $\bar{2}$ e $\bar{4}$), foi determinado que o fluxo seja zero, conforme ilustrado na Figura 5.7.

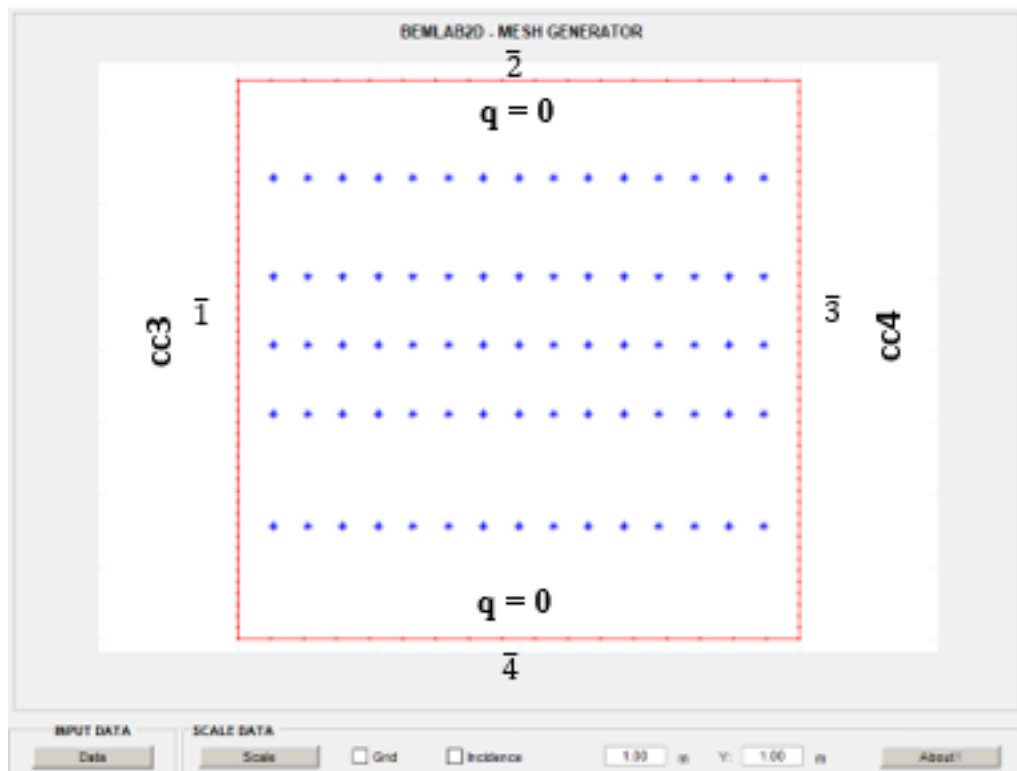


Figura 5.7 - Condições de contorno para o modelo de referência.

A Tabela 5.4 apresenta os resultados de temperatura nos contornos superior e inferior, nos quais o fluxo foi considerado zero.

Tabela 5.4 - Temperatura no Contorno com fluxo zero do modelo de referência

Contorno			
Superior		Inferior	
Ponto	Temperatura	Ponto	Temperatura
52	40,7101	118	44,3081
53	41,0262	119	44,0961
54	41,3255	120	43,8824
55	41,6160	121	43,6614
56	41,8987	122	43,4328
57	42,1737	123	43,1965
58	42,4410	124	42,9524
59	42,7006	125	42,7005
60	42,9524	126	42,4409
61	43,1965	127	42,1737
62	43,4329	128	41,8987
63	43,6615	129	41,6160
64	43,8824	130	41,3255
65	44,0961	131	41,0262
66	44,3081	132	40,7101

A Tabela 5.5 apresenta resultados de temperatura para os alinhamentos horizontais, enquanto na Tabela 5.6 constam os resultados para o alinhamento vertical.

Tabela 5.5 - Resultados de temperatura dos alinhamentos (A, B, C, D e E) obtidos pelo BEMPOTENCIAL do modelo referência

Linha de pontos internos A		Linha de pontos internos B		Linha de pontos internos C		Linha de pontos internos D		Linha de pontos internos E	
Ponto	Temp.	Ponto	Temp.	Ponto	Temp.	Ponto	Temp.	Ponto	Temp.
133	-1,5809	148	-1,6270	163	-1,6092	178	-1,6299	193	-1,5440
134	-1,2895	149	-1,3328	164	-1,3359	179	-1,3282	194	-1,2751
135	-1,0156	150	-1,0511	165	-1,0537	180	-1,0471	195	-1,0042
136	-0,7498	151	-0,7772	166	-0,7791	181	-0,7740	196	-0,7410
137	-0,4919	152	-0,5111	167	-0,5124	182	-0,5088	197	-0,4857
138	-0,2419	153	-0,2528	168	-0,2535	183	-0,2515	198	-0,2383
139	0,0003	154	-0,0023	169	-0,0024	184	-0,0020	199	0,0011
140	0,2347	155	0,2404	170	0,2409	185	0,2398	200	0,2328
141	0,4613	156	0,4753	171	0,4763	186	0,4737	201	0,4567
142	0,6802	157	0,7024	172	0,7040	187	0,6999	202	0,6730
143	0,8913	158	0,9217	173	0,9239	188	0,9182	203	0,8815
144	1,0949	159	1,1332	174	1,1361	189	1,1288	204	1,0825
145	1,2908	160	1,3370	175	1,3404	190	1,3317	205	1,2760
146	1,4790	161	1,5331	176	1,5371	191	1,5265	206	1,4623
147	1,6500	162	1,7167	177	1,7431	192	1,7006	207	1,6514

Tabela 5.6 – Resultado da temperatura para o alinhamento vertical (F) do modelo referência

F	
Ponto	Temperatura
140	0,2347
155	0,2404
170	0,2409
185	0,2398
200	0,2328

5.2.1 – MODELO I – PLACA COM FISSURA ANGULAR (MPFA)

A Figura 5.8 mostra a malha MPFA com 153 elementos lineares e 63 pontos internos.

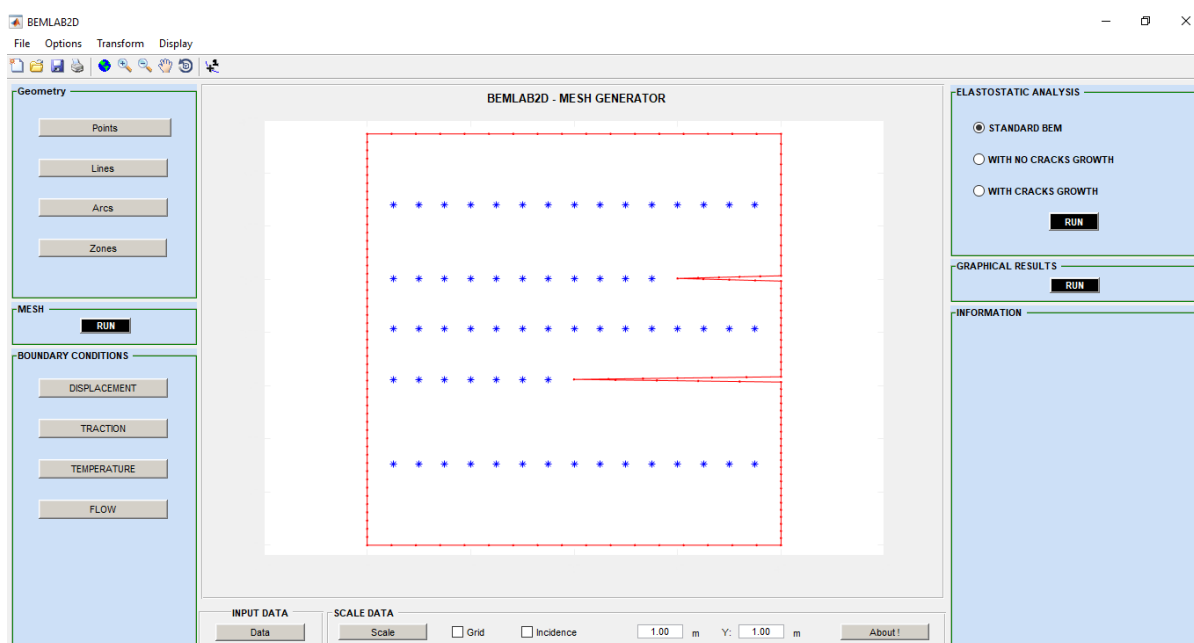


Figura 5.8 – Malha de elementos de contorno para o modelo MPFA.

Como se pode observar na Figura 5.9, a introdução das fissuras reduziu o número de pontos internos em relação às placas sem fissuras e, conseqüentemente, as linhas horizontais B e D, bem como a vertical F, sofreram redução e deslocamento de pontos, respectivamente, o que não implica em alteração da análise, uma vez que se deseja estudar tanto a distribuição da temperatura quanto a influência da forma da fissura. O mesmo aconteceu para o modelo II.

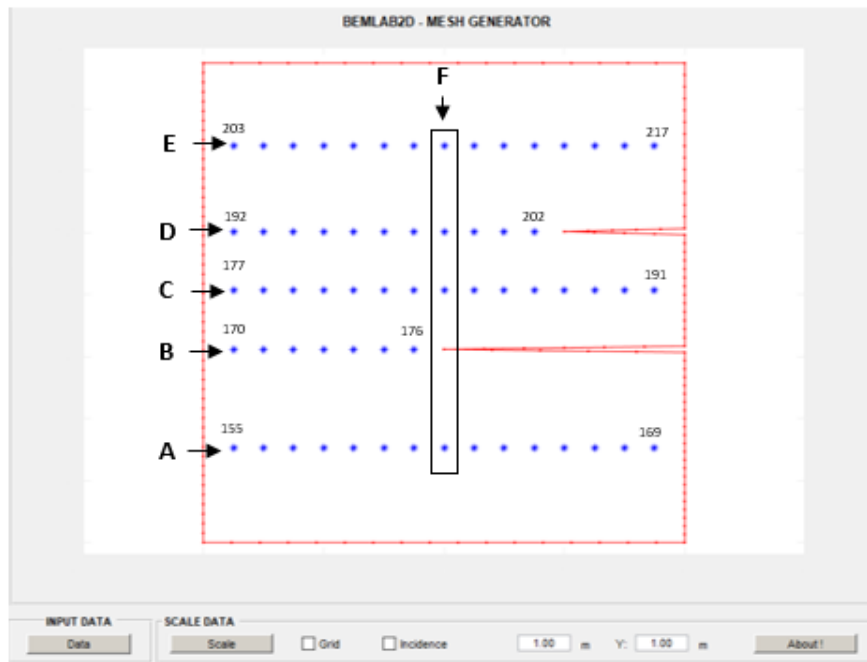


Figura 5.9 – Alinhamentos para o modelo MPFA

Para essa modelagem, adotamos dois cenários, visualizados na Figura 5.10:

- Cenário 1: Fissuras com fluxo zero ($q = 0$)
- Cenário 2: Fissuras com fluxo diferente de zero ($q = cc4$)

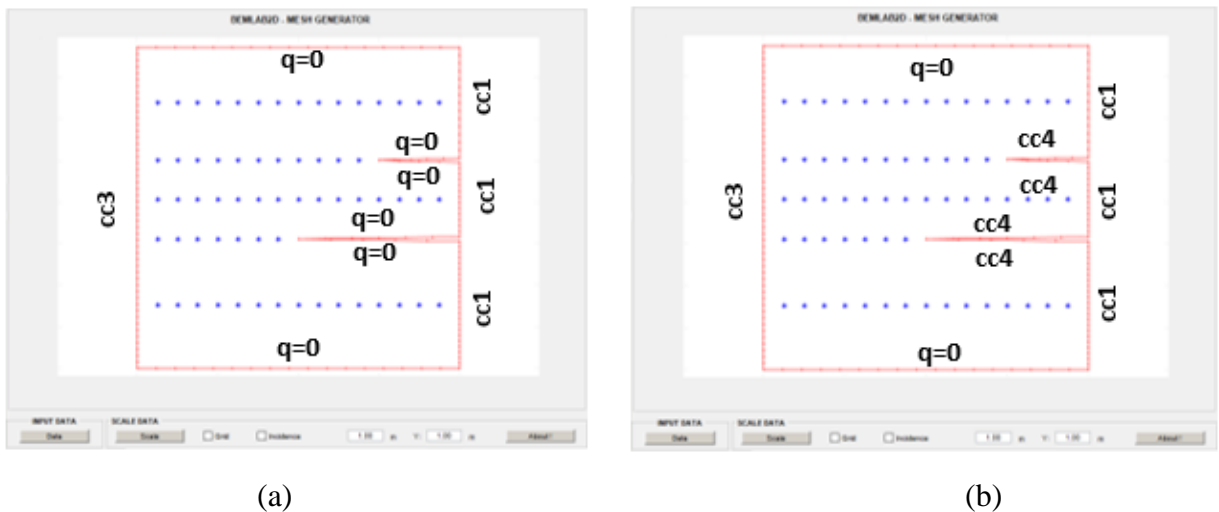


Figura 5.10 – (a) Cenário 1: Fissuras com fluxo zero ($q = 0$) - MPFA; (b) Cenário 2: Fissuras com fluxo diferente de zero ($q = cc4$) - MPFA

A Tabela 5.7 apresenta os resultados de temperatura nos contornos superior e inferior, nos quais o fluxo foi considerado zero.

Tabela 5.7 - Temperatura no Contorno com fluxo zero do modelo I (MPFA)

Contorno			
Superior		Inferior	
Ponto	Temperatura	Ponto	Temperatura
52	40,7100	140	44,3090
53	41,0261	141	44,0975
54	41,3253	142	43,8836
55	41,6158	143	43,6625
56	41,8984	144	43,4337
57	42,1734	145	43,1972
58	42,4406	146	42,9530
59	42,7001	147	42,7010
60	42,9518	148	42,4413
61	43,1958	149	42,1740
62	43,4320	150	41,8989
63	43,6605	151	41,6162
64	43,8812	152	41,3256
65	44,0948	153	41,0263
66	44,3075	154	40,7101

Utilizando as condições adotadas no cenário 1, a Tabela 5.8 apresenta os resultados de temperatura para os alinhamentos horizontais, enquanto na Tabela 5.9 constam os resultados para o alinhamento vertical.

Tabela 5.8 – Resultados de temperatura dos alinhamentos (A, B, C, D e E) obtidos pelo BEMPOTENCIAL do modelo I (MPFA) – cenário 1

Linha de pontos internos A		Linha de pontos internos B		Linha de pontos internos C		Linha de pontos internos D		Linha de pontos internos E	
Ponto	Temp.	Ponto	Temp.	Ponto	Temp.	Ponto	Temp.	Ponto	Temp.
155	-1,5782	170	-1,6127	177	-1,5980	192	-1,6150	203	-1,5380
156	-1,2871	171	-1,3225	178	-1,3258	193	-1,3173	204	-1,2694
157	-1,0135	172	-1,0448	179	-1,0448	194	-1,0402	205	-0,9988
158	-0,7480	173	-0,7749	180	-0,7715	195	-0,7713	206	-0,7358
159	-0,4904	174	-0,5130	181	-0,5059	196	-0,5103	207	-0,4808
160	-0,2406	175	-0,2592	182	-0,2482	197	-0,2575	208	-0,2337
161	0,0012	176	-0,0135	183	0,0018	198	-0,0129	209	0,0055
162	0,2353			184	0,2441	199	0,2233	210	0,2369
163	0,4616			185	0,4786	200	0,4509	211	0,4606
164	0,6802			186	0,7055	201	0,6694	212	0,6765
165	0,8911			187	0,9246	202	0,8783	213	0,8848
166	1,0943			188	1,1360			214	1,0855
167	1,2899			189	1,3397			215	1,2786
168	1,4779			190	1,5357			216	1,4628
169	1,6537			191	1,7214			217	1,5783

Tabela 5.9 – Resultado da temperatura para o alinhamento vertical (F) do modelo I (MPFA) – cenário 1

F	
Ponto	Temperatura
162	0,2353
184	0,2441
199	0,2233
210	0,2362

Com as condições adotadas no cenário 2, a Tabela 5.10 apresenta os resultados de temperatura para os alinhamentos horizontais, enquanto na Tabela 5.11 constam os resultados para o alinhamento vertical.

Tabela 5.10 – Resultados de temperatura dos alinhamentos (A, B, C, D e E) obtidos pelo BEMPOTENCIAL do modelo I (MPFA) – cenário 2

Linha de pontos internos A		Linha de pontos internos B		Linha de pontos internos C		Linha de pontos internos D		Linha de pontos internos E	
Ponto	Temp.	Ponto	Temp.	Ponto	Temp.	Ponto	Temp.	Ponto	Temp.
155	-1,5805	170	-1,5250	177	-1,6022	192	-1,6106	203	-1,5436
156	-1,2886	171	-1,1256	178	-1,3220	193	-1,2894	204	-1,2743
157	-1,0143	172	-0,7310	179	-1,0335	194	-0,9879	205	-1,0031
158	-0,7481	173	-0,3305	180	-0,7533	195	-0,6930	206	-0,7396
159	-0,4899	174	0,0853	181	-0,4820	196	-0,4038	207	-0,4841
160	-0,2397	175	0,5350	182	-0,2197	197	-0,1194	208	-0,2366
161	0,0026	176	1,0676	183	0,0336	198	0,1620	209	0,0031
162	0,2370			184	0,2777	199	0,4426	210	0,2348
163	0,4635			185	0,5125	200	0,7270	211	0,4588
164	0,6822			186	0,7382	201	1,0247	212	0,6749
165	0,8931			187	0,9547	202	1,3624	213	0,8834
166	1,0963			188	1,1622			214	1,0842
167	1,2917			189	1,3608			215	1,2774
168	1,4796			190	1,5509			216	1,4616
169	1,6552			191	1,7300			217	1,5771

Tabela 5.11 – Resultado da temperatura para o alinhamento vertical (F) do modelo I (MPFA) – cenário 2

F	
Ponto	Temperatura
162	0,2370
184	0,2777
199	0,4426
210	0,2348

5.2.2 – MODELO II – PLACA COM FISSURA RETANGULAR (MPFR)

A Figura 5.11 apresenta a malha MPFR, com 155 elementos lineares e 63 pontos internos.

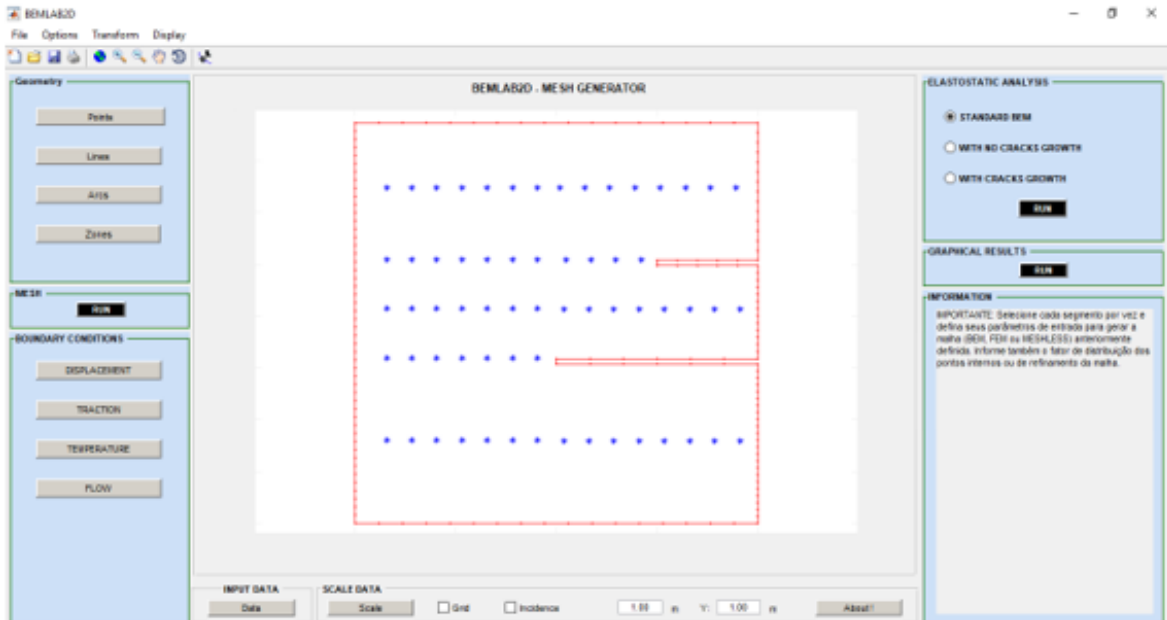


Figura 5.11. – Malha de elementos de contorno para o modelo MPFR.

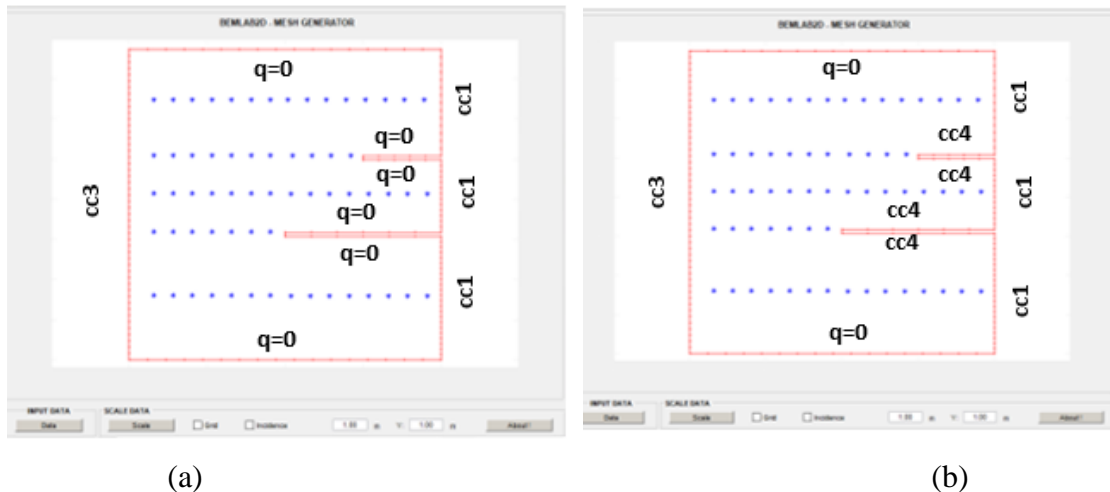


Figura 5.12 – (a) Cenário 1: Fissuras com fluxo zero ($q = 0$) - MPFR; (b) Cenário 2: Fissuras com fluxo diferente de zero ($q = cc4$) – MPFR

A Tabela 5.13 apresenta os resultados de temperatura nos contornos superior e inferior, nos quais o fluxo foi considerado zero.

Tabela 5.13 – Temperatura no Contorno com fluxo zero do modelo II (MPFR)

Contorno			
Superior		Inferior	
Ponto	Temperatura	Ponto	Temperatura
52	40,7100	142	44,3090
53	41,0261	143	44,0975
54	41,3253	144	43,8836
55	41,6158	145	43,6625
56	41,8984	146	43,4337
57	42,1734	147	43,1972
58	42,4406	148	42,9530
59	42,7001	149	42,7010
60	42,9518	150	42,4413
61	43,1958	151	42,1740
62	43,4320	152	41,8989
63	43,6605	153	41,6162
64	43,8812	154	41,3256
65	44,0948	155	41,0263
66	44,3075	156	40,7101

Utilizando as condições adotadas no cenário 1, a Tabela 5.14 apresenta resultados de temperatura para os alinhamentos horizontais e a Tabela 5.15 para o alinhamento vertical.

Tabela 5.14 – Resultados de temperatura dos alinhamentos (A, B, C, D e E) obtidos pelo BEMPOTENCIAL do modelo II (MPFR) – cenário 1

Linha de pontos internos A		Linha de pontos internos B		Linha de pontos internos C		Linha de pontos internos D		Linha de pontos internos E	
Ponto	Temp.	Ponto	Temp.	Ponto	Temp.	Ponto	Temp.	Ponto	Temp.
155	-1,5769	170	-1,6032	177	-1,5955	192	-1,6121	203	-1,5374
156	-1,2859	171	-1,3153	178	-1,3238	193	-1,3151	204	-1,2688
157	-1,0124	172	-1,0399	179	-1,0432	194	-1,0388	205	-0,9982
158	-0,7470	173	-0,7722	180	-0,7703	195	-0,7706	206	-0,7353
159	-0,4895	174	-0,5125	181	-0,5052	196	-0,5104	207	-0,4804
160	-0,2399	175	-0,2610	182	-0,2479	197	-0,2583	208	-0,2334
161	0,0019	176	-0,0179	183	0,0017	198	-0,0145	209	0,0057
162	0,2358			184	0,2436	199	0,2208	210	0,2370
163	0,4620			185	0,4777	200	0,4475	211	0,4606
164	0,6804			186	0,7041	201	0,6649	212	0,6765
165	0,8912			187	0,9229	202	0,8725	213	0,8847
166	1,0943			188	1,1340			214	1,0854
167	1,2898			189	1,3374			215	1,2784
168	1,4777			190	1,5331			216	1,4625
169	1,6534			191	1,7187			217	1,5779

Tabela 5.15 – Resultado da temperatura para o alinhamento vertical (F) do modelo II (MPFR) – cenário 1

F	
Ponto	Temperatura
162	0,2358
184	0,2436
199	0,2208
210	0,2370

Com as condições adotadas no cenário 2, a Tabela 5.16 apresenta resultados de temperatura para os alinhamentos horizontais, enquanto na Tabela 5.17 constam os resultados para o alinhamento vertical.

Tabela 5.16 – Resultados de temperatura dos alinhamentos (A, B, C, D e E) obtidos pelo BEMPOTENCIAL do modelo II (MPFR) – cenário 2

Linha de pontos internos A		Linha de pontos internos B		Linha de pontos internos C		Linha de pontos internos D		Linha de pontos internos E	
Ponto	Temp.	Ponto	Temp.	Ponto	Temp.	Ponto	Temp.	Ponto	Temp.
155	-1,5805	170	-1,5130	177	-1,6014	192	-1,6069	203	-1,5435
156	-1,2885	171	-1,1012	178	-1,3204	193	-1,2819	204	-1,2742
157	-1,0142	172	-0,6932	179	-1,0312	194	-0,9764	205	-1,0030
158	-0,7480	173	-0,2772	180	-0,7505	195	-0,6772	206	-0,7394
159	-0,4897	174	0,1578	181	-0,4786	196	-0,3833	207	-0,4839
160	-0,2395	175	0,6336	182	-0,2159	197	-0,0934	208	-0,2363
161	0,0028	176	1,2080	183	0,0376	198	0,1943	209	0,0034
162	0,2372			184	0,2818	199	0,4829	210	0,2351
163	0,4637			185	0,5166	200	0,7778	211	0,4591
164	0,6824			186	0,7420	201	1,0909	212	0,6752
165	0,8933			187	0,9581	202	1,4549	213	0,8837
166	1,0964			188	1,1651			214	1,0844
167	1,2919			189	1,3631			215	1,2775
168	1,4797			190	1,5524			216	1,4617
169	1,6552			191	1,7308			217	1,5772

Tabela 5.17 – Resultado da temperatura para o alinhamento vertical (F) do modelo II (MPFR) – cenário 2

F	
Ponto	Temperatura
162	0,2372
184	0,2818
199	0,4829
210	0,2351

6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Este capítulo trata da análise e resultados do modelo estudado, uma placa de argamassa constituída de duas fissuras, objetivando compreender o comportamento da temperatura no interior da placa submetida a uma fonte de calor no instante de 120 minutos. Neste sentido, analisaremos, inicialmente, a placa sem fissuras e, em seguida, os dois modelos de placas fissuradas.

6.1 - PLACA REFERÊNCIA

No gráfico da Figura 6.1 temos a distribuição de temperaturas para o corte, obtida por Denise (2016), e via Equação de Laplace, isto é, no regime permanente e sem geração de calor.

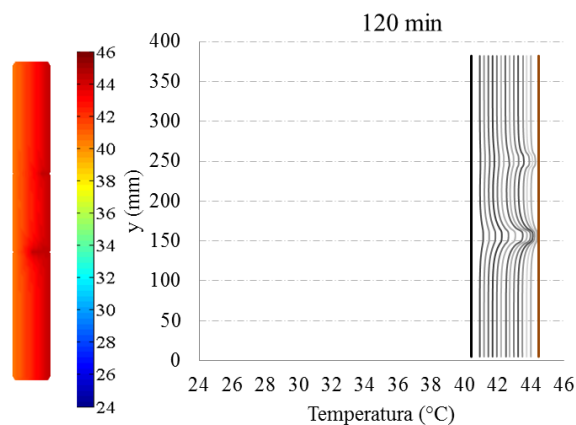


Figura 6.1 – Distribuição de temperaturas para o corte

Fonte: GUIMARÃES (2016)

No caso em estudo, via Equação de Poisson e, portanto, com geração de calor, a análise ainda se dará no regime permanente, ou de forma simplificada no regime quase-transiente, embora as variáveis do problema (temperatura e fluxo) extraídas da análise experimental sofram modificações com o tempo em uma análise real, estas serão consideradas como condições de contorno no instante analisado – 120 minutos, de modo a representar a distribuição de temperatura naquele instante específico. Desta forma, tomaremos como referência de análise apenas a faixa de temperatura no contorno onde o fluxo foi considerado zero, isto é [40.5°C a 44.5°C]. A solução para temperatura nos pontos internos devido à Guimarães (2016) não será considerada, uma vez que se trata de distribuição constante no tempo isenta de qualquer fonte de calor.

A Figura 6.2 apresenta a solução de temperatura na faixa de contorno, considerada acima, para o modelo de placa sem fissura, para fins de comparação com os demais modelos.

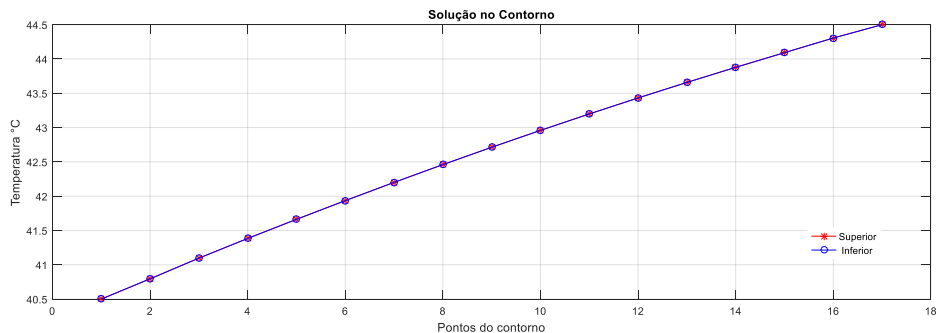


Figura 6.2 – Solução de temperatura na faixa de contorno

Observa-se, na Figura 6.2 acima, que os valores encontrados para temperatura nos pontos do contorno superior e inferior são muito próximos e coerentes com a faixa de contorno.

Na Figura 6.3, temos o gráfico dos valores de temperatura em pontos internos para cada alinhamento horizontal (A, B, C, D, E) e vertical (F), onde se verifica a simetria nos valores das bordas para o centro. Observar ainda, que na linha F as temperaturas são próximas de zero.

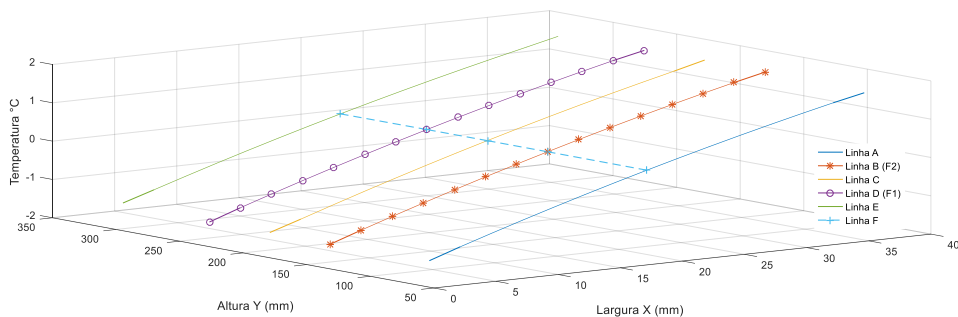


Figura 6.3 – Valores de temperatura em pontos internos para cada alinhamento vertical e horizontal

6.1.1 VERIFICAÇÃO DE SENSIBILIDADE DA FONTE b

A fim de demonstrar a relação existente entre temperatura e fonte no interior da placa, a função b , constante, foi ampliada de 10, 100 e 1000 vezes seu valor original. A Tabela 6.1 mostra os resultados para o ponto médio dos contornos superior e inferior, bem como para linha F, comparados com o valor original.

Tabela 6.1 – Valores de Temperatura em função de b .

Função	Ponto Médio Contorno		Linha F
	Superior	Inferior	Ponto Médio
b	42,7006	42,7005	0,2409
bx10	44,9556	44,9553	2,4086
bx100	67,5056	67,5025	24,0863
bx1000	293,0059	292,9751	240,8627

Pela Tabela 6.1 verifica-se o quanto a temperatura é sensível a fonte de calor e, devido ao isolamento das bordas superior e inferior, esperava-se um aumento significativo das temperaturas na direção dos contornos superior e inferior para o interior da placa.

6.2. MODELO DE PLACA COM FISSURA ANGULAR (MPFA)

Para esta análise, os dois seguintes cenários são considerados com o objetivo de averiguar a temperatura calculada e confrontar com a temperatura adotada como condição de contorno:

- Cenário 1: Fissuras com fluxo zero ($q = 0$)
- Cenário 2: Fissuras com fluxo diferente de zero ($q = cc4$).

As Tabela 6.2 e Tabela 6.3 mostram os pontos do contorno da fissura F2 e F1 (Figuras 6.4 e 6.5) e seus respectivos valores de temperatura calculados contra os do cenário 2.

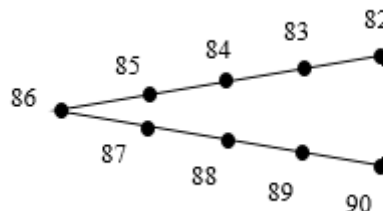


Figura 6.4 – Pontos do contorno da fissura F2 - MPFA

Tabela 6.2 – Pontos do contorno da Fissura F2 da placa MPFA e seus respectivos valores de temperatura calculados contra os do cenário 2

Pontos do contorno da fissura	Temperatura Cenário 1	Temperatura Cenário 2	Erro absoluto
82	44,0962	44,5	0,907%
83	44,0321	44,5	1,051%
84	43,8871	44,5	1,377%
85	43,7162	44,5	1,761%
86	43,5409	44,5	2,155%
87	43,7430	44,5	1,701%
88	43,9349	44,5	1,270%
89	44,1011	44,5	0,896%
90	44,1827	44,5	0,713%

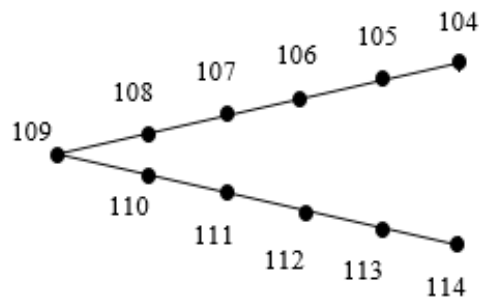


Figura 6.5 – Pontos do contorno da Fissura F1 – MPFA

A Tabela 6.3, apresenta a variação da temperatura do ponto médio do contorno, obtidos pelo programa para o modelo MPFA - cenário 2 e para a placa de referência.

Tabela 6.3 – Pontos do contorno da fissura F2 da placa MPRA e seus respectivos valores de temperatura calculados contra os do cenário 2

Pontos do contorno da fissura	Temperatura Cenário 1	Temperatura Cenário 2	Erro absoluto
104	44,2089	44,5	0,654%
105	44,0353	44,5	1,044%
106	43,7276	44,5	1,736%
107	43,3809	44,5	2,515%
108	43,0095	44,5	3,349%
109	42,6405	44,5	4,179%
110	43,0316	44,5	3,300%
111	43,3945	44,5	2,484%
112	43,7366	44,5	1,716%
113	44,0434	44,5	1,026%
114	44,2183	44,5	0,633%

A Tabela 6.4, apresenta a variação da temperatura do ponto médio do contorno, obtidos pelo programa para o modelo MPFA - cenário 2 e para a placa de referência.

Tabela 6.4 – Comparação da temperatura do modelo MPFA cenário 2 com a placa sem fissuras.

Modelos	Ponto Médio Contorno		Linha F
	Superior	Inferior	Ponto Médio
Placa sem fissura	42,7006	42,7005	0,2409
MPFA (cenário 2)	42,7001	42,7010	0,2777
Erro (%)	0,0012%	0,0012%	15,28%

Os resultados da Tabela 6.4 demonstram que as modelagens possuem um comportamento semelhante para os pontos médios dos contornos superior e inferior. Entretanto na linha F, centro da placa, houve um aumento maior na temperatura, sendo o erro de 15,28% em relação ao modelo-referência. Esse aumento é devido a forma geométrica da fissura.

As inclusões das fissuras reduziram o número de pontos internos em relação a placa sem fissuras o que não implica em alteração da análise. Assim a comparação é feita até o ponto mais próximo da ponta da fissura para verificar a distribuição da temperatura e a influência da forma da fissura. As Figuras 6.6 e 6.7 apresentam um comparativo entre as linhas das fissuras B e D e a placa referência.

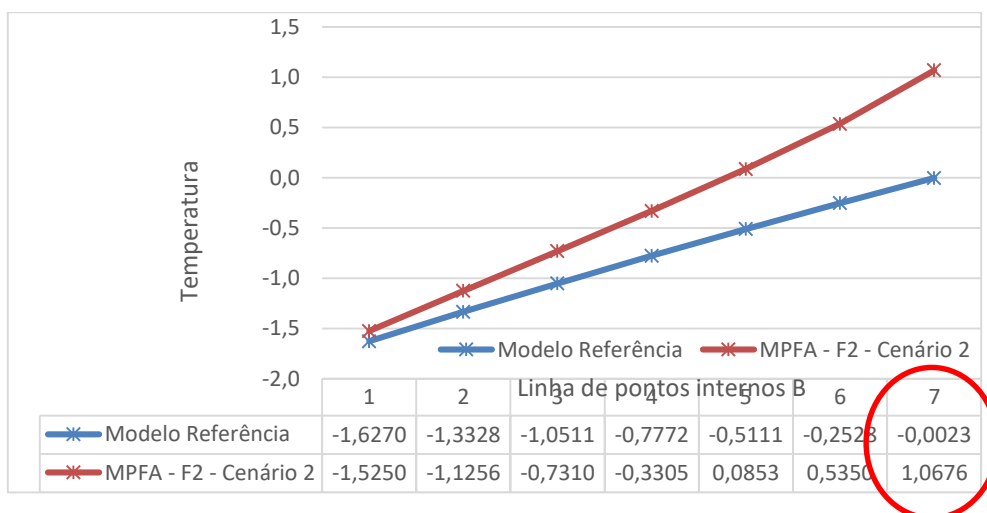


Figura 6.6 – Comparativo entre o modelo referência e o modelo MPFA – F2

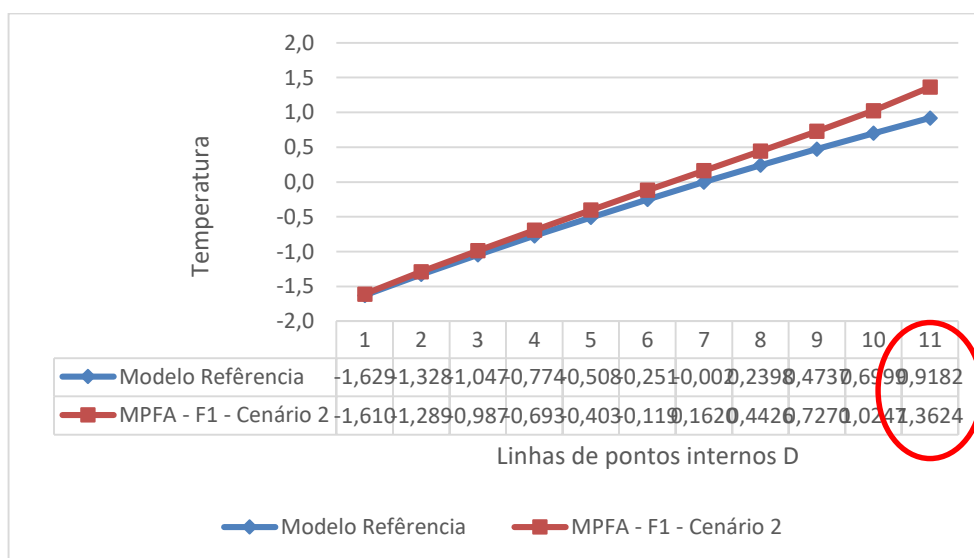


Figura 6.7 – Comparativo entre o modelo referência e o modelo MPFA – F1

A Tabela 6.5 contém os valores de temperatura no ponto mais próximo da ponta da fissura comparada com a placa referência. Ambos os pontos foram destacados nas Figuras 6.6 e 6.7.

Tabela 6.5 – Comparativo de temperatura do ponto interno mais próximo da ponta das fissuras angulares e a placa referência.

Modelo Referência	F1	Modelo Referência	F2
0,9182	1,4549	-0,0023	1,208

Verifica-se que no ponto mais próximo das fissuras há uma maior temperatura para ambas as fissuras em relação ao modelo-referência.

6.3. MODELO DE PLACA COM FISSURA RETANGULAR (MPFR)

Para esta análise também foram consideradas os cenários 1 e 2. As Tabelas 6.6 e 6.7 mostram os pontos do contorno da fissura e seus respectivos valores de temperatura calculados, contra os do cenário 2. As Figuras 6.8 e 6.9 mostram os pontos considerados.

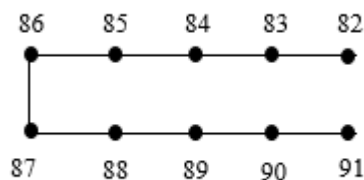


Figura 6.8 – Pontos do contorno da fissura F2 - MPFR

Tabela 6.6 – Pontos do contorno da Fissura F2 da placa MPFR e seus respectivos valores de temperatura calculados contra os do cenário 2

Pontos do contorno da fissura	Temperatura Cenário 1	Temperatura Cenário 2	Erro absoluto
82	44,1185	44,5	0,8573%
83	44,0610	44,5	0,9865%
84	43,9132	44,5	1,3187%
85	43,7238	44,5	1,7443%
86	43,4826	44,5	2,2863%

87	43,4940	44,5	2,2607%
88	43,7576	44,5	1,6683%
89	43,9657	44,5	1,2007%
90	44,1338	44,5	0,8229%
91	44,2078	44,5	0,6566%

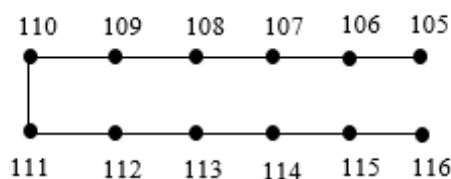


Figura 6.9 – Pontos do contorno da Fissura F1 - MPFR

Tabela 6.7 – Pontos do contorno da fissura F1 da placa MPFR e seus respectivos valores de temperatura calculados contra os do cenário 2

Pontos do contorno da fissura	Temperatura Cenário 1	Temperatura Cenário 2	Erro absoluto
105	44,2295	44,5	0,608%
106	44,0641	44,5	0,980%
107	43,7583	44,5	1,667%
108	43,4064	44,5	2,458%
109	43,0193	44,5	3,327%
110	42,5533	44,5	4,375%
111	42,5535	44,5	4,374%
112	43,0199	44,5	3,326%
113	43,4078	44,5	2,454%
114	43,7607	44,5	1,661%
115	44,0684	44,5	0,970%
116	44,2362	44,5	0,593%

Dessa forma analisando as tabelas verificamos que não há uma notável diferença entre os resultados de temperatura para a placa MPFR.

A Tabela 6.8 apresenta a comparação da temperatura do modelo MPFR cenário 2 com a placa sem fissuras obtidas pela modelagem numérica.

Tabela 6.8 – Comparação da temperatura do modelo MPFR cenário 2 com a placa sem fissuras.

Modelos	Ponto Médio Contorno		Linha F
	Superior	Inferior	Ponto Médio
Placa sem fissura	42,7006	42,7005	0,2409
MPFR (cenário 2)	42,7001	42,7010	0,2818
Erro (%)	0,00117%	0,00117%	17,0%

Os resultados da Tabela 6.8 demonstra que as modelagens possuem um comportamento semelhante para os pontos médios dos contornos superior e inferior. Entretanto na linha F, centro da placa, houve um aumento maior na temperatura, sendo o erro de 17% em relação ao modelo-referência. Esse aumento é devido a forma geométrica da fissura.

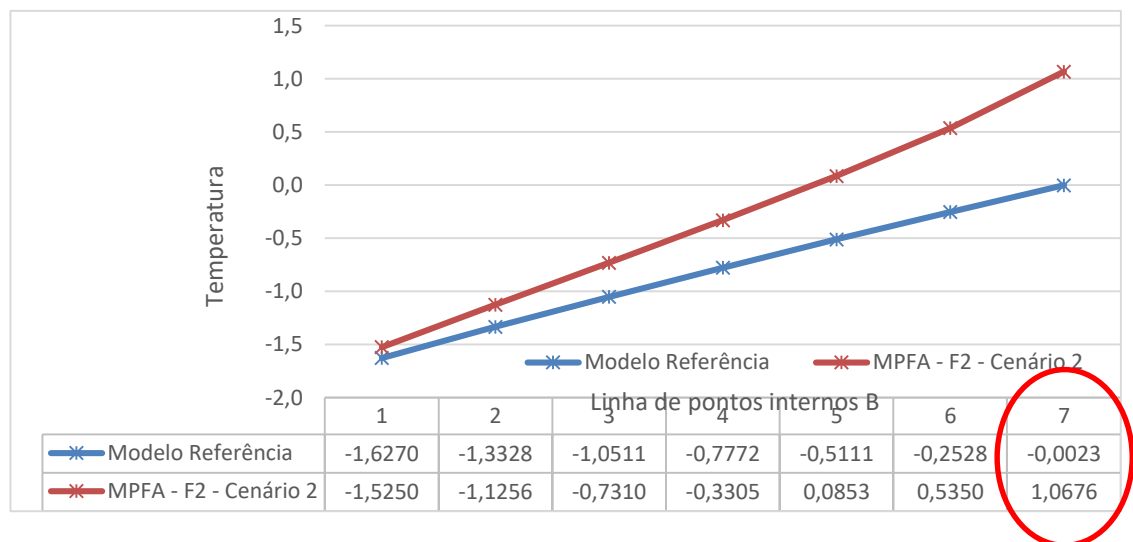


Figura 6.10 – Comparativo entre o modelo referência e o modelo MPFR – F2

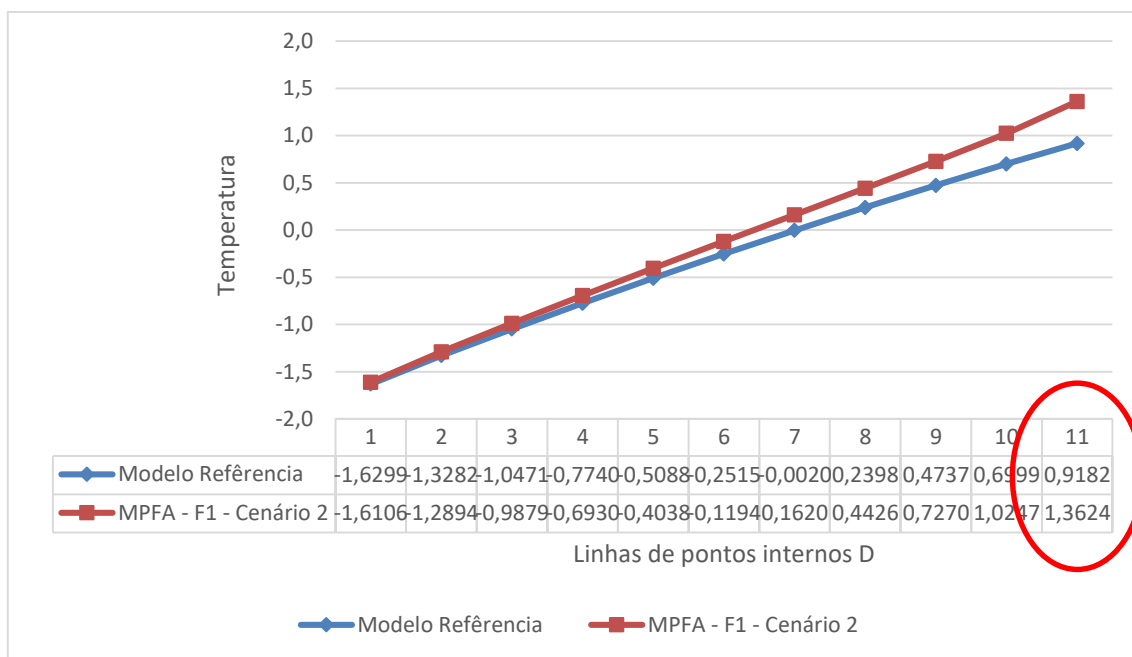


Figura 6.11 – Comparativo entre o modelo referência e o modelo MPFR – F1

A Tabela 6.9 contém os valores de temperatura no ponto mais próximo da ponta da fissura e comparado com o mesmo na placa referência. Ambos os pontos foram destacados nas Figuras 6.10 e 6.11.

Tabela 6.9 – Comparativo de temperatura do ponto interno mais próximo da ponta das fissuras retangulares e a placa referência.

Modelo Referência	F1	Modelo Referência	F2
0,9182	1,3624	-0,0023	1,0676

Verifica-se que no ponto mais próximo das fissuras há uma maior temperatura para ambas as fissuras em relação ao modelo-referência. Observa-se que F2 obteve uma maior temperatura, isto ocorre devido a sua profundidade ser de 10 mm, enquanto F1 é de 20 mm, assim a temperatura da fissura está correlacionada com a camada em que se encontra.

6.4 - DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Resultados de temperaturas dos dois modelos comparando-os com os da placa referência são mostrados na Tabela 6.10.

Tabela 6.10 – Comparativo dos resultados de temperaturas dos dois modelos e a placa referência.

Modelos	Ponto Médio Contorno		Linha F
	Superior	Inferior	Ponto Médio
Placa sem fissura	42,7006	42,7005	0,2409
MPFA (cenário 2)	42,7001	42,7010	0,2777
MPFR (cenário 2)	42,7001	42,7010	0,2818

O que podemos verificar que ambos os modelos estudados, MPFA e MPFR, apresentam na linha F uma maior temperatura em relação a placa sem fissura.

Resultados dos pontos ao redor das fissuras para ambos os modelos comparados com a placa referência são mostradas nas Tabelas 6.11 e 6.12.

Tabela 6.11 – Comparativo entre os pontos internos ao redor da fissura F1 da placa referência com os modelos MPFA e MPFR

Modelo Referência	MPFA	Erro (%)	MPFR	Erro (%)
0,8815	0,8834	0,216%	0,8837	0,216%
1,0825	1,0842	0,157%	1,0844	0,157%
1,2760	1,2774	0,110%	1,2775	0,110%
1,4623	1,4616	0,048%	1,4617	0,048%
1,6514	1,5771	4,499%	1,5772	4,499%
0,9239	0,9547	3,334%	0,9581	3,334%
1,1361	1,1622	2,297%	1,1651	2,297%
1,3404	1,3608	1,522%	1,3631	1,522%
1,5371	1,5509	0,898%	1,5524	0,898%
1,7431	1,7300	0,720%	1,7308	0,752%

Tabela 6.12 – Comparativo entre os pontos internos ao redor da fissura F2 da placa referência com os modelos MPFA e MPFR

Modelo-Referência	MPFA	Erro(%)	MPFR	Erro(%)
0,2409	0,2777	15,28%	0,2818	16,98%
0,4763	0,5125	7,60%	0,5166	7,80%
0,7040	0,7382	4,86%	0,7420	5,12%
0,9239	0,9547	3,33%	0,9581	3,57%
1,1361	1,1622	2,30%	1,1651	2,49%
1,3404	1,3608	1,52%	1,3631	1,67%
1,5371	1,5509	0,90%	1,5524	0,99%
1,7431	1,7300	0,80%	1,7308	0,71%
0,2347	0,2370	0,98%	0,2372	1,05%
0,4613	0,4635	0,48%	0,4637	0,52%
0,6802	0,6822	0,29%	0,6824	0,32%
0,8913	0,8931	0,20%	0,8933	0,22%
1,0949	1,0963	0,13%	1,0964	0,14%
1,2908	1,2917	0,07%	1,2919	0,09%
1,4790	1,4796	0,04%	1,4797	0,05%
1,6500	1,6552	0,32%	1,6552	0,31%

Verifica-se, confirmando no que já foi mostrado, que no ponto mais próximo das fissuras há uma maior temperatura para ambos os modelos, MPFA e MPFR, em relação ao modelo-referência. Nos demais pontos, não teve diferenças significativas.

7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

7.1 - SOBRE O PROGRAMA DESENVOLVIDO

Este trabalho teve como objetivo o estudo do Método dos Elementos de Contorno com o Método de Reciprocidade Dual em problemas de potencial com o objetivo de desenvolver um programa de análise que comprove esse estudo. Foram realizados exemplos da literatura para atestar a análise potencial pelo MEC/MRD. Os exemplos considerados neste trabalho, tiveram como objetivo à validação do programa desenvolvido, visando garantir a continuidade da análise não discutindo detalhes do Método dos Elementos de Contorno, como por exemplo, o uso de nós duplos, problemas de singularidades ou melhorias da técnica. Todos os exemplos são clássicos da literatura que já demonstra o poder dos elementos de contorno em problemas de potencial. Nesse contexto, comparando a resposta analítica e experimental tratados no trabalho com a resposta numérica obtida utilizando o programa BEMPOTENCIAL, pode-se atestar a eficiência da técnica numérica, bem como validar o programa desenvolvido.

Contudo para que se alcançasse o objetivo principal existiu-se a necessidade da realização de adaptação do programa BEMLAB2D, como por exemplo a construção dos diálogos das condições de contorno de temperatura e fluxo e principalmente a geração dos arquivos de dados de entrada para as modelagens numéricas, o que ocorreu de forma satisfatória, de modo que ambas as modelagens (numéricas) convergiram.

7.2 – SOBRE A APLICAÇÃO EM PLACAS FISSURADAS

Aqui foram modelados dois tipos de placas com diferenças geométricas nas fissuras, uma retangular e outra angular. As condições de contorno utilizadas foram aqueles referentes ao instante de 120 minutos, devido a GUIMARÃES (2017), quando ao desligamento dos termopares.

- A solução de contorno em ambos os modelos não se alterou, como pode ser comprovado nas tabelas do capítulo 5 e capítulo 6.
- O modelo MPFR apresentou na linha F, centro da placa, uma maior temperatura em relação ao modelo referência e no modelo MPFA, o que já era esperado, devido a forma geométrico das fissuras.

- Sobre a análise das linhas das fissuras, os gráficos mostraram, para ambos os modelos, o afastamento em relação ao modelo referência à medida que se aproxima de cada fissura.
- Entretanto, verificou-se que o a introdução das fissuras na placa resultou em maiores temperaturas para ambos os modelos. Concluindo-se, portanto, que a forma geométrica da fissura tem influência significativa na distribuição de temperatura.

De maneira geral concluímos que pela modelagem numérica do corte, percebe-se que as fissuras modificam a temperatura da área que as envolve, sendo que no aquecimento esta área se torna com temperatura mais elevada (absorve mais calor).

7.3 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS:

- Análise com geometria e/ou aberturas de fissuras diferentes da aqui implementada;
- Análise com expansão de f diferentes, por exemplo $f = r$ e $f = 1 + r + r^2$
- Análise da transferência de calor considerando o modo de transferência transiente.
- Tratamento dos cantos da placa coma por exemplo, utilização de nós duplos para dirimir o problema de singularidade;
- Implementação do cálculo de fluxo em pontos internos

8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAUER, E., PAVÓN, E., BARREIRA, E., CASTRO, E. K., **Analysis of building facade defects using infrared thermography: Laboratory studies**, in Journal of Building Engineering 6. 93–104 p., 2016. (a)

BAUER, E., PAVÓN, E., OLIVEIRA, E., **Inspeção Termográfica de Fachadas – Investigação da Influência da Fissuração**. Anais do Congresso Brasileiro de Patologia das Construções- CBPAT . Abril – 2016. ISSN 2448-1459. (b)

BREBBIA, C. A. e DOMINGUEZ J., **Boundary Elements: An introductory Course**.

Brebbia, C. A., Dominguez, J., **“Boundary Elements: An Introductory Course.”**, Computational Mechanics Publications, Southampton 1989.

BREBBIA, C. A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L. C., **Boundary element techniques-Theory and application in engineering**, Springer-Verlag, Berlin and New York,1984.

BREBBIA, C., A.; DOMINGUEZ, J., 1977. **Boundary element methods for Potential problems**, Applied Mathematical Modelling, 1, 7.

BREBBIA, C., A.; NARDINI, D., 1982. **A new approach to free vibration analysis using boundary elements**, in **Boundary Element in Engineering** (ed. C.A. Brebbia), Springer Verlag, Berlin and New York.

BUENO, F. R. **Análise inversa com uso de algoritmo genético para localização de tumores de pele em três dimensões utilizando elementos de contorno com reciprocidade dual**. xix, 143 f. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil)-Universidade de Brasília, Brasília, 2012.

CORTIZO, E. C., **Avaliação da Técnica de Termografia Infravermelha para Identificação de Estruturas Ocultas e Diagnóstico de Anomalias em Edificações: Ênfase em Edificações Do Patrimônio Histórico**. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia, Departamento de Engenharia Mecânica. 178p., 2007.

Cruse, T. A., “**Numerical Solution in Three Dimensional Elastostatics.**”, Int. J. Solids and Structures, vol. 5, pp. 1259-1274, 1969.

CRUZ, J. P., **Formulações não-singulares do Método dos Elementos de Contorno aplicadas Problemas bidimensionais de potencial.** Belo Horizonte, Dissertação de mestrado, 2001.

DELGADO NETO, A.M., GUIMARÃES, D.C., GOMES,G. **BEMLAB2D: GUI MODELING, VISUALIZATION AND ANALYSIS WITH BOUNDARY ELEMENT – AN APPLICATION IN ELASTOSTATIC PROBLEMS.** In: Proceedings of the XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Suzana Moreira Ávila (Editor), ABMEC, Brasília, DF, Brazil, November 6-9, 2016.

DELGADO NETO, ALVARO M. (2017). **BEMLAB2D: Interface Gráfica de Modelagem, Visualização e Análise com Elementos de Contorno – Uma Aplicação em Problemas Elastostáticos.** Dissertação de Mestrado, Publicação 005A/2017, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, DF, 113p.

GOMES, G. "**Aplicação dos Métodos de Elementos de Contorno e Reciprocidade Dual em Problemas de Plasticidade 2D Orientada a Objeto**". Universidade de Brasília - UnB. Brasília, p. 165. 2006. (E.TD- 002A/06).

GREENBERG, M. D., “**Advanced Engineering Mathematics**”, Prentice Hall-2ª edição, New Jersey, 1998.

GUIMARÃES, D. C. (2017). **Correlação Numérico - Experimental entre o Método dos Elementos de Contorno e Termografia Aplicados a Placas de Argamassa.** Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil. Publicação E.DM-15A/17, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 86 p.

HESS,J.L., e SMITH,A.M., “**Calculation of potential flow about arbitrary bodies**”, Pergamon Press, Lodon,1967.

Hunt, B.R., Lipsman, R.L. y Rosenberg, J.M. (2001) **A guide to Matlab: For Beginners and Experienced Users.** Cambrige University Press, Cambridge.

JASWON, M. A., “**Integral Equation Methods in potential Theory I.**”, Proc.Roy Soc. Lond.,vol.A275,pp.23-32,1963.

KATSIKADELIS,J.T., **Boundary elements: theory and applications**. 1. ed. Elsevier, 2002. ISBN 0-080-44107-6.

LACHAT, J. C.; WATSON, J. O. (1976). **Effective treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics**. Int. J. Num. Meth. Engng., v.10, p.991-1005.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com geometria analítica**, Vol. 1. 3. ed São Paulo: HARBRA, 1994.

NASCIMENTO, M. L. M. (2016). **Aplicação da Simulação Higrotérmica na Investigação da Degradação de Fachadas de Edifícios**. **Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil**, Publicação E.DM-018A/16, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 173p.

PARTRIDGE, P. W., BREBBIA, C. A. & WROBEL, L. C., 1992, **The Dual Reciprocity Boundary Element Method**. London, Computational Mechanics Publications.

RIZZO, F.J., “ *An Integral Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics.*” Q. Appl. Math., vol 25, pp.83-85, 1967.

SANTOS, L., **Classificação e Modelagem de Fatores de Influência sobre Inspeções Termográficas em Ambientes Desabrigados**. Tese de doutorado submetida ao Programa de Pós- Graduação em Engenharia Elétrica. Itajubá- MG. 160p., 2012.

SERAFIM, A. C. M., **Análise In-Situ do Comportamento Físico de Argamassas de Revestimento de Fachadas**. Dissertação de Mestrado- Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa. 169p., 2012.

SYMM,G.T.,” **Integral Equation Method in Potential Theory – I.**” , Porc. Roy Soc. LOND.,vol.A275,pp.33-46,1963.

TELLES, J.C.F e BREBBIA, C.A., “Elastoplastic boundary element analysis.”, in proc. Europe, pp.403-434, Springer-Verlag Berlin, 1981.

WILLIAM J PALM III. **Introdução ao {MATLAB} para engenheiros**. Mc Graw Hill, third edition, 2013.

9 APÊNDICES

9.1 - APÊNDICE A

Este Apêndice apresenta um exemplo de modelagem com o BEMLAB2D a fim de ilustrar a utilização dos três principais módulos usados neste trabalho.

Exemplo de Modelagem com o BEMLAB2D

Será utilizado uma placa retangular (387mm de altura e 40mm de largura), com duas fissuras de espessura 2mm, onde uma mede 10mm de comprimento e uma de 20mm de comprimento. A geometria é ilustrada na Figura 9.1.

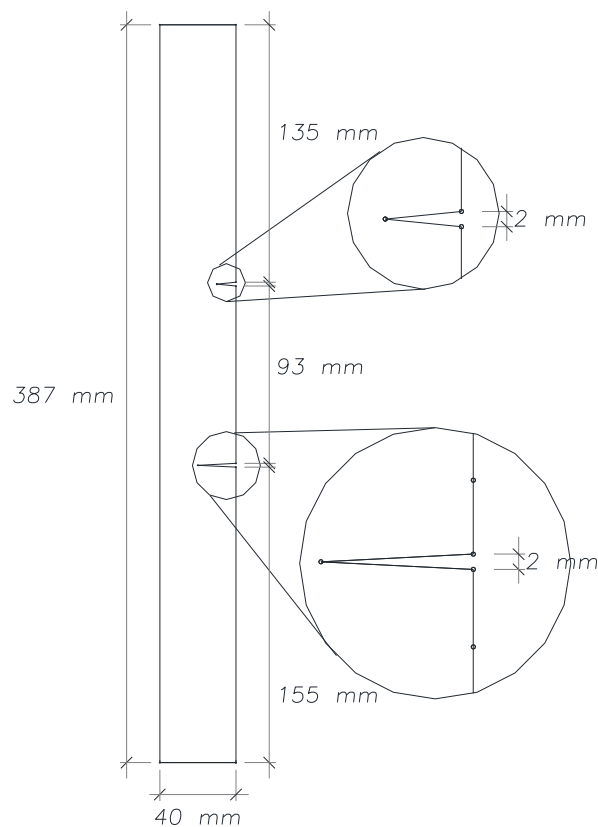


Figura 9.1 - Geometria da placa retangular com duas fissuras angulares

Para se iniciar um problema no BemLab2D é preciso definir os limites do visualizador do programa para melhor demarcação do desenho. É possível entrar com os valores de X_i, X_f, Y_i, Y_f para definir os limites a partir do ícone *Scale* na parte inferior do programa. A Figura 9.2 mostra os valores considerados.

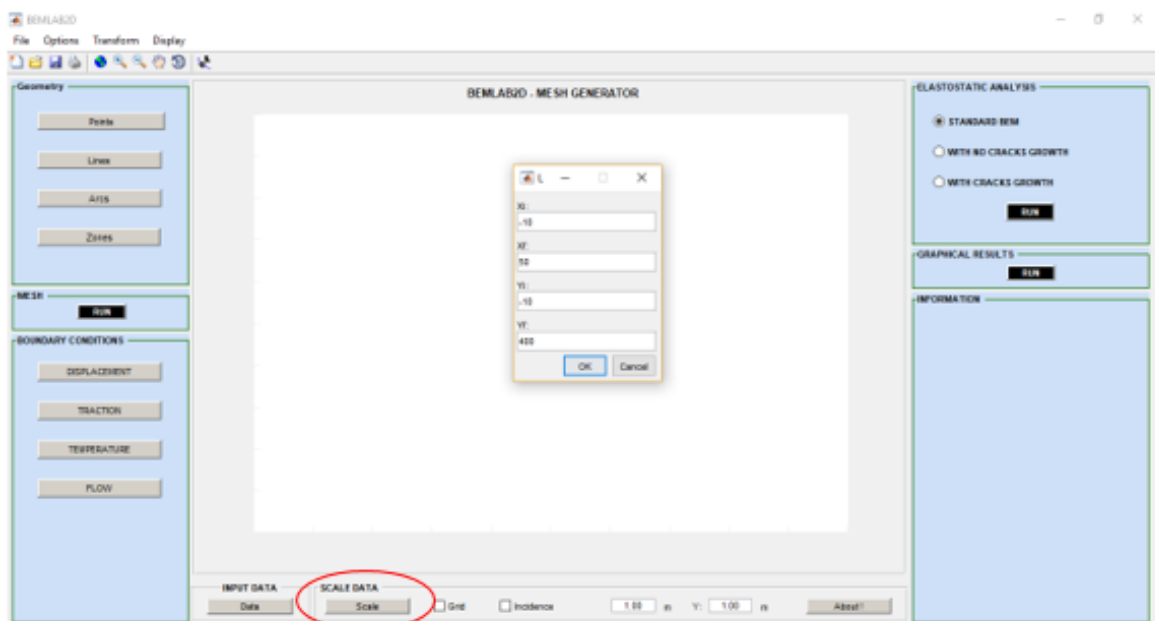


Figura 9.2- Janela para entrada dos valores dos limites do visualizador do BemLab2D

Para a criação da modelagem geométrica e discretização da placa, foi utilizado elementos lineares, como ilustrado na Figura 9.3.

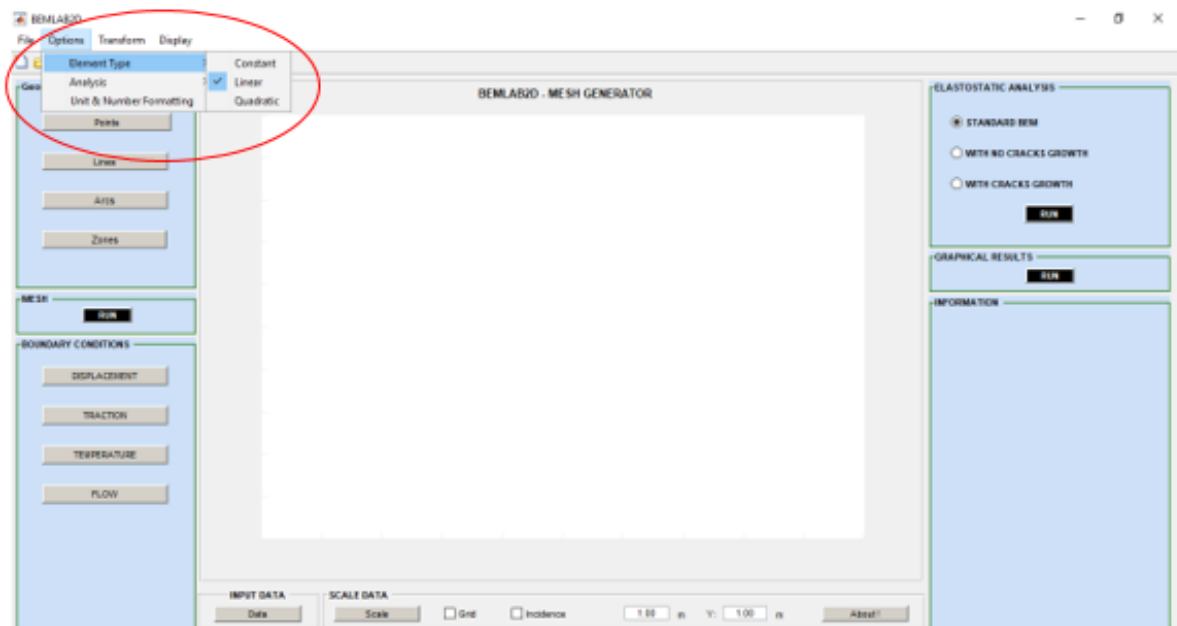


Figura 9.3 - Janela para entrada para escolher a opção: Tipos de elementos

O próximo passo é determinar um sistema de coordenadas cartesianas para definir os pontos de referência utilizados na construção dos segmentos retos no BemLab2D. Pela geometria apresentada observamos que é preciso definir um nó em cada extremidade da placa, dois em

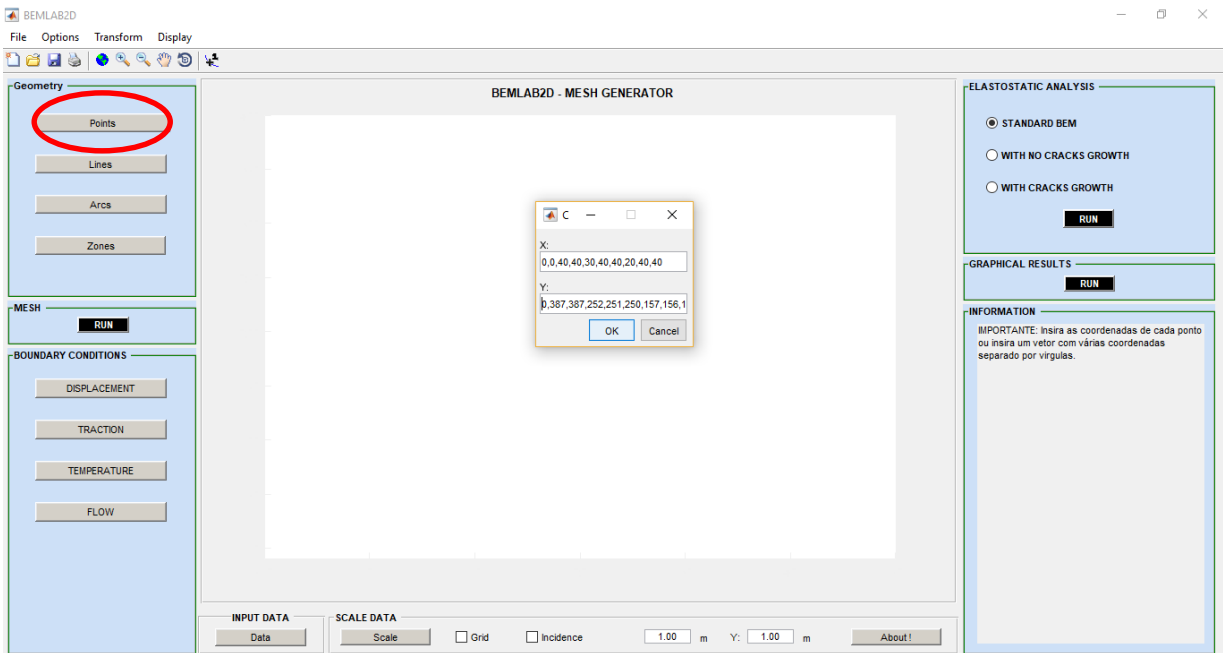


Figura 9.5 - Caixa de diálogo das coordenadas X e Y

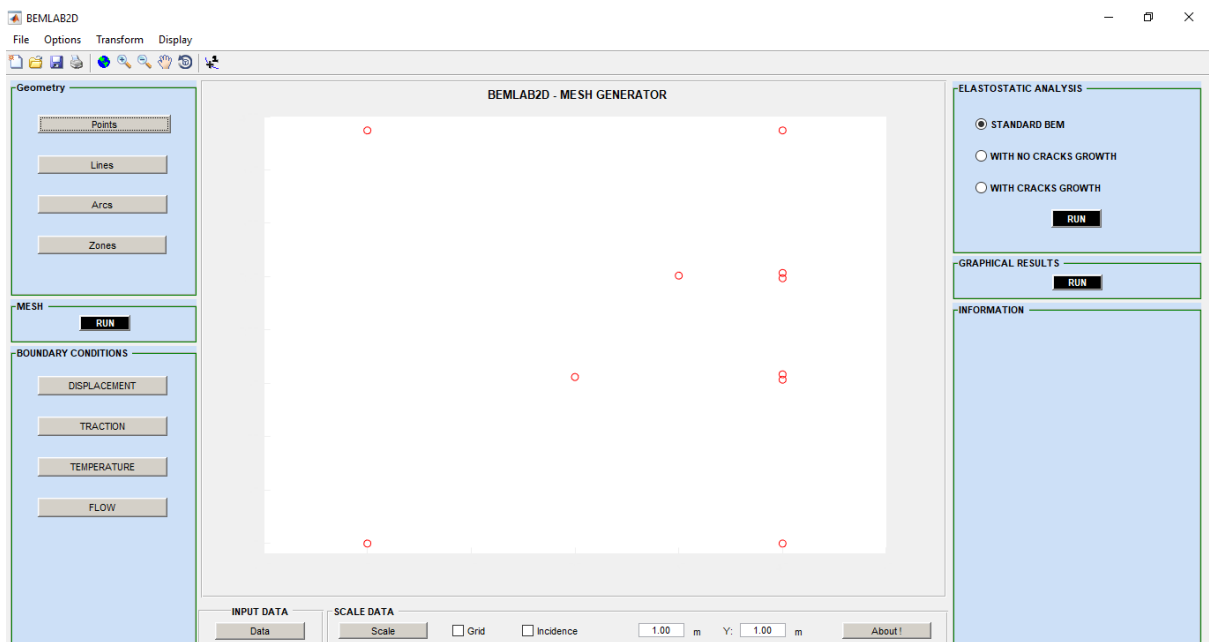


Figura 9.6 - Pontos de referência criados

Por meio dos pontos de referência podemos inserir os segmentos retos utilizando o ícone *Lines* derivado também do Módulo I. Os segmentos retos são colocados após clicar com o mouse nos pontos que foram inseridos anteriormente pelo ícone *Points*. É necessário seguir uma sequência de desenho, em que o último segmento construído se conecte com o próximo até fechar o contorno do problema e finalizado com o botão *Enter* do teclado. A Figura 9.7 ilustra os segmentos retos construídos.

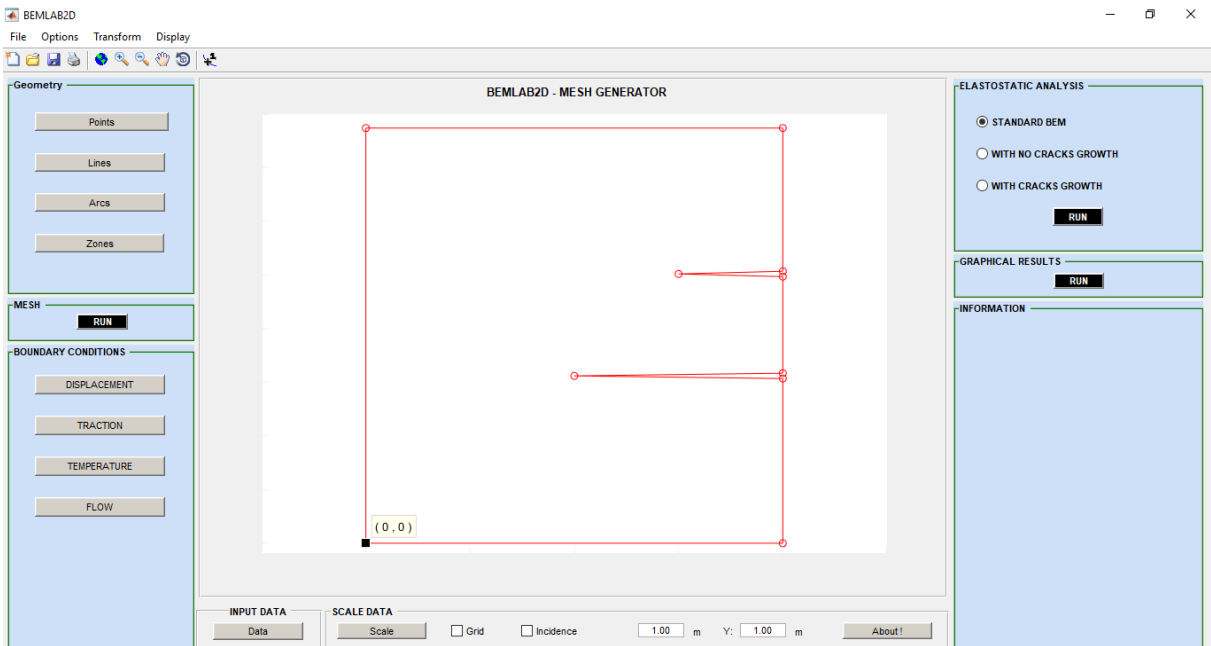


Figura 9.7 - Segmentos de reta

A próxima etapa é definir os tipos de zonas existentes no problema. O módulo I é acionado novamente pelo ícone *zones* e uma interface auxiliar chamada *Zona* se projeta. Ao clicar no botão *Selecionar Zona* o cursor do mouse é habilitado e com um clique do mouse, seleciona-se os segmentos que compõe a zona mestre. A zona mestre foi desenhada no sentido horário e após finalizar as definições de zonas, pressiona-se o ícone *Finalizar* na atual janela. A Figura 9.8 ilustra a definição de zona mestre do problema.

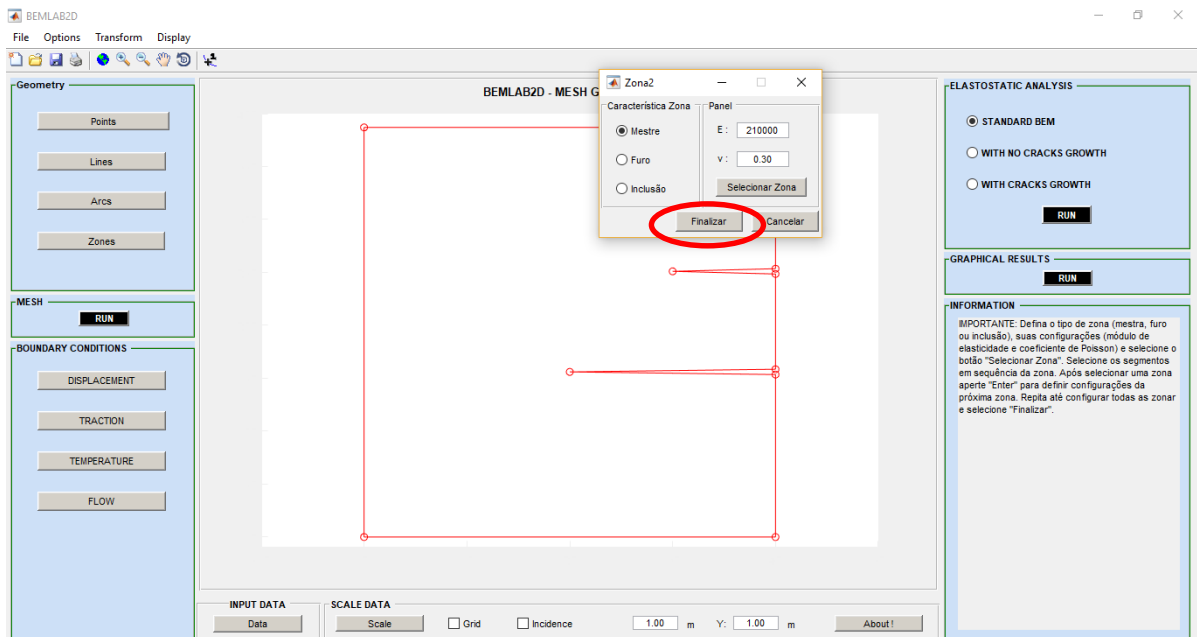


Figura 9.8 - Definição de zona mestre do problema

A próxima etapa a ser realizada é gerar a malha do contorno do problema, onde para isto modulo II é acionado. Clica-se no botão RUN para começar a discretização do contorno. Utilizando o clique do mouse para seleciona uma linha, abre-se uma caixa de diálogo de forma a definir a quantidade de elementos de contorno, ver Figura 9.9.

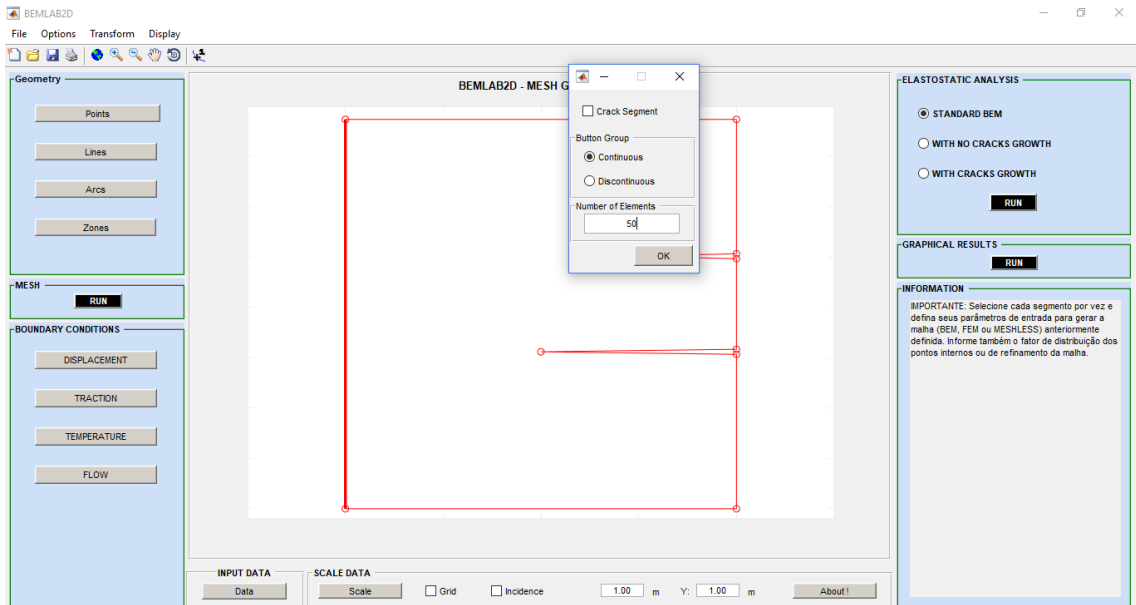


Figura 9.9 - Janela para atribuir o número de elementos lineares em um segmento reto

Ao terminar a seleção de todos os segmentos, o BemLaB2D solicita através de uma caixa de questionamento se o usuário definirá pontos internos e esses são inseridos por uma caixa de diálogo que aparece posteriormente. A Figura 9.10 ilustra a caixa de diálogo apresentada ao usuário para se inserir a coordenadas dos pontos internos que irá conter.

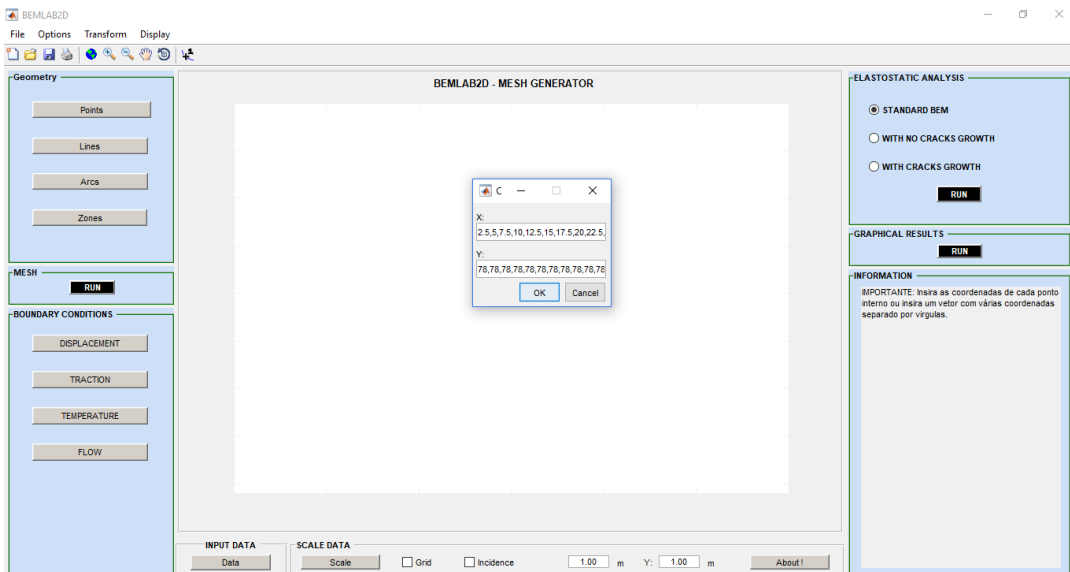


Figura 9.10 - caixa de diálogo para inserir a coordenadas dos pontos internos

A Figura 9.11 ilustra a modelagem finalizada com os pontos internos solicitados, sendo 153 elementos lineares no contorno e 63 pontos internos.

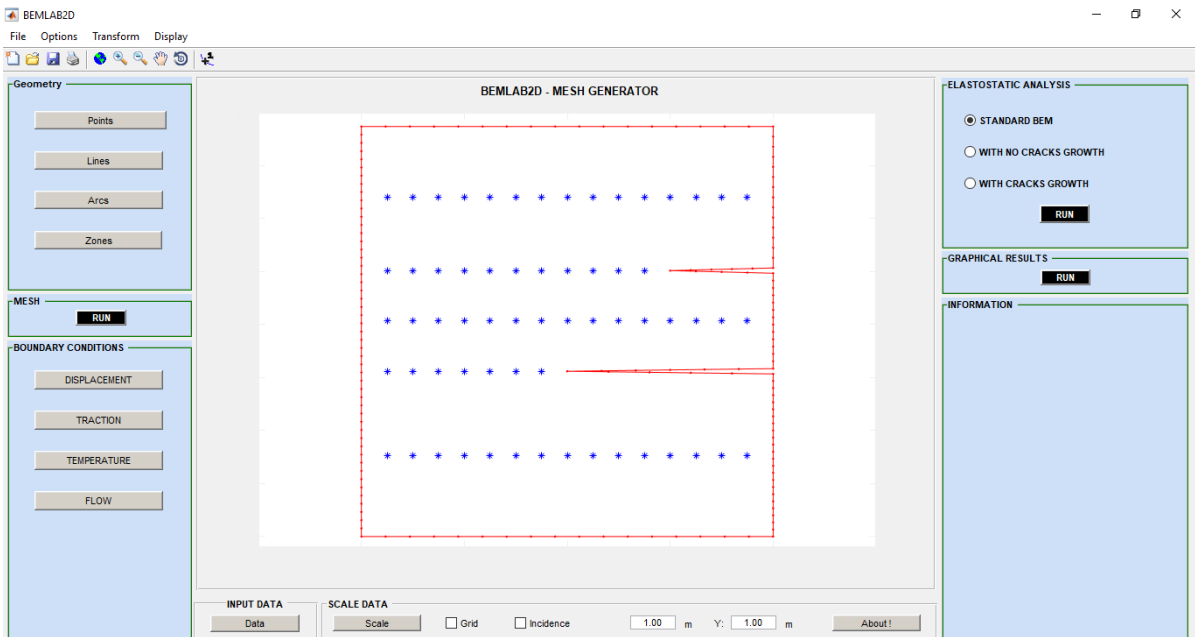


Figura 9.11 – Modelo geométrico final

O próximo passo a ser executado é inserção das condições de contorno, assim o módulo III é acionado. Os seguintes ícones podem ser selecionados: TEMPERATURE e FLOW. Desse modo, ao selecionar a linha desejada, abriu-se uma caixa de diálogo onde se inseriu o valor da condição de contorno daquela linha, conforme ilustrado na Figura 9.12.

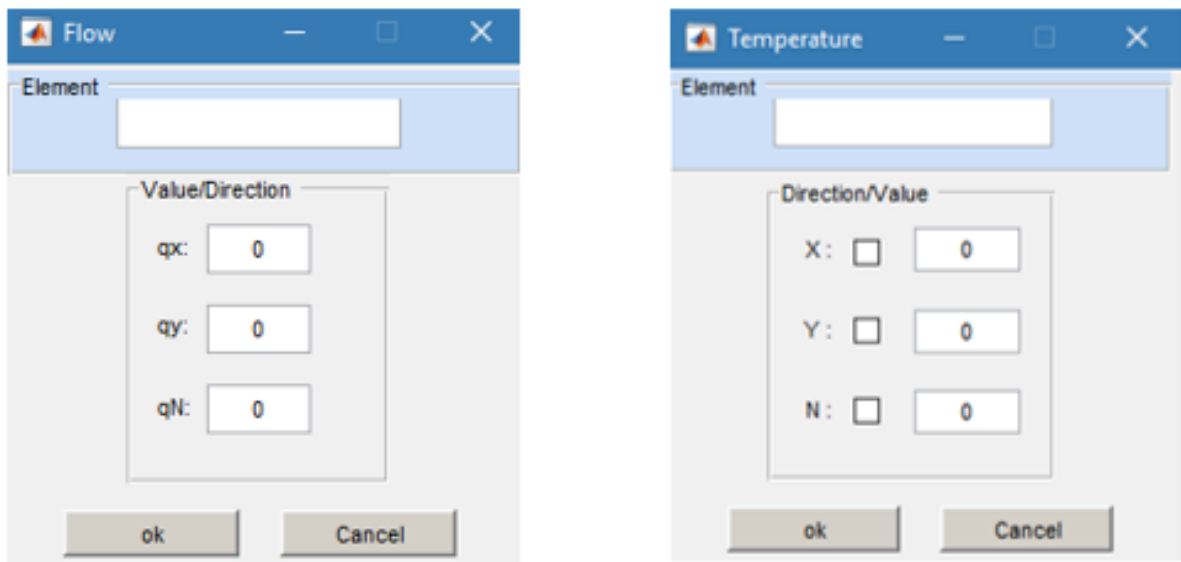


Figura 9.12 - Caixa de diálogo para inserir o valor da condição de contorno por linha

