Henrique Moreira de Almeida

r-Racionalidade com Correspondência de Escolha

Brasília

2017

Henrique Moreira de Almeida

r-Racionalidade com Correspondência de Escolha

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Economia, Universidade de Brasília, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Economia

Universidade de Brasília – UnB

Faculdade de Administração, Contabilidade e Economia

Departamento de Economia

Programa de Pós-Graduação

Orientador: José Guilherme de Lara Resende

Brasília

2017

Henrique Moreira de Almeida
r-Racionalidade com Correspondência de Escolha– Brasília, 2017-
26 p.

Orientador: José Guilherme de Lara Resende

Dissertação (Mestrado) – Universidade de Brasília – UnB
Faculdade de Administração, Contabilidade e Economia
Departamento de Economia
Programa de Pós-Graduação, 2017.

1. Racionalidade Limitada. 2. Correspondência de Escolha. 3. Escolhas Aleatórias.

Henrique Moreira de Almeida

r-Racionalidade com Correspondência de Escolha

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Economia, Universidade de Brasília, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Economia

Trabalho aprovado. Brasília, 13 de novembro de 2017:

José Guilherme de Lara Resende
Orientador

Gil Riella
Convidado 1

Rogério Mazali
Convidado 2

Brasília
2017

Agradecimentos

Aos meus pais e meu irmão.

Aos amigos e os colegas de mestrado, em especial à Érica Gonzales pelo apoio nesta parte final do curso.

Ao professor Gil Riella, e sua paciência inesgotável.

Aos professores José Guilherme de Lara Resende, Daniel Cajueiro e Joaquim Pinto de Andrade, por tudo o que me ensinaram.

À Lorena, por seu apoio e compreensão.

Resumo

Este trabalho apresenta uma caracterização alternativa ao modelo Ordinal Relative Satisficing Behavior, de Barberà e Neme. Para tanto partimos de axiomas comportamentais e encontramos uma representação por Correspondências de Escolhas, onde o grau de racionalidade pode ser definido de maneira endógena ou exógena. Em seguida utilizamos o resultado como o suporte de uma função de escolha estocástica do tipo Luce generalizada.

Palavras-chave: Racionalidade Limitada. Correspondência de Escolha. Escolhas Aleatórias.

Abstract

This work present an alternative characterization of the Ordinal Relative Satisficing Behavior Model, by Barberà and Neme. We start with behavioral axioms and find a Choice Correspondence representation, where the degree of rationality may be defined endogenously or exogenously. Later the previous result is used as the support for a generalized Luce random choice function.

Keywords: Bounded Rationality. Choice correspondence. Random Choice.

Sumário

1 Introdução

Agentes, não raramente, não maximizam suas utilidades. Embora tal comportamento já venha sendo observado há muito tempo, e tenha sido objeto de estudos como por exemplo em Simon (1955), recentemente o assunto passou a ocupar amplo espaço no debate econômico.

Dentre as tentativas recentes de modelar o comportamento não maximizador, também conhecido como Racionalidade Limitada, podemos destacar aqueles em que a escolha é feita após uma triagem como em Cherepanov, Feddersen e Sandroni (2013); os que atribuem o comportamento como o resultado de escolhas guiadas por várias preferências; como Manzini e Mariotti (2007, 2012); ou mesmo aqueles em que a escolha é a alternativa ótima dentre as alternativas que o agente consegue prestar atenção; como Masatlioglu, Nakajima, e Ozbay (2013).

Tendo em vista o problema acima abordado, Barberà e Neme (2016) apresentam a noção de $r - racionalidade$ segundo a qual uma função de escolha é $r - racional$ se existe uma ordem linear R sobre o conjunto de alternativas X tal que, para todo problema de escolha A, $c(A)$ é uma das r-melhores alternativas em A de acordo com R, ou seja o agente se satisfaz com uma das r-melhores alternativas. Desta forma o modelo preserva diversos aspectos da abordagem tradicional, em que uma escolha é dita racional se é escolhida a melhor alternativa de acordo com uma relação de preferência completa, reflexiva e transitiva definida para o conjunto de alternativas.

A noção é estendida permitindo r variar de acordo com o problema de escolha. Uma função de escolha é dita $\alpha - racional$ se existe uma ordem linear R sobre o conjunto de alternativas X tal que, para todo problema de escolha A, $c(A)$ é uma das $\alpha(A)$ melhores alternativas em A de acordo com R.

Neste trabalho propomos uma formulação alternativa utilizando correspondências de escolhas e axiomas comportamentais. O modelo pode ser adaptado para a utilização de correspondências de escolha, uma vez que o uso do conceito de funções de escolhas impõe restrições ao modelo sem ganhos práticos ou conceituais.

Na segunda parte do artigo, o modelo é complementado adicionando-se um segundo estágio no qual a frequência de escolha de cada uma das r melhores alternativas em um dado problema é determinada através de uma regra de Luce.

2 Definições Preliminares

2.1 Relações Binárias

Seja X um conjunto qualquer. Uma relação binária $\succsim$ sobre X é um subconjunto qualquer de $X \times X$. Adotaremos a notação usual $x \succsim y$ para denotar $(x, y) \in \succsim$. As partes simétrica e assimétrica de $\succsim$ são denotadas por $\sim$ e $\succ$, respectivamente. Algumas propriedades comuns de relações binárias são:

Reflexividade: $x \succsim x$ para todo $x \in X$.

Transitividade: $x \succsim y$ e $y \succsim z$ implica $x \succsim z$.

Antissimetria: $x \succsim y$ e $y \succsim x$ implica $x = y$.

Completeza: Para todo $(x, y) \in X$, ou $x \succsim y$ ou $y \succsim x$.

Aciclicidade: $\nexists\ k \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_k \in X$ tais que $x_1 \succ \cdots \succ x_k \succ x_1$.

Uma relação binária $\succsim$ que satisfaz Reflexividade, Transitividade e Antissimetria é chamada de ordem parcial e dizemos que $(X, \succsim)$ é um poset (conjunto parcialmente ordenado). Se $\succsim$ é uma ordem parcial e satisfaz completeza, dizemos que $\succsim$ é uma ordem linear e dizemos que $(X, \succsim)$ é um loset (conjunto linearmente ordenado). Se $\succsim$ satisfaz Reflexividade e Transitividade, chamamos $\succsim$ uma pré-ordem e $(X, \succsim)$ de um conjunto pré-ordenado.

Definição 1. *Seja $(X, \succsim)$ um conjunto pré-ordenado e $\emptyset \neq Y \subseteq X$. Defina*

$$MAX(Y, \succsim) := \{y \in Y |\ x \succ y \text{ é falso para todo } x \in Y\},$$

e

$$max(Y, \succsim) := \{y \in Y |\ y \succsim x, \text{ para todo } x \in Y\},$$

*isto é, um elemento y de Y é chamado $\succsim$ **-maximal** de Y se não existe $x \in Y$ com $x \succ y$. Se $y \succsim x$ para todo $x \in Y$, então y é chamado o $\succsim$ **-máximo** de Y.*

Para podermos trabalhar com situações como as encontradas em Barberà, Neme (2017), em que a escolha não é necessariamente a alternativa não dominada do conjunto, precisamos da seguinte definição:

Definição 2. *Seja $(X, \succsim)$ um conjunto pré-ordenado. Definimos o r-maximal de X por*

$$r - MAX(X, \succsim) := \bigcup_{i=0}^{r-1} MAX(X_i, \succsim),$$

onde $X_0 := X$ *e para todo* $i \in \mathbb{N}$, $X_i := X_{i-1} \backslash MAX(X_{i-1}, \succsim)$

Precisaremos também das definições e resultados a seguir, provenientes da Teoria dos Conjuntos:

Definição 3. *Seja* $\succsim$ *uma relação binária em um conjunto não-vazio* X. *Seja* $\succsim_0 := \succsim$ *e, para cada inteiro positivo* m, *defina a relação* $\succsim_m$ *em* X *por* $x \succsim_m y$ *se, e somente se, existe* $z_1, ..., z_m \in X$ *tais que* $x \succsim z_1, z_1 \succsim z_2, ..., z_{m-1} \succsim z_m$ *e* $z_m \succsim y$. *A relação* $tran(\succsim) := \succsim_0 \cup \succsim_1 \cup ...$ *é chamada o fecho transitivo de* $\succsim$.

Definição 4. *Seja* $(X, \succsim)$ *um conjunto pré-ordenado. Uma relação binária* $\succsim^*$ *é dita ser uma extensão de* $\succsim$ *se* $\succ \subseteq \succ^*$ *e* $\succsim \subseteq \succsim^*$.

Teorema 1 (Teorema da extensão de Szpilrajn)**.** *Toda ordem parcial pode ser completada (i.e. para todo poset* $(X, \succsim)$ *existe uma extensão* $\succsim^*$ *de* $\succsim$ *tal que* $(X, \succsim^*)$ *é um loset).*

Teorema 2. *Seja* X *um conjunto finito qualquer. Se* $\emptyset \neq Y \subseteq X$ *e* $\succsim \subseteq X \times X$ *é acíclica, então* $MAX(Y, \succsim) \neq \emptyset$.

Para todo $Y \in \Omega_X$, $Y \neq \emptyset$, $MAX(Y, \succsim) \neq \emptyset$ *se* $\succsim$ *é acíclica.*

2.2 Correspondências de escolha

Seja X um conjunto qualquer e Ω_X uma coleção de subconjuntos não-vazios de X. Podemos interpretar X como as alternativas possíveis de escolha e Ω_X como a coleção de todos os problemas de escolhas possíveis que o agente pode enfrentar.

Definição 5. *Um campo de escolha sobre* X, *denotado* Ω_X, *é um subconjunto de* $2^X \backslash \{\emptyset\}$ *com as seguintes propriedades:*

1. $\{x\} \in \Omega_X$, *para todo* $x \in X$;
2. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \Omega_X$ *sempre que* $A_i \in \Omega_X; i = 1, 2, \ldots, n, \; n \in \mathbb{N}$.

Nós dizemos que (X, Ω_X) *é um espaço de escolha.*

Definição 6. *Dado um espaço de escolha* (X, Ω_X), *definiremos uma correspondência de escolha sobre* Ω_X *como uma correspondência* $c : \Omega_X \rightrightarrows X$ *que satisfaz:*

1. $c(S) \neq \emptyset$, *para todo* $S \in \Omega_X$;
2. $c(S) \subseteq S$, *para todo* $S \in \Omega_X$.

3 Axiomatização

Neste capítulo serão apresentados os axiomas e as formas de caracterização do modelo de r-racionalidade com correspondências de escolha. Tomamos o caminho contrário ao de Barberá e Neme e partimos de uma versão mais geral para em seguida abordar as mais específicas.

3.1 Caracterização geral

A partir de agora, o nosso objeto de estudo será uma correspondência de escolha c sobre um espaço de escolha finito (X, Ω_X). [1]

Definição 7. *Defina a relação binária $\rhd \subseteq X \times X$ por $x \rhd y$ se, e somente se, existe um problema de escolha A com $x \in c(A)$ e $y \in A \backslash c(A)$.*

A partir da preferência revelada definida acima é imposto um critério de consistência para as escolhas.

Axioma 1 (Aciclicidade)**.** *A relação $\rhd$ é acíclica.*

A aciclicidade da preferência revelada é suficiente para apresentarmos a nossa primeira caracterização para a correspondência de escolha c.

Teorema 3. *A correspondência de escolha c satisfaz Aciclicidade se, e somente se, exitem uma ordem linear $\succcurlyeq \subseteq X \times X$ e uma função $r : 2^X \backslash \{\emptyset\} \to \mathbb{N}$ tal que para todo problema de escolha $A \in \Omega_X$,*

$$c(A) = r(A) - MAX(A, \succcurlyeq).$$

Demonstração.

($\Rightarrow$)

Seja $tran(\rhd) \subseteq X \times X$ o fecho transitivo da relação $\rhd$ definida acima. Como $\rhd$ é acíclica, o seu fecho transitivo é uma ordem parcial estrita que é uma extensão de $\rhd$.

Defina a relação $\trianglerighteq$ por $\trianglerighteq := tran(\rhd) \cup I$, onde $I := \{(x, x) : x \in X\}$. Temos assim que $\trianglerighteq$ é reflexiva, transitiva e antissimétrica e, portanto, $\trianglerighteq$ é uma ordem parcial.

Pelo Teorema de Szpilrajn existe uma extensão $\succcurlyeq$ da ordem parcial $\trianglerighteq$ tal que $\succcurlyeq$ é uma ordem linear. Assim $MAX(A, \succcurlyeq) \neq \emptyset, \ \forall A \in \Omega_X$. Defina $r(A) := |c(A)|$ para todo $A \in \Omega_X$. Como (X, Ω_X) é um espaço de escolha finito, a função $r(A)$ está bem definida.

[1] Por um espaço de escolha finito nós queremos dizer que X é um conjunto finito.

Agora, fixe qualquer $A \in \Omega_X$. Por construção, se $y \in c(A)$ e $x \in A \backslash c(A)$, nós temos $y \succ x$. Mas então, é claro que $c(A) = r(A) - MAX(A, \succcurlyeq)$.

($\Leftarrow$)

Suponha agora que c seja uma correspondência de escolha tal que $c(A) = r(A) - MAX(A, \succcurlyeq)$, para todo $A \in \Omega_X$, em que $r : 2^X \backslash \{\emptyset\} \to \mathbb{N}$ e $\succcurlyeq$ é uma ordem linear sobre X. Suponha também que $x_1, \ldots, x_k \in X$ sejam tais que $x_1 \rhd x_2, \ldots, x_{k-1} \rhd x_k$. Pela representação de c, isto implica que $x_1 \succ x_2, \ldots, x_{k-1} \succ x_k$. Como $\succcurlyeq$ é uma ordem linear, nós obtemos que $x_1 \succ x_k$. Pela representação de c, é claro que não existe $A \in \Omega_X$ com $x_k \in c(A)$ e $x_1 \in A \backslash c(A)$. Consequentemente, não é verdade que $x_k \rhd x_1$ e nós concluímos que $\rhd$ é acíclica. $\square$

3.2 Caracterização com r variável

No modelo de Barberá e Neme, é apresentada a noção de α-racionalidade, na qual o valor de r é uma função do problema de escolha. A caracterização geral apresentada acima também define r a partir do problema de escolha, porém não impõe restrição nenhuma à relação entre r e o problema de escolha. Uma restrição desejável ao comportamento de r é a monotonicidade com relação a inclusão.

Axioma 2 (Monotonicidade)**.** *Para todo $A, B \in \Omega_X$ com $A \subseteq B$, temos $|c(A)| \leq |c(B)|$.*

Utilizando **Aciclicidade** e **Monotonicidade**, nós obtemos a seguinte caracterização:

Teorema 4. *Uma correspondência de escolha satisfaz* ***Aciclicidade*** *e* ***Monotonicidade*** *se, e somente se, exitem uma ordem linear $\succcurlyeq \subseteq X \times X$ e uma função $r : 2^X \backslash \{\emptyset\} \to \mathbb{N}$ tais que para todo problema de escolha $A \in \Omega_X$, $c(A) = r(A) - MAX(A, \succcurlyeq)$, e $r(A) \leq r(B)$, para todo par de problemas de escolha A e B com $A \subseteq B$.*

Demonstração. É claro que se c tem uma representação como no Teorema 3 com uma função r tal que $r(A) \leq r(B)$ sempre que $A \subseteq B$, então c satisfaz Monotonicidade.

Suponha agora que c seja uma correspondência de escolha que satisfaz Aciclicidade e Monotonicidade. Pelo Teorema 3, ela tem um representação $(\succcurlyeq, r)$. Como $|c(A)| = r(A)$ para todo $A \in \Omega_X$, é claro que Motonicidade implica que $r(A) \leq r(B)$ sempre que $A \subseteq B$.

$\square$

3.3 Caracterização com r fixo

Até o momento temos trabalhado com uma função que assume valores distintos para diferentes problemas de escolha. Um outro caso, interessante, também discutido em Barberá e Neme (2017), é aquele em que r é um valor exógeno. Para tanto nós precisamos do seguinte postulado:

Axioma 3 (r-Fixo)**.** *Para todo* A*,* $|c(A)| = min\{r, |A|\}$*.*

Desta forma, se $r > |A|$, todo elemento de A pode ser escolhido, como era de se esperar.

Podemos agora demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 5. *Uma correspondência de escolha satisfaz* ***Aciclicidade*** *e* ***r-Fixo*** *se, e somente se, existe uma ordem linear* $\succcurlyeq \subseteq X \times X$ *tal que para qualquer problema de escolha* $A \in \Omega_X$*,*

$$c(A) = r - MAX(A, \succcurlyeq).$$

Demonstração. Pelo Teorema 3, nós já sabemos que uma correspondência de escolha que tem uma representação como no Teorema satisfaz Aciclicidade. Como r é um valor exógeno e que não varia conforme o problema de escolha, é claro que satisfaz r-Fixo.

Suponha agora que c seja uma correspondência de escolha que satisfaz Aciclicidade e r-Fixo. Pelo Teorema 3, existem uma função $\gamma : \Omega_X \to \mathbb{N}$ e uma ordem linear $\succcurlyeq$ sobre X tais que

$$c(A) = \gamma(A) - MAX(A, \succcurlyeq),$$

para todo $A \in \Omega_X$. Agora r-Fixo implica que $\gamma(A) = |A|$, se $|A| < r$ e $\gamma(A) = r$ caso contrário.

□

4 r-Racionalidade com escolhas aleatórias

O modelo padrão de escolhas aleatórias (Luce, 1959) postula que a probabilidade de se escolher cada uma das alternativas do problema de escolha depende da utilidade relativa entre as alternativas, e portanto, não consegue captar situações em que uma alternativa nunca é escolhida na presença de outra. Echenique e Saito (2017) fornecem uma extensão do modelo de Luce que permite que situações como as acima descritas possam ser trabalhadas.

Uma função de escolha estocástica é uma função p tal que, para qualquer conjunto não vazio $A \in \Omega_X$, atribui uma distribuição de probabilidade $p(A)$ sobre A. Denotamos a probabilidade de escolher a alternativa $x \in A$ por $p(x, A)$.

4.1 Modelo de Luce generalizado

Definição 8. *Uma função de escolha estocástica p é chamada função de Luce generalizada se existir um par (u, c) de funções $u : X \to \mathbb{R}_{++}$ e $c : \Omega_X \to \Omega_X$ tal que $c(A) \subseteq A$ para qualquer conjunto $A \in \Omega_X$, e*

$$p(x, A) = \begin{cases} \frac{u(x)}{\Sigma_{y \in c(A)} u(y)} & se\ x \in c(a), \\ 0 & se\ x \notin c(A), \end{cases}$$

para todo $A \subseteq X$.

A diferença da definição acima com relação à função definida em Luce (1959) é que, na definição acima, é atribuída probabilidade positiva apenas às alternativas passíveis de ser escolhidas, e não a todas as alternativas do problema de escolha.

Observe que se, na definição acima, $c(A) = A$ para todo $A \in \Omega_X$, então o modelo coincide com o de Luce.

Axioma 4 (Independência Cíclica)**.** *Para qualquer sequência $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, se existe uma sequência $A_1, \ldots, A_n$ de subconjuntos não vazios de X tal que $p(x_i, A_i) > 0$, $p(x_{i+1}, A_i) > 0$ para $i = 1, \ldots, n-1$, $p(x_n, A_n) > 0$ e $p(x_1, A_n) > 0$, então*

$$\frac{p(x_1, A_n)}{p(x_n, A_n)} = \frac{p(x_1, A_1)}{p(x_2, A_1)} \frac{p(x_2, A_2)}{p(x_3, A_2)} \cdots \frac{p(x_{n-1}, A_{n-1})}{p(x_n, A_{n-1})}.$$

Teorema 6 (Echenique e Saito(2017))**.** *Uma função de escolha estocástica satisfaz* ***Independência Cíclica*** *se, e somente se, é uma função de Luce generalizada.*

4.2 r-Racionalidade como suporte da função de Luce generalizada

O Teorema 6 nos coloca em uma posição em que podemos importar qualquer resultado de Teoria da Escolha para o mundo de escolhas aleatórias. Em particular, nós podemos fazer isto com os resultados de r-Racionalidade discutidos anteriormente. Para tanto nós precisamos do seguinte postulado:

Axioma 5 (Compatibilidade)**.** *Para quaisquer $x, y \in X$, se existe problema de escolha A com $y \in A$, $p(y, A) = 0$ e $p(x, A) > 0$, então $p(x, \{x, y\}) > p(y, \{x, y\})$.*

Por razões puramente técnicas nós vamos precisar da seguinte hipótese adicional:

Axioma 6 (Positividade)**.** *Para todo par $x, y \in X$, $p(x, \{x, y\}) > 0$.*

Nós podemos agora demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 7. *Uma função estocástica p satisfaz **Independência Cíclica**, **Compatibilidade** e **Positividade** se, e somente se, existem $u : X \to \mathbb{R}_{++}$ e $r : 2^X \backslash \{\emptyset\} \to \mathbb{N}$ com $r(A) = 2$ sempre que $|A| = 2$ tais que (u, c) é uma representação de Luce generalizada de p, em que, para qualquer problema de escolha A,*

$$c(A) = r(A) - MAX(A, u).$$

Demonstração. Suponha primeiro que (u, r) seja uma representação de p como no enunciado do Teorema. Pelo Teorema 6, nós sabemos que p satisfaz Independência Cíclica. Como $r(A) = 2$ sempre que $|A| = 2$, p satisfaz Positividade. Finalmente, se existe um problema de escolha A com $y \in A$, $p(y, A) = 0$ e $p(x, A) > 0$, então, pela representação de p nós sabemos que $u(x) > u(y)$. Usando a representação de p novamente, nós concluímos que $p(x, \{x, y\}) > p(y, \{x, y\})$.

Suponha agora que p seja uma função de escolha estocástica que satisfaça Independência Cíclica, Compatibilidade e Positividade. Pelo Teorema 6, existe (u, c) que é uma representação Luce generalizada de p. Por Positividade, $c(\{x, y\}) = \{x, y\}$ para todo $x, y \in X$. Suponha agora que $x, y \in X$ sejam tais que $x \rhd y$. Isto é, suponha que exista problema de escolha A com $y \in A$, $p(y, A) = 0$ e $p(x, A) > 0$. Por Compatibilidade, isto implica que $p(x, \{x, y\}) > p(y, \{x, y\})$ o que, pela representação de p, só pode ocorrer se $u(x) > u(y)$. Isto é, $x \rhd y$ implica $u(x) > u(y)$ para todo $x, y \in X$. Logo, $\rhd$ não pode ter ciclos e c satisfaz Aciclicidade. Pelo Teorema 3, nós sabemos que c tem uma representação $(\succcurlyeq, r)$ como naquele Teorema. Na verdade, uma inspeção na demostração do Teorema 3 nos mostra que nós podemos obter uma representação como naquele teorema utilizando qualquer extensão transitiva de $\rhd$. Podemos até mesmo usar uma pré-ordem completa $\succsim$ no lugar da ordem linear $\succcurlyeq$. Em particular, nós podemos usar a pré-ordem representada pela função u. Isto nos dá a representação desejada. $\square$

O resultado acima pode ser interpretado da seguinte forma: Dado um problema de escolha A, $r(A)$ alternativas são possíveis de ser escolhidas, sendo cada uma delas escolhidas com frequência, ou probabilidade, $p(x, A)$. Esta probabilidade é determinada pela utilidade relativa da alternativa frente as utilidades das demais alternativas passíveis de ser escolhidas.

5 Conclusão

Apresentamos neste trabalho uma caracterização alternativa do modelo Ordinal Relative Satisficing Behavior, de Barberà e Neme, utilizando uma axiomatização que implica na existência de correspondências de escolha. Tal qual no modelo original, trabalhamos os casos em que o grau de racionalidade é definido de maneira exógena ao problema de escolha, bem como quando é definido em função do problema. O modelo assim definido preserva a simplicidade conceitual do modelo original porém sem as restrições inerentes ao uso de funções de escolha. Em seguida utilizamos os resultados obtidos no mundo de escolhas aleatórias, onde a frequência de escolha de cada uma das r melhores alternativas em um determinado problema de escolha é determinada através de uma regra de Luce.

Referências

BARBERÀ, S.; NEME, A. Ordinal relative satisficing behavior. Disponível em: <http://pareto.uab.es/sbarbera/WEB%20SB-Conxa/WP/SB-AN%20Ordinal%20WP790%20BGSE%20March2015.pdf> Acesso em: dez 2016.

CHEREPANOV, V.; FEDDERSEN, T.; SANDRONI, A. Rationalization. Theoretical Economics. 2013.

ECHENIQUE, F.; SAITO, K. General Luce Model. Disponível em: <http://people.hss.caltech.edu/~saito/papers/general_luce_july3.pdf> Acesso em: set 2017.

ELIAZ, K.; OK, E. Indifference or indecisiveness? Choice-theoretic foundations of incomplete preferences. Games and Economic Behavior. 2006.

LUCE, R. D. Individual Choice Behavior a Theoretical Analysis, John Wiley and sons. 1959.

MANZINI, P.; MARIOTTI, M. Sequentially Rationalizable Choice. American Economic Review. 2007.

MANZINI, P.; MARIOTTI, M. Categorize Then Choose: Boundedly Rational Choice and Welfare. Journal of the European Economic Association. 2012.

MASATLIOGLU, Y.; NAKAJIMA, D.; and OZBAY, E.Y. Revealed Attention. American Economic Review. 2012.

OK, E. Real Analysis with economic Applications. Princeton University Press. 2007.

RIBEIRO, M.; RIELLA, G. Regular Preorders and Behavioral Indifference. Theory and Decision. 2016.

SIMON, H. A Behavioral Model of Rational Choice. Quarterly Journal of Economics. 1955.