Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Superálgebras com Superinvolução

por

Herlisvaldo Costa Santos

Orientadora: Professora Doutora Irina Sviridova

Brasília
2017

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Superálgebras com Superinvolução

por

Herlisvaldo Costa Santos

Orientadora: Professora Doutora Irina Sviridova

Brasília
2017

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Superálgebras com Superinvolução

por

Herlisvaldo Costa Santos *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 29 de junho de 2017.

Comissão Examinadora:

Irina Sviridova

Profa. Dra. Irina Sviridova - MAT/UnB (Orientadora)

Prof. Dr. Alexei Krassilnikov – MAT/UnB (Membro)

Diogo Diniz P. S. Silva.

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva - UFCG (Membro)

* O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S237s Santos, Herlisvaldo C .
Superálgebras com Superinvolução / Herlisvaldo C. Santos; orientador Irina Sviridova. -- Brasília, 2017.
93 p.

Dissertação (Mestrado – Mestrado em Matemática) – Universidade de Brasília, 2017.

1.Superálgebras. 2.Superideal. 3.Superinvolução. I.Sviridova, Irina, orient. II. Título.

Dedico este trabalho à:

Florinda Dos Santos Telles.

Svetlana Eliakova.

A todos os amigos.

Agradecimentos

- A professora Irina Sviridova, orientadora acadêmica, pela orientação, incentivo e dedicação que sempre me prestou durante a elaboração desta dissertação. Acima de tudo, agradeço a ela pela paciência e profissionalismo que tem ao ensinar e por transmitir com clareza e simplicidade certos conceitos matemáticos complexos.

- Aos professores da banca examinadora Alexei Krassilnikov e Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva pela leitura atenta e pelas correçoes que enriquceram este trabalho.

- Aos professores da UNB que sem dúvida contribuíram para meu crescimento profissional e, em especial ao professor Luís Henrique de Miranda.

- Aos professores de graduação da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro pela minha formação e incentivo, em especial aos professores Orlando Santos Pereira e Marcia Costa Chaves.

- A Elaine Cristine de Souza Silva por sua amizade e pelo seu apoio.

- Aos amigos e colegas do Departamento de Matemática-UNB, pela inúmeras experiências, apoio e incentivo. Especialmente, Wenison, Antonio Marcos, Valter, John Freddy. Também, a Quintino por está feliz com minha partida.

- A Svetlana Eliakova por ser a minha companheira nesta jornada.

Resumo

Nosso objetivo nesse trabalho é proporcionar às superálgebras associativas primitivas uma estrutura análoga àquelas para álgebras encontradas em [6, 7, 8] e classificar superálgebras primitivas com superinvolução tendo um superideal minimal. Finalizamos o trabalho com a classificação das superálgebras associativas de divisão com superinvolução e superálgebras simples com superinvolução.

Palavras-chave: superálgebra, superideal, superinvolução.

Abstract

Our objective in this work is to provide primitive associative superalgebras a structure analogous to those for the algebras found in [6, 7, 8] and to classify primitive superalgebras with superinvolution having a minimal superideal. We conclude the work with the classification of associative division superalgebras with superinvolution and simple superalgebras with superinvolution.

Sumário

Introdução

O teorema da densidade de Jacobson é bem conhecido na literatura. Ele afirma que um anel primitivo é um subanel denso do anel de transformações lineares de um espaço vetorial sobre um anel de divisão (veja [8]). Usando uma teoria análoga, Racine, em [10], provou um teorema análogo ao teorema de Jacobson para superanéis. No mesmo artigo, ele classifica as superálgebras com superinvoluções.

O principal objetivo desta dissertação é apresentar para superálgebras associativas uma teoria clássica análoga para álgebras associativas encontradas nos livros [7, 6, 8]. A dissertação está organizada da seguinte maneira.

No capítulo 1 apresentamos os conceitos básicos e é assumido o conhecimento por parte do leitor de álgebra, teorema da densidade de Jacobson e conceitos relacionados. Iniciamos com a definição de anéis graduados, apresentamos a definição de álgebras associativas graduadas, módulos graduados, homomorfismo graduados e resultados relacionados. Por fim, apresentamos a definição de produto tensorial que é importante para entendimento do segundo capítulo.

No capítulo 2 consideramos as $\mathbb{K}$-álgebras com característica diferente de 2, onde $\mathbb{K}$ é um corpo. Em seguida, definimos uma $\mathbb{K}$-superálgebras que é o tema central desta dissertação, apresentamos a definição de superinvolução. Finalizamos o capítulo, com o teorema da densidade para superanéis que é análogo ao teorema de Jacobson para anéis não graduados e algumas aplicações.

No capítulo 3 concluímos o trabalho com a classificação de todas às superálgebras de divisão com superinvolução e as superálgebras simples com superinvolução.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Anéis Graduados

Nesta seção, apresentaremos algumas propriedades de anéis graduados. As definições, teoremas e exemplos apresentados, são análogos aos dos livros [3] e [6].

Sejam $(\mathscr{R}, +, \cdot)$ um anel (associativo) $e\,\mathscr{G}$ um grupo qualquer.

Definição 1.1. *O anel $\mathscr{R}$ é dito $\mathscr{G}$-graduado se $\mathscr{R}$ pode ser escrito como soma direta de subgrupos aditivos $\mathscr{R} = \bigoplus_{g\in\mathscr{G}} \mathscr{R}_g$ tais que para todos $g,\ h \in \mathscr{G}$, $\mathscr{R}_g \cdot \mathscr{R}_h \subseteq \mathscr{R}_{gh}$.*

Segue da definição que qualquer $r \in \mathscr{R}$ pode ser unicamente escrito como uma soma $r = \sum_{g\in\mathscr{G}} r_g$ com $r_g \in \mathscr{R}_g$. O subgrupo $\mathscr{R}_g$ é chamado componente homogênea de $\mathscr{R}$, $g \in \mathscr{G}$. Um elemento $0 \neq r \in \mathscr{R}$ é homogêneo se existe $g \in \mathscr{G}$ tal que $r \in \mathscr{R}_g$, neste caso, dizemos que r tem grau g e escrevemos: $deg\ r = g$.

Um subgrupo aditivo $\mathscr{S} \subset \mathscr{R}$ é graduado (ou homogêneo) se $\mathscr{S} = \bigoplus_{g\in\mathscr{G}} (\mathscr{S} \cap \mathscr{R}_g)$. Ou seja, $\mathscr{S}$ é graduado se, para qualquer $s \in \mathscr{S}$, $s = \sum_{g\in\mathscr{G}} s_g$ implica que $s_g \in \mathscr{S}$, para todo $g \in \mathscr{G}$. Similarmente, podemos definir subanéis graduados, ideais graduados.

Note que, se $\mathscr{H}$ é um subgrupo de $\mathscr{G}$, então $\mathscr{S} = \bigoplus_{h\in\mathscr{H}} \mathscr{R}_h$ é um subanel graduado de $\mathscr{R}$.

No caso em que I é um ideal graduado de $\mathscr{R}$ então o anel quociente $\mathscr{R}/I = \{x+I | x \in \mathscr{R}\}$ é um anel graduado com componentes homogêneas definidas por:

$$(\mathscr{R}/I)_g := (\mathscr{R}_g + I)/I = \{r_g + I | r_g \in \mathscr{R}_g\}, \quad \forall g \in \mathscr{G}.$$

É fácil ver que todo anel possui a seguinte graduação que é chamada de **graduação trivial**.

Exemplo 1.2 (Graduação Trivial)**.** *Sejam $\mathscr{R}$ um anel e $\mathscr{G}$ um grupo qualquer, a graduação trivial em $\mathscr{R}$ é definida por: $\mathscr{R}_{\mathfrak{e}} = \mathscr{R}$ e $\mathscr{R}_g = \{0\}$ para $g \neq e$, onde $\mathfrak{e} \in \mathscr{G}$ é o elemento neutro do grupo $\mathscr{G}$.*

Exemplo 1.3. *Sejam $\mathscr{R}$ um anel e $x_1, \cdots, x_k$ indeterminadas sobre $\mathscr{R}$. Para $m = (m_1, \cdots, m_k) \in \mathbb{N}^k$, defina $x^m := x_1^{m_1} \cdots x_k^{m_k}$. Então o anel polinomial $S = \mathscr{R}[x_1, \cdots, x_k]$ é um anel $\mathbb{Z}$-graduado, onde*

$$S_n = \left\{ \sum_{m \in \mathbb{N}^k} r_m x^m | r_m \in \mathscr{R} \text{ e } m_1 + \cdots + m_k = n \right\}.$$

$U(\mathscr{R})$ é o conjunto dos elementos inversíveis de $\mathscr{R}$.

Proposição 1.4. *Sejam $\mathfrak{e}$ o elemento neutro do grupo $\mathscr{G}$ e $\mathscr{R}$ um anel $\mathscr{G}$-graduado. Então $\mathscr{R}_{\mathfrak{e}}$ é um subanel de $\mathscr{R}$.*

Demonstração. Como $\mathscr{R}$ é graduado, por definição, $\mathscr{R}_{\mathfrak{e}}\mathscr{R}_{\mathfrak{e}} \subseteq \mathscr{R}_{\mathfrak{e}}$, ou seja, $\mathscr{R}_{\mathfrak{e}}$ é fechado em respeito de multiplicação, logo $\mathscr{R}_{\mathfrak{e}}$ é um subanel de $\mathscr{R}$. ■

Proposição 1.5. *Seja $\mathscr{R} = \bigoplus_{g \in \mathscr{G}} \mathscr{R}_g$ um anel $\mathscr{G}$-graduado unitário. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *$1 \in \mathscr{R}_{\mathfrak{e}}$, onde $\mathfrak{e}$ é o elemento neutro do grupo $\mathscr{G}$.*

2. *$\mathscr{R}_g$ é um $\mathscr{R}_{\mathfrak{e}}$-bimódulo, $\forall g \in \mathscr{G}$.*

3. *O inverso r^{-1} de um elemento homogêneo $r \in U(\mathscr{R})$ é homogêneo.*

Demonstração.

1. Sejam $1_{\mathscr{R}} \in \mathscr{R}$ a unidade de $\mathscr{R}$ e

$$1_{\mathscr{R}} = \sum_{g \in \mathscr{G}} x_g, \text{ onde } x_g \in \mathscr{R}_g, \tag{1.1}$$

a decomposição de $1_{\mathscr{R}}$ em componentes homogêneas. Observe que em (1.1), $x_g \neq 0$ para um número finito de $g \in \mathscr{G}$. Então para todo $h \in \mathscr{G}$,

$$x_h = x_h \cdot 1_{\mathscr{R}} = x_h \sum_{g \in \mathscr{G}} x_g = \sum_{g \in \mathscr{G}} x_h x_g.$$

Por comparação de grau, tem-se $x_h = x_h x_{\mathfrak{e}}$. Portanto,

$$x_{\mathfrak{e}} = 1_{\mathscr{R}} \cdot x_{\mathfrak{e}} = (\sum_{g \in \mathscr{G}} x_g) x_{\mathfrak{e}} = \sum_{g \in \mathscr{G}} x_g x_{\mathfrak{e}} = \sum_{g \in \mathscr{G}} x_g = 1_{\mathscr{R}}.$$

Consequentemente, $x_{\mathfrak{e}} = 1_{\mathscr{R}} \in \mathscr{R}_{\mathfrak{e}}$.

2. Segue da Proposição 1.4 que $\mathscr{R}_{\mathfrak{e}}$ é um subanel de $\mathscr{R}$. Temos pela definição de anel graduado que

$$\mathscr{R}_{\mathfrak{e}} \mathscr{R}_g \subset \mathscr{R}_g \text{ e } \mathscr{R}_g \mathscr{R}_{\mathfrak{e}} \subset \mathscr{R}_g, \quad \forall g \in \mathscr{G},$$

logo, $\mathscr{R}_g$ é um $\mathscr{R}_{\mathfrak{e}}$-bimódulo para todo $g \in \mathscr{G}$.

3. Suponha que $r_h \in U(\mathscr{R}) \cap \mathscr{R}_h$ com $h \in \mathscr{G}$. Seja $r \in \mathscr{R}$ tal que $r_h r = r r_h = 1$. Como $\mathscr{R}$ é graduado então $r = r_{g_1} + \cdots + r_{g_n}$ com $r_{g_i} \in \mathscr{R}_{g_i}$, $i = 1, \cdots, n$. Logo,

$$1 = r_h r = r_h(r_{g_1} + \cdots + r_{g_n}) = r_h r_{g_1} + \cdots + r_h r_{g_n} \in \mathscr{R}_{\mathfrak{e}}, \quad g_i \in \mathscr{G}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

Comparando os graus dos elementos e pela unicidade do elemento inverso do grupo $\mathscr{G}$, concluímos que existe um l tal que $hg_l = \mathfrak{e}$, $r_h r_{g_l} = r_{g_l} r_h = 1$ e $r_h r_{g_k} = 0$ para todo $k \neq l$ com $1 \leq k \leq n$. Logo $g_l = h^{-1}$, portanto, $r \in \mathscr{R}_{h^{-1}}$.

■

Definição 1.6. *Sejam $\mathscr{R}$ e $\mathscr{R}'$ dois anéis $\mathscr{G}$-graduados, um homomorfismo de anéis $\mathscr{G}$-graduados $f : \mathscr{R} \to \mathscr{R}'$ é um homomorfismo de anéis tal que*

$$f(\mathscr{R}_g) \subseteq \mathscr{R}'_g, \quad \forall g \in \mathscr{G}.$$

Um homomorfismo de anéis graduados f é chamado isomorfismo se f é bijetivo. E quando existir um isomorfismo entre anéis graduados, escreveremos $\mathscr{R} \cong \mathscr{R}'$.

Lema 1.7. *Sejam $\mathscr{R}, \mathscr{R}'$ dois anéis $\mathscr{G}$-graduados e f um isomorfismo de $\mathscr{R}$ em $\mathscr{R}'$. Então a inversa de f, denotada por f^{-1}, é um isomorfismo de anéis graduados.*

Demonstração. Seja $f^{-1} : \mathscr{R}' \to \mathscr{R}$ a inversa de f. Então f^{-1} é um isomorfismo de anéis. Logo, para provar que f^{-1} é um isomorfismo de anéis graduados, é suficiente observar que $f(\mathscr{R}_g) = \mathscr{R}'_g$ para todo $g \in \mathscr{G}$, e portanto $\mathscr{R}_g = f^{-1}(\mathscr{R}_{g'})$, $\forall g \in \mathscr{G}$. ■

1.2 Anéis graduados de divisão

Nesta seção, $\mathscr{R}$ representará um anel $\mathscr{G}$-graduado associativo com unidade, onde $\mathscr{G}$ é um grupo qualquer. Representaremos por $\mathfrak{e}$ o elemento neutro do $\mathscr{G}$.

Definição 1.8. *Um anel $\mathscr{G}$-graduado $\mathscr{R}$ é chamado anel graduado de divisão se todo elemento homogêneo não nulo do $\mathscr{R}$ é inversível.*

É claro que se $\mathscr{R}$ é um anel graduado de divisão, então $\mathscr{R}_\mathfrak{e}$ é um anel de divisão. Todo anel de divisão com qualquer $\mathscr{G}$-graduação é graduado de divisão, entretanto, existem anéis graduados de divisão que não são anéis de divisão.

Exemplo 1.9 (Álgebra de Grupos)**.** *Para um grupo $\mathscr{G}$, a álgebra de grupo $\mathbb{K}\mathscr{G}$, onde $\mathbb{K}$ é um corpo, tem uma graduação natural*

$$\mathbb{K}\mathscr{G} = \bigoplus_{g \in \mathscr{G}} (\mathscr{G})_g, \textit{ onde } (\mathbb{K}\mathscr{G})_g = \mathbb{K}g.$$

$\mathbb{K}\mathscr{G}$ é um anel $\mathscr{G}$-graduado de divisão. Considere $\mathscr{G} = \mathbb{Z}_2$, então $\mathbb{K}\mathbb{Z}_2 = \mathbb{K}\eta_0 + \mathbb{K}\eta_1$ é graduado de divisão, onde $\eta_i\eta_j = \eta_{i+j}$, $\forall i, j \in \mathbb{Z}_2$. Entretanto, não é um anel de divisão, pois $0 \neq \eta_0 + \eta_1 \in \mathbb{K}\mathbb{Z}_2$ não possui inverso.

Dado um anel $\mathscr{G}$-graduado $\mathscr{R}$, podemos definir um novo anel chamado anel oposto de $\mathscr{R}$ representado por $\mathscr{R}^{op}$.

Definição 1.10 (Anel oposto $\mathscr{R}^{op}$)**.** *Seja $\mathscr{R}$ um anel $\mathscr{G}$-graduado. O anel oposto de $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}^{op}$, é o grupo aditivo $\mathscr{R}$ com a multiplicação dada por*

$$r \underset{op}{\circ} r' := r'r$$

para quaisquer r, $r' \in \mathscr{R}$. Nessas condições, $\mathscr{R}^{op}$ também é um anel $\mathscr{G}$-graduado, com $(\mathscr{R}^{op})_g = \mathscr{R}_g$.

1.3 Álgebras Graduadas

Seja $\mathbb{K}$ um corpo de característica diferente de dois.

Definição 1.11. *Uma $\mathbb{K}$-álgebra $\mathscr{A}$ é $\mathscr{G}$-graduada se existe uma família de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais $\{\mathscr{A}_g\}_{g\in\mathscr{G}}$ tal que*

i. $\mathscr{A} = \underset{g\in\mathscr{G}}{\oplus} \mathscr{A}_g$;

ii. $\mathscr{A}_g\mathscr{A}_h \subseteq \mathscr{A}_{gh}$ *para todo $g, h \in \mathscr{G}$.*

Observamos que toda álgebra graduada é, em particular, um anel graduado.

Da mesma forma que definimos subanel graduado, ideal graduado e anel graduado de divisão podemos definir subálgebra graduada, ideal graduado de uma álgebra graduada e álgebra graduada de divisão. As definições são análogas às feitas acima.

Exemplo 1.12. *Sejam n inteiro positivo e $A = M_n(\mathbb{K})$ a álgebra de matrizes com entrada no corpo $\mathbb{K}$. Considere $\mathscr{G} = \mathbb{Z}_m$. Dado $(g_1, \cdots, g_n) \in \mathbb{Z}_m^n$, considere o subespaço*

$$A_\sigma =< e_{ij} | g_i^{-1} g_j = \sigma >,$$

onde

$$e_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & j & & \end{matrix} & \end{array}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad e \quad e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}, \text{ com } \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & se\ j = k \\ 0 & se\ j \neq k \end{cases}. \tag{1.2}$$

Como $\{e_{ij} | 1 \leq i, j \leq n\}$ *é uma base de* A, *então* $A = \bigoplus_{\sigma \in \mathbb{Z}_m} A_\sigma$. *Agora, observe que para todo* $e_{ij} \in A_{\sigma_1}$ *e* $e_{ks} \in A_{\sigma_2}$, *com* $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{Z}_m$, *temos:*

1. $e_{ij}e_{ks} = 0 \in A_{\sigma_1\sigma_2}$, *se* $j \neq k$;

2. $e_{ij}e_{ks} = e_{is}$, *se* $j = k$. *Neste caso,* $e_{ij}e_{ks} \in A_{\sigma_1\sigma_2}$, *pois* $g_i^{-1}g_j = \sigma_1$, $g_k^{-1}g_s = \sigma_2$ *e* $j = k$. *Logo,* $g_i^{-1}g_s = g_i^{-1}(g_j g_k^{-1})g_s = (g_i^{-1}g_j)(g_k^{-1}g_s) = \sigma_1\sigma_2$.

Portanto, A *é uma* $\mathbb{K}$*-álgebra* $\mathbb{Z}_m$*-graduada. Em particular, tomando* $m = 2$ *e* $(0,1) \in \mathbb{Z}_2^2$ *ou* $(1,0) \in \mathbb{Z}_2^2$ *obtemos:*

$$M_2(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\sigma \in \mathbb{Z}_2} A_\sigma,$$

onde $A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{K} \right\}$ *e* $A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} | c, d \in \mathbb{K} \right\}$. *Os pares ordenados* $(0,0)$, $(1,1) \in \mathbb{Z}_2^2$ *geram a graduação trivial.*

Exemplo 1.13. *Sejam* $M_3(\mathbb{K})$ *e* $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_3$. *Considere* $(0,1,2)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1) \in \mathbb{Z}_3^3$.

1) Para $(0,1,2)$, *obtemos:*

- *Elementos de grau* 0,

$$deg\ e_{11} = \overline{0+0} = 0 = deg\ e_{22} = deg\ e_{33}.$$

- *Elementos de grau* 1,

$$deg\ e_{12} = \overline{0+1} = 1, \quad deg\ e_{31} = \overline{1+0} = 1, \quad deg\ e_{23} = \overline{2+2} = 1.$$

- *Elementos de grau* 2,

$$deg\, e_{21} = \overline{2+0} = 2, \quad deg\, e_{13} = \overline{0+2} = 2, \quad deg\, e_{32} = \overline{1+1} = 2.$$

Logo,

$$\begin{array}{ll} A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} | a, e, i \in \mathbb{K} \right\}, & A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix} | b, f, g \in \mathbb{K} \right\}, \\ A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ d & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix} | c, d, h \in \mathbb{K} \right\} & \end{array}. \tag{1.3}$$

2) Para $(0,1,1)$*, obtemos:*

- *Elementos de grau* 0,

$$deg\, e_{11} = \overline{0+0} = 0 = deg\, e_{22} = deg\, e_{33}, \quad deg\, e_{32} = \overline{2+1} = 0, \quad deg\, e_{23} = \overline{2+1} = 0.$$

- *Elementos de grau* 1,

$$deg\, e_{12} = \overline{0+1} = 1, \quad deg\, e_{13} = \overline{0+1} = 1.$$

- *Elementos de grau* 2,

$$deg\, e_{21} = \overline{2+0} = 2, \quad deg\, e_{31} = \overline{2+0} = 2.$$

Logo,

$$\begin{array}{ll} A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix} | a, e, f, h, i \in \mathbb{K} \right\}, & A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} | b, c \in \mathbb{K} \right\}, \\ A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix} | d, g \in \mathbb{K} \right\} & \end{array}. \tag{1.4}$$

3) Para $(1,0,1)$*, obtemos:*

- *Elementos de grau* 0*,*

$$deg\, e_{11} = 0 = deg\, e_{22} = deg\, e_{33}, \quad deg\, e_{13} = \overline{2+1} = 0, \quad deg\, e_{31} = \overline{2+1} = 0.$$

- *Elementos de grau* 1*,*

$$deg\, e_{21} = \overline{0+1} = 1, \quad deg\, e_{23} = \overline{0+1} = 1.$$

- *Elementos de grau* 2*,*

$$deg\, e_{12} = \overline{2+0} = 2, \quad deg\, e_{32} = \overline{2+0} = 2.$$

Logo,

$$\begin{array}{c} A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & i \end{pmatrix} | a,c,e,g,i \in \mathbb{K} \right\}, \quad A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} | d,f \in \mathbb{K} \right\}, \\ A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix} | d,g \in \mathbb{K} \right\} \end{array} . \tag{1.5}$$

Observe que a ordem dos g_i *em* $(g_1, g_2, g_3) \in \mathbb{Z}_3^3$ *é importante.*

Exemplo 1.14. *Seja* n *um número inteiro positivo. Seja* $T = M_n(\mathscr{A})$ *a* $\mathbb{K}$*-álgebra de matrizes* $n \times n$ *com entradas na* $\mathbb{K}$*-álgebra* $\mathscr{G}$*-graduada* $\mathscr{A}$*. Então* T *tem uma* $\mathscr{G}$*-graduação definida da seguinte maneira:*

$$(T)_g := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11}^g & \cdots & a_{1l}^g & \cdots & a_{1n}^g \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1}^g & \cdots & a_{ll}^g & \cdots & a_{ln}^g \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^g & \cdots & a_{nl}^g & \cdots & a_{nn}^g \end{pmatrix} | a_{ij}^g \in \mathscr{A}_g,\ 1 \le i,j \le n \right\},\ g \in \mathscr{G}.$$

1.4 Módulos Graduados

Seja $\mathscr{R}$ um anel associativo $\mathscr{G}$-graduado, onde $\mathscr{G}$ é um grupo qualquer. Denotaremos por $\mathfrak{e}$ o elemento neutro do grupo $\mathscr{G}$.

Seja $\mathscr{N}$ um $\mathscr{R}_{\mathfrak{e}}$-módulo à esquerda. Para cada $g \in \mathscr{G}$, consideramos $\mathscr{M}_g := \mathscr{R}_g \underset{\mathscr{R}_{\mathfrak{e}}}{\otimes} \mathscr{N}$, ou seja, $\mathscr{M}_g$ é o produto tensorial dos $\mathscr{R}_{\mathfrak{e}}$-módulos $\mathscr{N}$ e $\mathscr{R}_g$. Dado $r_h \in \mathscr{R}_h$ com $h \in \mathscr{G}$, defina

$$r_h(r_g \underset{\mathscr{R}_{\mathfrak{e}}}{\otimes} n) := (r_h r_g) \underset{\mathscr{R}_{\mathfrak{e}}}{\otimes} n, \quad n \in \mathscr{N}, \quad r_g \in \mathscr{R}_g, \quad \forall g \in \mathscr{G}. \tag{1.6}$$

Observamos que $r_h(r_g \underset{\mathscr{R}_{\mathfrak{e}}}{\otimes} n) \in \mathscr{M}_{hg}$, pois $r_h r_g \in \mathscr{R}_{hg}$. Estendemos a ação (1.6) em todo $\mathscr{R}$ e $\mathscr{M}_g$ por aditividade. Seja $\mathscr{M} = \sum\limits_{g\in\mathscr{G}} \mathscr{M}_g = \sum\limits_{g\in\mathscr{G}} \mathscr{R}_g \underset{\mathscr{R}_{\mathfrak{e}}}{\otimes} \mathscr{N}$, então $\mathscr{M}$ é um $\mathscr{R}$-módulo $\mathscr{G}$-graduado, isto é, $\mathscr{M}$ é $\mathscr{R}$-módulo tal que

$$\mathscr{R}_h \mathscr{M}_g \subseteq \mathscr{M}_{hg}$$

para quaisquer $g, h \in \mathscr{G}$. Existem $\mathscr{R}$-módulos graduados que não são induzidos por $\mathscr{R}_{\mathfrak{e}}$-módulos. Em geral, temos a seguinte definição.

Definição 1.15. *Seja $\mathscr{M}$ um $\mathscr{R}$-módulo à esquerda. Dizemos que $\mathscr{M}$ é um $\mathscr{R}$-módulo graduado se existe uma família de subgrupos aditivos $\{\mathscr{M}_g\}_{g\in\mathscr{G}}$ de $\mathscr{M}$ tal que*

1. $\mathscr{M} = \underset{g\in\mathscr{G}}{\oplus} \mathscr{M}_g$;
2. $\mathscr{R}_g \mathscr{M}_h \subset \mathscr{M}_{gh}, \quad \forall g, h \in \mathscr{G}$.

De modo semelhante, podemos definir $\mathscr{R}$-módulo graduado à direita.

O conjunto $X = \underset{g\in\mathscr{G}}{\cup} \mathscr{M}_g$ é o conjunto dos elementos homogêneos de $\mathscr{M}$; um elemento não nulo $u \in \mathscr{M}_g$ é dito ser homogêneo de grau g.

É claro que se $\mathscr{R}$ é um anel graduado, então $\mathscr{R}$ é um $\mathscr{R}$-módulo à esquerda graduado.

Exemplo 1.16. *Sejam M um $\mathscr{R}$-módulo graduado e g_0 um elemento de $\mathscr{G}$. Para cada $g,\ h \in \mathscr{G}$, defina $\mathscr{M}'_g := \mathscr{M}_{gg_0}$ e seja $\mathscr{M}' = \underset{g\in\mathscr{G}}{\oplus} \mathscr{M}'_g$. Logo,*

$$r_h m'_g \in \mathscr{M}_{hgg_0} = \mathscr{M}'_{hg}, \quad \forall r_h \in \mathscr{R}_h, \quad \forall m'_g \in \mathscr{M}'_g, \quad \forall h, g \in \mathscr{G}.$$

Então $\mathscr{M}'$ é um $\mathscr{R}$-módulo graduado.

Dizemos que $\mathscr{N}$ é um submódulo graduado de um $\mathscr{R}$-módulo $\mathscr{M}$ se $\mathscr{N}$ é um $\mathscr{R}$-submódulo e $\mathscr{N} = \underset{g\in\mathscr{G}}{\oplus} (\mathscr{M}_g \cap \mathscr{N})$, ou equivalente, todas as componentes homogêneas de todo elemento do $\mathscr{N}$ pertencem a $\mathscr{N}$, ou seja, se $n \in \mathscr{N}$ tal que $n = m_{g_1} + \cdots +, m_{g_k}$, então $m_{g_i} \in \mathscr{N}$ para todo $1 \leq i \leq k$. Em particular, um ideal à esquerda $\mathscr{G}$-graduado é um submódulo graduado do $\mathscr{R}$.

Dado um submódulo graduado $\mathscr{N}$ de um $\mathscr{R}$-módulo graduado $\mathscr{M}$, podemos considerar o $\mathscr{R}$-módulo quociente $\mathscr{M}/\mathscr{N}$. O $\mathscr{M}$ induz uma graduação em $\mathscr{M}/\mathscr{N}$. As componentes homogêneas de $\mathscr{M}/\mathscr{N}$ são dadas por:

$$(\mathscr{M}/\mathscr{N})_g := \{m_g + \mathscr{N} | m_g \in \mathscr{M}_g\}.$$

É evidente que um $\mathscr{R}$-módulo graduado $\mathscr{M}$ ($\mathscr{M} \neq \{0\}$) tem no mínimo dois submódulos graduados, $\{0\}$ e $\mathscr{M}$, os quais são chamados de triviais.

Dado um subconjunto S de um $\mathscr{R}$-módulo graduado à esquerda $\mathscr{M}$, definimos o anulador à esquerda de S como sendo

$$Ann^l({}_{\mathscr{R}}S) = \{r \in \mathscr{R} | rs = 0, \ \forall s \in S\},$$

de forma semelhante, podemos definir anulador para um módulo à direita.

Lema 1.17. *Seja $\mathscr{M}$ um $\mathscr{R}$-módulo graduado à esquerda. Então, $Ann^l({}_{\mathscr{R}}\mathscr{M})$ é um ideal bilateral graduado de $\mathscr{R}$.*

Demonstração. Para cada $g \in \mathscr{G}$, considere $(Ann^l({}_{\mathscr{R}}\mathscr{M}))_g = \{r_g \in \mathscr{R}_g | r_g m = 0, \ \forall m \in \mathscr{M}\}$. Observamos que $(Ann^l({}_{\mathscr{R}}\mathscr{M}))_g$ é um subgrupo de $Ann^l({}_{\mathscr{R}}\mathscr{M})$ para todo $g \in \mathscr{G}$. Por outro lado, se $r \in (Ann^l({}_{\mathscr{R}}\mathscr{M}))_g \cap \sum\limits_{g\neq h \in \mathscr{G}} (Ann^l({}_{\mathscr{R}}\mathscr{M}))_h$, então $r = 0$, pois $\mathscr{R}_g \cap$

$\sum_{g\neq h\in\mathcal{G}}\mathcal{R}_h=(0)$. Logo, a soma $\sum_{g\neq h\in\mathcal{G}}(Ann^l({}_{\mathcal{R}}\mathcal{M}))_h$ é direta. Seja $r\in Ann^l({}_{\mathcal{R}}\mathcal{M})$, então $r=\sum_{h\in\mathcal{G}}r_h$, com $r_g\in\mathcal{R}_h$. Para todo $m_g\in\mathcal{M}_g$ e $g\in\mathcal{G}$, temos $rm_g=0$ para todo $m\in\mathcal{M}$. Em particular, $0=rm_g=\sum_{h\in\mathcal{G}}r_hm_g$ para todo $g\in\mathcal{G}$. Como $\mathcal{M}$ é graduado, temos $r_hm_g=0$ para todo $g\in\mathcal{G}$, daí segue que $r_h\in Ann^l({}_{\mathcal{R}}\mathcal{M})$. Logo, $Ann^l({}_{\mathcal{R}}\mathcal{M})\subseteq\bigoplus_{g\in\mathcal{G}}(Ann^l({}_{\mathcal{R}}\mathcal{M}))_g$. Portanto, $Ann^l({}_{\mathcal{R}}\mathcal{M})=\bigoplus_{g\in\mathcal{G}}(Ann^l({}_{\mathcal{R}}\mathcal{M}))_g$. ∎

Similarmente, o anulador de um $\mathcal{R}$-módulo à direta graduado é um ideal bilateral graduado de $\mathcal{R}$.

Definição 1.18. *Um $\mathcal{R}$-módulo graduado $\mathcal{M}$ é dito ser fiel se $Ann^l({}_{\mathcal{R}}\mathcal{M})=(0)$.*

Definição 1.19. *Um $\mathcal{R}$-módulo graduado $\mathcal{M}$ diz-se simples (ou irredutível) se $\mathcal{R}\mathcal{M}\neq 0$ e 0 e $\mathcal{M}$ são seus únicos submódulos graduados.*

Definição 1.20. *Seja $\mathcal{R}$ um anel graduado. Dizemos que $\mathcal{R}$ é simples (ou graduado simples) se não tiver ideais graduados próprios não nulos.*

Lema 1.21. *Todo o anel (álgebra) graduado de divisão é graduado simples.*

Demonstração. Seja $\mathcal{D}$ é um anel graduado de divisão. Suponha que exista um ideal graduado $\{0\}\neq I$. Logo, existe $0\neq x_g\in I$, com $g\in\mathcal{G}$. Sendo $\mathcal{D}$ anel graduado de divisão, existe $x_{g^{-1}}\in\mathcal{D}_{g^{-1}}$ tal que $1=x_{g^{-1}}x_g\in I$, ou seja, $I=\mathcal{D}$. ∎

Sabemos que todo anel (álgebra) de divisão é graduado de divisão, com graduação trivial (ou qualquer outra graduação), logo é um anel (álgebra) graduado simples, pelo Lema 1.21. Assim, temos as seguintes implicações:

$$\begin{array}{ccc}
\text{anéis de divisão} & \overset{\text{(com qualquer graduação)}}{\Rightarrow} & \text{anéis graduado de divisão}\\
\Downarrow & & \Downarrow\\
\text{anéis simples} & \overset{\text{(com qualquer graduação)}}{\Rightarrow} & \text{anéis graduados simples}
\end{array}$$

As implicações do diagrama acima não são inversíveis. No exemplo 1.9 vimos que $\mathbb{K}\mathbb{Z}_2$ é um anel graduado de divisão, mas não é um anel de divisão. Usando Lema 1.21

concluímos que $\mathbb{K}\mathbb{Z}_2$ é um anel ($\mathbb{K}$-álgebra) $\mathbb{Z}_2$-graduado simples, entretanto, como anel ($\mathbb{K}$-álgebra) não é simples, pois $\mathbb{K}(\eta_0+\eta_1) \subsetneq \mathbb{K}\mathbb{Z}_2$ é um ideal próprio não graduado de $\mathbb{K}\mathbb{Z}_2$.

Exemplo 1.22. *Seja $M_n(\mathbb{K})$ o anel de matrizes com entradas no corpo $\mathbb{K}$. Quando $n > 1$, $M_n(\mathbb{K})$ é um anel simples, mas não é anel de divisão. $M_n(\mathbb{K})$ com $\mathbb{Z}_m$-graduação é graduado simples, mas não é graduado de divisão, veja [8].*

1.5 Homomorfismos Graduados

Nesta seção, consideraremos $\mathscr{G}$ um grupo abeliano, $\mathscr{M}$ um $\mathscr{R}$-módulo à esquerda, onde $\mathscr{R}$ é um anel ($\mathbb{K}$-álgebra) $\mathscr{G}$-graduada. E a operação do grupo $\mathscr{G}$ será representada por $+$. Seja $\mathscr{M}$ um $\mathscr{R}$-módulo à esquerda $\mathscr{G}$-graduado, denotaremos por $End({}_{\mathscr{R}}\mathscr{M})$ o anel de todos os $\mathscr{R}$-endomorfismos de $\mathscr{M}$. É bom lembrar que $End({}_{\mathscr{R}}\mathscr{M})$ é um anel com as operações usuais, soma e composição de funções.

Definição 1.23 (Homomorfismo graduado)**.** *Sejam $\mathscr{M} = \bigoplus_{\beta\in\mathscr{G}} \mathscr{M}_\beta$ e $\mathscr{M}' = \bigoplus_{\beta\in\mathscr{G}} \mathscr{M}'_\beta$ dois $\mathscr{R}$-módulos graduados. Um homomorfismo de módulos graduados (ou homogêneo) de grau $\gamma \in \mathscr{G}$ é um homomorfismo de $\mathscr{R}$-módulos $f : \mathscr{M} \to \mathscr{M}'$ tal que $f(\mathscr{M}_\beta) \subseteq \mathscr{M}'_{\beta+\gamma}$ para todo $\beta \in \mathscr{G}$.*

Lema 1.24. *Sejam $\mathscr{M}$ e $\mathscr{N}$ dois $\mathscr{R}$-módulos graduados e f um homomorfismo homogêneo de $\mathscr{R}$-módulos graduados de $\mathscr{M}$ em $\mathscr{N}$. Então*

1. *$Ker(f) = \{m \in \mathscr{M} \mid f(m) = 0\}$ é um submódulo graduado de $\mathscr{M}$.*

2. *$Im(f) = \{f(m) \in \mathscr{N} \mid m \in \mathscr{M}\}$ é submódulo graduado de $\mathscr{N}$.*

Demonstração. Seja f um homomorfismo de módulos graduados de $\mathscr{M}$ em $\mathscr{N}$ de grau γ. Provaremos que $Ker(f) = \bigoplus_{\beta\in\mathscr{G}} Ker_\beta(f)$, a prova de que $Im(f) = \bigoplus_{\beta\in\mathscr{G}} Im_\beta(f)$ segue de maneira similar.

Para cada $\beta \in \mathscr{G}$, defina $Ker_\beta(f) = \{m_\beta \in \mathscr{M}_\beta | f(m_\beta) = 0\}$. Primeiramente, observemos que $Ker_\beta(f)$ é um subgrupo de $Ker(f)$ para todo $\beta \in \mathscr{G}$. Por outro lado, se $m \in Ker_\beta(f) \cap \sum_{\beta \neq \alpha \in \mathscr{G}} Ker_\alpha(f)$, então $m \in \mathscr{M}_\beta \cap \sum_{\beta \neq \alpha \in \mathscr{G}} \mathscr{M}_\alpha$. Como $\mathscr{M}_\beta \cap \sum_{\beta \neq \alpha \in \mathscr{G}} \mathscr{M}_\alpha = \{0\}$, temos que $m = 0$. Com isso, a soma $\sum_{\beta \in \mathscr{G}} \mathscr{M}_\alpha$ é direta. Seja $m \in Ker(f)$, então $m = \sum_{\beta \in \mathscr{G}} m_\beta$, onde $m_\beta \in \mathscr{M}_\beta$ para todo $\beta \in \mathscr{G}$ e $f(m) = 0$. Como f é homomorfismo graduado temos que $0 = f(m) = f(\sum_{\beta \in \mathscr{G}} m_\beta) = f(m_{\beta 1}) + \cdots + f(m_{\beta n})$. Logo, $f(-m_{\alpha i}) = \sum_{\alpha i \neq \alpha j \in \mathscr{G}} f(m_{\alpha j})$, ou seja, $f(m_{\alpha i}) \in \mathscr{N}_{\alpha i + \gamma} \cap \sum_{\alpha i \neq \alpha j \in \mathscr{G}} \mathscr{N}_{\alpha j + \gamma}$, onde $1 \leq i,\ j \leq n$. Assim, como $\mathscr{N}$ é graduado, temos que $\mathscr{N}_{\alpha i + \gamma} \cap \sum_{\alpha i \neq \alpha j \in \mathscr{G}} \mathscr{N}_{\alpha j + \gamma} = \{0\}$. Logo $f(m_{\alpha i}) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$, com $\alpha i \in \mathscr{G}$. Com isso, temos que $Ker(f) \subseteq \bigoplus_{\beta \in \mathscr{G}} Ker_\beta(f)$. Portanto, $Ker(f) = \bigoplus_{\beta \in \mathscr{G}} Ker_\beta(f)$. ■

Não é difícil ver que se ϕ é um homomorfismo graduado de grau γ de anéis $\mathscr{G}$-graduados, então $\gamma = e$.

O conjunto de todos os homomorfismos graduados de grau γ é um subgrupo aditivo $Hom_\mathscr{R}(\mathscr{M}, \mathscr{N})_\gamma$ do grupo $Hom_\mathscr{R}(\mathscr{M}, \mathscr{N})$. Consideramos

$$Hom^{gr}_\mathscr{R}(\mathscr{M}, \mathscr{N}) = \sum_{\gamma \in \mathscr{G}} Hom_\mathscr{R}(\mathscr{M}, \mathscr{N})_\gamma$$

Facilmente, verifica-se que se $f \in Hom_\mathscr{R}(\mathscr{M}, \mathscr{N})_\gamma \cap \sum_{\gamma \neq \alpha \in \mathscr{G}} Hom_\mathscr{R}(\mathscr{M}, \mathscr{N})_\gamma$ então $f = 0$ e, portanto $Hom^{gr}_\mathscr{R}(\mathscr{M}, \mathscr{N}) = \bigoplus_{\gamma \in \mathscr{G}} Hom_\mathscr{R}(\mathscr{M}, \mathscr{N})_\gamma$ é um grupo abeliano graduado.

Um endomorfismo graduado (ou homogêneo) de módulos graduados de grau γ é um endomorfismo de grupo $f : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ tal que f é um homomorfismo graduado. O conjunto de todos os endomorfismos graduados de grau γ é um subgrupo aditivo $Hom_\mathscr{R}(\mathscr{M}, \mathscr{M})_\gamma$ do grupo $Hom_\mathscr{R}(\mathscr{M}, \mathscr{M})$. Observamos que $Hom^{gr}_\mathscr{R}(\mathscr{M}, \mathscr{M}) = \bigoplus_{\gamma \in \mathscr{G}} Hom_\mathscr{R}(\mathscr{M}, \mathscr{M})_\gamma$ é um anel graduado como as operações usuais de funções, que denotaremos por $End^{gr}_\mathscr{R}(\mathscr{M})$.

Em geral, temos $Hom^{gr}_\mathscr{R}(\mathscr{M}, \mathscr{N}) \subsetneq Hom_\mathscr{R}(\mathscr{M}, \mathscr{N})$. Entretanto, é conhecido que se o módulo $\mathscr{M}$ é finitamente gerado ou se $\mathscr{G}$ é um grupo finito então

$$End_\mathscr{R}(\mathscr{M}) = End^{gr}_\mathscr{R}(\mathscr{M}) \ \ [[4], Corollary\ A.I.2.11.].$$

1.6 Anéis Graduados Primitivos

Apresentaremos alguns resultados da teoria de anéis graduados primitivos.

Definição 1.25. *Seja $\mathscr{R}$ um anel $\mathscr{G}$-graduado, $\mathscr{R} \neq 0$. Dizemos que $\mathscr{R}$ é um anel $\mathscr{G}$-graduado primo se para quaisquer ideais bilaterais graduados não nulos I, J teremos $IJ \neq (0)$.*

Dado um anel graduado $\mathscr{R}$, podemos considerar $\mathscr{R}$ como um $\mathscr{R}$-módulo à esquerda graduado. Denotaremos por $Ann({}_{\mathscr{R}}\mathscr{R})$ o anulador de $\mathscr{R}$ à esquerda.

Lema 1.26. *Seja $\mathscr{R}$ um anel graduado primo. Então $Ann({}_{\mathscr{R}}\mathscr{R}) = (0)$.*

Demonstração. Seja $\mathscr{R}$ um anel primo. Pelo **Lema 1.17** $Ann({}_{\mathscr{R}}\mathscr{R})$ é um ideal bilateral graduado do $\mathscr{R}$. Temos que $\mathscr{R}$ é um ideal bilateral graduado de $\mathscr{R}$ diferente de zero e $\mathscr{R}Ann({}_{\mathscr{R}}\mathscr{R}) = (0)$. Pela definição de anel graduado primo, segue que $Ann({}_{\mathscr{R}}\mathscr{R}) = (0)$. ■

Lema 1.27. *Seja I um ideal à esquerda graduado (ou à direita) de um anel graduado $\mathscr{R}$, então $I\mathscr{R}$ ($\mathscr{R}I$) é um ideal bilateral graduado do anel $\mathscr{R}$.*

Demonstração. Não é difícil prova que $I\mathscr{R}$ é um ideal bilateral do $\mathscr{R}$. Para provarmos que $I\mathscr{R}$ é graduado, é suficiente observamos que $\mathscr{R} = \bigoplus_{\beta\in\mathscr{G}} \mathscr{R}_\beta$ e $I = \bigoplus_{\alpha\in\mathscr{G}} I_\alpha$. Logo, $I\mathscr{R} = (\bigoplus_{\alpha\in\mathscr{G}} I_\alpha)(\bigoplus_{\beta\in\mathscr{G}} \mathscr{R}_\beta) = \bigoplus_{\alpha\in\mathscr{G}} \bigoplus_{\beta\in\mathscr{G}} I_\alpha\mathscr{R}_\beta$. ■

Utilizando o Lema 1.27, mostraremos que na definição de anel graduado primo, podemos considerar ideais unilaterais graduados.

Lema 1.28. *Um anel graduado $\mathscr{R}$ é primo se, e somente se, para quaisquer ideais à esquerda (à direita) graduados não nulos I e J de $\mathscr{R}$ tem-se $IJ \neq (0)$.*

Demonstração. Seja $\mathscr{R}$ um anel graduado primo. Sejam I e J dois ideais à esquerda não nulos do $\mathscr{R}$. Pelo **Lema 1.27** $I\mathscr{R}$ e $J\mathscr{R}$ são ideais bilaterais graduados de $\mathscr{R}$. Pelo **Lema 1.17** $Ann({}_{\mathscr{R}}\mathscr{R})$ é um ideal bilateral graduado do $\mathscr{R}$. Observamos que $\forall r \in \mathscr{R}$ e

$\forall a \in Ann({}_{\mathscr{R}}\mathscr{R})$, $ra = 0$, logo $\mathscr{R}Ann({}_{\mathscr{R}}\mathscr{R}) = (0)$, e portanto $(Ann({}_{\mathscr{R}}\mathscr{R}))^2 = (0)$. Como $\mathscr{R}$ é um anel graduado primo, segue do Lema que $Ann({}_{\mathscr{R}}\mathscr{R}) = (0)$, pois caso contrário teríamos $(Ann({}_{\mathscr{R}}\mathscr{R}))^2 \neq (0)$. Como $Ann({}_{\mathscr{R}}\mathscr{R}) = (0)$ então $I\mathscr{R}$ e $J\mathscr{R}$ são ideais bilaterais graduados não nulos de $\mathscr{R}$. Como $\mathscr{R}$ é um anel graduado primo, $I\mathscr{R}J\mathscr{R} \neq (0)$. Logo, $I\mathscr{R}J \neq (0)$ e $(0) \neq I\mathscr{R}J \subseteq IJ$. Portanto, $IJ \neq (0)$.

Para a recíproca, observamos que todo ideal bilateral graduado é em particular um ideal à esquerda (ou à direita) graduado. ■

Definição 1.29. *Um anel $\mathscr{G}$-graduado $\mathscr{R}$ é dito semiprimo se $I^n = (0)$, para $n \geq 1$, implica $I = (0)$, para qualquer ideal bilateral graduado I de $\mathscr{R}$, ou seja, $\mathscr{R}$ não possui ideais bilaterais graduados nilpotentes não nulos.*

Análogo a **Proposição 1.8**, obtemos a seguinte preposição.

Proposição 1.30. *Um anel graduado $\mathscr{R}$ é graduado semiprimo se, e somente se, $\mathscr{R}$ não contém ideais à esquerda (ou à direita) graduados nilpotentes.*

Demonstração. Seja $\mathscr{R}$ um anel graduado semiprimo. Lembramos que $Ann({}_{\mathscr{R}}\mathscr{R})$ é um ideal bilateral graduado de $\mathscr{R}$ e $(Ann({}_{\mathscr{R}}\mathscr{R}))^2 = (0)$. Como $\mathscr{R}$ é graduado semiprimo, segue que $Ann({}_{\mathscr{R}}\mathscr{R}) = (0)$. Seja I um ideal à esquerda graduado não nulo de $\mathscr{R}$, então $I\mathscr{R}$ é um ideal bilateral graduado não nulo. Logo, $I^n\mathscr{R} \supset (I\mathscr{R})^n \neq (0)$, portanto $I^n \neq (0)$ para todo $n \geq 1$.

Para a recíproca é suficiente observar que todo ideal bilateral graduado é um ideal à esquerda graduado. ■

Definição 1.31. *Um anel $\mathscr{G}$-graduado $\mathscr{R}$ é dito primitivo à esquerda se existe um $\mathscr{R}$-módulo graduado à esquerda simples e fiel.*

Um anel graduado primitivo à direita é definido de forma análoga para $\mathscr{R}$-módulo graduado à direita.

A caracterização usual de um anel graduado primo $\mathscr{R}$ é dado pelo seguinte lema.

Lema 1.32. *Seja $\mathscr{R}$ um anel graduado. Então $\mathscr{R}$ é graduado primo se, e somente se, $a_\alpha \mathscr{R} b_\beta \neq \{0\}$ para todo $0 \neq a_\alpha \in \mathscr{R}_\alpha$, $b_\beta \in \mathscr{R}_\beta$ com $\alpha, \beta \in \mathscr{G}$.*

Demonstração. Sejam $\mathscr{R}$ um anel graduado primo, $0 \neq a_\alpha \in \mathscr{R}_\alpha$ e $0 \neq b_\beta \in \mathscr{R}_\beta$, $\alpha,\ \beta \in \mathscr{G}$. Pelo **Lema 1.27** $Ann({}_{\mathscr{R}}\mathscr{R}) = (0)$. Assim, $\mathscr{R}a_\alpha$ e $\mathscr{R}b_\beta$ são ideais à esquerda graduados não nulos de $\mathscr{R}$. Pelo **Lema 1.28** $\mathscr{R}a_\alpha\mathscr{R}b_\beta \neq (0)$. Portanto, $a_\alpha\mathscr{R}b_\beta \neq (0)$.

Reciprocamente, suponha que para quaisquer elementos não nulos $a_\alpha \in \mathscr{R}_\alpha$ e $b_\beta \in \mathscr{R}_\beta$ tenhamos $a_\alpha\mathscr{R}b_\beta \neq \{0\}$. Se I e J são ideais bilaterais graduados não nulos do $\mathscr{R}$, então existem elementos homogêneos não nulos $a_\alpha \in I_\alpha \subseteq \mathscr{R}_\alpha$ e $b_\beta \in J_\beta \subseteq \mathscr{R}_\beta$ para alguns $\alpha,\ \beta \in \mathscr{G}$. Logo, $(0) \neq a_\alpha\mathscr{R}b_\beta \subseteq I\mathscr{R}J \subseteq IJ$. Portanto, $IJ \neq \{0\}$. ■

Para anéis graduados semiprimos, obtemos um resultado similar ao anterior, cuja a demonstração não é difícil.

Lema 1.33. *Um anel $\mathscr{R}$ é graduado semiprimo se, somente se, $a_\alpha\mathscr{R}a_\alpha \neq (0)$ para qualquer elemento homogêneo não nulo $0 \neq a_\alpha \in \mathscr{R}_\alpha$ e todo $\alpha \in \mathscr{G}$.*

As relações entre anel graduado primitivo, anel graduado primo e anel graduado semiprimo são dadas pelos seguintes resultados.

Lema 1.34. *Seja $\mathscr{R}$ um anel graduado primitivo à esquerda, então $\mathscr{R}$ é graduado primo.*

Demonstração. Sejam I, J ideais bilaterais graduados não nulos de $\mathscr{R}$. Sendo $\mathscr{R}$ um anel graduado primitivo, então existe um $\mathscr{R}$-módulo à esquerda graduado irredutível e fiel $\mathscr{M}$. Sendo $\mathscr{M}$ fiel, $I\mathscr{M} \neq (0)$ e $J\mathscr{M} \neq (0)$, observamos que $I\mathscr{M}$ e $J\mathscr{M}$ são submódulos graduados do $\mathscr{M}$. Assim, pela irredutibilidade $\mathscr{M}$, segue que $I\mathscr{M} = J\mathscr{M} = \mathscr{M}$. Logo, $(0) \neq I\mathscr{M} = IJ\mathscr{M} = \mathscr{M}$. Logo, $IJ \neq (0)$, portanto, $\mathscr{R}$ é graduado primo. ■

Corolário 1.35. *Seja $\mathscr{R}$ um anel graduado primo, então $\mathscr{R}$ é semiprimo. Em particular, todo anel graduado primitivo é semiprimo.*

Demonstração. Seja I um ideal bilateral graduado não nulo de $\mathscr{R}$. Suponha por absurdo que existe $n \geq 1$ tal que $I^n = (0)$. Observe que $(0) = II^{n-1}$ como $I \neq (0)$ e $\mathscr{R}$ é primo, segue que $I^{n-1} = (0)$. Utilizando o mesmo argumento anterior, concluímos que $I = 0$, absurdo. Logo, $I^n \neq (0)$ e, portanto, $\mathscr{R}$ é um anel graduado primo. ■

1.7 Teorema da Densidade para Álgebras Graduadas

Comecemos por alguns resultados que são análogos aos resultados clássicos para anéis ($\mathbb{K}$-álgebras) não graduados. Primeiramente, começaremos com o seguinte lema.

Lema 1.36. *Sejam $\mathscr{R}$ um anel ($\mathbb{K}$-álgebra) graduado, $\mathscr{M}$ um $\mathscr{R}$-módulo à esquerda graduado e $\mathscr{D} = End_{\mathscr{R}}^{gr}(\mathscr{M})$ o anel dos $\mathscr{R}$-endomorfismos graduados de $\mathscr{M}$. Então $\mathscr{M}$ é um $\mathscr{D}$-módulo graduado à direita com ação $m \cdot f = (m)f$.*

Demonstração. Sejam $\mathscr{R}$ um anel graduado, $\mathscr{M}$ um $\mathscr{R}$-módulo à esquerda graduado e $\mathscr{D} = End_{\mathscr{R}}^{gr}(\mathscr{M})$. Então, $\forall m,\ n \in \mathscr{M}$, $\forall f, g \in \mathscr{D}$:

1. $m \cdot (fg) = ((m)f)g = (m \cdot f) \cdot g$.

2. $(m+n) \cdot f = (m+n)f = (m)f + (n)f = m \cdot f + n \cdot f$.

3. $m \cdot (f+g) = (m)(f+g) = (m)f + (m)g = m \cdot f + m \cdot g$.

4. $m \cdot 1_{\mathscr{D}} = (m)id_{\mathscr{M}} = m$.

Dados $f_\gamma \in \mathscr{D}_\gamma$ e $m_\beta \in \mathscr{M}_\beta$, temos $m_\beta \cdot f_\gamma = (m_\beta)f_\gamma \in \mathscr{M}_{\beta+\gamma}$. Portanto, $\mathscr{M}_\beta \cdot \mathscr{D}_\gamma \subseteq \mathscr{M}_{\beta+\gamma}$. ■

Lema 1.37. *Seja $\mathscr{R}$ um anel graduado. Sejam $\mathscr{M}$ um $\mathscr{R}$-módulo à esquerda graduado, f_β um isomorfismo de $\mathscr{R}$-módulos graduado, com grau $\beta \in \mathscr{G}$ e f' a sua inversa. Então f' é um isomorfismo graduado de grau $-\beta$.*

Demonstração. Como f_β é um isomorfismo de $\mathscr{R}$-módulos, então f' também é um isomorfismo de $\mathscr{R}$-módulos. Agora, dado $m_\alpha \in \mathscr{M}_\alpha$, pela bijeção f_β, existe $\tilde{m} \in \mathscr{M}$ tal que $m_\alpha = (\tilde{m})f_\beta$. Sendo $\mathscr{M}$ um $\mathscr{R}$-módulo graduado, temos $\tilde{m} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{m}_{\gamma_i}$, com $\tilde{m}_{\gamma_i} \in \mathscr{M}$, $\gamma_i \in \mathscr{G}$ para todo $1 \leq i \leq n$. Logo,

$$m_\alpha = (\tilde{m})f_\beta = (\sum_{i=1}^{n} \tilde{m}_{\gamma_i})f_\beta = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{m}_{\gamma_i})f_\beta = (\tilde{m}_{\gamma_1})f_\beta + \cdots + (\tilde{m}_{\gamma_n})f_\beta.$$

Comparando os graus dos elementos e pela unicidade do elemento inverso do grupo $\mathcal{G}$, concluímos que existe um l tal que

$$m_\alpha = (\tilde{m}_{\gamma_l})f_\beta$$

para algum $1 \leq l \leq n$. Observamos que $(\tilde{m}_{\gamma_l})f_\beta \in \mathcal{M}_{\gamma_l+\beta}$. Como $m_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$ e $m_\alpha = (\tilde{m}_{\gamma_l})f_\beta$, temos que

$$m_\alpha = (\tilde{m}_{\gamma_l})f_\beta \in \mathcal{M}_{\gamma_l+\beta} \cap \mathcal{M}_\alpha.$$

Teremos que verificar dois casos:

i. $(\tilde{m}_{\gamma_l})f_\beta = 0$;

ii. $(\tilde{m}_{\gamma_l})f_\beta \neq 0$.

No caso i., $(\tilde{m}_{\gamma_l})f_\beta = 0$ então $(\tilde{m}_{\gamma_l})f_\beta \in \mathcal{M}_\delta$, $\forall \delta \in \mathcal{G}$. Segue daí que $\tilde{m}_{\gamma_l} = 0$, pois f_β é um homomorfismo bijetivo.

No caso ii., $(\tilde{m}_{\gamma_l})f_\beta \neq 0$ então $\mathcal{M}_{\gamma_l+\beta} = \mathcal{M}_\alpha$, pois caso contrário teríamos $(\tilde{m}_{\gamma_l})f_\beta \in \mathcal{M}_{\gamma_l+\beta} \cap \mathcal{M}_\alpha = \{0\}$, uma contradição. Logo, $\mathcal{M}_{\gamma_l+\beta} = \mathcal{M}_\alpha$. Como $\mathcal{M}_{\gamma_l+\beta} = \mathcal{M}_\alpha$, segue que $\gamma_l + \beta = \alpha$, ou seja, $\gamma_l = \alpha - \beta$.

Em ambos os casos, concluímos que $\tilde{m}_{\gamma_l} \in \mathcal{M}_{\alpha-\beta}$, ou seja, $\tilde{m}_{\gamma_l} = \tilde{m}_{\alpha-\beta}$.

Logo, $(m_\alpha)f' = ((\tilde{m}_{\alpha-\beta})f_\beta)f' = (\tilde{m}_{\alpha-\beta})(f_\beta f') = (\tilde{m}_{\alpha-\beta})id_{\mathcal{M}} = \tilde{m}_{\alpha-\beta}$. Portanto, f' é um isomorfismo graduado de grau $-\beta$. ■

Definição 1.38. *Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{D}$ dois anéis $\mathcal{G}$-graduados. Dizemos que $\mathcal{M}$ é um $(\mathcal{R},\mathcal{D})$-bimódulo $\mathcal{G}$-graduado se $\mathcal{M}$ é um $\mathcal{R}$-módulo à esquerda $\mathcal{G}$-graduado e um $\mathcal{D}$-módulo à direita $\mathcal{G}$-graduado tal que*

$$(r_\alpha m_\beta)d_\tau = r_\alpha(m_\beta d_\gamma)$$

para quaisquer $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$, $d_\gamma \in \mathcal{D}_\tau$, $m_\beta \in \mathcal{M}_\beta$ e α, β, $\gamma \in \mathcal{G}$.

Observamos que dado um $\mathcal{R}$-módulo à esquerda graduado $\mathcal{M}$, então $\mathcal{M}$ é um $(\mathcal{R}, End_{\mathcal{R}}^{gr}(\mathcal{M}))$-bimódulo graduado.

Definição 1.39. *Sejam $\mathscr{D}$ um anel graduado de divisão, $\mathscr{R}$ um anel graduado e $\mathscr{M}$ um $(\mathscr{R},\mathscr{D})$-bimódulo graduado. Dizemos que $\mathscr{R}$ age densamente em $\mathscr{M}$ sobre $\mathscr{D}$ se para qualquer inteiro positivo n, quaisquer elementos homogêneos $v_\alpha^1, \cdots, v_\alpha^n \in \mathscr{M}_\alpha$ linearmente independentes sobre $\mathscr{D}_0$ e quaisquer $w_\beta^1, \cdots, w_\beta^n \in \mathscr{M}_\beta$, existe $r_{\beta-\alpha} \in \mathscr{R}_{\beta-\alpha}$ tal que $r_{\beta-\alpha} v_\alpha^i = w_\beta^i$.*

O seguinte lema já é conhecido na teoria anéis.

Lema 1.40 (Lema de Schur)**.** *Seja $\mathscr{R}$ anel ($\mathbb{K}$-álgebra) graduado. Suponha que $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ são dois $\mathscr{R}$-módulos à esquerda graduados irredutíveis e f_β um $\mathscr{R}$-homomorfismo homogêneo de grau β de $\mathscr{M}$ em $\mathscr{N}$, com $\beta \in \mathscr{G}$. Se $f_\beta \neq 0$ então f_β é inversível.*

Demonstração. Seja $0 \neq f_\beta$ um homomorfismo graduado de grau β de $\mathscr{M}$ em $\mathscr{N}$. Então a imagem de f_β, Imf_β, é um submódulo graduado de $\mathscr{N}$ não nulo. Pela irredutibilidade de $\mathscr{N}$, $Imf_\beta = \mathscr{N}$, logo f_β é sobrejetiva. O núcleo de f_β, $Ker f_\beta$, é um submódulo graduado propriamente contido em $\mathscr{M}$. Pela irredutibilidade de $\mathscr{M}$, segue que $Ker f_\beta = \{0\}$, logo f_β é injetiva. Logo, f_β é uma bijeção e, portanto, f_β é inversível. ∎

Utilizando o **Lema 1.40**, obtemos o seguinte resultado.

Lema 1.41 ([1], Lemma 2.4)**.** *Seja $\mathscr{R}$ um anel ($\mathbb{K}$-álgebra) graduado. Suponha que $\mathscr{V}$ é um $\mathscr{R}$-módulo à direita graduado irredutível. Então $\mathscr{D} = End_{\mathscr{R}}^{gr}(\mathscr{V})$ é um anel ($\mathbb{K}$-álgebra) graduado de divisão.*

Demonstração. Segue do **Lema 1.40** tomando $\mathscr{V} = \mathscr{M} = \mathscr{N}$. ∎

Teorema 1.42 ([1], Theorem 2.5)**.** *Seja $\mathscr{R}$ uma $\mathbb{K}$-álgebra graduada. Suponha que $\mathscr{V}$ seja um $\mathscr{R}$-módulo à esquerda graduado irredutível e seja $\mathscr{D} = End_{\mathscr{R}}^{gr}(\mathscr{V})$. Se $v_1, \cdots, v_n \in \mathscr{V}$ são elementos homogêneos linearmente independentes sobre $\mathscr{D}$, então para quaisquer $w_1, \cdots, w_n \in \mathscr{V}$, existe $r \in \mathscr{R}$ tal que $r v_i = w_i$ para todo $i = 1, \cdots, n$.*

1.8 Produto Tensorial de Álgebras

Definição 1.43 (Produto Tensorial)**.** *Sejam E e F dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, com bases $\{e_i | i \in I\}$ e $\{f_j | j \in J\}$, respectivamente. O **produto tensorial** de E e F denotado por $E \underset{\mathbb{K}}{\otimes} F$ é o espaço vetorial com base $\{e_i \otimes f_j\}$. Os elementos da forma $e \otimes f$ são chamados de tensores e satisfazem:*

1. $(e_1 + e_2) \otimes f = (e_1 \otimes f) + (e_2 \otimes f)$;

2. $e \otimes (f_1 + f_2) = (e \otimes f_1) + (e \otimes f_2)$;

3. $r(e \otimes f) = (re) \otimes f = e \otimes (rf)$,

para quaisquer $e_1, e_2, e \in E$, $f_1, f_2, f \in F$ e $r \in \mathbb{K}$.

Definição 1.44 (Produto tensorial de álgebras)**.** *Sejam $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ duas $\mathbb{K}$-álgebras. Consideremos o $\mathbb{K}$-espaço vetorial $\mathscr{A} \underset{\mathbb{K}}{\otimes} \mathscr{B}$ com o produto $\mathbb{K}$-bilinear definida por*

$$\begin{aligned}(\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}) \times (\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}) &\to \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \\ (a \otimes b, a' \otimes b') &\mapsto (a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb' \ a, a' \in \mathscr{A},\ b, b' \in \mathscr{B}.\end{aligned}$$

O espaço vetorial $\mathscr{A} \underset{\mathbb{K}}{\otimes} \mathscr{B}$, munido com esta multiplicação é uma $\mathbb{K}$-álgebra chamada de produto tensorial das álgebras $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$.

Sejam $\mathscr{G}$ e $\mathscr{H}$ dois grupos abelianos.

Lema 1.45. *Sejam $\mathscr{A} = \underset{g \in \mathscr{G}}{\oplus} \mathscr{A}_g$ e $\mathscr{B} = \underset{h \in \mathscr{H}}{\oplus} \mathscr{B}_h$ duas $\mathbb{K}$-álgebras associativas graduadas, $\mathscr{G}$-graduada e $\mathscr{H}$-graduada, respectivamente. Então $\mathscr{A} \underset{\mathbb{K}}{\otimes} \mathscr{B}$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa $\mathscr{G} \times \mathscr{H}$-graduada com sua componente homogênea de grau $(g, h) \in \mathscr{G} \times \mathscr{H}$ dada por:*

$$(\mathscr{A} \otimes \mathscr{B})_{(g,h)} := \mathscr{A}_g \otimes \mathscr{B}_h.$$

Demonstração. Veja [9]. ■

Exemplo 1.46. *Seja $\mathscr{A}$ uma $\mathbb{K}$-álgebra. A transformação linear*

$$\begin{aligned} \varphi : M_n(\mathbb{K}) \otimes \mathscr{A} &\to M_n(\mathscr{A}) \\ e_{ij} \otimes a &\mapsto ae_{ij} \end{aligned} \tag{1.7}$$

onde

$$ae_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i, j \leq n \text{ é um isomorfismo de álgebras.}$$

Observe que $\{ae_{ij} | 1 \leq i, j \leq n, a \in B\}$ é uma base para $M_n(\mathscr{A})$ como espaço vetorial, onde B é uma base de $\mathscr{A}$. A inversa de φ é:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : M_n(\mathscr{A}) &\to M_n(\mathbb{K}) \otimes \mathscr{A} \\ ae_{ij} &\mapsto e_{ij} \otimes a. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Portanto, $M_n(\mathbb{K}) \otimes \mathscr{A} \cong M_n(\mathscr{A})$.

De modo semelhante, podemos provar que se $\mathscr{A} = M_m(\mathbb{K})$ então $M_n(\mathbb{K}) \otimes M_m(\mathbb{K}) \cong M_n(M_m\mathbb{K}) \cong M_{nm}(\mathbb{K})$.

Capítulo 2

Álgebras Com Involuções e Superinvoluções

Neste capítulo, $\mathbb{K}$ representará um corpo de característica diferente de 2.

2.1 Superálgebras

Devemos salientar que a soma direta será representada por $+$ ou $\oplus$. Por exemplo uma $\mathbb{K}$-álgebra (anel) $\mathbb{Z}_2$-graduada $\mathscr{A}$ será representada como $\mathscr{A} = \mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_1$ ou $\mathscr{A} = \mathscr{A}_0 \oplus \mathscr{A}_1$.

Definição 2.1 (Variedade)**.** *Uma classe não vazia $\mathfrak{K}$ de álgebras é chamada de variedade se as seguintes condições são válidas:*

1. *Se $\mathscr{B} \in \mathfrak{K}$ e $\mathscr{B}'$ é uma subálgebra de $\mathscr{B}$ então $\mathscr{B}' \in \mathfrak{K}$.*

2. *Se $\mathscr{B} \in \mathfrak{K}$ e $\mathscr{B}'$ é uma imagem de um homomorfismo de $\mathscr{B}$, então $\mathscr{B}' \in \mathfrak{K}$.*

3. *Se $\mathscr{B}_i \in \mathfrak{K}$, para todo $i \in I$ então $\prod_{i\in I}\mathscr{B}_i \in \mathfrak{K}$.*

Observamos que uma variedade também pode ser definida como classe de álgebras que satisfazem algum conjunto de identidades polinomiais. Neste caso, nossa definição é uma consequência do teorema de Birkhoff, veja [2].

Dizemos que uma variedade é homogênea se ela é definida por identidades multi-homogêneas.

Exemplo 2.2. *Seja $\mathfrak{K}$ a classe de todas álgebras associativas, ou seja, se $\mathscr{A} \in \mathfrak{K}$ então $\forall x,\ y,\ z \in \mathscr{A}$ teremos $x(yz) = (xy)z$. Então $\mathfrak{K}$ é uma variedade homogênea.*

Definição 2.3 (Álgebra de Grassmann)**.** *Seja $\mathbb{K}\langle X\rangle$ a álgebra livre unitária de posto enumerável livremente gerada por $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$. Se I é o ideal bilateral de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto de polinômios $\{x_ix_j + x_jx_i | i, j \geq 1\}$, consideramos $G = \mathbb{K}\langle X\rangle / I$. G chama-se a $\mathbb{K}$-álgebra de Grassmann infinitamente gerada unitária. Se escrevemos $e_i = x_i + I$, para $i = 1, 2, \cdots$, obtemos $e_ie_j = (x_i + I)(x_j + I) = x_ix_j + I = x_ix_j - (x_ix_j + x_jx_i) + I = -x_jx_i + I = -(x_j + I)(x_i + I) = -e_je_i$, para todo $i, j \geq 1$. Então G tem a seguinte apresentação*

$$G = \langle 1, e_1, e_2, \cdots | e_ie_j = -e_je_i,\ \textit{para todo}\ i, j \geq 1\rangle.$$

Os elementos 1 e $e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_r}$, com $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$, formam uma $\mathbb{K}$-base da álgebra G, a prova desse fato pode ser encontrado em [2]. Sejam

$$G_0 = span_{\mathbb{K}}\left\{e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}} | 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k},\ k \geq 0\right\},$$
$$G_1 = span_{\mathbb{K}}\left\{e_{i_1}\cdots e_{i_{2k+1}}\ | 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k+1},\ k \geq 0\right\},$$

não é difícil provar que $G_0G_0 + G_1G_1 \subseteq G_0$ e $G_1G_0 + G_0G_1 \subseteq G_1$ e

$$G = G_0 \oplus G_1 \quad (G_0 \cap G_1 = (0)).$$

Logo, G é uma álgebra associativa $\mathbb{Z}_2$-graduada.

Definição 2.4 (Envelope de Grassmann)**.** *Sejam $\mathscr{A} = \mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_1$ uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa $\mathbb{Z}_2$-graduada e $G = G_0 + G_1$ a $\mathbb{K}$-álgebra de Grassmann infinitamente gerada. A subálgebra da álgebra $\mathscr{A} \otimes_{\mathbb{K}} G$*

$$G(\mathscr{A}) = (\mathscr{A}_0 \otimes_{\mathbb{K}} G_0) + (\mathscr{A}_1 \otimes_{\mathbb{K}} G_1)$$

é chamada de envelope de Grassmann de $\mathscr{A}$.

Observamos que $G(\mathscr{A})$ também é uma $\mathbb{K}$-álgebra (anel) associativa $\mathbb{Z}_2$-graduada com componentes homogêneas $G(\mathscr{A})_\alpha = \mathscr{A}_\alpha \otimes_{\mathbb{K}} G_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}_2$.

Exemplo 2.5. *Sejam G a álgebra de Grassmann e $M_n(\mathbb{K})$ a $\mathbb{K}$-álgebra de matrizes com entradas no corpo $\mathbb{K}$. A transformação linear*

$$\begin{aligned} \varphi : M_n(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} G &\to M_n(G) \\ e_{ij} \otimes g &\mapsto g e_{ij} \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde ge_{ij} é a matriz de $M_n(G)$ que tem g na entrada (ij) e zero nas demais, é um isomorfismo de $\mathbb{K}$ álgebras. Observamos que $\{ge_{ij} | 1 \leq i,\ j \leq n,\ g \in B\}$ é uma base para $M_n(G)$ como espaço vetorial, onde os elementos de B são $1 e e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_r}$, com $\quad i_1 < i_2 < \cdots < i_r$. Considere a transformação linear

$$\begin{aligned} \Phi : M_n(G) &\to M_n(\mathbb{K}) \otimes G \\ g e_{ij} &\mapsto e_{ij} \otimes g. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Temos que

1. $\varphi(\Phi(\sum_{i,j} g_{ij} e_{ij})) = \varphi(\sum_{i,j} e_{ij} \otimes g_{ij}) = \sum_{i,j} g_{ij} e_{ij}$.
2. $\Phi(\varphi(\sum_{i,j} e_{ij} \otimes g_{ij})) = \Phi(\sum_{i,j} g_{ij} e_{ij}) = \sum_{i,j} e_{ij} \otimes g_{ij}$.

Assim, $\varphi^{-1} = \Phi$ e, portanto, φ é bijetiva. Antes de mostrarmos que φ é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebra, observamos que para todos ge_{ij}, te_{sm} elementos da base de $M_n(G)$ temos:

$$g e_{ij} t e_{sm} = g t e_{ij} e_{sm} = \begin{cases} 0, & se\ j \neq s \\ g t e_{im}, & se\ j = s \end{cases}. \tag{2.3}$$

Como φ é linear, é suficiente verificar o homomorfismo para os elementos da base. Sejam $e_{ij}\otimes g,\ e_{sm}\otimes t \in M_n(\mathbb{K})\otimes G$. Então

$$\varphi((e_{ij}\otimes g)(e_{sm}\otimes t)) = \varphi(e_{ij}e_{sm}\otimes gt) = \begin{cases} \varphi(0\otimes gt), & se\ j\neq s \\ \varphi(e_{im}\otimes gt), & se\ j=s \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0, & se\ j\neq s \\ gte_{im}, & se\ j=s. \end{cases}$$

Se $j\neq s$, teremos

$$\varphi((e_{ij}\otimes g)(e_{sm}\otimes t)) = \varphi(0\otimes gt) = 0 = e_{ij}e_{sm}gt = (e_{ij}g)(e_{sm}t) = \varphi(e_{ij}\otimes g)\varphi(e_{sm}\otimes t).$$

Se $j=s$, obtém-se

$$\varphi((e_{ij}\otimes g)(e_{sm}\otimes t)) = \varphi(e_{im}\otimes gt) = gte_{im} = e_{ij}e_{sm}gt = (e_{ij}g)(e_{sm}t) = \varphi(e_{ij}\otimes g)\varphi(e_{sm}\otimes t).$$

Logo $M_n(\mathbb{K})\otimes_{\mathbb{K}} G \cong M_n(G)$. Considerando $M_n(\mathbb{K})$ como uma $\mathbb{K}$-graduada, concluímos que o envelope de Grassman de $M_n(\mathbb{K})$ é uma subálgebra de $M_n(G)$.

Agora, definiremos $\mathcal{V}$-superálgebras que é o tema central da dissertação.

Definição 2.6 (Superálgebra)**.** *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade homogênea de álgebras. Uma $\mathbb{K}$-álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $\mathscr{A} = \mathscr{A}_o + \mathscr{A}_1$ é uma $\mathcal{V}$-superálgebra se o envelope de Grassmann dela está contido em $\mathcal{V}$.*

Observamos que em geral, $\mathscr{A} \notin \mathcal{V}$. Por exemplo, uma Superálgebra de Lie não é uma álgebra de Lie, em geral. $\mathscr{A} = \mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_1$ é uma superálgebra de Lie se, e somente se, satisfaz

$$[a_\alpha,[b_\beta,c_\lambda]] = [[a_\alpha,b_\beta],c_\lambda] + (-1)^{\alpha\cdot\beta}[b_\beta,[a_\alpha,c_\lambda]] \text{(superidentidade de Jacobi);}$$
$$[x_\alpha,y_\beta] = -(-1)^{\alpha\cdot\beta}[y_\beta,x_\alpha] \text{(superanticomutatividade),}$$

$\forall a_\alpha, x_\alpha \in \mathscr{A}_\alpha,\ \forall b_\beta, y_\beta \in \mathscr{A}_\beta, \forall c_\gamma \in \mathscr{A}_\gamma\ \forall \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{Z}_2$.

Observamos que se $\mathscr{A}$ é uma superálgebra de Lie, então para todo $x_1, x_2 \in \mathscr{A}_1$ teremos

$$[x_1,x_2] = -1(-1)^{1\cdot 1}[x_2,x_1] = [x_2,x_1].$$

Proposição 2.7. *Seja $\mathscr{A}$ uma $\mathbb{K}$-álgebra (anel). Então o envelope de Grassmann $G(\mathscr{A})$ é associativo se, e somente se, $\mathscr{A}$ é associativa.*

Demonstração. Sejam $a, b, c \in \mathscr{A}$ e $g, h, f \in G$ então $a \otimes g, b \otimes h, c \otimes f \in G(\mathscr{A})$. Desde que $G(\mathscr{A})$ é associativo, temos

$$(ab)c \otimes ghf = ((ab \otimes gh))(c \otimes f) = ((a \otimes g)(b \otimes h))(c \otimes f) = (a \otimes g)((b \otimes h)(c \otimes f)) = a(bc) \otimes ghf.$$

Logo, $((ab)c - a(bc) \otimes ghf$. Tomando $g, h, f \in G$ tais que $ghf \neq 0$, obtemos $(ab)c - a(bc)$, ou seja, $(ab)c = a(bc)$.

Reciprocamente, suponha que $\mathscr{A}$ é associativa. Então $G(\mathscr{A}) = \mathscr{A}_0 \otimes G_0 + \mathscr{A}_1 \otimes G_1$ é associativo, pois a álgebra de Grassmann é associativa. ■

Usando Proposição **2.7**, podemos concluir que uma superálgebra associativa é, simplesmente, uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa $\mathbb{Z}_2$-graduada, em particular, um superanel associativo $\mathscr{R}$ é um anel associativo $\mathbb{Z}_2$-graduado.

Nessa dissertação vamos considerar superálgebras e superanéis associativos.

Seja $\mathscr{A} = \mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_1$ uma superálgebra. Então $\mathscr{A}$ é uma superálgebra supercomutativa se

$$a_\alpha b_\beta = (-1)^{\alpha\beta} b_\beta a_\alpha, \quad \forall a_\alpha \in \mathscr{A}_\alpha, \quad \forall b_\beta \in \mathscr{A}_\beta, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2.$$

Diremos neste caso que os elementos de $\mathscr{A}$ super-comutam. Observe que no caso em que $\mathscr{A}_1 = \{0\}$, teríamos a definição de álgebra comutativa.

Exemplo 2.8. *Seja $G = G_0 + G_1$ a álgebra de Grassmann, então G é uma superálgebra supercomutativa. Lembramos que*

$$G_0 = span_{\mathbb{K}} \left\{ e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}} | 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k}, \ k \geq 0 \right\},$$
$$G_1 = span_{\mathbb{K}} \left\{ e_{i_1} \cdots e_{i_{2k+1}} \ | 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k+1}, \ k \geq 0 \right\},$$

Logo, G_α é formado pela combinação de palavras elementos de comprimento

- *par se $\alpha = 0$;*

- *ímpar se* $\alpha = 1$.

Seja $e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{n-1}}e_{i_n}$*, com* $n > 1$*. Como* $e_ie_j = -e_je_i$ *segue que*

$$\begin{aligned}
(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{n-1}}e_{i_n})e_j &= (e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{n-1}})(e_{i_n}e_j)\\
&= (e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{n-1}})(-e_je_{i_n})\\
&= -(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{n-1}}e_j)e_{i_n}\\
&= -(-(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_j)(e_{i_{n-1}}e_{i_n}))\\
&\ \ \vdots\\
&= (-1)^n e_j(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{n-1}}e_{i_n}). \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Seja $e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_{m-1}}e_{j_m}$*, com* $m > 1$*. Logo,*

$$\begin{aligned}
(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{n-1}}e_{i_n})(e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_{m-1}}e_{j_m}) &= ((e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{n-1}}e_{i_n})e_{j_1})(e_{j_2}\cdots e_{j_{m-1}}e_{j_m})\\
&\underset{=}{(2.4)}((-1)^n e_{j_1}(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{n-1}}e_{i_n})(e_{j_2}\cdots e_{j_{m-1}}e_{j_m})\\
&\ \ \vdots\\
&\underset{=}{\star}(-1)^{nm}(e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_{m-1}}e_{j_m})(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{n-1}}e_{i_n}),
\end{aligned}$$

obtemos $\star$ *aplicando (2.4)* $m-1$*-vezes. Observamos que se n é par então*

$$(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{n-1}}e_{i_n})(e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_{m-1}}e_{j_m}) = (e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_{m-1}}e_{j_m})(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{n-1}}e_{i_n}).$$

Portanto, G_0 *está contido no centro de* G*.*

Sejam $w = \sum_{\#\{i\}<\infty} c_{(i)}e_{i_1}\cdots e_{i_{2m}} \in G_0$ *e* $w' = \sum_{\#\{i'\}<\infty} c_{(i')}e_{i'_1}\cdots e_{i'_{2m'+1}}$*,* $w'' = \sum_{\#\{i''\}<\infty} c_{(i'')}e_{i''_1}\cdots e_{i''_{2m''+1}} \in G_1$*. Então*

i.

$$\begin{aligned}
ww' &= (\sum_{\#\{i\}<\infty} c_{(i)}e_{i_1}\cdots e_{i_{2m}})(\sum_{\#\{i'\}<\infty} c_{(i')}e_{i'_1}\cdots e_{i'_{2m'+1}})\\
&= \sum_{\#\{i\},\#\{i'\}<\infty} c_{(i)}c_{(i')}e_{i_1}\cdots e_{i_{2m}}e_{i'_1}\cdots e_{i'_{2m'+1}}\\
&= (\sum_{\#\{i'\}<\infty} c_{(i')}e_{i'_1}\cdots e_{i'_{2m'+1}})(\sum_{\#\{i\}<\infty} c_{(i)}e_{i_1}\cdots e_{i_{2m}}) = w'w = (-1)^{0\cdot 1}w'w.
\end{aligned}$$

ii. Segue das observações acima que

$$(e_{i'_1}\cdots e_{i'_{2m'+1}})(e_{i''_1}\cdots e_{i''_{2m''+1}}) \quad = -e_{i''_1}\cdots e_{i''_{2m''+1}} e_{i'_1}\cdots e_{i'_{2m'+1}}.$$

Logo, $w'w'' = -w''w' = (-1)^{1\cdot 1}w''w'$.

Portanto,

$$w_\alpha w_\beta = (-1)^{\alpha\beta} w_\beta w_\alpha,\ \forall w_\alpha \in G_\alpha,\ \forall w_\beta \in G_\beta,\ \forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{Z}_2.$$

Exemplo 2.9. *A álgebra de matrizes* $M_{p,q}(\mathscr{D})$*, onde* $\mathscr{D}$ *é uma álgebra associativa de divisão, é uma superálgebra associativa, onde a* $\mathbb{Z}_2$*-graduação é definida como segue. Seja*

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\alpha_{p+1},\cdots,\alpha_{p+q}) \in \mathbb{Z}_2^{p+q},$$

onde $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p$ *e* $\alpha_p \neq \alpha_{p+s}$ $\forall 1 \leq s \leq q$*. Sabemos que* $M_{p,q}(\mathscr{D}) = \bigoplus_{\beta\in\mathbb{Z}_2} A_\beta$*, onde* A_β *é o subespaço gerado por* $< e_{ij} | \alpha_j - \alpha_i = \beta >$*. Observamos que* $deg\ e_{ij} = \alpha_j - \alpha_i$*, logo*

$$deg\ e_{ij} = \begin{cases} 0, & se\ 1 \leq i, j \leq p\ ou\ p+1 \leq i, j \leq p+q, \\ 1, & se \begin{cases} 1 \leq i \leq p\ e\ p+1 \leq j \leq p+q \\ ou \\ 1 \leq j \leq p\ e\ p+1 \leq i \leq p+q. \end{cases} \end{cases}$$

Portanto,

$$A_0 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|ccc} \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hspace{5cm}}^{p}} & & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,p} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{p+1,p+1} & \cdots & a_{p+1,p+q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{p+q,p+1} & \cdots & a_{p+q,p+q} \end{array} \right) \\ \begin{array}{cccc|ccc} & & & & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hspace{5cm}}_{q}} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{array}}\right\} p \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ \vdots \\ a \end{array}}\right\} q \end{array} \quad | a_{i,j} \in \mathscr{D} \right\},$$

$$A_1 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|ccc} & & & & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hspace{4cm}}^{q}} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,p+1} & \cdots & a_{1,p+q} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2,p+1} & \cdots & a_{2,p+q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{p,p+1} & \cdots & a_{p,p+q} \\ \hline a_{p+1,1} & a_{p+1,2} & \cdots & a_{p+1,p} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p+q,1} & a_{p+q,2} & \cdots & a_{p+q,p} & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) \\ \begin{array}{cccc|ccc} \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\hspace{5cm}}_{p}} & & & \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{array}}\right\} p \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ \vdots \\ a \end{array}}\right\} q \end{array} \quad | a_{i,j} \in \mathscr{D} \right\}.$$

Escolhendo $(\alpha_1, \cdots, \alpha_q, \alpha_{q+1}, \cdots, \alpha_{q+p}) \in \mathbb{Z}_2^{q+p}$*, onde* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_q$ *e* $\alpha_q \neq \alpha_{q+s}$ $\forall 1 \leq s \leq p$*, obteremos*

$$A_0 = \left(\begin{array}{c|c} M_q(\mathscr{D}) & M_{q\times p}(0) \\ \hline M_{p\times q}(0) & M_p(\mathscr{D}) \end{array} \right), \ A_1 = \left(\begin{array}{c|c} M_q(0) & M_{q\times p}(\mathscr{D}) \\ \hline M_{p\times q}(\mathscr{D}) & M_p(0) \end{array} \right), \quad \textit{onde } M_{p\times q}(0) \textit{ é a matriz nula.}$$

Essa graduação é conhecida como **graduação elementar** *de* $M_{p,q}(\mathscr{D})$.

2.2 Involuções e Superinvoluções

Nesta seção, estudaremo o conceito de superinvolução. Nosso objetivo será definir superinvolução, entretanto, daremos a definição de involução e alguns exemplos. Caso o leitor esteja interessado em aprofundar o conhecimento sobre involução, consulte o livro [14].

Definição 2.10. *Seja $\mathscr{A}$ uma $\mathbb{K}$-álgebra. Uma função $\mathbb{K}$-linear $*: \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ é uma involução de $\mathscr{A}$, se satisfaz:*

1. $a^{**} = a$;

2. $(ab)^* = b^* a^*$,

para quaisquer $a,\ b \in \mathscr{A}$.

Exemplo 2.11. *Seja $M_k(\mathbb{K})$ a $\mathbb{K}$-álgebra de matrizes $k \times k$ sobre $\mathbb{K}$. Para uma matriz $A = (a_{ij}) \in M_k(\mathbb{K})$ seja $A^t = (a_{ji})$ a matriz transposta. Então $* = t$ é uma involução de $M_k(\mathbb{K})$, chamada involução transposta.*

Exemplo 2.12. *A aplicação $s: M_{2n}(\mathbb{K}) \to M_{2n}(\mathbb{K})$, definida por*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{pmatrix},$$

onde $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{K})$, é uma involução, chamada de involução simplética.

Exemplo 2.13. *Dado uma $\mathbb{K}$-álgebra $\mathscr{A}$ denote $\mathscr{A}^{op}$ a $\mathbb{K}$-álgebra oposta de $\mathscr{A}$. A álgebra $\mathscr{A} \times \mathscr{A}^{op}$ tem uma involução $*$, dada por:*

$$\begin{aligned} *: \mathscr{A} \times \mathscr{A}^{op} &\to \mathscr{A} \times \mathscr{A}^{op} \\ (a,b) &\longmapsto (b,a). \end{aligned}$$

Essa involução chama-se involução de troca.

Definição 2.14 (Superinvolução)**.** *Uma superinvolução de uma superálgebra $\mathscr{A} = \mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_1$ é uma transformação linear de grau zero $* : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ tal que*

$$a^{**} = a \quad e \quad (a_\alpha b_\beta)^* = (-1)^{\alpha\beta} b_\beta^* a_\alpha^*,\ \forall a_\alpha \in \mathscr{A}_\alpha,\ \forall b_\beta \in \mathscr{A}_\beta,\ \forall a \in \mathscr{A},\ \forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{Z}_2.$$

No caso em que $\mathscr{A}$ é um superanel, uma superinvolução é uma função $* : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ aditiva graduada de grau zero que satisfaz

$$a^{**} = a \quad \text{e} \quad (a_\alpha b_\beta)^* = (-1)^{\alpha\beta} b_\beta^* a_\alpha^*,\ \forall a \in \mathscr{A},\ \forall a_\alpha \in \mathscr{A}_\alpha,\ b_\beta \in \mathscr{A}_\beta,\ \forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{Z}.$$

Definição 2.15. *Seja $\mathscr{A}$ uma superálgebra (superanel). Considere a nova superálgebra (superanel) $\mathscr{A}^{sop}$ com mesma estrutura de espaço vetorial (grupo aditivo) $\mathbb{Z}_2$-graduado como em $\mathscr{A}$, mas o produto de $\mathscr{A}^{sop}$ é dada por*

$$x_\alpha \underset{sop}{\circ} x_\beta = (-1)^{\alpha\beta} x_\beta x_\alpha,\ \forall x_\alpha \in \mathscr{A}_\alpha,\ \forall x_\beta \in \mathscr{A}_\beta,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{Z}_2.$$

Chamamos essa superálgebra (superanel) de superálgebra super-oposta (super-oposto).

Logo, para todo $x = x_0 + x_1,\ y = y_0 + y_1 \in \mathscr{A}^{sop}$ obtemos

$$\begin{aligned} x \underset{sop}{\circ} y &= (x_0 + x_1) \underset{sop}{\circ} (y_0 + y_1) \\ &= x_0 \underset{sop}{\circ} (y_0 + y_1) + x_1 \underset{sop}{\circ} (y_0 + y_1) \\ &= x_0 \underset{sop}{\circ} y_0 + x_0 \underset{sop}{\circ} y_1 + x_1 \underset{sop}{\circ} y_0 + x_1 \underset{sop}{\circ} y_1 \\ &= y_0 x_0 + y_1 x_0 + y_0 x_1 - y_1 x_1. \end{aligned}$$

Seja $\mathscr{B} = \mathscr{A} \oplus \mathscr{A}^{sop}$ a soma direta das superálgebras (superanéis) $\mathscr{A}$ e $\mathscr{A}^{sop}$. Isto é uma superálgebra (superanel), onde a graduação do $\mathscr{B}$ é dada por

$$\mathscr{B}_0 = \mathscr{A}_0 \oplus \mathscr{A}_0^{sop},\ \mathscr{B}_1 = \mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{A}_1^{sop}.$$

Denotamos um elemento arbitrário x do $\mathscr{B}$ como um par de elementos de $\mathscr{A}$, isto é, $x = (a, b)$, onde $a, b \in \mathscr{A}$. O produto em $\mathscr{B}$ é dado por

$$(a_0 + a_1, b_0 + b_1)(a_0^{'} + a'_1, b'_0 + b'_1) = (a_0 a'_0 + a_0 a'_1 + a_1 a'_0 + a_1 a'_1, b'_0 b_0 - b'_1 b_1 + b'_0 b_1 + b'_1 b_0).$$

Lema 2.16. *Sejam $\mathscr{A}^{sop}$ a superálgebra oposta da superálgebra $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B} = \mathscr{A} \oplus \mathscr{A}^{sop}$. Então*

$$\begin{aligned} * : \mathscr{B} &\to \mathscr{B} \\ (x, y) &\mapsto (y, x) \end{aligned}$$

é uma superinvolução.

Demonstração. Não é difícil provar que $*$ está bem definida e é uma função linear. Sejam $x_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha$ e $x_\beta \in \mathscr{B}_\beta$. Então existem a_α, $b_\alpha \in \mathscr{A}_\alpha$ e a_β, $b_\beta \in \mathscr{A}_\beta$, com α, $\beta \in \mathbb{Z}_2$ tais que $x_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha)$, $x_\beta = (a_\beta, b_\beta)$. Portanto, $x_\alpha^* = (b_\alpha, a_\alpha)$, $x_\beta^* = (b_\beta, a_\beta)$. Logo, $x_\alpha^{**} = (b_\alpha, a_\alpha)^* = (a_\alpha, b\alpha) = x_\alpha$ e

$$\begin{aligned} (x_\alpha x_\beta)^* &= ((a_\alpha, b_\alpha)(a_\beta, b_\beta))^* \\ &= (a_\alpha a_\beta, (-1)^{\alpha\beta} b_\beta b_\alpha)^* \\ &= (-1)^{\alpha\beta}(b_\beta b_\alpha, (-1)^{\alpha\beta} a_\alpha a_\beta) \\ &= (-1)^{\alpha\beta}(b_\beta, a_\beta)(b_\alpha, a_\alpha) \\ &= (-1)^{\alpha\beta} x_\beta^* x_\alpha^*. \end{aligned} \tag{2.5}$$

■

O lema acima, continua sendo válido para superanéis.

Note que uma superinvolução $* : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ restrita à $\mathscr{A}_0$ é uma involução. Observamos ainda que dado uma álgebra associativa $\mathscr{A}$, podemos considera-lá como uma superálgebra com graduação trivial, logo uma superinvolução em $\mathscr{A}$ é simplesmente uma involução, neste caso. Finalizaremos está seção com o seguinte lema, cuja a demonstração não é difícil.

Lema 2.17. *Seja $*$ uma involução graduada de uma superálgebra (ou superanel) associativa $\mathscr{A}$. Então a função $\tilde{*}$ dada por $(a_\alpha \otimes g_\alpha)^{\tilde{*}} = (a_\alpha^* \otimes g_\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_2$, é uma superinvolução no envolvente de Grassmann.*

2.3 Supermódulos

A partir de agora, assumiremos que $\alpha, \gamma, \delta, \beta \in \mathbb{Z}_2$ e que qualquer equação envolvendo os índices é válido para todas as escolhas possíveis. Vale lembra que uma superálgebra (superanel) é uma álgebra (anel) associativa $\mathbb{Z}_2$-graduada.

Alguns destes resultados, podem ser encontrados nos livros [9] e [12]. Nesta seção, $\mathscr{R}$ representará um superanel associativo e $\mathscr{D}$ um superanel de divisão associativo.

Definição 2.18 (Supermódulo)**.** *Um $\mathscr{R}$-supermódulo à direita $\mathscr{M}$ é um $\mathscr{R}$-módulo à direita $\mathbb{Z}_2$-graduado.*

De maneira semelhante, podemos definir supermódulos à esquerda. Segue que todas as observações feitas para módulo graduado, valem para supermódulo (veja as preliminares). Notemos que $\mathscr{R}$ pode ser considerado como um $\mathscr{R}$-supermódulo à direita.

Dizemos que um subconjunto $\mathscr{N}$ não-vazio de $\mathscr{M}$ é um sub-supermódulo de $\mathscr{M}$ se $\mathscr{N}$ é submódulo graduado de $\mathscr{M}$.

Definição 2.19. *Seja $\mathscr{R}$ um superanel. Dizemos que um subconjunto não vazio I de $\mathscr{R}$ é um superideal à direita, se I é ideal à direita graduado do $\mathscr{R}$.*

Analogamente, podemos definir superideal à esquerda. Diremos que I é um superideal quando for um superideal à direita e à esquerda, ou seja, um ideal bilateral graduado.

Seja $\mathscr{M}$ um $\mathscr{R}$-supermódulo à direita. O anulador de um $\mathscr{R}$-supermódulo $\mathscr{M}$, $Ann_{\mathscr{R}}(\mathscr{M}) = \{r \in \mathscr{R} | mr = 0, \ \forall m \in \mathscr{M}\}$, é um ideal graduado bilateral do $\mathscr{R}$, logo um superideal. Observemos que um superideal I é um sub-supermódulo do $\mathscr{R}$-supermódulo $\mathscr{R}$.

Exemplo 2.20. *Considere a álgebra de grupo $\mathbb{K}\mathbb{Z}_2$, então $\mathbb{K}\mathbb{Z}_2$ é um $\mathbb{K}\mathbb{Z}_2$-supermódulo.*

Dado um $\mathscr{R}$-supermódulo à direita $\mathscr{M}$, seja $End(\mathscr{M}) = End(\mathscr{M}_{\mathscr{R}})$, o anel dos $\mathscr{R}$-endomorfismos de $\mathscr{M}$. Sabemos que $End^{gr}(\mathscr{M})$ é um anel associativo $\mathbb{Z}_2$-graduado, logo $End^{gr}(\mathscr{M})$ é um superanel. Como $\mathbb{Z}_2$ é um grupo finito, segue que $End(\mathscr{M})$ é um superanel, pois neste caso, $End(\mathscr{M}) = End^{gr}(\mathscr{M})$.

Para as próximas secções, precisaremos da seguinte definição.

Definição 2.21. *Um superespaço à direita (ou esquerda) sobre um superanel (superálgebra) associativo de divisão $\mathscr{D} = \mathscr{D}_0 + \mathscr{D}_1$ é um $\mathscr{D}$-supermódulo à direita (esquerda) $\mathscr{V} = \mathscr{V}_0 \oplus \mathscr{V}_1$.*

Note que se $\mathscr{V}$ é um $\mathscr{D}$-superespaço à direita (esquerda), então toda componente homogênea $\mathscr{V}_\beta$ é $\mathscr{D}_0$-espaço vetorial à direita (esquerda), pois $\mathscr{D}_0$ é um anel de divisão e $\mathscr{V}_\beta$ é um $\mathscr{D}_0$-módulo à direita (esquerda).

Para qualquer $\mathscr{D}$-supermódulo à direita (esquerda) $\mathscr{V}$ e qualquer $\gamma \in \mathbb{Z}_2$, definimos

$$\mathscr{V}(\gamma) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}_2} \mathscr{V}_{\gamma+\alpha},$$

isto é, $\mathscr{V}(\gamma)$ é o $\mathscr{D}$-supermódulo $\mathscr{V}$ com componentes homogêneas dada por $\mathscr{V}(\gamma)_\alpha = \mathscr{V}_{\gamma+\alpha}$. Quando, $\mathscr{V}$ é um $\mathscr{D}$-supermódulo finitamente gerado, temos que $Hom_{\mathscr{D}}(\mathscr{V}(\gamma), \mathscr{V}(\delta)) = End_{\mathscr{D}}(\mathscr{V})(\gamma - \delta)$, $\forall \gamma, \delta \in \mathbb{Z}_2$, veja o lema [[12], Proposition 2.8].

Exemplo 2.22. *Sejam n um número inteiro positivo e $(\delta_1, \cdots, \delta_n) \in \mathbb{Z}_2^n$. Seja*

$$T = M_n(\mathscr{D})(\delta_1, \cdots, \delta_n)$$

o anel de matrizes $n \times n$ com entradas no superanel (superálgebra) $\mathscr{D}$,

$$M_n(\mathscr{D})(\delta_1, \cdots, \delta_n) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathscr{D} & \mathscr{D}(\delta_1 - \delta_2) & \cdots & \mathscr{D}(\delta_1 - \delta_n) \\ \mathscr{D}(\delta_2 - \delta_1) & \mathscr{D} & \cdots & \mathscr{D}(\delta_2 - \delta_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathscr{D}(\delta_n - \delta_1) & \mathscr{D}(\delta_n - \delta_1) & \cdots & \mathscr{D} \end{pmatrix} \right\}.$$

Com a seguinte graduação. Para qualquer $\gamma \in \mathbb{Z}_2$ a componente de grau γ é

$$T_\gamma = \begin{pmatrix} \mathscr{D}_\gamma & \mathscr{D}_{\gamma+\delta_1-\delta_2} & \cdots & \mathscr{D}_{\gamma+\delta_1-\delta_n} \\ \mathscr{D}_{\gamma+\delta_2-\delta_1} & \mathscr{D}_\gamma & \cdots & \mathscr{D}_{\gamma+\delta_2-\delta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathscr{D}_{\gamma+\delta_n-\delta_1} & \mathscr{D}_{\gamma+\delta_n-\delta_2} & \cdots & \mathscr{D}_\gamma \end{pmatrix}.$$

Uma vez que $\mathscr{D} = \underset{\gamma\in\mathbb{Z}_2}{\oplus}\mathscr{D}(\delta)_\gamma$, *temos* $T = \underset{\gamma\in\mathbb{Z}_2}{\oplus} T_\gamma$. *Além disso, se* $A = (a_{ij}) \in T_\gamma$ *e* $B = (b_{ij}) \in T_\alpha$, *então cada* $a_{ij} \in \mathscr{D}_{\gamma+\delta_i-\delta_j}$ *e* $b_{jk} \in \mathscr{D}_{\alpha+\delta_j-\delta_k}$, *assim* $a_{ij}b_{jk} \in \mathscr{D}_{\gamma+\delta_i+\alpha-\delta_k} = \mathscr{D}(\delta_i-\delta_k)_{\gamma+\alpha}$. *Logo,* $AB \in T_{\gamma+\alpha}$, $\forall A \in T_\gamma$, $\forall B \in T_\alpha$ *e, portanto,* T *é um superanel.*

Proposição 2.23. *Sejam* $\mathscr{D}$ *um superanel (superálgebra) associativo de divisão,* $\mathscr{V}$ *um superespaço à direita sobre* $\mathscr{D}$ *e* $E = End_{\mathscr{D}}(\mathscr{V})$. *Se* $\mathscr{V}$ *é finitamente gerado então para todo* $(\delta_1,\cdots,\delta_n) \in \mathbb{Z}_2^n$,

$$End_{\mathscr{D}}(\mathscr{V}(\delta_1)\oplus\cdots\oplus\mathscr{V}(\delta_n)) \cong M_n(E)(\delta_1,\cdots,\delta_n),$$

é um isomorfismo de superanéis.

Demonstração. Em primeiro lugar, observemos que $\mathscr{V} = \mathscr{V}(\delta_i)$ como espaços vetoriais, a graduação é diferente, para todo $1 \le i \le n$. Denotemos $\mathscr{V}(\delta_1)\oplus\cdots\oplus\mathscr{V}(\delta_n) := \bigoplus_{i=1}^{n}\mathscr{V}(\delta_i)$,

$$H = \begin{pmatrix} Hom_{\mathscr{D}}\big(\mathscr{V}(\delta_1),\mathscr{V}(\delta_1)\big) & Hom_{\mathscr{D}}\big(\mathscr{V}(\delta_2),\mathscr{V}(\delta_1)\big) & \cdots & Hom_{\mathscr{D}}\big(\mathscr{V}(\delta_n),\mathscr{V}(\delta_1)\big) \\ Hom_{\mathscr{D}}\big(\mathscr{V}(\delta_1),\mathscr{V}(\delta_2)\big) & Hom_{\mathscr{D}}\big(\mathscr{V}(\delta_2),\mathscr{V}(\delta_2)\big) & \cdots & Hom_{\mathscr{D}}\big(\mathscr{V}(\delta_n),\mathscr{V}(\delta_2)\big) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Hom_{\mathscr{D}}\big(\mathscr{V}(\delta_1),\mathscr{V}(\delta_n)\big) & Hom_{\mathscr{D}}\big(\mathscr{V}(\delta_2),\mathscr{V}(\delta_n)\big) & \cdots & Hom_{\mathscr{D}}\big(\mathscr{V}(\delta_n),\mathscr{V}(\delta_n)\big) \end{pmatrix}$$

e definimos os $\mathscr{D}$-homomorfismos seguintes:

$$\begin{aligned} e_i : \mathscr{V}(\delta_i) &\to \bigoplus_{i=1}^{n}\mathscr{V}(\delta_i) \\ v &\mapsto \underset{\text{i-ésima posição}}{(0,\cdots,0,v,0,\cdots,0)} \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \pi_j : \bigoplus_{i=1}^{n}\mathscr{V}(\delta_i) &\to \mathscr{V}(\delta_j) \\ v = (v_1,\cdots,v_{j-1},v_j,v_{j+1},\cdots,v_n) &\mapsto v_j. \end{aligned}$$

Note-se que $\sum_{i=1}^{n}\pi_i\circ e_j$ é a aplicação identidade de $\bigoplus_{i=1}^{n}\mathscr{V}(\delta_i)$, porque

$$(v_1,\cdots,v_n)(\sum_{i=1}^{n}\pi_i\circ e_i) = \sum_{i=1}^{n}(0,\cdots,0,v_i,0,\cdots,0). \tag{2.6}$$

Além disso, $e_i\circ\pi_j = \begin{cases} id_{\mathscr{V}(\delta_i)}, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$, porque $\forall\, v \in \mathscr{V}(\delta_i)$

$$(v)(e_i\circ\pi_j) = (0,\cdots,0,v_i,0,\cdots,0)\pi_j = \begin{cases} v, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}. \tag{2.7}$$

Definimos a função

$$\varphi : End_{\mathscr{D}}(\mathcal{V}(\delta_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}(\delta_n)) \to H$$
$$f \mapsto \varphi(f) = (e_i \circ f \circ \pi_j)_{i,j},$$

isto é, dado um homomorfismo $f \in End_{\mathscr{D}}\big(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{V}(\delta_i)\big)$ definimos $f_{i,j} = e_i \circ f \circ \pi_j$ (que são $\mathscr{D}$-homomorfismos de $Hom_{\mathscr{D}}(\mathcal{V}(\delta_i), \mathcal{V}(\delta_j))$ e construímos a matriz $n \times n$ de homomorfismos de $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{V}(\delta_i)$,

$$\begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,n} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n,1} & f_{n,2} & \cdots & f_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Facilmente, vê-se que φ é um homomorfismo de superanéis, $f, g \in End_{\mathscr{D}}(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{V}(\delta_i))$

- $\varphi(f+g) = (e_i \circ (f+g) \circ \pi_j)_{i,j} = ((e_i \circ f + e_i \circ g)\pi_j)_{i,j} = (e_i \circ f \circ \pi_j + e_i \circ g \circ \pi_j)_{i,j} = (e_i \circ f \circ \pi_j)_{i,j} + (e_i \circ g \circ \pi_j)_{i,j} = \varphi(f) + \varphi(g)$.

- $\varphi(f)\varphi(g) = (e_i \circ f \circ \pi_j)_{i,j}(e_i \circ g \circ \pi_j)_{i,j} = (\sum_{k=1}^{n}(e_i \circ f \circ \pi_k) \circ (e_k \circ g \circ \pi_j))_{i,j} = ((e_i \circ f \circ \sum_{k=1}^{n}(\pi_k \circ e_k) \circ (g \circ \pi_j))_{i,j} = ((e_i \circ (f \circ g) \circ \pi_j))_{i,j} = \varphi(fg)$.

- $\varphi(id_{\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{V}(\delta_i)}) = (e_i \circ id_{\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{V}(\delta_i)} \circ \pi_j)_{i,j} = (e_i \circ \pi_j)_{i,j} = id_{M_n(E)}$.

Por outro lado, definimos a aplicação

$$\psi : H \to End_{\mathscr{D}}(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{V}(\delta_i))$$
$$(f_{i,j})_{i,j} \mapsto \psi((f_{i,j})_{i,j}) = \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i \circ f_{i,j} \circ e_j$$

que está bem definida, porque a composição e soma de homomorfismos é um homomorfismo.

Dado $f \in End_{\mathscr{D}}(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathscr{V}(\delta_i))$, por (2.6) f temos que

$$\psi(\varphi(f)) = \psi((e_i \circ f \circ \pi_j)_{i,j}) = \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i \circ (e_i \circ f \circ \pi_j) \circ e_j = f$$

e dada $A = (f_{i,j})_{i,j} \in H$ temos que

$$\begin{aligned}\varphi(\psi((f_{i,j})_{i,j})) &= \varphi\left(\sum_{i,j=1}^{n} \pi_i \circ f_{i,j} \circ e_j\right) = \left(e_k \circ \left(\sum_{i,j=1}^{n} \pi_i \circ f_{i,j} \circ e_j\right) \circ \pi_l\right)_{k,l} \\ &=^{*} \left(\sum_{i=1}^{n} (e_k \circ \pi_i) \circ f_{i,j} \circ \sum_{j=1}^{n} (e_j \circ \pi_l)\right)_{k,l} = (f_{k,l})_{k,l} \quad, *\text{por } (2.7).\end{aligned}$$

Logo, φ e ψ são inversos e φ é isomorfismo de anéis. Portanto, $End_{\mathscr{D}}(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathscr{V}(\delta_i)) \cong H$, observe φ é um isomorfismo de anéis que é compatível com a graduação. Como $\mathscr{V}$ é finitamente gerado, segue que na entrada ij, temos

$$Hom_{\mathscr{D}}(\mathscr{V}(\delta_j), \mathscr{V}(\delta_i)) \cong (End_{\mathscr{D}}(\mathscr{V}))(\delta_i - \delta_j)$$

que é a entrada ij de $M_n(E)(\delta_1, \cdots, \delta_n)$. Portanto, $End_{\mathscr{D}}(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathscr{V}(\delta_i)) \cong M_n(E)(\delta_1, \cdots, \delta_n)$. ■

Sejam $\dim_{\mathscr{D}_0} \mathscr{V}_0 = p$ e $\dim_{\mathscr{D}_0} \mathscr{V}_1 = q$. Se $p + q < \infty$ então $\mathscr{V} = \mathscr{V}_0 \oplus \mathscr{V}_1$ tem dimensão finita sobre $\mathscr{D}_0$. A prova desse fato pode ser encontrada em [[12], Proposition 2.8].

Lema 2.24. *Todo superespaço sobre um superanel de divisão $\mathscr{D}$ é isomorfo a uma soma direta de superespaços 1-dimensionais $\mathscr{D}(\gamma)$.*

Demonstração. Veja [**[12] Corollary 2.10**]. ■

2.3.1 Super-centralizador

Sejam $\mathscr{R}$ um superanel e $\mathscr{M}$ um $\mathscr{R}$-supermódulo. Definimos $E(\mathscr{M}) := \{f : \mathscr{M} \to \mathscr{M} | (m+n)f = (m)f + (n)f,\ \forall m,\ n \in \mathscr{M}\}$ o conjunto dos endomorfismos do grupo aditivo do $\mathscr{M}$.

Não é difícil provar que $E(\mathscr{M})$ é um anel associativo com as operações $+, \circ$ definidas por

$$(m)(f+g) := (m)f + (m)g \text{ e } (m)(f\circ g) := ((m)f)g \text{ (soma e composição).}$$

Observamos que o conjunto de todos os $\mathscr{R}$-endomorfismos do $\mathscr{M}$ $(End(\mathscr{M}_{\mathscr{R}}))$ está contido em $E(\mathscr{M})$. Quando $\mathscr{M}$ é um $\mathscr{R}$-supermódulo fiel, temos que $\mathscr{R}$ é um subanel de $E(\mathscr{M})$. A demonstração do seguinte lema não é difícil.

Lema 2.25. *Para cada $\gamma \in \mathbb{Z}_2$, seja $E(\mathscr{M})_\gamma = \{f_\gamma \in E(\mathscr{M}) | (m_\alpha) f_\gamma \in \mathscr{M}_{\gamma+\alpha}, \forall m_\alpha \in \mathscr{M}_\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_2\}$. Então $E^{gr}(\mathscr{M}) := \bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}_2} E(\mathscr{M})_\gamma$ é um superanel.*

Dado um anel $\mathbb{Z}_2$-graduado associativo $\mathscr{A}$ e, seja $\mathscr{A}^{op}$ o seu anel oposto. Observamos que $\mathscr{A}^{op}$ é um superanel e $\forall (a_\alpha \otimes g_\alpha) \in \mathscr{A}_\alpha \otimes G_\alpha$ e $\forall (a_\beta \otimes g_\beta) \in \mathscr{A}_\beta \otimes G_\beta$,

$$\begin{aligned}
(a_\alpha \circ_{op} a_\beta) \otimes g_\alpha g_\beta &= a_\beta a_\alpha \otimes g_\alpha g_\beta \\
&= (-1)^{\alpha\beta}(a_\beta a_\alpha \otimes g_\beta g_\alpha) \\
&= (-1)^{\alpha\beta}(a_\beta \otimes g_\beta)(a_\alpha \otimes g_\alpha) \\
&= (a_\alpha \otimes g_\alpha) \underset{sop}{\circ} (a_\beta \otimes g_\beta),
\end{aligned}$$

ou seja, calcular $a_\alpha \circ_{op} a_\beta$ em $\mathscr{A}^{op}$ é equivalente calcular $(a_\alpha \otimes g_\alpha) \underset{sop}{\circ} (a_\beta \otimes g_\beta)$ em $G(\mathscr{A})^{sop}$. Em vista disso, faz-se necessário definir o super-centralizador.

Definição 2.26. *Sejam $\mathscr{R}$ um superanel e $\mathscr{M}$ um $\mathscr{R}$-supermódulo. Definimos o super-centralizador do $\mathscr{R}$ em $\mathscr{M}$ como sendo*

$$\mathscr{C} = \mathscr{C}_0 + \mathscr{C}_1, \;\; onde\, \mathscr{C}_\gamma = \{c_\gamma \in E(\mathscr{M})_\gamma | c_\gamma r_\alpha = (-1)^{\alpha\gamma} r_\alpha c_\gamma, \forall r_\alpha \in \mathscr{R}_\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}_2\}.$$

Assim, os elementos de $\mathscr{C}$ super-comutam com os de $\mathscr{R}$ agindo em $\mathscr{M}$.

Observamos que o super-centralizador de $\mathscr{R}$ em $\mathscr{M}$ é um superanel, chamado de superanel super-comutativo de $\mathscr{R}$ em $\mathscr{M}$. Notamos que $End(\mathscr{M}_{\mathscr{R}})_0$ está contido em $\mathscr{C}_0 \subseteq \mathscr{C}$, pois $c_0 r_\alpha = r_\alpha c_0 = (-1)^{0\alpha} r_\alpha c_0$, $\forall r_\alpha \in \mathscr{R}_\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_2$, $c_0 \in End(\mathscr{M}_{\mathscr{R}})_0$.

Lema 2.27. *Sejam $\mathscr{M}$ um $\mathscr{R}$-supermódulo e $c_\beta \in \mathscr{C}_\beta$. Então $(\mathscr{M})c_\beta = Im(c_\beta)$ e $Ker(c_\beta) := \{m \in \mathscr{M} | (m)c_\beta = 0\}$ são sub-supermódulos de $\mathscr{M}$.*

Demonstração. Provemos que $Im(c_\beta)$ é um sub-supermódulo de $\mathscr{M}$, a prova de que $Ker(c_\beta)$ é um sub-supermódulo de $\mathscr{M}$ segue de forma análoga.

Começamos a observar que $(\mathscr{M})c_\beta \neq \emptyset$, pois $0 \in (\mathscr{M})c_\beta$. Como c_β é endomorfismo do grupo aditivo do $\mathscr{M}$ então Imc_β e $Ker c_\beta$ são subgrupos do $\mathscr{M}$. Sejam $m_\alpha \in (\mathscr{M})c_\beta$ e $r_\delta \in \mathscr{R}_\delta$, então existe $\tilde{m}_{\alpha-\beta} \in \mathscr{M}_{\alpha-\beta}$ tal que $m_{\alpha-\beta}c_\beta = m_\alpha$. Logo,

- $m_\alpha r_\delta = (\tilde{m}_{\alpha-\beta})c_\beta r_\delta = (\tilde{m}_{\alpha-\beta}(-1)^{\delta\beta} r_\delta)c_\beta$.

Portanto, $m_\alpha r_\delta \in (\mathscr{M})c_\beta$. E por definição $Im(\mathscr{C}_\beta)$ é submódulo graduado do $\mathscr{M}$. ∎

Lema 2.28. *Sejam $c_\beta \in \mathscr{C}_\beta$ uma bijeção e f a sua inversa. Então $f \in \mathscr{C}_{-\beta}$.*

Demonstração. Seja f a inversa de c_β. Dados $m, n \in \mathscr{M}$ então exitem $a, b \in \mathscr{M}$ tais que $(a)c_\beta = m$ e $(b)c_\beta = n$, logo $(m+n)f = ((a)c_\beta + (b)c_\beta)f = ((a+b)c_\beta)f = a+b = (m)f + (n)f$ e, portanto, $f \in E(\mathscr{M})$. Note que dado $m_\alpha \in \mathscr{M}_\alpha$, existe $\tilde{m}_{\alpha-\beta} \in \mathscr{M}_{\alpha-\beta}$ tal que $(\tilde{m}_{\alpha-\beta})c_\beta = m_\alpha$. Logo, $(m_\alpha)f = (\tilde{m}_{\alpha-\beta})c_\beta f = \tilde{m}_{\alpha-\beta}$ e, portanto, $f = (c_\beta)^{-1} \in E(\mathscr{M})_{-\beta}$. Observemos que para todo $r_\delta \in \mathscr{R}_\delta$ temos $c_\beta r_\delta = (-1)^{\delta\beta} r_\delta c_\beta$, consequentemente, $(c_\beta)^{-1} r_\delta = (-1)^{-\delta\beta} r_\delta (c_\beta)^{-1}$, ou seja, $(c_\beta)^{-1} \in \mathscr{C}_{\beta^{-1}} = \mathscr{C}_\beta$. ∎

2.3.2 Supermódulos Irredutíveis

Definição 2.29. *Um $\mathscr{R}$-supermódulo à direita $\mathscr{M}$ é irredutível se $\mathscr{M}\mathscr{R} \neq \{0\}$ e $\mathscr{M}$ não tem sub-supermódulo próprio, ou seja, não existe um sub-supermódulo de $\mathscr{M}$ tal que $\{0\} \neq \mathscr{N} \subsetneq \mathscr{M}$.*

É importante observar que um $\mathscr{R}$-supermódulo irredutível $\mathscr{M}$ não é necessariamente um $\mathscr{R}$-módulo irredutível. A irredutibilidade, refere-se a sub-supermódulos do $\mathscr{M}$.

O próximo lema será importante para os próximos resultados.

Lema 2.30. *Sejam $\mathscr{M}$ um $\mathscr{R}$-supermódulo irredutível e $f_\beta \in \mathscr{C}_\beta$. Se $f_\beta \neq 0$ então f_β é inversível.*

Demonstração. Seja $0 \neq f_\beta \in \mathscr{C}_\beta$. Segue do lema 2.27 que $Im(f_\beta)$ é um sub-supermódulo de $\mathscr{M}$ não nulo. Pela irredutibilidade de $\mathscr{M}$, $Im(f_\beta) = \mathscr{M}$, logo f_β é sobrejetiva. Pelo lema 2.27 $Ker f_\beta$ é um submódulo graduado propriamente contido em $\mathscr{M}$. Pela irredutibilidade de $\mathscr{M}$, segue que $Ker f_\beta = \{0\}$, logo f_β é injetiva. Portanto, f_β é uma bijeção. ■

Corolário 2.31. *Sejam $\mathscr{R}$ um superanel e $\mathscr{M}$ um $\mathscr{R}$-supermódulo irredutível. Então o superanel comutativo $\mathscr{C}$ de $\mathscr{R}$ em $\mathscr{M}$ é um superanel de divisão.*

Demonstração. Seja $0 \neq c_\beta \in \mathscr{C}_\beta$. Pelo **Lema** 2.30, c_β é inversível em $\mathscr{C}$, e por 2.28, o inverso de c_β pertence a $\mathscr{C}_{-\beta}$. Portanto, $\mathscr{C}$ é um superanel de divisão. ■

2.4 Teorema da Densidade para Superanéis

Para todos os efeitos, consideraremos α, $\beta \in \mathbb{Z}_2$. Sejam $\mathscr{D} = \mathscr{D}_0 + \mathscr{D}_1$ um superanel e $\mathscr{M} = \mathscr{M}_0 + \mathscr{M}_1$ um $\mathscr{D}$-supermódulo à esquerda. Então $\mathscr{M}_\alpha$ e $\mathscr{M}_\beta$ são $\mathscr{D}_0$-módulos à esquerda. Consideremos $Hom_{\mathscr{D}_0}(\mathscr{M}_\alpha, \mathscr{M}_\beta)$ o conjunto de $\mathscr{D}_0$-homomorfismos de $\mathscr{M}_\alpha$ em $\mathscr{M}_\beta$. Se a adição for definida de maneira usual, então $(Hom_{\mathscr{D}_0}(\mathscr{M}_\alpha, \mathscr{M}_\beta), +)$ é um grupo abeliano. Agora, introduzimos as seguintes notações.

Seja S um subconjunto não vazio de $Hom_{\mathscr{D}_0}(\mathscr{M}_\alpha, \mathscr{M}_\beta)$, definimos

$$S^\perp = \{x \in \mathscr{M}_\alpha | xS = \{0\}\}. \tag{2.8}$$

Similarmente, se T é um subconjunto de $\mathscr{M}_\alpha$ não vazio, então definimos

$$T^\perp = \{l \in Hom_{\mathscr{D}_0}(\mathscr{M}_\alpha, \mathscr{M}_\beta) | Tl = \{0\}\}.$$

Lema 2.32. *Sejam $\mathscr{M} = \mathscr{M}_0 + \mathscr{M}_1$ um $\mathscr{D} = \mathscr{D}_0 + \mathscr{D}_1$-supermódulos à esquerda e $S \subseteq Hom_{\mathscr{D}_0}(\mathscr{M}_\alpha, \mathscr{M}_\beta)$ um subconjunto. Então $S^\perp$ é um $\mathscr{D}_0$-submódulo de $\mathscr{M}_\alpha$.*

Demonstração. Seja $S \subseteq Hom_{\mathscr{D}_0}(\mathscr{M}_\alpha, \mathscr{M}_\beta)$. Observemos primeiro que $S^\perp \neq \emptyset$, pois $0 \in \mathscr{M}_\alpha$ e $\forall f \in S \subseteq Hom_{\mathscr{D}_0}(\mathscr{M}_\alpha, \mathscr{M}_\beta)$ temos $0f = 0$. Logo, $0S = \{0\}$, ou seja, $0 \in S^\perp$. Sejam $x, y \in S^\perp$, $r \in \mathscr{D}_0$, então $xS = \{0\}$ e $yS = \{0\}$. Logo, para todo $f \in S$

i. $(x-y)f = xf - yf = 0 - 0 = 0$;

ii. $(rx)f = r(xf) = r0 = 0$,

portanto, segue de $i.$, $ii.$ que $x-y$, $rx \in S^\perp$. ■

O seguinte resultado será importante para demonstrar o teorema da densidade.

Lema 2.33. *Sejam $\mathscr{D} = \mathscr{D}_0 + \mathscr{D}_1$ um superanel e $\mathscr{M} = \mathscr{M}_0 + \mathscr{M}_1$ um $\mathscr{D}$-supermódulo. Seja $U = End_{\mathscr{D}_0}(\mathscr{M}_\beta)$ o anel de $\mathscr{D}_0$-endomorfismos de $\mathscr{M}_\beta$ e B um subgrupo aditivo de $Hom_{\mathscr{D}_0}(\mathscr{M}_\alpha, \mathscr{M}_\beta)$ tal que $BU \subseteq B$ e $\alpha, \beta = 0, 1$. Suponha que qualquer homomorfismo de qualquer U-submódulo de $\mathscr{M}_\beta$ no U-módulo $\mathscr{M}_\beta$ pode ser realizado por um elemento de $\mathscr{D}_0$. Então para qualquer subconjunto finito $\{u_i | i = 1, \cdots, n\}$ de $\mathscr{M}_\alpha$*

$$B^\perp + \sum_{i=1}^{n} \mathscr{D}_0 u_i = (\cap_1^n u_i^\perp \cap B)^\perp. \tag{2.9}$$

Demonstração. Primeiro, provemos para $n = 1$. Escreva u no lugar de u_1. É claro que $(B^\perp + \mathscr{D}_0 u)(u^\perp \cap B) = \{0\}$. Portanto, $(B^\perp + \mathscr{D}_0 u) \subseteq (u^\perp \cap B)^\perp$. Provemos que $(u^\perp \cap B)^\perp \subseteq (B^\perp + \mathscr{D}_0 u)$. Se $v \in (u^\perp \cap B)^\perp$ e $b \in u^\perp \cap B$, então $vb = 0$. Consequentemente, $ub \to vb$, $b \in B$ é um mapeamento de único valor de $uB \subseteq \mathscr{M}_\beta$ em $\mathscr{M}_\beta$. Como, $BU \subseteq U$, uB é um U-submódulo de $\mathscr{M}_\beta$. Além disso, o mapeamento é um homomorfismo de uB no U-módulo $\mathscr{M}_\beta$. Daí existe um $r_0 \in \mathscr{D}_0$ tal que $r_0(ub) = vb$ para todo $b \in B$. Assim, $(v - r_0 u)b = 0$, ou seja, $v - r_0 u \in B^\perp$. Portanto, $v \in B^\perp + \mathscr{D}_0 u$. Isto prova o caso para $n = 1$ do lema. Suponha que

$$B^\perp + \sum_{j=1}^{n-1} \mathscr{D}_0 u_j = (\cap_{j=1}^{n-1} u_j^\perp \cap B)^\perp. \tag{2.10}$$

Consideremos $B' = \cap_{j=1}^{n-1} u_j^\perp \cap B$. Então B' é um subgrupo de B e $B'U \subseteq B'$. Consequentemente, pelo caso $n = 1$,

$$B'^\perp + \mathscr{D}_0 u_n = (u_n^\perp \cap B')^\perp. \tag{2.11}$$

Como $u_n^{\perp} \cap B' = \cap_{i=1}^{n} u_i^{\perp} \cap B$ e por 2.10,

$$\begin{aligned}
(\cap_{i=1}^{n} u_i^{\perp} \cap B)^{\perp} &= B'^{\perp} + \mathscr{D}_0 u_n \\
&= (\cap_{i=1}^{n-1} u_i^{\perp} \cap B)^{\perp} + \mathscr{D}_0 u_n \\
&= B^{\perp} + \sum_{j=1}^{n-1} \mathscr{D}_0 u_j + \mathscr{D}_0 u_n = B^{\perp} + \sum_{j=1}^{n} \mathscr{D}_0 u_j.
\end{aligned}$$

■

Definição 2.34. *Seja $\mathscr{M}$ um $\mathscr{R}$-supermódulo, onde $\mathscr{R}$ é um superanel. Definimos o anel comutativo de $\mathscr{R}_0$ em $\mathscr{M}_\alpha$ como*

$$\mathscr{D} = \{d \in E(\mathscr{M}_\alpha) | d r_0 = r_0 d,\ \forall r_0 \in \mathscr{R}_0\} = End_{\mathscr{R}_0}(\mathscr{M}_\alpha),\ onde$$
$$E(\mathscr{M}_\alpha) := \{d : \mathscr{M}_\alpha \to \mathscr{M}_\alpha | (m+n)d = (m)d + (n)d, \forall m, n \in \mathscr{M}_\alpha\}.$$

Teorema 2.35. *Sejam $\mathscr{D}$ um superanel de divisão e $\mathscr{M} = \mathscr{M}_0 + \mathscr{M}_1$ um $\mathscr{D}$-supermódulo à esquerda. Sejam U o anel de $\mathscr{D}_0$-transformações lineares de $\mathscr{M}_\beta$ sobre si e B um subgrupo aditivo de $Hom_{\mathscr{D}_0}(\mathscr{M}_\alpha, \mathscr{M}_\beta)$ tal que $BU \subseteq B$. Suponha que*

i *$\mathscr{M}_\beta$ é um U-módulo irredutível;*

ii *O centralizador de $\mathscr{M}_\beta$ é $\mathscr{D}_0$.*

Sejam $\{x_1, \cdots, x_n\}$ um conjunto finito de vetores em $\mathscr{M}_\alpha$ que é linearmente independente módulo $\mathscr{D}_0$-subespaço $B^{\perp}$ no sentido que as classes $\overline{x}_1 = x_1 + B^{\perp}, \cdots, \overline{x}_n = x_n + B^{\perp}$ são linearmente independentes no espaço quociente $\overline{\mathscr{M}}_\alpha = \mathscr{M}_\alpha - B^{\perp}$. Sejam $y_1, \cdots, y_n$ arbitrários em $\mathscr{M}_\beta$. Então existem um $b \in B$ tal que

$$x_i b = y_i, \quad i = 1, \cdots, n.$$

Demonstração. Sejam $\mathscr{D}$ um superanel de divisão e $\mathscr{M} = \mathscr{M}_0 + \mathscr{M}_1$ um $\mathscr{D}$-supermódulo à esquerda. Então $\mathscr{M}_\alpha$ e $\mathscr{M}_\beta$ são $\mathscr{D}_0$ espaços vetoriais. Logo, teremos exatamente as mesmas hipóteses do Teorema 1 [[8], p. 28]. ■

Os seguintes lemas serão importantes para demonstrar o teorema da densidade para superanéis.

Lema 2.36. *Sejam $\mathscr{R} = \mathscr{R}_0 + \mathscr{R}_1$ um superanel e $\mathscr{M} = \mathscr{M}_0 + \mathscr{M}_1$ um $\mathscr{R}$-supermódulo à direita irredutível.*

1. *Se $\mathscr{M}_\alpha \neq \{0\}$ então $\mathscr{M}_\alpha$ é um $\mathscr{R}_0$-módulo irredutível e para todo $m_\alpha \in \mathscr{M}_\alpha$ não nulo, $m_\alpha \mathscr{R}_\beta = \mathscr{M}_{\alpha+\beta}$.*

2. *Se $\mathscr{M}_0 \neq \{0\}$ e $\mathscr{M}_1 \neq \{0\}$ então o anel comutativo de $\mathscr{R}_0$ em $\mathscr{M}_\alpha$ pode ser identificado com $\mathscr{C}_0$, a parte par do superanel comutativo $\mathscr{C}$ de $\mathscr{R}$ em $\mathscr{M}$.*

Demonstração.

1. Observando mais uma vez que $\mathscr{R}_0$ é um anel. Se $\mathscr{N}_\alpha$ é um $\mathscr{R}_0$-submódulo de $\mathscr{M}_\alpha$ não nulo, então $\mathscr{N}_\alpha + \mathscr{N}_\alpha \mathscr{R}_1$ é um sub-supermódulo não nulo de $\mathscr{M}$, onde $\mathscr{N}_\alpha \mathscr{R}_1 = \{b \in \mathscr{M}_{\alpha+1} | b = \sum_{finito} b_{i\alpha} r_i,\ b_{i\alpha} \in \mathscr{N}_\alpha,\ r_i \in \mathscr{R}_1\}$. Portanto, $\mathscr{N}_\alpha + \mathscr{N}_\alpha \mathscr{R}_1 = \mathscr{M}$. Logo por comparação dos graus, $\mathscr{N}_\alpha = \mathscr{M}_\alpha$ e $\mathscr{M}_\alpha$ é $\mathscr{R}_0$-módulo irredutível.
   Agora, se $m_\alpha \mathscr{R}_0 = \{0\}$ para algum $0 \neq m_\alpha \in \mathscr{M}_\alpha$, seja $\mathscr{N}_\alpha = \{n_\alpha \in \mathscr{M}_\alpha | n_\alpha \mathscr{R}_0 = \{0\}\}$. Logo, $\mathscr{N}_\alpha$ é um $\mathscr{R}_0$-submódulo de $\mathscr{M}_\alpha$ não nulo, pois $0 \neq m_\alpha \in \mathscr{N}_\alpha$, concluímos que $\mathscr{N}_\alpha = \mathscr{M}_\alpha$ ($\mathscr{M}_\alpha$ é um $\mathscr{R}_0$-módulo irredutível). Portanto, $\mathscr{M}_\alpha \mathscr{R}_0 = \{0\}$. Se $\mathscr{M}_\alpha \mathscr{R}_1 = \{0\}$ então $\mathscr{M}_\alpha \mathscr{R} = \{0\}$ e $\mathscr{M}_\alpha$ é um sub-supermódulo próprio de $\mathscr{M}$. Portanto, $\mathscr{M}_\alpha \mathscr{R}_1 \neq \{0\}$. Entretanto, $\mathscr{M}_\alpha \mathscr{R}$ é um sub-supermódulo próprio de $\mathscr{M}$. Logo, se $m_\alpha \neq 0$ então $m_\alpha \mathscr{R}_0 \neq \{0\}$ e $m_\alpha \mathscr{R}_0 = \mathscr{M}_\alpha$. Também, $m_\alpha \mathscr{R}_1 \supseteq m_\alpha \mathscr{R}_0 \mathscr{R}_1$ é um $\mathscr{R}_0$-submódulo de $\mathscr{M}_{\alpha+1}$. Se $\mathscr{M}_\alpha \mathscr{R}_1 = \{0\}$, enquanto $\mathscr{M}_{\alpha+1} \neq \{0\}$ então $\mathscr{M}_\alpha$ é um sub-supermódulo próprio de $\mathscr{M}$, uma contradição. Consequentemente, $m_\alpha \mathscr{R}_1 = \mathscr{M}_\alpha \mathscr{R}_1 = \mathscr{M}_{\alpha+1}$.

2. Consideramos $\mathscr{M}_\alpha$ como $\mathscr{R}_0$-módulo. Seja $\mathscr{D}$ o anel comutativo de $\mathscr{R}_0$ em $\mathscr{M}_\alpha$. Então para todo $d \in \mathscr{D}$, $r_0 \in \mathscr{R}_0$, e $m_\alpha \in \mathscr{M}_\alpha$, temos

$$(m_\alpha r_0) d = (m_\alpha d) r_0.$$

Dado $d \in \mathscr{D}$, vamos estender essa ação para $\mathscr{M}$. Fixado $m_\alpha \in \mathscr{M}_\alpha$ não nulo, temos $m_\alpha \mathscr{R}_1 = \mathscr{M}_{\alpha+1}$, defina uma ação de $\mathscr{D}$ em $\mathscr{M}_{\alpha+1}$ por

$$(m_\alpha r_1)d := (m_\alpha d)r_1 \text{ para todo } d \in \mathscr{D},\ r_1 \in \mathscr{R}_1. \tag{2.12}$$

Note que $(m_\alpha r_1)d \in \mathscr{M}_{\alpha+1}$. Vamos mostrar que a ação está bem definida, isto é, se $m_\alpha r_1 = 0$ então $n_{\alpha+1} = (m_\alpha d)r_1 = 0$, onde $n_{\alpha+1} \in \mathscr{M}_{\alpha+1}$ com $\alpha + 1 \in \mathbb{Z}_2$. Se $n_{\alpha+1} \neq 0$ então $n_{\alpha+1}\mathscr{R}_1 = \mathscr{M}_\alpha$ (parte 1 do Lema 2.36), logo $m_\alpha = n_{\alpha+1}s_1$ para algum $s_1 \in \mathscr{R}_1$. Portanto,

$$m_\alpha = n_{\alpha+1}s_1 = ((m_\alpha)dr_1)s_1 = (m_\alpha)d(r_1s_1) = ((m_\alpha)(r_1s_1))d = ((m_\alpha r_1)s_1)d = (0)d = 0,$$

uma contradição (m_α é fixo e diferente de zero). Do jeito análogo podemos provar que d comuta com todos os elementos $s_1 \in \mathscr{R}_1$ em $\mathscr{M}_{\alpha+1}$. Por (2.12), d comuta com todos os elementos de $\mathscr{R}_1$ em $\mathscr{M}_\alpha$. Para todo $n_{\alpha+1} \in \mathscr{M}_{\alpha+1}$ temos que existe $r_1 \in \mathscr{R}_1$ tal que $n_{\alpha+1} = m_\alpha r_1$. Logo, para todos $r_0 \in \mathscr{R}_0$, $r_1 \in \mathscr{R}_1$, e $d \in \mathscr{D}$

$$(n_{\alpha+1})dr_0 = (m_\alpha r_1)dr_0 = (m_\alpha)d(r_1r_0) = (m_\alpha r_1r_0)d = (m_\alpha r_1)(r_0d) = (n_{\alpha+1}r_0)d,$$

logo, d comuta com $\mathscr{R}_0$ em $\mathscr{M}_{\alpha+1}$. Portanto, todo elemento de $\mathscr{D}$ pode ser estendido à um único elemento de $\mathscr{C}_0$. Assim, podemos identificar $\mathscr{D}$ com $\mathscr{C}_0$.

■

Note que para superanéis, $\mathbb{K}$-superálgebras e supermódulos é suficiente definir a operação de multiplicação apenas nos elementos homogêneos.

Definição 2.37. *Sejam $\mathscr{R}$ e $\mathscr{R}'$ superanéis. Dizemos que $\mathscr{M}$ é um $(\mathscr{R},\mathscr{R}')$-super-bimódulo se $\mathscr{M}$ é um $\mathscr{R}'$-supermódulo à direita e $\mathscr{R}$-supermódulo à esquerda tal que*

$$(r_\alpha m_\beta)r'_\gamma = r_\alpha(m_\beta r'_\gamma),$$

para quaisquer $r_\alpha \in \mathscr{R}$, $m_\beta \in \mathscr{M}$, $r'_\gamma \in \mathscr{R}'$ e α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}_2$.

Lema 2.38. *Sejam $\mathscr{R}$ um superanel associativo, $\mathscr{M}$ um $\mathscr{R}$-supermódulo à direita e $\mathscr{D} = \mathscr{C}^{sop}$ o superanel super-oposto do superanel comutativo de $\mathscr{R}$ em $\mathscr{M}$. Então $\mathscr{M}$ é um $\mathscr{D}$-supermódulo à esquerda com ação definida por*

$$c \cdot m := c_0 \cdot m_0 + c_0 \cdot m_1 + c_1 \cdot m_0 + c_1 \cdot m_1,\ \forall m = m_0 + m_1 \in \mathscr{M} \ e\ c = c_0 + c_1 \in \mathscr{C},$$

onde

$$c_\gamma \cdot m_\alpha := (-1)^{\gamma\alpha} m_\alpha c_\gamma. \tag{2.13}$$

.

Demonstração. Sejam $m_\alpha, m'_\alpha \in \mathscr{M}_\alpha$, $m'_\beta \in \mathscr{M}_\beta$, $d_\gamma \in \mathscr{D}_\gamma$, $d_\beta \in \mathscr{D}_\beta$.

1. $(d_\gamma \underset{sop}{\circ} d_\beta) \cdot m_\alpha = (-1)^{\alpha(\gamma+\beta)} m_\alpha (d_\gamma \underset{sop}{\circ} d_\beta) = (-1)^{\alpha(\gamma+\beta)}(-1)^{\gamma\beta} m_\alpha (d_\beta d_\gamma)$
   $= ((-1)^{\alpha(\gamma+\beta)}(-1)^{\gamma\beta} m_\alpha d_\beta) d_\gamma = ((-1)^{\alpha(\gamma+\beta)}(-1)^{\gamma\beta}(-1)^{\alpha\beta}(d_\beta \cdot m_\alpha)) d_\gamma$
   $= (-1)^{\alpha(\gamma+\beta)}(-1)^{\gamma\beta}(-1)^{\alpha\beta}(-1)^{\gamma(\alpha+\beta)} d_\gamma \cdot (d_\beta \cdot m_\alpha) = d_\gamma \cdot (d_\beta \cdot m_\alpha)$;

2. $d_\gamma \cdot (m_\alpha + m'_\beta) = d_\gamma \cdot m_\alpha + d_\gamma \cdot m'_\beta$;

3. $(d_\gamma + d'_\gamma) \cdot m_\alpha = (-1)^{\alpha\gamma}(m_\alpha d_\gamma + m_\alpha d'_\gamma) = d_\gamma \cdot m_\alpha + d'_\gamma \cdot m_\alpha$;

4. $1_{\mathscr{D}} \cdot m_\alpha = (-1)^{\alpha 0} m_\alpha 1_{\mathscr{D}} = m_\alpha$, onde $1_{\mathscr{D}}$ é a identidade de $\mathscr{D}$.

Temos que $\mathscr{M} = \mathscr{M}_0 + \mathscr{M}_1$ e

$$d_\gamma m_\alpha = (-1)^{\gamma\alpha} m_\alpha d_\gamma \in \mathscr{M}_{\gamma+\alpha}, \quad \forall m_\alpha \in \mathscr{M}_\alpha \text{ e } \forall d_\gamma \in \mathscr{D}_\gamma. \tag{2.14}$$

Portando, $\mathscr{M}$ é um $\mathscr{D}$-supermódulo. ■

Definição 2.39. *Dizemos que um superanel $\mathscr{R}$ é primitivo à direita se $\mathscr{R}$ tem um supermódulo à direita fiel e irredutível.*

Se $\mathscr{M} = \mathscr{M}_0 + \mathscr{M}_1$ é um $\mathscr{R}$-supermódulo à direita irredutível, então pelo Lema 2.38 $\mathscr{M}$ é um $\mathscr{C}^{sop}$-supermódulo à esquerda. Portanto, $\mathscr{M}$ é um $(\mathscr{C}^{sop}, \mathscr{R})$-super-bimódulo.

Definição 2.40. *Um superanel $\mathscr{R}$ é dito ser denso no supermódulo $\mathscr{M}$ se para todo inteiro positivo n e toda escolha de $v_{1\alpha}, \cdots, v_{n\alpha} \in \mathscr{M}_\alpha$ linearmente independentes sobre $\mathscr{C}_0$ e para toda escolha de $w_{1\beta}, \cdots, w_{n\beta} \in \mathscr{M}_\beta$ existe um elemento $r_{\alpha-\beta} \in \mathscr{R}_{\alpha-\beta}$ tal que*

$$v_{i\alpha} r_{\alpha-\beta} = w_{i\beta}, \ \ para\, i = 1, \cdots, n.$$

Observemos que no caso em que $\mathscr{R}$ é um superanel com graduação trivial, então a definição acima é a definição clássica de densidade. Nesse caso, $\mathscr{R}_1 = \{0\}$ e $\mathscr{C}^{sop} = End^{op}(\mathscr{M}_{\mathscr{R}})$.

Seja $\mathscr{R} = \mathscr{R}_0 + \mathscr{R}_1$ um superanel primitivo. Seja $\mathscr{M} = \mathscr{M}_0 + \mathscr{M}_1$ um $\mathscr{R}$-supermódulo à direita fiel e irredutível. No caso em que $\{0\} \neq \mathscr{M}_\alpha$ então pelo 2.36, $\{0\} \neq \mathscr{M}_\alpha$ é um $\mathscr{R}_0$-módulo à direita irredutível e, portanto, um módulo semisimples. Mais uma vez, pelo 2.36 temos que para todo $0 \neq m_\alpha \in \mathscr{M}_\alpha$, obtemos $m_\alpha \mathscr{R}_0 = \mathscr{M}_\alpha$, ou seja, $\mathscr{M}_\alpha$ é um $\mathscr{R}_0$-módulo finitamente gerado. Pelo **Teorema da Densidade de Jacobson** para anéis, $\mathscr{R}_0$ age densamente em ${}_{\mathscr{T}}\mathscr{M}_\alpha$, onde $\mathscr{T} = End^{op}_{\mathscr{R}_0}(\mathscr{M}_\alpha)$.

Lema 2.41. *Sejam um $\mathscr{R} = \mathscr{R}_0 + \mathscr{R}_1$ um superanel primitivo à direita e $\mathscr{M} = \mathscr{M}_0 + \mathscr{M}_1$ um $\mathscr{R}$-supermódulo à direita fiel e irredutível. Se $\mathscr{M}_\alpha \neq \{0\}$ então a aplicação*

$$\begin{aligned} \phi : \mathscr{R}_0 &\to E = End^{op}_{\mathscr{T}}(\mathscr{M}_\alpha) \\ r &\mapsto \phi_r : \mathscr{M}_\alpha \to \mathscr{M}_\alpha \\ & \qquad\qquad m \mapsto mr \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Observemos que ϕ está bem definida e ϕ_r é uma bijeção para todo $0 \neq r \in \mathscr{R}_0$. Seja $0 \neq m_\alpha \in \mathscr{M}_\alpha$ um gerador de $\mathscr{M}_\alpha$ enquanto E-módulo, isto é, $\forall n_\alpha \in \mathscr{M}_\alpha$, $\exists \psi \in E$ tal que $n_\alpha = (m_\alpha)\psi$. Seja $f \in E$ qualquer. Pelo Teorema da Densidade para anéis não graduados, existe um $r \in \mathscr{R}_0$ tal que $(m_\alpha) f = m_\alpha r$. Dado $n_\alpha \in \mathscr{M}_\alpha$, temos que existe um $a \in E$ tal que $n_\alpha = a \cdot m_\alpha$, então

$$n_\alpha r = (a \cdot m_\alpha) r = a \cdot (m_\alpha r) f = a \cdot (m_\alpha) f = (a \cdot m_\alpha) f = (n_\alpha) f,$$

portanto, $f = \phi_r$, ou seja, ϕ é sobrejetiva. O seu núcleo é

$$Ker(\phi) = \{r \in \mathscr{R}_0 | \phi_r = 0\} = \{r \in \mathscr{R}_0 | (m_\alpha)r = 0,\ \forall m_\alpha \in \mathscr{M}_\alpha\} = Ann_{\mathscr{R}_0}(\mathscr{M}_\alpha) = (0),$$

pois $\mathscr{M}_\alpha$ é um $\mathscr{R}_0$-módulo fiel, logo ϕ é injetiva. A prova que φ é um homomorfismo de anéis não é difícil. Portanto, $\mathscr{R}_0 \cong E$. ■

Logo, quando $\mathscr{M}$ é um $\mathscr{R}$-supermódulo à direita fiel e irredutível, $\mathscr{R}_0$ é um anel de transformações lineares de $\mathscr{M}_\alpha$ em si mesmo.

Teorema 2.42 (Teorema da Densidade)**.** *Sejam $\mathscr{R} = \mathscr{R}_0 + \mathscr{R}_1$ um superanel primitivo à direita, $\mathscr{M} = \mathscr{M}_0 + \mathscr{M}_1$ um $\mathscr{R}$-supermódulo à direita irredutível e fiel, e $\mathscr{C} = \mathscr{C}_0 + \mathscr{C}_1$ o superanel comutativo de $\mathscr{R}$ em $\mathscr{M}$. Então $\mathscr{R}$ é um superanel denso de transformações lineares em $\mathscr{M}$ sobre $\mathscr{D} = \mathscr{C}^{sop}$.*

Demonstração. Observamos que $\mathscr{D}_0 = \mathscr{C}_0^{sop}$ é um anel de divisão. Logo, $\mathscr{M}_\alpha$ e $\mathscr{M}_\beta$ são espaços vetoriais à esquerda sobre $\mathscr{D}_0 = \mathscr{C}_0^{sop}$. Pelo Lema 2.41, $\mathscr{R}_0$ é o anel de transformações lineares de $\mathscr{M}_\beta$ em si mesmo, e $\mathscr{R}_{\alpha-\beta}$ um grupo aditivo de transformações lineares de $\mathscr{M}_\alpha$ em $\mathscr{M}_\beta$ tal que $\mathscr{R}_{\alpha-\beta}\mathscr{R}_0 \subseteq \mathscr{R}_{\alpha-\beta}$. Pelo Lema (2.36), $\mathscr{M}_\beta$ é um $\mathscr{R}_0$-módulo irredutível e o anel comutativo de $\mathscr{R}_0$ em $\mathscr{M}$ é $\mathscr{D}_0$. Estas são exatamente as hipóteses do Teorema 2.35 que nos permitem concluir que $\mathscr{R}_{\alpha-\beta}$ age densamente em $\mathscr{M}_\alpha$. ■

Definição 2.43. *Um superanel associativo é artiniano à direita (à esquerda) se ele satisfaz a condição da cadeia descendente (DCC) para superideais à direita (à esquerda).*

Exemplo 2.44 (Inteiros de Gauss)**.** *Definimos $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi | a, b \in \mathbb{Z}\}$, onde $i^2 = -1$. Considere $\mathbb{Z}[i] = \mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_1$, onde $\mathscr{A}_0 = \mathbb{Z}$ e $\mathscr{A}_1 = \mathbb{Z}[i]$. Então $\mathbb{Z}[i]$ é um superanel associativo, entretanto, não é artiniano à direita e à esquerda, pois $\{2^n\mathbb{Z}[i], n \geq 1\}$ é uma família de superideais de $\mathbb{Z}[i]$ que não satisfaz DCC, pois*

$$\{0\} \subsetneq \cdots \subsetneq 2^n\mathbb{Z}[i] \subsetneq \cdots \subsetneq 4\mathbb{Z}[i] \subsetneq 2\mathbb{Z}[i] \subsetneq \mathbb{Z}[i].$$

Definição 2.45. *Seja $\mathscr{R}$ um superanel. Dizemos que $\mathscr{R}$ é simples se $\mathscr{R}^2 \neq (0)$ e os únicos ideais graduados são os triviais, ou seja, $\mathscr{R}$ e $\{0\}$.*

Exemplo 2.46. *Todo superanel de divisão $\mathscr{D}$ é um superanel simples. É suficiente observar que se $0 \neq d_\alpha \in \mathscr{D}_\alpha$ então existe $d_{-\alpha} \in \mathscr{D}_{-\alpha}$ tal que $1 = d_\alpha d_{-\alpha} = d_{-\alpha} d_\alpha$.*

Exemplo 2.47. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Então com graduação trivial $M_n(\mathbb{K})$ é um superanel simples que não é um superanel de divisão.*

Teorema 2.48. *Seja $\mathscr{A} = \mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_1$ um superanel associativo simples e artiniano à direita. Então, como superanel, $\mathscr{A} \cong End_{\mathscr{D}}(\mathscr{V})$, onde $\mathscr{V}$ um superespaço de dimensão finita sobre uma superanel associativo $\mathscr{D}$.*

Demonstração. Seja $I = I_0 + I_1$ um ideal a direta minimal do superanel $\mathscr{A}$, existe pois $\mathscr{A}$ é artiniano à direita. Pela minimalidade, I é um supermódulo irredutível de $\mathscr{A}$, pois $I\mathscr{A} \neq (0)$ e $I\mathscr{A} \neq \mathscr{A}$. Desde que $\mathscr{A}$ é simples, então I é um supermódulo fiel, pois se $(0) \neq \{y \in \mathscr{A} | Iy = (0)\} = B$ então B seria um superideal de $\mathscr{A}$ não nulo propriamente contido em $\mathscr{A}$. Portanto pelo Teorema 2.42, $\mathscr{A}$ é um superanel primitivo com supermódulo irredutível e fiel $\mathscr{M} = I$. Logo, $\mathscr{M}$ é um $\mathscr{D} = \mathscr{C}^{sop}$-supermódulo à esquerda, onde $\mathscr{C}$ é o superanel comutativo de $\mathscr{A}$ em $\mathscr{M}$, observemos que $\mathscr{D}$ é um superanel de divisão. Portanto, $\mathscr{A}$ é isomorfo a um sub-superanel denso de $End_{\mathscr{D}}(\mathscr{M})$. Se $\mathscr{M}$ tem dimensão infinita sobre $\mathscr{D}_0$ então algum $\mathscr{M}_\alpha$ tem dimensão infinita sobre $\mathscr{D}_0$, para algum $\alpha \in \mathbb{Z}_2$. Sejam $v_{1_\alpha}, \cdots, v_{n_\alpha}, \cdots$ uma sequência infinita de elementos linearmente independente de $\mathscr{M}_\alpha$ sobre $\mathscr{D}_0$. Seja $\mathscr{V}_j = \bigoplus_{i=1}^{j} \mathscr{D} v_{i_\alpha}$. Observamos que $\mathscr{V}_j$ é um $\mathscr{D}$-supermódulo à esquerda e um grupo graduado de $\mathscr{A}$, com $j \geq 1$. Ainda, temos

$$\mathscr{V}_1 \subsetneq \mathscr{V}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathscr{V}_j \subsetneq \mathscr{V}_n \subsetneq \cdots, \; \forall n > j \geq 1. \tag{2.15}$$

Consideremos $Ann\mathscr{V}_j = Ann_0\mathscr{V}_j + Ann_1\mathscr{V}_j$, onde $Ann_\beta\mathscr{V}_j = \{b_\beta \in \mathscr{A}_\beta | \mathscr{V}_j b_\beta = \{0\}\}$, $\beta \in \mathbb{Z}_2$. Sendo $\mathscr{V}_j$ um grupo graduado de $\mathscr{A}$, então $Ann\mathscr{V}_j$ é um superideal de $\mathscr{A}$ para todo $j \geq 1$. Não é difícil provar que $Ann\mathscr{V}_{j+1} \subseteq Ann\mathscr{V}_j$. Provemos que $Ann\mathscr{V}_{j+1} \subsetneq Ann\mathscr{V}_j$ para todo $j \geq 1$. Como $v_{1_\alpha}, \cdots, v_{(j+1)_\alpha}$ são linearmente independentes sobre $\mathscr{D}_0$, pelo teorema da densidade existe $r \in \mathscr{A}$ tal que $v_{(j+1)_\alpha} r \neq 0$ e $v_{i_\alpha} r = 0$, $\forall 1 \leq i \leq j$. Logo, $r \in Ann\mathscr{V}_j$, mas $r \notin Ann\mathscr{V}_{j+1}$. Daí concluímos que $Ann\mathscr{V}_{j+1} \subsetneq Ann\mathscr{V}_j$.

Logo, temos que

$$Ann\mathscr{V}_1 \supsetneq Ann\mathscr{V}_2 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathscr{A}nnV_j \supsetneq Ann\mathscr{V}_n \supsetneq \cdots, \ \forall n > j \geq 1. \tag{2.16}$$

Portanto, (2.16) forma uma cadeia descendente adequadamente de superideais à direita de $\mathscr{A}$. Como $\mathscr{A}$ é artiniano, a cadeia se estabiliza, uma contradição. Então, não existe uma sequência infinita de elementos de $\mathscr{M}_\alpha$ linearmente independentes sobre $\mathscr{D}_0$. Portanto, $dim_{\mathscr{D}_0}\mathscr{M}$ é finita, sendo n, e pela densidade, $\mathscr{A} \cong End_{\mathscr{D}}\mathscr{M} = End_0(\mathscr{M}) + End_1(\mathscr{M})$. ■

Proposição 2.49. *Seja $\mathscr{R} = \mathscr{R}_0 + \mathscr{R}_1$ um superanel primitivo à direita tendo um superideal à direita minimal. Então quaisquer dois $\mathscr{R}$-supermódulos irredutíveis e fieis à direita são isomorfos, e o isomorfismo é homogêneo.*

Demonstração. Sejam $I = I_0 + I_1$ um superideal à direita minimal de $\mathscr{R} = \mathscr{R}_0 + \mathscr{R}_1$ e $\mathscr{M} = \mathscr{M}_0 + \mathscr{M}_1$ um $\mathscr{R}$-supermódulo à direita irredutível e fiel. A fidelidade de $\mathscr{M}$ garante que $m_\alpha I \neq \{0\}$ para algum $m_\alpha \in \mathscr{M}_\alpha$, pois $Ann_{\mathscr{R}}(\mathscr{M}) = (0)$. Como I é um superideal à direita de $\mathscr{R}$, então $m_\alpha I$ é um sub-supermódulo de $\mathscr{M}$ não nulo, pela irredutibilidade de $\mathscr{M}$, devemos ter $m_\alpha I = \mathscr{M}$. Seja

$$\varphi_\alpha : I \to m_\alpha I$$
$$a \mapsto m_\alpha a,$$

temos que φ_α é um homomorfismo de $\mathscr{R}$-supermódulos homogêneo de grau α. A demonstração que φ_α está bem definida, não é difícil. Sejam a, $b \in I$, $a_\beta \in I_\beta$ e $r_\beta \in \mathscr{R}_\beta$, então

- $(a+b)\varphi_\alpha = m_\alpha(a+b) = m_\alpha a + m_\alpha b = (a)\varphi_\alpha + (b)\varphi_\alpha$.
- $(ar_\beta)\varphi_\alpha = (m_\alpha a)r_\beta = (a)\varphi_\alpha r_\beta$.
- $(a_\beta)\varphi_\alpha = m_\alpha a_\beta \in \mathscr{M}_{\alpha+\beta}$.

Como $Im\varphi_\alpha \subseteq \mathscr{M}$ é um sub-supermódulo de $\mathscr{M}$ não nulo, devemos ter $Im\varphi_\alpha = \mathscr{M}$, portanto, $Im\varphi_\alpha = m_\alpha I$. O anulador de m_α em I é um superideal à direita de $\mathscr{R}$ propriamente contido em I, sendo I minimal, devemos ter $\{0\} = Ker\varphi_\alpha$, pois $Ann_I(m_\alpha) := \{a \in I | m_\alpha a = 0\} = Ker\varphi_\alpha$. Portanto, φ_α é um isomorfismo de $\mathscr{R}$-supermódulos de I em $m_\alpha I = \mathscr{M}$. Assim, cada $\mathscr{R}$-supermódulo à direita irredutível e fiel é isomorfo a I. Pegamos um $\mathscr{R}$-supermódulo à direita irredutível e fiel e provamos que ele é isomorfo à I, onde$I$ é um superideal à direita minimal, logo podemos concluir que todo $\mathscr{R}$-supermódulo à direita irredutível e fiel é isomorfo à I. Portanto, todos os $\mathscr{R}$-supermódulos à direita irredutíveis e fieis são isomorfos entre si, basta utilizar composição de isomorfismo. ■

Observação 1. *Quando dizemos que $\mathscr{A}$ é uma superálgebra, estaremos considerando $\mathscr{A}$ como uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa $\mathbb{Z}_2$-graduada, onde $\mathbb{K}$ é um corpo de característica diferente de dois. Então a partir daqui, não repetiremos que uma superálgebra é uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa $\mathbb{Z}_2$-graduada, utilizaremos simplesmente a palavra superálgebra.*

Definição 2.50. *Sejam $\mathscr{V} = \mathscr{V}_0 + \mathscr{V}_1$ um superespaço sobre uma superálgebra associativa de divisão $\mathscr{C} = \mathscr{C}_0 + \mathscr{C}_1$, $\mathscr{W} = \mathscr{W}_0 + \mathscr{W}_1$ um superespaço sobre a superálgebra associativa de divisão $\mathscr{D} = \mathscr{D}_0 + \mathscr{D}_1$ e $\sigma : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ um isomorfismo de superálgebras de $\mathscr{C}$ em $\mathscr{D}$. Uma função $s_\gamma : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$, com $\gamma \in \mathbb{Z}_2$, é dita ser um homomorfismo de superespaços σ-semilinear homogêneo de grau γ desde que*

$$(u_\beta)s_\gamma \in \mathscr{W}_{\gamma+\beta} \quad e \quad (c_\alpha u_\beta)s_\gamma = (c_\alpha)\sigma((u_\beta)s_\gamma), \quad \forall c_\alpha \in \mathscr{C}_\alpha,\ u_\beta \in \mathscr{V}_\beta.$$

Dada uma superálgebra associativa de divisão $\mathscr{D}$ e um superespaço a direita de dimensão finita sobre $\mathscr{D}$, então pela proposição 2.23 concluímos que $End_{\mathscr{D}}(V) \cong M_n(\mathscr{D})$, onde a graduação de $M_n(\mathscr{D})$ é dada na mesma proposição. Portanto, quando $\mathscr{V}$ é de dimensão finita sobre $\mathscr{D}$, teremos que $End_{\mathscr{D}}(\mathscr{V})$ é uma superálgebra.

Teorema 2.51 (Teorema do Isomorfismo)**.** *Sejam $\mathscr{C} = \mathscr{C}_0 + \mathscr{C}_1$ e $\mathscr{D} = \mathscr{D}_0 + \mathscr{D}_1$ superálgebras de divisão associativas, $\mathscr{V} = \mathscr{V}_0 + \mathscr{V}_1$ um superespaço à esquerda de dimensão finita sobre $\mathscr{C}$ e $\mathscr{W} = \mathscr{W}_0 + \mathscr{W}_1$ um superespaço à esquerda de dimensão finita sobre $\mathscr{D}$. Então*

$\phi : End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V}) \to End_{\mathscr{D}}(\mathscr{W})$ é um isomorfismo de superálgebra se, e somente se, existe um isomorfismo de superálgebras $\sigma : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e um isomorfismo σ-semi-linear de superespaços de $\mathscr{V}$ em $\mathscr{W}$ homogêneo de grau γ

$$s_\gamma : \mathscr{V} \to \mathscr{W} \ \textit{tal que} \ (a_\alpha)\phi = s_\gamma^{-1} a_\alpha s_\gamma, \forall a_\alpha \in (End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V}))_\alpha. \tag{2.17}$$

Demonstração. Se s_γ é um isomorfismo σ-semi-linear de $\mathscr{V}$ em $\mathscr{W}$ homogêneo de grau γ então

$$\begin{aligned} \phi : End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V}) &\to End_{\mathscr{D}}(\mathscr{W}) \\ a_\alpha &\mapsto s_\gamma^{-1} a_\alpha s_\gamma. \end{aligned}$$

é um isomorfismo graduado de $End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})$ em $End_{\mathscr{D}}(\mathscr{V})$. Antes de mais nada, observe que $s_\gamma^{-1} a_\alpha s_\gamma \in End_{\mathscr{D}}(\mathscr{W})$, com $a_\alpha \in End_{\mathscr{D}}(\mathscr{V})$, podemos ver este fato através do seguinte diagrama,

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{V} \arrow[r, "a_\alpha"] & \mathscr{V} \arrow[d, "s_\gamma"] \\
\mathscr{W} \arrow[u, "s_\gamma^{-1}"] \arrow[r, "s_\gamma^{-1} a_\alpha s_\gamma"'] \arrow[ur, phantom, "\curvearrowright"] & \mathscr{W}
\end{tikzcd}$$

Não é difícil provar que ϕ está bem definida, pois dados $a_\alpha = b_\alpha \in End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})$ então,

$$(a_\alpha)\phi = s_\gamma^{-1} a_\alpha s_\gamma = s_\gamma^{-1} b_\alpha s_\gamma = (b_\alpha)\phi,$$

observemos que s_γ é uma função bem definida, portanto ϕ está bem definida:

1. $((a_0+a_1)+(b_0+b_1))\phi = s_\gamma^{-1}((a_0+a_1)+(b_0+b_1))s_\gamma = s_\gamma^{-1}(a_0+a_1)s_\gamma + s_\gamma^{-1}(b_0+b_1)s_\gamma = ((a_0+a_1)\phi + (b_0+b_1)\phi$, $\forall a_\alpha, b_\beta \in End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})$;

2. $(a_\alpha b_\beta)\phi = s_\gamma^{-1}(a_\alpha b_\beta)s_\gamma = s_\gamma^{-1} a_\alpha (s_\gamma s_\gamma^{-1}) b_\beta s_\gamma = (s_\gamma^{-1} a_\alpha s_\gamma)(s_\gamma^{-1} b_\beta s_\gamma) \overset{*}{=} (a_\alpha)\phi(b_\beta)\phi$, $\forall a_\alpha, b_\beta \in End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})$, $*$ segue da definição de ϕ.

3. $(v_\beta)s_\gamma \in \mathscr{W}_{\beta+\gamma}$, por definição de s_γ. Para todo $w_\beta \in \mathscr{W}_\beta$, temos

$$(w_\beta)(s_\gamma^{-1}a_\alpha s_\gamma) = \underbrace{((w_\beta)s_\gamma^{-1})}_{\in \mathscr{V}_{\beta+\gamma}} a_\alpha s_\gamma = \underbrace{(((w_\beta)s_\gamma^{-1})a_\alpha)}_{\in \mathscr{V}_{\beta+\gamma+\alpha}} s_\gamma \in \mathscr{W}_{\beta+\gamma+\alpha+\gamma} = \mathscr{W}_{\beta+\alpha},$$

pois $\gamma+\gamma = 0$ em $\mathbb{Z}_2$. Portanto, $s_\gamma^{-1}a_\alpha s_\gamma \in End_{\mathscr{D}}(\mathscr{W})_\alpha$, $\forall a_\alpha \in End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})_\alpha$.

Logo ϕ é um homomorfismo de superálgebras. A inversa de ϕ é dada por

$$\begin{aligned} \psi : End_{\mathscr{D}}(\mathscr{W}) &\to End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V}) \\ a_\alpha &\mapsto s_\gamma a_\alpha s_\gamma^{-1}. \end{aligned}$$

A prova de que ψ é um homomorfismo de superálgebras, segue de forma análoga a prova de que ϕ é um homomorfismo de superálgebra. Observemos que $\psi\phi = id_{End_{\mathscr{D}}(\mathscr{W})}$, $\phi\psi = id_{End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})}$. Portanto, ϕ é um isomorfismo.

Por outro lado, suponha que $\phi : End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V}) \to End_{\mathscr{D}}(\mathscr{W})$ é um isomorfismo de superálgebras.

Afirmação 2.52. *A função ϕ permite visualizar $\mathscr{W}$ como um $End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})$-supermódulo à direita irredutível e fiel, com ação dada por $w \cdot a = (w)((a)\phi)$, $\forall a \in End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})$, $\forall w \in \mathscr{W}$.*

Observemos que a ação está bem definida. De fato, seja $f = g \in End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})$, logo $(f)\phi = (g)\phi \in End_{\mathscr{D}}(\mathscr{W})$ e $w \cdot f = (w)((f)\phi) = (w)((g)\phi) = w \cdot g, \forall w \in \mathscr{W}$. Verificar que $\mathscr{W}$ é um $End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})$-módulo com a ação dada acima, não é difícil. Seja $f_\alpha \in End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})_\alpha$, como ϕ é de grau zero, temos que $(f_\alpha)\phi \in End_{\mathscr{D}}(\mathscr{W})_\alpha$. Logo, $w_\beta \cdot f_\alpha = (w_\beta)((f_\alpha)\phi) \in \mathscr{W}_{\alpha+\beta}$, $\forall w_\beta \in \mathscr{W}_\beta$, portanto $\mathscr{W}$ é um $End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})$-supermódulo. Para provar que $\mathscr{W}$ é um $End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})$-supermódulo à direita fiel é suficiente observar que $Ker(\phi) = \{0\}$ e

$$Ann_{End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})}(\mathscr{W}) := \{f \in End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V}) | w \cdot f = 0, \forall w \in \mathscr{W}\} \subseteq Ker(\phi).$$

Como $\mathscr{W}$ é um $End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})$-supermódulo fiel, temos $\mathscr{W} \cdot End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V}) \neq \{0\}$. Seja $0 \neq w \in \mathscr{W}$ então $w \cdot End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V}) \subseteq \mathscr{W}$. Seja $w' \in \mathscr{W}$. Como a $\dim_{\mathscr{D}}(\mathscr{W})$ é finita, então existem $w_1, \cdots, w_{k-1}$ tais que $\{w, w_1, \cdots w_{k-1}\}$ é uma $\mathscr{D}$-base de $\mathscr{W}$. Consideremos $g \in End_{\mathscr{D}}(\mathscr{W})$ tal que $(w)g = w'$ e $(w_i)g = 0$, $\forall 1 < i \leq k-1$. Sendo ϕ isomorfismo, então existe $f =$

$(g)\phi^{-1} \in End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})$ tal que $w \cdot f = w'$ e, portanto, $w' \in w \cdot End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})$. Concluímos que $\mathscr{W}$ é um $End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})$-supermódulo à direita irredutível e fiel, portanto, a afirmação está provada.

Na afirmação 2.52 provamos que $End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})$ é um superanel primitivo. Observamos que $End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})$ possui um superideal à direita minimal, pois $M_n(\mathscr{C})$ é isomorfo à $End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})$ e $M_n(\mathscr{C})$ possui um superideal graduado à direita minimal por exemplo,

$$I := \left\{ A \in M_n(\mathscr{C}) | A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & c \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Observemos que $\mathscr{V}$ é um $End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})$-supermódulo à direita irredutível e fiel. Como $End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})$ possui superideal à direita minimal, pela Proposição 2.49, $\mathscr{V}$ e $\mathscr{W}$ são isomorfos como $End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})$-supermódulos. Se $s_\gamma : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ é um isomorfismo de $End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})$-supermódulos homogêneo de algum grau $\gamma \in \mathbb{Z}_2$, então

$$(v_\alpha r_\beta)s_\gamma = ((v_\alpha)s_\gamma) \cdot r_\beta = ((v_\alpha)s_\gamma)((r_\beta)\phi) \quad \forall v_\alpha \in \mathscr{V}_\alpha,\ r_\beta \in (End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V}))_\beta.$$

Portanto,

$$(w_\alpha)((r_\beta)\phi) = (w_\alpha)(s_\gamma^{-1} r_\beta s_\gamma), \quad \forall w_\alpha \in \mathscr{W}_\alpha,\ r_\beta \in (End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V}))_\beta.$$

Para continuar a prova do teorema, precisamos definir em $\mathscr{V}$ a multiplicação escalar por elementos de $\mathscr{C}$ da seguinte forma, $(v)\mathscr{L}_c = cv$, $\forall v \in \mathscr{V}$, $c \in \mathscr{C}$. Note que $\mathscr{L}_c$ está bem definida, a boa definição segue da definição de $\mathscr{C}$-supermódulo. Notemos que $\mathscr{L}_c$ comuta com todo os elementos de $End_{\mathscr{C}}\mathscr{V}$, a prova desse fato é simples, pois é suficiente observar que se $f \in End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})$ então $c_\beta f = f c_\beta$, $\forall c_\beta \in \mathscr{C}_\beta$. Note que dados $\mathscr{L}_c$ e $\mathscr{L}_r$, com $c, r \in \mathscr{C}$ então

$$(v)\mathscr{L}_{cr} = (cr)v = c(rv) = (rv)\mathscr{L}_c = (v)(\mathscr{L}_r\mathscr{L}_c),\ \forall v \in \mathscr{V},$$

portanto, $\mathscr{L}_{cr} = \mathscr{L}_r\mathscr{L}_c$ (iguais como funções).

Afirmação 2.53. *Sejam* $c_\beta \in \mathscr{C}_\beta$ *e* $r_\beta \in End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})_\beta$ *então* $s_\gamma^{-1}\mathscr{L}_{c_\beta}s_\gamma$ *comuta com todos* $s_\gamma^{-1}r_\beta s_\gamma = (r_\beta)\phi \in End_{\mathscr{D}}(\mathscr{W})$.

De fato, seja $s_\gamma^{-1}r_\beta s_\gamma = (r_\beta)\phi \in End_{\mathscr{D}}(\mathscr{W})$, com $r_\beta \in End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})_\beta$. Temos que $r_\beta\mathscr{L}_{c_\beta} = \mathscr{L}_{c_\beta}r_\beta$, $c_\beta \in \mathscr{C}_\beta$, logo

$$(s_\gamma^{-1}\mathscr{L}_{c_\beta}s_\gamma)(s_\gamma^{-1}r_\beta s_\gamma) = (s_\gamma^{-1}\mathscr{L}_{c_\beta})(s_\gamma s_\gamma^{-1})(r_\beta s_\gamma) = s_\gamma^{-1}r_\beta\mathscr{L}_{c_\beta}s_\gamma = (s_\gamma^{-1}r_\beta s_\gamma)(s_\gamma^{-1}\mathscr{L}_{c_\beta}s_\gamma).$$

Portanto, a afirmação está provada.

Seja $c \in \mathscr{C}$. Defina $(w)f = (w)(s_\gamma^{-1}\mathscr{L}_c s_\gamma)$, $\forall\, w \in \mathscr{W}$. Observemos que f é uma função de $\mathscr{W}$ em $\mathscr{W}$, pois é simplesmente a composição de funções, o diagrama abaixo nos dá uma ideia e a direção da composição,

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{V} \arrow[r, "\mathscr{L}_c"] & \mathscr{V} \arrow[d, "s_\gamma"] \\
\mathscr{W} \arrow[u, "s_\gamma^{-1}"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\curvearrowright"] & \mathscr{W}
\end{tikzcd}.$$

Consideremos $\dim_{\mathscr{D}}\mathscr{W} = n$. Sejam $\psi \in End_{\mathscr{D}}(\mathscr{W})$ e $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base de $\mathscr{W}$, onde e_i são elementos homogêneos. Como B é uma base de $\mathscr{W}$, podemos determinar de modo único $a_{ij} \in \mathscr{D}$, com $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, tais que

$$(e_i)\psi = a_{1i}e_1 + \cdots + a_{ji}e_j + \cdots + a_{mi}e_m. \tag{2.18}$$

Seja $w \in \mathscr{W}$. Temos que $w = b_1e_1 + \cdots + b_ne_n$ em que $b_i \in \mathscr{D}$ para $1 \le i \le n$. Pela linearidade de ψ e por (2.18), segue que

$$\begin{aligned}
(w)f &= b_1(e_1)\psi + \cdots + b_n(e_n)\psi \\
&= b_1(a_{11}e_1 + \cdots + a_{m1}e_m) + \cdots + b_n(a_{1n}e_1 + \cdots + a_{mn}e_m) \\
&= (b_1a_{11} + \cdots + b_na_{1n})e_1 + \cdots + (b_1a_{m1} + \cdots + b_na_{mn})e_n.
\end{aligned}$$

Logo

$$[(w)\psi]_B = \begin{pmatrix} a_{11} + \cdots + a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} + \cdots + a_{mn} \end{pmatrix} = [b_1 \cdots b_n] \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = [w]_B \cdot [\psi]_B. \qquad (2.19)$$

Portanto, todo elemento de $End_{\mathscr{D}}(\mathscr{W})$ tem uma representação matricial.

Pela afirmação 2.53 f comuta com todos elementos da forma $s_\gamma^{-1} c_\beta s_\gamma$. Como $f \in End_{\mathscr{D}}(\mathscr{W})$ tem uma representação matricial e $f\psi = \psi f \; \forall \psi \in End_{\mathscr{D}}(\mathscr{W})$, concluímos que f é a multiplicação por um escalar.

Logo, f é uma multiplicação por escalar $\mathscr{L}_{(d_c)}$ em $\mathscr{W}$ para algum $d_c \in \mathscr{D}$, ou seja, $f = \mathscr{L}_{d_c}$. Definamos a função σ em $\mathscr{D}$ por $(c)\sigma = d_c$.

Para todo a, $c \in \mathscr{C}$, temos

1.

$$\begin{aligned} (w)\mathscr{L}_{((ac))\sigma} &= (w)s_\gamma^{-1} \underbrace{\mathscr{L}_{(ac)}}_{=\mathscr{L}_c\mathscr{L}_a} s_\gamma \\ &= (w)s_\gamma^{-1}(\mathscr{L}_c\mathscr{L}_a)s_\gamma \\ &= (w)s_\gamma^{-1}(\mathscr{L}_c(Id_{\mathscr{V}})\mathscr{L}_a)s_\gamma \\ &= (w)s_\gamma^{-1}\mathscr{L}_c \underbrace{(s_\gamma s_\gamma^{-1})}_{Id_{\mathscr{V}}} \mathscr{L}_a s_\gamma \\ &= (w)(s_\gamma^{-1}\mathscr{L}_c s_\gamma)(s_\gamma^{-1}\mathscr{L}_a s_\gamma) \\ &= (w)\mathscr{L}_{(c)\sigma}\mathscr{L}_{(a)\sigma} \\ &= (w)\mathscr{L}_{(a)\sigma(c)\sigma}, \forall w \in \mathscr{W}. \end{aligned}$$

2.

$$
\begin{aligned}
(w)\mathscr{L}_{((a+c))\sigma} &= (w)s_\gamma^{-1}\underbrace{\mathscr{L}_{(a+c)}}_{=\mathscr{L}_c+\mathscr{L}_a}s_\gamma \\
&= (w)s_\gamma^{-1}(\mathscr{L}_a+\mathscr{L}_c)s_\gamma \\
&= (w)s_\gamma^{-1}\mathscr{L}_a s_\gamma + (w)s_\gamma^{-1}\mathscr{L}_c s_\gamma \\
&= (w)\mathscr{L}_{(a)\sigma} + (w)\mathscr{L}_{(c)\sigma} \\
&= (w)(\mathscr{L}_{(a)\sigma} + \mathscr{L}_{(c)\sigma}) \\
&= (w)\mathscr{L}_{(a)\sigma+(c)\sigma}, \forall w \in \mathscr{W}.
\end{aligned}
$$

Notemos que σ tem grau zero, pois $(w_\beta)s_\gamma^{-1}\mathscr{L}_{a_\alpha}s_\gamma \in \mathscr{W}_{\alpha+\beta}, \forall w_\beta \in \mathscr{W}_\beta$, $\forall a_\alpha \in \mathscr{C}_\alpha$ então devemos ter por comparação de grau, $(a_\alpha)\sigma \in \mathscr{D}_\alpha$. Assim, $(ac)\sigma = (a)\sigma(c)\sigma$, $(a+c)\sigma = (a)\sigma + (c)\sigma$ e, portanto, $\sigma : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ dada por $c \mapsto (c)\sigma$ define um homomorfismo de superanéis de $\mathscr{C}$ em $\mathscr{D}$. Similarmente, considere a multiplicação à esquerda em $\mathscr{W}$ $\mathscr{L}_d$, então $(v)\mathscr{L}_{(d)\tau} := (v)s_\gamma\mathscr{L}_d s_\gamma^{-1}$, $\forall v \in \mathscr{V}$, onde $(w)\mathscr{L}_d = dw$, $\forall w \in \mathscr{W}$, com $d \in \mathscr{D}$, produz um homomorfismo de superanéis τ de $\mathscr{D}$ em $\mathscr{C}$. Além disso, $(d)\tau\sigma = d$, σ é sobrejetiva. Assim, σ é um isomorfismo de $\mathscr{C}$ em $\mathscr{D}$ e

$$(c_\beta u_\alpha)s_\gamma = (c_\beta)\sigma(u_\alpha s_\gamma) \quad \forall u_\alpha \in \mathscr{V}_\alpha,\ c_\beta \in \mathscr{C}_\beta,$$

isto é, s_γ é um isomorfismo σ-semi-linear de $\mathscr{V}$ em $\mathscr{W}$. ■

Definição 2.54. *Um superanel $\mathscr{R}$ é chamado primo se $\mathscr{R}$ é um anel $\mathbb{Z}_2$-graduado associativo primo.*

Definição 2.55. *Um superanel $\mathscr{R}$ é dito semiprimo se $\mathscr{R}$ é um anel $\mathbb{Z}_2$-graduado associativo semiprimo.*

É claro que todas as propriedades válidas para anéis graduados primos, também são válidas para superanéis primos.

Para o próximo lema, precisaremos da seguinte definição.

Definição 2.56. *Sejam $\mathscr{R}$ um superanel e $0 \neq e \in \mathscr{R}$. Dizemos que $e \in \mathscr{R}$ é um elemento idempotente se $e^2 = e$.*

Exemplo 2.57. *Seja $\mathscr{R}$ um anel com identidade 1. Logo, 1 é um elemento idempotente.*

Exemplo 2.58. *Seja $\mathbb{F}\mathbb{Z}_2 = \mathbb{F}\eta_0 + \mathbb{F}\eta_1$ a $\mathbb{F}$-álgebra de grupo, onde $\mathbb{F}$ um corpo de característica diferente de dois. Então $\dfrac{\eta_0 + \eta_1}{2}$ é um elemento idempotente.*

A demonstração do seguinte lema não é difícil.

Lema 2.59. *Sejam $\mathscr{R}$ um superanel e $e \in \mathscr{R}_0$ um elemento idempotente. Então $e\mathscr{R}e = e\mathscr{R}_0 e + e\mathscr{R}_2 e$ é um superanel e e é a unidade de $e\mathscr{R}e$.*

Definição 2.60. *Sejam $\mathscr{R}$ e I um superideal à direita de $\mathscr{R}$ não nulo. Um elemento $e \in I$ é dito idempotente primitivo se $0 \neq e \in I_0$, $e^2 = e$ e $I = e\mathscr{R}$.*

Assim, como no caso de anéis, o seguinte lema é básico para a estrutura de superanel primitivo com um superideal unilateral.

Lema 2.61. *Seja $\mathscr{R} = \mathscr{R}_0 + \mathscr{R}_1$ um superanel associativo semiprimo . Se $I = I_0 + I_1$ é um superideal à direita minimal de $\mathscr{R}$ então $I = e_0\mathscr{R}$, onde $e_0 \in I_0$ é um elemento idempotente primitivo. Neste caso, $e_0\mathscr{R}e_0 = e_0\mathscr{R}_0 e_0 + e_0\mathscr{R}_1 e_0$ é um superanel associativo de divisão e $\mathscr{R}e_0$ é um superideal à esquerda minimal.*

Demonstração. Sejam $\mathscr{R} = \mathscr{R}_0 + \mathscr{R}_1$ um superanel semiprimo e $I = I_0 + I_1$ um superideal à direita minimal de $\mathscr{R}$. Então I é irredutível como $\mathscr{R}$-supermódulo à direita, pois em particular, I é um $\mathscr{R}$-supermódulo minimal, ou seja, I não possui subsupermódulo próprio diferente do nulo. Como I é um superideal de $\mathscr{R}$, então $\mathscr{R}I$ é um superideal bilateral de $\mathscr{R}$.

Afirmação 2.62. *Se $\mathscr{R}I = \{0\}$ então I é um ideal nilpotente e, portanto, $I = (0)$.*

De fato, é suficiente observar que $I \subseteq \mathscr{R}$. Logo, $I^2 = II \subseteq \mathscr{R}I = \{0\}$, sendo $\mathscr{R}$ semiprimo devemos ter $I = (0)$. Portanto, a afirmação está provada.

Segue que $\mathscr{R}I$ é um superideal não nulo de $\mathscr{R}$. Logo, $\{0\} \neq (\mathscr{R}I)^2 = \mathscr{R}\underbrace{I\mathscr{R}}_{\subseteq I}I \subseteq \mathscr{R}I^2$ e, portanto, $I^2 \neq \{0\}$. Se $II_0 = \{0\}$ então $I_0I_0 \subseteq II_0 = \{0\}$ e $I_1I_0 = \{0\}$. Temos também que $I_0\mathscr{R} = I_0\mathscr{R}_0 + I_0\mathscr{R}_1 \subseteq I = I_0 + I_1$, como I é um superideal à direita minimal e $I_0\mathscr{R}$ é um superideal à direita, devemos ter, $I_0\mathscr{R} = I$ ou $I_0\mathscr{R} = \{0\}$. Como $\mathscr{R}$ é semiprimo, logo $Ann_{\mathscr{R}}({}_{\mathscr{R}}\mathscr{R}) = 0$, portanto, se $I_0\mathscr{R} = (0)$ implica $I_0 = (0)$ e $I_0\mathscr{R}_1 = (0)$. Portanto, $I^2 = I_0I_0 + I_0I_1 + I_1I_0 + I_1I_1 = \{0\}$, uma contradição. Assim, $II_0 \neq \{0\}$, além disso $a_\alpha I \neq \{0\}$ para algum $a_\alpha \in I_\alpha$, pois caso contrário, teríamos $I^2 = \{0\}$, provamos acima. Então, como $I\mathscr{R} \subseteq I$ segue que $a_\alpha I\mathscr{R} \subseteq a_\alpha I$, portanto, $a_\alpha I$ é um superideal à direita não nulo contido em I (observemos que $a_\alpha \in I$ e I é um superideal à direita), portanto, $a_\alpha I = I$. Observamos que $I = I_0 + I_1$. Como $I = a_\alpha I$ então $I_\alpha + I_{\alpha+1} = a_\alpha I_0 + a_\alpha I_1$. Por comparação de grau, devemos ter $a_\alpha I_0 = I_\alpha$ e $a_\alpha e_0 = a_\alpha$ para algum $e_0 \in I_0$. Portanto,

$$a_\alpha e_0 = a_\alpha \Rightarrow (a_\alpha e_0)e_0 = a_\alpha e_0 \Rightarrow a_\alpha e_0^2 = a_\alpha e_0 \Rightarrow a_\alpha(e_0^2 - e_0) = 0, \text{ pois } a_\alpha e_0 = a_\alpha.$$

Afirmação 2.63. *Seja $J = \{r \in I | a_\alpha r = 0\}$. Então $J = J_0 + J_1$ é um sub-superideal propriamente contido no I, onde $J_\beta = \{r_\beta \in I_\beta | a_\alpha r_\beta = 0\}$.*

De fato, observamos que $J \neq \emptyset$, pois $0 \in J$. Temos que $J\mathscr{R} \subseteq J$ porque para todo $r \in J$, temos

$$r \in I \Rightarrow ru \in I,\ \forall u \in \mathscr{R} \Rightarrow ru \in J, \text{ pois } a_\alpha(ru) = (a_\alpha r)u = 0u = 0.$$

Sejam $r,\ c \in J$ então $a_\alpha r = 0$ e $a_\alpha c = 0$, logo

- $a_\alpha(rc) = 0$;
- $a_\alpha(r - c) = a_\alpha r - a_\alpha c = 0$.

Portanto, $rc,\ r - c \in J$. A afirmação está provada.

Uma vez que, $a_\alpha I = I$ e $I^2 \neq (0)$, temos que J está propriamente contido em I. Sendo I minimal, temos $J = \{0\}$. Portanto, $e_0^2 = e_0$. Seja $\mathscr{D} = e_0\mathscr{R}e_0 = e_0(\mathscr{R}_0 + \mathscr{R}_1)e_0 = e_0\mathscr{R}_0e_0 + e_0\mathscr{R}_1e_0 = \mathscr{D}_0 + \mathscr{D}_1$, observemos que $\mathscr{D}$ é unitário e a unidade é e_0. Se $e_0b_\beta e_0 \neq 0$, então $e_0b_\beta e_0\mathscr{R}$ é um superideal à direita de $\mathscr{R}$ não nulo, $e_0b_\beta e_0 \in e_0b_\beta e_0\mathscr{R}$, pois

$e_0 b_\beta e_0 = (e_0 b_\beta e_0) e_0$, portanto, $\{0\} \neq e_0 b_\beta e_0 \mathscr{R} \subseteq I$ $(e_0 \in I_0)$. Mais uma vez, observamos que I é superideal à direita minimal, logo $e_0 b_\beta e_0 \mathscr{R} = I$. Como $e_0 \in I_0$ e $b_\beta e_0 \in \mathscr{R}$ temos $e_0 b_\beta e_0 \mathscr{R} \subseteq e_0 \mathscr{R} \subseteq I$, pois I é superideal à direita de $\mathscr{R}$. Observemos que $e_0 \mathscr{R}$ é um superideal à direita contido em I, notemos que $e_0 \mathscr{R} \neq (0)$, pois $0 \neq e_0 = e_0 e_0 \in e_0 \mathscr{R}$. Como I é um superideal minimal, temos $e_0 \mathscr{R} = I$ e, portanto, $e_0 b_\beta e_0 \mathscr{R} = e_0 \mathscr{R}$. Então $e_0 b_\beta e_0 \mathscr{R} e_0 = e_0 \mathscr{R} e_0$, logo existe $c \in \mathscr{R}$ tal que $e_0 b_\beta e_0 c e_0 = e_0$. Observemos que $c \in \mathscr{R}_\beta$, como em $\mathbb{Z}_2$ temos $-\beta = \beta$, concluímos que $c \in \mathscr{R}_\beta$, logo $e_0 c e_0 = (e_0 b_\beta e_0)^{-1} \in \mathscr{D}_\beta$. Assim, $\mathscr{D}$ é uma superanel de divisão.

Considere $\mathscr{L} = \mathscr{R} e_0 = \mathscr{R}_0 e_0 + \mathscr{R}_1 e_0 = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_1$. Se $\mathscr{L}^{'} = \mathscr{L}_0^{'} + \mathscr{L}_1^{'} \subseteq \mathscr{L}$ é um superideal à esquerda não nulo de $\mathscr{R}$, argumentando como acima trocando simplesmente as notações de esquerda por direita, $\mathscr{L}^{'2} \neq \{0\}$ e existe $a_\alpha \in \mathscr{L}_\alpha^{'}$ tal que $\mathscr{L}^{'} a_\alpha \neq \{0\}$ (a demonstração é análoga a feita acima).

Portanto, $e_0 a_\alpha \neq 0$. Assim, $a_\alpha = a_\alpha e_0 \in \mathscr{R} e_0$, $a_\alpha e_0 = a_\alpha$, então $e_0 a_\alpha e_0 = e_0 a_\alpha$ $0 \neq e_0 a_\alpha = e_0 a_\alpha e_0 \in e_0 \mathscr{R} e_0 = \mathscr{D}$ (a demonstração é análoga a feita acima). Logo, $e_0 a_\alpha e_0$ é invertível em $\mathscr{D}$, $e_0 \in \mathscr{L}^{'}$ e $\mathscr{L} = \mathscr{R} e_0 \subseteq \mathscr{L}^{'} \subseteq \mathscr{L}$ é um $\mathscr{R}$-superideal à esquerda minimal.

Mostramos que se, para algum elemento idempotente $e_0 \in I$, $e_0 \mathscr{R} e_0$ é uma superanel de divisão então $\mathscr{R} e_0$ é um superideal à esquerda. Um argumento análogo, prova que $e_0 \mathscr{R}$ é um superideal à direita minimal. ■

Sejam $\mathscr{V} = \mathscr{V}_0 + \mathscr{V}_1$ um superespaço à esquerda sobre uma superálgebra de divisão $\mathscr{C} = \mathscr{C}_0 + \mathscr{C}_1$ e $\mathscr{W} = \mathscr{W}_0 + \mathscr{W}_1$ um superespaço à direita sobre $\mathscr{C}$. Um emparelhamento bilinear $(,)_\omega$ é uma função bi-aditiva $(,)_\omega : \mathscr{V} \times \mathscr{W} \to \mathscr{C}$ satisfazendo

$$(u_\alpha, w_\beta)_\omega \in \mathscr{C}_{\alpha+\beta+\omega},$$
$$(c_\gamma u_\alpha, w_\beta)_\omega = c_\gamma (u_\alpha, w_\beta)_\omega,$$
$$(u_\alpha, w_\beta c_\gamma)_\omega = (u_\alpha, w_\beta)_\omega c_\gamma,$$

para todo $u_\alpha \in \mathscr{V}_\alpha$, $w_\beta \in \mathscr{W}_\beta$ e $c_\gamma \in \mathscr{C}_\gamma$. Dizemos que um emparelhamento bilinear $(,)_\omega$ é não degenerado se

$$(u_\alpha, \mathscr{W})_\omega = \{0\} \implies u_\gamma = 0 \quad \text{e} \quad (\mathscr{V}, w_\beta)_\omega = \{0\} \implies w_\beta = 0.$$

Se $(,)_\omega$ é não degenerada dizemos que os superespaços $\mathscr{V}$ e $\mathscr{W}$ são duais. O $\mathscr{C}$-superespaço à direita $\mathscr{W}$ pode ser visto como $\mathscr{C}^{sop}$-superespaço à esquerda através da ação

$$cw = w_0c_0 + w_1c_0 + w_0c_1 - w_1c_1,$$
$$\text{onde } w = w_0 + w_1 \in \mathscr{W} \text{ e } c = c_0 + c_1 \in \mathscr{C},$$

onde $c_\gamma w_\beta := (-1)^{\beta\gamma} w_\beta c_\gamma$. Um elemento homogêneo $a_\alpha \in End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})_\alpha$ é dito ter um adjunto $a^*_\alpha \in End_{\mathscr{C}^{sop}}(\mathscr{W})$ se

$$(u_\beta a_\alpha, w_\delta)_\omega = (-1)^{\alpha\delta}(u_\beta, w_\delta a^*_\alpha)_\omega, \ \forall u_\beta \in \mathscr{V}_\beta, \ w_\delta \in \mathscr{W}_\delta.$$

Denotamos o sub-superanel de elementos de $End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})$ tendo um adjunto por $\mathfrak{L}_{\mathscr{W}}(\mathscr{V})$. Um elemento $a \in End_{\mathscr{C}}(\mathscr{V})$ tem posto finito se $\mathscr{C}_0$-dimensão de $(\mathscr{V}a)$ é finita. Em particular, a tem posto 1 se $\mathscr{V}a = \mathscr{C}u$, para algum $u \in \mathscr{V}$. Denotamos o conjunto dos elementos de $\mathfrak{L}_{\mathscr{W}}(\mathscr{V})$ tendo posto finito por $\mathfrak{F}_{\mathscr{W}}(\mathscr{V})$. Agora, provemos um completamente análogo o teorema de estrutura para anéis primitivos com um ideal à esquerda minimal.

Teorema 2.64. *Se $\mathscr{R}$ é um superanel primitivo com um superideal à direita minimal então existem um superanel de divisão $\mathscr{D}$ e $\mathscr{D}$-superespaços $\mathscr{V}$ e $\mathscr{W}$ tais que*

$$\mathfrak{F}_{\mathscr{W}}(\mathscr{V}) \subseteq \mathscr{R} \subseteq \mathfrak{L}_{\mathscr{W}}(\mathscr{V}). \tag{2.20}$$

Por outro lado, dados $\mathscr{W}$, $\mathscr{V}$ superespaços duais sobre superálgebra de divisão $\mathscr{D}$, qualquer superanel $\mathscr{R}$ satisfazendo (2.20) é primitivo e contém um superideal à direita minimal. $\mathfrak{F}_{\mathscr{W}}(\mathscr{V})$ é o único superideal minimal de $\mathscr{R}$.

Demonstração. Seja $\mathscr{R} = \mathscr{R}_0 + \mathscr{R}_1$ um superanel primitivo com um superideal à direita minimal $I = I_0 + I_1$. Pelo Lema 2.61, $I = e_0\mathscr{R}$, onde $e_0 \in I_0$ é um elemento idempotente primitivo. Seja $\mathscr{V} = e_0\mathscr{R}$ o superespaço à esquerda sobre a superálgebra de divisão $\mathscr{D} = e_0\mathscr{R}e_0$ e $\mathscr{W} = \mathscr{R}e_0$ o superespaço à direita sobre $\mathscr{D}$. Para $u_\alpha = e_0a_\alpha \in \mathscr{V}_\alpha$ e $w_\beta = b_\beta e_0 \in \mathscr{W}_\beta$, defina

$$(u_\alpha, w_\beta)_0 := u_\alpha w_\beta = e_0a_\alpha b_\beta e_0 \in \mathscr{D}_{\alpha+\beta}, \ (a_\alpha \in \mathscr{R}_\alpha, \ b_\beta \in \mathscr{R}_\beta).$$

Além disso, $\mathscr{R}$ é primitivo, então $\mathscr{R}$ é primo e $\{0\} = (u_\alpha, \mathscr{W})_0 = e_0 a_\alpha \mathscr{R} e_0$ implica que $u_\alpha = e_0 a_\alpha = 0$. Similarmente, $(\mathscr{V}, w_\beta)_0 = \{0\}$ implica que $w_\beta = 0$. Assim, $\mathscr{V}$ e $\mathscr{W}$ são superespaços duais. A multiplicação à direita

$$R_{r_\gamma} : \mathscr{V} \to \mathscr{V}, \quad u \mapsto u r_\gamma, \quad r_\gamma \in \mathscr{R}_\gamma,$$

induz um homomorfismo de superanéis de $\mathscr{R}$ para $End_{\mathscr{D}}(\mathscr{V})$ que é injetivo por que $\mathscr{V}$ é $\mathscr{R}$-supermódulo à direita fiel. A partir de $(u_\alpha R_{r_\gamma}, w_\beta) = e_0 a_\alpha r_\gamma b_\beta e_0$, vemos que a adjunta de R_{r_γ} é $\mathscr{L}_{r_\gamma}$ com multiplicação à esquerda de $\mathscr{W}$ por r_γ. Portanto, $R_{r_\gamma} \in \mathfrak{L}_{\mathscr{W}}(\mathscr{V})$. Se $b_\beta \subseteq \mathfrak{F}_{\mathscr{W}}(\mathscr{V})$ é de posto 1 então

$$\mathscr{V} b_\beta \subseteq \mathscr{D} u_\gamma \quad \text{para algum } u_\gamma \in \mathscr{V}_\gamma.$$

Seja $w_\gamma \in \mathscr{W}_\gamma$ tal que $(u_\gamma, w_\gamma)_0 = 1$, existe por que $\mathscr{D}$ é um superanel de divisão. Se $u_\alpha b_\beta = d_{\alpha-\beta+\gamma} u_\gamma$ então

$$d_{\alpha-\beta+\gamma} = (d_{\alpha-\beta+\gamma} u_\gamma, w_\gamma)_0 = (u_\alpha b_\beta, w_\gamma)_0 = (u_\alpha, b_\beta^* w_\gamma)_0 = (u_\alpha, w_{\beta+\gamma})_0,$$

onde $w_{\beta+\gamma} = b_\beta^* w_\gamma$. Portanto,

$$u_\alpha b_\beta = d_{\alpha-\beta+\gamma} u_\gamma = (u_\alpha, w_{\beta+\gamma})_0 u_\gamma, \quad \forall u_\alpha \in \mathscr{V}_\alpha.$$

Em particular, e_0 é de posto 1 e $(e_0 a_\alpha) e_0 = (e_0 a_\alpha e_0) e_0$. Logo, $u_\gamma = e_0 r_\gamma$ para algum $r_\gamma \in \mathscr{R}_\gamma$, e $w_{\beta+\gamma} = c_{\beta+\gamma} e_0$, para algum $c_{\beta+\gamma} \in \mathscr{R}_{\beta+\gamma}$,

$$\begin{aligned}
u_\alpha b_\beta &= (u_\alpha, w_{\beta+\gamma})_0 u_\gamma \\
&= (u_\alpha, c_{\beta+\gamma} e_0) u_\gamma \\
&= e_0 a_\alpha c_{\beta+\gamma} e_0 u_\gamma \\
&= e_0 a_\alpha c_{\beta+\gamma} e_0 e_0 r_\gamma \\
&= u_\alpha (c_{\alpha+\gamma} e_0 r_\gamma) \\
&= u_\alpha R_{c_{\beta+\gamma} e_0 r_\gamma}, \quad \forall u_\alpha \in \mathscr{V}_\alpha.
\end{aligned}$$

Assim, toda transformação de posto 1 pertence a imagem de $\mathscr{R}$. Por isso, $\mathfrak{F}_{\mathscr{W}}(\mathscr{V})$ está contida na imagem de $\mathscr{R}$ e podemos identificar $\mathscr{R}$ como um sub-superanel de $\mathfrak{L}_{\mathscr{W}}(\mathscr{V})$ contendo $\mathfrak{F}_{\mathscr{W}}(\mathscr{V})$.

Reciprocamente, dado $\mathscr{V}$ e $\mathscr{W}$ $\mathscr{D}$-superespaços duais, se $\mathscr{R}$ é um sub-superanel de $\mathfrak{L}_{\mathscr{W}}(\mathscr{V})$contendo $\mathfrak{F}_{\mathscr{W}}(\mathscr{V})$ então é claro que $\mathscr{R}$ age fielmente e é irredutivelmente em $\mathscr{V}$. Sejam $u_0 \in \mathscr{V}_0$ fixo e $L_\alpha = \{r_\alpha \in \mathscr{R}_\alpha | \mathscr{V}_\beta r_\alpha \subseteq \mathscr{D}_{\alpha-\beta} u_0\}$.

Seja $L = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}_2} L_\alpha$. Queremos mostrar que L é um superideal à esquerda é minimal. Para um $y_\beta \in \mathscr{W}_\beta$ fixo, considere

$$\varphi(u_\alpha) = (u_\alpha, y_\beta)_0 u_0, \;\; u_\alpha \in \mathscr{V}_\alpha.$$

Uma vez que o adjunto é dado por

$$\Psi(w_\gamma) = y_\beta(u_0, w_\gamma)_0, \quad w_\gamma \in \mathscr{W}_\gamma,$$

esta função de posto 1 pertence a L_β. Denotemos L_β por b_β.

Queremos provar que todo elemento homogêneo a_α de L_α é um múltiplo de b_β à esquerda por algum elemento de $\mathscr{R}_{\alpha+\beta}$, donde, L é minimal. Argumentando como acima, se $(u_0, w_0)_0 = 1$,

$$u_\gamma a_\alpha = (u_\gamma, w_{\alpha+0})_0 u_0 = (u_\gamma, a_\alpha^* w_0)_0 u_0, \quad u_\gamma b_\beta = (u_\gamma, b_\beta^* w_0)_0 u_0.$$

Escolhendo $x_\beta \in \mathscr{V}_\beta$ tal que $(x_\beta, b_\beta^* w_0)_0 = 1$, temos

$$u_\gamma c_{\gamma+\beta} := (u_\gamma, a_\alpha^* w_0)_0 x_\beta, \; c_{\gamma+\beta} \in \mathfrak{F}_{\mathscr{W}}(\mathscr{V}) \subseteq \mathscr{R}$$

e

$$\begin{aligned} u_\gamma c_{\gamma-\beta} b_\beta &= (u_\gamma, a_\alpha^* w_0)_0 x_\beta b_\beta \\ &= (u_\gamma, a_\alpha^* w_0)_0 (x_\beta, b_\beta^* w_0)_0 u_0 \\ &= (u_\gamma, a_\alpha^* w_0)_0 u_0 \\ &= u_\gamma a_\alpha \quad \forall u_\gamma \in \mathscr{V}_\gamma. \end{aligned}$$

Consequentemente, L é um superideal à esquerda de $\mathscr{R}$ e, pelo Lema 2.61, $\mathscr{R}$ contém um superideal minimal.

Uma vez que múltiplos de elementos de posto finito tem posto finito, então $\mathfrak{F}_{\mathscr{W}}(\mathscr{V})$ é um superideal de $\mathscr{R}$ e qualquer superideal diferente de zero de $\mathscr{R}$ contém elementos diferente de zero de posto finito. Argumentando como acima, vê-se que ele deve conter elementos de posto 1, portanto todos elementos de posto 1, e também todos elementos de $\mathfrak{F}_{\mathscr{W}}(\mathscr{V})$. ■

Se σ é um antiautomorfismo de um superanel $\mathscr{D}$, então σ é um isomorfismo de $\mathscr{D}$ em $\mathscr{D}^{sop}$ e $\mathscr{W}$ é um $\mathscr{D}$-supermódulo à esquerda com a ação

$$d_\delta w_\beta := (-1)^{\delta\beta} w_\beta d_\delta^\sigma, \quad d_\delta \in \mathscr{D}_\delta,\ w_\beta \in \mathscr{W}_\beta.$$

Definição 2.65. *Dizemos que* $(,)_\omega : \mathscr{V} \times \mathscr{W}$ *é um par sesquilinear de* $\mathscr{D}$*-superespaços à esquerda se*

$$\begin{aligned} (d_\delta u_\alpha, w_\beta)_\omega &= d_\delta (u_\alpha, w_\beta)_\omega, \\ (u_\alpha, d_\delta w_\beta)_\omega &= (-1)^{\delta\beta}(u_\alpha, w_\beta)_\omega d_\delta^\sigma, \end{aligned}$$

para todo $u_\alpha \in \mathscr{V}_\alpha,\ w_\beta \in \mathscr{W}_\beta,\ d_\delta \in \mathscr{D}_\delta$.

Se $-$ é uma superinvolução em $\mathscr{D}$, então $\mathscr{D}$ é isomorfo a $\mathscr{D}^{sop}$ e podemos considerar o emparelhamento sesquilinear de $\mathscr{V} \times \mathscr{V}$. Referimos a ela como superforma.

Definição 2.66. *Seja* $\mathscr{D}$ *um superanel. Se* $\epsilon \in Z(\mathscr{D})$ *com* $\epsilon\bar{\epsilon} = 1$, *uma superforma* ϵ*-hermitiana é um emparelhamento sesquilinear satisfazendo*

$$(u_\alpha, w_\beta)_\omega = (-1)^{\alpha\beta}\epsilon\overline{(w_\beta, u_\alpha)}_\omega, \quad \forall u_\alpha \in \mathscr{V}_\alpha,\ w_\beta \in \mathscr{W}_\beta.$$

Uma superforma $(,)_\omega$ é dita ser par ou ímpar se $\omega = 0$ ou 1. Se $\epsilon = 1$ (respectivamente, -1), $(,)_\omega$ é dita ser hermitiana (respectivamente, antihermitiana). Dizemos que um $\mathscr{D}$-supermódulo à direita $\mathscr{V}$ é auto-dual com respeito a uma superforma $(,)_0$ se para todos $d_\delta \in \mathscr{D}_\delta,\ v_\alpha \in \mathscr{V}_\alpha,\ w_\beta \in \mathscr{V}_\beta$

$$\begin{aligned} &(d_\delta u_\alpha, w_\beta)_0 = d_\delta (u_\alpha, w_\beta)_0, \quad (u_\alpha, d_\delta w_\beta)_0 = (-1)^{\alpha\beta}(u_\alpha, w_\beta)\bar{d}_\delta, \\ &(w_\beta, u_\alpha)_0 = (-1)^{\alpha\beta}\overline{(u_\alpha, w_\beta)}_0. \end{aligned}$$

Teorema 2.67. *Um superanel primitivo $\mathscr{R} = \mathscr{R}_0 + \mathscr{R}_1$ com um superideal à direita minimal tem um superinvolução $*$ se, e somente se, $\mathscr{R}$ tem um supermódulo auto-dual à direita $\mathscr{V}$, o superanel comutativo $\mathscr{C}$ de $\mathscr{R}$ em $\mathscr{V}$ tem uma superinvolução, e $*$ é a adjunta com repeito a uma superforma não degenerada hermitiana ou antihermitiana em $\mathscr{V}$.*

Demonstração. Se existe um idempotente par primitivo e simétrico $e_0 = e_0^*$ então $\mathscr{D} = e_0\mathscr{R}e_0$ é uma superálgebra de divisão com involução $^- = *|_{\mathscr{D}}$ e o superideal à direita $\mathscr{V} = e_0\mathscr{R}_0 + e_0\mathscr{R}_1 = \mathscr{V}_0 + \mathscr{V}_1$ é um $\mathscr{D}$-superespaço à esquerda. Para $u_\alpha = e_0 a_\alpha \in \mathscr{V}_\alpha,\ w_\beta = e_0 b_\beta \in \mathscr{V}_\beta$ definimos

$$(u_\alpha, w_\beta)_0 := e_0 a_\alpha (e_0 b_\beta)^* = e_0 a_\alpha b_\beta^* e_0 \in \mathscr{D}_{\alpha+\beta}.$$

Verifica-se que $(,)_0$ é uma forma biaditiva graduada de grau 0 e para todos $d_\delta \in \mathscr{D}_\delta,\ v_\alpha \in \mathscr{V}_\alpha,\ w_\beta \in \mathscr{V}_\beta$,

$$(d_\delta u_\alpha, w_\beta)_0 = d_\delta (u_\alpha, w_\beta)_0, \quad (u_\alpha, d_\delta w_\beta)_0 = (-1)^{\alpha\beta}(u_\alpha, w_\beta)\bar{d}_\delta,$$
$$(w_\beta, u_\alpha)_0 = (-1)^{\alpha\beta}\overline{(u_\alpha, w_\beta)}_0.$$

Isso significa que $\mathscr{V}$ é auto-dual com respeito a $(,)_0$. Sejam $u_\alpha = e_0 a_\alpha,\ w_\beta = e_0 b_\beta$ e $\tilde{w}_\delta = e_0 \tilde{b}_\delta$ em $\mathscr{V}$. Então,

$$(u_\alpha \tilde{w}_\delta, w_\beta)_0 = u_\alpha \tilde{w}_\delta w_\beta^* = (-1)^{\delta\beta} u_\alpha (w_\delta \tilde{w}_\beta^*)^* = (-1)^{\delta\beta}(u_\alpha, w_\delta \tilde{w}_\beta^*)_0,$$

portanto, $*$ é o adjunto com respeito a superforma hermitiana $(,)_0$.

Se um superideal à direita minimal $I = I_0 + I_1$ contém um elemento homogêneo ϵ-simétrico $a_\alpha^* = \epsilon a_\alpha$, $\epsilon = \pm 1$, tal que $a_\alpha I \neq \{0\}$ então $I = e_0\mathscr{R}$ para algum idempotente primitivo adequado $e_0 \in I_0$, com $e_0^* = e_0$. Com efeito, desde que $a_\alpha I \neq \{0\}$ então $a_\alpha I = I$ e, argumentando como na prova do Lema 2.61, existe um idempotente $f_0 \in I_0$ tal que $a_\alpha f_0 = a_\alpha$ e $I = f_0\mathscr{R},\ a_\alpha \in I = f_0\mathscr{R}$. Como $I = f_0\mathscr{R}$, então $a_\alpha = f_0 b_\alpha$ para algum $b_\alpha \in \mathscr{R}_\alpha$. Logo,

$$a_\alpha = f_0 b_\alpha \Rightarrow f_0 a_\alpha = f_0^2 b_\alpha = f_0 b_\alpha \Rightarrow f_0(a_\alpha - b_\alpha) = 0 \Rightarrow a_\alpha = b_\alpha.$$

Então $f_0 a_\alpha = a_\alpha$ e

$$a_\alpha = \epsilon a_\alpha^* = \epsilon(f_0 a_\alpha)^* = \epsilon a_\alpha^* f_0^* = (a_\alpha f_0) f_0^*.$$

Mais uma vez, argumento do Lema 2.61 prova que $e_0 = f_0 f_0^* \in I_0$ é um idempotente simétrico par não nulo, tal que $I = e_0\mathscr{R}$.

Suponha a partir de agora que I é um superideal à direita minimal de $\mathscr{R}$ e se $a_\alpha^* = \epsilon a_\alpha \in I_\alpha$, $\epsilon = \pm 1$, então $a_\alpha I = \{0\}$. Desejamos provar que se $b_\beta b_\beta^* \neq 0$ para algum $b_\beta \in J_\beta$, onde J é um superideal à direita minimal então $J^* J = \{0\}$. De fato, pelo Lema 2.36, $b_\beta b_\beta^* \neq 0$ implica que $\{0\} \neq b_\beta b_\beta^* \mathscr{R} \subseteq J$, pois $(b_\beta b_\beta^* \mathscr{R}_\beta) = J_\beta$, $\forall \beta \in \mathbb{Z}_2$. Portanto, $b_\beta b_\beta^* \mathscr{R} = J$ e $J^* = \mathscr{R} b_\beta b_\beta^*$. Desde que $b_\beta b_\beta^* \in J$ é simétrico, $J^* J = \mathscr{R} b_\beta b_\beta^* J = \{0\}$.

Afirmamos que existe um superideal à direita minimal I tal que $a_\alpha a_\alpha^* = 0$, para todo $a_\alpha \in I_\alpha$. Seja I um superideal à direita minimal de $\mathscr{R}$. Para qualquer $0 \neq a_\alpha \in I_\alpha$, pelo Lema 2.61 o Teorema 2.64, $I = a_\alpha \mathscr{R} = e_0 \mathscr{R}$ e $\mathscr{R} e_0 = \mathscr{R} a_\alpha$ é um superideal à esquerda minimal. Portanto, $(\mathscr{R} a_\alpha)^* = a_\alpha^* \mathscr{R}$ é um superideal à direita minimal. Se algum deste satisfaz $b_\beta b_\beta^* = 0$ para todo $b_\beta \in a_\alpha^* \mathscr{R}_{\alpha+\beta}$ então acabamos. De outra forma, pelo argumento anterior,

$$\mathscr{R} a_\alpha a_\alpha^* \mathscr{R} = (a_\alpha^* \mathscr{R})^* (a_\alpha^* \mathscr{R}) = \{0\} \quad \forall a_\alpha \in I_\alpha. \tag{2.21}$$

Assim, por primalidade, $a_\alpha a_\alpha^* = 0$, para todo $a_\alpha \in I_\alpha$, que prova a afirmação.

De agora em diante, seja I um superideal à direita minimal de $\mathscr{R}$ tal que $a_\alpha a_\alpha^* = 0$, para todo $a_\alpha \in I_\alpha$. Escrevendo $I = e_0 \mathscr{R} = e_0 \mathscr{R}_0 + e_0 \mathscr{R}_1$ como no Lema 2.61, temos $e_0 \mathscr{R} e_0^* \neq \{0\}$ por primalidade. Portanto, $e_0 \mathscr{R}_u e_0^* \neq \{0\}$ por pelo menos um $u \in \mathbb{Z}_2$. Escolhemos u para ser 0 se possível. Este será sempre o caso se $\mathscr{D}_1 = e_0 \mathscr{R}_1 e_0 \neq \{0\}$, pois $e_0 \mathscr{R} e_0^* \neq \{0\}$, desde que $e_0^* \mathscr{R} e_0^* = (e_0 \mathscr{R} e_0)^*$ é um superanel de divisão com unidade e_0^*, $e_0 \mathscr{R}_0 e_0^* \supseteq e_0 \mathscr{R}_1 e_0^* \mathscr{R}_1 e_0^* \neq \{0\}$. Podemos, portanto, assumir que se $v = 1$ então $\mathscr{D}_1 = \{0\}$.

Suponha que $e_0 \mathscr{R}_u e_0^* \neq \{0\}$. Se $e_0(r_u + r_u^*) e_0^* \neq 0$, para algum $r_u \in \mathscr{R}_u$, fazendo $t_u = r_u + r_u^*$ podemos assumir que $(e_0 t_u e_0^*)^* = e_0 t_u e_0^* \neq 0$. Caso contrário, visto que $(e_0 r_u e_0^*)^* = -e_0 r_u e_0^*$, para todo $r_u \in \mathscr{R}_u$, escolhemos $t_u \in \mathscr{R}_u$ tal que $(e_0 t_u e_0^*)^* = -e_0 t_u e_0^* \neq$

0. Assim,

$$(e_0 t_u e_0^*)^* = \epsilon e_0 t_u e_0^*,\ \epsilon = \pm 1.$$

Como $e_0^* \mathscr{R} e_0 t_u e_0^* \neq \{0\}$, por primalidade, uma vez que $e_0^* \mathscr{R} e_0^*$ é um superanel de divisão, pode-se escolher $s_u \in \mathscr{R}_u$ tal que

$$e_0^* s_u e_0 t_u e_0^* = e_0^*.$$

Aplicando $*$,

$$\begin{aligned}
e_0 = e_0^{**} &= (e_0^* s_u e_0 t_u e_0^*)^* \\
&= (-1)^{u^2} e_0 t_u^* e_0^* s_u^* e_0 \\
&= (-1)^{u^2} e_0 t_u e_0^* s_u^* e_0 \\
&= (-1)^{u^2} (e_0 t_u e_0^*)^* s_u^* e_0 \\
&= (-1)^{v} \epsilon e_0 t_u e_0^* s_u^* e_0, \text{ observemos que } u^2 = u,\ \forall u \in \mathbb{Z}_2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
e_0^* s_u e_0 &= e_0^* s_u((-1)^u \epsilon e_0 t_u e_0^* s_u^* e_0) \\
&= (-1)^u \epsilon (e_0^* s_u e_0 t_u e_0^*) s_u^* e_0 \\
&= (-1)^v \epsilon e_0^* s_u^* e_0.
\end{aligned}$$

e

$$(e_0^* s_u e_0)^* = (-1)^u e_0^* s_u e_0.$$

Por isso, temos

$$\begin{array}{ll}
e_0^* s_u e_0 t_u e_0^* = e_0^*, & e_0 t_u e_0^* s_u e_0 = e_0, \\
(e_0 t_u e_0^*)^* = \epsilon e_0 t_u e_0^*, & (e_0^* s_u e_0)^* = (-1)^u \epsilon e_0^* s_u e_0
\end{array} \tag{2.22}$$

Seja $\mathcal{V} = I = e_0\mathscr{R}$, para $v_\alpha = e_0 a_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha,\ w_\beta = e_0 b_\beta \in \mathcal{V}_\beta$,

$$\begin{aligned} v_\alpha w_\beta^* &= e_0 a_\alpha (e_0 b_\beta)^* \\ &= e_0 a_\alpha b_\beta^* e_0^* \\ &= e_0 a_\alpha b_\beta^* e_0^* s_u e_0 t_u e_0^*. \end{aligned}$$

Defina

$$(v_\alpha, w_\beta)_u := e_0 a_\alpha b_\beta^* e_0^* s_u e_0 \in e_0 \mathscr{R}_{\alpha-\beta+v} e_0 = \mathscr{D}_{\alpha-\beta+u}.$$

Temos que

$$(u_\alpha, u_\alpha)_u = e_0 \underbrace{a_\alpha a_\alpha^*}_{=0} e_0^* s_u e_0 = 0,$$

para todo $v_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha$. Se $(v_\alpha, \mathcal{V})_u = 0$, então

$$\begin{aligned} 0 = (v_\alpha, \mathcal{V})_u &= (v_\alpha, e_0\mathscr{R})_u \\ &= (e_0 a_\alpha, e_0\mathscr{R}) = e_0 a_\alpha \mathscr{R}^* e_0^* s_u e_0, \\ &\therefore e_0 a_\alpha \mathscr{R}^* e_0^* s_u e_0 = \{0\}. \end{aligned}$$

Mas $e^* s_u e_0 \neq 0$, logo

$$e_0 a_\alpha = 0, \text{ por primalidade.}$$

Similarmente, $(\mathcal{V}, w_\beta)_u = 0$ implica que $w_\beta = 0$, portanto, $(,)_u$ é não degenerada. É óbvio que $(,)$ é bi-aditiva e homogênea de grau 0. Se $d_\delta \in \mathscr{D}_\delta$, $(d_\delta v_\alpha, w_\beta)_u = d_\delta (v_\alpha, w_\beta)_u$. Além disso,

$$\begin{aligned} (v_\alpha, d_\delta w_\beta)_u &= e_0 a_\alpha b_\beta^* e_0^* d_\delta^* e_0^* s_u e_0 \\ &= e_0 a_\alpha b_\beta^* e_0^* s_u e_0 t_u e_0^* d_\delta^* e_0^* s_u e_0 \\ &= (v_\alpha, w_\beta) \bar{d}_\delta, \end{aligned}$$

onde

$$\bar{d}_\delta := e_0 t_u e_0^* d_\delta^* e_0^* s_u e_0.$$

Para $d_\delta \in \mathscr{D}_\delta$,

$$
\begin{aligned}
\bar{\bar{d}}_\delta &= e_0 t_u e_0^* \bar{d}_\delta^* e_0^* s_u e_0 \\
&= e_0 t_u e_0^* (e_0 t_u e_0^* d_\delta^* e_0^* s_u e_0)^* e_0^* s_u e_0 \\
&= (-1)^{u^2} (-1)^{\delta u} e_0 t_u e_0^* s_u^* e_0 d_\delta e_0 t_u^* e_0^* s_u e_0 \\
&= (-1)^{\delta u} \epsilon e_0 d_\delta \epsilon e_0 \\
&= (-1)^{\delta u} d_\delta \\
&= d_\delta,
\end{aligned}
$$

pois se $u = 1$ então δ deve ser 0. Para $c_\gamma \in \mathscr{D}_\gamma$ e $d_\delta \in \mathscr{D}_\delta$,

$$
\begin{aligned}
\overline{c_\gamma d_\delta} &= e_0 t_u e_0^* (c_\gamma d_\delta)^* e_0^* s_u e_0 \\
&= (-1)^{\gamma\delta} e_0 t_u e_0^* d_\delta^* c_\gamma^* e_0^* s_u e_0 \\
&= (-1)^{\gamma\delta} e_0 t_u e_0^* d_\delta^* (e_0 c_\gamma)^* s_u e_0 \\
&= (-1)^{\gamma\delta} e_0 t_u e_0^* d_\delta^* e_0^* s_u e_0 t_u e_0^* c_\gamma^* e_0^* s_u e_0 \\
&= (-1)^{\gamma\delta} \bar{d}_\delta \bar{c}_\gamma.
\end{aligned}
$$

Assim, $-$ é uma superinvolução de $\mathscr{D}$ e $(,)_u$ é uma superforma sesquilinear não degenerada em $\mathscr{V}$ cuja a adjunta é $*$. Finalmente

$$
\begin{aligned}
\overline{(v_\alpha, w_\beta)_u} &= e_0 t_u e_0^* (e_0 a_\alpha b_\beta^* e_0^* s_u e_0)^* e_0^* s_u e_0 \\
&= (-1)^{\alpha\beta} (-1)^{(\alpha-\beta)u} e_0 t_u e_0^* s_u^* e_0 b_\beta a_\alpha^* e_0^* s_u e_0 \\
&= (-1)^{\alpha\beta} (-1)^{(\alpha-\beta)u} (-1)^u \epsilon e_0 b_\beta a_\alpha^* e_0^* s_u e_0 \\
&= (-1)^{\alpha\beta} (-1)^{(\alpha-\beta)u} (-1)^v \epsilon (w_\beta, v_\alpha)_u.
\end{aligned}
$$

Se $u = 0$, então $(,)_0$ é ϵ-hermitiana. Se $u = 1$, assumimos que $\mathscr{D}_1 = \{0\}$ e portanto $(v_\alpha, w_\alpha)_1 = 0$ para todo $v_\alpha,\ w_\alpha \in \mathscr{V}_\alpha$. Donde o lado direito é 0 a menos que $\alpha - \beta = 1$. Assim, para todo $v_\alpha \in \mathscr{V}_\alpha,\ w_\beta \in \mathscr{V}_\beta$,

$$
\overline{(u_\alpha, w_\beta)_1} = (-1)^{\alpha\beta} \epsilon (w_\beta, u_\alpha) \text{ e}
$$

$(,)_1$ é uma superforma ϵ-hermitiana. ■

Exemplo 2.68. *Sejam $\mathscr{D}$ uma anel de divisão com involução $-$ e $\mathscr{W}$ um $\mathscr{D}$-espaço vetorial à esquerda munido com um forma ϵ-hermitiana não-degenerada $g : \mathscr{W} \times \mathscr{W} \to \mathscr{D}$. Se A é um subanel de $End_{\mathscr{D}}(\mathscr{W})$ satisfazendo $\mathfrak{F}_{\mathscr{W}}(\mathscr{W}) \subseteq A \subseteq \mathfrak{L}_{\mathscr{W}}(\mathscr{W})$, seja $V = V_0 + V_1$, $V_\alpha = W$, isto é, como $\mathscr{D}$-espaço vetorial, V é uma soma direta de duas cópias de $\mathscr{W}$, e $R = M_2(A) = R_0 + R_1$, onde $R_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, $R_1 = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ com ação obvia à direita em V. Dado $\mathscr{D}$ com graduação trivial, $\mathscr{D}_0 = \mathscr{D}$. Então $h : V \to \mathscr{D}$ dada por*

$$h(v_\alpha, w_\alpha) := 0,\ h(v_0, w_1) := g(v_0, w_1),\ e$$
$$h(w_1, v_0) := -\overline{h(v_0, w_1)}$$

é uma superforma (-ϵ)-hermitiana ímpar não-degenerada que induz uma superinvolução $*$ em R dada por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \widetilde{d} & -\widetilde{b} \\ \widetilde{c} & \widetilde{a} \end{pmatrix},$$

onde ~ é a involução de A induzida por g., ou seja, $g(wa, w_2) = g(w, \tilde{a}w_2)$. Se $\mathscr{W} = f_0 A$, onde f_0 é um elemento idempotente de A, então

$$e_0 = \begin{pmatrix} f_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é um elemento idempotente primitivo de R tal que $e_0 R_0 e_0^* = \{0\}$, mas é claro que $e_0 R_1 e_0^* \neq \{0\}$. Isso mostra que o último caso do Teorema 2.67 pode ocorrer, ou seja, Se $u = 0$, então $(,)_0$ é ϵ-hermitiana. Se $u = 1$, podemos assumir que $\mathscr{D}_1 = \{0\}$ e portanto $(v_\alpha, w_\alpha)_1 = 0$ para todo v_α, $w_\alpha \in \mathscr{V}_\alpha$. Donde o lado direito é 0 a menos que $\alpha - \beta = 1$. Assim, para todo $v_\alpha \in \mathscr{V}_\alpha$, $w_\beta \in \mathscr{V}_\beta$,

$$\overline{(u_\alpha, w_\beta)_1} = (-1)^{\alpha\beta} \epsilon (w_\beta, u_\alpha)\ e$$

$(,)_1$ é uma superforma ϵ-hermitiana.

Capítulo 3

Superálgebras Associativas de Divisão

Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Uma $\mathbb{K}$-superálgebra é uma superálgebra associativa sobre $\mathbb{K}$.

Definição 3.1. *Sejam $\mathscr{A}$ uma $\mathbb{K}$-superálgebra e I um superideal de $\mathscr{A}$. Dizemos que I é um superideal próprio se $I \subsetneq \mathscr{A}$.*

Definição 3.2. *Seja $\mathscr{A}$ uma $\mathbb{K}$-superálgebra. Definimos o centro de $\mathscr{A}$ como*

$$Z(\mathscr{A}) := \{a \in \mathscr{A} | ab = ba, \ \forall b \in \mathscr{A}\}.$$

Seguinte lema afirma que o centro de uma superálgebra é um superanel.

Lema 3.3. *Sejam $\mathscr{A}$ uma $\mathbb{K}$-superálgebra e $Z(\mathscr{A})$ o seu centro. Então $Z(\mathscr{A})$ é um sub-superanel, ou seja, $Z(\mathscr{A})$ é um subanel $\mathbb{Z}_2$-graduado de $\mathscr{A}$.*

Demonstração. Observamos que $\emptyset \neq Z(\mathscr{A})$, pois $0 \in Z(\mathscr{A})$. Sejam $a, a' \in Z(\mathscr{A})$ então $ab = ba$, $a'b' = b'a'$, $\forall b, b' \in \mathscr{A}$. Logo,

i. $(a - a')b = ab - a'b = ba - ba' = b(a - a')$, $\forall b \in \mathscr{A}$;

ii. $(aa')b = a(a'b) = a(ba') = (ab)a' = b(aa')$, $\forall b \in \mathscr{A}$.

Portanto, $a - a'$, $aa' \in Z(\mathscr{A})$. Observemos que $Z(\mathscr{A}) = Z(\mathscr{A})_0 + Z(\mathscr{A})_1$, onde $Z(\mathscr{A})_\alpha := \{a_\alpha \in \mathscr{A}_\alpha | a_\alpha b = ba_\alpha, \ \forall b \in \mathscr{A}\}$. ■

Definição 3.4. *Seja* $\mathscr{A} = \mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_1$ *uma* $\mathbb{K}$*-superálgebra unitária. Dizemos que* $\mathscr{A}$ *é central se* $\mathbb{K} = Z(\mathscr{A}) \cap \mathscr{A}_0$*. No caso em que* $\mathscr{A}$ *é uma* $\mathbb{K}$*-superálgebra com graduação trivial, dizemos que* $\mathscr{A}$ *é central se* $\mathbb{K} = Z(\mathscr{A})$*.*

Observamos que a igualdade $\mathbb{K} = Z(\mathscr{A}) \cap \mathscr{A}_0$ significa que $B = \mathbb{K} \cdot 1_{\mathscr{A}} = Z(\mathscr{A}) \cap \mathscr{A}_0$ é um corpo isomorfo a $\mathbb{K}$.

Exemplo 3.5. *Seja* $\mathbb{C} = \mathbb{C}_0 + \mathbb{C}_1$ *o corpo dos números complexos, onde* $\mathbb{C}_0 = \mathbb{R}, \mathbb{C}_1 = i\mathbb{R}$*, onde* $\mathbb{R}$ *é o corpo dos número reais. Claramente,* $\mathbb{C}$ *é uma* $\mathbb{R}$*-superálgebra central e o seu centro é* $\mathbb{C}$*, entretanto, com graduação trivial,* $\mathbb{C}$ *não é uma álgebra central sobre* $\mathbb{R}$*, pois* $\mathbb{R} \neq Z(\mathscr{A}) = \mathbb{C}$*.*

Dado $n > 1$*, considere* $M_n(\mathbb{C})$ *a* $\mathbb{R}$*-álgebra de matrizes com entradas em* $\mathbb{C}$*. Temos que* $M_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C}_0) + M_n(\mathbb{C}_1) = M_n(\mathbb{R}) + iM_n(\mathbb{R})$*. Seja* $\phi : \mathbb{R} \to B$*,* $B = \{aI_{n\times n} | a \in \mathbb{R}\} \subseteq M_n(\mathbb{C}_0)$*, dada por* $\phi(a) = aI_{n\times n}$*, onde* $I_{n\times n}$ *é a matriz identidade. É fácil ver que* ϕ *é um isomorfismo de* $\mathbb{R}$*-álgebras e que* B *é a interseção do centro com* $M_n(\mathbb{C}_0)$*. Portanto,* $M_n(\mathbb{C})$ *é um superálgebra central.*

Os seguintes lemas serão importantes para o resultado principal deste capítulo.

Lema 3.6. *Seja* $\mathscr{A}$ *uma* $\mathbb{K}$*-superálgebra. Então* $\mathscr{A}_1^2 + \mathscr{A}_1$ *é um superideal de* $\mathscr{A}$*.*

Demonstração. Provar que $\mathscr{A}_1^2 + \mathscr{A}_1$ é $\mathbb{K}$-espaço, não é difícil. Observamos que $\mathscr{A}_1^2 \subseteq \mathscr{A}_0$, logo $\mathscr{A}_1^2 \cap \mathscr{A}_1 = \{0\}$. Temos também que $\mathscr{A}_1(\mathscr{A}_1^2 + \mathscr{A}_1)\mathscr{A}_1 = \underbrace{\mathscr{A}_1^4}_{\subseteq \mathscr{A}_0^2} + \underbrace{\mathscr{A}_1^3}_{\subseteq \mathscr{A}_1^1} \subseteq \mathscr{A}_1^2 + \mathscr{A}_1$. Como $\mathscr{A}_1\mathscr{A}_0 \subseteq \mathscr{A}_1$ temos que $\mathscr{A}_1^2\mathscr{A}_0 \subseteq \mathscr{A}_1^2$. Portanto, $\mathscr{A}_1^2 + \mathscr{A}_1$ é um superideal de $\mathscr{A}$. ∎

Lema 3.7. *Seja* $\mathscr{A}$ *uma* $\mathbb{K}$*-superálgebra simples. Então*

i. $\mathscr{A}_1 = (0)$ *ou* $\mathscr{A}_1^2 = \mathscr{A}_0$*.*

ii. Se I *é um ideal próprio de* $\mathscr{A}_0$ *não nulo, então*

  (a) $I + \mathscr{A}_1 I \mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_0$*;*

  (b) $\mathscr{A}_1 I + I\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_1$*.*

iii. Se J é um ideal próprio de $\mathscr{A}$ não nulo, então as projeções $\pi_i : J \to \mathscr{A}_i$, $i = 0,1$, onde $\pi_i(x) = x_i$, $x = x_0 + x_1$, são isomorfismos de $\mathscr{A}_0$-módulos.

Demonstração.

i. Se $\mathscr{A}_1 \neq \{0\}$ então $\mathscr{A}_1^2 + \mathscr{A}_1$ é um superideal não nulo de $\mathscr{A}$, logo $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1^2 + \mathscr{A}_1$. Portanto, $\mathscr{A}_1^2 = \mathscr{A}_0$ por comparação de grau.

ii. Seja I um ideal de $\mathscr{A}_0$ não nulo, então I+$I\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_1 I + \mathscr{A}_1 I \mathscr{A}_1$ é fechado em relação a soma e multiplicação à direita e à esquerda por $\mathscr{A}_0$ e $\mathscr{A}_1$, portanto é um ideal, e é graduado, pois $I + \mathscr{A}_1 I \mathscr{A}_1 \subseteq \mathscr{A}_0$ e $I\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_1 I \subseteq \mathscr{A}_1$. Sendo $I \neq (0)$ segue que $(0) \neq I \subseteq I + I\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_1 I + \mathscr{A}_1 I \mathscr{A}_1$ é um superideal não nulo de $\mathscr{A}$. Como $\mathscr{A}$ é uma $\mathbb{K}$-superálgebra simples, devemos ter $\mathscr{A} = I + I\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_1 I + \mathscr{A}_1 I \mathscr{A}_1$ e, portanto, $\mathscr{A}_0 = I + \mathscr{A}_1 I \mathscr{A}_1$ e $\mathscr{A}_1 = I\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_1 I$.

iii. A projeção é um homomorfismo de $\mathscr{A}_0$-módulos, logo $\pi_0(\mathscr{A}_0)$ é um ideal de $\mathscr{A}_0$. Temos que $J \cap \mathscr{A}_0$ e $\pi(\mathscr{A}_0)$ são ideais de $\mathscr{A}_0$. Se $J \cap \mathscr{A}_0 = \pi(\mathscr{A}_0)$ então J seria graduado, uma contradição, pois $\mathscr{A}$ é uma $\mathbb{K}$-superálgebra simples. Seja $I = J \cap \mathscr{A}_0$ e $I' = \pi_0(J)$. Multiplicando I e I' por $\mathscr{A}_1$ à esquerda e à direita e usando o fato que J é um ideal de $\mathscr{A}$, obtemos $\mathscr{A}_1 I \mathscr{A}_1 \subseteq I$ e $\mathscr{A}_1 I' \mathscr{A}_1 \subseteq I'$. Pelo item ii do lema 3.7, I e I' não podem ser próprios. Portanto, $I = (0)$ e $I' = \mathscr{A}_0$.

   Consequentemente, $J \cap \mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_0(J \cap \mathscr{A}_1) = \mathscr{A}_1^2(J \cap \mathscr{A}_1) \subseteq \mathscr{A}_1(J \cap \mathscr{A}_0) = \mathscr{A}_1 0 = 0$, e $\pi_1(J)$ contem $\mathscr{A}_1 \pi_0(J) = \mathscr{A}_1$. Assim, as π_i são sobrejetivas, e têm núcleo zero, portanto π_i são bijeções.

■

Lema 3.8. *Seja $\mathscr{A}$ uma $\mathbb{K}$-superálgebra simples. Se $\mathscr{A} = \mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_1$ é uma superálgebra unitária, então $\mathscr{A}$ é simples como $\mathbb{K}$-álgebra ou $\mathscr{A}_0$ é simples e $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_0 u$, com $u \in Z(\mathscr{A}) \cap \mathscr{A}_1$ e $u^2 = 1$.*

Demonstração. Notemos que $\mathscr{A}_0$ é uma álgebra unitária. Suponha que $\mathscr{A}$ não é simples como $\mathbb{K}$-álgebra. Então $\mathscr{A}$ tem um ideal próprio J, e podemos aplicar o lema

3.7 item iii. Escreva $u = \pi_1\pi_0^{-1}(1)$. Sendo π_i bijeções, temos que existe um único $w = x_0 + x_1 \in J$ tal que $\pi_0(w) = 1$, logo $x_0 = 1$. Observamos que $\pi_0^{-1}(1) = w$, logo $u = \pi_1\pi_0^{-1}(1) = \pi_1(w) = x_1$, portanto, $w = 1 + u \in J$. Sendo J ideal, segue que $u(1+u) = u + u^2 \in J$, logo $u = \pi_1(w) = \pi_1(u + u^2) = u$, pela injetividade de π_1, $w = u + u^2$ donde $u^2 = 1$. Mais uma vez, sendo J ideal, segue que $z_i(1+u)$, $(1+u)z_i \in J$ e $\pi_i(z_i(1+u)) = z_i = \pi_i((1+u)z_i)$, pela injetividade de π_i segue que $uz_i = z_i u$ para todo $z_i \in \mathscr{A}_i$. Assim, $u \in Z((A)) \cap \mathscr{A}_1$. Observamos que $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_1 1 = \mathscr{A}_1 u^2 = (\mathscr{A}_1 u)u \subseteq \mathscr{A}_0 u \subseteq \mathscr{A}_1$, portanto, $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_0 u$.

Finalmente, se I é um ideal de $\mathscr{A}_0$, temos

$$\mathscr{A}_1 I \mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_0 u I \mathscr{A}_0 u = \mathscr{A}_0 u I u = \mathscr{A}_0 I u^2 = \mathscr{A}_0 I = I,$$

e pelo Lema 3.7 item ii, I não é próprio. Assim, $\mathscr{A}_0$ é simples. ■

O próximo lema será importante para demonstrar o Teorema Superálgebra de Divisão que será o resultado mais importante desse capítulo.

Lema 3.9. *Se $\mathscr{A} = \mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_1$ é uma superálgebra unitária simples central sobre $\mathbb{K}$ então $\mathscr{A}$ é simples como uma álgebra ou $\mathscr{A}_0$ é simples e $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_0 u$, com $u \in Z(\mathscr{A}) \cap \mathscr{A}_1$ e $u^2 = 1$. Além disso, $\mathscr{A}$ ou $\mathscr{A}_0$ é simples e central como uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ e se $\mathscr{A}$ tem dimensão finita a afirmativa é exclusiva.*

Demonstração. Veja [[5], Lemma 4, 5]. ■

Definição 3.10. *Seja $\mathscr{A}$ uma $\mathbb{K}$-álgebra. Um isomorfismo $f : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ é dito um automorfismo de $\mathscr{A}$.*

Claramente a função identidade é um automorfismo de $\mathscr{A}$.

Exemplo 3.11. *Para qualquer $\mathbb{K}$-álgebra $\mathscr{A}$ e $c \in \mathscr{A}$ inversível, denotamos por ψ_c a função $(x)\psi_c = cxc^{-1}$. Observamos que ψ_c é um automorfismo de $\mathscr{A}$. É claro que $\psi_c|_{\mathscr{A}_0}$ é um automorfismo de $\mathscr{A}_0$.*

Dizemos que um automorfismo f de $\mathscr{A}$ é automorfismo interno, se $f(x) = cxc^{-1}$ para algum $c \in \mathscr{A}$.

Uma involução $*$ é dita do primeiro tipo se a restrição ao centro é a identidade e do segundo tipo caso contrário. Usaremos a mesma termologia para superinvoluções. Adotamos a seguinte convenção para lidar simultaneamente com superinvolução do primeiro e segundo tipo. Assumimos $Z(\mathscr{A}) \cap \mathscr{A}_0 = \mathbb{K}$ e $k = \{c \in \mathbb{K} | c^* = c\}$. Assim, $\mathbb{K} = k$ se $*$ é do primeiro tipo, $\mathbb{K} = k[\theta]$, onde $k[\theta]$ é uma extensão quadrática de k com $\theta^* = -\theta$ se a característica de $\mathbb{K}$ é diferente de 2 ou $\theta^* = \theta + 1$ se a característica de $\mathbb{K}$ é 2.

Seja $\mathbb{K}$ um corpo, definimos $\mathbb{K}^2 := \left\{ \sum_{i<\infty} a_i^2 | a_i \in \mathbb{K} \right\}$. Se $\mathbb{K}$ é de característica 2 então denotamos $\mathscr{P}(\mathbb{K})$ o conjunto $\{\alpha + \alpha^2 | \alpha \in \mathbb{K}\}$.

Antes de determinar as superálgebras associativas de divisão, anunciaremos alguns resultados preliminares.

Lema 3.12. *Seja $\mathscr{D}$ uma $\mathbb{K}$-superálgebra associativa de divisão. Se $\mathscr{D}_1 \neq \{0\}$ então $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}_0 u, \forall 0 \neq u \in \mathscr{D}_1$.*

Demonstração. Seja $0 \neq u \in \mathscr{D}_1$. Como $\mathscr{D}$ um superálgebra de divisão, logo existe $u^{-1} \in \mathscr{D}_1$ tal que $u^{-1}u = 1$. Logo, $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}_1 1 = \mathscr{D}_1(u^{-1}u) = (\mathscr{D}_1 u^{-1})u \subseteq \mathscr{D}_0 u \subseteq \mathscr{D}_1$. Portanto, $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D} u$. ∎

Lema 3.13. *Seja $\mathscr{D}$ uma superálgebra de divisão central sobre um corpo $\mathbb{K}$. Se $\mathscr{D}$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra simples e $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}_0 u$, onde $u^2 \in Z(\mathscr{D}) \cap \mathscr{D}_0$ com $0 \neq u^2 = \lambda \in \mathbb{K}$. Então $\lambda \notin \mathbb{K}^2$.*

Demonstração. Suponha que $\lambda \in \mathbb{K}^2$, podemos supor que $\lambda^2 = 1$. Observamos que $(1+\lambda)^2 = 2 + 2\lambda$. Logo, $\dfrac{1+\lambda}{2}$ é idempotente. Portanto, $\mathbb{K}\dfrac{(1+\lambda)}{2}$ é um ideal próprio de $\mathscr{D}$, logo $\mathscr{D}$ não é simples. ∎

Lema 3.14. *Sejam $\mathscr{E}$ uma álgebra de divisão sobre $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}$ é um corpo de característica diferente de 2, e ϕ um automorfismo externo de $\mathscr{E}$ sobre $\mathbb{K}$ tal que $\phi^2 = \psi_d$, para algum $d \in \mathscr{E}$ com $(d)\phi = d$. Seja $\mathscr{D} = \mathscr{E} + \mathscr{E} v$, como $\mathscr{E}$-espaço vetorial à esquerda e defina $v^2 := d$ e $va := (a)\phi v$, $\forall a \in \mathscr{E}$. Então,*

1. *$\mathscr{D}$ é uma $\mathbb{K}$-superálgebra associativa.*

2. *$\mathscr{D}$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra de divisão se, e somente se, $d = (c)\phi c$ não tem solução em $\mathscr{E}$.*

Demonstração.

1. Sejam $\mathscr{D}_0 = \mathscr{E}$ e $\mathscr{D}_1 = \mathscr{E}v$. Essa graduação é compatível com o produto em $\mathscr{D}$, resta checar que é associativa. É suficiente provar a associatividade para $\mathscr{E}v$, notemos que

$$\begin{aligned}
(avbv)cv &= (a(b)\phi vv)cv \\
&= (a(b)\phi v^2)cv \\
&= (a(b)\phi d)cv \\
&= a(b)\phi dcv \\
&= a(b)\phi dc(d^{-1}d)v \\
&= a(b)\phi(dcd^{-1})dv \\
&= a(b)\phi(c)\phi^2 dv \\
&= a(b)\phi(c)\phi^2(d)\phi v \\
&= a(b(c)\phi d)\phi v \\
&= av(b(c)\phi d) \\
&= av(b(c)\phi vv) \\
&= av(bvcv), \forall a,\ b,\ c \in \mathscr{E},
\end{aligned}$$

isso prova a associatividade de $\mathscr{D}$.

2. Suponha que $\mathscr{D}$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra de divisão. Seja $c \in \mathscr{E}/\{0\}$. Consideremos $c = b^{-1}a$, onde $b^{-1} = 1$ e $a = c$. Então $a + bv \neq 0$. Logo, existe $m + nv \in \mathscr{D}$ tal que $(a+bv)(m+nv) = 1$. Desenvolvendo o lado esquerdo dessa igualdade, obtemos:

$$(a+bv)(m+nv) = am + b(n)\phi d + (an + b(m)\phi)v.$$

Logo,

$$(a+bv)(m+nv)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} am+b(n)\phi d=1 \\ (n)\phi=-(a^{-1}b)\phi dmd^{-1} \end{cases}.$$

Portanto,

$$(a-b(a^{-1}b)\phi d)m=1. \tag{3.1}$$

Por 3.1, obtemos

$$0\neq(1)\phi=((a)\phi-(b)\phi da^{-1}b)(m)\phi.$$

Logo, $0\neq((a)\phi-(b)\phi da^{-1}b)(m)\phi$. Consequentemente, $0\neq(a)\phi-(b)\phi da^{-1}b$. Observamos que

$$0\neq(a)\phi-(b)\phi da^{-1}b\Leftrightarrow 0\neq(b^{-1}a)\phi b^{-1}a-d.$$

Como $c=b^{-1}a\in\mathscr{D}$ é qualquer, concluímos que $0\neq(c)\phi c-d$, $\forall c\in\mathscr{E}/\{0\}$. Para $c=0$, obtemos $(c)\phi c=0\neq d$. Portanto, a equação $(c)\phi c=d$ não tem solução em $\mathscr{E}$.

Reciprocamente, suponha que a equação $(c)\phi c=d$ não tem solução em $\mathscr{E}$. Primeiro, observamos que $(c)\phi c=d$ não tem solução em $\mathscr{E}$ se, e somente se, $(c)\phi c-d\neq0$, $\forall c\in\mathscr{E}$. Não é difícil verificar que $\mathscr{D}_0$ e $\mathscr{D}_1$ não possuem divisores de zeros. Sejam $h=a+bv\in\mathscr{D}$, com $a,\ b\in\mathscr{E}/\{0\}$ e $m+nv\in\mathscr{D}$ tais que $(a+bv)(m+nv)=0$. Desenvolvendo o lado esquerdo dessa igualdade, obtemos

$$\begin{cases} am+b(n)\phi d=0 \\ an+b(m)\phi=0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Então $n=-a^{-1}b(m)\phi$. Substituindo n na primeira equação do sistema 3.2, obtemos

$$(a-b(a^{-1}b)\phi d)m=0.$$

Afirmação 3.15. $(a - b(a^{-1}b)\phi d) \neq 0$.

De fato, pois $(b^{-1}a)\phi b^{-1}a - d \neq 0$ se, e somente se, $a - b(a^{-1}b)\phi d \neq 0$. Como $(c)\phi c \neq d$, $\forall c \in \mathscr{E}$. Portanto, $a - b(a^{-1}b)\phi d \neq 0$ e a afirmação está provada. Temos que $(a - b(a^{-1}b)\phi d)m = 0$ como $a - b(a^{-1}b)\phi d \in \mathscr{E}/\{0\}$ e $\mathscr{E}$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra de divisão então $m = 0$. Logo, $n = -a^{-1}b(m)\phi a = -a^{-1}b(0)\phi d = 0$ e, portanto, $\mathscr{D}$ não possui divisores de zeros.

Afirmação 3.16. *Sejam $a, b \in \mathscr{E}/\{0\}$, $x = -a^{-1}b(a)\phi$, $y = -ab(a^{-1})\phi$, $h = a^2 - b(a^{-1}b)\phi d a$ e $m = a^2 - ab(a^{-1}b)\phi d$. Então*

(a) $(a + bv)(a + xv)h^{-1} = 1$.

(b) $m^{-1}(a + yv)(a + bv) = 1$.

Portanto, $a + bv \in \mathscr{D}$ é inversível.

De fato, para provar o item (a) é suficiente observamos que

$$\begin{aligned}
(a+bv)(a+xv) &= a^2 + b(x)\phi d + (ax + b(a)\phi)v \\
&= a^2 + b(-a^{-1}b(a)\phi)\phi d + (a(-a^{-1}b(a)\phi) + b(a)\phi)v \\
&= a^2 - b(a^{-1}b)\phi d a d^{-1} d + (-aa^{-1}b(a)\phi) + b(a)\phi)v \\
&= a^2 - b(a^{-1}b)\phi d a + (-b(a)\phi) + b(a)\phi)v \\
&= a^2 - b(a^{-1}b)\phi d a + (-b(a)\phi) + b(a)\phi)v = h + 0v = h.
\end{aligned}$$

Para provamos o item (b) é suficiente observamos que

$$\begin{aligned}
(a+yv)(a+bv) &= a^2 + y(b)\phi d + (ab + y(a)\phi)v \\
&= a^2 + (-ab(a^{-1})\phi)(b)\phi d + (ab + (-ab(a^{-1})\phi)(a)\phi)v \\
&= a^2 - ab(a^{-1}b)\phi d + (ab - ab(a^{-1}a)\phi)v \\
&= a^2 - ab(a^{-1}b)\phi d + (ab - ab)v \\
&= a^2 - ab(a^{-1}b)\phi d + 0v = m.
\end{aligned}$$

Portanto, $a + bv \in \mathscr{D}$ é inversível. Logo, a afirmação está provada.

Claramente, os inversos dos elementos da forma $a + 0v$, $bv \in \mathscr{D}/\{0\}$ são, respectivamente, a^{-1}, $(b^{-1}d^{-1})\phi v$. ■

Teorema 3.17 (Teorema Superálgebra de Divisão)**.** *Se $\mathscr{D} = \mathscr{D}_0 + \mathscr{D}_1$ é uma superálgebra de divisão central sobre o corpo $\mathbb{K}$ então vale exatamente uma das seguintes condições, $\mathscr{E}$ denota uma álgebra de divisão central sobre $\mathbb{K}$.*

(i) $\mathscr{D} = \mathscr{D}_0 = \mathscr{E}$, *isto é,* $\mathscr{D}_1 = \{0\}$,

(ii) $\mathscr{D} = \mathscr{E} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[u]$, $0 \neq u^2 = \lambda \in \mathbb{K}$, $\mathscr{D}_0 = \mathscr{E} \otimes \mathbb{K}1$, $\mathscr{D}_1 = \mathscr{E} \otimes \mathbb{K}u$,

(iii) $\mathscr{D} = \mathscr{E}$, $\mathscr{D}_0 = C_{\mathscr{E}}(u)$, *o centralizador de u em $\mathscr{E}$,* $\mathscr{D}_1 = \{d \in \mathscr{E} | du = u^{\sigma} d\}$ *para alguma extensão de Galois quadrática $\mathbb{K}[u] \subset \mathscr{E}$ com automorfismo de Galois σ,*

(iv) $\mathscr{D} = M_2(\mathscr{E}) = \mathscr{E} \otimes_{\mathbb{K}} M_2(\mathbb{K})$, $\mathscr{D}_0 = \mathscr{E} \otimes \mathbb{K}[u]$, $\mathscr{D}_1 = \mathscr{E} \otimes \mathbb{K}[u]w$, *onde*

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}),\ \lambda \notin \mathbb{K}^2,\ char\mathbb{K} \neq 2$$
$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}),\ \lambda \notin \mathscr{P}(\mathbb{K}),\ char\mathbb{K} = 2,$$

e $\mathbb{K}[u]$ não esta contido em $\mathscr{E}$,

(v) $\mathscr{D} = \mathscr{E} + \mathscr{E}v$, $\mathscr{D}_0 = \mathscr{E}$, $\mathscr{D}_1 = \mathscr{E}v$, $0 \neq v^2 = d \in \mathscr{E}$, $va = (a)\phi v$, $\forall a \in \mathscr{E}$, *onde ϕ é um um automorfismo externo de $\mathscr{E}$ sobre $\mathbb{K}$ tal que $\phi^2 = \psi_d$ e $(d)\phi = d$.*
Esse último caso pode ocorrer somente se $\mathscr{E}$ é de dimensão infinita sobre o centro $\mathbb{K}$.

Demonstração. Suponha que $\mathscr{D} = \mathscr{D}_0 + \mathscr{D}_1$ é uma superálgebra de divisão central sobre o corpo $\mathbb{K}$ e que $\mathscr{D}_1 \neq \{0\}$, isto é, não estamos no caso (i). Segue do lema (3.12) que $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}_0 v$, $\forall 0 \neq v \in \mathscr{D}_1$. Para todo $a \in \mathscr{D}_0$, temos que

$$va = va(v^{-1}v) = (vav^{-1})v = (a)\psi_v v \Rightarrow (a)\psi_v = vav^{-1}$$

e, portanto, $\psi_v|_{\mathscr{D}_0}$ é um automorfismo de $\mathscr{D}_0$ como uma álgebra sobre $Z(\mathscr{D})\cap\mathscr{D}_0$. Uma vez que todo elemento de $\mathscr{D}_1$ é da forma c_0v, $c_0\in\mathscr{D}_0$, a restrição de ψ_v a $Z(\mathscr{D}_0)$ não depende da escolha em particular de $0\neq v\in\mathscr{D}_1$.

Suponha primeiro que $\psi_v|_{\mathscr{D}_0}$ é um automorfismo interno de $\mathscr{D}_0$, digamos que $\psi_v|_{\mathscr{D}_0}=\psi_c$ para algum $c\in\mathscr{D}_0$ determinado pela multiplicação por um elemento de $Z(\mathscr{D}_0)$. Portanto,

$$(a)\psi_v=(a)\psi_c\Leftrightarrow vav^{-1}=cac^{-1}\Leftrightarrow c^{-1}vav^{-1}c=a,$$

para todo $a\in\mathscr{D}_0$. Seja $u=c^{-1}v\in\mathscr{D}_1$, temos $uau^{-1}=a$, para todo $a\in\mathscr{D}_0$ e u centraliza $\mathscr{D}_0$. Uma vez que $\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_0u$, u centraliza $\mathscr{D}_1$ também. Assim, $u\in Z(\mathscr{D})$ e $u^2\in Z(\mathscr{D})\cap\mathscr{D}_0$, digamos que $0\neq u^2=\lambda\in\mathbb{K}$. Sejam $\mathscr{E}=\mathscr{D}_0$ e $\mathscr{D}=\mathscr{E}\otimes_{\mathbb{K}}\mathbb{K}[u]$. Note que $\mathscr{D}$ é simples como uma álgebra se, e somente se, $\lambda\notin\mathbb{K}^2$. Se $\lambda\in\mathbb{K}^2$, podemos supor que $\lambda=1$, veja o lema 3.13. Este é o único caso, onde a superálgebra de divisão não é simples como uma álgebra.

Suponha a seguir que $\psi_v|_{\mathscr{D}_0}$ não é um automorfismo interno de $\mathscr{D}_0$ sobre $\mathbb{K}$. Se $\psi_v|_{Z(\mathscr{D}_0)}$ não é a identidade então $\mathbb{K}$ é o subcorpo fixado de $Z(\mathscr{D}_0)$. Podemos escolher $u\in Z(\mathscr{D}_0)$ tal que $Z(\mathscr{D}_0)=\mathbb{K}[u]$,

$$u^2=\lambda\notin\mathbb{K}^2,\quad (u)\psi_v=-u,\ char\mathbb{K}\neq 2$$
$$u^2+u=\lambda\notin\mathscr{P}(\mathbb{K}),\quad (u)\psi_v=1+u,\ char\mathbb{K}=2.$$

Mas, então $avu=avu(v^{-1}v)=a(vuv^{-1})v=a(u)\psi_vv=(u)\psi_vav$ para todo $a\in\mathscr{D}_0$. Portanto, $\mathscr{D}_0=C_{\mathscr{D}}(u)$, o centralizador de u em $\mathscr{D}$ e $\mathscr{D}_1=\{c\in\mathscr{D}|cu=a(u)\psi_vv\}$. Se $\mathscr{D}$ é uma álgebra de divisão, este é o caso (iii) com $\mathscr{E}=\mathscr{D}$.

Se $\mathscr{D}$ não é uma álgebra de divisão então $\mathscr{D}_0$ não é simples central sobre $\mathbb{K}=Z(\mathscr{D})\cap\mathscr{D}_0$ então, pelo Lema 3.9, $\mathscr{D}$ é simples e central sobre $\mathbb{K}$. Seja $J\neq\{0\}$ um ideal à direita de $\mathscr{D}$. Se $0\neq a_0+a_1\in J$ então pelo menos um $a_i\neq 0$, e multiplicando por a_i^{-1} à direita, $(1+b_1)\in J$, para algum $b_1\in\mathscr{D}_1$. Como $(1+b_1)\mathscr{D}\subseteq J$. Se J contém um elemento $a_0'+a_1'\notin(1+b_1)\mathscr{D}$ então, argumentando como acima, obtemos um elemento $1+b_1'\in J$, $b_1'\neq b_1$. Neste caso, $0\neq b_1-b_1'\in J$ e $1\in J$ que deve ser o conjunto $J=\mathscr{D}$. Portanto, uma cadeia descendente de ideais à direita não nulo em $\mathscr{D}$ tem comprimento no máximo 2, logo $\mathscr{D}$ é artiniano e além disso, $\mathscr{D}$ é isomorfo à $M_2(\mathscr{E})$, onde $\mathscr{E}$ é uma álgebra de divisão com centro $\mathbb{K}$. Se $\mathbb{K}[u]$ fosse imerso em $\mathscr{E}$ então $\mathscr{D}_0 = C_{\mathscr{D}}(u) \supseteq M_2(C_{\mathscr{E}}(u))$ que não é uma álgebra de divisão. Portanto, $\mathbb{K}[u]$ não está imerso em $\mathscr{E}$, mas a extensão quadrática $\mathbb{K}[u]$ está imersa em $M_2(\mathbb{K})$ e podemos escolher w como

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e}$$

$$\mathscr{D}_1 = \mathscr{E} \otimes \mathbb{K}[u]w \text{ para } w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad char\mathbb{K} \neq 2,$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}, \text{ e}$$

$$\mathscr{D}_1 = \mathscr{E} \otimes \mathbb{K}[u]w \text{ para } w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad char\mathbb{K} = 2,$$

e estamos no caso (iv).

Finalmente, suponha que $\psi_v|_{\mathscr{D}_0}$ não é automorfismo interno, mas $\psi_v|_{Z(\mathscr{D}_0)}$ é a função identidade. Portanto, $Z(\mathscr{D}) = Z(\mathscr{D}_0)$. Isso não pode acontecer se $\mathscr{D}_0$ é de dimensão finita sobre seu centro, uma vez que todos os automorfismo de $\mathscr{D}_0$ sobre seu centro são internos. Agora, $\psi_v^2 = \psi_{v^2}$ é interno desde que $v^2 \in \mathscr{D}_0$ e $(v^2)\psi_v^2 = v^2$. Então temos o caso (v). Por outro lado, se $\mathscr{E}$ é uma álgebra de divisão e central sobre $\mathbb{K}$ e ϕ um outo automorfismo de $\mathscr{E}$ sobre $\mathbb{K}$ tal que $\phi^2 = \psi_d$, para algum $d \in \mathscr{E}$ com $d^\phi = d$, seja $\mathscr{D} = \mathscr{E} + \mathscr{E}v$, como um $\mathscr{E}$-espaço vetorial à esquerda e defina $v^2 := d$ e $va := (a)\phi v$, para $a \in \mathscr{E}$. Logo, pelo lema 3.14 $\mathscr{D}$ é uma álgebra de divisão se, e somente se, $d = (c)\phi c$ não tem solução $c \in \mathscr{D}_0$. ■

3.1 Superálgebras de Divisão com Superinvolução

Seja $\mathscr{A} = \mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_1$ uma superálgebra, sobre um corpo $\mathbb{K}$, com superinvolução $*$. Sabemos que $(\mathscr{A}_0, *|_{\mathscr{A}_0})$ é uma álgebra com involução.

Lema 3.18. *Sejam $\mathscr{A}$ uma $\mathbb{K}$-superálgebra, onde $\mathbb{K}$ é um corpo, e $*$ uma superinvolução de $\mathscr{A} = \mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_1$. Então*

$$(a_0 + b_1)^{\tilde{*}} := a_0^* - b_1^*$$

define uma superinvolução em $\mathscr{A}$.

Demonstração. Observamos primeiro que $\tilde{*}$ está bem definida, pois dados $a_0 + a_1 = b_0 + b_1 \in \mathscr{D}$ então $a_i = b_i$, $i = 0, 1$. Logo, $(a_0 + a_1)^{\tilde{*}} = a_0^* - a_1^* = b_0^* - b_1^* = (b_0 + b_1)^{\tilde{*}}$. Como $*$ é uma superinvolução em $\mathscr{D}$, então temos

$$(a_0 + b_1)^{**} = a_0 + b_1, \text{ e } (a_i b_j)^* = (-1)^{ij} b_j^* a_i^*, \ \forall a_i \mathscr{D}_i, \ \forall b_j \in \mathscr{D}_j.$$

Portanto, $(a_0 + b_1)^{\tilde{*}\tilde{*}} = (a_0^* - b_1^*)^{\tilde{*}} = a_0^{**} - (-b_1^{**}) = a_0 + b_1$ e

$$\begin{aligned}
(a_i b_j)^{\tilde{*}} &= \begin{cases} (a_i b_j)^*, \text{ se } a_i b_j \in \mathscr{D}_0, \\ -(a_i b_j)^*, \text{ se } a_i b_j \in \mathscr{D}_1, \end{cases} \\
&= \begin{cases} b_j^* a_j^*, \text{ se } a_i, b_j \in \mathscr{D}_0, \\ b_j^* a_j^*, \text{ se } a_i, b_j \in \mathscr{D}_1, \\ -b_j^* a_j^*, \text{ se } a_i \in \mathscr{D}_0, b_j \in \mathscr{D}_1 \\ -b_j^* a_j^*, \text{ se } a_i \in \mathscr{D}_1, b_j \in \mathscr{D}_0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} b_j^{\tilde{*}} a_j^{\tilde{*}}, \text{ se } a_i, \ b_j \in \mathscr{D}_0, \\ -b_j^{\tilde{*}} a_j^{\tilde{*}}, \text{ se } a_i, \ b_j \in \mathscr{D}_1, \\ b_j^{\tilde{*}} a_j^{\tilde{*}}, \text{ se } a_i \in \mathscr{D}_0, \ b_j \in \mathscr{D}_1 \\ b_j^{\tilde{*}} a_j^{\tilde{*}}, \text{ se } a_i \in \mathscr{D}_1, \ b_j \in \mathscr{D}_0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Em todos os casos, temos $(a_i b_j)^{\tilde{*}} = (-1)^{ij} b_j^{\tilde{*}} a_i^{\tilde{*}}$, $\forall a_i \in \mathscr{D}_i$, $\forall b_j \in \mathscr{D}_j$. Logo, o resultado segue. ■

Seja $\mathscr{D} = \mathscr{D}_0 + \mathscr{D}_1$ uma $\mathbb{K}$-superálgebra de divisão com superinvolução $*$. Se $\mathscr{D} = \mathscr{D}_0$ então $(\mathscr{D}, *)$ é uma álgebra com involução.

Suponha a partir de agora que $\mathscr{D}_1 \neq \{0\}$. Lidamos primeiro com o caso (ii) do Teorema da Superálgebra de Divisão.

Proposição 3.19. *Sejam* $^-$ *uma involução de* $\mathscr{D}_0$ *e um elemento* $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, *onde* $\mathbb{K}$ *é o centro de* $\mathscr{D}_0$, *tal que* $\bar{\lambda} = -\lambda$, *então*

$$(a + bu)^* := \bar{a} + \bar{b}u$$

é uma superinvolução da superálgebra $\mathscr{D} = \mathscr{D}_0 \otimes \mathbb{K}[u]$, $u^2 = \lambda$.

Demonstração. Observamos que $*$ está bem definida, pois $^-$ é bem definida. A linearidade, segue da linearidade de $^-$. Sejam $a + bu,\ c + du \in \mathscr{D}$, então

$$(a+bu)(c+du))^* = ((ac+bd\lambda)+(ad+bc)u))^* = (ac+bd\lambda)^- + (ad+bc)^- u = \bar{c}\bar{a} - \bar{d}\bar{b}\lambda + (\bar{d}\bar{a} + \bar{c}\bar{b})u.$$

Logo, se $a = c = 0$ então $bu, du \in \mathscr{D}_1$ e $(budu)^* = (-)^{11}(du)^*(bu)^*$ e, o resultado segue. ■

Teorema 3.20. *Seja* $\mathscr{D} = \mathscr{D}_0 \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[u]$, $0 \neq u^2 = \lambda \in \mathbb{K}$, $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}_0$, $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D} \otimes \mathbb{K}u$. *Se* $\mathscr{D}$ *tem uma superinvolução então podemos escolher* u *tal que* $u^* = u$ *e* $\lambda^* = -\lambda$. *Se a característica não é 2 isso implica que* $*|_{\mathscr{D}_0}$ *é uma involução do segundo tipo. Inversamente, se* $^-$ *é uma involução de* $\mathscr{D}_0$ *e* $\lambda \neq 0$ *um elemento de* $\mathbb{K}$, *onde* $\mathbb{K}$ *é o centro de* $\mathscr{D}_0$, *tal que* $\bar{\lambda} = -\lambda$, *então a superálgebra* $\mathscr{D} = \mathscr{D}_0 \otimes \mathbb{K}[u]$, $u^2 = \lambda$, *tem uma superinvolução* $*$ *estendendo* $^-$ *dada por*

$$(a + bu)^* := \bar{a} + \bar{b}u.$$

Demonstração. O centro de $\mathscr{D}$, $Z(\mathscr{D}) = \mathbb{K}[u]$ e como $u \in Z(\mathscr{D}) \cap \mathscr{D}_1$, $u^* \in Z(\mathscr{D}) \cap \mathscr{D}_1 = \mathbb{K}[u]$. Se $u + u^* \neq 0$, substituindo u por $u + u^*$ se necessário, podemos supor que $u = u^*$. De outra forma, $u^* = -u$. Aplicando a superinvolução $*$ a $u^2 = \lambda \in \mathbb{K}$, obtemos $\lambda^* = (u^2)^* = u^* u^* = -\epsilon u \epsilon u$, $\epsilon = \pm 1$. Assim,

$$\lambda^* = -\lambda$$

e $*|_{\mathscr{D}_0}$ deve ser do segundo tipo se $char\mathbb{K} \neq 2$. Nesse caso, substituindo u por θu se necessário, podemos supor que $u^* = u$. Então em todo caso u, pode ser escolhido com $u^* = u$, $u^2 = \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda^* = -\lambda$.

Reciprocamente, dada uma involução $^-$ de $\mathscr{D}_0$ e um elemento $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}$ é o centro de $\mathscr{D}_0$, tal que $\bar{\lambda} = -\lambda$, verifica-se que

$$(a + bu)^* := \bar{a} + \bar{b}u$$

é uma superinvolução (veja 3.19) da superálgebra $\mathscr{D} = \mathscr{D}_0 \otimes \mathbb{K}[u]$, $u^2 = \lambda$, estendendo $^-$. ■

Lidaremos com os casos (iii), (iv) e (v) do Teorema de Superálgebra de Divisão juntos.

Lema 3.21. *Sejam $\mathscr{D} = \mathscr{D}_0 + \mathscr{D}_1$ é uma superálgebra de divisão e $0 \neq v \in \mathscr{D}_1$ então*

$$\begin{aligned} \phi : \mathscr{D}_0 &\to \mathscr{D}_0 \\ a &\to vav^{-1} \end{aligned}$$

é um automorfismo.

Demonstração. Primeiro, observamos que ϕ é a restrição de ϕ_v a $\mathscr{D}_0$ e como $v \in \mathscr{D}_1$ segue que $vav^{-1} \in \mathscr{D}_0$, $\forall a \in \mathscr{D}_0$. Logo, ϕ está bem definida. Note que ϕ é um isomorfismo. Portanto, ϕ é um automorfismo. ■

Proposição 3.22. *Seja $\mathscr{D} = \mathscr{D}_0 + \mathscr{D}_1$ uma superálgebra de divisão com $\mathscr{D}_1 \neq \{0\}$ e $Z(\mathscr{D}) \cap \mathscr{D}_1 = \{0\}$. Se $\mathscr{D}$ tem uma superinvolução $*$ então $\mathscr{D}_1$ contem um $0 \neq v = v^*$. Além disso,*

$$d^* = -d, \quad onde\ d = v^2. \tag{3.3}$$

$$(b^*)\phi = ((b)\phi^{-1})^*, \quad \forall b \in \mathscr{D}_0. \tag{3.4}$$

Reciprocamente, se $*$ é uma involução de $\mathscr{D}_0$, satisfazendo (3.3) e (3.4), então

$$(a + bv)^* := a^* + (b^*)\phi v$$

estende $*$ a uma superinvolução de $\mathscr{D}$.

Demonstração. Uma vez que $b + b^*$ é simétrico, podemos supor que existe um elemento simétrico $v \in \mathscr{D}_1$ não nulo ou a característica não é 2 e $b_1^* = -b_1$ para todo $b_1 \in \mathscr{D}_1$. Nesse caso,

$$
\begin{aligned}
-a_0 b_1 &= (a_0 b_1)^* = b_1^* a_0^* = -b_1 a_0^* \\
a_0 b_1 c_1 &= b_1 a_0^* c_1 = b_1(-a_0^* c_1^*) = b_1(-c_1^* a_0^{**}) = b_1(-c_1^* a_0) = b_1 c_1 a_0.
\end{aligned}
$$

Como $\mathscr{D}_1\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}_0$, então $\mathscr{D}_0$ é comutativo. Isso contradiz a dimensão infinita no caso iv. Ficamos, à esquerda, com uma $\mathscr{D}$ álgebra de quatérnios de divisão no caso iii e álgebra de coquatérnios no caso iv. Em ambos os casos, uma vez que $v^{2*} = -v^* v^* = -v^2 \in \mathbb{K}$, logo $*|_{\mathbb{K}}$ é do segundo tipo e, argumentando como acima, podemos supor que $u^* = u$. Nesse caso, $(uv)^* = v^* u^* = -vu = uv$, contradizendo nossa suposição que $\mathscr{D}_1$ consiste de elementos anti-simétricos. Portanto, $\mathscr{D}_1$ contem um elemento simétrico não nulo v.

Para $a \in \mathscr{D}$, $(av)^* = va^* = (a^*)\phi v$ e $av = (av)^{**} = ((av)^*)^* = (a^*)\phi v)^* = (((a^*)\phi)^*)\phi v = (a^*)\phi^*\phi v$. Portanto,

$$(a^*)\phi = (a)\phi^{-1*}, \ \forall a \in \mathscr{D}_0.$$

Reciprocamente, se $*$ é uma involução de $\mathscr{D}_0$, satisfazendo (3.3) e (3.4), então verifica-se que

$$(a + bv)^* := a^* + (b^*)\phi v$$

estende a uma superinvolução em $\mathscr{D}$. ■

3.2 Superálgebras Simples com Superinvolução

Lema 3.23. *Seja $\mathscr{A}$ uma $\mathbb{K}$-superálgebra, onde $\mathbb{K}$ é um corpo. Se $\mathscr{A}$ é um superanel associativo com superinvolução $*$ tal que $(\mathscr{A}, *)$ é simples então $\mathscr{A}$ é simples (como um superanel) ou $\mathscr{A} = \mathscr{B} \oplus \mathscr{B}^*$, com $\mathscr{B}$ um superanel simples.*

Demonstração. Seja $(\mathscr{A}, *)$ um superanel associativo com superinvolução que é simples como um superanel com superinvolução. Se $\mathscr{B}$ é um superideal não nulo de $\mathscr{A}$

então $\mathscr{B}+\mathscr{B}^*$ e $\mathscr{B}\cap\mathscr{B}^*$ são superideais $*$-estáveis de $\mathscr{A}$. Portanto, $\mathscr{B}+\mathscr{B}^*=\mathscr{A}$. Se $\mathscr{B}\neq\mathscr{A}$ então $\mathscr{B}\cap\mathscr{B}^*=\{0\}$ e $\mathscr{A}=\mathscr{B}\oplus\mathscr{B}^*$. Se I é um superideal próprio de $\mathscr{B}$ então $I+I^*$ é um superideal próprio de $\mathscr{A}$. Portanto, $\mathscr{A}$ é simples ou $\mathscr{A}=\mathscr{B}\oplus\mathscr{B}^*$ com $\mathscr{B}$ simples. ■

No segundo caso, $\mathscr{B}^*$ é isomorfo ao superanel super-oposto. Vamos considerar um superanel $\mathscr{A}$ com a parte ímpar não nula e, para evitar índices duplos, escreveremos no momento $\mathscr{A}=A+B$, onde $A=\mathscr{A}_0$ é a parte par e $B=\mathscr{A}_1$ a parte ímpar, onde B é um bimódulo de A.

Teorema 3.24. *Sejam $\mathscr{A}=A+B$ um superanel associativo com $B\neq\{0\}$ e $*$ uma superinvolução de $\mathscr{A}$. Se $(\mathscr{A},*)$ é simples então $(A,*|_A)$ é simples ou*

$$A=A_1\oplus A_2,\quad B=B_1\oplus B_2, \tag{3.5}$$

onde $(A_i,*|_{A_i})$ são simples e B_i são A-bimódulos irredutíveis com

$$B_1^*=B_2,\ e\ B_2^*=B_1, \tag{3.6}$$

tais que

$$\begin{gathered} A_1B_1=B_1=B_1A_2,\quad A_2B_2=B_2=B_2A_2,\\ B_1B_2=A_1,\quad B_2B_1=A_2, \end{gathered} \tag{3.7}$$

$$A_2B_1=\{0\}=A_1B_2=B_2A_2=B_1B_1=B_2B_2. \tag{3.8}$$

Demonstração. Seja I um ideal $*$-estável não nulo de A. Então $I+BIB+IB+BI$ é um superideal $*$-estável de $\mathscr{A}$. Logo,

$$I+BIB=A\quad\text{e}\quad IB+BI=B. \tag{3.9}$$

Se $I\cap BIB\neq(0)$ então $J=I\cap BIB$ é um ideal $*$-estável de A e, por (3.9) trocando I por J obtemos, $J+BJB=A$. Entretanto, $BJB\subseteq BBIBB\subseteq AIA\subseteq I$. Portanto, $A=J+BJB\subset I$

e $I = A$. Isto é $(A, *|_A)$ é simples como um anel com involução ou para todo ideal $*$-estável próprio I de A, $I \cap BIB = \{0\}$. Nesse caso, sejam

$$A_1 = I, \quad A_2 = BIB, \quad B_1 = IB, \quad B_2 = BI. \tag{3.10}$$

Se $z \in IB \cap BI$ então, para todo $b \in B$, $bz \in BIB \cap BBI \subseteq BIB \cap I = \{0\}$. Similarmente, $bz = 0$ e

$$IB \cap BI \subseteq Ann_B(B) := \{z \in B | Bz = \{0\} = zB\}.$$

Com $Ann_B(B)$ é um A-bimódulo é um superideal $*$-estável de $\mathscr{A}$, logo deve ser $\{0\}$. Portanto, $IB \cap BI = \{0\}$ e vale (3.5). Se J é um ideal $*$-estável próprio de A_1 então é um ideal $*$-estável de $A = A_1 \oplus A_2$. Além disso, $BJB \subseteq BIB = A_2$ e J gera um superideal próprio de $\mathscr{A}$, o que é impossível. Portanto A_1, e por simetria, A_2 são $*$-simples. A equação (3.6) segue de (3.10) e dos fatos que I é $*$-estável e que $*$ é de período 2. Seja C_1 um A-sub-bimódulo de B_1 não nulo. Então C_1^* é um A-sub-bimódulo de B_2 e $C_1C_1^* + C_1^* + C_1 + C_1^*$ é um superideal $*$-estável de $\mathscr{A}$. Portanto, $C_1 = B_1$ e B_1 é irredutível. Similarmente, B_2 é irredutível.

Em seguida, $A_2B_1 = (BIB)IB \subseteq AIB \subseteq IB$; Mas, $BIBIB = BI(BIB) \subseteq BIA \subseteq BI$ e $A_2B_1 \subseteq B_1 \cap B_2 = \{0\}$. Além disso, por (3.5) temos que $B_1B_1 = IBIB = A_1A_2 = \{0\}$. As equações (3.8) são provadas de forma semelhante.

Observemos que $B_1B_2 \subseteq A_1$ e $B_2B_1 \subseteq A_2$ é uma consequência de (3.10). Desde que B_1B_2 é um ideal $*$-estável de A_1, $B_1B_1 = \{0\}$ ou A_1. Se $B_1B_1 = \{0\}$ então, por (3.8), $B_1B = \{0\}$ e $B + B_2B_1$ é um superideal $*$-próprio de $\mathscr{A}$, uma contradição. Logo, $B_1B_2 = A_1$ e, similarmente, $B_2B_1 = A_2$. Por (3.10), $A_1B_1 \subseteq B_1$ e deve ser igual a B_1 pela irredutibilidade de B_1. As outras equações de (3.7) são provadas de forma semelhante. ■

Observação 2. *Se $\mathscr{A} = A_1 \oplus A_2 + B_1 \oplus B_2$ com A_i $*$-simples, B_i irredutíveis A-bimódulos satisfazendo (3.6), (3.7) e (3.8) então não existe um ideal $*$-estável próprio de A com $I \cap BIB \neq \{0\}$.*

Proposição 3.25. *Se $\mathscr{A} = M_{p,q}(\mathscr{D})$, $p, q > 0$, é uma superálgebra com $\mathscr{A}_0 = M_p(\mathscr{A}) \oplus M_q(\mathscr{D})$ e $(A, *|_A)$ é simples então $p = q$, $M_p(\mathscr{D})$ tem uma involução ~ e $(\mathscr{A}, *)$ é isomorfo* *a* $M_{2p}(\mathscr{D})$ *com a superinvolução* $*$ *dada por*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \widetilde{d} & -\mu\widetilde{b} \\ \widetilde{\mu}\widetilde{c} & \widetilde{a} \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

para $a, b, c, d \in M_p(\mathscr{D})$ *e* $\mu \in \mathbb{K}$ *tal que* $\mu\widetilde{\mu} = 1$. *Se* ~ *é de primeiro tipo, então* μ *pode ser escolhido igual a* 1. *Reciprocamente, se* $M_p(\mathscr{D})$ *tem uma involução* ~ *então (3.11) define uma superinvolução na superálgebra simples* $M_{p,p}(\mathscr{D})$.

Demonstração. Como $\mathscr{A}$ tem uma superinvolução então, pelo Teorema 2.67, $\mathscr{D}$ também tem. Nesse caso, desde que $\mathscr{D} = \mathscr{D}_0$, $\mathscr{D}$ tem uma involução $^{-}$ e $M_p(\mathscr{D})$ tem uma involução $\widetilde{a} = \bar{a}^t$, onde t é a involução transposta. Como $(A, *|_A)$ é simples, $M_q(\mathscr{D})$ é anti-isomorfo a $M_p(\mathscr{D})$ e $p = q$. O isomorfismo, $(A, *|_A)$ é dado por $(M_p(\mathscr{D}) \oplus M_p(\mathscr{D}), *)$ com $(a, b)^* = (\widetilde{b}, \widetilde{a})$. Sejam

$$f_{11} = \sum_{i=1}^{p} e_{ii}, \quad f_{22} = \sum_{i=p+1}^{2p} e_{ii}, \quad f_{12} = \sum_{i=1}^{p} e_{ip+i}, \quad f_{21} = \sum_{i=1}^{p} e_{p+ii},$$

temos

$$\begin{aligned} A &= M_p(\mathscr{D})f_{11} \oplus M_p(\mathscr{D})f_{22}, \\ D &= M_p(\mathscr{D})f_{12} \oplus M_p(\mathscr{D})f_{21}, \quad f_{11}^* = f_{22},\ f_{22}^* = f_{11}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$f_{12}^* = (f_{11}f_{12}f_{22})^* = f_{22}^*f_{12}^*f_{11}^* = f_{11}f_{12}^*f_{22}$$

e

$$f_{12}^* = cf_{12}, \text{ para algum } c \in M_p(\mathscr{D}).$$

Para todo $a \in M_p(\mathscr{D})$,

$$(af_{12})^* = ((af_{11})f_{12})^* = cf_{12}\widetilde{a}f_{22} = c\widetilde{a}f_{12}$$

enquanto,

$$(af_{12})^* = (f_{12}(af_{12}))^* = \widetilde{a}f_{11}cf_{12} = \widetilde{a}cf_{12}.$$

Portanto, $c \in Z(M_p(\mathscr{D}))$. Além disso, $f_{12} = (f_{12})^{**} = c\widetilde{c}f_{12}$ implica que $c\widetilde{c} = I_p$. Assim, $c = \mu \in \mathbb{K}$ com $\mu\widetilde{\mu} = 1$. Similarmente, $f_{21}^* = df_{21}$, $d \in Z(M_p(\mathscr{D}))$. Porém, $f_{22} = f_{11}^* = (f_{12}f_{21})^* = -df_{21}cf_{12} = -dcf_{22}$ que implica $d = -c^{-1}$. Portanto, $(af_{12}^*) = -\mu\widetilde{a}f_{12}$ e $(af_{21})^* = \widetilde{\mu}\widetilde{a}f_{21}$ ou

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \widetilde{d} & -\mu\widetilde{b} \\ \widetilde{\mu}\widetilde{c} & \widetilde{a} \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

para a, b, d, $c \in M_p(\mathscr{D})$, se ~ é de primeiro tipo então $\mu = \pm 1$ e, permutando os indicies se necessário, podemos supor que $f_{12}^* = -f_{12}$ e $f_{221}^* = f_{21}$. O inverso é fácil de verificar. ■

Proposição 3.26. *Se $\mathscr{A} = M_{p,q}(\mathscr{D})$, $p, q > 0$, é uma superálgebra com $A = A_1 \oplus A_2$, $A_1 = M_p(\mathscr{D})$, $A_2 = M_q(\mathscr{D})$ e $(A, *|_A)$ não é simples então $(A_1, *|_{A_1})$ e $(A_2, *|_{A_2})$ são do mesmo tipo. Se $*$ é do segundo tipo então $*$ induzida por uma superforma hermitiana par não degenerada. Se $\mathscr{A}$ é de dimensão finita sobre um corpo de característica diferente de 2 e $*$ é do primeiro tipo então um $(A_i, *|_{A_i})$ é de tipo ortogonal e outro de tipo simplético. A graduação em V pode ser escolhida de modo que $*$ seja induzida por uma superforma hermitiana par não degenerada.*

Demonstração. Se $\mathscr{A}$ tem uma superinvolução então, pelo Teorema 2.67, $\mathscr{D}$ tem uma involução $^-$ e $*$ é o adjunto da superforma não-degenerada antihermitiana ou hermitiana. Portanto, as involuções $*|_{A_1}$ e $*|_{A_2}$ são do mesmo tipo. Se forem do segundo tipo, podemos supor que $*$ é induzida por uma superforma hermitiana não-degenerada.

Mostramos a seguir que se elas são do mesmo tipo e a dimensão de $\mathscr{A}$ é finita então $*|_{A_1}$ e $*|_{A_2}$ não podem ser ambas do mesmo tipo (ortogonal ou simplética). Suponha que são. Estendendo o corpo base, se necessário, podemos supor que $A = M_m(\mathscr{C})$, com $\mathscr{C} = \mathbb{K}$ ou $M_2(k)$, os coquatérnios, $A_1 = M_r(\mathscr{C})$, $A_2 = M_s(\mathscr{C})$, $r + s = m$ e que as involuções $*|_{A_i}$ são dadas por $^{-t}$, onde $^{-}$ é a involução padrão e $\mathscr{C}$ e t é a involução transposta. Denotemos e_{ij} as unidades matriciais de $M_m(\mathscr{C})$. Logo, $e_{ij}^* = e_{ji}$ para $1 \leq i, j \leq r$ ou $r+1 \leq i, j \leq m$. Fixemos $i,\ j$ tais que $1 \leq i \leq r$ $r+1 \leq j \leq m$. Então

$$e_{ij}^* = (e_{ii}e_{ij}e_{jj})^* = e_{jj}e_{ij}^*e_{ii} \text{ e } e_{ij}^* = ce_{ji} \text{ para algum } c \in \mathscr{C}.$$

Para todo $a \in \mathscr{C}$

$$(ae_{ij})^* = ((ae_{ii})e_{ij}e_{jj})^* = ce_{ji}\bar{a}e_{ii} = c\bar{a}e_{ji} \text{ e}$$
$$(ae_{ij})^* = (e_{ij}(ae_{jj}))^* = \bar{a}ce_{ji}.$$

Logo, $c \in Z(\mathscr{C})$. Similarmente, $e_{ji}^* = de_{ij}$ para algum $d \in Z(\mathscr{C})$. Além disso, $e_{ij} = (e_{ij})^{**} = \bar{c}de_{ij}$ e como $^{-}$ é a identidade em $Z(\mathscr{C})$, $d = c^{-1}$. Finalmente, $e_{ii} = e_{ii}^* = (e_{ij}e_{ji})^* = -de_{ij}ce_{ji} = -e_{ii}$, uma contradição.

A superálgebra $\mathscr{A} = M_{p,q}(\mathscr{D})$ é isomorfa a superálgebra dos endomorfismo do $\mathscr{D}$-superespaço à esquerda $V = V_0 + V_1$, onde $\{dim_{\mathscr{D}}V_0,\ dim_{\mathscr{D}}V_1\} = \{p, q\}$. Seja $*$ uma superinvolução de $\mathscr{A}$ que estabiliza $A_1 = M_p(\mathscr{D})$ e $A_2 = M_q(\mathscr{D})$. A involução $*|_{A_1}$ (respectivamente, $*|_{A_2}$) é induzida por uma forma hermitiana ou skewhermitiana h_1 (respectivamente, h_2) em V_0 (respectivamente, V_1). Se $*|_{A_1}$ e $*|_{A_2}$ são do primeiro tipo, uma das involuções é do tipo ortogonal e a outra do tipo simplética. Portanto, podemos supor que h_1 é hermitiana e h_2 é skewhermitiana. A superforma hermitiana $h = h_1 \perp h_1$ induz uma superinvolução $\star$ de $End(V)$ cuja a restrição a A_i coincide com $*|_{A_i}$. A composição de $\star$ com $*$, $\star *$, é um automorfismo de $\mathscr{A}$. É interno e a restrição a A_1 e A_2 é a identidade. verifica-se que isso força $\star *$ a ser uma conjugação ψ_c pela soma $c = \gamma_1 + \gamma_2$ de elementos centrais não nulos γ_i de A_i. Alterando a superforma para $\gamma_1 h_1 + h_2\gamma_2$ irá produzir a superinvolução desejada. Portanto, $*$ é induzida por uma superforma hermitiana par em V. $\blacksquare$

Índice Remissivo

Referências Bibliográficas

[1] A. Elduque and M. Kochetov. *Gradings on simple Lie algebras*. Vol. 189. Providence, RI: American Mathematical Society, 2013.

[2] A. Giambruno, M. Zaicev, Polynomial identities and asymptotic methods, Math. Surveys Monographs 122, AMS, Providence, RI, 2005.

[3] C. Năstăsesscu and F. Van Oystaeyen. *Methods of graded rings*. Springer, 2004.

[4] C. Năstăsesscu and F. Van Oystaeyen. *Graded ring theory*. Vol. 28. North-Holland Mathematical Library, 1982.

[5] C. T. C. Wall, Graded Brauer groups, J. Reine Angew. Mth. 213(1963), 187-199.

[6] I. N. Herstein, Rings with involution , Chicago Lectures in Math., Univ. of Chicago Press, Chicago, 1976.

[7] L. H. Rowen, Ring Theory, Vol. I, Academic Press, San Diego/London, 1988.

[8] N. Jacobson, Structure of Rings, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 37, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1956.

[9] R. Hazra. *Graded Rings and Graded Grothendieck Groups*. ArXiv.org (2014). `http://arxiv.org/abs/1405.5071/arXiv:1405.5071` [math.RA]. Acessado: .

[10] M.L. Racine, E.I. Zelmanov, *Simple Jordan superalgebras with semisimple even part*. J. Algebra, 270 (2003), no. 2.

[11] J. S. Rose. *A course on group theory*. Courier Corporation, 1994.

[12] J.P. Tignol, A. R. Wadsworth, *Value functions on simple algebras, and associated graded rings.* Springers Monographs in Mathematics, 2015.

[13] M.L. Racine, *Primitive superalgebras with superinvolution.* J.Algebra, 206 (1998), 2.

[14] M.A. Knus, A.S. Merkurjev, M.Rost, and J.-P. Tignol, *The book of involutions.* American Mathematical Society Colloquium Publications, vol.44, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.