

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

**Existência de soluções positivas para equações e  
sistemas semilineares via fundamentos  
topológicos e baricentro**

por

**Elson Leal de Moura**

Brasília

2017

*"O futuro tem muitos nomes: para os fracos, é o inatingível; para os temerosos, o desconhecido; para os valentes, é a oportunidade."*

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Existência de soluções positivas para equações e sistemas semilineares via fundamentos topológicos e baricentro

por

Elson Leal de Moura

*Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB,  
como requisito parcial para obtenção do grau de*

## DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 09 de março de 2017.

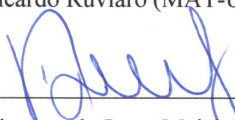
Comissão Examinadora:



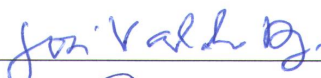
Prof. Dra. Liliane de Almeida Maia – Orientadora (MAT-UnB)



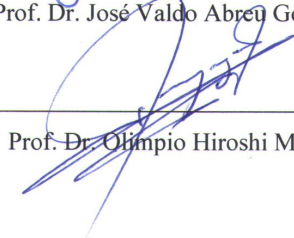
Prof. Dr. Ricardo Ruviano (MAT-UnB)



Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo (MAT-UnB)



Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves (UFG)



Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki (UFJF)

\*O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração deste trabalho.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

LEL49e Leal de Moura, Elson  
Existência de soluções positivas para equações e  
sistemas semilineares via fundamentos topológicos e  
baricentro. / Elson Leal de Moura; orientador  
Liliane Almeida Maia. -- Brasília, 2017.  
112 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Matemática) --  
Universidade de Brasília, 2017.

1. Equações de Schrodinger. 2. Sistema fortemente  
acoplado. 3. Assintoticamente linear e superlinear.  
4. Decaimento exponencial. 5. Métodos variacionais.  
I. Almeida Maia, Liliane , orient. II. Título.

# Agradecimentos

---

Ao meu Senhor, Criador, Pai, Redentor. A Ele dou graças sempre. Em especial, neste momento, agradeço por esta grandiosa conquista.

A minha mãe Maria, Nossa Senhora Aparecida, eu te escolhi como Padroeira e Defensora dos meus estudos. Iluminou com Tua claridade as obscuridades da minha inteligência, foi e será o meu guia. Não cabe mais palavras Mãe Santíssima, apenas o silêncio de meu coração feliz e agradecido.

Ao meu filho Bernardo que mesmo longe de mim torceu para eu chegar a este dia. *A você, meu filho amado, dedico esta tese. A você dedico todos os meus dias de vida.*

A minha família: Elza, Pai(falecido em 2016), Elcio, Elisiane, Ednéia, Júnior que estão sempre comigo espiritualmente. Nós conseguimos!

A meus dois grandes amigos que a Vida me permitiu conhecer e aprender com eles : "João Olímpio Cardoso" (falecido em 2016) e "José Geraldo Alves de Amaral". Obrigado por tudo!

A minha avó, tios, tias e primos que rezaram por mim. A graça de Deus esteja convosco.

A minha orientadora, professora Liliane, obrigado pela orientação no Mestrado e Doutorado, por me ensinar a ser melhor do que eu era. Peço desculpas pelos meus erros.

Ao professor Olímpio, por me incentivar a estudar e crescer. Obrigado pela amizade e felicidade de permitir conhecer uma pessoa de tão grande coração. Que Deus lhe dê muitas graças e bênçãos.

Ao professor Ricardo, obrigado pela amizade e disponibilidade para colaborar com a minha tese. Obrigado grande amigo!

Aos professores José Valdo e Giovany Figueiredo por participarem da banca, pelas correções e pelas sugestões para a finalização deste trabalho.

Aos amigos Adriano, Camila, Cid e Dióscoros por terem tornado esse período mais agradável.

Agradeço a *UFVJM* pelo apoio financeiro durante este trabalho.

# Resumo

---

O problema semilinear elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u + u = (1 + a(x))f(u) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

é estudado com  $N \geq 2$ ,  $f$  uma função assintoticamente linear ou superlinear não necessariamente homogênea e a função peso  $a(x)$  tendendo a zero no infinito e podendo mudar de sinal.

Além disso, o sistema do tipo gradiente não homogêneo, assintoticamente linear e fortemente acoplado

$$\begin{cases} -\Delta u + u = (1 + a(x))\frac{u(u^2 + v^2)}{1 + s(u^2 + v^2)} + \lambda v & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + v = (1 + a(x))\frac{v(u^2 + v^2)}{1 + s(u^2 + v^2)} + \lambda u & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u, v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

é estudado com  $N \geq 3$ ,  $\lambda$  e  $s$  parâmetros reais satisfazendo  $0 < s < \frac{1}{1 + \lambda}$ ,  $0 < \lambda < 1$  e condições na função peso  $a(x)$  semelhantes as do caso escalar.

Usando argumentos topológicos que envolvem uma função baricentro, obtem-se existência de soluções positivas para ambos os problemas em situações em que não existem soluções de energia mínima *ground state*.

Palavras-Chaves: Equações de Schrödinger; assintoticamente linear; superlinear; solução positiva; métodos variacionais; sistema fortemente acoplado; decaimento exponencial, baricentro.

# Abstract

---

The semilinear elliptic problem

$$\begin{cases} -\Delta u + u = (1 + a(x))f(u) & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

is studied with  $N \geq 2$ ,  $f$  an asymptotically linear or superlinear not necessarily homogeneous function and the weight function  $a(x)$ , vanishing at infinity and may change its sign.

In addition, the asymptotically linear and strongly coupled non-homogeneous gradient type system

$$\begin{cases} -\Delta u + u = (1 + a(x))\frac{u(u^2 + v^2)}{1 + s(u^2 + v^2)} + \lambda v & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + v = (1 + a(x))\frac{v(u^2 + v^2)}{1 + s(u^2 + v^2)} + \lambda u & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u, v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

is studied with  $N \geq 3$ ,  $\lambda$  and  $s$  real parameters satisfying  $0 < s < \frac{1}{1 + \lambda}$ ,  $0 < \lambda < 1$  and conditions on the weight function  $a(x)$  such as in the scalar case.

Using topological arguments involving a barycenter function, we obtain existence of positive solutions for both problems in situations where there are no *ground state* solutions.

**Key-Words:** Schrödinger equations; asymptotically linear; superlinear; positive solution; variational methods; strongly coupled system; exponential decay, barycenter.

# Sumário

---

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Caso escalar</b>	<b>7</b>
1.1 Preliminares e resultados auxiliares . . . . .	9
1.2 Compacidade . . . . .	19
1.3 Projeção sobre Nehari . . . . .	21
1.4 Estimativas assintóticas . . . . .	29
1.5 Demonstração do resultado principal . . . . .	46
<b>2 Sistema fortemente acoplado</b>	<b>50</b>
2.1 Preliminares . . . . .	52
2.2 Decaimento das soluções do problema limite . . . . .	53
2.3 Variedade de Nehari e limitação da sequência de Palais-Smale . . . . .	66
2.4 Compacidade . . . . .	77
2.5 Estimativas assintóticas . . . . .	79
2.6 Demonstração do resultado principal do sistema . . . . .	97



# Introdução

---

A busca de soluções de campos escalares de equações não lineares usando métodos variacionais tem sido vigoroso nas últimas três décadas, vide [10, 13, 12, 23, 39, 42], entre muitos outros. Neste assunto, equações semilineares elípticas em  $\mathbb{R}^N$  surgem como ondas estacionárias das equações de Schrödinger e equações de Klein-Gordon surgem na modelagem, por exemplo, da propagação de um feixe de luz em meios Kerr e não-Kerr, como em [3, 44] e suas referências, o que leva ao problema elíptico

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(x, u) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

O interesse por este tipo de problema é duplo: por um lado, a vasta gama de aplicações e, por outro lado, o desafio matemático introduzido quando se trabalha em um domínio não limitado como o espaço vetorial  $\mathbb{R}^N$ .

Neste trabalho estamos preocupados especificamente com a seguinte versão simplificada do problema  $(P)$ :

$$(P_a) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = (1 + a(x))f(u) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

com hipóteses sobre  $a(x)$  que implicam este problema não ter uma solução de energia mínima e conduzem ao desafio de procurar soluções em níveis mais elevados de energia. Nossa motivação especial foi o importante trabalho de Bahri e Li [9] onde introduziram um procedimento de *min-max* para provar a existência de uma solução positiva *bound state* de

$$(P_q) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = q(x)|u|^{p-1}u & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde  $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ , se  $N \geq 3$ , e  $1 < p < +\infty$ , se  $N = 1, 2$  com  $q \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$  satisfazendo algum limite assintótico exponencial, quando a solução *ground state* não existe para o problema.

Nosso objetivo é ampliar o artigo [9] para não linearidades  $f(u)$  não homogêneas que são superlineares ou assintoticamente lineares no infinito e em que  $a(x)$  também satisfaz um limite assintótico exponencial. Nós utilizamos uma abordagem variacional e um argumento topológico introduzido em [9] e atualizado em [18, 24, 31].

Há uma extensa literatura sobre o assunto. Vamos destacar alguns artigos que são mais relevantes no que diz respeito aos nossos principais objetivos. Nos casos autônomos onde  $V(x) = m$  e  $f(x, u) = f(u)$ , o

trabalho pioneiro de Berestycki e Lions [13] exibiu uma solução *ground state* para  $(P)$ . Usando argumentos de minimização com restrição, eles mostraram a existência de uma solução positiva, radial e investigaram a sua regularidade e o seu decaimento exponencial no infinito. Em 1984, P. L. Lions [27] introduziu idéias inovadoras notáveis de concentração-compacidade que permitiu inúmeras investigações sobre este tipo de problema.

Lehrer e Maia em [29] estudaram o problema  $(P)$  com  $V(x) = \lambda > 0$  e  $f(x, u) = a(x)f(u)$  em  $\mathbb{R}^N$ ,  $f(u)$  assintoticamente linear no infinito e impuseram várias hipóteses sobre  $a(x)$ . Trabalhando com a conhecida variedade de Pohozaev e usando argumento de *Linking*, elas provaram a existência de uma solução *bound state* para o problema.

Clapp e Maia em [18] investigaram a existência de solução *ground state* positiva para a equação  $-\Delta u + V(x)u = f(u)$  in  $\mathbb{R}^N$  onde  $f$  é superlinear ou assintoticamente linear no infinito utilizando técnicas variacionais, no caso em que o nível crítico de energia mínima do problema não é atingido.

Recentemente, Weth e Évéquoz [24] consideraram a equação em  $(P)$  com hipóteses sobre  $a(x)$ , o que os levou a trabalhar com o espaço  $H^1(\mathbb{R}^N)$  na forma de decomposição espectral  $E^+ \oplus E^0 \oplus E^-$  e com  $F$ , a primitiva de  $f$ , do tipo superquadrático no infinito. Para ter sucesso na obtenção de estimativas de energia convenientes, eles tiveram que impor outras hipóteses, tais como a existência de uma constante  $C > 0$  tal que

$$F(x, u) \geq F_{+\infty} - Ce^{-\alpha\sqrt{a_{\infty}}|x|}(|u|^2 + |u|^p); \quad \alpha > 0,$$

e com  $f(u) = o(|u|^{1+\nu})$ , quando  $|u| \rightarrow 0$ , para algum  $\nu > 0$ . Assumindo essas hipóteses, eles obtiveram uma solução positiva que não é, necessariamente, *ground state*.

Inspirado pelas idéias em [24] e [31] nós realizamos algumas estimativas precisas de energia e aplicamos um argumento topológico envolvendo a função baricentro para mostrar que existe um valor crítico para o funcional relacionado com a equação de Euler em  $(P_a)$ , em um nível adequado de energias, dando uma solução para o problema.

Em contraste com as obras mencionadas acima, podemos destacar alguns aspectos relevantes. Distintamente do método em [9], nós evitamos a utilização de uma identidade algébrica (Lema 2.1 em [9]) ao trabalhar com o vínculo da variedade de Nehari e, portanto, permitindo não linearidades  $f$  mais gerais que são não homogêneas. Além disso, diferentemente de [29], trabalhamos com a variedade de Nehari em vez da variedade de Pohozaev o que nos permitiu trabalhar com pesos  $a(x)$  mais gerais, assim, com menos restrições para o problema. Finalmente, fomos capazes de melhorar as restrições de regularidade da função  $f$  exigindo apenas  $f \in C^1[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty)$  explorando alguns cálculos técnicos com a nossa hipótese (ver Observação 1.2 e Lema 1.14) e evitando também a utilização do Lema 2.2 em [1] ou as hipóteses  $(F'_2)$  e (4) em [24].

Segundo o nosso conhecimento, este resultado é novo e examinando as interações de duas cópias de translações da solução positiva *ground state* do problema limite

$$(P_{\infty}) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = f(u) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

e manipulando estimativas exponenciais delicadas dessas translações, fomos capazes de estender o resultado em [9].

Vamos assumir  $N \geq 2$  e também as seguintes hipóteses para a função peso:

$$(a_1) \quad a \in C(\mathbb{R}^N); \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + a(x)) = \tau > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} a(x) = 0;$$

(a<sub>2</sub>) existem constantes  $p_1, p_2$  com  $1 < p_1 \leq p_2 < 2^* - 1$  tais que  $|a(x)| \leq C_1 e^{-k|x|}$  onde  $k \in (2, p_1 + 1)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^N$  e  $C_1$  uma constante positiva.

Ademais, nós vamos considerar  $f$ , não necessariamente homogênea, satisfazendo:

(f<sub>1</sub>)  $f \in C^1[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty)$ ;

(f<sub>2</sub>)  $f$  e sua derivada de primeira ordem têm o seguinte crescimento

$$\left| f^{(k)}(t) \right| \leq C(|t|^{p_1-k} + |t|^{p_2-k}),$$

para  $k \in \{0, 1\}$  para  $t > 0$  e  $C > 0$  uma constante;

(f<sub>3</sub>)  $f'(t) > \frac{f(t)}{t}$ , se  $t > 0$ ;

(f<sub>4</sub>)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} \geq l_\infty > 1$  para algum  $l_\infty \in \mathbb{R}$ ;

(f<sub>5</sub>)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \{f(t)t - 2F(t)\} = +\infty$  onde  $F(t) := \int_0^t f(\varsigma) d\varsigma$ ;

(U) A solução positiva do problema ( $P_\infty$ ) é única.

Nosso primeiro objetivo neste trabalho é tentar demonstrar o seguinte resultado:

**Teorema 0.1.** *Assumindo que as hipóteses (a<sub>1</sub>)–(a<sub>2</sub>), (f<sub>1</sub>)–(f<sub>5</sub>) e (U) são satisfeitas, então o problema ( $P_a$ ) tem uma solução positiva  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ . Além disso, se  $a \in C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ , então a solução é clássica.*

A hipótese de unicidade de solução positiva de ( $P_\infty$ ) é fundamental para o método construtivo que será aplicado na obtenção de solução positiva de ( $P$ ). Tal unicidade é conhecida no caso da potência pura superlinear e subcrítica  $f(s) = |s|^p$ , com  $1 < p < 2^* - 1$  demonstrado por Kwong em [26], e no caso da não linearidade modelo, assintoticamente linear,  $f(s) = l_\infty \frac{s^3}{1+s^2}$  demonstrado em Serrin e Tang [40]. Estes dois exemplos de não linearidades  $f$  satisfazem as nossas hipóteses (f<sub>1</sub>) – (f<sub>5</sub>). Porém, em geral a unicidade pode não ocorrer. Resultados de condição suficiente podem ser encontrados em [36] e [40]. Por exemplo, se a função  $h(u) := \frac{-u + f(u)}{uf'(u) - f(u)}$  é não decrescente em  $(\tau, \infty)$  onde  $\tau$  é o único número positivo satisfazendo  $\frac{f(\tau)}{\tau} = 1$ , então tem-se uma condição suficiente para a unicidade da solução positiva de ( $P_\infty$ ).

A hipótese (f<sub>4</sub>) complementa (f<sub>3</sub>) afirmando que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t}$  pode ser  $+\infty$  ou uma constante  $l_\infty$ . Neste segundo caso, a constante  $l_\infty$  deve ser maior que 1 para que ( $P_\infty$ ) tenha solução não trivial segundo Berestycki e Lions [13] com  $m = 1$ .

Em um segundo momento, sobre o estudo de sistemas, podemos citar o clássico trabalho de Ambrosetti-Cerami - Ruiz [5]. Usando argumentos de concentração de compacidade os autores mostraram resultados de existência de solução positiva do tipo *ground* e *bound state* do seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= (1 + a(x))|u|^{p-1}u + \lambda v & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + v &= (1 + b(x))|v|^{p-1}v + \lambda u & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

considerando  $N \geq 2$ ,  $(u, v) \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ ,  $0 < \lambda < 1$  um parâmetro real,  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} a(x) = 0 = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} b(x)$  e, ainda  $\inf_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + a(x)) > 0$  e  $\inf_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + b(x)) > 0$ , além de assumirem normas  $|a|_{L^\infty}$  e  $|b|_{L^\infty}$  suficientemente pequenas.

Ambrosetti [4], usando métodos de perturbação, provou a existência de soluções para o sistema não autônomo não linear de equações de Schrödinger as quais são linearmente acopladas

$$\begin{cases} -u_1'' + u_1 &= (1 + \varepsilon b_1(x))u_1^3 + \gamma u_2 & \text{em } \mathbb{R}, \\ -u_2'' + u_2 &= (1 + \varepsilon b_2(x))u_2^3 + \gamma u_1 & \text{em } \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde  $\gamma$  e  $\varepsilon$  são parâmetros reais,  $b_i \in L^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} b_i(x) = 0$ ;  $u_1, u_2 \in W^{1,2}(\mathbb{R})$  com  $i = 1, 2$ . Quando  $\varepsilon = 0$ , este sistema foi estudado em [3] do ponto de vista analítico e numérico e quando  $b_i \equiv 0$  e  $\varepsilon = 1$ , o sistema foi estudado por [6] mostrando a existência de solução com componente multi-bump.

Em 2013, Zhang, Xu e Zhang em [48] estudaram o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u + (1 + a(x))u &= F_u(u, v) + \lambda v & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + (1 + b(x))v &= F_v(u, v) + \lambda u & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

para  $N \geq 2$ ,  $a, b$  periódicos ou assintoticamente periódicos e  $F$  superlinear. A ferramenta utilizada para mostrar a existência de *ground state* positiva foi a variedade de Nehari e princípio de concentração de compacidade.

Lehrer e Maia em [29] estudaram o problema  $-\Delta u + \lambda u = a(x)f(u)$  em  $\mathbb{R}^N$ , com  $f$  assintoticamente linear no infinito e impondo várias hipóteses sobre  $a(x)$ . Usando a variedade de Pohozaev e argumentos de *Linking*, as autoras provaram a existência de solução *bound state* para o problema. Com as devidas adaptações, Lehrer e Maia também garantiram a existência de solução não nula via Teorema de *Linking* para o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = a(x) \frac{u(u^2 + v^2)}{1 + s(u^2 + v^2)} + \lambda v & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + v = a(x) \frac{v(u^2 + v^2)}{1 + s(u^2 + v^2)} + \lambda u & \text{em } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Apesar de no caso modelo o termo não linear  $f$ , assintoticamente linear, satisfazer a hipótese  $f(t)/t$  crescente para  $t > 0$ , ou no caso do sistema  $\nabla F(tu, tv)(u, v)/t$  crescente na variável  $t$ , para  $(u, v) \neq (0, 0)$  e permitir a projeção sobre a variedade de Nehari do funcional e a obtenção de pontos críticos dos funcionais associados sob este vínculo, este aspecto não foi utilizado em [29] permitindo-se não linearidades mais gerais, sem esta característica. Assim sendo, tanto no caso escalar quanto no caso do sistema foram usadas projeções sob a variedade de Pohozaev do funcional. Entretanto para tratar os termos não lineares não homogêneos com hipóteses de crescimento menos restritivas, foram necessárias hipóteses extras de regularidade e crescimento sobre o peso  $a(x)$ .

Existe uma motivação Física para o estudo deste tipo de sistema de duas equações de Schrödinger acopladas, nas quais encontra-se um acoplamento linear nas duas componentes. Um exemplo é o sistema de duas equações que modelam os condensados de Bose-Einstein compostos por dois estados hiperfinos (Ver [11] e suas referências). Tais modelos consideram um grande número de pequenos componentes individuais que interagem uns com os outros; o fenômeno é descrito pelas equações de Gross-Pitaevskii em [34, 35]

$$\begin{cases} i \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = (L_1 + U_{11}|\psi_1|^2 + U_{12}|\psi_2|^2)\psi_1 + \lambda\psi_2, \\ i \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = (L_2 + U_{22}|\psi_2|^2 + U_{21}|\psi_1|^2)\psi_2 + \lambda\psi_1, \end{cases} \quad (1)$$

onde  $L_j = -\partial^2/\partial x^2 + V_j$  com  $j = 1, 2$ . Embora a dinâmica dos condensados acoplados de Bose-Einstein tenha atraído a atenção nos últimos anos, o problema acima também surge em outros contextos físicos, mais especificamente em modelos ópticos não-lineares em que as equações descrevem feixes de luz em fibras ópticas onde  $\psi_1$  e  $\psi_2$  representam o campo de luz dentro de ondas eletromagnéticas ou ondas sonoras em [47]. Os sistemas elípticos encontrados em [5, 29] podem ser obtidos de (1) quando se estuda a existência de soluções estacionárias (solitárias) para o sistema, isto é, uma solução da forma  $\psi_1(x, t) = \exp(-iEt)u(x)$  e  $\psi_2(x, t) = \exp(-iEt)v(x)$ .

Inspirados pelos trabalhos de Ambrosetti - Cerami - Ruiz em [5], Clapp - Maia em [18] e Lehrer - Maia em [29], nos propusemos a estudar o seguinte sistema fortemente acoplado com não-linearidade assintoticamente linear no infinito

$$(S) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = (1 + a(x)) \frac{u(u^2 + v^2)}{1 + s(u^2 + v^2)} + \lambda v & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + v = (1 + a(x)) \frac{v(u^2 + v^2)}{1 + s(u^2 + v^2)} + \lambda u & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u, v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

com  $N \geq 3$ ,  $0 < \lambda < 1$  e  $s$  um parâmetro real satisfazendo  $0 < s < \frac{1}{1 + \lambda}$ . Baseados no método de Bahri - Li em [9] realizamos estimativas de energia mais precisas e aplicamos um argumento topológico envolvendo a função baricentro para mostrar que existe um valor crítico para o funcional relacionado com a equação de Euler do sistema (S), em um nível adequado de energias, dando uma solução para o sistema.

Comparando-se com as obras mencionadas acima, podemos destacar alguns aspectos relevantes. Distintamente do método em [5] que trata do problema homogêneo, utilizamos técnicas de combinação convexa de duas cópias da solução *ground state* transladadas, técnica introduzida por Bahri-Li em [9], para tratarmos do nosso problema não homogêneo. Além disso, diferentemente de [5] que admite  $|a|_{L^\infty}$  e  $|b|_{L^\infty}$  suficientemente pequenas, estamos livres para não assumir esta restrição nas normas do supremo, porém assumir um decaimento exponencial para  $a(x)$ , visto que  $a(x)$  é positivo e/ou negativo (isto é, podendo mudar de sinal). Complementando os resultados em [29], trabalhamos com a variedade de Nehari em vez da variedade de Pohozaev o que nos permitiu trabalhar com funções pesos  $a(x)$  contínuas e assim mais gerais do que os pesos de classe  $C^2$  encontrados em [29]. Por fim, destacamos a necessidade de demonstrar o decaimento exponencial da solução do problema limite relacionado ao sistema (S) na Seção 2.2, visto que o resultado provavelmente existe na literatura, entretanto não encontramos uma referência.

Vamos assumir as seguintes hipóteses sobre a função peso para o sistema (S)

$$(a_1) \quad a \in C(\mathbb{R}^N); \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + a(x)) = \varsigma > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} a(x) = 0;$$

$$(a_2) \quad |a(x)| \leq C e^{-k|x|} \quad \text{onde } k \in (2\sqrt{1 - \lambda}, 4\sqrt{1 - \lambda}) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N \quad \text{e } C \text{ uma constante positiva;}$$

(U) A solução positiva  $(u, v)$ ,  $u > 0, v > 0$  do sistema limite

$$(\mathbb{S}_\infty) \begin{cases} -\Delta u + u = \frac{u(u^2 + v^2)}{1 + s(u^2 + v^2)} + \lambda v, & \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + v = \frac{v(u^2 + v^2)}{1 + s(u^2 + v^2)} + \lambda u, & \mathbb{R}^N, \\ u, v \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

é única ou qualquer solução positiva está no mesmo nível de energia do funcional associado a  $(\mathbb{S}_\infty)$ .

O nosso principal resultado sobre sistemas é o seguinte teorema

**Teorema 0.2.** *Assuma  $0 < \lambda < 1$ ,  $0 < s < \frac{1}{1 + \lambda}$ , as hipóteses  $(a_1), (a_2)$  e (U), então o problema (S) tem uma solução positiva  $(u, v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$ . Além disso, se  $a \in C_{loc}^{1, \alpha}(\mathbb{R}^N)$ , então a solução  $(u, v)$  é clássica.*

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: no Capítulo 1, estudaremos o problema escalar

$$\begin{cases} -\Delta u + u = (1 + a(x))f(u) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

realizando algumas estimativas de energia e aplicando um argumento topológico envolvendo a função baricentro para mostrar que existe um valor crítico para o funcional relacionado com a equação de Euler do problema acima, em um nível adequado de energias, dando uma solução para o problema. Especificamente, na Seção 1.1 trataremos de alguns resultados auxiliares; na Seção 1.2 estudaremos a compacidade da sequência de Palais-Smale para o funcional associado; na Seção 1.3 demonstraremos a projeção sobre a variedade de Nehari; na Seção 1.4 realizaremos as estimativas de energia assintótica do funcional associado e decaimento exponencial das soluções do problema limite, por fim, na Seção 1.5 apresentaremos a prova do resultado principal deste capítulo utilizando argumentos topológicos.

No Capítulo 2, estudaremos o sistema do tipo gradiente não homogêneo, fortemente acoplado

$$\begin{cases} -\Delta u + u = (1 + a(x)) \frac{u(u^2 + v^2)}{1 + s(u^2 + v^2)} + \lambda v & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + v = (1 + a(x)) \frac{v(u^2 + v^2)}{1 + s(u^2 + v^2)} + \lambda u & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u, v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

com  $0 < \lambda < 1$  e  $s$  é um parâmetro real satisfazendo  $0 < s < \frac{1}{1 + \lambda}$ . Mostraremos primeiramente o decaimento exponencial da solução do problema limite na Seção 2.2 e, obteremos uma solução positiva para o sistema seguindo a técnica utilizada no caso escalar e em Clapp - Maia [18]. Especificamente, na Seção 2.1 trataremos de alguns resultados preliminares; na Seção 2.2 estudaremos o decaimento exponencial das soluções do problema limite; na Seção 2.3 estudaremos a variedade de Nehari e provaremos a limitação da sequência de Palais-Smale; na Seção 2.4 estudaremos a compacidade da sequência de Palais-Smale para o funcional associado; na Seção 2.5 estudaremos as estimativas assintóticas do funcional associado; por fim, na Seção 2.6 apresentaremos a prova do resultado principal deste capítulo.

# Caso escalar

Neste capítulo, como descrito na introdução, estudaremos o problema

$$(P_a) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = (1 + a(x))f(u) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Vamos assumir  $N \geq 2$  e também as seguintes hipóteses para a função peso:

$$(a_1) \quad a \in C(\mathbb{R}^N); \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + a(x)) = \tau > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} a(x) = 0;$$

$$(a_2) \quad \text{existem constantes } p_1, p_2 \text{ com } 1 < p_1 \leq p_2 < 2^* - 1 \text{ tais que } |a(x)| \leq C_1 e^{-k|x|} \text{ onde } k \in (2, p_1 + 1), \\ \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N \text{ e } C_1 \text{ uma constante positiva.}$$

Outrossim, vamos considerar  $f$  não necessariamente homogênea satisfazendo

$$(f_1) \quad f \in C^1[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty);$$

$$(f_2) \quad f \text{ e sua derivada de primeira ordem têm o seguinte crescimento}$$

$$|f^{(k)}(t)| \leq C(|t|^{p_1 - k} + |t|^{p_2 - k}),$$

para  $k \in \{0, 1\}$  para  $t > 0$  e onde  $C > 0$  é uma constante;

$$(f_3) \quad f'(t) > \frac{f(t)}{t}, \text{ se } t > 0;$$

$$(f_4) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} \geq l_\infty > 1 \text{ para algum } l_\infty \in \mathbb{R};$$

$$(f_5) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \{f(t)t - 2F(t)\} = +\infty, \text{ em que } F(t) := \int_0^t f(\varsigma) \, d\varsigma;$$

$$(U) \quad \text{A solução positiva do problema } (P_\infty) \text{ é única.}$$

**Observação 1.1.** Note que a hipótese  $(f_3)$  implica que

$$\frac{1}{2}f(t)t - F(t) > 0, \quad \text{se } t \neq 0. \tag{1.1}$$

Esta implicação junto com a hipótese  $(f_5)$  é conhecido por condição de não quadraticidade de  $f$ .

**Observação 1.2.** Note também que a hipótese  $(f_2)$  implica que, para toda constante positiva  $\mu$  satisfazendo  $0 < 1 + \mu < p_1$ , tem-se  $f(u) = o(|u|^{1+\mu})$ , quando  $|u| \rightarrow 0$ .

Como o problema é variacional, nós precisamos introduzir ferramentas variacionais para podermos demonstrar os resultados subsequentes. Inicialmente vamos definir  $f(t) := -f(-t)$  para  $t < 0$ . Assim temos que  $f$  é de classe  $C^2(\mathbb{R})$  e é uma função ímpar. É importante observar que se  $u$  é solução positiva do problema  $(P_a)$  para essa nova função,  $u$  é também solução do problema  $(P_a)$  para a função original. Vamos, então, considerar esta extensão e estabelecer a existência de solução positiva para o problema.

Iremos usar a constante geral  $C > 0$  para simplificar a notação e assim  $C$  não será sempre a mesma constante no que segue. Considerando o espaço de Hilbert  $H^1(\mathbb{R}^N)$  com o produto interno definido por

$$\langle u, v \rangle := \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + uv) \, dx$$

e a norma associada

$$\|u\|^2 := \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2) \, dx.$$

O funcional associado ao problema  $(P_a)$  é definido por

$$I(u) := \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))F(u) \, dx \quad (1.2)$$

e a sua derivada

$$I'(u)v = \langle u, v \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))f(u)v \, dx. \quad (1.3)$$

Trabalharemos com a variedade de Nehari definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &:= \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}; J(u) = 0 \right\} \\ &= \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}; \|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))f(u)u \, dx \right\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

cujo funcional associado é

$$J(u) := I'(u)u = \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))f(u)u \, dx. \quad (1.5)$$

Consideremos também o nível de energia mínima associado ao funcional  $I$  definido por

$$m := \inf_{u \in \mathcal{N}} I(u). \quad (1.6)$$

Associado ao problema  $(P_a)$ , por  $(a_1)$ , utilizaremos fortemente o problema limite

$$(P_\infty) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = f(u) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

e, associado a este problema limite, definimos o nível de energia mínima:

$$m_\infty := \inf_{u \in \mathcal{N}_\infty} I_\infty(u), \quad (1.7)$$



para o funcional associado definido por

$$I_\infty(u) := \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) \, dx \quad (1.8)$$

e sua derivada dada por

$$I'_\infty(u)v = \langle u, v \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v \, dx, \quad v \in H^1(\mathbb{R}^N). \quad (1.9)$$

Analogamente, o funcional associado a  $\mathcal{N}_\infty$  é definido por

$$J_\infty(u) := I'_\infty(u)u = \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u \, dx. \quad (1.10)$$

## 1.1 Preliminares e resultados auxiliares

Feitas estas considerações iniciais, nós pretendemos demonstrar o primeiro resultado que contém as propriedades principais sobre a variedade  $\mathcal{N}$  associada ao funcional  $I$ .

**Lema 1.1.** *A variedade  $\mathcal{N}$  satisfaz:*

- a) *existe um número  $\alpha > 0$  tal que para todo  $u \in \mathcal{N}$  tem-se  $\|u\| \geq \alpha$ ;*
- b)  *$\mathcal{N}$  é uma subvariedade fechada, de classe  $C^2$  em  $H^1(\mathbb{R}^N)$  e é variedade natural para  $I$ ;*
- c) *para todo  $u \in \mathcal{N}$ , a função  $t \mapsto g(t) := I(tu)$  é estritamente crescente no intervalo  $[0, 1)$  e estritamente decrescente no intervalo  $(1, +\infty)$ . Assim, em particular, pode-se afirmar que*

$$I(u) = \max_{t>0} I(tu) > 0.$$

**Demonstração:** Verificação de (a) Por (a<sub>1</sub>) temos  $a \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ . Segue que  $1 + \|a(x)\|_\infty \leq C$ . Usando a expressão de  $J$  em (1.5), (f<sub>2</sub>), para todo  $u \in \mathcal{N}$  obtemos

$$\begin{aligned} J(u) &= I'(u)u = \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))f(u)u \, dx \\ &\geq \|u\|^2 - C \int_{\mathbb{R}^N} (|u|^{p_1+1} + |u|^{p_2+1}) \, dx. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Note que  $2 < p_1 + 1 \leq p_2 + 1$ . Logo, existe um  $t \in (0, 1)$  que nos permite escrever  $p_1 + 1 = 2t + (1-t)(p_2 + 1)$ . Daí, pela desigualdade de Hölder segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_1+1} \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2t} |u|^{(1-t)(p_2+1)} \, dx \leq \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \, dx \right)^t \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_2+1} \, dx \right)^{1-t}$$

com  $p = \frac{1}{t}$  e  $p' = \frac{1}{1-t}$ . Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_1+1} \, dx \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{2t} \|u\|_{L^{p_2+1}(\mathbb{R}^N)}^{(p_2+1)(1-t)}.$$

Desde que temos a imersão contínua  $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$  para  $2 \leq q \leq 2^*$  e temos  $p_2 + 1 < 2^*$  obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_1+1} dx \leq \|u\|_{H^1}^{2t} \|u\|_{H^1}^{(p_2+1)(1-t)}.$$

Sabendo, pela desigualdade de Young que  $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'} = ta^{1/t} + (1-t)b^{1/(1-t)}$ , podemos reescrever a expressão anterior da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_1+1} dx &\leq \frac{1}{C} \|u\|_{H^1}^{2t} C \|u\|_{H^1}^{(p_2+1)(1-t)} \\ &\leq \frac{t}{C} \|u\|_{H^1}^2 + (1-t)(C)^{1/(1-t)} \|u\|_{H^1}^{p_2+1}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Usando a imersão contínua novamente temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_2+1} dx = C \|u\|_{L^{p_2+1}(\mathbb{R}^N)}^{p_2+1} \leq C \|u\|_{H^1}^{p_2+1}. \quad (1.13)$$

Usando as estimativas (1.12) e (1.13) na expressão de  $J$  em (1.11) obtemos

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \|u\|^2 - t \|u\|^2 - C \|u\|^{p_2+1} \\ &= (1-t) \|u\|^2 - C \|u\|^{p_2+1}. \end{aligned}$$

Por fim, se  $u \in \mathcal{N}$  temos  $J(u) = 0$ . Segue que

$$\|u\|^{p_2-1} = C \frac{\|u\|^{p_2+1}}{\|u\|^2} \geq \frac{1-t}{C}.$$

Portanto, existe  $\alpha > 0$  tal que  $\|u\| \geq \alpha, \forall u \in \mathcal{N}$ .

Verificação de (b) Note que  $\mathcal{N} := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}; J(u) = 0\} = J^{-1}(\{0\})$ . Como  $J$  é contínuo, segue que  $\mathcal{N}$  é uma subvariedade fechada de  $H^1(\mathbb{R}^N)$ .

Além disso, derivando-se o funcional  $J$  em (1.5) e aplicando em  $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ ,

$$J'(u)v = 2 \langle u, v \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x)) [f'(u)u + f(u)] v dx.$$

Em particular, tomando-se  $v = u$ , segue que

$$\begin{aligned} J'(u)u &= 2 \langle u, u \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x)) [f'(u)u + f(u)] u dx \\ &= 2 \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x)) [f'(u)u + f(u)] u dx. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Se  $u \in \mathcal{N}$ , então  $J(u) = 0$ , isto é,  $\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x)) f(u) u dx$ .

Substituindo na expressão (1.14) temos por  $(a_1)$  e  $(f_3)$

$$\begin{aligned}
J'(u)u &= 2 \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))f(u)u \, dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) [f'(u)u + f(u)] u \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) [-f'(u)u^2 + f(u)u] \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) [-f'(u)u + f(u)] u \cdot \frac{u}{u} \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \left[ \frac{f(u) - f'(u)u}{u} \right] u^2 \, dx < 0.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

De fato, se a condição  $(f_3)$  é verdade, seja  $u > 0$ , então  $\frac{-f(u) + f'(u)u}{u} > 0$ . Isto significa que se  $u > 0$ , então  $\frac{f(u)}{u}$  é crescente. Agora, se considerarmos  $u < 0$ , por  $(f_3)$ , segue que  $\frac{f(u)}{u}$  é decrescente. Para verificar isto, note que

$$\left( \frac{f(u)}{u} \right)' = \frac{f'(u)u - f(u)}{u^2}.$$

Como  $f$  é ímpar, sua derivada será par. Daí, fazendo  $v = -u > 0$  segue que

$$\begin{aligned}
\left( \frac{f(u)}{u} \right)' &= \frac{f'(-v)(-v) - f(-v)}{-v} \frac{1}{-v} \\
&= \frac{f'(v)(-v) + f(v)}{v} \frac{1}{-v} \\
&= \frac{f'(v)(v) - f(v)}{v} \frac{1}{-v} < 0.
\end{aligned}$$

Segue que  $f'(u)u - f(u) < 0$ , caso  $u < 0$ . Tomando a integral em (1.15) nos conjuntos  $\{u > 0\}$  e  $\{u < 0\}$  para  $u$  em  $\mathcal{N}$  segue que

$$J'(u)u < 0.$$

Isto implica que 0 é um valor regular de  $J : H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Assim,  $J^{-1}(\{0\})$  é um conjunto fechado, por ser a imagem inversa de um conjunto fechado por um funcional contínuo. Como  $\{u \equiv 0\}$  é um ponto isolado de  $J^{-1}(\{0\})$ , então temos que  $\mathcal{N}$  é de classe  $C^2$  e é uma variedade natural para  $I$ .

Verificação de (c) Pelo item (a) existe um  $\alpha > 0$  tal que  $\|u\| \geq \alpha$  e, portanto, que  $u$  não é identicamente zero. Defina os seguintes conjuntos:

$$\Gamma^+ = \{x \in \mathbb{R}^N : u(x) > 0\}$$

e

$$\Gamma^- = \{x \in \mathbb{R}^N : u(x) < 0\}.$$

Como o funcional associado ao problema  $(P_a)$  é definido por

$$I(u) := \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))F(u) \, dx,$$

considere  $t > 0$  e  $u$  fixado, definimos

$$g(t) := I(tu) = \frac{t^2}{2} \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))F(tu) dx.$$

Derivando  $g$  em relação a  $t$  e usando os conjuntos  $\Gamma^+$ ,  $\Gamma^-$  definidos anteriormente, segue que

$$\begin{aligned} g'(t) &= t \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))f(tu)u dx \\ &= t \|u\|^2 - \frac{t}{t} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))f(tu)u dx \\ &= t \left\{ \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \frac{f(tu)}{t} u dx \right\} \\ &= t \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))f(u)u dx - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \frac{f(tu)}{t} u dx \right\} \\ &= t \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \left( \frac{f(u)}{u} - \frac{f(tu)}{tu} \right) u^2 dx \right\}, \end{aligned}$$

e reescrevendo  $g'(t)$ ,

$$g'(t) = t \left\{ \int_{\Gamma^+} (1 + a(x)) \left( \frac{f(u)}{u} - \frac{f(tu)}{tu} \right) u^2 dx \right\} + t \left\{ \int_{\Gamma^-} (1 + a(x)) \left( \frac{f(u)}{u} - \frac{f(tu)}{tu} \right) u^2 dx \right\}.$$

Agora observe que se  $t \in (0, 1)$  e  $u \in (0, +\infty)$  temos  $tu < u$ . Pela hipótese  $(f_3)$  temos  $\frac{f(tu)}{tu} < \frac{f(u)}{u}$ . Além disso por  $(a_1)$  segue que  $(1 + a(x)) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$  e resulta que  $g'(t) > 0$ , isto é,  $g$  é estritamente crescente. Se  $t \in (0, 1)$  e  $u \in (-\infty, 0)$  temos  $u < tu < 0$  e assim

$$\frac{f(tu)}{tu} = -\frac{f(t(-u))}{tu} = \frac{f(t(-u))}{t(-u)} < \frac{f(-u)}{-u} = \frac{f(u)}{u},$$

analogamente segue que  $g'(t) > 0$ . De maneira análoga, se  $t \in (1, +\infty)$  e  $u \in (-\infty, 0)$  temos  $u > tu$ . Pela hipótese  $(f_3)$  temos  $\frac{f(tu)}{tu} > \frac{f(u)}{u}$ . Além disso, por  $(a_1)$ , segue que  $(1 + a(x)) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$  e resulta que  $g'(t) < 0$ , isto é,  $g$  é estritamente decrescente. Analogamente, se  $t \in (1, +\infty)$  e  $u \in (0, +\infty)$ . Portanto, temos para todo  $u \in \mathcal{N}$  que

$$g(1) := I(u) = \max_{t>0} g(t) = \max_{t>0} I(tu).$$

□

O próximo resultado nos dá uma limitação para uma sequência em  $\mathcal{N}$  em qualquer nível  $d$  fixado. Isto nos permitirá usar o Lema de Splitting posteriormente.

**Lema 1.2.** *Suponha que exista uma sequência  $\{u_n\}$  em  $\mathcal{N}$  satisfazendo*

$$I(u_n) \rightarrow d.$$

*Então a sequência  $\{u_n\}$  é limitada em  $H^1(\mathbb{R}^N)$ .*

**Demonstração:** Primeiramente fixemos um número real  $D > d \geq 0$ , por (1.1). Argumentando por contradição, suponha que a sequência  $\{u_n\}$  não seja limitada em  $H^1(\mathbb{R}^N)$ , ou seja,  $\|u_n\| \rightarrow +\infty$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ .

Defina agora  $\varphi_n := t_n u_n$  onde  $t_n := \frac{2\sqrt{D}}{\|u_n\|}$ . Desta forma, note que

$$\|\varphi_n\| = \frac{2\sqrt{D}}{\|u_n\|} \|u_n\| = 2\sqrt{D} < \infty.$$

Então a seqüência  $\{\varphi_n\}$  é limitada em  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . Para  $n$  suficientemente grande, usando o Lema 1.1 (c) segue que

$$D > I(u_n) = \max_{t>0} I(tu_n) \geq I(t_n u_n) = I(\varphi_n).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} D > I(\varphi_n) &= \frac{1}{2} \|\varphi_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))F(\varphi_n) dx \\ &= 2D - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))F(\varphi_n) dx. \end{aligned}$$

Assim, temos por  $(a_1)$  que existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$D < \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))F(\varphi_n) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} F(\varphi_n) dx.$$

Usando agora a condição  $(f_2)$  segue a seguinte desigualdade

$$D < C \int_{\mathbb{R}^N} (|\varphi_n|^{p_1+1} + |\varphi_n|^{p_2+1}) dx = C \left( \|\varphi_n\|_{p_1+1}^{p_1+1} + \|\varphi_n\|_{p_2+1}^{p_2+1} \right). \quad (1.16)$$

Como a seqüência  $\{\varphi_n\}$  é limitada em  $H^1(\mathbb{R}^N)$ , temos somente dois casos a considerar:

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\varphi_n|^2 dx \right) = 0;$
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\varphi_n|^2 dx \right) > 0.$

Suponha que o primeiro caso seja verdade. Usando o Lema de Lions (Lema 1.21 em [46]), temos  $\varphi_n \rightarrow 0$  em  $L^p(\mathbb{R}^N)$  para  $2 < p < 2^*$ . Por hipótese, temos  $2 < p_1 + 1 \leq p_2 + 1 < 2^*$ . Isto significa que  $\varphi_n \rightarrow 0$  em  $L^{p_i+1}(\mathbb{R}^N)$ , com  $i = 1, 2$ . Usando este fato, temos uma contradição com a desigualdade (1.16). Logo, a menos de subsequência, temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\varphi_n|^2 dx \right) = \eta > 0.$$

Fixando  $n \in \mathbb{N}$ , por definição de supremo, existe uma seqüência  $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$  tal que

$$\int_{B_1(y_n)} |\varphi_n|^2 dx \geq \frac{\eta}{4}. \quad (1.17)$$

Defina a seqüência  $\psi_n := \varphi_n(x + y_n)$  e utilizando a invariância das integrais por translação,

$$\|\psi_n\| = \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_n(x + y_n)|^2 + |\varphi_n(x + y_n)|^2 \right)^{1/2} = \|\varphi_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = 2\sqrt{D}.$$

Em outras palavras, temos que  $\{\psi_n\}$  é limitada em  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . Pelas imersões de Sobolev e como  $H^1(\mathbb{R}^N)$  é espaço reflexivo segue que

- $\psi_n \rightharpoonup \varphi$  em  $H^1(\mathbb{R}^N)$ ;
- $\psi_n \rightarrow \varphi$  em  $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$  para  $2 \leq p < 2^*$ ;
- $\psi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$  q.t.p. em  $\mathbb{R}^N$ .

Consequentemente,

$$\psi_n \rightarrow \varphi \quad \text{em} \quad L^2(B_1(0)).$$

Fazendo uma mudança de variáveis, segue por (1.17)

$$\begin{aligned} \int_{B_1(0)} |\varphi(x)|^2 dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_1(0)} |\psi_n(x)|^2 dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_1(0)} |\varphi_n(x + y_n)|^2 dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_1(y_n)} |\varphi_n(x)|^2 dx \geq \frac{\eta}{4} > 0. \end{aligned}$$

Assim existe um subconjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  de medida de Lebesgue positiva em  $B_1(0)$  em que  $\varphi(x) \neq 0, \forall x \in \Omega$ . Observe que a convergência pontual em  $\mathbb{R}^N$  nos dá

$$0 < |\varphi(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |\varphi_n(x + y_n)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{D}|u_n(x + y_n)|}{\|u_n(x + y_n)\|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{D}|u_n(x + y_n)|}{\|u_n\|},$$

para todo  $x \in \Omega$ . Visto que  $\|u_n\| \rightarrow +\infty$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , necessariamente temos que

$$|u_n(x + y_n)| \rightarrow +\infty, \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Desde que  $\{u_n\}$  está contida em  $\mathcal{N}$ , podemos usar o Lema de Fatou, (1.1), a condição  $(f_5)$ , (1.1) e  $(a_1)$  e obter

$$\begin{aligned} D &> \lim_{n \rightarrow +\infty} I(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))F(u_n) dx \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \left( \frac{1}{2} f(u_n)u_n - F(u_n) \right) dx \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \tau \left( \frac{1}{2} f(u_n)u_n - F(u_n) \right) dx \\ &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \tau \left( \frac{1}{2} f(u_n(x + y_n))u_n(x + y_n) - F(u_n(x + y_n)) \right) dx \\ &> \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \tau \left( \frac{1}{2} f(u_n(x + y_n))u_n(x + y_n) - F(u_n(x + y_n)) \right) dx \\ &\geq \int_{\Omega} \tau \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} f(u_n(x + y_n))u_n(x + y_n) - F(u_n(x + y_n)) \right) dx = +\infty. \end{aligned}$$

Logo, temos uma contradição e o segundo caso também não pode acontecer. A contradição veio do fato de supor que a sequência  $\{u_n\}$  não era limitada em  $H^1(\mathbb{R}^N)$  e, portanto, finalizamos a demonstração do lema.

□

O resultado seguinte mostra a positividade do ínfimo do funcional associado ao problema  $(P_a)$  sobre a variedade  $\mathcal{N}$ .

**Lema 1.3.** *Seja  $m$  definida em (1.6). Então tem-se  $m > 0$ .*

**Demonstração:** A demonstração deste resultado requer o Lema de Lions como já utilizado no Lema 1.2. Primeiramente consideremos uma sequência minimizante  $\{u_n\}$  na variedade de Nehari tal que  $I(u_n) \rightarrow m$ . Pelo Lema 1.2 temos que  $\{u_n\}$  é limitada em  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . Assim, utilizando as condições  $(a_1)$ ,  $(f_2)$  existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\begin{aligned} 0 < \alpha^2 \leq \|u_n\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))f(u_n)u_n \, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^{p_1+1} + |u_n|^{p_2+1}) \, dx \\ &= C \left( \|u_n\|_{p_1+1}^{p_1+1} + \|u_n\|_{p_2+1}^{p_2+1} \right). \end{aligned}$$

Argumentando como no Lema 1.2, pelo Lema de Lions, existe uma constante  $\eta_1 > 0$  e uma sequência  $\{y_n\} \in \mathbb{R}^N$  tais que

$$\int_{B_1(y_n)} (u_n)^2 \, dx = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} (u_n)^2 \, dx \geq \frac{\eta_1}{4} > 0.$$

Defina a sequência  $\psi_n := u_n(x + y_n)$  e note que existe uma constante  $M > 0$  tal que

$$\|\psi_n\| = \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n(x + y_n)|^2 + |u_n(x + y_n)|^2 \right)^{1/2} = \|u_n\| \leq M.$$

Em outras palavras,  $\{\psi_n\}$  é uma sequência limitada em  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . Pelas imersões de Sobolev e como  $H^1(\mathbb{R}^N)$  é espaço reflexivo segue que

- $\psi_n \rightharpoonup u$  em  $H^1(\mathbb{R}^N)$ ;
- $\psi_n \rightarrow u$  em  $L_{loc}^p(\mathbb{R}^N)$  para  $2 \leq p < 2^*$ ;
- $\psi_n(x) \rightarrow u(x)$  q.t.p. em  $\mathbb{R}^N$ .

Consequentemente,  $\psi_n \rightarrow u$  em  $L^2(B_1(0))$ .

Por mudança de variáveis, segue que

$$\begin{aligned} \int_{B_1(0)} |u(x)|^2 \, dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_1(0)} |\psi_n(x)|^2 \, dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_1(0)} |u_n(x + y_n)|^2 \, dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_1(y_n)} |u_n(x)|^2 \, dx \geq \frac{\eta_1}{4} > 0. \end{aligned}$$

Assim, existe um subconjunto  $\Omega_1$  de medida de Lebesgue positiva em  $B_1(0)$  no qual  $u(x) \neq 0, \forall x \in \Omega_1$ . Usando o Lema de Fatou, a condição  $(f_3)$  e  $(a_1)$  segue que

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{n \rightarrow +\infty} I(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))F(u_n) dx \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x)) \left( \frac{1}{2} f(u_n)u_n - F(u_n) \right) dx \\
&\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \tau \left( \frac{1}{2} f(u_n)u_n - F(u_n) \right) dx \\
&= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \tau \left( \frac{1}{2} f(u_n(x+y_n))u_n(x+y_n) - F(u_n(x+y_n)) \right) dx \\
&> \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \tau \left( \frac{1}{2} f(u_n(x+y_n))u_n(x+y_n) - F(u_n(x+y_n)) \right) dx \\
&\geq \int_{\Omega} \tau \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} f(u_n(x+y_n))u_n(x+y_n) - F(u_n(x+y_n)) \right) dx \\
&= \int_{\Omega} \tau \left( \frac{1}{2} f(u)u - F(u) \right) dx > 0.
\end{aligned}$$

Assim, segue o resultado desejado.  $\square$

**Lema 1.4.** *Suponha que  $u$  seja uma solução do problema  $(P_a)$  com  $I(u)$  no intervalo  $[m, 2m)$ . Então a solução  $u$  não muda de sinal.*

**Demonstração:** Seja  $u$  uma solução fraca do problema  $(P_a)$ , então  $I'(u) = 0$ , isto é,  $I'(u)v = 0$  para todo  $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ . Em particular,  $I'(u)u^+ = 0$  e  $I'(u)u^- = 0$  onde consideramos  $u^+ = \max\{u, 0\}$  e  $u^- = \min\{u, 0\}$ . Note que se  $I'(u)u^+ = 0$ , então  $\langle u, u^+ \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))f(u)u^+ dx = 0$ , ou seja,

$$\langle u, u^+ \rangle - \left\{ \int_{\{u \geq 0\}} (1+a(x))f(u^+)u^+ dx + \int_{\{u < 0\}} (1+a(x))f(u^-)u^+ dx \right\} = 0,$$

isto é,  $\|u^+\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))f(u^+)u^+ dx = 0$ . Portanto,  $I'(u^+)u^+ = 0$  e, similarmente,  $I'(u^-)u^- = 0$ .

Suponha que  $u^+ \neq 0$  e  $u^- \neq 0$ , então pelo que acabamos de ver temos que  $u^+$  e  $u^-$  estão na variedade  $\mathcal{N}$  e ainda

$$\begin{aligned}
I(u) &= I(u^+ + u^-) = \frac{1}{2} \|u^+ + u^-\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))F(u^+ + u^-) dx \\
&= \frac{1}{2} \langle u^+ + u^-, u^+ + u^- \rangle - \int_{\{u \geq 0\}} (1+a(x))F(u^+ + u^-) dx \\
&\quad - \int_{\{u < 0\}} (1+a(x))F(u^+ + u^-) dx \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \|u^+\|^2 + \|u^-\|^2 \right\} - \int_{\{u \geq 0\}} (1+a(x))F(u^+) dx \\
&\quad - \int_{\{u < 0\}} (1+a(x))F(u^-) dx \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \|u^+\|^2 + \|u^-\|^2 \right\} - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))F(u^+) dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))F(u^-) dx \\
&= I(u^+) + I(u^-) \geq 2m.
\end{aligned}$$

Por outro lado, por hipótese  $I(u) < 2m$  e como  $m$  é estritamente positivo pelo Lema 1.3, obtemos uma contradição e assim finalizamos a demonstração.  $\square$



**Observação 1.3.** Note que o resultado do Lema 1.4 se aplica analogamente ao funcional  $I_\infty$  definido em (1.8), isto é, suponha que  $u$  é uma solução do problema  $(P_\infty)$  com  $I_\infty(u)$  no intervalo  $[m_\infty, 2m_\infty)$ . Então a solução  $u$  não muda de sinal.

Um conceito importante e bastante conhecido que utilizaremos é o conceito de sequência de Palais-Smale. Dizemos que uma sequência  $\{u_n\}$  em  $H^1(\mathbb{R}^N)$  é uma sequência  $(PS)_c$  para alguma constante  $c$ , se  $I(u_n) \rightarrow c$  e  $I'(u_n) \rightarrow 0$  em  $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ , se  $n \rightarrow +\infty$ . Caso a sequência  $\{u_n\}$  possua subsequência convergente, dizemos que o funcional  $I$  satisfaz  $(PS)_c$  no nível  $c$ .

O próximo lema nos dá uma importante informação sobre uma sequência  $(PS)$  do funcional  $I$  restrito à variedade  $\mathcal{N}$  no espaço  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . Aqui é o momento em que precisamos utilizar a condição de crescimento  $(f_2)$  para a derivada de  $f$ .

**Lema 1.5.** Suponha que  $\{u_n\}$  é uma sequência  $(PS)_d$  para  $I$  restrito à variedade  $\mathcal{N}$ . Então, a menos de subsequência, a sequência  $\{u_n\}$  é também uma sequência  $(PS)_d$  para o funcional  $I$  em  $H^1(\mathbb{R}^N)$ .

**Demonstração:** Primeiramente supomos que exista uma sequência  $\{u_n\} \subset \mathcal{N}$  do tipo  $(PS)_d$  para  $I$  restrito à variedade  $\mathcal{N}$ . Por definição,

$$I(u_n) \rightarrow d \text{ e } (I|_{\mathcal{N}})'(u_n) \rightarrow 0. \quad (1.18)$$

Usando o Lema 1.2, como a sequência  $\{u_n\} \subset \mathcal{N}$  e  $I(u_n) \rightarrow d > 0$ , então a sequência  $\{u_n\}$  é limitada em  $H^1(\mathbb{R}^N)$ .

Para toda  $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ , como a sequência  $\{u_n\}$  é limitada e usando a desigualdade de Hölder e a condição de crescimento  $(f_2)$  segue que

$$\begin{aligned} |J'(u_n)v| &= \left| 2 \langle u_n, v \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))(f'(u_n)u_n + f(u_n))v \, dx \right| \\ &\leq 2 \|u_n\| \|v\| + \int_{\mathbb{R}^N} |(1+a(x))| |(f'(u_n)u_n + f(u_n))| |v| \, dx \\ &\leq 2 \|u_n\| \|v\| + c_a \int_{\mathbb{R}^N} |(f'(u_n)u_n + f(u_n))| |v| \, dx \\ &\leq C \left\{ \|v\| \|u_n\| + c_2 \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^{p_1} + |u_n|^{p_2}) |v| \, dx \right\} \\ &= C \left\{ \|v\| \|u_n\| + \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^{p_1}) |v| \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^{p_2}) |v| \, dx \right\} \\ &\leq C \left\{ \|v\| \|u_n\| + \left( \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^{p_1+1}) \, dx \right)^{p_1/(p_1+1)} \left( \int_{\mathbb{R}^N} (|v|^{p_1+1}) \, dx \right)^{1/(p_1+1)} \right\} \\ &\quad + C \left\{ \left( \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^{p_2+1}) \, dx \right)^{p_2/(p_2+1)} \left( \int_{\mathbb{R}^N} (|v|^{p_2+1}) \, dx \right)^{1/(p_2+1)} \right\} \\ &= C \left\{ \|v\| \|u_n\| + \|u_n\|_{p_1+1}^{p_1} \|v\|_{p_1+1} + \|u_n\|_{p_2+1}^{p_2} \|v\|_{p_2+1} \right\} \\ &\leq C \left\{ \|v\| \|u_n\| + \|u_n\|^{p_1} \|v\| + \|u_n\|^{p_2} \|v\| \right\}. \end{aligned}$$

Como a sequência  $\{u_n\}$  é limitada, então para toda  $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ ,

$$|J'(u_n)v| \leq C \|v\|.$$

Isto mostra que a sequência  $\{J'(u_n)\}$  é limitada em  $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ . Consequentemente,

$$|J'(u_n)u_n| \leq \|J'(u_n)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)} \|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C, \quad (1.19)$$

em que a constante  $C$  não depende de  $\{u_n\}$ . A menos de subsequência, a sequência de números reais positivos

$$\lambda_n := |J'(u_n)u_n| \rightarrow \lambda \geq 0.$$

Além disso, como  $\{u_n\} \subset \mathcal{N}$ , pelo Lema 1.1(a) temos que  $\|u_n\| \geq \alpha > 0$  e argumentando como na demonstração do Lema 1.3, usando o Lema de Lions,  $(a_1)$  e  $(f_3)$  segue que  $u_n(x) \rightarrow u(x)$  q.t.p.  $x \in \mathbb{R}^N$  e  $u(x) \neq 0$  q.t.p.  $x \in \Omega_0$  onde  $\Omega_0$  é um conjunto de medida positiva. Daí usando o Lema de Fatou e o fato de que  $f'(t)t - f(t) \geq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{n \rightarrow +\infty} |J'(u_n)u_n| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \left\{ 2\|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))(f'(u_n)u_n + f(u_n))u_n \, dx \right\} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))(f'(u_n)u_n^2 - f(u_n)u_n) \, dx \right| \\ &\geq \tau \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_0} (f'(u_n(x))u_n^2(x) - f(u_n(x))u_n(x)) \, dx \\ &= \tau \int_{\Omega_0} (f'(u)u^2 - f(u)u) \, dx \\ &= \tau \int_{\Omega_0} (f'(u)u - f(u))u \, dx > 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Como  $\mathcal{N}$  é uma variedade de codimensão 1 em  $H^1(\mathbb{R}^N)$  (vide seção 6.3 em [7]), podemos escrever a projeção gradiente  $(I|_{\mathcal{N}})'(u)$  sobre o plano tangente

$$T_u\mathcal{N} = \{v \in H^1(\mathbb{R}^N) : \langle J'(u), v \rangle = 0\}$$

por

$$(I|_{\mathcal{N}})'(u) = I'(u) - tJ'(u),$$

em que

$$t := \frac{\langle I'(u), J'(u) \rangle}{\|J'(u)\|^2}.$$

Desde que  $\{u_n\} \subset \mathcal{N}$  é uma sequência (PS) de  $I$  restrito à variedade de Nehari (pelo Lema 7.19 em [7]) existe uma sequência  $\{t_n\}$  tal que

$$(I|_{\mathcal{N}})'(u_n) = I'(u_n) - t_n J'(u_n), \quad (1.21)$$

dada por

$$t_n := \frac{\langle I'(u_n), J'(u_n) \rangle}{\|J'(u_n)\|^2};$$

note que  $\|J'(u_n)\| \neq 0$  por (1.15).

O objetivo agora é mostrar que a sequência  $\{t_n\}$  converge a zero se  $n \rightarrow +\infty$  e assim concluiremos o

lema. Por (1.18) e (1.21) segue que

$$0 = I'(u_n)u_n = (I|_{\mathcal{N}})'(u_n)u_n + t_n J'(u_n)u_n = o_n(1) + t_n J'(u_n)u_n. \quad (1.22)$$

Por (1.19) e (1.20) tem-se

$$C \geq |J'(u_n)u_n| \rightarrow \lambda > 0, \quad \text{se } n \rightarrow +\infty,$$

e por (1.22) isto implica que, a menos de subsequência,

$$t_n \rightarrow 0, \quad \text{se } n \rightarrow +\infty. \quad (1.23)$$

Assim, deduzimos de (1.18) e (1.23) que, a menos de subsequência de  $\{u_n\}$ ,

$$I'(u_n) = (I|_{\mathcal{N}})'(u_n) + t_n J'(u_n) \rightarrow 0, \quad \text{se } n \rightarrow +\infty.$$

Concluimos assim a demonstração do lema. □

Os resultados clássicos relativos ao problema limite ( $P_\infty$ ) encontrados em [12], [13], e [25] juntamente com o estudo da simetria radial e decaimento exponencial podem ser resumidos da seguinte forma: o problema tem uma solução de energia mínima  $\omega$  tal que

- i)  $\omega > 0$  em  $\mathbb{R}^N$ ;
- ii)  $\omega$  é radialmente simétrica:  $\omega(x) = \omega(r)$ , onde  $r = |x|$  e  $\omega$  decresce com respeito a  $r$ ;
- iii)  $\omega \in C^2(\mathbb{R}^N)$ ;
- iv) existem constantes  $C_1 > 0$  e  $C_2 > 0$  satisfazendo

$$C_1(1 + |x|)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-|x|} \leq \omega(x) \leq C_2(1 + |x|)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \quad (1.24)$$

Além disso,  $\omega$  é único dependendo das hipóteses sobre  $f$  como em [26, 40].

**Lema 1.6.** *Não existe solução  $u$  para o problema ( $P_\infty$ ) tal que  $I_\infty(u) \in (m_\infty, 2m_\infty)$ .*

**Demonstração:** Se  $u$  é solução do problema ( $P_\infty$ ) tal que  $I_\infty(u) \in (m_\infty, 2m_\infty)$ , então pela Observação 1.3,  $u$  não muda de sinal, isto é,  $u > 0$  ou  $u < 0$ . Sem perda de generalidade, considere  $u > 0$  (no caso  $u < 0$ , como  $f$  é ímpar, segue que  $-u > 0$  é solução). Pelos resultados clássicos,  $u$  é solução positiva, radialmente simétrica de ( $P_\infty$ ) e única, portanto,  $u = \omega$  e  $I_\infty(u) = m_\infty$  implicando em contradição com a hipótese. □

## 1.2 Compacidade

O próximo resultado que enunciaremos será fundamental para o estudo dos pontos críticos do funcional  $I$ . Ele descreve como uma sequência de Palais - Smale de  $I$  se comporta assintoticamente.

**Lema 1.7.** (Lema de Splitting) Suponha que  $\{u_n\}$  é uma sequência limitada em  $H^1(\mathbb{R}^N)$  tal que

$$I(u_n) \rightarrow d > 0 \quad e \quad (I|_{\mathcal{N}})'(u_n) \rightarrow 0 \quad em \quad H^{-1}(\mathbb{R}^N).$$

Então, passando se necessário a uma subsequência, existem  $u_0$  solução fraca de  $(P_a)$ , um número  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $k$  funções  $w^1, \dots, w^k \in H^1(\mathbb{R}^N)$  soluções do problema limite  $(P_\infty)$  e  $k$  sequências de pontos  $\{y_n^j\}, 1 \leq j \leq k$  tais que

1.  $u_n \rightarrow u_0$  em  $H^1(\mathbb{R}^N)$  ou
2.  $|y_n^j| \rightarrow +\infty$  e  $|y_n^j - y_n^i| \rightarrow +\infty; j \neq i;$
3.  $u_n - \sum_{j=1}^k w^j(\cdot - y_n^j) \rightarrow u_0$  em  $H^1(\mathbb{R}^N);$
4.  $I(u_n) \rightarrow d = I(u_0) + \sum_{j=1}^k I_\infty(w^j).$

**Demonstração:** O primeiro passo da demonstração é o Lema 1.5. A demonstração segue como em [33].

□

Como uma consequência dos Lemas 1.2, 1.5 e 1.6 combinados com o Lema 1.7 temos o seguinte resultado.

**Lema 1.8.** Suponha que o ínfimo  $m$  definido em (1.6) não seja atingido. Então  $m \geq m_\infty$  e, ainda, o funcional  $I$  satisfaz a condição de Palais- Smale sobre  $\mathcal{N}$  em qualquer nível do intervalo  $(m_\infty, 2m_\infty)$ .

**Demonstração:** Considere uma sequência  $\{u_n\}$  tal que satisfaz  $(PS)_d$  para o funcional  $I$  restrito a  $\mathcal{N}$ . Então, a menos de subsequência,  $\{u_n\}$  é limitada e é  $(PS)_d$  para  $I$  em todo o espaço  $H^1(\mathbb{R}^N)$  pelos Lemas 1.2 e 1.5.

Suponha que o nível  $m$  não seja atingido. Se existisse uma sequência  $u_n \rightarrow u_0$ , pela continuidade do funcional  $I$ , teríamos  $I(u_n) \rightarrow I(u_0) = d = m$ . Contradição com a hipótese neste caso. Logo, não existe tal sequência; o que implica que a possibilidade (1) no Lema de Splitting não ocorre. Decorre então que valem (2), (3) e (4).

Em primeiro lugar, suponha que  $u_0 = 0$ , então por (4), temos que

$$I(u_n) \rightarrow d = m = I(u_0) + \sum_{j=1}^k I_\infty(w^j) \geq 0 + kI_\infty(w) \geq km_\infty \geq m_\infty,$$

onde  $w$  é a solução de energia mínima para  $I_\infty$ .

Em segundo lugar, assumamos que  $u_0 \neq 0$ . Como  $u_0$  pertence a  $\mathcal{N}$ , tem-se  $I(u_0) > 0$ . Segue que  $m > km_\infty \geq m_\infty$ . Logo, em ambos os casos, temos  $m \geq m_\infty$  e assim a primeira parte do Lema está verificada.

Suponha que  $d \in (m_\infty, 2m_\infty)$ . Assim, para  $n$  suficientemente grande,

$$m_\infty < I(u_n) < 2m_\infty.$$

Se não existisse subsequência  $\{u_n\}$  convergente, usando o Lema 1.7,

$$I(u_n) \rightarrow d = I(u_0) + \sum_{j=1}^k I_\infty(w^j).$$

Se  $k \geq 2$ , então

$$I(u_n) \rightarrow d = I(u_0) + \sum_{j=1}^k I_\infty(w^j) \geq 0 + kI_\infty(w) \geq km_\infty \geq 2m_\infty.$$

Isto configura um absurdo uma vez que  $d < 2m_\infty$ . Portanto, obrigatoriamente, tem-se  $k = 1$ . Neste caso, se  $u_0 = 0$ , então

$$2m_\infty > I_\infty(w^j) = d > m_\infty.$$

Isto é uma contradição com o Lema 1.6, pois não existe solução  $w^j$  de  $(P_\infty)$  no intervalo  $(m_\infty, 2m_\infty)$ . Usando mais uma vez o Lema 1.7, como  $u_0$  pertence a  $\mathcal{N}$ ,

$$I(u_n) \rightarrow d = I(u_0) + 1 \cdot I_\infty(w^j) \geq m + I_\infty(w) = m + m_\infty \geq m_\infty + m_\infty = 2m_\infty.$$

Isto também configura uma contradição, visto que  $d < 2m_\infty$ . Neste caso, concluímos que  $k$  não pode ser maior ou igual a 1 e devemos ter  $k = 0$  e, portanto, por (3) existe uma subsequência de  $\{u_n\}$  convergente e o lema está provado. □

### 1.3 Projeção sobre Nehari

O próximo passo é mostrar que o conjunto  $\mathcal{N}$  é não vazio. Com tal objetivo, iremos trabalhar com  $y_0 \in \mathbb{R}^N$  fixado,  $\|y_0\| = 1$ ,  $y \in \partial B_2(y_0)$  onde  $B_2(y_0) := \{x \in \mathbb{R}^N; \|x - y_0\| \leq 2\}$  e com  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Como o problema limite  $(P_\infty)$  tem uma solução *ground state*  $w > 0$ , trabalhamos com esta solução transladada, isto é,

$$w_0^R := w(x - Ry_0)$$

e

$$w_y^R := w(x - Ry)$$

e definimos uma combinação linear

$$z_{\lambda,y}^R := \lambda w(x - Ry_0) + (1 - \lambda)w(x - Ry) = \lambda w_0^R + (1 - \lambda)w_y^R. \quad (1.25)$$

Para demonstrarmos a projeção sobre  $\mathcal{N}$  precisamos utilizar dois resultados. O primeiro deles é

**Proposição 1.1.** *Considere dois números reais  $r \in (0, +\infty)$  e  $\lambda \in [0, 1]$  e defina a seguinte função em duas variáveis*

$$\Phi(\lambda, r) := \lambda^2 \left( \|w\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} w^2 dx \right), \quad (1.26)$$

onde  $w$  é a solução *ground state* do problema  $(P_\infty)$ . Então existe um número  $S_0 < 0$  e  $T_0 > 0$  de modo que  $\forall r \geq T_0$  tem-se

$$\Phi(\lambda, r) + \Phi(1 - \lambda, r) \leq S_0 < 0.$$

**Demonstração:** Começamos observando que decorre da hipótese  $(f_3)$  que a função  $\Phi$  é decrescente na variável  $r$ . Por outro lado, derivando a função  $\Phi$  em (1.26) com respeito a variável  $\lambda$ , fixando  $r$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(\lambda, r) &= 2\lambda \left( \|w\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} w^2 dx \right) \\ &\quad + \lambda^2 \left( - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f'(r\lambda w) r w r \lambda w - f(r\lambda w) r w}{(r\lambda w)^2} w^2 dx \right) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Como  $w$  é a solução positiva *ground state* do problema  $(P_\infty)$ , então  $w$  satisfaz

$$-\Delta w + w = f(w).$$

Segue que

$$\|w\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla w|^2 + w^2] dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(w)w dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(w)}{w} w^2 dx. \quad (1.28)$$

Substituindo (1.28) em (1.27), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(\lambda, r) &= 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{f(w)}{w} - \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} \right) w^2 dx \\ &\quad + \lambda^2 \left( - \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{f'(r\lambda w)}{\lambda} - \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda^2 w} \right] w^2 dx \right) \\ &= 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{f(w)}{w} - \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} \right) w^2 dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \left[ -f'(r\lambda w)\lambda + \frac{f(r\lambda w)}{r w} \right] w^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[ 2\lambda \frac{f(w)}{w} - f'(r\lambda w)\lambda - \frac{\lambda f(r\lambda w)}{r w} \right] w^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[ 2\lambda \frac{f(w)}{w} - \left( f'(r\lambda w)\lambda + \lambda \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} \right) \right] w^2 dx. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Por  $(f_3)$ , se  $u > 0$  temos  $f'(u) > \frac{f(u)}{u}$ , e assim

$$f'(u) + \frac{f(u)}{u} > 2\frac{f(u)}{u}.$$

Isto implica que  $\forall \lambda \in (0, 1]$ ,

$$-\lambda \left( f'(u) + \frac{f(u)}{u} \right) < -2\lambda \frac{f(u)}{u}. \quad (1.30)$$

Agora escolhendo  $u = r\lambda w > 0$  em (1.30) e substituindo na derivada da  $\Phi$ , isto é, em (1.29) tem-se que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(\lambda, r) &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[ 2\lambda \frac{f(w)}{w} - \left( f'(r\lambda w)\lambda + \frac{\lambda f(r\lambda w)}{\lambda r w} \right) \right] w^2 dx \\
&< \int_{\mathbb{R}^N} \left[ 2\lambda \frac{f(w)}{w} - 2\lambda \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} \right] w^2 dx \\
&= 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{f(w)}{w} - \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} \right] w^2 dx.
\end{aligned}$$

Escolhendo  $r$  suficientemente grande tal que  $r\lambda > 1$  e usando, mais uma vez, a condição  $(f_3)$  que implica  $\frac{f(t)}{t}$  crescente para  $t > 0$  segue que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(\lambda, r) < 0.$$

Portanto,  $\Phi$  é decrescente na variável  $\lambda$ .

Decorre da definição de  $\Phi$  e pela condição  $(f_3)$  que existe uma constante  $M_1 > 0$  tal que para todo  $\lambda \in (0, 1]$  e  $r \in (0, +\infty)$  temos

$$\Phi(\lambda, r) \leq \lambda^2 \|w\|^2 := M_1 \lambda^2. \quad (1.31)$$

Por outro lado, como  $w$  é solução positiva do problema  $(P_\infty)$ , para todo  $0 < \lambda \leq 1$ , tem-se por  $(f_3)$  e  $(f_4)$  que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} \geq l_\infty,$$

e  $\frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w}$  é crescente na variável  $r$ . Isto implica que no caso assintoticamente linear  $\frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} \nearrow l_\infty$  e

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(w)}{w} - \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} \right| w^2 &\leq \left( \left| \frac{f(w)}{w} \right| + \left| \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} \right| \right) w^2 \\
&\leq 2l_\infty w^2 \in L^1(\mathbb{R}^N).
\end{aligned} \quad (1.32)$$

Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, existe uma constante  $M_2 > 0$ , tal que

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow +\infty} \Phi(\lambda, r) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{f(w)}{w} - \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} \right] w^2 dx \\
&= \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{f(w)}{w} - l_\infty \right] w^2 dx := \lambda^2 (-M_2).
\end{aligned} \quad (1.33)$$

Para o caso superlinear, visto que  $\frac{f(s)}{s}$  é crescente se  $s > 0$ , usamos o Teorema da Convergência Monótona para obter o resultado em (1.33).

Vamos considerar  $\lambda$  no intervalo  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  devido à simetria de  $\Phi(\lambda, r) + \Phi(1 - \lambda, r)$  com respeito à  $\lambda$ . Começamos fixando  $\lambda_0$  no intervalo  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  tal que

$$M_1 \lambda_0^2 < \frac{M_2}{2} (1 - \lambda_0)^2; \quad (1.34)$$

pode-se encontrar  $r_0 > 2$  satisfazendo

$$\Phi(1 - \lambda_0, r_0) = -\frac{M_2}{2}(1 - \lambda_0)^2.$$

De fato, se  $0 < \lambda_0 < \frac{1}{2}$ , então  $(1 - \lambda_0)^2 > \frac{1}{4}$ . Como  $M_2 > 0$ , escolha  $\lambda_0 < \sqrt{\frac{M_2}{8M_1}}$ . Assim,  $(1 - \lambda_0)^2 \frac{M_2}{2} > \frac{M_2}{8}$  e segue que

$$M_1 \lambda_0^2 < M_1 \frac{M_2}{8M_1} = \frac{M_2}{8} < (1 - \lambda_0)^2 \frac{M_2}{2}.$$

Considere agora  $\lambda \in (0, \lambda_0]$  e  $r \geq r_0$ . Como  $\frac{1}{2} < 1 - \lambda_0 \leq 1 - \lambda$ ,  $\Phi$  é decrescente em  $r$  e em  $\lambda$ , e por (1.31) segue que

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, r) + \Phi(1 - \lambda, r) &\leq \Phi(\lambda, r_0) + \Phi(1 - \lambda, r_0) \\ &\leq M_1 \lambda_0^2 + \Phi(1 - \lambda, r_0) \\ &= M_1 \lambda_0^2 - \frac{M_2}{2}(1 - \lambda_0)^2 < 0. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Por outro lado, se  $\lambda \in \left[\lambda_0, \frac{1}{2}\right]$  e fixando  $r_1 > \max\left\{\frac{1}{\lambda_0}, 2\right\}$ , note que se

$$r \geq r_1 > \frac{1}{\lambda_0} \implies r\lambda \geq r_1\lambda \geq r_1\lambda_0 > 1 \tag{1.36}$$

e como

$$r \geq r_1 > 2 \text{ e } 1 - \lambda \geq \frac{1}{2},$$

então

$$r(1 - \lambda) \geq \frac{r}{2} > \frac{2}{2} = 1. \tag{1.37}$$

Visto que  $\frac{f(t)}{t}$  é crescente, pela definição de  $\Phi$ , (1.36) e (1.37) segue que  $\Phi$  é negativa, isto é,  $\Phi(\lambda, r) < 0$  e  $\Phi(1 - \lambda, r) < 0$ . Assim, se  $\lambda \in \left[\lambda_0, \frac{1}{2}\right]$  segue que

$$\Phi(\lambda, r) + \Phi(1 - \lambda, r) < 0.$$

Para concluir, defina  $T_0 := \max\{r_0, r_1\}$ . Logo,  $T_0 > 2$  e observe que

$$S_0 := \max\{\Phi(\lambda, T_0) + \Phi(1 - \lambda, T_0)\} < 0.$$

Assim concluímos que para  $r \geq T_0$

$$\Phi(\lambda, r) + \Phi(1 - \lambda, r) \leq \Phi(\lambda, T_0) + \Phi(1 - \lambda, T_0) \leq S_0 < 0, \text{ para todo } \lambda \in [0, 1].$$

Portanto, a proposição fica provada. □

O resultado que segue pode ser encontrado em [1], Lema 2.1.

**Lema 1.9.** *Suponha que existam  $\mu_2 > \mu_1 \geq 0$ . Então, para todo  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$ , existe um número real  $C > 0$  tal que*



$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\mu_1|x-x_1|} e^{-\mu_2|x-x_2|} dx \leq C e^{-\mu_1|x_1-x_2|}.$$

Outrossim, se  $\mu_2 \geq \mu_1 > 0$  e  $\mu_3 > \mu_1 \geq 0$ , então, para quaisquer  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^N$ , existe um número real  $C > 0$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\mu_1|x-x_1|} e^{-\mu_2|x-x_2|} e^{-\mu_3|x-x_3|} dx \leq C e^{-\frac{\mu_1}{2} \left\{ |x_1-x_2| + |x_2-x_3| + |x_3-x_1| \right\}}.$$

O próximo resultado garante que a variedade  $\mathcal{N}$  é não vazia.

**Lema 1.10.** *Existem números  $R_0 > 0$ ,  $T_0 > 2$  e para cada  $R \geq R_0$ ,  $y \in \partial B_2(y_0)$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ , um único  $T_{\lambda,y}^R > 0$  satisfazendo*

$$T_{\lambda,y}^R z_{\lambda,y}^R \in \mathcal{N}.$$

Ademais,  $T_{\lambda,y}^R \in [0, T_0)$  e  $T_{\lambda,y}^R$  é uma função contínua nas variáveis  $\lambda, y, R$ .

**Demonstração:** Sejam  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ ;  $u, v > 0$  e  $r \in (0, +\infty)$  em (1.10), então

$$\begin{aligned} J_\infty(ru + rv) &= \|ru + rv\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(ru + rv)(ru + rv) dx \\ &= \|ru + rv\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(ru + rv)(ru + rv) \left( \frac{ru + rv}{ru + rv} \right) dx \\ &= r^2 (\|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle) - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(ru + rv)}{ru + rv} (ru + rv)^2 dx \\ &= r^2 (\|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle) - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(ru + rv)}{ru + rv} (r^2 u^2 + 2r^2 uv + r^2 v^2) dx \\ &= r^2 (\|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle) - r^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(ru + rv)}{ru + rv} (u^2 + 2uv + v^2) dx. \end{aligned}$$

Por  $(f_3)$ ,  $\frac{f(s)}{s}$  é crescente se  $s > 0$ , assim

$$\begin{aligned} \frac{J_\infty(ru + rv)}{r^2} &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(ru + rv)}{ru + rv} (u^2 + 2uv + v^2) dx \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(ru)}{ru} (u^2) dx - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(ru + rv)}{ru + rv} (uv) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(rv)}{rv} (v^2) dx \\ &< \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(ru)}{ru} (u^2) dx + \|v\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(rv)}{rv} (v^2) dx + 2\langle u, v \rangle. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Como o resultado em (1.38) é válido para todo  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ ;  $u, v > 0$  e  $r \in (0, +\infty)$ , podemos substituir  $u$  por  $\lambda w_0^R$  e  $v$  por  $(1 - \lambda) w_y^R$  para  $0 \leq \lambda \leq 1$  e utilizando mudança de variáveis obter a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
\frac{J_\infty(ru + rv)}{r^2} &= \frac{J_\infty(r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R)}{r^2} \\
&\leq \|\lambda w_0^R\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(r\lambda w_0^R)}{r\lambda w_0^R} (\lambda w_0)^2 dx \\
&\quad + \|(1-\lambda)w_y^R\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(r(1-\lambda)w_y^R)}{r(1-\lambda)w_y^R} ((1-\lambda)w_y^R)^2 dx + 2\langle \lambda w_0^R, (1-\lambda)w_y^R \rangle \\
&= \lambda^2 \left( \|w_0^R\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(r\lambda w_0^R)}{r\lambda w_0^R} (w_0^R)^2 dx \right) \\
&\quad + (1-\lambda)^2 \left( \|w_y^R\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(r(1-\lambda)w_y^R)}{r(1-\lambda)w_y^R} (w_y^R)^2 dx \right) + 2\lambda(1-\lambda) \langle w_0^R, w_y^R \rangle \\
&= \lambda^2 \left( \|w\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} (w)^2 dx \right) \\
&\quad + (1-\lambda)^2 \left( \|w\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(r(1-\lambda)w)}{r(1-\lambda)w} (w)^2 dx \right) + 2\lambda(1-\lambda) \langle w_0^R, w_y^R \rangle. \quad (1.39)
\end{aligned}$$

Visto que  $w$  solução do problema limite, então

$$w_{y-y_0}^R = w(x - R(y - y_0)) \rightarrow 0, \text{ se } R \rightarrow +\infty.$$

e

$$w_{y-y_0}^R = w(x - R(y - y_0)) \rightarrow 0, \text{ em } H^{-1}(\mathbb{R}^N).$$

Assim, por definição de convergência fraca, para toda  $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\langle w(\cdot - R(y - y_0)), \varphi \rangle \rightarrow \langle 0, \varphi \rangle = 0, \text{ se } R \rightarrow +\infty.$$

Em particular, escolha  $\varphi = w \in H^1(\mathbb{R}^N)$  e segue que

$$\langle w(\cdot - R(y - y_0)), w \rangle \rightarrow 0, \text{ se } R \rightarrow +\infty.$$

Fazendo uma mudança de variáveis, segue que

$$\begin{aligned}
o_R(1) &= \langle w(\cdot - R(y - y_0)), w \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla w(x - R(y - y_0)) \nabla w(x) + w(x - R(y - y_0)) w(x)] dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla w(x - Ry_0) \nabla w(x - Ry) + w(x - Ry_0) w(x - Ry)] dx \quad (1.40) \\
&= \langle w(\cdot - Ry_0), w(\cdot - Ry) \rangle \\
&= \langle w_0^R, w_y^R \rangle.
\end{aligned}$$

Pela Proposição 1.1 e usando (1.40) podemos reescrever a desigualdade em (1.39) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\frac{J_\infty(ru + rv)}{r^2} &= \frac{J_\infty(r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R)}{r^2} \\
&\leq \lambda^2 \left( \|w\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(r\lambda w)}{r\lambda w} (w)^2 dx \right) \\
&\quad + (1-\lambda)^2 \left( \|w\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(r(1-\lambda)w)}{r(1-\lambda)w} (w)^2 dx \right) \\
&\quad + 2\lambda(1-\lambda) \langle w_0^R, w_y^R \rangle \\
&= \Phi(\lambda, r) + \Phi(1-\lambda, r) + o_R(1) \\
&< S_0 + o_R(1),
\end{aligned} \tag{1.41}$$

em que  $o_R(1) \rightarrow 0$ , se  $R \rightarrow +\infty$ .

Por outro lado, desejamos obter uma estimativa da seguinte forma

$$\frac{J(r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R)}{r^2} < 0,$$

para todo  $r \geq T_0, 0 \leq \lambda \leq 1, R \geq R_0$  e uniformemente em  $y \in \partial B_2(y_0)$ . Para tanto, observe que para todo  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned}
J(u) &= \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))f(u)u dx \\
&= \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(u)u dx \\
&= J_\infty(u) - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(u)u dx.
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Segue por (1.42) que

$$\begin{aligned}
\frac{J(r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R)}{r^2} &= \frac{J_\infty(r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R)}{r^2} \\
&\quad - \frac{1}{r^2} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R)(r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R) dx \\
&= \frac{J_\infty(r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R)}{r^2} \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) \frac{f(r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R)}{r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R} (\lambda w_0^R + (1-\lambda)w_y^R)^2 dx.
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Agora vamos estimar esta última integral na equação (1.43), isto é, vamos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| \frac{f(r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R)}{r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R} (\lambda w_0^R + (1-\lambda)w_y^R)^2 dx = o_R(1). \tag{1.44}$$

Podemos utilizar a condição  $(a_2)$ ,  $(f_2)$  e o Lema 1.9 verificar (1.44). De fato, note que por  $(f_2)$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| |f(r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R)| (\lambda w_0^R + (1-\lambda)w_y^R) dx \\
& \leq \frac{C}{r} \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| \left\{ 2^{p_1} (|r\lambda w_0^R|^{p_1} + |r(1-\lambda)w_y^R|^{p_1}) + 2^{p_2} (|r\lambda w_0^R|^{p_2} + |r(1-\lambda)w_y^R|^{p_2}) \right\} \lambda w_0^R dx \\
& \quad + \frac{C}{r} \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| \left\{ 2^{p_1} (|r\lambda w_0^R|^{p_1} + |r(1-\lambda)w_y^R|^{p_1}) + 2^{p_2} (|r\lambda w_0^R|^{p_2} + |r(1-\lambda)w_y^R|^{p_2}) \right\} (1-\lambda)w_y^R dx \\
& \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| \left\{ (w_0^R)^{p_1} + (w_0^R)^{p_2} + (w_y^R)^{p_1} + (w_y^R)^{p_2} \right\} (\lambda w_0^R + (1-\lambda)w_y^R) dx. \tag{1.45}
\end{aligned}$$

Usando agora  $(a_2)$  e o Lema 1.9 obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| (w_0^R)^{p_i+1} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} e^{-k|x|} e^{-(p_i+1)|x-Ry_0|} dx \leq C e^{-k|0-Ry_0|} = C e^{-kR} = o_R(1), \tag{1.46}$$

e também que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| (w_0^R)^{p_i} w_y^R dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} e^{-k|x|} e^{-p_i|x-Ry_0|} e^{-|x-Ry|} dx \leq C e^{-\frac{1}{2}(R+2R+R)} = o_R(1), \tag{1.47}$$

visto que  $C e^{-\frac{1}{2}(R|y|)} \leq C e^{-\frac{1}{2}R}$ , pois  $1 \leq |y| \leq 3$ . Logo, de (1.45), (1.46) e (1.47) verificamos (1.44).

Para concluir o resultado de projeção sobre  $\mathcal{N}$ , substituindo (1.41), (1.44) em (1.43), podemos tomar  $R$  suficientemente grande de forma que

$$\frac{J(r\lambda w_0^R + r(1-\lambda)w_y^R)}{r^2} \leq S_0 + o_R(1) < \frac{S_0}{3} < 0, \tag{1.48}$$

para todo  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $T_0 \leq r$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$  e uniformemente em  $y \in \partial B_2(y_0)$ .

Combinando-se (1.4) e (1.48) pode-se garantir que existe um único  $r = T_{\lambda,y}^R \in (0, T_0)$  tal que  $T_{\lambda,y}^R z_{\lambda,y}^R$  pertence à variedade  $\mathcal{N}$ . Consequentemente,  $\mathcal{N}$  é uma variedade não vazia.

Para provar a continuidade de  $T_{\lambda,y}^R$ , considere a aplicação  $h \in C^1$  definida por

$$\begin{aligned}
h : \mathbb{R}^+ \times H^1(\mathbb{R}^N) & \rightarrow \mathbb{R} \\
(t, u) & \mapsto h(t, u) = t\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))f(tu)u dx.
\end{aligned}$$

Seja  $(t_0, u_0)$  tal que  $h(t_0, u_0) = 0$  e  $u_0 > 0$ . Note que se  $t_0 u_0 \in \mathcal{N}$ , então

$$t_0^2 \|u_0\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))f(t_0 u_0) t_0 u_0 dx = \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x)) \frac{f(t_0 u_0)}{t_0} t_0^2 u_0 dx.$$

Assim,

$$\|u_0\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x)) \frac{f(t_0 u_0)}{t_0} u_0 dx. \tag{1.49}$$

Por outro lado, derivando  $h$  em relação a  $t$  e utilizando (1.49) e (f<sub>3</sub>) obtemos

$$\begin{aligned} h'_t(t_0, u_0) &= \|u_0\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) f'(t_0 u_0) u_0^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \left( \frac{f(t_0 u_0)}{t_0} u_0 - f'(t_0 u_0) u_0^2 \right) dx < 0. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Aplicando o Teorema da Função Implícita, a aplicação  $u \mapsto t(u)$  é de classe  $C^1$  onde  $t_0 = t(u_0)$ . Pelo que provamos, para cada  $R > 0$ ,  $y \in \partial B_2(y_0)$  e  $\lambda \in [0, 1]$  existe um único  $T_{\lambda, y}^R = t(z_{\lambda, y}^R)$  tal que  $t$  é de classe  $C^1$ . Agora, para cada  $R > 0$  fixado, a função  $(\lambda, y) \mapsto z_{\lambda, y}^R$  é contínua. Desde que  $[0, 1] \times \partial B_2(y_0)$  é compacto em  $\mathbb{R}^2$ , existe um  $\bar{T}(R) = \max_{(\lambda, y) \in [0, 1] \times \partial B_2(y_0)} T_{\lambda, y}^R$  tal que  $T_{\lambda, y}^R z_{\lambda, y}^R \in \mathcal{N}$  e  $T_{\lambda, y}^R \in [0, \bar{T}(R)]$ . Suponha por contradição que  $\bar{T}(R_k) \rightarrow +\infty$ , se  $R_k \rightarrow +\infty$ . Visto que  $\bar{T}(R_k) = \max_{(\lambda, y) \in [0, 1] \times \partial B_2(y_0)} T_{\lambda, y}^{R_k}$ , tem-se  $\bar{T}(R_k) = T_{\lambda, y}^{R_k}$  para algum  $(\lambda, y)$ . Assim obtemos a continuidade de  $T_{\lambda, y}^R$  nas variáveis  $\lambda, y, R$  e o lema está provado. □

## 1.4 Estimativas assintóticas

Precisaremos do Lema II.2 em Bahri e Lions [8] para nos auxiliar nas delicadas e precisas estimativas. Por motivo de completude de informações iremos demonstrar o lema visto que em [8] tal resultado não está claramente enunciado e demonstrado.

**Lema 1.11.** (Lema II.2 - [8]) *Suponha que  $\varphi \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ,  $\psi \in C(\mathbb{R}^N)$  satisfazem para constantes  $\alpha, \beta \geq 0$  e  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,*

$$\varphi(x) e^{\alpha|x|} |x|^\beta \rightarrow \gamma; \quad \text{se } |x| \rightarrow +\infty \quad (1.51)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\psi(x)| e^{\alpha|x|} (1 + |x|^\beta) dx < +\infty. \quad (1.52)$$

Então

$$\lim_{|\bar{y}| \rightarrow +\infty} \left[ \left( \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x + \bar{y}) \psi(x) dx \right) e^{\alpha|\bar{y}|} |\bar{y}|^\beta - \gamma \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{\alpha \langle x, \bar{y} \rangle}{|\bar{y}|}} \psi(x) dx \right] = 0. \quad (1.53)$$

**Demonstração:** A demonstração segue do estudo de vários casos e da aplicação do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Primeiramente, seja  $|x + \bar{y}| \leq 1$ . Note que

$$|\bar{y}| - |x| \leq |x + \bar{y}| \leq 1 \implies |\bar{y}| \leq 1 + |x|.$$

Por (1.52) e dado que  $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$  existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\begin{aligned} |\varphi(x + \bar{y}) \psi(x)| e^{\alpha|\bar{y}|} |\bar{y}|^\beta &\leq C |\psi(x)| e^{\alpha|x|} (1 + |x|)^\beta \\ &= C |\psi(x)| e^{\alpha|x|} (1 + |x|^\beta) \in L^1(\mathbb{R}^N). \end{aligned} \quad (1.54)$$

Considere agora  $1 < |x + \bar{y}| \leq \frac{|\bar{y}|}{2}$ . Note que

$$2|\bar{y}| - 2|x| \leq 2|x + \bar{y}| \leq |\bar{y}| \implies |\bar{y}| \leq 2|x| \quad (1.55)$$

e

$$|\bar{y}| - |x| \leq |x + \bar{y}| \implies -\alpha|x + \bar{y}| + \alpha|\bar{y}| \leq \alpha|x|.$$

Por (1.51), dado  $\epsilon > 0$  existe algum  $M_0 > 0$  tal que  $\forall |x| \geq M_0$  tem-se

$$|\varphi(x)| \leq (\epsilon + \gamma)e^{-\alpha|x|}|x|^{-\beta} = Ce^{-\alpha|x|}|x|^{-\beta}. \quad (1.56)$$

Combinando as informações de (1.54), (1.55), (1.56) com (1.52) segue que se  $1 < |x + \bar{y}| \leq \frac{|\bar{y}|}{2}$ ,

$$\begin{aligned} |\varphi(x + \bar{y})\psi(x)|e^{\alpha|\bar{y}|}|\bar{y}|^\beta &\leq C|\psi(x)|e^{-\alpha|x+\bar{y}|}|x + \bar{y}|^{-\beta}e^{\alpha|\bar{y}|}(2|x|)^\beta \\ &\leq C|\psi(x)|e^{\alpha|x|}|x|^\beta \in L^1(\mathbb{R}^N). \end{aligned} \quad (1.57)$$

Finalmente considere o caso  $|x + \bar{y}| \geq \frac{|\bar{y}|}{2}$ . Usando novamente (1.51) e a desigualdade  $-\alpha|x + \bar{y}| + \alpha|\bar{y}| \leq \alpha|x|$  tem-se

$$\begin{aligned} |\varphi(x + \bar{y})\psi(x)|e^{\alpha|\bar{y}|}|\bar{y}|^\beta &\leq C|\psi(x)|e^{-\alpha|x+\bar{y}|}|x + \bar{y}|^{-\beta}e^{\alpha|\bar{y}|}(2|x + y|)^\beta \\ &\leq C|\psi(x)|e^{\alpha|x|}|x|^\beta \in L^1(\mathbb{R}^N). \end{aligned} \quad (1.58)$$

Para cada  $x \in \mathbb{R}^N$  fixado, segue de (1.51) que

$$\lim_{|\bar{y}| \rightarrow +\infty} \varphi(x + \bar{y})\psi(x)e^{\alpha|\bar{y}|}|\bar{y}|^\beta = \lim_{|x+\bar{y}| \rightarrow +\infty} \varphi(x + \bar{y})\psi(x)e^{\alpha|x+\bar{y}|}|x + \bar{y}|^\beta = \gamma\psi(x). \quad (1.59)$$

Com os resultados obtidos em (1.54), (1.57), (1.58) e (1.59) podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para obter

$$\lim_{|\bar{y}| \rightarrow +\infty} \left( \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x + \bar{y})\psi(x) dx \right) e^{\alpha|\bar{y}|}|\bar{y}|^\beta = \gamma \int_{\mathbb{R}^N} \psi(x) dx. \quad (1.60)$$

Por outro lado, observe que se  $\langle x, \bar{y} \rangle \geq 0$ , então

$$\left| \gamma e^{-\frac{\alpha\langle x, \bar{y} \rangle}{|\bar{y}|}} \psi(x) \right| \leq |\gamma| |\psi(x)|, \quad (1.61)$$

e  $\gamma\psi \in L^1(\mathbb{R}^N)$  uma vez que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\psi(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\psi(x)|e^{\alpha|x|}(1 + |x|^\beta) dx < +\infty.$$

Se  $\langle x, \bar{y} \rangle \leq 0$ , então

$$0 \leq -\langle x, \bar{y} \rangle = \langle -x, \bar{y} \rangle \leq |x||\bar{y}|$$

implica que

$$\left| \gamma e^{-\frac{\alpha \langle x, y \rangle}{|y|}} \psi(x) \right| \leq |\gamma| e^{\alpha|x|} |\psi(x)| \in L^1(\mathbb{R}^N), \quad (1.62)$$

por (1.52). Para cada  $x \in \mathbb{R}^N$  fixado, temos ainda

$$\lim_{|\bar{y}| \rightarrow +\infty} \gamma e^{-\frac{\alpha \langle x, \bar{y} \rangle}{|\bar{y}|}} \psi(x) = \gamma e^0 \psi(x). \quad (1.63)$$

Com os resultados obtidos em (1.61), (1.62) e (1.63) podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para obter

$$\lim_{|\bar{y}| \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \gamma e^{-\frac{\alpha \langle x, \bar{y} \rangle}{|\bar{y}|}} \psi(x) dx = \gamma \int_{\mathbb{R}^N} \psi(x) dx. \quad (1.64)$$

Portanto, de (1.60) e (1.64) o lema está demonstrado. □

Um resultado encontrado em [37] que iremos utilizar para obter o decaimento exponencial exato para a solução *ground state* do problema limite ( $P_\infty$ ), a saber

**Lema 1.12.** [Proposição 6.1 em [37]] *Sejam  $N > 1$ ,  $\rho \geq 0$  e  $W \in C^1((\rho, \infty), \mathbb{R})$ . Se*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} W(s) > 0$$

*e para algum  $\beta > 0$  tem-se*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} W'(s) s^{1+\beta} = 0,$$

*então existe uma função radial não negativa  $v : \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$-\Delta v + Wv = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0) \quad (1.65)$$

*e, para alguma constante  $\rho_0 \in (\rho, \infty)$ ,*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x) |x|^{\frac{N-1}{2}} \exp \int_{\rho_0}^{|x|} \sqrt{W} = 1. \quad (1.66)$$

Seguindo idéias encontradas em [38], mostraremos que a solução *ground state* positiva do problema limite ( $P_\infty$ ) tem decaimento exponencial exato. Tal demonstração é diferente daquela encontrada no clássico artigo de Gidas, Ni e Nirenberg [25] em que os autores demonstraram o decaimento exponencial utilizando função de Green, estimativas interiores e funções de Bessel.

**Lema 1.13.** *Seja  $u$  solução positiva radial *ground state* do problema*

$$-\Delta u + u = f(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

*então  $u$  satisfaz*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) |x|^{\frac{N-1}{2}} e^{|x|} \in (0, \infty). \quad (1.67)$$

**Demonstração:** Inicialmente, visto que  $u(x) \rightarrow 0$ , se  $|x| \rightarrow \infty$ , segue por  $(f_2)$  que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(u(x))}{u(x)} = 0.$$

Logo, existe um  $\rho \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $x \in \mathbb{R}^N$  e  $|x| \geq \rho$  temos

$$\frac{f(u(x))}{u(x)} \leq \frac{3}{4}.$$

Note que se  $x \in \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0)$ ,

$$-\Delta u(x) + u(x) = f(u(x)) = \frac{f(u(x))}{u(x)} u(x) \leq \frac{3u(x)}{4} \quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0),$$

implicando

$$-\Delta u(x) + \frac{1}{4}u(x) \leq \frac{3u(x)}{4} - \frac{3u(x)}{4} = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0). \quad (1.68)$$

Considere uma função radial não negativa  $v \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0), \mathbb{R})$  satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta v + \frac{1}{4}v = 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0), \\ v(x) = u(x), & \text{se } x \in \partial B_\rho(0), \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x) = 0. \end{cases} \quad (1.69)$$

Seja  $W_0(x) = \frac{1}{4}$  e note que  $W = W_0$  no Lema 1.12, juntamente com (1.65) e (1.66) existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$0 < v(x) \leq C|x|^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\frac{|x|}{2}}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0).$$

Defina a função  $z := u - v$ . Segue por (1.68) e (1.69)

$$-\Delta z + \frac{1}{4}z = -\Delta u + \frac{1}{4}u + \Delta v - \frac{1}{4}v \leq 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0) \quad (1.70)$$

e

$$z = 0 \quad \text{sobre } \partial B_\rho(0).$$

Ademais, temos que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} z(x) = 0.$$

Considere  $z = z^+ - z^-$ . Por (1.70) segue

$$\|z^+\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0)} \left( |\nabla z^+|^2 + \frac{1}{4}|z^+|^2 \right) dx \leq 0, \quad (1.71)$$

logo  $z \leq 0$  em  $\mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0)$ . Assim



$$0 < u(x) \leq v(x) \leq C|x|^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\frac{|x|}{2}} \text{ em } \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0). \quad (1.72)$$

Combinando a hipótese de crescimento ( $f_2$ ) e (1.72) existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\left| \frac{f(u)}{u} \right| \leq C \left( e^{-\frac{p_1-1}{2}|x|} + e^{-\frac{p_2-1}{2}|x|} \right). \quad (1.73)$$

Considere  $W_1(x) = 1 - C \left( e^{-\frac{p_1-1}{2}|x|} + e^{-\frac{p_2-1}{2}|x|} \right)$  e note que  $W_1$  satisfaz o Lema 1.12 . Aplicando-o mais uma vez e usando (1.73) temos

$$\begin{aligned} -\Delta u + W_1 u &= -\Delta u + u - C \left( e^{-\frac{p_1-1}{2}|x|} + e^{-\frac{p_2-1}{2}|x|} \right) u \\ &= \frac{f(u)}{u} u - C \left( e^{-\frac{p_1-1}{2}|x|} + e^{-\frac{p_2-1}{2}|x|} \right) u \\ &= \left[ \frac{f(u)}{u} - C \left( e^{-\frac{p_1-1}{2}|x|} + e^{-\frac{p_2-1}{2}|x|} \right) \right] u \\ &\leq 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$-\Delta u + u \geq 0 \geq -\Delta u + W_1 u \text{ em } \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0). \quad (1.74)$$

Defina as funções radiais não negativas  $\underline{u}, \bar{u} \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0), \mathbb{R})$  satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} + \underline{u} = 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0), \\ \underline{u}(x) = u(x), & \text{se } x \in \partial B_\rho(0), \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} \underline{u}(x) = 0 \end{cases} \quad (1.75)$$

e

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u} + W_1 \bar{u} = 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0), \\ \bar{u}(x) = u(x), & \text{se } x \in \partial B_\rho(0), \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} \bar{u}(x) = 0. \end{cases} \quad (1.76)$$

Observe que

$$-\Delta(\underline{u} - u) + (\underline{u} - u) = (-\Delta \underline{u} + \underline{u}) + (\Delta u - u) \leq 0,$$

isto é,

$$-\Delta \underline{u} + \underline{u} \leq -\Delta u + u \text{ em } \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0)$$

e

$$\underline{u} = u \text{ sobre } \partial B_\rho(0).$$

Analogamente, temos

$$-\Delta(\bar{u} - u) + W_1(\bar{u} - u) = (-\Delta \bar{u} + W_1 \bar{u}) + (\Delta u - W_1 u) \geq 0,$$

isto é,

$$-\Delta u + W_1 u \leq -\Delta \bar{u} + W_1 \bar{u} \text{ em } \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0)$$

e

$$\bar{u} = u \text{ sobre } \partial B_\rho(0).$$

Com estas duas observações segue analogamente como feito em (1.71) que

$$\underline{u} \leq u \leq \bar{u} \text{ em } \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0). \quad (1.77)$$

Utilizando (1.77) e o Lema 1.12 segue que

$$\begin{aligned} 0 < \lim_{|x| \rightarrow \infty} \underline{u}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{|x|} &\leq \liminf_{|x| \rightarrow \infty} u(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{|x|} \\ &\leq \limsup_{|x| \rightarrow \infty} u(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{|x|} \\ &\leq \lim_{|x| \rightarrow \infty} \bar{u}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{|x|} < \infty. \end{aligned} \quad (1.78)$$

A primeira desigualdade estrita em (1.78) segue do Lema 1.12 e a última desigualdade é finita, pois utilizando o Lema 1.12 e (1.76) obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow \infty} \bar{u}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{|x|} &= \lim_{|x| \rightarrow \infty} \bar{u}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} \frac{e^{\int_\rho^{|x|} \sqrt{1-C\left(e^{-\frac{p_1-1}{2}t} + e^{-\frac{p_2-1}{2}t}\right)} dt}}{e^{\int_\rho^{|x|} \sqrt{1-C\left(e^{-\frac{p_1-1}{2}t} + e^{-\frac{p_2-1}{2}t}\right)} dt}} e^{|x|} \\ &= \lim_{|x| \rightarrow \infty} \bar{u}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\int_\rho^{|x|} \sqrt{1-C\left(e^{-\frac{p_1-1}{2}t} + e^{-\frac{p_2-1}{2}t}\right)} dt} \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{e^{|x|}}{e^{\int_\rho^{|x|} \sqrt{1-C\left(e^{-\frac{p_1-1}{2}t} + e^{-\frac{p_2-1}{2}t}\right)} dt}} < \infty. \end{aligned}$$

O próximo passo é mostrar que o  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{|x|}$  existe. De fato, note que se mostrarmos que a função  $\frac{\bar{u}}{\underline{u}}$  é não decrescente, usando (1.77) tal função seria limitada, pois  $1 \leq \frac{\bar{u}}{\underline{u}} \leq \frac{\bar{u}}{\underline{u}}$  e

$$\begin{aligned} &\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\bar{u}(x)}{\underline{u}(x)} \\ &= \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\bar{u}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\int_\rho^{|x|} \sqrt{1-C\left(e^{-\frac{p_1-1}{2}t} + e^{-\frac{p_2-1}{2}t}\right)} dt}}{\underline{u}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{|x|}} \frac{e^{|x|}}{e^{\int_\rho^{|x|} \sqrt{1-C\left(e^{-\frac{p_1-1}{2}t} + e^{-\frac{p_2-1}{2}t}\right)} dt}} < \infty, \end{aligned}$$

por (1.75), (1.76) e o Lema 1.12. Assim concluiríamos que  $\frac{u}{\underline{u}}$  tem limite finito se  $|x| \rightarrow +\infty$  e que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{|x|} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{\underline{u}(x)} \lim_{|x| \rightarrow \infty} \underline{u}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{|x|} \in (0, \infty).$$

Finalmente, vamos mostrar que  $\frac{u}{\underline{u}}$  é não decrescente. Considere  $r, s \in (\rho, \infty)$  tal que  $r \leq s$ . Desde

que  $u$  e  $\underline{u}$  são ambas funções radiais, defina o seguinte operador

$$Lu = -(-\Delta u + u) = \Delta u - u = u'' + \frac{N-1}{r}u' - u.$$

Segue da definição do operador  $L$  e de (1.75) que

$$L\underline{u} = \underline{u}'' + \frac{N-1}{r}\underline{u}' - \underline{u}.$$

Note que  $-\Delta(\underline{u} - u) + (\underline{u} - u) = -f(u) < 0$ , logo, como feito em (1.71), temos que  $\underline{u}(x) \leq u(x)$  para todo  $|x| \in (\rho, \infty)$ .

Agora considere a função  $v = \frac{\underline{u}}{u}$  e  $g(r) = \frac{N-1}{r}$ . Observe que

$$L\underline{u} = L(vu) = uv'' + (2u' + gu)v' + L(u)v = 0.$$

Decorre que

$$v'' + \left(2\frac{u'}{u} + g\right)v' + \frac{1}{u}L(u)v; \quad r \in (\rho, \infty), \quad v(\rho) = 1. \quad (1.79)$$

O problema de valor inicial em (1.79) tem solução única desde que  $\frac{1}{u}L(u) < 0$  e  $2\frac{u'}{u} + g$  é contínua em  $r \in (\rho, \infty)$ .

Por outro lado, note que temos

$$L(\underline{u} - u) = 0 - (-f(u)) = f(u) > 0, \quad \text{para } r \in (\rho, \infty),$$

e

$$\underline{u} - u = 0 \quad \text{sobre } \partial B_\rho(0).$$

Aplicando o Princípio do Máximo e Lema de Hopf, respectivamente, temos

$$\underline{u} - u < 0 \quad \text{para } r > \rho \quad \text{e} \quad \frac{\partial(\underline{u} - u)}{\partial r} < 0 \quad \text{se } r = \rho, \quad (1.80)$$

que implica

$$\underline{u}'(\rho) < u'(\rho) < 0.$$

Consequentemente,

$$v'(\rho) = \frac{\underline{u}'(\rho)u(\rho) - \underline{u}(\rho)u'(\rho)}{u^2(\rho)} < \frac{u'(\rho)[u(\rho) - \underline{u}(\rho)]}{u^2(\rho)} = 0.$$

Desde que  $v(r)$  é continuamente diferenciável em  $(\rho, \infty)$ , derivando  $v$  temos

$$v'(r) = \frac{\underline{u}'(r)u(r) - \underline{u}(r)u'(r)}{u^2(r)}.$$

Supondo  $v'(r) \geq 0$  segue que

$$\frac{\underline{u}'(r)}{\underline{u}(r)} \geq \frac{u'(r)}{u(r)},$$

ou seja,

$$(\ln \underline{u}(r))' \geq (\ln u(r))'.$$

Como a função  $\ln(x)$  é uma função crescente, isto equivale a

$$\underline{u}(r) \geq u(r). \text{ Contradição com (1.80).}$$

Assim temos que  $v'(r) < 0$  para todo  $r > \rho$  e, portanto, implicando que  $\frac{u}{\underline{u}}$  é não decrescente como desejávamos mostrar.

□

No próximo resultado iremos enunciar e provar duas propriedades das funções  $F$  e  $f$  que são consequências de  $(f_3)$  e que foi observado inicialmente no trabalho [24]. Tais propriedades são válidas sem exigir que  $f$  seja de classe  $C^3$  como nos trabalhos em [1, 18].

**Lema 1.14.** *Assuma  $(f_3)$ . Para todo  $u, v > 0$  tem-se*

$$F(u + v) \geq F(u) + f(u)v, \quad (1.81)$$

e para todo  $\rho > 0$  existe uma constante  $C_\rho > 0$  tal que, para todo  $0 \leq u, v \leq \rho$  e  $\mu$  satisfazendo  $0 < 1 + \mu < p_1$ , tem-se

$$F(u + v) - F(u) - F(v) \geq f(u)v + f(v)u - C_\rho u^{1+\frac{\mu}{2}} v^{1+\frac{\mu}{2}}. \quad (1.82)$$

**Demonstração:** Primeiramente, como consequência de  $(f_3)$  temos que a função  $u \mapsto f(u)$  é crescente e isto implica que

$$F(u + v) - F(u) = \int_u^{u+v} f(t) dt \geq f(u)v.$$

Por outro lado, se  $u = 0$  ou  $v = 0$ , a segunda propriedade é satisfeita. Entretanto, para  $0 < v \leq u$ , segue de (1.81) que

$$\begin{aligned} F(u + v) - F(u) - F(v) - f(u)v - f(v)u &\geq -F(v) - f(v)u \\ &= -\int_0^v \frac{f(t)}{t^{1+\nu}} t^{1+\mu} dt - \frac{f(v)}{v^{1+\nu}} uv^{1+\mu} \\ &\geq -\frac{\overline{C}_\rho}{2+\mu} v^{2+\mu} - \overline{C}_\rho uv^{1+\mu} \\ &= \overline{C}_\rho (uv)^{1+\frac{\mu}{2}} \left\{ -\frac{1}{2+\mu} \frac{v^{1+\frac{\mu}{2}}}{u^{1+\frac{\mu}{2}}} - \frac{v^{\frac{\mu}{2}}}{u^{\frac{\mu}{2}}} \right\} \\ &\geq \overline{C}_\rho (uv)^{1+\frac{\mu}{2}} \left\{ -\frac{1}{2+\mu} \frac{v^{1+\frac{\mu}{2}}}{u^{1+\frac{\mu}{2}}} - \frac{u^{\frac{\mu}{2}}}{u^{\frac{\mu}{2}}} \right\} \\ &\geq \overline{C}_\rho (uv)^{1+\frac{\mu}{2}} \left\{ -\frac{1}{2+\mu} - 1 \right\} \\ &\geq \overline{C}_\rho (uv)^{1+\frac{\mu}{2}} \left\{ -\frac{1}{2} - 1 \right\} \\ &= -\frac{3}{2} \overline{C}_\rho u^{1+\frac{\mu}{2}} v^{1+\frac{\mu}{2}}, \end{aligned}$$

onde  $\bar{C}_\rho := \sup_{0 < u \leq \rho} \frac{f(u)}{u^{1+\mu}} < \infty$  e para todo  $\mu$  tal que  $0 < 1 + \mu < p_1$ .

Como (1.81) e (1.82) são simétricas em relação a  $u$  e  $v$ , a mesma estimativa se mantém para  $0 < u \leq v$  e, assim, concluimos a demonstração. □

Agora iremos iniciar as precisas estimativas. Para isso, começamos definindo para  $R > 0$ ,  $y \in \partial B_2(y_0)$ ,  $\|y_0\| = 1$  e  $y_0 \in \mathbb{R}^N$  fixado, a quantidade

$$\varepsilon_R := \int_{\mathbb{R}^N} f(w(x - Ry_0))w(x - Ry) dx \quad (1.83)$$

onde estamos trabalhando com  $w$  solução positiva radial do problema  $(P_\infty)$ . Para mais informações sobre (1.83), veja os trabalhos [1, 8, 18] e suas referências.

Nos dois próximos lemas iremos estimar a quantidade  $\varepsilon_R$ , isto é, mostrar o decaimento exato da quantidade  $\varepsilon_R$  como consequência dos Lemas 1.11 e 1.13 e das hipóteses  $(f_2)$  e  $(f_3)$ .

**Lema 1.15.** *Assuma  $(f_2)$  e considere  $y \in \partial B_2(y_0)$  com  $y_0 \in \mathbb{R}^N; \|y_0\| = 1$ . Então existe uma constante  $C_0 > 0$  tal que*

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \varepsilon_R(2R)^{\frac{N-1}{2}} e^{2R} = C_0. \quad (1.84)$$

**Demonstração:** Para demonstrarmos este lema iremos utilizar o Lema 1.11 com  $\varphi = \omega$ ,  $\psi = f(\omega)$  e  $\bar{y} = -R(y_0 - y)$  e ainda  $\alpha = 1$  e  $\beta = \frac{N-1}{2}$ .

Pelo Lema 1.13, se  $\omega$  é a solução positiva radial do problema limite  $(P_\infty)$ , então  $\omega$  tem o comportamento assintótico

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \omega(|x|)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{|x|} \in (0, \infty). \quad (1.85)$$

Portanto, a primeira hipótese do Lema 1.11, isto é, (1.51) está verificada em (1.85).

Por outro lado, usando  $(f_2)$  e (1.85) existe algum  $R_1 > 0$  tal que, para todo  $|x| > R_1$ ,

$$\begin{aligned} \psi = f(\omega) &\leq C(|\omega|^{p_1} + |\omega|^{p_2}) \\ &\leq C\left(|x|^{-p_1 \frac{N-1}{2}} e^{-p_1|x|} + |x|^{-p_2 \frac{N-1}{2}} e^{-p_2|x|}\right). \end{aligned} \quad (1.86)$$

Decorre de (1.86) que

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} f(\omega) e^{|x|} (1 + |x|)^{\frac{N-1}{2}} dx \\
&= \int_{B_{R_1}(0)} f(\omega) e^{|x|} (1 + |x|)^{\frac{N-1}{2}} dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R_1}(0)} f(\omega) e^{|x|} (1 + |x|)^{\frac{N-1}{2}} dx \\
&\leq C\mu(B_{R_1}(0)) + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R_1}(0)} f(\omega) e^{|x|} (1 + |x|)^{\frac{N-1}{2}} dx \\
&\leq C + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R_1}(0)} C(|x|^{-p_1 \frac{N-1}{2}} e^{-p_1|x|} + |x|^{-p_2 \frac{N-1}{2}} e^{-p_2|x|}) e^{|x|} (1 + |x|)^{\frac{N-1}{2}} dx \\
&= C + C \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R_1}(0)} (|x|^{-p_1 \frac{N-1}{2}} e^{(1-p_1)|x|} + |x|^{-p_2 \frac{N-1}{2}} e^{(1-p_2)|x|}) (1 + |x|)^{\frac{N-1}{2}} dx \\
&\leq C + C \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R_1}(0)} (R^{-p_1 \frac{N-1}{2}} e^{(1-p_1)|x|} + R^{-p_2 \frac{N-1}{2}} e^{(1-p_2)|x|}) (1 + |x|)^{\frac{N-1}{2}} dx \\
&= C + CR^{-p_1 \frac{N-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R_1}(0)} e^{(1-p_1)|x|} (1 + |x|)^{\frac{N-1}{2}} dx \\
&\quad + CR^{-p_2 \frac{N-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R_1}(0)} e^{(1-p_2)|x|} (1 + |x|)^{\frac{N-1}{2}} dx < +\infty,
\end{aligned}$$

pois  $1 - p_i < 0$  para  $i \in \{1, 2\}$ . Desta forma verificamos a segunda hipótese do Lema 1.11, isto é, (1.52) está verificada. Podemos então aplicar o Lema 1.11 que assegura

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \varepsilon_R (2R)^{\frac{N-1}{2}} e^{2R} = C_0 > 0.$$

□

No lema seguinte apresentaremos uma estimativa inferior para a quantidade  $\varepsilon_R$ , se  $s = t = 1$ .

**Lema 1.16.** *Existe uma constante  $\bar{C}_0 > 0$  tal que para todo  $t, s \geq \frac{1}{2}$ ,  $y \in \partial B_2(y_0)$  com  $y_0 \in \mathbb{R}^N$  e  $R$  suficientemente grande,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(sw(x - Ry_0))tw(x - Ry) dx \geq \bar{C}_0 (2R)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-2R}. \quad (1.87)$$

**Demonstração:** Inicialmente, como  $s, t \geq \frac{1}{2}$  e usando a hipótese ( $f_3$ ) segue que

$$\frac{f(sw_0)}{sw_0} \geq \frac{f(\frac{1}{2}w_0)}{\frac{1}{2}w_0}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} f(sw_0)tw_y dx &= st \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(sw_0)}{sw_0} w_0 w_y dx \\
&\geq \frac{1}{2} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(\frac{1}{2}w_0)}{\frac{1}{2}w_0} w_0 w_y dx \\
&\geq \frac{1}{4} \int_{B_1(Ry_0)} \frac{f(\frac{1}{2}w_0)}{\frac{1}{2}w_0} w_0 w_y dx.
\end{aligned}$$

Como  $\frac{f(s)}{s}$ , para  $s > 0$ , é contínua em  $B_1(0)$ , então  $\frac{f(\frac{1}{2}w_0)}{\frac{1}{2}w_0}$  atinge um mínimo. Assim, fazendo mudança de variáveis

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} f(sw_0)tw_y dx &\geq \frac{1}{4} \int_{B_1(Ry_0)} \frac{f(\frac{1}{2}w_0)}{\frac{1}{2}w_0} w_0 w_y dx \\ &\geq \frac{1}{4} \int_{B_1(0)} \frac{f(\frac{1}{2}w(x))}{\frac{1}{2}w(x)} w(x)w(x - R(y - y_0)) dx \\ &\geq \frac{1}{4} \min_{B_1(0)} \frac{f(\frac{1}{2}w(x))}{\frac{1}{2}w(x)} \int_{B_1(0)} w(x)w(x - R(y - y_0)) dx \\ &\geq \frac{1}{4} C(2R)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-2R} = \bar{C}_0(2R)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-2R}, \end{aligned}$$

pois, usando a desigualdade triangular e como  $x \in B_1(0)$ , para todo  $R \geq 1$ , segue que

$$1 + |x - R(y - y_0)| \leq 1 + |x| + R|y - y_0| \leq R + R + 2R = 4R \quad (1.88)$$

e combinando (1.88) e (1.24) resulta que

$$\begin{aligned} w(x - R(y - y_0)) &\geq C_1(1 + |x - R(y - y_0)|)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-|x - R(y - y_0)|} \\ &\geq C_1(4R)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-|x|} e^{-|R(y - y_0)|} \\ &\geq C(2R)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-1} e^{-2R} \\ &= C(2R)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-2R}. \end{aligned}$$

Assim, o lema está demonstrado. □

Para nossas precisas estimativas de energia precisaremos utilizar os próximos dois resultados técnicos.

**Corolário 1.1.** *Existe uma constante positiva  $C$  tal que*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} (sf(w_0^R) - f(sw_0^R))w_y^R dx \right| \leq C|s - 1|O(\varepsilon_R),$$

*uniformemente para  $y \in \partial B_2(y_0)$ ,  $s \in [0, d]$ ;  $d > 1$  e  $R$  suficientemente grande.*

**Demonstração:** Defina  $\psi(s) := sf(u) - f(su)$  para  $u$  no conjunto dos números reais. Pela regularidade da  $f$  podemos usar o Teorema do Valor Médio para  $\psi$  o qual garante a existência de um  $\xi$  entre  $s$  e 1, sem perda de generalidade, considere  $s > 1$  tal que

$$|\psi(s) - \psi(1)| \leq |\psi'(\xi)||s - 1|. \quad (1.89)$$

Derivando  $\psi$  em relação a  $s$  e usando a hipótese  $(f_2)$  tem-se

$$\begin{aligned}
|\psi'(s)| &= |f(u) - f'(su)u| \\
&\leq |f(u)| + |f'(su)||u| \\
&\leq |f(u)| + C \left( |su|^{p_1-1} |u| + |su|^{p_2-1} |u| \right) \\
&\leq |f(u)| + C \max \left\{ |s|^{p_1-1}, |s|^{p_2-1} \right\} (|u|^{p_1} + |u|^{p_2}) \\
&\leq |f(u)| + C (|u|^{p_1} + |u|^{p_2}).
\end{aligned} \tag{1.90}$$

Combinando as desigualdades em (1.89) e (1.90) segue que

$$|\psi(s)| = |\psi(s) - \psi(1)| \leq (|f(u)| + C(|u|^{p_1} + |u|^{p_2})) |s - 1|.$$

Tomando  $u = w_0^R := w(x - Ry_0)$ , segue que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{R^N} (sf(w_0^R) - f(sw_0^R)) w_y^R dx \right| &= \left| \int_{R^N} \psi(s) w_y^R dx \right| \\
&\leq \int_{R^N} \left\{ |f(w_0^R)| + C \left( |w_0^R|^{p_1} + |w_0^R|^{p_2} \right) \right\} w_y^R |s - 1| dx \\
&= |s - 1| \left\{ \int_{R^N} |f(w_0^R) w_y^R| dx + C \int_{R^N} \left( |w_0^R|^{p_1} w_y^R + |w_0^R|^{p_2} w_y^R \right) dx \right\} \\
&\leq |s - 1| \{ \varepsilon_R + O(\varepsilon_R) \},
\end{aligned}$$

pois para  $i \in \{1, 2\}$ , usando (1.24), o Lema 1.9 e argumentando como no Lema 1.15 temos

$$\int_{R^N} |w_0^R|^{p_i} w_y^R dx = \int_{R^N} |w(z)|^{p_i} w(z - R(y - y_0)) dz \leq O(\varepsilon_R).$$

Assim concluímos a demonstração do corolário. □

**Lema 1.17.** Considere  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Se  $R \rightarrow +\infty$ , então tem-se que

$$T_{\frac{1}{2}, y}^R \rightarrow 2,$$

uniformemente em  $y \in \partial B_2(y_0)$ .

**Demonstração:** Considerando  $z_{\lambda, y}^R$  definido em (1.25) e fazendo  $\lambda = \frac{1}{2}$  temos

$$z_{\frac{1}{2}, y}^R = \frac{1}{2} w(x - Ry_0) + \frac{1}{2} w(x - Ry) = \frac{1}{2} w_0^R + \frac{1}{2} w_y^R.$$



Usando o funcional  $J$  dado em (1.5) segue que

$$\begin{aligned}
J(2z_{\frac{1}{2},y}^R) = J(w_0^R + w_y^R) &= \|w_0^R + w_y^R\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))f(w_0^R + w_y^R)(w_0^R + w_y^R) \, dx \\
&= \|w_0^R\|^2 + \|w_y^R\|^2 + 2\langle w_0^R, w_y^R \rangle \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))\frac{f(w_0^R + w_y^R)}{w_0^R + w_y^R}(w_0^R + w_y^R)^2 \, dx.
\end{aligned} \tag{1.91}$$

Como  $\frac{f(t)}{t}$  é crescente se  $t > 0$ , podemos reescrever (1.91) como

$$\begin{aligned}
J(2z_{\frac{1}{2},y}^R) &\leq \|w_0^R\|^2 + \|w_y^R\|^2 + 2\langle w_0^R, w_y^R \rangle \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))\frac{f(w_0^R)}{w_0^R}(w_0^R)^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))\frac{f(w_y^R)}{w_y^R}(w_y^R)^2 \, dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))\frac{f(w_0^R + w_y^R)}{w_0^R + w_y^R}(2w_0^R w_y^R) \, dx \\
(i) &\leq \|w_0^R\|^2 + \|w_y^R\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(w_0^R)w_0^R \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(w_y^R)w_y^R \, dx \\
(ii) &\quad + 2\langle w_0^R, w_y^R \rangle \\
(iii) &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)\left[f(w_0^R)w_0^R + f(w_y^R)w_y^R\right] \, dx.
\end{aligned}$$

Vamos agora observar o que acontece em (i), (ii), (iii). Em (i), note que  $w_0^R$  satisfaz

$$-\Delta w_0^R + w_0^R = f(w_0^R) \quad \text{em } \mathbb{R}^N$$

visto que  $w$  é solução do problema limite. Segue que  $\|w_0^R\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(w_0^R)(w_0^R) \, dx = 0$ .

O mesmo resultado acontece para  $w_y^R$ . Portanto, o caso (i) é igual a zero. Em (ii), temos que  $2\langle w_0^R, w_y^R \rangle = o_R(1)$  como já provamos em (1.40). Em (iii), usando (a<sub>2</sub>), (f<sub>2</sub>) e o Lema 1.9 afirmamos que

$$\left| - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)\left[f(w_0^R)w_0^R + f(w_y^R)w_y^R\right] \, dx \right| = o_R(1). \tag{1.92}$$

De fato, note que

$$\begin{aligned}
\left| - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(w_0^R)w_0^R \, dx \right| &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} e^{-k|x|} \left[ |w_0^R|^{p_1+1} + |w_0^R|^{p_2+1} \right] \, dx \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^N} e^{-k|x|} \left[ e^{-(p_1+1)|x-Ry_0|} + e^{-(p_2+1)|x-Ry_0|} \right] \, dx \\
&\leq C e^{-k|0-Ry_0|} + C e^{-k|0-Ry_0|} \\
&= C e^{-kR} = o_R(1),
\end{aligned}$$

e similarmente para  $\left| - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(w_y^R)w_y^R \, dx \right|$ . Assim, obtemos (1.92).

Combinando os resultados em (i), (ii), (iii) e (1.92) segue que para  $\lambda = \frac{1}{2}$ , uniformemente em  $y \in$

$\partial B_2(y_0)$ , se  $R \rightarrow +\infty$ ,

$$J(2z_{\frac{1}{2},y}^R) = J(w_0^R + w_y^R) \rightarrow 0.$$

Resta provar que

$$T_{\frac{1}{2},y}^R \rightarrow 2, \text{ quando } R \rightarrow \infty.$$

Argumentando por contradição, suponha que existam  $\delta > 0$  e subsequências  $R_n \rightarrow \infty$  e  $y_n \in \partial B_2(y_0)$  tais que

$$T_n := T_{\frac{1}{2},y_n}^{R_n} \text{ satisfaz } |T_n - 2| \geq \delta. \quad (1.93)$$

Como  $\{T_n\}$  é limitada pelo Lema 1.10, então existe uma constante  $T$  tal que

$$T_n \rightarrow T, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Por (1.5), se  $tu \in \mathcal{N}$ , então

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \frac{f(tu)}{tu} u^2 dx.$$

Por um lado, note que

$$\begin{aligned} \|z_{\frac{1}{2},y_n}^{R_n}\|^2 &= \left\| \frac{1}{2}w_{y_0}^{R_n} + \frac{1}{2}w_{y_n}^{R_n} \right\|^2 = \frac{1}{4} \|w_{y_0}^{R_n}\|^2 + \frac{1}{4} \|w_{y_n}^{R_n}\|^2 + \frac{1}{2} \langle w_{y_0}^{R_n}, w_{y_n}^{R_n} \rangle \\ &= \frac{1}{4} \|w\|^2 + \frac{1}{4} \|w\|^2 + o_{R_n}(1). \end{aligned} \quad (1.94)$$

Por outro lado, por  $(a_1)$ , mudança de variáveis e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \frac{f\left(\frac{T_n}{2}(w_{y_0}^{R_n} + w_{y_n}^{R_n})\right)}{\frac{T_n}{2}(w_{y_0}^{R_n} + w_{y_n}^{R_n})} \left( \frac{1}{4} (w_{y_0}^{R_n})^2 + \frac{1}{4} (w_{y_n}^{R_n})^2 + \frac{1}{2} w_{y_0}^{R_n} w_{y_n}^{R_n} \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x + R_n y_0)) \frac{f\left(\frac{T_n}{2}(w + w_{y_n + y_0}^{R_n})\right)}{\frac{T_n}{2}(w + w_{y_n + y_0}^{R_n})} \left( \frac{1}{4} w^2 + \frac{1}{4} (w_{y_n + y_0}^{R_n})^2 + \frac{1}{2} w w_{y_n + y_0}^{R_n} \right) dx \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f\left(\frac{T}{2}w\right)}{\frac{T}{2}w} \left( \frac{2}{4} w^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (1.95)$$

De (1.94) e (1.95) resulta que

$$\frac{2}{4} \|w\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f\left(\frac{T}{2}w\right)}{\frac{T}{2}w} \left( \frac{2}{4} w^2 \right) dx$$

e desde que  $w$  é solução do problema limite, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{f(w)}{w} - \frac{f\left(\frac{T}{2}w\right)}{\frac{T}{2}w} \right) w^2 dx = 0.$$

Como  $\frac{f(s)}{s}$  é crescente para  $s > 0$ , obtemos  $T = 2$ . Contradição com (1.93). Portanto,  $T_{\frac{1}{2},y}^R \rightarrow 2$ , quando  $R \rightarrow \infty$  e o lema está provado.

□

**Lema 1.18.** *Existem números  $R_2 > 0$  e  $\alpha > 0$  tal que*

$$I(T_{\lambda,y}^R z_{\lambda,y}^R) \leq 2m_\infty - \alpha$$

para cada  $R > R_2$  e para todo  $y \in \partial B_2(y_0)$  e  $\lambda \in [0, 1]$ .

**Demonstração:** Primeiramente escrevemos a combinação linear

$$\lambda T_{\lambda,y}^R w(x - Ry_0) + (1 - \lambda) T_{\lambda,y}^R w(x - Ry) := sw_0^R + tw_y^R. \quad (1.96)$$

Já sabemos pelo Lema 1.10 que  $s$  e  $t$  pertencem ao intervalo  $(0, T_0)$ , ou seja, já sabemos que são limitados. Tomando  $u = sw_0^R + tw_y^R$  em  $I$  definido em (1.2) obtemos

$$\begin{aligned} I(sw_0^R + tw_y^R) &= \frac{1}{2} \int_{R^N} \left( s^2 |\nabla w_0^R|^2 + t^2 |\nabla w_y^R|^2 + 2st \nabla w_0^R \nabla w_y^R \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{R^N} \left( s^2 |w_0^R|^2 + t^2 |w_y^R|^2 + 2stw_0^R w_y^R \right) dx \\ &\quad - \int_{R^N} (1 + a(x)) F(sw_0^R + tw_y^R) dx \\ (A) \quad &= \frac{s^2}{2} \int_{R^N} \left( |\nabla w_0^R|^2 + (w_0^R)^2 \right) dx + \frac{t^2}{2} \int_{R^N} \left( |\nabla w_y^R|^2 + (w_y^R)^2 \right) dx \\ (B) \quad &- \int_{R^N} F(sw_0^R) dx - \int_{R^N} F(tw_y^R) dx \\ (C) \quad &- \int_{R^N} \left[ F(sw_0^R + tw_y^R) - F(sw_0^R) - F(tw_y^R) \right] dx \\ (D) \quad &+ st \int_{R^N} (\nabla w_0^R \nabla w_y^R + w_0^R w_y^R) dx - \int_{R^N} (f(sw_0^R) tw_y^R + f(tw_y^R) sw_0^R) dx \\ (E) \quad &+ \int_{R^N} (f(sw_0^R) tw_y^R + f(tw_y^R) sw_0^R) dx \\ (F) \quad &- \int_{R^N} (1 + a(x)) F(sw_0^R + tw_y^R) dx + \int_{R^N} F(sw_0^R + tw_y^R) dx. \end{aligned} \quad (1.97)$$

Vamos estimar cada linha em (1.97). Nas linhas (A) e (B) tem-se

$$\frac{s^2}{2} \int_{R^N} \left( |\nabla w_0^R|^2 + (w_0^R)^2 \right) dx - \int_{R^N} F(sw_0^R) dx = I_\infty(sw_0^R) \leq m_\infty \quad (1.98)$$

e

$$\frac{t^2}{2} \int_{R^N} \left( |\nabla w_y^R|^2 + (w_y^R)^2 \right) dx - \int_{R^N} F(tw_y^R) dx = I_\infty(tw_y^R) \leq m_\infty. \quad (1.99)$$

Na linha (C), utilizamos o Lema 1.14 para obter

$$\begin{aligned} &\int_{R^N} \left[ F(sw_0^R + tw_y^R) - F(sw_0^R) - F(tw_y^R) \right] dx \\ &\geq t \int_{R^N} f(sw_0^R) w_y^R dx + s \int_{R^N} f(tw_y^R) w_0^R dx - C_\rho(st)^{1+\frac{\mu}{2}} \int_{R^N} (w_0^R)^{1+\frac{\mu}{2}} (w_y^R)^{1+\frac{\mu}{2}} dx. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Tomando  $1 < \bar{\mu} < 1 + \frac{\mu}{2}$  e o Lema 1.9 implica que

$$\begin{aligned} \int_{R^N} (w_0^R)^{1+\frac{\mu}{2}} (w_y^R)^{1+\frac{\mu}{2}} dx &\leq C \int_{R^N} e^{-(1+\frac{\mu}{2})|x-Ry_0|} e^{-(1+\frac{\mu}{2})|x-Ry|} dx \\ &\leq C e^{-\bar{\mu}|Ry_0-Ry|} = C e^{-2\bar{\mu}R} = o(\varepsilon_R). \end{aligned} \quad (1.101)$$

Portanto, segue de (1.100) e (1.101) que

$$\begin{aligned} & - \int_{R^N} [F(sw_0^R + tw_y^R) - F(sw_0^R) - F(tw_y^R)] dx \\ & \leq -t \int_{R^N} f(sw_0^R) w_y^R dx - s \int_{R^N} f(tw_y^R) w_0^R dx + o(\varepsilon_R). \end{aligned} \quad (1.102)$$

Combinando (1.102) e (E) obtemos

$$(C) + (E) \leq o(\varepsilon_R). \quad (1.103)$$

Para a linha (D), usamos o Corolário 1.1 e o Lema 1.16 para obter

$$\begin{aligned} & st \int_{R^N} (\nabla w_0^R \nabla w_y^R + w_0^R w_y^R) dx - \int_{R^N} (f(sw_0^R) tw_y^R + f(tw_y^R) sw_0^R) dx \\ = & \frac{st}{2} \int_{R^N} (\nabla w_0^R \nabla w_y^R + w_0^R w_y^R) dx - \frac{1}{2} \int_{R^N} f(sw_0^R) tw_y^R dx \\ & + \frac{st}{2} \int_{R^N} (\nabla w_y^R \nabla w_0^R + w_y^R w_0^R) dx - \frac{1}{2} \int_{R^N} f(tw_y^R) sw_0^R dx \\ & - \frac{1}{2} \int_{R^N} (f(sw_0^R) tw_y^R + f(tw_y^R) sw_0^R) dx \\ = & \frac{t}{2} \int_{R^N} (sf(w_0^R) - f(sw_0^R)) w_y^R dx + \frac{s}{2} \int_{R^N} (tf(w_y^R) - f(tw_y^R)) w_0^R dx \\ & - \frac{1}{2} \int_{R^N} (f(sw_0^R) tw_y^R + f(tw_y^R) sw_0^R) dx \\ \leq & C(|s-1| + |t-1|) O(\varepsilon_R) - C_0 \varepsilon_R. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Resta-nos estimar a linha (F), isto é,

$$- \int_{R^N} (1+a(x)) F(sw_0^R + tw_y^R) dx + \int_{R^N} F(sw_0^R + tw_y^R) dx = - \int_{R^N} a(x) F(sw_0^R + tw_y^R) dx.$$

Pela hipótese (a<sub>2</sub>) e o Lema 1.9 segue que

$$\begin{aligned} & \left| - \int_{R^N} a(x) F(sw_0^R + tw_y^R) dx \right| \\ & \leq C \int_{\mathbb{R}^N} e^{-k|x|} (|w_0^R|^{p_1+1} + |w_0^R|^{p_2+1} + |w_y^R|^{p_1+1} + |w_y^R|^{p_2+1}) dx \\ & \leq C e^{-k|0-Ry_0|} + C e^{-k|0-Ry|} \leq C e^{-kR} = o(\varepsilon_R). \end{aligned} \quad (1.105)$$

Resulta do Lema 1.17 que se  $\lambda = \frac{1}{2}$ , então  $s, t \rightarrow 1$ , quando  $R \rightarrow +\infty$ . Tomando  $R_2$  suficientemente grande e  $\sigma = \sigma(R) \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  segue por (1.98), (1.99), (1.100), (1.101), (1.102), (1.103), (1.104), (1.105)

que

$$I(sw_0^R + tw_y^R) = I(\lambda T_{\lambda,y}^R w(x - Ry_0) + (1 - \lambda)T_{\lambda,y}^R w(x - Ry)) \leq 2m_\infty - \frac{C}{3}\varepsilon_R + o(\varepsilon_R). \quad (1.106)$$

Por continuidade, para todo  $\lambda \in \left[\frac{1}{2} - \sigma, \frac{1}{2} + \sigma\right]$ ,  $y \in \partial B_2(y_0)$ ,  $R > R_2$ , vale que

$$I(sw_0^R + tw_y^R) = I(\lambda T_{\lambda,y}^R w(x - Ry_0) + (1 - \lambda)T_{\lambda,y}^R w(x - Ry)) \leq 2m_\infty - \frac{C}{3}\varepsilon_R + o(\varepsilon_R). \quad (1.107)$$

Resta analisar o caso  $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2} - \sigma\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \sigma, 1\right]$ . Para isto, sem perda de generalidade, fixemos  $\lambda$  tal que  $0 \leq \lambda < \frac{1}{2} - \sigma$ . Então  $1 \geq 1 - \lambda > \frac{1}{2} + \sigma$ . Note que, se  $T_{\lambda,y}^R \leq 2$ , então  $s = T_{\lambda,y}^R \lambda \in [0, 1 - 2\sigma]$  e  $t = T_{\lambda,y}^R(1 - \lambda) \in [1 + 2\sigma, 2]$ , ou seja, temos  $s < 1$  e  $t > 1$ . Por outro lado, se  $T_{\lambda,y}^R \geq 2$ , então  $s = T_{\lambda,y}^R \lambda \in [1 - 2\sigma, +\infty]$  e  $t = T_{\lambda,y}^R(1 - \lambda) \in [1 + 2\sigma, +\infty]$ . Ademais, sabemos que sendo  $w$  solução positiva *ground state* do problema limite, utilizando o Lema 1.1 segue que  $I_\infty(tw_0^R) < m_\infty - \eta$  para algum  $\eta \in (0, m_\infty)$ ,  $t \in [0, 1 - \sigma_0] \cup [1 + \sigma_0, \infty)$ , para algum  $\sigma_0$ . Juntando isto e as estimativas anteriores de (1.98) a (1.105) mostramos que

$$I(sw_0^R + tw_y^R) = I(\lambda T_{\lambda,y}^R w(x - Ry_0) + (1 - \lambda)T_{\lambda,y}^R w(x - Ry)) \leq m_\infty - \eta + m_\infty - \eta + O(\varepsilon_R), \quad (1.108)$$

$$\forall \lambda \in \left[0, \frac{1}{2} - \sigma\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \sigma, 1\right].$$

Portanto, concluímos o lema juntando os resultados em (1.106), (1.107) e (1.108) para todo  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $y \in \partial B_2(y_0)$ ,  $R > R_2$ .

□

**Lema 1.19.** *Dado número real  $\eta > 0$ , existe um número real  $R_3 > 0$  tal que*

$$I(T_{0,y}^R z_{0,y}^R) < m_\infty + \eta,$$

para todo  $y \in \partial B_2(y_0)$ ,  $R > R_3$ . Em particular,  $m \leq m_\infty$ .

**Demonstração:** Inicialmente iremos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| |F(T_{0,y}^R w_y^R)| \, dx = o_R(1).$$

De fato, por  $(a_2)$ ,  $(f_2)$ , (1.24) e o Lema 1.9 existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| |F(T_{0,y}^R w_y^R)| \, dx &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| \left( |T_{0,y}^R w_y^R|^{p_1+1} + |T_{0,y}^R w_y^R|^{p_2+1} \right) \, dx \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^N} e^{-k|x|} \left( |T_{0,y}^R w_y^R|^{p_1+1} + |T_{0,y}^R w_y^R|^{p_2+1} \right) \, dx \\
&= C \int_{\mathbb{R}^N} e^{-k|x|} \left( (T_{0,y}^R)^{p_1+1} |w_y^R|^{p_1+1} + (T_{0,y}^R)^{p_2+1} |w_y^R|^{p_2+1} \right) \, dx \\
&\leq C (T_{0,y}^R)^{p_1+1} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-k|x|} e^{-(p_1+1)|x-Ry|} \, dx \\
&\quad + C (T_{0,y}^R)^{p_2+1} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-k|x|} e^{-(p_2+1)|x-Ry|} \, dx \\
&\leq C (T_{0,y}^R)^{p_1+1} e^{-k|0-Ry|} + C (T_{0,y}^R)^{p_2+1} e^{-k|0-Ry|} \\
&\leq C (T_{0,y}^R)^{p_1+1} e^{-kR} + C (T_{0,y}^R)^{p_2+1} e^{-kR} = o(\varepsilon_R), \tag{1.109}
\end{aligned}$$

com  $2 < k < p_i + 1$ ;  $i \in \{1, 2\}$  e  $T_{0,y}^R$  é limitado.

Considerando  $\lambda = 0$  na equação (1.96) temos

$$T_{0,y}^R z_{0,y}^R = T_{0,y}^R w(x - Ry) := T_{0,y}^R w_y^R.$$

Usando o Lema 1.1(c) e tomando  $u = T_{0,y}^R w_y^R$  em (1.2) segue que

$$\begin{aligned}
I(T_{0,y}^R w_y^R) &= I_\infty(T_{0,y}^R w_y^R) - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) F(T_{0,y}^R w_y^R) \, dx \\
&\leq \max_{t>0} I_\infty(t w_y^R) + \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| |F(T_{0,y}^R w_y^R)| \, dx \\
&= I_\infty(w_y^R) + \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| |F(T_{0,y}^R w_y^R)| \, dx \\
&= m_\infty + \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| |F(T_{0,y}^R w_y^R)| \, dx. \tag{1.110}
\end{aligned}$$

Combinando (1.109) e (1.110), o lema está provado. □

## 1.5 Demonstração do resultado principal

Para a demonstrar o teorema principal deste capítulo utilizaremos ferramentas do tipo “min-max”. Precisaremos introduzir a função baricentro  $\beta : H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Inicialmente definiremos as funções  $\Psi_u, v : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\Psi_u := \frac{1}{\mu(B_1(0))} \int_{B_1(x)} |u(y)| \, dy \quad \text{e} \quad v(x) := \left( \Psi_u - \frac{1}{2} \max_{x \in \mathbb{R}^N} \Psi_u(x) \right)^+,$$

onde  $\mu(B_1(0))$  é a medida de Lebesgue da bola unitária. A função baricentro de  $u$  é a aplicação definida por

$$\beta(u) := \frac{1}{|v|_1} \int_{\mathbb{R}^N} x v(x) \, dx.$$

A função baricentro possui as seguintes propriedades:

- i)  $\beta$  é contínua em  $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ ;
- ii) Se  $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$  é radialmente simétrica, então  $\beta(u) = 0$ ;
- iii) Para todo  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e todo  $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$  tem-se  $\beta(u) = \beta(tu)$ ;
- iv) Dado  $z \in \mathbb{R}^N$  tem-se  $\beta(u(x-z)) = \beta(u) + z$ .

Definida a função baricentro, podemos demonstrar o seguinte resultado:

**Lema 1.20.** *Suponha que  $m$  não seja atingido. Então  $m = m_\infty$  e existe um  $\eta > 0$  tal que*

$$\beta(u) \neq 0, \text{ para toda } u \in \mathcal{N} \cap I^{m_\infty + \eta};$$

onde denotamos

$$I^{m_\infty + \eta} := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N); I(u) \leq m_\infty + \eta\}.$$

**Demonstração:** Suponha que  $m$  não é atingido. Pelo Lema 1.8,  $m \geq m_\infty$  e do Lema 1.19, a desigualdade invertida. Logo temos a igualdade  $m = m_\infty$ .

Argumentando por contradição, suponha que para cada  $n \in \mathbb{N}$  exista  $\{v_n\} \subset \mathcal{N} \cap I^{m_\infty + \alpha}$ , isto é,  $\{v_n\} \subset \mathcal{N}$  satisfazendo  $I(v_n) < m_\infty + o_n(1)$  e, ainda,  $\beta(v_n) = 0$ . Segue disto que  $\{v_n\} \subset \mathcal{N}$  é uma sequência minimizante para  $I$ . O Princípio Variacional de Ekeland, por instante vide [46], nos fornece uma sequência  $\{u_n\}$  para  $I$  restrito  $\mathcal{N}$  no nível  $m_\infty$  onde tal sequência é (PS) e satisfaz

$$\|v_n - u_n\| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Já vimos pelo Lema 1.2 e 1.5 que toda sequência (PS) em  $\mathcal{N}$  é limitada e como  $m$  não é atingido, podemos usar o Lema 1.7 para garantir a existência de uma sequência

$$\{z_n\} \subset \mathbb{R}^N; \|z_n\| \rightarrow \infty \text{ e } \|u_n - w(\cdot - z_n)\| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

onde  $w$  é a solução positiva, radial de energia mínima do problema limite.

Por translação temos

$$u_n(x + z_n) = w(x) + o_n(1).$$

Usando as propriedades da função baricentro e que  $\beta(v_n) = 0$  temos

$$\beta(v_n(x + z_n)) = \beta(v_n) - z_n = -z_n$$

e, ainda, pela continuidade da função baricentro  $\beta$  na norma em  $H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\beta(v_n(x + z_n)) \rightarrow \beta(w(x)) = 0,$$

que configura uma contradição, pois  $\|z_n\| \rightarrow \infty$ .

□

Por fim iremos demonstrar o resultado principal onde utilizaremos os resultados que obtivemos anteriormente.

**Prova do Teorema 0.1:**

Inicialmente, suponha que  $m$  seja atingido para algum  $u \in \mathcal{N}$ . Conseqüentemente, pelos Lemas 1.1(b) e 1.3 temos que  $u$  é uma solução não trivial para o problema  $(P)$ . Suponha então que  $m$  não seja atingido. Segue do Lema 1.20 que  $m = m_\infty$ ,  $\beta(u) \neq 0$ , para toda  $u \in \mathcal{N} \cap I^{m_\infty + \eta}$  e podemos fixar  $\eta$  entre  $(0, \frac{m_\infty}{8})$  e, ainda pelo Lema 1.19, para todo  $R > R_3$

$$I(T_{0,y}^R z_{0,y}^R) \leq m_\infty + \eta, \quad \forall y \in \partial B_2(y_0). \quad (1.111)$$

Pelo Lema 1.18 podemos escolher  $\alpha$  entre  $(0, \frac{m_\infty}{8})$  e para todo  $R > R_2$

$$I(T_{\lambda,y}^R z_{\lambda,y}^R) \leq 2m_\infty - \alpha, \quad \forall y \in \partial B_2(y_0), \quad \lambda \in [0, 1]. \quad (1.112)$$

Considere  $R > \max\{R_2, R_3\}$  e defina a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : B_2(0) &\longrightarrow \mathcal{N} \cap I^{2m_\infty - \eta} \\ \lambda y_0 + (1 - \lambda)y &\longrightarrow T_{\lambda,y}^R z_{\lambda,y}^R, \quad \forall y \in \partial B_2(y_0), \quad \lambda \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (1.113)$$

O objetivo agora é mostrar que o funcional  $I$  tem um valor crítico no intervalo  $(m_\infty, 2m_\infty)$ . Argumentando por contradição, suponha que tal valor crítico não exista. Como  $m$  não é atingido, podemos utilizar o Lema 1.8 para garantir que o funcional  $I$  satisfaz a condição de Palais - Smale no intervalo  $(m_\infty, 2m_\infty)$ . Logo, existe um  $\varepsilon > 0$  tal que

$$\|(I|_{\mathcal{N}})^\prime(u)\| \geq \varepsilon \quad \text{para todo } u \in \mathcal{N} \cap I^{-1}[m_\infty + \eta, 2m_\infty - \alpha].$$

Isso implica que, pelo Lema 5.15 em [46], existe uma aplicação (deformação) contínua

$$\mathcal{D} : \mathcal{N} \cap I^{2m_\infty - \alpha} \rightarrow \mathcal{N} \cap I^{m_\infty + \eta} \quad (1.114)$$

tal que  $\mathcal{D} = id$  (aplicação identidade) para todo  $u \in \mathcal{N} \cap I^{m_\infty + \eta}$ .

Por (1.111), (1.112), (1.113) e (1.114) podemos definir a seguinte aplicação contínua

$$\begin{aligned} \Gamma : B_2(0) &\rightarrow \partial B_2(0) \\ x &\rightarrow A_2 \left( 2 \frac{\beta \circ \mathcal{D} \circ \mathcal{H} \circ A_1(x)}{|\beta \circ \mathcal{D} \circ \mathcal{H} \circ A_1(x)|} \right), \end{aligned} \quad (1.115)$$

onde  $\beta$  é a aplicação baricentro e as aplicações contínuas  $A_1$  e  $A_2$  são definidas como segue

$$\begin{aligned} A_1 : B_2(0) &\rightarrow B_2(y_0) \\ x &\rightarrow x + y_0 \end{aligned} \quad (1.116)$$

e

$$\begin{aligned} A_2 : \partial B_2(0) &\rightarrow \partial B_2(0) \\ \frac{2y}{|y|} &\rightarrow y - y_0 \end{aligned} \quad (1.117)$$



onde  $y \in \partial B_2(y_0)$ . Além disso, se  $\lambda = 0$  segue que

$$\mathcal{H}(y) = T_{0,y}^R Z_{0,y}^R. \quad (1.118)$$

Por outro lado, usando as propriedades da função baricentro note que

$$\beta(T_{0,y}^R z_{0,y}^R) = \beta(T_{0,y}^R \omega_y^R) = \beta(\omega_y^R) = \beta(\omega(x - Ry)) = \beta(\omega(x)) + Ry = Ry. \quad (1.119)$$

Como  $\mathcal{D} = id$  para todo  $u \in \mathcal{N} \cap I^{m_\infty + n}$  tem-se por (1.115), (1.116), (1.117), (1.118) e (1.119) que

$$\Gamma(y - y_0) = A_2 \left( 2 \frac{\beta \circ \mathcal{D} \circ \mathcal{H} \circ A_1(y - y_0)}{|\beta \circ \mathcal{D} \circ \mathcal{H} \circ A_1(y - y_0)|} \right) = A_2 \left( 2 \frac{\beta(T_{0,y}^R z_{0,y}^R)}{|\beta(T_{0,y}^R z_{0,y}^R)|} \right) = A_2 \left( 2 \frac{Ry}{|Ry|} \right) = y - y_0.$$

Temos uma contradição visto que tal aplicação contínua  $\Gamma$  não pode existir pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, veja Teorema 3.5 em [7]. Portanto, a contradição veio de supor que  $I$  não tem um valor crítico no intervalo  $(m_\infty, 2m_\infty)$ .

Concluimos a demonstração do Teorema observando a positividade da solução, pois a solução  $u$  não muda de sinal pelo Lema 1.4. Ademais, como  $f$  é uma função ímpar,  $-u$  também é solução do problema  $(P)$ . Assim, o resultado segue e o teorema está provado.

□

## Sistema fortemente acoplado

Neste capítulo vamos investigar a existência de solução positiva para o seguinte sistema

$$(S) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = (1 + a(x)) \frac{u(u^2 + v^2)}{1 + s(u^2 + v^2)} + \lambda v, & \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + v = (1 + a(x)) \frac{v(u^2 + v^2)}{1 + s(u^2 + v^2)} + \lambda u, & \mathbb{R}^N, \\ u, v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

com  $N \geq 3$ ,  $0 < \lambda < 1$  e  $s$  é um parâmetro real satisfazendo  $0 < s < \frac{1}{1 + \lambda}$ .

Vamos assumir as seguintes hipóteses sobre a função peso:

$$(a_1) \quad a \in C(\mathbb{R}^N); \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + a(x)) = \varsigma > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} a(x) = 0;$$

$$(a_2) \quad |a(x)| \leq Ce^{-k|x|} \quad \text{onde} \quad k \in (2\sqrt{1 - \lambda}, 4\sqrt{1 - \lambda}) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad C \quad \text{uma constante positiva.}$$

Considere

$$f(u, v) := \frac{u(u^2 + v^2)}{1 + s(u^2 + v^2)}, \quad g(u, v) := \frac{v(u^2 + v^2)}{1 + s(u^2 + v^2)}$$

e

$$F(u, v) := \frac{u^2 + v^2}{2s} - \frac{1}{2s^2} \ln(1 + s(u^2 + v^2)) \quad \text{onde} \quad \frac{\partial F}{\partial u} = f \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial v} = g.$$

A seguir serão feitas algumas afirmações com suas respectivas provas referentes a algumas particularidades do sistema.

**Afirmção 2.1.** *A seguinte afirmação é verificada.*

$$(F_1) \quad \frac{\nabla F(tu, tv)(u, v)}{t} \quad \text{é crescente para} \quad t > 0 \quad \text{onde} \quad u, v \neq 0.$$

**Demonstração:** Considere a função

$$G(t) = \frac{\nabla F(tu, tv)(u, v)}{t} = \frac{1}{t} \frac{(tu)^2 + (tv)^2}{1 + s((tu)^2 + (tv)^2)} (tu^2 + tv^2) = \frac{t^2(u^2 + v^2)^2}{1 + st^2(u^2 + v^2)}.$$

Derivando  $G(t)$  em  $t$  obtemos

$$\begin{aligned} G'(t) &= \frac{2t(u^2 + v^2)^2 + 2st^3(u^2 + v^2)^3 - 2st^3(u^2 + v^2)^3}{(1 + st^2(u^2 + v^2))^2} \\ &= \frac{2t(u^2 + v^2)^2}{(1 + st^2(u^2 + v^2))^2} > 0. \end{aligned}$$

Portanto, segue que  $\frac{\nabla F(tu, tv)(u, v)}{t}$  é crescente em  $t > 0$ .

□

**Afirmção 2.2.** *A seguinte afirmação é verificada.*

( $F_2$ )  $F$  satisfaz a condição de não quadraticidade :

(a)  $\lim_{\|(u,v)\| \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \nabla F(u, v)(u, v) - F(u, v) = +\infty;$

(b)  $\frac{1}{2} \nabla F(u(x), v(x))(u(x), v(x)) - F(u(x), v(x)) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^N$ .

**Demonstração:** Primeiramente mostraremos o item (b). Considere

$$h(t) := \frac{t^2(u^2 + v^2)^2}{2(1 + s(u^2 + v^2))} - \frac{t^2(u^2 + v^2)}{2s} + \frac{1}{2s^2} \ln(1 + t^2s(u^2 + v^2)),$$

para todo  $t \geq 0$ . Derivando  $h$  em  $t$ ,

$$h'(t) = \frac{t(u^2 + v^2)^2}{1 + s(u^2 + v^2)} - \frac{t^3(u^2 + v^2)^2}{1 + st^2(u^2 + v^2)},$$

o que implica

$$h'(t) < 0, \text{ se } t > 1;$$

$$h'(t) > 0, \text{ se } t < 1;$$

$$h'(t) = 0, \text{ se } t = 1.$$

Assim,  $h(t) \leq h(1)$  para todo  $t > 0$ . Ademais,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \nabla F(u(x), v(x))(u(x), v(x)) - F(u(x), v(x)) &= \frac{1}{2} \left( \frac{(u^2 + v^2)u}{1 + s(u^2 + v^2)}, \frac{(u^2 + v^2)v}{1 + s(u^2 + v^2)} \right) (u, v) - F(u, v) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(u^2 + v^2)u^2}{1 + s(u^2 + v^2)} + \frac{(u^2 + v^2)v^2}{1 + s(u^2 + v^2)} \right] - F(u, v) \\ &= \frac{(u^2 + v^2)^2}{2(1 + s(u^2 + v^2))} - \frac{u^2 + v^2}{2s} + \frac{1}{2s^2} \ln(1 + s(u^2 + v^2)) \\ &= h(1) > h(0) = 0, \quad \forall (u, v) \neq (0, 0). \end{aligned}$$

Portanto, este item fica verificado.

Verificaremos agora o item (a). Para isso, considere a mudança de coordenadas  $u^2 + v^2 = z^2$  e obtemos para todo  $z^2 > 0$  que

$$\frac{z^4}{2(1 + sz^2)} - \frac{z^2}{2s} \geq -\frac{1}{2s^2},$$

e fazendo  $z \rightarrow +\infty$  temos

$$\frac{z^4}{2(1+sz^2)} - \frac{z^2}{2s} + \frac{1}{2s^2} \ln(1+sz^2) \geq -\frac{1}{2s^2} + \frac{1}{2s^2} \ln(1+sz^2) \rightarrow +\infty.$$

Portanto,

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left[ \frac{z^4}{2(1+sz^2)} - \frac{z^2}{2s} + \frac{1}{2s^2} \ln(1+sz^2) \right] = +\infty.$$

Assim, concluímos o item (a). □

**Afirmção 2.3.** *Comportamento de  $\nabla F$  na origem e no infinito.*

$$(F_3) \quad \nabla F(u, v) \cdot (u, v) = o(u^2 + v^2) \quad e \quad \lim_{\|(u, v)\| \rightarrow \infty} \frac{\nabla F(u, v) \cdot (u, v)}{u^2 + v^2} = \frac{1}{s}.$$

**Demonstração:** A verificação segue diretamente da não linearidade. □

## 2.1 Preliminares

Iremos utilizar uma constante geral  $C > 0$  para simplificar a notação e assim  $C$  não será sempre a mesma constante no que segue.

Consideramos o espaço de Hilbert  $H := H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$  com norma dada por

$$\|(u, v)\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + u^2 + v^2) \, dx.$$

O funcional associado ao problema (S) é definido por

$$I(u, v) = \frac{1}{2} \|(u, v)\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} uv \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) F(u, v) \, dx, \quad (2.1)$$

e sua derivada

$$\begin{aligned} I'(u, v)(\varphi, \psi) &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \varphi + \nabla v \nabla \psi + u\varphi + v\psi) \, dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} (v\varphi + u\psi) \, dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \nabla F(u, v)(\varphi, \psi) \, dx. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Trabalharemos com a variedade de Nehari definida por

$$\mathcal{N} := \{(u, v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \setminus \{(0, 0)\} : J(u, v) = 0\}, \quad (2.3)$$

cujo funcional associado é

$$J(u, v) = I'(u, v)(u, v) = \|(u, v)\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} uv \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \nabla F(u, v)(u, v) \, dx. \quad (2.4)$$

Consideramos também o nível de energia do funcional  $I$  definido por

$$m := \inf_{(u, v) \in \mathcal{N}} I(u, v). \quad (2.5)$$

Decorre de  $(a_1)$  que o problema limite associado ao sistema  $(\mathbb{S})$  é

$$(\mathbb{S}_\infty) \begin{cases} -\Delta u + u = \frac{u(u^2 + v^2)}{1 + s(u^2 + v^2)} + \lambda v, & \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + v = \frac{v(u^2 + v^2)}{1 + s(u^2 + v^2)} + \lambda u, & \mathbb{R}^N, \\ u, v \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Analogamente para o sistema  $(\mathbb{S}_\infty)$ , podemos definir  $I_\infty, J_\infty, \mathcal{N}_\infty$  e  $m_\infty$ , respectivamente.

Note que temos para quaisquer  $u, v$  em  $H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned} I(u, v) &= \frac{1}{2} \|(u, v)\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} uv dx - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) F(u, v) dx \\ &= I_\infty(u, v) - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) F(u, v) dx. \end{aligned} \quad (2.6)$$

A hipótese  $0 < s < 1/(1 + \lambda)$  é suficiente para que a identidade de Pohozaev possa ser satisfeita por pares  $(u, v) \neq (0, 0)$ . De fato, considere  $G(u, v) = F(u, v) + \lambda uv - \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2}$ . Desejamos mostrar que a identidade de Pohozaev associado ao sistema  $(\mathbb{S}_\infty)$

$$\frac{N-2}{2} \|(\nabla u, \nabla v)\|_{L^2}^2 = N \int_{\mathbb{R}^N} G(u, v) dx$$

pode ser válida para algum  $(u, v) \neq (0, 0)$ . Observe que se  $0 < \lambda < \left(\frac{1}{s} - 1\right)$ , então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} G(u, v) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{u^2 + v^2}{2s} - \frac{1}{2s^2} \ln(1 + s(u^2 + v^2)) + \lambda uv - \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{u^2 + v^2}{2} \left( \frac{1}{s} - 1 \right) + \lambda uv - \frac{1}{2s^2} \ln(1 + s(u^2 + v^2)) \right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{M}{2} \left[ u^2 + v^2 + \frac{2\lambda}{M} uv \right] dx - \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{1}{2s^2} \ln(1 + s(u^2 + v^2)) \right] dx > 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde  $M = \left(\frac{1}{s} - 1\right)$ .

**Observação 2.1.** *Pelo Teorema 2.1 em [28] existe solução positiva radial de energia mínima (ground state solution) do problema  $(\mathbb{S}_\infty)$ . Por [14], se  $(u, v)$  é positiva segue que  $(u, v)$  é uma solução radialmente simétrica e estritamente decrescente para  $(\mathbb{S}_\infty)$ . No que segue, iremos denotar uma solução ground state positiva por  $(w_1, w_2)$ . Nós enfatizamos em todo trabalho que ser uma solução positiva significa ser positiva em cada coordenada do vetor  $(u, v)$ .*

## 2.2 Decaimento das soluções do problema limite

Observe que quando  $u = v = z$  em  $(\mathbb{S}_\infty)$ , o sistema se reduz à equação

$$-\Delta z + (1 - \lambda)z = h(z), \quad \mathbb{R}^N,$$

onde  $h(z) = \frac{2z^3}{1+2sz^2}$ . Uma condição necessária para que esta equação tenha solução não trivial é

$$\frac{1}{s} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{h(z)}{z} > 1 - \lambda.$$

Note que temos

$$0 < s < \frac{1}{1+\lambda} < \frac{1}{1-\lambda}.$$

Considere a equação

$$-\Delta z = \psi(z) := h(z) - (1-\lambda)z.$$

Note que,

i)  $\psi(0) = 0$ ;

ii)  $\psi'(z) = \lambda - 1 + h'(z)$ . Assim,  $\psi'(0) = \lambda - 1 < 0$ .

Com os resultados em (i), (ii) podemos utilizar a observação do Teorema 2 em [25] para obter que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} z(x) |x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\sqrt{1-\lambda}|x|} \in (0, +\infty).$$

A solução  $(z, z)$  é positiva, radial com decaimento exponencial, porém não sabemos se é solução *ground state*.

Nosso objetivo agora é mostrar que se o par  $(u, v)$  é solução de  $(\mathbb{S}_\infty)$ , então mantém-se o mesmo decaimento por meio do seguinte teorema

**Teorema 2.1.** *Uma solução positiva de energia mínima  $(w_1, w_2)$  do problema  $(\mathbb{S}_\infty)$  satisfaz*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} w_1(x) |x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\sqrt{1-\lambda}|x|} = \mu_1,$$

e

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} w_2(x) |x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\sqrt{1-\lambda}|x|} = \mu_2$$

com  $\mu_1, \mu_2 \in (0, +\infty)$ .

No resultado seguinte iremos mostrar um decaimento para o problema  $(\mathbb{S}_\infty)$  que ainda não é o decaimento “ideal” que almejamos. Isto será útil para obtermos o decaimento ideal, exato. A prova é semelhante a encontrada no Teorema 2.2 em [21] ou Proposição 4.4 em [43].

**Lema 2.2.** *Se  $(u, v)$  é solução positiva do problema  $(\mathbb{S}_\infty)$ , então existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$0 < u(x), v(x) \leq C |x|^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\theta|x|},$$

para  $|x| > R$ ,  $R > 0$  suficientemente grande,  $\theta = \sqrt{1-\lambda-\varepsilon}$ ,  $N \geq 3$  e  $\varepsilon > 0$  é uma constante dada.

**Demonstração:** Inicialmente, vamos reescrever o problema  $(\mathbb{S}_\infty)$  na forma matricial, isto é,  $U \in H$ ,

$$L(U) + AU = \mathcal{F}$$

onde

$$U := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad L := \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \mathcal{F} := \begin{pmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \end{pmatrix}.$$

Defina agora a função auxiliar

$$\varphi(x) = \frac{M}{R^{-\frac{N-1}{2}}} |x|^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\theta(|x|-R)} = \overline{M}(R) |x|^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\theta|x|}$$

onde  $M = u(R) + v(R)$ ,  $|x| = R$ .

Vamos calcular o Laplaciano de  $\varphi$ . Inicialmente, note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} &= \overline{M} \left( -\frac{N-1}{2} \right) |x|^{-\frac{N-1}{2}-1} \frac{x_i}{|x|} e^{-\theta|x|} + \overline{M} |x|^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\theta|x|} \left( -\frac{\theta x_i}{|x|} \right) \\ &= \varphi(x) \frac{x_i}{|x|} \left( -\frac{N-1}{2|x|} - \theta \right). \end{aligned}$$

Derivando a função  $\varphi$  mais uma vez, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i^2} &= \varphi(x) \frac{x_i^2}{|x|^2} \left( -\frac{N-1}{2|x|} - \theta \right)^2 + \varphi(x) \left( \frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^2} \right) \left( -\frac{N-1}{2|x|} - \theta \right) \\ &\quad + \varphi(x) \frac{x_i}{|x|} \frac{(N-1)x_i}{2|x|^3}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Agora vamos somar (2.8) em  $i$ , de 1 a  $N$ . Segue que

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(x) &= \varphi(x) \left( -\frac{N-1}{2|x|} - \theta \right)^2 + \varphi(x) \left( \frac{N-1}{|x|} \right) \left( -\frac{N-1}{2|x|} - \theta \right) + \varphi(x) \frac{(N-1)}{2|x|^2} \\ &= \varphi(x) \left\{ \frac{(N-1)^2}{4|x|^2} + \frac{(N-1)\theta}{|x|} + \theta^2 - \frac{(N-1)^2}{2|x|^2} - \frac{(N-1)\theta}{|x|} + \frac{(N-1)}{2|x|^2} \right\} \\ &= \varphi(x) \left\{ \frac{(N-1)^2}{4|x|^2} + \theta^2 - \frac{2(N-1)^2}{4|x|^2} + \frac{2(N-1)}{4|x|^2} \right\} \\ &= \varphi(x) \left\{ \theta^2 + \frac{(N-1)}{4|x|^2} (N-1-2N+2+2) \right\} \\ &= \varphi(x) \left\{ \theta^2 - \frac{(N-1)}{4|x|^2} (N-3) \right\}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Como  $(u, v)$  é solução de  $(\mathbb{S}_\infty)$ , então  $u(x), v(x) \rightarrow 0$ , quando  $|x| \rightarrow +\infty$ . Assim, dado  $\varepsilon > 0$  tal que  $1 - \lambda \geq \frac{4\varepsilon}{3}$  e  $\theta = \sqrt{1 - \lambda - \varepsilon}$ , existe um  $\delta = \delta(\varepsilon)$  tal que se  $u^2 + v^2 < \delta$  tem-se

$$\frac{f(u, v)}{u} = \frac{g(u, v)}{v} < \varepsilon. \tag{2.10}$$

Considere  $L > R$  e o conjunto aberto

$$\Omega_L := \{x \in \mathbb{R}^N : R < |x| < L; u(x) + v(x) > \varphi(x)\}.$$

Desejando mostrar que o conjunto  $\Omega_L$  é vazio. Suponha então, por contradição, que  $\Omega_L \neq \emptyset$ . Note

que, para todo  $|x| \geq R$ , temos por (2.9), (2.10) e  $N \geq 3$  que

$$\begin{aligned}
\Delta(\varphi - u - v) &= \varphi \left\{ \theta^2 - \frac{(N-1)}{4|x|^2}(N-3) \right\} - \Delta u - \Delta v \\
&< \varphi \left\{ \theta^2 - \frac{(N-1)}{4|x|^2}(N-3) \right\} - u + \lambda v + \varepsilon u - v + \lambda u + \varepsilon v \\
&\leq \varphi \theta^2 - (1 - \lambda - \varepsilon)u - (1 - \lambda - \varepsilon)v \\
&\leq \theta^2(\varphi - u - v) < 0 \text{ em } \Omega_L.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Desde que  $\Omega_L$  é limitado,  $\Delta(\varphi - u - v) < 0$  em  $\Omega_L$ , pelo Princípio do Máximo, temos por (2.11) que

$$\begin{aligned}
\varphi(x) - u(x) - v(x) &\geq \min \{(\varphi - u - v)(x) : x \in \partial\Omega_L\} \\
&= \min \left\{ \varphi(R) - u(R) - v(R), \varphi(L) - u(L) - v(L) \right\} \\
&\geq \min \left\{ 0, \varphi(L) - u(L) - v(L) \right\}, \quad \forall x \in \Omega_L.
\end{aligned}$$

Quando  $L \rightarrow +\infty$ , observe que  $u, v, \varphi \rightarrow 0$ , logo temos  $\varphi(x) - u(x) - v(x) \geq 0$  para todo  $x \in \Omega_L$  tal que  $|x| \geq R$ , implicando em contradição. Portanto,  $\Omega_L$  é vazio e finalizamos a prova do lema.  $\square$

Vamos adaptar os argumentos de [37] para o sistema a fim de obter os decaimentos exponenciais exatos. No que segue, vamos tomar  $\gamma = 0$  na Proposição 6.1 em [37]. Observe no Teorema 2.1 o fato de  $\mu_1$  e  $\mu_2$  serem constantes positivas significa que tem-se o decaimento a zero das soluções  $w_1$  e  $w_2$  em ordem exata e será fundamental em argumento posterior.

No que segue, denotaremos  $(w_1, w_2)$  solução positiva radial de  $(\mathbb{S}_\infty)$ , obtida em [28], em que  $I_\infty(w_1, w_2) = m_\infty$ .

**Lema 2.3.** *Sejam  $N \geq 3$ ,  $\rho > 0$  e  $0 < \lambda < 1$ . Então existem funções radiais não negativas  $u, v : \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0) \rightarrow \mathbb{R}$  do sistema linear*

$$(\mathcal{H}) \quad \begin{cases} -\Delta u + u - \lambda v = 0, & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0), \\ -\Delta v + v - \lambda u = 0, & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0), \\ u = \omega_1, \quad v = \omega_2, & \text{sobre } \partial B_\rho(0) \end{cases}$$

e, para algum  $\rho_0 \in (\rho, +\infty)$ ,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) |x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\int_{\rho_0}^{|x|} \sqrt{1-\lambda} dt} = \sigma_1 > 0 \tag{2.12}$$

e

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x) |x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\int_{\rho_0}^{|x|} \sqrt{1-\lambda} dt} = \sigma_2 > 0. \tag{2.13}$$

**Demonstração:** A prova de existência de solução para  $(\mathcal{H})$  é consequência da teoria de EDO lineares, entretanto iremos incluí-la com detalhes para efeito de completude. Primeiramente, iremos mostrar que



o problema  $(\mathcal{H})$  possui uma subsolução e supersolução. Depois iremos usar [19] para garantir a existência de solução entre essa subsolução e supersolução .

Considere  $0 \leq \beta < 1$ ,  $t > \rho$  e  $\tau \in \mathbb{R}$  . Defina a função

$$\phi_\tau(t) = -\frac{N-1}{2t} - \sqrt{1-\lambda} + \frac{\tau}{t^{1+\beta}} \quad (2.14)$$

e para  $x \in \mathbb{R}^N \setminus \bar{B}_\rho(0)$  considere

$$\psi_\tau(x) = \begin{pmatrix} \Phi_\tau(x) \\ \Phi_\tau(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \int_\rho^{|x|} \phi_\tau(t) dt \\ \int_\rho^{|x|} \phi_\tau(t) dt \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Pela regra da cadeia tem-se

$$\frac{\partial \Phi_\tau(x)}{\partial x_i} = \Phi_\tau(x) \phi_\tau(|x|) \frac{x_i}{|x|}.$$

Derivando novamente temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_\tau(x)}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial \Phi_\tau(x)}{\partial x_i} \phi_\tau(|x|) \frac{x_i}{|x|} + \Phi_\tau(x) \phi'_\tau(|x|) \frac{x_i^2}{|x|^2} + \Phi_\tau(x) \phi_\tau(|x|) \left( \frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3} \right) \\ &= \Phi_\tau(x) \left[ \phi_\tau(|x|) \frac{x_i}{|x|} \right]^2 + \Phi_\tau(x) \phi'_\tau(|x|) \frac{x_i^2}{|x|^2} + \Phi_\tau(x) \phi_\tau(|x|) \left( \frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3} \right) \\ &= \Phi_\tau(x) \left[ \phi_\tau^2(|x|) \frac{x_i^2}{|x|^2} + \phi'_\tau(|x|) \frac{x_i^2}{|x|^2} + \phi_\tau(|x|) \left( \frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3} \right) \right]. \end{aligned}$$

Somando em  $i$  de 1 a  $N$  temos

$$-\Delta \Phi_\tau(x) = \Phi_\tau(x) \left[ -\phi_\tau^2(|x|) - \phi'_\tau(|x|) - \phi_\tau(|x|) \left( \frac{N-1}{|x|} \right) \right]. \quad (2.16)$$

Por outro lado, derivando (2.14) em  $t$  obtemos

$$\phi'_\tau(t) = \frac{N-1}{2t^2} - \frac{\tau(1+\beta)}{t^{2+\beta}}.$$

Segue para  $t = |x| \geq \rho$  que

$$\phi'_\tau(|x|) = \frac{N-1}{2|x|^2} - \frac{\tau(1+\beta)}{|x|^{2+\beta}}. \quad (2.17)$$

Agora, substituindo (2.14) e (2.17) em (2.16) temos

$$\begin{aligned}
-\Delta\Phi_\tau(x) &= \Phi_\tau(x) \left[ - \left( \frac{N-1}{2|x|} - \sqrt{1-\lambda} + \frac{\tau}{|x|^{1+\beta}} \right)^2 - \frac{N-1}{2|x|^2} + \frac{\tau(1+\beta)}{|x|^{2+\beta}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(N-1)(N-1)}{2|x|^2} + \frac{\sqrt{1-\lambda}(N-1)}{|x|} - \frac{\tau(N-1)}{|x|^{2+\beta}} \right] \\
&= \Phi_\tau(x) \left[ - \left( \frac{N-1}{2|x|} \right)^2 - (1-\lambda) - \frac{\tau^2}{|x|^{2+2\beta}} - \frac{(N-1)\sqrt{1-\lambda}}{|x|} + \frac{\tau(N-1)}{|x|^{2+\beta}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\sqrt{1-\lambda}\tau}{|x|} - 2\frac{(N-1)}{4|x|^2} + \frac{\tau(1+\beta)}{|x|^{2+\beta}} \right. \\
&\quad \left. + 2\frac{(N-1)(N-1)}{4|x|^2} + \frac{\sqrt{1-\lambda}(N-1)}{|x|} - \frac{\tau(N-1)}{|x|^{2+\beta}} \right] \\
&= \Phi_\tau(x) \left[ \frac{(N-1)(N-3)}{4|x|^2} - (1-\lambda) - \frac{\tau^2}{|x|^{2+2\beta}} + \frac{\tau(1+\beta)}{2|x|^{2+2\beta}} + \frac{2\tau\sqrt{1-\lambda}}{|x|^{1+\beta}} \right].
\end{aligned}$$

Segue que

$$-\Delta\Phi_\tau(x) + (1-\lambda)\Phi_\tau(x) = \frac{\Phi_\tau(x)}{|x|^{1+\beta}} \left[ 2\tau\sqrt{1-\lambda} + \frac{(N-1)(N-3)}{4|x|^{1-\beta}} - \frac{\tau^2}{|x|^{1+\beta}} + \frac{\tau(1+\beta)}{|x|^1} \right].$$

Reescrevendo de forma mais conveniente temos

$$-\Delta\Phi_\tau(x) + (1-\lambda)\Phi_\tau(x) = \Phi_\tau(x) \left[ \frac{2\tau\sqrt{1-\lambda}}{|x|^{1+\beta}} + \frac{\pi_\tau(x)}{|x|^{1+\beta}} \right], \quad (2.18)$$

onde  $\pi_\tau(x) : \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0) \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$\pi_\tau(x) = \frac{(N-1)(N-3)}{4|x|^{1-\beta}} - \frac{\tau^2}{|x|^{1+\beta}} + \frac{\tau(1+\beta)}{|x|}.$$

Como  $\beta < 1$  segue que

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \pi_\tau(x) = 0.$$

Assim, podemos escolher  $\rho_0$  suficientemente grande tal que para todo  $\rho \geq \rho_0$ , se  $|x| \geq \rho$  temos  $\pi_\tau(x)$  pequeno de tal forma que escolhendo  $\bar{\tau} > 0$  e  $\underline{\tau} < 0$ , segue por (2.18) que existem funções

$$\psi_{\underline{\tau}}(x) = \begin{pmatrix} \Phi_{\underline{\tau}}(x) \\ \Phi_{\underline{\tau}}(x) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \psi_{\bar{\tau}}(x) = \begin{pmatrix} \Phi_{\bar{\tau}}(x) \\ \Phi_{\bar{\tau}}(x) \end{pmatrix}$$

subsolução e supersolução do problema  $(\mathcal{H})$ , ou seja, em termos de matrizes

$$\begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{\bar{\tau}}(x) \\ \Phi_{\bar{\tau}}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{\bar{\tau}}(x) \\ \Phi_{\bar{\tau}}(x) \end{pmatrix} \gg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

e

$$\begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{\underline{\tau}}(x) \\ \Phi_{\underline{\tau}}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{\underline{\tau}}(x) \\ \Phi_{\underline{\tau}}(x) \end{pmatrix} \ll \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

onde os símbolos  $\ll$  e  $\gg$  significam  $\leq$  e  $\geq$ , respectivamente, em cada linha do sistema.

Resta mostrar que existe um vetor solução  $Z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  de  $(\mathcal{H})$  satisfazendo

$$\begin{pmatrix} \Phi_{\bar{\tau}}(x) \\ \Phi_{\underline{\tau}}(x) \end{pmatrix} \ll Z \ll \begin{pmatrix} \Phi_{\bar{\tau}}(x) \\ \Phi_{\underline{\tau}}(x) \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Vamos utilizar o método de redução de ordem. Desde que as soluções do sistema são radiais por ([14]), vamos reescrever o sistema  $(\mathcal{H})$  da seguinte forma

$$\begin{cases} -\Delta u(r) + u(r) = \lambda v(r), & r \in (\rho, +\infty), \\ -\Delta v(r) + v(r) = \lambda u(r), & r \in (\rho, +\infty), \\ u(\rho) = \omega_1(\rho), & v(\rho) = \omega_2(\rho). \end{cases}$$

Como  $u$  e  $v$  são radiais, então  $(\mathcal{H})$  é dado por

$$(\mathcal{H}_r) \begin{cases} u'' + \frac{N-1}{r}u' - u(r) = -\lambda v(r), & r \in (\rho, +\infty), \\ v'' + \frac{N-1}{r}v' - v(r) = -\lambda u(r), & r \in (\rho, +\infty), \\ u(\rho) = \omega_1(\rho), & v(\rho) = \omega_2(\rho). \end{cases}$$

Consideremos a segunda mudança de variáveis:

$$x_1 = u; \quad x_2 = x'_1; \quad x_3 = v; \quad x_4 = x'_3$$

com condições iniciais

$$x_1(\rho) = \omega_1(\rho); \quad x_3(\rho) = \omega_2(\rho); \quad x_2 < 0; \quad x_4 < 0.$$

Assim, obtemos o sistema de EDO linear

$$(\mathcal{H}_R) \begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = x_1 + \frac{1-N}{r}x_2 - \lambda x_3, \\ x'_3 = x_4, \\ x'_4 = -\lambda x_1 + x_3 + \frac{1-N}{r}x_3. \end{cases}$$

Ou seja,

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1-N}{r} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda & 0 & 1 & \frac{1-N}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Podemos olhar o sistema na forma  $X' = A(r)X$  onde  $A(r)X = f(r, x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Como os coeficientes da matriz  $A$  são limitados e contínuos para  $r > \rho$ , podemos usar o Teorema 5.2 em [19] para garantir que existe solução  $(u(x), v(x)) = (u(r), v(r))$  para qualquer  $r \in (\rho, +\infty)$ . Feito isto, observe que, por

construção temos que

$$\Phi_{\underline{\tau}}(x) \leq u(x), v(x) \leq \Phi_{\bar{\tau}}(x). \quad (2.22)$$

A fim de mostrar o decaimento das soluções  $u$  e  $v$ , nós precisamos de dois resultados auxiliares.

**Afirmção 2.4.** *As seguintes afirmativas são verdadeiras:*

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\Phi_{\bar{\tau}}(x)}{\Phi_{\underline{\tau}}(x)} < +\infty \quad (2.23)$$

e

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \Phi_{\underline{\tau}}(x) |x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\int_{\rho}^{|x|} \sqrt{1-\lambda} dt} \in (0, +\infty). \quad (2.24)$$

**Demonstração:** Começamos observando que, por (2.14),

$$\phi_{\bar{\tau}}(t) - \phi_{\underline{\tau}}(t) = -\frac{N-1}{2t} - \sqrt{1-\lambda} + \frac{\bar{\tau}}{t^{1+\beta}} + \frac{N-1}{2t} + \sqrt{1-\lambda} - \frac{\underline{\tau}}{t^{1+\beta}} = \frac{\bar{\tau} - \underline{\tau}}{s^{1+\beta}}.$$

Integrando de  $\rho$  a  $|x|$  temos

$$\begin{aligned} \int_{\rho}^{|x|} (\phi_{\bar{\tau}}(t) - \phi_{\underline{\tau}}(t)) dt &= \int_{\rho}^{|x|} \frac{\bar{\tau} - \underline{\tau}}{s^{1+\beta}} dt = (\bar{\tau} - \underline{\tau}) \int_{\rho}^{|x|} t^{-(1+\beta)} dt \\ &= (\bar{\tau} - \underline{\tau}) \left\{ -\frac{1}{t^{\beta}} \right\} \Big|_{t=\rho}^{|x|} = (\bar{\tau} - \underline{\tau}) \left\{ -\frac{1}{|x|^{\beta}} + \frac{1}{\rho^{\beta}} \right\}. \end{aligned}$$

Segue então que

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\Phi_{\bar{\tau}}(x)}{\Phi_{\underline{\tau}}(x)} &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} e^{\int_{\rho}^{|x|} (\phi_{\bar{\tau}}(t) - \phi_{\underline{\tau}}(t)) dt} \\ &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} e^{\left\{ (\bar{\tau} - \underline{\tau}) \left\{ -\frac{1}{|x|^{\beta}} + \frac{1}{\rho^{\beta}} \right\} \right\}} \\ &= e^{\left\{ (\bar{\tau} - \underline{\tau}) \left\{ \frac{1}{\rho^{\beta}} \right\} \right\}} < +\infty. \end{aligned}$$

Assim, mostramos (2.23). Por outro lado, por (2.14) temos

$$\begin{aligned}
\Phi_{\tau}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}}e^{\int_{\rho}^{|x|}\sqrt{1-\lambda}dt} &= \left( \int_{\rho}^{|x|} \phi_{\tau}(t) dt \right) \left( |x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\int_{\rho}^{|x|}\sqrt{1-\lambda}dt} \right) \\
&= |x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\int_{\rho}^{|x|} \left( -\frac{N-1}{2t} - \sqrt{1-\lambda} + \frac{\tau}{t^{1+\beta}} + \sqrt{1-\lambda} \right) dt} \\
&= |x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\int_{\rho}^{|x|} \left( -\frac{N-1}{2t} + \frac{\tau}{t^{1+\beta}} \right) dt} \\
&= |x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\left( -\frac{N-1}{2} \ln|x| + \frac{N-1}{2} \ln\rho - \frac{\tau}{|x|^{\beta}} + \frac{\tau}{\rho^{\beta}} \right)} \\
&= |x|^{\frac{N-1}{2}} |x|^{-\frac{N-1}{2}} e^{\left( \frac{N-1}{2} \ln\rho - \frac{\tau}{|x|^{\beta}} + \frac{\tau}{\rho^{\beta}} \right)} \\
&= e^{\left( \frac{N-1}{2} \ln\rho - \frac{\tau}{|x|^{\beta}} + \frac{\tau}{\rho^{\beta}} \right)}.
\end{aligned}$$

Aplicando o limite obtemos

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Phi_{\tau}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}}e^{\int_{\rho}^{|x|}\sqrt{1-\lambda}dt} = e^{\left( \frac{N-1}{2} \ln\rho + \frac{\tau}{\rho^{\beta}} \right)}.$$

Portanto, concluímos (2.24).

Para concluirmos o lema e obtermos (2.12) e (2.13), podemos utilizar (2.22), (2.23) e (2.24) e obter que

$$\begin{aligned}
0 &< \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x)|x|^{\frac{N-1}{2}}e^{\int_{\rho}^{|x|}\sqrt{1-\lambda}dt} \\
&= \left( \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{\Phi_{\tau}(x)} \right) \left( \lim_{|x| \rightarrow \infty} \Phi_{\tau}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}}e^{\int_{\rho}^{|x|}\sqrt{1-\lambda}dt} \right) \\
&\leq \left( \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\Phi_{\bar{\tau}}(x)}{\Phi_{\tau}(x)} \right) \left( \lim_{|x| \rightarrow \infty} \Phi_{\tau}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}}e^{\int_{\rho}^{|x|}\sqrt{1-\lambda}dt} \right) \in (0, +\infty).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Similarmente, (2.25) vale para  $v(x)$ .

□

**Prova do Teorema 2.1.** Primeiramente denotamos uma solução positiva radial de  $(\mathbb{S}_{\infty})$  por

$$U(x) := \begin{pmatrix} w_1(x) \\ w_2(x) \end{pmatrix}.$$

Vamos considerar dois problemas auxiliares, a saber: sejam  $H_0, H^0 \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0)) \times C^2(\mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0))$  satisfazendo

$$(\mathcal{H}_0) \quad \begin{cases} -\Delta H_0 + AH_0 = 0, & \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0), \\ H_0(x) = U(x), & \Gamma = \partial B_\rho(0), \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} H_0(x) = 0, \end{cases}$$

e

$$(\mathcal{H}^0) \quad \begin{cases} -\Delta H^0 + WH^0 = 0, & \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0), \\ H^0(x) = U(x), & \Gamma = \partial(B_\rho(0)), \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} H^0(x) = 0, \end{cases}$$

onde  $H_0(x) := \begin{pmatrix} h_{0,1}(x) \\ h_{0,2}(x) \end{pmatrix}$ ,  $H^0(x) := \begin{pmatrix} h^{0,1}(x) \\ h^{0,2}(x) \end{pmatrix}$ ,  $A := \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$ ,  $0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $W(x) := \begin{pmatrix} 1 - ce^{-\theta|x|} & -\lambda \\ -\lambda & 1 - ce^{-\theta|x|} \end{pmatrix}$  onde  $c$  é uma constante positiva e  $\theta > 0$  escolhido no Lema 2.2. Note que  $H_0$  satisfaz o Lema 2.3, então existe  $\mu_0 > 0$  tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} H_0(x) |x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\int_\rho^{|x|} \sqrt{1-\lambda} dt} = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_0 \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Similarmente como feito nos passos de (2.14) a (2.20) tomando  $\phi_\tau(t) = -\frac{N-1}{2t} - W(t) + \frac{\tau}{t^{1+\beta}}$  em vez de  $\phi_\tau(t) = -\frac{N-1}{2t} - \sqrt{1-\lambda} + \frac{\tau}{t^{1+\beta}}$  em (2.14), com  $W(t) = \sqrt{1-\lambda - ce^{-\theta t}}$ , desde que para algum  $\beta > 0$  tem-se  $\lim_{t \rightarrow \infty} W'(t)t^{1+\beta} = 0$ , veja a Proposição 6.1 em [37], obtemos

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} H^0(x) |x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\int_\rho^{|x|} \sqrt{1-\lambda - ce^{-\theta t}} dt} = \begin{pmatrix} \mu^0 \\ \mu^0 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

com  $\mu^0 \in (0, +\infty)$ . Ademais,

$$\begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{\bar{\tau}}(x) \\ \Phi_{\bar{\tau}}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - ce^{-\theta|x|} & -\lambda \\ -\lambda & 1 - ce^{-\theta|x|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{\bar{\tau}}(x) \\ \Phi_{\bar{\tau}}(x) \end{pmatrix} \gg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{\underline{\tau}}(x) \\ \Phi_{\underline{\tau}}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - ce^{-\theta|x|} & -\lambda \\ -\lambda & 1 - ce^{-\theta|x|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{\underline{\tau}}(x) \\ \Phi_{\underline{\tau}}(x) \end{pmatrix} \ll \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resta mostrar que existe um vetor solução  $V = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  de  $(\mathcal{H}^0)$  satisfazendo

$$\begin{pmatrix} \Phi_{\underline{\tau}}(x) \\ \Phi_{\underline{\tau}}(x) \end{pmatrix} \ll V(x) \ll \begin{pmatrix} \Phi_{\bar{\tau}}(x) \\ \Phi_{\bar{\tau}}(x) \end{pmatrix}.$$

Porém, é similar aos passos de (2.21) a (2.22).

Vamos escrever o problema  $(\mathbb{S}_\infty)$  de uma forma compacta, isto é, considere  $LU + AU = \mathcal{F}$  onde

$$LU = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} f(w_1, w_2) \\ g(w_1, w_2) \end{pmatrix}.$$

A demonstração da estimativa exponencial para a solução do sistema  $(\mathbb{S}_\infty)$  repousa no Princípio do Máximo em [22]. No domínio  $\mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0)$ ,

$$L(U - H_0) = L(U) - L(H_0) = -AU + \mathcal{F} + AH_0 = -A(U - H_0) + \mathcal{F}.$$

Como  $\mathcal{F} \gg 0$ ,  $-A = \begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ \lambda & -1 \end{pmatrix}$  e  $U(x) - H_0(x) = 0$  sobre  $\Gamma$ , pelo Princípio do Máximo, ver Teorema 1.1 em [22], segue que

$$U(x) \gg H_0(x) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus \bar{B}_\rho(0). \quad (2.28)$$

Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned} L(H^0 - U) &= L(H^0) - L(U) \\ &= -WH^0 + AU - \mathcal{F} \\ &= -A(H^0 - U) + \begin{pmatrix} ce^{-\theta|x|} & 0 \\ 0 & ce^{-\theta|x|} \end{pmatrix} H^0 - \mathcal{F} \\ &= -A(H^0 - U) + \begin{pmatrix} ce^{-\theta|x|}h^{0,1} - f(w_1, w_2) \\ ce^{-\theta|x|}h^{0,2} - g(w_1, w_2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Para utilizar o Princípio do Máximo, precisamos verificar que a matriz

$$\begin{pmatrix} ce^{-\theta|x|}h^{0,1} - f(w_1, w_2) \\ ce^{-\theta|x|}h^{0,2} - g(w_1, w_2) \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

é não negativa em cada linha. Pelo Lema 2.2, a solução vetorial do sistema

$$L(U) + AU = \mathcal{F}$$

tem decaimento do tipo

$$0 < w_1(x), w_2(x) \leq C|x|^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\theta|x|},$$

para  $|x| > R$ ,  $R > 0$  suficientemente grande. Note que

$$f(w_1, w_2) = \frac{w_1(w_1^2 + w_2^2)}{1 + s(w_1^2 + w_2^2)} \leq w_1(w_1^2 + w_2^2) = w_1^3 + w_2^2 w_1 \leq \bar{C}|x|^{-\frac{3(N-1)}{2}} e^{-3\theta|x|}$$

e, similarmente, para  $g(w_1, w_2)$ . Consequentemente, estimando a primeira linha da matriz em (2.30), pois a segunda linha é similar, notamos que utilizando o decaimento exponencial de  $H^0$  em (2.27) temos

$$\begin{aligned}
& ce^{-\theta|x|}h^{0,1} - f(w_1, w_2) \\
& \geq \bar{c}e^{-\theta|x|}C|x|^{-\frac{N-1}{2}}e^{-\sqrt{1-\lambda-ce^{-\theta|x|}|x|}} - \bar{C}|x|^{-\frac{3(N-1)}{2}}e^{-3\theta|x|} \\
& \geq Ce^{-\theta|x|}|x|^{-\frac{N-1}{2}}\left(e^{-\sqrt{1-\lambda-ce^{-\theta|x|}|x|}} - |x|^{-\frac{2(N-1)}{2}}e^{-2\theta|x|}\right) \\
& \geq Ce^{-\theta|x|}|x|^{-\frac{N-1}{2}}\left(e^{-\sqrt{1-\lambda-ce^{-\theta|x|}|x|}} - |R|^{-\frac{2(N-1)}{2}}e^{-2\theta|x|}\right) \\
& \geq Ce^{-\theta|x|}|x|^{-\frac{N-1}{2}}\left(e^{-\sqrt{1-\lambda-ce^{-\theta|x|}|x|}} - e^{-2\theta|x|}\right) \geq 0,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

pois dado  $\varepsilon > 0$ ,  $1 - \lambda \geq \frac{4\varepsilon}{3}$  e  $\theta = \sqrt{1 - \lambda - \varepsilon}$  temos para  $|x| > R$ ,  $R$  suficientemente grande,

$$\begin{aligned}
& ce^{-\theta|x|} + 3(1 - \lambda) - 4\varepsilon \geq 0 \\
& \Leftrightarrow 1 - \lambda - ce^{-\theta|x|} \leq 4(1 - \lambda - \varepsilon) \\
& \Leftrightarrow 1 - \lambda - ce^{-\theta|x|} \leq 4\theta^2 \\
& \Leftrightarrow \sqrt{1 - \lambda - ce^{-\theta|x|}} \leq 2\theta \\
& \Leftrightarrow -\sqrt{1 - \lambda - ce^{-\theta|x|}}|x| \geq -2\theta|x| \\
& \Leftrightarrow e^{-\sqrt{1-\lambda-ce^{-\theta|x|}|x|}} \geq e^{-2\theta|x|} \\
& \Leftrightarrow e^{-\sqrt{1-\lambda-ce^{-\theta|x|}|x|}} - e^{-2\theta|x|} \geq 0,
\end{aligned}$$

donde segue (2.31). Logo, de (2.29), (2.30), aplicando o Princípio do Máximo [22] obtemos

$$H^0(x) \gg U(x) \text{ em } \mathbb{R}^N \setminus \bar{B}_\rho(0). \tag{2.32}$$

Portanto, combinando (2.28) e (2.32) temos

$$H_0(x) \ll U(x) \ll H^0(x) \text{ em } \mathbb{R}^N \setminus \bar{B}_\rho(0), \tag{2.33}$$

similarmente como feito em [38]. Utilizando (2.26), (2.27) e (2.33), temos que

$$\begin{aligned}
0 < \mu_0 &= \lim_{|x| \rightarrow \infty} h_{0,1}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}}e^{\sqrt{1-\lambda}|x|} \leq \liminf_{|x| \rightarrow \infty} w_1(x)|x|^{\frac{N-1}{2}}e^{\sqrt{1-\lambda}|x|} \\
&\leq \limsup_{|x| \rightarrow \infty} w_1(x)|x|^{\frac{N-1}{2}}e^{\sqrt{1-\lambda}|x|} \\
&\leq \lim_{|x| \rightarrow \infty} h^{0,1}(x)|x|^{\frac{N-1}{2}}e^{\sqrt{1-\lambda}|x|} < \infty.
\end{aligned} \tag{2.34}$$



A primeira desigualdade estrita segue de (2.26) e a última desigualdade é finita, pois usando (2.27) temos

$$\begin{aligned} & \lim_{|x| \rightarrow \infty} h^{0,1}(x) |x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\sqrt{1-\lambda}|x|} \\ &= \lim_{|x| \rightarrow \infty} h^{0,1}(x) |x|^{\frac{N-1}{2}} \frac{e^{\int_{\rho}^{|x|} \sqrt{1-\lambda - ce^{-\theta t}} dt}}{e^{\int_{\rho}^{|x|} \sqrt{1-\lambda - ce^{-\theta t}} dt}} e^{\sqrt{1-\lambda}|x|} \\ &= \lim_{|x| \rightarrow \infty} h^{0,1}(x) |x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\int_{\rho}^{|x|} \sqrt{1-\lambda - ce^{-\theta t}} dt} \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{1-\lambda}|x|}}{e^{\int_{\rho}^{|x|} \sqrt{1-\lambda - ce^{-\theta t}} dt}} < \infty. \end{aligned}$$

O próximo passo é mostrar que o  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} w_1(x) |x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\sqrt{1-\lambda}|x|}$  existe. De fato, note que se mostrarmos que a função  $\frac{w_1}{h_{0,1}}$  é não decrescente, usando (2.33) tal função seria limitada, pois  $1 \leq \frac{w_1}{h_{0,1}} \leq \frac{h^{0,1}}{h_{0,1}}$  e

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{h^{0,1}(x)}{h_{0,1}(x)} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{h^{0,1}(x) |x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\int_{\rho}^{|x|} \sqrt{1-\lambda - ce^{-\theta t}} dt}}{h_{0,1}(x) |x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\sqrt{1-\lambda}|x|}} \frac{e^{\sqrt{1-\lambda}|x|}}{e^{\int_{\rho}^{|x|} \sqrt{1-\lambda - ce^{-\theta t}} dt}} = \frac{\mu^0}{\mu_0} C < \infty,$$

por (2.26) e (2.27). Assim concluiríamos que  $\frac{w_1}{h_{0,1}}$  tem limite finito quando  $|x| \rightarrow \infty$  e que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} w_1(x) |x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\sqrt{1-\lambda}|x|} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{w_1(x)}{h_{0,1}(x)} \lim_{|x| \rightarrow \infty} h_{0,1}(x) |x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\sqrt{1-\lambda}|x|} \in (0, \infty).$$

Finalmente, vamos mostrar que  $\frac{w_1}{h_{0,1}}$  é não decrescente. Considere  $r, s \in (\rho, \infty)$  tal que  $r \leq s$ . Desde que  $w_1$  e  $h_{0,1}$  são ambas funções radiais, defina o seguinte operador

$$Sw_1 = -(-\Delta w_1 + w_1) = \Delta w_1 - w_1 = w_1'' + \frac{N-1}{r} w_1' - w_1.$$

Segue da definição do operador  $S$  e de  $(\mathcal{H}_0)$  que

$$Sh_{0,1} = h_{0,1}'' + \frac{N-1}{r} h_{0,1}' - h_{0,1}.$$

Note que,  $-\Delta(h_{0,1} - w_1) + (h_{0,1} - w_1) = \lambda(h_{0,2} - w_2) - f(w_1, w_2) < 0$ , logo pelo Princípio do Máximo, temos que  $h_{0,1}(x) \leq w_1(x)$  para todo  $|x| \in (\rho, \infty)$ . Agora considere a função  $w = \frac{h_{0,1}}{w_1}$  e  $\sigma(r) = \frac{N-1}{r}$ . Observe que

$$Sh_{0,1} = S(w w_1) = w_1 w'' + (2w_1' + \sigma w_1) w' + S(w_1) w = 0.$$

Decorre que

$$w'' + \left(2 \frac{w_1'}{w_1} + \sigma\right) w' + \frac{1}{w_1} S(w_1) w; \quad r \in (\rho, \infty), \quad w(\rho) = 1. \quad (2.35)$$

O problema de valor inicial em (2.35) tem solução única desde que  $\frac{1}{w_1} S(w_1) < 0$  e  $2\frac{w_1'}{w_1} + \sigma$  é contínua em  $r \in (\rho, \infty)$ .

Por outro lado, note que temos

$$S(h_{0,1} - w_1) = 0 - (-f(w_1, w_2) - \lambda w_2) = f(w_1, w_2) + \lambda w_2 > 0 \text{ para } r \in (\rho, \infty),$$

e

$$h_{0,1} - w_1 = 0 \text{ sobre } \partial B_\rho(0).$$

Aplicando o Princípio do Máximo e Lema de Hopf, respectivamente, temos

$$h_{0,1} - w_1 < 0 \text{ para } r > \rho \text{ e } \frac{\partial(h_{0,1} - w_1)}{\partial r} < 0 \text{ se } r = \rho, \quad (2.36)$$

que implica

$$h'_{0,1}(\rho) < w'_1(\rho) < 0.$$

Consequentemente,

$$w'(\rho) = \frac{h'_{0,1}(\rho)w_1(\rho) - h_{0,1}(\rho)w'_1(\rho)}{w_1^2(\rho)} < \frac{w'_1(\rho)[w_1(\rho) - h_{0,1}(\rho)]}{w_1^2(\rho)} \leq 0.$$

Desde que  $w(r)$  é continuamente diferenciável em  $(\rho, \infty)$ , derivando  $w$  temos

$$w'(r) = \frac{h'_{0,1}(r)w_1(r) - h_{0,1}(r)w'_1(r)}{w_1^2(r)}.$$

Supondo  $w'(r) \geq 0$  segue que

$$\frac{h'_{0,1}(r)}{h_{0,1}(r)} \geq \frac{w'_1(r)}{w_1(r)},$$

ou seja,  $(\ln h_{0,1}(r))' \geq (\ln w_1(r))'$ , isto é,  $\ln h_{0,1}(r) \geq \ln w_1(r)$ , Como a função  $\ln(x)$  é uma função crescente, isto equivale a  $h_{0,1}(r) \geq w_1(r)$ . Contradição com (2.36). Implicando que  $\frac{w_1}{h_{0,1}}$  é não decrescente como queríamos mostrar. Similarmente para  $w_2$ , obtendo assim

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} w_1(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\sqrt{1-\lambda}|x|} = \mu_1 > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} w_2(x)|x|^{\frac{N-1}{2}} e^{\sqrt{1-\lambda}|x|} = \mu_2 > 0$$

com  $\mu_1, \mu_2 \in (0, +\infty)$ .

□

## 2.3 Variedade de Nehari e limitação da sequência de Palais-Smale

O resultado a seguir contém as propriedades principais sobre a variedade  $\mathcal{N}$  associado ao funcional  $I$ .

**Lema 2.4.** *A variedade  $\mathcal{N}$  satisfaz:*

- existe um número  $\alpha > 0$  tal que para todo  $(u, v) \in \mathcal{N}$  tem-se  $\|(u, v)\| \geq \alpha$ ;
- $\mathcal{N}$  é uma subvariedade fechada, de classe  $C^2$  em  $H$  e é variedade natural para  $I$ ;

c) para todo  $(u, v) \in \mathcal{N}$ , a função  $t \mapsto I(tu, tv)$  é estritamente crescente no intervalo  $[0, 1)$  e estritamente decrescente no intervalo  $(1, +\infty)$ . Assim, em particular, pode-se afirmar que

$$I(u, v) = \max_{t > 0} I(tu, tv) > 0.$$

**Demonstração:** Verificação de (a) Por  $(a_1)$ ,  $(F_3)$  e o funcional  $J$  associado a  $\mathcal{N}$  definido em (2.4) tem-se

$$\begin{aligned} J(u, v) &= I'(u, v)(u, v) = \|(u, v)\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} uv \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \nabla F(u, v)(u, v) \, dx \\ &\geq \|(u, v)\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} (u^2 + v^2) \, dx - C \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(u, v)(u, v) \, dx \\ &\geq (1 - \lambda - \varepsilon) \|(u, v)\|^2 - C \|(u, v)\|^p, \quad 2 < p < 2^*. \end{aligned}$$

Desde que  $(u, v) \in \mathcal{N}$ , tem-se  $J(u, v) = 0$ . Assim, (a) segue de

$$C \|(u, v)\|^{p-2} \geq (1 - \lambda - \varepsilon).$$

Verificação de (b) Note que

$$\mathcal{N} := \{(u, v) \in H \setminus \{(0, 0)\} ; J(u, v) = 0\} = J^{-1}(\{(0, 0)\}).$$

Como  $J$  é contínuo, implica que  $\mathcal{N}$  é uma subvariedade fechada de  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . Se  $(u, v) \in \mathcal{N}$ , por (2.4) então

$$\|(u, v)\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} uv \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \nabla F(u, v)(u, v) \, dx.$$

Derivando com respeito a  $u$  o gradiente  $\nabla F(u, v)(u, v) = \frac{(u^2 + v^2)^2}{1 + s(u^2 + v^2)}$ , obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{2(u^2 + v^2)2u(1 + s(u^2 + v^2))u - (u^2 + v^2)^2 2suu}{(1 + s(u^2 + v^2))^2} \\ &= \frac{4u^2(u^2 + v^2) + 4su^2(u^2 + v^2)^2 - 2su(u^2 + v^2)^2}{(1 + s(u^2 + v^2))^2} \tag{2.37} \\ &= \frac{4u^2(u^2 + v^2) + 2su^2(u^2 + v^2)^2}{(1 + s(u^2 + v^2))^2}. \end{aligned}$$

Derivando agora com respeito a  $v$ , analogamente, tem-se

$$\frac{4v^2(u^2 + v^2) + 2sv^2(u^2 + v^2)^2}{(1 + s(u^2 + v^2))^2}. \tag{2.38}$$

Somando (2.37) e (2.38) obtemos

$$\frac{4(u^2 + v^2)^2 + 2s(u^2 + v^2)^3}{(1 + s(u^2 + v^2))^2}. \tag{2.39}$$

Derivando (2.4) e combinado com (2.39) e o fato de que  $(u, v) \in \mathcal{N}$ ,

$$\begin{aligned}
J'(u, v)(u, v) &= 2\|(u, v)\|^2 - 4\lambda \int_{\mathbb{R}^N} uv \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \nabla^2 F(u, v)(u, v) \, dx \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \nabla F(u, v)(u, v) \, dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \frac{4(u^2 + v^2)^2 + 2s(u^2 + v^2)^3}{(1 + s(u^2 + v^2))^2} \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \left\{ \frac{2(u^2 + v^2)^2}{1 + s(u^2 + v^2)} - \frac{4(u^2 + v^2)^2 + 2s(u^2 + v^2)^3}{(1 + s(u^2 + v^2))^2} \right\} \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \left\{ \frac{2(u^2 + v^2)^2 + 2s(u^2 + v^2)^3 - 4(u^2 + v^2)^2 - 2s(u^2 + v^2)^3}{(1 + s(u^2 + v^2))^2} \right\} \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \left\{ \frac{-2(u^2 + v^2)^2}{(1 + s(u^2 + v^2))^2} \right\} \, dx < 0
\end{aligned}$$

visto que  $\inf_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + a(x)) = \varsigma > 0$ , por  $(a_1)$ . Isto implica que  $(0, 0)$  é um valor regular de  $J : H \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Assim,  $J^{-1}(\{(0, 0)\})$  é um conjunto fechado, por ser a imagem inversa de um conjunto fechado por um funcional contínuo. Como  $\{(u, v) \equiv (0, 0)\}$  é um ponto isolado de  $J^{-1}(\{(0, 0)\})$ , então temos que  $\mathcal{N}$  é de classe  $C^2$  e é uma variedade natural para  $I$ . Assim verificamos (b).

Verificação de (c) Note que,

$$\begin{aligned}
I(tu, tv) &= \frac{t^2}{2} \|(u, v)\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} (tu)(tv) \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) F(tu, tv) \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \left\{ \frac{t^2}{2} \nabla F(tu, tv)(tu, tv) - F(tu, tv) \right\} \, dx.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Considere a aplicação  $\xi(t) := \frac{t^2}{2} \nabla F(tu, tv)(tu, tv) - F(tu, tv)$  para  $t \geq 0$ . Observe que

$$\begin{aligned}
\xi(t) &= \frac{t^2}{2} \frac{(u^2 + v^2)^2}{1 + s(u^2 + v^2)} - \frac{t^2(u^2 + v^2)}{2s} + \frac{1}{2s^2} \ln(1 + st^2(u^2 + v^2)) \\
&:= \frac{t^2}{2} \frac{z^4}{1 + sz^2} - \frac{t^2 z^2}{2s} + \frac{1}{2s^2} \ln(1 + st^2 z^2).
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Derivando (2.41) em  $t$ , com  $z^2 = u^2 + v^2$  tem-se

$$\begin{aligned}
\xi'(t) &= t \frac{z^4}{1 + sz^2} - t \frac{z^2}{s} + \frac{tz^2}{s(1 + st^2 z^2)} \\
&= \frac{tsz^4 - tz^2(1 + sz^2)}{s(1 + sz^2)} + \frac{tz^2}{s(1 + st^2 z^2)} \\
&= \frac{-tz^2}{s(1 + sz^2)} + \frac{tz^2}{s(1 + st^2 z^2)} \\
&= \frac{-tz^2 - st^3 z^4 + tz^2 + stz^4}{s(1 + sz^2)(st^2 z^2)} = \frac{stz^2(-t^2 + 1)}{s(1 + sz^2)(st^2 z^2)}.
\end{aligned}$$

Segue que se  $0 < t < 1$ , então

$$\xi'(t) > 0. \tag{2.42}$$

Se  $t > 1$ , então

$$\xi'(t) < 0. \quad (2.43)$$

Se  $t = 1$ , então

$$\xi'(t) = 0. \quad (2.44)$$

Por (a<sub>1</sub>), (2.40),(2.42),(2.43) e (2.44), (c) fica provado. □

O próximo resultado nos dá uma limitação para uma sequência em  $\mathcal{N}$  em qualquer nível  $d \geq 0$  fixado. Isto nos permitirá usar o Lema de Splitting posteriormente .

**Lema 2.5.** *Suponha que exista uma sequência  $\{(u_n, v_n)\}$  em  $\mathcal{N}$  satisfazendo*

$$I(u_n, v_n) \rightarrow d.$$

*Então a sequência  $\{(u_n, v_n)\}$  é limitada em  $H$ .*

**Demonstração:** Por (F<sub>2</sub>)(b) temos  $d \geq 0$ . Fixemos  $D > d \geq 0$  e consideramos que  $z_n := (u_n, v_n)$ . Vamos supor que a sequência  $\{z_n\}$  não seja limitada, isto é,  $\|z_n\| \rightarrow \infty$ . Considere a sequência  $\{\varphi_n\} := \{t_n z_n\}$  onde  $t_n = \frac{2\sqrt{D}}{\sqrt{1-\lambda}\|z_n\|}$ . Assim,  $\|\varphi_n\| = \frac{2\sqrt{D}}{\sqrt{1-\lambda}} < \infty$ , significando a limitação desta sequência. Pelo Lema 2.4, para  $n$  suficientemente grande, temos que

$$I(\varphi_n) = I(t_n z_n) \leq \max_{t>0} I(t z_n) = I(z_n) < D.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} D &> I(t_n z_n) = \frac{1}{2} \|t_n(u_n, v_n)\|_H^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} t_n^2 u_n v_n \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))F(t_n(u_n, v_n)) \, dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|t_n(u_n, v_n)\|^2 - t_n^2 \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \frac{u_n^2}{2} + \frac{v_n^2}{2} \right\} \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))F(t_n(u_n, v_n)) \, dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|t_n(u_n, v_n)\|^2 - t_n^2 \lambda \| (u_n, v_n) \|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))F(t_n(u_n, v_n)) \, dx \\ &= \left\{ \frac{1-\lambda}{2} \right\} \|t_n(u_n, v_n)\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))F(t_n(u_n, v_n)) \, dx \\ &= \left\{ \frac{1-\lambda}{2} \right\} \frac{4D}{1-\lambda} - \int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))F(t_n(u_n, v_n)) \, dx. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Isto implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))F(t_n(u_n, v_n)) \, dx \geq 2D - D = D.$$

Para obtermos a contradição, precisamos mostrar que  $\int_{\mathbb{R}^N} (1+a(x))F(t_n(u_n, v_n)) \, dx = o_n(1)$ , pois  $D > 0$ . De fato, desde que  $\{\varphi_n\}$  é limitada em  $H$ , então  $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$  em  $H$ . Temos dois casos a considerar:

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\varphi_n|^2 \, dx \right) = 0;$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\varphi_n|^2 dx \right) = \eta > 0.$$

Suponha que o primeiro caso seja verdade. Usando o Lema de Lions, logo  $\varphi_n \rightarrow 0$  em  $L^p(\mathbb{R}^N)$  para  $2 < p < 2^*$ . Usando  $(F_3)$ , como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário,  $\varphi_n$  é limitada e  $\|\varphi_n\|_{L^p} \rightarrow 0$ , segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x))F(t_n(u_n, v_n)) dx \leq C (\varepsilon \|\varphi_n\|_{L^2}^2 + C_\varepsilon \|\varphi_n\|_{L^p}^p) < D. \quad (2.46)$$

Contradição. Então suponha que o segundo caso ocorra, a menos de subsequência, fixando  $n \in \mathbb{N}$ , por definição de supremo existe uma sequência  $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$  tal que

$$\int_{B_1(y_n)} |\varphi_n^1|^2 dx \geq \frac{\eta}{4}, \quad (2.47)$$

onde  $\varphi_n = (\varphi_n^1, \varphi_n^2)$ . Defina  $\varphi_n^1 := \varphi_n^1(x + y_n)$ . Desde que  $\varphi_n$  é limitada e pela invariância do domínio,  $\varphi_n^1$  é limitada em  $H^1$  e, portanto, converge fraco para alguma  $\varphi^1$ . Temos ainda que  $\varphi_n^1 \rightarrow \varphi^1$  em  $L_{loc}^p(\mathbb{R}^N)$  para  $2 \leq p < 2^*$  e também q.t.p. em  $\mathbb{R}^N$ .

Usando mudança de variáveis, segue que

$$\begin{aligned} \int_{B_1(0)} |\varphi^1(x)|^2 dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_1(0)} |\varphi_n^1(x + y_n)|^2 dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_1(y_n)} |\varphi_n^1(x)|^2 dx \geq \frac{\eta}{4} > 0. \end{aligned}$$

Assim existe um subconjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  de medida de Lebesgue positiva em  $B_1(0)$  em que  $\varphi(x) \neq 0, \forall x \in \Omega$ . Observe que a convergência pontual em  $\mathbb{R}^N$  nos dá

$$0 < |\varphi^1(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |\varphi_n^1(x + y_n)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{D}|u_n(x + y_n)|}{\|z_n(x + y_n)\|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{D}|u_n(x + y_n)|}{\|z_n\|},$$

para todo  $x \in \Omega$ . Visto que  $\|z_n\| \rightarrow +\infty$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , necessariamente temos que

$$|u_n(x + y_n)| \rightarrow +\infty, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Desde que  $\{(u_n, v_n)\}$  está contida em  $\mathcal{N}$ , podemos usar o Lema de Fatou, a condição de não quadrati-

cidade  $(F_2)$ ,  $(a_1)$  e obter

$$\begin{aligned}
D &> \lim_{n \rightarrow +\infty} I(u_n, v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \|(u_n, v_n)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} u_n v_n \, dx \right) \\
&\quad - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) F(u_n, v_n) \, dx \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \left( \frac{1}{2} \nabla F(u_n, v_n)(u_n, v_n) - F(u_n, v_n) \right) \, dx \\
&\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \varsigma \left( \frac{1}{2} \nabla F(u_n, v_n)(u_n, v_n) - F(u_n, v_n) \right) \, dx \\
&= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left( \varsigma \frac{1}{2} \nabla F(u_n(x + y_n), v_n(x + y_n))(u_n(x + y_n), v_n(x + y_n)) \right. \\
&\quad \left. - \varsigma F(u_n(x + y_n), v_n(x + y_n)) \right) \, dx \\
&> \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \left( \varsigma \frac{1}{2} \nabla F(u_n(x + y_n), v_n(x + y_n))(u_n(x + y_n), v_n(x + y_n)) \right. \\
&\quad \left. - \varsigma F(u_n(x + y_n), v_n(x + y_n)) \right) \, dx \\
&\geq \varsigma \int_{\Omega} \left( \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \nabla F(u_n(x + y_n), v_n(x + y_n))(u_n(x + y_n), v_n(x + y_n)) \right. \\
&\quad \left. - F(u_n(x + y_n), v_n(x + y_n)) \right) \, dx = +\infty.
\end{aligned}$$

Assim, o segundo caso também não pode ocorrer. A contradição veio do fato de supor que a sequência  $\{(u_n, v_n)\}$  não era limitada em  $H$  e obtemos assim o resultado desejado.

□

O resultado a seguir mostra a positividade do ínfimo do funcional associado ao problema (S) sobre a variedade  $\mathcal{N}$ .

**Lema 2.6.** *Seja  $m$  definida em (2.5), então tem-se  $m > 0$ .*

**Demonstração:** A demonstração é análoga à do Lema 2.5. Considere  $\{(u_n, v_n)\}$  na variedade  $\mathcal{N}$  tal que  $I(u_n, v_n) \rightarrow m$ . Pelo Lema 2.5,  $\{(u_n, v_n)\}$  é limitada em  $H$  e  $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v)$  com  $u \neq 0$  e  $v \neq 0$ . Segue que

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{n \rightarrow +\infty} I(u_n, v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \|(u_n, v_n)\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} u_n v_n \, dx \right) \\
&\quad - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) F(u_n, v_n) \, dx \right) \\
&\geq \varsigma \int_{\Omega} \left( \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \nabla F(u_n(x + y_n), v_n(x + y_n))(u_n(x + y_n), v_n(x + y_n)) \right. \\
&\quad \left. - F(u_n(x + y_n), v_n(x + y_n)) \right) \, dx \\
&= \varsigma \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \nabla F(u, v)(u, v) - F(u, v) \right) \, dx > 0.
\end{aligned}$$

□

**Observação 2.2.** Note que o resultado obtido no Lema 2.6 também se aplica ao funcional  $I_\infty$ , ou seja,  $m_\infty > 0$ .

O próximo lema nos dá uma importante informação sobre uma sequência (PS) do funcional  $I$  restrito à  $\mathcal{N}$  e no espaço  $H$ .

**Lema 2.7.** Suponha que  $\{(u_n, v_n)\}$  é uma sequência (PS) $_d$  para  $I$  restrito à variedade  $\mathcal{N}$ . Então, a menos de subsequência, a sequência  $\{(u_n, v_n)\}$  é também uma sequência (PS) $_d$  para o funcional  $I$  em  $H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$ .

**Demonstração:** Considere  $\{(u_n, v_n)\} \subset \mathcal{N}$  do tipo (PS) $_d$ . Então pelo Lema 2.5,  $\{(u_n, v_n)\}$  é limitada e satisfaz

$$I(u_n, v_n) \rightarrow d \quad \text{e} \quad (I|_{\mathcal{N}})'(u_n, v_n) \rightarrow 0. \quad (2.48)$$

Observe que para qualquer  $(\varphi, \psi) \in H$

$$\begin{aligned} J'(u_n, v_n)(\varphi, \psi) &= 2(\langle u_n, \varphi \rangle + \langle v_n, \psi \rangle) - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} (v_n \varphi + u_n \psi) \, dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \nabla(\nabla F(u_n, v_n)(u_n, v_n))(\varphi, \psi) \, dx. \end{aligned}$$

Usando a hipótese  $(a_1)$  e a desigualdade de Hölder segue que

$$\begin{aligned} |J'(u_n, v_n)(\varphi, \psi)| &\leq 2\left\{\|u_n\| \|\varphi\| + \|v_n\| \|\psi\|\right\} + 2 \int_{\mathbb{R}^N} (|v_n| |\varphi| + |u_n| |\psi|) \, dx \\ &\quad + C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\nabla F(u_n, v_n)(u_n, v_n))(\varphi, \psi)| \, dx \\ &\leq 2\left\{\|u_n\| \|\varphi\| + \|v_n\| \|\psi\|\right\} \\ &\quad + 2\left\{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^2 \, dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^2 \, dx\right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 \, dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\psi|^2 \, dx\right)^{1/2}\right\} \\ &\quad + C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\nabla F(u_n, v_n)(u_n, v_n))(\varphi, \psi)| \, dx \\ &\leq 2\left\{\|u_n\| \|\varphi\| + \|v_n\| \|\psi\|\right\} + 2\left\{\|v_n\| \|\varphi\| + \|u_n\| \|\psi\|\right\} \\ &\quad + C \int_{\mathbb{R}^N} \frac{4|u_n|(u_n^2 + v_n^2) + 2s|u_n|(u_n^2 + v_n^2)^2}{(1 + s(u_n^2 + v_n^2))^2} |\varphi| \, dx \\ &\quad + C \int_{\mathbb{R}^N} \frac{4|v_n|(u_n^2 + v_n^2) + 2s|v_n|(u_n^2 + v_n^2)^2}{(1 + s(u_n^2 + v_n^2))^2} |\psi| \, dx \\ &\leq 2\left\{\|u_n\| + \|v_n\|\right\} \left\{\|\varphi\| + \|\psi\|\right\} + C \int_{\mathbb{R}^N} \left\{\frac{4|u_n| |\varphi|}{s} + \frac{4|v_n| |\psi|}{s}\right\} \, dx \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&\leq \| (u_n, v_n) \| \| (\varphi, \psi) \| + \frac{4C}{s} \left\{ \|v_n\| \|\varphi\| + \|u_n\| \|\psi\| \right\} \\
&\leq 2 \| (u_n, v_n) \| \| (\varphi, \psi) \| + \frac{4C}{s} \left\{ (\|v_n\| + \|u_n\|) \|\varphi\| + (\|u_n\| + \|v_n\|) \|\psi\| \right\} \\
&\leq \| (u_n, v_n) \| \| (\varphi, \psi) \| + \frac{4C}{s} \| (u_n, v_n) \| \| (\varphi, \psi) \| \\
&\leq \max \left\{ 2, \frac{4C}{s} \right\} \| (u_n, v_n) \| \| (\varphi, \psi) \|.
\end{aligned}$$

Desde que a sequência  $\{(u_n, v_n)\}$  é limitada em  $H$ , então para toda  $(\varphi, \psi) \in H$ ,

$$|J'(u_n, v_n)(\varphi, \psi)| \leq C \|(\varphi, \psi)\|_H.$$

Isto mostra que a sequência  $\{J'(u_n, v_n)\}$  é limitada em  $H^{-1}$ . Consequentemente,  $|J'(u_n, v_n)(u_n, v_n)| \leq \|J'(u_n, v_n)\|_{H^{-1}} \| (u_n, v_n) \|_H \leq C$ , onde a constante  $C$  não depende de  $\{(u_n, v_n)\}$ . A menos de subsequência, a sequência de números reais positivos

$$\varrho_n := |J'(u_n, v_n)(u_n, v_n)| \rightarrow \varrho \geq 0.$$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned}
\varrho &= \liminf_{n \rightarrow \infty} |J'(u_n, v_n)(u_n, v_n)| \\
&= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| 2 \| (u_n, v_n) \|^2 - 4\lambda \int_{\mathbb{R}^N} u_n v_n \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \nabla (\nabla F(u_n, v_n)(u_n, v_n)) (u_n, v_n) \, dx \right| \\
&= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) 2 \nabla F(u_n, v_n)(u_n, v_n) \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \nabla (\nabla F(u_n, v_n)(u_n, v_n)) (u_n, v_n) \, dx \right| \\
&= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \left\{ \frac{2(u_n^2 + v_n^2)^2}{(1 + s(u_n^2 + v_n^2))^2} \right\} \, dx \right| \\
&\geq \varsigma \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \frac{2(u_n^2 + v_n^2)^2}{(1 + s(u_n^2 + v_n^2))^2} \right\} \, dx \\
&\geq \varsigma \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_0} \left\{ \frac{2(u_n^2 + v_n^2)^2}{(1 + s(u_n^2 + v_n^2))^2} \right\} \, dx \\
&= \varsigma \int_{\Omega_0} \left\{ \frac{2(u^2 + v^2)^2}{(1 + s(u^2 + v^2))^2} \right\} \, dx > 0,
\end{aligned}$$

pois como  $\{(u_n, v_n)\} \in \mathcal{N}$ , pelo Lema 2.4 temos que  $\|(u_n, v_n)\| \geq \alpha > 0$  e argumentando como na demonstração do Lema 2.6, usando o Lema de Lions tem-se que  $(u_n(x), v_n(x)) \rightarrow (u(x), v(x))$  q.t.p.  $x \in \mathbb{R}^N$  e  $u(x), v(x) \neq 0$  q.t.p.  $x \in \Omega_0$  onde  $\Omega_0$  é um conjunto de medida positiva, e tudo isto adicionado com o Lema de Fatou e  $(a_1)$ .

Como  $\mathcal{N}$  é uma variedade de codimensão 1 em  $H$  (vide seção 6.3 em [7]) podemos escrever a projeção gradiente  $(I|_{\mathcal{N}})'(u, v)$  sobre o plano tangente

$$T_{(u,v)}\mathcal{N} = \{ (\varphi, \psi) \in H : \langle J'(u), (\varphi, \psi) \rangle = 0 \}$$

por

$$(I|_{\mathcal{N}})'(u, v) = I'(u, v) - tJ'(u, v),$$

em que

$$t := \frac{\langle I'(u, v), J'(u, v) \rangle}{\|J'(u, v)\|^2}.$$

Desde que  $\{(u_n, v_n)\} \subset \mathcal{N}$  é uma sequência (PS) de  $I$  restrito a  $\mathcal{N}$  (vide Lema 7.19 em [7]) existe uma sequência  $\{t_n\}$  tal que

$$(I|_{\mathcal{N}})'(u_n, v_n) = I'(u_n, v_n) - t_n J'(u_n, v_n) = o_n(1), \quad (2.49)$$

dada por

$$t_n := \frac{\langle I'(u_n, v_n), J'(u_n, v_n) \rangle}{\|J'(u_n, v_n)\|^2};$$

note que  $\|J'(u_n, v_n)\| \neq 0$  pelo Lema 2.4.

O objetivo agora é mostrar que a sequência  $\{t_n\}$  converge a zero, se  $n \rightarrow +\infty$ . Assim concluiremos o lema.

Por (2.48) e (2.49) segue que

$$\begin{aligned} 0 &= I'(u_n, v_n)(u_n, v_n) \\ &= (I|_{\mathcal{N}})'(u_n, v_n)(u_n, v_n) + t_n J'(u_n, v_n)(u_n, v_n) \\ &= o_n(1) + t_n J'(u_n, v_n)(u_n, v_n). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Por (2.49) e (2.50) tem-se  $C \geq |J'(u_n, v_n)(u_n, v_n)| \rightarrow \varrho > 0$ , se  $n \rightarrow +\infty$ , e isto implica que, a menos de subsequência,

$$t_n \rightarrow 0, \quad \text{se } n \rightarrow +\infty. \quad (2.51)$$

Assim, deduzimos de (2.48) e (2.51) que, a menos de subsequência de  $\{(u_n, v_n)\}$ ,

$$I'(u_n, v_n) = (I|_{\mathcal{N}})'(u_n, v_n) + t_n J'(u_n, v_n) \rightarrow 0, \quad \text{se } n \rightarrow +\infty.$$

Concluimos assim a demonstração do lema. □

Pretendemos usar ferramentas do tipo *min-max* para encontrar solução de (S). Entretanto, o conjunto de soluções do sistema autônomo pode ser complicado e, ao contrário do caso escalar, precisamos impor hipóteses similares às que implicam em unicidade de solução no caso escalar. Definimos

$$\widehat{m}_\infty = \inf \{m^* > m_\infty : m^* \text{ é valor crítico de } I_\infty\}.$$

**Observação 2.3.** *O problema escalar que tem solução positiva única satisfaz esta hipótese. Supor que o sistema tenha solução positiva  $(u, v)$  única é mais artificial, entretanto podemos supor que todas as soluções positivas (caso exista mais de uma) estejam no mesmo nível de energia é razoável.*

**Observação 2.4.** Em 2013 Maia-Montefusco-Pellacci [32] investigaram o problema fracamente acoplado

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = \frac{u(u^2 + v^2)}{1 + s(u^2 + v^2)}, & \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \lambda v = \frac{v(u^2 + v^2)}{1 + s(u^2 + v^2)}, & \mathbb{R}^N, \\ u, v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (2.52)$$

com  $\lambda > 0$  e  $N \geq 2$ . O Teorema 2.1 em [32] mostra que se  $s \in (0, 1/\lambda)$ , então existe uma única solução  $U = (u, v)$ , a menos de rotação, com ambas componentes positivas de (2.52) dada por  $(u, v) = (\cos \theta, \sin \theta)z_\lambda$  onde  $\theta \in (0, \pi/2)$  e  $z_\lambda$  é solução de

$$\begin{cases} -\Delta z_\lambda + \lambda z_\lambda = \frac{z_\lambda^3}{1 + s z_\lambda^2}, & \mathbb{R}^N, \\ z_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (2.53)$$

Outrossim, o nível de energia da única solução vetorial do sistema (2.52) é igual ao nível de energia das soluções de (2.53). Em outras palavras, para o problema modelo (2.52) não podemos encontrar uma solução vetorial com nível de energia estritamente menor que o nível de energia das soluções de (2.53).

Assumindo a hipótese (U) vamos mostrar que  $2m_\infty \leq \widehat{m}_\infty$ . Precisaremos do seguinte lema auxiliar

**Lema 2.8.** Se  $(u, v)$  é solução de  $(\mathbb{S}_\infty)$  que muda de sinal, então

$$\text{supt}(u^+) \cap \text{supt}(v^-) \subset \{x : u(x) = 0 \text{ e } v(x) = 0\} \quad (2.54)$$

onde  $u^+ = \max\{u, 0\}$  e  $v^- = \max\{-v, 0\}$ .

**Demonstração:** Primeiramente note que o acoplamento forte do sistema  $(\mathbb{S}_\infty)$  implica  $v = 0$  se, e somente se,  $u = 0$  (isto é, as regiões nodais de  $u$  e  $v$  são as mesmas). Considere  $\Omega := \text{supt}\{u^+\} \subset \mathbb{R}^N$ . Se  $v(x) < 0$  para algum  $x \in \Omega$ , então  $x \in \text{int}(\Omega)$ , (pois  $u(x) = 0$  para todo  $x \in \partial\Omega$ ). Logo, obtemos que  $\Omega := \text{supt}\{v^-\} \subset \mathbb{R}^N$ . Dado  $x_0 \in \partial\Omega$ ,  $u(x_0) = v(x_0) = 0$  e pela continuidade de  $u$  e  $v$  dado um  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que, se  $x \in \Omega$  e  $|x - x_0| < \delta$ , então  $|u^+(x)| = |u(x)| < \varepsilon$  e  $|v^-(x)| = |v(x)| < \varepsilon$ . Subtraindo as duas equações do sistema  $(\mathbb{S}_\infty)$ , temos

$$-\Delta(u - v) + (u - v) = \frac{u^2 + v^2}{1 + s(u^2 + v^2)}(u - v) - \lambda(u - v)$$

e para todos os pontos  $x \in \Omega$ , vamos ter

$$-\Delta(u^+ + v^-) + \left[1 + \lambda - \frac{u^2 + v^2}{1 + s(u^2 + v^2)}\right] (u^+ + v^-) = 0. \quad (2.55)$$

Tomando  $\varepsilon$  suficientemente pequeno tal que  $\frac{u^2 + v^2}{1 + s(u^2 + v^2)} < \frac{1 + \lambda}{2}$ , para todo  $x \in \Omega$  e  $|x - x_0| < \delta$ .

Multiplicando a equação (2.55) por  $u^+ + v^-$  obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega \cap B_\delta(x_0)} \left( |\nabla(u^+ + v^-)|^2 + \left[ 1 + \lambda - \frac{u^2 + v^2}{1 + s(u^2 + v^2)} \right] (u^+ + v^-)^2 \right) dx \\ &> \int_{\Omega \cap B_\delta(x_0)} \left( |\nabla(u^+ + v^-)|^2 + \left[ \frac{1 + \lambda}{2} \right] (u^+ + v^-)^2 \right) dx > 0, \end{aligned}$$

visto que,  $u^+(x) + v^-(x) > 0$  no interior  $\Omega \cap B_\delta(x_0)$ , pelo Lema de Hopf e do fato que  $u$  e  $v$  são soluções clássicas de  $(\mathbb{S}_\infty)$ . Este absurdo veio de termos assumido que  $v(x) < 0$  para algum  $x \in \Omega$ , portanto  $v(x) \geq 0$  para todo  $x \in \Omega$  e assim  $\text{supt}(u^+) \cap \text{supt}(v^-) \subset \{x : u(x) = 0 \text{ e } v(x) = 0\}$ . Analogamente verifica-se que

$$\text{supt}(u^-) \cap \text{supt}(v^+) \subset \{x : u(x) = 0 \text{ e } v(x) = 0\}. \quad (2.56)$$

□

Segue o seguinte lema de não existência de solução

**Lema 2.9.** *Suponha  $(U)$ , então não existe solução  $(u, v)$  para o problema  $(\mathbb{S}_\infty)$  tal que  $I_\infty(u, v) \in (m_\infty, 2m_\infty)$ .*

**Demonstração:** Seja  $(u, v)$  uma solução de  $(\mathbb{S}_\infty)$ . Segue que  $I'_\infty(u, v) = 0$ , isto é,  $I'_\infty(u, v)(\phi, \psi) = 0$  para qualquer  $(\phi, \psi) \in H$ . Em particular,  $I'_\infty(u, v)(u^+, v^+) = 0$  e  $I'_\infty(u, v)(u^-, v^-) = 0$ . Desejamos mostrar que  $(u^+, v^+)$  e  $(u^-, v^-)$  estão na variedade  $\mathcal{N}$ . De fato,

$$\begin{aligned} 0 &= I'_\infty(u, v)(u^+, v^+) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla(u^+ + u^-)|^2 + |\nabla(v^+ + v^-)|^2 + (u^+ + u^-)u^+ + (v^+ + v^-)v^-] dx \\ &\quad - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} [(v^+ + v^-)u^+ + (u^+ + u^-)v^+] dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(u^+ + u^-, v^+ + v^-)(u^+, v^+) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u^+|^2 + |\nabla v^+|^2 + (u^+)^2 + (v^+)^2] dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} (u^+v^+ + u^+v^+ + v^-u^+ + u^-v^+) dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(u^+ + u^-, v^+ + v^-)(u^+, v^+) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u^+|^2 + |\nabla v^+|^2 + (u^+)^2 + (v^+)^2] dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} (u^+v^+ + u^+v^+ + v^-u^+ + u^-v^+) dx \\ &\quad - \int_{\{u, v \geq 0\}} \nabla F(u^+, v^+)(u^+, v^+) dx - \int_{\{u, v < 0\}} \nabla F(u^-, v^-)(u^+, v^+) dx \\ &\quad - \int_{\{u \geq 0, v \leq 0\}} \nabla F(u^+, v^-)(u^+, v^+) dx - \int_{\{u < 0, v > 0\}} \nabla F(u^-, v^+)(u^+, v^+) dx \\ &= I'_\infty(u^+, v^+)(u^+, v^+), \end{aligned}$$

em que a última desigualdade é consequência de (2.54) e (2.56). Logo,  $(u^+, v^+) \in \mathcal{N}_\infty$ . De modo análogo mostra-se que  $(u^-, v^-) \in \mathcal{N}_\infty$ .

Agora, note que

$$\begin{aligned}
& I_\infty(u^+ + u^-, v^+ + v^-) \\
&= \frac{1}{2} \|(u^+ + u^-, v^+ + v^-)\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} (u^+ + u^-, v^+ + v^-) (u^+ + u^-, v^+ + v^-) \, dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} F(u^+ + u^-, v^+ + v^-) \, dx \\
&= \frac{1}{2} \|(u^+, v^+)\|^2 + \frac{1}{2} \|(u^-, v^-)\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} (u^+ v^+ + u^- v^-) \, dx \\
&\quad - \int_{\{u, v \geq 0\}} F(u^+, v^+) \, dx - \int_{\{u, v < 0\}} F(u^-, v^-) \, dx \\
&\quad - \int_{\{u \geq 0, v \leq 0\}} F(u^+, v^-) \, dx - \int_{\{u < 0, v > 0\}} F(u^-, v^+) \, dx \\
&= I_\infty(u^+, v^+) + I_\infty(u^-, v^-) \geq m_\infty + m_\infty = 2m_\infty,
\end{aligned}$$

em que novamente utilizamos (2.54) e (2.56). Como  $m_\infty$  é estritamente positivo pela Observação 2.2, acabamos de mostrar que não existe solução  $(u, v)$  de  $(\mathbb{S}_\infty)$  que muda de sinal em  $[m_\infty, 2m_\infty)$ . Suponha  $(u, v)$  solução de  $(\mathbb{S}_\infty)$  tal que  $I_\infty(u, v) \in (m_\infty, 2m_\infty)$ . Pela hipótese  $(U)$  temos que é única ou qualquer solução positiva está no mesmo nível de energia do funcional associado a  $(\mathbb{S}_\infty)$ . Sem perda de generalidade, suponha  $(u, v)$  solução positiva. Por [14],  $(u, v)$  é radial e por  $(U)$  segue que  $(u, v) = (w_1, w_2)$  e  $I_\infty(u, v) = m_\infty$  ou  $I_\infty(u, v) = m_\infty$  implicando em contradição com a hipótese de  $I_\infty(u, v) > m_\infty$ .

□

## 2.4 Compacidade

O próximo resultado que enunciaremos será fundamental para o estudo dos pontos críticos do funcional  $I$ . Ele descreve como uma sequência de Palais - Smale de  $I$  se comporta assintoticamente.

**Lema 2.10.** (*Lema de Splitting*) *Suponha que  $\{(u_n, v_n)\}$  é uma sequência limitada em  $H$  tal que*

$$I(u_n, v_n) \rightarrow d > 0 \quad e \quad (I|_{\mathcal{N}})'(u_n, v_n) \rightarrow 0 \quad em \quad H^{-1}.$$

*Então, passando se necessário a uma subsequência, existem  $(u_0, v_0)$  solução fraca de  $(\mathbb{S})$ , um número  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $k$  funções  $(u^1, v^1), \dots, (u^k, v^k) \in H$  soluções do problema limite  $(\mathbb{S}_\infty)$  e  $k$  sequências de pontos  $\{y_n^j\}, 1 \leq j \leq k$  tais que*

1.  $(u_n, v_n) \rightarrow (u_0, v_0)$  em  $H$  ou
2.  $|y_n^j| \rightarrow +\infty$  e  $|y_n^j - y_n^i| \rightarrow +\infty; j \neq i;$
3.  $(u_n, v_n) - \sum_{j=1}^k (u^j(\cdot - y_n^j), v^j(\cdot - y_n^j)) \rightarrow (u_0, v_0)$  em  $H;$
4.  $I(u_n, v_n) \rightarrow d = I(u_0, v_0) + \sum_{j=1}^k I_\infty(u^j, v^j).$

**Demonstração:** Inicialmente obtemos do Lema 2.7 que a sequência  $\{(u_n, v_n)\}$  satisfaz  $I'(u_n, v_n) \rightarrow 0$ . A prova segue como em [5] considerando que a não linearidade  $F(u, v)$  é de classe  $C^2(H)$  e seguindo os passos (2.11) e (2.46) a (2.55) da Proposição 2.31 em [20].

□

Como uma consequência dos Lemas 2.5 , 2.7 e 2.9 combinados com o Lema 2.10 temos o seguinte resultado

**Lema 2.11.** *Suponha que o ínfimo  $m$  definido em (2.5) não seja atingido. Então  $m \geq m_\infty$  e, ainda, o funcional  $I$  satisfaz a condição de Palais-Smale sobre  $\mathcal{N}$  em qualquer nível do intervalo  $(m_\infty, 2m_\infty)$ .*

**Demonstração:** Considere uma sequência  $\{(u_n, v_n)\}$  tal que satisfaz  $(PS)_d$  para o funcional  $I$  restrito a  $\mathcal{N}$ . Então, a menos de subsequência,  $\{(u_n, v_n)\}$  é limitada e é  $(PS)_d$  para  $I$  em todo espaço  $H$  pelos Lemas 2.5 e 2.7.

Suponha que o nível  $m$  não seja atingido. Se  $d = m$ , então existe uma sequência  $(u_n, v_n) \rightarrow (u_0, v_0)$ , pela continuidade do funcional  $I$ , teríamos  $I(u_n, v_n) \rightarrow I(u_0, v_0) = d = m$ . Contradição com a hipótese neste caso. Logo, não existe tal sequência; o que implica que a possibilidade 1 no Lema de Splitting não ocorre. Decorre então que valem (2), (3) e (4).

Em primeiro lugar, suponha que  $(u_0, v_0) = (0, 0)$ , então por (4),

$$I(u_n, v_n) \rightarrow d = m = I(u_0, v_0) + \sum_{j=1}^k I_\infty(u^j, v^j) \geq 0 + kI_\infty(w_1, w_2) \geq km_\infty \geq m_\infty,$$

onde  $(w_1, w_2)$  é a solução de energia mínima para  $I_\infty$ .

Em segundo lugar, assuma que  $(u_0, v_0) \neq (0, 0)$ . Como  $(u_0, v_0)$  pertence a  $\mathcal{N}$ , tem-se  $I(u_0, v_0) > 0$ . Segue que  $m > km_\infty \geq m_\infty$ . Logo, em ambos os casos, temos  $m \geq m_\infty$  e assim a primeira parte do lema está verificada.

Por outro lado, seja  $d \in (m_\infty, 2m_\infty)$ . Assim, para  $n$  suficientemente grande,

$$m_\infty < I(u_n, v_n) < 2m_\infty.$$

Se não existisse subsequência  $\{(u_n, v_n)\}$  convergente, usando o Lema 2.10,

$$I(u_n, v_n) \rightarrow d = I(u_0, v_0) + \sum_{j=1}^k I_\infty(u^j, v^j).$$

Se  $k \geq 2$ , então

$$\begin{aligned} I(u_n, v_n) \rightarrow d &= I(u_0, v_0) + \sum_{j=1}^k I_\infty(u^j, v^j) \\ &\geq 0 + kI_\infty(w_1, w_2) \geq km_\infty \geq 2m_\infty. \end{aligned}$$

Isto configura um absurdo uma vez que  $d < 2m_\infty$ . Portanto, obrigatoriamente, tem-se  $k = 1$ . Neste caso, se  $(u_0, v_0) = (0, 0)$ , então

$$2m_\infty > I_\infty(u^j, v^j) = d > m_\infty.$$

Isto é uma contradição com o Lema 2.9, pois não existe solução  $(u^j, v^j)$  de  $(\mathbb{S})_\infty$  no intervalo  $(m_\infty, 2m_\infty)$ . Usando mais uma vez o Lema 2.10, como  $(u_0, v_0)$  pertence a  $\mathcal{N}$ ,

$$\begin{aligned} I(u_n, v_n) &\rightarrow d = I(u_0, v_0) + 1 \cdot I_\infty(u^j, v^j) \\ &\geq m + I_\infty(w_1, w_2) = m + m_\infty \geq m_\infty + m_\infty = 2m_\infty. \end{aligned}$$

Isto também configura uma contradição, visto que  $d < 2m_\infty$ . Neste caso, concluímos que  $k$  não pode ser maior ou igual a 1 e devemos ter  $k = 0$  e, portanto, por (3) existe uma subsequência de  $\{(u_n, v_n)\}$  convergente e o lema está provado. □

## 2.5 Estimativas assintóticas

Visto que problema limite  $(\mathbb{S}_\infty)$  tem uma solução  $(w_1, w_2)$  positiva de energia mínima, trabalharemos com esta solução transladada, isto é,

$$w_i^{Ry_0} := w_i(x - Ry_0) \quad \text{e} \quad w_i^{Ry} := w_i(x - Ry)$$

para  $i = 1, 2$ . Seja  $\beta \in [0, 1]$ ,  $R > 0$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^N$  fixado,  $y \in \partial B_2(y_0)$  e definimos a combinação linear

$$Z_{\beta, y}^R := \beta(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}) + (1 - \beta)(w_1^{Ry}, w_2^{Ry}) = (\beta w_1^{Ry_0} + (1 - \beta)w_1^{Ry}, \beta w_2^{Ry_0} + (1 - \beta)w_2^{Ry}). \quad (2.57)$$

Novamente iremos precisar do resultado técnico em [1]. Por comodidade, vamos enunciá-lo novamente.

**Lema 2.12.** *Assuma que  $\mu_2 > \mu_1 \geq 0$ . Então, existe um número  $C > 0$  tal que, para todo  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$ ,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\mu_1|x-x_1|} e^{-\mu_2|x-x_2|} dx \leq C e^{-\mu_1|x_1-x_2|}.$$

*Se  $\mu_2 \geq \mu_1 > 0$  e  $\mu_3 > \mu_1 \geq 0$ . Então, existe um número  $C > 0$  tal que, para quaisquer  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^N$ ,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\mu_1|x-x_1|} e^{-\mu_2|x-x_2|} e^{-\mu_3|x-x_3|} dx \leq C e^{-\frac{\mu_1}{2}(|x_1-x_2|+|x_1-x_3|+|x_2-x_3|)}.$$

O próximo resultado garante que a variedade  $\mathcal{N}$  é não vazia.

**Lema 2.13.** *Existem números  $R_0 > 0, T_0 > 2$  e para cada  $R \geq R_0, y \in \partial B_2(y_0)$  e  $0 \leq \beta \leq 1$ , um único  $T_{\beta, y}^R > 0$  satisfazendo*

$$T_{\beta, y}^R Z_{\beta, y}^R \in \mathcal{N}.$$

*Ademais,  $T_{\beta, y}^R \in [0, T_0)$  e  $T_{\beta, y}^R$  é uma função contínua nas variáveis  $\beta, y, R$ .*

**Demonstração:** Sejam  $r, u_1, u_2, v_1, v_2 > 0$ . Escrevendo a combinação  $(r(u_1 + u_2), r(v_1 + v_2))$  e aplicando o funcional  $J_\infty$  nesta combinação temos

$$\begin{aligned}
J_\infty(r(u_1 + u_2), r(v_1 + v_2)) &= \|(ru_1 + ru_2, rv_1 + rv_2)\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} r^2 (u_1 + u_2)(v_1 + v_2) \, dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(ru_1 + ru_2, rv_1 + rv_2)(ru_1 + ru_2, rv_1 + rv_2) \, dx \\
&= r^2\|u_1\|^2 + r^2\|u_2\|^2 + r^2\|v_1\|^2 + r^2\|v_2\|^2 + 2r^2\langle u_1, u_2 \rangle + 2r^2\langle v_1, v_2 \rangle \\
&\quad - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} r^2 (u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_2v_2) \, dx \\
&\quad - r^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F(ru_1 + ru_2, rv_1 + rv_2)}{r} (u_1 + u_2, v_1 + v_2) \, dx \\
&= r^2\|u_1\|^2 + r^2\|u_2\|^2 + r^2\|v_1\|^2 + r^2\|v_2\|^2 + 2r^2\langle u_1, u_2 \rangle + 2r^2\langle v_1, v_2 \rangle \\
&\quad - 2\lambda r^2 \int_{\mathbb{R}^N} (u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_2v_2) \, dx \\
&\quad - r^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F(ru_1 + ru_2, rv_1 + rv_2)}{r} (u_1, v_1) \, dx \\
&\quad - r^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F(ru_1 + ru_2, rv_1 + rv_2)}{r} (u_2, v_2) \, dx.
\end{aligned}$$

Por  $(F_1)$  segue que

$$\begin{aligned}
\frac{J_\infty(r(u_1 + u_2), r(v_1 + v_2))}{r^2} &\leq \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + 2\langle u_1, u_2 \rangle + 2\langle v_1, v_2 \rangle \\
&\quad - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} (u_1v_1 + u_2v_2) \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F(ru_1, rv_1)}{r} (u_1, v_1) \, dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F(ru_2, rv_2)}{r} (u_2, v_2) \, dx. \tag{2.58}
\end{aligned}$$

Tomando  $u_1 = \beta w_1^{Ry_0}, u_2 = (1 - \beta) w_1^{Ry}, v_1 = \beta w_2^{Ry_0}, v_2 = (1 - \beta) w_2^{Ry}$  em (2.58),

$$\begin{aligned}
&\frac{J_\infty\left(r\beta w_1^{Ry_0} + r(1 - \beta) w_1^{Ry}, r\beta w_2^{Ry_0} + r(1 - \beta) w_2^{Ry}\right)}{r^2} \\
&\leq \|\beta w_1^{Ry_0}\|^2 + \|(1 - \beta) w_1^{Ry}\|^2 + \|\beta w_2^{Ry_0}\|^2 + \|(1 - \beta) w_2^{Ry}\|^2 + 2\langle \beta w_1^{Ry_0}, (1 - \beta) w_1^{Ry} \rangle \\
&\quad + 2\langle \beta w_2^{Ry_0}, (1 - \beta) w_2^{Ry} \rangle - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left(\beta w_1^{Ry_0} \beta w_2^{Ry_0} + (1 - \beta) w_1^{Ry} (1 - \beta) w_2^{Ry}\right) \, dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F\left(r\beta w_1^{Ry_0}, r\beta w_2^{Ry_0}\right)}{r} \left(\beta w_1^{Ry_0}, \beta w_2^{Ry_0}\right) \, dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F\left(r(1 - \beta) w_1^{Ry}, r(1 - \beta) w_2^{Ry}\right)}{r} \left((1 - \beta) w_1^{Ry}, (1 - \beta) w_2^{Ry}\right) \, dx
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \beta^2 \left\{ \|w_1^{Ry_0}\|^2 + \|w_2^{Ry_0}\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} (w_1^{Ry_0} w_2^{Ry_0}) dx \right\} - \beta \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F(r\beta w_1^{Ry_0}, r\beta w_2^{Ry_0})}{r} (w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}) dx \\
&\quad + (1-\beta)^2 \left\{ \|w_1^{Ry}\|^2 + \|w_2^{Ry}\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} (w_1^{Ry} w_2^{Ry}) dx \right\} \\
&\quad - (1-\beta) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F(r(1-\beta)w_1^{Ry}, r(1-\beta)w_2^{Ry})}{r} (w_1^{Ry}, w_2^{Ry}) dx \\
&\quad + 2 \langle \beta w_1^{Ry_0}, (1-\beta)w_1^{Ry} \rangle + 2 \langle \beta w_2^{Ry_0}, (1-\beta)w_2^{Ry} \rangle \\
&= \beta^2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}) (w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}) dx - \beta \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F(r\beta w_1^{Ry_0}, r\beta w_2^{Ry_0})}{r} (\beta w_1^{Ry_0}, \beta w_2^{Ry_0}) dx \\
&\quad + (1-\beta)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(w_1^{Ry}, w_2^{Ry}) (w_1^{Ry}, w_2^{Ry}) dx \\
&\quad - (1-\beta) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F(r(1-\beta)w_1^{Ry}, r(1-\beta)w_2^{Ry})}{r} (w_1^{Ry}, w_2^{Ry}) dx \\
&\quad + 2 \langle \beta w_1^{Ry_0}, (1-\beta)w_1^{Ry} \rangle + 2 \langle \beta w_2^{Ry_0}, (1-\beta)w_2^{Ry} \rangle \\
&= \beta^2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}) (w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}) dx - \beta^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F(r\beta w_1^{Ry_0}, r\beta w_2^{Ry_0})}{r\beta} (w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}) dx \\
&\quad + (1-\beta)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(w_1^{Ry}, w_2^{Ry}) (w_1^{Ry}, w_2^{Ry}) dx \\
&\quad - (1-\beta)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F(r(1-\beta)w_1^{Ry}, r(1-\beta)w_2^{Ry})}{r(1-\beta)} (w_1^{Ry}, w_2^{Ry}) dx \\
&\quad + 2 \langle \beta w_1^{Ry_0}, (1-\beta)w_1^{Ry} \rangle + 2 \langle \beta w_2^{Ry_0}, (1-\beta)w_2^{Ry} \rangle.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Considere a aplicação

$$\Gamma(\beta, r) = \beta^2 \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(u, v) (u, v) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F(r\beta u, r\beta v)}{r\beta} (u, v) dx \right\}. \tag{2.60}$$

Por  $(F_1)$ ,  $\Gamma(\beta, r)$  é decrescente em relação a  $\beta$  e  $r$ . Argumentando como no caso escalar, confira Proposição 1.1, existirá um  $T_0 > 2$  e  $S_0 < 0$  tais que

$$\Gamma(\beta, r) + \Gamma(1-\beta, r) < S_0 < 0, \quad \forall r \geq T_0, \quad \forall \beta \in [0, 1].$$

Além disso,  $T_0$  e  $S_0$  independem de  $R$  pela invariância por translações das integrais em  $\mathbb{R}^N$ .

Usando (2.60) em (2.59) segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{J_\infty(r\beta w_1^{Ry_0} + r(1-\beta)w_1^{Ry}, r\beta w_2^{Ry_0} + r(1-\beta)w_2^{Ry})}{r^2} \\
&\leq \Gamma(\beta, r) + \Gamma(1-\beta, r) + 2 \langle w_1^{Ry_0}, w_1^{Ry} \rangle + 2 \langle w_2^{Ry_0}, w_2^{Ry} \rangle \\
&\leq \Gamma(\beta, r) + \Gamma(1-\beta, r) + o_R(1) < S_0 + o_R(1).
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Desde que podemos escrever para  $(u, v)$  em  $H$

$$J(u, v) = J_\infty(u, v) - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) \nabla F(u, v)(u, v) dx,$$

segue que

$$\begin{aligned} & \frac{J\left(r\beta w_1^{Ry_0} + r(1-\beta)w_1^{Ry}, r\beta w_2^{Ry_0} + r(1-\beta)w_2^{Ry}\right)}{r^2} \\ &= \frac{J_\infty\left(r\beta w_1^{Ry_0} + r(1-\beta)w_1^{Ry}, r\beta w_2^{Ry_0} + r(1-\beta)w_2^{Ry}\right)}{r^2} \\ & \quad - \frac{1}{r^2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[ a(x) \nabla F\left(r\beta w_1^{Ry_0} + r(1-\beta)w_1^{Ry}, r\beta w_2^{Ry_0} + r(1-\beta)w_2^{Ry}\right) \right. \\ & \quad \left. \left( r\beta w_1^{Ry_0} + r(1-\beta)w_1^{Ry}, r\beta w_2^{Ry_0} + r(1-\beta)w_2^{Ry} \right) \right] dx. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Como

$$\nabla F(u, v)(u, v) = \frac{(u^2 + v^2)^2}{1 + s(u^2 + v^2)} \leq C(u^4 + v^4),$$

e ainda, pelo Lema 2.12 e  $(a_2)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| \left(w_i^{Ry_0}\right)^4 dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} e^{-k|x|} e^{-4\sqrt{1-\lambda}|x-Ry_0|} dx \leq C e^{-k|Ry_0|} = o_R(1)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| \left(w_i^{Ry}\right)^4 dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} e^{-k|x|} e^{-4\sqrt{1-\lambda}|x-Ry|} dx \leq C e^{-k|Ry|} = o_R(1),$$

substituindo em (2.62) resulta que

$$\begin{aligned} & \frac{J\left(r\left(\beta w_1^{Ry_0} + (1-\beta)w_1^{Ry}\right), r\left(\beta w_2^{Ry_0} + (1-\beta)w_2^{Ry}\right)\right)}{r^2} \\ & \leq \frac{J_\infty\left(r\beta w_1^{Ry_0} + r(1-\beta)w_1^{Ry}, r\beta w_2^{Ry_0} + r(1-\beta)w_2^{Ry}\right)}{r^2} + o_R(1) \\ & < S_0 + o_R(1) < 0, \end{aligned} \quad (2.63)$$

para  $R$  suficientemente grande e  $r \geq T_0$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$  e  $y \in \partial B_2(y_0)$ . Para concluirmos nosso resultado, basta combinarmos (2.63) com (2.3) para garantir que existe um único  $r = T_{\beta, y}^R > 0$  tal que  $T_{\beta, y}^R Z_{\beta, y}^R \in \mathcal{N}$ . Consequentemente,  $\mathcal{N}$  é não vazia. Argumentando como no Lema 1.10, demonstra-se a continuidade de  $T_{\lambda, y}^R$  nas variáveis  $\lambda, y, R$  e o lema está provado.  $\square$

Definimos a quantidade

$$\varepsilon_R := \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(w_1(x - Ry_0), w_2(x - Ry_0))(w_1(x - Ry), w_2(x - Ry)) dx, \quad (2.64)$$

onde  $(w_1, w_2)$  é uma solução positiva radial de  $(S_\infty)$ .

O próximo resultado é essencial para provarmos o comportamento assintótico da quantidade  $\varepsilon_R$ . O Lema já foi utilizado no caso escalar e vamos enunciá-lo novamente por comodidade.

**Lema 2.14.** *Sejam  $\varphi \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ,  $\psi \in C(\mathbb{R}^N)$  satisfazendo para constantes  $a, b \geq 0$  e  $c \in \mathbb{R}$ ,*

$$\varphi(x)e^{a|x|}|x|^b \rightarrow c; \quad \text{se } |x| \rightarrow +\infty \quad (2.65)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\psi(x)| e^{a|x|} (1 + |x|^b) dx < +\infty. \quad (2.66)$$

Então

$$\lim_{|\bar{y}| \rightarrow +\infty} \left[ \left( \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x + \bar{y}) \psi(x) dx \right) e^{a|\bar{y}|} |\bar{y}|^b - c \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{a\langle x, \bar{y} \rangle}{|\bar{y}|}} \psi(x) dx \right] = 0. \quad (2.67)$$

**Demonstração:** Segue de [8] e está demonstrado no Capítulo 1, Lema 1.11. □

Nos dois lemas a seguir, iremos estimar a quantidade  $\varepsilon_R$ , isto é, mostrar decaimento exato desta quantidade  $\varepsilon_R$ .

**Lema 2.15.** *Considere  $y \in \partial B_2(y_0)$  com  $y_0 \in \mathbb{R}^N$  fixado tal que  $\|y_0\| = 1$ . Então, existe uma constante  $C_0 > 0$  tal que*

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \varepsilon_R(2R)^{\frac{N-1}{2}} e^{2\sqrt{1-\lambda}R} = C_0. \quad (2.68)$$

**Demonstração:** Pela definição de  $\varepsilon_R$  em (2.64) tem-se

$$\begin{aligned} \varepsilon_R &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(w_1(x - Ry_0), w_2(x - Ry_0)) (w_1(x - Ry), w_2(x - Ry)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(w_1^{Ry_0})^2 + (w_2^{Ry_0})^2}{1 + s \left( (w_1^{Ry_0})^2 + (w_2^{Ry_0})^2 \right)} (w_1^{Ry_0} w_1^{Ry} + w_2^{Ry_0} w_2^{Ry}) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{w_1^2 + w_2^2}{1 + s(w_1^2 + w_2^2)} w_1 w_1^{R(y-y_0)} dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{w_1^2 + w_2^2}{1 + s(w_1^2 + w_2^2)} w_2 w_2^{R(y-y_0)} dx. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Para estimar cada integral em (2.69), iremos utilizar o Lema 2.14 com

$$\psi = \frac{w_1^2 + w_2^2}{1 + s(w_1^2 + w_2^2)} w_1, \quad \varphi = w_1^{R(y-y_0)}, \quad \bar{y} = -R(y - y_0), \quad a = \sqrt{1-\lambda} \quad \text{e} \quad b = \frac{N-1}{2}.$$

Como  $(w_1, w_2)$  é solução do problema  $(\mathbb{S}_\infty)$ , pelo Teorema 2.1 existe um  $R_0 > 0$  tal que para todo  $|x| > R_0$  obtemos (2.65) para alguma constante positiva  $c$ . Agora vamos verificar (2.66) e, para isso note que para todo  $|x| > R_1 \geq R_0$ , tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\psi(x)| e^{\alpha|x|} (1 + |x|^\beta) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{w_1^2 + w_2^2}{1 + s(w_1^2 + w_2^2)} w_1 e^{\sqrt{1-\lambda}|x|} (1 + |x|^{\frac{N-1}{2}}) dx \\
&= \int_{B_{R_1}(0)} \frac{w_1^2 + w_2^2}{1 + s(w_1^2 + w_2^2)} w_1 e^{\sqrt{1-\lambda}|x|} (1 + |x|^{\frac{N-1}{2}}) dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R_1}(0)} \frac{w_1^2 + w_2^2}{1 + s(w_1^2 + w_2^2)} w_1 e^{\sqrt{1-\lambda}|x|} (1 + |x|^{\frac{N-1}{2}}) dx \\
&\leq C\mu(B_{R_1}(0)) + C \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R_1}(0)} |x|^{-3\frac{N-1}{2}} e^{-3\sqrt{1-\lambda}|x|} e^{\sqrt{1-\lambda}|x|} (1 + |x|^{\frac{N-1}{2}}) dx \\
&\leq C\mu(B_{R_1}(0)) + C \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R_1}(0)} |x|^{-3\frac{N-1}{2}} e^{-2\sqrt{1-\lambda}|x|} (1 + |x|^{\frac{N-1}{2}}) dx < \infty,
\end{aligned} \tag{2.70}$$

onde  $\mu(B_{R_1}(0))$  é a medida de Lebesgue da bola de raio  $R_1$  centrada na origem. Assim, por (2.70), está verificado (2.66). Podemos então utilizar o Lema 2.14 e o limite (2.67), para provar que, para todo  $|x| > R_2$  com  $R_2 > \max\{R_0, R_1\}$ ,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left[ \left( \int_{\mathbb{R}^N} \frac{w_1^2 + w_2^2}{1 + s(w_1^2 + w_2^2)} w_1 w_1^{R(y-y_0)} dx \right) e^{\sqrt{1-\lambda}|R(y-y_0)|} |R(y-y_0)|^{\frac{N-1}{2}} \right] = C > 0. \tag{2.71}$$

De forma inteiramente análoga, obtemos

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left[ \left( \int_{\mathbb{R}^N} \frac{w_1^2 + w_2^2}{1 + s(w_1^2 + w_2^2)} w_2 w_2^{R(y-y_0)} dx \right) e^{\sqrt{1-\lambda}|R(y-y_0)|} |R(y-y_0)|^{\frac{N-1}{2}} \right] = C > 0. \tag{2.72}$$

De (2.71), (2.72) e (2.69) segue (2.68), e o lema está provado .

□

Apresentaremos uma estimativa inferior para  $\varepsilon_R$ .

**Lema 2.16.** *Existe uma constante  $\bar{C}_0 > 0$  tal que para todo  $t, s \geq \frac{1}{2}$ ,  $y \in \partial B_2(y_0)$  com  $y_0 \in \mathbb{R}^N$  fixado e  $R$  suficientemente grande,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(tw_1(x - Ry_0), tw_2(x - Ry_0))(sw_1(x - Ry), sw_2(x - Ry)) dx \geq \bar{C}_0(R)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-2\sqrt{1-\lambda}R}.$$

**Demonstração:** Segue do Teorema 2.1 que existem constantes  $C_1 > 0$  e  $C_2 > 0$  tais que

$$C_1(1 + |x|)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\sqrt{1-\lambda}|x|} \leq w_i(x) \leq C_2(1 + |x|)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\sqrt{1-\lambda}|x|}, \tag{2.73}$$

para  $i = 1, 2$  e para  $x \in \mathbb{R}^N$ . Para  $|x| < 1$  e para todo  $y$  tal que  $|y - y_0| = 2$  e considerando  $R > 1$ , note que

$$1 + |x - R(y - y_0)| \leq 1 + |x| + R|y - y_0| \leq R + R + 2R = 4R.$$

Segue por (2.73) que existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\begin{aligned}
w(x - R(y - y_0)) &\geq C_1(1 + |x - R(y - y_0)|)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\sqrt{1-\lambda}|x - R(y - y_0)|} \\
&\geq C_1(4R)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\sqrt{1-\lambda}|x|} e^{-2\sqrt{1-\lambda}R} \\
&\geq C(2R)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\sqrt{1-\lambda}|x|} e^{-2\sqrt{1-\lambda}R} \\
&= C(2R)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-2\sqrt{1-\lambda}R}.
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Usando (2.74) existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(tw_1(x - Ry_0), tw_2(x - Ry_0))(sw_1(x - Ry), sw_2(x - Ry)) \, dx \\
&= s \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(tw_1(x - Ry_0), tw_2(x - Ry_0))(w_1(x - Ry), w_2(x - Ry)) \, dx \\
&= s \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(tw_1^{Ry_0})^2 + (tw_2^{Ry_0})^2}{1 + s \left( (tw_1^{Ry_0})^2 + (tw_2^{Ry_0})^2 \right)} \left( tw_1^{Ry_0} w_1^{Ry} + tw_2^{Ry_0} w_2^{Ry} \right) \, dx \\
&\geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(tw_1^{Ry_0})^2 + (tw_2^{Ry_0})^2}{1 + s \left( (tw_1^{Ry_0})^2 + (tw_2^{Ry_0})^2 \right)} \left( w_1^{Ry_0} w_1^{Ry} + w_2^{Ry_0} w_2^{Ry} \right) \, dx \\
&\geq \frac{1}{4} \int_{B_1(Ry_0)} \frac{(tw_1^{Ry_0})^2 + (tw_2^{Ry_0})^2}{1 + s \left( (tw_1^{Ry_0})^2 + (tw_2^{Ry_0})^2 \right)} \left( w_1^{Ry_0} w_1^{Ry} + w_2^{Ry_0} w_2^{Ry} \right) \, dx \\
&\geq \frac{1}{4} \min_{B_1(0)} \left\{ \frac{(tw_1(x))^2 + (tw_2(x))^2}{1 + s \left( (tw_1(x))^2 + (tw_2(x))^2 \right)} \right\} \int_{B_1(0)} \left( w_1(x) w_1^{R(y-y_0)} + w_2(x) w_2^{R(y-y_0)} \right) \, dx \\
&\geq \bar{C}_0 (2R)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-2\sqrt{1-\lambda}R}.
\end{aligned}$$

□

Para nossas finas estimativas de energia precisaremos utilizar os dois próximos resultados técnicos.

**Corolário 2.17.** *Existe uma constante positiva  $C$  tal que*

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left( tf \left( w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right) - f \left( tw_1^{Ry_0}, tw_2^{Ry_0} \right) \right) w_1^{Ry} \, dx \right| \\
&+ \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left( tg \left( w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right) - g \left( tw_1^{Ry_0}, tw_2^{Ry_0} \right) \right) w_2^{Ry} \, dx \right| \leq C |t - 1| O(\varepsilon_R),
\end{aligned}$$

uniformemente em  $y \in \partial B_2(y_0)$ ,  $t \in [0, a]$ ;  $a > 1$  e  $R$  suficientemente grande.

**Demonstração:** Defina as funções reais  $h_1(t) := tf(u, v) - f(tu, tv)$  e  $h_2(t) := tg(u, v) - g(tu, tv)$ . Observe que  $h_1(1) = f(u, v) - f(u, v) = 0$  e  $h_2(1) = g(u, v) - g(u, v) = 0$ , para todo  $u$  e  $v$ . Além, do fato que  $f(tu, tv) = \frac{t^3(u^2 + v^2)u}{1 + st^2(u^2 + v^2)}$ , fixados  $u$  e  $v$  e derivando  $f(tu, tv)$  em relação a  $t$  obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} f(tu, tv) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{t^3(u^2 + v^2)u}{1 + st^2(u^2 + v^2)} \right) \\
&= \frac{3t^2(u^2 + v^2)u(1 + st^2(u^2 + v^2)) - t^3(u^2 + v^2)(u2st)(u^2 + v^2)}{(1 + st^2(u^2 + v^2))^2} \\
&= \frac{3t^2(u^2 + v^2)u + 3st^4(u^2 + v^2)^2u - 2st^4(u^2 + v^2)^2u}{(1 + st^2(u^2 + v^2))^2} \\
&= \frac{3t^2(u^2 + v^2)u + st^4(u^2 + v^2)^2u}{(1 + st^2(u^2 + v^2))^2}.
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Usando (2.75) obtemos

$$\begin{aligned} |h'_1(t)| &\leq |f(u, v)| + \left| \frac{d}{dt} f(tu, tv) \right| \\ &\leq |f(u, v)| + 3t^2 (u^2 + v^2) |u| + st^4 (u^2 + v^2)^2 |u| \\ &\leq |f(u, v)| + \max \{3t^2, st^4\} \left\{ (u^2 + v^2) |u| + (u^2 + v^2)^2 |u| \right\}. \end{aligned}$$

Suponha, sem perda de generalidade,  $t > 1$  e utilizando o Teorema do Valor Médio para  $h_1$ , existe um  $\tau$  entre  $t$  e 1 tal que

$$|h_1(t) - h_1(1)| \leq |h'_1(\tau)| |t - 1| \leq |t - 1| \left\{ |f(u, v)| + C \left( (u^2 + v^2)u + (u^2 + v^2)^2 u \right) \right\}. \quad (2.76)$$

Similarmente obtemos

$$\frac{d}{dt} g(tu, tv) = \frac{3t^2(u^2 + v^2)v + st^4(u^2 + v^2)^2 v}{(1 + st^2(u^2 + v^2))^2}$$

e

$$|h_2(t) - h_2(1)| \leq |t - 1| \left\{ |g(u, v)| + C \left( (u^2 + v^2)|v| + (u^2 + v^2)^2 |v| \right) \right\}. \quad (2.77)$$

Tomando  $u = w_1^{Ry_0}$  e  $v = w_2^{Ry_0}$  em (2.76) e (2.77), respectivamente, implica que

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}^N} \left( t f \left( w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right) - f \left( t w_1^{Ry_0}, t w_2^{Ry_0} \right) \right) w_1^{Ry} dx \right| \\ &+ \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left( t g \left( w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right) - g \left( t w_1^{Ry_0}, t w_2^{Ry_0} \right) \right) w_2^{Ry} dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} h_1(t) w_1^{Ry} dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^N} h_2(t) w_2^{Ry} dx \right| \\ &\leq |t - 1| \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ |f \left( w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right)| + C \left( ((w_1^{Ry_0})^2 + (w_2^{Ry_0})^2) w_1^{Ry_0} + ((w_1^{Ry_0})^2 + (w_2^{Ry_0})^2)^2 w_1^{Ry_0} \right) \right\} w_1^{Ry} dx \\ &+ |t - 1| \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ |g \left( w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right)| + C \left( ((w_1^{Ry_0})^2 + (w_2^{Ry_0})^2) w_1^{Ry_0} + ((w_1^{Ry_0})^2 + (w_2^{Ry_0})^2)^2 w_1^{Ry_0} \right) \right\} w_2^{Ry} dx \\ &= |t - 1| \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ f \left( w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right) w_1^{Ry} + g \left( w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right) w_2^{Ry} \right\} dx \\ &+ |t - 1| \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ C \left( ((w_1^{Ry_0})^2 + (w_2^{Ry_0})^2) w_1^{Ry_0} + ((w_1^{Ry_0})^2 + (w_2^{Ry_0})^2)^2 w_1^{Ry_0} \right) \right\} w_1^{Ry} dx \\ &+ |t - 1| \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ C \left( ((w_1^{Ry_0})^2 + (w_2^{Ry_0})^2) w_1^{Ry_0} + ((w_1^{Ry_0})^2 + (w_2^{Ry_0})^2)^2 w_1^{Ry_0} \right) \right\} w_2^{Ry} dx. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Vamos estimar as integrais em (2.78). Como  $\nabla F(u, v) := (f(u, v), g(u, v))$  tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left\{ f \left( w_1^{Ry_0}, w_1^{Ry_0} \right) w_1^{Ry} + g \left( w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right) w_2^{Ry} \right\} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F \left( w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right) \left( w_1^{Ry}, w_2^{Ry} \right) dx = \varepsilon_R. \quad (2.79)$$

Usando os Lemas 2.12 e 2.14 obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left( (w_1^{Ry_0})^2 + (w_2^{Ry_0})^2 \right) w_1^{Ry_0} w_1^{Ry} dx = \int_{\mathbb{R}^N} (w_1^{Ry_0})^3 w_1^{Ry} dx + \int_{\mathbb{R}^N} (w_2^{Ry_0})^2 w_1^{Ry_0} w_1^{Ry} dx = O(\varepsilon_R). \quad (2.80)$$

Similarmente, as demais integrais em (2.78) têm a mesma estimativa, isto é,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left( (w_1^{Ry_0})^2 + (w_2^{Ry_0})^2 \right)^2 w_1^{Ry_0} w_1^{Ry} dx &= O(\varepsilon_R); \\ \int_{\mathbb{R}^N} \left( (w_1^{Ry_0})^2 + (w_2^{Ry_0})^2 \right) w_2^{Ry_0} w_2^{Ry} dx &= O(\varepsilon_R); \\ \int_{\mathbb{R}^N} \left( (w_1^{Ry_0})^2 + (w_2^{Ry_0})^2 \right)^2 w_2^{Ry_0} w_2^{Ry} dx &= O(\varepsilon_R). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Reunindo as estimativas em (2.78), (2.79), (2.80) e (2.81), temos a conclusão do corolário.

□

**Lema 2.18.** *Considere  $\beta = \frac{1}{2}$ . Se  $R \rightarrow +\infty$ , então tem-se que*

$$T_{\frac{1}{2}, y}^R \rightarrow 2,$$

*uniformemente em  $y \in \partial B_2(y_0)$  onde  $y_0 \in \mathbb{R}^N$  é fixado com  $\|y_0\| = 1$ .*

**Demonstração:** Como  $(w_1, w_2)$  é solução do problema  $(S_\infty)$ , então  $I'_\infty(w_1, w_2)(w_1, w_2) = 0$  implicando em

$$\left\| (w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}) \right\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} w_2^{Ry_0} w_1^{Ry_0} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}) (w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}) dx. \quad (2.82)$$

Procedendo de forma análoga obtemos

$$\left\| (w_1^{Ry}, w_2^{Ry}) \right\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} w_2^{Ry} w_1^{Ry} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(w_1^{Ry}, w_2^{Ry}) (w_1^{Ry}, w_2^{Ry}) dx. \quad (2.83)$$

Consideramos a combinação linear

$$Z_{\beta, y}^R = \left( \beta w_1^{Ry_0} + (1 - \beta) w_1^{Ry}, \beta w_2^{Ry_0} + (1 - \beta) w_2^{Ry} \right)$$

e tomando  $\beta = \frac{1}{2}$  temos  $Z_{\frac{1}{2}, y}^R = \left( \frac{1}{2} w_1^{Ry_0} + \frac{1}{2} w_1^{Ry}, \frac{1}{2} w_2^{Ry_0} + \frac{1}{2} w_2^{Ry} \right)$ .

Calculando  $J$  em  $2Z_{\frac{1}{2}, y}^R$  e utilizando (2.82) e (2.83) obtemos

$$\begin{aligned}
J(2Z_{\frac{1}{2},y}^R) &= J\left(w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry}\right) \\
&= \left\| \left(w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry}\right) \right\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left(w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}\right) \left(w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry}\right) dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \nabla F\left(w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry}\right) \left(w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry}\right) dx. \\
&= \left\| w_1^{Ry_0} \right\|^2 + \left\| w_1^{Ry} \right\|^2 + \left\| w_2^{Ry_0} \right\|^2 + \left\| w_2^{Ry} \right\|^2 + 2 \left\langle w_1^{Ry_0}, w_1^{Ry} \right\rangle + 2 \left\langle w_2^{Ry_0}, w_2^{Ry} \right\rangle \\
&\quad - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left(w_1^{Ry_0} w_2^{Ry_0} + w_1^{Ry_0} w_2^{Ry} + w_1^{Ry} w_2^{Ry_0} + w_1^{Ry} w_2^{Ry}\right) dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \nabla F\left(w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry}\right) \left(w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry}\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0})(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(w_1^{Ry}, w_2^{Ry})(w_1^{Ry}, w_2^{Ry}) dx \\
&\quad + 2 \left\langle w_1^{Ry_0}, w_1^{Ry} \right\rangle + 2 \left\langle w_2^{Ry_0}, w_2^{Ry} \right\rangle - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left(w_1^{Ry_0} w_2^{Ry} + w_1^{Ry} w_2^{Ry_0}\right) dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \nabla F\left(w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry}\right) \left(w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry}\right) dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0})(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(w_1^{Ry}, w_2^{Ry})(w_1^{Ry}, w_2^{Ry}) dx \\
&\quad + 2 \left\langle w_1^{Ry_0}, w_1^{Ry} \right\rangle + 2 \left\langle w_2^{Ry_0}, w_2^{Ry} \right\rangle \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \nabla F\left(w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry}\right) \left(w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry}\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0})(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(w_1^{Ry}, w_2^{Ry})(w_1^{Ry}, w_2^{Ry}) dx \\
&\quad + 2 \left\langle w_1^{Ry_0}, w_1^{Ry} \right\rangle + 2 \left\langle w_2^{Ry_0}, w_2^{Ry} \right\rangle \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F\left(w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry}\right) \left(w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry}\right) dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) \nabla F\left(w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry}\right) \left(w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry}\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0})(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(w_1^{Ry}, w_2^{Ry})(w_1^{Ry}, w_2^{Ry}) dx \\
&\quad + 2 \left\langle w_1^{Ry_0}, w_1^{Ry} \right\rangle + 2 \left\langle w_2^{Ry_0}, w_2^{Ry} \right\rangle \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F\left(w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry}\right) \left(\left(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}\right) + \left(w_1^{Ry}, w_2^{Ry}\right)\right) dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) \nabla F\left(w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry}\right) \left(w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry}\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0})(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(w_1^{Ry}, w_2^{Ry})(w_1^{Ry}, w_2^{Ry}) dx \\
&\quad + 2 \left\langle w_1^{Ry_0}, w_1^{Ry} \right\rangle_{H^1} + 2 \left\langle w_2^{Ry_0}, w_2^{Ry} \right\rangle \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F\left(w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry}\right) \left(w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0}\right) dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F\left(w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry}\right) \left(w_1^{Ry}, w_2^{Ry}\right) dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) \nabla F\left(w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry}\right) \left(w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry}\right) dx. \tag{2.84}
\end{aligned}$$



Ademais,

$$\nabla F \left( w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry} \right) \left( w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right) \geq \nabla F \left( w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right) \left( w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right), \quad (2.85)$$

pois como a função  $h(x) = \frac{x}{1+sx}$  é crescente para  $x > 0$  e visto que  $w_i > 0$  para  $i = 1, 2$ , tem-se

$$\begin{aligned} & \nabla F \left( w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry} \right) \left( w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right) \\ &= f \left( w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry} \right) w_1^{Ry_0} + g \left( w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry} \right) w_2^{Ry_0} \\ &= \frac{\left( w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry} \right)^2 + \left( w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry} \right)^2}{1 + s \left( \left( w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry} \right)^2 + \left( w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry} \right)^2 \right)} \left\{ \left( w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry} \right) w_1^{Ry_0} + \left( w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry} \right) w_2^{Ry_0} \right\} \\ &\geq \frac{\left( w_1^{Ry_0} \right)^2 + \left( w_2^{Ry_0} \right)^2}{1 + s \left( \left( w_1^{Ry_0} \right)^2 + \left( w_2^{Ry_0} \right)^2 \right)} \left\{ \left( w_1^{Ry_0} \right)^2 + \left( w_2^{Ry_0} \right)^2 \right\} \\ &= \nabla F \left( w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right) \left( w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right). \end{aligned}$$

Decorre de (2.84) e (2.85) que

$$\begin{aligned} J(2Z_{\frac{1}{2},y}^R) &\leq 2\langle w_1^{Ry_0}, w_1^{Ry} \rangle + 2\langle w_2^{Ry_0}, w_2^{Ry} \rangle \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) \nabla F \left( w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry} \right) \left( w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry} \right) dx. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Resta estimar o termo integral em (2.86), visto que já sabemos que

$$\langle w_1^{Ry_0}, w_1^{Ry} \rangle = o_R(1) = \langle w_2^{Ry_0}, w_2^{Ry} \rangle. \quad (2.87)$$

Utilizando (a<sub>2</sub>) e o Lema 2.12,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| \nabla F \left( w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry} \right) \left( w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry}, w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry} \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| \frac{\left( \left( w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry} \right)^2 + \left( w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry} \right)^2 \right)^2}{1 + s \left( \left( w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry} \right)^2 + \left( w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry} \right)^2 \right)} dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| \left\{ \left( w_1^{Ry_0} + w_1^{Ry} \right)^4 + \left( w_2^{Ry_0} + w_2^{Ry} \right)^4 \right\} dx = o(\varepsilon_R). \end{aligned} \quad (2.88)$$

Logo, segue de (2.86), (2.87) e (2.88) que  $J(2Z_{\frac{1}{2},y}^R) \rightarrow 0$ , se  $R \rightarrow +\infty$ , uniformemente em  $y \in \partial B_2(y_0)$ .

Resta mostrar que

$$T_{\frac{1}{2},y}^R \rightarrow 2, \text{ quando } R \rightarrow \infty.$$

De fato, argumentando por contradição, suponha que existem  $\delta > 0$  e subsequências  $R_n \rightarrow \infty$  e  $y_n \in \partial B_2(y_0)$  tais que a seqüência

$$T_n := T_{\frac{1}{2},y_n}^{R_n} \text{ satisfaz } |T_n - 2| \geq \delta.$$

Como  $\{T_n\} \subset \mathbb{R}$  é limitada pelo Lema 2.13, existe uma constante  $T$  tal que

$$T_n \rightarrow T \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Por (2.4), se  $(tu, tv) \in \mathcal{N}$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ , então

$$\|(u, v)\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} uv \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \frac{\nabla F(tu, tv)(u, v)}{t} \, dx. \quad (2.89)$$

Visto que  $T_n^{R_n} Z_n^{R_n} \in \mathcal{N}$ , segue de (2.89) que

$$\begin{aligned} & \left\| \left( \frac{1}{2} w_1^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_1^{R_n y_n}, \frac{1}{2} w_2^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_2^{R_n y_n} \right) \right\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{1}{2} w_1^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_1^{R_n y_n} \right) \left( \frac{1}{2} w_2^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_2^{R_n y_n} \right) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \frac{\nabla F \left( T_n \left( \frac{1}{2} w_1^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_1^{R_n y_n} \right), T_n \left( \frac{1}{2} w_2^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_2^{R_n y_n} \right) \right) \left( w_1^{R_n y_0} + w_1^{R_n y_n}, w_2^{R_n y_0} + w_2^{R_n y_n} \right)}{\frac{T_n}{2}} \, dx. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Por um lado, como  $(w_1, w_2)$  é solução de  $(\mathbb{S}_\infty)$  e pela invariância por translação tem-se

$$\begin{aligned} & \left\| \left( \frac{1}{2} w_1^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_1^{R_n y_n}, \frac{1}{2} w_2^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_2^{R_n y_n} \right) \right\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{1}{2} w_1^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_1^{R_n y_n} \right) \left( \frac{1}{2} w_2^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_2^{R_n y_n} \right) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \|w_1^{R_n y_0}\|^2 + \frac{1}{4} \|w_1^{R_n y_n}\|^2 + \frac{1}{2} \langle w_1^{R_n y_0}, w_1^{R_n y_n} \rangle + \frac{1}{4} \|w_2^{R_n y_0}\|^2 + \frac{1}{4} \|w_2^{R_n y_n}\|^2 + \frac{1}{2} \langle w_2^{R_n y_0}, w_2^{R_n y_n} \rangle \\ &\quad - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{1}{2} w_1^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_1^{R_n y_n} \right) \left( \frac{1}{2} w_2^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_2^{R_n y_n} \right) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \|w_1\|^2 + \frac{1}{4} \|w_1\|^2 + o_{R_n}(1) + \frac{1}{4} \|w_2\|^2 + \frac{1}{4} \|w_2\|^2 + o_{R_n}(1) \\ &\quad - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{1}{4} w_1^{R_n y_0} w_2^{R_n y_0} + \frac{1}{4} w_1^{R_n y_0} w_2^{R_n y_n} + \frac{1}{4} w_1^{R_n y_n} w_2^{R_n y_0} + \frac{1}{4} w_1^{R_n y_n} w_2^{R_n y_n} \right) \, dx \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \|w_1\|^2 + \frac{1}{2} \|w_2\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{2}{4} w_1 w_2 \, dx \\ &= \frac{1}{2} \|(w_1, w_2)\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{2}{4} w_1 w_2 \, dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(w_1, w_2)(w_1, w_2) \, dx. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Por outro lado, por  $(a_1)$ ,  $(F_1)$ ,  $\nabla F(w_1, w_2)(w_1, w_2) \leq \frac{w_1^2(0) + w_2^2(0)}{s}$  e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) \frac{\nabla F \left( T_n \left( \frac{1}{2} w_1^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_1^{R_n y_n} \right), T_n \left( \frac{1}{2} w_2^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_2^{R_n y_n} \right) \right) \left( w_1^{R_n y_0} + w_1^{R_n y_n}, w_2^{R_n y_0} + w_2^{R_n y_n} \right)}{\frac{T_n}{2}} \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F \left( T_n \left( \frac{1}{2} w_1^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_1^{R_n y_n} \right), T_n \left( \frac{1}{2} w_2^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_2^{R_n y_n} \right) \right) \left[ \left( w_1^{R_n y_0}, w_2^{R_n y_0} \right) + \left( w_1^{R_n y_n}, w_2^{R_n y_n} \right) \right]}{\frac{T_n}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} a(x) \frac{\nabla F \left( T_n \left( \frac{1}{2} w_1^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_1^{R_n y_n} \right), T_n \left( \frac{1}{2} w_2^{R_n y_0} + \frac{1}{2} w_2^{R_n y_n} \right) \right) \left[ \left( w_1^{R_n y_0}, w_2^{R_n y_0} \right) + \left( w_1^{R_n y_n}, w_2^{R_n y_n} \right) \right]}{\frac{T_n}{2}} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{4} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F \left( \frac{T}{2} (w_1, w_2) (w_1, w_2) \right)}{\frac{T}{2}} \, dx. \end{aligned} \quad (2.92)$$

De (2.90), (2.91) e (2.92) temos

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(w_1, w_2)(w_1, w_2) \, dx - \frac{2}{4} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla F\left(\frac{T}{2}(w_1, w_2)(w_1, w_2)\right)}{\frac{T}{2}} \, dx = 0.$$

Por  $(F_1)$  segue que  $T = 2$ . Contradição. Logo,

$$T_{\frac{1}{2}, y}^R \rightarrow 2, \text{ quando } R \rightarrow \infty$$

e finalizamos a prova do lema. □

No próximo resultado demonstraremos uma versão para sistemas como já vimos no Lema 1.14 para o caso escalar.

**Lema 2.19.** *Considere  $a, b, c, d$  números reais positivos. Então existe uma constante  $C > 0$  satisfazendo*

$$\begin{aligned} & F(a + b, c + d) - F(a, c) - F(b, d) - \nabla F(a, c)(b, d) - \nabla F(b, d)(a, c) \\ & \geq -C \left\{ (cd)^2 + (ab)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 \right\}. \end{aligned}$$

**Demonstração:** Seja  $t \geq 0$  e a função real  $j(t) := F(a + tb, c + td)$ . Observe que  $j$  é crescente. Defina  $G(t) = j'(t) = \nabla F(a + tb, c + td)(b, d)$ . Note que

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{(a + tb)^2 + (c + td)^2}{[1 + s((a + tb)^2 + (c + td)^2)]} (a + tb)b + (c + td)d \\ &:= \frac{Z^2(t)}{1 + sZ^2(t)} [(a + tb)b + (c + td)d]. \end{aligned}$$

Derivando  $G(t)$  temos para todo  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} G'(t) &= \frac{2ZZ'(1 + sZ^2) - Z^2 \cdot 2sZZ'}{(1 + sZ^2)^2} [(a + tb)b + (c + td)d] \\ &\quad + \frac{Z^2(t)}{1 + sZ^2(t)} (b^2 + d^2) \\ &= \frac{2ZZ'}{(1 + sZ^2)^2} [(a + tb)b + (c + td)d] \\ &\quad + \frac{Z^2(t)}{1 + sZ^2(t)} (b^2 + d^2) > 0, \end{aligned}$$

logo  $j'$  é crescente. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo e o crescimento de  $j'$  já verificado tem-se

$$\begin{aligned} & F(a + b, c + d) - F(a, c) - \nabla F(a, c)(b, d) \\ &= j(1) - j(0) - j'(0) \\ &= \int_0^1 j'(t) \, dt - j'(0) \\ &\geq \int_0^1 j'(0) \, dt - j'(0) = 0. \end{aligned} \tag{2.93}$$

Agora vamos estimar  $-F(b, d) - \nabla F(b, d)(a, c)$ . Defina  $\psi(t) = F(tb, td)$ . Então  $\psi'(t) = \nabla F(tb, td)(b, d)$ ,  $\psi(0) = F(0, 0) = 0$  e  $\psi(1) = F(b, d)$ . Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo segue que

$$\begin{aligned}
& -F(b, d) - \nabla F(b, d)(a, c) \\
&= -\int_0^1 \psi'(t) dt - \nabla F(b, d)(a, c) \\
&\geq -\int_0^1 \frac{(tb)^2 + (td)^2}{1 + s((tb)^2 + (td)^2)} (tb^2 + td^2) dt - \frac{b^2 + d^2}{1 + s(b^2 + d^2)} (ba + dc) \\
&\geq -\int_0^1 t^3 (b^2 + d^2)^2 dt - (b^2 + d^2)(ba + dc) \\
&= -\frac{(b^2 + d^2)^2}{4} - (b^2 + d^2)(ba + dc) \\
&= -\frac{1}{4} \left\{ b^4 + d^4 + 2b^2 d^2 + 4ab^3 + 4b^2 cd + 4abd^2 + 4cd^3 \right\}. \tag{2.94}
\end{aligned}$$

Considere  $0 < b \leq a$  e  $0 < d \leq c$ . Note que

- i)  $b^4 + 4ab^3 = (ab)^2 \left\{ \frac{b^2}{a^2} + \frac{4b}{a} \right\} \leq (ab)^2 \left\{ \frac{b^2}{a^2} + \frac{4a}{a} \right\} \leq 5(ab)^2$ ;
- ii)  $d^4 + 4cd^3 \leq 5(cd)^2$ , analogamente;
- iii)  $5(ab)^2 + 4abd^2 = (ad)^2 \left\{ \frac{5b^2}{d^2} + \frac{4b}{a} \right\} \leq (ad)^2 \left\{ \frac{5b^2}{d^2} + 4 \right\} \leq 5(ab)^2 + 4(ad)^2$ ;
- iv)  $2(bd)^2 + 4b^2 cd = 2(bc)^2 \left\{ \frac{d^2}{c^2} + 2\frac{d}{c} \right\} \leq 2(bc)^2 \left\{ 1 + 2 \right\} \leq 6(bc)^2$ .

De (i) – (iv) segue que (2.94) resulta em

$$-F(b, d) - \nabla F(b, d)(a, c) \geq -\frac{1}{4} \left\{ 5(cd)^2 + 5(ab)^2 + 4(ad)^2 + 6(bc)^2 \right\}. \tag{2.95}$$

O caso em que  $0 < a \leq b$  e  $0 < c \leq d$  é análogo (simétrico). Portanto, segue de (2.93) e (2.95) o resultado. □

**Lema 2.20.** *Existem números  $R_3 > 0$ ,  $\eta_1 > 0$  tais que*

$$I(T_{\beta, y}^R Z_{\beta, y}^R) \leq 2m_\infty - \eta_1$$

para cada  $R > R_3$  e para todo  $y \in \partial B_2(y_0)$  e  $\beta \in [0, 1]$ .

**Demonstração:** Inicialmente vamos escrever a combinação linear na forma simplificada

$$T_{\beta, y}^R Z_{\beta, y}^R = \left( \beta T_{\beta, y}^R w_1^{Ry_0} + (1-\beta) T_{\beta, y}^R w_1^{Ry}, \beta T_{\beta, y}^R w_2^{Ry_0} + (1-\beta) T_{\beta, y}^R w_2^{Ry} \right) = \left( t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry} \right).$$

Além disso, tomando  $u = t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}$  e  $v = t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry}$  em (2.1) segue que

$$\begin{aligned}
& I(t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry}) \\
&= \frac{1}{2} \left\| (t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry}) \right\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} (t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry})(t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry}) \, dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) F(t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry}) \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[ t_1^2 |\nabla w_1^{Ry_0}|^2 + t_2^2 |\nabla w_1^{Ry}|^2 + 2t_1 t_2 \nabla w_1^{Ry_0} \nabla w_1^{Ry} + (t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry})^2 \right] \, dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[ t_1^2 |\nabla w_2^{Ry_0}|^2 + t_2^2 |\nabla w_2^{Ry}|^2 + 2t_1 t_2 \nabla w_2^{Ry_0} \nabla w_2^{Ry} + (t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry})^2 \right] \, dx \\
&\quad - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left[ t_1^2 w_1^{Ry_0} w_2^{Ry} + t_1 t_2 w_1^{Ry_0} w_2^{Ry} + t_1 t_2 w_1^{Ry} w_2^{Ry_0} + t_2^2 w_1^{Ry} w_2^{Ry} \right] \, dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) F(t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry}) \, dx \\
(A) &= \frac{t_1^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[ |\nabla w_1^{Ry_0}|^2 + (w_1^{Ry_0})^2 + |\nabla w_2^{Ry_0}|^2 + (w_2^{Ry_0})^2 \right] - \lambda t_1^2 \int_{\mathbb{R}^N} w_1^{Ry_0} w_2^{Ry_0} \, dx \\
(B) &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} F(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0}) \, dx \\
(C) &\quad + \frac{t_2^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[ |\nabla w_1^{Ry}|^2 + (w_1^{Ry})^2 + |\nabla w_2^{Ry}|^2 + (w_2^{Ry})^2 \right] - \lambda t_2^2 \int_{\mathbb{R}^N} w_1^{Ry} w_2^{Ry} \, dx \\
(D) &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} F(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry}) \, dx \\
(E) &\quad + t_1 t_2 \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \nabla w_1^{Ry_0} \nabla w_1^{Ry} + w_1^{Ry_0} w_1^{Ry} + \nabla w_2^{Ry_0} \nabla w_2^{Ry} + w_2^{Ry_0} w_2^{Ry} \right] \, dx \\
(F) &\quad - \lambda t_1 t_2 \int_{\mathbb{R}^N} (w_1^{Ry_0} w_2^{Ry} + w_2^{Ry_0} w_1^{Ry}) \, dx \\
(G) &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \nabla F(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0})(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry}) + \nabla F(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry})(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0}) \right] \, dx \\
(H) &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \nabla F(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0})(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry}) + \nabla F(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry})(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0}) \right] \, dx \\
(I) &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \left[ F(t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry}) - F(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0}) - F(t_1 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry}) \right] \, dx \\
(J) &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) F(t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry}) \, dx. \tag{2.96}
\end{aligned}$$

Vamos estimar cada uma das linha de (A) a (J). Para as linhas (A) e (B), desde que  $(w_1, w_2)$  são soluções de energia mínima e pela invariância por translação nas integrais do funcional  $I_\infty$  temos que

$$(A) + (B) = I_\infty(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0}) \leq m_\infty. \tag{2.97}$$

Analogamente para as linhas (C) e (D) temos

$$(C) + (D) = I_\infty(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry}) \leq m_\infty. \tag{2.98}$$

A linha (I) pode ser estimada pelo Lema 2.19

$$\begin{aligned} & F\left(t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry}\right) - F\left(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0}\right) - F\left(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry}\right) \\ & - \nabla F\left(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0}\right)\left(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry}\right) - \nabla F\left(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry}\right)\left(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0}\right) \\ & \geq -C \left\{ \left(t_1 w_2^{Ry_0} t_2 w_2^{Ry}\right)^2 + \left(t_1 w_1^{Ry_0} t_2 w_1^{Ry}\right)^2 + \left(t_1 w_1^{Ry_0} t_2 w_2^{Ry}\right)^2 + \left(t_2 w_1^{Ry} t_1 w_2^{Ry_0}\right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Integrando e invertendo os sinais temos

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}^N} \left[ F\left(t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry}\right) - F\left(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0}\right) - F\left(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry}\right) \right] dx \\ & \leq - \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \nabla F\left(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0}\right)\left(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry}\right) + \nabla F\left(t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry}\right)\left(t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0}\right) \right] dx \\ & + C \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \left(t_1 w_2^{Ry_0} t_2 w_2^{Ry}\right)^2 + \left(t_1 w_1^{Ry_0} t_2 w_1^{Ry}\right)^2 + \left(t_1 w_1^{Ry_0} t_2 w_2^{Ry}\right)^2 + \left(t_2 w_1^{Ry} t_1 w_2^{Ry_0}\right)^2 \right\} dx. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Utilizando os Lemas 2.12 e 2.13, equação (2.73),  $(a_2)$  e tomando  $\mu_0$  tal que  $\sqrt{1-\lambda} < \mu_0 < 2\sqrt{1-\lambda}$ , segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left(t_1 w_2^{Ry_0} t_2 w_2^{Ry}\right)^2 dx & \leq C(t_1 t_2)^2 \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\sqrt{1-\lambda}|x-Ry_0|} e^{-2\sqrt{1-\lambda}|x-Ry|} dx \\ & \leq C(t_1 t_2)^2 \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\mu_0|x-Ry_0|} e^{-2\sqrt{1-\lambda}|x-Ry|} dx \\ & \leq C(t_1 t_2)^2 e^{-\mu_0|Ry_0-Ry|} \leq C(t_1 t_2)^2 e^{-2\mu_0 R} = o(\varepsilon_R) \end{aligned} \quad (2.100)$$

e analogamente

$$C \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \left(t_1 w_1^{Ry_0} t_2 w_1^{Ry}\right)^2 + \left(t_1 w_1^{Ry_0} t_2 w_2^{Ry}\right)^2 + \left(t_2 w_1^{Ry} t_1 w_2^{Ry_0}\right)^2 \right\} dx = o(\varepsilon_R). \quad (2.101)$$

Logo, de (2.99), (2.100) e (2.101) segue que

$$(H) + (I) \leq o(\varepsilon_R). \quad (2.102)$$

Vamos estimar a linha (J). Utilizando os Lemas 2.12 e 2.13, equação (2.73),  $(a_2)$  e para  $i, j = 1, 2$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| (t_i w_i^{Ry_0})^4 dx \leq o(\varepsilon_R), \quad (2.103)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| (t_j w_j^{Ry})^4 dx \leq o(\varepsilon_R). \quad (2.104)$$

Observando que  $a(x)$  pode mudar de sinal, segue de (2.103), (2.104) e  $(F_2)$  que

$$\begin{aligned}
(J) &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| F \left( t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry} \right) dx \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| \nabla F \left( t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry} \right) \left( t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry} \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| \frac{\left( \left( t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry} \right)^2 + \left( t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry} \right)^2 \right)^2}{1 + s \left( \left( t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry} \right)^2 + \left( t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry} \right)^2 \right)} dx \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| \left( \left( t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry} \right)^2 + \left( t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry} \right)^2 \right)^2 dx \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| \left( \left( t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry} \right)^4 + \left( t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry} \right)^4 \right) dx \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| \left( \left( t_1 w_1^{Ry_0} \right)^4 + \left( t_2 w_1^{Ry} \right)^4 + \left( t_1 w_2^{Ry_0} \right)^4 + \left( t_2 w_2^{Ry} \right)^4 \right) dx \leq o(\varepsilon_R).
\end{aligned} \tag{2.105}$$

Resta estimar  $(E)$ ,  $(F)$ ,  $(G)$ . Temos dois casos a analisar:  $\beta$  em um pequeno intervalo contendo  $1/2$  e  $\beta$  nos intervalos complementares em  $[0, 1]$ . Quando  $\beta = 1/2$ , utilizando que  $(w_1, w_2)$  é solução de  $(\mathbb{S}_\infty)$ , o Corolário 2.17 e o Lema 2.16 com  $t_1, t_2 \geq 1/2$ ,  $\overline{C}_0 > 0$  e  $C > 0$  temos que

$$\begin{aligned}
&(E) + (F) + (G) \\
&= t_1 t_2 \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \nabla w_1^{Ry_0} \nabla w_1^{Ry} + w_1^{Ry_0} w_1^{Ry} + \nabla w_2^{Ry_0} \nabla w_2^{Ry} + w_2^{Ry_0} w_2^{Ry} \right] dx \\
&\quad \lambda t_1 t_2 \int_{\mathbb{R}^N} \left( w_1^{Ry_0} w_2^{Ry} + w_2^{Ry_0} w_1^{Ry} \right) dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \nabla F \left( t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0} \right) \left( t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry} \right) + \nabla F \left( t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry} \right) \left( t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0} \right) \right] dx \\
&= \frac{t_1 t_2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \nabla w_1^{Ry_0} \nabla w_1^{Ry} + w_1^{Ry_0} w_1^{Ry} + \nabla w_2^{Ry_0} \nabla w_2^{Ry} + w_2^{Ry_0} w_2^{Ry} \right] dx \\
&\quad + \frac{t_1 t_2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \nabla w_1^{Ry_0} \nabla w_1^{Ry} + w_1^{Ry_0} w_1^{Ry} + \nabla w_2^{Ry_0} \nabla w_2^{Ry} + w_2^{Ry_0} w_2^{Ry} \right] dx \\
&\quad - \frac{\lambda}{2} t_1 t_2 \int_{\mathbb{R}^N} \left( w_1^{Ry_0} w_2^{Ry} + w_2^{Ry_0} w_1^{Ry} \right) dx \\
&\quad - \frac{\lambda}{2} t_1 t_2 \int_{\mathbb{R}^N} \left( w_1^{Ry_0} w_2^{Ry} + w_2^{Ry_0} w_1^{Ry} \right) dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \nabla F \left( t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0} \right) \left( t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry} \right) + \nabla F \left( t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry} \right) \left( t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0} \right) \right] dx \\
&= \frac{t_2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} t_1 \nabla F \left( w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right) \left( w_1^{Ry}, w_2^{Ry} \right) dx + \frac{t_1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} t_2 \nabla F \left( w_1^{Ry}, w_2^{Ry} \right) \left( w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right) dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \nabla F \left( t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0} \right) \left( t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry} \right) + \nabla F \left( t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry} \right) \left( t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0} \right) \right] dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{t_2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ t_1 \nabla F \left( w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right) \left( w_1^{Ry}, w_2^{Ry} \right) - \nabla F \left( t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0} \right) \left( w_1^{Ry}, w_2^{Ry} \right) \right\} dx \\
&\quad + \frac{t_1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ t_2 \nabla F \left( w_1^{Ry}, w_2^{Ry} \right) \left( w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right) - \nabla F \left( t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry} \right) \left( w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right) \right\} dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \nabla F \left( t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0} \right) \left( t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry} \right) + \nabla F \left( t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry} \right) \left( t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0} \right) \right] dx \\
&= \frac{t_2}{2} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left( t_1 f \left( w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right) - f \left( t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0} \right) \right) w_1^{Ry} dx \right| \\
&\quad + \frac{t_2}{2} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left( t_1 g \left( w_1^{Ry_0}, w_2^{Ry_0} \right) - g \left( t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0} \right) \right) w_2^{Ry} dx \right| \\
&\quad + \frac{t_1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left( t_2 f \left( w_1^{Ry}, w_2^{Ry} \right) - f \left( t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry} \right) \right) w_1^{Ry_0} dx \right| \\
&\quad + \frac{t_1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left( t_2 g \left( w_1^{Ry}, w_2^{Ry} \right) - g \left( t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry} \right) \right) w_2^{Ry_0} dx \right| \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \nabla F \left( t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0} \right) \left( t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry} \right) + \nabla F \left( t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry} \right) \left( t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0} \right) \right] dx \\
&\leq \frac{t_2}{2} C |t_1 - 1| O(\varepsilon_R) + \frac{t_1}{2} C |t_2 - 1| O(\varepsilon_R) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \nabla F \left( t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0} \right) \left( t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry} \right) + \nabla F \left( t_2 w_1^{Ry}, t_2 w_2^{Ry} \right) \left( t_1 w_1^{Ry_0}, t_1 w_2^{Ry_0} \right) \right] dx \\
&\leq \frac{t_2}{2} C |t_1 - 1| O(\varepsilon_R) + \frac{t_1}{2} C |t_2 - 1| O(\varepsilon_R) - \bar{C}_0 \varepsilon_R.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(E) + (F) + (G) \leq \frac{t_2}{2} C |t_1 - 1| O(\varepsilon_R) + \frac{t_1}{2} C |t_2 - 1| O(\varepsilon_R) - \bar{C}_0 \varepsilon_R. \quad (2.106)$$

Como  $0 < t_1, t_2 \leq T_0$  e  $t_1(R) \rightarrow 1$ ,  $t_2(R) \rightarrow 1$ , se  $R \rightarrow \infty$ , pelo Lema 2.18, então tomando  $R_0 > 0$  suficientemente grande e  $\delta \in (0, \frac{1}{2})$  suficientemente pequeno, temos que

$$(E) + (F) + (G) \leq -\frac{\bar{C}_0}{2} \varepsilon_R, \quad (2.107)$$

para todo  $\beta \in \left[ \frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta \right]$ ,  $y \in B_2(y_0)$  e  $R \geq R_0$ . Assim, por (2.97), (2.98), (2.102), (2.105) e (2.107), para todo  $\beta \in \left[ \frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta \right]$ ,  $y \in B_2(y_0)$  e  $R \geq R_0$ , provamos que

$$I(t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry}) \leq 2m_\infty - \frac{\bar{C}_0}{2} \varepsilon_R + o(\varepsilon_R). \quad (2.108)$$

Observe que neste argumento utilizamos a continuidade de  $T_{\beta,y}^R$  nas variáveis  $\beta, y$  e  $R$ .

Finalmente, estudamos o segundo caso  $\beta \in [0, \frac{1}{2} - \delta) \cup (\frac{1}{2} + \delta, 1]$ . Para isto, sem perda de generalidade, fixemos  $\beta$  tal que  $0 \leq \beta < \frac{1}{2} - \delta$ . Então  $1 \geq 1 - \beta > \frac{1}{2} + \delta$ . Note que, se  $T_{\beta,y}^R \leq 2$ , então  $t_1 = T_{\beta,y}^R \beta \in [0, 1 - 2\delta]$  e  $t_2 = T_{\beta,y}^R (1 - \beta) \in [1 + 2\delta, 2]$ , ou seja, temos  $t_1 < 1$  e  $t_2 > 1$ . Por outro lado, se  $T_{\beta,y}^R \geq 2$ , então  $t_1 = T_{\beta,y}^R \beta \in [1 - 2\delta, +\infty]$  e  $t_2 = T_{\beta,y}^R (1 - \beta) \in [1 + 2\delta, +\infty]$ . Juntando isto e as estimativas anteriores de (2.97) a (2.105) e o Lema 2.4(c) mostramos que

$$I(t_1 w_1^{Ry_0} + t_2 w_1^{Ry}, t_1 w_2^{Ry_0} + t_2 w_2^{Ry}) \leq m_\infty - \gamma + m_\infty - \gamma + O(\varepsilon_R). \quad (2.109)$$



$$\forall \beta \in \left[0, \frac{1}{2} - \delta\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \delta, 1\right], y \in B_2(y_0) \text{ e } R \geq R_1.$$

Portanto, concluímos o lema juntando os resultados em (2.108) e (2.109) para todo  $\beta \in [0, 1], y \in \partial B_2(y_0), R > \max\{R_0, R_1\}$ .

□

**Lema 2.21.** *Dado número real  $\eta_2 > 0$ , existe um número real  $R_4 > 0$  tal que*

$$I(T_{0,y}^R Z_{0,y}^R) < m_\infty + \eta_2,$$

para todo  $y \in \partial B_2(y_0)$  e  $R > R_4$ . Em particular,  $m \leq m_\infty$

**Demonstração:** Começamos observando que, pelo Lema 2.12 e a equação (2.73), para  $i = 1, 2$  já vimos em (2.105) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| F(T_{0,y}^R w_1^{Ry}, T_{0,y}^R w_2^{Ry}) dx \leq o(\varepsilon_R). \quad (2.110)$$

Escolhendo  $(u, v) = (T_{0,y}^R w_1^{Ry}, T_{0,y}^R w_2^{Ry}) = Z_{0,y}^R$  em (2.6) e utilizando o Lema 2.4 e a desigualdade (2.110) temos

$$\begin{aligned} I(T_{0,y}^R w_1^{Ry}, T_{0,y}^R w_2^{Ry}) &= I_\infty(T_{0,y}^R w_1^{Ry}, T_{0,y}^R w_2^{Ry}) - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) F(T_{0,y}^R w_1^{Ry}, T_{0,y}^R w_2^{Ry}) dx \\ &\leq \max_{t>0} I_\infty(t w_1^{Ry}, t w_2^{Ry}) + \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| F(T_{0,y}^R w_1^{Ry}, T_{0,y}^R w_2^{Ry}) dx \\ &= I_\infty(w_1^{Ry}, w_2^{Ry}) + \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| F(T_{0,y}^R w_1^{Ry}, T_{0,y}^R w_2^{Ry}) dx \\ &= m_\infty + \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)| F(T_{0,y}^R w_1^{Ry}, T_{0,y}^R w_2^{Ry}) dx \leq m_\infty + o(\varepsilon_R). \end{aligned}$$

Assim, o resultado segue e o lema está demonstrado.

□

## 2.6 Demonstração do resultado principal do sistema

Para a demonstração do Teorema 0.2 serão utilizadas ferramentas do tipo *min-max*. Precisamos introduzir a função baricentro em  $H^1(\mathbb{R}^N)$  dada em [16]. Sejam  $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ ,

$$\mu(u)(x) := \frac{1}{\mu(B_1(0))} \int_{B_1(x)} |u(y)| dy, \quad \mu(u) \in L^\infty \text{ e contínua}$$

e

$$\bar{u}(x) := \left( \mu(u)(x) - \frac{1}{2} \max_{x \in \mathbb{R}^N} \mu(u)(x) \right)^+, \quad \bar{u} \in C_0(\mathbb{R}^N)$$

onde  $\mu(B_1(0))$  é a medida de Lebesgue da bola unitária. A função baricentro de  $u$  é a aplicação definida por

$$\bar{B}(u) := \frac{1}{|\bar{u}|_1} \int_{\mathbb{R}^N} x \bar{u}(x) dx.$$

A função baricentro possui as seguintes propriedades:

- i)  $\bar{\mathcal{B}}$  é contínua em  $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ ;
- ii) Se  $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$  é radialmente simétrica, então  $\bar{\mathcal{B}}(u) = 0$ ;
- iii) Para todo  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e todo  $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$  tem-se  $\bar{\mathcal{B}}(u) = \bar{\mathcal{B}}(tu)$ ;
- iv) Dado  $z \in \mathbb{R}^N$  tem-se  $\bar{\mathcal{B}}(u(x-z)) = \bar{\mathcal{B}}(u) + z$ .

Agora consideramos a definição da função baricentro do par  $(u, v) \in H \setminus \{(0, 0)\}$  dada em [5]:

$$\mathcal{B}(u, v) := \frac{1}{|\bar{u}|_1 + |\bar{v}|_1} \int_{\mathbb{R}^N} x (\bar{u}(x) + \bar{v}(x)) dx \in \mathbb{R}^N.$$

Convém salientar que, se  $u, v \neq 0$ , então

$$\mathcal{B}(u, v) := \frac{|\bar{u}|_1}{|\bar{u}|_1 + |\bar{v}|_1} \bar{\mathcal{B}}(u) + \frac{|\bar{v}|_1}{|\bar{u}|_1 + |\bar{v}|_1} \bar{\mathcal{B}}(v).$$

Assim,  $\mathcal{B}$  está bem definida e verifica propriedades análogas as (i)-(iv).

Definida a função baricentro, podemos demonstrar o seguinte resultado:

**Lema 2.22.** *Suponha que  $m$  não seja atingido. Então  $m = m_\infty$  e existe um  $\eta > 0$  tal que*

$$\mathcal{B}(u, v) \neq 0, \text{ para toda } (u, v) \in \mathcal{N} \cap I^{m_\infty + \eta};$$

onde denotamos

$$I^{m_\infty + \eta} := \{(u, v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N); I(u, v) \leq m_\infty + \eta\}.$$

**Demonstração:** Suponha que  $m$  não é atingido. Pelo Lema 2.11,  $m \geq m_\infty$  e do Lema 2.21, a desigualdade invertida. Logo temos a igualdade  $m = m_\infty$ .

Argumentando por contradição, suponha que para cada  $n \in \mathbb{N}$  exista  $\{(\varphi_n, \psi_n)\} \subset \mathcal{N}$  satisfazendo  $I(\varphi_n, \psi_n) < m + o_n(1)$  e, ainda,  $\mathcal{B}(\varphi_n, \psi_n) = 0$ . Segue disto que  $\{(\varphi_n, \psi_n)\} \subset \mathcal{N}$  é uma sequência minimizante para  $I$ . O Princípio Variacional de Ekeland, por instante vide [46], nos fornece uma sequência  $\{(u_n, v_n)\}$  para  $I$  restrito a  $\mathcal{N}$  no nível  $m_\infty$  onde tal sequência é (PS) e satisfaz

$$\|(\varphi_n, \psi_n) - (u_n, v_n)\| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Já vimos pelos Lemas 2.5 e 2.7 que toda sequência (PS) em  $\mathcal{N}$  é limitada e como  $m$  não é atingido, podemos usar o Lema 2.10 para garantir a existência de uma sequência

$$\{z_n\} \subset \mathbb{R}^N; \|z_n\| \rightarrow \infty \text{ e } \|(u_n, v_n) - (w_1(\cdot - z_n), w_2(\cdot - z_n))\| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

onde  $(w_1, w_2)$  é a solução positiva, radial de energia mínima do problema limite.

Por translação temos

$$u_n(x + z_n) = w_1(x) + o_n(1) \text{ e } v_n(x + z_n) = w_2(x) + o_n(1).$$

Usando as propriedades da função baricentro e que  $\mathcal{B}(\varphi_n, \psi_n) = 0$  temos

$$\mathcal{B}(\varphi_n(x + z_n), \psi_n(x + z_n)) = \mathcal{B}(\varphi_n, \psi_n) + z_n = z_n,$$

e ainda pela continuidade da função baricentro  $\mathcal{B}$  na norma em  $H$

$$\mathcal{B}(\varphi_n(x + z_n), \psi_n(x + z_n)) \rightarrow \mathcal{B}(w_1(x), w_2(x)) = 0.$$

que configura uma contradição, pois  $\|z_n\| \rightarrow \infty$ .

□

Por fim iremos demonstrar o resultado principal onde utilizaremos os resultados que obtivemos anteriormente.

### Prova do Teorema 0.2 :

Inicialmente, suponha que  $m$  é atingido para algum  $(u, v)$  em  $\mathcal{N}$ . Conseqüentemente, pelos Lemas 2.4(b) e 2.6 temos que  $(u, v)$  é uma solução não trivial para o problema (S). Suponha então que  $m$  não seja atingido. Segue do Lema 2.22 que  $m = m_\infty$  e podemos fixar  $\eta_2 \in \left(0, \frac{m_\infty}{8}\right)$  tal que  $I(u, v) \leq m_\infty + \eta_2$ ,  $\forall (u, v) \in \mathcal{N}$  e  $\mathcal{B}(u, v) \neq 0$  e ainda, pelo Lema 2.21, para todo  $R > R_4$

$$I(T_{0,y}^R Z_{0,y}^R) \leq m_\infty + \eta_2, \quad \forall y \in \partial B_2(y_0). \quad (2.111)$$

Segue do Lema 2.20 que podemos escolher  $\eta_1$  entre  $\left(0, \frac{m_\infty}{8}\right)$  e para todo  $R > R_3$

$$I(T_{\beta,y}^R Z_{\beta,y}^R) \leq 2m_\infty - \eta_1, \quad \forall y \in \partial B_2(y_0), \quad \beta \in [0, 1]. \quad (2.112)$$

Fixe  $R > \max\{R_3, R_4\}$  e defina a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : B_2(y_0) &\longrightarrow \mathcal{N} \cap I^{2m_\infty - \eta_1} \\ \beta y_0 + (1 - \beta)y &\longrightarrow T_{\beta,y}^R Z_{\beta,y}^R, \quad \forall y \in \partial B_2(y_0), \quad \beta \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (2.113)$$

O objetivo agora é mostrar que o funcional  $I$  tem um valor crítico no intervalo  $(m_\infty, 2m_\infty)$ . Argumentando por contradição, suponha que tal valor crítico não exista. Como  $m$  não é atingido, podemos utilizar o Lema 2.11 para garantir que o funcional  $I$  restrito a  $\mathcal{N}$  satisfaz a condição de Palais- Smale no intervalo  $(m_\infty, 2m_\infty)$ . Logo, existe um  $\varepsilon > 0$  tal que

$$\|(I|_{\mathcal{N}})'(u, v)\| \geq \varepsilon \quad \text{para todo } (u, v) \in \mathcal{N} \cap I^{-1}[m_\infty + \eta_2, 2m_\infty - \eta_1].$$

Isso implica que, pelo Lema 5.15 [46], existe uma aplicação (deformação) contínua

$$\mathcal{D} : \mathcal{N} \cap I^{2m_\infty - \eta_1} \longrightarrow \mathcal{N} \cap I^{m_\infty + \eta_2} \quad (2.114)$$

tal que  $\mathcal{D} = id$  (aplicação identidade) para todo  $(u, v) \in \mathcal{N} \cap I^{m_\infty + \eta_2}$ .

Por (2.111), (2.112), (2.113) e (2.114) podemos definir a seguinte aplicação contínua

$$\begin{aligned} \Gamma : B_2(0) &\longrightarrow \partial B_2(0) \\ x &\longrightarrow A_2 \left( 2 \frac{\mathcal{B}o\mathcal{D}o\mathcal{H}oA_1(x)}{|\mathcal{B}o\mathcal{D}o\mathcal{H}oA_1(x)|} \right), \end{aligned} \quad (2.115)$$

onde  $\mathcal{B}$  é a aplicação baricentro e as aplicações contínuas  $A_1$  e  $A_2$  são definidas como segue

$$\begin{aligned} A_1 : B_2(0) &\longrightarrow B_2(y_0) \\ x &\longrightarrow x + y_0 \end{aligned} \quad (2.116)$$

e

$$\begin{aligned} A_2 : \partial B_2(0) &\longrightarrow \partial B_2(0) \\ \frac{2y}{|y|} &\longrightarrow y - y_0 \end{aligned} \quad (2.117)$$

onde  $y \in \partial B_2(y_0)$ . Além disso, se  $\beta = 0$  segue que

$$\mathcal{H}(y) = T_{0,y}^R Z_{0,y}^R. \quad (2.118)$$

Por outro lado, usando as propriedades da função baricentro note que

$$\mathcal{B}(T_{0,y}^R Z_{0,y}^R) = \mathcal{B}(T_{0,y}^R (\omega_1^{Ry}, \omega_2^{Ry})) = \mathcal{B}(\omega_1^{Ry}, \omega_2^{Ry}) = \mathcal{B}(\omega_1(x), \omega_2(x)) + Ry = Ry. \quad (2.119)$$

Como  $\mathcal{D} = id$  para todo  $(u, v) \in \mathcal{N} \cap I^{m_\infty + \eta_2}$  tem-se por (2.115), (2.116), (2.117), (2.118) e (2.119) que

$$\Gamma(y - y_0) = A_2 \left( 2 \frac{\mathcal{B} \circ \mathcal{D} \circ \mathcal{H} \circ A_1(y - y_0)}{|\mathcal{B} \circ \mathcal{D} \circ \mathcal{H} \circ A_1(y - y_0)|} \right) = A_2 \left( 2 \frac{\mathcal{B}(T_{0,y}^R z_{0,y}^R)}{|\mathcal{B}(T_{0,y}^R z_{0,y}^R)|} \right) = A_2 \left( 2 \frac{Ry}{|Ry|} \right) = y - y_0.$$

Temos uma contradição, pois a aplicação contínua  $\Gamma$  não pode existir pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, veja Teorema 3.5 em [7]. Portanto, a contradição neste caso veio de supor que  $I$  não tem um valor crítico no intervalo  $(m_\infty, 2m_\infty)$ .

Para discutir a existência de uma solução positiva  $u > 0, v > 0$ , consideremos o funcional

$$I_+(u, v) = \frac{1}{2} \|(u, v)\|_H^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} uv \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + a(x)) F(u^+, v^+) \, dx.$$

Para maiores detalhes sobre este funcional  $I_+$ , veja a Proposição 1.12 em [46].

Aplicando os mesmos argumentos anteriores do funcional  $I$ , pelo Teorema 0.2 podemos obter uma solução do problema

$$(\mathbb{S}_+) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = (1 + a(x)) \frac{u^+ ((u^+)^2 + (v^+)^2)}{1 + s((u^+)^2 + (v^+)^2)} + \lambda v & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + v = (1 + a(x)) \frac{v^+ ((u^+)^2 + (v^+)^2)}{1 + s((u^+)^2 + (v^+)^2)} + \lambda u & \text{em } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Somando as duas equações do sistema  $(\mathbb{S}_+)$  temos

$$-\Delta(u + v) + (1 - \lambda)(u + v) = (1 + a(x)) \frac{u^+ ((u^+)^2 + (v^+)^2)}{1 + s((u^+)^2 + (v^+)^2)} + (1 + a(x)) \frac{v^+ ((u^+)^2 + (v^+)^2)}{1 + s((u^+)^2 + (v^+)^2)}.$$

Desde que  $0 < \lambda < 1$ , por  $(a_1)$  e pelo Princípio do Máximo temos que  $u + v > 0$ .

Adicionando  $\lambda u$  a ambos os lados da primeira equação em  $(\mathbb{S}_+)$  temos

$$-\Delta u + (1 + \lambda)u = (1 + a(x)) \frac{u^+ ((u^+)^2 + (v^+)^2)}{1 + s((u^+)^2 + (v^+)^2)} + \lambda(u + v) > 0.$$

Novamente por  $(a_1)$  e pelo Princípio do Máximo temos  $u > 0$ . De maneira análoga,  $v > 0$ . Assim,  $(u, v)$  é uma solução positiva de  $(\mathbb{S}_+)$ .

□

# Referências Bibliográficas

---

- [1] Ackermann, N.; Clapp, M. and Pacella, F., *Alternating sign multibump solutions of nonlinear elliptic equations in expanding tubular domains*, Comm. Partial Differential Equations. **38** (2013), 751-779.
- [2] Akhmediev, N.; Królinowski, W. and Snyder, A., *Partially coherent solitons of variable shape*, Physical Review Letters **81**, no. 21,(1998), 4632-4635.
- [3] Akhmediev, N. and Ankiewicz, A., *Novel soliton states and bifurcation phenomena in nonlinear fiber couplers*, Phys. Rev. Lett. **70**, 2395-2398.
- [4] Ambrosetti, A., *Remarks on some systems of nonlinear Schrödinger equations*, Journal of Fixed Point Theory and Applications **4** (2008), 35-46.
- [5] Ambrosetti, A.; Cerami, G. and Ruiz, D., *Solitons of linearly coupled systems of semilinear non-autonomous equations on  $\mathbb{R}^N$* , Journal of Functional Analysis. **254** (2008), 2816-2845.
- [6] Ambrosetti, A.; Colorado, E. and Ruiz, D., *Multi-bump solitons to linearly coupled systems of nonlinear Schrödinger equations*, Calc. Var. Partial Diff. Equations, **2007**, 85-112.
- [7] Ambrosetti, A. and Malchiodi, A., *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*, Cambridge University Press, 2007.
- [8] Bahri, A. and Lions, P.L, *On the existence of a positive solution of semilinear elliptic equations in unbound domain*, Ann. Inst. Henri Poincaré. **14** (1997), 365-413.
- [9] Bahri, A. and Li, Y. Y, *On a minimax procedure for the existence of a positive solution for certain scalar field*, Revista Mat. Iberoamericana. **6** (1997), 1-2.
- [10] Bartolo, P.; Benci, V. and Fortunato, D., *Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with strong resonance at infinity*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications. **7** (1983), 981-1012.
- [11] Beitia, J. B.; García, V. M. P. and Torres, P. J.; *Solitary waves for linearly coupled nonlinear Schrödinger equations with inhomogeneous coefficients*, Nonlinear Science **19** (2009), 437-451.
- [12] Berestycki, H.; Gallouet, T. and Kavian, O., *Equations de champs scalaires euclidiens non lineaires dans le plan*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **297** (1983), 305-310.

- [13] Berestycki, H. and Lions, P. L., *Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state*, Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983), 313-345.
- [14] Busca, J. and Sirakov, B., *Symmetry results for semilinear elliptic systems in the whole space*, Journal of Diff. Equations. **163** (2000), 41-56.
- [15] Cerami, G. and Passaseo, D., *Existence and multiplicity results for semilinear elliptic Dirichlet problems in exterior domains*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods Applications, **24**, (1995), 1533-1547.
- [16] Cerami, G. and Passaseo, D., *The effect of concentrating potentials in some singularly perturbed problems*, Calc. Var. Partial Differential Equations. **3** (2003), 257-281.
- [17] Chen, Z. and Zou, W., *Standing waves for a coupled system of nonlinear Schrödinger equations*, Annali di Matematica **194** (2015) 183-220.
- [18] Clapp, M. and Maia, L. A., *A positive bound state for an asymptotically linear or superlinear Schrödinger equations*, J. Differential Equation. **260** (2016), 3173-3192.
- [19] Coddington, E. A. and Levinson, N., *Theory of ordinary differential equations*, New York: McGraw-Hill. (1955).
- [20] Coti-Zelati, V. and Rabinowitz, P., *Homoclinic type solutions for a semilinear elliptic PDE on  $\mathbb{R}^N$* , Comm. Pure Appl. Math, 46 (1992), 1217-1269.
- [21] De Figueiredo, D. G. and Yang, J., *Decay, symmetry and existence of solutions of semilinear elliptic systems*, Nonlinear Anal. **33** (1998), no. 3, 211-234.
- [22] De Figueiredo, D. G. and Mitidieri, E., *Maximum principles for linear elliptic systems*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste 22 (1990), no. 1-2, 36-66 (1992).
- [23] Ding, W. Y. and Ni, W. M., *On the existence of positive entire solutions of a semilinear elliptic equation*, Arch. Rational Mech. Anal. **91**, no. 4, (1986), 283-308.
- [24] Évéquoz, G. and Weth, T., *Entire solutions to nonlinear scalar field equations with indefinite linear part*, Adv. Nonlinear Studies. **12** (2016), 281-314.
- [25] Gidas, B., Ni, W. and Nirenberg, L., *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Math. Analysis and Applications, Part A. Advances in Math. Supplementary Studies, vol 7A., 1981.
- [26] Kwong, M. K., *Uniqueness of positive solutions of  $\Delta u - u + u^p = 0$  in  $\mathbb{R}^N$* , Arch. Rational Mech. Anal **105**, (1989), 243-266.
- [27] Lions, P. L., *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case*, Ann. I. H. Poincaré AN **1**, (1984), 109 - 145 and 223-283.
- [28] Lehrer, R., *Existence of solution for asymptotically linear systems in  $\mathbb{R}^N$* , Electronic Journal of Differential Equations, **236** (2013), 1-20.
- [29] Lehrer, R. and Maia, L. A., *Positive solutions of asymptotically linear equations via Pohozaev manifold*, Journal Functional Analysis. **266** (2014), 213-246.

- [30] Litchinister, N. M.; Królikowski, W.; Akhmediev, N. N. and Agrawal, G. P., *Asymmetric partially coherent solitons in saturable nonlinear media*, Phys. Rev. E **60** (1999), 2377-2380.
- [31] Maia, L. A. and Pellacci, B. , *Positive solutions for asymptotically linear problems in exterior domains*, Annali di Matematica Pura ed Applicata . (2016), 1-32.
- [32] Maia, L. A., Montefusco, E. and Pellacci, B., *Weakly coupled nonlinear Schrödinger systems: the saturation effect*, Calc. Var. (2013), 25-351.
- [33] Maia, L. A. and Ruviaro, R., *Positive and nodal solutions of nonlinear Schrödinger equations in a saturable medium*, Adv. Nonlinear Stud. . **15** (2015), 191-219.
- [34] Matthews, M.R.; Anderson, B.P.; Haljan, P.C.; Hall, D.S.; Wieman, C.E. and Cornell, E.A., *Vortices in a Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. Lett. **83**, 2498-2501 (1999a).
- [35] Matthews, M.R.; Anderson, B.P. Haljan, P.C.; Hall, D.S.; Holland, M.J.; Williams, J.E.; Wieman, C.E. and Cornell, E.A., *Watching a superfluid untwist itself: Recurrence of Rabi oscillations in a Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. Lett. **83**, 3358 (1999b).
- [36] McLeod, K., *Uniqueness of positive radial solutions of  $\Delta u + f(u) = 0$  in  $\mathbb{R}^N$*  II, Trans. Amer. Math. Soc. . **339** (1993), 495-505.
- [37] Moroz, V. and Schaftingen, J. V., *Nonexistence and optimal decay of supersolutions to Choquard equations in exterior domains*, Journal of Differential Equations. **254** (2013), 3089-3145.
- [38] Moroz, V. and Schaftingen, J. V., *Groundstates of nonlinear Choquard equations : Existence, qualitative properties and decay asymptotics*, Journal of Funct. Anal. **265** (2013), 153-184.
- [39] Rabinowitz, P. H. *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, Z. Angew. Math. Phys. **43** (1992), no. 2, 270-291.
- [40] Serrin, J. and Tang, M. *Uniqueness of ground states for quasilinear elliptic equations*, Indiana Univ. Math. **49** (2000), 897-923.
- [41] Steman, G. I. and Segev, M., *Optical spatial solutions and their interactions: universality and diversity*, Science **286** (1999), 1518-1523.
- [42] Strauss, W. A. *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Commun. Math. Phys. . **55** (1977), 149-162.
- [43] Stuart, C. A., *Bifurcation in  $L^p(\mathbb{R}^N)$  for a semilinear elliptic equation*, London. Math. Soc., **57** (1987), 511-541.
- [44] Stuart, C. A. *Guidance properties of nonlinear planar waveguides*, Arch. Rational Mech. Anal. **125** (1993), no. 2, 145-200.
- [45] Weilnau, C.; Ahles, M.; Petter, J.; Träger, D.; Schröder, J. and Denz, C., *Spatial optical (2+1)-dimensional scalar- and vector-solitons in saturable nonlinear media*, Ann. Phys. (Leipzig) **11** (2002), 573-629.
- [46] Willem, M., *Minimax Theorems*, Volume 24 , Birkhauser, Boston, 1996.



- 
- [47] Zafrany, A.; Malomed, B.A. and Merhasin, I.M., *Solitons in a linearly coupled system with separated dispersion and nonlinearity*, Chaos **15**, 037108 (2005).
- [48] Zhang, H.; Xu, J. and Zhang, F. , *Existence of positive ground states for some nonlinear Schrödinger systems* , Boundary Value Problems. **13** (2013).