UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Modelos Cosmológicos Escalares-Tensoriais

Stella Fernandes Pereira

Orientadora: Prof. Dra. Maria Emília Xavier Guimarães

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Física.

Brasília-DF

Março, 2006

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Modelos Cosmológicos Escalares-Tensoriais

Por

Stella Fernandes Pereira

Orientadora
Profa. Dra. Maria Emília Xavier Guimarães

Você não sabe o quanto eu caminhei/ Pra chegar até aqui/ Percorri milhões de milhas antes de dormir...

"O que nós vemos das cousas são as cousas.

Por que veríamos nós uma cousa se houvesse outra?

Por que é que ver e ouvir seria iludirmo-nos

Se ver e ouvir são ver e ouvir?

O essencial é saber ver,

Saber ver sem estar a pensar,

Saber ver quando se vê,

E nem pensar quando se vê

Nem ver quando se pensa.."

Fernando Pessoa

Agradecimentos

À Professora Maria Emília, pela orientação presente e motivadora.

Ao professor Joaquim José Soares Neto, por seu incentivo incansável à pesquisa.

Aos queridos Professores Ademir e Olavo, pela atenção durante todas as discussões tão produtivas e por sempre enriquecerem minha formação com seu profundo saber e imensa amabilidade.

Aos meus amados pais e meu irmão Danillo, por sempre acreditarem em mim mais do que eu mesma e pelo apoio e amor incondicional.

Ao grande amigo Álvaro, pelos incontáveis estudos e conversas pela madrugada, pelo ombro amigo nos momentos de tristeza e pela torcida nos momentos de dificuldade.

Aos companheiros de sofrimento Maíra, Marcelo, Gustavo, Luana, Luiz, Vivi, Nelsinho, Dani, Edu, Alessandra, Fábio, Nanderson e tantos outros pelo apoio e companheirismo e aos amigos Bruna, Zé e Talita, que não são físicos mas sofrem junto.

A Célia, Salete e Sebastião, sem cujo profissionalismo e cordialidade tudo seria mais difícil na Pós-Graduação.

À CAPES, pela bolsa de mestrado, que possibilitou este trabalho. E acima de tudo, à Deus, a razão de tudo.

Resumo

Por muito tempo acreditou-se que o modelo cosmológico padrão, obtido com base na Teoria da Relatividade Geral, era aproximadamente compatível com dados observacionais. Os problemas originados por essa teoria estariam concentrados em estágios iniciais do universo e poderiam ser resolvidos por um modelo inflacionário apropriado. Recentes evidências observacionais, contudo, levam a crer que na era atual o universo encontra-se expandindo aceleradamente. Da forma como se encontra formulado, o modelo padrão só seria capaz de elucidar qual seria uma possível fonte desta aceleração, dita energia/matéria escura, se grande parte densidade do universo estivesse na forma de matéria não visível. Uma alternativa à busca de fontes exóticas responsáveis pela aceleração seria a formulação de teorias alternativas à Relatividade Geral e a descrição de modelos cosmológicos nestas teorias.

As Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação se apresentam como uma generalização natural da Teoria da Relatividade Geral e têm atraído cada vez mais atenção em várias áreas de pesquisa em gravitação e cosmologia. Neste trabalho, a possibilidade de obter-se expansão acelerada para o universo é investigada, apresentando-se alguns modelos cosmológicos no contexto de Teorias Escalares-Tensoriais de Gravitação.

Abstract

For many years it was a general belief that standard cosmology was nearly compatible with all observational data. The problems that might arise in this model were confined to the early stages of the evolution of the universe and were expected to be solved by a proper inflationary approach. Recent observational evidence, however, lead to an accelerated expantion of the universe. By the way it is formulated, the standard cosmological model conjectures that a possible font of this acceleration would be some exotic kind of matter, namely dark matter/energy. Another point of view would be formulating alternative theories to General Relativity, and their respective cosmological description.

The scalar-tensor theories of gravity is a natural generalization of Einstein's theory and have become a focal point of interest in many areas in gravitational physics and cosmology. The present work investigates the possibility of obtaining an accelerating expantion for the universe, presenting some cosmological models in the context of scalar-tensor theories of gravity.

Sumário

Notação

Ao longo deste trabalho será adotada a seguinte terminologia:

- Índices gregos variam de 0 a 3.
- Índices latinos variam de 1 a 3.
- A métrica de Mikowiski é dada por $\eta_{\mu\nu} = diag(+1, -1, -1, -1)$.
- A notação $\doteq$ significa que a equação é válida somente em um sistema de coordenadas particular.
- O elemento de linha é escrito na forma $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$.
- A derivada temporal de uma função $f(t)$ será denotada por $\dot{f}(t)$.
- A conexão métrica é definida por

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}\left(\partial_\beta g_{\lambda\gamma} + \partial_\gamma g_{\lambda\beta} - \partial_\lambda g_{\beta\gamma}\right).$$

- A derivada covariante será denotada por

$$\nabla_\mu T^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots} = \partial_\mu T^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots} + \Gamma^\alpha_{\lambda\mu}T^{\lambda\cdots}_{\beta\cdots} + \cdots - \Gamma^\lambda_{\beta\mu}T^{\alpha\cdots}_{\lambda\cdots} - \cdots,$$

  onde $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

- O tensor de Riemann é definido por

$$R^\alpha_{\beta\lambda\sigma} = \partial_\lambda\Gamma^\alpha_{\beta\sigma} - \partial_\sigma\Gamma^\alpha_{\beta\lambda} + \Gamma^\nu_{\beta\sigma}\Gamma^\alpha_{\nu\lambda} - \Gamma^\nu_{\beta\lambda}\Gamma^\alpha_{\nu\sigma}.$$

- O escalar de Ricci ou escalar de curvatura é definido como $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, onde $R_{\mu\nu}$ é chamado tensor de Ricci, dado pela contração $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = g^{\lambda\sigma}R_{\sigma\mu\lambda\nu}$.

- O tensor de Einstein é definido como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R.$$

- O determinante da métrica é denotado por $g = det(g_{\mu\nu})$.

- O operador d'Alembertiano covariante é dado por $\Box = g_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu$. Em particular, para um campo escalar é definido como o divergente covariante de $\partial^\mu \phi$, ou seja,

$$\Box \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left[\sqrt{-g}\ \partial^\mu \phi \right]$$

Capítulo 1

Introdução

As evidências crescentes para a aceleração do universo levaram a formulação de inúmeros cenários de energia escura (por exemplo [1]). Eles reduzem-se, em geral, à introdução de novos graus de liberdade no cenário cosmológico, seja por campos de matéria com pressão negativa ou mudanças no setor gravitacional. Um dos modelos mais simples que dão conta desta aceleração baseia-se na introdução de um campo escalar cujo valor médio varia durante a história do universo. Genericamente, esse campo escalar pode acoplar-se ao campo gravitacional induzindo uma quinta força que é de longo alcance se o campo escalar é leve, o que é usualmente o caso se ele é a fonte para a aceleração do universo.

Do ponto de vista teórico, as Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação, nas quais a interação gravitacional é mediada por um ou vários campos escalares de longo alcance, além do tensor métrico presente na teoria de Einstein, representam a alternativa mais natural a Teoria da Relatividade Geral, preservando o princípio de equivalência e a constância de todas as constantes não gravitacionais. Existem muitas motivações teóricas para considerar tal parceiro escalar para o *graviton*, particularmente em teorias de mais dimensões, como teorias de cordas e supercordas. De fato, muitas tentativas de unificação da gravitação com as outras teorias prevêem a existência de campos escalares sem massa com acoplamentos de ordem gravitacional. Devido à presença do campo escalar em si, as teorias escalares tensoriais prevêem fenômenos não presentes na Relatividade Geral. As Teorias Escalares-Tensoriais estão bem definidas no sistema solar e é possível tentar extender este limite para escalas astrofísicas e cosmológicas. Uma motivação independente para considerar parceiros escalares para o tensor de gravidade usual de Einstein é fornecida por modelos inflacionários [2, 3] que encontram no contexto das Teorias Escalares-Tensoriais da gravitação um caminho natural para a existência de inflação.

A Cosmologia padrão do modelo do Big-Bang em Relatividade Geral é uma descrição bem sucedida do universo observável, embora soluções cosmológicas tenham sido estudadas também em teorias alternativas de gravitação. No entanto, a necessidade de resolver os problemas associados ao modelo padrão motivou a pesquisa além do modelo do Big-Bang, introduzindo a idéia de inflação. Vários cenários inflacionários baseados tanto em Relatividade Geral quanto em teorias alternativas da gravitação foram propostos.

Contudo, talvez um dos maiores desafios da Cosmologia teórica seja entender o surgimento e a natureza da atual aceleração do universo observada e fornecer uma resposta para a questão da matéria escura, tida como a possível fonte desta aceleração. Em escala cosmológica, as Teorias Escalares-Tensoriais foram propostas como modelos para a energia escura que podem substituir a constante cosmológica, assim como uma tentativa para explicar outras características da distribuição de galáxias no universo.

As Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação já haviam se mostrado eficientes como alternativa à Relatividade Geral em Cosmologia [4, 9] na tentativa de modelar um universo que expanda aceleradamente (de acordo com os recentes dados observacionais). Tal modelo pode ser usado como ponto de partida para modelar a matéria escura [10], tida como uma possível fonte desta aceleração.

Apesar de quase meio século de idade, as ST continuam a atrair interesse não somente de no campo teórico como também experimental, quando hoje a Física se depara com questões como a aceleração do universo e a dependência temporal da constante de estrutura fina, ambas vistas como algo além da Relatividade Geral padrão. A relevância de utilizar-se as Teorias Escalares-Tensoriais dentre tantas outras reside no fato de que no início do universo, ou na presença de campos gravitacionais fortes, tanto os aspectos escalares quanto os tensoriais da gravitação devem ser levados em consideração. Na era atual, esses efeitos são muito pequenos, de modo que é possível notar um efeito atrator da Relatividade Geral com relação às Cosmologias Escalares-Tensoriais [11].

O presente trabalho encontra-se assim organizado: no Capítulo 2 é feito um breve resumo da Teoria da Relatividade Geral no contexto de Cosmologia, e dos ingredientes básicos para um modelo cosmológico relativístico, seguidos de exemplos. No Capítulo 3 será introduzido um panorama geral das Teorias Escalares-Tensoriais de Gravitação, partindo de seu exemplar mais simples que é a Teoria de Brans-Dicke. No Capítulo 4 são apresentados alguns modelos cosmológicos FRW no contexto de Teorias Escalares-Tensoriais usando métodos aproximativos para solucionar as equações de campo. No Capítulo 5 são discutidas as conclusões e algumas perspectivas. Finalmente, o Apêndice A são apresentados os procedimentos do programa de computação algébrica Maple IX para o cálculo de alguns elementos matemáticos da Relatividade Geral utilizados ao longo de certos cálculos.

Capítulo 2

A Cosmologia Relativística

2.1 Introdução

A Astronomia é uma das mais antigas ciências, uma vez que as questões sobre a origem do universo e sobre a movimentação dos astros é quase tão antiga quanto a própria razão do homem. Juntamente com a Cosmologia, é um campo da ciência que aplica a Física na tentativa de compreender a estrutura e a evolução do universo. Da mesma forma, a importância de seu estudo reside parcialmente no fato de que nosso entendimento das leis da Física e em particular de sua aparente universalidade no espaço e no tempo ter um número de evidências que dependem crucialmente de dados astronômicos.

Por Cosmologia entende-se o estudo da estrutura dinâmica em larga escala do universo, sua formação e sua evolução. Sua versão mais antiga se encontra nos mitos cosmogônicos, versões mitológicas sobre a origem dos elementos e dos seres vivos. As idéias de como o universo e seus elementos se comportam foram sendo modificadas ao longo do tempo, mas a Cosmologia só passou a ser considerada como ciência após a formulação da Teoria da Relatividade Geral por Albert Einstein, em 1917.

2.2 O Princípio Cosmológico

O ponto de partida do consiste em um princípio de simplicidade chamado princípio cosmológico, o qual enuncia:

Excetuando-se irregularidades locais, em uma determinada época o universo apresenta os mesmas aspectos em todos os pontos.

o que equivale a dizer que não existem pontos ou direções privilegiadas a serem considerados, ou seja, o espaço pode ser visto como homogêneo e isotrópico. Como em geral o universo é tratado em larga escala, os dados observacionais mostram que tal suposição pode ser considerada verdadeira [12].

2.3 A Equação de Campo de Einstein

A Teoria da Relatividade Geral é uma teoria geométrica da gravitação: o conceito clássico de força gravitacional, dado pelas leis de gravitação de Newton como resultado da interação entre massas, é substituído pela geometria espaço-temporal. Em outras palavras, a gravitação passa a ser interpretada como uma manifestação da própria curvatura do espaço-tempo, causada pela presença de massa, ou energia. A equação dinâmica que descreve a forma como matéria e energia modificam a geometria do espaço-tempo corresponde à equação de campo gravitacional de Einstein, que pode ser deduzida como resultado do princípio variacional.

Suponha, inicialmente, o funcional ação dado por

$$\mathcal{S}_G = \int d^4x \mathcal{L}_G \,, \tag{2.1}$$

onde o lagrangiano $\mathcal{L}_G$, chamado *lagrangiano de Einstein*, depende exclusivamente da métrica $g_{\mu\nu}$, isto é, diz respeito somente a efeitos do campo gravitacional. Uma vez que a ação deve ser independente da escolha de coordenadas, o lagrangiano $\mathcal{L}_G$ deve ser um escalar, de modo que a escolha mais simples é dada por [13]

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, R \,, \tag{2.2}$$

onde $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ é o escalar de Ricci. As equações de movimento surgem variando-se a ação com relação à métrica $g^{\mu\nu}$. De (2.2), segue que

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{S}_G &= \frac{1}{2}\int d^4x\,\delta\left(\sqrt{-g}\,R\right) \\
&= \frac{1}{2}\int d^4x\left\{R\left(\delta\sqrt{-g}\right)+\sqrt{-g}\left[g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}+\left(\delta g^{\mu\nu}\right)R_{\mu\nu}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left[(\delta\mathcal{S})_1+(\delta\mathcal{S})_2+(\delta\mathcal{S})_3\right].
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Lembrando que, para uma matriz qualquer M vale [14]

$$Tr(\ln M) = \ln(det\,M)\,, \tag{2.4}$$

e, consequentemente

$$\begin{aligned}
\delta Tr(\ln M) &= \delta\ln(det\,M) \\
Tr(\frac{1}{M}\delta M) &= \frac{1}{det\,M}\delta(det\,M)\,.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Além disso, tem-se que

$$\begin{aligned}
Tr\,M &= \sum_i M_{ii} \\
\left(M^{-1}\delta M\right)_{ij} &= \sum_k M^{-1}_{ik}\delta M_{kj} \\
Tr\left(M^{-1}\delta M\right) &= \sum_i\left(M^{-1}\delta M\right)_{ii} = \sum_i\sum_k M^{-1}_{ik}\delta M_{kj}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Deste modo, usando (2.5) e (2.6) com $M = g^{\mu\nu}$ e $g^{-1} = det\,g^{\mu\nu} = det\,M$, segue que

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} &= g\delta(g^{-1}), \\
\delta(g^{-1}) &= \frac{1}{g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Daí, tem-se que

$$\begin{aligned}
\delta\sqrt{-g} &= \delta\left[\left(-g^{-1}\right)^{-1/2}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left(-g^{-1}\right)^{-3/2}\delta(-g^{-1}) \\
&= \frac{1}{2}\left(-g^{-1}\right)^{-3/2}\delta(g^{-1}) \\
&= \frac{1}{2}(-g)^{3/2}\frac{1}{g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Além disso, sendo a forma do tensor de Riemann

$$R^{\rho}_{\mu\lambda\nu} = \partial_{\lambda}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} \tag{2.9}$$

e fazendo a variação tem-se

$$\delta R^{\rho}_{\mu\lambda\nu} = \partial_{\lambda}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} + (\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu})\Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda} - (\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda})\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}. \tag{2.10}$$

Com um pouco de álgebra, a equação (2.10) pode ser reescrita na forma

$$\delta R^{\rho}_{\mu\lambda\nu} = \nabla_{\lambda}\left(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\right) - \nabla_{\nu}\left(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\right) \tag{2.11}$$

que é chamada de equação de Palatini. Deste modo, a variação do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, dado pela contração $R^{\rho}_{\mu\rho\nu}$, tem a forma

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\rho}\left(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\right) - \nabla_{\nu}\left(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\rho}\right). \tag{2.12}$$

Assim, para encontrar a contribuição da integral $(\delta\mathcal{S})_2$ em (2.3) segue que

$$\begin{aligned}
(\delta\mathcal{S})_2 &= \int d^4x\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\left[\nabla_{\rho}\left(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\right) - \nabla_{\nu}\left(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\rho}\right)\right] \\
&= \int_{\Omega} d\Omega\left[g^{\mu\nu}\nabla_{\rho}\left(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\right) - g^{\mu\rho}\nabla_{\rho}\left(\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}\right)\right] \\
&= \int_{\Omega} \nabla_{\rho}\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - g^{\mu\rho}\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}\right) d\Omega \\
&= \int_{\partial\Omega}\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - g^{\mu\rho}\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}\right) dS_{\rho}\,,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

onde foi usado que $\nabla_{\rho}g^{\mu\nu}{\equiv}0$. Além disso, o Teorema de Stokes foi aplicado e a equação (2.13) representa uma integral de superfície. No entanto, como é usual no princípio variacional, as variações $\delta g^{\mu\nu}$ e as variações de suas primeiras derivadas, combinadas em $\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$, devem ser nulas no contorno $\partial\Omega$, de modo que

$$(\delta\mathcal{S})_2 = 0\,. \tag{2.14}$$

Finalmente, usando as contribuições (2.8) e (2.14) em (2.3) tem-se que

$$\delta\mathcal{S}_G = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right]\delta g^{\mu\nu} = 0\,. \tag{2.15}$$

Como a equação acima deve valer para qualquer variação $\delta g^{\mu\nu}$ arbitrária, então

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{S}_G}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}\right] = 0 \\ \therefore \quad & G_{\mu\nu} = 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

que é a *equação de campo de Einstein no vácuo.*

Torna-se razoável, agora, supor que existem outros campos presentes além do campo gravitacional, de modo que a ação completa da relatividade geral a ser considerada será [15]

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \mathcal{S}_G + \kappa \mathcal{S}_M \\ &= \int d^4x \left(\mathcal{L}_G + \kappa \mathcal{L}_M\right), \end{aligned} \tag{2.17}$$

onde $\mathcal{L}_M$, chamado *lagrangiano de matéria*, compreende toda a matéria e os campos além do tensor métrico e $\mathcal{L}_G$ é dado pela equação (2.2). A constante de proporcionalidade κ é chamada *constante de acoplamento*. Aplicando o princípio variacional na ação (2.17) com relação à métrica $g^{\mu\nu}$ tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{\delta \mathcal{S}_G}{\delta g^{\mu\nu}} + \kappa \frac{\delta \mathcal{S}_M}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, G_{\mu\nu} + \kappa \frac{\delta \mathcal{S}_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Definindo o *tensor de energia-momento* como [16]

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{S}_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \tag{2.19}$$

segue que

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \tag{2.20}$$

É importante notar que a definição (2.19), apesar de não ser a única forma de escrever o tensor de energia-momento, demonstra ser uma maneira bastante satisfatória de fazê-lo já que $T_{\mu\nu}$ é automaticamente conservado devido à identidade de Bianchi.

Assim, o lado esquerdo da equação (2.20) fornece informações a respeito da curvatura do espaço-tempo determinada pela métrica, enquanto o lado direito representa a distribuição de matéria contida no espaço-tempo. Fazer esta relação é um dos princípios básicos da relatividade geral.

A constante κ é determinada utilizando o princípio de correspondência, uma vez que a equação (2.20) deve ser reduzida à gravitação de Newton no limite não-relativístico, e é um resultado conhecido da relatividade geral dado por [17]

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}. \tag{2.21}$$

em unidades não-relativísticas. A equação de Einstein, portanto, tem a forma ($c = 1$):

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{2.22}$$

A equação (2.17) pode ser modificada de várias maneiras diferentes, fornecendo como resultado alterações na equação de campo. Uma alteração importante é adicionar um termo constante à ação convencional de modo a ter

$$\mathcal{S} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[(R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M\right] , \tag{2.23}$$

onde Λ é chamada *constante cosmológica*. Neste caso, surge na solução um termo proporcional à métrica $g_{\mu\nu}$ e a equação de campo tem a forma

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{2.24}$$

2.4 O Postulado de Weyl

Em 1923, H. Weyl questionou como seria possível relacionar as propriedades observadas localmente com efeitos que gostaríamos de estudar à distância. Ele argumentou, por fim, que na tentativa de entender o distante era necessário se basear, na medida do possível, nas teorias que podem ser verificadas em nossa vizinhança. Baseado nesta suposição, ele introduziu um "substrato", ou fluido, permeando o espaço de modo que as galáxias movem-se nele como partículas em um fluido. Desta forma, o universo pode ser considerado, com boa aproximação, como um fluido perfeito.

Um fluido ideal é caracterizado por uma densidade de matéria $\rho(x^\mu)$, por uma pressão $p(x^\mu)$, ambas medidas por um observador em um referencial em repouso com relação ao fluido, isto é, um referencial co-móvel, e pela 4-velocidade deste fluido. Além disto, p e ρ estão relacionadas por uma equação de estado que governa o tipo de fluido em consideração. No limite em que a pressão tende a zero, o fluido perfeito reduz-se à poeira, o que corresponderia aos dias de hoje (era de matéria). A definição do tensor de energia-momento para o fluido perfeito adotado ao longo deste trabalho é dada por

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^{\mu}u^{\nu} - pg^{\mu\nu}, \tag{2.25}$$

onde $u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}$ é a 4-velocidade do fluido. A homogeneidade e a isotropia do espaço postuladas pelo Princípio Cosmológico exigem que a densidade média ρ e a pressão p sejam funções exclusivas do tempo.

2.5 A Expansão e a Lei de Hubble

Assim como o som da sirene de uma ambulância parece ser mais agudo à medida que ela se aproxima e mais grave conforme ela se afasta, a luz emitida por uma fonte luminosa que se desloca com relação ao observador sofre um desvio espectral (diferença entre o comprimento de onda medido no laboratório e o observado), devido ao efeito Doppler ótico.

Nos anos 20, medindo a velocidade radial de galáxias com o recém instalado telescópio do Monte Wilson, Edwin Hubble observou que a maioria dos desvios espectrais é para o vermelho, indicando que as galáxias estão se afastando umas das outras e da Via Láctea. Observacionalmente, ele concluiu [18] que a velocidade radial v com que uma galáxia se afasta da Via Láctea (chamada velocidade de recessão) é diretamente proporcional à sua distância d, expressando esta relação com a expressão matemática que leva seu nome, a Lei de Hubble (1929):

$$v = H_0 d \tag{2.26}$$

A constante H_0 chamada *constante de Hubble*, que corresponde ao parâmetro de Hubble $H(t)$ medido hoje, possui unidade de $[T]^{-1}$ e sua estimativa é um valor aproximado para a idade do universo (cerca de 10^{10} anos). Esta constituiu a primeira evidência de que o universo não era estático, e sim estava expandindo. Tal expansão, pelo princípio cosmológico, deve se dar homogênea e isotropicamente, de modo que é possível escrever a relação

$$r(t) = S(t)r(t_0)\,, \tag{2.27}$$

onde $r(t)$ é a distância entre um determinado par de galáxias, $r(t_0)$ é constante para este par e $S(t)$ é um fator de expansão universal chamado *fator de escala*.

A velocidade de recessão de uma galáxia é dada pela derivada temporal da expressão (2.27)

$$v(t) = \dot{r}(t) = r(t_0)\dot{S}(t) \equiv H(t)r(t) \tag{2.28}$$

usando (2.26). Assim, o parâmetro de Hubble $H(t)$ pode ser escrito como

$$H(t) = \frac{\dot{S}(t)}{S(t)}. \tag{2.29}$$

2.6 O Elemento de Linha

Introduzindo as coordenadas x^μ, de modo que $x^0 = t$ corresponde ao tempo medido por um observador no referencial co-móvel e x^i são as coordenadas espaciais, o Princípio Cosmológico permite que o elemento de linha seja escrito como

$$ds^2 = dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j = dt^2 - d\sigma^2, \tag{2.30}$$

uma vez que a isotropia permite a sincronização de relógios (de modo a ter $g_{0i} = 0$, ou seja, não existe direção privilegiada para a qual g_{0i} aponte) e a homogeneidade garante que esta sincronização pode ser feita equivalentemente em todo o espaço. O elemento g_{00} é tomado igual a 1 para, no caso de eventos vizinhos medidos por observadores co-móveis ($dx^i = 0$), o tempo t corresponder ao tempo próprio , de modo que o intervalo invariante seja dado por $dt^2 \equiv ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{00}dt^2$. Em (2.30), $d\sigma^2$ representa a distância espacial própria entre eventos simultâneos.

Além disto, como todos os pontos do espaço devem ser geometricamente equivalentes, a homogeneidade e a isotropia requerem, em particular, que o espaço tenha curvatura constante em torno de cada ponto. Matematicamente, um espaço de curvatura constante é caracterizado pela equação

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = K(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}), \tag{2.31}$$

onde K é uma constante chamada curvatura. Considerando o espaço tridimensional

$$R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \tag{2.32}$$

e contraindo (2.32) com a métrica g^{ik}

$$\begin{aligned} g^{ik}R_{ijkl} &= R_{jl} \\ &= Kg^{ik}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \\ &= K(3g_{jl} - \delta_l^k g_{jk}) \\ &= K(3g_{jl} - g_{jl}) \\ &= 2Kg_{jl}\,, \end{aligned} \tag{2.33}$$

ou seja, para um 3-espaço de curvatura constante, o tensor de Ricci R_{jl} é proporcional à métrica deste espaço. Seja agora o elemento de linha em 3 dimensões escrito da forma $d\sigma^2 = g_{ij}dx^i dx^j$. Como o espaço é isotrópico, ele deve ser esfericamente simétrico[1] em torno de cada um dos pontos. Neste caso, o elemento de linha deve ter a forma

$$d\sigma^2 = e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2). \tag{2.34}$$

Usando as componentes do tensor de Ricci[2] para a métrica dada em (2.34) e comparando com (2.33), tem-se

$$R_{11} = \frac{\lambda'(r)}{r} = 2Ke^{\lambda(r)}, \tag{2.35}$$

$$R_{22} = 1 + \frac{1}{2}re^{-\lambda(r)}\lambda'(r) - e^{-\lambda(r)} = 2Kr^2, \tag{2.36}$$

$$R_{33} = R_{22}sen^2\theta = 2Kr^2sen^2(\theta), \tag{2.37}$$

de modo que a solução do sistema formado pelas equações (2.35) e (2.36) é

$$e^{-\lambda} = 1 - Kr^2. \tag{2.38}$$

Assim, o elemento de linha para a superfície de curvatura constante pode ser reescrito como

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2). \tag{2.39}$$

A homogeneidade e a isotropia exigem que a parte espacial do tensor métrico evolua somente por meio de uma função universal do tempo, como visto na equação (2.27), de

[1] Apêndice A, com um Resumo da seção 14.4 do d'Inverno

[2] Apêndice B1, com os cálculos do Maple.

modo que é possível reescrever (2.30) usando (2.39)

$$ds^2 = dt^2 - [S(t)]^2 \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2) \right). \tag{2.40}$$

A constante K pode assumir, em princípio, qualquer valor positivo, negativo ou nulo. Torna-se interessante definir k de modo que $K = |K|k$, e assim k vale $+1$ ou -1, dependendo de K ser positivo ou negativo. Fazendo a mudança em (2.40) segue que

$$ds^2 = dt^2 - \frac{[S(t)]^2}{|K|} \left(\frac{|K|dr^2}{1 - kr^2} + |K|r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2) \right). \tag{2.41}$$

No caso de $K = 0$, a equação (2.40) toma a forma

$$ds^2 = dt^2 - [S(t)]^2 \left(dr^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2) \right). \tag{2.42}$$

Procedendo uma mudança de escala em r, redefinindo $r \equiv |K|^{\frac{1}{2}} r$, e chamando

$$\begin{aligned} a(t) &= S(t)/|K|^{\frac{1}{2}} \quad \text{se } K \neq 0, \\ a(t) &= S(t) \quad \text{se } K = 0, \end{aligned}$$

é possível reescrever a equação acima na forma

$$ds^2 = dt^2 - [a(t)]^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2) \right), \tag{2.43}$$

onde k pode assumir os valores $+1$, -1 ou 0 e (2.43) é chamado *elemento de linha de Robertson-Walker*.

2.7 A Equação de Friedmann

Um modelo cosmológico corresponde a soluções das equações de campo de Einstein para um fluido perfeito e que reproduzem as principais características do universo. A cosmologia relativística tem, portanto, sua base nos três ingredientes seguintes:

- O **princípio cosmológico**, que leva ao elemento de linha de Robertson-Walker

$$ds^2 = dt^2 - [a(t)]^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2) \right). \tag{2.44}$$

- O **postulado de Weyl**, que introduz o fluido perfeito, cujo tensor de energia-momento é dado por

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)g^{\mu\alpha}u_\alpha u^\nu - pg^{\mu\nu}. \tag{2.45}$$

- A Teoria da Relatividade Geral como ferramenta matemática, com **equação de Einstein** com constante cosmológica ($G = 1$)

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \tag{2.46}$$

No referencial co-móvel que será adotado, a 4-velocidade do fluido é dada por

$$u^\mu \doteq (1, 0, 0, 0). \tag{2.47}$$

Uma vez que pelo princípio cosmológico a métrica é diagonal por construção e $g_{00} = 1$, as componentes do tensor de energia-momento são dadas por

$$\begin{aligned}
T_{00} &= (\rho + p)u_0 u_0 - pg_{00} \\
&= (\rho + p)g_{0i}u^i u_0 - pg_{00} \\
&= (\rho + p)g_{00}u^0 u_0 - pg_{00} \\
&= \rho, && (2.48) \\
T_{0i} &= (\rho + p)u_0 u_i - pg_{0i} \\
&= (\rho + p)g_{0k}u^k u_0 \\
&= 0, && (2.49) \\
T_{ij} &= (\rho + p)u_i u_j - pg_{ij} \\
&= (\rho + p)g_{ik}u^k u_j - pg_{ij} \\
&= -pg_{ij}. && (2.50)
\end{aligned}$$

A fim de calcular as componentes do tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, são necessárias as componentes do Tensor de Ricci[3] para a métrica dada por (2.44)

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} && (2.51)\\
R_{11} &= -\frac{a\ddot{a}+2k+2\dot{a}^2}{-1+kr^2} && (2.52)\\
R_{22} &= \left(a\ddot{a}+2k+2\dot{a}^2\right)r^2 && (2.53)\\
R_{33} &= -sen^2\theta R_{22} && (2.54)
\end{aligned}
$$

e o escalar de Ricci

$$R=-6\frac{\ddot{a}}{a}-6\frac{k}{a^2}-6\frac{\dot{a}^2}{a^2}. \qquad (2.55)$$

Substituindo agora as equações (2.48)-(2.55) em (2.46)

$$
\begin{aligned}
G_{00}-\Lambda g_{00} &= 8\pi T_{00},\\
R_{00}-\frac{1}{2}g_{00}R-\Lambda g_{00} &=\\
-3\frac{\ddot{a}}{a}-\frac{1}{2}\left(-6\frac{\ddot{a}}{a}-6\frac{k}{a^2}-6\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)-\Lambda &=\\
3\frac{\dot{a}^2+k}{a^2}-\Lambda &= 8\pi\rho && (2.56)
\end{aligned}
$$

e também

$$
\begin{aligned}
G_{ij}-\Lambda g_{ij} &= 8\pi T_{ij}\\
R_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}R-\Lambda g_{ij} &= -8\pi p g_{ij},
\end{aligned}
$$

onde só sobrevivem os termos com $i=j$, de modo que

$$R_{ii}-\frac{1}{2}g_{ii}R-\Lambda g_{ii}=-8\pi p g_{ii} \qquad (2.57)$$

para $i=1,2,3$.

[3] Apendice B2, com os calculos do Maple.

Assim:

$$\begin{aligned} G_{11} - \Lambda g_{11} &= 8\pi T_{11} \\ R_{11} - \frac{1}{2} g_{11} R - \Lambda g_{11} &= -8\pi p g_{11} \\ \frac{a\ddot{a} + 2k + 2\dot{a}^2}{1 - kr^2} + \frac{a^2}{2(1-kr^2)}\left(-6\frac{\ddot{a}}{a} - 6\frac{k}{a^2} - 6\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) &+ \frac{\Lambda a^2}{1-kr^2} = \frac{8\pi p a^2}{1-kr^2} \\ a\ddot{a} + 2k + 2\dot{a}^2 - 3(a\ddot{a} + 2k + 2\dot{a}^2) + \Lambda a^2 &= 8\pi p a^2 \\ -2a\ddot{a} - k - \dot{a}^2 + \Lambda a^2 &= 8\pi p a^2 \\ \frac{2a\ddot{a} + k + \dot{a}^2}{a^2} - \Lambda &= 8\pi p. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Além disto, usando (2.45), a lei de conservação

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{2.59}$$

fornece a equação

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + p\frac{d}{dt}(a^3) = 0, \tag{2.60}$$

que também pode ser obtida combinando-se apropriadamente (2.56) e (2.58).

Na época atual, a pressão p é desprezível se comparada à densidade de matéria ρ, de acordo com dados observacionais. Assim, é possível tomar $p = 0$ de modo que o "substrato" é formado de poeira. Assim a equação (2.58) toma a forma

$$2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k - \Lambda a^2 = 0, \tag{2.61}$$

e usando

$$\int a(t)\ddot{a}(t)dt = a(t)\dot{a}(t) - \int \dot{a}^2(t)dt$$

para integrar (2.61), segue que

$$a(\dot{a}^2 + k) - \frac{1}{3}\Lambda a^3 = C, \tag{2.62}$$

onde C é uma constante de integração. De (2.56)

$$\begin{aligned} \dot{a}^2 &+ k - \frac{1}{3}\Lambda a^2 = 8\pi\rho a^2 \\ &\therefore \; C = \frac{8}{3}\pi\rho a^3. \end{aligned} \tag{2.63}$$

A equação (2.62)

$$\dot{a}^2 = \frac{C}{a} + \frac{1}{3}\Lambda a^2 - k, \tag{2.64}$$

é chamada de *equação de Friedmann para o fator de escala* $a(t)$ *na ausência de pressão.* A escolha das constantes de curvatura k e cosmológica Λ define um modelo cosmológico de FRW (Friedmann-Robertson-Walker).

2.8 Exemplos de Modelos FRW na Época Atual

Nesta seção serão apresentados alguns exemplos de modelos cosmológicos como soluções da equação de Friedmann (2.64). Outras soluções analíticas podem ser encontradas em [19].

2.8.1 Modelo Estático de Einstein

Além de homogêneo e isotrópico, o modelo proposto por Einstein era estático (isto é, desprovido de dinâmica em larga escala e, portanto, $\dot{a} = 0$) e fechado (ou seja, limitado nas direções espaciais e portanto finito, com $k = 1$). Assim que tentou aplicar a sua equação de campo na forma original (2.22), Einstein verificou que só seria possível uma solução estática se a equação fosse modificada, introduzindo um termo extra, chamado *constante cosmológica* Λ.

Colocado do lado esquerdo da equação de campo, o termo com constante cosmológica sugere que o espaço seria curvo mesmo na ausência de matéria ($T_{\mu\nu} = 0$). A tendência atual é a de movê-lo para o lado direito de (2.24), de maneira que ele aparece não mais como uma mudança nas equações de campo, e sim como uma contribuição no tensor energia-momento. Desta forma, o tensor de energia-momento possuiria, além de uma contribuição devida a matéria em si, uma contribuição proporcional ao tensor métrico $\Lambda g_{\mu\nu}$.

No entanto, o universo de Einstein se encontra em um ponto de equilíbrio instável, de modo que a constante cosmológica deveria estar submetida a um ajuste fino para que o modelo funcionasse.

2.8.2 Modelo de Einstein-de Sitter ou Modelo Padrão

Neste modelo, tanto a curvatura k como a constante cosmológica Λ são desprezíveis em comparação com a densidade de matéria ρ. A escolha do parâmetro k como sendo igual a zero fornecerá como resultado da equação de Friedmann (2.64) modelos cosmológicos relativísticos para a época atual ($p = 0$) com curvatura nula, ou seja, modelos planos. O fator de escala obedece, neste caso, à equação

$$\begin{aligned} \dot{a}^2 &= \frac{C}{a} \\ \dot{a} &= \frac{C^{1/2}}{a^{1/2}} \\ \frac{da}{dt} &= \frac{C^{1/2}}{a^{1/2}} \\ a^{1/2}da &= C^{1/2}dt. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Supondo $a(t=0) = 0$ e integrando (2.65) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}a^{3/2} &= C^{1/2}t \\ \therefore a(t) &= \left(\frac{9}{4}C\right)^{1/3} t^{2/3}. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Da conservação de energia (2.60) segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho a^3) &= 0 \\ \rho(t)a(t)^3 = cte \rightarrow \rho(t) &= \frac{cte}{a(t)^3}, \end{aligned}$$

mas de (2.63) vem

$$C = \frac{8}{3}\pi\rho(t)a(t)^3 \rightarrow \rho(t) = \frac{3C}{8\pi a(t)^3}, \tag{2.67}$$

e assim

$$\rho(t) = \frac{1}{6\pi t^2}. \tag{2.68}$$

Definindo

$$q(t) = \frac{-a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \tag{2.69}$$

como o *parâmetro de desaceleração*, para o caso do modelo de Einstein-de Sitter, tem-se

$$q(t) = -\frac{\left(\frac{9}{4}C\right)^{1/3} t^{2/3} \frac{-2}{9}\left(\frac{9}{4}C\right)^{1/3} t^{-4/3}}{\frac{4}{9}\left(\frac{9}{4}C\right)^{2/3} t^{-2/3}} = \frac{1}{2}. \tag{2.70}$$

Capítulo 3

Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação

A motivação para a busca de teorias alternativas à Teoria da Relatividade Geral (RG) inclui não somente a tentativa de unificação, "geometrizando" os outros campos como foi feito com o campo gravitacional por Einstein, mas também consiste em levantar questões a respeito da própria teoria e delimitar sua fronteira, comparando dados experimentais com as previsões de Einstein [20] ou das outras formulações [21]. Dentre as tentativas de unificação, as teorias de Kaluza-Klein [22] e de supercordas se destacam por preverem a existência de campos escalares acoplados à matéria que surgem naturalmente da compactificação de dimensões extras, se tornando assim precedentes às chamadas Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação (ST).

As ST foram inicialmente propostas por Pascual Jordan [23], que, inspirado pela proposta de Dirac [24] de que a constante gravitacional deveria ser dependente do tempo, levantou a possibilidade de que a nova componente da métrica na quinta dimensão nas teorias de Kaluza-Klein, isto é, o campo escalar, pudesse estar relacionada à "constante" gravitacional variável. No entanto, no trabalho de Jordan o lagrangiano de matéria aparecia dependendo diretamente do campo escalar, ou seja, as equações de movimento para uma massa qualquer na presença de uma certa distribuição de matéria não forneceriam as mesmas geodésicas da RG, violando o princípio de equivalência fraco, conforme foi argumentado por Fierz [25].

O exemplo mais proeminente da ST consiste no modelo proposto por C. Brans e R. H. Dicke [26], no qual, visando preservar o princípio de equivalência, assumiram que o campo escalar surgisse desacoplado do lagrangiano de matéria. Na teoria de Brans-Dicke, o campo escalar, suposto como sendo sem massa, acopla-se com a curvatura por um fator constante. Teorias seguintes [28] introduziram o acoplamento dinâmico (isto é, dependente do campo escalar) entre a matéria e o campo escalar e/ou um termo de auto-interação e, posteriormente, generalizaram a formulação para o caso de múltiplos campos escalares [29].

3.1 A Teoria de Brans-Dicke

O modelo desenvolvido por Brans-Dicke possuía como objetivo apresentar uma teoria de gravitação relativística alternativa compatível com o *princípio de Mach* de reação inercial, que enuncia que as propriedades inerciais locais são determinadas pela distribuição total de massa do universo. Assim, a constante gravitacional deveria ser uma função desta distribuição de massa e esta relação pode ser escrita na forma [30]

$$\frac{1}{8\pi G} \approx \frac{m}{r}, \tag{3.1}$$

onde m e r representam a massa e o raio do universo até o limite visível, respectivamente, e G corresponde à constante de Newton.

Na formulação Newtoniana da gravitação a interação gravitacional devida a uma distribuição de matéria de densidade $\rho = \rho(x, y, z)$ é descrita por um potencial gravitacional escalar ϕ de modo a satisfazer a equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho = \frac{\kappa}{2} \rho, \tag{3.2}$$

onde $\kappa = 8\pi G$. Desta forma, é possível comparar $1/\kappa$, ou $1/G$, com o campo escalar Φ médio associado à densidade de massa do universo [31].

O procedimento seguido por Brans e Dicke partia do funcional ação definido na RG por (2.17), ou seja

$$\delta \int d^4x \left[\frac{1}{2} \sqrt{-\widetilde{g}} \widetilde{R} + \kappa \mathcal{L}_M \right] = 0, \tag{3.3}$$

onde $\widetilde{R}$ é o escalar de curvatura associado a métrica física $\widetilde{g}_{\mu\nu}$ e $\mathcal{L}_M$ é o lagrangiano de matéria que contém os campos materiais Ψ_M acoplados exclusivamente à métrica $\widetilde{g}_{\mu\nu}$, preservando o princípio de equivalência. Dividindo (3.3) por κ segue que

$$\delta \int d^4x \left[\frac{1}{2\kappa}\sqrt{-\widetilde{g}}\widetilde{R} + \mathcal{L}_M\right] = 0 \tag{3.4}$$

e fazendo a substituição de $1/G \to \Phi$ tem-se

$$\delta \int d^4x \left[\frac{1}{16\pi}\Phi\sqrt{-\widetilde{g}}\widetilde{R} + \mathcal{L}_M\right] = 0. \tag{3.5}$$

Além disto, é necessário adicionar um termo à ação que forneça informações a respeito do campo escalar Φ,

$$\mathcal{L}_\Phi = \frac{\omega}{\Phi}\widetilde{g}^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi\partial_\mu\Phi\,, \tag{3.6}$$

que é o termo cinético do lagrangiano usual para um campo escalar, lembrando que neste caso não está sendo considerada dinâmica associada a este campo ($V(\Phi) = 0$), e o escalar no denominador foi introduzido de modo a manter a constante ω, que é o único parâmetro da teoria de Brans-Dicke, adimensional. Assim, é possível escrever o lagrangiano de Brans-Dicke como

$$\mathcal{L}_{BD} = \sqrt{-\widetilde{g}}\left(\Phi\widetilde{R} - \frac{\omega}{\Phi}\widetilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi\right) + 16\pi\mathcal{L}_M. \tag{3.7}$$

O princípio de acoplamento mínimo da RG enuncia que o funcional ação descrevendo o acoplamento entre os campos de matéria e as outras interações deve ser uma deformação mínima do funcional ação da Relatividade Especial, substituindo-se a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu}$ e as derivadas parciais ∂_μ pelas respectivas derivadas covariantes ∇_μ. Ou seja, a passagem de uma teoria para outra não deve ser feita adicionando-se termos explicitamente dependentes do tensor de curvatura. Se o acoplamento entre o campo escalar e a métrica fosse realizado somente pelo termo cinético (3.6), o acoplamento seria dito *mínimo*. No entanto, o primeiro termo à direita de (3.7) não pode ser obtido obedecendo-se a esta regra, uma vez que no espaço-tempo de Minkowski $R = 0$ e este termo desapareceria. Desta forma, note que o acoplamento entre o campo escalar e a gravidade é feito não-minimamente.

Assim, tem-se

$$\mathcal{S}_{BD} = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-\widetilde{g}}\left(\Phi\widetilde{R} - \frac{\omega}{\Phi}\partial^\mu\Phi\partial_\mu\Phi\right) + \mathcal{S}_M\left(\Psi_M, \widetilde{g}_{\mu\nu}\right) \tag{3.8}$$

e as equações de campo são obtidas aplicando-se o princípio variacional com relação aos campos $\widetilde{g}^{\mu\nu}$ e ao campo escalar Φ. Logo, variando-se (3.7) com relação a Φ segue que

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{BD}}{\partial \Phi} = \sqrt{-\widetilde{g}}\;\widetilde{R} + \frac{\omega}{\Phi^2}\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi \sqrt{-\widetilde{g}} \tag{3.9}$$

e diferenciando com relação a $\partial_\sigma \Phi$ tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{BD}}{\partial\left(\partial_\sigma \Phi\right)} &= -\frac{\omega}{\Phi}\frac{\partial}{\partial\left(\partial_\sigma \Phi\right)}\left(\widetilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi\right)\sqrt{-\widetilde{g}} \\ &= -\frac{\omega\sqrt{-\widetilde{g}}}{\Phi}2\partial^\sigma \Phi. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \partial_\sigma\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{BD}}{\partial\left(\partial_\sigma \Phi\right)}\right) &= -2\omega\partial_\sigma\left[\frac{1}{\Phi}\sqrt{-\widetilde{g}}\;\partial^\sigma \Phi\right] \\ &= -2\omega\left[-\frac{1}{\Phi^2}\left(\partial_\sigma \Phi\right)\sqrt{-\widetilde{g}}\;\partial^\sigma \Phi + \frac{1}{\Phi}\left(\partial^\sigma \Phi\right)\partial_\sigma\sqrt{-\widetilde{g}} + \frac{1}{\Phi}\sqrt{-\widetilde{g}}\;\partial_\sigma\partial^\sigma \Phi\right] \\ &= 2\frac{\omega}{\Phi^2}\left(\partial_\sigma \Phi\right)\left(\partial^\sigma \Phi\right)\sqrt{-\widetilde{g}} - 2\frac{\omega}{\Phi}\left[\left(\partial^\sigma \Phi\right)\partial_\sigma\sqrt{-\widetilde{g}} + \sqrt{-\widetilde{g}}\;\partial_\sigma\partial^\sigma \Phi\right] \\ &= \left[2\frac{\omega}{\Phi^2}\left(\partial_\sigma \Phi\right)\left(\partial^\sigma \Phi\right) - \frac{2\omega}{\Phi}\widetilde{\Box}\Phi\right]\sqrt{-\widetilde{g}}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde

$$\begin{aligned} \widetilde{\Box}\Phi &= \frac{1}{\sqrt{-\widetilde{g}}}\partial_\mu\left[\sqrt{-\widetilde{g}}\;\partial^\mu \Phi\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\widetilde{g}}}\left(\partial_\mu\sqrt{-\widetilde{g}}\right)\partial^\mu \Phi + \partial_\mu\partial^\mu \Phi. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Substituindo (3.9) e (3.11) na equação de Euler-Lagrange

$$\partial_\sigma\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{BD}}{\partial\left(\partial_\sigma \Phi\right)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{BD}}{\partial \Phi} = 0 \tag{3.13}$$

seque que

$$\frac{\omega}{\Phi}\partial^\sigma \Phi \partial_\sigma \Phi - 2\omega\frac{\widetilde{\Box}\Phi}{\Phi} - \widetilde{R} = 0. \tag{3.14}$$

As equações para o campo $\widetilde{g}_{\mu\nu}$ são obtidas (analogamente a Seção 2.3), variando-se (3.7) com relação a $\widetilde{g}^{\mu\nu}$ e suas primeiras derivadas, conforme descrito detalhadamente em [32], tendo, como resultado

$$\widetilde{G}_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\Phi}\widetilde{T}_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\Phi^2}\left(\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2}\widetilde{g}_{\mu\nu}\widetilde{g}^{\rho\sigma}\partial_\rho \Phi \partial_\sigma \Phi\right) + \frac{1}{\Phi}\left(\partial_\mu\partial_\nu \Phi - \widetilde{g}_{\mu\nu}\widetilde{\Box}\Phi\right). \tag{3.15}$$

Note que o primeiro termo à direita de (3.15) é o termo de fonte usual da RG, ou seja, o tensor de energia-momento derivado do lagrangiano de matéria e dado pela expressão (2.19). O segundo termo desta soma é o tensor de energia-momento do campo escalar, obtido pela variação de (3.6) dada por

$$\begin{aligned}
\sqrt{-\widetilde{g}}\,T^{\Phi}_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{\Phi}}{\partial \widetilde{g}^{\mu\nu}} \\
&= \frac{\partial}{\partial \widetilde{g}^{\mu\nu}}\left[\frac{\omega}{\Phi}\sqrt{-\widetilde{g}}\widetilde{g}^{\alpha\sigma}\partial_{\alpha}\Phi\partial_{\sigma}\Phi\right] \\
&= \frac{\omega}{\Phi}\partial_{\alpha}\Phi\partial_{\sigma}\Phi\left[\frac{\partial \widetilde{g}^{\alpha\sigma}}{\partial \widetilde{g}^{\mu\nu}}\sqrt{-\widetilde{g}} + \widetilde{g}^{\alpha\sigma}\frac{\partial\sqrt{-\widetilde{g}}}{\partial \widetilde{g}^{\mu\nu}}\right] \\
&= \frac{\omega}{\Phi}\partial_{\alpha}\Phi\partial_{\sigma}\Phi\left[\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\nu}\sqrt{-\widetilde{g}} - \frac{1}{2}\widetilde{g}^{\alpha\sigma}\widetilde{g}_{\mu\nu}\sqrt{-\widetilde{g}}\right] \\
\therefore\; T^{\Phi}_{\mu\nu} &= \frac{\omega}{\Phi}\left[\partial_{\mu}\Phi\partial_{\nu}\Phi - \frac{1}{2}\widetilde{g}_{\mu\nu}\widetilde{g}^{\alpha\sigma}\partial_{\alpha}\Phi\partial_{\sigma}\Phi\right]. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Ambos surgem na equação de campo acoplados ao acoplamento gravitacional $1/\Phi$.

O terceiro termo, por sua vez, é resultado direto do fato de o acoplamento entre o campo escalar e a curvatura ter sido feito não-minimamente. No entanto, ao contrair (3.15) obtém-se

$$-\widetilde{R} = \frac{8\pi}{\Phi}\widetilde{T} - \frac{\omega}{\Phi^2}\partial_{\mu}\Phi\partial^{\mu}\Phi - \frac{3}{\Phi}\widetilde{\Box}\Phi\,, \qquad (3.17)$$

onde $\widetilde{T} = \widetilde{g}^{\mu\nu}\widetilde{T}_{\mu\nu}$ é o traço do tensor de energia-momento. Ao combiná-la com (3.14) resulta em uma nova equação de onda para Φ dada por

$$\widetilde{\Box}\Phi = \frac{8\pi}{2\omega+3}\widetilde{T}, \qquad (3.18)$$

ou seja, o campo escalar possui como fonte o traço do tensor de energia-momento, apesar de não estar acoplado à parte material do lagrangiano. A origem de (3.18) está justamente no fato de (3.15) possuir termos resultantes do acoplamento não-mínimo em (3.7). Portanto, um campo material que originalmente acopla-se somente ao campo tensorial $\widetilde{g}_{\mu\nu}$ aparece, finalmente, acoplado ao campo escalar na equação de movimento, por meio da equação representada por (3.18).

Os resultados físicos associados às equações de campo da ST podem ser obtidos fazendo-se a aproximação para campos fracos, analogamente ao que é feito com relação à RG. Neste limite, supõe-se, primeiramente, que o tensor métrico do espaço-tempo desvia ligeiramente da métrica de Minkowski, isto é

$$\widetilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{3.19}$$

onde $h_{\mu\nu}$ é um termo de perturbação. Além disto, o campo escalar é reescrito como

$$\Phi = \Phi_0 + \sigma(x), \tag{3.20}$$

onde $\sigma(x)$ é um termo de primeira ordem tal que $\sigma(x) \ll \Phi_0$. Nesta aproximação, para uma mesma distribuição de matéria, a equação de movimento da Teoria de Brans-Dicke para uma massa pontual é uma geodésica, do mesmo modo que na Relatividade Geral, como mostrado em [33]. Tal resultado pode ser generalizado [34] para as Teorias Escalares-Tensorias que serão vistas a seguir.

É importante ressaltar ainda que, como o tensor de energia-momento para a matéria mantém-se inalterado, continua sendo verdadeira a lei de conservação

$$\nabla_\mu \widetilde{T}^{\mu\nu} = 0. \tag{3.21}$$

Note que se o traço $\widetilde{T}$ for nulo e se o campo escalar Φ for constante a equação de campo (3.15) reduz-se àquela encontrada para a Relatividade Geral em (2.22) se for feita a identificação de $G = 1/\Phi$, e (3.18) se transforma em uma identidade.

Em resumo, a Teoria de Brans-Dicke é, de uma certa maneira, a extensão mais simples da Relatividade Geral, introduzindo um campo escalar Φ como mediador da interação gravitacional juntamente com a métrica do espaço-tempo, o que fica evidenciado por (3.18), de tal modo que campo escalar não exerça influência direta sobre a matéria, uma vez que só aparece acoplado a ela nas equações de campo. Vale ressaltar que qualquer solução exata da equação de Einstein da RG é uma solução particular das equações de campo da ST onde o traço é nulo e o campo escalar é constante.

3.2 A Transformação Conforme

De modo mais geral, a ação das ST pode ser escrita como

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-\widetilde{g}} \left[\Phi \widetilde{R} - \frac{\omega(\Phi)}{\Phi} \widetilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \right] + \mathcal{S}_M \left[\Psi_M, \widetilde{g}^{\mu\nu} \right], \tag{3.22}$$

onde $\omega(\Phi)$ é chamado *parâmetro de acoplamento* e é função do campo escalar Φ. A Teoria de Brans-Dicke remete ao caso particular em que ω é uma constante. Para a ação dada por (3.22), as equações de campo são dadas por

$$\widetilde{G}_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\Phi}\widetilde{T}_{\mu\nu} + \frac{\omega(\Phi)}{\Phi^2}\left[\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi - \frac{1}{2}\widetilde{g}_{\mu\nu}\widetilde{g}^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Phi\partial_\beta\Phi\right] + + \frac{1}{\Phi}\left[\nabla_\mu\partial_\nu\Phi - \widetilde{g}_{\mu\nu}\widetilde{\Box}\Phi\right] \quad (3.23)$$

$$\widetilde{\Box}\Phi = \frac{1}{2\omega(\Phi)+3}\left(8\pi\widetilde{T} - \frac{d\omega(\Phi)}{d\Phi}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi\right) \quad (3.24)$$

Uma vez que a teoria desenvolvida na Seção 3.1 partia do lagrangiano original da RG, ela está representada no referencial físico, chamado de *referencial de Jordan*. No entanto, a presença dos termos com derivadas de segunda ordem do campo escalar em (3.23), oriundas da variação com respeito à métrica da parte gravitacional do lagrangiano (3.22), não permite que todos os termos associados a Φ no lado direito de (3.23) sejam identificados como o tensor de energia-momento do campo escalar [35]. Ou seja, parte da dinâmica do tensor métrico, descrita pelo tensor de Einstein, se encontra acoplada à dinâmica do campo escalar do lado direito de (3.23). Torna-se interessante, portanto, reescrever a ação (3.22) em termos de novas variáveis $g_{\mu\nu}$ e ϕ de modo a desacoplar os graus de liberdade escalar e tensorial. O referencial no qual se faz a transformação da métrica física $\widetilde{g}_{\mu\nu}$ em outra métrica $g_{\mu\nu}$ dada pela regra

$$\widetilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\phi)g_{\mu\nu} \quad (3.25)$$

é dito conforme, ou *referencial de Einstein*, onde $A^2(\phi)$ é uma função arbitrária. Como o quadrado da norma de um vetor contravariante X^μ é definida como

$$X^2 = g_{\mu\nu}X^\mu X^\nu \quad (3.26)$$

e o ângulo entre dois vetores é dado por

$$\cos(X,Y) = \frac{g_{\mu\nu}X^\mu Y^\nu}{(|g_{\rho\sigma}X^\rho X^\sigma|)^{1/2}(|g_{\alpha\beta}Y^\alpha Y^\beta|)}, \quad (3.27)$$

pode se ver facilmente que a razão entre as magnitudes e o ângulo entre vetores permanece inalterada sob a transformação (3.25), isto é, estas quantidades são conformalmente invariantes. Grandezas como a conexão $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}$, o tensor de Riemann $R^\sigma_{\mu\nu\rho}$ e, por sua vez, o escalar de Ricci R não são invariantes sob transformações conformes.

Nesse novo referencial, a ação da ST pode ser reescrita como

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G_0} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R - 2g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right] + \mathcal{S}_M \left[\Psi_M, A^2(\phi)g_{\mu\nu}\right], \tag{3.28}$$

onde R é o escalar de curvatura associado à nova métrica $g_{\mu\nu}$ e

$$G_0 = \frac{1}{A^2(\phi)\Phi} \tag{3.29}$$

é uma constante de gravitação média. É importante ressaltar que, conforme explicitado pelos colchetes no último termo de (3.28), a ação de matéria é um funcional dos campos materiais Ψ_M e da métrica física $\widetilde{g}_{\mu\nu}$.

Note que em (3.28) não surge mais o acoplamento não mínimo entre o campo escalar ϕ e a curvatura R. Além disto, o termo cinético não apresenta a função arbitrária $\omega(\phi)$, como em (3.22). Por este motivo, variando a ação (3.28) com relação à métrica conforme $g^{\mu\nu}$ e ao campo escalar ϕ, a dinâmica do campo escalar e do tensor métrico surgem desacopladas nas equações de campo, dadas por

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G_0 T_{\mu\nu} + 2\left(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}\partial_\lambda\phi\partial_\sigma\phi\right) \tag{3.30}$$

$$\Box\phi = -4\pi G_0\alpha(\phi)T, \tag{3.31}$$

onde foi definido

$$\alpha(\phi) = \frac{d}{d\phi}(\ln A(\phi)), \tag{3.32}$$

e $\Box$ representa o operador d'Alembertiano de $g_{\mu\nu}$.

Assim, no referencial de Einstein a dinâmica do campo gravitacional é determinada pela ação $\mathcal{L}_G$ definida em (2.2), que resulta no tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ do lado esquerdo de (3.30) contendo todos os termos que envolvem a dinâmica do tensor métrico. Além disto, a parte dependente do campo escalar no novo funcional surge na forma do termo cinético associado a um campo usual ϕ. Isto permite que a equação (3.30) seja reescrita como

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G_0 T_{\mu\nu} + T^{\phi}_{\mu\nu}, \tag{3.33}$$

na qual o lado esquerdo descreve a dinâmica associada à métrica e o lado direito contém as fontes dadas pelo tensor de energia-momento no referencial de Einstein definido na forma padrão,

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathcal{S}_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \tag{3.34}$$

e pelo tensor de energia-momento relativo ao campo escalar ϕ.

Além disso, fica claro por (3.31) que a grandeza $\alpha(\phi)$ representa uma medida (dependente do campo escalar) da força de acoplamento entre o campo escalar e a matéria[1]. Assim como ao tomar $\omega(\Phi)$ constante recaía-se no caso particular da Teoria Escalar-Tensorial que é a Teoria de Brans-Dicke, a escolha da função $A(\phi)$ especifica univocamente uma Teoria Escalar-Tensorial. Além disto, impondo o vínculo

$$\alpha^2(\phi) = \frac{1}{2\omega(\Phi)+3} \tag{3.35}$$

as novas grandezas $g_{\mu\nu}$, ϕ e $A(\phi)$ do referencial conforme são definidas univocamente em termos das grandezas correspondentes $\widetilde{g}_{\mu\nu}$, Φ e $\omega(\Phi)$ no referencial de Jordan.

Observe ainda que o lagrangiano de matéria no referencial de Jordan e no referencial de Einstein são iguais, sendo que este último está expresso em termos das quantidades no referencial não físico,

$$\delta\mathcal{S}_M = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-\widetilde{g}}\,\widetilde{T}_{\mu\nu}\delta\widetilde{g}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \tag{3.36}$$

No entanto, ao aplicar a regra da cadeia

$$\frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta\widetilde{g}^{\mu\nu}} = \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial\widetilde{g}^{\mu\nu}}\frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta g^{\rho\sigma}} = A^{-2}\frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \tag{3.37}$$

segue que

$$T_{\mu\nu} = A^2(\phi)\widetilde{T}_{\mu\nu}. \tag{3.38}$$

Consequentemente, tem-se

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = A^4(\phi)\widetilde{T} \tag{3.39}$$

e também

$$T^{\mu}_{\ \nu} = A^4(\phi)\widetilde{T}^{\mu}_{\ \nu}, \tag{3.40}$$

o que implica em

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = \alpha(\phi)T\partial_\nu\phi\,, \tag{3.41}$$

[1]O valor α^2 surge em todas as grandezas onde ocorre interação entre dois corpos materiais mediada pelo campo escalar (do mesmo modo que e^2 surge para as interações eletromagnéticas).

ou seja, o tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$ do referencial conforme não representa o tensor de energia-momento dos campos materiais (físico) uma vez que não é conservado. Por outro lado, utilizando a identidade de Bianchi fica claro de (3.30) que a soma de $T_{\mu\nu}$ e do tensor de energia associado ao campo ϕ é conservada, indicando que existe troca de energia entre a matéria e o campo escalar.

O termo "referencial físico" deve-se ao fato de a matéria acoplar-se de forma direta somente à métrica, o que é natural uma vez que, devido ao acoplamento direto, as partículas possuem massa constante e se movem em geodésicas da métrica física, isto é, o tensor de energia-momento físico é conservado. De modo geral, apesar de parecer apenas um detalhe puramente técnico, a escolha do referencial a ser usado pode alterar significativamente as previsões físicas de uma teoria [35], o que por sua vez leva a certa confusão a respeito se o referencial de Jordan ou o referencial de Einstein deve ser considerado físico [36, 37], em teorias clássicas e quânticas da gravitação. Por outro lado, é importante ressaltar que ambas representam somente descrições diferentes da natureza.

No que segue, não será preciso especificar os campos de matéria Ψ_M: será suficiente usar as equações de campo (3.30)-(3.31) aliadas à lei de conservação (3.21). Além disto, por simplicidade na notação, será retirado o índice 0 da constante de Newton G_0, de modo que, daqui por diante, será considerado $G_0 \equiv G$. No entando, é importante lembrar que não se deve confundir a constante graviatcional variável do início deste capítulo com este valor médio.

Capítulo 4

A Cosmologia Escalar- Tensorial

4.1 Introdução

O interesse em estudar cosmologia em teorias alternativas de gravitação cresce por vários motivos. Uma destas motivações vem do fato de os campos escalares aparecerem envolvidos em modelos cosmológicos que visam reproduzir de modo mais consistente os dados observacionais. Em particular, a teoria de inflação é baseada na presença de um campo escalar φ (chamado *inflaton*) em um potencial $V(\varphi)$, que comporta-se como um fluido com densidade de energia positiva $8\pi G\rho_\varphi = \dot{\varphi}^2 + 2V(\varphi)$, porém com pressão negativa $8\pi G p_\varphi = \dot{\varphi}^2 - 2V(\varphi)$. Este cenário causa um período de expansão exponencial do universo, o que pode explicar porque regiões aparentemente desconectadas casualmente na épora atual deveriam estar conectadas no princípio do universo, de modo que a isotropia observada da radiação cósmica de fundo possa ser entendida. Além disto, a inflação prevê que o universo é aproximadamente plano espacialmente, uma vez que qualquer curvatura inicial foi exponencialmente reduzida pela expansão.

Por outro lado, uma das grandes surpresas em cosmologia moderna veio com o comportamento inesperado observado em supernovas distantes em 1998, indicando uma recém descoberta aceleração na expansão do universo, que leva ao desafio: o universo dominado por uma densidade crítica de matéria, como o modelo de Einstein-de Sitter descrito na Seção 2.8.2, não é compatível com tais dados observacionais. Esta descoberta levou à busca de candidatos para a fonte desta aceleração, chamada genericamente de *energia* *e matéria escura*, entre eles os modelos de quintessência [38] e defeitos topológicos [39]. Uma alternativa natural para se adicionar esta nova forma de energia ao cenário físico do universo seria considerar modificações na Teoria de Relatividade Geral, motivada pelo fato de a precisão das observações em RG estar concentrada na faixa entre as escalas milimétrica e do Sistema Solar, a qual está distante do atual raio do universo, que é a escala relevante para a questão desta energia escura.

4.2 Modelos Cosmológicos Escalares-Tensoriais

A ação que será usada neste trabalho corresponde à ação mais geral das Teorias Escalares-Tensoriais com constante cosmológica Λ, a qual é dada para o referencial de Einstein por

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x\sqrt{-g}\left[R - 2g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - 2\Lambda\left(\phi\right)\right] + \mathcal{S}_M\left[\Psi_M, A^2\left(\phi\right)g_{\mu\nu}\right]. \tag{4.1}$$

Além disto, serão consideradas cosmologias de FRW (Friedmann - Robertson - Walker), que descrevem o universo como homogêneo e isotrópico com métrica dada pelo elemento de linha de Robertson-Walker

$$ds^2 = dt^2 - [a(t)]^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + sen^2(\theta)d\varphi^2)\right). \tag{4.2}$$

Vale ratificar que, uma vez que o universo se apresenta homogêneo e isotrópico em larga escala, uma cosmologia FRW é uma boa aproximação para descrever o universo em que estamos inseridos.

De modo a poder comparar com as observações, é necessário expressar todas as quantidades fisicamente mensuráveis (como tempo próprio, fator de escala, densidade e pressão) em termos das quantidades no referencial de Einstein, as quais serão utilizadas. Devido à relação conforme dada em (3.25) entre a métrica física e a métrica conforme, o tempo próprio medido por relógios ideais não é $d\tau = \sqrt{-ds^2}$ e sim

$$d\widetilde{\tau} = A(\phi)\sqrt{-ds^2}. \tag{4.3}$$

Em particular, para observadores comóveis $d\widetilde{\tau} = A(\phi)dt$. Uma vez que a métrica física também define distâncias, o fator de escala físico é dado por

$$\widetilde{a}(t) = A(\phi)a(t), \tag{4.4}$$

onde $a(t)$ é o fator de escala no referencial conforme. A condição de homogeneidade implica que o campo escalar ϕ seja função exclusiva do tempo no referencial de Einstein, $\phi = \phi(t)$.

Assim como nos modelos FRW da Relatividade geral, a matéria comporta-se como um fluido perfeito, cujo tensor de energia-momento é dado por

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^{\mu}u^{\nu} - pg^{\mu\nu}, \tag{4.5}$$

onde

$$u^{\mu} \equiv \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \tag{4.6}$$

é a 4-velocidade do meio no referencial de Einstein. Uma vez que $d\widetilde{\tau} = A(\phi)d\tau$, então

$$u^{\mu} = A(\phi)\widetilde{u}^{\mu} \;\rightarrow\; \widetilde{u}^{\mu} \equiv \frac{dx^{\mu}}{d\widetilde{\tau}} \tag{4.7}$$

é a 4-velocidade física do meio. Finalmente, como $T_{\mu\nu} = A^2(\phi)\widetilde{T}_{\mu\nu}$, a densidade e a pressão no referencial conforme são expressas em termos das grandezas físicas por

$$\rho = A^4(\phi)\widetilde{\rho}\ , \quad p = A^4(\phi)\widetilde{p}. \tag{4.8}$$

Para a métrica dada por (4.2) e tensor de energia-momento dado por (4.5), as equações de campo associadas ao funcional ação (4.1) são:

$$\begin{aligned}
-3\frac{\ddot{a}}{a} &= 4\pi G\left(\rho + 3p\right) + 2\dot{\phi}^2 - \Lambda\left(\phi\right), && (4.9)\\
3\frac{\left(\dot{a}^2 + k\right)}{a^2} &= 8\pi G\rho + \dot{\phi}^2 + \Lambda\left(\phi\right), && (4.10)\\
\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} &= -4\pi\alpha\left(\phi\right)G\left(\rho - 3p\right) - \frac{1}{2}\frac{d\Lambda\left(\phi\right)}{d\phi}, && (4.11)
\end{aligned}$$

A identidade de Bianchi tem a forma

$$d\left(\rho a^3\right) + pd\left(a^3\right) = \left(\rho - 3p\right)a^3 d\left(\ln A\left(\phi\right)\right), \tag{4.12}$$

onde

$$\alpha(\phi) = \frac{d\ln A(\phi)}{d\phi}. \tag{4.13}$$

Na época atual (era de matéria), é possível tomar a presão $p = 0$, de modo que as equações (4.9 - 4.13) tomam a forma

$$
\begin{aligned}
-3\frac{\ddot{a}}{a} &= 4\pi G\rho + 2\dot{\phi}^2 - \Lambda(\phi), && (4.14)\\
3\frac{(\dot{a}^2+k)}{a^2} &= 8\pi G\rho + \dot{\phi}^2 + \Lambda(\phi), && (4.15)\\
\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} &= -4\pi\alpha(\phi)\,G\rho - \frac{1}{2}\frac{d\Lambda(\phi)}{d\phi}, && (4.16)\\
d\left(\rho a^3\right) &= \rho a^3 d\left(\ln A(\phi)\right). && (4.17)
\end{aligned}
$$

Neste trabalho, vamos buscar soluções do conjunto de equações acima para alguns casos particulares, visando encontrar um modelo cosmológico que forneça parâmetro de desaceleração $q(t)$, definido em (2.69), negativo, isto é, expansão acelerada.

4.3 Caso I

Em princípio, suponha que o fator de escala $a(t)$ evolua como uma potência do tempo [40, 41], de modo que

$$a(t) = a_1 t^{\beta}, \tag{4.18}$$

onde a_1 é uma constante positivo-definida. Além disto, estamos interessados em valores de $\beta \geqslant 1$, o que resultaria na expansão acelerada, já que

$$q(t) = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -\frac{(\beta-1)}{\beta} \tag{4.19}$$

Suponha ainda que o campo escalar também obedeça a uma lei de potência, ou seja

$$\phi(t) = \phi_1 t^{\gamma}, \tag{4.20}$$

onde ϕ_1 também é uma constante positivo definida.

4.3.1 Caso 1: $k = 0\,,\,\Lambda = 0$

Para este caso, as equações de campo têm a forma

$$
\begin{aligned}
-3\frac{\ddot{a}}{a} &= 4\pi G\rho + 2\dot{\phi}^2, && (4.21)\\
3\frac{\dot{a}^2}{a^2} &= 8\pi G\rho + \dot{\phi}^2, && (4.22)\\
\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} &= -4\pi G\rho\alpha(\phi). && (4.23)
\end{aligned}
$$

Multiplicando (4.22) por 2 e fazendo (4.22) - (4.21) segue

$$
-3\frac{\ddot{a}}{a} - 6\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -12\pi G\rho \rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 4\pi G\rho, \tag{4.24}
$$

e, assim,

$$
\begin{aligned}
\beta\left(\beta - 1\right)t^{-2} + 2\beta^2 t^{-2} &= 4\pi G\rho\\
\beta\left(3\beta - 1\right)t^{-2} &= 4\pi G\rho
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\ \rho = \frac{\beta\left(3\beta - 1\right)}{4\pi G}t^{-2}. \tag{4.25}
$$

Multiplicando (4.23) por $\dot{\phi}$

$$
\begin{aligned}
\ddot{\phi}\dot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi}^2 &= -4\pi G\rho\alpha(\phi)\dot{\phi}\\
&= -4\pi G\rho\frac{d}{d\phi}\left(\ln A(\phi)\right)\frac{d\phi}{dt}\\
&= -4\pi G\rho\frac{d}{dt}\left(\ln A(\phi)\right). && (4.26)
\end{aligned}
$$

De (4.17) segue que

$$
\frac{d}{dt}\left(\rho a^3\right) = \rho a^3\frac{d}{dt}\left(\ln A\left(\phi\right)\right) = \rho a^3\alpha\left(\phi\right)\dot{\phi} \tag{4.27}
$$

e substituindo em (4.26) tem-se

$$
\ddot{\phi}\dot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi}^2 = -\frac{4\pi G}{a^3}\frac{d}{dt}(\rho a^3), \tag{4.28}
$$

mas

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\rho a^3) &= \frac{d}{dt}\left[\frac{\beta(3\beta - 1)}{4\pi G}a_1^3 t^{3\beta - 2}\right]\\
&= \frac{\beta(3\beta - 1)a_1^3}{4\pi G}(3\beta - 2)t^{3\beta - 3}\\
&= \frac{\beta(3\beta - 2)(3\beta - 2)}{4\pi G}a^3 t^{-3}. && (4.29)
\end{aligned}
$$

Usando que

$$\phi = \phi_1 t^\gamma \,;\; \dot{\phi} = \gamma\phi_1 t^{\gamma-1} \,;\; \ddot{\phi} = \gamma(\gamma-1)\phi_1 t^{\gamma-2}$$

e (4.29) em (4.28) vem que

$$\begin{aligned} \gamma(\gamma-1)\phi_1 t^{\gamma-2}\gamma\phi_1 t^{\gamma-1} + 3\beta t^{-1}\gamma^2\phi_1^2 t^{2\gamma-2} &= -\beta(3\beta-1)(3\beta-2)t^{-3} \\ \rightarrow\; \gamma^2\phi_1^2\,(\gamma-1+3\beta)\,t^{2\gamma-3} &= -\beta(3\beta-1)(3\beta-2)t^{-3}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Igualando os expoentes de t tem-se

$$2\gamma - 3 = -3 \;\Rightarrow\; \gamma = 0 \tag{4.31}$$

e assim, comparando os coeficientes, segue que

$$\beta(3\beta-1)(3\beta-2) = 0. \tag{4.32}$$

As soluções $\beta = 0$ e $\beta = 1/3$ são descartadas pois resultariam em soluções de vácuo ($\rho = 0$). Assim

$$\beta = 2/3 \tag{4.33}$$

e então

$$a(t) \propto t^{2/3}, \tag{4.34}$$

$$\phi(t) = \phi_1 = cte. \tag{4.35}$$

Apesar de interessante, uma vez que é a mesma cosmologia encontrada para a Relatividade Geral na Seção 2.8.2, este resultado não atende aos requisitos, pois não fornece parâmetro de desaceleração q negativo

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = +\frac{1}{2}. \tag{4.36}$$

4.3.2 Caso 2: $k = -1\,,\,\Lambda = 0$

Ainda mantendo $\Lambda = 0$, vamos agora tratar do modelo onde o espaço é hiperbólico, ou seja, $k = -1$. Neste caso, as equações de campo

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G\rho + 2\dot{\phi}^2, \tag{4.37}$$

$$3\frac{(\dot{a}^2-1)}{a^2} = 8\pi G\rho + \dot{\phi}^2, \tag{4.38}$$

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} = -4\pi G\rho\alpha(\phi). \tag{4.39}$$

Analogamente, multiplicando (4.38) por 2 e tomando (4.37)-(4.38) segue que

$$\begin{aligned} -3\frac{\ddot{a}}{a} - 6\frac{\dot{a}^2-1}{a^2} &= -12\pi G\rho \\ \Rightarrow \quad \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2}{a^2} &= 4\pi G\rho. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Usando a lei de potência para $a(t)$, segue de (4.40)

$$\begin{aligned} \beta(\beta-1)t^{-2} + 2\beta^2 t^{-2} - \frac{2}{a_1^2}t^{-2\beta} &= \\ \beta(3\beta-1)t^{-2} - \frac{2}{a_1^2}t^{-2\beta} &= 4\pi G\rho \end{aligned}$$

$$\therefore \ \rho = \frac{\beta(3\beta-1)}{4\pi G}t^{-2} - \frac{1}{2\pi G a_1^2}t^{-2\beta}. \tag{4.41}$$

Multiplicando (4.39) por $\dot{\phi}$ temos uma equação idêntica à usada no caso anterior (equação (4.28)), uma vez que a equação de onda não depende da constante de curvatura,

$$\ddot{\phi}\dot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi}^2 = -\frac{4\pi G}{a^3}\frac{d}{dt}\left(\rho a^3\right), \tag{4.42}$$

mas

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho a^3) &= \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\beta(3\beta-1)}{4\pi G}t^{-2} - \frac{1}{2\pi G a_1^2}t^{-2\beta}\right)a_1^3 t^{3\beta}\right] \\ &= \frac{\beta(3\beta-1)}{4\pi G}a_1^3\frac{d}{dt}(t^{3\beta-2}) - \frac{a_1}{2\pi G}\frac{d}{dt}(t^\beta) \\ &= \frac{\beta(3\beta-1)(3\beta-2)}{4\pi G}a^3 t^{-2} - \frac{a_1\beta}{2\pi G}t^{\beta-1}. \end{aligned} \tag{4.43}$$

O lado esquerdo de (4.42) é idêntico ao do caso anterior e no lado direito usaremos (4.43). Assim tem-se

$$\gamma^2\phi_1^2 t^{2\gamma-3}(\gamma-1+3\beta) = -\beta(3\beta-1)(3\beta-2)t^{-2} + \frac{2\beta}{a_1^2}t^{-2\beta-1}. \tag{4.44}$$

Note que os dois lados de (4.44) possuem potências em princípio completamente diferentes de t. Assim, qualquer comparação seria inconclusiva. Deste modo, torna-se necessária uma manipulação diferente. Usando $a = a_1 t^\beta$ e $\phi = \phi_1 t^\gamma$ em (4.42) tem-se

$$\begin{aligned} \gamma^2\phi_1^2(\gamma-1+3\beta)t^{2\gamma-3} &= -\frac{4\pi G}{a_1^3 t^{3\beta}}\frac{d}{dt}(\rho a^3) \\ \frac{d}{dt}(-4\pi G\rho a^3) &= \gamma^2\phi_1^2 a_1^3(\gamma-1+3\beta)t^{2\gamma+3\beta-3} \\ d(-4\pi G\rho a^3) &= \gamma^2\phi_1^2 a_1^3(\gamma-1+3\beta)t^{2\gamma+3\beta-3}dt. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Integrando os dois lados de (4.45)

$$
\begin{aligned}
-4\pi G\rho a^3 &= \gamma^2\phi_1^2 a_1^3(\gamma-1+3\beta)\int t^{2\gamma+3\beta-3}dt \\
&= \gamma^2\phi_1^2(\gamma-1+3\beta)a_1^3\frac{t^{2\gamma+3\beta-2}}{2\gamma+3\beta-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\ \rho &= -\frac{\gamma^2\phi_1^2(\gamma-1+3\beta)}{4\pi G(2\gamma-2+3\beta)}t^{2\gamma-2} \\
&= -\frac{\gamma-1+3\beta}{4\pi G(2\gamma+2-3\beta)}\gamma^2\phi_1^2 t^{2\gamma-2} \\
&= -\frac{1}{4\pi G}\frac{(\gamma-1+3\beta)}{2\gamma-2+3\beta}\dot{\phi}^2. \qquad (4.46)
\end{aligned}
$$

Multiplicando (4.37) por 2 e subtraindo de (4.38) vem que

$$
\begin{aligned}
3\frac{(\dot{a}^2-1)}{a^2}+6\frac{\ddot{a}}{a} &= -3\dot{\phi}^2 \\
\Rightarrow\ \dot{\phi}^2 &= -\frac{(\dot{a}^2-1)}{a^2}-2\frac{\ddot{a}}{a}. \qquad (4.47)
\end{aligned}
$$

Daí segue que

$$
\begin{aligned}
\dot{\phi}^2 &= -\beta^2 t^{-2}+\frac{1}{a_1^2}t^{-2\beta}-2\beta(\beta-1)t^{-2} \\
&= -\beta(3\beta-2)t^{-2}+\frac{1}{a_1^2}t^{-2\beta}. \qquad (4.48)
\end{aligned}
$$

Substituindo (4.48) em (4.46) tem-se

$$
\rho=\frac{\beta(3\beta-2)(\gamma-1+3\beta)}{(2\gamma-2+3\beta)}\frac{1}{4\pi G}t^{-2}-\frac{1}{4\pi G a_1^2}\frac{(\gamma-1+3\beta)}{(2\gamma-2+3\beta)}t^{-2\beta}, \qquad (4.49)
$$

que pode ser comparada com (4.41) levando às duas equações

$$
\beta(3\beta-1)=\frac{\beta(3\beta-2)(\gamma-1+3\beta)}{(2\gamma-2+3\beta)}\,, \qquad (4.50)
$$

$$
1=\frac{1}{2}\frac{(\gamma-1+3\beta)}{2\gamma-2+3\beta}. \qquad (4.51)
$$

Usando (4.51) em (4.50) segue que

$$
\beta(3\beta-1)=2\beta(3\beta-2)\ \Rightarrow\ 3\beta^2-\beta=6\beta^2-4\beta\ \Rightarrow\ \beta=0\ ou\ \beta=1. \qquad (4.52)
$$

Se $\beta = 0$, tem-se

$$2 = \frac{\gamma - 1}{2\gamma - 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow ABSURDO! \tag{4.53}$$

Se $\beta = 1$, vem que

$$2 = \frac{\gamma + 2}{2\gamma + 1}$$

$$\therefore \gamma = 0. \tag{4.54}$$

Logo, para este caso temos

$$a(t) \propto t, \tag{4.55}$$

$$\phi(t) = \phi_1 = cte \tag{4.56}$$

que é conhecido como o Modelo Cosmológico de Milne, também encontrado na Relatividade Geral, o que era de se esperar uma vez que $\phi = cte$. Apesar de historicamente relevante, esse resultado também não é o esperado, pois o modelo não apresenta aceleração, ou seja, tal fator de escala nos dá, para o parâmetro de desaceleração, $q(t) = 0$.

4.4 Caso II

A era de radiação é caracterizada pela predominância da radiação sobre a matéria como fonte da gravitação e a equação de estado para esta época pode ser escrita como $p = \rho/3$. Se $\Lambda(\phi)$ é independente de ϕ, é possível reescrever (4.11) como

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} = -4\pi G\alpha(\phi)\left(\rho - 3\frac{\rho}{3}\right) = 0. \tag{4.57}$$

Assim

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} &= -3\frac{\dot{a}}{a} \\ \frac{d}{dt}\ln\dot{\phi} &= -3\frac{d}{dt}\ln a \end{aligned}$$

$$\therefore \dot{\phi} \propto a^{-3}. \tag{4.58}$$

Suponto que a energia cinética $\dot{\phi}^2$ é grande nesta época, como ela varia com a^{-6} seria desprezível ao fim da era de radiação, de modo que é possível desconsiderá-la na época presente ($p = 0$), ou seja, aproximar $\dot{\phi}^2 \sim 0$. Assim, como uma primeira aproximação, os termos $\dot{\phi}^2$ serão desprezados para os casos a seguir.

Além disto, para os casos a seguir será escolhido $A(\phi)$ tal que [42]

$$A(\phi) = 1 + \lambda \frac{\phi^2}{2}. \tag{4.59}$$

Embora pareça arbitrário, como estamos buscando modelos cosmológicos para a época atual, é de se imaginar que qualquer função de acoplamento que tenha pelo menos um mínimo esteja próxima deste mínimo nos dias de hoje e possa ser aproximada a uma função quadrática do campo escalar. Baseado na escolha (4.59), $\phi = cte$ corresponde a um mínimo no qual a teoria se mostra indistinguível da Relatividade Geral.

4.4.1 Caso 1: $k = -1\,,\, \Lambda = 0$

Neste caso, como estamos trabalhando para a época atual, uma boa aproximação para o comportamento de um universo aberto ($k = -1$) para a era recentes é um universo dominado pela curvatura [43], isto é, o termo de curvatura é dominante sobre a densidade de matéria e as equações podem ser escritas como

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G\rho, \tag{4.60}$$

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{3}{a^2}, \tag{4.61}$$

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} = -4\pi G\alpha\left(\phi\right)\rho. \tag{4.62}$$

Resolvendo (4.61) obtém-se

$$a(t) = t. \tag{4.63}$$

Da identidade de Bianchi

$$d(a^3\rho) = \rho a^3 d(\ln A(\phi)), \tag{4.64}$$

segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho a^3} d(\rho a^3) &= d(\ln A(\phi)) \\
d(\ln((\rho a^3)) &= d(\ln A(\phi)) \\
\rightarrow \rho a^3 &= A(\phi) M_0, \qquad (4.65)
\end{aligned}$$

onde M_0 é uma constante de integração. Usando a definição para $A(\phi)$ dada em (4.59) combinada com (4.63) vem que

$$\rho = \frac{A(\phi) M_0}{a^3} = \frac{(1 + \lambda\phi^2/2) M_0}{t^3}. \qquad (4.66)$$

Por outro lado, usando (4.59) em (4.13) segue que

$$\alpha(\phi) = \frac{A'(\phi)}{A(\phi)} = \frac{\lambda\phi}{1 + \lambda\phi^2/2}. \qquad (4.67)$$

Substituindo (4.67), (4.63) e (4.66) na equação de onda (4.62) tem-se

$$\ddot{\phi} + \frac{3}{t}\dot{\phi} = -4\pi G M_0 \lambda \frac{\phi}{t^3}, \qquad (4.68)$$

cuja solução é dada por [44]

$$\phi(t) = \frac{1}{t}\left[c_1 J_2\left(4\sqrt{\frac{\pi G M_0 \lambda}{t}}\right) + c_2 Y_2\left(\sqrt{\frac{\pi G M_0 \lambda}{t}}\right)\right], \qquad (4.69)$$

onde $J_2(x)$ e $Y_2(x)$ são as funções de Bessel de ordem 2 de primeira e segunda espécie, respectivamente, e c_1 e c_2 são constantes de integração.

Apesar de ainda não fornecer o parâmetro de desaceleração negativo como o esperado (uma vez que o fator de escala encontrado para este caso foi o mesmo da seção 4.3.2), esta aproximação apresenta um resultado interessante por fornecer uma função dependente do tempo para o campo escalar. Observe, ainda, que no limite em que $t \rightarrow \infty$, o que corresponderia às épocas cosmológicas mais recentes, tem-se

$$J_2\left(4\sqrt{\frac{\pi G M_0 \lambda}{t}}\right) \rightarrow \frac{2\pi M_0 \lambda}{t} \quad e \quad Y_2\left(4\sqrt{\frac{\pi G M_0 \lambda}{t}}\right) \rightarrow -\frac{t}{4\pi^2 M_0 \lambda},$$

e portanto

$$\phi \rightarrow -\frac{c_2}{4\pi^2 G M_0 \lambda}, \qquad (4.70)$$

que é uma constante, como encontrado em 4.3.2.

4.4.2 Caso 2: $k = 0$ *ou* -1 , $\Lambda(\phi) = \Lambda \neq 0$

Neste caso, a função $\Lambda(\phi)$ será tomada como uma constante não-nula Λ. Para a época atual, Λ é dominante sobre a curvatura e a densidade de matéria, de modo que é possível escrever

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G\rho - \Lambda, \tag{4.71}$$

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \Lambda, \tag{4.72}$$

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} = -4\pi G\alpha(\phi)\rho. \tag{4.73}$$

$$\tag{4.74}$$

Solucionando (4.72) obtém-se

$$\ln a = t\sqrt{\Lambda/3} + M_1 \Rightarrow a(t) = Le^{t\sqrt{\Lambda/3}}, \tag{4.75}$$

onde $L = e^{M_1}$ é uma constante de integração.

Analogamente ao caso anterior, tem-se

$$\rho = \frac{A(\phi)M_0}{a^3}, \tag{4.76}$$

e, usando (4.75) segue que

$$\rho = \frac{(1 + \lambda\phi^2/2)\,M_0}{L^3}e^{-t\sqrt{\Lambda/3}}. \tag{4.77}$$

Substituindo o fator de escala (4.75) e a densidade ρ (4.77) na equação de onda (4.73) tem-se

$$\ddot{\phi} + \sqrt{3\Lambda}\dot{\phi} = -\frac{4\pi GM_0\lambda}{L^3}e^{-t\sqrt{3\Lambda}}. \tag{4.78}$$

cuja solução[1] é dada por

$$\phi(t) = c_1e^{-\frac{1}{2}t\sqrt{3\Lambda}}J_1\left(4\sqrt{\frac{\pi GM_0\lambda}{3L^3\Lambda}}e^{-\frac{1}{2}t\sqrt{3\Lambda}}\right) + c_2e^{-\frac{1}{2}t\sqrt{3\Lambda}}Y_1\left(4\sqrt{\frac{\pi GM_0\lambda}{3L^3\Lambda}}e^{-\frac{1}{2}t\sqrt{3\Lambda}}\right), \tag{4.79}$$

que pode ser reescrita como

$$\phi(y) = c_1y^{1/2}J_1\left(\sqrt{\frac{4\pi GM_0\lambda y}{L^3\sqrt{3\Lambda}}}\right) + c_2y^{1/2}Y_1\left(\frac{4\pi GM_0\lambda y}{L^3\sqrt{3\Lambda}}\right), \tag{4.80}$$

[1] Esta solução foi calculada diretamente no Maple IX.

onde

$$y \equiv \frac{e^{-t\sqrt{3\Lambda}}}{\sqrt{3\Lambda}} \tag{4.81}$$

e $J_1(x)$ e $Y_1(x)$ são as funções de Bessel de ordem 1 de primeira e segunda espécie, respectivamente, e c_1 e c_2 são constantes de integração. Assim como no caso anterior, à medida que $t \to \infty$, $y \to 0$, e neste limite

$$\phi \to c_2(1/\pi)(\sqrt{3\Lambda}\, L^3/\pi M_0 \lambda)^{1/2}, \tag{4.82}$$

que também é um valor constante, remetendo ao comportamento previsto pela RG.

Note que neste caso, o parâmetro de desaceleração

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -1, \tag{4.83}$$

que corresponderia a um modelo com expansão acelerada, conforme buscávamos.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho foram apresentados alguns modelos cosmológicos FRW para a era de matéria ($p = 0$) no contexto das Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação. Em princípio, considerou-se que o fator de escala do universo varie com o tempo obedecendo a uma lei de potência $a(t) \propto t^{\beta}$, que representa uma aproximação razoável uma vez que alguns modelos inflacionários na teoria de Brans-Dicke fornecem este comportamento para a expansão. Nesta aproximação, foram estudados os modelos cosmológicos para os universos plano ($k = 0$) e aberto ($k = -1$), ambos com constante cosmológica Λ nula. Para estes dois casos, os resultados obtidos foram os mesmos de modelos cosmológicos relativísticos sob as mesmas condições (Einstein-de Sitter e Milne, respectivamente), indicando um comportamento atrativo da Relatividade Geral com relação às Teorias Escalares-Tensoriais para estágios recentes da evolução do universo.

Em um segundo caso, a lei de potência para o fator de escala foi desconsiderada, deixando-o livre para assumir qualquer comportamento como função do tempo. Neste caso, foi usado o método aproximativo proposto por [42] a fim de simplificar as equações de campo a serem resolvidas. No caso de universo aberto e constante cosmológica nula o resultado encontrado sob esta perspectiva tende assintoticamente ao comportamento encontrado quando era imposta a lei de potência. Em um segundo momento, foi estudado o caso de universo aberto ou plano e Λ assumindo um valor constante não nulo. A não especificação de k se deve ao fato de ter sido feita a aproximação de que, para a era atual, a constante cosmológica domina sobre a curvatura, de modo que o termo que contém

k na equação de campo pode ser desconsiderado. Para esta situação, encontramos uma função exponencial para o fator de escala e um comportamento igualmente assintótico com relação à RG para o campo escalar.

Dentre todas as situações propostas, só foi possível encontrar um modelo cosmológico condizente com os dados observacionais (isto é, fornecendo aceleração para a atual expansão do universo) para o último deles. No entanto, casos com constante cosmológica variável não foram estudados por apresentarem equações de campo complicadas para serem resolvidas analiticamente, mesmo diante das aproximações feitas. Como perspectiva para este trabalho, espera-se poder aplicar o método numérico proposto em [47], na tentativa de encontrar modelos cosmológicos adequados para condições impostas mais complexas.

Apêndice A

Principais elementos matemáticos da RG

A.1 Para solução esfericamente simétrica

Este procedimento foi realizado em *Maple IX* para calcular as componentes dos principais elementos matemáticos da RG utilizando a métrica esfericamente simétrica dada por (2.34), utilizada na Seção 2.6.

Inicialmente, é preciso abrir o pacote **tensor**, que contém as rotinas que trabalham com os tensores, suas operações e seu uso em Relatividade Geral.

[> **restart;**

[> **with(tensor):**

Em seguida, deve-se definir as coordenadas que serão utilizadas, neste caso coordenadas esféricas

[> **coords:=[r,theta,phi]:**

e os elementos da métrica g

[> **g:=array(symmetric,sparse,1..3,1..3):**

[> **g[1,1] := exp(lambda(r)): g[2,2] := r^2: g[3,3] := r^2*(sin(theta))^2:**

[> **metric := create([-1,-1], eval(g));**

Como resultado, o Maple monta a matriz abaixo

$$metric := TABLE([index\_char = [-1,-1],\, compts = \begin{bmatrix} e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2(\theta) \end{bmatrix}])$$

Em seguida, o comando abaixo calcula, respectivamente, as coordenadas usadas, as componentes covariantes não nulas da métrica, as componentes contravariantes da métrica, o determinante da métrica covariante, os símbolos de Christoffel de primeiro e segundo tipo, as componentes do tensor de Riemman, o tensor de Ricci, o escalar de Ricci, as componentes do tensor de Einstein e as componentes do tensor de Weyl.

[> **tensorsGR(coords, metric, contra_metric, det_met, C1, C2, Rm, Rc, R, G, C);**

Finalmente, com o comando

[> **display_allGR(coords, metric, contra_metric, det_met, C1, C2, Rm, Rc, R, G, C);**

obtém-se os resultados calculados acima, o que fornece como resposta a sequência de informações abaixo

---

The coordinates variables are :

$$x1 = r$$

$$x2 = \theta$$

$$x3 = \phi$$

The Covariant Metric

non-zero components :

$$cov\_g11 = e^{\lambda(r)}$$

$$cov\_g22 = r^2$$

$$cov\_g33 = r^2\,(\sin(\theta))^2$$

Determinant of the covariant metric tensor :

$$detg = -e^{\lambda(r)} r^4 \left(-1 + \cos(\theta)^2\right)$$

The Contravariant Metric

non-zero components :

$$contra\_g11 = \left(e^{\lambda(r)}\right)^{-1}$$

$$contra\_g22 = r^{-2}$$

$$contra\_g33 = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)^2}$$

The Christoffel Symbols of the First Kind

non-zero components :

$$[11,1] = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dr}\lambda(r)\right) e^{\lambda(r)}$$

$$[12,2] = r$$

$$[13,3] = r \sin(\theta)^2$$

$$[22,1] = -r$$

$$[23,3] = r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$[33,1] = -r \sin(\theta)^2$$

$$[33,2] = -r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

The Christoffel Symbols of the Second Kind

non-zero components :

$$\{1,11\} = \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\lambda(r)$$

$$\{1,22\} = -\frac{r}{e^{\lambda(r)}}$$

$$\{1, 33\} = -\frac{r \sin(\theta)^2}{e^{\lambda(r)}}$$

$$\{2, 12\} = r^{-1}$$

$$\{2, 33\} = -\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$$\{3, 13\} = r^{-1}$$

$$\{3, 23\} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

The Riemann Tensor

non-zero components :

$$R1212 = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dr}\lambda(r)\right) r$$

$$R1313 = -\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dr}\lambda(r)\right) r \left(-1 + \cos(\theta)^2\right)$$

$$R2323 = -\frac{r^2 \left(e^{\lambda(r)} \cos(\theta)^2 - e^{\lambda(r)} + 1 - \cos(\theta)^2\right)}{e^{\lambda(r)}}$$

character : [-1, -1, -1, -1]

The Ricci tensor

non-zero components :

$$R11 = -\frac{\frac{d}{dr}\lambda(r)}{r}$$

$$R22 = -\frac{\left(\frac{d}{dr}\lambda(r)\right) r + 2\, e^{\lambda(r)} - 2}{2e^{\lambda(r)}}$$

$$R33 = \frac{-\left(\frac{d}{dr}\lambda(r)\right) r + \left(\frac{d}{dr}\lambda(r)\right) r \cos(\theta)^2 + 2\, e^{\lambda(r)} \cos(\theta)^2 - 2\, e^{\lambda(r)} + 2 - 2\, \cos(\theta)^2}{2e^{\lambda(r)}}$$

character : [-1, -1]

The Ricci Scalar

$$R = -2\frac{\left(\frac{d}{dr}\lambda(r)\right) r + e^{\lambda(r)} - 1}{r^2 e^{\lambda(r)}}$$

The Einstein Tensor

non-zero components :

$$G11 = \frac{e^{\lambda(r)} - 1}{r^2}$$

$$G22 = \frac{\left(\frac{d}{dr}\lambda\left(r\right)\right) r}{2e^{\lambda(r)}}$$

$$G33 = -\frac{\left(\frac{d}{dr}\lambda\left(r\right)\right) r \left(-1 + \cos\left(\theta\right)^2\right)}{2e^{\lambda(r)}}$$

character : [-1, -1]

The Weyl Tensor

non-zero components :

None

character : [-1, -1, -1, -1]

A.2 Para métrica de Robertson-Walker

Um procedimento semelhante ao anterior foi realizado para o elemento de linha de Robertson-Walker dado por (2.43), utilizado na Seção 2.7 a fim de encontrar a Equação de Friedmann. Assim

[> **restart;**

[> **with(tensor):**

[> **coords:=[t, r, theta, phi]:**

[> **g:=array (symmetric, sparse, 1..4, 1..4):**

[> **g[1,1] := 1: g[2,2] := -a(t)^2/(1-k*r^2): g[3,3] := -a(t)^2*r^2: g[4,4]: = -a(t)^2*r^2*(sin(theta))^2:**

[> **metric:=create([-1,-1],eval(g));**

$$metric := TABLE([index\_char = [-1, -1], compts = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a(t)^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2r^2\sin(theta)^2 \end{bmatrix}])$$

[> **tensorsGR(coords,metric,contra_metric,det_met,C1,C2,Rm,Rc,R,G,C);**

[> **display_allGR(coords,metric,contra_metric,det_met,C1,C2,Rm,Rc,R,G,C);**

Daí, tem-se

The coordinates variables are :

$$x1 = t$$

$$x2 = r$$

$$x3 = \theta$$

$$x4 = \phi$$

The Covariant Metric

non-zero components :

$$cov\_g11 = 1$$

$$cov\_g22 = -\frac{a(t)^2}{1-kr^2}$$

$$cov\_g33 = -a(t)^2r^2$$

$$cov\_g44 = -a(t)^2r^2\sin(\theta)^2$$

Determinant of the covariant metric tensor :

$$detg = -\frac{a(t)^6 r^4 \left(-1+\cos(\theta)^2\right)}{-1+kr^2}$$

The Contravariant Metric

non-zero components :

$$contra\_g11 = 1$$

$$contra\_g22 = \frac{-1 + kr^2}{a(t)^2}$$

$$contra\_g33 = -\frac{1}{a(t)^2 r^2}$$

$$contra\_g44 = \frac{1}{a(t)^2 r^2 \left(-1 + \cos(\theta)^2\right)}$$

The Christoffel Symbols of the First Kind

non-zero components :

$$[12, 2] = \frac{a(t) \left(\frac{d}{dt} a(t)\right)}{-1 + kr^2}$$

$$[13, 3] = -a(t) r^2 \left(\frac{d}{dt} a(t)\right)$$

$$[14, 4] = -a(t) r^2 \left(\frac{d}{dt} a(t)\right) + a(t) r^2 \left(\frac{d}{dt} a(t)\right) \cos(\theta)^2$$

$$[22, 1] = -\frac{a(t) \left(\frac{d}{dt} a(t)\right)}{-1 + kr^2}$$

$$[22, 2] = -\frac{a(t)^2 kr}{(-1 + kr^2)^2}$$

$$[23, 3] = -a(t)^2 r$$

$$[24, 4] = -a(t)^2 r + a(t)^2 r \cos(\theta)^2$$

$$[33, 1] = a(t) r^2 \left(\frac{d}{dt} a(t)\right)$$

$$[33, 2] = a(t)^2 r$$

$$[34, 4] = -a(t)^2 r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$[44, 1] = a(t) r^2 \left(\frac{d}{dt} a(t)\right) - a(t) r^2 \left(\frac{d}{dt} a(t)\right) \cos(\theta)^2$$

$$[44, 2] = a(t)^2 r - a(t)^2 r \cos(\theta)^2$$

$$[44,3] = a(t)^2 r^2 \sin(\theta)\cos(\theta)$$

The Christoffel Symbols of the Second Kind

non-zero components :

$$\{1,22\} = -\frac{a(t)\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)}{-1+kr^2}$$

$$\{1,33\} = a(t)\,r^2\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)$$

$$\{1,44\} = a(t)\,r^2\left(\frac{d}{dt}a(t)\right) - a(t)\,r^2\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)(\cos(\theta))^2$$

$$\{2,12\} = \frac{\frac{d}{dt}a(t)}{a(t)}$$

$$\{2,22\} = -\frac{kr}{-1+kr^2}$$

$$\{2,33\} = \left(-1+kr^2\right)r$$

$$\{2,44\} = \sin(\theta)^2\left(-1+kr^2\right)r$$

$$\{3,13\} = \frac{\frac{d}{dt}a(t)}{a(t)}$$

$$\{3,23\} = r^{-1}$$

$$\{3,44\} = -\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$$\{4,14\} = \frac{\frac{d}{dt}a(t)}{a(t)}$$

$$\{4,24\} = r^{-1}$$

$$\{4,34\} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

The Riemann Tensor

non-zero components :

$$\mathit{R1212} = -\frac{a(t)\left(\frac{d^2}{dt^2}a(t)\right)}{-1+kr^2}$$

$$\mathit{R1313} = a(t)\,r^2\left(\frac{d^2}{dt^2}a(t)\right)$$

$$R1414 = a(t)\, r^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t)\right) - r^2 \cos(\theta)^2\, a(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t)\right)$$

$$R2323 = \frac{a(t)^2\, r^2 \left(\left(\frac{d}{dt} a(t)\right)^2 + k\right)}{-1 + kr^2}$$

$$R2424 = -\frac{a(t)^2\, r^2 \left(-k + \cos(\theta)^2 k - \left(\frac{d}{dt} a(t)\right)^2 + \cos(\theta)^2 \left(\frac{d}{dt} a(t)\right)^2\right)}{-1 + kr^2}$$

$$R3434 = \left(-k + \cos(\theta)^2\; k - \left(\frac{d}{dt} a(t)\right)^2 + \cos(\theta)^2 \left(\frac{d}{dt} a(t)\right)^2\right) a(t)^2\, r^4$$

character : [-1, -1, -1,-1]

The Ricci tensor

non-zero components :

$$R11 = 3\, \frac{\left(\frac{d^2}{dt^2} a(t)\right)}{a(t)}$$

$$R22 = \frac{a(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t)\right) + 2\,k + 2\; \left(\frac{d}{dt} a(t)\right)^2}{-1 + kr^2}$$

$$R33 = -\left(a(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t)\right) + 2\,k + 2\; \left(\frac{d}{dt} a(t)\right)^2\right) r^2$$

$$R44 = -a(t)\, r^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t)\right) + r^2 \cos(\theta)^2\, a(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t)\right) - 2\,kr^2 + 2\; \cos(\theta)^2\, kr^2$$
$$-2\; \left(\frac{d}{dt} a(t)\right)^2 r^2 + 2\, r^2 \cos(\theta)^2 \left(\frac{d}{dt} a(t)\right)^2$$

character : [-1, -1]

The Ricci Scalar

$$R = 6\, \frac{a(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t)\right) + k + \left(\frac{d}{dt} a(t)\right)^2}{a(t)^2}$$

The Einstein Tensor

non-zero components :

$$G11 = -3\,\frac{\left(\frac{d}{dt}a\left(t\right)\right)^2 + k}{a\left(t\right)^2}$$

$$G22 = -\frac{2\,a\left(t\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}a\left(t\right)\right) + k + \left(\frac{d}{dt}a\left(t\right)\right)^2}{-1 + kr^2}$$

$$G33 = 2\,a\left(t\right)r^2\left(\frac{d^2}{dt^2}a\left(t\right)\right) + kr^2 + \left(\frac{d}{dt}a\left(t\right)\right)^2 r^2$$

$$G44 = -r^2\left[-2\,a\left(t\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}a\left(t\right)\right) + 2\,\cos\left(\theta\right)^2 a\left(t\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}a\left(t\right)\right) - k + \cos\left(\theta\right)^2 k - \left(\frac{d}{dt}a\left(t\right)\right)^2 + \cos\left(\theta\right)^2\left(\frac{d}{dt}a\left(t\right)\right)^2\right]$$

character: [-1, -1]

The Weyl Tensor

non-zero components :

None

character : [-1, -1, -1, -1]

Referências Bibliográficas

[1] L. Amendola, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 196 (2001).

[2] D. La e P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 376 (1989).

[3] P. J. Steinhardt e F. S. Accetta, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2740 (1990).

[4] A. Bhadra e K. K. Nandi, *Do Scalar-Tensor Cosmologies naturally explain all the current cosmological observations?* [gr-qc/0203103].

[5] S. Carneiro e A. E. Montenegro Jr, *Braz. J. Phys.* **35**, 1052 (2005).

[6] B. Boisseau, G. Esposito-Farèse, D. Polarski e A. A. Starobinsky, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2236 (2000).

[7] J. D. Barrow e J. P. Mimoso, *Phys. Rev. D* **50**, 3746 (1994).

[8] J. D. Barrow, *Phys. Rev. D* **47**, 5329 (1993).

[9] Th. Damour e K. Nordtvedt, *Phys. Rev. D* **48**, 3436 (1993).

[10] Th. Damour, G. W. Gibbons e C. Gundlach, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 123 (1990).

[11] Th. Damour e K. Nordtvedt, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2217 (1993).

[12] E. Elizalde, *Proceedings of the II International Conference of Fundamental Interactions*, (Pedra Azul, 2004) [gr-qc/0409076].

[13] H. Stephani, *General Relativity - 2nd ed.*, (Cambridge: Cambridge University Press, 1990).

[14] S. M. Carroll *Lecture Notes on General Relativity* [gr-qc/9712019].

[15] D. Hilbert, *Nachr. Königl. Gesellsch. Wiss. Göttingen*, 395 (1915).

[16] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, (Princeton: Princeton University Press, 1993).

[17] R. A. d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, (Oxford: Oxford University Press, 1992).

[18] E. Hubble, *Proc. N. A. S.* **15**, 168 (1929).

[19] R. Aldrovandi, R. R. Cuzinatto e L. G. Medeiros, *Analytic Solutions for the* Λ*-FRW Model* [gr-qc/0508073].

[20] Th. Damour, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **80**, 41-50 (2000).

[21] G. Esposito-Farèse, *AIP Conference Proceedings* **736**, 35-52 (2004) [gr-qc/0409081].

[22] J. M. Overduin e P. S. Wesson, *Phys.Rept.* **283**, 303 (1997) [gr-qc/9805018].

[23] P. Jordan, *Nature (London)* **164**, 637 (1949); *Z. Phys.* **157**, 112 (1959).

[24] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. A* **165**, 199 (1938).

[25] M. Fierz, *Helv. Phys. Acta* **29**, 128 (1956).

[26] C. H. Brans e R. H. Dicke, *Phys. Rev.***124**, 925 (1961).

[27] R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **125**, 2163 (1962).

[28] P. G. Bergmann, *Int. J. Theor. Phys.* **1**, 25 (1968); K. Nordtvedt, *Ap. J.*, **161**, 1059 (1970); R. V. Wagoner, *Phys. Rev. D* **1**, 3209 (1970).

[29] Th. Damour e G. Esposito-Farèse, *Class. Quantum Grav* **9**, 2093 (1992).

[30] C. H. Brans, *The roots of scalar-tensor theory: an approximate history* [gr-qc/0506063].

[31] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, (New York: John Wiley & Sons, 1972).

[32] Y. Fujii e K. Maeda, *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation*, (Cambridge: Cambridge University Press, 2003).

[33] A. Barros e C. Romero, *Phys. Lett. A* **245**, 31 (1998) [gr-qc/9712080].

[34] M. E. X. Guimarães, L. P. Colatto e F. B. Tourinho, *Spacetime and Substance* **2**, 71 (2001) [gr-qc/0201101].

[35] D. I. Santiago e A. S. Silbergleit, *Gen. Rel. Grav.* **32**, 565 (2000) [gr-qc/9904003].

[36] V. Faraoni, E. Gunzig e P. Nardone, *Fund. Cosm. Phys* **20**, 121 (1999) [gr-qc/9811047].

[37] V. Faraoni e E. Gunzig, *Int. J. Theor. Phys.* **38**, 217 (1999) [gr-qc/9910176].

[38] N. Banerjee e D. Pavón, *Class. Quant. Grav.* **18**, 593 (2001).

[39] R. A. Battye, M. Bucher e D. Spergel, *Phys. Rev. D* **60**, 043505 (1999); M. Bucher e D. Spergel, *Domain Wall Dominated Universes* [astro-ph/9908047].

[40] N. Banerjee e D. Pavón, *Phys. Rev. D* **63**, 043504 (2001).

[41] O. Bertolami e P. J. Martins, *Phys. Rev. D* **61**, 064007 (2000).

[42] D. I. Santiago, D. Kalligas e R. V. Wagoner, *Phys. Rev. D* **58**, 124005 (1998).

[43] D. I. Santiago, D. Kalligas e R. V. Wagoner, *Phys. Rev. D* **56**, 7627 (1997).

[44] E. Butkov, *Mathematical Physics* (Addison Wesley Publishing Company, 1968).

[45] Th. Damour e G. Esposito-Farèse, *Phys. Rev. D* **54**, 1474 (1996).

[46] M. Salgado *The Cauchy Problem in Scalar Tensor Theories of Gravity* [gr-qc/0509001].

[47] J. B. Binder e G. M. Kremer, *Braz. J. Phys.* **35**, 1038 (2005); G. M. Kremer e F. P. Devecchi, *Phys. Rev. D* **67**, 047301 (2003); D. S. M. Alves e G. M. Kremer, *JCAP* **0410**, 009 (2004), [astro-ph/0410113].