



Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Humanas  
Departamento de Economia

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**MESTRADO EM GESTÃO ECONÔMICA DE  
NEGÓCIOS**

**PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES COM  
ESTOCASTICIDADE E DIFUSÃO POR SALTOS**

**FELIPE GOMES DA SILVA BARROS**

**Brasília - DF  
2006**

# PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES COM ESTOCASTICIDADE E DIFUSÃO POR SALTOS

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da **UnB – Universidade de Brasília**, como exigência parcial para obtenção do título de **Mestre** em Gestão Econômica de Negócios sob orientação do Professor Doutor Benjamin Tabak

**UnB – Universidade de Brasília**  
**Mestrado em Gestão Econômica de Negócios**

BARROS, Felipe Gomes da Silva - 1974

Precificação de Opções com Estocasticidade e Difusão por Saltos. [77 p.] – Programa de Pós Graduação em Economia, 2006.

Dissertação: Mestrado em Gestão Econômica de Negócios

**UnB** – Universidade de Brasília, [2006]

1. Opções
2. Volatilidade
3. Estocasticidade

---

**Prof. Dr. Benjamin Miranda Tabak**  
Orientador

---

**Prof. Dr. Daniel Oliveira Cajueiro**  
1º - Membro da Banca

---

**Prof. Dr. Eduardo José Araújo Lima**  
2º - Membro da Banca

## RESUMO

O apreçamento de opções tem sido objeto de estudo constante principalmente a partir de 1973 quando Black-Scholes derivaram uma fórmula fechada para tratar do assunto. Diversos modelos foram propostos a partir daí, objetivando principalmente o relaxamento de algumas premissas do modelo original. Em 1997 Bakshi-Cao-Chen ampliaram o modelo original utilizando volatilidade estocástica, taxa de juros estocástica e difusão com saltos no ativo-base. Nosso trabalho será replicar este modelo e verificar se ele pode ser utilizado para apreçar opções de dólar no mercado brasileiro.

## **ABSTRACT**

Pricing options has been frequently studied since 1973 when Black and Scholes developed a closed-form solution to this issue. Since then, different models were proposed and the main focus was relaxing some standards and assumptions from original model. In 1997 Bakshi, Cao and Chen extended the original model using stochastic volatility, stochastic interest rates and jumps diffusion. Our research will be using this model and check whether it fits to pricing options denominated in Dollar traded in Brazilian markets.

**Este trabalho é dedicado a  
meus pais Hugo Sergio e Vilma;  
meu filho Erick;  
minha irmã Fabiane e  
minha esposa Luciana**

## **AGRADECIMENTOS**

A equipe de Gestão de Fundos de Investimentos do Bancoob (Gustavo Bezerra, Rodrigo Forzano, Erica Karoline, Sara Ricardo e Kleide) pela ajuda, apoio e troca de idéias.

Ao Banco Cooperativo do Brasil pelo apoio incondicional durante a realização deste trabalho.

Aos corretores e participantes do mercado de opções pela troca de informações.

Aos professores do curso (em especial Prof. Aquiles) que pacientemente discutiram comigo sobre o tema, mostrando-me as possibilidades que o assunto permitia e os cuidados que impunha.

Agradeço aos colegas do mestrado (em especial Antonio Lara, América e Ronaldo) que mesmo envolvidos com seu próprio trabalho de dissertação, tiveram comentários bem humorados sobre esta tarefa tão especial e desafiadora.



## ÍNDICE

<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>1. DEFINIÇÕES E CONCEITOS .....</b>	<b>3</b>
1.1. DEFINIÇÕES E CONCEITOS.....	3
1.2. DINÂMICA DO MERCADO DE OPÇÕES .....	5
1.3. RESULTADOS ESPERADOS .....	5
<b>2. MODELAGEM DO AMBIENTE E ESTRUTURA MATEMÁTICA .....</b>	<b>9</b>
2.1. OBJETIVOS .....	9
2.2. MODELAGEM DO AMBIENTE .....	9
2.2.1. ATIVOS PUROS .....	9
2.2.2. MERCADO DE CAPITAL COMPLETO .....	9
2.2.3. PRINCÍPIO DA AUSÊNCIA DE ARBITRAGEM .....	10
2.2.4. AVALIAÇÃO NEUTRA AO RISCO .....	10
2.2.5. DOMINÂNCIA ESTOCÁSTICA .....	11
2.2.6. VOLATILIDADE .....	11
2.3. ESTRUTURA MATEMÁTICA.....	14
2.3.1. TEOREMA CENTRAL DO LIMITE .....	14
2.3.2. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS .....	15
2.3.3. MOVIMENTO BROWNIANO .....	16
2.3.4. LEMA DE ITÔ.....	17
2.3.5. QUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE .....	17
<b>3. APREÇAMENTO COM INCORPORACAO DE SALTOS .....</b>	<b>19</b>
3.1. OBJETIVOS.....	19
3.2. APREÇAMENTO DE OPÇÕES.....	19
3.3. BAKSHI-CAO-CHEN [1997].....	21
<b>4. ANÁLISE DOS RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>24</b>

<b>4.1. DADOS .....</b>	<b>24</b>
<b>4.2. SÉRIE TEMPORAL.....</b>	<b>26</b>
<b>4.3. ESTIMAÇÃO DO MODELO .....</b>	<b>31</b>
<b>4.4. RESULTADOS E CONCLUSÕES.....</b>	<b>36</b>
<b>5. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>38</b>
<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>39</b>
<b>ANEXOS.....</b>	<b>41</b>
<b>ANEXO I. FÓRMULAS DA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL DE BAKSHI-CAO-CHEN .....</b>	<b>41</b>
<b>ANEXO II. GRÁFICOS DE VOLATILIDADE ÍMPLICITA OBTIDAS PELO MODELO BLACK-SCHOLES .....</b>	<b>44</b>
<b>ANEXO III. ROTINAS DE PROGRAMAÇÃO NO EIEWS E MATLAB ....</b>	<b>55</b>

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIACOES

ARMA:	Autoregressive Moving Average
BF:	Butterfly spread
BM&F:	Bolsa de Mercadorias e Futuros
BPG:	Breusch-Pagan-Godfrey
GARCH:	General Autoregressive Conditional Heteroskedasticity
OTC:	Over the Counter
RR:	Risk Reversal
SQE:	Soma dos Quadrados dos Erros
SI:	Stochastic Interest rate
SV:	Stochastic Volatility
SVJ:	Stochastic Volatility and Jump
SVSI:	Stochastic Volatility and Stochastic Interest rate
SVSI-J:	Stochastic Volatility Stochastic Interest rate and Jump
S&P500:	Standard & Poor's index
VTC:	Operaoes estruturadas de Volatilidade de Taxa de Câmbio

## LISTA DE TABELAS

**TABELA 1 – ABCISSAS E PONDERAÇÕES PARA INTEGRAÇÃO PELO MÉTODO DA QUADRATURA GAUSS-LEGENDRE ..... 18**

**TABELA 2 – PARÂMETROS ESTIMADOS DO VETOR PHI ..... 32**

**TABELA 3 – PARÂMETROS ESTIMADOS DO VETOR PHI COM INCLUSÃO DA VOLATILIDADE ..... 33**

**TABELA 4 – SOMATÓRIO DO QUADRADO DOS RESÍDUOS E TESTE “PSEUDO-F” ..... 35**

## **LISTA DE GRÁFICOS**

**GRÁFICO 1 – HISTOGRAMA DA DISTRIBUIÇÃO DE RETORNO EM LOGARITMO DO DÓLAR FUTURO ..... 6**

**GRÁFICO 2 – SÉRIE DE RETORNO EM LOGARITMO DO DÓLAR FUTURO ..... 27**

**GRÁFICO 3 – DISTRIBUIÇÃO DOS RESÍDUOS DO VETOR PHI EM RELAÇÃO AO MONEYNNESS (DADOS EM CONJUNTO) ..... 34**

**GRÁFICO 4 - DISTRIBUIÇÃO DOS RESÍDUOS DO VETOR PHI EM RELAÇÃO AO MONEYNNESS (DADOS EM SEPARADO) ..... 34**

## INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é estudar a incorporação de um processo de volatilidade estocástica com descontinuidade na difusão da trajetória dos preços dos ativos financeiros. Ao incorporarmos esses processos pretendemos verificar se o modelo retorna um erro (desvio) menor do que os apresentados pelo modelo mais utilizado pelo mercado comparativamente com os preços reais das opções.

Os modelos de apreçamento de opções têm que considerar três premissas: (i) a distribuição do ativo-objeto; (ii) a taxa de juros inerente ao período de avaliação; e (iii) o valor dos fatores de risco. Para cada um desses fatores existem diversas combinações de possibilidades que determinarão a maior ou menor aderência aos preços verificados no mercado.

O modelo de apreçamento tomado como referência pelo mercado foi desenvolvido por Black-Scholes [1973]. As relações entre preço do ativo-objeto e exercício das opções (moneyness) desse modelo possuem um viés que pode ser medido como a assimetria da volatilidade implícita (*smile-effect*). Esta relação, apesar de ser verificável não faz parte de nenhum modelo teórico conhecido para apreçamento de opções.

As descontinuidades (jumps) são freqüentes na difusão dos retornos dos ativos com baixa liquidez ou mesmo aqueles que estão sujeitos a notícias inesperadas ou de alta freqüência. Merton [1976] desenvolveu um trabalho evidenciando a difusão com saltos para preços de ações e a respectiva solução para apreçamento de seus derivativos. Jorion [1988] analisou as descontinuidades nos mercados de taxa de câmbio e índice de ações.

A motivação deste trabalho é procurar um modelo que atenuie as premissas originais propostas no modelo de referência do mercado e replicá-lo no mercado brasileiro. Bakshi-Cao-Chen [1997] desenvolveram um modelo que capturou esses efeitos e apresentou um resultado satisfatório para o mercado norte-americano.

Nosso escopo será o mercado de opções de taxa de câmbio denominadas em dólar. Os contratos são negociados no balcão (*over-the-counter*) e posteriormente registrados em uma bolsa/*clearing* (Bolsa de Mercadorias e Futuros - BM&F). O

mercado de balcão tem como uma de suas características a baixa liquidez e a não formação de preços instantaneamente (como ocorre nos mercados mais líquidos). Dentre as opções negociadas no ambiente da BM&F estas são as que apresentam maior liquidez e maior diversidade entre seus participantes.

Apesar do mercado de derivativos ser amplamente utilizado no Brasil tanto para proteção de ativos como para especulação, a maior parte das estratégias são desenvolvidas nos mercados futuros. A disseminação do mercado de opções ainda é muito restrita e segmentada ao mercado de balcão.

O melhor entendimento da dinâmica deste mercado, bem como da formação de preço destes ativos pode contribuir para uma maior utilização deste instrumento, tanto para proteção de preços como para alavancagem resultados.

# 1. DEFINIÇÕES E CONCEITOS

## 1.1. DEFINIÇÕES E CONCEITOS

Opção é um contrato que dá ao seu detentor o direito de comprar ou vender um determinado ativo-objeto, por um preço previamente determinado. Este preço é conhecido como preço de exercício. Para possuir este direito, o comprador (titular) paga um determinado valor (prêmio da opção) para o vendedor (lançador). O direito embutido no contrato pode ser exercido somente na data de vencimento da opção (opções tipo européia) ou em qualquer data que anteceda o vencimento (opções tipo americana).

As opções que dão ao titular o direito de comprar o ativo-objeto são conhecidas como opção de compra (*call*) e as opções que dão o direito de vender o ativo-objeto são conhecidas como opção de venda (*put*)

As opções podem ser classificadas quanto à probabilidade de exercício (*moneyness*). Ao fazermos essa classificação temos que observar o valor futuro do ativo-objeto, isto porque este (e não o valor atual) será o valor mais próximo daquele observado na data do exercício. A metodologia mais usual para calcular o valor do ativo-objeto no futuro é dada pela fórmula:

$$F = S(1+i)^n + C + \varepsilon \quad (1)$$

Onde  $F$  é o valor futuro,  $S$  é o valor atual,  $i$  é a taxa livre de risco (expressa na mesma base do período do exercício da opção),  $n$  é o período até o exercício da opção,  $C$  é o custo de custódia (estocagem) do ativo e  $\varepsilon$  é o fator de erro aleatório

No caso do nosso trabalho utilizaremos as opções que tem como base o preço do contrato futuro da cotação do dólar.

A classificação é então estabelecida como:

- dentro-do-dinheiro (*in-the-money*): o preço de exercício é menor do que o preço do ativo-objeto, no caso das opções de compra e maior no caso das opções de venda;



- no-dinheiro (*at-the-money*): o preço de exercício é igual ao preço do ativo objeto, tanto para as opções de compra como para as opções de venda;

- fora-do-dinheiro (*out-of-the-money*): o preço de exercício é maior do que o preço do ativo-objeto, no caso das opções de compra e menor no caso das opções de venda.

Outro conceito importante é o conhecimento dos parâmetros de *hedging* (comumente chamados de “gregas”). Esses parâmetros são as derivadas parciais do preço de uma opção e indica a variação do preço para uma dada variação em uma determinada variável. Os cinco principais parâmetros são:

- delta: representa a taxa de variação do preço de uma opção em relação a variações no preço do ativo-objeto. A fórmula do delta para opções de compra do tipo europeia pode ser dada por  $N(\cdot)$ ;

- *gamma*: representa a taxa de variação do valor do delta de um opção em relação a variação no preço do ativo-objeto. A fórmula do *gamma* para opções de compra do tipo europeia pode ser dada por  $\frac{N(d)}{S\sigma\sqrt{T}}$ ;

- *theta*: representa a taxa de variação do valor de uma opção em relação a variações no tempo. A fórmula do *theta* para opções de compra do tipo europeia pode ser dada por  $\frac{-S\sigma N(x)}{2\sqrt{T}} - rXe^{-rT} N(d - \sigma\sqrt{T})$ ;

- *rho*: representa a taxa de variação do valor de uma opção em relação a variações na taxa de juros livre de risco. A fórmula do *rho* para opções de compra do tipo europeia pode ser dada por  $XTe^{-rT} N(d - \sigma\sqrt{T})$ ;

-*vega*: representa a taxa de variação do valor de uma opção em relação a variações na volatilidade. A fórmula do *vega* pode ser dada por  $S\sqrt{T}N(d)$ .

Em todos os casos temos que  $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ .

## 1.2. DINÂMICA DO MERCADO DE OPÇÕES

As opções que são objeto deste estudo são contratos regulamentados pela Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F). A BM&F registra tais contratos como operações estruturadas de volatilidade (VTC) para as opções de dólar. Este contrato padronizado pela BM&F estipula que cada preço de exercício (*strike*) de opção seja negociado conjuntamente com o seu respectivo *delta* do ativo-objeto. Este modelo de negociação não é usual no mercado norte-americano, mas torna-se importante no mercado brasileiro principalmente pela baixa liquidez apresentada pelo ativo-objeto a partir do segundo vencimento. A negociação destas opções é feita no mercado de balcão, isto é, existe livre negociação entre as partes sem um lugar físico determinado para as transações, sendo que as operações são negociadas por telefone entre as instituições financeiras.

Para prover mais transparência e segurança, a BM&F realiza um leilão diário, no recinto da bolsa, destas opções. A negociação subsequente é realizada então no balcão, com intermediação das corretoras de valores e todas as negociações efetivadas são registradas no sistema eletrônico da BM&F.

A negociação em balcão é feita com “*spread bid-offer*”, onde as partes mostram os preços pelo qual desejam comprar ou vender a opção. Havendo a efetivação do negócio, a operação é registrada no sistema da BM&F e permanece em leilão por um período de tempo a critério da bolsa, a qual esta sujeita à interferência dos participantes do mercado. Este procedimento evita que sejam efetivados negócios com preços espúrios ou sem embasamento com as condições do mercado.

## 1.3. RESULTADOS ESPERADOS

Utilizar um modelo de apreçamento de opções que incorpore volatilidade estocástica e difusão por saltos e comparar os resultados obtidos utilizando o modelo mais usual do mercado.

O modelo de apreçamento de opções mais difundido e utilizado no mercado é o que foi desenvolvido por Black-Scholes [1973]. Este modelo possui uma fórmula fechada, de fácil assimilação e implementação. Uma das desvantagens deste modelo

é que algumas premissas utilizadas na formulação teórica não são necessariamente observadas na prática. A partir desta constatação, a grande maioria dos modelos subsequentes busca a melhor forma de modelar esses parâmetros.

A motivação desta pesquisa é atenuar um dos principais problemas do modelo Black-Scholes: o forte viés que ocorre no apreçamento de opções de mesma data de vencimento, mas com preços de exercícios diferentes, especialmente as opções muito fora-do-dinheiro.

A comprovação deste fato pode ser feita observando-se a distribuição do retorno implícita no ativo objeto que difere daquela atribuída pelo modelo Black-Scholes (distribuição log-normal). No caso do nosso estudo esta distribuição é positivamente assimétrica (*skewness*) – longa cauda à direita e leptocúrtica - alta curtose fina e de cauda longa.

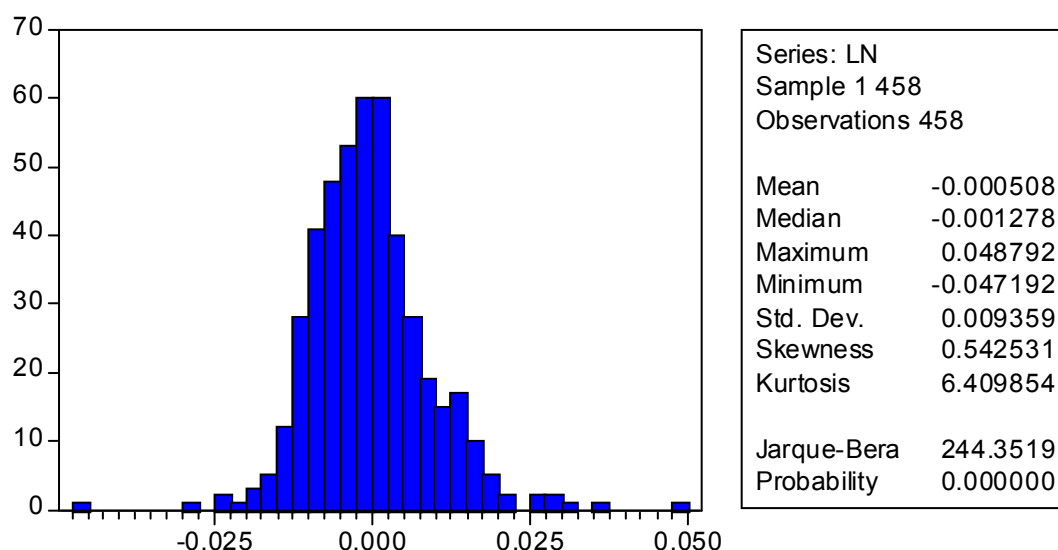


Gráfico 1 – Histograma da distribuição de retorno em logaritmo do dólar futuro no período de janeiro de 2005 a outubro de 2006.

A assimetria é medida por:  $S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\hat{\sigma}} \right)^3$ . No caso de uma distribuição

normal (simétrica) a assimetria é zero.

A curtose mede a elevação ou achatamento da série, e é dada por:

$$K = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\hat{\sigma}} \right)^4 .$$
 Uma série com distribuição normal possui curtose igual a três.

Em ambos os casos  $\hat{\sigma}$  é o desvio-padrão baseado no estimador viesado da variância, dado por:  $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}$  .

A incorporação de volatilidade estocástica permite um melhor controle da curtose já que é possível administrar o coeficiente de variação da volatilidade e o nível da assimetria (*skewness*). Mesmo nesse modelo onde a volatilidade é apresentada como uma difusão com parâmetros estabelecidos a partir de observações, o apreçamento de opções não captura bem a curtose e, portanto continua penalizando as opções de prazo mais curto.

A incorporação de difusão por saltos no ativo-base permite atenuar a assimetria (*skewness*) negativa e a alta-curtose implícita no preço das opções. O simples fato de que os saltos são descontínuos ao longo do tempo já permite mais flexibilidade neste modelo.

Somente a combinação destes dois modelos – volatilidade estocástica e difusão por saltos – já permite um ganho no apreçamento de opções em relação ao modelo tradicional Black-Scholes. Ao incluir também estocasticidade na estrutura a termo de taxa de juros o modelo permite – em teoria - ganhos no apreçamento em relação ao prazo, já que permitiria uma maior flexibilidade no fator de desconto do valor futuro do ativo-base.

Bakshi-Cao-Chen [1997] realizaram o experimento com preços de opções de compra do S&P 500 no período de junho de 1988 a maio de 1991 (totalizando 38.749 observações). Neste experimento eles implementaram um modelo que incorpora volatilidade estocástica, taxa de juros estocástica e saltos aleatórios – abreviação em inglês: SVSI-J. Os resultados obtidos mostraram que todos os modelos contêm imperfeições e inconsistências, porém, o modelo SVSI-J pode ser implementado em uma fórmula fechada e com resultados melhores do que com os modelos tradicionais.

De acordo com esse experimento os autores concluíram que o modelo pode ser especificado em cinco diferentes composições, a saber: SV (volatilidade estocástica), SI (estocasticidade na taxa de juros), SVSI (estocasticidade na

volatilidade e na taxa de juros), SV-J (volatilidade estocástica e difusão por saltos) e SVSI-J (estocasticidade na volatilidade, na taxa de juros e difusão por saltos).

Na seqüência os autores relatam que o modelo SI e SVSI-J não apresentam ganhos significativos em relação ao modelo padrão Black-Scholes. O modelo SV-J foi o que apresentou as melhores propriedades e ganhos estatísticos.

Esperamos obter um resultado semelhante nas opções de taxas de câmbio negociadas na BM&F. No presente trabalho não trabalharemos com estocasticidade na taxa de juros, uma vez que as opções terão maturação em prazo curto (um mês) e portanto o efeito da taxa de juros no comportamento da opção terá um efeito pequeno em relação aos outros parâmetros a serem estudados. O foco será dado no modelo SV-J.

O modelo deverá explicar melhor o comportamento “*moneyness*” das opções e reduzir os resíduos das diferenças entre o apreçamento pelo modelo Black-Scholes [1973] e o modelo Bakshi-Cao-Chen [1997]. O resultado final será satisfatório se for mantida a consistência entre o modelo teórico e a utilização empírica.

## **2. MODELAGEM DO AMBIENTE E ESTRUTURA MATEMÁTICA**

### **2.1. OBJETIVO**

Nesta seção iremos definir o ambiente que será utilizado na continuidade do trabalho. O ambiente será definido como média-variância e ficará restrito em: (i) ativos puros, (ii) mercado de capital completo, (iii) condições de ausência de arbitragem, (iv) avaliação neutra ao risco, (v) dominância estocástica, (vi) volatilidade.

Complementaremos esta seção com o arcabouço matemático que será utilizado.

### **2.2. MODELAGEM DO AMBIENTE**

#### **2.2.1. ATIVOS PUROS**

Definiremos um ativo puro como sendo um ativo que paga \$1 no final do período se um determinado estado da natureza ocorrer e \$0 se nada ocorrer. Este conceito e suas implicações (tal como decompor o mercado em portfólios de ativos puros) também é conhecido como Arrow-Debreu.

#### **2.2.2. MERCADO DE CAPITAL COMPLETO**

Assumiremos um mercado de capital completo como sendo aquele onde o número de ativos linearmente independentes é igual ao número de estados futuros da natureza. Conforme demonstrado por Ross [1976], se uma opção pode ser emitida em um mercado de capital completo um número infinito de ativos linearmente independentes pode ser formado e podemos obter infinitos *pay-offs* para as opções, mesmo com um pequeno número de ativos.

### 2.2.3. PRINCÍPIO DA AUSÊNCIA DE ARBITRAGEM

Este princípio, também conhecido como “lei do preço único”, pressupõe que dois ativos substitutos perfeitos e na ausência de fricções (limitações de negociação, custos de transação, taxas, etc.) devam ser negociados pelo mesmo preço.

Para que não existam oportunidades de arbitragem comprando o ativo mais atrativo financiando esta compra com a venda do menos atrativo, o retorno dos dois ativos deverá ser o mesmo.

Este conceito é importante na avaliação de derivativos, principalmente porque com esse modelo torna-se possível determinar o preço de um ativo (no caso o derivativo) tendo como base outros preços cotados no mercado.

Existem algumas condições para que prevaleçam as condições de ausência de arbitragem. Diante do objetivo do nosso trabalho, concentraremos a atenção em duas:

- paridade *call-put*: relação que existe entre os preços de uma opção de compra e uma opção de venda para o mesmo ativo-objeto, mesmo preço de exercício e mesmo vencimento. Desta forma, com a combinação de uma opção de compra e o ativo-objeto poderemos obter o mesmo *pay-off* de uma opção de venda e vice-versa. Esta relação é válida para as opções do tipo européia, mas é possível assumir que o exercício antecipado das opções do tipo americana é economicamente desfavorável;

- paridade de taxa de juros: é a relação intrínseca na taxa de juros entre duas moedas. Esta paridade estabelece que para não haver arbitragem, a relação entre duas moedas deverá estar ajustada pela taxa de juros entre os dois emitentes dessas moedas.

### 2.2.4. AVALIAÇÃO NEUTRA AO RISCO

A avaliação ao risco pode ser definida conceituando se o investidor aceita, rejeita ou é indiferente a um ativo que tem custo \$1 e paga \$1 ao final do período dada uma função de probabilidade. A análise desta componente nos leva ao conceito de variância.

$$\sigma_w^2 = E[X - E(X)]^2 \quad (2)$$

De acordo com Cox e Ross [1976] o conceito de avaliação neutra ao risco parte do princípio de que o valor de uma opção não depende do retorno esperado do ativo-objeto, desta forma, em um ambiente onde os investidores são indiferentes ao risco o retorno esperado será a própria taxa livre de risco. Considerando que no ambiente neutro ao risco todos os ativos possuem o mesmo retorno esperado, o preço deste ativo poderá ser determinado pelo seu risco, que por sua vez será medido pela volatilidade.

### **2.2.5. DOMINÂNCIA ESTOCÁSTICA**

Podemos dizer que um ativo é estocasticamente dominante sobre o outro se o recebimento ou *pay-off* é maior em qualquer estado da natureza ordenado. Matematicamente este conceito pode ser definido se a distribuição de probabilidade cumulativa de um ativo situa-se à esquerda da distribuição de outro ativo. A importância deste conceito é a sua aplicabilidade em qualquer função de distribuição e a sua expectativa de maximização da função utilidade (riqueza).

De acordo com este conceito, a dominância estocástica de primeira ordem estipula que um ativo terá a preferência dos investidores (indiferentes ao risco) se o retorno esperado for superior em qualquer estado da natureza ao retorno de outro ativo.

### **2.2.6. VOLATILIDADE**

Ao atribuímos valor a uma opção, temos por objetivo atribuir uma probabilidade de que o direito embutido no contrato da opção será exercido ou não. Intuitivamente estamos interessados na direção e na velocidade com que o mercado se moverá, seja alta ou queda dos preços. A volatilidade pode ser interpretada como uma medida da velocidade do mercado: mercados com alta volatilidade são



mercados com grandes oscilações de preços (independente da direção) e conseqüentemente com grande variação nas probabilidades de exercício das opções.

O conceito de média-variância é amplamente utilizado para apreçamento de ativos, principalmente por serem as medidas de localização (média) e dispersão (variância) mais facilmente observáveis em uma amostra.

A média (ou expectância) pode ser definida como:

$$E(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^N p_i X_i \quad (3)$$

onde  $p_i$  é a probabilidade de um evento  $X_i$  ocorrer,  $N$  é o número total de eventos e  $(\sim)$  representa a aleatoriedade.

A variância pode ser definida como:

$$VAR(\tilde{X}) = E\left[\left(X_i - E(\tilde{X})\right)^2\right] \quad (4)$$

Podemos notar que a unidade que mede a dispersão está expressa ao quadrado. Isto se faz necessário para que os valores negativos não sejam anulados pelos valores positivos, refletindo em uma medida espúria. Para facilitar a leitura, convencionou-se utilizar o desvio-padrão ( $\sigma$ ), que nada mais é do que a raiz quadrada da variância.

$$\sigma(\tilde{X}) = \sqrt{VAR(\tilde{X})} \quad (5)$$

A volatilidade é o termo ao qual o mercado financeiro convencionou chamar o desvio padrão. Este termo é expresso em porcentagem e para um período de tempo pré-determinado.

Um ativo tem valor esperado (média) \$1 e volatilidade de 10% ao ano, terá aproximadamente 68,3% (1 desvio-padrão) do período uma oscilação de \$0,90 a \$1,10. Em aproximadamente 99,7% (3 desvios-padrão) do ano a oscilação será entre \$0,70 e \$1,30. Para facilitar a ilustração do exemplo, assumimos que o retorno do

ativo segue uma distribuição Normal Padrão [ $Z \sim N(0,1)$ ]. Desta forma os percentuais (68,3% e 99,7%) foram extraídos de uma tabela de probabilidade  $p$ , tal que  $p = P(0 < Z < Z_c)$ . Na seqüência do trabalho essa premissa será relaxada.

Após conceituarmos e exemplificarmos a medida mais comum de volatilidade (desvio-padrão), descreveremos os dois tipos mais utilizados de inferir a volatilidade, a saber: histórica e implícita.

A volatilidade histórica é medida com base em séries passadas dos preços do ativo. Na análise deste tipo de volatilidade, é importante a definição do período de tempo que será utilizado para a apuração da série. Quanto maior o tempo e conseqüentemente maior a série, melhor será o resultado obtido para efeito de comparação. Mesmo dentro de um período longo, o estudo pode ser fracionado em “janelas” que permitam inclusive decompor sazonalidades. A volatilidade pode ser observada para qualquer tipo de ativo. Essa medida de volatilidade pode ser obtida

pela fórmula 
$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{1}{N} [(x_0 - \bar{x})^2 + (x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2]}$$
, onde

$\bar{x} = \frac{1}{N+1} (x_0 + x_1 + \dots + x_N)$ . Normalmente a unidade de medida padrão para avaliação

de opções é um ano, desta forma usa-se a convenção  $\sigma\sqrt{\Delta T}$ .

A volatilidade implícita tem relação direta com as opções. Isto porque este tipo de volatilidade é obtido a partir de um modelo previamente escolhido para determinar o preço das opções. Podemos sintetizar o conceito de volatilidade implícita como sendo aquela que inserida no modelo de apreçamento nos retorna exatamente o valor da opção que está sendo negociado no mercado.

Observando os dados reais do mercado, podemos notar que a volatilidade histórica quando utilizada no modelo teórico escolhido para apreçar as opções, não reflete o prêmio negociado no mercado. Desta evidência podemos extrair que a volatilidade não é única para todas as séries de opções do mesmo ativo e de mesmo vencimento.

O segundo ponto observável é que ao utilizarmos o conceito de volatilidade implícita, calculando por processos iterativos qual a volatilidade que retornaria o prêmio real de cada opção, verificamos que existe uma distribuição para a volatilidade implícita. É importante notar que esta distribuição não segue a mesma distribuição adotada no modelo teórico para o ativo-base. Este efeito onde diferentes volatilidades

são adotadas para diferentes preços de exercício é conhecido como “efeito-sorriso” (*smile effect*).

O estudo deste efeito é de suma importância porque contém informações relevantes de como o mercado está atribuindo probabilidades para o comportamento no futuro do ativo-base. Opções com menor volatilidade implícita estão relacionadas com opções mais próximas do dinheiro (*at-the-money*), conseqüentemente o mercado atribui uma grande probabilidade de que este seja o comportamento do ativo-base no futuro (vencimento das opções).

## 2.3. ESTRUTURA MATEMÁTICA

### 2.3.1. TEOREMA CENTRAL DO LIMITE

Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_N$ ,  $N$  variáveis aleatórias independentes e igualmente distribuídas. Sendo idêntica a distribuição dessas variáveis, temos que a esperança e a variância entre elas sejam:

$$\begin{aligned} E(X_1) &= E(X_2) = \dots = E(X_N) = \delta \\ \text{Var}(X_1) &= \text{Var}(X_2) = \dots = \text{Var}(X_N) = \nu^2 \end{aligned} \tag{6}$$

Sendo  $\zeta_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$  a soma das variáveis aleatórias, podemos definir que a esperança e a variância da soma é expressa por:

$$\begin{aligned} E(\zeta_N) &= E(X_1 + X_2 + \dots + X_N) = N \cdot \delta \\ \text{Var}(\zeta_N) &= \text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_N) = N \cdot \nu^2 \end{aligned} \tag{7}$$

Supondo que  $\zeta_N$  é uma variável aleatória normal com distribuição definida pelos parâmetros  $\mu = N \cdot \delta$  e  $\sigma^2 = N \cdot \nu^2$ , temos que para qualquer intervalo  $(a, b)$  com  $N$  suficientemente grande:

$$P\{a < \zeta_N < b\} \approx \int_a^b P \zeta_N(x) dx \quad (8)$$

onde  $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$  é a função densidade de probabilidade da distribuição normal.

O exposto anterior demonstra que o somatório de um número elevado de variáveis aleatórias independentes e igualmente distribuídas segue aproximadamente uma distribuição normal.

Este conceito é muito utilizado em finanças para aproximações da realidade, na medida que o comportamento e propriedades da distribuição normal são amplamente conhecidas e mais fáceis de serem aplicadas. O principal problema no caso do nosso estudo (opções negociadas no mercado de balcão) é que  $N$  não é suficientemente grande para assumirmos que a distribuição dos retornos seja uma normal.

### 2.3.2. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Um processo estocástico é um modelo matemático que explica a ocorrência no decorrer do tempo de uma variável aleatória. A evolução desta variável aleatória pode ser de forma contínua ou discreta. A aleatoriedade é capturada pela introdução de um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F})$  na qual a probabilidade pode ser inferida e estabelecida. Matematicamente podemos denotar um processo estocástico como uma coleção de variáveis aleatórias  $X = \{X_t; 0 \leq t < \infty\}$  em  $(\Omega, \mathfrak{F})$ .

Admitimos também que dentro deste universo existe um espaço  $(S, \mathfrak{G})$  que contém todas as  $\sigma$ -álgebra definidas por Borel, tal que:  $S = \mathbb{R}^d, \mathfrak{G} = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ . A classe de conjunto  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$  é a menor  $\sigma$ -álgebra que contenha todos os componentes definidos no espaço  $(\mathbb{R}^d)$ . O indicador  $t$  denota o espaço de tempo compreendido entre  $[0, \infty)$  da variável aleatória  $X_t$ . A definição dos elementos de uma  $\sigma$ -álgebra (os borelianos) pode ser dada por um conjunto que pode ser obtido a partir de um número enumerável de intervalos aplicando-se as operações  $\cup, \cap, \complement$  ( $A \cup B =$  evento A ou

evento B;  $A \cap B$  = evento A e B;  $A^c$  = ocorre evento A<sup>c</sup> se, e somente se não ocorrer evento A) em um número enumerável de vezes.

Para um ponto amostral fixo  $\omega \in \Omega$ , a função  $t \mapsto X_t(\omega); t \geq 0$  representa a trajetória do processo  $X$  associado com  $\omega$ .

A inclusão do conceito de  $\sigma$ -álgebra no estudo de processos estocásticos é permitir um registro da informação. Na medida que um processo estocástico oscila no tempo, a decomposição do processo em  $\sigma$ -álgebra menores permite uma melhor seleção da informação de acordo com a conveniência de cada período de tempo.

### 2.3.3. MOVIMENTO BROWNIANO

Um movimento Browniano (processo de Wiener) é um processo estocástico contínuo com as seguintes propriedades:

- segue um processo de Markov: a distribuição de probabilidade dos valores futuros do processo não guarda informação dependente dos valores passados ou de qualquer outra informação;

- as alterações de estado são independentes: a distribuição de probabilidade da variável do processo em um intervalo de tempo é independente de qualquer outro intervalo de tempo, desde que os intervalos não se sobreponham;

- as alterações de estado observadas em intervalo de tempo finito seguem uma distribuição normal (Gaussiana) com variância crescendo linearmente.

Matematicamente definimos um movimento Browniano como  $B = \{B_t, \mathfrak{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$  definido em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ .

Sendo  $z(t)$  um processo de Wiener,  $\Delta z$  uma variação de  $z(t)$  e  $\Delta t$  uma variação do intervalo de tempo, temos que  $\Delta z = \varepsilon_t \cdot \sqrt{\Delta t}$ . Ao alterarmos o tempo de tal forma que  $\Delta t$  seja infinitesimalmente pequeno, podemos representar o movimento Browniano em tempo contínuo como:

$$dz = \varepsilon_t \sqrt{dt} \tag{9}$$

Ao incorporarmos uma tendência (*drift*) para o processo de Wiener, temos:

$$dx = \alpha dt + \sigma dz \quad (10)$$

Onde  $x$  é o processo estocástico,  $\alpha$  é o *drift* e  $\sigma$  é a variância do processo. Lembramos que estamos trabalhando ainda com distribuição normal, esperança  $E(\Delta x) = \alpha \cdot \Delta t$  e variância  $Var(\Delta x) = \sigma^2 \cdot \Delta t$ .

#### 2.3.4. LEMA DE ITÔ

O processo de Itô é um processo estocástico de tempo contínuo que pode ser representado por  $dx = a(x,t) \cdot dt + b(x,t)dz$ , onde  $a(x,t)$  é a função não-aleatória de tendência (*drift*),  $b(x,t)$  é a função não aleatória de variância,  $z(t)$  é um processo de Wiener e  $t$  é o espaço de tempo.

O Lema de Itô mostra que se a função  $f(x,t)$  for diferenciável duas vezes em  $x$  e uma vez em  $t$ , temos que:

$$df = \left[ \frac{\partial f}{\partial t} a(x,t) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(x,t) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] dt + b(x,t) \frac{\partial f}{\partial x} dz \quad (11)$$

O lema de Itô é a base de fórmulas e métodos de apreçamento de opções já que a função  $f(x,t)$  pode ser o preço tanto de um contrato futuro como da própria opção.

#### 2.3.5. Quadratura de Gauss-Legendre

O cálculo de integral pelo processo conhecido como quadratura de Gauss-Legendre é uma técnica para integrar numericamente uma função posicionando os pontos da amostragem de tal forma a obter uma melhor precisão. Desta forma com  $n$  pontos temos  $2n$  incógnitas:  $\varsigma_1$  e  $f(\varsigma_1)$ , conseqüentemente pode-se ajustar um polinômio de ordem  $2n-1$  para que a função seja integrada exatamente.

Aplica-se então a equação:

$$I = \int_{-1}^1 f(\zeta) d\zeta = \sum_{i=1}^n \omega_i f(\zeta_i) \quad (12)$$

onde  $\zeta_i$  é o ponto de avaliação e  $\omega_i$  é o respectivo coeficiente da ponderação.

Na quadratura de Gauss-Legendre a integral é feita no intervalo  $[-1,1]$ , mas pode ser avaliada em um intervalo mais geral aplicando-se a transformação linear:  $x = c + m\zeta$ , onde  $c = \frac{1}{2}(b+a)$  e  $m = \frac{1}{2}(b-a)$ . Substituindo  $\zeta = -1$  temos  $x = a$  e  $\zeta = 1$  temos  $x = b$ , desta forma a equação (12) pode ser reescrita de uma forma mais geral como:

$$I = \int_a^b f(x) dx = m \sum_{i=1}^n \omega_i f(c + m\zeta_i) \quad (13)$$

A tabela abaixo mostra os pontos adequados de  $\zeta_i$  e  $\omega_i$  para uma integral até a quinta ordem :

Gauss-Legendre Abcissas e Ponderações		
n	Valores de $\zeta_i$	Coeficientes $\omega_i$
2	$\pm \sqrt{\frac{1}{3}}$	1
3	0 $\pm 0.77459667$	0.88888889 0.55555555
4	$\pm 0.33998104$ $\pm 0.86113631$	0.65214515 0.34785485
5	0 $\pm 0.53846931$ $\pm 0.90617985$	0.56888889 0.47862867 0.23692689

Tabela 1 – Abcissas e ponderações para integração pelo método da quadratura Gauss-Legendre

### 3. APREÇAMENTO COM INCORPORAÇÃO DE SALTOS

#### 3.1. OBJETIVO

Nesta seção iremos demonstrar alguns dos modelos mais utilizados para apreçamento de opções, relatando os pontos fortes e fracos de cada um.

Iniciaremos com o modelo desenvolvido por Black-Scholes [1973] por ter sido a primeira solução em fórmula fechada de equilíbrio geral na avaliação do prêmio de opções. Seguiremos diferenciando os modelos de equilíbrio e livre de arbitragem e culminaremos analisando o modelo proposto por Bakshi-Cao-Chen [1997].

#### 3.2. APREÇAMENTO DE OPÇÕES

Ao utilizarmos modelos matemáticos para estimarmos o prêmio das opções estamos sujeitos a uma série de problemas, sendo que o principal é que o valor obtido não é precisamente igual ao valor negociado no mercado. Dentro do ambiente proposto anteriormente, as principais causas deste efeito são: simplificações da realidade, modelo inadequado e dificuldade de estimar a volatilidade.

Matematicamente podemos representar o preço de uma opção como sendo uma função de cinco parâmetros:

$$\text{Price}_{C,P} = f(S, X, \sigma^2, \tau, r_f) \quad (14)$$

Onde  $S$  é o preço do ativo-objeto,  $X$  é o preço de exercício da opção,  $\sigma^2$  é a variância do retorno do ativo-objeto,  $\tau$  é o prazo até o exercício e  $r_f$  é a taxa livre de risco.

O fato de que o comportamento do ativo-base é estocástico – Ramaswamy-Sundaresan [1985] demonstraram o fato para taxa de juros – é crucial para apreçar opções de futuros.



No modelo proposto por Black-Scholes [1973] os autores derivaram uma equação diferencial que apresenta solução para o preço de opções baseado em um ativo-objeto que não paga dividendo. O preço de uma opção de compra do tipo européia pode ser obtido por:

$$C = SN(d_1) - Xe^{-r_f\tau} N(d_2) \quad (15)$$

Onde,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + r_f\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau} \quad (16)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

Sendo que,

$$N(j) = \int_{-\infty}^j f(z) dz \quad (17)$$

para  $j = 1, 2$ .

A fórmula fechada resultante deste modelo ainda hoje é utilizada para calcular opções, sendo que a sua variação para cálculo onde o ativo-objeto é um contrato futuro – Black [1976] – é muito utilizada no mercado brasileiro para as opções negociadas na BM&F.

Os modelos desenvolvidos por Vasicek [1977] e Cox-Ingersoll-Ross [1985] são tidos como modelos de equilíbrio que assumem um processo de reversão à média da taxa de juros de curto prazo, sendo que no último as taxas devem ser positivas.

O modelo desenvolvido por Garman-Kohlhagen [1983] tem suas origem nos conceitos propostos por Black-Scholes [1973], porém tem por objetivo apreçar opções sobre moeda. De acordo com o princípio da ausência de arbitragem

(especificamente paridade de taxa de juros), o nível futuro da relação de troca entre as duas moedas (taxa de câmbio) depende dos níveis das taxas de juros praticadas nos países em questão.

Neste modelo, a volatilidade da opção será uma composição das volatilidades das duas moedas, determinadas pelas volatilidades das duas taxas de juros e a correlação entre elas. O valor futuro de uma taxa de câmbio pode ser obtido por:  $F = Se^{(r_d - r_f)t}$ , onde  $F$  é o valor futuro,  $S$  é o valor atual,  $r_d$  é a taxa de retorno sem risco em moeda do país 1,  $r_f$  é a taxa de retorno sem risco em moeda do país 2 e  $t$  é o tempo até o vencimento.

### 3.3. BAKSHI-CAO-CHEN [1997]

A proposta de Bakshi et al. incorpora volatilidade estocástica, taxa de juros estocástica, saltos aleatórios (modelo SVSI-J). O valor da opção será uma função dos parâmetros definidos no modelo Black-Scholes adicionados de: correlação entre o preço do ativo e a volatilidade do processo, a frequência dos saltos, a média e desvio-padrão do tamanho do salto, a velocidade do ajuste, a média de longo prazo e o coeficiente de variação da volatilidade do ativo-base. Neste modelo, sob a hipótese de neutralidade ao risco, temos que a difusão do preço do ativo-base pode ser dado por:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = [R(t) - \lambda\mu_j]dt + \sqrt{V(t)} \cdot d\omega_s(t) + J(t)dq(t) \quad (18)$$

$$dV(t) = [\theta_v - \kappa_v V(t)]dt + \sigma_v \sqrt{V(t)} \cdot d\omega_v(t) \quad (19)$$

onde,

$R(t)$  = taxa de juros no instante  $t$ ;

$\lambda_j$  = frequência de saltos;

$\mu_j$  = média do tamanho dos saltos;

$V(t)$  = componente de difusão de retorno da variância (condicional ou sem saltos);

$\omega_S(t)$  e  $\omega_v(t)$  = movimento Browniano padrão com  $Cov_t[d\omega_S(t), d\omega_v(t)] \equiv \rho dt$

$J(t)$  = tamanho do salto (em percentual), com distribuição lognormal, independente e identicamente distribuída  $\ln[1+J(t)] \sim N\left(\ln[1+\mu_J] - \frac{1}{2}\sigma_J^2, \sigma_J^2\right)$ ;

$q(t)$  = contador de saltos de Poisson com intensidade  $\lambda_J$ , onde  $pr\{dq(t)=1\} = \lambda_J dt$  e  $pr\{dq(t)=0\} = 1 - \lambda_J dt$ ;

$\frac{\theta_v}{\kappa_v}$  = média de longo prazo;

$\kappa_v$  = velocidade do ajuste;

$\sigma_v$  = coeficiente de variação da difusão da volatilidade  $V(t)$ .

De acordo com o proposto a variância pode ser decomposta em dois fatores:

$$\frac{1}{dt} Var_t \left( \frac{dS(t)}{S(t)} \right) = V(t) + V_J(t) \quad (20)$$

Nota-se que os dois fatores são a variância do ativo e a variância do salto onde este último pode ser expresso por:

$$V_J(t) \equiv \left( \frac{1}{dt} \right) Var_t [J(t)dq(t)] = \lambda \left[ \mu_J^2 + (e^{\sigma_J^2} - 1)(1 + \mu_J)^2 \right] \quad (21)$$

A assimetria da distribuição pode ser controlada tanto pela correlação ( $\rho$ ) como pela média dos saltos ( $\mu_J$ ). A curtose pode ser controlada pelo coeficiente de variação da difusão da volatilidade ( $\sigma_v$ ). Uma vez que  $V(t)$  segue um processo contínuo, a sua habilidade de controlar a assimetria negativa e o excesso de curtose é limitada. Já o processo descontínuo com saltos  $V_J(t)$  pode absorver e controlar tanto a assimetria como a curtose através dos parâmetros  $\lambda$ ,  $\mu_J$  e  $\sigma_J$ .

A generalização da fórmula pode ser dada por:

$$C_{(t,\tau)} = S(t)\prod_1(t,\tau,S,R,V) - KB(t,\tau)\prod_2(t,\tau,S,R,V) \quad (22)$$

onde,

$C_{(t,\tau)}$  = preço da opção de compra do tipo europeia no tempo  $t$  com vencimento em  $\tau$ ;

$K$  = preço de exercício;

$B(t,\tau)$  = valor presente de um título livre de risco;

$\prod_j$  = probabilidades neutras ao risco que são especificadas como:

$$\prod_j(t,\tau,S(t),R(t),V(t)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi \ln[K]} f_j(t,\tau,S(t),R(t),V(t);\phi)}{i\phi} \right] d\phi \quad (23)$$

para

$$f_1(t,\tau,S(t),R(t),V(t);\phi) = \exp\{u(\tau) + x_r(\tau)R(t) + x_v(\tau)V(t) + i\phi \ln[S(t)]\} \quad (24)$$

e

$$f_2(t,\tau,S(t),R(t),V(t);\phi) = \exp\{z(\tau) + y_r(\tau)R(t) + y_v(\tau)V(t) + i\phi \ln[S(t)] - \ln[B(t,\tau)]\} \quad (25)$$

## 4. ANÁLISE DOS RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 4.1. DADOS

Os dados foram obtidos a partir da observação feita pelo autor no período de janeiro de 2005 até outubro de 2006, perfazendo um total de 459 dias de negociação das opções de dólar futuro. Diariamente a BM&F promove um leilão onde são apregoadas algumas séries de opções de compra (*call*) e de opções de venda (*put*) para cada vencimento. O mercado de balcão normalmente baseia as suas cotações com base nos “*deltas*” das opções tendo como referência a série de preço de exercício considerada “no-dinheiro”. Para tanto, utilizam-se duas convenções para cotar essas opções:

- *butterfly-spread* (BF): especifica a diferença de volatilidade entre a opção “no-dinheiro” e a opção de “*delta*” igual a 25%. Este modelo captura mais facilmente a curtose ou efeito-sorriso;

- *risk-reversal* spread (RR): especifica a diferença de volatilidade entre a opção de compra com “*delta*” igual a 25% e a opção de venda com “*delta*” igual a 25%. Este modelo captura mais facilmente a assimetria.

As séries normalmente apregoadas são aquelas cujos “*deltas*” sejam próximos de 75%, 50% e 25%. Este leilão ocorre em pregão de viva-voz e após o encerramento do leilão os participantes do mercado continuam negociando as séries chamadas ou quaisquer outras que estejam disponíveis no mercado de balcão.

Diariamente o autor coletou os preços de oito séries de opções para o primeiro vencimento do ativo-objeto. Apesar de estar disponível para negociação vencimentos de maturidade maior, a liquidez do mercado fica concentrada neste vencimento. A coleta seguiu o seguinte critério:

- utilizar o preço decorrente de negociação;
- na ausência de negociação, utilizar o preço médio entre a oferta de compra e venda da opção.

A utilização desta metodologia permite que mesmo não ocorrendo negociação efetiva, os preços utilizados correspondam a preços coerentes com a realidade do instante da coleta. Esta premissa é válida e verdadeira tanto

teoricamente (princípio da ausência de arbitragem) quanto empiricamente já que se houvesse uma super-avaliação dos preços, a(s) contraparte(s) poderiam interferir na apreçoação e vender contratos até que o preço de equilíbrio fosse encontrado. A recíproca é verdadeira também na sub-avaliação dos preços.

Apesar desta metodologia (conhecida também como *bid-ask spread*) apresentar diversas conseqüências no retorno das séries temporais (como por exemplo: introduzir uma correlação serial negativa lag-1 no retorno da série), entendemos que ela é necessária para que mais dados de preços estejam disponíveis.

Uma peculiaridade de negociação desses contratos facilita a obtenção dos dados. As opções são negociadas conjuntamente com uma proporção (delta) do ativo-base. Com isso ao apreçoar uma oferta de compra-venda da opção é também definido o preço e a proporção (delta) do ativo-base para negociação.

Desta forma, os efeitos de descasamentos que poderiam ocorrer entre a apuração do preço da opção e os preços do ativo objeto (o que é comum em experimentos com opções cujo ativo objeto são ações) são nulos no nosso trabalho.

Ao trabalharmos com o retorno da série do ativo objeto utilizamos o conceito de retorno composto continuamente (retorno em log). Desta forma o retorno foi obtido

pela expressão  $r_t = \ln(1 + R_t) = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$ . Este conceito é válido uma vez que as

propriedades estatísticas do retorno em log são mais fáceis de serem tratadas do que o retorno simples.

A partir dos preços das oito séries, dos respectivos “deltas”, do preço do ativo-base no momento da coleta e da taxa de juros do momento, reconstruímos a curva de volatilidade implícita pelo modelo Black-76. Utilizamos este modelo de apreçoamento por utilizar os mesmos preceitos do modelo tradicional Black-Scholes e incorporar o fato do ativo-base ser um ativo com vencimento futuro (que é o caso do grupo de opções estudado – opção do tipo européia com base na taxa de dólar futuro).

Com os dados (3.672 preços) em mãos decidimos uniformizar a informação. Para tal adaptamos uma curva aos dados de volatilidade implícita obtidos experimentalmente. A situação mais comum seria escolher uma curva cuja soma dos quadrados dos erros nos pontos fosse minimizada. No entanto, preferimos utilizar

uma forma mais direta através de uma série de potências truncadas (polinômio). São necessários dois pontos para definir um polinômio de primeira ordem, três pontos para um polinômio quadrático (segunda ordem) e assim progressivamente. Desta forma necessitamos de  $n + 1$  pontos para especificarmos de forma única um polinômio de ordem  $n$ . Como possuímos oito séries de preços por dia, poderíamos escolher um polinômio até a sétima ordem. Porém, em função das más propriedades numéricas de polinômios de ordem elevada não seria aconselhável escolher uma ordem maior do que a necessária. Além disso, a medida que a ordem do polinômio aumenta, a aproximação torna-se menos suave, já que os polinômios de ordem superior podem ser derivados mais vezes até que se tornem zero. Ponderando todas essas considerações comparamos as curvas obtidas na geração de polinômios de primeira ordem até a sétima ordem e decidimos adotar a terceira ordem em todo o experimento para ajustar as curvas de volatilidade implícita. Sendo assim, para cada dia foi gerado um polinômio de terceira ordem na forma:  $p(x) = p_1x^3 + p_2x^2 + p_3x + p_{n+1}$  com os preços observados e com base nesse cada curva de volatilidade implícita foi montada.

## 4.2. SÉRIE TEMPORAL

Ao utilizarmos os dados amostrais do dólar futuro (janeiro 2005 até outubro 2006) pretendemos fazer inferências sobre o processo estocástico estacionário subjacente. Todas as análises e testes desta seção foram implementados com a utilização do software Eviews 4.1.

Podemos dizer que o processo é estacionário se suas média e variância forem constantes ao longo do tempo e o valor da covariância entre dois períodos de tempo depender apenas da defasagem entre os dois períodos. Ou seja, a média, variância e covariância permanecem as mesmas independentemente do período de tempo em que sejam medidas.

Visualmente temos que a série de retorno do dólar futuro é estacionária.

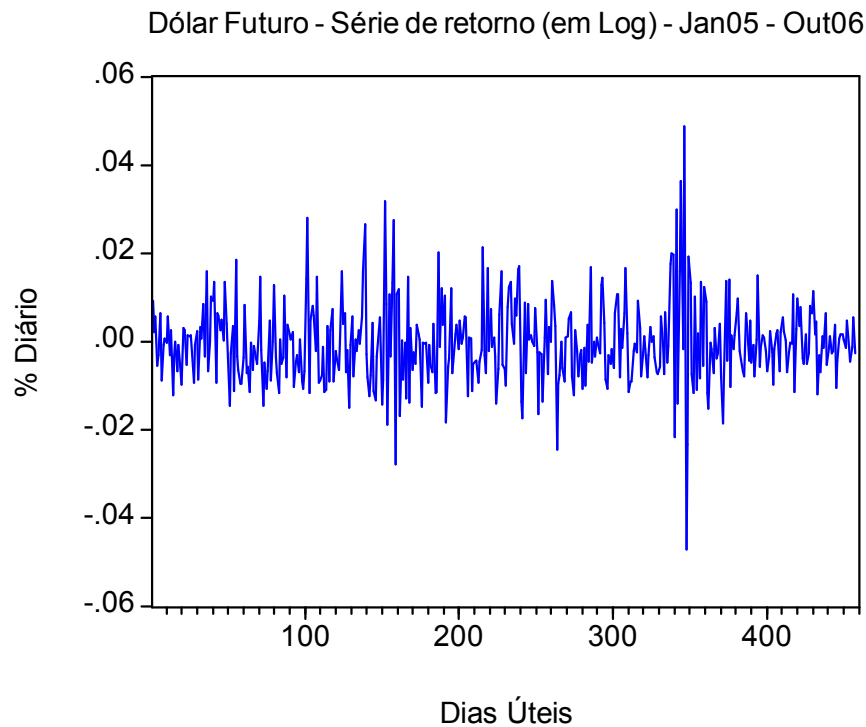


Gráfico 2 – Série de retorno em logaritmo do dólar futuro no período de janeiro de 2005 a outubro de 2006.

Utilizamos a estatística  $Q_{LB} = n(n+2) \sum_{k=1}^m \left( \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} \right) \sim \chi_m^2$ , desenvolvida por Ljung-

Box para verificar se todos os coeficientes de autocorrelação  $\rho_k$  são simultaneamente iguais a zero. Como resultado obtivemos  $Q(10) = 8.83$  com  $p\text{-value} = 0.54$  demonstrando que a série não apresenta autocorrelação serial significativa.

Efetuamos também o teste de raiz unitária proposto por Dickey-Fuller. Neste teste a hipótese nula é de que a série possui raiz unitária, isto é, sendo o modelo de uma regressão  $Y_t = \phi Y_{t-1} + u_t$ , se verificarmos que  $\phi = 1$  podemos então dizer que a variável estocástica  $Y$  tem raiz unitária e portanto segue o padrão *random walk* (caminho aleatório). Uma série temporal segue um caminho aleatório desde que  $p_t = p_{t-1} + a_t$ , onde  $p_0$  é o valor inicial do processo e  $\{a_t\}$  é uma série temporal de choques com ruído branco. É importante notar que o preço de um ativo pode seguir o



padrão não estacionário *random walk* (a cotação de hoje é igual a cotação de ontem mais um choque aleatório), mas o seu retorno não necessariamente.

Como resposta a essa proposição temos que a estatística  $\tau$  do teste para a série do dólar futuro apresentou um resultado de  $-1.66$ , não rejeitando a hipótese nula e o mesmo teste para a série do retorno (em log) do dólar futuro apresentou um resultado de  $-22.28$ , rejeitando a hipótese nula. Em ambos os testes o valor crítico a 5% é igual a  $-2.87$  e o valor entre parênteses representa o *p-value*.

O próximo passo foi testar a heterocedasticidade da série. Para tal geramos uma regressão do retorno do dólar contendo apenas a sua constante para simplificar o processo. Utilizamos o teste proposto por Breusch-Pagan-Godfrey (BPG). Neste teste considera-se um modelo  $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i$  onde os autores desenvolveram um teste do multiplicador de Lagrange da hipótese nula de que  $\sigma_i^2 = \sigma^2 f(\alpha_0 + \alpha' Z_i)$ , onde  $Z_i$  é um vetor de variáveis independentes, podendo incluir alguns dos regressores originais. O modelo será homoscedástico se  $\alpha = 0$ .

Com base nos resíduos da série estimamos por máxima verossimilhança  $\hat{\sigma}_{MV}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n}$ , construímos a série  $p_i = \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{MV}^2}$ . Supondo que  $p_i$  se relaciona linearmente com  $X_i (= Z_i)$ , obtemos a regressão  $p_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + v_i$ . Temos então que o vetor  $Z$  é composto por  $Z_1$ , que por sua vez é igual a  $X_1$ . Sob a hipótese nula de homoscedasticidade, a estatística  $\Theta = \frac{1}{2}(SQE)$  onde  $SQE = \sum [(\hat{p}_i - \bar{p})^2]$ , é assintoticamente distribuída como uma qui quadrada com  $m-1$  graus de liberdade tal que  $\Theta \underset{ass}{\sim} \chi_{1gl}^2$ .

O resultado do teste BPG mostrou que o valor encontrado 67.40 é superior ao valor (3.84) tabelado da distribuição  $\chi^2$  - qui quadrada - para 5% de significância, desta forma rejeitamos a hipótese nula de homoscedasticidade.

Com base nessas informações geramos um modelo GARCH(1,1) para o retorno do dólar futuro de tal forma a capturar a heteroscedasticidade:

$$\begin{aligned}
r_t &= \mu + a_t \\
a_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\
\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_1 a_{t-1}^2
\end{aligned} \tag{24}$$

onde,

$$\begin{aligned}
r_t &= -0.000787 + a_t \\
&\quad (0.0003) \\
\sigma_t^2 &= 0.000012 + 0.2082 \sigma_{t-1}^2 + 0.6363 a_{t-1}^2 \\
&\quad (0.0000) \quad (0.0540) \quad (0.0994)
\end{aligned} \tag{25}$$

onde  $\{a_t\}$  é um choque com ruído branco e os números entre parênteses representam o erro padrão dos coeficientes e os mesmos são significantes a 5% de confiança. A adequação do modelo foi obtida com a análise dos resíduos ao quadrado  $\tilde{a}_t^2$  onde obtivemos  $Q(5) = 4.781$  e  $Q(10) = 10.932$ , sendo os números entre parênteses o  $p$ -value.

A equação da previsão da variância incondicional para o modelo GARCH (1,1) é dada por:

$$\begin{aligned}
\sigma_h^2(\ell) &\rightarrow \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1} \\
\ell &\rightarrow \infty
\end{aligned} \tag{26}$$

onde temos:

$$\sigma_h^2(\ell) = \frac{0.000012}{1 - 0.2082 - 0.6363} = 0.00008 \tag{27}$$

Alternativamente geramos um modelo para o retorno do dólar futuro seguindo um processo estocástico auto-regressivo com média móvel de primeira ordem - ARMA(1,1) - e variância heteroscedástica. De tal forma que:

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1} \tag{28}$$

onde  $\{a_t\}$  é um choque com ruído branco e  $\phi_1 \neq \theta_1$  para que a equação não se reduza a um processo de ruído branco.

A equação do processo fica então:

$$r_t = \underset{(0.0001)}{-0.0006} + \underset{(0.0352)}{0.9285} r_{t-1} + a_t - \underset{(0.0211)}{0.9717} a_{t-1} \quad (29)$$

onde os números entre parênteses representam o erro padrão dos coeficientes. Todos os coeficientes são significantes a 5% de confiança.

A equação da volatilidade do processo pode ser descrita como:

$$\sigma_t^2 = \underset{(0.0000)}{0.000009} + \underset{(0.0503)}{0.1937} a_{t-i}^2 + \underset{(0.0860)}{0.6912} \sigma_{t-j}^2 \quad (30)$$

Os números entre parênteses representam o erro padrão dos coeficientes e os mesmos são significantes a 5% de confiança. A adequação do modelo foi obtida com a análise dos resíduos ao quadrado  $\tilde{a}_t^2$  onde obtivemos  $Q(5) = \underset{(0.260)}{4.015}$  e  $Q(10) = \underset{(0.303)}{9.486}$ , sendo os números entre parênteses o *p-value*.

A equação da previsão da variância incondicional para o modelo GARCH (1,1) é dada por:

$$\sigma_h^2(\ell) = \frac{0.000009}{1 - 0.1937 - 0.6912} = 0.00008 \quad (31)$$

Os valores obtidos para  $\sigma_h^2(\ell)$  na equação (27) e na equação (31) são praticamente idênticos, havendo diferenciação após a sexta casa decimal, porém devido a maior simplicidade na equação da média (25) preferimos adotar o resultado exposto em (27).

### 4.3. ESTIMAÇÃO DO MODELO

Nesta seção demonstraremos como será feita a estimação do modelo de apreçamento proposto por Bakshi-Cao-Chen [1997]. Todas as rotinas foram implementadas com a utilização do software Matlab 7.

Na equação (23) o cálculo da integral da parte Real da equação foi obtido com o auxílio da função QUADG adaptada para utilizar a Quadratura Gauss-Legrende para integração.

A volatilidade atual (condicional ou sem saltos) e seus parâmetros estruturais  $(\kappa_V, \theta_V, \sigma_V, \rho)$  e os parâmetros relacionados ao salto  $(\mu_J, \sigma_J, \lambda)$  tem que ser estimados.

Sendo  $C_N(t, \tau_n; \kappa_n)$  os preços observados e  $\hat{C}_N(t, \tau_n; \kappa_n)$  os preços obtidos pela fórmula (20) temos que  $\hat{C}_N - C_N$  é uma função de valores de  $V(t)$  e por  $\equiv \{\theta_V, \sigma_V, \kappa_V, \rho, \lambda, \mu_J, \sigma_J\}$ .

Em um processo de otimização é fundamental começar com uma boa aproximação inicial para que a resposta mantenha o problema nas vizinhanças da solução, desta forma, após diversas iterações chegamos aos valores iniciais do vetor  $= [0.01, 0.5, 0.5, -0.5, 0.05, 0.02, 0.02]$ .

Utilizamos então a função LSQNONLIN para otimizar o mínimo do somatório do quadrado dos erros:  $SQE(t) \equiv \min_{V(t), \Phi} \sum_{n=1}^N \left| \varepsilon_n[V(t), \Phi] \right|^2$ , sendo  $\varepsilon_n[V(t), \Phi] \equiv \hat{C}_N(t, \tau_n; \kappa_n) - C_N(t, \tau_n; \kappa_n)$ .

Os resultados dos parâmetros estimados estão dispostos na tabela abaixo:

Vetor PHI (sem volatilidade)

	$\theta_V$	$\sigma_V$	$\kappa_V$	$\rho$	$\lambda$	$\mu_J$	$\sigma_J$
Total	0,0005	2,9140	2,9624	(0,6731)	0,0665	(0,0057)	0,0123
Jan-05	0,0000	28,9660	11,1280	(0,9903)	0,0471	0,0185	0,0115
Feb-05	0,0000	2,4253	2,6163	(0,7051)	0,1041	0,0052	0,0195
Mar-05	0,0000	34,1020	24,8290	(0,9994)	0,0406	0,0284	0,0157
Apr-05	0,0000	15,6090	15,9710	(0,9999)	0,0580	0,0191	0,0159
May-05	0,0000	25,6510	54,3260	(0,9999)	0,0554	0,0257	0,0173
Jun-05	0,0000	26,1450	59,5370	(0,9997)	0,0438	0,0258	0,0183
Jul-05	0,0000	1,9334	2,3960	(0,7327)	0,0665	(0,0095)	0,0001
Aug-05	0,0000	8,4263	8,6746	0,9318	0,0611	0,0266	0,0122
Sep-05	0,0000	12,1180	33,9130	(0,9976)	0,0465	0,0198	0,0254
Oct-05	0,0000	15,0410	30,9850	(0,9731)	0,0531	0,0272	0,0123
Nov-05	0,0000	2,7062	3,1672	(0,5998)	0,1497	0,0030	0,0134
Dec-05	0,0000	11,4170	17,3370	(0,9886)	0,0505	0,0273	0,0176
Jan-06	0,0000	20,2820	38,9960	(0,9997)	0,0609	0,0260	0,0150
Feb-06	0,0000	2,2035	2,2686	(0,6627)	0,0727	0,0071	0,0244
Mar-06	0,0000	4,6046	5,5452	(0,7612)	0,0689	0,0213	0,0146
Apr-06	0,0000	8,3188	10,3990	(0,9882)	0,0871	0,0224	0,0109
May-06	0,0000	3,5250	3,8154	(0,2990)	0,0475	0,0207	0,0125
Jun-06	0,0000	12,2340	16,0180	(0,9997)	0,0396	0,0490	0,0372
Jul-06	0,0000	7,2586	9,8626	(0,9793)	0,0625	0,0229	0,0206
Aug-06	0,0000	4,5417	5,7621	(0,8675)	0,0655	0,0078	0,0157
Sep-06	0,0000	1,3729	1,4117	(0,6372)	0,0578	0,0034	0,0000
Oct-06	0,0000	2,1546	2,1975	(0,7118)	0,0667	0,0052	0,0155

Tabela 2 – Parâmetros estimados do vetor

Repetimos o mesmo procedimento descrito anteriormente incluindo a volatilidade  $V(t)$  como um parâmetro a ser estimado no vetor . Os parâmetros iniciais do vetor são:  $= [0.01, 0.5, 0.5, -0.5, 0.05, 0.02, 0.02, 0.009359]$ . O objetivo é verificar se ocorre ganho na redução dos resíduos entre os preços estimados e os preços observados no mercado. Os resultados podem ser verificados na tabela abaixo:

Vetor PHI (com volatilidade)									
	$\theta_V$	$\sigma_V$	$\kappa_V$	$\rho$	$\lambda$	$\mu_J$	$\sigma_J$	$V(t)$	$V(t)$
Total	0,0000	1,1040	1,1443	(0,4641)	0,0555	0,0051	0,0203	0,0068	10,80%
Jan-05	0,0000	90,9220	234,3900	(0,9896)	0,0312	0,0238	0,0114	0,0000	0,00%
Feb-05	0,0000	1,5721	1,8814	(0,5753)	0,0526	0,0160	0,0198	0,0011	1,77%
Mar-05	0,0000	4,0511	4,0456	(0,7437)	0,0429	0,0256	0,0173	0,0026	4,17%
Apr-05	0,0000	9,1763	8,5145	(0,8244)	0,0340	0,0291	0,0186	0,0000	0,06%
May-05	0,0000	1,9263	1,9793	(0,5890)	0,0547	0,0221	0,0180	0,0022	3,51%
Jun-05	0,0000	1,3364	1,3615	(0,5514)	0,0558	0,0102	0,0198	0,0046	7,29%
Jul-05	0,0000	1,8903	1,9332	(0,5472)	0,0532	0,0143	0,0182	0,0033	5,24%
Aug-05	0,0000	2,4572	2,3120	(0,4044)	0,0547	0,0223	0,0202	0,0033	5,29%
Sep-05	0,0000	8,5261	10,7120	(0,5794)	0,0176	0,0424	0,0358	0,0000	0,03%
Oct-05	0,0000	0,9891	1,0055	(0,5345)	0,0566	0,0107	0,0191	0,0029	4,65%
Nov-05	0,0000	2,5720	2,7269	(0,5547)	0,0550	0,0162	0,0171	0,0026	4,06%
Dec-05	0,0000	1,7066	1,7606	(0,5370)	0,0539	0,0192	0,0175	0,0034	5,42%
Jan-06	0,0000	2,5865	2,7963	(0,5721)	0,0527	0,0204	0,0191	0,0042	6,62%
Feb-06	0,0000	2,3331	2,6917	(0,5261)	0,0643	0,0216	0,0140	0,0052	8,32%
Mar-06	0,0000	1,2539	1,3145	(0,5399)	0,0565	0,0162	0,0194	0,0034	5,35%
Apr-06	0,0000	6,5149	7,3120	(0,7473)	0,0737	0,0269	0,0042	0,0001	0,21%
May-06	0,0000	2,4360	3,3764	0,4974	0,0498	0,0220	0,0046	0,0058	9,20%
Jun-06	0,0000	3,2927	3,2220	(0,7804)	0,0419	0,0460	0,0388	0,0003	0,46%
Jul-06	0,0000	10,6310	9,8939	(0,8733)	0,0452	0,0307	0,0200	0,0002	0,29%
Aug-06	0,0000	4,7293	4,9671	(0,6802)	0,0428	0,0242	0,0009	0,0029	4,54%
Sep-06	0,0000	4,0916	4,6121	(0,5623)	0,0471	0,0154	0,0155	0,0031	4,85%
Oct-06	0,0000	1,4500	1,5287	(0,5641)	0,0544	0,0052	0,0192	0,0036	5,71%

Tabela 3 – Parâmetros estimados do vetor com a inclusão da volatilidade

Conforme explicitado nas tabelas as estimações foram efetuadas vinte e três vezes para cada vetor : uma para os dados conjuntamente e também para cada um dos vinte e dois sub-períodos (meses) da amostra.

A análise da distribuição dos resíduos de acordo com o “*moneyness*” mostra que os dados computados conjuntamente não permite assegurar que existe ganho na estimação do modelo irrestrito (incorporando volatilidade estocástica e saltos) e o modelo restrito (Black-Scholes). O gráfico abaixo ilustra a comparação:

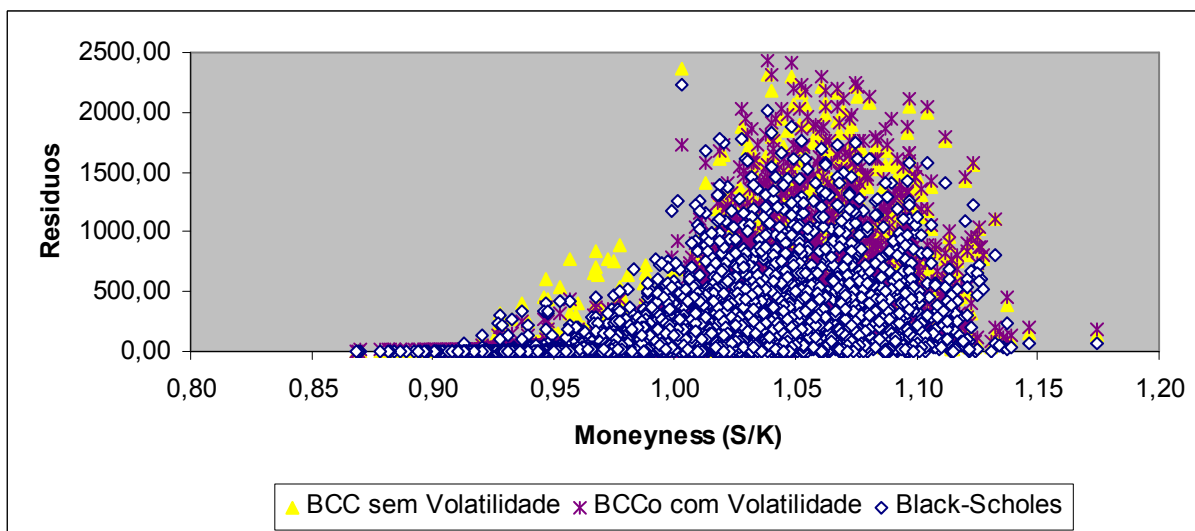


Gráfico 3 – Distribuição dos resíduos do vetor em relação ao moneyness (S/K)

Ao analisarmos os sub-períodos verificamos que o modelo irrestrito permite um ganho considerável com a redução dos resíduos. O gráfico abaixo ilustra essa comparação:

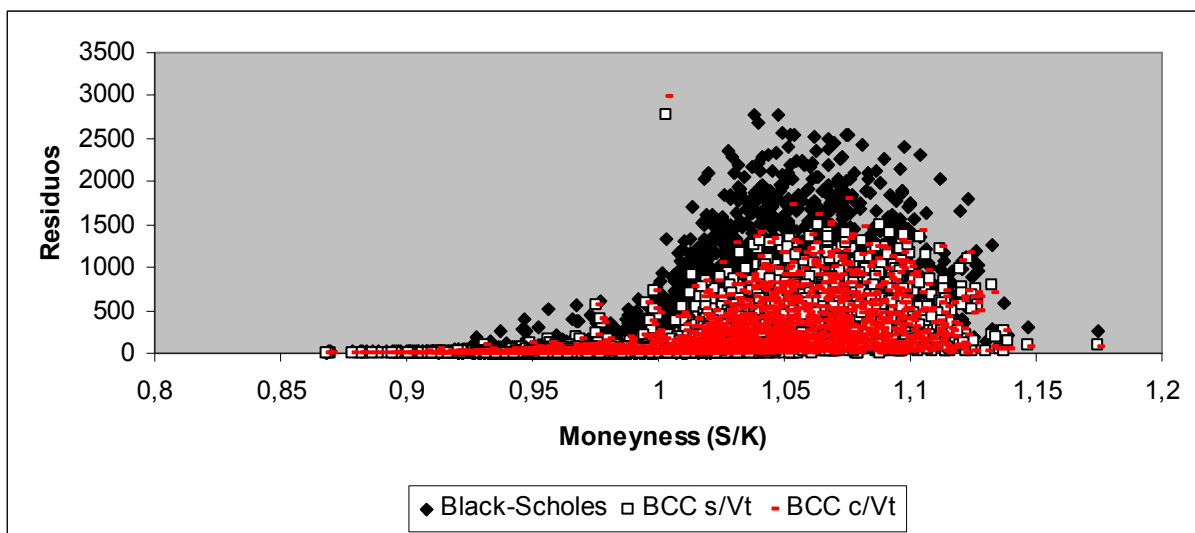


Gráfico 4 – Distribuição dos resíduos do vetor em relação ao moneyness (S/K)

Para finalizar efetuamos um teste estatístico de consistência entre as estimações. Utilizamos para tanto o teste “pseudo-F”, proposto por Davidson &

Mackinnon [1993]. O teste pode ser expresso por: 
$$F = \frac{SQE_{rest} - SQE_{irrest}}{\frac{r}{n-k} SQE_{irrest}}$$
, onde:

$SQE_{rest}$  = somatório dos quadrados dos erros do modelo Black-Scholes;

$SQE_{irrest}$  = somatório dos quadrados dos erros do modelo Bakshi-Cao-Chen;

$r$  = número de restrições;

$k$  = número de parâmetros do modelo irrestrito;

$n$  = número de observações

Neste teste as rotinas executadas são as mesmas que a do teste F, mas valem apenas assintoticamente no caso de modelos não-lineares. Neste teste a estatística F penaliza o modelo irrestrito (já que ele tem mais parâmetros) e beneficia o modelo restrito ao dividir a diferença entre as somas dos quadrados dos resíduos pelo número de restrições impostas. As tabelas abaixo retornam o somatório do quadrado dos resíduos e os resultados do teste:

	SQE			BCC sem Vt					BCC com Vt		
	BS	BCC s/Vt	BCC c/Vt	T	n	r	k	F	r	k	F
jan-05	113.366	28.695	27.281	21	145	27	28	<b>12,7864</b>	28	29	<b>13,0727</b>
fev-05	89.525	44.362	23.558	18	135	24	25	<b>4,6661</b>	25	26	<b>12,2090</b>
mar-05	106.838	27.151	28.042	22	162	28	29	<b>13,9410</b>	29	30	<b>12,7902</b>
abr-05	90.278	25.576	24.742	20	144	26	27	<b>11,3840</b>	27	28	<b>11,3797</b>
mai-05	88.560	27.772	31.608	21	151	27	28	<b>9,9715</b>	28	29	<b>7,8507</b>
jun-05	85.153	27.243	42.850	22	150	28	29	<b>9,1861</b>	29	30	<b>4,0852</b>
jul-05	80.388	44.081	29.236	20	158	26	27	<b>4,1498</b>	27	28	<b>8,4241</b>
ago-05	50.478	18.850	21.580	23	176	29	30	<b>8,4470</b>	30	31	<b>6,4726</b>
set-05	79.261	28.041	25.944	21	151	27	28	<b>8,3210</b>	28	29	<b>8,9543</b>
out-05	64.818	18.539	27.860	20	154	26	27	<b>12,1934</b>	27	28	<b>6,1907</b>
nov-05	57.286	26.023	17.599	20	150	26	27	<b>5,6833</b>	27	28	<b>10,1896</b>
dez-05	68.937	26.133	26.133	22	175	28	29	<b>8,5406</b>	29	30	<b>8,1896</b>
jan-06	75.327	23.620	28.502	22	161	28	29	<b>10,3199</b>	29	30	<b>7,4211</b>
fev-06	37.927	19.824	14.160	18	130	24	25	<b>3,9954</b>	25	26	<b>6,9827</b>
mar-06	66.652	25.997	29.073	23	183	29	30	<b>8,2509</b>	30	31	<b>6,5492</b>
abr-06	40.483	10.679	8.761	18	134	24	25	<b>12,6762</b>	25	26	<b>15,6419</b>
mai-06	33.354	17.135	15.569	22	166	28	29	<b>4,6311</b>	29	30	<b>5,3568</b>
jun-06	44.592	9.623	8.904	21	153	27	28	<b>16,8237</b>	28	29	<b>17,7498</b>
jul-06	56.123	15.726	12.665	21	158	27	28	<b>12,3681</b>	28	29	<b>15,8085</b>
ago-06	82.563	30.581	24.823	23	175	29	30	<b>8,4990</b>	30	31	<b>11,1650</b>
set-06	58.932	39.971	14.415	20	157	26	27	<b>2,3718</b>	27	28	<b>14,7552</b>
out-06	63.875	30.956	22.765	21	156	27	28	<b>5,0414</b>	28	29	<b>8,1906</b>
Total	1.534.714	566.578	506.069	459	3424	465	466	<b>10,8698</b>	466	467	<b>12,8980</b>

Tabela 4 – Somatório do quadrado dos resíduos e teste “pseudo-F”



Todos os resultados expressados possuem significância estatística e podemos rejeitar em todos os casos a hipótese nula de que os modelos são iguais.

#### 4.4. RESULTADOS E CONCLUSÕES

Os resultados demonstraram que ao incorporarmos estocasticidade e difusão por saltos tornamos o modelo de apreçamento das opções um processo mais suave e com menor diferença entre o resultado empírico e teórico, sendo mantidas as devidas consistências. Isto pode ser creditado ao fato de que ao permitir que outros fatores além da volatilidade, possam sofrer choques e oscilar existe uma grande contribuição para a explicação da formação do preço de uma opção.

Este fato é importante porque dos cinco parâmetros do modelo Black-Scholes [1973] descritos na fórmula (14), apenas a volatilidade não é observável. Sendo assim, é fato comum entre operadores e participantes do mercado de opções que todos os choques e oscilações que não são explicados pelos quatro parâmetros observáveis seja absorvido na estimação da volatilidade.

Guimarães e Silva [1999] efetuaram semelhante procedimento para opções cujo ativo-objeto eram as ações da Telebrás no período de abril, julho e agosto de 1999. Neste experimento a estimação dos parâmetros ficou prejudicada devido à baixa liquidez das opções (resultando em amostra pequena) no mercado brasileiro. Para melhorar a aderência e velocidade do ajustamento, alguns parâmetros - como  $\kappa_V$  - foram fixados e outros estimados exogenamente – como a volatilidade de longo prazo  $\sqrt{\theta_V/k_V}$ . Mesmo com essas restrições eles concluíram que o modelo proposto por Bakshi-Cao-Chen [1997] explicou melhor os preços das opções e conseqüentemente a estimação de uma superfície de volatilidade, mantendo consistência entre o modelo teórico e o uso empírico.

O presente trabalho aproveitou-se de uma amostra mais ampla e conseqüentemente pode ser realizado com um número menor de restrições na estimação dos parâmetros.

Diante dos resultados podemos concluir que as opções de dólar negociadas no mercado brasileiro, podem ser apreçadas pelo modelo proposto com ganhos

consideráveis na redução dos resíduos. Essa redução por sua vez atenua o “efeito-smile” da volatilidade implícita, que os participantes do mercado comumente usam para “ajustar” o preço das opções.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com a proposição inicial do trabalho conseguimos obter um resultado satisfatório que abre um campo para pesquisa sobre o mercado de opções brasileiro.

Mesmo considerando as dificuldades de implementação do modelo proposto, a saber: (i) impossibilidade de programar as fórmulas em aplicativos menos robustos (exemplo: Excel); (ii) estimação dos parâmetros iniciais que permitem que o resultado das otimizações fiquem próximos da solução ideal; (iii) tempo computacional (a amostra conjunta de vinte e dois meses demorou em média cinco horas e o cálculo dos meses individuais demorou em média quinze minutos), podemos afirmar que este modelo tem viabilidade ao ser utilizado em ambiente operacional. Para tanto os parâmetros e análises da amostra devem ser estimados previamente e apenas a volatilidade implícita, que pode ser calculada rapidamente (como por exemplo utilizando um algoritmo Newton-Raphson) seria estimada no momento das negociações.

Uma das extensões deste trabalho seria adotar o mesmo procedimento para as opções onde o ativo-objeto sejam as taxas de juros. Neste mercado a liquidez é ainda mais restrita do que as opções de juros, mas adotando o procedimento de “bid-ask” permite uma maior amplitude da amostra.

## BIBLIOGRAFIA

1. Aït-Sahalia, Y. "Disentangling diffusion from jumps", *Journal of Financial Economics*, 2004.
2. Ahn, C., Thompson, H. "Jump-diffusion process and the term structure of interest rates", *The Journal of Finance*, 1988.
3. Andersen, L., Andreasen, J. "Jump-diffusion process: volatility smile fitting and numerical methods for option pricing", *Review of Derivatives Research*, 2000.
4. Arrow, K.J. "The Role of Securities in the optimal allocation of risk-bearing", *Review of Economic Studies*, 1964.
5. Bakshi, G., Cao, C., Chen, Z. "Empirical performance of alternative option pricing models", *The Journal of Finance*, 1997.
6. Bates, D. "Jumps and stochastic volatility: exchange rate process implicit in Deutsche Mark options", *The Review of Financial Studies*, 1996.
7. Black, F. "The pricing of commodity contracts", *Journal of Financial Economics*, 1976.
8. Black, F., Scholes, M. "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy*, 1973.
9. Bollen, N., Rasiel, E. "The performance of alternative valuation models in the OTC currency option market", *Journal of International Money and Finance*, 2003.
10. Cox, J., Ross, S. "A survey of some new results in financial option pricing theory", *Journal of Finance*, 1976.
11. Cox, J., Ingersoll, J., Ross, S. "A theory of the term structure of interest rates", *Econometrica*, 1985.
12. Davidson, R., Mackinnon, J. "Estimation and inference in econometrics". Oxford University Press, 1993.
13. Duffie, D., Pen, J., Singleton, K. "Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions", *Econometrica*, 2000.

14. Garman, M., Kohlhagen, S. "Foreign currency option values", *Journal of International Money and Finance*, 1983.
15. Guimarães, B., Silva, M. "Precificação de opções com volatilidade estocástica e saltos", *Resenha BM&F* n.142, 1999.
16. Heath, D., Jarrow, R., Morton, A. "Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology", *Econometrica*, 1992.
17. Heston, S. "A closed-form solution for option with stochastic volatility with application to bond and currency options", *The Review of Financial Studies*, 1993.
18. Ho, T., Lee, S. "Term structure movements and pricing interest rate contingent claims", *Journal of Finance*, 1986.
19. Hull, J., White, A. "The pricing options on assets with stochastic volatility", *Journal of Finance*, 1987.
20. Jorion, P. "On jump process in the foreign exchange and stock market", *The Review of Financial Studies*, 1988.
21. Kou, S. "A jump diffusion model for option pricing with three properties:..." Working Paper Columbia University, 1999.
22. Levy, H., Kroll, Y. "Stochastic dominance with riskless assets". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1976.
23. Merton, R. "Option pricing when underlying stock returns are discontinuous", *Journal of Financial Economics*, 1976.
24. Ramaswamy, K., Sundaresan, S. "The pricing of option on futures contracts", *Journal of Finance*, 1985;
25. Ross, S. "Option and efficiency", *Quarterly Journal of Economics*, 1976.
26. Scott, L. "Pricing stock option in a jump diffusion model with stochastic volatility and interest rates application of Fourier inversion methods" *Mathematical Finance*, 1997.
27. Vasicek, O. "An equilibrium characterization of the term structure", *Journal of Financial Economics*, 1977.

## ANEXOS

### ANEXO I – Formúlas da solução EDP de Bakshi-Cao-Chen

Diariamente o autor coletou os preços de oito séries de opções para o primeiro. Com isso ao apregoar uma oferta de compra-venda da opção é também definido o preço e a proporção (delta) do ativo-base para negociação.

$$C_{(t,\tau)} = S(t)\prod_1(t,\tau,S,R,V) - KB(t,\tau)\prod_2(t,\tau,S,R,V)$$

onde,

$C_{(t,\tau)}$  = preço da opção de compra do tipo européia no tempo  $t$  com vencimento em  $\tau$ ;

$K$  = preço de exercício;

$B(t,\tau)$  = valor presente de um título livre de risco, com o intuito de simplificar o nosso estudo utilizaremos a taxa livre de risco composta por  $e^{-r\tau}$ ;

$\prod_j$  = probabilidades neutras ao risco que são especificadas como:

$$\prod_j(t,\tau,S(t),R(t),V(t)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi \ln[\kappa]} f_j(t,\tau,S(t),R(t),V(t);\phi)}{i\phi} \right] d\phi$$

para

$$f_1(t,\tau,S(t),R(t),V(t);\phi) = \exp\{u(\tau) + x_r(\tau)R(t) + x_v(\tau)V(t) + i\phi \ln[S(t)]\}$$

e

$$f_2(t,\tau,S(t),R(t),V(t);\phi) = \exp\{z(\tau) + y_r(\tau)R(t) + y_v(\tau)V(t) + i\phi \ln[S(t)] - \ln[B(t,\tau)]\}$$

$$\hat{f}_1 = \exp \left\{ \begin{aligned} & -i\phi \ln e^{-R\tau} - \frac{\theta_V}{\sigma_V^2} \left[ 2 \ln \left( 1 - \frac{[\xi_V - \kappa_V + (1+i\phi)\rho\sigma_V](1-e^{-\xi_V\tau})}{2\xi_V} \right) \right] \\ & - \frac{\theta_V}{\theta_V^2} [\xi_V - \kappa_V + (1+i\phi)\rho\sigma_V] \tau + i\phi \ln[S(t)] \\ & + \lambda(1+\mu_J)\tau \left[ (1+\mu_J)^{i\phi} e^{(\frac{i\phi}{2})(1+i\phi)\sigma_J^2} - 1 \right] - \lambda i\phi\mu_J\tau \\ & + \frac{i\phi(i\phi+1)(1-e^{-\xi_V\tau})}{2\xi_V - [\xi_V - \kappa_V + (1+i\phi)\rho\sigma_V](1-e^{-\xi_V\tau})} V(t) \end{aligned} \right\}$$

$$\hat{f}_2 = \exp \left\{ \begin{aligned} & -i\phi \ln e^{-R\tau} - \frac{\theta_V}{\sigma_V^2} \left[ 2 \ln \left( 1 - \frac{[\xi_V^* - \kappa_V + i\phi\rho\sigma_V](1-e^{-\xi_V^*\tau})}{2\xi_V^*} \right) \right] \\ & - \frac{\theta_V}{\theta_V^2} [\xi_V^* - \kappa_V + i\phi\rho\sigma_V] \tau + i\phi \ln[S(t)] \\ & + \lambda\tau \left[ (1+\mu_J)^{i\phi} e^{(\frac{i\phi}{2})(i\phi-1)\sigma_J^2} - 1 \right] - \lambda i\phi\mu_J\tau \\ & + \frac{i\phi(i\phi-1)(1-e^{-\xi_V^*\tau})}{2\xi_V^* - [\xi_V^* - \kappa_V + i\phi\rho\sigma_V](1-e^{-\xi_V^*\tau})} V(t) \end{aligned} \right\}$$

onde

$$\xi_V = \sqrt{[\kappa_V - (1+i\phi)\rho\sigma_V]^2 - i\phi(i\phi+1)\sigma_V^2}$$

$$\xi_V^* = \sqrt{[\kappa_V - i\phi\rho\sigma_V]^2 - i\phi(i\phi-1)\sigma_V^2}$$

$R(t)$  = taxa de juros no instante  $t$ ;

$\lambda_j$  = frequência de saltos;

$\mu_j$  = média do tamanho dos saltos;

$V(t)$  = componente de difusão de retorno da variância (condicional ou sem saltos);

$\omega_S(t)$  e  $\omega_v(t)$  = movimento Browniano padrão com  $Cov_t[d\omega_S(t), d\omega_v(t)] \equiv \rho dt$

$J(t)$  = tamanho do salto (em percentual), com distribuição lognormal, independente e identicamente distribuída  $\ln[1+J(t)] \sim N\left(\ln[1+\mu_J] - \frac{1}{2}\sigma_J^2, \sigma_J^2\right)$ ;

$q(t)$  = contador de saltos de Poisson com intensidade  $\lambda_J$ , onde  $pr\{dq(t)=1\} = \lambda_J dt$  e  $pr\{dq(t)=0\} = 1 - \lambda_J dt$ ;

$\frac{\theta_v}{\kappa_v}$  = média de longo prazo;

$\kappa_v$  = velocidade do ajuste;

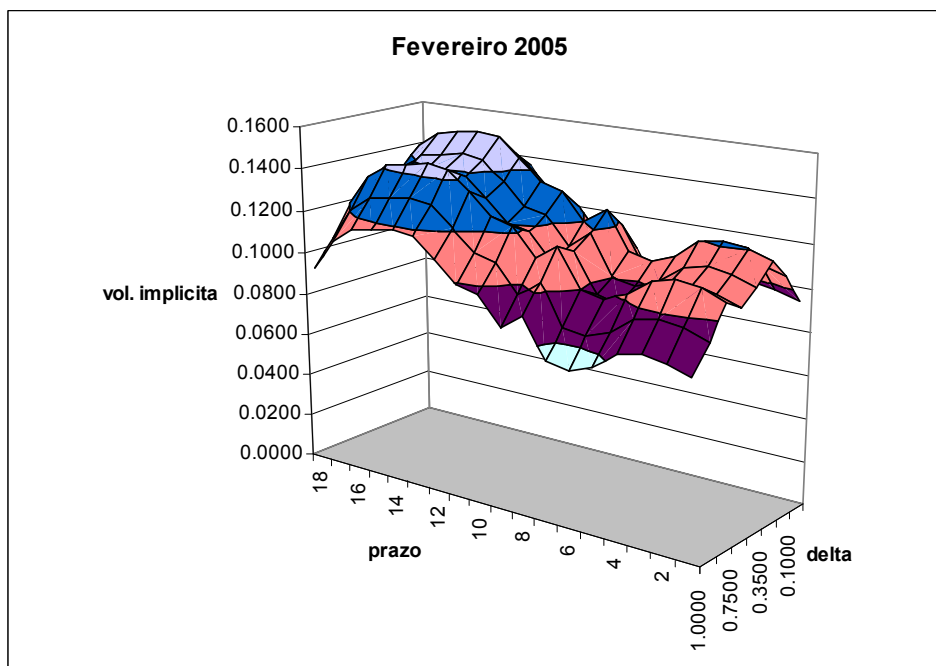
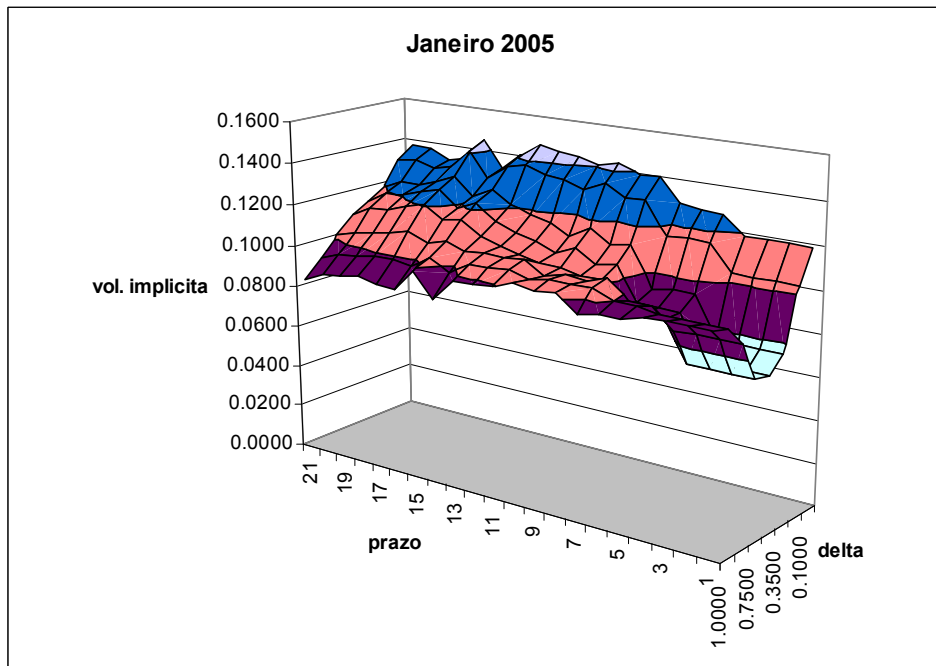
$\sigma_v$  = coeficiente de variação da difusão da volatilidade  $V(t)$ .

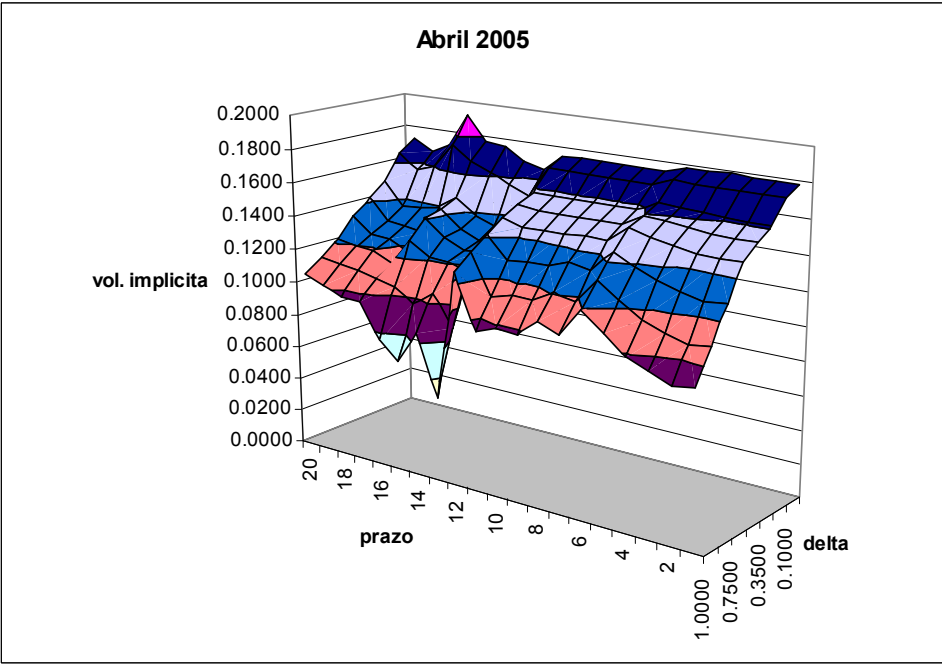
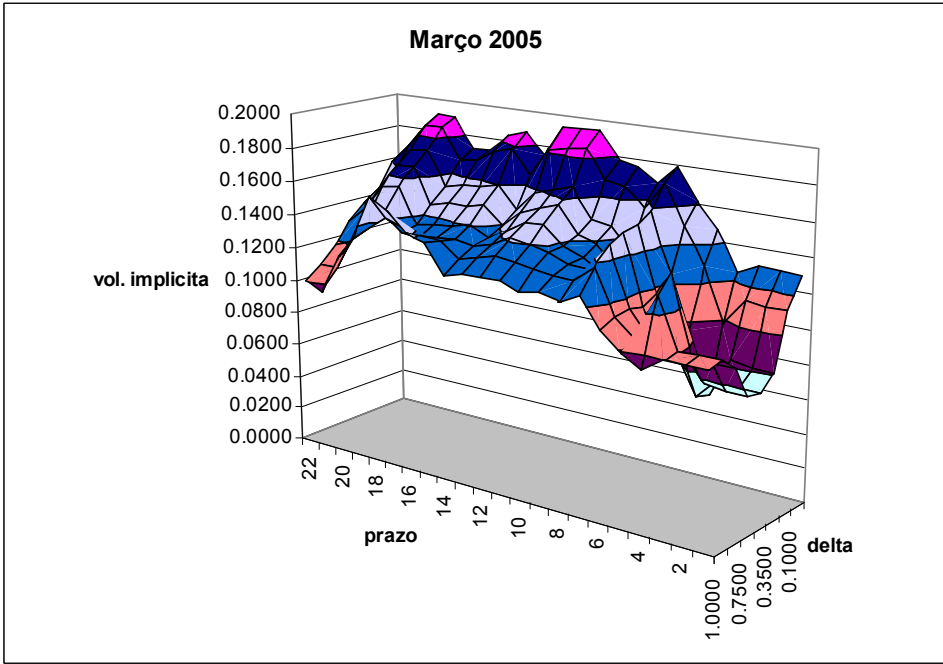
$\sigma_J$  = desvio padrão do logaritmo de  $1 +$  o percentual do tamanho do salto.

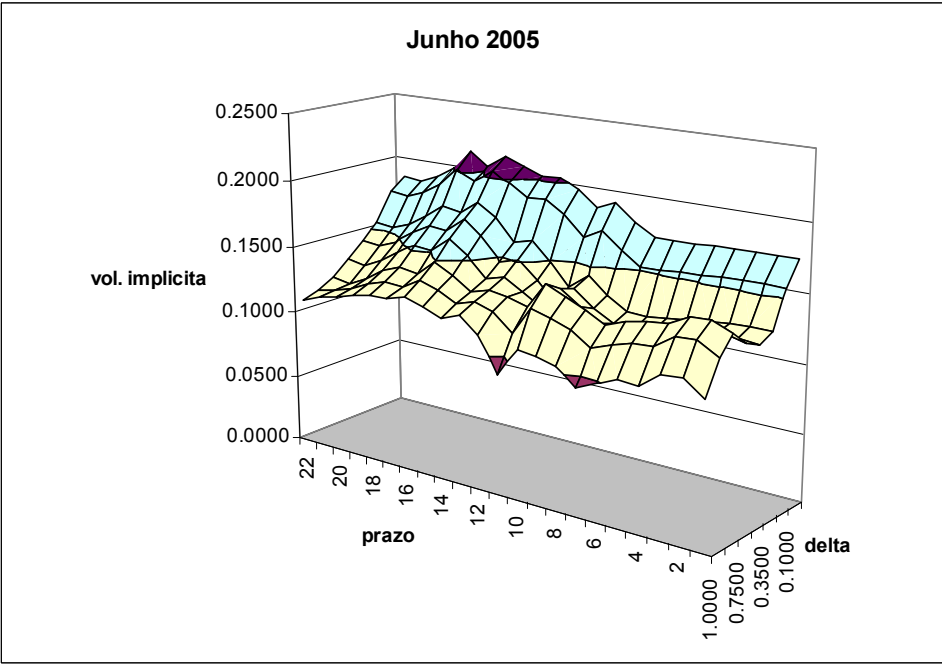
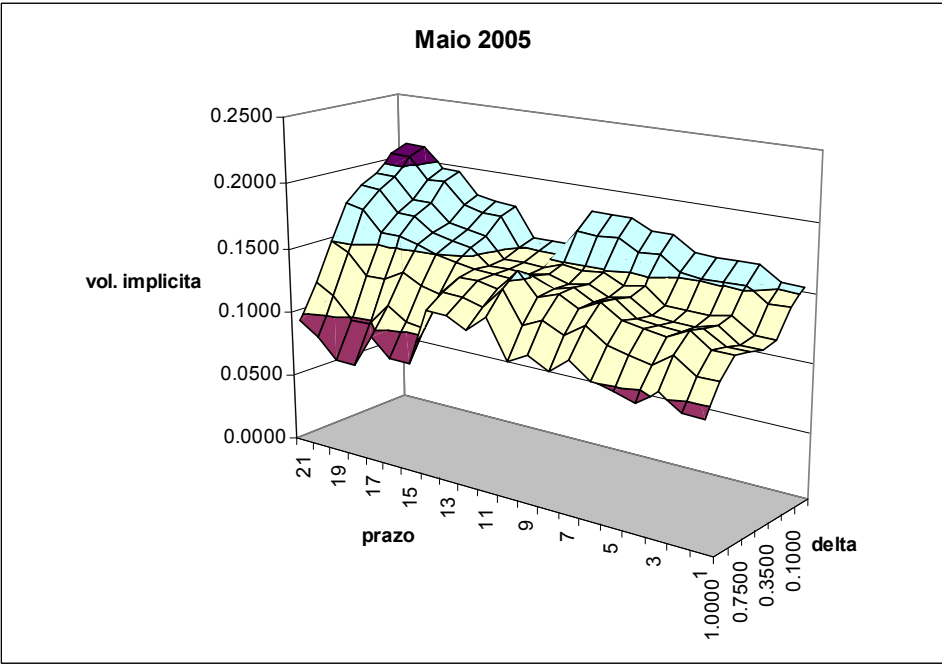
$V_J$  = variância instantânea do componente do salto.

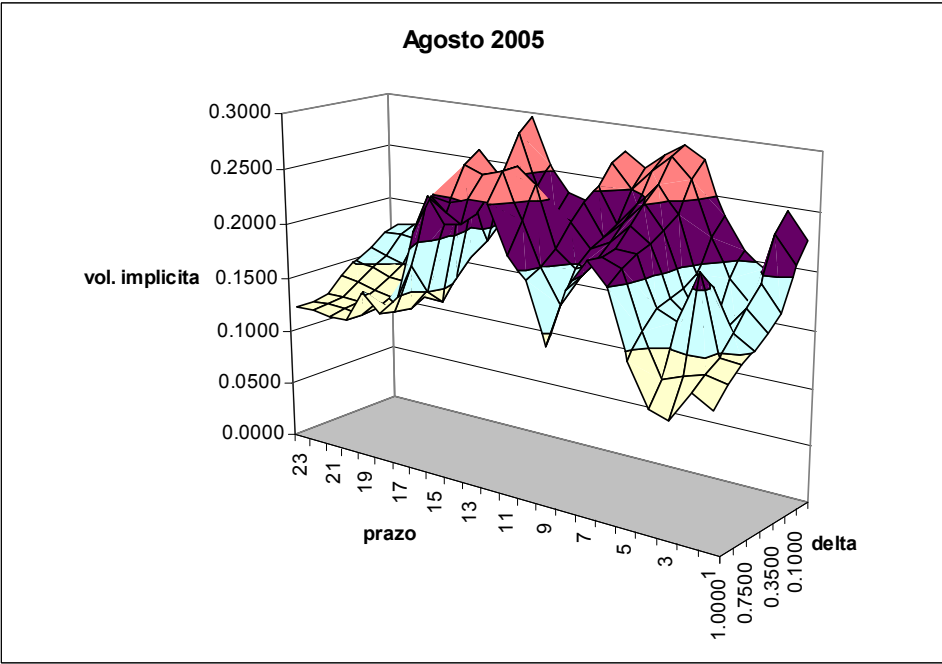
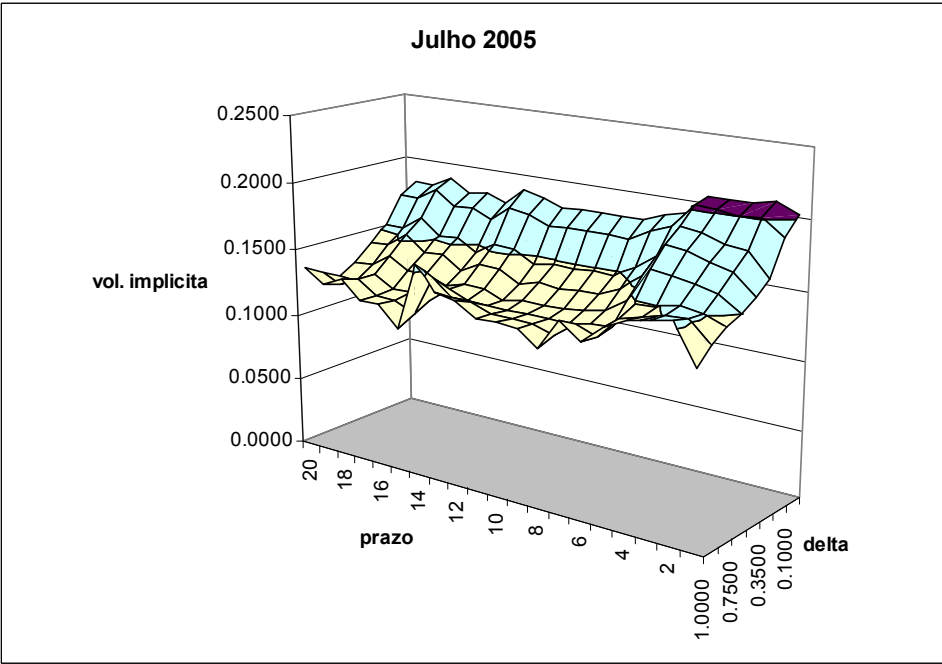


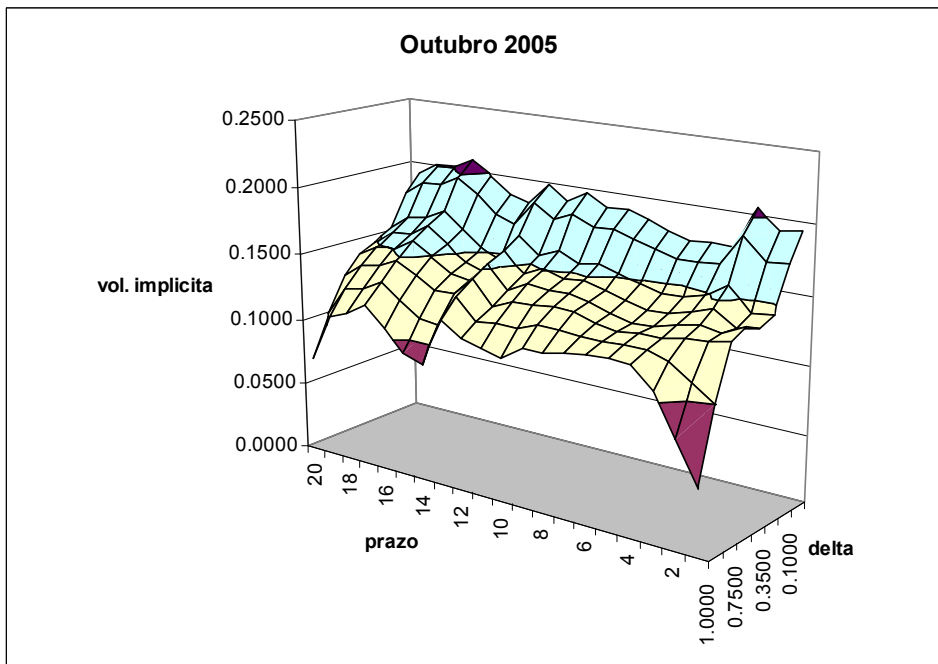
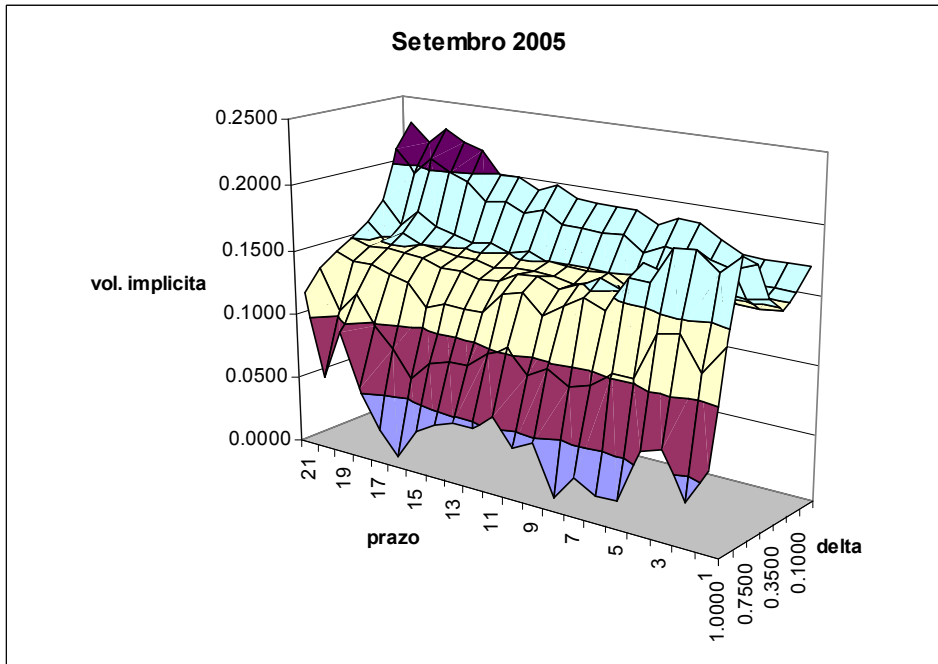
## ANEXO II – Gráficos de volatilidade implícita obtidas pelo modelo Black-Scholes

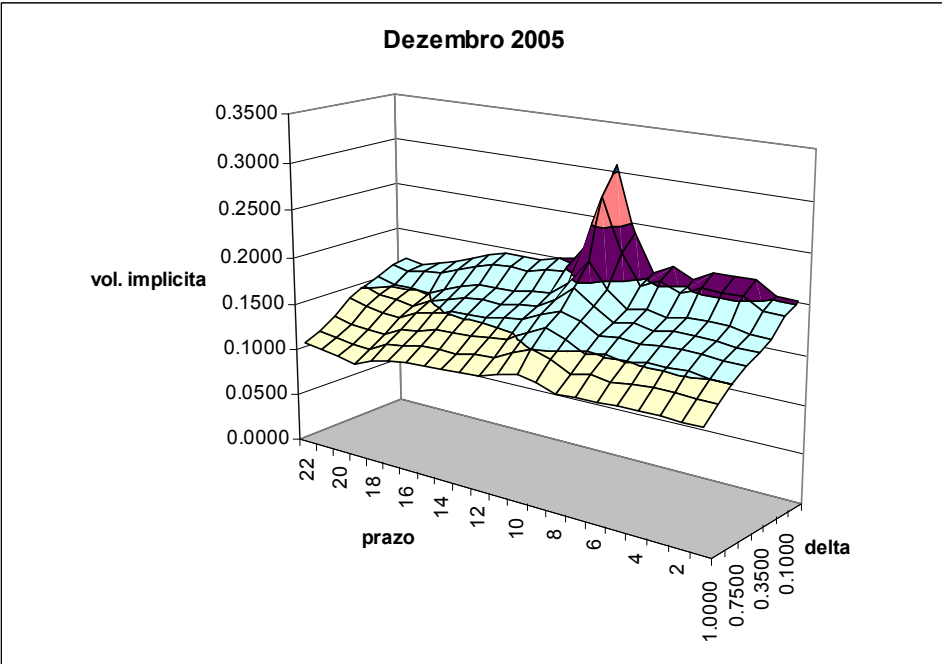
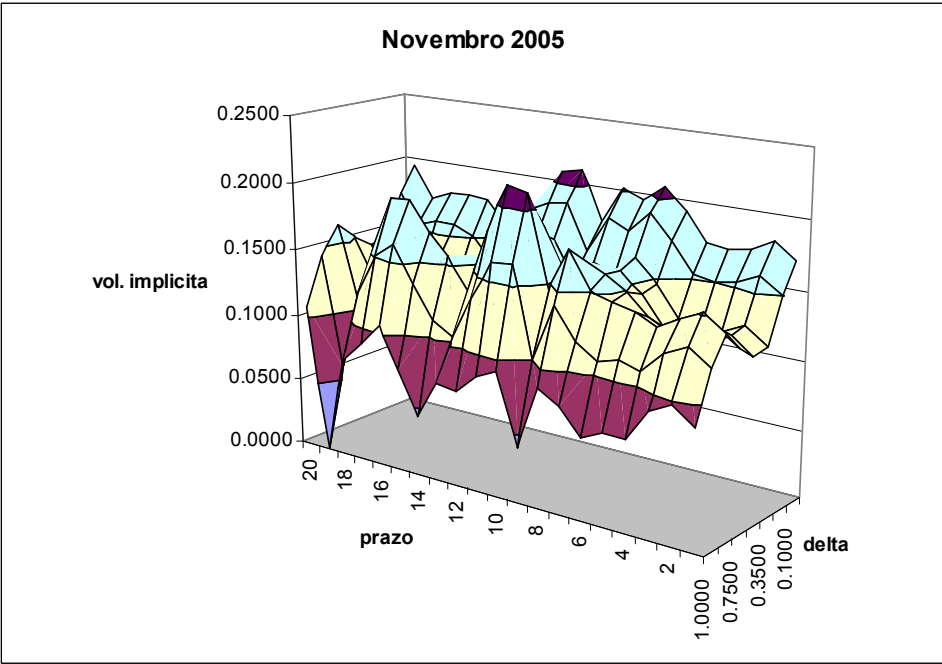


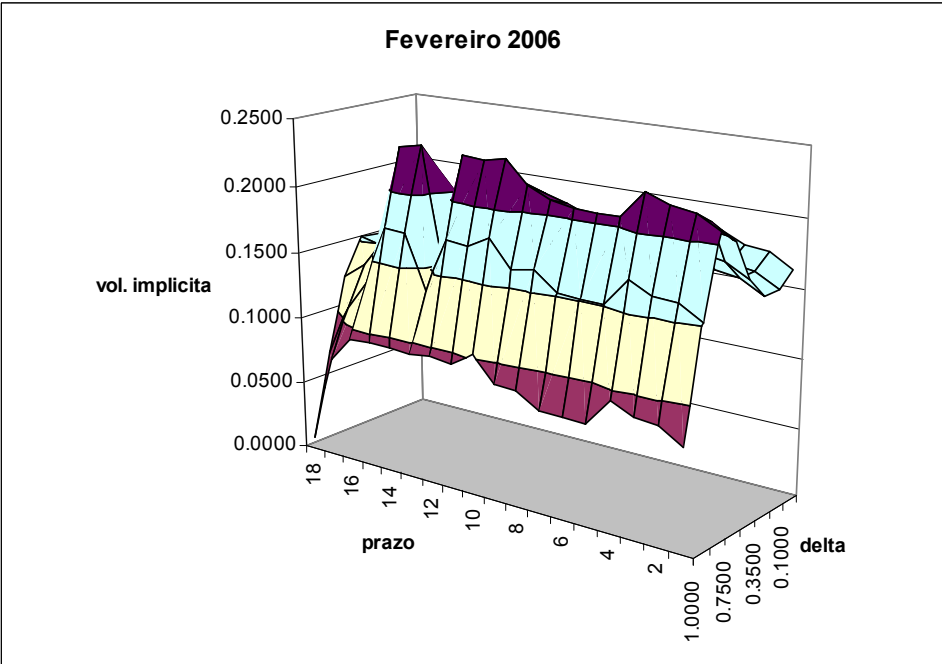
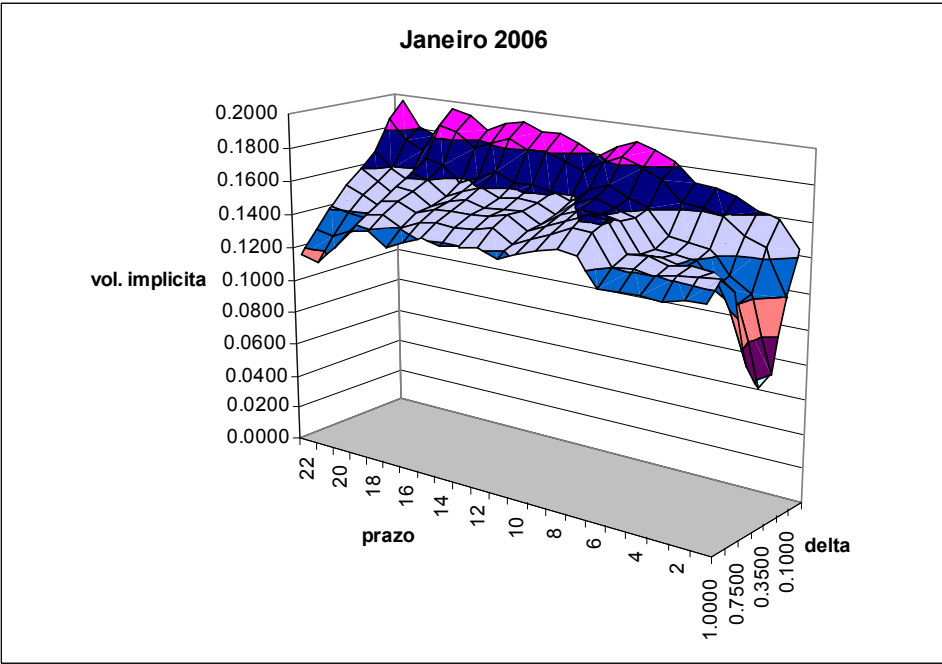


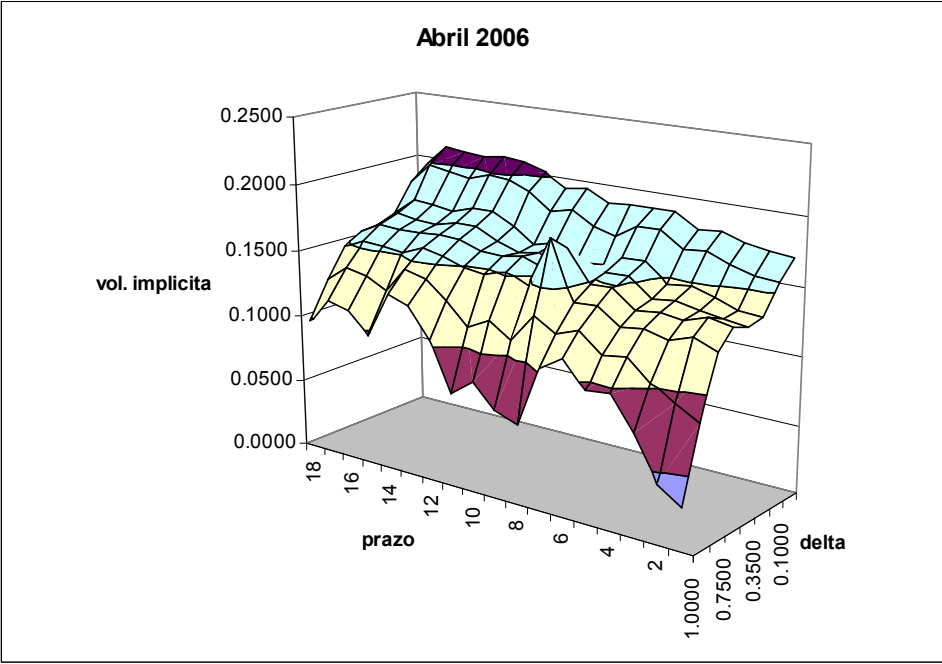
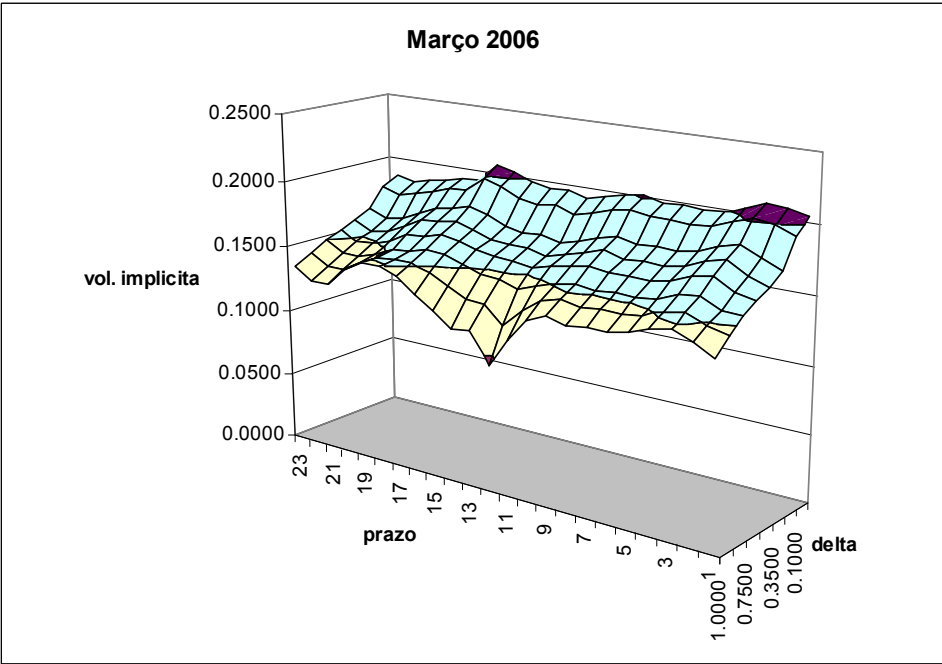




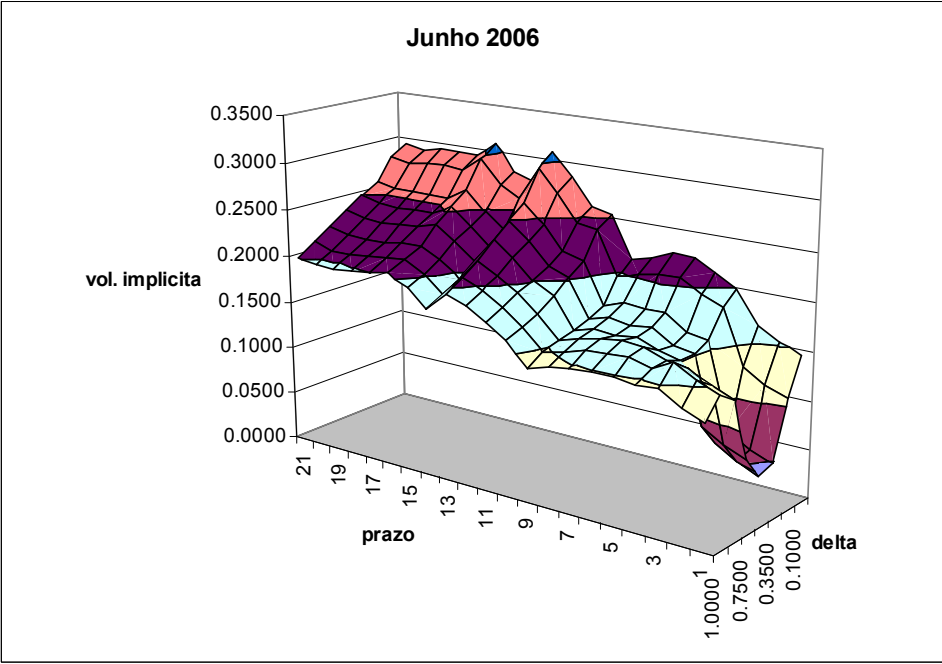
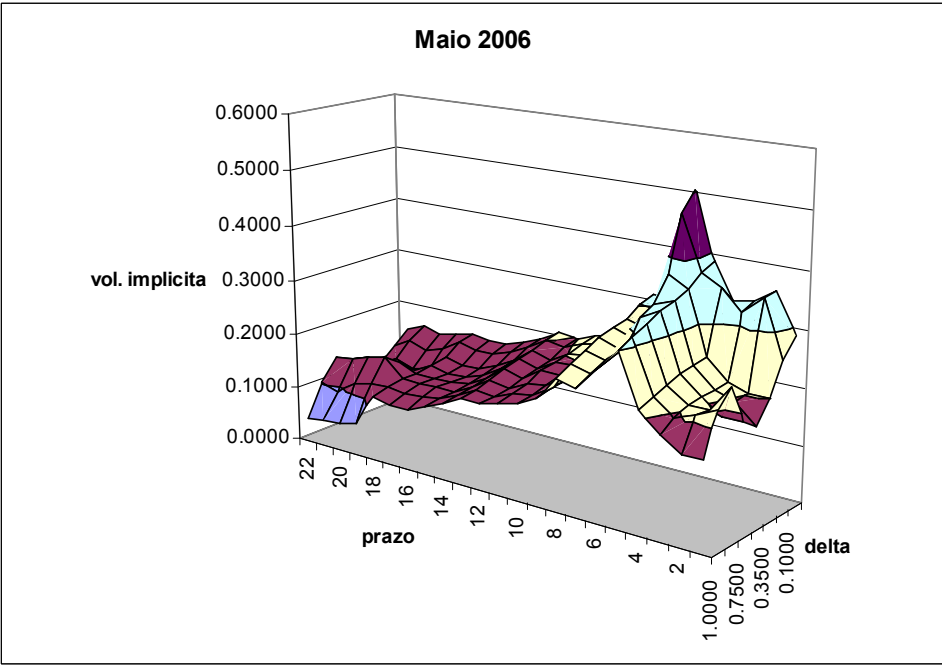


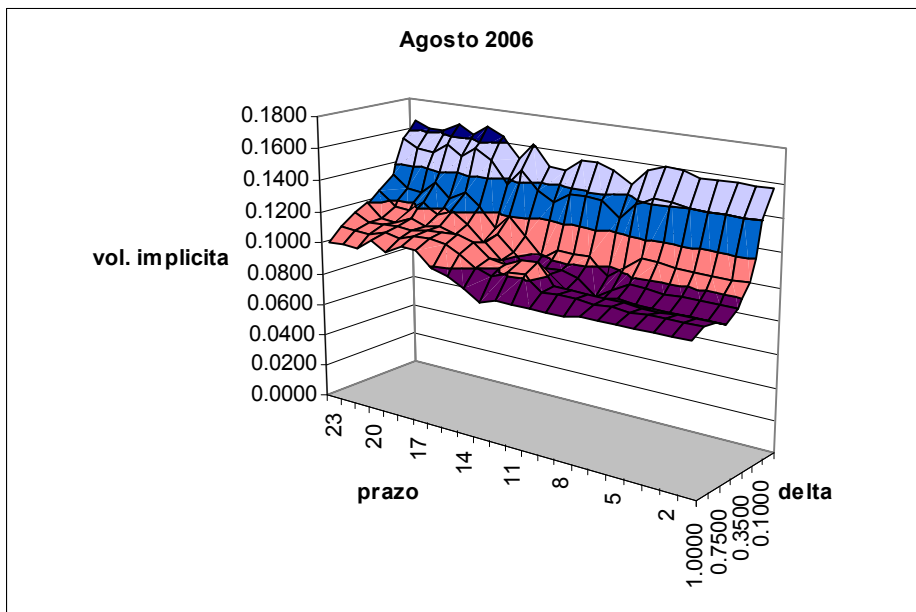
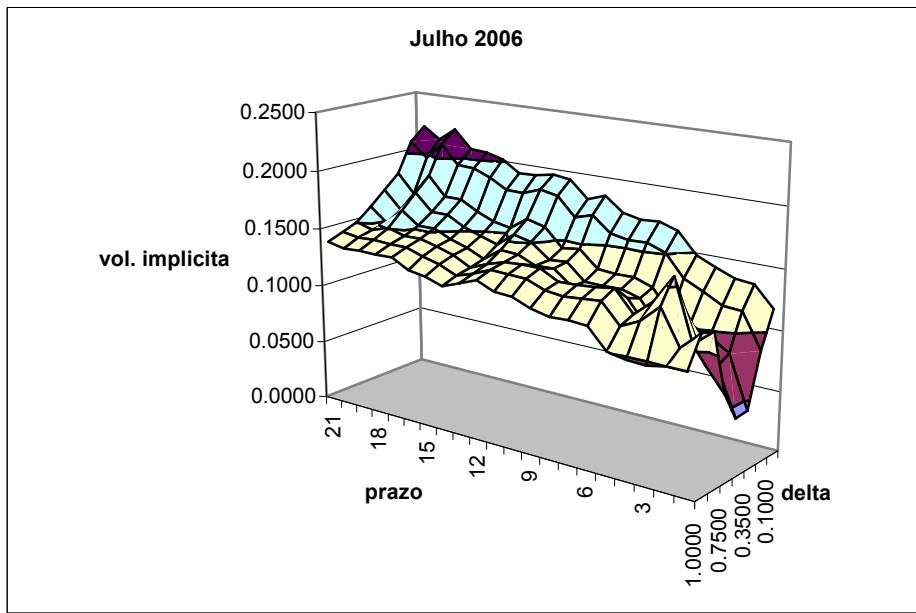


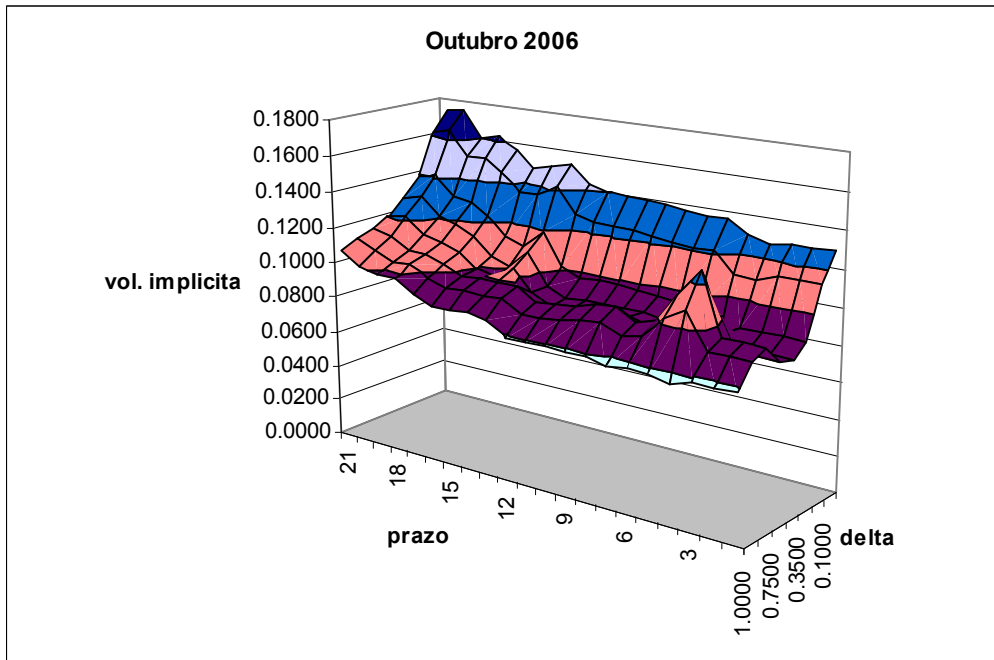
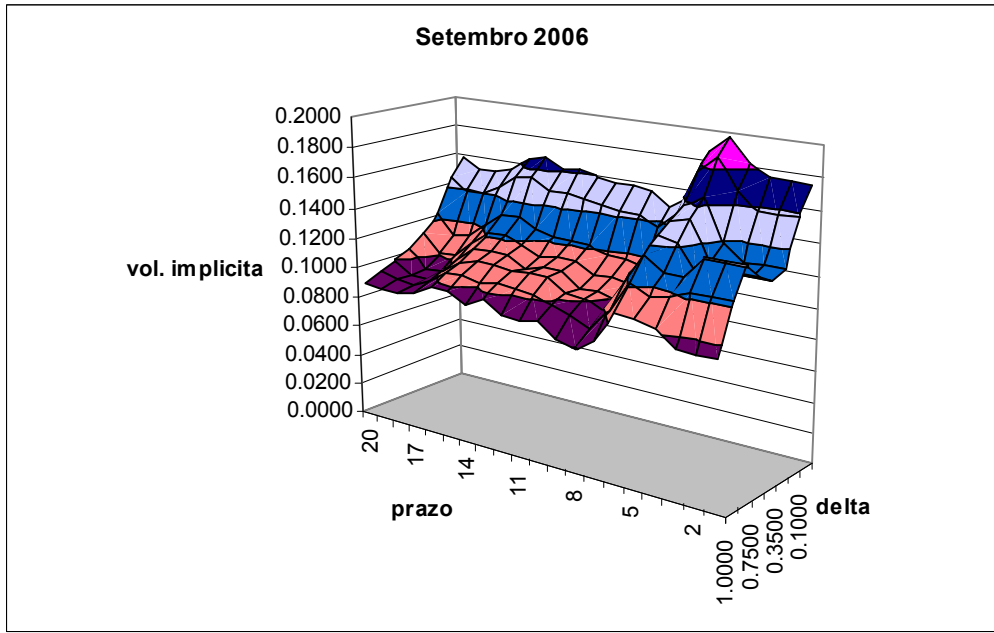












## ANEXO III – Rotinas do Eviews e Matlab

### FUNÇÃO 1 (EIEWS) – TESTE BREUSCH-PAGAN-GODFREY

#### Teste BPG no Eviews

```
vector S2MV=@sumsq(resid)/ln_constante.@regobs
genr p=(resid^2)/s2mv(1)
equation eq2.ls p c ln
eq2.fit estim
vector(2) bpg
bpg(1)=0.5*@sumsq(estim-@mean(p))
bpg(2)=@qchisq(0.95,1)
```

```
vector s2mv=@sumsq(resid)/ln_constante.@regobs
genr p=(resid^2)/s2mv(1)
equation eq02.ls p c ln
eq02.fit estim
vector(2) bpg
bpg(1)=0.5*@sumsq(estim - @mean(p))
bpg(2)=@qchisq(0.95,1)
```

### FUNÇÃO 2 (MATLAB) – CALCULA O PREÇO DA CALL PELO MODELO BAKSHI-CAO-CHEN

```
function resp=BCCprice(tau,thetav,sigmav,kv,rho,lambd,mij,sigmaj,St,Vt,K,r)
% function resp=BCCprice(tau,thetav,sigmav,kv,rho,lambd,mij,sigmaj,St,Vt,K,r)
resp=St*pi1(tau,thetav,sigmav,kv,rho,lambd,mij,sigmaj,St,Vt,K,r)-K*exp(-
r*tau)*pi2(tau,thetav,sigmav,kv,rho,lambd,mij,sigmaj,St,Vt,K,r);
```

### FUNÇÃO 3 (MATLAB) – CALCULA “PI1” (PARÂMETRO DE BCCPRICE)

```
function resp=pi1(tau,thetav,sigmav,kv,rho,lambd,mij,sigmaj,St,Vt,K,r)
phi=0.0001:0.01:60;
Re=Re1(tau,thetav,sigmav,kv,rho,lambd,mij,sigmaj,St,Vt,K,r,phi);
```

```

ind=find(abs(Re)>1e-6);
%phi=linspace(0.000001,phi(max(ind)),100000);
%phi=linspace(0.000001,20,100000);
%Re=Re2(tau,thetav,sigmav,kv,rho,lambda,mij,sigmaj,St,Vt,K,r,phi);
%resp=1/2+1/pi*trapz(Re,phi);
%resp=1/2+1/pi*quad8(@(phi) Re1(tau,thetav,sigmav,kv,rho,lambda,mij,sigmaj,St,Vt,K,r,phi),
eps,phi(max(ind)));
resp=1/2+1/pi*quadg('Re1',eps,500,[],[],tau,thetav,sigmav,kv,rho,lambda,mij,sigmaj,St,Vt,K,r);

return;

```

#### **FUNÇÃO 4 (MATLAB) – CALCULA “RE1” (PARÂMETRO DE PI1)**

```

function resp2=Re1(phi,tau,thetav,sigmav,kv,rho,lambda,mij,sigmaj,St,Vt,K,r)
resp2=real((exp(-
i.*phi.*log(K)).*carac1(tau,phi,thetav,sigmav,kv,rho,lambda,mij,sigmaj,St,Vt,r))./(i.*phi));

return;

```

#### **FUNÇÃO 5 (MATLAB) – CALCULA “CARAC1” (PARÂMETRO DE RE1)**

```

function resp=carac1(tau,phi,thetav,sigmav,kv,rho,lambda,mij,sigmaj,St,Vt,r)
xiv=sqrt((kv-(1+i.*phi).*rho.*sigmav).^2-i.*phi.*(i.*phi+1).*sigmav.^2);
part1=-i.*phi.*(-r*tau);
part2=-thetav./sigmav.^2.*(2.*log(1-((xiv-kv+(1+i.*phi).*rho.*sigmav).*(1-exp(-
xiv.*tau))./(2.*xiv)))));
part3=-thetav./sigmav.^2.*(xiv-kv+(1+i.*phi).*rho.*sigmav).*tau+i.*phi.*log(St);
part4=lambda.*(1+mij).*tau.*((1+mij).^(i.*phi)).*exp((i.*phi./2).*(1+i.*phi).*sigmaj.^2-1)-
lambda.*i.*phi.*mij.*tau;
part5=(i.*phi.*(i.*phi+1).*(1-exp(-xiv.*tau)))./(2.*xiv-(xiv-kv+(1+i.*phi).*rho.*sigmav).*(1-exp(-
xiv.*tau))).*Vt;
resp=exp(part1+part2+part3+part4+part5);

```

#### **FUNÇÃO 6 (MATLAB) – CALCULA “PI2” (PARÂMETRO DE BCCPRICE)**

```

function resp=pi2(tau,thetav,sigmav,kv,rho,lambda,mij,sigmaj,St,Vt,K,r)
phi=0.0001:0.01:60;
Re=Re2(tau,thetav,sigmav,kv,rho,lambda,mij,sigmaj,St,Vt,K,r,phi);
ind=find(abs(Re)>1e-6);
%phi=linspace(0.000001,phi(max(ind)),100000);

```

```

%phi=linspace(0.000001,20,100000);
%Re=Re2(tau,thetav,sigmav,kv,rho,lambda,mij,sigmaj,St,Vt,K,r,phi);
%resp=1/2+1/pi*trapz(Re,phi);
%resp=1/2+1/pi*quad8(@(phi) Re2(tau,thetav,sigmav,kv,rho,lambda,mij,sigmaj,St,Vt,K,r,phi),
eps,phi(max(ind)));
resp=1/2+1/pi*quadg('Re2',eps,500,[],[],tau,thetav,sigmav,kv,rho,lambda,mij,sigmaj,St,Vt,K,r);
return;

```

## FUNÇÃO 7 (MATLAB) – CALCULA “RE2” (PARÂMETRO DE PI2)

```

function resp2=Re2(phi,tau,thetav,sigmav,kv,rho,lambda,mij,sigmaj,St,Vt,K,r)
resp2=real((exp(-
i.*phi.*log(K)).*carac2(tau,phi,thetav,sigmav,kv,rho,lambda,mij,sigmaj,St,Vt,r))./(i.*phi));

return;

```

## FUNÇÃO 8 (MATLAB) – CALCULA “CARAC2” (PARÂMETRO DE RE2)

```

function resp=carac2(tau,phi,thetav,sigmav,kv,rho,lambda,mij,sigmaj,St,Vt,r)
xi2v=sqrt((kv-i.*phi.*rho.*sigmav).^2-i.*phi.*(i.*phi-1).*sigmav.^2);
part1=-i.*phi.*(-r*tau);
part2=-thetav./sigmav.^2.*(2.*log(1-((xi2v-kv+i.*phi.*rho.*sigmav).*(1-exp(-
xi2v.*tau))./(2.*xi2v)))));
part3=-thetav./sigmav.^2.*(xi2v-kv+i.*phi.*rho.*sigmav).*tau+i.*phi.*log(St);
part4=lambda.*tau.*((1+mij).^i.*phi).*exp((i.*phi./2).*(i.*phi-1).*sigmaj.^2)-
lambda.*i.*phi.*mij.*tau;
part5=(i.*phi.*(i.*phi-1).*(1-exp(-xi2v.*tau))./(2.*xi2v-(xi2v-kv+i.*phi.*rho.*sigmav).*(1-exp(-
xi2v.*tau))).*Vt;
resp=exp(part1+part2+part3+part4+part5);

```

## FUNÇÃO 9 (MTLAB) – CALCULA A INTEGRAL DE “RE1” E “RE2” (GAUSS LEGENDRE)

```

function [int, tol1,ix]=
quadg(fun,xlow,xhigh,tol,trace,p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,p8,p9,p10,p11,p12,p13,p14,p15)
%QUAUDG Numerically evaluates a integral using a Gauss Legendre quadrature.
%
% CALL:
% [int, tol] = quadg('Fun',xlow,xhigh,reltol,[trace,gn],p1,p2,...)
%
```

```

% int = evaluated integral
% tol = absolute tolerance abs(int-intold)
% Fun = string containing the name of the function or a directly given
%       expression enclosed in parenthesis.
% xlow,xhigh = integration limits
% reltol = relative tolerance default=1e-3
% trace = for non-zero TRACE traces the function evaluations
%         with a point plot of the integrand.
% gn = number of base points and weight points to start the
%      integration with (default=2)
% p1, p2, ...= coefficients to be passed directly to function Fun:
%             G = Fun(x,p1,p2,...).
%
% Note that int is the common size of xlow and xhigh.
% Example: integration from 0 to 2 and from 2 to 4 for x is done by:
%          quadg('(x.^2)',[0 2],[2 4])

%This function works just like QUAD or QUAD8 but uses a Gaussian quadrature
%integration scheme. Use this routine instead of QUAD or QUAD8:
% if higher accuracy is desired (this works best if the function,
%     'Fun', can be approximated by a power series)
% or if many similar integrations are going to be done (I think less
%     function evaluations will typically be done, but the
%     integration points and the weights must be calculated.
%     These are saved between integrations so when QUADG
%     is called again, the points and weights are all ready
%     known.)
% or if the function evaluations are time consuming.
%Note that if there are discontinuities the integral should be broken up into separate
%pieces. And if there are singularities, a more appropriate integration quadrature
%should be used (such as the Gauss-Chebyshev).
%

% modified by Per A. Brodtkorb 17.11.98 :
% -accept multiple integrationlimits, int is the common size of xlow and xhigh
% -optimized by only computing the integrals which did not converge.
% - enabled the integration of directly given functions enclosed in
%   parenthesis. Example: integration from 0 to 2 and from 2 to 4 for x is done by:
%          quadg('(x.^2)',[0 2],[2 4])

```

```

% Reference
% see grule

%global b2
%global w2

if nargin<4| isempty(tol),
    tol=1e-3;
end

if nargin <5,
    trace=0; gn1=2;
elseif ~isempty(trace) ,
    if length(trace)==2,
        gn1=trace(2);
    else
        gn1=2;
    end
    trace=1;
else
    trace=0; gn1=2;
end

if prod(size(xlow))==1,% make sure the integration limits have correct size
    xlow=xlow(ones(size(xhigh)));;
elseif prod(size(xhigh))==1,
    xhigh=xhigh(ones(size(xlow)));;
elseif any( size(xhigh)~=size(xlow) )
    error('The input must have equal size!')
end

if any(fun=='(') & any(fun=='x'),
    exec_string=['y=',fun ';'']; %the call function is already setup
else
    %setup string to call the function
    exec_string=['y=',fun,'(x)'];
    num_parameters=nargin-5;
    for i=1:num_parameters,

```



```

    %if exist('p1') ~=1,
    xvar=['p' int2str(i)]; % variable # i
    if eval(['~ischar(' ,xvar,') &all(size(xlow)==size(' xvar,') & length(' ,xvar,') ~=1' )] ,
        eval(['xvar, '=' ,xvar ,':;']); %make sure it is a column
        exec_string=[exec_string,',' xvar '(k,ones(1,gn1) )']; %enable integration with multiple
arguments
    else
        exec_string=[exec_string,',' xvar];
    end
end
exec_string=[exec_string,'];
end
[N M]=size(xlow);

%setup mapping parameters
xlow=xlow(:);
jacob=(xhigh(:)-xlow(:))/2;
nk=N*M;%length of jacob
k=1:nk;

%generate the first two sets of integration points and weights
%if isempty(b2),
% [b2 w2]=grule(2);
%end
%gn1=2;% # of weights

gntxt=int2str(gn1);% # of weights
eval(['global b',gntxt,' w',gntxt,'];)
if isempty(eval(['b',gntxt])) , % calculate the weights if necessary
    eval(['[b',gntxt,',w',gntxt,']=grule(' ,gntxt,')]);
end

eval(['x=(b',gntxt,')(ones(nk,1),:)+1).*jacob(k,ones(1, gn1 ))+xlow(k,ones(1,gn1 ))'];)
%x=(b2(ones(nk,1),:)+1).*jacob(k,ones(1,gn1))+xlow(k,ones(1,gn1));

eval(exec_string);

%size(x),size(y),size(w2)
eval(['int=sum(w',gntxt,')(ones(nk,1),:).*y,2).*jacob(k)'];)
%int_old=sum(w2(ones(nk,1),:).*y,2).*jacob;

```

```

int_old=int;
tol1=int;

if trace==1,
    x_trace=x(:);
    y_trace=y(:);
end

% Break out of the iteration loop for two reasons:
% 1) the last update is very small compared to int (one might compare with tol aswell)
% 2) There are more than 11 iterations. This should NEVER happen.

converge='n';
for i=1:11,
    gn1=gn1*2;% double the # of weights
    gntxt=int2str(gn1);% # of weights
    eval(['global b',gntxt,' w',gntxt,'];)
    if isempty(eval(['b',gntxt])) , % calculate the weights if necessary
        eval(['[b',gntxt,',w',gntxt,']=grule(' ,gntxt,');']);
    end
    eval(['x=(b',gntxt, '(ones(nk,1),:)+1).*jacob(k,ones(1, gn1 ))+xlow(k,ones(1,gn1 ));']);
    eval(exec_string);
    eval(['int(k)=sum(w',gntxt, '(ones(nk,1),:).*y,2).*jacob(k);']);

    if trace==1,
        x_trace=[x_trace;x(:)];
        y_trace=[y_trace;y(:)];
    end

    tol1(k)=abs(int_old(k)-int(k)); %absolute tolerance
    k=find(tol1 > abs(tol*int));%| tol1 > abs(tol)|;%indices to integrals which did not converge

    if any(k),% compute integrals again
        nk=length(k);%# of integrals we have to compute again
    else
        converge='y';
        break;
    end
    int_old=int;

```

```

end

int=reshape(int,N,M); % make sure int is the same size as the integration limits
if nargout>1,
    tol1=reshape(tol1,N,M);
end

if converge=='n',
    disp('Integral did not converge--singularity likely')
end

if trace==1,
    plot(x_trace,y_trace,'+')
end

```

```

function [bp,wf]=grule(n)
%GRULE computes base points and weight factors for a Gauss-
% Legendre quadrature.
%
%CALL [bp, wf]=grule(n);
%
% bp = base points
% wf = weight factors
% n = number of base points (integrates a (2n-1)th order
% polynomial exactly)
%
% The Gauss-Legendre quadrature integrates an integral of the form
%

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{j=1}^n w_j f(bp_j)$$

%
% See also: quadg.

%Reference
% Davis and Rabinowitz in 'Methods of Numerical Integration', page 365,
% Academic Press, 1975.

% Revised GKS 5 June 92
% Revised Per A. Brodtkorb pab@marin.ntnu.no 30.03.1999

```

```

% [bp,wf]=grule(n)
% This function computes Gauss base points and weight factors
% using the algorithm given by Davis and Rabinowitz in 'Methods
% of Numerical Integration', page 365, Academic Press, 1975.
bp=zeros(n,1); wf=bp; iter=2; m=fix((n+1)/2); e1=n*(n+1);
mm=4*m-1; t=(pi/(4*n+2))*(3:4:mm); nn=(1-(1-1/n)/(8*n*n));
xo=nn*cos(t);
for j=1:iter
    pkm1=1; pk=xo;
    for k=2:n
        t1=xo.*pk; pkp1=t1-pkm1-(t1-pkm1)/k+t1;
        pkm1=pk; pk=pkp1;
    end
    den=1.-xo.*xo; d1=n*(pkm1-xo.*pk); dpn=d1./den;
    d2pn=(2.*xo.*dpn-e1.*pk)./den;
    d3pn=(4.*xo.*d2pn+(2-e1).*dpn)./den;
    d4pn=(6.*xo.*d3pn+(6-e1).*d2pn)./den;
    u=pk./dpn; v=d2pn./dpn;
    h=-u.*(1+(.5*u).*(v+u.*(v.*v-u.*d3pn./(3*dpn))));
    p=pk+h.*(dpn+(.5*h).*(d2pn+(h/3).*(d3pn+.25*h.*d4pn)));
    dp=dpn+h.*(d2pn+(.5*h).*(d3pn+h.*d4pn/3));
    h=h-p./dp; xo=xo+h;
end
bp=-xo-h;
fx=d1-h.*e1.*(pk+(h/2).*(dpn+(h/3).*(...
    d2pn+(h/4).*(d3pn+(.2*h).*d4pn)));
wf=2*(1-bp.^2)./(fx.*fx);
if (m+m) > n, bp(m)=0; end
if ~((m+m) == n), m=m-1; end
jj=1:m; n1j=(n+1-jj); bp(n1j)=-bp(jj); wf(n1j)=wf(jj);
% end

```

## **FUNÇÃO 10 (MATLAB) – CALCULA A OTIMIZAÇÃO DA DIFERENÇA ENTRE PREÇOS ESTIMADOS POR BCC [1997] E PREÇOS VERIFICADOS EMPIRICAMENTE**

%%% Como chamar a funcao:

% Preencher os parametros iniciais

```
tau = Dados(:,1);  
St = Dados(:,2);  
Vt = Dados(:,3);  
K = Dados(:,4);  
r = Dados(:,5);  
Preco_Real = Dados(:,6);  
Parametros0 = [0.01,0.50,0.50,-0.5,0.05,0.02,0.02];
```

```
Parametros = lsqnonlin(@X,  
difPreco(tau,X(1),X(2),X(3),X(4),X(5),X(6),X(7),St,Vt,K,r,Preco_Real),Parametros0);
```