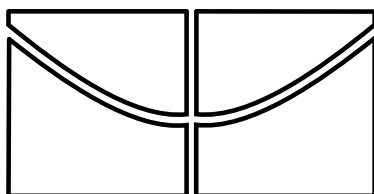


Representações Gráficas para Sistemas de Spins com presença de Campo Externo

Algumas relações em Teoria de Probabilidades



por

Roberto Vila Gabriel

Departamento de Matemática
Instituto de Ciências Exatas
Universidade de Brasília

Orientador(a): Dra. Chang Chung Yu Dorea

Coorientador: Dr. Leandro Martins Cioletti

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da
agência de fomento à pesquisa: CNPq

BRASÍLIA, 24 DE OUTUBRO DE 2016

Representações Gráficas para Sistemas de Spins com presença de Campo Externo

por

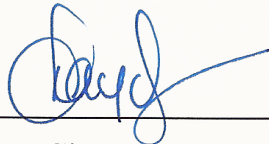
Roberto Vila Gabriel

*Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB,
como requisito parcial para obtenção do grau de*

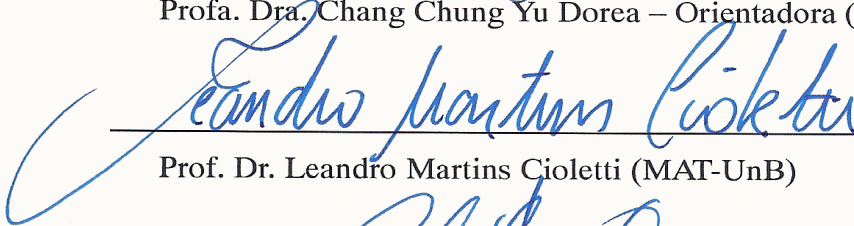
DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 24 de outubro de 2016.

Comissão Examinadora:



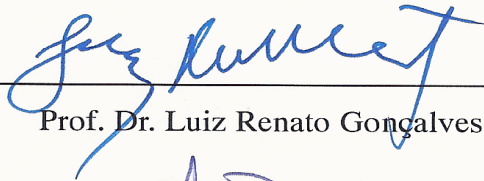
Prof. Dra. Chang Chung Yu Dorea – Orientadora (MAT-UnB)



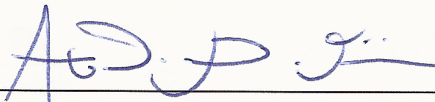
Prof. Dr. Leandro Martins Cioletti (MAT-UnB)



Prof. Dra. Cira Etheowalda Guevara Otiniano (EST-UnB)



Prof. Dr. Luiz Renato Gonçalves Fontes (USP/SP)



Prof. Dr. Augusto Quadros Teixeira (IMPA/RJ)

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

VV695r Vila Gabriel, Roberto
Representações Gráficas para Sistemas de Spins com
presença de Campo Externo / Roberto Vila Gabriel;
orientador Chang Chung Yu Dorea; co-orientador
Leandro Martins Cioletti. -- Brasília, 2016.
404 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Matemática) --
Universidade de Brasília, 2016.

1. Modelo de Ising/Potts. 2. Modelo de
Aglomerados Aleatórios/ GRC. 3. Distância Mallows. 4.
Mecânica Estatística. I. Dorea, Chang Chung Yu ,
orient. II. Martins Cioletti, Leandro , co-orient.
III. Título.

DEDICATÓRIA

Dedico esta tese, com o maior amor do mundo, aos meus pais, Porfirio e Julia! Eles são a fonte de minha inspiração e o motivo de continuar lutando dia a dia.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer, com maior devoção, a Deus, por me dar fé, saúde e sabedoria para continuar no difícil caminhar do dia a dia.

Agradeço, imensamente, a meus pais, Porfirio e Julia, pelas belas orientações e instruções que me deram desde criança, as quais não tenho nada a lamentar, uma vez que, se não fosse por eles, tenho absoluta certeza de que tudo seria diferente.

Agradeço muito a minha orientadora, Chang Chung Yu Dorea, pelo ensinamento básico da Teoria de Probabilidade, pela paciência que teve comigo e pelos belos momentos de seminários que tivemos neste trajeto acadêmico.

Com muito carinho, agradeço, também, ao meu coorientador, Leandro Martins Cioletti, uma pessoa admirável e que me guiou a estudar tópicos de Mecânica Estatística. Leandro me orientou no mestrado e ainda continua me guiando no doutorado. *Valeu pelos seminários intensos que nós tínhamos e, sobretudo, agradeço pela paciência que teve comigo todo este tempo!*

Agradeço, da mesma forma, aos professores que me formaram na UnB, especialmente aos de probabilidade, Cátia Regina Gonçalves e Ary Vasconcelos, pelos cursos de Probabilidade, Processos Estocásticos I e II. *Vocês fizeram com que eu visse a probabilidade como uma área imensamente interessante e divertida. Muito obrigado por isso!*

Agradeço, também, a todas as pessoas que fazem parte de minha vida: minha irmã Carina, minha irmã Carla, meu irmão Ricardo, meu cunhado René, meu tio Fausto e a Vanda. Todas essas pessoas, direta ou indiretamente, confiaram em mim, me apoiaram e me incentivaram em todo o meu trajeto de estudante e, agora, como profissional.

Agradeço, também, aos meus colegas de doutorado, especialmente aos peruanos, Pedro, Josimar, Jhoel e Jamer. Valeu pelos momentos de futebol e pelas discussões matemáticas que tínhamos a cada instante e, apesar de todos nós pertencermos a áreas de pesquisa diferentes, lhes confesso algo: *vocês fizeram com que este trajeto entre estudo e pesquisa fosse mais divertido!*

Gostaria de agradecer, outrossim, às agências de fomento à pesquisa, CAPES e CNPq, pelo suporte financeiro que me deram todo esse tempo, permitindo-me, dessa forma, realizar com sucesso meu mestrado e doutorado.

Gostaria também de agradecer aos colaboradores: Leandro Chiarini Medeiros, Lucia Helena Chiarini, Letícia Do Carmo Dicheti, Leonardo Cavalcanti de Melo, José Carlos Oliveira Junior, Cleber Pereira, Élis Gardel Mesquita e aos membros da banca, que leram os originais da tese e fizeram importantes observações que me ajudaram a corrigir inúmeras imprecisões ortográficas e matemáticas.

Finalmente, o óbvio: independentemente das críticas e observações dos que leram os originais, o texto final de *Representações Gráficas para Sistemas de Spins com presença de Campo Externo*, com seus erros e acertos, é de minha inteira responsabilidade.

Não se preocupe com suas dificuldades em matemática.
Posso assegurar-lhes que as minhas são ainda maiores.
— Albert Einstein.

RESUMO

Este trabalho é concernente à teoria básica de percolação e representações gráficas para o modelo de Ising/Potts sobre latices com presença de campos externos invariantes e não invariantes por translação. Descrevemos, explicitamente, em termos do modelo de aglomerados aleatórios, a função distribuição e, em consequência, o valor esperado de um único spin para os modelos de Ising e de Potts de q -estados com campos externos gerais. Consideramos, também, os estados de Gibbs para a representação do modelo de Potts com campo magnético invariante e não invariante por translação, e provamos uma versão da desigualdade FKG para o chamado modelo de aglomerados aleatórios geral (modelo GRC), com condição de fronteira livre e conectada no caso invariante e não invariante translacional.

Adicionando a hipótese de amenabilidade sobre o látice, obtemos a unicidade do aglomerado infinito e a quase-localidade (quase certa) das medidas de Gibbs para o modelo GRC com tais campos magnéticos. Como uma aplicação da teoria desenvolvida, mostramos a unicidade das medidas de Gibbs para o modelo de Ising ferromagnético, com campo magnético decaindo segundo uma lei de potência com potência suficientemente pequena, como conjecturado em [23]. Finalmente, apresentamos uma pequena introdução e alguns resultados sobre distância Mallows, dando algumas relações com as medidas de Gibbs apresentadas previamente.

Palavras-chave: Modelo de Ising, Modelo de Aglomerados Aleatórios, Modelo de Edwards-Sokal, especificações, distância Mallows e Mecânica Estatística.

ABSTRACT

This work is concerned with the basic theory of percolation and graphical representation for the Ising and Potts models over general lattices with invariant and non-translation invariant external field. We explicitly describe in terms of the random-cluster representation the distribution function and, consequently, the expected value of a single spin for the Ising and q -state Potts models with general external fields. We also consider the Gibbs states for the Edwards-Sokal representation of the Potts model with invariant and non-translation invariant magnetic field and prove a version of the FKG inequality for the so called general random-cluster model (GRC model) with free and wired boundary conditions in the invariant and non-translation invariant case.

Adding the amenability hypothesis on the lattice, we obtain the uniqueness of the infinite connected component and the almost sure quasilocality of the Gibbs measures for the GRC model with such general magnetic fields. As a application of the theory developed, we show the uniqueness of the Gibbs measures for the ferromagnetic Ising model with a positive power-law decay magnetic field with small enough power, as conjectured in [23]. Finally we present a brief introduction and some results on Mallows distance giving some relationship with Gibbs measures presented previously.

Keywords: Ising Model, random-cluster model, Edwards-Sokal model, specifications, Mallows distance and Statistical Mechanics.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 Esboço gráfico do campo externo $h_x = h^*/\|x\|^\alpha$ com $\alpha = 1$. 3
- Figura 2 Enfatizamos que, os resultados que constituem parte do aporte principal de esta tese são aqueles capítulos que estão em caixas sombreadas. No entanto, no Capítulo 3, ressaltamos simplesmente a Seção 3.3. 7
- Figura 3 Esboço gráfico da fronteira externa de um volume V nas redes hipercúbicas $\mathbb{L}^2 = (\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$ (lado esquerdo) e $\mathbb{L}^3 = (\mathbb{Z}^3, \mathbb{E}^3)$ (lado direito). 10
- Figura 4 Esboço gráfico da fronteira externa de uma caixa V na árvore binária \mathbb{T}_2^+ (lado esquerdo) e na árvore homogênea \mathbb{T}_2 de grau 3 (lado direito). 11
- Figura 5 Os grafos G e G' . 13
- Figura 6 O grafo G (em linhas contínuas) e seu grafo dual G^* (em linhas tracejadas). O grafo G tem uma face infinita e o grafo dual G^* tem um laço. Exibe-se a aresta $e = \{x, y\}$ no grafo primal G e sua aresta dual $e^* = \{x^*, y^*\}$ no grafo dual G^* . 16
- Figura 7 Aglomerado aleatório da origem em parte da rede bidimensional. 30
- Figura 8 Parte da rede \mathbb{L}^2 e seu dual \mathbb{L}^{2*} . 34
- Figura 9 Um aglomerado finito da origem (em linhas sólidas) sendo cercado por um circuito aberto na rede dual (em linhas tracejadas). 35
- Figura 10 Possíveis comportamentos de $\theta_d(p)$. 37
- Figura 11 Comportamento da suscetibilidade $\chi(p)$. 41
- Figura 12 O vértice x é conectado por caminhos abertos disjuntos à origem e à superfície da caixa $\Lambda_m(x)$. 42
- Figura 13 Construção dos caminhos abertos disjuntos α , β e θ no interior da caixa Q_{n_0-1} ligando x a y_1, y_2 e y_3 em duas dimensões. 46

- Figura 14 Argumento dos 4 braços. Cruzamento cima-baixo em $T(N)^*$ bloqueando cruzamento esquerda-direita em $T(N)$. 51
- Figura 15 Ao lado esquerdo representamos a condição de fronteira menos $\mu = -$ e no lado direito a condição de fronteira mais $\mu = +$ sobre o volume V . 62
- Figura 16 Observe que, dada uma configuração $\omega \in \{0, 1\}^E$, a condição de consistência determinada por $\Delta(\sigma, \omega)$ força todos os spins dos vértices de cada aglomerado de ω a ter o mesmo sinal (ou mesma cor) em σ . 72
- Figura 17 Ao lado esquerdo representamos graficamente a condição de fronteira livre $\xi = 0$ e no lado direito a condição de fronteira conectada $\xi = 1$ sobre o grafo $G = (V, E)$. Observe que $k^0(\omega, G) = 16$ e $k^1(\omega, G) = 4$. 86
- Figura 18 Em (A) temos os grafos G e G^* cujas arestas são dadas, respectivamente, por $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e $E^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*\}$. Ilustrando a Proposição 3.28 temos em (B) que $f(\omega_1^*) = 2 = k(\omega_1)$ (contando a face infinita), em (C) temos $f(\omega_2^*) = 1 = k(\omega_2)$ e em (D) temos $f(\omega_3^*) = 1 = k(\omega_3)$. 88
- Figura 19 Possíveis estados de duas arestas paralelas e e f . 95
- Figura 20 Algoritmo da prova de que $p_{sd}(q) \leq p_c$. 120
- Figura 21 Unicidade da medida de aglomerados aleatórios sobre rede bidimensional. 121
- Figura 22 Representação gráfica do fato da inclusão $A \cap A_n^c \subset \cup_{\gamma \in Y} \{\Gamma = \gamma\}$. A região em cinza é a região de dependência para poder ser construído o circuito γ . 122
- Figura 23 Ocorrência do evento $B \cap [\cap_{n=1}^k \mathcal{C}(R_n)]$ com $k = 3$. 125
- Figura 24 Ocorrência do evento $\mathcal{D}_{\Lambda, \Delta}$. 132
- Figura 25 Ao lado esquerdo esboçamos a configuração $\xi^{1,n} \in \mathcal{N}(\Lambda_n^1, \eta)$ e no lado direito uma típica configuração $\xi^{0,n} \in \mathcal{N}(\Lambda_n^0, \eta)$. As linhas (verticais) em cinza representam os raios (abertos) que compõem a configuração η . 146
- Figura 26 Existência de um circuito dual cercado um sítio a com spin $-$, dado que os spins fora da caixa Λ são $+$. 187

- Figura 27 Comportamento do conjunto das medidas das Gibbs do modelo de Ising, $\mathcal{G}(\beta\Phi)$ em $d \geq 2$, quando o parâmetro termodinâmico β varia. Aqui Φ denota a interação de primeiros vizinhos definida em (201). 217
- Figura 28 Aglomerados A_1, A_2, B_1 e B_2 no grafo $(\Lambda, \sigma_{\mathbb{B}_0(\Lambda)}(\xi))$. 237
- Figura 29 Ocorrência do evento $\mathcal{M}_{\Delta, \Lambda}$. 279
- Figura 30 Ocorrência do evento $\mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m$. 280
- Figura 31 Aglomerados A_1, A_2, B_1 e B_2 no grafo $(\Lambda, \mathbb{B}_{\text{occ}}(\xi) \cap \mathbb{B}_0(\Lambda))$. 328
- Figura 32 Unicidade e não unicidade para o modelo de Ising com campo $h_x = h^* / \|x\|^\alpha$. 353
- Figura 33 Comportamento do campo externo $h_x = h^* / \|x\|^\alpha$ com $\alpha = 1$. 354
- Figura 34 Esboço do fato de que, $\sup_{A \in \mathcal{E}} |\mu(A) - \nu(A)| = \frac{1}{2} [\text{área}(I) + \text{área}(II)]$. 398

CONTEÚDO

1	CONCEITOS ELEMENTARES DE TEORIA DE GRAFOS	9
2	PERCOLAÇÃO INDEPENDENTE	19
2.1	Definição formal do modelo	20
2.2	Desigualdade FKG	22
2.3	Transição de fase	30
2.4	Ergodicidade da medida de Bernoulli	37
2.5	Percolação subcrítica	40
2.6	Percolação supercrítica	43
2.7	O valor crítico em duas dimensões	48
2.8	Probabilidade crítica	53
2.9	Alguns problemas em percolação	53
3	O MODELO DE ISING/POTTS E O MODELO DE AGLOMERADOS ALEATÓRIOS	56
3.1	O modelo de Ising em grafos enumeráveis	58
3.2	O modelo de Potts em grafos enumeráveis	63
3.3	O modelo de aglomerados aleatórios em grafos finitos	66
3.4	O modelo de aglomerados aleatórios sem presença de campo externo ($q > 0$)	84
4	CAMPOS ALEATÓRIOS E ESPECIFICAÇÕES	148
4.1	Algumas notações gerais: núcleo de medidas	149
4.2	Teoria de especificações	155
4.3	Funções locais e quase-locais	171
4.4	O modelo de Ising em duas dimensões	185
4.5	Unicidade	192
5	REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS PARA SISTEMAS DE SPINS COM PRESENÇA DE CAMPO	221

5.1	Estados de Gibbs nas representações: ES, SPIN e GRC	223
5.2	Propriedade FKG das medidas GRC.....	233
5.3	Cor(es) do(s) aglomerado(s) infinito(s)	271
5.4	Unicidade do aglomerado infinito	276
5.5	Limite fraco da medida ES	279
5.6	Quase-localidade q.c. do modelo GRC	290
5.7	Unicidade e ausência de percolação	296
5.8	Aplicações entre medidas de Gibbs: ES, SPIN e RC.....	304
5.9	Estados de Gibbs RC em dimensão dois	313
6	REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS PARA SISTEMAS DE SPINS COM PRESENÇA DE CAMPO GERAL	317
6.1	Estados de Gibbs nas representações: ES, SPIN e GRC	320
6.2	Propriedade FKG e algumas monotonicidades	325
6.3	Quase-localidade q.c. do modelo GRC	340
6.4	Unicidade do aglomerado infinito	343
6.5	Unicidade e transição de fase	347
6.6	Aplicação: modelo de Ising com campo decaindo segundo uma lei de potência.....	351
7	CONVERGÊNCIA EM DISTÂNCIA MALLOWS	356
7.1	Convêrgencia de v.a.'s associadas estacionárias	362
7.2	Convêrgencia de v.a.'s associadas não estacionárias.....	372
	Referência Bibliográfica	379
	APÊNDICE	389
1	Resultados usados com frequência	389
2	Caso $q \in \{2, 3, \dots\}$:	399

INTRODUÇÃO

Representações gráficas são ferramentas extremamente usadas no estudo de transição de fase em Mecânica Estatística de Equilíbrio. Fortuin e Kasteleyn [51] marcaram o início de quatro décadas de intensas atividades que produziram uma teoria completa para sistemas invariantes por translação. Estas representações são usadas com êxito para obter resultados não perturbativos para modelos de Ising/Potts sobre a rede hipercúbica d -dimensional, usando métodos de percolação, por exemplo, a descontinuidade da magnetização no ponto crítico $p = p_c$ (ponto de transição de fase) para os modelos de Ising/Potts unidimensionais com interações do tipo $1/r^2$ [4], o conhecimento do comportamento assintótico dos autovalores da matriz covariância do modelo de Potts [28], o Teorema de Aizenman-Higuchi sobre a decomposição de Choquet dos modelos de Ising/Potts [2, 37, 38, 58, 72] e a prova de que o ponto autodual $p_{sd}(q) = \sqrt{q}/(1 + \sqrt{q})$ é crítico para percolação no modelo de aglomerados aleatórios com parâmetro $q \geq 1$ (veja referência [12], e para uma revisão dos detalhes da prova deste resultado veja, também, referência [120]). Para uma introdução detalhada ao estudo do modelo de aglomerados aleatórios, veja as referências [42, 59, 65, 75].

A relação entre representações gráficas e transição de fase em modelos de Ising/Potts é tipicamente considerada com respeito ao modelo de aglomerados aleatórios (modelo RC) via acoplamento de Edwards-Sokal. Muitos trabalhos empregando tais representações usam modelos de spins com campos magnéticos nulos ou invariantes por translação, no entanto, neste trabalho, analisaremos representações gráficas de modelos de Ising/Potts com presença de campos arbitrários e não invariantes por translação, o que é significativamente mais complicado tratar, por diversas razões: quando condições de fronteira gerais são consideradas, a propriedade FKG é difícil de provar (como previamente foi advertido em [20]), esta propriedade nem sempre é válida para certas condições de fronteira. Na ausência de campo magnético, transição de fase no sistema pode ser diretamente detectada por representações de aglomerados aleatórios, porém,

sua relação se torna delicada quando, em alguns casos, a transição de fase (no sentido de percolação) no modelo de aglomerados aleatórios não corresponde à transição de fase no modelo spin correspondente. Tais dificuldades também aparecem na análise dos estados de Dobrushin [60], na construção de um estado de Gibbs, do modelo de aglomerados aleatórios que não é invariante por translações na densidade crítica $p = p_c$ com q suficientemente grande [32], e o efeito das condições de fronteiras fracas no modelo de Potts de q -estados [29].

A ausência de simetria (presença de campo magnético externo) traz perguntas sobre a(s) cor(es) do(s) aglomerado(s) infinito(s), o que não é necessário ser abordado no caso do campo magnético nulo, por exemplo. Além disso, a não invariância translacional causa muitos problemas técnicos quando se usa resultados básicos da teoria clássica de modelos de spins e Teoria Ergódica. Para evitar confusão neste trabalho, os termos transição de fase e temperatura inversa crítica serão unicamente empregados para expressar mudança no número de medidas de Gibbs quando a temperatura varia.

Este trabalho é motivado por trabalhos recentes sobre modelos de Ising ferromagnéticos com presença de campos externos não uniformes [10, 23, 24, 78, 96, 97]. Estamos interessados no desenvolvimento da teoria de representações gráficas para modelos não invariantes por translação. No entanto, o problema de classificação de campos magnéticos positivos, tal como o modelo de Ising ferromagnético sobre a rede bidimensional, passa através de uma transição de fase de primeira ordem, em termos do decaimento exponencial e do decaimento segundo uma lei de potencia. O Hamiltoniano formal do modelo spin é dado por

$$H(\sigma) = -J \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j - \sum_i h_i \sigma_i, \quad (1)$$

onde a primeira soma percorre sobre todos os pares de primeiros vizinhos. Neste modelo, se o campo magnético externo $\mathbf{h} = (h_i : i \in \mathbb{Z}^d)$ satisfaz $\liminf h_i > 0$, foi provado em [24] que para qualquer temperatura positiva o conjunto das medidas de Gibbs é unitário. Para campos externos positivos limitados inferiormente, uma conclusão similar foi obtida por Lee e Yang em [87]. Na referência [23], os autores consideraram um campo magnético positivo que decai segundo uma lei de potência $\alpha \geq 0$, isto é, o campo magnético externo é dado por $h_i = h^* / \|i\|^\alpha$, onde h^* é uma constante positiva (veja Figura 1), para provar que: o estudo da existência ou não existência de transição de fase, do modelo de Ising, se reduz a análise dos diversos casos quando os parâmetros α e h^* variam, por exemplo, os autores usaram a desigualdade

Isoperimétrica sobre \mathbb{Z}^d e o argumento de Peierls para mostrar que o referido modelo apresenta transição de fase de primeira ordem, para (toda dimensão) $d \geq 2$ e para qualquer expoente $\alpha > 1$.

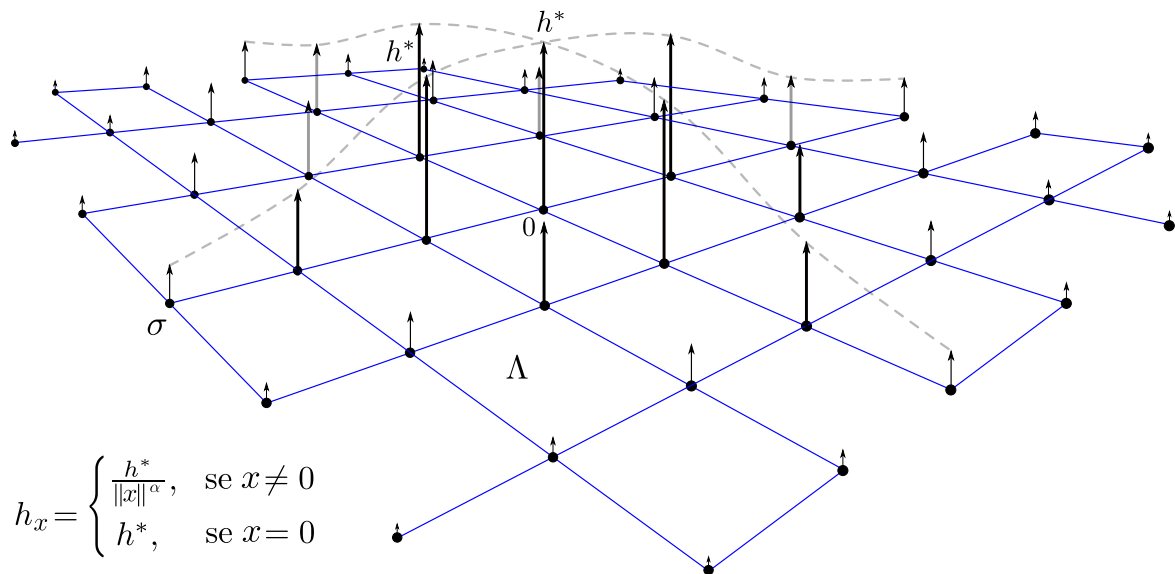
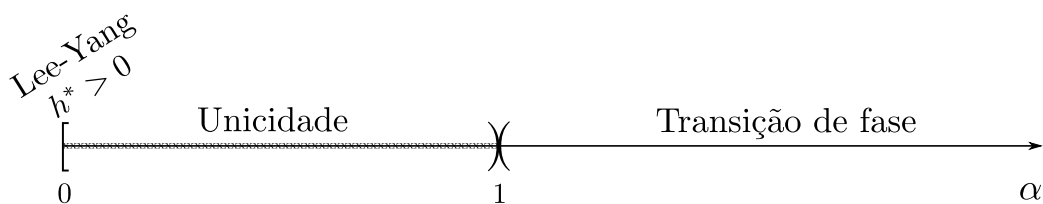


Figura 1: Esboço gráfico do campo externo $h_x = h^* / \|x\|^\alpha$ com $\alpha = 1$.

Por outro lado, se $\alpha < 1$, os autores (na referência [23]) provaram, através de expansões de contornos, que a unicidade das medidas de Gibbs se mantêm em baixas temperaturas e, por meio de outros métodos (Teorema da unicidade de Dobrushin), provaram, também, a unicidade em altas temperaturas, o que lhes motivou a afirmar a seguinte conjectura: **o conjunto das medidas de Gibbs em qualquer temperatura positiva é (um conjunto) unitário**. Os autores em [23] justificaram, via extensão do seus resultados a qualquer temperatura positiva, que esse fato não era óbvio através do uso de técnicas conhecidas. Como uma aplicação da teoria desenvolvida nesta tese, nós provaremos que, de fato, a conjectura se mantém. Logo, o intervalo de unicidade e não unicidade para o modelo de Ising ferromagnético (sobre a rede hipercúbica d -dimensional, $d \geq 2$) com campo externo $h_i = h^* / \|i\|^\alpha$, onde $\alpha \geq 0$ e $h^* > 0$, ficará como a seguinte figura.



Isso será feito por estender alguns resultados (representações gráficas do modelo de Potts com campos externos) do trabalho [20] a um novo cenário com presença de campos externos não invariantes por translação.

Esta tese está organizada em 7 capítulos. O Capítulo 1 está destinado a apresentar alguns conceitos e resultados elementares da teoria de grafos que serão usados à medida que forem necessários na exposição deste trabalho. No Capítulo 2 começamos estudando um dos modelos mais simples da Mecânica Estatística: o modelo de percolação independente ou modelo de Bernoulli. Introduziremos a probabilidade de percolação e mostramos como este conceito nos levará à definição de transição de fase e de ponto crítico $p_c(q)$. Em seguida, estudaremos que, quando $p < p_c$ (fase subcrítica), os aglomerados abertos contendo um determinado vértice de \mathbb{Z}^d têm a propriedade de ser controlados pelo decaimento exponencial de certas probabilidades. Já na fase supercrítica, isto é quando $p > p_c$, por meio de técnicas usuais, estudaremos a existência de um único aglomerado infinito (quase certamente, notação: q.c.). Enfatizamos que a fase supercrítica tem sido palco recente de grandes resultados sobre a relação entre o modelo de Ising/Potts e o modelo de aglomerados aleatórios. Aqui, merece grande destaque a prova da chamada Construção de Wulff para o modelo de Ising na fase supercrítica. Uma versão da construção de Wulff é válida para o modelo de aglomerados aleatórios, mas sujeita a uma forte restrição no parâmetro p . Acredita-se que essa construção possa ser feita até o ponto crítico p_c , mas essa conjectura ainda permanece em aberto, mesmo quando $q = 1$ e 2 . Outro “grande problema” nesta área é a prova da unicidade quase certa do aglomerado infinito quando $p \geq p_c$. Essa prova será dada aqui, no Capítulo 3, para todo $q \geq 1$.

A primeira parte do Capítulo 3 é composta da teoria sobre grafos finitos gerais, com condições de fronteira livre, onde os resultados principais são extensões do acoplamento de Edwards-Sokal para campos externos gerais, os quais nos permitirão fazer o cálculo explícito (em termos do modelo RC) da função distribuição de um único spin no modelo de Ising com presença de campo externo geral e de seus valores esperados respectivos. Na segunda parte desse capítulo, apresentaremos alguns resultados já conhecidos do modelo de aglomerados aleatórios para o caso em que se tem ausência de campo externo. Nessa direção, apresentaremos propriedades como desigualdades de correlações, unicidade de medidas, unicidade do aglomerado infinito e perda de quase-localidade que naturalmente serão generalizadas nos Capítulos 5 e 6. A autodualidade da rede bidimensional \mathbb{Z}^2 é complementada pela relação de dualidade para as medidas

do modelo de aglomerados aleatórios em grafos planares, e essa ferramenta permite uma compreensão muito grande do comportamento desse modelo em duas dimensões. Uma das conjecturas mais importantes sobre esse modelo em dimensão dois era que o ponto crítico coincidia com o ponto autodual, isto é, $p_c(q) = \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$, $q \geq 1$. Esse fato era conhecido para $q = 1$ (percolação) e, na verdade, esse foi um dos resultados mais celebrados da década da percolação (precisamente, a década de 80). Para $q = 2$ o cálculo exato foi feito, primeiramente, pelo Físico-Químico Lars Onsager, que, por isso, recebeu o prêmio nobel de Química em 1968. Alguns anos mais tarde, em um célebre artigo (veja referência [112]), Smirnov definiu um observável para o modelo de aglomerados aleatórios no ponto autodual com $q = 2$ e o usou para obter a invariância conforme no limite de escalas do modelo de Ising. Isso possibilitou que Smirnov reobtivesse diversos resultados de Onsager, mas introduzindo uma nova maneira de fazer o cálculo explícito da temperatura crítica do modelo de Ising. Por esse importante resultado, Smirnov, em 2010, acabou recebendo a Medalha Fields, que é um dos prêmios de maior prestígio na comunidade matemática.

No Capítulo 4, faremos um estudo básico da teoria de especificações e medidas de Gibbs, segundo o livro de [57]. A teoria apresentada nesse capítulo nos fornece um algoritmo para a construção de especificações, com a finalidade de estudar a estrutura das conhecidas medidas de Gibbs e das especificações Gibbsianas. No desenvolvimento da teoria, nos preocupamos em esclarecer as definições e resultados via exemplos. Salientamos que a teoria apresentada nos capítulos anteriores somadas ao deste capítulo servem como base teórica elementar para uma compreensão completa dos capítulos posteriores. Para leitores sem experiência na literatura, recomendamos o estudo em sequência da ordem dos capítulos apresentados neste texto. Porém, leitores com experiência podem começar sua leitura a partir deste capítulo ou segundo as conexões de dependência apresentadas no final desta seção. Em todo o texto iremos expor definições, exemplos e observações, com a finalidade de tornar o texto quase autocontido, facilitando, assim, o entendimento do leitor.

O Capítulo 5 é constituído pelo estudo do trabalho [20]. Nesse capítulo, apresentaremos os modelos de Potts, Edwards-Sokal e de aglomerados aleatórios (modelo GRC) com presença de campos externos invariantes por translação com suas principais relações e propriedades. Salientamos que nossos resultados são baseados na referência [20], e é por isso que optamos por apresentar todas as contas em detalhe, uma vez que, no Capítulo 6, precisaremos de resultados do Capítulo 5, que, em alguns casos, foram

essencialmente provados para campos gerais, e nosso trabalho foi simplesmente indicar as adequadas modificações técnicas. Já o Capítulo 6 é concernente aos modelos de Potts, de Edwards-Sokal e de aglomerados aleatórios gerais (modelo GRC) com presença de campos externos não invariantes por translação e com condições de fronteiras gerais. Como havíamos mencionado, este capítulo é inspirado pela referência [20], onde estendemos seus resultados a campos magnéticos não invariantes por translação, o que é uma variação não trivial. Resultados fundamentais, como a desigualdade FKG, requerem adaptações não triviais e, por essa razão, apresentamos os detalhes da prova para condições de fronteira livre e conectada no chamado modelo GRC com campos externos não invariantes por translação. Quando o campo externo é nulo, a medida de aglomerados aleatórios perde a propriedade fundamental de quase-localidade das medidas de Gibbs, no entanto, é possível ter dita propriedade quase certamente por assumir a unicidade do aglomerado infinito (quase certamente). Para um campo magnético não nulo sobre a rede (hipercúbica d -dimensional), esse fato foi provado primeiramente em [101]. Não obstante, a geometria do grafo, nesse tipo de questão, é muito importante porque, para alguns grafos não amenáveis (isto é, aqueles grafos que possuem a propriedade que, ao selecionar vértices para formar subgrafos conexos, sempre produz a mesma quantidade ou mais arestas na fronteira que quantidade de vértices), tais como as árvores regulares, a propriedade de quase-localidade (quase certa) falha (veja referências [48, 68]). Para medidas de aglomerados aleatórios com campos magnéticos invariantes por translação, definidos sobre grafos amenáveis, quase-localidade quase certa foi provada em [20] para esses tipos de medidas tendo (quase certamente), no máximo, um aglomerado infinito. Esses resultados foram redescobertos aqui para modelos GRC com campos magnéticos não invariantes por translação. As provas da unicidade do aglomerado infinito e da quase-localidade da medida de Gibbs são dadas e novas ideias são introduzidas para contornar a perda de invariância translacional.

A conjectura que formula a unicidade das medidas de Gibbs para o modelo de Ising com campo externo decaindo segundo uma lei de potência ($\alpha < 1$) é provada na Seção 6.6. Como corolário de uns dos principais resultados (especificamente, Teorema 6.19) do Capítulo 6, temos obtido uma caracterização do inverso da temperatura crítica $\beta_c(\mathbf{J}, \mathbf{h})$ do modelo de Ising ferromagnético definido pelo Hamiltoniano (1), onde $h_i = h^* / \|i\|^\alpha$, e $\alpha > 1$ sobre a rede hipercúbica d -dimensional. Poucos fatos são conhecidos sobre o inverso da temperatura crítica. Por exemplo, quando o campo magnético externo é positivo no modelo de Ising bidimensional definido por (1) com acoplamento constante

$J \equiv 1$ e $\sum_{i \in \mathbb{Z}^2} h_i < \infty$, segue da solução exata de Osanger e de um resultado geral [57] sobre perturbações somáveis das medidas de Gibbs que $\beta_c(\mathbf{J}, \mathbf{h}) = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2})$. De [24] segue que $\beta_c(\mathbf{J}, \mathbf{h}) = +\infty$ sempre que $\liminf h_i > 0$ em qualquer dimensão. A última seção do Capítulo 6 contém a prova de que $\beta_c(\mathbf{J}, \mathbf{h})$ é trivial, isto é, $\beta_c(\mathbf{J}, \mathbf{h}) = +\infty$ quando $h_i = h^*/\|i\|^\alpha$ e $\alpha < 1$. Os casos mais interessantes são aqueles onde temos transição de fase e o campo magnético é dado por $h_i = h^*/\|i\|^\alpha$, com $1 < \alpha < 2$ (não somável sobre o látice todo). Para tais casos é somente conhecido o fato de que o inverso da temperatura crítica tem a seguinte limitação inferior: $\log(1 + \sqrt{2}) \leq \beta_c(1, \mathbf{h})$, o qual é derivado das desigualdades de correlações. Não é conhecido que a desigualdade de Simon-Lieb [88, 111], o Teorema de Aizenman-Barsky-Fernández [3] e outras caracterizações do ponto crítico (por exemplo, veja referência [44]) possam ser estendidos para o caso $h_i = h^*/\|i\|^\alpha$, com $1 < \alpha < 2$.

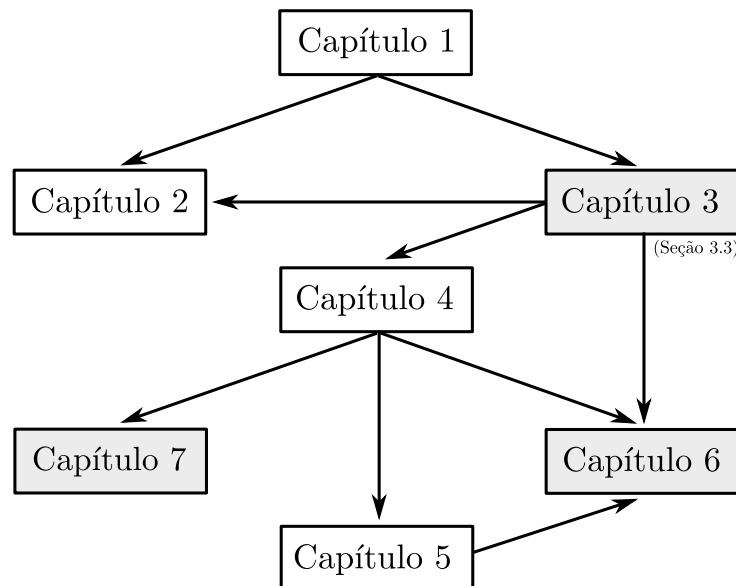


Figura 2: Enfatizamos que, os resultados que constituem parte do aporte principal de esta tese são aqueles capítulos que estão em caixas sombreadas. No entanto, no Capítulo 3, ressaltamos simplesmente a Seção 3.3.

Finalmente, no Capítulo 7, apresentaremos alguns resultados que foram obtidos como consequência de estudar o conceito de distância Mallows [34]. Começaremos definindo distância Mallows, no sentido da distância de Wasserstein [121] e provaremos uma equivalência com a definição usual de distância Mallows (veja referências [41, 92]). Este capítulo está dividido em duas seções. A primeira está destinada ao estudo de convergência em distância Mallows para distribuições de somas que envolvem

variáveis aleatórias associadas e estacionárias. Como aplicação de nossos resultados, estabeleceremos alguns exemplos onde relacionaremos a transição de fase do modelo de Ising unidimensional (sem presença de campo externo) com a convergência em distância Mallows. Por outro lado, na segunda seção tiraremos a hipótese de estacionaridade das variáveis aleatórias envolvidas e usaremos a desigualdade de Newman (veja referência [99]) para ter certo grau de independência no processo.

O texto pode ser lido linearmente ou seguindo as relações de dependências entre os capítulos como se mostra na Figura 2 (acima).

1

CONCEITOS ELEMENTARES DE TEORIA DE GRAFOS

As definições e resultados que apresentaremos neste capítulo podem ser encontrados em qualquer livro elementar de teoria de grafos, por exemplo veja referência [26].

Um **grafo** $\mathbb{L} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ é um par ordenado, onde \mathbb{V} é um conjunto arbitrário e \mathbb{E} é uma coleção de subconjuntos de \mathbb{V} de cardinalidade dois, isto é, $\mathbb{E} \subset \{\{i, j\} \subset \mathbb{V} : i \neq j\}$. O conjunto \mathbb{V} é chamado de conjunto de **vértices** de \mathbb{L} e \mathbb{E} é chamado de conjuntos de **arestas** de \mathbb{L} . Um grafo $\mathbb{L} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ é dito finito se $|\mathbb{V}| < \infty$ ¹, caso contrário, dizemos que \mathbb{L} é infinito. Se \mathbb{V} é enumerável, dizemos que o grafo \mathbb{L} é enumerável. Um **caminho** γ em um grafo \mathbb{L} é uma sequência alternada de vértices e arestas $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n)$, tal que $v_i \neq v_j$ para todo $0 \leq i, j \leq n - 1$, $v_n \in \mathbb{V} \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ e $e_j = \{v_{j-1}, v_j\}$, para todo $1 \leq j \leq n$. Em outras palavras, o conjunto de vértices de um caminho é formado por elementos distintos com exceção possivelmente de $v_0 = v_n$. Neste último caso, dizemos que γ é um caminho fechado, ciclo ou circuito. Desta forma, se um caminho γ não é fechado, então ele é necessariamente autoevitante, no sentido de que um vértice arbitrário de \mathbb{L} é visitado pelo caminho γ , no máximo, uma vez.

Dado um caminho $\gamma = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n)$, dizemos que v_0 e v_n são os vértices inicial e final de γ , respectivamente, e que γ conecta v_0 a v_n . Vamos convencionar que qualquer vértice está conectado a si mesmo. O comprimento de um caminho $\gamma = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n)$ será denotado $|\gamma|$ e definido como sendo o número de arestas que γ possui, e que, neste caso, é exatamente n .

Dizemos que um grafo $\mathbb{L} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ é **conexo** se para qualquer par de vértices distintos $x, y \in \mathbb{V}$ existe um caminho γ em \mathbb{L} conectando x a y . Dizemos que um grafo \mathbb{L} é **desconexo** se \mathbb{L} não é um grafo conexo. Dado um grafo $\mathbb{L} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ definimos a componente conexa de um vértice $x \in \mathbb{V}$ como sendo o conjunto de todos os vértices

¹ Aqui $|A|$ denota a cardinalidade do conjunto A

$y \in \mathbb{V}$ tais que x e y estão conectados. A componente conexa de um vértice $x \in \mathbb{V}$ é comumente chamada, em Mecânica Estatística, de **aglomerado** do vértice x . Dados $\mathbb{L} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ um grafo arbitrário e os vértices $x, y \in \mathbb{V}$, definimos a **distância** entre estes dois vértices, notação $d(x, y)$, da seguinte forma: se $x = y$, então $d(x, y) = 0$; se y não pertence ao aglomerado de x , então $d(x, y) = \infty$; e finalmente se $y \neq x$ e, além disso, y pertence ao aglomerado de x , então $d(x, y) = \inf\{|\gamma|: \gamma \text{ é um caminho conectando } x \text{ a } y\}$.

Dizemos que $G = (V, E)$ é um subgrafo de $\mathbb{L} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ se G tem estrutura de grafo e, além disso, $V \subset \mathbb{V}$ e $E \subset \mathbb{E}$. Quando G for um subgrafo de \mathbb{L} , vamos escrever simplesmente $G \subset \mathbb{L}$. Todas as noções introduzidas acima para grafos são generalizadas, de maneira natural, para subgrafos.

De agora em diante, vamos reservar a notação $\mathbb{L} \equiv (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ para denotar um grafo infinito enumerável e conexo. Frequentemente, vamos nos referir a \mathbb{L} como sendo uma *rede* ou um *látice*. Para designar um subgrafo finito da rede \mathbb{L} , vamos usar a notação $G = (V, E)$. O conjunto V será chamado de *volume finito*, *caixa finita* ou simplesmente *volume* ou *caixa*.

Existem várias noções de fronteira de um subgrafo $G = (V, E) \subset \mathbb{L}$. Neste trabalho, definiremos as fronteiras interna e externa que, por sua vez, podem ser dadas com respeito a vértices ou arestas. Para este trabalho, será mais conveniente adotar as definições de fronteiras externa e interna de vértices, já que as fronteiras tanto externa como interna de arestas serão definidas em seu respectivo contexto quando for necessário.

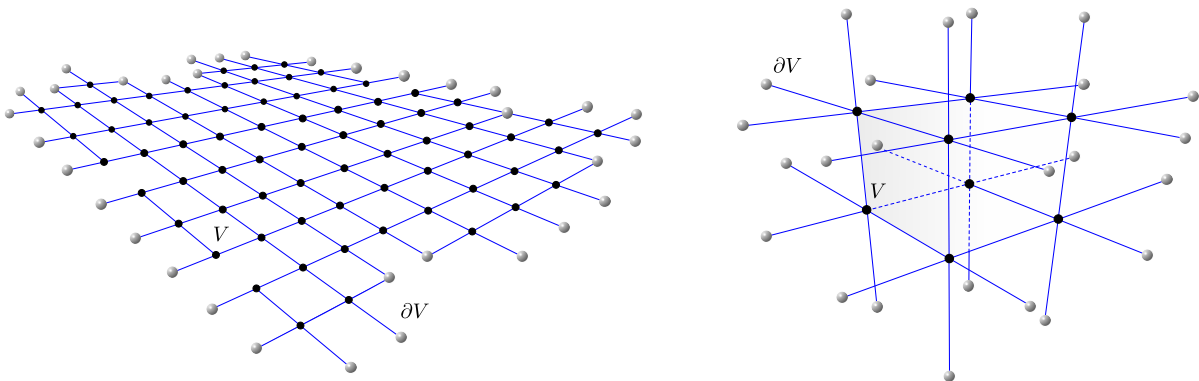


Figura 3: Esboço gráfico da fronteira externa de um volume V nas redes hipercúbicas $\mathbb{L}^2 = (\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$ (lado esquerdo) e $\mathbb{L}^3 = (\mathbb{Z}^3, \mathbb{E}^3)$ (lado direito).

Definição 1.1 (Fronteira externa de um subgrafo). *Seja $G = (V, E) \subset \mathbb{L}$. Definimos a fronteira externa de V como sendo o seguinte conjunto de vértices da rede*

$$\partial V \equiv \{x \in \mathbb{V} \setminus V : d(x, V) = 1\},$$

onde d denota a distância no grafo \mathbb{L} definida acima (veja Figuras 3 e 4).

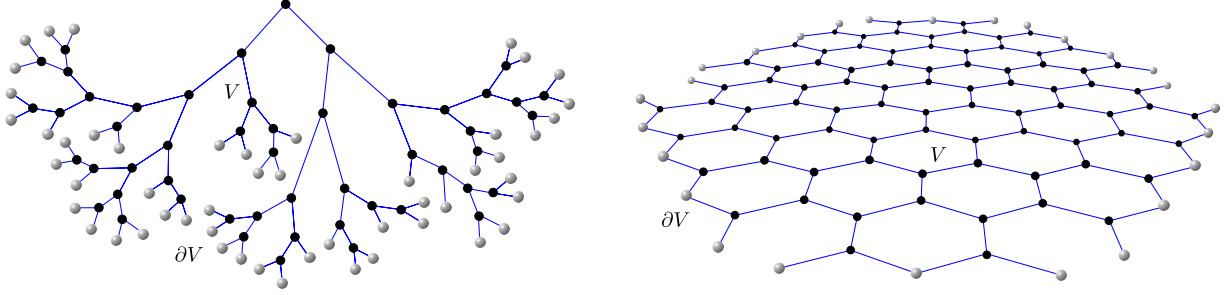


Figura 4: Esboço gráfico da fronteira externa de uma caixa V na árvore binária \mathbb{T}_2^+ (lado esquerdo) e na árvore homogênea \mathbb{T}_2 de grau 3 (lado direito).

Definição 1.2 (Fronteira interna de um subgrafo). *Seja $G = (V, E) \subset \mathbb{L}$. Definimos por fronteira interna de V como sendo o seguinte conjunto de vértices da rede*

$$\partial V \equiv \{x \in V : d(x, \mathbb{V} \setminus V) = 1\},$$

onde d denota a distância no grafo \mathbb{L} definida anteriormente.

Observação 1.1. *Nas definições de fronteira externa e interna de um grafo, adotamos a mesma notação para estes conceitos. Quando seja necessário, explicitaremos o tipo de fronteira com que se está trabalhando.*

Na continuação, daremos algumas definições e um lema que serão úteis quando, nos Capítulos 2 e 3, provarmos a unicidade (quase certa) do aglomerado infinito para os modelos de percolação independente e de aglomerados aleatórios.

Definição 1.3. *Seja $\mathbb{L} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ um grafo conexo. Um vértice $x \in \mathbb{V}$ é denominado ponto triplo para \mathbb{L} se:*

- a) existem apenas três arestas de \mathbb{E} incidentes a x e;
- b) o grafo $\mathbb{L} \setminus \{x\} = (\mathbb{V} \setminus \{x\}, \mathbb{E} \setminus \{e_1, e_2, e_3\})$, onde e_1, e_2, e_3 são arestas incidentes a x , tem exatamente três aglomerados. Chamaremos de ramos os conjuntos de vértices desses três aglomerados e usaremos a notação $E_1(x), E_2(x), E_3(x)$ para designá-los.

Lema 1.2 (Veja referência [50]). *Seja $\mathbb{L} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ um grafo conexo.*

- i) Se x_1, \dots, x_n são pontos triplos distintos de \mathbb{L} . Então para algum i , dois de três ramos em x_i , digamos $E_2(x_i)$ e $E_3(x_i)$, não contêm nenhum dos outros pontos triplos $\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_i\}$.*
- ii) Seja $G = (\mathbb{V} \setminus E_3(x_i), \mathbb{E} \setminus E[E_3(x_i)])$ o subgrafo de \mathbb{L} , onde $E[E_3(x_i)]$ é o conjunto de todas as arestas incidentes aos vértices do conjunto $E_3(x_i)$. Então, $\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_i\}$ são pontos triplos para \mathbb{L} .*
- iii) Sejam x_1, \dots, x_n pontos triplos distintos para \mathbb{L} . Entre os $3n$ ramos $E_i(x_1), E_i(x_2), \dots, E_i(x_n)$, $i = 1, 2, 3$ encontramos, pelo menos, $n + 2$ ramos disjuntos.*

Definição 1.4. *Um ponto triplo é um “ponto triplo especial” se seus ramos são infinitos.*

GRAFOS PLANARES

A teoria de dualidade planar fornece uma técnica interessante para o estudo da percolação independente (ou de Bernoulli) e do modelo de aglomerados aleatórios, que serão estudados nos próximos capítulos. Intuitivamente, um grafo é chamado *planar* se este pode ser mergulhado em \mathbb{R}^2 , de tal forma que quaisquer duas de suas arestas se interceptam somente em um vértice comum. Mais precisamente, fixe um conjunto infinito de pontos p_1, p_2, \dots em \mathbb{R}^3 tal que qualquer plano $\pi \subset \mathbb{R}^3$ possui, no máximo, três destes pontos. Denotamos por (p_i, p_j) o segmento de reta unindo p_i a p_j . Para cada subgrafo $G = (V, E) \subset \mathbb{L}$, vamos construir um espaço topológico $R(G)$ em \mathbb{R}^3 usando a sequência fixada p_1, p_2, \dots da seguinte maneira: se $G = (V, E)$ e $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, definimos

$$R(G) = \bigcup_{\{v_i, v_j\} \in E} (p_i, p_j) \cup \bigcup_{j=1}^n \{p_j\} \subset \mathbb{R}^3.$$

O espaço topológico $R(G)$ é chamado de uma realização de G . Observamos que, se construirmos uma outra realização de G , digamos $\tilde{R}(G)$, a partir de uma outra sequência $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots$ também com a propriedade de que nenhum plano de \mathbb{R}^3 contém mais de três pontos desta coleção, então as realizações $\tilde{R}(G)$ e $R(G)$ são homeomorfas. Este fato mostra que a seguinte definição independe da escolha da sequência p_1, p_2, \dots

Observamos que a definição de $R(G)$ dada acima se estende, naturalmente, para o caso em que $G = \mathbb{L}$ é um grafo infinito enumerável, isto é, V tem a cardinalidade de \mathbb{N} .

Definição 1.5 (Grafo Planar). *Um grafo $G = (V, E)$ enumerável é dito planar se $R(G)$ é homeomorfo a algum subconjunto do plano \mathbb{R}^2 .*

Observamos que, para todo grafo planar G sempre existe um homeomorfismo φ que leva $R(G)$ em um subconjunto $\varphi(R(G)) \subset \mathbb{R}^2$, de forma que cada aresta de G é representada no plano por um segmento de reta (para maiores detalhes veja [26], p. 20).

Se G é um grafo planar, então a menos de homeomorfismos, podemos pensar em $R(G)$ como um subconjunto de \mathbb{R}^2 . Cada componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus R(G)$ é chamada de uma face de G . Com as noções introduzidas acima, podemos provar a famosa 1ª *Fórmula de Euler* para grafos planares.

Teorema 1.3 (1ª Fórmula de Euler). *Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo, finito e planar. Se f denota o número de faces de G , então*

$$|V| - |E| + f = 2.$$

Demonstração. A prova será feita por indução no número de faces de G . Se $f = 1$, então G não contém ciclos e, portanto, é um grafo árvore. Já para todo grafo árvore $|E| = |V| - 1$, temos que a fórmula é verdadeira. Vamos supor, agora, que $f > 1$ e que o resultado é verdadeiro para valores menores que f . Seja $\{a, b\}$ uma aresta contida em algum ciclo de G . Já que um ciclo separa o plano em duas faces, a aresta $\{a, b\}$ está contida na fronteira destas duas faces que vamos denotar por S e T .

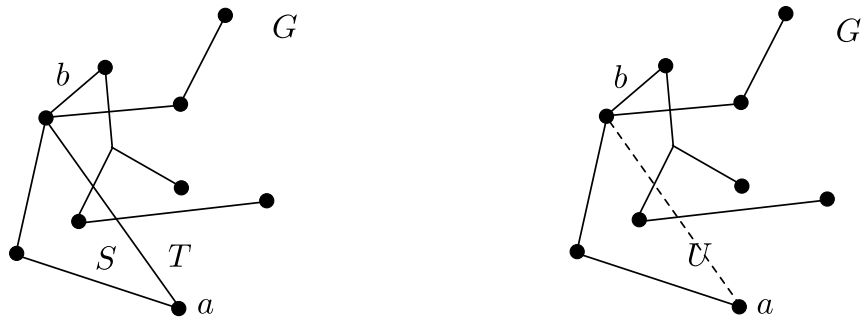


Figura 5: Os grafos G e G' .

Considere o grafo G' obtido a partir de G pela remoção da aresta $\{a, b\}$, como foi feito na Figura 5. Observe que G e G' têm as mesmas faces, exceto as faces S e T que, após a remoção da aresta $\{a, b\}$, se fundiram em uma nova face que chamaremos de U . Se f' denota o número de faces de G' , segue, da hipótese de indução, que

$$|V| - (|E| - 1) + f' = 2.$$

Usando que $f' = f - 1$, na última igualdade, temos $|V| - |E| + f = 2$. □

O seguinte resultado é consequência direta da 1ª Fórmula de Euler, conhecida como 2ª Fórmula de Euler, cuja aplicação será fundamental quando estudarmos o conceito de dualidade de um grafo.

Corolário 1.4 (2ª Fórmula de Euler). *Seja $G = (V, E)$ um grafo (não necessariamente conexo), finito e planar. Se f denota o número de faces de G , e K o número de componentes conexas de G , então*

$$|V| - |E| + f = K + 1.$$

Demonstração. Sejam $|V_i|$ o número de vértices, $|E_i|$ o número de arestas e f_i o número de faces da i -ésima componente conexa de G , com $i = 1, \dots, K$. Pelo teorema anterior, temos

$$|V_i| - |E_i| + f_i = 2, \quad i = 1, \dots, K. \quad (2)$$

Observamos que $|V| = \sum_{i=1}^K |V_i|$, $|E| = \sum_{i=1}^K |E_i|$ e que o número $\sum_{i=1}^K f_i$ conta K -vezes a única face infinita de G , logo, $\sum_{i=1}^K (f_i - 1) + 1$ contará o número de faces no grafo G (incluindo a única face infinita de G). Isto é, $f = \sum_{i=1}^K (f_i - 1) + 1$.

Somando em i na equação (2), finalmente, obtemos

$$|V| - |E| + (f + K - 1) = 2K,$$

o que conclui a prova. □

Definição 1.6 (Ponte). *Seja $G = (V, E)$ um grafo finito. Uma aresta $e \in E$ é chamada de ponte, se o grafo $(V, E \setminus \{e\})$ tem uma componente conexa a mais do que G .*

Seja G um grafo finito conexo planar com $|V|$ vértices, $|E|$ arestas e f faces. Denote por f_i o número de faces tendo exatamente i arestas em suas fronteiras. Claramente,

$$\sum_i f_i = f,$$

e quando G não possui pontes, já que toda aresta está na fronteira de duas faces, temos também que

$$\sum_i i f_i = 2|E|.$$

Definição 1.7 (Cintura). *A cintura g de um grafo G é o número de arestas dos ciclos de menor comprimento em G . Se G é acíclico, então dizemos que a cintura de G é infinita, isto é $g = \infty$.*

Teorema 1.5. Se $G = (V, E)$ um grafo planar com $|V| \geq 3$, então $|E| \leq 3|V| - 6$. Além do mais, se a cintura de G satisfaz $3 \leq g < \infty$, então podemos afirmar que

$$|E| \leq \max \left\{ \frac{g}{g-2}(|V|-2), |V|-1 \right\}.$$

Demonstração. Observe que a primeira afirmação se reduz ao caso $g = 3$. Logo, é suficiente mostrar que a segunda afirmação é válida. Se $|V| \leq g - 1$, então claramente G é acíclico. Logo, $|E| \leq |V| - 1$. Vamos supor que $g \leq |V|$ e que a afirmação seja válida para todo grafo planar $G' = (V', E')$ tal que $|V'| < |V|$. Podemos assumir sem perda de generalidade que G é conexo. Se existe uma ponte $e \in E'$, então $G' \setminus \{e\}$ é união de dois subgrafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$, cujos conjuntos de vértices são disjuntos. Por indução, temos

$$\begin{aligned} |E| &= |E_1| + |E_2| + 1 \\ &\leq \max \left\{ \frac{g}{g-2}(|V_1|-2), |V_1|-1 \right\} + \max \left\{ \frac{g}{g-2}(|V_2|-2), |V_2|-1 \right\} + 1 \\ &\leq \max \left\{ \frac{g}{g-2}(|V|-2), |V|-1 \right\}. \end{aligned}$$

Por outro lado, se G não possui pontes, então sabemos que

$$gf = g \sum_i f_i \leq \sum_{i \geq g} if_i \leq \sum_i if_i = 2|E|.$$

Pela Fórmula de Euler, temos $|E| + 2 = |V| + f \leq |V| + \frac{2}{g}|E|$, de onde segue que $|E| \leq \frac{g}{g-2}(|V|-2)$. \square

Corolário 1.6. O toro bidimensional $\mathbb{T}(m) \equiv (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, de comprimento m , não é um grafo planar.

Demonstração. O toro $\mathbb{T}(m)$ tem m^2 vértices e $2m^2$ arestas. Uma vez que sua cintura é $g = 4$, se $\mathbb{T}(m)$ fosse um grafo planar, então pelo teorema acima teríamos

$$2m^2 \leq \frac{4}{4-2}(m^2 - 2) = 2m^2 - 4,$$

o que é um absurdo. \square

DUALIDADE

Um laço em um grafo é um tipo especial de aresta, cujas extremidades são formadas pelo mesmo vértice. Na literatura, esse novo objeto matemático é normalmente chamado de multigrafo, mas, por questão de simplicidade vamos nos referir a tais objetos, neste texto, simplesmente por grafos. De agora em diante, vamos assumir que os grafos envolvidos podem possuir laços.

Seja $G = (V, E)$ um grafo planar (finito ou infinito) em \mathbb{L} . Obtemos seu grafo dual $G^* = (V^*, E^*)$ como segue: colocamos um novo vértice, que chamaremos de vértice dual, dentro de cada face de G , incluindo as faces infinitas de G , caso existam. Para cada $e \in E$, colocamos uma aresta dual $e^* = \{x^*, y^*\}$, unindo os dois vértices duais nas duas faces de G separadas por e . Se essas duas faces são as mesmas, temos que $x^* = y^*$ e, portanto, e^* é um laço. Assim, dado um grafo planar G , sempre é possível obter seu grafo dual G^* . O grafo G (resp. G^*) é chamado de *grafo primal* (*dual*) (veja Figura 6).

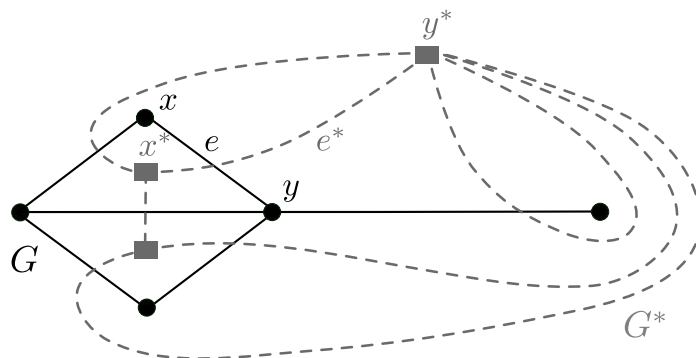


Figura 6: O grafo G (em linhas contínuas) e seu grafo dual G^* (em linhas tracejadas). O grafo G tem uma face infinita e o grafo dual G^* tem um laço. Exibe-se a aresta $e = \{x, y\}$ no grafo primal G e sua aresta dual $e^* = \{x^*, y^*\}$ no grafo dual G^* .

Assim, V^* está em correspondência biunívoca com o conjunto de faces de G , e E^* está em correspondência biunívoca com E .

O seguinte lema de contagem será de vital importância quando, nos Capítulos 5 e 6, tentarmos obter representações gráficas dos modelos de Ising e de Potts.

Lema 1.7 (Lema de contagem). *Seja $G = (V, E) \subset \mathbb{L}$ um subgrafo finito, $(A_e)_{e \in E}$ e $(B_e)_{e \in E}$ duas famílias de números reais. Então*

$$\prod_{e \in E} (A_e + B_e) = \sum_{E' \subset E} \left(\prod_{e \in E'} A_e \prod_{e \in E \setminus E'} B_e \right),$$

onde E' é um subconjunto arbitrário de arestas de G . Quando E' ou $E \setminus E'$ forem vazios, convencionamos que o produtório sobre estes conjuntos é igual a um.

Demonstração. Para provar este lema, procederemos, por indução, sobre o número de arestas do grafo G , tendo em conta que, por convenção, o produtório sobre o conjunto vazio é igual a um. De fato, se $|E|=1$ com $E = \{b\}$, então

$$A_b + B_b = \sum_{\{b\} \subset E} \left(\prod_{e \in \{b\}} A_e \prod_{\emptyset} B_e \right) + \sum_{\emptyset \subset E} \left(\prod_{\emptyset} A_e \prod_{e \in \{b\}} B_e \right). \quad (3)$$

Se $|E|=2$ com $E = \{b_1, b_2\}$, então

$$\begin{aligned} (A_{b_1} + B_{b_1})(A_{b_2} + B_{b_2}) &= A_{b_1}B_{b_2} + A_{b_2}B_{b_1} + A_{b_1}A_{b_2} + B_{b_1}B_{b_2} \\ &= \sum_{\{b_1\} \subset E} \left(\prod_{e \in \{b_1\}} A_e \prod_{e \in \{b_2\}} B_e \right) + \sum_{\{b_2\} \subset E} \left(\prod_{e \in \{b_2\}} A_e \prod_{e \in \{b_1\}} B_e \right) \\ &\quad + \sum_{\{b_1, b_2\} \subset E} \left(\prod_{e \in \{b_1, b_2\}} A_e \prod_{\emptyset} B_e \right) + \sum_{\emptyset \subset E} \left(\prod_{\emptyset} A_e \prod_{e \in \{b_1, b_2\}} B_e \right). \end{aligned}$$

Assumindo que a identidade deste lema é válida quando $|E|=n \geq 1$, provaremos que

$$\prod_{e \in E} (A_e + B_e) = \sum_{E' \subset E} \left(\prod_{e \in E'} A_e \prod_{e \in E \setminus E'} B_e \right),$$

onde $|E|=n+1$. De fato, sem perda de generalidade, definimos $E = E^* \cup \{b\}$, onde $|E^*|=n$. Veja que usando a hipótese indutiva, temos

$$\begin{aligned} \prod_{e \in E} (A_e + B_e) &= (A_b + B_b) \prod_{e \in E^*} (A_e + B_e) \\ &= (A_b + B_b) \sum_{E' \subset E^*} \left(\prod_{e \in E'} A_e \prod_{e \in E^* \setminus E'} B_e \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{E' \subset E} \left(\prod_{e \in E'} A_e \prod_{e \in E \setminus E'} B_e \right) &= \left[\sum_{\{b\} \subset E} \left(\prod_{e \in \{b\}} A_e \prod_{\emptyset} B_e \right) + \sum_{\emptyset \subset E} \left(\prod_{\emptyset} A_e \prod_{e \in \{b\}} B_e \right) \right] \\ &\quad \times \sum_{E' \subset E^*} \left(\prod_{e \in E'} A_e \prod_{e \in E^* \setminus E'} B_e \right) \\ &\stackrel{(3)}{=} (A_b + B_b) \sum_{E' \subset E^*} \left(\prod_{e \in E'} A_e \prod_{e \in E^* \setminus E'} B_e \right). \end{aligned} \quad (5)$$

De (4) e (5), conclui-se a prova. \square

Exemplo 1.1 (Prova alternativa do Binômio de Newton). Fazendo $A_e = x$, $B_e = y$ e $|E| = n$, pelo Lema 1.7, temos

$$(x + y)^n = \sum_{E' \subset E} \left(\prod_{e \in E'} x \prod_{e \in E \setminus E'} y \right) = \sum_{r=0}^n \sum_{\substack{E' \subset E \\ |E'|=r}} x^r y^{n-r},$$

onde, na segunda igualdade, fizemos um rearranjo dos elementos da soma. Por indução em r , pode-se verificar que $\sum_{\substack{E' \subset E \\ |E'|=r}} 1 = \binom{n}{r}$. Daí, a igualdade acima fica

$$= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r y^{n-r}.$$

Juntando o termo inicial e o final na igualdade acima, obtemos a prova do Binômio de Newton.

2

PERCOLAÇÃO INDEPENDENTE

Neste capítulo, abordamos um dos modelos importantes da Mecânica Estatística: o modelo de percolação independente (ou de Bernoulli). Esse modelo aparece pouco depois de 1957, com a finalidade de modelar matematicamente meios porosos. O referido modelo tem sido intensamente estudado e sobre ele já foi produzida uma quantidade numerosa de trabalhos notáveis. Em 1960, Piet Kasteleyn notou que o modelo de percolação independente satisfazia as propriedades das chamadas leis *série/paralelo* (veja Teorema 3.91 de [65], p. 62 para uma referência). Essa simples observação levou Piet Kasteleyn e Cees Fortuin a formularem o conhecido modelo de aglomerados aleatórios, o qual será estudado pormenorizadamente no próximo capítulo. Esse novo modelo é basicamente determinado por dois parâmetros, p e q , onde $p \in [0, 1]$ e $q > 0$. Se, no modelo de aglomerados aleatórios fizermos $q = 1$, obteremos o modelo de percolação independente. Se fizermos $q = 2$, podemos relacionar esse modelo com o modelo de Ising e, em caso mais geral, podemos relacionar com o modelo de Potts de $q \in \{1, 2, \dots\}$ estados via medida de acoplamentos de Edwards-Sokal. Os detalhes das relações mencionadas acima serão estudados nos próximos capítulos.

O modelo de percolação independente é provavelmente o mais simples da Mecânica Estatística (veja referências [33, 42, 50, 64]). Esse tipo de percolação foi introduzido por Broadbent e Hammersley em 1957 como um modelo para estudar o comportamento dos fluidos em um meio poroso. Percolação é a ação ou processo de passar um líquido através de um meio, para filtrar ou para extrair substâncias desse meio. A percolação é um fenômeno da vida cotidiana, por exemplo: podemos dizer que a água em forma de vapor “percola” através do café moído na cafeteira. Porém, se a concentração de café no filtro fosse extremamente alta, a água poderia não percolar, pois não encontraria espaços livres entre os poros para fazê-lo. Outros exemplos de percolação são:

- ✓ A extração de petróleo do subsolo, fazendo-o percolar através do meio rochoso /poroso.

- ✓ A percolação de infecções ou epidemias através de uma população: se a probabilidade de contágio é alta, a infecção se propagará ou percolará em uma dada população.

2.1 DEFINIÇÃO FORMAL DO MODELO

Uma configuração ω sobre o grafo $\mathbb{L} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ é um elemento do espaço $\{0, 1\}^{\mathbb{E}}$, isto é, uma configuração é uma função $\omega : \mathbb{E} \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $e \mapsto \omega_e$, para cada $e \in \mathbb{E}$, notação: $(\omega_e)_{e \in \mathbb{E}}$.

Diremos que uma aresta $e = e(\omega)$ é aberta (ou que ela tem estado aberto) na configuração ω se $\omega_e = 1$. Analogamente, diremos que uma aresta $e = e(\omega)$ é fechada (ou que ela tem estado fechado) na configuração ω se $\omega_e = 0$. A configuração ω pode ser vista como um subgrafo de \mathbb{L} , composto dos mesmos vértices de \mathbb{L} e de um subconjunto de arestas de \mathbb{E} , já que sempre existe uma correspondência biunívoca entre um elemento de $\{0, 1\}^{\mathbb{E}}$ e o conjunto $\{e \in \mathbb{E} : \omega_e = 1\}$ de arestas abertas de \mathbb{L} . Assim, uma configuração pode ser vista como um vetor indexado pelas arestas de \mathbb{E} , cujas componentes são compostas pelos estados das arestas de \mathbb{L} .

Chamaremos de evento cilíndrico o conjunto de configurações de $\{0, 1\}^{\mathbb{E}}$, nas quais fixaremos os estados de um número finito de arestas e deixaremos variar os estados das arestas restantes da rede, ou seja,

$$C(F, \omega) = \{\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}} : \eta_e = \omega_e, \forall e \in F\},$$

onde F é um subconjunto finito de \mathbb{E} e $\omega \in \{0, 1\}^F$ é dado a priori.

Seja \mathcal{F} a σ -álgebra sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{E}}$ gerada pelos eventos cilíndricos. Se $p \in [0, 1]$ e $\lambda = p\delta_1 + (1 - p)\delta_0$ é a distribuição de Bernoulli (medida a priori), denotaremos a medida de probabilidade $\mathbb{P}_{p, \mathbb{L}}$ sobre (Ω, \mathcal{F}) induzida por

$$\mathbb{P}_{p, \mathbb{L}}(C(F, \omega)) = \prod_{e \in F} \lambda(\omega_e) = p^{|\{e \in F : \omega_e = 1\}|} (1 - p)^{|\{e \in F : \omega_e = 0\}|}.$$

Na medida $\mathbb{P}_{p, \mathbb{L}}$ os estados das arestas são independentes com distribuição $\mathbb{P}_{p, \mathbb{L}}(\omega_e = 1) = \mathbb{P}_{p, \mathbb{L}}(C(\{e\}, 1)) = p = 1 - \mathbb{P}_{p, \mathbb{L}}(\omega_e = 0)$. Chamaremos $\mathbb{P}_{p, \mathbb{L}}$ uma medida de percolação sobre \mathbb{L} ou **medida de Bernoulli**.

Daí, a probabilidade de uma configuração $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}}$ é

$$\mathbb{P}_{p, \mathbb{L}}(\{\omega\}) = p^{o(\omega)} (1 - p)^{c(\omega)}, \quad (6)$$

onde $o(\omega)$ (resp. $c(\omega)$) representa o número de arestas abertas (resp. fechadas) na configuração ω . É comum denotar $\mathbb{P}_{p,\mathbb{L}}(\omega)$ em vez de $\mathbb{P}_{p,\mathbb{L}}(\{\omega\})$.

Observe que, de maneira análoga, pode-se definir a medida de Bernoulli sobre um subgrafo (não necessariamente finito) $G = (V, E)$ de \mathbb{L} , notação $\mathbb{P}_{p,G}$. O parâmetro $p \in [0, 1]$ é constante nesse contexto. Já nos capítulos subseqüentes, estudaremos modelos da Mecânica Estatística, onde o parâmetro p não necessariamente tem que ser constante.

Dados $u, v \in \mathbb{V}$, se existir uma aresta unindo esses vértices, diremos que u e v são vértices adjacentes. Definimos o grau de um vértice v como o número de vértices adjacentes a este, isto é, o grau de v é a cardinalidade do conjunto $\{u \in \mathbb{V} : \{u, v\} \in \mathbb{E}\}$. Diremos que um grafo é **localmente finito** se todos seus vértices tiverem grau finito.

Por outro lado, definimos a rede hipercúbica d -dimensional pelo grafo $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, que, por abuso de linguagem, nós o denotaremos por \mathbb{L}^d . Aqui, \mathbb{Z}^d representa o conjunto de vértices da rede e $\mathbb{E}^d = \{\{x, y\} \subset \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \|x - y\| = 1\}$ é o conjunto de arestas de primeiros vizinhos, onde $\|\cdot\|$ é a norma ℓ^1 em \mathbb{Z}^d .

Considerando o grafo $\mathbb{L} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ localmente finito, uma das propriedades importantes da medida de Bernoulli se relaciona com o conceito de medida ergódica (uma prova desse fato é dada na Proposição 2.5 quando $\mathbb{L} = \mathbb{L}^d$, para grafos bem gerais, veja a Observação 2.13.). Outro fato interessante é que a medida de Bernoulli $\mathbb{P}_{p,\mathbb{L}}$ é invariante por automorfismos e, em particular, é invariante por translações (veja Proposição 2.10).

A cada aresta de \mathbb{E} será atribuída aleatoriamente o estado aberto ou fechado da seguinte maneira: considere $\{\omega_e : e \in \mathbb{E}\}$ uma família de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (v.a.'s i.i.d.) seguindo a distribuição de Bernoulli com parâmetro $p \in [0, 1]$. A medida de Bernoulli de parâmetro $p \in [0, 1]$ é a única medida de probabilidade $\mathbb{P}_{p,\mathbb{L}}$ sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{E}}$ tal que $\mathbb{P}_{p,\mathbb{L}}(\omega_e = 1) = p = 1 - \mathbb{P}_{p,\mathbb{L}}(\omega_e = 0)$, para cada $e \in \mathbb{E}$. A esperança com respeito a essa medida de probabilidade será denotada por \mathbb{E}_p .

Em determinadas partes de este trabalho usaremos o seguinte conceito

Definição 2.1. *Um **látice** num espaço vetorial real X , de dimensão d , é um subgrupo da forma:*

$$\mathbb{Z}x_1 + \cdots + \mathbb{Z}x_d,$$

onde $\{x_1, \dots, x_d\}$ é uma base de X . Uma vez que $\mathbb{Z}^d = \mathbb{Z}e_1 + \cdots + \mathbb{Z}e_d$, onde $\{e_1, \dots, e_d\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^d , temos que \mathbb{Z}^d é um **látice**.

Um subconjunto Y do espaço vetorial real \mathbb{R}^d é chamado discreto se a interseção entre Y e qualquer subconjunto limitado de \mathbb{R}^d é finito. Logo, \mathbb{Z}^d em \mathbb{R}^d é um látice discreto em \mathbb{R}^d .

Estamos interessados em propriedades de conectividade na configuração ω quando $\mathbb{L} = \mathbb{L}^d$. Daqui em diante, neste capítulo, nós nos restringiremos a trabalhar com modelos de nosso interesse, isto é, modelos de percolação sobre \mathbb{L}^d com $d \geq 1$. Já que temos subentendido que a medida de Bernoulli é definida sobre \mathbb{L}^d , adotaremos a notação \mathbb{P}_p para referimo-nos à medida de Bernoulli $\mathbb{P}_{p, \mathbb{L}^d}$, que com frequência será escrita, também, como $\mathbb{P}_{p, \mathbb{Z}^d}$.

Quando a dimensão do látice for especificada, por exemplo $d = 2$, nós enfatizaremos quando for necessário.

2.2 DESIGUALDADE FKG

No que segue, apresentaremos uma propriedade fundamental válida para a medida de Bernoulli \mathbb{P}_p . Na verdade, essa propriedade é válida sobre qualquer grafo. Ela foi provada, inicialmente, por Harris, no ano 1960 [71], e é usualmente conhecida como **desigualdade FKG** ou **propriedade FKG**, devido a uma extensão dada por Fortuin, Kasteleyn e Ginibre, no ano 1971 [52]. Informalmente, a desigualdade FKG diz que, em qualquer sistema aleatório, eventos crescentes (que serão definidos em seguida) são positivamente correlacionados, no entanto, um evento crescente e um evento decrescente são negativamente correlacionados.

A mencionada desigualdade tomará vital importância no Capítulo 7, quando mostrarmos a convergência de sequências correlacionadas positivamente em *distância Mallows* a uma variável aleatória Gaussiana. Salientamos que esse tipo de convergência é mais forte que a convergência em distribuição. Portanto, como caso particular, obteremos um teorema do limite central (TLC) para esses tipos de sequências.

Para compararmos funções especiais definidas sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$, necessitaremos definir alguma relação de ordem em $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$, caso seja possível. Introduzimos a ordem parcial natural \preceq em $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ da seguinte maneira: para cada $\omega, \tilde{\omega} \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$,

$$\omega \preceq \tilde{\omega} \Leftrightarrow \omega_e \leq \tilde{\omega}_e, \quad \forall e \in \mathbb{E}^d.$$

Uma variável aleatória X é dita crescente se for crescente na ordem parcial acima, isto é,

$$X(\omega) \leq X(\tilde{\omega}), \quad \text{sempre que } \omega \preceq \tilde{\omega}.$$

Um evento $A \in \mathcal{F}$ é dito **crescente** se $\mathbb{1}_A$ (a função indicadora de A) for crescente. Em outras palavras, um evento A é crescente sempre que, para cada configuração de arestas abertas em que A ocorre, ao abrirmos mais arestas nessa configuração, A continua ocorrendo. Exemplos comuns desses tipos de eventos são: o evento $\{x \leftrightarrow y\}$ em que dois vértices estão conectados por um caminho de arestas na rede \mathbb{L}^d , o evento $\{|C| = \infty\}$ em que o aglomerado da origem é infinito, o evento $\{N_\infty \geq 1\}$ em que o número de aglomerados infinitos é maior ou igual que um, etc.

Analogamente, diremos que um evento $A \in \mathcal{F}$ é **decrecente** se $-\mathbb{1}_A$ é crescente. Como exemplos de eventos decrecentes, podemos citar o complementar dos eventos crescentes mencionados acima.

Curiosamente, pode-se ver que existem eventos que não são nem crescentes nem decrecentes, por exemplo, o evento $\{N_\infty = k\}$, $k \geq 1$ inteiro, em que o número de aglomerados infinitos é exatamente k , o evento $\{N_\infty > 1\}$, em que o número de aglomerados infinitos é estritamente maior que 1 e o evento $\{N_\infty \geq k\}$, $k \geq 2$, em que o número de aglomerados infinitos é maior ou igual que k .

Em seguida, formulamos a propriedade fundamental mencionada no início desta seção.

Teorema 2.1 (Desigualdade FKG, veja [50, 52, 64]). *Se X e Y são duas variáveis aleatórias crescentes com segundo momento finito (isto é, $\mathbb{E}_p(X^2) < \infty$ e $\mathbb{E}_p(Y^2) < \infty$) em $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$, então*

$$\mathbb{E}_p(XY) \geq \mathbb{E}_p(X)\mathbb{E}_p(Y). \quad (7)$$

Como caso particular, tomando $X = \mathbb{1}_A$ e $Y = \mathbb{1}_B$, onde A e B são eventos crescentes, obtemos

$$\mathbb{P}_p(A \cap B) \geq \mathbb{P}_p(A)\mathbb{P}_p(B).$$

Demonstração. Sejam $Z \equiv (Z_i)_{i \in J}$ variáveis aleatórias independentes tomando valores em $\{0, 1\}$ e f, g funções crescentes tais que $X = f \circ Z$ e $Y = g \circ Z$, logo, provar (7) é equivalente a provar

$$\mathbb{E}_p(f(Z)g(Z)) \geq \mathbb{E}_p(f(Z))\mathbb{E}_p(g(Z)). \quad (8)$$

Provaremos a desigualdade (8) por indução sobre a cardinalidade de J , notação $|J|$. De fato, assumamos que $|J| = 1$. Sejam γ_1 e γ_2 dois elementos de $\{0, 1\}$. Como f e g são crescentes, as quantidades $f(\gamma_1) - f(\gamma_2)$ e $g(\gamma_1) - g(\gamma_2)$ sempre têm o mesmo sinal, não importando a ordem em que os valores γ_1 e γ_2 se escolham em $\{0, 1\}$. Isto é,

$$[f(\gamma_1) - f(\gamma_2)][g(\gamma_1) - g(\gamma_2)] \geq 0.$$

Usando a desigualdade acima, conseguimos

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \sum_{\gamma_1, \gamma_2 \in \{0,1\}} [f(\gamma_1) - f(\gamma_2)][g(\gamma_1) - g(\gamma_2)] \mathbb{P}_p(Z_1 = \gamma_1) \mathbb{P}_p(Z_1 = \gamma_2) \\
 &= \sum_{\gamma_1 \in \{0,1\}} f(\gamma_1) g(\gamma_1) \mathbb{P}_p(Z_1 = \gamma_1) - \sum_{\gamma_1, \gamma_2 \in \{0,1\}} f(\gamma_1) g(\gamma_2) \mathbb{P}_p(Z_1 = \gamma_1, Z_1 = \gamma_2) \\
 &\quad - \sum_{\gamma_1, \gamma_2 \in \{0,1\}} f(\gamma_2) g(\gamma_1) \mathbb{P}_p(Z_1 = \gamma_1, Z_1 = \gamma_2) + \sum_{\gamma_2 \in \{0,1\}} f(\gamma_2) g(\gamma_2) \mathbb{P}_p(Z_1 = \gamma_2) \\
 &= 2[\mathbb{E}_p(f(Z_1)g(Z_1)) - \mathbb{E}_p(f(Z_1))\mathbb{E}_p(g(Z_1))].
 \end{aligned}$$

Provando-se a desigualdade (8) quando $|J|=1$.

Agora, assumindo que a desigualdade (8) é verdadeira para $|J|=k-1$ e que f e g sejam funções crescentes de k variáveis. Como X e Y têm segundo momento finito, então pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, o valor esperado $\mathbb{E}_p(f(Z_1, \dots, Z_k)g(Z_1, \dots, Z_k))$ é finito. Logo, por propriedade de esperanças condicionais, temos

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_p(f(Z_1, \dots, Z_k)g(Z_1, \dots, Z_k)) \\
 = \mathbb{E}_p[\mathbb{E}_p(f(Z_1, \dots, Z_k)g(Z_1, \dots, Z_k) \mid Z_1, \dots, Z_{k-1})]. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Para dar continuidade à demonstração do teorema, provaremos dois lemas auxiliares, os quais têm um papel sutil dentro dessa prova.

Lema 2.2. *Sobre as hipóteses do Teorema 2.1, o caso $|J|=1$ implica que, para cada Z_1, \dots, Z_{k-1} ,*

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_p(f(Z_1, \dots, Z_k)g(Z_1, \dots, Z_k) \mid Z_1, \dots, Z_{k-1}) \\
 \geq
 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\mathbb{E}_p(f(Z_1, \dots, Z_k) \mid Z_1, \dots, Z_{k-1}) \mathbb{E}_p(g(Z_1, \dots, Z_k) \mid Z_1, \dots, Z_{k-1}).$$

Demonstração. Como

$$\sigma(Z_1, \dots, Z_{k-1}) = \left\{ \cup_{i_1, \dots, i_{k-1}} C_{1, \dots, k-1}^{i_1, \dots, i_{k-1}} : i_1, \dots, i_{k-1} \in \{0, 1\} \right\},$$

onde $C_{1, \dots, k-1}^{i_1, \dots, i_{k-1}} = \{\omega : \omega_1 = i_1, \dots, \omega_{k-1} = i_{k-1}\}$ é o cilindro de base i_1, \dots, i_{k-1} , pela independência das variáveis aleatórias Z_1, \dots, Z_k temos

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_p(f(Z_1, \dots, Z_k)g(Z_1, \dots, Z_k) \mid Z_1, \dots, Z_{k-1}) \\
 = \sum_{i_1, \dots, i_{k-1} \in \{0,1\}} \mathbb{E}_p \left(f(i_1, \dots, i_{k-1}, Z_k) g(i_1, \dots, i_{k-1}, Z_k) \mid C_{1, \dots, k-1}^{i_1, \dots, i_{k-1}} \right) \prod_{\ell=1}^{k-1} \mathbb{1}_{\{Z_\ell = i_\ell\}} \\
 = \sum_{i_1, \dots, i_{k-1} \in \{0,1\}} \mathbb{E}_p (f(i_1, \dots, i_{k-1}, Z_k) g(i_1, \dots, i_{k-1}, Z_k)) \prod_{\ell=1}^{k-1} \mathbb{1}_{\{Z_\ell = i_\ell\}}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Como as funções $f(i_1, \dots, i_{k-1}, Z_k)$ e $g(i_1, \dots, i_{k-1}, Z_k)$ são crescentes e dependem da única variável aleatória Z_k , pelo caso $|J|=k=1$, tem-se

$$\mathbb{E}_p(f(i_1, \dots, i_{k-1}, Z_k) g(i_1, \dots, i_{k-1}, Z_k)) \geq \mathbb{E}_p(f(i_1, \dots, i_{k-1}, Z_k)) \mathbb{E}_p(g(i_1, \dots, i_{k-1}, Z_k)).$$

Assim, juntando a desigualdade acima com (11), tem-se

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_p(f(Z_1, \dots, Z_k) g(Z_1, \dots, Z_k) \mid Z_1, \dots, Z_{k-1}) \\ & \geq \sum_{i_1, \dots, i_{k-1} \in \{0,1\}} \mathbb{E}_p(f(i_1, \dots, i_{k-1}, Z_k)) \mathbb{E}_p(g(i_1, \dots, i_{k-1}, Z_k)) \prod_{\ell=1}^{k-1} \mathbb{1}_{\{Z_\ell=i_\ell\}}. \end{aligned}$$

Reescrevendo a última expressão acima, fica

$$\begin{aligned} & = \prod_{\ell=1}^{k-1} \sum_{i_\ell \in \{0,1\}} \mathbb{E}_p(f(i_1, \dots, i_\ell, \dots, i_{k-1}, Z_k)) \mathbb{E}_p(g(i_1, \dots, i_\ell, \dots, i_{k-1}, Z_k)) \mathbb{1}_{\{Z_\ell=i_\ell\}} \\ & = \prod_{\ell=1}^{k-1} \left[\mathbb{E}_p(f(i_1, \dots, 0, \dots, i_{k-1}, Z_k)) \mathbb{1}_{\{Z_\ell=0\}} + \mathbb{E}_p(f(i_1, \dots, 1, \dots, i_{k-1}, Z_k)) \mathbb{1}_{\{Z_\ell=1\}} \right] \\ & \quad \times \left[\mathbb{E}_p(g(i_1, \dots, 0, \dots, i_{k-1}, Z_k)) \mathbb{1}_{\{Z_\ell=0\}} + \mathbb{E}_p(g(i_1, \dots, 1, \dots, i_{k-1}, Z_k)) \mathbb{1}_{\{Z_\ell=1\}} \right] \\ & = \left(\prod_{\ell=1}^{k-1} \sum_{i_\ell \in \{0,1\}} \mathbb{E}_p(f(i_1, \dots, i_\ell, \dots, i_{k-1}, Z_k)) \mathbb{1}_{\{Z_\ell=i_\ell\}} \right) \\ & \quad \times \left(\prod_{\ell=1}^{k-1} \sum_{i_\ell \in \{0,1\}} \mathbb{E}_p(g(i_1, \dots, i_\ell, \dots, i_{k-1}, Z_k)) \mathbb{1}_{\{Z_\ell=i_\ell\}} \right). \quad (12) \end{aligned}$$

Mas (12) é

$$\begin{aligned} & = \left(\sum_{i_1, \dots, i_{k-1} \in \{0,1\}} \mathbb{E}_p(f(i_1, \dots, i_{k-1}, Z_k)) \prod_{\ell=1}^{k-1} \mathbb{1}_{\{Z_\ell=i_\ell\}} \right) \\ & \quad \times \left(\sum_{i_1, \dots, i_{k-1} \in \{0,1\}} \mathbb{E}_p(g(i_1, \dots, i_{k-1}, Z_k)) \prod_{\ell=1}^{k-1} \mathbb{1}_{\{Z_\ell=i_\ell\}} \right) \end{aligned}$$

e, procedendo analogamente a (11), o fator acima é escrito da seguinte forma

$$= \mathbb{E}_p(f(Z_1, \dots, Z_k) \mid Z_1, \dots, Z_{k-1}) \mathbb{E}_p(g(Z_1, \dots, Z_k) \mid Z_1, \dots, Z_{k-1}).$$

Portanto, a desigualdade (10) fica provada. \square

Lema 2.3. *Sobre as hipóteses do Teorema 2.1, a aplicação*

$$\omega \mapsto \mathbb{E}_p(f(Z_1, \dots, Z_k) \mid Z_1, \dots, Z_{k-1})(\omega), \quad \omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d},$$

é crescente (no sentido FKG).

Demonstração. Se $h_f(Z_\ell) \equiv \mathbb{E}_p(f(i_1, \dots, i_{\ell-1}, Z_\ell, i_{\ell+1}, \dots, Z_k) \mid Z_\ell)$, com $\ell = 1, \dots, k-1$, pelo subproduto da prova do Lema 2.2, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p(f(Z_1, \dots, Z_k) \mid Z_1, \dots, Z_{k-1}) \\ = \prod_{\ell=1}^{k-1} \sum_{i_\ell \in \{0,1\}} \mathbb{E}_p(f(i_1, \dots, i_\ell, \dots, i_{k-1}, Z_k)) \mathbb{1}_{\{Z_\ell=i_\ell\}} = \prod_{\ell=1}^{k-1} h_f(Z_\ell). \end{aligned} \quad (13)$$

Primeiro provaremos que a aplicação $\omega \mapsto h_f(Z_\ell)(\omega)$ é crescente (no sentido FKG). De fato, pelo subproduto da prova do Lema 2.2, para cada $\omega, \eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ tais que $\omega \preceq \eta$, veja que

$$\begin{aligned} h_f(Z_\ell)(\omega) &= \sum_{i_\ell \in \{0,1\}} \mathbb{E}_p(f(i_1, \dots, i_\ell, \dots, i_{k-1}, Z_k)) \mathbb{1}_{\{Z_\ell=i_\ell\}}(\omega) \\ &\leq \sum_{i_\ell \in \{0,1\}} \mathbb{E}_p(f(i_1, \dots, i_\ell, \dots, i_{k-1}, Z_k)) \mathbb{1}_{\{Z_\ell=i_\ell\}}(\eta) = h_f(Z_\ell)(\eta), \end{aligned} \quad (14)$$

para cada $\ell = 1, \dots, k-1$, onde, na desigualdade, usamos que f é uma função crescente.

Em seguida, analisaremos os três seguintes casos: *a)* $f = 0$, *b)* $f > 0$ e *c)* f geral.

No caso *a)* o resultado é trivial, pois uma função constante sempre é crescente. No caso *b)* temos que $h_f(Z_\ell) > 0$, $\forall \ell = 1, \dots, k-1$. Logo, como o produto de funções positivas crescentes é crescente e $\mathbb{E}_p(f(Z_1, \dots, Z_k) \mid Z_1, \dots, Z_{k-1}) \stackrel{(13)}{=} \prod_{\ell=1}^{k-1} h_f(Z_\ell)$, a prova segue.

Já no caso *c)*, primeiramente, afirmamos que a aplicação $\omega \mapsto h_{f-c}(Z_\ell)(\omega)$ é positiva e crescente, sempre que $f \neq c$, onde $c \equiv h_f(Z_\ell)(\mathbf{0}) = \mathbb{E}_p(f(i_1, \dots, i_{\ell-1}, 0, i_{\ell+1}, \dots, Z_k))$ é uma constante e $\mathbf{0}$ é a configuração nula definida como $\mathbf{0}_e = 0, \forall e \in \mathbb{E}^d$. Pois, de ser $f = c$, voltaríamos a uma situação similar ao caso *a)* o qual é trivial. De fato, assumindo que $f \neq c$, uma vez que

$$h_{f-c}(Z_\ell) = \sum_{i_\ell \in \{0,1\}} \mathbb{E}_p((f-c)(i_1, \dots, i_\ell, \dots, i_{k-1}, Z_k)) \mathbb{1}_{\{Z_\ell=i_\ell\}} = h_f(Z_\ell) - c,$$

e que $\mathbf{0} \preceq \omega \preceq \eta$, por (14) temos $c = h_f(Z_\ell)(\mathbf{0}) < h_f(Z_\ell)(\omega) \leq h_f(Z_\ell)(\eta)$, para cada $\omega, \eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ tais que $\omega \preceq \eta$, implicando que $\omega \mapsto h_{f-c}(Z_\ell)(\omega)$ é positiva e crescente.

Usando a afirmação acima, para cada $\omega, \eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ tais que $\omega \preceq \eta$, temos

$$\frac{h_{f-c}(Z_\ell)(\eta)}{h_{f-c}(Z_\ell)(\omega)} \geq 1 \Rightarrow \sum_{\ell=1}^{k-1} \log \left(\frac{h_{f-c}(Z_\ell)(\eta)}{h_{f-c}(Z_\ell)(\omega)} \right) \geq 0 \Rightarrow \prod_{\ell=1}^{k-1} \frac{h_{f-c}(Z_\ell)(\eta)}{h_{f-c}(Z_\ell)(\omega)} \geq 1, \quad (15)$$

onde

$$\begin{aligned} \prod_{\ell=1}^{k-1} h_{f-c}(Z_\ell) &\stackrel{(13)}{=} \mathbb{E}_p(f(Z_1, \dots, Z_k) - c \mid Z_1, \dots, Z_{k-1}) \\ &= \mathbb{E}_p(f(Z_1, \dots, Z_k) \mid Z_1, \dots, Z_{k-1}) - c. \end{aligned}$$

Já que $h_{f-c}(Z_\ell) > 0, \forall \ell = 1, \dots, k-1$, temos $\prod_{\ell=1}^{k-1} h_{f-c}(Z_\ell) > 0$, logo, combinando este fato, a identidade acima e a desigualdade à direita de (15), a prova segue. \square

Dando continuidade à demonstração do teorema, pelo Lema 2.2, a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p(f(Z_1, \dots, Z_k)g(Z_1, \dots, Z_k) \mid Z_1, \dots, Z_{k-1}) \\ \geq \mathbb{E}_p(f(Z_1, \dots, Z_k) \mid Z_1, \dots, Z_{k-1}) \mathbb{E}_p(g(Z_1, \dots, Z_k) \mid Z_1, \dots, Z_{k-1}) \end{aligned}$$

é válida. Tomando a média nessa desigualdade e usando (9), temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p(f(Z_1, \dots, Z_k)g(Z_1, \dots, Z_k)) \\ \geq \mathbb{E}_p[\mathbb{E}_p(f(Z_1, \dots, Z_k) \mid Z_1, \dots, Z_{k-1})\mathbb{E}_p(g(Z_1, \dots, Z_k) \mid Z_1, \dots, Z_{k-1})]. \quad (16) \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.3, as funções

$$\mathbb{E}_p(f(Z_1, \dots, Z_k) \mid Z_1, \dots, Z_{k-1}) \quad \text{e} \quad \mathbb{E}_p(g(Z_1, \dots, Z_k) \mid Z_1, \dots, Z_{k-1}),$$

são crescentes e dependem apenas das variáveis aleatórias Z_1, \dots, Z_{k-1} . Pela hipótese de indução, o Item (16) é

$$\begin{aligned} &\geq \mathbb{E}_p[\mathbb{E}_p(f(Z_1, \dots, Z_k) \mid Z_1, \dots, Z_{k-1})] \mathbb{E}_p[\mathbb{E}_p(g(Z_1, \dots, Z_k) \mid Z_1, \dots, Z_{k-1})] \\ &= \mathbb{E}_p(f(Z_1, \dots, Z_k))\mathbb{E}_p(g(Z_1, \dots, Z_k)), \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos, novamente, propriedade de esperanças condicionais. Provando-se a desigualdade (8), para o caso que $|J| = k$.

Por último, mostraremos que a desigualdade FKG permanece válida para o caso em que $|J| = \infty$. Para isso, suponha que $X = f(Z_1, Z_2, \dots)$ e $Y = g(Z_1, Z_2, \dots)$ sejam variáveis aleatórias crescentes com segundo momento finito. Sejam

$$X_n \equiv \mathbb{E}_p(f(Z_1, Z_2, \dots) \mid Z_1, \dots, Z_n) \quad \text{e} \quad Y_n \equiv \mathbb{E}_p(g(Z_1, Z_2, \dots) \mid Z_1, \dots, Z_n).$$

Por um raciocínio análogo ao feito no Lema 2.3, as variáveis aleatórias X_n e Y_n são crescentes e dependem apenas das variáveis aleatórias Z_1, \dots, Z_n . Portanto, pela discussão feita acima,

$$\mathbb{E}_p(X_n Y_n) \geq \mathbb{E}_p(X_n) \mathbb{E}_p(Y_n). \quad (17)$$

Observe que $\mathbb{E}_p(X_n) = \mathbb{E}_p(X)$ e $\mathbb{E}_p(Y_n) = \mathbb{E}_p(Y)$. Como consequência do Teorema de Convergência de Martingales de Lévy-forward (veja Teorema .18 do Apêndice), temos que, quando $n \rightarrow \infty$

$$\mathbb{E}_p((X_n - X)^2) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \mathbb{E}_p((Y_n - Y)^2) \rightarrow 0.$$

Daí, quando $n \rightarrow \infty$

$$\mathbb{E}_p(X_n^2) \rightarrow \mathbb{E}_p(X^2) < \infty \quad \text{e} \quad \mathbb{E}_p(Y_n^2) \rightarrow \mathbb{E}_p(Y^2) < \infty.$$

Além disso, pelas desigualdades triangular e de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p|X_n Y_n - XY| &\leq \mathbb{E}_p(|(X_n - X)Y_n| + |X(Y_n - Y)|) \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}_p((X_n - X)^2) \mathbb{E}_p(Y_n^2)} + \sqrt{\mathbb{E}_p((Y_n - Y)^2) \mathbb{E}_p(X^2)} \\ &\rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Isto é, $\mathbb{E}_p(X_n Y_n) \rightarrow \mathbb{E}_p(XY)$, quando $n \rightarrow \infty$. Finalmente, tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ em (17) e usando as convergências anteriores, obtemos o resultado. \square

A seguinte desigualdade que enunciaremos vai de encontro à desigualdade FKG e envolve uma interseção restrita de eventos crescentes. Essa desigualdade será de vital importância na Seção 2.5, para provar o teorema do decaimento exponencial da percolação subcrítica (veja Teorema 2.17). Antes disso, introduzimos algumas notações.

Para $F \subset \mathbb{E}^d$ e $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$, escrevemos $(\omega_F)_e = \omega_e$ para $e \in F$ e $(\omega_F)_e = 0$, em outro caso.

Definição 2.2. *Sejam A e B dois eventos crescentes. Definimos o evento $A \circ B$ ocorrência disjunta de A e B por*

$$A \circ B = \left\{ \omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d} : \exists F \subseteq \mathbb{E}^d \text{ tal que } \omega_F \in A, \omega_{F^c} \in B \right\}.$$

Note que $A \circ B$ é um evento crescente. De fato, se $\omega \in A \circ B$, então existe $F \subseteq \mathbb{E}^d$ tal que $\omega_F \in A$ e $\omega_{F^c} \in B$. Seja $\omega \preceq \tilde{\omega}$, em particular, temos $\omega_F \preceq \tilde{\omega}_F$. Como A é crescente, temos $\tilde{\omega}_F \in A$. Similarmente, obtemos que $\tilde{\omega}_{F^c} \in B$. Portanto, $\tilde{\omega} \in A \circ B$, provando-se a afirmação.

Intuitivamente, $\omega \in A \circ B$ se existe um subconjunto de arestas finito F tal que unicamente necessitamos examinar as arestas de F para saber se $\omega \in A$, e somente examinar as arestas fora de F para saber se $\omega \in B$.

Teorema 2.4 (Desigualdade BK). *Sejam A e B dois eventos crescentes. Então,*

$$\mathbb{P}_p(A \circ B) \leq \mathbb{P}_p(A)\mathbb{P}_p(B).$$

O nome de desigualdade BK é dado em homenagem a seus descobridores Van den Berg e Kesten [119]. Para uma discussão completa incluindo a demonstração do resultado, veja [64] p. 29. Para uma ideia da prova, usando os eventos do tipo $A = \{x \leftrightarrow y\}$ e $B = \{u \leftrightarrow v\}$, mas restritos a uma sub-rede finita de \mathbb{L}^d , veja [50].

Para encerrar esta seção, daremos algumas definições básicas (que podem ser encontradas nas referências [27, 64]), as quais serão indispensáveis para a sequência da apresentação das próximas seções. Dada uma configuração $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$, um caminho $\gamma = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n)$ é dito aberto em ω se todas as suas arestas estiverem abertas, isto é, $\omega_{e_i} = 1$, $i = 1, \dots, n$. Diremos que dois vértices da rede \mathbb{Z}^d , x, y estão conectados na configuração $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$, e escrevemos $x \leftrightarrow y$, se existir um caminho aberto $\gamma = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n)$ na configuração ω tal que $v_0 = x$ e $v_n = y$.

Denotemos por $G = (V, E)$ um subgrafo de \mathbb{L}^d . O grafo G é dito conexo (ou conectado), se quaisquer dois de seus vértices podem ser ligados por um caminho aberto inteiramente contido em G . Se definirmos que cada vértice $x \in \mathbb{Z}^d$ está conectado consigo mesmo, podemos ver que a conectividade será uma relação de equivalência e que as classes de equivalência em que se dividem os vértices serão chamados de *aglomerados* (ou sua expressão em inglês *clusters*, eles podem ser vértices isolados) da rede \mathbb{L}^d . Assim, um *aglomerado aberto* é uma componente conexa de um subgrafo de arestas abertas de \mathbb{L}^d .

Denotamos por C_x o aglomerado do vértice x e por C o aglomerado da origem. Logo, a notação $x \leftrightarrow \infty$ denotará o fato de que o aglomerado aberto que contém x possui infinitos vértices.

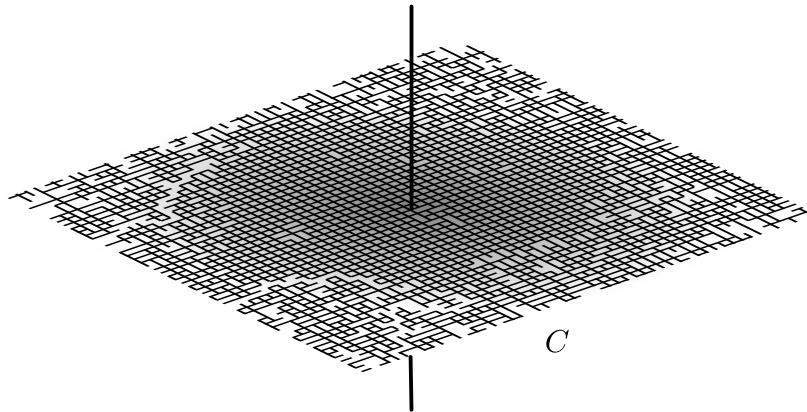


Figura 7: Aglomerado aleatório da origem em parte da rede bidimensional.

Uma quantidade de grande interesse, neste capítulo, é o volume (ou cardinalidade) do aglomerado aberto do vértice x , isto é, $|C_x|$; mais precisamente, em sua distribuição. Observe que $|C_x|$ é uma variável aleatória que pode assumir os valores $1, 2, \dots, \infty$. No modelo de percolação independente podemos mostrar que em grafos com invariância translacional, como \mathbb{Z}^d , as variáveis aleatórias $|C_x|$ têm a mesma distribuição para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, e portanto, nós nos concentraremos no aglomerado da origem C (veja Figura 7). Uma quantidade de interesse é

$$\theta_d(p) = \mathbb{P}_p(\{\omega : |C|(\omega) = \infty\})$$

que, por simplicidade de notação, escreveremos apenas $\theta_d(p) = \mathbb{P}_p(|C| = \infty)$. Segundo a notação introduzida acima temos $\theta_d(p) = \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty)$. Na próxima seção, provaremos que a percolação de Bernoulli sobre \mathbb{Z}^d exibe uma transição de fase, isto é, existe um valor crítico não trivial (isto é, o valor crítico pertence ao intervalo $(0, 1)$) para o parâmetro p , abaixo do qual é nula a probabilidade de existir aglomerados infinitos e acima do qual é positiva essa probabilidade.

2.3 TRANSIÇÃO DE FASE

Quando esquentamos um bloco de gelo, este tende a derreter-se. O referido processo esconde um fenômeno que nos é familiar, porém, é mais complexo do que imaginamos, já que as propriedades macroscópicas (aquelas que se podem medir de alguma forma

ou de outra, como por exemplo: cor, textura, temperatura, peso, volume, etc...) da água mudam de forma não contínua quando variamos a temperatura.

Esse exemplo da vida cotidiana é um exemplo de transição de fase. Em um sistema composto por muitas partículas que interagem a nível local com outras partículas, uma transição de fase ocorre se uma propriedade macroscópica do sistema muda de repente quando um parâmetro macroscópico, como a temperatura, pressão, densidade, etc, varia continuamente. Nesta seção, daremos um significado matemático preciso para o que se entende atualmente por transição de fase no modelo de percolação independente.

Já nos capítulos posteriores, quando apresentemos o modelo de Potts/Ising, daremos outras definições rigorosas de transição de fase. Um dos exemplos que sofrem transição de fase é justamente o modelo de percolação independente (veja Teorema 2.6 abaixo).

Desejamos saber como é o comportamento da função $p \mapsto \theta_d(p) = \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty)$, $\forall p \in [0, 1]$, a qual foi definida na seção anterior. Poderia existir $p < p'$ tal que para a percolação de parâmetro p existe um aglomerado infinito quase certamente, mas não existe um tal aglomerado infinito para a percolação do parâmetro p' . É claro que esse fenômeno é contraditório com nossa intuição, já que o modelo de percolação deve possuir mais arestas abertas quando p aumenta e, portanto, seria mais provável ver um aglomerado infinito (aberto) no modelo em que o parâmetro p tem maior valor. A fim de formalizar esta ideia intuitiva de monotonicidade neste modelo, introduzimos a definição de acoplamento de duas medidas.

Definição 2.3. *Um acoplamento de duas medidas de probabilidade ϕ_1 e ϕ_2 definidas sobre um espaço mensurável (Ω, \mathcal{F}) é uma medida de probabilidade ϕ sobre $(\Omega, \mathcal{F}) \times (\Omega, \mathcal{F})$, cuja primeira (resp. segunda) marginal é ϕ_1 (resp. ϕ_2).*

O método de acoplamento permite comparar diferentes medidas de probabilidade definidas sobre um mesmo espaço mensurável. Certamente, existe uma variedade de acoplamentos de qualquer par de medidas ϕ_1 e ϕ_2 . A arte do acoplamento reside em encontrar um acoplamento útil para o problema de interesse.

Proposição 2.5 (Acoplamento crescente). *Fixados $p, p' \in [0, 1]$ com $p < p'$, existe um acoplamento \mathbf{P} das medidas de probabilidade \mathbb{P}_p e $\mathbb{P}_{p'}$ definida sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d} \times \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ tal que*

$$\mathbf{P}(\{(\omega, \omega') : \omega \leq \omega'\}) = 1.$$

Demonstração. Considere uma família $(U_e : e \in \mathbb{E}^d)$ de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com distribuição uniforme em $[0, 1]$. Definamos as configurações $\omega, \omega' \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ como segue

$$\omega_e \equiv \begin{cases} 1, & \text{se } U_e \leq p \\ 0, & \text{se } U_e > p \end{cases} \quad \text{e} \quad \omega'_e \equiv \begin{cases} 1, & \text{se } U_e \leq p' \\ 0, & \text{se } U_e > p' \end{cases} \quad \forall e \in \mathbb{E}^d.$$

Observamos que cada aresta em ω está aberta com probabilidade p e fechada com probabilidade $1 - p$, independentemente das demais arestas. Analogamente, em ω' as arestas estão abertas com probabilidade p' e fechadas com probabilidade $1 - p'$, independentemente umas das outras. Como $\omega \leq \omega'$ sempre que $p < p'$, definimos \mathbf{P} como a lei da distribuição conjunta dos vetores aleatórios $(\omega_e, \omega'_e)_{e \in \mathbb{E}^d}$. Por construção, temos imediatamente que as marginais de \mathbf{P} são \mathbb{P}_p e $\mathbb{P}_{p'}$. \square

Como as marginais de \mathbf{P} são \mathbb{P}_p e $\mathbb{P}_{p'}$, usando o Teorema de Fubini-Tonelli (veja Apêndice, Teorema .24) obtemos as seguintes igualdades:

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) = \mathbf{P}(0 \leftrightarrow \infty \text{ em } \omega) \quad \text{e} \quad \mathbb{P}_{p'}(0 \leftrightarrow \infty) = \mathbf{P}(0 \leftrightarrow \infty \text{ em } \omega'),$$

onde

$$\{0 \leftrightarrow \infty \text{ em } \omega\} = \{(\omega, \omega') \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d} \times \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d} : 0 \leftrightarrow \infty \text{ ocorre em } \omega\}.$$

Posto que $\omega \leq \omega'$, se a origem estiver em um aglomerado infinito em ω , então a origem também estará em um aglomerado infinito em ω' . Usando as propriedades do acoplamento \mathbf{P} , temos a seguinte desigualdade:

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) = \mathbf{P}(0 \leftrightarrow \infty \text{ em } \omega) \leq \mathbf{P}(0 \leftrightarrow \infty \text{ em } \omega') = \mathbb{P}_{p'}(0 \leftrightarrow \infty).$$

A desigualdade acima, na verdade, prova que a função $\theta_d(p) = \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty)$ é não decrescente com respeito a p . Usando essa monotonicidade, no Teorema 2.6 (ou resumidamente, no Corolário 2.29 abaixo), mostraremos que o *ponto crítico* definido como

$$p_c(d) \equiv \inf\{p \in [0, 1] : \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) > 0\}$$

é não trivial, isto é, $p_c(d) \in (0, 1)$, sempre que $d \geq 2$.

Cabe destacar que, no modelo de percolação com parâmetro $p = 0$, todas as arestas da rede estão fechadas. Por outro lado, se $p = 1$, o aglomerado da origem é \mathbb{Z}^d quase certamente com respeito a \mathbb{P}_p , pois todas as arestas estão abertas quase certamente, e

esse conjunto de arestas é enumerável. Note que essa observação não prova a existência de um ponto crítico para o modelo de percolação na rede \mathbb{L}^d , pois poderíamos ter $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) = 0$, para todo $p < 1$.

Um dos problemas que ainda permanece em aberto e que é de grande interesse em percolação, é calcular exatamente o valor do ponto crítico $p_c(d)$ do modelo de percolação independente em d dimensões com $d \geq 3$. Na Seção 2.7 faremos esse cálculo para o modelo de percolação sobre a rede bidimensional.

Teorema 2.6 (Existência de transição de fase, veja [50, 64, 120]). *Para o modelo de percolação independente sobre a rede \mathbb{L}^d , com $d \geq 2$, existe um ponto crítico $p_c(d) \in (0, 1)$, tal que*

$$\begin{cases} \theta_d(p) = 0, & \text{se } p < p_c(d) \\ \theta_d(p) > 0, & \text{se } p > p_c(d). \end{cases}$$

Demonstração. Dividimos a prova deste teorema em duas partes:

Não percolação para valores de p próximos de 0. Para a prova dessa primeira parte, fixamos $n > 0$ e definimos Ω_n como sendo o conjunto de todos os caminhos (abertos) em \mathbb{L}^d que saem da origem e tem, pelo menos, n arestas. Vale notar que, nenhuma aleatoriedade está envolvida na definição de Ω_n , esse conjunto depende apenas do grafo onde estamos considerando a percolação, que nesse caso é o \mathbb{L}^d . Observe que, se uma configuração possui um caminho aberto infinito contendo a origem, então esse caminho pertence a Ω_n , logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) &\leq \mathbb{P}_p(\exists \gamma \in \Omega_n; \text{ tal que } \omega_{e_k} = 1, \forall k \leq n) \leq \sum_{\gamma \in \Omega_n} \mathbb{P}_p(\omega_{e_k} = 1, \forall k \leq n) \\ &= |\Omega_n| p^n \\ &\leq (2dp)^n, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos o fato de que, para construir um caminho aberto de n arestas, existem $2d$ maneiras de escolher a primeira aresta. Em seguida, há no máximo $2d - 1$ maneiras diferentes para a escolha da segunda aresta, depois, no máximo $2d - 1$ maneiras para a escolha da terceira, e assim por diante. Portanto, temos a seguinte estimativa $|\Omega_n| \leq 2d(2d - 1)^{n-1} \leq (2d)^n$. Note que a quantidade da direita na desigualdade $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) \leq (2dp)^n$ tende a 0 quando $p < 1/2d$. Usando a monotonicidade de $\theta_d(p)$, deduzimos que $p_c(d) \geq 1/2d$. Observamos que a estimativa obtida acima não é suficiente, ainda, para garantir a existência de transição de fase para

o modelo de percolação independente sobre \mathbb{L}^d . O que temos, por enquanto, é apenas a seguinte afirmação: se existir o ponto crítico $p_c(d)$ então ele deve ser pelo menos $1/2d$.

Percolação para valores de p próximos de 1. A prova dessa segunda parte é baseada no conceito de dualidade introduzido no Capítulo 1. O método de prova usado é frequentemente conhecido como *argumento de Peierls*. O argumento de Peierls é um dos métodos mais usados para provar existência de transição de fase de modelos em Mecânica Estatística, ao lado da positividade por reflexão (veja [57] para esse último método).

Devemos encontrar um valor $p < 1$ tal que $\theta_d(p) > 0$. Se $\theta_d(p) > 0$ para $d = 2$, logo, $\theta_d(p) > 0$ para todo $d \geq 2$, porque $\theta_d(p)$ é não decrescente em d . Isto é, pode-se definir uma imersão $\zeta : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^d$ definida por $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, 0, \dots, 0)$, a qual aplica arestas de \mathbb{Z}^2 a correspondentes arestas de \mathbb{Z}^d . Se existe um aglomerado infinito em $\zeta(\mathbb{Z}^2) \subset \mathbb{Z}^d$ (o qual, por definição da medida produto, acontece com probabilidade $\theta_d(p)$ para $d = 2$), então existe um aglomerado infinito em \mathbb{Z}^d contendo a origem. Daí, podemos restringir nossos argumentos a $d = 2$, o qual nos permitirá usar argumentos de dualidade planar para provar o desejado.

A principal chave para provar essa parte é introduzir o chamado grafo dual $\mathbb{L}^{2*} \equiv (\mathbb{Z}^{2*}, \mathbb{E}^{2*})$, que não é mais que uma deslocação da rede $\mathbb{L}^2 = (\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$ pelo vetor $(1/2, 1/2)$ (para uma representação de \mathbb{L}^2 e seu dual \mathbb{L}^{2*} , veja Figura 8).

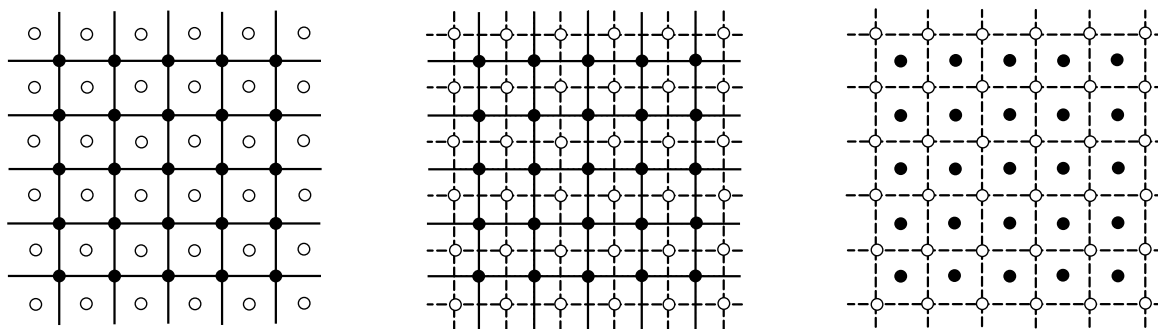


Figura 8: Parte da rede \mathbb{L}^2 e seu dual \mathbb{L}^{2*} .

Uma configuração $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^2}$ dá lugar a uma configuração $\omega^* \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^{2*}}$, definida por $\omega_{e^*}^* = 1 - \omega_e$, $\forall e^* \in \mathbb{E}^{2*}$. No modelo de percolação, dizemos que uma aresta dual está aberta se a correspondente aresta sobre \mathbb{Z}^2 está fechada e vice-versa. Logo, a configuração ω^* é distribuída segundo o modelo de percolação independente de parâmetro $p^* = 1 - p$.

Um fato geométrico (veja referências [50, 57]) diz que, se em uma determinada configuração ω , a origem não está conectada ao infinito, então ω^* contém um circuito aberto na rede dual cercado a origem (veja Figura 9).

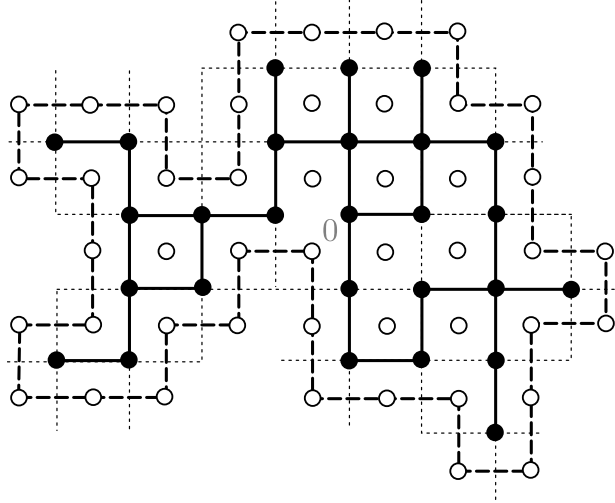


Figura 9: Um aglomerado finito da origem (em linhas sólidas) sendo cercado por um circuito aberto na rede dual (em linhas tracejadas).

Seja $\Omega_{m,n}$ o conjunto de circuitos duais de comprimento m cercado a origem que passam pelo ponto $(n + 1/2, 0)$. Para $p > 3/4$ temos as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(0 \not\leftrightarrow \infty) &= \mathbb{P}_p(\exists \gamma \text{ aberto} \in \cup_{m,n} \Omega_{m,n}) \leq \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 2n+4} |\Omega_{m,n}| (1-p)^m \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 2n+4} (4-4p)^m \\ &\leq \frac{(4-4p)^6}{\log(4(1-p))}, \end{aligned}$$

onde, na primeira e na segunda desigualdades, usamos o fato de que todo circuito dual que cerca a origem e passa por $(n + 1/2, 0)$ tem pelo menos $2n + 4$ arestas. Na terceira desigualdade, usamos uma comparação entre somas de Riemann e integrais junto com a hipótese $p > 3/4$. A cota superior obtida acima, apesar de não ter nenhum significado físico, mostra que se $p \approx 1$ (mais precisamente, se $p > 3/4$), então $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) < 1$.

Dessa desigualdade segue imediatamente que $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) > 0$ e, portanto, $p_c(d) \leq 3/4 < 1$. Em outras palavras, para valores de p próximos de 1, a saber, maiores que $3/4$, existem aglomerados infinitos. Portanto, para valores de p próximos de 1, existe percolação.

Finalmente, usando a monotonicidade de $\theta_d(p)$, podemos verificar que existe um valor crítico $p_c(d)$ não trivial, tal que se $p < p_c(d)$, então não temos aglomerado infinito quase certamente e, se $p > p_c(d)$, então existe pelo menos um aglomerado infinito com probabilidade positiva. \square

Para uma prova recente e elegante do Teorema 2.6, onde não se faz uso do conceito de dualidade, veja referência [44].

Observação 2.7. O Teorema 2.6 nos diz que o modelo de percolação independente de parâmetro p não possui aglomerados infinitos quase certamente, se $p < p_c(d)$. Por outro lado, encontramos, com probabilidade positiva, pelo menos um aglomerado infinito se $p > p_c(d)$. Esta mudança de comportamento do modelo com respeito à existência ou não de um aglomerado infinito é chamada de transição de fase. Quando $p < p_c(d)$, dizemos que o modelo está na **fase subcrítica**. Já para $p = p_c(d)$, dizemos que ele está na **fase crítica** e, finalmente, para $p > p_c(d)$ dizemos que ele está na **fase supercrítica**.

Em dimensões $d \geq 3$, o fenômeno de percolação nas fases subcrítica e supercrítica é bem conhecido, porém, a fase crítica permanece bastante misteriosa. Vale ressaltar, neste ponto, que o problema em aberto mais famoso nesta área é saber se existe aglomerado infinito em $p = p_c(d)$, para $d \geq 3$. Não se conhece, ainda, uma fórmula geral para $p_c(d)$, com exceção de $d = 1, 2$. Para $d = 1$, o modelo é trivial pois, exceto para $p = 1$, não existe aglomerado infinito quase certamente por Borel-Cantelli e, portanto, $p_c(1) = 1$ (veja Proposição 2.28). Já para $d = 2$, o cálculo explícito do ponto crítico é feito no célebre Teorema de Kesten. Este é um resultado muito profundo e de enorme importância na história da percolação. Kesten provou seu famoso teorema na década de 80, mostrando que $p_c(2) = 1/2$. Além de obter o valor explícito de $p_c(2)$, em seu famoso artigo, Harry e Kesten também demonstraram que não há percolação no ponto crítico em dimensão 2.

Como se pode ver no Capítulo 4 de [50], $\theta_d(p)$ é uma função contínua, exceto possivelmente em $p = p_c(d)$. Se $\theta_d(p_c(d)) = 0$, então $\theta_d(p)$ será contínua e seu gráfico será semelhante com o da Figura 10 à esquerda (a seguir). Caso contrário, o gráfico será mais parecido com o da Figura 10 à direita.

Para d genérico, qual comportamento de $\theta_d(p)$ vale é uma questão em aberto, mas acredita-se que $\theta_d(p)$ seja contínua. Isso está, de fato, provado em 2 dimensões e em dimensões grandes. Veremos o caso bidimensional na Seção 2.7. Para ver um método de ataque, chamado de *renormalização*, ao problema de provar a continuidade de $\theta_d(p)$ em $p_c(d)$ para dimensões maiores do que duas, veja o Capítulo 5 de [50].

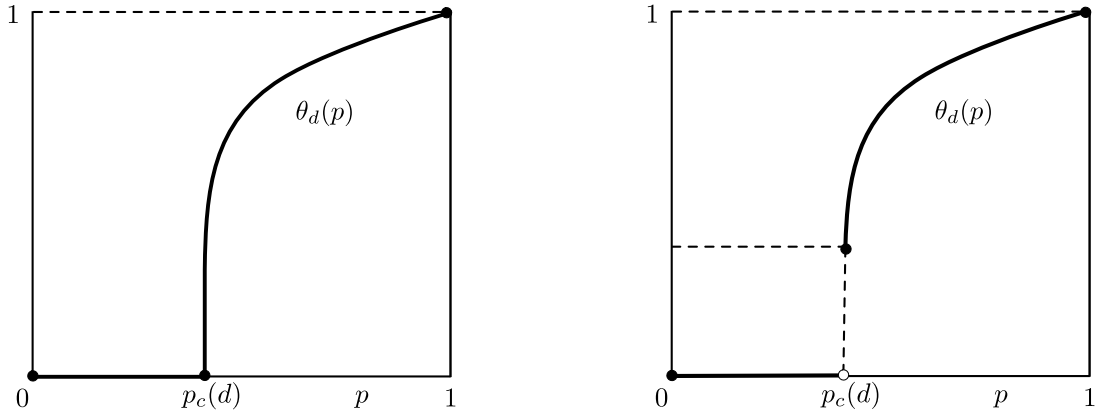


Figura 10: Possíveis comportamentos de $\theta_d(p)$.

Observação 2.8. Na demonstração do Teorema 2.6 obtemos as seguintes estimativas para o ponto crítico em $d \geq 2$ dimensões

$$\frac{1}{2d} \leq p_c(d) \leq \frac{3}{4}.$$

Kesten provou na referência [81] que $p_c(d) \sim 1/2d$.

2.4 ERGODICIDADE DA MEDIDA DE BERNOULLI

Seja $\mathbb{L} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ um grafo enumerável e localmente finito. Escrevemos \mathcal{F} para a σ -álgebra gerada pelos eventos cilíndricos de $\{0, 1\}^{\mathbb{E}}$. As seguintes definições podem ser encontradas na referência [65].

Um **automorfismo** de \mathbb{L} é uma bijeção $\tau : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ tal que, para todo $u, v \in \mathbb{V}$; $\{u, v\} \in \mathbb{E}$ se, e somente se, $\{\tau(u), \tau(v)\} \in \mathbb{E}$. Escrevemos $\text{Aut}(\mathbb{L})$ para o grupo de tais automorfismos. O domínio de um automorfismo τ pode ser estendido ao conjunto de arestas \mathbb{E} por definir $\tau(\{u, v\}) = \{\tau(u), \tau(v)\}$. Um automorfismo τ gera um operador sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{E}}$, denotado também por $\tau : \{0, 1\}^{\mathbb{E}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{E}}$ e é dado por $\tau\omega_e = \omega_{\tau^{-1}e}$ para $e \in \mathbb{E}$. Uma variável aleatória $X : \{0, 1\}^{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada **τ -invariante** se $X(\omega) = X(\tau\omega)$ para todo $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}}$. Uma medida de probabilidade μ sobre $(\{0, 1\}^{\mathbb{E}}, \mathcal{F})$ é chamada **τ -invariante** se $\mu(A) = \mu(\tau A)$, para todo $A \in \mathcal{F}$.

Seja Γ um subgrupo de $\text{Aut}(\mathbb{L})$. Uma variável aleatória $X : \{0, 1\}^{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada **Γ -invariante** se esta é τ -invariante para todo $\tau \in \Gamma$ e, similarmente, a definição se mantém para uma medida de probabilidade μ sobre $(\{0, 1\}^{\mathbb{E}}, \mathcal{F})$. A medida μ é chamada

automorfismo invariante se esta é $\text{Aut}(\mathbb{L})$ -invariante. Uma medida de probabilidade μ sobre $(\{0, 1\}^{\mathbb{E}}, \mathcal{F})$ é chamada Γ -**ergódica**, se toda variável aleatória Γ -invariante é constante μ -q.c. É claro que, se $\Gamma' \subseteq \Gamma$, logo, μ é Γ -ergódica sempre que esta seja Γ' -ergódica. No caso, quando Γ é um grupo gerado por um único automorfismo τ , usamos o termo τ -ergódico (ou simplesmente ergódico) em lugar de Γ -ergódico.

Agora, retornamos ao uso do grafo \mathbb{L}^d e à classe de automorfismos chamados de translações. Seja $j \in \mathbb{Z}^d$, defina a função $\theta_j : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^d$ por $\theta_j(i) = i + j$. O automorfismo θ_j é conhecido como translação. Denotaremos o grupo de translações por \mathbb{Z}^d , convencioando que θ_0 é a aplicação identidade. Uma variável aleatória $X : \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ (respectivamente uma medida de probabilidade μ sobre $(\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}, \mathcal{F})$) é chamada **invariante por translação** se esta é \mathbb{Z}^d -invariante.

Observação 2.9. Se $G = (V, E)$ é um subgrafo de \mathbb{L}^d , a translação de G por $j \in \mathbb{Z}^d$ é o subgrafo $\theta_j G$ de \mathbb{L}^d , o qual está formado pelo conjunto de vértices $\{\theta_j(v) : v \in V\}$ e o conjunto de arestas de G transladados, isto é, $\{\theta_j\{u, v\} = \{\theta_j(u), \theta_j(v)\} : \{u, v\} \in E\}$.

Seja ω uma configuração em $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ e $j \in \mathbb{Z}^d$. A translação de ω por j é uma configuração $\theta_j \omega$ definida por $(\theta_j \omega)_e = \omega_{\theta_j^{-1}e} = \omega_{e-j}$, para todo $e \in \mathbb{E}^d$. Suponha que A seja um evento no espaço de probabilidade $(\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$. A translação de A por j é o evento $\theta_j A = \{\omega : \theta_j \omega \in A\}$. Logo, se A for um evento invariante por translações, temos que $\theta_j A = A$, para todo $j \in \mathbb{Z}^d$. A medida \mathbb{P}_p será invariante por translações se $\mathbb{P}_p(A) = \mathbb{P}_p(\theta_j A)$, para todo evento A e todo $j \in \mathbb{Z}^d$. Destacamos que a medida $\mathbb{P}_p(\theta_j \cdot)$ é, também, denotada como $\mathbb{P}_p \circ \theta_j(\cdot)$.

Dada uma configuração ω , alguns exemplos de eventos invariantes por translação são: o evento em que todas as arestas são abertas em ω , o evento em que existe um aglomerado infinito (aberto) em ω e o evento em que existem exatamente k aglomerados infinitos em ω , onde $k = 0, 1, \dots, \infty$. Já o evento em que existe um aglomerado infinito contendo a origem, na configuração ω , não é invariante por translação, pois a translação de uma configuração, na qual a origem faz parte de um aglomerado infinito (aberto), pode trasladar-se de maneira que o aglomerado não contenha a origem.

Proposição 2.10. A medida de Bernoulli \mathbb{P}_p é invariante por translações, isto é, $\mathbb{P}_p \circ \theta_j = \mathbb{P}_p$, para cada $j \in \mathbb{Z}^d$.

Demonstração. Para cada $\omega \in \{0, 1\}^F$ e $F \subset \mathbb{E}^d$ finito, consideremos o cilindro $C(F, \omega)$.

Primeiro, verificaremos que

$$\theta_j C(F, \omega) = C(\theta_j F, \theta_j \omega), \quad \forall j \in \mathbb{Z}^d. \quad (18)$$

De fato, isto segue das seguintes equivalências:

$$\eta \in \theta_j C(F, \omega) \Leftrightarrow \theta_j^{-1} \eta \in C(F, \omega) \Leftrightarrow \eta_{\theta_j F} = \omega_F \Leftrightarrow \eta_{\theta_j F} = (\theta_j \omega)_{\theta_j F} \Leftrightarrow \eta \in C(\theta_j F, \theta_j \omega).$$

Segundo, usando a identidade (18), mostraremos que a medida \mathbb{P}_p é invariante por translações sobre a álgebra de todos os eventos cilíndricos, denotada por \mathcal{A} . De fato, por definição da medida \mathbb{P}_p , temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(C(F, \omega)) &= \prod_{e \in F} \lambda(\omega_e) = \prod_{e \in \theta_j F} \lambda(\omega_{\theta_j^{-1} e}) = \prod_{e \in \theta_j F} \lambda((\theta_j \omega)_e) \\ &= \mathbb{P}_p(C(\theta_j F, \theta_j \omega)) \stackrel{(18)}{=} \mathbb{P}_p(\theta_j C(F, \omega)) = \mathbb{P}_p \circ \theta_j(C(F, \omega)), \quad \forall j \in \mathbb{Z}^d. \end{aligned}$$

Finalmente, pelo Lema .36 (do Apêndice) concluímos que a medida \mathbb{P}_p é invariante por translações. \square

O seguinte Teorema pode ser encontrado em qualquer livro clássico de introdução à medida, por essa razão, omitiremos a prova dele neste trabalho.

Teorema 2.11. *Suponha que μ é uma medida de probabilidade, \mathcal{G} uma álgebra sobre algum espaço amostral Ω e $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G})$. Logo, para todo $A \in \mathcal{F}$ e $\epsilon > 0$, existe $U \in \mathcal{G}$ tal que $\mu(A \Delta U) < \epsilon$.*

A única propriedade de eventos invariantes por translações que usaremos nesta seção são aqueles eventos que têm probabilidade 0 ou 1.

Proposição 2.12. *Se $A \in \mathcal{F}$ é um evento invariante por translações, então \mathbb{P}_p é ergódica.*

Demonstração. Dada a sequência de caixas $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^d$, definamos por \mathcal{F}_{Λ_n} à σ -álgebra que depende somente das arestas em Λ_n , isto é, $\mathcal{F}_{\Lambda_n} = \sigma(\omega_e : e \in \Lambda_n)$.

Fixe $\epsilon > 0$. Como a união de uma sequência crescente de σ -álgebras é uma álgebra, temos que $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{\Lambda_n}$ é uma álgebra. Desde que qualquer evento pode ser expressado como a união enumerável de interseções de eventos que dependem somente de arestas de caixas finitas, temos $A \in \sigma(\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{\Lambda_n})$. Pelo Teorema 2.11, existe $n \in \mathbb{N}$ e um evento $U \in \mathcal{F}_{\Lambda_n}$ tal que $\mathbb{P}_p(A \Delta U) < \epsilon$. Desde que $|\mathbb{P}_p(A) - \mathbb{P}_p(U)| \leq \mathbb{P}_p(A \Delta U)$, temos que $|\mathbb{P}_p(A) - \mathbb{P}_p(U)| < \epsilon$. Daí

$$|\mathbb{P}_p(A)^2 - \mathbb{P}_p(U)^2| = |\mathbb{P}_p(A) + \mathbb{P}_p(U)| |\mathbb{P}_p(A) - \mathbb{P}_p(U)| < 2\epsilon. \quad (19)$$

Defina $j \equiv (n+1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^d$ e $V \equiv \theta_j U$. Claramente, U e V são independentes e têm probabilidades iguais. Logo, $\mathbb{P}_p(U \cap V) = \mathbb{P}_p(U)\mathbb{P}_p(V) = \mathbb{P}_p(U)^2$. Substituindo isso em (19), temos

$$|\mathbb{P}_p(A)^2 - \mathbb{P}_p(U \cap V)| < 2\epsilon. \quad (20)$$

Por outro lado, pela invariância de A , temos

$$\begin{aligned} A \Delta V &= \{\omega : \omega \in A \wedge \omega \notin \theta_j U\} \cup \{\omega : \omega \in \theta_j U \wedge \omega \notin A\} \\ &= \{\omega : \omega \in A \wedge \theta_j^{-1} \omega \notin U\} \cup \{\omega : \theta_j^{-1} \omega \in U \wedge \omega \notin A\} \\ &= \{\theta_j^{-1} \eta : \theta_j \eta \in A \wedge \eta \notin U\} \cup \{\theta_j^{-1} \eta : \eta \in U \wedge \theta_j \eta \notin A\} \\ &= \{\theta_j^{-1} \eta : \eta \in A \wedge \eta \notin U\} \cup \{\theta_j^{-1} \eta : \eta \in U \wedge \eta \notin A\} \\ &= \theta_j^{-1}(A \Delta U). \end{aligned} \quad (21)$$

Daí, pela invariância translacional de \mathbb{P}_p (veja Proposição 2.10), temos $\mathbb{P}_p(A \Delta V) = \mathbb{P}_p(A \Delta U)$. Note, também, que como $A \Delta (U \cap V) = (A \Delta U) \cup (A \Delta V)$,

$$\mathbb{P}_p(A \Delta (U \cap V)) \leq \mathbb{P}_p(A \Delta U) + \mathbb{P}_p(A \Delta V) = 2\mathbb{P}_p(A \Delta U) < 2\epsilon.$$

Portanto,

$$|\mathbb{P}_p(A) - \mathbb{P}_p(U \cap V)| < 2\epsilon. \quad (22)$$

Combinando (20), (22) e a desigualdade triangular, temos

$$|\mathbb{P}_p(A) - \mathbb{P}_p(A)^2| < 4\epsilon.$$

Desde que $\epsilon > 0$ foi arbitrário, segue que $\mathbb{P}_p(A) = \mathbb{P}_p^2(A)$. Portanto, $\mathbb{P}_p(A) \in \{0, 1\}$. \square

Observação 2.13. A Proposição 2.12 pode ser provada em contextos mais gerais. Por exemplo, para uma prova dessa proposição sobre grafos de Cayley veja [89], Proposição 7.3, p. 208.

2.5 PERCOLAÇÃO SUBCRÍTICA

Quando falamos de percolação subcrítica estamos nos referindo à percolação na fase $p < p_c(d)$. Nesse caso, o Teorema 2.6 da seção anterior nos diz que, quase certamente,

não vamos ter a presença de aglomerados infinitos (abertos), e é natural perguntar-se o que podemos dizer sobre o tamanho do aglomerado infinito C que contém a origem. O que veremos nesta seção é que a probabilidade do aglomerado C estender-se a uma caixa de raio n , decai exponencialmente em n .

Definição 2.4. Dado $p \in (0, 1)$, definimos a *suscetibilidade*, notação $\chi(p) \equiv \mathbb{E}_p(|C|)$, como o valor esperado do tamanho do aglomerado infinito contendo a origem.

Igualmente à função $\theta_p(d)$, a função $\chi(p)$ também experimenta um fenômeno crítico (veja Figura 11). Claramente, $\chi(p)$ é não decrescente em p , desde que $\theta_p(d)$ é não decrescente em p . Por definição, $\chi(0) = 1$ e $\chi(1) = +\infty$. Além disso, temos os seguintes resultados com respeito ao comportamento de $\chi(p)$:

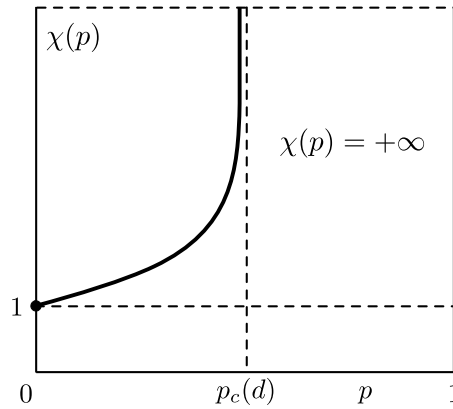


Figura 11: Comportamento da suscetibilidade $\chi(p)$.

Proposição 2.14. Se $p > p_c(d)$, então $\chi(p) = +\infty$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.6, para $p < p_c$ temos que $\theta_p(d) > 0$. Logo, segue da igualdade $\chi(p) = \mathbb{E}_p(\mathbb{1}_{\{|C|=\infty\}}|C|) + \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}_p(|C|=n)$. \square

Observação 2.15. Em [64] prova-se que $\lim_{p \rightarrow p_c(d)^+} \chi(p) = +\infty$.

Um resultado importante, o qual estabelece a finitude da suscetibilidade na região subcrítica, é do seguinte teorema.

Teorema 2.16. Se $p < p_c(d)$, então $\chi(p) < \infty$.

Demonstração. A prova deste teorema não é imediata e será omitida neste trabalho (para maiores detalhes, veja [64]). \square

No restante desta seção, assumiremos a definição de *fronteira interna* de um grafo segundo a Definição 1.2. Denotaremos Λ_n para nos referirmos ao hiper-cubo d -dimensional $[-n, n]^d \cap \mathbb{Z}^d$.

Assumindo o Teorema 2.16, em seguida passamos a provar o decaimento exponencial da percolação subcrítica.

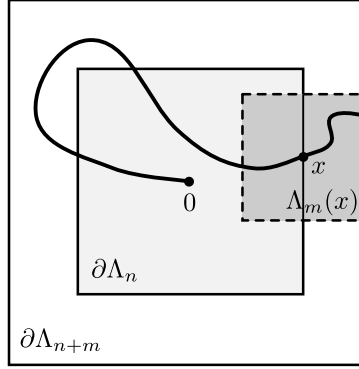


Figura 12: O vértice x é conectado por caminhos abertos disjuntos à origem e à superfície da caixa $\Lambda_m(x)$.

Teorema 2.17 (Decaimento exponencial). *Se $p < p_c(d)$, existe uma constante $c_p > 0$ tal que para todo $n \geq 1$, tem-se*

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq e^{-nc_p}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.16 temos $\chi(p) < +\infty$. Dado $m, n \in \mathbb{N}$, definimos as caixas $\Lambda_m(x)$, Λ_n e Λ_{n+m} como estão dispostas na Figura 12.

Da Figura 12, observe que

$$\{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_{n+m}\} \subset \cup_{x \in \partial\Lambda_n} \{0 \leftrightarrow x\} \circ \{x \leftrightarrow \partial\Lambda_m(x)\}.$$

Logo, pela desigualdade BK (veja Teorema 2.4) e pela invariância translacional de \mathbb{P}_p , temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_{n+m}) &\leq \sum_{x \in \partial\Lambda_n} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow x) \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \Lambda_m(x)) \\ &= \left[\sum_{x \in \partial\Lambda_n} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow x) \right] \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \Lambda_m) \\ &\equiv C_p(n) \cdot \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \Lambda_m). \end{aligned}$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} C_p(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x \in \partial \Lambda_n} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow x) = \mathbb{E}_p(|C|) < \infty$, temos que $C_p(n) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, e daí podemos escolher N tal que $C_p(n) < 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$, pelo algoritmo da divisão existem $q, r \in \mathbb{N}$ (com $0 \leq r < N$) tal que $n = qN + r$. Desde que $\{0 \leftrightarrow \partial \Lambda_n\} \subset \{0 \leftrightarrow \partial \Lambda_{qN}\}$, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial \Lambda_n) &\leq \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial \Lambda_{qN}) \\ &\leq C_p(N) \cdot \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial \Lambda_{(q-1)N}) \leq \dots \leq [C_p(N)]^q = e^{q \ln[C_p(N)]}. \end{aligned}$$

Como $C_p(N) < 1$, $\ln[C_p(N)] < 0$ e desde que $n < (q+1)N$, temos $q > \frac{n}{N} - 1 = n(\frac{1}{N} - \frac{1}{n}) \geq n(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1})$ para todo $n \geq N+1$. Definindo

$$k_p \equiv - \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) \ln[C_p(N)],$$

temos $k_p > 0$ e $q \ln[C_p(N)] < -nk_p$, para todo $n \geq N+1$. Desde que um número finito de n 's satisfaça $n \geq N$, escolhemos b tal que $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial \Lambda_n) \leq e^{-nb}$ para todo $n \leq N$. Finalmente, tomando $c_p \equiv \max\{k_p, b\}$ concluímos que existe $c_p > 0$ tal que $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial \Lambda_n) \leq e^{-nc_p}$, para todo $n \geq 1$. \square

2.6 PERCOLAÇÃO SUPERCRÍTICA

No estudo de modelos de percolação, é natural perguntar-se quantos aglomerados infinitos existem na fase supercrítica $p \geq p_c(d)$. Veremos no Lema 2.19 que, para cada $p \in (0, 1)$, este número é constante quase certamente. Mais precisamente, em 1987, Aizenman, Kesten e Newman [7] mostraram que aí existe um único aglomerado infinito quando $p \geq p_c(d)$ e uma das conjecturas centrais neste campo diz que: *não existe aglomerado infinito quando $p = p_c(d)$, $d \geq 2$* . Isso foi provado para $d = 2$ em 1960 por Harris [71] e, em 1980, por Kesten [79]. Já para $d \geq 19$ ¹ (e para $d \geq 7$, quando se adicionam laços entre todos os pares de vértices dentro de alguma distância L), em 1990 e 1994, foi provado, por Hara e Slade, que $\mathbb{P}_{p_c(d)}(0 \leftrightarrow \infty) = 0$ (para maiores detalhes veja [69, 70]). A técnica de expansão em laços (usada por Hara e Slade) é esperada a ser válida até $d \geq 6$. Porém, para $d \in \{3, 4, 5\}$, essa técnica não é válida.

Nesta seção, provaremos que a medida de Bernoulli, quase certamente, tem, no máximo, um aglomerado infinito (veja Teorema 2.18 abaixo). Uma das ferramentas

¹ Mais recentemente, Fitzner e Van der Hofstad [49] melhoraram o método de Hara e Slade, provando que a percolação crítica sobre \mathbb{Z}^d não possui aglomerados infinitos, para todo $d \geq 11$.

fundamentais para provar este teorema é a independência do modelo. No próximo capítulo, quando trabalharmos com o modelo de aglomerados aleatórios, provaremos que a medida desse modelo, quase certamente, também possui, no máximo, um aglomerado infinito. Para isso, trocaremos a independência do modelo pela conhecida **propriedade da energia finita** (veja Proposição 3.38), já que o modelo de aglomerados aleatórios é um modelo que carece de independência.

O Teorema 2.18 (abaixo) foi provado por Aizenman, Kesten e Newman [7]. Um argumento de prova mais simples deste teorema pode ser encontrado no *paper* de Burton e Keane [30]. Este teorema fornece a unicidade quase certa do aglomerado infinito para o modelo de percolação independente. Uma pequena adaptação deste teorema mostra que o modelo de aglomerados aleatórios possui, também, esta mesma propriedade. Quando falamos simplesmente “modelo de aglomerados aleatórios”, nós estamos nos referindo a ditos modelos sem presença de campo externo. Quando este modelo possui presença de campo, a unicidade do aglomerado infinito depende muito da invariância do campo externo e da estrutura de grafo com que se esteja trabalhando. No caso em que o campo externo for invariante, o modelo de aglomerados aleatórios ou a representação de modelos de aglomerados aleatórios sobre a rede d -dimensional \mathbb{L}^d terá, quase certamente, um único aglomerado infinito (veja referência [20]). Já quando o campo externo não for invariante, precisaremos de alguma propriedade geométrica adicional sobre o grafo em que se trabalha, a saber, a propriedade do grafo ser **amenável**. Todos esses detalhes sobre o modelo de aglomerados aleatórios serão estudados aprofundadamente no Capítulo 6 (veja referência [36]). A propriedade da unicidade q.c. do aglomerado infinito diz que, para valores de p maiores que o ponto crítico, existe um único aglomerado infinito, isto é, $\mathbb{P}_p(\text{Existe um único aglomerado infinito}) = 1$.

Teorema 2.18 (Unicidade do aglomerado infinito, veja [7]). *Na fase supercrítica, isto é, quando $p > p_c$, existe um único aglomerado infinito.*

Demonstração. Vamos denotar por N_∞ a variável aleatória que conta o número de aglomerados infinitos. Claramente, N_∞ é invariante por translações, pois as translações das configurações de $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ não alteram seu número de aglomerados. Pela ergodicidade de \mathbb{P}_p (veja Lema 2.12), temos que $\mathbb{P}_p(N_\infty = n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\})$ é igual a zero ou um. A prova da unicidade quase certa do aglomerado infinito pode ser deduzida como consequência de dois lemas que mostraremos em seguida. O seguinte lema foi provado por Newman e Schulman em 1981 (veja referência [99]) em contextos mais gerais, a saber, para grafos conexos transitivos.

Lema 2.19. Para cada $p \in (0, 1)$,

$$\mathbb{P}_p(N_\infty \in \{0, 1, \infty\}) = 1.$$

Demonstração. Desejamos provar que $N_\infty \in \{0, 1, \infty\}$ quase certamente. Vamos fazer a prova por contradição. Fixe $n_0 \neq 0, 1, \infty$ e suponha que

$$\mathbb{P}_p(N_\infty = n_0) = 1. \quad (23)$$

Defina o evento

$$A_k = \{n_0 \text{ aglomerados infinitos em } \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda_k \text{ interceptam } \Lambda_k\},$$

onde $\Lambda_k = [-k, k]^d \cap \mathbb{Z}^d$ é a caixa centrada na origem de lado $2k$.

Observe que a sequência de conjuntos $(A_k)_{k>0}$ é monótona crescente e que $\cup_{k>0} A_k = \{N_\infty = n_0\}$. Logo, pela continuidade da medida, tem-se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(A_k) = \mathbb{P}_p(\cup_{k>0} A_k) = \mathbb{P}_p(N_\infty = n_0) = 1.$$

Portanto, podemos escolher um $k > 0$ tal que

$$\mathbb{P}_p(A_k) > \frac{1}{2}. \quad (24)$$

Observe que

$$A_k \cap \{e \in E_{\Lambda_k} : \omega_e = 1\} \subset \{N_\infty = 1\},$$

pois, no evento acima, os n_0 aglomerados estão unidos pela caixa Λ_k , já que todas suas arestas estão abertas.

Daí, pela inclusão dos eventos acima, por independência e pelo Item (24), temos

$$\mathbb{P}_p(N_\infty = 1) \geq \mathbb{P}_p(A_k \cap \{e \in E_{\Lambda_k} : \omega_e = 1\}) = p^{|\Lambda_k|} \mathbb{P}_p(A_k) > 0,$$

pois $p \in (0, 1)$, chegando assim a uma contradição com (23). \square

Lema 2.20. Para cada $p \in (0, 1)$,

$$\mathbb{P}_p(N_\infty = \infty) = 0.$$

Demonstração. Observe que é suficiente provar que $\mathbb{P}_p(N_\infty \geq 3) = 0$. Para isso, suponha que $\mathbb{P}_p(N_\infty \geq 3) > 0$. Definindo Q_{n-1} como a caixa centrada na origem de lado $2n - 1$ e

$$F_n \equiv \left\{ \text{Pelo menos 3 aglomerados infinitos (abertos) distintos interceptam } Q_{n-1} \right\},$$

observe que $\{N_\infty \geq 3\} = \cup_{n \geq 1} F_n$, $F_n \subset F_{n+1}$, para todo $n \geq 1$. Logo, pela continuidade da medida, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(F_n) = \mathbb{P}_p(N_\infty \geq 3)$. Portanto, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$, então

$$\mathbb{P}_p(F_n) > 0. \quad (25)$$

Dados três pontos distintos y_1, y_2 , e y_3 em ∂Q_{n_0-1} , defina o evento

$$F_{n_0}(y_1, y_2, y_3) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{Os pontos } y_1, y_2, y_3 \text{ pertencem a aglomerados infinitos (abertos)} \\ \text{distintos usando apenas arestas exteriores a } Q_{n_0-1} \end{array} \right\}$$

Como $F_{n_0} \subset \cup_{y_1, y_2, y_3} F_{n_0}(y_1, y_2, y_3)$, então por (25), para algum y_1, y_2, y_3 , temos

$$\mathbb{P}_p(F_{n_0}(y_1, y_2, y_3)) > 0. \quad (26)$$

Dados y_1, y_2, y_3 existe $x \equiv x(y_1, y_2, y_3) \in Q_{n_0-1}$ tal que existam três caminhos de arestas disjuntas no interior da caixa Q_{n_0-1} ligando x a y_1, y_2 e y_3 (veja Figura 13). Denotando estes três caminhos por: α, β , e θ , respectivamente, definimos o seguinte evento

$$F'_{n_0}(y_1, y_2, y_3) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{os caminhos } \alpha, \beta \text{ e } \theta \text{ estão abertos e as demais arestas do interior} \\ \text{da caixa } Q_{n_0-1} \text{ estão fechadas} \end{array} \right\}.$$

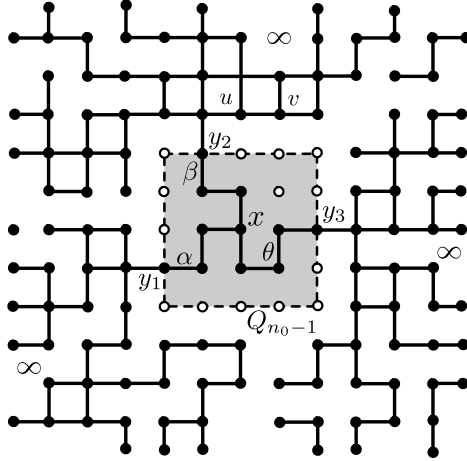


Figura 13: Construção dos caminhos abertos disjuntos α, β e θ no interior da caixa Q_{n_0-1} ligando x a y_1, y_2 e y_3 em duas dimensões.

Defina $P_T \equiv \{x \text{ é ponto triplo especial no interior da caixa } Q_{n_0-1}\}$. Note que

$$\{x \in P_T\} \supset F_{n_0}(y_1, y_2, y_3) \cap F'_{n_0}(y_1, y_2, y_3). \quad (27)$$

Como $\mathbb{P}_p(F_{n_0}(y_1, y_2, y_3)) > 0$, por independência de eventos, temos

$$0 < \mathbb{P}_p(F'_{n_0}(y_1, y_2, y_3)) \mathbb{P}_p(F_{n_0}(y_1, y_2, y_3)) = \mathbb{P}_p(F'_{n_0}(y_1, y_2, y_3) \cap F_{n_0}(y_1, y_2, y_3))$$

Usando a equação (27), segue que $\mathbb{P}_p(x \in P_T) > 0$. Pela invariância translacional do evento P_T , temos que a probabilidade de qualquer ponto ser um ponto triplo é constante, isto é, existe uma constante positiva ρ tal que $\rho = \mathbb{P}_p(x \in P_T) > 0, \forall x \in \mathbb{Z}^d$.

Seja X_n a variável aleatória que representa o número de pontos triplos dentro da caixa Q_{n-1} , então

$$\mathbb{P}_p(X_n) = \sum_{x \in Q_{n-1}} \mathbb{P}_p(x \in P_T) = (2n-1)^2 \rho.$$

Já que X_n é uma variável aleatória integrável, então $\mathbb{P}_p(X_n \geq \mathbb{E}_p(X_n)) > 0$ pois, caso contrário, usando a desigualdade de Chebyshev, temos

$$1 = \mathbb{P}_p(X_n < \mathbb{E}_p(X_n)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(\mathbb{E}_p(X_n) - X_n \geq 1/k) \leq 0,$$

o que é uma contradição. Assim

$$\mathbb{P}_p(X_n \geq (2n-1)^2 \rho) > 0. \quad (28)$$

Por outro lado, afirmamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n \leq 4(2n-1). \quad (29)$$

Para verificar esta afirmação, considere as componentes conexas dos pontos triplos especiais usando apenas arestas no interior da caixa Q_{n-1} . Suponha que cada componente contenha n_1, n_2, \dots pontos triplos especiais, logo, $n_1 + n_2 + \dots$ é o número total de pontos triplos especiais no interior da caixa Q_{n-1} . Do Lema 1.2, temos que existem pelo menos $n_i + 2$ ramos distintos dentro das $3n_i$ possibilidades. Portanto, podemos achar $\sum_{i \geq 1} (n_i + 2)$ ramos distintos de todos os pontos triplos e, como cada ramo de cada ponto triplo toca pelo menos um ou mais vértices em algum lado de ∂Q_{n-1} , temos necessariamente que

$$X_n = \sum_{i \geq 1} n_i \leq \sum_{i \geq 1} (n_i + 2) \leq |\partial Q_{n-1}| = 4(2n-1),$$

provando a desigualdade em (29).

Usando (28) e (29), obtemos a cota: $(2n-1)\rho \leq (2n-1)^{-1} X_n \leq 4$, a qual é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Nessa última desigualdade, tomando o limite quando n tende ao infinito, obtemos a contradição. \square

CONTINUAÇÃO DA PROVA DO TEOREMA 2.18.

Finalmente, para provar este Teorema, basta combinar os Lemas 2.19 e 2.20 para obter que $\mathbb{P}_p(N_\infty \in \{0, 1\}) = 1$, concluindo-se a prova. \square

A prova do Teorema 2.18 é válida sobre grafos bem mais gerais com certa propriedade geométrica. Para enunciar dito teorema, faremos a seguinte definição de amenabilidade de um grafo: diremos que um grafo infinito $\mathbb{L} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ é *amenável* se $\inf\{|\partial_{\mathbb{E}} V|/|V|\} = 0$, onde o ínfimo é tomado sobre todos os subconjuntos finitos conexos V de \mathbb{V} e $\partial_{\mathbb{E}} V$ é o conjunto de arestas com um vértice em V e o outro em \mathbb{V}/V ; isto é, grandes volumes V contêm mais sítios que volumes de sua fronteira $\partial_{\mathbb{E}} V$. O conceito de amenabilidade é originado em teoria de grupos, onde, em alguns casos, é definido de forma diferente. O seguinte resultado é devido a Aizenman, Kesten e Newman [7], mas é comum apresentar-se a prova deste resultado segundo o argumento de Burton e Keane [30].

Teorema 2.21. *Seja \mathbb{L} um grafo conexo infinito, amenável, tipo finito ² e localmente finito. Se $p \in (0, 1)$, então*

$$\mathbb{P}_p(I_0) = 1 \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}_p(I_1) = 1,$$

onde I_k é o evento em que existem exatamente k aglomerados (abertos) infinitos.

Demonstração. Para maiores detalhes veja [27], Teorema 4, p. 121. \square

2.7 O VALOR CRÍTICO EM DUAS DIMENSÕES

É conhecido (e será provado na Seção 2.8) que para todo $d \geq 2$, $0 < p_c(d) < 1$. Por volta de 1955 foi conjecturado que $p_c(2) = 1/2$, porém isso não foi provado logo em seguida. Em 1980 Kesten conseguiu prová-lo em seu celebre trabalho [79].

No modelo de percolação independente de parâmetro p , é fácil ver que $p = 1/2$ é o único ponto para o qual p é igual a p^* . Chamamos este ponto de *ponto autodual* e o denotaremos por p_{sd} (no Capítulo 3 definiremos formalmente o conceito de ponto autodual). Já que \mathbb{L}^{2*} é simplesmente uma cópia de \mathbb{L}^2 transladada pelo vetor $(1/2, 1/2)$

² Definimos uma relação de equivalência sobre o conjunto de vértices \mathbb{V} de \mathbb{L} na seguinte direção: dizemos que dois vértices x e y são *equivalentes*, notação $x \sim y$, se, e somente se, eles têm os mesmos vizinhos. Seja $\mathbb{V}/\sim \equiv \{N_1, N_2, \dots\}$ o correspondente conjunto cociente. Um grafo infinito \mathbb{L} é de TIPO FINITO k , se $|\mathbb{V}/\sim| = k$. Um grafo infinito \mathbb{L} é de tipo infinito, se $|\mathbb{V}/\sim| = \infty$.

e que \mathbb{P}_{p^*} é definida em termos de \mathbb{P}_p , há uma certa simetria entre estes dois modelos de percolação. Como veremos à frente, os principais resultados deste trabalho estão concentrados na análise do processo de percolação do modelo de aglomerados aleatórios na rede \mathbb{L}^2 definidos no ponto $p_{sd} \in (0, 1)$, onde tais processos, bem como a percolação de elos independentes de Bernoulli, apresentam máxima semelhança possível.

O resultado de Kesten é muito importante, ele estabelece o principal teorema desta seção. O Teorema de Kesten (Teorema 2.26 abaixo), segue diretamente como consequência dos dois lemas seguintes:

Lema 2.22 (Argumento de Zhang, veja [50, 64]). *Para o modelo de percolação independente em \mathbb{Z}^2 com parâmetro $p = 1/2$, temos*

$$\mathbb{P}_{1/2}(0 \leftrightarrow \infty) = 0.$$

Demonstração. Mostraremos este lema por contradição, assuma que $\mathbb{P}_{1/2}(0 \leftrightarrow \infty) > 0$. Em toda a demonstração, vamos considerar $p = 1/2$. Para cada $n \geq 1$, defina a caixa $T(n) = [0, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2$, e os seguintes eventos:

$$A^u(n) = \left\{ \begin{array}{l} \text{algum vértice sobre o lado } u \text{ da caixa } T(n) \text{ está em um aglomerado} \\ \text{(aberto) infinito de } \mathbb{Z}^2 \text{ que não usa outros vértices de } T(n) \end{array} \right\}$$

$$R_n = \{\text{o único aglomerado (aberto) infinito em } \mathbb{Z}^2 \cap T(n)^c \text{ intercepta } T(n)\},$$

onde D^c denota o complemento do conjunto D , $u = e, d, c, b$ denota os lados esquerdo, direito, de cima e de baixo, respectivamente.

Observação 2.23. *Na prova deste lema, a notação $A^c(n)$ não deve ser confundida com a notação de complemento de um conjunto.*

Veja que os eventos $A^e(n), A^d(n), A^c(n)$ e $A^b(n)$ são eventos crescentes. Além disso, temos

$$A^e(n) \cup A^d(n) \cup A^c(n) \cup A^b(n) = \{T(n) \leftrightarrow \infty\}. \quad (30)$$

Como a medida de probabilidade \mathbb{P}_p é invariante por rotações de ângulo $\pi/2$ da rede \mathbb{L}^2 , para cada $n \geq 1$, temos

$$\mathbb{P}_p(A^u(n)) = \text{const.}, \quad \text{onde } u = e, d, c, b. \quad (31)$$

Definindo a variável aleatória N_∞ como o número de aglomerados abertos infinitos, segue do Teorema 2.18 que $\mathbb{P}_p(N_\infty = 1) = 1$. Logo,

$$\begin{aligned} 1 = \mathbb{P}_p(N_\infty = 1) &= \mathbb{P}_p(\cup_{n>0} R_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(R_n) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(T(n) \leftrightarrow \infty) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(A^e(n) \cup A^d(n) \cup A^c(n) \cup A^b(n)), \end{aligned}$$

onde, na terceira igualdade, fizemos uso da continuidade da medida, já que a sequência de conjuntos $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não decrescente. Na desigualdade, usamos simplesmente a inclusão de conjuntos e, na última igualdade, fizemos uso de (30).

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(A^e(n) \cup A^d(n) \cup A^c(n) \cup A^b(n)) = 1. \quad (32)$$

Pela desigualdade FKG, por (31) e pelo truque da raiz quadrada (veja Apêndice, Proposição .20), obtemos

$$\mathbb{P}_p(A^u(n)) \geq 1 - \left[1 - \mathbb{P}_p(A^e(n) \cup A^d(n) \cup A^c(n) \cup A^b(n)) \right]^{\frac{1}{4}}, \quad \text{onde } u = e, d, c, b.$$

Usando (32) e o Teorema do Confronto, podemos tomar o limite quando $n \rightarrow \infty$, na desigualdade acima e concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(A^u(n)) = 1, \quad \text{onde } u = e, d, c, b. \quad (33)$$

Agora, tomamos $N \in \mathbb{N}$, tal que se $n \geq N$, temos

$$\mathbb{P}_p(A^u(n)) > \frac{7}{8}, \quad \text{onde } u = e, d, c, b. \quad (34)$$

Deslocando \mathbb{L}^2 por $(1/2, 1/2)$, definimos a caixa dual $T(n)^* = T(n-1) + (1/2, 1/2)$. Definimos, agora, o evento

$$B^u(n) = \left\{ \begin{array}{l} \text{algum vértice sobre o lado } u \text{ de } T(n)^* \text{ está em um aglomerado (aberto)} \\ \text{infinito da rede dual } \mathbb{L}^{2*} \text{ sem usar outros vértices de } T(n)^* \end{array} \right\},$$

onde $u = e, d, c, b$.

Considere o evento $A = A^e(n) \cap A^d(n) \cap A^c(n) \cap A^b(n)$ visto como um subconjunto de $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^2}$. Lembrando que $p = 1/2$, temos por (34) que

$$\mathbb{P}_p(B^u(n)) = \mathbb{P}_{1-p}(A^u(n)) > \frac{7}{8}, \quad \text{onde } u = e, d, c, b. \quad (35)$$

Por questão de simplicidade, somente nesta última parte da prova, adotamos a notação $\Omega \equiv \{0, 1\}^{\mathbb{E}^2}$. Logo, a probabilidade de que o evento A não ocorra é

$$\mathbb{P}_p(\Omega \setminus A) \leq \mathbb{P}_p(\Omega \setminus A^e(n)) + \mathbb{P}_p(\Omega \setminus A^d(n)) + \mathbb{P}_{1-p}(\Omega \setminus B^c(n)) + \mathbb{P}_{1-p}(\Omega \setminus B^b(n)) \leq \frac{1}{2},$$

onde fizemos o uso das desigualdades (34) e (35). Resumindo, temos

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A) \geq \frac{1}{2}. \quad (36)$$

Como, quase certamente, há apenas um aglomerado (aberto) infinito em \mathbb{L}^2 e \mathbb{L}^{2*} , então o aglomerado infinito que intercepta o lado de cima de $T(N)^*$ deve estar conectado a algum ponto do aglomerado infinito que intercepta o lado de baixo de $T(N)^*$. Além do mais, esses pontos se ligam por algum caminho aberto dentro de $T(N)$, pois esses aglomerados são impedidos de se unir fora de $T(N)^*$ por conta da existência de aglomerados infinitos na rede que interceptam os lados direito e esquerdo $T(N)$ (veja Figura 14).

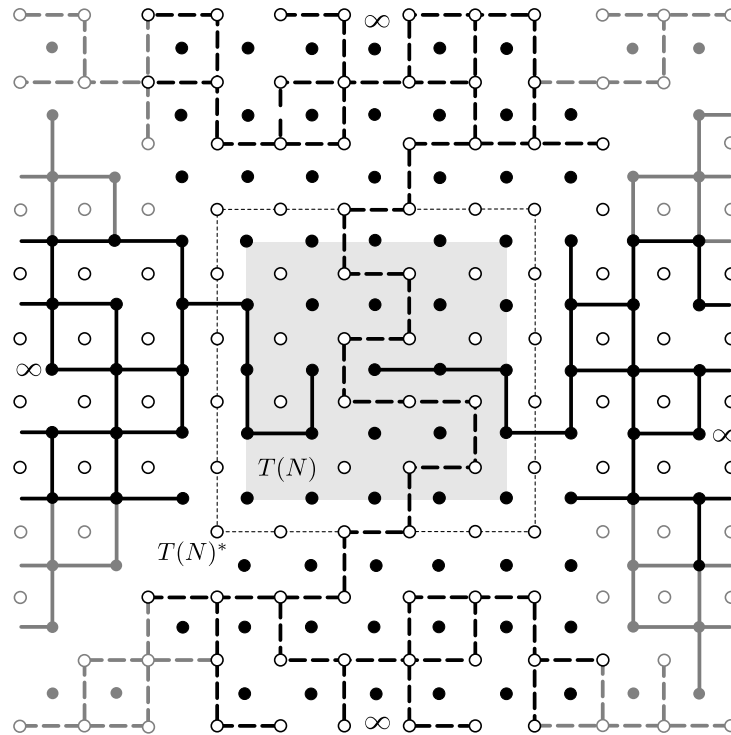


Figura 14: Argumento dos 4 braços. Cruzamento cima-baixo em $T(N)^*$ bloqueando cruzamento esquerda-direita em $T(N)$.

Mas isso implica a existência de, pelo menos, dois aglomerados infinitos em \mathbb{L}^2 , o que contradiz o Teorema 2.18. Portanto, $\mathbb{P}_{1/2}(A) = 0$, o que contradiz (36). \square

Observação 2.24. O resultado do Lema 2.22 tem como consequência imediata que, em duas dimensões, $p_c(2) \geq 1/2$.

Lema 2.25 (Veja [50, 64]). Para o modelo de percolação independente sobre \mathbb{Z}^2 com parâmetro p , temos

$$p_c(2) \leq \frac{1}{2}.$$

Demonstração. Seja $p = 1/2$. Por contradição, suponha que $p_c(2) > 1/2$. Pelo Teorema 2.17, existe $c_{1/2} > 0$ tal que $\mathbb{P}_{1/2}(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq e^{-n c_{1/2}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $\Lambda_n = [-n, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2$ e $\partial\Lambda_n$ é a fronteira interna (veja Definição 1.2).

Seja $T(n)$ a caixa onde removemos as arestas dos lados leste e oeste da caixa $[0, n+1] \times [0, n] \cap \mathbb{Z}^2$. Seja o evento

$$A_n \equiv \{\text{existe um caminho aberto de esquerda a direita em } T(n)\}.$$

Considere a caixa dual $T(n)^*$ gerada pela caixa $[0, n] \times [0, n+1] \cap \mathbb{Z}^2 + (1/2, -1/2)$ com as arestas do lado norte e sul removidas. Defina, também, o evento

$$A'_n \equiv \{\text{existe um caminho fechado de cima para baixo em } T(n)^*\}.$$

Pela invariância de $\mathbb{P}_{1/2}$, é claro que $\mathbb{P}_{1/2}(A_n) = \mathbb{P}_{1/2}(A'_n)$ e exatamente que, ou ocorre A_n ou ocorre A'_n . Logo, $\mathbb{P}_{1/2}(A_n) + \mathbb{P}_{1/2}(A'_n) = 1$. Daí,

$$\mathbb{P}_{1/2}(A_n) = 1/2, \quad \forall n \geq 1. \tag{37}$$

Por outro lado, como $A_n \subset \cup_{k=1}^{n+1} \{(0, k) \leftrightarrow k + \Lambda_n\}$, para cada $n \geq 1$ temos

$$\mathbb{P}_{1/2}(A_n) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}_{1/2}((0, k) \leftrightarrow k + \Lambda_n) = (n+1)\mathbb{P}_{1/2}(0 \leftrightarrow A_n) \leq (n+1)e^{-n c_{1/2}},$$

o que contradiz (37) para n suficientemente grande. \square

Para uma prova alternativa do Lema 2.25 veja [50], p. 51.

Teorema 2.26 (Teorema de Kesten, veja [79]). O ponto crítico para o modelo de percolação independente sobre \mathbb{Z}^2 é igual a seu ponto autodual, isto é,

$$p_c(2) = \frac{1}{2} \quad \text{e além do mais} \quad \theta_2(p_c(2)) = 0.$$

Demonstração. Combinando-se os Lemas 2.22 e 2.25, o resultado segue. \square

Proposição 2.27. Seja $\mathcal{C}_h(R)$ o evento de cruzar da esquerda à direita em um retângulo R na rede bidimensional. Logo,

$$\mathbb{P}_{1/2}(\mathcal{C}_h(R)) = 1/2.$$

Demonstração. A prova desta proposição é um subproduto da prova do Lema 2.25. \square

2.8 PROBABILIDADE CRÍTICA

A seguinte proposição e o próximo corolário mostram que, no modelo de percolação independente, o caso $d = 1$ não tem interesse algum e que em $d \geq 2$, tem-se que $p_c(d) \in (0, 1)$. Isso estabelece a existência de um comportamento que faz uma mudança abrupta no sistema de percolação.

Proposição 2.28. *Para $d = 1$, temos $p_c(1) = 1$.*

Demonstração. Seja $p < 1$. Como $\{0 \leftrightarrow \infty\} = \bigcap_{n \geq 1} \{0 \leftrightarrow n\} \cup \bigcap_{n \geq 1} \{0 \leftrightarrow -n\}$ e o evento $\{0 \leftrightarrow n\}$ é decrescente, pela continuidade da medida, temos

$$\theta_1(p) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow -n) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} p^n.$$

Desde que $p < 1$, temos que $\theta_1(p) = 0$. Portanto, $p_c(1) = 1$. □

Corolário 2.29. *Para $d \geq 2$, temos $0 < p_c(d) < 1$.*

Demonstração. A prova é consequência imediata do Teorema 2.6. □

2.9 ALGUNS PROBLEMAS EM PERCOLAÇÃO

Desigualdade BK. Considere o espaço de probabilidade $(\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$, \mathcal{F} à σ -álgebra de todos os subconjuntos de $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ e \mathbb{P}_p a medida de Bernoulli definida na Seção 2.1. A desigualdade BK (veja Seção 2.2) nos dá uma relação contrária à desigualdade FKG com o evento $A \cap B$ substituído pelo evento $A \circ B$, chamado de ocorrência disjunta. A desigualdade BK [119] estabelece que para cada evento crescente A e B , tem-se

$$\mathbb{P}_p(A \circ B) \leq \mathbb{P}_p(A)\mathbb{P}_p(B).$$

Van den Berg e Kesten conjecturaram uma versão da desigualdade BK válida para todo par de eventos A, B independente de serem crescentes ou não. Essa conjectura foi provada em 1997 por Reimer [103]. Para enunciar a desigualdade de Reimer, dados eventos gerais A e B , definimos o evento

$$A \square B \equiv \{\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d} : \exists F \subseteq \mathbb{E}^d \text{ tal que } \omega_F \in A, \omega_{F^c} \in B\},$$

onde para $F \subseteq \mathbb{E}^d$ e $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$, escreveremos $(\omega_F)_e = \omega_e$ para $e \in F$ e $(\omega_F)_e = 0$, caso contrário.

Teorema 2.30 (Reimer, veja [103]). *Para todo evento A e B ,*

$$\mathbb{P}_p(A \square B) \leq \mathbb{P}_p(A)\mathbb{P}_p(B).$$

O Teorema de Reimer tem, como casos especiais, a desigualdade FKG e a desigualdade BK, desde que $A \square B = A \circ B$ e $A \square B^c = A \cap B^c$, para todo evento crescente A e B . O caso $p = 1/2$ se reduz ao seguinte problema de contagem: para cada evento A e B , tem-se

$$2^{|E|} |A \square B| \leq |A| \cdot |B|. \quad (38)$$

Em uma discussão [118] de resultados parciais, foi provado que (38) implica o Teorema de Reimer.

Suavidade da probabilidade de percolação. É conhecido que $\theta_d(p) = 0$ para $p < p_c(d)$ (veja Teorema 2.6) e que $\theta_d(p)$ é infinitamente diferenciável quando $p > p_c(d)$. O maior problema existente na atualidade é provar que $\theta_d(p_c(d)) = 0$, o que é equivalente a provar que

$$\theta_d(p) \text{ é contínuo em } p_c(d).$$

Esse problema tem sido resolvido quando $d = 2$ (veja Teorema 2.26), portanto, para a seguinte discussão, assumiremos que $d \geq 3$. É conhecido que a probabilidade crítica $p_c(d)$ de \mathbb{Z}^d é a mesma que a probabilidade crítica $p_c(d, H)$ do semiespaço $H \equiv \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^{d-1}$ (veja [67]). Além disso, é conhecido, também, que H não possui aglomerados infinitos [9], quando $p = p_c(d, H)$. Daí, é necessário descartar a seguinte possibilidade peculiar: quando $p = p_c(d)$ quase certamente existe um aglomerado infinito (aberto) que se decompõe quase certamente em finitos aglomerados sempre que \mathbb{Z}^d se divida em dois semiespaços disjuntos.

Expoentes críticos. Pensa-se que a função $\theta_d(p)$ se comporta de maneira similar à $|p - p_c(d)|^\beta$ no limite quando $p \downarrow p_c(d)$. Denotamos isso por $\theta_d(p) \sim |p - p_c(d)|^\beta$ quando $p - p_c \approx 0$, onde $\beta = \beta(d)$ é um *expoente crítico* que não depende da estrutura do látice em particular. Nenhuma prova é conhecida sobre a existência do número

$$\beta \equiv \lim_{p \downarrow p_c(d)} \left\{ \frac{\log \theta_d(p)}{\log |p - p_c(d)|} \right\}.$$

Possivelmente,

$$a(p)|p - p_c(d)|^\beta \leq \theta_d(p) \leq b(p)|p - p_c(d)|^\beta, \quad \text{para } p > p_c(d),$$

para algumas funções a e b que são de variação limitada quando $p \downarrow p_c(d)$. O valor de $\beta = \beta(d)$ depende de d . É conhecido que

$$\beta(2) = \frac{5}{36}, \beta(d) = 1, \quad \text{para } d \geq 6.$$

Quando $d = 2$, acredita-se que todos os expoentes críticos são racionais. Quando $d \geq 6$ acredita-se que qualquer expoente crítico dado, toma o mesmo valor que quando o látice é substituído por uma árvore regular finita (veja referências [69, 80, 90]).

A primeira prova de que $p_c(2) = 1/2$ utiliza autodualidade da rede \mathbb{Z}^2 (veja Seção 2.7). Denotando o número de aglomerados abertos por vértice, por $\kappa(p) \equiv \mathbb{E}_p(|C|^{-1})$, Sykes e Essan [115] estabeleceram a seguinte relação

$$\kappa(p) = \kappa(1 - p) + 1 - 2p. \quad (39)$$

Assumindo que κ tem uma única singularidade no ponto $p_c(2)$, segue de (39) que κ tem, também, uma singularidade em $1 - p_c(2)$. Como a singularidade de κ é única, temos $p_c(2) = 1 - p_c(2)$ e daí $p_c(2) = 1/2$. Provas alternativas do fato $p_c(2) = 1/2$ são disponíveis em [64, 79]. No entanto, não se exclui que κ seja infinitamente diferenciável em $[0, 1]$. É conjecturado que κ é duas vezes diferenciável, mas não três vezes diferenciável no ponto $p_c(d)$.

3

O MODELO DE ISING/POTTS E O MODELO DE AGLOMERADOS ALEATÓRIOS

Os modelos de sistemas de partículas que estudaremos neste capítulo são: o modelo de Ising (1925), o modelo de Potts (1952) e o modelo de aglomerados aleatórios (1972). O modelo de Ising (veja referência [77]) é o modelo mais simples e o mais estudado de sistemas de spins para estudar transição de fase. Esse modelo é fundamental para o estudo de ferromagnetos e tem gerado enorme interesse em matemática e física ao longo das últimas décadas. Inicialmente, esse modelo foi estudado por Wilhelm Lenz, que propôs a seu aluno de doutorado, Ernst Ising, como tema de tese. Ernst Ising introduziu este modelo em 1925, em sua tese doutoral [77], resolvendo-o completamente para \mathbb{Z} e descobrindo que nenhuma transição de fase ocorre. Ele concluiu erroneamente que este deve ser o caso se todas as dimensões foram $d \geq 1$. Apesar disso, o modelo foi rebatizado com seu nome, mas os falantes de inglês normalmente adulteram a pronúncia de seu nome.

O modelo de Potts (veja referência [102]) é atribuído a Renfrey Potts, que descreveu o modelo perto do fim de sua tese doutoral em 1951. Esse modelo foi relacionado com o modelo de Potts planar ou modelo de relógio. O modelo de Potts foi sugerido a ele por seu orientador, Cyril Domb. O modelo de Potts planar de quatro estados é por vezes conhecido como o modelo Ashkin-Teller, desde que Julius Ashkin e Edward Teller consideraram um modelo equivalente em 1943. O modelo de Potts estende o número de estados do modelo de Ising de 2 a q estados e está relacionado com, e generalizado por, vários outros modelos, incluindo o modelo XY, o modelo de Heisenberg e o modelo N-vector. O modelo de Potts, de longo alcance, é conhecido, também, como o modelo de Kac.

Apesar da sua simplicidade como modelo de um sistema físico, o modelo de Potts é útil para o estudo de transição de fase. Por exemplo, sobre o látice bidimensional \mathbb{L}^2

com $J > 0$ e $q \geq 5$, foi predito que este modelo exibe uma transição de fase de primeira ordem (isto é equivalente à existência de mais de um estado de Gibbs) na fase crítica. Nesta mesma fase, quando $q \leq 4$, uma transição de fase contínua (isto é equivalente à existência de um único estado de Gibbs) foi observado em [43], como no modelo de Ising, onde $q = 2$. Outros usos deste modelo são encontrados através de sua relação com problemas de modelos de percolação, Tutte e polinômios cromáticos que usualmente são encontrados em combinatória. O modelo de Potts tem uma estreita relação com o modelo de aglomerados aleatórios de Fortuin-Kasteleyn (veja referência [51]), um outro modelo da Mecânica Estatística. Entender essa relação tem ajudado a desenvolver métodos eficientes como o método de Monte Carlo para a exploração numérica do modelo para valores de q suficientemente pequenos.

O modelo de aglomerados aleatórios nos dá um quadro abrangente para os modelos de Ising e Potts. O aspecto em comum que tem estes três sistemas é que a singularidade ocorre em pontos de transição de fase. Cabe ressaltar, também, que estes três modelos tiveram origem na Física Matemática. A família de medidas de aglomerados aleatórios (isto é, medidas de probabilidade as quais governam esse modelo) não é uma extensão das medidas de Potts. A relação existente é mais sofisticada, tal que correlações para modelos de Potts correspondem a conexões no modelo de aglomerados aleatórios. As referidas conexões existentes são conhecidas como *representações gráficas* do modelo de Potts. Portanto, a estrutura de correlação de um modelo de Potts pode ser estudada por meio da geometria estocástica correspondente a um modelo de aglomerados aleatórios. A intuição por trás deste estudo geométrico vem frequentemente da percolação, pela qual o modelo de aglomerados aleatórios é de fato uma extensão. Os objetivos deste capítulo são:

- ✓ formular os modelos de Ising/Potts e de aglomerados aleatórios,
- ✓ apresentar o método de acoplamento: medidas de Edwards-Sokal para os modelos de Ising/Potts e de aglomerados aleatórios,
- ✓ estudar algumas propriedades básicas do modelo de aglomerados aleatórios: ordenamento estocástico (desigualdade FKG), associação positiva e, finalmente,
- ✓ apresentar alguns problemas em aberto concernentes ao modelo de aglomerados aleatórios.

Observação 3.1. Dado um subgrafo finito $G = (V, E) \subset \mathbb{L}$, nas Seções 3.1 e 3.2 escrevemos ∂V para nos referirmos à fronteira externa de um grafo segundo a Definição 1.1. No entanto, na

Seção 3.4 usaremos essa mesma notação para nos referirmos à Definição 1.2 de fronteira interna. Esse uso de notação será especificado com muito cuidado em seu respectivo contexto.

3.1 O MODELO DE ISING EM GRAFOS ENUMERÁVEIS

O modelo de Ising para um ferromagneto (em uma dimensão) foi analisado por Ernst Ising em 1925, em sua tese de doutorado [77]. O ferromagnetismo, que aparece em muitos metais ordinários como o ferro e o níquel, se entende como a presença de magnetização espontânea inclusive quando não há campo magnético externo. Isso se deve a uma fração importante dos **momentos magnéticos (ou spins)** dos átomos que se alinham na mesma direção devido à interação entre os mesmos, dando lugar a que a amostra se magnetiza. Este alinhamento se produz unicamente a temperaturas baixas ou por debaixo de uma temperatura característica chamada de **temperatura de Curie**. Por acima dessa temperatura os spins estão orientados ao acaso, de forma que não há um campo magnético externo. Na temperatura de Curie, como na transição, aparece uma fenomenologia diferente: por exemplo, o calor específico é divergente e a energia e magnetização tem derivada descontínua com respeito aos parâmetros termodinâmicos.

O modelo de Ising retrata, de forma precisa, o seguinte experimento: uma peça de ferro é colocada em um meio com presença de um campo magnético externo, com uma intensidade que cresce de zero até seu máximo e depois se reduz abruptamente a zero. O ferro retém alguma magnetização residual se, e somente se, a temperatura é suficientemente baixa. A temperatura crítica para este fenômeno é a temperatura de Curie. O modelo de Ising é um modelo simples para o estudo da transição ferromagnética, que é resolúvel analiticamente. Se parte de uma rede regular, que imita a uma rede cristalina de ferro ou níquel, em cujos sítios se coloca um momento magnético ou spin. Matematicamente, suponha que partículas são colocadas nos vértices de um grafo enumerável arbitrário $\mathbb{L} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$. Cada partícula tem a característica de possuir somente dois estados: para acima ou para baixo, $+$ ou $-$. Os valores dos spins são escolhidos aleatoriamente de acordo com uma certa medida de probabilidade regida essencialmente por interações entre partículas vizinhas. Em seguida, descrevemos em detalhe a medida de probabilidade associada ao modelo de Ising.

Como já havíamos falado anteriormente, seja $\mathbb{L} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ uma rede enumerável arbitrária. Cada vértice $i \in \mathbb{V}$ é ocupado por uma partícula com um spin aleatório.

Uma vez que os spins são assumidos a ter dois tipos de estados básicos, definimos o espaço amostral, chamado de **espaço de configurações**, como sendo o seguinte produto cartesiano

$$\Sigma \equiv \{\sigma = (\sigma_i : i \in \mathbb{V}) : \sigma_i \in \{-1, +1\}, \forall i \in \mathbb{V}\} = \{-1, +1\}^{\mathbb{V}}.$$

Cada elemento $\sigma \in \Sigma$ será chamado de configuração de spins. Fixada uma configuração $\sigma \in \Sigma$ o valor σ_i será chamado de **spin** no sítio $i \in \mathbb{V}$.

Podemos considerar diversas métricas em Σ , mas vamos optar por uma métrica $d : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ que gere a topologia produto em $\Sigma = \{-1, +1\}^{\mathbb{V}}$. Para construir uma de tais métricas, primeiro fixamos (arbitrariamente) um vértice $x \in \mathbb{V}$. Seja $B(x, r)$ a bola fechada de centro $x \in \mathbb{V}$ e raio $r > 0$. A distância entre duas configurações $\sigma, \omega \in \Sigma$ é definida por

$$d(\sigma, \omega) = 2^{-\inf\{r > 0 : \sigma_i = \omega_i, \forall i \in B(x, r) \text{ e } \exists j \in \partial B(x, r) \text{ tal que } \sigma_j \neq \omega_j\}}.$$

Se o conjunto involucrado na definição (da distância) acima for vazio, convencionamos que seu ínfimo é $+\infty$ para que a distância de σ a ω seja nula, para o caso $\sigma = \omega$.

A topologia induzida por d em Σ é justamente a topologia produto de $\{-1, +1\}^{\mathbb{V}}$. Denotamos por $\mathcal{B}(\Sigma)$ a σ -álgebra de Borel em Σ , isto é, a σ -álgebra gerada pelos abertos de Σ .

Definição 3.1 (Condição de fronteira). *Fixada uma configuração $\mu \in \Sigma$ e um subgrafo finito $G = (V, E) \subset \mathbb{L}$, definimos o conjunto finito (que depende unicamente de μ e V)*

$$\Sigma_V^\mu \equiv \{\sigma \in \Sigma : \sigma_i = \mu_i, \text{ para } i \in \mathbb{V} \setminus V\},$$

conformado de configurações que coincidem no complementar de V com respeito a \mathbb{V} .

A configuração μ , na definição acima, é usualmente chamada de *condição de fronteira* sobre V , este nome é razoável pois μ determina e fixa todos os valores que podem assumir os spins do conjunto Σ_V^μ na fronteira de V .

Para definirmos o modelo de Ising na rede \mathbb{L} primeiro fixamos duas famílias de parâmetros: a primeira família é chamada **constante de acoplamento** e é constituída por interações indexadas em cada par de sítios (extremidades de uma aresta) da rede, notação: $J \equiv (J_{ij} : i, j \in \mathbb{V}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{V}}$. A segunda família é chamada de **campo externo** e é formado por números reais indexados nos sítios da rede, notação: $h \equiv (h_i : i \in \mathbb{V}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{V}}$. Suponha que a seguinte condição de regularidade é válida

$$\sum_{j \in \mathbb{V}} |J_{ij}| < \infty, \quad \forall i \in \mathbb{V}. \quad (40)$$

Fixada a constante de acoplamento J satisfazendo a condição de regularidade (40) e o campo externo \mathbf{h} , o **Hamiltoniano do modelo de Ising**, a volume finito $V \subset \mathbb{V}$ com condição de fronteira $\mu \in \Sigma$, é definido pela função $\mathcal{H}_{\mathbf{h},V}^{\mu,\text{Ising}} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\mathcal{H}_{\mathbf{h},V}^{\mu,\text{Ising}}(\sigma) \equiv - \sum_{\substack{i,j \in V \\ \{i,j\} \in \mathbb{E}}} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_{i \in V} h_i \sigma_i - \sum_{\substack{i \in V, j \in \partial V \\ \{i,j\} \in \mathbb{E}}} J_{ij} \sigma_i \mu_j, \sigma \in \Sigma \quad (41)$$

Para cada configuração σ , $\mathcal{H}_{\mathbf{h},V}^{\mu,\text{Ising}}(\sigma)$ é interpretado como a energia do sistema associado a σ .

Cabem destacar duas observações neste ponto. A primeira é que não foi indicada na notação do Hamiltoniano a dependência em J . A razão disso é que estaremos mais interessados em entender como se comporta este modelo quando variamos o campo externo \mathbf{h} . Outra observação é que a condição de regularidade (40) garante que $\mathcal{H}_{\mathbf{h},V}^{\mu,\text{Ising}}(\sigma)$ esteja bem definido para todo $\sigma \in \Sigma$.

Dizemos que o modelo de Ising com constantes de acoplamento $J = (J_{ij} : i, j \in \mathbb{V})$ tem alcance $r \in \mathbb{N}$ se

$$r \equiv \sup_{i,j \in \mathbb{V}} \{ \|i - j\| : J_{ij} \neq 0 \}.$$

Quando $r = 1$, dizemos que o modelo é de **primeiros vizinhos**. Se $1 \leq r < +\infty$, dizemos que o modelo é de **curto alcance** e quando $r = +\infty$, dizemos que o modelo é de **longo alcance**. Uma classe muito importante de acoplamentos é a dos chamados **ferromagnéticos**, que são todos os acoplamentos J tais que $J_{ij} \geq 0$, para todo $i, j \in \mathbb{V}$.

Observação 3.2. Neste trabalho estamos interessados em acoplamentos ferromagnéticos, isto é, $J_{ij} \geq 0 \ \forall i, j \in \mathbb{V}$. Porém, vários resultados obtidos aqui são válidos para acoplamentos mais gerais.

Medidas de Gibbs do modelo de Ising em \mathbb{L} . O próximo passo é definir o conjunto das medidas de Gibbs do modelo de Ising ao inverso da temperatura $\beta > 0$. Esse conjunto será denotado por $\mathcal{G}_{\beta}^{\text{Ising}}(\mathbf{J}, \mathbf{h})$. A construção desse conjunto é bastante elaborada e será feita ao longo desta seção.

Fixe as constantes de acoplamento J , o campo externo $\mathbf{h} = (h_i : i \in \mathbb{V}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{V}}$ e $\beta > 0$. Para cada condição de fronteira $\mu \in \Sigma$ e $V \subset \mathbb{V}$ finito, definimos uma medida de probabilidade $\lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}^{\mu} : \mathcal{B}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que para cada $\sigma \in \Sigma$ temos

$$\lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}^{\mu}(\{\sigma\}) = \begin{cases} \frac{1}{\mathcal{Z}_{\beta, \mathbf{h}, V}^{\mu, \text{Ising}}} e^{-\beta \mathcal{H}_{\mathbf{h}, V}^{\mu, \text{Ising}}(\sigma)}, & \text{se } \sigma \in \Sigma_V^{\mu} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (42)$$

onde $\mathcal{Z}_{\beta, \mathbf{h}, V}^{\mu, \text{Ising}}$ é um fator de normalização chamado de **função de partição** e dado por

$$\mathcal{Z}_{\beta, \mathbf{h}, V}^{\mu, \text{Ising}} = \sum_{\sigma \in \Sigma_V^\mu} e^{-\beta \mathcal{H}_{\mathbf{h}, V}^{\mu, \text{Ising}}(\sigma)}.$$

Para a segunda etapa da construção do conjunto das medidas de Gibbs vamos considerar as medidas de probabilidade construídas acima como elementos do conjunto $\mathcal{M}_1(\Sigma, \mathcal{F})$, que é formado por todas as medidas de probabilidade definidas sobre o espaço mensurável (Σ, \mathcal{F}) , onde \mathcal{F} é a σ -álgebra dos borelianos em Σ . De maneira usual vamos considerar o conjunto $\mathcal{M}_1(\Sigma, \mathcal{F})$ como espaço topológico munido da topologia fraca. Com essa topologia sabemos que o espaço topológico $\mathcal{M}_1(\Sigma, \mathcal{F})$ é metrizável, compacto e, também, é bem conhecido que uma sequência $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_1(\Sigma, \mathcal{F})$ **converge fracamente** para $\nu \in \mathcal{M}_1(\Sigma, \mathcal{F})$ se, e somente se, para toda função contínua limitada $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Sigma} \nu(d\sigma) f(\sigma) = \int_{\Sigma} \nu(d\sigma) f(\sigma).$$

A rigor, na definição de convergência fraca simplesmente deveríamos pedir que a função f seja contínua, pois, pelo Teorema de Tychonoff, o espaço Σ é compacto.

Seja $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência arbitrária em Σ e $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência arbitrária não decrescente de volumes finitos em \mathbb{V} tal que $V_n \uparrow \mathbb{V}$ (convergência no sentido de sequências de conjuntos, isto é, $\cup_{n=1}^{\infty} V_n = \mathbb{V}$). Pela compacidade de $\mathcal{M}_1(\Sigma, \mathcal{F})$ segue que a sequência $(\lambda_{\beta, \mathbf{h}, V_n}^{\mu_n})_{n \in \mathbb{N}}$ possui pelo menos um ponto de acumulação. Então, o seguinte conjunto é não vazio

$$\mathcal{C}((\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}, (V_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \left\{ \nu \in \mathcal{M}_1(\Sigma, \mathcal{F}) : \begin{array}{l} \nu \text{ é um ponto de acumulação} \\ \text{da sequência } (\lambda_{\beta, \mathbf{h}, V_n}^{\mu_n})_{n \in \mathbb{N}} \end{array} \right\}.$$

Agora definimos $G_\beta(\mathbf{J}, \mathbf{h})$ como sendo a união de todas as coleções $\mathcal{C}((\mu_n), (V_n))$ variando $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sobre todas as possíveis sequências em Σ e variando sobre todas as coleções $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ crescentes de volume finito que convergem para \mathbb{V} .

Já que $\mathcal{M}_1(\Sigma, \mathcal{F})$ é um conjunto convexo, podemos definir $\text{Env}(G_\beta(\mathbf{J}, \mathbf{h}))$, a **envoltória convexa** de $G_\beta(\mathbf{J}, \mathbf{h})$, que é simplesmente a interseção de todos os subconjuntos convexos de $\mathcal{M}_1(\Sigma, \mathcal{F})$ contendo $G_\beta(\mathbf{J}, \mathbf{h})$. Finalmente, estamos prontos para dar a definição do conjunto das medidas de Gibbs do modelo de Ising.

Definição 3.2. O conjunto das medidas de Gibbs do modelo de Ising ao inverso da temperatura $\beta > 0$ na rede \mathbb{L} será denotado $\mathcal{G}_\beta^{\text{Ising}}$ e definido como sendo o fecho, na topologia fraca, do conjunto $\text{Env}(G_\beta(\mathbf{J}, \mathbf{h}))$, isto é,

$$\mathcal{G}_\beta^{\text{Ising}} = \overline{\text{Env}(G_\beta(\mathbf{J}, \mathbf{h}))}.$$

Algumas das medidas da forma (42) se destacam no estudo do modelo de Ising. Entre elas estão aquelas obtidas a partir de (42) tomando a condição de fronteira μ tal que $\mu_i = +1$ para todo $i \in \mathbb{L}$ ou $\mu_i = -1$ para todo $i \in \mathbb{L}$. Estas condições de fronteira são chamadas de condições de fronteira mais e menos, respectivamente. Por exemplo, no caso da condição de fronteira ser escolhida como a mais, escrevemos $\lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}^+$ e, analogamente, para a condição de fronteira menos.

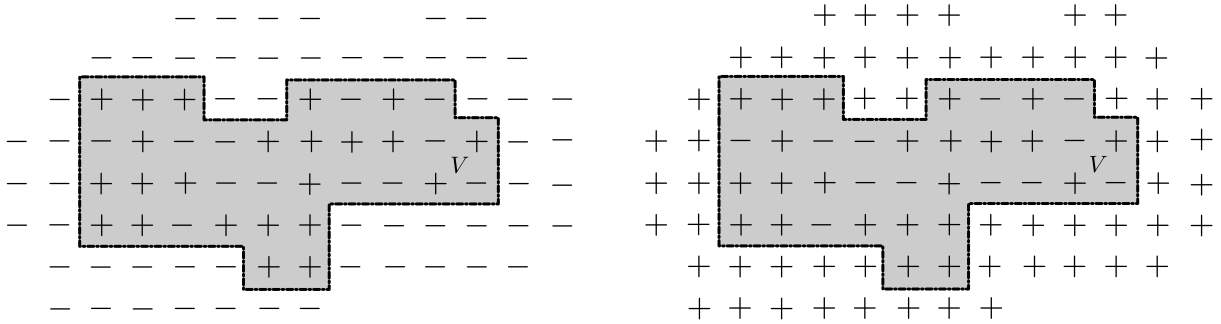


Figura 15: Ao lado esquerdo representamos a condição de fronteira menos $\mu = -$ e no lado direito a condição de fronteira mais $\mu = +$ sobre o volume V .

Omitindo no Hamiltoniano (41) o último somatório, obtemos o chamado *modelo de Ising com condição de fronteira livre*. Esse modelo pode ser pensado como aqueles que acabamos de introduzir mas tomando-se uma “condição de fronteira” $\mu = 0$, isto é, $\mu_i = 0$ para todo $i \in V^c$. As aspas são devidas ao fato de que a rigor $\mu = 0$ não é uma condição de fronteira, pois não é um elemento do espaço Σ . Vamos adotar esta notação porque ela nos fornece uma maneira bastante conveniente para falar do modelo de Ising com condição de fronteira livre.

Dado um subgrafo finito $G = (V, E) \subset \mathbb{L}$, a **medida de Gibbs do modelo de Ising** com condição de fronteira livre sobre o volume V será denotada simplesmente por $\lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}$. Para cada subgrafo finito G fixado, a medida de Gibbs deste modelo está definida sobre $\{-1, +1\}^V$ pela expressão

$$\lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}(\{\sigma\}) = \frac{1}{\mathcal{Z}_{\beta, \mathbf{h}, V}^{\text{Ising}}} e^{-\beta \mathcal{H}_{\mathbf{h}, V}^{\text{Ising}}(\sigma)} \quad (43)$$

onde $\mathcal{Z}_{\beta, \mathbf{h}, V}^{\text{Ising}}$ é a função de partição e $\mathcal{H}_{\mathbf{h}, V}^{\text{Ising}}(\sigma)$ é o Hamiltoniano definido por

$$\mathcal{H}_{\mathbf{h}, V}^{\text{Ising}}(\sigma) = - \sum_{\{i, j\} \in E} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_{i \in V} h_i \sigma_i.$$

Definição 3.3 (Valor esperado-modelo de Ising). *Se $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ é uma variável aleatória, definimos o valor esperado de f com respeito à medida $\lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}^{\mu}$ de maneira usual*

$$\lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}^{\mu}(f) \equiv \int_{\Sigma} \lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}^{\mu}(d\sigma) f(\sigma) = \sum_{\sigma \in \Sigma} f(\sigma) \lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}^{\mu}(\sigma).$$

Nos casos em que as condições de fronteira sejam $\mu = \pm$ ou $\mu = 0$ (livre), usaremos as notações $\lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}^{\pm}$ e $\lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}$ para denotar os respectivos valores esperados.

3.2 O MODELO DE POTTS EM GRAFOS ENUMERÁVEIS

Ao longo desta seção vamos considerar que a rede $\mathbb{L} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ e o parâmetro $q \in \mathbb{Z}_+$ estão fixados. O espaço amostral para este modelo será

$$\Sigma_q \equiv \{\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_i : i \in \mathbb{V}) : \hat{\sigma}_i \in \{1, 2, \dots, q\}, \forall i \in \mathbb{V}\} = \{1, 2, \dots, q\}^{\mathbb{V}},$$

cujos elementos são chamados de configurações de spins. Seja um subgrafo finito de $G = (V, E) \subset \mathbb{L}$ e $\mu \in \Sigma_q$. Analogamente à seção anterior definimos o conjunto (finito)

$$\Sigma_{q, V}^{\mu} \equiv \{\hat{\sigma} \in \Sigma_q : \hat{\sigma}_i = \mu_i \text{ para } i \in \mathbb{V} \setminus V\}.$$

A **medida de Gibbs do modelo de Potts** de q estados com condição de fronteira μ sobre o volume V é definida como sendo a medida de probabilidade $\pi_{\beta, \hat{\mathbf{h}}, q, V}^{\mu}$ sobre $(\Sigma_q, \mathcal{B}(\Sigma_q))$ dada por

$$\pi_{\beta, \hat{\mathbf{h}}, q, V}^{\mu}(\hat{\sigma}) = \begin{cases} \frac{1}{\mathcal{Z}_{\beta, \hat{\mathbf{h}}, q, V}^{\mu, \text{Potts}}} e^{-\beta \mathcal{H}_{\hat{\mathbf{h}}, q, V}^{\mu, \text{Potts}}(\hat{\sigma})}, & \text{se } \hat{\sigma} \in \Sigma_{q, V}^{\mu} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $\mathcal{Z}_{\beta, \hat{\mathbf{h}}, q, V}^{\mu, \text{Potts}}$ é uma constante conhecida como função de partição e expressa por

$$\mathcal{Z}_{\beta, \hat{\mathbf{h}}, q, V}^{\mu, \text{Potts}} = \sum_{\hat{\sigma} \in \Sigma_{q, V}^{\mu}} e^{-\beta \mathcal{H}_{\hat{\mathbf{h}}, q, V}^{\mu, \text{Potts}}(\hat{\sigma})}$$

e o Hamiltoniano $\mathcal{H}_{\mathbf{h},q,V}^{\mu,\text{Potts}}(\hat{\sigma})$ é dado por

$$\mathcal{H}_{\mathbf{h},q,V}^{\mu,\text{Potts}}(\hat{\sigma}) \equiv - \sum_{\substack{i,j \in V \\ \{i,j\} \in E}} J_{ij} \delta_{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j} - \sum_{p=1}^q \sum_{i \in V} \frac{h_{i,p}}{q} \delta_{\hat{\sigma}_i, p} - \sum_{\substack{i \in V, j \in \partial V \\ \{i,j\} \in E}} J_{ij} \delta_{\hat{\sigma}_i, \mu_j} \quad (44)$$

com $\hat{\mathbf{h}} \equiv (h_{i,p} : i \in \mathbb{V}; p = 1, \dots, q) \in \mathbb{R}^{\mathbb{V}} \times \dots \times \mathbb{R}^{\mathbb{V}}$, $J \equiv (J_{ij} : i, j \in \mathbb{V}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{V}}$, $\beta > 0$ o inverso da temperatura e $\delta_{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j}$ é a função delta de Kronecker que vale um se $\hat{\sigma}_i = \hat{\sigma}_j$ e zero caso contrário.

Como no modelo de Ising, algumas condições de fronteira têm papel fundamental no estudo do modelo de Potts. Destacam-se, neste contexto, q condições de fronteira, formadas por configurações de spins que são constantes ao longo de todos os sítios da rede. Este conjunto de condições de fronteira é precisamente o conjunto

$$\{\mu \in \Sigma_q : \exists l \in \{1, \dots, q\} \text{ tal que } \mu_i = l, \forall i \in \mathbb{V}\}.$$

Como na seção anterior, definimos o modelo de Potts a volume finito V com condição de fronteira livre ($\mu \equiv 0$), simplesmente removendo do Hamiltoniano (44) o último somatório. Nesse caso, as notações para a medida de Gibbs, função de partição e Hamiltoniano são $\pi_{\beta, \hat{\mathbf{h}}, q, V}^{\mu}$, $\mathcal{Z}_{\beta, \hat{\mathbf{h}}, q, V}^{\text{Potts}}$ e $\mathcal{H}_{\hat{\mathbf{h}}, q, V}^{\text{Potts}}$, respectivamente. Mantendo a notação da seção anterior, vamos denotar o **valor esperado** de uma variável aleatória $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\pi_{\beta, \hat{\mathbf{h}}, q, V}^{\mu}(f) \equiv \int_{\Sigma_q} \pi_{\beta, \hat{\mathbf{h}}, q, V}^{\mu}(d\hat{\sigma}) f(\hat{\sigma}) = \sum_{\hat{\sigma} \in \Sigma_q} f(\hat{\sigma}) \pi_{\beta, \hat{\mathbf{h}}, q, V}^{\mu}(\hat{\sigma}). \quad (45)$$

O conjunto das medidas de Gibbs do modelo de Potts, ao inverso da temperatura $\beta > 0$ na rede \mathbb{L} , será definido em semelhança ao conjunto das medidas de Gibbs do modelo de Ising e será denotado por $\mathcal{G}_{\beta}^{\text{Potts}}$.

Observação 3.3. *Salientamos que quando estivermos considerando campos externos gerais no modelo de Potts, que são da forma $(h_{i,p} : i \in \mathbb{V}; p = 1, \dots, q) \in \mathbb{R}^{\mathbb{V}} \times \dots \times \mathbb{R}^{\mathbb{V}}$, vamos usar a notação $\hat{\mathbf{h}}$. No caso especial onde $q = 2$ e o campo externo for da forma $h_{i,1} = -h_{i,2} \equiv h_i$ vamos denotá-lo simplesmente por \mathbf{h} em analogia ao modelo de Ising, já que tal notação facilitará a compreensão de argumentos que utilizam a relação entre estes dois modelos.*

Observação 3.4. *O Hamiltoniano do modelo de Potts com $q = 2$ estados e condição de fronteira livre, onde $h_{i,1} = -h_{i,2} = h_i, \forall i \in V$ é dado por*

$$\mathcal{H}_{\mathbf{h},2,V}^{\text{Potts}}(\hat{\sigma}) \equiv - \sum_{\{i,j\} \in E} J_{ij} \delta_{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j} - \sum_{i \in V} \frac{h_i}{2} (\delta_{\hat{\sigma}_i, 1} - \delta_{\hat{\sigma}_i, 2}). \quad (46)$$

Identificadas, para cada $i \in V$, as variáveis de spin (Potts) $\hat{\sigma}_i \in \{1, 2\}$ com as variáveis de spin (Ising) $\sigma_j \in \{+1, -1\}$, fazendo $1 \leftrightarrow 1$ e $2 \leftrightarrow -1$ temos a seguinte relação

$$\delta_{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j} = \frac{1}{4}(1 + \sigma_i)(1 + \sigma_j) + \frac{1}{4}(1 - \sigma_i)(1 - \sigma_j) = \frac{1}{2}(1 + \sigma_i \sigma_j)$$

que usada em (46) nos fornece a igualdade

$$\mathcal{H}_{\mathbf{h}, 2, V}^{\text{Potts}}(\hat{\sigma}) = \frac{1}{2} \mathcal{H}_{\mathbf{h}, V}^{\text{Ising}}(\sigma) - \frac{1}{2} \sum_{\{i, j\} \in E} J_{ij} \equiv - \sum_{\{i, j\} \in E} \frac{J_{ij}}{2} (1 + \sigma_i \sigma_j) - \sum_{i \in V} \frac{h_i}{2} \sigma_i. \quad (47)$$

Com base nessa observação, podemos mostrar o seguinte lema, o qual nos fornece uma equivalência entre o modelo de Potts de dois estados e o modelo de Ising, ambos com condições de fronteira livre.

Lema 3.5. *Seja $G = (V, E)$ um grafo finito, $\hat{\sigma} \in \{1, 2\}^V$ e $\sigma \in \{-1, 1\}^V$ duas configurações correspondentes, segundo a bijeção definida na Observação 3.4. Então para todo $\beta > 0$ temos*

$$\lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}(\sigma) = \pi_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}(\hat{\sigma}).$$

Demonstração. A prova desse lema segue diretamente das definições destas duas medidas de Gibbs, do uso da bijeção definida na Observação 3.4 e da identidade (47). De fato, para o modelo de Ising com condição de fronteira livre, temos

$$\lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}(\sigma) = \frac{1}{\mathcal{Z}_{\beta, \mathbf{h}, V}^{\text{Ising}}} e^{-\beta \mathcal{H}_{\mathbf{h}, V}^{\text{Ising}}(\sigma)} = \frac{1}{\mathcal{Z}_{\beta, \mathbf{h}, V}^{\text{Ising}}} e^{\beta \sum_{\{i, j\} \in E} J_{ij} \sigma_i \sigma_j + \beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i},$$

para qualquer configuração de spins $\sigma \in \Sigma$. Multiplicando e dividindo o lado direito da igualdade acima pelo fator $e^{\beta \sum_{i, j \in V} J_{ij}}$, obtemos

$$\lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}(\sigma) = \frac{1}{\mathcal{Z}_{\beta, \mathbf{h}, V}^{\text{Ising}}} \frac{e^{2\beta \sum_{\{i, j\} \in E} \frac{J_{ij}}{2} (1 + \sigma_i \sigma_j) + 2\beta \sum_{i \in V} \frac{h_i}{2} \sigma_i}}{e^{\beta \sum_{\{i, j\} \in E} J_{ij}}}.$$

Se $\hat{\sigma}$ denota a configuração correspondente a σ segue da identidade (47) que

$$\lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}(\sigma) = \frac{1}{\mathcal{Z}_{\beta, \mathbf{h}, V}^{\text{Ising}}} \frac{e^{-2\beta \mathcal{H}_{\mathbf{h}, 2, V}^{\text{Potts}}(\hat{\sigma})}}{e^{\beta \sum_{\{i, j\} \in E} J_{ij}}}. \quad (48)$$

Como $\lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}$ é uma medida de probabilidade, então de (48) temos

$$\mathcal{Z}_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}^{\text{Potts}} = \mathcal{Z}_{\beta, \mathbf{h}, V}^{\text{Ising}} \cdot e^{\beta \sum_{\{i, j\} \in E} J_{ij}}.$$

Substituindo esta última igualdade no denominador de (48) e usando a definição da medida de Gibbs do modelo de Potts obtemos, finalmente, que $\lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}(\sigma) = \pi_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}(\hat{\sigma})$. \square

Em seguida damos a definição de **função de dois pontos** que será amplamente usada na próxima seção.

Definição 3.4 (Função de dois pontos). *Fixe $q \in \{2, 3, \dots\}$ e o campo externo \hat{h} como em (44). Considere $\pi_{\beta, \hat{h}, q, V}$ a medida de Gibbs do modelo de Potts com q estados definida sobre um grafo finito $G = (V, E)$. A função de dois pontos $\tau_{\beta, \hat{h}, q, V}$ é definida para cada par $x, y \in V$ pela seguinte expressão*

$$\tau_{\beta, \hat{h}, q, V}(x, y) \equiv \pi_{\beta, \hat{h}, q, V}(\sigma_x = \sigma_y) - \frac{1}{q}.$$

Note que na definição acima $1/q$ é exatamente a probabilidade de dois spins independentes, tomando uniformemente q valores sejam iguais.

3.3 O MODELO DE AGLOMERADOS ALEATÓRIOS EM GRAFOS FINITOS

Seja $G = (V, E)$ um grafo finito. O modelo de aglomerados aleatórios sobre o grafo G é definido por uma família de medidas de probabilidade sobre o conjunto de subconjuntos de E . Tomamos o espaço de configurações $\{0, 1\}^E$, cujos os elementos são vetores com entradas 0 e 1: $\omega = (\omega_e : e \in E)$ chamados de configurações. Diremos que uma aresta e é aberta (ou tem estado aberto) em ω se $\omega_e = 1$ e é fechada (ou tem estado fechado) caso contrário. Denotamos $\eta(\omega) = \{e \in E : \omega_e = 1\}$ como o conjunto de arestas abertas em ω . Existe uma correspondência unívoca entre configurações $\omega \in \{0, 1\}^E$ e os subconjuntos $F \subset E$, dado por $F = \eta(\omega)$. Seja $k(\omega, G)$ o número de aglomerados (ou componentes conexas) do grafo $(V, \eta(\omega))$.

Fixada uma configuração $\omega \in \{0, 1\}^E$ dizemos que um caminho $\gamma = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n)$ de G é aberto em ω se todas suas arestas pertencem a $\eta(\omega)$, isto é, $\omega_{e_i} = 1, \forall i = 1, \dots, n$. Dois vértices distintos $x, y \in V$, estarão conectados na configuração ω , e escrevemos $x \leftrightarrow y$, se existe um caminho aberto $\gamma = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n)$ na configuração ω tal que $v_0 = x$ e $v_n = y$. Um subgrafo F de G é dito conexo em ω se quaisquer dois de seus vértices podem ser ligados por um caminho aberto inteiramente contido em F .

A componente conexa de $x \in V$ em ω é formada pelo conjunto de vértices

$$C_x(\omega) \equiv \{y \in V : x \leftrightarrow y \text{ em } \omega\} \cup \{x\}.$$

O conjunto $C_x(\omega)$ é chamado de **aglomerado aberto** de x na configuração ω . Note que $k(\omega, G)$ inclui na contagem vértices isolados. Associaremos com $\{0, 1\}^E$ a σ -álgebra dos subconjuntos de $\{0, 1\}^E$, denotada por \mathcal{F} .

Uma medida de aglomerados aleatórios sobre G tem dois parâmetros $\mathbf{p} \equiv (p_{ij} \in [0, 1] : \{i, j\} \in E) \in [0, 1]^E$ e $q \in \mathbb{Z}^+$, denotada por $\phi_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}$, e é definida sobre o espaço mensurável $(\{0, 1\}^E, \mathcal{F})$ da seguinte maneira

$$\phi_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}(\omega) = \frac{1}{\mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}^{\text{RC}}} B_J(\omega) \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} \sum_{p=1}^q e^{\beta \sum_{i \in K_\alpha(\omega)} h_{i,p}}, \quad \omega \in \{0, 1\}^E, \quad (49)$$

onde $\hat{\mathbf{h}} \equiv (h_{i,p} : i \in V; p = 1, \dots, q) \in \mathbb{R}^V \times \dots \times \mathbb{R}^V$ denota o campo magnético externo, os conjuntos $K_1(\omega), \dots, K_{k(\omega, G)}(\omega)$ são os aglomerados do grafo aleatório $(V, \eta(\omega))$, $B_J(\omega)$ representa o fator de Bernoulli

$$B_J(\omega) \equiv \prod_{\{i,j\}:\omega_{ij}=1} p_{ij} \prod_{\{i,j\}:\omega_{ij}=0} (1 - p_{ij}) \quad (50)$$

e $\mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}^{\text{RC}}$ é a constante de normalização

$$\mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}^{\text{RC}} = \sum_{\omega \in \{0, 1\}^E} B_J(\omega) \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} \sum_{p=1}^q e^{\beta \sum_{i \in K_\alpha(\omega)} h_{i,p}}.$$

Com a notação estabelecida acima, escreveremos o valor esperado de uma variável aleatória $f : \{0, 1\}^E \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\phi_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}(f) \equiv \int_{\{0, 1\}^E} \phi_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}(d\omega) f(\omega) = \sum_{\omega \in \{0, 1\}^E} f(\omega) \phi_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}(\omega). \quad (51)$$

Proposição 3.6. Em (49), seja $q = 2$, $h_{i,1} = -h_{i,2} \equiv h_i$, $i \in V$ e $\mathbf{h} \equiv (h_i : i \in V) \in \mathbb{R}^V$. Para cada $\omega \in \{0, 1\}^E$ temos

$$\phi_{\mathbf{p}, 2, \mathbf{h}, G}(\omega) = \frac{1}{\mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, 2, G}^{\text{RC}}} B_J(\omega) \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} 2 \cosh(\mathbf{h}(K_\alpha)),$$

onde $\mathbf{h}(K_\alpha) \equiv \beta \sum_{i \in K_\alpha(\omega)} h_i$.

Demonstração. Segue diretamente da definição (49) de $\phi_{\mathbf{p}, 2, \mathbf{h}, G}$. \square

Em seguida, introduziremos a definição de função conectividade que será relevante na apresentação de nosso trabalho.

Definição 3.5 (Função conectividade de dois pontos). *A função conectividade de dois pontos no modelo de aglomerados aleatórios, com medida de Gibbs $\phi_{p, \hat{h}, q, G}$, é definida para cada par $x, y \in V$ como sendo a probabilidade que x e y estejam conectados por um caminho de arestas abertas, e sua notação será $\phi_{p, \hat{h}, q, G}(x \leftrightarrow y)$.*

Os valores de q para os quais se tem interesse são os valores inteiros, desde que o modelo de aglomerados aleatórios com $q \in \{2, 3, \dots\}$ corresponda, em certa forma, ao modelo de Potts com q estados. Em contraste, a Seção 3.4 está devotada à teoria de medidas de aglomerados aleatórios sem presença de campo externo e com parâmetro $q > 0$ real.

Acoplamento: modelo de Potts e aglomerados aleatórios em grafos finitos

A família de medidas que governam o modelo de aglomerados aleatórios em grafos finitos não é uma extensão das medidas de Potts. A relação existente é mais sofisticada e é tal que correlações para modelos de Potts correspondem a conexões no modelo de aglomerados aleatórios. Isto é, a estrutura de correlação do modelo de Potts pode ser estudado por meio da geometria estocástica correspondente ao modelo de aglomerados aleatórios.

Fortuin e Kasteleyn descobriram que o modelo de Potts pode ser relacionado com o modelo de aglomerados aleatórios em grafos finitos. Além disso, a relação existente entre esses sistemas facilita o estudo do fenômeno de transição de fase do modelo de Potts. Usando uma técnica conhecida como **acoplamento**, construímos em um espaço probabilidade (comum) os dois modelos. Na literatura, o acoplamento padrão para os modelos de Potts e de aglomerados aleatórios é formado pelas conhecidas *medidas de Edwards-Sokal*. Esses tipos de medidas serão de fundamental importância no que segue.

Enfatizamos que, nesta seção toda, vamos apresentar a primeira e uma das principais partes de nosso trabalho [36] (no entanto, a segunda parte do trabalho [36] será desenvolvida completamente no Capítulo 6). Para isso, consideraremos o modelo de aglomerados aleatórios sobre o grafo finito $G = (V, E)$, segundo a Definição 49.

O **modelo de Edwards-Sokal**, num grafo finito $G = (V, E)$, é definido por uma sequência de medidas de probabilidade sobre o produto cartesiano $\{-1, +1\}^V \times \{0, 1\}^E$. Para definir essas medidas ou acoplamentos, necessitamos introduzir a seguinte notação de consistência para um elemento desse produto cartesiano.

Definição 3.6 (Consistência de configurações). *Diremos que as configurações $\sigma \in \{-1, +1\}^V$ e $\omega \in \{0, 1\}^E$ são consistentes se*

$$\omega_{ij} = 1 \Rightarrow \sigma_i = \sigma_j, \quad \forall \{i, j\} \in E.$$

Para cada elemento $(\sigma, \omega) \in \{-1, +1\}^V \times \{0, 1\}^E$, definimos

$$\Delta(\sigma, \omega) \equiv \mathbb{1}_{\{(\xi, \eta) \in \{-1, +1\}^V \times \{0, 1\}^E : \text{se } \eta_{ij}=1, \text{ então } \xi_i=\xi_j\}}(\sigma, \omega). \quad (52)$$

Fixadas as constantes de acoplamento $\mathbf{J} = (J_{ij} \in [0, \infty] : i, j \in V)$, $q \in \mathbb{Z}^+$ e $\beta > 0$, definimos o parâmetro $\mathbf{p} = (p_{ij} \in [0, 1] : \{i, j\} \in E) \in [0, 1]^E$ por

$$p_{ij} \equiv 1 - e^{-q\beta J_{ij}}.$$

Para cada $(\sigma, \omega) \in \{-1, +1\}^V \times \{0, 1\}^E$, a **medida de Edwards-Sokal a volume finito** $G = (V, E)$ é definida por

$$\nu_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}(\sigma, \omega) \equiv \frac{1}{\mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}^{\text{ES}}} B_{\mathbf{J}}(\omega) \Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} \sum_{p=1}^q h_{i,p} \delta_{\sigma_i, p}}, \quad (53)$$

onde $B_{\mathbf{J}}$ é o fator de Bernoulli definido em (50), $\delta_{\sigma_i, \sigma_j}$ é a função delta de Kronecker que vale um se $\sigma_i = \sigma_j$ e zero caso contrário, $\beta > 0$ é uma variável inverso proporcional à temperatura no sistema e $\mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}^{\text{ES}}$ é a função de partição que é dada por

$$\mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}^{\text{ES}} \equiv \sum_{(\sigma, \omega) \in \{-1, +1\}^V \times \{0, 1\}^E} B_{\mathbf{J}}(\omega) \Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} \sum_{p=1}^q h_{i,p} \delta_{\sigma_i, p}}.$$

Note que

$$\sum_{(\sigma, \omega) \in \{-1, +1\}^V \times \{0, 1\}^E} \nu_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}(\sigma, \omega) = 1.$$

A medida $\nu_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}$ foi introduzida em 1987 por Swendsen e Wang [114] e feito mais explícita por Edwards e Sokal em 1988. Em seguida apresentaremos uma serie de resultados prévios para poder provar o seguinte teorema que estabelece que a ω -marginal de $\nu_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}$ é a medida de aglomerados aleatórios e a σ -marginal é a medida de Gibbs para o modelo de Ising, significando que $\nu_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}$ é um acoplamento de $\lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}$ e $\phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}$, sempre que $q = 2$. Um resultado análogo para o caso $q \in \{2, 3, \dots\}$ é apresentado mais à frente, generalizando os argumentos que apresentar-se-ão em seguida.

Lema 3.7. *Seja $\beta > 0$, $Q \in \mathbb{R}^+$ e $q \in \mathbb{Z}^+$. Então*

$$e^{qQ(\delta_{a,b}-1)} = e^{-qQ} + \left[1 - e^{-qQ}\right] \delta_{a,b},$$

para cada $a, b \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Podemos verificar diretamente que

$$e^{qQ(\delta_{a,b}-1)} = \delta_{a,b} + (1 - \delta_{a,b}) \cdot e^{-qQ} = \left[1 - e^{-qQ}\right] \delta_{a,b} + e^{-qQ} = e^{-qQ} + \left[1 - e^{-qQ}\right] \delta_{a,b},$$

o que conclui a prova. \square

Para mostrar a arte das medidas de Edwards-Sokal, apresentaremos nesta seção o caso $q = 2$. O caso geral $q \in \{2, 3, \dots\}$ será apresentado na Seção 2 do Apêndice, pois este caso tem provas similares ao caso $q = 2$ com suas respectivas adaptações.

CASO $q = 2$:

A seguinte observação e a Proposição 3.6 são muito importantes no decorrer da apresentação deste caso.

Observação 3.8. Em (53), fazendo $q = 2$, $h_{i,1} = -h_{i,2} = h_i$, $\forall i \in V$, $h \equiv (h_i : i \in V)$ e identificando, para cada $i \in V$, as variáveis de spin (Potts) $\hat{\sigma}_i \in \{1, 2\}$ com as variáveis de spin (Ising) $\sigma_j \in \{+1, -1\}$, isto é, fazendo $1 \leftrightarrow 1$ e $2 \leftrightarrow -1$ temos a seguinte relação:

$$\nu_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\sigma, \omega) = \frac{1}{\mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}^{\text{ES}}} B_{\mathbf{J}}(\omega) \Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i}.$$

Lema 3.9 (Veja referência [36]). *Seja $G = (V, E)$ um grafo finito. Considere o modelo de Potts de dois estados com Hamiltoniano dado por (46) ao inverso da temperatura $\beta > 0$ com constantes de acomplamento $\mathbf{J} = (J_{ij} : i, j \in \mathbb{V})$ e campo magnético $\mathbf{h} = (h_i : i \in V)$ tal que $h_i \equiv h_{i,1} = -h_{i,2}$. Seja $p_{ij} \equiv 1 - e^{-2\beta J_{ij}}$. Então*

$$e^{-2\beta(\mathcal{H}_{\mathbf{h}, 2, V}^{\text{Potts}}(\hat{\sigma}) + \sum_{\{i,j\} \in E} J_{ij})} = \sum_{\omega \in \{0,1\}^E} \left(\prod_{\{i,j\}:\omega_{ij}=1} p_{ij} \delta_{\sigma_i, \sigma_j} \prod_{\{i,j\}:\omega_{ij}=0} (1 - p_{ij}) \right) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i},$$

para cada $\hat{\sigma} \in \{1, 2\}^V$ e $\sigma \in \{-1, +1\}^V$.

Demonstração. Usando a definição do Hamiltoniano (46) e sua relação com o Item (47), veja que

$$\begin{aligned} e^{-2\beta(\mathcal{H}_{\mathbf{h}, 2, V}^{\text{Potts}}(\hat{\sigma}) + \sum_{\{i,j\} \in E} J_{ij})} &= e^{2\beta(\sum_{\{i,j\} \in E} J_{ij}(\delta_{\sigma_i, \sigma_j} - 1) + \sum_{i \in V} h_i \frac{1}{2}(\delta_{\sigma_i, 1} - \delta_{\sigma_i, -1}))} \\ &= e^{2\beta \sum_{\{i,j\} \in E} J_{ij}(\delta_{\sigma_i, \sigma_j} - 1)} \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i}, \end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade, usamos a identidade $\delta_{\sigma_i, \sigma_j} = \frac{1}{2}(1 + \sigma_i \sigma_j)$. Usando $p_{ij} = 1 - e^{-2\beta J_{ij}}$ e o Lema 3.7 com $q = 2$, $Q = \beta J_{ij}$ e $a = \sigma_i, b = \sigma_j$, temos que a primeira exponencial da segunda igualdade acima se escreve

$$= \prod_{\{i,j\} \in E} (p_{ij} \delta_{\sigma_i, \sigma_j} + (1 - p_{ij})) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i}.$$

Aplicando o Lema 1.7 na expressão acima, ficamos com

$$= \sum_{E' \subset E} \left(\prod_{\{i,j\} \in E'} p_{ij} \delta_{\sigma_i, \sigma_j} \prod_{\{i,j\} \in E \setminus E'} (1 - p_{ij}) \right) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i}. \quad (54)$$

Note que o conjunto de todos os pares da forma $(E', E \setminus E')$, onde $E' \subset E$, está em bijeção com o conjunto $\{0, 1\}^E$. De fato, a aplicação $(E', E \setminus E') \mapsto \{1\}^{E'} \times \{0\}^{E \setminus E'}$ fornece tal bijeção. Usando essa identificação a expressão (54) se reescreve

$$= \sum_{\omega \in \{0,1\}^E} \left(\prod_{\{i,j\}: \omega_{ij}=1} p_{ij} \delta_{\sigma_i, \sigma_j} \prod_{\{i,j\}: \omega_{ij}=0} (1 - p_{ij}) \right) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i},$$

o que conclui a demonstração. \square

Lema 3.10 (Veja referência [36]). *Seja $G = (V, E)$ um grafo finito. Considere o modelo de Potts de dois estados com Hamiltoniano dado por (46) ao inverso da temperatura $\beta > 0$ com constantes de acomplamento $\mathbf{J} = (J_{ij} : i, j \in \mathbb{V})$ e campo magnético $\mathbf{h} = (h_i : i \in V)$ tal que $h_i \equiv h_{i,1} = -h_{i,2}$. Seja $p_{ij} \equiv 1 - e^{-2\beta J_{ij}}$. Então existe uma constante $C \equiv C(\beta, G) > 0$ tal que*

$$\mathcal{Z}_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}^{\text{Potts}} = C \mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}^{\text{ES}}.$$

Demonstração. Observe que a função de partição do modelo de Potts de dois estados com Hamiltoniano dado por (46) pode ser representada como

$$\mathcal{Z}_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}^{\text{Potts}} = \sum_{\hat{\sigma} \in \{1,2\}^V} e^{-2\beta \mathcal{H}_{\mathbf{h}, 2, V}^{\text{Potts}}(\hat{\sigma})} = \frac{1}{e^{-2\beta \sum_{\{i,j\} \in E} J_{ij}}} \sum_{\sigma \in \{-1, +1\}^V} e^{-2\beta (\mathcal{H}_{\mathbf{h}, 2, V}^{\text{Potts}}(\hat{\sigma}) + \sum_{\{i,j\} \in E} J_{ij})}.$$

Definindo $C \equiv e^{2\beta \sum_{\{i,j\} \in E} J_{ij}} > 0$ e usando o Lema 3.9, podemos verificar que a expressão do lado direito da igualdade acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} &= C \sum_{\sigma, \omega} \left(\prod_{\{i,j\}: \omega_{ij}=1} p_{ij} \delta_{\sigma_i, \sigma_j} \prod_{\{i,j\}: \omega_{ij}=0} (1 - p_{ij}) \right) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i} \\ &= C \sum_{\sigma, \omega} \left(\prod_{\{i,j\}: \omega_{ij}=1} p_{ij} \prod_{\{i,j\}: \omega_{ij}=0} (1 - p_{ij}) \right) \Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i} \\ &= C \sum_{\sigma, \omega} B_J(\omega) \Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i} = C \mathcal{Z}_{p, h, 2, G'}^{\text{ES}} \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, usamos a Observação 3.8. □

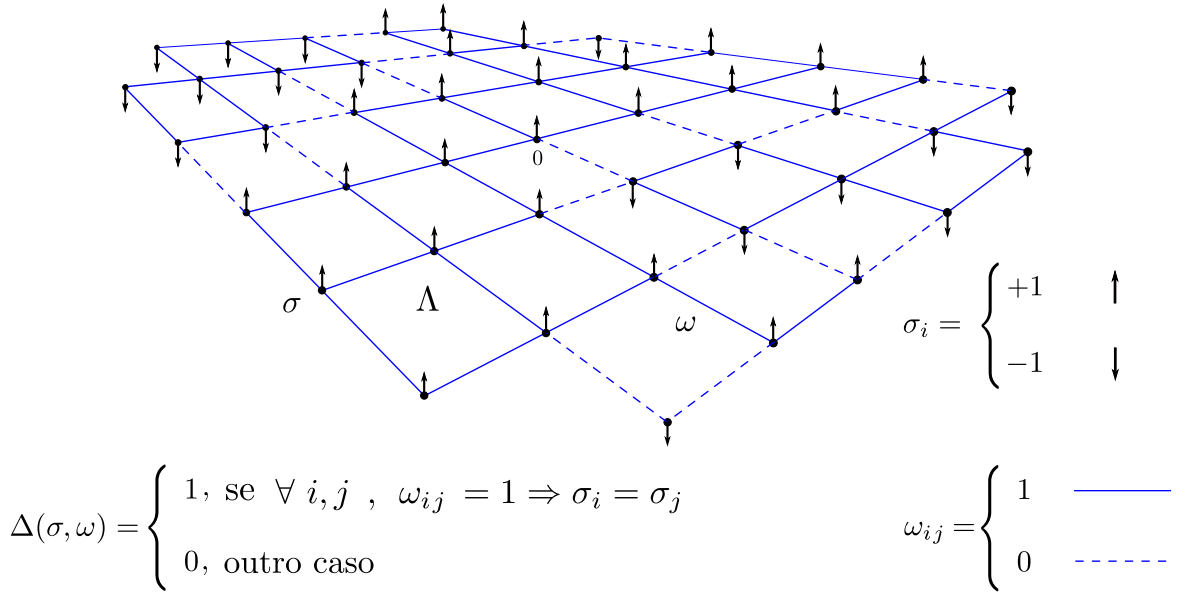


Figura 16: Observe que, dada uma configuração $\omega \in \{0, 1\}^E$, a condição de consistência determinada por $\Delta(\sigma, \omega)$ força todos os spins dos vértices de cada aglomerado de ω a ter o mesmo sinal (ou mesma cor) em σ .

Lema 3.11 (Veja referência [36]). *Seja $\beta > 0$ o inverso da temperatura, $G = (V, E) \subset \mathbb{L}$ um subgrafo finito, $\omega \in \{0, 1\}^E$ fixado e $\Delta(\sigma, \omega)$ como definido em (52). Denote por $k(\omega, G)$, o número de aglomerados do grafo $(V, \eta(\omega))$. Então a seguinte identidade é válida.*

$$\sum_{\sigma \in \{-1, +1\}^V} \Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i} = \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} 2 \cosh(\mathbf{h}(K_\alpha)),$$

onde $\mathbf{h}(K_\alpha) \equiv \beta \sum_{i \in K_\alpha} h_i$ e os conjuntos $K_1, \dots, K_{k(\omega, G)}$ denotam os aglomerados de $(V, \eta(\omega))$.

Demonstração. Decompondo a soma em V sobre os aglomerados do grafo $(V, \eta(\omega))$ temos a seguinte igualdade

$$\sum_{i \in V} h_i \sigma_i = \sum_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} \sum_{i \in K_\alpha} h_i \sigma_i.$$

Para cada configuração de spins $\sigma \in \{-1, 1\}^V$ tal que o par $(\sigma, \omega) \in \{-1, 1\}^V \times \{0, 1\}^E$ satisfaz $\Delta(\sigma, \omega) = 1$, temos que os spins em cada aglomerado de $(V, \eta(\omega))$ têm o mesmo sinal (veja Figura 16 acima).

Pelas propriedades elementares da função exponencial e pelas observações feitas acima segue que

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \{-1, +1\}^V} \Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i} &= \sum_{\sigma \in \{-1, +1\}^V} \Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} \sum_{i \in K_\alpha} h_i \sigma_i} \\ &= \sum_{\sigma \in \{-1, +1\}^V} \Delta(\sigma, \omega) \cdot \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} e^{\beta \sum_{i \in K_\alpha} h_i \sigma_i}. \end{aligned} \quad (55)$$

Considerando a decomposição V em seus aglomerados, segundo a configuração ω , temos $V = \sqcup_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} K_\alpha$. Essa decomposição define uma bijeção natural entre os espaços

$$\{-1, +1\}^V \quad \text{e} \quad \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} \{-1, +1\}^{K_\alpha}.$$

Por questão de simplicidade, denotamos um elemento genérico do produto cartesiano $\prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} \{-1, +1\}^{K_\alpha}$ por $(\sigma_{K_1}, \dots, \sigma_{K_{k(\omega, G)}})$, onde $\sigma_{K_j} \equiv (\sigma_i : i \in K_j)$ para cada $j = 1, \dots, k(\omega, G)$. Dessa forma podemos fazer a seguinte identificação

$$\sigma = (\sigma_{K_1}, \dots, \sigma_{K_{k(\omega, G)}}).$$

Abusando um pouco da notação, podemos escrever

$$\Delta(\sigma, \omega) = \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} \Delta(\sigma_{K_\alpha}, \omega).$$

Usando, agora, as relações estabelecidas acima temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma} \Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i} &= \sum_{(\sigma_{K_1}, \dots, \sigma_{K_{k(\omega, G)}})} \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} \Delta(\sigma_{K_\alpha}, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in K_\alpha} h_i \sigma_i} \\ &= \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} \sum_{\sigma_{K_\alpha}} \Delta(\sigma_{K_\alpha}, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in K_\alpha} h_i \sigma_i}. \end{aligned}$$

Por causa da condição de consistência, para cada α fixado cada um dos somatórios que aparecem do lado direito acima têm exatamente duas parcelas não nulas, uma dada pela configuração onde todos os spins em K_α assumem o valor $+1$, e a outra dada pela configuração onde todos os spins de K_α assumem o valor -1 . Portanto, a expressão acima se reduz a

$$= \prod_{\alpha=1}^{k(\omega,G)} 2 \cosh \left(\beta \sum_{i \in K_\alpha} h_i \right),$$

concluindo-se a prova. \square

Lema 3.12 (Veja referência [36]). *Seja $G = (V, E)$ um grafo finito, $p_{ij} \equiv 1 - e^{-2\beta J_{ij}}$, $\mathbf{h} = (h_i : i \in V)$ e $\beta > 0$. Logo*

$$\mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}^{\text{ES}} = \mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}^{\text{RC}}.$$

Demonstração. Basta reordenar as somas que definem a função de partição do modelo de Edwards-Sokal (Observação 3.8) e, em seguida, usar o Lema 3.11 e a definição da função de partição do modelo de aglomerados aleatórios para $q = 2$ (Proposição 3.6), como mostrado abaixo.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}^{\text{ES}} &= \sum_{\sigma, \omega} B_J(\omega) \Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i} = \sum_{\omega} B_J(\omega) \sum_{\sigma} \Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i} \\ &= \sum_{\omega} B_J(\omega) \cdot \prod_{\alpha=1}^{k(\omega,G)} 2 \cosh(\mathbf{h}(K_\alpha)) = \mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}^{\text{RC}}. \end{aligned}$$

\square

A seguinte proposição está relacionada com o conceito de **energia livre**. Se $G = (V, E)$ é um subgrafo finito de $\mathbb{L} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$, a energia livre para o modelo de Potts é definida por

$$f_{2\beta, \mathbf{h}}^{\text{Potts}} \equiv - \lim_{V \uparrow \mathbb{V}} \frac{1}{|V|} \log \mathcal{Z}_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}^{\text{Potts}},$$

sempre que este limite exista.

Analogamente, definimos a energia livre para o modelo de aglomerados aleatórios, notação: $f_{\mathbf{p}, \mathbf{h}}^{\text{RC}}$, sempre que o limite respectivo exista.

Proposição 3.13. *Considere o modelo de Potts com constante de acoplamento constante, isto é, $J_{i,j} = J, \forall i, j$. Sobre a rede hipercúbica d -dimensional, a seguinte relação*

$$f_{2\beta, \mathbf{h}}^{\text{Potts}} + 4\beta J = 2f_{\mathbf{p}, \mathbf{h}}^{\text{RC}}$$

entre energias livres, dos modelo de Potts e de aglomerados aleatórios, é válida. Claramente, estamos supondo que os limites, respectivos, que definem as energias livres existem.

Demonstração. Consideremos a caixa $\Lambda_n = [-n, n] \cap \mathbb{Z}^d$, $n \geq 1$ e denotemos por E_{Λ_n} seu conjunto de arestas. Note que, $|E_{\Lambda_n}| = 2(3)^d$ e $|\Lambda_n| = 3^d$, o que implica $|E_{\Lambda_n}|/|\Lambda_n| = 2$.

Por outro lado, dos Lemas 3.10 e 3.12, temos

$$\mathcal{Z}_{2\beta, \mathbf{h}, 2, \Lambda_n}^{\text{Potts}} = e^{2\beta J |E_{\Lambda_n}|} \mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}^{\text{RC}}.$$

Usando as relações acima, obtemos

$$\begin{aligned} f_{2\beta, \mathbf{h}}^{\text{Potts}} + 4\beta J &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \log \left(e^{-2\beta J |E_{\Lambda_n}|} \mathcal{Z}_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}^{\text{Potts}} \right) \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \log \mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}^{\text{RC}} = 2 \left(- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|E_{\Lambda_n}|} \log \mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}^{\text{RC}} \right) = 2f_{\mathbf{p}, \mathbf{h}}^{\text{RC}}, \end{aligned}$$

o que encerra a prova. \square

Em particular, comportamentos singulares das energias livres $f_{2\beta, \mathbf{h}}^{\text{Potts}}$ e $f_{\mathbf{p}, \mathbf{h}}^{\text{RC}}$ de ambos os modelos são relacionados e, portanto, pode-se estudar o fenômeno de transição de fase do modelo de Potts através da transição de fase do modelo de aglomerados aleatórios.

A seguir enunciaremos e provaremos o principal resultado (próximo teorema) desta seção. A parte técnica da demonstração desse resultado foi praticamente feita nos lemas anteriores e, a partir de agora, nosso trabalho é apenas usá-los de maneira adequada.

Teorema 3.14 (Medidas marginais de $\nu_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, G}$, veja [36]). *Seja $G = (V, E)$ um grafo finito, $\beta > 0$, $p_{ij} \equiv 1 - e^{-2\beta J_{ij}}$ como acima e $\mathbf{h} = (h_i : i \in V)$ um campo magnético arbitrário. Então*

- (1) $\sum_{\omega \in \{0,1\}^E} \nu_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\sigma, \omega) = \lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}(\sigma)$ (σ -marginal de $\nu_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, G}$)
- (2) $\sum_{\sigma \in \{-1,+1\}^V} \nu_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\sigma, \omega) = \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\omega)$ (ω -marginal de $\nu_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, G}$).

Demonstração. (1) Usando as definições do fator de Bernoulli B_J , da medida de probabilidade do modelo de Edwards-Sokal e o Lema 3.10 com $C \equiv e^{2\beta \sum_{\{i,j\} \in E} J_{ij}}$ obtemos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \{0,1\}^E} \nu_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\sigma, \omega) &= \frac{1}{\mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}^{\text{ES}}} \sum_{\omega \in \{0,1\}^E} B_J(\omega) \Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i} \\ &= \frac{C}{\mathcal{Z}_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}^{\text{Potts}}} \sum_{\omega \in \{0,1\}^E} \left(\prod_{\{i,j\}: \omega_{ij}=1} p_{ij} \delta_{\sigma_i, \sigma_j} \prod_{\{i,j\}: \omega_{ij}=0} (1 - p_{ij}) \right) e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i}. \end{aligned}$$

Aplicando, agora, o Lema 3.9, podemos verificar que o lado direito da igualdade fica

$$\begin{aligned} &= \frac{C}{\mathcal{Z}_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}^{\text{Potts}}} e^{-2\beta(\mathcal{H}_{\mathbf{h}, 2, V}^{\text{Potts}}(\hat{\sigma}) + \sum_{\{i,j\} \in E} J_{ij})} \\ &= \pi_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}(\hat{\sigma}) = \lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}(\sigma), \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, usamos o Lema 3.5.

Passaremos, agora, para a prova do Item (2). Para calcular a ω -marginal de ν , basta usar a definição da medida do modelo de Edwards-Sokal, em seguida, observar que o fator de Bernoulli é constante com respeito a soma em σ e, por último, aplicar os Lemas 3.11 e 3.12, como mostrado abaixo.

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \{-1, +1\}^V} \nu_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\sigma, \omega) &= \frac{1}{\mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}^{\text{ES}}} B_{\mathbf{J}}(\omega) \sum_{\sigma \in \{-1, +1\}^V} \Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i} \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}^{\text{RC}}} B_{\mathbf{J}}(\omega) \cdot \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} 2 \cosh(\mathbf{h}(K_{\alpha})) = \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\omega). \end{aligned}$$

Note que na última igualdade usamos a Proposição 3.6. □

Corolário 3.15 (Medida condicional de $\nu_{\beta, \mathbf{h}, G}$, veja [36]). *Dada uma configuração $\omega \in \{0, 1\}^E$, para cada $\sigma \in \{-1, +1\}^V$ temos*

$$\nu_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\sigma | \omega) = \frac{1}{\prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} 2 \cosh(\mathbf{h}(K_{\alpha}))} \Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i}.$$

Demonstração. Relembrando a definição da medida de probabilidade $\pi_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}(\cdot)$ dada em (45), segue do Lema 3.9, onde para qualquer variável aleatória $g : \{1, 2\}^V \rightarrow \mathbb{R}$ são válidas as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \pi_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}(g) &= \sum_{\hat{\sigma} \in \{1, 2\}^V} g(\hat{\sigma}) \pi_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}(\hat{\sigma}) \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}^{\text{Potts}}} \sum_{\hat{\sigma} \in \{1, 2\}^V} g(\hat{\sigma}) \cdot e^{-2\beta \mathcal{H}_{\mathbf{h}, 2, V}^{\text{Potts}}(\hat{\sigma})} \\ &= \frac{C}{\mathcal{Z}_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}^{\text{Potts}}} \sum_{\hat{\sigma} \in \{1, 2\}^V} g(\hat{\sigma}) \cdot e^{-2\beta(\mathcal{H}_{\mathbf{h}, 2, V}^{\text{Potts}}(\hat{\sigma}) + \sum_{\{i,j\} \in E} J_{ij})} \\ &= \frac{C}{\mathcal{Z}_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}^{\text{Potts}}} \sum_{\sigma \in \{-1, +1\}^V} g(\sigma) \sum_{\omega \in \{0, 1\}^E} \prod_{\{i,j\}: \omega_{ij}=1} p_{ij} \delta_{\sigma_i, \sigma_j} \prod_{\{i,j\}: \omega_{ij}=0} (1 - p_{ij}) e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i}, \end{aligned}$$

onde $C \equiv e^{2\beta \sum_{\{i,j\} \in E} J_{ij}} > 0$. Usando a definição do fator de Bernoulli, as condições de consistência e rearranjando a ordem dos somatórios, podemos reescrever a última expressão do lado direito acima como segue

$$\begin{aligned} &= \frac{C}{\mathcal{Z}_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}^{\text{Potts}}} \sum_{\sigma \in \{-1, +1\}^V} g(\sigma) \sum_{\omega \in \{-1, +1\}^E} B_J(\omega) \Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i} \\ &= \frac{C}{\mathcal{Z}_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}^{\text{Potts}}} \sum_{\omega \in \{0, 1\}^E} B_J(\omega) \sum_{\sigma \in \{-1, +1\}^E} g(\sigma) \Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i}. \end{aligned}$$

Segue dos Lemas 3.10 e 3.12 que $C^{-1} \mathcal{Z}_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}^{\text{Potts}} = \mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}^{\text{ES}} = \mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}^{\text{RC}}$. Multiplicando e dividindo a última expressão pelo produto que aparece na definição da medida do modelo de aglomerados aleatórios podemos verificar que a expressão acima é

$$\begin{aligned} &= \sum_{\omega} \frac{B_J(\omega) \cdot \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} 2 \cosh(\mathbf{h}(K_{\alpha}))}{\mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}^{\text{RC}}} \sum_{\sigma} g(\sigma) \frac{\Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i}}{\prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} 2 \cosh(\mathbf{h}(K_{\alpha}))} \\ &= \sum_{\omega \in \{0, 1\}^E} \sum_{\sigma \in \{-1, +1\}^V} g(\sigma) \frac{\Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i}}{\prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} 2 \cosh(\mathbf{h}(K_{\alpha}))} \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\omega). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\pi_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}(g) = \sum_{\omega} \left[\sum_{\sigma} g(\sigma) \frac{\Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i}}{\prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} 2 \cosh(\mathbf{h}(K_{\alpha}))} \right] \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\omega). \quad (56)$$

Por outro lado, usando o Teorema 3.14, temos

$$\begin{aligned} \pi_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}(g) &= \sum_{\hat{\sigma} \in \{1, 2\}^V} g(\hat{\sigma}) \pi_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}(\hat{\sigma}) = \sum_{(\sigma, \omega) \in \{-1, +1\}^V \times \{0, 1\}^E} g(\sigma) \nu_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\sigma, \omega) \\ &= \sum_{\omega} \left[\sum_{\sigma} g(\sigma) \nu_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\sigma | \omega) \right] \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\omega). \quad (57) \end{aligned}$$

Finalmente, comparando (56) e (57) obtemos a conclusão. \square

O próximo teorema de correlação-conectividade (veja Teorema 3.17) relaciona a medida de Potts e a medida de aglomerados aleatórios sobre grafos finitos. Esse teorema é de grande importância em nosso trabalho [36] pois, além de estabelecer uma relação muito bonita, nos dá uma alternativa de possível cálculo de probabilidade do evento $\{\sigma_x = \sigma_y\}$ com respeito à medida de Potts via medida de aglomerados aleatórios de eventos de conectividade entre os spins σ_x e σ_y . Em linhas gerais, esse teorema generaliza vários resultados expostos no livro clássico [65], por exemplo, se generaliza

o Teorema 1.16, p. 11 desta referência quando se tenha ausência de campo externo (isto é, $\hat{\mathbf{h}} \equiv 0$). Antes de formular dito teorema, introduzimos o seguinte lema técnico.

Lema 3.16 (Veja referência [36]). *Seja $G = (V, E)$ um grafo finito, $x, y \in V$ vértices distintos e $\omega \in \{0, 1\}^E$ uma configuração de arestas fixa. Se $x \not\leftrightarrow y$ em ω , então*

$$\sum_{\sigma \in \{-1, +1\}^V} \mathbb{1}_{\{\sigma_x = \sigma_y\}} \Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i} = 2 \cosh(\mathbf{h}(K_t) + \mathbf{h}(K_u)) \cdot \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq t, u}}^{k(\omega, G)} 2 \cosh(\mathbf{h}(K_\alpha)),$$

onde $K_t(\omega) \equiv K_t(\omega, x)$ e $K_u(\omega) \equiv K_u(\omega, y)$ são aglomerados disjuntos (de vértices) contendo os vértices x e y respectivamente e $\mathbf{h}(K_\alpha) \equiv \beta \sum_{i \in K_\alpha} h_i$.

Demonstração. A técnica usada na prova deste lema é semelhante àquela usada na prova do Lema 3.11. Seja $V = \sqcup_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} K_\alpha$ a decomposição do conjunto V em termos das componentes conexas do grafo $(V, \eta(\omega))$. Lembramos que

$$\{-1, +1\}^V \cong \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} \{-1, 1\}^{K_\alpha} \quad (58)$$

e que um elemento genérico deste produto cartesiano será denotado por $(\sigma_{K_1}, \dots, \sigma_{K_{k(\omega, G)}})$, onde $\sigma_{K_j} \equiv (\sigma_i : i \in K_j)$, $\forall j = 1, \dots, k(\omega, G)$. De maneira natural identificamos $\sigma = (\sigma_{K_1}, \dots, \sigma_{K_{k(\omega, G)}})$.

Suponha que x e y são vértices distintos, tais que $x \not\leftrightarrow y$ em ω . Sejam K_t e K_u aglomerados (disjuntos) contendo os vértices x e y , respectivamente. Considerando a decomposição de V mencionada acima temos imediatamente a seguinte igualdade

$$\sum_{\sigma} \mathbb{1}_{\{\sigma_x = \sigma_y\}} \Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i} = \sum_{\sigma} \mathbb{1}_{\{\sigma_x = \sigma_y\}} \Delta(\sigma, \omega) \cdot \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} e^{\beta \sum_{i \in K_\alpha} h_i \sigma_i}.$$

O próximo passo é decompor o evento $\{\sigma_x = \sigma_y\}$ de forma que possamos reescrever a expressão acima como segue

$$= \sum_{\sigma} \mathbb{1}_{\{\sigma_x = \sigma_y = +1\}} \Delta(\sigma, \omega) \cdot \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} e^{\beta \sum_{i \in K_\alpha} h_i \sigma_i} + \sum_{\sigma} \mathbb{1}_{\{\sigma_x = \sigma_y = -1\}} \Delta(\sigma, \omega) \cdot \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} e^{\beta \sum_{i \in K_\alpha} h_i \sigma_i}.$$

Como observado anteriormente, temos $\Delta(\sigma, \omega) = \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} \Delta(\sigma_{K_\alpha}, \omega)$. Usando o Teorema de Fubini-Tonelli (veja Apêndice, Teorema .24), reescrevemos a expressão acima como

$$\begin{aligned}
 &= e^{\mathbf{h}(K_t) + \mathbf{h}(K_u)} \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq t, u}}^{k(\omega, G)} \sum_{\sigma_{K_\alpha}} \Delta(\sigma_{K_\alpha}, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in K_\alpha} h_i \sigma_i} + e^{-\mathbf{h}(K_t) - \mathbf{h}(K_u)} \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq t, u}}^{k(\omega, G)} \sum_{\sigma_{K_\alpha}} \Delta(\sigma_{K_\alpha}, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in K_\alpha} h_i \sigma_i} \\
 &= 2 \cosh(\mathbf{h}(K_t) + \mathbf{h}(K_u)) \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq t, u}}^{k(\omega, G)} \sum_{\sigma_{K_\alpha}} \Delta(\sigma_{K_\alpha}, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in K_\alpha} h_i \sigma_i}. \tag{59}
 \end{aligned}$$

Por causa da condição de consistência, a somatória sobre σ_{K_α} possui apenas duas parcelas não nulas. Nessas parcelas os valores dos spins são constantes, igual a um ou menos um e, portanto, temos que o produtório acima admite uma forma mais simples dada por

$$\begin{aligned}
 \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq t, u}}^{k(\omega, G)} \sum_{\sigma_{K_\alpha}} \Delta(\sigma_{K_\alpha}, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in K_\alpha} h_i \sigma_i} &= \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq t, u}}^{k(\omega, G)} \left[e^{\mathbf{h}(K_\alpha)} + e^{-\mathbf{h}(K_\alpha)} \right] \\
 &= \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq t, u}}^{k(\omega, G)} 2 \cosh(\mathbf{h}(K_\alpha)). \tag{60}
 \end{aligned}$$

Finalmente, substituindo (60) em (59) concluímos a prova. \square

Para enunciar o próximo teorema de correlação-conectividade necessitaremos relembrar as Definições 3.4 e 3.5 (com $q = 2$ e $h_{i,1} = -h_{i,2} \equiv -h_i$), dadas nas Seções 3.2 e 3.3, respectivamente. O Lema 3.16 é de fundamental importância na prova deste teorema.

Teorema 3.17 (Correlação-conectividade, veja [36]). *Seja $G = (V, E)$ um grafo finito, x e y dois vértices distintos no grafo G . Então*

$$\tau_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}(x, y) = \frac{1}{2} \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(x \leftrightarrow y) + \frac{1}{2} \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G} \left(\mathbb{1}_{\{x \not\leftrightarrow y\}} \cdot \tanh(\mathbf{h}(K_t)) \cdot \tanh(\mathbf{h}(K_u)) \right),$$

onde $K_t(\omega) \equiv K_t(\omega, x)$ e $K_u(\omega) \equiv K_u(\omega, y)$ são aglomerados disjuntos (de vértices) contendo os vértices x e y , respectivamente na configuração ω , $\mathbf{h}(K_\alpha) \equiv \beta \sum_{i \in K_\alpha} h_i$ e $\phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\cdot)$ foi definido em (51).

Demonstração. Usando a definição da função de dois pontos (Definição 3.4) e fazendo algumas manipulações simples podemos observar que

$$\begin{aligned}
 \tau_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}(x, y) &= \pi_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}(\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_y) - \frac{1}{2} \\
 &= \sum_{\hat{\sigma} \in \{1, 2\}^V} \left(\mathbb{1}_{\{\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_y\}} - \frac{1}{2} \right) \pi_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}(\hat{\sigma}) \\
 &= \sum_{(\sigma, \omega) \in \{-1, +1\}^V \times \{0, 1\}^E} \left(\mathbb{1}_{\{\sigma_x = \sigma_y\}} - \frac{1}{2} \right) \nu_{\beta, \mathbf{h}, 2, G}(\sigma, \omega) \\
 &= \sum_{\omega \in \{0, 1\}^E} \left[\sum_{\sigma \in \{-1, +1\}^V} \left(\mathbb{1}_{\{\sigma_x = \sigma_y\}} - \frac{1}{2} \right) \nu_{\beta, \mathbf{h}, 2, G}(\sigma | \omega) \right] \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\omega), \quad (61)
 \end{aligned}$$

onde, na terceira igualdade, invocamos o Teorema 3.14. Uma vez que $\delta_{\sigma_i, \sigma_j} = \frac{1}{2}(1 + \sigma_i \sigma_j)$, segue do Corolário 3.15 que o lado direito da expressão acima é

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\omega} \left[\sum_{\sigma} \left(\mathbb{1}_{\{\sigma_x = \sigma_y\}} - \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i}}{\prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} 2 \cosh(\mathbf{h}(K_{\alpha}))} \right] \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\omega) \\
 &= \sum_{\omega} \mathbb{1}_{\{x \leftrightarrow y\}}(\omega) \left[\sum_{\sigma} \left(\mathbb{1}_{\{\sigma_x = \sigma_y\}} - \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i}}{\prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} 2 \cosh(\mathbf{h}(K_{\alpha}))} \right] \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\omega) \\
 &\quad + \sum_{\omega} \mathbb{1}_{\{x \not\leftrightarrow y\}}(\omega) \left[\sum_{\sigma} \left(\mathbb{1}_{\{\sigma_x = \sigma_y\}} - \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i}}{\prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} 2 \cosh(\mathbf{h}(K_{\alpha}))} \right] \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\omega) \\
 &\equiv I_1 + I_2. \quad (62)
 \end{aligned}$$

Note que, se $x \leftrightarrow y$ em ω e o par (σ, ω) é consistente, então, $\sigma_x = \sigma_y$. Dessa observação e do Lema 3.11 segue que

$$I_1 = \frac{1}{2} \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(x \leftrightarrow y). \quad (63)$$

Por outro lado, temos pelo Lema 3.11 que

$$\begin{aligned}
 I_2 &= -\frac{1}{2} \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(x \not\leftrightarrow y) + \sum_{\omega} \mathbb{1}_{\{x \not\leftrightarrow y\}}(\omega) \left[\sum_{\sigma} \mathbb{1}_{\{\sigma_x = \sigma_y\}} \frac{\Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i}}{\prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} 2 \cosh(\mathbf{h}(K_{\alpha}))} \right] \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\omega) \\
 &\equiv -\frac{1}{2} \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(x \not\leftrightarrow y) + \tilde{I}_2. \quad (64)
 \end{aligned}$$

Para simplificar um pouco a expressão de \tilde{I}_2 , fazemos uso do Lema 3.16, obtendo

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_2 &= \sum_{\omega} \mathbb{1}_{\{x \not\leftrightarrow y\}} \left[\sum_{\sigma} \mathbb{1}_{\{\sigma_x = \sigma_y\}} \frac{\Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i}}{\prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} 2 \cosh(\mathbf{h}(K_{\alpha}))} \right] \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\omega) \\
 &= \sum_{\omega} \mathbb{1}_{\{x \not\leftrightarrow y\}}(\omega) \left[\frac{2 \cosh(\mathbf{h}(K_t) + \mathbf{h}(K_u)) \cdot \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq t, u}}^{k(\omega, G)} 2 \cosh(\mathbf{h}(K_{\alpha}))}{\prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} 2 \cosh(\mathbf{h}(K_{\alpha}))} \right] \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\omega) \\
 &= \frac{1}{2} \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G} \left[\mathbb{1}_{\{x \not\leftrightarrow y\}} \frac{\cosh(\mathbf{h}(K_t) + \mathbf{h}(K_u))}{\cosh(\mathbf{h}(K_t)) \cdot \cosh(\mathbf{h}(K_u))} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G} \left(\mathbb{1}_{\{x \not\leftrightarrow y\}} \cdot \{1 + \tanh(\mathbf{h}(K_t)) \cdot \tanh(\mathbf{h}(K_u))\} \right). \tag{65}
 \end{aligned}$$

Substituindo (65) em (64), temos

$$I_2 = \frac{1}{2} \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G} \left(\mathbb{1}_{\{x \not\leftrightarrow y\}} \cdot \tanh(\mathbf{h}(K_t)) \cdot \tanh(\mathbf{h}(K_u)) \right). \tag{66}$$

Finalmente, substituindo (66) e (63) em (62), obtemos a conclusão. \square

Observação 3.18. Note que se tomamos $\mathbf{h} \equiv 0$, então, a conclusão do Teorema 3.17 se reduz a

$$\tau_{2\beta, 0, 2, V}(x, y) = \frac{1}{2} \phi_{\mathbf{p}, 0, 2, G}(x \leftrightarrow y), \quad \forall x, y \in V$$

que é uma identidade bem conhecida para o modelo de Ising/Potts com $q = 2$ (veja [65], Teorema 1.16, p. 11).

Corolário 3.19 (Veja referência [36]). No modelo de Ising, se satisfaz a seguinte igualdade de correlações:

$$\lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}(\sigma_x \sigma_y) = \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(x \leftrightarrow y) + \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G} \left(\mathbb{1}_{\{x \not\leftrightarrow y\}} \cdot \tanh(\mathbf{h}(K_t)) \cdot \tanh(\mathbf{h}(K_u)) \right).$$

Demonstração. Basta observar que

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}(\sigma_x \sigma_y) &= \lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}(\sigma_x = \sigma_y) - \lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}(\sigma_x \neq \sigma_y) = 2 \lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}(\sigma_x = \sigma_y) - 1 \\
 &= 2 \left(\pi_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}(\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y) - \frac{1}{2} \right) \\
 &= 2 \tau_{2\beta, \mathbf{h}, 2, V}(x, y)
 \end{aligned}$$

e, em seguida, aplicar o Teorema 3.17. \square

Observação 3.20. Se consideramos o campo externo nulo (isto é, $\mathbf{h} \equiv 0$), no Corolário 3.19 obtemos uma identidade bem conhecida para o modelo de Ising

$$\lambda_{\beta,0,V}(\sigma_x \sigma_y) = \phi_{\mathbf{p},0,2,G}(x \leftrightarrow y), \quad \forall x, y \in V.$$

Observação 3.21. Os resultados feitos até aqui para o caso $q = 2$ serão generalizados para o modelo de aglomerados aleatórios com medidas de Gibbs $\phi_{\mathbf{p},\hat{\mathbf{h}},q,G}$, onde $q \in \{2, 3, \dots\}$. Tais modelos com campo nulo $\hat{\mathbf{h}} \equiv 0$ já foram considerados na literatura (veja referências [12, 120]). Nesse caso mais geral (quando $\hat{\mathbf{h}}$ não necessariamente é nulo), usando uma versão de acoplamento análogo ao Teorema 49, obteremos as medidas de aglomerados aleatórios e de Potts como marginais desse acoplamento. Isso será feito em detalhes daqui a pouco, quando consideremos o caso $q \in \{2, 3, \dots\}$.

Lema 3.22 (Veja referência [36]). Seja $G = (V, E)$ um grafo finito com $x \in V$ e $\omega \in \{0, 1\}^E$ uma configuração de arestas fixa. Logo

$$\sum_{\sigma \in \{-1, +1\}^V} \mathbb{1}_{\{\sigma_x = \pm 1\}} \Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i} = e^{\pm \mathbf{h}(K_t)} \cdot \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq t}}^{k(\omega, G)} 2 \cosh(\mathbf{h}(K_\alpha)),$$

onde $K_t(\omega) \equiv K_t(\omega, x)$ é um aglomerado (de vértices) contendo o vértice x na configuração ω e $\mathbf{h}(K_\alpha) \equiv \beta \sum_{i \in K_\alpha} h_i$.

Demonstração. Veja que, pelo Item (58), temos que o conjunto de vértices V pode descompor-se da seguinte forma

$$\{-1, +1\} \cong \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} \{-1, +1\}^{K_\alpha},$$

onde $(K_\alpha : \alpha = 1, \dots, k(\omega, G))$ são os aglomerados do grafo $(V, \eta(\omega))$. Logo, de maneira natural, um elemento $\sigma \in \{-1, +1\}^V$ pode ser escrito como $(\sigma_{K_1}, \dots, \sigma_{K_{k(\omega, G)}})$, onde se considerou $\sigma_{K_j} \equiv (\sigma_i : i \in K_j), \forall j = 1, \dots, k(\omega, G)$.

Seja K_t um aglomerado contendo o vértice x . Logo, pela decomposição mencionada anteriormente, temos

$$\sum_{\sigma} \mathbb{1}_{\{\sigma_x = \pm 1\}} \Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i} = \sum_{\sigma} \mathbb{1}_{\{\sigma_x = \pm 1\}} \Delta(\sigma, \omega) \cdot \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} e^{\beta \sum_{i \in K_\alpha} h_i \sigma_i}.$$

Como sempre é possível escrever o fator $\Delta(\sigma, \omega)$ como o produtório $\prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} \Delta(\sigma_{K_\alpha}, \omega)$, a expressão do lado direito da igualdade acima fica

$$= e^{\pm \mathbf{h}(K_t)} \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq t}}^{k(\omega, G)} \sum_{\sigma_{K_\alpha}} \Delta(\sigma_{K_\alpha}, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in K_\alpha} h_i \sigma_i}.$$

Por ação de Δ sobre o somatório $\sum_{\sigma_{K_\alpha}}$, veja que este somatório tem somente duas parcelas, uma correspondendo aos spins igual a um e a outra aos spins menos um. Logo, a última expressão acima pode ser escrita

$$= e^{\pm \mathbf{h}(K_t)} \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq t}}^{k(\omega, G)} e^{\mathbf{h}(K_\alpha) + \mathbf{h}(-K_\alpha)} = e^{\pm \mathbf{h}(K_t)} \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq t}}^{k(\omega, G)} 2 \cosh(\mathbf{h}(K_\alpha)),$$

concluindo-se a prova. \square

Teorema 3.23 (Veja referência [36]). *Seja $G = (V, E)$ um grafo finito e x um vértice em V . Então*

$$\lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}(\sigma_x = \pm 1) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\tanh(\mathbf{h}(K_t))),$$

onde $K_t(\omega) \equiv K_t(\omega, x)$ é o aglomerado (de vértices) contendo o vértice x , $\mathbf{h}(K_\alpha) \equiv \beta \sum_{i \in K_\alpha} h_i$ e $\phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\cdot)$ foi definido em (51).

Demonstração. Note que, pelo Teorema 3.14, diretamente temos

$$\begin{aligned} \lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}(\sigma_x = \pm 1) &= \sum_{(\sigma, \omega) \in \{-1, +1\}^V \times \{0, 1\}^E} \mathbb{1}_{\{\sigma_x = \pm 1\}} \nu_{\beta, \mathbf{h}, 2, G}(\sigma, \omega) \\ &= \sum_{\omega \in \{0, 1\}^E} \left[\sum_{\sigma \in \{-1, +1\}^V} \mathbb{1}_{\{\sigma_x = \pm 1\}} \nu_{\beta, \mathbf{h}, 2, G}(\sigma | \omega) \right] \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\omega), \end{aligned}$$

Pelo uso do Corolário 3.15, temos que a expressão acima se escreve

$$= \sum_{\omega \in \{0, 1\}^E} \left[\sum_{\sigma \in \{-1, +1\}^V} \mathbb{1}_{\{\sigma_x = \pm 1\}} \frac{\Delta(\sigma, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} h_i \sigma_i}}{\prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} 2 \cosh(\mathbf{h}(K_\alpha))} \right] \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\omega)$$

a mesma que pelo Lema 3.22 pode ser rescrita como

$$\begin{aligned} &= \sum_{\omega \in \{0, 1\}^E} \left[\frac{e^{\pm \mathbf{h}(K_t)} \cdot \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq t}}^{k(\omega, G)} 2 \cosh(\mathbf{h}(K_\alpha))}{\prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} 2 \cosh(\mathbf{h}(K_\alpha))} \right] \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\omega) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \{0, 1\}^E} [1 \pm \tanh(\mathbf{h}(K_t))] \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\omega), \end{aligned}$$

de onde se deduz a prova do teorema. \square

Corolário 3.24 (Veja referência [36]). *Com as mesmas hipóteses do Teorema 3.23, temos*

$$\lambda_{\beta, \mathbf{h}, V}(\sigma_x) = \phi_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, 2, G}(\tanh(\mathbf{h}(K_t))).$$

Demonstração. A prova segue diretamente do Teorema 3.23. \square

3.4 O MODELO DE AGLOMERADOS ALEATÓRIOS SEM PRESENÇA DE CAMPO EXTERNO ($q > 0$)

Nesta seção faremos um estudo rigoroso do modelo de aglomerados aleatórios, sem presença de campo magnético externo, na mesma direção do livro de [65]. O modelo de aglomerados aleatórios foi introduzido em 1970 por Fortuin e Kasteleyn como uma ferramenta para manusear o modelo de Ising e o modelo de Potts sobre a rede \mathbb{L} . Destacamos que, nesta última seção, consideraremos sempre que o modelo de aglomerados aleatórios está definido sobre a rede hipercúbica d -dimensional $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ com $d \geq 2$. O modelo de aglomerados aleatórios pode ser visto como uma generalização do modelo de percolação de arestas independentes, portanto, temos um novo caminho para estudar modelos de percolação. O modelo de aglomerados aleatórios sobre \mathbb{L}^d é determinado por uma coleção de medidas de probabilidade definidas adequadamente na coleção de subconjuntos de arestas de \mathbb{L}^d . Antes de passar a definir tais medidas de probabilidade e do espaço em si precisamos introduzir algumas notações.

No modelo de aglomerados aleatórios sobre a rede \mathbb{L}^d o espaço de configurações é o conjunto $\Omega \equiv \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$. Um elemento genérico desse espaço pode ser escrito como $\omega = (\omega_e : e \in \mathbb{E}^d)$. Frequentemente, vamos nos referir a um elemento de Ω como *configuração de arestas* ou simplesmente de configuração, quando se tenha subentendido o contexto. Como é usual, diremos que uma aresta e é aberta na configuração ω se $\omega_e = 1$ e será dita fechada se $\omega_e = 0$. Fixado $\omega \in \Omega$, denotamos por $\eta(\omega) = \{e \in \mathbb{E}^d : \omega_e = 1\}$ o conjunto de todas as arestas abertas em ω . Pensando em η como uma aplicação, podemos ver que ela define uma correspondência injetiva que associa cada elemento $\omega \in \Omega$ a um subconjunto $F \subset \mathbb{E}^d$, dado por $F = \eta(\omega)$.

Fixada uma configuração $\omega \in \Omega$ e dado $\gamma := (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n)$ um caminho (resp. circuito) em \mathbb{L}^d , dizemos que γ é um caminho (resp. circuito) aberto em ω se todas suas arestas pertencem a $\eta(\omega)$, isto é, $\omega_{e_i} = 1, \forall i = 1, \dots, n$. Dizemos que dois vértices distintos $x, y \in \mathbb{Z}^d$ estão conectados na configuração ω , e escrevemos $x \leftrightarrow y$, se existe um caminho aberto $\gamma := (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n)$ na configuração ω tal que $v_0 = x$ e $v_n = y$. Um subgrafo $G \subset \mathbb{L}^d$ é dito conexo em ω se quaisquer dois de seus vértices podem ser ligados por um caminho aberto inteiramente contido em G .

A componente conexa de $x \in \mathbb{Z}^d$ em ω é formada pelo conjunto de vértices

$$C_x(\omega) \equiv \{y \in \mathbb{V} : x \leftrightarrow y \text{ em } \omega\} \cup \{x\}.$$

O conjunto $C_x(\omega)$ é chamado de *aglomerado aberto* de x na configuração ω . A coleção de todos os aglomerados abertos de uma configuração ω define, de maneira natural, uma relação de equivalência em \mathbb{Z}^d , em que $x \sim y$ se, e somente se, $y \in C_x(\omega)$. Note que um aglomerado aberto na configuração ω pode ser formado simplesmente por um vértice isolado.

Em seguida, definiremos o modelo de aglomerados aleatórios sobre um grafo finito arbitrário (pode estar contido em \mathbb{L}^d ou não).

Definição 3.7. *Seja $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ um grafo finito. Para $p \in [0, 1]$ e $q > 0$, a medida de aglomerados aleatórios $\phi_{p,q,\tilde{G}}$ sobre $\{0, 1\}^{\tilde{E}}$ é definida por*

$$\phi_{p,q,\tilde{G}}(\omega) = \frac{1}{\mathcal{Z}_{p,q,\tilde{G}}} p^{o(\omega)} (1-p)^{c(\omega)} q^{k(\omega,\tilde{G})},$$

para todo $\omega \in \{0, 1\}^{\tilde{E}}$. Aqui $\mathcal{Z}_{p,q,\tilde{G}}$ é a função de partição $\sum_{\omega \in \{0,1\}^{\tilde{E}}} p^{o(\omega)} (1-p)^{c(\omega)} q^{k(\omega,\tilde{G})}$ e $q^{k(\omega,\tilde{G})}$ é o número de aglomerados aleatórios no subgrafo aberto de \tilde{G} dado por ω .

Denotaremos o valor esperado de uma variável aleatória $f : \{0, 1\}^{\tilde{E}} \rightarrow \mathbb{R}$ segundo a medida de probabilidade $\phi_{p,q,\tilde{G}}$ por $\phi_{p,q,\tilde{G}}(f)$.

No caso de \tilde{G} ser um grafo infinito enumerável, como por exemplo \mathbb{L}^d , esta definição não funciona diretamente, uma vez que o número de aglomerados abertos ou fechados podem ser infinitos. Esse problema pode ser contornado por usar o chamado *limite termodinâmico*. Para isso, precisamos introduzir, antes, a definição de condição de fronteira, como segue.

Definição 3.8 (Condição de Fronteira). *Fixado $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ e $G = (V, E) \subset \mathbb{L}^d$ um subgrafo finito, definimos um subconjunto de $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ que depende de G e de ξ , por*

$$\Omega_G^\xi = \{\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d} : \omega_e = \xi_e, \text{ para } e \in \mathbb{E}^d \setminus E\}.$$

A configuração ξ , por causa desta definição, é chamada de *condição de fronteira*.

Claramente $|\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}| = +\infty$, mas por outro lado $|\Omega_G^\xi| = 2^{|E|} < \infty$. Dada uma configuração $\omega \in \Omega_G^\xi$ definimos $k^\xi(\omega, G)$ sendo o número de aglomerados de ω que interceptam G .

Fixado o subgrafo finito $G = (V, E) \subset \mathbb{L}^d$, $p \in [0, 1]$, $q > 0$ e uma configuração $\xi \in \Omega_G^\xi$, definimos a medida de aglomerados aleatórios (a volume infinito) sobre G com condição de fronteira ξ por

$$\phi_{p,q,G}^\xi(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\mathcal{Z}_{p,q,G}^\xi} p^{o(\omega)}(1-p)^{c(\omega)} q^{k^\xi(\omega,G)}, & \text{se } \omega \in \Omega_G^\xi \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (67)$$

onde $o(\omega)$ (resp. $c(\omega)$) denota o número de arestas abertas (resp. fechadas) em G . Neste caso, denotaremos o valor esperado de uma variável aleatória f sobre Ω como $\phi_{p,q,G}^\xi(f)$.

Observação 3.25. Em toda esta seção adotaremos a notação ∂V para nos referirmos à condição de fronteira interna de V , como foi estabelecido na Definição 1.2.

Neste trabalho, estamos interessados em dois tipos especiais de condições de fronteira: a *livre* e a *conectada*. Na continuação, daremos uma definição precisa destes conceitos.

- **Condição de fronteira livre:** é obtida pela configuração ξ tal que $\xi_e = 0$ para todo $e \in \mathbb{E}^d$. A correspondente medida de probabilidade é denotada por $\phi_{p,q,G}^0$. Esta condição de fronteira é caracterizada pela ausência de conexão entre os vértices da fronteira ∂V , como se mostra na Figura 17.
- **Condição de fronteira conectada:** é obtida pela configuração ξ tal que $\xi_e = 1$ para todo $e \in \mathbb{E}^d$. A medida de probabilidade correspondente será denotada por $\phi_{p,q,G}^1$. Esta condição de fronteira é caracterizada pelo fato de que para todo $V \subset \mathbb{Z}^d$ os vértices de ∂V estão todos dois a dois conectados (veja Figura 17).

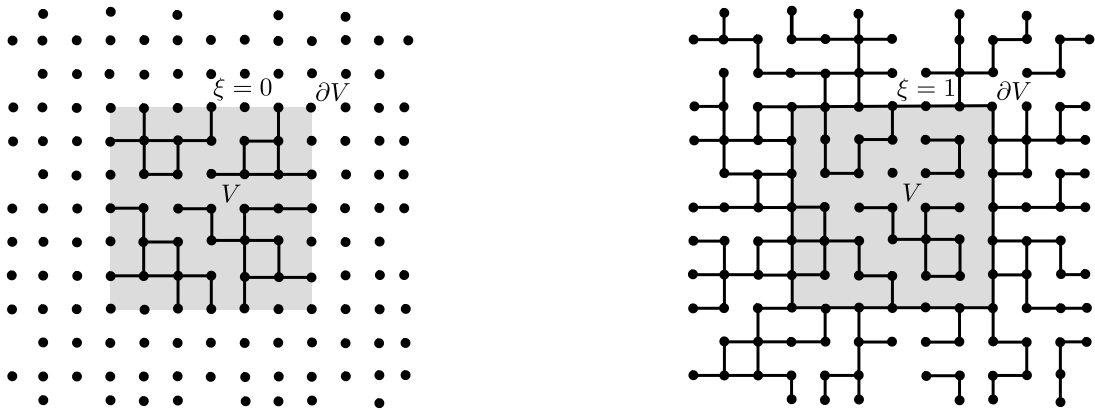


Figura 17: Ao lado esquerdo representamos graficamente a condição de fronteira livre $\xi = 0$ e no lado direito a condição de fronteira conectada $\xi = 1$ sobre o grafo $G = (V, E)$. Observe que $k^0(\omega, G) = 16$ e $k^1(\omega, G) = 4$.

Observação 3.26. *Seja $G = (V, E) \subset \mathbb{L}^d$ um subgrafo finito e η uma configuração em $\{0, 1\}^E$. Fazendo $\xi = 0$ em (67), para cada $\omega \in \Omega_G^0$ temos*

$$p^{o(\omega)}(1-p)^{c(\omega)}q^{k^0(\omega, G)} = p^{o(\eta)}(1-p)^{c(\eta)}q^{k(\eta, G)},$$

o que implica que

$$\phi_{p,q,G}^0(\omega) = \phi_{p,q,G}(\eta),$$

onde a medida $\phi_{p,q,G}$ foi dada na Definição 3.7. Isto é, a condição de fronteira livre não tem efeito nenhum sobre o comportamento do sistema em G . Portanto, a medida $\phi_{p,q,G}^0$ pode substituir-se pela medida $\phi_{p,q,G}$ não alterando o resultado das características do sistema.

Os modelos definidos acima são conhecidos como modelos de aglomerados aleatórios com campo externo nulo. Para um estudo do modelos de aglomerados aleatórios com presença de campo externo, veja os Capítulos 5 e 6. Pelo Teorema da Extensão de Kolmogorov (veja Apêndice, Teorema .25), não há nenhuma complicação para definir o processo de percolação independente em toda a rede \mathbb{L}^d . Já no modelo de aglomerados aleatórios, existem várias complicações para se fazer uma construção análoga, justamente por causa da estrutura de dependência entre as variáveis aleatórias. Para vencer essas dificuldades, vamos adotar dois procedimentos padrões: o limite termodinâmico e o formalismo DLR (devido a Dobrushin, Lanford e Ruelle). Ao longo desta seção, introduziremos alguns conceitos geométricos e o conceito de convergência fraca de medidas de probabilidade.

DUALIDADE PLANAR

Qualquer modelo de aglomerados aleatórios sobre um grafo planar G pode ser associado a um modelo dual definido sobre G^* . Dada uma configuração $\omega \in \{0, 1\}^E$, o modelo sobre G^* é construído declarando que qualquer aresta do grafo dual estará aberta (resp. fechada) se a aresta correspondente do grafo **primal** estiver fechada (resp. aberta) para a configuração ω . A nova configuração é chamada configuração dual de ω e é denotada por ω^* . Dois vértices x, y em G^* são ditos **conectados no dual** se existe um caminho aberto no modelo dual ligando os vértices x e y . O evento, x está conectado a y no grafo dual, será denotado por $x \overset{*}{\leftrightarrow} y$. Dizemos que os conjuntos A e B estão conectados no dual se existe um caminho aberto, no dual, conectando algum vértice de A a algum vértice de B . Uma componente conexa maximal (no sentido de que não é possível adicionar vértice algum de forma que dita componente continue sendo conexa) no dual será chamada de aglomerado dual (aberto).

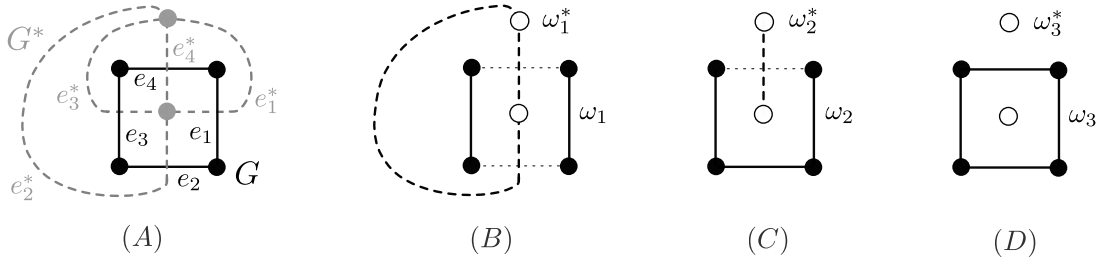


Figura 18: Em (A) temos os grafos G e G^* cujas arestas são dadas, respectivamente, por $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e $E^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*\}$. Ilustrando a Proposição 3.28 temos em (B) que $f(\omega_1^*) = 2 = k(\omega_1)$ (contando a face infinita), em (C) temos $f(\omega_2^*) = 1 = k(\omega_2)$ e em (D) temos $f(\omega_3^*) = 1 = k(\omega_3)$.

Proposição 3.27. *Se G é um grafo planar, então, G^* é um multigrafo planar.*

Como dito acima, uma configuração $\omega \in \{0, 1\}^E$ dá origem a uma configuração dual $\omega^* \in \{0, 1\}^{E^*}$ tal que $\omega_{e^*}^* = 1 - \omega_e$. Para cada configuração ω^* definimos $\eta(\omega^*) = \{e^* \in E^* : \omega_{e^*}^* = 1\}$, que é o conjunto das arestas abertas na configuração ω^* . Observe que $\eta(\omega^*)$ está em bijeção com $E \setminus \eta(\omega)$. Pela Proposição 3.27 temos que, para todo grafo planar G , G^* é um multigrafo planar, logo, podemos definir o número de faces de $(V^*, \eta(\omega^*))$ que será denotado por $f(\omega^*)$ (incluindo a face infinita).

Para cada $\omega \in \{0, 1\}^E$, note que as faces de $(V^*, \eta(\omega^*))$ estão em bijeção com as componentes de $(V, \eta(\omega))$ (veja Figura 18 acima). Por essa observação, temos a seguinte proposição

Proposição 3.28. *Seja G um multigrafo planar e G^* seu dual. Para todo $\omega \in \{0, 1\}^E$ temos*

$$f(\omega^*) = k(\omega).$$

Uma consequência imediata de $(G^*)^*$ ser isomorfo a G é que a proposição acima pode ser usada para concluir que

$$k(\omega^*) = f(\omega). \tag{68}$$

Pela 2ª Fórmula de Euler (Corolário 1.4), para toda configuração $\omega \in \{0, 1\}^E$ temos que o subgrafo aleatório $(V, \eta(\omega))$ satisfaz

$$k(\omega) = |V| - |\eta(\omega)| + f(\omega) - 1. \tag{69}$$

Usando a definição de grafo dual temos, imediatamente, que

$$|\eta(\omega)| + |\eta(\omega^*)| = |E|. \tag{70}$$

Pela definição da medida $\phi_{p,q,G}(\omega)$ temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}\phi_{p,q,G}(\omega) &= \frac{1}{\mathcal{Z}_{p,q,G}} p^{o(\omega)} (1-p)^{c(\omega)} q^{k(\omega)} = \frac{1}{\mathcal{Z}_{p,q,G}} p^{o(\omega)} (1-p)^{|E|-o(\omega)} q^{k(\omega)} \\ &= \frac{(1-p)^{|E|}}{\mathcal{Z}_{p,q,G}} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{o(\omega)} q^{k(\omega)} \\ &= \frac{(1-p)^{|E|}}{\mathcal{Z}_{p,q,G}} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{|\eta(\omega)|} q^{k(\omega)}.\end{aligned}$$

Usando (68) na equação (69) obtemos $k(\omega) = |V| - |\eta(\omega)| + k(\omega^*) - 1$. Usando essa identidade no lado direito da equação acima ficamos com

$$\begin{aligned}\phi_{p,q,G}(\omega) &= \frac{(1-p)^{|E|}}{\mathcal{Z}_{p,q,G}} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{|\eta(\omega)|} q^{|V|-|\eta(\omega)|+k(\omega^*)-1} \\ &= \frac{(1-p)^{|E|} q^{|V|-1}}{\mathcal{Z}_{p,q,G}} \left(\frac{p}{(1-p)q}\right)^{|\eta(\omega)|} q^{k(\omega^*)}.\end{aligned}$$

Aplicando (70) para o expoente $|\eta(\omega)|$ na igualdade acima obtemos

$$\begin{aligned}\phi_{p,q,G}(\omega) &= \frac{(1-p)^{|E|} q^{|V|-1}}{\mathcal{Z}_{p,q,G}} \left(\frac{p}{(1-p)q}\right)^{|E|} \left(\frac{(1-p)q}{p}\right)^{|\eta(\omega^*)|} q^{k(\omega^*)} \\ &= C(p, q, |V|, |E|) \left(\frac{(1-p)q}{p}\right)^{|\eta(\omega^*)|} q^{k(\omega^*)},\end{aligned}$$

onde $C(p, q, |V|, |E|) \equiv \frac{(1-p)^{|E|} q^{|V|-1}}{\mathcal{Z}_{p,q,G}} \left(\frac{p}{(1-p)q}\right)^{|E|}$.

Tomando p^* como a única solução da equação

$$\frac{p^*}{1-p^*} = \frac{(1-p)q}{p},$$

isto é

$$p^* \equiv p^*(p, q) = \frac{(1-p)q}{(1-p)q + p}, \quad (71)$$

ficamos com

$$\begin{aligned}\phi_{p,q,G}(\omega) &= C(p, q, |V|, |E|) \left(\frac{p^*}{1-p^*}\right)^{|\eta(\omega^*)|} q^{k(\omega^*)} \\ &= C(p, q, |V|, |E|) \mathcal{Z}_{p^*,q,G^*} \frac{1}{(1-p^*)^{|E|}} \phi_{p^*,q,G^*}(\omega^*).\end{aligned}$$

Usando que $\phi_{p,q,G}(\omega)$ e $\phi_{p^*,q,G}(\omega^*)$ são medidas de probabilidade e somando sobre $\omega \in \{0,1\}^E$, na equação acima, obtemos a seguinte igualdade

$$C(p, q, |V|, |E|) \mathcal{L}_{p^*,q,G^*} \frac{1}{(1-p^*)^{|E|}} = 1.$$

De onde segue que

$$\phi_{p,q,G}(\omega) = \phi_{p^*,q,G^*}(\omega^*). \quad (72)$$

Observação 3.29. O parâmetro $p^* \in [0, 1]$.

Observação 3.30. Para cada $q \geq 1$ fixo, a função $p \rightarrow p^*(p, q)$ definida em (71) é não crescente em $p \in (0, 1)$.

O PONTO AUTODUAL

Definição 3.9. O ponto autodual $p_{sd} \equiv p_{sd}(q)$ é a única solução da equação $p^*(p_{sd}, q) = p_{sd}$, isto é

$$p_{sd}(q) = \frac{\sqrt{q}}{1 + \sqrt{q}}. \quad (73)$$

Como mencionado anteriormente, quando o parâmetro de dependência q toma o valor 1, o modelo de aglomerados aleatórios torna-se o modelo de percolação independente. Pelo Teorema 2.26 do Capítulo 2, o ponto crítico do modelo de percolação independente em duas dimensões é $1/2$, coincidindo com $p_{sd}(1)$. A pergunta é: o ponto crítico do modelo de aglomerados aleatórios em duas dimensões com parâmetros $(p, q) \in [0, 1] \times (1, +\infty)$ coincidirá também com o ponto autodual $p_{sd}(q)$? A resposta é sim. Essa pergunta foi uma das conjecturas relevantes em percolação dependente até que, em 2011, os matemáticos H. Duminil-Copin e V. Beffara o resolveram no trabalho [12]. Nesta tese daremos um esboço bem geral da prova desse resultado, mas antes disso, estudaremos as principais propriedades do modelo de aglomerados aleatórios (para uma revisão detalhada dessa prova, veja referência [120]).

Em seguida, vamos considerar subgrafos finitos da rede bidimensional \mathbb{L}^2 . Fixado $n \in \mathbb{N}$, vamos olhar para $\Lambda_n = [-n, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2$ como um subgrafo de \mathbb{L}^2 .

Vamos mostrar, agora, como construir Λ_n^* . Primeiro, consideramos a caixa $[-n-1, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2 + (1/2, 1/2)$, visto como subgrafo de $\mathbb{L}^2 + (1/2, 1/2)$. Em seguida, definimos o grafo $H(n)$ como sendo a caixa $[-n-1, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2 + (1/2, 1/2)$ sem as arestas entre os pontos de sua fronteira interna, segundo a Definição 1.2 do Capítulo 1.

Por último, identificamos todos os vértices da fronteira de $H(n)$. Este novo grafo que denotamos por $\tilde{H}(n)$ é claramente isomorfo ao grafo Λ_n^* .

Essa construção sugere que o modelo de aglomerados aleatórios em Λ_n com condições de fronteira livre esteja relacionado com o modelo de aglomerados aleatórios em Λ_n^* com condição de fronteira conectada.

Pela Observação 3.26, para todo $\omega \in \{0, 1\}^{E_{\Lambda_n}}$ temos

$$\phi_{p,q,\Lambda_n}^0(\omega) = \phi_{p,q,\Lambda_n}(\omega).$$

Aplicando (72) no lado direito da igualdade acima ficamos com

$$\phi_{p,q,\Lambda_n}(\omega) = \phi_{p^*,q,\Lambda_n^*}(\omega^*).$$

Por construção, $\tilde{H}(n)$ é isomorfo a $\Lambda(n)^*$, portanto, podemos identificar, de maneira natural, $E_{\Lambda_n^*}$ com $E_{\tilde{H}(n)}$. Pensando em ω^* como elemento de $\{0, 1\}^{E_{\tilde{H}(n)}}$ podemos escrever $\phi_{p^*,q,\Lambda_n^*}(\omega^*) = \phi_{p^*,q,\tilde{H}(n)}(\omega^*)$. Usando, agora, a Definição 3.26, olhando para $H(n)$ como subgrafo de $\mathbb{L}^2 + (1/2, 1/2)$ temos

$$\phi_{p^*,q,\tilde{H}(n)}(\omega^*) = \phi_{p^*,q,H(n)}^1(\omega^*).$$

Portanto, provamos a seguinte relação de dualidade

$$\phi_{p,q,\Lambda_n}^0(\omega) = \phi_{p^*,q,H(n)}^1(\omega^*). \quad (74)$$

3.4.1 Alguns resultados básicos para o modelo de aglomerados aleatórios

Nosso objetivo, agora, é mostrar alguns resultados de dominação estocástica que nos ajudarão a fazer comparações entre medidas de aglomerados aleatórios com diferentes valores de p e q , como também com diferentes condições de fronteira.

ORDENAMENTO ESTOCÁSTICO DE MEDIDAS

Considere $G = (V, E)$ um grafo finito (ou infinito enumerável), $\{0, 1\}^E$ o espaço de configurações e \mathcal{F} a σ -álgebra gerado pelos eventos cilíndricos de $\{0, 1\}^E$. Lembramos que $\{0, 1\}^E$ é um conjunto parcialmente ordenado pela relação de ordem parcial \preceq , onde $\omega \preceq \eta$ se $\omega_e \leq \eta_e$ para todo $e \in E$. Uma variável aleatória $X : \{0, 1\}^E \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada crescente se $X(\omega) \leq X(\eta)$ sempre que $\omega \preceq \eta$. Um evento $A \in \mathcal{F}$ é chamado crescente (resp. decrescente) se sua função indicadora $\mathbb{1}_A$ é crescente (resp. decrescente);

Isto é, um evento $A \in \mathcal{F}$ é crescente se toda vez que $\omega \preceq \eta$ e $\omega \in A$, então, $\eta \in A$. O conjunto $\{0, 1\}^E$, equipado com a topologia dos conjuntos abertos gerados pelos eventos cilíndricos, é um espaço metrizável e nós dizemos que a variável aleatória $X : \{0, 1\}^E \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua se esta é uma função contínua sobre este espaço métrico. Já que $\{0, 1\}^E$ é compacto, qualquer função contínua definida sobre $\{0, 1\}^E$ é limitada. Pela definição da ordem parcial de $\{0, 1\}^E$ temos que $0 \preceq \omega \preceq 1$, onde a notação 0 (resp. 1) é usada para denotar a configuração ω de $\{0, 1\}^E$ tal que $\omega_e = 0$ (resp. $\omega_e = 1$) para todo $e \in E$. Logo, uma função crescente $X : \{0, 1\}^E \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e, além do mais, $X(0) \leq X(\omega) \leq X(1)$ para $\omega \in \{0, 1\}^E$.

Definição 3.10. Dizemos que uma medida μ definida sobre $\{0, 1\}^E$ tem a propriedade de *associação positiva* se satisfaz

$$\mu(XY) \geq \mu(X)\mu(Y),$$

para todo par de variáveis aleatórias crescentes $X, Y : \{0, 1\}^E \rightarrow \mathbb{R}$. A desigualdade acima é conhecida, também, como *desigualdade FKG*.

No Capítulo 7 utilizaremos o conceito de associação positiva para uma sequência de variáveis aleatórias, com a finalidade de obter um tipo de convergência mais forte que a de distribuição, nos referimos à convergência em distância Mallows.

Definição 3.11. Sejam $\mu_1, \mu_2 : (\{0, 1\}^E, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ duas medidas de probabilidade. Escrevemos $\mu_1 \leq_{st} \mu_2$ (ou $\mu_2 \geq_{st} \mu_1$) e dizemos que μ_1 é dominada estocasticamente por μ_2 , se $\mu_1(X) \leq \mu_2(X)$, para toda variável aleatória contínua e crescente X sobre $\{0, 1\}^E$.

Dada uma variável aleatória X e μ uma medida de probabilidade, como já tínhamos feito antes, denotamos por $\mu(X)$ ao valor esperado de X (caso exista), isto é,

$$\mu(X) = \int_{\{0, 1\}^E} \mu(d\omega) X(\omega).$$

Definição 3.12. Uma medida de probabilidade $\mu : (\{0, 1\}^E, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ é estritamente positiva se $\mu(\omega) > 0$ para cada ω em $\{0, 1\}^E$.

Começamos estudando desigualdades de correlação e ordenamento estocástico para medidas gerais. Para isso, para cada $\omega, \eta \in \{0, 1\}^E$, denotamos por $\omega \vee \eta$ e $\omega \wedge \eta$ a configuração máximo e mínimo por

$$(\omega \vee \eta)_e = \max\{\omega_e, \eta_e\} \quad \text{e} \quad (\omega \wedge \eta)_e = \min\{\omega_e, \eta_e\},$$

para cada aresta $e \in E$.

No restante deste capítulo, assumiremos que o conjunto das arestas E é finito. O seguinte teorema nos dá condições suficientes para que a dominação estocástica $\mu_1 \leq_{st} \mu_2$ seja válida.

Teorema 3.31 (Desigualdade de Holley, veja [74]). *Se $\mu_1, \mu_2 : (\{0, 1\}^E, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ são duas medidas de probabilidade estritamente positivas sobre o espaço finito $(\{0, 1\}^E, \mathcal{F})$ tal que*

$$\mu_1(\omega \vee \eta)\mu_2(\omega \wedge \eta) \geq \mu_1(\omega)\mu_2(\eta), \quad \omega, \eta \in \{0, 1\}^E. \quad (75)$$

Então

$$\mu_1(X) \leq \mu_2(X), \quad (76)$$

para cada variável aleatória $X : \{0, 1\}^E \rightarrow \mathbb{R}$ crescente. Isto é $\mu_1 \leq_{st} \mu_2$.

A prova desse teorema pode ser encontrada em [65], Teorema 2.1, p. 20. Enfatizamos que este teorema pode ser generalizado em dois sentidos, o primeiro é que este resultado é válido sobre espaços de configurações mais gerais, como T^E , onde T é um subconjunto finito de \mathbb{R} . O segundo é que a condição de que a medida seja estritamente positiva pode ser relaxada (veja Seção 4 de [59]).

Definição 3.13. *Fixadas duas arestas distintas e, f em E . Para cada $k \in E$ e para cada configuração $\omega \in \{0, 1\}^E$ definimos as seguintes configurações:*

$$\begin{aligned} \omega_f(k) &:= \begin{cases} \omega_k, & \text{se } k \neq f \\ 0, & \text{se } k = f \end{cases} & \omega^e(k) &:= \begin{cases} \omega_k, & \text{se } k \neq e \\ 1, & \text{se } k = e \end{cases} \\ \omega_e^f(k) &:= \begin{cases} \omega_k, & \text{se } k \neq e \wedge k \neq f \\ 0, & \text{se } k = e \\ 1, & \text{se } k = f \end{cases} & \omega_f^e(k) &:= \begin{cases} \omega_k, & \text{se } k \neq e \wedge k \neq f \\ 0, & \text{se } k = f \\ 1, & \text{se } k = e \end{cases} \\ \omega_{ef}(k) &:= \begin{cases} \omega_k, & \text{se } k \neq e \wedge k \neq f \\ 0, & \text{se } k = e \wedge k = f \end{cases} & \omega^{ef}(k) &:= \begin{cases} \omega_k, & \text{se } k \neq e \wedge k \neq f \\ 1, & \text{se } k = e \wedge k = f. \end{cases} \end{aligned}$$

O próximo teorema é uma simplificação elegante da desigualdade de Holley. Ele nos diz que não é necessário fazer comparações do tipo (75) para qualquer configuração ω , basta comparar configurações da Definição 3.13 para obter a desigualdade do Item (76).

Teorema 3.32 (Veja referência [65]). *Um par de medidas de probabilidade estritamente positivas sobre $(\{0, 1\}^E, \mathcal{F})$ satisfaz (75) se, e somente se, estas satisfazem as seguintes desigualdades:*

$$\mu_1(\omega^e)\mu_2(\omega_e) \geq \mu_1(\omega_e)\mu_2(\omega^e) \quad e \quad \mu_1(\omega_e^f)\mu_2(\omega_f^e) \leq \mu_1(\omega^{ef})\mu_2(\omega_{ef}),$$

para cada configuração ω em $\{0, 1\}^E$ e para qualquer aresta $e, f \in E$

Para maiores detalhes sobre a prova deste teorema, veja [65], Teorema 2.3, p. 21.

Teorema 3.33 (Condição FKG, veja [65]). *Seja $\mu : (\{0, 1\}^E, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ uma medida de probabilidade estritamente positiva. Se para toda configuração $\omega \in \{0, 1\}^E$ e todo par de arestas $e, f \in E$:*

$$\mu(\omega_e^f)\mu(\omega_f^e) \leq \mu(\omega^{ef})\mu(\omega_{ef}), \quad (77)$$

então

$$\mu(A \cap B) \geq \mu(A)\mu(B), \quad (78)$$

para todo evento $A, B \in \mathcal{F}$ crescente.

Demonstração. Fixado um evento $B \in \mathcal{F}$ crescente, defina as seguintes medidas de probabilidade $\mu_1(\cdot) \equiv \mu(\cdot|B)$, $\mu_2(\cdot) \equiv \mu(\cdot)$. Já que $\omega_e \preceq \omega^e$, temos as seguintes possibilidades, $\omega_e \notin B$ ou $\omega_e \in B$. Se $\omega_e \notin B$, desde que $\mu > 0$ tem-se

$$\mu_1(\omega_e)\mu_2(\omega^e) = \mu(\omega_e|B)\mu(\omega^e) = 0 < \mu_1(\omega^e)\mu_2(\omega_e). \quad (79)$$

Como B é um evento crescente, $\omega_e \in B$ implica que $\omega^e \in B$ e portanto

$$\mu_1(\omega_e)\mu_2(\omega^e) = \mu(\omega_e|B)\mu(\omega^e) = \mu(\omega_e)\mu(\omega^e|B) = \mu_1(\omega^e)\mu_2(\omega_e). \quad (80)$$

De (79) e (80) temos

$$\mu_1(\omega_e)\mu_2(\omega^e) \leq \mu_1(\omega^e)\mu_2(\omega_e). \quad (81)$$

Por outro lado, sabemos que $\omega_e^f \preceq \omega^{ef}$. Novamente analisamos os dois casos $\omega_e^f \notin B$ ou $\omega_e^f \in B$. Se $\omega_e^f \notin B$, desde que $\mu > 0$ tem-se

$$\mu_1(\omega_e^f)\mu_2(\omega_f^e) = \mu(\omega_e^f|B)\mu(\omega_f^e) = 0 < \mu_1(\omega^{ef})\mu_2(\omega_{ef}).$$

No caso em que $\omega_e^f \in B$, usamos a hipótese para obter

$$\begin{aligned} \mu_1(\omega_e^f)\mu_2(\omega_f^e) &= \mu(\omega_e^f|B)\mu(\omega_f^e) \\ &= \frac{\mu(\omega_e^f)\mu(\omega_f^e)}{\mu(B)} \leq \frac{\mu(\omega^{ef})\mu(\omega_{ef})}{\mu(B)} = \mu(\omega^{ef}|B)\mu(\omega_f^e) = \mu_1(\omega^{ef})\mu_2(\omega_{ef}). \end{aligned}$$

Das duas desigualdades anteriores segue que

$$\mu_1(\omega_e^f)\mu_2(\omega_f^e) \leq \mu_1(\omega^{ef})\mu_2(\omega_{ef}). \quad (82)$$

Assim, de (81), (82) e pelo Teorema 3.32 temos $\mu_1(A) \geq \mu_2(A)$. Usando as definições de μ_1 e μ_2 e o fato de que $\mu > 0$, conclui-se que $\mu(A \cap B) \geq \mu(A)\mu(B)$. \square

Em seguida, apresentaremos um resultado muito importante na Mecânica Estatística, conhecido como a **desigualdade FKG**. Essa desigualdade diz que as medidas de aglomerados aleatórios têm a propriedade de associação positiva. Trata-se de uma generalização da desigualdade FKG (enunciada no Teorema 7) do modelo de arestas independentes, já que no modelo de aglomerados aleatórios temos o parâmetro de dependência $q \geq 1$. A referida desigualdade é crucial neste trabalho, pois muitos resultados importantes se derivam de sua aplicação. Note as diferenças entre os casos $q < 1$ e $q \geq 1$: o primeiro caso favorece a formação de poucos aglomerados, já o segundo caso, no entanto, favorece uma grande formação de aglomerados. Quando $q = 1$ as arestas de E são abertas e fechadas, independentemente umas de outras. Este caso especial foi estudado em detalhe abaixo do título de *percolação independente*, no Capítulo 2. O caso $q < 1$ é matematicamente difícil e menos importante fisicamente. Existe algum interesse no limite $q \downarrow 0$ (veja Seção 1.5 em [65]).

Cabe ressaltar que a desigualdade FKG não é válida para valores de $q < 1$ (veja [65], Seção 3.9, p. 63), e é por isso que de agora em diante assumiremos que $q \geq 1$, pois a maioria dos resultados que serão obtidos derivam desta desigualdade. Não é difícil ver que $\phi_{p,q,G}$, em geral, não é associada positiva quando $q \in (0, 1)$, como será ilustrado no seguinte exemplo:

Exemplo 3.1. *Seja G o grafo (mas precisamente, um multigrafo) contendo exatamente dois vértices. Sejam e, f duas arestas paralelas que unem ditos vértices, como se mostra na Figura 19. Afirmamos que para $0 < p < 1$ e $0 < q < 1$, a medida de aglomerados aleatórios $\phi_{p,q,G}$ não é associada positiva.*



Figura 19: Possíveis estados de duas arestas paralelas e e f .

De fato, primeiramente, adotaremos as seguintes definições

$$\omega = (\omega_b)_{b=e,f}, \quad \omega^e = (\omega_b)_{b=e,f} \text{ tal que } \omega_e = 1 \quad e \quad \omega_{(e)} = (\omega_b)_{b=e,f} \text{ tal que } \omega_e = 0.$$

Um cálculo simples mostra que,

$$\begin{aligned} \phi_{p,q,G}(\omega_e = 1 | \omega_f) &= \frac{\phi_{p,q,G}(\omega^e)}{\phi_{p,q,G}(\omega^e) + \phi_{p,q,G}(\omega_{(e)})} \\ &= \frac{[p/(1-p)]^{o(\omega^e)} q^{k^0(\omega^e, G \setminus \{e\})}}{[p/(1-p)]^{o(\omega^e)} q^{k^0(\omega^e, G \setminus \{e\})} + [p/(1-p)]^{o(\omega_{(e)})} q^{k^0(\omega_{(e)}, G \setminus \{e\})}} \\ &= \begin{cases} \frac{p/(1-p)}{[p/(1-p)]+1} = p, & \text{se } \omega_f = 1 \\ \frac{p/(1-p)}{[p/(1-p)]+q} = \frac{p}{p+q(1-p)}, & \text{se } \omega_f = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (83)$$

onde

$$\frac{p}{p+q(1-p)} \begin{cases} > p, & \text{se } q < 1 \\ = p, & \text{se } q = 1 \\ < p, & \text{se } q > 1. \end{cases}$$

Logo, por propriedade de esperança condicional e por (83), conseguimos

$$\phi_{p,q,G}(\omega_e = 1) = \phi_{p,q,G}(\phi_{p,q,G}(\omega_e = 1 | \omega_f)) > p = \phi_{p,q,G}(\omega_e = 1 | \omega_f = 1).$$

Portanto, concluímos que a medida de aglomerados aleatórios $\phi_{p,q,G}$ não é associada positiva.

No estudo de percolação, a desigualdade FKG é complementada pela desigualdade BK, portanto, deveria esperar-se que esta desigualdade falhe para as medidas de aglomerados aleatórios com parâmetro $q > 1$. Aproveitando o Exemplo 3.1, mostraremos esse fato no seguinte exemplo:

Exemplo 3.2. *Seja G o grafo contendo exatamente dois vértices e sejam e, f duas arestas paralelas que unem ditos vértices. A desigualdade BK não é satisfeita para medidas de aglomerados aleatórios com parâmetro $q > 1$.*

De fato, seguindo a mesma notação do Exemplo 3.1, definamos os seguintes eventos: $A = \{\omega_e = 1\}$ e $B = \{\omega_f = 1\}$. Como A e B dependem de arestas distintas,

$$A \cap B = A \circ B.$$

No entanto, para $q > 1$, (83) implica que

$$\phi_{p,q,G}(A) = \phi_{p,q,G}(\phi_{p,q,G}(A | \omega_f)) < p = \phi_{p,q,G}(A | B).$$

Portanto, a desigualdade BK não é satisfeita quando $q > 1$, para medidas de aglomerados aleatórios.

A ausência da propriedade BK torna toda a teoria mais complicada que a teoria de percolação independente. Uma pergunta que permanece em aberto, é saber se a desigualdade BK é válida para eventos crescentes, em medidas de aglomerados aleatórios com parâmetro $q < 1$. Sabemos que a desigualdade BK não é válida para qualquer evento nas medidas de aglomerados quando $q < 1$, desde que a referida desigualdade coincide com a desigualdade FKG quando se trabalha, na interseção, com um evento crescente e outro decrescente.

ASSOCIAÇÃO POSITIVA QUANDO $q \geq 1$

A associação positiva nos permitirá comparar medidas de aglomerados aleatórios com diferentes valores de p e q . Isso será usado para deduzir uma desigualdade de correlação importante que generaliza a desigualdade FKG exposta no Teorema 7 para o modelo de percolação independente.

Corolário 3.34 (Desigualdade FKG). *Seja $G = (V, E) \subset \mathbb{L}^d$ um subgrafo finito, $p \in [0, 1]$, $q \in [1, +\infty)$ e ξ uma condição de fronteira arbitrária. Se A, B são eventos crescentes na σ -álgebra das partes de Ω_G^ξ então*

$$\phi_{p,q,G}^\xi(A \cap B) \geq \phi_{p,q,G}^\xi(A) \phi_{p,q,G}^\xi(B),$$

onde Ω_G^ξ denota o conjunto da Definição 3.8.

Demonstração. Para não carregar a notação, nesta prova escrevemos $k^\xi(\omega)$ para denotar $k^\xi(\omega, G)$. Pelo Teorema 3.33 (condição FKG) é suficiente provar a condição (77), isto é,

$$p^{o(\omega^{ef})+o(\omega_{ef})}(1-p)^{c(\omega^{ef})+c(\omega_{ef})} q^{k^\xi(\omega^{ef})+k^\xi(\omega_{ef})} \geq p^{o(\omega_e^f)+o(\omega_f^e)}(1-p)^{c(\omega_e^f)+c(\omega_f^e)} q^{k^\xi(\omega_e^f)+k^\xi(\omega_f^e)}.$$

Em direção de provar esta desigualdade, observamos que

$$\begin{aligned} o(\omega^{ef}) + o(\omega_{ef}) &= [o(\omega) + 2] + o(\omega) \\ &= [o(\omega) + 1] + [o(\omega) + 1] = o(\omega_e^f) + o(\omega_f^e) \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} c(\omega^{ef}) + c(\omega_{ef}) &= c(\omega) + [c(\omega) + 2] \\ &= [c(\omega) + 1] + [c(\omega) + 1] = c(\omega_e^f) + c(\omega_f^e). \end{aligned}$$

Assim, só resta provar que

$$q^{k^{\zeta}(\omega^{ef})+k^{\zeta}(\omega_{ef})} \geq q^{k^{\zeta}(\omega_e^f)+k^{\zeta}(\omega_f^e)}. \quad (84)$$

Fixadas as arestas $e = \{u, v\}$ e $f = \{x, y\}$, onde $u, v, x, y \in V$, e observando que a configuração ω está definida sobre o conjunto de arestas $E \setminus \{e, f\}$, daremos um esboço da prova da desigualdade em (84), considerando simplesmente alguns casos especiais, já que a técnica para provar todos os outros casos é a mesma. Em quase todos os casos, como é simples de verificar em (84), temos a igualdade. Abaixo mostramos como obter (84) em três casos onde vale a igualdade e um caso onde a desigualdade é estrita.

- ✓ Quando u, v, x e y pertencem a aglomerados disjuntos em $(V, \eta(\omega))$.

$$\begin{aligned} k^{\zeta}(\omega^{ef}) + k^{\zeta}(\omega_{ef}) &= [k^{\zeta}(\omega) - 2] + k^{\zeta}(\omega) \\ &= [k^{\zeta}(\omega) - 1] + [k^{\zeta}(\omega) - 1] = k^{\zeta}(\omega_e^f) + k^{\zeta}(\omega_f^e). \end{aligned}$$

- ✓ Quando u, v pertencem a dois aglomerados disjuntos e x, y estão em um mesmo aglomerado em $(V, \eta(\omega))$.

$$\begin{aligned} k^{\zeta}(\omega^{ef}) + k^{\zeta}(\omega_{ef}) &= [k^{\zeta}(\omega) - 1] + k^{\zeta}(\omega) \\ &= k^{\zeta}(\omega) + [k^{\zeta}(\omega) - 1] = k^{\zeta}(\omega_e^f) + k^{\zeta}(\omega_f^e). \end{aligned}$$

- ✓ Quando u, v, x pertencem um aglomerado e y não pertence a este aglomerado em $(V, \eta(\omega))$.

$$k^{\zeta}(\omega^{ef}) + k^{\zeta}(\omega_{ef}) = [k^{\zeta}(\omega) - 1] + k^{\zeta}(\omega) = k^{\zeta}(\omega_e^f) + k^{\zeta}(\omega_f^e).$$

- ✓ Quando u, x estão em um mesmo aglomerado disjunto ao aglomerado onde estão v, y , em $(V, \eta(\omega))$.

$$\begin{aligned} k^{\zeta}(\omega^{ef}) + k^{\zeta}(\omega_{ef}) &= [k^{\zeta}(\omega) - 1] + k^{\zeta}(\omega) \\ &> [k^{\zeta}(\omega) - 1] + [k^{\zeta}(\omega) - 1] = k^{\zeta}(\omega_e^f) + k^{\zeta}(\omega_f^e). \end{aligned}$$

Procedendo analogamente para os outros casos, obtemos

$$k^{\zeta}(\omega^{ef}) + k^{\zeta}(\omega_{ef}) \geq k^{\zeta}(\omega_e^f) + k^{\zeta}(\omega_f^e),$$

concluindo-se a prova. □

Observamos que as desigualdades que estamos apresentando são sempre enunciadas para eventos crescentes. A próxima desigualdade que apresentaremos será muito útil neste trabalho, já que nos permitirá comparar medidas de aglomerados aleatórios com diferentes parâmetros $p \in [0, 1]$ e $q \geq 1$. Além do mais, para estas medidas sobre subgrafos finitos de \mathbb{L}^d a comparação também é válida para quaisquer condições de fronteira.

Corolário 3.35 (Comparação em p , veja [65]). *Seja $G = (V, E) \subset \mathbb{L}^d$ um subgrafo finito e ξ uma condição de fronteira fixa. Então*

- (1) $\phi_{p_1, q_1, G}^{\xi} \leq_{\text{st}} \phi_{p_2, q_2, G}^{\xi}$, se $q_1 \geq q_2$, $q_1 \geq 1$ e $p_1 \leq p_2$,
- (2) $\phi_{p_1, q_1, G}^{\xi} \geq_{\text{st}} \phi_{p_2, q_2, G}^{\xi}$, se $q_1 \geq q_2$, $q_1 \geq 1$ e $\frac{p_1}{q_1(1-p_1)} \leq \frac{p_2}{q_2(1-p_2)}$.

Demonstração. (1) Para cada $\omega \in \Omega_{\Lambda}^{\xi}$, defina a variável aleatória

$$Y(\omega) \equiv \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{k^{\xi}(\omega, G)} \left[\frac{p_2/(1-p_2)}{p_1/(1-p_1)}\right]^{o(\omega)}.$$

Desde que $k^{\xi}(\omega, G)$ é uma variável aleatória decrescente e $\frac{q_2}{q_1} \leq 1$ tem-se que $\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{k^{\xi}(\omega, G)}$ é crescente. Por outro lado, como $o(\omega)$ é crescente e, por hipótese, $\left[\frac{p_2/(1-p_2)}{p_1/(1-p_1)}\right] \geq 1$, tem-se que $\left[\frac{p_2/(1-p_2)}{p_1/(1-p_1)}\right]^{o(\omega)}$ é crescente. Como Y é o produto de duas variáveis aleatórias crescentes, ela é crescente.

Seja X uma variável aleatória arbitrária. Pela definição de esperança da variável aleatória XY com respeito a medida de probabilidade $\phi_{p_1, q_1, G}^{\xi}$ temos

$$\begin{aligned} \phi_{p_1, q_1, G}^{\xi}(XY) &= \int_{\Omega_G^{\xi}} \phi_{p_1, q_1, G}^{\xi}(d\omega) X(\omega)Y(\omega) \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_{p_1, q_1, G}^{\xi}} \sum_{\omega \in \Omega_G^{\xi}} X(\omega) \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{k^{\xi}(\omega, G)} \left[\frac{p_2/(1-p_2)}{p_1/(1-p_1)}\right]^{o(\omega)} [p_1/(1-p_1)]^{o(\omega)} q_1^{k(\omega)}. \end{aligned}$$

Simplificando, multiplicando e dividindo pela constante de normalização $\mathcal{Z}_{p_2, q_2, G}^{\xi}$, a expressão anterior se reescreve

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\mathcal{Z}_{p_2, q_2, G}^{\xi}} \sum_{\omega \in \Omega_G^{\xi}} X(\omega) [p_2/(1-p_2)]^{o(\omega)} q_2^{k^{\xi}(\omega, G)} \cdot \frac{\mathcal{Z}_{p_2, q_2, G}^{\xi}}{\mathcal{Z}_{p_1, q_1, G}^{\xi}} \\ &= \phi_{p_2, q_2, G}^{\xi}(X) \cdot \frac{\mathcal{Z}_{p_2, q_2, G}^{\xi}}{\mathcal{Z}_{p_1, q_1, G}^{\xi}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\phi_{p_1, q_1, G}^{\xi}(XY) = \phi_{p_2, q_2, G}^{\xi}(X) \cdot \frac{\mathcal{Z}_{p_2, q_2, G}^{\xi}}{\mathcal{Z}_{p_1, q_1, G}^{\xi}}. \quad (85)$$

Por outro lado, fazendo $X \equiv 1$ nesta igualdade, conseguimos $\phi_{p_1, q_1, G}^{\xi}(Y) = \frac{\mathcal{Z}_{p_2, q_2, G}^{\xi}}{\mathcal{Z}_{p_1, q_1, G}^{\xi}}$. Usando esta identidade em (85), para toda variável aleatória X temos

$$\phi_{p_1, q_1, G}^{\xi}(XY) = \phi_{p_2, q_2, G}^{\xi}(X) \cdot \phi_{p_1, q_1, G}^{\xi}(Y). \quad (86)$$

Caso particular, consideremos X uma variável aleatória crescente. Como $q_1 \geq 1$, $\phi_{p_1, q_1, G}^{\xi}$ tem a propriedade de ser associada positiva, portanto, usando (86) obtemos

$$\phi_{p_2, q_2, G}^{\xi}(X) = \frac{\phi_{p_1, q_1, G}^{\xi}(XY)}{\phi_{p_1, q_1, G}^{\xi}(Y)} \geq \phi_{p_1, q_1, G}^{\xi}(X),$$

concluindo-se a prova deste item.

Para provar o Item (2), para todo $\omega \in \Omega_{\Lambda}^{\xi}$ defina a variável aleatória

$$Y(\omega) \equiv \left(\frac{q_2}{q_1} \right)^{k^{\xi}(\omega, G) + o(\omega)} \left[\frac{p_2/q_2(1-p_2)}{p_1/q_1(1-p_1)} \right]^{o(\omega)}.$$

Desde que $k^{\xi}(\omega, G)$ é decrescente e $o(\omega)$ é crescente, $k^{\xi}(\omega, G) + o(\omega)$ é crescente. Como $\frac{q_2}{q_1} \leq 1$ temos que $\left(\frac{q_2}{q_1} \right)^{k^{\xi}(\omega, G) + o(\omega)}$ é decrescente. Por outro lado, veja que, por hipótese, $\left[\frac{p_2/q_2(1-p_2)}{p_1/q_1(1-p_1)} \right] \leq 1$, logo, $\left[\frac{p_2/q_2(1-p_2)}{p_1/q_1(1-p_1)} \right]^{o(\omega)}$ é decrescente. Como Y é o produto de duas variáveis aleatórias decrescentes, ela é decrescente.

Simplificando, observe que Y pode-se reescrever assim: $Y(\omega) = \left(\frac{q_2}{q_1} \right)^{k^{\xi}(\omega, G)} \left[\frac{p_2/(1-p_2)}{p_1/(1-p_1)} \right]^{o(\omega)}$, logo, a identidade (86) é válida, também, para toda variável aleatória X . Como $q_1 \geq 1$, $\phi_{p_1, q_1, G}^{\xi}$ tem a propriedade de ser associada positiva, logo, considerando X crescente e usando (86) obtemos

$$\phi_{p_2, q_2, G}^{\xi}(X) = \frac{\phi_{p_1, q_1, G}^{\xi}(XY)}{\phi_{p_1, q_1, G}^{\xi}(Y)} \leq \phi_{p_1, q_1, G}^{\xi}(X),$$

concluindo-se a prova. □

PROPRIEDADES DO DOMÍNIO DE MARKOV E DA ENERGIA FINITA

Considere um subgrafo finito $\Gamma \equiv (\Gamma, E_\Gamma) \subset \mathbb{L}^d$ (o abuso de notação cometido aqui é que identificamos Γ com seu conjunto de vértices V_Γ) e Λ um subgrafo de Γ . A próxima proposição, chamada *domínio de Markov*, nos mostra como a medida de probabilidade do modelo de aglomerados aleatórios em Λ pode ser obtida através da medida de probabilidade deste modelo definida em Γ com condições de fronteira adequadas.

Antes de prosseguirmos, relembremos uma propriedade elementar da esperança condicional. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de probabilidade. Suponha que X seja uma variável aleatória neste espaço. Se $A \in \mathcal{F}$ então, a esperança condicional de X , dada a σ -álgebra gerada por A , tem a seguinte expressão para todo $\omega \in \Omega$:

$$\mathbb{E}_\mu[X|A, A^c, \mathcal{O}, \Omega](\omega) = \frac{1}{\mu(A)} \mathbb{E}_\mu[X \cdot \mathbb{1}_A] \cdot \mathbb{1}_A(\omega) + \frac{1}{\mu(A^c)} \mathbb{E}_\mu[X \cdot \mathbb{1}_{A^c}] \cdot \mathbb{1}_{A^c}(\omega).$$

Para demonstrar a próxima proposição deste texto vamos precisar introduzir uma nova notação para falarmos de algumas condições de fronteira que surgem naturalmente quando consideramos as equações DLR.

Sejam $\Lambda \subset \Gamma$ subgrafos finitos em \mathbb{L}^d . Dada uma condição de fronteira ξ em Γ e uma configuração $\omega \in \{0, 1\}^{E_\Gamma}$, podemos definir uma nova condição de fronteira em Λ , que será denotada por $\xi \cup \omega$ e definida da seguinte maneira: $\{x, y\} \in \xi \cup \omega$ se, e somente se, $x, y \in \partial\Lambda$ e, além do mais, x e y pertencem à mesma componente conexa no grafo, cujo conjunto de vértices é formado por $(V_\Gamma \setminus V_\Lambda) \cup \partial\Lambda$ e o conjunto de arestas é dado por todas as arestas abertas da configuração ω tais que suas extremidades estejam no conjunto de vértices que acabamos de definir, unido ao conjunto das arestas ξ . Em outras palavras, $\{x, y\} \in (\xi \cup \omega)$ se eles estão no mesmo aglomerado aberto determinado por ω e ξ “fora” de Λ . As aspas no “fora” se referem ao fato de que o aglomerado ou as arestas mencionadas acima podem conter vértices ou arestas da fronteira de Λ .

Usando a notação introduzida acima e tomando a aresta $e = \{x, y\}$, podemos escrever a seguinte identidade

$$\begin{aligned} \phi_{p,q,\Gamma}^\xi(\omega_e = 0) &= \frac{1}{\mathcal{Z}_{p,q,\Gamma}^\xi} \sum_{\substack{\omega \in \{0,1\}^{E_\Gamma} \\ \omega_e = 0}} p^{o(\omega_e)} (1-p)^{c(\omega_e)} q^{k^\xi(\omega_e, \Gamma)} \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_{p,q,\Gamma}^\xi} \mathcal{Z}_{p,q,\Gamma \setminus \{x,y\}}^{\xi \cup 0}. \end{aligned} \quad (87)$$

Analogamente,

$$\phi_{p,q,\Gamma}^{\xi}(\omega_e = 1) = \frac{1}{\mathcal{Z}_{p,q,\Gamma}^{\xi}} \mathcal{Z}_{p,q,\Gamma \setminus \{x,y\}}^{\xi \cup 1}. \quad (88)$$

Proposição 3.36 (Propriedade do domínio de Markov). *Seja $\Lambda \subset \Gamma$, X uma variável aleatória que depende apenas dos estados das arestas de E_{Λ} . Denotamos por $\mathcal{F}_{\Gamma \setminus \Lambda} = \sigma(\omega_e : e \in E_{\Gamma} \setminus E_{\Lambda})$ a σ -álgebra gerada pelas variáveis aleatórias ω_e com $e \in E_{\Gamma} \setminus E_{\Lambda}$. Então*

$$\phi_{p,q,\Gamma}^{\xi}(X | \mathcal{F}_{\Gamma \setminus \Lambda})(\omega) = \phi_{p,q,\Lambda}^{\xi \cup \omega}(X).$$

Demonstração. Vamos primeiro fazer esta prova em um caso mais simples. Seja $e = \{x, y\}$ uma aresta em Γ e tome $\Lambda = \Gamma \setminus \{x, y\}$. Então

$$\mathcal{F}_{\Gamma \setminus (\Gamma \setminus \{x,y\})} = \mathcal{F}_{\{x,y\}} = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_e = 0\}, \{\omega_e = 1\}\}.$$

Portanto,

$$\phi_{p,q,\Gamma}^{\xi}(X | \mathcal{F}_{\Gamma \setminus \Lambda}) = \frac{\phi_{p,q,\Gamma}^{\xi}(\mathbb{1}_{\{\omega_e=0\}} X)}{\phi_{p,q,\Gamma}^{\xi}(\mathbb{1}_{\{\omega_e=0\}})} \mathbb{1}_{\{\omega_e=0\}} + \frac{\phi_{p,q,\Gamma}^{\xi}(\mathbb{1}_{\{\omega_e=1\}} X)}{\phi_{p,q,\Gamma}^{\xi}(\mathbb{1}_{\{\omega_e=1\}})} \mathbb{1}_{\{\omega_e=1\}}.$$

Usando as identidades (87) e (88) ficamos com

$$\phi_{p,q,\Gamma}^{\xi}(X | \mathcal{F}_{\Gamma \setminus \Lambda}) = \phi_{p,q,\Gamma \setminus \{x,y\}}^{\xi \cup 0}(X) \mathbb{1}_{\{\omega_e=0\}} + \phi_{p,q,\Gamma \setminus \{x,y\}}^{\xi \cup 1}(X) \mathbb{1}_{\{\omega_e=1\}}.$$

Aplicando a função acima em um ponto arbitrário $\omega \in \{0, 1\}^{E_{\Gamma}}$ ficamos com

$$\phi_{p,q,\Gamma}^{\xi}(X | \mathcal{F}_{\Gamma \setminus (\Gamma \setminus \{x,y\})})(\omega) = \phi_{p,q,\Gamma \setminus \{x,y\}}^{\xi \cup \omega}(X).$$

Usando as propriedades da esperança condicional e repetindo o procedimento acima concluímos a prova. \square

Observação 3.37. *Se $\Lambda \subset \Gamma$, note que a propriedade do domínio de Markov pode-se escrever da seguinte forma*

$$\phi_{p,q,\Gamma}^{\xi}(X | \mathcal{F}_{\Gamma \setminus \Lambda})(\omega) = \phi_{p,q,\Lambda}^{\omega}(X), \quad \omega \in \Omega_{\Gamma}^{\xi},$$

onde Ω_{Γ}^{ξ} denota o conjunto da Definição 3.8.

A seguinte propriedade, chamada de *propriedade da energia finita*, é uma das ferramentas necessárias (junto à invariância por translação da medida) quando no modelo de aglomerados aleatórios se deseja provar a propriedade geométrica da unicidade quase certa do aglomerado infinito. O problema da unicidade do aglomerado infinito será abordado no Teorema 3.50 abaixo. Salientamos que este problema geométrico pode ser válido para modelos de aglomerados aleatórios mais gerais (com presença de campo externo), veja-se, por exemplo, o Teorema 5.25 do Capítulo 5.

Proposição 3.38 (Propriedade da energia finita). *Seja $\Lambda \subset \mathbb{L}^d$ um subgrafo finito e $e = \{x, y\} \in E_\Lambda$ uma aresta. Denotamos por $\Lambda_* \equiv (\Lambda, \eta(\omega) \setminus e)$ e K_e o evento que x e y estão conectados por um caminho aberto que não usa a aresta “ e ”. Se $p \in (0, 1)$ e $q \geq 1$ temos*

$$\phi_{p,q,\Lambda}^{\xi}(\omega_e = 1 | \mathcal{F}_{\Lambda \setminus \{x,y\}}) = \begin{cases} p, & \text{se } x \text{ e } y \text{ pertencem a mesma componente em } \Lambda_* \\ \frac{p}{p+q(1-p)}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Usando a propriedade do domínio de Markov para Λ e $\{x, y\}$ temos

$$\phi_{p,q,\Lambda}^{\xi}(\omega_e = 1 | \mathcal{F}_{\Lambda \setminus \{x,y\}})(\psi) = \phi_{p,q,\{x,y\}}^{\xi \cup \psi}(\omega_e = 1).$$

Se x e y pertencem à mesma componente em Λ_* , a condição de fronteira acima é a condição de fronteira conectada. Logo,

$$\phi_{p,q,\{x,y\}}^{\xi \cup \psi}(\omega_e = 1) = \phi_{p,q,\{x,y\}}^1(\omega_e = 1) = \frac{p^1(1-p)^0q^1}{p^1(1-p)^0q^1 + p^0(1-p)^1q^1} = p.$$

Por outro lado, se x e y não pertencem a mesma componente em Λ_* , a condição de fronteira $\xi \cup \psi$ seria a condição de fronteira livre, logo,

$$\phi_{p,q,\{x,y\}}^{\xi \cup \psi}(\omega_e = 1) = \phi_{p,q,\{x,y\}}^0(\omega_e = 1).$$

Para calcular o lado direito acima, se procede analogamente ao caso anterior. \square

Com estas ferramentas a nossa disposição, agora podemos provar a desigualdade seguinte, que consiste em comparar medidas de probabilidade do modelo de aglomerados aleatórios com respeito as condições de fronteira.

Corolário 3.39 (Comparação entre condições de fronteira). *Seja $p \in [0, 1]$ e $q \geq 1$. Se $\xi \preceq \psi$ (toda aresta de ξ é uma aresta de ψ) então*

$$\phi_{p,q,\Lambda}^{\xi}(A) \leq \phi_{p,q,\Lambda}^{\psi}(A),$$

para qualquer evento crescente A na σ -álgebra das partes de $\{0, 1\}^{E_\Lambda}$.

Demonstração. Sejam ξ e ψ duas condições de fronteira sobre Λ . Suponha que $\xi \preceq \psi$. Seja Λ_0 o grafo obtido a partir de Λ adicionando as arestas de ψ . Seja B o evento dado por todos os elementos $\omega \in \{0, 1\}^{E_{\Lambda_0}}$ tais que $\omega_e = 0$ para todo $e \in \psi$ (lembrando que ψ é um conjunto de arestas). Pelas propriedades da esperança condicional, para todo evento A e todo ω tal que $\omega_e = 0 \forall e \in \psi$ temos

$$\phi_{p,q,\Lambda_0}^{\xi}(A | \mathcal{F}_{\Lambda_0 \setminus \Lambda})(\omega) = \phi_{p,q,\Lambda_0}^{\xi}(A | \omega_e = 0, \text{ para todo } e \in \psi) = \phi_{p,q,\Lambda_0}^{\xi}(A | B).$$

Usando a propriedade do domínio de Markov no lado esquerdo da igualdade acima ficamos com

$$\phi_{p,q,\Lambda_0}^{\zeta}(A|\mathcal{F}_{\Lambda_0\setminus\Lambda})(\omega) = \phi_{p,q,\Lambda}^{\zeta\cup\omega}(A) = \phi_{p,q,\Lambda}^{\zeta}(A),$$

onde, na última igualdade, usamos que $\zeta \cup \omega$ induz a mesma condição de fronteira que ζ em Λ . Seja C o evento dado por todos os elementos $\omega \in \{0,1\}^{E_{\Lambda_0}}$ tais que $\omega_e = 1$ para todo $e \in \psi$. Analogamente, tomando ω tal que $\omega_e = 1$ para todo $e \in \psi$, temos

$$\phi_{p,q,\Lambda_0}^{\zeta}(A|\mathcal{F}_{\Lambda_0\setminus\Lambda})(\omega) = \phi_{p,q,\Lambda_0}^{\zeta}(A|C).$$

Aplicando a propriedade do domínio de Markov no lado esquerdo da igualdade acima ficamos agora com

$$\phi_{p,q,\Lambda_0}^{\zeta}(A|\mathcal{F}_{\Lambda_0\setminus\Lambda})(\omega) = \phi_{p,q,\Lambda}^{\zeta\cup\omega}(A) = \phi_{p,q,\Lambda}^{\psi}(A),$$

onde, na última igualdade, usamos que $\zeta \cup \omega = \psi$. Pela definição de probabilidade condicional e pela desigualdade FKG temos

$$\phi_{p,q,\Lambda_0}^{\zeta}(A|B) = \frac{\phi_{p,q,\Lambda_0}^{\zeta}(A \cap B)}{\phi_{p,q,\Lambda_0}^{\zeta}(B)} \leq \frac{\phi_{p,q,\Lambda_0}^{\zeta}(A) \phi_{p,q,\Lambda_0}^{\zeta}(B)}{\phi_{p,q,\Lambda_0}^{\zeta}(B)} = \phi_{p,q,\Lambda_0}^{\zeta}(A).$$

Note que B é um evento decrescente, por isso invertemos o sentido da desigualdade FKG na linha acima. Com as relações obtidas acima podemos, então, concluir que

$$\phi_{p,q,\Lambda}^{\zeta}(A) \leq \phi_{p,q,\Lambda_0}^{\zeta}(A). \quad (89)$$

Pela definição de esperança condicional temos

$$\phi_{p,q,\Lambda_0}^{\zeta}(A) = \phi_{p,q,\Lambda_0}^{\zeta}(A|C) \phi_{p,q,\Lambda_0}^{\zeta}(C) = \phi_{p,q,\Lambda}^{\psi}(A) \phi_{p,q,\Lambda_0}^{\zeta}(C) \leq \phi_{p,q,\Lambda}^{\psi}(A),$$

onde, na segunda igualdade, usamos a propriedade do domínio de Markov como mostrado acima. Com esta desigualdade concluímos a prova do teorema, já que vale o Item (89). \square

Este corolário é importante, pois dele se deduz que as medidas $\phi_{p,q,\Lambda}^0$ e $\phi_{p,q,\Lambda}^1$ são medidas extremais, no sentido de que não se podem escrever como combinação convexa de duas medidas distintas.

Corolário 3.40 (Extremabilidade). *Seja $p \in [0,1]$, $q \geq 1$ e $\Lambda \subset \mathbb{L}^d$ um subgrafo finito. As medidas $\phi_{p,q,\Lambda}^0$ e $\phi_{p,q,\Lambda}^1$ são extremais. Isto é, para qualquer condição de fronteira ζ temos*

$$\phi_{p,q,\Lambda}^0(A) \leq \phi_{p,q,\Lambda}^{\zeta}(A) \leq \phi_{p,q,\Lambda}^1(A),$$

para qualquer evento crescente A na σ -álgebra das partes de $\{0,1\}^{E_{\Lambda}}$.

3.4.2 O limite termodinâmico, ergodicidade e a existência de transição de fase

Estamos interessados em estudar o que acontece com as medidas de probabilidade do modelo de aglomerados aleatórios quando o grafo finito começa a crescer monotonicamente para um grafo infinito, o chamado **limite termodinâmico**.

Daqui em diante, em nosso estudo, faremos um abuso de notação. Para referirmos à rede \mathbb{L}^d escreveremos simplesmente \mathbb{Z}^d , o que denotará o grafo $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, $d \geq 2$. A definição de uma medida de aglomerados aleatórios sobre \mathbb{Z}^d não pode ser feita diretamente a partir da definição dada para subgrafos de \mathbb{Z}^d , pois pode acontecer que o número de arestas abertas (ou fechadas) seja infinito.

Existem, basicamente, duas formas de definir estes tipos de medidas sobre espaços infinitos. A primeira (que começaremos a definir na continuação) é definida indiretamente tomando limites (fracos) das medidas de aglomerados aleatórios sobre grafos finitos (como, por exemplo, uma sequência de caixas crescentes que tendem a \mathbb{Z}^d) com condições de fronteira apropriadas (veja referência [65]). A segunda forma é construir medidas a volume infinito de maneira direta sobre o látice infinito, esta construção é inspirada pelos trabalhos de Dobrushin-Lanford-Ruelle (DLR) para estados de Gibbs (veja referência [57] para mais detalhes). Essa segunda forma de se construir estes tipos de medidas será vista pormenorizadamente na Subseção 3.4.5.

Um dos conceitos fundamentais para compreender o que é o limite termodinâmico é o conceito de convergência fraca de medidas. Existem vários conceitos de convergência de medidas de probabilidade. Como já mencionamos, a topologia gerada pelos cilindros finito dimensionais em $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ é metrizável e, além do mais, este espaço com a referida topologia é um espaço métrico compacto. Tal fato permite usar um importante teorema de Análise (veja Proposição 5.5 de [16]) que garante a compacidade do espaço das medidas de probabilidade definidas sobre os borelianos de $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$. Antes de enunciar este teorema vamos dar a definição de convergência fraca.

Definição 3.14 (Convergência fraca). *Seja (Ω, \mathcal{F}) um espaço mensurável. Uma sequência $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de medidas de probabilidade definidas neste espaço converge fracamente para μ se para toda função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ contínua limitada, temos*

$$\int_{\Omega} \mu_n(d\omega) f(\omega) \rightarrow \int_{\Omega} \mu(d\omega) f(\omega), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Essa noção de convergência define, de maneira natural, uma topologia no conjunto de todas as medidas de probabilidade que denotaremos por $\mathcal{M}_1(\Omega)$. No caso em que Ω

também tenha estrutura de espaço métrico, denotamos por $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ o conjunto de todas as medidas de probabilidade definidas sobre a σ -álgebra de Borel de Ω , isto é, a σ -álgebra gerada pelos abertos de Ω , notação: $\mathcal{B}(\Omega)$. A topologia induzida em $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ pela convergência fraca é metrizável e, além do mais, com respeito a esta métrica, o espaço $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ é um espaço topológico compacto se, e somente se, Ω é compacto. Um caso particular de bastante interesse em nosso trabalho é quando $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$. Com a topologia produto, temos pelo Teorema de Tychonoff que este espaço é compacto. Podemos mostrar, também, que esta topologia é metrizável e assim segue do teorema citado anteriormente que $\mathcal{M}_1(\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}, \mathcal{B}(\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}))$ é um espaço métrico compacto.

Para definirmos o limite termodinâmico, lembramos que podemos olhar para as medidas do modelo de aglomerados aleatórios com condições de fronteira, no sentido da Definição 3.8, em cada $\Lambda_n \subset \mathbb{Z}^d$ (finito) como medidas de probabilidade definidas na σ -álgebra de Borel de $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$. De fato, neste contexto de condições de fronteira a medida de probabilidade $\phi_{p,q,\Lambda_n}^{\xi}$ é dada por

$$\phi_{p,q,\Lambda_n}^{\xi}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\mathcal{Z}_{p,q,\Lambda_n}^{\xi}} p^{o(\omega)}(1-p)^{c(\omega)} q^{k(\omega,\Lambda_n)}, & \text{se } \omega \in \Omega_{\Lambda_n}^{\xi} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Esta construção motiva a seguinte definição.

Definição 3.15 (Limite termodinâmico). *A medida de probabilidade ϕ_{p,q,\mathbb{Z}^d} definida sobre o conjunto de configurações $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ associado ao grafo infinito \mathbb{Z}^d , é chamada de medida de aglomerados aleatórios a volume infinito com parâmetros p e q , se existe uma condição de fronteira $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$, no sentido da Definição 3.8, e uma sequência crescente de subgrafos finitos $\{(\Lambda_n, E_{\Lambda_n}) : n \geq 1\}$, satisfazendo $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ quando $n \rightarrow \infty$ e*

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^{\xi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p,q,\Lambda_n}^{\xi}$$

onde a convergência acima deve ser entendida no sentido da Definição 3.14.

Para cada $\Lambda_n \subset \mathbb{Z}^d$ a medida de probabilidade $\phi_{p,q,\Lambda_n}^{\xi}$ de aglomerados aleatórios com condição de fronteira $\xi_e = 1$ para todo $e \in \mathbb{E}^d$ tem um papel importante em nosso trabalho. Observamos que alguns resultados, como a desigualdade FKG, a desigualdade de comparação com respeito ao parâmetro p , a monotonicidade com respeito às condições de fronteira e propriedade da energia finita permanecem válidas,

com as naturais adaptações no limite termodinâmico. Isso será visto em detalhes mais adiante, especificamente no Teorema 3.59 e Proposição 3.63.

Teorema 3.41. *Existem duas medidas de probabilidade $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0$ e $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^1$ chamadas medidas do modelo de aglomerados aleatórios a volume infinito com condições de fronteira livre e conectada respectivamente. Para todo evento $A \in \mathcal{F}$ crescente que depende de um número finito de arestas tais medidas satisfazem:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p,q,\Lambda_n}^1(A) = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^1(A) \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p,q,\Lambda_n}^0(A) = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(A),$$

onde $\Lambda_n = [-n, n]^d \cap \mathbb{Z}^d$.

Demonstração. Já que A depende apenas dos estados de um número finito de arestas, então, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A \in \mathcal{F}_{\Lambda_N}$. Observe que, para cada condição de fronteira ψ temos, para todo $n \geq N$ que

$$\phi_{p,q,\Lambda_{n+1}}^1(A | \mathcal{F}_{\Lambda_{n+1} \setminus \Lambda_n})(\psi) = \phi_{p,q,\Lambda_n}^{1 \cup \psi}(A) \leq \phi_{p,q,\Lambda_n}^1(A), \quad (90)$$

onde, na igualdade acima, usamos a propriedade do domínio de Markov, e na desigualdade a condição de comparação entre condições de fronteira. Assim, por (90) temos

$$\phi_{p,q,\Lambda_{n+1}}^1(A) = \phi_{p,q,\Lambda_{n+1}}^1(\phi_{p,q,\Lambda_{n+1}}^1(A | \mathcal{F}_{\Lambda_{n+1} \setminus \Lambda_n})) \leq \phi_{p,q,\Lambda_{n+1}}^1(\phi_{p,q,\Lambda_n}^1(A)) = \phi_{p,q,\Lambda_n}^1(A).$$

Logo, $\{\phi_{p,q,\Lambda_n}^1(A) : n \geq N\}$ é decrescente. Como esta sequência de números reais é limitada, ela é convergente. Para cada $A \in \mathcal{F}_{\Lambda_N}$ definamos

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^1(A) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p,q,\Lambda_n}^1(A).$$

O limite acima é independente da escolha da sequência Λ_n . De fato, fixadas duas sequências $\Lambda_{1,n}$ e $\Lambda_{2,n}$, seja $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d;1}^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p,q,\Lambda_{1,n}}$ e $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d;2}^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p,q,\Lambda_{2,n}}$ e considere a sequência

$$\Lambda_n = \begin{cases} \Lambda_{1,n}, & n \text{ é par} \\ \Lambda_{2,n}, & n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

e seja $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p,q,\Lambda_n}$. Como $\phi_{p,q,\Lambda_{1,n}}$ e $\phi_{p,q,\Lambda_{2,n}}$ são subsequências de ϕ_{p,q,Λ_n} , as três sequências mencionadas convergem, portanto, elas devem ter o mesmo limite.

Por outro lado, a coleção dos eventos crescentes que dependem de um número finito de variáveis é uma classe que determina convergência (veja referência [18], p. 14-19),

logo, existe uma medida de probabilidade $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^1$ tal que ϕ_{p,q,Λ_n}^1 converge fracamente para $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^1$.

Analogamente, temos que $\phi_{p,q,\Lambda_{n+1}}^0(A)$ é uma sequência limitada crescente ($n \geq N$) de números reais e, portanto, converge. Usando, novamente, argumentos similares ao caso anterior, temos que ϕ_{p,q,Λ_n}^0 converge fracamente a uma medida de probabilidade que será denotada por $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0$. \square

O seguinte corolário é consequência do Corolário 3.40 junto ao Teorema 3.41.

Corolário 3.42 (Extremabilidade a volume infinito). *Todos os limites termodinâmicos do modelo de aglomerados aleatórios $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^\xi$ sobre \mathbb{Z}^d são estocasticamente dominados por $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0$ e dominam $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^1$. Mais precisamente*

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0 \leq_{\text{st}} \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^\xi \leq_{\text{st}} \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^1,$$

para qualquer condição de fronteira ξ .

Proposição 3.43 (Monotonicidade no volume). *Como subproduto da prova do Teorema 3.41, para $\Lambda \subset \Gamma$ em \mathbb{Z}^d temos*

$$\phi_{p,q,\Lambda}^0(A) \leq \phi_{p,q,\Gamma}^0(A) \quad e \quad \phi_{p,q,\Gamma}^1(A) \leq \phi_{p,q,\Lambda}^1(A),$$

para cada evento A crescente na σ -álgebra das partes de $\{0,1\}^{E_\Lambda}$.

INVARIÂNCIA, ERGODICIDADE E TRIVIALIDADE DE ϕ_{p,q,\mathbb{Z}^d} .

As seguintes propriedades estão relacionadas com os conceitos de invariância, ergodicidade (para uma definição formal destes conceitos, veja Seção 2.4 do Capítulo 2) e trivialidade de medidas. No que resta do capítulo, vamos adotar a seguinte notação

$$\mathcal{L} \equiv \{\Lambda \subset \mathbb{Z}^d : 0 < |\Lambda| < \infty\}. \quad (91)$$

Dado $\Lambda \in \mathcal{L}$, denotamos por \mathcal{F}_Λ à σ -álgebra de eventos que dependem de um número finito (de estados) de arestas. Uma medida μ sobre o espaço mensurável (Ω, \mathcal{F}) é dito **trivial** sobre \mathcal{T} se, para todo evento $A \in \mathcal{T} \equiv \bigcap_{\Lambda \in \mathcal{L}} \mathcal{F}_{\Lambda^c}$, $\mu(A)$ é igual a zero ou um. A σ -álgebra \mathcal{T} é conhecida como σ -álgebra caudal.

O seguinte teorema nos diz que as medidas extremas a volume infinito do modelo de aglomerados aleatórios (extremas, no sentido de espaços convexos, isto é, estas medidas não podem ser escritas como combinação convexa de duas medidas distintas)

são invariantes por automorfismos (em particular, são invariantes por translações) da rede \mathbb{Z}^d .

Fixado $p \in [0, 1]$ e $q \in [1, \infty)$, enunciaremos e provamos o seguinte teorema.

Teorema 3.44 (Invariância por automorfismos). *A medida de aglomerados aleatórios a volume infinito $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b$, é invariante por automorfismos, para $b = 0, 1$.*

Demonstração. Seja A um evento crescente dependendo de um número finito de arestas, todas incluídas em uma caixa $\Lambda \in \mathcal{L}$. Seja τ a traslação de \mathbb{Z}^d , pela Proposição 3.43 temos

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(A) \geq \phi_{p,q,\Lambda}^0(A) = \phi_{p,q,\tau\Lambda}^0(\tau^{-1}A) \longrightarrow \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(\tau^{-1}A), \quad \text{quando } \Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d.$$

Pelo mesmo raciocínio, substituindo $A \equiv \tau^{-1}A$ e $\tau \equiv \tau^{-1}$ na expressão acima obtemos

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(\tau^{-1}A) \geq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(A).$$

Portanto, $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(\tau^{-1}A) = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(A)$. Desde que os eventos cilíndricos geram a σ -álgebra \mathcal{F} , pelo Lema 3.36 (do Apêndice) temos $\tau\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0 = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0$.

Por outro lado, pela Proposição 3.43 e por um raciocínio similar ao feito acima, obtemos $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^1(\tau A) = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^1(A)$. Seja \mathcal{C} o conjunto de automorfismos que fixam a origem. Cada automorfismo de \mathbb{Z}^d é a combinação de uma traslação τ e um elemento σ de \mathcal{C} . Como todo evento crescente pode-se aproximar por eventos crescentes dependendo de um número finito de arestas e todo elemento de \mathcal{C} preserva caixas da forma $\Lambda_n \equiv [-n, n]^d \cap \mathbb{Z}^d$, segue do Teorema 3.41 que $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b$ é invariante por automorfismos. \square

O seguinte teorema sobre trivialidade das medidas extremais, nos servirá para provar a ergodicidade das medidas (extremais) de aglomerados aleatórios.

Teorema 3.45 (Trivialidade). *A medida de aglomerados aleatórios a volume infinito $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b$, é trivial sobre \mathcal{F} , para $b = 0, 1$.*

Demonstração. Existem duas formas de verificar este teorema, a primeira é usar a Proposição 4.35, a qual será apresentada ainda na Subseção 4.3.2 do Capítulo 4 e a segunda forma será detalhada a seguir. Sejam $\Lambda \subset \Gamma$ subgrafos finitos¹ em \mathbb{Z}^d , $A \in \mathcal{F}_\Lambda$ e $B \in \mathcal{F}_{\Gamma \setminus \Lambda}$ ambos crescentes. Logo,

$$\phi_{p,q,\Gamma}^0(A \cap B) = \phi_{p,q,\Gamma}^0(A|B) \phi_{p,q,\Gamma}^0(B) \geq \phi_{p,q,\Gamma}^0(A) \phi_{p,q,\Gamma}^0(B) \geq \phi_{p,q,\Lambda}^0(A) \phi_{p,q,\Gamma}^0(B),$$

¹ Relembramos que, aqui, estamos cometendo abuso de notação, estamos escrevendo Λ para denotar o grafo (Λ, E_Λ)

onde, na primeira desigualdade, se usou a desigualdade FKG (veja Corolário 3.34) e na segunda desigualdade a monotonicidade no volume (veja Proposição 3.43).

Fazendo $\Gamma \uparrow \mathbb{Z}^d$ na desigualdade anterior obtemos

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(A \cap B) \geq \phi_{p,q,\Lambda}^0(A) \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(B), \quad \forall B \in \mathcal{F}_{\Gamma \setminus \Lambda},$$

logo, por definição da σ -álgebra caudal, esta desigualdade se mantém para todo $B \in \mathcal{T}$. Fazendo $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ na desigualdade acima, obtemos

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(A \cap B) \geq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(A) \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(B), \quad \forall B \in \mathcal{T}. \quad (92)$$

Desde que $B \in \mathcal{T}$, $B^c \in \mathcal{T}$, temos

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(A \cap B^c) \geq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(A) \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(B^c), \quad \forall B \in \mathcal{T}. \quad (93)$$

Como A e B são independentes (pois dependem de volumes diferentes) segue

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(A \cap B) + \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(A \cap B^c) = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(A) \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(B) + \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(A) \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(B^c).$$

Combinando (92) e (93) comprovamos a validade da seguinte identidade

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(A \cap B) = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(A) \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(B), \quad \forall B \in \mathcal{T}. \quad (94)$$

Como (94) é válido para todo $A \in \mathcal{F}_\Lambda$ crescente e a coleção de tais eventos é uma classe que determina convergência (veja referência [18], p. 14-19), então (94) é válido para todo $A \in \mathcal{F}$.

Fazendo $A = B$, em (94) temos $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(A) = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(A)^2$, portanto, $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(A) \in \{0, 1\}$, para todo $A \in \mathcal{T}$. Isto é, $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0$ é trivial sobre \mathcal{T} .

Usando-se associatividade positiva, a Proposição 3.43 e um raciocínio análogo ao feito anteriormente provam que $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^1$ é também trivial sobre \mathcal{T} . \square

Uma medida de probabilidade μ sobre (Ω, \mathcal{F}) é dita **mixing** ou **fortemente mixing** se, para todo $A, B \in \mathcal{F}$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \mu(A \cap \tau_x B) = \mu(A)\mu(B) \quad (95)$$

ou equivalentemente, dado $\epsilon > 0$, existe $N = N(\epsilon)$ tal que

$$|\mu(A \cap \tau_x B) - \mu(A)\mu(B)| < \epsilon, \quad \text{se } |x| \geq N.$$

Teorema 3.46 (Ergodicidade). *A medida de aglomerados aleatórios a volume infinito $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b$ é ergódica com respeito as translações de \mathbb{Z}^d , distintas da identidade, para $b = 0, 1$.*

Demonstração. Um fato geral diz que toda medida trivial sobre \mathcal{T} é mixing (veja [57], Proposição 7.9 e a discussão relacionada em [57], Observação 7.13, Proposição 14.9). Com isso a nossa disposição, seja $j \neq 0$ e B um evento invariante por translações. Como $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b$ é mixing, vale a identidade (95). Fazendo $x = nj$, $A = B$ e $\tau \equiv \theta$ em (95), quando $n \rightarrow \infty$, temos $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(B) = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(B)^2$, portanto, $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(B) \in \{0, 1\}$. Logo, $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b$ é ergódica, para $b = 0, 1$. \square

Observação 3.47. *Considerando $q = 1$ nos Teoremas 3.44 e 3.46, veja que obtemos uma prova alternativa das Proposições 2.10 e 2.5, respectivamente, Seção 2.4. Além disso, neste caso ($q = 1$), segundo o Teorema 3.45, tem-se que a medida de Bernoulli \mathbb{P}_p é trivial sobre \mathcal{T} .*

TRANSIÇÃO DE FASE

A transição de fase para o modelo de aglomerados aleatórios a volume infinito é similar à transição de fase para o modelo de percolação independente, esta semelhança é descrita precisamente no teorema abaixo.

Teorema 3.48. *Seja $d \geq 1$. Para cada $q \geq 1$ fixo, existe $p_c \equiv p_c(q) \in [0, 1]$, chamado de ponto crítico, tal que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall p < p_c, \text{ qualquer medida de aglomerados aleatórios sobre } \mathbb{Z}^d, \text{ não tem aglomerados} \\ \text{infinitos quase certamente} \\ \forall p > p_c, \text{ qualquer medida de aglomerados aleatórios sobre } \mathbb{Z}^d, \text{ tem pelo menos um} \\ \text{aglomerado infinito quase certamente.} \end{array} \right.$$

Demonstração. Fixe $q \geq 1$ e $N \in \mathbb{N}$. Denote por $[-N, N]^d \equiv [-N, N]^d \cap \mathbb{Z}^d$, a caixa de centro na origem de lado $2N$. Pelo Teorema 3.41, para todo $N > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p,q,[-n,n]^d}^1(0 \leftrightarrow \partial[-N, N]^d) = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^1(0 \leftrightarrow \partial[-N, N]^d).$$

Pelo Corolário .39, a quantidade à esquerda na igualdade acima é não decrescente em p , logo, o limite também é monótono no parâmetro p . Daí, para cada $p_1 \leq p_2$

$$\phi_{p_1,q,\mathbb{Z}^d}^1(0 \leftrightarrow \partial[-N, N]^d) \leq \phi_{p_2,q,\mathbb{Z}^d}^1(0 \leftrightarrow \partial[-N, N]^d).$$

Uma vez que

$$\bigcap_{N=1}^{\infty} \{0 \leftrightarrow \partial[-N, N]^d\} = \{0 \leftrightarrow \infty\},$$

pela continuidade da medida, a desigualdade anterior implica

$$\phi_{p_1, q, \mathbb{Z}^d}^1(0 \leftrightarrow \infty) \leq \phi_{p_2, q, \mathbb{Z}^d}^1(0 \leftrightarrow \infty),$$

para todo $p_1 \leq p_2$. Analogamente, a mesma desigualdade é válida para a condição de fronteira livre. Portanto, podemos definir

$$p_c^b \equiv \inf\{p \in [0, 1] : \phi_{p, q, \mathbb{Z}^d}^b(0 \leftrightarrow \infty) > 0\}, \quad \text{com } b = 0, 1.$$

Vamos mostrar, agora, que $p_c^1 = p_c^0$. De fato, suponha por contradição que $p_c^1 \neq p_c^0$. Se $p_c^1 > p_c^0$, então, pela definição de p_c^1 , existe algum $p \in (p_c^0, p_c^1)$ tal que

$$\phi_{p, q, \mathbb{Z}^d}^1(0 \leftrightarrow \infty) = 0.$$

Já que $\phi_{p, q, \mathbb{Z}^d}^0 \leq_{st} \phi_{p, q, \mathbb{Z}^d}^1$ e $\{0 \leftrightarrow \infty\}$ é um evento crescente, segue que $\phi_{p, q, \mathbb{Z}^d}^0(0 \leftrightarrow \infty) = 0$, mas isto contradiz a definição de p_c^0 . Por um raciocínio análogo, para o caso $p_c^1 < p_c^0$, chegamos, também, a uma contradição. Logo, esse **ponto crítico** comum será denotado por p_c .

Note que o evento $\bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{x \leftrightarrow \infty\}$ onde existe pelo menos uma componente conexa infinita é crescente e invariante por translações, pois uma translação de \mathbb{Z}^d leva aglomerados aleatórios infinitos em aglomerados aleatórios infinitos na configuração ω transladada, por causa da invariância translacional da rede \mathbb{Z}^d .

Por outro lado, as medidas de aglomerados aleatórios extremas a volume infinito $\{\phi_{p, q, \mathbb{Z}^d}^b : b = 0, 1\}$ são ergódicas, logo,

$$\phi_{p, q, \mathbb{Z}^d}^b(\bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{x \leftrightarrow \infty\}) \in \{0, 1\}.$$

Por dominação estocástica, σ -aditividade e invariância translacional das medidas $\phi_{p, q, \mathbb{Z}^d}^b$ com $b = 0, 1$, para todo $p < p_c$ temos

$$\phi_{p, q, \mathbb{Z}^d}^{\xi}(\bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{x \leftrightarrow \infty\}) \leq \phi_{p, q, \mathbb{Z}^d}^1(\bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{x \leftrightarrow \infty\}) \leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \phi_{p, q, \mathbb{Z}^d}^1(x \leftrightarrow \infty) = 0.$$

Este último fato conclui a demonstração da primeira parte do teorema.

Observe que se $p > p_c$, então, devemos ter $\phi_{p, q, \mathbb{Z}^d}^0(\bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{x \leftrightarrow \infty\}) = 1$ pois, caso contrário,

$$0 = \phi_{p, q, \mathbb{Z}^d}^0(\bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{x \leftrightarrow \infty\}) \geq \phi_{p, q, \mathbb{Z}^d}^0(x \leftrightarrow \infty) > 0,$$

onde, novamente na última desigualdade, fazemos uso da invariância translacional do modelo e da definição de ponto crítico. E, assim, chegamos a uma contradição.

Portanto, $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(\cup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{x \leftrightarrow \infty\}) = 1$. Usando a dominação estocástica da medida extremal conectada, temos a desigualdade

$$1 = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(\cup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{x \leftrightarrow \infty\}) \leq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^{\xi}(\cup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{x \leftrightarrow \infty\}),$$

o que conclui a prova. \square

Definição 3.16. *Motivados pela definição de ponto crítico estabelecido na prova do Teorema 3.48, para $d \geq 2$ definimos o ponto crítico do modelo de aglomerados aleatórios de parâmetro $q \geq 1$ pelo valor*

$$p_c(q, d) = \inf\{p \in [0, 1] : \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(0 \leftrightarrow \infty) > 0\}, \quad b = 0, 1.$$

Para $d \geq 2$, o fato de que $p_c(q, d) \in (0, 1)$ não é, de maneira nenhuma, óbvio. Esse resultado pode ser provado usando os Corolários 3.35 e 2.29, os quais estabelecem que $p_c(1, d) \equiv p_c(d) \in (0, 1)$, como pode ser visto na prova do seguinte teorema.

Teorema 3.49. *Se $d \geq 2$, e $q \geq 1$, então, $p_c(q, d) \in (0, 1)$.*

Demonstração. O caso de maior interesse é quando $p \in (0, 1)$. Logo, usando o Corolário 3.35 com $q_1 = q$, $q_2 = 1$, $p_1 = p$, $p_2 = p'$, $\xi = 1$ e $p' \equiv \frac{p}{p+q(1-p)}$, temos

$$\phi_{p',1,G}^1 \leq_{\text{st}} \phi_{p,q,G}^1 \leq_{\text{st}} \phi_{p,1,G'}^1$$

desde que $\frac{p}{q(1-p)} = \frac{p_2}{q_2(1-p_2)} = \frac{p'}{(1-p')}$. Da definição de p' obtemos que $p = \frac{qp'}{1+p'(q-1)}$. Daí, a dominação estocástica anterior pode-se rescrever

$$\phi_{p',1,G}^1 \leq_{\text{st}} \phi_{p,q,G}^1 \leq_{\text{st}} \phi_{\frac{qp'}{1+p'(q-1)},1,G}^1.$$

Fazendo $G \uparrow \mathbb{Z}^d$ obtemos

$$\phi_{p',1,\mathbb{Z}^d}^1 \leq_{\text{st}} \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^1 \leq_{\text{st}} \phi_{\frac{qp'}{1+p'(q-1)},1,\mathbb{Z}^d}^1.$$

Logo, pela definição de ponto crítico segundo a Definição 3.16 tem-se

$$p_c(1, d) \leq p_c(q, d) \leq \frac{qp_c(1, d)}{1 + (q-1)p_c(1, d)},$$

onde $p_c(1, d) = p_c(d)$ é o ponto crítico do modelo de aglomerados aleatórios, quando $q = 1$, isto é, $p_c(d)$ é o ponto crítico do modelo de percolação independente, que, pelo Corolário 2.29, é não trivial. Portanto, concluímos que $p_c(q, d) \in (0, 1)$ sempre que $q \geq 1$. \square

No caso que $d = 2$, não nos preocupamos com este detalhe pois, na Subseção 3.4.4 esboçaremos a prova de que o ponto crítico coincide com o ponto

$$p_{sd} = \frac{\sqrt{q}}{1 + \sqrt{q}},$$

com $q \geq 1$ [12], o que implicará que o ponto crítico na rede bidimensional é não trivial (para uma exposição mais detalhada desse fato veja [120]).

3.4.3 Unicidade do aglomerado infinito

Pelo Teorema 3.48 temos que na fase supercrítica (isto é, quando $p > p_c$) existe, pelo menos, um aglomerado infinito quase certamente. Uma pergunta natural é: este aglomerado infinito é único? A resposta é sim.

O próximo teorema nos fornece a unicidade quase certa do aglomerado infinito para medidas de aglomerados aleatórios com condições de fronteira extremas. Ele diz que para valores de p maiores que o ponto crítico, quase certamente existe um único aglomerado infinito, isto é, $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(\text{Existe um único aglomerado infinito}) = 1$, onde $b = 0, 1$. Mais precisamente

Teorema 3.50 (Unicidade do aglomerado infinito). *Para todo $p \in [0, 1]$ o número de aglomerados infinitos é igual a 0 ou 1, $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b$ -q.c.*

Demonstração. Vamos denotar por N_∞ a variável aleatória que conta o número de aglomerados aleatórios infinitos. Claramente, N_∞ é invariante por translações, pois as translações das configurações de $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ não alteram seu número de aglomerados aleatórios. Pela ergodicidade das medidas extremas $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b$, $b = 0, 1$ (veja Teorema 3.46), temos que $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(N_\infty = n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\})$ é igual a zero ou um.

Daí, a prova da unicidade do aglomerado infinito pode ser deduzida como consequência dos dois seguintes lemas:

Lema 3.51. *Para cada $p \in [0, 1]$ e $q \geq 1$, temos*

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(N_\infty \in \{0, 1, \infty\}) = 1.$$

Demonstração. Desejamos provar que $N_\infty \in \{0, 1, \infty\}$ quase certamente. Vamos fazer a prova por contradição. Fixe $n_0 \neq 0, 1$ e $+\infty$ e suponha por contradição que

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(N_\infty = n_0) = 1. \tag{96}$$

Defina o evento

$$A_k \equiv \{n_0 \text{ aglomerados infinitos (abertos) em } \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda_k \text{ interceptam } \Lambda_k\},$$

onde $\Lambda_k = [-k, k]^2 \cap \mathbb{Z}^d$ é a caixa centrada na origem de lado $2k$.

Observe que a sequência de conjuntos $(A_k)_{k>0}$ é crescente e que $\cup_{k>0} A_k = \{N_\infty = n_0\}$, o que implica (pelo continuidade da medida) que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(A_k) = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(\cup_{k>0} A_k) = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(N_\infty = n_0) = 1.$$

Portanto, podemos escolher um $k > 0$ tal que

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(A_k) > \frac{1}{2}. \quad (97)$$

Observe que

$$A_k \cap \{\forall e \in E_{\Lambda_k} : \omega_e = 1\} \subset \{N_\infty = 1\},$$

pois, no evento acima, os n_0 aglomerados estão unidos pela caixa Λ_k , já que todas suas arestas estão abertas. Daí, temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(N_\infty = 1) &\geq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(A_k \cap \{\forall e \in E_{\Lambda_k} : \omega_e = 1\}) \\ &= \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(\forall e \in E_{\Lambda_k} : \omega_e = 1 | A_k) \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(A_k) > 0, \end{aligned}$$

onde, na primeira desigualdade, simplesmente usamos inclusão de conjuntos, e, na última desigualdade, usamos a propriedade da energia finita (veja Proposição 3.38) e a equação (97). Chegando assim a uma contradição com (96). \square

Lema 3.52. Para cada $p \in [0, 1]$ e $q \geq 1$ temos

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(N_\infty = \infty) = 0.$$

Demonstração. É suficiente provar que $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(N_\infty \geq 3) = 0$. Para isso, suponha que $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(N_\infty \geq 3) > 0$. Defina Q_{n-1} como a caixa centrada na origem de lado $2n - 1$ e o evento

$$F_n \equiv \{ \text{Pelo menos 3 aglomerados infinitos (abertos) distintos interceptam } Q_{n-1} \}.$$

Observe que $\{N_\infty \geq 3\} = \cup_{n \geq 1} F_n$ e que $F_n \subset F_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, logo, pela continuidade da medida, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(F_n) = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(N_\infty \geq 3)$. Portanto, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$, então

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(F_n) > 0. \quad (98)$$

Dados três pontos distintos $y_1, y_2,$ e y_3 em ∂Q_{n_0-1} , defina o evento

$$F_{n_0}(y_1, y_2, y_3) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{Os pontos } y_1, y_2, y_3 \text{ pertencem a aglomerados infinitos (abertos)} \\ \text{distintos, usando apenas arestas exteriores a } Q_{n_0-1} \end{array} \right\}.$$

Como $F_{n_0} \subset \cup_{y_1, y_2, y_3} F_{n_0}(y_1, y_2, y_3)$, então, por (98) temos que: para algum y_1, y_2, y_3

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(F_{n_0}(y_1, y_2, y_3)) > 0. \quad (99)$$

Dados y_1, y_2, y_3 existe $x \equiv x(y_1, y_2, y_3) \in Q_{n_0-1}$ tal que existem três caminhos de arestas disjuntas no interior da caixa Q_{n_0-1} ligando x a y_1, y_2 e y_3 . Denotando estes três caminhos por: $\alpha, \beta,$ e θ , respectivamente, definimos o seguinte evento

$$F'_{n_0}(y_1, y_2, y_3) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{os caminhos } \alpha, \beta \text{ e } \theta \text{ estão aberto se as demais arestas} \\ \text{do interior da caixa } Q_{n_0-1} \text{ estão fechadas} \end{array} \right\}.$$

Pela propriedade da energia finita temos

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(F'_{n_0}(y_1, y_2, y_3)) > 0. \quad (100)$$

Defina $P_T \equiv \{x \text{ é "ponto triplo especial" no interior da caixa } Q_{n_0-1}\}$. Note que

$$\{x \in P_T\} \supset F_{n_0}(y_1, y_2, y_3) \cap F'_{n_0}(y_1, y_2, y_3). \quad (101)$$

Como $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(F_{n_0}(y_1, y_2, y_3)) > 0$, aplicando a propriedade da energia finita temos

$$0 < \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(F'_{n_0}(y_1, y_2, y_3) | F_{n_0}(y_1, y_2, y_3)) = \frac{\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(F'_{n_0}(y_1, y_2, y_3) \cap F_{n_0}(y_1, y_2, y_3))}{\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(F_{n_0}(y_1, y_2, y_3))}.$$

Usando a equação (101) segue que

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(x \in P_T) > 0.$$

Por invariância translacional, temos que a probabilidade de qualquer ponto ser um ponto triplo é constante, isto é, existe uma constante positiva ρ tal que

$$0 < \rho = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(x \in P_T), \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d.$$

Seja X_n a variável aleatória que representa o número de pontos triplos dentro da caixa Q_{n-1} . Então

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(X_n) = \sum_{x \in Q_{n-1}} \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(x \in P_T) = (2n - 1)^2 \rho.$$

Já que X_n é uma variável aleatória integrável, então, $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(X_n \geq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(X_n)) > 0$. Assim, temos

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(X_n \geq (2n-1)^2\rho) > 0. \quad (102)$$

Por outro lado, afirmamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$X_n \leq 4(2n-1). \quad (103)$$

Para verificar esta afirmação, considere as componentes conexas dos pontos triplos especiais usando apenas arestas no interior da caixa Q_{n-1} . Suponha que cada componente contenha n_1, n_2, \dots pontos triplos especiais, logo, $n_1 + n_2 + \dots$ é o número total de pontos triplos especiais no interior da caixa Q_{n-1} . Do Lema 1.2 temos que existem pelo menos $n_i + 2$ ramos distintos dentro das $3n_i$ possibilidades. Portanto, podemos achar $\sum_{i \geq 1} (n_i + 2)$ ramos distintos de todos os pontos triplos. E como cada ramo de cada ponto triplo toca pelo menos um ou mais vértices em algum lado de ∂Q_{n-1} , temos necessariamente que

$$X_n = \sum_{i \geq 1} n_i \leq \sum_{i \geq 1} n_i + 2 \leq |\partial Q_{n-1}| = 4(2n-1),$$

provando a desigualdade em (103). Usando (102) e (103) obtemos a seguinte cota

$$(2n-1)\rho \leq (2n-1)^{-1}X_n \leq 4,$$

válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando o limite quando n tende ao infinito, obtemos a contradição. \square

CONTINUAÇÃO DA PROVA DO TEOREMA 3.50.

Finalmente, na prova do teorema, combinando os Lemas 3.51 e 3.52 tem-se $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b(N_\infty \in \{0, 1\}) = 1$, concluindo-se a prova. \square

3.4.4 Unicidade de medidas e o valor crítico bidimensional

Observamos que o Teorema 3.41 (acima) garante a existência dos limites termodinâmicos, $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0$ e $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^1$, mas ele não menciona em que casos temos a unicidade de medidas de aglomerados aleatórios com respeito ao parâmetro p . Concisamente, formulamos a seguinte pergunta: em que casos $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0 = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^1$ quando $p \in [0, 1]$? Nesta subseção discutiremos em que casos obtemos dita unicidade quando $d = 2$.

A prova do seguinte lema é ligeiramente fácil, pois usa uma construção clássica conhecida como **Argumento de Zhang**. Esse argumento foi inicialmente usado no caso do modelo de percolação independente, mas estende-se facilmente para o modelo de aglomerados aleatórios. O Argumento de Zhang nos fornece a desigualdade $p_{sd}(q) \leq p_c$. A heurística para a validade desta desigualdade é a seguinte: se assumimos que $p_c < p_{sd}(q)$, a configuração em $p_{sd}(q)$ deve conter um aglomerado infinito primal e um aglomerado infinito dual, já que o modelo de aglomerados aleatórios dual está na fase supercrítica também. Intuitivamente, a coexistência destes aglomerados implica a existência de mais de um aglomerado infinito na fase supercrítica, o que contradiz o Teorema da unicidade do aglomerado infinito (veja Teorema 3.50).

Lema 3.53 (Cota inferior: $p_{sd}(q) \leq p_c$ / Argumento de Zhang). *Se $q \geq 1$, então,*

$$\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(0 \leftrightarrow \infty) = 0.$$

Como consequência, $p_c \geq p_{sd}(q)$.

Demonstração. Suponha que $\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(0 \leftrightarrow \infty) > 0$. Então este modelo com $p = p_{sd}(q)$ está na fase supercrítica, isto é, $p_c > p_{sd}(q)$. Portanto,

$$\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(N_\infty = 1) = 1, \quad (104)$$

onde N_∞ é a variável aleatória que conta a quantidade de aglomerados infinitos (abertos). Defina o evento

$$R_n \equiv \left\{ \text{O único aglomerado (aberto) infinito em } \mathbb{Z}^2 \setminus [-n, n]^2 \text{ intercepta } [-n, n]^2 \right\}.$$

Note que a sequência de eventos $(R_n)_{n>0}$ é crescente, logo, pela continuidade da medida, temos

$$1 = \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(N_\infty = 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(R_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0([-n, n]^2 \leftrightarrow \infty).$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então,

$$|\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0([-n, n]^2 \leftrightarrow \infty) - 1| < \epsilon.$$

Logo, podemos escolher m suficientemente grande de maneira que

$$\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0([-m, m]^2 \leftrightarrow \infty) > 1 - \epsilon. \quad (105)$$

Fixando $m_0 \geq n_0$, seja A_e (resp. A_d, A_c, A_b) o evento:

- O segmento $\{-m_0\} \times [-m_0, m_0]$ (resp. $\{m_0\} \times [-m_0, m_0]$, $[-m_0, m_0] \times \{m_0\}$, $[-m_0, m_0] \times \{-m_0\}$) está em um aglomerado infinito em $\mathbb{Z}^2 \setminus [-m_0, m_0]^2$,

onde $e \equiv$ esquerda, $d \equiv$ direita, $c \equiv$ cima, $b \equiv$ baixo. Pela invariância por rotação do medida de aglomerados aleatórios temos

$$\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(A_e \cap A_d) = \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(A_c \cap A_b). \quad (106)$$

Por outro lado, segue de (105) que

$$\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(A_e \cup A_d \cup A_c \cup A_b) = \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0([-m_0, m_0]^2 \leftrightarrow \infty) > 1 - \epsilon. \quad (107)$$

Usando o *truque da raiz quadrada* (veja Apêndice, Proposição .20) temos

$$\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(A_u) \geq 1 - [1 - \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(A_e \cup A_d \cup A_c \cup A_b)]^{\frac{1}{4}}, \quad u = e, d, c, b. \quad (108)$$

Segue das desigualdades (107) e (108) que

$$\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(A_u) \geq 1 - \epsilon^{\frac{1}{4}}, \quad u = e, d, c, b. \quad (109)$$

Observe que os eventos A_u , onde $u = e, d, c, b$ são eventos crescentes, logo, por (109) e pela desigualdade FKG

$$\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(A_e \cap A_d) \geq \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(A_e) \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(A_d) \geq (1 - \epsilon^{\frac{1}{4}})^2 \geq 1 - 2\epsilon^{\frac{1}{4}}. \quad (110)$$

Usando a identidade (106) e que $\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0$ é estocasticamente dominado por $\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^1$, obtemos

$$\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^1(A_c \cap A_b) \geq 1 - 2\epsilon^{\frac{1}{4}}. \quad (111)$$

Antes de prosseguirmos, lembramos de dois fatos importantes sobre este modelo

- o ponto autodual é dado por $p^*(p_{sd}(q)) = p_{sd}(q)$;
- a medida dual de $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^0$ é $\phi_{p^*,q,\mathbb{Z}^{2*}}^1$.

Seja A_c^* (resp. A_b^*) o evento, a face $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + [1 - n, n - 1] \times \{n - 1\}$ (resp. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + [1 - n, n - 1] \times \{1 - n\}$) está em um aglomerado infinito na configuração dual, no exterior do quadrado $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + [1 - n, n - 1]^2$. Usando a dualidade, as observações a) e b) e as estimativas feitas acima, podemos afirmar que para todo $n \geq m + 1$

$$\begin{aligned} \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(A_e \cap A_d \cap A_c^* \cap A_b^*) &\geq \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(A_e \cap A_d) \phi_{p^*(p_{sd}),q,\mathbb{Z}^{2*}}^1(A_c^* \cap A_b^*) \\ &\geq \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(A_e \cap A_d) \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^{2*}}^1(A_c^* \cap A_b^*) \\ &\geq (1 - 2\epsilon^{\frac{1}{4}})^2 > 1 - 4\epsilon^{\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

onde, na primeira desigualdade, usamos a desigualdade FKG e o fato b), na segunda desigualdade, o fato a) e, na terceira desigualdade, usamos as equações (110) e (111) simultaneamente. Isto é,

$$\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(A_e \cap A_d \cap A_c^* \cap A_b^*) > 1 - 4\epsilon^{\frac{1}{4}}. \quad (112)$$

Agora, considere o evento

$$B \equiv \{ \text{toda aresta dual em } (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + [1 - n, n - 1]^2 \text{ está aberta} \}$$

Note que os eventos B e $A_e \cap A_d \cap A_c^* \cap A_b^*$ dependem de estados de arestas disjuntas. Usando a estimativa (112) e aplicando as propriedades de domínio de Markov e energia finita, temos

$$\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(B) > 0 \quad \text{e} \quad \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(B | A_e \cap A_d \cap A_c^* \cap A_b^*) > 0. \quad (113)$$

Consequentemente,

$$\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(N_\infty \geq 2) \geq \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(B \cap A_e \cap A_d \cap A_c^* \cap A_b^*) > 0,$$

chegando, assim, a uma contradição com (104), que garante a unicidade do aglomerado infinito na fase supercrítica. \square

A Figura 20 nos fornece um algoritmo elegante da demonstração anterior.

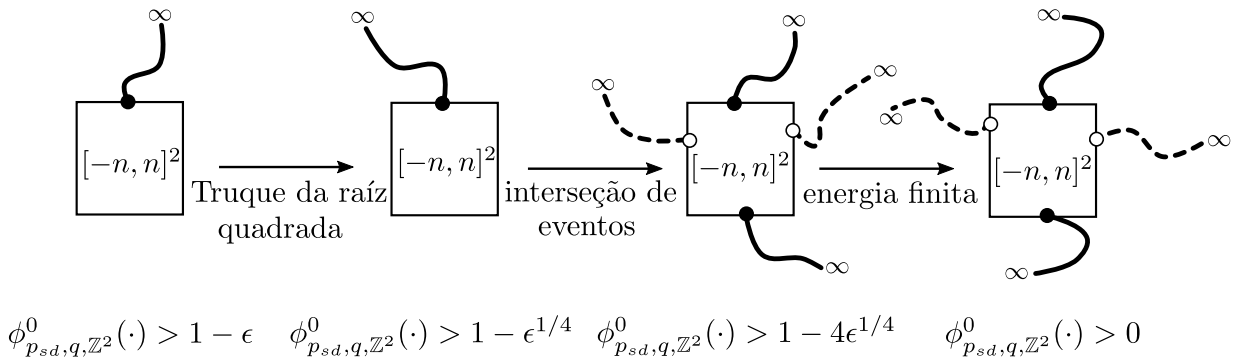


Figura 20: Algoritmo da prova de que $p_{sd}(q) \leq p_c$.

Um problema que continua em aberto atualmente é identificar todos os pares (p, q) tais que

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1 = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^0.$$

O próximo teorema nos dá certa informação (parcial) sobre o conjunto dos parâmetros $p \in [0, 1]$, para o qual a igualdade falha.

Teorema 3.54 (Veja [65], Teorema 4.63). *Para $q \geq 1$, o conjunto*

$$\{p \in [0, 1] : \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^0 \neq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1\}$$

dos parâmetros $p \in [0, 1]$, para o qual a unicidade falha é, no máximo, enumerável.

Já o próximo teorema nos dá uma informação mais completa. Ele nos diz que, para todo parâmetro $p \in [0, 1] - \{p_{sd}(q)\}$, a medida de aglomerados aleatórios bidimensional é única, mas não nos informa nada sobre o que acontece no ponto autodual $p_{sd}(q)$. A seguinte figura explica de maneira explícita este resultado.

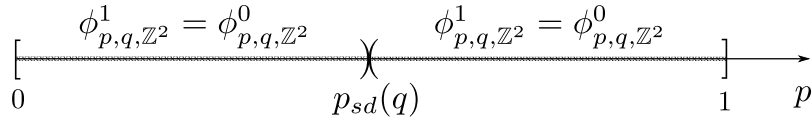


Figura 21: Unicidade da medida de aglomerados aleatórios sobre rede bidimensional.

Teorema 3.55. *(Unicidade da medida de aglomerados aleatórios, caso $d = 2$)* Fixado $q \geq 1$. O único ponto $p \in [0, 1]$ para o qual possa existir medidas de aglomerados aleatórios a volume infinito diferentes é o ponto autodual $p_{sd}(q)$.

Demonstração. Para não carregar a notação, nesta prova escrevemos $\phi_{p,q}^b$ para denotar a medida de aglomerados aleatórios a volume infinito $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b$, $b = 0, 1$. Observe que, pelo Corolário 3.40, é suficiente provar que $\phi_{p,q}^1 = \phi_{p,q}^0$, para todo $p \in [0, 1]$. Novamente, pelo uso do Corolário 3.40 é suficiente provar que $\phi_{p,q}^1 \leq_{st} \phi_{p,q}^0$, para todo $p \in [0, 1]$.

Note que se $\phi_{p,q}^1 \leq_{st} \phi_{p,q}^0$, para todo $p < p_c$, por dualidade, teríamos que a medida de aglomerados aleatórios a volume infinito é única para $p > p_c^*$, também. Desde que, pelo Lema 3.53, temos $p_{sd}(q) \leq p_c$, o único ponto para o qual a unicidade pode falhar é o ponto autodual.

Logo, para obter a conclusão do teorema, é suficiente provar que $\phi_{p,q}^1 \leq_{st} \phi_{p,q}^0$, para todo $p < p_c$. De fato, fixando o evento A crescente, dependendo de um número finito de arestas, todas incluídas em uma caixa $[-N, N]^2 \equiv [-N, N]^2 \cap \mathbb{Z}^2$, definimos o evento

$$A_n \equiv \left\{ [-N, N]^2 \leftrightarrow \mathbb{Z}^2 \setminus [-n, n]^2 \right\}, \quad n \geq 1.$$

Observe que para todo $n \geq N$ a sequência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não crescente. E como $\{0 \leftrightarrow \infty\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$, pela continuidade da medida temos

$$0 = \phi_{p,q}^1(0 \leftrightarrow \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p,q}^1(A_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p,q}^1(A \cap A_n), \quad (114)$$

onde, na primeira igualdade, usamos o fato de que, na fase subcrítica, ($p < p_c$) não existe aglomerados infinitos.

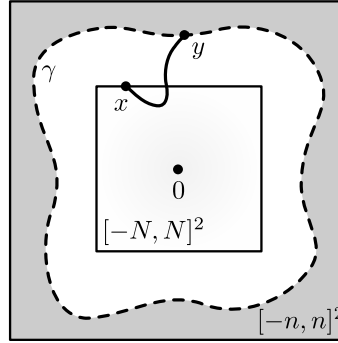


Figura 22: Representação gráfica do fato da inclusão $A \cap A_n^c \subset \cup_{\gamma \in Y} \{\Gamma = \gamma\}$. A região em cinza é a região de dependência para poder ser construído o circuito γ .

Por outro lado, condicionando sobre circuito dual (aberto) mais externo Γ ao redor de $[-N, N]^2$ em $[-n, n]^2$, como se mostra na Figura 22, a ser igual ao circuito determinístico γ em $(\mathbb{Z}^2)^*$, temos

$$\begin{aligned} \phi_{p,q,[-m,m]^2}^1(A|\Gamma = \gamma) &= \phi_{p^*,q,([-N,N]^2)^*}^{1 \cup 1}(A^*) = \phi_{p^*,q,([-N,N]^2)^*}^1(A^*) \\ &= \phi_{p,q,([-N,N]^2)}^0(A) \\ &\leq \phi_{p,q}^0(A), \quad \forall m \geq n \geq N, \end{aligned}$$

onde, na primeira igualdade, usamos a propriedade do domínio de Markov, na segunda igualdade, usamos que $1 \cup 1 = 1$, na terceira igualdade, usamos a relação de dualidade (74) e, na desigualdade, usamos a Proposição 3.43. Fazendo $m \rightarrow \infty$ na desigualdade acima, ficamos com

$$\phi_{p,q}^1(A|\Gamma = \gamma) \leq \phi_{p,q}^0(A), \quad \forall n \geq N. \quad (115)$$

Seja Y o conjunto dos circuitos duais (abertos) mais externos Γ ao redor de $[-N, N]^2$ em $[-n, n]^2$. Logo, como $A \cap A_n^c \subset \cup_{\gamma \in Y} \{\Gamma = \gamma\}$,

$$\phi_{p,q}^1(A \cap E_n^c) \leq \sum_{\gamma \in Y} \phi_{p,q}^1(A|\Gamma = \gamma) \leq \phi_{p,q}^0(A).$$

Finalmente, pela desigualdade acima e pelo Item (114), quando $n \rightarrow \infty$ temos

$$\phi_{p,q}^1(A) = \phi_{p,q}^1(A \cap A_n) + \phi_{p,q}^1(A \cap A_n^c) \leq \phi_{p,q}^1(A \cap A_n) + \phi_{p,q}^0(A) \rightarrow \phi_{p,q}^0(A).$$

Isto conclui a prova, desde que todo evento crescente pode ser aproximado por eventos crescentes, dependendo somente de um número finito de arestas. \square

Em geral, para $d > 2$ é conjecturado que a medida de aglomerados aleatórios é única para $p \neq p_c(q)$, e que a unicidade das medidas se mantém, também, quando $p = p_c(q)$ se, e somente se, q é suficientemente pequeno.

Essas afirmações chegam a ser triviais quando $q = 1$. Já quando $q = 2$, este modelo tem especial importância porque está relacionado com o modelo de Ising. Em [8] prova-se que, quando $d \geq 4$, a probabilidade de percolação $\theta^1(p, 2)$ é uma função contínua de p no valor crítico $p_c(2)$. Isto é, quando $d \geq 4$ e $p = p_c(2)$, o conjunto das medidas de Gibbs do modelo de Ising é unitário. Métodos clássicos (como *random-current representation*) provaram que em duas dimensões a unicidade de medidas se mantém na fase crítica (veja referência [94]). Em resumo, quando $q = 2$ e $p = p_c(2)$, a unicidade foi provada para todo $d \neq 3$ e ficando em aberto o problema para o caso $d = 3$. Em 2014, este problema foi resolvido. Na referência [5], os autores provaram que a magnetização se anula continuamente na temperatura crítica para uma classe de sistemas de spins ferromagnéticos, os quais incluem o modelo de Ising ferromagnético sobre \mathbb{Z}^d em $d = 3$ dimensões.

Quando q é suficientemente grande, é conhecido que existe uma única medida de aglomerados aleatórios quando $p \neq p_c(q)$ e se tem multiplicidade de medidas quando $p = p_c(q)$. Estes e outros problemas, para o modelo de aglomerados aleatórios de parâmetro $q \in (0, +\infty)$, que, atualmente, se encontram em aberto, serão listados na parte final deste capítulo (especificamente, na Subseção 3.4.7).

O VALOR CRÍTICO EM DUAS DIMENSÕES

Em continuação damos um esboço bem geral da prova de que o ponto crítico $p_c \equiv p_c(q)$, para o modelo de aglomerados aleatórios sobre a rede bidimensional, coincide com o ponto autodual. Especificamente, temos

$$p_c = \frac{\sqrt{q}}{1 + \sqrt{q}},$$

onde $q \geq 1$. Uma rigorosa derivação deste resultado inicialmente era conhecida somente em três casos. Para $q = 1$, o modelo é simplesmente o de percolação independente, foi provado em 1980, por Kesten [79], que o ponto crítico $p_c(1)$ é $1/2$. Para $q = 2$, o valor autodual correspondente à temperatura crítica do modelo de Ising foi derivado,

primeiramente, por Osanger, em 1944 [100]. Para uma prova moderna deste caso, veja [3] (para uma prova curta e elegante, veja [11], Capítulo 8). Para valores de q suficientemente grandes (a saber, maiores que 25.72), a prova conhecida é baseada sobre o fato de que o modelo de aglomerados aleatórios exibe uma transição de fase de primeira ordem (veja referências [85, 86]). Por outro lado, em 1978 físicos calcularam a temperatura crítica para o Modelo de Potts de parâmetro $q \geq 4$, na qual usaram argumentos não geométricos baseados em propriedades analíticas do Hamiltoniano [73].

Relembramos que o resultado de que $p_c = p_{sd}(q)$, $q \geq 1$ era uma conjectura de importância relevante até que no ano 2011, foi resolvida pelos matemáticos H. Duminil-Copin e V. Beffara [12].

Observe que o Argumento de Zhang (Lema 3.53) nos dá a cota inferior para o ponto crítico: $p_{sd}(q) \leq p_c$. Portanto, a desigualdade que restaria provar seria: $p_c \leq p_{sd}(q)$. Para provar dita desigualdade veja que é suficiente provar

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(0 \leftrightarrow \infty) > 0, \quad \forall p > p_{sd}.$$

Isso é feito estimando a probabilidade de existir um caminho que cruza um retângulo dado e, logo, por combinar caminhos abertos em diferentes retângulos para criar um caminho que liga a origem ao infinito. Basicamente, a prova desta desigualdade é feita em três etapas.

A primeira etapa consiste em estimar probabilidades de cruzamento no ponto autodual $p = p_{sd}(q)$. Isto é, mostrar que a probabilidade de cruzar horizontalmente um retângulo se encontra no intervalo $(c, 1 - c)$, com $c \equiv c(p, q) > 0$. Para um retângulo R na rede bidimensional, seja $\mathcal{C}_h(R)$ o evento que denote que existe um cruzamento do lado esquerdo ao direito em R . Analogamente, denotamos $\mathcal{C}_v(R)$ para o evento que denota a existência de um cruzamento vertical em R , isto é, do lado de cima para o de baixo do R . Nesta etapa, pode-se provar que para $p > p_{sd}$, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(\mathcal{C}_h([0, 2n] \times [0, nj])) \geq 1 - n^{-c}, \quad \forall n \geq 0.$$

Existem muitos detalhes técnicos na prova destes passos. A principal dificuldade é que, na seguinte etapa, se requer trabalhar com um toro. Para $m \geq 1$, o toro de tamanho m pode ser visto como uma caixa $[0, m]^2$ (na rede bidimensional) com condição de fronteira obtido por impor que o ponto $(i, 0)$ esteja identificado com (i, m) para cada $i \in [0, m]$ e que o ponto $(0, j)$ esteja identificado com (m, j) para todo $j \in [0, m]$. A

medida de aglomerados aleatórios sobre o toro de tamanho m é denotado por $\phi_{p,q,m}^P$. O teorema correspondente para provar a estimativa acima é a seguinte generalização do conhecido Teorema de Russo-Seymour-Welsh [107, 109] para percolação.

Teorema 3.56. *Seja $\alpha > 1$ e $q \geq 1$. Logo existe $c(\alpha) > 0$ tal que para todo $m > \alpha n > 0$ tem-se*

$$\phi_{p,q,m}^P(\mathcal{C}_h([0, \alpha n] \times [0, n])) \geq c(\alpha).$$

A segunda etapa consiste em uma construção que combina diferentes cruzamentos para construir o aglomerado infinito. Mais precisamente, defina $R_n \equiv [0, 2^n] \times [0, 2^{n+1}]$ se n é ímpar e $R_n \equiv [0, 2^{n+1}] \times [0, 2^n]$ se n é par. Seja $\mathcal{C}(R_n)$ o evento em que R_n é cruzado na maior direção, isto é, R_n é cruzado vertical se n é ímpar e é cruzado horizontal se n é par. Seja B o evento em que as arestas da caixa $[0, 2]^2$ (na rede bidimensional) são abertas. Por associação positiva temos

$$\begin{aligned} \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^P(0 \leftrightarrow \infty) &\geq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^P(B \cap \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{C}_h(R_n)) \geq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^P(B) \prod_{n \geq 1} \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^P(\mathcal{C}_h(R_n)) \\ &\geq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^P(B) \prod_{n \geq 1} (1 - 2^{-cn}) > 0. \end{aligned}$$

Na Figura 23, veja que a primeira desigualdade acima é justificada, já que a ocorrência do evento $\bigcap_{n \geq 1} \mathcal{C}_h(R_n)$ implica a existência de um aglomerado infinito da origem.

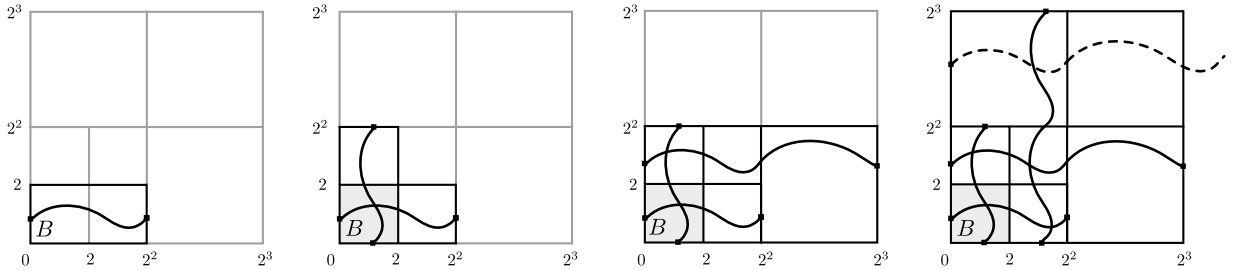


Figura 23: Ocorrência do evento $B \cap [\bigcap_{n=1}^k \mathcal{C}_h(R_n)]$ com $k = 3$.

O teorema principal para este segundo passo é o seguinte resultado que afirma que a probabilidade de cruzar horizontalmente um retângulo converge para um, quando $p > p_{sd}$.

Teorema 3.57. *Seja $q \geq 1$ e $p > p_{sd}$. Logo existe $c(p) > 0$ tal que para todo $n > 0$ temos*

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^P(\mathcal{C}_h([0, 4n] \times [0, n])) \geq 1 - n^{-c(p)}.$$

O último passo consiste em usar o Teorema 3.57 para construir um aglomerado infinito com probabilidade positiva. As condições de fronteira periódicas (sobre o toro) criam novas dificuldades e a construção apresentada acima não funciona muito bem (para uma construção detalhada desses passos, veja referência [120]).

É sabido que a medida de aglomerados aleatórios possui a propriedade de decaimento exponencial para valores de q suficientemente pequenos. Além de conseguir provar que neste modelo $p_c = p_{sd}(q)$, $q \geq 1$, H. Duminil-Copin e V. Beffara conseguiram provar o decaimento exponencial do modelo de aglomerados aleatórios na fase subcrítica, isto é $\forall p < p_c$. Resumiremos este resultado no seguinte teorema (veja referências [12, 120]).

Teorema 3.58. *Seja $q \geq 1$. Para qualquer $p < p_c(q)$, existe $0 < C(p, q), c(p, q) < \infty$ tal que para qualquer $x, y \in \mathbb{Z}^2$, tem-se*

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}(x \leftrightarrow y) \leq C(p, q) e^{-c(p,q)|x-y|},$$

onde $|\cdot|$ denota a norma euclideana.

3.4.5 Os conjuntos $\mathcal{W}_{p,q}$ e $\mathcal{R}_{p,q}$

Começaremos definindo o conjunto de limites fracos de medidas de aglomerados aleatórios a volume finito $\mathcal{W}_{p,q}$ e, depois, daremos algumas propriedades desse conjunto. Mas, antes disso, daremos nome a algumas propriedades já usadas anteriormente no texto.

Para cada $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$, seja $N_\infty(\omega)$ o número de aglomerados infinitos em ω . Como já se havia feito antes, seja $\mathcal{F} \equiv \mathcal{B}(\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d})$ a σ -álgebra de Borel em $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ e denotemos por $\mathcal{M}_1(\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}) \equiv \mathcal{M}_1(\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}, \mathcal{F})$, ao conjunto de medidas de probabilidade sobre o espaço mensurável $(\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}, \mathcal{F})$. No que resta do capítulo, adotaremos as seguintes definições:

Diremos que $\phi \in \mathcal{M}_1(\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d})$ tem a **propriedade 0/1-aglomerado-infinito** se

$$\phi(N_\infty \in \{0, 1\}) = 1. \tag{116}$$

Diremos que $\phi \in \mathcal{M}_1(\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d})$ tem a **propriedade da energia finita** se, $\forall e \in \mathbb{E}^d$

$$\phi(\omega_e = 1 | \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d \setminus \{e\}}) \in (0, 1), \quad \phi - \text{q.c.} \tag{117}$$

Pelo Teorema da Unicidade de Burton Keane [30], se $\phi \in \mathcal{M}_1(\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d})$ é invariante translacional e tem a propriedade da energia finita, então, ϕ tem a propriedade 0/1-aglomerado-infinito.

Definição 3.17. Dado $p \in [0, 1]$ e $q \in (0, +\infty)$ definimos o conjunto

$$\mathcal{W}_{p,q} \equiv \left\{ \phi \in \mathcal{M}_1(\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}) : \begin{array}{l} \phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p,q,\Lambda_n}^{\xi}; \text{ para alguma sequencia} \\ (\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L} \text{ e para algum } \xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d} \end{array} \right\},$$

onde a convergência fraca acima é segundo a Definição 3.14.

Teorema 3.59. Se $p \in [0, 1]$ e $q \in (0, +\infty)$, as seguintes afirmações são válidas.

- 1) O conjunto $\mathcal{W}_{p,q}$ é não vazio.
- 2) Se $\phi \in \overline{\text{Env}(\mathcal{W}_{p,q})}$ ², então, ϕ tem a propriedade da energia finita.
- 3) Se $q \in [1, +\infty)$, então, $\phi \in \mathcal{W}_{p,q}$ é associada positiva.

Demonstração. 1) Como $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ é o produto (cartesiano) infinito de espaços discretos, pelo Teorema de Tychonoff, temos que $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ é compacto. Logo, pela Proposição 5.5 de [16], o espaço $\mathcal{M}_1(\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d})$ é métrico compacto³. Daí, toda sequência infinita em $\mathcal{M}_1(\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d})$ possui uma subsequência $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge fracamente para um elemento de $\mathcal{M}_1(\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d})$. Usando esse raciocínio mas a inclusão $\{\phi_{p,q,\Lambda_n}^{\xi} : \forall \xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}, \forall (\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}\} \subset \mathcal{W}_{p,q}$, conclui-se que $\mathcal{W}_{p,q} \neq \emptyset$.

2) Se $\phi \in \mathcal{W}_{p,q}$, então $\phi = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{p,q,\Lambda}^{\xi}$, para algum $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ e para alguma sequência de caixas $\Lambda \in \mathcal{L}$. Para $\Gamma \in \mathcal{L}$ e $e \in \mathbb{E}^d$, seja $\mathcal{F}_{\Gamma \setminus e} = \sigma(\omega_f : f \in E_{\Gamma \setminus e})$.

Pelo Teorema de convergência de martingales de Lévy-forward (veja Apêndice, Teorema .18), temos

$$\phi(\omega_e = 1 | \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d \setminus e}) = \lim_{\Gamma \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi(\omega_e = 1 | \mathcal{F}_{\Gamma \setminus e}) = \lim_{\Gamma \uparrow \mathbb{Z}^d} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{p,q,\Lambda}^{\xi}(\omega_e = 1 | \mathcal{F}_{\Gamma \setminus e}), \quad \phi\text{-q.c.}$$

Pela Proposição 3.38, $\phi_{p,q,\Lambda}^{\xi}(\omega_e = 1 | \mathcal{F}_{\Gamma \setminus e}) = c(p) \in (0, 1)$, logo, pela identidade acima, $\forall e \in \mathbb{E}^d$ e $\forall \phi \in \mathcal{W}_{p,q}$, tem-se

$$\phi(\omega_e = 1 | \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d \setminus e}) \in (0, 1), \quad \phi\text{-q.c.} \quad (118)$$

² Aqui $\overline{\text{Env}(A)}$ denota o fecho da envoltória convexa do conjunto A .

³ A topologia fraca é metrizable, isto é, $\mathcal{M}_1(\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d})$ é um espaço métrico com a métrica

$$d(\mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |\mu(f_n) - \nu(f_n)|,$$

onde $\{f_n : n \geq 1\}$ é um subconjunto denso da bola fechada $\{f \in C(\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}) : \|f\|_{\infty} \leq 1\}$.

Toda sequência $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{M}_1(\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d})$ admite uma subsequência que é fracamente convergente. Como $\mathcal{M}_1(\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}, d)$ é um espaço métrico, isto é equivalente a dizer que este espaço é métrico e compacto, no sentido de que existe um ponto de acumulação para toda sequência no espaço.

Por outro lado, se $\phi \in \overline{\text{Env}(\mathcal{W}_{p,q})}$, então $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n$, onde $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{Env}(\mathcal{W}_{p,q})$. Como $\phi_n \in \text{Env}(\mathcal{W}_{p,q})$, existe $k \in \mathbb{N}$ e $\phi_n^1 \cdots \phi_n^k \in \mathcal{W}_{p,q}$ tal que $\phi_n = \sum_{j=1}^k t_j \phi_n^j$, com $\sum_{j=1}^k t_j = 1$. Isto é

$$\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k t_j \phi_n^j, \quad \text{onde } \sum_{j=1}^k t_j = 1.$$

Por (118), $\phi_n^j(\omega_e = 1 | \mathcal{F}_{\Gamma \setminus e}) \in (0, 1)$, ϕ -q.c., logo $\phi(\omega_e = 1 | \mathcal{F}_{\Gamma \setminus e}) \in (0, 1)$, ϕ -q.c. Isto é, ϕ tem a propriedade da energia finita.

3) Seja $q \in [1, +\infty)$ e $\phi = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{p,q,\Lambda}^\zeta$, para algum $\zeta \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ e para alguma seqüência de caixas $\Lambda \in \mathcal{L}$. Pelo Corolário 3.34, cada $\phi_{p,q,\Lambda}^\zeta$ é associada positiva, logo, pelo Teorema 3.41, segue a associatividade positiva de ϕ . \square

Seja (Ω, τ) um espaço topológico e $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. O funcional f é **semicontínuo inferior** (notação: s.c.i.) em ω_0 se a imagem inversa do semiespaço aberto da forma $(r, +\infty)$, com $f(\omega_0) \in (r, +\infty)$, contém um conjunto aberto $U \subset \Omega$ que contém ω_0 . Isto é,

$$f(\omega_0) \in (r, +\infty) \Rightarrow \exists U \in \tau : \omega_0 \in U \subset f^{-1}(r, +\infty). \quad (119)$$

Diremos que o funcional f é **semicontínuo superior** (notação s.c.s.) em ω_0 se (119) se satisfaz por substituir o semiespaço aberto da forma $(-\infty, r)$ por $(r, +\infty)$.

Como no caso da continuidade, a função f é s.c.i. (resp. s.c.s.) sobre o espaço topológico Ω se esta é s.c.i. (resp. s.c.s.) em cada ponto ω_0 . Definimos a versão de s.c.i. (resp. s.c.s.) para funcionais, pois é mais apropriada para diversas aplicações. Muitas aplicações são formuladas em espaços com uma estrutura mais considerável que um espaço topológico geral. A prova das seguintes duas proposições podem ser encontradas em qualquer livro de análise funcional ou de análise convexa, é por isso que não apresentaremos suas respectivas provas.

Proposição 3.60. *Seja (Ω, τ) um espaço métrico. Um funcional $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é s.c.i. (resp. s.c.s.) em cada ponto ω_0 se*

$$f(\omega_0) \leq (\text{resp. } \geq) \liminf_{\omega \rightarrow \omega_0} f(\omega).$$

Em algumas literaturas, a Proposição 3.60 é encontrada como definição de funcional semicontínuo.

Para cada $\omega, \zeta \in \Omega$ e $\Lambda \in \mathcal{L}$, escrevemos ω_Λ^ζ para a configuração definida por

$$(\omega_\Lambda^\zeta)_e = \begin{cases} \omega_e, & \text{se } e \in E_\Lambda \\ \zeta_e, & \text{outro caso.} \end{cases} \quad (120)$$

Para $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definimos X_Λ^0 e X_Λ^1 por

$$X_\Lambda^b(\omega) = X(\omega_\Lambda^b), \quad \omega \in \Omega, \quad b = 0, 1. \quad (121)$$

Proposição 3.61. *Assumindo que X é crescente, tem-se:*

$$i) X_\Lambda^0 \uparrow X, \text{ quando } \Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d \Leftrightarrow X \text{ s.c.i.} \quad \text{e} \quad ii) X_\Lambda^1 \downarrow X, \text{ quando } \Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d \Leftrightarrow X \text{ s.c.s.},$$

onde a convergência acima é referida à convergência pontual sobre Ω .

Observação 3.62. *Da Proposição 3.61 e pelo uso do Teorema da Convergência Monótona obtemos a seguinte equivalência:*

$$\mu_1 \leq_{st} \mu_2 \Leftrightarrow \mu_1(X) \leq \mu_2(X), \quad \text{para toda função semicontínua crescente } X,$$

onde a dominação estocástica $\mu_1 \leq_{st} \mu_2$ foi estabelecido na Definição 3.11.

Uma observação similar à Observação 3.62 é válida para obter associação positiva de uma medida μ . Isto é, é suficiente exigir semicontinuidade e monotonicidade crescente (em vez de continuidade e monotonicidade crescente) sobre as variáveis aleatórias X, Y de forma que $\mu(XY) \geq \mu(X)\mu(Y)$.

Usando a Proposição 3.61, facilmente consegue-se ver que a indicadora de eventos crescentes fechados é s.c.s. Analogamente, a indicadora de eventos crescentes abertos é s.c.i. Com estes resultados a nossa disposição, na continuação provamos a seguinte proposição.

Proposição 3.63. *Seja $p \in [0, 1]$ e $q \in [1, +\infty)$.*

(1) *Para $b = 0, 1$, as medidas $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b$ satisfazem as seguintes desigualdades de comparação:*

$$\begin{aligned} \phi_{p_1,q_1,\mathbb{Z}^d}^b &\leq_{st} \phi_{p_2,q_2,\mathbb{Z}^d}^b, \quad \text{se } q_1 \geq q_2, \quad q_1 \geq 1 \quad \text{e} \quad p_1 \leq p_2, \\ \phi_{p_1,q_1,\mathbb{Z}^d}^b &\geq_{st} \phi_{p_2,q_2,\mathbb{Z}^d}^b, \quad \text{se } q_1 \geq q_2, \quad q_1 \geq 1 \quad \text{e} \quad \frac{p_1}{q_1(1-p_1)} \leq \frac{p_2}{q_2(1-p_2)}. \end{aligned}$$

(2) *Se X é uma variável aleatória crescente s.c.i., então $\phi_{p_1,q_1,\mathbb{Z}^d}^0$ é uma função s.c.i. do vetor (p, q) , e portanto, é uma função contínua à esquerda de p e contínua à direita de q .*

(3) *Se X é uma variável aleatória crescente s.c.s., então $\phi_{p_1,q_1,\mathbb{Z}^d}^1$ é uma função s.c.s. do vetor (p, q) , e portanto, é uma função contínua à direita de p e contínua à esquerda de q .*

Demonstração. (1) Segue como consequência da combinação do Corolário 3.35 com o Teorema 3.41.

(2) Seja $\Lambda_n \equiv [-n, n] \cap \mathbb{Z}^d$. Suponha, também, que X é s.c.i. e defina $X_n^b(\omega) = X(\omega_{\Lambda_n}^b)$ para $b = 0, 1$, onde ω_{Λ}^b foi definido em (120).

Por monotonicidade e pelo uso da Observação 3.62, temos

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(X) \geq \phi_{p,q,\Lambda_n}^0(X) \geq \phi_{p,q,\Lambda_n}^0(X_m^0),$$

onde, na segunda desigualdade, usamos $X \geq X_m^0$. Fazendo $n \rightarrow \infty$ na desigualdade acima, conseguimos

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(X) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p,q,\Lambda_n}^0(X) \geq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(X_m^0),$$

pois X_m^0 é uma função local (portanto, contínua). Desde que X é uma variável aleatória crescente s.c.i., pela Proposição 3.61 temos $X_{\Lambda}^0 \uparrow X$. Fazendo $m \rightarrow \infty$ e aplicando o Teorema da Convergência Monótona na última desigualdade, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p,q,\Lambda_n}^0(X) = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(X). \quad (122)$$

Isto é, se está provado que o limite termodinâmico da medida ϕ_{p,q,Λ_n}^0 (veja Teorema 3.41) é válido, também, para toda variável aleatória X s.c.i. e crescente (em vez de contínua e crescente).

Por outro lado, como $\Lambda_n \subset \Lambda_{n+1}$, $X_n^0 \leq X_{n+1}^0$ e a sequência $\{\phi_{p,q,\Lambda}^0 : \Lambda \in \mathcal{L}\}$ é crescente, veja que

$$\phi_{p,q,\Lambda_n}^0(X_n^0) \leq \phi_{p,q,\Lambda_{n+1}}^0(X_n^0) \leq \phi_{p,q,\Lambda_{n+1}}^0(X_{n+1}^0). \quad (123)$$

De (122) e (123) obtemos

$$\phi_{p,q,\Lambda_n}^0(X_n^0) \uparrow \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(X), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (124)$$

e por definição da medida ϕ_{p,q,Λ_n}^0 , para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\phi_{p,q,\Lambda_n}^0(X_n^0) \text{ é contínua em } p \text{ e } q. \quad (125)$$

Finalmente, de (124) tem-se

$$\phi_{p,q,\Lambda_n}^0(X_n^0) \leq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(X).$$

Fixado o vetor (p_0, q_0) , por continuidade (125),

$$\phi_{p_0, q_0, \Lambda_n}^0(X_n^0) \leq \lim_{\substack{p \rightarrow p_0 \\ q \rightarrow q_0}} \phi_{p, q, \mathbb{Z}^d}^0(X), \quad \text{sempre que } p \rightarrow p_0, q \rightarrow q_0.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ e usando (124) na desigualdade acima, temos

$$\phi_{p_0, q_0, \mathbb{Z}^d}^0(X) \leq \lim_{\substack{p \rightarrow p_0 \\ q \rightarrow q_0}} \phi_{p, q, \mathbb{Z}^d}^0(X).$$

O que, por sua vez, pela Proposição 3.60, a medida $\phi_{p, q, \mathbb{Z}^d}^0$ é uma função s.c.i. do vetor (p, q) . Pela arbitrariedade do vetor (p_0, q_0) , concluímos a prova.

(3) Nesta parte, basta substituir no argumento do Item (2), X_Λ^1 por X_Λ^0 , a condição de fronteira 1 por 0, com suas respectivas desigualdades invertidas. \square

Uma segunda forma de construir medidas a volume infinito é trabalhar diretamente sobre o látice infinito \mathbb{Z}^d . A seguinte definição é baseada nos trabalhos de Dobrushin-Lanford-Ruelle (DLR) [57] para estados de Gibbs.

Definição 3.18. *Seja $p \in [0, 1]$ e $q \in (0, +\infty)$, definimos o conjunto*

$$\mathcal{R}_{p, q} \equiv \left\{ \phi \in \mathcal{M}_1(\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}) : \begin{array}{l} \phi(A | \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda})(\xi) = \phi_{p, q, \Lambda}^\xi(A), \quad \phi\text{-q.c. } \xi; \\ \forall A \in \mathcal{F}, \Lambda \in \mathcal{L} \end{array} \right\}.$$

O seguinte lema mostra a continuidade quase certa da aplicação $\omega \mapsto \phi_{p, q, \Lambda}^\omega(A)$, onde A é um evento cilíndrico. Este resultado é conhecido, também, como a *quase-localidade quase certa* da medida de aglomerados aleatórios. O conceito de quase-localidade de uma medida será estabelecida na Definição 3.21. Na Subseção 3.4.6, mostraremos que a medida de aglomerados aleatórios não é quase-local, mas, como veremos, o próximo resultado nos dá condições suficientes para não ter perda da quase-localidade (ou continuidade). Antes de enunciar tal lema, definimos a noção de continuidade de uma função $f : \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definição 3.19. *Diremos que a função $f : \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ se dado $\epsilon > 0$, existe uma caixa finita $\Lambda \in \mathcal{L}$ tal que*

$$\sup_{\eta: \eta_\Delta = \omega_\Delta} |f(\eta) - f(\omega)| < \epsilon, \quad \forall \Delta \supset \Lambda,$$

onde escrevemos $\eta_\Delta = \omega_\Delta$ para dizer que $\eta_e = \omega_e$, para todo $e \in E_\Delta$.

Uma função $f : \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *contínua*, se ela é contínua em cada ponto $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$.

Resultados similares ao próximo lema são dados nas Seções 5.6 e 6.3 dos Capítulos 5 e 6, respectivamente, para modelos de aglomerados aleatórios bem gerais.

Lema 3.64. *Se $\phi \in \mathcal{M}_1(\{0,1\}^{\mathbb{E}^d})$ tem a propriedade 0/1-aglomerado-infinito, para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$ e todo evento cilíndrico $A \in \mathcal{F}_\Lambda$, a aplicação*

$$\omega \mapsto g(\omega) = \phi_{p,q,\Lambda}^\omega(A)$$

é contínua ϕ -q.c.

Demonstração. Dados $\Lambda \in \mathcal{L}$ e $A \in \mathcal{F}_\Lambda$, definimos os seguintes eventos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_g &\equiv \{ \omega : \omega \mapsto g(\omega) \text{ é descontínua em } \omega \} \\ &= \bigcup_{\epsilon > 0} \bigcap_{\Lambda \in \mathcal{L}} \bigcup_{\Delta: \Delta \supset \Lambda} \left\{ \omega : \sup_{\eta: \eta_\Delta = \omega_\Delta} |g(\eta) - g(\omega)| \geq \epsilon \right\}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_g(\Lambda) \equiv \bigcap_{\Delta: \Delta \supset \Lambda} \left\{ \omega : \sup_{\eta: \eta_\Delta = \omega_\Delta} |g(\eta) - g(\omega)| > 0 \right\}.$$

Uma vez que, $\{ \omega : \sup_{\eta: \eta_\Delta = \omega_\Delta} |g(\eta) - g(\omega)| > 0 \} \subseteq \{ \omega : \sup_{\eta: \eta_\Lambda = \omega_\Lambda} |g(\eta) - g(\omega)| > 0 \}$, para $\Delta \supset \Lambda$, segue que $\bigcup_{\Delta: \Delta \supset \Lambda} \{ \omega : \sup_{\eta: \eta_\Delta = \omega_\Delta} |g(\eta) - g(\omega)| > 0 \} \subseteq \mathcal{D}_g(\Lambda)$. Por outro lado, como $\mathcal{D}_g \subseteq \bigcup_{\Delta: \Delta \supset \Lambda} \{ \omega : \sup_{\eta: \eta_\Delta = \omega_\Delta} |g(\eta) - g(\omega)| > 0 \}$, combinando as inclusões mencionadas acima, tem-se

$$\mathcal{D}_g \subseteq \mathcal{D}_g(\Lambda). \tag{126}$$

Assumindo que $\Delta \supset \Lambda$, defina o seguinte evento

$$\mathcal{D}_{\Lambda, \Delta} \equiv \left\{ \omega : \exists u, v \in \partial\Lambda \ / \ \gamma_1 : u \xleftrightarrow{E_{\Delta \setminus \Lambda}} \partial\Delta, \ \gamma_2 : v \xleftrightarrow{E_{\Delta \setminus \Lambda}} \partial\Delta, \ \gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset \text{ em } \omega \right\}. \tag{127}$$

A Figura 24 mostra um esboço gráfico do evento $\mathcal{D}_{\Lambda, \Delta}$.

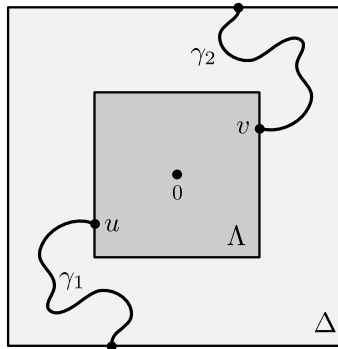


Figura 24: Ocorrência do evento $\mathcal{D}_{\Lambda, \Delta}$.

Se $\omega \notin \mathcal{D}_{\Lambda, \Delta}$ para algum Δ tal que $\Delta \supset \Lambda$, então $k(\eta, \Lambda) = k(\omega, \Lambda)$, para todo $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ tal que $\eta_\Delta = \omega_\Delta$, o que implica que $g(\eta) = g(\omega)$. Portanto, $\omega \notin \mathcal{D}_g(\Lambda)$. Logo, temos provado que

$$\mathcal{D}_g(\Lambda) \subseteq \bigcap_{\Delta: \Delta \supset \Lambda} \mathcal{D}_{\Lambda, \Delta}. \quad (128)$$

Se N_∞ é a variável aleatória que conta os números de aglomerados infinitos, veja que

$$\bigcup_{\Lambda \in \mathcal{L}} \bigcap_{\Delta: \Delta \supset \Lambda} \mathcal{D}_{\Lambda, \Delta} = \{N_\infty > 1\}. \quad (129)$$

Logo, de (126), (128) e (129) temos

$$\phi(\mathcal{D}_g) \leq \phi(\mathcal{D}_g(\Lambda)) \leq \phi(N_\infty > 1).$$

Finalmente, como ϕ tem a propriedade 0/1-aglomerado-infinito, temos $\phi(N_\infty > 1) = 0$. Usando esse fato na desigualdade acima, segue que $\phi(\mathcal{D}_g) = 0$, como se desejava. \square

Teorema 3.65. *Seja $p \in [0, 1]$ e $q \in (0, +\infty)$.*

- O conjunto $\overline{\text{Env}(\mathcal{W}_{p,q})}$ contém alguma medida ψ invariante por translações.
- Seja $p \in (0, 1)$. Todo $\phi \in \overline{\text{Env}(\mathcal{W}_{p,q})}$ tem a propriedade da energia finita.
- Se $\phi \in \overline{\text{Env}(\mathcal{W}_{p,q})}$ é invariante por traslações, então, ϕ tem a propriedade 0/1-aglomerado-infinito.

Demonstração. a) Se $q \in [1, +\infty)$, pelos Teoremas 3.41 e 3.44, as medidas $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b \in \mathcal{W}_{p,q}$, com $b = 0, 1$, são extremas e invariantes por translações, respectivamente.

Por outro lado, se $q \in (0, 1)$, pelo Teorema 3.59, $\mathcal{W}_{p,q} \neq \emptyset$. Seja $\phi \in \mathcal{W}_{p,q}$. Definindo

$$\psi_m \equiv \frac{1}{|\Delta_m|} \sum_{i \in \Delta_m} \phi \circ \theta_i^{-1},$$

onde $\Delta_m \equiv [-m, m]^d \cap \mathbb{Z}^d$ e $\phi \circ \theta_i^{-1}$ é a medida de probabilidade sobre $(\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}, \mathcal{F})$ definida por $\phi \circ \theta_i^{-1}(f) \equiv \phi(\theta_i^{-1}f)$, onde $\theta_i(v) = v + i$ é a translação em i do látice.

Como $\phi \in \mathcal{W}_{p,q}$, existe $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ e uma sequência de caixas finitas Λ tal que $\phi = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{p,q,\Lambda}^\xi$. Uma vez que, para toda função local f , vale $\phi_{p,q,\theta_i^{-1}\Lambda}^\xi(\theta_i^{-1}f) = \phi_{p,q,\Lambda}^\xi(f)$, fazendo $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ (nessa igualdade), temos $\phi \circ \theta_i^{-1}(f) = \phi(\theta_i^{-1}f) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{p,q,\Lambda}^\xi(f)$. Portanto, $\phi \circ \theta_i^{-1} \in \mathcal{W}_{p,q}$, $\forall i \in \mathbb{Z}^d$, implicando que, $\psi_m \in \text{Env}(\mathcal{W}_{p,q})$. Já que $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ é compacto, o conjunto $\mathcal{M}_1(\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d})$, também, é compacto (veja Proposição 5.5 de [16]),

logo, considere ψ como o ponto de acumulação da sequência de medidas $\{\psi_m : m = 1, 2, \dots\}$.

Seja e um vetor unitário em \mathbb{Z}^d . Pela definição de ψ , para qualquer função local f , temos

$$\begin{aligned} |\psi \circ \theta_e^{-1}(f) - \psi(f)| &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \psi_m(\theta_e^{-1}f) - \psi_m(f) \right| \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} |\Delta_m|^{-1} \left| \sum_{i \in \Delta_m} \left\{ \phi \circ \theta_i^{-1}(\theta_e^{-1}f) - \phi(\theta_i^{-1}f) \right\} \right| \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} |\Delta_m|^{-1} \left| \sum_{i \in \theta_e^{-1}\Delta_m} \phi \circ \theta_i^{-1}(f) - \sum_{i \in \Delta_m} \phi \circ \theta_i^{-1}(f) \right| \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} |\Delta_m|^{-1} \sum_{i \in \Delta_m \Delta \theta_e^{-1}\Delta_m} \left| \phi \circ \theta_i^{-1}(f) \right| \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|f\|_\infty \cdot \frac{|\Delta_m \Delta \theta_e^{-1}\Delta_m|}{|\Delta_m|} = 0, \end{aligned}$$

onde, a última convergência, se deduz da identidade (21) (da Seção 2.4). Portanto, para cada função local f , está provado que $\psi \circ \theta_e^{-1}(f) = \psi(f)$. Em seguida, pelo Lema 3.6 (do Apêndice), temos $\psi \circ \theta_e^{-1}(f) = \psi(f)$, $\forall f \in C(\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d})$, mostrando-se que ψ é invariante por translações. Finalmente, como ψ é ponto de acumulação da sequência $\{\psi_m : m = 1, 2, \dots\}$, concluímos que $\psi \in \overline{\text{Env}(\mathcal{W}_{p,q})}$.

b) A prova deste item segue como consequência do Item 2) do Teorema 3.59.

c) Se $p = 0$ ou $p = 1$, é consequência imediata que ϕ tem a propriedade 0/1-aglomerado-infinito. Se $p \in (0, 1)$, pelo Item b) deste teorema, ϕ tem a propriedade da energia finita. E como (por hipótese) ϕ é invariante por translações, pelo Teorema da Unicidade de Burton Keane [30], ϕ tem a propriedade 0/1-aglomerado-infinito. \square

Observação 3.66. O Teorema 3.65 c) possui hipóteses mais fortes do que o Teorema da Unicidade de Burton Keane [30], pois ele exige simplesmente invariância translacional da medida (para obter a propriedade 0/1-aglomerado-infinito), sempre que essa medida esteja em $\overline{\text{Env}(\mathcal{W}_{p,q})}$.

Por outro lado, pelo Teorema 3.44, as medidas $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b$, com $b = 0, 1$, são invariantes por translação, logo, pelo Item c) do Teorema 3.65, as medidas $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b$, com $b = 0, 1$, têm a propriedade 0/1-aglomerado-infinito.

Observação 3.67. Se $\phi \in \overline{\text{Env}(\mathcal{W}_{p,q})}$ é invariante por traslações, então, pelo Item c) do Teorema 3.65, ϕ tem a propriedade 0/1-aglomerado-infinito. Logo, pelo Lema 3.64 temos a continuidade

quase certa da função $\omega \mapsto \phi_{p,q,\Lambda}^\omega(A)$, onde A é um evento cilíndrico. Portanto, a invariância por translações da medida é uma condição mais forte que a propriedade 0/1-aglomerado-infinito para ter-se continuidade quase certa.

O seguinte teorema nós dá condições suficientes para ter a inclusão $\mathcal{W}_{p,q} \subseteq \mathcal{R}_{p,q}$. Na verdade, sob as mesmas condições desse teorema pode-se provar um resultado mais forte, isto é, $\overline{\text{Env}(\mathcal{W}_{p,q})} \subseteq \mathcal{R}_{p,q}$ (para maiores detalhes, sobre uma prova completa desse resultado, veja Teorema 4.31 de [65]). Um resultado análogo ao próximo teorema, onde o modelo de aglomerados aleatórios possui presença de campo externo, será estudado no Corolário 5.32 do Capítulo 5

Teorema 3.68. *Se $\phi \in \mathcal{W}_{p,q}$ tem a propriedade 0/1-aglomerado-infinito, então, $\phi \in \mathcal{R}_{p,q}$. Isto é, $\mathcal{W}_{p,q} \subseteq \mathcal{R}_{p,q}$.*

Demonstração. Se $p = 0$ ou $p = 1$ o resultado é completamente trivial. Já quando $p \in (0, 1)$, seja $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$, $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ e $\phi \in \mathcal{W}_{p,q}$ tal que

$$\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p,q,\Lambda_n}^\xi.$$

Seja $\Lambda \in \mathcal{L}$ e $A \in \mathcal{F}_\Lambda$ um evento cilíndrico. Tome n suficientemente grande tal que $\Lambda \subset \Lambda_n$. Pela propriedade do domínio de Markov (mais precisamente, pela Observação 3.37), temos

$$\phi_{p,q,\Lambda_n}^\xi(A | \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda})(\omega) = \phi_{p,q,\Lambda}^\omega(A), \quad \phi_{p,q,\Lambda_n}^\xi \text{-q.c. } \omega. \quad (130)$$

Como ϕ tem a propriedade 0/1-aglomerado-infinito, pelo Lema 3.64, a função $\omega \mapsto \phi_{p,q,\Lambda}^\omega(A)$ é contínua ϕ -q.c. Considere um evento cilíndrico $B \in \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda}$. Como a indicadora de um evento cilíndrico é uma função contínua, temos que a aplicação $\omega \mapsto \mathbb{1}_B(\omega) \phi_{p,q,\Lambda}^\omega(A)$ é contínua ϕ -q.c. Daí, usando (130), propriedades básicas de esperança condicional e a definição de convergência fraca de medidas, obtemos

$$\begin{aligned} \int_B \phi(d\omega) \phi_{p,q,\Lambda}^\omega(A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B \phi_{p,q,\Lambda_n}^\xi(d\omega) \phi_{p,q,\Lambda}^\omega(A) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B \phi_{p,q,\Lambda_n}^\xi(d\omega) \phi_{p,q,\Lambda_n}^\xi(A | \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda})(\omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B \phi_{p,q,\Lambda_n}^\xi(d\omega) \mathbb{1}_A(\omega) \\ &= \int_B \phi(d\omega) \mathbb{1}_A(\omega), \quad \forall B \in \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda}. \end{aligned}$$

Finalmente, por definição de esperança condicional, temos

$$\phi(A|\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda})(\omega) = \phi_{p,q,\Lambda}^\omega(A), \quad \phi\text{-q.c. } \omega.$$

Isto é, $\phi \in \mathcal{R}_{p,q}$. □

Observação 3.69. Se $p \in (0, 1)$, pelo Item a) do Teorema 3.65, existe uma medida ϕ invariante por translações em $\overline{\text{Env}(\mathcal{W}_{p,q})}$. Pelo Item b) desse mesmo teorema, a medida ϕ tem a propriedade da energia finita. Logo, pelo Teorema da Unicidade de Burton Keane [30], ϕ tem a propriedade 0/1-aglomerado-infinito. Daí, pelo Teorema 3.68, $\phi \in \mathcal{R}_{p,q}$, portanto, $\mathcal{R}_{p,q} \neq \emptyset$.

Já quando $p \in \{0, 1\}$, pelo Item a) do Teorema 3.65 existe uma medida ϕ invariante por translações em $\overline{\text{Env}(\mathcal{W}_{p,q})}$. Veja que, nesse caso, trivialmente ϕ tem a propriedade 0/1-aglomerado-infinito, pois ou bem a rede está fechada ($p = 0$) ou bem aberta ($p = 1$). Daí, pelos comentários feitos antes do Teorema 3.68, temos que $\phi \in \mathcal{R}_{p,q}$, logo, nesse caso, também, $\mathcal{R}_{p,q} \neq \emptyset$.

Continuando, apresentamos algumas propriedades do conjunto $\mathcal{R}_{p,q}$.

Teorema 3.70. Seja $p \in [0, 1]$ e $q \in (0, +\infty)$. As seguintes afirmações são válidas:

- 1) O conjunto $\mathcal{R}_{p,q}$ é não vazio e contém, no mínimo, um elemento de $\overline{\text{Env}(\mathcal{W}_{p,q})}$ que é invariante por translação.
- 2) Para $q \in [1, +\infty)$, temos que $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b \in \mathcal{R}_{p,q}$, com $b = 0, 1$. Além disso,

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0 \leq_{\text{st}} \phi \leq_{\text{st}} \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^1, \quad \phi \in \mathcal{R}_{p,q}. \quad (131)$$

- 3) As medidas $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b \in \mathcal{R}_{p,q}$, com $b = 0, 1$, são extremais em $\mathcal{R}_{p,q}$.

Demonstração. 1) A Observação 3.69 mostra que $\mathcal{R}_{p,q}$ é não vazio. Para ver que $\mathcal{R}_{p,q}$ é convexo, tome $\phi, \psi \in \mathcal{R}_{p,q}$, $t \in [0, 1]$ e $A \in \mathcal{F}_\Lambda$, com $\Lambda \in \mathcal{L}$.

Se $\{\phi_{p,q,\Lambda}^\omega : \Lambda \in \mathcal{L}\}$ é a sequência de medidas que determina o conjunto $\mathcal{R}_{p,q}$, por definição de ϕ, ψ e de esperança condicional, para todo $B \in \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda}$, temos

$$\int_B \phi(d\omega) \phi_{p,q,\Lambda}^\omega(A) = \int_B \phi(d\omega) \mathbb{1}_A(\omega) \quad \text{e} \quad \int_B \psi(d\omega) \phi_{p,q,\Lambda}^\omega(A) = \int_B \psi(d\omega) \mathbb{1}_A(\omega).$$

Usando essas identidades, para todo $B \in \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda}$, tem-se

$$\begin{aligned} \int_B (t\phi + (1-t)\psi)(d\omega) \phi_{p,q,\Lambda}^\omega(A) &= t \int_B \phi(d\omega) \phi_{p,q,\Lambda}^\omega(A) + (1-t) \int_B \psi(d\omega) \phi_{p,q,\Lambda}^\omega(A) \\ &= t \int_B \phi(d\omega) \mathbb{1}_A(\omega) + (1-t) \int_B \psi(d\omega) \mathbb{1}_A(\omega) \\ &= \int_B (t\phi + (1-t)\psi)(d\omega) \mathbb{1}_A(\omega). \end{aligned}$$

Daí, por definição de esperança condicional, segue que

$$(t\phi + (1-t)\psi)(A|\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda})(\omega) = \phi_{p,q,\Lambda}^\omega(A), \quad t\phi + (1-t)\psi - \text{q.c. } \omega.$$

Isto é, $t\phi + (1-t)\psi \in \mathcal{R}_{p,q}$.

2) Assuma que $q \in [0, +\infty)$. Pelo Teorema 3.44, as medidas $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^b$, com $b = 0, 1$, são invariantes por translações, daí, pelo Teorema 3.65 c), essas medidas tem a propriedade 0/1-aglomerado-infinito e, ainda mais, pelo Teorema 3.68, elas pertencem a $\mathcal{R}_{p,q}$.

Com o intuito de provar as desigualdades (131), pelo Corolário 3.40, para cada evento A crescente dependendo de um número finito de arestas, tem-se

$$\phi_{p,q,\Lambda}^0(A) \leq \phi_{p,q,\Lambda}^{\tilde{\zeta}}(A) \leq \phi_{p,q,\Lambda}^1(A).$$

Seja $B \in \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda}$ e $\phi \in \mathcal{R}_{p,q}$. Integrando sobre $\tilde{\zeta} \in B$ com respeito a ϕ nas desigualdades acima, temos

$$\phi_{p,q,\Lambda}^0(A) \phi(B) \leq \int_B \phi(d\tilde{\zeta}) \phi_{p,q,\Lambda}^{\tilde{\zeta}}(A) \leq \phi_{p,q,\Lambda}^1(A) \phi(B).$$

Por definição de ϕ , a desigualdade anterior fica

$$\phi_{p,q,\Lambda}^0(A) \phi(B) \leq \int_B \phi(d\tilde{\zeta}) \mathbb{1}_A(\omega) \leq \phi_{p,q,\Lambda}^1(A) \phi(B).$$

Tomando $B \equiv \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ nessa desigualdade, tem-se

$$\phi_{p,q,\Lambda}^0(A) \leq \phi(A) \leq \phi_{p,q,\Lambda}^1(A),$$

para todo evento A crescente dependendo de um número finito de arestas.

Fazendo $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ nas desigualdades acima, obtemos

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0(A) \leq \phi(A) \leq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^1(A).$$

Finalmente, como todo evento crescente pode ser aproximado por eventos crescentes que dependem de um número finito de arestas, a prova segue.

3) Para provar este item podemos usar diretamente a equivalência entre extremabilidade e trivialidade de medidas (veja [57], Teorema 7.7) ou podemos argumentar de uma forma bem elegante por contradição da seguinte forma: suponha que $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0$ não é extremal, logo, existem duas medidas diferentes $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{R}_{p,q}$ tal que

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0 = t\phi_1 + (1-t)\phi_2, \quad \text{para algum } t \in (0, 1).$$

Para qualquer evento A cilíndrico crescente, pela equação (131) do Item 2) deste teorema, tem-se

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}}^0(A) < \min\{\phi_1(A), \phi_2(A)\}. \quad (132)$$

Em (132) descartamos uma possível igualdade, pois caso contrário teríamos uma contração com o fato de que as medidas ϕ_1 e ϕ_2 são diferentes. Por outro lado, veja, também, que

$$\min\{\phi_1(A), \phi_2(A)\} < t\phi_1(A) + (1-t)\phi_2(A) = \phi_{p,q,\mathbb{Z}}^0(A).$$

Porém, isso contradiz a desigualdade estrita (132). Portanto, $\phi_{p,q,\mathbb{Z}}^0$ é extremal. Por um raciocínio semelhante, prova-se que $\phi_{p,q,\mathbb{Z}}^1$, também, é extremal. \square

Observação 3.71. *Pelo Corolário 3.42, temos*

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0 \leq_{\text{st}} \phi \leq_{\text{st}} \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^1, \quad \phi \in \mathcal{W}_{p,q}.$$

Juntando esse fato com o Item b) do Teorema 3.70 conseguimos a seguinte equivalência

$$|\mathcal{W}_{p,q}| = |\mathcal{R}_{p,q}| = 1 \Leftrightarrow \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0 = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^1.$$

Relembramos que, no Teorema 3.55 com $d = 2$, tem-se $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^0 = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1$, para todo $p \in [0, 1]$ com a exceção do ponto autodual $p_{sd}(q)$. Logo, pela Observação 3.71, temos que $|\mathcal{W}_{p,q}| = |\mathcal{R}_{p,q}| = 1$.

A seguinte proposição nos dá a propriedade de associatividade positiva e da energia finita para elementos do conjunto $\mathcal{R}_{p,q}$.

Seja $e = \{x, y\}$ uma aresta em \mathbb{E}^d e K_e o evento em que x e y estão ligados por um caminho aberto de $\mathbb{E}^d \setminus \{e\}$.

Proposição 3.72. *Para $p \in [0, 1]$ e $q \in (0, +\infty)$, temos ⁴*

- a) *Todo $\phi \in \mathcal{R}_{p,q}$ tem a propriedade da energia finita.*
- b) *Se $q \in [1, +\infty)$ e $\phi \in \mathcal{R}_{p,q}$ é trivial sobre \mathcal{T} , então, ϕ é associada positiva.*

Demonstração. a) Se $\phi \in \mathcal{R}_{p,q}$, por definição, para todo $A \in \mathcal{F}$, temos

$$\phi(A | \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda})(\omega) = \phi_{p,q,\Lambda}^\omega(A), \quad \phi\text{-q.c. } \omega.$$

⁴ Enfatizamos que, aqui na notação, está sendo cometido um abuso de linguagem, escrevemos Λ para referirmos ao grafo (Λ, E_Λ) .

Fazendo $A = \{\omega_e = 1\}$, $\Lambda = \{e\}$ e usando a propriedade do domínio de Markov (Observação 3.37) na equação acima ficamos com

$$\phi(\omega_e = 1 | \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d \setminus e})(\omega) = \phi_{p,q,\{e\}}^\omega(\omega_e = 1) = \phi_{p,q,\Gamma}^\xi(\omega_e = 1 | \mathcal{F}_{\Gamma \setminus e}), \quad \phi\text{-q.c. } \omega \in \Omega_\Gamma^\xi,$$

onde Ω_Γ^ξ denota o conjunto da Definição 3.8 e $\Gamma \supset \{e\}$. Pela propriedade da energia finita (Proposição 3.38), $\phi_{p,q,\Gamma}^\xi(\omega_e = 1 | \mathcal{F}_{\Gamma \setminus e}) \in (0, 1)$. Logo, na igualdade acima temos $\phi(\omega_e = 1 | \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d \setminus e})(\omega) \in (0, 1)$, ϕ -q.c. ω . Isto é, todo $\phi \in \mathcal{R}_{p,q}$ tem a propriedade da energia finita.

b) Seja $q \in [1, +\infty)$ e $X, Y : \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ duas variáveis aleatórias contínuas crescentes. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\{0,1\}^{\mathbb{E}^d}} \phi(d\xi) X(\xi) Y(\xi) &= \int_{\{0,1\}^{\mathbb{E}^d}} \phi(d\xi) \phi(XY | \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda})(\xi) \\ &= \int_{\{0,1\}^{\mathbb{E}^d}} \phi(d\xi) \phi_{p,q,\Lambda}^\xi(XY) \\ &\geq \int_{\{0,1\}^{\mathbb{E}^d}} \phi(d\xi) \phi_{p,q,\Lambda}^\xi(X) \phi_{p,q,\Lambda}^\xi(Y) \\ &= \int_{\{0,1\}^{\mathbb{E}^d}} \phi(d\xi) \phi(X | \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda})(\xi) \phi(Y | \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda})(\xi) \\ &= \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \int_{\{0,1\}^{\mathbb{E}^d}} \phi(d\xi) \phi(X | \mathcal{T})(\xi) \phi(Y | \mathcal{T})(\xi), \end{aligned} \quad (133)$$

onde, na primeira igualdade, usamos propriedade de esperanças condicionais, na segunda e terceira igualdades, usamos o fato que $\phi \in \mathcal{R}_{p,q}$, na desigualdade, usamos a propriedade de associação positiva. Já na quarta igualdade, usamos o Teorema da Convergência Limitada e o Teorema de Convergência de Martingales de Lévy-downward (veja Apêndice, Teorema .19).

AFIRMAÇÃO: Se ϕ é trivial sobre \mathcal{T} , então $\phi(X | \mathcal{T}) = \phi(X)$, ϕ -q.c.

De fato, se ϕ é trivial sobre \mathcal{T} , por definição $\phi(B) \in \{0, 1\}$, para todo $B \in \mathcal{T}$. Caso que $\phi(B) = 0$, trivialmente temos

$$\int_B \phi(d\xi) \phi(X) = 0 = \int_B \phi(d\xi) X(\xi).$$

Se $\phi(B) = 1$, então $\phi(B^c) = 0$. Logo, $\phi(\mathbb{1}_{B^c} X) = 0$. Daí, $0 = \phi(1 - \mathbb{1}_B X)$, isto é, $\phi(\mathbb{1}_B X) = \phi(X)$. Portanto,

$$\int_B \phi(d\xi) \phi(X) = \phi(X) \phi(B) = \phi(X) = \phi(\mathbb{1}_B X) = \int_B \phi(d\xi) X(\xi),$$

onde a última igualdade é válida pela observação feita acima. Portanto, desses dois casos, por definição de esperança condicional, temos o afirmado. \diamond

Assim, temos

$$\phi(X|\mathcal{I}) = \phi(X) \quad \text{e} \quad \phi(Y|\mathcal{I}) = \phi(Y), \quad \phi\text{-q.c.}$$

Substituindo isso na desigualdade (133), segue que

$$\int_{\{0,1\}^{\mathbb{E}^d}} \phi(d\xi) X(\xi)Y(\xi) \geq \int_{\{0,1\}^{\mathbb{E}^d}} \phi(d\xi) X(\xi) \int_{\{0,1\}^{\mathbb{E}^d}} \phi(d\xi) Y(\xi).$$

Isto é, ϕ tem a propriedade de associatividade positiva. \square

3.4.6 Ausência de quase-localidade no modelo

Para encerrar este capítulo, de agora em diante nos interessaremos em estudar a propriedade de não quase-localidade da medida de aglomerados aleatórios $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b$, com $b = 0, 1$, segundo a referência [101]. Essas medidas têm a seguinte propriedade: a distribuição condicional de uma aresta ser aberta, dado que se conhece os estados da configuração fora de dita aresta, não é quase-local mas sim quase-local quase certamente, segundo a Definição 3.21 abaixo (veja Teorema 3.64).

Nesta subseção vamos verificar que as esperanças condicionais de eventos cilíndricos são funções contínuas na configuração que se condiciona. Um caminho para classificar medidas é o estudo de quão grande é o conjunto sobre o qual a quase-localidade falha, porém, em muitos casos, esse estudo é muito complicado (veja referência [47]).

Aqui, consideraremos medidas de aglomerados aleatórios com condições de fronteira livre e conectada com parâmetros $q > 1$ e $p \in (0, 1)$. Em seguida, definiremos o conceito principal dessa discussão.

Novamente usando abuso de linguagem ao escrever Λ para o grafo finito (Λ, E_Λ) de \mathbb{Z}^2 , definimos

Definição 3.20 (Quase-localidade de funções). *Dizemos que uma função f sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ é **quase-local** em η se para todo $\epsilon > 0$, existe uma região finita Λ_ϵ tal que*

$$\sup_{\xi: \xi_{\Lambda_\epsilon} = \eta_{\Lambda_\epsilon}} |f(\xi) - f(\eta)| < \epsilon. \tag{134}$$

Toda função quase-local é contínua (veja Definição 3.19), pois se f é quase-local, (134) se mantém. Logo, para cada $\Delta \supset \Lambda_\epsilon$, temos $\sup_{\xi: \xi_\Delta = \eta_\Delta} |f(\xi) - f(\eta)| < \epsilon$, $\forall \Delta \supset \Lambda_\epsilon$, pois

$\{\xi : \xi_\Delta = \eta_\Delta\} \subset \{\xi : \xi_{\Lambda_\epsilon} = \eta_{\Lambda_\epsilon}\}$. Enfatizamos que a noção de quase-localidade e continuidade são equivalentes quando o espaço de estados é finito (para uma prova desse fato, veja Lema 4.18 do próximo capítulo).

Definição 3.21 (Quase-localidade e quase-localidade quase certa de medidas). *Dizemos que uma medida μ sobre $(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}, \mathcal{F})$ é **quase-local** se para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$ e todo evento cilíndrico $A \in \mathcal{F}_\Lambda$, a função $\omega \mapsto \mu(A | \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^2 \setminus \Lambda})(\omega)$ é quase-local. Se a quase-localidade acontece exceto num conjunto de μ -medida zero, então, a medida μ será chamada de **quase-local quase certa**.*

Em rigor, quase-localidade quase certa é uma propriedade das distribuições condicionais, em vez da medida.

Note que quase-localidade implica quase-localidade quase certa. Uma medida i.i.d sobre Ω é obviamente quase-local, daí, a medida de aglomerados aleatórios para uma árvore regular \mathbb{T}_n , cujos parâmetros satisfazem ou $p \in \{0, 1\}$ ou $q = 1$, é quase-local. A estrutura geométrica do grafo é importante para determinar se um modelo é ou não é quase-local, por exemplo, para grafos não amenáveis como árvores regulares de ordem $n \geq 2$, \mathbb{T}_n (isto é, o único grafo infinito conexo o qual é conectado, não têm circuitos e possui n ramos emanando de cada vértice) a quase-localidade quase certa falha [48, 68].

Como as medidas $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b$, com $b = 0, 1$, são invariantes por translações (veja Teorema 3.44), pela Observação 3.67 e pelo Lema 3.64, essas medidas são quase-locais quase certamente. De agora em diante, nos preocuparemos em provar a não quase-localidade dessas medidas.

Fixada a aresta $e \in \mathbb{E}^2$ definimos por $J_e \equiv \mathbb{1}_{\{\omega: \omega_e=1\}}$ a indicadora do evento em que a aresta e é aberta. Dado $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ visto como subgrafo, denotaremos Λ^c para denotar $\mathbb{Z}^2 \setminus \Lambda$. Além disso, definimos também

$$\begin{aligned} \gamma_e^0(J_e | \eta_\Lambda 0_{\Lambda^c}) &\equiv \phi_{p,q,\Lambda}^0(J_e | \eta_{\Lambda \setminus \{e\}} 0_{\Lambda^c}) \\ \gamma_e^1(J_e | \eta_\Lambda 1_{\Lambda^c}) &\equiv \phi_{p,q,\Lambda}^1(J_e | \eta_{\Lambda \setminus \{e\}} 1_{\Lambda^c}) \\ \gamma_e^0(J_e | \eta) &\equiv \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2} \gamma_e^0(J_e | \eta_\Lambda 0_{\Lambda^c}) \quad \text{e} \quad \gamma_e^1(J_e | \eta) \equiv \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2} \gamma_e^1(J_e | \eta_\Lambda 1_{\Lambda^c}), \end{aligned}$$

onde

$$\eta_{\Lambda \setminus \{e\}} b_{\Lambda^c} \equiv \{\omega \in \Omega_\Lambda^b : \omega_f = \eta_f, \forall f \in E_{\Lambda \setminus \{e\}}\},$$

para $b = 0, 1$, são eventos cilíndricos. Aqui, Ω_Λ^b denota o conjunto da Definição 3.8. Antes de enunciar o resultado principal sobre a não quase-localidade da medida $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b$, damos alguns lemas e proposições auxiliares.

Lema 3.73. *Seja Λ um grafo finito de \mathbb{Z}^2 contendo a aresta e . Para cada função g mensurável segundo a σ -álgebra $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^2 \setminus \{e\}}$, tem-se*

$$\phi_{p,q,\Lambda}^0(\gamma_e^0(J_e|\cdot)g) = \phi_{p,q,\Lambda}^0(J_e g) \quad e \quad \phi_{p,q,\Lambda}^1(\gamma_e^1(J_e|\cdot)g) = \phi_{p,q,\Lambda}^1(J_e g).$$

Demonstração. Para $b = 0, 1$, tem-se

$$\begin{aligned} \phi_{p,q,\Lambda}^b(\gamma_e^b(J_e|\cdot)g) &= \int_{\Omega_\Lambda^b} \phi_{p,q,\Lambda}^b(d\omega) \gamma_e^b(J_e|\omega) g(\omega) \\ &= \int_{\{0,1\}^{\mathbb{E}^2}} \phi_{p,q,\Lambda}^b(d\omega) \gamma_e^b(J_e|\omega_\Lambda b_{\Lambda^c}) g(\omega_\Lambda b_{\Lambda^c}). \end{aligned}$$

Usando a definição de $\gamma_e^b(J_e|\omega_\Lambda b_{\Lambda^c})$ o lado direito da igualdade acima fica

$$\begin{aligned} &= \int_{\{0,1\}^{\mathbb{E}^2}} \phi_{p,q,\Lambda}^b(d\omega) \phi_{p,q,\Lambda}^b(J_e|\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^2 \setminus \{e\}})(\omega_\Lambda b_{\Lambda^c}) g(\omega_\Lambda b_{\Lambda^c}) \\ &= \int_{\Omega_\Lambda^b} \phi_{p,q,\Lambda}^b(d\omega) \phi_{p,q,\Lambda}^b(J_e|\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^2 \setminus \{e\}})(\omega) g(\omega) \\ &= \int_{\Omega_\Lambda^b} \phi_{p,q,\Lambda}^b(d\omega) \phi_{p,q,\Lambda}^b(J_e g|\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^2 \setminus \{e\}})(\omega) \\ &= \int_{\Omega_\Lambda^b} \phi_{p,q,\Lambda}^b(d\omega) J_e(\omega) g(\omega) \\ &= \phi_{p,q,\Lambda}^b(J_e g), \end{aligned}$$

onde, na terceira igualdade, usamos o fato de que a função g é $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^2 \setminus \{e\}}$ -mensurável e, na quarta igualdade, usamos propriedade de esperança condicional. \square

Lema 3.74. *Para $b = 0, 1$, a aplicação $\eta \mapsto \gamma_e^b(J_e|\eta)$ é não local, não negativa, crescente (no sentido FKG).*

Demonstração. Seja $e = \{x, y\}$, $\Lambda^* = (\Lambda, E_\Lambda \setminus \{e\})$ o subgrafo de Λ por deletamento da aresta e e os eventos.

$$K_\Lambda = \{x \text{ é conectado a } y \text{ em } \Lambda^*\} \quad e \quad K = \bigcup_{\Lambda \in \mathbb{Z}^2} K_\Lambda.$$

Observe que $K_\Lambda \uparrow K$, quando $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$. Dado $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^2}$ definamos as configurações $\eta_{(e)}$ e η^e por

$$(\eta_{(e)})_f = \begin{cases} \eta_b, & \text{se } f \neq e \\ 0, & \text{se } f = e \end{cases} \quad e \quad (\eta^e)_f = \begin{cases} \eta_b, & \text{se } f \neq e \\ 1, & \text{se } f = e, \end{cases} \quad \forall f \in \mathbb{E}^2,$$

respectivamente. Salientamos que as notações η_e e $\eta_{(e)}$ têm diferentes significados nesta subseção.

Se $o(\eta)$ denota o número de arestas abertas de η em Λ , um cálculo simples mostra que

$$\begin{aligned} \gamma_e^0(J_e | \eta_\Lambda 0_{\Lambda^c}) &= \frac{\phi_{p,q,\Lambda}^0(\eta^e)}{\phi_{p,q,\Lambda}^0(\eta^e) + \phi_{p,q,\Lambda}^0(\eta_{(e)})} \\ &= \frac{[p/1-p]^{o(\eta^e)} q^{k^0(\eta^e, \Lambda^*)}}{[p/1-p]^{o(\eta^e)} q^{k^0(\eta^e, \Lambda^*)} + [p/1-p]^{o(\eta_{(e)})} q^{k^0(\eta_{(e)}, \Lambda^*)}} \\ &= \begin{cases} \frac{p/(1-p)}{[p/1-p]+1} = p, & \text{se } \eta_{(e)} \in K_\Lambda \\ \frac{p/(1-p)}{[p/1-p]+q} = \frac{p}{p+q(1-p)}, & \text{se } \eta_{(e)} \notin K_\Lambda. \end{cases} \end{aligned}$$

Tomando o limite termodinâmico, obtemos

$$\gamma_e^0(J_e | \eta) = p \cdot \mathbb{1}_K(\eta_{(e)}) + \frac{p}{p+q(1-p)} \cdot (1 - \mathbb{1}_K(\eta_{(e)})). \quad (135)$$

Por outro lado, definindo os eventos

$$K^\Lambda = \{x \text{ é conectado a } y \text{ fora de } \Lambda^*\} \quad \text{e} \quad \tilde{K} = K \cup \left(\bigcap_{\Lambda \in \mathbb{Z}^2} K^\Lambda \right),$$

similarmente, obtemos

$$\gamma_e^1(J_e | \eta_\Lambda 1_{\Lambda^c}) = \begin{cases} p, & \text{se } \eta_{(e)} \in K^\Lambda \\ \frac{p}{p+q(1-p)}, & \text{se } \eta_{(e)} \notin K^\Lambda. \end{cases}$$

Tomando o limite termodinâmico nessa igualdade, temos

$$\begin{aligned} \gamma_e^1(J_e | \eta) &= p \cdot \mathbb{1}_{\tilde{K}}(\eta_{(e)}) + \frac{p}{p+q(1-p)} \cdot (1 - \mathbb{1}_{\tilde{K}}(\eta_{(e)})) \\ &= \frac{p}{p+q(1-p)} + \left(p - \frac{p}{p+q(1-p)} \right) \cdot \mathbb{1}_{\tilde{K}}(\eta_{(e)}). \end{aligned} \quad (136)$$

De (135) e (136) claramente se observa que as aplicações $\eta \mapsto \gamma_e^0(J_e | \eta)$ e $\eta \mapsto \gamma_e^1(J_e | \eta)$ são crescentes e não negativas. Além disso, essas aplicações não são locais no sentido de que a conectividade ou não das extremidades x e y fora de Λ^* depende dos estados das arestas fora de Λ^* . Isto é, essas aplicações dependem de um número infinito de arestas, portanto, não são locais. \square

Lema 3.75. *Seja g uma função monótona limitada. Se $g(\omega) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2} g(\omega_\Lambda b_{\Lambda^c})$, então*

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(g) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2} \phi_{p,q,\Lambda}^b(g), \quad b = 0, 1.$$

Demonstração. Provaremos este lema para o caso em que g é uma função monótona crescente com $b = 0$, pois o caso $b = 1$ é análogo. Denotando $g_\Lambda(\omega) \equiv g(\omega_\Lambda 0_{\Lambda^c})$, seja Γ um subconjunto finito de \mathbb{Z}^2 tal que $\Lambda \subset \Gamma$. Como $\omega_\Lambda 0_{\Lambda^c} \preceq \omega_\Gamma 0_{\Gamma^c}$ e g é crescente, temos que $g_\Lambda \leq g_\Gamma$.

Seja $M \subset \Lambda \subset N$, onde N é um subconjunto finito de \mathbb{Z}^2 . Como que g_Λ é monótona crescente, pela observação feita em linhas acima e pela desigualdade FKG, tem-se

$$\phi_{p,q,\Lambda}^0(g_M) \leq \phi_{p,q,\Lambda}^0(g_\Lambda) = \phi_{p,q,\Lambda}^0(g) \leq \phi_{p,q,N}^0(g_\Lambda),$$

onde, na desigualdade do lado direito, usamos a Proposição 3.43.

Como g_Λ é local (depende de um número finito de arestas), podemos tomar o limite $N \uparrow \mathbb{Z}^2$ para obter

$$\phi_{p,q,\Lambda}^0(g_M) \leq \phi_{p,q,\Lambda}^0(g) \leq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^0(g_\Lambda).$$

Fazendo $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2$, pela hipótese e pelo Teorema da Convergência Monótona (veja Apêndice, Teorema .22), temos

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^0(g_M) \leq \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2} \phi_{p,q,\Lambda}^0(g) \leq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^0(g).$$

Finalmente, fazendo $M \uparrow \mathbb{Z}^2$ e usando o Teorema da Convergência Monótona outra vez, obtemos

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^0(g) \leq \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2} \phi_{p,q,\Lambda}^0(g) \leq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^0(g).$$

□

Proposição 3.76. *Para $b = 0, 1$, temos*

$$\gamma_e^b(J_e|\cdot) = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(J_e|\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^2 \setminus \{e\}}), \quad \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b\text{-q.c.}$$

Demonstração. Por definição de esperança condicional, para toda função mensurável g segundo a σ -álgebra $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^2 \setminus \{e\}}$, temos que provar a seguinte igualdade:

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(J_e g) = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(\gamma_e^b(J_e|\cdot) g). \quad (137)$$

De fato, como J_e e g são funções locais (no sentido que dependem de um número finito de arestas), pelo Lema 3.73, tem-se

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(J_e g) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2} \phi_{p,q,\Lambda}^b(J_e g) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2} \phi_{p,q,\Lambda}^b(\gamma_e^b(J_e|\cdot) g). \quad (138)$$

Pelo Lema 3.74, $\gamma_e^b(J_e|\cdot)$ é não negativa e crescente, logo, $\gamma_e^b(J_e|\cdot)g$ também o é. Por definição $\gamma_e^b(J_e|\eta) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2} \gamma_e^b(J_e|\eta_\Lambda b_{\Lambda^c})$. Como g é local, $\gamma_e^b(J_e|\cdot)g$ também o é.

Definindo $h(\cdot) \equiv \gamma_e^b(J_e|\cdot)g(\cdot)$, temos que $h(\omega) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2} h(\omega_\Lambda b_{\Lambda^c})$. Logo, pelo Lema 3.75 temos $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(h) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2} \phi_{p,q,\Lambda}^b(h)$, isto é

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(\gamma_e^b(J_e|\cdot)g) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2} \phi_{p,q,\Lambda}^b(\gamma_e^b(J_e|\cdot)g).$$

Finalmente, combinando essa igualdade com (138), obtemos (137). \square

Definição 3.22. *Seja $\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$, $\Lambda \in \mathbb{Z}^2$ e $f \in \mathcal{F}$. Uma função g sobre Ω tal que*

$$g(\cdot) = \mu(f|\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^2 \setminus \Lambda})(\cdot), \quad \mu\text{-q.c.}$$

é uma versão (=realização) da correspondente esperança condicional.

Salientamos que as esperanças condicionais admitem um número infinito de versões, todas diferindo sobre conjuntos de medida zero.

O que nos propomos agora é estudar as propriedades de quase-localidade das distribuições condicionais $\gamma_e^b(J_e|\cdot)$, para $b = 0, 1$. Observe que, pelo Lema 3.76, $\gamma_e^b(J_e|\cdot)$ é somente uma versão de $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(J_e|\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^2 \setminus \{e\}})(\cdot)$. Para provar a não quase-localidade de $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(J_e|\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^2 \setminus \{e\}})(\cdot)$, deve-se provar que nenhuma função igual a $\gamma_e^b(J_e|\cdot)$, $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b$ -q.c. é quase-local (isto é, $\gamma_e^b(J_e|\cdot)$ exibe uma não quase-localidade essencial). Como $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(A) > 0$, para qualquer conjunto aberto A , é suficiente investigar a propriedade de não quase-localidade essencial de $\gamma_e^b(J_e|\cdot)$ em uma vizinhança de η . Fixado $\Lambda \in \mathcal{L}$, uma vizinhança de η é um conjunto da forma:

$$\mathcal{N}(\Lambda, \eta) \equiv \{\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^2} : \xi_\Lambda = \eta_\Lambda\}.$$

Proposição 3.77. *Nenhuma versão de $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(J_e|\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^2 \setminus \{e\}})(\cdot)$ é quase-local.*

Demonstração. Sendo $\Lambda_n \equiv [-n, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2$ e a aresta $e = \{x, y\}$, considere a configuração η que toma os valores de um sobre as (duas) linhas paralelas infinitas que passam pelos vértices x e y e é zero sobre todas as outras arestas (veja Figura 25). Em seguida, escolha os seguintes subconjuntos da vizinhança de $\mathcal{N}(\Lambda_n, \eta)$:

$$\mathcal{N}^1(\Lambda_n, \eta) \equiv \{\xi \in \mathcal{N}(\Lambda_n, \eta) : \text{uma aresta aberta de } \Lambda_{n+1} \setminus \Lambda_n \text{ liga as duas linhas em } \xi\}$$

$$\mathcal{N}^0(\Lambda_n, \eta) \equiv \{\xi \in \mathcal{N}(\Lambda_n, \eta) : \text{todas as arestas de } \Lambda_{n+1} \setminus \Lambda_n \text{ são fechadas em } \xi\}.$$

Da Figura 25, se $\xi^{1,n} \in \mathcal{N}^1(\Lambda_n, \eta)$, então as (duas) linhas paralelas vão ser ligadas. No entanto, se $\xi^{0,n} \in \mathcal{N}^0(\Lambda_n, \eta)$, então, as linhas (paralelas) nunca vão se ligar em Λ_n , não importando o tipo de configuração que se tenha fora de Λ_{n+1} .

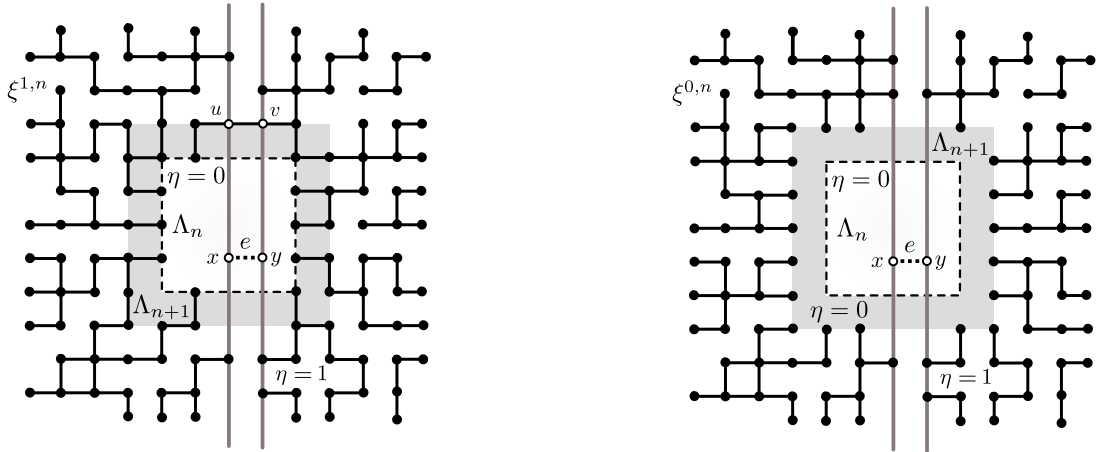


Figura 25: Ao lado esquerdo esboçamos a configuração $\zeta^{1,n} \in \mathcal{N}(\Lambda_n^1, \eta)$ e no lado direito uma típica configuração $\zeta^{0,n} \in \mathcal{N}(\Lambda_n^0, \eta)$.

Daí, por um cálculo similar ao feito no Lema 3.74, temos

$$\gamma_e^b(J_e|\zeta^{1,n}) - \gamma_e^b(J_e|\zeta^{0,n}) = p - \frac{p}{p+q(1-p)} > 0$$

uniformemente em n .

Desde que as vizinhanças $\mathcal{N}^0(\Lambda_n, \eta)$ e $\mathcal{N}^1(\Lambda_n, \eta)$ têm medida $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b$ -positiva, segue que nenhuma função que é igual a $\gamma_e^b(J_e|\cdot)$, $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b$ -q.c. pode ser quase-local em η . \square

3.4.7 Alguns problemas para este modelo

Muitas perguntas permanecem parcialmente sem resposta para o modelo de aglomerados aleatórios. Aqui listamos algumas delas.

O caso $q < 1$. É conhecido que quando $q < 1$ a desigualdade FKG falha (veja Exemplo 3.1). Uma conjectura bem otimista é que uma versão de associação negativa se mantenha quando $q < 1$ e esta possa implicar a existência de limites a volume infinito. Uma conjectura fraca se poderia enunciar da seguinte forma: para $q < 1$ se satisfaz

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}(\{\omega_e = 1\} \cap \{\omega_f = 1\}) \leq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}(\omega_e = 1) \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}(\omega_f = 1), \quad \text{para } e \neq f.$$

Decaimento exponencial ($d > 2$). É conjecturado que

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}(0 \leftrightarrow \partial[-n, n]^d) \leq e^{-cn}, \quad n \geq 1,$$

para $c \equiv c(p, q)$ satisfazendo $c > 0$ quando $p < p_c(q)$. Isso tem sido provado para valores de p suficientemente pequenos, porém, nenhuma prova é conhecida até o ponto crítico $p_c(q)$, quando $d > 2$.

Alertamos que, quando $d = 2$ e $q \geq 1$, esse problema tem sido resolvido (veja Teorema 3.58). O caso $q = 2$ é muito especial, desde que corresponde ao modelo de Ising para o qual a *random-current representation* permite ter uma teoria muito rica (veja [65], Seção 9.3).

O decaimento exponencial é provado para geral d quando $q = 2$ e, também, para q suficientemente grande.

Unicidade de medidas de aglomerados aleatórios. É conjecturado que $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^1 = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^d}^0$ para $p \neq p_c(q)$. Além disso, que a unicidade das medidas se mantém quando $p = p_c(q)$ se, e somente se, q é suficientemente pequeno.

Sabemos que para $d = 2$, essa conjectura foi resolvida (veja Teorema 3.55). Essas afirmações chegam a ser triviais quando $q = 1$. Já quando $q = 2$, este modelo tem especial importância, porque está relacionado com o modelo de Ising. Em [8], Aizenman e Newman provaram que, quando $d \geq 4$ a probabilidade de percolação $\theta^1(p, 2)$ é uma função contínua de p no valor crítico $p_c(2)$. Isto é, quando $d \geq 4$ e $p = p_c(2)$, o conjunto das medidas de Gibbs do modelo de Ising é unitário. Métodos clássicos (como *random-current representation*) provaram que em duas dimensões a unicidade de medidas se mantém na fase crítica (veja referência [94]). Em resumo, quando $q = 2$ e $p = p_c(2)$, a unicidade foi provada para todo $d \neq 3$, ficando em aberto o problema para o caso $d = 3$. Em 2014, esse problema foi resolvido, na referência [5] os autores provaram que a magnetização se anula continuamente na temperatura crítica para uma classe de sistemas de spins ferromagnéticos, os quais incluem o modelo de Ising ferromagnético sobre \mathbb{Z}^d (com $d = 3$).

4

CAMPOS ALEATÓRIOS E ESPECIFICAÇÕES

Neste capítulo, consideramos o grafo infinito enumerável $\mathbb{L} \equiv (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ e $(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ um espaço mensurável onde \mathcal{E} é um espaço finito ¹, por exemplo, $\{0, 1\}$, $\{+1, -1\}$ ou $\{1, 2, \dots, q\}$, com $q \geq 1$ e \mathcal{E} é a σ -álgebra de todos os subconjuntos de \mathcal{E} . Quando não for especificado, estaremos considerando S como se fosse o conjunto \mathbb{V} ou um subconjunto dele. O conjunto S será chamado de *conjunto de parâmetros*. O par $(\mathcal{E}, \mathcal{E})$, ou simplesmente o conjunto \mathcal{E} , será chamado de *espaço de estados*. Em seguida, definimos o espaço

$$\Omega \equiv \{\omega = (\omega_z)_{z \in S} : \omega_z \in \mathcal{E}\} = \mathcal{E}^S$$

chamado de espaço de configurações. A este espaço associaremos a σ -álgebra produto sobre Ω e o denotaremos por $\mathcal{F} \equiv \mathcal{E}^S$. Em seguida, dotaremos ao espaço mensurável (Ω, \mathcal{F}) de uma medida (de probabilidade) μ para formar o espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, com a finalidade de definir a seguinte variável aleatória

$$\sigma_z : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow (\mathcal{E}, \mathcal{E}), \quad \forall z \in S.$$

Em alguns contextos, essa variável aleatória é chamada de *campo aleatório*. Note que a variável aleatória σ_z pode ser vista como a projeção sobre a z -ésima coordenada, isto é, σ_z está definida pela relação: $\omega \mapsto \omega_z$, para cada $\omega \in \Omega$. Dado o espaço mensurável (Ω, \mathcal{F}) , definimos

$$\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F}) \equiv \{\mu : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow [0, 1] : \mu \text{ é uma medida de probabilidade}\}$$

o conjunto de todas as medidas de probabilidade sobre (Ω, \mathcal{F}) . Para cada $\Lambda \subset S$ finito, definimos a projeção sobre as coordenadas em Λ como a aplicação

$$\sigma_\Lambda : \Omega \rightarrow \mathcal{E}^\Lambda,$$

¹ Para uma teoria mais extensa deste capítulo sobre espaços \mathcal{E} mais gerais, veja [57], Capítulos 1 e 2.

tal que $\omega \mapsto \omega_\Lambda \equiv (\omega_z)_{z \in \Lambda}$, para cada $\omega \in \Omega$. Analogamente, como definimos acima, para cada $\Lambda \subset \Delta$ definimos a aplicação

$$\sigma_\Lambda : \mathcal{E}^\Delta \rightarrow \mathcal{E}^\Lambda.$$

Note que se $\omega \in \mathcal{E}^\Lambda$ e $\xi \in \mathcal{E}^{\Delta \setminus \Lambda}$, então $\omega\xi \in \mathcal{E}^\Delta$ é definida por $\sigma_\Lambda(\omega\xi) = \omega$ e $\sigma_{\Delta \setminus \Lambda}(\omega\xi) = \xi$. Por questão de simplicidade, daqui em diante adotaremos a notação de \mathcal{L} como o conjunto enumerável dos volumes finitos de S , isto é

$$\mathcal{L} \equiv \{\Lambda \subset S : 0 < |\Lambda| < \infty\}. \quad (139)$$

Para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$ e $A \in \mathcal{E}^\Lambda$, o evento $\{\sigma_\Lambda \in A\}$ será chamado de *evento cilíndrico*. Denotando \mathcal{C} como a coleção de todos os eventos cilíndricos, observe que a σ -álgebra \mathcal{F} pode ser vista como a menor σ -álgebra que contém o conjunto \mathcal{C} .

Dado $\Delta \in \mathcal{L}$, definimos a coleção

$$\mathcal{C}_\Delta \equiv \{\{\sigma_\Lambda \in A\} : \Lambda \subset \Delta, \Lambda \in \mathcal{L} \text{ e } A \in \mathcal{E}^\Lambda\}.$$

Assim, se $\Delta \in \mathcal{L}$, definimos \mathcal{F}_Δ como a sub- σ -álgebra de \mathcal{F} gerada pela coleção \mathcal{C}_Δ , ou equivalentemente, \mathcal{F}_Δ é a σ -álgebra de eventos ocorridos em Δ . Isto é, se $\{\sigma_z : z \in \Delta\}$ denota a família de todas as projeções sobre as coordenadas em Δ , então \mathcal{F}_Δ é a σ -álgebra gerada pela coleção $\{\sigma_z : z \in \Delta\}$. Dado o conjunto de parâmetros S , definiremos $\mathcal{F}_{S \setminus \Delta}$ ou \mathcal{F}_{Δ^c} , a σ -álgebra gerada pela coleção $\{\cup_\Lambda \mathcal{F}_\Lambda : \Lambda \subset S \setminus \Delta\}$. Em outras palavras, $\mathcal{F}_{S \setminus \Delta}$ é a σ -álgebra que contém toda informação sobre as *condições de fronteira*, isto é, a configuração restrita aos valores de certas variáveis aleatórias fora do volume finito Δ . Finalmente, note também que $\mathcal{F} = \sigma(\cup_\Lambda \mathcal{F}_\Lambda)$.

4.1 ALGUMAS NOTAÇÕES GERAIS: NÚCLEO DE MEDIDAS

Seja (Ω, \mathcal{F}) um espaço mensurável e $\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$, para cada função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável e μ -integrável definimos o valor esperado de f com respeito à medida μ , como

$$\mu(f) \equiv \int_\Omega \mu(d\omega) f(\omega).$$

Se \mathcal{G} é um sub- σ -álgebra de \mathcal{F} e $\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$, definimos a esperança condicional de f dada a σ -álgebra \mathcal{G} com respeito a medida μ , como

$$\mu(f|\mathcal{G}) \equiv \mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{G}).$$

Caso se tenha clareza com respeito a que medida se está integrando, nas definições acima omitiremos a notação de tal medida. Em particular, para qualquer $A \in \mathcal{F}$,

$$\mu(A|\mathcal{G}) \equiv \mu(\mathbb{1}_A|\mathcal{G}).$$

Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função não negativa mensurável, adotaremos a seguinte definição

$$f\mu(A) \equiv \mu(f \cdot \mathbb{1}_A) = \int_A \mu(d\omega) f(\omega).$$

Definição 4.1 (Núcleo de medidas). *Sejam $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ dois espaços mensuráveis. Uma função $\gamma : \mathcal{F}_1 \times \Omega_2 \rightarrow [0, +\infty]$ é chamado de **núcleo de medida** de \mathcal{F}_2 a \mathcal{F}_1 se as seguintes condições são satisfeitas:*

- ✓ $\gamma(\cdot|\omega_2)$ é uma medida sobre $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$, para qualquer $\omega_2 \in \Omega_2$ fixado.
- ✓ $\gamma(A|\cdot)$ é uma aplicação \mathcal{F}_2 -mensurável sobre $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$, para qualquer $A \in \mathcal{F}_1$.

Se em adição, a aplicação γ satisfaz: $\gamma(\Omega_1|\cdot) = 1$, então a aplicação γ é chamada de **núcleo de probabilidade** de \mathcal{F}_2 a \mathcal{F}_1 .

Exemplo 4.1. Se $\varphi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ é uma função mensurável, então a aplicação

$$\gamma(A|\omega_2) \equiv \mathbb{1}_A \circ \varphi(\omega_2)$$

é um núcleo de probabilidade de \mathcal{F}_2 a \mathcal{F}_1 .

De fato, desde que $\gamma(A|\omega_2) = \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(A)}(\omega_2)$, pelas propriedades da função indicadora, $\gamma(\cdot|\omega_2)$ é uma medida de probabilidade, para todo $\omega_2 \in \Omega_2$. O fato da mensurabilidade da aplicação $\gamma(A|\cdot)$ é imediato, uma vez que φ é uma aplicação mensurável. Portanto, γ é um núcleo de probabilidade.

Exemplo 4.2 (Veja referência [116]). Seja $\Omega_1 = \{0, 1\}$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\{0, 1\})$ a σ -álgebra das partes, $\Omega_2 = [0, 1]$ e $\mathcal{F}_2 = \mathcal{B}([0, 1])$ os borelianos em $[0, 1]$. A aplicação

$$\gamma(A|p) = ((1-p)\delta_0 + p\delta_1)(A)$$

é um núcleo de probabilidade de \mathcal{F}_2 a \mathcal{F}_1 . Aqui $\delta_x(A)$, com $x = 0, 1$, é a medida delta de Dirac que é um se $x \in A$ e é zero, caso contrário.

De fato, uma vez que $\gamma(\cdot|p)$ é a distribuição de Bernoulli com parâmetro p , esta é uma medida de probabilidade. Por outro lado, veja que $\gamma(\Omega_2|\cdot) = 1$, $\gamma(\emptyset|\cdot) = 0$, $\gamma(\{0\}|\cdot) = 1-p$ e $\gamma(\{1\}|\cdot) = p$ que são mensuráveis. Portanto, γ é um núcleo de probabilidade.

Exemplo 4.3. Por um raciocínio semelhante ao exercício anterior, vemos que

1. Se $\Omega_1 = \{1, \dots, q\}$ e $\Omega_2 = \{1/q\}$, $q \geq 1$ com suas respectivas σ -álgebras, a aplicação $\gamma(A|\frac{1}{q}) = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \delta_i$ é um núcleo de probabilidade.
2. Se $\Omega_1 = \{-1, +1\}$ e $\Omega_2 = \{1/2\}$ com suas respectivas σ -álgebras, a aplicação $\gamma(A|\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_{+1}$ é um núcleo de probabilidade.

Exemplo 4.4 (Veja referência [116]). Sejam Ω_1 e Ω_2 munidos de medidas σ -finitas. Seja $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ mensurável tal que para μ_1 -quase todo $x \in \Omega_1$, tenhamos que $\int_{\Omega_2} \mu_2(dy) f(x, y) =$

1. A aplicação

$$\gamma(A|x) = \int_A \mu_2(dy) f(x, y)$$

é um núcleo de medida.

De fato, da hipótese $\int_{\Omega_2} \mu_2(dy) f(x, y) = 1$ e pelas propriedades de integral de Lebesgue, temos que a aplicação $A \mapsto \int_A \mu_2(dy) f(x, y)$ é uma medida de probabilidade. A mensurabilidade da aplicação $x \mapsto \int_A \mu_2(dy) f(x, y)$ decorre do Teorema de Fubini-Tonelli (veja Apêndice, Teorema .24). Portanto, γ é um núcleo de probabilidade.

Exemplo 4.5. Seja $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ a σ -álgebra dos borelianos em Ω . Para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$ e $A \in \mathcal{F}_\Lambda$, a aplicação

$$\gamma_\Lambda(A|\omega) = \phi_{p,q,\Lambda}^\omega(A)$$

é um núcleo de probabilidade de \mathcal{F}_{Λ^c} a \mathcal{F}_Λ . Aqui, $\phi_{p,q,\Lambda}^\omega(A)$ é a medida de aglomerados aleatórios definido em (67).

De fato, por definição $A \mapsto \phi_{p,q,\Lambda}^\omega(A)$ é uma medida de probabilidade para cada $\omega \in \Omega$. Por outro lado, para cada $A \in \mathcal{F}_\Lambda$ a aplicação $\omega \mapsto \phi_{p,q,\Lambda}^\omega(A)$ é mensurável pelo Teorema de Fubini-Tonelli. Portanto, γ é um núcleo de probabilidade.

O seguinte exemplo foi extraído de [53] e servirá para ter uma explicação teórica interessante quando definirmos o conceito de conjunto das medidas de Gibbs, e desejarmos impor condições de forma que este conjunto seja não vazio.

Exemplo 4.6. Sejam η^- e η^{-i} duas configurações em $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$ definidas por

$$\eta^- \equiv (-1, \dots, -1, \underbrace{-1}_{i\text{-ésimo}}, -1, \dots) \quad \text{e} \quad \eta^{-i} \equiv (-1, \dots, -1, \underbrace{+1}_{i\text{-ésimo}}, -1, \dots),$$

respectivamente. Para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$ e $A \in \mathcal{F}$, seja

$$\gamma_\Lambda(A|\omega) \equiv \begin{cases} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \mathbb{1}_A(\eta^{-i}), & \text{se } \omega_{\Lambda^c} = \eta_{\Lambda^c}^- \\ \mathbb{1}_A(\eta_{\Lambda^c}^- \omega_{\Lambda^c}), & \text{outro caso.} \end{cases}$$

A família $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ é um núcleo de probabilidade.

De fato, veja que, por definição, $\gamma_\Lambda(A|\omega)$ depende unicamente dos estados dos spins em Λ^c , logo, para cada $A \in \mathcal{F}$, a aplicação $\omega \mapsto \gamma_\Lambda(A|\omega)$ é \mathcal{F}_{Λ^c} -mensurável. Por outro lado, por propriedades da função indicadora, note-se que para cada ω , $\gamma_\Lambda(A|\omega)$ é uma medida de probabilidade. Portanto, concluímos que $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ é um núcleo de probabilidade.

É comum definir os núcleos de medida introduzindo $\gamma(\cdot|\omega)$ como sendo uma medida que depende de ω . Logo, uma das condições para que γ seja um núcleo está implicitamente satisfeita, restando provar que a aplicação $\omega \mapsto \gamma(A|\omega)$ é mensurável para todo $A \in \mathcal{F}_2$. O conjunto \mathcal{F}_2 pode ser muito complexo e difícil de verificar esta condição de mensurabilidade. A Proposição 2.9.2 de [116] nos fornece uma via menos elaborada para provar a condição de mensurabilidade. A referida proposição nos diz que é suficiente verificar que a aplicação $\omega \mapsto \gamma(A|\omega)$ seja mensurável para os conjuntos A em uma classe rica o suficiente, a saber sobre uma classe \mathcal{G} , onde \mathcal{G} é um π -sistema que gera \mathcal{F}_2 .

Se γ é um núcleo de \mathcal{F}_2 a \mathcal{F}_1 e $\mu : (\Omega_2, \mathcal{F}_2) \rightarrow [0, +\infty]$ uma medida, definimos a medida

$$\begin{aligned} \mu\gamma : (\Omega_1, \mathcal{F}_1) &\rightarrow [0, +\infty] \\ A &\mapsto \int_{\Omega_2} \mu(d\omega) \gamma(A|\omega). \end{aligned}$$

Para toda função mensurável $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ consideramos a função mensurável

$$\begin{aligned} \gamma f : \Omega_2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega_2 &\mapsto \gamma(f|\omega_2) \equiv \int_{\Omega_1} \gamma(d\omega_1|\omega_2) f(\omega_1). \end{aligned}$$

No caso de que a função f , definida acima, seja não negativa, definimos

$$\begin{aligned} f\gamma(A|\cdot) : \Omega_2 &\rightarrow [0, +\infty) \\ \omega_2 &\mapsto \gamma(f \mathbb{1}_A)(\omega_2) = \gamma(f \mathbb{1}_A|\omega_2). \end{aligned}$$

Definição 4.2 (Convolução de núcleos). *Sejam $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ e $(\Omega_3, \mathcal{F}_3)$ três espaços mensuráveis. A **convolução** $\gamma_1\gamma_2$ de um núcleo γ_1 de \mathcal{F}_3 a \mathcal{F}_2 e um núcleo γ_2 de \mathcal{F}_2 a \mathcal{F}_1 é definida pela fórmula*

$$\gamma_1\gamma_2(A|\omega_3) \equiv \gamma_1(\gamma_2(A|\cdot)|\omega_3) = \int_{\Omega_2} \gamma_1(d\omega_2|\omega_3) \gamma_2(A|\omega_2),$$

para cada $A \in \mathcal{F}_1$ e $\omega_3 \in \Omega_3$.

Definição 4.3 (Núcleo próprio). Se \mathcal{G} é um sub- σ -álgebra de \mathcal{F} , um núcleo γ de \mathcal{G} a \mathcal{F} é dito ser **próprio** se satisfaz a seguinte identidade:

$$\gamma(A \cap B | \cdot) = \gamma(A | \cdot) \mathbb{1}_B(\cdot), \quad \forall A \in \mathcal{F} \text{ e } B \in \mathcal{G}.$$

A seguinte observação nos dá um caminho bastante técnico para verificar quando um núcleo não é próprio.

Observação 4.1. Com as mesmas hipóteses da definição acima, se γ é um núcleo próprio, f uma função \mathcal{F} -mensurável e g uma função \mathcal{G} -mensurável limitada, então

$$\gamma(fg) = (\gamma f)g.$$

Demonstração. Considerando $g \equiv \mathbb{1}_B$, onde $B \in \mathcal{G}$, para cada $\omega \in \Omega$ temos

$$\gamma(f \mathbb{1}_B)(\omega) = \gamma(f \mathbb{1}_B | \omega) = \gamma(f | \omega) \mathbb{1}_B(\omega) = [(\gamma f) \mathbb{1}_B](\omega),$$

onde, na segunda igualdade, se usou o fato de que γ é um núcleo próprio. Usando o resultado para funções indicadoras, a linearidade de γ implica que a observação se mantém para funções simples.

Ora, se g é uma função mensurável não negativa, pode-se construir uma sequência de funções simples $g_n \uparrow g$. Usando o Teorema da Convergência Dominada, obtemos que a observação vale para toda função g mensurável não negativa. Para uma função arbitrária \mathcal{G} -mensurável g , basta descompor g em sua parte positiva e negativa e usar o resultado acima. \square

Caso particular desta observação: veja que se γ é um núcleo de probabilidade próprio de \mathcal{G} a \mathcal{F} , então

$$\gamma(B | \cdot) = \mathbb{1}_B(\cdot), \quad \forall B \in \mathcal{G}.$$

Lema 4.2. Seja (Ω, \mathcal{F}) um espaço mensurável, \mathcal{G} uma sub- σ -álgebra de \mathcal{F} , γ um núcleo de probabilidade próprio de \mathcal{G} a \mathcal{F} e $\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$. Então

$$\mu(A | \mathcal{G}) = \gamma(A | \cdot), \quad \mu\text{-q.c.}, \quad \forall A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \mu\gamma = \mu.$$

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{G}$. Uma vez que γ é próprio, temos

$$\mu\gamma(A \cap B) = \int_{\Omega} \mu(d\omega) \gamma(A \cap B | \omega) = \int_{\Omega} \mu(d\omega) \gamma(A | \omega) \mathbb{1}_B(\omega) = \int_B \mu(d\omega) \gamma(A | \omega). \quad (140)$$

Primeiro, assumiremos que $\mu(A|\mathcal{G}) = \gamma(A|\cdot)$, μ -q.c., $\forall A \in \mathcal{F}$. Considerando $B \equiv \Omega$ em (140) temos

$$\mu\gamma(A) = \int_{\Omega} \mu(d\omega) \gamma(A|\omega) = \int_{\Omega} \mu(d\omega) \mu(A|\mathcal{G})(\omega) = \int_{\Omega} \mu(d\omega) \mathbb{1}_A(\omega) = \mu(A),$$

onde, na segunda igualdade, usamos a hipótese e, na terceira igualdade, usamos propriedade de esperança condicional.

Reciprocamente, suponha que $\mu\gamma = \mu$. Por (140) e pela hipótese, para todo $B \in \mathcal{G}$ tem-se

$$\int_B \mu(d\omega) \gamma(A|\omega) = \mu\gamma(A \cap B) = \mu(A \cap B) = \int_B \mu(d\omega) \mathbb{1}_A(\omega).$$

Pela definição de esperança condicional concluímos que $\mu(A|\mathcal{G}) = \gamma(A|\cdot)$, μ -q.c. \square

Definição 4.4. *Seja (Ω, \mathcal{F}) um espaço mensurável, $\mathcal{F}_{S \setminus \Lambda}$ um sub- σ -álgebra de \mathcal{F} , $\gamma = (\gamma_{\Lambda})_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ uma família de núcleos de probabilidade de $\mathcal{F}_{S \setminus \Lambda}$ a \mathcal{F} e $\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$.*

- a) *Diremos que o núcleo γ_{Λ} , para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$, é uma **distribuição condicional regular** para μ relativo à σ -álgebra $\mathcal{F}_{S \setminus \Lambda}$, se para cada $A \in \mathcal{F}$ e $\Lambda \in \mathcal{L}$, a condição*

$$\mu(A|\mathcal{F}_{S \setminus \Lambda}) = \gamma_{\Lambda}(A|\cdot), \quad \mu\text{-q.c.}$$

se satisfaz.

- b) *A família γ é **consistente** se, $\gamma_{\Delta}\gamma_{\Lambda} = \gamma_{\Delta}$, com $\Lambda \subset \Delta$ em \mathcal{L} .*

A condição b), da definição acima, pode-se escrever assim: para cada $A \in \mathcal{F}$ e $\omega \in \Omega$,

$$\int_{\Omega} \gamma_{\Delta}(dz|\omega) \gamma_{\Lambda}(A|z) = \gamma_{\Delta}(A|\omega), \quad \text{com } \Lambda \subset \Delta \text{ em } \mathcal{L}.$$

Proposição 4.3. *Seja (Ω, \mathcal{F}) um espaço mensurável, $\mathcal{F}_{S \setminus \Lambda}$ um sub- σ -álgebra de \mathcal{F} , γ_{Λ} uma distribuição condicional regular para μ relativo à σ -álgebra $\mathcal{F}_{S \setminus \Lambda}$, $\Lambda \in \mathcal{L}$. Então*

- i) *A aplicação $\gamma_{\Lambda}(A|\cdot)$ é $\mathcal{F}_{S \setminus \Lambda}$ -mensurável, $\forall A \in \mathcal{F}$ e $\Lambda \in \mathcal{L}$.*
 ii) *O núcleo γ_{Λ} é próprio μ -q.c.*
 iii) *A família de núcleos $(\gamma_{\Lambda})_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ é consistente μ -q.c.*

Demonstração. Veja que a prova de i) segue diretamente da definição de distribuição condicional regular. Para provar ii), note que para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$, $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}_{S \setminus \Lambda}$

$$\begin{aligned} \gamma_{\Lambda}(A \cap B|\omega) &= \mu(A \cap B|\mathcal{F}_{S \setminus \Lambda})(\omega) = \mu(A|\mathcal{F}_{S \setminus \Lambda})(\omega) \mathbb{1}_B(\omega) \\ &= \gamma_{\Lambda}(A|\omega) \mathbb{1}_B(\omega), \quad \mu\text{-q.c. } \omega, \end{aligned}$$

onde na primeira e terceira igualdades se usou a definição de γ_Λ e, na segunda igualdade, o fato de que $B \in \mathcal{F}_{S \setminus \Lambda}$.

iii) Considere $\Lambda, \Delta \in \mathcal{L}$ tal que $\Lambda \subset \Delta$ e $A \in \mathcal{F}$. Usando a definição de γ_Λ e propriedades de esperança condicional pode-se ver que

$$\begin{aligned} \gamma_\Delta \gamma_\Lambda(A|\omega) &= \gamma_\Delta(\gamma_\Lambda(A|\cdot)|\omega) = \gamma_\Delta(\mu(A|\mathcal{F}_{S \setminus \Lambda})|\omega) = \mu(\mu(A|\mathcal{F}_{S \setminus \Lambda})|\mathcal{F}_{S \setminus \Delta})(\omega) \\ &= \mu(A|\mathcal{F}_{S \setminus \Delta})(\omega) \\ &= \gamma_\Delta(A|\omega), \quad \mu\text{-q.c. } \omega, \end{aligned}$$

completando-se a demonstração. \square

4.2 TEORIA DE ESPECIFICAÇÕES

Na Proposição 4.3 vimos que γ_Λ é um núcleo próprio μ -q.c. e que $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ é uma especificação consistente μ -q.c. Estamos interessados em estudar núcleos de probabilidade com tais propriedades, satisfazendo-se em todo Ω e não somente no suporte de μ . Isso motiva a seguinte definição.

Definição 4.5 (Especificação). *Uma especificação com conjunto de parâmetros S e espaço de estados $(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ é uma família $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ de núcleos de probabilidade próprios γ_Λ de $\mathcal{F}_{S \setminus \Lambda}$ a \mathcal{F} , os quais satisfazem a condição de consistência, isto é,*

$$\gamma_\Delta \gamma_\Lambda = \gamma_\Delta, \quad \text{quando } \Lambda \subset \Delta. \quad (141)$$

Observação 4.4. *Toda especificação satisfaz a seguinte relação inversa (da condição) de consistência (141): para cada $\Lambda \subset \Delta$,*

$$\gamma_\Lambda \gamma_\Delta = \gamma_\Delta.$$

Demonstração. Para cada $A \in \mathcal{F}$, veja que

$$\gamma_\Lambda \gamma_\Delta(A|\omega) = \gamma_\Lambda(\gamma_\Delta(A|\cdot)|\omega) = \gamma_\Delta(A|\omega),$$

onde, na segunda igualdade, usamos que γ_Λ é próprio e que $\mathcal{F}_{S \setminus \Delta}$ é sub- σ -álgebra de $\mathcal{F}_{S \setminus \Lambda}$. \square

Exemplo 4.7. A família $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ onde $\gamma_\Lambda(A|\omega) = \phi_{p,q,\Lambda}^\omega(A)$ foi definido no Exemplo 4.5 é uma especificação.

De fato, pelo Exemplo 4.5 γ é um núcleo de probabilidade. Trivialmente γ_Λ é próprio. Restaria por verificar a condição de consistência. Procedemos a provar a validade desta condição, como segue.

Pela propriedade do domínio de Markov (veja Observação 3.37) da medida de aglomerados aleatórios, para cada $\Lambda \subset \Gamma$ e $A \in \mathcal{F}_\Lambda$, temos

$$\phi_{p,q,\Gamma}^\xi(A|\mathcal{F}_{\Lambda^c})(\omega) = \phi_{p,q,\Lambda}^\omega(A), \quad \phi_{p,q,\Gamma}^\xi\text{-q.c. } \omega.$$

Equivalentemente, para todo $B \in \mathcal{F}_{\Lambda^c}$, tem-se

$$\phi_{p,q,\Gamma}^\xi(\mathbb{1}_B \phi_{p,q,\Lambda}^{(\cdot)}(A)) = \phi_{p,q,\Gamma}^\xi(A \cap B).$$

Fazendo $B \equiv \Omega$ nesta igualdade, conseguimos

$$\phi_{p,q,\Gamma}^\xi(\phi_{p,q,\Lambda}^{(\cdot)}(A)) = \phi_{p,q,\Gamma}^\xi(A).$$

Por definição, isto é

$$\gamma_\Gamma \gamma_\Lambda(A|\xi) = \gamma_\Gamma(A|\xi), \quad \forall A \in \mathcal{F}_\Lambda.$$

Portanto, a família γ definida acima é uma especificação.

Exemplo 4.8 (Veja referência [53]). Sejam η^- e η^{-i} duas configurações em $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$ definidas por

$$\eta^- \equiv (-1, \dots, -1, \underbrace{-1}_{i\text{-ésimo}}, -1, \dots) \quad e \quad \eta^{-i} \equiv (-1, \dots, -1, \underbrace{+1}_{i\text{-ésimo}}, -1, \dots),$$

respectivamente. Para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$ e $A \in \mathcal{F}$, seja

$$\gamma_\Lambda(A|\omega) \equiv \begin{cases} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \mathbb{1}_A(\eta^{-i}), & \text{se } \omega_{\Lambda^c} = \eta_{\Lambda^c}^- \\ \mathbb{1}_A(\eta_{\Lambda^c}^- \omega_{\Lambda^c}), & \text{outro caso.} \end{cases}$$

A família $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ é uma especificação de \mathcal{F}_{Λ^c} a \mathcal{F} .

De fato, pelo Exemplo 4.6 γ é um núcleo de probabilidade. Além disso, este núcleo é próprio desde que $\forall A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}_{\Lambda^c}$, tem-se:

- Se $\omega_{\Lambda^c} = \eta_{\Lambda^c}^-$,

$$\gamma_\Lambda(A \cap B|\omega) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \mathbb{1}_A(\eta^{-i}) \mathbb{1}_B(\eta^{-i}) = \mathbb{1}_B(\omega) \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \mathbb{1}_A(\eta^{-i}) = \mathbb{1}_B(\omega) \gamma_\Lambda(A|\omega),$$

onde, na segunda igualdade, usamos a equivalência: $\eta^{-i} \in B \Leftrightarrow \omega \in B$.

- Se $\omega_{\Lambda^c} \neq \eta_{\Lambda^c}^-$,

$$\gamma_{\Lambda}(A \cap B|\omega) = \mathbb{1}_A(\eta_{\Lambda}^- \omega_{\Lambda^c}) \mathbb{1}_B(\eta_{\Lambda}^- \omega_{\Lambda^c}) = \mathbb{1}_B(\omega) \mathbb{1}_A(\eta_{\Lambda}^- \omega_{\Lambda^c}) = \mathbb{1}_B(\omega) \gamma_{\Lambda}(A|\omega),$$

onde, novamente na segunda igualdade, usamos a equivalência: $\eta^{-i} \in B \Leftrightarrow \omega \in B$.

Portanto, somente nos restaria provar a condição de consistência. Para isso, sejam $\Lambda, \Delta \in \mathcal{L}$ tal que $\Delta \subset \Lambda$. Para cada $A \in \mathcal{L}$ e $\omega \in \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$ veja que

- (1) Se $\omega_{\Lambda^c} = \eta_{\Lambda^c}^-$, por definição do núcleo γ temos

$$\gamma_{\Lambda} \gamma_{\Delta}(A|\omega) = \gamma_{\Lambda}(\gamma_{\Delta}(A|\cdot)|\omega) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \gamma_{\Delta}(A|\eta^{-i}). \quad (142)$$

Dividimos a análise de (142) em dois casos:

- (1.1) Se $\eta_{\Delta^c}^{-i} = \eta_{\Delta^c}^-$, então $i \in \Delta$. Logo, o lado direito de (142) fica

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \left[\frac{1}{|\Delta|} \sum_{j \in \Delta} \mathbb{1}_A(\eta^{-j}) \right] = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \left[\frac{1}{|\Delta|} \sum_{j \in \Delta} \mathbb{1}_A(\eta_{\Delta}^{-j} \eta_{\Lambda \setminus \Delta}^{-i} \eta_{\Lambda^c}^-) \right] \\ &= \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Delta} \left[\frac{1}{|\Delta|} \sum_{j \in \Delta} \mathbb{1}_A(\eta_{\Delta}^{-j} \eta_{\Lambda^c}^-) \right] \\ &= \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{j \in \Delta} \mathbb{1}_A(\eta_{\Delta}^{-j} \eta_{\Lambda^c}^-) = \gamma_{\Lambda}(A|\omega). \end{aligned}$$

- (1.2) Se $\eta_{\Delta^c}^{-i} \neq \eta_{\Delta^c}^-$, então $i \in \Lambda \setminus \Delta$. Logo, o lado direito de (142) se escreve

$$= \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \mathbb{1}_A(\eta_{\Delta}^- \eta_{\Lambda \setminus \Delta}^{-i} \eta_{\Lambda^c}^-) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \mathbb{1}_A(\eta_{\Lambda}^{-i} \eta_{\Lambda^c}^-) = \gamma_{\Lambda}(A|\omega).$$

- (2) Se $\omega_{\Lambda^c} \neq \eta_{\Lambda^c}^-$, por definição do núcleo γ temos

$$\begin{aligned} \gamma_{\Lambda}(\gamma_{\Delta}(A|\cdot)|\omega) &= \gamma_{\Delta}(A|\eta_{\Lambda}^- \omega_{\Lambda^c}) = \begin{cases} \frac{1}{|\Delta|} \sum_{i \in \Delta} \mathbb{1}_A(\eta^{-i}), & \text{se } \eta_{\Lambda \setminus \Delta}^- = \eta_{\Delta^c}^- \\ \mathbb{1}_A(\eta_{\Delta}^- \omega_{\Lambda^c}), & \text{se } \eta_{\Lambda \setminus \Delta}^- \neq \eta_{\Delta^c}^- \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \mathbb{1}_A(\eta_{\Lambda}^{-i} \omega_{\Lambda^c}) \\ \mathbb{1}_A(\eta_{\Lambda}^- \omega_{\Lambda^c}) \end{cases} = \gamma_{\Lambda}(A|\omega). \end{aligned}$$

Isso mostra que a condição de consistência $\gamma_\Delta \gamma_\Lambda = \gamma_\Lambda$ ($\Delta \subset \Lambda$) é satisfeita. Portanto, a família γ definida acima de fato é uma especificação.

4.2.1 Medidas determinadas por uma especificação

Definição 4.6. Dada uma especificação $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$, definimos

$$\mathcal{G}(\gamma) \equiv \left\{ \mu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F}) : \mu(A | \mathcal{F}_{S \setminus \Lambda}) = \gamma_\Lambda(A | \cdot), \quad \mu\text{-q.c.}, \forall A \in \mathcal{F} \text{ e } \Lambda \in \mathcal{L} \right\} \quad (143)$$

o conjunto de medidas de probabilidade determinadas pela especificação γ . Cada elemento de $\mathcal{G}(\gamma)$ é chamada de **medida de Gibbs** ou **estado de Gibbs**.

Definição 4.7 (Consistência). Uma medida $\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ é **consistente** com a especificação $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ se, para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$,

$$\mu \gamma_\Lambda = \mu. \quad (144)$$

A equação (144) é chamada equação DLR, em homenagem a Dobrushin, Lanford e Ruelle.

Veja que, pelo Lema 4.2, $\mathcal{G}(\gamma)$ é o conjunto das medidas de probabilidade consistentes com a especificação γ . Isto é, $\mathcal{G}(\gamma)$ é a classe de medidas de probabilidade que são preservadas pela família enumerável de núcleos de probabilidade γ .

É de interesse saber a existência e unicidade de medidas de probabilidade que satisfazem a condição (144), previsto que, a priori, se conheça a especificação γ . No que segue, daremos algumas respostas parciais a essas interrogantes. O problema da unicidade de medidas será considerado na Seção 4.5, onde nos preocupamos por dar condições sobre a especificação γ , de maneira que a unicidade do conjunto de medidas de Gibbs seja um conjunto unitário, isto é, $|\mathcal{G}(\gamma)| = 1$. Um problema bem mais complexo relacionado à unicidade de medida de Gibbs do modelo de aglomerados aleatórios com presença de campo externo será estudado na Seção 6.6.

Diferentemente do que se pensa no meio matemático, a ausência de unicidade de medidas de Gibbs não é uma falência, ao contrário, este acontecimento nos ajuda a entender melhor a estrutura do conjunto $\mathcal{G}(\gamma)$.

Definição 4.8. Um subconjunto \mathcal{L}_0 do conjunto de índices \mathcal{L} (ordenados por inclusão) é chamado **cofinal**, se cada $\Lambda \in \mathcal{L}$ está contido em algum $\Delta \in \mathcal{L}_0$.

Por exemplo, se $S \equiv \mathbb{Z}^d$ para algum $d \geq 1$, então o conjunto

$$\mathcal{L}_0 \equiv \{[-n, n]^d \cap S : n \geq 1\},$$

de todos os cubos centrados na origem é cofinal.

Teorema 4.5 (Caracterização do conjunto $\mathcal{G}(\gamma)$). *Suponha que $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ é uma especificação com conjunto de parâmetros S e espaço de estados \mathcal{E} . As seguintes afirmações são equivalentes.*

- 1) $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$;
- 2) μ é consistente com a especificação γ , isto é, para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$ temos $\mu\gamma_\Lambda = \mu$;
- 3) Existe uma coleção cofinal $\{\Gamma_\alpha : \Gamma_\alpha \in \mathcal{L}, \forall \alpha \in I\}$ satisfazendo $\mu\gamma_{\Gamma_\alpha} = \mu$, para algum índice $\alpha \in I$.

Demonstração. A equivalência 1) \Leftrightarrow 2) segue diretamente do Lema 4.2.

A afirmação 2) \Rightarrow 3) é óbvia. Procedemos a provar a implicação 3) \Rightarrow 2). Desde que $\{\Gamma_\alpha : \Gamma_\alpha \in \mathcal{L}, \forall \alpha \in I\}$ é uma sequência cofinal, para todo $\Lambda \in \mathcal{L}$ existe um índice $\alpha \in I$ tal que $\Lambda \subset \Gamma_\alpha \equiv \Gamma$. Por hipótese, temos $\mu = \mu\gamma_\Gamma$. Integrando o núcleo γ_Λ com respeito a esta medida, obtemos a medida $\mu\gamma_\Lambda = (\mu\gamma_\Gamma)\gamma_\Lambda$. Afirmamos que $(\mu\gamma_\Gamma)\gamma_\Lambda = \mu\gamma_\Gamma$. Seja $A \in \mathcal{F}$. Por definição

$$(\mu\gamma_\Gamma)\gamma_\Lambda(A) = \int_{\Omega} (\mu\gamma_\Gamma)(d\omega) \gamma_\Lambda(A|\omega). \quad (145)$$

Por argumentos padrões de Teoria da Medida, conhecemos que existe uma sequência de funções $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ simples \mathcal{F}_{Λ^c} -mensuráveis tais que $\varphi_n(\omega) \uparrow \gamma_\Lambda(A|\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$. Usando repetidas vezes o Teorema da Convergência Monótona (veja Apêndice, Teorema .22) na equação (145) e a consistência da especificação γ , obtemos

$$\begin{aligned} (\mu\gamma_\Gamma)\gamma_\Lambda(A) &= \int_{\Omega} (\mu\gamma_\Gamma)(d\omega) \gamma_\Lambda(A|\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\mu\gamma_\Gamma)(d\omega) \varphi_n(\omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\gamma_\Gamma(\varphi_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \mu(d\omega) \gamma_\Gamma(\varphi_n|\omega) \\ &= \int_{\Omega} \mu(d\omega) \gamma_\Gamma(\gamma_\Lambda(A|\cdot)|\omega) \\ &= \int_{\Omega} \mu(d\eta) \gamma_\Gamma(A|\eta) = \mu\gamma_\Gamma(A). \end{aligned}$$

Juntando as equações obtidas acima e usando a hipóteses obtemos $\mu\gamma_\Lambda = (\mu\gamma_\Gamma)\gamma_\Lambda = \mu\gamma_\Gamma = \mu$, concluindo-se a prova. \square

4.2.2 Construindo especificações

Sejam (X, \mathcal{X}, μ) e (Y, \mathcal{Y}, ν) dois espaços de probabilidade, onde as medidas μ, ν são σ -finitas ². Considere o espaço de probabilidade produto $(X \times Y, \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mu \times \nu)$ e $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ -mensurável. Pelo Teorema de Fubini-Tonelli (veja Apêndice, Teorema .24), as aplicações $x \mapsto \int_Y \nu(dy) f(x, y)$ e $y \mapsto \int_X \mu(dx) f(x, y)$ são \mathcal{X} -mensurável e \mathcal{Y} -mensurável, respectivamente.

Em seguida, munimos o espaço de estados $(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ de uma medida de probabilidade λ , chamada de **medida a priori**.

Definição 4.9. Dada $\lambda \in \mathcal{M}_1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ uma medida a priori, para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$ definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \lambda_\Lambda : \mathcal{F} \times \Omega &\rightarrow [0, +\infty) \\ (A|\omega) &\mapsto (\lambda^\Lambda \times \delta_{\omega_{S \setminus \Lambda}})(A) = \lambda^\Lambda(\xi \in \mathcal{E}^\Lambda : \xi \omega_{S \setminus \Lambda} \in A) \\ &= \int_{\mathcal{E}^\Lambda} \lambda^\Lambda(d\xi) \mathbb{1}_A(\xi \omega_{S \setminus \Lambda}), \end{aligned}$$

onde $\delta_{\omega_{S \setminus \Lambda}} = \prod_{i \in S \setminus \Lambda} \delta_{\{\omega_i\}}$, $\delta_{\{\cdot\}}$ é a medida delta de Dirac e $\lambda^\Lambda \in \mathcal{M}_1(\mathcal{E}^\Lambda, \mathcal{E}^\Lambda)$ é a medida produto sobre Λ . Daqui em frente escreveremos λ^* para denotar a família $(\lambda_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$.

Proposição 4.6. A família $\lambda^* = (\lambda_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ é uma especificação de $\mathcal{F}_{S \setminus \Lambda}$ a \mathcal{F} . Esta especificação é chamada especificação independente.

Demonstração. Pelo Teorema da Extensão de Kolmogorov (veja Apêndice, Teorema .25), para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$ e $A \in \mathcal{F}$, a aplicação $A \mapsto \lambda_\Lambda(A|\cdot)$ é uma medida de probabilidade. Pelo Teorema de Fubini-Tonelli (veja Apêndice, Teorema .24), para cada $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ função \mathcal{F} -mensurável limitada, a aplicação

$$\omega_{S \setminus \Lambda} \mapsto \lambda_\Lambda(f|\omega_{S \setminus \Lambda}) = \int_{\mathcal{E}^\Lambda} \lambda^\Lambda(d\xi) f(\xi \omega_{S \setminus \Lambda}) \quad (\Lambda \in \mathcal{L})$$

é mensurável segundo a σ -álgebra $\mathcal{F}_{S \setminus \Lambda}$. Até agora temos provado que λ_Λ é um núcleo de probabilidade.

Dado $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}_{S \setminus \Lambda}$, veja que λ_Λ é um núcleo próprio, já que

$$\begin{aligned} \lambda_\Lambda(A \cap B|\omega) &= \int_{\mathcal{E}^\Lambda} \lambda^\Lambda(d\xi) \mathbb{1}_A(\xi \omega_{S \setminus \Lambda}) \mathbb{1}_B(\xi \omega_{S \setminus \Lambda}) = \mathbb{1}_B(\omega) \int_{\mathcal{E}^\Lambda} \lambda^\Lambda(d\xi) \mathbb{1}_A(\xi \omega_{S \setminus \Lambda}) \\ &= \lambda_\Lambda(A|\omega) \mathbb{1}_B(\omega), \end{aligned}$$

² Um espaço de medida (X, \mathcal{X}, μ) é chamado finito, se $\mu(X)$ é um número real finito. E se diz σ -finito, se X é a união enumerável de conjuntos mensuráveis de medida finita. A medida μ é σ -finita, se X é a união enumerável de conjuntos de medida finita.

onde, na segunda igualdade, usamos a equivalência:

$$\xi\omega_{S\setminus\Lambda} \in B \Leftrightarrow \mathbb{1}_B(\xi\omega_{S\setminus\Lambda}) = 1 \stackrel{B \in \mathcal{F}_{S\setminus\Lambda}}{\Leftrightarrow} \mathbb{1}_B(\omega) = \mathbb{1}_B(\xi\omega_{S\setminus\Lambda}) = 1 \Leftrightarrow \omega \in B.$$

Finalmente, completamos a prova mostrando a relação de consistência (141). Para isso, sejam $\Lambda, \Delta \in \mathcal{L}$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathcal{F} -mensurável limitada. Por definição, temos

$$(\lambda_\Delta \lambda_\Lambda f)(\omega) = \int_{\mathcal{E}^\Delta} \lambda_\Delta(dz|\omega) \lambda_\Lambda(f|z). \quad (146)$$

Definindo $g(z) \equiv \lambda_\Lambda(f|z)$, nos propomos a provar que, para cada função g mensurável segundo a σ -álgebra \mathcal{F} ,

$$\int_{\mathcal{E}^\Delta} \lambda_\Delta(dz|\omega) g(z) = \int_{\mathcal{E}^\Delta} \lambda^\Delta(d\xi) g(\xi\omega_{S\setminus\Delta}). \quad (147)$$

De fato, considere primeiro $g \equiv \mathbb{1}_A$, onde A é um evento $\mathcal{F}_{S\setminus\Delta}$ -mensurável. Por definição de λ_Δ temos

$$\int_{\mathcal{E}^\Delta} \lambda_\Delta(dz|\omega) \mathbb{1}_A(z) = \lambda_\Delta(A|\omega) = \int_{\mathcal{E}^\Delta} \lambda^\Delta(d\xi) \mathbb{1}_A(\xi\omega_{S\setminus\Delta}).$$

Logo, esta igualdade é válida para funções simples. Se g é uma função \mathcal{G} -mensurável não negativa, pode-se construir uma sequência de funções simples $g_n \uparrow g$. Usando o Teorema da Convergência Dominada, obtemos que a igualdade acima vale para toda função \mathcal{G} -mensurável não negativa. Para uma função g arbitrária \mathcal{G} -mensurável, basta descompor g em sua parte positiva e negativa e usar o resultado acima.

Substituindo (147) em (146), temos

$$\begin{aligned} (\lambda_\Delta \lambda_\Lambda f)(\omega) &= \int_{\mathcal{E}^\Delta} \lambda^\Delta(d\xi) g(\xi\omega_{S\setminus\Delta}) = \int_{\mathcal{E}^\Delta} \lambda^\Delta(d\xi) \lambda_\Lambda(f|\xi\omega_{S\setminus\Delta}) \\ &= \int_{\mathcal{E}^\Delta} \lambda^\Delta(d\xi) \int_{\mathcal{E}^\Lambda} \lambda^\Lambda(d\eta) f(\eta(\xi\omega_{S\setminus\Delta})_{S\setminus\Lambda}) \\ &= \int_{\mathcal{E}^\Delta} \lambda^{\Delta \setminus \Lambda}(d\xi) \int_{\mathcal{E}^\Lambda} \lambda^\Lambda(d\eta) f(\eta\xi\omega_{S\setminus(\Delta \cup \Lambda)}) \\ &= (\lambda_{\Delta \cup \Lambda} f)(\omega). \end{aligned}$$

Portanto, quando $\Lambda \subset \Delta$ obtemos $\lambda_\Delta \lambda_\Lambda = \lambda_\Delta$, concluindo-se a prova. \square

Denotando por λ^S a medida de probabilidade sobre (Ω, \mathcal{F}) , cuja existência é garantida pelo Teorema da Extensão de Kolmogorov, temos

Observação 4.7. Para cada $\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ e $\Lambda \in \mathcal{L}$, $\mu\lambda_\Lambda = \lambda^S$ sobre \mathcal{F}_Λ .

Demonstração. Seja $\Lambda \in \mathcal{L}$. Para cada evento $B \in \mathcal{F}_\Lambda$, veja que

$$\begin{aligned} \mu\lambda_\Lambda(B \times \mathcal{E}^{S \setminus \Lambda}) &= \int_\Omega \mu(d\omega) \lambda_\Lambda(B \times \mathcal{E}^{S \setminus \Lambda} | \omega) = \int_\Omega \mu(d\omega) \int_{\mathcal{E}^\Lambda} \lambda^\Lambda(d\xi) \mathbb{1}_{B \times \mathcal{E}^{S \setminus \Lambda}}(\xi\omega_{S \setminus \Lambda}) \\ &= \int_\Omega \mu(d\omega) \lambda^\Lambda(B) \\ &= \lambda^\Lambda(B) = \lambda^S(B \times \mathcal{E}^{S \setminus \Lambda}), \end{aligned}$$

onde, na terceira igualdade, usamos a equivalência: $\xi\omega_{S \setminus \Lambda} \in B \times \mathcal{E}^{S \setminus \Lambda}$ se, e somente se, $\xi \in B$. Portanto, $\mu\lambda_\Lambda = \lambda^S$ sobre \mathcal{F}_Λ , para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$. \square

A seguinte proposição nos informa que o conjunto das medidas de Gibbs $\mathcal{G}(\lambda^*)$ tem um único elemento, especificamente, é formado pela medida produto λ^S sobre (Ω, \mathcal{F}) .

Proposição 4.8. O conjunto das medidas de probabilidade determinadas pela especificação independente λ^* é um conjunto unitário. Isto é, $\mathcal{G}(\lambda^*) = \{\lambda^S\}$.

Demonstração. Veja que, para cada $A \in \mathcal{F}$ a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \lambda^S \lambda_\Lambda(A) &= \int_\Omega \lambda^S(d\omega) \lambda_\Lambda(A | \omega) = \int_\Omega \lambda^S(d\omega) \int_{\mathcal{E}^\Lambda} \lambda^\Lambda(d\xi) \mathbb{1}_A(\xi\omega_{S \setminus \Lambda}) \\ &= \int_\Omega \lambda^{S \setminus \Lambda}(d\omega) \int_{\mathcal{E}^\Lambda} \lambda^\Lambda(d\xi) \mathbb{1}_A(\xi\omega_{S \setminus \Lambda}) = \lambda^S(A), \end{aligned}$$

é válida, logo, tem-se $\{\lambda^S\} \subseteq \mathcal{G}(\lambda^*)$.

Por outro lado, para cada $\mu \in \mathcal{G}(\lambda^*)$ e $\Lambda \in \mathcal{L}$, pela Observação 4.7, temos que $\mu = \mu\lambda_\Lambda = \lambda^S$ sobre \mathcal{F}_Λ . Isto é, se $\mu \in \mathcal{G}(\lambda^*)$, então $\mu = \lambda^S$ sobre cada \mathcal{F}_Λ e portanto, pelo Teorema da Classe Monótona (veja Teorema .27 do Apêndice), $\mu = \lambda^S$ sobre \mathcal{F} . Implicando que $\mathcal{G}(\lambda^*) \subseteq \{\lambda^S\}$. Finalmente, combinando as duas inclusões acima, concluímos a prova. \square

Definição 4.10 (λ -modificação e λ -especificação). Seja $\lambda \in \mathcal{M}_1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ uma medida a priori. Uma λ -modificação é uma família $\rho = (\rho_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ de funções mensuráveis $\rho_\Lambda : \Omega \rightarrow [0, +\infty[$ tal que a família $\rho\lambda = (\rho_\Lambda \lambda_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ é uma especificação. Uma λ -especificação é uma especificação γ da forma $\gamma = \rho\lambda$, para alguma λ -modificação ρ . A λ -modificação ρ é chamada positiva se $\rho_\Lambda > 0$ para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$.

Desde que o núcleo λ_Λ é próprio, $\rho_\Lambda \lambda_\Lambda$ é próprio. De fato, dados os eventos $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}_{S \setminus \Lambda}$ com $\Lambda \in \mathcal{L}$, tem-se

$$\rho_\Lambda \lambda_\Lambda(A \cap B | \omega) = \lambda_\Lambda(\mathbb{1}_{A \cap B} \rho_\Lambda | \omega) = \mathbb{1}_B(\omega) \lambda_\Lambda(\mathbb{1}_A \rho_\Lambda | \omega) = \mathbb{1}_B(\omega) \rho_\Lambda \lambda_\Lambda(A | \omega),$$

onde, na segunda igualdade, usamos que o núcleo λ_Λ é próprio.

Proposição 4.9. ρ é λ -modificação se, e somente se, para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$ o núcleo $\rho_\Lambda \lambda_\Lambda$ é

- 1) normalizado: $\lambda_\Lambda \rho_\Lambda(\omega) = 1$, para cada $\omega \in \Omega$.
- 2) consistente: $(\rho_\Delta \lambda_\Delta)(\rho_\Lambda \lambda_\Lambda) = \rho_\Delta \lambda_\Delta$, com $\Lambda \subset \Delta$.

Demonstração. Desde que o núcleo $\rho_\Lambda \lambda_\Lambda$ é próprio, observe que a prova se deduz diretamente da seguinte igualdade: $\rho_\Lambda \lambda_\Lambda(\Omega|\omega) = \lambda_\Lambda(\rho_\Lambda|\omega) = \lambda_\Lambda \rho_\Lambda(\omega)$. \square

Proposição 4.10. Se $\gamma = \rho \lambda$ é uma λ -especificação, então

$$\mathcal{G}(\gamma) = \{\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F}) : \mu = \rho_\Lambda(\mu \lambda_\Lambda), \forall \Lambda \in \mathcal{L}\}.$$

Demonstração. Definamos $\mathcal{G}_\Lambda(\gamma) \equiv \{\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F}) : \mu = \rho_\Lambda(\mu \lambda_\Lambda), \forall \Lambda \in \mathcal{L}\}$. Primeiro provemos a seguinte relação:

$$\rho_\Lambda(\mu \lambda_\Lambda) = \mu \gamma_\Lambda. \quad (148)$$

De fato, para $A \in \mathcal{F}$ tem-se

$$\begin{aligned} \rho_\Lambda(\mu \lambda_\Lambda)(A) &= \mu \lambda_\Lambda(\mathbb{1}_A \rho_\Lambda) = \int_{\Omega} \mu(dx) \lambda_\Lambda(\mathbb{1}_A \rho_\Lambda|x) = \int_{\Omega} \mu(dx) \rho_\Lambda \lambda_\Lambda(A|x) \\ &= \mu(\rho_\Lambda \lambda_\Lambda)(A) = \mu \gamma_\Lambda(A). \end{aligned}$$

Assim, $\mu \in \mathcal{G}(\gamma) \Leftrightarrow \mu = \mu \gamma_\Lambda \stackrel{(148)}{\Leftrightarrow} \mu = \rho_\Lambda(\mu \lambda_\Lambda) \Leftrightarrow \mu \in \mathcal{G}_\Lambda(\gamma)$. \square

Até agora, foi mostrado que o núcleo $\rho_\Lambda \lambda_\Lambda$ é próprio e que sobre a condição de normalização $\rho_\Lambda \lambda_\Lambda$ é um núcleo de probabilidade. Desejamos provar que ρ seja uma λ -modificação, logo, nos restaria encontrar condições sobre ρ para que satisfaça as condições de consistência. A seguinte proposição nos dá essa resposta.

Proposição 4.11. Seja $\lambda \in \mathcal{M}_1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$, $\rho = (\rho_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ tal que $\rho_\Lambda \geq 0$ e $\lambda_\Lambda \rho_\Lambda = 1$. As seguintes condições são equivalentes

- a) ρ é uma λ -modificação;
- b) Para cada $\Lambda \subset \Delta \in \mathcal{L}$ e para todo $\omega \in \Omega$, $\rho_\Lambda = \rho_\Delta \cdot \lambda_\Delta \rho_\Delta$, $\lambda_\Lambda(\cdot|\omega)$ -q.c.;
- c) Para todo $\Lambda \subset \Delta \in \mathcal{L}$, para todo $\alpha \in \Omega$ e $\lambda_{\Delta \setminus \Lambda}(\cdot|\alpha)$ -q.c. $\omega \in \Omega$, temos

$$\rho_\Delta(\xi) \rho_\Lambda(\eta) = \rho_\Delta(\eta) \rho_\Lambda(\xi),$$

para $\lambda_\Lambda(\cdot|\omega) \times \lambda_\Lambda(\cdot|\omega)$ -q.c. $(\xi, \eta) \in \Omega \times \Omega$.

Demonstração. Primeiro provaremos a equivalência $a) \Leftrightarrow b)$, mas antes disso provaremos a seguinte afirmação: para cada função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ não negativa e mensurável segundo a σ -álgebra \mathcal{F} , tem-se

$$\gamma_{\Delta} \gamma_{\Lambda}(f) = \lambda_{\Delta}(f \rho_{\Lambda} \lambda_{\Lambda} \rho_{\Delta}). \quad (149)$$

De fato, desde que λ_{Λ} é próprio e $\lambda_{\Lambda}(f \rho_{\Lambda})$, $\lambda_{\Lambda} \rho_{\Delta}$ são $\mathcal{F}_{S \setminus \Lambda}$ -mensuráveis, temos

$$\lambda_{\Lambda}(f \rho_{\Lambda} \lambda_{\Lambda} \rho_{\Delta}) = \lambda_{\Lambda} \rho_{\Delta} \cdot \lambda_{\Lambda}(f \rho_{\Lambda}) = \lambda_{\Lambda}(\rho_{\Delta} \lambda_{\Lambda}(f \rho_{\Lambda})) = \lambda_{\Lambda}(\rho_{\Delta} \gamma_{\Lambda} f).$$

Como $\lambda_{\Delta} = \lambda_{\Delta \setminus \Lambda} \lambda_{\Lambda}$, da equação acima temos

$$\lambda_{\Delta}(f \rho_{\Lambda} \lambda_{\Lambda} \rho_{\Delta}) = \lambda_{\Delta}(\rho_{\Delta} \gamma_{\Lambda} f) = \gamma_{\Delta} \gamma_{\Lambda}(f),$$

provando-se o afirmado.

Para provar a implicação $a) \Rightarrow b)$, como ρ é uma λ -modificação, temos

$$\lambda_{\Delta}(\rho_{\Delta} f) = \gamma_{\Delta} f = \gamma_{\Delta} \gamma_{\Lambda}(f) = \lambda_{\Delta}(f \rho_{\Lambda} \cdot \lambda_{\Lambda} \rho_{\Delta}),$$

onde, na segunda igualdade, usamos a consistência do núcleo e, na terceira igualdade, a afirmação em (149). Portanto, $\rho_{\Delta} = \rho_{\Lambda} \cdot \lambda_{\Lambda} \rho_{\Delta}$, $\lambda_{\Delta}(\cdot | \omega)$ -q.c.

Para mostrar $b) \Rightarrow a)$, veja que $\lambda_{\Lambda} \rho_{\Lambda} = 1$ e

$$\gamma_{\Delta} \gamma_{\Lambda}(f) = \lambda_{\Delta}(f \rho_{\Lambda} \lambda_{\Lambda} \rho_{\Lambda}) = \lambda_{\Delta}(f \rho_{\Delta}) = \gamma_{\Delta}(f),$$

onde nas duas primeiras igualdades usamos (149) e a hipótese, respectivamente. Logo, pela Proposição 4.9, ρ é uma λ -modificação.

Agora provaremos a equivalência $b) \Leftrightarrow c)$. Primeiro provaremos a implicação $b) \Rightarrow c)$. Por hipótese, veja que

$$0 = \lambda_{\Delta} \left(|\rho_{\Delta} - \rho_{\Lambda} \cdot \lambda_{\Lambda} \rho_{\Lambda}| | \alpha \right) = \lambda_{\Delta \setminus \Lambda} \left(\lambda_{\Lambda} \left(|\rho_{\Delta} - \rho_{\Lambda} \cdot \lambda_{\Lambda} \rho_{\Lambda}| | \cdot \right) | \alpha \right).$$

Então,

$$\lambda_{\Lambda}(\rho_{\Delta} | \omega) = \lambda_{\Lambda}(\rho_{\Lambda} \cdot \lambda_{\Lambda} \rho_{\Delta} | \omega) = \lambda_{\Lambda}(\rho_{\Lambda} | \omega) \cdot \lambda_{\Lambda}(\rho_{\Delta} | \omega) = \lambda_{\Lambda}(\rho_{\Lambda} \lambda_{\Lambda}(\rho_{\Delta} | \omega) | \omega),$$

$\lambda_{\Delta \setminus \Lambda}(\cdot | \alpha)$ -q.c. $\omega \in \Omega$ e para todo $\alpha \in \Omega$. Logo,

$$\rho_{\Delta}(\eta) = \rho_{\Lambda}(\eta) \lambda_{\Lambda}(\rho_{\Delta} | \omega), \quad \lambda_{\Lambda}(\cdot | \alpha)\text{-q.c. } \eta \in \Omega.$$

Assim, usamos a identidade acima na primeira e última igualdade abaixo

$$\rho_{\Delta}(\xi) \rho_{\Lambda}(\eta) = [\rho_{\Lambda}(\xi) \cdot \lambda_{\Lambda}(\rho_{\Delta} | \omega)] \rho_{\Lambda}(\eta) = \rho_{\Lambda}(\xi) [\rho_{\Lambda}(\eta) \cdot \lambda_{\Lambda}(\rho_{\Delta} | \omega)] = \rho_{\Delta}(\eta) \rho_{\Lambda}(\xi).$$

Finalmente, provamos $c) \Rightarrow b)$. Mas isto é direto, pois

$$\begin{aligned}\rho_{\Delta}(\cdot) &= \rho_{\Delta}(\cdot) \cdot \lambda_{\Delta}(\rho_{\Delta}|\cdot) = \lambda_{\Delta}(\rho_{\Delta} \cdot \rho_{\Delta}(\cdot)|\cdot) = \lambda_{\Delta}(\rho_{\Delta}(\cdot) \cdot \rho_{\Delta}|\cdot) \\ &= \rho_{\Delta}(\cdot) \cdot \lambda_{\Delta}(\rho_{\Delta}|\cdot) = \rho_{\Delta}(\cdot) \cdot \lambda_{\Delta}\rho_{\Delta}(\cdot),\end{aligned}$$

onde, na primeira igualdade, usamos que o núcleo $\rho_{\Delta}\lambda_{\Delta}$ é normalizado e, na segunda igualdade, usamos a hipótese. \square

O Item $c)$ da Proposição 4.11 motiva a definição de pré-modificação.

Definição 4.11 (Pre-modificação). *Uma família $h \equiv (h_{\Lambda})_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ de funções mensuráveis $h_{\Lambda} : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$ é uma **pré-modificação** se*

$$h_{\Delta}(\xi)h_{\Lambda}(\eta) = h_{\Lambda}(\xi)h_{\Delta}(\eta)$$

para cada $\Lambda, \Delta \in \mathcal{L}$ com $\Lambda \subset \Delta$ e para todo $\xi, \eta \in \Omega$ com $\xi_{S \setminus \Lambda} = \eta_{S \setminus \Lambda}$.

Proposição 4.12. *Seja h uma pré-modificação e $\lambda \in \mathcal{M}_1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ tal que $\lambda_{\Lambda}h_{\Lambda} \in]0, +\infty[$, para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$. Logo $\rho \equiv (h_{\Lambda}/\lambda_{\Lambda}h_{\Lambda})_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ é uma λ -modificação.*

Demonstração. Desde que λ_{Λ} é $\mathcal{F}_{S \setminus \Lambda}$ -mensurável e λ_{Λ} é um núcleo próprio, temos

$$\lambda_{\Lambda}\rho_{\Lambda} = \lambda_{\Lambda} \left(\frac{h_{\Lambda}}{\lambda_{\Lambda}h_{\Lambda}} \right) = \frac{\lambda_{\Lambda}h_{\Lambda}}{\lambda_{\Lambda}h_{\Lambda}} = 1,$$

isto é, o núcleo $\rho_{\Lambda}\lambda_{\Lambda}$ é normalizado, para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$. Antes de continuar com a prova, mostraremos a seguinte afirmação

$$\lambda_{\Delta}(h_{\Delta}|\xi) \cdot \lambda_{\Lambda}(h_{\Lambda}|\eta) = \lambda_{\Delta}(h_{\Delta}|\eta) \cdot \lambda_{\Lambda}(h_{\Lambda}|\xi), \quad \text{com } \Lambda \subset \Delta. \quad (150)$$

De fato, como $\xi_{S \setminus \Lambda} = \eta_{S \setminus \Lambda}$, veja que

$$\begin{aligned}\lambda_{\Delta}(h_{\Delta}|\xi) \cdot \lambda_{\Lambda}(h_{\Lambda}|\eta) &= \int_{\mathcal{E}^{\Delta}} \lambda^{\Delta}(d\omega) h_{\Delta}(\omega \xi_{S \setminus \Delta}) \cdot \int_{\mathcal{E}^{\Lambda}} \lambda^{\Lambda}(d\sigma) h_{\Lambda}(\sigma \eta_{S \setminus \Delta}) \\ &= \int_{\mathcal{E}^{\Delta}} \lambda^{\Delta}(d\omega) h_{\Delta}(\omega \eta_{S \setminus \Delta}) \cdot \int_{\mathcal{E}^{\Lambda}} \lambda^{\Lambda}(d\sigma) h_{\Lambda}(\sigma \xi_{S \setminus \Delta}) = \lambda_{\Delta}(h_{\Delta}|\eta) \cdot \lambda_{\Lambda}(h_{\Lambda}|\xi),\end{aligned}$$

mostrando o afirmado.

Por uma aplicação direta de (150) temos

$$\rho_{\Delta}(\xi)\rho_{\Lambda}(\eta) = \frac{h_{\Delta}(\xi)}{\lambda_{\Delta}(h_{\Delta}|\xi)} \cdot \frac{h_{\Lambda}(\eta)}{\lambda_{\Lambda}(h_{\Lambda}|\eta)} = \frac{h_{\Lambda}(\eta)}{\lambda_{\Lambda}(h_{\Lambda}|\eta)} \cdot \frac{h_{\Delta}(\xi)}{\lambda_{\Delta}(h_{\Delta}|\xi)} = \rho_{\Lambda}(\eta)\rho_{\Delta}(\xi).$$

Portanto, temos provado que o núcleo $\rho_{\Lambda}\lambda_{\Lambda}$ é normalizado, daí, pela Proposição 4.11 $c)$, ρ é uma λ -modificação. \square

Definição 4.12 (Interação). Uma *interação*³ é uma família $\Phi \equiv (\Phi_A)_{A \in \mathcal{L}}$ de funções indexadas por elementos do conjunto \mathcal{L} , onde

(i) Para cada $A \in \mathcal{L}$, Φ_A é \mathcal{F}_A -mensurável.

(ii) Para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$ e $\omega \in \Omega$, a série

$$H_\Lambda^\Phi(\omega) = \sum_{\substack{A \in \mathcal{L} \\ A \cap \Lambda \neq \emptyset}} \Phi_A(\omega) \quad (151)$$

existe. $H_\Lambda^\Phi(\omega)$ é chamado de energia total de ω em Λ e H_Λ^Φ é o **Hamiltoniano** em Λ para Φ . Usaremos a notação

$$h_\Lambda^\Phi(\omega) \equiv e^{-H_\Lambda^\Phi(\omega)} \quad (152)$$

e h_Λ^Φ será chamado de **fator de Boltzmann**.

Observação 4.13. De agora em diante, para não carregar a notação, simplesmente escreveremos $\sum_{A \cap \Lambda \neq \emptyset} \Phi_A(\omega)$ para referir-nos a $\sum_{\substack{A \in \mathcal{L} \\ A \cap \Lambda \neq \emptyset}} \Phi_A(\omega)$ subentendendo-se que a soma é feita sobre todo $A \in \mathcal{L}$ tal que $A \cap \Lambda \neq \emptyset$.

Definição 4.13. Uma interação $\Phi \equiv (\Phi_A)_{A \in \mathcal{L}}$ é chamada de interação de **primeiros vizinhos** se para todo $\omega \in \Omega$, $\Phi_A(\omega) = 0$ a menos que $A = \{i\}$ ou A é um par $\{i, j\}$ de vizinhos próximos. A interação Φ será chamada de **curto alcance** se existe $R \in \mathbb{N}$ tal que, para todo ω , $\Phi_A(\omega) = 0$ para todo A tal que $\delta(A) \equiv \sup_{i, j \in A} d(i, j) > R$. Aqui, $\delta(A)$ denota o diâmetro de A . A interação Φ será chamada de **longo alcance** se ela não for de curto alcance.

Exemplo 4.9 (Modelo de Ising). Consideremos o modelo de Ising com espaço de estados $\mathcal{E} = \{-1, +1\}$ e medida a priori $\lambda = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_{+1}$. A interação de primeiros vizinhos $\Phi = (\Phi_A)_{A \in \mathcal{L}}$ é definida por

$$\Phi_A(\sigma) = \begin{cases} -J_{ij}\sigma_i\sigma_j, & \text{se } A = \{i, j\}, \|i - j\| = 1 \\ -h_i\sigma_i, & \text{se } A = \{i\} \\ 0, & \text{outro caso,} \end{cases}$$

onde $J : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de constante de acoplamento e $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ de campo magnético externo. No modelo de Ising padrão $J_{ij} = 0$, a menos que i, j sejam primeiros vizinhos. Quando J e h são constantes, este modelo é conhecido como modelo de Ising homogêneo e não homogêneo em outro caso. Este modelo é dito ser ferromagnético se $J \geq 0$ e anti ferromagnético quando $J < 0$.

³ Em alguns textos o conceito de interação é substituído pelo conceito de potencial.

Exemplo 4.10 (Modelo de Potts). Considere o modelo de Potts de $q \in \{1, 2, \dots\}$ estados com espaço de estados $\mathcal{E} = \{1, 2, \dots, q\}$ e com medida a priori $\lambda = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \delta_i$. A interação de primeiros vizinhos $\Phi = (\Phi_A)_{A \in \mathcal{L}}$ é definida por

$$\Phi_A(\sigma) = \begin{cases} -J_{ij} \delta_{\sigma_i, \sigma_j}, & \text{se } A = \{i, j\} \\ 0, & \text{outro caso.} \end{cases}$$

Considerando o modelo de Potts definido na Seção 3.2, veja que

$$\Phi_A(\sigma) = \begin{cases} -J_{ij} \delta_{\sigma_i, \sigma_j}, & \text{se } A = \{i, j\} \\ -\sum_{p=1}^q \frac{h_{i,p}}{q} \delta_{\sigma_i, p}, & \text{se } A = \{i\} \\ 0, & \text{outro caso} \end{cases}$$

também é uma interação de primeiros vizinhos.

Este tipo de interação será vista com regular frequência no Capítulo 5 (com $h_p \equiv \frac{h_{i,p}}{q}$ constante nos sítios) e no Capítulo 6.

Exemplo 4.11 (Modelo de Heisenberg clássico). Este modelo é análogo ao modelo de Ising, porém, com conjunto de parâmetros $S \equiv S_2$, a esfera bidimensional em \mathbb{R}^3 (superfície da bola unitária tridimensional). O acoplamento de primeiros vizinhos é $\Phi_{i,j} = -J \sigma_i \cdot \sigma_j$ (produto escalar de vetores tridimensionais $\sigma_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$). Se estes spins são bidimensionais, o referido modelo é conhecido como modelo XY ou modelo rotor. O caso geral de vetores unitários n -dimensional é o modelo n -vetor

Exemplo 4.12 (Látice gás). O modelo de Ising pode ser usado para modelar átomos sobre um látice (veja Definição 2.1). Tome $S = \{0, 1\}$ onde 0 denota um sitio vazio e 1 denota um sitio ocupado por um átomo. A interação é $\Phi_A = -J(A) \prod_{i \in A} \sigma_i$ para constantes de acoplamentos positivos J que satisfaz $J(\theta_i A) = J(A)$. Por exemplo, tome $J(\{i, j\}) = J > 0$ para pares $\{i, j\}$ de primeiros vizinhos e $J(A) = 0$ em outro caso.

A seguinte proposição nos dá uma chave para a construção de **especificações dependentes**.

Proposição 4.14. Para cada interação Φ , a família $(h_\Lambda^\Phi)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ é uma pré-modificação positiva.

Demonstração. Seja $\Lambda \subset \Delta \in \mathcal{L}$ e $\xi, \eta \in \Omega$ tal que $\eta_{S \setminus \Lambda} = \xi_{S \setminus \Lambda}$. Veja que

$$g(\eta) \equiv H_\Delta^\Phi(\eta) - H_\Lambda^\Phi(\eta) = \sum_{A \cap \Delta \neq \emptyset} \Phi_A(\eta) - \sum_{B \cap \Lambda \neq \emptyset} \Phi_B(\eta) = \sum_{A \cap \Delta \setminus \Lambda \neq \emptyset} \Phi_A(\eta),$$

implicando que g é $\mathcal{F}_{\Delta \setminus \Lambda}$ -mensurável e daí g é $\mathcal{F}_{S \setminus \Lambda}$ -mensurável para todo $\Lambda \in \mathcal{L}$. Portanto, $g \in \mathcal{T} = \bigcap_{\Lambda \in \mathcal{L}} \mathcal{F}_{S \setminus \Lambda}$. Como $\eta_{S \setminus \Lambda} = \xi_{S \setminus \Lambda}$, tem-se $g(\eta) = g(\xi)$, concluindo-se a prova. \square

Definição 4.14 (Interação λ -admissível). *Seja $\lambda \in \mathcal{M}_1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$. Dizemos que uma interação Φ é λ -admissível se*

$$Z_\Lambda^\Phi(\omega) \equiv \lambda_\Lambda h_\Lambda^\Phi(\omega) = \int_{\mathcal{E}^\Lambda} \lambda^\Lambda(d\xi) h_\Lambda^\Phi(\xi \omega_{S \setminus \Lambda}) \quad (\forall \Lambda \in \mathcal{L})$$

é finito, onde h_Λ^Φ foi definido em (152).

Definição 4.15 (Função de partição). *Seja Φ uma interação λ -admissível, $\omega \in \Omega$ e $\Lambda \in \mathcal{L}$. Chamamos de **função de partição** no volume Λ , com interação Φ e condição de fronteira ω , a função $\mathcal{F}_{S \setminus \Lambda}$ -mensurável $Z_\Lambda^\Phi(\omega)$ estabelecida na Definição 4.14.*

A seguinte proposição é caso particular da Proposição 4.12.

Proposição 4.15. *Seja $\rho_\Lambda^\Phi \equiv \frac{h_\Lambda^\Phi}{Z_\Lambda^\Phi}$, com $\Lambda \in \mathcal{L}$. A família $\rho^\Phi \equiv (\rho_\Lambda^\Phi)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ é uma λ -modificação.*

Definição 4.16 (Distribuições de Gibbs a volume finito). *Seja Φ uma interação λ -admissível. Para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$, chamamos de **distribuição de Gibbs** a volume finito Λ , com interação Φ e condição de fronteira ω , à medida de probabilidade $\gamma_\Lambda^\Phi(\cdot | \omega)$ sobre (Ω, \mathcal{F}) definido por*

$$\gamma_\Lambda^\Phi(A | \omega) \equiv \rho_\Lambda^\Phi \lambda_\Lambda(A | \omega) = \frac{1}{Z_\Lambda^\Phi(\omega)} \int_{\mathcal{E}^\Lambda} \lambda^\Lambda(d\xi) h_\Lambda^\Phi(\xi \omega_{S \setminus \Lambda}) \mathbb{1}_A(\xi \omega_{S \setminus \Lambda}),$$

para cada $A \in \mathcal{F}$.

Definição 4.17 (Especificação Gibbsiana). *Seja Φ uma interação λ -admissível. Pela Proposição 4.15, a família de núcleos $\gamma^\Phi = (\gamma_\Lambda^\Phi)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ é uma especificação conhecida como **especificação Gibbsiana** com interação λ -admissível Φ .*

Definição 4.18 (Medidas de Gibbs). *Uma medida de probabilidade em $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ é dita uma **medida de Gibbs** se existe uma interação λ -admissível Φ tal que $\mu \in \mathcal{G}(\gamma^\Phi)$. Frequentemente diremos que μ é uma medida de Gibbs para os potenciais Φ que são λ -admissíveis. Como havíamos falado anteriormente, os elementos de $\mathcal{G}(\gamma^\Phi)$ são conhecidos como **estados de Gibbs**.*

Definição 4.19. *Diremos que uma interação Φ exibe **transição de fase** (de primeira ordem) se $|\mathcal{G}(\gamma^\Phi)| > 1$. Caso contrário, Φ não exibe transição de fase (segunda ordem).*

É frequente escrever $\mathcal{G}(\Phi)$ para denotar $\mathcal{G}(\gamma^\Phi)$.

Definindo $\|\Phi_A\|_\infty \equiv \sup_{\omega \in \Omega} |\Phi_A(\omega)|$, estabelecemos a seguinte condição de regularidade sobre Φ .

Definição 4.20 (Interação regular). Uma interação $\Phi \equiv (\Phi_A)_{A \in \mathcal{L}}$ é chamada de **regular** se para cada $i \in S$, existe uma constante c_i tal que

$$\sum_{A \ni i} \|\Phi_A\|_\infty \leq c_i < \infty.$$

Observação 4.16. O conjunto de todas as interações para as quais $\sup_{i \in S} c_i < \infty$, forma um espaço de Banach $(\mathcal{B}_0, \|\cdot\|_0)$, com a norma definida por

$$\|\Phi\|_0 \equiv \sup_{i \in S} \sum_{A \ni i} \|\Phi_A\|_\infty.$$

Na ausência de limitação uniforme das constantes c_i simplesmente pode-se garantir que o espaço $(\mathcal{B}_0, \|\cdot\|_0)$ forma um espaço de Fréchet ⁴.

Quando uma interação é invariante por translação, isto é, $\Phi_{A+j} = \Phi_A$ para cada $j \in S$, as constantes c_i podem ser tomadas como sendo uma constante c e, portanto, o subconjunto dos potenciais regulares e invariantes por translação é um subespaço de $(\mathcal{B}_0, \|\cdot\|_0)$.

Exemplo 4.13 (Modelo de Ising de primeiros vizinhos). Seja $\mathcal{E} = \{-1, +1\}$ e $\lambda = \frac{1}{2}\delta_{+1} + \frac{1}{2}\delta_{-1}$ a medida a priori. Considere a interação $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ em $(\mathcal{E}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{F})$ dada por

$$\Phi_\Lambda(\sigma) = \begin{cases} J\sigma_i\sigma_j, & \text{se } \Lambda = \{i, j\} \text{ e } \|i - j\| = 1 \\ h\sigma_i, & \text{se } \Lambda = \{i\} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $J, h \in \mathbb{R}$ são constantes fixadas. A interação Φ é regular.

De fato, para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$ temos $\Phi_\Lambda \equiv 0$ se $|\Lambda| \neq 2$ ou $|\Lambda| \neq 1$. Se $\Lambda = \{i, j\}$ com $\|i - j\| = 1$ ou $\Lambda = \{i\}$, então Φ_Λ é \mathcal{F}_Λ -mensurável. A condição de regularidade é verificada como segue:

$$\sum_{\Lambda \ni i} \|\Phi_\Lambda\|_\infty = \sum_{j=1}^{2d} \sup_{\sigma \in \Omega} |J\sigma_i\sigma_j| + \sup_{\sigma \in \Omega} |h\sigma_i| = 2d|J| + |h| < \infty,$$

onde $2d$ é o número de primeiros vizinhos do sítio i . Daí, Φ é uma interação regular.

⁴ Um espaço vetorial topológico é dito de Fréchet, se este é metrizável (sua topologia é compatível com uma métrica), completo e localmente convexo (sua topologia admite uma base local formada por conjuntos convexos).

Exemplo 4.14 (Modelo de Ising de longo alcance). Seja $\mathcal{E} = \{-1, +1\}$ e $\lambda = \frac{1}{2}\delta_{+1} + \frac{1}{2}\delta_{-1}$. Considere a interação $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ em $(\mathcal{E}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{F})$ dada por

$$\Phi_\Lambda(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\|i-j\|^\alpha} \sigma_i \sigma_j, & \text{se } \Lambda = \{i, j\} \text{ e } i \neq j \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se $\alpha > d$, Φ é uma interação regular.

De fato, para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$ temos $\Phi_\Lambda \equiv 0$ se $|\Lambda| \neq 2$. Se $\Lambda = \{i, j\}$ com $i \neq j$, então Φ_Λ é \mathcal{F}_Λ -mensurável. Uma vez que Φ é invariante por translações, a condição de regularidade é verificada como segue

$$\begin{aligned} \sum_{\Lambda \ni i} \|\Phi_\Lambda\|_\infty &= \sum_{\Lambda \ni 0} \sup_{\sigma \in \Omega} \left| \frac{\sigma_i \sigma_0}{\|i\|^\alpha} \right| \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \frac{1}{\|i\|^\alpha} \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \left[\sum_{i \in \mathbb{Z}^d: \|i\|=r} \frac{1}{r^\alpha} \right] = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^\alpha} \left[\sum_{i \in \mathbb{Z}^d: \|i\|=r} 1 \right], \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d. \end{aligned}$$

Observe que $\sum_{i \in \mathbb{Z}^d: \|i\|=r} 1$ é exatamente o número de elementos da fronteira da bola de raio r centrada no 0. Sem perda de generalidade, usando em \mathbb{Z}^d a norma da soma, pode-se provar por indução que $\sum_{i \in \mathbb{Z}^d: \|i\|=r} 1 \leq 2d(2r+1)^{d-1} \leq 2d3^{d-1}r^{d-1}$. Usando esta estimativa, o termo do lado direito da igualdade acima fica

$$\leq 2d3^{d-1} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{\alpha-d+1}} < \infty,$$

pois, $\alpha > d$. Portanto,

$$\sum_{\Lambda \ni i} \|\Phi_\Lambda\|_\infty < \infty, \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d,$$

implicando que Φ é uma interação regular.

Exemplo 4.15. Seja $\Psi = (\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ uma cadeia de Markov estacionária com espaço de estados finito \mathcal{E} , conjunto de parâmetros $S = \mathbb{Z}$ e matriz de transição $P = (P(x, y))_{x, y \in \mathcal{E}}$ (estritamente) positiva, isto é, as entradas $P(x, y)$ da matriz P satisfazem $P(x, y) > 0$, para todo $x, y \in \mathcal{E}$.

Considere, também, $\lambda \in \mathcal{M}_1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ a medida a priori (que é a medida de contagem), onde \mathcal{E} é a σ -álgebra das partes de \mathcal{E} . Afirmamos que a família $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ em $(\mathcal{E}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{F})$, definida por

$$\Phi_\Lambda(\sigma) \equiv \begin{cases} -\log P(\sigma_i, \sigma_{i+1}), & \text{se } \Lambda = \{i, i+1\} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

é uma interação regular.

De fato, para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$ temos $\Phi_\Lambda \equiv 0$ se $|\Lambda| \neq 2$. Se $\Lambda = \{i, i+1\}$, então Φ_Λ é \mathcal{F}_Λ -mensurável. A condição de regularidade se comprova como segue,

$$\begin{aligned} \sum_{\Lambda \ni i} \|\Phi_\Lambda\|_\infty &= \sum_{\{j, j+1\} \ni i} \sup_{\sigma} |-\log P(\sigma_j, \sigma_{j+1})| \\ &= \sup_{\sigma} |-\log P(\sigma_i, \sigma_{i+1})| + \sup_{\sigma} |-\log P(\sigma_{i-1}, \sigma_i)| \\ &= -2 \log P(\sigma_{i_0}, \sigma_{i_1}) < \infty, \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, usamos a estacionaridade da cadeia de Markov Ψ e o fato de que o fator $-2 \log P(\sigma_{i_0}, \sigma_{i_1})$ é positivo, pois $P(\sigma_{i_0}, \sigma_{i_1}) \in (0, 1]$. Isso prova a afirmação.

Proposição 4.17. Se $\Phi \in (\mathcal{B}_0, \|\cdot\|_0)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que $\|H_\Lambda^\Phi\|_\infty \leq C|\Lambda|$, para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$.

Demonstração. Como $\Phi \in (\mathcal{B}_0, \|\cdot\|_0)$, temos que $\sup_{i \in S} \sum_{A \ni i} \|\Phi_A\|_\infty \leq \sup_{i \in S} c_i < \infty$ (veja Observação 4.16). Se $A \in \mathcal{L}$ é tal que $A \cap \Lambda \neq \emptyset$, onde $\Lambda \in \mathcal{L}$ é fixo, então existe $i \in \Lambda$ tal que A contém i . Logo, para cada $\sigma \in \Omega$ temos

$$|H_\Lambda^\Phi(\sigma)| = \left| \sum_{A \cap \Lambda \neq \emptyset} \Phi_A(\sigma) \right| \leq \sum_{i \in \Lambda} \sum_{A \ni i} |\Phi_A(\sigma)| \leq \|\Phi\|_0 |\Lambda|.$$

Portanto, basta considerar $C \equiv \|\Phi\|_0 \in (0, +\infty)$ e tomar o supremo em $\sigma \in \Omega$ na desigualdade acima. \square

4.3 FUNÇÕES LOCAIS E QUASE-LOCAIS

Seguindo uma notação similar à referência [57] e à seção anterior, seja (Ω, \mathcal{F}) um espaço mensurável. Denotamos por

$$B(\Omega, \mathcal{F}) \equiv \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é } \mathcal{F}\text{-mensurável limitada}\}.$$

De maneira análoga, para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$, definimos o espaço

$$B(\Omega, \mathcal{F}_\Lambda) \equiv \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é } \mathcal{F}_\Lambda\text{-mensurável limitada}\}.$$

Cabe destacar que uma função $f \in B(\Omega, \mathcal{F}_\Lambda)$, com $\Lambda \in \mathcal{L}$, pode ser caracterizada pela seguinte identidade: $f(\sigma_\Lambda \omega_{S \setminus \Lambda}) = f(\sigma_\Lambda \eta_{S \setminus \Lambda})$, para quaisquer $\sigma, \omega, \eta \in \Omega$. Isto é,

$B(\Omega, \mathcal{F}_\Lambda)$ está conformado por aquelas funções que dependem apenas de um número finito de vértices no volume Λ .

Outro conceito importante a mencionar, são as **funções locais**. O espaço de todas as funções locais será denotado por $B_{\text{loc}}(\Omega)$, mas exatamente

$$B_{\text{loc}}(\Omega) \equiv \cup_{\Lambda \in \mathcal{L}} B(\Omega, \mathcal{F}_\Lambda).$$

Logo, uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é local se existe $\Lambda \in \mathcal{L}$ tal que $f(\omega) = f(\eta)$ sempre que $\omega_\Lambda = \eta_\Lambda$. O menor conjunto Λ de forma que isso aconteça é chamado de **suporte de f** e será denotado por $\text{supp}(f)$.

Exemplo 4.16. As funções $f(\sigma) = \prod_{m=1}^q \prod_{x \in \mathcal{F}_m} \delta_{\sigma_x, m}$ onde $\mathcal{F} = \sqcup_{m=1}^q \mathcal{F}_m \in \mathcal{L}$, $q \geq 1$ e σ_0 são funções locais e têm suporte \mathcal{F} e $\{0\}$ respectivamente.

Exemplo 4.17. Seja $(\mathcal{E}, \mathcal{E}, \lambda)$ um espaço de probabilidade, Φ uma interação regular definida em $(\mathcal{E}^S, \mathcal{F})$, $\beta > 0$, $\Lambda \in \mathcal{L}$ e $A \in \mathcal{L}$. Então a fórmula

$$\gamma_\Lambda^{\beta\Phi}(A|\omega) = \frac{1}{Z_\Lambda^{\beta\Phi}(\omega)} \int_{\mathcal{E}^\Lambda} \lambda^\Lambda(d\xi) e^{-H_\Lambda^{\beta\Phi}(\xi\omega_{S \setminus \Lambda})} \mathbb{1}_A(\xi\omega_{S \setminus \Lambda}),$$

onde $Z_\Lambda^{\beta\Phi}(\omega) = \int_{\mathcal{E}^\Lambda} \lambda^\Lambda(d\xi) e^{-H_\Lambda^{\beta\Phi}(\xi\omega_{S \setminus \Lambda})}$, define uma especificação local para interação Φ ao inverso da temperatura β .

De fato, pela Definição 4.17, $\gamma_\Lambda^{\beta\Phi}$ é uma especificação Gibbsiana. Uma vez que Φ é uma interação regular, o Hamiltoniano $H_\Lambda^{\beta\Phi}$ é local, de onde se conclui que a especificação $\gamma_\Lambda^{\beta\Phi}$ é local.

Definição 4.21 (Função quase-local). Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é **quase-local** se esta pode ser aproximada uniformemente por funções locais, isto é, se para cada $\epsilon > 0$, existe $f_\epsilon \in B_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que

$$\sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega) - f_\epsilon(\omega)| < \epsilon.$$

Denotaremos por $B_{\text{qloc}}(\Omega)$ o espaço das funções quase-locais. Note que, por definição, o conjunto das funções locais é denso no conjunto das funções quase-locais $B_{\text{qloc}}(\Omega)$.

Definição 4.22 (Convergência ao longo de uma sequência de conjuntos). A notação

$$\lim_{\Lambda \uparrow S} F(\Lambda) = L,$$

significa convergência de uma função-conjunto $F : S \rightarrow \mathbb{R}$ ao longo de um conjunto S (ordenado pela inclusão) como segue

$$\forall \epsilon > 0, \exists \Lambda_\epsilon \in \mathcal{L} \text{ tal que } \Lambda_\epsilon \subset \Lambda \text{ e } \Lambda \in \mathcal{L} \Rightarrow |F(\Lambda) - L| < \epsilon.$$

Assim, em nosso contexto, como o espaço de estados \mathcal{E} é *finito*, temos a seguinte caracterização das funções quase-locais.

Lema 4.18 (Caracterização das funções quase-locais). *Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é quase-local se, e somente se, uma das seguintes condições se satisfaz:*

(i) **Continuidade:** a função f é contínua em Ω , se esta é contínua para cada $\omega \in \Omega$, isto é, $\forall \omega \in \Omega, \forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{\sigma \in \Omega} |f(\omega_{\Lambda_n} \sigma_{S \setminus \Lambda_n}) - f(\omega)| < \epsilon.$$

(ii) **Limite uniforme de funções locais:** Existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in B(\Omega, \mathcal{F}_{\Lambda_n})$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\omega \in \Omega} |f_n(\omega) - f(\omega)| = 0.$$

(iii) **Continuidade sequencial uniforme:** $\forall \epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{\sigma, \omega \in \Omega} |f(\omega_{\Lambda_n} \sigma_{S \setminus \Lambda_n}) - f(\omega)| < \epsilon.$$

(iv) **Continuidade uniforme:**

$$\lim_{\substack{\Lambda \uparrow S \\ \sigma_{\Lambda} = \omega_{\Lambda}}} \sup_{\sigma, \omega \in \Omega} |f(\omega) - f(\sigma)| = 0.$$

Demonstração. Note que, por definição, $f \in B_{\text{qloc}}(\Omega) \Leftrightarrow$ (ii) se satisfaz. Agora, provaremos a equivalência $f \in B_{\text{qloc}}(\Omega) \Leftrightarrow$ (iv). De fato,

$(\Rightarrow) f \in B_{\text{qloc}}(\Omega) \Leftrightarrow$ (ii) se satisfaz \Leftrightarrow existe $(f_{\Gamma})_{\Gamma \in \mathcal{L}}$, tal que para cada $\Gamma \in \mathcal{L}$, $f_{\Gamma} \in B(\Omega, \mathcal{F}_{\Gamma})$ e

$$\lim_{\Gamma \uparrow S} \sup_{\sigma \in \Omega} |f_{\Gamma}(\sigma) - f(\sigma)| = 0. \quad (153)$$

Como $\{(\sigma, \eta) : \sigma_{\Lambda} = \eta_{\Lambda}\} \subset \{(\sigma, \eta) : \sigma_{\Gamma} = \eta_{\Gamma}\}$, sempre que $\Gamma \subset \Lambda$, temos

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{\sigma, \eta \in \Omega \\ \sigma_{\Lambda} = \eta_{\Lambda}}} |f(\sigma) - f(\eta)| &\leq \sup_{\sigma \in \Omega} |f(\sigma) - f_{\Gamma}(\sigma)| + \sup_{\substack{\sigma, \eta \in \Omega \\ \sigma_{\Lambda} = \eta_{\Lambda}}} |f_{\Gamma}(\sigma) - f_{\Gamma}(\eta)| + \sup_{\eta \in \Omega} |f_{\Gamma}(\eta) - f(\eta)| \\ &\leq \sup_{\sigma \in \Omega} |f(\sigma) - f_{\Gamma}(\sigma)| + \sup_{\substack{\sigma, \eta \in \Omega \\ \sigma_{\Gamma} = \eta_{\Gamma}}} |f_{\Gamma}(\sigma) - f_{\Gamma}(\eta)| + \sup_{\eta \in \Omega} |f_{\Gamma}(\eta) - f(\eta)| \\ &= 2 \sup_{\sigma \in \Omega} |f(\sigma) - f_{\Gamma}(\sigma)| + \sup_{\substack{\sigma, \eta \in \Omega \\ \sigma_{\Gamma} = \eta_{\Gamma}}} |f_{\Gamma}(\sigma) - f_{\Gamma}(\eta)|. \end{aligned}$$

Como f_Γ é local, ela é uniformemente contínua, isto é $\lim_{\Gamma \uparrow S} \sup_{\substack{\sigma, \eta \in \Omega \\ \sigma_\Gamma = \eta_\Gamma}} |f_\Gamma(\sigma) - f_\Gamma(\eta)| = 0$. Fazendo $\Lambda \uparrow S$, depois $\Gamma \uparrow S$ e finalmente, usando (153) tem-se

$$\lim_{\Lambda \uparrow S} \sup_{\substack{\sigma, \eta \in \Omega \\ \sigma_\Lambda = \eta_\Lambda}} |f(\sigma) - f(\eta)| = 0.$$

(\Leftarrow) Por hipótese $\lim_{\Lambda \uparrow S} \sup_{\sigma, \sigma' \in \Omega} |f(\sigma) - f(\sigma_\Lambda \sigma'_{S \setminus \Lambda})| = 0$. Logo,

$$\lim_{\Lambda \uparrow S} \sup_{\sigma \in \Omega} |f(\sigma) - f(\sigma_\Lambda \sigma'_{S \setminus \Lambda})| = 0. \quad (154)$$

Fixado $\sigma' \in \Omega$ definimos $f_\Lambda(\sigma) \equiv f(\sigma_\Lambda \sigma'_{S \setminus \Lambda})$, para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$. Veja que a sequência $(f_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ é tal que $\forall \Lambda \in \mathcal{L}, f_\Lambda \in B(\Omega, \mathcal{F}_\Lambda)$. Logo, por (154) temos

$$\lim_{\Lambda \uparrow S} \sup_{\sigma \in \Omega} |f(\sigma) - f_\Lambda(\sigma)| = 0.$$

Isto é, (153) é satisfeito, portanto, $f \in B_{\text{qloc}}(\Omega)$.

Finalmente, dentro deste contexto, veja que por definição, (iii) \Leftrightarrow (iv) e (i) \Leftrightarrow (iv). \square

Para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$, denotaremos o espaço das funções contínuas \mathcal{F}_Λ -mensuráveis no sentido da definição de continuidade dada no Lema 4.18 (i), por

$$C(\Omega, \mathcal{F}_\Lambda) \equiv \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é contínua}\}.$$

Quando $\Lambda \equiv S$, adotaremos a seguinte notações:

$$C(\Omega) \equiv C(\Omega, \mathcal{F}_S) \quad \text{e} \quad C_b(\Omega, \mathcal{F}) \equiv C(\Omega) \cap B(\Omega, \mathcal{F}).$$

Uma consequência importante do Lema 4.18 é que uma função \mathcal{T} -mensurável⁵ não constante nunca pode ser quase-local. De fato, seja f uma função não constante e $\omega \in \Omega$ fixo, então existe uma configuração $\eta \in \Omega$ tal que $f(\omega) \neq f(\eta)$. Em seguida, defina a configuração $\omega^n \equiv \omega_{\Lambda_n} \eta_{\Lambda_n^c}$. Note que $d(\omega^n, \omega) = \sum_{i \in \Lambda_n^c} \frac{1}{2^{\|i\|}} \mathbb{1}_{\{\omega_i^n \neq \omega_i\}} \leq |\Lambda_n^c|$, logo, fazendo $n \rightarrow \infty$, temos $d(\omega^n, \omega) \rightarrow 0$. Por outro lado, uma vez que f é \mathcal{T} -mensurável e $\omega_{\Lambda_n^c}^n = \eta_{\Lambda_n^c}$, temos $f(\omega^n) = f(\eta)$. Portanto, $f(\omega^n) \not\rightarrow f(\omega)$ e $d(\omega^n, \omega) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Isto é, $f \notin C(\Omega) = B_{\text{qloc}}(\Omega)$, onde esta última igualdade decorre do Lema 4.18.

Proposição 4.19. *Se $\Phi = (\Phi_A)_{A \in \mathcal{L}}$ é uma interação regular, então o Hamiltoniano H_Λ^Φ é uma função quase-local, para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$.*

⁵ Relembramos de capítulos anteriores que $\mathcal{T} = \bigcap_{\Lambda \in \mathcal{L}} \mathcal{F}_{S \setminus \Lambda}$ denota a σ -álgebra caudal.

Demonstração. Por hipótese, Φ é uma interação regular, isto é, Φ satisfaz

$$\sum_{A \ni i} \sup_{\omega \in \Omega} |\Phi_A(\omega)| < \infty.$$

Daí, a seguinte desigualdade é mantida

$$\sum_{A \cap \Lambda \neq \emptyset} \sup_{\omega \in \Omega} |\Phi_A(\omega)| \leq \sum_{i \in \Lambda} \sum_{A \ni i} \sup_{\omega \in \Omega} |\Phi_A(\omega)| < \infty. \quad (155)$$

Tome $\Gamma \in \mathcal{L}$ suficientemente grande tal que $\Lambda \subset \Gamma$ e $\sigma_\Gamma = \omega_\Gamma$. Logo,

$$\begin{aligned} |H_\Lambda^\Phi(\omega) - H_\Lambda^\Phi(\sigma)| &= \left| \sum_{A \cap \Lambda \neq \emptyset} \Phi_A(\omega) - \sum_{A \cap \Lambda \neq \emptyset} \Phi_A(\sigma) \right| \\ &= \left| \sum_{A \cap \Lambda \neq \emptyset, A \cap \Gamma^c \neq \emptyset} (\Phi_A(\omega) - \Phi_A(\sigma)) \right| \\ &\leq 2 \sum_{A \cap \Lambda \neq \emptyset, A \cap \Gamma^c \neq \emptyset} \sup_{\omega \in \Omega} |\Phi_A(\omega)|. \end{aligned} \quad (156)$$

Por (155), a série $\sum_{A \cap \Lambda \neq \emptyset} \sup_{\omega \in \Omega} |\Phi_A(\omega)|$ é convergente, logo, como o termo do lado direito de (156) é a cauda desta série, temos

$$\lim_{\Gamma \uparrow S} \sum_{A \cap \Lambda \neq \emptyset, A \cap \Gamma^c \neq \emptyset} \sup_{\omega \in \Omega} |\Phi_A(\omega)| = 0.$$

Tomando o supremo sobre todo σ, ω tal que $\sigma_\Gamma = \omega_\Gamma$ e depois fazendo $\Gamma \uparrow S$ em (156), obtemos

$$\lim_{\Gamma \uparrow S} \sup_{\substack{\sigma, \omega \in \Omega \\ \sigma_\Gamma = \omega_\Gamma}} |H_\Lambda^\Phi(\omega) - H_\Lambda^\Phi(\sigma)| = 0.$$

Pelo Lema 4.18, H_Λ^Φ é quase-local, para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$. □

Observação 4.20. *Veja que, para provar a Proposição 4.19, é suficiente assumir que*

$$\lim_{\Gamma \uparrow S} \sup_{\sigma, \omega \in \Omega} \left| \sum_{A \cap \Lambda \neq \emptyset, A \cap \Gamma^c \neq \emptyset} \Phi_A(\omega) \right| = 0, \quad \forall \Lambda \in \mathcal{L}. \quad (157)$$

Uma interação satisfazendo a condição (157) é dita **uniformemente convergente**.

Uma vez que

$$\left| \sum_{A \cap \Lambda \neq \emptyset, A \cap \Gamma^c \neq \emptyset} \Phi_A(\omega) \right| \leq \sum_{A \cap \Lambda \neq \emptyset} \sup_{\omega \in \Omega} |\Phi_A(\omega)|,$$

o Item (155) mostra que a hipótese de regularidade sobre uma interação é mais forte que a hipótese de ser uniformemente convergente.

4.3.1 Especificações quase-locais

Definição 4.23. Dizemos que uma especificação $\gamma \equiv (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ é **quase-local** se, e somente se, $\gamma_\Lambda f \in B_{\text{qloc}}(\Omega)$, para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$ e $f \in B_{\text{qloc}}(\Omega)$. Em outras palavras, a especificação γ é quase-local se a aplicação

$$\omega \mapsto \gamma_\Lambda f(\omega) = \int_{\Omega} \gamma_\Lambda(d\eta|\omega) f(\eta)$$

é quase-local. Esta propriedade também é conhecida como **propriedade de Feller**.

Existem especificações que não são quase-locais (para uma referência ampla sobre este contexto, veja referências [47, 48]), o seguinte exemplo mostra isso.

Exemplo 4.18 (Especificação que não é quase-local). Pelo Exemplo 4.7, a família $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$, onde $\gamma_\Lambda(A|\omega) = \phi_{p,q,\Lambda}^\omega(A)$ foi definido no Exemplo 4.5, é uma especificação. Esta especificação não é quase-local (veja Subseção 3.4.6 do capítulo anterior).

Observação 4.21. No Exemplo 4.19, apresentaremos outro exemplo de especificação que perde a propriedade de quase-localidade. No Capítulo 5, Proposição 5.13 e no Capítulo 6, Proposição 6.3, apresentaremos outros dois exemplos de especificações que não são quase-locais.

A próxima proposição nos diz que, uma especificação γ é quase-local sempre que, $\gamma_\Lambda(\cdot|\omega)$ transforma funções locais em quase-locais, para cada ω e $\Lambda \in \mathcal{L}$.

Proposição 4.22. Desde que toda função quase-local pode ser aproximada uniformemente por funções locais, para verificar se uma especificação $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ é quase-local, é suficiente provar que $\gamma_\Lambda f$ é quase-local, para cada função f local e $\Lambda \in \mathcal{L}$.

Demonstração. Seja $g \in B_{\text{qloc}}(\Omega)$, logo existe uma sequência $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que

$$\|g - g_n\|_\infty \longrightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (158)$$

Como $g_n \in B_{\text{loc}}(\Omega)$, por hipótese a aplicação $\omega \rightarrow \gamma_\Lambda(g_n|\omega)$ é contínua (uniformemente), isto é,

$$\lim_{\Lambda \uparrow S} \sup_{\substack{\sigma, \omega \in \Omega \\ \sigma_\Lambda = \omega_\Lambda}} |\gamma_\Lambda(g_n|\sigma) - \gamma_\Lambda(g_n|\omega)| = 0. \quad (159)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{\sigma, \omega \in \Omega \\ \sigma_\Lambda = \omega_\Lambda}} |\gamma_\Lambda(g|\sigma) - \gamma_\Lambda(g|\omega)| &\leq \sup_{\sigma \in \Omega} |\gamma_\Lambda(g|\sigma) - \gamma_\Lambda(g_n|\sigma)| \\
&+ \sup_{\substack{\sigma, \omega \in \Omega \\ \sigma_\Lambda = \omega_\Lambda}} |\gamma_\Lambda(g_n|\sigma) - \gamma_\Lambda(g_n|\omega)| + \sup_{\omega \in \Omega} |\gamma_\Lambda(g_n|\omega) - \gamma_\Lambda(g|\omega)| \\
&= 2\|\gamma_\Lambda g - \gamma_\Lambda g_n\|_\infty + \sup_{\substack{\sigma, \omega \in \Omega \\ \sigma_\Lambda = \omega_\Lambda}} |\gamma_\Lambda(g_n|\sigma) - \gamma_\Lambda(g_n|\omega)| \\
&\leq 2\|g - g_n\|_\infty + \sup_{\substack{\sigma, \omega \in \Omega \\ \sigma_\Lambda = \omega_\Lambda}} |\gamma_\Lambda(g_n|\sigma) - \gamma_\Lambda(g_n|\omega)|.
\end{aligned}$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ e $\Lambda \uparrow S$ na desigualdade acima e usando (158) e (159) concluímos a demonstração. \square

Lema 4.23. *Se γ é uma especificação quase-local, então $\mathcal{G}(\gamma)$ é um subconjunto fechado de $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$.*

Demonstração. Seja $\mu \in \overline{\mathcal{G}(\gamma)}$ ⁶, logo, existe uma sequência $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{G}(\gamma)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu$, onde esta convergência é no sentido fraco (veja Definição 3.14). O que nos propomos a provar é que a medida limite $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$.

Se $f \in C(\Omega) = B_{\text{qloc}}(\Omega)$, por definição de especificação quase-local temos $\gamma_\Lambda f \in C(\Omega)$. Daí

$$\mu \gamma_\Lambda(f) = \mu(\gamma_\Lambda(f|\cdot)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\gamma_\Lambda(f|\cdot)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(f) = \mu(f),$$

onde, na segunda e quarta igualdades, usamos a definição de convergência fraca. Já na terceira igualdade, usamos o fato de que $\mu_n \in \mathcal{G}(\gamma)$.

Portanto, $\overline{\mathcal{G}(\gamma)} \subseteq \mathcal{G}(\gamma)$. Como a outra inclusão sempre é válida, concluímos a prova. \square

A seguinte proposição decorre como subproduto da prova do Lema 4.23.

Proposição 4.24. *Se γ é uma especificação quase-local e*

$$\mathcal{G}_{\text{lim}}(\gamma) \equiv \left\{ \mu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F}) : \begin{array}{l} \mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{\Lambda_n}(\cdot|\eta_n), \\ \text{para algumas sequências } \{\eta_n\}_{n \geq 1} \text{ e } \{\Lambda_n\}_{n \geq 1} \end{array} \right\},$$

então, $\mathcal{G}_{\text{lim}}(\gamma) \subseteq \mathcal{G}(\gamma)$.

⁶ Aqui \bar{A} denota o fecho do conjunto A .

Em geral, é difícil determinar quando $\mathcal{G}_{\text{lim}}(\gamma) = \mathcal{G}(\gamma)$. Quase sempre, esses tipos de relações são considerados, como, problemas em aberto. Quando $d = 3$, em [37] é exibido um exemplo de medida de Gibbs não extremal a volume infinito (a temperaturas suficientemente baixas) que pertence ao conjunto $\mathcal{G}(\gamma) \setminus \mathcal{G}_{\text{lim}}(\gamma)$, onde $\gamma = \gamma^{\beta\Phi}$ e Φ é a interação regular associada ao modelo de Ising com campo nulo (veja Exemplo 4.9). Salientamos que, um resultado independente sobre essa questão pode ser encontrado, também, na referência [95]. O seguinte resultado nos manifesta que, no caso que a especificação seja quase-local e o espaço de estados seja compacto, então o fecho da envoltória convexa dos limites fracos é igual ao conjunto das medidas de Gibbs $\mathcal{G}(\gamma)$.

Teorema 4.25. *Se (\mathcal{E}, d) um espaço métrico compacto e $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ uma especificação quase-local sobre $(\mathcal{E}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{F})$, então $\overline{\text{Env}(\mathcal{G}_{\text{lim}}(\gamma))} = \mathcal{G}(\gamma)$.*

Demonstração. Pela Proposição 4.24 temos $\mathcal{G}_{\text{lim}}(\gamma) \subseteq \mathcal{G}(\gamma)$. Como $\mathcal{G}(\gamma)$ é um conjunto fechado (veja Proposição 4.23) e convexo (como será visto mas adiante, na Subseção 4.3.2), segue que $\overline{\text{Env}(\mathcal{G}_{\text{lim}}(\gamma))} \subseteq \overline{\text{Env}(\mathcal{G}(\gamma))} = \mathcal{G}(\gamma)$. A ideia central da prova deste teorema é supor que $\overline{\text{Env}(\mathcal{G}_{\text{lim}}(\gamma))} \subsetneq \mathcal{G}(\gamma)$, em seguida usar o Teorema de Separação de Hiperplanos para chegar a uma contradição (para maiores detalhes, veja [25], Teorema 71, p. 51). \square

O próximo teorema nos fornece condições suficientes sobre a especificação γ para que o conjunto das medidas de Gibbs $\mathcal{G}(\gamma)$ seja não vazio.

Teorema 4.26. *Se γ é uma especificação quase-local, então o conjunto $\mathcal{G}(\gamma)$ é não vazio.*

Demonstração. Fixada uma configuração $\omega \in \Omega$, defina a sequência $\mu_n(\cdot) \equiv \gamma_{\Gamma_n}(\cdot | \omega) \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$, com $n \in \mathbb{N}$. Fixado $\Lambda \in \mathcal{L}$, usando as condições de consistência do núcleo γ_Λ , para cada $f \in C(\Omega) = B_{\text{qloc}}(\Omega)$ e cada n suficientemente grande tal que $\Gamma_n \supset \Lambda$, tem-se

$$\mu_n \gamma_\Lambda(f) = \mu_n(\gamma_\Lambda(f | \cdot)) = \gamma_{\Gamma_n}(\gamma_\Lambda(f | \cdot) | \omega) = \gamma_{\Gamma_n}(f | \omega) = \mu_n(f). \quad (160)$$

Como Ω é compacto, pela Proposição 5.5 de [16], $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ é um espaço métrico compacto. Logo, existe uma subsequência μ_{n_k} tal que (o limite) $\mu \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k}$ existe. Se $f \in C(\Omega)$, por definição de especificação quase-local temos $\gamma_\Lambda f \in C(\Omega)$, para $\Lambda \in \mathcal{L}$ fixo. Daí

$$\mu \gamma_\Lambda(f) = \mu(\gamma_\Lambda(f | \cdot)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k}(\gamma_\Lambda(f | \cdot)) \stackrel{(160)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k}(f) = \mu(f),$$

mostrando-se que $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$. Logo $\mathcal{G}(\gamma)$ é não vazio. \square

Exemplo 4.19 (Outra especificação que não é quase-local, veja [53]). Sejam η^- e $\eta^{-,i}$ duas configurações em $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$ definidas por

$$\eta^- \equiv (-1, \dots, -1, \underbrace{-1}_{i\text{-ésimo}}, -1, \dots) \quad e \quad \eta^{-,i} \equiv (-1, \dots, -1, \underbrace{+1}_{i\text{-ésimo}}, -1, \dots),$$

respectivamente. Para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$ e $A \in \mathcal{F}$, seja

$$\gamma_\Lambda(A|\omega) \equiv \begin{cases} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \mathbb{1}_A(\eta^{-,i}), & \text{se } \omega_{\Lambda^c} = \eta_{\Lambda^c}^- \\ \mathbb{1}_A(\eta_{\Lambda}^- \omega_{\Lambda^c}), & \text{outro caso.} \end{cases} \quad (161)$$

Pelo Exemplo 4.8 a família $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ é uma especificação de \mathcal{F}_{Λ^c} a \mathcal{F} . Afirmamos que esta especificação não é quase-local.

De fato, se provarmos que $\mu(\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}) = 0$, para algum $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$, então teremos que μ não é uma medida de probabilidade, o que implicará que $\mathcal{G}(\gamma) = \emptyset$. Logo, pelo Teorema 4.26, seguiria que γ não é quase-local. Portanto, é suficiente provar que $\mu(\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}) = 0$, para algum $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$. Para isso, considere $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$ e a variável aleatória

$$N^+(\omega) = |\{i \in \mathbb{Z}^d : \omega_i = +1\}|$$

que conta o número de sítios $i \in \mathbb{Z}^d$ cujo spin associado é +1.

Desde que $\{\omega : N^+(\omega) = 0\} = \{\eta^-\}$, por (161) tem-se

$$\mu(N^+ = 0) = \mu(\{\eta^-\}) = \mu \gamma_\Lambda(\{\eta^-\}) = \int \mu(d\omega) \gamma_\Lambda(\{\eta^-\}|\omega) = 0. \quad (162)$$

Por outro lado, como $\{\omega : N^+(\omega) = 1\} = \cup_{i \in \mathbb{Z}^d} \{\eta^{-,i}\}$ e

$$\mu(\{\eta^{-,i}\}) = \mu \gamma_\Lambda(\{\eta^{-,i}\}) = \int \mu(d\omega) \gamma_\Lambda(\{\eta^{-,i}\}|\omega) = \begin{cases} \frac{1}{|\Lambda|}, & \text{se } \omega_{\Lambda^c} = \eta_{\Lambda^c}^- \\ 0, & \text{se } \omega_{\Lambda^c} \neq \eta_{\Lambda^c}^- \end{cases} \leq \frac{1}{|\Lambda|},$$

segue que

$$\mu(N^+ = 1) \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \mu(\{\eta^{-,i}\}) \rightarrow 0, \quad \text{quando } \Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d. \quad (163)$$

Finalmente, como $\{\omega : N^+(\omega) \geq 2\} \subset \cup_{i \neq j} \{\omega : \omega_i = \omega_j = +1\}$ e

$$\mu(\{\omega_i = \omega_j = +1\}) = \mu \gamma_{\{i,j\}}(\{\omega_i = \omega_j = +1\}) = \int \mu(d\omega) \gamma_{\{i,j\}}(\{\omega_i = \omega_j = +1\}|\omega) = 0,$$

temos

$$\mu(N^+ \geq 2) \leq \sum_{i \neq j} \mu(\{\omega_i = \omega_j = +1\}) = 0. \quad (164)$$

Logo, de (162)-(164) concluímos que $\mu(\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}) = 0$, para algum $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$.

Em contraste com o Teorema 4.26, o Exemplo 4.19 nos fornece uma especificação γ que não é quase-local, cujo conjunto $\mathcal{G}(\gamma)$ é vazio.

É natural perguntar-se por condições suficientes para que a especificação Gibbsiana γ^Φ seja quase-local. Os seguintes (dois) resultados nos dão algumas respostas a estas interrogantes.

Proposição 4.27. *Seja $\lambda \in \mathcal{M}_1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ uma medida a priori. Suponha que Φ é uma interação λ -admissível tal que o Hamiltoniano H_Λ^Φ é quase-local, para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$, então a especificação Gibbsiana γ^Φ é quase-local.*

Demonstração. Primeiro, observe que

$$\begin{aligned} \left| Z_\Lambda^\Phi(\omega) - Z_\Lambda^\Phi(\sigma) \right| &\leq \int_{\mathcal{E}^\Lambda} \lambda^\Lambda(d\tilde{\zeta}) \left| e^{-H_\Lambda^\Phi(\tilde{\zeta}\omega_{S \setminus \Lambda})} - e^{-H_\Lambda^\Phi(\tilde{\zeta}\sigma_{S \setminus \Lambda})} \right| \\ &\leq \int_{\mathcal{E}^\Lambda} \lambda^\Lambda(d\tilde{\zeta}) e^{-H_\Lambda^\Phi(\tilde{\zeta}\sigma_{S \setminus \Lambda})} \left| e^{\beta |H_\Lambda^\Phi(\tilde{\zeta}\omega_{S \setminus \Lambda}) - H_\Lambda^\Phi(\tilde{\zeta}\sigma_{S \setminus \Lambda})|} - 1 \right|. \end{aligned}$$

Logo, considerando $\Gamma \in \mathcal{L}$ tal que $\Lambda \subset \Gamma$, temos

$$\sup_{\substack{\sigma, \omega \in \Omega \\ \sigma_\Gamma = \omega_\Gamma}} \left| Z_\Lambda^\Phi(\omega) - Z_\Lambda^\Phi(\sigma) \right| \leq \left| e^{\sup_{\sigma \in \Omega} |H_\Lambda^\Phi(\omega) - H_\Lambda^\Phi(\sigma)|} - 1 \right| \sup_{\sigma \in \Omega} Z_\Lambda^\Phi(\sigma). \quad (165)$$

Por outro lado, denotando

$$u(\omega) \equiv \int_{\mathcal{E}^\Lambda} \lambda^\Lambda(d\tilde{\zeta}) e^{-H_\Lambda^\Phi(\tilde{\zeta}\omega_{S \setminus \Lambda})} \mathbb{1}_A(\tilde{\zeta}\omega_{S \setminus \Lambda})$$

escrevemos

$$\begin{aligned} \left| \gamma_\Lambda^\Phi(A|\omega) - \gamma_\Lambda^\Phi(A|\sigma) \right| &= \left| \frac{1}{Z_\Lambda^\Phi(\omega)} u(\omega) - \frac{1}{Z_\Lambda^\Phi(\sigma)} u(\sigma) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{Z_\Lambda^\Phi(\omega)} - \frac{1}{Z_\Lambda^\Phi(\sigma)} \right| u(\omega) + \frac{1}{Z_\Lambda^\Phi(\sigma)} |u(\omega) - u(\sigma)| \\ &= \frac{|Z_\Lambda^\Phi(\omega) - Z_\Lambda^\Phi(\sigma)|}{Z_\Lambda^\Phi(\omega) Z_\Lambda^\Phi(\sigma)} u(\omega) + \frac{1}{Z_\Lambda^\Phi(\sigma)} |u(\omega) - u(\sigma)|. \end{aligned}$$

Desde que $u(\omega) \leq Z_\Lambda^\Phi(\omega)$ e $|u(\omega) - u(\sigma)| \leq |Z_\Lambda^\Phi(\omega) - Z_\Lambda^\Phi(\sigma)|$, temos

$$\left| \gamma_\Lambda^\Phi(A|\omega) - \gamma_\Lambda^\Phi(A|\sigma) \right| \leq 2 \frac{|Z_\Lambda^\Phi(\omega) - Z_\Lambda^\Phi(\sigma)|}{Z_\Lambda^\Phi(\sigma)}.$$

Em seguida, tomando o supremo sobre todo $\sigma, \omega \in \Omega$ tal que $\sigma_\Gamma = \omega_\Gamma$ e depois usando (165) na desigualdade acima, obtemos

$$\sup_{\substack{\sigma, \omega \in \Omega \\ \sigma_\Gamma = \omega_\Gamma}} \left| \gamma_\Lambda^\Phi(A|\omega) - \gamma_\Lambda^\Phi(A|\sigma) \right| \leq 2 \left| e^{\sup_{\sigma_\Gamma = \omega_\Gamma} |H_\Lambda^\Phi(\omega) - H_\Lambda^\Phi(\sigma)|} - 1 \right|.$$

Finalmente, fazendo $\Gamma \uparrow S$ e usando a hipótese de que o Hamiltoniano H_Λ^Φ é quase-local, concluímos a prova. \square

Lema 4.28. *Se $\Phi = (\Phi_A)_{A \in \mathcal{L}}$ é uma interação λ -admissível regular, então a especificação Gibbsiana γ^Φ é quase-local.*

Demonstração. A prova deste lema é consequência direta das Proposições 4.19 e 4.27. \square

O Lema 4.28 nos diz que toda especificação Gibbsiana com interação regular é quase-local. A recíproca deste fato não é verdadeiro em geral. No entanto, muitas das especificações quase-locais são Gibbsianas.

Definição 4.24 (Medida quase-local e medida quase-local q.c.). *Uma medida $\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ é dita quase-local se existe uma especificação γ quase-local tal que $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$.*

Uma medida $\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ é chamada quase-local q.c. se existe uma especificação γ quase-local q.c. (isto é, a aplicação $\omega \mapsto \gamma_\Lambda(f)(\omega)$ é μ -q.c. quase-local) tal que $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$.

Uma medida i.i.d. sobre Ω é obviamente quase-local, daí, a medida de aglomerados aleatórios para uma árvore regular \mathbb{T}_n , cujos parâmetros satisfazem ou $p \in \{0, 1\}$ ou $q = 1$, é quase-local.

Lema 4.29. *Se $\Phi = (\Phi_A)_{A \in \mathcal{L}}$ é uma interação λ -admissível uniformemente convergente, então a especificação Gibbsiana γ^Φ é quase-local.*

Demonstração. Segue por combinar a Observação 4.20 com a Proposição 4.27. \square

Observação 4.30. *Dos resultado expostos acima mais o Teorema 4.26, dada uma interação λ -admissível regular Φ , o conjunto das medidas de Gibbs $\mathcal{G}(\Phi)$ é não vazio.*

Pelo Lema 4.2, $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$ se, e somente se, satisfaz a equação: $\mu\gamma = \mu$, para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$. Mais precisamente, se satisfaz a equação:

$$\int_{\Omega} \mu(d\omega) \gamma_\Lambda(A|\omega) = \mu(A), \quad \forall A \in \mathcal{F} \text{ e } \Lambda \in \mathcal{L}. \quad (166)$$

Uma equação ligeiramente mais fraca que esta é obtida restringindo o evento A à sub- σ -álgebra \mathcal{F}_Λ , isto é:

$$\int_{\Omega} \mu(d\omega) \gamma_{\Lambda}(A|\omega) = \mu(A), \quad \forall A \in \mathcal{F}_{\Lambda} \text{ e } \Lambda \in \mathcal{L}. \quad (167)$$

Em geral, (167) é condição necessária, mas não suficiente, para que $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$. No entanto, em situações práticas, as condições (166) e (167) são equivalentes (veja referência[57], Observação 4.21).

A prova do seguinte resultado foi extraído de [35] (especificamente, Teorema 3.4), o qual terá utilidade fundamental nos Capítulos 5 e 6. Esse resultado nos diz que, sobre a hipótese de quase-localidade (da especificação γ), as condições (166) e (167) são equivalentes.

Teorema 4.31. *Suponha que γ é uma especificação quase-local com conjunto de parâmetros S e espaço de estados $(\mathcal{E}, \mathcal{E})$. Então*

$$\mu \in \mathcal{G}(\gamma) \Leftrightarrow \mu(A) = \int_{\Omega} \mu(d\omega) \gamma_{\Lambda}(A|\omega), \quad \forall A \in \mathcal{F}_{\Lambda} \text{ e } \Lambda \in \mathcal{L}.$$

Demonstração. Primeiro assumiremos que $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$. Como caso particular, temos que

$$\mu(A) = \int_{\Omega} \mu(d\omega) \gamma_{\Lambda}(A|\omega), \quad \forall A \in \mathcal{F}_{\Lambda} \text{ e } \Lambda \in \mathcal{L}.$$

Reciprocamente, suponha que a igualdade acima é verdade. Seja $\Lambda_n = \{[-n, n] \cap \mathbb{Z}^d : n \geq 1\}$. Primeiro, provaremos que, quando $n \rightarrow \infty$, temos $\mu\gamma_{\Lambda_n} \rightarrow \mu$, onde esta convergência é no sentido fraco (veja Definição 3.14). Para provar esta convergência fixamos uma função contínua $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Como o espaço de estados \mathcal{E} é finito, qualquer função local é contínua e, então, qualquer função em $B_{\text{qloc}}(\Omega)$ é contínua. Um resultado mais forte diz que $C(\Omega) = \overline{B_{\text{loc}}(\Omega)} (= B_{\text{qloc}}(\Omega))$. Logo, existe uma sequência $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em $B_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que $\|f_k - f\|_{\infty} \rightarrow 0$. Seja $n_k \in \mathbb{N}$ o menor inteiro para o qual $f_k \in B(\Omega, \mathcal{F}_{\Lambda_{n_k}})$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $k \geq k_0$ temos $\|f_k - f\|_{\infty} < \varepsilon$. Por outro lado, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, pela desigualdade triangular, segue que

$$|\mu\gamma_{\Lambda_n}(f) - \mu(f)| \leq \mu\gamma_{\Lambda_n}(|f - f_k|) + |\mu\gamma_{\Lambda_n}(f_k) - \mu(f)|.$$

O primeiro termo sobre o lado direito é limitado por ε para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $k = k_0$. Se $n \geq n_{k_0}$, da hipótese segue que $\mu\gamma_{\Lambda_n}(f_k) = \mu(f_k)$. Logo, o segundo termo do lado direito da desigualdade acima é menor que ε sempre que $n \geq n_{k_0}$. Desde que ε é arbitrário, temos $\mu\gamma_{\Lambda_n}(f) \rightarrow \mu(f)$, $\forall f \in C(\Omega)$.

O seguinte passo é provar que a equação DLR é satisfeita, isto é, $\mu(A) = \mu\gamma_\Lambda(A)$ para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$ e $A \in \mathcal{F}$. Primeiro, fixe $\Lambda \in \mathcal{L}$ e $f \in B_{\text{loc}}(\Omega)$. Usando a *quase-localidade* da especificação γ , pela Proposição 4.22, a especificação $\gamma_\Lambda f$ é quase-local e, daí, contínua. Segue da convergência fraca, mencionada acima, que

$$|\mu\gamma_\Lambda(f) - \mu(f)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(\mu\gamma_{\Lambda_n})\gamma_\Lambda(f) - (\mu\gamma_{\Lambda_n})(f)|.$$

A *consistência* da especificação implica que o termo da direita na igualdade acima (para n suficientemente grande, tal que $\Lambda \subset \Lambda_n$) satisfaz a seguinte igualdade: $(\mu\gamma_{\Lambda_n})(f) = (\mu\gamma_{\Lambda_n})\gamma_\Lambda(f)$, o que implica, que $|\mu\gamma_\Lambda(f) - \mu(f)| = 0$.

Tomando $f = \mathbb{1}_C$, onde $C \subset \Omega$ é um evento cilíndrico, temos dos resultados prévios que $\mu\gamma_\Lambda(C) = \mu(C)$. Em outras palavras, a restrição de ambas as medidas $\mu\gamma_\Lambda$ e μ à álgebra dos conjuntos cilíndricos coincide. Pelo Teorema da Extensão de Caratheodóry (veja Apêndice, Teorema .26) ambas as medidas tem uma única extensão à σ -álgebra gerada pelos conjuntos cilíndricos. Isto conclui a prova. \square

Observação 4.32. Pelo Teorema 4.31, para definir o conjunto $\mathcal{G}(\Phi)$, onde Φ é uma interação regular (ou uniformemente convergente, no sentido da Observação 4.20) e γ^Φ uma especificação Gibbsiana (portanto, quase-local), não temos problemas se o definimos em função das equações DLR, (166) ou (167), uma vez que estas equações são equivalentes.

Se todos os Hamiltonianos H_Λ^Φ são funções locais (resp. quase-locais), então γ^Φ é uma especificação quase-local. Em particular, isso ocorre quando Φ é uma interação λ -admissível (resp. regular ou uniformemente convergente, veja Lemas 4.28 e 4.29) de curto alcance.

4.3.2 Medidas de Gibbs extremas

Nesta subseção damos três resultados bastante conhecidos quando se fala de medidas de Gibbs extremas. Ressaltaremos a importância destes resultados nos Capítulos 5 e 6. Mas antes introduziremos a definição de elemento extremal.

Definição 4.25. Seja \mathcal{C} um subconjunto convexo de um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Um elemento $\mu \in \mathcal{C}$ é chamado *extremal*, se $\mu \neq tv + (1-t)v'$, dado que $t \in (0, 1)$ e $v, v' \in \mathcal{C}$, com $v \neq v'$. O conjunto dos pontos extremas será denotado por “ $ex\mathcal{C}$ ”.

Em seguida, estabeleceremos os três resultados mencionados anteriormente.

Lema 4.33. *Sejam $\mu, \nu \in \mathcal{G}(\gamma)$. Se $\mu(A) = \nu(A)$, para cada $A \in \mathcal{T}$, então $\mu = \nu$.*

Demonstração. Assuma que $\mu, \nu \in \mathcal{G}(\gamma)$, logo, para cada função local f e para todo $\Lambda \in \mathcal{L}$, vale

$$\mu(f) = \mu(\gamma_\Lambda(f|\cdot)) \quad \text{e} \quad \nu(f) = \nu(\gamma_\Lambda(f|\cdot)).$$

Como $\gamma_\Lambda(f|\cdot)$ é $\mathcal{F}_{S \setminus \Lambda}$ -mensurável para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$, temos que $\lim_{\Lambda \uparrow S} \gamma_\Lambda(f|\cdot)$ é \mathcal{T} -mensurável. Usando as identidades e o fato, mencionados acima, mais o Teorema da Convergência Monótona (veja Apêndice, Teorema .22), tem-se

$$\mu(f) = \lim_{\Lambda \uparrow S} \mu(\gamma_\Lambda(f|\cdot)) = \mu(\lim_{\Lambda \uparrow S} \gamma_\Lambda(f|\cdot)) = \nu(\lim_{\Lambda \uparrow S} \gamma_\Lambda(f|\cdot)) = \lim_{\Lambda \uparrow S} \nu(\gamma_\Lambda(f|\cdot)) = \nu(f),$$

onde, na terceira igualdade, usamos que $\mu = \nu$ sobre \mathcal{T} .

Finalmente, como $\mu(f) = \nu(f)$, $\forall f \in B_{\text{loc}}(\Omega)$, o Lema .36, do Apêndice, nos garante que $\mu = \nu$ sobre \mathcal{F} , a σ -álgebra gerada pelos cilindros. \square

Lema 4.34. *Se $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$ e $A \in \mathcal{T}$ com $\mu(A) > 0$, então a medida condicional $\mu(\cdot|A) \in \mathcal{G}(\gamma)$.*

Demonstração. Para cada função local f , veja que

$$\mu(f|A) = \frac{\mu(f\mathbb{1}_A)}{\mu(A)} = \frac{\mu(\gamma_\Lambda(f\mathbb{1}_A|\cdot))}{\mu(A)} = \frac{\mu(\mathbb{1}_A \gamma_\Lambda(f|\cdot))}{\mu(A)} = \mu(\gamma_\Lambda(f|\cdot)|A), \quad \forall \Lambda \in \mathcal{L}. \quad (168)$$

Logo, $\mu(\cdot|A) \in \mathcal{G}(\gamma)$. \square

A prova da seguinte proposição é baseada na aplicação dos dois lemas acima.

Proposição 4.35. *Assuma que $\mathcal{G}(\gamma) \neq \emptyset$. As seguintes afirmações são satisfeitas.*

1. $\mathcal{G}(\gamma)$ é um subconjunto convexo de $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$;
2. $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$ é extremal se, e somente se, μ é trivial sobre \mathcal{T} . Isto é,

$$\text{ex}\mathcal{G}(\gamma) = \{\mu \in \mathcal{G}(\gamma) : \mu(B) \in \{0, 1\}, \forall B \in \mathcal{T}\}.$$

Demonstração. 1. Assuma que $\mu, \nu \in \mathcal{G}(\gamma)$, logo, para cada função cilíndrica f com suporte em Λ , temos

$$\mu\gamma_\Lambda(f) = \mu(f) \quad \text{e} \quad \nu\gamma_\Lambda(f) = \nu(f). \quad (169)$$

Daí, para cada $t \in [0, 1]$, tem-se

$$\begin{aligned} (t\mu + (1-t)\nu) \gamma_\Lambda(f) &= \int (t\mu + (1-t)\nu)(d\omega) \gamma_\Lambda(f|\omega) \\ &= t \int \mu(d\omega) \gamma_\Lambda(f|\omega) + (1-t) \int \nu(d\omega) \gamma_\Lambda(f|\omega) \\ &= t(\mu\gamma_\Lambda(f)) + (1-t)(\nu\gamma_\Lambda(f)). \end{aligned}$$

Usando as equações DLR (169), a identidade acima fica

$$= t\mu(f) + (1-t)\nu(f) = (t\mu + (1-t)\nu)(f).$$

Combinando estas identidades temos provado que, para cada função cilíndrica f vale

$$(t\mu + (1-t)\nu) \gamma_\Lambda(f) = t\mu + (1-t)\nu(f).$$

Pelo Lema .36 do Apêndice, temos que as medidas $(t\mu + (1-t)\nu) \gamma_\Lambda$ e $t\mu + (1-t)\nu$ coincidem em todo \mathcal{F} . Portanto, $t\mu + (1-t)\nu \in \mathcal{G}(\gamma)$, implicando que $\mathcal{G}(\gamma)$ é convexo.

2. \Leftarrow) Suponha que μ é trivial sobre \mathcal{T} e seja $\mu = p\mu' + (1-p)\mu''$, com $p \in (0, 1)$. Logo, $\forall A \in \mathcal{T} : \mu(A) = p\mu'(A) + (1-p)\mu''(A) \in \{0, 1\}$. Porém, isso é certo somente quando $\mu'(A) = \mu''(A) \in \{0, 1\}$. Finalmente, pelo Lema 4.33, concluímos que $\mu' = \mu''$.

\Rightarrow) Reciprocamente, por contraposição, suponha que μ não é trivial sobre \mathcal{T} , então existe $A \in \mathcal{T}$ tal que $\mu(A) = p \in (0, 1)$. Pelo Lema 4.34 temos que $\mu(\cdot|A), \mu(\cdot|A^c) \in \mathcal{G}(\gamma)$ e $\mu = p\mu(\cdot|A) + (1-p)\mu(\cdot|A^c)$, logo, μ não é extremal, o que é uma contradição. \square

4.4 O MODELO DE ISING EM DUAS DIMENSÕES

Nesta seção, consideraremos o modelo de Ising com espaço de estados $\mathcal{E} \equiv \{-1, +1\}$ e com conjunto de parâmetros $S = \mathbb{Z}^2$. A medida a priori $\lambda = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_{+1} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ é a medida de contagem e a interação a considerar é definida por

$$\Phi_A(\sigma) \equiv \begin{cases} -\sigma_i\sigma_j, & \text{se } A = \{i, j\}, \|i - j\| = 1 \\ 0, & \text{outro caso.} \end{cases} \quad (170)$$

É claro que a interação Φ é invariante por flipamentos $\tau : (\omega_i)_{i \in S} \mapsto (-\omega_i)_{i \in S}$ e por translações $\theta_j : (\omega_i)_{i \in S} \mapsto (\omega_{i-j})_{i \in S}$, $j \in S$. Denotamos a configuração ω^+ como aquela cujas componentes estão formadas pelas variáveis aleatórias $\omega_i = +1$, para todo $i \in S$.

Analogamente, definimos a configuração ω^- . As medidas delta de Dirac em ω^+ e ω^- serão denotados por δ_+ e δ_- , respectivamente.

Observe, também, que Φ_A atinge seu valor mínimo em ω^+ e ω^- , para cada $A \in \mathcal{L}$. As configurações ω^+ e ω^- são chamadas **estados fundamentais** de Φ . O objetivo desta seção é verificar que os estados fundamentais ω^+ e ω^- são estáveis, no sentido de que o conjunto $\mathcal{G}(\beta\Phi)$ é atraído por cada uma das medidas δ_+ e δ_- , quando o inverso da temperatura cresce, isto é, quando $\beta \rightarrow \infty$.

Nesta seção, d denotará uma métrica, qualquer, sobre $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ e $\mathcal{G}_\Theta(\beta\Phi)$ denotará o conjunto das medidas de Gibbs invariantes por translações, para $\beta\Phi$. Isto é,

$$\mathcal{G}_\Theta(\beta\Phi) = \left\{ \mu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F}) : \theta_j \mu \equiv \mu \circ \theta_j^{-1} = \mu, \forall j \in S \right\},$$

onde $\theta_j(v) = v + j$ é uma translação em j do látice.

Denotamos $\Lambda \equiv S \cap ([M_1, N_1] \times [M_2, N_2])$, $M_1 < N_1, M_2 < N_2$ e

$$B \equiv \{ \{i, j\} \subset S : \|i - j\| = 1, \{i, j\} \cap \Lambda \neq \emptyset \}.$$

Cada aresta em $b = \{i, j\} \in B$ cruza um único segmento de linha entre dois sítios vizinhos u e v do retângulo dual

$$\Lambda^* \equiv \{M_1 - 1/2, M_1 + 1/2, \dots, N_1 + 1/2\} \times \{M_2 - 1/2, M_2 + 1/2, \dots, N_2 + 1/2\}$$

A aresta associada b^* é chamada *aresta dual* de b , isto é,

$$b^* = \{u \in \Lambda^* : |u - (i + j)/2| = 1/2\}.$$

Denotamos o conjunto das arestas duais por

$$B^* \equiv \{b^* : b \in B\} = \{ \{u, v\} \subset \Lambda^* : \|u - v\| = 1 \}.$$

Um subconjunto $c \subset B^*$ é chamado de *circuito*, se $\{ \{u^{(k-1)}, u^{(k)}\} : 1 \leq k \leq l \}$, para alguma sequência finita $(u^{(0)}, \dots, u^{(l)})$ com $u^{(l)} = u^{(0)}$, $|u^{(1)}, \dots, u^{(l)}| = l$ tem-se $\{u^{(k-1)}, u^{(k)}\} \in B^*$, para $1 \leq k \leq l$. Aqui, $|c| = l$ é chamado comprimento do circuito. Um circuito c se diz que cerca um sítio $a \in \Lambda$ se, para cada caminho $(i^{(0)}, \dots, i^{(n)})$ em S com $i^{(0)} = a, i^{(n)} \notin \Lambda$ e $\{i^{(m-1)}, i^{(m)}\} \in B, \forall 1 \leq m \leq n$, existe algum m com $\{i^{(m-1)}, i^{(m)}\}^* \in c$. Com a finalidade de enunciar o próximo lema, denotaremos por C_a o conjunto de todos os circuitos em B^* que cercam a .

Lema 4.36. *Para cada $a \in \Lambda$ e $l \geq 1$, temos*

$$|\{c \in C_a : |c| = l\}| \leq l 3^{l-1}.$$

Demonstração. Cada $c \in C_a$ com $|c| = l$ contém, no mínimo, uma das l arestas duais $\{a + (k - 1, 0), a + (k, 0)\}^*$, $k = 1, \dots, l$ a qual cruza o eixo horizontal de a à direita. Logo, em cada passo, existe, no máximo, três possíveis escolhas de anexar à seguinte aresta dual. \square

Para cada $\omega \in \Omega$ definimos

$$B^*(\omega) \equiv \{b^* : b = \{i, j\} \in B, \omega_i \neq \omega_j\}.$$

Um circuito c com $c \subset B^*(\omega)$ é chamado de *contorno* em ω .

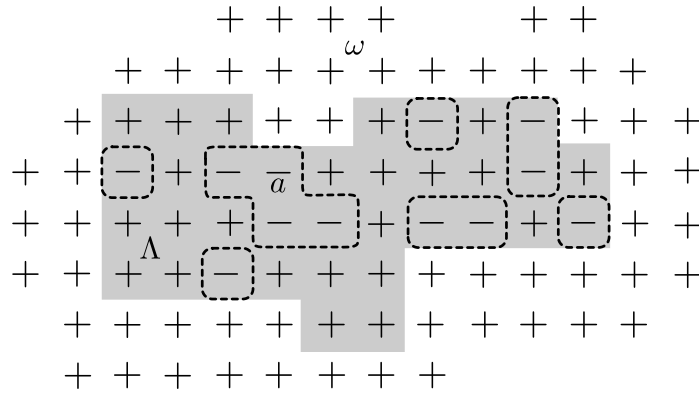


Figura 26: Existência de um circuito dual cercando um sítio a com spin $-$, dado que os spins fora da caixa Λ são $+$.

Lema 4.37. *Suponha que $\omega \in \Omega$ seja tal que $\omega_i = +1$ para todo $i \in S \setminus \Lambda$ e $\omega_a = -1$ para algum $a \in \Lambda$. Logo, existe um contorno em ω que cerca a .*

Demonstração. A prova deste lema segue intuitivamente da Figura 26 (para uma prova rigorosa deste resultado, veja [57], Lema 6.14). \square

O seguinte lema nos dá uma estimativa de contornos, esta estimativa é o coração do argumento de Peierls.

Lema 4.38. *Se $c \subset B^*$, então*

$$\gamma_{\Lambda}^{\beta\Phi}(c \subset B^*(\cdot) | \omega) \leq e^{-2\beta|c|}, \quad \forall \beta > 0 \text{ e } \omega \in \Omega.$$

Demonstração. Para cada $\omega \in \Omega$ temos

$$\begin{aligned} -H_{\Lambda}^{\Phi}(\xi) &= \sum_{\{i,j\} \in B} \xi_i \xi_j = B - \sum_{\{i,j\} \in B} (1 - \xi_i \xi_j) = |B| - 2|\{\{i, j\} \in B : \xi_i \neq \xi_j\}| \\ &= |B^*| - 2|B^*(\xi)|. \end{aligned}$$

Definindo

$$A_1 \equiv \{\xi \in \Omega : \xi_{S \setminus \Lambda} = \omega_{S \setminus \Lambda}, c \subset B^*(\xi)\}, \quad A_2 \equiv \{\xi \in \Omega : \xi_{S \setminus \Lambda} = \omega_{S \setminus \Lambda}, c \cap B^*(\xi) = \emptyset\}$$

e $\tau_c : \Omega \rightarrow \Omega$ por

$$(\tau_c \xi)_i = \begin{cases} -\xi_i, & \text{se } i \text{ está cercado por } c \\ \xi_i, & \text{outro caso,} \end{cases}$$

veja que τ_c flipa os spins que estão no interior de c . Para cada $\{i, j\} \in B$, temos

$$(\tau_c \xi)_i (\tau_c \xi)_j = \begin{cases} \xi_i \xi_j, & \text{se } \{i, j\}^* \notin c \\ -\xi_i \xi_j, & \text{se } \{i, j\}^* \in c. \end{cases}$$

Uma vez que $B^*(\tau_c \xi) \setminus B^*(\xi) = c$, tem-se

$$|c| = |B^*(\tau_c \xi)| - |B^*(\xi)|.$$

Como $\tau_c : A_2 \rightarrow A_1$ é uma bijeção, então

$$H_\Lambda^\Phi(\xi) - H_\Lambda^\Phi(\tau_c \xi) = 2|B^*(\tau_c \xi)| - 2|B^*(\xi)| = -2|c|. \quad (171)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \gamma_\Lambda^{\beta\Phi}(c \subset B^*(\cdot) | \omega) &= \sum_{\xi \in A_1} e^{-\beta H_\Lambda^\Phi(\xi)} \left(\sum_{\xi \in \Omega} e^{-\beta H_\Lambda^\Phi(\xi)} \right)^{-1} \leq \sum_{\xi \in A_1} e^{-\beta H_\Lambda^\Phi(\xi)} \left(\sum_{\xi \in A_2} e^{-\beta H_\Lambda^\Phi(\xi)} \right)^{-1} \\ &= \sum_{\xi \in A_2} e^{-\beta H_\Lambda^\Phi(\tau_c \xi)} \left(\sum_{\xi \in A_2} e^{-\beta H_\Lambda^\Phi(\xi)} \right)^{-1} \\ &= e^{-2\beta|c|}, \end{aligned}$$

onde, na desigualdade, usamos inclusão de conjuntos, na segunda igualdade, o fato de que $\tau_c : A_2 \rightarrow A_1$ é uma bijeção e, na última igualdade, o Item (171). \square

O seguinte teorema nos fornece existência de duas medidas distintas no modelo de Ising bidimensional, sempre e quando o inverso da temperatura $\beta > 0$ seja suficientemente grande. A ideia da prova deste resultado é a seguinte: primeiro, defina-se, em função da especificação $\gamma^{\beta\Phi}$, uma sequência $\nu_{N,+}^\beta$. Esta sequência tem certas propriedades de limitação superior pelo uso das estimativas dos lemas anteriores. Em seguida, deve-se mostrar a existência de um ponto de acumulação μ_+^β desta sequência. Veremos que, de fato, μ_+^β converge à medida delta de Dirac δ_+ quando $\beta \rightarrow \infty$. Por flipar a

medida μ_+^β obtém-se que os limites deste flipamento convergem à medida delta de Dirac δ_- quando $\beta \rightarrow \infty$. Note-se que as medidas δ_+ e δ_- são diferentes já que estas foram construídas como limites de flipamentos. Portanto, para β suficientemente grande, as duas medidas distintas são dadas por μ_+^β e o flipamento desta, que o denotamos por μ_-^β .

Um argumento rigoroso do que foi falado acima será exposto na continuação.

Teorema 4.39. *No modelo de Ising ferromagnético bidimensional com interação de primeiros vizinhos Φ definida em (170),*

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} d(\mathcal{G}_\Theta(\beta\Phi), \delta_+) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} d(\mathcal{G}_\Theta(\beta\Phi), \delta_-) = 0.$$

Em particular, para todo β suficientemente grande, existem duas medidas μ_-^β e $\mu_+^\beta \in \mathcal{G}_\Theta(\beta\Phi)$, com $\tau(\mu_+^\beta) = \mu_-^\beta$ e

$$\mu_-^\beta(\sigma_0) < 0 < \mu_+^\beta(\sigma_0).$$

Demonstração. Para cada $\beta > 0$ defina

$$r(\beta) \equiv \min\{1, \sum_{l \geq 1} l (3e^{-2\beta})^l\}.$$

Note que $r(\beta) \rightarrow 0$, quando $\beta \rightarrow \infty$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \gamma_\Lambda^{\beta\Phi}(\sigma_a = -1 | \omega^+) &\leq \sum_{c \in C_a} \gamma_\Lambda^{\beta\Phi}(c \subset B^*(\cdot) | \omega^+) \leq \sum_{c \in C_a} e^{-2\beta|c|} \\ &= \sum_{l \geq 1} \sum_{c \in C_a: |c|=l} e^{-2\beta|c|} \\ &\leq \sum_{l \geq 1} l 3^l e^{-2\beta l}, \end{aligned}$$

onde na primeira, segunda e terceira desigualdades usamos o Lema 4.37, o Lema 4.38 e o Lema 4.36, respectivamente. Já na igualdade usamos a seguinte decomposição $C_a = \sqcup_{\ell \geq 1} \{c \in C_a : |c| = \ell\}$. Logo, $\gamma_\Lambda^{\beta\Phi}(\sigma_a = -1 | \omega^+) \leq r(\beta)$, para cada $a \in S$, $\beta > 0$ e cada retângulo Λ em S .

Para cada $N \geq 1$, defina

$$\Lambda_N \equiv S \cap [-N, N]^2 \quad \text{e} \quad \nu_{N,+}^\beta \equiv |\Lambda_N|^{-1} \sum_{i \in \Lambda_N} \gamma_{\theta_i \Lambda_N}^{\beta\Phi}(\cdot | \omega^+).$$

Usando-se a compacidade de $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ (pois, Ω é compacto) e um argumento análogo ao Teorema 4.26, facilmente pode-se provar que $\mu_+^\beta \in \mathcal{G}(\beta\Phi)$. Em seguida, afirmamos que:

AFIRMAÇÃO 1: $\mu_+^\beta \in \mathcal{G}_\Theta(\beta\Phi)$.

De fato, para cada função local f e $j \in \mathbb{Z}^d$, veja que

$$\begin{aligned}
 |\mu_+^\beta \circ \theta_j^{-1}(f) - \mu_+^\beta(f)| &= \lim_{N \rightarrow \infty} |\Lambda_N|^{-1} \left| \sum_{i \in \Lambda_N} \left\{ \gamma_{\theta_i \Lambda_N}^{\beta \Phi}(\theta_j^{-1} f | \omega^+) - \gamma_{\theta_i \Lambda_N}^{\beta \Phi}(f | \omega^+) \right\} \right| \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} |\Lambda_N|^{-1} \left| \sum_{i \in \theta_j^{-1} \Lambda_N} \gamma_{\theta_i \Lambda_N}^{\beta \Phi}(f | \omega^+) - \sum_{i \in \Lambda_N} \gamma_{\theta_i \Lambda_N}^{\beta \Phi}(f | \omega^+) \right| \\
 &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} |\Lambda_N|^{-1} \sum_{i \in \Lambda_N \Delta \theta_j^{-1} \Lambda_N} \left| \gamma_{\theta_i \Lambda_N}^{\beta \Phi}(f | \omega^+) \right| \\
 &\leq \|f\|_\infty \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\Lambda_N \Delta \theta_j^{-1} \Lambda_N|}{|\Lambda_N|} = 0.
 \end{aligned}$$

Portanto, para cada função local f , está provado que $\mu_+^\beta \circ \theta_j^{-1}(f) = \mu_+^\beta(f)$. Finalmente, pelo Lema .36 (do Apêndice), $\mu_+^\beta \circ \theta_j^{-1}(f) = \mu_+^\beta(f)$, $\forall f \in C(\Omega)$, o que conclui a prova da afirmação. \diamond

Como $\gamma_\Lambda^{\beta \Phi}(\sigma_a = -1 | \omega^+) \leq r(\beta)$, para cada $a \in S$, $\beta > 0$ e cada retângulo Λ em S , temos $\nu_{N,+}^\beta \leq r(\beta)$, portanto,

$$\mu_+^\beta(\sigma_a = -1) \leq r(\beta), \quad \forall a \in S.$$

Se $\Lambda \in \mathcal{L}$ e f é uma função \mathcal{F}_Λ -mensurável limitada, então

$$\begin{aligned}
 |\mu_+^\beta(f) - \delta_+(f)| &\leq \mu_+^\beta(|f - f(\omega^+)|) \leq 2\|f\|_\infty \mu_+^\beta(\sigma_\Lambda \neq \omega_\Lambda^+) \\
 &\leq 2\|f\|_\infty \sum_{a \in \Lambda} \mu_+^\beta(\sigma_a = -1) \\
 &\leq 2\|f\|_\infty |\Lambda| r(\beta).
 \end{aligned}$$

Como $\lim_{\beta \rightarrow \infty} r(\beta) = 0$, temos $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mu_+^\beta = \delta_+$ no sentido fraco. Portanto,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} d(\mathcal{G}_\Theta(\beta \Phi), \delta_+) = 0.$$

Finalmente, pondo $\mu_-^\beta \equiv \tau \mu_+^\beta$, afirmamos que:

AFIRMAÇÃO 2: $\mu_-^\beta \in \mathcal{G}_\Theta(\beta \Phi)$.

De fato, desde que a interação Φ é invariante por flipamentos $\tau : (\omega_i)_{i \in S} \mapsto (-\omega_i)_{i \in S}$, temos que o Hamiltoniano é invariante por τ , implicando que a especificação $\gamma^{\beta \Phi}$

também é invariante por τ . Isto é, $(\tau\gamma^{\beta\Phi})_{\Lambda} = \gamma_{\Lambda}^{\beta\Phi}$, para todo $\Lambda \in \mathcal{L}$. Portanto, para cada função local f temos

$$\begin{aligned} (\tau\mu_{+}^{\beta})\gamma_{\Lambda}^{\beta\Phi}(f) &= \tau\mu_{+}^{\beta}(\gamma_{\Lambda}^{\beta\Phi}(f|\cdot)) = \mu_{+}^{\beta}(\gamma_{\Lambda}^{\beta\Phi}(f|\cdot) \circ \tau) = \int \mu_{+}^{\beta}(d\omega) \gamma_{\Lambda}^{\beta\Phi}(f|\tau\omega) \\ &= \int \mu_{+}^{\beta}(d\omega) \gamma_{\tau^{-1}\Lambda}^{\beta\Phi}(\tau^{-1}f|\omega) \\ &= \mu_{+}^{\beta}(\gamma_{\tau^{-1}\Lambda}^{\beta\Phi}(\tau^{-1}f|\cdot)) \\ &= \mu_{+}^{\beta}\gamma_{\tau^{-1}\Lambda}^{\beta\Phi}(\tau^{-1}f) = \mu_{+}^{\beta}(\tau^{-1}f) = (\tau\mu_{+}^{\beta})(f), \end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade, usamos a caracterização de medida τ -invariante (veja Apêndice, Lema .31). No entanto, na última igualdade usamos a Definição .4 (do Apêndice) de medida τ -invariante. Isto prova que $\mu_{-}^{\beta} \in \mathcal{G}(\beta\Phi)$. Por outro lado, desde que cada flipamento τ preserva Φ e comuta com cada translação θ , temos $\mu_{-}^{\beta} \in \mathcal{G}_{\Theta}(\beta\Phi)$.

◇

Como τ leva funções locais em funções locais (portanto, contínuas), para toda função local f , temos

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mu_{-}^{\beta}(f) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} (\tau\mu_{+}^{\beta})(f) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mu_{+}^{\beta}(\tau^{-1}f) = \delta_{+}(\tau^{-1}f) = (\tau\delta_{+})(f) = \delta_{-}(f),$$

onde, na segunda e quarta igualdade, usamos a Definição .4 (do Apêndice) de medida τ -invariante. Usando o Lema que nos garante unicidade de medidas sobre todo \mathcal{F} (veja Apêndice, Lema .36), temos

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mu_{-}^{\beta} = \delta_{-}.$$

Implicando que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} d(\mathcal{G}_{\Theta}(\beta\Phi), \delta_{-}) = 0.$$

Se β é suficientemente grande tal que $r(\beta) < 1/2$, tem-se $\mu_{+}^{\beta}(\sigma_0 = -1) < 1/2$, implicando que $1 - 2\mu_{+}^{\beta}(\sigma_0 = -1) > 0$. Observe, também, que

$$\mu_{-}^{\beta}(\sigma_0) = (\tau\mu_{+}^{\beta})(\sigma_0) = \mu_{+}^{\beta}(\tau^{-1}\sigma_0) = -\mu_{+}^{\beta}(\sigma_0).$$

Juntando estes fatos, temos

$$-\mu_{-}^{\beta}(\sigma_0) = \mu_{+}^{\beta}(\sigma_0) = \mu_{+}^{\beta}(\sigma_0 = +1) - \mu_{+}^{\beta}(\sigma_0 = -1) = 1 - 2\mu_{+}^{\beta}(\sigma_0 = -1) > 0,$$

concluindo-se a demonstração. □

Observação 4.40. Como δ_{+} e δ_{-} são distintos, temos que μ_{+}^{β} e μ_{-}^{β} são medidas de probabilidade distintas, para β suficientemente grande. Daí, $|\mathcal{G}(\beta\Phi)| > 1$, para β suficientemente grande.

Tabela 1: Alguns resultados para o modelo de Ising em duas dimensões

$\mu_+^\beta \equiv \lim_{\Lambda \uparrow S} \gamma_\Lambda^{\beta\Phi}(\cdot \omega^+) \in \mathcal{G}_\Theta(\beta\Phi), \forall \beta \geq 0$
$\mu_+^\beta(\sigma_0) \geq \mu(\sigma_0), \forall \mu \in \mathcal{G}(\beta\Phi)$
$ \mathcal{G}(\beta\Phi) > 1 \Leftrightarrow \mu_+^\beta(\sigma_0) > 0; [93, 104]$
$\mu_+^\beta(\sigma_0) \geq 0$ e é não decrescente em β ; [62]
$\exists 0 \leq \beta_c \leq \infty : \mathcal{G}(\beta\Phi) \begin{cases} = 1, & \text{se } \beta < \beta_c \\ > 1, & \text{se } \beta > \beta_c \end{cases}$
$\beta_c = \frac{1}{2} \sinh^{-1}(1) = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}) \wedge \mu_+^\beta(\sigma_0) = [1 - (\sinh(2\beta))^{-4}]^{1/8}, \text{ se } \beta \geq \beta_c$
$\mathcal{G}(\beta\Phi) = [\mu_-^\beta, \mu_+^\beta], \forall \beta > \beta_c; [1, 2]$

4.5 UNICIDADE

Nesta seção, daremos um caminho para assegurar que o conjunto $\mathcal{G}(\gamma)$ contém, no mínimo, um elemento, mais que isso, daremos condições suficientes sobre uma especificação γ para garantir que $|\mathcal{G}(\gamma)| = 1$ sobre certo espaço de parâmetros. Se a unicidade se mantém no sistema, isso é equivalente a interpretar que o sistema não sente os efeitos das condições de fronteira, portanto, um desalinhamento nos spins deve de aparecer (veja Lema 4.49 abaixo).

Como desejamos provar unicidade de medidas, precisamos medir proximidade de medidas. Uma das formas de medir proximidade de medidas (de probabilidade) é através da *distância de variação total*.

Definição 4.26 (Distância de variação total). *Seja (Ω, \mathcal{F}) um espaço mensurável. Dadas quaisquer duas medidas finitas $\mu, \nu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty)$. Definimos a distância de variação total entre μ e ν por*

$$\|\mu - \nu\|_{\text{VT}} = 2 \sup_{A \in \mathcal{F}} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

O seguinte teorema foi extraído de [25] e é válido em contextos mais gerais, a saber quando o espaço de estados \mathcal{E} é um espaço métrico compacto.

Teorema 4.41 (Teorema da unicidade de Dobrushin). *Seja (\mathcal{E}, d) um espaço métrico finito e \mathcal{E} a σ -álgebra de Borel de \mathcal{E} . Considere $\Omega = \mathcal{E}^S$ e $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ uma especificação quase-local em (Ω, \mathcal{F}) . Para cada $i, j \in S$ defina*

$$\rho_{i,j} \equiv \frac{1}{2} \sup_{\substack{\omega, \eta \in \Omega \\ \omega_k = \eta_k, \forall k \neq i}} \left\| \gamma_{\{j\}}(\cdot | \omega) - \gamma_{\{j\}}(\cdot | \eta) \right\|_{\text{VT}}.$$

Se a condição de Dobrushin

$$\sup_{j \in S} \sum_{i \in S} \rho_{i,j} < 1$$

é satisfeita, então $|\mathcal{G}(\gamma)| = 1$.

Demonstração. Uma das utilidades que a quase-localidade da especificação γ tem nesta prova é que a mencionada hipótese garante que o conjunto das medidas de Gibbs $\mathcal{G}(\gamma)$ seja não vazio (veja Teorema 4.26).

Antes de começar com a prova, introduzimos algumas notações. Para cada função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definimos a *variação total* no ponto $i \in S$ por

$$\delta_i(f) \equiv \sup_{\substack{\omega, \eta \in \Omega \\ \omega_k = \eta_k, \forall k \neq i}} |f(\omega) - f(\eta)|$$

e sua *variação total* como

$$\Delta(f) \equiv \sum_{i \in S} \delta_i(f).$$

Daqui em diante consideramos o espaço

$$\mathcal{T} \equiv \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \in C(\Omega) \text{ e } \Delta(f) < \infty\}.$$

Se $g \in B_{\text{loc}}(\Omega)$, então existe $\Lambda \in \mathcal{L}$ tal que g é \mathcal{F}_Λ -mensurável limitada, logo, existe alguma constante $C > 0$ tal que $\Delta(g) \leq \sum_{i \in \Lambda} \delta_i(g) \leq C|\Lambda| < \infty$. Como toda função local é uniformemente contínua, temos $B_{\text{loc}}(\Omega) \subset \mathcal{T}$. Mas pela Definição 4.21, o conjunto $B_{\text{loc}}(\Omega)$ é denso em $C(\Omega)$, logo, temos que \mathcal{T} é denso em $C(\Omega)$ com respeito à norma $\|\cdot\|_\infty$.

Seja i_1, i_2, \dots uma enumeração dos pontos de S (fixada na demonstração). Para cada $f \in C(\Omega)$, definimos a aplicação $\mathbb{T} : C(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(f) : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \eta &\longmapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{\{i_1\}} \cdots \gamma_{\{i_n\}}(f | \eta). \end{aligned} \tag{172}$$

AFIRMAÇÃO 1: A aplicação $T(f)$ está definida para toda função $f \in C(\Omega)$.

De fato, primeiro provaremos que para cada sequência de Cauchy $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C_{\text{qloc}}(\Omega)$ a sequência $(\mathbb{T}(f_n)(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ também é de Cauchy em $C_{\text{qloc}}(\Omega)$. Para isso, tome a função $f \in C_{\text{qloc}}(\Omega)$ e a sequência de Cauchy $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C_{\text{qloc}}(\Omega)$ tal que $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Esta convergência pode ser tomada uma vez que o espaço $(C_{\text{qloc}}(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.

Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m, n \geq n_0$ tem-se

$$|\mathbb{T}(f_n)(\omega) - \mathbb{T}(f_m)(\omega)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\gamma_{\{i_1\}} \cdots \gamma_{\{i_k\}}(f_n - f_m)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon.$$

Desta forma, para cada $\omega \in \Omega$ podemos definir

$$\mathbb{T}(f)(\omega) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{T}(f_n)(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (173)$$

Note que $\mathbb{T}(f)$ em (173) está bem definido, isto é, não depende da escolha da sequência de Cauchy usada. Na direção de provar este fato, suponha que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são duas sequências de Cauchy em $C_{\text{qloc}}(\Omega)$ tal que $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ e $\|g_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Logo,

$$\begin{aligned} |\mathbb{T}(f_n)(\omega) - \mathbb{T}(g_n)(\omega)| &= |\gamma_{\{i_1\}} \cdots \gamma_{\{i_k\}}(f_n - g_n)| \\ &\leq \|f_n - g_n\|_\infty \\ &\leq \|f_n - f\|_\infty + \|g_n - f\|_\infty \\ &\rightarrow 0, \end{aligned} \quad (174)$$

quando $n \rightarrow \infty$. Daí, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{T}(f_n)(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{T}(g_n)(\omega)$, portanto, $\mathbb{T}(f)$ em (173) está bem definido.

Por outro lado, como $(C_{\text{qloc}}(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach e $(\mathbb{T}(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy neste espaço, então $\mathbb{T}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{T}(f_n) \in C_{\text{qloc}}(\Omega)$. Usando que $C_{\text{qloc}}(\Omega) = C(\Omega)$ (veja Lema 4.18), temos que $\mathbb{T}(f)$ está definida para cada $f \in C(\Omega)$, encerrando-se a prova da afirmação. \diamond

Como γ é uma especificação quase-local, pelo Teorema 4.26 $|\mathcal{G}(\gamma)| \neq \emptyset$. Seja $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Apêndice, Teorema .23) e pelo fato que $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$, para cada $f \in C(\Omega)$, temos

$$\mu(\mathbb{T}(f)) = \mu\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{\{i_1\}} \cdots \gamma_{\{i_n\}}(f|\cdot)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\gamma_{\{i_1\}} \cdots \gamma_{\{i_n\}}(f|\cdot)) = \mu(f). \quad (175)$$

O próximo passo é mostrar que \mathbb{T} é uma contração com respeito a seminorma Δ , sempre que $\sup_{j \in S} \sum_{i \in S} \rho_{ij} \leq \alpha < 1$. Isto é, mostraremos que $\Delta(\mathbb{T}(f)) \leq \Delta(f)$, $\forall f \in \mathcal{T}$. Antes disso, apresentaremos dois lemas que serão fundamentais na prova deste teorema.

Lema 4.42. Se $f \in \mathcal{T}$, então

- i) $\delta_i(\gamma_{\{i\}}(f|\cdot)) = 0$;
- ii) Se $i \neq j$, então $\delta_i(\gamma_{\{j\}}(f|\cdot)) \leq \delta_i(f) + \rho_{i,j} \delta_j(f)$.

Demonstração. Como por definição, $\gamma_{\{i\}}(f|\cdot)$ é $\mathcal{F}_{\{i\}^c}$ -mensurável, ela é constante em i . Portanto, $\delta_i(\gamma_{\{i\}}(f|\cdot)) = 0$. Se $i \neq j$, tem-se

$$\begin{aligned} \delta_i(\gamma_{\{j\}}(f|\cdot)) &= \sup_{\substack{\omega, \eta \in \Omega \\ \omega_k = \eta_k, \forall k \neq i}} \left| \gamma_{\{j\}}(f|\omega) - \gamma_{\{j\}}(f|\eta) \right| \\ &= \sup_{\substack{\omega, \eta \in \Omega \\ \omega_k = \eta_k, \forall k \neq i}} \left| \int_{\Omega} \gamma_{\{j\}}(d\sigma|\omega) f(\sigma_j \omega_{\{j\}^c}) - \int_{\Omega} \gamma_{\{j\}}(d\sigma|\eta) f(\sigma_j \eta_{\{j\}^c}) \right| \\ &\leq \sup_{\substack{\omega, \eta \in \Omega \\ \omega_k = \eta_k, \forall k \neq i}} \left| \int_{\Omega} \gamma_{\{j\}}(d\sigma|\omega) \left[f(\sigma_j \omega_{\{j\}^c}) - f(\sigma_j \eta_{\{j\}^c}) \right] \right| \\ &\quad + \sup_{\substack{\omega, \eta \in \Omega \\ \omega_k = \eta_k, \forall k \neq i}} \left| \int_{\Omega} \gamma_{\{j\}}(d\sigma|\eta) f(\sigma_j \eta_{\{j\}^c}) - \int_{\Omega} \gamma_{\{j\}}(d\sigma|\omega) f(\sigma_j \eta_{\{j\}^c}) \right|. \end{aligned}$$

Pela definição de $\delta_i(f)$ e pela desigualdade triangular, a desigualdade acima é

$$\begin{aligned} &\leq \delta_i(f) + \sup_{\substack{\omega, \eta \in \Omega \\ \omega_k = \eta_k, \forall k \neq i}} \left| \int_{\Omega} \gamma_{\{j\}}(d\sigma|\eta) \left[f(\sigma_j \eta_{\{j\}^c}) - \inf_{\tau_j \in \mathcal{E}} f(\tau_j \eta_{\{j\}^c}) \right] \right| \\ &\quad - \int_{\Omega} \gamma_{\{j\}}(d\sigma|\omega) \left[f(\sigma_j \eta_{\{j\}^c}) - \inf_{\tau_j \in \mathcal{E}} f(\tau_j \eta_{\{j\}^c}) \right] \Big| \\ &\leq \delta_i(f) + \frac{1}{2} \sup_{\substack{\omega, \eta \in \Omega \\ \omega_k = \eta_k, \forall k \neq i}} \left\| \gamma_{\{j\}}(\cdot|\eta) - \gamma_{\{j\}}(\cdot|\omega) \right\|_{\text{VT}} \delta_j(f) \\ &= \delta_i(f) + \rho_{i,j} \delta_j(f). \end{aligned}$$

□

Lema 4.43. Se $f \in \mathcal{T}$ e $\sup_{j \in S} \sum_{i \in S} \rho_{i,j} \leq \alpha < 1$, então para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\Delta(\gamma_{\{i_1\}} \cdots \gamma_{\{i_n\}}(f|\cdot)) \leq \alpha \sum_{k=1}^n \delta_{i_k}(f) + \sum_{k \geq n+1} \delta_{i_k}(f).$$

Demonstração. Procedemos por indução sobre n . Para $n = 1$ vale que

$$\Delta(\gamma_{\{i_1\}}(f|\cdot)) = \sum_{i \in S} \delta_i(\gamma_{\{i_1\}}(f|\cdot)) = \delta_{i_1}(\gamma_{\{i_1\}}(f|\cdot)) + \sum_{k \geq 2} \delta_{\{i_k\}}(\gamma_{\{i_1\}}(f|\cdot)).$$

Como $\delta_{i_1}(\gamma_{\{i_1\}}(f|\cdot)) = 0$ e $\sum_{k \geq 2} \delta_{\{i_k\}}(\gamma_{\{i_1\}}(f|\cdot)) \leq \delta_{i_k}(f) + \rho_{i_k, i_1} \delta_{i_1}(f)$, pelo Lema 4.42 e pela hipótese, a igualdade acima é

$$\leq \sum_{k \geq 2} [\delta_{i_k}(f) + \rho_{i_k, i_1} \delta_{i_1}(f)] \leq \alpha \delta_{i_1}(f) + \sum_{k \geq 2} \delta_{i_k}(f).$$

Para $n = k$, assumamos que a desigualdade é válida. Usando a hipótese de indução, para $n = k + 1$ tem-se

$$\Delta(\gamma_{\{i_1\}} \cdots \gamma_{\{i_n\}} \gamma_{\{i_{n+1}\}}(f|\cdot)) \leq \alpha \sum_{k=1}^n \delta_{i_k}(\gamma_{\{i_{n+1}\}}(f|\cdot)) + \sum_{k \geq n+1} \delta_{i_k}(\gamma_{\{i_{n+1}\}}(f|\cdot)).$$

Usando duas vezes seguidas o Lema 4.42, o lado direito da expressão acima é

$$\begin{aligned} &= \alpha \sum_{k=1}^n \delta_{i_k}(\gamma_{\{i_{n+1}\}}(f|\cdot)) + \sum_{k \geq n+2} \delta_{i_k}(\gamma_{\{i_{n+1}\}}(f|\cdot)) \\ &\leq \alpha \sum_{k=1}^n [\delta_{i_k}(f) + \rho_{i_k, i_{n+1}} \delta_{i_{n+1}}(f)] + \sum_{k \geq n+2} [\delta_{i_k}(f) + \rho_{i_k, i_{n+1}} \delta_{i_{n+1}}(f)]. \end{aligned}$$

Como $\alpha < 1$ e $\sum_{k \geq 1} \rho_{i_k, i_{n+1}} \geq \alpha$, a expressão acima é limitada por

$$\begin{aligned} &\leq \alpha \sum_{k=1}^n \delta_{i_k}(f) + \sum_{k \geq 1} \rho_{i_k, i_{n+1}} \delta_{i_{n+1}}(f) + \sum_{k \geq n+2} \delta_{i_k}(f) \\ &\leq \alpha \sum_{k=1}^n \delta_{i_k}(f) + \delta_{i_{n+1}}(f) + \sum_{k \geq n+2} \delta_{i_k}(f) \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{n+1} \delta_{i_k}(f) + \sum_{k \geq n+2} \delta_{i_k}(f), \end{aligned}$$

de onde se conclui a prova. □

Continuando com a prova do teorema, com ajuda do lema acima afirmamos que:

AFIRMAÇÃO 2: \mathbb{T} é uma contração.

De fato, desde que $\alpha < 1$, por hipóteses temos

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbb{T}f) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(\gamma_{\{i_1\}} \cdots \gamma_{\{i_n\}}(f|\cdot)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\alpha \sum_{k=1}^n \delta_{i_k}(f) + \sum_{k \geq n+1} \delta_{i_k}(f) \right] \\ &= \alpha \sum_{n \geq 1} \delta_{i_n}(f) \\ &= \alpha \Delta(f), \end{aligned} \tag{176}$$

onde, na segunda desigualdade, usamos o Lema 4.42 e, na penúltima igualdade, o fato de que $\Delta(f) = \sum_{k \geq 1} \delta_{i_k}(f) < \infty$. Portanto, \mathbb{T} é uma contração. \diamond

Por outro lado, afirmamos que:

AFIRMAÇÃO 3: se $\Delta(\mathbb{T}(f)) = 0$, então f é constante, para todo $f \in \mathcal{T}$.

De fato, como $f \in C(\Omega)$ e Ω é compacto, então existe $\Lambda \in \mathcal{L}$ e $\omega^+, \omega^- \in \Omega$ com $\omega_{\Lambda^c}^+ = \omega_{\Lambda^c}^-$ tais que

$$\sup_{\omega \in \Omega} f(\omega) \leq f(\omega^+) + \epsilon \quad \text{e} \quad f(\omega^-) - \epsilon \leq \inf_{\omega \in \Omega} f(\omega), \quad \forall \epsilon > 0.$$

Daí, por uma expansão telescópica, temos

$$\sup_{\omega \in \Omega} f(\omega) - \inf_{\omega \in \Omega} f(\omega) - 2\epsilon \leq f(\omega^+) - f(\omega^-) \leq \sum_{i \in \Lambda} \delta_i(f) \leq \Delta(f).$$

Finalmente, fazendo $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\sup_{\omega \in \Omega} f(\omega) - \inf_{\omega \in \Omega} f(\omega) \leq \Delta(f), \quad (177)$$

obtemos que f é constante. \diamond

Usaremos os fatos mencionados anteriormente para finalizar a prova do Teorema de Dobrushin. Se $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$, por (175) temos

$$\mu(f) = \mu(\mathbb{T}(f)) = \mu(\mathbb{T}^n(f)). \quad (178)$$

Pela desigualdade (176), iterativamente temos $\Delta(\mathbb{T}^n(f)) \leq \alpha^n \Delta(f)$, $\alpha < 1$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(\mathbb{T}^n(f)) = 0. \quad (179)$$

Para cada $\omega \in \Omega$ afirmamos que:

AFIRMAÇÃO 4: existe $\mathbb{T}^\infty(f)(\omega) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{T}^n(f)(\omega)$, além do mais, $\mathbb{T}^\infty(f)(\omega) \equiv c(f)$ é constante, para todo $f \in \mathcal{T}$.

De fato, para cada $f \in \mathcal{T}$, $\mathbb{T}(f)(\omega) \leq \sup_{\omega \in \Omega} f(\omega)$, o que implica que

$$\sup_{\omega \in \Omega} \mathbb{T}(f)(\omega) \leq \sup_{\omega \in \Omega} f(\omega).$$

Iterativamente, para cada $m > n$ em \mathbb{N} temos

$$\sup_{\omega \in \Omega} \mathbb{T}^m f(\omega) \leq \sup_{\omega \in \Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega) \leq \sup_{\omega \in \Omega} f(\omega).$$

Analogamente, para cada $m > n$ em \mathbb{N} , prova-se que

$$\inf_{\omega \in \Omega} f(\omega) \leq \inf_{\omega \in \Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega) \leq \inf_{\omega \in \Omega} \mathbb{T}^m f(\omega).$$

Portanto, as sequências $\{\sup_{\omega \in \Omega} \mathbb{T}^m f(\omega) : m \in \mathbb{N}\}$ e $\{\inf_{\omega \in \Omega} \mathbb{T}^m f(\omega) : m \in \mathbb{N}\}$ são monótonas e limitadas, logo, convergem. Denotemos estes limites por

$$\mathbb{T}_+^\infty(f) \equiv \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{\omega \in \Omega} \mathbb{T}^m f(\omega) \quad \text{e} \quad \mathbb{T}_-^\infty(f) \equiv \lim_{m \rightarrow \infty} \inf_{\omega \in \Omega} \mathbb{T}^m f(\omega).$$

Como γ é quase-local, então $\mathbb{T}^n(f)$ é contínua. Logo, aplicando (177) e (179) temos

$$\sup_{\omega \in \Omega} \mathbb{T}^n f(\omega) - \inf_{\omega \in \Omega} \mathbb{T}^n f(\omega) \leq \Delta(\mathbb{T}^n(f)) \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Assim, $\mathbb{T}^\infty(f) \equiv \mathbb{T}_-^\infty(f) = \mathbb{T}_+^\infty(f)$.

Por outro lado, provaremos que o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{T}^n(f)(\omega)$ é constante. Para isso, veja que para cada n se satisfaz

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{T}^n(f)(\omega) - \frac{1}{2} \left[\sup_{\omega \in \Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega) + \inf_{\omega \in \Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega) \right] \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left| \mathbb{T}^n(f)(\omega) - \sup_{\omega \in \Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega) \right| + \frac{1}{2} \left| \mathbb{T}^n(f)(\omega) - \inf_{\omega \in \Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega) \right| \\ & = \frac{1}{2} \left(\sup_{\omega \in \Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega) - \mathbb{T}^n(f)(\omega) \right) + \frac{1}{2} \left(\mathbb{T}^n(f)(\omega) - \inf_{\omega \in \Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega) \right) \\ & = \frac{1}{2} \left(\sup_{\omega \in \Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega) - \inf_{\omega \in \Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega) \right). \end{aligned}$$

Desde que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\omega \in \Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\omega \in \Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega) = \mathbb{T}^\infty(f)$, fazendo $n \rightarrow \infty$ na desigualdade acima, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{T}^n(f)(\omega) = \mathbb{T}^\infty(f)$, o que conclui a prova da afirmação. \diamond

Finalmente, pelo Teorema da Convergência Dominada e por (178) temos

$$\mu(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\mathbb{T}^n(f)) = \mu(\mathbb{T}^\infty(f)) = \mathbb{T}^\infty(f),$$

para cada $f \in \mathcal{T}$ e para todo $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$. Como \mathcal{T} é denso em $C(\Omega)$ e Ω é um espaço métrico compacto, $\mu(f) = \text{constante} \forall f \in C_b(\Omega, \mathcal{F})$. Daí, pelo Teorema de Riesz-Markov (veja Apêndice, Teorema .34) concluímos que $|\mathcal{G}(\gamma)| = 1$. \square

O próximo exemplo foi extraído de [53], Exercício 6.5.2, p. 249. Pela Proposição .37 do Apêndice, veja que

$$\|\gamma_{\{i\}}(\cdot|\omega) - \gamma_{\{i\}}(\cdot|\omega')\|_{\text{VT}} = \sum_{\omega_i = \pm 1} |\gamma_{\{i\}}(\omega_i|\omega) - \gamma_{\{i\}}(\omega_i|\omega')|.$$

Exemplo 4.20 (Modelo de Ising de primeiros vizinhos). Seja $\mathcal{E} = \{-1, +1\}$ e $\lambda = \frac{1}{2}\delta_{+1} + \frac{1}{2}\delta_{-1}$ a medida a priori. Considere a interação $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ em $(\mathcal{E}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{F})$, $d \geq 1$ dada por

$$\Phi_\Lambda(\sigma) = \begin{cases} J\sigma_i\sigma_j, & \text{se } \Lambda = \{i, j\} \text{ e } \|i - j\| = 1 \\ h\sigma_i, & \text{se } \Lambda = \{i\} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $h > 0$ é o campo magnético externo, $J > 0$ a constante de acoplamento. Mostraremos que, para h suficientemente grande, $|\mathcal{G}(\beta\Phi)| = 1$, onde $\beta > 0$ é o inverso da temperatura.

De fato, primeiro consideremos especificação Gibbsiana $\gamma_h^{\beta\Phi}$ (veja Definição 4.16), onde

$$\gamma_{\Lambda, h}^{\beta\Phi}(A|\omega) = \frac{1}{Z_\Lambda^{\beta\Phi}(\omega)} \int_{\mathcal{E}^\Lambda} \lambda^\Lambda(d\xi) e^{-H_\Lambda^{\beta\Phi}(\xi\omega_{S \setminus \Lambda})} \mathbb{1}_A(\xi\omega_{S \setminus \Lambda}),$$

para cada $A \in \mathcal{F}$. Denotamos a configuração ω^- como aquela cujas componentes estão formadas pelas variáveis aleatórias $\omega_i = -1$ para todo $i \in S$. Pela teoria geral das especificações Gibbsianas, veja que a seguinte estimativa é válida

$$\begin{aligned} 1 \geq \gamma_{\{j\}, h}^{\beta\Phi}(\omega_j = +1|\omega) &\geq \gamma_{\{j\}, h}^{\beta\Phi}(\omega_j = +1|\omega^-) = \frac{e^{\beta(h-2dJ)}}{e^{\beta(h-2dJ)} + e^{\beta(-h+2dJ)}} \\ &= \frac{1}{1 + e^{2\beta(-h+2dJ)}}. \end{aligned} \quad (180)$$

Substituindo a identidade $\gamma_{\{j\}, h}^{\beta\Phi}(\omega_j = +1|\omega) = 1 - \gamma_{\{j\}, h}^{\beta\Phi}(\omega_j = -1|\omega)$ em (180), obtemos

$$0 \leq \gamma_{\{j\}, h}^{\beta\Phi}(\omega_j = -1|\omega) \leq \gamma_{\{j\}, h}^{\beta\Phi}(\omega_j = -1|\omega^-) = \frac{1}{1 + e^{2\beta(h-2dJ)}}. \quad (181)$$

Por usar (180) e (181) segue que

$$\begin{aligned} |\gamma_{\{j\}, h}^{\beta\Phi}(\omega_j = +1|\omega) - \gamma_{\{j\}, h}^{\beta\Phi}(\omega_j = +1|\omega')| &\leq \frac{1}{1 + e^{2\beta(h-2dJ)}}, \\ |\gamma_{\{j\}, h}^{\beta\Phi}(\omega_j = -1|\omega) - \gamma_{\{j\}, h}^{\beta\Phi}(\omega_j = -1|\omega')| &\leq \frac{1}{1 + e^{2\beta(h-2dJ)}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|\gamma_{\{j\}, h}^{\beta\Phi}(\cdot|\omega) - \gamma_{\{j\}, h}^{\beta\Phi}(\cdot|\omega')\|_{\text{VT}} &= \sum_{\omega_j = \pm 1} |\gamma_{\{j\}, h}^{\beta\Phi}(\omega_j|\omega) - \gamma_{\{j\}, h}^{\beta\Phi}(\omega_j|\omega')| \\ &\leq \frac{2}{1 + e^{2\beta(h-2dJ)}}. \end{aligned} \quad (182)$$

Seja $B_j \equiv \{k \in \mathbb{Z}^d : \|k - j\| = 1\}$ o conjunto dos primeiros vizinhos de j . Desde que $\|\gamma_{\{j\},h}^{\beta\Phi}(\cdot|\omega) - \gamma_{\{j\},h}^{\beta\Phi}(\cdot|\omega')\|_{\text{VT}} = 0$, quando $\omega_k = \omega'_k \forall k \in B_j$, temos

$$\begin{aligned} \rho_{i,j} &= \frac{1}{2} \sup_{\substack{\omega, \eta \in \Omega \\ \omega_k = \eta_k, \forall k \neq i}} \left\| \gamma_{\{j\},h}^{\beta\Phi}(\cdot|\omega) - \gamma_{\{j\},h}^{\beta\Phi}(\cdot|\omega') \right\|_{\text{VT}} \\ &= \frac{1}{2} \sup_{\substack{\omega, \eta \in \Omega \\ \omega_k = \eta_k, \forall k \in B_j^c \setminus \{i\}}} \left\| \gamma_{\{j\},h}^{\beta\Phi}(\cdot|\omega) - \gamma_{\{j\},h}^{\beta\Phi}(\cdot|\omega') \right\|_{\text{VT}}. \end{aligned}$$

Usando (182) e esta última igualdade, temos

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}^d} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \rho_{i,j} \leq \frac{1}{1 + e^{2\beta(h-2dJ)}} \sup_{j \in \mathbb{Z}^d} \sup_{i \neq j} \sum_{\Lambda \supset \{i,j\}} 1.$$

Como $\sum_{i \neq j} \sum_{\Lambda \supset \{i,j\}} 1$ representa o número de primeiros vizinhos de j em \mathbb{Z}^d que é $= 2d$, o termo do lado direito da desigualdade acima fica

$$= \frac{2d}{1 + e^{2\beta(h-2dJ)}}.$$

Isto é, temos provado que

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}^d} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \rho_{i,j} \leq \frac{2d}{1 + e^{2\beta(h-2dJ)}}.$$

Daí, para todo $h > \frac{\log(2d-1)+4d\beta J}{2\beta}$ a condição de Dobrushin do Teorema 4.41 é satisfeita. Portanto, para todo $h > \frac{\log(2d-1)+4d\beta J}{2\beta}$ temos $|\mathcal{G}(\beta\Phi)| = 1$.

Em contraste com esse resultado, sabemos que, no modelo de Ising ferromagnético sobre \mathbb{Z}^d com campo constante não nulo, o Teorema de Lee-Yang [87] e as Desigualdades GHS estabelecem a analiticidade da energia livre com respeito ao campo externo h . Isto é, a unicidade se mantém para todo $h \neq 0$.

CRITÉRIO DE DOBRUSHIN

Em seguida, daremos um critério de unicidade para especificações Gibbsianas. A ideia desta subseção é mostrar como podemos usar o Teorema de Dobrushin para concluir que $|\mathcal{G}(\beta\Phi)| = 1$ onde Φ é uma interação regular e $\mathcal{G}(\beta\Phi) \neq \emptyset$. Na parte final desta seção apresentaremos alguns exemplos de aplicação.

Lema 4.44. *Seja (Ω, \mathcal{F}) um espaço mensurável, $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty)$ duas medidas e $\mu_1(\Omega) = 1 = \mu_2(\Omega)$. Se existe uma medida $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty)$ tal que $\mu \ll \mu_1$ e $\mu \ll \mu_2$ e se $g_1 = \frac{d\mu_1}{d\mu}$, $g_2 = \frac{d\mu_2}{d\mu}$, então*

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_{\text{VT}} = \int_{\Omega} \mu(d\omega) |g_1 - g_2|(\omega).$$

Demonstração. Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathcal{F} -mensurável limitada e $m \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\begin{aligned} \left| \int \mu_1(d\omega) f(\omega) - \int \mu_2(d\omega) f(\omega) \right| &= \left| \int \mu(d\omega) [(f(\omega) - m)(g_1(\omega) - g_2(\omega))] \right| \\ &\leq \|f - m\|_{\infty} \cdot \int \mu(d\omega) |g_1(\omega) - g_2(\omega)|, \end{aligned}$$

onde a igualdade é atingida se

$$f - m = \text{sign}(g_1 - g_2) \|f - m\|_{\infty}. \quad (183)$$

Fazendo $f = \chi_F$, com $F \in \mathcal{F}$ e $m = 1/2$ na desigualdade acima, veja que

$$|\mu_1(F) - \mu_2(F)| \leq \|f - m\|_{\infty} \cdot \int \mu(d\omega) |g_1(\omega) - g_2(\omega)| = \frac{1}{2} \int \mu(d\omega) |g_1(\omega) - g_2(\omega)|.$$

Tomando o supremo sobre todo evento $F \in \mathcal{F}$ temos

$$\sup_{F \in \mathcal{F}} |\mu_1(F) - \mu_2(F)| \leq \frac{1}{2} \int \mu(d\omega) |g_1(\omega) - g_2(\omega)|.$$

Observe que se $G = \{\omega : g_1(\omega) > g_2(\omega)\}$ tem-se

$$\chi_G - 1/2 = (1/2) \text{sign}(g_1 - g_2) = \text{sign}(g_1 - g_2) \|\chi_G - 1/2\|_{\infty}$$

e, assim, (183) é satisfeita com $m = 1/2$. Logo, por definição de supremo temos

$$\sup_{F \in \mathcal{F}} |\mu_1(F) - \mu_2(F)| = \frac{1}{2} \int \mu(d\omega) |g_1 - g_2|(\omega),$$

provando-se o que se desejava. □

Teorema 4.45 (Critério de unicidade para especificações Gibbsianas). *Seja $(\mathcal{E}, \mathcal{E}, \nu)$ um espaço de probabilidade métrico e finito, $\Omega = \mathcal{E}^S$ e $\Phi = (\Phi_A)_{A \in \mathcal{L}}$ uma interação regular definida em (Ω, \mathcal{F}) . Considere o Hamiltoniano no volume Λ dado por*

$$H_{\Lambda}(\sigma) = \sum_{\substack{A \in \mathcal{L} \\ A \cap \Lambda \neq \emptyset}} \Phi_A(\sigma)$$

e $\gamma^\Phi = (\gamma_\Lambda^\Phi)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ uma especificação Gibbsiana definida por

$$\gamma_\Lambda^\Phi(A|\omega) = \frac{1}{Z_\Lambda^\Phi(\omega)} \int_{\mathcal{E}^\Lambda} \lambda^\Lambda(d\xi) e^{-H_\Lambda^\Phi(\xi\omega_{S \setminus \Lambda})} \mathbb{1}_A(\xi\omega_{S \setminus \Lambda}).$$

Para todo $\beta > 0$ satisfazendo

$$\sup_{i \in S} \sum_{A \ni i} (|A| - 1) \|\Phi_A\|_\infty < \frac{1}{\beta},$$

temos $|\mathcal{G}(\beta\Phi)| = 1$.

Demonstração. Seja $i \neq j$ em S e $\omega, \eta \in \Omega$ tal que $\omega_{\{i\}^c} = \eta_{\{i\}^c}$. Defina as seguintes aplicações

$$\begin{aligned} f_0: \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} & f_1: \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \sigma &\mapsto -\beta H_{\{j\}}(\sigma_j \omega_{\{j\}^c}) & \sigma &\mapsto -\beta H_{\{j\}}(\sigma_j \eta_{\{j\}^c}) \end{aligned} \quad \text{e} \quad f \equiv f_1 - f_0.$$

Veja que f, f_0 e f_1 são $\mathcal{F}_{\{i\}}$ -mensuráveis.

Definimos a oscilação em f sobre Ω como

$$\text{var}(f) \equiv \sup_{\omega, \eta \in \Omega} |f(\omega) - f(\eta)| = \sup_{\sigma \in \Omega} f(\sigma) - \inf_{\sigma \in \Omega} f(\sigma), \quad (184)$$

veja que

$$\begin{aligned} \text{var}(f) &= \sup_{\sigma_j, \tau_j \in \mathcal{E}} \left| \beta H_{\{j\}}(\sigma_j \eta_{\{j\}^c}) - \beta H_{\{j\}}(\sigma_j \omega_{\{j\}^c}) - \beta H_{\{j\}}(\tau_j \eta_{\{j\}^c}) + \beta H_{\{j\}}(\tau_j \omega_{\{j\}^c}) \right| \\ &\leq \beta \sup_{\sigma_j, \tau_j \in \mathcal{E}} \sum_{A \ni j} \left| H_{\{j\}}(\sigma_j \eta_{\{j\}^c}) - H_{\{j\}}(\sigma_j \omega_{\{j\}^c}) - H_{\{j\}}(\tau_j \eta_{\{j\}^c}) + H_{\{j\}}(\tau_j \omega_{\{j\}^c}) \right| \\ &\leq 2\beta \sum_{A \ni \{i, j\}} \delta_j(\Phi_A). \end{aligned} \quad (185)$$

Para todo $t \in [0, 1]$ definimos

$$f_t \equiv t f_1 + (1 - t) f_0 = f_0 + t f, \quad g_t \equiv \frac{e^{f_t}}{\int_{\mathcal{E}} \nu(d\sigma) e^{f_0(\sigma)}} \quad \text{e} \quad \mu_t \equiv g_t \nu.$$

Observe que, para $t = 0$ tem-se

$$\mu_0 = g_0 \nu = \frac{e^{f_0}}{\int_{\mathcal{E}} \nu(d\sigma) e^{f_0(\sigma)}} \cdot \nu = \frac{e^{-\beta H_{\{j\}}(\sigma_j \omega_{\{j\}^c})}}{\int_{\mathcal{E}} \nu(d\sigma) e^{-\beta H_{\{j\}}(\sigma_j \omega_{\{j\}^c})}} \cdot \nu$$

e, analogamente, para $t = 1$ temos

$$\mu_1 = g_1 \nu = \frac{e^{-\beta H_{\{j\}}(\sigma_j \eta_{\{j\}^c})}}{\int_{\mathcal{E}} \nu(d\sigma) e^{-\beta H_{\{j\}}(\sigma_j \eta_{\{j\}^c})}} \cdot \nu.$$

Observe, também, que

$$\mu_0 = \gamma_{\{j\}}^{\beta\Phi}(\cdot|\omega) \quad \text{e} \quad \mu_1 = \gamma_{\{j\}}^{\beta\Phi}(\cdot|\eta). \quad (186)$$

Como $\mu \ll \mu_0$ e $\mu \ll \mu_1$, pelo Lema 4.44, pelo Teorema Fundamental do Cálculo e pelo Teorema de Fubini-Tonelli (veja Apêndice, Teorema .24), tem-se

$$\begin{aligned} \|\mu_0 - \mu_1\|_{\text{VT}} &= \int \nu(d\omega) |g_0 - g_1|(\omega) \\ &= \int \nu(d\omega) \left| \int_0^1 dt \left[\frac{d}{dt} g_t(\omega) \right] \right| \\ &\leq \int_0^1 dt \int \nu(d\omega) \left| \frac{d}{dt} g_t(\omega) \right|. \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada (veja Apêndice, Teorema .23), conseguimos $\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{E}} \nu(d\omega) e^{f_t(\omega)} = \int_{\mathcal{E}} \nu(d\omega) f(\omega) e^{f_t(\omega)}$. Como $\frac{d}{dt} g_t = g_t [f - \int_{\mathcal{E}} \nu_t(d\omega) f(\omega)]$, onde $d\nu_t = d\nu g_t$, temos

$$\begin{aligned} \|\mu_0 - \mu_1\|_{\text{VT}} &\leq \int_0^1 dt \int \nu(d\omega) \left| g_t(\omega) \left[f(\omega) - \int_{\mathcal{E}} \nu_t(d\eta) f(\eta) \right] \right| \\ &= \int_0^1 dt \left[\int \nu_t(d\omega) \left| f(\omega) - \int_{\mathcal{E}} \nu_t(d\eta) f(\eta) \right| \right] \\ &\leq \int_0^1 dt \left[\int \nu_t(\omega) \left| f(\omega) - \int_{\mathcal{E}} \nu_t(d\eta) f(\eta) \right|^2 \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

onde, na última desigualdade, usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Como para cada $m \in \mathbb{R}$: $[\int \nu_t(d\omega) |f(\omega) - \int_{\mathcal{E}} \nu_t(d\eta) f(\eta)|^2]^{1/2} \leq [\int \nu_t(d\omega) |f - m|^2(\omega)]^{1/2}$, segue que

$$\|\mu_0 - \mu_1\|_{\text{VT}} \leq \int_0^1 dt \left[\int \nu_t(d\omega) |f - m|^2(\omega) \right]^{1/2} \leq \|f - m\|_{\infty}.$$

Escolhendo $m \equiv \frac{1}{2}(\sup_{\sigma \in \Omega} f(\sigma) + \inf_{\sigma \in \Omega} f(\sigma))$, obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \|f - m\|_{\infty} &= \sup_{\sigma \in \Omega} \left| f(\sigma) - \frac{1}{2} \left(\sup_{\sigma \in \Omega} f(\sigma) + \inf_{\sigma \in \Omega} f(\sigma) \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{\sigma \in \Omega} \left(|f(\sigma) - \sup_{\sigma \in \Omega} f(\sigma)| + |f(\sigma) - \inf_{\sigma \in \Omega} f(\sigma)| \right) \\ &= \frac{1}{2} \sup_{\sigma \in \Omega} \left(\sup_{\sigma \in \Omega} f(\sigma) - f(\sigma) + f(\sigma) - \inf_{\sigma \in \Omega} f(\sigma) \right) = \frac{1}{2} \text{var}(f). \end{aligned}$$

Logo, $2\|\mu_0 - \mu_1\|_{\text{VT}} \leq \text{var}(f)$. Daí, por (185) e (186), tem-se

$$\|\gamma_{\{j\}}^{\beta\Phi}(\cdot|\eta) - \gamma_{\{j\}}^{\beta\Phi}(\cdot|\omega)\|_{\text{VT}} = \|\mu_1 - \mu_0\|_{\text{VT}} \leq \frac{1}{2} \text{var}(f) \leq \beta \sum_{A \ni \{i,j\}} \delta_j(\Phi_A).$$

Como desde o início $\omega_{\{i\}^c} = \eta_{\{i\}^c}$, então $\rho_{i,j} \leq \frac{1}{2} \beta \sum_{A \ni \{i,j\}} \delta_j(\Phi_A)$.

Uma vez que $\rho_{i,i} = 0$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} \rho_{i,j} &\leq \frac{\beta}{2} \sum_{\substack{i \in S \\ i \neq j}} \sum_{A \ni \{i,j\}} \delta_j(\Phi_A) \leq \beta \sum_{\substack{i \in S \\ i \neq j}} \sum_{A \ni \{i,j\}} \|\Phi_A\|_{\infty} = \beta \sum_{A \ni j} \sum_{\substack{i \in A \\ i \neq j}} \|\Phi_A\|_{\infty} \\ &= \beta \sum_{A \ni j} (|A| - 1) \|\Phi_A\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Tomando o supremo em $j \in S$ na desigualdade acima, temos

$$\sup_{j \in S} \sum_{i \in S} \rho_{i,j} \leq \beta \sup_{j \in S} \sum_{A \ni j} (|A| - 1) \|\Phi_A\|_{\infty}.$$

Como ϕ é uma interação regular, pelo Lema 4.28 sabemos que a especificação Gibbsiana γ^{Φ} é quase-local. Desde que por hipótese $\beta \sup_{j \in S} \sum_{A \ni j} (|A| - 1) \|\Phi_A\|_{\infty} < 1$, da desigualdade acima temos que a condição de Dobrushin se satisfaz. Portanto, pelo Teorema 4.41 de Dobrushin, obtemos $|\mathcal{G}(\beta\Phi)| = 1$, concluindo-se a prova. \square

Exemplo 4.21 (Modelo de Ising de primeiros vizinhos). Seja $\mathcal{E} = \{-1, +1\}$ e $\lambda = \frac{1}{2}\delta_{+1} + \frac{1}{2}\delta_{-1}$ a medida a priori. Considere a interação $\Phi = (\Phi_A)_{A \in \mathcal{L}}$ em $(\mathcal{E}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{F})$ dada por

$$\Phi_A(\sigma) = \begin{cases} J\sigma_i\sigma_j, & \text{se } A = \{i, j\} \text{ e } \|i - j\| = 1 \\ h\sigma_i, & \text{se } A = \{i\} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $J, h \in \mathbb{R}$ são constantes fixadas.

Pelo Exemplo 4.13, a interação Φ é regular. Veja que os únicos conjuntos que aportam à soma $\beta \sup_{i \in \mathbb{Z}^d} \sum_{A \ni i} (|A| - 1) \|\Phi_A\|_\infty$ são aqueles da forma $A = \{i, j\}$. Logo,

$$\beta \sup_{i \in \mathbb{Z}^d} \sum_{A \ni i} (|A| - 1) \|\Phi_A\|_\infty = \beta \sup_{i \in \mathbb{Z}^d} \sum_{A \ni i} \|\Phi_A\|_\infty = |J| \beta \sup_{i \in \mathbb{Z}^d} \sum_{A \ni i} 1.$$

Note que, $\sum_{A \ni i} 1$ é igual ao número de primeiros vizinhos de i em \mathbb{Z}^d , isto é, $2d$. Portanto, a expressão do lado direito da igualdade acima é

$$= 2d|J|\beta.$$

Fazendo esta última quantidade < 1 , pelo Critério de Dobrushin, para todo $\beta < (1/2d|J|)$ temos $|\mathcal{G}(\beta\Phi)| = 1$.

Cabe enfatizar que o Critério de Dobrushin nos fornece unicidade em regiões pequenas do espaço de parâmetros $\{\beta : 0 < \beta < +\infty\}$. Por exemplo, quando $d = 1$, $J = 1$ e $h = 0$, do resultado exposto acima temos unicidade para todo $\beta < 1/2$, no entanto, sabemos que neste caso a unicidade se dá em todas as temperatura inversas. Em geral, quando $d = 1$ a unicidade é válida em todas as temperaturas inversas quando o modelo é de curto alcance (veja Corolário 4.48). Já quando $d = 2$, $J = 1$ e $h = 0$ sabemos que, para todo $\beta \leq \beta_c(2) = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}) = 0.4406 \dots$ (veja Tabela 2) tem-se unicidade não obstante, o Critério de Dobrushin simplesmente nos garante unicidade para todo $\beta \leq 1/4 = 0.25$.

Exemplo 4.22 (Modelo de Ising de longo alcance). Seja $\mathcal{E} = \{-1, +1\}$ e $\lambda = \frac{1}{2}\delta_{+1} + \frac{1}{2}\delta_{-1}$. Considere a interação $\Phi = (\Phi_A)_{A \in \mathcal{L}}$ em $(\mathcal{E}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{F})$ dada por

$$\Phi_A(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\|i-j\|^\alpha} \sigma_i \sigma_j, & \text{se } A = \{i, j\} \text{ e } i \neq j \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pelo Exemplo 4.14, Φ é uma interação regular quando $\alpha > d$. Os únicos conjuntos que aportam à soma $\beta \sup_{i \in \mathbb{Z}^d} \sum_{A \ni i} (|A| - 1) \|\Phi_A\|_\infty$ são da forma $A = \{i, j\}$. Em seguida, daremos uma estimativa para a condição de Dobrushin. Como Φ é uma interação de curto alcance, por um cálculo análogo ao feito no Exemplo 4.14, temos

$$\beta \sup_{i \in \mathbb{Z}^d} \sum_{A \ni i} (|A| - 1) \|\Phi_A\|_\infty = \beta \sum_{A \ni 0} \sup_{\sigma \in \Omega} \left| \frac{\sigma_i \sigma_0}{\|i\|^\alpha} \right| \leq \beta \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^\alpha} \left[\sum_{i \in \mathbb{Z}^d: \|i\|=r} 1 \right] \leq 2\beta d 3^{d-1} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{\alpha-d+1}}.$$

Sabemos que, para cada $\alpha > d$, a p -série $C(\alpha, d) \equiv \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{\alpha-d+1}}$ converge. Logo, para cada $\beta < 1/(2d3^{d-1}C(\alpha, d))$, a seguinte limitação $\beta \sup_{i \in \mathbb{Z}^d} \sum_{A \ni i} (|A| - 1) \|\Phi_A\|_\infty < 1$ é válida. Daí, pelo Teorema 4.45, $|\mathcal{G}(\beta\Phi)| = 1$, sempre que $\beta < 1/(2d3^{d-1}C(\alpha, d))$ e $\alpha > d$.

Observe que, quando $d = 1$, este exemplo nos fornece unicidade para todo $\beta < 1/2C(\alpha, 1)$ com $\alpha \in (1, 2]$ (em geral, sabe-se que neste caso, o modelo de Ising possui transição de fase, veja [45, 54]). Para $\alpha > 2$, obtemos que este modelo possui unicidade para todo $\beta < 1/2C(\alpha, 2)$, no entanto, como veremos no Exemplo 4.23, a unicidade é válida para todas as temperaturas inversas $\beta \geq 0$ (veja referência [105]).

UNICIDADE EM UMA DIMENSÃO

Proposição 4.46 (Veja referência [57]). *Seja γ uma especificação e suponha que exista $c > 0$ com a seguinte propriedade:*

$$\text{para todo evento cilíndrico } A, \text{ existe } \Lambda \in \mathcal{L} \text{ tal que } \gamma_\Lambda(A|\xi) \geq c \gamma_\Lambda(A|\eta), \quad \forall \xi, \eta \in \Omega.$$

Então, $|\mathcal{G}(\gamma)| = 1$.

Demonstração. Suponha que $\mathcal{G}(\gamma)$ contenha dois elementos μ e ν tal que $\mu \neq \nu$. Então, $\frac{1}{2}(\mu + \nu) \in \mathcal{G}(\gamma) \setminus \text{ex}\mathcal{G}(\gamma)$, pois caso contrário $\mu = \nu$, o que nos leva a uma contradição. Com o intuito de mostrar a unicidade, observe que é suficiente provar a seguinte inclusão:

$$\mathcal{G}(\gamma) \subset \text{ex}\mathcal{G}(\gamma). \quad (187)$$

De fato, seja $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$ e $B \in \mathcal{T}$ com $\mu(B) > 0$. Pelo Lema 4.34 tem-se $\nu \equiv \mu(\cdot|B) \in \mathcal{G}(\gamma)$. Logo, para cada evento cilíndrico A e Λ adequado em \mathcal{L} temos

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \nu \gamma_\Lambda(A) = \int \nu(d\xi) \gamma_\Lambda(A|\xi) = \int \nu(d\xi) \int \mu(d\eta) \gamma_\Lambda(A|\xi) \\ &\geq c \int \nu(d\xi) \int \mu(d\eta) \gamma_\Lambda(A|\eta) = c \mu(A). \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Classe Monótona (veja Apêndice, Teorema .27), $\nu \geq c\mu$ sobre todo \mathcal{F} . Em particular

$$0 = \nu(\Omega \setminus B) \geq c \mu(\Omega \setminus B),$$

implicando que $\mu(B) = 1$. Daí, μ é trivial sobre \mathcal{T} , logo, pelo Lema 4.35, $\mu \in \text{ex}\mathcal{G}(\gamma)$. Assim, está provado (187) e, em consequência, a prova do teorema segue. \square

Com a finalidade de formular o próximo resultado, para cada $A \in \mathcal{L}$ lembramos a definição (184) de oscilação em Φ sobre Ω como

$$\text{var}(\Phi_A) \equiv \sup_{\omega, \eta \in \Omega} |\Phi(\omega) - \Phi(\eta)| = \sup_{\omega \in \Omega} \Phi_A(\omega) - \inf_{\omega \in \Omega} \Phi_A(\omega).$$

Observe que o inverso da temperatura β pode ser sempre associado ao potencial $\Phi = (\Phi_A)_{A \in \mathcal{L}}$, por multiplicação: $\beta\Phi \equiv (\beta\Phi_A)_{A \in \mathcal{L}}$.

O seguinte teorema, o qual é uma consequência do Teorema 4.46, nos fornece unicidade de medidas em todas as temperatura inversas quando Φ é uma interação λ -admissível e o conjunto de parâmetros é $S = \mathbb{Z}$ ou \mathbb{N} .

Teorema 4.47 (Unicidade em uma dimensão, veja [57]). *Seja $S = \mathbb{Z}$ ou \mathbb{N} , $(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ o espaço de estados, $\lambda \in \mathcal{M}_1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ uma medida a priori e Φ uma interação λ -admissível tal que*

$$s \equiv \sup_{i \in S} \sum_{\substack{A \in \mathcal{L} \\ \min A \leq i \leq \max A}} \text{var}(\Phi_A) < \infty,$$

então $|\mathcal{G}(\Phi)| = 1$.

Demonstração. Verificaremos que para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$, $\gamma_\Lambda^\Phi \equiv \rho_\Lambda \lambda_\Lambda$ satisfaz a hipótese da Proposição 4.46. Para isso, consideremos $\Lambda \equiv (-n, n] \cap S$, $n \geq 1$. Para todo $\xi, \omega \in \Omega$ e $\omega \in \mathcal{E}^\Lambda$, tem-se

$$\begin{aligned} \left| H_\Lambda^\Phi(\omega \xi_{S \setminus \Lambda}) - H_\Lambda^\Phi(\omega \eta_{S \setminus \Lambda}) \right| &= \left| \sum_{A \cap \Lambda \neq \emptyset} \left[\Phi_A(\omega \xi_{S \setminus \Lambda}) - \Phi_A(\omega \eta_{S \setminus \Lambda}) \right] \right| \\ &\leq \sum_{A \cap \Lambda \neq \emptyset, A \cap \Lambda^c \neq \emptyset} \text{var}(\Phi_A) \\ &\leq \sum_{\substack{A \in \mathcal{L} \\ \min A \leq -n \leq \max A}} \text{var}(\Phi_A) + \sum_{\substack{A \in \mathcal{L} \\ \min A \leq n \leq \max A}} \text{var}(\Phi_A) \leq 2s, \end{aligned} \tag{188}$$

implicando que $-2s + H_\Lambda^\Phi(\omega \eta_{S \setminus \Lambda}) \leq H_\Lambda^\Phi(\omega \xi_{S \setminus \Lambda}) \leq 2s + H_\Lambda^\Phi(\omega \eta_{S \setminus \Lambda})$ ⁷. Portanto,

$$e^{-2s} \cdot h_\Lambda^\Phi(\omega \eta_{S \setminus \Lambda}) \leq h_\Lambda^\Phi(\omega \xi_{S \setminus \Lambda}) \leq e^{2s} \cdot h_\Lambda^\Phi(\omega \eta_{S \setminus \Lambda}).$$

Integrando sobre ω com respeito a λ^Λ , para cada $A \in \mathcal{F}$, temos

$$\begin{aligned} e^{-2s} \cdot \int_{\mathcal{E}^\Lambda} \lambda^\Lambda(d\omega) h_\Lambda^\Phi(\omega \eta_{S \setminus \Lambda}) \mathbb{1}_A(\omega) &\leq \int_{\mathcal{E}^\Lambda} \lambda^\Lambda(d\omega) h_\Lambda^\Phi(\omega \xi_{S \setminus \Lambda}) \mathbb{1}_A(\omega) \\ &\quad \text{e} \\ \int_{\mathcal{E}^\Lambda} \lambda^\Lambda(d\omega) h_\Lambda^\Phi(\omega \xi_{S \setminus \Lambda}) &\leq e^{2s} \cdot \int_{\mathcal{E}^\Lambda} \lambda^\Lambda(d\omega) h_\Lambda^\Phi(\omega \eta_{S \setminus \Lambda}). \end{aligned}$$

Isto é, para todo $A \in \mathcal{F}$, vale

$$e^{-2s} \cdot \lambda_\Lambda(\mathbb{1}_A h_\Lambda^\Phi | \eta) \leq \lambda_\Lambda(\mathbb{1}_A h_\Lambda^\Phi | \xi) \quad \text{e} \quad \lambda_\Lambda(\mathbb{1}_A h_\Lambda^\Phi | \xi) \leq e^{2s} \cdot \lambda_\Lambda(\mathbb{1}_A h_\Lambda^\Phi | \eta).$$

⁷ Salientamos que, no caso que $S = \mathbb{N}$, a soma sobre os A 's tal que $\min A \leq -n \leq \max A$ não aparece na desigualdade abaixo de (188).

Usando as desigualdades acima, segue que

$$e^{-4s} \cdot \frac{1}{Z_{\Lambda}^{\Phi}(\eta)} \lambda_{\Lambda}(\mathbb{1}_A h_{\Lambda}^{\Phi} | \eta) \leq \frac{1}{Z_{\Lambda}^{\Phi}(\xi)} \lambda_{\Lambda}(\mathbb{1}_A h_{\Lambda}^{\Phi} | \xi)$$

equivalentemente

$$e^{-4s} \cdot \rho_{\Lambda}^{\Phi} \lambda_{\Lambda}(A | \eta) \leq \rho_{\Lambda}^{\Phi} \lambda_{\Lambda}(A | \xi).$$

Tomando $c \equiv e^{-4s} > 0$ nesta desigualdade, temos

$$c \gamma_{\Lambda}^{\Phi}(A | \eta) \leq \gamma_{\Lambda}^{\Phi}(A | \xi), \quad \forall A \in \mathcal{F}_{\Lambda} \text{ e } \xi, \eta \in \Omega.$$

Portanto, temos provado que a hipótese da Proposição 4.46 se satisfaz. Logo, o conjunto das medidas de Gibbs $\mathcal{G}(\Phi)$ tem um único elemento. \square

Corolário 4.48 (Unicidade em interações de curto alcance). *Seja $d = 1$. Se Φ é qualquer interação de curto alcance, no sentido da Definição 4.13, então $|\mathcal{G}(\Phi)| = 1$.*

Demonstração. Se $\Lambda \equiv (-n, n] \cap S$, $n \geq 1$, pelo Item (188), temos

$$\left| H_{\Lambda}^{\Phi}(\omega \xi_{S \setminus \Lambda}) - H_{\Lambda}^{\Phi}(\omega \eta_{S \setminus \Lambda}) \right| \leq \sum_{A \cap \Lambda \neq \emptyset, A \cap \Lambda^c \neq \emptyset} \text{var}(\Phi_A).$$

Fazendo $s \equiv \sum_{A \cap \Lambda \neq \emptyset, A \cap \Lambda^c \neq \emptyset} \text{var}(\Phi_A)$ em vez do s considerado no Teorema 4.47, veja que

$$s \leq 2 \sum_{A \cap \Lambda \neq \emptyset, A \cap \Lambda^c \neq \emptyset} \|\Phi_A\|_{\infty} < \infty,$$

pois Φ é uma interação de curto alcance. Com essa escolha do s , procedendo analogamente ao Teorema 4.47, temos que

$$c \gamma_{\Lambda}^{\Phi}(A | \eta) \leq \gamma_{\Lambda}^{\Phi}(A | \xi), \quad \forall A \in \mathcal{F}_{\Lambda} \text{ e } \xi, \eta \in \Omega,$$

com $c \equiv e^{-4s} > 0$. Portanto, pela Proposição 4.46, segue que $|\mathcal{G}(\Phi)| = 1$. \square

Exemplo 4.23 (Modelo de Ising de longo alcance, caso $d = 1$). *Seja $\mathcal{E} = \{-1, +1\}$ e $\lambda = \frac{1}{2}\delta_{+1} + \frac{1}{2}\delta_{-1}$. Considere a interação $\Phi = (\Phi_A)_{A \in \mathcal{L}}$ em $(\mathcal{E}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{F})$ dada por*

$$\Phi_A(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{|i-j|^{\alpha}} \sigma_i \sigma_j, & \text{se } A = \{i, j\} \text{ e } i \neq j \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Afirmamos que, para todo $\beta \geq 0$ e $\alpha > 2$, $|\mathcal{G}(\beta\Phi)| = 1$.

De fato, para $\alpha > 2$, pelo Exemplo 4.14, Φ é uma interação regular. Como Φ é invariante por flipamentos, temos

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{A \in \mathcal{L} \\ \min A \leq i \leq \max A}} \text{var}(\Phi_A) &= \sum_{A \in \mathcal{L}: \min A = 0} (\max A - \min A) \text{var}(\Phi_A) \\ &\leq \sum_{A \ni 0} (\max A - \min A) \text{var}(\Phi_A) \\ &\leq \sum_{r=1}^{\infty} \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}: |j|=r} |j| \frac{2}{|j|^\alpha} \right] = 4 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{\alpha-1}} < \infty, \end{aligned}$$

onde usamos que $\text{var}(\Phi_A) \leq 2/|i|^\alpha$, $(\sum_{j \in \mathbb{Z}: |j|=r} 1) = 2$ e que $\alpha > 2$. Logo, a hipótese do Teorema 4.47 é satisfeita, implicando que, para todo $\beta \geq 0$, $|\mathcal{G}(\beta\Phi)| = 1$. Por usar a analiticidade da energia livre com respeito aos parâmetros termodinâmicos, este resultado foi provado, também, por D. Ruelle, na referência [105].

Para encerrar o conceito de unicidade, apresentaremos um resultado que diz que a unicidade de medidas no sistema é equivalente à perda de sensibilidade do sistema com respeito às condições de fronteira.

Lema 4.49 (Veja referência [53]). *Se γ é uma especificação, as seguintes condições são equivalentes:*

1. A unicidade se mantém: $\mathcal{G}(\gamma) = \{\mu\}$;
2. Para cada ω e para todo $\Lambda_n \uparrow S$ e para todas as funções locais

$$\gamma_{\Lambda_n} f(\omega) \rightarrow \mu(f), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Demonstração. $1 \Rightarrow 2$. Seja ω uma configuração de fronteira fixa. Como Ω é finito (portanto, compacto) temos que $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ é compacto. Logo, existe alguma subsequência $\gamma_{\Lambda_n}(\cdot|\omega)$ a qual converge a algum elemento de $\mathcal{G}(\gamma) = \{\mu\}$. Isto implica que as sequências coincidem com μ , portanto, $\gamma_{\Lambda_n} f(\omega) \rightarrow \mu(f)$ para toda f função local.

$2 \Rightarrow 1$. Sejam $\mu, \nu \in \mathcal{G}(\gamma)$. Para cada f função local tem-se

$$\begin{aligned} |\mu(f) - \nu(f)| &= |\mu \gamma_\Lambda(f) - \nu \gamma_\Lambda(f)| = \left| \int \mu(d\omega) \gamma_\Lambda(f|\omega) - \int \nu(d\eta) \gamma_\Lambda(f|\eta) \right| \\ &= \left| \int \mu(d\omega) \nu(d\eta) [\gamma_\Lambda(f|\omega) - \gamma_\Lambda(f|\eta)] \right| \\ &\leq \int \mu(d\omega) \nu(d\eta) |\gamma_\Lambda(f|\omega) - \gamma_\Lambda(f|\eta)|. \end{aligned}$$

Como f é local (portanto, contínua), segue que $|\gamma_\Lambda(f|\cdot)| \leq \|f\|_\infty$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Apêndice, Teorema .23), temos que $\mu(f) = \nu(f)$, para toda função f local. Finalmente, usando o Teorema .36, temos $\mu = \nu$. \square

Exemplos de conjuntos de medidas de Gibbs e transição de fase

Continuando, daremos alguns exemplos simples de medidas de Gibbs e sua relação com a transição de fase. Nos referimos à medida produto (onde a interação é ausente), cadeias de Markov, modelo de Ising e modelo de Potts.

Exemplo 4.24 (Medida produto). *Sejam $\lambda \in \mathcal{M}_1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ e $\lambda^\Lambda \in \mathcal{M}_1(\mathcal{E}^\Lambda, \mathcal{E}^\Lambda)$ a medida produto sobre $\Lambda \in \mathcal{L}$. Definimos a família $\lambda^* \equiv (\lambda_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ por*

$$\lambda_\Lambda(f|\omega) = \int_{\mathcal{E}^\Lambda} \lambda^\Lambda(d\xi) f(\xi\omega_{S \setminus \Lambda}) \quad (\Lambda \in \mathcal{L}).$$

Foi mostrado na Proposição 4.6 que $\lambda^* = (\lambda_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ é uma especificação (independente). Além disso, a Proposição 4.8 mostra, também, que $|\mathcal{G}(\lambda^*)| = 1$.

Exemplo 4.25 (Cadeias finitas de Markov). *Outro exemplo onde o conjunto das medidas de Gibbs possui exatamente uma única medida, é aquele determinado pela família de distribuições condicionais finito dimensionais de uma cadeia de Markov estacionária $\Psi = (\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ com espaço de estados finito \mathcal{E} e matriz de transição $P = (P(x, y))_{x, y \in \mathcal{E}}$ (estritamente) positiva, isto é, as entradas $P(x, y)$ da matriz P satisfazem $P(x, y) > 0$, para todo $x, y \in \mathcal{E}$.*

Para provar isso, primeiro faremos a seguinte observação:

Se $\mu_P \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ é a distribuição da cadeia de Markov estacionária Ψ usando a propriedade de Markov e a estacionaridade da cadeia Ψ , facilmente comprova-se que

$$\begin{aligned} \mu_P(\sigma_i = x_0, \sigma_{i+1} = x_1, \dots, \sigma_{i+n} = x_n) &= \mu_P(\sigma_{i+m} = x_0, \sigma_{i+m+1} = x_1, \dots, \sigma_{i+m+n} = x_n) \\ &= \mu_P(\sigma_{i+m} = x_0) P(x_0, x_1) \cdots P(x_{n-1}, x_n), \end{aligned} \quad (189)$$

onde $i \in \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{Z}^+$ e $x_0, \dots, x_n \in \mathcal{E}$.

Pela Proposição .29 do Apêndice, sabemos que existe uma única distribuição estacionária ⁸ $\pi_P = (\pi_P(x))_{x \in \mathcal{E}} \in (0, 1)^\mathcal{E}$ para a cadeia de Markov Ψ com matriz de transição P e, além disso, pelo Teorema .30 do Apêndice, $\lim_{m \rightarrow \infty} P^m(x, y) = \pi_P(y)$ para todo $x, y \in \mathcal{E}$. Em outras

⁸ Em alguns textos, uma distribuição estacionária também é chamada de invariante, de equilíbrio ou homogênea.

palavras, temos que a cadeia de Markov Ψ é ergódica. Aqui, P^m denota a matriz estocástica de m passos.

Uma vez que $\mu_P(\sigma_{i+m} = x_0) = \sum_{z \in \mathcal{E}} \mu_P(\sigma_i = x_0) P^m(z, x_0)$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Apêndice, Teorema .23) temos

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_P(\sigma_{i+m} = x_0) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{z \in \mathcal{E}} \mu_P(\sigma_i = z) P^m(z, x_0) \\ &= \pi_P(x_0) \sum_{z \in \mathcal{E}} \mu_P(\sigma_i = z) \\ &= \pi_P(x_0), \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, usamos que $\{\mu_P(\sigma_i = x_0) : i \in \mathbb{Z}\}$ é uma distribuição de probabilidade.

Fazendo $m \rightarrow \infty$ em (189) e usando o limite acima, temos a seguinte igualdade

$$\mu_P(\sigma_i = x_0, \sigma_{i+1} = x_1, \dots, \sigma_{i+n} = x_n) = \pi_P(x_0) P(x_0, x_1) \cdots P(x_{n-1}, x_n). \quad (190)$$

Isto é, a distribuição estacionária π_P e a matriz de transição P determinam as distribuições finitas dimensionais da cadeia de Markov Ψ . Portanto, como π_P é único, μ_P é a única distribuição da cadeia estacionária Ψ .

Tendo estas informações a nossa disposição, agora provaremos que a família $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$, definida por

$$\gamma_\Lambda(\sigma_\Lambda = \xi | \omega) = \mu_P(\sigma_\Lambda = \xi | \sigma_{\partial\Lambda} = \omega_{\partial\Lambda}) \quad (\Lambda \in \mathcal{L}, \omega \in \Omega, \xi \in \mathcal{E}^\Lambda), \quad (191)$$

é uma especificação Gibbsiana, onde $\partial\Lambda$ denota a fronteira externa de Λ segundo a Definição 1.1.

Nessa direção, primeiro observemos que qualquer $\Lambda \in \mathcal{L}$ pode ser expressada da forma

$$\Lambda = \cup_{k=1}^n \Lambda_k, \quad \text{onde } \Lambda_k = \{i_k + 1, \dots, i_k + n_k\},$$

para algum $n \geq 1$, onde $i_k \in \mathbb{Z}$ e $n_k \in \mathbb{N}$ são tais que os conjuntos $\{i_k + 1, \dots, i_k + n_k\}$ são disjuntos dois a dois. Por fazer indução sobre n_k e usar (190) obtemos

$$\begin{aligned} \mu_P(\sigma_{i_k+1} = \xi_{i_k+1}, \dots, \sigma_{i_k+n_k} = \xi_{i_k+n_k} | \sigma_{i_k} = \omega_{i_k}, \sigma_{i_k+(n_k+1)} = \omega_{i_k+(n_k+1)}) \\ = \frac{P(\omega_{i_k}, \xi_{i_k+1}) P(\xi_{i_k+1}, \xi_{i_k+2}) \cdots P(\xi_{i_k+n_k}, \omega_{i_k+n_k+1})}{P^{n_k+1}(\omega_{i_k}, \omega_{i_k+n_k+1})}, \end{aligned}$$

para cada $k = 1, \dots, n$; implicando que

$$\gamma_\Lambda(\sigma_\Lambda = \xi | \omega) = \prod_{k=1}^n \frac{P(\omega_{i_k}, \xi_{i_k+1}) P(\xi_{i_k+1}, \xi_{i_k+2}) \cdots P(\xi_{i_k+n_k}, \omega_{i_k+n_k+1})}{P^{n_k+1}(\omega_{i_k}, \omega_{i_k+n_k+1})}, \quad (192)$$

para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$. Em seguida, definimos a família $\Phi = (\Phi_A)_{A \in \mathcal{L}}$ como

$$\Phi_A(\sigma) \equiv \begin{cases} -\log P(\sigma_i, \sigma_{i+1}), & \text{se } A = \{i, i+1\} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O Exemplo 4.15 mostra que Φ é uma interação regular. Agora estamos prontos para mostrar que a família $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ é uma especificação Gibbsiana. De fato, primeiro observe que

$$\begin{aligned} e^{-H_\Lambda^\Phi(\xi \omega_{\partial\Lambda})} &= \prod_{A \cap \Lambda \neq \emptyset} e^{-\Phi_A(\xi \omega_{\partial\Lambda})} \\ &= \prod_{\{j, j+1\} \cap \Lambda \neq \emptyset} P(\xi_j, \xi_{j+1}) \\ &= \prod_{k=1}^n P(\omega_{i_k}, \xi_{i_k+1}) \prod_{j=i_k+1}^{i_k+n_k} P(\xi_j, \xi_{j+1}) P(\xi_{i_k+n_k}, \omega_{i_k+(n_k+1)}). \end{aligned} \quad (193)$$

Usando (189), pode-se provar que

$$P^{n_k+1}(\omega_{i_k}, \omega_{i_k+(n_k+1)}) = \sum_{\xi_{i_k+1}, \dots, \xi_{i_k+n_k}} P(\omega_{i_k}, \xi_{i_k+1}) \prod_{j=i_k+1}^{i_k+n_k} P(\xi_j, \xi_{j+1}) P(\xi_{i_k+n_k}, \omega_{i_k+(n_k+1)}). \quad (194)$$

Desde que $\Lambda = \cup_{k=1}^n \Lambda_k$, temos uma bijeção natural entre os espaços

$$\mathcal{E}^\Lambda \quad e \quad \times \mathcal{E}^{\Lambda_1} \times \dots \times \mathcal{E}^{\Lambda_n}.$$

Por simplicidade, um elemento genérico do produto cartesiano $\mathcal{E}^{\Lambda_1} \times \dots \times \mathcal{E}^{\Lambda_n}$ será denotado por $(\xi_{\Lambda_1}, \dots, \xi_{\Lambda_n})$, onde $\xi_{\Lambda_k} \equiv (\xi_i : i \in \Lambda_k), \forall k = 1, \dots, n$. Logo, cada elemento $\xi \in \mathcal{E}^\Lambda$ pode ser escrito como $\xi = (\xi_{\Lambda_1}, \dots, \xi_{\Lambda_n})$. Integrando sobre $\xi \in \mathcal{E}^\Lambda$ em (193), tem-se

$$\begin{aligned} Z_\Lambda^\Phi(\omega) &= \sum_{\xi \in \mathcal{E}^\Lambda} e^{-H_\Lambda^\Phi(\xi \omega_{\partial\Lambda})} \\ &= \sum_{(\xi_{\Lambda_1}, \dots, \xi_{\Lambda_n})} e^{-H_\Lambda^\Phi(\xi \omega_{\partial\Lambda})} \\ &= \sum_{(\xi_{\Lambda_1}, \dots, \xi_{\Lambda_n})} \prod_{k=1}^n P(\omega_{i_k}, \xi_{i_k+1}) \prod_{j=i_k+1}^{i_k+n_k} P(\xi_j, \xi_{j+1}) P(\xi_{i_k+n_k}, \omega_{i_k+(n_k+1)}) \\ &= \prod_{k=1}^n \sum_{\xi_{i_k+1}, \dots, \xi_{i_k+n_k}} P(\omega_{i_k}, \xi_{i_k+1}) \prod_{j=i_k+1}^{i_k+n_k} P(\xi_j, \xi_{j+1}) P(\xi_{i_k+n_k}, \omega_{i_k+(n_k+1)}). \end{aligned}$$

Usando (194) a igualdade acima fica

$$Z_{\Lambda}^{\Phi}(\omega) = \prod_{k=1}^n P^{n_k+1}(\omega_{i_k}, \omega_{i_k+(n_k+1)}). \quad (195)$$

Por (193) e (195), a igualdade (192) se escreve

$$\gamma_{\Lambda}(\sigma_{\Lambda} = \xi | \omega) = \frac{e^{-H_{\Lambda}^{\Phi}(\xi \omega_{\partial \Lambda})}}{Z_{\Lambda}^{\Phi}(\omega)}.$$

Logo, pela Proposição 4.15 a igualdade acima implica que a família γ é uma especificação Gibbsiana associada à interação Φ . De agora em diante denotaremos $\gamma \equiv \gamma^{\Phi}$.

Seja $\lambda \in \mathcal{M}_1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ a medida a priori (é a medida de contagem) onde \mathcal{E} é a σ -álgebra das partes de \mathcal{E} . Como Φ é uma interação λ -admissível e regular, pelo Lema 4.28, a especificação Gibbsiana γ^{Φ} é quase-local, daí, pelo Teorema 4.26, temos que $\mathcal{G}(\Phi) \neq \emptyset$.

Para finalizar, agora provaremos que $\mathcal{G}(\Phi) = \{\mu_P\}$. De fato, considere $i \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, $\Lambda = \{i, i+1, \dots, i+n\}$, $k \geq 1$ e

$$\Delta = \Delta(k) = \{i-k+1, \dots, i+n+k-1\}.$$

Para cada $\xi \in \mathcal{E}^{\Lambda}$ e $\omega \in \Omega$, por indução em k , usando (190) prova-se

$$\sum_{\eta \in \mathcal{E}^{\Delta}: \eta_{\Lambda} = \xi} \mu_P(\sigma_{\Delta} = \eta | \sigma_{\partial \Delta} = \omega_{\partial \Delta}) = \frac{P^k(\omega_{i-k}, \xi_i) \prod_{\ell=i}^{i+n-1} P(\xi_{\ell}, \xi_{\ell+1}) P^k(\xi_{i-n}, \omega_{i+n+k})}{P^{n+2k}(\omega_{i-k}, \omega_{i+n+k})}. \quad (196)$$

Por outro lado, por (190) se satisfaz

$$\begin{aligned} \mu_P(\sigma_{\Lambda} = \xi) &= \mu_P(\sigma_i = \xi_i, \sigma_{i+1} = \xi_{i+1}, \dots, \sigma_{i+n} = \xi_{i+n}) \\ &= \pi_P(\xi_i) \prod_{\ell=i}^{i+n-1} P(\xi_{\ell}, \xi_{\ell+1}). \end{aligned} \quad (197)$$

Seja $\mu \in \mathcal{G}(\Phi)$, usando (196) temos

$$\begin{aligned} \mu(\sigma_{\Lambda} = \xi) &= \int_{\Omega} \mu(d\omega) \gamma_{\Delta(k)}^{\Phi}(\sigma_{\Lambda} = \xi | \omega) \\ &= \int_{\Omega} \mu(d\omega) \sum_{\eta \in \mathcal{E}^{\Delta}: \eta_{\Lambda} = \xi} \mu_P(\sigma_{\Delta} = \eta | \sigma_{\partial \Delta} = \omega_{\partial \Delta}) \\ &= \int_{\Omega} \mu(d\omega) \frac{P^k(\omega_{i-k}, \xi_i) \prod_{\ell=i}^{i+n-1} P(\xi_{\ell}, \xi_{\ell+1}) P^k(\xi_{i-n}, \omega_{i+n+k})}{P^{n+2k}(\omega_{i-k}, \omega_{i+n+k})}. \end{aligned} \quad (198)$$

Pelo Teorema de ergodicidade para matrizes estocásticas positivas (veja Apêndice, Teorema .30) sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y) = \pi_P(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{E}. \quad (199)$$

Usando a convergência acima e a identidade (197), obtêm-se

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P^k(\omega_{i-k}, \xi_i) \prod_{\ell=i}^{i+n-1} P(\xi_\ell, \xi_{\ell+1}) P^k(\xi_{i-n}, \omega_{i+n+k})}{P^{n+2k}(\omega_{i-k}, \omega_{i+n+k})} &= \frac{\pi_P(\xi_i) \prod_{\ell=i}^{i+n-1} P(\xi_\ell, \xi_{\ell+1}) \pi_P(\omega_{i+n+k})}{\pi_P(\omega_{i+n+k})} \\ &= \pi_P(\xi_i) \prod_{\ell=i}^{i+n-1} P(\xi_\ell, \xi_{\ell+1}) \\ &= \mu_P(\sigma_\Lambda = \xi). \end{aligned}$$

Observe que o integrando em (198) é limitado. Logo, fazendo $n \rightarrow \infty$ em (198) e usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Apêndice, Teorema .23), para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$, temos

$$\mu(\sigma_\Lambda = \xi) = \mu_P(\sigma_\Lambda = \xi).$$

Isto é, μ e μ_P coincidem em todos os eventos cilíndricos, logo, pelo Lema .36 (do Apêndice), $\mu = \mu_P$ e como μ_P é única distribuição da cadeia de Markov Ψ , então $\mathcal{G}(\Phi) = \{\mu_P\}$.

Antes de passar ao próximo exemplo, primeiro enunciaremos uma definição e um resultado a priori. Para isso, Fixamos $S = \mathbb{Z}$ como conjunto de parâmetros, $\mathcal{E} \neq \emptyset$ um espaço de estados finitos e $\lambda \in \mathcal{M}_1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ uma medida a priori (é a medida de contagem).

Definição 4.27. Dada uma especificação γ com conjuntos de parâmetros \mathbb{Z} e espaço de estados finitos \mathcal{E} , dizemos que γ é uma especificação de Markov homogênea positiva se existe uma função $g(\cdot, \cdot, \cdot)$ sobre \mathcal{E}^3 tal que

$$\gamma_{\{i\}}(\sigma_i = y | \omega) = g(\omega_{i-1}, y, \omega_{i+1}), \quad \forall i \in \mathbb{Z}, y \in \mathcal{E} \text{ e } \omega \in \Omega.$$

A função g é frequentemente chamada de (função) determinística de γ .

O seguinte teorema mostra que toda especificação de Markov homogênea positiva admite uma única medida de Gibbs μ , a qual não é mais que a distribuição da cadeia de Markov com matriz de transição $P = (P(x, y))_{x, y \in \mathcal{E}}$ positiva, além disso, o referido teorema dá uma via para calcular explicitamente a matriz de transição P em função da especificação γ .

Seja $\mu_P \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ a única distribuição da cadeia de Markov estacionária com matriz de transição P . Sabemos que μ_P é unicamente determinada pela condição (190), para maiores detalhes veja Exemplo 4.25. Para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$, consideraremos a definição de fronteira externa de Λ segundo a Definição 1.1. A prova do Exemplo 4.25 foi completamente inspirado no seguinte teorema.

Teorema 4.50. *A relação $\mathcal{G}(\gamma) = \{\mu_P\}$ estabelece uma correspondência 1-1 $\gamma \leftrightarrow P$ entre o conjunto de todas as especificações de Markov homogêneas positivas e o conjunto de todas as matrizes estocásticas sobre \mathcal{E} com entradas não nulas.*

Dado a matriz P , a correspondente γ é determinada pela equação

$$\gamma_\Lambda(\sigma_\Lambda = \xi | \omega) = \mu_P(\sigma_\Lambda = \xi | \sigma_{\partial\Lambda} = \omega_{\partial\Lambda}) \quad (\Lambda \in \mathcal{L}, \omega \in \Omega, \xi \in \mathcal{E}^\Lambda).$$

Reciprocamente, P pode ser expressada em termos da função determinística de γ como

$$P(x, y) = Q(x, y)r(y)/qr(x) \quad (x, y \in \mathcal{E}). \quad (200)$$

Aqui, $Q(x, y) = g(a, x, y)/g(a, a, y)$ para algum arbitrariamente fixado $a \in \mathcal{E}$, q é o maior autovalor positivo de $Q = (Q(x, y))_{x, y \in \mathcal{E}}$ e $r \in (0, 1)^\mathcal{E}$ um correspondente autovetor a direita.

Demonstração. A prova deste teorema, em parte, é resumida no Exemplo 4.25. Para uma exposição ampla desta prova, veja Teorema 3.5 de [57]. \square

Observe que toda especificação γ é uma especificação de Markov homogênea positiva se, e somente se, γ é Gibbsiana para alguma interação $\Phi = (\Phi_A)_{A \in \mathcal{L}}$ de primeiros vizinhos homogênea, isto é, a interação Φ é da forma

$$\Phi_A(\sigma) = \begin{cases} \phi_1(\sigma_i), & \text{se } A = \{i\} \\ \phi_2(\sigma_i, \sigma_{i+1}), & \text{se } A = \{i, i+1\} \\ 0, & \text{outro caso,} \end{cases}$$

para algumas funções $\phi_1 : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\phi_2 : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ (este fato foi provado na primeira parte do Exemplo 4.25). Assim, teríamos que a conclusão da unicidade do Exemplo 4.25 se deriva como caso particular deste teorema.

Exemplo 4.26 (Veja referência [57]). *Consideremos o modelo de Ising ferromagnético sobre \mathbb{Z} com uma interação $\Phi = (\Phi_A)_{A \in \mathcal{L}}$ sobre $\{-1, 1\}^\mathbb{Z}$ definida por*

$$\Phi_A(\sigma) = \begin{cases} -J\sigma_i\sigma_{i+1}, & \text{se } A = \{i, i+1\} \\ -h\sigma_i, & \text{se } A = \{i\} \\ 0, & \text{outro caso.} \end{cases}$$

Pelo Exemplo 4.13 Φ é uma interação regular. Desejamos obter informação sobre a cardinalidade do conjunto $\mathcal{G}(\Phi)$. Observe que se provarmos que γ^Φ é uma especificação de Markov homogênea positiva, o Teorema 4.50 nos permite concluir que $\mathcal{G}(\Phi) = \{\mu_P\}$, onde μ_P é a distribuição da cadeia de Markov com matriz de transição P , a qual é definida em termos da função determinística g (a encontrar-se) através de (200).

Com o intuito de provar que γ^Φ é uma especificação de Markov homogênea positiva, simples cálculos mostram que

$$\gamma_{\{i\}}(\sigma_i = y | \omega) = \frac{e^{hy + J\omega_{i-1}y + J\omega_{i+1}y}}{\sum_{\sigma} e^{h\sigma_i + J\omega_{i-1}\sigma_i + J\omega_{i+1}\sigma_i}} = \frac{e^{y(h + J\omega_{i-1} + J\omega_{i+1})}}{2 \cosh(h + J\omega_{i-1} + J\omega_{i+1})}.$$

Logo, tomando $g(\omega_{i-1}, y, \omega_{i+1}) = \frac{e^{y(h + J\omega_{i-1} + J\omega_{i+1})}}{2 \cosh(h + J\omega_{i-1} + J\omega_{i+1})}$ com $\omega_{i-1}, \omega_{i+1}, y \in \{-1, +1\}$, concluímos que γ^Φ é uma especificação de Markov homogênea positiva. Portanto, pelo Teorema 4.50, o conjunto das medidas de Gibbs do modelo de Ising associado à interação Φ é unitário.

Exemplo 4.27 (Modelo de Ising). Consideremos o modelo de Ising ferromagnético ($J_{ij} = J > 0$, $\forall i, j$) definido na Seção 3.1 com interação $\Phi = (\Phi_A)_{A \in \mathcal{L}}$ e conjunto de parâmetros $S = \mathbb{Z}^d$. Isto é,

$$\Phi_A(\sigma) = \begin{cases} -J_{ij}\sigma_i\sigma_j, & \text{se } A = \{i, j\} \\ -h_i\sigma_i, & \text{se } A = \{i\} \\ 0, & \text{outro caso.} \end{cases} \quad (201)$$

Primeiramente, vamos considerar o seguinte:

CASO $d = 1$: modelo de Ising de primeiros vizinhos com constante de acoplamento $J_{ij} = J$, $\forall i, j$ e campo magnético externo constante (ou homogêneo), isto é, $h_i = h \forall i$. Esse modelo é analisado em profundidade na referência [57]. Nesse caso, cálculos explícitos mostram a analiticidade da energia livre $f(\beta, h) = -\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}} \log(Z_\Lambda(\beta, h)) / \beta|\Lambda|$ com respeito a temperatura inversa $\beta > 0$. Segundo Ruelle [104], isto equivale a dizer que o conjunto das medidas de Gibbs é unitário em todas as temperaturas inversas $\beta > 0$, em outras palavras, existe uma transição de fase de segunda ordem, segundo a Definição 4.19.

Quando o modelo ferromagnético é de longo alcance, com $J_{ij} = 1/|i - j|^\alpha$. O limite termodinâmico existe quando $\alpha > 1$ [105]. Quando $1 < \alpha < 2$ foi provado por Dyson, por comparação com o caso hierárquico, que existe transição de fase para β suficientemente grande [45]. Salientamos que esse caso tem sido estudado, também, em [31, 46, 113]. Quando $\alpha = 2$, Fröhlich e Spencer provaram que existe transição de fase quando o inverso da temperatura β é suficientemente grande [54]. Já quando $\alpha > 2$, incluindo o caso de interações de curto alcance, não existe

transição de fase para toda temperatura positiva, pois a energia livre é analítica com respeito aos parâmetros termodinâmicos [105].

CASO $d = 2$: modelo de Ising de primeiros vizinhos com $J_{ij} = J, \forall i, j$ e $h = 0$. Esse modelo foi introduzido por Lenz a modelos ferromagnéticos. A energia livre tem sido calculada explicitamente por Onsager. Estudos intensos estabeleceram que existe uma temperatura crítica $\beta_c(2) > 0$ tal que na fase subcrítica (isto é, $\beta < \beta_c(2)$) existe uma única medida consistente com a especificação $\gamma^{\beta\Phi}$, e na fase supercrítica (isto é, $\beta > \beta_c$), o conjunto $\mathcal{G}(\beta\Phi)$ é o “simplex” (de Choquet), $[\mu_-^\beta, \mu_+^\beta]$ (veja referências [1, 2]), cujas medidas extremas são mutuamente singulares e podem ser escritas como $\mu_\pm^\beta(\cdot) = \lim_{\Lambda \uparrow S} \gamma_\Lambda^{\beta\Phi}(\cdot | \pm)$. Quando β é suficientemente grande, o argumento de Peierls prova que a magnetização $\mu_+^\beta(\sigma_0) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2} \sum_{x \in \Lambda} \langle \sigma_x \rangle_{\beta, \Lambda}^+ / |\Lambda|$ é positiva, isto é, $\mu_+^\beta(\sigma_0) = -\mu_-^\beta(\sigma_0) > 0$ (veja referências [93, 104]). Para uma análise do modelo de Ising sobre \mathbb{Z}^2 quando β suficientemente grande, veja-se o Teorema 4.39.

A existência da temperatura crítica foi bastante estudada por Peierls [61] em 1975, usando argumentos geométricos (argumentos de contornos). O cálculo exato do valor $\beta_c(2) = \log(1 + \sqrt{2})/2$ é devido a Kramers e Wannier em 1941 (veja referências [83, 84]). O fato de que para $\beta > \beta_c(2)$ o conjunto $\mathcal{G}(\beta\Phi)$ é o “simplex” (de Choquet) $[\mu_-^\beta, \mu_+^\beta]$ significa que qualquer medida $\mu \in \mathcal{G}(\beta\Phi)$ é unicamente determinada por combinações convexas dos estados de Gibbs extremas $\text{ex}\mathcal{G}(\beta\Phi) = \{\mu_-^\beta, \mu_+^\beta\}$, isto é, que exista um único $t \in [0, 1]$ tal que $\mu = t\mu_+^\beta + (1 - t)\mu_-^\beta$.

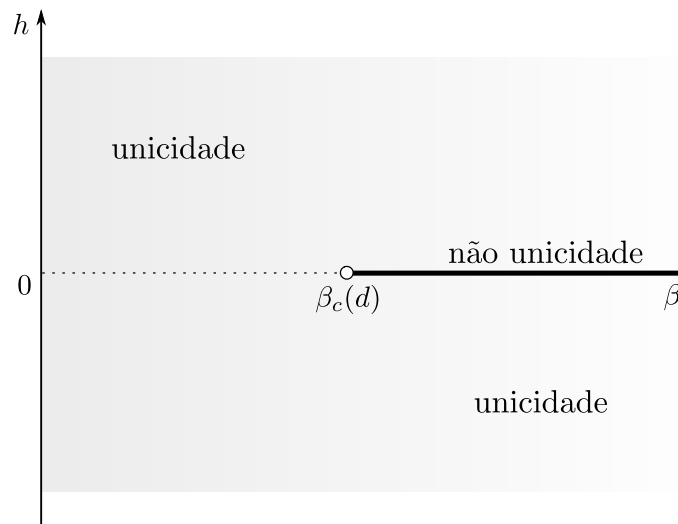


Figura 27: Comportamento do conjunto das medidas das Gibbs do modelo de Ising, $\mathcal{G}(\beta\Phi)$ em $d \geq 2$, quando a parâmetro termodinâmico β varia. Aqui Φ denota a interação de primeiros vizinhos definida em (201).

A unicidade foi provada, também, em $(\beta_c, 0)$, quando $d \geq 2$. Em dimensão 2, existe uma variedade de provas, por exemplo, veja referência [94]. Uma prova mais moderna sobre a unicidade, em dimensão dois, em $(\beta_c, 0)$ foi dada por W. Werner em 2009. Já em dimensão $d \geq 4$, esse fato foi tratado por M. Aizenman e R. Fernández [6]. Recentemente, o caso restante ($d \geq 3$) foi completado por M. Aizenman, H. Duminil-Copin e V. Sidoravicius [5], através do uso de outra representação gráfica do modelo de Ising chamado “random-current representation” (para um esboço gráfico dessas situações, veja Figura 27).

CASO $d \geq 2$: modelo de Ising de primeiros vizinhos com $J_{ij} = J, \forall i, j$ e com campo magnético constante $h_i = h, \forall i$. Se $h = 0$, o clássico argumento de Peierls garante a existência de transição de fase. Se $h \neq 0$, para toda temperatura existe uma única medida Gibbs, isso segue da teoria de Lee-Yang [87] e das desigualdades GHS. A ausência de transição de fase é analisada comprovando a diferenciabilidade da energia livre com respeito ao parâmetro h . Diante disso, deduzimos que a ausência de um campo externo no modelo favorece o desalinhamento dos spins nas configurações.

Tudo o que foi dito anteriormente (quando a interação Φ é de primeiros vizinhos) é resumido na Figura 27 acima.

Seja $\mathcal{G}_{\text{lim}}(\beta\phi)$ o conjunto dos limites fracos das medidas de Gibbs a volume finito $(\gamma_{\Lambda}^{\beta\phi})_{\Lambda \in \mathcal{L}}$, onde Φ é uma interação da forma (201), com $h_i = 0, \forall i$. É natural tentar relacionar os conjuntos $\mathcal{G}_{\text{lim}}(\beta\phi)$ e $\mathcal{G}(\beta\phi)$. Ainda que, seja conhecido que $\mathcal{G}_{\text{lim}}(\beta\phi) \subseteq \mathcal{G}(\beta\phi)$ (veja Proposição 4.24), é difícil determinar quando $\mathcal{G}_{\text{lim}}(\beta\phi) = \mathcal{G}(\beta\phi)$. Geralmente, obter esses tipos de relações, é considerado como problemas em aberto. Em contraste, quando $d = 3$, em [37] é exibido um exemplo de medida de Gibbs não extremal a volume infinito (a temperaturas suficientemente baixas) que pertence ao conjunto $\mathcal{G}(\beta\phi) \setminus \mathcal{G}_{\text{lim}}(\beta\phi)$. Um resultado independente sobre essa questão pode ser encontrado, também, em [95].

Quando $J_{ij} = J \geq 0, h_i \equiv h^* / \|i\|^\alpha$ se $i \neq 0$ ($\alpha \geq 1$) e $h_i = h^* > 0$ se $i = 0$ e, $S = \mathbb{Z}^d$, foi provado em [23] que, para temperaturas suficientemente altas e baixas (o qual decorre diretamente pelo Teorema da Unicidade de Dobrushin), existe, exatamente, uma única medida de Gibbs para o modelo de Ising sobre \mathbb{Z}^d ($d \geq 2$), sempre que $\alpha \in [0, 1)$. A mesma afirmação (sobre a unicidade) foi conjecturada, para toda temperatura positiva mas com parâmetro $\alpha \in [0, 1)$. Em 2015, a referida conjectura foi resolvida na referência [36] por usar representações gráficas de modelos de spins e ideias envolvidas de [20]. Esse problema é a parte central desta tese e será abordado, em detalhe, no Capítulo 6.

Exemplo 4.28 (Modelo de Potts). Consideremos o modelo de Potts de primeiros vizinhos, com parâmetro $q \in \{1, 2, \dots\}$, espaço de estados $\mathcal{E} = \{1, 2, \dots, q\}$ e conjunto de parâmetros $S = \mathbb{Z}^d$; cuja interação foi definido no Exemplo 4.10 como

$$\Phi_A(\sigma) = \begin{cases} -J_{ij}\delta_{\sigma_i, \sigma_j}, & \text{se } A = \{i, j\} \\ 0, & \text{outro caso.} \end{cases}$$

Por simplicidade, considere que $J_{ij} = 1, \forall i, j$. É conhecido que, para o modelo de Potts sobre \mathbb{Z}^d ($d \geq 2$), existe uma temperatura crítica inversa $\beta_c \in (0, +\infty)$ (dependendo sobre d e q) tal que para $\beta < \beta_c$, o modelo tem uma única medida de Gibbs, no entanto, para $\beta > \beta_c$, existem q medidas de Gibbs mutuamente singulares, para maiores detalhes veja [40], Teorema 3.2, p. 18.

O modelo de Potts difere do modelo de Ising no sentido que, para valores grandes de q , existem múltiplas medidas de Gibbs na temperatura crítica $\beta = \beta_c(q, d)$, como foi mostrado por Kotecky e Shlosman em [82].

CASO $d = 2$: o valor crítico $\beta_c(2) = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2})$ para o modelo de Ising bidimensional (veja referência [100]) era aceitado válido a estender-se para o modelo de Potts sobre \mathbb{Z}^2 através da formula

$$\beta_c(q) = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{q}).$$

Logo, não existia nenhuma prova rigorosa desse fato, com exceção de valores de q suficientemente grandes estabelecidos nas referências [86] (a saber $q \geq 26$) e [82]. Em 2014 esse fato heurístico foi validado para qualquer número inteiro $q \geq 1$ (veja referências [12, 13]), calculando-se o ponto crítico $p_c(q) = \sqrt{q}/(1 + \sqrt{q})$ do modelo de aglomerados aleatórios (bidimensional) com parâmetros $(p, q) \in (0, 1) \times [1, +\infty)$. Como o modelo de Potts de q estados está relacionado com o modelo de aglomerados aleatórios com parâmetro $p = 1 - e^{-2\beta}$, obtém-se o valor exato de $\beta_c(q)$.

Foi predito que, para valores de $q \geq 5$, o modelo de Potts (bidimensional) possuía transição de fase de primeira ordem na fase $\beta = \beta_c(q)$. Depois de 40 anos, essa formulação continua sendo válida ainda, sem nenhuma verificação rigorosa. Baxter previu heurísticamente que esse modelo apresentava transição de fase de segunda ordem (segundo a Definição 4.19) para $q \in \{2, 3, 4\}$ sem nenhuma justificação sólida, até que, no ano 2015, H. Duminil-Copin, V. Sidoravicius e V. Tassion provaram esse fato na referência [43].

CASO $d \geq 3$: se espera que o modelo de Potts sobre \mathbb{Z}^d apresente transição de fase de segunda ordem na temperatura crítica $\beta = \beta_c(q)$ se, e somente se, $q = 2$. Os melhores resultados nessa direção são os seguintes: por um lado, o fato de que a transição de fase é de segunda ordem para o modelo de Ising ($q = 2$) é conhecida [5]. Por outro lado, a positividade por reflexão [21] permite provar que, para qualquer $q \geq 3$, o modelo de Potts apresenta transição de fase de primeira ordem

sobre alguma dimensão $d_c(q)$. Finalmente, pode-se aproveitar a positividade por reflexão para provar que, para qualquer $d \geq 2$, dita transição de fase é de primeira ordem para valores de q suficientemente grandes (veja referência [82]).

5

REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS PARA SISTEMAS DE SPINS COM PRESENÇA DE CAMPO

Neste capítulo, estudaremos, exclusivamente, o trabalho escrito pelos matemáticos M. Biskup, C. Borgs, J. T. Chayes e R. Kotecký, intitulado: *Gibbs states of graphical representations of the Potts model with external fields* (veja referência [20]). Ainda, este estudo terá como principal finalidade a introdução ao Capítulo 6, o qual é baseado e inspirado pelo trabalho mencionado. Justamente por isso, nos dedicaremos, aqui, a explicar as contas básicas de [20], no intuito de gerar menos complexidade ao entendimento do capítulo subsequente.

Resumindo, consideraremos o modelo de Potts ferromagnético (com constante de acoplamento $J \geq 0$) de q estados, onde $q \geq 1$ é um número inteiro, no qual cada spin está acoplado a um campo magnético externo homogêneo (chamado também de campo uniforme, pela não dependência dos spins assinados a cada vértice do grafo em consideração). Introduziremos, também, o modelo de aglomerados aleatórios generalizado (GRC), o qual inclui o modelo de aglomerados aleatórios de parâmetro q não inteiro como caso especial. Para o modelo GRC, estabeleceremos:

- ✓ a propriedade FKG (versão forte);
- ✓ a propriedade da energia finita;
- ✓ a unicidade do aglomerado infinito (quase certamente);
- ✓ a existência do limite fraco (ou limite termodinâmico) e
- ✓ as propriedades dos estados de Gibbs GRC.

Além disso, desenvolveremos a teoria dos estados de Gibbs de Edwards-Sokal (ES), para a representação ES do modelo de Potts com presença de campo, relacionando a estrutura de fase da representação ES com as representações SPIN e GRC. Caracterizaremos, também, a(s) possível(s) cor(es) do aglomerado infinito na representação ES e

mostraremos as relações existentes entre as aplicações dos estados de Gibbs: ES, SPIN e RC.

Matematicamente, o modelo de Potts ferromagnético (de q estados) em consideração terá Hamiltoniano definido por

$$H(\sigma) = -J \sum_{\{x,y\}} \delta_{\sigma_x, \sigma_y} - \sum_{p=1}^q \sum_x h_p \delta_{\sigma_x, p}, \quad (202)$$

onde cada $\sigma_x \in \{1, \dots, q\}$ é uma variável aleatória que chamaremos de variável spin ou simplesmente de spin, $J \geq 0$ é a constante de acoplamento que mede a força de interação entre dois spins vizinhos, $\delta_{\sigma_x, \sigma_y}$ é a função delta de Kronecker, $(h_p)_{p=1}^q$ é uma sequência de números reais que representa o campo magnético externo (cujo conjunto de índices é o conjunto de cores $\{1, 2, \dots, q\}$) e $\{x, y\}$ denota o par de primeiros vizinhos sobre a rede hipercúbica d -dimensional \mathbb{L}^d .

Durante os últimos trinta anos, vem surgindo uma grande quantidade de trabalhos sobre representações gráficas do modelo de Potts com ausência de campo externo, isto é $h_p = 0, \forall p \in 1, 2, \dots, q$. A representação FK (devido a Fortuin-Kasteleyn) ou de aglomerados aleatórios tem sido usado para provar diversos resultados sobre o modelo de Potts usando métodos de percolação (veja referências [4, 28]).

Note que, fixada a cor p , a segunda parcela de (202) associa o campo externo h_p a um subconjunto de sítios (ou vértices) (que pode ser um conjunto unitário) de \mathbb{Z}^d , isto é, h_p é constante para um número finito de sítios de \mathbb{Z}^d .

No Capítulo 6, estudaremos o modelo de Potts ferromagnético apresentado em [36], com uma pequena modificação no campo externo, isto é, fixada a cor p , a segunda parcela do Hamiltoniano modificado associará a cada sítio um campo externo que não necessariamente tem que ser constante no sítio. Portanto, a teoria apresentada no Capítulo 6, de certo modo, generaliza parte da teoria exposta neste capítulo.

Estudaremos, outrossim, representações gráficas do modelo de Potts com presença de campos externos arbitrários, como se definiu em (202). É claro que a análise da parte analítica (cálculo computacional) dos modelos em questão, com presença de campo externo, se torna relativamente mais complicada que a análise destes modelos quando se tem ausência de campo externo, por um número significativo de razões, a saber:

- ✓ Quando $h_p = 0$ é fácil verificar que a representação de aglomerados aleatórios tem a propriedade FKG (veja Corolário 3.34) não obstante quando $h_p \neq 0$ esta propriedade nem sempre é satisfeita para certas condições de fronteira. Em outras

palavras, a presença de campo externo muda a percepção intuitiva que se deve ter sobre o comportamento do sistema. Por outro lado, como já havíamos mencionado, neste caso os cálculos analíticos se tornam mais complexos como naturalmente há de se esperar.

- ✓ Quando $h_p = 0$ a quebra de simetria na representação de spins é equivalente à existência de percolação na representação de aglomerados aleatórios, por exemplo, veja Teorema .45 com $\hat{h} \equiv 0$. No caso em que $h_p \neq 0$, a relação entre a estrutura de fase do modelo de spins e percolação da representação do modelo de aglomerados aleatórios é menos direta.
- ✓ No caso em que $h_p \neq 0$, a ausência de simetria deixa a pergunta sobre a(s) cor(es) do(s) aglomerado(s) infinito(s), sendo esta pergunta realmente complexa de responder e não necessariamente devendo ser relacionado com os resultados dos modelos em questão quando $h_p = 0$.

Cabe destacar que, neste capítulo, provar-se-ão resultados concernentes aos sistemas que possuem campo externo definido por (202), os quais generalizam conhecidas propriedades de estados de Gibbs de modelos de aglomerados aleatórios com campo nulo. Em particular, para o modelo de aglomerados aleatórios com campo externo homogêneo, isto é $h_p = \text{constante}$, provaremos a propriedade FKG, a existência de medidas a volume infinito (limite fraco) e a Gibbsianidade destas medidas (para outras representações gráficas do modelo de Potts com presença de campo externo, veja por exemplo, a referência [22]).

5.1 ESTADOS DE GIBBS NAS REPRESENTAÇÕES: ES, SPIN E GRC

Nesta seção, definiremos medidas de Gibbs sobre espaços de probabilidade conjunta de variáveis de spins e arestas, isto é, definiremos as medidas de Gibbs de Edwards-Sokal (medidas ES), com a finalidade de relacionar o conjunto destas medidas com o conjunto das medidas de Gibbs, SPIN's e de aglomerados aleatórios (GRC). Salienta-se, por oportuno, que, em todo o capítulo, vamos adotar a definição (139) do conjunto \mathcal{L} como

$$\mathcal{L} \equiv \{\Lambda \subset \mathbb{Z}^d : 0 < |\Lambda| < \infty\}.$$

Para qualquer $\Lambda \in \mathcal{L}$, introduzimos a notação $\mathbb{B}_0(\Lambda)$ visando denotar o conjunto de todas as arestas $e = \{x, y\}$ de primeiros vizinhos com ambos os vértices em Λ e $\mathbb{B}(\Lambda)$ para representar o conjunto de todas as arestas com, no mínimo, um vértice em Λ . Para qualquer subconjunto $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)$, definimos $\mathbb{V}(\mathbb{B})$ como o conjunto de vértices (ou sítios) que pertencem, no mínimo, a uma aresta em \mathbb{B} . Relembrando que a fronteira externa de um subconjunto $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)$ é formada por todas as arestas de $\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)$ com um extremo em \mathbb{B} e o outro fora dele, observe que $\mathbb{B}(\Lambda) = \mathbb{B}_0(\Lambda) \cup \partial\mathbb{B}_0(\Lambda)$, $\mathbb{V}(\mathbb{B}_0(\Lambda)) = \Lambda$, $\mathbb{V}(\partial\mathbb{B}_0(\Lambda)) = \partial\Lambda$, portanto, $\mathbb{V}(\mathbb{B}(\Lambda)) = \Lambda \cup \partial\Lambda = \bar{\Lambda}$.

5.1.1 Estados de Gibbs na representação de Edwards-Sokal

Dado $\Lambda \in \mathcal{L}$ e fixadas as configurações σ_{Λ^c} e $\eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}$ fora de Λ e $\mathbb{B}(\Lambda)$ respectivamente, definimos a medida de Edwards-Sokal (ES) por

$$\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(\sigma_{\Lambda}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)} | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) \equiv \begin{cases} \frac{\mathcal{W}(\sigma_{\Lambda}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)} | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c})}{Z_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(\sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c})}, & \text{se } Z_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(\sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) > 0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (203)$$

onde os pesos \mathcal{W} são definidos como

$$\mathcal{W}(\sigma_{\Lambda}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)} | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) = \prod_{\substack{\{x, y\} \in \mathbb{B}(\Lambda) \\ \eta_{xy}=1}} (e^{\beta J} - 1) \delta_{\sigma_x, \sigma_y} \prod_{x \in \Lambda} e^{\beta \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}} \quad (204)$$

e

$$Z_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(\sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) = \sum_{\tilde{\sigma}_{\Lambda}, \tilde{\eta}_{\mathbb{B}(\Lambda)}} \mathcal{W}(\tilde{\sigma}_{\Lambda}, \tilde{\eta}_{\mathbb{B}(\Lambda)} | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c})$$

denota a função de partição que faz de $\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}$ uma medida de probabilidade. Observe-se que a notação da função de partição é adequada, desde que esta dependa unicamente das configurações σ e η sobre Λ^c e $\mathbb{B}(\Lambda)^c$, respectivamente. A dependência dos parâmetros J e $(h_p)_{p=1}^q$ serão explicitamente ressaltados sempre quando for necessário.

Pela própria definição de $\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}$, veja que esta não depende de nenhuma forma da configuração $\eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}$. Logo, consideraremos esta configuração na definição daquela medida por completude e estética.

Adotaremos, aqui, a notação $\Sigma_q \equiv \{1, \dots, q\}^{\mathbb{Z}^d}$ e $\Omega \equiv \{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)}$ para o espaço de configurações de spins e de arestas, respectivamente, e $\mathcal{M}_1(\Sigma_q \times \Omega)$ para denotar o conjunto das medidas de probabilidade sobre o espaço de probabilidade $\Sigma_q \times \Omega$.

Desde que a família de medidas $\{\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}} : \Lambda \in \mathcal{L}\}$ é uma especificação (veja Capítulo 4 para uma definição precisa deste conceito), diremos que uma medida $\nu \in \mathcal{M}_1(\Sigma_q \times \Omega)$ satisfaz a condição ou equação DLR (em homenagem a a Dobrushin, Lanford e Ruelle, veja Definição 4.7), se para cada função cilíndrica f com suporte em $\Lambda \times \mathbb{B}(\Lambda)$ se satisfaz

$$\nu(f) \stackrel{\text{DLR}}{=} \int \nu(d\sigma, d\eta) \phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(f | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}). \quad (205)$$

Como é usual, definimos por \mathcal{G}^{ES} o conjunto de medidas de probabilidade (chamadas também de medidas de Gibbs ES a volume infinito ou estados de Gibbs ES) que satisfazem a condição DLR. Dito de outra forma, \mathcal{G}^{ES} está conformado pelas medidas em $\mathcal{M}_1(\Sigma_q \times \Omega)$, que são consistentes com a especificação $\{\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}} : \Lambda \in \mathcal{L}\}$, segundo a Definição 4.7. Por compreensão, \mathcal{G}^{ES} é definido como

$$\mathcal{G}^{\text{ES}} \equiv \left\{ \nu \in \mathcal{M}_1(\Sigma_q \times \Omega) : \nu(f) = \nu(\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(f | \cdot)), \text{ supp}(f) \subset \Lambda \times \mathbb{B}(\Lambda) \right\}.$$

Observe que o conjunto \mathcal{G}^{ES} pode ser interpretado, também, como uma classe de medidas que são preservadas por seus respectivos núcleos de probabilidade.

Desde que a especificação $\{\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}} : \Lambda \in \mathcal{L}\}$ é quase-local, pelo Teorema 4.26 temos que o conjunto \mathcal{G}^{ES} é não vazio. Note que a quase-localidade e a consistência desta especificação implicam que a equação DLR (que define \mathcal{G}^{ES}) é equivalente à versão esperança condicional de ν (como foi mostrado no Teorema 4.31). Logo, $\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$ se, e somente se, para cada função cilíndrica f com suporte em $\Lambda \times \mathbb{B}(\Lambda)$, ν satisfaz a seguinte equação:

$$\nu(f | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) = \phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(f | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}), \quad \nu - \text{q.c.} \quad (206)$$

Antes de prosseguirmos, salientamos dois pontos importantes, o primeiro é que na notação (206), por abuso costumeiro de linguagem, estamos escrevendo $\nu(f | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c})$ para referimo-nos à esperança condicional $\nu(f | \mathcal{F}_{\Lambda^c} \times \mathcal{F}_{\mathbb{B}(\Lambda)^c})(\eta)$, onde $\mathcal{F}_{\Lambda^c} \times \mathcal{F}_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}$ representa à σ -álgebra produto gerada pelos cilindros com base em $\Lambda^c \times \mathbb{B}(\Lambda)^c$. Um segundo ponto é que a expressão $\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(f | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c})$ denota simplesmente uma esperança que depende das configurações σ_{Λ^c} e $\eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}$, portanto, essa notação não deve ser confundida com a de uma esperança condicional. Em alguns textos, a equação (206) é chamada, também, de equação DLR.

Em seguida, introduziremos as medidas ES com dois tipos especiais de condições de fronteira: condição de fronteira livre e m -conectada.

MODELO DE EDWARDS-SOKAL COM CONDIÇÃO DE FRONTEIRA m -CONECTADA.

Relembrando que, por definição (203), a medida de probabilidade $\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(\cdot | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c})$ não tem dependência alguma sobre a configuração $\eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}$. Assim, para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$ definimos a medida

$$\phi_{\Lambda, m}^{\text{ES}}(\cdot) \equiv \phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(\cdot | \sigma_{\Lambda^c}^m, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}),$$

onde σ^m é a configuração constante, $\sigma_x^m = m$ para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, com $m \in \{1, \dots, q\}$ fixo. $\phi_{\Lambda, m}^{\text{ES}}(\cdot)$ será chamada de medida ES com condição de fronteira m -conectada. A função partição desta medida de probabilidade será denotada por $Z_{\Lambda, m}^{\text{ES}}$ e satisfaz

$$Z_{\Lambda, m}^{\text{ES}} = Z_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(\sigma_{\Lambda^c}^m, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}).$$

MODELO DE EDWARDS-SOKAL COM CONDIÇÃO DE FRONTEIRA LIVRE.

Analogamente, definimos a medida ES com condição de fronteira livre como a medida $\phi_{\Lambda, \mathbb{B}_0(\Lambda)}^{\text{ES}}(\cdot | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}_0(\Lambda)^c})$, que se obtém de (203) por considerar $\mathbb{B} \equiv \mathbb{B}_0$. Por definição, esta medida não depende da configuração σ_{Λ^c} . A única dependência que esta medida possui é sobre a condição de fronteira $\eta_{\mathbb{B}_0(\Lambda)^c}$ que é escolhida como $\eta_{\mathbb{B}_0(\Lambda)^c} = \eta_{\mathbb{B}_0(\Lambda)^c}^0$, onde η^0 é a configuração constante definida assim: $\eta_e^0 = 0$ para cada $e \in \mathbb{B}(\mathbb{Z}^d)$. Neste caso introduzimos a notação

$$\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{ES}}(\cdot) \equiv \phi_{\Lambda, \mathbb{B}_0(\Lambda)}^{\text{ES}}(\cdot | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}_0(\Lambda)^c}^0). \quad (207)$$

A função de partição desta medida de probabilidade será denotada por $Z_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{ES}}$ e esta satisfaz

$$Z_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{ES}} = Z_{\Lambda, \mathbb{B}_0(\Lambda)}^{\text{ES}}(\sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}_0(\Lambda)^c}^0).$$

5.1.2 Estados de Gibbs na representação GRC

Dada uma configuração $\eta \in \Omega$, definimos o conjunto das arestas abertas (ou ocupadas) por $\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \equiv \{e \in \mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d) : \eta_e = 1\}$ e o grafo correspondente $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta))$ com conjunto de vértices \mathbb{Z}^d e conjunto de arestas $\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta)$. Para cada conjunto finito de arestas \mathbb{B} e cada configuração $\eta_{\mathbb{B}^c}$, definimos a medida de probabilidade

$$\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}} | \eta_{\mathbb{B}^c}) = \begin{cases} \frac{\mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}} | \eta_{\mathbb{B}^c})}{Z_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}^c})}, & \text{se } Z_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}^c}) > 0 \\ 0, & \text{outro caso,} \end{cases} \quad (208)$$

onde os pesos $\mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}$ são definidos como

$$\mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}}|\eta_{\mathbb{B}^c}) \equiv (e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}|} \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \mathbb{V}(\mathbb{B}) \neq \emptyset} \sum_{p=1}^q q_p e^{-\beta(h_{\max} - h_p)|C(\eta)|}. \quad (209)$$

Aqui, o produto percorre sobre todos os aglomerados que contém origem

$$C(\eta) \equiv \{y \in \mathbb{Z}^d : 0 \leftrightarrow y \text{ em } \eta\} \cup \{0\},$$

tal que $C(\eta)$ intercepta o conjunto de vértices $\mathbb{V}(\mathbb{B})$ e os fatores q_p , $p = 1, \dots, q$, são assumidos a ser números reais positivos tal que

$$\sum_{p \in \mathcal{Q}_{\max}(h)} q_p \geq 1, \quad (210)$$

onde $\mathcal{Q}_{\max}(h)$ é o conjunto de cores onde o campo atinge seu valor máximo (veja definição (212) abaixo). Já para os aglomerados (não necessariamente finitos) em η que não interceptem $\mathbb{V}(\mathbb{B})$, definiremos $\mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}}|\eta_{\mathbb{B}^c}) = 0$. A medida $\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\cdot|\eta_{\mathbb{B}^c})$ será chamada de medida GRC, cuja notação provém da palavra em inglês *general random-cluster*. Neste trabalho usar-se-ão termos técnicos como modelo GRC e medida GRC, tendo sempre em mente que estamos nos referindo ao modelo e à medida de aglomerados aleatórios generalizado definidos aqui.

Usaremos h_{\max} para denotar

$$h_{\max} \equiv \max_{p \in \{1, \dots, q\}} h_p. \quad (211)$$

Definindo o conjunto

$$\mathcal{Q}_{\max}(h) \equiv \{p \in \{1, \dots, q\} : h_p = h_{\max}\} \quad (212)$$

e convencionando que $e^{-\infty} = 0$; na definição (209), se $p \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$ com $q_p = 1$ para todo $p \in \{1, \dots, q\}$, então quando $|C| = \infty$ temos

$$\mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}}|\eta_{\mathbb{B}^c}) = (e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}|} q^{|\{C(\eta): C(\eta) \cap \mathbb{V}(\mathbb{B}) \neq \emptyset\}|}.$$

Observe-se que os aglomerados infinitos contribuem ao tamanho do conjunto $\mathcal{Q}_{\max}(h)$, isso não é casualidade, o Teorema 5.22 abaixo nos diz que quase certamente, a cor de um aglomerado infinito (referindo-nos ao cor de cada spin do aglomerado) deve estar em $\mathcal{Q}_{\max}(h)$. Para usos futuros, escrevemos $N_{\infty} \equiv N_{\infty}(\eta)$ para denotar a variável aleatória que conta o número de aglomerados infinitos de $\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta)$ e usaremos $C_{\infty} \equiv C_{\infty}(\eta)$ para denotar o único aglomerado infinito em η , sempre que $N_{\infty} = 1$.

Similarmente à Subseção 5.1.1, introduzimos o conjunto das medidas de probabilidade determinadas pela especificação $\{\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}} : |\mathbb{B}| < \infty\}$. Diremos que uma medida $\phi \in \mathcal{M}_1(\Omega)$ satisfaz a condição DLR se esta satisfaz a seguinte equação:

$$\phi(f) \stackrel{\text{DLR}}{=} \int \phi(d\eta) \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\omega_{\mathbb{B}^c}), \quad (213)$$

onde f é uma função cilíndrica crescente com suporte em \mathbb{B} . O conjunto destas medidas será denotado por \mathcal{G}^{GRC} , onde

$$\mathcal{G}^{\text{GRC}} \equiv \left\{ \phi \in \mathcal{M}_1(\Omega) : \phi(f) = \phi(\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\cdot)), \text{ supp}(f) \subset \mathbb{B} \right\}.$$

Os elementos do conjunto \mathcal{G}^{GRC} são conhecidos como medidas de Gibbs a volume infinito ou estados de Gibbs GRC. Um fato fundamental a enfatizar é que, devido à perda de quase-localidade da especificação $\{\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}} : |\mathbb{B}| < \infty\}$ (veja Proposição 5.13 abaixo) o fato de que $\phi \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}$ não necessariamente é equivalente a que ϕ satisfaça a seguinte versão de esperança condicional

$$\phi(f|\eta_{\mathbb{B}^c}) = \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}^c}), \quad \phi - \text{q.c.}, \quad (214)$$

para cada função cilíndrica f . Para se ter a equivalência entre essas definições, deve-se impor a condição geométrica adicional da existência quase certa de um único aglomerado infinito, veja Teorema 5.33.

MEDIDA GRC COM CONDIÇÃO DE FRONTEIRA LIVRE.

Seja $\Lambda \in \mathcal{L}$ e $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\Lambda)}$ uma configuração. Se $C(\eta)$ denota um aglomerado genérico sobre o grafo $(\Lambda, \mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}_0(\Lambda))$, definimos

$$\Theta_{\text{livre}}(C(\eta)) \equiv \sum_{p=1}^q q_p e^{\beta h_p |C(\eta)|}. \quad (215)$$

A medida GRC com condição de fronteira livre é obtida por normalizar os seguintes pesos

$$\mathcal{W}_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}(\eta) \equiv (e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}_0(\Lambda)|} \prod_{C(\eta)} \Theta_{\text{livre}}(C(\eta)), \quad (216)$$

onde o produto percorre sobre todos os aglomerados $C(\eta)$ do grafo $(\Lambda, \mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}_0(\Lambda))$. Esta medida de probabilidade é denotada por $\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}$ e, para cada $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\Lambda)}$, esta satisfaz $\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}(\eta) \propto \mathcal{W}_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}(\eta)$, onde a constante de proporcionalidade é exatamente a

(inversa da) função de partição do medida GRC e é denotada por $Z_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}$. Formalmente, a função partição $Z_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}$ é aquela que satisfaz

$$Z_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}} = \sum_{\tilde{\eta}_{\mathbb{B}_0(\Lambda)}} \mathcal{W}_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}(\tilde{\eta}).$$

MEDIDA GRC COM CONDIÇÃO DE FRONTEIRA m -CONECTADA.

Fixado $m \in \{1, \dots, q\}$ e $\Lambda \in \mathcal{L}$, se para cada $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}(\Lambda)}$, $C(\eta)$ denota um aglomerado sobre o grafo $(\bar{\Lambda}, \mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}(\Lambda))$ ¹ com $\bar{\Lambda} = \Lambda \cup \partial\Lambda$, definimos

$$\Theta_{\Lambda, m}(C(\eta)) \equiv \begin{cases} \Theta_{\text{livre}}(C(\eta)), & \text{se } C(\eta) \cap \Lambda^c = \emptyset \\ e^{\beta h_m |C(\eta)|}, & \text{outro caso.} \end{cases} \quad (217)$$

A medida GRC com condição com fronteira m -conectada é obtida por normalizar os seguintes pesos

$$\mathcal{W}_{\Lambda, m}^{\text{GRC}}(\eta) \equiv (e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}(\Lambda)|} \prod_{C(\eta)} \Theta_{\Lambda, m}(C(\eta)), \quad (218)$$

onde o produto percorre sobre todos os aglomerados $C(\eta)$ do grafo $(\bar{\Lambda}, \mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}(\Lambda))$. A medida GRC com condição de fronteira m -conectada é denotada por $\phi_{\Lambda, m}^{\text{GRC}}$ e para cada $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}(\Lambda)}$ satisfaz $\phi_{\Lambda, m}^{\text{GRC}} \propto \mathcal{W}_{\Lambda, m}^{\text{GRC}}(\eta)$. A constante de proporcionalidade exatamente é a (inversa da) função de partição associada à medida GRC, notação $Z_{\Lambda, m}^{\text{GRC}}$, a qual satisfaz

$$Z_{\Lambda, m}^{\text{GRC}} = \sum_{\tilde{\eta}_{\mathbb{B}(\Lambda)}} \mathcal{W}_{\Lambda, m}^{\text{GRC}}(\tilde{\eta}).$$

Definição 5.1 (Medida GRC com condição de fronteira max-conectada). *Se $m, \tilde{m} \in \mathcal{Q}_{\text{max}}(h)$, então para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$: $\Theta_{\Lambda, \tilde{m}}(C) = \Theta_{\Lambda, m}(C)$. Portanto,*

$$\phi_{\Lambda, \tilde{m}}^{\text{GRC}} = \phi_{\Lambda, m}^{\text{GRC}}.$$

Esta medida será denotada por $\phi_{\Lambda, \text{max}}^{\text{GRC}}$ e, frequentemente, o chamaremos de medida GRC com condição de fronteira max-conectada.

É instrutivo considerar os efeitos de condições de fronteiras particulares sobre a medida com pesos (209). Para enunciar as duas proposições seguintes, denotamos por $\eta^{(b)}$ a configuração de arestas definida por $\eta_e^{(b)} = b$ para cada $e \in \mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)$, com $b = 0, 1$.

¹ Relembramos que $\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta)$ denota o conjunto de arestas e em η tal que $\eta_e = 1$.

Proposição 5.1. *Fazendo-se $\mathbb{B} \equiv \mathbb{B}(\Lambda)$ e $\eta_{\mathbb{B}^c} \equiv \eta_{\mathbb{B}^c}^{(1)}$ em (209), obtemos a medida GRC com condição de fronteira max-conectada $\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}$, sempre que Λ^c seja conexo. Isto é*

$$\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(\eta) = \phi_{\mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}(\Lambda)} | \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}^{(1)}).$$

Pela Proposição 5.1, nos vemos tentados a afirmar que, para cada $m \in \{1, \dots, q\}$, também, se satisfaz

$$\phi_{\mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}(\Lambda)} | \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}^{(1)}) = \phi_{\Lambda, m}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}(\Lambda)}),$$

o que não necessariamente é certo, em geral. A Proposição 5.1 afirma que a identidade acima é certa sempre que imponhamos a condição de que $m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$. Observe que as medidas $\phi_{\Lambda, m}^{\text{GRC}}$, $\forall m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$, são constantes na cor, isto é, são iguais à medida $\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}$.

Proposição 5.2. *Fazendo-se $\mathbb{B} \equiv \mathbb{B}_0(\Lambda)$ e $\eta_{\mathbb{B}^c} \equiv \eta_{\mathbb{B}^c}^{(0)}$ em (209), obtém-se a medida GRC com condição de fronteira livre $\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}$. Em outras palavras,*

$$\phi_{\mathbb{B}_0(\Lambda)}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}_0(\Lambda)} | \eta_{\mathbb{B}_0(\Lambda)^c}^{(0)}) = \phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}(\eta).$$

Definição 5.2 (Medida RC). *Nas definições das medidas GRC tanto com condições de fronteiras gerais, livre ou m -conectada, se fazemos $q_p \equiv 1$ para todo $p \in \{1, \dots, q\}$, estas medidas serão chamadas simplesmente de **medidas RC** para substituir a palavra “medida de aglomerados aleatórios”. Nesse caso, analogamente ao feito depois de (213), definiremos o conjunto \mathcal{G}^{RC} com sua respectiva modificação.*

O seguinte lema nos diz que, a volume finito, a RC marginal da medida ES é uma medida RC a volume finito. A prova desse lema segue por observar, basicamente, as definições das medidas ES e RC, a volume finito.

Lema 5.3 (RC marginais). *Com base nas definições das medidas ES e RC, para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$, as seguintes RC marginais (ou arestas-marginais) são satisfeitas:*

i) *para cada função f cilíndrica com suporte em $\mathbb{B}_0(\Lambda)$,*

$$\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{ES}}(f) = \phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{RC}}(f);$$

ii) *para cada função f cilíndrica com suporte em $\mathbb{B}(\Lambda)$,*

$$\phi_{\Lambda, m}^{\text{ES}}(f) = \phi_{\Lambda, m}^{\text{RC}}(f), \quad m = 1, 2, \dots, q.$$

5.1.3 Estados de Gibbs na representação de spins

Considere o modelo de Potts de q estados onde cada spin é acoplado a um campo magnético externo homogêneo $(h_p)_{p=1}^q$. Seja $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ a interação definida no Exemplo 4.10 e H_Λ^Φ o Hamiltoniano em Λ associado a Φ , estabelecido na Definição 4.12. Nesta subseção, apresentamos uma modificação do Hamiltoniano $H(\cdot)$ introduzido em (202), de modo que dita variante nos permita incorporar condições de fronteira. Este Hamiltoniano é definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H_\Lambda^\Phi(\sigma_\Lambda \sigma_{\Lambda^c}) &\equiv H(\sigma) - J \sum_{\substack{\{x,y\} \in \mathbb{B}(\mathbb{Z}^d): \\ x \in \Lambda, y \in \partial\Lambda}} \delta_{\sigma_x, \sigma_y} \\ &= -J \sum_{\substack{\{x,y\} \in \mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d) \\ x,y \in \Lambda}} \delta_{\sigma_x, \sigma_y} - \sum_{p=1}^q \sum_{x \in \Lambda} h_p \delta_{\sigma_x, p} - J \sum_{\substack{\{x,y\} \in \mathbb{B}(\mathbb{Z}^d): \\ x \in \Lambda, y \in \partial\Lambda}} \delta_{\sigma_x, \sigma_y}. \end{aligned} \quad (219)$$

Fixada a configuração σ sobre Λ^c , definamos a medida de probabilidade $\phi_\Lambda^{\text{SPIN}}(\cdot | \sigma_{\Lambda^c})$ caracterizada pelo Hamiltoniano H_Λ^Φ ,

$$\phi_\Lambda^{\text{SPIN}}(\sigma_\Lambda | \sigma_{\Lambda^c}) = \begin{cases} \frac{e^{-\beta H_\Lambda^\Phi(\sigma_\Lambda \sigma_{\Lambda^c})}}{Z_\Lambda^{\text{SPIN}}(\sigma_{\Lambda^c})}, & \text{se } Z_\Lambda^{\text{SPIN}}(\sigma_{\Lambda^c}) > 0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (220)$$

onde $Z_\Lambda^{\text{SPIN}}(\sigma_{\Lambda^c})$ é a função de partição que faz de $\phi_\Lambda^{\text{SPIN}}$ uma medida de probabilidade. Isto é,

$$Z_\Lambda^{\text{SPIN}}(\sigma_{\Lambda^c}) = \sum_{\tilde{\sigma}_\Lambda} e^{-\beta H_\Lambda^\Phi(\tilde{\sigma}_\Lambda \sigma_{\Lambda^c})}.$$

Uma vez que $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ é uma interação λ -admissível regular, pelo Lema 4.28, a família $\gamma^\Phi = \{\phi_\Lambda^{\text{SPIN}} : \Lambda \in \mathcal{L}\}$ é uma especificação Gibbsiana quase-local. Diremos que uma medida $\mu \in \mathcal{M}_1(\Sigma_q)$ satisfaz a equação DLR se μ é especificada pela família γ^Φ , isto é, para cada função f cilíndrica com suporte em Λ , se satisfaz

$$\mu(f) \stackrel{\text{DLR}}{=} \int \mu(d\sigma) \phi_\Lambda^{\text{SPIN}}(f | \sigma_{\Lambda^c}). \quad (221)$$

Definimos por $\mathcal{G}^{\text{SPIN}}$ o conjunto de todas as medidas de probabilidade que satisfazem a equação DLR. Por compreensão, $\mathcal{G}^{\text{SPIN}}$ é

$$\mathcal{G}^{\text{SPIN}} \equiv \left\{ \mu \in \mathcal{M}_1(\Sigma_q) : \mu(f) = \mu(\phi_\Lambda^{\text{SPIN}}(f | \cdot)), \text{ supp}(f) \subset \Lambda \right\}.$$

Os elementos de $\mathcal{G}^{\text{SPIN}}$ são chamados, também, de estados ou medidas de Gibbs ou estados de Gibbs SPIN. O conjunto $\mathcal{G}^{\text{SPIN}}$ está formado por todas as medidas que são consistentes (veja Definição 4.7) com a especificação γ^Φ . Dito de outra forma, $\mathcal{G}^{\text{SPIN}}$ é a classe de medidas de probabilidade que são preservadas por seus respectivos núcleos de probabilidade.

Desde que γ^Φ é uma especificação quase-local, pelo Teorema 4.26, o conjunto $\mathcal{G}^{\text{SPIN}}$ é não vazio. Observe, também, que a quase-localidade e a consistência desta especificação, segundo o Teorema 4.31, nos permite estabelecer a seguinte equivalência: cada $\mu \in \mathcal{G}^{\text{SPIN}}$ se, e somente se, μ admite a seguinte versão esperança condicional,

$$\mu(f|\sigma_{\Lambda^c}) = \phi_{\Lambda}^{\text{SPIN}}(f|\sigma_{\Lambda^c}), \quad \mu - \text{q.c.}, \quad (222)$$

onde f é uma função cilíndrica com suporte em Λ .

O Lema 5.3 nos proporciona as RC marginais para a medida ES com condição de fronteira livre e m -conectada. No entanto, o seguinte Lema nos informa sobre a SPIN marginal da medida ES com condição de fronteira geral como foi definido em (203).

Lema 5.4 (SPIN marginal). *Seja $\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$, $\Lambda \in \mathcal{L}$ e f uma função cilíndrica com suporte em Λ . Então a seguinte SPIN marginal é satisfeita:*

$$\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(f|\sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) = \phi_{\Lambda}^{\text{SPIN}}(f|\sigma_{\Lambda^c}).$$

Demonstração. Dado $\Lambda \in \mathcal{L}$ e o Hamiltoniano definido em (219), note que fator de Boltzmann $e^{-\beta H_{\Lambda}^{\Phi}(\sigma_{\Lambda}\sigma_{\Lambda^c})}$ pode expressar-se

$$e^{-\beta H_{\Lambda}^{\Phi}(\sigma_{\Lambda}\sigma_{\Lambda^c})} = \prod_{\{x,y\} \in \mathbb{B}(\Lambda)} e^{\beta J \delta_{\sigma_x, \sigma_y}} \prod_{x \in \Lambda} e^{\beta \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}} = \prod_{\{x,y\} \in \mathbb{B}(\Lambda)} e^{\beta J \delta_{\sigma_x, \sigma_y}} \prod_{x \in \Lambda} e^{\beta h(\sigma_x)},$$

onde $h(\sigma_x) \equiv \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}$. Usando o Lema 3.7, expandimos cada fator $e^{\beta J \delta_{\sigma_x, \sigma_y}}$ como $1 + (e^{\beta J} - 1)\delta_{\sigma_x, \sigma_y}$. Logo, introduzindo a configuração $\eta_{\mathbb{B}(\Lambda)} = (\eta_b)_{b \in \mathbb{B}(\Lambda)}$ e usando o Lema 1.7 (como foi feito no Lema 3.9), podemos escrever o fator de Gibbs da seguinte forma

$$\begin{aligned} e^{-\beta H_{\Lambda}^{\Phi}(\sigma_{\Lambda}\sigma_{\Lambda^c})} &= \sum_{\eta_{\mathbb{B}(\Lambda)}} \prod_{\substack{\{x,y\} \in \mathbb{B}(\Lambda) \\ \eta_{xy}=1}} (e^{\beta J} - 1)\delta_{\sigma_x, \sigma_y} \prod_{x \in \Lambda} e^{\beta h(\sigma_x)} \\ &= \sum_{\eta_{\mathbb{B}(\Lambda)}} \mathcal{W}_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(\sigma_{\Lambda}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)} | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}). \end{aligned}$$

De onde se deduz $\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(f|\sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) = \phi_{\Lambda}^{\text{SPIN}}(f|\sigma_{\Lambda^c})$, para cada função f cilíndrica. \square

5.2 PROPRIEDADE FKG DAS MEDIDAS GRC

Nesta seção e no restante do capítulo, assumiremos que $\{q_p : p = 1, \dots, q\}$ é uma sequência de números reais positivos que satisfazem a desigualdade

$$\sum_{p \in \mathcal{Q}_{\max}(h)} q_p \geq 1, \quad (223)$$

onde $\mathcal{Q}_{\max}(h) \equiv \{p \in \{1, \dots, q\} : h_p = h_{\max}\}$ é o conjunto formado por todas as cores onde o campo externo atinge um valor máximo. Consideraremos a relação de ordem padrão sobre $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)}$ definida por

$$\omega, \eta \in \Omega : \omega \preceq \eta \iff \omega_e \leq \eta_e, \quad \forall e \in \mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d).$$

Usaremos, também, a notação padrão $\omega \vee \eta$ e $\omega \wedge \eta$ para denotar as configurações máximo e mínimo. Tais configurações são definidas como

$$(\omega \vee \eta)_e = \max\{\omega_e, \eta_e\} \quad \text{e} \quad (\omega \wedge \eta)_e = \min\{\omega_e, \eta_e\}, \quad \forall e \in \mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d),$$

respectivamente.

Diremos que uma medida μ sobre Ω tem a **propriedade látice FKG** se esta satisfaz a **condição látice FKG**:

$$\mu(\omega \vee \eta) \mu(\omega \wedge \eta) \geq \mu(\omega) \mu(\eta), \quad \forall \omega, \eta \in \Omega. \quad (224)$$

A classe de medidas que compõem a formulação do próximo resultado é caracterizada pela condição que introduziremos a seguir como a **propriedade FKG forte**. Esse conceito de monotonicidade é mais forte que a propriedade FKG (padrão). Foi mostrado por Van den Berg e Burton [117] que a classe de medidas que satisfazem a propriedade FKG forte é equivalente à classe de medidas que satisfazem a condição látice FKG, isso é resumido no Teorema 5.5 (para maiores detalhes sobre a condição látice FKG, veja referência [52]).

Para $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}'$ finitos e $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}'}$, definimos

$$\Omega_{\mathbb{B}}^{\xi} \equiv \{\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}'} : \eta_e = \xi_e, \forall e \in \mathbb{B}' \setminus \mathbb{B}\} \quad (225)$$

como o conjunto de configurações que coincidem com ξ sobre o complementar de \mathbb{B} com respeito a \mathbb{B}' . Seja μ uma medida de probabilidade sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{B}'}$ e sejam \mathbb{B} , ξ tal

que $\mu(\Omega_{\mathbb{B}}^{\xi}) > 0$. Definimos a medida de probabilidade condicional $\mu_{\mathbb{B}}^{\xi}$ sobre o espaço de configurações finitas $\{0, 1\}^{\mathbb{B}}$ por

$$\mu_{\mathbb{B}}^{\xi}(\eta_{\mathbb{B}}) \equiv \mu(\eta_{\mathbb{B}} | \Omega_{\mathbb{B}}^{\xi}) = \frac{\mu(\eta_{\mathbb{B}} \xi_{\mathbb{B}' \setminus \mathbb{B}})}{\mu(\Omega_{\mathbb{B}}^{\xi})}, \quad \eta_{\mathbb{B}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}}, \quad (226)$$

onde $\eta_{\mathbb{B}} \xi_{\mathbb{B}' \setminus \mathbb{B}}$ denota a configuração (chamada de configuração concatenada) definida por

$$(\eta_{\mathbb{B}} \xi_{\mathbb{B}' \setminus \mathbb{B}})_e = \begin{cases} \eta_e, & \text{se } e \in \mathbb{B} \\ \xi_e, & \text{se } e \in \mathbb{B}' \setminus \mathbb{B}. \end{cases}$$

Definição 5.3 (Propriedade FKG forte). Dizemos que uma medida μ tem a **propriedade FKG forte**² se: para cada $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}'$ e todo $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}'}$ tal que $\mu(\Omega_{\mathbb{B}}^{\xi}) > 0$, a medida $\mu_{\mathbb{B}}^{\xi}$ é associada positiva, isto é, para cada função f, g mensurável crescente temos

$$\mu_{\mathbb{B}}^{\xi}(f \cdot g) \geq \mu_{\mathbb{B}}^{\xi}(f) \mu_{\mathbb{B}}^{\xi}(g),$$

equivalentemente, se $\text{Cov}_{\mu_{\mathbb{B}}^{\xi}}(f, g) \geq 0$.

Seja μ uma medida sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{B}'}$, $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}'$ subconjuntos finitos de $\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)$ e $\xi, \psi \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}'}$ tal que $\mu(\Omega_{\mathbb{B}}^{\xi}), \mu(\Omega_{\mathbb{B}}^{\psi}) > 0$. Dizemos que μ é **monótona** se: para cada função cilíndrica crescente f , dependendo somente das arestas de \mathbb{B} , tem-se

$$\mu_{\mathbb{B}}^{\xi}(f) \leq \mu_{\mathbb{B}}^{\psi}(f), \quad \text{sempre que } \xi \preceq \psi.$$

Isto é, μ é monótona se, para cada $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}'$,

$$\mu_{\mathbb{B}}^{\xi} \leq_{\text{st}} \mu_{\mathbb{B}}^{\psi}, \quad \text{sempre que } \xi \preceq \psi. \quad (227)$$

A medida μ é chamada de **1-monótona** se (227) se satisfaz para todo conjunto de arestas \mathbb{B} unitário.

Com base nestas definições prévias, enunciamos o seguinte teorema que será de vital importância no decorrer da apresentação do trabalho.

Teorema 5.5. *Seja μ uma medida de probabilidade estritamente positiva sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{B}'}$ (isto é, $\mu(\omega) > 0, \forall \omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}'}$). As seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) μ tem a propriedade FKG forte.

² Em alguns textos, a propriedade FKG forte é conhecida, também, como associação fortemente positiva.

(b) μ satisfaz a condição látice FKG.

(c) μ é monótona.

(d) μ é 1-monótona.

Demonstração. Para uma prova por extenso deste teorema, veja [65], Teorema 2.24, p. 28. \square

5.2.1 Propriedade FKG forte e algumas consequências

A seguinte ferramenta técnica, chamada **propriedade FKG**, é uma propriedade de vital importância das medidas a volume finito definidas aqui. Essa propriedade nos permitirá dar sequência a nossa apresentação, pois através dela é possível obter a maioria das monotonicidades deste trabalho, o que nos ajudará economizando esforço analítico. Essa ferramenta faz o papel análogo à independência para modelos que possuem a propriedade de ser independente como, por exemplo, o modelo de percolação (de Bernoulli) definido no Capítulo 2. Salientamos que as medidas de Gibbs definidas neste capítulo carecem de independência, e é por isso que requeremos dessa propriedade.

Teorema 5.6 (Propriedade FKG forte). *Sejam $q \in \mathbb{Z}^+$, $\beta \geq 0$, $J \geq 0$, $(h_p)_{p=1}^q$ uma sequência de campos externos e $\{q_p : p = 1, \dots, q\}$ uma sequência de números reais satisfazendo (223). Para qualquer $\Lambda \in \mathcal{L}$, as medidas $\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}$ e $\phi_{\Lambda, \text{max}}^{\text{GRC}}$ têm a propriedade FKG forte.*

Demonstração. Por simplicidade, assumiremos que o campo magnético satisfaz a seguinte relação:

$$h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_p \leq \dots \leq h_q. \quad (228)$$

Fixando o volume $\Lambda \in \mathcal{L}$, pelo Teorema 5.5, para provar a propriedade FKG forte da medida $\phi_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}$ onde $\#$ denota a condição de fronteira livre ou m -conectada, é condição necessária e suficiente provar a condição látice FKG para a medida $\phi_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}$, a qual, a sua vez, é equivalente a provar a seguinte desigualdade

$$\mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\eta^{(1)} \vee \eta^{(2)}) \mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\eta^{(1)} \wedge \eta^{(2)}) \geq \mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\eta^{(1)}) \mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\eta^{(2)}), \quad (229)$$

onde $\eta^{(1)}$ e $\eta^{(2)}$ são configurações arbitrárias.

Por definir

$$\mathcal{R}(\xi, \eta) \equiv \frac{\mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\xi \vee \eta)}{\mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\xi)},$$

pode-se ver que (229) se mantém se

$$\mathcal{R}(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}) \geq \mathcal{R}(\eta^{(1)} \wedge \eta^{(2)}, \eta^{(2)}), \quad (230)$$

isto é, a condição (229) é satisfeita sempre que verificarmos que $\mathcal{R}(\zeta, \eta)$ é crescente em ζ , para cada η fixado.

Para cada configuração η fixa, escolhemos um ordem arbitrário para o conjunto de arestas abertas $\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta)$ e o representamos como a sequência $(e_1, \dots, e_{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta)|})$. Logo, para qualquer configuração ζ ³ temos

$$\mathcal{R}(\zeta, \eta) = \prod_{k=1}^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta)|} \mathcal{R}(\zeta \vee \eta^{(e_1)} \vee \dots \vee \eta^{(e_{k-1})}, \eta^{(e_k)}),$$

onde a configuração $\eta^{(e)}$ é definida por

$$(\eta^{(e)})_b = \begin{cases} 1, & \text{se } b = e \\ 0, & \text{se } b \neq e, \end{cases} \quad \forall b \in \mathbb{B}_0(\Lambda) \text{ ou } b \in \mathbb{B}(\Lambda).$$

Portanto, é suficiente provar (230) para configurações ζ , $\eta^{(1)}$ e $\eta^{(2)}$ tal que ζ tenha, no mínimo, duas coordenadas nulas ou, no máximo, uma coordenada nula, com $\eta^{(1)} \equiv \zeta \vee \eta^{(b)}$, $\eta^{(2)} \equiv \zeta \vee \eta^{(b')}$. Começaremos assumindo que ζ tem, no mínimo, duas coordenadas nulas que, por simplicidade, o denotaremos assim

$$\zeta \equiv (*, \dots, *, \underbrace{0}_{b\text{-ésimo}}, *, \dots, *, \underbrace{0}_{b'\text{-ésimo}}, *, \dots, *),$$

onde $b, b' \in \mathbb{B}(\Lambda)$ ou $b, b' \in \mathbb{B}_0(\Lambda)$, $b \neq b'$ e os asteriscos denotam elementos genéricos em $\{0, 1\}$ (não necessariamente iguais). Se definimos as configurações

$$\zeta^b \equiv (*, \dots, *, \underbrace{1}_{b\text{-ésimo}}, *, \dots, *, \underbrace{0}_{b'\text{-ésimo}}, *, \dots, *),$$

e

$$\zeta^{b'} \equiv (*, \dots, *, \underbrace{0}_{b\text{-ésimo}}, *, \dots, *, \underbrace{1}_{b'\text{-ésimo}}, *, \dots, *),$$

temos que $\eta^{(1)} = \zeta \vee \eta^{(b)} = \zeta^b$, $\eta^{(2)} = \zeta \vee \eta^{(b')} = \zeta^{b'}$ e $\eta^{(1)} \wedge \eta^{(2)} = \zeta$.

Com o intuito de provar (230) é suficiente verificar que

$$\mathcal{R}(\zeta^b, \zeta^{b'}) \geq \mathcal{R}(\zeta, \zeta^{b'}), \quad \text{com } b \neq b'. \quad (231)$$

³ Aqui, a configuração ζ pertence ao espaço $\{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\Lambda)}$ ou ao espaço $\{0, 1\}^{\mathbb{B}(\Lambda)}$ sempre que não se especifique.

Portanto, nos concentraremos em provar (231). Para isso primeiro observamos que

$$\begin{aligned} (e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\xi^b \vee \xi^{b'}) \cap \mathbb{B}(\Lambda)|} &= (e^{\beta J} - 1)^2 (e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\xi) \cap \mathbb{B}(\Lambda)|}, \\ (e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\xi^b) \cap \mathbb{B}(\Lambda)|} &= (e^{\beta J} - 1) (e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\xi) \cap \mathbb{B}(\Lambda)|}, \\ (e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\xi \vee \xi^{b'}) \cap \mathbb{B}(\Lambda)|} &= (e^{\beta J} - 1) (e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\xi) \cap \mathbb{B}(\Lambda)|}. \end{aligned}$$

Então, segue que

$$\begin{aligned} \frac{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\xi^b \vee \xi^{b'}) \cap \mathbb{B}(\Lambda)|}}{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\xi^b) \cap \mathbb{B}(\Lambda)|}} &= \frac{(e^{\beta J} - 1)^2 (e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\xi) \cap \mathbb{B}(\Lambda)|}}{(e^{\beta J} - 1) (e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\xi) \cap \mathbb{B}(\Lambda)|}} = e^{\beta J} - 1 \\ &= \frac{(e^{\beta J} - 1) (e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\xi) \cap \mathbb{B}(\Lambda)|}}{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\xi) \cap \mathbb{B}(\Lambda)|}} = \frac{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\xi \vee \xi^{b'}) \cap \mathbb{B}(\Lambda)|}}{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\xi) \cap \mathbb{B}(\Lambda)|}}. \end{aligned}$$

Identidades similares às de acima obtêm-se para o caso da condição de fronteira livre fazendo-se $\mathbb{B} \equiv \mathbb{B}_0$. Pelo cálculo anterior e pelas definições dos pesos $\mathcal{W}_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}$, $\mathcal{W}_{\Lambda, m}^{\text{GRC}}$ a prova de (231) se reduz a provar a desigualdade

$$\frac{\Theta_{\Lambda, \#}(C(\xi^b \vee \xi^{b'}))}{\Theta_{\Lambda, \#}(C(\xi^b))} \geq \frac{\Theta_{\Lambda, \#}(C(\xi \vee \xi^{b'}))}{\Theta_{\Lambda, \#}(C(\xi))}, \quad (232)$$

onde # denota a condição de fronteira livre ou m -conectada.

CASO CONDIÇÃO DE FRONTEIRA LIVRE.

Dividiremos a prova de (232) em vários casos. Sejam A_1, A_2, B_1 e B_2 os aglomerados do grafo $(\Lambda, |\mathbb{B}_{\text{occ}}(\xi) \cap \mathbb{B}_0(\Lambda)|)$, consideraremos os casos mostrados na Figura 28

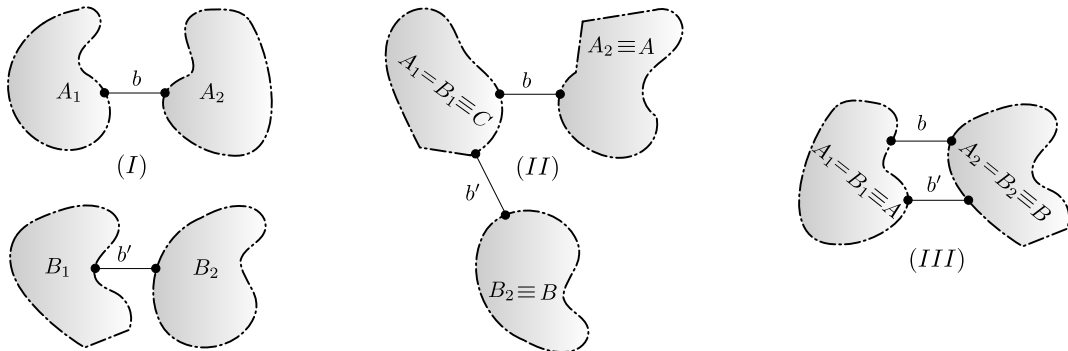


Figura 28: Aglomerados A_1, A_2, B_1 e B_2 no grafo $(\Lambda, o_{\mathbb{B}_0(\Lambda)}(\xi))$.

O caso (I) representa o fato de que os vértices da aresta b pertencem ao aglomerado A_1 , A_2 e os vértices de b' pertencem ao aglomerado B_1 , B_2 . Neste caso, o lado esquerdo e o lado direito de (232) são iguais, desde que

$$\frac{\Theta_{\text{livre}}(A_1 \cup A_2)\Theta_{\text{livre}}(B_1 \cup B_2)}{\Theta_{\text{livre}}(A_1 \cup A_2)\Theta_{\text{livre}}(B_1)\Theta_{\text{livre}}(B_2)} = \frac{\Theta_{\text{livre}}(B_1 \cup B_2)\Theta_{\text{livre}}(A_1)\Theta_{\text{livre}}(A_2)}{\Theta_{\text{livre}}(A_1)\Theta_{\text{livre}}(A_2)\Theta_{\text{livre}}(B_1)\Theta_{\text{livre}}(B_2)}.$$

Para o caso (II), devemos de provar que

$$\frac{\Theta_{\text{livre}}(A \cup B \cup C)}{\Theta_{\text{livre}}(C \cup A)\Theta_{\text{livre}}(B)} \geq \frac{\Theta_{\text{livre}}(C \cup B)\Theta_{\text{livre}}(A)}{\Theta_{\text{livre}}(A)\Theta_{\text{livre}}(B)\Theta_{\text{livre}}(C)},$$

o qual é equivalente a provar a seguinte desigualdade

$$\Theta_{\text{livre}}(C)\Theta_{\text{livre}}(A \cup B \cup C) \geq \Theta_{\text{livre}}(C \cup A)\Theta_{\text{livre}}(C \cup B). \quad (233)$$

Para facilitar-nos a prova de (233), para cada $p \in \{1, \dots, q\}$ definimos os seguintes números

$$a_p \equiv e^{\beta h_p |A|}, \quad b_p \equiv e^{\beta h_p |B|} \quad \text{e} \quad c_p \equiv e^{\beta h_p |C|}.$$

A hipótese (228) implica que as sequências $(a_p)_{p=1}^q$ e $(b_p)_{p=1}^q$ são não decrescentes em p . Usando esta notação, (233) se rescreve

$$\sum_{p=1}^q q_p c_p \sum_{p'=1}^q q_{p'} a_{p'} b_{p'} c_{p'} \geq \sum_{p=1}^q q_p a_p c_p \sum_{p'=1}^q q_{p'} b_{p'} c_{p'}. \quad (234)$$

Ambos os lados da desigualdade acima podem ser escritos usando a forma bilinear

$$\varphi(a, b) \equiv \sum_{p, p'=1}^q r_{p, p'} a_p b_{p'},$$

onde $r_{p, p'} \equiv q_p c_p q_{p'} c_{p'}$, $a \equiv (a_1, \dots, a_q)$ e $b \equiv (b_1, \dots, b_q)$. Note que φ é uma forma bilinear simétrica e que (234) pode ser escrita como

$$\varphi(1, c) \geq \varphi(a, b), \quad \text{onde } c \equiv (a_1 b_1, \dots, a_q b_q). \quad (235)$$

Portanto, resta provar (235), o que claramente se mantém desde que

$$r_{p, p'}(a_{p'} - a_p)(b_{p'} - b_p) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(1, c) - \varphi(a, b) - \varphi(b, a) + \varphi(c, 1) \geq 0.$$

Procedemos a provar (232) para o caso (III). Agora provaremos que

$$1 = \frac{\Theta_{\text{livre}}(A \cup B)}{\Theta_{\text{livre}}(A \cup B)} \geq \frac{\Theta_{\text{livre}}(A \cup B)}{\Theta_{\text{livre}}(A)\Theta_{\text{livre}}(B)},$$

em outras palavras, provaremos que $\Theta_{\text{livre}}(A)\Theta_{\text{livre}}(B) \geq \Theta_{\text{livre}}(A \cup B)$, ou equivalentemente

$$\sum_{p=1}^q q_p a_p \sum_{p'=1}^q q_{p'} b_{p'} \geq \sum_{p=1}^q q_p a_p b_p.$$

Esta última desigualdade é verdade desde que

$$\sum_{p=1}^q q_p a_p \sum_{p'=1}^q q_{p'} b_{p'} \geq \sum_{p=1}^q q_p a_p \sum_{p' \in \mathcal{Q}_{\max}(h)} q_{p'} b_{p'} \geq \sum_{p=1}^q q_p a_p b_p,$$

onde usamos que $\forall p \in \{1, \dots, q\}$, $b_{p'} \geq b_p$ sobre o conjunto $\mathcal{Q}_{\max}(h)$.

Para os casos onde os vértices de b ou de b' são contidos no mesmo aglomerado, a desigualdade é trivial.

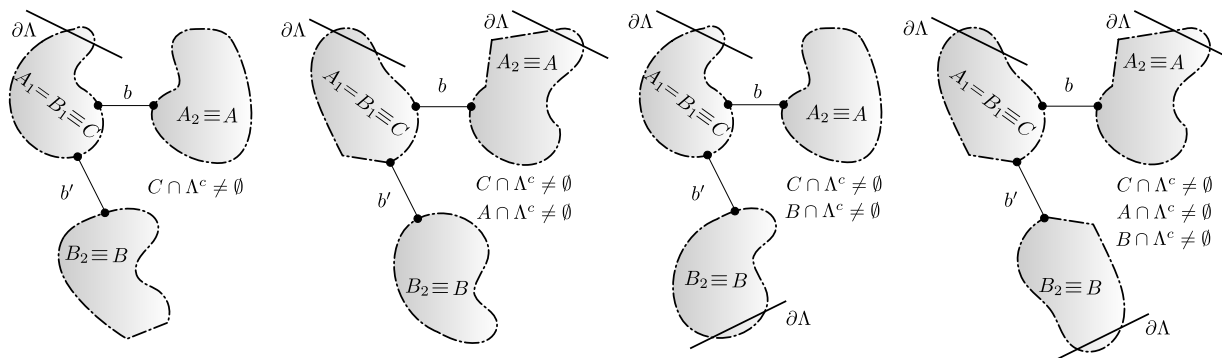
CASO CONDIÇÃO DE FRONTEIRA MAX-CONECTADA.

Suponha que $\tilde{m} \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$. Para provar a desigualdade (232), outra vez temos que analisar os três casos expostos na Figura 28. Para o caso (I), analogamente ao caso da condição de fronteira livre, temos

$$\frac{\Theta_{\Lambda, \tilde{m}}(A_1 \cup A_2)\Theta_{\Lambda, \tilde{m}}(B_1 \cup B_2)}{\Theta_{\Lambda, \tilde{m}}(A_1 \cup A_2)\Theta_{\Lambda, \tilde{m}}(B_1)\Theta_{\Lambda, \tilde{m}}(B_2)} = \frac{\Theta_{\Lambda, \tilde{m}}(B_1 \cup B_2)\Theta_{\Lambda, \tilde{m}}(A_1)\Theta_{\Lambda, \tilde{m}}(A_2)}{\Theta_{\Lambda, \tilde{m}}(A_1)\Theta_{\Lambda, \tilde{m}}(A_2)\Theta_{\Lambda, \tilde{m}}(B_1)\Theta_{\Lambda, \tilde{m}}(B_2)},$$

independentemente dos aglomerados A_1, A_2, B_1 e B_2 e das possíveis combinações que interceptam Λ^c .

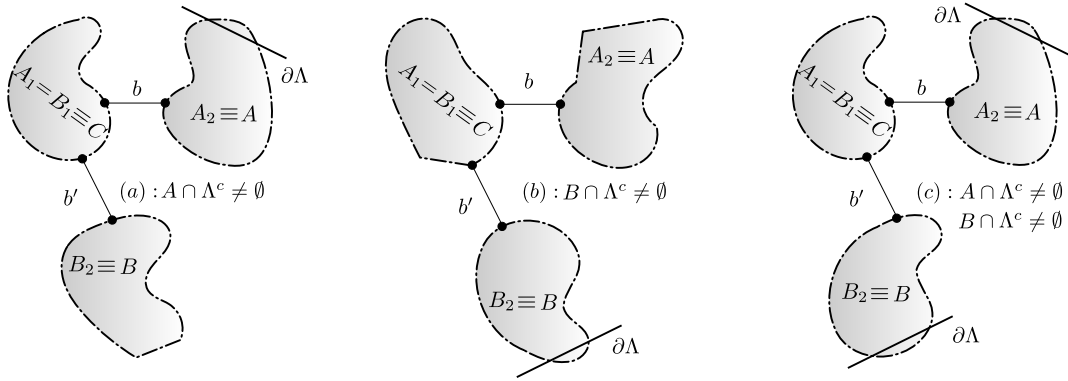
Para o caso (II) e todas as configurações mostradas nas figuras abaixo



temos da definição (218) de $\Theta_{\Lambda, \tilde{m}}$ que a seguinte igualdade se mantém

$$c_{\tilde{m}} a_{\tilde{m}} b_{\tilde{m}} c_{\tilde{m}} = a_{\tilde{m}} c_{\tilde{m}} b_{\tilde{m}} c_{\tilde{m}}.$$

Para as seguintes configurações que também aparecem no caso (II) da Figura 28:



veja que, para o caso (a), a desigualdade (232) fica

$$\left(\sum_{p=1}^q q_p c_p \right) a_{\tilde{m}} b_{\tilde{m}} c_{\tilde{m}} \geq a_{\tilde{m}} c_{\tilde{m}} \left(\sum_{p'=1}^q q_{p'} b_{p'} c_{p'} \right),$$

a qual é sempre válida desde que $b_{\tilde{m}} \geq b_{p'}, \forall p' = 1, \dots, q$. Já no caso (b) a desigualdade (232) fica

$$\left(\sum_{p=1}^q q_p c_p \right) a_{\tilde{m}} b_{\tilde{m}} c_{\tilde{m}} \geq \left(\sum_{p=1}^q q_p a_p c_p \right) b_{\tilde{m}} c_{\tilde{m}},$$

a qual é verdade porque $a_{\tilde{m}} \geq a_p, \forall p = 1, \dots, q$. Finalmente, em (c) a desigualdade (232) se expressa da seguinte forma

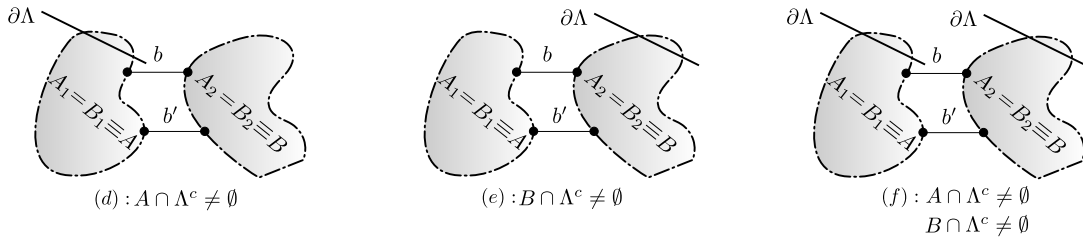
$$\left(\sum_{p=1}^q q_p c_p \right) a_{\tilde{m}} b_{\tilde{m}} c_{\tilde{m}} \geq a_{\tilde{m}} c_{\tilde{m}} b_{\tilde{m}} c_{\tilde{m}}$$

e a validade desta desigualdade é assegurada pela relação

$$\sum_{p=1}^q q_p c_p \geq \sum_{p \in \mathcal{Q}_{\max}(h)} q_p c_p \geq c_{\tilde{m}},$$

a qual segue de (223) e pelo fato de que quando $p \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$ tem-se $c_p = e^{\beta h_{\max}|C|} = c_{\tilde{m}}$.

Agora, consideraremos o caso (III) (da Figura 28), dividindo seu análise nos seguintes sub-casos



Para (d), a desigualdade (232) é válida enquanto

$$a_{\tilde{m}} \left(\sum_{p'=1}^q q_{p'} b_{p'} \right) \geq a_{\tilde{m}} b_{\tilde{m}}.$$

Este fato é verdadeiro porque

$$\sum_{p'=1}^q q_{p'} b_{p'} \geq \sum_{p' \in \mathcal{Q}_{\max}(h)} q_{p'} b_{p'} \geq b_{\tilde{m}}.$$

Para (e), a desigualdade desejada segue de

$$\left(\sum_{p=1}^q q_p a_p \right) b_{\tilde{m}} \geq a_{\tilde{m}} b_{\tilde{m}},$$

porém, esta desigualdade se mantém, pois a desigualdade seguinte

$$\sum_{p=1}^q q_p a_p \geq \sum_{p \in \mathcal{Q}_{\max}(h)} q_p a_p \geq a_{\tilde{m}}.$$

é válida. Para o último sub-caso (f), temos que provar que $a_{\tilde{m}} b_{\tilde{m}} = a_{\tilde{m}} b_{\tilde{m}}$, o que é obviamente verdadeiro.

Na condição de fronteira max-conectada, se os vértices extremos de b ou de b' pertencem ao mesmo aglomerado, o resultado segue. Para finalizar a prova, necessitamos considerar o caso em que ξ tem, no máximo, uma coordenada nula e $\eta^{(1)} \equiv \xi \vee \eta^{(b)}$, $\eta^{(2)} \equiv \xi \vee \eta^{(b')}$. Suponha que

$$\xi \equiv (1, \dots, 1, \underbrace{0}_{b\text{-ésimo}}, 1, \dots, 1, \underbrace{1}_{b'\text{-ésimo}}, 1, \dots, 1)$$

onde $b, b' \in \mathbb{B}(\Lambda)$, com $b \neq b'$. Definindo as configurações

$$\xi^b \equiv (1, \dots, 1, \underbrace{1}_{b\text{-ésimo}}, 1, \dots, 1, \underbrace{1}_{b'\text{-ésimo}}, 1, \dots, 1)$$

e

$$\xi^{b'} \equiv (1, \dots, 1, \underbrace{0}_{b\text{-ésimo}}, 1, \dots, 1, \underbrace{1}_{b'\text{-ésimo}}, 1, \dots, 1),$$

pode-se ver que $\eta^{(1)} = \xi \vee \eta^{(b)} = \xi^b$, $\eta^{(2)} = \xi \vee \eta^{(b')} = \xi^{b'}$ e que $\eta^{(1)} \wedge \eta^{(2)} = \xi$. Neste caso, para provar (230) para as condições de fronteira livre e max-conectada, é suficiente provar que $\mathcal{R}(\xi^b, \xi^{b'}) = \mathcal{R}(\xi, \xi^{b'})$ com $b \neq b'$, porém isto é trivial desde que

$$\mathcal{R}(\xi^b, \xi^{b'}) = \frac{\mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\xi^b \vee \xi^{b'})}{\mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\xi^b)} = \frac{\mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\xi^b)}{\mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\xi^b)} = \frac{\mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\xi)}{\mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\xi)} = \frac{\mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\xi \vee \xi^{b'})}{\mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\xi)} = \mathcal{R}(\xi, \xi^{b'}),$$

o que conclui a prova. \square

A proposição a seguir cumpre um papel fundamental na prova do Lema 5.8, esta proposição diz que se uma medida de probabilidade μ sobre o espaço $\{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)}$ tem a propriedade FKG forte, então, a medida de probabilidade condicional $\mu(\cdot | \overline{\Omega}_{\mathbb{B}}^{\zeta})$ sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{B}}$, $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)$ finito também tem a propriedade FKG forte, onde $\overline{\Omega}_{\mathbb{B}}^{\zeta}$ é definido como

$$\overline{\Omega}_{\mathbb{B}}^{\zeta} \equiv \{\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)} : \eta_e = \zeta, \forall e \in \mathbb{B}^c\}, \quad \zeta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)}, \quad (236)$$

o conjunto de configurações que coincidem no complementar do conjunto de arestas \mathbb{B} com respeito a $\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)$. Cabe observar a diferença da definição do conjunto $\overline{\Omega}_{\mathbb{B}}^{\zeta}$ com a definição (225) do conjunto $\Omega_{\mathbb{B}}^{\zeta}$.

Proposição 5.7. *Seja $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)$ finito, μ uma medida de probabilidade sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)}$ que possui a propriedade FKG forte, $\zeta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)}$ e $\tilde{\mu}(\cdot) \equiv \mu(\cdot | \overline{\Omega}_{\mathbb{B}}^{\zeta})$. Então, a medida de probabilidade condicional $\tilde{\mu}$ possui, também, a propriedade FKG forte.*

Demonstração. Segundo a definição da propriedade FKG forte de uma medida e a notação feita em (226), para cada função crescente cilíndrica $f, g : \{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)$ um subconjunto finito, se

$$\mu_{\mathbb{B}}^{\zeta}(f \cdot g) \geq \mu_{\mathbb{B}}^{\zeta}(f) \mu_{\mathbb{B}}^{\zeta}(g), \quad (237)$$

devemos provar que

$$\tilde{\mu}_{\mathbb{B}}^{\zeta}(f \cdot g) \geq \tilde{\mu}_{\mathbb{B}}^{\zeta}(f) \tilde{\mu}_{\mathbb{B}}^{\zeta}(g). \quad (238)$$

De fato, dado $\zeta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)}$ e $f : \{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cilíndrica crescente, definimos a função crescente $f_{\mathbb{B}}^{\zeta} : \{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_{\mathbb{B}}^{\zeta}(\eta) \equiv f(\eta_{\mathbb{B}}^{\zeta}),$$

onde a configuração $\eta_{\mathbb{B}}^{\zeta}$ é definida por

$$(\eta_{\mathbb{B}}^{\zeta})_e = \begin{cases} \eta_e, & \text{se } e \in \mathbb{B} \\ \zeta_e, & \text{se } e \in \mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d) \setminus \mathbb{B}. \end{cases}$$

Observamos que $f_{\mathbb{B}}^{\zeta}$ é uma função crescente sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{B}}$.

Por outro lado, considere $\mathbb{B}' \subset \mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)$ finito tal que $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}'$ e definamos a função crescente $\tilde{f}_{\mathbb{B}}^{\zeta} : \{0, 1\}^{\mathbb{B}'} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\tilde{f}_{\mathbb{B}}^{\zeta}(\eta_{\mathbb{B}'}) \equiv f((\eta_{\mathbb{B}}^{\zeta})_{\mathbb{B}'}),$$

onde $(\eta_{\mathbb{B}}^{\zeta})_{\mathbb{B}'}$ é a projeção da configuração $\eta_{\mathbb{B}}^{\zeta}$ sobre o conjunto \mathbb{B}' , isto é

$$(\eta_{\mathbb{B}}^{\zeta})_e = \begin{cases} \eta_e, & \text{se } e \in \mathbb{B} \\ \zeta_e, & \text{se } e \in \mathbb{B}' \setminus \mathbb{B}. \end{cases}$$

Observe que $\tilde{f}_{\mathbb{B}}^{\zeta}$ é, também, uma função crescente sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{B}}$. Adotadas estas notações, lembrando a definição do conjunto $\Omega_{\mathbb{B}}^{\zeta}$ dado em (225), tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{\mathbb{B}}^{\zeta}(f \cdot g) &= \frac{\tilde{\mu}(\tilde{f}_{\mathbb{B}}^{\zeta} \cdot \tilde{g}_{\mathbb{B}}^{\zeta})}{\tilde{\mu}(\Omega_{\mathbb{B}}^{\zeta})} = \frac{\mu(\tilde{f}_{\mathbb{B}}^{\zeta} \cdot \tilde{g}_{\mathbb{B}}^{\zeta} | \overline{\Omega}_{\mathbb{B}}^{\zeta})}{\mu(\Omega_{\mathbb{B}}^{\zeta} | \overline{\Omega}_{\mathbb{B}}^{\zeta})} = \frac{\frac{\mu(f_{\mathbb{B}}^{\zeta} \cdot g_{\mathbb{B}}^{\zeta})}{\mu(\Omega_{\mathbb{B}}^{\zeta})}}{\frac{\mu(\Omega_{\mathbb{B}}^{\zeta} \cap \overline{\Omega}_{\mathbb{B}}^{\zeta})}{\mu(\overline{\Omega}_{\mathbb{B}}^{\zeta})}} = \frac{\mu(f_{\mathbb{B}}^{\zeta} \cdot g_{\mathbb{B}}^{\zeta})}{\mu(\Omega_{\mathbb{B}}^{\zeta})} \\ &= \frac{\mu(\tilde{f}_{\mathbb{B}}^{\zeta} \cdot \tilde{g}_{\mathbb{B}}^{\zeta})}{\mu(\Omega_{\mathbb{B}}^{\zeta})} = \mu_{\mathbb{B}}^{\zeta}(\tilde{f} \cdot \tilde{g}), \end{aligned} \quad (239)$$

onde, na primeira igualdade, no numerador da terceira igualdade e na última igualdade, usamos a definição de esperança condicional dada em (226). Na segunda igualdade usamos a definição da medida de probabilidade $\tilde{\mu}$. Já no denominador da terceira igualdade se observa que $\Omega_{\mathbb{B}}^{\zeta} \subset \overline{\Omega}_{\mathbb{B}}^{\zeta}$, portanto, segue a quarta igualdade. Observe que, pela definição de esperança condicional, por convenção, estamos assumindo que os conjuntos $\Omega_{\mathbb{B}}^{\zeta}$ e $\overline{\Omega}_{\mathbb{B}}^{\zeta}$ têm medida estritamente positiva.

Um processo análogo (basta fazer $g \equiv 1$ e depois $f \equiv 1$ em (239)) ao feito em (239), mostra

$$\tilde{\mu}_{\mathbb{B}}^{\zeta}(f) = \mu_{\mathbb{B}}^{\zeta}(\tilde{f}) \quad \text{e} \quad \tilde{\mu}_{\mathbb{B}}^{\zeta}(g) = \mu_{\mathbb{B}}^{\zeta}(\tilde{g}).$$

Finalmente, usando (239), estas duas (últimas) identidades e a hipótese (237) temos

$$\tilde{\mu}_{\mathbb{B}}^{\zeta}(f \cdot g) = \mu_{\mathbb{B}}^{\zeta}(\tilde{f} \cdot \tilde{g}) \geq \mu_{\mathbb{B}}^{\zeta}(\tilde{f}) \mu_{\mathbb{B}}^{\zeta}(\tilde{g}) = \tilde{\mu}_{\mathbb{B}}^{\zeta}(f) \tilde{\mu}_{\mathbb{B}}^{\zeta}(g),$$

o que prova (238). □

Como veremos a seguir, em geral, para qualquer subconjunto finito $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)$, a medida a volume finito $\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\cdot | \eta_{\mathbb{B}^c})$ também tem a propriedade FKG forte. A ideia da prova deste fato, como veremos em seguida, é que a medida $\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\cdot | \eta_{\mathbb{B}^c})$ pode ser escrita como limite (pontual) de medidas de probabilidade, as quais podem ser expressadas como medidas condicionais da medida $\phi_{\Delta, \text{livre}}^{\text{GRC}}$, que, pelo Teorema 5.6, têm a propriedade FKG forte.

Lema 5.8. *Sejam $\beta \geq 0$, $J \geq 0$, $q_p > 0$, $p = 1, \dots, q$ e suponha que os parâmetros q_p obedecem a condição (223). Para qualquer $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)$ finito, a medida $\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\cdot | \eta_{\mathbb{B}^c})$ tem a propriedade FKG forte.*

Demonstração. Considerando $\Delta \in \mathcal{L}$ e $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)}$, seja $\eta^{(\Delta)}$ a configuração definida por

$$(\eta^{(\Delta)})_e \equiv \begin{cases} \eta_e, & \text{se } e \in \mathbb{B}_0(\Delta) \\ 0, & \text{se } e \in \mathbb{B}_0(\Delta)^c. \end{cases}$$

Uma vez que $\eta_{\mathbb{B}_0(\Delta)}^{(\Delta)} = \eta_{\mathbb{B}_0(\Delta)}$ e $\eta_{\mathbb{B}_0(\Delta)^c}^{(\Delta)} = 0$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\mathbb{B}_0(\Delta)}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}_0(\Delta)}^{(\Delta)} | \eta_{\mathbb{B}_0(\Delta)^c}^{(\Delta)}) &= (e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta^{(\Delta)}) \cap \mathbb{B}_0(\Delta)|} \prod_{C(\eta^{(\Delta)}): C(\eta^{(\Delta)}) \cap \Delta \neq \emptyset} \sum_{p=1}^q q_p e^{-\beta(h_{\max} - h_p) |C(\eta^{(\Delta)})|} \\ &= e^{-\beta h_{\max} |\Delta|} \cdot (e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}_0(\Delta)|} \prod_{C(\eta)} \sum_{p=1}^q q_p e^{\beta h_p |C(\eta)|} \\ &= e^{-\beta h_{\max} |\Delta|} \cdot \mathcal{W}_{\Delta, \text{livre}}^{\text{GRC}}(\eta) = e^{-\beta h_{\max} |\Delta|} \cdot \mathcal{W}_{\Delta, \text{livre}}^{\text{GRC}}(\eta^{(\Delta)}), \end{aligned} \quad (240)$$

onde, na segunda igualdade, simplesmente se fatorou o termo $e^{-\beta h_{\max} |\Delta|}$ do produtório correspondente e se usou, também, o fato de que o número de aglomerados $C(\eta^{(\Delta)})$ que interceptam Δ é igual ao número de aglomerados $C(\eta)$ do grafo $(\Delta, \mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}_0(\Delta))$, no entanto, na última igualdade se usou a identidade $\mathcal{W}_{\Delta, \text{livre}}^{\text{GRC}}(\eta) = \mathcal{W}_{\Delta, \text{livre}}^{\text{GRC}}(\eta^{(\Delta)})$, tendo-se em conta a definição da configuração $\eta^{(\Delta)}$ e do fator $\mathcal{W}_{\Delta, \text{livre}}^{\text{GRC}}(\cdot)$.

Seguindo a definição (236) do conjunto $\overline{\Omega}_{\mathbb{B}_0(\Delta)}^0$, para cada função crescente cilíndrica $f : \{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a função crescente $f_{\Delta}^0 : \{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_{\Delta}^0(\eta) \equiv f(\eta^{(\Delta)}),$$

onde a configuração $\eta^{(\Delta)}$ foi definida no começo desta prova. Observamos que f_{Δ}^0 é uma função crescente sobre o espaço de configurações $\{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\Delta)}$.

Usando a definição da medida de probabilidade $\phi_{\Delta, \text{livre}}^{\text{GRC}}$, condicionado ao evento $\overline{\Omega}_{\mathbb{B}_0(\Delta)}^0$, veja que

$$\phi_{\Delta, \text{livre}}^{\text{GRC}}(f | \overline{\Omega}_{\mathbb{B}_0(\Delta)}^0) = \frac{\phi_{\Delta, \text{livre}}^{\text{GRC}}(f_{\Delta}^0)}{\phi_{\Delta, \text{livre}}^{\text{GRC}}(\overline{\Omega}_{\mathbb{B}_0(\Delta)}^0)} = \frac{(Z_{\Delta, \text{livre}}^{\text{GRC}})^{-1}}{\phi_{\Delta, \text{livre}}^{\text{GRC}}(\overline{\Omega}_{\mathbb{B}_0(\Delta)}^0)} \sum_{\eta_{\mathbb{B}_0(\Delta)}} f_{\Delta}^0(\eta) \mathcal{W}_{\Delta, \text{livre}}^{\text{GRC}}(\eta^{(\Delta)}).$$

Por (240), o lado direito da igualdade acima é

$$= \frac{(Z_{\Delta, \text{livre}}^{\text{GRC}})^{-1} e^{\beta h_{\max} |\Delta|}}{\phi_{\Delta, \text{livre}}^{\text{GRC}}(\overline{\Omega}_{\mathbb{B}_0(\Delta)}^0)} \sum_{\eta_{\mathbb{B}_0(\Delta)}} f_{\Delta}^0(\eta) \mathcal{W}_{\mathbb{B}_0}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}_0(\Delta)}^{(\Delta)} | \eta_{\mathbb{B}_0(\Delta)^c}^{(\Delta)}).$$

Multiplicando e dividendo pela constante de normalização $Z_{\mathbb{B}_0(\Delta)}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}_0(\Delta)^c})$, obtemos

$$\begin{aligned} &= \frac{(Z_{\Delta,\text{livre}}^{\text{GRC}})^{-1} Z_{\mathbb{B}_0(\Delta)}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}_0(\Delta)^c}) e^{\beta h_{\max}|\Delta|}}{\phi_{\Delta,\text{livre}}^{\text{GRC}}(\overline{\Omega}_{\mathbb{B}_0(\Delta)}^0)} \phi_{\mathbb{B}_0(\Delta)}^{\text{GRC}}(f_{\Delta}^0 | \eta_{\mathbb{B}_0(\Delta)^c}^{(\Delta)}) \\ &= \frac{(Z_{\Delta,\text{livre}}^{\text{GRC}})^{-1} Z_{\mathbb{B}_0(\Delta)}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}_0(\Delta)^c}) e^{\beta h_{\max}|\Delta|}}{\phi_{\Delta,\text{livre}}^{\text{GRC}}(\overline{\Omega}_{\mathbb{B}_0(\Delta)}^0)} \phi_{\mathbb{B}_0(\Delta)}^{\text{GRC}}(f | \eta_{\mathbb{B}_0(\Delta)^c}^{(\Delta)}). \end{aligned}$$

Em resumo, temos provado que

$$\phi_{\Delta,\text{livre}}^{\text{GRC}}(f | \overline{\Omega}_{\mathbb{B}_0(\Delta)}^0) = \frac{(Z_{\Delta,\text{livre}}^{\text{GRC}})^{-1} Z_{\mathbb{B}_0(\Delta)}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}_0(\Delta)^c}) e^{\beta h_{\max}|\Delta|}}{\phi_{\Delta,\text{livre}}^{\text{GRC}}(\overline{\Omega}_{\mathbb{B}_0(\Delta)}^0)} \phi_{\mathbb{B}_0(\Delta)}^{\text{GRC}}(f | \eta_{\mathbb{B}_0(\Delta)^c}^{(\Delta)}).$$

Fazendo $f \equiv 1$ na identidade acima, conseguimos $1 = \frac{(Z_{\Delta,\text{livre}}^{\text{GRC}})^{-1} Z_{\mathbb{B}_0(\Delta)}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}_0(\Delta)^c}) e^{\beta h_{\max}|\Delta|}}{\phi_{\Delta,\text{livre}}^{\text{GRC}}(\overline{\Omega}_{\mathbb{B}_0(\Delta)}^0)}$, implicando que

$$\phi_{\Delta,\text{livre}}^{\text{GRC}}(f | \overline{\Omega}_{\mathbb{B}_0(\Delta)}^0) = \phi_{\mathbb{B}_0(\Delta)}^{\text{GRC}}(f | \eta_{\mathbb{B}_0(\Delta)^c}^{(\Delta)}). \quad (241)$$

Por outro lado, como a medida $\phi_{\Delta,\text{livre}}^{\text{GRC}}$ tem a propriedade FKG forte, pela Proposição 5.7, a medida de probabilidade condicional $\phi_{\Delta,\text{livre}}^{\text{GRC}}(\cdot | \overline{\Omega}_{\mathbb{B}_0(\Delta)}^0)$, também, possui a propriedade FKG forte. Combinando essa observação com o fato de que a família $\{\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\cdot | \eta_{\mathbb{B}^c}^{(\Delta)}) : |\mathbb{B}| < \infty\}$ forma uma especificação consistente, de (241) obtemos que a medida $\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\cdot | \eta_{\mathbb{B}^c}^{(\Delta)})$ possui a propriedade FKG forte para $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}(\Delta)$.

Para concluir a demonstração, veja que se o limite

$$\lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\cdot | \eta_{\mathbb{B}^c}^{(\Delta)}) = \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\cdot | \eta_{\mathbb{B}^c}) \quad (242)$$

é satisfeito, pelo fato de que a medida $\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\cdot | \eta_{\mathbb{B}^c}^{(\Delta)})$ possui a propriedade FKG forte, o limite $\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\cdot | \eta_{\mathbb{B}^c})$, também, possuirá a propriedade FKG forte, o que concluiria a demonstração. Portanto, no que resta da prova, nos dedicaremos a provar a validade do limite em (242). De fato, seja f uma função cilíndrica que depende somente das arestas em \mathbb{B} , tal que $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}_0(\Delta)$ e denote $\widehat{\Theta}(C(\eta)) \equiv \sum_{p=1}^q q_p e^{-\beta(h_{\max} - h_p)|C(\eta)|}$. Pela definição da medida de probabilidade $\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\cdot | \eta_{\mathbb{B}^c}^{(\Delta)})$ segue que

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f | \eta_{\mathbb{B}^c}^{(\Delta)}) &= \sum_{\eta_{\mathbb{B}}} f(\eta) \frac{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta^{(\Delta)}) \cap \mathbb{B}|}}{Z_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}^c}^{(\Delta)})} \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \mathbb{V}(\mathbb{B})^c = \emptyset} \widehat{\Theta}(C(\eta)) \\ &\quad \times \prod_{\substack{C(\eta): C(\eta) \cap \mathbb{V}(\mathbb{B})^c \neq \emptyset \\ C(\eta) \cap \partial \Delta = \emptyset}} \widehat{\Theta}(C(\eta)) \prod_{\substack{C(\eta^{(\Delta)}): C(\eta^{(\Delta)}) \cap \mathbb{V}(\mathbb{B})^c \neq \emptyset \\ C(\eta^{(\Delta)}) \cap \partial \Delta \neq \emptyset}} \widehat{\Theta}(C(\eta^{(\Delta)})). \end{aligned} \quad (243)$$

Como $|C| = \mathbb{1}_{\cup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{0 \leftrightarrow x\}}$, segue que $|C|$ é crescente no sentido FKG. Além disso, como $\eta^{(\Delta)} \uparrow \eta$ temos $\mathbb{1}_{\cup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{0 \leftrightarrow x\}}(\eta^{(\Delta)}) = \mathbb{1}_{\cup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{0 \leftrightarrow x\}}(\eta)$, para Δ suficientemente grande, o que implica $|C(\eta^{(\Delta)})| \uparrow |C(\eta)|$, sempre que $\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d$.

Por outro lado, para cada $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)}$, existe $\Delta \in \mathcal{L}$ tal que

$$\begin{aligned} & |\{C(\eta^{(\Delta)}) \subseteq (\Delta, \mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta^{(\Delta)})) : C(\eta^{(\Delta)}) \cap \mathbb{V}(\mathbb{B})^c \neq \emptyset, C(\eta^{(\Delta)}) \cap \partial\Delta \neq \emptyset\}| \\ &= \\ & |\{C(\eta) \subseteq (\mathbb{Z}^d, \mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta)) : C(\eta) \cap \mathbb{V}(\mathbb{B})^c \neq \emptyset, |C(\eta)| = \infty\}|. \end{aligned}$$

Usando a convergência $|C(\eta^{(\Delta)})| \uparrow |C(\eta)|$ e a identidade acima, obtemos a validade do seguinte limite

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \prod_{\substack{C(\eta) : C(\eta) \cap \mathbb{V}(\mathbb{B})^c \neq \emptyset \\ C(\eta) \cap \partial\Delta = \emptyset}} \widehat{\Theta}(C(\eta)) \prod_{\substack{C(\eta^{(\Delta)}) : C(\eta^{(\Delta)}) \cap \mathbb{V}(\mathbb{B})^c \neq \emptyset \\ C(\eta^{(\Delta)}) \cap \partial\Delta \neq \emptyset}} \widehat{\Theta}(C(\eta^{(\Delta)})) \\ &= \\ & \prod_{\substack{C(\eta) : C(\eta) \cap \mathbb{V}(\mathbb{B})^c \neq \emptyset \\ |C(\eta)| < \infty}} \widehat{\Theta}(C(\eta)) \prod_{\substack{C(\eta) : C(\eta) \cap \mathbb{V}(\mathbb{B})^c \neq \emptyset \\ |C(\eta)| = \infty}} \widehat{\Theta}(C(\eta)) \\ &= \\ & \prod_{C(\eta) : C(\eta) \cap \mathbb{V}(\mathbb{B}) \neq \emptyset} \widehat{\Theta}(C(\eta)). \end{aligned}$$

Fazendo $\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d$ em (243) e usando o limite acima, veja que $Z_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}^c}^{(\Delta)}) \rightarrow Z_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}^c})$. Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f | \eta_{\mathbb{B}^c}^{(\Delta)}) &= \sum_{\eta_{\mathbb{B}}} f(\eta) \frac{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}|}}{Z_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}^c})} \\ &\quad \times \prod_{C(\eta_{\mathbb{B}}) : C(\eta_{\mathbb{B}}) \cap \mathbb{V}(\mathbb{B})^c = \emptyset} \widehat{\Theta}(C(\eta)) \prod_{C(\eta) : C(\eta) \cap \mathbb{V}(\mathbb{B})^c \neq \emptyset} \widehat{\Theta}(C(\eta)) \\ &= \sum_{\eta_{\mathbb{B}}} f(\eta) \frac{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}|}}{Z_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}^c})} \prod_{C(\eta) : C(\eta) \cap \mathbb{V}(\mathbb{B}) \neq \emptyset} \widehat{\Theta}(C(\eta)) = \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f | \eta_{\mathbb{B}^c}). \end{aligned}$$

Isto prova (242) e, em consequência, a prova do lema segue. \square

O próximo resultado, de certo modo, é uma generalização do Corolário 3.39. Este resultado nos proporciona a monotonicidade das medidas GRC com respeito à condição de fronteira. Novamente, a utilidade da propriedade FKG é fundamental no esquema da prova.

Lema 5.9. *Sejam $\beta \geq 0$, $J \geq 0$, $q_p > 0$, $p = 1, \dots, q$ e suponha que os parâmetros q_p obedecem a condição (223). Para qualquer subconjunto finito $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)$, a aplicação $\eta \mapsto \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\cdot | \eta_{\mathbb{B}^c})$ é crescente no sentido FKG. Isto é, para cada função cilíndrica crescente f*

$$\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f | \xi_{\mathbb{B}^c}) \leq \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f | \psi_{\mathbb{B}^c}), \quad \text{sempre que } \xi \preceq \psi.$$

Demonstração. Dado $\xi \in \Omega$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cilíndrica crescente, definimos a função crescente $f_{\mathbb{B}}^{\xi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_{\mathbb{B}}^{\xi}(\eta) \equiv f(\eta_{\mathbb{B}}^{\xi}),$$

onde a configuração $\eta_{\mathbb{B}}^{\xi}$ é definida por

$$(\eta_{\mathbb{B}}^{\xi})_e = \begin{cases} \eta_e, & \text{se } e \in \mathbb{B} \\ \xi_e, & \text{se } e \in \mathbb{B}^c. \end{cases}$$

Observe que $f_{\mathbb{B}}^{\xi}$ é uma função crescente sobre o espaço de configurações finito $\{0, 1\}^{\mathbb{B}}$. Seguindo a mesma ideia de [65], Lema 4.14, p. 71, aumentaremos o grafo $(\mathbb{V}(\mathbb{B}), \mathbb{B})$ por adicionar algumas arestas extras na fronteira $\partial\mathbb{V}(\mathbb{B})$. Para cada $x \neq y$ em $\partial\mathbb{V}(\mathbb{B})$, adicionamos novas arestas entre x e y , denotadas por $[x, y]$. Caso uma aresta $\{x, y\}$ já exista, simplesmente adicionamos outra aresta em paralelo. Escrevemos \mathbb{F} para o conjunto das novas arestas, $\overline{\mathbb{B}} \equiv \mathbb{B} \cup \mathbb{F}$; $\{0, 1\}^{\overline{\mathbb{B}}}$ para o espaço de configurações aumentadas e seja $\overline{\phi}_{\mathbb{B}}^{\xi}(\cdot) \equiv \phi_{\overline{\mathbb{B}}}^{\text{GRC}}(\cdot | \xi_{\overline{\mathbb{B}}^c})$ a medida GRC sobre o grafo aumentado $(\mathbb{V}(\mathbb{B}), \overline{\mathbb{B}})$. Pelo Lema 5.8, a medida $\overline{\phi}_{\mathbb{B}}^{\xi}$ tem a propriedade FKG forte, logo, ela satisfaz os itens do Teorema 5.5.

Para $\xi \in \Omega$, seja $\overset{\xi}{\sim}$ a relação de equivalência sobre $\partial\mathbb{V}(\mathbb{B})$ dada por: $x \overset{\xi}{\sim} y$ se, e somente se, existe um caminho ξ -aberto de $\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d) \setminus \mathbb{B}$ ligando x a y . Defina

$$\mathbb{F}^{\xi} \equiv \{[x, y] \in \mathbb{F} : x \overset{\xi}{\sim} y\}.$$

Seja $\xi \preceq \psi$, logo, $\mathbb{F}^{\xi} \subseteq \mathbb{F}^{\psi}$. Para cada configuração $\eta_{\overline{\mathbb{B}}} \in \{0, 1\}^{\overline{\mathbb{B}}}$, definimos a configuração $\omega^{(\xi)} \in \{0, 1\}^{\overline{\mathbb{B}}}$, onde

$$\omega_e^{(\xi)} = \begin{cases} 1, & \text{se } e \in \mathbb{F}^{\xi} \\ 0, & \text{se } e \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{F}^{\xi} \\ \eta_e, & \text{se } e \in \mathbb{B}. \end{cases}$$

Veja que $\omega^{(\xi)} \preceq \omega^{(\psi)}$. Motivados pela definição dada em (225), definimos o conjunto

$$\Omega_{\mathbb{B}}^{\omega^{(\xi)}} \equiv \{\eta_{\overline{\mathbb{B}}} \in \{0, 1\}^{\overline{\mathbb{B}}} : \eta_e = \omega_e^{(\xi)}, \forall e \in \overline{\mathbb{B}} \setminus \mathbb{B}\}$$

de configurações em $\{0, 1\}^{\overline{\mathbb{B}}}$ que coincidem com $\omega^{(\xi)}$ no complementar de \mathbb{B} (com respeito a $\overline{\mathbb{B}}$). Levando em conta estas definições, temos

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\xi_{\mathbb{B}^c}) &= \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f_{\mathbb{B}}^{\xi}|\xi_{\mathbb{B}^c}) = \overline{\phi}_{\mathbb{B}}^{\xi}(f_{\mathbb{B}}^{\xi}|\Omega_{\mathbb{B}}^{\omega^{(\xi)}}) \leq \overline{\phi}_{\mathbb{B}}^{\xi}(f_{\mathbb{B}}^{\xi}|\Omega_{\mathbb{B}}^{\omega^{(\psi)}}) \leq \overline{\phi}_{\mathbb{B}}^{\psi}(f_{\mathbb{B}}^{\psi}|\Omega_{\mathbb{B}}^{\omega^{(\psi)}}) \\ &= \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f_{\mathbb{B}}^{\psi}|\psi_{\mathbb{B}^c}) = \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\psi_{\mathbb{B}^c}), \end{aligned}$$

onde a segunda e terceira igualdade podem ser provadas usando argumentos análogos à prova do Lema 5.8. Na primeira desigualdade se usou o Teorema 5.5, especificamente a monotonicidade da medida $\overline{\phi}_{\mathbb{B}}^{\xi}$, desde que esta satisfaz a propriedade FKG forte, no entanto, na segunda desigualdade o fato de que $f_{\mathbb{B}}^{\xi} \leq f_{\mathbb{B}}^{\psi}$. \square

O seguinte corolário é válido para qualquer medida de probabilidade, uma vez que esta medida tenha a propriedade FKG forte. Este resultado nos fornece monotonicidades FKG com respeito a eventos especiais, como veremos em seguida.

Corolário 5.10. *Sejam $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}'$ dois subconjuntos de arestas e μ uma medida de probabilidade definida sobre o espaço $\{0, 1\}^{\mathbb{B}'}$ satisfazendo a propriedade FKG forte. Para cada função cilíndrica crescente f , as seguintes desigualdades entre esperanças condicionais (com respeito a μ) são satisfeitas:*

$$\mu(f|\eta_{\mathbb{B}} = 0) \geq \mu(f|\eta_{\mathbb{B}'} = 0) \quad e \quad \mu(f|\eta_{\mathbb{B}} = 1) \leq \mu(f|\eta_{\mathbb{B}'} = 1),$$

onde $\{\eta_{\mathbb{B}} = b\}$ denota o evento $\{\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}'} : \eta_e = b, \forall e \in \mathbb{B}\}$, com $b = 0, 1$.

Demonstração. Por simplicidade da apresentação, unicamente faremos a prova para a desigualdade que involucra o evento $\{\eta_{\mathbb{B}} = 1\}$, já que a outra desigualdade é provada usando os mesmos argumentos. Por propriedades elementares de esperanças condicionais, veja que

$$\begin{aligned} \mu(f|\eta_{\mathbb{B}} = 1) &= \sum_{\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}'}} \mu(f \cdot \mathbb{1}_{\{\eta_{\mathbb{B}' \setminus \mathbb{B}} = \xi\}}|\eta_{\mathbb{B}} = 1) \\ &= \sum_{\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}'}} \mu(f|\eta_{\mathbb{B}} = 1, \eta_{\mathbb{B}' \setminus \mathbb{B}} = \xi) \mu(\eta_{\mathbb{B}' \setminus \mathbb{B}} = \xi|\eta_{\mathbb{B}} = 1) \\ &\leq \mu(f|\eta_{\mathbb{B}'} = 1) \sum_{\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}'}} \mu(\eta_{\mathbb{B}' \setminus \mathbb{B}} = \xi|\eta_{\mathbb{B}} = 1) \\ &= \mu(f|\eta_{\mathbb{B}'} = 1), \end{aligned}$$

onde, na desigualdade, usamos o fato de que a condição de fronteira 1 domina a qualquer condição de fronteira ξ juntamente com a propriedade FKG forte da medida μ (portanto, μ é monótona, veja Teorema 5.5). \square

5.2.2 Limite fraco da medida GRC

O objetivo desta subseção é mostrar a existência de limites fracos, no sentido da Definição 3.14, das medidas GRC $\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}$ e $\phi_{\Lambda, \text{max}}^{\text{GRC}}$. Para isso, primeiro usaremos as monotonicidades e dominações FKG mostradas na subseção anterior para provar o seguinte lema de dominação FKG no volume. Precisamente, o Lema 5.11 é uma consequência da propriedade forte FKG e do Corolário 5.10. Este lema pode-se ver como uma generalização da Proposição 3.43 do Capítulo 3.

Lema 5.11 (Dominação no volume). *Sejam $\beta \geq 0$, $J \geq 0$, $q_p > 0$, $p = 1, \dots, q$ e suponha que os parâmetros q_p obedecem a condição (223). Além disso, seja $\Lambda \subset \Delta$ em \mathcal{L} . Então*

$$\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}(f) \leq \phi_{\Delta, \text{livre}}^{\text{GRC}}(f) \quad e \quad \phi_{\Lambda, \text{max}}^{\text{GRC}}(f) \geq \phi_{\Delta, \text{max}}^{\text{GRC}}(f),$$

para cada função cilíndrica crescente f .

Demonstração. Primeiro, provaremos a monotonicidade no caso da condição de fronteira livre. Para isso, considere $\Lambda \subset \Delta$ em \mathcal{L} , $f : \{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\Delta)} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cilíndrica crescente e o evento $\Omega_{\mathbb{B}_0(\Lambda)}^0$ definido em (225) com $\mathbb{B}' = \mathbb{B}(\Delta)$. Note que $\Omega_{\mathbb{B}_0(\Lambda)}^0$ é um evento decrescente (no sentido FKG), logo, por uma inspeção simples na definição da medida $\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}$, veja que

$$\phi_{\Delta, \text{livre}}^{\text{GRC}}(f | \Omega_{\mathbb{B}_0(\Lambda)}^0) = \phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}(f).$$

Em seguida, usando a identidade acima e a propriedade FKG forte da medida $\phi_{\Delta, \text{livre}}^{\text{GRC}}$, obtemos

$$\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}(f) \leq \phi_{\Delta, \text{livre}}^{\text{GRC}}(f).$$

Para provar a outra monotonicidade, com respeito à condição de fronteira max-conectada, a prova é bem mais elaborada. Primeiramente, observe que o evento $\Omega_{\mathbb{B}(\Lambda)}^1$, definido em (225) com $\mathbb{B}' = \mathbb{B}(\Delta)$, é crescente (no sentido FKG). Segundo, no caso que Λ^c é conexo, a prova procede como caso particular da prova para o caso quando Λ^c não é conexo. No entanto, no caso em que $\Delta \setminus \Lambda$ não é conexo, denotaremos por H_1, \dots, H_k os buracos que provocam esta não conexidade. Para contornar o problema de não conexidade fora de Λ , usamos o seguinte truque padrão: para cada buraco H_i , introduzimos uma aresta (fantasma) adicional b_i com uma extremidade em H_i e a outra em $\partial\Delta$. Considerando

$$\mathbb{B}^*(\Delta) \equiv \mathbb{B}(\Delta) \cup \{b_1, \dots, b_k\},$$

definimos a medida GRC max-conectada $\bar{\phi}_{\Delta, \max}^{\text{GRC}}$ sobre o grafo aumentado $(\bar{\Delta}, \mathbb{B}^*(\Delta))$, onde $\bar{\Delta} = \Delta \cup \partial\Delta$. Seja $f : \{0, 1\}^{\mathbb{B}^*(\Delta)} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cilíndrica crescente. Com as definições consideradas acima, por uma inspeção simples da definição da medida $\phi_{\Delta, \max}^{\text{GRC}}$, veja que

$$\phi_{\Delta, \max}^{\text{GRC}}(f) = \bar{\phi}_{\Delta, \max}^{\text{GRC}}(f | \Omega_{\mathbb{B}(\Delta)}^0) \quad \text{e} \quad \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(f) = \bar{\phi}_{\Delta, \max}^{\text{GRC}}(f | \Omega_{\mathbb{B}(\Lambda)}^1).$$

Usando as identidades acima tem-se

$$\phi_{\Delta, \max}^{\text{GRC}}(f) = \bar{\phi}_{\Delta, \max}^{\text{GRC}}(f | \Omega_{\mathbb{B}(\Delta)}^0) \leq \bar{\phi}_{\Delta, \max}^{\text{GRC}}(f | \Omega_{\mathbb{B}(\Delta)}^1) \leq \bar{\phi}_{\Delta, \max}^{\text{GRC}}(f | \Omega_{\mathbb{B}(\Lambda)}^1) = \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(f),$$

onde, na primeira desigualdade, usamos a propriedade FKG forte da medida $\bar{\phi}_{\Delta, \max}^{\text{GRC}}$ (pois, a propriedade FKG forte implica na monotonicidade da medida, veja Teorema 5.5), no entanto, na segunda desigualdade, usamos o Corolário 5.10 com a inclusão $\mathbb{B}^*(\Delta) \setminus \mathbb{B}(\Delta) \subset \mathbb{B}^*(\Delta) \setminus \mathbb{B}(\Lambda)$. \square

Tendo a nossa disposição a dominação FKG no volume, observe-se que o argumento mostrado abaixo para provar a existência de limites fracos (ou limite termodinâmico) das medidas a volume finito $\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}$, $\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}$ e a invariância por translação das medidas limite segue da teoria padrão do modelo de aglomerados aleatórios com campo nulo (veja Teorema 3.41). Portanto, o Lema 5.11 e a propriedade FKG forte (além dos resultados prévios) são resultados fundamentais quando, em certo modelo, se deseja provar existência de limites fracos.

Teorema 5.12. *Sejam $\beta \geq 0$ e $h_p \in \mathbb{R}$, $p = 1, \dots, q$. Se f é uma função quase-local crescente sobre Ω , logo, os limites fracos*

$$\phi_{\max}^{\text{GRC}}(f) \equiv \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(f) \quad \text{e} \quad \phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}}(f) \equiv \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}(f)$$

existem, pertencem ao conjunto \mathcal{G}^{GRC} e são invariantes por translação.

Demonstração. Como consequência do Lema 5.11, a sequência $\{\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}} : \Lambda \in \mathcal{L}\}$ (resp. $\{\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}} : \Lambda \in \mathcal{L}\}$) é crescente (resp. decrescente) quando Λ cresce (na ordem definida pela inclusão de conjuntos), logo, a existência dos limites desejados existem para cada função local crescente. Por um argumento padrão de aproximações, a existência destes limites é válida, também, para toda função quase-local crescente.

Para provar a invariância por translação destas medidas, considere um evento A crescente dependendo de um número finito de arestas, todas incluídas em uma caixa $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$. Seja θ_j a translação em j da rede \mathbb{Z}^d . Pelo Lema 5.11, temos

$$\phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}}(A) \geq \phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}(A) = \phi_{\theta_j^{-1}\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}(\theta_j^{-1}A) \longrightarrow \phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}}(\theta_j^{-1}A), \quad \text{quando } \Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d.$$

Pelo mesmo raciocínio, substituindo $A \equiv \theta_j^{-1}A$ e $\theta_j \equiv \theta_j^{-1}$ na expressão acima, obtemos

$$\phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}}(\theta_j^{-1}A) \geq \phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}}(A).$$

Portanto, $\phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}} \circ \theta_j^{-1}(A) = \phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}}(\theta_j^{-1}A) = \phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}}(A)$. Por aproximações padrões obtemos que $\phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}} \circ \theta_j^{-1} = \phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}}$. Por outro lado, usando o Lema 5.11 e um raciocínio similar ao feito acima, obtemos $\phi_{\text{max}}^{\text{GRC}} \circ \theta_j^{-1} = \phi_{\text{max}}^{\text{GRC}}, \forall j \in \mathbb{Z}^d$. \square

A maior parte da teoria padrão de estados de Gibbs, como em suas interpretações físicas, requer de quase-localidade (veja referências [57, 106]). A ausência desta propriedade gera um impedimento técnico maior na análise dos estados de Gibbs na representação GRC, como veremos ao longo da apresentação.

Proposição 5.13. *A especificação $\{\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}} : |\mathbb{B}| < \infty\}$ não é quase-local.*

Demonstração. Dados $\Lambda, \Gamma \in \mathcal{L}$, tal que $\Lambda \subset \Gamma$, seja $\pi_{\Lambda}^{-1}(B)$ um cilindro com base em Λ . Aqui, B é um evento do conjunto das partes de $\{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\Lambda)}$ e π_{Λ} é a projeção canônica sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\Lambda)}$. Veja que, para a função quase-local $f(\eta) = \frac{(\sum_{m=1}^q q_m)^{|\mathbb{C}(\eta)|}}{\prod_{C(\eta)} \Theta_{\text{livre}}(C(\eta))} \cdot \mathbb{1}_{\pi_{\Lambda}^{-1}(B)}(\eta)$, a seguinte igualdade se satisfaz

$$\phi_{\Gamma, \text{livre}}^{\text{GRC}, (h_p)_{p=1}^q}(f) = \phi_{\Gamma, \text{livre}}^{\text{GRC}, (0)_{p=1}^q}(\pi_{\Lambda}^{-1}(B)).$$

Fazendo $\Gamma \uparrow \mathbb{Z}^d$, pelo limite termodinâmico (Teorema 5.12), temos

$$\phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}, (h_p)_{p=1}^q}(f) = \phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}, (0)_{p=1}^q}(\pi_{\Lambda}^{-1}(B)).$$

Pela Subseção 3.4.6, a medida $\phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}, (0)_{p=1}^q}$ não é quase-local, logo, pela Definição 4.23, temos que $\phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}, (h_p)_{p=1}^q}$, também, não é quase-local. \square

5.2.3 Monotonicidades

Para fins técnicos desta subseção, definimos a probabilidade de percolação

$$P_{\infty}(\beta, J, h) \equiv \sup_{\phi \in \tilde{\mathcal{G}}^{\text{GRC}}} \phi(|C_0| = \infty) \quad (244)$$

e a probabilidade de percolação auxiliar

$$\tilde{P}_\infty(\beta, J, h) \equiv \inf_{\phi \in \tilde{\mathcal{G}}^{\text{GRC}}} \phi(|C_0| = \infty), \quad (245)$$

onde $C_0 \equiv C_0(\eta)$ é o aglomerado que contém a origem $0 \in \mathbb{Z}^d$. Aqui, o supremo e o ínfimo estão sendo tomados sobre o conjunto $\tilde{\mathcal{G}}^{\text{GRC}}$ de todas as medidas de Gibbs GRC invariantes por translação. Para as medidas RC consideradas aqui, as definições de $P_\infty(\beta, J, h)$ e $\tilde{P}_\infty(\beta, J, h)$ são obviamente modificadas por substituir o espaço $\tilde{\mathcal{G}}^{\text{GRC}}$ das medidas de Gibbs GRC invariantes por translação pelo espaço $\tilde{\mathcal{G}}^{\text{RC}}$ das medidas de Gibbs RC invariantes por translação. Como será visto no Corolário 5.18, a densidade $P_\infty(\beta, J, h)$ é, justamente, a medida de percolação da medida $\phi_{\text{max}}^{\text{RC}}$, a qual é não decrescente e contínua pela direita como função de J . Similarmente, veremos que $\tilde{P}_\infty(\beta, J, h)$ é a probabilidade de percolação da medida $\phi_{\text{livre}}^{\text{RC}}$. Definimos, também, o acoplamento crítico

$$J_c(\beta, h) \equiv \inf\{J \geq 0 : P_\infty(\beta, J, h) > 0\}. \quad (246)$$

Se substituirmos $P_\infty(\beta, J, h)$ por $\tilde{P}_\infty(\beta, J, h)$ na definição acima, o valor de $J_c(\beta, h)$ não muda, isso será visto como consequência do Corolário 5.18.

ESTADOS LIMITES

Em seguida, definimos o conjunto dos limites termodinâmicos da especificação $\{\phi_{\mathbb{B}_n}^{\text{GRC}} : |\mathbb{B}_n| < \infty\}$, onde $\{\mathbb{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência cofinal em $\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)$:

$$\mathcal{G}_{\text{lim}}^{\text{GRC}} \equiv \left\{ \phi \in \mathcal{M}_1(\Omega) : \phi \stackrel{\text{fraco}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\mathbb{B}_n}^{\text{GRC}}(\cdot | \eta_n) \right\}. \quad (247)$$

Em geral, não é fácil relacionar os conjuntos \mathcal{G}^{GRC} e $\mathcal{G}_{\text{lim}}^{\text{GRC}}$ devido à perda da propriedade de quase-localidade da especificação $\{\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}} : |\mathbb{B}| < \infty\}$ (veja Proposição 5.13). Um dos casos onde esses conjuntos podem ser relacionados é o caso no qual assumimos a existência de, no máximo, um aglomerado infinito com probabilidade um. No Corolário 5.32, provaremos a seguinte relação: $\mathcal{G}_{\text{lim}}^{\text{GRC}} \subseteq \mathcal{G}^{\text{GRC}}$. Usando a propriedade FKG forte para o modelo GRC mais os resultados prévios, provamos o seguinte teorema.

Teorema 5.14. *Sejam $\beta \geq 0$, $J \geq 0$, $q_p > 0$, $p = 1, \dots, q$ e suponha que os parâmetros q_p obedecem a condição (223). Logo se $\phi \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}$ ou $\phi \in \mathcal{G}_{\text{lim}}^{\text{GRC}}$, para cada função quase-local crescente f tem-se*

$$\phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}}(f) \leq \phi(f) \leq \phi_{\text{max}}^{\text{GRC}}(f).$$

Demonstração. Dado $\Lambda \in \mathcal{L}$, pelo Lema 5.9 (com $\mathbb{B} \equiv \mathbb{B}(\Lambda)$), para cada função cilíndrica crescente tem-se

$$\phi_{\mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}^{(0)}) \leq \phi_{\mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) \leq \phi_{\mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}^{(1)}), \quad (248)$$

onde $\eta^{(b)}$ é a configuração com $\eta_e^{(b)} = b$, para todo $e \in \mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)$ e $b = 0, 1$.

Denotando $\tilde{\Lambda} \equiv \mathbb{V}(\mathbb{B}(\Lambda))$, note que $\mathbb{B}_0(\tilde{\Lambda}) = \mathbb{B}(\Lambda)$ e que $\Lambda \subset \tilde{\Lambda}$. Logo,

$$\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}(f) \leq \phi_{\tilde{\Lambda}, \text{livre}}^{\text{GRC}}(f) = \phi_{\mathbb{B}_0(\tilde{\Lambda})}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}_0(\tilde{\Lambda})^c}^{(0)}) = \phi_{\mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}^{(0)}),$$

onde, na desigualdade, usamos o Lema 5.11 e, na primeira igualdade, usamos a Proposição 5.2. Pela Proposição 5.1 temos, também, que

$$\phi_{\mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}^{(1)}) = \phi_{\Lambda, \text{max}}^{\text{GRC}}(f).$$

Combinando estas duas últimas desigualdades com (248), obtemos a seguinte desigualdade

$$\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}(f) \leq \phi_{\mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) \leq \phi_{\Lambda, \text{max}}^{\text{GRC}}(f). \quad (249)$$

Se $\phi \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}$, pelas equações DLR temos

$$\int \phi(d\eta) \phi_{\mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) = \phi(f).$$

Integrando com respeito a ϕ em (249) e usando a identidade acima, conseguimos

$$\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}(f) \leq \phi(f) \leq \phi_{\Lambda, \text{max}}^{\text{GRC}}(f).$$

Fazendo $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ e usando o Teorema 5.12 na desigualdade acima, temos

$$\phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}}(f) \leq \phi(f) \leq \phi_{\text{max}}^{\text{GRC}}(f), \quad \phi \in \mathcal{G}^{\text{GRC}},$$

a desigualdade desejada.

Por outro lado, se $\phi \in \mathcal{G}_{\text{lim}}^{\text{GRC}}$, então $\phi \stackrel{\text{fraco}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\mathbb{B}_n}^{\text{GRC}}(\cdot|\eta_{\mathbb{B}_n^c}^{(n)})$, para alguma sequência de condições de fronteira $\eta^{(n)} \in \Omega$. Usaremos o fato de que $\{\mathbb{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência cofinal, isto é, para qualquer sequência de conjuntos finitos \mathbb{B}_n com $\mathbb{B}_n \uparrow \mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)$ pode-se encontrar uma sequência finita $\Lambda_n \in \mathcal{L}$ tal que $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ e $\mathbb{B}(\Lambda_n) \subset \mathbb{B}_n$. Dada uma tal sequência e uma sequência de condições de fronteira $\eta^{(n)}$, substituindo $\Lambda \equiv \Lambda_n$ e $\eta \equiv \eta^{(n)}$ em (249) vale que

$$\phi_{\Lambda_n, \text{livre}}^{\text{GRC}}(f) \leq \phi_{\mathbb{B}(\Lambda_n)}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}(\Lambda_n)^c}^{(n)}) \leq \phi_{\Lambda_n, \text{max}}^{\text{GRC}}(f). \quad (250)$$

Como $\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}$ é uma especificação (portanto, consistente) e $\mathbb{B}(\Lambda_n) \subset \mathbb{B}_n$, então

$$\phi_{\mathbb{B}_n}^{\text{GRC}} \phi_{\mathbb{B}(\Lambda_n)}^{\text{GRC}} = \phi_{\mathbb{B}_n}^{\text{GRC}}.$$

Assim, integrando-se (250) com respeito a $\phi_{\mathbb{B}(\Lambda_n)}^{\text{GRC}}(\cdot | \eta_{\mathbb{B}(\Lambda_n)^c}^{(n)})$ tem-se

$$\phi_{\Lambda_n, \text{livre}}^{\text{GRC}}(f) \leq \phi_{\mathbb{B}_n}^{\text{GRC}}(f | \eta_{\mathbb{B}(\Lambda_n)^c}^{(n)}) \leq \phi_{\Lambda_n, \text{max}}^{\text{GRC}}(f).$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ e usando a convergência fraca da sequência de medidas $\phi_{\mathbb{B}_n}^{\text{GRC}}(\cdot | \eta_{\mathbb{B}(\Lambda_n)^c}^{(n)})$, temos

$$\phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}}(f) \leq \phi(f) \leq \phi_{\text{max}}^{\text{GRC}}(f), \quad \phi \in \mathcal{G}_{\text{lim}}^{\text{GRC}},$$

o que conclui a prova, uma vez que toda função quase-local crescente pode ser aproximada por funções locais crescentes. \square

A seguinte proposição é relativamente técnica, mas de grande dificuldade de ser provada. Por exemplo, nela afirmamos que a aplicação

$$\eta \mapsto e^{\beta h_{\text{max}} \sum_{C(\eta): C(\eta) \cap \partial \Lambda \neq \emptyset} |C(\eta)|}$$

é decrescente no sentido FKG. Se em lugar de h_{max} tivermos $h_{\text{max}} - h_m$ para cada $m \in \{1, \dots, q\}$, não teríamos problema nenhum em afirmar que dita aplicação é crescente, desde que $h_{\text{max}} - h_m \geq 0$ e que $\sum_{C(\eta): C(\eta) \cap \partial \Lambda \neq \emptyset} |C(\eta)|$ chegue a ser igual ao número de sítios conectados à fronteira, que é uma função crescente de η . O problema em nosso caso é que não sabemos com certeza absoluta se h_{max} é um campo externo com sinal definido. Nesta situação, o seguinte resultado nos afirma que, de fato, a aplicação acima é decrescente em η e, ainda mais, nos fornece monotonicidade em η de uma versão análoga à aplicação discutida acima, quando a condição de fronteira é livre.

Proposição 5.15. *Para cada $\eta \in \Omega$, seja $B_J(\eta) \equiv (e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}_0(\Lambda)|}$ um fator de Bernoulli. As aplicações*

$$\eta \mapsto B_J^{-1}(\eta) \mathcal{W}_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}(\eta) \quad e \quad \eta \mapsto B_J^{-1}(\eta) \mathcal{W}_{\Lambda, \text{max}}^{\text{GRC}}(\eta)$$

são decrescentes no sentido FKG, onde os pesos $\mathcal{W}_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}$ e $\mathcal{W}_{\Lambda, \text{max}}^{\text{GRC}}$ foram definidos em (216) e (218), respectivamente.

Demonstração. Para cada $\eta \in \mathbb{B}_0(\Lambda)$ ou $\eta \in \mathbb{B}(\Lambda)$, definimos $g_{\#}(\eta) \equiv B_J^{-1}(\eta) \mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\eta)$, onde $\#$ denota a condição de fronteira livre ou max-conectada. Note que, para provar a monotonicidade da função $g_{\#}$, é suficiente provar a seguinte desigualdade

$$g_{\#}(\eta^e) \leq g_{\#}(\eta_{(e)}), \tag{251}$$

onde as configurações $\eta_{(e)}, \eta^e$ são definidas como

$$(\eta_{(e)})_b = \begin{cases} \eta_b, & \text{se } b \neq e \\ 0, & \text{se } b = e \end{cases} \quad \text{e} \quad (\eta^e)_b = \begin{cases} \eta_b, & \text{se } b \neq e \\ 1, & \text{se } b = e \end{cases}, \quad \forall b \in \mathbb{B}_0(\Lambda) \text{ ou } b \in \mathbb{B}(\Lambda),$$

respectivamente.

Suponha que e é uma aresta com extremidades x e y , isto é, $e \equiv \{x, y\}$, e que estes vértices estejam conectados na configuração $\eta_{(e)}$, isto é, $x \leftrightarrow y$ em $\eta_{(e)}$. Então a desigualdade (251) é atingida (e, portanto, temos a igualdade). Por outro lado, se os vértices x e y não estiverem conectados dentro desta configuração, notação $x \not\leftrightarrow y$ em $\eta_{(e)}$, então existem duas componentes conexas $A \equiv C(x, \eta_{(e)})$ e $B \equiv C(y, \eta_{(e)})$ contendo os vértices x e y , respectivamente. Se e é uma aresta aberta em $\eta_{(e)}$, então as componentes A e B estão conectadas, formando-se uma nova componente conexa denotada por $C \equiv A \cup B$. Logo, $|C| = |A| + |B|$, e assim, para provar (251), é suficiente verificar que

$$\Theta_{\Lambda, \#}(C) \leq \Theta_{\Lambda, \#}(A) \Theta_{\Lambda, \#}(B), \quad (252)$$

onde $\#$ denota a condição de fronteira livre ou max-conectada. Para estabelecer a desigualdade acima, analisaremos por separadamente os casos quando a condição de fronteira é livre ou max-conectada.

CONDIÇÃO DE FRONTEIRA LIVRE.

Definindo

$$a_m \equiv e^{\beta h_m |A|}, \quad b_m \equiv e^{\beta h_m |B|} \quad \text{e} \quad c_m \equiv e^{\beta h_m |C|},$$

veja que, com esta notação, a desigualdade (252) pode ser rescrita como

$$\sum_{j=1}^q q_j a_j b_j \leq \left(\sum_{k=1}^q q_k a_k \right) \left(\sum_{l=1}^q q_l b_l \right).$$

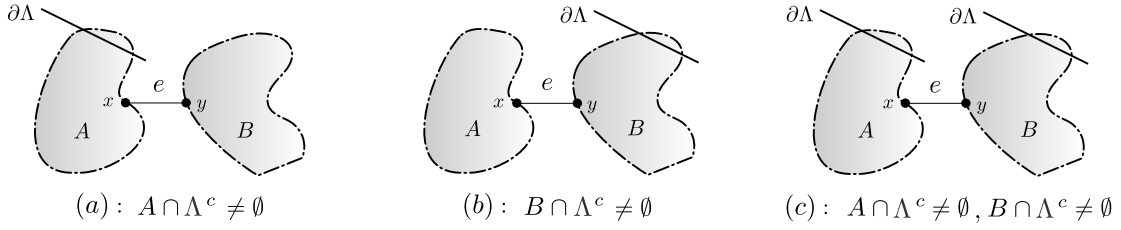
Mas, a desigualdade acima é verdadeira, uma vez que

$$\left(\sum_{k=1}^q q_k a_k \right) \left(\sum_{l=1}^q q_l b_l \right) \geq \sum_{k=1}^q q_k a_k \sum_{l \in \mathcal{Q}_{\max}(h)} q_l b_l \geq \sum_{j=1}^q q_j a_j b_j,$$

onde usamos que $\forall j \in \{1, \dots, q\}$, $q_l \geq q_j$ sobre $\mathcal{Q}_{\max}(h)$.

CONDIÇÃO DE FRONTEIRA MAX-CONECTADA.

Primeiramente, observe que, se $m \in \mathcal{Q}_m(h)$ e $\tilde{m} \in \mathcal{Q}_{\tilde{m}}(h')$, então $m = \tilde{m}$. Dadas duas componentes conexas A e B , se $A \cap \Lambda^c = \emptyset$ e $B \cap \Lambda^c = \emptyset$, então a desigualdade (252) segue diretamente do caso da condição de fronteira livre. Os casos restantes serão analisados considerando as seguintes possibilidades:



Para o caso (a), (252) é equivalente à desigualdade

$$a_{\tilde{m}} b_{\tilde{m}} \leq a_{\tilde{m}} \left(\sum_{m=1}^q q_m b_m \right).$$

Mas esta última desigualdade é válida, uma vez que

$$\sum_{m=1}^q q_m b_m \geq \sum_{m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)} q_m b_m \geq b_{\tilde{m}},$$

onde, na segunda desigualdade, usamos (351) e que $b_m \equiv e^{\beta h_{\max}|B|} = b_{\tilde{m}}$, para todo $m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$.

No caso (b), (252) é equivalente à desigualdade

$$a_{\tilde{m}} b_{\tilde{m}} \leq \left(\sum_{m=1}^q q_m a_m \right) b_{\tilde{m}}.$$

Outra vez, esta desigualdade é válida, já que

$$\sum_{m=1}^q q_m a_m \geq \sum_{m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)} q_m a_m \geq a_{\tilde{m}}.$$

Finalmente, para o caso (c), (252) é equivalente à seguinte igualdade $a_{\tilde{m}} b_{\tilde{m}} = a_{\tilde{m}} b_{\tilde{m}}$. \square

O seguinte teorema nos fornece monotonicidade na constante de acoplamento das medidas de Gibbs GRC. Uma versão geral deste resultado será visto no Teorema 6.8 do próximo capítulo.

Teorema 5.16 (Monotonicidade na constante de acoplamento). *Sejam $\beta \geq 0$, $J \geq 0$, $q_p > 0$, $p = 1, \dots, q$ e suponha que os parâmetros q_p obedecem a condição (223). Suponha que $J_1 < J_2$. Se $\phi_{\max}^{\text{GRC}, J_1}$ denota o estado de Gibbs max-conectado com $J = J_1$ e $\phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}, J_2}$ o estado de Gibbs livre com $J = J_2$. Então, para cada função quase-local crescente f , temos*

$$\phi_{\max}^{\text{GRC}, J_1}(f) \leq \phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}, J_2}(f).$$

Demonstração. Observe que, para provar a afirmação do teorema, é suficiente provar que

$$\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}, J_1}(f) \leq \phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}, J_2}(f), \quad \forall \Lambda \in \mathcal{L}, \quad (253)$$

desde que se (253) seja válido, por aplicação direta do limite termodinâmico (Teorema 5.12) nesta desigualdade conclui-se a prova.

De fato, desde que $J_1 < J_2$, tem-se $e^{\beta J_1} - 1 < e^{\beta J_2} - 1$. Para cada configuração $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}(\Lambda)}$, defina a função $g : \{0, 1\}^{\mathbb{B}(\Lambda)} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(\eta) \equiv \left[\frac{e^{\beta J_1} - 1}{e^{\beta J_2} - 1} \right]^{|B_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}(\Lambda)|} \times \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \partial \Lambda \neq \emptyset} e^{\beta h_{\max} |C(\eta)|},$$

onde $o(\eta)$ denota o número de arestas abertas na configuração η . Claramente, a função $[(e^{\beta J_1} - 1)/(e^{\beta J_2} - 1)]^{|B_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}(\Lambda)|}$ é decrescente no sentido FKG. Pela Proposição 5.15, mesma afirmação permanece para a função

$$\prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \partial \Lambda \neq \emptyset} e^{\beta h_{\max} |C(\eta)|},$$

daí, a função g também é decrescente, uma vez que g é composta pelo produto de duas funções não negativas decrescentes.

Seja $f : \{0, 1\}^{\mathbb{B}(\Lambda)} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função arbitrária cilíndrica crescente no sentido FKG. Da definição de valor esperado de uma variável aleatória temos

$$\begin{aligned} \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}, J_1}(f) &= \sum_{\eta \in \mathbb{B}(\Lambda)} f(\eta) \frac{(e^{\beta J_1} - 1)^{|B_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}(\Lambda)|}}{Z_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}, J_1}} \prod_{C(\eta)} \Theta_{\Lambda, \max}(C(\eta)) \\ &= \sum_{\eta \in \mathbb{B}(\Lambda)} f(\eta) g(\eta) \frac{(e^{\beta J_2} - 1)^{|B_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}(\Lambda)|}}{Z_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}, J_2}} \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \partial \Lambda = \emptyset} \sum_{p=1}^q e^{\beta h_p |C(\eta)|} \times \frac{Z_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}, J_2}}{Z_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}, J_1}} \\ &= \phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}, J_2}(f \cdot g) \times \frac{Z_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}, J_2}}{Z_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}, J_1}}, \end{aligned} \quad (254)$$

onde $Z_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}, J}$ denota a função de partição (ou constante de normalização) da medida de probabilidade $\phi_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}, J}$ e $\#$ denota a condição de fronteira livre ou max-conectada.

Considerando $f \equiv 1$ (função constante 1), em (254) tem-se a seguinte igualdade

$$\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}, J_2}(g) = \frac{Z_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}, J_1}}{Z_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}, J_2}}.$$

Usando a equação acima, (254) e a propriedade FKG forte (precisamente, Teorema 5.6) obtém-se

$$\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}, J_1}(f) = \frac{\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}, J_2}(f \cdot g)}{\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}, J_2}(g)} \stackrel{\text{FKG}}{\leq} \phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}, J_2}(f),$$

o que prova (253). \square

Para dar continuidade ao seguinte resultado (veja Teorema 5.17), é necessário introduzir uma relação de ordem no espaço dos campos magnéticos externos. Antes disso, apresentaremos um argumento elementar, o qual mostra a escolha adequada da ordem parcial para os campos $(h_p)_{p=1}^q$, independentemente do volume, do inverso da temperatura $\beta > 0$ e dos valores de q_p , onde $p = 1, \dots, q$.

Seja $\Lambda = \{x, y\}$ o conjunto (de vértices) formado por dois sítios de primeiros vizinhos x e y . Consideremos o evento $\{\eta_e = 1\}$ que a aresta $e = \{x, y\}$ está aberta (ou ocupada), logo,

$$\phi_{\{x, y\}, \text{livre}}^{\text{GRC}, (h_p)_{p=1}^q}(\eta_e = 1) = \frac{\sum_{p=1}^q q_p e^{2\beta h_p}}{\sum_{p=1}^q q_p e^{2\beta h_p} + \left[\sum_{p=1}^q q_p e^{\beta h_p} \right]^2} = \frac{\left[\frac{(\sum_{p=1}^q q_p e^{2\beta h_p})^{1/2}}{\sum_{p=1}^q q_p e^{\beta h_p}} \right]^2}{1 + \left[\frac{(\sum_{p=1}^q q_p e^{2\beta h_p})^{1/2}}{\sum_{p=1}^q q_p e^{\beta h_p}} \right]^2}.$$

Como a função $x \mapsto x^2/(1+x^2)$ é estritamente crescente para $x > 0$, a medida $\phi_{\{x, y\}, \text{livre}}^{\text{GRC}, (h_p)_{p=1}^q}$ é crescente em $(h_p)_{p=1}^q$ se, e somente se, $\frac{(\sum_{p=1}^q q_p e^{2\beta h_p})^{1/2}}{\sum_{p=1}^q q_p e^{\beta h_p}}$ é crescente em $(h_p)_{p=1}^q$. Se isso é verdade, independentemente dos q_p 's, logo, também

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha q_k = q_l \rightarrow \infty} q_k \frac{\sum_{p=1}^q q_p e^{2\beta h_p}}{\left[\sum_{p=1}^q q_p e^{\beta h_p} \right]^2} &= \lim_{\alpha q_k = q_l \rightarrow \infty} \frac{1 + \alpha e^{2\beta(h_l - h_k)} + \sum_{m \neq k, l} \frac{q_p}{q_k} e^{2\beta(h_p - h_k)}}{\left[1 + \alpha e^{\beta(h_l - h_k)} + \sum_{m \neq k, l} \frac{q_p}{q_k} e^{\beta(h_p - h_k)} \right]^2} \\ &= \frac{1 + \alpha e^{2\beta(h_l - h_k)}}{\left[1 + \alpha e^{\beta(h_l - h_k)} \right]^2} \end{aligned} \quad (255)$$

deve ser crescente para todo $\alpha > 0$. No limite acima, fixamos todos os q_p 's com $p \neq k, l$.

Mostraremos que a condição

$$h'_k - h' \geq h_k - h_l, \quad \text{sempre que } h_k - h_l > 0 \quad (256)$$

é necessária para que, para cada função quase-local crescente f , se satisfaça

$$\phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}, (h_p)_{p=1}^q}(f) \leq \phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}, (h'_p)_{p=1}^q}(f), \quad (257)$$

onde $(h_p)_{p=1}^q$ e $(h'_p)_{p=1}^q$ são dois campos magnéticos externos. Para isso, primeiro provaremos que a condição

$$h'_k - h'_l \geq 0, \quad \text{sempre que } h_k - h_l > 0 \quad (258)$$

é necessária para que (257) se mantenha. De fato, suponha que (258) não se satisfaz, isto é $h_k > h_l$ e $h'_k - h'_l < 0$. Logo, se $h_k > h_l$, para β suficientemente grande, o lado direito de (255) é

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1 + \alpha e^{2\beta(h_l - h_k)}}{[1 + \alpha e^{\beta(h_l - h_k)}]^2} = 1.$$

Se $h'_k - h'_l < 0$, para β suficientemente grande, o lado direito de (255) é

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1 + \alpha e^{2\beta(h'_l - h'_k)}}{[1 + \alpha e^{\beta(h'_l - h'_k)}]^2} = \frac{1}{\alpha}.$$

Tomando $\alpha > 1$, veja que a desejada monotonicidade de $\phi_{\{x,y\}, \text{livre}}^{\text{GRC}, (h_p)_{p=1}^q}(\eta_e = 1)$ não é satisfeita, portanto, a monotonicidade (257) também não é satisfeita. Assim, a condição (258) é necessária para (257).

Tendo isso a nossa disposição, agora provaremos que a condição (256) é necessária para (257). De fato, tome $\alpha = 1$ em (255), o lado direito deste item deixa a função

$$(h_k - h_l) \mapsto \frac{1}{2} \frac{\cosh(\beta(h_k - h_l))}{\left[\cosh\left(\frac{1}{2}\beta(h_k - h_l)\right)\right]^2},$$

a qual é uma função par e estritamente crescente. Daí, por substituir $(h_p)_{p=1}^q \rightarrow (h'_p)_{p=1}^q$ em (255), o lado direito de este item $\frac{1 + \alpha e^{2\beta(h'_l - h'_k)}}{[1 + \alpha e^{\beta(h'_l - h'_k)}]^2}$ é crescente se, e somente se, $|h'_l - h'_k| \geq |h_l - h_k|$ que, junto com (258), dá a necessidade de (256) para (257).

Com esta motivação prévia para a escolha correta da relação de ordem para os campos externos, de modo que as medidas GRC sejam comparadas crescentemente com respeito ao campo, dados dois campos magnéticos externos $(h_p)_{p=1}^q$ e $(h'_p)_{p=1}^q$, definimos a seguinte relação de ordem parcial:

$$(h_p)_{p=1}^q \prec (h'_p)_{p=1}^q \Leftrightarrow h_k - h_l \leq h'_k - h'_l, \quad \forall k, l = 1, \dots, q, \quad (259)$$

sempre que $h_k - h_l > 0$.

Enfatizamos que a relação de ordem e a justificativa apresentada acima apareceram pela primeira vez no trabalho [20].

Teorema 5.17 (Monotonicidade no campo externo). *Sejam $\beta \geq 0$, $J \geq 0$, $q_p > 0$, $p = 1, \dots, q$ e suponha que os parâmetros q_p obedecem a condição (223). Se $(h_p)_{p=1}^q \prec (h'_p)_{p=1}^q$ são dois campos magnéticos externos, então, as seguintes monotonicidades*

$$\phi_{\text{livre}}^{\text{GRC},(h_p)_{p=1}^q}(f) \leq \phi_{\text{livre}}^{\text{GRC},(h'_p)_{p=1}^q}(f) \quad \text{e} \quad \phi_{\text{max}}^{\text{GRC},(h_p)_{p=1}^q}(f) \leq \phi_{\text{max}}^{\text{GRC},(h'_p)_{p=1}^q}(f)$$

são válidas, para cada função quase-local crescente f .

Demonstração. Pelo “Teorema de Holley” (veja Teorema 3.31), as dominações estocásticas

$$\phi_{\text{livre}}^{\text{GRC},(h_p)_{p=1}^q} \leq_{\text{st}} \phi_{\text{livre}}^{\text{GRC},(h'_p)_{p=1}^q} \quad \text{e} \quad \phi_{\text{max}}^{\text{GRC},(h_p)_{p=1}^q} \leq_{\text{st}} \phi_{\text{max}}^{\text{GRC},(h'_p)_{p=1}^q}$$

são justificadas se provarmos a seguinte desigualdade (chamada de condição látice)

$$\begin{aligned} \phi_{\Lambda, \#}^{\text{GRC},(h_p)_{p=1}^q}(\eta^{(1)} \vee \eta^{(2)}) \phi_{\Lambda, \#}^{\text{GRC},(h'_p)_{p=1}^q}(\eta^{(1)} \wedge \eta^{(2)}) \\ \geq \phi_{\Lambda, \#}^{\text{GRC},(h'_p)_{p=1}^q}(\eta^{(1)}) \phi_{\Lambda, \#}^{\text{GRC},(h_p)_{p=1}^q}(\eta^{(2)}), \end{aligned} \quad (260)$$

para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$ e para todo $\eta^{(1)}, \eta^{(2)} \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}(\Lambda)}$ ou $\{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\Lambda)}$, onde $\#$ denota as condições de fronteira livre e max-conectada. Sabemos que a condição látice (260) é uma consequência de

$$\frac{\phi_{\Lambda, \#}^{\text{GRC},(h'_p)_{p=1}^q}(\zeta^e)}{\phi_{\Lambda, \#}^{\text{GRC},(h_p)_{p=1}^q}(\zeta(e))} \geq \frac{\phi_{\Lambda, \#}^{\text{GRC},(h_p)_{p=1}^q}(\zeta^e)}{\phi_{\Lambda, \#}^{\text{GRC},(h_p)_{p=1}^q}(\zeta(e))}, \quad (261)$$

para qualquer $\zeta \preceq \zeta$ e $e \in \mathbb{B}(\Lambda)$ ou $e \in \mathbb{B}_0(\Lambda)$, onde as configurações $\zeta_{(e)}$ e ζ^e são definidas como

$$(\zeta_{(e)})_b = \begin{cases} \zeta_b, & \text{se } b \neq e \\ 0, & \text{se } b = e \end{cases} \quad \text{e} \quad (\zeta^e)_b = \begin{cases} \zeta_b, & \text{se } b \neq e \\ 1, & \text{se } b = e, \end{cases} \quad \forall b \in \mathbb{B}(\Lambda) \text{ ou } b \in \mathbb{B}_0(\Lambda),$$

respectivamente. Salientamos que as notações ζ^e e $\zeta_{(e)}$ têm diferentes significados. Sem perda de generalidade, podemos assumir que ζ e ζ são da forma

$$\zeta \equiv (*, \dots, *, \underbrace{0}_{e\text{-ésimo}}, *, \dots, *) \quad \text{e} \quad \zeta \equiv (*', \dots, *', \underbrace{0}_{e\text{-ésimo}}, *', \dots, *'),$$

respectivamente, com $\zeta \preceq \zeta$ e $*, *' \in \{0, 1\}$. Com estas notações em mente, note que

$$\zeta_{(e)} = \zeta \quad \text{e} \quad \zeta_{(e)} = \zeta,$$

portanto,

$$\frac{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\zeta^e) \cap \mathbb{B}_0(\Lambda)|}}{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\zeta_{(e)}) \cap \mathbb{B}_0(\Lambda)|}} = e^{\beta J - 1} = \frac{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\zeta^e) \cap \mathbb{B}_0(\Lambda)|}}{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\zeta_{(e)}) \cap \mathbb{B}_0(\Lambda)|}}.$$

Da equação anterior segue que a desigualdade (261) é uma consequência de

$$\frac{\Theta_{\Lambda, \#}^{(h'_p)_{p=1}^q}(\zeta^e)}{\Theta_{\Lambda, \#}^{(h'_p)_{p=1}^q}(\zeta_{(e)})} \geq \frac{\Theta_{\Lambda, \#}^{(h_p)_{p=1}^q}(\zeta^e)}{\Theta_{\Lambda, \#}^{(h_p)_{p=1}^q}(\zeta_{(e)})}, \quad (262)$$

para condições de fronteira $\#$: livre e max-conectada.

Se $e = \{x, y\}$ e $x \leftrightarrow y$ na configuração ζ , então (262) é uma igualdade. Por outro lado, se $x \not\leftrightarrow y$ em ζ , então devem existir duas componentes conexas $A \equiv C(x, \zeta)$ e $B \equiv C(y, \zeta)$ contendo os vértices x e y , respectivamente. Se e é uma aresta aberta em ζ , então as componentes A e B são conectadas e serão denotadas por $C \equiv A \cup B$. Assim, $|C| = |A| + |B|$, de onde se deduz que

$$\frac{\Theta_{\Lambda, \#}^{(h'_p)_{p=1}^q}(\zeta^e)}{\Theta_{\Lambda, \#}^{(h'_p)_{p=1}^q}(\zeta_{(e)})} \cdot \frac{\Theta_{\Lambda, \#}^{(h_p)_{p=1}^q}(\zeta_{(e)})}{\Theta_{\Lambda, \#}^{(h_p)_{p=1}^q}(\zeta^e)} = \frac{\Theta_{\Lambda, \#}^{(h'_p)_{p=1}^q}(C)}{\Theta_{\Lambda, \#}^{(h_p)_{p=1}^q}(C)} \cdot \frac{\Theta_{\Lambda, \#}^{(h_p)_{p=1}^q}(A) \Theta_{\Lambda, \#}^{(h_p)_{p=1}^q}(B)}{\Theta_{\Lambda, \#}^{(h'_p)_{p=1}^q}(A) \Theta_{\Lambda, \#}^{(h'_p)_{p=1}^q}(B)},$$

para cada condição de fronteira $\#$: livre e max-conectada. Com o intuito de provar (262), note que é suficiente provar a seguinte desigualdade

$$\frac{\Theta_{\Lambda, \#}^{(h'_p)_{p=1}^q}(C)}{\Theta_{\Lambda, \#}^{(h_p)_{p=1}^q}(C)} \cdot \frac{\Theta_{\Lambda, \#}^{(h_p)_{p=1}^q}(A) \Theta_{\Lambda, \#}^{(h_p)_{p=1}^q}(B)}{\Theta_{\Lambda, \#}^{(h'_p)_{p=1}^q}(A) \Theta_{\Lambda, \#}^{(h'_p)_{p=1}^q}(B)} \geq 1. \quad (263)$$

Para provarmos a desigualdade acima, faremos uma análise por separado para o caso da fronteira livre e para o caso da fronteira max-conectada.

CASO CONDIÇÃO DE FRONTEIRA LIVRE.

Seguindo a notação usada na prova da propriedade FKG forte, para cada $m \in \{1, \dots, q\}$ definimos os seguintes números

$$a_m \equiv e^{\beta h_m |A|}, \quad b_m \equiv e^{\beta h_m |B|} \quad \text{e} \quad c_m \equiv e^{\beta h_m |B|}.$$

Analogamente, definimos a'_m, b'_m e c'_m por substituir $(h_p)_{p=1}^q$ por $(h'_p)_{p=1}^q$. Com esta notação, (263) se escreve

$$\left(\sum_{j=1}^q q_j a'_j \right) \left(\sum_{k=1}^q q_k b'_k \right) \left(\sum_{l=1}^q q_l a_l b_l \right) \leq \left(\sum_{j=1}^q q_j a_j \right) \left(\sum_{k=1}^q q_k b_k \right) \left(\sum_{l=1}^q q_l a'_l b'_l \right). \quad (264)$$

A prova da desigualdade (264) será dividida em dois passos.

Passo 1:(remover as primas dos a_j 's) afirmamos que

$$\left(\sum_{j=1}^q q_j a'_j \right) \left(\sum_{k=1}^q q_k b'_k \right) \left(\sum_{l=1}^q q_l a_l b_l \right) \leq \left(\sum_{j=1}^q q_j a_j \right) \left(\sum_{k=1}^q q_k b'_k \right) \left(\sum_{l=1}^q q_l a'_l b_l \right). \quad (265)$$

De fato, sem perda de generalidade, veja que podemos assumir que $h_l - h_j > 0$. Por hipótese, temos $(h_p)_{p=1}^q \prec (h'_p)_{p=1}^q$, logo, $\forall l, j = 1, \dots, q$ obtemos $h_l - h_j \leq h'_l - h'_j$. Desta última desigualdade

$$\frac{a_l}{a_j} \leq \frac{a'_l}{a'_j}, \quad \text{implicando que } a'_j a_l - a_j a'_l \leq 0. \quad (266)$$

Por outro lado, desde que $h_l - h_j > 0$, temos $b_l - b_j > 0$. Combinando as duas últimas desigualdades acima obtemos

$$(a'_j a_l - a_j a'_l)(b_l - b_j) \leq 0,$$

o que permite concluir que $a'_j a_l b_l \leq [a'_j a_l - a_j a'_l] b_j + a'_j a_j b_l \leq a_j a'_l b_l$, onde, na última desigualdade, usamos (266). Multiplicando pelo fator $q_j q_k q_l b'_k$ e somando sobre todo $j, k, l = 1, \dots, q$ na desigualdade acima, concluímos o afirmado.

Passo 2:(remover primas de b_k 's) afirmamos que

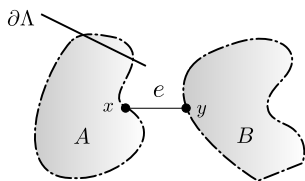
$$\left(\sum_{j=1}^q q_j a_j \right) \left(\sum_{k=1}^q q_k b'_k \right) \left(\sum_{l=1}^q q_l a'_l b_l \right) \leq \left(\sum_{j=1}^q q_j a_j \right) \left(\sum_{k=1}^q q_k b_k \right) \left(\sum_{l=1}^q q_l a'_l b'_l \right). \quad (267)$$

A prova é feita de forma análoga ao Passo 1. Assumimos que $h_l - h_k > 0$ e, em lugar de (266), provamos que $b'_k b_l - b_k b'_l \leq 0$, procedendo por similitude ao feito acima, obtemos a conclusão.

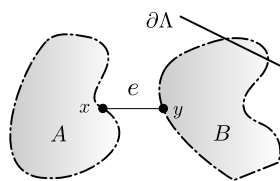
Finalmente, juntando as desigualdades (265) e (267), obtém-se (264).

CASO CONDIÇÃO DE FRONTEIRA MAX-CONECTADA.

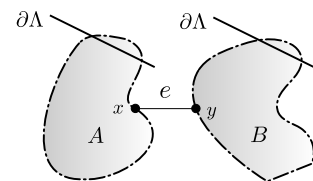
Observe que, se $m \in \mathcal{Q}_m(h)$ e $\tilde{m} \in \mathcal{Q}_{\tilde{m}}(h')$ então $m = \tilde{m}$. Dadas duas componentes conexas A e B , se $A \cap \Lambda^c = \emptyset$ e $B \cap \Lambda^c = \emptyset$, então a desigualdade (263) segue diretamente do caso da condição de fronteira livre exposto anteriormente. Os casos restantes serão analisados por considerar os seguintes casos:



(a): $A \cap \Lambda^c \neq \emptyset$



(b): $B \cap \Lambda^c \neq \emptyset$



(c): $A \cap \Lambda^c \neq \emptyset, B \cap \Lambda^c \neq \emptyset$

No caso (a), (263) é equivalente à desigualdade

$$a'_m \left(\sum_{k=1}^q q_k b'_k \right) a_m b_m \leq a_m \left(\sum_{k=1}^q q_k b_k \right) a'_m b'_m. \quad (268)$$

Para provar que esta desigualdade é válida, é suficiente observar que o ordenamento parcial entre os campos magnéticos externos implica que $b_m b'_k \leq b'_m b_k$. Multiplicando a desigualdade acima pelo fator $a'_m a_m$ e somando sobre todo $k = 1, \dots, q$, obtemos (268).

No caso (b), a desigualdade (263) se reduz a

$$\left(\sum_{j=1}^q q_j a'_j \right) b'_m a_m b_m \leq \left(\sum_{j=1}^q q_j a_j \right) b_m a'_m b'_m.$$

Novamente, usamos o ordenamento parcial entre os campos magnéticos externos para obter que $a_m a'_j \leq a'_m a_j$ e procedemos analogamente ao caso anterior. Finalmente, no caso (c), a desigualdade (263) é equivalente a $a'_m b'_m a_m b_m = a_m b_m a'_m b'_m$, o que é trivialmente certo. \square

Com ajuda do teorema da monotonicidade no campo externo, provaremos a não trivialidade das probabilidades de percolação (244) e (245), além disso, através deste teorema, é possível destacar-se duas fases de percolação quando se faz variar a constante de acoplamento J . Mencionamos isto e outros resultados no seguinte corolário.

Corolário 5.18. *Sejam $\beta \geq 0$, $J \geq 0$, $h_p \in \mathbb{R}$, $q_p > 0$, $p = 1, \dots, q$ e suponha que os parâmetros q_p obedecem a condição (223). Logo*

- (i) $P_\infty(\beta, J, h) = \phi_{\max}^{\text{GRC}}(|C_0| = \infty)$.
- (ii) $\tilde{P}_\infty(\beta, J, h) = \phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}}(|C_0| = \infty)$.
- (iii) $J \mapsto P_\infty(\beta, J, h)$ é uma função não decrescente e contínua pela direita.
- (iv) $J \mapsto \tilde{P}_\infty(\beta, J, h)$ é uma função não decrescente, a qual é contínua e igual a $P_\infty(\beta, J, h)$ sempre que $J \mapsto P_\infty(\beta, J, h)$ seja contínua.
- (v) $P_\infty(\beta, J, h) = \tilde{P}_\infty(\beta, J, h) = 0$ se $J < J_c$, enquanto $P_\infty(\beta, J, h) > 0$ e $\tilde{P}_\infty(\beta, J, h) > 0$ se $J > J_c$.

Demonstração. Para verificar (i) e (ii), veja que, pelo Teorema 5.14, para toda função quase-local crescente f

$$\phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}}(f) \leq \phi(f) \leq \phi_{\max}^{\text{GRC}}(f), \quad \forall \phi \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}.$$

Uma vez que $\mathbb{1}_{\{0 \leftrightarrow \infty\}}$ é uma função quase-local crescente, na desigualdade acima consideramos $f \equiv \mathbb{1}_{\{0 \leftrightarrow \infty\}}$. Logo, no lado esquerdo dessa desigualdade, tomamos o ínfimo sobre todas as medidas $\phi \in \tilde{\mathcal{G}}^{\text{GRC}}$ e concluímos a prova de (ii) usando a definição de \tilde{P}_∞ . Analogamente, no lado direito da referida desigualdade, tomamos o supremo sobre todas as medidas $\phi \in \tilde{\mathcal{G}}^{\text{GRC}}$ e usamos a definição de P_∞ para concluir a prova de (i).

Para a prova de (iii), afirmamos que

$$\lim_{\Lambda \downarrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(0 \leftrightarrow \Lambda^c) = \phi_{\max}^{\text{GRC}}(0 \leftrightarrow \infty). \quad (269)$$

De fato, para cada $\Lambda \subset \Delta$, tem-se

$$\phi_{\Delta, \max}^{\text{GRC}}(0 \leftrightarrow \Delta^c) \leq \phi_{\Delta, \max}^{\text{GRC}}(0 \leftrightarrow \Lambda^c) \leq \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(0 \leftrightarrow \Lambda^c), \quad (270)$$

onde, na primeira desigualdade, usamos a monotonicidade da medida com respeito à inclusão $\{0 \leftrightarrow \Delta^c\} \subset \{0 \leftrightarrow \Lambda^c\}$, no entanto, na segunda desigualdade usamos a propriedade da dominação no volume da medida de probabilidade $\phi_{\Delta, \max}^{\text{GRC}}$ (veja Lema 5.11).

Desde que $\{\{0 \leftrightarrow \Delta^c\} : \Delta \in \mathcal{L}\}$ é uma sequência de eventos decrescentes em Δ , podemos fazer $\Delta \downarrow \mathbb{Z}^d$ em (270), para obter

$$\lim_{\Delta \downarrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Delta, \max}^{\text{GRC}}(0 \leftrightarrow \Delta^c) \leq \lim_{\Delta \downarrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Delta, \max}^{\text{GRC}}(0 \leftrightarrow \Lambda^c) = \phi_{\max}^{\text{GRC}}(0 \leftrightarrow \Lambda^c) \leq \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(0 \leftrightarrow \Lambda^c).$$

Em seguida, fazendo $\Lambda \downarrow \mathbb{Z}^d$ e usando a continuidade da medida nesta última desigualdade, ficamos com

$$\lim_{\Delta \downarrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Delta, \max}^{\text{GRC}}(0 \leftrightarrow \Delta^c) \leq \lim_{\Lambda \downarrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(0 \leftrightarrow \Lambda^c) = \phi_{\max}^{\text{GRC}}(0 \leftrightarrow \infty) \leq \lim_{\Lambda \downarrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(0 \leftrightarrow \Lambda^c),$$

o que conclui a prova da afirmação (269), visto que as quantidades dos extremos são iguais.

Na prova do Item (iii), por questão de notação, consideremos a medida $\phi_{\max}^{\text{GRC}, J}$ que denota o estado de Gibbs max-conectado com constante de acoplamento J . Veja que de (269) e (270) tem-se

$$\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}, J}(0 \leftrightarrow \Lambda^c) \downarrow \phi_{\max}^{\text{GRC}, J}(0 \leftrightarrow \infty), \quad \text{quando } \Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d. \quad (271)$$

Fixado J_0 , note, também, que

$$\lim_{J \rightarrow J_0} \phi_{\max}^{\text{GRC}, J}(0 \leftrightarrow \Lambda^c) = \phi_{\max}^{\text{GRC}, J_0}(0 \leftrightarrow \Lambda^c). \quad (272)$$

De (271), obtém-se

$$\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}, J}(0 \leftrightarrow \Lambda^c) \geq \phi_{\max}^{\text{GRC}, J}(0 \leftrightarrow \infty).$$

Por continuidade (272) da medida $\phi_{\max}^{\text{GRC}, J}(0 \leftrightarrow \Lambda^c)$, tem-se

$$\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}, J_0}(0 \leftrightarrow \Lambda^c) \geq \limsup_{J \rightarrow J_0} \phi_{\max}^{\text{GRC}, J}(0 \leftrightarrow \infty), \quad \text{sempre que } J \rightarrow J_0.$$

Fazendo $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ e usando (271) na desigualdade acima, obtemos

$$P_\infty(\beta, J, h) \stackrel{(i)}{=} \phi_{\max}^{\text{GRC}, J_0}(0 \leftrightarrow \infty) \geq \limsup_{J \rightarrow J_0} \phi_{\max}^{\text{GRC}, J}(0 \leftrightarrow \infty) \stackrel{(i)}{=} \limsup_{J \rightarrow J_0} P_\infty(\beta, J, h).$$

Logo, pela Proposição 3.60 temos provado que $P_\infty(\beta, J, h)$ é uma função semicontínua superior (veja definição estabelecida no Item (119), notação: s.c.s.) em J_0 . Pela arbitrariedade de J_0 , temos que $P_\infty(\beta, J, h)$ é uma função s.c.s., portanto, (que é equivalente a dizer que) $P_\infty(\beta, J, h)$ é uma função contínua pela direita em J . A parte de que a aplicação $J \mapsto P_\infty(\beta, J, h)$ é crescente em J , decorre imediatamente por definição da medida $\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}, J}$.

Para provar (iv) e (v), (como havíamos falado anteriormente) note que as aplicações

$$J \mapsto \tilde{P}_\infty(\beta, J, h) \quad \text{e} \quad J \mapsto P_\infty(\beta, J, h), \quad \text{são não decrescentes.} \quad (273)$$

Pelo Teorema 5.14, tem-se

$$\tilde{P}_\infty(\beta, J, h) \stackrel{(ii)}{=} \phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}}(|C_0| = \infty) \leq \phi_{\max}^{\text{GRC}}(|C_0| = \infty) \stackrel{(i)}{=} P_\infty(\beta, J, h), \quad \forall J \geq 0 \quad (274)$$

e pelo Teorema 5.16, $\forall J_1 < J_2$, a seguinte desigualdade se satisfaz

$$\tilde{P}_\infty(\beta, J_2, h) \stackrel{(ii)}{=} \phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}, J_2}(|C_0| = \infty) \geq \phi_{\max}^{\text{GRC}, J_1}(|C_0| = \infty) \stackrel{(i)}{=} P_\infty(\beta, J_1, h). \quad (275)$$

Como $\phi_{\max}^{\text{GRC}}(\cdot) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(\cdot)$ e $\{\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(\cdot) : \Lambda \in \mathcal{L}\}$ é uma sequência não decrescente no volume Λ (pelo Lema 5.11) e, além disso, esta sequência é não decrescente e contínua em J , a aplicação $J \mapsto \tilde{P}_\infty(\beta, J, h)$ é uma função contínua e monótona não decrescente em J .

Por outro lado, fazendo $J_2 = J$ em (275) e tomando o $J_1 \rightarrow J$, desde que a aplicação $J \mapsto P_\infty(\beta, J, h)$ é contínua obtemos $\tilde{P}_\infty(\beta, J, h) \geq P_\infty(\beta, J, h)$, o que, combinando com (274), nos permite concluir a prova do Item (iv).

Finalmente, na prova de (v), se $J < J_c$, por definição do parâmetro crítico $J_c \equiv J_c(\beta, h)$, temos $P_\infty(\beta, J, h) = 0$. Daí, por (274) obtemos $\tilde{P}_\infty(\beta, J, h) = 0$. No entanto, se $J > J_c$, novamente pela definição do parâmetro crítico J_c e por (273), tem-se

$$P_\infty(\beta, J, h) \geq P_\infty(\beta, J_c, h) > 0.$$

Por outro lado, fazendo $J_2 = J$ e $J_1 = J_c$ em (275) e usando a definição de J_c , temos

$$\tilde{P}_\infty(\beta, J, h) \geq P_\infty(\beta, J_c, h) > 0,$$

o que conclui a prova de (v) e, em consequência, a prova do teorema. \square

Seja $\tilde{J}_c(\beta, h) \equiv \inf\{J \geq 0 : \tilde{P}_\infty(\beta, J, h) > 0\}$. Em seguida, afirmamos que $J_c(\beta, h) = \tilde{J}_c(\beta, h)$. De fato, pelos Itens (i) e (ii) do Corolário 5.18 temos $\tilde{P}_\infty(\beta, J, h) \leq P_\infty(\beta, J, h)$, implicando que $J_c(\beta, h) \leq \tilde{J}_c(\beta, h)$. Por outro lado, pelos Itens (i) e (ii) do Corolário 5.18 e pela definição de $\tilde{J}_c(\beta, h)$, se $J_c(\beta, h) > \tilde{J}_c(\beta, h)$, temos que $P_\infty(\beta, \tilde{J}_c, h) \geq \tilde{P}_\infty(\beta, \tilde{J}_c, h) > 0$, o qual contradiz o Item (v) do Corolário 5.18. Portanto, $J_c(\beta, h) = \tilde{J}_c(\beta, h)$.

Encerramos esta seção com dois lemas, o primeiro concernente às RC marginais da medidas ES com condições de fronteira geral, e o segundo é relacionado com uma dominação do tipo FKG, o qual será usado para provar o Teorema 5.23 da Seção 5.3. Para isso, necessitamos introduzir algumas notações. Primeiramente, para um conjunto $\Lambda \in \mathcal{L}$ e qualquer subconjunto $D \subset \partial\Lambda$, onde $\partial\Lambda = \{x \in \mathbb{Z}^d : \text{dist}(x, \Lambda) = 1\}$ é a fronteira externa. Definimos a medida D -max conectada no volume Λ como a medida

$$\phi_{\Lambda, D, \max}^{\text{GRC}}(\cdot) \equiv \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(\cdot | \eta_e = 0 \ \forall e \in \mathbb{B}(\Lambda) \setminus \mathbb{B}_0(\Lambda \cup D)). \quad (276)$$

Note que

$$\phi_{\Lambda, D, \max}^{\text{GRC}}(\cdot) = \begin{cases} \phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}(\cdot), & D = \emptyset \\ \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(\cdot), & D = \partial\Lambda, \end{cases}$$

onde as medidas $\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}$ e $\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}$ foram definidas em (216) e (218), respectivamente. Outrossim, definimos uma medida que generaliza a medida m -conectada. Para isso, para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$ e qualquer configuração $\sigma : \partial\Lambda \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$, a medida $\phi_{\Lambda, \sigma}^{\text{GRC}}$ é obtida por normalizar os pesos

$$\mathcal{W}_{\Lambda, \sigma}^{\text{GRC}}(\eta) \equiv (e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}} \cap \mathbb{B}(\Lambda)|} \prod_{i < j} \mathbb{1}_{\{\partial_i \Lambda \leftrightarrow \partial_j \Lambda\}}(\eta) \prod_{C(\eta)} \Theta_{\Lambda, \sigma}(C(\eta)), \quad (277)$$

onde $\partial_i \Lambda \equiv \{x \in \partial\Lambda : \sigma_x = i\}$, para cada $i \in \{1, \dots, q\}$. Note que $\{\partial_i \Lambda : i = 1, \dots, q\}$ forma uma partição de $\partial\Lambda$. Aqui,

$$\Theta_{\Lambda, \sigma}(C) \equiv \begin{cases} \Theta_{\text{livre}}(C), & C \cap \Lambda^c = \emptyset \\ e^{\beta h_m |C|}, & C \cap \partial_m \Lambda \neq \emptyset. \end{cases} \quad (278)$$

Com estas notações a nossa disposição, estamos prontos para provar o seguinte lema.

Lema 5.19 (RC marginais). *Seja f uma função cilíndrica crescente com suporte $\tilde{\mathbb{B}} \subset \mathbb{B}(\Lambda)$. Então,*

$$(i) \phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(f | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) = \phi_{\Lambda, \sigma}^{\text{RC}}(f).$$

$$(ii) \phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(f | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}^c}) = \phi_{\Lambda, D, \max}^{\text{RC}}(f),$$

onde $\mathbb{B} \equiv \mathbb{B}_0(\Lambda) \cup (\mathbb{B}(\Lambda) \cap \mathbb{B}(D))$, $\eta_{\mathbb{B}(\Lambda) \setminus \mathbb{B}} = 0$ e $\sigma_x = m$, para algum $m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$ e $\forall x \in D$.

Demonstração. (i) Considere f uma função cilíndrica crescente com suporte em $\mathbb{B}(\Lambda)$. Veja que

$$\begin{aligned} \phi_{\Lambda, \sigma}^{\text{RC}}(f) &= \sum_{\eta_{\mathbb{B}(\Lambda)}} f(\eta) \frac{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}} \cap \mathbb{B}(\Lambda)|}}{Z_{\Lambda, \sigma}^{\text{RC}}} \prod_{i < j} \mathbb{1}_{\{\partial_i \Lambda \leftrightarrow \partial_j \Lambda\}}(\eta) \\ &\quad \times \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \Lambda^c = \emptyset} \Theta_{\text{livre}}(C(\eta)) \prod_{m=1}^q \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \partial_m \Lambda \neq \emptyset} e^{\beta h_m |C(\eta)|} \\ &\equiv \sum_{\eta_{\mathbb{B}(\Lambda)}} f(\eta) \frac{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}} \cap \mathbb{B}(\Lambda)|}}{Z_{\Lambda, \sigma}^{\text{RC}}} \prod_{i < j} \mathbb{1}_{\{\partial_i \Lambda \leftrightarrow \partial_j \Lambda\}}(\eta) \cdot \text{produto}_1 \cdot \text{produto}_2, \end{aligned} \quad (279)$$

onde $Z_{\Lambda, \sigma}^{\text{RC}}$ é a função de partição associada à medida $\phi_{\Lambda, \sigma}^{\text{RC}}$.

Assumindo que $\prod_{i < j} \mathbb{1}_{\{\partial_i \Lambda \leftrightarrow \partial_j \Lambda\}}(\eta) = 1$, então todo aglomerado C tal que $C \cap \partial_m \Lambda \neq \emptyset$ satisfaz $C \cap \partial_i \Lambda = \emptyset$, $\forall i \neq m$. Introduzindo a identidade

$$e^{\beta h_m |C(\eta)|} = e^{\beta h_m |C(\eta) \cap \Lambda|} e^{\beta h_m |C(\eta) \cap \Lambda^c|},$$

temos

$$\begin{aligned} \text{produto}_2 &= \prod_{m=1}^q \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \partial_m \Lambda \neq \emptyset} e^{\beta h_m |C(\eta)|} = \prod_{m=1}^q \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \partial_m \Lambda \neq \emptyset} e^{\beta h_m |C(\eta) \cap \Lambda^c|} \\ &= \prod_{m=1}^q \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \partial_m \Lambda \neq \emptyset} \Delta(\sigma_{C \cap \partial_m \Lambda}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)}) e^{\beta \sum_{x \in C(\eta) \cap \partial \Lambda} \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}} \\ &= \Delta(\sigma_{\partial \Lambda}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)}) \prod_{m=1}^q \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \partial_m \Lambda \neq \emptyset} e^{\beta \sum_{x \in C(\eta) \cap \partial \Lambda} \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}} \\ &= \Delta(\sigma_{\partial \Lambda}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)}) \prod_{x \in \partial \Lambda} e^{\beta \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}}, \end{aligned}$$

onde $\Delta(\sigma, \eta)$ foi definido em (52). Aqui, na terceira igualdade, temos usado o fato de que $\Delta(\sigma_{\partial\Lambda}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)}) = \prod_{m=1}^q \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \partial_m \Lambda \neq \emptyset} \Delta(\sigma_{C \cap \partial_m \Lambda}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)})$ e, na quarta igualdade, o fato de que $\{\partial_i \Lambda : i = 1, \dots, q\}$ forma uma partição de $\partial\Lambda$. Analogamente, obtemos

$$\text{produto}_1 = \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \Lambda^c = \emptyset} \Theta_{\text{livre}}(C(\eta)) = \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \Lambda^c = \emptyset} \sum_{p=1}^q e^{\beta h_p |C(\eta) \cap \Lambda|}.$$

Considere a partição de Λ : $\{\Lambda_i : i = 1, \dots, q\}$, onde $\Lambda_i = \{x \in \Lambda : \sigma_x = 1\}$. Com esta notação, veja que a expressão da direita da identidade acima se reescreve

$$\begin{aligned} &= \prod_{m=1}^q \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \Lambda_m \neq \emptyset} \sum_{\sigma_{C(\eta) \cap \Lambda_m}} \Delta(\sigma_{C(\eta) \cap \Lambda_m}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)}) e^{\beta \sum_{x \in C(\eta) \cap \Lambda} \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}} \\ &= \sum_{\sigma_\Lambda} \Delta(\sigma_\Lambda, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)}) \prod_{m=1}^q \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \Lambda_m \neq \emptyset} e^{\beta \sum_{x \in C(\eta) \cap \Lambda} \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}} \\ &= \sum_{\sigma_\Lambda} \Delta(\sigma_\Lambda, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)}) \prod_{x \in \Lambda} e^{\beta \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}}, \end{aligned}$$

onde, novamente, usamos que $\Delta(\sigma_\Lambda, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)}) = \prod_{m=1}^q \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \Lambda_m \neq \emptyset} \Delta(\sigma_{C \cap \Lambda_m}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)})$. Isto é,

$$\text{produto}_1 = \sum_{\sigma_\Lambda} \Delta(\sigma_\Lambda, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)}) \prod_{m=1}^q \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \Lambda_m \neq \emptyset} e^{\beta \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}}.$$

Denote por $\Delta(\sigma_{\bar{\Lambda}}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)}) = \Delta(\sigma_\Lambda, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)}) \Delta(\sigma_{\partial\Lambda}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)})$. Logo, substituindo produto_1 e produto_2 em (279), tem-se

$$\begin{aligned} \phi_{\Lambda, \sigma}^{\text{RC}}(f) &= \sum_{\sigma_\Lambda, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)}} f(\eta) \frac{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}} \cap \mathbb{B}(\Lambda)|}}{Z_{\Lambda, \sigma}^{\text{RC}}} \Delta(\sigma_{\bar{\Lambda}}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)}) \\ &\quad \times \prod_{x \in \Lambda} e^{\beta \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}} \prod_{x \in \partial\Lambda} e^{\beta \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}}. \end{aligned} \quad (280)$$

Por definição (52) de $\Delta(\sigma, \eta)$, veja que

$$\begin{aligned} \frac{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}} \cap \mathbb{B}(\Lambda)|}}{Z_{\Lambda, \sigma}^{\text{RC}}} \Delta(\sigma_{\bar{\Lambda}}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)}) &= \frac{\prod_{x, y \in \mathbb{B}(\Lambda)} (e^{\beta J} - 1) \delta_{\sigma_x, \sigma_y} \prod_{x \in \Lambda} e^{\beta \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}}}{\eta_{xy=1}} \\ &= \frac{Z_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(\sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c})}{Z_{\Lambda, \sigma}^{\text{RC}}} \phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(\sigma_\Lambda, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)} | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}), \end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade, usamos a definição (203) da medida ES. Denotando L por

$$L(\sigma, \eta) \equiv \frac{Z_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(\sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c})}{Z_{\Lambda, \sigma}^{\text{RC}}} \prod_{x \in \partial \Lambda} e^{\beta \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma x, p}}$$

e substituindo em (280) segue que

$$\begin{aligned} \phi_{\Lambda, \sigma}^{\text{RC}}(f) &= \sum_{\sigma_{\Lambda}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)}} f(\eta) \phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(\sigma_{\Lambda}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)} | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) \cdot L(\sigma, \eta) \\ &= \phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(f | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) \cdot L(\sigma, \eta). \end{aligned}$$

Fazendo $f \equiv 1$ nesta igualdade, temos $L(\sigma, \eta) = 1$. Logo

$$\phi_{\Lambda, \sigma}^{\text{RC}}(f) = \sum_{\sigma_{\Lambda}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)}} f(\eta) \phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(\sigma_{\Lambda}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)} | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) = \phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(f | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}).$$

Note que esta igualdade tem sentido, pois, por definição da medida $\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(\cdot | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c})$, esta não depende da configuração $\eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}$.

(ii) Com um esquema similar ao Item (i), com suas respectivas modificações, obtemos a prova de (ii). \square

As medidas $\phi_{\Lambda, \sigma}^{\text{GRC}}$ e $\phi_{\Lambda, D, \max}^{\text{GRC}}$ definidas em (276) e (277), respectivamente, satisfazem as seguintes dominações FKG.

Lema 5.20. *Seja $\Lambda \in \mathcal{L}$. Logo, para cada σ sobre Λ^c temos*

$$\phi_{\Lambda, \sigma}^{\text{GRC}}(f) \leq \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(f).$$

Se além disso, seja $D \subset \partial \Lambda$, então

$$\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}(f) \leq \phi_{\Lambda, D, \max}^{\text{GRC}}(f) \leq \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(f),$$

onde f é uma função cilíndrica crescente.

Demonstração. Usando a definição dos pesos em (277), provaremos que $\phi_{\Lambda, \sigma}^{\text{GRC}}$ pode-se reescrever como

$$\phi_{\Lambda, \sigma}^{\text{GRC}}(f) = \frac{\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(f \cdot g)}{\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(g)}, \quad (281)$$

onde f é uma função cilíndrica crescente com suporte em Λ e g é definida como

$$g(\eta) \equiv \prod_{i < j} \mathbb{1}_{\{\partial_i \Lambda \leftrightarrow \partial_j \Lambda\}}(\eta) \prod_{m=1}^q \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \partial_m \Lambda \neq \emptyset} e^{-(h_{\max} - h_m) |C(\eta)|},$$

para qualquer configuração $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}(\Lambda)}$. Usando a definição (218) de $\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}$ e o fato de que $\{\partial_i \Lambda : i = 1, \dots, q\}$ forma uma partição de $\partial \Lambda$, vemos que

$$\begin{aligned} \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(f \cdot g) &= \sum_{\eta \in \mathbb{B}(\Lambda)} f(\eta) g(\eta) \frac{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}} \cap \mathbb{B}(\Lambda)|}}{Z_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}} \\ &\quad \times \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \Lambda^c = \emptyset} \Theta_{\text{livre}}(C(\eta)) \prod_{m=1}^q \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \partial_m \Lambda \neq \emptyset} e^{\beta h_{\max} |C(\eta)|}. \end{aligned}$$

Observe que, usando a definição de g , a expressão à direita da igualdade acima é

$$\begin{aligned} &= \sum_{\eta \in \mathbb{B}(\Lambda)} f(\eta) \frac{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}} \cap \mathbb{B}(\Lambda)|}}{Z_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}} \prod_{i < j} \mathbb{1}_{\{\partial_i \Lambda \leftrightarrow \partial_j \Lambda\}}(\eta) \\ &\quad \times \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \Lambda^c = \emptyset} \Theta_{\text{livre}}(C(\eta)) \prod_{m=1}^q \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \partial_m \Lambda \neq \emptyset} e^{\beta h_m |C(\eta)|} \\ &= \sum_{\eta \in \mathbb{B}(\Lambda)} f(\eta) \frac{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}} \cap \mathbb{B}(\Lambda)|}}{Z_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}} \prod_{i < j} \mathbb{1}_{\{\partial_i \Lambda \leftrightarrow \partial_j \Lambda\}}(\eta) \prod_{C(\eta)} \Theta_{\Lambda, \sigma}(C(\eta)) = \frac{Z_{\Lambda, \sigma}^{\text{GRC}}}{Z_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}} \phi_{\Lambda, \sigma}^{\text{GRC}}(f), \end{aligned}$$

onde $Z_{\Lambda, \sigma}^{\text{GRC}}$ é a função de partição relacionada à medida $\phi_{\Lambda, \sigma}^{\text{RC}}$. Portanto,

$$\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(f \cdot g) = \frac{Z_{\Lambda, \sigma}^{\text{GRC}}}{Z_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}} \phi_{\Lambda, \sigma}^{\text{GRC}}(f). \quad (282)$$

Fazendo $f \equiv 1$ em (282), obtemos $\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(g) = \frac{Z_{\Lambda, \sigma}^{\text{GRC}}}{Z_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}}$. Substituindo este valor em (282), conseguimos que

$$\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(f \cdot g) = \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(g) \phi_{\Lambda, \sigma}^{\text{GRC}}(f),$$

o que conclui a demonstração de (281).

Observe que a função g é decrescente no sentido FKG, de fato, primeiro note que a indicadora $\prod_{i < j} \mathbb{1}_{\{\partial_i \Lambda \leftrightarrow \partial_j \Lambda\}}$ é crescente, portanto, $\prod_{i < j} \mathbb{1}_{\{\partial_i \Lambda \leftrightarrow \partial_j \Lambda\}}$ é decrescente. Segundo, desde que $\sum_{C: C \cap \partial_m \Lambda \neq \emptyset} |C|$ é igual ao número de sítios conectados à fronteira $\partial_m \Lambda$, esta é crescente em η . Portanto, a função $\prod_{m=1}^q \prod_{C: C \cap \partial_m \Lambda \neq \emptyset} e^{-(h_{\max} - h_m) |C|}$ também é decrescente em η , pois $h_{\max} > h_m$. Logo, a monotonicidade de g segue pelo fato de que o produto de funções não negativas decrescentes é decrescente.

Daí, por (281) e pela aplicação direta da propriedade FKG forte (Teorema 5.6), para cada função cilíndrica crescente f (como mencionado acima), tem-se

$$\phi_{\Lambda, \sigma}^{\text{GRC}}(f) = \frac{\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(f \cdot g)}{\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(g)} \leq \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(f),$$

o que prova a primeira dominação FKG deste lema.

Para provar a segunda dominação FKG, primeiro note que o evento $\{\eta : \eta_e = 0 \forall e \in \mathbb{B}(\Lambda) \setminus \mathbb{B}_0(\Lambda \cup D)\}$ é decrescente no sentido FKG. Logo, para cada função cilíndrica crescente f , usando a definição (276) de $\phi_{\Lambda, D, \max}^{\text{GRC}}$ temos

$$\phi_{\Lambda, D, \max}^{\text{GRC}}(f) = \frac{\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(f \cdot \mathbb{1}_{\{\eta_e = 0 \forall e \in \mathbb{B}(\Lambda) \setminus \mathbb{B}_0(\Lambda \cup D)\}})}{\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(\eta_e = 0 \forall e \in \mathbb{B}(\Lambda) \setminus \mathbb{B}_0(\Lambda \cup D))} \leq \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(f). \quad (283)$$

Por outro lado, como $\mathbb{B}(\Lambda) \setminus \mathbb{B}_0(\Lambda \cup D) \subset \mathbb{B}(\Lambda) \setminus \mathbb{B}_0(\Lambda)$, e as medidas $\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}, \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}$ possuem a propriedade FKG forte, pelo Corolário 5.10, obtemos

$$\begin{aligned} \phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}(f) &= \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(f | \eta_e = 0 \forall e \in \mathbb{B}(\Lambda) \setminus \mathbb{B}_0(\Lambda)) \\ &\leq \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(f | \eta_e = 0 \forall e \in \mathbb{B}(\Lambda) \setminus \mathbb{B}_0(\Lambda \cup D)) \\ &= \phi_{\Lambda, D, \max}^{\text{GRC}}(f), \end{aligned} \quad (284)$$

onde a primeira igualdade se deriva por uma inspeção simples da definição das medidas $\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}, \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}$ e, na segunda igualdade, usamos a definição (276) de $\phi_{\Lambda, D, \max}^{\text{GRC}}$.

Finalmente, combinando (283) e (284), obtemos a monotonicidade desejada. \square

5.3 COR(ES) DO(S) AGLOMERADO(S) INFINITO(S)

Nesta seção, trataremos de um resultado fundamental concernente à medida RC padrão estabelecida na Definição 5.1, portanto, está implícito que, na seção toda, estamos assumindo $q_m = 1, \forall m \in \{1, \dots, q\}$. O segundo teorema desta seção (Teorema 5.23) é o único resultado do capítulo, que não pode ser generalizado para modelos GRC, já que, para sua demonstração, se requer algum resultado de marginais similar ao Lema 5.19 para este tipo de medidas, que, por questões técnicas, a saber porque $q_m \neq 1$, não é possível obter. No entanto, o próximo teorema (Teorema 5.22), de certa forma, nos dá um possível controle das cores (valores dos spins) que aglomerados infinitos podem assumir. Para formular tais resultados, necessitamos introduzir a seguinte notação:

$$S(\sigma, \eta) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{valores possíveis assumidos pelos spins sobre aglomerados} \\ \text{infinitos na configuração } (\sigma, \eta) \end{array} \right\}. \quad (285)$$

Veja que, por construção (3.6) de $\Delta(\sigma, \eta)$ para o modelo ES, se $\sigma_x \neq \sigma_y$, então $\eta_{x,y} = 0$. Logo, o evento $\{(\sigma, \eta) : \sigma_x \neq \sigma_y, \eta_{xy} = 1\}$ tem medida zero segundo ν , para cada $\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$.

Isto é, cada aglomerado tem spins com valores constantes quase certamente. O primeiro resultado desta seção nos diz que S está contido em $\mathcal{Q}_{\max}(h)$ ν -quase certamente, sempre que $\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$. Antes de provar esse resultado, provaremos o seguinte lema auxiliar.

Lema 5.21. *Seja $\{a_k : k \geq 1\}$ um sequência de números tal que $1 \leq a_k \leq C k^n$ para alguma constante $C < \infty$ e um inteiro $n \geq 0$. Então, para cada $\epsilon > 0$ e qualquer $\bar{k} \geq C(n+1)^n \epsilon^{-(n+1)}$,*

$$a_k \leq \epsilon \sum_{k' \leq k} a_{k'}$$

se satisfaz para algum $k \in \{\bar{k}, \dots, (n+1)\bar{k}\}$.

Demonstração. Provaremos este lema fazendo uma análise em n . Se $n = 0$, então $k = \bar{k}$. Neste caso $1 \leq a_k \leq C$ e $\bar{k} \geq C\epsilon^{-1}$, o que implica que $a_k \leq C \leq \epsilon\bar{k}$. Mas, como $\bar{k} \leq \sum_{k' \leq \bar{k}} a_{k'} = \sum_{k' \leq k} a_{k'}$, concluímos que $a_k \leq \epsilon \sum_{k' \leq k} a_{k'}$.

Já para o caso $n \geq 1$, provaremos por contradição. Suponha que $a_k > \epsilon \sum_{k' \leq k} a_{k'}$ para todo $k \in \{\bar{k}, \dots, (n+1)\bar{k}\}$. Se $n = 1$, então $k \in \{\bar{k}, \dots, 2\bar{k}\}$. Como $a_{\bar{k}} \geq 1$, temos $a_k > \epsilon \sum_{k' \leq k} a_{k'} \geq \sum_{k' \leq k} 1 = k \geq \bar{k}$. Assim, para $\ell \in \{1, \dots, n\}$, por indução, segue que, para todo $k \in \{\bar{k}, \dots, (\ell+1)\bar{k}\}$; $a_k > \epsilon^\ell \bar{k}^\ell$. Em particular está provado que $a_{(n+1)\bar{k}} > \epsilon^{n+1} \bar{k}^{n+1}$. Mas, como $\bar{k} \geq C(n+1)^n \epsilon^{-(n+1)}$, tem-se que $a_{(n+1)\bar{k}} > C[(n+1)\bar{k}]^n$, o que contradiz a hipótese de que $a_{(n+1)\bar{k}} \leq C[(n+1)\bar{k}]^n$. \square

É um problema de grande interesse saber se os valores dos spins de aglomerados infinitos estão sujeitos a restrições. O seguinte teorema dá uma resposta completa a essa interrogante. O referido teorema nos diz que cada aglomerado infinito toma um cor de modo que o campo externo atinga uma direção máxima.

Teorema 5.22. *Seja $\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$. Então, $S \subseteq \mathcal{Q}_{\max}(h)$ ν -quase certamente.*

Demonstração. Procedemos por contradição. Assuma que exista $\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$ tal que $\nu(S \not\subseteq \mathcal{Q}_{\max}(h)) > 0$, isto é, que existam $m \notin \mathcal{Q}_{\max}(h)$ e $\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$ tais que $\nu(m \in S) > 0$. Definindo o evento

$$\Omega_m^x \equiv \{(\sigma, \eta) : \exists C_x(\eta), |C_x(\eta)| = \infty, C(\eta) \ni x, \sigma_x = m\}, \quad x \in \mathbb{Z}^d,$$

onde $C_x(\eta)$ denota o aglomerado em η contendo o sítio x , veja que $\{m \in S\} \subset \cup_x \Omega_m^x$. Como os elementos de \mathcal{G}^{ES} são invariantes com respeito a translações, temos $\nu(\Omega_m^0) = \nu(\Omega_m^x)$. Logo, podemos supor, sem perda de generalidade, que o evento Ω_m^0 tem medida de probabilidade positiva, isto é, $\nu(\Omega_m^0) > 0$.

Seja $\Lambda_k \equiv [-2k, 2k] \cap \mathbb{Z}^d$ a caixa centrada na origem de lado $2k + 1$ e para cada $(\sigma, \eta) \in \Omega_m^0$, com $k \geq 1$, seja $\mathbb{V}_k(\eta) \equiv \{x \in \Lambda_k : x \overset{\mathbb{B}_0(\Lambda_k)}{\longleftrightarrow} 0 \text{ em } \eta\}$ o conjunto de sítios em Λ_k que são conectados à origem em $\mathbb{B}_0(\Lambda_k)$ e seja

$$a_k \equiv a_k(\eta) = |\mathbb{V}_k(\eta) \cap \partial\Lambda_{k-1}|.$$

Com essas notações a nossa disposição, definimos o seguinte evento

$$\Omega_{m,k}^0 \equiv \{(\sigma, \eta) : \sigma_0 = m, 0 \overset{\mathbb{B}_0(\Lambda_k)}{\longleftrightarrow} \partial\Lambda_{k-1}, a_k(\eta) \leq \epsilon |\mathbb{V}_k(\eta)|\}.$$

Em seguida, nos propomos a verificar que a inclusão $\Omega_m^0 \subset \bigcup_{\bar{k} \leq k \leq d\bar{k}} \Omega_{m,k}^0$ é válida para cada $\bar{k} \geq (3d/\epsilon)^d$ e $\epsilon > 0$. Para isso, seja $(\sigma, \eta) \in \Omega_m^0$. Note que, para cada $k' \leq k$: $\mathbb{V}_{k'}(\eta) \cap \partial\Lambda_{k'-1} \subset \mathbb{V}_k(\eta) \cap \partial\Lambda_{k-1} \subset \mathbb{V}_k(\eta)$, o que implica que $\bigcup_{k' \leq k} \mathbb{V}_{k'}(\eta) \cap \partial\Lambda_{k'-1} \subset \mathbb{V}_k(\eta)$ e, como a coleção $\{\mathbb{V}_k(\eta) \cap \partial\Lambda_{k-1} : k \geq 1\}$ é disjunta, temos $\sum_{k' \leq k} a_{k'} = |\bigcup_{k' \leq k} \mathbb{V}_{k'}(\eta) \cap \partial\Lambda_{k'-1}| \leq |\mathbb{V}_k(\eta)|$. Por outro lado, veja que o conjunto $\mathbb{V}_1(\eta) \cap \partial\Lambda_0$ é não vazio, o 0 está lá, portanto, $a_k \geq a_1 = 1$. Usando a cota para a cardinalidade da fronteira externa $|\partial\Lambda_{k-1}| \leq 2d(2k+1)^{d-1}$, e usando que $k \geq 1$, obtemos uma cota mas grosseira para esta cardinalidade, a saber, $|\partial\Lambda_{k-1}| \leq 3^d dk^{d-1}$. Em resumo, temos $\sum_{k' \leq k} a_{k'} \leq |\mathbb{V}_k(\eta)|$ e $1 \leq a_k \leq |\partial\Lambda_{k-1}| \leq 3^d dk^{d-1}$. Pelo Lema 5.21, com $n = d - 1$, $C = (3^d d)^{-1}$; para cada $\epsilon > 0$ e cada $\bar{k} \geq (3d/\epsilon)^d$ existe $k \in \{\bar{k}, \dots, d\bar{k}\}$ tal que

$$a_k(\eta) = |\mathbb{V}_k(\eta) \cap \partial\Lambda_{k-1}| \leq \epsilon |\mathbb{V}_k(\eta)|,$$

isto é, $(\sigma, \eta) \in \bigcup_{\bar{k} \leq k \leq d\bar{k}} \Omega_{m,k}^0$. Portanto,

$$\Omega_m^0 \subset \bigcup_{\bar{k} \leq k \leq d\bar{k}} \Omega_{m,k}^0.$$

Usando esta inclusão e a subaditividade da medida, para cada $\bar{k} \geq (3d/\epsilon)^d$ temos

$$\nu(\Omega_m^0) \leq \nu\left(\bigcup_{\bar{k} \leq k \leq d\bar{k}} \Omega_{m,k}^0\right) \leq \sum_{\bar{k} \leq k \leq d\bar{k}} \nu(\Omega_{m,k}^0). \quad (286)$$

Daí, para cada $\epsilon > 0$, existe um conjunto determinístico $\mathbb{N}_\epsilon \subset \mathbb{N}$, $|\mathbb{N}_\epsilon| = \infty$, tal que, para qualquer $k \in \mathbb{N}_\epsilon$ tem-se

$$\nu(\Omega_m^0) \leq dk \cdot \nu(\Omega_{m,k}^0), \quad (287)$$

pelo principio dos pombos aplicado à identidade (286).

Por outro lado, por definição, $\Omega_{m,k}^0$ é um evento cilíndrico com suporte em $(\Lambda_k, \mathbb{B}_0(\Lambda_k))$. Chamando de $\phi_{\Lambda_k, \sigma}^{\text{ES}}$ a especificação (205) com a especial escolha $\Lambda \equiv \Lambda_k$ e $\mathbb{B} \equiv \mathbb{B}_0(\Lambda_k)$,

com condição de fronteira de spins σ (lembramos que por definição a η condição de fronteira é irrelevante). Pela condição DLR (205),

$$\nu(\Omega_{m,k}^0) = \int \nu(d\sigma, d\eta) \phi_{\Lambda_k, \sigma}^{\text{ES}}(\Omega_{m,k}^0). \quad (288)$$

Fixado $\epsilon > 0$ tal que $dJ_\epsilon < h_{\max}$ e escolhendo $\tilde{m} \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$, pelo uso da desigualdade

$$\begin{aligned} \sum_{\eta_{x,y}=0,1} \left(\mathbb{1}_{\{\eta_{x,y}=0\}} + (e^{\beta J} - 1) \delta_{\sigma_x, \sigma_y} \mathbb{1}_{\{\eta_{xy}=1\}} \right) &= 1 + (e^{\beta J} - 1) \delta_{\sigma_x, \sigma_y} \leq e^{\beta J} = \sum_{\eta_{x,y}=0,1} e^{\beta J} \mathbb{1}_{\{\eta_{x,y}=0\}} \\ &= \sum_{\eta_{x,y}=0,1} e^{\beta J} \mathbb{1}_{\{\eta_{x,y}=0\}} \left(\mathbb{1}_{\{\eta_{x,y}=0\}} + (e^{\beta J} - 1) \delta_{\sigma_x, \sigma_y} \mathbb{1}_{\{\eta_{xy}=1\}} \right), \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \phi_{\Lambda_k, \sigma}^{\text{ES}}(\Omega_{m,k}^0) &\leq \phi_{\Lambda_k, \sigma}^{\text{ES}} \left(\mathbb{1}_{\Omega_{m,k}^0} \prod_{\{x,y\}: x \in \Lambda_k^c, y \in \mathbb{V}_k} e^{\beta J} \mathbb{1}_{\{\eta_{x,y}=0\}} \right) \\ &= \phi_{\Lambda_k, \sigma}^{\text{ES}} \left(\mathbb{1}_{\Omega_{\tilde{m},k}^0} e^{-\beta(h_{\max} - h_m) |\mathbb{V}_k|} \prod_{\{x,y\}: x \in \Lambda_k^c, y \in \mathbb{V}_k} e^{\beta J} \mathbb{1}_{\{\eta_{x,y}=0\}} \right) \\ &\leq \phi_{\Lambda_k, \sigma}^{\text{ES}} \left(\mathbb{1}_{\Omega_{\tilde{m},k}^0} e^{-\beta(h_{\max} - h_m - dJ_\epsilon) |\mathbb{V}_k|} \right) \\ &\leq e^{-\beta(h_{\max} - h_m - dJ_\epsilon)k}. \end{aligned} \quad (289)$$

A conversão de uma configuração arbitrária nas arestas da fronteira do conjunto \mathbb{V}_k ao estado de aresta vazia permite flipar σ_x em cada $x \in \mathbb{V}_k$ de m a \tilde{m} , resultando no fator exponencial na segunda linha da desigualdade acima. No entanto, a última desigualdade sai do fato de que, sobre $\Omega_{\tilde{m},k'}^0$ o número de arestas flipadas não excede $d|\mathbb{V}_k \cap \partial\Lambda_{k-1}| \leq d\epsilon|\mathbb{V}_k|$ e que $|\mathbb{V}_k(\eta)| \geq \sum_{k' \leq k} a_{k'} > k$.

Combinando (287), (288) e (289), obtém-se

$$\frac{1}{dk} \nu(\Omega_m^0) \leq \int \nu(d\sigma, d\eta) \phi_{\Lambda_k, \sigma}^{\text{ES}}(\Omega_{m,k}^0) \leq e^{-\beta(h_{\max} - h_m - dJ_\epsilon)k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_\epsilon.$$

Como $|\mathbb{N}_\epsilon| = \infty$, para $k \in \mathbb{N}_\epsilon$ suficientemente grande temos uma contradição com a suposição $\nu(\Omega_m^0) > 0$. Logo, não existe m nem $\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$ tal que $m \notin \mathcal{Q}_{\max}(h)$ e $\nu(m \in S) > 0$. Portanto, $S \subseteq \mathcal{Q}_{\max}(h)$ ν -quase certamente. \square

O Teorema 5.14 nos proporciona a seguinte dominação FKG

$$\phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}}(\cdot) \leq \phi(\cdot) \leq \phi_{\text{max}}^{\text{GRC}}(\cdot),$$

onde ϕ é um estado de Gibbs ou um limite fraco de medidas GRC a volume finito. Uma pergunta natural seria: a mesma monotonicidade é válida para as RC marginais de um estado de Gibbs ES? Ou, se fossemos menos ambiciosos, perguntaríamos: sobre que condições existe alguma monotonicidade similar para as GRC marginais de um estado ES? A resposta a estas perguntas é dada de forma parcial no próximo teorema, no seguinte sentido. Primeiro, é possível obter uma desigualdade do tipo FKG para as marginais dos estados de Gibbs RC mas não para os estados de Gibbs GRC em geral. Segundo, esta desigualdade é válida sobre condições restritivas, à diferença do Teorema 5.14. Este resultado é exposto no seguinte teorema.

Teorema 5.23. *Sejam $\beta \geq 0$, $J \geq 0$, $h_p \in \mathbb{R}$, $p = 1, \dots, q$. Seja $\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$ uma medida arbitrária e seja ϕ_ν sua η -marginal. Para cada função quase-local crescente f temos*

$$\phi_\nu(f) \leq \phi_{\max}^{\text{RC}}(f).$$

Se em adição, $|\mathcal{Q}_{\max}(h)| = 1$ ou $\phi_\nu(N_\infty \leq 1) = 1$, então

$$\phi_\nu(f) \geq \phi_{\text{livre}}^{\text{RC}}(f),$$

onde f é uma função quase-local crescente.

Demonstração. A primeira monotonicidade deste teorema será provado usando os Lemas 5.19 e 5.20. Para isso, seja $\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$ um medida de Gibbs ES e ϕ_ν (notação) a sua η -marginal. Para cada função cilíndrica crescente f com suporte sobre $\tilde{B} \subset \mathbb{B}(\Lambda)$, pelas equações DLR de ν , temos

$$\begin{aligned} \phi_\nu(f) &= \nu(f) \stackrel{\text{DLR}}{=} \int \nu(d\sigma, d\eta) \phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)^c}^{\text{ES}}(f | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) \\ &= \int \nu(d\sigma, d\eta) \phi_{\Lambda, \sigma}^{\text{RC}}(f) \leq \int \nu(d\sigma, d\eta) \phi_{\Lambda, \max}^{\text{RC}}(f) = \phi_{\Lambda, \max}^{\text{RC}}(f), \end{aligned}$$

onde a terceira igualdade é devido ao Lema 5.19 e, na desigualdade, usamos a dominação dada no Lema 5.20. Finalmente, por aplicar o limite termodinâmico (Teorema 5.12) na desigualdade acima, obtemos a conclusão da primeira monotonicidade.

A prova da segunda desigualdade é bem mais elaborada. O detalhe técnico da prova traz consigo construções que não produzirão novas ideias que se usar-se-ão na frente, e é por isso que omitiremos a prova desta desigualdade (para mais detalhes sobre a demonstração deste resultado, veja [20], Teorema III.2, Item (3.15)) Ressaltamos que este resultado terá relevância na prova do teorema principal da Seção 5.9. \square

5.4 UNICIDADE DO AGLOMERADO INFINITO

Nesta seção, provaremos que as medidas de Gibbs GRC e que os limites fracos de medidas GRC a volume finito tem quase certamente, no máximo, um aglomerado infinito (veja Teorema 5.25), esta propriedade é chamada, também, *propriedade 0/1-aglomerado-infinito* (veja definição em (116)). Na verdade, este resultado é uma consequência direta do Teorema 1 de [55], sempre que a medida a volume infinito seja invariante por translação e satisfaça a chamada *condição ou propriedade da energia finita*. Usando uma versão forte da condição dada em [55], dizemos que uma medida GRC ϕ tem a propriedade da energia finita se ϕ satisfaz (117), isto é, para toda aresta $e \in \mathbb{B}(\mathbb{Z}^d)$, ϕ satisfaz

$$\phi(\eta_e = 1 | \mathcal{F}_{\mathbb{B}(\mathbb{Z}^d) \setminus \{e\}}) > 0, \quad \phi - \text{q.c.} \quad (290)$$

Relembramos que $\mathcal{F}_{\mathbb{B}(\mathbb{Z}^d) \setminus \{e\}}$ é a σ -álgebra produto gerada cilindros sobre a base $\mathbb{B}(\mathbb{Z}^d) \setminus \{e\}$.

Começamos a discussão da unicidade quase certa do aglomerado infinito com um lema que nos diz que os estados de Gibbs e os limites fracos de medidas GRC a volume finito têm a propriedade da energia finita.

Lema 5.24. *Seja ϕ uma medida GRC invariante por translações, já seja um estado de Gibbs ou um limite fraco da forma $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\mathbb{B}_n}^{\text{GRC}}(\cdot | \eta_n)$. Então, a medida μ satisfaz a propriedade da energia finita, sempre que $\beta J > 0$.*

Em outras palavras, se $\phi \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}$ ou $\phi \in \mathcal{G}_{\text{lim}}^{\text{GRC}}$, então ϕ satisfaz a condição (290).

Demonstração. Seja \mathbb{B} um conjunto finito de arestas de $\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)$. Para cada $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)}$, definimos a configuração projeção sobre \mathbb{B} por $\eta \mapsto \pi_{\mathbb{B}}(\eta) = \eta_{\mathbb{B}}$. Fixada uma configuração $\bar{\eta}$, por abuso de linguagem, escreveremos $\{\pi_{\mathbb{B}} = \bar{\eta}_{\mathbb{B}}\}$ para nos referirmos ao evento cilíndrico $\{\eta : \pi_{\mathbb{B}}(\eta) = \bar{\eta}_{\mathbb{B}}\}$.

Afirmamos que para provar a condição (290) é suficiente provar que existe uma constante $c > 0$ tal que para cada $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}(\mathbb{Z}^d) \setminus \{e\}$ e toda configuração $\bar{\eta}_{\mathbb{B}}$, tem-se

$$\begin{aligned} \int \phi(d\eta) \mathbb{1}_{\{\pi_{\mathbb{B}} = \bar{\eta}_{\mathbb{B}}\}}(\eta) \phi(\eta_e = 1 | \mathcal{F}_{\mathbb{B}(\mathbb{Z}^d) \setminus \{e\}})(\eta) \\ \geq c \int \phi(d\eta) \mathbb{1}_{\{\pi_{\mathbb{B}} = \bar{\eta}_{\mathbb{B}}\}}(\eta) \phi(\eta_e = 0 | \mathcal{F}_{\mathbb{B}(\mathbb{Z}^d) \setminus \{e\}})(\eta). \end{aligned} \quad (291)$$

De fato, (291) implica que

$$\phi(\eta_e = 1 | \mathcal{F}_{\mathbb{B}(\mathbb{Z}^d) \setminus \{e\}})(\eta) \geq c \phi(\eta_e = 0 | \mathcal{F}_{\mathbb{B}(\mathbb{Z}^d) \setminus \{e\}})(\eta), \quad \phi - \text{q.c.}$$

o que, por sua vez, implica

$$\phi(\eta_e = 1 | \mathcal{F}_{\mathbb{B}(\mathbb{Z}^d) \setminus \{e\}})(\eta) \geq \frac{c}{1+c}, \quad \phi - \text{q.c.}$$

provando-se (290) e, em seguida, a afirmação segue.

Como $\mathbb{1}_{\{\pi_{\mathbb{B}}=\bar{\eta}_{\mathbb{B}}\}}$ é $\mathcal{F}_{\mathbb{B}(\mathbb{Z}^d) \setminus \{e\}}$ -mensurável, por propriedade de esperança condicional, a desigualdade (291) é equivalente a

$$\phi(\mathbb{1}_{\{\pi_{\mathbb{B}}=\bar{\eta}_{\mathbb{B}}\}} \cdot \mathbb{1}_{\{\eta_e=1\}}) \geq c \phi(\mathbb{1}_{\{\pi_{\mathbb{B}}=\bar{\eta}_{\mathbb{B}}\}} \cdot \mathbb{1}_{\{\eta_e=0\}}). \quad (292)$$

Observe que uma condição suficiente para provar (292) é

$$\phi_{\mathbb{D}}^{\text{GRC}}(\mathbb{1}_{\{\pi_{\mathbb{B}}=\bar{\eta}_{\mathbb{B}}\}} \cdot \mathbb{1}_{\{\eta_e=1\}} | \eta_{\mathbb{D}^c}) \geq c \phi_{\mathbb{D}}^{\text{GRC}}(\mathbb{1}_{\{\pi_{\mathbb{B}}=\bar{\eta}_{\mathbb{B}}\}} \cdot \mathbb{1}_{\{\eta_e=0\}} | \eta_{\mathbb{D}^c}), \quad (293)$$

para algum conjunto $\mathbb{D} \subset \mathbb{B}(\mathbb{Z}^d)$ finito tal que $\mathbb{D} \supset \mathbb{D} \cup \{e\}$, pois se $\phi \in \tilde{\mathcal{G}}^{\text{GRC}}$, basta integrar (293) com respeito a ϕ e usar a condição DLR para concluir. Caso que $\phi \in \tilde{\mathcal{G}}_{\text{lim}}^{\text{GRC}}$, isto é $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\mathbb{B}_n}^{\text{GRC}}(\cdot | \eta_n)$, a desigualdade (292) segue de (293) também, previsto que (293) se mantenha para todo conjunto $\mathbb{D} = \mathbb{B}_n \supset \mathbb{B} \cup \{e\}$ suficientemente grande e condições de fronteira $\eta_{\mathbb{B}_n^c} = \eta_n$. De fato, por definição de convergência fraca (veja Definição 3.14) tem-se

$$\phi(\mathbb{1}_{\{\pi_{\mathbb{B}}=\bar{\eta}_{\mathbb{B}}\}} \cdot \mathbb{1}_{\{\eta_e=1\}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\mathbb{B}_n}^{\text{GRC}}(\mathbb{1}_{\{\pi_{\mathbb{B}}=\bar{\eta}_{\mathbb{B}}\}} \cdot \mathbb{1}_{\{\eta_e=1\}} | \eta_n)$$

e

$$\phi(\mathbb{1}_{\{\pi_{\mathbb{B}}=\bar{\eta}_{\mathbb{B}}\}} \cdot \mathbb{1}_{\{\eta_e=0\}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\mathbb{B}_n}^{\text{GRC}}(\mathbb{1}_{\{\pi_{\mathbb{B}}=\bar{\eta}_{\mathbb{B}}\}} \cdot \mathbb{1}_{\{\eta_e=0\}} | \eta_n),$$

o que, combinando com (293), dá (292).

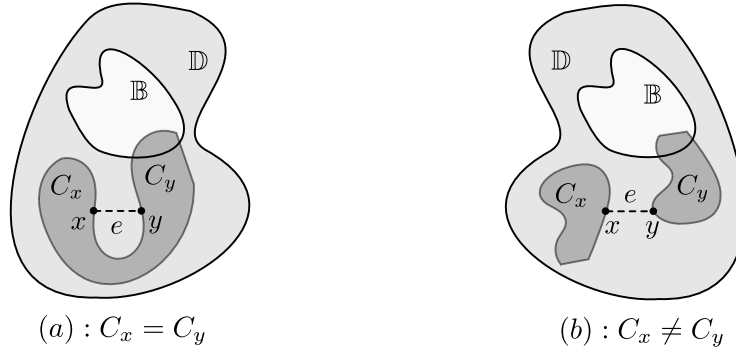
Portanto, no que resta da prova nos dedicaremos exclusivamente a provar (293). Para provar (293), analisaremos o ínfimo da seguinte razão:

$$\frac{\phi_{\mathbb{D}}^{\text{GRC}}(\eta_e = 1, \eta_{\mathbb{D} \setminus \{e\}} | \eta_{\mathbb{D}^c})}{\phi_{\mathbb{D}}^{\text{GRC}}(\eta_e = 0, \eta_{\mathbb{D} \setminus \{e\}} | \eta_{\mathbb{D}^c})}, \quad \forall \eta_{\mathbb{D} \setminus \{e\}}. \quad (294)$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que a configuração η é da seguinte forma

$$\eta \equiv (*, \dots, *, \underbrace{0}_{e\text{-ésimo}}, *, \dots, *),$$

com $* \in \{0, 1\}$. (Observe-se que a escolha de η dessa forma não influi no raciocínio a seguir se escolhe η tal que $\eta_e = 1$). Sejam $e = \{x, y\}$ e $C_x \equiv C(x, \eta)$, $C_y \equiv C(y, \eta)$ as componentes conexas em η associadas aos pontos extremos x, y , respectivamente. Logo, analisamos a razão (294) considerando os seguintes casos:



No caso (a), veja que por definição de $\phi_{\mathbb{D}}^{\text{GRC}}$ (veja as definições (208) e (209)) imediatamente temos

$$\frac{\phi_{\mathbb{D}}^{\text{GRC}}(\eta_e = 1, \eta_{\mathbb{D} \setminus \{e\}} | \eta_{\mathbb{D}^c})}{\phi_{\mathbb{D}}^{\text{GRC}}(\eta_e = 0, \eta_{\mathbb{D} \setminus \{e\}} | \eta_{\mathbb{D}^c})} = e^{\beta J} - 1.$$

Logo, tomando-se $c \equiv e^{\beta J} - 1$ (> 0 pois $\beta J > 0$), neste caso, verifica-se (293).

No caso (b), as componentes conexas C_x e C_y do grafo $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta))$ são distintas, logo, por definição de $\phi_{\mathbb{D}}^{\text{GRC}}$, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{\phi_{\mathbb{D}}^{\text{GRC}}(\eta_e = 1, \eta_{\mathbb{D} \setminus \{e\}} | \eta_{\mathbb{D}^c})}{\phi_{\mathbb{D}}^{\text{GRC}}(\eta_e = 0, \eta_{\mathbb{D} \setminus \{e\}} | \eta_{\mathbb{D}^c})} \\ &= \frac{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}| + 1} \sum_{p=1}^q q_p e^{-\beta(h_{\max} - h_p)(|C_x(\eta)| + |C_y(\eta)|)}}{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}|} \left(\sum_{p=1}^q q_p e^{-\beta(h_{\max} - h_p)|C_x(\eta)|} \right) \left(\sum_{p=1}^q q_p e^{-\beta(h_{\max} - h_p)|C_y(\eta)|} \right)} \\ & \geq (e^{\beta J} - 1) \cdot \frac{\sum_{p \in \mathcal{Q}_{\max(h)}} q_p}{\left(\sum_{p=1}^q q_p \right)^2}, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{Q}_{\max(h)}$ foi definido em (212). Daí é suficiente considerar

$$c \equiv (e^{\beta J} - 1) \cdot \frac{\sum_{p \in \mathcal{Q}_{\max(h)}} q_p}{\left(\sum_{p=1}^q q_p \right)^2}$$

para verificar-se (293). Observe-se que $c > 0$, pois por (210) estamos considerando $\sum_{p \in \mathcal{Q}_{\max(h)}} q_p \geq 1$ e, por hipótese, $\beta J > 0$. \square

Com o Lema 5.24 a nossa disposição, pelo uso do Teorema da Unicidade de Burton Keane, fica trivial a prova do seguinte resultado de unicidade quase certa do aglomerado infinito.

Teorema 5.25 (Unicidade do aglomerado infinito). *Sejam $\beta \geq 0$, $J \geq 0$, $q_p > 0$, $p = 1, \dots, q$ e suponha que os parâmetros q_p obedecem a condição (223). Logo, todas as medidas invariantes por translações $\phi \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}$ ou $\phi \in \mathcal{G}_{\text{lim}}^{\text{GRC}}$ têm a propriedade 0/1-aglomerado-infinito.*

Demonstração. Pelo Lema 5.24, toda medida ϕ invariante translacional em \mathcal{G}^{GRC} ou em $\mathcal{G}_{\text{lim}}^{\text{GRC}}$ tem a propriedade da energia finita, logo, pelo Teorema da Unicidade de Burton Keane [30], ϕ tem a propriedade 0/1-aglomerado-infinito. \square

5.5 LIMITE FRACO DA MEDIDA ES

Os limites fracos estudados na Subseção 5.2.2 existem para toda função f quase-local (inclusive existem para funções quase-locais quase certamente via aproximação por funções quase-locais, como veremos nesta seção), dependendo unicamente das arestas da configuração η . Para provar o próximo teorema, o qual trata sobre a existência do limite fraco para medidas ES a volume finito, necessitamos estender os resultados da Subseção 5.2.2 para funções dependentes de duas configurações, a saber σ e η . Antes de prosseguir a formular o resultado principal desta seção, introduzimos algumas definições.

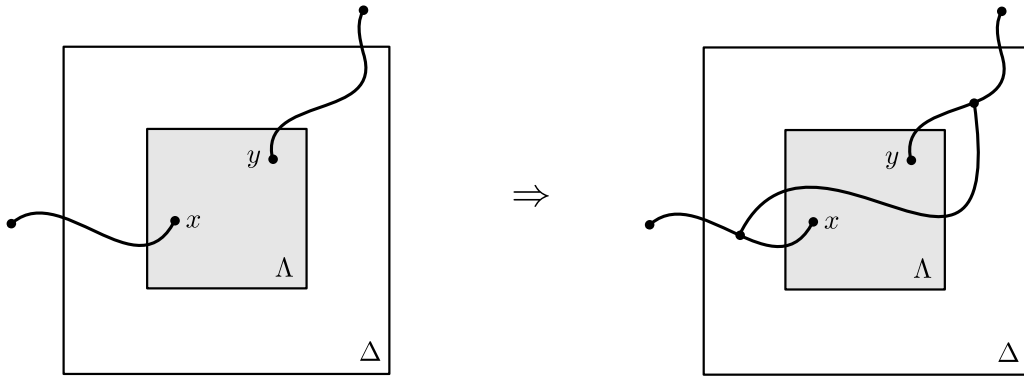


Figura 29: Ocorrência do evento $\mathcal{M}_{\Delta, \Lambda}$.

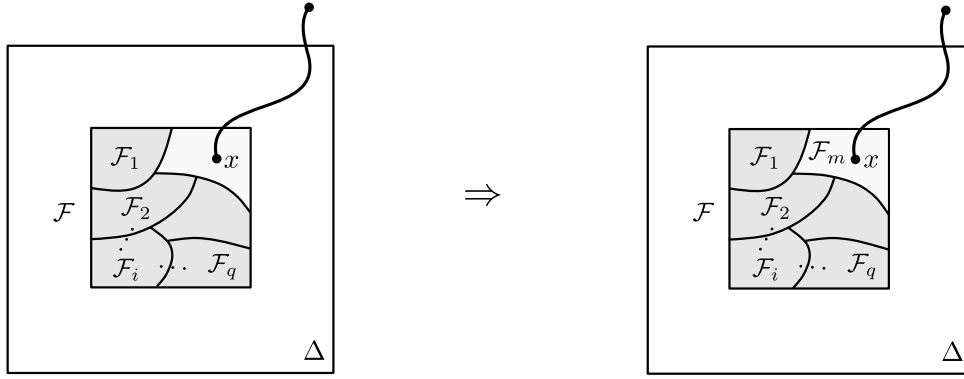
Para cada $\Lambda \subset \Delta$ em \mathcal{L} definimos o evento $\mathcal{M}_{\Delta, \Lambda}$ por

$$\mathcal{M}_{\Delta, \Lambda} \equiv \left\{ \eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)} : \forall x, y \in \Lambda, x \longleftrightarrow \Delta^c \text{ e } y \longleftrightarrow \Delta^c \implies x \underset{\mathbb{B}_0(\Delta)}{\longleftrightarrow} y \right\}. \quad (295)$$

Para qualquer coleção $\{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^q$ de conjuntos $\mathcal{F}_i \in \mathcal{L}$ disjuntos dois a dois, isto é $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j = \emptyset \forall i \neq j$, de modo que $\mathcal{F} = \cup_{i=1}^q \mathcal{F}_i \subset \Delta$, definimos o evento $\mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m$ por

$$\mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m \equiv \left\{ \eta \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}} : x \in \mathcal{F} \text{ com } x \longleftrightarrow \Delta^c \implies x \in \mathcal{F}_m \right\}, \quad (296)$$

para cada $m \in \{1, \dots, q\}$.


 Figura 30: Ocorrência do evento $\mathcal{M}_{\Delta, \{F_i\}}^m$.

Relembramos que $q_0 = |\mathcal{Q}_{\max}(h)| = |\{p : h_p = h_{\max}\}|$. Para cada $m \in \{1, \dots, q\}$ e $\{F_i\}$ definimos, também, a variável aleatória $Q_{\Delta, \{F_i\}}^m$ por

$$Q_{\Delta, \{F_i\}}^m = \begin{cases} q_0, & \mathcal{F}_m \leftrightarrow \Delta^c \\ 1, & \text{outro caso.} \end{cases} \quad (297)$$

Para cada coleção $\{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^q$ de conjuntos $\mathcal{F}_i \in \mathcal{L}$ disjuntos dois a dois, definimos

$$F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}(\eta) \equiv \prod_{i < j} \mathbb{1}_{\{\mathcal{F}_i \leftrightarrow \mathcal{F}_j\}}(\eta) \prod_{p=1}^q \prod_{C: C \cap \mathcal{F}_p \neq \emptyset} \frac{e^{\beta h_p |C|}}{\Theta_{\text{livre}}(C)}, \quad (298)$$

onde $\Theta_{\text{livre}}(C) = \sum_{p=1}^q e^{\beta h_p |C|}$ foi definido em (215) com $q_p = 1, \forall p = 1, \dots, q$. O produto em (298) percorre sobre todos os aglomerados do conjunto $\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta)$, de modo que $C \cap \mathcal{F}_p \neq \emptyset$.

Analogamente, dado um conjunto $\Lambda \in \mathcal{L}$ tal que $\mathcal{F} = \cup_{i=1}^q \mathcal{F}_i \subset \Lambda$, definimos

$$F_{\Lambda, \{\mathcal{F}_i\}}^m(\eta) \equiv \prod_{i < j} \mathbb{1}_{\{\mathcal{F}_i \leftrightarrow \mathcal{F}_j\}}(\eta) \prod_{p=1}^q \prod_{C: C \cap \mathcal{F}_p \neq \emptyset} \frac{e^{\beta h_p |C|}}{\Theta_{\Lambda, p}(C)} \chi_{\Lambda, m}(C, p), \quad (299)$$

para cada $m \in \{1, \dots, q\}$, onde $\Theta_{\Lambda, p}(C) = \Theta_{\text{livre}}(C) \cdot \mathbb{1}_{\{C \cap \Lambda^c = \emptyset\}} + e^{\beta h_p |C|} \cdot \mathbb{1}_{\{C \cap \Lambda^c \neq \emptyset\}}$ foi definido em (217). A diferença de Θ_{livre} , observe que, por definição, $\Theta_{\Lambda, p}$ depende do volume Λ . Aqui estamos usando $\chi_{\Lambda, m}(C, p)$ para denotar

$$\chi_{\Lambda, m}(C, p) = \begin{cases} 1, & C \cap \Lambda^c = \emptyset \text{ ou } p = m \\ 0, & \text{outro caso.} \end{cases}$$

Em seguida, formulamos o teorema principal desta seção.

Teorema 5.26 (Limite fraco da medida ES). *Sejam $\beta \geq 0$ e $h_p \in \mathbb{R}$, $p = 1, \dots, q$. Se f é uma função quase-local crescente sobre $\Sigma_q \times \Omega$ e $m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$, então os limites fracos*

$$\phi_m^{\text{ES}}(f) \equiv \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, m}^{\text{ES}}(f) \quad \text{e} \quad \phi_{\text{livre}}^{\text{ES}}(f) \equiv \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{ES}}(f)$$

existem, pertencem ao conjunto \mathcal{G}^{ES} e são invariantes por translação com, no máximo, um aglomerado infinito.

Demonstração. Primeiro, assumiremos alguns fatos que serão formulados e provados posteriormente como lemas. Com base nesses fatos, concluiremos a prova do teorema.

- 1) Sejam $A \in \mathcal{L}$, f uma função cilíndrica com suporte em $(A, \mathbb{B}(A))$ e $\Lambda \supset A$ com $\mathbb{B}_0(\Lambda) \supset \mathbb{B}(A)$. Para cada $m \in \{1, \dots, q\}$ existem números $\{a_{\{\mathcal{F}_i\}}\}$ tal que

$$\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{ES}}(f) = \sum_{\{\mathcal{F}_i\}} a_{\{\mathcal{F}_i\}} \phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{RC}}(F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}})$$

e

$$\phi_{\Lambda, m}^{\text{ES}}(f) = \sum_{\{\mathcal{F}_i\}} a_{\{\mathcal{F}_i\}} \phi_{\Lambda, m}^{\text{RC}}(F_{\Lambda, \{\mathcal{F}_i\}}^m).$$

- 2) Para cada $\Delta \in \mathcal{L}$, $\{\mathcal{F}_i\}$ com $\mathcal{F} = \cup_{i=1}^q \mathcal{F}_i$ e $m \in \{1, \dots, q\}$, as funções

$$\eta \mapsto F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}(\eta) \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m}(\eta) \quad \text{e} \quad \eta \mapsto F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}(\eta) \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}}(\eta),$$

são quase-locais, onde os eventos $\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}$ e $\mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m$ foram definidos em (295) e (296), respectivamente.

- 3) Sejam $\mathcal{F} = \cup_{i=1}^q \mathcal{F}_i$, $Q_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m = q_0 \cdot \mathbb{1}_{\{\mathcal{F}_m \leftrightarrow \Delta^c\}} + \mathbb{1}_{\{\mathcal{F}_m \nleftrightarrow \Delta^c\}}$, m tal que $h_m = h_{\max}$ e

$$G_{\Lambda, \Delta, m}^{\{\mathcal{F}_i\}} \equiv F_{\Lambda, \{\mathcal{F}_i\}}^m \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}} - Q_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m} F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}.$$

Então,

$$\lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}(\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}) = 1, \quad \lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, m}^{\text{RC}}(\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}) = 1$$

$$\text{e} \quad \lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, m}^{\text{RC}}(G_{\Lambda, \Delta, m}^{\{\mathcal{F}_i\}}) = 0.$$

Com os itens 1), 2) e 3) a nossa disposição, procedemos a provar este teorema. De fato, a primeira vista nos vemos tentados a tomar o limite termodinâmico nas identidades do Item 1) (com $m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$), mas veja que isso não é possível, pois as funções \mathcal{F}_i 's, em

geral, não são quase-locais. No entanto, ambas as funções podem se tornar quase-locais quando acrescentamos uma propriedade geométrica ao látice, como indica o Item 2). A ideia central desta prova é aproximar as \mathcal{F}_i 's por funções quase-locais, para as quais o limite termodinâmico, segundo o Teorema 6.2, tem sentido.

Pelo Item 2) a aplicação $\eta \mapsto F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}(\eta) \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}}(\eta)$ é quase-local, logo, pelo Teorema 5.12 temos

$$\phi_{\text{livre}}^{\text{RC}} \left(F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}} \right) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{RC}} \left(F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}} \right).$$

Seja \mathcal{M}_{Λ} o conjunto de todas as configurações que possuem, no máximo, um aglomerado infinito incidente a Λ . Desde que $\mathcal{M}_{\Delta, \Lambda} \uparrow \mathcal{M}_{\Lambda}$ quando $\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d$, pela unicidade do aglomerado infinito (Teorema 5.25) e pela invariância da medida $\phi_{\text{livre}}^{\text{RC}}$, temos $\phi_{\text{livre}}^{\text{RC}}(\mathcal{M}_{\Delta, \Lambda}) \uparrow \phi_{\text{livre}}^{\text{RC}}(\mathcal{M}_{\Lambda}) = 1$, quando $\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d$. Usando esta convergência, o Item 3), o fato de que $F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}$ é limitada, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e fazendo $\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d$ na identidade acima, obtemos

$$\phi_{\text{livre}}^{\text{RC}}(F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{RC}}(F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}). \quad (300)$$

Por outro lado, pelo Item 2) a aplicação $\eta \mapsto F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}(\eta) \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m}(\eta)$ é quase-local e como $Q_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m$ é de suporte finito, a aplicação $\eta \mapsto Q_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m(\eta) \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m}(\eta) F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}(\eta)$ também é quase-local. Então, pelo Teorema 5.12, para $m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$ temos

$$\phi_m^{\text{RC}} \left(Q_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m} F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}} \right) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, m}^{\text{RC}} \left(Q_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m} F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}} \right).$$

Usando a definição de $G_{\Lambda, \Delta, m}^{\{\mathcal{F}_i\}}$ e o limite $\phi_{\Lambda, m}^{\text{RC}}(G_{\Lambda, \Delta, m}^{\{\mathcal{F}_i\}}) \rightarrow 0$ quando $\Delta, \Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$, ao se fazer $\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d$ na igualdade acima, obtém-se

$$\lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_m^{\text{RC}} \left(F_{\Lambda, \{\mathcal{F}_i\}}^m \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}} \right) - \lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_m^{\text{RC}}(G_{\Lambda, \Delta, m}^{\{\mathcal{F}_i\}}) = \lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, m}^{\text{RC}} \left(F_{\Lambda, \{\mathcal{F}_i\}}^m \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}} \right).$$

Como $G_{\Lambda, \Delta, m}^{\{\mathcal{F}_i\}}$ é combinação linear de funções quase-locais, ela também é quase-local. Logo, pelo Item 3) e pelo Teorema 5.12 temos $\phi_m^{\text{RC}}(G_{\Lambda, \Delta, m}^{\{\mathcal{F}_i\}}) \rightarrow 0$ quando $\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d$. Um argumento similar ao feito acima mostra $\phi_m^{\text{RC}}(\mathcal{M}_{\Delta, \Lambda}) \uparrow 1$, quando $\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d$. Usando estas convergências, o fato de que $F_{\Lambda, \{\mathcal{F}_i\}}^m$ é limitada, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e o Item 3) na igualdade acima, conseguimos que

$$\phi_m^{\text{RC}}(F_{\Lambda, \{\mathcal{F}_i\}}^m) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, m}^{\text{RC}}(F_{\Lambda, \{\mathcal{F}_i\}}^m). \quad (301)$$

Finalmente, como veremos no lema a seguir, para provar a existência dos limites fracos de medidas ES formulados neste teorema, é suficiente provar este fato para toda

função f que depende unicamente da configuração de spins σ , onde f tem suporte em $\bar{A} = A \cup \partial\Lambda$ com $A \subset \Lambda$. Como f é uma função cilíndrica, esta pode-se rescrever unicamente como $f = \sum_{\{\mathcal{F}_i\}} a_{\{\mathcal{F}_i\}} f_{\{\mathcal{F}_i\}}$, onde $a_{\{\mathcal{F}_i\}}$ são números reais que se anulam quando $\mathcal{F} \not\subset \bar{A}$ e $f_{\{\mathcal{F}_i\}}(\sigma)$ é a função que é igual a um, se cada volume \mathcal{F}_m tem cor m na configuração σ e é igual zero, caso contrário (veja Lema .33 do Apêndice). Relembramos que em todos os nossos argumentos estamos assumindo que $m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$, pois se está usando o Item 3), uma vez que os itens 1) e 2) não necessitam desta hipótese. Fazendo $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ nas decomposições do Item 1) e usando os Itens (300) e (301), temos

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{ES}}(f) = \sum_{\{\mathcal{F}_i\}} a_{\{\mathcal{F}_i\}} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{RC}}(F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}) = \sum_{\{\mathcal{F}_i\}} a_{\{\mathcal{F}_i\}} \phi_{\text{livre}}^{\text{RC}}(F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}) = \phi_{\text{livre}}^{\text{RC}}(f) \equiv \phi_{\text{livre}}^{\text{ES}}(f)$$

e

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, m}^{\text{ES}}(f) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \sum_{\{\mathcal{F}_i\}} a_{\{\mathcal{F}_i\}} \phi_{\Lambda, m}^{\text{RC}}(F_{\Lambda, \{\mathcal{F}_i\}}^m) = \sum_{\{\mathcal{F}_i\}} a_{\{\mathcal{F}_i\}} \phi_m^{\text{RC}}(F_{\Lambda, \{\mathcal{F}_i\}}^m) = \phi_m^{\text{RC}}(f) \equiv \phi_m^{\text{ES}}(f),$$

sempre que $m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$. Pela existência das medidas $\phi_{\text{livre}}^{\text{RC}}$ e ϕ_m^{RC} (veja Subseção 5.2.2), concluímos que as medidas limite ES, também, existem.

Agora, para provar que as medidas limite $\phi_{\text{livre}}^{\text{ES}}$ e ϕ_m^{ES} pertencem a \mathcal{G}^{ES} , procede-se usando a quase-localidade das especificações a volume finito $\{\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{ES}} : \Lambda \in \mathcal{L}\}$ e $\{\phi_{\Lambda, m}^{\text{ES}} : \Lambda \in \mathcal{L}\}$ (veja Proposição 4.24). A propriedade da invariância das medidas de Gibbs ES é herdada das medidas de Gibbs RC $\phi_{\text{livre}}^{\text{RC}}$ e ϕ_m^{RC} . Finalmente, a unicidade do aglomerado infinito é obtida da forma usual, usando a propriedade da energia finita mas a propriedade de estabilidade das medidas de Gibbs ES (argumento de Burton Keane). \square

No que resta desta seção, nos dedicaremos a provar os itens 1), 2) e 3) enunciados no Teorema 5.26, o que formularemos como Lema 5.27, Lema 5.28 e Lema 5.29, respectivamente.

Lema 5.27. *Sejam $\Lambda \in \mathcal{L}$ e f uma função cilíndrica suportada em $(A, \mathbb{B}(A))$. Então, existem números $\{a_{\{\mathcal{F}_i\}}\}$ tal que*

$$\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{ES}}(f) = \sum_{\{\mathcal{F}_i\}} a_{\{\mathcal{F}_i\}} \phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{RC}}(F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}})$$

e

$$\phi_{\Lambda, m}^{\text{ES}}(f) = \sum_{\{\mathcal{F}_i\}} a_{\{\mathcal{F}_i\}} \phi_{\Lambda, m}^{\text{RC}}(F_{\Lambda, \{\mathcal{F}_i\}}^m),$$

para cada $m \in \{1, \dots, q\}$ e todo $\Lambda \supset A$ com $\mathbb{B}_0(\Lambda) \supset \mathbb{B}(A)$. Ademais, $a_{\{\mathcal{F}_i\}} = 0$ sempre que exista um $x \in \mathcal{F} = \cup_{i=1}^q \mathcal{F}_i$ com $d(x, A) > 1$. Em particular, ambas as somas acima são finitas. Aqui $F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}$ e $F_{\Lambda, \{\mathcal{F}_i\}}^m$ foram definidos em (298) e (299), respectivamente.

Demonstração. Seja $\Lambda \supset A$ em \mathcal{L} e $\mathbb{B}_0(\Lambda) \supset \mathbb{B}(A)$. Pela consistência da especificação $\{\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{ES}} : \Lambda \in \mathcal{L}\}$, onde por definição $\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{ES}}(\cdot) = \phi_{\Lambda, \mathbb{B}_0(\Lambda)}^{\text{ES}}(\cdot | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}_0(\Lambda)^c}^0)$, veja que

$$\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{ES}}(f) = \int \phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{ES}}(d\sigma, d\eta) \phi_{A, \mathbb{B}(A)}^{\text{ES}}(f | \sigma_{A^c}, \eta_{\mathbb{B}(A)^c})$$

e, similarmente, obtém-se uma expressão para $\phi_{\Lambda, m}^{\text{ES}}$, onde por definição $\phi_{\Lambda, m}^{\text{ES}}(\cdot) = \phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(\cdot | \sigma_{\Lambda^c}^m, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c})$. Por definição, na identidade acima, note que a especificação a volume finito $\phi_{A, \mathbb{B}(A)}^{\text{ES}}(f | \sigma_{A^c}, \eta_{\mathbb{B}(A)^c})$ não depende da configuração $\eta_{\mathbb{B}(A)^c}$, logo, ela depende unicamente das variáveis spins na fronteira exterior ∂A de A . Daí é suficiente provar a afirmação deste lema somente para funções f que dependem unicamente das variáveis spins, e cujo suporte se encontra em $\bar{A} = A \cup \partial A$.

Como f é cilíndrica com suporte em \bar{A} (portanto, local), pelo Lema .33 do Apêndice, f pode ser rescrita de maneira única como $f = \sum_{\{\mathcal{F}_i\}} a_{\{\mathcal{F}_i\}} f_{\{\mathcal{F}_i\}}$, onde $a_{\{\mathcal{F}_i\}}$ são números reais tal que $a_{\{\mathcal{F}_i\}} = 0$ quando $\mathcal{F} \not\subset \bar{A}$ e

$$f_{\{\mathcal{F}_i\}}(\sigma) = \prod_{p=1}^q \prod_{x \in \mathcal{F}_p} \delta_{\sigma_x, p}.$$

Isto é, $f_{\{\mathcal{F}_i\}}(\sigma)$ é uma função escada que é igual a um se cada volume \mathcal{F}_p tem cor p (ou seja que toda variável spin em \mathcal{F}_p possui valor igual a p) na configuração σ e é igual zero caso contrário. Por uma inspeção simples (como veremos à continuação) na definição das medidas $\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{ES}}$ e $\phi_{\Lambda, m}^{\text{ES}}$, para cada $m \in \{1, \dots, q\}$ temos

$$\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{ES}}(f_{\{\mathcal{F}_i\}} | \eta) = F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}(\eta) \quad (302)$$

e

$$\phi_{\Lambda, m}^{\text{ES}}(f_{\{\mathcal{F}_i\}} | \eta) = F_{\Lambda, \{\mathcal{F}_i\}}^m(\eta). \quad (303)$$

Integrando com respeito a $\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{ES}}$ em (302) e com respeito a $\phi_{\Lambda, m}^{\text{ES}}$ em (303) e usando a decomposição de f , concluímos a afirmação deste teorema. Portanto, resta verificar (302) e (303).

Por definição (207) de $\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{ES}}$ e como o suporte de $f_{\{\mathcal{F}_i\}}$ é \mathcal{F} , veja que

$$\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{ES}}(f_{\{\mathcal{F}_i\}} | \eta) = \frac{\sum_{\sigma} f_{\{\mathcal{F}_i\}}(\sigma) \prod_{\substack{\{i,j\} \in \mathbb{B}_0(\mathcal{F}) \\ \eta_{ij}=1}} (e^{\beta J} - 1) \delta_{\sigma_i, \sigma_j} \prod_{x \in \mathcal{F}} e^{\beta \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}}}{\sum_{\sigma} \prod_{\substack{\{i,j\} \in \mathbb{B}_0(\mathcal{F}) \\ \eta_{ij}=1}} (e^{\beta J} - 1) \delta_{\sigma_i, \sigma_j} \prod_{x \in \mathcal{F}} e^{\beta \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}}}.$$

Como a configuração η está fixada, observe que na igualdade acima não aparece o somatório em η . Fixe $p \in \{1, \dots, q\}$. Se $f_{\{\mathcal{F}_i\}}(\sigma) = 1$, então o volume \mathcal{F}_p assume a cor p (que é assumida somente por este volume). Logo, as componentes \mathcal{F}_i e \mathcal{F}_j não podem estar conectadas, isto é $\mathcal{F}_i \leftrightarrow \mathcal{F}_j$ para $i < j$. Isso dá a indicadora $\mathbb{1}_{\{\mathcal{F}_i \leftrightarrow \mathcal{F}_j\}}$. Logo, se um aglomerado C de $\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta)$ é tal que $C \cap \mathcal{F}_p \neq \emptyset$, então necessariamente deve de satisfazer-se que $C \cap \mathcal{F}_i = \emptyset$ para todo $i \neq p$. Assim, a identidade acima se rescreve

$$\begin{aligned} &= \frac{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}_0(\mathcal{F})|} \cdot \prod_{i < j} \mathbb{1}_{\{\mathcal{F}_i \leftrightarrow \mathcal{F}_j\}}(\eta) \sum_{\sigma} \Delta(\sigma, \eta) \prod_{x \in \mathcal{F}} e^{\beta \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}}}{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}_0(\mathcal{F})|} \cdot \sum_{\sigma} \Delta(\sigma, \eta) \prod_{x \in \mathcal{F}} e^{\beta \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}}} \\ &= \frac{\prod_{i < j} \mathbb{1}_{\{\mathcal{F}_i \leftrightarrow \mathcal{F}_j\}}(\eta) \sum_{\sigma} \Delta(\sigma, \eta) \prod_{x \in \mathcal{F}} e^{\beta \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}}}{\sum_{\sigma} \Delta(\sigma, \eta) \prod_{x \in \mathcal{F}} e^{\beta \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}}}, \end{aligned}$$

onde $\Delta = \mathbb{1}_{\{(\sigma, \eta) \in \{-1, +1\}^{\mathcal{F}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\mathcal{F})} : \text{se } \eta_{ij} = 1 \text{ então } \sigma_i = \sigma_j\}}$ foi definido em (3.6). Uma vez que $\mathcal{F} = \cup_{i=1}^q \mathcal{F}_i$, por argumentos padrões mostrados na Subseção 3.3, a expressão acima é

$$\begin{aligned} &= \frac{\prod_{i < j} \mathbb{1}_{\{\mathcal{F}_i \leftrightarrow \mathcal{F}_j\}}(\eta) \prod_{p=1}^q \prod_{C: C \cap \mathcal{F}_p \neq \emptyset} \prod_{x \in C} e^{\beta h_p}}{\prod_{p=1}^q \prod_{C: C \cap \mathcal{F}_p \neq \emptyset} \prod_{x \in C} \sum_{p=1}^q e^{\beta h_p}} \\ &= \prod_{i < j} \mathbb{1}_{\{\mathcal{F}_i \leftrightarrow \mathcal{F}_j\}}(\eta) \prod_{p=1}^q \prod_{C: C \cap \mathcal{F}_p \neq \emptyset} \frac{e^{\beta h_p |C|}}{\sum_{p=1}^q e^{\beta h_p |C|}} = F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}(\eta). \end{aligned}$$

Juntando as identidades acima, mostra-se (302).

Por outro lado, procedendo analogamente ao feito anteriormente, mostra-se que

$$\phi_{\Lambda, m}^{\text{ES}}(f_{\{\mathcal{F}_i\}} | \eta) = \frac{\prod_{i < j} \mathbb{1}_{\{\mathcal{F}_i \leftrightarrow \mathcal{F}_j\}}(\eta) \prod_{p \neq m} \prod_{C: C \cap \mathcal{F}_m \neq \emptyset} e^{\beta h_p |C|} \cdot \prod_{C: C \cap \mathcal{F}_m \neq \emptyset} e^{\beta h_m |C|}}{\prod_{p \neq m} \prod_{C: C \cap \mathcal{F}_m \neq \emptyset} \sum_{p=1}^q e^{\beta h_p |C|} \cdot \prod_{\substack{C \cap \Lambda^c = \emptyset \\ C \cap \mathcal{F}_m \neq \emptyset}} \sum_{p=1}^q e^{\beta h_p |C|} \prod_{\substack{C \cap \Lambda^c = \emptyset \\ C \cap \mathcal{F}_m \neq \emptyset}} e^{\beta h_m |C|}}.$$

Uma vez que $\prod_{C: C \cap \mathcal{F}_m \neq \emptyset} \Theta_{\Lambda, m}(C) = \prod_{\substack{C \cap \mathcal{F}_m \neq \emptyset \\ C \cap \Lambda^c = \emptyset}} \sum_{p=1}^q e^{\beta h_p |C|} \prod_{\substack{C \cap \mathcal{F}_m \neq \emptyset \\ C \cap \Lambda^c = \emptyset}} e^{\beta h_m |C|}$ e $\Theta_{\text{livre}}(C) = \sum_{p=1}^q e^{\beta h_p |C|}$, reescrevemos a expressão acima como

$$= \prod_{i < j} \mathbb{1}_{\{\mathcal{F}_i \leftrightarrow \mathcal{F}_j\}}(\eta) \prod_{p \neq m} \prod_{C: C \cap \mathcal{F}_m \neq \emptyset} \frac{e^{\beta h_p |C|}}{\Theta_{\text{livre}}(C)} \cdot \prod_{C: C \cap \mathcal{F}_m \neq \emptyset} \frac{e^{\beta h_m |C|}}{\Theta_{\Lambda, m}(C)} = F_{\Lambda, \{\mathcal{F}_i\}}^m(\eta),$$

o que prova a validez de (303). \square

O seguinte lema mostra a quase-localidade quase certa da aplicação $\eta \mapsto F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}(\eta)$. A técnica aplicada para provar esse lema é a mesma que se usará para provar os Lemas

5.30 e 6.11. O passo principal dessa prova é: mostrar a quase-localidade da aplicação do Item (i) e depois empregá-lo para provar a quase-localidade da aplicação do Item (ii).

Lema 5.28. Para todo $\Lambda \in \mathcal{L}$ e qualquer $\mathcal{F} = \cup_{i=1}^q \mathcal{F}_i$

(i) $F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m}$ é quase-local para todo $m \in \{1, \dots, q\}$;

(ii) $F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}}$ é quase-local,

onde $F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}$ foi definido em (298) e os eventos $\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}$ e $\mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m$ foram definidos em (295) e (296), respectivamente.

Demonstração. Seja $m \in \{1, \dots, q\}$ fixo e $\Lambda \supset \Delta$ em \mathcal{L} . Note que $\mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m} \cdot \prod_{i < j} \mathbb{1}_{\{\mathcal{F}_i \leftrightarrow \mathcal{F}_j\}}$ é uma função cilíndrica em $\mathbb{B}(\Lambda)$. Considere duas configurações η e η^e definidas como

$$\eta \equiv (*, \dots, *, \underbrace{0}_{e\text{-ésimo}}, *, \dots, *) \quad \text{e} \quad \eta^e \equiv (*, \dots, *, \underbrace{1}_{e\text{-ésimo}}, *, \dots, *),$$

respectivamente, com $* \in \{0, 1\}$ e $e \in \mathbb{B}(\Lambda)^c$. Isto é, η e η^e são duas configurações que diferem somente por um flipamento na e -ésima coordenada. Para provar (i), assuma que $\eta \in \mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m$ é tal que $\prod_{i < j} \mathbb{1}_{\{\mathcal{F}_i \leftrightarrow \mathcal{F}_j\}}(\eta) = 1$ e que exista um aglomerado C conectando \mathcal{F}_m a $\mathbb{B}(\Lambda)^c$. Pela definição (296) de $\mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m$, a configuração η^e também satisfaz essas três condições, e pela definição (295) de $\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}$, o aglomerado C de $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta))$ é único. Observe, também, que a quantidade $F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}$ não se vê afetada por mudar de η a η^e , a menos que $\mathbb{V}(\{e\}) \cap C \neq \emptyset$. Supondo que isso acontece, denote por C^e ao aglomerado correspondente sobre η^e . Por definição de $F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}$, veja que

$$\left| F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}(\eta^e) - F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}(\eta) \right| \leq \left| \frac{e^{\beta h_m |C^e|}}{\Theta_{\text{livre}}(C^e)} - \frac{e^{\beta h_m |C|}}{\Theta_{\text{livre}}(C)} \right|,$$

onde usamos a estimativa $\prod_{p=1}^q \prod_{\substack{\tilde{C}: \tilde{C} \cap \mathcal{F}_p \neq \emptyset \\ p \neq m}} \frac{e^{\beta h_p |\tilde{C}|}}{\Theta_{\text{livre}}(\tilde{C})} \leq 1$ para aqueles aglomerados \tilde{C} que não foram afetados pelo flipamento em e . Desde que $d(e, \mathcal{F}) \leq |C| < |C^e|$, fazendo $d(e, \Lambda) \rightarrow \infty$, o lado direito da desigualdade acima é exponencialmente pequeno. Isto é

$$\left| F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}(\eta^e) - F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}(\eta) \right| \rightarrow 0, \quad \text{quando } d(e, \mathcal{F}) \rightarrow \infty.$$

Daí, por um truque telescópico padrão, como será mostrado no argumento final da prova do Lema 5.30 (abaixo), para qualquer duas configurações ω e η , diferentes, em $\mathbb{B}(\Lambda)^c$, obtemos

$$\left| F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}(\omega) - F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}(\eta) \right| \rightarrow 0,$$

quando $\min_{e \in A} d(e, \Lambda) \rightarrow \infty$, onde $A \equiv \{e \in \mathbb{B}(\Lambda)^c : \omega_e \neq \eta_e\}$. Isto é, a aplicação $\eta \mapsto F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}(\eta)$ é contínua na topologia produto, logo, pelo Lema 4.18, esta aplicação é quase-local, provando-se a primeira afirmação (i).

(ii) Primeiramente, provaremos que

$$g \equiv F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}} \left[\mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}} - \sum_{m=1}^q \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m} \right]$$

é uma função cilíndrica em $\mathbb{B}(\Delta)$. Observe que $\cup_{m=1}^q \mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m \subset \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}$. Daí, usando esta inclusão, veja que: se η é uma configuração tal que $\mathbb{1}_{\cup_{m=1}^q \mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m}(\eta) = 1$ ou $\mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}}(\eta) = 0$, então a expressão em colchetes acima é sempre zero, portanto, $g \equiv 0$. Logo, nestes casos teríamos que $F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}} = F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}} \cdot \sum_{m=1}^q \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m}$. Portanto, a quase-localidade de $F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}}$ decorreria desta igualdade, pois pelo Item (i), a função $F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m}$ é quase-local para cada m .

No entanto, se η é tal que $\mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}}(\eta) = 1$ e $\mathbb{1}_{\cup_{m=1}^q \mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m}(\eta) = 0$, afirmamos que não existe aglomerado algum de modo que conecte \mathcal{F} a Δ^c . De fato, suponha que exista pelo menos um aglomerado (este deve ser único pois $\eta \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}$) que conecte \mathcal{F} a Δ^c , logo, deveria existir um \hat{m} tal que o aglomerado conecte o volume $\mathcal{F}_{\hat{m}}$ a Δ^c , mas isto contradiz o fato de que $\eta \in \cup_{m=1}^q \mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m$.

Logo, neste caso, $F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}$ depende unicamente dos estados das arestas de $\mathbb{B}(\Delta)$, implicando que g é uma função cilíndrica em $\mathbb{B}(\Delta)$, portanto, quase-local.

Finalmente, como $F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}} = g + \sum_{m=1}^q F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m}$, pelo uso do Item (i) e o fato de que a soma de funções quase-locais é quase-local, temos que $F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}}$ é quase-local. \square

Lema 5.29. *Sejam $\{\mathcal{F}_i\}$, $\mathcal{F} = \cup_{i=1}^q \mathcal{F}_i$ e $m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$.*

(i) Então

$$\lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}(\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}) = 1 \quad e \quad \lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, m}^{\text{RC}}(\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}) = 1.$$

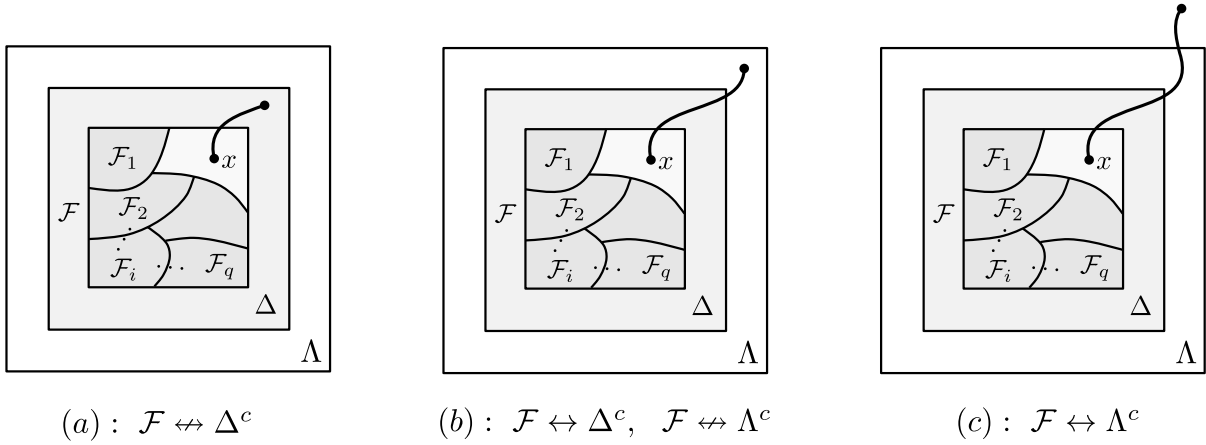
(ii) Se em adição, $G_{\Lambda, \Delta, m}^{\{\mathcal{F}_i\}} \equiv F_{\Lambda, \{\mathcal{F}_i\}}^m \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}} - Q_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m} F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}$, então

$$\lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, m}^{\text{RC}}(G_{\Lambda, \Delta, m}^{\{\mathcal{F}_i\}}) = 0,$$

onde $Q_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m = q_0 \cdot \mathbb{1}_{\{\mathcal{F}_m \leftrightarrow \Delta^c\}} + \mathbb{1}_{\{\mathcal{F}_m \nleftrightarrow \Delta^c\}}$ foi definido em (297) e os eventos $\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}$ e $\mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m$ foram definidos em (295) e (296), respectivamente.

Demonstração. (i) Definindo o evento $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ como aquele que é composto por todas as configurações que apresentam, no máximo, um aglomerado infinito incidente com \mathcal{F} , note que $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} = \cup_{\Delta: \Delta \supset \mathcal{F}} \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}$. Pela continuidade da medida e pelo fato de que $\phi_{\#}^{\text{GRC}}$ tem, no máximo, um aglomerado infinito (Teorema 5.25), onde $\#$ denota a condição de fronteira livre ou a m -conectada com $m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$, temos $\lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}) = \phi_{\#}^{\text{GRC}}(\mathcal{M}_{\mathcal{F}}) = 1$.

(ii) Para provar este item, considere $\{\mathcal{F}_i\}$ e $\Delta \subset \Lambda$ com $\Delta \supset \mathcal{F}$. Dado $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}(\Lambda)}$, analisamos os seguintes três casos:



No caso (a), pelo fato de não ter aglomerados conectando \mathcal{F} a Δ^c , note que

$$\mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m} = \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}}, \quad \mathcal{Q}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m = 1 \quad \text{e} \quad F_{\Lambda, \{\mathcal{F}_i\}}^m = F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}},$$

pois, neste caso, $\mathcal{F} \leftrightarrow \Delta^c$ implica que $\mathcal{F} \leftrightarrow \Lambda^c$. Em consequência, $G_{\Lambda, \Delta, m}^{\{\mathcal{F}_i\}} = 0$. Daí, trivialmente se tem $\lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, m}^{\text{RC}}(G_{\Lambda, \Delta, m}^{\{\mathcal{F}_i\}}) = 0$.

Se o caso (c) ocorre, destacamos os seguintes três casos: (1) se η é tal que $\mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}}(\eta) = 1$ e $\mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m}(\eta) = 0$, então o aglomerado que conecta \mathcal{F} à fronteira externa $\partial\Lambda$ é único, pois $\eta \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}$. Desde que $\eta \notin \mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m$, existe $\tilde{m} \neq m$ tal que dito aglomerado conecta $\mathcal{F}_{\tilde{m}}$ a $\partial\Lambda$. Denotemos por $C_{\tilde{m}, \Lambda}$ a este aglomerado. Então, por definição de $\chi_{\Lambda, m}$, $\chi_{\Lambda, m}(C_{\tilde{m}, \Lambda}, \tilde{m}) = 0$, já que $\tilde{m} \neq m$. Isto implica que $F_{\Lambda, \{\mathcal{F}_i\}}^m = 0$. Portanto, $G_{\Lambda, \Delta, m}^{\{\mathcal{F}_i\}} = 0$. Assim, neste caso também $\lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, m}^{\text{RC}}(G_{\Lambda, \Delta, m}^{\{\mathcal{F}_i\}}) = 0$.

(2) Se η é tal que $\mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}}(\eta) = 0$, por inclusão de conjuntos temos $\mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m}(\eta) = 0$, implicando que $G_{\Lambda, \Delta, m}^{\{\mathcal{F}_i\}} = 0$. Assim, trivialmente segue que $\lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, m}^{\text{RC}}(G_{\Lambda, \Delta, m}^{\{\mathcal{F}_i\}}) = 0$.

(3) Se η é tal que $\mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m}(\eta) = 1$, então, por inclusão de conjuntos temos $\mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}}(\eta) = 1$. Logo, o aglomerado que conecta \mathcal{F} à fronteira $\partial\Lambda$ é único pois $\eta \in \mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}$ e, além disso, este aglomerado conecta \mathcal{F}_m a $\partial\Lambda$, já que $\eta \in \mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m$. Denotemos por $C_{m, \Lambda}$ tal

aglomerado. Desde que $\mathcal{F}_m \leftrightarrow \partial\Lambda$, tem-se $\mathcal{F}_m \leftrightarrow \Delta^c$, daí, $Q_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m = q_0$. Por simples inspeção nas definições de $F_{\Lambda, \{\mathcal{F}_i\}}^m$ temos

$$F_{\Lambda, \{\mathcal{F}_i\}}^m = \prod_{i < j} \mathbb{1}_{\{\mathcal{F}_i \leftrightarrow \mathcal{F}_j\}} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq m}}^q \prod_{C: C \cap \mathcal{F}_p \neq \emptyset} \frac{e^{\beta h_p |C|}}{\Theta_{\text{livre}}(C)} \cdot \frac{e^{\beta h_m |C_{m,\Lambda}|}}{\Theta_{\Lambda, m}(C_{m,\Lambda})}.$$

Como o aglomerado $C_{m,\Lambda}$ conecta \mathcal{F}_m a $\partial\Lambda$, temos $C_{m,\Lambda} \cap \Lambda^c \neq \emptyset$, implicando que $\Theta_{\Lambda, m}(C_{m,\Lambda}) = e^{\beta h_m |C_{m,\Lambda}|}$. Logo, a igualdade acima fica

$$F_{\Lambda, \{\mathcal{F}_i\}}^m = \prod_{i < j} \mathbb{1}_{\{\mathcal{F}_i \leftrightarrow \mathcal{F}_j\}} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq m}}^q \prod_{C: C \cap \mathcal{F}_p \neq \emptyset} \frac{e^{\beta h_p |C|}}{\Theta_{\text{livre}}(C)}. \quad (304)$$

Similarmente, por simples inspeção nas definições de $F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}$, tem-se

$$F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}} = \prod_{i < j} \mathbb{1}_{\{\mathcal{F}_i \leftrightarrow \mathcal{F}_j\}} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq m}}^q \prod_{C: C \cap \mathcal{F}_p \neq \emptyset} \frac{e^{\beta h_p |C|}}{\Theta_{\text{livre}}(C)} \cdot \frac{e^{\beta h_m |C_{m,\Lambda}|}}{\Theta_{\text{livre}}(C_{m,\Lambda})}. \quad (305)$$

Assim, de (304) e (305) obtém-se

$$F_{\Lambda, \{\mathcal{F}_i\}}^m = F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}} \cdot \frac{\Theta_{\text{livre}}(C_{m,\Lambda})}{e^{\beta h_m |C_{m,\Lambda}|}}. \quad (306)$$

Como $m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$, o fator $\frac{\Theta_{\text{livre}}(C_{m,\Lambda})}{e^{\beta h_m |C_{m,\Lambda}|}}$ é igual a

$$\frac{\Theta_{\text{livre}}(C_{m,\Lambda})}{e^{\beta h_{\max} |C_{m,\Lambda}|}} = \frac{\sum_{p=1}^q e^{\beta h_p |C_{m,\Lambda}|}}{e^{\beta h_{\max} |C_{m,\Lambda}|}} = q_0 + \sum_{p \notin \mathcal{Q}_{\max}(h)} e^{-\beta (h_{\max} - h_p) |C_{m,\Lambda}|}. \quad (307)$$

Desde que $h_{\max} - h_p > 0$ e $d(\mathcal{F}_m, \partial\Lambda) \leq |C_{m,\Lambda}|$, fazendo $d(\mathcal{F}_m, \partial\Lambda) \rightarrow \infty$ em (307) obtemos $\frac{\Theta_{\text{livre}}(C_{m,\Lambda})}{e^{\beta h_m |C_{m,\Lambda}|}} \rightarrow q_0$. Daí, usando (306) para reescrever $G_{\Lambda, \Delta, m}^{\{\mathcal{F}_i\}}$ em seguida fazendo $d(\mathcal{F}_m, \partial\Lambda) \rightarrow \infty$ tem-se

$$G_{\Lambda, \Delta, m}^{\{\mathcal{F}_i\}} = F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}} \left[\frac{\Theta_{\text{livre}}(C_{m,\Lambda})}{e^{\beta h_m |C_{m,\Lambda}|}} - q_0 \right] \longrightarrow 0.$$

Uma vez que $G_{\Lambda, \Delta, m}^{\{\mathcal{F}_i\}}$ é limitada, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Apêndice, Teorema .23) obtemos que $\lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, m}^{\text{RC}}(G_{\Lambda, \Delta, m}^{\{\mathcal{F}_i\}}) = 0$.

Finalmente, analisaremos o caso (b), onde $\mathcal{F} \leftrightarrow \Delta^c$ e $\mathcal{F} \leftrightarrow \Lambda^c$. Se η é tal que $\mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}}(\eta) = 1$ e $\mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m}(\eta) = 0$ ou se η é tal que $\mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathcal{F}}}(\eta) = 0$, o mesmo raciocínio feito nos casos 1) e 2) para o caso c) mostra que $\lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, m}^{\text{RC}}(G_{\Lambda, \Delta, m}^{\{\mathcal{F}_i\}}) = 0$.

Se η é tal que $\mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m}(\eta) = 1$, temos $F_{\Lambda, \{\mathcal{F}_i\}}^m = F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}$ e que $Q_{\Delta, \{\mathcal{F}_i\}}^m = q_0$. Denote por $\mathcal{P}_{\Lambda, \Delta}^{\mathcal{F}}$ o evento (b), isto é, $\mathcal{P}_{\Lambda, \Delta}^{\mathcal{F}} \equiv \{\eta : \mathcal{F} \leftrightarrow \Delta^c, \text{ porém, } \mathcal{F} \not\leftrightarrow \Lambda^c\}$. Seja $C_{m, \Delta}$ o único aglomerado que conecta \mathcal{F}_m a Δ^c . Logo,

$$\left| G_{\Lambda, \Delta, m}^{\{\mathcal{F}_i\}} \right| = \left| F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}(1 - q_0) \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{P}_{\Lambda, \Delta}^{\mathcal{F}}} \right| \leq q_0 \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{P}_{\Lambda, \Delta}^{\mathcal{F}}} + F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}} \frac{\Theta_{\text{livre}}(C_{m, \Delta})}{e^{\beta h_m |C_{m, \Delta}|}}.$$

Por um raciocínio similar a (307), veja que a parcela do lado direito é exponencialmente pequena quando fazemos crescer Λ e a distância entre \mathcal{F}_m e $\partial\Delta^c$. Logo, para provar que $\lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, m}^{\text{RC}}(G_{\Lambda, \Delta, m}^{\{\mathcal{F}_i\}}) = 0$, é suficiente provar que

$$\lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, m}^{\text{RC}}(\mathcal{P}_{\Lambda, \Delta}^{\mathcal{F}}) = 0. \quad (308)$$

Primeiro, relembramos a seguinte caracterização de limite

$$\phi_m^{\text{RC}}(\mathcal{F} \leftrightarrow \infty) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, m}^{\text{RC}}(\mathcal{F} \leftrightarrow \Lambda^c),$$

o qual decorre imediatamente das seguintes desigualdades: para $\Lambda \subset \widehat{\Lambda}$, tem-se $\phi_{\Lambda, m}^{\text{RC}}(\mathcal{F} \leftrightarrow \widehat{\Lambda}^c) \leq \phi_{\Lambda, m}^{\text{RC}}(\mathcal{F} \leftrightarrow \Lambda^c) \leq \phi_{\widehat{\Lambda}, m}^{\text{RC}}(\mathcal{F} \leftrightarrow \Lambda^c)$, onde a primeira desigualdade é devido à monotonicidade de $\{\mathcal{F} \leftrightarrow \Lambda^c\}$ e a segunda devido ao Lema (5.11).

Note que os eventos $\{\mathcal{F} \leftrightarrow \Delta^c\}$, $\{\mathcal{F} \leftrightarrow \Lambda^c\}$ são disjuntos e $\{\mathcal{F} \leftrightarrow \Delta^c\} \uparrow \{\mathcal{F} \leftrightarrow \infty\}$ quando $\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d$. Daí, pela caracterização de limite mencionada acima e pela continuidade da medida, tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, m}^{\text{RC}} \left(\{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)} \setminus \mathcal{P}_{\Lambda, \Delta}^{\mathcal{F}} \right) &= \lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, m}^{\text{RC}}(\{\mathcal{F} \leftrightarrow \Delta^c\} \cup \{\mathcal{F} \leftrightarrow \Lambda^c\}) \\ &= \lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, m}^{\text{RC}}(\mathcal{F} \leftrightarrow \Delta^c) + \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, m}^{\text{RC}}(\mathcal{F} \leftrightarrow \Lambda^c) \\ &= \phi_m^{\text{RC}}(\mathcal{F} \leftrightarrow \infty) + \phi_m^{\text{RC}}(\mathcal{F} \leftrightarrow \infty) = 1, \end{aligned}$$

provando-se (308). □

5.6 QUASE-LOCALIDADE Q.C. DO MODELO GRC

Ao longo desta seção estudaremos a quase-localidade (quase certa) do modelo GRC com presença de campo externo uniforme $(h_p)_{p=1}^q$ definido em (202). O seguinte lema nos diz que todo estado $\phi \in \mathcal{G}_{\text{lim}}^{\text{GRC}}$ ou $\phi \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}$ é quase-local q.c. (precisamente, veja Observação 5.31) segundo a Definição 4.24. Para formular com precisão dito lema, necessitamos relembrar o evento $\mathcal{M}_{\Delta, \Lambda}$, que foi definido em (295), isto é:

$$\mathcal{M}_{\Delta, \Lambda} \equiv \left\{ \eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)} : \forall x, y \in \Lambda, \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \mathbb{B}_0(\Delta) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ \mathbb{B}_0(\Delta) \end{array} \right\}.$$

Já no próximo capítulo, enunciaremos um lema similar sobre quase-localidade, com suas respectivas adaptações, para medidas GRC com presença de campo externo não homogêneo (a diferença deste capítulo).

Lema 5.30. (i) Seja $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)$ um subconjunto finito e seja f uma função cilíndrica dependendo unicamente dos estados das arestas em \mathbb{B} . Então a função

$$\eta \mapsto \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \Lambda}}(\eta) \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f | \eta_{\mathbb{B}^c}) \text{ é quase-local,}$$

para qualquer par $\Delta, \Lambda \in \mathcal{L}$ tal que $\Delta \supset \Lambda \supset \mathbb{V}(\mathbb{B})$.

(ii) Seja $\phi \in \mathcal{G}_{\text{lim}}^{\text{GRC}}$ ou $\phi \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}$ com, no máximo, um aglomerado infinito e $\Lambda \in \mathcal{L}$, então

$$\phi(\mathcal{M}_{\Delta, \Lambda}) \uparrow 1, \text{ quando } \Delta \uparrow \mathbb{Z}^d.$$

Demonstração. (i) Sejam $\tilde{\Delta} \supset \Delta$, $e \in \mathbb{B}(\tilde{\Delta})^c$ uma aresta e η e η^e duas configurações definidas como

$$\eta \equiv (*, \dots, *, \underbrace{0}_{e\text{-ésimo}}, *, \dots, *) \text{ e } \eta^e \equiv (*, \dots, *, \underbrace{1}_{e\text{-ésimo}}, *, \dots, *),$$

respectivamente, com $* \in \{0, 1\}$. Isto é, η e η^e são duas configurações que diferem somente por um flipamento na e -ésima coordenada. Defina o evento

$$\mathcal{N}_{\Delta, \Lambda} \equiv \left\{ \eta \in \mathcal{M}_{\Delta, \Lambda} : \exists \text{ aglomerado } C \text{ tal que } \Lambda \xleftrightarrow{C} \mathbb{B}(\tilde{\Delta})^c \right\}.$$

Observe que se $\eta \in \mathcal{N}_{\Delta, \Lambda}$, então $\eta^e \in \mathcal{N}_{\Delta, \Lambda}$, além disso, o aglomerado C de $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta))$ que conecta Λ a $\mathbb{B}(\tilde{\Delta})^c$ é único, pois, se existiram dois aglomerados distintos com esta propriedade, o fato de que $\eta \in \mathcal{M}_{\Delta, \Lambda}$ faz com que se tenha uma contradição.

Tendo em conta que $e \in \mathbb{B}(\tilde{\Delta})^c$, analisamos os seguintes casos:

(i) $\mathbb{V}(\{e\}) \cap C = \emptyset$: neste caso, por definição (209) do peso $\mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}$ note que

$$\mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f | \eta_{\mathbb{B}^c}) = \mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f | \eta_{\mathbb{B}^c}^e).$$

(ii) $\mathbb{V}(\{e\}) \cap C \neq \emptyset$: neste caso, denote por C^e o aglomerado correspondente na configuração η^e . Desde que f é uma função cilíndrica, portanto, contínua, por definição (209) do peso $\mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}$ tem-se

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}^c}^e) - \mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}^c}) \right| \\ & \leq \\ & \|f\|_{\infty} \cdot \left| \mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}}|\eta_{\mathbb{B}^c}^e) - \mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}}|\eta_{\mathbb{B}^c}) \right| \\ & \leq \\ & \|f\|_{\infty} \cdot (e^{\beta J} - 1)^{\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta_{\mathbb{B}}) \cap \mathbb{B}} \sum_{p=1}^q q_p \left| e^{-\beta(h_{\max} - h_p)|C^e|} - e^{-\beta(h_{\max} - h_p)|C|} \right| \\ & = \\ & \|f\|_{\infty} \cdot (e^{\beta J} - 1)^{\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta_{\mathbb{B}}) \cap \mathbb{B}} \sum_{p \notin \mathcal{Q}_{\max}(h)} \left| e^{-\beta(h_{\max} - h_p)|C^e|} - e^{-\beta(h_{\max} - h_p)|C|} \right|. \end{aligned}$$

Já que $d(e, \Lambda) \leq |C| < |C^e|$ e $h_{\max} - h_p > 0$ sobre $\{1, \dots, q\} \setminus \mathcal{Q}_{\max}(h)$, fazendo $d(e, \Lambda) \rightarrow \infty$, o lado direito da desigualdade acima é exponencialmente pequena. Isto é, o lado direito da desigualdade acima é somável sobre as posições de e . Isto é,

$$\left| \mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}^c}^e) - \mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}^c}) \right| \rightarrow 0, \quad \text{quando } d(e, \Lambda) \rightarrow \infty. \quad (309)$$

Agora, considere e, \bar{e} duas arestas em $\mathbb{B}(\tilde{\Delta})^c$ e a configuração η da forma

$$\eta \equiv (*, \dots, *, \underbrace{0}_{e\text{-ésimo}}, *, \dots, *, \underbrace{0}_{\bar{e}\text{-ésimo}}, *, \dots, *),$$

com $* \in \{0, 1\}$. Logo, defina as configurações η^e e $\eta^{\bar{e}}$ como aquelas que são obtidas por flipar a configuração η de zero para um na e -ésima e \bar{e} -ésima coordenada respectivamente, sem nenhuma mudança nas outras coordenadas. Por (309) e pela desigualdade triangular, tem-se

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}^c}^e) - \mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}^c}^{\bar{e}}) \right| & \leq \left| \mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}^c}^e) - \mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}^c}) \right| \\ & + \left| \mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}^c}^{\bar{e}}) - \mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}^c}) \right| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $d(e, \Lambda), d(\bar{e}, \Lambda) \rightarrow \infty$.

Seguindo o mesmo raciocínio, por indução, prova-se que para qualquer duas configurações $\eta, \bar{\eta}$ diferentes em $\mathbb{B}(\tilde{\Delta})^c$,

$$\left| \mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}^c}) - \mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\bar{\eta}_{\mathbb{B}^c}) \right| \leq \sum_{e, \bar{e}: e \neq \bar{e}} \left| \mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}^c}^e) - \mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}^c}^{\bar{e}}) \right| \rightarrow 0,$$

quando $\min_{e \in A} d(e, \Lambda) \rightarrow \infty$, onde $A \equiv \{e \in \mathbb{B}(\tilde{\Delta})^c : \eta_e \neq \bar{\eta}_e\}$. Isto é, a aplicação $\eta \mapsto \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \Lambda}}(\eta) \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}^c})$ é contínua na topologia produto, logo, pelo Lema 4.18, esta aplicação é quase-local.

(ii) Para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$, seja \mathcal{M}_{Λ} o evento composto por todas as configurações que apresentam, no máximo, um aglomerado infinito incidente com Λ . Note que $\mathcal{M}_{\Delta, \Lambda} \uparrow \mathcal{M}_{\Lambda}$, quando $\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d$, e que $\mathcal{M}_{\Lambda} \downarrow \{N_{\infty} \leq 1\}$, quando $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$. Como, por hipótese, $\phi(N_{\infty} \leq 1) = 1$, então $\phi(\mathcal{M}_{\Lambda}) = 1, \forall \Lambda \in \mathcal{L}$. Logo, pela continuidade da medida, segue que $\lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi(\mathcal{M}_{\Delta, \Lambda}) = \phi(\mathcal{M}_{\Lambda}) = 1, \forall \Lambda \in \mathcal{L}$. \square

Observação 5.31. Para cada $f \subset \text{supp}(\mathbb{B})$ definamos a aplicação $g(\eta) \equiv \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}^c})$ e

$$E_g \equiv \{\omega \in \Omega : \eta \mapsto g(\eta) \text{ é quase-local em } \omega\}.$$

Mostraremos que, se $\phi \in \mathcal{G}_{\text{lim}}^{\text{GRC}}$ ou $\phi \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}$ com, no máximo, um aglomerado infinito, então a aplicação $\eta \mapsto g(\eta)$ é ϕ -q.c. quase-local. De fato, pelo Lema 5.30 (ii) temos que $\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\cup_{\Delta: \Delta \supset \Lambda} \mathcal{M}_{\Delta, \Lambda}) = 1$. Por outro lado, note que, pelo Lema 5.30 (i), temos $\mathcal{M}_{\Delta, \Lambda} \subset E_g, \forall \Delta: \Delta \supset \Lambda$. Daí, $1 = \phi(\cup_{\Delta: \Delta \supset \Lambda} \mathcal{M}_{\Delta, \Lambda}) \leq \phi(E_g)$. Portanto, $\phi(E_g) = 1$.

Em outras palavras, se há provado que o estado $\phi \in \mathcal{G}_{\text{lim}}^{\text{GRC}}$ ou $\phi \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}$ é quase-local q.c. (veja Definição 4.24).

Como consequência da quase-localidade q.c. dos estados GRC, temos o seguinte corolário, o qual nos diz que todo limite fraco de medidas GRC a volume finito é um estado de Gibbs GRC.

Corolário 5.32. Seja $\beta \geq 0, J \geq 0, h_m \in \mathbb{R}$ e $q_m > 0, m = 1, \dots, q$, e suponha que os parâmetros q_m obedecem a condição (223). Então, todos os estados limites GRC invariantes por translação são estados de Gibbs GRC, isto é, $\mathcal{G}_{\text{lim}}^{\text{GRC}} \subseteq \mathcal{G}^{\text{GRC}}$.

Demonstração. Seja $\phi \in \mathcal{G}_{\text{lim}}^{\text{GRC}}$, então $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\mathbb{B}_n}^{\text{GRC}}(\cdot|\eta_n)$ para alguma sequência de configurações $\{\eta_n : n \in \mathbb{N}\}$. Afirmamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a medida de probabilidade

$$\phi_n(\cdot) \equiv \phi_{\mathbb{B}_n}^{\text{GRC}}(\cdot|\eta_n)$$

satisfaz a condição DLR (213). De fato, para qualquer função cilíndrica f , dependendo somente dos estados das arestas de \mathbb{B} e para qualquer $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}_n$, tem-se

$$\begin{aligned} \phi_n(f) &= \phi_{\mathbb{B}_n}^{\text{GRC}}(f|\eta_n) = \phi_{\mathbb{B}_n}^{\text{GRC}}\left(\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\cdot)\Big|\eta_n\right) = \int \phi_{\mathbb{B}_n}^{\text{GRC}}(d\eta|\eta_n) \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}^c}) \\ &= \int \phi_n(d\eta) \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}^c}) \\ &= \phi_n(\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\cdot)) = \phi_n \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\cdot), \end{aligned} \quad (310)$$

onde, na segunda igualdade, usamos a propriedade de consistência da especificação $\{\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}} : |\mathbb{B}| < \infty\}$ e, na quarta igualdade, a definição de ϕ_n . Assim, $\phi_n = \phi_n \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}$, isto é, $\phi_n \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}$, o que prova a afirmação.

Como a especificação $\{\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}} : |\mathbb{B}| < \infty\}$ não é quase-local (veja Proposição 5.13), isso não necessariamente implica que a medida de probabilidade limite ϕ satisfaça a condição DLR. Para abordar esse problema, seguimos a estratégia que envolve a *quase-localidade quase certa* de $\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}$.

Seja \mathbb{B} um conjunto finito de arestas e seja f uma função cilíndrica dependendo unicamente dos estados das arestas de \mathbb{B} . Desde que as funções f e $\mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathbb{V}(\mathbb{B})}}(\cdot) \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\cdot)$ são quase-locais para todo $\Delta \supset \mathbb{V}(\mathbb{B})$, por definição de ϕ_n , temos

$$\phi \left(\mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathbb{V}(\mathbb{B})}} \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\cdot) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n \left(\mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathbb{V}(\mathbb{B})}} \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\cdot) \right) \quad (311)$$

e

$$\phi(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(f) \stackrel{(310)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\cdot)). \quad (312)$$

Como $\phi(N_{\infty} \leq 1) = 1$, pelo Lema 5.30, conseguimos que $\phi(\mathcal{M}_{\Delta, \mathbb{V}(\mathbb{B})}) \uparrow 1$ sempre que $\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d$. Como $\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\cdot)$ é limitada, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_n \left(\mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathbb{V}(\mathbb{B})}} \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\cdot) \right) = \phi_n(\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\cdot))$$

e

$$\lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi \left(\mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathbb{V}(\mathbb{B})}} \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\cdot) \right) = \phi(\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\cdot)).$$

Fazendo $\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d$ em (311) e usando estes dois limites acima, obtemos

$$\phi(\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\cdot)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\cdot)).$$

Combinando esta identidade com (312) tem-se

$$\phi(f) = \phi(\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\cdot)),$$

isto é, $\phi \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}$. Desde que a priori $\phi \in \mathcal{G}_{\text{lim}}^{\text{GRC}}$, concluímos que $\mathcal{G}_{\text{lim}}^{\text{GRC}} \subseteq \mathcal{G}^{\text{GRC}}$. \square

Relembramos que, em geral, uma medida de Gibbs GRC não tem porque, necessariamente, ter uma versão esperança condicional (214), devido à perda de quase-localidade das medidas GRC a volume finito (veja Proposição 5.13). Como havíamos falado anteriormente, podemos contornar esse problema adicionando a hipótese geométrica de existência (quase certa) de no máximo um aglomerado infinito. Isso é resumido no seguinte teorema.

Teorema 5.33 (Versão esperança condicional). *Seja $\beta \geq 0, J \geq 0, h_m \in \mathbb{R}$ e $q_m > 0, m = 1, \dots, q$, e suponha que os parâmetros q_m obedecem a condição (223). Seja $\phi \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}$ com $\phi(N_\infty \leq 1) = 1$, \mathbb{B} um subconjunto finito de $\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)$ e seja f uma função cilíndrica crescente dependendo somente sob a configuração $\eta_{\mathbb{B}}$. Então,*

$$\phi(f|\eta_{\mathbb{B}^c}) = \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\eta_{\mathbb{B}^c}), \quad \phi\text{-q.c.} \quad (313)$$

Demonstração. Sejam $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2$ dois conjuntos finitos de arestas be com $\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2 = \emptyset$ e f, g duas funções cilíndricas limitadas dependendo unicamente sobre os estados das arestas de \mathbb{B}_1 e \mathbb{B}_2 , respectivamente. Desde que $\phi \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}$, usando a equação DLR (213) e a consistência da especificação $\{\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}} : |\mathbb{B}| < \infty\}$, para $\mathbb{B} \supset \mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2$ (veja Definição 4.5), facilmente pode-se obter que

$$\begin{aligned} \phi(gf) &= \int \phi(d\eta) \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}} \left(\phi_{\mathbb{B}_1}^{\text{GRC}}(g f|\cdot) \Big| \eta_{\mathbb{B}^c} \right) \\ &= \int \phi(d\eta) \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}} \left(g \phi_{\mathbb{B}_1}^{\text{GRC}}(f|\cdot) \Big| \eta_{\mathbb{B}^c} \right) \\ &= \lim_{\mathbb{B} \uparrow \mathbb{B}(\mathbb{Z}^d)} \int \phi(d\eta) \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}} \left(g \phi_{\mathbb{B}_1}^{\text{GRC}}(f|\cdot) \Big| \eta_{\mathbb{B}^c} \right). \end{aligned} \quad (314)$$

Seja $\Delta \supset \mathbb{V}(\mathbb{B}_1)$ e o evento $\mathcal{M}_{\Delta, \mathbb{V}(\mathbb{B}_1)}$ definido em (295). Desde que as funções g e $\mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathbb{V}(\mathbb{B}_1)}}(\cdot) \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\cdot)$ são quase-locais, o produto destas funções $g \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathbb{V}(\mathbb{B}_1)}} \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\cdot)$ é também quase-local, daí, esta função pode ser aproximado por funções locais. Logo, (em analogia com (314)) pela equação DLR (213), temos

$$\phi \left(g \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathbb{V}(\mathbb{B}_1)}} \phi_{\mathbb{B}_1}^{\text{GRC}}(f|\cdot) \right) = \lim_{\mathbb{B} \uparrow \mathbb{B}(\mathbb{Z}^d)} \int \phi(d\eta) \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}} \left(g \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathbb{V}(\mathbb{B}_1)}} \phi_{\mathbb{B}_1}^{\text{GRC}}(f|\cdot) \Big| \eta_{\mathbb{B}^c} \right). \quad (315)$$

Uma vez que $\phi(N_\infty \leq 1) = 1$, pelo Lema 5.30 conseguimos que $\phi(\mathcal{M}_{\Delta, \mathbb{V}(\mathbb{B}_1)}) \uparrow 1$, sempre que $\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d$. Como f e g são limitadas, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \int \phi(d\eta) \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}} \left(g \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathbb{V}(\mathbb{B}_1)}} \phi_{\mathbb{B}_1}^{\text{GRC}}(f|\cdot) \Big| \eta_{\mathbb{B}^c} \right) = \int \phi(d\eta) \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}} \left(g \phi_{\mathbb{B}_1}^{\text{GRC}}(f|\cdot) \Big| \eta_{\mathbb{B}^c} \right)$$

e

$$\lim_{\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi \left(g \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \mathbb{V}(\mathbb{B}_1)}} \phi_{\mathbb{B}_1}^{\text{GRC}}(f|\cdot) \right) = \phi \left(g \phi_{\mathbb{B}_1}^{\text{GRC}}(f|\cdot) \right).$$

Fazendo $\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d$ em (315) e usando estes dois limites, obtemos

$$\phi \left(g \phi_{\mathbb{B}_1}^{\text{GRC}}(f|\cdot) \right) = \lim_{\mathbb{B} \uparrow \mathbb{B}(\mathbb{Z}^d)} \int \phi(d\eta) \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}} \left(g \phi_{\mathbb{B}_1}^{\text{GRC}}(f|\cdot) \Big| \eta_{\mathbb{B}^c} \right).$$

Combinando a identidade acima com (314), obtemos

$$\phi(gf) = \phi \left(g \phi_{\mathbb{B}_1}^{\text{GRC}}(f|\cdot) \right),$$

para toda função limitada g que depende unicamente sobre as configurações $\eta_{\mathbb{B}_1^c}$. Da unicidade quase certa da esperança condicional com respeito a ϕ , segue a prova. \square

5.7 UNICIDADE E AUSÊNCIA DE PERCOLAÇÃO

Relembremos que por definição (285), $S(\sigma, \eta)$ é o conjunto de valores possíveis assumidos pelos spins sobre um aglomerado infinito na configuração (σ, η) . Em seguida, formulamos o seguinte lema, o qual nos dá condições suficientes para que a RC marginal de uma medida de Gibbs ES seja um estado de Gibbs RC.

Lema 5.34. *Seja $\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$ uma medida de probabilidade com $\nu(|S| \leq 1) = 1$ e seja ϕ sua RC marginal. Então, $\phi \in \mathcal{G}^{\text{RC}}$.*

Demonstração. Dado $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)$ com $|\mathbb{B}| < \infty$, seja f uma função cilíndrica com suporte em \mathbb{B} . Desejamos provar que a RC marginal ϕ de ν satisfaz a condição DLR, isto é, $\phi(f) = \int \mu(d\eta) \phi_{\mathbb{B}}^{\text{RC}}(f|\eta_{\mathbb{B}^c})$. Note que uma condição suficiente para provar isso é provar que

$$\phi(f|\eta_{\mathbb{B}^c}) = \phi_{\mathbb{B}}^{\text{RC}}(f|\eta_{\mathbb{B}^c}), \quad (316)$$

pois basta integrar com respeito à medida μ esta igualdade e usar a propriedade da torre das esperanças condicionais para obter-se a identidade anterior. Na direção de provar (316), para cada $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)}$ defina a configuração projeção sobre \mathbb{B} por $\eta \mapsto \pi_{\mathbb{B}}(\eta) = \eta_{\mathbb{B}}$. Fixada uma configuração $\bar{\eta}$, por abuso de linguagem escreveremos $\{\pi_{\mathbb{B}} = \bar{\eta}_{\mathbb{B}}\}$ para nos referirmos ao evento cilíndrico $\{\eta : \pi_{\mathbb{B}}(\eta) = \bar{\eta}_{\mathbb{B}}\}$. Seja f uma função cilíndrica com suporte em \mathbb{B} . Para todo Δ tal que $\Delta \supset \mathbb{V}(\mathbb{B})$, $\mathbb{B}^* \subset \mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d) \setminus \mathbb{B} = \mathbb{B}^c$ e toda configuração $\bar{\eta}_{\mathbb{B}^*}$, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\{\pi_{\mathbb{B}^*} = \bar{\eta}_{\mathbb{B}^*}\}} \nu(d\hat{\eta}) \int \nu(d\sigma, d\eta_{\mathbb{B}} | \hat{\eta}_{\mathbb{B}^c}) \nu(f | \sigma_{\Delta^c}, \hat{\eta}_{\mathbb{B}^c}) &= \int_{\{\pi_{\mathbb{B}^*} = \bar{\eta}_{\mathbb{B}^*}\}} \nu(d\hat{\eta}) \nu(\nu(f|\cdot) | \hat{\eta}_{\mathbb{B}^c}) \\ &= \int \nu(d\hat{\eta}) \nu \left(\mathbb{1}_{\{\pi_{\mathbb{B}^*} = \bar{\eta}_{\mathbb{B}^*}\}} \nu(f|\cdot) \middle| \hat{\eta}_{\mathbb{B}^c} \right), \end{aligned}$$

onde esta última igualdade acontece pelo fato de que $\mathbb{1}_{\{\pi_{\mathbb{B}^*} = \bar{\eta}_{\mathbb{B}^*}\}} \in \mathcal{F}_{\mathbb{B}^c}$. Por outro lado, por propriedade de esperança condicional e desde que $\mathbb{1}_{\{\pi_{\mathbb{B}^*} = \bar{\eta}_{\mathbb{B}^*}\}} \in \mathcal{F}_{\Delta^c} \times \mathcal{F}_{\mathbb{B}^c}$, reescrevemos a igualdade acima como

$$\begin{aligned} &= \int \nu(d\hat{\eta}) \mathbb{1}_{\{\pi_{\mathbb{B}^*} = \bar{\eta}_{\mathbb{B}^*}\}} \nu(f | \sigma_{\Delta^c}, \hat{\eta}_{\mathbb{B}^c}) = \int \nu(d\hat{\eta}) \nu(\mathbb{1}_{\{\pi_{\mathbb{B}^*} = \bar{\eta}_{\mathbb{B}^*}\}} f | \sigma_{\Delta^c}, \hat{\eta}_{\mathbb{B}^c}) \\ &= \int_{\{\pi_{\mathbb{B}^*} = \bar{\eta}_{\mathbb{B}^*}\}} \nu(d\hat{\eta}) f(\cdot, \hat{\eta}). \end{aligned}$$

Juntando as identidades acima, por definição de esperança condicional obtemos ν -q.c. que

$$\nu(f | \eta_{\mathbb{B}^c}) = \int \nu(d\sigma, d\eta_{\mathbb{B}} | \eta_{\mathbb{B}^c}) \nu(f | \sigma_{\Delta^c}, \eta_{\mathbb{B}^c}). \quad (317)$$

Dado $\eta_{\mathbb{B}^c}$, pode-se tomar Δ suficientemente grande, de modo que não existam aglomerados finitos $C(\eta_{\mathbb{B}^c})$ conectando $\mathbb{V}(\mathbb{B})$ a Δ^c . Com esta escolha, por um simples cálculo, veja que $\nu(f | \sigma_{\Delta^c}, \eta_{\mathbb{B}^c}) = \phi_{\mathbb{B}}^{\text{RC}}(f | \eta_{\mathbb{B}^c})$ para cada função cilíndrica f com suporte em \mathbb{B} , pois, pela assunção do lema, todos os aglomerados infinitos quase certamente tem a mesma cor. Desde que \mathbb{B} é arbitrário, substituindo esta identidade em (317), obtemos

$$\nu(f | \eta_{\mathbb{B}^c}) = \int \nu(d\sigma, d\eta_{\mathbb{B}} | \eta_{\mathbb{B}^c}) \phi_{\mathbb{B}}^{\text{RC}}(f | \eta_{\mathbb{B}^c}) = \phi_{\mathbb{B}}^{\text{RC}}(f | \eta_{\mathbb{B}^c}) \int \nu(d\sigma, d\eta_{\mathbb{B}} | \eta_{\mathbb{B}^c}) = \phi_{\mathbb{B}}^{\text{RC}}(f | \eta_{\mathbb{B}^c}).$$

Mas como ϕ é RC marginal de ν , $\phi(f | \eta_{\mathbb{B}^c}) = \nu(f | \eta_{\mathbb{B}^c})$. Substituindo este fato na igualdade acima, temos $\phi(f | \eta_{\mathbb{B}^c}) = \phi_{\mathbb{B}}^{\text{RC}}(f | \eta_{\mathbb{B}^c})$, o que prova (316) e, portanto, a conclusão do lema. \square

Lema 5.35. *As medidas $\phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}}$ e $\phi_{\text{max}}^{\text{GRC}}$ são fortemente mixing e, em particular, ergódicas com respeito às translações em quaisquer das direções principais do látice.*

Demonstração. Seja τ a translação em uma das direções principais do látice (veja Definição 2.1). Pela Proposição .32 (do Apêndice), para que a medida $\phi_{\text{max}}^{\text{GRC}}$ seja fortemente mixing é suficiente provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\text{max}}^{\text{GRC}}(f \cdot g \circ \tau^n) = \phi_{\text{max}}^{\text{GRC}}(f) \phi_{\text{max}}^{\text{GRC}}(g), \quad \forall f, g \in L^2(\Omega). \quad (318)$$

Como o espaço das funções contínuas $C(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, será suficiente provar (318) para toda função $f, g \in C(\Omega)$. Por outro lado, uma vez que toda função quase-local pode ser aproximada uniformemente por funções cilíndricas, por argumentos padrões de convergência, é suficiente provar (318) para funções cilíndricas. Daí, como Ω tem

um ordem parcial natural, restringiremos a prova de (318) para funções cilíndricas crescentes (no sentido FKG).

Seja $\Delta \in \mathcal{L}$ com complementar Δ^c conexo e sejam f, g duas funções cilíndricas crescentes não negativas com suporte em $\mathbb{B}(\Delta)$. Defina $g_n \equiv g \circ \tau^n$ e $\Delta_n \equiv \tau^n(\Delta)$. Logo, o produto $f g_n$, também, é crescente. Daí, $\forall n \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathbb{B}(\Delta) \cap \mathbb{B}(\Delta_n) = \emptyset$ e $\forall \Lambda \supset \Delta \cup \Delta_n$, temos

$$\begin{aligned} \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(f \cdot g_n) &= \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(f \cdot g_n | \eta_{\mathbb{B}(\Lambda) \setminus \mathbb{B}_0(\Lambda)} = 1) \leq \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(f \cdot g_n | \eta_{\mathbb{B}(\Lambda) \setminus (\mathbb{B}(\Delta) \cup \mathbb{B}(\Delta_n))} = 1) \\ &= \phi_{\Delta \cup \Delta_n, \max}^{\text{GRC}}(f \cdot g_n) = \phi_{\Delta, \max}^{\text{GRC}}(f) \phi_{\Delta_n, \max}^{\text{GRC}}(g_n) \\ &= \phi_{\Delta, \max}^{\text{GRC}}(f) \phi_{\Delta, \max}^{\text{GRC}}(g_n), \end{aligned}$$

onde, na desigualdade, usamos o Corolário 5.10. Em seguida, fazendo $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ seguido de $n \rightarrow \infty$ e $\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d$, obtemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \phi_{\max}^{\text{GRC}}(f \cdot g \circ \tau^n) \leq \phi_{\max}^{\text{GRC}}(f) \phi_{\max}^{\text{GRC}}(g).$$

A desigualdade contrária segue da desigualdade FKG, logo, a propriedade mixing forte é estabelecida para a medida ϕ_{\max}^{GRC} . O caso quando a condição de fronteira é livre é completamente análogo, neste caso se necessita tomar f e g positivas decrescentes.

Para provar a ergodicidade dessas medidas, o argumento feito aqui será apresentado bem geral. Suponha que a medida ϕ satisfaz a propriedade mixing forte. Para cada evento invariante por translações A , veja que

$$\phi(A) = \phi(A \cap \tau^{-n}A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi(A)^2.$$

Daí, segue que $\phi(A) = \phi(A)^2$, portanto, $\phi(A) \in \{0, 1\}$. Assim ϕ é ergódica. \square

Antes de formular os seguintes dois resultados, por simplicidade de apresentação, introduzimos as seguintes definições:

$$\mathcal{A}_{1,m}^\infty \equiv \{N_\infty = 1 \text{ e } \sigma_x = m \ \forall x \in C_\infty\} \quad \text{e} \quad \mathcal{G}_{1,m}^{\text{ES}} \equiv \{v \in \mathcal{G}^{\text{ES}} : v(\mathcal{A}_{1,m}^\infty) = 1\}.$$

Para um aglomerado finito C na configuração η , definimos a medida

$$\pi_C(\sigma_C) = \sum_m \left(\frac{e^{-\beta h_m |C|}}{\Theta_{\text{livre}}(C)} \prod_{x \in C} \delta_{\sigma_x, m} \right).$$

Para cada $m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$ definimos, também, a medida a volume infinito

$$v_m(\sigma | \eta) = \prod_{C(\eta): |C(\eta)| < \infty} \pi_{C(\eta)}(\sigma_{C(\eta)}) \prod_{x \leftrightarrow \infty} \delta_{\sigma_x, m}.$$

Lema 5.36. *Sejam $m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$ e $\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$ com $\nu(S \subseteq \{m\}) = 1$. Seja ϕ uma RC marginal de ν . Logo, para cada função cilíndrica f de σ e η*

$$\nu(f) = \int \phi(d\eta) \nu_m(f|\eta).$$

Em particular, se $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{G}_{1,m}^{\text{ES}}$ são duas medidas com a mesma RC marginal, então $\nu_1 = \nu_2$.

Demonstração. Seja f uma função cilíndrica com suporte em $(\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda))$. Como foi argumentado no Lema 5.34 com $\mathbb{B} = \emptyset$, para ν -q.c., pode-se encontrar $\Delta \supset \Lambda$ suficientemente grande tal que $\nu(f|\sigma_{\Delta^c}, \eta)$ não dependa de σ_{Δ^c} , de onde pode-se verificar que $\nu(f|\sigma_{\Delta^c}, \eta) = \nu_m(f|\eta)$. Substituindo esta igualdade em (317), obtemos

$$\nu(f|\eta) = \int \nu(d\sigma, \cdot|\eta) \nu_m(f|\eta) = \nu_m(f|\eta) \int \nu(d\sigma, \cdot|\eta) = \nu_m(f|\eta).$$

Integrando a igualdade acima com respeito a ν , temos

$$\nu(f) = \nu(\nu(f|\eta)) = \int \nu(d\sigma, d\eta) \nu_m(f|\eta) = \int \phi(d\eta) \nu_m(f|\eta),$$

onde, na primeira igualdade, usamos propriedade de esperança condicional e, na última identidade, usamos o fato de que $\nu_m(f|\eta)$ é uma função que depende unicamente de η e que ϕ é RC marginal de ν . \square

Com estes lemas a nossa disposição provamos o seguinte teorema, o qual nos dá informação sobre o comportamento da cardinalidade das medidas de Gibbs tanto RC como ES nas fases $J \neq J_c$. Já na fase $J > J_c$, é esperado a existência de mais de uma medida de Gibbs ES quando a constante de acoplamento J é suficientemente grande. O Item (iii) do próximo resultado nos afirma que existem, na verdade, tantos estados de Gibbs ES como a cardinalidade do conjunto $\mathcal{Q}_{\max}(h)$. Isso motiva a fazermos as seguintes perguntas: no caso de que $|\mathcal{Q}_{\max}(h)| = 1$, será que teremos uma única medida de Gibbs ES?, o modelo RC tem o mesmo comportamento? Um resultado parcial (baseado sobre a dimensão da rede) nesta direção será dado na Seção 5.9.

Teorema 5.37. *Seja $\beta \geq 0$ e $h_m \in \mathbb{R}, m = 1, \dots, q$.*

(i) *Para todo $J \geq 0$, existe, no máximo, uma medida de Gibbs de ES que não possui a propriedade do ∞ /aglomerado-infinito (veja definição em (116)).*

(ii) *Se $P_\infty(\beta, J, h) = 0$, então $|\mathcal{G}^{\text{ES}}| = |\mathcal{G}^{\text{RC}}| = 1$. Em particular, $|\mathcal{G}^{\text{ES}}| = |\mathcal{G}^{\text{RC}}| = 1$ se $J < J_c$.*

(iii) Se $P_\infty(\beta, J, h) > 0$, então as medidas ϕ_m^{ES} , $m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$ são estados de Gibbs extremais-invariantes por translações com $\phi_m^{\text{ES}}(\mathcal{A}_{1,m}^\infty) = 1$. Em particular, existe no mínimo $q_0 = |\mathcal{Q}_{\max}(h)|$ estados de Gibbs diferentes extremais-invariantes por translações.

Demonstração. (i) Provaremos que para qualquer medida $\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$ que não exibe percolação é igual à medida limite $\phi_{\text{livre}}^{\text{ES}}$, cuja existência foi estabelecido no Teorema 5.12. De fato, seja $\nu \in \mathcal{G}_0^{\text{ES}}$ uma medida que não possui a propriedade do ∞ /aglomerado-infinito e $\{\Delta_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência cofinal (no sentido da Definição 4.8) de subconjuntos de \mathbb{V} . Logo, a sequência de conjuntos aleatórios $\{\Lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ definido por

$$\Lambda_n(\eta) \equiv \{x \in \Delta_n : x \not\leftrightarrow \Delta_n^c \text{ in } \eta\},$$

também é crescente. Note que o conjunto Λ_n está bem definido devido à ausência de aglomerados infinitos. Pelo Teorema 6.2, dado $\epsilon > 0$, pode-se tomar Δ suficientemente grande, de modo que, para cada função f com suporte em $(\Delta, \mathbb{B}_0(\Delta))$, se tenha

$$|\phi_{\mathbb{V}, \text{livre}}^{\text{ES}}(f) - \phi_{\text{livre}}^{\text{ES}}(f)| \leq \epsilon, \quad \forall \mathbb{V} \supset \Delta. \quad (319)$$

Por outro lado, observe que

$$\nu(f) = \nu(f \cdot \mathbb{1}_{\{\Lambda_n(\cdot) \not\supset \Delta\}}) + \nu(f \cdot \mathbb{1}_{\{\Lambda_n(\cdot) \supset \Delta\}}) = \nu(f \cdot \mathbb{1}_{\{\Lambda_n(\cdot) \not\supset \Delta\}}) + \sum_{\bar{\Lambda}_n(\cdot) \supset \Delta} \nu(f \cdot \mathbb{1}_{\{\Lambda_n(\cdot) = \bar{\Lambda}_n\}}).$$

Por usar as equações DLR e sua versão equivalente de esperanças condicionais para a especificação $\{\phi_{\Lambda, \mathbb{B}_0(\Lambda)}^{\text{ES}} : \Lambda \in \mathcal{L}\}$ (veja equação (206)), a expressão acima pode reescrever-se como

$$\begin{aligned} &= \nu(f \cdot \mathbb{1}_{\{\Lambda_n(\cdot) \not\supset \Delta\}}) + \sum_{\bar{\Lambda}_n(\cdot) \supset \Delta} \nu(\phi_{\bar{\Lambda}_n, \mathbb{B}_0(\bar{\Lambda}_n)}^{\text{ES}}(f \cdot \mathbb{1}_{\{\Lambda_n(\cdot) = \bar{\Lambda}_n\}} | \cdot)) \\ &= \nu(f \cdot \mathbb{1}_{\{\Lambda_n(\cdot) \not\supset \Delta\}}) + \sum_{\bar{\Lambda}_n(\cdot) \supset \Delta} \nu(\nu(f \cdot \mathbb{1}_{\{\Lambda_n(\cdot) = \bar{\Lambda}_n\}} | \mathcal{F}_{\bar{\Lambda}_n, \mathbb{B}_0(\bar{\Lambda}_n)}^c)). \end{aligned}$$

Note que, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo, a variável aleatória $\mathbb{1}_{\{\Lambda_n(\cdot) = \bar{\Lambda}_n\}}$ depende unicamente dos estados dos sítios e arestas em $(\bar{\Lambda}_n, \mathbb{B}_0(\bar{\Lambda}_n))$, logo, esta variável aleatória é independente da σ -álgebra $\mathcal{F}_{\bar{\Lambda}_n, \mathbb{B}_0(\bar{\Lambda}_n)}^c$. Daí, a última expressão acima pode-se reescrever como

$$\begin{aligned} &= \nu(f \cdot \mathbb{1}_{\{\Lambda_n(\cdot) \not\supset \Delta\}}) + \sum_{\bar{\Lambda}_n(\cdot) \supset \Delta} \nu(\mathbb{1}_{\{\Lambda_n(\cdot) = \bar{\Lambda}_n\}} \nu(f | \mathcal{F}_{\bar{\Lambda}_n, \mathbb{B}_0(\bar{\Lambda}_n)}^c)) \\ &= \nu(f \cdot \mathbb{1}_{\{\Lambda_n(\cdot) \not\supset \Delta\}}) + \sum_{\bar{\Lambda}_n(\cdot) \supset \Delta} \nu(\mathbb{1}_{\{\Lambda_n(\cdot) = \bar{\Lambda}_n\}} \phi_{\bar{\Lambda}_n, \mathbb{B}_0(\bar{\Lambda}_n)}^{\text{ES}}(f | \cdot)) \\ &= \nu(f \cdot \mathbb{1}_{\{\Lambda_n(\cdot) \not\supset \Delta\}}) + \sum_{\bar{\Lambda}_n(\cdot) \supset \Delta} \nu(\mathbb{1}_{\{\Lambda_n(\cdot) = \bar{\Lambda}_n\}} \phi_{\bar{\Lambda}_n, \text{livre}}^{\text{ES}}(f)), \end{aligned}$$

onde, na segunda desigualdade, usamos outra vez a versão equivalente de esperança condicional para a especificação $\{\phi_{\Lambda, B_0(\Lambda)}^{\text{ES}} : \Lambda \in \mathcal{L}\}$, no entanto, na última desigualdade usamos a definição da medida $\phi_{\Lambda_n, \text{livre}}^{\text{ES}}$. Resumindo os passos feitos acima, temos a seguinte identidade

$$\nu(f) = \nu(f \cdot \mathbb{1}_{\{\Lambda_n(\cdot) \not\supset \Delta\}}) + \sum_{\bar{\Lambda}_n(\cdot) \supset \Delta} \nu(\mathbb{1}_{\{\Lambda_n(\cdot) = \bar{\Lambda}_n\}} \phi_{\Lambda_n, \text{livre}}^{\text{ES}}(f)). \quad (320)$$

Combinando as identidades (319) e (320), temos

$$\begin{aligned} \nu(f \cdot \mathbb{1}_{\{\Lambda_n(\cdot) \not\supset \Delta\}}) + [\phi_{\text{livre}}^{\text{ES}}(f) - \epsilon] \nu(f \mathbb{1}_{\{\Lambda_n(\cdot) \supset \Delta\}}) &\leq \nu(f) \\ &\leq \nu(f \cdot \mathbb{1}_{\{\Lambda_n(\cdot) \not\supset \Delta\}}) + [\phi_{\text{livre}}^{\text{ES}}(f) + \epsilon] \nu(f \cdot \mathbb{1}_{\{\Lambda_n(\cdot) \supset \Delta\}}). \end{aligned} \quad (321)$$

Desde que a sequência $\{\Lambda_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$ é crescente, a sequência $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, com $A_n \equiv \{\Lambda_n(\cdot) \supset \Delta\}$, também é crescente. Portanto, $\mathbb{1}_{A_n} \uparrow 1$. Como f é limitada, tomando $n \uparrow \infty$ em (321) e usando o Teorema da convergência Dominada, tem-se

$$|\nu(f) - \phi_{\text{livre}}^{\text{ES}}(f)| \leq \epsilon.$$

Desde que $\epsilon > 0$ foi arbitrário, concluímos a prova deste item.

(ii) Pelo Corolário 5.18 sabe-se que $P_\infty(\beta, J, h) = \phi_{\text{max}}^{\text{GRC}}(|C_0| = \infty)$. Desde que $P_\infty(\beta, J, h) = 0$ temos $\phi_{\text{max}}^{\text{RC}}(|C_0| = \infty) = 0$. Veja que

$$\{N_\infty \geq 1\} \subseteq \{\text{existe pelo menos um aglomerado infinito}\} = \cup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{|C_x| = \infty\} \quad (322)$$

e que o evento $\cup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{|C_x| = \infty\}$ é invariante por translações, pois uma translação de \mathbb{Z}^d leva aglomerados infinitos em aglomerados infinitos na configuração trasladada, por causa da invariância translacional da rede hipercúbica \mathbb{L}^d . Desde que $\phi_{\text{max}}^{\text{RC}}(|C_0| = \infty) = 0$, pela relação (322) e pelo comentário feito em linhas acima (sob invariância), temos $\phi_{\text{max}}^{\text{RC}}(N_\infty \geq 1) = 0$.

Pelo Lema 5.3, Item (ii), $\phi_{\text{max}}^{\text{RC}}$ é η -marginal da medida $\phi_{\text{max}}^{\text{ES}}$, logo,

$$\phi_{\text{max}}^{\text{ES}}(N_\infty \geq 1) = \phi_{\text{max}}^{\text{RC}}(N_\infty \geq 1) = 0,$$

pois aqui $\{N_\infty \geq 1\} = \{\eta : N_\infty(\eta) \geq 1\}$ é um evento que não depende da configuração de spins σ . Seja ϕ_ν a η -marginal de $\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$. Como $\{N_\infty \geq 1\}$ é um evento crescente no sentido FKG, pelo Teorema 5.23 temos

$$\phi_\nu(N_\infty \geq 1) \leq \phi_{\text{max}}^{\text{RC}}(N_\infty \geq 1) = 0.$$

Somando em η , na desigualdade acima temos

$$\nu(N_\infty \geq 1) \leq \phi_{\max}^{\text{RC}}(N_\infty \geq 1) = 0.$$

Isto é, $\nu(N_\infty = 0) = 1$ para cada $\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$, portanto, pelo Item (i), $\mathcal{G}^{\text{ES}} = \{\phi_{\text{livre}}^{\text{ES}}\}$.

Por outro lado, $\phi_{\max}^{\text{RC}}(N_\infty \geq 1) = 0$ implica que o mesmo é verdade para todo $\phi \in \mathcal{G}^{\text{RC}}$ pelo Teorema 5.14. Repetindo o mesmo argumento na prova do Item (i) deste teorema para a medida RC ϕ e usando o Teorema 5.33 para garantir a versão de esperança condicional para as medidas RC, conseguimos que $\phi = \phi_{\text{livre}}^{\text{RC}}$ para toda medida de Gibbs $\phi \in \mathcal{G}^{\text{RC}}$, o que implica que $\mathcal{G}^{\text{RC}} = \{\phi_{\text{livre}}^{\text{RC}}\}$.

Em particular, se $J < J_c$, por definição (246) do parâmetro crítico J_c , temos $P_\infty(\beta, J, h) = 0$, pelo provado acima, conclui-se que $|\mathcal{G}^{\text{ES}}| = |\mathcal{G}^{\text{RC}}| = 1$.

(iii) Para provar este item, primeiro provaremos que

$$\phi_m^{\text{ES}}(\sigma_x = \tilde{m} | x \leftrightarrow \infty) = \delta_{m, \tilde{m}}, \quad (323)$$

previsto que $P_\infty(\beta, J, h) > 0$ e $m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$. Para provar (323), pela equação (269) é sabido que

$$\phi_{\max}^{\text{RC}}(0 \leftrightarrow \infty) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, \max}^{\text{RC}}(0 \leftrightarrow \Lambda^c).$$

Desde que ϕ_{\max}^{RC} é η -marginal da medida ϕ_m^{ES} para cada $m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$, e o evento $\{0 \leftrightarrow \infty\}$ não depende da configuração de spins σ , da igualdade acima, para cada $m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$ e $x \in \mathbb{Z}^d$, temos

$$\phi_m^{\text{ES}}(x \leftrightarrow \infty) = \phi_m^{\text{ES}}(0 \leftrightarrow \infty) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \phi_{\Lambda, m}^{\text{ES}}(0 \leftrightarrow \Lambda^c).$$

Como $\phi_{\Lambda, m}^{\text{ES}}(0 \leftrightarrow \Lambda^c, \sigma_x = \tilde{m}) = \phi_{\Lambda, m}^{\text{ES}}(0 \leftrightarrow \Lambda^c) \cdot \delta_{m, \tilde{m}}$, fazendo $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ e usando a identidade acima, temos $\phi_m^{\text{ES}}(x \leftrightarrow \infty, \sigma_x = \tilde{m}) = \phi_m^{\text{ES}}(x \leftrightarrow \infty) \cdot \delta_{m, \tilde{m}}$, o que prova (323).

Em seguida mostraremos que, para cada $m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$, a medida de Gibbs ϕ_m^{ES} é extremal. Para este fim, assumiremos que ϕ_m^{ES} admita a seguinte decomposição

$$\phi_m^{\text{ES}} = \lambda \nu_1 + (1 - \lambda) \nu_2, \quad (324)$$

com $\nu_1(\mathcal{A}_{1, m}^\infty) = \nu_2(\mathcal{A}_{1, m}^\infty) = 1$ e $\lambda \in (0, 1)$, isto é, estamos assumindo que as medidas $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{G}_{1, m}^{\text{ES}} = \{\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}} : \nu(\mathcal{A}_{1, m}^\infty) = 1\}$. Sejam ϕ_{ν_1} e ϕ_{ν_2} as RC marginais de ν_1 e ν_2 , respectivamente. Pelo Lema 5.34 $\phi_{\nu_1}, \phi_{\nu_2} \in \mathcal{G}^{\text{RC}}$, implicando que (324) induz a seguinte decomposição

$$\phi_{\max}^{\text{RC}} = \lambda \phi_{\nu_1} + (1 - \lambda) \phi_{\nu_2}.$$

No entanto, pelo Lema 5.35, ϕ_{\max}^{RC} é uma medida extremal, o que implica que $\phi_{\nu_1} = \phi_{\nu_2} = \phi_{\max}^{\text{RC}}$. Usando o Lema 5.36, isto implica que $\nu_1 = \nu_2$, isto é, para cada $m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$ a medida ϕ_m^{ES} é extremal.

Provaremos que $\phi_m^{\text{ES}}(\mathcal{A}_{1,m}^\infty) = 1$, para isso suponha que $P_\infty(\beta, J, h) > 0$. Como ϕ_{\max}^{RC} atinge o supremo da definição de P_∞ , temos

$$0 < P_\infty(\beta, J, h) = \phi_{\max}^{\text{RC}}(|C_0| = \infty) \leq \phi_{\max}^{\text{RC}}(N_\infty \geq 1).$$

Como ϕ_{\max}^{RC} é um estado de Gibbs extremal e $\{N_\infty \geq 1\}$ é um evento caudal, da desigualdade acima e da unicidade do aglomerado infinito (veja Teorema 5.25), para cada $m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$ segue que $\phi_{\max}^{\text{RC}}(N_\infty = 1) = \phi_m^{\text{ES}}(N_\infty = 1) = 1$.

Por outro lado, aproveitando a unicidade (quase certa) do aglomerado infinito, pelo Lema 5.30 (ii) temos que $\phi_{\max}^{\text{RC}}(\mathcal{M}_\Lambda) = 1, \forall \Lambda \in \mathcal{L}$, onde \mathcal{M}_Λ denota o evento composto por todas as configurações que apresentam, no máximo, um aglomerado infinito incidente com Λ . Em particular obtemos que

$$\phi_{\max}^{\text{RC}}(x \leftrightarrow \infty) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d.$$

Logo, usando a identidade acima, (323) e a inclusão

$$\{\sigma_x = m, x \leftrightarrow \infty\} \subset \{N_\infty \geq 1, \sigma_x = m \forall x \in C_\infty\},$$

para cada $m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$ conseguimos

$$\begin{aligned} 1 = \phi_m^{\text{ES}}(\sigma_x = m | x \leftrightarrow \infty) &= \frac{\phi_m^{\text{ES}}(\sigma_x = m, x \leftrightarrow \infty)}{\phi_{\max}^{\text{RC}}(x \leftrightarrow \infty)} \\ &\leq \frac{\phi_m^{\text{ES}}(N_\infty = 1, \sigma_x = m \forall x \in C_\infty)}{\phi_{\max}^{\text{RC}}(x \leftrightarrow \infty)} \\ &\leq \phi_m^{\text{ES}}(\mathcal{A}_{1,m}^\infty), \end{aligned}$$

o que conclui a prova do teorema. □

Observação 5.38. Dado que o Teorema 5.33 é enunciado para o modelo GRC, a prova de (ii) permanece válida para o modelo GRC. Isto é, todos os estados de Gibbs GRC são iguais à medida $\phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}}$, se $P_\infty(\beta, J, h) = 0$. Isto implica que $\mathcal{G}^{\text{GRC}} = \{\phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}}\}$, sempre que $P_\infty(\beta, J, h) = 0$.

5.8 APLICAÇÕES ENTRE MEDIDAS DE GIBBS: ES, SPIN E RC

Se $\mathcal{G}^{\text{SPIN}}$ denota o conjunto de todos os estados de Gibbs SPINS, definidos pelo Hamiltoniano (219), denotaremos por Π_S a aplicação que faz corresponder a SPIN marginal para cada medida de Gibbs ES (a volume infinito). A priori, não é obvio que a SPIN marginal de qualquer estado de Gibbs ES é um estado de Gibbs SPIN a volume infinito. Isto e um pouco mais é provado no seguinte teorema.

Teorema 5.39. *Seja $\Pi_S : \mathcal{G}^{\text{ES}} \rightarrow \mathcal{G}^{\text{SPIN}}$ uma aplicação que assina a σ -marginal (ou spin-marginal) a cada medida de ES a volume infinito. Logo, Π_S é um isomorfismo linear. Em particular, $|\mathcal{G}^{\text{ES}}| = 1$ se, e somente se, $|\mathcal{G}^{\text{SPIN}}| = 1$.*

Demonstração. Seja $\phi_\Lambda^{\text{SPIN}}(\cdot | \sigma_{\Lambda^c})$ a medida de Gibbs sobre os spins no volume Λ com condição de fronteira σ_{Λ^c} , como foi definido em (220). Seja $\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$, z uma função dependendo unicamente dos estados dos spins em \mathbb{Z}^d (ou de um subconjunto de \mathbb{Z}^d) e ϕ_ν^{SPIN} a σ -marginal (ou spin-marginal) da medida $\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$. Por definição da aplicação Π_S e de marginal de uma medida (nesse ordem), temos

$$(\Pi_S \nu)(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \phi_\nu^{\text{SPIN}}(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \int \nu(d\sigma, d\eta) z(\sigma, \cdot) = \nu(z). \quad (325)$$

Primeiro, provaremos que a aplicação $\Pi_S : \mathcal{G}^{\text{ES}} \rightarrow \mathcal{G}^{\text{SPIN}}$ está bem definida. De fato, sejam $\Lambda \in \mathcal{L}$ e g uma função dependendo unicamente dos estados dos spins em Λ . Pela condição DLR definida em (205) e pelo Lema 5.4, temos

$$\begin{aligned} (\Pi_S \nu)(g) &\stackrel{(325)}{=} \nu(g) \stackrel{\text{DLR}}{=} \int \nu(d\sigma, d\eta) \phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(g | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) \\ &= \int \nu(d\sigma, d\eta) \phi_\Lambda^{\text{SPIN}}(g | \sigma_{\Lambda^c}) \\ &= \int (\Pi_S \nu)(d\sigma) \phi_\Lambda^{\text{SPIN}}(g | \sigma_{\Lambda^c}) = (\Pi_S \nu)(\phi_\Lambda^{\text{SPIN}}(g | \cdot)), \end{aligned}$$

o que implica que $(\Pi_S \nu) \in \mathcal{G}^{\text{SPIN}}$. Logo, a aplicação Π_S está bem definida.

A seguir, provaremos que a aplicação Π_S é sobrejetiva. De fato, note que o conjunto $\{(\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)) : \Lambda \in \mathcal{L}\}$ é cofinal (segundo a Definição 4.8) no conjunto de índices $\{(\Lambda, \mathbb{B}) : \Lambda \in \mathcal{L}\}$, desde que para cada par (Λ, \mathbb{B}) existe $\Lambda_0 \in \mathcal{L}$ tal que $\Lambda_0 \supset \Lambda$ e $\mathbb{B}(\Lambda_0) \supset \mathbb{B}$. Pelo teorema da caracterização do conjunto \mathcal{G}^{ES} (veja Teorema 4.5), a

validade da equação DLR para os pares $(\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda))$ implica sua validade para o par geral (Λ, \mathbb{B}) .

Agora, seja $\mu \in \mathcal{G}^{\text{SPIN}}$ e considere a seguinte medida ES

$$\nu_\Lambda(\cdot) \equiv \int \mu(d\sigma) \phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(\cdot | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) \quad (326)$$

sobre o conjunto de configurações em $(\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda))$. Lembremos que, por definição da especificação $\{\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}} : \Lambda \in \mathcal{L}\}$, esta não depende de $\eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}$, logo, ν_Λ também não depende de $\eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}$. Portanto, a configuração $\eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}$ é adicionada em (326) por pura formalidade. Por usar a consistência da especificação $\{\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}} : \Lambda \in \mathcal{L}\}$, para cada $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$, $\tilde{\mathbb{B}} \subset \mathbb{B}(\Lambda)$ tem-se

$$\begin{aligned} \nu_\Lambda(f) &= \int \mu(d\bar{\sigma}) \phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(f | \bar{\sigma}_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) \\ &= \int \mu(d\bar{\sigma}) \left[\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}} \phi_{\tilde{\Lambda}, \tilde{\mathbb{B}}}^{\text{ES}}(f | \bar{\sigma}_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) \right] \\ &= \int \mu(d\bar{\sigma}) \left[\int \phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(d\sigma, d\eta | \bar{\sigma}_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) \phi_{\tilde{\Lambda}, \tilde{\mathbb{B}}}^{\text{ES}}(f | \sigma_{\tilde{\Lambda}^c}, \eta_{\tilde{\mathbb{B}}^c}) \right], \end{aligned}$$

onde f é uma função cilíndrica com suporte em $\tilde{\Lambda} \times \tilde{\mathbb{B}}$. Usando o Teorema de Fubini-Tonelli (veja Apêndice, Teorema .24), a igualdade acima pode-se reescrever

$$\begin{aligned} &= \int \left[\int \mu(d\bar{\sigma}) \phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(d\sigma, d\eta | \bar{\sigma}_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) \right] \phi_{\tilde{\Lambda}, \tilde{\mathbb{B}}}^{\text{ES}}(f | \sigma_{\tilde{\Lambda}^c}, \eta_{\tilde{\mathbb{B}}^c}) \\ &= \int \nu_\Lambda(d\sigma, d\eta) \phi_{\tilde{\Lambda}, \tilde{\mathbb{B}}}^{\text{ES}}(f | \sigma_{\tilde{\Lambda}^c}, \eta_{\tilde{\mathbb{B}}^c}), \end{aligned}$$

onde, na igualdade acima, usamos a definição da medida $\nu_\Lambda(\cdot)$. Juntando as identidades acima, vemos que a medida $\nu_\Lambda(\cdot)$ satisfaz as equações DLR restritas:

$$\nu_\Lambda(f) = \int \nu_\Lambda(d\sigma, d\eta) \phi_{\tilde{\Lambda}, \tilde{\mathbb{B}}}^{\text{ES}}(f | \sigma_{\tilde{\Lambda}^c}, \eta_{\tilde{\mathbb{B}}^c}). \quad (327)$$

Sejam $\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \tilde{\Lambda}$ dois conjuntos em \mathcal{L} , então, para cada função cilíndrica f com suporte em $\tilde{\Lambda} \times \tilde{\mathbb{B}}$, se obtém

$$\begin{aligned} \nu_{\Lambda_1}(f) &= \int \mu(d\sigma) \phi_{\Lambda_1, \mathbb{B}(\Lambda_1)}^{\text{ES}}(f | \sigma_{\Lambda_1^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda_1)^c}) \\ &= \int \mu(d\sigma) \phi_{\Lambda_1, \mathbb{B}(\Lambda_1)}^{\text{ES}} \left(\phi_{\Lambda_2, \mathbb{B}(\Lambda_2)}^{\text{ES}}(f | \cdot) \Big| \sigma_{\Lambda_1^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda_1)^c} \right) \\ &= \int \mu(d\sigma) \mu_{\Lambda_1}^{\text{SPIN}} \left(\phi_{\Lambda_2, \mathbb{B}(\Lambda_2)}^{\text{ES}}(f | \cdot) \Big| \sigma_{\Lambda_1^c} \right) \\ &= \int \mu(d\sigma) \phi_{\Lambda_2, \mathbb{B}(\Lambda_2)}^{\text{ES}}(f | \sigma_{\Lambda_2^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda_2)^c}) = \nu_{\Lambda_2}(f), \end{aligned}$$

onde, na primeira e na última igualdade, usamos a definição de ν_Λ , na segunda igualdade, a consistência da especificação $\{\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}} : \Lambda \in \mathcal{L}\}$, na terceira igualdade, o fato de que $\phi_{\Lambda_1, \mathbb{B}(\Lambda_1)}^{\text{ES}}$ não depende de $\eta_{\mathbb{B}(\Lambda_1)}^c$ junto ao Lema 5.4 e, finalmente, na quarta igualdade, o fato de que $\mu \in \mathcal{G}^{\text{SPIN}}$. Daí, da identidade acima se desprende que, para Λ suficientemente grande, $\nu_\Lambda(f) = \int \nu_\Lambda(d\sigma, d\eta) f(\sigma, \eta)$ é constante para toda função cilíndrica f com suporte em $\tilde{\Lambda} \times \tilde{\mathbb{B}}$. Em particular, o limite fraco $\nu \equiv \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \nu_\Lambda$ existe. Como a especificação $\{\phi_{\tilde{\Lambda}, \tilde{\mathbb{B}}}^{\text{ES}} : \tilde{\Lambda} \subset \Lambda, \tilde{\mathbb{B}} \subset \mathbb{B}(\Lambda), \Lambda \in \mathcal{L}\}$ é quase-local, portanto, contínua e limitada, fazendo $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ em (327) tem-se

$$\nu(f) = \int \nu(d\sigma, d\eta) \phi_{\tilde{\Lambda}, \tilde{\mathbb{B}}}^{\text{ES}}(f | \sigma_{\tilde{\Lambda}^c}, \eta_{\tilde{\mathbb{B}}^c}),$$

isto é, $\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$.

Com o intuito de provar que a aplicação Π_S é sobrejetiva, para todo $\mu \in \mathcal{G}^{\text{SPIN}}$ existe $\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$ tal que para qualquer função g , dependendo unicamente dos estados dos spins em Λ , tem-se

$$\begin{aligned} (\Pi_S \nu)(g) &\stackrel{(325)}{=} \nu(g) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \nu_\Lambda(g) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \int \mu(d\sigma) \phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(g | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) \\ &= \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \int \mu(d\sigma) \phi_\Lambda^{\text{SPIN}}(g | \sigma_{\Lambda^c}) \\ &= \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \mu(g) = \mu(g), \end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade, usamos o limite fraco $\nu \equiv \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \nu_\Lambda$, na terceira igualdade a definição (326) da medida ν_Λ , na quarta igualdade o fato de que $\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}$ não depende de $\eta_{\mathbb{B}(\Lambda)}^c$ junto ao Lema 5.4 e, na quinta igualdade, o fato de que $\mu \in \mathcal{G}^{\text{SPIN}}$. Observe que, na segunda igualdade acima, pode-se haver escrito diretamente que $\nu(g) = \nu_\Lambda(g)$, pois, como vimos anteriormente, $\nu_\Lambda(g)$ é constante para Λ suficientemente grande. Isto prova a sobrejetividade de Π_S .

Por outro lado, para concluir que Π_S é um isomorfismo linear, restaria provar que Π_S é injetiva. Para isso, seja $\Pi_S \tilde{\nu} = \mu$, para todo $\tilde{\nu} \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$. Então, para cada função cilíndrica f com suporte em $\Lambda \times \mathbb{B}(\Lambda)$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}(f) &= \tilde{\nu}(\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(f | \cdot)) = (\Pi_S \tilde{\nu})(\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(f | \cdot)) \\ &= \mu(\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(f | \cdot)) \\ &= \int \mu(d\sigma) \phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(f | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) = \nu_\Lambda(f), \end{aligned}$$

onde, na primeira identidade, usamos as condições DLR, na segunda igualdade o Item (325) com $z(\sigma_{\Lambda^c}) = \phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(f|\sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c})$, na terceira igualdade usamos a assunção que $\Pi_S \tilde{\nu} = \mu$, na quarta igualdade a definição $\mu(f) = \int \mu(d\sigma) f(\sigma)$ e na quinta identidade a definição (326) da medida ν_{Λ} . Desde que f é uma função cilíndrica, f é contínua limitada (pois o espaço amostral é compacto). Fazendo $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ na identidade acima (e usando o limite fraco $\nu \equiv \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \nu_{\Lambda}$) obtemos

$$\tilde{\nu}(f) = \nu(f).$$

Isto é, se há provado que para toda medida $\tilde{\nu} \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$ satisfazendo $\Pi_S \tilde{\nu} = \mu$ se tem $\tilde{\nu} = \nu$, de onde se deduz a injetividade de Π_S . \square

Se \mathcal{G}^{RC} denota o conjunto de todos os estados de Gibbs RC, definidos em (213). Denotando por Π_{RC} a aplicação que assina uma RC marginal para cada medida de Gibbs ES a volume infinito. Salientamos que a mesma afirmação do Teorema 5.37 não é válida para a aplicação Π_{RC} , pois em dimensão $d = 2$, pelo Teorema 4.39, é conhecido que existem exatamente dois estados de Gibbs extremais no modelo de Ising abaixo da temperatura crítica e, portanto, pelo Teorema 5.37, dois estados de Gibbs ES extremais, no entanto, as correspondentes RC marginais são idênticas (veja Teorema 3.55).

Para estabelecer o próximo resultado introduzimos as seguintes notações:

$$\mathcal{G}_{\leq 1}^{\text{ES}} \equiv \{\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}} : \nu(N_{\infty} \leq 1) = 1\}, \quad \mathcal{G}_{\leq 1}^{\text{RC}} \equiv \{\phi \in \mathcal{G}^{\text{RC}} : \phi(N_{\infty} \leq 1) = 1\}$$

$$\mathcal{G}_k^{\text{ES}} \equiv \{\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}} : \nu(N_{\infty} = k) = 1\} \quad \text{e} \quad \mathcal{G}_k^{\text{RC}} \equiv \{\phi \in \mathcal{G}^{\text{ES}} : \phi(N_{\infty} = k) = 1\}, \quad k = 0, 1.$$

Teorema 5.40. *Seja $\Pi_{\text{RC}} : \mathcal{G}^{\text{ES}} \rightarrow \mathcal{G}^{\text{RC}}$ uma aplicação que assina a η -marginal (aresta-marginal ou RC-marginal) a cada medida de ES a volume infinito. As seguintes afirmações são satisfeitas.*

(i) *A restrição da aplicação Π_{RC} a $\mathcal{G}_{\leq 1}^{\text{ES}}$ é sobrejetiva sobre $\mathcal{G}_{\leq 1}^{\text{RC}}$.*

(ii) *Toda medida $\nu \in \mathcal{G}_{\leq 1}^{\text{ES}}$ tem uma única decomposição da forma*

$$\nu = \lambda_0 \nu_0 + \sum_{m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)} \lambda_m \nu_m,$$

com $\nu_0 \in \mathcal{G}_0^{\text{ES}}$, $\nu_m \in \mathcal{G}_{1,m}^{\text{ES}}$, $\lambda_0, \lambda_m \geq 0$ e $\lambda_0 + \sum_{m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)} \lambda_m = 1$.

(iii) *A restrição da aplicação Π_{RC} a $\mathcal{G}_0^{\text{ES}}$ é injetiva de $\mathcal{G}_0^{\text{ES}}$ a $\mathcal{G}_0^{\text{RC}}$.*

Se $m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$, logo, a restrição de Π_{RC} a $\mathcal{G}_{1,m}^{\text{ES}}$ é injetiva de $\mathcal{G}_{1,m}^{\text{ES}}$ a $\mathcal{G}_1^{\text{RC}}$.

(iv) Se $|\mathcal{Q}_{\max}(h)| = 1$, então a aplicação $\Pi_{\text{RC}} : \mathcal{G}_{\leq 1}^{\text{ES}} \rightarrow \mathcal{G}_{\leq 1}^{\text{RC}}$ é uma bijeção.

Demonstração. Primeiro, note que marginal de qualquer estado de Gibbs ES que possui, no máximo, um aglomerado infinito é um estado de Gibbs RC, pelo Lema 5.34. Isto prova que $\Pi_S(\mathcal{G}_{\leq 1}^{\text{ES}}) \subset \mathcal{G}^{\text{RC}}$.

(i) Para provar a sobrejetividade da aplicação $\Pi_S : \mathcal{G}_{\leq 1}^{\text{ES}} \rightarrow \mathcal{G}_{\leq 1}^{\text{RC}}$, considere $\phi \in \mathcal{G}_{\leq 1}^{\text{RC}}$. Da definição (298) de $F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}$, este satisfaz a seguinte relação:

$$\sum_{m=1}^q F_{\{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{m-1}, \mathcal{F}_m \cup \{x\}, \mathcal{F}_{m+1}, \dots, \mathcal{F}_q\}}^{\text{livre}}(\eta) = F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}(\eta), \quad (328)$$

para cada $\{\mathcal{F}_i\}$, qualquer $x \notin \mathcal{F} = \cup_{i=1}^q \mathcal{F}_i$ e qualquer η . De fato, se $\{\mathcal{F}_i \leftrightarrow \mathcal{F}_j\}$ para $i \neq j$ em η , assumamos que $x \leftrightarrow \mathcal{F}_m$, para algum m . Logo, o lado esquerdo de (328) se reduz a $F_{\{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{m-1}, \mathcal{F}_m \cup \{x\}, \mathcal{F}_{m+1}, \dots, \mathcal{F}_q\}}^{\text{livre}}(\eta)$ o qual é identificado com $F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}(\eta)$. Por outro lado, se $x \leftrightarrow \mathcal{F}_m$, para todo m , logo, a soma em (328) pode ser propagada através dos produtos da definição (298) de $F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}}$ até o último termo, de onde a desigualdade segue por tomar em conta a definição (215) de Θ_{livre} . Para cada $m \in \{1, \dots, q\}$, defina o evento

$$\mathcal{A}_{\{\mathcal{F}_i\}} \equiv \{\sigma : \sigma_x = m, \forall x \in \mathcal{F}_m\},$$

Note que $\mathcal{A}_{\{\mathcal{F}_i\}}$ é um evento cilíndrico em \mathcal{F} . Considerando a relação (328), definimos a aplicação de conjunto ν , para os conjuntos sobre o espaço produto de configurações (σ, η) , definida como

$$\nu(\mathcal{A}_{\{\mathcal{F}_i\}} \times \mathcal{B}) = \phi(F_{\{\mathcal{F}_i\}}^{\text{livre}} \mathbb{1}_{\mathcal{B}}), \quad (329)$$

onde \mathcal{B} denota qualquer evento cilíndrico sobre as configurações η . Devido a que μ é uma medida sobre η e devido a (328), a função de conjunto definido em (329) satisfaz a condição de consistência para todas as projeções a volume finito e, pelo Teorema da Extensão de Kolmogorov, ν dá uma medida sobre (σ, η) .

Usando (328) e que a η -marginal de ν é ϕ (para terminar de provar a sobrejetividade da aplicação $\Pi_S : \mathcal{G}_{\leq 1}^{\text{ES}} \rightarrow \mathcal{G}_{\leq 1}^{\text{RC}}$), nos restaria provar que $\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$. Mas, por (206), $\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$ se, e somente se,

$$\nu(\sigma_{\Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)} | \sigma_{\Delta^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}) = \nu_{\Delta, \mathbb{B}(\Delta)}^{\text{ES}}(\sigma_{\Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)} | \sigma_{\partial\Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}), \quad \nu\text{-q.c.}, \forall \Delta \in \mathcal{L}.$$

Para verificar isso, pelo Teorema de Convergência de Martingales de Lévy-forward (veja Teorema .18 do Apêndice), é suficiente provar que

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \nu(\sigma_{\Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)} | \sigma_{\Lambda \setminus \Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}) = \nu_{\Delta, \mathbb{B}(\Delta)}^{\text{ES}}(\sigma_{\Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)} | \sigma_{\partial\Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}). \quad (330)$$

Para provar (330), primeiro avaliaremos $\nu(\sigma_\Delta, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)} | \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c})$, para Λ suficientemente grande de modo que $\Lambda \supset \Delta$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $h_{\max} \equiv 0$ pois, na definição de $\phi_{\mathbb{B}(\Delta)}^{\text{RC}}$ abaixo, este termo pode ser tirado do produtório em função do volume Δ (o qual está fixo e é finito) e ser cancelado com o mesmo fator da função de partição.

Para cada $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\mathbb{Z}^d)}$, definimos a configuração projeção sobre \mathbb{B} por $\eta \mapsto \pi_{\mathbb{B}}(\eta) = \eta_{\mathbb{B}}$. Fixada uma configuração $\bar{\eta}$, por abuso de linguagem escreveremos $\{\pi_{\mathbb{B}} = \bar{\eta}_{\mathbb{B}}\}$, ou simplesmente $\bar{\eta}_{\mathbb{B}}$, para nos referirmos ao evento cilíndrico $\{\eta : \pi_{\mathbb{B}}(\eta) = \bar{\eta}_{\mathbb{B}}\}$.

Usando o fato de que ϕ é a η -marginal de ν e que $\phi \in \mathcal{G}^{\text{RC}}$, escrevemos

$$\begin{aligned} \nu(\sigma_\Delta, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)} | \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}) &= \phi(F_{\{\Lambda_i\}}^{\text{livre}} \mathbb{1}_{\{\pi_{\mathbb{B}(\Delta)} = \eta_{\mathbb{B}(\Delta)}\}} | \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}) = F_{\{\Lambda_i\}}^{\text{livre}}(\eta) \cdot \phi(\eta_{\mathbb{B}(\Delta)} | \mathcal{F}_{\mathbb{B}(\Delta)^c})(\eta) \\ &= F_{\{\Lambda_i\}}^{\text{livre}}(\eta) \cdot \phi_{\mathbb{B}(\Delta)}^{\text{RC}}(\eta_{\mathbb{B}(\Delta)} | \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}), \end{aligned} \quad (331)$$

onde $\{\Lambda_i : i = 1, \dots, q\}$ é uma partição de Λ definida por $\Lambda_i \equiv \{x \in \Lambda : \sigma_x = i\}$. Na segunda igualdade da identidade acima usamos a mensurabilidade de $F_{\{\Lambda_i\}}^{\text{livre}}$ em $\mathcal{F}_{\mathbb{B}(\Delta)^c}$, pois $\Lambda^c \subset \mathbb{B}(\Delta)^c$, com Λ suficientemente grande. Avaliando o lado direito da identidade acima, temos

$$\begin{aligned} F_{\{\Lambda_i\}}^{\text{livre}}(\eta) \cdot \phi_{\mathbb{B}(\Delta)}^{\text{RC}}(\eta_{\mathbb{B}(\Delta)} | \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}) &= \prod_{i < j} \mathbb{1}_{\{\Lambda_i \leftrightarrow \Lambda_j\}}(\eta) \prod_{m=1}^q \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \Lambda_m \neq \emptyset} \frac{e^{\beta h_m |C(\eta)|}}{\Theta_{\text{livre}}(C(\eta))} \\ &\quad \times \frac{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}(\Delta)|}}{Z_{\mathbb{B}(\Delta)}^{\text{RC}}(\eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c})} \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \bar{\Delta} \neq \emptyset} \Theta_{\text{livre}}(C(\eta)) \\ &\equiv \prod_{i < j} \mathbb{1}_{\{\Lambda_i \leftrightarrow \Lambda_j\}}(\eta) \cdot \text{produto}_1 \cdot \frac{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}(\Delta)|}}{Z_{\mathbb{B}(\Delta)}^{\text{RC}}(\eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c})} \cdot \text{produto}_2, \end{aligned}$$

onde $Z_{\mathbb{B}(\Delta)}^{\text{RC}}(\eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c})$ é a função de partição para $\phi_{\mathbb{B}(\Delta)}^{\text{RC}}$ e $\bar{\Delta} = \Delta \cup \partial\Delta$. Definindo $\bar{\Delta}_m \equiv \Lambda_m \cap \bar{\Delta}$, daqui em diante assumiremos que $\prod_{i < j} \mathbb{1}_{\{\Lambda_i \leftrightarrow \Lambda_j\}}(\eta) = 1$, note que

$$\text{produto}_1 = \prod_{m=1}^q \prod_{\substack{C(\eta): C(\eta) \cap \Lambda_m \neq \emptyset \\ C(\eta) \cap \bar{\Delta} = \emptyset}} \frac{e^{\beta h_m |C(\eta)|}}{\Theta_{\text{livre}}(C(\eta))} \prod_{m=1}^q \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \bar{\Delta}_m \neq \emptyset} \frac{e^{\beta h_m |C(\eta)|}}{\Theta_{\text{livre}}(C(\eta))}$$

e

$$\text{produto}_2 = \prod_{m=1}^q \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \bar{\Delta}_m \neq \emptyset} \Theta_{\text{livre}}(C(\eta)).$$

Substituindo estes produtos na identidade anterior, temos

$$\begin{aligned}
 F_{\{\Lambda_i\}}^{\text{livre}}(\eta) \cdot \phi_{\mathbb{B}(\Delta)}^{\text{RC}}(\eta_{\mathbb{B}(\Delta)} | \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}) &= \frac{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}(\Delta)|}}{Z_{\mathbb{B}(\Delta)}^{\text{RC}}(\eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c})} \\
 &\times \prod_{m=1}^q \prod_{\substack{C(\eta): C(\eta) \cap \Lambda_m \neq \emptyset \\ C(\eta) \cap \bar{\Delta} = \emptyset}} \frac{e^{\beta h_m |C(\eta)|}}{\Theta_{\text{livre}}(C(\eta))} \prod_{m=1}^q \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \bar{\Delta}_m \neq \emptyset} e^{\beta h_m |C(\eta)|} \\
 &\equiv \frac{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}(\Delta)|}}{Z_{\mathbb{B}(\Delta)}^{\text{RC}}(\eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c})} \cdot \text{produto}_3. \tag{332}
 \end{aligned}$$

Introduzindo a identidade

$$e^{\beta h_m |C(\eta)|} = e^{\beta h_m |C(\eta) \cap \Delta|} e^{\beta h_m |C(\eta) \cap \Delta^c|},$$

temos

$$\begin{aligned}
 \text{produto}_3 &= \prod_{m=1}^q \prod_{\substack{C(\eta): C(\eta) \cap \Lambda_m \neq \emptyset \\ C(\eta) \cap \bar{\Delta} = \emptyset}} \frac{e^{\beta h_m |C(\eta) \cap \Delta^c|}}{\Theta_{\text{livre}}(C(\eta))} \prod_{m=1}^q \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \bar{\Delta}_m \neq \emptyset} e^{\beta h_m |C(\eta) \cap \Delta|} \\
 &\equiv \text{produto}_4 \cdot \text{produto}_5.
 \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
 \text{produto}_5 &= \prod_{m=1}^q \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \bar{\Delta}_m \neq \emptyset} \Delta(\sigma_{C \cap \bar{\Delta}_m}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)}) e^{\beta \sum_{x \in C \cap \Delta} \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}} \\
 &= \Delta(\sigma_{\Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)}) \prod_{m=1}^q \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \bar{\Delta}_m \neq \emptyset} e^{\beta \sum_{x \in C \cap \Delta} \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}} \\
 &= \Delta(\sigma_{\Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)}) \prod_{x \in \Delta} e^{\beta \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}},
 \end{aligned}$$

onde $\Delta(\sigma, \eta)$ foi definido em (52). Aqui, na segunda igualdade, está sendo usado o fato de que $\Delta(\sigma_{\Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)}) = \prod_{m=1}^q \Delta(\sigma_{C \cap \bar{\Delta}_m}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)})$. Analogamente, obtemos

$$\text{produto}_4 = \Delta(\sigma_{\Lambda \setminus \Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)}) \prod_{x \in \Lambda \setminus \Delta} \frac{e^{\beta \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}}}{\Theta_{\text{livre}}(C)}.$$

Denotando $\Delta(\sigma_{\bar{\Delta}}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)}) = \Delta(\sigma_{\Lambda \setminus \Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)}) \Delta(\sigma_{\Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)})$, reescrevemos produto₃ como

$$\text{produto}_3 = \prod_{x \in \Lambda \setminus \Delta} \frac{e^{\beta \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}}}{\Theta_{\text{livre}}(C)} \cdot \Delta(\sigma_{\bar{\Delta}}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)}) \prod_{x \in \Delta} e^{\beta \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}}.$$

Logo, (332) fica

$$\begin{aligned}
 F_{\{\Lambda_i\}}^{\text{livre}}(\eta) \cdot \phi_{\mathbb{B}(\Delta)}^{\text{RC}}(\eta_{\mathbb{B}(\Delta)} | \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}) &= \prod_{x \in \Lambda \setminus \Delta} \frac{e^{\beta \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}}}{\Theta_{\text{livre}}(C)} \\
 &\quad \times \frac{(e^{\beta J} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}(\Delta)|}}{Z_{\mathbb{B}(\Delta)}^{\text{RC}}(\eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c})} \Delta(\sigma_{\bar{\Delta}}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)}) \prod_{x \in \Delta} e^{\beta \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}} \\
 &\equiv \prod_{x \in \Lambda \setminus \Delta} \frac{e^{\beta \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}}}{\Theta_{\text{livre}}(C)} \cdot K(\sigma, \eta). \tag{333}
 \end{aligned}$$

Por definição (52) de $\Delta(\sigma, \eta)$, veja que

$$\begin{aligned}
 K(\sigma, \eta) &= \frac{\prod_{\substack{x, y \in \mathbb{B}(\Delta) \\ \eta_{xy}=1}} (e^{\beta J} - 1) \delta_{\sigma_x, \sigma_y} \prod_{x \in \Delta} e^{\beta \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}}}{Z_{\mathbb{B}(\Delta)}^{\text{RC}}(\eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c})} \\
 &= \frac{Z_{\Delta, \mathbb{B}(\Delta)}^{\text{ES}}(\sigma_{\Delta^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c})}{Z_{\mathbb{B}(\Delta)}^{\text{RC}}(\eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c})} \phi_{\Delta, \mathbb{B}(\Delta)}^{\text{ES}}(\sigma_{\Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)} | \sigma_{\Delta^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}),
 \end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade, usamos a definição (203) da medida ES. Denotando por

$$N(\sigma_{\Lambda \setminus \Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}) \equiv \prod_{x \in \Lambda \setminus \Delta} \frac{e^{\beta \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}}}{\Theta_{\text{livre}}(C)} \frac{Z_{\Delta, \mathbb{B}(\Delta)}^{\text{ES}}(\sigma_{\Delta^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c})}{Z_{\mathbb{B}(\Delta)}^{\text{RC}}(\eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c})},$$

reescrevemos (333) como

$$F_{\{\Lambda_i\}}^{\text{livre}}(\eta) \cdot \phi_{\mathbb{B}(\Delta)}^{\text{RC}}(\eta_{\mathbb{B}(\Delta)} | \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}) = N(\sigma_{\Lambda \setminus \Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}) \cdot \phi_{\Delta, \mathbb{B}(\Delta)}^{\text{ES}}(\sigma_{\Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)} | \sigma_{\partial \Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}).$$

Combinando esta identidade com (331), tem-se

$$\nu(\sigma_{\Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)} | \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}) = N(\sigma_{\Lambda \setminus \Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}) \cdot \phi_{\Delta, \mathbb{B}(\Delta)}^{\text{ES}}(\sigma_{\Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)} | \sigma_{\partial \Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}).$$

Mas como $\nu(\sigma_{\Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)} | \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}) = \nu(\sigma_{\Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)} | \sigma_{\Lambda \setminus \Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}) \nu(\sigma_{\Lambda \setminus \Delta} | \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c})$, temos

$$\nu(\sigma_{\Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)} | \sigma_{\Lambda \setminus \Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}) \nu(\sigma_{\Lambda \setminus \Delta} | \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}) = N(\sigma_{\Lambda \setminus \Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}) \cdot \phi_{\Delta, \mathbb{B}(\Delta)}^{\text{ES}}(\sigma_{\Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)} | \sigma_{\partial \Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}).$$

Desde que ν e $\phi_{\Delta, \mathbb{B}(\Delta)}^{\text{ES}}$ são medidas de probabilidade, somando em $\sigma_{\Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)}$ conseguimos que $\nu(\sigma_{\Lambda \setminus \Delta} | \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}) = N(\sigma_{\Lambda \setminus \Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c})$, portanto

$$\nu(\sigma_{\Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)} | \sigma_{\Lambda \setminus \Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}) = \phi_{\Delta, \mathbb{B}(\Delta)}^{\text{ES}}(\sigma_{\Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)} | \sigma_{\partial \Delta}, \eta_{\mathbb{B}(\Delta)^c}).$$

Finalmente, fazendo-se $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ na igualdade acima, prova-se (330), portanto, segue a prova do Item (i).

(ii) Para provar este item, usaremos repetidamente o Lema 4.33. Seja $\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$, primeiro afirmamos que $\nu = \lambda_0 \nu_0 + \lambda_{>0} \nu_{>0}$, onde $\nu_0 \in \mathcal{G}_0^{\text{ES}}$ e $\nu_{>0} \in \mathcal{G}_1^{\text{ES}}$ e $\lambda_0 + \lambda_{>0} = 1$. De fato, assumindo que estas medidas são diferentes, escolha $\lambda_0 = \nu(N_\infty = 0)$, desde que $\{N_\infty = 0\}$ é um evento caudal, veja que $\nu(N_\infty = 0) = \lambda_0 \nu_0(N_\infty = 0) + \lambda_{>0} \nu_{>0}(N_\infty = 0)$, onde $\lambda_0 \nu_0 + \lambda_{>0} \nu_{>0} \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$, pois \mathcal{G}^{ES} é um espaço convexo. Isso contradiz o Lema 4.33, portanto, estas medidas são iguais.

Analogamente, afirmamos que para $\nu_{>0} \in \mathcal{G}_1^{\text{ES}}$, $\nu_{>0} = \sum_{m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)} \lambda_m \nu_m$, com $\nu_m \in \mathcal{G}_{1,m}^{\text{ES}}$ e $\lambda_0 + \sum_{m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)} \lambda_m = 1$. Caso contrário, podemos escolher $\lambda_m = \nu_{>0}(\sigma_x = m \ \forall x \in C^\infty)$ e como $S \subset \mathcal{Q}_{\max}(h)$ ν -quase certamente (veja Teorema 5.22) para $\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$, veja que $1 = \sum_{m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)} \lambda_m + \sum_{m \notin \mathcal{Q}_{\max}(h)} \lambda_m = \sum_{m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)} \lambda_m + \nu_0$ e que

$$\nu_{>0}(N_\infty = 1) = \sum_{m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)} \lambda_m \nu_m(N_\infty = 1).$$

Como $\{N_\infty = 1\} = \{N_\infty = 0\}^c$, $\{N_\infty = 1\}$ também é um evento caudal, isto contradiz o Lema 4.33, portanto, estas medidas são iguais. Isso prova o Item (ii).

(iii) Pelo Teorema 5.37 (i), $\mathcal{G}_0^{\text{ES}} = \{\phi_{\text{livre}}^{\text{ES}}\}$. Logo, $\Pi_{\text{RC}}(\{\phi_{\text{livre}}^{\text{ES}}\}) = \{\phi_{\text{livre}}^{\text{RC}}\}$ é o único elemento em $\mathcal{G}_0^{\text{RC}}$, pois, pelo Item (i) deste teorema, a aplicação $\Pi_{\text{RC}} : \mathcal{G}_0^{\text{ES}} \rightarrow \mathcal{G}_0^{\text{RC}}$ é sobrejetiva. Portanto, a aplicação restrição $\Pi_{\text{RC}} : \mathcal{G}_0^{\text{ES}} \rightarrow \mathcal{G}_0^{\text{RC}}$ é injetiva.

Agora, se $m \in \mathcal{Q}_{\max}(h)$ e $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{G}_{1,m}^{\text{ES}}$, considere $\phi_{\nu_1}, \phi_{\nu_2}$ duas RC marginais de ν_1, ν_2 , respectivamente. Por definição: $\Pi_{\text{RC}}(\nu_1) = \Pi_{\text{RC}}(\nu_2)$ se, e somente se, $\phi_{\nu_1} = \phi_{\nu_2}$. Pelo Lema 5.36, temos $\nu_1 = \nu_2$. Isto prova a injectividade da restrição $\Pi_{\text{RC}} : \mathcal{G}_{1,m}^{\text{ES}} \rightarrow \mathcal{G}_1^{\text{RC}}$.

(iv) Assumindo que $|\mathcal{Q}_{\max}(h)| = 1$. Sem perda de generalidade, seja $\mathcal{Q}_{\max}(h) = \{1\}$. Pelo Item (ii), a restrição $\Pi_{\text{RC}} : \mathcal{G}_{\leq 1}^{\text{ES}} \rightarrow \mathcal{G}_{\leq 1}^{\text{RC}}$ é sobrejetiva. Restaria por provar que esta aplicação é injetiva, para isso, por (ii), para cada $\nu \in \mathcal{G}_{\leq 1}^{\text{ES}}$ tem-se

$$\nu = \lambda_0 \nu_0 + \lambda_1 \nu_1,$$

com $\nu_0 \in \mathcal{G}_0^{\text{ES}}, \nu_1 \in \mathcal{G}_{1,1}^{\text{ES}}, \lambda_0, \lambda_1 \geq 0$ e $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$. Pelo Teorema 5.37 (i), sabe-se que $\nu_0 = \phi_{\text{livre}}^{\text{ES}}$. Para cada $\nu, \tilde{\nu} \in \mathcal{G}_{\leq 1}^{\text{ES}}$, sejam $\phi_1, \tilde{\phi}_1$ as RC marginais de $\nu_1, \tilde{\nu}_1$, respectivamente. Por definição de Π_{RC} :

$$\Pi_{\text{RC}}(\nu) = \Pi_{\text{RC}}(\tilde{\nu}) \Leftrightarrow \lambda_0 \phi_{\text{livre}}^{\text{RC}} + \lambda_1 \phi_1 = \lambda_0 \phi_{\text{livre}}^{\text{RC}} + \lambda_1 \tilde{\phi}_1 \Leftrightarrow \phi_1 = \tilde{\phi}_1.$$

Pelo Lema 5.36, temos $\nu_1 = \tilde{\nu}_1$ e, portanto, $\nu = \tilde{\nu}$. Daí, a restrição $\Pi_{\text{RC}} : \mathcal{G}_{\leq 1}^{\text{ES}} \rightarrow \mathcal{G}_{\leq 1}^{\text{RC}}$ é injetiva. \square

Observação 5.41. Pelo Teorema 5.37 (i), tem-se $\mathcal{G}_0^{\text{ES}} = \{\phi_{\text{livre}}^{\text{ES}}\}$, daí, pelo Teorema 5.40 (i), o conjunto $\mathcal{G}_{\leq 1}^{\text{ES}}$ é não vazio.

Como as especificações (203) das medidas ES são quase-locais, pelo Lema 4.34, para cada estado de Gibbs ν , a medida condicional $\nu(\cdot|B)$ também é um estado de Gibbs ES, para todo evento caudal B com $\nu(B) > 0$. Em particular, como os eventos $\{N_\infty = 0\}$ e $\{N_\infty \geq 1\}$ são caudais (pois um é complementar do outro), as medidas condicionais $\nu(\cdot|N_\infty = 0)$ e $\nu(\cdot|N_\infty = 1)$ são estados de Gibbs ES para qualquer $\nu \in \mathcal{G}_{\leq 1}^{\text{ES}}$ com $\nu(N_\infty = 0) \in (0, 1)$. No entanto, pela perda de quase-localidade (veja Proposição 5.13), a mesma afirmação não pode ser feita diretamente para um estado de Gibbs RC $\phi \in \mathcal{G}_{\leq 1}^{\text{RC}}$. É uma consequência do Teorema 5.40 (i), (ii) que as medidas condicionais $\phi(\cdot|N_\infty = 0)$ e $\phi(\cdot|N_\infty = 1)$ são de fato estados de Gibbs RC.

5.9 ESTADOS DE GIBBS RC EM DIMENSÃO DOIS

Segundo a referência [104], estudar transição de fase (ou seja, analiticidade da pressão com respeito ao campo externo) em um modelo ferromagnético é equivalente a saber calcular a cardinalidade das medidas de Gibbs a volume infinito quando algum parâmetro de dependência do modelo varia. O Teorema 5.37 (ii) nos fornece a unicidade das medidas de Gibbs ES e RC na fase $J < J_c$. Logo, restaria por estudar o comportamento destas medidas na fase $J \geq J_c$. Para o modelo de Ising (ou seja $q = 2$), a condição $|\mathcal{Q}_{\max}(h)| = 1$ significa que $h \neq 0$. Neste caso, sabe-se que o Teorema de Lee-Yang [87] e as desigualdades GHS fornecem a analiticidade da energia livre no campo externo, sempre que a parte real do campo seja não nula. Logo, existe um único estado de equilíbrio invariante e extremal. Em consequência, pelo Teorema 5.39 existe uma única medida de Gibbs ES, para todo $d \geq 2$ e $J \geq 0$, incluindo a fase crítica $J = J_c$. Suspeita-se que para $J \neq J_c$, a condição $|\mathcal{Q}_{\max}(h)| = 1$ implica unicidade, para todo q e $d > 2$. Alguns resultados relacionados com a discussão feita acima são mostrados no Teorema 5.43.

Para enunciar o próximo resultado, introduzimos as seguintes hipóteses: dado uma medida de probabilidade μ sobre (Ω, \mathcal{F}) , considere

- (A.1) μ é invariante por translações horizontais, verticais e reflexões por linhas horizontais e verticais;
- (A.2) μ é ergódica por translações horizontais e verticais (separadamente);

(A.3) Para qualquer evento crescente A e B : $\mu(A \cap B) \geq \mu(A) \mu(B)$. Isto é, eventos crescentes são correlacionados positivamente baixo μ ; e

(A.4) A variável aleatória que conta o número de aglomerados infinitos, notação: N_∞ , é não nula.

A condição (A.2) é suficiente para afirmar que o número de aglomerados infinitos N_∞ é constante quase certamente.

Teorema 5.42. *Se as condições (A.1) – (A.4) são satisfeitas, então*

$$\mu(N_\infty = 1) = 1.$$

Além disso, qualquer conjunto finito de sítios é cercado por um aglomerado aberto com probabilidade um, equivalentemente, todos os aglomerados não ocupados (fechados) são finitos com probabilidade um.

Demonstração. Uma prova detalhada deste resultado pode ser encontrada no teorema principal de [56], p. 1151. \square

O Item (i) do próximo resultado é uma generalização do Teorema 3.55.

Teorema 5.43. *Seja $\beta \geq 0$ e $h_m \in \mathbb{R}$, $m = 1, \dots, q$ e $d = 2$.*

(i) *Se $J \neq J_c$, então $|\mathcal{G}^{\text{RC}}| = 1$ e $P_\infty(\beta, J, h) = \tilde{P}_\infty(\beta, J, h)$.*

(ii) *Se $J \neq J_c$ e em adição $|\mathcal{Q}_{\max}(h)| = 1$, então $|\mathcal{G}^{\text{ES}}| = 1$.*

Demonstração. (i) O Teorema 5.37 (ii) nos dá a validade desta afirmação para o caso $J < J_c$. Agora, suponha que $J > J_c$ e que $d = 2$. Pelo Corolário 5.18 (iii) a aplicação $J \mapsto P(\beta, J, h)$ é crescente e, como $J < J_c$, segue que existe percolação para o estado de Gibbs $\phi_{\max}^{\text{RC}, J}$. Desde que a medida $\phi_{\max}^{\text{RC}, J}$ satisfaz as condições (A.1) – (A.4), pelo Teorema 5.42, segue que existe um único aglomerado infinito para $\phi_{\max}^{\text{RC}, J}$. Além disso, os aglomerados contém uma serie de infinitos circuitos anidados que cercam qualquer quantidade finita de pontos do látice.

Seja E_∞ o evento definido pelas configurações η que exibem um único aglomerado infinito e que possuem as características do aglomerado do Teorema 5.42. Veja que E_∞ é um evento crescente no sentido FKG. Pelo Teorema 5.14 (iii), qualquer medida de Gibbs RC domina à medida $\phi_{\text{livre}}^{\text{RC}, J}$. Seja $J > J_1 > J_c$, então

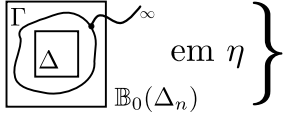
$$\phi(E_\infty) \geq \phi_{\text{livre}}^{\text{RC}, J}(E_\infty) \geq \phi_{\max}^{\text{RC}, J_1}(E_\infty),$$

onde, na segunda desigualdade, usamos o teorema da monotonicidade na constante do acoplamento (veja Teorema 5.16). Portanto, todas as medidas de Gibbs RC em J apresentam um aglomerado infinito com as características do Teorema 5.42.

Daqui para frente, seguiremos um esquema similar ao feito na prova do Teorema 5.37 Item (i). Seja f uma função cilíndrica crescente com suporte em $\mathbb{B}(\Delta)$, onde Δ foi tomado suficientemente grande tal que

$$|\phi_{V_{\max}}^{\text{RC}}(f) - \phi_{\max}^{\text{RC}}(f)| \leq \epsilon, \quad (334)$$

para todo $\epsilon > 0$ e para qualquer $V \in \mathcal{L}$ tal que $V \supset \Delta$. Considere $\{\Delta_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de caixas crescentes centradas na origem e defina Ω_n como

$$\Omega_n \equiv \left\{ \eta : \exists \text{ circuito aberto } \Gamma \text{ tal que } \begin{array}{c} \Gamma \\ \text{em } \eta \\ \mathbb{B}_0(\Delta_n) \end{array} \right\}$$


o conjunto de todas as configurações η para o qual existe um circuito aberto Γ cercando Δ e conectando ao aglomerado infinito, de modo que Γ esteja inteiramente contido em $\mathbb{B}_0(\Delta_n)$. Denotando $\Gamma_n(\eta)$ como o circuito mais externo contido em $\mathbb{B}_0(\Delta_n)$ e V_{Γ_n} como o conjunto dos sítios interiores a $\Gamma_n(\eta)$, note que a indicadora $\mathbb{1}_{\{\Gamma_n=\Gamma\}}$ não depende dos valores da configuração $\eta_{\mathbb{B}(V_{\Gamma})}$. Logo,

$$\begin{aligned} \phi(\mathbb{1}_{\Omega_n} \cdot f) &= \sum_{\Gamma \in \Omega_n} \phi(\mathbb{1}_{\{\Gamma_n=\Gamma\}} \cdot f) = \sum_{\Gamma \in \Omega_n} \phi(\phi(\mathbb{1}_{\{\Gamma_n=\Gamma\}} \cdot f | \eta_{\mathbb{B}(V_{\Gamma})})) \\ &= \sum_{\Gamma \in \Omega_n} \phi(\mathbb{1}_{\{\Gamma_n=\Gamma\}} \cdot \phi(f | \eta_{\mathbb{B}(V_{\Gamma})})) \\ &= \sum_{\Gamma \in \Omega_n} \phi(\mathbb{1}_{\{\Gamma_n=\Gamma\}} \cdot \phi_{V_{\Gamma}, \max}^{\text{RC}}(f)) = \phi(\mathbb{1}_{\Omega_n} \cdot \phi_{V_{\Gamma}, \max}^{\text{RC}}(f)), \end{aligned}$$

onde, na quarta igualdade, usamos a versão esperança condicional da medida de Gibbs GRC ϕ , desde que sua validade é satisfeita pelo fato de ter unicidade do aglomerado infinito com probabilidade um (veja Teorema 5.33).

Desde que f é uma função limitada e $\Omega_n \uparrow \Omega$, fazendo $n \rightarrow \infty$ na identidade acima, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\phi(f) = \phi(\phi_{V_{\Gamma}, \max}^{\text{RC}}(f)) = \phi_{V_{\Gamma}, \max}^{\text{RC}}(f).$$

Substituindo esta igualdade em (334) e considerando $V \equiv V_{\Gamma}$, tem-se

$$|\phi(f) - \phi_{\max}^{\text{RC}}(f)| \leq \epsilon,$$

para cada $\epsilon > 0$. Da arbitrariedade de ϵ , se conclui $\mathcal{G}^{\text{RC}} = \{\phi_{\max}^{\text{RC}}\}$. Portanto, $|\mathcal{G}^{\text{RC}}| = 1$ sempre que $J > J_c$.

(ii) Novamente, o Teorema 5.37 (ii) nos diz que na fase $J < J_c$ esta afirmação é válida. Portanto, é de interesse considerar somente o caso $J > J_c$. Desde que $|\mathcal{Q}_{\max}(h)| = 1$, a segunda desigualdade do Teorema 5.23 nos dá uma cota similar à do Item (i) para $J > J_1 > J_c$

$$\nu(E_\infty) = \phi_\nu(E_\infty) \geq \phi_{\text{livre}}^{\text{RC},J}(E_\infty) \geq \phi_{\max}^{\text{RC},J_1}(E_\infty),$$

onde ϕ_ν é uma RC marginal da medida de Gibbs ES ν e o evento E_∞ é o mesmo definido em (i). Logo, todos os estados de Gibbs ES ν em J apresentam um aglomerado infinito com as características do Teorema 5.42.

Seguindo a mesma ideia da prova do Item (i), para cada função cilíndrica f com suporte em $(\Delta, \mathbb{B}(\Delta))$, obtemos a seguinte equivalência:

$$\begin{aligned} \nu(\mathbb{1}_{\Omega_n} \cdot f) &= \sum_{\Gamma \in \Omega_n} \nu(\mathbb{1}_{\{\Gamma_n=\Gamma\}} \cdot \nu(f | \sigma_{V_\Gamma^c}, \eta_{\mathbb{B}(V_\Gamma)})) = \sum_{\Gamma \in \Omega_n} \nu(\mathbb{1}_{\{\Gamma_n=\Gamma\}} \cdot \phi_{V_\Gamma, \mathbb{B}(V_\Gamma)}^{\text{ES}}(f | \sigma_{V_\Gamma^c}, \eta_{\mathbb{B}(V_\Gamma)})) \\ &= \sum_{\Gamma \in \Omega_n} \nu(\mathbb{1}_{\{\Gamma_n=\Gamma\}} \cdot \phi_{V_\Gamma, m}^{\text{ES}}(f)) \\ &= \nu(\mathbb{1}_{\Omega_n} \cdot \phi_{V_\Gamma, m}^{\text{ES}}(f)), \end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade, usamos a versão esperança condicional (206) para ν . No entanto, na terceira igualdade, desde que $|\mathcal{Q}_{\max}(h)| = 1$, o Teorema 5.22 nos diz que os valores de σ_x tal que $x \in \partial V_\Gamma$ são restringidos a tomar somente um dos cores em $\mathcal{Q}_{\max}(h)$. Sem perda de generalidade, seja $\mathcal{Q}_{\max}(h) = \{m\}$, logo, obtemos $\phi_{V_\Gamma, \mathbb{B}(V_\Gamma)}^{\text{ES}}(f | \sigma_{V_\Gamma^c}, \eta_{\mathbb{B}(V_\Gamma)}) = \phi_{V_\Gamma, m}^{\text{ES}}(f)$, de onde a igualdade segue.

Desde que f é uma função limitada e $\Omega_n \uparrow \Omega$, fazendo $n \rightarrow \infty$ na identidade acima, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos $\nu(f) = \nu(\phi_{V_\Gamma, m}^{\text{ES}}(f)) = \phi_{V_\Gamma, m}^{\text{ES}}(f)$. O que implica que $\nu(f) = \phi_{V_\Gamma, m}^{\text{ES}}(f) \rightarrow \phi_m^{\text{ES}}(f)$, sempre que $V_\Gamma \uparrow \mathbb{Z}^2$ (veja Teorema 5.26). Portanto, $\mathcal{G}^{\text{ES}} = \{\phi_m^{\text{ES}}\}$, concluindo-se a prova. \square

Observação 5.44. *Observe-se que o argumento feito para provar o Teorema 5.43 (i) com respeito as medidas de Gibbs RC poderia ser feito, também, para as medidas de Gibbs GRC, desde que na prova deste item é usado o Teorema 5.37 (ii), que pela Observação 5.38 é válido, também, para o modelo GRC.*

6

REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS PARA SISTEMAS DE SPINS COM PRESENÇA DE CAMPO GERAL

Este capítulo está dedicado a estudar a teoria das representações gráficas para modelos de spins não invariantes (por translações) exposta no trabalho [36], o qual foi inspirado pela referência [20]. **Neste capítulo todo, vamos apresentar a segunda e uma das principais partes de nosso trabalho [36].** Isto é, estenderemos alguns resultados do Capítulo 5 para campos magnéticos não invariantes por translação, dando uma abordagem que não é nada trivial. Note que alguns resultados de [20] podem ser estendidos facilmente para uma classe de campos externos bem gerais (não necessariamente invariantes por translação), desde que, na prova destes resultados, são usadas a teoria do formalismo termodinâmico e a teoria geral dos estados de Gibbs. Logo, nosso trabalho será adaptar e desenvolver novas técnicas para aqueles resultados que usam a invariância por translação do modelo. Resultados fundamentais como a desigualdade FKG, monotonicidade no campo externo (não invariante por translação), monotonicidade na constante de acoplamento, quase-localidade quase certa, unicidade de no máximo um aglomerado infinito (com probabilidade um) e outros resultados para o modelo GRC requerem adaptações não triviais e, por essa razão, apresentaremos as provas respectivas em detalhe. No decorrer da apresentação, vamos comparando os resultados deste capítulo com os do Capítulo 5.

Baseados na referência [101], vimos (na Proposição 3.77) que o modelo de aglomerados aleatórios (bidimensional) com campo nulo perde a propriedade da quase-localidade. Sugestionados por Fernández e Pfister [101], substituiremos a condição de quase-localidade pela noção fraca de quase-localidade quase certa, no sentido da Definição 3.21. No caso do modelo de aglomerados aleatórios sobre \mathbb{Z}^d , a quase-localidade quase certa foi mostrada, ao menos para medidas de aglomerados aleatórios invariantes por translação, por Grimmett [63] e Vande Velde [101]. Note que quase-localidade implica

quase-localidade quase certa. Uma medida i.i.d sobre Ω é obviamente quase-local, e daí, a medida de aglomerados aleatórios para uma árvore regular \mathbb{T}_n , cujos parâmetros satisfazem ou $p \in \{0, 1\}$ ou $q = 1$, é quase-local.

Como foi feito em [20], assumiremos a unicidade (quase certa) de no máximo um aglomerado infinito. Ressaltamos que, para nossos objetivos, essa suposição é suficiente uma vez que grafos infinitos, conexos, localmente finitos, transitivos e amenáveis, possuem único aglomerado infinito com probabilidade um (veja referência [89]). A estrutura geométrica do grafo é importante para determinar se um modelo é ou não quase-local, por exemplo, para grafos não amenáveis (como árvores regulares de ordem $n \geq 2$, \mathbb{T}_n , isto é, o único grafo infinito conexo o qual é conectado, não tem circuitos e possui n ramos emanando de cada vértice) a quase-localidade quase certa falha [48, 68].

O objetivo principal, pelo qual estenderemos os resultados de [20], é fechar um problema proposto em [23] sobre unicidade das medidas de Gibbs do modelo de Ising sobre a rede hipercúbica d -dimensional ($d \geq 2$). Esse problema será enunciado e resolvido em detalhe na Seção 6.6 como consequência da teoria desenvolvida previamente.

Em analogia ao Capítulo 5, neste capítulo definiremos o chamado modelo de Edwards-Sokal (ou simplesmente, modelo ES), o modelo de aglomerados aleatórios generalizado, cuja expressão em inglês é: *general random-cluster model*, (a terminologia, modelo GRC, é devido a [20]) e o modelo de Gibbs de sistemas de spins. Esses modelos são definidos sobre o látice $\mathbb{L} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ considerado no Capítulo 3, e possuem uma característica em comum, a presença de um campo magnético externo (generalizado) não homogêneo da forma:

$$\hat{\mathbf{h}} \equiv (h_{x,p} : x \in \mathbb{V}; p = 1, \dots, q) \in \mathbb{R}^{\mathbb{V}} \times \dots \times \mathbb{R}^{\mathbb{V}}. \quad (335)$$

Esses modelos serão definidos tendo em consideração o modelo de Potts ferromagnético (de q estados) definido na Seção 3.2. Precisamente, o Hamiltoniano associado a esse modelo é definido por

$$H(\sigma) \equiv - \sum_{\{x,y\}} J_{xy} \delta_{\sigma_x, \sigma_y} - \sum_{p=1}^q \sum_x \frac{h_{x,p}}{q} \delta_{\sigma_x, p}, \quad (336)$$

onde $\hat{\mathbf{h}}$ é o campo magnético externo (335), $\mathbf{J} \equiv (J_{xy} : x, y \in \mathbb{V}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{V}}$ a constante de acoplamento, $\beta > 0$ o inverso da temperatura, $\delta_{\sigma_x, \sigma_y}$ é a função delta de Kronecker que vale um se $\sigma_x = \sigma_y$ e zero caso contrário e $\{x, y\}$ denota o par de primeiros vizinhos na rede \mathbb{E} .

Os fatores de Bernoulli introduzidos no Capítulo 5 serão substituídos, neste capítulo, por (abuso de notação)

$$B_J(\eta) \equiv \prod_{\{x,y\}:\eta_{xy}=1} r_{xy}, \quad (337)$$

onde $J = (J_{xy} \geq 0 : \{x, y\} \in \mathbb{E})$, $r_{xy} \equiv e^{q\beta J_{xy}} - 1$ e $q \in \mathbb{Z}^+$ fixado. Em geral, os fatores $r_{xy} \geq 0$ não são limitados por um. Isto não gera problema algum, pois a medida de aglomerados aleatórios obtida com tal fator de Bernoulli é a mesma que se consegue com o fator de Bernoulli usual (pois os pesos em ambos casos são obtidos por um fator que se cancela com o fator da constante de partição).

Por simplicidade de apresentação, utilizaremos a definição (139) do conjunto \mathcal{L}

$$\mathcal{L} \equiv \{\Lambda \subset \mathbb{V} : 0 < |\Lambda| < \infty\}$$

das caixas finitas de \mathbb{L} . Fixado $\Lambda \in \mathcal{L}$, denotamos por $\mathbb{B}_0(\Lambda)$ o conjunto de todas as arestas $\{x, y\} \in \mathbb{E}$ tal que $\{x, y\} \subset \Lambda$. Nós usamos a notação $\mathbb{B}(\Lambda)$ para denotar o conjunto de todas as arestas com, no mínimo, um vértice em Λ . Para qualquer $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}_0(\mathbb{V})$, definimos $\mathbb{V}(\mathbb{B})$ como o conjunto de todos os sítios, os quais pertencem, no mínimo, a uma aresta de \mathbb{B} . Fixado $\Lambda \in \mathcal{L}$, definimos a fronteira externa de $\mathbb{B}_0(\Lambda)$, notação $\partial\mathbb{B}_0(\Lambda)$, como

$$\partial\mathbb{B}_0(\Lambda) = \{e \in \mathbb{E} : e \cap \Lambda \neq \emptyset \text{ e } e \cap \partial\Lambda \neq \emptyset\}$$

o conjunto de arestas de \mathbb{E} tais que possuem um extremo em Λ e o outro em $\mathbb{V} \setminus \Lambda$. Aqui, a notação $\partial\Lambda$ denota a fronteira externa de Λ segundo a Definição 1.1.

Neste capítulo, assim como no capítulo anterior, usaremos as notações $\Omega \equiv \{0, 1\}^{\mathbb{E}}$, $\Sigma_q \equiv \{1, \dots, q\}^{\mathbb{V}}$, onde $q \in \mathbb{Z}^+$, para representar o espaço de arestas e de configurações de spins, respectivamente.

Dado $\Lambda \in \mathcal{L}$, para cada $x \in \mathbb{V}$, definimos

$$h_{x,\max} \equiv \max \{h_{x,p} : p = 1, \dots, q\},$$

o campo externo máximo, onde o máximo é atingido em alguma cor $p = 1, \dots, q$.

6.1 ESTADOS DE GIBBS NAS REPRESENTAÇÕES: ES, SPIN E GRC

Similarmente ao Capítulo 5, nesta seção, definiremos os principais modelos que serão usados na apresentação. Para não carregar notação, decidimos usar a mesmas notações do Capítulo 5 para representar as medidas e pesos: ES, GRC e de SPIN's. Isso não deve causar confusão alguma, uma vez que os contextos (onde são definidos) são relativamente diferentes. Quando considerarmos conveniente, destacaremos a notação de tais medidas.

6.1.1 Estados de Gibbs na representação de Edwards-Sokal

Dado $\Lambda \in \mathcal{L}$ e fixadas as configurações σ_{Λ^c} e $\eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}$, definimos a medida de Edwards-Sokal, ou simplesmente medida ES, por

$$\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(\sigma_{\Lambda}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)} | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) \equiv \begin{cases} \frac{\mathcal{W}(\sigma_{\Lambda}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)} | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c})}{Z_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(\sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c})}, & \text{se } Z_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(\sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) > 0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (338)$$

onde os pesos \mathcal{W} são definidos como

$$\mathcal{W}(\sigma_{\Lambda}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)} | \sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) = \prod_{\substack{\{x,y\} \in \mathbb{B}(\Lambda) \\ \eta_{xy}=1}} (e^{\beta J} - 1) \delta_{\sigma_x, \sigma_y} \prod_{x \in \Lambda} e^{\beta \sum_{p=1}^q h_p \delta_{\sigma_x, p}} \quad (339)$$

e $Z_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(\sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c})$ denota a função de partição associada a $\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}$. A dependência dos parâmetros J e \hat{h} será explícita sempre quando for necessário. Pela definição de $\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}$, veja que esta não depende da configuração $\eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}$. Logo, consideraremos esta configuração na definição desta medida por questão de completude.

Analogamente à Subseção 5.1.1, dada a especificação $\{\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}} : \Lambda \in \mathcal{L}\}$, diremos que uma medida $\nu \in \mathcal{M}_1(\Sigma_q \times \Omega)$ satisfaz a condição DLR se ν é consistente com a especificação $\{\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}} : \Lambda \in \mathcal{L}\}$, segundo a Definição 4.7. Isto é, para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$ e toda função f com suporte em $(\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda))$, temos a seguinte igualdade

$$\nu(f) = \nu(\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(f | \cdot)). \quad (340)$$

O conjunto das medidas de probabilidade, satisfazendo as equações DLR, será denotado por \mathcal{G}^{ES} e, frequentemente, são conhecidas como medidas de Gibbs ES. Desde

que a especificação $\{\phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}} : \Lambda \in \mathcal{L}\}$ é quase-local, toda medida de Gibbs ES admite uma versão de esperança condicional, isto é, a medida $\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$ se, e somente se, para cada função f com suporte em $(\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda))$, ν satisfaz a seguinte igualdade

$$\nu(f|\sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}) = \phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(f|\sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}), \quad \nu - \text{q.c.} \quad (341)$$

Para ver uma equivalência deste resultado, veja Teorema 4.31. Encerramos esta subseção definindo as medidas ES com dois tipos especiais de condições de fronteira, nos referimos à condição de fronteira livre e m -conectada.

MODELO DE EDWARDS-SOKAL COM CONDIÇÃO DE FRONTEIRA m -CONECTADA.

Para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$, definimos a medida de probabilidade

$$\phi_{\Lambda, m}^{\text{ES}}(\cdot) \equiv \phi_{\Lambda, \mathbb{B}(\Lambda)}^{\text{ES}}(\cdot|\sigma_{\Lambda^c}^m, \eta_{\mathbb{B}(\Lambda)^c}),$$

onde σ^m é a configuração constante, $\sigma_x^m = m$ para todo $x \in \mathbb{V}$, com $m \in \{1, \dots, q\}$ fixado a priori. A medida $\phi_{\Lambda, m}^{\text{ES}}(\cdot)$ será chamada de medida ES com condição de fronteira m -conectada. A função partição desta medida de probabilidade será denotada por $Z_{\Lambda, m}^{\text{ES}}$.

MODELO DE EDWARDS-SOKAL COM CONDIÇÃO DE FRONTEIRA LIVRE.

Definimos a medida ES com condição de fronteira livre como a medida de probabilidade $\phi_{\Lambda, \mathbb{B}_0(\Lambda)}^{\text{ES}}(\cdot|\sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}_0(\Lambda)^c})$, que se obtém de (338) ao considerar $\mathbb{B} \equiv \mathbb{B}_0$. Note que, por definição, esta medida não depende de σ_{Λ^c} . Aqui, a condição de fronteira $\eta_{\mathbb{B}_0(\Lambda)^c}$ é escolhida como $\eta_{\mathbb{B}_0(\Lambda)^c} = \eta_{\mathbb{B}_0(\Lambda)^c}^0$, onde η^0 é a configuração constante definida por $\eta_e^0 = 0$ para cada $e \in \mathbb{E}$. Neste caso, introduzimos a notação

$$\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{ES}}(\cdot) \equiv \phi_{\Lambda, \mathbb{B}_0(\Lambda)}^{\text{ES}}(\cdot|\sigma_{\Lambda^c}, \eta_{\mathbb{B}_0(\Lambda)^c}^0).$$

A função de partição desta medida de probabilidade será denotada por $Z_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{ES}}$.

6.1.2 Estados de Gibbs na representação GRC

Se $\eta \in \Omega$ e $C(\eta)$ denota uma componente conexa genérica sobre o grafo $(\mathbb{V}, \mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta))$, onde $\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) = \{e \in \mathbb{E} : \eta_e = 1\}$ é o conjunto de arestas ocupadas, a medida GRC com condição de fronteira geral é obtida por normalizar os seguintes pesos

$$\mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}}|\eta_{\mathbb{B}^c}) \equiv B_{\mathbb{J}}(\eta) \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \mathbb{V}(\mathbb{B}) \neq \emptyset} \sum_{p=1}^q q_p e^{-\beta \sum_{x \in C(\eta)} (h_{x, \max} - h_{x, p})}, \quad (342)$$

onde $\{q_p : p = 1, \dots, q\}$ são constantes positivas, $B_I(\eta)$ é dado por (337) e o produto percorre sobre todas as componentes conexas $C(\eta)$ do grafo $(V, \mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta))$. Na expressão acima estamos usando a convenção $e^{-\infty} = 0$. Esta medida é denotada por $\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\cdot | \eta_{\mathbb{B}^c})$ e é chamada de medida GRC com condição de fronteira geral. A função de partição associada a esta medida será denotada por $Z_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\eta_{\mathbb{B}^c})$.

Em analogia à Subseção 5.1.1, dada a especificação $\{\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}} : |\mathbb{B}| < \infty\}$, dizemos que uma medida $\phi \in \mathcal{M}_1(\Omega)$ satisfaz a condição DLR se ϕ é consistente com a especificação $\{\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}} : |\mathbb{B}| < \infty\}$, segundo a Definição 4.7, isto é, para cada $\mathbb{B} \subset \mathbb{E}$ tal que $|\mathbb{B}| < \infty$ e toda função f com suporte em (\mathbb{B}) , temos a seguinte igualdade

$$\phi(f) = \phi(\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f|\cdot)). \quad (343)$$

O conjunto das medidas de probabilidade satisfazendo as equações DLR será denotado por \mathcal{G}^{GRC} e, frequentemente, são conhecidas como medidas ou estados de Gibbs GRC.

Note que, em contraste com as equações (340) e (341), aqui as equações DLR não implicam que as esperanças condicionais de um estado de Gibbs RC ϕ são dadas por esperanças a volume finito devido à perda de quase-localidade das especificações $\{\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}} : |\mathbb{B}| < \infty\}$ (veja Proposição 6.3 abaixo). No entanto, esse problema pode ser evitado assegurando a existência quase certa de um único aglomerado infinito, (veja Teorema 6.14 abaixo).

Analogamente, como fizemos para o caso do modelo ES, passamos a definir as medidas ES com condição de fronteira livre e m -conectada.

MODELO GRC COM CONDIÇÃO DE FRONTEIRA LIVRE.

Seja $\Lambda \in \mathcal{L}$ e $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\Lambda)}$ uma configuração. Se $C(\eta)$ denota uma componente conexa genérica sobre o grafo $(\Lambda, \mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}_0(\Lambda))$, definimos

$$\Theta_{\text{livre}}(C(\eta)) \equiv \sum_{p=1}^q q_p e^{\beta \sum_{x \in C(\eta)} h_{x,p}}.$$

A medida GRC com condição de fronteira livre é obtida por normalizar os seguintes pesos

$$\mathcal{W}_{\text{livre}}^{\text{GRC}}(\eta) \equiv B_I(\eta) \prod_{C(\eta)} \Theta_{\text{livre}}(C(\eta)), \quad (344)$$

onde $B_J(\eta)$ é dado por (337) e o produto percorre sobre todas as componentes conexas $C(\eta)$ do grafo $(\Lambda, \mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}_0(\Lambda))$. Esta medida é denotada por $\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}$ e, para cada $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\Lambda)}$, esta satisfaz $\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}(\eta) = \mathcal{W}_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}(\eta) / Z_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}$, onde $Z_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}$ é a função de partição da medida GRC.

MODELO GRC COM CONDIÇÃO DE FRONTEIRA m -CONECTADA.

Seja $\Lambda \in \mathcal{L}$ e $m \in \{1, \dots, q\}$. Se, para cada $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}(\Lambda)}$, $C(\eta)$ denota uma componente conexa sobre $(\bar{\Lambda}, \mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}(\Lambda))$ com $\bar{\Lambda} = \Lambda \cup \partial\Lambda$, definimos

$$\Theta_{\Lambda, m}(C(\eta)) \equiv \begin{cases} \Theta_{\text{livre}}(C(\eta)), & \text{se } C(\eta) \cap \Lambda^c = \emptyset \\ e^{\beta \sum_{x \in C(\eta)} h_{x, m}}, & \text{outro caso.} \end{cases}$$

A medida GRC com condição de fronteira m -conectada é obtida por normalizar os pesos

$$\mathcal{W}_{\Lambda, m}^{\text{GRC}}(\eta) \equiv B_J(\eta) \prod_{C(\eta)} \Theta_{\Lambda, m}(C(\eta)), \quad (345)$$

onde o produto percorre sobre todas as componentes conexas $C(\eta)$ do grafo $(\bar{\Lambda}, \mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}(\Lambda))$. Esta medida é denotada por $\phi_{\Lambda, m}^{\text{GRC}}$ e é chamada de medida GRC com condição de fronteira m -conectada. A função de partição associada à medida $\phi_{\Lambda, m}^{\text{GRC}}$ é denotada por $Z_{\Lambda, m}^{\text{GRC}}$.

Sendo

$$\mathcal{Q}_{x, \max}(\hat{h}) \equiv \{p \in \{1, \dots, q\} : h_{x, p} = h_{x, \max}\} \quad (346)$$

o conjunto formado pelas cores nas quais o campo externo \hat{h} atinge um valor máximo, damos a seguinte definição:

Definição 6.1. Se $m, \tilde{m} \in \cap_{x \in \mathbb{V}} \mathcal{Q}_{x, \max}(\hat{h})$, logo, $\Theta_{\Lambda, \tilde{m}}(C) = \Theta_{\Lambda, m}(C)$ e portanto,

$$\phi_{\Lambda, \tilde{m}}^{\text{GRC}} = \phi_{\Lambda, m}^{\text{GRC}}.$$

Esta medida será denotada por $\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}$.

Similarmente ao Capítulo 5, definimos as **medidas RC** com condições de fronteiras gerais, livre ou m -conectada, como aquela medida GRC onde se faz $q_p \equiv 1$ para todo $p \in \{1, \dots, q\}$. Neste caso, em analogia ao feito para o caso das medidas GRC, definiremos também o conjunto \mathcal{G}^{RC} com sua respectiva modificação.

6.1.3 Estados de Gibbs na representação de spins

Nesta subsecção, consideramos o modelo de Potts de q estados onde cada spin está acoplado a um campo magnético externo não homogêneo $(h_{x,p} : x \in \mathbb{V}; p = 1, \dots, q)$. Considere a interação $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ definida no Exemplo 4.10 e H_Λ^Φ o Hamiltoniano em Λ associado a Φ , estabelecido na Definição 4.12. Em seguida, definimos uma modificação do Hamiltoniano $H(\cdot)$ introduzido em (336), de modo que, dita variante nos permita incorporar condições de fronteira. Este Hamiltoniano é definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H_\Lambda^\Phi(\sigma_\Lambda \sigma_{\Lambda^c}) &\equiv H(\sigma) - \sum_{\substack{\{x,y\} \in \mathbb{E}: \\ x \in \Lambda, y \in \partial\Lambda}} J_{xy} \delta_{\sigma_x, \sigma_y} \\ &= - \sum_{\substack{\{x,y\} \in \mathbb{E} \\ x, y \in \Lambda}} J_{xy} \delta_{\sigma_x, \sigma_y} - \sum_{p=1}^q \sum_{x \in \Lambda} \frac{h_{i,p}}{q} \delta_{\sigma_x, p} - \sum_{\substack{\{x,y\} \in \mathbb{E}: \\ x \in \Lambda, y \in \partial\Lambda}} J_{xy} \delta_{\sigma_x, \sigma_y}. \end{aligned} \quad (347)$$

Dado σ sobre Λ^c , definimos a medida de probabilidade $\phi_\Lambda^{\text{SPIN}}(\cdot | \sigma_{\Lambda^c})$ através do Hamiltoniano H_Λ^Φ , como

$$\phi_\Lambda^{\text{SPIN}}(\sigma_\Lambda | \sigma_{\Lambda^c}) = \begin{cases} \frac{e^{-\beta H_\Lambda^\Phi(\sigma_\Lambda \sigma_{\Lambda^c})}}{Z_\Lambda^{\text{SPIN}}(\sigma_{\Lambda^c})}, & \text{se } Z_\Lambda^{\text{SPIN}}(\sigma_{\Lambda^c}) > 0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (348)$$

onde $Z_\Lambda^{\text{SPIN}}(\sigma_{\Lambda^c})$ denota a função de partição. Note que a família $\gamma^\Phi = \{\phi_\Lambda^{\text{SPIN}} : \Lambda \in \mathcal{L}\}$ é uma especificação Gibbsiana quase-local. Dizemos que uma medida $\mu \in \mathcal{M}_1(\Sigma_q)$ satisfaz a equação DLR se, para cada função f com suporte em Λ , se satisfaz

$$\mu(f) = \mu(\phi_\Lambda^{\text{SPIN}}(f | \cdot)). \quad (349)$$

Definimos por $\mathcal{G}^{\text{SPIN}}$ o conjunto de todas as medidas de probabilidade que satisfazem a equação DLR. Os elementos de $\mathcal{G}^{\text{SPIN}}$ são chamados, também, de estados ou medidas de Gibbs SPIN.

Desde que γ^Φ é uma especificação quase-local, pelo Teorema 4.26, o conjunto $\mathcal{G}^{\text{SPIN}}$ é não vazio. Observe, também, que a quase-localidade e a consistência desta especificação, segundo o Teorema 4.31, permitem expressar as esperanças condicionais do estado de Gibbs SPIN μ em função das esperanças a volume finito com respeito a $\phi_\Lambda^{\text{SPIN}}$. Em outras palavras, $\mu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$ se, e somente se, para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$ e toda função cilíndrica f com suporte em Λ , se satisfaz

$$\mu(f | \sigma_{\Lambda^c}) = \phi_\Lambda^{\text{SPIN}}(f | \sigma_{\Lambda^c}), \quad \mu - \text{q.c.} \quad (350)$$

Encerramos esta seção notando que as Proposições 5.1 e 5.2 que caracterizam as medidas a volume finito $\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}$ e $\phi_{\Lambda, m}^{\text{GRC}}$, respectivamente, e os Lemas 5.3 e 5.4 que fornecem as η e σ marginais, se mantém ainda para as medidas ES, GRC e SPIN definidas neste capítulo.

6.2 PROPRIEDADE FKG E ALGUMAS MONOTONICIDADES

Nesta seção, assumiremos que $\{q_p : p = 1, \dots, q\}$ é uma sequência de números reais positivos que satisfazem a desigualdade

$$\sum_{p \in \cap_{x \in \mathbb{V}} \mathcal{Q}_{x, \max}(\hat{h})} q_p \geq 1, \quad (351)$$

onde $\mathcal{Q}_{x, \max}(\hat{h})$ foi definido em (346).

Consideraremos a relação de ordem (parcial) natural sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{E}}$ definida por

$$\omega, \eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}} : \omega \preceq \eta \Leftrightarrow \omega_e \leq \eta_e, \quad \forall e \in \mathbb{E}.$$

Usaremos a mesma notação do Capítulo 5 para denotar as configurações máximo e mínimo: $\omega \vee \eta$ e $\omega \wedge \eta$, respectivamente. Lembrando que uma medida μ sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{E}}$ tem a propriedade látice FKG se esta satisfaz a **condição látice FKG**:

$$\mu(\omega \vee \eta) \mu(\omega \wedge \eta) \geq \mu(\omega) \mu_2(\eta), \quad \omega, \eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}}.$$

Seja $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}'}$. Relembrando, segundo a Definição 5.3, uma medida μ sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{B}'}$ tem a propriedade FKG forte se, para cada $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}'$, tal que $\mu(\Omega_{\mathbb{B}}^{\xi}) > 0$, onde

$$\Omega_{\mathbb{B}}^{\xi} \equiv \{\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}'} : \eta_e = \xi_e, \quad \forall e \in \mathbb{B}' \setminus \mathbb{B}\}.$$

A medida $\mu_{\mathbb{B}}^{\xi}$ é associada positivamente, isto é, para quaisquer funções f e g mensuráveis crescentes, temos

$$\mu_{\mathbb{B}}^{\xi}(f \cdot g) \geq \mu_{\mathbb{B}}^{\xi}(f) \mu_{\mathbb{B}}^{\xi}(g),$$

onde a medida de probabilidade condicional $\mu_{\mathbb{B}}^{\xi}$ sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{B}}$ é definida por

$$\mu_{\mathbb{B}}^{\xi}(\eta_{\mathbb{B}}) \equiv \mu(\eta_{\mathbb{B}} | \Omega_{\mathbb{B}}^{\xi}) = \frac{\mu(\eta_{\mathbb{B}} \xi_{\mathbb{B}' \setminus \mathbb{B}})}{\mu(\Omega_{\mathbb{B}}^{\xi})}, \quad \eta_{\mathbb{B}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}},$$

sempre que $\mu(\Omega_{\mathbb{B}}^{\tilde{\zeta}}) > 0$.

A classe de medidas do próximo resultado é caracterizada pela *propriedade FKG forte*. Pelo clássico teorema da desigualdade FKG (veja [65], Teorema 2.16, p. 25), a propriedade FKG forte, conceitualmente, é uma condição mais forte que a propriedade FKG (padrão). Foi mostrado por Van den Berg e Burton [117] que a classe de medidas que satisfazem a propriedade FKG forte é equivalente à classe de medidas que satisfazem a condição látice FKG (veja [52] e o Teorema 5.5 do capítulo anterior).

Teorema 6.1 (Propriedade FKG forte, veja [36]). *Sejam $q \in \mathbb{Z}^+$, $\beta \geq 0$, $J = (J_{xy} : \{x, y\} \in \mathbb{E}) \in [0, \infty)^{\mathbb{E}}$, $\hat{h} = (h_{x,p} \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{V}, 1 \leq p \leq q)$ e $\{q_p : p = 1, \dots, q\}$ satisfazendo (351). Para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$, as medidas $\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}$ e $\phi_{\Lambda, \text{max}}^{\text{GRC}}$ têm a propriedade FKG forte.*

Demonstração. Por simplicidade, assumiremos que o campo magnético satisfaz a seguinte relação

$$h_{x,1} \leq h_{x,2} \leq \dots \leq h_{x,q}, \quad \forall x \in \mathbb{V}. \quad (352)$$

Daqui em diante, dentro do contexto desta demonstração, fixaremos o volume $\Lambda \in \mathcal{L}$. Pelo Teorema 5.5, para provar a propriedade FKG forte da medida $\phi_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}$ onde $\#$ denota a condição de fronteira livre ou m -conectada, é condição necessária e suficiente provar a condição látice FKG para a medida $\phi_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}$, a qual é equivalente a provar a seguinte desigualdade:

$$\mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\eta^{(1)} \vee \eta^{(2)}) \mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\eta^{(1)} \wedge \eta^{(2)}) \geq \mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\eta^{(1)}) \mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\eta^{(2)}), \quad (353)$$

onde $\eta^{(1)}$ e $\eta^{(2)}$ são configurações arbitrárias.

Por definir

$$\mathcal{R}(\tilde{\zeta}, \eta) \equiv \frac{\mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\tilde{\zeta} \vee \eta)}{\mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\tilde{\zeta})},$$

pode-se ver que (353) se mantém se

$$\mathcal{R}(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}) \geq \mathcal{R}(\eta^{(1)} \wedge \eta^{(2)}, \eta^{(2)}), \quad (354)$$

isto é, a condição (353) é satisfeita sempre que verificarmos que $\mathcal{R}(\tilde{\zeta}, \eta)$ é crescente em $\tilde{\zeta}$, para cada η fixado.

Para cada configuração η (fixa), escolhemos uma ordem arbitrário para o conjunto de arestas abertas $\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta)$ e o representamos como a sequência $(e_1, \dots, e_{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta)|})$. Logo, para qualquer configuração $\tilde{\zeta}$ ¹, temos

¹ Aqui a configuração $\tilde{\zeta}$ pertence ao espaço $\{0, 1\}^{\mathbb{B}_0(\Lambda)}$ ou a $\{0, 1\}^{\mathbb{B}(\Lambda)}$.

$$\mathcal{R}(\xi, \eta) = \prod_{k=1}^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta)|} \mathcal{R}(\xi \vee \eta^{(e_1)} \vee \dots \vee \eta^{(e_{k-1})}, \eta^{(e_k)}),$$

onde a configuração $\eta^{(e)}$ é definida por $(\eta^{(e)})_{e'} \equiv \delta_{e,e'}$. Portanto, é suficiente provar (354) para configurações $\xi, \eta^{(1)}$ e $\eta^{(2)}$ tais que ξ tem, no mínimo, duas coordenadas nulas ou, no máximo, uma coordenada nula, com $\eta^{(1)} \equiv \xi \vee \eta^{(b)}, \eta^{(2)} \equiv \xi \vee \eta^{(b')}$. Começaremos assumindo que ξ tem, no mínimo, duas coordenadas nulas que, por simplicidade, o denotaremos assim

$$\xi \equiv (*, \dots, *, \underbrace{0}_{b\text{-ésimo}}, *, \dots, *, \underbrace{0}_{b'\text{-ésimo}}, *, \dots, *),$$

onde $b, b' \in \mathbb{B}_0(\Lambda)$ (ou $\mathbb{B}(\Lambda)$), $b \neq b'$ e os asteriscos denotam elementos genéricos em $\{0, 1\}$ (não necessariamente iguais). Se definimos as configurações

$$\xi^b \equiv (*, \dots, *, \underbrace{1}_{b\text{-ésimo}}, *, \dots, *, \underbrace{0}_{b'\text{-ésimo}}, *, \dots, *)$$

e

$$\xi^{b'} \equiv (*, \dots, *, \underbrace{0}_{b\text{-ésimo}}, *, \dots, *, \underbrace{1}_{b'\text{-ésimo}}, *, \dots, *),$$

temos que $\eta^{(1)} = \xi \vee \eta^{(b)} = \xi^b, \eta^{(2)} = \xi \vee \eta^{(b')} = \xi^{b'}$ e $\eta^{(1)} \wedge \eta^{(2)} = \xi$. Com o intuito de provar (354) é suficiente verificar que

$$\mathcal{R}(\xi^b, \xi^{b'}) \geq \mathcal{R}(\xi, \xi^{b'}), \quad \text{com } b \neq b'. \quad (355)$$

Portanto, nos concentraremos em provar (355). Para isso, primeiro observamos que se $\prod_{\{x,y\}:\xi_{xy}=1} r_{xy} \equiv k(\xi)$, então

$$\prod_{\{x,y\}:(\xi^b \vee \xi^{b'})_{xy}=1} r_{xy} = r_b r_{b'} k(\xi), \quad \prod_{\{x,y\}:\xi^b_{xy}=1} r_{xy} = r_b k(\xi) \quad \text{e} \quad \prod_{\{x,y\}:(\xi \vee \xi^{b'})_{xy}=1} r_{xy} = r_{b'} k(\xi).$$

Segue da definição do fator de Bernoulli (337) que

$$\frac{B_{\mathbf{J}}(\xi^b \vee \xi^{b'})}{B_{\mathbf{J}}(\xi^b)} = \frac{\prod_{\{x,y\}:(\xi^b \vee \xi^{b'})_{xy}=1} r_{xy}}{\prod_{\{x,y\}:\xi^b_{xy}=1} r_{xy}} = r_{b'} = \frac{\prod_{\{x,y\}:(\xi \vee \xi^{b'})_{xy}=1} r_{xy}}{\prod_{\{x,y\}:\xi_{xy}=1} r_{xy}} = \frac{B_{\mathbf{J}}(\xi \vee \xi^{b'})}{B_{\mathbf{J}}(\xi)}.$$

Pela observação feita acima e pelas definições de $\mathcal{W}_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}$ e $\mathcal{W}_{\Lambda, m}^{\text{GRC}}$, a prova de (355) se reduz a provar a desigualdade

$$\frac{\Theta_{\Lambda, \#}(C(\xi^b \vee \xi^{b'}))}{\Theta_{\Lambda, \#}(C(\xi^b))} \geq \frac{\Theta_{\Lambda, \#}(C(\xi \vee \xi^{b'}))}{\Theta_{\Lambda, \#}(C(\xi))}, \quad (356)$$

onde # denota a condição de fronteira livre ou m -conectada.

CASO CONDIÇÃO DE FRONTEIRA LIVRE.

Dividiremos a prova de (356) em vários casos. Sejam A_1, A_2, B_1 e B_2 os aglomerados do grafo $(\Lambda, \mathbb{B}_{\text{occ}}(\xi) \cap \mathbb{B}_0(\Lambda))$, consideraremos os casos mostrados na Figura 31.

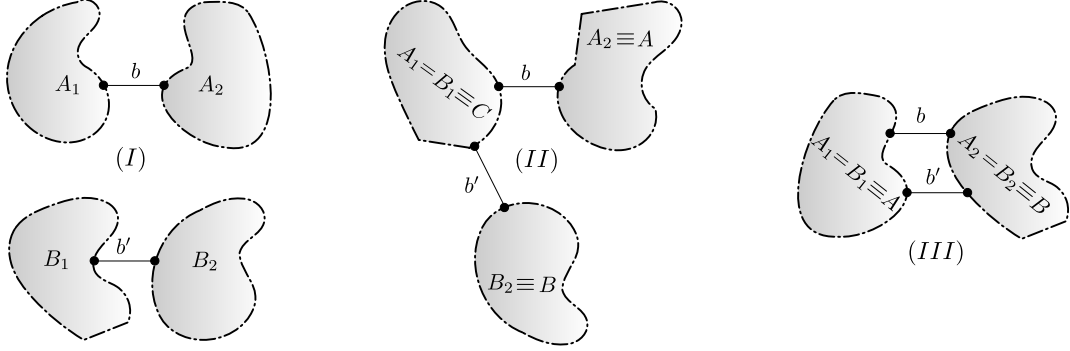


Figura 31: Aglomerados A_1, A_2, B_1 e B_2 no grafo $(\Lambda, \mathbb{B}_{\text{occ}}(\xi) \cap \mathbb{B}_0(\Lambda))$.

O caso (I) representa o fato de que os vértices da aresta b pertencem ao aglomerado A_1, A_2 e os vértices de b' pertencem ao aglomerado B_1, B_2 . Neste caso, o lado esquerdo e o lado direito de (356) são iguais, desde que

$$\frac{\Theta_{\text{livre}}(A_1 \cup A_2)\Theta_{\text{livre}}(B_1 \cup B_2)}{\Theta_{\text{livre}}(A_1 \cup A_2)\Theta_{\text{livre}}(B_1)\Theta_{\text{livre}}(B_2)} = \frac{\Theta_{\text{livre}}(B_1 \cup B_2)\Theta_{\text{livre}}(A_1)\Theta_{\text{livre}}(A_2)}{\Theta_{\text{livre}}(A_1)\Theta_{\text{livre}}(A_2)\Theta_{\text{livre}}(B_1)\Theta_{\text{livre}}(B_2)}.$$

Para o caso (II), devemos provar que

$$\frac{\Theta_{\text{livre}}(A \cup B \cup C)}{\Theta_{\text{livre}}(C \cup A)\Theta_{\text{livre}}(B)} \geq \frac{\Theta_{\text{livre}}(C \cup B)\Theta_{\text{livre}}(A)}{\Theta_{\text{livre}}(A)\Theta_{\text{livre}}(B)\Theta_{\text{livre}}(C)},$$

o que é equivalente a provar a seguinte desigualdade

$$\Theta_{\text{livre}}(C)\Theta_{\text{livre}}(A \cup B \cup C) \geq \Theta_{\text{livre}}(C \cup A)\Theta_{\text{livre}}(C \cup B). \quad (357)$$

Para facilitar a prova de (357), para cada $p \in \{1, \dots, q\}$, definimos os seguintes números

$$a_p \equiv e^{\beta \sum_{x \in A} h_{x,p}}, \quad b_p \equiv e^{\beta \sum_{x \in B} h_{x,p}} \quad \text{e} \quad c_p \equiv e^{\beta \sum_{x \in C} h_{x,p}}.$$

A hipótese (352) implica que as sequências $(a_p)_{p=1}^q$ e $(b_p)_{p=1}^q$ são não decrescentes em p . Usando esta notação, (357) se reescreve

$$\sum_{p=1}^q q_p c_p \sum_{p'=1}^q q_{p'} a_{p'} b_{p'} c_{p'} \geq \sum_{p=1}^q q_p a_p c_p \sum_{p'=1}^q q_{p'} b_{p'} c_{p'}. \quad (358)$$

Ambos os lados da desigualdade acima podem ser escritos usando a forma bilinear

$$\varphi(a, b) \equiv \sum_{p, p'=1}^q r_{p, p'} a_{p'} b_p,$$

onde $r_{p, p'} \equiv q_p c_p q_{p'} c_{p'}$, $a \equiv (a_1, \dots, a_q)$ e $b \equiv (b_1, \dots, b_q)$. Note que φ é uma forma bilinear simétrica e que (358) pode ser escrita como

$$\varphi(1, c) \geq \varphi(a, b), \quad \text{onde } c \equiv (a_1 b_1, \dots, a_q b_q). \quad (359)$$

Portanto, resta provar (359), o qual claramente se mantém, desde que

$$r_{p, p'}(a_{p'} - a_p)(b_{p'} - b_p) \geq 0 \Leftrightarrow \varphi(1, c) - \varphi(a, b) - \varphi(b, a) + \varphi(c, 1) \geq 0.$$

Procedemos a provar (356) para o caso (III). Para isso, teremos que provar

$$1 = \frac{\Theta_{\text{livre}}(A \cup B)}{\Theta_{\text{livre}}(A \cup B)} \geq \frac{\Theta_{\text{livre}}(A \cup B)}{\Theta_{\text{livre}}(A) \Theta_{\text{livre}}(B)},$$

em outras palavras, provaremos que $\Theta_{\text{livre}}(A) \Theta_{\text{livre}}(B) \geq \Theta_{\text{livre}}(A \cup B)$, ou equivalentemente

$$\sum_{p=1}^q q_p a_p \sum_{p'=1}^q q_{p'} b_{p'} \geq \sum_{p=1}^q q_p a_p b_p.$$

Esta última desigualdade é verdade, uma vez que por (351), $\forall p \in \{1, \dots, q\}$

$$\sum_{p'=1}^q q_{p'} b_{p'} \geq \sum_{p'} q_{p'} b_{p'} = \sum_{p'} q_{p'} e^{\beta \sum_{x \in B} h_{x, \max}} \geq e^{\beta \sum_{x \in B} h_{x, p}} \sum_{p'} q_{p'} \geq b_p,$$

onde os somatórios em p 's percorrem sobre o conjunto $\cap_{x \in V} \mathcal{Q}_{x, \max}(\hat{h})$.

Para os casos onde os vértices de b ou b' são contidos no mesmo aglomerado, a desigualdade é trivial.

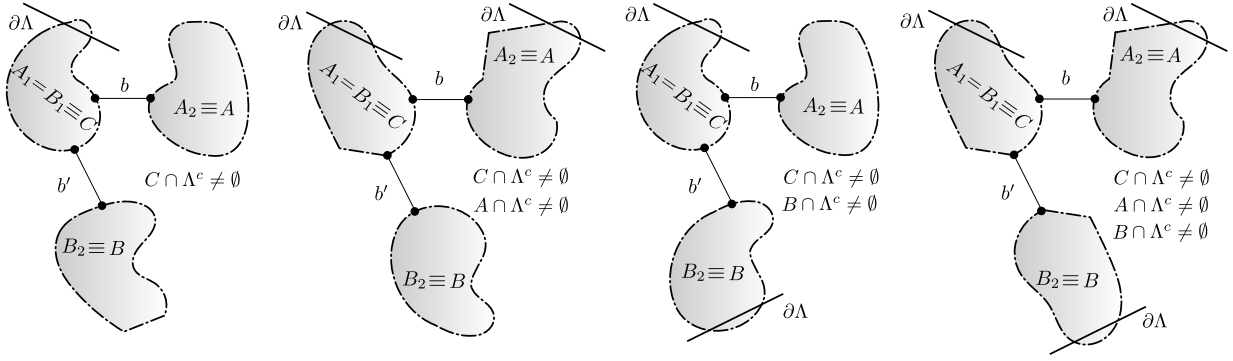
CASO CONDIÇÃO DE FRONTEIRA MAX-CONECTADA.

Suponha que $\tilde{m} \in \cap_{x \in V} \mathcal{Q}_{x, \max}(\hat{h})$. Para provar a desigualdade (356), outra vez, temos que analisar os três casos expostos na Figura 31. Para o caso (I), analogamente ao caso da condição de fronteira livre, temos

$$\frac{\Theta_{\Lambda, \tilde{m}}(A_1 \cup A_2) \Theta_{\Lambda, \tilde{m}}(B_1 \cup B_2)}{\Theta_{\Lambda, \tilde{m}}(A_1 \cup A_2) \Theta_{\Lambda, \tilde{m}}(B_1) \Theta_{\Lambda, \tilde{m}}(B_2)} = \frac{\Theta_{\Lambda, \tilde{m}}(B_1 \cup B_2) \Theta_{\Lambda, \tilde{m}}(A_1) \Theta_{\Lambda, \tilde{m}}(A_2)}{\Theta_{\Lambda, \tilde{m}}(A_1) \Theta_{\Lambda, \tilde{m}}(A_2) \Theta_{\Lambda, \tilde{m}}(B_1) \Theta_{\Lambda, \tilde{m}}(B_2)},$$

independentemente dos aglomerados A_1, A_2, B_1 e B_2 e das possíveis combinações que interceptam Λ^c .

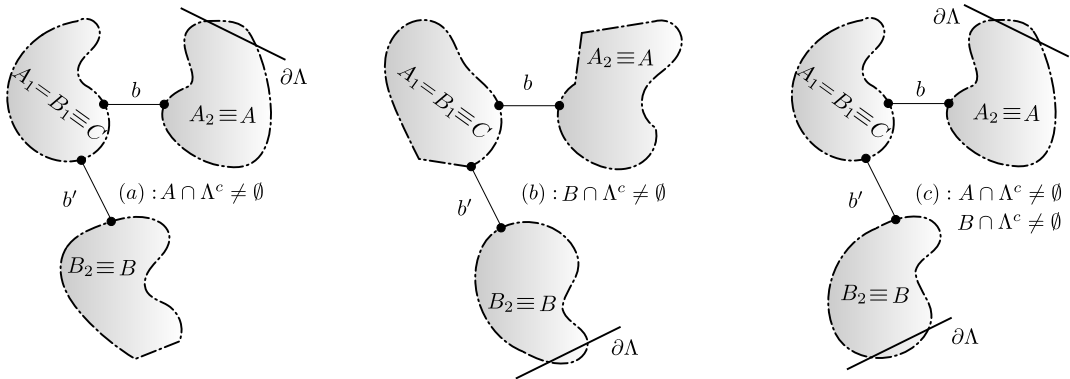
Para o caso (II) e todas as configurações mostradas na figura abaixo



temos da definição (218) de $\Theta_{\Lambda, \tilde{m}}$ que a seguinte igualdade se satisfaz

$$c_{\tilde{m}} a_{\tilde{m}} b_{\tilde{m}} c_{\tilde{m}} = a_{\tilde{m}} c_{\tilde{m}} b_{\tilde{m}} c_{\tilde{m}}.$$

Para as seguintes configurações, que também aparecem no caso (II) da Figura 31:



veja que, para o caso (a) a desigualdade (356) fica

$$\left(\sum_{p=1}^q q_p c_p \right) a_{\tilde{m}} b_{\tilde{m}} c_{\tilde{m}} \geq a_{\tilde{m}} c_{\tilde{m}} \left(\sum_{p'=1}^q q_{p'} b_{p'} c_{p'} \right),$$

a qual é sempre válida desde que $b_{\tilde{m}} \geq b_{p'}, \forall p' = 1, \dots, q$. Já no caso (b), a desigualdade (356) fica

$$\left(\sum_{p=1}^q q_p c_p \right) a_{\tilde{m}} b_{\tilde{m}} c_{\tilde{m}} \geq \left(\sum_{p=1}^q q_p a_p c_p \right) b_{\tilde{m}} c_{\tilde{m}},$$

a qual é verdade, porque $a_{\tilde{m}} \geq a_p, \forall p = 1, \dots, q$. Finalmente, em (c), a desigualdade (356) se expressa da seguinte forma

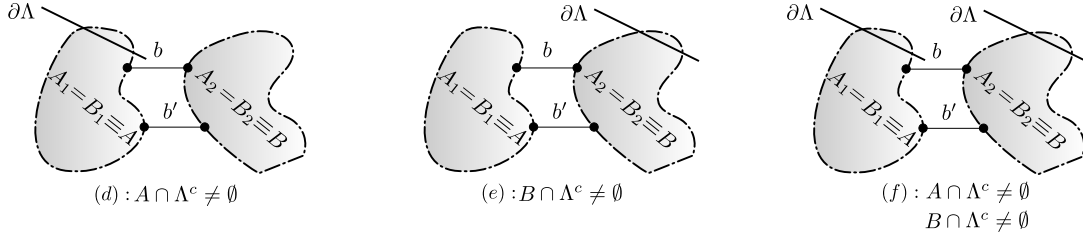
$$\left(\sum_{p=1}^q q_p c_p \right) a_{\tilde{m}} b_{\tilde{m}} c_{\tilde{m}} \geq a_{\tilde{m}} c_{\tilde{m}} b_{\tilde{m}} c_{\tilde{m}},$$

mas esta desigualdade é válida, pois

$$\sum_{p=1}^q q_p c_p \geq \sum_{p \in \cap_{x \in \mathbb{V}} \mathcal{Q}_{x, \max}(\hat{h})} q_p c_p \geq c_{\tilde{m}},$$

a qual segue de (351) e da identidade $c_p = c_{\tilde{m}}$ sobre $\cap_{x \in \mathbb{V}} \mathcal{Q}_{x, \max}$.

Agora, consideraremos o caso (III) da Figura 31, dividindo sua análise nos seguintes sub-casos



Para (d), a desigualdade (356) é válida enquanto

$$a_{\tilde{m}} \left(\sum_{p'=1}^q q_{p'} b_{p'} \right) \geq a_{\tilde{m}} b_{\tilde{m}}.$$

Este fato é verdadeiro, porque

$$\sum_{p'=1}^q q_{p'} b_{p'} \geq \sum_{p' \in \cap_{x \in \mathbb{V}} \mathcal{Q}_{x, \max}(\hat{h})} q_{p'} b_{p'} \geq b_{\tilde{m}}.$$

Para (e), a desigualdade desejada segue de

$$\left(\sum_{p=1}^q q_p a_p \right) b_{\tilde{m}} \geq a_{\tilde{m}} b_{\tilde{m}},$$

mas esta desigualdade se mantém, uma vez que

$$\sum_{p=1}^q q_p a_p \geq \sum_{p \in \cap_{x \in \mathbb{V}} \mathcal{Q}_{x, \max}(\hat{h})} q_p a_p \geq a_{\tilde{m}}.$$

Para o último sub-caso (f), temos que provar que $a_{\tilde{m}} b_{\tilde{m}} = a_{\tilde{m}} b_{\tilde{m}}$, o que é obviamente verdadeiro.

Na condição de fronteira max-conectada, se os vértices extremos de b ou b' pertencem ao mesmo aglomerado, o resultado segue.

Para finalizar a prova, necessitamos considerar o caso em que ξ tem, no máximo, uma coordenada nula e $\eta^{(1)} \equiv \xi \vee \eta^{(b)}$, $\eta^{(2)} \equiv \xi \vee \eta^{(b')}$. Suponha que

$$\xi \equiv (1, \dots, 1, \underbrace{0}_{b\text{-ésimo}}, 1, \dots, 1, \underbrace{1}_{b'\text{-ésimo}}, 1, \dots, 1),$$

onde $b, b' \in \mathbb{B}(\Lambda)$ com $b \neq b'$. Definindo as configurações

$$\xi^b \equiv (1, \dots, 1, \underbrace{1}_{b\text{-ésimo}}, 1, \dots, 1, \underbrace{1}_{b'\text{-ésimo}}, 1, \dots, 1)$$

e

$$\zeta^{b'} \equiv (1, \dots, 1, \underbrace{0}_{b\text{-ésimo}}, 1, \dots, 1, \underbrace{1}_{b'\text{-ésimo}}, 1, \dots, 1),$$

pode-se ver que $\eta^{(1)} = \zeta \vee \eta^{(b)} = \zeta^b$, $\eta^{(2)} = \zeta \vee \eta^{(b')} = \zeta^{b'}$ e $\eta^{(1)} \wedge \eta^{(2)} = \zeta$. Neste caso, para provar (354) para as condições de fronteira livre e max-conectada, é suficiente provar que $\mathcal{R}(\zeta^b, \zeta^{b'}) = \mathcal{R}(\zeta, \zeta^{b'})$ com $b \neq b'$, mas isto é trivial, desde que

$$\mathcal{R}(\zeta^b, \zeta^{b'}) = \frac{\mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\zeta^b \vee \zeta^{b'})}{\mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\zeta^b)} = \frac{\mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\zeta^b)}{\mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\zeta^b)} = \frac{\mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\zeta)}{\mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\zeta)} = \frac{\mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\zeta \vee \zeta^{b'})}{\mathcal{W}_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}}(\zeta)} = \mathcal{R}(\zeta, \zeta^{b'}),$$

o que conclui a demonstração. \square

Pelo uso da propriedade FKG forte para o modelo GRC e das prévias definições, pode-se provar o seguinte teorema, o qual assegura a existência do limite termodinâmico.

Teorema 6.2 (Monotonicidade e existência de limites de estado). *Sejam $\beta \geq 0$, $\mathbf{J} = (J_{xy} : \{x, y\} \in \mathbb{E}) \in [0, \infty)^{\mathbb{E}}$ e $\hat{\mathbf{h}} \equiv (h_{x,p} \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{V}; p = 1, \dots, q)$. Para cada função quase-local f ,*

(i) *Os seguintes limites existem*

$$\phi_{\max}^{\text{GRC}}(f) \equiv \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{V}} \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(f) \quad e \quad \phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}}(f) \equiv \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{V}} \phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}(f).$$

(ii) *Se, em adição, $m \in \cap_{x \in \mathbb{V}} \mathcal{Q}_{x, \max}(\hat{\mathbf{h}})$, então, os seguintes limites existem*

$$\phi_{\max}^{\text{ES}}(f) \equiv \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{V}} \phi_{\Lambda, \max}^{\text{ES}}(f) \quad e \quad \phi_{\text{livre}}^{\text{ES}}(f) \equiv \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{V}} \phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{ES}}(f).$$

(iii) *Se $\phi \in \mathcal{G}_{\text{lim}}^{\text{GRC}}$ ou $\phi \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}$, então, para cada função quase-local crescente f , temos*

$$\phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}}(f) \leq \phi(f) \leq \phi_{\max}^{\text{GRC}}(f).$$

Demonstração. A prova dos Itens (i), (ii) e (iii) seguem o mesmo esquema das provas dos Teoremas 5.12, 5.26 e 5.14, respectivamente, dados no Capítulo 5, uma vez que na prova destes resultados é usada a teoria geral do formalismo termodinâmico. \square

Proposição 6.3. *A especificação $\{\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}} : |\mathbb{B}| < \infty\}$ não é quase-local.*

Demonstração. A demonstração é feita em analogia (com suas respectivas adaptações) à Proposição 5.13 do capítulo anterior. \square

Como estamos interessados em propriedades de monotonicidade das medidas de Gibbs GRC com respeito ao campo externo, necessitamos introduzir uma relação de ordem parcial que nos permita fazer comparações entre duas medidas quando tomarmos dois campos externos comparáveis (veja referência [20]). Para isso, dados dois campos magnéticos arbitrários \hat{h} e \hat{h}' , dizemos que

$$\hat{h} \prec \hat{h}' \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{V} : h_{x,k} - h_{x,l} \leq h'_{x,k} - h'_{x,l}, \quad k, l = 1, \dots, q, \quad (360)$$

sempre que $h_{x,k} - h_{x,l} > 0$. Esta definição de relação de ordem entre campos externos não uniformes foi motivada pela definição de relação de ordem dada em (259) para campos externos homogêneos.

Teorema 6.4 (Monotonicidade com respeito ao campo magnético externo, veja [36]). *Sejam \hat{h} e \hat{h}' dois campos magnéticos externos arbitrários tais que $\hat{h} \prec \hat{h}'$. Denotamos por $\phi_{\#}^{\text{GRC}, \hat{h}}$ e $\phi_{\#}^{\text{GRC}, \hat{h}'}$ suas respectivas medidas definidas no Teorema 6.2, onde $\#$ denota a condição de fronteira livre ou max-conectada. Logo, para qualquer função quase-local crescente f , temos*

$$\phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}, \hat{h}}(f) \leq \phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}, \hat{h}'}(f) \quad e \quad \phi_{\text{max}}^{\text{GRC}, \hat{h}}(f) \leq \phi_{\text{max}}^{\text{GRC}, \hat{h}'}(f).$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.31 (desigualdade de Holley), a dominação estocástica clamada na tese do teorema é justificada se provarmos a seguinte condição látice:

$$\phi_{V, \#}^{\text{GRC}, \hat{h}}(\omega^{(1)} \vee \omega^{(2)}) \phi_{V, \#}^{\text{GRC}, \hat{h}'}(\omega^{(1)} \wedge \omega^{(2)}) \geq \phi_{V, \#}^{\text{GRC}, \hat{h}'}(\omega^{(1)}) \phi_{V, \#}^{\text{GRC}, \hat{h}}(\omega^{(2)}), \quad (361)$$

para todo $\omega^{(1)}, \omega^{(2)} \in \{0, 1\}^E$, onde $\#$ denota as condições de fronteira livre e max-conectada e $G = (V, E)$ é um subgrafo finito de \mathbb{L} . É conhecido, também, que a condição látice (361) é uma consequência de

$$\frac{\phi_{V, \#}^{\text{GRC}, \hat{h}'}(\zeta^e)}{\phi_{V, \#}^{\text{GRC}, \hat{h}'}(\zeta_{(e)})} \geq \frac{\phi_{V, \#}^{\text{GRC}, \hat{h}}(\zeta^e)}{\phi_{V, \#}^{\text{GRC}, \hat{h}}(\zeta_{(e)})}, \quad (362)$$

para qualquer $\zeta \preceq \zeta$ e $e \in E$, onde $\zeta_{(e)}$ (ζ^e) é a configuração que coincide com ζ em todas as arestas, exceto em e , onde seu valor é zero (um). Salientamos que as notações ζ_e e $\zeta_{(e)}$ têm diferentes significados.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que ζ e ζ são da forma

$$\zeta \equiv (*, \dots, *, \underbrace{0}_{e\text{-ésimo}}, *, \dots, *) \quad e \quad \zeta \equiv (*', \dots, *', \underbrace{0}_{e\text{-ésimo}}, *', \dots, *'),$$

respectivamente, com $\tilde{\zeta} \preceq \zeta$. Sejam $k' \equiv \prod_{\{x,y\}:\zeta_{xy}=1} r_{xy}$ e $k \equiv \prod_{\{x,y\}:\tilde{\zeta}_{xy}=1} r_{xy}$. Com essas notações a nossa disposição, obtemos que

$$\zeta_{(e)} = \zeta, \quad \tilde{\zeta}_{(e)} = \tilde{\zeta}, \quad \prod_{\{x,y\}:\zeta_{xy}=1} r_{xy} = r_e k' \quad \text{e} \quad \prod_{\{x,y\}:\tilde{\zeta}_{xy}=1} r_{xy} = r_e k.$$

Portanto,

$$\frac{B_J(\zeta^e)}{B_J(\zeta_{(e)})} = \frac{\prod_{\{x,y\}:\zeta_{xy}^e=1} r_{xy}}{\prod_{\{x,y\}:\zeta_{xy}=1} r_{xy}} = r_e = \frac{\prod_{\{x,y\}:\tilde{\zeta}_{xy}^e=1} r_{xy}}{\prod_{\{x,y\}:\tilde{\zeta}_{xy}=1} r_{xy}} = \frac{B_J(\tilde{\zeta}^e)}{B_J(\tilde{\zeta}_{(e)})}.$$

Segue da equação acima que a desigualdade (362) é uma consequência de

$$\frac{\Theta_{V,\#}^{\hat{h}'}(\zeta^e)}{\Theta_{V,\#}^{\hat{h}'}(\zeta_{(e)})} \geq \frac{\Theta_{V,\#}^{\hat{h}}(\tilde{\zeta}^e)}{\Theta_{V,\#}^{\hat{h}}(\tilde{\zeta}_{(e)})}, \quad (363)$$

para condições de fronteira $\#$: livre e max-conectada.

Se $e = \{x, y\}$ e $x \leftrightarrow y$ na configuração ζ , (363) é uma igualdade. Por outro lado, se $x \not\leftrightarrow y$ em ζ , então existem duas componentes conexas $A \equiv C(x, \zeta)$ e $B \equiv C(y, \zeta)$ contendo os vértices x e y , respectivamente. Se e é uma aresta aberta em ζ , então as componentes A e B são conectadas e serão denotadas por $C \equiv A \cup B$. Assim, $|C| = |A| + |B|$, de onde deduzimos que

$$\frac{\Theta_{V,\#}^{\hat{h}'}(\zeta^e)}{\Theta_{V,\#}^{\hat{h}'}(\zeta_{(e)})} \cdot \frac{\Theta_{V,\#}^{\hat{h}}(\tilde{\zeta}_{(e)})}{\Theta_{V,\#}^{\hat{h}}(\tilde{\zeta}^e)} = \frac{\Theta_{V,\#}^{\hat{h}'}(C)}{\Theta_{V,\#}^{\hat{h}}(C)} \cdot \frac{\Theta_{V,\#}^{\hat{h}}(A)\Theta_{V,\#}^{\hat{h}}(B)}{\Theta_{V,\#}^{\hat{h}'}(A)\Theta_{V,\#}^{\hat{h}'}(B)},$$

para cada condição de fronteira $\#$: livre e max-conectada. Na direção de provar (363), é suficiente provar que

$$\frac{\Theta_{V,\#}^{\hat{h}'}(C)}{\Theta_{V,\#}^{\hat{h}}(C)} \cdot \frac{\Theta_{V,\#}^{\hat{h}}(A)\Theta_{V,\#}^{\hat{h}}(B)}{\Theta_{V,\#}^{\hat{h}'}(A)\Theta_{V,\#}^{\hat{h}'}(B)} \geq 1. \quad (364)$$

Para provarmos a desigualdade acima, faremos uma análise por separado para o caso da fronteira livre e para o caso da fronteira max-conectada.

CASO CONDIÇÃO DE FRONTEIRA LIVRE.

Mantendo a notação usada na prova da desigualdade FKG, para cada $m \in \{1, \dots, q\}$, definimos

$$a_m \equiv e^{\beta \sum_{x \in A} h_{x,m}}, \quad b_m \equiv e^{\beta \sum_{x \in B} h_{x,m}} \quad \text{e} \quad c_m \equiv e^{\beta \sum_{x \in C} h_{x,m}}.$$

Analogamente, definimos a'_m, b'_m e c'_m por substituir $(h_{x,m})$ por $(h'_{x,m})$. Com esta notação, (364) fica

$$\left(\sum_{j=1}^q q_j a'_j \right) \left(\sum_{k=1}^q q_k b'_k \right) \left(\sum_{l=1}^q q_l a_l b_l \right) \leq \left(\sum_{j=1}^q q_j a_j \right) \left(\sum_{k=1}^q q_k b_k \right) \left(\sum_{l=1}^q q_l a'_l b'_l \right). \quad (365)$$

A prova da desigualdade (365) é dividida em dois passos.

Passo 1:(remover as primas dos a_j 's) afirmamos que

$$\left(\sum_{j=1}^q q_j a'_j\right) \left(\sum_{k=1}^q q_k b'_k\right) \left(\sum_{l=1}^q q_l a_l b_l\right) \leq \left(\sum_{j=1}^q q_j a_j\right) \left(\sum_{k=1}^q q_k b'_k\right) \left(\sum_{l=1}^q q_l a'_l b_l\right). \quad (366)$$

De fato, primeiro, observamos que sem perda de generalidade podemos assumir que $h_{x,l} - h_{x,j} > 0, \forall x \in \mathbb{V}$. Por hipótese, temos $\hat{h} < \hat{h}'$, logo, $\forall l, j = 1, \dots, q$ e $\forall x \in \mathbb{V}$ conseguimos que $h_{x,l} - h_{x,j} \leq h'_{x,l} - h'_{x,j}$. Desta última desigualdade,

$$\frac{a_l}{a_j} \leq \frac{a'_l}{a'_j}, \quad \text{a qual implica que } a'_l a_l - a_j a'_l \leq 0. \quad (367)$$

Por outro lado, desde que $h_{x,l} - h_{x,j} > 0$, temos $b_l - b_j > 0$. Combinando as duas últimas desigualdades, obtemos

$$(a'_l a_l - a_j a'_l)(b_l - b_j) \leq 0,$$

e concluímos que $a'_l a_l b_l \leq [a'_l a_l - a_j a'_l] b_j + a'_l a_j b_l \leq a_j a'_l b_l$, onde, na última desigualdade, foi usado (367). Multiplicando a desigualdade acima pelo fator $q_j q_k q_l b'_k$ e somando sobre todo $j, k, l = 1, \dots, q$, provamos o afirmado.

Passo 2:(remover primas de b_k 's) afirmamos que

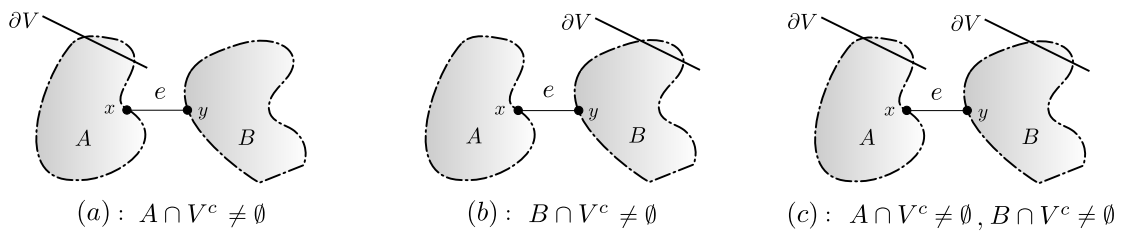
$$\left(\sum_{j=1}^q q_j a_j\right) \left(\sum_{k=1}^q q_k b'_k\right) \left(\sum_{l=1}^q q_l a'_l b_l\right) \leq \left(\sum_{j=1}^q q_j a_j\right) \left(\sum_{k=1}^q q_k b_k\right) \left(\sum_{l=1}^q q_l a'_l b'_l\right). \quad (368)$$

A prova é análoga à feita para o Passo 1. Assumimos que $h_{x,l} - h_{x,k} > 0, \forall x \in \mathbb{V}$ e em lugar de (367), provamos que $b'_k b_l - b_k b'_l \leq 0$, procedendo por similitude, alcançamos a conclusão.

Finalmente, combinamos as desigualdades (366) e (368) para obter (365).

CASO CONDIÇÃO DE FRONTEIRA MAX-CONECTADA.

Primeiro, observe que, se $m \in \cap_{x \in \mathbb{V}} \mathcal{Q}_{x,m}(\hat{h})$ e $\tilde{m} \in \cap_{x \in \mathbb{V}} \mathcal{Q}_{x,\tilde{m}}(\hat{h}')$, então $m = \tilde{m}$. Dadas duas componentes conexas A e B , se $A \cap V^c = \emptyset$ e $B \cap V^c = \emptyset$, então a desigualdade (364) segue diretamente do caso da condição de fronteira livre exposto acima. Os casos restantes serão analisados por considerar os seguintes casos:



No caso (a), (364) é equivalente à desigualdade

$$a'_m \left(\sum_{k=1}^q q_k b'_k \right) a_m b_m \leq a_m \left(\sum_{k=1}^q q_k b_k \right) a'_m b'_m. \quad (369)$$

Para provar a veracidade desta desigualdade, é suficiente observar que o ordenamento parcial entre os campos magnéticos externos implica que $b_m b'_k \leq b'_m b_k$. Multiplicando a desigualdade acima pelo fator $a'_m a_m$ e somando sobre todo $k = 1, \dots, q$, obtemos (369).

No caso (b), a desigualdade (364) se reduz a

$$\left(\sum_{j=1}^q q_j a'_j \right) b'_m a_m b_m \leq \left(\sum_{j=1}^q q_j a_j \right) b_m a'_m b'_m.$$

Agora, novamente usamos o ordenamento parcial entre os campos magnéticos externos para obter $a_m a'_j \leq a'_m a_j$ e procedemos similarmente ao caso anterior.

Finalmente, no caso (c), a desigualdade (364) é equivalente a $a'_m b'_m a_m b_m = a_m b_m a'_m b'_m$, o que é trivialmente certo. \square

O próximo resultado de monotonicidade é válido para uma gama de medidas de probabilidade com a restrição de que estas medidas sejam associadas positivamente.

Proposição 6.5. *Se $\mu_i(\eta) \equiv \frac{1}{Z_i} B_J(\eta) \mathcal{W}_i(\eta)$, $i = 1, 2$, são duas medidas de probabilidade que satisfazem a propriedade FKG, onde*

- 1) \mathcal{W}_1 e \mathcal{W}_2 são crescentes ou decrescentes ou \mathcal{W}_1 é decrescente e \mathcal{W}_2 é crescente, então

$$\mu_1(f) \leq \mu_2(f),$$

para cada função crescente f .

- 2) \mathcal{W}_1 é crescente e \mathcal{W}_2 é decrescente, então

$$\mu_1(f) \geq \mu_2(f),$$

para cada função crescente f .

Aqui, B_J denota o fator de Bernoulli definido em (337) e as monotonicidades são segundo FKG.

Demonstração. Definindo a aplicação $\eta \mapsto g(\eta) \equiv \frac{\mathcal{W}_1(\eta)}{\mathcal{W}_2(\eta)}$, para cada função crescente f , temos

$$\mu_1(f) = \frac{1}{Z_1} \sum_{\eta} f(\eta) g(\eta) B_J(\eta) \mathcal{W}_2(\eta) = \frac{Z_2}{Z_1} \mu_2(f \cdot g). \quad (370)$$

Tomando $f \equiv 1$ em (370), obtemos

$$\mu_2(g) = \left[\frac{Z_2}{Z_1} \right]^{-1}. \quad (371)$$

Para provar o primeiro item, por hipótese, temos que g é decrescente. Logo, por (370), (371) e pela desigualdade FKG, temos

$$\mu_1(f) = \frac{\mu_2(f \cdot g)}{\mu_2(g)} \leq \mu_2(f).$$

O segundo item é provado analogamente ao primeiro item. \square

Seguindo a mesma ideia, com suas respectivas adaptações, do Teorema 6.4, obtemos a seguinte proposição, a qual terá um rol sutil para provar a monotonicidade das medidas de Gibbs GRC com respeito à constante de acoplamento.

Proposição 6.6. *As aplicações*

$$\eta \mapsto B_J^{-1}(\eta) \mathcal{W}_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}(\eta) \quad e \quad \eta \mapsto B_J^{-1}(\eta) \mathcal{W}_{\Lambda, \text{max}}^{\text{GRC}}(\eta),$$

são decrescentes no sentido FKG, onde os pesos $\mathcal{W}_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}$, $\mathcal{W}_{\Lambda, \text{max}}^{\text{GRC}}$ foram definidos em (344) e (345) (precisamente, na Definição 6.1), respectivamente. Aqui, B_J denota o fator de Bernoulli definido em (337)

Demonstração. A prova desta proposição será omitida, uma vez que a técnica da prova segue o mesmo esquema da Proposição 5.15 do capítulo anterior, com suas respectivas adaptações. \square

É bem sabido que as dominações estocásticas nos permitem comparar distintas medidas de probabilidade. Um dos usos comuns deste tipo de dominações é que nos permite provar que certas características são hereditárias de um modelo para outro, que geralmente não é nada trivial. Por exemplo, a seguinte proposição nos diz que a medida de percolação de Bernoulli domina a medida do modelo GRC com presença de campo externo não invariante por translações. Logo, se soubéssemos a priori que o modelo GRC possui um único aglomerado infinito quase certamente (de fato, essa afirmação é verdadeira baixo certa condição geométrica no grafo, como veremos na Seção 6.4), então poderíamos dar uma prova alternativa ao fato de que a medida de Bernoulli tem, também, a propriedade 0/1-aglomerado-infinito.

Proposição 6.7 (Dominação estocástica da medida de Bernoulli). *Para cada função quase-local crescente f , temos*

$$\phi_{\max}^{\text{GRC}}(f) \leq \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(f),$$

onde $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}$ denota a medida de percolação independente (ou de Bernoulli) associada aos fatores de Bernoulli definidos em (337) com pesos $\mathbf{p} \equiv (r_{i,j} : i, j \in \mathbb{V})$.

Demonstração. Para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$, definindo $\mu_1(\cdot) \equiv \mathbb{P}_{\Lambda, \mathbf{p}}(\cdot)$ e $\mu_2(\cdot) \equiv \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(\cdot)$ com seus respectivos pesos $\mathcal{W}_1(\cdot) \equiv 1$ e $\mathcal{W}_2(\cdot) \equiv B_{\mathbf{J}}^{-1} \mathcal{W}_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(\cdot)$. Desde que \mathcal{W}_1 é crescente e pela Proposição 6.6, \mathcal{W}_2 é crescente, logo, pelo Item 2) da Proposição 6.5, temos $\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}}(f) \leq \mathbb{P}_{\Lambda, \mathbf{p}}(f)$, para qualquer função crescente f . A quase-localidade da função f é usada para poder tomar o limite termodinâmico na última desigualdade. \square

O seguinte resultado é concernente à monotonicidade, no sentido FKG, com respeito a acoplamentos constantes J , isto é, acoplamentos especiais onde $J_{xy} \equiv J, \forall x, y \in \mathbb{V}$. A Proposição 6.6 terá um papel fundamental na prova deste resultado, como veremos na continuação.

Teorema 6.8 (Veja referência [36]). *Suponha que $0 \leq J_1 < J_2$ são dois acoplamentos constantes. Para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$, denote por $\phi_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}, J_k}$, $k = 1, 2$ a medida definida pelos pesos (216) ou (218) com $m \in \cap_{x \in \mathbb{V}} \in \mathcal{Q}_{x, \max}(\hat{\mathbf{h}})$. Logo,*

$$\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}, J_1}(f) \leq \phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}, J_2}(f),$$

onde f é uma função crescente cilíndrica e $\#$ denota a condição de fronteira livre ou max-conectada.

Demonstração. Como $J_1 < J_2$, temos $e^{q\beta J_1} - 1 < e^{q\beta J_2} - 1$. Para toda configuração $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}(\Lambda)}$, defina a função $g : \{0, 1\}^{\mathbb{B}(\Lambda)} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(\eta) \equiv \left[\frac{e^{q\beta J_1} - 1}{e^{q\beta J_2} - 1} \right]^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}(\Lambda)|} \times \prod_{C(\omega) : C(\eta) \cap \partial \Lambda \neq \emptyset} e^{\beta \sum_{x \in C(\eta)} h_{x, \max}}.$$

Veja que $[(e^{q\beta J_1} - 1)/(e^{q\beta J_2} - 1)]^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}(\Lambda)|}$ é decrescente. Pela Proposição 6.6, a aplicação

$$\eta \mapsto \prod_{C(\eta) : C(\eta) \cap \partial \Lambda \neq \emptyset} e^{\beta \sum_{x \in C(\eta)} h_{x, \max}},$$

também, é decrescente. Então, a função g é decrescente, desde que, g é composta pelo produto de duas funções não negativas decrescentes no sentido FKG.

Seja $f : \{0, 1\}^{\mathbb{B}(\Lambda)} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função arbitrária cilíndrica crescente no sentido FKG. Desde que as constantes de acoplamentos são constantes, isto é $J_{xy} \equiv J$, o fator de Bernoulli pode ser expresso como: $B_{J_k}(\eta) = (e^{q\beta J_k} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}(\Lambda)|}$, $k = 1, 2$. Definindo $\bar{g}(\eta) \equiv \prod_{C(\eta): C(\eta) \cap \partial\Lambda = \emptyset} \sum_{p=1}^q e^{\beta \sum_{x \in C(\eta)} h_{x,p}}$, da definição de valor esperado de uma variável aleatória, temos

$$\begin{aligned} \phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}, J_1}(f) &= \sum_{\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}(\Lambda)}} f(\eta) \frac{(e^{q\beta J_1} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}(\Lambda)|}}{Z_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}, J_1}} \prod_{C(\eta)} \Theta_{\Lambda, \max}(C(\eta)) \\ &= \sum_{\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}(\Lambda)}} f(\eta) g(\eta) \frac{(e^{q\beta J_2} - 1)^{|\mathbb{B}_{\text{occ}}(\eta) \cap \mathbb{B}(\Lambda)|}}{Z_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}, J_2}} \bar{g}(\eta) \times \frac{Z_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}, J_2}}{Z_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}, J_1}} \\ &= \phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}, J_2}(f \cdot g) \times \frac{Z_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}, J_2}}{Z_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}, J_1}}, \end{aligned} \quad (372)$$

onde $Z_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}, J}$ denota a função de partição (ou constante de normalização) da medida de probabilidade $\phi_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}, J}$ e $\#$ denota a condição de fronteira livre ou max-conectada.

Considerando $f \equiv 1$ (função constante 1) em (372), tem-se a seguinte igualdade

$$\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}, J_2}(g) = \frac{Z_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}, J_1}}{Z_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}, J_2}}.$$

Usando a equação acima, (372) e a propriedade FKG forte (veja Teorema 6.1), obtemos

$$\phi_{\Lambda, \max}^{\text{GRC}, J_1}(f) = \frac{\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}, J_2}(f \cdot g)}{\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}, J_2}(g)} \stackrel{\text{FKG}}{\leq} \phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}, J_2}(f),$$

o que conclui a prova. \square

Observação 6.9. Note que o Teorema 6.8 pode ser estendido usando o Teorema 6.2 (iii) para qualquer par de medidas de Gibbs GRC em $J = J_1$, respectivamente $J = J_2$. Como caso particular, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 6.10 (Monotonicidade na constante de acoplamento, veja [36]). Suponha que $0 \leq J_1 < J_2$ são duas constantes de acoplamentos. Para cada $\Lambda \subset \mathbb{V}$ finito, denote por $\phi_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}, J_k}$, $k = 1, 2$ a medida de probabilidade definida pelos pesos (216) ou (218) com $m \in \cap_{x \in \mathbb{V}} \in \mathcal{Q}_{x, \max}(\hat{h})$. Logo,

$$\phi_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}, J_1}(f) \leq \phi_{\Lambda, \#}^{\text{GRC}, J_2}(f),$$

onde f é uma função cilíndrica crescente e $\#$ denota a condição de fronteira livre ou max-conectada.

6.3 QUASE-LOCALIDADE Q.C. DO MODELO GRC

Nesta seção, estudaremos a propriedade de quase-localidade (quase certa) do modelo GRC com presença de campo magnético não homogêneo definido em (335). O seguinte lema nos diz que todo estado $\phi \in \mathcal{G}_{\text{lim}}^{\text{GRC}}$ ou $\phi \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}$ é quase-local q.c., no sentido da Definição 4.24 (veja Observação 6.12). Para dar precisão a este resultado, em analogia ao evento definido em (295), introduzimos a seguinte definição:

$$\mathcal{M}_{\Delta, \Lambda} \equiv \left\{ \eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}} : \forall x, y \in \Lambda, \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \mathbb{B}_0(\Delta) \end{array} \implies \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ \mathbb{B}_0(\Delta) \end{array} \right\},$$

onde $\Lambda \subset \Delta \in \mathcal{L}$. O seguinte lema é uma adaptação do Lema 5.30 para o modelo GRC deste capítulo.

Lema 6.11 (Quase-localidade, veja [36]). *Seja $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}_0(\mathbb{E})$ um conjunto finito e f uma função cilíndrica dependendo somente sobre os estados das arestas de \mathbb{B} . Logo, para cada par de subconjuntos (Δ, Λ) em \mathcal{L} com $\mathbb{V}(\mathbb{B}) \subset \Lambda \subset \Delta$, a função*

$$\eta \mapsto \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \Lambda}}(\eta) \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f | \eta_{\mathbb{B}^c}) \quad \text{é quase-local.}$$

Se, em adição, $\phi \in \mathcal{G}_{\text{lim}}^{\text{GRC}}$ ou $\phi \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}$ tem, no máximo, um aglomerado infinito e $\Lambda \in \mathcal{L}$, então

$$\phi(\mathcal{M}_{\Delta, \Lambda}) \uparrow 1, \quad \text{quando } \Delta \uparrow \mathbb{V}.$$

Demonstração. Note que, pela definição (342) do peso $\mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}$ e pela continuidade da função f (veja Lema 5.30), para provar a tese deste lema, é suficiente provar que a função

$$\eta \mapsto \mathbb{1}_{\mathcal{M}_{\Delta, \Lambda}}(\eta) \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\bar{\eta}_{\mathbb{B}} | \eta_{\mathbb{B}^c}), \quad \forall \bar{\eta}_{\mathbb{B}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{B}} \quad (373)$$

é quase-local. No que segue, provaremos a quase-localidade da aplicação definida em (373). Seja $\tilde{\Delta}$ um subconjunto finito de \mathbb{V} tal que $\Delta \subset \tilde{\Delta}$. Considere as seguintes configurações:

$$\omega \equiv (*, \dots, *, \underbrace{0}_{e\text{-ésimo}}, *, \dots, *) \quad \text{e} \quad \omega^e \equiv (*, \dots, *, \underbrace{1}_{e\text{-ésimo}}, *, \dots, *),$$

onde $*$ é um elemento arbitrário em $\{0, 1\}$ e $e \in \mathbb{B}(\tilde{\Delta})^c$. Suponha que $\omega \in \mathcal{M}_{\Delta, \Lambda}$ e que exista um aglomerado (que pode ser finito ou infinito) C^* conectando Λ a $\mathbb{B}(\tilde{\Delta})^c$ na

configuração ω . Por definição, veja que $\omega^e \in \mathcal{M}_{\Delta, \Lambda}$ também e que o aglomerado C^* é único, desde que, inicialmente, tomamos $\omega \in \mathcal{M}_{\Delta, \Lambda}$. Em seguida, consideraremos os seguintes dois casos:

$$1) C^* \cap \mathbb{V}(\{e\}) = \emptyset \quad \text{e} \quad 2) C^* \cap \mathbb{V}(\{e\}) \neq \emptyset.$$

No primeiro caso, trivialmente temos $|W_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\bar{\omega}_{\mathbb{B}}|\omega_{\mathbb{B}^c}^e) - W_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\bar{\omega}_{\mathbb{B}}|\omega_{\mathbb{B}^c})| = 0$.

No entanto, o segundo caso é bem mais elaborado. Consideraremos por separado dois casos. Primeiramente, assumiremos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < |h_{x, \max} - h_{x, m}|$ para todo $x \in \mathbb{V}$ e $m \in \{1, \dots, q\}$. Para este caso, denotaremos por C_e^* o (único) aglomerado tal que $C^* \cap \mathbb{V}(\{e\})$. Logo, por definição (342) do peso $\mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}$,

$$\begin{aligned} & \left| W_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\bar{\omega}_{\mathbb{B}}|\omega_{\mathbb{B}^c}^e) - W_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\bar{\omega}_{\mathbb{B}}|\omega_{\mathbb{B}^c}) \right| \\ & \leq \\ & \bar{B}_J(\omega) k(\omega) \sum_{m=1}^q q_m \left| e^{-\beta \sum_{x \in C_e^*} (h_{x, \max} - h_{x, m})} - e^{-\beta \sum_{x \in C^*} (h_{x, \max} - h_{x, m})} \right| \\ & = \\ & \bar{B}_J(\omega) k(\omega) \sum_{m \notin \cap_{x \in \mathbb{V}} \mathcal{Q}_{x, \max}(\hat{h})} \left| e^{-\beta \sum_{x \in C_e^*} (h_{x, \max} - h_{x, m})} - e^{-\beta \sum_{x \in C^*} (h_{x, \max} - h_{x, m})} \right|, \end{aligned}$$

onde

$$k(\omega) \equiv \prod_{\substack{C(\omega): C \cap \mathbb{V}(\mathbb{B}) \neq \emptyset \\ |C| < \infty}} \sum_{m=1}^q q_m e^{-\beta \sum_{x \in C} (h_{x, \max} - h_{x, m})} < \infty \quad \text{e} \quad \bar{B}_J(\omega) = \prod_{\{x, y\} \in \mathbb{B}: \omega_{xy}=1} r_{xy}.$$

Como a desigualdade

$$d(e, \Lambda) \leq |C_e^*| \leq \sum_{x \in C_e^*} \frac{1}{\varepsilon} (h_{x, \max} - h_{x, m}), \quad \forall m \notin \cap_{x \in \mathbb{V}} \mathcal{Q}_{x, \max}(\hat{h})$$

é válida, fazendo $d(e, \Lambda) \rightarrow \infty$, tem-se

$$\sum_{x \in C_e^*} (h_{x, \max} - h_{x, m}) \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad \sum_{x \in C^*} (h_{x, \max} - h_{x, m}) \rightarrow \infty,$$

para cada $m \notin \cap_{x \in \mathbb{V}} \mathcal{Q}_{x, \max}(\hat{h})$. Portanto, sempre que $d(e, \Lambda) \rightarrow \infty$, tem-se

$$|W_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\bar{\omega}_{\mathbb{B}}|\omega_{\mathbb{B}^c}^e) - W_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\bar{\omega}_{\mathbb{B}}|\omega_{\mathbb{B}^c})| \rightarrow 0. \quad (374)$$

No outro caso, quando $\liminf_{x \in \mathbb{V}} |h_{x, \max} - h_{x, m}| = 0$ é suficiente analisar se a série

$$\sum_{x \in C^*} (h_{x, \max} - h_{x, m})$$

é finita ou não. Se esta série é infinita, trivialmente se satisfaz (374). Em outro caso, usamos a continuidade da função exponencial e uma adequada escolha de e , de modo que $d(e, \Lambda) \rightarrow \infty$.

Finalmente, por um truque telescópico padrão, como foi feito no Lema 5.30, para quaisquer duas configurações diferentes ω e η em $\mathbb{B}(\tilde{\Delta})^c$, obtemos

$$\left| \mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\bar{\omega}_{\mathbb{B}} | \omega_{\mathbb{B}^c}) - \mathcal{W}_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(\bar{\omega}_{\mathbb{B}} | \eta_{\mathbb{B}^c}) \right| \rightarrow 0,$$

quando $\min_{e \in A} d(e, \Lambda) \rightarrow \infty$, onde $A \equiv \{e \in \mathbb{B}(\tilde{\Delta})^c : \omega_e \neq \eta_e\}$. Isto é, a aplicação definida em (373) é contínua na topologia produto. Logo, pelo Lema 4.18, esta aplicação é quase-local, provando-se a primeira afirmação.

Por outro lado (para provar a segunda afirmação), para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$, seja \mathcal{M}_{Λ} o evento composto por todas as configurações que apresentam, no máximo, um aglomerado infinito incidente com Λ . Note que $\mathcal{M}_{\Delta, \Lambda} \uparrow \mathcal{M}_{\Lambda}$, quando $\Delta \uparrow \mathbb{V}$, e que $\mathcal{M}_{\Lambda} \downarrow \{N_{\infty} \leq 1\}$, quando $\Lambda \uparrow \mathbb{V}$. Como, por hipótese, $\phi(N_{\infty} \leq 1) = 1$, então $\phi(\mathcal{M}_{\Lambda}) = 1, \forall \Lambda \in \mathcal{L}$. Logo, pela continuidade da medida, segue que $\lim_{\Delta \uparrow \mathbb{V}} \phi(\mathcal{M}_{\Delta, \Lambda}) = \phi(\mathcal{M}_{\Lambda}) = 1, \forall \Lambda \in \mathcal{L}$. \square

Observação 6.12. *Por um raciocínio análogo à Observação 5.31, prova-se que cada estado $\phi \in \mathcal{G}_{\text{lim}}^{\text{GRC}}$ ou $\phi \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}$ é quase-local q.c. (veja Definição 4.24).*

Lema 6.13 (Subconjuntos de medidas de Gibbs). *Sejam $q \in \mathbb{Z}^+, \beta \geq 0, \mathbf{J} = (J_{xy} : \{x, y\} \in \mathbb{E}) \in [0, \infty)^{\mathbb{E}}, \hat{\mathbf{h}} = (h_{x,p} \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{V}, p = 1, \dots, q)$ e $\{q_p : p = 1, \dots, q\}$ satisfazendo (351). Se $\phi \in \mathcal{G}_{\text{lim}}^{\text{GRC}}$ é tal que $\phi(N_{\infty} \leq 1) = 1$, então $\phi \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}$. Em outras palavras, $\mathcal{G}_{\text{lim}}^{\text{GRC}} \subseteq \mathcal{G}^{\text{GRC}}$.*

Demonstração. A prova deste resultado segue do Lema 6.11 e da quase-localidade quase certa da medida GRC. A referida prova é feita usando a teoria geral das medidas de Gibbs (para maiores detalhes, veja Lema 5.32). \square

O seguinte teorema nos dá condições suficientes para ter a quase-localidade da especificação $\{\phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}} : |\mathbb{B}| < \infty\}$ por trás a suposição geométrica de que no grafo exista, quase certamente um único aglomerado infinito. Este resultado simplifica muitos cálculos técnicos, como veremos a seguir.

Teorema 6.14 (Esperanças condicionais para o modelo GRC). *Sejam $\beta \geq 0, J_{xy} \geq 0, h_{x,m} \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{V}$ e $q_m > 0, m = 1, \dots, q$ satisfazendo (351). Se $\phi \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}$ é tal que $\phi(N_{\infty} \leq 1) = 1, \mathbb{B} \subset \mathbb{B}_0(\mathbb{V})$ e f é uma função cilíndrica dependendo, unicamente, dos estados da configuração $\eta_{\mathbb{B}}$, então*

$$\phi(f | \mathcal{F}_{\mathbb{B}^c}) = \phi_{\mathbb{B}}^{\text{GRC}}(f | \eta_{\mathbb{B}^c}), \quad \phi\text{-q.c.}$$

Demonstração. A prova deste teorema segue o mesmo esquema da prova do Teorema 5.33, portanto será omitida. \square

Usando a teoria geral do formalismo termodinâmico, pode-se provar o seguinte lema de dominação FKG.

Lema 6.15 (Monotonicidade no volume). *Sejam $q \in \mathbb{Z}^+$, $\beta \geq 0$, $\mathbf{J} = (J_{xy} : \{x, y\} \in \mathbb{E}) \in [0, \infty)^{\mathbb{E}}$, $\hat{\mathbf{h}}$ o campo magnético e a sequência $\{q_p : p = 1, \dots, q\}$ satisfazendo (351). Se $\Lambda \subset \Delta \in \mathcal{L}$, então, para cada função cilíndrica crescente (no sentido FKG) f , temos*

$$\phi_{\Lambda, \text{livre}}^{\text{GRC}}(f) \leq \phi_{\Delta, \text{livre}}^{\text{GRC}}(f) \quad e \quad \phi_{\Lambda, \text{max}}^{\text{GRC}}(f) \geq \phi_{\Delta, \text{max}}^{\text{GRC}}(f).$$

Demonstração. Para maiores detalhes da prova deste resultado, veja Lema 5.11. \square

Observação 6.16. *Quando $q_p = 1$, para todo $p = 1, \dots, q$ no modelo GRC (342), por simplicidade, este modelo será chamado de modelo RC. Neste caso, definimos o conjunto de medidas de Gibbs \mathcal{G}^{RC} e o conjunto de limites fracos de medidas de Gibbs a volume finito $\mathcal{G}_{\text{lim}}^{\text{RC}}$ analogamente às definições feitas em (213) e (247).*

De agora em diante, estudaremos algumas propriedades fundamentais do modelo RC (caso que se estude o modelo GRC, será especificado). O seguinte teorema é válido somente para o modelo RC.

Teorema 6.17. *Sejam $q \in \mathbb{Z}^+$, $\beta \geq 0$, $\mathbf{J} = (J_{xy} : \{x, y\} \in \mathbb{E}) \in [0, \infty)^{\mathbb{E}}$ e $\hat{\mathbf{h}}$ um campo magnético, como foi definido previamente. Dado $\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$, se ϕ_ν denota sua η -marginal, então, para cada função cilíndrica crescente f , temos $\phi_\nu(f) \leq \phi_{\text{max}}^{\text{RC}}(f)$.*

Demonstração. Veja o Lema 5.23. \square

Contrastando o Teorema 6.17 com o Teorema 5.23, um detalhe importante temos que destacar. A segunda dominação do Teorema 5.23 não é satisfeita para o modelo GRC (com campo externo não invariante) deste capítulo, já que para provar essa desigualdade se requer o conceito de invariância por translação do modelo, propriedade que o modelo GRC (deste capítulo) não apresenta.

6.4 UNICIDADE DO AGLOMERADO INFINITO

Até aqui, foi apresentada parte da teoria do modelo de aglomerados aleatórios generalizado (modelo GRC) com presença de campo magnético não uniforme para

grafos infinitos enumeráveis $\mathbb{L} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$. Nesta seção, estamos interessados na situação na qual o aglomerado infinito é quase certamente único, como comumente acontece para o caso de **grafos amenáveis**. A hipótese geométrica de amenabilidade é importante para obter-se a unicidade quase certa do aglomerado infinito em diversos modelos, [30, 66, 76]. Sabe-se que grafos infinitos, conexos, localmente finitos, transitivos e amenáveis, possuem um único aglomerado infinito com probabilidade um [89]. Quando o grafo é não amenável, a unicidade do aglomerado se vê comprometida. A não unicidade do aglomerado infinito é conhecida para diversos modelos incluindo o modelo de percolação de Bernoulli e o modelo de aglomerados aleatórios sem presença de campo magnético [14, 66, 76]. De agora em diante, assumiremos implicitamente que o látice $\mathbb{L} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ é amenável, desde que em geral, não podemos aplicar as mesmas técnicas usadas na prova do resultado de unicidade de aglomerado infinito (veja Teorema 5.25), pois o modelo GRC deste capítulo não apresenta a propriedade de invariância por translação. Diremos que o grafo \mathbb{L} é amenável se

$$\iota_{\mathbb{E}}(\mathbb{L}) \equiv \inf \left\{ \frac{|\partial_{\mathbb{E}}\Lambda|}{|\Lambda|} : \Lambda \subset \mathbb{V}, \Lambda \in \mathcal{L} \right\} = 0,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os subconjuntos conexos finitos Λ de \mathbb{V} , $|\partial_{\mathbb{E}}\Lambda|$ denota a cardinalidade de $\partial_{\mathbb{E}}\Lambda$ e

$$\partial_{\mathbb{E}}\Lambda = \{e = \{x, y\} \in \mathbb{E} : x \in \Lambda \text{ e } y \in \mathbb{V} \setminus \Lambda\}$$

é o conjunto de arestas com um vértice (ou ponto extremal) em Λ e o outro em $\mathbb{V} \setminus \Lambda$. Isto é, $\partial_{\mathbb{E}}\Lambda$ representa a fronteira de arestas externa de Λ . Se $\iota_{\mathbb{E}}(\mathbb{L}) > 0$, dizemos que o látice \mathbb{L} é não amenável.

A constante $\iota_{\mathbb{E}}(\mathbb{L})$ é chamada de *constante isoperimétrica* (ou constante de Cheeger). O conceito de amenabilidade descreve bastante coisa sobre a geometria do grafo. Por definição, para ter um grafo amenável \mathbb{L} devemos selecionar vértices para formar um subconjunto finito conexo Λ , de modo que o número de arestas que saem de Λ seja menor que o número de vértices que estão em Λ . Por exemplo, a rede hipercúbica d -dimensional $\mathbb{L} = \mathbb{L}^d$, $d \geq 1$, é um grafo amenável, pois ao tomar a sequência de caixas $\{\Lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$, com $\Lambda_n \equiv [0, n-1]^d \cap \mathbb{Z}^d$, veja que $|\partial_{\mathbb{E}}\Lambda_n| = 2dn^{d-1}$ e que $|\Lambda_n| = n^d$, o que implica que $\iota_{\mathbb{E}}(\mathbb{L}^d) = 0$. Por outro lado, grafos não amenáveis tem a propriedade que, ao selecionar vértices para formar subgrafos conexos, sempre produz a mesma quantidade ou mais arestas na fronteira que quantidade de vértices. Exemplos de grafos não amenáveis são comuns de encontrar nas árvores, por exemplo, a árvore regular \mathbb{T}_n

de ordem $n + 1$ e a árvore n -ária \mathbb{T}_n^+ com $n \geq 1$, ambas tem constante isoperimétrica $= n - 1$. Portanto, para $n \geq 2$, esses grafos são não amenáveis. Outro exemplo de grafo não amenável é dado pela árvore fatorial, cuja constante isoperimétrica é $= 2$.

No que segue, denotaremos por N_∞ a variável aleatória que conta o número de aglomerados infinitos em ambos os espaços amostrais Ω e $\Sigma_q \times \Omega$.

Teorema 6.18 (Unicidade do aglomerado infinito, veja [36]). *Seja $\beta > 0$ a temperatura inversa e \hat{h} um campo magnético. Então,*

$$\phi_{\max}^{\text{GRC}, \hat{h}}(N_\infty \leq 1) = \phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}, \hat{h}}(N_\infty \leq 1) = 1.$$

Demonstração. Por simplicidade, apresentaremos a prova para o caso quando $\phi_{\max}^{\text{GRC}, \hat{h}} \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}$, já que para o caso quando a condição de fronteira é livre, a prova se procede analogamente.

Sejam $\Lambda \subset \Delta$ subconjuntos finitos de \mathbb{V} e defina o evento $\mathcal{D}_{\Lambda, \Delta}$

$$\mathcal{D}_{\Lambda, \Delta} \equiv \left\{ \omega : \exists u, v \in \partial\Lambda \text{ e caminhos } \gamma_1 \text{ e } \gamma_2 \text{ tais que, } \begin{array}{c} \gamma_2 \\ \gamma_1 \\ u \end{array} \begin{array}{c} \Delta \\ \Lambda \\ \Delta \end{array} \text{ em } \omega \right\}$$

como o conjunto de todas as configurações $\omega \in \Omega$ com a seguinte propriedade: existem dois vértices $u, v \in \partial\Lambda$ tais que u e v são conectados a $\partial\Delta$ por caminhos γ_1 e γ_2 , respectivamente, usando ω -arestas abertas em $\mathbb{B}_0(\Delta \setminus \Lambda)$, mas u não é conectado a v por caminhos usando ω -arestas abertas de $\mathbb{B}_0(\Delta)$.

Para cada configuração $\eta \in \Omega$ fixada, note que a aplicação

$$\omega \mapsto \mathbb{1}_{\mathcal{D}_{\Lambda, \Delta}}(\omega_{\mathbb{B}_0(\Lambda)} \eta_{\mathbb{B}_0(\mathbb{V} \setminus \Lambda)})$$

é decrescente no sentido FKG. Pela definição do evento $\mathcal{D}_{\Lambda, \Delta}$, por abuso de notação, a aplicação acima pode ser rescrita da seguinte maneira

$$\omega \mapsto \mathbb{1}_{\mathcal{D}_{\Lambda, \Delta}}(\omega_{\mathbb{B}_0(\Lambda)} \eta_{\mathbb{B}_0(\Delta \setminus \Lambda)}).$$

Dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno (escolhido adequadamente), consideremos o seguinte campo magnético externo

$$\epsilon \hat{h} \equiv (\epsilon h_{x,p} : \forall x \in \mathbb{V}, p = 1, \dots, q).$$

Afirmamos que $\epsilon \hat{h} \prec \hat{h}$, onde a ordem parcial \prec é dada em (360). De fato, supondo que $h_{x,k} - h_{x,l} > 0$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, a seguinte desigualdade

$$\epsilon h_{x,k} - \epsilon h_{x,l} = \epsilon(h_{x,k} - h_{x,l}) \leq h_{x,k} - h_{x,l}, \quad k, l = 1, \dots, q, \quad \forall x \in \mathbb{V}$$

é válida. Logo, $\epsilon \hat{\mathbf{h}} \prec \hat{\mathbf{h}}$. Observe que a escolha de $\epsilon > 0$ depende, de certa forma, do campo externo $\hat{\mathbf{h}}$, pois, dado $h_{x,k} - h_{x,l} > 0$, sempre é possível encontrar $\epsilon > 0$, de modo que a desigualdade acima seja verdadeira.

Seja $V \supset \Delta$. Como a aplicação $\omega \mapsto \mathbb{1}_{D_{\Lambda,\Delta}}(\omega_{\mathbb{B}_0(\Lambda)} \eta_{\mathbb{B}_0(\Delta \setminus \Lambda)})$ é decrescente sempre que η se mantenha fixa, pela propriedade de monotonicidade no campo externo da medida $\phi_{V,\max}^{\text{GRC},\hat{\mathbf{h}}}$ (Teorema 6.4), segue que

$$\phi_{V,\max}^{\text{GRC},\hat{\mathbf{h}}}(\mathbb{1}_{D_{\Lambda,\Delta}}(\cdot \eta_{\mathbb{B}_0(\Delta \setminus \Lambda)})) \leq \phi_{V,\max}^{\text{GRC},\epsilon \hat{\mathbf{h}}}(\mathbb{1}_{D_{\Lambda,\Delta}}(\cdot \eta_{\mathbb{B}_0(\Delta \setminus \Lambda)})).$$

Somando em $\eta_{\mathbb{B}_0(\Delta \setminus \Lambda)}$ na desigualdade acima, conseguimos

$$\phi_{V,\max}^{\text{GRC},\hat{\mathbf{h}}}(D_{\Lambda,\Delta}) \leq \phi_{V,\max}^{\text{GRC},\epsilon \hat{\mathbf{h}}}(D_{\Lambda,\Delta}).$$

Tomando $\epsilon \rightarrow 0$ na medida $\phi_{V,\max}^{\text{GRC},\epsilon \hat{\mathbf{h}}}(D_{\Lambda,\Delta})$, por definição da medida $\phi_{V,\max}^{\text{GRC},\hat{\mathbf{h}}}$, observe que $\phi_{V,\max}^{\text{GRC},\epsilon \hat{\mathbf{h}}}(D_{\Lambda,\Delta}) \rightarrow \phi_{V,\max}^{\text{GRC},\hat{\mathbf{0}}}(D_{\Lambda,\Delta})$ onde $\hat{\mathbf{0}} \equiv (0 : \forall x \in \mathbb{V}, p = 1, \dots, q)$ denota o campo nulo.

Logo, fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, $V \uparrow \mathbb{V}$ e usando continuidade da função $\mathbb{1}_{D_{\Lambda,\Delta}}$ na desigualdade acima, obtemos

$$\phi_{\max}^{\text{GRC},\hat{\mathbf{h}}}(D_{\Lambda,\Delta}) \leq \phi_{\max}^{\text{GRC},\hat{\mathbf{0}}}(D_{\Lambda,\Delta}),$$

onde, implicitamente, usamos o Teorema 6.2. Uma vez que $\cap_{\Delta \supset \Lambda} D_{\Lambda,\Delta} \uparrow \{N_\infty > 1\}$, quando $\Lambda \uparrow \mathbb{V}$, segue da continuidade da medida e do Teorema 5.25 (teorema da unicidade do aglomerado infinito para o caso de campos externos homogêneos) que $\phi_{\max}^{\text{GRC},\hat{\mathbf{0}}}(N_\infty > 1) = 0$. Portanto, $\phi_{\max}^{\text{GRC},\hat{\mathbf{h}}}(N_\infty > 1) = 0$.

Observe que, no argumento acima, usamos a propriedade de monotonicidade no campo externo e existência do limite termodinâmico da medida de probabilidade $\phi_{\max}^{\text{GRC},\hat{\mathbf{h}}}$. Como a medida $\phi_{\text{livre}}^{\text{GRC},\hat{\mathbf{h}}}$ também tem essas propriedades, a prova se conclui simplesmente por substituir uma medida pela outra. \square

Para enunciar o próximo teorema, o qual é o teorema principal desta seção, necessitamos introduzir os seguintes parâmetros:

$$P_\infty(\beta, J, \hat{\mathbf{h}}) \equiv \sup_{x \in \mathbb{V}} \sup_{\phi \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}} \phi(|C_x| = \infty)$$

e

$$\tilde{P}_\infty(\beta, J, \hat{\mathbf{h}}) \equiv \sup_{x \in \mathbb{V}} \inf_{\phi \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}} \phi(|C_x| = \infty),$$

onde C_x é o aglomerado infinito contendo o vértice x . Para o modelo RC, os parâmetros P_∞ e \tilde{P}_∞ são definidos similarmente. Definimos, também, o parâmetro crítico

$$\beta_c(\mathbf{J}, \hat{\mathbf{h}}) \equiv \inf\{\beta \geq 0 : P_\infty(\beta, \mathbf{J}, \hat{\mathbf{h}}) > 0\},$$

o qual será chamado de *temperatura crítica inversa*. Para simplificar a notação, para cada $m \in \{1, \dots, q\}$ fixo, definimos o seguinte evento:

$$\mathcal{A}_{\geq 1, m}^\infty \equiv \left\{ (\sigma, \eta) \in \Sigma_q \times \Omega : \begin{array}{l} N_\infty(\sigma, \eta) \geq 1 \text{ e todos os vértices em qualquer} \\ \text{aglomerado infinito satisfazem } \sigma_x = m \end{array} \right\}.$$

6.5 UNICIDADE E TRANSIÇÃO DE FASE

Com as ferramentas dadas nas seções anteriores, estamos preparados para provar um dos principais teoremas deste trabalho, o qual relaciona unicidade e não unicidade de medidas com existência ou não existência de aglomerados infinitos.

Teorema 6.19 (Unicidade e transição de fase, veja [36]). *Fixados $q \in \mathbb{Z}^+$, $\beta \geq 0$, um campo magnético $\hat{\mathbf{h}} = (h_{x,p} \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{V}, p = 1, \dots, q)$ e a sequência $\{q_p : p = 1, \dots, q\}$ satisfazendo a condição (351).*

- (i) Para todo $\mathbf{J} \geq 0$ ($J_{xy} \geq 0, \forall \{x, y\} \in \mathbb{E}$), existe, no máximo, uma medida de probabilidade μ_0 em $\mathcal{G}_0^{\text{ES}} \equiv \{\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}} : \nu(N_\infty = 0) = 1\}$.
- (ii) Se $P_\infty(\beta, \mathbf{J}, \hat{\mathbf{h}}) = 0$, então $|\mathcal{G}^{\text{ES}}| = |\mathcal{G}^{\text{RC}}| = 1$. Em particular, se $\beta < \beta_c(\mathbf{J}, \hat{\mathbf{h}})$, então $|\mathcal{G}^{\text{ES}}| = |\mathcal{G}^{\text{RC}}| = 1$.
- (iii) Se $\mathbf{J} \geq 0$ é uma constante de acoplamento uniforme ($J_{xy} \equiv J \geq 0, \forall \{x, y\} \in \mathbb{E}$), então $P_\infty(\beta, \mathbf{J}, \hat{\mathbf{h}}) = \sup_{x \in \mathbb{V}} \phi_{\max}^{\text{GRC}}(|C_x| = \infty)$ e $\tilde{P}_\infty(\beta, \mathbf{J}, \hat{\mathbf{h}}) = \sup_{x \in \mathbb{V}} \phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}}(|C_x| = \infty)$.
- (iv) Seja $\mathbf{J} \geq 0$ ($J_{xy} \equiv J \geq 0, \forall \{x, y\} \in \mathbb{E}$). Se $P_\infty(\beta, \mathbf{J}, \hat{\mathbf{h}}) > 0$, então os estados ϕ_m^{ES} , com $m \in \cap_{x \in \mathbb{V}} \mathcal{Q}_{x, \max}(\hat{\mathbf{h}})$, são estados de Gibbs extremais com $\phi_m^{\text{ES}}(\mathcal{A}_{\geq 1, m}^\infty) = 1$. No entanto, sobre a hipótese forte $\tilde{P}_\infty(\beta, \mathbf{J}, \hat{\mathbf{h}}) > 0$, tem-se $|\mathcal{G}^{\text{ES}}| > 1$.
- (v) Seja $\mathbf{J} \geq 0$ ($J_{xy} \equiv J \geq 0, \forall \{x, y\} \in \mathbb{E}$). Se $\beta < \beta_c$, então $P_\infty(\beta, \mathbf{J}, \hat{\mathbf{h}}) = \tilde{P}_\infty(\beta, \mathbf{J}, \hat{\mathbf{h}}) = 0$. No entanto, $P_\infty(\beta, \mathbf{J}, \hat{\mathbf{h}}) > 0$ e $\tilde{P}_\infty(\beta, \mathbf{J}, \hat{\mathbf{h}}) > 0$ é válido sempre que $\beta > \beta_c$.

Demonstração. (i) A prova deste item segue o mesmo esquema da prova do Item (i) do Teorema 5.37, Capítulo 5.

(ii) Se $P_\infty(\beta, J, \hat{h}) = 0$, então, por definição de P_∞

$$\phi(|C_x| = \infty) = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{G}^{\text{RC}} \text{ e } x \in \mathbb{V}. \quad (375)$$

Pela unicidade do aglomerado infinito (Teorema 6.18) e pelo Lema 6.13, segue que a propriedade (375) se mantém, também, para a medida limite ϕ_{\max}^{RC} . Se ϕ_ν denota a ω -marginal de $\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$, pelo Teorema 6.17, tem-se

$$0 = \phi_{\max}^{\text{RC}}(N_\infty \geq 1) \geq \phi_\nu(N_\infty \geq 1) = \nu(N_\infty \geq 1),$$

o qual implica que $\nu \in \mathcal{G}_0^{\text{ES}} = \{\nu \in \mathcal{G}^{\text{ES}} : \nu(N_\infty = 0) = 1\}$. Portanto, do Item (i), segue que $\nu = \phi_{\text{livre}}^{\text{ES}}$. Isto é, $\mathcal{G}^{\text{ES}} = \mathcal{G}_0^{\text{ES}} = \{\phi_{\text{livre}}^{\text{ES}}\}$.

Por outro lado, se denotamos por $\mathcal{G}_0^{\text{RC}} \equiv \{\phi \in \mathcal{G}^{\text{RC}} : \phi(N_\infty = 0) = 1\}$, de (375) e do Teorema 6.2, temos

$$0 = \phi_{\max}^{\text{RC}}(N_\infty \geq 1) \geq \phi(N_\infty \geq 1), \quad \forall \phi \in \mathcal{G}^{\text{RC}}.$$

Isto é, $\phi \in \mathcal{G}_0^{\text{RC}}$. Por repetir o argumento da prova do Item (i), usando o Teorema 6.14 para garantir uma versão de esperança condicional para a medida GRC ϕ , temos $\mathcal{G}^{\text{RC}} = \{\phi_{\text{livre}}^{\text{RC}}\}$.

(iii) Usando o Item (iii) do Teorema 6.2, tem-se

$$P_\infty(\beta, J, \hat{h}) \leq \sup_{x \in \mathbb{V}} \phi_{\max}^{\text{GRC}}(|C_x| = \infty) \quad \text{e} \quad \tilde{P}_\infty(\beta, J, \hat{h}) \geq \sup_{x \in \mathbb{V}} \phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}}(|C_x| = \infty).$$

Nas desigualdades acima, para provar que em cada uma delas a igualdade é atingida, é suficiente mostrar que $\phi_{\max}^{\text{GRC}} \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}$ e $\phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}} \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}$, respectivamente. Pela unicidade do aglomerado infinito, Teorema 6.18, tem-se $\phi_{\max}^{\text{GRC}, \hat{h}}(N_\infty \leq 1) = \phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}, \hat{h}}(N_\infty \leq 1) = 1$. Logo, do Lema 6.13 concluímos que $\phi_{\max}^{\text{GRC}} \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}$ e $\phi_{\text{livre}}^{\text{GRC}} \in \mathcal{G}^{\text{GRC}}$, provando-se este item.

(iv) Usando a mesma técnica do Item (iii) do Teorema 5.37, para cada $m \in \cap_{x \in \mathbb{V}} \mathcal{Q}_{x, \max}(\hat{h})$ e $x \in \mathbb{V}$ provamos que

$$\phi_m^{\text{ES}}(\sigma_x = \tilde{m} | x \leftrightarrow \infty) = \delta_{m, \tilde{m}}. \quad (376)$$

Agora, provaremos que o estado ϕ_m^{ES} é extremal sempre que $m \in \cap_{x \in \mathbb{V}} \mathcal{Q}_{x, \max}(\hat{h})$. Para este fim, assumiremos que $\phi_m^{\text{ES}}(\mathcal{A}_{\geq 1, m}^\infty) = 1$. Na verdade, esta hipótese será provada na parte final do argumento deste item.

Suponha que ϕ_m^{ES} não é uma medida extremal. Logo, existem duas medidas de Gibbs $\phi_1^{\text{ES}}, \phi_2^{\text{ES}} \in \mathcal{G}^{\text{ES}}$ tais que

$$\phi_m^{\text{ES}} = t\phi_1^{\text{ES}} + (1-t)\phi_2^{\text{ES}}, \quad \text{com } \phi_i^{\text{ES}}(\mathcal{A}_{\geq 1, m}^{\infty}) = 1 \text{ e } t \in (0, 1). \quad (377)$$

Se ϕ_i^{RC} denota a RC marginal of ϕ_i^{ES} , segue do Lema 5.34 que $\phi_i^{\text{RC}} \in \mathcal{G}^{\text{RC}}$, $i = 1, 2$. Implicando que

$$\phi_{\max}^{\text{RC}} = t\phi_1^{\text{RC}} + (1-t)\phi_2^{\text{RC}}, \quad t \in (0, 1). \quad (378)$$

Em seguida, afirmamos que ϕ_{\max}^{RC} é uma medida extremal. De fato, suponha que ϕ_{\max}^{RC} não é extremal. Logo, existem duas medidas diferentes $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{G}^{\text{RC}}$ tais que se tenha a seguinte decomposição

$$\phi_{\max}^{\text{RC}} = \lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2, \quad \text{para algum } \lambda \in (0, 1).$$

Para qualquer evento cilíndrico crescente A , do Item (iii) do Teorema 6.2 e da decomposição acima, tem-se

$$\phi_{\max}^{\text{RC}}(A) > \max\{\phi_1(A), \phi_2(A)\}. \quad (379)$$

Em (379), descartamos uma possível igualdade, pois caso contrário teríamos uma contradição com o fato de que as medidas ϕ_1 e ϕ_2 são diferentes. Por outro lado, veja, também, que

$$\max\{\phi_1(A), \phi_2(A)\} > \lambda\phi_1(A) + (1-\lambda)\phi_2(A) = \phi_{\max}^{\text{RC}}(A).$$

Mas isso contradiz a desigualdade estrita (379), o que prova a afirmação feita acima.

Como ϕ_{\max}^{RC} é uma medida de probabilidade extremal, da decomposição (378), temos $\phi_1^{\text{RC}} = \phi_2^{\text{RC}} = \phi_{\max}^{\text{RC}}$. Usando o Lema 5.36, este fato implica $\phi_1^{\text{ES}} = \phi_2^{\text{ES}}$, e daí, a extremabilidade de ϕ_m^{ES} é provada.

Finalmente, provaremos que $\phi_m^{\text{ES}}(\mathcal{A}_{\geq 1, m}^{\infty}) = 1$. Desde que $P_{\infty}(\beta, \mathbf{J}, \hat{\mathbf{h}}) > 0$, do Item (iii) do Teorema 6.2, conseguimos

$$0 < P_{\infty}(\beta, \mathbf{J}, \hat{\mathbf{h}}) \leq \sup_{x \in \mathbb{V}} \phi_{\max}^{\text{RC}}(x \leftrightarrow \infty) \leq \phi_{\max}^{\text{RC}}(N_{\infty} \geq 1). \quad (380)$$

Como acabamos de provar, ϕ_{\max}^{RC} é um estado de Gibbs extremal e, como $\{N_{\infty} \geq 1\}$ é um evento caudal, da desigualdade (380) e da unicidade do aglomerado infinito (Teorema 6.18), segue que

$$1 = \phi_{\max}^{\text{RC}}(N_{\infty} = 1) = \phi_m^{\text{ES}}(N_{\infty} = 1), \quad \forall m \in \bigcap_{x \in \mathbb{V}} \mathcal{Q}_{x, \max}(\hat{\mathbf{h}}).$$

A prévia equação junto com a identidade (376) e um argumento similar ao feito na parte final do Item (iii) do Teorema 5.37 implicam, para cada $m \in \cap_{x \in \mathbb{V}} \mathcal{Q}_{x, \max}(\hat{\mathbf{h}})$, que $\phi_m^{\text{ES}}(\mathcal{A}_{\geq 1, m}^{\infty}) = 1$.

Agora, provaremos a segunda afirmação do Item (iv). Se o conjunto $\cap_{x \in \mathbb{V}} \mathcal{Q}_{x, \max}(\hat{\mathbf{h}})$ tem mais que um elemento, o resultado segue da primeira afirmação do Item (iv) deste teorema. Em outro caso, sem perda de generalidade, podemos assumir que $\cap_{x \in \mathbb{V}} \mathcal{Q}_{x, \max}(\hat{\mathbf{h}}) = \{1\}$. Seja $\phi^{\text{RC}} \in \mathcal{G}^{\text{RC}}$ uma ω -marginal de ϕ_2^{ES} . Por monotonicidade, tem-se

$$\begin{aligned} 0 < \tilde{P}_{\infty}(\beta, J, \hat{\mathbf{h}}) &\leq \sup_{x \in \mathbb{V}} \phi^{\text{RC}}(x \leftrightarrow \infty) = \sup_{x \in \mathbb{V}} \phi_2^{\text{ES}}(x \leftrightarrow \infty) \\ &= \sup_{x \in \mathbb{V}} \phi_2^{\text{ES}}(x \leftrightarrow \infty, \sigma_x = 2) \\ &\leq \phi_2^{\text{ES}}(\mathcal{A}_{\geq 1, 2}^{\infty}). \end{aligned}$$

Como $\phi_1^{\text{ES}}(\mathcal{A}_{\geq 1, 1}^{\infty}) = 1$ e $\mathcal{A}_{\geq 1, 1}^{\infty} \cap \mathcal{A}_{\geq 1, 2}^{\infty} = \emptyset$, da desigualdade acima, segue que $\phi_1^{\text{ES}} \neq \phi_2^{\text{ES}}$, pois caso contrário, teríamos

$$1 = \phi_2^{\text{ES}}(\mathcal{A}_{\geq 1, 1}^{\infty}) + \phi_2^{\text{ES}}(\mathcal{A}_{\geq 1, 2}^{\infty}) = \phi_1^{\text{ES}}(\mathcal{A}_{\geq 1, 1}^{\infty}) + \phi_2^{\text{ES}}(\mathcal{A}_{\geq 1, 2}^{\infty}) = 1 + \phi_2^{\text{ES}}(\mathcal{A}_{\geq 1, 2}^{\infty}) \Rightarrow \phi_2^{\text{ES}}(\mathcal{A}_{\geq 1, 2}^{\infty}) = 0,$$

gerando uma contradição.

(v) Pelo Item (iii) e pelo Corolário 6.10, as aplicações

$$J \mapsto P_{\infty}(\beta, J, \hat{\mathbf{h}}) \quad \text{e} \quad J \mapsto \tilde{P}_{\infty}(\beta, J, \hat{\mathbf{h}}),$$

são crescentes. Veja também que, com respeito à ordem parcial (360), as aplicações

$$\hat{\mathbf{h}} \mapsto P_{\infty}(\beta, J, \hat{\mathbf{h}}) \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{h}} \mapsto \tilde{P}_{\infty}(\beta, J, \hat{\mathbf{h}}),$$

também, são crescentes. Por definição de \tilde{P}_{∞} e P_{∞} , temos

$$\tilde{P}_{\infty}(\beta, J, \hat{\mathbf{h}}) \leq P_{\infty}(\beta, J, \hat{\mathbf{h}}), \quad \forall \beta, J \text{ e } \hat{\mathbf{h}}. \quad (381)$$

Pelo Item (iii) e pelo Teorema 6.8, $P_{\infty}(\beta, J_1, \hat{\mathbf{h}}) \leq \tilde{P}_{\infty}(\beta, J_2, \hat{\mathbf{h}})$, para todo $J_1 < J_2$. Pelo Item (iii), temos que P_{∞} e \tilde{P}_{∞} são limites termodinâmicos. Usando a forma do Hamiltoniano deste modelo e as propriedades de monotonicidade provadas acima, conseguimos, para todo $\beta_1 < \beta_2$, que

$$P_{\infty}(\beta_1, J, \hat{\mathbf{h}}) = P_{\infty}(1, \beta_1 J, \beta_1 \hat{\mathbf{h}}) \leq \tilde{P}_{\infty}(1, \beta_2 J, \beta_1 \hat{\mathbf{h}}) \leq \tilde{P}_{\infty}(1, \beta_2 J, \beta_2 \hat{\mathbf{h}}) = \tilde{P}_{\infty}(\beta_2, J, \hat{\mathbf{h}}). \quad (382)$$

Daí, se $\beta < \beta_c$, por definição do inverso da temperatura crítica, $P_\infty(\beta, J, \hat{\mathbf{h}}) = 0$. Logo, da desigualdade (381), tem-se $\tilde{P}_\infty(\beta, J, \hat{\mathbf{h}}) = 0$.

Por outro lado, se $\beta > \beta_c$, temos $P_\infty(\beta, J, \hat{\mathbf{h}}) > P_\infty(\beta_c, J, \hat{\mathbf{h}}) > 0$. Fazendo $\beta_1 = \beta_c$ e $\beta_2 = \beta$ em (382), tem-se $\tilde{P}_\infty(\beta, J, \hat{\mathbf{h}}) > 0$, o que prova (v). \square

Seja $\tilde{\beta}_c(J, \hat{\mathbf{h}}) \equiv \inf\{\beta \geq 0 : \tilde{P}_\infty(\beta, J, \hat{\mathbf{h}}) > 0\}$. Em seguida, mostraremos que se na definição de $\beta_c(J, \hat{\mathbf{h}})$, trocamos P_∞ por \tilde{P}_∞ , essa quantidade não muda. Mais precisamente, afirmamos que $\beta_c(J, \hat{\mathbf{h}}) = \tilde{\beta}_c(J, \hat{\mathbf{h}})$. De fato, pelo Item (iii) do Teorema 6.19 temos $\tilde{P}_\infty(\beta, J, \hat{\mathbf{h}}) \leq P_\infty(\beta, J, \hat{\mathbf{h}})$, implicando que $\beta_c(J, \hat{\mathbf{h}}) \leq \tilde{\beta}_c(J, \hat{\mathbf{h}})$. Por outro lado, novamente, pelo Item (iii) do Teorema 6.19 e pela definição de $\tilde{\beta}_c(J, \hat{\mathbf{h}})$, se $\beta_c(J, \hat{\mathbf{h}}) > \tilde{\beta}_c(J, \hat{\mathbf{h}})$, temos que $P_\infty(\tilde{\beta}_c, J, \hat{\mathbf{h}}) \geq \tilde{P}_\infty(\tilde{\beta}_c, J, \hat{\mathbf{h}}) > 0$, o qual contradiz o Item (v) do Teorema 6.19. Portanto, $\beta_c(J, \hat{\mathbf{h}}) = \tilde{\beta}_c(J, \hat{\mathbf{h}})$.

Como subproduto da prova do Teorema 6.19, Item (v), temos o seguinte corolário.

Corolário 6.20 (Monotonicidade em β , veja [36]). *As seguintes aplicações*

$$\beta \mapsto P_\infty(\beta, J, \hat{\mathbf{h}}) \quad e \quad \beta \mapsto \tilde{P}_\infty(\beta, J, \hat{\mathbf{h}}),$$

são monótonas crescentes.

Finalmente, para encerrar esta seção, enunciamos um teorema que relaciona os conjuntos \mathcal{G}^{ES} e $\mathcal{G}^{\text{SPIN}}$. Este resultado terá desempenho essencial na próxima seção, quando nos disporemos a provar a unicidade do conjunto das medidas de Gibbs para o modelo de Ising.

Teorema 6.21. *Se $\Pi_S : \mathcal{G}^{\text{ES}} \rightarrow \mathcal{G}^{\text{SPIN}}$ denota a aplicação que assina a SPIN marginal a cada medida de Gibbs ES a volume infinito, então Π_S é um isomorfismo linear.*

Demonstração. A prova deste teorema usa argumentos da teoria geral das medidas de Gibbs. Uma prova detalhada deste resultado pode ser vista no Teorema 5.39. \square

6.6 APLICAÇÃO: MODELO DE ISING COM CAMPO DECAINDO SEGUNDO UMA LEI DE POTÊNCIA

O modelo de Ising é um dos modelos mais estudados na Mecânica Estatística. Um problema de interesse neste modelo é determinar a cardinalidade das medidas de Gibbs

quando um parâmetro (termodinâmico) de dependência varia, neste caso o inverso da temperatura $\beta > 0$. Caso existam mais de duas medidas de Gibbs, esse problema se torna equivalente a estudar presença de transição de fase de primeira ordem no modelo (veja referência [104]). Esse caso corresponde ao sistema estar alinhado, isto é, o sistema sente os efeitos das condições de fronteira quando vão se distanciando. Ao contrário, a existência de uma única medida corresponde ao sistema estar desalinhado ou não sentir o efeito das condições de fronteira quando estas vão se afastando progressivamente (em outras palavras, o sistema apresenta a propriedade de perda de sensibilidade com respeito às condições de fronteira, veja Lema 4.49). Nesta seção, consideraremos o modelo de Ising na rede hipercúbica d -dimensional $\mathbb{L}^d \equiv (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ ($d \geq 2$), onde \mathbb{E}^d é o conjunto de primeiros vizinhos na rede \mathbb{L}^d , com Hamiltoniano dado por

$$\mathcal{H}_{h,\Lambda}^{\mu, \text{Ising}}(\sigma) \equiv - \sum_{\substack{x,y \in \Lambda \\ \{x,y\} \in \mathbb{E}}} J \sigma_x \sigma_y - \sum_{x \in \Lambda} h_x \sigma_x - \sum_{\substack{x \in \Lambda, y \in \partial \Lambda \\ \{x,y\} \in \mathbb{E}}} J \sigma_x \mu_y, \quad (383)$$

onde $J \geq 0$, $h = (h_x : x \in \mathbb{Z}^d)$ e $\beta > 0$ é (proporcional a) o inverso da temperatura do modelo. Daqui em diante, escreveremos $\mathcal{G}_\beta^{\text{SPIN}}$ em vez de $\mathcal{G}^{\text{SPIN}}$ para que fique mais claro a dependência sobre o inverso da temperatura β .

Alguns resultados, nesta direção, sobre o modelo de Ising são conhecidos. Quando o campo externo h é uniforme, isto é, $h_x = h \ \forall x$, no caso $h = 0$, através do argumento de Peierls, prova-se que existe transição de fase de primeira ordem (veja Teorema 4.39 para $d = 2$). Já quando o campo externo é não nulo, isto é, $h \neq 0$, o Teorema de Lee-Yang [87] e as Desigualdades GHS estabelecem a analiticidade da energia livre no campo h sempre que a parte real de h seja não nula, implicando que existe um único estado de equilíbrio invariante e extremal. Uma pergunta natural a questionar-se seria: quantas medidas de Gibbs existem para o modelo de Ising ferromagnético quando o campo externo é não uniforme? Algumas respostas a esse problema foram dadas, as quais enunciaremos a seguir. Em [24], foi provado que, para campos $(h_x) \in \ell_1(\mathbb{Z}^d)$, o modelo de Ising apresenta transição de fase. No entanto, quando $(h_x) \in \ell_\infty(\mathbb{Z}^d)$ com $\inf_x h_x > 0$, é provada a existência de uma única medida de Gibbs para todo $\beta > 0$.

Nesta seção, estamos interessados em campos externos não uniformes que possuem decaimento segundo uma lei de potência, isto é, campos externos da forma:

$$h_x = \begin{cases} \frac{h^*}{\|x\|^\alpha}, & \text{se } x \neq 0 \\ h^*, & \text{se } x = 0, \end{cases} \quad (384)$$

onde $\alpha \geq 0$ e $h^* > 0$. Os parâmetros α e h^* , à simples vista, parecem inofensivos, mas como veremos em seguida, estes determinam o comportamento de transição de fase do modelo de Ising.

Para $\alpha > 1$, usando o argumento de Peierls, foi provada em [23] a existência de transição de fase de primeira ordem. No entanto, quando $\alpha = 1$ e h^* é suficientemente pequeno, provou-se que o mesmo comportamento se mantém. Já quando $\alpha \in [0, 1)$, em [23], os autores provaram que existe uma temperatura inversa positiva $\beta_\alpha < \infty$ tal que, para todo $\beta > 0$ tal que $\beta > \beta_\alpha$, o conjunto das medidas de Gibbs para o modelo de Ising definido por (383) é unitário. Pelo Teorema da Unicidade de Dobrushin (veja Teorema 4.45) e por um cálculo similar ao feito no Exemplo 4.21 com $J > 0$, conhecemos que, para qualquer $\beta < 1/(2dJ)$, o conjunto das medidas de Gibbs para o modelo de Ising, também, é unitário.

Na referência [23], foi conjecturado que, para todo $\beta > 0$, o conjunto das medidas de Gibbs para esse modelo, com $\alpha \in [0, 1)$, é, também, unitário. Isto é, conjecturou-se a não existência de transição de fase, para todo $\beta > 0$. Logo, o intervalo de unicidade e não unicidade para o modelo de Ising ferromagnético com campo externo $h_x = h^*/\|x\|^\alpha$ fica como aquele (intervalo) mostrado na Figura 32. O trabalho principal desta seção será fechar essa conjectura com a teoria desenvolvida até aqui. Enunciaremos esse problema em forma de teorema (veja Teorema 6.22 abaixo).

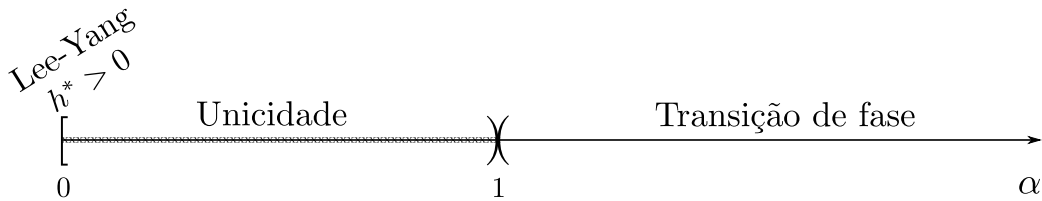


Figura 32: Unicidade e não unicidade para o modelo de Ising com campo $h_x = h^*/\|x\|^\alpha$.

Nesta seção, consideraremos o modelo GRC definido em (342) com $q = 2$, as constantes $q_p \equiv 1, \forall p \in \{1, \dots, q\}$ e o campo magnético externo \hat{h} , como definiremos em seguida.

Teorema 6.22 (L. Cioletti e R. Vila, veja [36]). *Existe uma única medida de Gibbs, em toda temperatura inversa $\beta > 0$, para o modelo de Ising ferromagnético sobre a rede hipercúbica d -dimensional \mathbb{L}^d definido pelo Hamiltoniano (383) e pelo campo externo não uniforme (384), com $\alpha \in [0, 1)$.*

Demonstração. Quando $\alpha = 0$, como havíamos falado anteriormente, a conclusão deste teorema segue do Teorema de Lee-Yang [87] e as Desigualdades GHS, as quais estabelecem a analiticidade da energia livre com respeito ao campo externo h .

Seja $\alpha \in (0, 1)$. Como o espaço de estados $\{-1, +1\}$ é métrico compacto e a especificação γ^Φ (definida pelo Hamiltoniano (347)) definida sobre $(\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{F})$ é quase-local, então o conjunto das medidas de Gibbs do modelo de Potts $\mathcal{G}_{2\beta}^{\text{Potts}}$, estabelecido na Seção 3.2, é $\mathcal{G}_{2\beta}^{\text{Potts}} = \mathcal{G}_\beta^{\text{SPIN}}$ (veja Teorema 4.25). Por outro lado, pela Proposição 3.5 da Seção 3.2, $\mathcal{G}_{2\beta}^{\text{Potts}} = \mathcal{G}_\beta^{\text{Ising}}$. Portanto, $\mathcal{G}_\beta^{\text{SPIN}} = \mathcal{G}_\beta^{\text{Ising}}$.

Em seguida, consideraremos o Hamiltoniano (347) com $q = 2$ e o campo magnético dado por

$$\hat{\mathbf{h}} = ((h_{x,1}, h_{x,2}) \in \mathbb{R}^2 : h^* / \|x\|^\alpha = h_{x,1} = -h_{x,2}, \forall x \in \mathbb{V}).$$

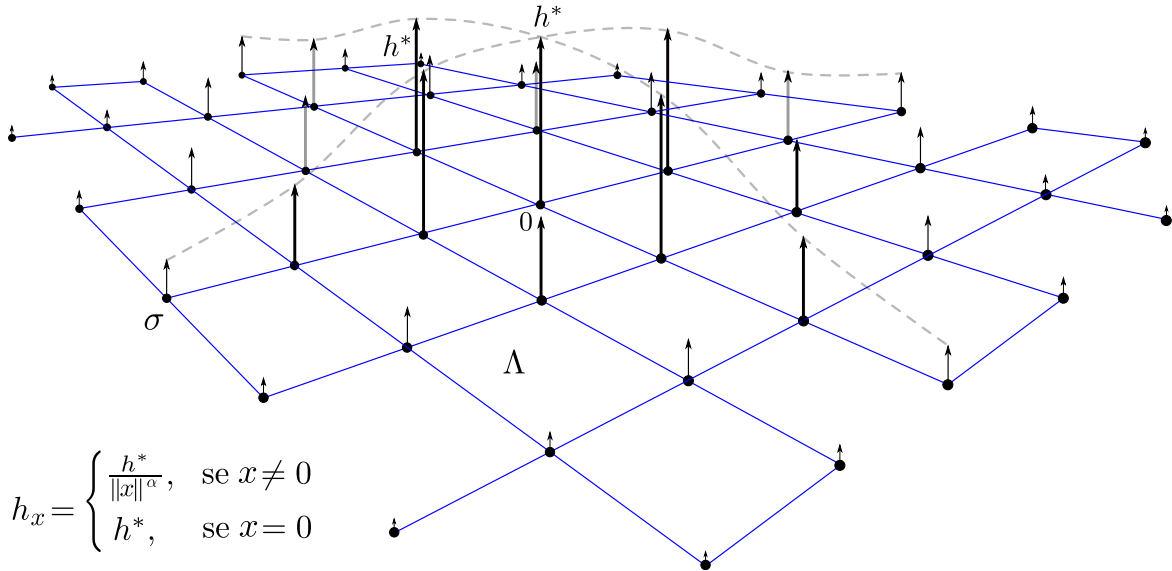


Figura 33: Comportamento do campo externo $h_x = h^* / \|x\|^\alpha$ com $\alpha = 1$.

Note que, se $\beta_c(J, \hat{\mathbf{h}}) = +\infty$ a prova do teorema segue. De fato, se

$$\beta_c(J, \hat{\mathbf{h}}) \equiv \inf\{\beta > 0 : P_\infty(\beta, J, \hat{\mathbf{h}}) > 0\} = +\infty,$$

segue do Teorema 6.19 (ii) que, para qualquer $\beta > 0$, $|\mathcal{G}_\beta^{\text{ES}}| = 1$. Logo, pelo Teorema 6.21, temos $|\mathcal{G}_\beta^{\text{SPIN}}| = 1$, concluindo-se a prova.

Portanto, no que resta da prova mostraremos que $\beta_c(J, \hat{\mathbf{h}}) = +\infty$. Para isso, por contradição suponha que $\beta_c(J, \hat{\mathbf{h}}) < +\infty$. Por usar uma vez mais o Item (ii) do Teorema 6.19, obtemos a unicidade para todo $\beta < \beta_c(J, \hat{\mathbf{h}})$, isto é, $|\mathcal{G}_\beta^{\text{SPIN}}| = 1$ para tais valores de β . Se $\beta > \max\{\beta_\alpha, \beta_c(J, \hat{\mathbf{h}})\}$, foi provado em [23] que $|\mathcal{G}_\beta^{\text{SPIN}}| = 1$.

AFIRMAÇÃO: $\tilde{P}_\infty(\beta, J, \hat{\mathbf{h}}) = 0$, para qualquer $\beta > 0$.

De fato, primeiro provaremos que $\tilde{P}_\infty(\beta, J, \hat{\mathbf{h}}) = 0, \forall \beta > \beta_\alpha$. Para isso, suponha que $\tilde{P}_\infty(\beta, J, \hat{\mathbf{h}}) > 0$, para algum β tal que $\beta > \beta_\alpha$. Logo, pelo Teorema 6.19 (iv), temos que existe, no mínimo, duas medidas de Gibbs ES e, pelo Teorema 6.21, duas medidas de Gibbs para o modelo de Ising definido por (383), o que contradiz [23]. Portanto, $\tilde{P}_\infty(\beta, J, \hat{\mathbf{h}}) = 0, \forall \beta > \beta_\alpha$. Finalmente, como a aplicação $\beta \mapsto \tilde{P}_\infty(\beta, J, \hat{\mathbf{h}})$ é monótona crescente (veja Corolário 6.20), a afirmação segue. \diamond

Do Teorema 6.19 (v), para qualquer $\beta > \beta_c(J, \hat{\mathbf{h}})$, temos $P_\infty(\beta, J, \hat{\mathbf{h}}) > 0$ e $\tilde{P}_\infty(\beta, J, \hat{\mathbf{h}}) > 0$, porém isto contradiz a afirmação acima. Portanto, está provado que, para qualquer $\alpha \in [0, 1)$, $\beta_c(J, \hat{\mathbf{h}}) = +\infty$. \square

Observação 6.23. Em [23], foi conjecturado que, para $\alpha = 1$ e h^* suficientemente grande, a mesma afirmação do Teorema 6.22 continua sendo válida. Atualmente, este problema ainda permanece em aberto.

7

CONVERGÊNCIA EM DISTÂNCIA MALLOWS

Neste capítulo apresentaremos alguns de nossos resultados sobre convergência segundo o conceito de **distância Mallows** (veja referência [34]). Começaremos definindo distância Mallows, no sentido de distância de Wasserstein [121], e provaremos uma equivalência com a definição usual de distância Mallows como aparecem nas referências [41, 92]. A primeira seção está destinada ao estudo de convergência em distância Mallows para distribuições de somas que envolvem variáveis aleatórias associadas e estacionárias. Como aplicação de nossos resultados, estabeleceremos alguns exemplos onde relacionaremos a transição de fase do modelo de Ising unidimensional (sem presença de campo externo) com a convergência em distância Mallows. Por outro lado, na segunda seção, tiraremos a hipótese de estacionaridade das variáveis aleatórias envolvidas e usaremos a desigualdade de Newman-Wright (veja referência [99]) para se ter certo grau de independência no processo.

Observação 7.1. Denotando por $\mathcal{B}(\Omega)$ a σ -álgebra dos borelianos de Ω , definimos a coleção de todas as medidas de probabilidade definidas sobre $\mathcal{B}(\Omega)$ por $\mathcal{M}_1(\Omega)$. Logo, se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função e $\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega)$, neste capítulo, a diferença dos capítulos anteriores, por questões técnicas, adotaremos a notação $\int_{\Omega} f(\omega) d\mu(\omega)$ em vez de $\int_{\Omega} \mu(d\omega) f(\omega)$.

Suponha que estamos encarregados do “transporte de mercadorias” entre produtores e consumidores, cujas distribuições espaciais respectivas são modeladas pelas medidas de probabilidade μ e ν . Se os produtores e consumidores estão localizados a maior distância, mais difícil será nosso trabalho. Logo, desejaríamos resumir o “grau de dificuldade” com apenas uma quantidade. Para esse efeito, é natural considerar, o “custo de transporte ótimo” entre as medidas μ e ν como

$$C(\mu, \nu) \equiv \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{\mathbb{R}^2} c(x, y) d\pi(x, y),$$

onde $c(x, y)$ denota o custo de transporte de uma unidade de massa de x para y e o conjunto

$$\Pi(\mu, \nu) \equiv \left\{ \pi \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^2) : \pi(A \times \mathbb{R}) = \mu(A) \text{ e } \pi(\mathbb{R} \times B) = \nu(B), \forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \right\}$$

está constituído por todos os acoplamentos π de μ e ν , conhecidos como planos de transferência ou de transporte. Em geral C não é uma distância. Se c é uma distância, então C é uma distância (métrica) também.

Se (\mathbb{R}, d) é um espaço métrico, $r > 0$, para cada $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, a **distância de Wasserstein** (veja referência [121]) de r -ésima ordem entre μ e ν é definida por

$$\mathcal{W}_r(\mu, \nu) = \left\{ \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{\mathbb{R}^2} d(x, y)^r d\pi(x, y) \right\}^{1/r}.$$

Alguns casos particulares da distância de Wasserstein são conhecidos, por exemplo:

- $\mathcal{W}_1(\mu, \nu) = \sup_{\|\psi\|_{\text{Lip}} \leq 1} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \psi d(\mu - \nu) \right\}$, essa expressão é chamada “fórmula de dualidade para a distância de Kantorovich-Rubinstein” (para maiores detalhes, veja [121]). Aqui o supremo está dado sobre todas as funções Lipschitzianas (limitadas) ψ que estão dentro da bola unitária, segundo a norma $\|\psi\|_{\text{Lip}} \equiv \max \{k_1(\psi), k_2(\psi)\}$, onde $k_1(\psi) = \sup_{x \neq y} |\psi(x) - \psi(y)| / |x - y|$ e $k_2(\psi) = 2 \sup_x |\psi(x)|$.
- $\mathcal{W}_r(\delta_x, \delta_y) = d(x, y)$, $r > 0$.
- Se d é a métrica discreta, isto é $d(x, y) = \mathbb{1}_{\{x \neq y\}}$, então $\mathcal{W}_r(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \|\mu - \nu\|_{\text{VT}}$ (veja [121]), onde $\|\cdot\|_{\text{VT}}$ denota a distância de variação total segundo a Definição 4.26.
- Se $d(x, y) = |x - y|$ e μ, ν são as funções de distribuição de probabilidade (f.d.p.) F e G , respectivamente, então

$$d_r(F, G) \equiv \mathcal{W}_r(F, G) = \left\{ \inf_{\pi \in \Pi(F, G)} \int_{\mathbb{R}^2} |x - y|^r d\pi(x, y) \right\}^{1/r} \quad (r > 0),$$

é conhecida como a **distância Mallows** de r -ésima ordem entre as f.d.p F, G .

De aqui em diante, estaremos interessados no conceito de distância Mallows. Note que, a priori, d_r , como foi definida acima, não é uma distância sobre o espaço das f.d.p., porque esta definição admite que $d_r = \infty$ possa acontecer.

A distância Mallows pode ser expressada por usar acoplamentos entre variáveis aleatórias. Sejam F e G duas distribuições (de certas variáveis aleatórias). Um vetor aleatório (X, Y) é um acoplamento entre as variáveis aleatórias associadas as distribuições F e G , quando as distribuições de X e Y são F e G , respectivamente, isto é, quando $X \stackrel{d}{=} F$ e $Y \stackrel{d}{=} G$. Usando essa terminologia, a distância Mallows pode-se rescrever como segue.

Lema 7.2. *Seja $r > 0$ e F, G duas f.d.p. Então*

$$d_r(F, G) = \left(\inf_{(X, Y)} \mathbb{E}(|X - Y|^r) \right)^{1/r},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os pares de variáveis aleatórias (X, Y) cujas distribuições marginais são F e G , respectivamente. Em outras palavras, o ínfimo acima é tomado sobre todos os acoplamentos (X, Y) das variáveis aleatórias associadas as distribuições F e G .

Demonstração. Esta prova requer o uso do Teorema da Mudança de Variáveis. ¹

Seja $H \equiv (X, Y)$ um vetor aleatório definido sobre algum espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que $H \stackrel{d}{=} (X, Y)$ e tenha as seguintes marginais

$$\lim_{y \rightarrow \infty} H(x, y) = \mathbb{P}(X \in (-\infty, x], Y \in \mathbb{R}) = F(x), \tag{385}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} H(x, y) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}, Y \in (-\infty, y]) = G(y).$$

Se $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $g(x, y) = |x - y|^r$, pela definição do valor esperado e pelo Teorema de Mudança de Variáveis, segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X - Y|^r) &= \int_{\Omega} g(X(\omega) - Y(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)} (g \circ H)(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) d(\mathbb{P} \circ H^{-1})(x, y). \end{aligned}$$

Note que, esta igualdade se mantém ainda se $\mathbb{E}(|X - Y|^r) = \infty$. Afirmamos que $\pi \equiv \mathbb{P} \circ H^{-1} \in \Pi(F, G)$. De fato, isso é imediato, desde que

$$\pi((-\infty, x] \times \mathbb{R}) = \mathbb{P} \circ H^{-1}((-\infty, x] \times \mathbb{R}) = \mathbb{P}(X \in (-\infty, x], Y \in \mathbb{R}) = F(x),$$

onde, na última igualdade, usamos (385). Analogamente, obtemos

$$\pi(\mathbb{R} \times (-\infty, y]) = G(y),$$

provando-se a afirmação.

¹ Teorema da Mudança de Variáveis: se g é uma função Borel mensurável sobre \mathbb{R}^n , X um vetor aleatório sobre Ω , logo, para qualquer conjunto de Borel $B \subset \mathbb{R}^n$,

$$\int_B g d(\mathbb{P} \circ X^{-1}) = \int_{X^{-1}(B)} (g \circ X) d\mathbb{P}.$$

Os argumentos acima mostram que, para cada vetor aleatório (X, Y) cujas distribuições marginais são dadas por F e G , existe uma medida de probabilidade $\pi \in \Pi(F, G)$, tal que

$$\mathbb{E}(|X - Y|^r) = \int_{\mathbb{R}^2} |x - y|^r d\pi(x, y) \geq d_r^r(F, G).$$

Como consequência dessa igualdade e da definição do ínfimo, obtemos

$$d_r^r(F, G) \leq \inf_{(X, Y)} \mathbb{E}(|X - Y|^r).$$

Agora, provaremos a desigualdade recíproca. Dado $\pi \in \Pi(F, G)$, considere o espaço de probabilidade $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \pi)$ e as variáveis aleatórias (projeções) π_1 e π_2 definidas por $\pi_1(x, y) = x$ e $\pi_2(x, y) = y$, respectivamente. Desde que $\pi \in \Pi(F, G)$, as distribuições marginais do vetor (π_1, π_2) são F e G , respectivamente. Da definição das variáveis aleatórias π_1 e π_2 , tem-se

$$\mathbb{E}(|\pi_1 - \pi_2|^r) = \int_{\mathbb{R}^2} |x - y|^r d\pi(x, y).$$

Assim, para cada $\pi \in \Pi(F, G)$, se construiu um vetor aleatório (π_1, π_2) tendo distribuições marginais F e G , respectivamente, tal que a igualdade acima se mantém. Logo, temos provado que

$$\inf_{(X, Y)} \mathbb{E}(|X - Y|^r) \leq \int_{\mathbb{R}^2} |x - y|^r d\pi(x, y), \quad \pi \in \Pi(F, G).$$

Portanto,

$$\inf_{(X, Y)} \mathbb{E}(|X - Y|^r) \leq d_r^r(F, G),$$

o que conclui a demonstração. \square

Na verdade, em alguns trabalhos [17, 41, 92], o Lema 7.2 é considerado como definição de distância Mallows. Seguindo essa mesma linha, enunciamos o lema anterior em forma de definição.

Definição 7.1 (Distância Mallows, veja [92]). *Para $r > 0$, a distância Mallows de ordem r entre duas f.d.p. F e G é definida como*

$$d_r(F, G) = \left(\inf_{(X, Y)} \mathbb{E}(|X - Y|^r) \right)^{1/r}, \quad X \stackrel{d}{=} F, \quad Y \stackrel{d}{=} G,$$

onde $\stackrel{d}{=}$ denota a igualdade em distribuição e o ínfimo é tomado sobre todos os pares de variáveis aleatórias (X, Y) com distribuições marginais F e G , respectivamente.

Note que, rigorosamente falando, d_r definida como acima não é uma distância sobre o espaço das f.d.p., já que essa definição admite que $d_r(F, G) = \infty$. Mas isso não cria inconveniente nenhum, para que essa definição faça sentido as distribuições F e G devem ter r -ésimo momento (absoluto) finito, isto é, $\int_{\mathbb{R}} |x|^r dF(x), \int_{\mathbb{R}} |x|^r dG(x) < \infty$. Formalmente, definimos o espaço de distribuições que têm essa propriedade por

$$\mathcal{L}_r \equiv \left\{ F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] : F \text{ é f.d.p. tal que } \int_{\mathbb{R}} |x|^r dF(x) < \infty \right\}.$$

Esse espaço foi introduzido por Bickel e Freedman em [17] para mostrar que, para $r \geq 1$ a função $d_r : \mathcal{L}_r \times \mathcal{L}_r \rightarrow [0, \infty)$ é uma métrica.

Sejam $X \stackrel{d}{=} F, Y \stackrel{d}{=} G$ e $(X, Y) \stackrel{d}{=} H$. Se $H = F \wedge G$, onde $F(x) \wedge G(y) \equiv \min\{F(x), G(y)\}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$, escrevemos H^* e (X^*, Y^*) em lugar de H e (X, Y) , respectivamente, isto é,

$$H^*(x, y) = \mathbb{P}(X^* \leq x, Y^* \leq y) = F(x) \wedge G(y).$$

Lema 7.3 (Representação de d_r , veja [41, 91]). *Para $r \geq 1$, a distância Mallows pode ser representada por*

$$\begin{aligned} d_r^r(F, G) &= \mathbb{E}(|F^{-1}(U) - G^{-1}(U)|^r) = \int_0^1 |F^{-1}(u) - G^{-1}(u)|^r du \\ &= \mathbb{E}(|X^* - Y^*|^r) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |x - y|^r dH^*(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} |x - y|^r d[F(x) \wedge G(y)], \end{aligned}$$

onde U é uniformemente distribuído no intervalo $(0, 1)$ e

$$F^{-1}(u) \equiv \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}, \quad 0 < u < 1,$$

denota a inversa generalizada.

A representação da distância Mallows do Lema 7.3 não é válida para $r \in (0, 1)$, mesmo quando o r -ésimo momento for finito, como mostra o próximo exemplo:

Exemplo 7.1. *Sejam X e Y duas v.a.'s tomando valores em $\{1, 2\}$ e $\{3, 4\}$, respectivamente. Considere $X \stackrel{d}{=} F$ e $Y \stackrel{d}{=} G$, onde $\mathbb{P}(X = 1) = 2/3 = 1 - \mathbb{P}(X = 2)$ e $\mathbb{P}(Y = 3) = 3/4 = 1 - \mathbb{P}(Y = 4)$. Se $(X, Y) \stackrel{d}{=} 0 \vee [F + G - 1]$, pode-se ver que a função de distribuição conjunta do vetor aleatório (X, Y) é dada por $p(1, 3) = 1/12 = p(2, 4)$, $p(1, 4) = 1/6$ e $p(2, 3) = 2/3$, isto é, a função de probabilidade conjunta é a da Tabela 2, lado esquerdo.*

Se $(X^, Y^*) \stackrel{d}{=} F \wedge G$, cálculos simples mostram que a função de probabilidade conjunta do vetor aleatório (X^*, Y^*) é a da Tabela 2, lado direito.*

		Y	
		3	4
X	1	1/12	1/6
	2	2/3	1/12

		Y*	
		3	4
X*	1	2/3	0
	2	1/12	1/4

Tabela 2: Funções de distribuição conjunta dos vetores aleatórios (X, Y) e (X^*, Y^*) .

Considerando $r \in (0, 1)$, veja que

$$\mathbb{E}(|X - Y|^r) = \frac{8 + 2(2^r) + 2(3^r)}{12} \quad e \quad \mathbb{E}(|X^* - Y^*|^r) = \frac{1 + 11(2^r)}{12}.$$

Logo,

$$\mathbb{E}(|X^* - Y^*|^r) - \mathbb{E}(|X - Y|^r) = \frac{9(2^r) - 2(3^r) - 7}{12}.$$

Como a função $f(x) = 9(2^x) - 2(3^x) - 7$ é estritamente crescente em $x \in (0, 1)$, temos que $\mathbb{E}(|X^* - Y^*|^r) - \mathbb{E}(|X - Y|^r) > 0$, para $r \in (0, 1)$. Logo, a representação da distância Mallows do Lema 7.3 não é possível para $r \in (0, 1)$.

Foi mostrado por Bickel e Freedman [17] que a distância Mallows sobre \mathcal{L}_r é uma métrica. Daí, faz sentido definir o conceito de convergência em distância Mallows como segue.

Definição 7.2 (Convergência). *Sejam $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e F duas f.d.p. Diremos que F_n converge em distância Mallows a F , se*

$$d_r(F_n, F) \longrightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

O seguinte lema, basicamente, nos dá uma conexão direta entre convergência em distância Mallows d_r e convergência em distribuição.

Lema 7.4 (Bickel e Freedman, veja [17]). *Se $r \geq 1$, $F_n \in \mathcal{L}_r$, $n = 1, 2, \dots$ e $F \in \mathcal{L}_r$, então $d_r(F_n, F) \longrightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$ se, e somente se, para cada função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e limitada, temos*

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF(x)$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r dF_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r dF(x)$.

Para variações e extensões desse resultado, veja as referências [41, 110].

No decorrer da apresentação deste capítulo, para simplificar a notação, escreveremos v.a. para denotar a expressão *variável aleatória*. Também, escreveremos Z_{μ, σ^2} para uma v.a. com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, Z_{σ^2} para uma v.a. com distribuição $N(0, \sigma^2)$, Z para uma v.a. com distribuição $N(0, 1)$ e Φ_{μ, σ^2} , Φ_{σ^2} e Φ para suas respectivas f.d.p.

7.1 CONVÊRGENCIA DE V.A.'S ASSOCIADAS ESTACIONÁRIAS

Seja $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ e $\Omega \equiv \{(\omega_i)_{i \in \mathbb{Z}} : \omega_i \in \mathcal{E}, \forall i \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{E}^{\mathbb{Z}}$. Para um subconjunto $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ usamos a notação $|\Lambda|$ para denotar sua cardinalidade. Com o intuito de simplificar a exposição, de agora em diante, usaremos as letras gregas Λ e Γ exclusivamente para denotar subconjuntos finitos de \mathbb{Z} e denotaremos por $\mathcal{L} \equiv \{\Lambda \subset \mathbb{Z} : 0 < |\Lambda| < \infty\}$ à coleção de todos estes subconjuntos. Para $i \in \mathbb{Z}$ fixo, consideramos a função coordenada $X_i : \Omega \rightarrow \mathcal{E}$ dada por $X_i(\omega) = \omega_i$ e para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$, seja $\mathcal{F}_\Lambda \equiv \sigma(X_i : i \in \Lambda)$ a σ -álgebra gerada pela coleção $\{X_i\}_{i \in \Lambda}$. Definimos \mathcal{F}_{Λ^c} como $\sigma(\cup_\Gamma \mathcal{F}_\Gamma : \Gamma \subset \Lambda^c)$ e, finalmente, definimos $\mathcal{F} \equiv \sigma(\cup_\Lambda \mathcal{F}_\Lambda)$.

Uma função $\gamma_\Lambda : \mathcal{F} \times \Omega \rightarrow [0, 1]$ é chamada **núcleo de probabilidade próprio** de \mathcal{F}_{Λ^c} a \mathcal{F} , se as seguintes condições são satisfeitas:

- $\gamma_\Lambda(\cdot|\omega)$ é uma medida de probabilidade sobre (Ω, \mathcal{F}) , para qualquer $\omega \in \Omega$ fixado;
- $\gamma_\Lambda(A|\cdot)$ é \mathcal{F}_{Λ^c} -mensurável para qualquer $A \in \mathcal{F}$ fixo;
- $\gamma_\Lambda(A \cap B|\omega) = \mathbb{1}_B(\omega)\gamma_\Lambda(A|\omega)$, para qualquer $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}_{\Lambda^c}$ e $\omega \in \Omega$.

Dizemos que a família $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ é **consistente** se, para todo $A \in \mathcal{F}$ e $\omega \in \Omega$, temos

$$\int_{\Omega} \gamma_\Lambda(A|\cdot) d\gamma_\Gamma(\cdot|\omega) = \gamma_\Gamma(A|\omega), \text{ sempre que } \Lambda \subset \Gamma.$$

Seguindo [57], a integral do lado esquerdo da igualdade acima será denotada simplesmente por $\gamma_\Gamma \gamma_\Lambda(A|\omega)$. Nessa notação a consistência se lê $\gamma_\Gamma \gamma_\Lambda = \gamma_\Lambda$, para qualquer par de subconjuntos $\Lambda \subset \Gamma$ em \mathcal{L} .

Uma **especificação** com conjunto de parâmetros \mathbb{Z} e espaço de estados \mathcal{E} é uma família $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \subset \mathbb{Z}}$ de núcleos de probabilidade próprios γ_Λ de \mathcal{F}_{Λ^c} a \mathcal{F} , os quais satisfazem a condição de consistência $\gamma_\Gamma \gamma_\Lambda = \gamma_\Gamma$, sempre que $\Lambda \subset \Gamma$ em \mathcal{L} .

Agora, estamos prontos para definir o conjunto das medidas de Gibbs. Dada um especificação γ com conjunto de parâmetros \mathbb{Z} e espaço de estados \mathcal{E} . O conjunto das medidas de probabilidade definidas por

$$\mathcal{G}(\gamma) \equiv \left\{ \mu \in \mathcal{M}_1(\Omega) : \begin{array}{l} \mu(A|\mathcal{F}_{\Lambda^c})(\omega) = \gamma_\Lambda(A|\omega) \quad \mu\text{-q.c.} \\ \forall A \in \mathcal{F} \text{ e } \Lambda \in \mathcal{L} \end{array} \right\}$$

é chamado de conjunto das medidas de Gibbs determinadas pela especificação γ . Cada elemento $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$ é chamado de **medida de Gibbs** (para uma exposição detalhada das propriedades destes conceitos, veja o Capítulo 4).

Seja γ uma especificação. Para cada $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$ e qualquer par de v.a.'s X, Y sobre (Ω, \mathcal{F}) definimos a covariância entre X e Y (quando isso fizer sentido) como

$$\text{Cov}_\mu(X, Y) \equiv \mathbb{E}_\mu[XY] - \mathbb{E}_\mu[X]\mathbb{E}_\mu[Y].$$

A função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ será chamada de crescente se $x_i \leq y_i$, para todo $i = 1, \dots, n$, implicar $f(x_1, \dots, x_n) \leq f(y_1, \dots, y_n)$.

Diremos que uma medida de probabilidade $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$ tem a **propriedade FKG** se, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para cada par de funções crescentes $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, temos $\text{Cov}_\mu[f(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}), g(X_{i_1}, \dots, X_{i_n})] \geq 0$, para todo $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}$.

Suponha que $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$ e $\mathbf{X} \equiv \{X_j : j \in \mathbb{Z}\}$ é um processo estocástico estacionário² sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Definimos a **suscetibilidade** associada a μ como segue

$$\chi(\mu) \equiv \sum_{j \in \mathbb{Z}} \text{Cov}_\mu(X_0, X_j).$$

Quando estivermos lidando com v.a.'s associadas dependentes segundo a Definição 7.3 (abaixo), uma ferramenta importante para ter controle do grau de dependência é o chamado **coeficiente de Cox-Grimmett**, o qual foi introduzido pela primeira vez em [39] e é definido como

$$u_{\mathbf{X}}(n) = \sum_{j \in \mathbb{Z} : |j| \geq n+1} \text{Cov}(X_0, X_j), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

² Um processo estocástico é estacionário, se todas as distribuições finito dimensionais permanecem as mesmas sob translações no parâmetro tempo.

Essa expressão pode-se interpretar como a variância assintótica nos teoremas de limite central para v.a.'s dependentes se escolhermos $n = 0$.

Definição 7.3 (Processo estocástico associado). *As v.a.'s X_{j_1}, \dots, X_{j_n} , onde $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{Z}$, são ditas associadas se, dadas duas funções coordenadas crescentes $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, temos*

$$\text{Cov}[f(X_{j_1}, \dots, X_{j_n}), g(X_{j_1}, \dots, X_{j_n})] \geq 0,$$

*sempre que a covariância existe. Um processo estocástico $\{X_j : j \in \mathbb{Z}\}$ será dito **associado** se, para cada coleção finita $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{Z}$, as v.a.'s X_{j_1}, \dots, X_{j_n} são associadas.*

A seguinte propriedade é uma consequência imediata da definição de associação.

Lema 7.5. *Seja $\mathbf{X} \equiv \{X_j : j \in \mathbb{Z}\}$ um processo estocástico associado. Se para cada $j \in \mathbb{Z}$ temos que $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função coordenada crescente, então o processo estocástico $\{Z_j : j \in \mathbb{Z}\}$, dado por $Z_j \equiv f_j(X_j)$, também, é associado. Isto é, as v.a.'s $f_{j_1}(X_{j_1}), \dots, f_{j_n}(X_{j_n})$ são associadas, para todo $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{Z}$.*

Como estamos trabalhando com processos estocásticos \mathbf{X} indexados sob o látice \mathbb{Z} , é natural, quando lidamos com teoremas de limite central, considerar somas parciais com n termos, porém, que não começam de qualquer índice inteiro, isto é,

$$S_k^n(\mathbf{X}) \equiv \sum_{j=k}^{(n-1)+k} X_j, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{N}. \quad (386)$$

Veja que na notação $S_k^n(\mathbf{X})$, os subíndices k nos dizem onde a soma começa e o superíndice n nos indica quantos termos estamos somando.

Pelo uso da desigualdade de Minkowski, da estacionaridade e do Teorema 1 de [19], imediatamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 7.6 (Birkel). *Seja $\mathbf{X} \equiv \{X_j : j \in \mathbb{Z}\}$ um processo estocástico associado e estacionário satisfazendo $\sup \{\mathbb{E}[|X_j|^{\alpha+\delta}] : j \in \mathbb{Z}\} < \infty$, para algum $\alpha > 2$ e $\delta > 0$. Assuma, também, que*

$$u_{\mathbf{X}}(n) = O(n^{-(\alpha-2)(\alpha+\delta)/2\delta}).$$

Então, existe uma constante B independente de n tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \mathbb{E}[|S_k^{n+m}(\mathbf{X}) - S_k^m(\mathbf{X})|^\alpha] \leq Bn^{\alpha/2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

O seguinte resultado foi extraído de [98], ele nos fornece um teorema do limite central sobre as hipóteses de variância finita, estacionaridade, propriedade FKG e suscetibilidade finita. Salientamos que esse resultado será a base do teorema principal desta seção (especificamente, Teorema 7.8).

Teorema 7.7 (Newman/TLC, veja [98]). *Seja γ uma especificação com conjunto de parâmetros \mathbb{Z} e espaço de estados \mathcal{E} . Seja $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$ tal que $\mathbf{X} \equiv \{X_j : j \in \mathbb{Z}\}$ é um processo estocástico associado sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Se, em adição, as seguintes condições*

- i) variância finita: $\mathbb{E}_\mu[X_j^2] < \infty$, para todo $j \in \mathbb{Z}$;*
- ii) estacionaridade: para todo $m \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}$ e $j_1, \dots, j_m \in \mathbb{Z}$ os vetores aleatórios $(X_{j_1}, \dots, X_{j_m})$ e $(X_{j_1+l}, \dots, X_{j_m+l})$ têm a mesma distribuição;*
- iii) a medida de probabilidade μ tem a propriedade FKG;*
- iv) suscetibilidade finita, isto é, $\chi(\mu) < \infty$;*

são satisfeitas, então

$$Y_k^n \equiv \frac{S_k^n(\mathbf{X}) - \mathbb{E}_\mu[S_k^n(\mathbf{X})]}{[n\chi(\mu)]^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{d} Z, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (387)$$

onde $Z \stackrel{d}{=} N(0, 1)$, \xrightarrow{d} denota a convergência em distribuição e $S_k^n(\mathbf{X})$ foi definido em (386).

7.1.1 Convergência em d_r

Com todas as ferramentas (enunciadas anteriormente) a nossa disposição, em seguida provaremos o teorema principal desta seção. Este resultado nos fornece as condições suficientes para obter convergência em distância Mallows de ordem r .

Teorema 7.8 (Convergência em distância Mallows de r -ésima ordem, veja [34]). *Seja γ uma especificação com conjunto de parâmetros \mathbb{Z} e espaço de estados \mathcal{E} . Assuma que $\mathbf{X} \equiv \{X_j : j \in \mathbb{Z}\}$ é um processo estocástico associado sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, onde $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$, satisfaz a hipótese dos Teoremas 7.6 e 7.7. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja Y_k^n a v.a. definida em (387) e F_k^n sua f.d.p. Para cada $\alpha > 2$ e $\delta > 0$ satisfazendo as condições do Teorema 7.6, temos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_r(F_k^n, \Phi) = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq r < \alpha.$$

Demonstração. Por hipótese, temos $Y_k^n \xrightarrow{d} Z$, com $Z \stackrel{d}{=} \Phi$. Se provarmos que a sequência $\{|Y_k^n|^r: n \in \mathbb{N}\}$ é uniformemente integrável ³, então, por resultados padrões ⁴, teríamos que $\mathbb{E}_\mu[|Y_k^n|^r] \rightarrow \mathbb{E}[|Z|^r]$, quando $n \rightarrow \infty$ e $Z \stackrel{d}{=} \Phi$. Esses fatos, junto com o Lema 7.4 (de Bickel e Freedman), permitem concluir a prova.

Para provar que a sequência $\{|Y_k^n|^r: n \in \mathbb{N}\}$ é uniformemente integrável, basta provar a seguinte limitação uniforme: para algum $\epsilon > 0$, $K \equiv \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}_\mu[|Y_k^n|^{r+\epsilon}] < \infty$. De fato, uma vez que

$$\mathbb{E}_\mu[\mathbb{1}_{\{|Y_k^n|^r \geq \ell^r\}} |Y_k^n|^r] = \mathbb{E}_\mu[\mathbb{1}_{\{|Y_k^n| \geq \ell\}} |Y_k^n|^r] \leq \frac{1}{\ell^\epsilon} \mathbb{E}_\mu[\mathbb{1}_{\{|Y_k^n| \geq \ell\}} |Y_k^n|^{r+\epsilon}] \leq \frac{K}{\ell^\epsilon},$$

a integrabilidade uniforme segue.

Com o intuito de provar que $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}_\mu[|Y_k^n|^{r+\epsilon}] < \infty$, para algum $\epsilon > 0$, consideramos o processo estocástico $\mathbf{Z} \equiv \{Z_j: j \in \mathbb{Z}\}$, definido por

$$Z_j \equiv X_j - \mathbb{E}_\mu[X_j], \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Pelo Lema 7.5, o processo estocástico \mathbf{Z} , que é uma transformação das variáveis iniciais, ainda é associado. Note, também, que $\text{Cov}_\mu(Z_k, Z_l) = \text{Cov}_\mu(X_k, X_l)$, logo, temos a seguinte igualdade: $u_{\mathbf{Z}}(n) = u_{\mathbf{X}}(n) = O(n^{-(\alpha-2)(\alpha+\delta)/2\delta})$. Pelo uso da desigualdade triangular, da desigualdade C_p ⁵, da desigualdade de Jensen e da hipótese, obtemos $\sup \{\mathbb{E}[|Z_j|^{\alpha+\delta}]: j \in \mathbb{Z}\} < \infty$. Logo, a hipótese do Teorema 7.6 é satisfeita para o processo estocástico $\mathbf{Z} \equiv \{Z_j: j \in \mathbb{Z}\}$. Portanto,

$$Bn^{\alpha/2} \geq \mathbb{E}_\mu[|S_k^{n+m}(\mathbf{Z}) - S_k^m(\mathbf{Z})|^\alpha] = \mathbb{E}_\mu[|S_k^n(\mathbf{Z})|^\alpha] = [n\chi(\mu)]^{\alpha/2} \mathbb{E}_\mu[|Y_k^n|^\alpha], \quad (388)$$

onde, na primeira igualdade, usamos a estacionaridade de \mathbf{Z} e, na segunda igualdade, (usamos) as definições das v.a.'s $S_k^n(\mathbf{Z})$ e Y_k^n . Se $\epsilon > 0$ é tal que $r + \epsilon < \alpha$, outra vez, usando a desigualdade C_p e a cota (388), para cada $k \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\mathbb{E}_\mu[|Y_k^n|^{r+\epsilon}] \leq \mathbb{E}_\mu[(1 + |Y_k^n|)^\alpha] \leq C_\alpha \mathbb{E}_\mu[1 + |Y_k^n|^\alpha] \leq C_\alpha \left(1 + \frac{B}{[\chi(\mu)]^{\alpha/2}}\right),$$

concluindo a prova da afirmação. □

Assumindo o Teorema 7.7 e usando técnicas relativamente simples, mostraremos o seguinte resultado sobre convergência em distância Mallows de ordem $d = 2$.

- 3 Uma sequência de v.a.'s $(X_n)_{n \geq 1}$ é uniformemente integrável se, $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1} \int_{\{|X_n| \geq \ell\}} |X_n| d\mathbb{P} = 0$.
- 4 Se $X_n \xrightarrow{d} X$ e $(X_n)_{n \geq 1}$ é uniformemente integrável, então X é integrável e $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow \mathbb{E}(X)$. Além disso, se $\mathbb{E}|X_n| \rightarrow \mathbb{E}|X|$ e $X_n \xrightarrow{d} X$, então $(X_n)_{n \geq 1}$ é uniformemente integrável.
- 5 Desigualdade C_p : $\forall x, y \geq 0$; $(x + y)^p \leq C_p(x^p + y^p)$, onde $p > 0$ e $C_p \equiv \max\{1, 2^{p-1}\}$.

Teorema 7.9 (Convergência em distância Mallows de ordem $d = 2$, veja [34]). *Seja γ uma especificação com conjunto de parâmetros \mathbb{Z} e espaço de estados \mathcal{E} . Assuma que $\mathbf{X} \equiv \{X_j : j \in \mathbb{Z}\}$ é um processo estocástico associado e estacionário sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, onde $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$, satisfazendo a hipótese do Teorema 7.7. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja Y_k^n a v.a. definida em (387) e F_k^n sua f.d.p. Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_2(F_k^n, \Phi) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Desde que

$$\text{Var}_\mu[S_k^n(\mathbf{X})] = \sum_{j=k}^{(n-1)+k} \text{Var}_\mu(X_j) + 2 \sum_{k \leq i < j \leq (n-1)+k} \text{Cov}_\mu(X_i, X_j)$$

e \mathbf{X} é um processo estocástico associado e estacionário, temos

$$\begin{aligned} \text{Var}_\mu[S_k^n(\mathbf{X})] &= n \text{Var}_\mu(X_0) + 2 \sum_{k \leq i < j \leq (n-1)+k} \text{Cov}_\mu(X_k, X_j) \\ &= n \text{Var}_\mu(X_0) + 2(n-1) \sum_{j=k+1}^{(n-1)+k} \text{Cov}_\mu(X_k, X_j) \\ &= n \text{Var}_\mu(X_0) + 2(n-1) \sum_{j=1}^{n-1} \text{Cov}_\mu(X_0, X_j). \end{aligned}$$

Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}_\mu[S_k^n(\mathbf{X})]}{n} = \text{Var}_\mu(X_0) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \text{Cov}_\mu(X_0, X_j) = \chi(\mu).$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_\mu[|Y_k^n|^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}_\mu[S_k^n(\mathbf{X})]}{n\chi(\mu)} = 1 = \mathbb{E}[|Z|^2], \quad (389)$$

onde $Z \stackrel{d}{=} \Phi$.

Combinando (389) com o teorema do limite central fornecido pelo Teorema 7.7 e, finalmente, aplicando o Lema 7.4 (de Bickel e Freedman) concluímos a prova. \square

Como consequência do Teorema 7.9 calcularemos o limite da seguinte função

$$n \mapsto \sum_{k=0}^n y_{k,n} \int_{\sum_{j=0}^{k-1} p_{j,n}}^{\sum_{j=0}^k p_{j,n}} \Phi^{-1}(u) du, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

o que não é nada trivial pois quando se tenta calcular diretamente esse limite, nos deparamos com um problema essencial, tal função tem dependência direta com a

função inversa generalizada Φ^{-1} . Atualmente, não conhecemos nenhuma técnica computacional que nos permita calcular tal limite. O seguinte corolário nos mostra como usar a convergência em distância Mallows de ordem 2 para calcular dito limite.

Corolário 7.10 (Veja referência [34]). *Seja γ uma especificação com conjunto de parâmetros \mathbb{Z} e espaço de estados \mathcal{E} . Assuma que $\mathbf{X} \equiv \{X_j \in \{0, 1\} : j \in \mathbb{Z}\}$ é um processo estocástico associado e estacionário sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, onde $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$, satisfazendo a hipótese do Teorema 7.7. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S_n \equiv S_1^n(\mathbf{X})$ a v.a. definida em (386) e $Y_n \equiv Y_1^n$ a v.a. definida em (387), com Y_n tomando valores $y_{0,n}, y_{1,n}, \dots, y_{n,n}$. Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\Phi) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n y_{k,n} \int_{\sum_{j=0}^{k-1} p_{j,n}}^{\sum_{j=0}^k p_{j,n}} \Phi^{-1}(u) du = 1,$$

onde Φ^{-1} denota a inversa generalizada.

Demonstração. Como a v.a. Y_n toma valores $y_{k,n} \equiv \frac{k - \mathbb{E}_\mu(S_n)}{[n\chi(\mu)]^{1/2}} : k = 0, 1, \dots, n$, esta satisfaz

$$\mu(Y_n = y_{k,n}) = p_{k,n} \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^n p_{k,n} = 1, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Considere $Y_n \stackrel{d}{=} F_n$ e $Z \stackrel{d}{=} \Phi$. Pode-se provar que, para cada $u \in (0, 1)$, a inversa generalizada de F_n é

$$F_n^{-1}(u) = y_{k,n}, \quad \text{se} \quad \sum_{j=0}^{k-1} p_{j,n} < u \leq \sum_{j=0}^k p_{j,n}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

onde, convencionalmente, definimos $\sum_{j=0}^{-1} p_{j,n} = 0$. Usando a representação do Lema 7.3 e a forma de F_n^{-1} , temos

$$\begin{aligned} d_2^2(F_n, \Phi) &= \int_0^1 [F_n^{-1}(u) - \Phi^{-1}(u)]^2 du \\ &= \sum_{k=0}^n \int_{\sum_{j=0}^{k-1} p_{j,n}}^{\sum_{j=0}^k p_{j,n}} [y_{k,n} - \Phi^{-1}(u)]^2 du \\ &= \sum_{k=0}^n y_{k,n}^2 \int_{\sum_{j=0}^{k-1} p_{j,n}}^{\sum_{j=0}^k p_{j,n}} du + \sum_{k=0}^n \int_{\sum_{j=0}^{k-1} p_{j,n}}^{\sum_{j=0}^k p_{j,n}} [\Phi^{-1}(u)]^2 du - 2I_n(\Phi) \\ &\equiv L_1(n) + L_2(n) - 2I_n(\Phi). \end{aligned} \tag{390}$$

Imediatamente, pelo Item (389), vemos que

$$L_1(n) = \sum_{k=0}^n y_{k,n}^2 p_{k,n} = \mathbb{E}_\mu(Y_n^2) \longrightarrow 1, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \tag{391}$$

Tomando $u = \Phi(v)$, como Φ é contínua, temos que $\Phi^{-1}(\Phi(v)) = v$. Portanto,

$$L_2(n) = \sum_{k=0}^n \int_{\Phi^{-1}(\sum_{j=0}^{k-1} p_{j,n})}^{\Phi^{-1}(\sum_{j=0}^k p_{j,n})} v^2 d\Phi(v) = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 d\Phi(v) = \mathbb{E}(Z^2) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (392)$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ em (390), usando (391), (392) e o Teorema 7.9, temos

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} d_2^2(F_n, \Phi) = 2 - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\Phi). \quad (393)$$

concluindo-se a demonstração. \square

7.1.2 Aplicações

O caminho padrão para se construir uma especificação com conjunto de parâmetros \mathbb{Z} e espaço de estados \mathcal{E} é por meio de uma **interação**. Para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$ associamos a função $\Phi_\Lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Tal família de funções será denotada por $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ e Φ é chamada de interação. Salientamos que é muito comum, para uma interação Φ ter vários subconjuntos finitos Λ 's para os quais Φ_Λ é identicamente zero. Outra observação importante é que, neste trabalho, somente trataremos com interações definidas sobre o látice \mathbb{Z} , construções similares podem ser feitas sobre qualquer látice infinito contável. Para usar os resultados clássicos da teoria das medidas de Gibbs, restringimos nossa atenção a interações satisfazendo a seguinte condição de regularidade:

1. para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$, a função $\Phi_\Lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é \mathcal{F}_Λ -mensurável;
2. Φ satisfaz a seguinte condição

$$\|\Phi\| \equiv \sup_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{\Lambda \in \mathcal{L} \\ \Lambda \ni j}} \sup_{\sigma \in \Omega} |\Phi_\Lambda(\sigma)| < \infty.$$

Uma interação Φ que satisfaz as condições 1 e 2 é chamada de interação **absolutamente somável**. Veja que toda interação regular (segundo a Definição 4.20) é absolutamente somável. Em seguida, apresentaremos dois exemplos simples de interações absolutamente somáveis.

Exemplo 7.2. Seja $\Omega = \mathcal{E}^{\mathbb{Z}}$, onde $\mathcal{E} = \{-1, 1\}$ e Φ é uma interação dada pela seguinte expressão: para qualquer $\sigma \in \Omega$ e $j \in \mathbb{Z}$

$$\Phi_\Lambda(\sigma) = \begin{cases} \sigma_j \sigma_{j+1}, & \text{se } \Lambda = \{j, j+1\} \\ 0, & \text{outro caso.} \end{cases}$$

Afirmamos que Φ é uma interação absolutamente somável. De fato, para qualquer $\Lambda \in \mathcal{L}$ temos, $\Phi_\Lambda \equiv 0$ se Λ não é da forma $\{j, j+1\}$. Se $\Lambda = \{j, j+1\}$ é claro que Φ_Λ depende unicamente das coordenadas σ_j e σ_{j+1} , portanto, Φ_Λ é \mathcal{F}_Λ -mensurável. A condição de regularidade é satisfeita, já que

$$\|\Phi\| \equiv \sup_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{\Lambda \in \mathcal{L} \\ \Lambda \ni j}} \sup_{\sigma \in \Omega} |\Phi_\Lambda(\sigma)| = \sup_{j \in \mathbb{Z}} \sup_{\sigma \in \Omega} |\Phi_{j,j+1}(\sigma)| = 1.$$

Exemplo 7.3. Seja Ω definida como no exemplo prévio e $\alpha > 1$ é um parâmetro fixado, logo, a interação Φ dada por

$$\Phi_\Lambda(\sigma) = \begin{cases} \frac{\sigma_i \sigma_j}{|i-j|^\alpha}, & \text{se } \Lambda = \{i, j\} \text{ e } i \neq j \\ 0, & \text{outro caso,} \end{cases}$$

é uma interação absolutamente somável. Para qualquer $\Lambda \in \mathcal{L}$ temos $\Phi_\Lambda \equiv 0$ se $|\Lambda| \neq 2$. Por outro lado, se $\Lambda = \{i, j\}$ com $i \neq j$, então Φ_Λ é \mathcal{F}_Λ -mensurável. A condição de regularidade é verificada como segue

$$\|\Phi\| \equiv \sup_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{\Lambda \in \mathcal{L} \\ \Lambda \ni j}} \sup_{\sigma \in \Omega} |\Phi_\Lambda(\sigma)| = \sup_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i \in \mathbb{Z} \setminus \{j\}} \sup_{\sigma \in \Omega} \left| \frac{\sigma_j \sigma_i}{|j-i|^\alpha} \right| \leq \sup_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i \in \mathbb{Z} \setminus \{j\}} \frac{1}{|i-j|^\alpha} \leq 2\zeta(\alpha).$$

Observação 7.11. As interações dos Exemplos 7.2 e 7.3 são interações de curto (primeiros vizinhos) e longo alcance do modelo de Ising sobre o látice \mathbb{Z} , respectivamente.

Hamiltoniano. Para cada $\Lambda \in \mathcal{L}$ o Hamiltoniano (ou a energia) $H_\Lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ associado (a) a uma configuração $\sigma \in \Omega$ é definido (a) como

$$H_\Lambda(\sigma) = \sum_{\substack{\Gamma \in \mathcal{L} \\ \Gamma \cap \Lambda \neq \emptyset}} \Phi_\Gamma(\sigma). \quad (394)$$

Note que, se Φ é absolutamente somável, então a série acima é absolutamente convergente, para cada $\sigma \in \Omega$. De fato, a seguinte cota superior se mantém

$$\sum_{\substack{\Gamma \in \mathcal{L} \\ \Gamma \cap \Lambda \neq \emptyset}} |\Phi_\Gamma(\sigma)| \leq \sum_{i \in \Lambda} \sum_{\substack{\Gamma \in \mathcal{L} \\ \Gamma \ni i}} |\Phi_\Gamma(\sigma)| \leq \sum_{i \in \Lambda} \sum_{\substack{\Gamma \in \mathcal{L} \\ \Gamma \ni i}} \sup_{\sigma \in \Omega} |\Phi_\Gamma(\sigma)| \leq |\Lambda| \|\Phi\|.$$

Construiremos algumas especificações com conjunto de parâmetros \mathbb{Z} e espaço de estados \mathcal{E} . Fixamos uma interação absolutamente somável Φ , uma medida de

probabilidade $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ (chamada medida a priori) e $\beta > 0$. Para cada $\omega \in \Omega$ e $A \in \mathcal{F}$, a seguinte expressão

$$\gamma_\beta(A, \omega) = \frac{1}{Z_\Lambda^\omega(\beta)} \int_{\mathcal{E}^{|\Lambda|}} \mathbb{1}_A(\sigma) \mathbb{1}_{\{\sigma_{\Lambda^c} = \omega_{\Lambda^c}\}}(\sigma) e^{-\beta H_\Lambda(\sigma)} \prod_{i \in \Lambda} d\lambda(\sigma_i),$$

define uma especificação, onde $Z_\Lambda^\omega(\beta)$ é a função de partição (padrão) dada por

$$Z_\Lambda^\omega(\beta) = \int_{\mathcal{E}^{|\Lambda|}} \mathbb{1}_{\{\sigma_{\Lambda^c} = \omega_{\Lambda^c}\}}(\sigma) e^{-\beta H_\Lambda(\sigma)} \prod_{i \in \Lambda} d\lambda(\sigma_i).$$

O conjunto $\mathcal{G}(\gamma_\beta)$ é formado pelas medidas de Gibbs determinadas pela especificação γ_β no inverso da temperatura $\beta > 0$.

Estamos prontos para exibir uma classe de especificações para a qual podemos aplicar os Teoremas 7.6–7.9. Primeiramente, aplicaremos os resultados obtidos aqui para o Exemplo 7.2. Nesse caso, para qualquer $\beta > 0$, o conjunto das medidas de Gibbs $\mathcal{G}(\gamma_\beta)$ é unitário (veja Corolário 4.48). Seja μ_β este único elemento. Pode-se mostrar que o processo estocástico $\{X_j : j \in \mathbb{Z}\}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mu_\beta)$ é associado e estacionário por usar a desigualdade FGK.

Usando-se 1ª desigualdade de Griffiths, pode-se provar que a covariância $\text{Cov}_{\mu_\beta}(X_0, X_j)$ decai para zero a uma taxa exponencial com a distância, isto é, existem constantes $0 < C(\beta), m(\beta) < \infty$ tais que, $\forall j \in \mathbb{Z}$ temos $\text{Cov}_{\mu_\beta}(X_0, X_j) = \mu_\beta(X_0 X_j) \leq C(\beta) e^{-m(\beta)|j|}$. Pela desigualdade de Simon-Lieb prova-se a seguinte equivalência: a covariância decai exponencialmente se, e somente se, a suscetibilidade, denotada por $\chi(\beta)$, é finita, $\forall \beta > 0$. Portanto, temos verificado as hipóteses do Teorema 7.6. Esse exemplo, também, satisfaz as hipóteses do Teorema 7.7. Logo, o Teorema 7.8 é válido e se satisfaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_r(F_k^n, \Phi) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, r \geq 2 \text{ e } \Phi \sim N(0, 1).$$

No Exemplo 7.3, para obter a convergência em distância Mallows do Teorema 7.8, temos que considerar dois casos diferentes. O primeiro (e o mais complexo) é quando $1 < \alpha \leq 2$ e o segundo é quando $\alpha > 2$. Para $\alpha < 1$ a interação Φ não é absolutamente somável e, em certo sentido, o caso é considerado trivial.

Suponha que $1 < \alpha \leq 2$. Nesse caso existe um ponto crítico $0 < \beta_c(\alpha) < \infty$, tal que o conjunto das medidas de Gibbs $\mathcal{G}(\gamma_\beta)$ tem infinitos elementos para $\beta > \beta_c(\alpha)$ (fase supercrítica) e é unitário quando $\beta < \beta_c(\alpha)$ (fase subcrítica). Na fase subcrítica, sua única medida, similarmente ao exemplo prévio, tem a propriedade FKG e o processo estocástico $\{X_j : j \in \mathbb{Z}\}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mu_\beta)$ é associado e estacionário. Aizenman e

Newman obtiveram o decaimento polinomial da covariância até o ponto crítico, isto é, a existência de uma constante positiva $C(\beta)$ tal que, para todo $\beta < \beta_c(\alpha)$ tem-se $\text{Cov}_{\mu_\beta}(X_0, X_j) \leq C(\beta)|j|^{-\alpha}$ e, portanto, (desde que $\alpha > 1$) a suscetibilidade $\chi(\beta) < \infty$ e o coeficiente de Cox-Grimmett satisfazem $u_{\mathbf{X}}(n) = O(n^{1-\alpha})$. Nesses casos, os Teoremas 7.6 e 7.7 podem ser aplicados para $r = 2$ ou $r > 2$ sempre que a desigualdade $r^2 + (\delta - 2)r < 2\delta\alpha$ se mantenha, para algum $\delta > 0$. Sobre essas condições, segue dos Teoremas 7.8 e 7.9 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_r(F_k^n, \Phi) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Para $1 < \alpha \leq 2$ e $\beta > \beta_c(\alpha)$ a análise é muito mais difícil. Por exemplo, não pode ser assegurado que o processo estocástico $\{X_j : j \in \mathbb{Z}\}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mu_\beta)$ é estacionário, para qualquer $\mu_\beta \in \mathcal{G}(\gamma_\beta)$. Logo necessitamos uma caracterização de convergência em distância Mallows, para variáveis aleatórias (envolvidas) associadas mas não necessariamente estacionárias. Isso será visto na sequência.

7.2 CONVÊRGENCIA DE V.A.'S ASSOCIADAS NÃO ESTACIONÁRIAS

Nesta seção, em contraste com a seção anterior, apresentaremos uma técnica que foi extraída de Newman e Wright [99], a qual nos permite obter convergência em distância Mallows de ordem 2 para distribuições de variáveis aleatórias (que não necessariamente são estacionárias) construídas mediante somas parciais, que definiremos em seguida. Acreditamos que a ordem desse tipo de convergência pode-se aumentar para $r \geq 2$. Para isso, introduzimos algumas notações.

Se $S = (S_1, S_2, \dots)$ é uma sequência de v.a.'s, dizemos que S_n é **assintoticamente normal** com media μ_n e variância σ_n^2 , e escrevemos S_n é $AN(\mu_n, \sigma_n^2)$, se $\sigma_n > 0$ e quando $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{S_n - \mu_n}{\sigma_n} \xrightarrow{d} Z, \quad Z \stackrel{d}{=} \Phi.$$

Aqui, μ_n e σ_n^2 não necessariamente são a média e a variância da v.a. S_n . Nesse caso podemos aproximar, para n suficientemente grande, $\mathbb{P}(S_n \leq t)$ por $\mathbb{P}(Z \leq (t - \mu_n)/\sigma_n)$, onde Z é $N(0, 1)$. Dizemos que S satisfaz o **Teorema do Limite Central** (TLC) se S_n é $AN(\mathbb{E}(S_n), \text{Var}(S_n))$.

Em seguida, introduzimos algumas notações. Se $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$, escrevemos x_i para denotar a i -ésima coordenada de \mathbf{x} . Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$, escrevemos $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ (respectivamente $\mathbf{x} < \mathbf{y}$) se $x_i \leq y_i$ (respectivamente $x_i < y_i$) para todo i . Definimos

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sup\{|x_i - y_i| : i = 1, 2, \dots, d\}$$

e escrevemos $\mathbf{1}$ para denotar o vetor cujas entradas são 1's. Se $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, denotamos por $\Lambda(\mathbf{k})$ a caixa

$$\Lambda(\mathbf{k}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d : \mathbf{1} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{k}\}$$

e seja $\|\mathbf{k}\| = k_1 k_2 \cdots k_d$ representando o número de pontos nessa caixa.

Seja $\{\mathbf{k}(N) : N = 1, 2, \dots\}$ uma sequência em \mathbb{Z}^d tal que $k_i(N) \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, para $i = 1, 2, \dots, d$. Suponha que, para cada N , $\{X_{\mathbf{n}}(N) : \mathbf{n} \in \Lambda(\mathbf{k}(N))\}$ é uma família de v.a.'s associadas segundo a Definição 7.3. Para todo N definimos

$$S_N = \sum_{\mathbf{n} \in \Lambda(\mathbf{k}(N))} X_{\mathbf{n}}(N) \quad \text{e} \quad \sigma_N^2 = \text{Var}(S_N).$$

Usando a mesma notação de Cox-Grimmett [39], se ℓ é um inteiro positivo, definimos

$$\mathbf{m} = (\lfloor k_1(N)/\ell \rfloor, \lfloor k_2(N)/\ell \rfloor, \dots, \lfloor k_d(N)/\ell \rfloor),$$

$$Y_j(N) = \sum_{(j-1)\ell < \mathbf{n} \leq j\ell} X_{\mathbf{n}}(N), \quad \mathbf{1} \leq j \leq \mathbf{m}, \quad s_{N,\ell}^2 = \sum_{\mathbf{1} \leq j \leq \mathbf{m}} \text{Var}(Y_j(N)),$$

$$S_{N,\ell} = \sum_{\mathbf{1} \leq j \leq \mathbf{m}} Y_j(N), \quad \sigma_{N,\ell}^2 = \text{Var}(S_{N,\ell}) \quad \text{e} \quad Z_N = S_N - S_{N,\ell},$$

onde $\lfloor x \rfloor$ denota o máximo inteiro menor ou igual que x .

Lema 7.12 (Cox-Grimmett, veja [39]). *Para cada N , seja $\{X_{\mathbf{n}}(N) : \mathbf{n} \in \Lambda(\mathbf{k}(N))\}$ uma família de v.a.'s associadas satisfazendo:*

(i) *existe uma constante finita e estritamente positiva c_1 , tal que*

$$\text{Var}(X_{\mathbf{n}}(N)) \geq c_1, \quad \forall \mathbf{n} \text{ e } N;$$

(ii) *existe uma função $u : \{0, 1, 2, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u(r) \rightarrow 0$, quando $r \rightarrow \infty$ e*

$$\sum_{\mathbf{j} : |\mathbf{n} - \mathbf{j}| \geq r} \text{Cov}(X_{\mathbf{j}}(N), X_{\mathbf{n}}(N)) \leq u(r), \quad \forall \mathbf{n}, N \text{ e } r \geq 0.$$

Então,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma_N^2}{s_{N,\ell}^2} \leq 1 + \frac{2d}{\ell c_1} \sum_{r=1}^{\ell} u(r).$$

Como subproduto da prova do Lema 7.12, temos a seguinte proposição.

Proposição 7.13. *Sob as hipóteses do Lema 7.12, as seguintes desigualdades são satisfeitas,*

$$\|\mathbf{m}\| \ell^d c_1 \leq s_{N,\ell}^2 \leq \sigma_{N,\ell}^2 \leq \|\mathbf{m}\| \ell^d c_3, \quad \sigma_{N,\ell}^2 \leq \sigma_N^2, \quad (395)$$

$$\text{Var}(Z_N) \leq c_3 \ell^d (\|\mathbf{m} + \mathbf{1}\| - \|\mathbf{m}\|), \quad (396)$$

$$\text{Cov}(Z_N, S_{N,\ell}) \leq c_3 \ell^d (\|\mathbf{m} + \mathbf{1}\| - \|\mathbf{m}\|),$$

onde $c_3 = u(0)$.

Teorema 7.14 (Desigualdade de Newman-Wright, veja [99]). *Suponha que X_1, X_2, \dots, X_m sejam v.a.'s associadas com variância finita e sejam $\phi(r_1, r_2, \dots, r_n)$ e $\phi_j(r)$ a função característica e a função característica marginal, respectivamente, então*

$$\left| \phi(r_1, r_2, \dots, r_n) - \prod_{j=1}^m \phi_j(r_j) \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \neq k \leq m} |r_j| |r_k| \text{Cov}(X_j, X_k).$$

Essa desigualdade nos dá um controle adequado sobre as covariâncias, as v.a.'s podem ser substituídas por outras com mesma distribuição, porém independentes. Este acoplamento será a base dos resultados que provaremos para variáveis aleatórias associadas.

O seguinte teorema é uma extensão da desigualdade de Berry-Esseen para o caso de v.a.'s independentes, porém, não necessariamente identicamente distribuídas.

Teorema 7.15 (Desigualdade de Berry, veja [15]). *Seja X_1, X_2, \dots, X_n v.a.'s independentes com $\mathbb{E}[X_i] = 0$, $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ e $\mathbb{E}[X_i^3] < \infty$, $i = 1, \dots, n$. Então*

$$\sup_x \left| \mathbb{P} \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\text{Var}(\sum_{i=1}^n X_i)}} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \leq C^* \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i|^3]}{(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2)^{3/2}},$$

para alguma constante universal $0 < C^* < \infty$.

Seguindo a notação acima, enunciaremos (e provamos) o resultado principal desta seção.

Teorema 7.16 (Convergência de S_N/σ_N em d_2 , veja [34]). *Para cada N , seja $\{X_{\mathbf{n}}(N) : \mathbf{n} \in \Lambda(\mathbf{k}(N))\}$ uma família de v.a.'s associadas satisfazendo:*

(i) *existem constantes finitas e estritamente positivas c_1 e c_2 , tais que*

$$\text{Var}(X_{\mathbf{n}}(N)) \geq c_1 \text{ e } \mathbb{E}(|X_{\mathbf{n}}(N)|^3) \leq c_2, \quad \forall \mathbf{n} \text{ e } N,$$

(ii) *existe uma função $u : \{0, 1, 2, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u(r) \rightarrow 0$, quando $r \rightarrow \infty$ e*

$$\sum_{\mathbf{j}: |\mathbf{n}-\mathbf{j}| \geq r} \text{Cov}(X_{\mathbf{j}}(N), X_{\mathbf{n}}(N)) \leq u(r), \quad \forall \mathbf{n}, N \text{ e } r \geq 0.$$

Então,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} d_2(F_{S_N/\sigma_N}, \Phi) = 0,$$

onde F_{S_N/σ_N} é a função de distribuição da v.a. S_N/σ_N .

Demonstração. Sem perda de generalidade, assumiremos que $\mathbb{E}(X_{\mathbf{n}}(N)) = 0$, $\forall \mathbf{n}$ e N . Seja $Z \stackrel{d}{=} \Phi$. Provaremos este teorema através de 3 afirmações.

AFIRMAÇÃO 1:

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_N}{\sigma_N} - \frac{S_{N,\ell}}{s_{N,\ell}} \right)^2 \right] \leq \left(\frac{2d}{\ell c_1} \sum_{r=1}^{\ell} u(r) \right)^2. \quad (397)$$

De fato, observe que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_N}{\sigma_N} - \frac{S_{N,\ell}}{s_{N,\ell}} \right)^2 \right] &= \text{Var} \left(\frac{S_N}{\sigma_N} - \frac{S_{N,\ell}}{s_{N,\ell}} \right) \\ &= \text{Var} \left(\frac{Z_N}{\sigma_N} - S_{N,\ell} \left(\frac{1}{s_{N,\ell}} - \frac{1}{\sigma_N} \right) \right) \\ &= \frac{\text{Var}(Z_N)}{\sigma_N^2} + \left(\frac{1}{s_{N,\ell}} - \frac{1}{\sigma_N} \right)^2 \sigma_{N,\ell}^2 - 2 \frac{1}{\sigma_N} \left(\frac{1}{s_{N,\ell}} - \frac{1}{\sigma_N} \right) \text{Cov}(Z_N, S_{N,\ell}). \end{aligned}$$

Como $\sigma_N \geq s_{N,\ell}$ e $\text{Cov}(Z_N, S_{N,\ell}) \geq 0$ (pois, o processo é associado), a última expressão é

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\text{Var}(Z_N)}{\sigma_N^2} + \left(\frac{1}{s_{N,\ell}} - \frac{1}{\sigma_N} \right)^2 \sigma_{N,\ell}^2 = \frac{\text{Var}(Z_N)}{\sigma_N^2} + \left(\frac{\sigma_N}{s_{N,\ell}} - 1 \right)^2 \\ &\leq \frac{c_3(\|\mathbf{m} + \mathbf{1}\| - \|\mathbf{m}\|)}{c_1 \|\mathbf{m}\|} + \left(\frac{\sigma_N^2}{s_{N,\ell}^2} - 1 \right)^2, \end{aligned}$$

onde, na segunda desigualdade, usamos (395) e (396). Portanto,

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{S_N}{\sigma_N} - \frac{S_{N,\ell}}{s_{N,\ell}} \right)^2 \right] \leq \frac{c_3(\|\mathbf{m} + \mathbf{1}\| - \|\mathbf{m}\|)}{c_1\|\mathbf{m}\|} + \left(\frac{\sigma_N^2}{s_{N,\ell}^2} - 1 \right)^2.$$

Fazendo $N \rightarrow \infty$ e usando o Lema 7.12 (de Cox-Grimmett), na desigualdade acima, concluímos que

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_N}{\sigma_N} - \frac{S_{N,\ell}}{s_{N,\ell}} \right)^2 \right] \leq \left(\frac{2d}{\ell c_1} \sum_{r=1}^{\ell} u(r) \right)^2. \quad \diamond$$

AFIRMAÇÃO 2:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \phi_{Y_1(N), \dots, Y_m(N)} \left(\frac{t}{s_{N,\ell}}, \dots, \frac{t}{s_{N,\ell}} \right) - \prod_{1 \leq j \leq m} \phi_{Y_j(N)} \left(\frac{t}{s_{N,\ell}} \right) \right| = 0.$$

Essa afirmação diz que, sem perda de generalidade, para N suficientemente grande, pode-se supor que os blocos $Y_1(N), \dots, Y_m(N)$ são independentes (para completar o raciocínio pode-se introduzir um conjunto novo de v.a.'s com as propriedades requeridas, porém nós não faremos isso para manter a simplicidade na notação).

De fato, observe que pelo Teorema 7.14 (desigualdade de Newman-Wright), temos

$$\begin{aligned} & \left| \phi_{Y_1(N), \dots, Y_m(N)} \left(\frac{t}{s_{N,\ell}}, \dots, \frac{t}{s_{N,\ell}} \right) - \prod_{1 \leq j \leq m} \phi_{Y_j(N)} \left(\frac{t}{s_{N,\ell}} \right) \right| \\ & \leq \frac{t^2}{2s_{N,\ell}^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \text{Cov}(Y_i(N), Y_j(N)) \\ & = \frac{t^2}{2s_{N,\ell}^2} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq m} \text{Cov}(Y_i(N), Y_j(N)) - \sum_{1 \leq j \leq m} \text{Var}(Y_j(N)) \right) \\ & = \frac{t^2}{2s_{N,\ell}^2} \left(\text{Var} \left(\sum_{1 \leq j \leq m} Y_j(N) \right) - \sum_{1 \leq j \leq m} \text{Var}(Y_j(N)) \right) \\ & = \frac{t^2}{2s_{N,\ell}^2} (\sigma_{N,\ell}^2 - s_{N,\ell}^2) = \frac{t^2}{2} \left(\frac{\sigma_N^2}{s_{N,\ell}^2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Agora, fazendo $N \rightarrow \infty$ e usando o Lema 7.12 (de Cox-Grimmett), tem-se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \phi_{Y_1(N), \dots, Y_m(N)} \left(\frac{t}{s_{N,\ell}}, \dots, \frac{t}{s_{N,\ell}} \right) - \prod_{1 \leq j \leq m} \phi_{Y_j(N)} \left(\frac{t}{s_{N,\ell}} \right) \right| \leq \frac{dt^2}{c_1} \frac{1}{\ell} \sum_{r=1}^{\ell} u(r).$$

Finalmente, fazendo $\ell \rightarrow \infty$ e usando o Teorema de Stolz-Cesàro (veja Apêndice, Teorema .21), concluímos a demonstração. \diamond

AFIRMAÇÃO 3:

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{N,\ell}}{s_{N,\ell}} - Z \right)^2 \right] \longrightarrow 0, \quad \text{quando } N \rightarrow \infty. \quad (398)$$

De fato, note que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[|Y_j(N)|^3 \right] &= \mathbb{E} \left[\left| \sum_{(j-1)\ell < \mathbf{n} \leq j\ell} X_{\mathbf{n}}(N) \right|^3 \right] \\ &\leq \sum_{\mathbf{n}} \mathbb{E} \left[|X_{\mathbf{n}}(N)|^3 \right] + \sum_{\mathbf{i} \neq \mathbf{j}} \mathbb{E} \left[|X_{\mathbf{i}}(N) X_{\mathbf{j}}(N)|^2 \right] \\ &\quad + \sum_{\mathbf{i} \neq \mathbf{j} \neq \mathbf{k}} \mathbb{E} \left[|X_{\mathbf{i}}(N) X_{\mathbf{j}}(N) X_{\mathbf{k}}(N)| \right] \\ &\leq \sum_{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \in \Lambda_s} \mathbb{E} \left[|X_{\mathbf{i}}(N) X_{\mathbf{j}}(N) X_{\mathbf{k}}(N)| \right], \end{aligned}$$

onde $\Lambda_s = \{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^d : (\mathbf{s} - \mathbf{1})\ell < \mathbf{a} \leq \mathbf{s}\ell\}$. Pela desigualdade de Hölder, a expressão acima é

$$\leq \sum_{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \in \Lambda_s} \left(\mathbb{E} \left[|X_{\mathbf{i}}(N)|^3 \right] \mathbb{E} \left[|X_{\mathbf{j}}(N)|^3 \right] \mathbb{E} \left[|X_{\mathbf{k}}(N)|^3 \right] \right)^{1/3} \leq \ell^{3d} c_2.$$

Isto é, $\mathbb{E} \left[|Y_j(N)|^3 \right] < \infty$. Então, pelo Teorema 7.15 (desigualdade de Berry), existe uma constante $C^* \in (0, \infty)$ tal que

$$\sup_x \left| \mathbb{P} \left(\frac{\sum_{1 \leq j \leq m} Y_j(N)}{\sqrt{\text{Var}(\sum_{1 \leq j \leq m} Y_j(N))}} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \leq C^* \frac{\sum_{1 \leq j \leq m} \mathbb{E} \left[|Y_j(N)|^3 \right]}{\left(\sum_{1 \leq j \leq m} \text{Var}(Y_j(N)) \right)^{3/2}},$$

porém, como $\sigma_{N,\ell}^2 = \text{Var}(\sum_{1 \leq j \leq m} Y_j(N)) = \sum_{1 \leq j \leq m} \text{Var}(Y_j(N)) = s_{N,\ell}^2$, por (395) tem-se

$$\frac{1}{s_{N,\ell}^3} \sum_{1 \leq j \leq m} \mathbb{E} \left[|Y_j(N)|^3 \right] \leq \frac{\|\mathbf{m}\| \ell^{3d} c_2}{(\|\mathbf{m}\| \ell^d c_1)^{3/2}} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } N \rightarrow \infty.$$

Logo, tomando $N \rightarrow \infty$ na cota de Berry e usando a última expressão, obtemos que $S_{N,\ell} \equiv \sum_{1 \leq j \leq m} Y_j(N)$ é $AN(0, s_{N,\ell}^2)$. Em outras palavras

$$\frac{S_{N,\ell}}{s_{N,\ell}} \xrightarrow{d} Z$$

e como

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{N,\ell}}{s_{N,\ell}} \right)^2 \right] = 1 \longrightarrow 1 = \mathbb{E} [Z^2], \quad \text{quando } N \rightarrow \infty,$$

pelo Lema 7.4 (de Bickel e Freedman), temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} d_2(F_{S_{N,\ell}/s_{N,\ell}}, \Phi) = 0.$$

Assim, pelo Lema da Representação (veja Lema 7.3) podemos tomar Z tal que a distribuição conjunta do vetor aleatório $(S_{N,\ell}/s_{N,\ell}, Z)$ é $F_{S_{N,\ell}/s_{N,\ell}} \wedge \Phi$, onde

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{N,\ell}}{s_{N,\ell}} - Z \right)^2 \right] \longrightarrow 0, \quad \text{quando } N \rightarrow \infty. \quad \diamond$$

Por outro lado, pela definição de distância Mallows, temos

$$\begin{aligned} d_2^2(F_{S_N/\sigma_N}, \Phi) &\leq \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_N}{\sigma_N} - Z \right)^2 \right] \\ &\leq 2 \left\{ \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_N}{\sigma_N} - \frac{S_{N,\ell}}{s_{N,\ell}} \right)^2 \right] + \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{N,\ell}}{s_{N,\ell}} - Z \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (399)$$

Combinando (397), (398), e fazendo $N \rightarrow \infty$ na desigualdade acima, obtemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} d_2^2(F_{S_N/\sigma_N}, \Phi) \leq \left(\frac{2d}{\ell c_1} \sum_{r=1}^{\ell} u(r) \right)^2.$$

Finalmente, como por hipótese $u(r) \rightarrow 0$, quando $r \rightarrow \infty$, pelo Teorema de Stolz-Cesàro, $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{\ell} u(r)/\ell = 0$, completando a prova. \square

Corolário 7.17. Para cada N , seja $\{X_{\mathbf{n}}(N) : \mathbf{n} \in \Lambda(\mathbf{k}(N))\}$ uma família de v.a.'s associadas. Sobre as hipóteses do Teorema 7.16, a sequência $\{S_N : N = 1, 2, \dots\}$ satisfaz o TLC.

Demonstração. A prova segue diretamente por combinar o Lema 7.4 (de Bickel e Freedman) com o Teorema 7.16. \square

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. Aizenman. Instability of phase coexistence and translation invariance in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 43(0):407–409, 1979.
- [2] M. Aizenman. Translation invariance and instability of phase coexistence in the two-dimensional Ising system. *Comm. Math. Phys.*, 73(1):83–94, 1980.
- [3] M. Aizenman, D. J. Barsky, and R. Fernández. The phase transition in a general class of Ising-type models is sharp. *Journal of Statistical Physics*, 47(3):343–374, 1987.
- [4] M. Aizenman, J. T. Chayes, L. Chayes, and C. M. Newman. Discontinuity of the magnetization in one-dimensional $1/|x - y|^2$ Ising and Potts models. *Journal of Statistical Physics*, 50(1):1–40, 1988.
- [5] M. Aizenman, H. Duminil-Copin, and V. Sidoravicius. Random currents and continuity of Ising model’s spontaneous magnetization. *Commun. Math. Phys.*, 334(2):719–742, 2014.
- [6] M. Aizenman and R. Fernández. On the critical behavior of the magnetization in high-dimensional ising models. *Journal of Statistical Physics*, 44(3):393–454, 1986.
- [7] M. Aizenman, H. Kesten, and C. M. Newman. Uniqueness of the infinite cluster and continuity of connectivity functions for short and long range percolation. *Comm. Math. Phys.*, 111(4):505–531, 1987.
- [8] M. Aizenman and C. M. Newman. Discontinuity of the percolation density in one-dimensional $1/|x - y|^2$ percolation models. *Comm. Math. Phys.*, 107(4):611–647, 1986.
- [9] D. J. Barsky, G. R. Grimmett, and C. M. Newman. Percolation in half-spaces: equality of critical densities and continuity of the percolation probability. *Probability Theory and Related Fields*, 90(1):111–148, 1991.

- [10] A. G. Basuev. Ising model in half-space: a series of phase transitions in low magnetic fields. *Theor. Math. Phys.*, 153(2):1539–1574, 2007.
- [11] V. Beffara and H. Duminil-Copin. *Smirnov’s fermionic observable away from criticality*. The Institute of Mathematical Statistics, 2010.
- [12] V. Beffara and H. Duminil-Copin. The self-dual point of the two-dimensional random-cluster model is critical for $q \geq 1$. *Probability Theory and Related Fields*, 153(3):511–542, 2011.
- [13] V. Beffara and H. Duminil-Copin. *Critical point and duality in planar lattice models*. 2012.
- [14] I. Benjamini and O. Schramm. *Percolation Beyond \mathbb{Z}^d , Many Questions and a Few Answers*. 2011.
- [15] A. C. Berry. The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. *Transactions of the American Mathematical Society*, 49(1):122–136, 1941.
- [16] R. Bhattacharya and E. C. Waymire. *A Basic Course in Probability Theory*. Universitext. Springer New York, 2007.
- [17] P. J. Bickel and D. A. Freedman. Some asymptotic theory for the bootstrap. *Ann. Statist.*, 9(6):1196–1217, 1981.
- [18] P. Billingsley. *Convergence of probability measures*. Wiley Series in probability and Mathematical Statistics: Tracts on probability and statistics. Wiley, 1968.
- [19] T. Birkel. Moment bounds for associated sequences. *Ann. Probab.*, 16(3):1184–1193, 1988.
- [20] M. Biskup, C. Borgs, J. T. Chayes, and R. Kotecký. Gibbs states of graphical representations of the Potts model with external fields. *Journal of Mathematical Physics*, 41(3):1170–1210, 2000.
- [21] M. Biskup, L. Chayes, and N. Crawford. Mean-field driven first-order phase transitions in systems with long-range interactions. *Journal of Statistical Physics*, 122(6):1139–1193, 2006.

- [22] M. Biskup, L. Chayes, and R. Kotecký. Coexistence of partially disordered/ordered phases in an extended Potts model. *Journal of Statistical Physics*, 99(5):1169–1206, 2000.
- [23] R. Bissacot, M. Cassandro, L. Cioletti, and E. Presutti. Phase transitions in ferromagnetic Ising models with spatially dependent magnetic fields. *Communications in Mathematical Physics*, 337(1):41–53, 2015.
- [24] R. Bissacot and L. Cioletti. Phase transition in ferromagnetic Ising models with non-uniform external magnetic fields. *Journal of Statistical Physics*, 139(5):769–778, 2010.
- [25] R. Bissacot and L. Cioletti. *Introdução à Teoria das Medidas de Gibbs*. Available at <http://www.mat.unb.br/~cioletti/Expository-Articles/Notas-ITMG-02-03.pdf>. 2012.
- [26] B. Bollobas. *Modern Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1998.
- [27] B. Bollobas and O. Riordan. *Percolation*. Cambridge University Press, 2006.
- [28] C. Borgs and J. T. Chayes. The covariance matrix of the Potts model: A random cluster analysis. *Journal of Statistical Physics*, 82(5):1235–1297, 1996.
- [29] C. Borgs, R. Kotecký, and I. Medved'. Finite-size effects for the Potts model with weak boundary conditions. *J. Stat. Phys.*, 109(1):67–131, 2002.
- [30] R. M. Burton and M. Keane. Density and uniqueness in percolation. *Comm. Math. Phys.*, 121(3):501–505, 1989.
- [31] L. Cavalcanti. *Magnetização Espontânea em Modelos de Ising Uni-Dimensionais com Interação de Longo Alcance*. UnB, Brasília. Available at <http://www.mat.unb.br/~cioletti/dissertacoes-teses/Dissertacao-Leonardo-Cavalcanti.pdf>. 2014.
- [32] J. Černý and R. Kotecký. Interfaces for random-cluster models. *Journal of Statistical Physics*, 111(1):73–106, 2003.
- [33] J. T. Chayes, A. Puha, and T. Sweet. *Independent and dependent percolation*. in Probability Theory and Applications, IAS/Park City mathematical series, vol. 6,

- eds. E. P. Hsu, S. R. S. Varadhan, American Mathematical Society and Institute for Advanced Study, 51 118, 1999.
- [34] L. Cioletti, C. C. Y. Dorea, and R. Vila. *Convergence in the Mallows distance and limit theorems for random variables with Gibbsian dependence*. In preparation, 2016.
- [35] L. Cioletti and R. Vila. *DLR-equations for local functions and quasilocality hypothesis*. Available at <http://www.mat.unb.br/~cioletti/Preprints/Local-DLR-eqs-Cioletti-Vila.pdf>. 2015.
- [36] L. Cioletti and R. Vila. Graphical representations for Ising and Potts models in general external fields. *Journal of Statistical Physics*, 162(1):81–122, 2016.
- [37] L. Coquille. Examples of DLR states which are not weak limits of finite volume Gibbs measures with deterministic boundary conditions. *Journal of Statistical Physics*, 159(4):958–971, 2015.
- [38] L. Coquille, H. Duminil-Copin, D. Ioffe, and Y. Velenik. On the gibbs states of the noncritical Potts model on \mathbb{Z}^2 . *Probability Theory and Related Fields*, 158(1-2):477–512, 2013.
- [39] J. T. Cox and G. R. Grimmett. Central limit theorems for associated random variables and the percolation model. *Ann. Probab.*, 12(2):514–528, 1984.
- [40] C. Domb and J. L. Lebowitz. *Phase Transitions and Critical Phenomena*. Number v. 18 in *Phase Transitions and Critical Phenomena*. Elsevier Science, 2000.
- [41] C. C. Y. Dorea and D. B. Ferreira. Conditions for equivalence between Mallows distance and convergence to stable laws. *Acta Mathematica Hungarica*, 134(1):1–11, 2012.
- [42] H. Duminil-Copin. *Geometric Representations of Lattice Spin Models*. Spartacus Graduate. Cours Peccot, Collège de France, 2015.
- [43] H. Duminil-Copin, V. Sidoravicius, and V. Tassion. Continuity of the phase transition for planar random-cluster and Potts models with $1 \leq q \leq 4$. *arXiv:1505.04159*, 2015.

- [44] H. Duminil-Copin and V. Tassion. A new proof of the sharpness of the phase transition for Bernoulli percolation and the Ising model. *Communications in Mathematical Physics*, 343(2):725–745, 2016.
- [45] F. J. Dyson. Existence of a phase-transition in a one-dimensional Ising ferromagnet. *Communications in Mathematical Physics*, 12(2):91–107, 1969.
- [46] F. J. Dyson. An Ising ferromagnet with discontinuous long-range order. *Comm. Math. Phys.*, 21(4):269–283, 1971.
- [47] R. Fernández and C.-E. Pfister. Non-quasilocality of projections of Gibbs measures. *Preprint Lausanne*, 1994.
- [48] R. Fernández and C.-E. Pfister. Global specifications and nonquasilocality of projections of Gibbs measures. *Ann. Probab.*, 1997.
- [49] R. Fitzner and R. Van der Hofstad. Nearest-neighbor percolation function is continuous for $d > 10$. Preprint, 2015.
- [50] L. R. Fontes. *Notas em percolação*. Monografias de matemática. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Brazil), 1996.
- [51] C. M. Fortuin and P. W. Kasteleyn. On the random-cluster model. *Physica*, 57(4):536–564, 1972.
- [52] C. M. Fortuin, P. W. Kasteleyn, and J. Ginibre. Correlation inequalities on some partially ordered sets. *Comm. Math. Phys.*, 1971.
- [53] S. Friedli and Y. Velenik. *Book project*. Available at <http://www.unige.ch/math/folks/velenik/smbook/index.html>.
- [54] J. Fröhlich and T. Spencer. The phase transition in the one-dimensional Ising model with $1/r^2$ interaction energy. *Comm. Math. Phys.*, 84(1):87–101, 1982.
- [55] A. Gandolfi, M. S. Keane, and C. M. Newman. Uniqueness of the infinite component in a random graph with applications to percolation and spin glasses. *Probability Theory and Related Fields*, 92(4):511–527, 1992.
- [56] A. Gandolfi, M. S. Keane, and L. Russo. On the uniqueness of the infinite occupied cluster in dependent two-dimensional site percolation. *Ann. Probab.*, 16(3):1147–1157, 1988.

- [57] H. O. Georgii. *Gibbs Measures and Phase Transitions*. Number v. 9 in De Gruyter studies in mathematics. W. de Gruyter, 1988.
- [58] H. O. Georgii and Y. Higuchi. Percolation and number of phases in the two-dimensional Ising model. *Journal of Mathematical Physics*, 41(3):1153–1169, 2000.
- [59] H. O. Georgii, O. Häggström, and C. Maes. The random geometry of equilibrium phases. pages 1–142, 2001.
- [60] G. Gielis and G. R. Grimmett. Rigidity of the interface in percolation and random-cluster models. *Journal of Statistical Physics*, 109(1):1–37, 2002.
- [61] R. B. Griffiths. Peierls proof of spontaneous magnetization in a two-dimensional Ising ferromagnet. *Phys. Rev.*, 136(0):437–439, 1964.
- [62] R. B. Griffiths. Correlations in Ising ferromagnets. I. *Journal of Mathematical Physics*, 8(3):478–483, 1967.
- [63] G. R. Grimmett. The stochastic random-cluster process and the uniqueness of random-cluster measures. *Ann. Probab.*, 23(4):1461–1510, 1995.
- [64] G. R. Grimmett. *Percolation*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Springer, 1999.
- [65] G. R. Grimmett. *The Random-Cluster Model*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [66] G. R. Grimmett. Uniqueness and multiplicity of infinite clusters. Volume 48:24–36, 2006.
- [67] G. R. Grimmett and J. M. Marstrand. The supercritical phase of percolation is well behaved. *Proceedings: Mathematical and Physical Sciences*, 430(1879):439–457, 1990.
- [68] O. Häggström. Almost sure quasilocality fails for the random-cluster model on a tree. *Journal of Statistical Physics*, 84(5):1351–1361, 1996.
- [69] T. Hara and G. Slade. Mean-field critical behaviour for percolation in high dimensions. *Comm. Math. Phys.*, 1990.
- [70] T. Hara and G. Slade. Mean-field behaviour and the lace expansion. 420:87–122, 1994.

- [71] T. E. Harris. A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 56(8):13–20, 1960.
- [72] Y. Higuchi. On the absence of non-translation invariant gibbs states for the two-dimensional Ising model. *Random fields, I, II (Esztergom, 1979)*(27):517–534, 1981.
- [73] A. Hintermann, H. Kunz, and F. Y. Wu. Exact results for the Potts model in two dimensions. *Journal of Statistical Physics*, 19(6):623–632, 1978.
- [74] R. Holley. Remarks on the FKG inequalities. *Comm. Math. Phys.*, 1974.
- [75] O. Häggström. Random-cluster representations in the study of phase transitions. *Markov Process. Relat. Fields*, 4(3):275–321, 1998.
- [76] O. Häggström and J. Jonasson. Uniqueness and non-uniqueness in percolation theory. *Probab. Surveys*, 3(0):289–344, 2006.
- [77] E. Ising. Beitrag zur theorie des ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, 31(1):253–258, 1925.
- [78] J. Jonasson and J. E. Steif. Amenability and phase transition in the Ising model. *J. Theor. Probab.*, 12(2):549–559, 1999.
- [79] H. Kesten. The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $1/2$. *Communications in Mathematical Physics*, 74(1):41–59, 1980.
- [80] H. Kesten. Scaling relations for $2d$ -percolation. *Communications in Mathematical Physics*, 109(1):109–156, 1987.
- [81] H. Kesten. *Asymptotics in High Dimensions for Percolation*. 1990.
- [82] R. Kotecký and S. B. Shlosman. First-order phase transitions in large entropy lattice models. *Comm. Math. Phys.*, 83(4):493–515, 1982.
- [83] H. A. Kramers and G. H. Wannier. Statistics of the two-dimensional ferromagnet. Part I. *Phys. Rev.*, 60(0):252–262, 1941.
- [84] H. A. Kramers and G. H. Wannier. Statistics of the two-dimensional ferromagnet. Part II. *Phys. Rev.*, 60(0):263–276, 1941.

- [85] L. Laanait, A. Messenger, S. Miracle-Sole, J. Ruiz, and S. Shlosman. Interfaces in the Potts model I: Pirogov-Sinai theory of the Fortuin-Kasteleyn representation. *Communications in Mathematical Physics*, 140(1):81–91, 1991.
- [86] L. Laanait, A. Messenger, and J. Ruiz. Phases coexistence and surface tensions for the Potts model. *Comm. Math. Phys.*, 105(4):527–545, 1986.
- [87] T. D. Lee and C. N. Yang. Statistical theory of equations of state and phase transitions. II. lattice gas and Ising model. *Phys. Rev.*, 87(0):410–419, 1952.
- [88] E. H. Lieb. A refinement of Simon’s correlation inequality. *Communications in Mathematical Physics*, 77(2):127–135, 1980.
- [89] R. Lyons. *Probability on trees and networks*. 2011.
- [90] N. Madras and G. Slade. *The Self-Avoiding Walk*. Probability and Its Applications. Birkhäuser Boston, 2013.
- [91] P. Major. On the invariance principle for sums of independent identically distributed random variables. *Journal of Multivariate Analysis*, 8(4):487–517, 1978.
- [92] C. L. Mallows. A note on asymptotic joint normality. *Ann. Math. Statist.*, 43(2):508–515, 1972.
- [93] A. Martin-Löf. On the spontaneous magnetization in the Ising model. *Comm. Math. Phys.*, 24(4):253–259, 1972.
- [94] B. M. McCoy and T. T. Wu. *The two-dimensional Ising model*. Harvard University Press, 1973.
- [95] M. Miyamoto. *Statistical mechanics – a mathematical approach (in Japanese)*. Nippon-Hyoron-Sha Co. Ltd. 2004.
- [96] F. R. Nardi, E. Olivieri, and M. Zahradník. On the Ising model with strongly anisotropic external field. *J. Stat. Phys.*, 97(1):87–144, 1999.
- [97] M. G. Navarrete, E. Pechersky, and A. Yambartsev. Phase transition in ferromagnetic Ising model with a cell-board external field. *Journal of Statistical Physics*, 162(1):139–161, 2016.

- [98] C. M. Newman. Normal fluctuations and the FKG inequalities. *Communications in Mathematical Physics*, 74(2):119–128, 1980.
- [99] C. M. Newman and A. L. Wright. An invariance principle for certain dependent sequences. *Ann. Probab.*, 9(4):671–675, 1981.
- [100] L. Onsager. Crystal statistics. I. a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Phys. Rev.*, 65(0):117–149, 1944.
- [101] C.-E. Pfister and K. V. Velde. Almost sure quasilocality in the random-cluster model. *Journal of Statistical Physics*, 79(3):765–774, 1995.
- [102] R. B. Potts. Some generalized order-disorder transformations. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 48(4):106–109, 1952.
- [103] D. Reimer. Proof of the Van den Berg–Kesten conjecture. *Comb. Probab. Comput.*, 9(1):27–32, 2000.
- [104] D. Ruelle. On the use of “small external fields” in the problem of symmetry breakdown in statistical mechanics. *Annals of Physics*, 69(2):364–374, 1972.
- [105] D. Ruelle. *Statistical Mechanics: Rigorous Results*. World Scientific, 1999.
- [106] D. Ruelle. *Thermodynamic Formalism: The Mathematical Structure of Equilibrium Statistical Mechanics*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 2004.
- [107] L. Russo. A note on percolation. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 43(1):39–48, 1978.
- [108] O. Sarig. *Lecture notes on ergodic theory*. Available at <http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~sarigo/506/ErgodicNotes.pdf>.
- [109] P. D. Seymour and D. J. A. Welsh. Percolation probabilities on the square lattice. 3:227–245, 1978.
- [110] G. R. Shorack and J. A. Wellner. *Empirical Processes with Applications to Statistics*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104), 2009.

- [111] B. Simon. Correlation inequalities and the decay of correlations in ferromagnets. *Communications in Mathematical Physics*, 77(2):111–126, 1980.
- [112] S. Smirnov. Conformal invariance in random-cluster models. i. holomorphic fermions in the Ising model. *Annals of Mathematics*, 172(2):1435–1467, 2010.
- [113] F. Spitzer. Phase transition in one-dimensional nearest-neighbor systems. *Journal of Functional Analysis*, 20(3):240–255, 1975.
- [114] R. H. Swendsen and J.-S Wang. Nonuniversal critical dynamics in Monte Carlo simulations. *Phys. Rev. Lett.*, 58(0):86–88, 1987.
- [115] M. F. Sykes and J. W. Essam. Exact critical percolation probabilities for site and bond problems in two dimensions. *Journal of Mathematical Physics*, 5(8):1117–1127, 1964.
- [116] A. Teixeira. *Notas de aula: Probabilidade I*. Available at http://w3.impa.br/augusto/notas_prob.pdf. 2016.
- [117] J. Van den Berg and R. Burton. *Private communication*.
- [118] J. Van Den Berg and U. Fiebig. On a combinatorial conjecture concerning disjoint occurrences of events. *Ann. Probab.*, 15(1):354–374, 1987.
- [119] J. Van Den Berg and H. Kesten. Inequalities with applications to percolation and reliability. *Journal of Applied Probability*, 22(3):556–569, 1985.
- [120] R. Vila. *Cálculo Exato do Ponto Crítico de Modelos de Aglomerados Aleatórios ($q \geq 1$) sobre a rede bidimensional*. UnB, Brasília. Available at <http://www.mat.unb.br/cioletti/dissertacoes-teses/Dissertacao-Roberto-Vila.pdf>. 2013.
- [121] C. Villani. *Topics in Optimal Transportation*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2003.
- [122] D. Williams. *Probability with Martingales*. Cambridge mathematical textbooks. Cambridge University Press, 1991.

APÊNDICE

Este capítulo está dividido em duas seções, a primeira está dedicada a apresentar alguns resultados (como: definições, teoremas, proposições e lemas) que foram usados com frequência no decorrer da apresentação desta tese. A segunda parte mostra a arte das medidas de Edwards-Sokal para o caso $q \in \{2, 3, \dots\}$, a qual generaliza o caso $q = 2$ apresentado na Seção 3.3 do Capítulo 3.

1 RESULTADOS USADOS COM FREQUÊNCIA

Uma família de variáveis aleatórias \mathcal{C} é uniformemente integrável se para cada $\epsilon > 0$ existe $k \in [0, +\infty)$ tal que: para todo $X \in \mathcal{C}$, $\mathbb{E}(|X| \cdot \mathbb{1}_{|X| > k}) < \epsilon$. Com base nesta definição prévia, passamos a enunciar o seguinte teorema.

Teorema .18 (Teorema de convergência de martingales de Lévy-forward). *Seja $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e defina $X_n \equiv \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$. Logo, X_n é uma martingale uniformemente integrável e*

$$X_n \longrightarrow \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_\infty)$$

quase certamente e em L^1 . Aqui $\mathcal{F}_\infty \equiv \sigma(\cup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n)$.

Demonstração. Veja [122], p. 134. □

Teorema .19 (Teorema de convergência de martingales de Lévy-downward). *Suponha que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade e que $\{\mathcal{F}_{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ é uma coleção de sub- σ -álgebras de \mathcal{F} tal que*

$$\mathcal{F}_{-\infty} \equiv \cap_k \mathcal{F}_{-k} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_{-(n+1)} \subseteq \mathcal{F}_{-n} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_{-1}.$$

Seja $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e defina

$$X_{-n} \equiv \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_{-n}).$$

Logo, $X_{-\infty} \equiv \lim X_{-n}$ existe quase certamente e em L^1 e

$$X_{-\infty} = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_{-\infty})$$

quase certamente.

Demonstração. Veja [122], p. 136. □

Proposição .20 (Truque da raiz quadrada). *Sejam A_1, A_2, \dots, A_n eventos crescentes e equiprováveis tal que $A = \cup_{i=1}^n A_i$, então*

$$\mathbb{P}_p(A_i) \geq 1 - [1 - \mathbb{P}_p(A)]^{\frac{1}{n}}.$$

Demonstração.

$$1 - \mathbb{P}_p(A) = 1 - \mathbb{P}_p(\cup_{i=1}^n A_i) = \mathbb{P}_p(\cap_{i=1}^n A_i^c) \geq \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_p(A_i^c) = (1 - \mathbb{P}_p(A_i))^n,$$

onde, na desigualdade, usamos a desigualdade FKG e, na terceira igualdade, o fato de que os eventos são equiprováveis. Daí, facilmente se deduz que $\mathbb{P}_p(A_i) \geq 1 - [1 - \mathbb{P}_p(A)]^{\frac{1}{n}}$. □

Teorema .21 (Teorema de Stolz-Cesàro). *Seja $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ uma sequência de números reais tal que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$ e $(a_n)_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ qualquer sequência real. Se a sequência $(a_n/b_n)_{n=1}^{+\infty}$ tem limite, então*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Teorema .22 (Teorema da Convergência Monótona). *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida. Suponha que $f_n : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ seja uma sequência monótona crescente de funções \mathcal{F} -mensuráveis. Seja $f : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ uma função definida por $f(\omega) = \sup_{n \geq 1} f_n(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\omega)$. Então*

$$\int_{\Omega} \mu(d\omega) f(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \mu(d\omega) f_n(\omega).$$

Teorema .23 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida. Suponha que $f_n : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ seja uma sequência de funções \mathcal{F} -mensuráveis, integráveis e que exista $f : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ tal que $f_n \rightarrow f$, μ -q.c. Se existe uma função integrável $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f_n| \leq g$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e*

$$\int_{\Omega} \mu(d\omega) f(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \mu(d\omega) f_n(\omega).$$

Teorema .24 (Teorema de Fubini-Tonelli). *Sejam $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ dois espaços de medida e $\mu = \mu_1 \times \mu_2$. Se $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow [0, +\infty]$ é uma função $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ -mensurável, então as seguintes funções*

$$\sigma \mapsto \int_{\Omega_2} \mu_2(d\omega) f(\sigma, \omega) \quad e \quad \omega \mapsto \int_{\Omega_1} \mu_1(d\sigma) f(\sigma, \omega) \tag{400}$$

são \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 mensuráveis, respectivamente, e

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \mu_1(d\sigma) \left[\int_{\Omega_2} \mu_2(d\omega) f(\sigma, \omega) \right] &= \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \mu(d\sigma, d\omega) f(\sigma, \omega) \\ &= \int_{\Omega_2} \mu_2(d\omega) \left[\int_{\Omega_1} \mu_1(d\sigma) f(\sigma, \omega) \right]. \end{aligned} \quad (401)$$

Além do mais, se $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow [0, +\infty]$ é uma função $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ -mensurável e integrável, então valem as igualdades em (401) e as funções em (400) também são mensuráveis e integráveis em quase todo ponto, com respeito a μ_1 e μ_2 , respectivamente.

Teorema .25 (Teorema da Extensão de Kolmogorov). *Suponha que \mathcal{E} é um espaço métrico completo separável, $S = \{i_1, i_2, i_3, \dots\}$ um conjunto contável de índices e $\Omega = \mathcal{E}^S$ o espaço de funções de S em \mathcal{E} . Seja \mathcal{F} a σ -álgebra produto sobre Ω , que por definição é a mais pequena σ -álgebra que contém todos os conjuntos da forma $\{\omega : \omega_k \in B\}$ para conjuntos de Borel $B \subset \mathcal{E}$ e $k \in S$.*

Suponha que para cada n esteja definida uma medida de probabilidade μ_n sobre o espaço \mathcal{E}^n . Assuma que a coleção $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ é consistente no seguinte sentido: para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada conjunto de Borel $A \subset \mathcal{E}^n$,

$$\mu_{n+1}(\{(\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_{n+1}}) \in \mathcal{E}^{n+1} : (\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_n}) \in A\}) = \mu_n(A),$$

equivalentemente,

$$\mu_{n+1}((\pi_{i_1, \dots, i_n}^{i_1, \dots, i_{n+1}})^{-1}(A)) = \mu_n(A) \quad (\text{condição de consistência}),$$

onde $\pi_{i_1, \dots, i_n}^{i_1, \dots, i_{n+1}}$ é a projeção natural de \mathcal{E}^{n+1} sobre \mathcal{E}^n .

Então, existe uma única medida de probabilidade ϕ sobre (Ω, \mathcal{F}) tal que, para todo n finito,

$$\phi \circ \pi_{i_1, \dots, i_{n+1}}^{-1}(A) = \phi(\pi_{i_1, \dots, i_{n+1}}^{-1}(A)) = \phi(\{\omega \in \Omega : (\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_n}) \in A\}) = \mu_n(A),$$

onde π_{i_1, \dots, i_n} é a projeção natural de Ω sobre \mathcal{E}^n .

Teorema .26 (Teorema da Extensão de Caratheodóry). *Seja $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ uma álgebra de conjuntos em Ω e suponha que $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaça a seguinte propriedade: sempre que $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{G}$ forem disjuntos e tais que $\cup_i A_i \in \mathcal{G}$, temos $\mu(\cup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$.*

Nesse caso, existe uma medida $\bar{\mu} : \sigma(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$, para todo $A \in \mathcal{G}$.

Uma coleção M de subconjuntos de um espaço amostral Ω é uma classe monótona, se

$$\forall (E_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ crescente em } M, \cup_{n=1}^{+\infty} E_n \in M,$$

$$\forall (F_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ decrescente em } M, \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n \in M.$$

Em base nessa definição, veja que toda σ -álgebra é uma classe monótona.

Seja \mathcal{A} uma coleção de subconjuntos de Ω . A menor classe monótona (sempre existe) que contém \mathcal{A} é chamada de *classe monótona gerada por \mathcal{A}* . Notação $M(\mathcal{A})$.

Observe que, $\sigma(\mathcal{A}) \supseteq M(\mathcal{A})$, sempre que \mathcal{A} seja uma coleção de subconjuntos de Ω . O seguinte teorema nos dá condições suficientes para que a igualdade, na inclusão, seja atingida.

Teorema .27 (Teorema da Classe Monótona). *Se \mathcal{A} é uma álgebra de conjuntos, então $\sigma(\mathcal{A}) = M(\mathcal{A})$.*

Segue do Teorema .27 que, se $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{A}$, onde \mathcal{C} é uma classe monótona e \mathcal{A} é uma álgebra, então $\mathcal{C} \supseteq \sigma(\mathcal{A}) = M(\mathcal{A})$.

Seja \mathcal{E} um conjunto finito com cardinalidade $|\mathcal{E}| \geq 2$. Uma matriz $Q = (Q(x, y))_{x, y \in \mathcal{E}}$ é chamada *positiva* se $Q(x, y) > 0$ para todo $x, y \in \mathcal{E}$. O seguinte teorema será usado para provar a Proposição .29 abaixo.

Teorema .28 (Teorema de Perron-Frobenius (PF)). *Cada matriz positiva $Q = (Q(x, y))_{x, y \in \mathcal{E}}$ tem um autovalor $q > 0$ com as seguintes propriedades*

1. $|z| < q$ para todos os autovalores $z \neq q$ de Q .
2. Existe um autovetor à direita π^T correspondente a q (isto é, $Q\pi^T = q\pi^T$) tal que $\pi^T(x) > 0$, para todo $x \in \mathcal{E}$.
3. q é um autovalor simples, isto é, se π_1^T e π_2^T são dois autovetores correspondentes ao autovalor q , então $\pi_1^T = c\pi_2^T$, para algum $c \in \mathbb{C}$.

O autovalor q é chamado de *PF-autovalor* de Q .

Demonstração. Veja Apêndice 3.A de [57]. □

Proposição .29. 1. O PF-autovalor de uma matriz estocástica positiva P é 1.

2. Para cada matriz estocástica positiva P existe um único vetor (fila) de probabilidade π sobre \mathcal{E} satisfazendo $\pi P = \pi$, onde $\pi(x) > 0$ para todo $x \in \mathcal{E}$.

Demonstração. 1. Seja q o PF-autovalor de $Q \equiv P^T$ e π^T seu respectivo autovetor à direita, os quais existem pelo Teorema PF, isto é, $P^T \pi^T = q \pi^T$. Tomando a transposta nesta identidade temos $\pi P = q \pi$. Em outras palavras

$$\sum_{x \in \mathcal{E}} \pi(x) P(x, y) = q \pi(y), \quad y \in \mathcal{E}. \quad (402)$$

Uma vez que a matriz P é estocástica e π é um vetor de probabilidade, somando sobre todo $y \in \mathcal{E}$ temos $q = 1$, provando-se esta afirmação.

2. Suponha que existam dois autovetores π_1 e π_2 correspondentes ao autovalor q . Visto que q é simples, existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $\pi_1^T = c \pi_2^T$, portanto, $\pi_1 = c \pi_2$. Como π_1, π_2 satisfazem (402), temos

$$\sum_{x \in \mathcal{E}} \pi_2(x) P(x, y) = c \pi_2(y), \quad y \in \mathcal{E}.$$

Somando sobre todo $y \in \mathcal{E}$ temos $c = 1$, implicando que $\pi_1 = \pi_2$. Além disso, $\pi(x) > 0$, pois pelo Teorema PF, $\pi^T(x) > 0$ para todo $x \in \mathcal{E}$. Portanto, o autovetor π tal que $\pi P = \pi$, é único. \square

Teorema .30 (Teorema de ergodicidade para matrizes estocásticas positivas). *Seja P uma matriz estocástica positiva e π seu único vetor de probabilidade com $\pi P = \pi$. Logo,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P^n(x, y) = \pi(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{E}.$$

Demonstração. Veja Apêndice 3.A de [57]. \square

Definição .4. *Uma transformação preservando medida (tpm) é um quarteto $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ onde (Ω, \mathcal{F}) é um espaço de medida e*

- 1) T é mensurável: $A \in \mathcal{F} \Rightarrow T^{-1}A \in \mathcal{F}$;
- 2) μ é T -invariante⁶: $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$, para todo $A \in \mathcal{F}$.

Uma transformação preservando probabilidade (tpp) é uma tpm sobre um espaço de probabilidade.

Lema .31 (Caracterização de medida invariante). *Seja $T : \Omega \rightarrow \Omega$ uma transformação mensurável e μ uma medida em Ω . Então as seguintes afirmações são equivalentes*

- (i) μ é T -invariante;

⁶ Neste caso também se diz que μ é invariante por T ou T preserva μ ,

(ii) para cada $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ temos

$$\int f \, d\mu = \int f \circ T \, d\mu;$$

(iii) para cada $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ temos

$$\int f \, d\mu = \int f \circ T \, d\mu.$$

Demonstração. Para provar (i) \Rightarrow (ii), suponhamos que a medida μ é T -invariante, isto é $\mu = \mu \circ T^{-1}$. Com a ideia de usar o Teorema do caminho das pedras, inicialmente, para todo conjunto mensurável A , observe que

$$\int \chi_A \, d\mu = \mu(A) = \mu(T^{-1}A) = \int \chi_{T^{-1}A} \, d\mu = \int \chi_A \circ T \, d\mu,$$

onde, na segunda identidade, usamos a hipótese e, na quarta igualdade, o fato de que $\chi_{T^{-1}A}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \chi_A \circ T(\omega) = 1$. Isto mostra que a relação (ii) é válida para funções características. Daí, por linearidade da integral, (ii) é válida, também, para combinações lineares finitas de funções características (funções simples). Dado qualquer $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ com $f \geq 0$, pode-se encontrar uma sequência crescente de funções simples s_n com $s_n \rightarrow f$ pontualmente, quando $n \rightarrow +\infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\int s_n \, d\mu = \int s_n \circ T \, d\mu$$

e, aplicando o Teorema da Convergência Monótona (Teorema .22) a ambos lados, obtemos

$$\int f \, d\mu = \int f \circ T \, d\mu.$$

Para estender o resultado a uma função integrável de valor real f , considere as partes positiva e negativa. Para estender o resultado a funções integráveis de valor complexo, tome as partes real e imaginária.

A implicação (ii) \Rightarrow (iii) é imediata, basta usar o fato de que $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Finalmente, provaremos que (iii) \Rightarrow (i). Seja $A \in \mathcal{F}$, logo $\chi_A \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Usando a identidade $\chi_A \circ T = \chi_{T^{-1}A}$ temos

$$\mu(A) = \int \chi_A \, d\mu = \int \chi_A \circ T \, d\mu = \int \chi_{T^{-1}A} \, d\mu = \mu(T^{-1}A),$$

o que prova que μ é uma medida T -invariante. \square

Como consequência do Lema .31 temos o seguinte resultado: seja h uma função contínua. A medida μ é T -invariante se, e somente se,

$$\int h \circ f \, d\mu = \int h \circ f \circ T \, d\mu.$$

Proposição .32 (Caracterização de medida mixing, veja [108]). *Uma tpm $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ é fortemente mixing se, e somente se, para toda função $f, g \in L^2$,*

$$\int f \cdot g \circ T^n \, d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int f \, d\mu \cdot \int g \, d\mu, \quad (403)$$

equivalentemente $\text{Cov}(f, g \circ T^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Demonstração. Se (403) se satisfaz, então fazendo $f = \chi_A$ e $g = \chi_B$, com $A, B \in \mathcal{F}$, temos

$$\mu(A \cap T^{-n}B) = \int \chi_A \cdot \chi_B \circ T^n \, d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu(A) \cdot \mu(B),$$

portanto, a medida μ é fortemente mixing.

Para mostrar a recíproca, primeiro necessitaremos provar as seguintes afirmações

- 1) Desde que $\mu \circ T^{-1} = \mu$, $\|f \circ T\|_p = \|f\|_p$, para todo $f \in L^p$ e $1 \leq p \leq +\infty$;
- 2) $\text{Cov}(f, g)$ é bilinear em f e g ;
- 3) $|\text{Cov}(f, g)| \leq 4\|f\|_2 \|g\|_2$.

O Item 1) decorre imediatamente do Lema .31 e da observação feita antes de formular esta proposição. O Item 2) segue pelas propriedades de linearidade da covariância. Para provar o Item 3) usaremos a definição de covariância, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade de Minkowski como segue

$$\begin{aligned} |\text{Cov}(f, g)| &= \left| \int \left[f - \int f \right] \left[g - \int g \right] \, d\mu \right| \leq \left\| f - \int f \right\|_2 \left\| g - \int g \right\|_2 \\ &\leq (\|f\|_2 + \|f\|_1)(\|g\|_2 + \|g\|_1) \\ &\leq 4\|f\|_2 \|g\|_2. \end{aligned}$$

Com estes três itens a nossa disposição, provaremos a proposição. Para isso, suponha que μ é mixing e tome dois elementos $f, g \in L^2$. Se f, g foram funções características de conjuntos mensuráveis, então $\text{Cov}(f, g \circ T^n) \rightarrow 0$ pelo fato de μ ser mixing. Se f, g são combinações finitas de funções características (funções simples), $\text{Cov}(f, g \circ T^n) \rightarrow 0$

pelo Item 2). Para funções gerais $f, g \in L^2$: $\forall \epsilon > 0$, $\exists f_\epsilon, g_\epsilon$ funções simples tal que $\|f - f_\epsilon\|_2 < \epsilon$, $\|g - g_\epsilon\|_2 < \epsilon$. Daí, usando os itens 1) e 3), temos

$$\begin{aligned} |\text{Cov}(f, g \circ T^n)| &\leq |\text{Cov}((f - f_\epsilon), g \circ T^n)| + |\text{Cov}(f_\epsilon, g_\epsilon \circ T^n)| + |\text{Cov}(f_\epsilon, (g - g_\epsilon) \circ T^n)| \\ &\leq 4\|f - f_\epsilon\|_2 \|g \circ T^n\|_2 + |\text{Cov}(f_\epsilon, g_\epsilon \circ T^n)| + 4\|f_\epsilon\|_2 \|g - g_\epsilon\|_2 \\ &\leq 4\epsilon\|g\|_2 + |\text{Cov}(f_\epsilon, g_\epsilon \circ T^n)| + 4\epsilon(\|f\|_2 + \epsilon). \end{aligned}$$

Como f_ϵ e g_ϵ são funções simples e μ é mixing, temos

$$\text{Cov}(f_\epsilon, g_\epsilon \circ T^n) \rightarrow 0 \Leftrightarrow |\text{Cov}(f_\epsilon, g_\epsilon \circ T^n)| \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow +\infty$. Logo, fazendo $n \rightarrow +\infty$ na desigualdade acima segue que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |\text{Cov}(f, g \circ T^n)| \leq 4\epsilon(\|f\|_2 + \|g\|_2 + \epsilon).$$

Desde que $f, g \in L^2$ e $\epsilon > 0$ foi arbitrário, o limite superior é igual ao limite zero. \square

Lema .33. *Seja f uma função local. Então existem coeficientes reais $\{a_C : C \subset \text{supp}(f)\}$ e $\{\tilde{a}_C : C \subset \text{supp}(f)\}$ tais que as seguintes representações*

$$f = \sum_{C \subset \text{supp}(f)} a_C \prod_{i \in C} \sigma_i \quad e \quad f = \sum_{C \subset \text{supp}(f)} a_C \prod_{i \in C} \frac{1}{2}(1 + \sigma_i)$$

são satisfeitas.

Demonstração. Para uma prova detalhada deste resultado, veja Lema 3.28, p. 71 da referência [53]. \square

Teorema .34 (Teorema de Riesz-Markov). *Seja Ω um espaço métrico compacto e $F : C(\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear positivo. Então, existe uma única medida $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty)$ tal que*

$$F(f) = \int_{\Omega} f d\mu,$$

para toda $f \in C(\Omega, \mathcal{F})$. Além do mais, $\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ se, e somente se, $F(1) = 1$.

Em outras palavras, se $F_\mu(f) = \mu(f)$, o Teorema de Riesz-Markov nos fornece uma bijeção $\mu \leftrightarrow F_\mu$ entre os conjuntos

$$\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F}) \quad e \quad \{F : C(\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R} \text{ linear} : F(1) = 1 \text{ e } F(f) \geq 0, \text{ para } f \geq 0\}.$$

Teorema .35 (Teorema de unicidade para medidas). *Seja (Ω, \mathcal{F}) um espaço mensurável e \mathcal{C} uma coleção de conjuntos que forma um π -sistema (isto é, se $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$) e que $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$. Se μ, ν são duas medidas de probabilidade sobre (Ω, \mathcal{F}) tais que $\mu(A) = \nu(A)$, $\forall A \in \mathcal{C}$, então $\mu = \nu$.*

Isto é, para que duas medidas de probabilidade coincidam sobre a σ -álgebra \mathcal{F} , é suficiente que elas coincidam em uma classe \mathcal{C} que tem a propriedade de ser um π -sistema e, além disso, gera a σ -álgebra \mathcal{F} .

O seguinte Lema é uma aplicação do Teorema .35 e da densidade das funções locais em $C(\Omega)$ (veja Lema 4.18), o referido lema nos diz que toda medida de probabilidade definida sobre o espaço mensurável (Ω, \mathcal{F}) é unicamente determinada por sua ação sobre os cilindros. Para enunciar dito lema, consideraremos sempre que, \mathcal{C} é um π -sistema que gera a σ -álgebra \mathcal{F} .

Lema .36 (Veja [53]). *Se μ, ν são duas medidas de probabilidade definidas sobre (Ω, \mathcal{F}) , então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $\mu = \nu$;
- (ii) $\mu(A) = \nu(A)$, para todos os cilindros $A \in \mathcal{C}$;
- (iii) $\mu(g) = \nu(g)$, para toda função local g ;
- (iv) $\mu(f) = \nu(f)$, para toda função $f \in C(\Omega)$.

Isto é, duas medidas de probabilidade são iguais se, e somente se, elas coincidem no π -sistema \mathcal{C} formado pelos cilindros finitos dimensionais. Lembre-se que a σ -álgebra \mathcal{F} é gerada pela coleção de cilindros \mathcal{C} .

Demonstração. (i) \Rightarrow (ii) é trivial. (ii) \Leftarrow (i) é consequência do Teorema .35. (ii) \Leftrightarrow (iii) uma vez que toda função local é função indicadora de um cilindro. (iii) \Leftrightarrow (vi) segue pela densidade das funções locais nas funções contínuas (veja Lema 4.18); e (iv) \Leftrightarrow (iii) segue pelo fato de que toda função local é contínua. \square

Proposição .37. *Sejam μ e ν duas distribuições de probabilidade sobre o espaço de estados finito $(\mathcal{E}, \mathcal{E})$, então*

$$\sup_{A \in \mathcal{E}} |\mu(A) - \nu(A)| = \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathcal{E}} |\mu(x) - \nu(x)|.$$

Demonstração. Seja $B \equiv \{x : \mu(x) \geq \nu(x)\}$ e $A \in \mathcal{E}$ arbitrário. Logo, as seguintes relações

$$\mu(B) - \nu(B) = \nu(B^c) - \mu(B^c), \quad (404)$$

$$\mu(A) - \nu(A) = \mu(A \cap B) - \nu(A \cap B) + [\mu(A \cap B^c) - \nu(A \cap B^c)], \quad (405)$$

$$\mu(A \cap B^c) < \nu(A \cap B^c), \quad (406)$$

$$\mu(B \cap A^c) \geq \nu(B \cap A^c), \quad (407)$$

são válidas.

Combinando (405)-(407), temos

$$\mu(A) - \nu(A) \leq \mu(A \cap B) - \nu(A \cap B) \leq \mu(B) - \nu(B). \quad (408)$$

Por analogia, também, temos

$$\nu(A) - \mu(A) \leq \nu(B^c) - \mu(B^c). \quad (409)$$

De (408),(409) e (404), obtemos

$$|\mu(A) - \nu(A)| = \mu(B) - \nu(B) = \nu(B^c) - \mu(B^c) = \frac{1}{2} [\mu(B) - \nu(B) + \nu(B^c) - \mu(B^c)], \quad (410)$$

de onde a prova segue. \square

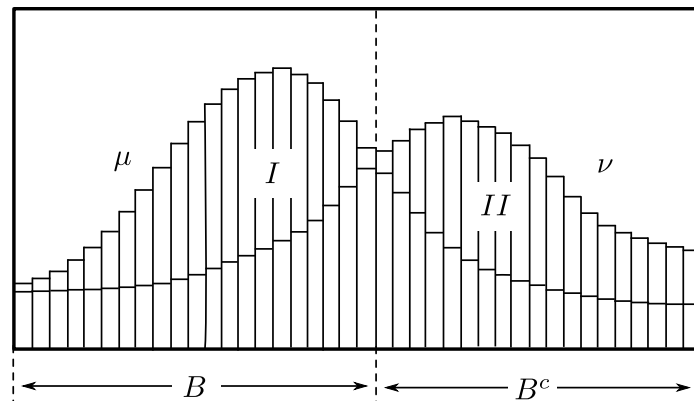


Figura 34: Esboço do fato de que, $\sup_{A \in \mathcal{E}} |\mu(A) - \nu(A)| = \frac{1}{2} [\text{área}(I) + \text{área}(II)]$.

Em seguida, faremos uma interpretação geométrica da quantidade $\sup_{A \in \mathcal{E}} |\mu(A) - \nu(A)|$. Para isso, consideremos $B = \{x : \mu(x) \geq \nu(x)\}$. Da Figura 34, veja que, $\text{área}(I) = \mu(B) - \nu(B)$ e $\text{área}(II) = \nu(B^c) - \mu(B^c)$, além disso, como μ e ν são medidas de probabilidade (portanto, as áreas que essas medidas encerram é igual a um), $\mu(B) - \nu(B) = \nu(B^c) - \mu(B^c)$. Logo, de (410), temos

$$\sup_{A \in \mathcal{E}} |\mu(A) - \nu(A)| = \frac{1}{2} [\mu(B) - \nu(B) + \nu(B^c) - \mu(B^c)] = \frac{1}{2} [\text{área}(I) + \text{área}(II)].$$

2 CASO $q \in \{2, 3, \dots\}$:

Em seguida, apresentaremos um teorema que estabelece uma representação da função de dois pontos do modelo de Potts de q estados em termos da função de conectividade do modelo de aglomerados aleatórios (veja Teorema .45). As técnicas utilizadas para provar dito teorema são semelhantes àquelas empregadas para o caso $q = 2$. Antes disso, apresentaremos uma série de resultados que nos ajudarão a dar sequência a nossa exposição.

Lema .38 (Veja referência [36]). *Seja $G = (V, E)$ um grafo finito e $\omega \in \{0, 1\}^E$ uma configuração fixa. Logo*

$$\sum_{\hat{\sigma}} \Delta(\hat{\sigma}, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} \sum_{p=1}^q h_{i,p} \delta_{\hat{\sigma}_i, p}} = \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} \sum_{p=1}^q e^{\beta \sum_{i \in K_\alpha} h_{i,p}}.$$

Demonstração. Veja que, seguindo o método usado no Lema 3.11, facilmente pode-se ver que a expressão

$$\sum_{\hat{\sigma}} \Delta(\hat{\sigma}, \omega) e^{\beta \sum_{i \in V} \sum_{p=1}^q h_{i,p} \delta_{\hat{\sigma}_i, p}}$$

pode ser escrita assim

$$= \sum_{\hat{\sigma}} \Delta(\hat{\sigma}, \omega) \cdot \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} e^{\beta \sum_{i \in K_\alpha} \sum_{p=1}^q h_{i,p} \delta_{\hat{\sigma}_i, p}} = \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} \sum_{\hat{\sigma}_{K_\alpha}} \Delta(\hat{\sigma}_{K_\alpha}, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in K_\alpha} \sum_{p=1}^q h_{i,p} \delta_{\hat{\sigma}_i, p}},$$

onde, na segunda igualdade, se usou o fato de que $\Delta(\hat{\sigma}, \omega) = \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} \Delta(\hat{\sigma}_{K_\alpha}, \omega)$.

Desde que o somatório $\sum_{\hat{\sigma}_{K_\alpha}} \Delta(\hat{\sigma}_{K_\alpha}, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in K_\alpha} \sum_{p=1}^q h_{i,p} \delta_{\hat{\sigma}_i, p}}$ tem exatamente q parcelas correspondentes aos spins $1, 2, \dots, q$, a expressão acima fica

$$= \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} \sum_{p=1}^q e^{\beta \sum_{i \in K_\alpha} h_{i,p}},$$

concluindo-se a prova. □

Lema .39 (Veja referência [36]). *Seja $G = (V, E)$ um grafo finito, logo, existe uma constante $\hat{C} \equiv \hat{C}(\beta, q, G) > 0$ tal que relaciona as seguintes funções de partição*

$$\mathcal{Z}_{q, \hat{h}, q, V}^{\text{Potts}} = \hat{C} \mathcal{Z}_{p, \hat{h}, q, G}^{\text{ES}}.$$

Demonstração. Definindo $\hat{C} \equiv \left[e^{-q\beta \sum_{\{i,j\} \in E} J_{ij}} \right]^{-1} > 0$, $Q \equiv \beta J_{ij}$, $a \equiv \hat{\sigma}_i$, $b \equiv \hat{\sigma}_j$ e usando o Lema 3.7, temos a identidade

$$e^{q\beta J_{ij}(\delta_{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j} - 1)} = 1 - p_{ij} + p_{ij} \delta_{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j},$$

com $p_{ij} \equiv 1 - e^{-q\beta J_{ij}}$. Logo

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{q\beta, \mathbf{h}, q, V}^{\text{Potts}} &= \hat{C} \sum_{\hat{\sigma}} e^{q\beta \left(\sum_{\{i,j\} \in E} J_{ij}(\delta_{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j} - 1) + \sum_{i \in V} \sum_{p=1}^q \frac{h_{i,p}}{q} \delta_{\hat{\sigma}_i, p} \right)} \\ &= \hat{C} \sum_{\hat{\sigma}} \prod_{\{i,j\} \in E} e^{q\beta J_{ij}(\delta_{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j} - 1)} \cdot e^{\sum_{i \in V} \sum_{p=1}^q h_{i,p} \delta_{\hat{\sigma}_i, p}} \\ &= \hat{C} \sum_{\hat{\sigma}} \prod_{\{i,j\} \in E} (p_{ij} \delta_{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j} + 1 - p_{ij}) \cdot e^{\sum_{i \in V} \sum_{p=1}^q h_{i,p} \delta_{\hat{\sigma}_i, p}} \\ &= \hat{C} \sum_{\hat{\sigma}} \sum_{F \subseteq E} \prod_{\{i,j\} \in F} p_{ij} \delta_{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j} \prod_{\{i,j\} \in E \setminus F} (1 - p_{ij}) \cdot e^{\sum_{i \in V} \sum_{p=1}^q h_{i,p} \delta_{\hat{\sigma}_i, p}} \\ &= \hat{C} \sum_{\hat{\sigma}} \sum_{\omega} B_J(\omega) \Delta(\hat{\sigma}, \omega) \cdot e^{\sum_{i \in V} \sum_{p=1}^q h_{i,p} \delta_{\hat{\sigma}_i, p}} = \hat{C} \mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, q, G'}^{\text{ES}} \end{aligned}$$

onde, na quarta igualdade, usamos o Lema 1.7. □

Lema .40 (Veja referência [36]). *Seja $G = (V, E)$ um grafo finito. No modelo de Edwards-Sokal e aglomerados aleatórios sobre G , suas funções de partição coincidem, isto é*

$$\mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, q, G}^{\text{ES}} = \mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, q, G}^{\text{RC}}.$$

Demonstração. Pelo Lema .38, imediatamente, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, q, G}^{\text{ES}} &= \sum_{\omega} B_J(\omega) \sum_{\hat{\sigma}} \Delta(\hat{\sigma}, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} \sum_{p=1}^q h_{i,p} \delta_{\hat{\sigma}_i, p}} \\ &= \sum_{\omega} B_J(\omega) \cdot \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} \sum_{p=1}^q e^{\beta \sum_{i \in V} h_{i,p}} = \mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, q, G'}^{\text{RC}} \end{aligned}$$

concluindo-se a demonstração. □

O seguinte teorema é uma versão generalizada do Teorema 3.14.

Teorema .41 (Medidas marginais de $\nu_{\mathbf{p}, \mathbf{h}, q, G}$, veja [36]). *Seja $G = (V, E)$ um grafo finito, logo, as marginais da medida de Edwards-Sokal são:*

$$(1) \quad \sum_{\omega \in \{0,1\}^E} v_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}(\hat{\sigma}, \omega) = \pi_{q\beta, \hat{\mathbf{h}}, q, V}(\hat{\sigma}) \quad (\hat{\sigma}\text{-marginal de } v_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G})$$

$$(2) \quad \sum_{\hat{\sigma} \in \{1, \dots, q\}^V} v_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}(\hat{\sigma}, \omega) = \phi_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}(\omega) \quad (\omega\text{-marginal de } v_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}).$$

Demonstração. (1) Observe que, usando inversamente os passos feitos na prova do Lema .39, temos

$$\begin{aligned} \sum_{\omega} v_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}(\hat{\sigma}, \omega) &= \frac{1}{\mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}^{\text{ES}}} \sum_{\omega} B_J(\omega) \Delta(\hat{\sigma}, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} \sum_{p=1}^q h_{i,p} \delta_{\hat{\sigma}_i, p}} \\ &= \frac{\hat{C}}{\mathcal{Z}_{q\beta, \hat{\mathbf{h}}, q, V}^{\text{Potts}}} \sum_{\omega} \prod_{\{i,j\}: \omega_{ij}=1} p_{ij} \delta_{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j} \prod_{\{i,j\}: \omega_{ij}=0} (1 - p_{ij}) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} \sum_{p=1}^q h_{i,p} \delta_{\hat{\sigma}_i, p}} \\ &= \frac{\hat{C}}{\mathcal{Z}_{q\beta, \hat{\mathbf{h}}, q, V}^{\text{Potts}}} e^{q\beta \left(\sum_{\{i,j\} \in E} (\delta_{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j} - 1) + \sum_{i \in V} \sum_{p=1}^q \frac{h_{i,p}}{q} \delta_{\hat{\sigma}_i, p} \right)} = \pi_{q\beta, \hat{\mathbf{h}}, q, V}(\hat{\sigma}), \end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade, usamos o Lema .39.

(2) Por outro lado, usando os Lemas .38 e .40, segue que

$$\begin{aligned} \sum_{\hat{\sigma}} v_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}(\hat{\sigma}, \omega) &= \frac{1}{\mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}^{\text{ES}}} B_J(\omega) \sum_{\hat{\sigma}} \Delta(\hat{\sigma}, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} \sum_{p=1}^q h_{i,p} \delta_{\hat{\sigma}_i, p}} \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}^{\text{RC}}} B_J(\omega) \cdot \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} \sum_{p=1}^q e^{\beta \sum_{i \in K_{\alpha}} h_{i,p}} = \phi_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}(\omega), \end{aligned}$$

finalizando-se a prova. □

Lema .42 (Medida condicional de $v_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}$, veja [36]). *Seja $G = (V, E)$ um grafo finito e $\omega \in \{0, 1\}^E$ uma configuração de arestas fixa. Logo, temos a seguinte medida condicional*

$$v_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}(\hat{\sigma} | \omega) = \frac{\Delta(\hat{\sigma}, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} \sum_{p=1}^q h_{i,p} \delta_{\hat{\sigma}_i, p}}}{\prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} \sum_{p=1}^q e^{\beta \sum_{i \in K_{\alpha}} h_{i,p}}}.$$

Demonstração. Usando a mesma técnica feita para a prova do Corolário 3.15, facilmente se obtém a conclusão. □

Lema .43 (Veja referência [36]). *Seja $G = (V, E)$ um grafo finito, $x, y \in V$ e $\omega \in \{0, 1\}^E$ uma configuração fixa. Se $x \not\leftrightarrow y$ em ω , então*

$$\sum_{\hat{\sigma}} \mathbb{1}_{\{\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_y\}} \Delta(\hat{\sigma}, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} \sum_{p=1}^q h_{i,p} \delta_{\hat{\sigma}_i, p}} = \sum_{r=1}^q e^{\beta \sum_{i \in K_t} h_{i,r} + \beta \sum_{i \in K_t} h_{i,r}} \cdot \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq t, u}}^{k(\omega, G)} \sum_{p=1}^q e^{\beta \sum_{i \in K_{\alpha}} h_{i,p}},$$

onde $K_t(\omega) \equiv K_t(\omega, x)$ e $K_u(\omega) \equiv K_u(\omega, y)$ são aglomerados disjuntos (de vértices) contendo os vértices x e y respectivamente.

Demonstração. Veja que a expressão

$$\sum_{\hat{\sigma}} \mathbb{1}_{\{\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_y\}} \Delta(\hat{\sigma}, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} \sum_{p=1}^q h_{i,p} \delta_{\hat{\sigma}_i, p}}$$

pode ser escrita da forma

$$= \sum_{\hat{\sigma}} \mathbb{1}_{\{\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_y\}} \Delta(\hat{\sigma}, \omega) \cdot \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} e^{\beta \sum_{i \in K_\alpha} \sum_{p=1}^q h_{i,p} \delta_{\hat{\sigma}_i, p}}.$$

Como $\Delta(\hat{\sigma}, \omega) = \prod_{\alpha=1}^{k(\omega, G)} \Delta(\hat{\sigma}_{K_\alpha}, \omega)$, rescrevemos a expressão anterior assim

$$= \sum_{r=1}^q e^{\beta \sum_{i \in K_t} h_{i,r} + \beta \sum_{i \in K_u} h_{i,r}} \cdot \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq t, u}}^{k(\omega, G)} \sum_{\hat{\sigma}_{K_\alpha}} \Delta(\hat{\sigma}_{K_\alpha}, \omega) e^{\beta \sum_{i \in K_\alpha} \sum_{p=1}^q h_{i,p} \delta_{\hat{\sigma}_i, p}}.$$

Desde que o somatório $\sum_{\hat{\sigma}_{K_\alpha}} \Delta(\hat{\sigma}_{K_\alpha}, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in K_\alpha} \sum_{p=1}^q h_{i,p} \delta_{\hat{\sigma}_i, p}}$ tem somente q parcelas, correspondentes aos spins $1, 2, \dots, q$ respectivamente, a expressão anterior fica

$$= \sum_{r=1}^q e^{\beta \sum_{i \in K_t} h_{i,r} + \beta \sum_{i \in K_u} h_{i,r}} \cdot \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq t, u}}^{k(\omega, G)} \sum_{p=1}^q e^{\beta \sum_{i \in K_\alpha} h_{i,p}},$$

concluindo-se a prova. □

Lema .44. *Seja $G = (V, E)$ um grafo finito com $x \in V$ e $\omega \in \{0, 1\}^E$ uma configuração de arestas fixa. Logo, para cada $m \in \{1, \dots, q\}$ com $q \geq 1$, temos*

$$\sum_{\hat{\sigma}} \mathbb{1}_{\{\hat{\sigma}_x = m\}} \Delta(\hat{\sigma}, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} \sum_{p=1}^q h_{i,p} \delta_{\hat{\sigma}_i, p}} = e^{\beta \sum_{i \in K_t} h_{i,m}} \cdot \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq t}}^{k(\omega, G)} \sum_{p=1}^q e^{\beta \sum_{i \in K_\alpha} h_{i,p}},$$

onde $K_t(\omega) \equiv K_t(\omega, x)$ é o aglomerado (de vértices) contendo o vértice x na configuração ω .

Demonstração. A prova deste resultado segue em analogia à prova do Lema 3.22. □

Teorema .45 (Correlação-conectividade: modelo de Potts de q estados, veja [36]). *No modelo de Potts com Hamiltoniano definido em (44) e com densidades $p_{ij} \equiv 1 - e^{-q\beta J_{ij}}$, $q \in \{2, 3, \dots\}$, para todo $x, y \in V$ tem-se*

$$\tau_{q\beta, \hat{h}, q, V}(x, y) = \left(1 - \frac{1}{q}\right) \phi_{\mathbf{p}, \hat{h}, q, G}(x \leftrightarrow y) + \phi_{\mathbf{p}, \hat{h}, q, G} \left(\mathbb{1}_{\{x \not\leftrightarrow y\}} \cdot \left\{ H_{\hat{h}}(K_t, K_u) - \frac{1}{q} \right\} \right),$$

onde a variável aleatória $H_{\hat{\mathbf{h}}}(K_t, K_u)$ é definida por

$$H_{\hat{\mathbf{h}}}(K_t, K_u) \equiv \frac{\sum_{r=1}^q e^{\beta \sum_{i \in K_t} h_{i,r} + \beta \sum_{i \in K_u} h_{i,r}}}{\sum_{r=1}^q e^{\beta \sum_{i \in K_t} h_{i,r}} \cdot \sum_{r=1}^q e^{\beta \sum_{i \in K_u} h_{i,r}}},$$

com $K_t(\omega) \equiv K_t(\omega, x)$ e $K_u(\omega) \equiv K_u(\omega, y)$ sendo os aglomerados disjuntos (de vértices) na configuração ω contendo os vértices x e y , respectivamente.

Demonstração. Usando o Teorema .41 e a definição da função $\tau_{q\beta, \hat{\mathbf{h}}, q, V}$ podemos nos convencer facilmente de que a seguinte identidade se satisfaz.

$$\tau_{q\beta, \hat{\mathbf{h}}, q, V}(x, y) = \sum_{\omega} \left[\sum_{\hat{\sigma}} \left(\mathbb{1}_{\{\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_y\}} - \frac{1}{q} \right) v_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}(\hat{\sigma} | \omega) \right] \phi_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}(\omega).$$

Usando o Lema .42 e analisando o fato quando $x \leftrightarrow y$ ou quando $x \not\leftrightarrow y$, a igualdade acima fica

$$\begin{aligned} \tau_{q\beta, \hat{\mathbf{h}}, q, V}(x, y) &= \left(1 - \frac{1}{q} \right) \phi_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}(x \leftrightarrow y) - \frac{1}{q} \phi_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}(x \not\leftrightarrow y) \\ &\quad + \sum_{\omega} \left[\mathbb{1}_{\{x \not\leftrightarrow y\}} \sum_{\hat{\sigma}} \mathbb{1}_{\{\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_y\}} \frac{\Delta(\hat{\sigma}, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} \sum_{p=1}^q h_{i,p} \delta_{\hat{\sigma}_i, p}}}{\prod_{\alpha=1}^k(\omega, G) \sum_{p=1}^q e^{\beta \sum_{i \in K_{\alpha}} h_{i,p}}} \right] \phi_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}(\omega). \end{aligned}$$

Finalmente, usando o Lema .43 e operando algebricamente, obtemos

$$\tau_{q\beta, \hat{\mathbf{h}}, q, V}(x, y) = \left(1 - \frac{1}{q} \right) \phi_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}(x \leftrightarrow y) + \phi_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G} \left(\mathbb{1}_{\{x \not\leftrightarrow y\}} \cdot \left\{ H_{\hat{\mathbf{h}}}(K_t, K_u) - \frac{1}{q} \right\} \right),$$

com

$$H_{\hat{\mathbf{h}}}(K_t, K_u) \equiv \frac{\sum_{r=1}^q e^{\beta \sum_{i \in K_t} h_{i,r} + \beta \sum_{i \in K_u} h_{i,r}}}{\sum_{r=1}^q e^{\beta \sum_{i \in K_t} h_{i,r}} \cdot \sum_{r=1}^q e^{\beta \sum_{i \in K_u} h_{i,r}}} \geq 0,$$

onde $K_t(\omega) \equiv K_t(\omega, x)$ e $K_u(\omega) \equiv K_u(\omega, y)$ são aglomerados disjuntos contendo os vértices x e y respectivamente. \square

Observação .46. Note que se $\hat{\mathbf{h}} \equiv 0$, então, para toda configuração de arestas ω temos

$$H_0(K_t, K_u)(\omega) = \frac{q}{q^2} = \frac{1}{q}$$

e assim, segue do Teorema .45 a seguinte identidade

$$\tau_{q\beta, 0, q, V}(x, y) = \left(1 - \frac{1}{q} \right) \phi_{\mathbf{p}, 0, q, G}(x \leftrightarrow y).$$

Essa fórmula já era conhecida, por exemplo, veja referência [65], Teorema 1.16, p. 11.

Supondo $q = 2$ e, além do mais, que $h_{i,1} = -h_{i,2} = h_i$, para cada $i \in V$, com $\mathbf{h} \equiv (h_i : i \in V)$, para quaisquer $x, y \in V$ temos

$$H_{\mathbf{h}}(K_t, K_u) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \tanh \left(\beta \sum_{i \in K_t} h_i \right) \cdot \tanh \left(\beta \sum_{i \in K_u} h_i \right) \right\}.$$

Portanto, o Teorema .45 é uma generalização do Teorema 3.17.

Continuando, enunciaremos um resultado, o qual generaliza o Teorema 3.23 para o caso do modelo de Potts em grafos finitos.

Teorema .47 (Veja referência [36]). *Seja $G = (V, E)$ um grafo finito e x um vértice em V . Então, para cada $m \in \{1, \dots, q\}$ com $q \in \mathbb{Z}^+$, temos*

$$\pi_{q\beta, \hat{\mathbf{h}}, q, V}(\hat{\sigma}_x = m) = \phi_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G} \left(\frac{e^{\beta \sum_{i \in K_t} h_{i,m}}}{\sum_{p=1}^q e^{\beta \sum_{i \in K_t} h_{i,p}}} \right),$$

onde $K_t(\omega) \equiv K_t(\omega, x)$ é o aglomerado (de vértices) contendo o vértice x e $\phi_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}(\cdot)$ foi definido em (49), Seção 3.3.

Demonstração. Por aplicação do Teorema .41, veja que

$$\pi_{q\beta, \hat{\mathbf{h}}, q, V}(\hat{\sigma}_x = m) = \sum_{\omega} \left[\sum_{\hat{\sigma}} \mathbb{1}_{\{\hat{\sigma}_x = m\}} \nu_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}(\hat{\sigma} | \omega) \right] \phi_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}(\omega).$$

Usando o Lema .42, a igualdade acima fica

$$\pi_{q\beta, \hat{\mathbf{h}}, q, V}(\hat{\sigma}_x = m) = \sum_{\omega} \left[\sum_{\hat{\sigma}} \mathbb{1}_{\{\hat{\sigma}_x = m\}} \frac{\Delta(\hat{\sigma}, \omega) \cdot e^{\beta \sum_{i \in V} \sum_{p=1}^q h_{i,p} \delta_{\hat{\sigma}_i, p}}}{\prod_{\alpha=1}^k(\omega, G) \sum_{p=1}^q e^{\beta \sum_{i \in K_{\alpha}} h_{i,p}}} \right] \phi_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G}(\omega).$$

Logo, usando o Lema .44 e simplificando, obtemos

$$\pi_{q\beta, \hat{\mathbf{h}}, q, V}(\hat{\sigma}_x = m) = \phi_{\mathbf{p}, \hat{\mathbf{h}}, q, G} \left(\frac{e^{\beta \sum_{i \in K_t} h_{i,m}}}{\sum_{p=1}^q e^{\beta \sum_{i \in K_t} h_{i,p}}} \right),$$

onde $K_t(\omega) \equiv K_t(\omega, x)$ é o aglomerado contendo o vértice x . □

Observação .48. Note que o Teorema 3.23 é um caso particular do Teorema .47, sempre que consideremos o modelo de Potts, com $q = 2$ e campo externo $h_{i,1} = -h_{i,2} \equiv h_i, \forall i \in V$.