



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**APLICAÇÕES DA DINÂMICA DE CAMPOS TÉRMICOS
(DCT) À ANÁLISE DO EFEITO CASIMIR DE BÓSONS E
FÉRMIONS EM TOPOLOGIAS TORODAIS**

Caroline Silva Rocha Costa

BRASÍLIA

- 2016 -

“Aplicações da Dinâmica de Campos Térmicos (DCT)
à Análise do Efeito Casimir de Bósons e Férmions em
Topologias Torodais.”

Por

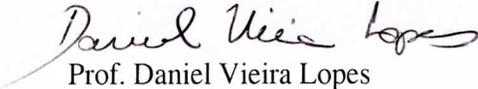
Caroline Silva Rocha Costa.

Dissertação submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Aprovada por:


Prof. Ademir Eugênio de Santana
IF/UnB


Prof. Amilcar Rabelo de Queiroz
IF/UnB


Prof. Daniel Vieira Lopes
IFG

Prof. Dr. Fernando Albuquerque de Oliveira
Coordenador de Pós-Graduação
Instituto de Física

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

SC292a Silva Rocha Costa, Caroline
Aplicações da Dinâmica de Campos Térmicos (DCT) à
Análise do Efeito Casimir de Bósons e Férmions em
Topologias Torodais / Caroline Silva Rocha Costa;
orientador Ademir Eugênio de Santana. -- Brasília,
2016.
85 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Física) --
Universidade de Brasília, 2016.

1. Efeito Casimir. 2. Dinâmica de Campos Térmicos.
3. Topologias Torodais. 4. Teoria Quântica de Campos.
5. Partículas. I. Eugênio de Santana, Ademir ,
orient. II. Título.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**APLICAÇÕES DA DINÂMICA DE CAMPOS TÉRMICOS
(DCT) À ANÁLISE DO EFEITO CASIMIR DE BÓSONS E
FÉRMIONS EM TOPOLOGIAS TORODAIS**

Caroline Silva Rocha Costa

Dissertação de Mestrado realizada sob a orientação do Prof. Dr. Ademir Eugênio de Santana, apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

BRASÍLIA

- 2016 -

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, por toda a superação para que hoje eu pudesse ter acesso a todas as oportunidades que não tiveram. Ao meu pai, por todo o apoio incondicional e afetivo durante esta jornada.

Ao meu querido professor e muito mais do que um orientador Ademir, ser de luz, por ter me guiado nesta empreitada, que começou muito antes do mestrado, e sempre com esta leveza característica do seu ser.

Ao Arsen Melikyan, por não me deixar desistir e me ensinar a persistir, por dividir sua empolgação com a física resultando nas melhores aulas que alguém possa ter, despertando em mim todo o encanto que hoje a física me traz, por ser uma fonte diária de inspiração e por tantas outras razões.

Aos meus amados irmãos, sobrinhos e avó pela simples razão de existirem.

Aos meus amigos, pela compreensão nos meus muitos momentos de ausência.

Ao meu amigo Waldenor, meu maior companheiro de estudos nesta jornada, pelo conjunto não enumerável de ajuda e discussões.

Ao Rodrigo, José e Neymar, pela ajuda cotidiana e todo apoio e incentivo e por tornar nosso ambiente de estudo sempre tão leve e feliz.

Ao Diego, amigo que a física me trouxe, por compartilhar das mesmas angústias.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

*Nothing in life is to be feared, it is only to
be understood. Now is the time to
understand more, so that we may fear
less..*

(Marie Curie)

*Poets say science takes away from the
beauty of the stars mere globs of gas
atoms. Nothing is “mere”. I too can see
the stars on a desert night, and feel them.*

*But do I see less or more? The vastness
of the heavens stretches my imagination -
stuck on this carousel my little eye can
catch one-million-year-old light. A vast
pattern - of which I am a part... What is
the pattern, or the meaning, or the why?*

*It does not do harm to the mystery to
know a little about it. For far more
marvelous is the truth than any artists of
the past imagined!*

(Richard Feynman)

RESUMO

Neste trabalho, analisamos o efeito Casimir para bósons e férmions em um hipertoro para ambos os casos à temperatura zero e à temperatura finita. Mostramos que, à temperatura zero, existe uma transição de valores negativos para valores positivos de pressão que dependem altamente dos parâmetros de compactificação. Com o aumento da temperatura, à baixas temperaturas, uma mudança na relação entre comportamento da pressão e os parâmetros de compactificação é observada, embora, para altas temperatura, devido à predominância do termo de radiação de corpo negro na pressão, essa mudança se torna irrelevante. Em seguida, utilizamos esses resultados para considerar um modelo não massivo e não interagente da Cromodinâmica Quântica e estimar a possível contribuição do efeito de Casimir para a temperatura crítica de deconfinamentos dos quarks.

Palavra-Chave: Efeito Casimir. Topologias Torodais. Dinâmica de Campos Térmicos. Teoria de Campos. Partículas.

ABSTRACT

In this work we analyse the Casimir effect for bosons and fermions on a hypertorus for both cases at zero and finite temperature. We find that at zero temperature there is a transition from negative to positive values of pressure which depends heavily on the magnitude of the compactification parameters. When low temperatures are considered, a change in the relation between the pressure behaviour and the compactification parameters is observed. In contrast, at high energies, due to the dominance of the black-body radiation term in the pressure, this change becomes insignificant. We then use these results to consider a non-interacting massless QCD model and estimate the possible contribution of the Casimir effect for the critical temperature of quarks deconfinement.

Keywords: Casimir effect. Toroidal Topologies. Thermofield Dynamics. Quantum fields theory. Particles.

Sumário

Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
Introducao	1
2 Dinâmica de Campos Térmicos	4
2.1 Espaço de Hilbert Térmico	5
2.1.1 Regras de conjugação til	7
2.2 Osciladores térmicos bosônicos e fermiônicos	8
2.2.1 Oscilador bosônico	8
2.2.2 Osciladores fermiônicos	12
2.3 Propagador no tempo real e tempo imaginário	15
2.4 Campo escalar térmico	15
2.5 Campo de Dirac Térmico	23
3 Campos Compactificados	28
3.1 Compactificação do tempo	28
3.2 Compactificação espacial	34
3.3 Compactificação do tempo e de uma dimensão espacial	39
3.4 Compactificação em d dimensões	41
4 Efeito Casimir para o campo eletromagnético	43
4.1 O estado de vácuo do campo eletromagnético	45
4.1.1 Tensor energia-momento	47
4.2 Efeito Casimir	55
5 Efeito Casimir para férmions e o plasma de quarks e glúons	62
5.1 Efeito Casimir para férmions	64
5.1.1 Efeito Casimir para quarks e glúons	72
6 Conclusões	77
Referências Bibliográficas	79

Lista de Figuras

4.1	Pressão de Casimir $P = \mathcal{T}^{33(11)}$ à temperatura zero para bósons.	57
4.2	Pressão de Casimir como função de a_2 e a_3 para a_1 mantido fixo.	58
4.3	Pressão de Casimir como função de a_2 e $T = \beta^{-1}$ para a_1 e a_3 fixos. . .	61
4.4	Pressão de Casimir como função de a_3 e $T = \beta^{-1}$ para a_1 e a_2 fixos. . .	61
5.1	Pressão de Casimir $P = \mathcal{T}^{33(11)}$ à temperatura zero em um hipertoro. . .	67
5.2	Pressão de Casimir à temperatura zero como função de a_2 e a_3 para a_1 mantido fixo. Observa-se que o comportamento da pressão de Casimir é mais suscetível a variações de a_3 quando comparado a a_2	68
5.3	Pressão de Casimir $P = \mathcal{T}^{33(11)}$ à temperatura finita em um hipertoro. Observa-se que a pressão decai rapidamente com o aumento de a_2 . Embora a pressão cresça com o aumento de a_3 , essa mudança é mais sutil comparada à mudança decorrente de a_2	71
5.4	Pressão de Casimir $P = \mathcal{T}^{33(11)}$ à temperatura zero para os quarks e glúons.	74
5.5	Pressão de Casimir $P = \mathcal{T}^{33(11)}$ à temperatura finita para o sistema de quarks e glúons com a_1 mantido constante.	76

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho investigamos o efeito Casimir a partir do método da dinâmica de campos térmicos (DCT) considerando férmions e bósons em um hipertoro.

A DCT é um formalismo de tempo real proposto por Umezawa e Takakashi [1] como uma alternativa ao formalismo de Matsubara [2] e é estabelecido a partir da duplicação do espaço de Hilbert original do sistema e tal que a temperatura é implementada por uma transformação de Bogoliubov. O formalismo de Matsubara, embora frequentemente usado para tratar sistemas em equilíbrio não é em geral adequado para lidar com processos fora do equilíbrio. Assim, para processos relacionados a física da matéria condensada, bem como fenômenos físicos de altas energias, onde a dependência real do tempo é crucial, um formalismo de tempo real tem sido demandado nas últimas décadas [3–11]. Diante desta necessidade, Schwinger e Keldysh [12–15] propuseram um formalismo de tempo real construído a partir de elementos do formalismo de tempo imaginário. Um outro formalismo de tempo real proposto, deduzido a partir de uma teoria de representação, é a DCT. No equilíbrio, estes dois formalismos de tempo real são equivalentes [16]. A DCT, enquanto uma teoria de representação, tem sido generalizada para descrever sistemas confinados em hipertoros, e preliminarmente aplicada na análise do efeito Casimir para um plasma de quarks (férmions) e glúons(bósons) [17]. Nosso principal objetivo aqui é aprofundar esta análise.

Um dos principais resultados da Cromodinâmica Quântica é a previsão da liberdade assintótica [18–20], propriedade em que, em altas energias, a constante de acoplamento efetiva se torna pequena, dando origem ao deconfinamento dos quarks. Disto resulta um novo estado de matéria, o chamado plasma de quarks e glúons. Devido a evidências experimentais [17], nas últimas décadas há um forte interesse neste deconfinamento, que está associado à transição de hadrons para o plasma de quarks e glúons, ocorrendo supostamente a uma temperatura de 200MeV [21], segundo cálculos em Cromodinâmica Quântica na rede.

Neste contexto, o efeito Casimir à temperatura finita para bósons e férmions é de particular interesse, uma vez que no modelo de sacola de MIT (MIT bag model) [22], assume-se que quarks e glúons estão confinados em uma pequena região do espaço, e o efeito Casimir nessa região elucidaria questões sobre o deconfinamento.

O efeito Casimir tem sido explorado via diferentes abordagens a fim de obter uma descrição satisfatória do fenômeno de deconfinamento [23–27]. Aqui investigamos o efeito Casimir para bósons e férmions em um hipertoro seguindo uma prescrição anteriormente desenvolvida [17], usando o método de campos compactificados baseados em uma transformação de Bogoliubov generalizada. A mudança da função de Green devido ao efeito de compactificação fornecerá um meio natural de se calcular o tensor energia-momento renormalizado. Considerando uma topologia geral onde todas as dimensões do espaço-tempo estão compactificadas em circunferências de diferentes comprimentos, investigamos a natureza da força de Casimir, se atrativa ou repulsiva, a depender dos parâmetros de compactificação. Uma das vantagens de se usar o formalismo da dinâmica de campos térmicos se dá ao fato que podemos separar o propagador em uma parte sem efeitos de compactificação e outra devido a compactificação. Para razões práticas, isso significa que os procedimentos de renormalização são resolvidos de maneira sutil.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira. No Capítulo 2, revisamos o

formalismo da dinâmica de campos térmicos, introduzindo os elementos básicos para a construção da teoria de campos à temperatura finita. No Capítulo 3, também um capítulo de revisão, campos compactificados são introduzidos a fim de tratar campos confinados no espaço à temperatura finita. Os dois últimos capítulos que precedem nossas conclusões se referem aos resultados obtidos nesta dissertação. No capítulo 4, analisamos o efeito Casimir para o campo eletromagnético em um hipertoro, ambos à temperatura zero e à temperatura finita. No capítulo 5, exploramos o efeito Casimir à temperatura zero e à temperatura finita para férmions em um hipertoro e utilizamos os resultados obtidos para bósons e férmions para considerar um modelo simplificado da Cromodinâmica Quântica a fim de estudar o papel que efeito Casimir desempenha no fenômeno de deconfinamento dos quarks. No capítulo 6, as conclusões deste trabalho são apresentadas.

Capítulo 2

Dinâmica de Campos Térmicos

Neste capítulo apresentamos uma revisão sobre o formalismo da dinâmica de campos térmicos (DCT), seguindo principalmente a referência [17]. Em teoria quântica de campos à temperatura finita, dois formalismos tem sido usados na tentativa de se compreender a física de muitos corpos, o formalismo de tempo imaginário, inicialmente proposto por Matsubara [2] e, posteriormente, estendido de maneira a contemplar a teoria quântica de campos [28], e o formalismo de tempo real. Com o estudo a fim de se estender o formalismo de Matsubara, descobriu-se as importantes condições de periodicidade (para bósons) e antiperiodicidade (para férmions) do tempo nas funções de correlação. No formalismo de tempo real, pode-se ainda destacar a abordagem do "caminho temporal fechado"(closed time path) [15, 29–33] e a dinâmica de campos térmicos, baseada em c^* -álgebras e grupos de Lie térmicos [34–37], cujos estados térmicos são construídos a partir de duplicamento dos graus de liberdade [38–40]. Esse duplicamento dos graus de liberdade foi, na verdade, reconhecido com uma característica própria dos formalismos de tempo real - A função de Green nos formalismos de tempo real é representada por matrizes 2×2 . Uma consequência da condição de periodicidade da função de Green que iremos explorar nesse trabalho é que essa condição é equivalente à compactificação do tempo em um circunferência de comprimento $\beta = 1/T$. Isso corresponde a escrever a teoria de campos em uma topologia $S^1 \times \mathbb{R}^{D-1}$, onde S^1 descreve a compactificação do tempo na circunferência de comprimento β e

$D - 1$ corresponde às coordenadas espaciais. No próximo capítulo, essa prescrição será generalizada de modo a contemplar compactificações espaciais.

2.1 Espaço de Hilbert Térmico

A média de um ensemble de um operador B em equilíbrio térmico é dado por

$$\langle B \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr}(e^{-\beta H} B),$$

onde $Z(\beta)$ é a função de partição, H é o hamiltoniano do sistema e $\beta = \frac{1}{T}$, sendo T a temperatura. Neste trabalho, adotamos unidades naturais: $k_B = c = \hbar = 1$, onde k_B é a constante de Boltzmann, c é a velocidade da luz e \hbar é a constante de Planck.

Procuramos um estado térmico, que denotamos por $|0(\beta)\rangle$, tal que podemos expressar o valor esperado de qualquer operador nesse estado de maneira análoga à teoria a temperatura zero, isso é, tal que

$$\langle B \rangle_\beta = \langle 0(\beta) | B | 0(\beta) \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n | B | n \rangle, \quad (2.1.1)$$

onde assumimos que

$$H | n \rangle = E_n | n \rangle$$

e

$$\langle n | m \rangle = \delta_{mn}.$$

Se o estado $|0(\beta)\rangle$ pertence ao espaço de Hilbert \mathcal{H} , então, inserindo a partição da unidade, podemos expressá-lo como uma combinação linear de vetores de \mathcal{H} ,

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|0(\beta)\rangle = \sum_n f_n(\beta) |n\rangle.$$

Sendo assim, o valor esperado do operador B fica dado por

$$\langle B \rangle_\beta = \sum_{n,m} f_n^*(\beta) f_m(\beta) \langle n | B | m \rangle.$$

Essa expressão quando comparada com a eq. (2.1.1) implica que os coeficientes $f_n^*(\beta)$ e $f_m(\beta)$ devam satisfazer

$$f_n^*(\beta)f_m(\beta) = \frac{1}{Z(\beta)}e^{-\beta E_n}\delta_{mn}. \quad (2.1.2)$$

Entretanto, como $f_n^*(\beta)$ e $f_m(\beta)$ são números complexos, essa relação não é possível de ser satisfeita. Isto significa que restringindo-nos ao espaço de Hilbert \mathcal{H} , não conseguimos definir um estado térmico tal que a eq. (2.1.1) seja satisfeita. Nota-se que a relação expressada pela eq. (2.1.2) é semelhante à relação de ortonormalidade entre vetores. De posse dessa observação, uma maneira de lidar com esse problema é introduzir um duplicamento do espaço de Hilbert, de forma que o espaço de Hilbert estendido seja dado pelo produto tensorial entre espaço de Hilbert original e sua cópia, que denotamos por $\tilde{\mathcal{H}}$, sendo o espaço duplicado $\mathcal{H}_T = \mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$. Embora a introdução de um duplicamento do espaço de Hilbert pareça um mecanismo artificial implementado *ad hoc*, este procedimento é, na verdade, do ponto de vista das simetrias, uma consequência natural de quando distinguimos e tratamos de maneira cautelosa os observáveis e os geradores de simetria [17].

Um vetor arbitrário nesse espaço duplicado fica dado então pelo produto tensorial $|n, \tilde{m}\rangle = |n\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle$, onde o estado $|\tilde{m}\rangle$ denota a cópia do estado $|m\rangle$. Procedendo de maneira semelhante, mas considerando $|0(\beta)\rangle$ agora um vetor do espaço de Hilbert duplicado, temos que

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n f_n(\beta)|n, \tilde{n}\rangle,$$

sendo agora o valor esperado,

$$\langle B \rangle_\beta = \sum_{n,m} f_n^*(\beta)f_m(\beta)\langle n, \tilde{n}|B|m, \tilde{m}\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n,m} f_n^*(\beta) f_m(\beta) \langle n|B|m\rangle \delta_{mn} \\
&= \sum_n f_n^*(\beta) f_n(\beta) \langle n|B|n\rangle,
\end{aligned}$$

onde o operador B age apenas nos vetores do espaço de Hilbert não duplicado, isso é, nos vetores sem til,

$$\langle n, \tilde{n}|B|m, \tilde{m}\rangle = \langle n|B|m\rangle \langle \tilde{n}|\tilde{m}\rangle = \delta_{nm} \langle n|B|m\rangle$$

Comparando esse resultado obtido para o valor esperado do observável B com a eq. (2.1.1), temos que, de fato, essa expressão representa a média térmica de um ensemble se os coeficientes $f_n^*(\beta)$ e $f_n(\beta)$ satisfizerem a relação

$$f_n^*(\beta) f_n(\beta) = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta E_n}.$$

Sendo assim, o estado térmico fica dado por

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n e^{-\frac{1}{2}\beta E_n} |n, \tilde{n}\rangle. \quad (2.1.3)$$

Sendo assim, devido ao duplicamento do espaço de Hilbert, um estado de vácuo térmico pode ser introduzido.

2.1.1 Regras de conjugação til

Por razões que ficarão mais claras adiante, é conveniente definir o seguinte operador:

$$\hat{B} = B - \tilde{B}. \quad (2.1.4)$$

O sistema original e o sistema cópia (ou til) estão relacionados pelas regras de conjugação til, que explicitamente são dadas por

1. $(A_i A_j)^\sim = \tilde{A}_i \tilde{A}_j,$
2. $(c A_i + A_j)^\sim = c^* \tilde{A}_i + \tilde{A}_j,$

3. $(A_i^\dagger)^\sim = A_i$,
4. $[A_i, \tilde{A}_j] = 0$.

Essas regras fornecerão os ingredientes para construção de exemplos à temperatura finita em paralelo com a teoria à temperatura zero.

2.2 Osciladores térmicos bosônicos e fermiônicos

Como um exemplo simples do formalismo de DCT, vamos considerar os osciladores bosônicos e fermiônicos, que, mais adiante, serão importantes para introduzir os campos quânticos termalizados. Os osciladores bosônicos e fermiônicos termalizados são definidos a partir da duplicação dos graus de liberdade do sistema. Isso é feito introduzindo-se os operadores til de criação e aniquilação, \tilde{a}^\dagger e \tilde{a} e aplicando as regras de conjugação til nas relações de comutação usuais da teoria à temperatura zero.

2.2.1 Oscilador bosônico

À temperatura zero, desprezando-se a energia de ponto zero, o oscilador bosônico é descrito pelo Hamiltoniano,

$$H = \omega a^\dagger a.$$

O Hamiltoniano para o sistema total, de acordo com a definição expressa na eq. (2.1.4), é dado por

$$\hat{H} = \omega a^\dagger a - \omega \tilde{a}^\dagger \tilde{a}.$$

Os operadores de criação e aniquilação, a e a^\dagger satisfazem a álgebra

$$[a, a^\dagger] = 1; [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0,$$

de modo que aplicando as regras de conjugação til, obtemos a álgebra dos operadores til de criação e aniquilação \tilde{a}^\dagger e \tilde{a} :

$$[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1; [\tilde{a}, \tilde{a}] = [\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}^\dagger] = 0.$$

Denotamos um vetor da base de Fock como

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle,$$

onde $|0\rangle$ é o estado de vácuo, de maneira que um estado arbitrário do espaço de Hilbert duplicado, $\mathcal{H}_T = \mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$, é dado por

$$|n, \tilde{m}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}\sqrt{\tilde{m}!}}(a^\dagger)^n(\tilde{a}^\dagger)^m|0, \tilde{0}\rangle,$$

e o estado térmico por,

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n e^{-n\beta\omega/2} |n, \tilde{n}\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n e^{-n\beta\omega/2} \frac{1}{\sqrt{n!}\sqrt{\tilde{n}!}} (a^\dagger)^n (\tilde{a}^\dagger)^n |0, \tilde{0}\rangle. \end{aligned}$$

Com a normalização $\langle 0(\beta)|0(\beta)\rangle = 1$, segue que

$$Z(\beta) = \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}},$$

e então

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \sqrt{1 - e^{-\beta\omega}} \sum_n \frac{e^{-\beta\omega/2}}{n!} (a^\dagger)^n (\tilde{a}^\dagger)^n |0, \tilde{0}\rangle \\ &= \sqrt{1 - e^{-\beta\omega}} \exp e^{-\beta\omega/2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger |0, \tilde{0}\rangle. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Definindo as novas variáveis

$$\begin{aligned} \cosh \theta(\beta) &\equiv \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega}}} \equiv u(\beta) \\ \sinh \theta(\beta) &\equiv \frac{e^{-\beta\omega/2}}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega}}} \equiv v(\beta), \end{aligned}$$

é possível reescrever o estado $|0(\beta)\rangle$ em termos de um operador unitário $U(\beta)$,

$$|0(\beta)\rangle = U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle,$$

onde $U(\beta) = e^{-iG(\beta)}$ e $G(\beta) = -i\theta(\beta)(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger)$. Essa transformação, que leva o estado de vácuo $|0, \tilde{0}\rangle$ ao estado termalizado $|0(\beta)\rangle$ é chamada de transformação de Bogoliubov.

Através do operador unitário $U(\beta)$, podemos escrever os operadores térmicos, $a^\dagger(\beta)$, $\tilde{a}^\dagger(\beta)$, $a(\beta)$ e $\tilde{a}(\beta)$, em termos dos operadores de criação e aniquilação, a^\dagger , \tilde{a}^\dagger , a e \tilde{a} :

$$a(\beta) = U(\beta)aU^\dagger(\beta) \quad (2.2.2)$$

$$a^\dagger(\beta) = U(\beta)a^\dagger U^\dagger(\beta) \quad (2.2.3)$$

$$\tilde{a}(\beta) = U(\beta)\tilde{a}U^\dagger(\beta) \quad (2.2.4)$$

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) = U(\beta)\tilde{a}^\dagger U^\dagger(\beta). \quad (2.2.5)$$

O significado desses operadores térmicos fica claro ao atuá-los sobre o estado térmico, $|0(\beta)\rangle$,

$$\begin{aligned} a(\beta)|0(\beta)\rangle &= U(\beta)aU^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle \\ &= U(\beta)aU^\dagger(\beta)U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle \\ &= U(\beta)a|0, \tilde{0}\rangle = 0. \end{aligned}$$

O mesmo resultado segue para o operador til \tilde{a} , isso é, os operadores térmicos $a(\beta)$ e $\tilde{a}(\beta)$ tem o mesmo significado de operador de aniquilação, tendo como estado de vácuo o estado $|0(\beta)\rangle$. O espaço de Hilbert térmico é, então, gerado pelos estados

$$\{|0(\beta)\rangle, a^\dagger|0(\beta)\rangle, \tilde{a}^\dagger|0(\beta)\rangle, \dots, \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} (a^\dagger(\beta))^n (\tilde{a}^\dagger(\beta))^m, \dots\}$$

Como a álgebra é invariante por transformações unitárias, então segue que os operadores térmicos satisfazem a mesma álgebra que os operadores não térmicos, ou seja, satisfazem as relações

$$[a(\beta), a^\dagger(\beta)] = [\tilde{a}(\beta), \tilde{a}^\dagger(\beta)] = 1, \quad (2.2.6)$$

com todas as outras relações de comutação sendo zero.

É conveniente ainda, devido a efeitos práticos de manipulação algébrica, escrever os operadores térmicos como combinação linear dos operadores não térmicos. Usando

a forma explícita do operador $U(\beta)$ e as eqs. (2.2.2)-(2.2.5), é fácil estabelecer as seguintes relações,

$$a(\beta) = u(\beta)a - v(\beta)\tilde{a}^\dagger \quad (2.2.7)$$

$$\tilde{a}(\beta) = u(\beta)\tilde{a} - v(\beta)a^\dagger \quad (2.2.8)$$

$$a^\dagger(\beta) = u(\beta)a^\dagger - v(\beta)\tilde{a} \quad (2.2.9)$$

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) = u(\beta)\tilde{a}^\dagger - v(\beta)a, \quad (2.2.10)$$

de onde segue que,

$$\begin{aligned} \tilde{a}^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle &= (u(\beta)\tilde{a}^\dagger - v(\beta)a)|0(\beta)\rangle \\ &= \left(u(\beta)\tilde{a}^\dagger - \frac{v(\beta)}{u(\beta)}\tilde{a}^\dagger \right) |0(\beta)\rangle \\ &= \frac{1}{u(\beta)}\tilde{a}^\dagger|0(\beta)\rangle. \end{aligned}$$

Aplicando a regra de conjugação til, obtemos o efeito do operador térmico de criação sobre o estado térmico

$$a^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle = \frac{1}{u(\beta)}a^\dagger|0(\beta)\rangle,$$

isso é, a menos de um fator de normalização $\frac{1}{u(\beta)}$, o operador $\tilde{a}^\dagger(\beta)$ age sobre o vácuo térmico criando uma partícula. Além disso observamos que aniquilar uma partícula no estado $|0(\beta)\rangle$ é equivalente a criar um partícula til nesse estado, i.e.,

$$a(\beta)|0(\beta)\rangle = 0$$

$$u(\beta)a|0(\beta)\rangle = v(\beta)\tilde{a}^\dagger|0(\beta)\rangle.$$

Invertendo as relações dos operadores térmicos dadas acima, podemos escrever os operadores não térmicos em termos dos operadores térmicos, resultando nas relações

$$a = u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) \quad (2.2.11)$$

$$\tilde{a} = u(\beta)\tilde{a}(\beta) + v(\beta)a^\dagger(\beta) \quad (2.2.12)$$

$$a^\dagger = u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta) \quad (2.2.13)$$

$$\tilde{a}^\dagger = u(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) + v(\beta)a(\beta). \quad (2.2.14)$$

Notemos que, se definirmos um dubleto como

$$A = \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix},$$

então, podemos escrever os operadores térmicos simplificadamente na forma matricial,

$$A(\beta) = \begin{pmatrix} a(\beta) \\ \tilde{a}^\dagger(\beta) \end{pmatrix} = B(\beta) \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix},$$

onde

$$B(\beta) = \begin{pmatrix} u(\beta) & -v(\beta) \\ -v(\beta) & u(\beta) \end{pmatrix}.$$

2.2.2 Osciladores fermiônicos

Para férmions, consideramos $H = \omega a^\dagger a$ tal que os operadores de criação e aniquilação satisfazem as relações de anticomutação

$$\{a, a^\dagger\} = 1; \{a^\dagger, a^\dagger\} = \{a, a\} = 0,$$

de onde segue que o espaço de Hilbert é gerado apenas pelos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, já que o operador número $N = a^\dagger a$ tem autovalores 0 ou 1.

Procedendo de maneira análoga ao sistema bosônico e fixando escolhas de forma que as regras de conjugação til sejam consistentes, os operadores til de criação e aniquilação satisfazem

$$\{\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\} = 1; \{\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}^\dagger\} = \{\tilde{a}, \tilde{a}\} = 0,$$

sendo o espaço de Hilbert duplicado gerado pelos vetores $|0, \tilde{0}\rangle$, $|0, \tilde{1}\rangle$, $|1, \tilde{0}\rangle$, $|1, \tilde{1}\rangle$. Para o estado térmico $|0(\beta)\rangle$, temos que

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n e^{-n\beta\omega/2} |n, \tilde{n}\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} (|0, \tilde{0}\rangle + e^{-\beta\omega/2} |1, \tilde{1}\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} (1 + e^{-\beta\omega/2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0, \tilde{0}\rangle, \end{aligned}$$

onde usamos o fato que $|1, \tilde{1}\rangle = a^\dagger \tilde{a}^\dagger |0, \tilde{0}\rangle$. A condição de normalização $\langle 0(\beta) | 0(\beta) \rangle = 1$ fixa $Z(\beta) = 1 + e^{-\beta\omega}$, de modo que

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\beta\omega}}} (1 + e^{-\beta\omega/2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0, \tilde{0}\rangle. \quad (2.2.15)$$

O valor esperado do operador número N no estado $|0(\beta)\rangle$

$$\langle N \rangle = \langle 0(\beta) | N | 0(\beta) \rangle = \frac{1}{1 + e^{-\beta\omega}}$$

nos dá a conhecida distribuição de Fermi.

Como no caso bosônico, definimos novas variáveis,

$$u(\beta) = \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\beta\omega}}} \quad (2.2.16)$$

$$v(\beta) = \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{+\beta\omega}}}, \quad (2.2.17)$$

consistentes com a relação

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = u(\beta)^2 + v(\beta)^2 = 1,$$

de modo que agora podemos reescrever o estado $|0(\beta)\rangle$ como

$$|0(\beta)\rangle = (\cos \theta + \sin \theta a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0, \tilde{0}\rangle.$$

Observando que

$$(\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^{2n} = (-1)^n |0, \tilde{0}\rangle$$

e expandindo as funções $\sin \theta$ e $\cos \theta$ em série de Taylor, podemos escrever $|0(\beta)\rangle$ como uma transformação unitária do estado $|0, \tilde{0}\rangle$:

$$|0(\beta)\rangle = U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle,$$

onde, como no caso bosônico,

$$U(\beta) = e^{-iG},$$

com

$$G = -i\theta(\tilde{a}a - a^\dagger\tilde{a}^\dagger).$$

Seguindo a prescrição do caso bosônico, introduzimos os operadores térmicos através da transformação unitária $U(\beta)$, obtendo aqueles mesmos operadores dados pelas eqs. (2.2.2)-(2.2.5). Atuando os operadores $a(\beta)$ e $\tilde{a}(\beta)$ sobre $|0(\beta)\rangle$,

$$a(\beta)|0(\beta)\rangle = U(\beta)aU^\dagger(\beta)U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle = 0$$

$$\tilde{a}(\beta)|0(\beta)\rangle = U(\beta)\tilde{a}U^\dagger(\beta)U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle = 0$$

concluimos que $|0(\beta)\rangle$ é o estado de vácuo para os operadores térmicos $a(\beta)$ e $\tilde{a}(\beta)$. Sendo assim, podemos escrever o espaço de Hilbert térmico, gerado pelo seguinte conjunto de estados

$$\{|0(\beta)\rangle, a^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle, \tilde{a}^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle, a^\dagger(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle\}$$

A transformação $U(\beta)$ induz a seguinte transformação dos operadores de criação e aniquilação:

$$a(\beta) = u(\beta)a - v(\beta)\tilde{a}^\dagger \quad (2.2.18)$$

$$\tilde{a}(\beta) = u(\beta)\tilde{a} + v(\beta)a^\dagger \quad (2.2.19)$$

$$a^\dagger(\beta) = u(\beta)a^\dagger - v(\beta)\tilde{a} \quad (2.2.20)$$

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) = u(\beta)\tilde{a}^\dagger + v(\beta)a. \quad (2.2.21)$$

Como a e a^\dagger não pertencem a álgebra térmica, podemos fixar $\tilde{a} = -a$ de forma a manter as relações acima consistentes com as regras de conjugação til.

É interessante notar que,

$$u(\beta)a|0(\beta)\rangle = v(\beta)\tilde{a}^\dagger|0(\beta)\rangle, \quad (2.2.22)$$

que significa que aniquilar uma partícula no vácuo térmico é equivalente a se criar uma partícula til. Agora também fica claro a razão pela qual definimos o operador tal como na eq. (2.1.4). Como podemos ver, os operadores térmicos são autovetores de $\hat{H} = H - \tilde{H}$.

Usando as eq. (2.2.18)-(2.2.21), podemos escrever a representação matricial para os operadores térmicos

$$A(\beta) = \begin{pmatrix} a(\beta) \\ \tilde{a}^\dagger(\beta) \end{pmatrix} = B(\beta) \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix},$$

onde

$$B(\beta) = \begin{pmatrix} u(\beta) & -v(\beta) \\ v(\beta) & u(\beta) \end{pmatrix}.$$

Expostos os ingredientes básicos da *DCT*, procedemos para a construção da teoria de campos à temperatura finita.

2.3 Propagador no tempo real e tempo imaginário

A fim de obter o propagador, vamos tomar como ponto de partida o campo escalar e derivar o propagador térmico no formalismo de tempo real e ver de que maneira se conecta com o propagador no tempo imaginário. Ao longo desse trabalho vamos adotar a métrica $(+, -, -, -)$.

2.4 Campo escalar térmico

A densidade de lagrangiana para o campo escalar térmico na presença de uma fonte externa é dada por

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}}$$

$$= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + J\phi - \frac{1}{2}\partial_\mu\tilde{\phi}\partial^\mu\tilde{\phi} + \frac{1}{2}m^2\tilde{\phi}^2 - J\tilde{\phi}.$$

Definindo o momento canonicamente conjugado

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \frac{\partial\mathcal{L}(\phi, \partial\phi)}{\partial\dot{\phi}} \\ \tilde{\pi}(x) &= \frac{\partial\mathcal{L}(\tilde{\phi}, \partial\tilde{\phi})}{\partial\dot{\tilde{\phi}}},\end{aligned}$$

podemos escrever a densidade de Hamiltoniano,

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} &= \mathcal{H} - \tilde{\mathcal{H}} \\ &= \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 - J\phi - \frac{1}{2}\tilde{\pi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\tilde{\phi})^2 - \frac{1}{2}m^2\tilde{\phi}^2 - \frac{1}{2}m^2\tilde{\phi}^2 + J\tilde{\phi}.\end{aligned}$$

As relações de comutação dos campos são dadas por

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.4.1)$$

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{y})] = [\pi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] = 0. \quad (2.4.2)$$

$$[\tilde{\phi}(t, \mathbf{x}), \tilde{\pi}(t, \mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.4.3)$$

$$[\tilde{\phi}(t, \mathbf{x}), \tilde{\phi}(t, \mathbf{y})] = [\pi(t, \mathbf{x}), \tilde{\pi}(t, \mathbf{y})] = 0. \quad (2.4.4)$$

Os campos térmicos são introduzidos, como antes, a partir da transformação de Bogoliubov. Entretanto, temos uma transformação de Bogoliubov definida para cada um dos infinitos modos, isso é,

$$U(\beta) = \exp \left\{ \sum_k \theta_k(\beta) [a^\dagger(k)\tilde{a}^\dagger(k) - a(k)\tilde{a}(k)] \right\}.$$

O espaço de Hilbert é gerado a partir do vácuo térmico por vetores do tipo

$$[a^\dagger(k_1; \beta)]^{n_1} \cdots [a^\dagger(k_M; \beta)]^{n_M} [\tilde{a}^\dagger(k_1; \beta)]^{m_1} \cdots [\tilde{a}^\dagger(k_N; \beta)]^{m_N} |0(\beta)\rangle,$$

onde

$$|0(\beta)\rangle = U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle \quad (2.4.5)$$

e

$$|0, \tilde{0}\rangle = \bigotimes_k |0, \tilde{0}\rangle. \quad (2.4.6)$$

Introduzindo os campos termalizados, podemos calcular o propagador térmico para o campo escalar usando o vácuo térmico $|0(\beta)\rangle$. Para os campos ϕ e π , temos

$$\begin{aligned} \phi(x; \beta) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi^3)} \frac{1}{2\omega_k} [a(k; \beta)e^{-ikx} + a^\dagger(k; \beta)e^{ikx}] \\ \pi(x; \beta) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi^3)} \frac{i}{2} [-a(k; \beta)e^{-ikx} + a^\dagger(k; \beta)e^{ikx}]. \end{aligned}$$

Aplicando a regra de conjugação til, obtemos para as variáveis til

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(x; \beta) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi^3)} \frac{1}{2\omega_k} [\tilde{a}(k; \beta)e^{+ikx} + \tilde{a}^\dagger(k; \beta)e^{-ikx}]. \\ \tilde{\pi}(x; \beta) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi^3)} \frac{i}{2} [\tilde{a}(k; \beta)e^{ikx} - \tilde{a}^\dagger(k; \beta)e^{-ikx}]. \end{aligned}$$

Invertendo essas relações, isso é, escrevendo os operadores de criação e aniquilação térmicos em termos dos campos, e usando a invariância dos operadores térmicos por transformação de Bogoliubov, podemos usar as relações dadas pelas eqs. (2.4.1)-(2.4.4) para obter as relações de comutação para os operadores de criação e aniquilação térmicos. Como resultado, temos

$$[a(k; \beta), a^\dagger(k'; \beta)] = (2\pi)^3 2k_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

$$[\tilde{a}(k; \beta), \tilde{a}^\dagger(k'; \beta)] = (2\pi)^3 2k_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

com todas as outras relações de comutação sendo zero.

Para o propagador térmico, temos

$$G_0(x - y; \beta) = -i \langle 0(\beta) | T \phi(x) \phi(y) | 0(\beta) \rangle,$$

onde “T” é o operador de ordenamento temporal,

$$\begin{aligned}
\langle 0(\beta) | T\phi(x)\phi(y) | 0(\beta) \rangle &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0(\beta) | \phi(x)\phi(y) | 0(\beta) \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0(\beta) | \phi(y)\phi(x) | 0(\beta) \rangle \\
&= \theta(x^0 - y^0) g(x - y; \beta) + \theta(y^0 - x^0) g(y - x; \beta),
\end{aligned}$$

onde denotamos $g(x - y; \beta) = \langle 0(\beta) | \phi(x)\phi(y) | 0(\beta) \rangle$, e

$$\theta(x^0 - y^0) = \begin{cases} 0, & x^0 - y^0 < 0 \\ 1, & x^0 - y^0 > 0 \end{cases}. \quad (2.4.7)$$

é a função degrau. Calculando $g(x - y; \beta)$ temos,

$$\begin{aligned}
g(x - y; \beta) &= \langle 0(\beta) | \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} [a(k)e^{-ikx} + a^\dagger(k)e^{ikx}] \\
&\quad \times \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} [a(p)e^{-ipy} + a^\dagger(p)e^{ipy}] | 0(\beta) \rangle \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \frac{1}{2\omega_p} (\langle 0(\beta) | a(k)a(p) | 0(\beta) \rangle e^{-i(kx+py)} + \\
&\quad + \langle 0(\beta) | a(k)a^\dagger(p) | 0(\beta) \rangle e^{-i(kx-py)} \\
&\quad \times \langle 0(\beta) | a^\dagger(p)a(k) | 0(\beta) \rangle e^{i(kx-py)} + \langle 0(\beta) | a^\dagger(k)a^\dagger(p) | 0(\beta) \rangle e^{i(kx+py)})
\end{aligned}$$

Precisamos escrever cada operador de criação e aniquilação em termos de seus equivalentes térmicos. Utilizando as relações dadas nas eq. (2.2.11), temos para o primeiro termo,

$$\begin{aligned}
\langle 0(\beta) | a(k)a(p) | 0(\beta) \rangle &= \langle 0(\beta) | (u(k; \beta)a(k; \beta) + v(k; \beta)\tilde{a}^\dagger(k; \beta)) \\
&\quad \times (u(p; \beta)a(p; \beta) + v(p; \beta)\tilde{a}^\dagger(p; \beta)) | 0(\beta) \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

já que

$$\begin{aligned}
a(p) | 0(\beta) \rangle &= 0, \\
a(k; \beta)\tilde{a}^\dagger(p; \beta) | 0(\beta) \rangle &= \tilde{a}^\dagger(p; \beta)a(k; \beta) | 0(\beta) \rangle = 0 \\
\langle 0(\beta) | \tilde{a}^\dagger(k; \beta) &= 0.
\end{aligned}$$

Para o segundo termo,

$$\begin{aligned}
\langle 0(\beta) | a(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{p}) | 0(\beta) \rangle &= \langle 0(\beta) | (u(\mathbf{k}; \beta) a(\mathbf{k}; \beta) + v(\mathbf{k}; \beta) \tilde{a}^\dagger(\mathbf{k}; \beta)) \\
&\quad \times (u(\mathbf{p}; \beta) a^\dagger(\mathbf{p}; \beta) + v(\mathbf{p}; \beta) \tilde{a}(\mathbf{p}; \beta)) | 0(\beta) \rangle \\
&= u(\mathbf{k}; \beta) u(\mathbf{p}; \beta) (2\pi)^3 2k_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}).
\end{aligned}$$

Para o terceiro,

$$\begin{aligned}
\langle 0(\beta) | a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{p}) | 0(\beta) \rangle &= \langle 0(\beta) | (u(\mathbf{k}; \beta) a^\dagger(\mathbf{k}; \beta) + v(\mathbf{k}; \beta) \tilde{a}(\mathbf{k}; \beta)) \\
&\quad \times (u(\mathbf{p}; \beta) a(\mathbf{p}; \beta) + v(\mathbf{p}; \beta) \tilde{a}^\dagger(\mathbf{p}; \beta)) | 0(\beta) \rangle \\
&= v(\mathbf{k}; \beta) v(\mathbf{p}; \beta) (2\pi)^3 2k_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}).
\end{aligned}$$

Para o último,

$$\begin{aligned}
\langle 0(\beta) | a^\dagger(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{p}) | 0(\beta) \rangle &= \langle 0(\beta) | (u(\mathbf{k}; \beta) a^\dagger(\mathbf{k}; \beta) + v(\mathbf{k}; \beta) \tilde{a}(\mathbf{k}; \beta)) \\
&\quad \times (u(\mathbf{p}; \beta) a^\dagger(\mathbf{p}; \beta) + v(\mathbf{p}; \beta) \tilde{a}(\mathbf{p}; \beta)) | 0(\beta) \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Com esses resultados, temos para $g(x - y; \beta)$

$$\begin{aligned}
g(x - y; \beta) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \frac{1}{2\omega_p} (2\pi)^3 2k_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \\
&\quad \times (u(\mathbf{k}; \beta) u(\mathbf{p}; \beta) e^{-i(kx - py)}) \\
&\quad + v(\mathbf{k}; \beta) v(\mathbf{p}; \beta) e^{i(kx - py)} \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} (u^2(\mathbf{k}; \beta) e^{-ik(x-y)} + v^2(\mathbf{k}; \beta) e^{ik(x-y)})
\end{aligned}$$

Como $u^2(\mathbf{k}; \beta) - v^2(\mathbf{k}; \beta) = 1$, então

$$g(x - y; \beta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} [(v^2(\mathbf{k}; \beta) + 1) e^{-ik(x-y)} + v^2(\mathbf{k}; \beta) e^{ik(x-y)}],$$

o que leva ao propagador

$$\begin{aligned}
iG_0(x-y; \beta) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \theta(x^0 - y^0) \left((v^2(k; \beta) + 1) e^{-ik(x-y)} + v^2(k; \beta) e^{ik(x-y)} \right) \\
&+ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \theta(y^0 - x^0) \left((v^2(k; \beta) + 1) e^{-ik(y-x)} + v^2(k; \beta) e^{ik(y-x)} \right) \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left(\theta(x^0 - y^0) e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{-ik(y-x)} \right) \\
&+ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} v^2(k; \beta) \left(\theta(x^0 - y^0) e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{-ik(y-x)} \right) \\
&+ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} v^2(k; \beta) \left(\theta(x^0 - y^0) e^{ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{ik(y-x)} \right) \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left(\theta(x^0 - y^0) e^{-i\omega_k(x^0 - y^0)} + \theta(y^0 - x^0) e^{i\omega_k(x^0 - y^0)} \right) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \\
&+ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} v^2(k; \beta) \left(\theta(x^0 - y^0) e^{-i\omega_k(x^0 - y^0)} + \theta(y^0 - x^0) e^{i\omega_k(x^0 - y^0)} \right) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \\
&+ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} v^2(k; \beta) \left(\theta(x^0 - y^0) e^{i\omega_k(x^0 - y^0)} + \theta(y^0 - x^0) e^{-i\omega_k(x^0 - y^0)} \right) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})},
\end{aligned}$$

onde na última igualdade, fizemos a mudança de variável $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ no segundo termo de cada soma. Usando a representação integral da função θ , obtemos

$$\begin{aligned}
G_0(x-y; \beta) &= -i \left(\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + v^2(k; \beta) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right. \\
&\quad \left. + v^2(k; \beta) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 - i\epsilon} \right) \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} G_0(k) + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} v^2(k; \beta) [G_0(k) - G_0^*(k)].
\end{aligned}$$

Em notação simplificada, podemos escrever

$$G_0(x-y; \beta) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} G_0(k; \beta), \quad (2.4.8)$$

onde

$$G_0(k; \beta) = G_0(k) + v^2(k; \beta) [G_0(k) - G_0^*(k)].$$

Usando a definição de $\delta(x)$:

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{x - i\epsilon} - \frac{1}{x + i\epsilon} \right]. \quad (2.4.9)$$

podemos ainda escrever

$$\begin{aligned} G_0(k) - G_0^*(k) &= \frac{-1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{1}{k^2 - m^2 - i\epsilon} \\ &= 2\pi i \delta(k^2 - m^2) \end{aligned}$$

E então,

$$G_0(k, \beta) = G_0(k) + 2\pi i v^2(k; \beta) \delta(k^2 - m^2).$$

Este resultado é interessante, pois isola totalmente no propagador a dependência da temperatura.

Vamos agora deduzir uma relação fundamental na teoria de campos térmicos. Escrevendo o propagador da DCT e utilizando a representação de Heisenberg para os campos, temos

$$\begin{aligned} G_0(x - y; \beta) &= -i \langle 0(\beta) | T[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] | 0(\beta) \rangle \\ &= -i \text{Tr} \left\{ \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta H} T[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] \right\} \\ &= -i \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} \left\{ T[\phi(\mathbf{x}, t) e^{-\beta H} e^{\beta H} \phi(\mathbf{y}, t) e^{-\beta H}] \right\} \\ &= -i \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} \left\{ T[\phi(\mathbf{x}, t) e^{-\beta H} e^{iH(t-i\beta)} \phi(\mathbf{y}) e^{-iH(t-i\beta)}] \right\} \\ &= -i \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} \left\{ T[e^{-\beta H} \phi(\mathbf{y}, t - i\beta) \phi(\mathbf{x}, t)] \right\}, \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

onde usamos a propriedade cíclica do traço. Essa relação é conhecida como relação de Kubo-Martin-Schwinger, ou relação de KMS. Isso significa que o propagador é periódico no eixo do tempo imaginário, com período β . A fim de se satisfazer a relação de KMS, apenas valores discretos para a frequência são permitidos,

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta},$$

para bósons e

$$\omega_n = \frac{2\pi(n + 1/2)}{\beta}$$

para férmions, onde $n \in \mathbb{Z}$. Essas frequências são conhecidas como frequências de Matsubara, embora essa relaao entre o inverso da temperatura e o tempo imaginário tenha sido primeiro notada por Bloch [41].

Sendo assim, também podemos escrever o propagador como

$$G_0(x - y, \beta) = \frac{-1}{i\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ik_n \cdot x}}{k_n^2 - m^2 + i\epsilon},$$

onde $k_n = (k_n^0, \mathbf{k})$. Esse último propagador é o propagador do formalismo de tempo imaginário. Sendo assim, observamos que existe uma conexão entre o propagador do formalismo de Matsubara e o propagador de DCT, dado pela eq. (2.4.8). Essa conexão é estabelecida partindo-se de aspectos topológicos e considerando as condioes de periodicidade da funao de Green. Isto será explorado no próximo capítulo.

Introduzindo a notao duplicada,

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \tilde{\phi}(x) \end{pmatrix},$$

temos para o propagador térmico,

$$\begin{aligned} iG(x - y; \beta)^{ab} &= \langle 0, \tilde{0} | T[\phi(x; \beta)^a \phi(y; \beta)^b] | 0, \tilde{0} \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k G(k; \beta)^{ab} e^{-ik(x-y)}, \end{aligned}$$

onde $G(k; \beta)^{ab} = \mathcal{B}^{-1}(k_0) G_0(k)^{ab} \mathcal{B}(k_0)$, e

$$B = \begin{pmatrix} u(\beta) & -v(\beta) \\ -v(\beta) & u(\beta) \end{pmatrix}.$$

com

$$G_0(k)^{ab} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{k^2 - m^2 - i\epsilon} \end{pmatrix}.$$

Usando essas definioes, podemos escrever as componentes de $G(k; \beta)^{ab}$,

$$G(k, \beta)^{11} = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} - 2\pi i n(k_0) \delta(k^2 - m^2),$$

$$G(k, \beta)^{22} = \frac{-1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} - 2\pi i n(k_0) \delta(k^2 - m^2),$$

$$G(k, \beta)^{12} = G(k; \beta)^{21} = -2\pi i [n(k_0) + n(k_0)^2]^{1/2} \delta(k^2 - m^2),$$

onde $n(k_0) = v_k(\beta)^2$ está relacionado à estatística de Bose-Einstein via

$$n(k_0) = v_k(\beta)^2 = \frac{e^{\beta\omega}}{1 - e^{-\beta\omega}}.$$

Alguns aspectos desse resultado devem ser destacados. Primeiro, o propagador adquire uma estrutura matricial de duas dimensões. Esse é um aspecto que foi observado como característico das teorias térmicas de tempo real e são usualmente referidos como duplicamento dos graus de liberdade. Também, a função de Green à temperatura finita se separa em uma soma de dois termos, um independente da temperatura, correspondendo a função de Green da teoria à temperatura zero, e outro termo que explicitamente depende da temperatura, preservando a mesma estrutura do propagador na abordagem de Schwinger-Keldish, diferindo apenas nos termos não diagonais.

2.5 Campo de Dirac Térmico

A teoria para campo de Dirac térmico é construída de maneira análoga aos campos de Klein Gordon térmico. A densidade de lagrangiana para o campo de Dirac térmico na presença de uma fonte externa é dada por

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}} &= \mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}} \\ &= \frac{1}{2} \bar{\psi}(x) [\gamma \cdot i \overleftrightarrow{\partial} - m^2] \psi(x) + \bar{\eta}(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \eta(x) \\ &\quad - \frac{1}{2} \bar{\psi}(x) [(\gamma^T)^\dagger \cdot i \overleftrightarrow{\partial} - m^2] \psi(x) + \tilde{\eta}(x) \tilde{\psi}(x) + \tilde{\bar{\psi}}(x) \tilde{\eta}(x). \end{aligned}$$

A partir da densidade de lagrangiana, definindo as densidades de momentos canonicamente conjugados associados aos campos $\psi(x)$ e $\tilde{\psi}(x)$,

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\psi^\dagger(x) \\ \tilde{\pi}(x) &= \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\tilde{\psi}}} = -i\tilde{\psi}^\dagger(x) \end{aligned}$$

podemos escrever o Hamiltoniano \hat{H} ,

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \int \hat{\mathcal{H}} d^3x = \int [\hat{\pi}(x)\dot{\psi}(x) - \hat{\mathcal{L}}] d^3x \\ &= \int [\pi(x)\dot{\psi}(x) - \mathcal{L} - \tilde{\pi}(x)\tilde{\dot{\psi}}(x) + \tilde{\mathcal{L}}] d^3x.\end{aligned}$$

A teoria de campos é introduzida impondo-se as relações de comutação a tempos iguais

$$\{\psi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)\} = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.5.1)$$

$$\{\psi(\mathbf{x}, t), \psi(\mathbf{y}, t)\} = \{\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)\} = 0 \quad (2.5.2)$$

$$\{\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t), \tilde{\pi}(\mathbf{y}, t)\} = -i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.5.3)$$

$$\{\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t), \tilde{\psi}(\mathbf{y}, t)\} = \{\tilde{\pi}(\mathbf{x}, t), \tilde{\pi}(\mathbf{y}, t)\} = 0. \quad (2.5.4)$$

Como no campo escalar, os operadores térmicos $\psi(x; \beta)$ e $\pi(x; \beta)$ são introduzidos a partir da transformação de Bogoliubov, existindo agora uma transformação de Bogoliubov para cada um dos modos do campo, de modo que para $\psi(x; \beta)$ e $\pi(x; \beta)$ expandidos em modos, $\psi(x; \beta)$ e $\pi(x; \beta)$ ficam definidos pelas relações

$$\begin{aligned}\psi(x; \beta) &= U(\beta)\psi(x)U^{-1}(\beta) \\ \pi(x; \beta) &= U(\beta)\pi(x)U^{-1}(\beta),\end{aligned}$$

onde

$$U(\beta) = \exp \left\{ \sum_k \{ \theta_{c,k} [c^\dagger(k)\tilde{c}^\dagger(k) - c(k)\tilde{c}(k)] + \theta_{d,k} [d^\dagger(k)\tilde{d}^\dagger(k) - d(k)\tilde{d}(k)] \} \right\},$$

e $c(k)$ e $d(k)$ são operadores de aniquilação para partícula e antipartícula, respectivamente, e $\theta_{c,k}, \theta_{d,k}$ são definidas através das relações

$$\begin{aligned}\sin \theta_{c,k} = v_c(k, \beta) : v_c^2(k, \beta) &= \frac{1}{e^{\beta(\omega_k - \mu_c)} + 1} \\ \sin \theta_{d,k} = v_d(k, \beta) : v_d^2(k, \beta) &= \frac{1}{e^{\beta(\omega_k + \mu_d)} + 1},\end{aligned}$$

onde μ_c e μ_d são os potenciais químicos e $v_c^2(k, \beta)$ e $v_d^2(k, \beta)$ são, respectivamente, as funções de distribuição de partículas e antipartículas, satisfazendo as relações $v_c^2(k, \beta) + u_c^2(k, \beta) = 1$ e $v_d^2(k, \beta) + u_d^2(k, \beta) = 1$.

Como a álgebra é invariante por transformações de Bogoliubov, os campos térmicos também satisfazem a álgebra dada pelas eq. (2.5.1)-(2.5.4).

O espaço de Hilbert é gerado a partir do vácuo térmico pelos vetores

$$[c^\dagger(k_1; \beta)]^{n_1} \dots [d^\dagger(k_M; \beta)]^{n_M} [\tilde{c}^\dagger(k_1; \beta)]^{m_1} \dots [\tilde{d}^\dagger(k_N; \beta)]^{m_N} |0(\beta)\rangle,$$

onde $n_i, m_i = 0, 1$ e $|0(\beta)\rangle = U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle$ com $|0, \tilde{0}\rangle$ dado pela eq. (2.4.6). Expandindo os campos em modos e aplicando a regra de conjugação til,

$$\begin{aligned} \psi(x; \beta) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 [c_\alpha(k; \beta) u^{(\alpha)}(k) e^{-ikx} + d_\alpha^\dagger(k; \beta) v^{(\alpha)}(k) e^{ikx}] \\ \bar{\psi}(x; \beta) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 [c_\alpha^\dagger(k; \beta) \bar{u}^{(\alpha)}(k) e^{ikx} + d_\alpha(k; \beta) \bar{v}^{(\alpha)}(k) e^{-ikx}] \\ \tilde{\psi}(x; \beta) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 [\tilde{c}_\alpha(k; \beta) u^{*(\alpha)}(k) e^{ikx} + \tilde{d}_\alpha^\dagger(k; \beta) v^{*(\alpha)}(k) e^{-ikx}] \\ \tilde{\bar{\psi}}(x; \beta) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 [\tilde{c}_\alpha^\dagger(k; \beta) \bar{u}^{*(\alpha)}(k) e^{-ikx} + \tilde{d}_\alpha(k; \beta) \bar{v}^{*(\alpha)}(k) e^{ikx}], \end{aligned}$$

podemos inverter essas relações para escrever os operadores de criação e aniquilação em termos dos campos e usar as relações dadas nas eqs. (2.5.1)-(2.5.4) para os campos térmicos para obter as relações de anticomutação entre os operadores de criação e aniquilação. Isso resulta nas seguintes relações:

$$\begin{aligned} \{c_\alpha(k; \beta), c_\gamma^\dagger(k'; \beta)\} &= \{d_\alpha(k; \beta), d_\gamma^\dagger(k'; \beta)\} = (2\pi)^3 \frac{k_0}{m} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\alpha\gamma}, \\ \{\tilde{c}_\alpha(k; \beta), \tilde{c}_\gamma^\dagger(k'; \beta)\} &= \{\tilde{d}_\alpha(k; \beta), \tilde{d}_\gamma^\dagger(k'; \beta)\} = (2\pi)^3 \frac{k_0}{m} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\alpha\gamma}. \end{aligned}$$

As relações para os operadores térmicos de criação e aniquilação em termos dos operadores não térmicos obtidas nas eqs. (2.2.7)-(2.2.10) são ainda válidas aqui no

contexto do campo de Dirac, com exceção que agora temos dois tipos de operadores de criação e aniquilação, um associado a partícula e outro à antipartícula, fazendo-se necessário a introdução de um índice de spin. Incorporando o índice de spin no modo k com esse entendimento, explicitamente as relações são

$$\begin{aligned} c(k; \beta) &= u_b(k; \beta)c(k) - v_b(k; \beta)\tilde{c}^\dagger(k) \\ d(k; \beta) &= u_b(k; \beta)d(k) - v_b(k; \beta)\tilde{d}^\dagger(k), \end{aligned}$$

ou invertendo,

$$c(k) = u_c(k; \beta)c(k; \beta) + v_c(k; \beta)\tilde{c}^\dagger(k; \beta) \quad (2.5.5)$$

$$d(k) = u_d(k; \beta)d(k; \beta) + v_d(k; \beta)\tilde{d}^\dagger(k; \beta). \quad (2.5.6)$$

Consideramos agora o propagador térmico para o campo de Dirac, definido por

$$iS_0(x - y; \beta) = \theta(x^0 - y^0)\langle 0(\beta) | \psi(x)\bar{\psi}(y) | 0(\beta) \rangle - \theta(y^0 - x^0)\langle 0(\beta) | \bar{\psi}(y)\psi(x) | 0(\beta) \rangle.$$

Como no caso do campo de Klein Gordon, escrevendo os campos explicitamente e utilizando as eqs. (2.5.5) e (2.5.6), achamos que

$$S_0(x - y; \beta) = (i\gamma \cdot \partial + m)G_0(x - y, \beta), \quad (2.5.7)$$

onde,

$$G_0(x - y; \beta) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} G_0(k; \beta),$$

com

$$G_0(k; \beta) = G_0(k) + v^2(k; \beta)[G_0(k) - G_0^*(k)].$$

Embora essa função de Green tenha a mesma estrutura da função de Green para o campo escalar, dada pela eq. (2.4.8), devemos lembrar que aqui temos a função de distribuição de férmions $v_{c,d}^2(k, \beta)$.

Os resultados obtidos neste capítulo podem ser utilizados para a análise topológica das teorias de campo a temperaturas finitas. Isto será revisto no capítulo seguinte.

Capítulo 3

Campos Compactificados

Nesse capítulo efeitos de compactificação no espaço-tempo são analisados. O principal resultado nessa análise é que uma teoria quântica de campos à temperatura finita é equivalente a uma teoria de campos escrita em uma topologia $\Gamma_D^d = \mathbb{S}^{l_1} \times \mathbb{S}^{l_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{D-d}$, onde d corresponde ao número de dimensões compactificadas, D corresponde à dimensão da variedade e \mathbb{S}^{l_i} é a circunferência cujo comprimento é L_i . O efeito de temperatura é implementado via compactificação do tempo em uma circunferência cujo comprimento é β . As equações de campo locais escritas em um espaço de Minkowski não são alteradas pela estrutura topológica do espaço-tempo. Embora as equações de campos sejam preservadas, quando campos quantizados em topologias não triviais são considerados, condições adicionais similares às condições de fronteira são impostas. Como consequência, alguns fenômenos físicos altamente dependentes de condições de fronteira surgem. Esse é o caso do efeito Casimir e das transições de fase, onde no último, a temperatura crítica de transição depende dos parâmetros de compactificação [17]. Ambos os casos serão considerados nos próximos capítulos.

3.1 Compactificação do tempo

Vamos considerar primeiro o caso da compactificação no tempo, i.e., na direção de x^0 . Considerando uma variedade quadridimensional, o caso em questão corresponde à

topologia $\Gamma_4^1 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3$, onde \mathbb{S}^1 é a circunferência de comprimento $\beta = \frac{1}{kT}$.

A condição de KMS na eq. (2.4.10) estabelece seguinte relação de periodicidade na função de Green,

$$G(x - y; \beta)|_{x^0 = 0} = 0 = G(x - y; \beta)|_{x^0 = -i\beta}.$$

É conveniente escrever $G(x - y; \beta)$ em termos das funções $G^>(x - y; \beta)$ e $G^<(x - y; \beta)$ de tal maneira que

$$G(x - y; \beta) = \theta(x^0 - y^0)G^>(x - y; \beta) + \theta(y^0 - x^0)G^<(x - y; \beta)$$

Da condição de periodicidade, segue que

$$G^<(x - y; \beta)|_{x^0 = 0} = G^>(x - y; \beta)|_{y^0 = -i\beta},$$

com

$$\begin{cases} x^0 = [0, -i\beta] \\ y^0 = [0, -i\beta] \end{cases}.$$

Na representação de Fourier, devido à periodicidade da função de Green, temos que

$$G(x - y; \beta) = \frac{1}{-i\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-ip_n(x-y)} G(p_n; \beta), \quad (3.1.1)$$

onde $n = 0, \pm 1, \dots$ e

$$p_n = \left(\frac{2\pi n}{-i\beta}, \mathbf{p} \right)$$

e

$$G(p_n; \beta) = -\frac{1}{p_n^2 - m^2},$$

sendo $p_{0n} = \frac{2\pi n}{-i\beta}$ a frequência de Matsubara. Invertendo a relação dada pela eq. (3.1.1),

temos

$$G(p_n; \beta) = \int_0^{-i\beta} dx^0 \int d^3x e^{ip_n(x-y)} G(x - y; \beta),$$

que também podemos escrever como

$$G(p_n; \beta) = \int_0^{-i\beta} dx^0 \int d^3x e^{ip_n(x-y)} G^>(x; \beta) \quad (3.1.2)$$

para $y^0 = 0$. Escrevendo a transformada de Fourier de $G(x - y; \beta)$, temos

$$\begin{aligned}\bar{G}(p; \beta) &= \int d^4x e^{ipx} \theta(x^0) G^>(x; \beta) + \int d^4x e^{ipx} \theta(-x^0) G^<(x; \beta) \\ &= \bar{G}^1(p; \beta) + \bar{G}^2(p; \beta).\end{aligned}$$

Escrevendo

$$G^>(x; \beta) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \bar{G}^>(p; \beta) \quad (3.1.3)$$

e usando a representação integral da função θ ,

$$\theta(x^0) = \frac{1}{2\pi i} \int d\tau \frac{e^{ix^0\tau}}{\tau - i\epsilon},$$

podemos calcular $\bar{G}^1(p; \beta)$ e $\bar{G}^2(p; \beta)$. Temos assim,

$$\begin{aligned}\bar{G}^1(p; \beta) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\pi i} \int d^4x \int d\tau d^4k e^{i(p-k)x} e^{ix^0\tau} \frac{\bar{G}^>(k; \beta)}{\tau - i\epsilon} \\ &= \frac{1}{2(\pi)^2} \frac{1}{2i} \int dx^0 dk^0 d\tau e^{-i(k^0 - p^0 - \tau)x^0} \frac{\bar{G}^>(k^0, p^1, p^2, p^3)}{\tau - i\epsilon} \\ &= i \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{\bar{G}^>(k^0, p^1, p^2, p^3)}{p^0 - k^0 + i\epsilon}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\bar{G}^2(p; \beta) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\pi i} \int d^4x \int d\tau d^4k e^{i(p-k)x} e^{-ix^0\tau} \frac{\bar{G}^<(k; \beta)}{\tau - i\epsilon} \\ &= \frac{1}{2(\pi)^2} \frac{1}{2i} \int dx^0 dk^0 d\tau e^{-i(k^0 - p^0 + \tau)x^0} \frac{\bar{G}^<(k^0, p^1, p^2, p^3)}{\tau - i\epsilon} \\ &= -i \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{\bar{G}^<(k^0, p^1, p^2, p^3)}{p^0 - k^0 - i\epsilon}.\end{aligned}$$

E a transformada de Fourier fica dada então por

$$\bar{G}(p; \beta) = i \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{\bar{G}^>(k^0, p^1, p^2, p^3)}{p^0 - k^0 + i\epsilon} - i \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{\bar{G}^<(k^0, p^1, p^2, p^3)}{p^0 - k^0 - i\epsilon}. \quad (3.1.4)$$

Note que a condição de periodicidade impõe que

$$G^<(x^0, \mathbf{x}; \beta) = G^>(x^0 - i\beta, \mathbf{x}; \beta),$$

que podemos ainda escrever como

$$\begin{aligned}
G^<(x^0, \mathbf{x}; \beta) &= G^>(x^0, \mathbf{x}; \beta) + (-i\beta) \frac{\partial}{\partial x^0} G^>(x^0, \mathbf{x}; \beta) + \dots \frac{(-i\beta)^n}{n!} \frac{\partial^n}{(\partial x^0)^n} G^>(x^0, \mathbf{x}; \beta) \\
&= e^{-i\beta\partial_0} G^>(x^0, \mathbf{x}; \beta),
\end{aligned}$$

o que, na representação de Fourier, nos leva a

$$\begin{aligned}
\bar{G}^<(p, \beta) &= \int d^4x e^{ipx} G^<(x; L_1) \\
&= \int d^4x e^{ipx} e^{-i\beta\partial_0} G^>(x; \beta) \\
&= \int \frac{1}{(2\pi)^4} d^4x d^4k e^{ipx} e^{-i\beta\partial_0} e^{-ikx} \bar{G}^>(k; \beta) \\
&= \int \frac{1}{(2\pi)^4} d^4x d^4k e^{ipx} (1 + (-i\beta\partial_0) + \dots \frac{(-i\beta\partial_0)^n}{n!}) e^{-ikx} \bar{G}^>(k; \beta) \\
&= \int \frac{1}{(2\pi)^4} d^4x d^4k e^{i(p-k)x} e^{-\beta k_0} \bar{G}^>(k; \beta) \\
&= e^{-\beta p_0} \bar{G}^>(p; \beta).
\end{aligned}$$

Definindo

$$f_\beta(p_0) = \frac{1}{e^{\beta p_0} - 1}, \quad (3.1.5)$$

podemos escrever

$$\bar{G}^<(p; \beta) = f_\beta(p_0) A(p; \beta) \quad (3.1.6)$$

$$\bar{G}^>(p; \beta) = [f_\beta(p_0) + 1] A(p; \beta), \quad (3.1.7)$$

e então, a eq. (3.1.4), em termos dessa definição, fica dada por

$$\begin{aligned}
\bar{G}(p, \beta) &= i \int \frac{dk^0}{2\pi} \left[\frac{[f_\beta(k_0) + 1] A(k_0, p_1, p_2, p_3; \beta)}{p^0 - k^0 + i\epsilon} - \frac{f_\beta(k_0) A(k_0, p_1, p_2, p_3; \beta)}{p^0 - k^0 - i\epsilon} \right] \\
&= i \int \frac{dk^0}{2\pi} \left[\frac{A(k_0, p_1, p_2, p_3; \beta)}{p^0 - k^0 + i\epsilon} + f_\beta(k_0) A(k_0, p_1, p_2, p_3; \beta) \right. \\
&\quad \left. \times \left\{ \frac{1}{p^0 - k^0 + i\epsilon} - \frac{1}{p^0 - k^0 - i\epsilon} \right\} \right] \\
&= i \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{A(k_0, p_1, p_2, p_3; \beta)}{p^0 - k^0 + i\epsilon} + i \int \frac{dk^0}{2\pi} (-2\pi i) f_\beta(k_0) A(k_0, p_1, p_2, p_3; \beta) \delta(p_0 - k_0) \\
&= i \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{A(k_0, p_1, p_2, p_3; \beta)}{p^0 - k^0 + i\epsilon} + f_\beta(p_0) A(p). \quad (3.1.8)
\end{aligned}$$

Ainda precisamos achar a forma explícita da função espectral $A(k_0, \mathbf{p}; \beta)$. O meio de atingir esse objetivo é usar a função conhecida $G(p_n; \beta)$ e extendê-la para uma função contínua $G(p; \beta)$. Calculando explicitamente $G(p_n; \beta)$ a partir da eq. (3.1.2) e usando a eq. (3.1.3), temos

$$\begin{aligned}
G(p_n; \beta) &= \int_0^{-i\beta} dx_0 \int dx_1 dx_2 dx_3 e^{ip_n x} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \bar{G}^>(k; \beta) \\
&= \int_0^{-i\beta} dx_0 \int dx_1 dx_2 dx_3 \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (f_\beta(k_0) + 1) A(k; \beta) e^{-i(k-p_n)x} \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} dx^1 dx^2 dx^3 [f_\beta(k^0) + 1] A(k; \beta) e^{-i(\mathbf{p}_n - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} \int_0^{-i\beta} dx^0 e^{i(p_n^0 - k^0)x^0} \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} dx^1 dx^2 dx^3 (f_\beta(k^0) + 1) A(k; \beta) e^{-i(\mathbf{p}_n - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} \frac{-i}{p_n^0 - k^0} [e^{i(p_n^0 - k^0)\beta} - 1].
\end{aligned}$$

Entretanto,

$$p_n^0 = \frac{2\pi n}{-i\beta},$$

e então

$$G(p_n; \beta) = \frac{i}{2\pi} \int dk^0 \frac{A(k_0, \mathbf{p})}{p_n^0 - k^0} \quad (3.1.9)$$

A continuação analítica de $G(p_n; \beta) \rightarrow G(p; \beta)$ nos dá

$$\mathcal{G}_0(p) = \frac{i}{2\pi} \int dk^0 \frac{A(k_0, \mathbf{p}; \beta)}{p^0 - k^0},$$

e então, usando a definição de $\mathcal{G}_0(p)$, onde agora p^0 é uma variável contínua, podemos achar a função espectral $A(k_0, \mathbf{p}; \beta)$. Temos que

$$\mathcal{G}_0(p) = \frac{-1}{p_0^2 - \omega_p^2},$$

de modo que

$$\mathcal{G}_0(p_0 + i\epsilon, \mathbf{p}) = \frac{-1}{p_0^2 - \omega_p^2 + i\delta} = i \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{A(k_0, \mathbf{p})}{p^0 - k^0 + i\epsilon},$$

e

$$\mathcal{G}_0(p_0 - i\epsilon, \mathbf{p}) = \frac{-1}{p_0^2 - \omega_p^2 - i\delta} = i \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{A(k_0, \mathbf{p})}{p^0 - k^0 - i\epsilon}.$$

Calculando a diferença, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_0(p_0 + i\epsilon, \mathbf{p}) - \mathcal{G}_0(p_0 - i\epsilon, \mathbf{p}) &= i \int \frac{dk^0}{2\pi} A(k_0, \mathbf{p}) \left[\frac{1}{p^0 - k^0 + i\epsilon} - \frac{1}{p^0 - k^0 - i\epsilon} \right] \\
&= i \int \frac{dk^0}{2\pi} A(k_0, \mathbf{p}) (-2\pi i) \delta(p_0 - k_0) \\
&= A(p).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_0(p_0 + i\epsilon, \mathbf{p}) - \mathcal{G}_0(p_0 - i\epsilon, \mathbf{p}) &= \frac{-1}{p_0^2 - \omega_p^2 + i\delta} + \frac{1}{p_0^2 - \omega_p^2 - i\delta} \\
&= 2\pi i \delta(p_0^2 - \omega_p^2),
\end{aligned}$$

i.e, a função espectral é dada por

$$A(p) = 2\pi i \delta(p_0^2 - \omega_p^2).$$

Podemos usar a função espectral para obter a representação de Fourier da função de Green. Substituindo esse resultado na eq. (3.1.8), temos

$$\bar{G}(p, \beta) = i \int \frac{dk^0}{2\pi} (2\pi i) \frac{\delta(k_0^2 - \omega_p^2)}{p^0 - k^0 + i\epsilon} + f_\beta(p_0) A(p)$$

Usando a identidade

$$\delta(x^2 - y^2) = \frac{1}{2|y|} [\delta(x - y) + \delta(x + y)],$$

obtemos, depois de um pouco de álgebra,

$$\begin{aligned}
\bar{G}(p, \beta) &= -\frac{1}{p_0^2 - \omega_p^2 + i\epsilon} + f_\beta(p_0) A(p) \\
&= G_0(p) + f_\beta(p_0) [G_0(p) - G_0^*(p)],
\end{aligned}$$

onde a função $f_\beta(p_0)$ é reescrita como $f_\beta(p_0) = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\beta p_0})^n$. E, finalmente, podemos escrever

$$G(x - y; \beta) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} (G_0(p) + f_\beta(p_0) [G_0(p) - G_0^*(p)]). \quad (3.1.10)$$

A partir desse resultado podemos observar que todo o efeito topológico da compactificação se encontra separado da contribuição do espaço plano. Além disso, o efeito de temperatura introduzido via o formalismo de Matsubara é equivalente à teoria escrita na topologia $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3$, cujo comprimento da circunferência é β .

3.2 Compactificação espacial

Vamos considerar agora o caso de uma compactificação espacial, i.e, $\Gamma_4^1 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3$, com a compactificação ao longo de x_1 , com comprimento de circunferência de \mathbb{S}_1 igual a L_1 . Para esse caso a função de Green satisfaz a seguinte condição de periodicidade

$$G(x^0, x^1, x^2, x^3) = G(x^0, x^1 + L_1, x^2, x^3) = G(x + L_1 n_1), \quad (3.2.1)$$

onde $n_1 \equiv n_1^\mu = (0, 1, 0, 0)$. A condição de periodicidade em x_1 implica que $0 \leq x \leq L_1$ enquanto que outras variáveis correm no intervalo $(-\infty, +\infty)$. A análise que aqui será conduzida para uma compactificação espacial seguirá os mesmos passos do caso para a compactificação no tempo.

A expansão de Fourier da função de Green satisfazendo a condição na eq. (3.2.1) é dada pela seguinte expressão:

$$G(x - y; L_1) = \frac{1}{L_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp_0 dp_2 dp_3 e^{-ip_n(x-y)} G(p_n; L_1), \quad (3.2.2)$$

onde

$$p_n = (p_0, \frac{2\pi n}{L_1}, p_2, p_3), \quad (3.2.3)$$

e

$$G(p_n; L_1) = \frac{-1}{p_n^2 - m^2}.$$

Invertendo a eq. (3.2.2), temos que

$$G(p_n; L_1) = \int_0^{L_1} dx_1 \int dx_0 dx_2 dx_3 e^{ip_n(x-y)} G(x - y; L_1).$$

Escrevendo o propagador em termos da função degrau, temos

$$G(x - y; L_1) = \theta(x^1 - y^1)G^>(x - y; L_1) + \theta(y^1 - x^1)G^<(x - y; L_1). \quad (3.2.4)$$

A condição de periodicidade a função de Green implica que

$$G^<(x; L_1)|_{x_1=0} = G^>(x; L_1)|_{x_1=L},$$

e então, podemos escrever

$$G(p_n; L_1) = \int_0^{L_1} dx_1 \int dx_0 dx_2 dx_3 e^{ip_n x} G^>(x; L_1). \quad (3.2.5)$$

Tomando a transformada de Fourier de $G(x - y; L_1)$, que denotamos por $\bar{G}(p, L_1)$, temos que

$$\begin{aligned} \bar{G}(p, L_1) &= \int d^4 x e^{ipx} \theta(x^1) G^>(x; L_1) + \int d^4 x e^{ipx} \theta(-x^1) G^<(x; L_1) \\ &= \bar{G}^{(1)}(p, L_1) + \bar{G}^{(2)}(p, L_1). \end{aligned}$$

Escrevendo

$$G^>(x; L_1) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \bar{G}^>(p; L_1) \quad (3.2.6)$$

e usando a representação integral da função θ ,

$$\theta(x^1) = \frac{1}{2\pi i} \int d\tau \frac{e^{ix^1 \tau}}{\tau - i\epsilon},$$

podemos calcular $\bar{G}^{(1)}(p, L_1)$. Temos assim,

$$\begin{aligned} \bar{G}^{(1)}(p, L_1) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\pi i} \int d^4 x \int d\tau d^4 k e^{i(p-k)x} e^{ix^1 \tau} \frac{\bar{G}^>(k; L_1)}{\tau - i\epsilon} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2i} \int dk^1 dx^1 d\tau e^{-i(p^1 - k^1 - \tau)x^1} \frac{\bar{G}^>(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)}{\tau - i\epsilon} \\ &= i \int \frac{dk^1}{2\pi} \frac{\bar{G}^>(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)}{k^1 - p^1 + i\epsilon}. \end{aligned}$$

Para $\bar{G}^{(2)}(p, L_1)$,

$$\begin{aligned}\bar{G}^{(2)}(p, L_1) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\pi i} \int d^4x \int d\tau d^4x d^4k e^{i(p-k)x} e^{-ix^1\tau} \frac{\bar{G}^<(p; L_1)}{\tau - i\epsilon} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2i} \int dk^1 dx^1 d\tau e^{-i(p^1-k^1+\tau)x^1} \frac{\bar{G}^<(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)}{\tau - i\epsilon} \\ &= -i \int \frac{dk^1}{2\pi} \frac{\bar{G}^<(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)}{k^1 - p^1 - i\epsilon}.\end{aligned}$$

Substituindo tais resultados na eq. (??), temos que

$$\bar{G}(p, L_1) = i \int \frac{dk^1}{2\pi} \left[\frac{\bar{G}^>(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)}{k^1 - p^1 + i\epsilon} - \frac{\bar{G}^<(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)}{k^1 - p^1 - i\epsilon} \right]. \quad (3.2.7)$$

Note que, a condição de periodicidade impõe que

$$\begin{aligned}G^<(x^0, x^1, x^2, x^3; L_1) &= G^>(x^0, x^1 + L^1, x^2, x^3; L_1) \\ &= G^>(x^0, x^1, x^2, x^3; L_1) + L_1 \frac{\partial}{\partial x^1} G^>(x^0, x^1, x^2, x^3; L_1) + \dots \\ &\quad + \frac{(L_1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{(\partial x^1)^n} G^>(x^0, x^1, x^2, x^3; L_1) \\ &= e^{L_1 \partial_1} G^>(x^0, x^1, x^2, x^3; L_1),\end{aligned}$$

o que, na representação de Fourier, nos leva a

$$\begin{aligned}\bar{G}^<(p, L_1) &= \int d^4x e^{ipx} G^<(x; L_1) \\ &= \int d^4x e^{ipx} e^{L_1 \partial_1} G^>(x; L_1) \\ &= \int \frac{1}{(2\pi)^4} d^4x d^4k e^{ipx} e^{L_1 p^1} e^{-ikx} \bar{G}^>(k; L_1) \\ &= \int \frac{1}{(2\pi)^4} d^4x d^4k e^{ipx} (1 + L_1 \partial_1 + \dots \frac{(L_1 \partial_1)^n}{n!}) e^{-ikx} \bar{G}^>(k; L_1) \\ &= \int \frac{1}{(2\pi)^4} d^4x d^4k e^{i(p-k)x} e^{iL_1 k^1} \bar{G}^>(k; L_1) \\ &= e^{iL_1 p^1} \bar{G}^>(p; L_1).\end{aligned}$$

Vamos definir a função

$$f_{L_1}(p^1) = \frac{1}{e^{iL_1 p^1} - 1}, \quad (3.2.8)$$

de tal maneira que possamos escrever

$$\bar{G}^>(p; L_1) = f_{L_1}(p^1)A(p; L_1) \quad (3.2.9)$$

$$\bar{G}^<(p; L_1) = [f_{L_1}(p^1) + 1]A(p; L_1), \quad (3.2.10)$$

e então, a eq. (3.2.7), em termos dessa definição, fica dada por

$$\bar{G}(p, L_1) = i \int \frac{dk^1}{2\pi} \left[\frac{f_{L_1}(k^1)A(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)}{k^1 - p^1 + i\epsilon} - \frac{[f_{L_1}(k^1) + 1]A(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)}{k^1 - p^1 - i\epsilon} \right]. \quad (3.2.11)$$

Ainda precisamos achar a forma explícita da função espectral $A(p; L_1)$. Como no caso da compactificação do tempo, procedemos extendendo a função conhecida $G(p_n; L_1)$ para a função contínua $G(p; L_1)$. Calculando explicitamente $G(p_n; L_1)$ a partir da eq. (3.2.5) e utilizando a eq. (3.2.6), temos

$$\begin{aligned} G(p_n; L_1) &= \int_0^{L_1} dx_1 \int dx_0 dx_2 dx_3 e^{ip_n x} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \bar{G}^>(k; L_1) \\ &= \int_0^{L_1} dx_1 \int dx_0 dx_2 dx_3 \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f_{L_1}(k^1) A(k; L_1) e^{-i(k-p_n)x} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} dx^0 dx^2 dx^3 f_{L_1}(k^1) A(k; L_1) e^{-i(k^0-p_n^0)x^0} e^{i(k^2-p_n^2)x^2} e^{i(k^3-p_n^3)x^3} \\ &\quad \times \int_0^{L_1} dx^1 e^{-i(p_n^1-k^1)x^1} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} dx^0 dx^2 dx^3 f_{L_1}(k^1) A(k; L_1) e^{-i(k^0-p_n^0)x^0} e^{i(k^2-p_n^2)x^2} e^{i(k^3-p_n^3)x^3} \\ &\quad \times \frac{i}{p_n^1 - k^1} \frac{1}{f_{L_1}(k_1)} \\ &= \frac{i}{2\pi} \int dk^1 \frac{A(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)}{p_n^1 - k^1}. \end{aligned}$$

A continuação analítica de $G(p_n; L_1) \rightarrow G(p; L_1)$ nos dá

$$\mathcal{G}_0(p) = \frac{i}{2\pi} \int dk^1 \frac{A(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)}{p^1 - k^1},$$

e então, usando a definição de $\mathcal{G}_0(p)$, onde agora p^1 é uma variável contínua, podemos achar a função espectral $A(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)$. Temos que

$$\mathcal{G}_0(p_0, p_1 + i\epsilon, p_2, p_3) = \frac{-1}{(p^0)^2 - (p^1 + i\epsilon)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 - m^2}$$

$$= i \int \frac{dk^1}{2\pi} \frac{A(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)}{p^1 - k^1 + i\epsilon},$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0(p_0, p_1 - i\epsilon, p_2, p_3) &= \frac{-1}{(p^0)^2 - (p^1 - i\epsilon)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 - m^2} \\ &= i \int \frac{dk^1}{2\pi} \frac{A(p_0, k_1, p_2, p_3)}{p^1 - k^1 - i\epsilon}. \end{aligned}$$

Calculando a diferença, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0(p_0, p_1 + i\epsilon, p_2, p_3) - \mathcal{G}_0(p_0, p_1 - i\epsilon, p_2, p_3) &= i \int dk^1 A(p_0, k_1, p_2, p_3) \left[\frac{1}{p^1 - k^1 + i\epsilon} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{p^1 - k^1 - i\epsilon} \right] \\ &= A(p). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0(p_0, p_1 + i\epsilon, p_2, p_3) - \mathcal{G}_0(p_0, p_1 - i\epsilon, p_2, p_3) &= \frac{-1}{(p^0)^2 - (p^1 + i\epsilon)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2} \\ &\quad + \frac{1}{(p^0)^2 - (p^1 - i\epsilon)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2} \\ &= -2\pi i \delta(p^2 - m^2), \end{aligned}$$

i.e, a função espectral é dada por

$$A(p) = -2\pi i \delta(p^2 - m^2).$$

Agora podemos usar a função espectral para obter a representação de Fourier da função de Green. Substituindo esse resultado na eq. (3.2.11), temos

$$\begin{aligned} \bar{G}(p, L_1) &= i \int \frac{dk^1}{2\pi} \left[\frac{f_{L_1}(k^1) A(p_0, k_1, p_2, p_3)}{k^1 - p^1 + i\epsilon} - \frac{[f_{L_1}(k^1) + 1] A(p_0, k_1, p_2, p_3)}{k^1 - p^1 - i\epsilon} \right] \\ &= i \int \frac{dk^1}{2\pi} f_{L_1}(k^1) A(p_0, k_1, p_2, p_3) \left(\frac{1}{k^1 - p^1 + i\epsilon} - \frac{1}{k^1 - p^1 - i\epsilon} \right) \\ &\quad - i \int \frac{dk^1}{2\pi} \frac{A(p_0, k_1, p_2, p_3)}{k^1 - p^1 - i\epsilon} \\ &= i \int \frac{dk^1}{2\pi} f_{L_1}(k^1) A(p_0, k_1, p_2, p_3) (-2\pi i) \delta(k^1 - p^1) \end{aligned}$$

$$-i \int \frac{dk^1}{2\pi} (-2\pi i) \frac{\delta(\omega_p^2 - (k^1)^2)}{k^1 - p^1 - i\epsilon},$$

onde usamos a definição da função delta dada na eq. (2.4.9) e o fato que

$$\omega_p^2 = p_0^2 - p_2^2 - p_3^2 - m^2.$$

Utilizando a identidade

$$\delta(x^2 - y^2) = \frac{1}{2|y|} [\delta(x - y) + \delta(x + y)],$$

obtemos

$$\begin{aligned} \bar{G}(p, L_1) &= f_{L_1}(p^1) A(p_0, p_1, p_2, p_3) - \frac{1}{p^2 - m^2 - i\epsilon} \\ &= -\frac{1}{p^2 - m^2 - i\epsilon} + f_{L_1}(p^1) [G_0(p) - G_0^*(p)], \end{aligned}$$

onde $f_{L_1}(p^1) = \sum_{l=1}^{\infty} e^{-ilL_1 p^1}$. E, finalmente, podemos escrever o propagador

$$G(x - y; L_1) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} (G_0(p) + f_{L_1}(p^1) [G_0(p) - G_0^*(p)]).$$

Como no caso da compactificação temporal, observamos o propagador se separa em duas partes, uma correspondendo ao propagador para o espaço plano e a outra contendo todo efeito de compactificação.

3.3 Compactificação do tempo e de uma dimensão espacial

Seguindo a mesma prescrição das seções anteriores, prosseguimos agora para a compactificação do tempo e de uma dimensão espacial, i.e, consideramos a topologia $\Gamma_4^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$. O tempo, consideramo-lo compactificado em uma circunferência \mathbb{S}^1 , de comprimento β e tomamos a compactificação espacial ao longo de x^1 com comprimento de circunferência L_1 . As dimensões não compactificadas são contínuas, enquanto as dimensões compactificadas, por serem definidas em intervalos finitos, envolve

apenas frequências discretas. Com essa consideração, podemos escrever a expansão de Fourier da função de Green,

$$G(x - y; \beta, L_1) = \frac{1}{L_1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{-i\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \int dp_2 dp_3 e^{-ip_{nl}(x-y)} G(p_{nl}; \beta, L_1), \quad (3.3.1)$$

onde

$$p_{nl} = \left(\frac{2\pi n}{-i\beta}, \frac{2\pi n}{L_1}, p^2, p^3 \right)$$

e

$$G(p_{nl}; \beta, L_1) = \frac{-1}{p_{nl}^2 - m^2}.$$

Escrevendo a função de Green como

$$G(x - y; \beta, L_1) = \frac{1}{L_1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} G_l(x - y; \beta), \quad (3.3.2)$$

onde

$$G_l(x - y; \beta) = \frac{1}{-i\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \int dp_2 dp_3 e^{-ip_{nl}(x-y)} G(p_{nl}; \beta),$$

procedemos da mesma maneira que anteriormente para achar a função $G(x - y; \beta)$. O resultado será similar àquele encontrado na eq. (3.1.10),

$$G_l(x - y; \beta) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp_0 dp_2 dp_3 e^{-ip_l(x-y)} (G_0(p_l) + f_\beta(p_0)[G_0(p_l) - G_0^*(p_l)]),$$

ou, de maneira condensada,

$$G_l(x - y; \beta) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp_0 dp_2 dp_3 e^{-ip_l(x-y)} \bar{G}(p_l; \beta),$$

onde

$$\bar{G}(p_l; \beta) = G_0(p_l) + f_\beta(p_0)[G_0(p_l) - G_0^*(p_l)].$$

Substituindo esse resultado na eq. (3.3.2), temos que

$$G(x - y; \beta, L_1) = \frac{1}{L_1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp_0 dp_2 dp_3 e^{-ip_n(x-y)} \bar{G}(p_l; \beta).$$

Resta agora compactificar a dimensão espacial ao longo da direção x^1 . Usando o resultado deduzido na seção anterior, obtemos

$$G(x - y; \beta, L_1) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp^4 e^{ip(x-y)} (\bar{G}(p; \beta) + f_{L_1}(p_1)[\bar{G}(p; \beta) - \bar{G}^*(p; \beta)])$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{ip(x-y)} (G_0(p) + [f_\beta(p_0) + f_{L_1}(p_1)][G_0(p) - G_0^*(p)] \\
&+ 2f_{L_1}(p_1)f_\beta(p_0)[G_0(p) - G_0^*(p)]).
\end{aligned}$$

Simplificando a notação, podemos escrever

$$G(x-y; \beta, L_1) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{ip(x-y)} (G_0(p) + f_{\beta, L_1}(p_0, p_1)[G_0(p) - G_0^*(p)]),$$

onde

$$f_{\beta, L_1}(p_0, p_1) = f_\beta(p_0) + f_{L_1}(p_1) + 2f_\beta(p_0)f_{L_1}(p_1).$$

As expressões obtidas separadamente para a compactificação do tempo e do espaço, podem ser reobtidas como caso limite da relação acima, isso é, tomando os limites quando $\beta \rightarrow \infty$ ou $L_1 \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}
f_{L_1}(p_1) &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} f_{\beta, L_1}(p_0, p_1) \\
f_\beta(p_0) &= \lim_{L_1 \rightarrow \infty} f_{\beta, L_1}(p_0, p_1).
\end{aligned}$$

Nos casos acima consideramos condições periódicas, de modo que tratamos de campos bosônicos. Para férmions o mesmo tipo de análise pode ser conduzida. Entretanto, neste caso, condições antiperiódicas devem ser impostas na função de Green. A condição de antiperiodicidade nas coordenadas é equivalente ao “modelo de sacola”, no qual o campo dos férmions encontram-se confinados dentro da sacola e o qual fornece um modelo consistente na descrição fenomenológica do co/deconfinamento dos quarks. O interesse neste modelo, desde que se foi proposto, se deve a tentativa de se obter uma descrição satisfatória do confinamento de quarks em hadrons. No próximo capítulo vamos essa equivalência para explorar o efeito Casimir baseado em campos compactificados.

3.4 Compactificação em d dimensões

O mesmo procedimento utilizado para se obter as funções de Green para os campos compactificados no tempo e em uma dimensão espacial pode ser aplicado para se obter

uma generalização para n dimensões compactificadas para ambos bósons e férmions em uma variedade de dimensão D . Essa topologia corresponde ao caso $\Gamma_D^d = \mathbb{S}^{l_1} \times \dots \times \mathbb{S}^{l_d} \times \dots \times \mathbb{R}^{D-d}$, onde $d = 1 + N$, e N denota o número de compactificações espaciais. Considerando o conjunto de parâmetros de compactificação $\alpha_0 = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N)$, o resultado de tal generalização é dado por

$$v_\eta^2(k_{(\alpha)}; \alpha) = \sum_{s=1}^{N+1} \sum_{\{\sigma_s\}} \left(\prod_{n=1}^s f(\alpha_{\sigma_n}) \right) 2^{s-1} \times \sum_{l_{\sigma_1}, \dots, l_{\sigma_s}=1}^{\infty} (-\eta)^{s + \sum_{r=1}^s l_{\sigma_r}} \exp \left(- \sum_{j=1}^s \alpha_{\sigma_j} l_{\sigma_j} k_{\sigma_j} \right), \quad (3.4.1)$$

onde $k_{(\alpha)} = (k_0, \dots, k_N)$, $f(\alpha_j) = 0$ para $\alpha_j = 0$ e $f(\alpha_j) = 1$ para $\alpha_j \neq 0$, $\{\sigma_s\}$ denota o conjunto de todas as combinações com s elementos, $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s\}$ dos primeiros $N + 1$ números naturais $(1, \dots, N)$ ordenados de tal maneira que $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_s$ e, para bósons, $\eta = -1$ e, para férmions, $\eta = 1$. Para bósons, a função de Green é dada por

$$G(x - y; \alpha) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \{G_0(k) + v_B^2(k_\alpha; \alpha)[G_0(k) - G_0^*]\},$$

e para férmions,

$$S(x - y; \alpha) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \{S_0(k) + v_F^2(k_\alpha; \alpha)[S_0(k) - S_0^*]\}.$$

Devido a estrutura similar desses propagadores e dos propagadores obtidos no formalismo de DCT nas eqs (2.4.8) e (2.5.7), é natural proceder na construção de uma teoria de campos em uma topologia Γ_D^d utilizando o apparatus da DCT. A construção seguirá em paralelo com aquela desenvolvida no capítulo 3, mas agora teremos campos α -dependentes. Isso mostrará que a função de Green para campos compactificados é uma generalização da função de Green da DCT.

Capítulo 4

Efeito Casimir para o campo eletromagnético

Neste capítulo aplicaremos a teoria de campos desenvolvida para campos compactificados para explorar o efeito Casimir na topologia Γ_D^d , onde D denota a dimensão da variedade considerada e d o número de dimensões compactificadas. A previsão teórica do efeito Casimir data desde a década de 50 [42], quando Casimir mostrou que, devido às flutuações do vácuo, o campo eletromagnético confinado entre duas placas condutoras separadas por uma distância “ a ” dava origem a uma força atrativa dada pela pressão $P = -\pi^2/240a^4$. Entretanto, não foi até passados quase 50 anos que o efeito foi constatado experimentalmente [43] dentro de uma faixa de erro aceitável, em concordância com a teoria com uma incerteza de 5% . Desde sua previsão, o efeito Casimir tem sido explorado para diferentes campos e em uma variedade de configurações [44–49], bem como para suas aplicações em nanotecnologias e microeletrônica [45, 50].

No contexto de topologias torodais, o efeito Casimir para ambos bósons e férmions foi analisado considerando-se diferentes configurações [51]. Por exemplo, o efeito Casimir para bósons e férmions foi analisado na topologia Γ_4^2 , com uma compactificação espacial e uma temporal e o caso simétrico de uma caixa cúbica, isso é, na topologia Γ_4^4 com todas as quatro dimensões do espaço-tempo compactificadas. Para o primeiro caso,

considerou-se uma compactificação no tempo imaginário, que corresponde ao efeito de temperatura, e uma compactificação ao longo do eixo x^3 em uma circunferência de comprimento $2a$. Para ambos férmions e bósons, mostrou-se que, no limite de altas temperaturas, tanto a energia de Casimir bem como a pressão para a configuração em questão são positivas, além de suas respectivas expressões serem dominadas pelos termos correspondentes à radiação de corpo negro, isso é, dominadas por termos $\sim T^4$. Para baixas temperaturas, mostrou-se que tanto a energia quanto a pressão são negativas, existindo, assim, uma curva crítica que leva valores negativos de energia e pressão a valores positivos. Para o segundo caso, considerou-se uma compactificação no tempo imaginário e a compactificação dos outros três eixos x^1, x^2, x^3 em uma circunferência de mesmo comprimento $2a$, concluindo que, para essa configuração, uma transição de valores negativos para valores positivos de pressão ocorre à medida que a temperatura aumenta. Devemos enfatizar que a compactificação $l = 2a$ é equivalente as condições de contorno de Neumann [17]. Neste capítulo e no capítulo que se segue adotaremos essa compactificação a fim de seguir em paralelo com trabalho de Saito [52].

A fim de se obter um melhor entendimento de como efeito Casimir pode depender dos parâmetros de compactificação, casos mais gerais precisam ser considerados. Neste capítulo, primeiro deduzimos o tensor energia-momento para o campo eletromagnético utilizando o método de campos compactificados. Este é um resultado já conhecido na literatura [51] que aqui deduzimos para fins pedagógicos e a fim de tornar suave a transição para o resultado deste trabalho. O efeito Casimir emerge devido à mudança da energia de ponto zero causada pela compactificação - Explicitamente, é calculado como a diferença entre o tensor energia-momento para os campos compactificados e o tensor energia-momento para os campos no espaço plano. Em seguida, consideramos o efeito Casimir para bósons na topologia $\Gamma_4^3 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$, com os eixos espaciais x^1, x^2 e x^3 compactificados em circunferências de diferentes comprimentos dados, respectivamente, por $L_1 = 2a_1, L_2 = 2a_2$ e $L_3 = 2a_3$. Depois implementamos a tempe-

ratura a partir da compactificação do tempo em uma circunferência de comprimento $L = \beta$ a fim de analisar o efeito de temperatura. O estudo das componentes $\mathcal{T}^{00(11)}$ e $\mathcal{T}^{33(11)}$ do tensor energia-momento nessa topologia corresponde ao estudo do efeito Casimir em um hipertoro.

4.1 O estado de vácuo do campo eletromagnético

O campo eletromagnético é descrito pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

O momento canonicamente conjugado ao potencial vetor A_ν é

$$\pi^\mu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A_\mu)},$$

de maneira que as componentes são

$$\begin{aligned}\pi^0 &= 0 \\ \pi^i &= \dot{A}^i - \partial^i A^0 = E^i\end{aligned}$$

Como $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$, conseqüentemente o vetor potencial satisfaz a seguinte equação:

$$[g^{\mu\nu}\square - \partial^\mu\partial^\nu]A_\nu(x) = 0.$$

No calibre de Coulomb, $A^0 = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, e a equação para o vetor potencial se reduz à

$$\square A_\nu(x) = 0.$$

Para o campo eletromagnético livre, o Hamiltoniano é dado por

$$H = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \omega_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}}^{(\lambda)\dagger} a_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} + \frac{1}{2} \right),$$

onde $\lambda = 1, 2$ denota os estados de polarização do fóton e onde os operadores $a_{\mathbf{k}}^{(\lambda)\dagger}$ e $a_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}$ satisfazem a relação de comutação usual $[a_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}, a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')\dagger}] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\delta_{\lambda,\lambda'}$. Somando sobre os estados de polarização, observa-se que a energia do estado fundamental é

$$H_{vac} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \omega_{\mathbf{k}}.$$

Somando sobre todos os modos k , isso contribui uma quantidade infinita no cálculo do valor esperado de H no estado de vácuo. Para contornar esse problema, em geral, essa contribuição é subtraída de H por imposição da simetria de Lorentz e, posteriormente, aplicando o ordenamento normal, de maneira que, para uma teoria formulada no espaço-tempo plano, a energia do estado de vácuo é zero. Entretanto, situações em que condições adicionais como condições de fronteira são implementadas, por exemplo, via espaço-tempos não triviais (planos ou curvados), topologias e geometrias não triviais, implicam em uma modificação no estado fundamental. Isso acontece devido à mudança da variedade de fundo da teoria. Não somente isso, essa diferença entre o caso não trivial e o caso no espaço tempo plano é mensurável e é o que chamamos de Efeito Casimir.

No que concerne a avaliação da energia de Casimir em configurações arbitrárias, pode-se destacar, especialmente, dois métodos que tem sido usados na literatura [53], o método da soma sobre os modos e o método das funções de Green. O primeiro método consiste em executar diretamente a soma infinita das energias correspondentes a cada modo normal, tomando como definição da energia de Casimir (energia de vácuo) a diferença de energia entre a energia de ponto zero na presença de condições de contorno e a energia de vácuo livre, isso é, livre de condições de contorno. No método das funções de Green, a energia de Casimir é obtida a partir da componente T^{00} do tensor energia momento do vácuo, o qual também define-se como uma diferença, entretanto, sendo agora a diferença entre o tensor energia momento do vácuo sujeito a condições de contorno específicas e o tensor energia momento livre (sem vínculos). Claramente, ambos os métodos requerem a introdução de esquemas de regularização para lidar

com divergências intrinsecamente relacionadas a ambas formulações. Neste trabalho exploramos o método das funções de Green, uma vez que esse método mostra-se mais adequado quando consideramos o campo eletromagnético em uma topologia Γ_D^d .

4.1.1 Tensor energia-momento

Agora prosseguimos para o cálculo do valor esperado do tensor energia momento no vácuo. O tensor energia momento para o campo eletromagnético é dado por

$$T^{\mu\lambda}(x) = -F^{\mu\alpha}(x)F^\lambda{}_\alpha(x) + \frac{1}{4}g^{\mu\lambda}F_{\nu\rho}(x)F^{\nu\rho}(x).$$

Como o produto de dois operadores em um mesmo ponto do espaço-tempo não é bem definido, o que leva a divergências no valor esperado do vácuo, utilizamos o método de regularização de "point splitting" a fim de contornar este problema. O método consiste em tomar o produto de operadores em pontos diferentes do espaço-tempo, tomando o limite de separação zero no final do cálculo. Nesse caso, o tensor energia-momento fica dado por

$$T^{\mu\lambda}(x) = \lim_{x \rightarrow x'} T \left\{ -F^{\mu\nu}(x)F^\lambda{}_\nu(x') + \frac{1}{4}g^{\mu\lambda}F_{\nu\rho}(x)F^{\nu\rho}(x') \right\}$$

onde T é o operador ordenamento temporal dado por

$$\begin{aligned} T[F^{\mu\nu}(x)F^{\lambda\rho}(x')] &= F^{\mu\nu}(x)F^{\lambda\rho}(x')\theta(x_0 - x'_0) + F^{\lambda\rho}(x')F^{\mu\nu}(x)\theta(x'_0 - x_0) \\ &:= \mathcal{F}^{\mu\nu,\lambda\rho}(x, x'). \end{aligned}$$

Podemos, então, escrever o tensor energia momento como

$$T^{\mu\lambda}(x) = \lim_{x \rightarrow x'} \left\{ -\mathcal{F}^{\mu\nu,\lambda}{}_\nu(x, x') + \frac{1}{4}g^{\mu\lambda}\mathcal{F}^{\nu\rho}{}_{\nu\rho}(x, x') \right\}.$$

A função θ se relaciona com a função delta de Dirac via a expressão

$$\partial^\mu\theta(x_0 - x'_0) = n_0^\mu\delta(x_0 - x'_0),$$

onde n_0^μ é a m -ésima componente do quadri vetor $n_0 = (1, 0, 0, 0)$. Usando as relações de comutação para os campos, podemos calcular $\mathcal{F}^{\mu\nu,\lambda\rho}(x, x')$, o que nos dará

$$\mathcal{F}^{\mu\nu,\lambda\rho}(x, x') = \Gamma^{\mu\nu,\lambda\rho,\alpha\beta}(x, x')T[A_\alpha(x)A_\beta(x')]$$

$$- n_0^\mu \delta(x_0 - x'_0) I^{\nu, \lambda \rho}(x, x') + n_0^\nu \delta(x_0 - x'_0) I^{\mu, \lambda \rho}(x, x'), \quad (4.1.1)$$

onde

$$\Gamma^{\mu\nu, \lambda\rho, \alpha\beta} = (g^{\nu\alpha} \partial^\mu - g^{\mu\alpha} \partial^\nu)(g^{\rho\beta} \partial'^\lambda - g^{\lambda\beta} \partial'^\rho),$$

e

$$I^{\mu, \lambda\rho}(x, x') = [A^\mu(x), F^{\lambda\rho}(x')]$$

$$I^{\nu, \lambda\rho}(x, x') = [A^\nu(x), F^{\lambda\rho}(x')].$$

Para mostrar a relação dada pela eq. (4.1.1), vamos primeiro calcular o primeiro termo. Temos que

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu\nu, \lambda\rho, \alpha\beta}(x, x') T[A_\alpha(x) A_\beta(x')] &= (g^{\nu\alpha} \partial^\mu - g^{\mu\alpha} \partial^\nu)(g^{\rho\beta} \partial'^\lambda - g^{\lambda\beta} \partial'^\rho) T[A_\alpha(x) A_\beta(x')] \\ &= (g^{\nu\alpha} \partial^\mu - g^{\mu\alpha} \partial^\nu)(g^{\rho\beta} \partial'^\lambda - g^{\lambda\beta} \partial'^\rho) \\ &\quad \times [A_\alpha(x) A_\beta(x') \theta(x_0 - x'_0) + A_\beta(x) A_\alpha(x') \theta(x'_0 - x_0)] \\ &= (g^{\nu\alpha} \partial^\mu - g^{\mu\alpha} \partial^\nu) \Lambda_0, \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

onde denotamos

$$\Lambda_0 = (g^{\rho\beta} \partial'^\lambda - g^{\lambda\beta} \partial'^\rho) [A_\alpha(x) A_\beta(x') \theta(x_0 - x'_0) + A_\beta(x) A_\alpha(x') \theta(x'_0 - x_0)].$$

Calculando Λ_0 , obtemos

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= (g^{\rho\beta} \partial'^\lambda - g^{\lambda\beta} \partial'^\rho) [A_\alpha(x) A_\beta(x') \theta(x_0 - x'_0) + A_\beta(x) A_\alpha(x') \theta(x'_0 - x_0)] \\ &= g^{\rho\beta} \partial'^\lambda [A_\alpha(x) A_\beta(x') \theta(x_0 - x'_0)] + g^{\rho\beta} \partial'^\lambda [A_\beta(x') A_\alpha(x) \theta(x'_0 - x_0)] \\ &\quad - g^{\lambda\beta} \partial'^\rho [A_\alpha(x) A_\beta(x') \theta(x_0 - x'_0)] - g^{\lambda\beta} \partial'^\rho [A_\beta(x') A_\alpha(x) \theta(x'_0 - x_0)] \\ &= g^{\rho\beta} A_\alpha(x) \partial'^\lambda A_\beta(x') \theta(x_0 - x'_0) - g^{\rho\beta} n_0^\mu A_\alpha(x) A_\beta(x') \delta(x'_0 - x_0) \\ &\quad + g^{\rho\beta} \partial'^\lambda A_\beta(x') A_\alpha(x) \theta(x'_0 - x_0) + g^{\rho\beta} n_0^\mu A_\beta(x') A_\alpha(x) \delta(x'_0 - x_0) \\ &\quad - g^{\lambda\beta} A_\alpha(x) \partial'^\rho A_\beta(x') \theta(x_0 - x'_0) + g^{\lambda\beta} n_0^\rho A_\alpha(x) A_\beta(x') \delta(x'_0 - x_0) \\ &\quad - g^{\lambda\beta} \partial'^\rho A_\beta(x') A_\alpha(x) \theta(x'_0 - x_0) - g^{\lambda\beta} n_0^\lambda A_\beta(x') A_\alpha(x) \delta(x'_0 - x_0). \end{aligned}$$

Substituindo esse resultado na eq. (4.1.2), temos

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mu\nu,\lambda\rho,\alpha\beta}(x, x')T[A_\alpha(x)A_\beta(x')] &= (g^{\nu\alpha}\partial^\mu - g^{\mu\alpha}\partial^\nu) \\
&\times [g^{\rho\beta}A_\alpha(x)\partial'^\lambda A_\beta(x')\theta(x_0 - x'_0) \\
&+ g^{\rho\beta}\partial'^\lambda A_\beta(x')A_\alpha(x)\theta(x'_0 - x_0) \\
&- g^{\lambda\beta}A_\alpha(x)\partial'^\rho A_\beta(x')\theta(x_0 - x'_0) \\
&- g^{\lambda\beta}\partial'^\rho A_\beta(x')A_\alpha(x)\theta(x'_0 - x_0)]
\end{aligned}$$

Denotemos $\Gamma^{\mu\nu,\lambda\rho,\alpha\beta}(x, x')T[A_\alpha(x)A_\beta(x')] := \Gamma$. Então

$$\begin{aligned}
\Gamma &= g^{\nu\alpha}g^{\rho\beta}\partial^\mu A_\alpha(x)\partial'^\lambda A_\beta(x')\theta(x_0 - x'_0) + g^{\nu\alpha}g^{\rho\beta}n_0^\mu A_\alpha(x)\partial'^\lambda A_\beta(x')\delta(x_0 - x'_0) \\
&+ g^{\nu\alpha}g^{\rho\beta}\partial'^\lambda A_\beta(x')\partial^\mu A_\alpha(x)\theta(x'_0 - x_0) - g^{\nu\alpha}g^{\rho\beta}n_0^\mu\partial'^\lambda A_\beta(x')A_\alpha(x)\delta(x_0 - x'_0) \\
&- g^{\nu\alpha}g^{\lambda\beta}\partial^\mu A_\alpha(x)\partial'^\rho A_\beta(x')\theta(x_0 - x'_0) - g^{\nu\alpha}g^{\lambda\beta}n_0^\mu A_\alpha(x)\partial'^\rho A_\beta(x')\delta(x_0 - x'_0) \\
&- g^{\nu\alpha}g^{\lambda\beta}\partial'^\rho A_\beta(x')\partial^\mu A_\alpha(x)\theta(x'_0 - x_0) + g^{\nu\alpha}g^{\lambda\beta}n_0^\mu\partial'^\rho A_\beta(x')A_\alpha(x)\delta(x_0 - x'_0) \\
&- g^{\mu\alpha}g^{\rho\beta}\partial^\nu A_\alpha(x)\partial'^\lambda A_\beta(x')\theta(x_0 - x'_0) - g^{\mu\alpha}g^{\rho\beta}n_0^\nu A_\alpha(x)\partial'^\lambda A_\beta(x')\delta(x_0 - x'_0) \\
&- g^{\mu\alpha}g^{\rho\beta}\partial'^\lambda A_\beta(x')\partial^\nu A_\alpha(x)\theta(x'_0 - x_0) + g^{\mu\alpha}g^{\rho\beta}n_0^\nu\partial'^\lambda A_\beta(x')A_\alpha(x)\delta(x_0 - x'_0) \\
&+ g^{\mu\alpha}g^{\lambda\beta}\partial^\nu A_\alpha(x)\partial'^\rho A_\beta(x')\theta(x_0 - x'_0) + g^{\mu\alpha}g^{\lambda\beta}n_0^\nu A_\alpha(x)\partial'^\rho A_\beta(x')\delta(x_0 - x'_0) \\
&+ g^{\mu\alpha}g^{\lambda\beta}\partial'^\rho A_\beta(x')\partial^\nu A_\alpha(x)\theta(x'_0 - x_0) - g^{\mu\alpha}g^{\lambda\beta}n_0^\nu\partial'^\rho A_\beta(x')A_\alpha(x)\delta(x_0 - x'_0).
\end{aligned}$$

Para simplificar essa expressão, é conveniente reescrevê-la em termos de tensor

$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Usando a métrica para subir os índices, obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \partial^\mu A^\nu(x)\partial'^\lambda A^\rho(x')\theta(x_0 - x'_0) + n_0^\mu A^\nu(x)\partial'^\lambda A^\rho(x')\delta(x_0 - x'_0) \\
&+ \partial'^\lambda A^\rho(x')\partial^\mu A^\nu(x)\theta(x'_0 - x_0) - n_0^\mu\partial'^\lambda A^\rho(x')A^\nu(x)\delta(x_0 - x'_0) \\
&- \partial^\mu A^\nu(x)\partial'^\rho A^\lambda(x')\theta(x_0 - x'_0) - n_0^\mu A^\nu(x)\partial'^\rho A^\lambda(x')\delta(x_0 - x'_0) \\
&- \partial'^\rho A^\lambda(x')\partial^\mu A^\nu(x)\theta(x'_0 - x_0) + n_0^\mu\partial'^\rho A^\lambda(x')A^\nu(x)\delta(x_0 - x'_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \partial^\nu A^\mu(x) \partial'^\lambda A^\rho(x') \theta(x_0 - x'_0) - n_0^\nu A^\mu(x) \partial'^\lambda A^\rho(x') \delta(x_0 - x'_0) \\
& - \partial'^\lambda A^\rho(x') \partial^\nu A^\mu(x) \theta(x'_0 - x_0) + n_0^\nu \partial'^\lambda A^\rho(x') A^\mu(x) \delta(x_0 - x'_0) \\
& + \partial^\nu A^\mu(x) \partial'^\rho A^\lambda(x') \theta(x_0 - x'_0) + n_0^\nu A^\mu(x) \partial'^\rho A^\lambda(x') \delta(x_0 - x'_0) \\
& + \partial'^\rho A^\lambda(x') \partial^\nu A^\mu(x) \theta(x'_0 - x_0) - n_0^\nu \partial'^\rho A^\lambda(x') A^\mu(x) \delta(x_0 - x'_0).
\end{aligned}$$

Combinando os termos, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Gamma & = F^{\mu\nu}(x) \partial'^\lambda A^\rho(x') \theta(x_0 - x'_0) + \partial'^\lambda A^\rho(x') F^{\mu\nu}(x) \theta(x'_0 - x_0) \\
& - F^{\mu\nu}(x) \partial'^\rho A^\lambda(x') \theta(x_0 - x'_0) - \partial'^\rho A^\lambda(x') F^{\mu\nu}(x) \theta(x'_0 - x_0) \\
& + n_0^\mu A^\nu(x) F^{\lambda\rho}(x') \delta(x_0 - x'_0) - n_0^\mu F^{\lambda\rho}(x') A^\nu(x) \delta(x_0 - x'_0) \\
& + n_0^\nu A^\mu(x) F^{\rho\lambda}(x') \delta(x_0 - x'_0) - n_0^\nu F^{\rho\lambda}(x') A^\mu(x) \delta(x_0 - x'_0),
\end{aligned}$$

o que resulta em

$$\begin{aligned}
\Gamma & = F^{\mu\nu}(x) F^{\lambda\rho}(x') \theta(x_0 - x'_0) + F^{\lambda\rho}(x') F^{\mu\nu}(x) \theta(x'_0 - x_0) \\
& + n_0^\mu [A^\nu(x), F^{\lambda\rho}(x')] \delta(x_0 - x'_0) + n_0^\nu [A^\mu(x), F^{\rho\lambda}(x')] \delta(x_0 - x'_0) \\
& = T[F^{\mu\nu}(x) F^{\lambda\rho}(x')] + n_0^\mu [A^\nu(x), F^{\lambda\rho}(x')] \delta(x_0 - x'_0) - n_0^\nu [A^\mu(x), F^{\lambda\rho}(x')] \delta(x_0 - x'_0).
\end{aligned}$$

Como resultado final obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mu\nu, \lambda\rho, \alpha\beta}(x, x') T[A_\alpha(x) A_\beta(x')] & = \mathcal{F}^{\mu\nu, \lambda\rho}(x, x') + n_0^\mu [A^\nu(x), F^{\lambda\rho}(x')] \delta(x_0 - x'_0) \\
& - n_0^\nu [A^\mu(x), F^{\lambda\rho}(x')] \delta(x_0 - x'_0).
\end{aligned}$$

Podemos usar este resultado para calcular o tensor-energia momento em termos do produto "T". Usando o resultado obtido na eq. (4.1.1), temos que

$$\begin{aligned}
T^{\mu\lambda}(x) & = \lim_{x \rightarrow x'} T \left\{ -F^{\mu\nu}(x) F^{\lambda\alpha}(x') g_{\nu\alpha} + \frac{1}{4} g^{\mu\lambda} g_{\nu\beta} g_{\rho\eta} F^{\beta\eta}(x) F^{\nu\rho}(x') \right\} \\
& = \lim_{x \rightarrow x'} \left\{ -T[F^{\mu\nu}(x), F^{\lambda\alpha}(x')] g_{\nu\alpha} + \frac{1}{4} g^{\mu\lambda} g_{\nu\beta} g_{\rho\eta} T[F^{\beta\eta}(x), F^{\nu\rho}(x')] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x_0 \rightarrow x'_0} \left\{ -\Gamma^{\mu\nu, \lambda\alpha, \bar{\alpha}\bar{\beta}}(x, x') T[A_{\bar{\alpha}}(x), A_{\bar{\beta}}(x')] g_{\nu\alpha} + n_0^\mu g_{\nu\alpha} [A^\nu(x), F^{\lambda\alpha}(x')] \delta(x_0 - x'_0) \right. \\
&- n_0^\nu g_{\nu\alpha} [A^\mu(x), F^{\lambda\alpha}(x')] \delta(x_0 - x'_0) + \frac{1}{4} g^{\mu\lambda} g_{\nu\beta} g_{\rho\eta} \Gamma^{\beta\eta, \nu\rho, \bar{\alpha}\bar{\beta}}(x, x') T[A_{\bar{\alpha}}(x), A_{\bar{\beta}}(x')] \\
&\left. - \frac{1}{4} g^{\mu\lambda} g_{\nu\beta} g_{\rho\eta} \delta(x_0 - x'_0) \left(n_0^\beta [A^\eta(x), F^{\nu\rho}(x')] + n_0^\eta [A^\beta(x), F^{\nu\rho}(x')] \right) \right\}
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[A^\eta(x), F^{\nu\rho}(x')] &= [A^\eta(x), \partial'^\nu A^\rho(x')] - [A^\eta(x), \partial'^\rho A^\nu(x')] \\
&= in_0^\nu g^{\eta\rho} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - in_0^\rho g^{\eta\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
&- in_0^\nu \Delta^{-1} \partial'^\eta \partial'^\rho \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + in_0^\rho \Delta^{-1} \partial'^\eta \partial'^\nu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),
\end{aligned}$$

sendo assim, obtemos

$$\begin{aligned}
T^{\mu\lambda}(x) &= - \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \left(\Gamma^{\mu\nu, \lambda}_{\nu \bar{\alpha}\bar{\beta}}(x, x') - \frac{1}{4} g^{\mu\lambda} \Gamma^{\beta\eta}_{\beta\eta \bar{\alpha}\bar{\beta}} \right) T[A_{\bar{\alpha}}(x) A_{\bar{\beta}}(x')] \right. \\
&\left. + 2i(n_0^\mu n_0^\lambda - \frac{1}{4} g^{\mu\lambda}) \right\} \delta(x - x').
\end{aligned}$$

Utilizando esse resultado, podemos agora calcular o valor esperado do tensor energia-momento no vácuo, que fica dado pela expressão

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T^{\mu\lambda}(x) | 0 \rangle &= -i \lim_{x \rightarrow x'} \left\{ \left(\Gamma^{\mu\nu, \lambda}_{\nu \bar{\alpha}\bar{\beta}}(x, x') - \frac{1}{4} g^{\mu\lambda} \Gamma^{\beta\eta}_{\beta\eta \bar{\alpha}\bar{\beta}} \right) G_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(x - x') \right. \\
&\left. + 2(n_0^\mu n_0^\lambda - \frac{1}{4} g^{\mu\lambda}) \delta(x - x') \right\},
\end{aligned}$$

onde

$$iG_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(x - x') = \langle 0 | T[A_{\bar{\alpha}}(x) A_{\bar{\beta}}(x')] | 0 \rangle.$$

Dessa maneira, estabelecemos a conexão entre o tensor energia momento e o propagador. Se agora utilizarmos o calibre de Feynmann, no qual o propagador se reduz àquele do campo escalar livre, isso é, no qual o propagador toma a forma

$$iG_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(x - x') = g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{1}{(x - x')^2 - i\epsilon},$$

então, o tensor energia momento fica dado por

$$\langle 0|T^{\mu\lambda}(x)|0\rangle = -i \lim_{x \rightarrow x'} \left\{ 2(\partial^\mu \partial^\nu - \frac{1}{4}g^{\mu\nu} \partial^\eta \partial'_\eta)G_0(x-x') + 2(n_0^\mu n_0^\lambda - \frac{1}{4}g^{\mu\lambda})\delta(x-x') \right\},$$

onde

$$G_0(x-x') = \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{1}{(x-x')^2 - i\epsilon}.$$

Agora, utilizando esses resultados, podemos calcular o valor esperado do tensor energia-momento no vácuo térmico introduzido no capítulo 2. Aplicando as regras de conjugação til, bem como utilizando a notação de dubleto introduzida anteriormente, o tensor energia momento é escrito como

$$T^{\mu\lambda(ab)}(x) = -F^{\mu\alpha(ab)}(x)F^\lambda{}_\alpha{}^{(ab)}(x) + \frac{1}{4}g^{\mu\lambda}F_{\nu\rho}^{(ab)}(x)F^{\nu\rho(ab)}(x),$$

onde $a, b = 1, 2$ e

$$F^{\mu\lambda(ab)} = \partial^\mu A^{\nu(a)} - \partial^\nu A^{\mu(b)}.$$

O propagador térmico livre para o fóton, ainda na notação de dubleto, fica então dado por

$$iD_{\alpha\beta}^{ab}(x-x') = g_{\alpha\beta}G_0^{ab}(x-x'),$$

onde agora

$$iD_{\alpha\beta}^{ab}(x-x') = \langle 0, \tilde{0}|T[A_\alpha^a(x)A_\beta^b(x')]|0, \tilde{0}\rangle$$

e

$$G_0^{ab}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ik(x-x')} G_0^{(ab)}(k),$$

com $G_0^{(ab)}(k)$ dado por

$$G_0^{(ab)}(k) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{k^2+i\epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k^2-i\epsilon} \end{pmatrix}.$$

Dessa maneira, o valor esperado do tensor energia momento no vácuo térmico é

$$\begin{aligned} \langle 0, \tilde{0}|T^{\mu\lambda(a,b)}(x)|0, \tilde{0}\rangle = & -i \lim_{x \rightarrow x'} \left\{ 2(\partial^\mu \partial^\nu - \frac{1}{4}g^{\mu\nu} \partial^\eta \partial'_\eta)G_0^{ab}(x-x') \right. \\ & \left. + 2(n_0^\mu n_0^\lambda - \frac{1}{4}g^{\mu\lambda})\delta(x-x')\delta_{ab} \right\}, \end{aligned}$$

onde $G_0^{ab}(x - x')$ é o propagador no espaço de configuração.

Como um dos nossos principais objetivos é estudar os efeitos induzidos pela topologia no tensor energia-momento, introduzimos campos “ α ” dependentes, para os quais o tensor energia momento tem a mesma forma do tensor na expressão acima, mas caracterizado pelos parâmetros “ α ” que, como vimos, está relacionado com as compactificações do espaço-tempo. Para campos “ α ” dependentes,

$$\begin{aligned} \langle 0, \tilde{0} | T^{\mu\lambda(a,b)}(x; \alpha) | 0, \tilde{0} \rangle = & -i \lim_{x \rightarrow x'} \left\{ 2(\partial^\mu \partial^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \partial^\eta \partial'_\eta) G_0^{ab}(x - x'; \alpha) \right. \\ & \left. + 2(n_0^\mu n_0^\lambda - \frac{1}{4} g^{\mu\lambda}) \delta(x - x') \delta_{ab} \right\}. \end{aligned}$$

Via um procedimento de regularização, introduzimos um tensor energia-momento finito, dado pela diferença entre o valor esperado do tensor energia-momento “ α ” dependente e o valor esperado do tensor energia-momento sem efeitos de compactificação

$$\mathcal{T}^{\mu\lambda(a,b)}(x; \alpha) = \langle T^{\mu\lambda(a,b)}(x; \alpha) \rangle - \langle T^{\mu\lambda(a,b)}(x) \rangle.$$

Utilizando as expressões obtidas acima, podemos escrever o tensor energia momento já renormalizado, $\mathcal{T}^{\mu\lambda(a,b)}(x; \alpha)$, como

$$\mathcal{T}^{\mu\lambda(a,b)}(x; \alpha) = -i \lim_{x \rightarrow x'} 2(\partial^\mu \partial^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \partial^\eta \partial'_\eta) \mathcal{G}^{(ab)}(x - x'; \alpha),$$

onde

$$\mathcal{G}^{(ab)}(x - x'; \alpha) = G^{ab}(x - x'; \alpha) - G_0^{ab}(x - x')$$

Escrevendo o propagador na sua representação de Fourier

$$G^{ab}(x - x'; \alpha) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{ik(x-x')} G^{ab}(k; \alpha),$$

com

$$G^{(ab)}(k; \alpha) = B^{-1(ac)}(k; \alpha) G_0^{(cd)}(k) B^{(db)}(k; \alpha),$$

onde $B(k; \alpha)$ é a matriz

$$B(k_\alpha, \alpha) = \begin{pmatrix} u(k, \alpha) & -v(k, \alpha) \\ -v(k, \alpha) & u(k, \alpha) \end{pmatrix}$$

que descreve a transformação de Bogoliubov. Explicitamente, as componentes de $G_0^{(ab)}(k; \alpha)$ são

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^{(11)}(k; \alpha) &= \mathcal{G}^{(22)}(k; \alpha) = v^2(k; \alpha)[G_0(k) - G_0^*(k)] \\ \mathcal{G}^{(12)}(k; \alpha) &= \mathcal{G}^{(21)}(k; \alpha) = v^2(k; \alpha)u^2(k; \alpha)[G_0^*(k) - G_0(k)].\end{aligned}$$

No caso geral de “ N ” compactificações, em que $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N)$, a transformação de Bogoliubov generalizada é dada por

$$v^2(k; \alpha) = \sum_{n=1}^{N+1} 2^{s-1} \sum_{\{\sigma_s\}} \left(\prod_{n=1}^s f(\alpha_{\sigma_n}) \right) \sum_{l_{\sigma_1}, \dots, l_{\sigma_s=1}}^{\infty} \exp \left(- \sum_{j=1}^s \alpha_{\sigma_j} l_{\sigma_j} k_{\sigma_j} \right),$$

de modo que a componente \bar{G}_0^{11} fica dada por

$$\begin{aligned}\bar{G}_0^{11} &= \lim_{x \rightarrow x'} \sum_{n=1}^{N+1} 2^{s-1} \sum_{\{\sigma_s\}} \left(\prod_{n=1}^s f(\alpha_{\sigma_n}) \right) \sum_{l_{\sigma_1}, \dots, l_{\sigma_s=1}}^{\infty} \\ &\times \left[G_0^*(x - x' - i \sum_{j=1}^s \eta_{\sigma_j} \alpha_{\sigma_j} l_{\sigma_j} n_{\sigma_j} - G_0(x - x' - i \sum_{j=1}^s \eta_{\sigma_j} \alpha_{\sigma_j} l_{\sigma_j} n_{\sigma_j}) \right],\end{aligned}$$

onde $\eta_{\sigma_j} = 1$, se $\sigma_j = 0$ e $\eta_{\sigma_j} = -1$ para $\sigma_j = 1, 2, \dots, N$. Já o tensor energia momento renormalizado em uma variedade quadridimensional é dado pela expressão

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{\mu\nu(11)}(\alpha) &= -i \lim_{x \rightarrow x'} \{ \Gamma^{\mu\nu}(x, x') \bar{G}_0^{11}(x - x'; \alpha) \} \quad (4.1.3) \\ &= -\frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^4 2^{s-1} \sum_{\{\sigma_s\}} \left(\prod_{n=1}^s f(\alpha_{\sigma_n}) \right) \sum_{l_{\sigma_1}, \dots, l_{\sigma_s=1}}^{\infty} \\ &\times \left[\frac{g^{\mu\nu}}{[\sum_{j=1}^s \eta_{\sigma_j} (\alpha_{\sigma_j} l_{\sigma_j})^2]^2} - \frac{2 \sum_{j,r=1}^s (1 + \eta_{\sigma_j} \eta_{\sigma_r}) (\alpha_{\sigma_j} l_{\sigma_j}) (\alpha_{\sigma_r} l_{\sigma_r}) n_{\sigma_j}^{\mu} n_{\sigma_r}^{\nu}}{[\sum_{j=1}^s \eta_{\sigma_j} (\alpha_{\sigma_j} l_{\sigma_j})^2]^3} \right],\end{aligned}$$

onde α_0 deve ser um número real e α_n , $n = 1, \dots, n$, deve ser um número imaginário do tipo ia_n para se obter o caso físico de temperatura finita e compactificação espacial.

Com base nesses resultados, podemos calcular o efeito Casimir para bósons e férmions em uma topologia arbitrária Γ_D^d .

4.2 Efeito Casimir

Para o primeiro caso à temperatura zero, correspondendo à escolha dos parâmetros de compactificação $\alpha = (0, 2ia_1, 2ia_2, 2ia_3)$, temos pela expressão geral dada pela eq. (4.1.1) o seguinte resultado para o tensor energia-momento

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{\mu\nu(11)}(\alpha) = & -\frac{2}{\pi^2} \left\{ \sum_{l_1=1}^{\infty} \frac{g^{\mu\nu} + 4n_1^\mu n_1^\nu}{(2a_1 l_1)^4} + \sum_{l_2=1}^{\infty} \frac{g^{\mu\nu} + 4n_2^\mu n_2^\nu}{(2a_2 l_2)^4} + \sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{g^{\mu\nu} + 4n_3^\mu n_3^\nu}{(2a_3 l_3)^4} \right. \\
& + 2 \sum_{l_1, l_2=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(2a_1 l_1)^2 + (2a_2 l_2)^2]^2} + \frac{4(2a_1 l_1)^2 n_1^\mu n_1^\nu + 4(2a_2 l_2)^2 n_2^\mu n_2^\nu}{[(2a_1 l_1)^2 + (2a_2 l_2)^2]^3} \right) \\
& + 2 \sum_{l_1, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(2a_1 l_1)^2 + (2a_3 l_3)^2]^2} + \frac{4(2a_1 l_1)^2 n_1^\mu n_1^\nu + 4(2a_3 l_3)^2 n_3^\mu n_3^\nu}{[(2a_1 l_1)^2 + (2a_3 l_3)^2]^3} \right) \\
& + 2 \sum_{l_2, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(2a_2 l_2)^2 + (2a_3 l_3)^2]^2} + \frac{4(2a_2 l_2)^2 n_2^\mu n_2^\nu + 4(2a_3 l_3)^2 n_3^\mu n_3^\nu}{[(2a_2 l_2)^2 + (2a_3 l_3)^2]^3} \right) \\
& + 4 \sum_{l_1, l_2, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(2a_1 l_1)^2 + (2a_2 l_2)^2 + (2a_3 l_3)^2]^2} + \frac{4(2a_1 l_1)^2 n_1^\mu n_1^\nu + 4(2a_2 l_2)^2 n_2^\mu n_2^\nu}{[(2a_1 l_1)^2 + (2a_2 l_2)^2 + (2a_3 l_3)^2]^3} \right. \\
& \left. + \frac{4(2a_3 l_3)^2 n_3^\mu n_3^\nu}{[(2a_1 l_1)^2 + (2a_2 l_2)^2 + (2a_3 l_3)^2]^3} \right) \Big\},
\end{aligned}$$

onde termos cruzados foram descartados, uma vez que esses termos não contribuem para energia e pressão do sistema, i.e., as componentes $\mathcal{T}^{00(11)}$ e $\mathcal{T}^{33(11)}$ do tensor energia momento. Para a energia, i.e., $E = \mathcal{T}^{00(11)}$, obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{00(11)} = & -\frac{\pi^2}{720} \left(\frac{1}{a_1^4} + \frac{1}{a_2^4} + \frac{1}{a_3^4} \right) - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_1, l_2=1}^{\infty} \frac{1}{[(a_1 l_1)^2 + (a_2 l_2)^2]^2} \\
& - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_1, l_3=1}^{\infty} \frac{1}{[(a_1 l_1)^2 + (a_3 l_3)^2]^2} - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_2, l_3=1}^{\infty} \frac{1}{[(a_2 l_2)^2 + (a_3 l_3)^2]^2} \\
& - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_1, l_2, l_3=1}^{\infty} \frac{1}{[(a_1 l_1)^2 + (a_2 l_2)^2 + (a_3 l_3)^2]^2}, \tag{4.2.1}
\end{aligned}$$

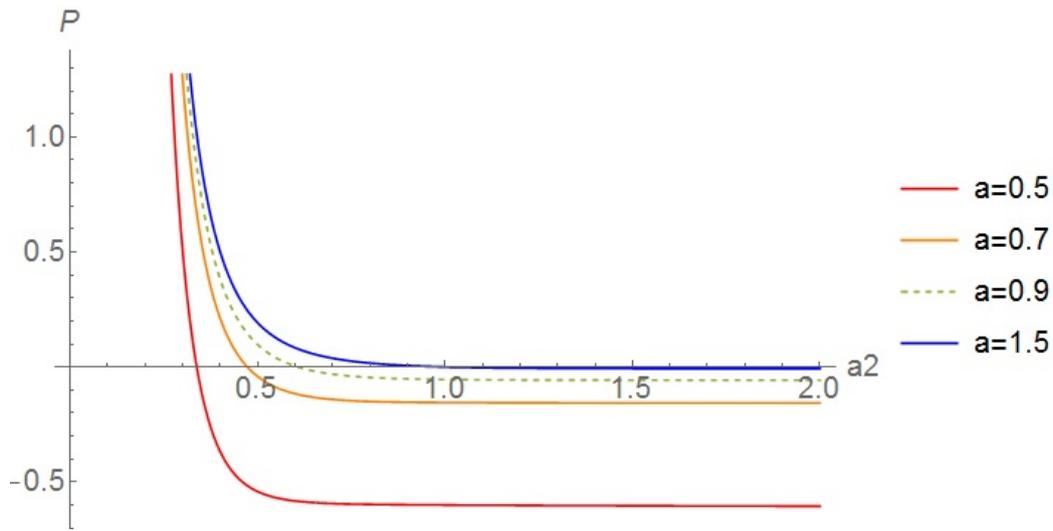
onde usamos a função zeta de Riemann

$$\zeta(4) = \sum_{l=1}^{\infty} l^{-4} = \frac{\pi^4}{90}. \tag{4.2.2}$$

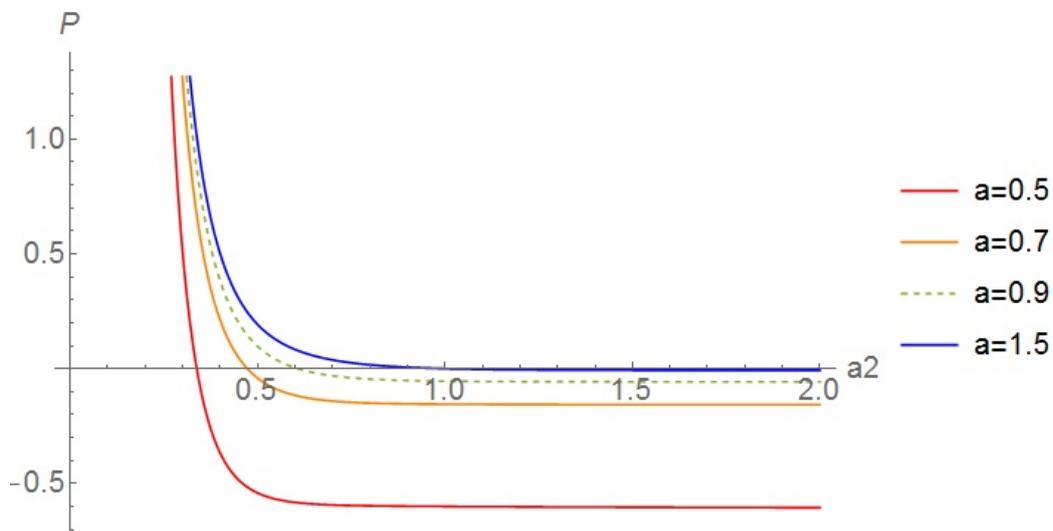
Para a pressão de Casimir, $P = \mathcal{T}^{33(11)}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{33(11)} &= \frac{\pi^2}{720} \left(\frac{1}{a_1^4} + \frac{1}{a_2^4} - \frac{3}{a_3^4} \right) + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_1, l_2=1}^{\infty} \frac{1}{[(a_1 l_1)^2 + (a_2 l_2)^2]^2} \\
&+ \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_1, l_3=1}^{\infty} \frac{(a_1 l_1)^2 - 3(a_3 l_3)^2}{[(a_1 l_1)^2 + (a_3 l_3)^2]^3} + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_2, l_3=1}^{\infty} \frac{(a_2 l_2)^2 - 3(a_3 l_3)^2}{[(a_2 l_2)^2 + (a_3 l_3)^2]^3} \\
&+ \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_1, l_2, l_3=1}^{\infty} \frac{(a_1 l_1)^2 + (a_2 l_2)^2 - 3(a_3 l_3)^2}{[(a_1 l_1)^2 + (a_2 l_2)^2 + (a_3 l_3)^2]^3}.
\end{aligned}$$

Considerando o caso de uma caixa cúbica, i.e., $a_1 = a_2 = a_3 = a$, observamos que a energia bem como a pressão são sempre negativas. A fim de se obter uma descrição mais completa da natureza da força de Casimir, se atrativa ou repulsiva, casos não simétricos de compactificações devem ser considerados. É evidente da expressão dada pela eq. (4.2.1) que a energia de Casimir à temperatura zero é sempre negativa, independente dos parâmetros de compactificação. O mesmo não é verdade para a pressão. A natureza da pressão mostra-se sensível aos parâmetros de compactificação. Para a pressão, uma transição de valores negativos de pressão para valores positivos é observada à medida em que a_3 aumenta. Um comportamento oposto é observado considerando-se a pressão como função de a_1 ou a_2 . A pressão é uma função decrescente de a_i , para $i = 1, 2$. Observa-se que existe uma transição de valores negativos para valores positivos à medida que a_i diminui. Tais comportamentos são mostrados nos gráficos (4.1a) e (4.1b). A partir do gráfico (4.1a), podemos observar que, embora a pressão e a_i sejam inversamente proporcionais enquanto que a pressão e a_3 são diretamente proporcionais, um acréscimo de a_1 e a_3 por uma mesma quantidade dá origem a um aumento de pressão, o que significa que a contribuição advinda de a_3 é dominante.



(a) Pressão de Casimir como função de a_2 para diferentes valores $a_1 = a_3 = a$.



(b) Pressão de Casimir como função de a_3 para diferentes valores de $a_1 = a_2 = a$.

Figura 4.1: Pressão de Casimir $P = \mathcal{T}^{33(11)}$ à temperatura zero para bósons.

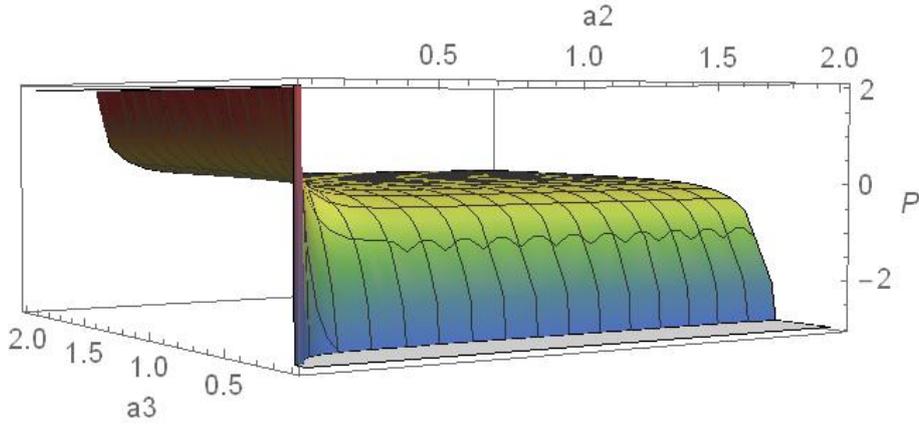


Figura 4.2: Pressão de Casimir como função de a_2 e a_3 para a_1 mantido fixo.

Agora direcionamos nossa atenção ao efeito de temperatura. À temperatura finita, correspondente à escolha da compactificação $\alpha = (\beta, i2a_1, i2a_2, i2a_3)$, o tensor energia-momento é dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{\mu\nu(11)}(\alpha) = & -\frac{2}{\pi^2} \left\{ \sum_{l_0=1}^{\infty} \frac{g^{\mu\nu} - 4n_0^\mu n_0^\nu}{(\beta l_0)^4} + \sum_{l_1=1}^{\infty} \frac{g^{\mu\nu} + 4n_1^\mu n_1^\nu}{(2a_1 l_1)^4} \right. \\
& + \sum_{l_2=1}^{\infty} \frac{g^{\mu\nu} + 4n_2^\mu n_2^\nu}{(2a_2 l_2)^4} + \sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{g^{\mu\nu} + 4n_3^\mu n_3^\nu}{(2a_3 l_3)^4} \\
& + 2 \sum_{l_0, l_1=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(\beta l_0)^2 + (2a_1 l_1)^2]^2} + \frac{4(2a_1 l_1)^2 n_1^\mu n_1^\nu - 4(\beta l_0)^2 n_0^\mu n_0^\nu}{[(\beta l_0)^2 + (2a_1 l_1)^2]^3} \right) \\
& + 2 \sum_{l_0, l_2=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(\beta l_0)^2 + (2a_2 l_2)^2]^2} + \frac{4(2a_2 l_2)^2 n_2^\mu n_2^\nu - 4(\beta l_0)^2 n_0^\mu n_0^\nu}{[(\beta l_0)^2 + (2a_2 l_2)^2]^3} \right) \\
& + 2 \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(\beta l_0)^2 + (2a_3 l_3)^2]^2} + \frac{4(2a_3 l_3)^2 n_3^\mu n_3^\nu - 4(\beta l_0)^2 n_0^\mu n_0^\nu}{[(\beta l_0)^2 + (2a_3 l_3)^2]^3} \right) \\
& + 2 \sum_{l_1, l_2=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(2a_1 l_1)^2 + (2a_2 l_2)^2]^2} + \frac{4(2a_1 l_1)^2 n_1^\mu n_1^\nu + 4(2a_2 l_2)^2 n_2^\mu n_2^\nu}{[(2a_1 l_1)^2 + (2a_2 l_2)^2]^3} \right) \\
& + 2 \sum_{l_1, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(2a_1 l_1)^2 + (2a_3 l_3)^2]^2} + \frac{4(2a_1 l_1)^2 n_1^\mu n_1^\nu + 4(2a_3 l_3)^2 n_3^\mu n_3^\nu}{[(2a_1 l_1)^2 + (2a_3 l_3)^2]^3} \right) \\
& + 2 \sum_{l_2, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(2a_2 l_2)^2 + (2a_3 l_3)^2]^2} + \frac{4(2a_2 l_2)^2 n_2^\mu n_2^\nu + 4(2a_3 l_3)^2 n_3^\mu n_3^\nu}{[(2a_2 l_2)^2 + (2a_3 l_3)^2]^3} \right) \\
& + 4 \sum_{l_1, l_2, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(2a_1 l_1)^2 + (2a_2 l_2)^2 + (2a_3 l_3)^2]^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4(2a_1l_1)^2n_1^\mu n_1^\nu + 4(2a_2l_2)^2n_2^\mu n_2^\nu + 4(2a_3l_3)^2n_3^\mu n_3^\nu}{[(2a_1l_1)^2 + (2a_2l_2)^2 + (2a_3l_3)^2]^3} \\
& + 4 \sum_{l_0, l_1, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(\beta l_0)^2 + (a_1l_1)^2 + (a_3l_3)^2]^2} \right. \\
& + \frac{4(2a_1l_1)^2n_1^\mu n_1^\nu + 4(2a_3l_3)^2n_3^\mu n_3^\nu - 4(\beta l_0)^2n_0^\mu n_0^\nu}{[(\beta l_0)^2 + (2a_1l_1)^2 + (2a_3l_3)^2]^3} \\
& + 4 \sum_{l_0, l_2, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(\beta l_0)^2 + (a_2l_2)^2 + (a_3l_3)^2]^2} \right. \\
& + \frac{4(2a_2l_2)^2n_2^\mu n_2^\nu + 4(2a_3l_3)^2n_3^\mu n_3^\nu - 4(\beta l_0)^2n_0^\mu n_0^\nu}{[(\beta l_0)^2 + (2a_2l_2)^2 + (2a_3l_3)^2]^3} \\
& + 4 \sum_{l_0, l_1, l_2=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(\beta l_0)^2 + (2a_1l_1)^2 + (2a_2l_2)^2]^2} \right. \\
& + \frac{4(2a_1l_1)^2n_1^\mu n_1^\nu + 4(2a_2l_2)^2n_2^\mu n_2^\nu - 4(\beta l_0)^2n_0^\mu n_0^\nu}{[(\beta l_0)^2 + (2a_1l_1)^2 + (2a_2l_2)^2]^3} \\
& + 8 \sum_{l_0, l_1, l_2, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(\beta l_0)^2 + (2a_1l_1)^2 + (2a_2l_2)^2]^2 + (2a_3l_3)^2} \right. \\
& + \left. \left. \frac{4(2a_1l_1)^2n_1^\mu n_1^\nu + 4(2a_2l_2)^2n_2^\mu n_2^\nu + 4(2a_3l_3)^2n_3^\mu n_3^\nu - 4(\beta l_0)^2n_0^\mu n_0^\nu}{[(\beta l_0)^2 + (2a_1l_1)^2 + (2a_2l_2)^2 + (2a_3l_3)^2]^3} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Para a energia $E = \mathcal{T}^{00(11)}$, essa expressão se reduz à

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{00(11)}(\alpha) &= \frac{\pi^2}{15\beta^4} - \frac{\pi^2}{720} \left(\frac{1}{a_1^4} + \frac{1}{a_2^4} + \frac{1}{a_3^4} \right) \\
& + \frac{4}{\pi^2} \sum_{l_0, l_1=1}^{\infty} \frac{3(\beta l_0)^2 - 4(a_1l_1)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2a_1l_1)^2]^3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{l_0, l_2=1}^{\infty} \frac{3(\beta l_0)^2 - 4(a_2l_2)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2a_2l_2)^2]^3} \\
& + \frac{4}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{3(\beta l_0)^2 - 4(a_3l_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + (2a_3l_3)^2]^3} - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_1, l_2=1}^{\infty} \frac{1}{[(a_1l_1)^2 + (a_2l_2)^2]^2} \\
& - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_1, l_3=1}^{\infty} \frac{1}{[(a_1l_1)^2 + (a_3l_3)^2]^2} - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_2, l_3=1}^{\infty} \frac{1}{[(a_2l_2)^2 + (a_3l_3)^2]^2} \\
& - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_1, l_2, l_3=1}^{\infty} \frac{1}{[(a_1l_1)^2 + (a_2l_2)^2 + (a_3l_3)^2]^3} \\
& + \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_2, l_3=1}^{\infty} \frac{3(\beta l_0)^2 - 4(a_2l_2)^2 - 4(a_3l_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + 4(a_2l_2)^2 + 4(a_3l_3)^2]^3} \\
& + \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_1, l_3=1}^{\infty} \frac{3(\beta l_0)^2 - 4(a_1l_1)^2 - 4(a_3l_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + 4(a_1l_1)^2 + 4(a_3l_3)^2]^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_1, l_2=1}^{\infty} \frac{3(\beta l_0)^2 - 4(a_1 l_1)^2 - 4(a_2 l_2)^2}{[(\beta l_0)^2 + 4(a_1 l_1)^2 + 4(a_2 l_2)^2]^3} \\
& + \frac{16}{\pi^2} \sum_{l_0, l_1, l_2, l_3=1}^{\infty} \frac{3(\beta l_0)^2 - 4(a_1 l_1)^2 - 4(a_2 l_2)^2 - 4(a_3 l_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + 4(a_1 l_1)^2 + 4(a_2 l_2)^2 + 4(a_3 l_3)^2]^3}.
\end{aligned}$$

E para a pressão,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{33(11)}(\alpha) &= \frac{\pi^2}{45\beta^4} + \frac{\pi^2}{720} \frac{1}{a_1^4} + \frac{\pi^2}{720} \frac{1}{a_2^4} - \frac{\pi^2}{240} \frac{1}{a_3^4} \\
& + \frac{4}{\pi^2} \sum_{l_0, l_1=1}^{\infty} \frac{1}{[(\beta l_0)^2 + 4(a_1 l_1)^2]^2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{l_0, l_2=1}^{\infty} \frac{1}{[(\beta l_0)^2 + 4(a_2 l_2)^2]^2} \\
& + \frac{4}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \frac{(\beta l_0)^2 - 12(a_3 l_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + 4(a_3 l_3)^2]^3} + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_1, l_2=1}^{\infty} \frac{1}{[(a_1 l_1)^2 + (a_2 l_2)^2]^2} \\
& + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_1, l_3=1}^{\infty} \frac{(a_1 l_1)^2 - 3(a_3 l_3)^2}{[(a_1 l_1)^2 + (a_3 l_3)^2]^3} + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_2, l_3=1}^{\infty} \frac{(a_2 l_2)^2 - 3(a_3 l_3)^2}{[(a_2 l_2)^2 + (a_3 l_3)^2]^3} \\
& + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_1, l_2, l_3=1}^{\infty} \frac{(a_1 l_1)^2 + (a_2 l_2)^2 - 3(a_3 l_3)^2}{[(a_1 l_1)^2 + (a_2 l_2)^2 + (a_3 l_3)^2]^3} \\
& + \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_2, l_3=1}^{\infty} \frac{(\beta l_0)^2 + 4(a_2 l_2)^2 - 12(a_3 l_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + 4(a_2 l_2)^2 + 4(a_3 l_3)^2]^3} \\
& + \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_1, l_3=1}^{\infty} \frac{(\beta l_0)^2 + 4(a_1 l_1)^2 - 12(a_3 l_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + 4(a_1 l_1)^2 + 4(a_3 l_3)^2]^3} \\
& + \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_1, l_2=1}^{\infty} \frac{1}{[(\beta l_0)^2 + 4(a_1 l_1)^2 + 4(a_2 l_2)^2]^2} \\
& + \frac{16}{\pi^2} \sum_{l_0, l_1, l_2, l_3=1}^{\infty} \frac{(\beta l_0)^2 + 4(a_1 l_1)^2 + 4(a_2 l_2)^2 - 12(a_3 l_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + 4(a_1 l_1)^2 + 4(a_2 l_2)^2 + 4(a_3 l_3)^2]^3}.
\end{aligned}$$

No limite de altas temperaturas, $T = \beta^{-1} \rightarrow \infty$, observamos que ambas a energia e pressão são dominadas pelos termos de radiação de corpo negro $\sim T^4$. Para uma caixa cúbica, i.e, $a_1 = a_2 = a_3 = a$, uma transição de valores negativos para valores positivos de energia e pressão ocorre à medida que a temperatura aumenta. Para o caso geral de compactificações não simétricas, combinamos o resultado obtido anteriormente à temperatura zero, e obtemos o seguinte comportamento: À medida que a temperatura e a_3 aumentam, uma transição de valores negativos para valores de pressão ocorre, enquanto que, para a_1 e a_2 , essa transição ocorre à medida que diminuimos a_1 ou a_2 .

Note que a implementação da temperatura reverte o comportamento da pressão em relação aos parâmetros de compactificação espacial. Tal comportamento é evidenciado nos gráficos (4.3) e (4.4). A pressão, antes mais suscetível a variações decorrentes de a_3 , agora mostra-se muito mais sensível à variações de a_2 .

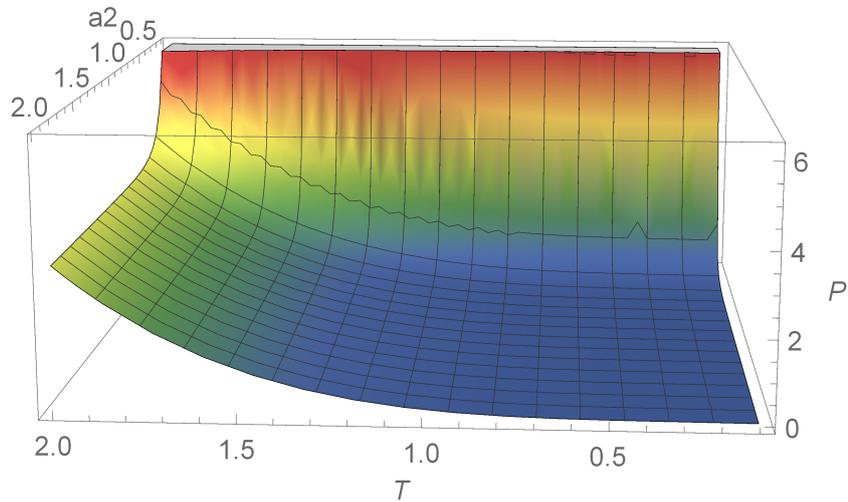


Figura 4.3: Pressão de Casimir como função de a_2 e $T = \beta^{-1}$ para a_1 e a_3 fixos.

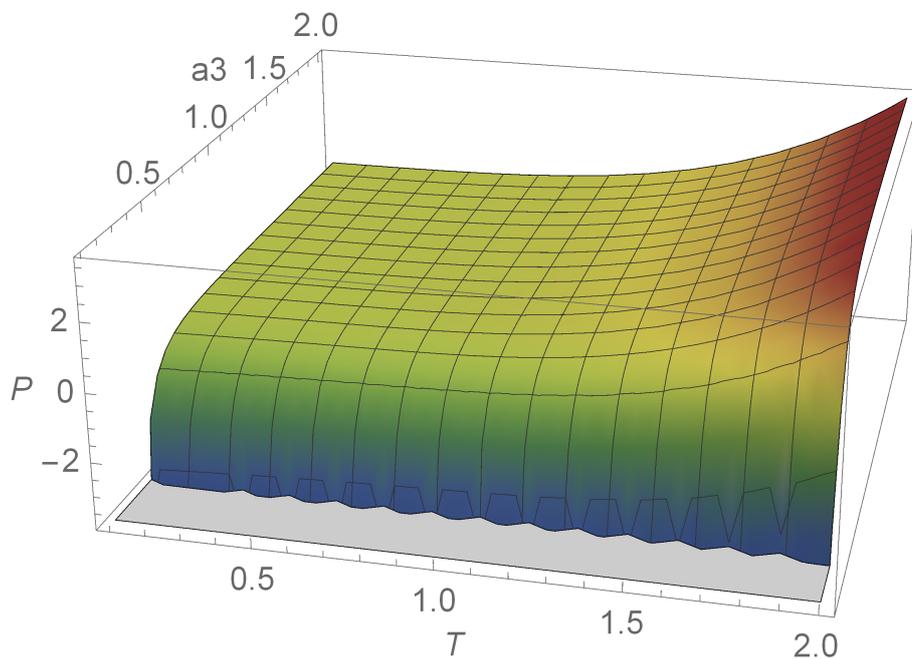


Figura 4.4: Pressão de Casimir como função de a_3 e $T = \beta^{-1}$ para a_1 e a_2 fixos.

Capítulo 5

Efeito Casimir para férmions e o plasma de quarks e glúons

Em física de partículas, há um grande interesse no estudo do efeito Casimir para férmions [21] devido a estrutura dos hadrons, como os prótons e os nêutrons, que são constituídos de quarks e glúons e cujos comportamentos são descritos pela Cromodinâmica Quântica. Embora avanços tenham sido realizados com a formulação da Cromodinâmica Quântica, algumas características não triviais dos hadrons permanecem sem respostas. Esse é o caso, por exemplo, do confinamento de cor: quarks livres não são observados na natureza, eles se agrupam em hadrons que apenas existem em estados singletos de cor [54].

Embora os quarks estejam confinados, acredita-se que, em temperaturas suficientemente altas, os quarks possam passar por um processo de deconfinamento. As evidências que apontam para o processo de deconfinamento surgiram, primeiro, com a descoberta de que a Cromodinâmica Quântica é uma teoria assintoticamente livre [18], i.e, que a força que mantém os quarks ligados se torna assintoticamente mais fraca à medida em que a distância entre eles diminui e que a energia aumenta. Outra razão se dá pelo fato de que a simetria quiral da Cromodinâmica Quântica é espontaneamente quebrada à baixas temperaturas, significando que essa simetria deve ser restaurada

a altas temperaturas. Esta é uma condição suficiente [55, 56] para o processo de deconfinamento dos quarks e que daria origem a um novo estado de matéria, o chamado plasma de quarks e glúons, que considera uma forma de matéria primordial, que teria existido apenas microsegundos depois do Big-Bang devido à grande quantidade de energia que seria necessária para sua produção [57].

No CERN, um experimento recente corrobora a existência da possibilidade de produzir o plasma de quarks e glúons em laboratório: há evidências da produção de um “pequeno” plasma de quarks e glúons ao colidir núcleos de chumbo à altas energias no detector “Solenóide de Múon Compacto” (CMS) no Grande Colisor de Hadrons (LHC) [58]. Isto suscita questões sobre os mecanismos que poderiam colaborar para o processo de deconfinamento como, por exemplo, o efeito Casimir.

Devido à antiperiodicidade na função de Green para férmions, o uso de topologias toroidais para explorar o efeito Casimir mostra-se consistente com o modelo de sacola [59], um dos modelos que descrevem matematicamente a fenomenologia dos hadrons. Neste modelo, os quarks encontram-se confinados em uma pequena região do espaço, i.e., confinados dentro da sacola tal que, nesta região, apenas forças fracas são experimentadas. Fora da sacola, os campos dos quarks não são permitidos se propagarem, de maneira que, nesta região, o tensor energia-momento é nulo [22].

Nesta direção, analisamos o efeito Casimir calculando o tensor energia para férmions utilizando o métodos de campos compactificados. Primeiro consideramos o efeito Casimir à temperatura zero, correspondendo à topologia Γ_4^3 , e com os parâmetros de compactificação especificados por $\alpha = (0, i2a_1, i2a_2, i2a_2)$. Esta escolha corresponde à compactificação dos eixos espaciais x^1, x^2 e x^3 em circunferências de comprimento $2a_1, 2a_2$ e $2a_3$, respectivamente. Esta troca do parâmetro de compactificação $L \rightarrow 2a$ é equivalente as condições de contorno de Neumann. Fazemos essa escolha de modo a seguir em paralelo com a análise feita por Saito [52]. Em seguida, a fim de analisar o efeito devido à temperatura, implementamos a temperatura a partir da compacti-

ficação do tempo em uma circunferência de comprimento β . Na última parte deste trabalho, utilizamos os resultados obtidos para férmions e os resultados obtidos para bósons no capítulo anterior para explorar o efeito Casimir para um modelo não massivo da Cromodinâmica Quântica a fim compreender a contribuição do efeito Casimir para o deconfinamento dos hadrons.

5.1 Efeito Casimir para férmions

A prescrição utilizada para derivar o tensor energia-momento para o campo eletromagnético pode ser estendida a fim de tratar o caso para férmions. Neste caso, para um espaço quadridimensional, correspondendo a $N = 3$, o tensor energia momento é [17]

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{\mu\nu(11)}(\alpha) &= -\frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^4 2^{s-1} \sum_{\{\sigma_s\}} \left(\prod_{n=1}^s f(\alpha_{\sigma_n}) \right) \sum_{l_{\sigma_1}, \dots, l_{\sigma_s}=1}^{\infty} (-1)^{s+\sum_{r=1}^s l_{\sigma_r}} \quad (5.1.1) \\ &\times \left[\frac{g^{\mu\nu}}{[\sum_{j=1}^s \eta_{\sigma_j} (\alpha_{\sigma_j} l_{\sigma_j})^2]^2} - \frac{2 \sum_{j,r=1}^s (1 + \eta_{\sigma_j} \eta_{\sigma_r}) (\alpha_{\sigma_j} l_{\sigma_j}) (\alpha_{\sigma_r} l_{\sigma_r}) n_{\sigma_j}^{\mu} n_{\sigma_r}^{\nu}}{[\sum_{j=1}^s \eta_{\sigma_j} (\alpha_{\sigma_j} l_{\sigma_j})^2]^3} \right]. \end{aligned}$$

Procedemos agora para a análise do efeito Casimir para férmions. Primeiro consideramos o caso à temperatura zero, correspondendo à compactificação $\alpha = (0, i2a_1, i2a_2, i2a_2)$.

Utilizando a eq. (5.1.1) acima, o tensor energia-momento fica dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{\mu\nu(11)}(\alpha) &= -\frac{4}{\pi^2} \left\{ \sum_{l_1=1}^{\infty} (-1)^{l_1+1} \frac{g^{\mu\nu} + 4n_1^{\mu} n_1^{\nu}}{(2a_1 l_1)^4} + \sum_{l_2=1}^{\infty} (-1)^{l_2+1} \frac{g^{\mu\nu} + 4n_2^{\mu} n_2^{\nu}}{(2a_2 l_2)^4} \right. \\ &+ \sum_{l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_3+1} \frac{g^{\mu\nu} + 4n_3^{\mu} n_3^{\nu}}{(2a_3 l_3)^4} + 2 \sum_{l_1, l_2=1}^{\infty} (-1)^{l_1+l_2} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(2a_1 l_1)^2 + (2a_2 l_2)^2]^2} \right. \\ &+ \left. \frac{4(2a_1 l_1)^2 n_1^{\mu} n_1^{\nu} + 4(2a_2 l_2)^2 n_2^{\mu} n_2^{\nu}}{[(2a_1 l_1)^2 + (2a_2 l_2)^2]^3} \right) \\ &+ 2 \sum_{l_1, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_1+l_3} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(2a_1 l_1)^2 + (2a_3 l_3)^2]^2} + \frac{4(2a_1 l_1)^2 n_1^{\mu} n_1^{\nu} + 4(2a_3 l_3)^2 n_3^{\mu} n_3^{\nu}}{[(2a_1 l_1)^2 + (2a_3 l_3)^2]^3} \right) \\ &+ 2 \sum_{l_2, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_2+l_3} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(2a_2 l_2)^2 + (2a_3 l_3)^2]^2} + \frac{4(2a_2 l_2)^2 n_2^{\mu} n_2^{\nu} + 4(2a_3 l_3)^2 n_3^{\mu} n_3^{\nu}}{[(2a_2 l_2)^2 + (2a_3 l_3)^2]^3} \right) \end{aligned}$$

$$+ 4 \sum_{l_1, l_2, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_1+l_2+l_3+1} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(2a_1l_1)^2 + (2a_2l_2)^2 + (2a_3l_3)^2]^2} + \frac{4(2a_1l_1)^2 n_1^\mu n_1^\nu + 4(2a_2l_2)^2 n_2^\mu n_2^\nu + 4(2a_3l_3)^2 n_3^\mu n_3^\nu}{[(2a_1l_1)^2 + (2a_2l_2)^2 + (2a_3l_3)^2]^3} \right) \Bigg\}.$$

Tomando a componente $\mathcal{T}^{00(11)}$, a energia de Casimir, $E(a_1, a_2, a_3) = \mathcal{T}^{00(11)}$ fica dada então por

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{00(11)} = & -\frac{7\pi^2}{2880} \left(\frac{1}{a_1^4} + \frac{1}{a_2^4} + \frac{1}{a_3^4} \right) - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_1, l_2=1}^{\infty} (-1)^{l_1+l_2} \frac{1}{[(a_1l_1)^2 + (a_2l_2)^2]^2} \\ & - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_1, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_1+l_3} \frac{1}{[(a_1l_1)^2 + (a_3l_3)^2]^2} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_2, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_2+l_3} \frac{1}{[(a_2l_2)^2 + (a_3l_3)^2]^2} \\ & + \frac{1}{\pi^2} \sum_{l_1, l_2, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_1+l_2+l_3} \frac{1}{[(a_1l_1)^2 + (a_2l_2)^3 + (a_3l_3)^2]^2}, \end{aligned}$$

onde usamos a função zeta de Riemann alternada

$$\zeta(4) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{1}{l^4} = \frac{7\pi^4}{720}. \quad (5.1.2)$$

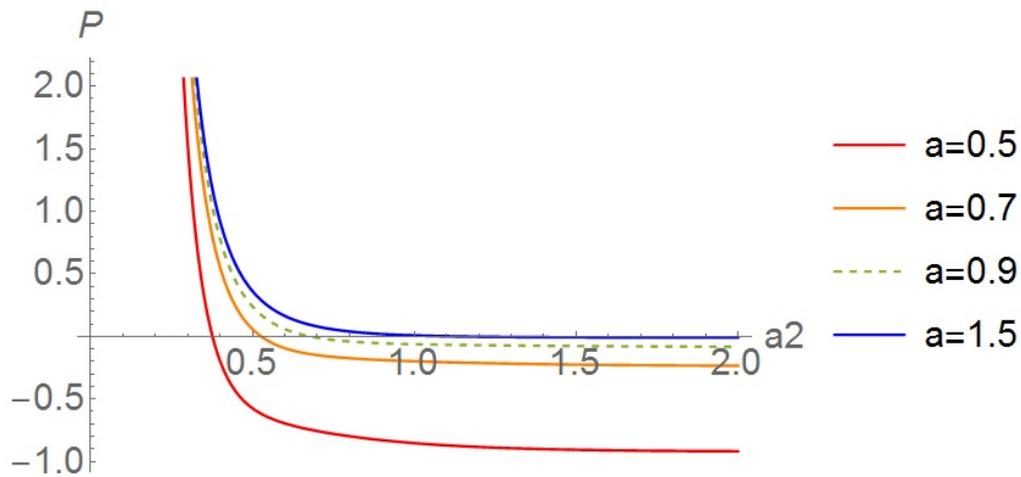
Para a pressão $P(a_1, a_2, a_3) = \mathcal{T}^{33(11)}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{33(11)} = & \frac{7\pi^2}{2880} \left(\frac{1}{a_1^4} + \frac{1}{a_2^4} - \frac{3}{a_3^4} \right) + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_1, l_2=1}^{\infty} (-1)^{l_1+l_2} \frac{1}{[(a_1l_1)^2 + (a_2l_2)^2]^2} \\ & + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_1, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_1+l_3} \frac{(a_1l_1)^2 - 3(a_3l_3)^2}{[(a_1l_1)^2 + (a_3l_3)^2]^3} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_2, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_2+l_3} \frac{(a_2l_2)^2 - 3(a_3l_3)^2}{[(a_2l_2)^2 + (a_3l_3)^2]^3} \\ & - \frac{1}{\pi^2} \sum_{l_1, l_2, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_1+l_2+l_3} \frac{(a_1l_1)^2 + (a_2l_2)^2 - 3(a_3l_3)^2}{[(a_1l_1)^2 + (a_2l_2)^3 + (a_3l_3)^2]^3}. \end{aligned}$$

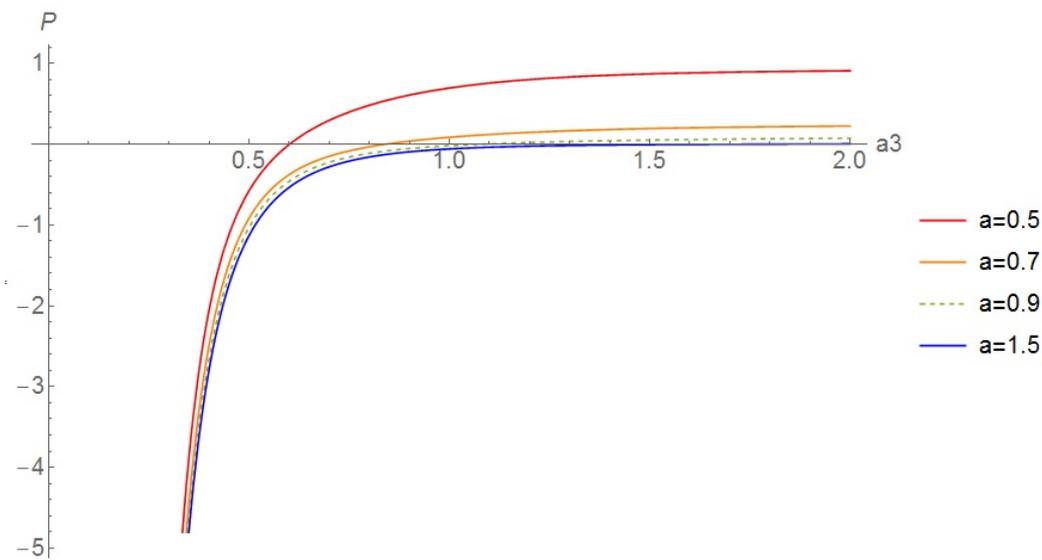
No caso de uma caixa cúbica, i.e, $a_1 = a_2 = a_3 = a$, encontramos que tanto a energia quanto a pressão são sempre negativas, sendo ambas funções crescentes de a . Esse comportamento é o mesmo comportamento obtido para o caso de uma guia de onda quadrada, correspondendo à compactificação ao longo dos eixos x^2 e x^3 [51]. Na verdade, é observado que a energia é sempre negativa quaisquer que sejam as relações entre os parâmetros de compactificação. Isso não é verdade para a pressão. O sinal da pressão depende altamente da relação entre os parâmetros de compactificação. A fim de entender o comportamento do sinal da pressão, alguns casos devem ser considerados.

1. $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}$. Para este caso, observamos que existe uma transição de valores positivos de pressão para valores negativos à medida que a_2 aumenta. Devido a simetria entre a_1 e a_2 , o mesmo comportamento é observado fixando-se $a_2 = a_3 = a$. Na figura (5.3a), o gráfico da pressão em função de a_2 para diferentes valores de a é mostrado.
2. $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}$. Neste caso observa-se uma transição de valores negativos de pressão para valores positivos à medida que a_3 aumenta. A pressão é uma função crescente de a_3 .

Tais comportamentos evidenciam que o sinal da pressão tem alta dependência da razão $\frac{a_3}{a_i}$, onde $i = 1, 2$. À medida que a razão $\frac{a_3}{a_i}$ cresce, a pressão também aumenta. Existe uma competição entre a_i e a_3 ; enquanto um aumento de a_i causa um aumento na pressão, um aumento a_3 faz a pressão diminuir. Notemos que, como no caso para bósons, a contribuição de a_3 é dominante, i.e, o comportamento da pressão devido à uma variação a_1 e a_3 por uma mesma quantidade é ditada por a_3 . Explicitamente, isso significa que, aumentado-se a_1 e a_3 por uma mesma quantidade, a pressão cresce com a_3 , enquanto que, diminuindo-se a_1 e a_3 por uma mesma quantidade, a pressão diminui com a_3 .



(a) Pressão de Casimir como função de a_2 para diferentes valores $a_1 = a_3 = a$. Aumentar a_1 e a_3 por uma mesma quantidade, o que corresponde a transitar das curvas mais abaixo para curvas acima, resulta em um aumento de pressão. Isto significa que o comportamento de pressão é dominado por a_3



(b) Pressão de Casimir como função de a_3 para diferentes valores de $a_1 = a_2 = a$. A pressão de Casimir é uma função crescente de a_3 . À medida em que a aumenta as curvas vão se acumulando até se tornarem sobrepostas umas as outras.

Figura 5.1: Pressão de Casimir $P = \mathcal{T}^{33(11)}$ à temperatura zero em um hipertoro.

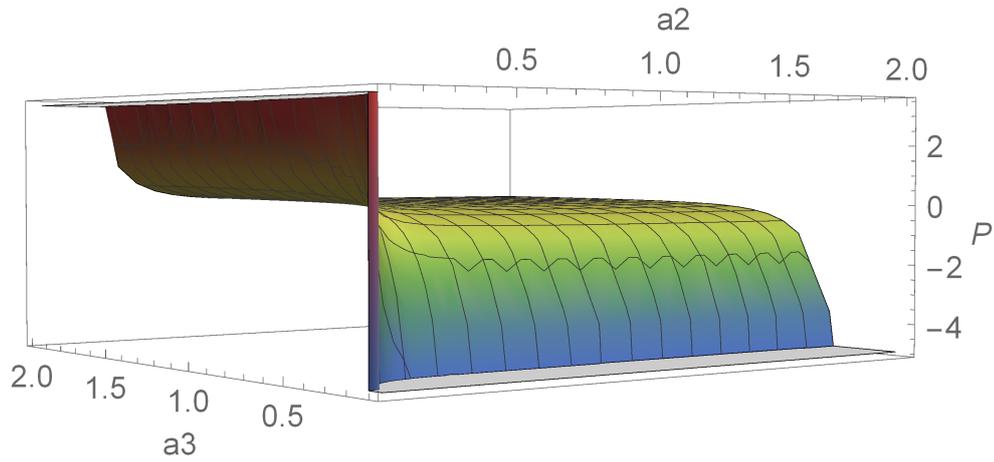


Figura 5.2: Pressão de Casimir à temperatura zero como função de a_2 e a_3 para a_1 mantido fixo. Observa-se que o comportamento da pressão de Casimir é mais suscetível a variações de a_3 quando comparado a a_2

Agora analisamos o efeito de temperatura, implementado-a via compactificação ao longo de x^0 . Para esse caso, onde $\alpha_0 = (\beta, 2ia_1, 2ia_2, 2ia_3)$, o tensor energia momento fica dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{\mu\nu(11)}(\alpha) = & -\frac{4}{\pi^2} \left\{ \sum_{l_0=1}^{\infty} (-1)^{l_0+1} \frac{g^{\mu\nu} - 4n_0^\mu n_0^\nu}{(\beta l_0)^4} + \sum_{l_1=1}^{\infty} (-1)^{l_1+1} \frac{g^{\mu\nu} + 4n_1^\mu n_1^\nu}{(2a_1 l_1)^4} \right. \\
& + \sum_{l_2=1}^{\infty} (-1)^{l_2+1} \frac{g^{\mu\nu} + 4n_2^\mu n_2^\nu}{(2a_2 l_2)^4} + \left. \sum_{l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_3+1} \frac{g^{\mu\nu} + 4n_3^\mu n_3^\nu}{(2a_3 l_3)^4} \right) \\
& + 2 \sum_{l_0, l_1=1}^{\infty} (-1)^{l_0+l_1} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(\beta l_0)^2 + (2a_1 l_1)^2]^2} - \frac{4(\beta l_0)^2 n_0^\mu n_0^\nu - 4(2a_1 l_1)^2 n_1^\mu n_1^\nu}{[(\beta l_0)^2 + (2a_1 l_1)^2]^3} \right) \\
& + 2 \sum_{l_0, l_2=1}^{\infty} (-1)^{l_0+l_2} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(\beta l_0)^2 + (2a_2 l_2)^2]^2} - \frac{4(\beta l_0)^2 n_0^\mu n_0^\nu - 4(2a_2 l_2)^2 n_2^\mu n_2^\nu}{[(\beta l_0)^2 + (2a_2 l_2)^2]^3} \right) \\
& + 2 \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_0+l_3} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(\beta l_0)^2 + (2a_3 l_3)^2]^2} - \frac{4(\beta l_0)^2 n_0^\mu n_0^\nu - 4(2a_3 l_3)^2 n_3^\mu n_3^\nu}{[(\beta l_0)^2 + (2a_3 l_3)^2]^3} \right) \\
& + 2 \sum_{l_1, l_2=1}^{\infty} (-1)^{l_1+l_2} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(2a_1 l_1)^2 + (2a_2 l_2)^2]^2} + \frac{4(2a_1 l_1)^2 n_1^\mu n_1^\nu + 4(2a_2 l_2)^2 n_2^\mu n_2^\nu}{[(2a_1 l_1)^2 + (2a_2 l_2)^2]^3} \right) \\
& + 2 \sum_{l_1, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_1+l_3} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(2a_1 l_1)^2 + (2a_3 l_3)^2]^2} + \frac{4(2a_1 l_1)^2 n_1^\mu n_1^\nu + 4(2a_3 l_3)^2 n_3^\mu n_3^\nu}{[(2a_1 l_1)^2 + (2a_3 l_3)^2]^3} \right) \\
& + 2 \sum_{l_2, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_2+l_3} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(2a_2 l_2)^2 + (2a_3 l_3)^2]^2} + \frac{4(2a_2 l_2)^2 n_2^\mu n_2^\nu + 4(2a_3 l_3)^2 n_3^\mu n_3^\nu}{[(2a_2 l_2)^2 + (2a_3 l_3)^2]^3} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4 \sum_{l_0, l_1, l_2=1}^{\infty} (-1)^{l_0+l_1+l_2+1} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(\beta l_0)^2 + (2a_1 l_1)^2 + (2a_2 l_2)^2]^2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{4(\beta l_0)^2 n_0^\mu n_0^\nu - 4(2a_1 l_1)^2 n_1^\mu n_1^\nu - 4(2a_2 l_2)^2 n_2^\mu n_2^\nu}{[(\beta l_0)^2 + (2a_1 l_1)^2 + (2a_2 l_2)^2]^3} \right) \\
& + 4 \sum_{l_0, l_2, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_0+l_2+l_3+1} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(\beta l_0)^2 + (2a_2 l_2)^2 + (2a_3 l_3)^2]^2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{4(\beta l_0)^2 n_0^\mu n_0^\nu - 4(2a_2 l_2)^2 n_2^\mu n_2^\nu - 4(2a_3 l_3)^2 n_3^\mu n_3^\nu}{[(\beta l_0)^2 + (2a_2 l_2)^2 + (2a_3 l_3)^2]^3} \right) \\
& + 4 \sum_{l_0, l_1, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_0+l_1+l_3+1} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(\beta l_0)^2 + (2a_1 l_1)^2 + (2a_3 l_3)^2]^2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{4(\beta l_0)^2 n_0^\mu n_0^\nu - 4(2a_1 l_1)^2 n_1^\mu n_1^\nu - 4(2a_3 l_3)^2 n_3^\mu n_3^\nu}{[(\beta l_0)^2 + (2a_1 l_1)^2 + (2a_3 l_3)^2]^3} \right) \\
& + 4 \sum_{l_1, l_2, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_1+l_2+l_3+1} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(2a_1 l_1)^2 + (2a_2 l_2)^2 + (2a_3 l_3)^2]^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{4(2a_1 l_1)^2 n_1^\mu n_1^\nu + 4(2a_2 l_2)^2 n_2^\mu n_2^\nu + 4(2a_3 l_3)^2 n_3^\mu n_3^\nu}{[(2a_1 l_1)^2 + (2a_2 l_2)^2 + (2a_3 l_3)^2]^3} \right) \\
& + 8 \sum_{l_0, l_1, l_2, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_0+l_1+l_2+l_3} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{[(\beta l_0)^2 + (2a_1 l_1)^2 + (2a_2 l_2)^2 + (2a_3 l_3)^2]^2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{4(\beta l_0)^2 n_0^\mu n_0^\nu - 4(2a_1 l_1)^2 n_1^\mu n_1^\nu - 4(2a_2 l_2)^2 n_2^\mu n_2^\nu - 4(2a_3 l_3)^2 n_3^\mu n_3^\nu}{[(\beta l_0)^2 + (2a_1 l_1)^2 + (2a_2 l_2)^2 + (2a_3 l_3)^2]^3} \right) \Big\},
\end{aligned}$$

sendo então a energia de Casimir, $E(a_1, a_1, a_1) = \mathcal{T}^{00(11)}$:

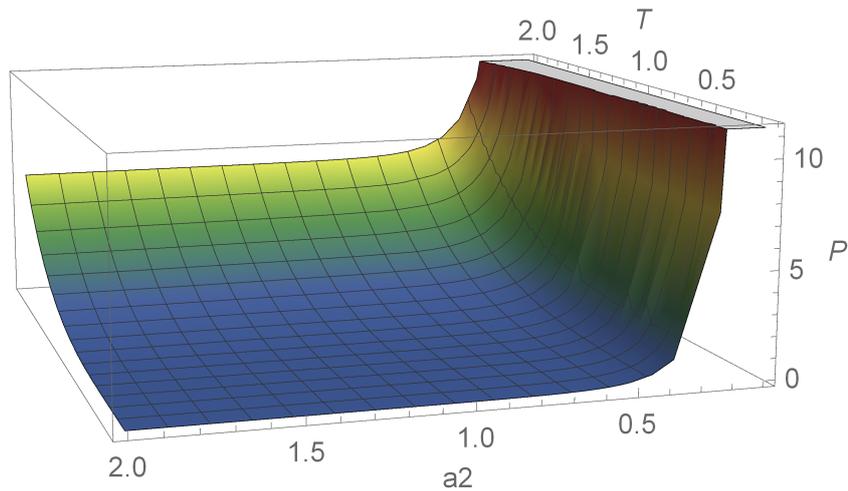
$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{00(11)} &= \frac{7\pi^2}{60\beta^4} - \frac{7\pi^2}{2880} \left(\frac{1}{a_1^4} + \frac{1}{a_2^4} + \frac{1}{a_3^4} \right) \\
& + \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_1=1}^{\infty} (-1)^{l_0+l_1} \frac{3(\beta l_0)^2 - 4(a_1 l_1)^2}{[(\beta l_0)^2 + 4(a_1 l_1)^2]^3} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_2=1}^{\infty} (-1)^{l_0+l_2} \frac{3(\beta l_0)^2 - 4(a_2 l_2)^2}{[(\beta l_0)^2 + 4(a_2 l_2)^2]^3} \\
& + \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_0+l_3} \frac{3(\beta l_0)^2 - 4(a_3 l_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + 4(a_3 l_3)^2]^3} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_1, l_2=1}^{\infty} (-1)^{l_1+l_2} \frac{1}{[(a_1 l_1)^2 + (a_2 l_2)^2]^2} \\
& - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_1, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_1+l_3} \frac{1}{[(a_1 l_1)^2 + (a_3 l_3)^2]^2} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_2, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_2+l_3} \frac{1}{[(a_2 l_2)^2 + (a_3 l_3)^2]^2} \\
& - \frac{16}{\pi^2} \sum_{l_0, l_1, l_2=1}^{\infty} (-1)^{l_0+l_1+l_2} \frac{3(\beta l_0)^2 - 4(a_1 l_1)^2 - 4(a_2 l_2)^2}{[(\beta l_0)^2 + 4(a_1 l_1)^2 + 4(a_2 l_2)^2]^3} \\
& - \frac{16}{\pi^2} \sum_{l_0, l_2, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_0+l_2+l_3} \frac{3(\beta l_0)^2 - 4(a_2 l_2)^2 - 4(a_3 l_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + 4(a_2 l_2)^2 + 4(a_3 l_3)^2]^3} \\
& - \frac{16}{\pi^2} \sum_{l_0, l_1, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_0+l_1+l_3} \frac{3(\beta l_0)^2 - 4(a_1 l_1)^2 - 4(a_3 l_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + 4(a_1 l_1)^2 + 4(a_3 l_3)^2]^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi^2} \sum_{l_1, l_2, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_1+l_2+l_3} \frac{1}{[(a_1 l_1)^2 + (a_2 l_2)^2 + (a_3 l_3)^2]^2} \\
& + \frac{32}{\pi^2} \sum_{l_0, l_1, l_2, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_0+l_1+l_2+l_3} \frac{3(\beta l_0)^2 - 4(a_1 l_1)^2 - 4(a_2 l_2)^2 - 4(a_3 l_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + 4(a_1 l_1)^2 + 4(a_2 l_2)^2 + 4(a_3 l_3)^2]^3},
\end{aligned}$$

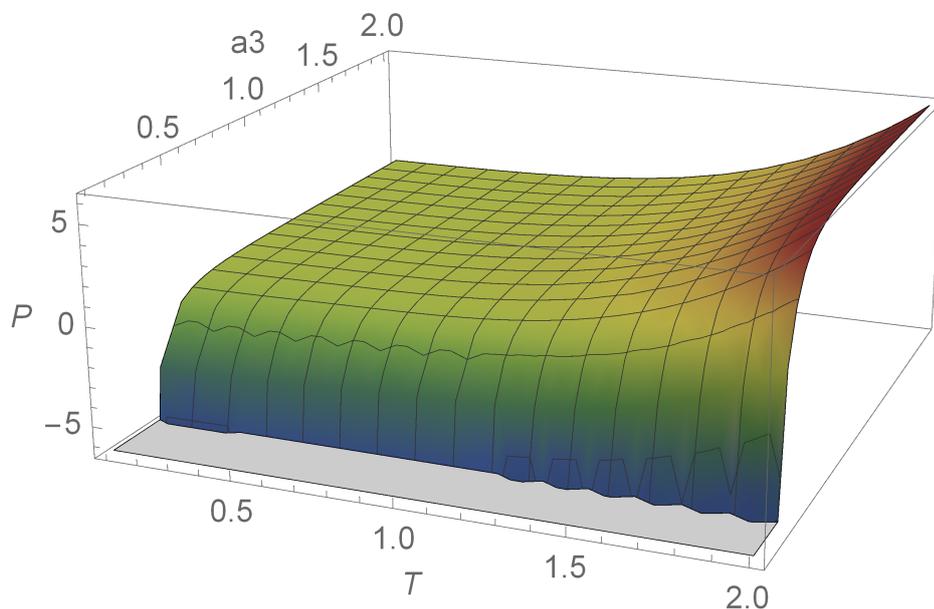
e a pressão,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{33(11)} &= \frac{7\pi^2}{180\beta^4} + \frac{7\pi^2}{2880} \frac{1}{a_1^4} + \frac{7\pi^2}{2880} \frac{1}{a_2^4} - \frac{7\pi^2}{960} \frac{1}{a_3^4} \\
& + \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_1=1}^{\infty} (-1)^{l_0+l_1} \frac{1}{[(\beta l_0)^2 + 4(a_1 l_1)^2]^2} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_2=1}^{\infty} (-1)^{l_0+l_2} \frac{1}{[(\beta l_0)^2 + 4(a_2 l_2)^2]^2} \\
& + \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_0+l_3} \frac{(\beta l_0)^2 - 12(a_3 l_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + 4(a_3 l_3)^2]^3} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_1, l_2=1}^{\infty} (-1)^{l_1+l_2} \frac{1}{[(a_1 l_1)^2 + (a_2 l_2)^2]^2} \\
& + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_1, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_1+l_3} \frac{(a_1 l_1)^2 - 3(a_3 l_3)^2}{[(a_1 l_1)^2 + (a_3 l_3)^2]^3} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_2, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_2+l_3} \frac{(a_2 l_2)^2 - 3(a_3 l_3)^2}{[(a_2 l_2)^2 + (a_3 l_3)^2]^3} \\
& - \frac{16}{\pi^2} \sum_{l_0, l_1, l_2=1}^{\infty} (-1)^{l_0+l_1+l_2} \frac{1}{[(\beta l_0)^2 + 4(a_1 l_1)^3 + 4(a_2 l_2)^2]^2} \\
& - \frac{16}{\pi^2} \sum_{l_0, l_2, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_0+l_2+l_3} \frac{(\beta l_0)^2 + 4(a_2 l_2)^3 - 12(a_3 l_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + 4(a_2 l_2)^3 + 4(a_3 l_3)^2]^3} \\
& - \frac{16}{\pi^2} \sum_{l_0, l_1, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_0+l_1+l_3} \frac{(\beta l_0)^2 + 4(a_1 l_1)^3 - 12(a_3 l_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + 4(a_1 l_1)^3 + 4(a_3 l_3)^2]^3} \\
& - \frac{1}{\pi^2} \sum_{l_1, l_2, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_1+l_2+l_3} \frac{(a_1 l_1)^2 + (a_2 l_2)^3 - 3(a_3 l_3)^2}{[(a_1 l_1)^2 + (a_2 l_2)^3 + (a_3 l_3)^2]^3} \\
& + \frac{32}{\pi^2} \sum_{l_0, l_1, l_2, l_3=1}^{\infty} (-1)^{l_0+l_1+l_2+l_3} \frac{(\beta l_0)^2 + 4(a_1 l_1)^2 + 4(a_2 l_2)^3 - 12(a_3 l_3)^2}{[(\beta l_0)^2 + 4(a_1 l_1)^2 + 4(a_2 l_2)^3 + 4(a_3 l_3)^2]^3},
\end{aligned}$$

Para uma caixa cúbica, i.e, $a_1 = a_2 = a_3 = a$, sabe-se que existe uma transição de valores negativos de pressão para valores positivos com o aumento da temperatura [51]. Considerando o caso geral, $a_1 \neq a_2 \neq a_3$, observamos que uma transição de valores negativos para valores positivos ocorre a medida em que a_3 e a temperatura ($T = \beta^{-1}$) aumentam, enquanto que para a_2 , essa transição ocorre com sua diminuição. Como no caso para bósons, a implementação da temperatura causa uma mudança na relação entre a pressão e os parâmetros de compactificação a_2 e a_3 . Com o efeito de temperatura, para baixas temperaturas, a pressão é dominada por a_2 . Para altas temperaturas, a pressão cresce rapidamente com a temperatura.



(a) Pressão de Casimir em função de a_2 e da temperatura $T = \beta^{-1}$ para $a_1 = a_3$ mantido fixos.



(b) Pressão de Casimir em função de a_3 e da temperatura $T = \beta^{-1}$ para $a_1 = a_2$ mantido fixos.

Figura 5.3: Pressão de Casimir $P = \mathcal{T}^{33(11)}$ à temperatura finita em um hipertoro. Observa-se que a pressão decai rapidamente com o aumento de a_2 . Embora a pressão cresça com o aumento de a_3 , essa mudança é mais sutil comparada à mudança decorrente de a_2 .

5.1.1 Efeito Casimir para quarks e glúons

Nesta seção vamos considerar um modelo aproximado da Cromodinâmica Quântica para analisar de que maneira o efeito Casimir pode contribuir para o fenômeno de deconfinamento de hadrons. Para isso, consideramos uma densidade de lagrangiana descrevendo um plasma de quarks e glúons, cuja matéria hadrônica forma um bárion não massivo livre e não interagente. Devido à liberdade assintótica, à temperaturas suficientemente altas, os quarks e glúons interagem fracamente, de maneira que o sistema pode ser tratado via teoria de perturbação. Em ordem zero, os quarks e glúons são livres e as massas dos quarks podem ser negligenciadas [57]. A fim de calcular o efeito Casimir para esse modelo simplificado, ambos resultados para bósons e férmions devem ser combinados. Nessa aproximação, o tensor energia-momento para o sistema de quarks e glúons é dado por

$$\mathcal{T}_{gg}^{\mu\nu(11)}(\alpha) = \mathcal{T}_q^{\mu\nu}(\alpha) + \mathcal{T}_g^{\mu\nu}(\alpha),$$

onde para os quarks, a menos dos números quânticos de cor e sabor, o tensor energia momento é dado por aquele dos férmions, i.e.,

$$\mathcal{T}_q^{\mu\nu}(\alpha) = n_c n_s \mathcal{T}^{\mu\nu(11)},$$

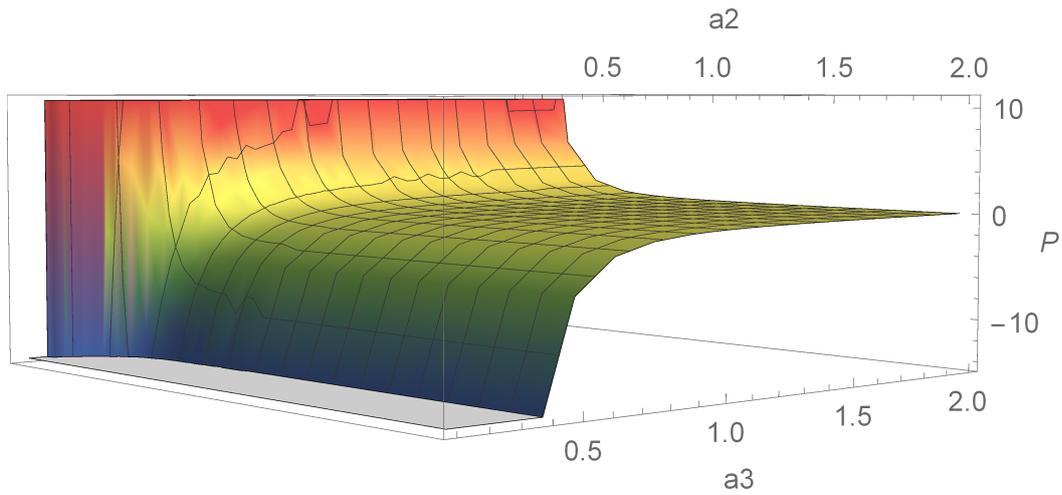
e para os glúons, a menos dos números quânticos de cor, o tensor energia momento é dado por aquele do campo eletromagnético:

$$\mathcal{T}_g^{\mu\nu}(\alpha) = n_g \mathcal{T}^{\mu\nu(11)}.$$

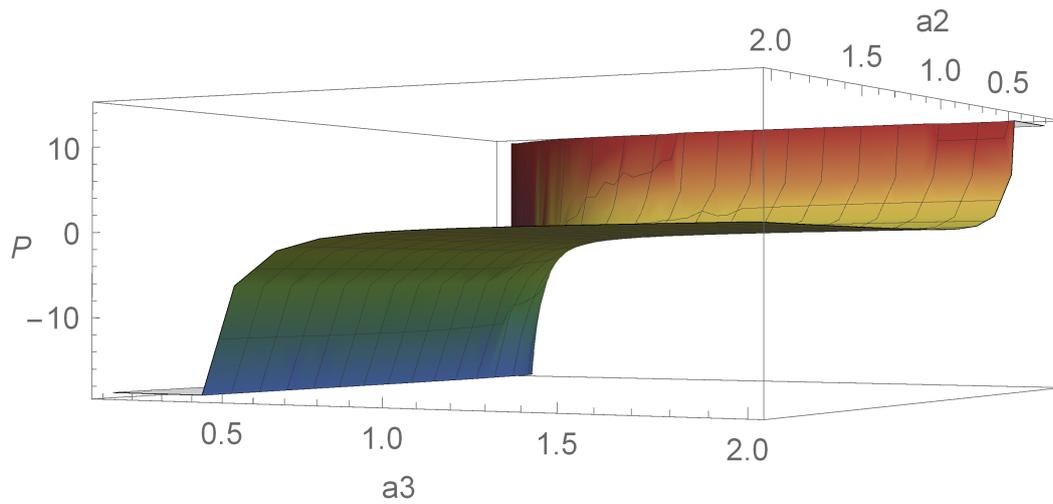
n_c, n_s denotam, respectivamente, o números de cores e sabores no grupo $SU(3)$ da teoria de campo não abeliano.

Considerando um hadron especificado por um octeto de glúons e dois sabores, cada um com três cores, i.e., considerando $n_g = 8, n_f = 2$ e $n_c = 3$ e utilizando os resultados obtidos na seção anterior para a pressão de Casimir para bósons e férmions encontramos que, para ambos os quarks e glúons, à temperatura zero, existe uma transição

de valores negativos para valores de pressão com o aumento de a_3 e a diminuição de a_2 . Como no caso de férmions e bósons, a pressão para ambos os campos de quarks e glúons é dominada por a_3 . Estes comportamentos podem ser observados no graficos (5.4a) e (5.4b).



(a) Pressão de Casimir à temperatura zero para os glúons em função de a_2 e a_3 para a_1 mantido constante.

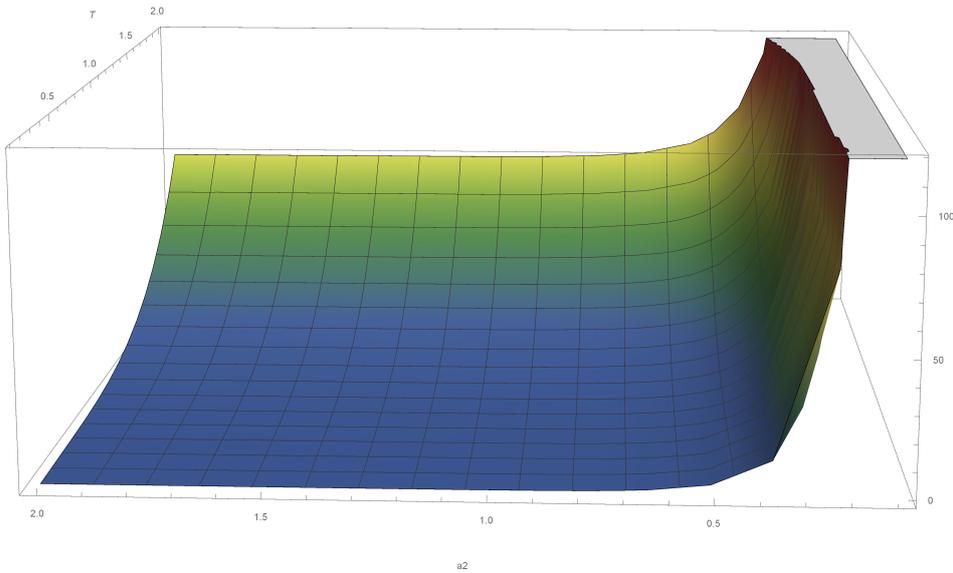


(b) Pressão de Casimir à temperatura zero para os quarks em função de a_2 e a_3 para a_1 mantido constante.

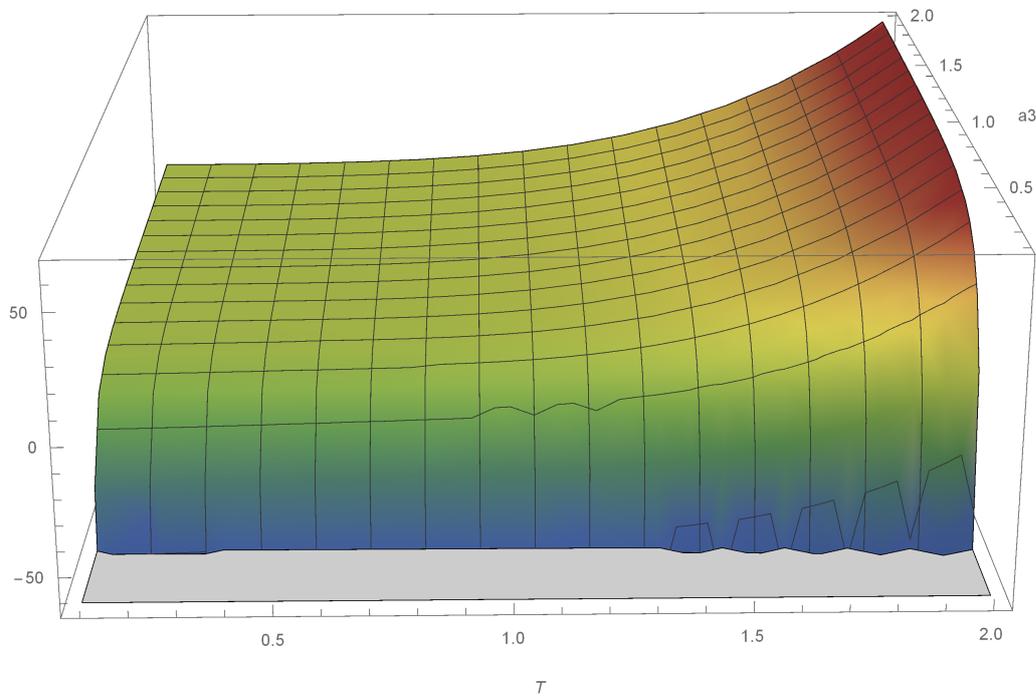
Figura 5.4: Pressão de Casimir $P = \mathcal{T}^{33(11)}$ à temperatura zero para os quarks e glúons.

Implementando a temperatura, encontramos que, para altas temperaturas, ambos os quarks e glúons contribuem positivamente para a pressão, enquanto que, para

baixas temperaturas, a contribuição é negativa. Portanto, existe uma transição de valores negativos de pressão para valores positivos para o sistema de quarks e glúons. Nota-se que, ao contrário do caso de bósons e férmions, para o sistema de quarks e glúon, a pressão, mesmo depois da implementação da temperatura, continua mais suscetível a variações de a_3 comparado à a_i , $i = 1, 2$. Estes comportamentos podem ser inferidos dos gráficos (5.5a) e (5.5b) Este fato abre amplas possibilidades para os parâmetros de compactificação a fim de se obter a temperatura crítica de transição para o plasma de quarks e glúons e, conseqüentemente, um amplo espectro de valores de temperatura crítica é possível devido a variações dos parâmetros de compactificação. Quantitativamente, considerando $a_1 = 0.88fm$, $a_2 = 0.88fm$, $a_3 = 0.88fm$, i.e., $a_1 = a_2 = a_3 \approx r_p$, onde r_p denota o raio do próton, obtemos uma temperatura crítica estimada de $T \approx 122MeV$ ($1fm = 1/200MeV$). Entretanto, um modesto aumento de $a_3 = 0.88fm \rightarrow 1.0fm$ faz com que a temperatura crítica caia para $T \approx 77MeV$. O mesmo aumento, se incrementado em $a_2 = 0.88fm \rightarrow 1.0fm$ ao invés de a_3 eleva a temperatura crítica para $T \approx 130MeV$. Esta situação claramente demonstra a dominância de a_3 na determinação da temperatura crítica de transição e o amplo espectro de possíveis temperaturas críticas. A previsão teórica via teoria não perturbativa da Cromodinâmica Quântica na rede aponta para uma temperatura crítica de transição $T \approx 200MeV$. Os resultados obtidos demonstram a importância dos parâmetros de compactificação na determinação do efeito Casimir e sua contribuição para o esperado deconfinamento dos hadrons.



(a) Pressão de Casimir em função da temperatura e de a_2 para o sistema de quarks e glúons.



(b) Pressão de Casimir em função da temperatura e de a_3 para o sistema de quarks e glúons.

Figura 5.5: Pressão de Casimir $P = \mathcal{T}^{33(11)}$ à temperatura finita para o sistema de quarks e glúons com a_1 mantido constante.

Capítulo 6

Conclusões

A descoberta da liberdade assintótica da Cromodinâmica Quântica, bem como da restauração da simetria quiral à altas temperaturas, que é espontaneamente quebrada à baixas temperaturas levou a um crescente interesse e a uma crescente investigação acerca do fenômeno de deconfinamento dos quarks, dando origem a um novo estado da matéria, o plasma de quarks e glúons. Nesta direção, este trabalho explorou o efeito de Casimir à temperatura zero e à temperatura finita para bósons e férmions em um hipertoro. Primeiro, consideramos efeito Casimir à temperatura zero para analisar os efeitos devido tão somente às compactificações espaciais. Observamos que existe uma transição de valores negativos de pressão para valores positivos de pressão à medida que o parâmetro de compactificação a_3 aumenta e a_2 diminui. Notamos que o comportamento da pressão é mais sensível à variações de a_3 do que à variações de a_2 . Entretanto, quando a temperatura é implementada, observamos uma reversão neste comportamento. À baixas temperaturas, o comportamento da pressão torna-se mais sensível à variações de a_2 , enquanto que, à altas temperaturas, essa mudança se torna irrisória devido à dominância do termo correspondente à radiação de corpo negro na pressão.

Utilizamos os resultados obtidos para bósons e férmions para considerar um modelo não massivo e não interagente da Cromodinâmica Quântica. Um hadron especificado por duas cores, cada um com três cores, e oito glúons é considerado a fim de se obter

um estimativa para a temperatura crítica de transição do hadron para o plasma de quarks e glúons. É observado um amplo espectro de possíveis temperaturas críticas de transição a depender da compactificação considerada. Considerando os parâmetros de compactificação na ordem do raio de um hadron e pequenas variações nessa escala, encontramos que a temperatura crítica para transição de valores negativos de pressão para valores positivos pode variar para valores abaixo de $T \approx 77MeV$, bem como acima de $T \approx 122MeV$.

Os resultados obtidos demonstram a crucial importância da contribuição do efeito Casimir para o processo de deconfinamento dos quarks, cuja previsão teórica aponta para uma temperatura crítica de transição $T \approx 200MeV$.

É importante ressaltar aqui o interesse em se avaliar o efeito da radiação em um meio material, o que altera o propagador com relação àquele do vácuo. Além disso, em termos do processo de deconfinamento, a transição observada aqui, entre as pressões positivas e negativas, pode estar associada com a transição quirial entre hadrons e o plasma de quarks e glúons. Esses aspectos permanecem em aberto, como perspectivas de futuros desenvolvimentos.

Referências Bibliográficas

- [1] Y. Takahasi and H. Umezawa, “Thermo field dynamics,” *Collect. Phenom.* **2** (1975) 55–80.
- [2] T. Matsubara, “A New approach to quantum statistical mechanics,” *Prog. Theor. Phys.* **14** (1955) 351–378.
- [3] R. Floreanini and R. Jackiw, “Functional Representation for Fermionic Quantum Fields,” *Phys. Rev.* **D37** (1988) 2206.
- [4] O. J. P. Eboli, R. Jackiw, and S.-Y. Pi, “Quantum Fields Out of Thermal Equilibrium,” *Phys. Rev.* **D37** (1988) 3557.
- [5] D. N. Zubarev and M. V. Tokarchuk, “Nonequilibrium Thermo Field Dynamics and the Method of the Nonequilibrium Statistical Operator,” *Theor. Math. Phys.* **88** (1992) 876–893. [Teor. Mat. Fiz.88N2,286(1991)].
- [6] S. P. Kim, A. E. Santana, and F. C. Khanna, “Generalized invariants and quantum evolution of open fermionic system,” *Phys. Lett.* **A272** (2000) 46–52, [arXiv:hep-th/9910189](https://arxiv.org/abs/hep-th/9910189) [hep-th].
- [7] R. Casana, V. Ya. Fainberg, B. M. Pimentel, and J. S. Valverde, “Bose-Einstein condensation and free DKP field,” *Phys. Lett.* **A316** (2003) 33–43, [arXiv:hep-th/0309007](https://arxiv.org/abs/hep-th/0309007) [hep-th].
- [8] C. A. Bonin and B. M. Pimentel, “The Matsubara-Fradkin Thermodynamical

- Quantization of Podolsky Electrodynamics,” *Phys. Rev.* **D84** (2011) 065023, arXiv:1105.3920 [hep-th].
- [9] F. T. Brandt, A. K. Das, O. Espinosa, J. Frenkel, and S. Perez, “Thermal operator representation of finite temperature graphs,” *Phys. Rev.* **D72** (2005) 085006, arXiv:hep-th/0508067 [hep-th].
- [10] C. Ccapa Ttira, C. D. Fosco, A. P. C. Malbouisson, and I. Roditi, “A Dual Path Integral Representation for Finite Temperature Quantum Field Theory,” *Phys. Rev.* **D77** (2008) 105030, arXiv:0803.1667 [hep-th].
- [11] T. Kita, “Introduction to Nonequilibrium Statistical Mechanics with Quantum Field,” *Prog. Theor. Phys.* **123** (2010) 581–658, arXiv:1005.0393 [cond-mat.stat-mech].
- [12] L. V. Keldysh, “Diagram technique for nonequilibrium processes,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **47** (1964) 1515–1527. [Sov. Phys. JETP20,1018(1965)].
- [13] J. S. Schwinger, “On the Green’s functions of quantized fields. 1.,” *Proc. Nat. Acad. Sci.* **37** (1951) 452–455.
- [14] J. S. Schwinger, “On the Green’s functions of quantized fields. 2.,” *Proc. Nat. Acad. Sci.* **37** (1951) 455–459.
- [15] J. S. Schwinger, “On gauge invariance and vacuum polarization,” *Phys. Rev.* **82** (1951) 664–679.
- [16] H. Chu and H. Umezawa, “A Unified formalism of thermal quantum field theory,” *Int. J. Mod. Phys.* **A9** (1994) 2363–2409.
- [17] F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson, and A. E. Santana, “Quantum field theory on toroidal topology: Algebraic structure and applications,” *Phys. Rept.* **539** (2014) 135–224, arXiv:1409.1245 [hep-th].

- [18] D. J. Gross, “Asymptotic Freedom and Bjorken Scaling,” *AIP Conf. Proc.* **23** (1975) 583–595.
- [19] D. Gross, “A Review of Asymptotic Freedom,” in *High energy physics. Proceedings, 17th International Conference, ICHEP 1974, London, England, July 01-July 10, 1974*, pp. III.65–76. 1974.
<http://inspirehep.net/record/1305004/files/c74-07-01-p065.pdf>.
- [20] S. Bethke, “Experimental tests of asymptotic freedom,” *Prog. Part. Nucl. Phys.* **58** (2007) 351–386, [arXiv:hep-ex/0606035](https://arxiv.org/abs/hep-ex/0606035) [hep-ex].
- [21] F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson, and A. R. Santana, *Thermal quantum field theory - Algebraic aspects and applications*. 2009. <http://ebooks.worldscinet.com/ISBN/9789812818898/9789812818898.html>.
- [22] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, and C. B. Thorn, “Baryon Structure in the Bag Theory,” *Phys. Rev.* **D10** (1974) 2599.
- [23] H. Queiroz, J. C. da Silva, F. C. Khanna, J. M. C. Malbouisson, M. Revzen, and A. E. Santana, “Thermofield dynamics and Casimir effect for fermions,” *Annals Phys.* **317** (2005) 220–237, [arXiv:hep-th/0411228](https://arxiv.org/abs/hep-th/0411228) [hep-th]. [Erratum: *Annals Phys.* 321,1274(2006)].
- [24] H. Queiroz, J. C. da Silva, F. C. Khanna, M. Revzen, and A. E. Santana, “Generalized Bogolyubov transformation, fermion field and Casimir effect in a box,” [arXiv:hep-th/0311246](https://arxiv.org/abs/hep-th/0311246) [hep-th].
- [25] J. Ambjorn and R. J. Hughes, “Gauge Fields, BRS Symmetry and the Casimir Effect,” *Nucl. Phys.* **B217** (1983) 336–348.
- [26] J. Ambjorn and S. Wolfram, “Properties of the Vacuum. 1. Mechanical and Thermodynamic,” *Annals Phys.* **147** (1983) 1.

- [27] J. Ambjorn and S. Wolfram, “Properties of the Vacuum. 2. Electrodynamics,” *Annals Phys.* **147** (1983) 33.
- [28] H. Ezawa, Y. Tomozawa, and H. Umezawa, “Quantum statistics of fields and multiple production of mesons,” *Nuovo Cim.* **5** (1957) 810–841.
- [29] J. Schwinger, “Euclidean Quantum Electrodynamics,” *Phys. Rev.* **115** (1959) 721–731.
- [30] K. T. Mahanthappa, “Multiple production of photons in quantum electrodynamics,” *Phys. Rev.* **126** (1962) 329–340.
- [31] P. M. Bakshi and K. T. Mahanthappa, “Expectation value formalism in quantum field theory. 1.,” *J. Math. Phys.* **4** (1963) 1–11.
- [32] P. M. Bakshi and K. T. Mahanthappa, “Expectation value formalism in quantum field theory. 2.,” *J. Math. Phys.* **4** (1963) 12–16.
- [33] L. Kadanoff and G. Baym, *Quantum Statistical Mechanics*. W.A. Benjamin Inc., New York, 1962.
- [34] I. Ojima, “Gauge Fields at Finite Temperatures: Thermo Field Dynamics, KMS Condition and their Extension to Gauge Theories,” *Annals Phys.* **137** (1981) 1.
- [35] A. E. Santana and F. C. Khanna, “Lie groups and thermal field theory,” *Phys. Lett.* **A203** (1995) 68–72.
- [36] A. E. Santana, F. C. Khanna, H. Chu, and Y. C. Chang, “Thermal lie groups, classical mechanics, and thermofield dynamics,” *Annals Phys.* **249** (1996) 481–498.
- [37] A. Matos Neto, J. D. M. Vianna, A. E. Santana, and F. C. Khanna, “The Tomita-Takesaki representation of w^* -algebras, Lie groups, and thermofield dynamics,” *Phys. Essays* **9** (1996) 596–603.

- [38] H. Umezawa, H. Matsumoto, and M. Tachiki, *THERMO FIELD DYNAMICS AND CONDENSED STATES*. 1982.
- [39] Y. Takahashi and H. Umezawa, “Thermo field dynamics,” *Int. J. Mod. Phys.* **B10** (1996) 1755–1805.
- [40] H. Umezawa, *Advanced Field Theory: Micro, Macro, and Thermal Physics*. AIP Press, 1995. <https://books.google.com.br/books?id=KMa-1RDkhxMC>.
- [41] F. Bloch, “Zur Theorie des Austauschproblems und der Remanenzerscheinung der Ferromagnetika,” *Zeitschrift fur Physik* **74** (May, 1932) 295–335.
- [42] H. B. G. Casimir, “On the Attraction Between Two Perfectly Conducting Plates,” *Indag. Math.* **10** (1948) 261–263. [Kon. Ned. Akad. Wetensch. Proc.100N3-4,61(1997)].
- [43] S. K. Lamoreaux, “Demonstration of the Casimir force in the 0.6 to 6 micrometers range,” *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 5–8. [Erratum: *Phys. Rev. Lett.*81,5475(1998)].
- [44] P. W. Milonni, *The Quantum vacuum: An Introduction to quantum electrodynamics*. 1994.
- [45] V. M. Mostepanenko and N. N. Trunov, *The Casimir effect and its applications*. 1997.
- [46] I. H. Brevik, J. B. Aarseth, J. S. Høye, and K. A. Milton, “On the temperature dependence of the Casimir effect,” *Phys. Rev.* **E71** (2005) 056101, [arXiv:quant-ph/0410231](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0410231) [quant-ph].
- [47] I. H. Brevik, K. A. Milton, S. D. Odintsov, and K. E. Osetrin, “Dynamical Casimir effect and quantum cosmology,” *Phys. Rev.* **D62** (2000) 064005, [arXiv:hep-th/0003158](https://arxiv.org/abs/hep-th/0003158) [hep-th].

- [48] M. Bordag, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko, “New developments in the Casimir effect,” *Phys. Rept.* **353** (2001) 1–205, arXiv:quant-ph/0106045 [quant-ph].
- [49] T. Hashimoto, “QCD CASIMIR EFFECTS WITH BAG BOUNDARY AT FINITE TEMPERATURE,” *Prog. Theor. Phys.* **73** (1985) 1223.
- [50] O. Kenneth, I. Klich, A. Mann, and M. Revzen, “Repulsive Casimir forces,” *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 033001, arXiv:quant-ph/0202114 [quant-ph].
- [51] F. C. Khanna, J. M. C. Malbouisson, and A. E. Santana, “Bogoliubov transformation for quantum fields in $(S^1)^d \times R^{D-d}$ topology and applications to the Casimir effect,” *J. Phys. Conf. Ser.* **161** (2009) 012024.
- [52] K. Saito, “Casimir effect on quark gluon plasma,” *Z. Phys.* **C50** (1991) 69–74.
- [53] G. Plunien, B. Muller, and W. Greiner, “The Casimir Effect,” *Phys. Rept.* **134** (1986) 87–193.
- [54] G. V. Efimov and M. A. Ivanov, *The Quark confinement model of hadrons*. IOP, Bristol, 1993.
- [55] M. Knecht, “Une introduction à la symétrie chirale.” Lecture, Sept., 1998.
- [56] J. B. Kogut, M. Stone, H. W. Wyld, W. R. Gibbs, J. Shigemitsu, S. H. Shenker, and D. K. Sinclair, “Deconfinement and Chiral Symmetry Restoration at Finite Temperatures in SU(2) and SU(3) Gauge Theories,” *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 393.
- [57] J. Kapusta, B. Muller, and J. Rafelski, *Quark-Gluon Plasma: Theoretical Foundations: An Annotated Reprint Collection*. Elsevier Science, 1 ed., Dec., 2003. <http://www.worldcat.org/isbn/0444511105>.

- [58] CMS Collaboration, V. Khachatryan *et al.*, “Evidence for collectivity in pp collisions at the LHC,” [arXiv:1606.06198](https://arxiv.org/abs/1606.06198) [nucl-ex].
- [59] K. Johnson, “The M.I.T. Bag Model,” *Acta Phys. Polon.* **B6** (1975) 865.