



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Aplicação do Método dos Elementos de Contorno  
na simulação dos fenômenos dos cones de água  
e de gás em poços de petróleo horizontais**

Gustavo Silva Vaz Gontijo

Brasília, Dezembro de 2015

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Aplicação do Método dos Elementos de Contorno  
na simulação dos fenômenos dos cones de água  
e de gás em poços de petróleo horizontais**

**Gustavo Silva Vaz Gontijo**

*Dissertação submetida ao Departamento de Engenharia Mecânica  
da Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília como requisito parcial  
para obtenção do grau de Mestre em Sistemas Mecatrônicos.*

Banca Examinadora

Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque, ENM/UnB

*Orientador*

\_\_\_\_\_

Prof. Dr. Eugênio L. F. Fortaleza, ENM/UnB

*Examinador interno*

\_\_\_\_\_

Prof. Dra. Carla Tatiana Mota Anflor, FGA/UnB

*Examinador externo*

\_\_\_\_\_

## FICHA CATALOGRÁFICA

GONTIJO, GUSTAVO SILVA VAZ

Aplicação do Método dos Elementos de Contorno na simulação dos fenômenos dos cones de água e de gás em poços de petróleo horizontais

[Distrito Federal] 2015.

xii, 128, 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Sistemas Mecatrônicos, 2015).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

- |                                     |                            |
|-------------------------------------|----------------------------|
| 1. Método dos Elementos de Contorno | 2. Interface móvel         |
| 3. Cone de água                     | 4. Cone de gás             |
| 5. Poços de petróleo horizontais    | 6. Difusividade hidráulica |
| I. ENM/FT/UnB                       | II. Título (série)         |

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

GONTIJO, G. S. V. (2015). Aplicação do Método dos Elementos de Contorno na simulação dos fenômenos dos cones de água e de gás em poços de petróleo horizontais, Dissertação de Mestrado em Sistemas Mecatrônicos, Publicação ENM.DM-92A/15, Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 128

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Gustavo Silva Vaz Gontijo

TÍTULO: Aplicação do Método dos Elementos de Contorno na simulação dos fenômenos dos cones de água e de gás em poços de petróleo horizontais.

GRAU: Mestre ANO: 2015

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desse trabalho de conclusão de curso pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Gustavo Silva Vaz Gontijo  
ggontijo@gmail.com

## **Dedicatória**

*Dedico este trabalho ao meu filho,  
Théo, que, mesmo sem saber, foi quem  
mais me incentivou a concluí-lo.*

## Agradecimentos

*A minha esposa, Ingrid, pelo apoio incondicional.*

*Ao professor Éder Lima de Albuquerque, por nunca ter medido esforços para me ajudar durante a orientação deste trabalho. Sem sua orientação, realizar este trabalho não teria sido possível.*

*Ao professor Eugênio Fortaleza, pelas conversas elucidantes que sempre me mostraram belas soluções de engenharia quando eu, aparentemente, chegava a um beco sem saída.*

*A ANP (Agência Nacional do Petróleo) e as empresas Chevron e Petrobras, que através do projeto “Controle de injeção de água em reservatórios de petróleo” e do “Programa de Formação de Recursos Humanos em Automação Offshore - PRH-PB 223” deram suporte e financiamento a este trabalho.*

---

## RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre os fenômenos dos cones de água e de gás em poços de petróleo horizontais. O escopo é a modelagem numérica bidimensional dos fenômenos utilizando o Método dos Elementos de Contorno. Este texto traz uma revisão acerca destes fenômenos e de seu impacto na indústria de petróleo, de forma a situar o leitor sobre a motivação para o estudo do tema.

São utilizados dois modelos de escoamento potencial, monofásico e bifásico. Um terceiro modelo, de escoamento compressível monofásico também é aplicado. Todo o tratamento matemático envolvido na dedução das equações governantes dos modelos é apresentado. Também estão presentes os desenvolvimentos matemáticos de três formulações do Método dos Elementos de Contorno. São elas a formulação para problemas regidos pela equação de Laplace, a formulação de Reciprocidade Dual para problemas regidos pela equação da difusividade e a formulação de sub-regiões, para problemas sobre domínios homogêneos por partes. O detalhamento do desenvolvimento matemático para a integração analítica das matrizes de influência é mostrado e utilizado para garantir uma melhor performance dos simuladores desenvolvidos.

Uma alternativa na modelagem do poço de petróleo horizontal em domínio bidimensional é proposta, utilizando um conjunto de sumidouros pontuais para representar seu perímetro. Esta abordagem permite analisar de forma satisfatória o comportamento da interface entre fluidos, mesmo depois que ela já tenha tocado o poço.

A implementação dos três simuladores é documentada de forma a permitir a utilização deste texto como consulta para implementações semelhantes. A determinação das condições de contorno para os três modelos, incluindo as condições de compatibilidade e equilíbrio na interface entre fluidos, é apresentada.

Os simuladores propostos foram desenvolvidos e validados em comparação a resultados analíticos disponíveis.

**Palavras-chave:** Método dos Elementos de Contorno, Interface móvel, Cone de água, Cone de gás, Poços de petróleo horizontais, Difusividade hidráulica.

---

## ABSTRACT

This paper presents a study on water and gas coning phenomena in horizontal oil wells. The scope is their two-dimensional numerical modeling using the Boundary Element Method. This text provides a review of these phenomena including their impact on oil industry in order to situate the reader about the motivation for the study of this subject.

Two potential flow models, single-phase and two-phase, are used. A third model, single-phase compressible flow is also applied. All the mathematical treatment involved in the deduction of the models' governing equations is presented. Also present are the mathematical developments of three formulations of the Boundary Element Method. They are the formulation for problems governed by the Laplace equation, the Dual Reciprocity formulation for problems governed by the diffusion equation, and the sub-regions formulation, for problems within a domain which is homogeneous by parts. The details of mathematical development for analytical integration of the influence matrices is shown and used to ensure better performance of the developed simulators.

An alternative modeling of horizontal oil wells in two-dimensional domain is proposed, using a set of point sinks to represent its perimeter. This approach allows to satisfactorily analyze the behavior of fluids interface, even after it reaches the well.

Implementation of the three simulators is documented to enable the use of this material as reference text for similar implementations. Determination of boundary conditions for the three models, including compatibility and equilibrium at the interface are presented.

The proposed simulators were developed and validated in comparison to available analytical results.

**Keywords:** Boundary Element Method, Moving interface, Water coning, Gas coning, Horizontal oil wells, Hydraulic diffusion.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b> .....	<b>1</b>
1.1	Os cones de água e de gás .....	1
1.2	O Método dos Elementos de Contorno .....	2
1.3	Objetivo do trabalho .....	3
<b>2</b>	<b>Os fenômenos dos cones de água e de gás</b> .....	<b>4</b>
2.1	Breves conceitos sobre a produção de petróleo .....	4
2.1.1	O reservatório de petróleo .....	4
2.1.2	O poço produtor .....	5
2.1.3	Etapas da produção .....	8
2.1.4	Processamento primário .....	9
2.2	Os cones de água e de gás .....	13
2.2.1	O fenômeno .....	14
2.2.2	Vazão crítica .....	14
2.2.3	Aspectos teóricos .....	15
2.2.4	Desvantagens .....	16
2.2.5	Abordagens.....	16
<b>3</b>	<b>Modelos adotados</b> .....	<b>18</b>
3.1	A lei de Darcy .....	19
3.1.1	Considerações sobre a velocidade.....	21
3.1.2	Importância prática da lei de Darcy.....	21
3.2	Escoamento potencial.....	21
3.2.1	A equação governante .....	22
3.3	Escoamento compressível .....	23
3.3.1	A equação governante .....	23
3.4	Condições de contorno .....	26
3.4.1	Escoamento monofásico .....	27
3.4.2	Escoamento bifásico.....	28
<b>4</b>	<b>O Método dos Elementos de Contorno para escoamentos potenciais</b> .....	<b>30</b>
4.1	Uma breve introdução .....	30
4.1.1	Modelos matemáticos.....	30
4.1.2	Métodos numéricos.....	30



4.2	Soluções fundamentais .....	31
4.2.1	Solução fundamental do potencial .....	32
4.2.2	Solução fundamental da velocidade .....	33
4.3	A equação integral de contorno .....	35
4.4	Discretização das equações .....	41
4.5	Elementos de contorno lineares contínuos .....	42
4.6	Método de solução .....	44
4.6.1	Cálculo do potencial e da velocidade no contorno.....	45
4.6.2	Cálculo do potencial e da velocidade em pontos internos .....	48
<b>5</b>	<b>Integração analítica das matrizes de influência <math>H</math> e <math>G</math> .....</b>	<b>50</b>
5.1	Análise qualitativa das integrações .....	50
5.2	Integração analítica das matrizes .....	51
5.2.1	Sistema de coordenadas local.....	51
5.2.2	Desenvolvimento analítico da integral para $g_1$ .....	53
5.2.3	Desenvolvimento analítico da integral para $g_2$ .....	56
5.2.4	Desenvolvimento analítico da integral para $h_1$ .....	57
5.2.5	Desenvolvimento analítico da integral para $h_2$ .....	59
<b>6</b>	<b>O Método dos Elementos de Contorno para escoamentos compressíveis .....</b>	<b>61</b>
6.1	Equação de Poisson na forma $\nabla^2 u = b(x, y)$ .....	61
6.1.1	Solução em pontos internos .....	65
6.1.2	A função $f$ .....	65
6.2	Equação de Poisson na forma $\nabla^2 u = b(x, y, u)$ .....	66
6.3	Equação da difusividade hidráulica.....	67
<b>7</b>	<b>Formulação do Método dos Elementos de Contorno para sub-regiões.....</b>	<b>70</b>
7.1	Fundamentação teórica .....	70
7.2	Equacionamento.....	71
<b>8</b>	<b>Modelagem do poço .....</b>	<b>80</b>
8.1	Tipos de representação .....	80
8.2	Características da representação adotada.....	81
8.2.1	Condição de equipotencial.....	82
8.2.2	Produção supercrítica .....	82
<b>9</b>	<b>Implementação dos simuladores .....</b>	<b>85</b>
9.1	Parâmetros de entrada.....	85
9.1.1	Parâmetros calculados.....	86
9.2	Condições de contorno.....	86
9.2.1	Escoamento monofásico potencial .....	86
9.2.2	Escoamento monofásico compressível.....	89
9.2.3	Escoamento bifásico potencial .....	91
9.3	Movimentação da interface .....	93

9.4	Método de solução .....	94
<b>10</b>	<b>Validação dos simuladores desenvolvidos.....</b>	<b>96</b>
10.1	Estratégia de validação .....	96
10.1.1	Simulador monofásico potencial .....	96
10.1.2	Simulador bifásico potencial .....	97
10.1.3	Simulador monofásico compressível .....	97
10.2	Comparação dos resultados.....	98
10.3	Discussão.....	100
<b>11</b>	<b>Resultados .....</b>	<b>101</b>
11.1	Simulador bifásico potencial.....	101
11.1.1	Líquido e gás.....	101
11.1.2	Líquido e líquido .....	104
11.2	Simulador monofásico potencial.....	105
11.3	Simulador monofásico compressível .....	106
	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>109</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>111</b>

# LISTA DE FIGURAS

1.1	Célula de Hele-Shaw (Limaverde Filho, 2014).....	3
2.1	Configurações dos reservatórios .....	5
2.2	Poços vertical e horizontal .....	6
2.3	Revestimento perfurado e ranhurado (Catálogo National Oilwell Varco, 2014) .....	6
2.4	Diagrama simplificado das etapas do processamento primário.....	13
2.5	Cone em poço vertical e em poço horizontal (PetroWiki.org).....	14
3.1	Representação bidimensional do reservatório .....	18
3.2	Experimento de Darcy (Bear, 1972, modificada). .....	19
3.3	Aspecto geral do problema cone de gás.....	27
3.4	Aspecto geral do problema de cone de água.....	28
4.1	Pontos fonte e campo.....	32
4.2	Modificação do contorno.....	37
4.3	Ângulos interno e externos .....	40
4.4	Discretização do contorno .....	41
4.5	Aproximação dos elementos reais por elementos de contorno .....	42
4.6	Elemento de contorno linear contínuo .....	42
4.7	Funções de forma (Albuquerque, 2013). .....	43
4.8	Exemplo de aplicação - condições de contorno.....	45
5.1	Sistema de coordenadas local usado para o cálculo das integrais analíticas (Braga, 2012) .....	52
5.2	Projeções de $r_1$ e $r_2$ na direção tangencial (Córdoba, 2013).....	54
7.1	Domínio composto por duas sub-regiões.....	71
7.2	Problema de duas sub-regiões .....	72
8.1	Abordagens para a modelagem geométrica do poço .....	81
8.2	Interação interface-poço.....	81
8.3	Balanceamento da intensidade dos sumidouros pontuais.....	83
8.4	Posição do ponto central da interface ao longo do tempo .....	84
8.5	Velocidade média normal ao elemento .....	84
9.1	Exemplo: reservatório retangular contendo apenas um fluido .....	86

9.2	Exemplo: reservatório retangular contendo dois fluidos .....	91
10.1	Geometria e condições de contorno simuladas para o caso (b).....	98
10.2	Comparação dos resultados para a posição da interface .....	99
10.3	Comparação dos resultados para a posição da interface (ampliação) .....	99
10.4	Distribuição de potencial no tempo $t = \infty$ .....	100
10.5	Evolução do potencial no ponto central do domínio para vários valores de K .....	100
11.1	Gradiente de pressão: altura da coluna de gás igual à da coluna de líquido .....	101
11.2	Gradiente de pressão: coluna de gás 5 vezes maior que a de líquido .....	102
11.3	Fluxo que entra em cada sub-região .....	103
11.4	Gradientes de potencial no instante $t$ .....	104
11.5	Gradientes de pressão no instante $t$ .....	104
11.6	Fluxo que entra no domínio simulado .....	105
11.7	Altura do nó central da interface ao longo do tempo .....	105
11.8	Gradiente de potencial com interface estável .....	106
11.9	Comparação da propagação da onda de potencial. Coluna esquerda: escoamento compressível. Coluna direita: escoamento potencial .....	107
11.10	Comparação entre os deslocamentos dos nós centrais .....	108
11.11	Comparação entre as evoluções do potencial de um mesmo ponto no interior do domínio.....	108
11.12	Comparação entre as evoluções do potencial de um mesmo ponto no interior do domínio - zoom.....	108

# LISTA DE TABELAS

4.1 Exemplo de aplicação - variáveis conhecidas e desconhecidas .....	45
10.1 Comparação dos resultados obtidos.....	98
10.2 Comparação dos resultados para o caso (b) .....	99

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Símbolos Latinos

$A$	Área [ $m^2$ ]
$c$	Compressibilidade do fluido [ $1/Pa$ ]
$c_f$	Compressibilidade efetiva da formação [ $1/Pa$ ]
$c_t$	Compressibilidade total [ $1/Pa$ ]
$g$	Aceleração da gravidade [ $m/s^2$ ]
$k$	Permeabilidade absoluta do meio poroso [ <i>darcy</i> ], [ $m^2$ ]
$K$	Condutividade hidráulica do meio [ $m/s$ ]
$p$	Pressão [ $Pa$ ]
$q$	Velocidade aparente do fluido [ $m/s$ ]
$Q$	Fluxo volumétrico [ $m^3/s$ ]
$u_f$	Velocidade do fluido [ $m/s$ ]

## Símbolos Gregos

$\alpha$	Razão entre as massas específicas dos fluidos[–]
$\Gamma$	Contorno aproximado
$\delta$	Função delta de Dirac
$\eta$	Constante de difusividade hidráulica [ $m^2/s$ ]
$\Theta$	Porosidade do meio [–]
$\lambda$	Função altura da interface [ $m$ ]
$\mu$	Viscosidade dinâmica do fluido [ $kg/m.s$ ]
$\xi$	Coordenada local do elemento
$\rho$	Massa específica do fluido [ $kg/m^3$ ]
$\Phi$	Potencial de velocidade [ $m$ ]

## Sobrescritos

*	Solução fundamental
–	Condição de contorno prescrita

## Subscritos

<i>crit</i>	Relativo à vazão crítica
<i>d</i>	Relativo ao ponto fonte
<i>f</i>	Relativo à formação
<i>g</i>	Relativo ao gás
<i>o</i>	Relativo ao óleo
<i>s</i>	Relativo à posição do sumidouro
<i>w</i>	Relativo à água
<i>x</i>	Relativo à direção x
<i>y</i>	Relativo à direção y
<i>z</i>	Relativo à direção z

## Siglas

MDF	Método das Diferenças Finitas
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MRD	Método da Reciprocidade Dual

## Negrito

Símbolos em negrito indicam grandezas vetoriais

# Capítulo 1

## Introdução

Em um antigo poço no vilarejo de Balakhany, no Azerbaijão, foi encontrada uma pedra onde se lia que aquele poço havia sido escavado no ano 1594 por Allah Yarom Mamed Nur Ogly. Tal poço tinha 60 metros de profundidade (Sokolov, 1972). Daquela época para hoje, não só uma indústria, mas um estilo de vida se desenvolveu em torno do petróleo. Poços ainda são perfurados com o mesmo objetivo. Suas profundidades, porém, já chegam a ser medidas em quilômetros.

O custo de se implantar uma planta de produção de petróleo é bastante elevado, mesmo para os padrões de uma empresa integrante deste mercado. A alta produtividade é sempre desejada. Isso significa produção em maior volume possível, de um óleo o mais “puro” possível. O recurso natural tão desejado, entretanto, não se deixa extrair nem com a velocidade nem com a pureza almejadas. Existem diversos fatores que limitam a produção. Dois deles são o tema de estudo deste trabalho.

### 1.1 Os cones de água e de gás

Os fenômenos dos cones de água e de gás são fatores limitantes na produtividade de um poço de petróleo. Estes fenômenos ocorrem em decorrência do gradiente de pressão aplicado pelo poço com o objetivo de extrair o petróleo do reservatório.

Em poucas palavras, o gradiente de pressão atinge todos os fluidos presentes no reservatório (petróleo, água e gás natural) e como a água e o gás têm maior mobilidade que o petróleo, os mesmos tendem a fluir em direção ao poço, tomando, cada um, a forma de um cone.

Para certos valores de vazão de extração, o cone de água e/ou o cone de gás atingem a extremidade do poço, fazendo com que água e/ou gás sejam produzidos junto com o petróleo, diminuindo a produtividade. Joshi (1991) diz que desde o princípio da exploração industrial do petróleo, inúmeros experimentos e análises matemáticas foram conduzidos para resolver problemas de cone de água de gás. O primeiro trabalho publicado sobre esse tema, em 1935, já diz que a formação e evolução do cone de água são fenômenos muito complexos sobre os quais uma análise teórica é praticamente impossível (Muskat e Wyckoff, 1935).



Contornando a grande complexidade do problema, tratamentos analíticos com severas aproximações e restrições foram utilizados na formulação de diversos modelos e correlações que hoje são utilizados para estimar o comportamento dos cones de água e de gás (Rosa et al., 2006). Felizmente, hoje existem avançadas ferramentas de análise numérica que permitem o estudo destes fenômenos via simulação computacional, minimizando as simplificações nos modelos utilizados e aumentando a acurácia dos resultados obtidos.

## 1.2 O Método dos Elementos de Contorno

A análise numérica é mais rápida e barata que a análise experimental, sendo muito utilizada na simulação de reservatórios de petróleo. Porém, para que a ferramenta numérica seja útil, é necessário um investimento em algoritmos eficientes, principalmente em se tratando de problemas de larga escala, onde milhões de graus de liberdade são considerados.

Neste quesito entra o Método dos Elementos de Contorno (MEC), uma ferramenta de análise numérica que vem sendo utilizada na modelagem do problema de extração de petróleo e de formação dos cones de água e de gás. Este método tem a característica de diminuir o problema em uma dimensão, diminuindo o custo computacional das análises. A montagem das matrizes de influência ( $H$ ) e ( $G$ ) é responsável pela maior parte do tempo de processamento do código do MEC. Portanto, a forma como esta matriz é calculada tem impacto direto no custo computacional da análise numérica.

A integração analítica destas matrizes não só torna o método mais rápido e eficiente que quando se faz integração numérica, mas também elimina uma série de questões relativas ao número de pontos de integração ideal para se obter boa precisão na integração. Para suprir esta necessidade, foi utilizado o procedimento desenvolvido por Córdoba (2013) para integrar analiticamente estas matrizes.

O Método das Diferenças Finitas é o método numérico mais utilizado no desenvolvimento dos simuladores comerciais disponíveis atualmente. Este trabalho apresenta o MEC como uma alternativa atraente para o desenvolvimento deste tipo de simulador.

Aplicações do MEC em temas similares aos deste trabalho foram desenvolvidas para o estudo de escoamento de água em meios porosos tanto na superfície, em represas de aterro (Rafiezadeh e Ataie-Ashtiani, 2014), quanto na sub-superfície, em aquíferos. Zhang et al. (1999) o utiliza para analisar a eficiência do bombeamento pulsado *versus* o constante em aquíferos monofásicos. Em alguns trabalhos, água doce e salgada foram consideradas coexistindo de forma estratificada por suas diferentes densidades (Hocking e Zhang, 2009; Zhang et al., 2009). Dias Jr (2012) faz uma implementação do MEC para o problema de bombeamento de água com superfície livre. Esta implementação foi utilizada como base para o desenvolvimento do simulador monofásico potencial neste trabalho.

Farmen et al. (1999) e Soares e Simões (2012) estudaram a dinâmica do cone de água em meio poroso bidimensional. O trabalho de Soares e Simões (2012) utilizou um tratamento matemático

através de mapeamentos conformes e obteve uma expressão analítica para o formato da interface estável. Este resultado é utilizado para validar os simuladores desenvolvidos.

### 1.3 Objetivo do trabalho

O objetivo deste trabalho é aplicar o MEC no desenvolvimento de três simuladores que permitam estudar o comportamento dos cones de água e de gás. O primeiro é um simulador de escoamento monofásico, que permite apenas a simulação do fenômeno do cone de gás. O segundo é um simulador bifásico, que permite simular tanto o fenômeno do cone de gás quanto o fenômeno do cone de água. O terceiro simulador também é monofásico, permitindo a simulação apenas do fenômeno do cone de gás. A diferença deste em relação ao primeiro é a utilização do modelo da difusividade hidráulica para levar em conta no escoamento as compressibilidades da rocha e do óleo.

Os simuladores se destinam à análise da evolução da interface entre óleo e água ou entre óleo e gás ao longo do tempo. Os simuladores serão utilizados para aplicação de sistemas de controle, onde constantemente se necessita saber a posição e velocidade de qualquer ponto da interface. Nesta área experimental, vários trabalhos se utilizam de células de Hele-Shaw (Fig. 1.1) para simular em escala reduzida o escoamento em meios porosos.



Figura 1.1: Célula de Hele-Shaw (Limaverde Filho, 2014)

Limaverde Filho (2014) mostra a aplicação de controle não-linear em uma célula de Hele-Shaw onde se realiza a extração de glicerina sujeita ao cone de gás. Aplicando o algoritmo de controle em um simulador, foram desenvolvidos modelos dinâmicos para controlar a altura da interface. A atuação se dá através da variação da intensidade do bombeamento, garantindo um aumento da produção acumulada ao longo do tempo, sem a produção indesejada de gás.

## Capítulo 2

# Os fenômenos dos cones de água e de gás

### 2.1 Breves conceitos sobre a produção de petróleo

De acordo com Satter et al. (2007), o primeiro poço perfurado especificamente com o objetivo de produzir petróleo para venda foi o poço Drake, nos arredores da cidade de Titusville, no estado da Pennsylvania, nos Estados Unidos. Este poço foi perfurado em 1859, tinha uma profundidade de 21 m e produzia cerca de 25 barris por dia. Seguindo o sucesso do poço Drake, toda a indústria do petróleo foi desenvolvida, e hoje é uma das maiores do mundo. Esta seção apresenta alguns conceitos sobre a indústria do petróleo, com o objetivo de familiarizar o leitor com as etapas do processo de produção e melhor compreender a motivação para a realização deste trabalho.

#### 2.1.1 O reservatório de petróleo

Um reservatório de petróleo é um meio poroso, permeável, que normalmente está aprisionado entre uma rocha impermeável acima e uma rocha semipermeável abaixo. Segundo Rosa et al. (2006), existem várias configurações possíveis dentro do reservatório (Fig. 2.1). A primeira possibilidade é o reservatório conter apenas petróleo (Fig. 2.1a). Outra possibilidade é o reservatório conter, além do petróleo, uma massa de água, a que comumente se refere como *aquífero* (Fig. 2.1b). Pode haver, também, a ocorrência de petróleo na presença de uma massa de gás natural, a que se convencionou chamar de *capa de gás* (Fig. 2.1c). Por último, pode haver a presença dos três fluidos, petróleo, água e gás (Fig. 2.1d). Tudo depende das condições de pressão e temperatura a que o reservatório esteve (e está) submetido e das condições geológicas daquele ponto da subsuperfície onde ele se encontra.

De acordo com Thomas (2004), o processo de formação do petróleo inicia-se nas camadas de rocha sedimentares localizadas em profundidade superior à do reservatório. Uma vez formado o petróleo, este escoa por rochas semipermeáveis até encontrar um bolsão de rocha porosa que esteja aprisionado por rochas impermeáveis. Este bolsão gradativamente se enche de petróleo e se torna,

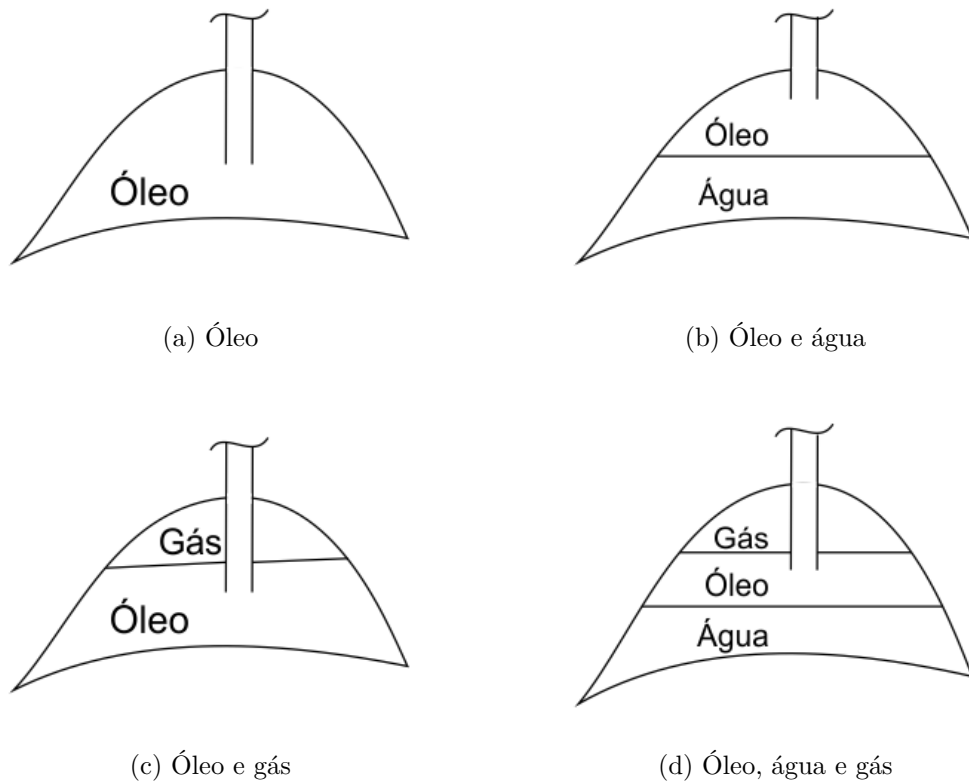


Figura 2.1: Configurações dos reservatórios

então, um reservatório. Segundo Sokolov (1972), a formação do petróleo é um processo químico que só ocorre sob condições geológicas definidas. As condições de pressão e temperatura aliadas ao longo tempo que o petróleo fica estagnado contribuem para a composição final e o estado físico dos hidrocarbonetos que se encontram no reservatório.

### 2.1.2 O poço produtor

Para extrair petróleo de um reservatório, um poço é perfurado no solo, passando através de várias camadas de rocha até chegar no meio poroso que contém o petróleo, conforme mostrado na Fig. 2.2. O poço se caracteriza, então, pelo duto perfurado desde a superfície até a zona de óleo do reservatório. Suas paredes são recobertas por um tubo metálico para garantir a estabilidade estrutural necessária. Este tubo, denominado  *revesti mento*, é perfurado (Fig. 2.3a) ou ranhurado (Fig. 2.3b) na região em que tem contato com a zona de óleo. Isso é necessário para permitir a entrada do óleo no interior do poço através de toda a superfície do poço que tem contato com o óleo.

Os poços podem ser verticais, direcionais ou horizontais. Os poços direcionais não serão levados em consideração neste trabalho. Todavia, uma ideia geral sobre os mesmos podem ser inferidas pelo leitor considerando que o poço horizontal pode ser visto como um caso particular de poço direcional.

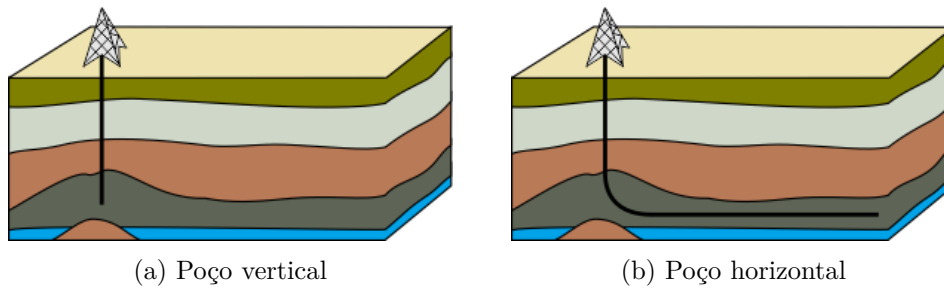


Figura 2.2: Poços vertical e horizontal

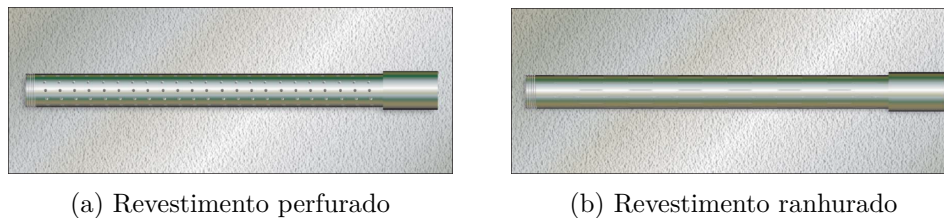


Figura 2.3: Revestimento perfurado e ranhurado (Catálogo National Oilwell Varco, 2014)

### a) Poços verticais

O tipo convencionalmente utilizado desde o início da produção de petróleo pela indústria são os poços verticais (Fig. 2.2a). Estes poços são mais baratos, tecnicamente mais simples e têm tempo de perfuração menor, se comparados aos horizontais.

Os poços verticais possuem duas fortes características. A primeira é que cada poço deve ser perfurado a partir do ponto da superfície localizado exatamente sobre o ponto do reservatório de onde se deseja extrair. Como os reservatórios são muito grandes, da ordem de quilômetros, perfuram-se neles vários poços para extrair petróleo, cada um com uma área de drenagem determinada pela condutividade hidráulica do meio poroso onde o óleo se encontra. Esta área determina o espaçamento entre os poços. Lyons e Plisga (2005) dizem que o usual nos Estados Unidos é que a área de drenagem de um poço seja de 40 acres para a produção de óleo (o equivalente a um quadrado de 400 m de lado ou uma circunferência de 450 m de diâmetro) e 160 ou 320 acres para a produção de gás. Como o custo da perfuração aumenta consideravelmente com a profundidade, é comum que poços mais profundos tenham um espaçamento maior entre si. Isso significa que em grandes reservatórios produzidos por meio de poços verticais, existirá uma grande área na superfície ocupada por equipamentos de produção.

A segunda característica é que o contato dos poços verticais com a zona de óleo do reservatório fica restrita à altura dessa camada de óleo. Então, em um reservatório com uma altura da zona de óleo pequena, maior deverá ser o diferencial de pressão entre o poço e o reservatório para se conseguir uma vazão de óleo considerável, o que pode influenciar fortemente a ocorrência de cone de água e de gás.

Estas características dos poços verticais, em algumas situações, podem inviabilizar econômica ou tecnicamente a extração de petróleo de um determinado reservatório. Para superar essas adversidades, a perfuração de poços horizontais foi desenvolvida e atualmente é plenamente utilizada.

## b) Poços horizontais

Um dos maiores propósitos dos poços horizontais (Fig. 2.2b) é o de aumentar o contato entre o poço e o reservatório, e, assim, aumentar a produtividade. Como a zona de óleo de um reservatório é tipicamente mais extensa no plano horizontal do que no vertical, a área de contato entre poço e óleo é consideravelmente maior do que em poços verticais. Assim, as mesmas vazões de óleo podem ser conseguidas com um diferencial de pressão menor, o que auxilia na prevenção do cone de água e de gás.

Segundo Joshi (2003), os poços horizontais começaram a ser utilizados na indústria do petróleo em 1927, mas somente na década de 80 ganharam maior popularidade. Em 2014, 67 % dos poços perfurados nos Estados Unidos foram horizontais (Selley e Sonnenberg, 2015).

De acordo com Azar e Samuel (2007), os reservatórios considerados como potenciais candidatos a receberem um poço horizontal têm pelo menos uma das seguintes características:

- São propensos à ocorrência de cone de água ou de gás;
- Têm permeabilidade muito baixa (permeabilidade « 1 md);
- São verticalmente fraturados ;
- São economicamente inacessíveis;
- Contêm óleo pesado;
- Têm pouca altura;
- São reservatórios em camadas com ângulo de inclinação muito grande;

Diz-se que tais reservatórios são *potenciais* candidatos porque a perfuração de um poço horizontal é muito mais custosa e demorada que a de um poço vertical. Assim, uma análise de viabilidade econômica deve ser realizada de forma a verificar se os ganhos em produtividade trazidos pelo poço horizontal suplantam seus custos de perfuração.

Selley e Sonnenberg (2015) apontam 3 fatores que podem levar à escolha de um poço horizontal ao invés de um poço vertical. São eles:

1. Pode ser drenada uma área que está sob uma cidade ou lago onde a superfície não pode ser ocupada;
2. Uma grande área pode ser drenada por vários poços perfurados a partir de um único local;
3. Um poço “fora de controle” pode ser selado ou ter sua pressão aliviada através de um poço horizontal que o intercepte.

A perfuração de vários poços a partir de um mesmo local é especialmente desejada em plataformas marítimas. Nelas, normalmente se perfuram um poço vertical e vários horizontais (ou direcionais).

### 2.1.3 Etapas da produção

De acordo com Petex (2011), “produção” é a fase da operação que contempla trazer o petróleo até a superfície e prepará-lo para o transporte até a refinaria. Para tirar o petróleo do reservatório e trazê-lo à superfície, duas etapas são realizadas. A primeira, chamada “recuperação”, é caracterizada pelo escoamento do óleo *dentro do reservatório*, através do meio poroso, até a sua entrada no poço. A segunda, chamada “elevação”, é caracterizada pelo escoamento do óleo *dentro do poço*, até a superfície.

Ao conjunto de causas e efeitos que levam o óleo a sair de seu local de repouso e escoar até a entrada do poço se dá o nome de “mecanismos de recuperação” ou “mecanismos de produção”. Analogamente, o que leva o óleo a escoar dentro do poço, desde o reservatório até a superfície, são os “mecanismos de elevação”.

#### a) Mecanismos de recuperação

Mecanismos de recuperação, segundo Rosa et al. (2006), são parcialmente baseados na descompressão do reservatório. Esta descompressão se deve à extração de matéria - e, conseqüentemente, energia - do interior do reservatório quando a produção é iniciada e tem basicamente dois efeitos: a expansão dos fluidos contidos no reservatório e a contração dos poros das rochas. A expansão dos fluidos, por si só, causa o escoamento de parte do óleo, pois o mesmo passa a precisar de um volume poroso maior para acomodar a totalidade de sua massa. Somado a isso, a contração dos poros das rochas diminui o volume poroso disponível para o armazenamento de fluidos e contribui para o escoamento do óleo na medida em que expulsa parte dele de seu interior. Como o poço é uma região de menor potencial, a tendência do óleo (e demais fluidos) é de escoar em sua direção.

Ainda segundo Rosa et al. (2006), outra parcela em que se baseiam os mecanismos de recuperação é o deslocamento de um fluido por outro. Um exemplo ilustra esta afirmação. A água proveniente de um aquífero abaixo da zona de óleo, quando escoar pela ação da descompressão do reservatório, empurra o óleo, forçando-o a escoar. Esta ação pode ser vista como uma *frente* de água “lavando” o óleo dos poros da rocha e tem sua raiz na imiscibilidade dos fluidos (Dake, 1978). A mesma coisa ocorre com o gás livre proveniente da capa de gás acima da zona de óleo. Novamente, como o poço produtor representa a região de menor potencial dentro do reservatório, o óleo tende a escoar para o seu interior.

É importante notar que a recuperação depende da energia existente no reservatório, manifestada através da pressão. Uma vez que a produção dos fluidos leva consigo parte dessa energia, chega um momento em que métodos de recuperação secundária se fazem necessários. Tais métodos se baseiam na adição de energia externa no reservatório, de modo a manter a pressão em seu interior em níveis que permitam a continuação do escoamento dos fluidos no meio poroso, ou seja, são uma forma de *recriar* um alto gradiente de pressão no reservatório. Alguns exemplos de métodos de recuperação secundária são a injeção de água e a injeção de gás. Existem também os processos térmicos, nos quais a viscosidade de um óleo pesado é diminuída pela adição de energia térmica ao reservatório, aumentando assim taxa de recuperação (Satter et al., 2007).

## b) Mecanismos de elevação

Em um primeiro estágio de produção, a energia natural do reservatório é tão grande que, em alguns casos, além de promover a etapa da recuperação, consegue realizar a elevação naturalmente. Isto é, basta conectar o poço à zona de óleo do reservatório e o óleo surge naturalmente na superfície. Nos casos em que isso acontece, diz-se que o poço é “surgente”, enquanto esta condição se mantém. Esta situação ocorre porque a pressão do reservatório, que é a principal manifestação da sua energia, é alta o suficiente não apenas para vencer a resistência do escoamento no meio poroso até o poço como também para vencer o peso de toda a coluna de fluidos do fundo do poço até a superfície.

Com o avanço da produção e a conseqüente diminuição da energia natural do reservatório, sua pressão interna eventualmente cai a ponto de não ser mais suficiente para elevar toda a coluna de fluido desde o fundo do poço até a superfície e o petróleo não consegue mais ser elevado desta forma natural. O poço deixa de ser surgente. Neste ponto, a elevação do petróleo até as instalações de superfície passa a ser realizada por mecanismos de elevação artificiais, como bombeamento ou gas-lift. Nos poços não-surgentes, os mecanismos de elevação artificiais são utilizados desde o início da produção.

## Produção de fluidos indesejados

Deve ficar claro que a produção de óleo *sempre* implica em produção de água e gás. Uma certa quantidade de água sempre está presente nos poros das rochas junto com o óleo, e ambos os fluidos escoam para o interior do poço devido ao diferencial de pressão entre o poço e o reservatório. Esta água se encontra *dentro* da zona de óleo, em equilíbrio, e sua produção é inevitável. Ela não deve ser confundida com a massa de água, ou aquífero, que se localiza abaixo da zona de óleo e pode ou não existir, como mostrado na Fig. 2.1. A produção de água do aquífero é o que se tenta evitar de modo a não produzir mais água do que a quantidade inevitável.

O mesmo ocorre com o gás. Normalmente, há uma parcela de gás dissolvida no óleo, independente do reservatório conter uma capa de gás livre. Esse gás se encontra dissolvido no óleo à pressão do reservatório, porém, à pressão atmosférica, forma uma fase gasosa que chega junto com o óleo e a água à superfície. O que se tenta evitar é a produção do gás natural proveniente da capa de gás, de forma a não produzir mais gás do que a quantidade inevitável.

A produção de água e gás provenientes do aquífero e da capa de gás aceleram a perda da energia natural do reservatório. Isso faz com que os métodos de recuperação secundária tenham que ser adotados mais cedo do que se estes fluidos indesejados não fossem produzidos.

### 2.1.4 Processamento primário

Haja vista as condições físicas e geológicas de um reservatório e do petróleo em seu interior, é impossível produzir o óleo sem que se produzam junto gás e água. De acordo com Thomas (2004), a quantidade de água produzida junto com o óleo tipicamente alcança valores da ordem de 50 %



do volume, podendo chegar até perto de 100 % no final da vida economicamente produtiva de um poço. As refinarias aceitam, no entanto, apenas de 0,2 % a 3 % de água no óleo (Lyons, 2010). Como o interesse econômico está apenas sobre o óleo, toda planta de produção tem instalada na superfície uma unidade de processamento primário. Esta unidade é responsável por fazer a separação entre óleo/gás/água, condicionar o óleo para o transporte até a refinaria e tratar a água produzida (que traz consigo uma série de impurezas) para descartar ou reinjetar no reservatório.

A mistura de fluidos que chega à superfície através do poço é bastante heterogênea. É normalmente composta de várias fases: gás, óleo, água, emulsão de água em óleo e partículas sólidas. As emulsões são formadas tanto no fluxo dos fluidos pelo meio poroso quanto no interior do poço (Sokolov, 1972), devido à presença de agentes emulsificantes tais como resinas, asfaltenos, sabões e vários sais que formam um filme fino ao redor de pequenas gotas de água e óleo e impedem a sua aglutinação. As partículas sólidas são tipicamente grãos de areia, partículas de argila e de rochas provenientes do interior do reservatório e do fundo do poço.

A mistura é primeiramente filtrada para a retirada das partículas sólidas. Depois da filtração, é passada por um conjunto de separadores. A separação gás/líquido ocorre primeiro e se baseia em sua grande diferença de densidade, utilizando a ação da gravidade e/ou das forças de inércia para separar o gás das fases líquidas. A separação óleo/água é mais complexa. De acordo com Thomas (2004), a mistura de fases líquidas, depois de decantada, apresenta uma camada de água relativamente livre de óleo no fundo, a que se convencionou chamar de “água livre”. Sobre esta camada apresenta-se uma camada de emulsão e, sobre ela, uma camada de óleo relativamente livre de água.

No final do processo de separação, se tem três fluidos diferentes: gás, óleo contendo uma camada de emulsão e água livre (contendo impurezas e resquícios de óleo). Cada um desses três fluidos toma, daí em diante, um caminho diferente dentro da planta de processamento primário. O óleo (incluindo a emulsão) é encaminhado para tratamento e condicionamento, o gás é direcionado para o seu processamento e a água livre é encaminhada para tratamento e descarte/reinjeção.

Há que se notar que o processamento primário pode ser relativamente simples e barato ou bastante complexo e custoso, dependendo da característica da mistura de fluidos que chega à superfície.

### **a) Tratamento do óleo**

O tratamento do óleo se inicia pela desemulsificação, com o objetivo de retirar a água ainda presente. Este processo consome tempo, energia térmica e/ou elétrica e substâncias desemulsificantes. Logo, dependendo da quantidade de água em emulsão, esta etapa pode vir a se tornar prejudicialmente onerosa.

Após a retirada da água residual, o óleo passa para a próxima etapa, que tem o objetivo de retirar compostos indesejados. Compostos de enxofre, por exemplo, ocorrem, em certa medida, em todo óleo bruto (Manning e Thompson, 1995). A retirada destes compostos é primordial, uma vez que são altamente prejudiciais aos processos subsequentes (tanto na planta de processamento

primário quanto na refinaria) por sua corrosividade e toxicidade.

Após estar livre da água e dos compostos prejudiciais, o óleo passa pelo processo de estabilização. Este processo consiste em retirar do óleo as frações mais leves de hidrocarbonetos (metano, etano e propano), que se encontram na forma de gás dissolvido (Manning e Thompson, 1995). Isto é necessário para atender os requisitos técnicos de transporte e armazenamento do óleo e também por questões de segurança. A retirada das frações mais leves, que se vaporizam mais facilmente, tornam o óleo estabilizado menos inflamável que o óleo cru, além de garantir a presença apenas da fase líquida durante seu transporte e armazenamento.

Livre de água, de compostos prejudiciais e de hidrocarbonetos mais leves, o óleo estabilizado está pronto para o armazenamento e transporte até a refinaria.

## **b) Processamento do gás**

O gás separado da mistura ainda contém uma certa quantidade de água e compostos de enxofre. Parte do processamento do gás consiste em retirar esses constituintes. Água líquida pode causar corrosão nos dutos de transporte de gás, por isso, é sempre removida. A remoção da água em suspensão no gás é normalmente realizada por meio do uso de substâncias higroscópicas (geralmente, soluções de glicol). Os compostos de enxofre, tóxicos e altamente corrosivos, devem ser removidos quando presentes a partir de certas concentrações (Manning e Thompson, 1991), normalmente em processos químicos que utilizam soluções de aminas.

Outra parte do processamento é a produção de condensado, isto é, promover a liquefação dos hidrocarbonetos mais pesados presentes no gás (butano, pentano e hexano (Thomas, 2004)). Este processo permite aumentar a quantidade de óleo produzido, uma vez que o líquido recuperado do gás é adicionado ao óleo. Segundo Manning e Thompson (1991), a produção do condensado se dá por meio de resfriamento do gás para condensar os líquidos, seguido por uma separação das fases gás/líquido em um separador. Se o gás produzido tiver valor comercial, a produção de condensado também evita que as frações mais pesadas se condensem no interior dos dutos devido à queda de temperatura durante o transporte.

Livre de água, de compostos prejudiciais e de hidrocarbonetos mais pesados, o gás processado pode ser reinjetado no reservatório, transportado até a refinaria (caso a combinação de sua composição e volume criem valor comercial), usado como combustível nas instalações de superfície, ou mesmo queimado.

## **c) Tratamento da água**

O volume de água produzido junto com o petróleo é muito grande. Como já dito, a quantidade de água pode chegar de 50 % a perto de 100 % do volume de fluidos produzidos em um poço. É comum que se produzam de 1 a 7 barris de água para cada barril de petróleo. Volumes ainda maiores de água podem ser produzidos em poços já no fim de sua vida econômica (Thomas, 2004). Toda essa água tem por fim o descarte ou a reinjeção no reservatório. A composição

dessa água, porém, não permite o seu descarte direto. As legislações ambientais de diversos países regulam a quantidade máxima de óleo que pode estar presente na água descartada. No Brasil, o Conselho Nacional do Meio Ambiente (CONAMA) estabelece o limite médio mensal de 29 mg/L para descarte no oceano (CONAMA, 2007, artigo 5º).

Além do óleo, vários outros componentes prejudiciais se encontram na água produzida. Segundo Thomas (2004), a água produzida apresenta sais, microorganismos, gases dissolvidos e materiais em suspensão. Em especial, sua salinidade é de três a quatro vezes superior à da água do mar, em média. De acordo com a resolução do CONAMA, os seguintes parâmetros devem ser monitorados semestralmente, para fins de identificação de presença e concentração (CONAMA, 2007, artigo 10):

- compostos inorgânicos: arsênio, bário, cádmio, cromo, cobre, ferro, mercúrio, manganês, níquel, chumbo, vanádio e zinco;
- radioisótopos: rádio-226 e rádio-228;
- compostos orgânicos: hidrocarbonetos policíclicos aromáticos, benzeno, tolueno, etilbenzeno e xilenos, fenóis e avaliação de hidrocarbonetos totais de petróleo;
- toxicidade crônica da água produzida;
- parâmetros complementares: carbono orgânico total, pH, salinidade, temperatura e nitrogênio amoniacal total.

Toda a água que foi produzida pelo poço - ou seja, a água livre proveniente dos separadores iniciais, a água proveniente do tratamento do óleo e a água proveniente do processamento do gás - é novamente reunida, então, para tratamento. Esta água ainda tem traços de óleo e de gás e outros componentes prejudiciais. Entre estes estão os gases carbônico e sulfídrico (este, também tóxico), bactérias indutoras de corrosão e partículas sólidas remanescentes em suspensão.

Primeiramente, um degaseificador é utilizado para remover o gás e este é, então, encaminhado para queima. A separação água/óleo é, então, levada a cabo, com o intuito de diminuir a concentração de óleo na água para níveis inferiores ao limite estabelecido pela legislação ambiental local. Segundo Thomas (2004), a quantidade de óleo que se consegue remover é diretamente proporcional ao tempo de processamento. Em campos terrestres, a água tratada chega a conter teor de óleo tão baixo quanto 5 mg/L. Em campos marítimos, onde o tratamento é tipicamente mais rápido, os valores são da ordem de 30 mg/L. O óleo recuperado nesta etapa é encaminhado para o ciclo de tratamento de óleo junto com o restante da produção.

A água tratada, então, pode ser utilizada para reinjeção no reservatório, por meio de poços perfurados especificamente para realizar esta tarefa. Caso a injeção de água não seja econômica ou tecnicamente viável, a água é descartada. Em campos marítimos, o descarte se dá por meio de despejo da água no oceano. Em campos terrestres, o local de descarte da água é um problema ambiental ainda não resolvido.

Se a água for utilizada para reinjeção, pode ser necessário realizar o seu tratamento químico para a retirada dos componentes prejudiciais às instalações. Para tal tarefa, são utilizados no-

vamente processos de filtração e adição de produtos químicos como sequestrantes de oxigênio, inibidores de corrosão e inibidores de incrustação. Em linhas gerais, a água proveniente da produção do petróleo é altamente corrosiva. Por este motivo, nas instalações para seu tratamento e reinjeção são utilizados tubos à base de plástico reforçado com fibra de vidro e equipamentos metálicos revestidos com material inerte (Thomas, 2004).

Se a água for descartada, deve ainda ser monitorada de acordo com os parâmetros estabelecidos (no Brasil, pelo CONAMA) e, caso necessário, deve ser promovido seu tratamento químico para a retirada ou diminuição da concentração de compostos indesejados.

Um diagrama simplificado das etapas do processamento primário é apresentado na Fig. 2.4.

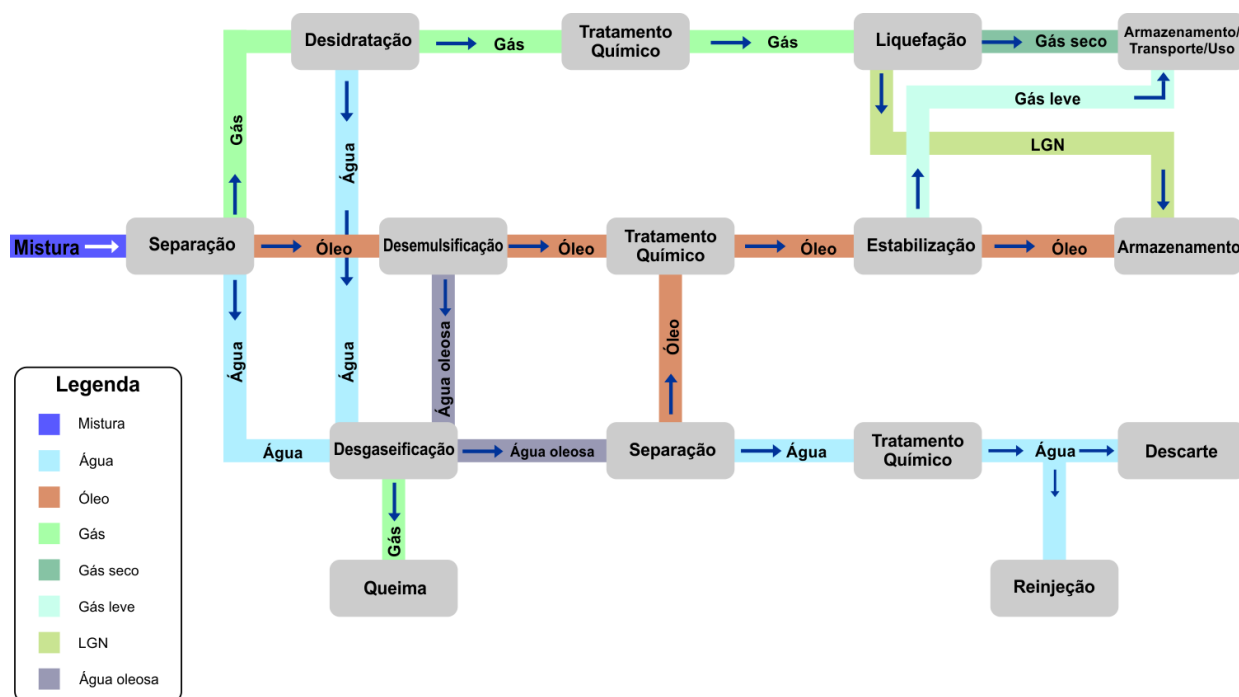


Figura 2.4: Diagrama simplificado das etapas do processamento primário

## 2.2 Os cones de água e de gás

O cone de água é um fenômeno que pode ocorrer durante a extração de petróleo de um reservatório que tem um aquífero de fundo, como os esquematizados pelas figuras 2.1b e 2.1d. Analogamente, o cone de gás ocorre em reservatórios que têm capa de gás (figuras 2.1c e 2.1d). Em linhas gerais, a teoria que envolve os fenômenos é a mesma tanto para o cone de gás quanto para o cone de água, mudando apenas o par de fluidos envolvidos: óleo/água ou óleo/gás. Portanto, neste texto, quando tratando de aspectos que são válidos para ambos os fluidos, o fenômeno será referenciado simplesmente por *cone*. Quando o aspecto tratado for específico de um dos fluidos, será tratado por *cone de água* ou *cone de gás*.

Tecnicamente, o termo *cone* é empregado apenas quando o fenômeno ocorre em poços verticais (Fig. 2.5a). Quando se trata de poços horizontais, o nome do fenômeno é *crista* (Fig. 2.5b).

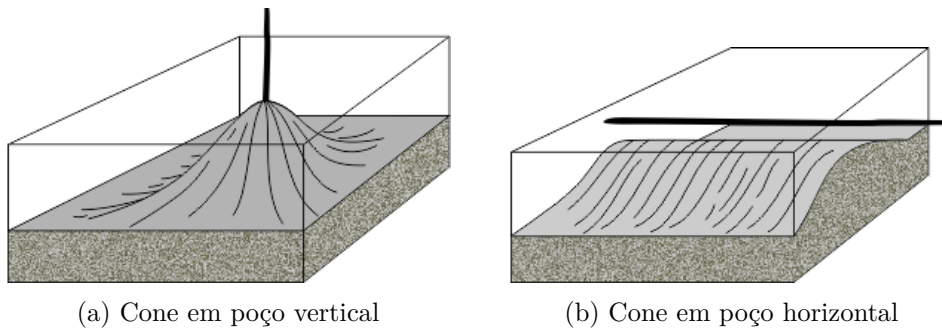


Figura 2.5: Cone em poço vertical e em poço horizontal (PetroWiki.org)

Entretanto, por praticidade, tem-se utilizado o nome *cone* para ambos os casos, sem distinção, e esta prática também é adotada neste trabalho.

### 2.2.1 O fenômeno

A baixa pressão no poço induzida pelo bombeamento (ou pela comunicação com a pressão atmosférica enquanto o poço é surgente) introduz um gradiente de pressão dentro do reservatório, que afeta os três fluidos: água, óleo e gás. O campo de pressão induzido é de decaimento radial. A pressão resultante no reservatório é a soma de dois campos: o campo de pressão natural do reservatório e o campo de pressão induzido pelo bombeamento. O campo de pressão natural, por sua vez, é a combinação da pressão da coluna de fluidos no interior do reservatório com a pressão das camadas geológicas sobre ele.

Assim como tem o efeito principal de impelir o petróleo para o interior do poço, o gradiente de pressão resultante tem o efeito colateral de causar a tendência da água e do gás também se encaminharem para o poço. Esse efeito gera o fenômeno do cone, que tem esse nome porque, devido à movimentação dos fluidos em direção ao poço e à condição de imiscibilidade entre eles, a superfície de interface entre óleo e água (assim como entre óleo e gás) toma a forma de uma cônica, que é a forma “desenhada” pelas linhas de corrente do óleo que flui para o interior do poço.

### 2.2.2 Vazão crítica

A altura atingida pelo cone é uma função da diferença de pressão entre o poço e o reservatório, que por sua vez, dita a vazão de petróleo no poço. Logo, a altura do cone de água é função da vazão de petróleo. Existe, então, uma vazão na qual a altura do cone é tal que a sua ponta fica na iminência de atingir o poço e, neste momento, qualquer incremento na vazão faz com que água ou gás passem a ser extraídos junto com o petróleo. A esta vazão é dado o nome de vazão crítica. A vazão crítica é definida, então, como a máxima vazão na qual óleo é produzido sem a produção de água ou gás (Joshi, 1991).

A vazão crítica de um poço pode ser determinada por meio de testes de produção. Nestes testes, a vazão de produção é aumentada aos poucos até ocorrer um aumento repentino na quantidade de água ou gás produzidos. Este é o momento em que o cone atinge o poço e água ou gás provenientes

do aquífero ou da capa de gás passaram a ser produzidos. A vazão crítica é determinada como sendo a vazão imediatamente menor que esta.

Calhoun Jr (1953) diz que uma vez que o cone ocorre, é possível desligar o poço para permitir que as interfaces se re-estabilizem. Joshi (1991) diz que, entretanto, existem reservatórios nos quais uma vez que a água começa a ser produzida, o cone é irreversível. Em alguns casos, mesmo o desligamento do poço por alguns dias não causa a diminuição no cone quando o poço é religado. Isso provavelmente ocorre por causa de forças capilares severas que conseguem sustentar a saturação de água nos arredores do poço. Nestes casos, a vazão crítica não pode ser determinada por um teste de produção. Então, esses são casos em que simulações numéricas como as mostradas neste trabalho são fortemente indicadas para a determinação da vazão crítica.

### 2.2.3 Aspectos teóricos

Para analisar os aspectos teóricos do fenômeno dos cones de água e de gás, deve-se considerar os principais parâmetros físicos que os afetam:

- Viscosidade dinâmica do óleo ( $\mu_{\acute{o}leo}$ );
- Massa específica do óleo ( $\rho_{\acute{o}leo}$ );
- Permeabilidade efetiva do meio poroso ao óleo ( $k_{\acute{o}leo}$ );
- Mobilidade do óleo no meio poroso ( $k_{\acute{o}leo}/\mu_{\acute{o}leo}$ ).

Ahmed (2010) diz que o fenômeno do cone é resultado do movimento dos fluidos do reservatório na direção de menor resistência, balanceado pela tendência dos fluidos de se manterem em equilíbrio gravitacional. Essa correlação pode ser vista no número de Froude (Eq. 2.1), que é um parâmetro adimensional que expressa a razão entre a força de sucção do sumidouro e a força gravitacional que tende a segregar óleo, água e gás em camadas de acordo com suas densidades (Soares e Simões, 2012).

$$F = \frac{Q \mu_{\acute{o}leo}}{k_{\acute{o}leo} H \Delta \rho g} \quad (2.1)$$

Na expressão do número de Froude, em um problema bidimensional,  $Q$  é a vazão volumétrica por unidade de comprimento do sumidouro. A variável  $H$  representa a escala característica de comprimento.  $\Delta \rho$  representa a diferença de massa específica entre água e óleo (para cone de água) ou entre óleo e gás (para cone de gás). Há ainda a constante  $g$ , que representa a aceleração da gravidade.

A expressão do número de Froude pode ser empregada para inferir características gerais do fenômenos dos cones. Para isso, deve-se fazer  $F$  e  $H$  constantes, variar as magnitudes de  $k_{\acute{o}leo}$ ,  $\mu_{\acute{o}leo}$  e/ou  $\Delta \rho$  e analisar o que acontece com a variável  $Q$ , que representará a vazão crítica do poço (Eq. 2.2).

$$Q_{crítica} = (FHg) \frac{k_{óleo}}{\mu_{óleo}} \Delta\rho \quad (2.2)$$

Pode-se observar na Eq.(2.2) que quanto maior a viscosidade do óleo, maior a tendência à ocorrência do cone. Joshi (1991) diz, entretanto, que os reservatórios de óleo pesado (mais viscosos) geralmente têm permeabilidade bem maior que os de óleo leve. Assim, a razão  $k_{óleo}/\mu_{óleo}$  exibida pelos reservatórios de óleo pesado é comparável à exibida pelos reservatórios de óleo leve que tenham baixa permeabilidade ao óleo.

Da Eq.(2.2), pode-se inferir também que, no geral, quanto maior for o  $\Delta\rho$ , maior será a vazão crítica e, portanto, menor será a tendência ao cone.

Outro importante parâmetro é a permeabilidade na direção vertical. Se esta for zero, então não haverá fluxo na direção vertical e o cone não ocorrerá. Em casos limite, a permeabilidade vertical pode chegar a ser igual à horizontal e a tendência ao cone é máxima.

#### 2.2.4 Desvantagens

Como mostrado na seção anterior, toda a água produzida pode ser descartada ou reinjetada no reservatório. Ambos os casos exigem um oneroso tratamento. A produção inevitável de água (proveniente da própria zona de óleo) já tem normalmente um volume considerável, suficiente para reinjeção nos casos em que esta manobra é necessária como mecanismo de recuperação secundária. Isso faz com que qualquer quantidade de água extra produzida por meio de cone de água seja extremamente prejudicial à viabilidade econômica do poço.

O gás produzido por ocorrência do cone de gás pode, em alguns casos, chegar a ser vendido. Os custos de tratamento deste gás que é produzido junto com o óleo, porém, não justificam sua produção intencional. Assim, a produção de gás por meio do cone de gás é sempre prejudicial para a indústria.

A produção de gás e água por ocorrência do cone faz a pressão do reservatório cair rapidamente, interferindo na ação dos mecanismos de recuperação. Isso pode forçar adoção prematura de mecanismos de recuperação secundária, impactando diretamente os custos de produção, além de prejudicar a produtividade do poço.

Em suma, a produção indesejada de água ou gás pode reduzir significativamente a produção de óleo. Então, é importante impedir o surgimento do cone, minimizar seus efeitos ou, pelo menos, atrasar o seu surgimento.

#### 2.2.5 Abordagens

Existem várias abordagens para tentar contornar o problema de produção da água e do gás. A principal delas é manter a vazão de produção abaixo da vazão crítica. Outra forma de prevenir a produção de água é alterar a sua mobilidade, tornando-a não tão suscetível a formar um cone significativamente perigoso para a produção de óleo. Tal objetivo pode ser conseguido com a

injeção de polímeros hidrossolúveis a tornem mais viscosa.

O principal esforço, entretanto, se concentra no entendimento do comportamento das interfaces óleo/água e óleo/gás. Para isto, vários modelos analíticos, experimentais e numéricos já foram propostos e testados. Os modelos analíticos utilizam as equações diferenciais que governam o problema, que no caso dos cones de água e de gás são a equação de Darcy (para escoamento potencial) e a equação da difusividade hidráulica (para escoamento compressível), que descrevem o escoamento de fluidos em meios porosos. Estes modelos, porém, utilizam em sua concepção simplificações das equações para permitir um tratamento matemático que as solucione. Os resultados, portanto, só são válidos para aplicação na análise de casos em que as simplificações adotadas sejam consideradas válidas.

Neste viés entram as vantagens dos modelos numéricos. Neles, as equações são resolvidas numericamente, sem a necessidade de se obter uma expressão analítica que explique o comportamento do objeto de estudo. Por isso, os modelos numéricos não necessitam tantas simplificações nas equações governantes do problema e podem, assim, ter uma aplicação mais geral. Um modelo numérico, normalmente, pode ser utilizado para estudar reservatórios e poços com características diferentes, além de permitir o estudo de regimes transientes. Por causa de suas características, modelos numéricos têm ganhado cada vez mais espaço no estudo de fenômenos complexos.

Da mesma forma que nos modelos analíticos, os resultados obtidos com os modelos numéricos devem ser confrontados com resultados experimentais para colocar em prova a sua fidelidade ao fenômeno estudado.



## Capítulo 3

# Modelos adotados

Este trabalho trata da simulação dos fenômenos dos cones de água e de gás em poços de petróleo horizontais. As simulações são realizadas em domínio bidimensional. A Fig. 3.1 mostra como um domínio bidimensional representativo do escoamento no reservatório é obtido através de um plano de corte.

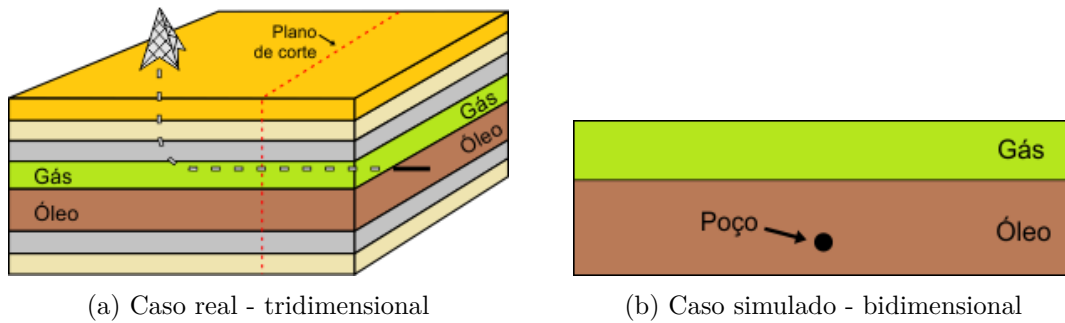


Figura 3.1: Representação bidimensional do reservatório

Os modelos adotados tratam dos fenômenos de forma individual, como ocorrem em reservatórios com as configurações ilustradas pelas Figuras 2.1b e 2.1c (capítulo 2). Reservatórios com a configuração apresentada pela Fig. 2.1d, nos quais os cones de água e de gás podem ocorrer simultaneamente, não são considerados aqui.

Para o estudo do problema, dois modelos foram adotados. O primeiro deles é o de escoamento potencial. O segundo, de escoamento compressível. No primeiro modelo, fluidos e rochas são considerados incompressíveis, enquanto que, no segundo, fluidos e rochas são considerados compressíveis, com compressibilidade constante.

Em ambos os modelos, os fluidos são considerados imiscíveis entre si e a interface entre eles é considerada como sendo abrupta. Esta é uma aproximação que considera que quando dois fluidos imiscíveis estão em contato, existe uma interface entre eles e, de cada lado desta interface, só existe um fluido cujo escoamento é governado pelo gradiente de seu próprio potencial. Quando a interface se movimenta, ambos os fluidos também se movimentam, de forma que não ocorrem vazios nem sobreposições entre as massas de fluido.

O que fundamenta tal aproximação é o fato de que a camada de transição entre os fluidos (que estão estratificados em função de suas diferentes densidades), na qual existe efetivamente a mistura entre eles, tem altura insignificante em comparação com a escala de comprimento característica do escoamento.

É importante notar que mesmo os modelos mais sofisticados não conseguem representar fielmente os reservatórios. Devido à sua inacessibilidade, nunca se tem um conhecimento real das suas características físicas. O que se tem são extrapolações feitas a partir de dados obtidos em medições e amostras de material retirado do reservatório durante a fase de perfuração dos poços. Esta característica do estudo dos reservatórios de petróleo faz com que seja natural se trabalhar com valores médios das suas propriedades físicas, como porosidade, permeabilidade e compressibilidade, mesmo nos casos de modelagem mais complexa. Trabalhar com valores numéricos muito apurados, com um grande número de algarismos significativos, não significa estar aumentando a exatidão do modelo, porque nunca se conhecem os valores reais das grandezas que se está representando.

### 3.1 A lei de Darcy

Segundo Bear (1972), o escoamento de fluidos em meios porosos é regido pela lei de Darcy. Após realizar experimentos com o aparato mostrado na Fig. 3.2, foi demonstrado por Darcy (1856) que:

$$Q = \frac{KA(\Phi_1 - \Phi_2)}{L} \quad (3.1)$$

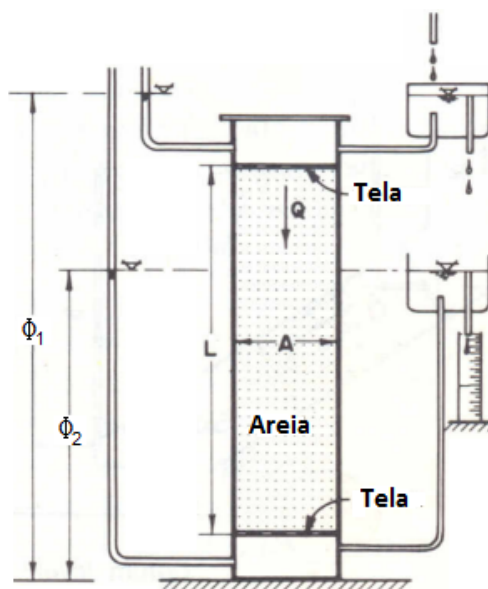


Figura 3.2: Experimento de Darcy (Bear, 1972, modificada).

Na Eq.(3.1),  $Q$  é a vazão volumétrica,  $A$  é a área de seção transversal,  $L$  é o comprimento a ser atravessado pelo fluido,  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  são as alturas piezométricas das seções de início e fim do escoamento e  $K$  é a condutividade hidráulica do meio, dada, segundo Bear (1972), por:

$$K = \frac{k \rho g}{\mu} \quad (3.2)$$

onde  $k$  é a permeabilidade absoluta da matriz porosa,  $\rho$  é a densidade do fluido,  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido e  $g$  é a aceleração da gravidade. A permeabilidade  $k$  é uma característica do meio poroso que independe do fluido que o está preenchendo. A condutividade hidráulica  $K$ , ao contrário, depende do fluido que está escoando, uma vez que envolve a densidade  $\rho$ .

A fim de se obter a vazão volumétrica por unidade de área de seção transversal (ou a *velocidade aparente*), pode-se dividir ambos os lados da Eq.(3.1) por  $A$ , fazendo:

$$q = \frac{K(\Phi_1 - \Phi_2)}{L} \quad (3.3)$$

onde  $q$  é a *velocidade aparente* ou velocidade média (macroscópica) do escoamento.

Reorganizando os termos da Eq.(3.3), tem-se:

$$q = \frac{-K(\Phi_2 - \Phi_1)}{L} \quad (3.4)$$

Disso vem:

$$q = \frac{-K\Delta\Phi}{L} \quad (3.5)$$

Fazendo o comprimento  $L$  tão pequeno quanto se queira, tem-se:

$$q = -K \frac{\partial\Phi}{\partial x} \quad (3.6)$$

em que  $x$  é a coordenada da direção do escoamento.

Considerando o escoamento bi ou tridimensional, tem-se:

$$\mathbf{q} = -K \nabla\Phi \quad (3.7)$$

A Eq.(3.7) mostra que a velocidade aparente do fluido,  $\mathbf{q}$ , está linearmente relacionada (através da condutividade hidráulica do meio) com o gradiente de uma função potencial. Esta função é o *potencial de velocidade* do escoamento e neste modelo é dado pela altura piezométrica, que, de acordo com Liggett e Liu (1983), é dada por:

$$\Phi = \frac{p}{\rho g} + z \quad (3.8)$$

### 3.1.1 Considerações sobre a velocidade

A velocidade tratada nas equações anteriores é a velocidade aparente do fluido, que é dada pela vazão volumétrica por unidade de área de seção transversal ao escoamento, ou seja:

$$\mathbf{q} = \frac{Q}{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (3.9)$$

onde  $\hat{\mathbf{n}}$  é o vetor unitário normal à área  $A$ .

É conveniente notar, entretanto, que esta é uma velocidade média macroscópica do escoamento, denominada também velocidade de Darcy, velocidade de descarga, ou velocidade superficial, e não representa a velocidade real do fluido no interior dos poros. Para se obter a velocidade real do fluido, deve-se considerar que o mesmo ocupa apenas uma fração do volume total do meio poroso e que percorre caminhos tortuosos dentro dos poros interconectados das rochas (Bruch, 1991).

A velocidade média real do fluido no interior dos poros está relacionada com a velocidade aparente por (Liggett e Liu, 1983):

$$\mathbf{q} = \Theta \mathbf{u} \quad (3.10)$$

onde  $\mathbf{u}$  é a velocidade média real do fluido e  $\Theta$  é a porosidade do meio, dada por:

$$\Theta = \frac{\text{Volume de vazios na rocha}}{\text{Volume total da rocha}} \quad (3.11)$$

Pode-se perceber da análise das equações (3.10) e (3.11) que a velocidade média real do fluido  $\mathbf{u}$  é sempre maior que a velocidade aparente  $\mathbf{q}$ , porque a porosidade será sempre inferior à unidade.

### 3.1.2 Importância prática da lei de Darcy

A lei de Darcy é uma ferramenta simples, porém poderosa, que auxilia os engenheiros de reservatório na avaliação qualitativa dos fatores que afetam o escoamento dos fluidos no meio poroso. Sua aplicação conceitual permite-lhes fazer úteis inferências, mesmo antes de realizar estudos detalhados (Satter et al., 2007). De fato, a lei de Darcy é utilizada por Soares e Simões (2012) na obtenção do número de Froude (Eq.2.1), que é o parâmetro adimensional que relaciona os fatores envolvidos no escoamento de fluidos em meios porosos, no modelo utilizado neste trabalho.

## 3.2 Escoamento potencial

No modelo de escoamento potencial, tanto os fluidos como o meio são considerados incompressíveis. A região do escoamento é um meio poroso homogêneo com permeabilidade constante e isotrópica. A viscosidade dos fluidos é constante. Admite-se que os poros estejam saturados com apenas um fluido por vez.

### 3.2.1 A equação governante

Pelo princípio de conservação da massa, temos:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (3.12)$$

Para um fluido incompressível, substituindo a Eq.(3.7) na Eq.(3.12), obtemos:

$$\nabla \cdot (-K \nabla \Phi) = 0 \quad (3.13)$$

Se o meio é homogêneo, então,  $K$  é uma constante. Desta forma, pode-se escrever:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (3.14)$$

A Eq.(3.14) é a equação de Laplace, que governa o escoamento de um fluido em um meio poroso.

Para o caso da existência de um sumidouro pontual, como no caso estudado, a aplicação do princípio de conservação da massa gera:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = -Q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (3.15)$$

Substituindo a Eq.(3.7) na Eq.(3.15) tem-se:

$$\nabla \cdot (-K \nabla \Phi) = -Q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (3.16)$$

E disso, vem:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{Q}{K} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (3.17)$$

onde  $\delta$  é a função delta de Dirac e  $\mathbf{x}_s$  é o vetor posição do sumidouro.

A Eq.(3.17) implica que o Laplaciano da função potencial é zero em todo o domínio (tornando-se a equação de Laplace) exceto no ponto onde está localizado o sumidouro (tornando-se a equação de Poisson).

Assim sendo, a equação diferencial governante do problema é a equação de Laplace (ou a equação de Poisson, para casos com fontes ou sumidouros), que, além do escoamento de fluidos incompressíveis em meios porosos, governa a transferência de calor por condução em sólidos, o fluxo de corrente elétrica em um condutor entre outros fenômenos físicos.

### 3.3 Escoamento compressível

No modelo de escoamento compressível, tanto os fluidos como o meio poroso são considerados compressíveis. Isso significa que o volume das rochas (tanto o volume da parte sólida quanto o volume poroso) também varia com a pressão. A *compressibilidade efetiva* da formação,  $c_f$ , é o fator que representa esse efeito.

Da mesma forma que no modelo de escoamento potencial, a região de escoamento é homogênea e a permeabilidade é isotrópica e constante. A viscosidade dos fluidos é constante, assim como as compressibilidades dos fluidos e da formação.

#### 3.3.1 A equação governante

A equação governante do escoamento compressível em meios porosos é a *equação da difusividade hidráulica*. Esta equação é obtida da combinação entre o princípio de conservação da massa, a lei de Darcy e a equação da compressibilidade.

##### a) Princípio de conservação da massa

Considerando um elemento diferencial de volume de meio poroso com formato cúbico com arestas de comprimento  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$ , pode-se analisar a conservação da massa de duas maneiras distintas. De acordo com o fluxo líquido de massa em cada direção, temos:

$$\begin{aligned} \text{Massa acumulada} = \Delta t[(Q_x \rho)_x - (Q_x \rho)_{x+\Delta x}] + \Delta t[(Q_y \rho)_y - (Q_y \rho)_{y+\Delta y}] + \\ + \Delta t[(Q_z \rho)_z - (Q_z \rho)_{z+\Delta z}] \end{aligned} \quad (3.18)$$

Outra maneira é analisar a conservação da massa de acordo com a massa existente nos instantes inicial e final de um intervalo de tempo qualquer:

$$\text{Massa acumulada} = \Delta x \Delta y \Delta z [(\Theta \rho)_{t+\Delta t} - (\Theta \rho)_t] \quad (3.19)$$

onde  $\Theta$  é a porosidade do meio, dada pela Eq.(3.11).

Igualando-se as equações (3.18) e (3.19), tem-se:

$$\begin{aligned} \Delta t[(Q_x \rho)_x - (Q_x \rho)_{x+\Delta x}] + \Delta t[(Q_y \rho)_y - (Q_y \rho)_{y+\Delta y}] + \\ + \Delta t[(Q_z \rho)_z - (Q_z \rho)_{z+\Delta z}] = \Delta x \Delta y \Delta z [(\Theta \rho)_{t+\Delta t} - (\Theta \rho)_t] \end{aligned} \quad (3.20)$$

Dividindo-se a Eq.(3.20) por  $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$ , obtém-se:

$$\frac{(Q_x\rho)_x - (Q_x\rho)_{x+\Delta x}}{\Delta x\Delta y\Delta z} + \frac{(Q_y\rho)_y - (Q_y\rho)_{y+\Delta y}}{\Delta x\Delta y\Delta z} + \frac{(Q_z\rho)_z - (Q_z\rho)_{z+\Delta z}}{\Delta x\Delta y\Delta z} = \frac{(\Theta\rho)_{t+\Delta t} - (\Theta\rho)_t}{\Delta t} \quad (3.21)$$

Na Eq.(3.21), aparece o termo  $Q_x/\Delta y\Delta z$ , que corresponde ao fluxo volumétrico  $Q$  na direção  $x$  dividido por sua área de seção transversal. Esta é a definição da velocidade aparente  $\mathbf{q}$  do fluido na direção  $x$ . Os análogos às direções  $y$  e  $z$  também estão presentes. Substituindo estes termos por  $q_x$ ,  $q_y$  e  $q_z$ , obtém-se:

$$\frac{(q_x\rho)_x - (q_x\rho)_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{(q_y\rho)_y - (q_y\rho)_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{(q_z\rho)_z - (q_z\rho)_{z+\Delta z}}{\Delta z} = \frac{(\Theta\rho)_{t+\Delta t} - (\Theta\rho)_t}{\Delta t} \quad (3.22)$$

Fazendo  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  e  $\Delta t$  tão pequenos quanto se queira, chega-se a:

$$\frac{\partial}{\partial x}(q_x\rho) + \frac{\partial}{\partial y}(q_y\rho) + \frac{\partial}{\partial z}(q_z\rho) = -\frac{\partial}{\partial t}(\Theta\rho) \quad (3.23)$$

que pode ser escrita de forma compacta como:

$$\nabla \cdot (\mathbf{q}\rho) = -\frac{\partial}{\partial t}(\Theta\rho) \quad (3.24)$$

Através de uma rápida análise, pode-se notar que a Eq.(3.24) tem dimensão de massa por tempo por unidade de volume.

## b) Lei de Darcy

A lei de Darcy leva, como já mostrado, à Eq.(3.7):

$$\mathbf{q} = -K \nabla \Phi$$

Substituindo esta equação na Eq.(3.24), tem-se:

$$\nabla \cdot (-K \nabla \Phi \rho) = -\frac{\partial}{\partial t}(\Theta\rho) \quad (3.25)$$

Substituindo  $K$  por  $k\rho g/\mu$ , tem-se:

$$\nabla \cdot \left( \frac{k\rho^2 g}{\mu} \nabla \Phi \right) = \frac{\partial}{\partial t}(\Theta\rho) \quad (3.26)$$

**Simplificação.** Rosa et al. (2006) diz que pode-se desprezar os efeitos da variação da altura, fazendo o potencial  $\Phi$  ser representado apenas por  $p/\rho g$ :

$$\frac{k}{\mu} \nabla \cdot (\rho \nabla p) = \frac{\partial}{\partial t} (\Theta \rho) \quad (3.27)$$

### c) Equação da compressibilidade

Neste ponto, devem ser adicionados na formulação a contribuição das compressibilidades, tanto do fluido quanto da formação rochosa. A introdução das compressibilidades visa expressar a derivada temporal de porosidade e massa específica (lado direito da Eq.(3.27)) em termos da pressão.

A equação da compressibilidade dos fluidos é dada por (Rosa et al., 2006):

$$c = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad (3.28)$$

que pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho c \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.29)$$

Analogamente, a equação da compressibilidade efetiva da formação é dada por (Rosa et al., 2006):

$$c_f = \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial p} \quad (3.30)$$

que, por sua vez, pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \Theta c_f \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.31)$$

As duas equações de compressibilidade, (3.28) e (3.30), expressam o quanto o volume se altera com a variação da pressão. No caso dos fluidos, em termos da massa específica e no caso da formação, em termos da porosidade.

A derivada temporal no lado direito da Eq.(3.27) pode ser desenvolvido como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Theta \rho) = \Theta \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \Theta}{\partial t} \quad (3.32)$$

Substituindo nesta as equações (3.29) e (3.31), chega-se a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\Theta \rho) &= \Theta \rho c \frac{\partial p}{\partial t} + \Theta \rho c_f \frac{\partial p}{\partial t} \\ &= \Theta \rho (c + c_f) \frac{\partial p}{\partial t} \\ &= \Theta \rho c_t \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.33)$$



onde  $c_t$  é a compressibilidade total do sistema, representada por  $c_t = c + c_f$ .

Substituindo este resultado na Eq.(3.27), tem-se:

$$\frac{k}{\mu} \nabla \cdot (\rho \nabla p) = \Theta \rho c_t \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.34)$$

Desenvolvendo-se o lado esquerdo desta equação, tem-se:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho \nabla p) &= \rho \frac{\Theta \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \\ \rho \nabla^2 p + \nabla \rho \cdot \nabla p &= \rho \frac{\Theta \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.35)$$

**Simplificação.** No desenvolvimento matemático deste modelo, optou-se por desprezar a parcela  $\nabla \rho \cdot \nabla p$  do lado esquerdo da equação. Desta forma, obtém-se:

$$\nabla^2 p = \frac{\Theta \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.36)$$

Esta é a equação da difusividade hidráulica, que governa o escoamento de fluidos compressíveis no meio poroso. Sua escrita é mais conveniente na forma:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.37)$$

onde a constante  $\eta$  é chamada de *constante de difusividade hidráulica*, que tem dimensão de  $m^2/s$  e é definida por:

$$\eta = \frac{k}{\Theta \mu c_t} \quad (3.38)$$

Para o caso da existência de um sumidouro, tem-se:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Q \rho g}{K} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (3.39)$$

### 3.4 Condições de contorno

Dois simuladores foram desenvolvidos: um para simular escoamentos monofásicos e outro para simular escoamentos bifásicos. A simulação de escoamento monofásico permite analisar apenas o fenômeno do cone de gás, em regime de produção com vazão subcrítica. A simulação de escoamento bifásico permite analisar os fenômenos dos cones de água e de gás, tanto em regime subcrítico quanto supercrítico.

Aqui serão mostradas as condições de contorno dos escoamentos monofásico e bifásico. As condições de contorno adotadas são as mesmas tanto para o escoamento potencial quanto para o

compressível.

### 3.4.1 Escoamento monofásico

O simulador de escoamento monofásico é utilizado para simular uma extração de óleo sujeito à ocorrência de cone de gás. A Fig. 3.3 mostra o aspecto geral deste tipo de problema.

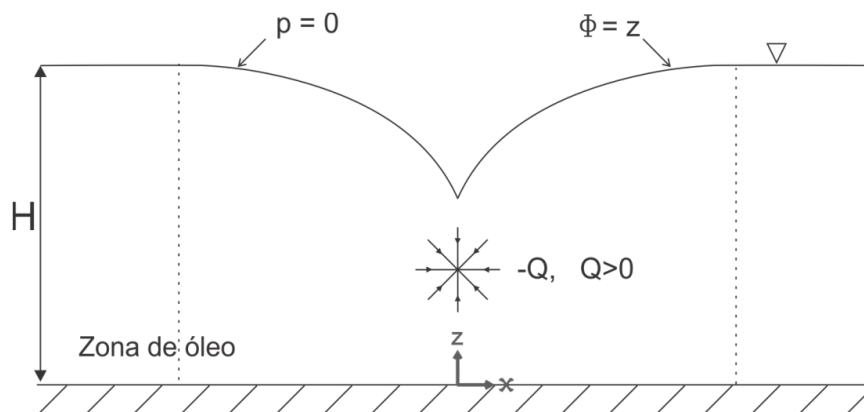


Figura 3.3: Aspecto geral do problema cone de gás

Nesta figura, pode-se identificar que:

O limite inferior da zona de óleo é a base, definida como uma fronteira impermeável. A impermeabilidade implica na condição de que não há escoamento na direção normal à base. Assim:

$$\text{C.C. Base:} \quad \mathbf{q} \cdot (-\hat{\mathbf{k}}) = 0 \quad (3.40)$$

Na Fig. 3.3,  $H$  é a altura da zona de óleo, medida da base impermeável até a interface óleo/gás não perturbada pelo escoamento. Desta forma, os limites laterais têm sempre o potencial igual a  $H$ . O sumidouro tem intensidade  $-Q$ , com  $Q > 0$ .

$$\text{C.C. Limites laterais:} \quad \Phi = H \quad (3.41)$$

O limite superior da zona de óleo é a interface óleo/gás (superfície livre), que é definida como uma superfície freática, onde  $p = 0$ . Logo, de acordo com a Eq.(3.8), a altura piezométrica da superfície livre é simplesmente sua altura (coordenada  $z$ ), que por sua vez, é o objeto de estudo.

$$\text{C.C. Superfície livre:} \quad \Phi = z(x) \quad (3.42)$$

As equações (3.40), (3.41) e (3.42) são as condições de contorno para o escoamento monofásico.

### 3.4.2 Escoamento bifásico

O simulador de escoamento bifásico é utilizado para simular a extração de óleo sujeita à ocorrência de cone de água ou de cone de gás. A Fig. 3.4 mostra o aspecto geral deste tipo de problema.

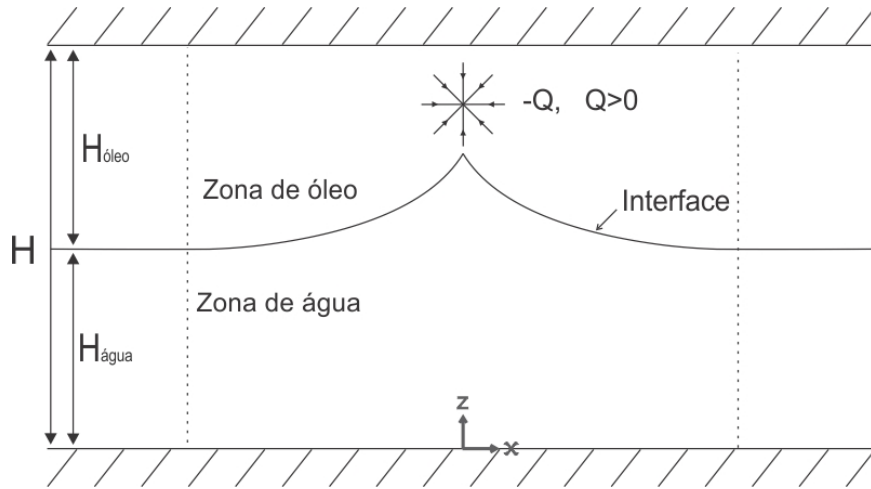


Figura 3.4: Aspecto geral do problema de cone de água

Na Fig. 3.4, pode-se indicar que:

O limite inferior da zona de água é a base, definida como uma fronteira impermeável. A impermeabilidade implica na condição de que não há escoamento na direção normal à base. Assim:

$$\text{C.C. Base:} \quad \mathbf{q} \cdot (-\hat{\mathbf{k}}) = 0 \quad (3.43)$$

O limite superior da zona de óleo é o topo, também definido como uma fronteira impermeável. Com isso, tem-se:

$$\text{C.C. Topo:} \quad \mathbf{q} \cdot (\hat{\mathbf{k}}) = 0 \quad (3.44)$$

Na Fig. 3.4,  $H$  é a altura total do reservatório.  $H_{\text{água}}$  é a altura da zona de água, medida da base impermeável até a interface não perturbada pelo escoamento.  $H_{\text{óleo}}$  é a altura da zona de óleo, medida da interface não perturbada pelo escoamento até o topo impermeável. Desta forma, têm-se as condições de contorno para os limites laterais:

$$\text{C.C. Limites laterais (óleo):} \quad \Phi = H_{\text{óleo}} + H_{\text{água}} \quad (3.45)$$

$$\text{C.C. Limites laterais (água):} \quad \Phi = H_{\text{óleo}} + (\rho_{\text{água}} H_{\text{água}}) / (\rho_{\text{óleo}}) \quad (3.46)$$

#### Interface

O limite entre as zonas de água e óleo é a interface. Este modelo considera que os fluidos são imiscíveis e adota a aproximação de que a interface é abrupta Bear (1972). Tratar a interface como abrupta implica na condição de que, para um ponto localizado sobre a interface, a velocidade

deve ter a mesma magnitude do ponto de vista de qualquer um dos dois fluidos, porém, sentidos contrários. A dinâmica do fenômeno leva ainda à condição de continuidade de pressão entre os dois fluidos, ao longo de todo o reservatório e, conseqüentemente, na interface. Desta forma, as condições de contorno para a interface são as equações de compatibilidade de pressões e equilíbrio de velocidades:

$$\text{C.C. 1 Interface:} \quad p_{\text{óleo}} = p_{\text{água}} \quad (3.47)$$

$$\text{C.C. 2 Interface:} \quad \mathbf{q}_{\text{óleo}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{q}_{\text{água}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (3.48)$$

onde  $\hat{\mathbf{n}}$  é o vetor unitário normal ao ponto da interface considerado.

As equações (3.43) a (3.48) são as condições de contorno para o escoamento bifásico e têm suas análogas para o escoamento de óleo/gás.

O sumidouro tem intensidade  $-Q$ ,  $Q > 0$ . Sua coordenada  $z$  se localiza, inicialmente, no interior da zona de óleo. À medida que o cone de água (ou de gás) avança, a coordenada do sumidouro pode vir a ser tomada pela zona de água (ou de gás).

Durante a extração do óleo, a interface, assim como a superfície livre no caso monofásico, tem localização desconhecida. Descobrir esta localização é parte do problema.

## Capítulo 4

# O Método dos Elementos de Contorno para escoamentos potenciais

### 4.1 Uma breve introdução

#### 4.1.1 Modelos matemáticos

Os modelos matemáticos de quaisquer sistemas a serem estudados são, normalmente, construídos a partir de equações diferenciais que regem o comportamento de cada parte infinitesimal de tal sistema. Segundo Banerjee (1994), uma vez descrito o sistema na forma deste conjunto de equações diferenciais, passa-se ao trabalho de obtenção da solução das equações em um determinado domínio, ou região, que por sua vez, podem ter forma geométrica complicada, composição de distintos materiais e propriedades complexas. Para tanto, várias condições deverão ser estabelecidas nos contornos da região.

Tais complicações, que aparecem na maioria dos problemas práticos, dificultam sobremaneira a obtenção de soluções analíticas para as equações governantes e, nestes casos, os métodos numéricos se apresentam como opções factíveis para a obtenção de resultados com boa precisão. Entre os métodos numéricos de grande expressão atualmente destacam-se o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos de Contorno.

#### 4.1.2 Métodos numéricos

De acordo com Banerjee (1994), o Método das Diferenças Finitas (MDF) é, em princípio, aplicável a qualquer sistema de equações diferenciais, mas sua implementação computacional no que tange à aplicação das condições de contorno é, não raras vezes, uma tarefa laboriosa. Neste método, a precisão dos resultados obtidos é fortemente dependente do refinamento da malha utilizada, logo, a quantidade de operações envolvidas é elevada.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) consiste na discretização de todo o corpo em elementos de tamanho finito (isto é, não-infinitesimal). Neste método, segundo Banerjee (1994), cada elemento reproduz aproximadamente o comportamento da região do corpo que ocupa. A implementação das condições de contorno é relativamente fácil, ao contrário do MDF. Seu principal ponto fraco é a necessidade de discretização do corpo todo, o que inevitavelmente leva a trabalhar com um número elevado de elementos finitos, principalmente em problemas tridimensionais em grande escala.

O Método dos Elementos de Contorno (MEC), ainda segundo Banerjee (1994), consiste em uma alternativa em relação à maneira como as equações diferenciais governantes do problema são atacadas. O primeiro passo realizado neste método é a transformação das equações diferenciais em equações integrais equivalentes. Como resultado deste passo, as variáveis envolvidas passam a ser avaliadas apenas nos extremos (contornos) da região de integração. Este é o motivo pelo qual, no MEC, a discretização só necessita ser realizada na superfície do corpo (seu contorno). Isso faz com que o MEC trabalhe com um número menor de elementos que o MEF ou o MDF: um corpo tridimensional passa a ser tratado apenas por sua superfície envoltória ao invés de todo o volume do corpo; um domínio bidimensional passa a ser tratado apenas por seu contorno ao invés de toda a sua área; um domínio unidimensional passa a ser tratado apenas por seus dois pontos extremos ao invés de todo seu comprimento.

Além de diminuir o problema em uma dimensão, o MEC tem também a vantagem de possibilitar soluções que variem continuamente em todo o corpo, sendo que as aproximações ficam restritas ao seu contorno. O MEC, por sua discretização apenas do contorno, leva a um sistema com número muito menor de equações do que o MEF ou o MDF. O ponto negativo é que o MEC gera matrizes densamente povoadas, enquanto que o MEF gera matrizes maiores, porém esparsas.

As próximas seções apresentam a formulação do MEC para problemas regidos pela equação de Laplace, que é o caso do primeiro modelo adotado neste trabalho, para o escoamento potencial.

## 4.2 Soluções fundamentais

Segundo Dominguez (1993), a solução fundamental da equação diferencial governante é a base da formulação do MEC. Para o caso estudado neste trabalho, a solução fundamental corresponde à resposta do potencial em um meio infinito quando a fonte (ou sumidouro) está concentrada em um ponto. De acordo com Dominguez (1993) ela é a solução particular da equação de Poisson quando o termo não homogêneo (referente à fonte ou ao sumidouro) é igual ao delta de Dirac:

$$\nabla^2 \Phi^* = -\frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d)}{K} \quad (4.1)$$

Uma solução possível para a Eq.(4.1) é:

$$\Phi^* = A \ln(r) \quad (4.2)$$

em que  $r$  é a distância entre o ponto onde a fonte é aplicada (ponto fonte) e o ponto onde a pressão é medida (ponto campo), mostrados na Fig. 4.1, e  $A$  é uma constante a ser determinada.

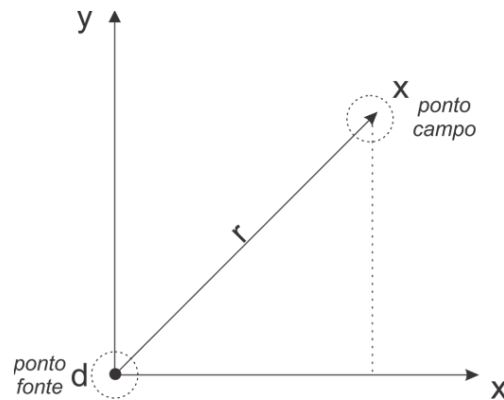


Figura 4.1: Pontos fonte e campo

### 4.2.1 Solução fundamental do potencial

Substituindo a Eq.(4.2) na Eq.(4.1), tem-se:

Da Fig. 4.1, temos que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4.3)$$

Uma vez que  $\Phi^* = A \ln(r)$ , conforme a Eq.(4.2), temos que

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial x} = A \frac{\partial \ln(r)}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} \quad (4.4)$$

Pode-se calcular que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} (2x) = \frac{x}{r} \quad (4.5)$$

Desta forma,

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial x} = A \frac{1}{r} \frac{x}{r} = A \frac{x}{r^2} \quad (4.6)$$

Derivando a Eq.(4.6) em relação a  $x$ , obtemos:

$$\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x^2} = A \left[ \frac{1}{r^2} - \left( \frac{2x^2}{r^4} \right) \right] \quad (4.7)$$

Analogamente, para  $y$ , temos que

$$\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial y^2} = A \left[ \frac{1}{r^2} - \left( \frac{2y^2}{r^4} \right) \right] \quad (4.8)$$

Portanto, das equações (4.7) e (4.8), tem-se que

$$\nabla^2 \Phi^* = 2A \underbrace{\left( \frac{1}{r^2} - \frac{x^2 + y^2}{r^4} \right)}_{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d)} \quad (4.9)$$

Logo,

$$\nabla^2 \Phi^* = 2A \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) \quad (4.10)$$

Igualando as equações (4.1) e (4.10), pode-se calcular a constante  $A$ :

$$-\frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d)}{K} = 2A \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) \quad (4.11)$$

$$A = -\frac{1}{2K} \quad (4.12)$$

Substituindo a Eq.(4.12) na Eq.(4.2), obtém-se:

$$\Phi^* = -\frac{1}{2K} \ln(r) \quad (4.13)$$

Porém, segundo Kane (1994), para se obter uma melhor formulação, considera-se um fluxo unitário através da fonte, transformando a Eq.(4.13) na seguinte forma:

$$\Phi^* = -\frac{1}{2\pi K} \ln(r) \quad (4.14)$$

A Eq.(4.14) é a solução fundamental do potencial.

#### 4.2.2 Solução fundamental da velocidade

Avaliando o fluxo que atravessa o contorno, temos que:

$$q = -K \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} \quad (4.15)$$

A Eq.(4.15) pode ser reescrita como

$$q = -K \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \quad (4.16)$$



Logo, a solução fundamental para a velocidade é:

$$q^* = -K \frac{\partial \Phi^*}{\partial \mathbf{n}} \quad (4.17)$$

Utilizando o valor de  $\Phi^*$  obtido na Eq.(4.14), temos:

$$q^* = -K \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( -\frac{1}{2\pi K} \ln(r) \right) \quad (4.18)$$

$$q^* = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial(\ln(r))}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\partial(\ln(r))}{\partial x} n_x + \frac{\partial(\ln(r))}{\partial y} n_y \right] \quad (4.19)$$

Analisando a Eq.(4.19) em  $x$ :

$$\frac{\partial(\ln(r))}{\partial x} = \frac{\partial(\ln(r))}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial(\ln(r))}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{x}{r} = \frac{x}{r^2} \quad (4.21)$$

Analogamente, em  $y$ :

$$\frac{\partial(\ln(r))}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{y}{r} = \frac{y}{r^2} \quad (4.22)$$

Substituindo as Eqs.(4.21) e (4.22) na Eq.(4.19), segue que

$$q^* = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{x}{r^2} n_x + \frac{y}{r^2} n_y \right] \quad (4.23)$$

$$q^* = \frac{1}{2\pi r^2} (x n_x + y n_y) \quad (4.24)$$

Generalizando para quando o ponto fonte não está localizado na origem do sistema de coordenadas, a Eq.(4.24) toma a forma:

$$q^* = \frac{1}{2\pi r^2} [(x - x_d) n_x + (y - y_d) n_y] \quad (4.25)$$

A Eq.(4.25) é a solução fundamental da velocidade.

Quando o ponto fonte não está localizado na origem, a expressão para o raio é:

$$r = \sqrt{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2} \quad (4.26)$$

onde  $(x_d, y_d)$  são as coordenadas do ponto fonte.

### 4.3 A equação integral de contorno

Para obter a equação integral de contorno, utiliza-se o método dos resíduos ponderados e o teorema de Gauss-Green. O método dos resíduos ponderados multiplica a equação diferencial governante do problema, Eq.(3.4), por uma função peso arbitrária  $\omega$ . Integra-se a expressão obtida em todo o domínio e assume-se que o resultado da integração é zero. Este procedimento é mostrado na Eq.(4.27).

$$\int_A (\nabla^2 \Phi) \omega dA = 0 \quad (4.27)$$

Desenvolvendo a Eq.(4.27), tem-se:

$$\int_A \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \omega dA = 0 \quad (4.28)$$

$$\int_A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \omega dA + \int_A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \omega dA = 0 \quad (4.29)$$

Neste ponto, lança-se mão do teorema de Gauss-Green - Eq.(4.30) - para realizar a transformação das integrais sobre o domínio em integrais sobre o contorno:

$$\int_S f(x, y) n_x dS = \int_A \frac{\partial f}{\partial x} dA \quad (4.30)$$

A partir daqui, será analisado a primeira integral da Eq.(4.29), que traz a derivada em  $x$ :

Fazendo  $f(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \omega$  na Eq.(4.30), temos que

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\partial \Phi}{\partial x} \omega n_x dS &= \int_A \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \omega \right) dA \\ &= \int_A \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \omega + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) dA \\ &= \int_A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \omega dA + \int_A \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} dA \end{aligned} \quad (4.31)$$

Reorganizando a Eq.(4.31):

$$\int_A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \omega dA = \int_S \frac{\partial \Phi}{\partial x} \omega n_x dS - \int_A \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} dA \quad (4.32)$$

Para transformar a última integral de domínio, do lado direito da Eq.(4.32), utiliza-se o seguinte artifício:

Aplicando o teorema de Gauss-Green fazendo  $f = \Phi \frac{\partial \omega}{\partial x}$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \int_S \Phi \frac{\partial \omega}{\partial x} n_x dS &= \int_A \frac{\partial}{\partial x} \left( \Phi \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) dA \\ &= \int_A \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} dA + \int_A \Phi \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dA \end{aligned} \quad (4.33)$$

Reorganizando a Eq.(4.33):

$$\int_A \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} dA = \int_S \Phi \frac{\partial \omega}{\partial x} n_x dS - \int_A \Phi \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dA \quad (4.34)$$

Com isso, podemos escrever a primeira integral da Eq.(4.29), substituindo a Eq.(4.34) na Eq.(4.32), como:

$$\int_A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \omega dA = \int_S \frac{\partial \Phi}{\partial x} \omega n_x dS - \int_S \Phi \frac{\partial \omega}{\partial x} n_x dS + \int_A \Phi \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dA \quad (4.35)$$

Analogamente, para a segunda integral da Eq.(4.29), pode-se escrever:

$$\int_A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \omega dA = \int_S \frac{\partial \Phi}{\partial y} \omega n_y dS - \int_S \Phi \frac{\partial \omega}{\partial y} n_y dS + \int_A \Phi \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} dA \quad (4.36)$$

Substituindo as equações (4.35) e (4.36) na Eq.(4.29), é obtido:

$$\int_S \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} n_y \right) \omega dS - \int_S \Phi \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} n_x + \frac{\partial \omega}{\partial y} n_y \right) dS + \int_A \Phi \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) dA = 0 \quad (4.37)$$

A Eq.(4.37) pode ser escrita na forma:

$$\int_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} \omega dS - \int_S \Phi \frac{\partial \omega}{\partial n} dS + \int_A \Phi \nabla^2 \omega dA = 0 \quad (4.38)$$

O próximo passo é a eliminar a integral de domínio da Eq.(4.38) de forma a obter uma equação integral de contorno. Para isso, deve ser escolhida uma função peso  $\omega(x, y)$  cujo laplaciano seja igual a zero. Uma das características do MEC é utilizar como função peso a solução fundamental para o potencial, ou seja, fazer  $\omega = \Phi^*$ . Como o laplaciano da solução fundamental é uma função delta de Dirac, então o mesmo será igual a zero para todo o domínio, exceto no ponto fonte.

Desta forma, a Eq.(4.38) fica:

$$\int_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Phi^* dS - \int_S \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} dS + \int_A \Phi \nabla^2 \Phi^* dA = 0 \quad (4.39)$$

Substituindo o laplaciano da solução fundamental pelo expresso na Eq.(4.1), tem-se:

$$\int_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Phi^* dS - \int_S \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} dS + \int_A \Phi \left( -\frac{\delta(x - x_d)}{K} \right) dA = 0 \quad (4.40)$$

Pelas propriedades da função delta de Dirac, tem-se:

$$\int_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Phi^* dS - \int_S \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} dS - \frac{\Phi(x_d, y_d)}{K} = 0 \quad (4.41)$$

Multiplicando a Eq.(4.41) por  $(-K)$ :

$$\int_S \left( -K \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \Phi^* dS - \int_S \Phi \left( -K \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} \right) dS + \Phi(x_d, y_d) = 0 \quad (4.42)$$

Isolando  $\Phi(x_d, y_d)$ :

$$\Phi(x_d, y_d) = \int_S \Phi \left( -K \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} \right) dS - \int_S \left( -K \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \Phi^* dS \quad (4.43)$$

Substituindo as equações (4.16) e (4.17) na Eq.(4.43), tem-se:

$$\Phi(x_d, y_d) = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.44)$$

A Eq.(4.44) é a equação integral de contorno válida para quando o ponto fonte está no interior do domínio.

Para abranger o caso em que o ponto fonte se encontra sobre o contorno, devemos lançar mão do seguinte artifício:

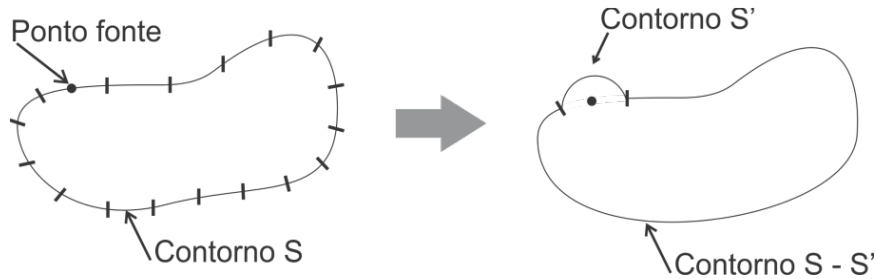


Figura 4.2: Modificação do contorno

Da Fig. 4.2, tem-se que o contorno original é o contorno  $S$ . Faz-se uma alteração no contorno  $S$ , criando um arco de circunferência sobre o ponto fonte. A este arco chamamos contorno  $S'$ .

Da análise da Fig. 4.2, percebe-se que:

$$[\text{Contorno } S] = [\text{Contorno original}] \quad (4.45)$$

$$[\text{Contorno } S - S'] + [\text{Contorno } S'] = [\text{Contorno alterado}] \quad (4.46)$$

O contorno  $S'$  é um arco de circunferência de raio  $\varepsilon$ . Em qualquer ponto de  $S'$ , o raio  $r$ , que é a distância entre ponto fonte e ponto campo, é sempre igual a  $\varepsilon$ . Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tem-se o ponto fonte sobre o contorno. Para a aplicação deste artifício, deve-se separar as integrais da equação integral de contorno, Eq.(4.44), em  $S'$  e  $(S - S')$ . Como mostrado a seguir.

Considerações prévias:

$$|\mathbf{r}| = r = \left[ (x - x_d)^2 + (y - y_d)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.47)$$

$$\mathbf{r} = (x - x_d)\hat{\mathbf{i}} + (y - y_d)\hat{\mathbf{j}} = r_x\hat{\mathbf{i}} + r_y\hat{\mathbf{j}} \quad (4.48)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{r_x\hat{\mathbf{i}} + r_y\hat{\mathbf{j}}}{(r_x + r_y)^{\frac{1}{2}}} = \frac{r_x\hat{\mathbf{i}} + r_y\hat{\mathbf{j}}}{r} \quad (4.49)$$

$$\therefore n_x = \frac{r_x}{r} ; n_y = \frac{r_y}{r} \quad (4.50)$$

Separando as integrais da Eq.(4.44), tem-se:

$$\Phi(x_d, y_d) = \int_{S'} \Phi q^* dS - \int_{S'} q \Phi^* dS + \int_{(S-S')} \Phi q^* dS - \int_{(S-S')} q \Phi^* dS \quad (4.51)$$

Analisando a primeira integral em  $S'$  da Eq.(4.51) e substituindo na mesma a expressão para  $q^*$  da Eq.(4.25), tem-se:

$$\int_{S'} \Phi q^* dS = \int_{S'} \Phi \frac{1}{2\pi r^2} [(x - x_d) n_x + (y - y_d) n_y] dS \quad (4.52)$$

Com o exposto nas considerações prévias - Eqs.(4.47) a (4.50) -, a Eq.(4.52) fica:

$$\begin{aligned} \int_{S'} \Phi q^* dS &= \int_{S'} \Phi \frac{1}{2\pi r^2} [r_x n_x + r_y n_y] dS \\ &= \int_{S'} \Phi \frac{1}{2\pi r^2} \left[ r_x \frac{r_x}{r} + r_y \frac{r_y}{r} \right] dS \end{aligned} \quad (4.53)$$

Como, em todo  $S'$ ,  $r = \varepsilon$  e  $dS = r d\theta \Rightarrow dS = \varepsilon d\theta$ , tem-se:

$$\int_{S'} \Phi q^* dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\Phi}{2\pi \varepsilon^2} \left( \frac{r_x^2 + r_y^2}{\varepsilon} \right) \varepsilon d\theta \quad (4.54)$$

Como  $r_x^2 + r_y^2 = r^2 = \varepsilon^2$ :

$$\int_{S'} \Phi q^* dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\Phi}{2\pi\varepsilon^2} \left( \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} \right) \varepsilon d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\Phi}{2\pi} d\theta = \frac{\Phi}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) \quad (4.55)$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \Phi \rightarrow \Phi(x_d, y_d)$ . Com isso:

$$\int_{S'} \Phi q^* dS = \Phi(x_d, y_d) \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} \quad (4.56)$$

Analisando, agora, a segunda integral em  $S'$  da Eq.(4.51) e substituindo na mesma a expressão para  $\Phi^*$  da Eq.(4.14), tem-se:

$$\int_{S'} q \Phi^* dS = \int_{S'} q \left( -\frac{1}{2\pi K} \ln(r) \right) dS \quad (4.57)$$

Fazendo  $r = \varepsilon$  e  $dS = \varepsilon d\theta$ , tem-se:

$$\int_{S'} q \Phi^* dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} q \left( -\frac{1}{2\pi K} \ln(\varepsilon) \right) \varepsilon d\theta \quad (4.58)$$

Lembrando que  $\varepsilon$  é constante em todo  $S'$ , tem-se:

$$\int_{S'} q \Phi^* dS = -\frac{q}{2\pi K} \varepsilon \ln(\varepsilon) \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \quad (4.59)$$

$$\int_{S'} q \Phi^* dS = -\frac{q}{2\pi K} \varepsilon \ln(\varepsilon) (\theta_2 - \theta_1) \quad (4.60)$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\int_{S'} q \Phi^* dS = -\frac{q}{2\pi K} (\theta_2 - \theta_1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon \ln(\varepsilon)] = 0 \quad (4.61)$$

Portanto, tem-se que:

$$\int_{S'} q \Phi^* dS = 0 \quad (4.62)$$

Substituindo os resultados obtidos com as equações (4.56) e (4.62) na equação original, (4.51), segue que:

$$\Phi(x_d, y_d) = \Phi(x_d, y_d) \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} + \int_{(S-S')} \Phi q^* dS - \int_{(S-S')} q \Phi^* dS \quad (4.63)$$

Levando em consideração que quando se faz  $\varepsilon \rightarrow 0$  isso implica que  $(S - S') \rightarrow S$ , então:

$$\Phi(x_d, y_d) = \Phi(x_d, y_d) \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} + \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.64)$$

Reorganizando, tem-se:

$$\Phi(x_d, y_d) - \Phi(x_d, y_d) \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.65)$$

$$\Phi(x_d, y_d) \left[ 1 - \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} \right] = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.66)$$

$$\Phi(x_d, y_d) \left[ \frac{2\pi - (\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} \right] = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.67)$$

O numerador da expressão entre colchetes,  $2\pi - (\theta_2 - \theta_1)$ , corresponde ao ângulo interno do contorno, conforme mostrado na Fig. 4.3. Então:

$$\Phi(x_d, y_d) \frac{\theta_{int}}{2\pi} = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.68)$$

A Eq.(4.68) é a equação integral de contorno válida quando o ponto fonte está sobre o contorno.

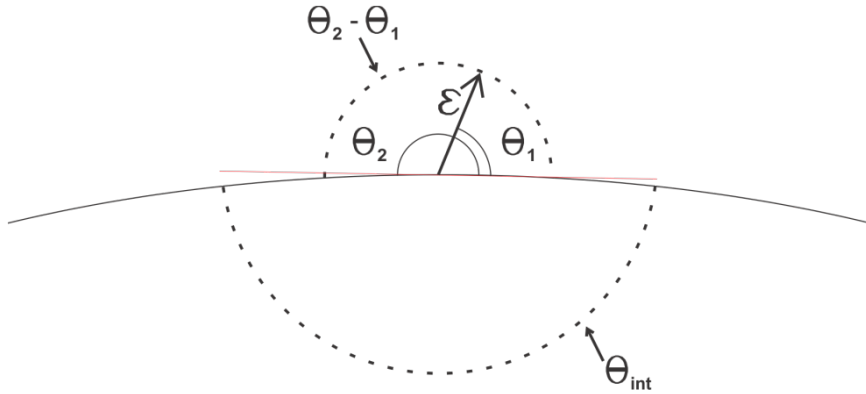


Figura 4.3: Ângulos interno e externos

Se o ponto fonte estiver no exterior do domínio e fora do contorno, então a integral do delta de Dirac da Eq.(4.40) é igual a zero e, com isso,  $\Phi(x_d, y_d) = 0$ . Neste caso, então:

$$0 = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.69)$$

A Eq.(4.69) é a equação integral de contorno válida quando o ponto fonte está no exterior do domínio e fora do contorno.

Dos resultados obtidos nas equações (4.44), (4.68) e (4.69), pode-se escrever:

$$c \Phi(x_d, y_d) = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.70)$$

$$\text{onde: } c = \begin{cases} 0 & \text{quando o ponto fonte está fora do domínio} \\ \frac{\theta_{int}}{2\pi} & \text{quando o ponto fonte está sobre o contorno} \\ 1 & \text{quando o ponto fonte está no interior do domínio} \end{cases}$$

Para um ponto suave do contorno, é de fácil visualização que  $\frac{\theta_{int}}{2\pi} = \frac{1}{2}$  (Banerjee, 1994; Kane, 1994).

#### 4.4 Discretização das equações

A formulação do MEC implica na discretização do contorno da região estudada. Desta forma, o contorno  $S$  é escrito como a soma de  $n$  pedaços nos quais o mesmo é dividido, conforme a Fig. 4.4.

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n \quad (4.71)$$

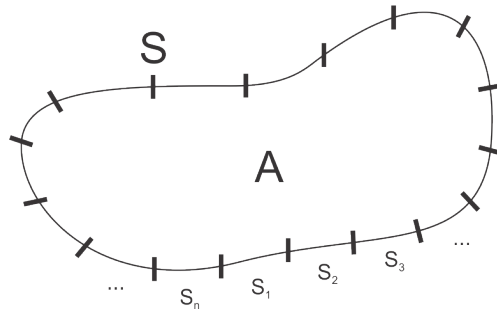


Figura 4.4: Discretização do contorno

A discretização do contorno implica na discretização da equação integral de contorno (4.70). Desta forma, cada uma das integrais da equação dá origem a  $n$  integrais sobre os  $n$  pedaços do contorno dividido. A Eq.(4.70) discretizada é escrita como:

$$c \Phi(x_d, y_d) = \sum_{j=1}^n \left( \int_{S_j} \Phi q^* dS_j \right) - \sum_{j=1}^n \left( \int_{S_j} q \Phi^* dS_j \right) \quad (4.72)$$

A discretização do contorno gera  $n$  pedaços do contorno que precisam, ainda, ser representados matematicamente. Estes pedaços do contorno podem ter uma forma qualquer, fato que leva à necessidade de serem aproximados por uma forma conhecida, como, segmentos de reta, polinômios de primeira ordem, polinômios de segunda ordem, etc. Quanto mais alto for o grau do polinômio utilizado, mais fiel será a representação que esta forma conhecida fará do pedaço do contorno.



Estas formas conhecidas são chamadas de *elementos de contorno*. A soma de todos os elementos de contorno será, então, uma aproximação do contorno real  $S$ . Quanto maior for a discretização, ou seja, quanto maior for o número  $n$  de pedaços em que o contorno foi dividido, melhor será a aproximação feita por meio dos elementos de contorno. Enquanto o contorno real é denominado  $S$ , o contorno aproximado é denominado  $\Gamma$ . Cada pedaço do contorno real  $S_j$  é aproximado por um *elemento de contorno*  $\Gamma_j$ , conforme mostrado na Fig. 4.5. A Eq.(4.72) para a aproximação com os elementos de contorno fica:

$$c\Phi(x_d, y_d) = \sum_{j=1}^n \left( \int_{\Gamma_j} \Phi q^* d\Gamma_j \right) - \sum_{j=1}^n \left( \int_{\Gamma_j} q \Phi^* d\Gamma_j \right) \quad (4.73)$$

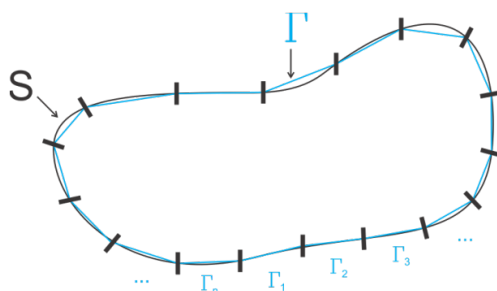


Figura 4.5: Aproximação dos elementos reais por elementos de contorno

## 4.5 Elementos de contorno lineares contínuos

Os elementos de contorno lineares contínuos são aproximações da geometria dos elementos de contorno reais por meio de segmentos de reta com um nó em cada extremidade do elemento (Fig. 4.6). As condições de contorno variam linearmente ao longo dos elementos.

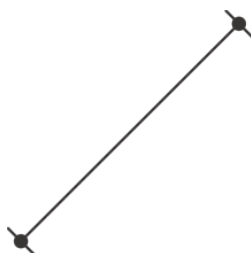


Figura 4.6: Elemento de contorno linear contínuo

Como os nós estão na extremidade do elemento, nem sempre o ponto fonte estará em uma parte suave do contorno. Assim sendo, a constante  $c$  da Eq.(4.73) nem sempre irá assumir o valor de  $c = \frac{1}{2}$ , devendo ser calculada para cada posição do ponto fonte (nos casos em que o mesmo estiver localizado sobre o contorno).

As condições de contorno da Eq.(4.73) devem ser explicitadas em termos do potencial e da velocidade em cada um dos dois nós do elemento. Assim, assume-se que:

$$\Phi_j = (N_1 \Phi_1 + N_2 \Phi_2)_j \quad (4.74)$$

$$q_j = (N_1 q_1 + N_2 q_2)_j \quad (4.75)$$

com  $j = 1, 2, \dots, n$ , onde  $n$  é o número de elementos de contorno utilizados na discretização.

Nas Eq.(4.74) e (4.75),  $N_1$  e  $N_2$  são as *funções de forma* do elemento. Como se trata de elementos retilíneos, as funções de forma são equações de reta baseadas na coordenada local do elemento, denominada  $\xi$ , que varia de  $-1$  a  $+1$ , conforme mostrado na Fig. 4.7.

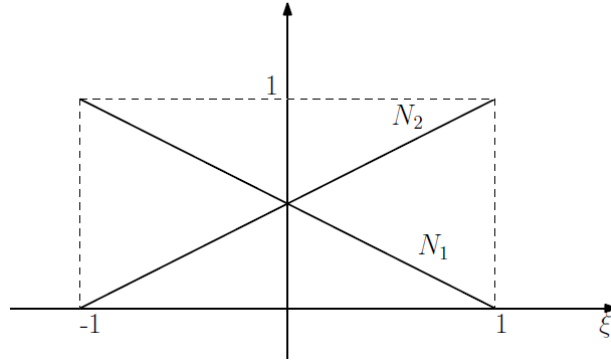


Figura 4.7: Funções de forma (Albuquerque, 2013).

Brebbia et al. (1984) mostram que, para os elementos de contorno lineares contínuos, as funções de forma são dadas por:

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (4.76)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.77)$$

Assim, o valor do potencial e da velocidade em qualquer ponto sobre o elemento pode ser definido em termos de seus valores nodais (na extremidade) e das duas funções de forma, que são funções de interpolação lineares sobre a coordenada  $\xi$  local do elemento.

Aplicando as considerações a respeito dos elementos lineares contínuos, a equação integral de contorno fica:

$$c \Phi^i(x_d, y_d) = \sum_{j=1}^n \left( \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}_j \right) - \sum_{j=1}^n \left( \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_j \right) \quad (4.78)$$

Na Eq.(4.78), os termos  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $g_1$  e  $g_2$  são dados por:

$$h_1 = \int_{\Gamma_j} N_1 q^* d\Gamma \quad (4.79)$$

$$h_2 = \int_{\Gamma_j} N_2 q^* d\Gamma \quad (4.80)$$

$$g_1 = \int_{\Gamma_j} N_1 \Phi^* d\Gamma \quad (4.81)$$

$$g_2 = \int_{\Gamma_j} N_2 \Phi^* d\Gamma \quad (4.82)$$

A Eq.(4.78) é a equação integral de contorno discretizada em elementos lineares contínuos, onde o índice  $i$  corresponde ao  $i$ -ésimo elemento de contorno analisado.

Pode-se organizar a Eq.(4.78) da seguinte forma:

$$-c \Phi^i(x_d, y_d) + \sum_{j=1}^n \left( \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}_j \right) = \sum_{j=1}^n \left( \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_j \right) \quad (4.83)$$

A Eq.(4.83) é a equação integral de contorno discretizada em elementos lineares. Ela pode ser transformada em uma forma matricial, fazendo:

$$H_{ij} = \begin{cases} \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}_j & \text{se } i \neq j \\ -c + \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}_j & \text{se } i = j \end{cases} \quad (4.84)$$

e

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix}_j \quad (4.85)$$

Com isso, a Eq.(4.83) fica:

$$\sum_{j=1}^n \left( H_{ij} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}_j \right) = \sum_{j=1}^n \left( G_{ij} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_j \right) \quad (4.86)$$

Finalmente, a Eq.(4.86) é a equação integral de contorno discretizada em elementos lineares e em forma matricial.

## 4.6 Método de solução

Para a descrição do método de solução, será apresentado um exemplo simples de aplicação em um problema de escoamento potencial unidirecional em um meio retangular com dois lados imper-

meáveis e dois lados com potenciais estabelecidos, conforme a Fig. 4.8. A discretização utilizada é de um elemento por lado.

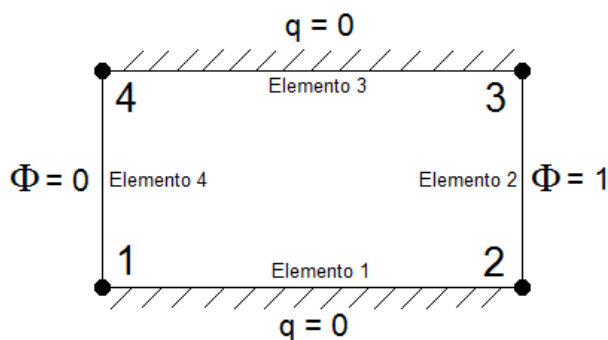


Figura 4.8: Exemplo de aplicação - condições de contorno

É importante notar que cada um dos nós é compartilhado por dois elementos. Para cada nó, existe apenas um valor de potencial, ou seja, existe uma continuidade de potencial ao longo do contorno, entre os elementos. A velocidade calculada em um nó, porém, pode ser diferente, dependendo do ponto de vista de cada elemento. Assim, existe uma velocidade *antes* do nó  $j$  ( $q_j^a$ ), calculada do ponto de vista do elemento exatamente anterior ao nó, e uma velocidade *depois* do mesmo nó  $j$  ( $q_j^d$ ), calculada do ponto de vista do elemento exatamente posterior ao nó. Portanto, existem 3 variáveis para cada nó. Note que, como a equação diferencial é de segunda ordem, cada nó só pode ter uma variável desconhecida para que o problema seja solucionado.

A tabela 4.1 relaciona quais são as variáveis conhecidas e desconhecidas em cada nó.

Tabela 4.1: Exemplo de aplicação - variáveis conhecidas e desconhecidas

Nó	Variáveis conhecidas	Variáveis desconhecidas
1	$\Phi_1 = 0$	$q_1^d = 0$ , $q_1^a$
2	$\Phi_2 = 1$	$q_2^a = 0$ , $q_2^d$
3	$\Phi_3 = 1$	$q_3^d = 0$ , $q_3^a$
4	$\Phi_4 = 0$	$q_4^a = 0$ , $q_4^d$

#### 4.6.1 Cálculo do potencial e da velocidade no contorno

O primeiro passo para a aplicação é colocar o ponto fonte sobre o primeiro nó do primeiro elemento (nó 1) e escrever a Eq.(4.83) para este nó:

$$\begin{aligned}
 -c_1 \bar{\Phi}_1 + (h_{11} \bar{\Phi}_1 + h_{21} \bar{\Phi}_2 + h_{12} \bar{\Phi}_2 + h_{22} \bar{\Phi}_3 + h_{13} \bar{\Phi}_3 + h_{23} \bar{\Phi}_4 + h_{14} \bar{\Phi}_4 + h_{24} \bar{\Phi}_1) = \\
 = (g_{11} \bar{q}_1^d + g_{21} \bar{q}_2^a + g_{12} \bar{q}_2^d + g_{22} \bar{q}_3^a + g_{13} \bar{q}_3^d + g_{23} \bar{q}_4^a + g_{14} \bar{q}_4^d + g_{24} \bar{q}_1^a) \quad (4.87)
 \end{aligned}$$

onde as variáveis sobrescritas com uma barra significam que são variáveis conhecidas, prescritas

através das condições de contorno. Agrupando os termos comuns, tem-se:

$$\begin{aligned} & \underbrace{(-c_1 + h_{11} + h_{24})}_{H_{11}} \bar{\Phi}_1 + \underbrace{(h_{21} + h_{12})}_{H_{12}} \bar{\Phi}_2 + \underbrace{(h_{22} + h_{13})}_{H_{13}} \bar{\Phi}_3 + \underbrace{(h_{23} + h_{14})}_{H_{12}} \bar{\Phi}_4 = \\ & = g_{11} \bar{q}_1^d + g_{21} \bar{q}_2^a + g_{12} q_2^d + g_{22} q_3^a + g_{13} \bar{q}_3^d + g_{23} \bar{q}_4^a + g_{14} q_4^d + g_{24} q_1^a \quad (4.88) \end{aligned}$$

Aplicando a notação dada pelas Eq.(4.84) e (4.85), tem-se:

$$H_{11} \bar{\Phi}_1 + H_{12} \bar{\Phi}_2 + H_{13} \bar{\Phi}_3 + H_{14} \bar{\Phi}_4 = G_{11}^d \bar{q}_1^d + G_{12}^a \bar{q}_2^a + G_{12}^d q_2^d + G_{13}^a q_3^a + G_{13}^d \bar{q}_3^d + G_{14}^a \bar{q}_4^a \quad (4.89)$$

Colocando o ponto fonte sobre o nó 2 e fazendo o mesmo procedimento, obtém-se:

$$H_{21} \bar{\Phi}_1 + H_{22} \bar{\Phi}_2 + H_{23} \bar{\Phi}_3 + H_{24} \bar{\Phi}_4 = G_{21}^d \bar{q}_1^d + G_{22}^a \bar{q}_2^a + G_{22}^d q_2^d + G_{23}^a q_3^a + G_{23}^d \bar{q}_3^d + G_{24}^a \bar{q}_4^a \quad (4.90)$$

Procede-se da mesma forma para os nós 3 e 4. Ao final deste procedimento, tem-se, de forma matricial:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Phi}_1 \\ \bar{\Phi}_2 \\ \bar{\Phi}_3 \\ \bar{\Phi}_4 \end{Bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} G_{11}^d & G_{12}^a & G_{12}^d & G_{13}^a & G_{13}^d & G_{14}^a & G_{14}^d & G_{11}^a \\ G_{21}^d & G_{22}^a & G_{22}^d & G_{23}^a & G_{23}^d & G_{24}^a & G_{24}^d & G_{21}^a \\ G_{31}^d & G_{32}^a & G_{32}^d & G_{33}^a & G_{33}^d & G_{34}^a & G_{34}^d & G_{31}^a \\ G_{41}^d & G_{42}^a & G_{42}^d & G_{43}^a & G_{43}^d & G_{44}^a & G_{44}^d & G_{41}^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1^d \\ \bar{q}_2^a \\ q_2^d \\ q_3^a \\ \bar{q}_3^d \\ \bar{q}_4^a \\ q_4^d \\ q_1^a \end{Bmatrix} \quad (4.91) \end{aligned}$$

ou, de forma compacta,

$$[H]\{\Phi\} = [G]\{q\} \quad (4.92)$$

A seguir, reorganizam-se as equações de forma a separar as variáveis conhecidas das desconhecidas, resultando em:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} -G_{12}^d & -G_{13}^a & -G_{14}^d & -G_{11}^a \\ -G_{22}^d & -G_{23}^a & -G_{24}^d & -G_{21}^a \\ -G_{32}^d & -G_{33}^a & -G_{34}^d & -G_{31}^a \\ -G_{42}^d & -G_{43}^a & -G_{44}^d & -G_{41}^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2^d \\ q_3^a \\ q_4^d \\ q_1^a \end{Bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} G_{11}^d & G_{12}^a & -H_{11} & -H_{12} & G_{13}^d & G_{14}^a & -H_{13} & -H_{14} \\ G_{21}^d & G_{22}^a & -H_{21} & -H_{22} & G_{23}^d & G_{24}^a & -H_{23} & -H_{24} \\ G_{31}^d & G_{32}^a & -H_{31} & -H_{32} & G_{33}^d & G_{34}^a & -H_{33} & -H_{34} \\ G_{41}^d & G_{42}^a & -H_{41} & -H_{42} & G_{43}^d & G_{44}^a & -H_{43} & -H_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1^d \\ \bar{q}_2^a \\ \bar{\Phi}_1 \\ \bar{\Phi}_2 \\ \bar{q}_3^d \\ \bar{q}_4^a \\ \bar{\Phi}_3 \\ \bar{\Phi}_4 \end{Bmatrix} \quad (4.93)
\end{aligned}$$

É importante lembrar que todos os elementos das matrizes  $H$  e  $G$  são conhecidos, resultando da resolução das equações (4.84) e (4.85). As variáveis do vetor da esquerda são desconhecidas enquanto que as do vetor da direita são todas conhecidas. Desta forma, pode-se escrever:

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (4.94)$$

ou

$$\{x\} = [A]^{-1}\{b\} \quad (4.95)$$

### Caso com sumidouros pontuais

Para o caso em que a equação governante não é a de Laplace, mas sim a de Poisson (Eq. 3.17), a Eq.(4.92) se torna:

$$[H]\{\Phi\} = [G]\{q\} - \{s\} \quad (4.96)$$

onde  $s$  é o vetor que guarda a contribuição de cada sumidouro pontual. Cada elemento deste vetor corresponde ao efeito dos sumidouros em um ponto fonte  $i$ , dado por:

$$s_i = \sum_{j=1}^{n_{sc}} Q_j \Phi_j^* \quad (4.97)$$

sendo que  $n_{sc}$  é o número de sumidouros pontuais do problema,  $Q_j$  é a intensidade do sumidouro  $j$  e  $\Phi^*$  é a solução fundamental do potencial, expressa pela Eq.(4.14).

Reorganizando as matrizes para separar as variáveis conhecidas das desconhecidas, tem-se:

$$[A]\{x\} = \{b\} - \{s\} \quad (4.98)$$

ou

$$\{x\} = [A]^{-1}(\{b\} - \{s\}) \quad (4.99)$$

Da resolução do sistema linear dado pela Eq.(4.95) ou pela Eq. (4.99), obtém-se os valores desconhecidos de  $\Phi$  e  $q$  no contorno.

#### 4.6.2 Cálculo do potencial e da velocidade em pontos internos

Depois que o potencial e a velocidade foram calculados no contorno, os mesmos podem, então, ser calculados em qualquer ponto no interior do domínio. Para a realização de tal tarefa, coloca-se o ponto fonte no interior do domínio, no ponto desejado e aplica-se a equação integral de contorno (Eq. 4.70). Como as integrais desta equação são avaliadas no contorno e, nele, os valores de  $\Phi$  e  $q$  já são conhecidos, então a única incógnita da equação integral de contorno é o potencial no ponto interno em questão. É importante notar que, quando o ponto fonte está no interior do domínio, a constante  $c$  da Eq.(4.70) vale 1.

Para o cálculo da velocidade em um ponto interior ao domínio é necessário, primeiramente, derivar a equação integral de contorno (Eq. 4.70) em relação às coordenadas do ponto fonte  $(x_d, y_d)$ , fazendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(x_d)}{\partial x_d} &= \frac{\partial}{\partial x_d} \left[ \int_S q_{(x,x_d)}^* \Phi(x) dS(x) \right] - \frac{\partial}{\partial x_d} \left[ \int_S \Phi_{(x,x_d)}^* q(x) dS(x) \right] \\ &= \int_S \frac{\partial q_{(x,x_d)}^*}{\partial x_d} \Phi(x) dS(x) - \int_S \frac{\partial \Phi_{(x,x_d)}^*}{\partial x_d} q(x) dS(x) \end{aligned} \quad (4.100)$$

A partir desta equação, pode-se calcular a velocidade em um ponto do interior do domínio, lembrando que:

$$\mathbf{q} = \left( -K \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left( -K \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{j}} \quad (4.101)$$

$$\frac{\partial q^*}{\partial x_d} = \frac{[n_x(r_x^2 - r_y^2) + 2n_y r_x r_y]}{2\pi r^4} \quad (4.102)$$

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial x_d} = \frac{r_x}{2\pi K r^2}; \text{ onde } r_x = x - x_d \quad (4.103)$$

As equações (4.100) a (4.103), com exceção da Eq.(4.101) têm suas análogas em relação a  $y_d$ .



## Capítulo 5

# Integração analítica das matrizes de influência $H$ e $G$

### 5.1 Análise qualitativa das integrações

Como mostrado no capítulo 4, o MEC é um método integral que tem graus de liberdade apenas no contorno da região estudada. De acordo com Kane (1994), este método tem duas características importantes, no que concerne às integrações:

- são consumidos muitos recursos computacionais com as integrações (se comparados com métodos de domínio), considerando que cada elemento de contorno é integrado  $N$  vezes, uma para cada localização do ponto fonte, sendo  $N$  o número total de nós do problema;
- a qualidade da solução obtida está intimamente relacionada à precisão do procedimento de integração utilizado.

Uma observação importante é que quando o ponto fonte está localizado sobre o elemento que está sendo integrado, os integrandos costumam apresentar singularidades, como por exemplo, com o raio tendendo a zero nas soluções fundamentais mostradas nas equações (4.14) e (4.25).

É mostrado por Kane (1994) que a integração exata das expressões é algo que pode se tornar bastante complicado quando o contorno discretizado foi aproximado por elementos de contorno quadráticos ou de ordem mais alta, porque os integrandos podem ser bastante complicados. Isto não significa que não possam ser obtidas expressões analíticas para estas integrais (principalmente com o auxílio dos softwares de manipulação simbólica atuais), mas tais expressões analíticas podem chegar a ser tão longas que se consome mais recursos computacionais na manipulação das mesmas pelos algoritmos do que se fosse realizada a integração numérica. Nestes casos, há que se pesar o benefício obtido pela solução mais precisa trazida pela integração analítica e o custo computacional adicional requerido.

A integração numérica, embora seja uma aproximação da solução exata da integral, é, normalmente, o meio mais utilizado para realizar as integrações no MEC, principalmente o método da

quadratura de Gauss. Entre os motivos para esta popularidade, estão a capacidade de se tratar as singularidades das soluções fundamentais e a possibilidade de utilização de elementos curvos (de ordem 2 ou superior). A utilização de elementos curvos diminui a discretização do contorno requerida para um mesmo grau de precisão entre o contorno real e o contorno aproximado, em relação a elementos retilíneos. Intuitivamente, espera-se um ganho de performance ao utilizar uma malha com um número menor de nós para se conseguir uma solução de igual qualidade. Análises de performance realizadas por Braga (2012), porém, mostram que formulações com elementos constantes e elementos lineares convergem quase tão rapidamente para a solução exata quanto elementos quadráticos. Além disso, Kane (1994) afirma que é vantajoso se utilizar elementos retilíneos (incluem-se os constantes) combinados com integração analítica ao invés de utilizar elementos curvos combinados com integração numérica.

Embora este cenário seja muitas vezes favorável à adoção da integração numérica com elementos de contorno de alta ordem, é mostrado por Banerjee (1994) e Kane (1994) que, quando se utilizam elementos de contorno retilíneos (lineares contínuos, lineares descontínuos e elementos constantes), a integração analítica é uma prática formidável devido às expressões obtidas serem factivelmente aplicáveis nos algoritmos; a dificuldade de se obter e aplicar as expressões analíticas não são tão dramáticas quanto no caso dos elementos curvos.

## 5.2 Integração analítica das matrizes

A integração analítica dos elementos das matrizes  $H$  e  $G$  das formulações do MEC para problemas potenciais com elementos de contorno lineares contínuos é mostrada por Córdoba (2013) e detalhada a seguir.

### 5.2.1 Sistema de coordenadas local

A equação integral de contorno discretizada considerando elementos lineares contínuos é dada pela Eq.(4.78):

$$c \Phi^i(x_d, y_d) = \sum_{j=1}^n \left( [h_1 \quad h_2]_j \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}_j \right) - \sum_{j=1}^n \left( [g_1 \quad g_2]_j \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_j \right)$$

Conforme mostrado por Braga (2012), a integração analítica dos termos  $g_1$  e  $g_2$  da matriz  $G$ , e dos termos  $h_1$  e  $h_2$  da matriz  $H$  pode ser feita considerando um sistema de coordenadas local  $x'y'$  com origem no ponto fonte e com o eixo  $y'$  paralelo ao elemento  $j$ . Na Fig. 5.1 se apresenta o sistema de coordenadas local usado para o cálculo das integrais analíticas.

Da Fig. 5.1, podem-se deduzir as seguintes relações:

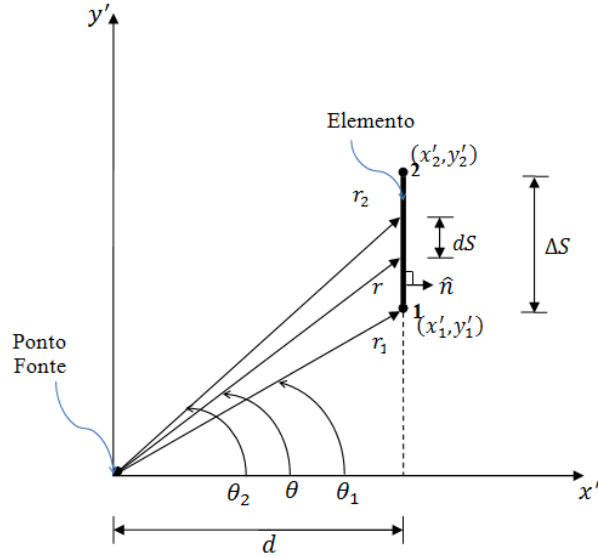


Figura 5.1: Sistema de coordenadas local usado para o cálculo das integrais analíticas (Braga, 2012)

$$x' = r \cos\theta \quad (5.1)$$

$$y' = r \sin\theta \quad (5.2)$$

$$y'_1 = r_1 \sin\theta_1 \quad (5.3)$$

$$y'_2 = r_2 \sin\theta_2 \quad (5.4)$$

O termo  $d$  é a projeção do vetor  $\vec{\mathbf{r}}$  na direção do vetor normal unitário  $\hat{\mathbf{n}}$ .

$$d = \vec{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = r \cos\theta \quad (5.5)$$

A Eq.(5.5) pode ser escrita como:

$$r = d \sec\theta \quad (5.6)$$

O diferencial  $dS$  pode ser escrito em termos da variável  $\theta$  como:

$$dS = dy' = d \sec^2 \theta d\theta \quad (5.7)$$

$L$  é o comprimento do elemento  $j$ , e é dado por:

$$L = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} = y'_2 - y'_1 \quad (5.8)$$

As funções de forma  $N_1$  e  $N_2$  são definidas como:

$$N_1 = \frac{y'_2 - y'}{y'_2 - y'_1} = \frac{r_2 \sin\theta_2 - r \sin\theta}{L} \quad (5.9)$$

$$N_2 = \frac{y' - y'_1}{y'_2 - y'_1} = \frac{r \sin\theta - r_1 \sin\theta_1}{L} \quad (5.10)$$

## 5.2.2 Desenvolvimento analítico da integral para $g_1$

Substituindo as Eq.(4.14) e (5.9) na Eq.(4.81), obtém-se a expressão integral para  $g_1$ :

$$g_1 = \int_{\Gamma_j} N_1 \Phi^* d\Gamma = \int_{\Delta S} \left( \frac{r_2 \sin\theta_2 - r \sin\theta}{L} \right) \left( -\frac{1}{2\pi K} \ln(r) \right) dS \quad (5.11)$$

Substituindo as relações dadas pelas Eq.(5.5), (5.6) e (5.7) na Eq.(5.11), obtém-se a seguinte expressão:

$$g_1 = \left( -\frac{1}{2\pi KL} \right) \left[ \int_{\theta_1}^{\theta_2} r_2 \sin\theta_2 \ln(d \sec\theta) d \sec^2\theta d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2} d \sec\theta \sin\theta \ln(d \sec\theta) d \sec^2\theta d\theta \right] \quad (5.12)$$

Reorganizando a Eq.(5.12), tem-se:

$$g_1 = \left( -\frac{1}{2\pi KL} \right) \left[ \underbrace{d r_2 \sin\theta_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln(d \sec\theta) \sec^2\theta d\theta}_{\text{I}} - \underbrace{d^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tan\theta \ln(d \sec\theta) \sec^2\theta d\theta}_{\text{II}} \right] \quad (5.13)$$

Para encontrar a expressão algébrica de  $g_1$ , resolve-se isoladamente as partes I e II da Eq.(5.13).

### 5.2.2.1 Parte I de $g_1$

A primeira parte de  $g_1$  é dada por:

$$\text{I} = d r_2 \sin\theta_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln(d \sec\theta) \sec^2\theta d\theta \quad (5.14)$$

Seu desenvolvimento é mostrado a seguir.

$$\text{I} = d r_2 \sin\theta_2 [\tan\theta (\ln |d \sec\theta| - 1) + \theta]_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (5.15)$$

Reorganizando a Eq.(5.15), tem-se:

$$I = r_2 \sin\theta_2 [d \tan\theta (\ln |d \sec\theta| - 1) + \theta d]_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (5.16)$$

Substituindo na Eq.(5.16) a seguintes relação:

$$d \tan\theta = r \sin\theta \quad (5.17)$$

tem-se a seguinte expressão:

$$I = r_2 \sin\theta_2 [r \sin\theta \ln |d \sec\theta| - r \sin\theta + \theta d]_{\theta_1, r_1}^{\theta_2, r_2} \quad (5.18)$$

Aplicando-se os limites de integração na Eq.(5.18), obtém-se:

$$I = r_2 \sin\theta_2 (r_2 \sin\theta_2 \ln |d \sec\theta_2| - r_2 \sin\theta_2 + \theta_2 d - r_1 \sin\theta_1 \ln |d \sec\theta_1| + r_1 \sin\theta_1 - \theta_1 d) \quad (5.19)$$

Mostram-se na Fig. 5.2 as relações apropriadas para expressar de uma maneira mais compacta o resultado da parte I.

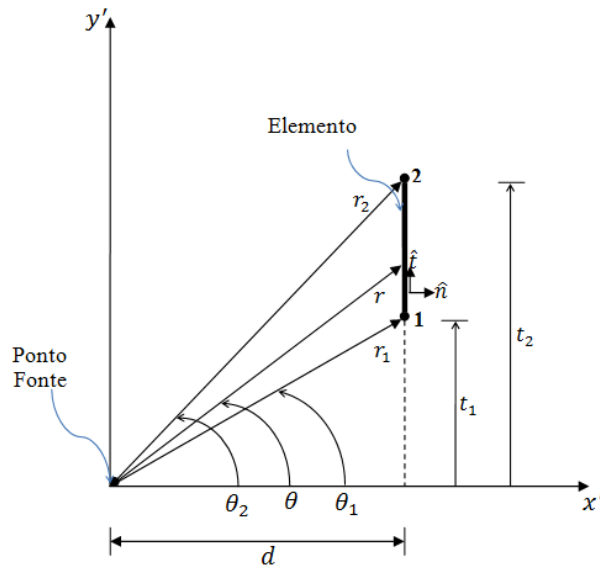


Figura 5.2: Projeções de  $r_1$  e  $r_2$  na direção tangencial (Córdoba, 2013)

Da Fig. 5.2, podem-se deduzir as seguintes relações a seguir.

$t_1$  é a projeção do vetor  $\vec{r}_1$  na direção tangencial:

$$t_1 = \vec{r}_1 \cdot \hat{t} = r_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) = r_1 \sin\theta_1 \quad (5.20)$$

$d$  é a projeção do vetor  $\vec{r}_1$  na direção normal:

$$d = \vec{r}_1 \cdot \hat{n} = r_1 \cos\theta_1 \quad (5.21)$$

A Eq.(5.21) pode ser escrita como:

$$r_1 = d \sec\theta_1 \quad (5.22)$$

$t_2$  é a projeção do vetor  $\vec{r}_2$  na direção tangencial:

$$t_2 = \vec{r}_2 \cdot \hat{t} = r_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) = r_2 \sin\theta_2 \quad (5.23)$$

$d$  é a projeção do vetor  $\vec{r}_2$  na direção normal:

$$d = \vec{r}_2 \cdot \hat{n} = r_2 \cos\theta_2 \quad (5.24)$$

A Eq.(5.24) pode ser escrita como:

$$r_2 = d \sec\theta_2 \quad (5.25)$$

Substituindo as relações dadas pelas Eq.(5.20) a (5.25) na Eq.(5.19), tem-se:

$$I = t_2 (t_2 \ln|r_2| - t_2 + \theta_2 d - t_1 \ln|r_1| + t_1 - \theta_1 d) \quad (5.26)$$

É útil definir as seguintes igualdades:

$$t_2 - t_1 = L \quad (5.27)$$

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{dL}{d^2 + t_1 t_2}\right) \quad (5.28)$$

$$(5.29)$$

Substituindo as igualdades dadas pelas Eq.(5.27) e (5.28) na Eq.(5.26), obtém-se a expressão para a primeira parte da Eq.(5.13):

$$I = t_2 (\Delta\theta d - L - t_1 \ln|r_1| + t_2 \ln|r_2|) \quad (5.30)$$

### 5.2.2.2 Parte II de $g_1$

A segunda parte de  $g_1$  é dada por:

$$\text{II} = d^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tan\theta \ln(d \sec\theta) \sec^2\theta d\theta \quad (5.31)$$

Seu desenvolvimento é mostrado a seguir.

$$\text{II} = d^2 \left[ \frac{(-1 + 2 \ln |d \sec\theta|) \sec^2\theta}{4} \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (5.32)$$

Expandindo a Eq.(5.32), tem-se:

$$\text{II} = \frac{1}{4} \left[ -d^2 \sec^2\theta + 2d^2 \sec^2\theta \ln |d \sec\theta| \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (5.33)$$

Elevando-se a Eq.(5.25) ao quadrado, obtém-se:

$$r^2 = d^2 \sec^2\theta \quad (5.34)$$

Substituindo a Eq.(5.34) na Eq.(5.33), tem-se:

$$\text{II} = \frac{1}{4} \left[ -r^2 + 2r^2 \ln |r| \right]_{r_1}^{r_2} \quad (5.35)$$

Aplicando-se os limites de integração da Eq.(5.35), obtém-se o resultado da segunda integral da Eq.(5.13):

$$\text{II} = \frac{1}{4} \left( -r_2^2 + 2r_2^2 \ln |r_2| + r_1^2 - 2r_1^2 \ln |r_1| \right) \quad (5.36)$$

Substituindo os resultados das partes I e II, dados pelas equações (5.30) e (5.36), na Eq.(5.13), obtém-se:

$$g_1 = \left( -\frac{1}{2\pi KL} \right) \left[ t_2 (\Delta\theta d - L - t_1 \ln |r_1| + t_2 \ln |r_2|) - \frac{1}{4} \left( 2r_2^2 \ln |r_2| - 2r_1^2 \ln |r_1| - r_2^2 + r_1^2 \right) \right] \quad (5.37)$$

Reorganizando os termos da Eq.(5.37), obtém-se o seguinte resultado para  $g_1$ :

$$g_1 = \left( \frac{1}{8\pi KL} \right) \left[ 4t_2 (-\Delta\theta d + L + t_1 \ln |r_1| - t_2 \ln |r_2|) + 2r_2^2 \ln |r_2| - 2r_1^2 \ln |r_1| + r_1^2 - r_2^2 \right] \quad (5.38)$$

### 5.2.3 Desenvolvimento analítico da integral para $g_2$

Substituindo as Eq.(4.14) e (5.10) na Eq.(4.82), obtém-se a expressão integral para  $g_2$ :

$$g_2 = \int_{\Gamma_j} N_2 \Phi^* d\Gamma = \int_{\Delta S} \left( \frac{r \sin\theta - r_1 \sin\theta_1}{L} \right) \left( -\frac{1}{2\pi k} \ln(r) \right) dS \quad (5.39)$$

Substituindo as relações dadas pelas Eq.(5.5), (5.6) e (5.7) na Eq.(5.39), obtém-se:

$$g_2 = \left( -\frac{1}{2\pi KL} \right) \left[ \int_{\theta_1}^{\theta_2} r \sin\theta \ln(d \sec\theta) d \sec^2\theta d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2} r_1 \sin\theta_1 \ln(d \sec\theta) d \sec^2\theta d\theta \right] \quad (5.40)$$

Substituindo a relação dada pela Eq.(5.17) na Eq.(5.40), obtém-se a seguinte expressão:

$$g_2 = \left( -\frac{1}{2\pi KL} \right) \left[ \int_{\theta_1}^{\theta_2} d \tan\theta \ln(d \sec\theta) d \sec^2\theta d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2} r_1 \sin\theta_1 \ln(d \sec\theta) d \sec^2\theta d\theta \right] \quad (5.41)$$

Extraindo os termos constantes dos integrandos, tem-se:

$$g_2 = \left( -\frac{1}{2\pi KL} \right) \left[ d^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tan\theta \ln(d \sec\theta) \sec^2\theta d\theta - dr_1 \sin\theta_1 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln(d \sec\theta) \sec^2\theta d\theta \right] \quad (5.42)$$

Substituindo os resultados das integrais em I e II (calculadas para  $g_1$ ), dados pelas Eq.(5.30) e (5.36), na Eq.(5.42), obtém-se:

$$g_2 = \left( -\frac{1}{2\pi KL} \right) \left[ \frac{1}{4} \left( 2r_2^2 \ln|r_2| - 2r_1^2 \ln|r_1| - r_2^2 + r_1^2 \right) - t_1 (\Delta\theta d - L - t_1 \ln|r_1| + t_2 \ln|r_2|) \right] \quad (5.43)$$

Reorganizando os termos da Eq.(5.43), obtém-se o seguinte resultado para  $g_2$ :

$$g_2 = \left( \frac{1}{8\pi KL} \right) \left[ 4t_1 (\Delta\theta d - L - t_1 \ln|r_1| + t_2 \ln|r_2|) + 2r_1^2 \ln|r_1| - 2r_2^2 \ln|r_2| + r_2^2 - r_1^2 \right] \quad (5.44)$$

#### 5.2.4 Desenvolvimento analítico da integral para $h_1$

Substituindo a Eq.(4.25) na Eq.(4.79), obtém-se a expressão integral para  $h_1$ :

$$h_1 = \int_{\Gamma_j} N_1 q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} N_1 \left( \frac{r_x n_x + r_y n_y}{2\pi r^2} \right) d\Gamma \quad (5.45)$$

Substituindo a Eq.(5.9) na Eq.(5.45), tem-se:



$$h_1 = \int_{\Delta S} \left( \frac{r_2 \sin\theta_2 - r \sin\theta}{L} \right) \left( \frac{r_x n_x + r_y n_y}{2\pi r^2} \right) dS \quad (5.46)$$

O produto escalar entre o vetor  $\vec{\mathbf{r}}$  e o vetor normal unitário  $\hat{\mathbf{n}}$  é dado por:

$$\vec{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = r_x n_x + r_y n_y = r \cos\theta = d \quad (5.47)$$

Substituindo as relações dadas pelas Eq.(5.6), (5.7) e (5.47), na Eq. (5.46), obtém-se a seguinte expressão:

$$h_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left( \frac{r_2 \sin\theta_2 - r \sin\theta}{L} \right) \left( \frac{d^2 \sec^2\theta}{2\pi d^2 \sec^2\theta} \right) d\theta \quad (5.48)$$

Reorganizando a Eq.(5.48), tem-se:

$$h_1 = \left( \frac{1}{2\pi L} \right) \left( \int_{\theta_1}^{\theta_2} r_2 \sin\theta_2 d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2} r \sin\theta d\theta \right) \quad (5.49)$$

Resolvendo a primeira integral e substituindo a relação dada pela Eq.(5.17) na Eq.(5.49), tem-se que:

$$h_1 = \left( \frac{1}{2\pi L} \right) \left[ r_2 \sin\theta_2 (\theta_2 - \theta_1) - \int_{\theta_1}^{\theta_2} d \tan\theta d\theta \right] \quad (5.50)$$

Resolvendo a integral da Eq.(5.50) chega-se a:

$$h_1 = \left( \frac{1}{2\pi L} \right) \left\{ r_2 \sin\theta_2 (\theta_2 - \theta_1) + [d \ln |\cos\theta|]_{\theta_1}^{\theta_2} \right\} \quad (5.51)$$

Aplicando os limites de integração da Eq.(5.51), tem-se:

$$h_1 = \left( \frac{1}{2\pi L} \right) \left[ r_2 \sin\theta_2 (\theta_2 - \theta_1) + d (\ln |\cos\theta_2| - \ln |\cos\theta_1|) \right] \quad (5.52)$$

Substituindo as relações dadas pelas Eq.(5.21), (5.22) e (5.24) na Eq.(5.52), obtém-se:

$$h_1 = \left( \frac{1}{2\pi L} \right) \left[ t_2 \Delta\theta + d \left( \ln \left| \frac{d}{r_2} \right| - \ln \left| \frac{d}{r_1} \right| \right) \right] \quad (5.53)$$

Logo,

$$h_1 = \left( \frac{1}{2\pi L} \right) \left( t_2 \Delta\theta + d \ln \left| \frac{r_1}{r_2} \right| \right) \quad (5.54)$$

### 5.2.5 Desenvolvimento analítico da integral para $h_2$

Substituindo a Eq.(4.25) na Eq.(4.80), obtém-se a expressão integral para  $h_2$ :

$$h_2 = \int_{\Gamma_j} N_2 q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} N_2 \left( \frac{r_x n_x + r_y n_y}{2\pi r^2} \right) d\Gamma \quad (5.55)$$

Substituindo a Eq.(5.10) na Eq.(5.55), tem-se:

$$h_2 = \int_{\Delta S} \left( \frac{r \sin\theta - r_1 \sin\theta_1}{L} \right) \left( \frac{r_x n_x + r_y n_y}{2\pi r^2} \right) dS \quad (5.56)$$

Substituindo as relações dadas pelas Eq.(5.6), (5.7) e (5.47), na Eq. (5.56), obtém-se a seguinte expressão:

$$h_2 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left( \frac{r \sin\theta - r_1 \sin\theta_1}{L} \right) \left( \frac{d^2 \sec^2\theta}{2\pi d^2 \sec^2\theta} \right) d\theta \quad (5.57)$$

Reorganizando a Eq.(5.57), tem-se:

$$h_2 = \left( \frac{1}{2\pi L} \right) \left( \int_{\theta_1}^{\theta_2} r \sin\theta d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2} r_1 \sin\theta_1 d\theta \right) \quad (5.58)$$

Substituindo a relação dada pela Eq.(5.17) na Eq.(5.58) e resolvendo sua segunda integral, obtém-se:

$$h_2 = \left( \frac{1}{2\pi L} \right) \left[ \int_{\theta_1}^{\theta_2} d \tan\theta d\theta - r_1 \sin\theta_1 (\theta_2 - \theta_1) \right] \quad (5.59)$$

Resolvendo a integral da Eq.(5.59), tem-se:

$$h_2 = \left( \frac{1}{2\pi L} \right) \left\{ [-d \ln |\cos\theta|]_{\theta_1}^{\theta_2} - r_1 \sin\theta_1 (\theta_2 - \theta_1) \right\} \quad (5.60)$$

Aplicando os limites de integração da Eq.(5.60), chega-se a:

$$h_2 = \left( \frac{1}{2\pi L} \right) [-d (\ln |\cos\theta_2| - \ln |\cos\theta_1|) - r_1 \sin\theta_1 (\theta_2 - \theta_1)] \quad (5.61)$$

Substituindo as relações dadas pelas Eq.(5.20), (5.21) e (5.24) na Eq.(5.61), tem-se que:

$$h_2 = \left( \frac{1}{2\pi L} \right) \left[ d \left( \ln \left| \frac{d}{r_1} \right| - \ln \left| \frac{d}{r_2} \right| \right) - r_1 \Delta\theta \right] \quad (5.62)$$

Reorganizando os termos da Eq.(5.62), chega-se ao resultado analítico de  $h_2$ :

$$h_2 = \left( \frac{1}{2\pi L} \right) \left( d \ln \left| \frac{r_2}{r_1} \right| - t_1 \Delta\theta \right) \quad (5.63)$$

Finalmente, as Eq.(5.38), (5.44), (5.54) e (5.63) reúnem as expressões para a resolução analítica das integrais das matrizes de influência  $H$  e  $G$ .

## Capítulo 6

# O Método dos Elementos de Contorno para escoamentos compressíveis

Este capítulo apresenta a formulação do Método da Reciprocidade Dual (MRD) do MEC para problemas regidos pela equação da difusividade hidráulica (Eq. 3.37),

$$\nabla^2 p = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t}$$

que é o caso do modelo adotado neste trabalho para o escoamento compressível. Desde que foi apresentado pelos seus criadores, este método vem sendo muito utilizado pelo seu baixo custo computacional (Partridge et al., 1992).

Este capítulo fará uso da nomenclatura padrão do MRD, portanto, a pressão ( $p$ ) será denotado pela letra  $u$  e sua derivada normal  $\partial p / \partial n$  será representada pela letra  $q$ .

Para melhor entendimento, a apresentação deste método se dará de forma gradual, primeiro para equações do tipo  $\nabla^2 u = b(x, y)$ , expandindo a formulação para equações do tipo  $\nabla^2 u = b(x, y, u)$ , e finalmente chegando à equação da difusividade hidráulica, que é do tipo  $\nabla^2 u = b(x, y, u, t)$ .

### 6.1 Equação de Poisson na forma $\nabla^2 u = b(x, y)$

Seja considerada a equação de Poisson na forma:

$$\nabla^2 u = b(x, y) \tag{6.1}$$

onde  $b$  é uma função conhecida da posição, distribuída sobre o domínio. O objetivo é conseguir resolver o problema sem precisar discretizar o domínio, mantendo a característica do MEC de

discretizar apenas o contorno. Para isso, o MRD foi desenvolvido e é explicado neste capítulo com base em Partridge et al. (1992).

A solução da Eq.(6.1) pode ser expressa como a soma da solução da equação diferencial homogênea (que, neste caso é a equação de Laplace) e uma solução particular, que será chamada de  $\hat{u}$ :

$$\nabla^2 \hat{u} = b \quad (6.2)$$

O MRD propõe o uso de uma série de soluções particulares  $\hat{u}_j$  ao invés de uma única  $\hat{u}$ . O número de soluções particulares utilizada será igual ao número total de nós do problema. Por *número total de nós*, entenda-se o número de nós do contorno  $N$  mais o número de pontos internos  $L$  nos quais se deseja conhecer os resultados. Dessa forma, a função  $b$  tem o valor aproximado por:

$$b \simeq \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f_j \quad (6.3)$$

onde  $\alpha_j$  é o conjunto de coeficientes inicialmente desconhecidos e  $f_j$  são as funções de aproximação. As soluções particulares  $\hat{u}_j$  e as funções de aproximação  $f_j$  estão relacionadas por:

$$\nabla \hat{u}_j = f_j \quad (6.4)$$

A Eq.(6.3) deve ser válida tanto sobre o domínio como sobre cada um dos elementos. As funções de aproximação  $f_j$  dependem da geometria, assim como as funções de forma.

Substituindo a Eq.(6.4) na Eq.(6.3) tem-se:

$$b = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j (\nabla^2 \hat{u}_j) \quad (6.5)$$

Substituindo esta equação na equação de Poisson original (Eq. 6.1), chega-se a:

$$\nabla^2 u = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j (\nabla^2 \hat{u}_j) \quad (6.6)$$

Neste ponto, utilizam-se as técnicas utilizadas no capítulo 4 para o desenvolvimento do MEC para a equação de Laplace. Aplicando-se o método dos resíduos ponderados e usando a segunda identidade de Green, Eq.(6.6) origina:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) u^* d\Omega = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \int_{\Omega} (\nabla^2 \hat{u}_j) u^* d\Omega \quad (6.7)$$

Utilizando-se da mesma estratégia do capítulo 4 para transformar as integrais de domínio em integrais de contorno, chega-se a:

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} q^* u d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left( c_i \hat{u}_{ij} + \int_{\Gamma} q^* \hat{u}_j d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* \hat{q}_j d\Gamma \right) \quad (6.8)$$

Esta é a equação integral de contorno do MRD. Nela,  $i$  indica o ponto fonte. O termo  $\hat{q}_j$  é definido como  $\hat{q}_j = \partial \hat{u}_j / \partial n$ , em que  $n$  é o vetor unitário normal ao contorno.  $\hat{q}_j$  pode ser expandido como:

$$\hat{q}_j = \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \quad (6.9)$$

A Eq.(6.8) é a equação integral de contorno, que assim como mostrado no MEC padrão, deve ser discretizada em elementos de contorno, resultando em:

$$c_i u_i + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} q^* u d\Gamma - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u^* q d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left( c_i \hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} q^* \hat{u}_j d\Gamma - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u^* \hat{q}_j d\Gamma \right) \quad (6.10)$$

É importante notar que, uma vez definida a função de aproximação  $f$ , as funções  $\hat{u}$  e  $\hat{q}$  ficam sendo conhecidas. Desta forma, não é necessário utilizar as funções de forma para obter seu valor aproximado sobre o elemento, com base nos valores nodais, como é feito para  $u$  e  $q$ . No entanto, se tais aproximações forem feitas, as mesmas matrizes  $H$  e  $G$  definidas no capítulo 4 podem ser utilizadas nos dois lados da Eq.(6.10). Esta estratégia introduz um erro numérico por utilizar valores aproximados ao invés dos valores reais disponíveis. Entretanto, Partridge et al. (1992) dizem que este erro foi provado como sendo pequeno e é um preço justo a se pagar pelo aumento considerável que esta estratégia traz na eficiência do método.

Aplicando a nomenclatura das matrizes  $H$  e  $G$ , a equação pode ser escrita em termos dos valores nodais como:

$$c_i u_i + \sum_{k=1}^N H_{ik} u_k - \sum_{k=1}^N G_{ik} q_k = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left( c_i \hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^N H_{ik} \hat{u}_{kj} - \sum_{k=1}^N G_{ik} \hat{q}_{kj} \right) \quad (6.11)$$

Novamente, os elementos das matrizes  $H$  e  $G$  são os mesmos mostrados no capítulo 4 (equações 4.84 e 4.85) e sua integração é feita de forma analítica, conforma mostrado no capítulo 5.

O índice  $i$  é utilizado para os pontos-fonte e o índice  $k$  é usado para os pontos-campo. Escrevendo de forma matricial, tem-se:

$$[H]\{u\} - [G]\{q\} = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j ([H]\{\hat{u}_j\} - [G]\{\hat{q}_j\}) \quad (6.12)$$

A equação pode ainda ser escrita na forma:

$$[H]\{u\} - [G]\{q\} = ([H][\hat{U}] - [G][\hat{Q}])\{\alpha\} \quad (6.13)$$

A Eq.(6.13) é a base da aplicação do MRD em elementos de contorno, na qual cada vetor  $\hat{u}_j$  é uma coluna da matriz  $\hat{U}$  e cada vetor  $\hat{q}_j$  é uma coluna da matriz  $\hat{Q}$ .

### O vetor $\alpha$

A Eq.(6.3) mostra que  $b$  é assumido como sendo:

$$b = \sum_{j=1}^{N+L} f_j \alpha_j \quad (6.14)$$

Avaliando o valor de  $b$  a partir de cada um dos nós (nos  $N$  nós do contorno e nos  $L$  pontos internos), um conjunto de  $N + L$  equações, cada uma com  $N + L$  termos será obtido. Essas equações, expressas em forma matricial, tornam-se:

$$\{b\} = [F]\{\alpha\} \quad (6.15)$$

em que cada coluna da matriz  $F$  consiste em um vetor  $f_j$  contendo os valores da função  $f_j$  em cada um dos  $N + L$  pontos do problema. A matriz  $F$  pode ser invertida para obter o vetor  $\alpha$ :

$$\{\alpha\} = [F]^{-1}\{b\} \quad (6.16)$$

Deve-se lembrar que, como dito no início do capítulo, a função  $b$  é uma função conhecida da posição, então, todos os elementos do vetor  $b$  são conhecidos. Assim, o vetor  $\alpha$  é obtido.

Conhecido o vetor  $\alpha$ , o lado direito da Eq.(6.13) vira um vetor conhecido, agora nomeado como  $d$ . Então, a equação fica:

$$[H]\{u\} - [G]\{q\} = \{d\} \quad (6.17)$$

onde

$$\{d\} = ([H][\hat{U}] - [G][\hat{Q}])\{\alpha\} \quad (6.18)$$

Reorganizando-se a equação, tem-se:

$$[H]\{u\} = [G]\{q\} + \{d\} \quad (6.19)$$

Como pode ser visto, o vetor  $d$  é obtido simplesmente pela multiplicação de vetores e matrizes conhecidos. A seguir, aplicam-se as condições de contorno na Eq.(6.19) e reorganizam-se as equações de forma a separar as variáveis conhecidas das desconhecidas, assim como mostrado no capítulo 4 (pág.47). Com isso, chega-se à forma:

$$[A]\{x\} = \{y\} \quad (6.20)$$

ou

$$\{x\} = [A]^{-1}\{y\} \quad (6.21)$$

onde o vetor  $x$  contém todas as variáveis desconhecidas no contorno. Da resolução deste sistema linear, obtém-se os valores desconhecidos de  $u$  e  $q$  no contorno.

### 6.1.1 Solução em pontos internos

Depois que a solução é obtida para o contorno,  $u$  e  $q$  podem, então, ser calculados nos pontos internos ao domínio. Para isso, toma-se a constante  $c$  com valor igual a 1 e aplica-se a Eq.(6.11), que, então, fica:

$$u_i = - \sum_{k=1}^N H_{ij}u_k + \sum_{k=1}^N G_{ij}q_k + \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left( \hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^N H_{ik}\hat{u}_{kj} - \sum_{k=1}^N G_{ik}\hat{q}_{kj} \right) \quad (6.22)$$

e tem como única incógnita  $u_i$ . Derivando esta equação em relação às coordenadas do ponto-fonte, pode-se calcular as derivadas em relação a  $x$  e  $y$  no ponto considerado.

### 6.1.2 A função $f$

A solução particular  $\hat{u}$ , sua derivada normal  $\hat{q}$  e a função de aproximação  $f$  correspondente utilizadas no MRD não são limitadas pela formulação. A única restrição é que a matriz  $F$  resultante não pode ser singular. A forma usual de obtenção destas funções é propor uma função  $f$  e, então, calcular  $\hat{u}$  e  $\hat{q}$  utilizando as equações (6.4) e (6.9).

Segundo Partridge et al. (1992), as funções de  $r$  são adotadas pela maioria dos pesquisadores como a alternativa mais simples e mais exata. Neste trabalho, adotou-se  $f = 1 + r$ . Neste caso:

$$\hat{u} = r^2/4 + r^3/9 \quad (6.23)$$

$$\hat{q} = (r_x \partial x / \partial n + r_y \partial y / \partial n)(1/2 + r/3) \quad (6.24)$$



## 6.2 Equação de Poisson na forma $\nabla^2 u = b(x, y, u)$

$$\nabla^2 u = b(x, y, u) \quad (6.25)$$

onde  $b$  agora é uma função conhecida da posição, e da própria variável dependente  $u$ , distribuída sobre o domínio. Para fins de exemplificação, será tratada a equação:

$$\nabla^2 u + u = 0 \quad (6.26)$$

na qual a função  $b$  é  $-u$ . Então, substituindo esta nova definição de  $b$  na Eq.(6.16), tem-se:

$$\{\alpha\} = -[F]^{-1}\{u\} \quad (6.27)$$

É importante notar que o vetor  $\alpha$  agora não pode ser calculado explicitamente, pois é também uma função de  $u$ . Por isso, este vetor será expresso nas equações matriciais como  $[F]^{-1}\{b\}$ . Neste caso,  $\{b\} = \{u\}$  e a Eq.(6.13) se torna:

$$[H]\{u\} - [G]\{q\} = -([H][\hat{U}] - [G][\hat{Q}])[F]^{-1}\{u\} \quad (6.28)$$

Todos os termos do lado direito da equação são conhecidos, com exceção do vetor  $u$ . Assim, pode-se definir:

$$[S] = ([H][\hat{U}] - [G][\hat{Q}])[F]^{-1} \quad (6.29)$$

onde a matriz  $S$  é a multiplicação de matrizes conhecidas. Assim, chega-se a:

$$[H]\{u\} - [G]\{q\} = -[S]\{u\} \quad (6.30)$$

Esta equação pode ser reorganizada como:

$$([H] + [S])\{u\} = [G]\{q\} \quad (6.31)$$

A seguir, aplicam-se as condições de contorno na Eq.(6.31) e reorganizam-se as equações de forma a separar as variáveis conhecidas das desconhecidas, chegando-se à forma:

$$[A]\{x\} = \{y\} \quad (6.32)$$

Pode-se, então, fazer

$$\{x\} = [A]^{-1}\{y\} \quad (6.33)$$

onde o vetor  $x$  contém os valores desconhecidos de  $u$  e  $q$ . Da resolução deste sistema linear, obtém-se os valores desconhecidos de  $\Phi$  e  $q$ .

### 6.3 Equação da difusividade hidráulica

Agora, considere-se uma equação de Poisson cujo termo não-homogêneo inclua a variação da própria função  $u$  no tempo. Este é o caso da equação da difusividade hidráulica, que governa o escoamento de fluidos compressíveis em meios porosos:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6.34)$$

Neste caso, a constante  $1/\eta$  aparece na Eq.(6.13):

$$[H]\{u\} - [G]\{q\} = \frac{1}{\eta} ([H][\hat{U}] - [G][\hat{Q}])\{\alpha\} \quad (6.35)$$

Para a equação da difusividade, a aproximação mostrada pela Eq.(6.3) é dada por:

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \simeq \sum_{j=1}^{N+L} f_j(x, y) \alpha_j(t) \quad (6.36)$$

onde pode-se ver uma separação entre variáveis de geometria e de tempo:  $f_j$  são funções conhecidas da geometria e  $\alpha_j$  são funções *desconhecidas* do tempo. Desta forma, as matrizes  $\hat{U}$  e  $\hat{Q}$  continuam sendo conhecidas e o vetor  $\alpha$  fica desconhecido.

Assim como para as equações anteriores, tem-se que

$$\begin{aligned} \{b\} &= [F]\{\alpha\} \\ \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} &= [F]\{\alpha\} \end{aligned} \quad (6.37)$$

Explicitando o vetor  $\alpha$

$$\{\alpha\} = [F]^{-1} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} \quad (6.38)$$

Substituindo esta expressão do vetor  $\alpha$  na Eq.(6.35), tem-se:

$$[H]\{u\} - [G]\{q\} = \frac{1}{\eta}([H][\hat{U}] - [G][\hat{Q}])[F]^{-1}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} \quad (6.39)$$

Todos os termos do lado direito da equação são conhecidos, com exceção do vetor  $\partial u/\partial t$ . Assim, pode-se definir:

$$[S] = ([H][\hat{U}] - [G][\hat{Q}])[F]^{-1} \quad (6.40)$$

onde a matriz  $S$  é a multiplicação de matrizes conhecidas. Assim, chega-se a:

$$[H]\{u\} - \frac{1}{\eta}[S]\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = [G]\{q\} \quad (6.41)$$

Aplicam-se nesta equação as seguintes aproximações para as variações temporais de  $u$ ,  $q$ , e  $\partial u/\partial t$ :

$$u = (1 - \theta_u)u_m + \theta_u u_{m+1} \quad (6.42)$$

$$q = (1 - \theta_q)q_m + \theta_q q_{m+1} \quad (6.43)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t}(u_{m+1} - u_m) \quad (6.44)$$

onde  $\theta_u$  e  $\theta_q$  são pesos variando entre 0 e 1 para ponderação de  $u$  e  $q$  entre os passos de tempo  $m$  e  $m + 1$ . Substituindo estas aproximações na Eq.(6.41), obtém-se:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{\eta\Delta t}[S] + \theta_u[H]\right)\{u\}_{m+1} - \theta_q[G]\{q\}_{m+1} = \\ = \left[-\frac{1}{\eta\Delta t}[S] - (1 - \theta_u)[H]\right]\{u\}_m + (1 - \theta_q)[G]\{q\}_m \end{aligned} \quad (6.45)$$

Segundo Partridge et al. (1992), uma série de testes indicaram que, no geral, boa exatidão nos resultados são obtidos utilizando  $\theta_u = 0,5$  e  $\theta_q = 1$ . Dessa forma, a Eq.(6.45) fica:

$$\left(-\frac{2}{\eta\Delta t}[S] + [H]\right)\{u\}_{m+1} - 2[G]\{q\}_{m+1} = \left(-\frac{2}{\eta\Delta t}[S] - [H]\right)\{u\}_m \quad (6.46)$$

e pode, ainda, ser escrita na forma:

$$[H']\{u\}_{m+1} = [G']\{q\}_{m+1} + \{y'\} \quad (6.47)$$

onde

$$[H'] = -\frac{2}{\eta\Delta t}[S] + [H] \quad \text{conhecida} \quad (6.48)$$

$$[G'] = 2[G] \quad \text{conhecida} \quad (6.49)$$

$$\{y'\} = \left(-\frac{2}{\eta\Delta t}[S] - [H]\right) \{u\}_m \quad \text{conhecido} \quad (6.50)$$

Deve-se notar que o vetor  $u_m$  é conhecido por se tratar de valores já calculados no passo de tempo anterior ou de condições de contorno estabelecidas para o instante de tempo inicial. Com isso, pode-se escrever a Eq.(6.47) como:

$$[A]\{x\} = \{y\} \quad (6.51)$$

após aplicar as condições de contorno e separar as variáveis conhecidas das desconhecidas. O vetor  $x$  contém todas as variáveis desconhecidas e pode ser calculado por:

$$\{x\} = [A]^{-1}\{y\} \quad (6.52)$$

Com isso, são calculados todos os valores de  $u$  e  $q$  desconhecidos.

## Capítulo 7

# Formulação do Método dos Elementos de Contorno para sub-regiões

### 7.1 Fundamentação teórica

As formulações do MEC apresentadas no capítulo 4 são aplicáveis apenas a domínios homogêneos, por restrição das soluções fundamentais utilizadas. Em muitos casos, porém, o domínio sobre o qual o problema é considerado não é homogêneo como um todo, porém, é homogêneo por partes. Nestes casos, podem-se aplicar os procedimentos numéricos apresentados em cada uma destas partes, ou *sub-regiões*, como se elas estivessem separadas umas das outras (Brebbia e Dominguez, 1992).

A condição de homogeneidade por sub-regiões tem ocorrência frequente em problemas de engenharia. Um exemplo é a condução de calor em um sólido composto de dois materiais distintos, cada um tendo uma condutividade térmica diferente. Katsikadelis (2002) cita a aplicação da formulação de sub-regiões na modelagem de corpos constituídos de materiais compósitos, sendo cada componente do material compósito tratado como uma sub-região. O caso do escoamento bifásico em meio poroso, tratado neste trabalho, também é homogêneo por partes, visto que cada fluido tem condutividade hidráulica  $K$  diferente e homogênea em toda sua extensão (segundo o modelo adotado). Bruch (1991) diz ainda que a divisão do domínio em sub-regiões é um artifício muito útil se o domínio tiver uma geometria complicada. Segundo ele, nestes casos, é obtida melhor precisão nos resultados se o domínio for dividido em sub-regiões ao invés de ser tratado por inteiro, sem divisões.

Na interface, tanto o potencial quanto a velocidade são desconhecidos. Isso faz com que cada nó da interface (com exceção dos nós das extremidades) tenha 3 variáveis desconhecidas ( $\Phi$ ,  $q^a$  e  $q^d$ ) ao invés de apenas uma. São necessárias, então, mais duas equações para que o sistema possa ser resolvido. São utilizadas, então, as equações que representam a continuidade ao longo da interface. Brebbia et al. (1984) mostra que o sistema de equações para o domínio completo é obtido pela junção do conjunto independente de equações para cada sub-região com as equações de compatibilidade e equilíbrio para cada nó da interface.

A Fig. 7.1 mostra o aspecto geral de um domínio composto por duas sub-regiões,  $R_1$  e  $R_2$ , com uma interface entre elas.

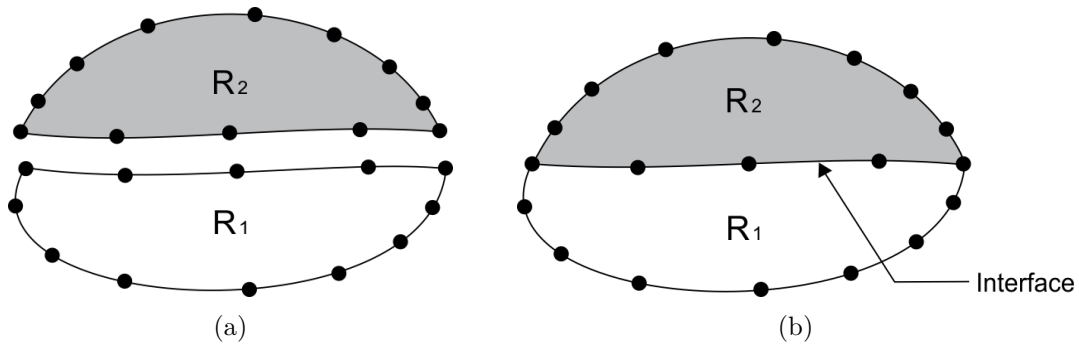


Figura 7.1: Domínio composto por duas sub-regiões

O potencial é contínuo dentro de cada sub-região, mas apresenta descontinuidade na interface (veja a Eq. 3.8:  $\Phi = \frac{p}{\rho g} + z$ ). A pressão, ao contrário, é contínua em todo o domínio. Então, da Fig. 7.1b, pode-se perceber que em cada ponto da interface, a pressão é única, não importando qual sub-região se toma como referência. O fluxo normal à interface, por sua vez, tem a mesma magnitude para as duas sub-regiões, porém, sentidos opostos. Isso leva às seguintes condições de acoplamento das regiões, na interface:

$$p_{R_1} = p_{R_2} \quad (7.1)$$

$$q_{R_1} = -q_{R_2} \quad (7.2)$$

## 7.2 Equacionamento

A seguir é apresentado um exemplo de aplicação da formulação do MEC para um problema de escoamento potencial em duas sub-regiões. Foi utilizada uma discretização com poucos elementos, de forma a minimizar o número de componentes das matrizes  $H$  e  $G$  para simplificar a demonstração. O equacionamento para escoamento compressível é análogo ao apresentado aqui e será suprimido para evitar repetição.

A Fig. 7.2 ilustra a geometria do problema e mostra as condições de contorno envolvidas.

A seguir, apresenta-se o desenvolvimento a partir da equação integral de contorno em sua forma matricial (Eq.4.86) para as sub-regiões.

Para a sub-região 1, tem-se:

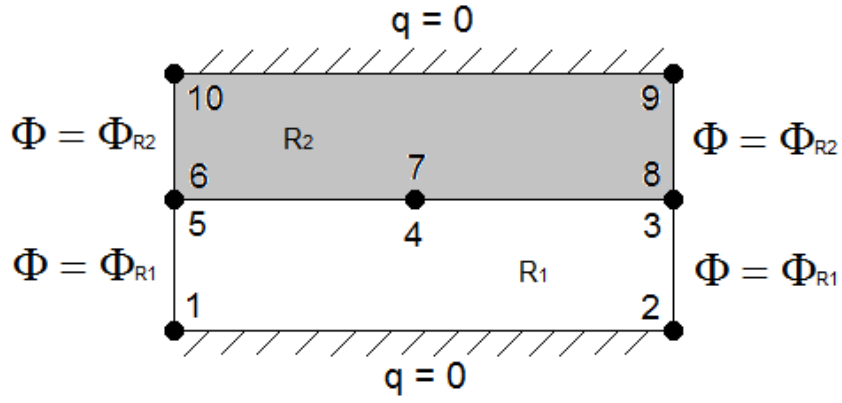


Figura 7.2: Problema de duas sub-regiões

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} & H_{35} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} & H_{45} \\ H_{51} & H_{52} & H_{53} & H_{54} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Phi}_1 \\ \bar{\Phi}_2 \\ \bar{\Phi}_3 \\ \bar{\Phi}_4 \\ \bar{\Phi}_5 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} G_{11}^d & G_{12}^a & G_{12}^d & G_{13}^a & G_{13}^d & G_{14}^a & G_{14}^d & G_{15}^a & G_{15}^d & G_{11}^a \\ G_{21}^d & G_{22}^a & G_{22}^d & G_{23}^a & G_{23}^d & G_{24}^a & G_{24}^d & G_{25}^a & G_{25}^d & G_{21}^a \\ G_{31}^d & G_{32}^a & G_{32}^d & G_{33}^a & G_{33}^d & G_{34}^a & G_{34}^d & G_{35}^a & G_{35}^d & G_{31}^a \\ G_{41}^d & G_{42}^a & G_{42}^d & G_{43}^a & G_{43}^d & G_{44}^a & G_{44}^d & G_{45}^a & G_{45}^d & G_{41}^a \\ G_{51}^d & G_{52}^a & G_{52}^d & G_{53}^a & G_{53}^d & G_{54}^a & G_{54}^d & G_{55}^a & G_{55}^d & G_{51}^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1^d \\ \bar{q}_2^a \\ q_2^d \\ q_3^a \\ q_3^d \\ q_4^a \\ q_4^d \\ q_5^a \\ q_5^d \\ q_1^a \end{Bmatrix} \quad (7.3)$$

Para a sub-região 2, tem-se

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} H_{66} & H_{67} & H_{68} & H_{69} & H_{610} \\ H_{76} & H_{77} & H_{78} & H_{79} & H_{710} \\ H_{86} & H_{87} & H_{88} & H_{89} & H_{810} \\ H_{96} & H_{97} & H_{98} & H_{99} & H_{910} \\ H_{106} & H_{107} & H_{108} & H_{109} & H_{1010} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Phi}_6 \\ \bar{\Phi}_7 \\ \bar{\Phi}_8 \\ \bar{\Phi}_9 \\ \bar{\Phi}_{10} \end{Bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} G_{66}^d & G_{67}^a & G_{67}^d & G_{68}^a & G_{68}^d & G_{69}^a & G_{69}^d & G_{610}^a & G_{610}^d & G_{66}^a \\ G_{76}^d & G_{77}^a & G_{77}^d & G_{78}^a & G_{78}^d & G_{79}^a & G_{79}^d & G_{710}^a & G_{710}^d & G_{76}^a \\ G_{86}^d & G_{87}^a & G_{87}^d & G_{88}^a & G_{88}^d & G_{89}^a & G_{89}^d & G_{810}^a & G_{810}^d & G_{86}^a \\ G_{96}^d & G_{97}^a & G_{97}^d & G_{98}^a & G_{98}^d & G_{99}^a & G_{99}^d & G_{910}^a & G_{910}^d & G_{96}^a \\ G_{106}^d & G_{107}^a & G_{107}^d & G_{108}^a & G_{108}^d & G_{109}^a & G_{109}^d & G_{1010}^a & G_{1010}^d & G_{106}^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_6^d \\ q_7^a \\ q_7^d \\ q_8^a \\ q_8^d \\ q_9^a \\ q_9^d \\ \bar{q}_9^d \\ \bar{q}_{10}^a \\ q_{10}^d \\ q_6^a \end{Bmatrix} \quad (7.4)
\end{aligned}$$

Escrevendo todas as equações em um único sistema matricial, obtém-se a Eq.(7.5), mostrada na próxima página (*pág. 74*). O sistema de equações resultante possui 10 equações e 18 incógnitas (2 potenciais e 16 velocidades). São necessárias mais 8 equações para que o sistema possa ser resolvido.

Das oito equações adicionais necessárias, três serão equações de continuidade de pressão e quatro serão equações de equilíbrio de velocidades dadas pelas Eqs.(7.1) e (7.2), respectivamente. As quatro equações de equilíbrio de velocidades podem ser prontamente adicionadas no sistema matricial fazendo:

$$q_3^d = -q_8^a \quad \text{ou} \quad q_3^d + q_8^a = 0 \quad (7.6)$$

$$q_4^a = -q_7^d \quad \text{ou} \quad q_4^a + q_7^d = 0 \quad (7.7)$$

$$q_4^d = -q_7^a \quad \text{ou} \quad q_4^d + q_7^a = 0 \quad (7.8)$$

$$q_5^a = -q_6^d \quad \text{ou} \quad q_5^a + q_6^d = 0 \quad (7.9)$$

As três equações de continuidade de pressão, por sua vez, requerem uma pequena manipulação para sua inclusão no sistema. Uma vez que a equação integral é escrita em termos do potencial  $\Phi$ , a equação de continuidade de pressão (Eq.7.1) também deve ser escrita em termos de  $\Phi$ . Explicitando a pressão na Eq.(3.8), tem-se:



$$\begin{array}{c}
\left[ \begin{array}{cccccccccccc}
H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} & H_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} & H_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
H_{51} & H_{52} & H_{53} & H_{54} & H_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{66} & H_{67} & H_{68} & H_{69} & H_{610} & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{76} & H_{77} & H_{78} & H_{79} & H_{710} & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{86} & H_{87} & H_{88} & H_{89} & H_{810} & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{96} & H_{97} & H_{98} & H_{99} & H_{910} & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{106} & H_{107} & H_{108} & H_{109} & H_{1010} & & & 
\end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccccccccccc}
-\Phi_1 \\
-\Phi_2 \\
-\Phi_3 \\
\Phi_4 \\
-\Phi_5 \\
-\Phi_6 \\
\Phi_7 \\
-\Phi_8 \\
-\Phi_9 \\
-\Phi_{10}
\end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccccccccccc}
G_{11}^d & G_{12}^a & G_{12}^d & G_{13}^a & G_{13}^d & G_{14}^a & G_{14}^d & G_{15}^a & G_{15}^d & G_{16}^a & G_{16}^d & G_{66}^a & G_{66}^d \\
G_{21}^d & G_{22}^a & G_{22}^d & G_{23}^a & G_{23}^d & G_{24}^a & G_{24}^d & G_{25}^a & G_{25}^d & G_{26}^a & G_{26}^d & G_{76}^a & G_{76}^d \\
G_{31}^d & G_{32}^a & G_{32}^d & G_{33}^a & G_{33}^d & G_{34}^a & G_{34}^d & G_{35}^a & G_{35}^d & G_{36}^a & G_{36}^d & G_{77}^a & G_{77}^d \\
G_{41}^d & G_{42}^a & G_{42}^d & G_{43}^a & G_{43}^d & G_{44}^a & G_{44}^d & G_{45}^a & G_{45}^d & G_{46}^a & G_{46}^d & G_{86}^a & G_{86}^d \\
G_{51}^d & G_{52}^a & G_{52}^d & G_{53}^a & G_{53}^d & G_{54}^a & G_{54}^d & G_{55}^a & G_{55}^d & G_{56}^a & G_{56}^d & G_{96}^a & G_{96}^d \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{610}^d & G_{610}^a \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{710}^d & G_{710}^a \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{810}^d & G_{810}^a \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{910}^d & G_{910}^a \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{1010}^d & G_{1010}^a
\end{array} \right]
\end{array} \tag{7.5}$$

$$p = (\Phi - z)\rho g \quad (7.10)$$

Substituindo a Eq.(7.10) na Eq.(7.1), chega-se a:

$$(\Phi_{R_1} - z_{R_1})\rho_{R_1} g = (\Phi_{R_2} - z_{R_2})\rho_{R_2} g \quad (7.11)$$

Dividindo ambos os lados por  $\rho_{R_2} g$ :

$$(\Phi_{R_1} - z_{R_1})\frac{\rho_{R_1}}{\rho_{R_2}} = \Phi_{R_2} - z_{R_2} \quad (7.12)$$

Para um ponto da interface,  $z_{R_1} = z_{R_2} = z$ . Com isso, tem-se:

$$\begin{aligned} (\Phi_{R_1} - z)\frac{\rho_{R_1}}{\rho_{R_2}} &= \Phi_{R_2} - z \\ \Phi_{R_2} - \alpha\Phi_{R_1} &= (1 - \alpha)z \end{aligned} \quad (7.13)$$

onde

$$\alpha = \frac{\rho_{R_1}}{\rho_{R_2}} \quad (7.14)$$

A Eq.(7.13) é a equação de continuidade de pressão escrita em termos do potencial  $\Phi$ . De fato, ela se torna a equação de compatibilidade de potenciais. Note que para o caso do cone de água, o parâmetro  $\alpha$  é definido como  $\rho_{\text{água}}/\rho_{\text{óleo}}$  e no caso do cone de gás, como  $\rho_{\text{óleo}}/\rho_{\text{gás}}$ .

As três equações de compatibilidade de potenciais podem ser, finalmente, adicionadas no sistema matricial fazendo:

$$\Phi_8 - \alpha\Phi_3 = (1 - \alpha)z_3 \quad (7.15)$$

$$\Phi_7 - \alpha\Phi_4 = (1 - \alpha)z_4 \quad (7.16)$$

$$\Phi_6 - \alpha\Phi_5 = (1 - \alpha)z_5 \quad (7.17)$$

Com quatro equações de equilíbrio de velocidades e três de compatibilidade de potenciais, o sistema conta agora com 17 equações e 18 incógnitas. A última equação necessária é obtida a partir da hipótese de que, na interface, a velocidade antes de um nó é igual à velocidade depois desse mesmo nó. Para que essa hipótese tenha validade, a discretização da interface deve ser suficientemente refinada para que os vetores normais entre elementos adjacentes sejam o mais coincidentes possível. Com isso, pode-se escrever:

$$q_4^a = q_4^d \quad \text{ou} \quad q_4^a - q_4^d = 0 \quad (7.18)$$

Adicionando as equações (7.6) a (7.9), (7.15) a (7.17) e (7.18) ao sistema de equações (7.5), obtém-se a Eq.(7.19), mostrada na próxima página (*pág. 77*).

Neste ponto, tem-se o sistema matricial na forma

$$[ H ]_{18 \times 10} \{ \Phi \}_{10 \times 1} = [ G ]_{18 \times 20} \{ q \}_{20 \times 1} + \{ b_3 \}_{18 \times 1} \quad (7.20)$$

Organizando as equações de forma a separar as variáveis conhecidas das desconhecidas, chega-se ao sistema na forma em que pode ser resolvido, dado pela Eq.(7.21), na página 78.

Representando o sistema de forma simplificada, tem-se:

$$[ A ]_{18 \times 18} \{ x \}_{18 \times 1} = [ B_1 ]_{18 \times 12} \{ b_2 \}_{12 \times 1} + \{ b_3 \}_{18 \times 1} \quad (7.22)$$

Todos os elementos das matrizes  $[A]$  e  $[B_1]$  são conhecidos e dependem apenas da geometria do problema. Todos os elementos do vetor  $\{b_2\}$  são conhecidos, vindos da aplicação das condições de contorno. Todos os elementos do vetor  $\{b_3\}$  são conhecidos e dependem da geometria do problema e da razão entre as massas específicas dos fluidos. O vetor  $\{x\}$  contém todas as variáveis desconhecidas do problema (potenciais e velocidades no contorno).

Fazendo  $\{b\} = [B_1]\{b_2\} + \{b_3\}$ , é possível escrever o sistema na forma:

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (7.23)$$

Agora, o sistema pode ser resolvido fazendo:

$$\{x\} = [A]^{-1}\{b\} \quad (7.24)$$

### Caso com sumidouros pontuais

Para o caso em que a equação governante não é a de Laplace, mas sim a de Poisson (Eq. 3.17), a Eq.(7.20) se torna:

$$[ H ]_{18 \times 10} \{ \Phi \}_{10 \times 1} = [ G ]_{18 \times 20} \{ q \}_{20 \times 1} + \{ b_3 \}_{18 \times 1} - \{ s_o \} - \{ s_w \} \quad (7.25)$$

onde  $s_o$  e  $s_w$  são os vetores que guardam a contribuição de cada sumidouro pontual aos pontos fontes de sua própria sub-região. Cada elemento destes vetores corresponde ao efeito dos sumidouros em um ponto fonte  $i$ , dado por:





$$s_i = \sum_{j=1}^{n_{sc}} Q_j \Phi^* \quad (7.26)$$

sendo que  $n_{sc}$  é o número de sumidouros pontuais da sub-região,  $Q_j$  é a intensidade do sumidouro  $j$  e  $\Phi^*$  é a solução fundamental do potencial, expressa pela Eq.(4.14).

Reorganizando as matrizes para separar as variáveis conhecidas das desconhecidas e fazendo  $\{s\} = \{s_o\} + \{s_w\}$ , tem-se:

$$[A]\{x\} = \{b\} - \{s\} \quad (7.27)$$

ou

$$\{x\} = [A]^{-1}(\{b\} - \{s\}) \quad (7.28)$$

Da resolução do sistema linear dado pela Eq.(7.24) ou pela Eq. (7.28), obtém-se os valores de potencial e velocidade no contorno das duas sub-regiões (incluindo a interface).

Para a obtenção dos valores de potencial e velocidade em pontos internos, procede-se da mesma maneira que a apresentada no capítulo 4, tratando cada sub-região como um domínio completamente independente do outro.

## Capítulo 8

# Modelagem do poço

Como já visto no capítulo 2, os poços de petróleo introduzem uma diferença de potencial no reservatório. Essa diferença de potencial causa o escoamento dos fluidos para o interior do poço. Para representar o poço nos simuladores, dois fatores devem ser levados em consideração: a representação do seu efeito no reservatório e a representação da sua geometria.

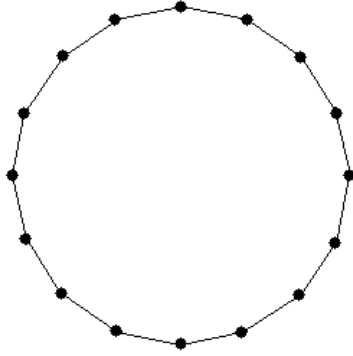
### 8.1 Tipos de representação

Com relação ao efeito do poço no reservatório, existem duas possíveis abordagens. A primeira delas é o estabelecimento do potencial na parede do poço. A segunda é o estabelecimento da vazão que entra no poço. Ambas estão relacionadas pela relação de causa e efeito que mantêm.

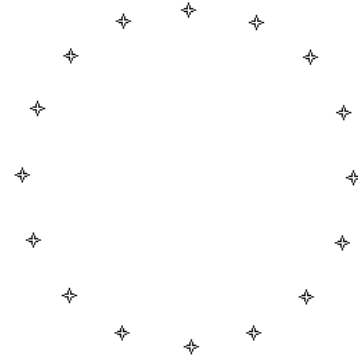
Com relação à representação geométrica, existem, também, duas possíveis abordagens: A primeira possibilidade é modelar o poço como um “furo” dentro do domínio, utilizando elementos de contorno para representar o seu perímetro (Fig. 8.1a). Assim, elementos de contorno representam fisicamente a parede do poço. Com essa modelagem geométrica, é possível adotar qualquer uma das abordagens para modelagem do efeito do poço: potencial ou vazão prescritos. Neste caso, o potencial ou a vazão são estabelecidos como condições de contorno dos elementos que representam a parede do poço.

A segunda abordagem para a modelagem geométrica é a de se modelar o poço como um conjunto de sumidouros concentrados (Fig. 8.1b). Estes são dispostos sobre o perímetro que seria formado pela parede do poço. Como sumidouros concentrados, por definição, são entidades relacionadas ao fluxo, esta modelagem geométrica funciona apenas com o estabelecimento da vazão como representação do efeito do poço.

A representação geométrica do poço por meio de elementos de contorno apresenta uma dificuldade de implementação. Quando a simulação envolve extração de fluidos acima da vazão crítica, a interface ou superfície livre necessariamente chega a tocar o poço. Neste momento, os elementos de contorno que formam a “parede” do poço devem se integrar à interface. A Fig. 8.2a mostra esta situação. Nesta figura, as porções da interface em cor vermelha representam onde



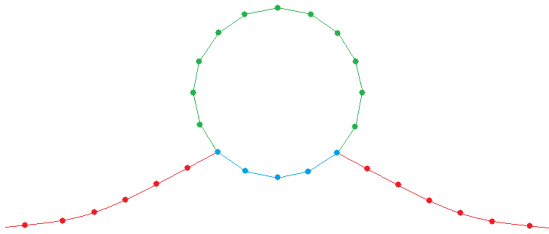
(a) Poço representado por elementos de contorno



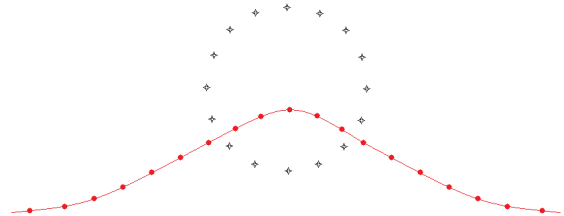
(b) Poço representado por sumidouros concentrados

Figura 8.1: Abordagens para a modelagem geométrica do poço

os elementos das duas sub-regiões são coincidentes, como foi desde o início. Os elementos em azul representam a parte da interface coincidente com o poço e pertencente à sub-região inferior. Os elementos em verde representam a parte da interface coincidente com o poço e pertencente à sub-região superior. A cada instante de tempo subsequente, a movimentação da interface exige um re-arranjo dos elementos, haja visto que a altura em que a interface toca no poço varia ao longo do tempo. Toda essa readequação da malha é muito trabalhosa e impacta no desempenho do simulador. Além disso, nas porções em verde e azul, as equações de continuidade ao longo da interface (Eqs. 7.1, 7.2 e 7.13) não são válidas, devendo ser substituídas pelas condições de contorno da parede do poço.



(a) Poço representado por elementos de contorno



(b) Poço representado por sumidouros concentrados

Figura 8.2: Interação interface-poço

Tendo estes problemas em vista, a representação da geometria do poço por um conjunto de sumidouros pontuais se torna a escolha natural. Como os sumidouros pontuais não envolvem a utilização de elementos de contorno, a movimentação da interface sobre eles não demanda nenhuma alteração na malha (Fig. 8.2b).

## 8.2 Características da representação adotada

A representação geométrica do poço é feita, então, por um conjunto de sumidouros pontuais, distribuídos de modo a formar o perímetro do poço. A representação do efeito do poço é feita



pelo estabelecimento da vazão total de fluidos que nele entra. Esta vazão é, então, um parâmetro de entrada da simulação e é distribuída entre todos os sumidouros. Entretanto, a distribuição não se dá de forma igualitária, e o motivo é explicado a seguir.

### 8.2.1 Condição de equipotencial

A seção transversal de um poço real é uma superfície equipotencial. Baseando-se nesta condição, a distribuição da vazão entre os sumidouros utiliza o critério de balanceamento da intensidade de cada um deles, de modo a tornar equipotencial o interior do poço simulado. Para garantir esta condição, foi desenvolvido um algoritmo que ajusta as intensidades de cada sumidouro pontual baseado na distribuição de potencial no interior do perímetro formado por eles. Então, a cada instante de tempo simulado, o simulador garante que o interior do poço será uma região equipotencial.

A Fig. 8.3 mostra a comparação entre o poço sem e com o balanceamento dos sumidouros pontuais.

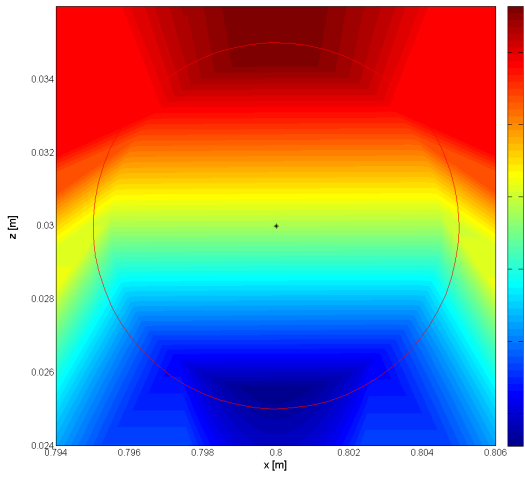
Pode-se ver na figura 8.3c que o interior do poço com balanceamento de intensidade dos sumidouros fica com uma diferença de potencial máxima de  $1 \times 10^{-4} m$ , ou seja, o equivalente a uma coluna de fluido com um décimo de milímetro de altura. Sem o balanceamento, a diferença de potencial no poço, que tem  $10 mm$  de diâmetro, chega a  $1 mm$ . O gradiente de potencial neste caso é semelhante ao que se obtém quando a representação do poço é feita por um único sumidouro pontual (Fig. 8.3a).

Apesar de parecer pequeno, o gradiente de potencial no interior do poço não balanceado gera resultado diferente para a movimentação da interface, se comparado com o poço balanceado, conforme pode ser visto na Fig. 8.4.

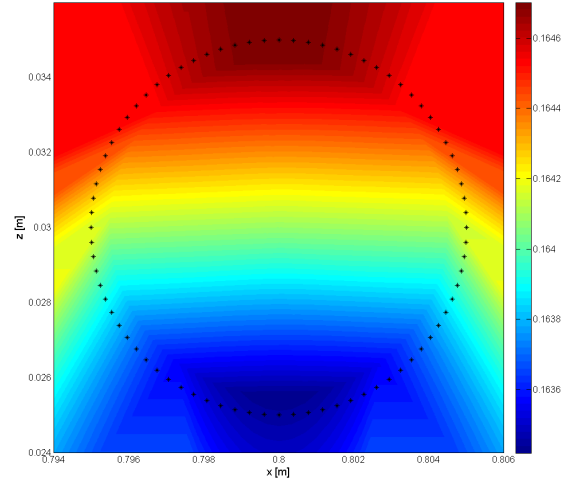
### 8.2.2 Produção supercrítica

Com essa modelagem, consegue-se facilmente simular a extração supercrítica dos fluidos. Considere, por exemplo, um reservatório contendo água e óleo. Inicialmente, todos os sumidouros que, em conjunto, representam o poço real, estão localizados dentro da zona de óleo (sub-região superior). À medida que a simulação avança, o cone sobe e toca no primeiro sumidouro concentrado, na parte inferior do poço. Neste momento, tudo que é necessário fazer é transferir a contribuição deste sumidouro concentrado para a zona de água. Isto demanda apenas deixar de contabilizar a contribuição deste sumidouro no vetor  $s_o$ , da zona de óleo, e passar a contabilizá-la no vetor  $s_w$ , da zona de água (Eq. 7.25). No caso dos simuladores monofásicos, a tarefa se restringe em não contabilizar a contribuição daquele sumidouro no vetor  $s$  da Eq.(4.96). Cada vez que a interface avança sobre um dos sumidouros pontuais, esta tarefa é repetida. O processo inverso é feito quando a interface retrocede.

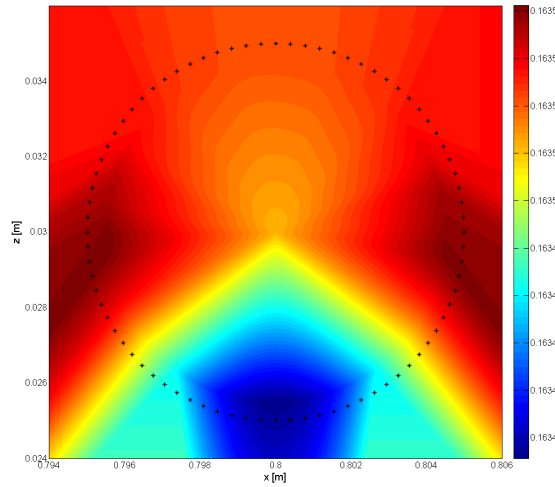
Este processo é extremamente simples e praticamente não consome recursos computacionais. Além disso, esta representação permite facilmente quantificar o volume produzido de cada um dos



(a) Representação por um sumidouro pontual



(b) Interior do poço sem balanceamento



(c) Interior do poço com balanceamento

Figura 8.3: Balanceamento da intensidade dos sumidouros pontuais

fluidos ao longo do tempo durante uma extração supercrítica. Levando-se em consideração que cada sumidouro pontual só produz um dos fluidos de cada vez, pode-se computar a produção de um determinado fluido por um determinado sumidouro multiplicando sua intensidade, ou vazão individual ( $Q_i$  [ $m^2/s$ ]), pelo tamanho do passo de tempo ( $\Delta t$  [s]). Assim, o volume total de água produzida ( $V_w$  [ $m^2$ ]), por exemplo, é calculado por:

$$V_w = \sum_{m=1}^{N_t} \left( \sum_{i=1}^{N_w} Q_i * \Delta t \right)_m \quad (8.1)$$

onde  $N_w$  é o número de sumidouros pontuais localizados dentro da zona de água e  $N_t$  indica o número total de passos de tempo simulados.

Uma segunda maneira de mensurar a produção dos fluidos é computar a sua taxa de produção. Isso é feito calculando o fluxo que entra no reservatório pelos limites laterais de cada sub-região. Para isso, multiplica-se a velocidade média normal ( $\underline{q}_j$  [ $m/s$ ]) a cada elemento que compõe os

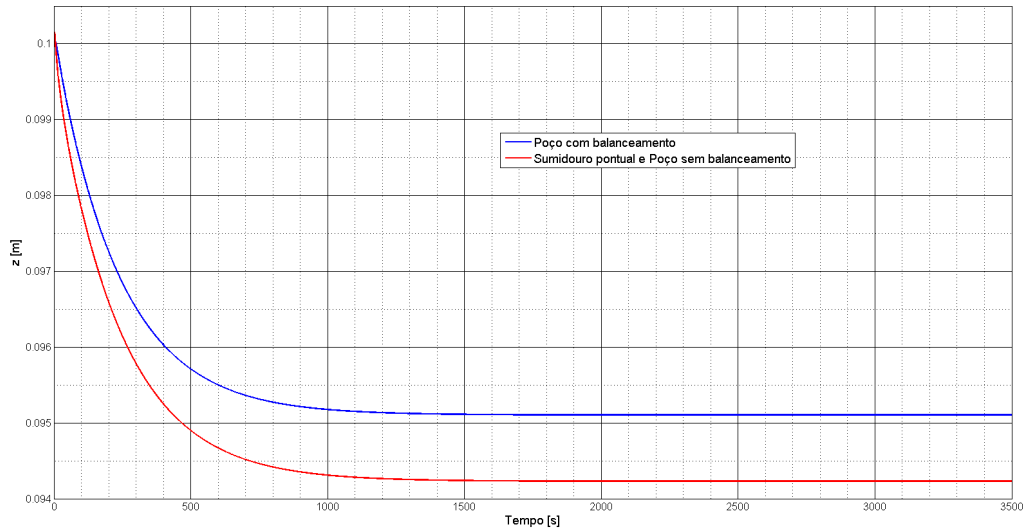


Figura 8.4: Posição do ponto central da interface ao longo do tempo

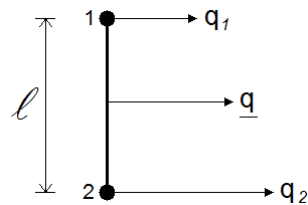


Figura 8.5: Velocidade média normal ao elemento

limites laterais pelo comprimento ( $l_j$  [m]) do elemento (Fig. 8.5). Assim, a taxa de produção de água ( $Q_w$  [ $m^2/s$ ]), por exemplo, é calculada por:

$$Q_w = \sum_{j=1}^{N_e} \underline{q}_j l_j + \sum_{j=1}^{N_d} \underline{q}_j l_j \quad (8.2)$$

onde  $N_e$  é o número de elementos no limite lateral esquerdo da sub-região e  $N_d$  é o número de elementos no limite lateral direito.

## Capítulo 9

# Implementação dos simuladores

Com base nos modelos definidos no capítulo 3, três simuladores foram desenvolvidos utilizando a linguagem Matlab. São eles:

- **Simulador de escoamento monofásico potencial.** Utiliza a formulação do MEC para escoamentos potenciais apresentada no capítulo 4;
- **Simulador de escoamento monofásico compressível.** Utiliza a formulação do MEC para escoamentos compressíveis apresentada no capítulo 6;
- **Simulador de escoamento bifásico potencial.** Utiliza a formulação do MEC para escoamentos potenciais apresentada no capítulo 4 e a formulação para sub-regiões apresentada no capítulo 7.

Em todos eles, o poço produtor é modelado por um conjunto de sumidouros concentrados, conforme mostrado no capítulo 8.

Neste capítulo, são apresentadas especificidades sobre a implementação dos simuladores como os parâmetros de entrada, a determinação das condições de contorno e o cálculo da movimentação da interface.

### 9.1 Parâmetros de entrada

Além da malha do reservatório, são requeridos pelos programas alguns parâmetros, listados a seguir.

**Meio poroso.** Os parâmetros de entrada para o meio poroso são:

- Permeabilidade absoluta  $k [m^2]$ ;
- Porosidade  $\Theta [-]$ ;
- Compressibilidade total do sistema  $c_t [Pa^{-1}]$  (apenas para o simulador monofásico compressível).

**Fluidos.** Os parâmetros de entrada para o(s) fluido(s) são:

- Massa específica  $\rho$  [ $kg/m^3$ ];
- Viscosidade dinâmica  $\mu$  [ $Pa.s$ ].

**Simulação.** Os parâmetros de entrada para a simulação são:

- Tamanho  $\Delta t$  [ $s$ ] e quantidade dos passos de tempo;
- Localização [ $m$ ], raio [ $m$ ] e intensidade  $Q$  [ $m^2/s$ ] do poço.

### 9.1.1 Parâmetros calculados

Utilizando a permeabilidade absoluta, a massa específica e a viscosidade dinâmica, são calculadas as condutividades hidráulicas  $K$  [ $m/s$ ] do meio poroso, por meio da equação 3.2.

A partir da malha inserida, são calculadas as alturas das zonas de fluido. Com esta informação, é possível calcular o potencial  $\Phi$  [ $m$ ] de cada fluido, em repouso, que será utilizado como condição de contorno.

Utilizando a permeabilidade absoluta, a porosidade, a viscosidade dinâmica e a compressibilidade total do sistema, é calculada a constante de difusividade hidráulica  $\eta$  [ $m^2/s$ ].

## 9.2 Condições de contorno

A determinação das condições de contorno é diferente para cada simulador e será mostrada separadamente. Para fins de simplificação dos exemplos, serão utilizados reservatórios com geometria simplificada (retangular) em todos os casos.

### 9.2.1 Escoamento monofásico potencial

A equação governante do escoamento potencial é a de Laplace (Eq. 3.14), escrita em termos do potencial  $\Phi$ . Logo, as condições de contorno aplicáveis a cada um dos nós são de *potencial conhecido* ou de *velocidade conhecida*. Para fins de exemplificação, considere o reservatório com a geometria simplificada mostrada na Fig. 9.1, contendo óleo.

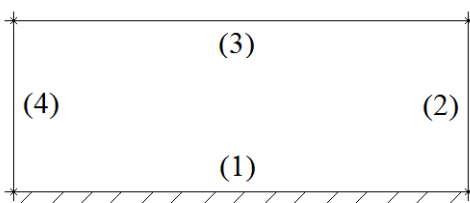


Figura 9.1: Exemplo: reservatório retangular contendo apenas um fluido

Da figura, nota-se que a altura da zona de óleo não perturbada pelo escoamento,  $H_o$ , é igual à altura de toda a porção simulada do reservatório.

### a) Potencial

O potencial é conhecido nas duas laterais (2) e (4) e na superfície livre (3). Seu valor é constante, calculado pela Eq.(3.8):

$$\Phi = \frac{p}{\rho g} + z$$

onde  $p$  é a pressão total a que uma partícula fluida localizada na posição do nó considerado está submetida, ou seja:

$$p = p_o + p_t \quad (9.1)$$

sendo que  $p_o$  é a pressão referente ao peso da coluna de óleo que está acima do nó e  $p_t$  é a pressão no topo desta coluna de óleo. Neste caso,  $p_t$  é a pressão que o gás faz sobre a superfície livre. Substituindo a expressão de  $p$  na equação do potencial, tem-se:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{p_o + p_t}{\rho g} + z \\ &= \frac{\rho g(H_o - z)}{\rho g} + \frac{p_t}{\rho g} + z \\ &= H_o + \frac{p_t}{\rho g} \end{aligned} \quad (9.2)$$

Na interface entre o óleo e o gás, ou seja, na superfície livre (3), a pressão é apenas a que o gás exerce sobre o óleo ( $p_t$ ). Sem perda de generalidade, a pressão na superfície livre pode ser assumida como zero. Com isso, todo o domínio tem potencial constante de valor igual à sua altura ( $H_o$ ). Assim, todos os nós dos limites laterais (2) e (4) e da superfície livre (3) têm potencial conhecido como:

$$\Phi_{(2)} = \Phi_{(3)} = \Phi_{(4)} = H_o \quad (9.3)$$

onde  $H_o$  é a altura da zona de óleo medida pela coordenada  $z$  da superfície livre não perturbada pelo escoamento.

## b) Velocidade

**Base.** O limite inferior (1) é a base impermeável do reservatório. Logo, não há fluxo de óleo na direção normal a ele. Isso leva à condição de contorno:

$$\mathbf{q}_{(1)} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{(1)} = 0 \quad (9.4)$$

Então, no primeiro nó da base, tem-se a condição de contorno  $q^d = 0$ . No último, tem-se a condição de contorno  $q^a = 0$ . Em todos os nós intermediários, tem-se  $q^a = q^d = 0$ . Note que as velocidades antes do primeiro e depois do último nós da base são desconhecidas.

Os nós da base têm então, cada um, apenas uma variável desconhecida. No caso do primeiro, a variável desconhecida é  $q^a$ . No caso do último,  $q^d$ . No caso dos nós intermediários, a variável desconhecida é o potencial  $\Phi$ .

**Limites laterais.** Os elementos de contorno que compõem os limites laterais serão sempre colineares entre si. Pela continuidade da velocidade ao longo desses segmentos de reta, tem-se que a velocidade imediatamente antes de um nó é igual à velocidade imediatamente depois. Logo, para qualquer nó intermediário dos limites laterais tem-se  $q^a = q^d = q$ . Isso não é válido para o primeiro e último nós desses segmentos, porque os elementos que os compartilham não são colineares.

Dessa forma, os nós dos limites laterais ficam com apenas uma variável desconhecida. No caso do primeiro nó do limite direito (2), a variável desconhecida é  $q^d$ . No caso do último nó do limite esquerdo (4),  $q^a$ . No caso dos nós intermediários, a variável desconhecida é a velocidade “comum”  $q$ . Os nós compartilhados com as extremidades da superfície livre serão tratados posteriormente.

**Superfície livre.** Na superfície livre, adota-se a mesma abordagem dos limites laterais. Faz-se, nos nós intermediários,  $q^a = q^d$ . É importante notar que, ao longo do tempo, a interface se move e perde a condição de colinearidade entre os seus elementos. Esta é uma fonte de erro numérico da técnica utilizada. Então, é importante que na discretização da superfície livre seja utilizada uma grande quantidade de elementos de contorno. Assim, pode-se minimizar o erro introduzido pela adoção da condição de colinearidade entre dois elementos consecutivos da superfície livre.

O primeiro e o último nós da superfície livre necessitem de tratamento especial. Como os elementos que os compartilham fazem um ângulo expressivo, não se pode utilizar a aproximação de colinearidade. Logo, uma equação adicional é necessária para cada nó.

O modelo adotado diz que na área externa à porção simulada do reservatório a posição da interface não é perturbada pela ação do poço. Logo, imediatamente ao lado dos limites laterais, as linhas de corrente do escoamento são horizontais. Isso nos permite fazer a aproximação de que, no primeiro nó da superfície livre, não existe velocidade projetada na direção normal (à superfície livre), ou seja,  $q^d = 0$ . Este elemento deve ser, então, pequeno o suficiente para minimizar o erro numérico causado por esta aproximação. A mesma estratégia é adotada para o último nó da superfície livre. Nele,  $q^a = 0$ .

Assim, os nós da superfície livre ficam com apenas uma variável desconhecida. No nó da extremidade direita, a variável desconhecida é  $q^a$ . No nó da extremidade esquerda,  $q^d$ . Os nós intermediários têm desconhecida a velocidade “comum”  $q$ .

### 9.2.2 Escoamento monofásico compressível

A determinação das condições de contorno para o escoamento monofásico compressível é semelhante à do escoamento monofásico potencial. A diferença é que a equação da difusividade hidráulica (Eq. 3.37), que governa este caso, é escrita em termos da pressão. Logo, as condições de contorno aplicáveis a cada um dos nós são de *pressão ( $p$ ) conhecida* ou de *derivada da pressão na direção normal ao elemento ( $\partial p/\partial n$ ) conhecida*. Para fins de exemplificação, considere o mesmo reservatório do caso anterior (Fig. 9.1).

#### a) Pressão

A determinação das condições de contorno para este caso é semelhante à do escoamento monofásico potencial. A diferença é que se deve expressar as equações em termos de pressão, ao invés de potencial. Isso é feito utilizando a Eq. 9.1. Desenvolvendo-a, tem-se:

$$\begin{aligned} p &= p_o + p_t \\ &= \rho g(H_o - z) + p_t \end{aligned} \quad (9.5)$$

onde  $H_o$  é a altura da zona de óleo e  $z$  é a coordenada do nó considerado. Novamente, a pressão atuante sobre a interface entre óleo e gás, ou seja, na superfície livre (3), é apenas aquela exercida pelo gás sobre o óleo ( $p_t$ ), pois  $z = H_o$ . Sem perda de generalidade, a pressão na interface pode ser assumida como zero. Assim, todos os nós dos limites laterais (2) e (4) e da superfície livre (3) tem pressão conhecida com valor em função da sua coordenada  $z$ :

$$p(z) = \rho g(H_o - z) \quad (9.6)$$

Desta equação, pode-se notar que a pressão varia linearmente com a profundidade, desde 0 na superfície livre até  $\rho g H_o$  na base.

#### b) Derivada da pressão na direção normal

A determinação das condições de contorno de velocidade devem ser traduzidas em termos de variação da pressão na direção normal ao elemento. Para isso, utiliza-se a Eq. (3.7):

$$\mathbf{q} = -K \nabla \Phi$$



Sobre o contorno, se calcula a velocidade na direção normal ao elemento, que é dada por:

$$\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = q = -K \frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad (9.7)$$

Substituindo a definição do potencial, tem-se:

$$\begin{aligned} q &= -K \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) \\ &= -K \left[ \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{p}{\rho g} \right) + \frac{\partial z}{\partial n} \right] \end{aligned} \quad (9.8)$$

Como a transformação de potencial em pressão está sendo realizada apenas pontualmente, pode-se escrever que:

$$q = -K \left( \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial n} + \frac{\partial z}{\partial n} \right) \quad (9.9)$$

Explicitando-se o termo da pressão, tem-se:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho g \left( \frac{q}{K} + \frac{\partial z}{\partial n} \right) \quad (9.10)$$

Da Fig. 9.1, pode-se perceber que a direção normal à base (único segmento que tem velocidade conhecida) é  $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{k}}$ . Assim, a condição de contorno da base fica:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\text{base}} = \rho g \quad (9.11)$$

Assim, para os mesmos nós da base que se determinou a condição de  $q = 0$  para o escoamento potencial, se define  $\partial p / \partial n = \rho g$  para o escoamento compressível. A partir da Eq.(9.10) se escrevem as condições de contorno de fluxo no instante de tempo inicial  $t = 0$ , considerando que no tempo  $t = 0$ ,  $q = 0$  para todo o domínio:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\text{lateral direita}} = 0 \quad (9.12)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\text{superfície livre}} = -\rho g \quad (9.13)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\text{lateral esquerda}} = 0 \quad (9.14)$$

As técnicas de obtenção das equações extra se repetem aqui tal como para o escoamento monofásico potencial.

### 9.2.3 Escoamento bifásico potencial

Assim como no escoamento monofásico potencial, a equação governante é a de Laplace (Eq. 3.14), escrita em termos do potencial  $\Phi$ . Logo, as condições de contorno aplicáveis a cada um dos nós são novamente de *potencial conhecido* ou de *velocidade conhecida*. Para fins de exemplificação, considere o reservatório cotendo dois fluidos mostrado na Fig. 9.2, contendo o fluido mais denso na sub-região inferior e o menos denso na sub-região superior.

Para efeitos de simplificação da nomenclatura, será assumido que há água na sub-região inferior (identificada pelo sub-índice “w”) e óleo na sub-região superior (identificado pelo sub-índice “o”). O tratamento matemático é idêntico se os fluidos forem óleo na sub-região inferior e gás na superior.

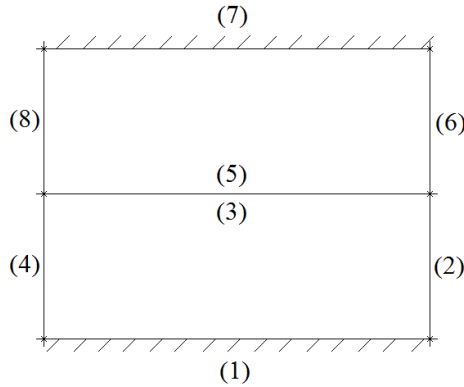


Figura 9.2: Exemplo: reservatório retangular contendo dois fluidos

Conforme mostrado no capítulo 7, cada sub-região deve ser tratada de forma independente da outra. Todavia, como formam um único domínio, as duas sub-regiões devem compartilhar o mesmo sistema de coordenadas.

#### a) Potencial

**Sub-região superior.** A sub-região superior, contendo óleo, tem potencial dado por:

$$\begin{aligned}
 \Phi_o &= \frac{p_o + p_t}{\rho_o g} + z_o \\
 &= \frac{\rho_o g (H_o + H_w - z_o)}{\rho_o g} + \frac{p_t}{\rho_o g} + z_o \\
 &= H_o + H_w - z_o + \frac{p_t}{\rho_o g} + z_o \\
 &= H_o + H_w + \frac{p_t}{\rho_o g}
 \end{aligned} \tag{9.15}$$

Da mesma forma que nos casos anteriores,  $p_t$  é a pressão de topo, a que a coluna de fluido superior está submetida. Esta pressão pode ser assumida como sendo zero. Desta forma, toda a

sub-região superior tem potencial constante de valor igual à altura total da porção simulada do reservatório ( $H_o + H_w$ ). Assim, todos os nós dos limites laterais (6) e (8) têm potencial conhecido, igual a:

$$\Phi_{(6)} = \Phi_{(8)} = H_o + H_w \quad (9.16)$$

**Sub-região inferior.** A sub-região inferior, contendo água, tem potencial dado por:

$$\Phi_w = \frac{(p_w + p_o + p_t)}{\rho_w g} + z_w \quad (9.17)$$

onde  $p_w$  é a pressão referente ao peso da coluna de água que está acima do nó,  $p_o$  é a pressão que toda a coluna de óleo exerce sobre a interface e  $p_t$  é a pressão de topo. Continuando o desenvolvimento, tem-se:

$$\begin{aligned} \Phi_w &= \frac{\rho_w g (H_w - z_w)}{\rho_w g} + \frac{\rho_o g H_o}{\rho_w g} + \frac{p_t}{\rho_w g} + z_w \\ &= H_w - z_w + \frac{\rho_o}{\rho_w} H_o + \frac{p_t}{\rho_w g} + z_w \\ &= H_w + \frac{1}{\alpha} H_o + \frac{p_t}{\rho_w g} \end{aligned} \quad (9.18)$$

onde  $\alpha$  é a razão entre as massas específicas do fluido inferior e do superior (Eq. 7.14). Novamente, assume-se  $p_t = 0$ . Dessa forma, toda sub-região inferior tem potencial constante de valor relacionado às alturas das duas sub-regiões ( $H_w$  e  $H_o$ ). Assim, todos os nós dos limites laterais (2) e (4) têm potencial conhecido como:

$$\Phi_{(2)} = \Phi_{(4)} = H_w + \frac{1}{\alpha} H_o \quad (9.19)$$

## b) Velocidade

**Base, topo e limites laterais.** Tratando cada sub-região de forma independente, a determinação das condições de contorno de velocidade para base e limites laterais é idêntica à mostrada para o escoamento monofásico potencial. A do topo é idêntica à da base.

## c) Interface

Na interface reside a maior diferença na determinação das condições de contorno entre os simuladores potenciais monofásico e bifásico. Até aqui, as duas sub-regiões foram tratadas como independentes. Para “acoplá-las”, utilizam-se, conforme mostrado no capítulo 7, as equações de continuidade na interface. São elas a equação de compatibilidade de potenciais (Eq. 7.13) e a

equação de equilíbrio de velocidades (Eq. 7.2). Assim, tem-se:

$$\Phi_{(5)} + \alpha\Phi_{(3)} = (1 - \alpha)z \quad (9.20)$$

e

$$q_{(3)} + q_{(5)} = 0 \quad (9.21)$$

A Eq.(9.20) é aplicada apenas aos nós intermediários da interface (os nós nas duas extremidade já têm seu potencial conhecido). A Eq.(9.21) é aplicada a todos os nós da interface, começando na velocidade depois do primeiro nó e terminando na velocidade antes do último nó.

Além destas equações de “acoplamento”, os nós intermediários da interface necessitam, assim como os da superfície livre dos simuladores monofásicos, de equações extra por terem, cada um, 3 variáveis desconhecidas. Para suprir as equações necessárias, novamente é utilizada a técnica de adotar a condição de colinearidade entre os elementos, fazendo  $q^a = q^d$ . Mais uma vez, a discretização da interface deve ser feita em um número suficientemente grande de elementos, de forma que se minimize o erro numérico introduzido pela suposição de colinearidade.

### 9.3 Movimentação da interface

A velocidade calculada na interface é, na verdade, a velocidade dos pontos materiais que a definem. É possível, então, deduzir a equação que define sua posição em função desta velocidade. Considere, para este caso, que exista uma função  $F$ , definida por:

$$F = z - \lambda(x, t) = 0 \quad (9.22)$$

onde  $\lambda(x, t)$  é a função que expressa a altura da interface para uma determinada coordenada  $x$  e um certo instante de tempo.

Como a interface é uma linha material, pode-se fazer:

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\mathbf{q}}{\Theta} \cdot \nabla F = 0 \quad (9.23)$$

Substituindo a Eq.(9.22) na Eq.(9.23), tem-se:

$$\frac{DF}{Dt} = -\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\mathbf{q}}{\Theta} \cdot (\nabla z - \nabla \lambda) = 0 \quad (9.24)$$

Explicitando a variação de  $\lambda$  no tempo, tem-se:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{1}{\Theta} [\mathbf{q} \cdot \nabla z - \mathbf{q} \cdot \nabla \lambda] \quad (9.25)$$

Sabendo que  $\nabla z = \hat{\mathbf{e}}_z$ , pode-se fazer:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{1}{\Theta} [\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z - \mathbf{q} \cdot \nabla \lambda] \quad (9.26)$$

A Eq.(9.26) é a equação que define a variação da posição (em  $z$ ) de um determinado ponto da interface. Há de se notar que esta equação inclui uma parcela linear, dada por  $\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z$ , e uma parcela não linear, dada por  $\mathbf{q} \cdot \nabla \lambda$ . Neste trabalho, optou-se por desconsiderar a contribuição não linear para o deslocamento da interface. Desta forma, obtém-se:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{1}{\Theta} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z \quad (9.27)$$

O produto escalar da equação acima ( $\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z$ ) é o vetor velocidade projetado no eixo  $z$  e é dado por:

$$\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z = -K \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (9.28)$$

Como a informação que se tem é a de velocidade normal ao elemento ( $q$ ), deve-se escrever a equação em termos desta velocidade normal projetada no eixo  $z$ :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{1}{\Theta} \frac{q}{\cos \beta} \quad (9.29)$$

onde  $\beta$  é o ângulo formado entre o vetor normal ao elemento e o eixo  $z$ .

A Eq.(9.29) é a equação utilizada neste estudo para a simulação da movimentação da superfície livre ou da interface entre dois fluidos. A implementação desta equação no código desenvolvido, porém, deve ser feita de forma a levar em conta o tamanho do passo de tempo utilizado nas iterações. Escrevendo a Eq.(9.29) em termos de diferenças finitas, temos:

$$z_{m+1} = z_m + \frac{1}{\Theta \cos \beta} (\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z)_m \Delta t \quad (9.30)$$

onde  $z$  é a altura da interface,  $\Delta t$  é o tamanho do passo de tempo e os sub-índices  $m$  e  $m + 1$  indicam o passo de tempo atual e o imediatamente próximo.

## 9.4 Método de solução

### Condição inicial

Inicialmente, têm-se as condições de contorno prescritas, conforme demonstrado na seção 9.2. No instante de tempo  $t = 0$ , assume-se que a interface coincide com a horizontal.

## Iteração para cada passo de tempo $\Delta t$

### Simuladores de escoamento potencial

Os códigos desenvolvidos resolvem o problema potencial decorrente do cenário inicial, calculando os potenciais e as velocidades na direção normal em todos os nós do contorno e da interface. A próxima etapa é o cálculo da nova posição da interface. Para isso, leva-se em conta a velocidade calculada, aplicando-a na Eq.(9.29). Como resultado, são obtidas as coordenadas de cada nó da interface ao final do intervalo de tempo  $\Delta t$ .

Estabelecem-se, então, para a próxima iteração, um novo cenário. As condições de contorno são as mesmas que foram prescritas inicialmente. A posição da interface, agora, não é mais assumida como horizontal, mas sim determinada pelas coordenadas calculadas.

O programa resolve o problema potencial decorrente deste novo cenário e realiza o cálculo da nova posição da interface. Todo este procedimento é repetido pelo número de passos de tempo indicado como parâmetro.

Com isto, pode-se obter a evolução da interface ao longo do tempo.

### Simulador de escoamento compressível

O simulador de escoamento compressível calcula as pressões e sua derivada na direção normal. Assim, depois de calculados, dois passos adicionais são necessários. O primeiro é converter os valores calculados de pressão ( $p$ ) em valores de potencial ( $\Phi$ ), por meio da Eq.(3.8):

$$\Phi = \frac{p}{\rho g} + z$$

O segundo é converter os valores calculados de derivadas de pressão ( $\partial p/\partial n$ ) em valores de velocidade ( $q$ ). Isso é feito utilizando a equação (9.9):

$$q = -K \left( \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial n} + \frac{\partial z}{\partial n} \right)$$

A velocidade pode, então, ser utilizada para calcular a movimentação da interface. Com exceção destes dois passos extra, o método de solução utilizado no simulador de escoamento compressível é igual ao utilizado nos simuladores potenciais.

# Capítulo 10

## Validação dos simuladores desenvolvidos

Antes de utilizar os simuladores desenvolvidos em análises, é necessário validá-los com base em resultados disponíveis na literatura. Soares e Simões (2012) desenvolveram uma solução analítica para a vazão crítica e para a posição da interface em condição de estabilidade, nesta vazão. Esta solução foi utilizada para comparar os resultados dos simuladores. A solução analítica utiliza mapeamento conforme e tem validade restrita a casos que apresentam:

- escoamento monofásico potencial;
- Pressão na superfície livre igual a zero;
- Um único sumidouro pontual com coordenada  $x$  igual à metade da largura do domínio e coordenada  $z$  igual a zero.

### 10.1 Estratégia de validação

A solução analítica disponível foi desenvolvida para validação de experimentos realizados em células de Hele-Shaw, aparatos construídos para simular o escoamento de fluidos em meios porosos. Os resultados publicados foram obtidos para uma célula de 2 m de largura, 0,4 m de altura da coluna de líquido e 4 mm de espessura. O fluido extraído é glicerina, com densidade de  $1255,5 \text{ kg/m}^3$  e viscosidade de  $1025,5 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$ .

Em cada um dos simuladores desenvolvidos foi inserido o conjunto de dados de forma a replicar o caso resolvido analiticamente.

#### 10.1.1 Simulador monofásico potencial

Os resultados do simulador de escoamento monofásico potencial podem ser comparados diretamente com os resultados analíticos, uma vez que ambos adotam o mesmo modelo matemático.

### 10.1.2 Simulador bifásico potencial

Para ser validado por meio de comparação com um escoamento monofásico, o simulador bifásico deve simular um caso que mantenha semelhança dinâmica com o escoamento monofásico que servirá de referência. Analisando o número de Froude (Eq. 2.1), pode-se perceber que, para garantir a semelhança dinâmica entre os modelos de escoamento bifásico e monofásico, deve-se utilizar o mesmo  $\Delta\rho$  em ambos os casos.

Assim, o simulador bifásico deve ter seus parâmetros alterados de forma que o  $\Delta\rho$  bifásico seja igual ao  $\Delta\rho$  monofásico. Então, faz-se

$$\rho_{\text{óleo}}(\text{bifásico}) = \rho_{\text{óleo}}(\text{monofásico}) + \rho_{\text{gás}}(\text{bifásico}) \quad (10.1)$$

para garantir que o  $\Delta\rho$  do escoamento bifásico seja igual ao do escoamento monofásico. Além disso, há que se garantir que a pressão sobre a interface seja zero, para que ela tenha a mesma condição da superfície livre do escoamento monofásico. Então, deve ser adotada uma pressão de topo  $p_t = -\rho_{\text{gás}} g H_{\text{gás}}$  para que na interface, a pressão resultante seja zero.

Como todos os demais parâmetros continuam iguais, a semelhança dinâmica entre os escoamentos é alcançada e os resultados do escoamento bifásico potencial podem ser comparados com os resultados analíticos disponíveis.

### 10.1.3 Simulador monofásico compressível

Não foi possível encontrar resultados analíticos para o problema de escoamento compressível em meio poroso com fronteira móvel. Logo, a validação do simulador monofásico compressível se dará de três formas, especificadas a seguir.

#### a) Escoamento com compressibilidade nula

A primeira forma de validação será a partir da simulação de um escoamento com a compressibilidade total nula ( $c_t = 0$ ). Sendo a compressibilidade nula, a constante de difusividade hidráulica  $\eta$  tende ao infinito, indicando que qualquer alteração na pressão é comunicada instantaneamente a todo o domínio. A fração  $1/\eta$ , então, também se torna nula. Logo, a equação governante do problema (Eq. 3.37) se torna a equação de Poisson em termos da pressão, com sumidouro pontual:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Q\rho g}{K} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (10.2)$$

É de fácil demonstração que esta equação é apenas uma notação alternativa da equação de Poisson para o escoamento potencial (Eq. 3.17) se a compressibilidade for nula e, consequentemente,  $\rho$  for constante.

Os resultados obtidos com esta simulação podem ser comparados com os resultados analíticos,



validando a solução particular da equação diferencial para o termo contendo o delta de Dirac.

## b) Escoamento compressível sem sumidouros

A segunda forma de validação será a partir da simulação de um escoamento compressível confinado, impelido pela diferença de potencial entre as seções de entrada e saída (Fig. 10.1). Não há fronteira móvel nem sumidouros concentrados. Os resultados para potencial e velocidade no tempo  $t = \infty$  (ou seja, quando a difusão já foi plenamente estabelecida e o regime permanente domina o escoamento) serão comparados com a solução analítica. Para a geometria e condições de contorno mostrados na Fig. 10.1 e utilizando  $K = 1 \text{ m/s}$ , a solução analítica em regime permanente é  $\Phi(x) = -0,5x + 1$  e  $\mathbf{q} = 0,5\hat{\mathbf{i}}$ . Isto possibilitará a validação da solução homogênea da equação diferencial bem como a convergência da solução particular para o termo difusivo.

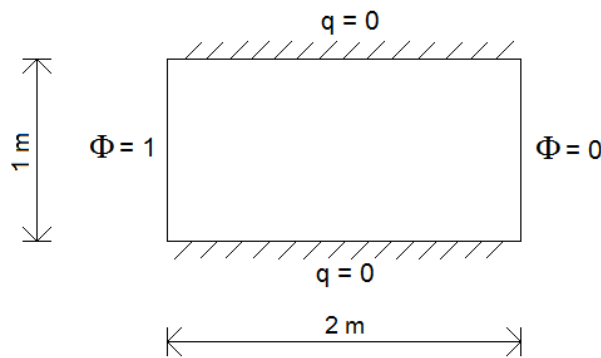


Figura 10.1: Geometria e condições de contorno simuladas para o caso (b)

## 10.2 Comparação dos resultados

A tabela 10.1 apresenta os valores obtidos para vazão crítica e coordenada  $z$  do nó central da interface em condição de estabilidade, nesta vazão. A Fig. 10.2 mostra a comparação dos resultados obtidos para a posição da interface em condição de estabilidade.

Tabela 10.1: Comparação dos resultados obtidos

Simulador	Vazão crítica [ $m^2/s$ ]	Erro [%]	Altura do nó central [ $m$ ]	Erro [%]
<i>Resultado analítico</i>	0,00254	-	0,04243	-
Monofásico potencial	0,00259	1,97	0,04228	0,45
Bifásico potencial	0,00260	2,36	0,04416	4,08
Monofásico compressível caso (a)	0,00259	1,97	0,04224	0,35

Há de se notar que o resultado analítico não apresenta os pontos da região central (ponta) da interface (Fig. 10.3). A coordenada da altura do nó central apresentada na tabela é fruto de uma

interpolação linear da curva analítica.

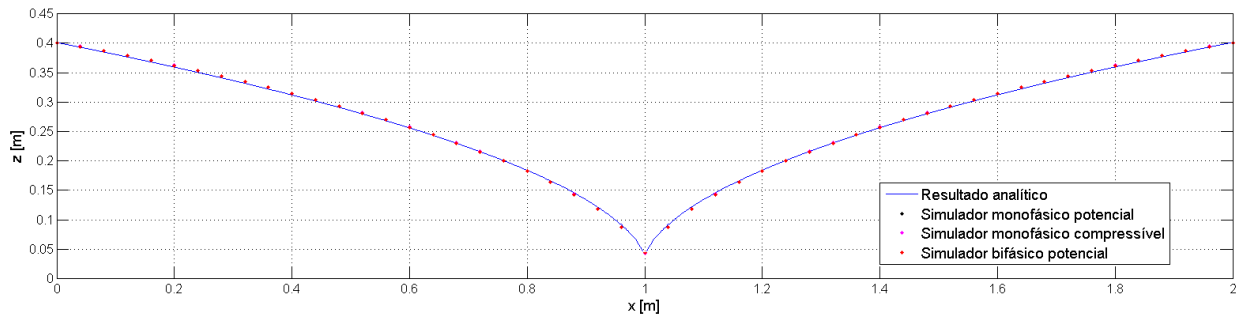


Figura 10.2: Comparação dos resultados para a posição da interface

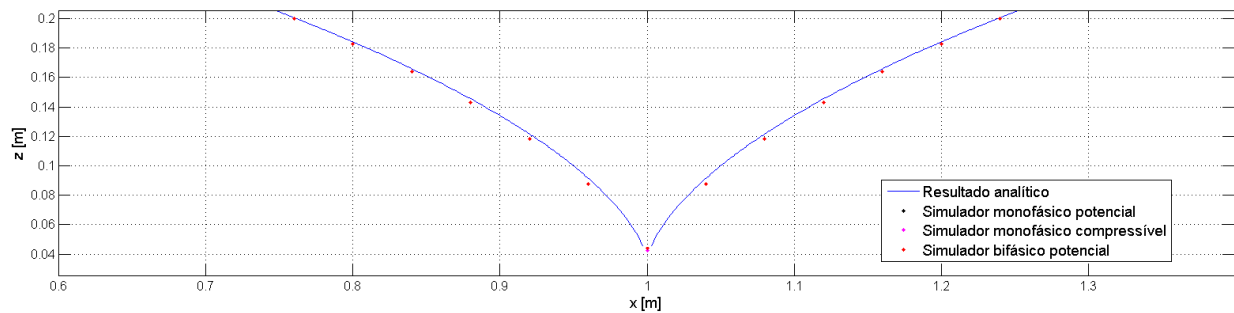


Figura 10.3: Comparação dos resultados para a posição da interface (ampliação)

### Simulador monofásico compressível - caso (b)

A tabela 10.2 apresenta os valores de potencial e velocidade nos nós selecionados obtidos na simulação do caso (b) do simulador monofásico compressível, bem como os resultados numéricos de referência. A Fig. 10.4 mostra a distribuição de potencial no interior do domínio simulado e a posição dos nós que aparecem na tabela.

Tabela 10.2: Comparação dos resultados para o caso (b)

Nó	Coord. x [m]	$\Phi_{an}$ [m]	$\Phi_{num}$ [m]	Erro $\Phi$ [%]	$q_{an}$ [m/s]	$q_{num}$ [m/s]	Erro q [%]
1	0,5	0,75	0,749908	0,01	0	0	-
2	1,5	0,25	0,249860	0,06	0	0	-
3	2	0	0	-	0,5	0,500109	0,02
4	2	0	0	-	0,5	0,500113	0,02
5	1	0,50	0,499893	0,02	0	0	-
6	0	1	1	-	-0,5	-0,499971	0,01
7	0	1	1	-	-0,5	-0,499982	0,00
8	1	0,50	0,500000	0	$0,5\hat{i}$	$0,500000\hat{i}$	0,00

A Fig. 10.5 apresenta a curva de evolução do potencial do ponto central do domínio ao longo do tempo, para três valores de condutividade hidráulica  $K$ .

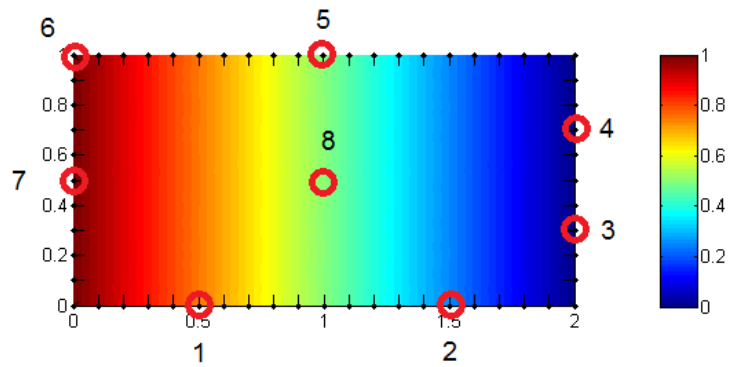


Figura 10.4: Distribuição de potencial no tempo  $t = \infty$

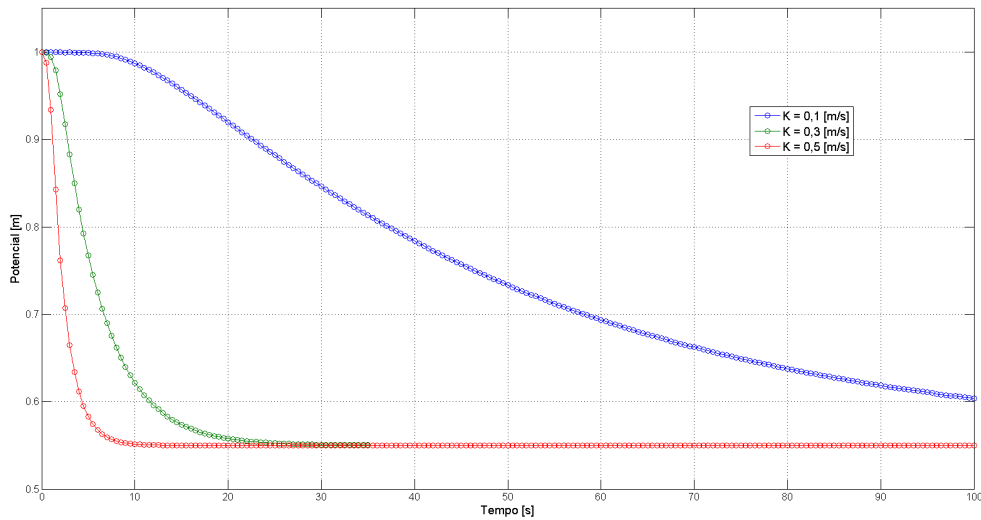


Figura 10.5: Evolução do potencial no ponto central do domínio para vários valores de  $K$

### 10.3 Discussão

Os resultados obtidos foram suficientemente próximos das soluções analíticas e numéricas disponíveis. A exceção ficou por conta do simulador bifásico potencial, que obteve erro da ordem de 2 % para vazão crítica e de 4 % para a posição do ponto central da interface, quando comparado com a solução analítica de escoamento monofásico. Como não existem soluções analíticas para o escoamento bifásico, não foi possível determinar se a fonte do erro é a aproximação de escoamento monofásico adotada, ou até mesmo a interpolação do vértice da interface. De qualquer forma, a própria existência de um vértice entre elementos de contorno adjacentes da interface já introduz erros numéricos, como explicado no capítulo 9.

O simulador de escoamento compressível se mostrou condizente com os resultados aos quais foi comparado nos casos (a) e (b). A solução transiente não foi comparada, porém, a Fig. 10.5 mostra que a evolução do potencial no domínio ocorre tão mais rápida quanto maior for a condutividade hidráulica do meio, como era de se esperar.

# Capítulo 11

## Resultados

Os simuladores desenvolvidos podem ser utilizados em diversos tipos de análises. Neste capítulo será mostrado um exemplo de análise para cada um deles.

### 11.1 Simulador bifásico potencial

#### 11.1.1 Líquido e gás

A primeira análise realizada com este simulador foi uma comparação entre os resultados de dois casos de extração de óleo sujeitos a cone de gás. A única variante entre os dois casos é a altura da zona de gás, que foi igual à da zona de líquido no primeiro caso e 5 vezes esta altura no segundo caso.

Dados:

- **Fluido inferior:** glicerina ( $\rho = 1245,000 \text{ kg/m}^3$ ;  $\mu = 0,400 \text{ Pa.s}$ ;  $K = 5,7250 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ )
- **Fluido superior:** ar ( $\rho = 1,084 \text{ kg/m}^3$ ;  $\mu = 18,2 \times 10^{-6} \text{ Pa.s}$ )
- **Vazão:**  $-2,8946 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$
- **Tempo final:**  $3600 \text{ s}$ ;  $\Delta t = 1 \text{ s}$

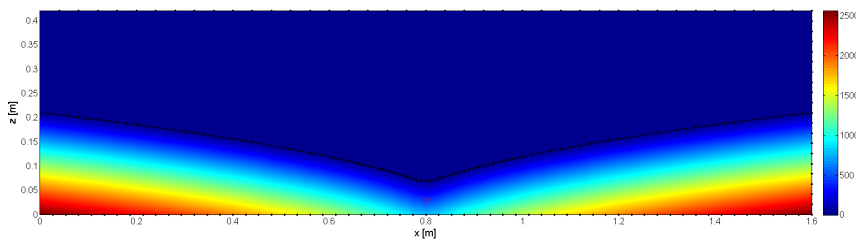


Figura 11.1: Gradiente de pressão: altura da coluna de gás igual à da coluna de líquido

As figuras 11.1 e 11.2 mostram o gradiente de potencial em cada fluido no tempo final, com interface estável. Pode-se perceber pela escala que a pressão na zona de glicerina não se altera

com a altura da zona de gás simulada, como era de se esperar.

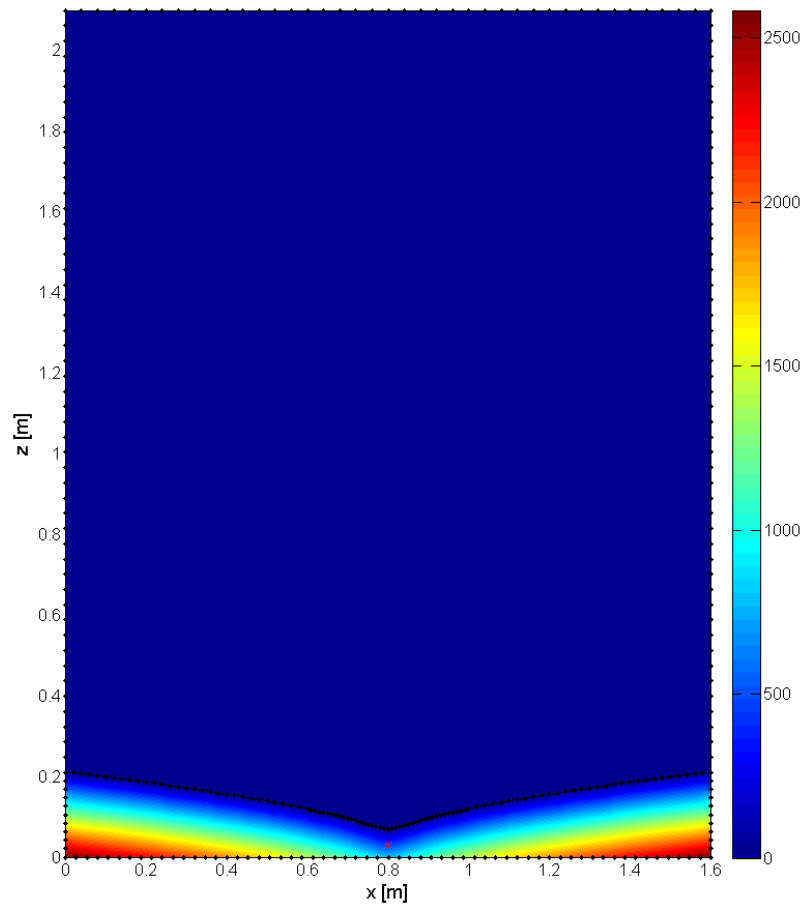


Figura 11.2: Gradiente de pressão: coluna de gás 5 vezes maior que a de líquido

O fluxo de glicerina que é produzido, medido pela quantidade do líquido que entra pelos limites laterais por unidade de tempo, também não se altera, como pode ser visto na Fig. 11.3

Assim, fica claro que a altura da coluna de gás não influencia nos resultados da simulação. De fato, isto permite que se utilize a formulação de domínio único para simular o fenômeno do cone de gás sem prejuízo nos resultados referentes ao óleo.

Da Fig. 11.3 pode-se inferir, ainda, que a produção alcançou o regime permanente, sendo que a interface ficou estabilizada. O fluxo que entra na zona de gás chegou a zero, indicando que não há movimento da massa de ar sobre a glicerina.

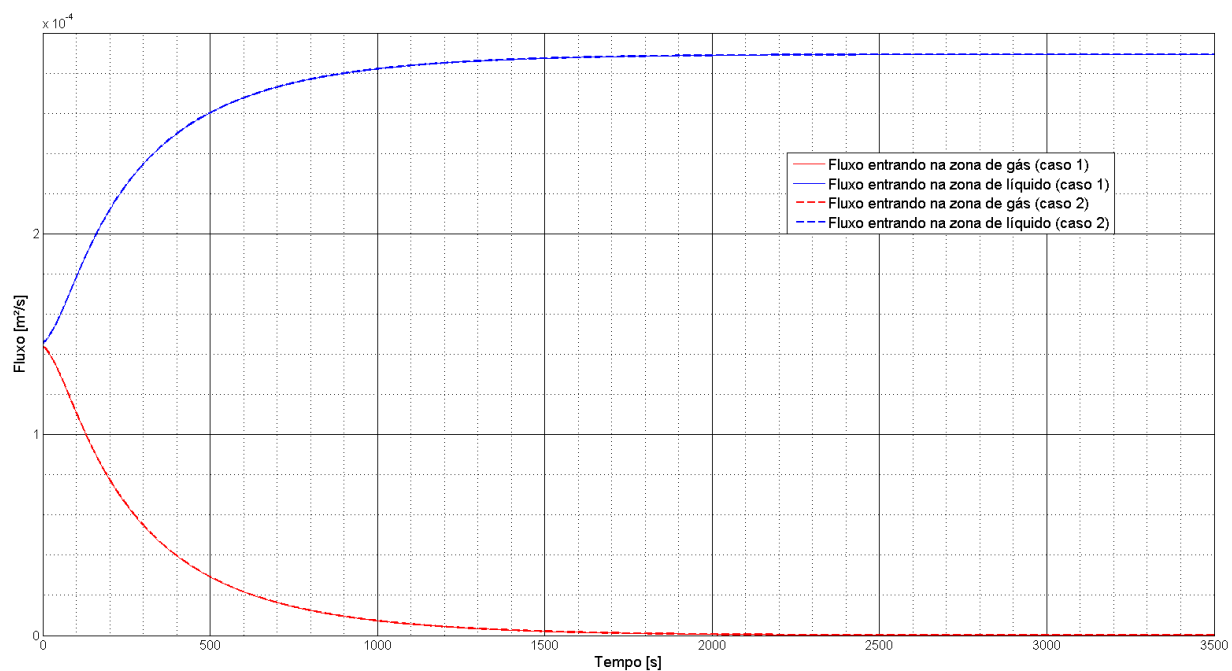


Figura 11.3: Fluxo que entra em cada sub-região

### 11.1.2 Líquido e líquido

Esta segunda análise realizada com o simulador bifásico potencial foi uma comparação qualitativa entre os gradientes de potencial e de pressão no domínio e seu comportamento na interface. O cenário é uma extração de óleo sujeita à ocorrência do cone de água.

Dados:

- **Fluido inferior:** água ( $\rho = 1025,1817 \text{ kg/m}^3$ ;  $\mu = 0,0003 \text{ Pa.s}$ ;  $k = 1 \text{ darcy}$ )
- **Fluido superior:** petróleo ( $\rho = 688,7939 \text{ kg/m}^3$ ;  $\mu = 0,003 \text{ Pa.s}$ )
- **Vazão:**  $-1,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$
- **Tempo final:**  $864000 \text{ s}$  (10 dias);  $\Delta t = 100 \text{ s}$

A Fig. 11.4 mostra os gradientes de *potencial* nas zonas de óleo e de água em um determinado instante de tempo. A Fig. 11.5 mostra os gradientes de *pressão* no mesmo instante de tempo.

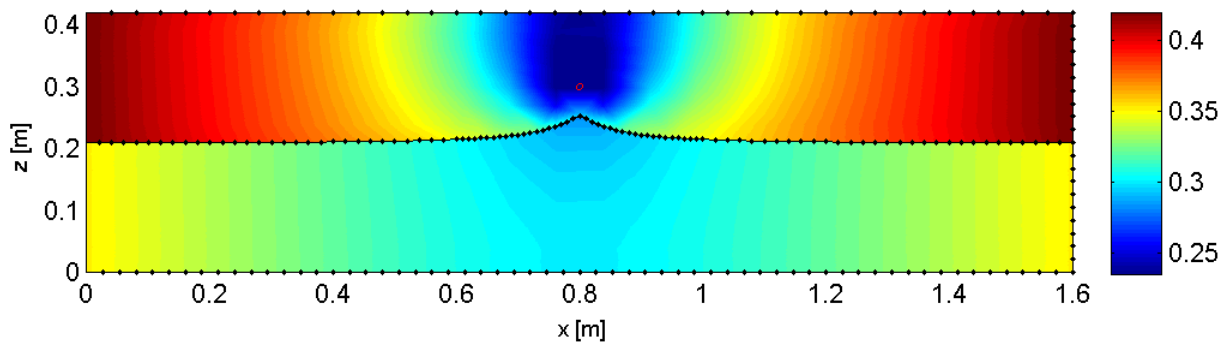


Figura 11.4: Gradientes de potencial no instante  $t$

Pode-se perceber visualmente as condições de compatibilidade na interface: a pressão é contínua ao longo de todo o domínio. O potencial dá um salto na interface entre os fluidos.

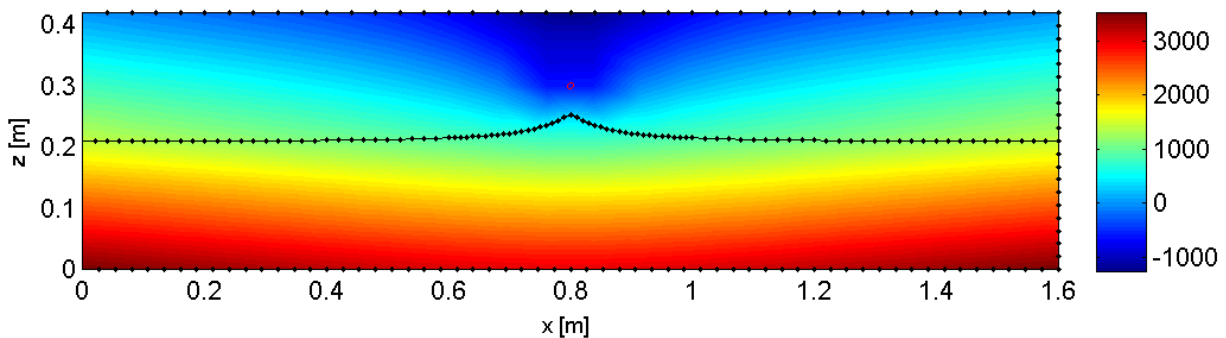


Figura 11.5: Gradientes de pressão no instante  $t$

## 11.2 Simulador monofásico potencial

Com o simulador monofásico potencial pode-se simular apenas o fenômeno do cone de gás. Um caso de extração em vazão crítica é apresentado.

Dados:

- **Fluido:** glicerina ( $\rho = 1255,000 \text{ kg/m}^3$ ;  $\mu = 0,51 \text{ Pa.s}$ ;  $K = 0,0335 \text{ m/s}$ )
- **Vazão:**  $-1,6708 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$
- **Tempo final:**  $1000 \text{ s}$ ;  $\Delta t = 1 \text{ s}$

A Fig. 11.6 mostra o fluxo de glicerina que entra pelos limites laterais. O deslocamento do nó central ao longo do tempo é mostrado na Fig. 11.7.

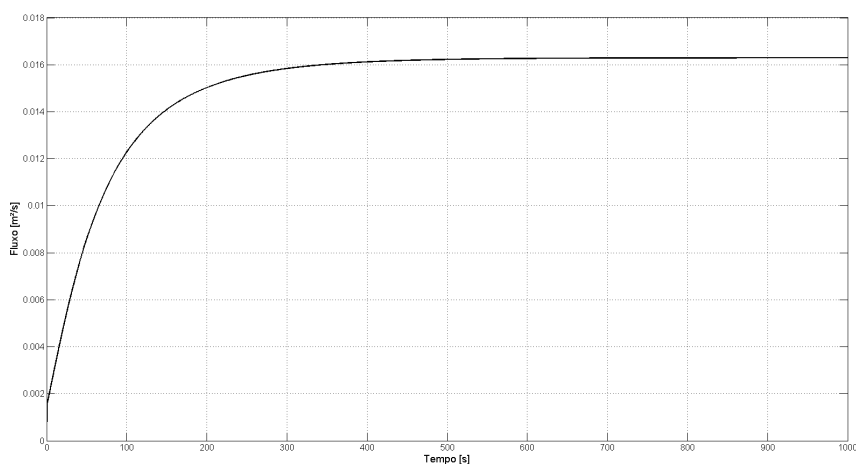


Figura 11.6: Fluxo que entra no domínio simulado

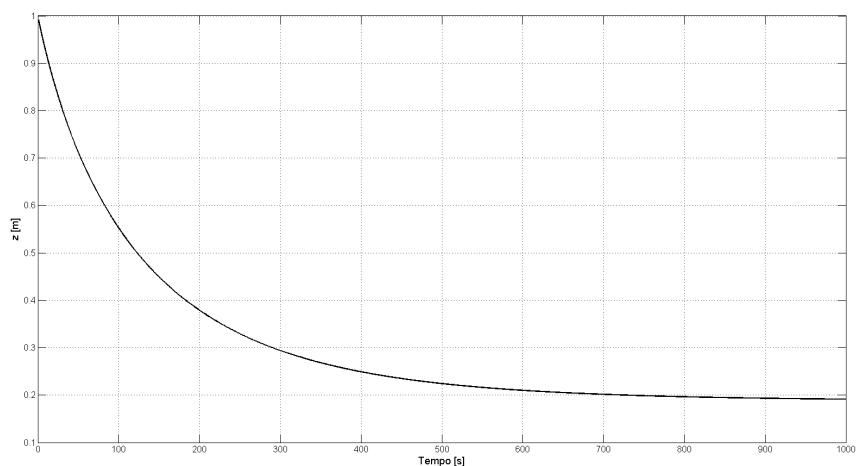


Figura 11.7: Altura do nó central da interface ao longo do tempo

A figura 11.8 mostra o gradiente de potencial na situação de interface estável. Apesar da vazão ter sido previamente determinada como sendo a crítica, note que a superfície livre estabilizada ainda se localiza a uma certa distância do poço. Esta região entre o vértice do cone e o poço é



uma zona instável. Qualquer incremento na vazão de extração causa a aceleração da interface e esta, fatalmente toca no poço. Não se consegue extrair óleo com a interface nesta zona instável sem a utilização de sistemas de controle que a estabilizem.

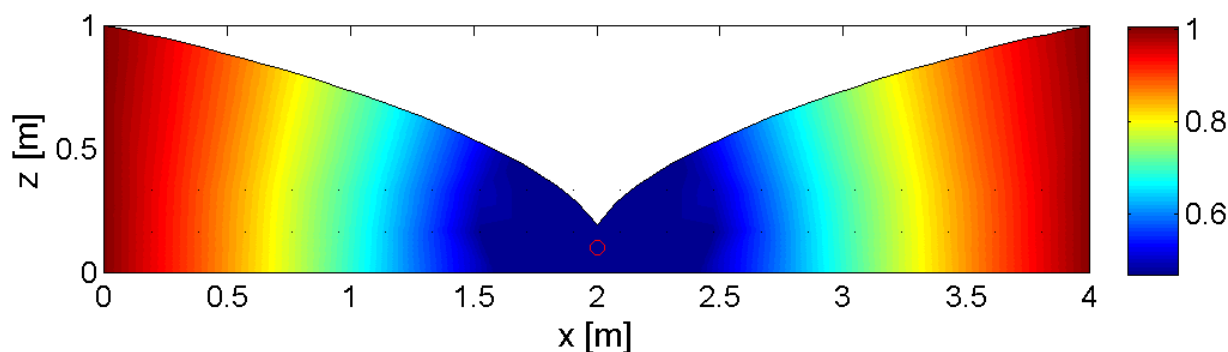


Figura 11.8: Gradiente de potencial com interface estável

### 11.3 Simulador monofásico compressível

Com o simulador monofásico compressível pode-se simular o fenômeno do cone de gás levando em consideração a compressibilidade do sistema óleo-rocha. Para evidenciar os efeitos da compressibilidade, exagerou-se no valor de  $c_t$  e simulou-se o mesmo caso apresentado com o simulador monofásico potencial.

Dados:

- **Fluido:** glicerina ( $\rho = 1255,000 \text{ kg/m}^3$ ;  $\mu = 0,51 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ;  $K = 0,0335 \text{ m/s}$ ;  $\eta = 0,0335 \text{ Pa}^{-1}$ )
- **Vazão:**  $-1,6708 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$
- **Tempo final:**  $4000 \text{ s}$ ;  $\Delta t = 1 \text{ s}$

As sucessivas imagens do mapa de potencial podem ser comparadas com as do escoamento potencial. Isso evidencia que, com a equação da difusividade, a propagação da queda de potencial não é instantânea como no escoamento potencial (Fig.11.9). A Fig. 11.10 apresenta a comparação entre o deslocamento do nó central ao longo do tempo para os dois casos. A evolução do potencial em um ponto no interior do domínio é mostrada pela Fig. 11.11. É notável o aparecimento de uma oscilação no potencial nos primeiros instantes de tempo (Fig. 11.12). Este erro é uma característica do Método da Reciprocidade Dual para problemas transientes, que foi aplicado neste simulador. Seu efeito, no entanto, desaparece logo após alguns passos de tempo de simulação.

Vale lembrar que o efeito da compressibilidade do fluido e da formação foram exagerados nesta simulação de forma a evidenciá-los mais. De toda forma, é possível inferir que o tratamento do sistema como incompressível introduz alguma ordem de erro na determinação da vazão crítica e da posição da interface estável.

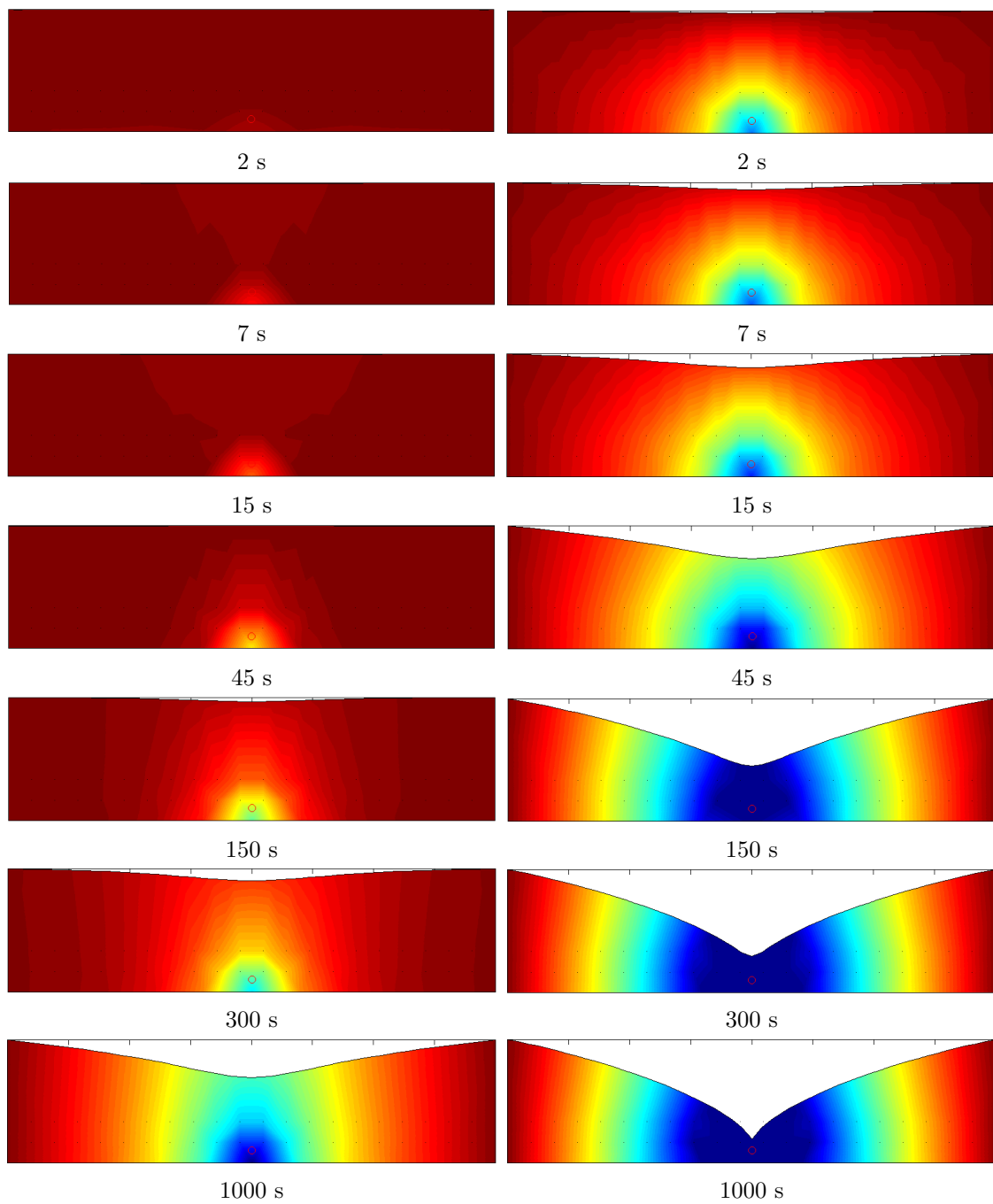


Figura 11.9: Comparação da propagação da onda de potencial. Coluna esquerda: escoamento compressível. Coluna direita: escoamento potencial

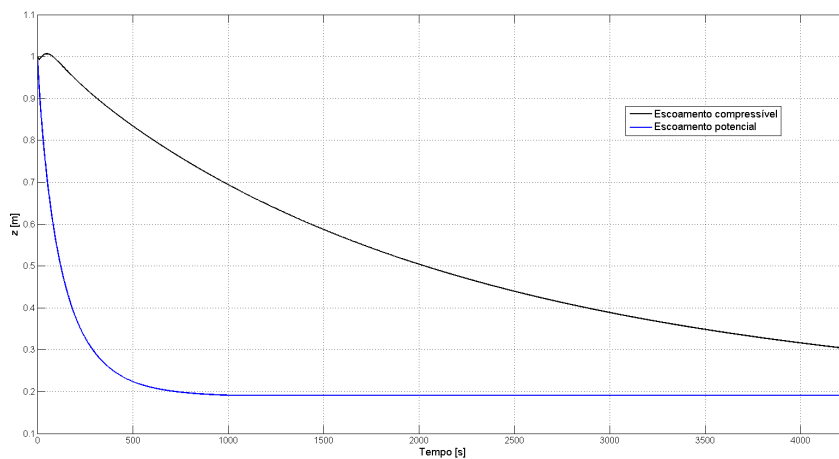


Figura 11.10: Comparação entre os deslocamentos dos nós centrais

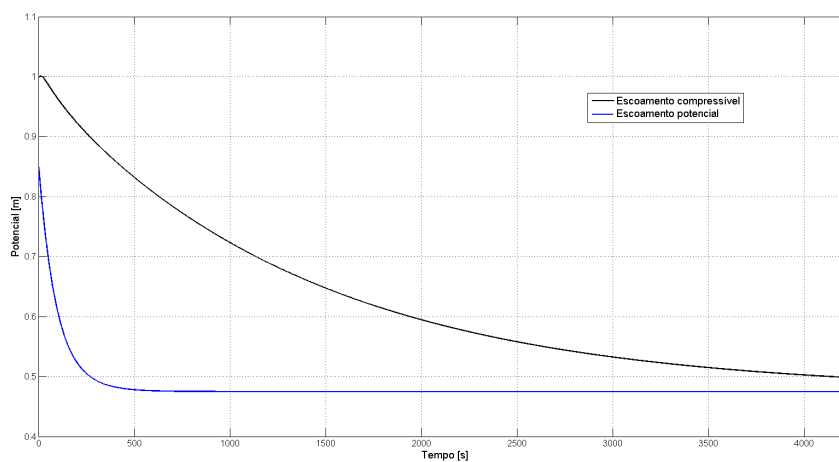


Figura 11.11: Comparação entre as evoluções do potencial de um mesmo ponto no interior do domínio

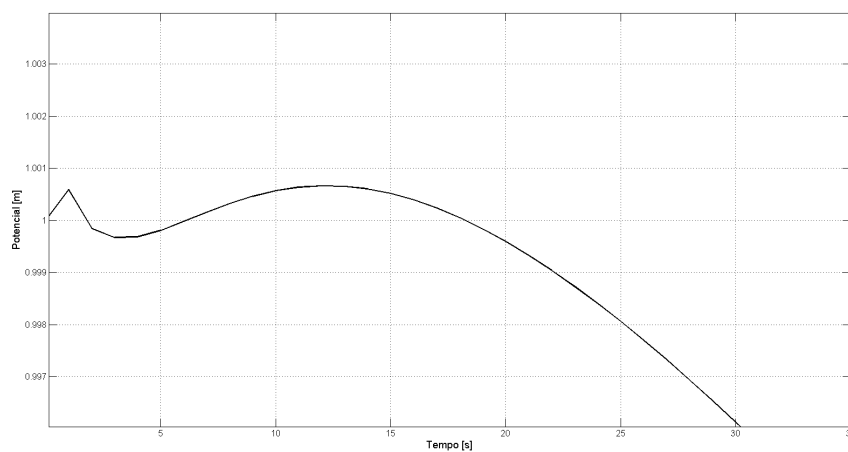


Figura 11.12: Comparação entre as evoluções do potencial de um mesmo ponto no interior do domínio - zoom

# Conclusões

Este trabalho reuniu as características-chave e informações a respeito dos fenômenos dos cones de água e de gás em poços de petróleo horizontais. Foram analisados os modelos matemáticos sobre os quais foram desenvolvidas as formulações do Método dos Elementos de Contorno para o estudo de tais fenômenos, bem como as condições de contorno pertinentes.

Uma primeira análise do problema mostrou que o MEC é uma ferramenta à altura do estudo proposto. Ficou evidenciado que este método é eficaz no tratamento de problemas como o escoamento de fluidos em meios porosos, principalmente quando existem fronteiras móveis envolvidas.

Fica fundamentado na literatura que a integração analítica dos elementos das matrizes de influência do MEC, aliada à utilização de elementos lineares contínuos, é uma estratégia eficaz para o aumento do desempenho dos algoritmos implementados. Conseqüentemente, este tipo de integração contribui para a diminuição dos custos computacionais envolvidos.

Três simuladores de escoamento de fluidos em meios porosos foram desenvolvidos seguindo as bases teóricas aqui apresentadas. O primeiro simula escoamentos monofásicos potenciais, para utilização no estudo do cone de gás em produção sub-crítica. O segundo simula escoamentos bifásicos potenciais para utilização tanto no estudo do cone de água quanto no estudo do cone de gás, em ambos os regimes de produção: sub-crítica ou supercrítica. Este simulador utiliza a formulação de sub-regiões do MEC para lidar com um domínio homogêneo por partes. Finalmente, o terceiro é um simulador de escoamentos monofásicos compressíveis, para utilização no estudo do cone de gás. Este simulador emprega a formulação do Método da Reciprocidade Dual do MEC para tratar problemas regidos pela equação da difusividade hidráulica. Em todos os simuladores foram utilizados elementos de contorno lineares contínuos. A montagem das matrizes de influência  $H$  e  $G$  foi feita utilizando o procedimento de integração analítica de seus elementos, conforme mostrado neste texto. Os três simuladores foram comparados satisfatoriamente com relação a soluções analíticas disponíveis.

O conjunto de simuladores desenvolvidos foi efetivamente empregado na simulação dos fenômenos dos cones de água e de gás. Seu principal uso ocorreu em paralelo a experimentos de controle e automação utilizando células de Hele-Shaw, os quais visavam a otimização da produção de óleo. Neste ambiente, o conjunto de simuladores tornou-se a principal ferramenta para a determinação da vazão crítica e predição do comportamento da interface entre fluidos, comprovando sua utilidade em pesquisas aplicadas de engenharia.

## Trabalhos futuros

Este trabalho lança as bases para o desenvolvimento de simuladores que permitam o estudo dos fenômenos dos cones de água e de gás em três dimensões. Adicionalmente, são sugeridos como trabalhos futuros:

1. a inclusão nos modelos utilizados da permeabilidade ortotrópica do meio poroso, característica de ocorrência frequente nas rochas sedimentares;
2. a extensão da formulação do Método da Reciprocidade Dual do MEC para sub-regiões, a fim de permitir o estudo do cone de água considerando a compressibilidade do sistema;
3. a adição de não-linearidades ao modelo de escoamento compressível. Exemplos são a adoção do fator de compressibilidade e da porosidade como sendo funções da pressão.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- T. H. Ahmed. *Reservoir Engineering Handbook*. 4. ed. Gulf Professional Publishing, 2010. ISBN 978-1-85617-803-7.
- E. L. Albuquerque. Introdução ao método dos elementos de contorno. Apostila - Universidade de Brasília, 2013.
- J. J. Azar e G. R. Samuel. *Drilling engineering*. 1. ed. PenWell, 2007. ISBN 978-1-59370-072-0.
- P. K. Banerjee. *Boundary element methods in engineering*. 2. ed. McGraw-Hill, 1994. ISBN 0-07-707769-5.
- J. Bear. *Dynamics of fluids in porous media*. American Elsevier, 1972.
- L. M. Braga. O método dos elementos de contorno rápido com expansão em multipólos aplicado a problemas de condução de calor. Dissertação de mestrado, Universidade de Brasília, 2012.
- C. A. Brebbia e J. Dominguez. *Boundary elements - an introductory course*. 2. ed. WIT Press, 1992. ISBN 1-85312-160-6.
- C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, e L. C. Wrobel. *Boundary element techniques - theory and applications in engineering*. 1. ed. Springer-Verlag, 1984. ISBN 978-3-642-48862-7.
- E. K. Bruch. *The boundary element method for groundwater flow*. 1. ed. Springer-Verlag, 1991. ISBN 978-3-540-54407-4.
- J. C. Calhoun Jr. *Fundamentals of reservoir engineering*. 2. ed. University of Oklahoma Press, 1953.
- CONAMA. Resolução conama nº 393 de 2007. Publicada no DOU nº 153, de 9 de agosto de 2007, Seção 1, páginas 72-73, 2007.
- L. M. I. Córdoba. Simulação 2d e controle de cone de água. Dissertação de mestrado, Universidade de Brasília, 2013.
- L. P. Dake. *Fundamentals of reservoir engineering*. 1. ed. Elsevier Science B. V., 1978. ISBN 0-444-41830-X.
- H. Darcy. *Les fontaines publiques de la Ville de Dijon*. 1. ed. Dalmont, 1856.

- A. B. Dias Jr. Análise numérica de bombeamento em reservatório de água. Projeto de Graduação, Universidade de Brasília, 2012.
- J. Dominguez. *Boundary elements in dynamics*. 1. ed. Computational Mechanics Publications, 1993. ISBN 1-85312-258-0.
- J.-E. Farnen, G. Wagner, U. Oxaal, P. Meakin, J. Feder, e T. Jossang. Dynamics of water coning. *Physical Review E*, 60(4):4244–4251, 1999.
- G. C. Hocking e H. Zhang. Coning during withdrawal from two fluids of different density in a porous medium. *Journal of Engineering Mathematics*, 65(2):101–109, 2009. doi: 10.1007/s10665-009-9267-1.
- S. D. Joshi. *Horizontal well technology*. 1. ed. PennWell, 1991. ISBN 0-87814-350-5.
- S. D. Joshi. Cost/benefits of horizontal wells. In *SPE Western Regional/AAPG Pacific Section Joint Meeting held in Long Beach, California, USA, 19-24 May 2003*. SPE, 2003.
- J. H. Kane. *Boundary element analysis in engineering continuum mechanics*. 1. ed. Prentice-Hall, 1994. ISBN 0-13-086927-9.
- J. T. Katsikadelis. *Boundary elements: theory and applications*. 1. ed. Elsevier, 2002. ISBN 0-080-44107-6.
- J. A. Liggett e P. L.-F. Liu. *The boundary integral equation method for porous media flow*. 1. ed. George Allen and Unwin, 1983. ISBN 0-04-620011-8.
- J. O. A. Limaverde Filho. Aplicação de controle não-linear para veículos marítimos e produção de petróleo. Dissertação de mestrado, Universidade de Brasília, 2014.
- W. Lyons. *Working guide to petroleum and natural gas production engineering*. 1. ed. Gulf Professional Publishing, 2010. ISBN 978-1-85617-845-7.
- W. C. Lyons e G. J. Plisga. *Standard handbook of petroleum and natural gas engineering*. 2. ed. Gulf Professional Publishing, 2005. ISBN 0-7506-7785-6.
- F. S. Manning e R. E. Thompson. *Oilfield processing of petroleum: natural gas*, volume 1. 1. ed. PennWell, 1991. ISBN 0-87814-343-2.
- F. S. Manning e R. E. Thompson. *Oilfield processing of petroleum: crude oil*, volume 2. 1. ed. PennWell, 1995. ISBN 0-87814-354-8.
- M. Muskat e R. D. Wyckoff. An approximate theory of water-coning in oil production. *Transactions of the AIME*, 114(01):144–163, 1935. doi: 10.2118/935144-G.
- P. W. Partridge, C. A. Brebbia, e L. C. Wrobel. *The dual reciprocity boundary element method*. 1. ed. Computational Mechanics Publications, 1992. ISBN 1-85132-098-7.
- Petex. *Fundamentals of petroleum*. 5. ed. The University of Texas - Petex, 2011. ISBN 978-0-88698-231-7.

- K. Rafiezadeh e B. Ataie-Ashtiani. Transient free-surface seepage in three-dimensional general anisotropic media by bem. *Engineering Analysis with Boudary Elements*, 46:51–66, 2014.
- A. J. Rosa, R. S. Carvalho, e J. A. D. Xavier. *Engenharia de reservatórios de petróleo*. 1. ed. Interciência, 2006. ISBN 85-7193-135-6.
- A. Satter, G. M. Iqbal, e J. L. Buchwalter. *Practical enhanced reservoir engineering: assisted with simulation software*. 1. ed. PenWell, 2007. ISBN 978-1-59370-056-0.
- R. C. Selley e S. A. Sonnenberg. *Elements of petroleum geology*. 3. ed. Academic Press, 2015. ISBN 978-0-12-386031-6.
- M. M. Soares e R. D. P. Simões. Análise de escoamento bifásico em meio poroso. Projeto de Graduação, Universidade de Brasília, 2012.
- V. A. Sokolov. *Petroleum*. 1. ed. University Press of the Pacific, 1972. ISBN 0-89875-725-8.
- J. E. Thomas. *Fundamentos de engenharia de petróleo*. 2. ed. Interciência, 2004. ISBN 85-7193-099-6.
- H. Zhang, D. A. Barry, e G. C. Hocking. Analysis of continuous and pulsed pumping of a phreatic aquifer. *Advances in Water Resources*, 22(6):623–632, 1999. doi: 10.1016/j.advwatres.2009.09.002.
- H. Zhang, G. C. Hocking, e B. Seymour. Critical and supercritical withdrawal from a two-layer fluid through a line sink in a partially bounded aquifer. *Advances in Water Resources*, 32(12): 1703–1710, 2009.