

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE GAMA/FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE
MATERIAIS DA ENGENHERIA**

**IMPLEMENTAÇÃO E VALIDAÇÃO DE MODELOS
CONSTITUTIVOS PARA PLASTICIDADE CÍCLICA**

RANIERE SILVA NEVES

ORIENTADOR: Dr. LUCIVAL MALCHER

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM INTEGRIDADE DE
MATERIAIS DA ENGENHARIA**

**PUBLICAÇÃO: 027A/2015
BRASÍLIA/DF: NOVEMBRO/2015**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE GAMA / FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE
MATERIAIS DA ENGENHARIA**

**IMPLEMENTAÇÃO E VALIDAÇÃO DE MODELOS
CONSTITUTIVOS PARA PLASTICIDADE CÍCLICA**

RANIERE SILVA NEVES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA DA FACULDADE GAMA E FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA.

APROVADO POR:

Lucival Malcher, Dr, ENM/FT/UnB
(Orientador)

Thiago de Carvalho Rodrigues Doca, Dr, ENM/FT/UnB
(Examinador Externo)

Jorge Luiz de Almeida Ferreira, Dr, ENM/FT/UnB
(Examinador Interno)

José Alexander Araújo, Ph.D, ENM/FT/UnB
(Suplente)

FICHA CADASTRAL

NEVES, RANIERE SILVA

Implementação e validação de modelos constitutivos para plasticidade cíclica. [Distrito Federal] 2015.

027A., 210 x 297 mm (FGA/FT/UnB, Mestre, Integridades de Materiais da Engenharia, 2015).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade UnB Gama. Programa de Pós-graduação em Integridade de Materiais da Engenharia.

1. Plasticidade Cíclica

2. Modelos de encruamento cinemático

I. FGA/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Neves, R. S. (2015). Implementação e validação de modelos constitutivos para plasticidade cíclica. Dissertação de Mestrado em Integridade de Materiais da Engenharia, Publicação N^o. 027^a/2015, Faculdade UnB Gama/FT/, Universidade de Brasília, DF, 110 p.

CESSÃO DE DIREITO

AUTOR: Raniere Silva Neves

TÍTULO: Implementação e validação de modelos constitutivos para plasticidade cíclica

GRAU: Mestre

ANO: 2015

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósito acadêmico e científico. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor

Raniere Silva Neves

Quadra 11, casa 158, Setor Oeste, Gama

72425-110 Brasília,DF - Brasil

RESUMO

A capacidade de prever de forma confiável o comportamento elastoplástico de um componente submetido a carregamentos vem ganhando importância no setor industrial. Atualmente a mecânica computacional possui vários modelos constitutivos que cumprem tal tarefa, porém cada modelo possui suas limitações.

Tendo isso em vista, este trabalho busca apresentar a importância da modulação do endurecimento cinemático na simulação de componentes dúcteis submetidos à plasticidade cíclica, por meio da implementação do modelo constitutivo endurecimento cinemático proposto por Jiang (1996) utilizando a linguagem FORTRAN e realização de um estudo comparativo entre os resultados encontrados pelos modelos de Jiang e Chaboche e também dados experimentais retirados da literatura, para a simulação do comportamento elastoplástico de três aços distintos (Aço 304, S460N e SAE 1045 HR) submetidos a históricos de carregamentos cíclicos proporcionais e não-proporcionais.

Palavras chaves: Modelos Constitutivos, Plasticidade Cíclica, Endurecimento Cinemático, Jiang.

ABSTRACT

The ability to predict reliably the elastoplastic behavior of a component subjected to loads is becoming increasingly important in the industrial sector. Currently, computational mechanics has numerous constitutive models that fulfill such a task, but each model has its limitations.

With this in mind, this paper searches to present the importance of modulation of kinematic hardening in the simulation of ductile components subjected to cyclic plasticity, through the implementation of a constitutive model kinematic hardening proposed by Jiang (1996) using FORTRAN and conducting a comparative study of the results found by models Jiang and Chaboche and also experimental data taken from literature, for the simulation of the elastoplastic behavior of three different steels (steel 304, S460N and SAE 1045 HR) subjected to cyclic loading histories proportional and non-proportional.

Keywords: Constitutive models, cyclic plasticity, kinematic hardening, Jiang.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	14
1.1	MOTIVAÇÃO.....	14
1.2	OBJETIVO.....	16
2	REVISÃO BIBLIOGRAFICA.....	18
2.1	TEORIA DA PLASTICIDADE.....	18
2.1.1	Plasticidade ideal.....	19
2.1.2	Endurecimento isotrópico.....	20
2.1.3	Endurecimento cinemático.....	21
2.2	MODELO MECANICO PARA PLASTICIDADE CÍCLICA.....	22
2.3	LEIS DE ENDURECIMENTO CINEMATICO.....	23
2.3.1	Prager Linear.....	23
2.3.2	Armstrong-Frederick.....	25
2.3.3	Chaboche.....	27
2.3.4	Ohno-Wang.....	31
2.3.5	Jiang.....	34
2.4	SUPERFÍCIE DE VON MISES COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO DE JIANG 35	
3	ESTRATÉGIA NUMÉRICA.....	43
3.1	ALGORITMO DE RETORNO.....	43
3.2	MODELO NUMERICO DE VON MISES COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO DE JIANG.....	44
4	SIMULAÇÕES.....	55
4.1	HISTÓRICOS DE CARREGAMENTO.....	55
4.2	PARÂMETROS DOS MATERIAS.....	56
4.3	RESULTADOS.....	58
4.3.1	Carregamentos proporcionais.....	59
4.3.2	Carregamentos não proporcionais.....	67
4.4	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.....	72
	REFERÊNCIA BIBLIOGRAFICA.....	74
	ANEXO.....	77

LISTA DE QUADROS

Quadro 2.1 - Modelo constitutivo com função de escoamento de von Mises e endurecimento cinemático de Jiang.	42
Quadro 3.1 - Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas para o modelo de von Mises com endurecimento cinemático de Jiang.....	49
Quadro 3.2 - Algoritmo de resolução do sistema não linear para o modelo de von Mises com endurecimento cinemático de Jiang.	51

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 - Parâmetros dos materiais aço 304, S460N e 1045 HR.....	58
Tabela 4.2 - Amplitudes de deformação prescritas e amplitudes de tensão experimentais e encontradas pelos modelos de Chaboche e Jiang para as trajetórias A, B e C e aços 304 e S460.	66
Tabela 4.3 - Amplitudes de deformação prescritas e amplitudes de tensão experimentais e encontradas pelos modelos de Chaboche e Jiang para a trajetória D e aços 304, S460 e 1045 HR.	71

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Linha de montagem da Fiat.	14
Figura 1.2 - Projeto de uma biela (Lapp e Hall, 2011).....	15
Figura 2.1 - Curva Tensão/Deformação genérica para um material dúctil.	18
Figura 2.2 - Plasticidade ideal (Lopes, 2014).	20
Figura 2.3 - Endurecimento isotrópico não linear (Lopes, 2014).	20
Figura 2.4 - Endurecimento cinemático não linear (Lopes, 2014).	21
Figura 2.5 - Resultados do modelo de Prager para laço de histerese estabilizado em deformação controlada (Bari e Hassan, 2000).	24
Figura 2.6 - Resultados do modelo de Prager para laço de histerese em tensão controlada com tensão média sobreposta (Bari e Hassan, 2000).	25
Figura 2.7 - Resultados do modelo de Armstrong-Frederick para laço de histerese estável com deformação controlada (Bari e Hassan, 2000).	26
Figura 2.8 - Resultados do modelo de Armstrong- Frederick para laço de histerese com tensão controlada (Bari e Hassan, 2000).	27
Figura 2.9 - Resultados do modelo de Chaboche com três regras decompostas para laço de histerese estável com deformação controlada (Bari e Hassan, 2000).	28
Figura 2.10 - Resultados do modelo de Chaboche com três regras decompostas para laço de histerese estável com tensão controlada (Bari e Hassan, 2000).	29
Figura 2.11 - Exemplos de carregamentos proporcionais (A, B e C) e não proporcional (D).....	30
Figura 2.12 - Exemplo de modelo multilinear (Bari e Hassan, 2000).	32
Figura 2.13 - Resultados do modelo de Ohno-Wang para laço de histerese estável com deformação controlada (Bari e Hassan, 2000).	33
Figura 2.14 - Resultados do modelo de Ohno e Wang para laço de histerese estável com tensão controlada (Bari e Hassan, 2000).	33
Figura 2.15 – Exemplo de carregamento não proporcional aplicado sobre um ponto material de um virabrequim durante o funcionamento do motor (eFatigue LLC, 2008)..	34
Figura 3.1 - Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas.	44
Figura 4.1 - Históricos de deformação considerados nas simulações.....	56

Figura 4.2 – Curva tensão/deformação de Ramberg-Osgood para os materiais (a) aço 304, (b) aço S460N e (c) aço 1045 HR.....	57
Figura 4.3 - Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial do tipo tração pura (Trajetória A) para os modelos Jiang e Chaboche e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0 \%$	59
Figura 4.4 - Comparação das curvas de tensão-deformação estabilizada normais resultantes da simulação de carregamento uniaxial do tipo tração pura (Trajetória A) para os modelos Jiang e Chaboche usando o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0 \%$	60
Figura 4.5 - Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial do tipo torção pura (Trajetória B) para os modelos Jiang e Chaboche e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$	60
Figura 4.6 - Comparação das curvas de tensão-deformação cisalhantes resultantes da simulação de carregamento uniaxial do tipo torção pura (Trajetória B) para os modelos Jiang e Chaboche usando o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$	60
Figura 4.7 - Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para os modelos Jiang e Chaboche e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$	61
Figura 4.8 - Comparação das curvas de tensão-deformação normais resultantes da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para os modelos Jiang e Chaboche usando o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$	61
Figura 4.9 - Comparação das curvas de tensão-deformação cisalhantes resultantes da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para os modelos Jiang e Chaboche usando o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$	62
Figura 4.10 - Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial do tipo tração pura (Trajetória A) para os modelos Jiang e	

Chaboche e dados experimentais (Pereira, 2014) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173\%$ e $\gamma_a = 0\%$	62
Figura 4.11 - Comparação das curvas de tensão-deformação normais resultantes da simulação de carregamento uniaxial do tipo tração pura (Trajetória A) para os modelos Jiang e Chaboche usando o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173\%$ e $\gamma_a = 0\%$	63
Figura 4.12 - Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial do tipo torção pura (Trajetória B) para os modelos Jiang e Chaboche e dados experimentais (Pereira, 2014) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0\%$ e $\gamma_a = 0,3\%$	63
Figura 4.13 - Comparação das curvas de tensão-deformação cisalhantes resultantes da simulação de carregamento uniaxial do tipo torção pura (Trajetória B) para os modelos Jiang e Chaboche usando o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0\%$ e $\gamma_a = 0,3\%$	64
Figura 4.14 - Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para os modelos Jiang e Chaboche e dados experimentais (Pereira, 2014) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173\%$ e $\gamma_a = 0,3\%$	64
Figura 4.15 - Comparação das curvas de tensão-deformação normais resultantes da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para os modelos Jiang e Chaboche usando o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173\%$ e $\gamma_a = 0,3\%$	65
Figura 4.16 - Comparação das curvas de tensão-deformação cisalhantes resultantes da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para os modelos Jiang e Chaboche usando o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173\%$ e $\gamma_a = 0,3\%$	65
Figura 4.17 - Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para os modelos de Jiang e Chaboche e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4\%$ e $\gamma_a = 0,695\%$	67
Figura 4.18 - Comparação das curvas de tensão-deformação normais resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para os	

modelos de Jiang e Chaboche usando o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$	67
Figura 4.19 - Comparação das curvas de tensão-deformação cisalhantes resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para os modelos de Jiang e Chaboche usando o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$	68
Figura 4.20 - Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para os modelos de Jiang e Chaboche e dados experimentais (Jiang et al., 2007) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$	68
Figura 4.21 - Comparação das curvas de tensão-deformação normais resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para os modelos de Jiang e Chaboche usando o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173 \%$ e $\gamma_a = 0,3 \%$	69
Figura 4.22 - Comparação das curvas de tensão-deformação cisalhantes resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para os modelos de Jiang e Chaboche usando o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173 \%$ e $\gamma_a = 0,3 \%$	69
Figura 4.23 - Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para os modelos de Jiang e Chaboche e dados experimentais (FATEMI, 1998) para o aço SAE 1045HR, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,13 \%$ e $\gamma_a = 0,34 \%$	70
Figura 4.24 - Comparação das curvas de tensão-deformação normais resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para os modelos de Jiang e Chaboche usando o aço SAE 1045HR, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,13 \%$ e $\gamma_a = 0,34 \%$	70
Figura 4.25 - Comparação das curvas de tensão-deformação cisalhantes resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para os modelos de Jiang e Chaboche usando o aço SAE 1045HR, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,13 \%$ e $\gamma_a = 0,34 \%$	71

LISTA DE SÍMBOLOS

σ_{y0}	Tensão de escoamento.
σ_y	Limite de escoamento
β	Tensor cinemático
q	Tensão equivalente de von Mises
Φ	Função de escoamento
$\dot{\varepsilon}^p$	Lei de fluxo plástico
$\dot{\gamma}$	Multiplicador plástico
N	Vetor de Fluxo
H^k	Módulo de endurecimento cinemático
$\dot{\beta}$	Lei de endurecimento cinemático
$\dot{\varepsilon}^p$	Taxa de deformação plástica
b	Constante material
H_v	Função degrau unitária
ε^e	Tensores de deformação elástica
ε^p	Tensor de deformação plástica
σ	Tensor tensão de Cauchy
\mathbb{D}	Tensor elástico isotrópico
S	Tensor das tensões desviadoras
η	Tensor relativo

$J_2(\boldsymbol{\eta})$	Segundo invariante do tensor relativo
m_i	Constante material
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}$	Tensor das deformações elásticas tentativa
$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$	Tensor das tensões tentativa
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial}$	Tensor das deformações plásticas tentativa
$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{trial}$	Tensor cinemático tentativa
$\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial}$	Deformação plástica equivalente tentativa
$\boldsymbol{s}_{n+1}^{trial}$	Tensor das tensões desviadoras tentativa
G	Constante de Lamé (Módulo de cisalhamento)
$\boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ trial}$	Componente desviadora do tensor de deformações elásticas tentativa
$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$	Incremento de deformação plástica

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

Diante do cenário econômico das últimas décadas, as indústrias vêm investindo incessantemente na melhoria dos seus processos e produtos, sempre visando aumentar a sua produtividade e competitividade no mercado, porém sem comprometer a qualidade e preço dos seus produtos. Para exemplificar a evolução dos processos industriais, a Figura 1.1 traz uma comparação entre uma linha de montagem de automóveis do início do século passado e uma atual.

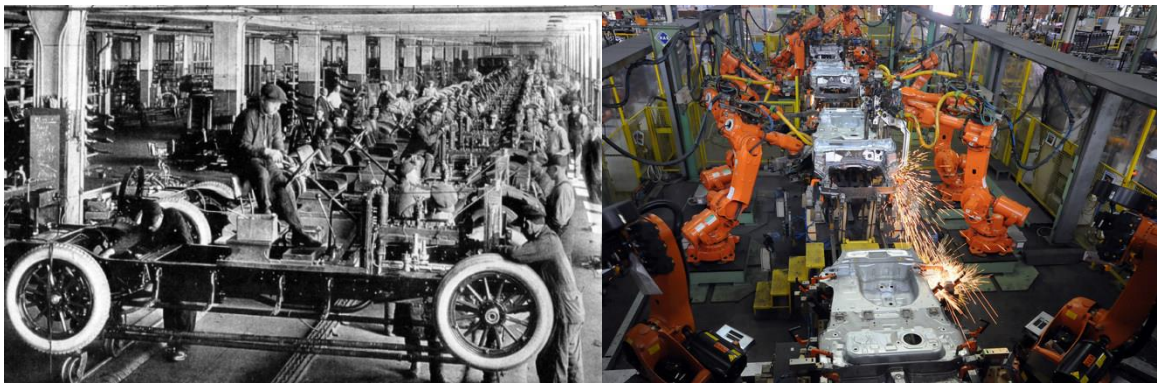


Figura 1.1 - Linha de montagem da Fiat.

Para que seja possível propor melhorias de projeto como, por exemplo, reduzir uma seção ou substituir a matérias primas de um componente, sem comprometer a segurança e funcionalidade do componente, é indispensável que se conheça, de maneira confiável, como o mesmo se comportará ao ser submetido aos esforços de trabalho para qual o mesmo foi projetado.

Com a função de descrever de forma confiável o comportamento elastoplástico de componentes submetidos a carregamentos, a mecânica computacional vem ganhando cada vez mais espaço no cenário industrial como uma ferramenta de auxílio no processo de desenvolvimento de projetos.

Por meio de mecânica computacional é possível realizar ensaios numéricos de estruturas complexas e prever o seu comportamento elastoplástico de maneira aproximada ainda durante a fase de projeto. Isso proporciona a oportunidade de

projetista identificar possíveis pontos críticos ou seções superdimensionadas antes mesmo da construção de protótipos, o que facilita alguma alteração de projeto.

A Figura 1.2 traz o exemplo do projeto de uma biela e, que por meio da mecânica computacional foi possível reduzir para da seção da haste da biela, sem comprometer a sua resistência.

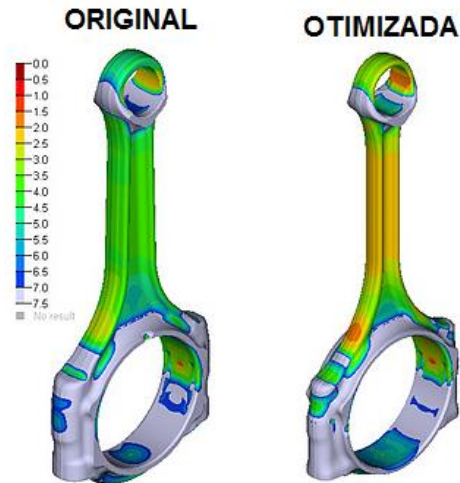


Figura 1.2 - Projeto de uma biela (Lapp e Hall, 2011).

A mecânica computacional calcula essa relação tensão/deformação por meio de formulações matemáticas que levam em conta as características do carregamento ao qual o material está sendo submetido e também as propriedades mecânicas do mesmo, essas formulações são conhecidas como modelos constitutivos.

Contudo, a utilização de modelos constitutivos requer cuidado e um certo grau de conhecimento por parte do usuário, pois apesar dos grandes avanços da mecânica computacional, os modelos constitutivos atuais são capazes de apresentar resultados confiáveis apenas para condições específicas de utilização. Eles ainda são dependentes de variáveis como tipo de carregamento, propriedades mecânicas do material e pontos de calibração.

Utilizar um modelo constitutivo fora das condições as quais ele foi desenvolvido pode gerar erros de dimensionamento do projeto. Por exemplo, o modelo de von Mises, usado como base para parte dos estudos relacionados a plasticidade e também na determinação de vida em fadiga, quando utilizado em condições de carregamento predominantemente cisalhante ele deixa de apresentar

resultados confiáveis, pois passa a fazer uma previsão otimista. O modelo passa a prever que o material teria uma capacidade de carga maior que a observada experimentalmente, gerando um dimensionamento incorreto da estrutura.

Quando se acrescenta o efeito de um carregamento cíclico a um modelo constitutivo elastoplástico que não foi formulado para tal aplicação, sua capacidade preditiva é prejudicada ainda mais, visto que a modelação do comportamento cinemático do material precisa também ser introduzida ao modelo. Um dos principais efeitos que neste caso precisa ser adicionado à lei de fluxo plástico é o chamado efeito de Bauschinger.

O efeito Bauschinger estabelece que ao deformar um metal em uma direção até que seja ultrapassado seu limite de escoamento e em seguida deforma-lo na direção contrária, seu limite de escoamento nesta última direção diminui. O motivo para que isto ocorra são adições e bloqueamentos de discordâncias no material. (Hoff, 1956).

Para análise de componentes submetidos à carregamentos cíclicos em regime plástico, destacam-se os modelos de plasticidade cíclica de Prager (1956), Armstrong-Frederick (1966) e Chaboche (1986), porém existem diversos outros modelos, como por exemplo os modelos de Ohno-Wang (1993) e Jiang (1996) que também serão explorados neste trabalho.

1.2 OBJETIVO

Este trabalho tem como objetivo implementar o modelo constitutivo endurecimento cinemático de Jiang para que com base em históricos de deformações cíclicas proporcionais e não proporcionais, previamente definidos, sejam gerados históricos de tensões que possam ser utilizados para alimentar modelos clássicos de estimativa de vida à fadiga.

Em seguida, utilizar os resultados encontrados pelo modelo de Jiang para realizar um estudo comparativo da sua capacidade preditiva em relação ao modelo de Chaboche e também dados experimentais retirados da literatura.

Para que estes objetivos sejam alcançados, tendo como base a formulação de von Mises, será elaborado um modelo numérico para a lei de endurecimento cinemático de Jiang utilizando a linguagem FORTRAN, que em seguida será implementado em uma ferramenta acadêmica de elementos finitos. Por meio deste modelo serão obtidos históricos de tensões para quatro diferentes históricos de deformações cíclicas, onde dois deles são uniaxiais e os outros dois multiaxiais, sendo um proporcional e o outro não proporcional, utilizando os aços 304, S460N e SAE 1045 HR.

2 REVISÃO BIBLIOGRAFICA

2.1 TEORIA DA PLASTICIDADE

Uma das características que fez com que os materiais metálicos ganhassem espaço foi a capacidade dos mesmos de resistirem à grandes deformações antes de se romperem, essa característica recebe o nome de ductilidade (CALLISTER, 2002). A ductilidade do material permite que o mesmo seja utilizado em diversos processos de fabricação aumentando assim seus usos e aplicações.

Ao ser submetido à carregamentos, os materiais dúcteis no geral apresentam uma relação entre a tensão aplicado e a deformação sofrida que pode ser representada pela curva apresentada pela Figura 2.1.

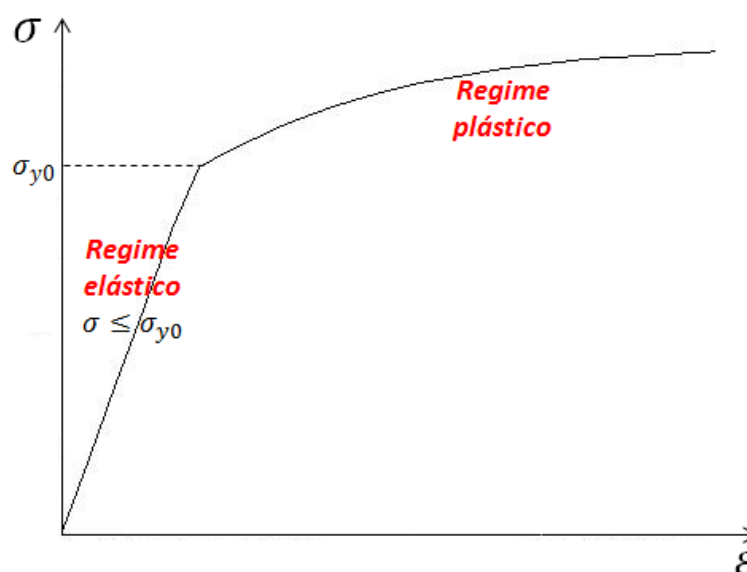


Figura 2.1 - Curva Tensão/Deformação genérica para um material dúctil.

Analisando a curva tensão/deformação apresentada, é possível dividir o processo de deformação do material em dois regimes distintos.

O primeiro regime é o elástico. Nesse regime o material apresenta um comportamento elástico linear e não sofre deformação permanente, isso significa que ao remover os carregamentos impostos ao material, a deformação presente no corpo desaparece quase que instantaneamente, não apresentando mudança considerável, a curto prazo, nas suas propriedades mecânicas.

Contudo, esse regime elástico é mantido apenas enquanto a tensão atuante no material é menor ou igual a sua tensão de escoamento σ_{y0} . Quando a tensão atuante no material ultrapassa a tensão de escoamento do mesmo, o material entra no segundo regime, o regime plástico.

O regime plástico é marcado pelo fato de que agora o material passa a apresentar deformações permanentes, deformações que se mantêm após a retirada do carregamento (Souza Neto et al, 2008). Esse tipo de deformação recebe o nome de deformação plástica. Outra característica do regime plástico é que agora o comportamento do material deixa de ser linear e prever o seu comportamento passa a ser possível apenas por meio da teoria matemática da Plasticidade.

Na engenharia, a maioria dos componentes estruturais são projetados para trabalhar dentro do regime elástico, onde a presença de deformações plásticas significa a falha do componente. Porém em determinadas situações a presença de deformações plásticas é bem vista, como por exemplo, durante um processo de estampagem ou forjamento, onde é necessário imprimir deformações permanentes no material para a confecção de peças, reforçando assim a importância da teoria da Plasticidade no dia a dia.

Um material ao se deformar plasticamente, tanto seu Módulo de Elasticidade com seu limite de escoamento, tende a aumentar, tornando o mesmo mais rígido, conseqüentemente sua capacidade de sofrer novas deformações sem que o mesmo venha a falhar diminui. Essa evolução do limite de escoamento do material acompanhada da evolução da deformação plástica recebe o nome de endurecimento.

O endurecimento é caracterizado pela dependência do limite de escoamento do material em relação ao histórico de carregamento e deformação plástica a que foi submetido e de modo geral o endurecimento pode ser modelado como plasticidade ideal, endurecimento isotrópico ou/e endurecimento cinemático. A seguir são apresentadas as características para cada modelação do endurecimento.

2.1.1 Plasticidade ideal

Na plasticidade ideal o limite de escoamento do material não varia com o nível de deformação plástica, logo não há endurecimento. Sendo assim, a superfície de escoamento, definida como o local em que a função de escoamento se iguala a

zero, não sofrendo nenhuma alteração, enquanto o limite de escoamento σ_y define o raio da superfície de escoamento, conforme mostrado na Figura 2.2.

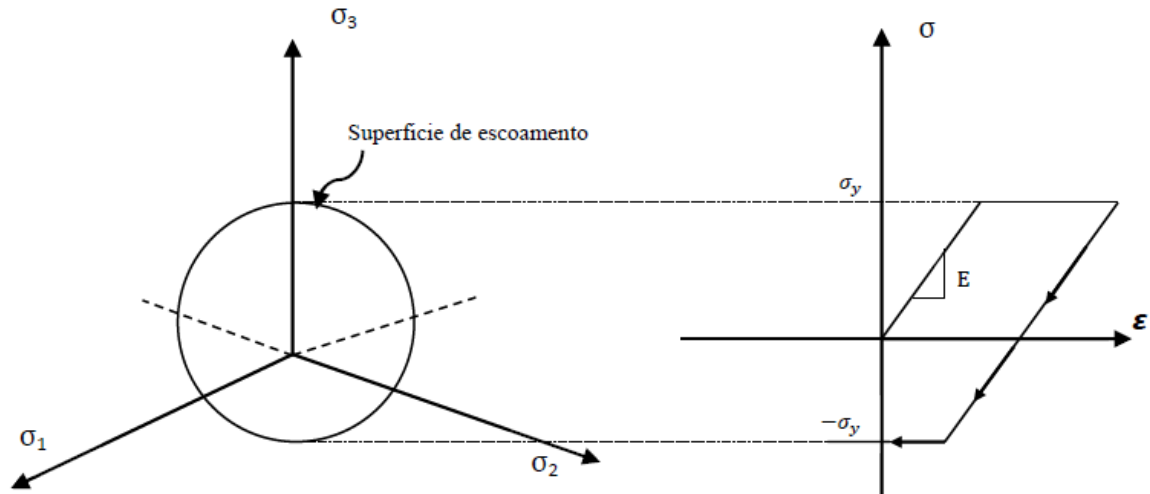


Figura 2.2 - Plasticidade ideal (Lopes, 2014).

2.1.2 Endurecimento isotrópico

No endurecimento isotrópico o limite de escoamento do material cresce, de forma linear ou não, fazendo com que a superfície de escoamento do material aumente durante o escoamento plástico, porém a mesma não sofre alteração de forma ou localização. Isso significa que caso o material seja carregado em uma direção até atingir o regime plástico e em seguida descarregado e recarregado no sentido inverso, ele produz um nível de tensão igual ao do carregamento realizado no sentido anterior. A Figura 2.3 representa o endurecimento isotrópico não linear de um material.

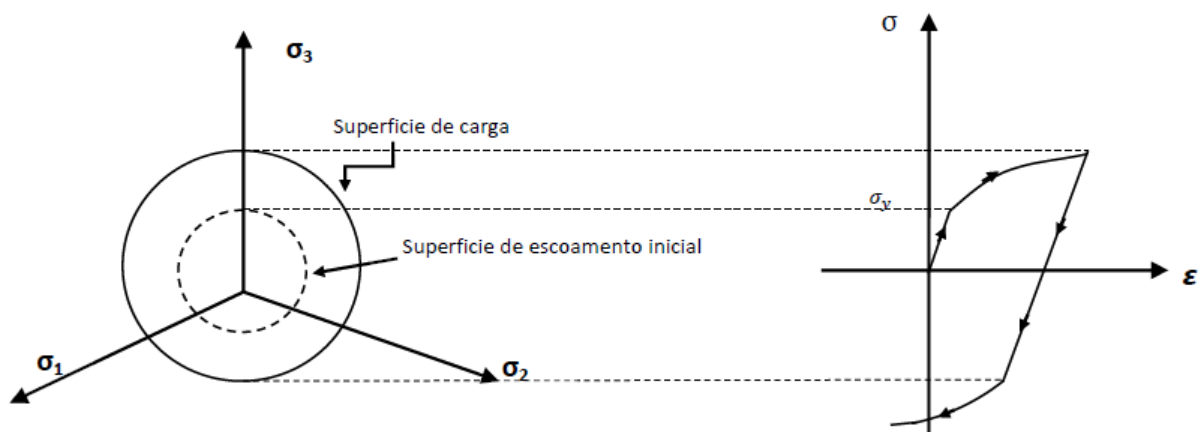


Figura 2.3 - Endurecimento isotrópico não linear (Lopes, 2014).

2.1.3 Endurecimento cinemático

No endurecimento cinemático após um material ser carregado além do seu limite de escoamento em uma certa direção, quando o mesmo material é carregado na direção oposta o seu limite de escoamento diminui, isso faz com que a superfície de escoamento do material preserve seu tamanho e apenas translade no espaço das tensões como um corpo rígido (Prager, 1955).

Esse efeito é chamado de Efeito Bauschinger e se torna bastante visível em matérias submetidos à regimes de carregamentos cíclicos, pois a reversão do carregamento influencia o limite de escoamento na direção oposta e faz com que a superfície de escoamento esteja constantemente se transladando (Souza Neto et al., 2008).

A Figura 2.4 ilustra o efeito do endurecimento cinemático não linear sobre a superfície de escoamento, e sobre a curva tensão/deformação em um ensaio uniaxial cíclico.

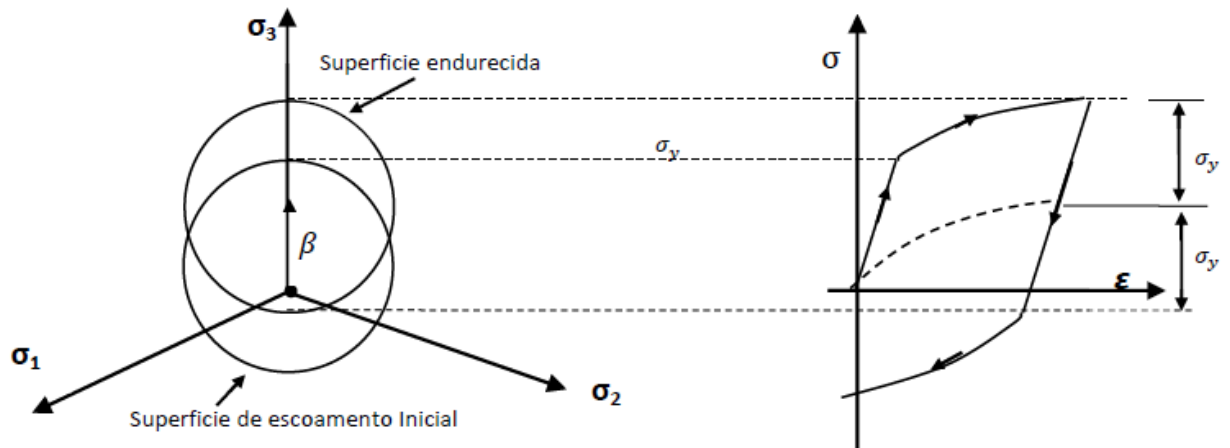


Figura 2.4 - Endurecimento cinemático não linear (Lopes, 2014).

A variável β que aparece na Figura 2.4 é o tensor cinemático que representa a translação da superfície de escoamento em relação ao ponto inicial do domínio elástico no espaço das tensões desviadoras.

2.2 MODELO MECANICO PARA PLASTICIDADE CÍCLICA

Considerando a hipótese de que o modelo seja independente do tempo para pequenas deformações, isto significa desconsiderar o efeito viscoelástico durante a análise, o processo de elaboração de modelos elastoplásticos para plasticidade cíclica com lei de endurecimento cinemático acoplado é composto por três itens básicos:

1- Função de escoamento

Para o desenvolvimento do trabalho, foi escolhida a função de escoamento de von Mises (1913) com a abordagem do endurecimento cinemático. A Função pode ser representada pela Equação 2.1:

$$\Phi = q - \sigma_{y0} \quad (2.1)$$

Onde q é a tensão equivalente de von Mises e σ_{y0} é a tensão de escoamento do material sob cargas de tração.

2- Lei de fluxo plástico

Considerando a hipótese da lei associativa para a evolução da deformação plástica que considera que a direção de evolução da deformação plástica é normal à superfície do domínio elástico, a lei de fluxo plástico $\dot{\varepsilon}^P$ representa a taxa de evolução da deformação plástica e é obtida com a derivada parcial da função de escoamento em relação ao tensor tensão, conforme a Equação 2.2.

$$\dot{\varepsilon}^P = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \quad (2.2)$$

Onde $\dot{\gamma}$ é o multiplicador plástico. Para o caso específico da superfície de escoamento de von Mises, a derivada parcial da função de escoamento em relação ao tensor tensão recebe o nome de Vetor de Fluxo N e é definida pela Equação 2.3:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = N \quad (2.3)$$

3- Lei de endurecimento cinemático

Para elaborar um modelo constitutivo para simular componentes submetidos à plasticidade cíclica é indispensável que seja incluído o Efeito Bauschinger na análise por meio da modulação matemática do endurecimento cinemático realizada com a introdução do tensor cinemático β .

Para a elaboração de um modelo matemático consistente, é necessário definir a taxa de variação do tensor cinemático em relação ao tempo, também conhecida como lei de endurecimento cinemático.

De uma maneira genérica, a lei endurecimento cinemático pode ser definida em função das variáveis de estado, conforme a Equação 2.4:

$$\dot{\beta} = g(\sigma, \varepsilon^p, \beta, \dot{\varepsilon}^p, etc) \quad (2.4)$$

2.3 LEIS DE ENDURECIMENTO CINEMATICO

Na literatura atual existem inúmeros modelos constitutivos capazes de reproduzir de maneira confiável o comportamento de um material dúctil submetido à carregamentos cíclicos. Em muitos destes modelos o cálculo do módulo plástico está acoplado com sua regra de encruamento cinemático pela condição de consistência da superfície de escoamento. Estes modelos são chamados de modelos acoplados.

Dentre os modelos acoplados existentes, destacam-se os modelos de Prager (1956), Armstrong-Frederick (1966), Chaboche (1989), Ohno-Wang (1993) e Jiang (1996).

2.3.1 Prager Linear

Em 1956 Prager propôs uma lei de endurecimento cinemático usada para descrever a resposta plástica dos materiais submetidos à carregamentos cíclicos. Ela se baseia em uma relação linear entre a taxa de variação do tensor cinemático e a taxa de variação da deformação plástica equivalente, com uma constante de

proporcionalidade igual ao módulo de endurecimento cinemático H^k . Portanto, quanto maior for a evolução da deformação plástica equivalente, maior será a taxa de variação do tensor cinemático.

A lei de endurecimento cinemático de Prager pode ser definida pela Equação 2.5 como sendo:

$$\dot{\beta} = \frac{2}{3} H^k \dot{\epsilon}^p \quad (2.5)$$

A lei proposta por Prager cumpre bem o seu papel de reproduzir matematicamente o efeito Bauschinger, porém, devido a sua simplicidade, deixa muito a desejar com relação à sua capacidade de prever o comportamento elastoplástico do material, conforme pode se notar na Figura 2.5.

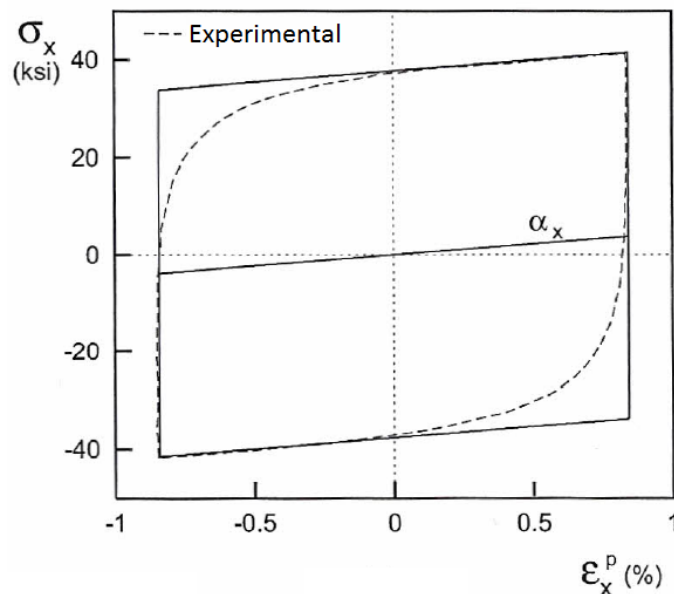


Figura 2.5 - Resultados do modelo de Prager para laço de histerese estabilizado em deformação controlada (Bari e Hassan, 2000).

A linearidade da relação tensão/deformação obtida pela lei de Prager impede que o modelo seja capaz de reproduzir de maneira adequada a parte inicial não linear da curva de histerese experimental.

Além disso, para um ciclo de tensão uniaxial com uma tensão média prescrita, o modelo perder a capacidade de simular o colapso incremental do material, também conhecido como *ratcheting*, pois o modelo não é capaz de diferenciar as formas das curvas de histerese para carregamento e carregamento reverso e

consequentemente, o modelo sempre produz um laço de histerese fechado (Bari e Hassan, 2000), conforme apresentado na Figura 2.6:

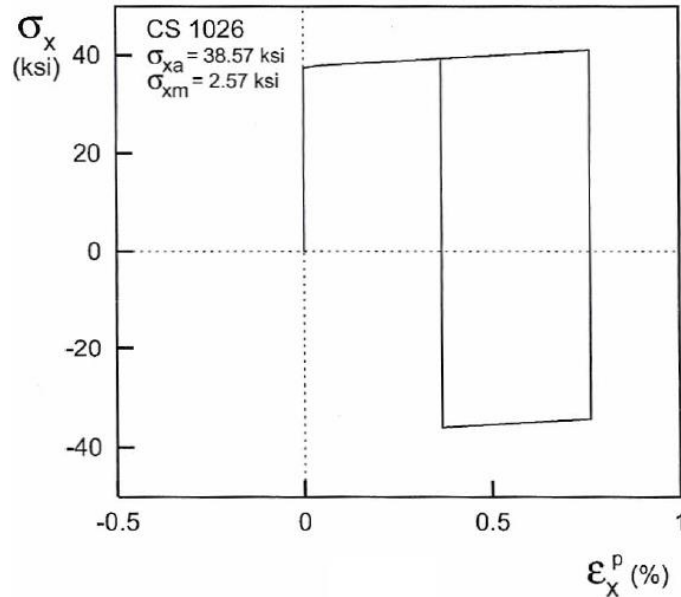


Figura 2.6 - Resultados do modelo de Prager para laço de histerese em tensão controlada com tensão média sobreposta (Bari e Hassan, 2000).

2.3.2 Armstrong-Frederick

Em 1966, Armstrong e Frederick propuseram a introdução de um termo de saturação não linear à lei de Prager com o intuito de descrever de maneira mais apropriada a curva tensão/deformação dos carregamentos cíclicos.

A lei de endurecimento cinemático de Armstrong-Frederick pode ser definida pela Equação 2.6 como sendo:

$$\dot{\beta} = \frac{2}{3} H^k \dot{\epsilon}^p - \dot{\epsilon}^p b \beta \quad (2.6)$$

Onde $\dot{\epsilon}^p$ representa a taxa de deformação plástica b é uma constante material.

Ao introduzir está lei de endurecimento cinemático ao critério de escoamento de von Mises a saturação corresponde a um valor máximo para o módulo do tensor cinemático β , a partir do qual o material passa a se comportar como perfeitamente plástico (Souza Neto, 2008).

Assim, quanto maior β , menor será sua evolução, o que faz com que o encruamento diminua conforme β aumenta, dando a curva tensão/deformação obtida com o modelo um formato exponencial (Armstrong e Frederick, 1966).

A Figura 2.7 compara a simulação deste modelo para um laço de histerese estável com os resultados experimentais.

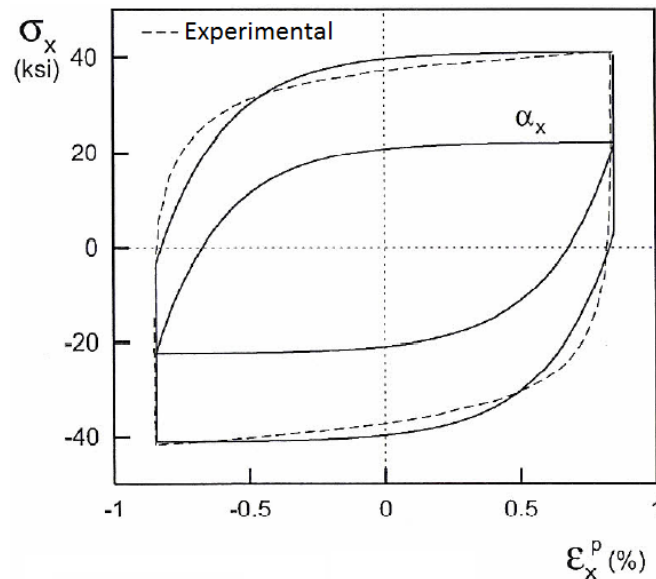


Figura 2.7 - Resultados do modelo de Armstrong-Frederick para laço de histerese estável com deformação controlada (Bari e Hassan, 2000).

Observa-se na Figura 9 que apesar da considerável melhora do ajuste da curva tensão/deformação em relação ao modelo de Prager, a utilização de apenas uma equação exponencial não é capaz de representar de maneira adequada a curva experimental. Aumentar o valor de H^k melhoraria o ajuste no início da deformação plástica, mas o resto da curva ficaria prejudicada (Bari e Hassan, 2000).

Outra vantagem da utilização do modelo não linear de Armstrong-Frederick em relação ao de Prager é a capacidade do modelo de descrever o colapso incremental do material sob carregamentos cíclicos não simétricos, como por exemplo, tensão/torção (Chaboche, 1989).

Agora no modelo de Armstrong e Frederick o termo de retorno produz mudança nas formas entre os caminhos de carregamento e carregamento reverso. Isto significa que o laço não fecha e resulta em colapso incremental conforme representado na Figura 2.8.

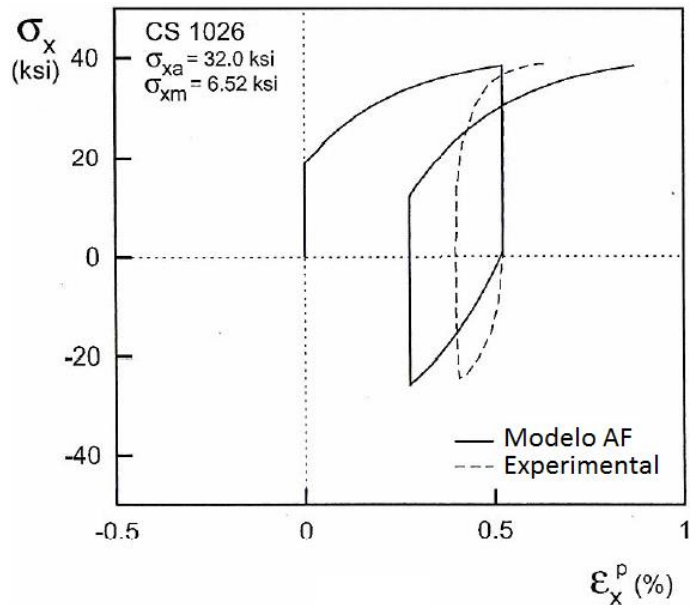


Figura 2.8 - Resultados do modelo de Armstrong- Frederick para laço de histerese com tensão controlada (Bari e Hassan, 2000).

Entretanto, observando a Figura 10 é possível notar que o laço de histerese produzido por este modelo diverge significativamente do experimental, superestimando a deformação produzida a cada ciclo.

Outra limitação do modelo de Armstrong-Frederick consiste na incapacidade de apresentar um módulo plástico constante em grandes deformações, seguindo a tendência dos experimentos. O modelo sempre apresenta módulo plástico igual a zero em grandes deformações (Bari e Hassan, 2000).

2.3.3 Chaboche

O modelo de Armstrong-Frederick sem dúvidas provocou um grande avanço na área de simulações de respostas de plasticidade cíclica dos materiais, contudo, como demonstrado por Bari e Hassan (2000), ele não é robusto o bastante para reproduzir as respostas de colapso incremental com boa correlação experimental.

Sendo assim, em 1989, Chaboche propôs seu modelo que se baseava no somatório de varias leis de Armstrong-Frederick onde cada lei teria o seu proposito, conforme apresentado na Equação 2.7:

$$\dot{\beta} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{3} H_i^k \dot{\epsilon}^p - \dot{\epsilon}^p b_i \beta_i \right) \quad (2.7)$$

Onde n é o número desejado de termos no somatório.

O modelo de Chaboche dá uma maior flexibilidade ao ajuste dos parâmetros materiais H^k e b , mantendo assim as vantagens do modelo de Armstrong-Frederick, inclusive a não linearidade, e diminuindo os efeitos superestimados por ele.

A Figura 2.9 compara o modelo de Chaboche usando três regras decompostas com as tendências experimentais representadas pelas linhas tracejadas.

Comparando as Figuras 2.8 e 2.9, é possível notar que a utilização de apenas três regras na simulação do modelo de Chaboche já é capaz de gerar um ajuste mais preciso da curva de histerese em comparação ao modelo de Armstrong-Frederick, pois cada uma das três regras teria a função de corrigir os três pontos de falha da curva de Armstrong-Frederick: O módulo inicial elevado no começo do escoamento, o segmento de módulo constante a uma faixa de deformação mais alta e o breve segmento não linear (Chaboche, 1989).

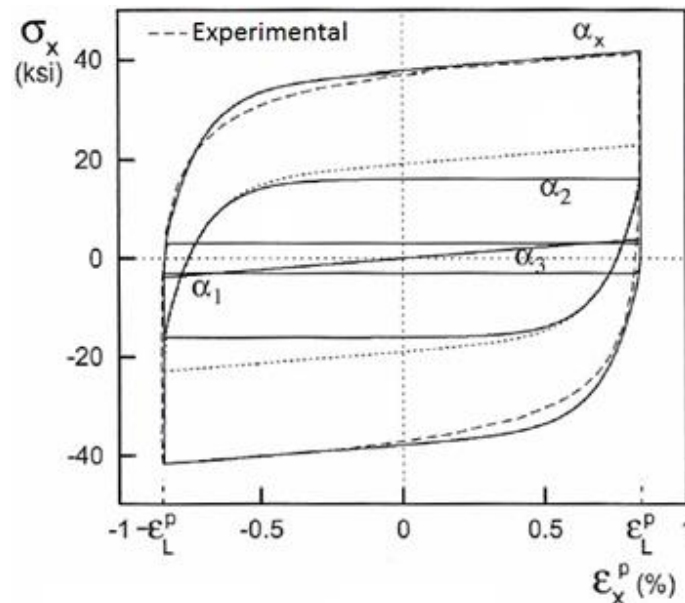


Figura 2.9 - Resultados do modelo de Chaboche com três regras decompostas para laço de histerese estável com deformação controlada (Bari e Hassan, 2000).

Na Figura 2.9, a primeira regra α_1 simula o começo do endurecimento com um módulo muito grande e que faz com que a curva estabilize rapidamente, a

segunda regra α_2 simula a pequena parte não linear da curva de histerese estável e a terceira regra α_3 simula uma regra de endurecimento linear com o intuito de representar a parte linear subsequente da curva de histerese numa faixa de deformação alta.

Quanto a capacidade do modelo de Chaboche em descrever o efeito de *ratcheting*, ela melhora consideravelmente em relação ao modelo de Armstrong-Frederick, como pode ser observado na Figura 2.10.

O laço de histerese simulado é bem melhor que do apresentado pelo modelo original de Armstrong-Frederick e está mais próximo do laço experimental. Mas este modelo ainda superestima a deformação de colapso incremental ao término do primeiro ciclo.

Mesmo utilizando três regras, as simulações das curvas de histerese ainda divergem levemente das curvas experimentais, mas isto pode ser corrigido utilizando somando-se mais regras cinemáticas. Contudo, a introdução de mais regras ao somatório faz com que sejam necessárias mais informações a respeito do material (Bari e Hassan, 2000).

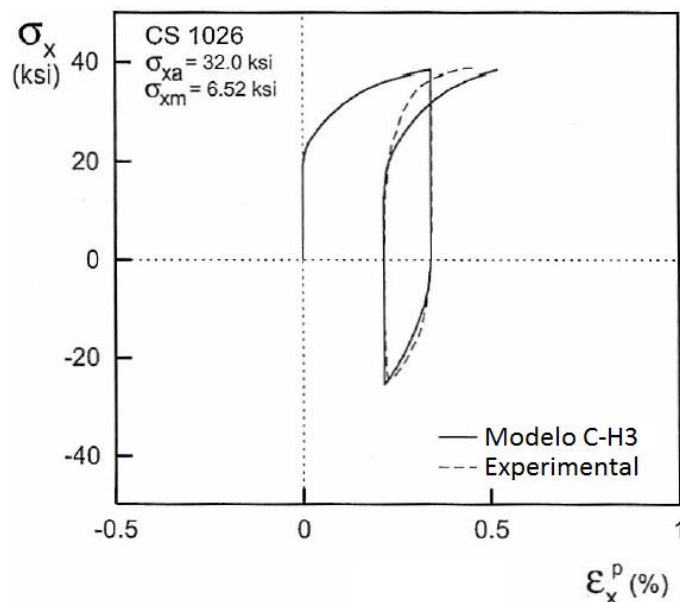


Figura 2.10 - Resultados do modelo de Chaboche com três regras decompostas para laço de histerese estável com tensão controlada (Bari e Hassan, 2000).

Na lei linear de Prager, a única constante material presente era o módulo de endurecimento cinemático H^k e, portanto apenas uma constante precisa ser calibrada de acordo com curvas experimentais. Na lei de Armstrong-Frederick, há a

introdução de uma nova constante material b e assim passa a ser necessário calibrar o modelo para duas constantes: b e H^k .

Já no modelo de Chaboche, haverá $2 \times n$ termos a serem calibrados. Geralmente, fazendo-se n igual a três resulta em boa correlação do modelo com os dados experimentais. Assim, seria necessário calibrar o modelo para 6 constantes materiais (Chaboche, 1986).

Outra desvantagem do modelo de Chaboche, assim com dos outros dois modelos já apresentados neste trabalho, é o fato dele apresentar pouca sensibilidade aos efeitos de carregamentos não proporcionais (Bari e Hassan, 2000).

Um carregamento não proporcional pode ser definido como qualquer histórico de tensão onde a sua razão e direção das tensões principais, resultantes de um carregamento cíclico, variam ao longo do tempo (Pereira, 2014).

Este conceito fica mais fácil de ser entendido quando se representa os históricos de carregamento em relação ao tempo, conforme apresentado na Figura 2.11.

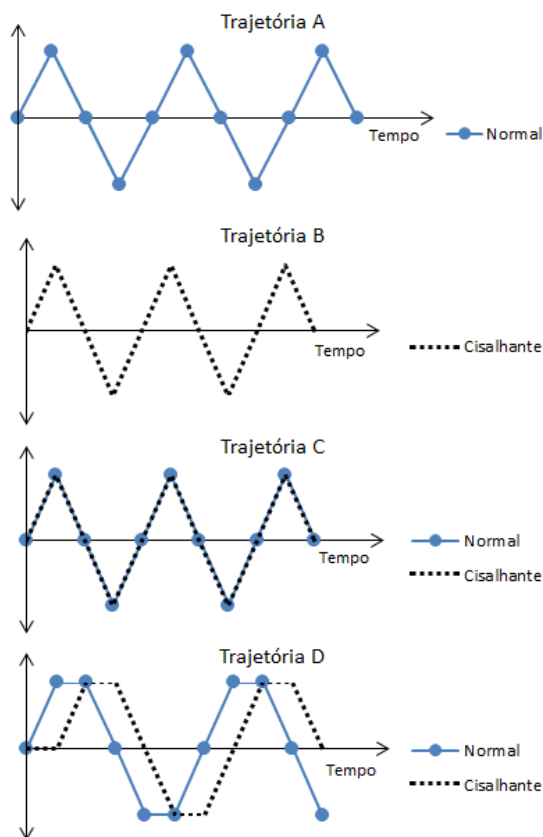


Figura 2.11 - Exemplos de carregamentos proporcionais (A, B e C) e não proporcional (D).

A Figura 2.11 apresenta quatro exemplos de históricos de carregamento distintos, onde dois deles são uniaxiais proporcionais (Trajetórias A e B), um é multiaxial proporcional (Trajetórias C) e um é multiaxial não proporcional (Trajetória D).

A trajetória D é classificada como não proporcional, pois nelas as curvas dos carregamentos estão defasadas uma em relação à outra. Ao contrario da trajetória C que é proporcional, na trajetória D os picos dos carregamentos não se coincidem, configurando assim um carregamento multiaxial não proporcional.

2.3.4 Ohno-Wang

Em 1993, Ohno e Wang propuseram um modelo, que assim como o modelo de Chaboche, é definido pela superposição de várias regras de endurecimento cinemático, porém no modelo proposto por Ohno e Wang cada regra de endurecimento decomposta simula um endurecimento linear com uma inclinação H_i^k até alcançar o valor crítico H_i^k/b_i conforme a Equação 2.8:

$$\dot{\beta} = \sum_{i=1}^n \frac{2}{3} H_i^k \dot{\epsilon}^p - b_i \beta_i \langle \dot{\epsilon}^p \otimes \frac{\beta_i}{q} \rangle H_v \{ \beta_i^2 - (H_i^k/b_i)^2 \} \quad (2.8)$$

Onde, H_v representa uma função degrau unitária.

No modelo de Ohno-Wang após o valor crítico da inclinação de cada regra de endurecimento ser alcançada o seu efeito é anulado pela função degrau. Isso faz com que a o modelo se torne um modelo multilinear em casos uniaxiais, dividindo assim a curva tensão deformação em vários segmentos lineares (Ohno e Wang, 1993), conforme apresentado na Figura 2.12.

Contudo, como os modelos multilineares possuem a característica de gerar laços de histerese fechados quando submetidos a ciclos de tensão uniaxial, eles não produzem nenhum colapso incremental uniaxial durante as simulações.

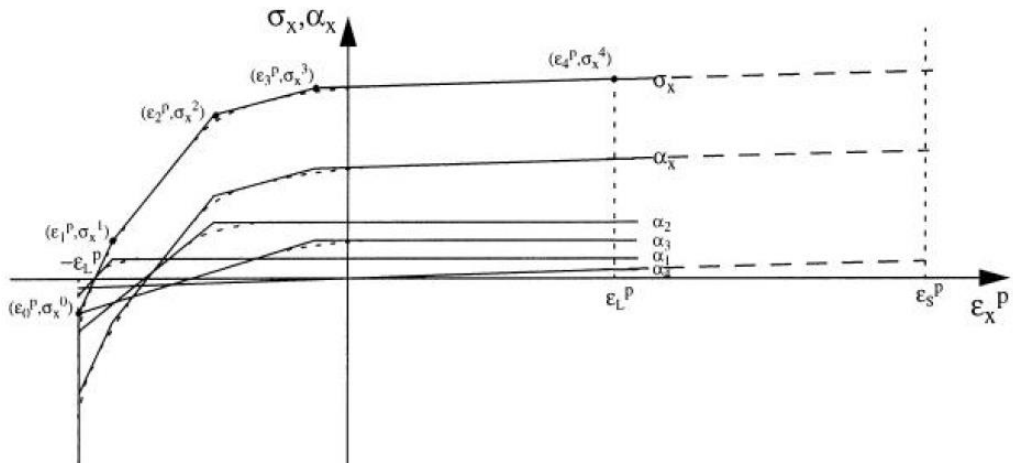


Figura 2.12 - Exemplo de modelo multilinear (Bari e Hassan, 2000).

Para eliminar essa limitação, Ohno e Wang introduziram uma leve não linearidade para cada regra na transição do encruamento linear para o estado crítico estabilizado ao substituir a função degrau unitária por um multiplicador com potência m_i , conforme a Equação 2.9:

$$\dot{\beta} = \sum_{i=1}^n \frac{2}{3} H_i^k \dot{\epsilon}^p - b_i \beta_i \left\langle \dot{\epsilon}^p \otimes \frac{\beta_i}{q} \right\rangle \left(\frac{q}{H_i^k / b_i} \right)^{m_i} \quad (2.9)$$

A introdução das não linearidades impede que o laço de histerese com tensão controlada se feche e permite que o colapso incremental uniaxial ocorra.

Pelo fato de várias regras de endurecimento essencialmente lineares serem utilizadas na simulação de uma curva de histerese não linear, este modelo acaba precisando utilizar um número grande de regras decompostas para produzir uma boa representação da curva de histerese uniaxial estável. Contudo, quando o número suficiente de seguimentos é escolhido, a simulação do laço de histerese apresenta bons resultados (Bari e Hassan, 2000), conforme apresentado na Figura 2.13.

Outro ponto positivo do modelo de Ohno-Wang é a sua melhor precisão na simulação do colapso incremental observado experimentalmente após vários ciclos de carga mesmo em casos multiaxiais.

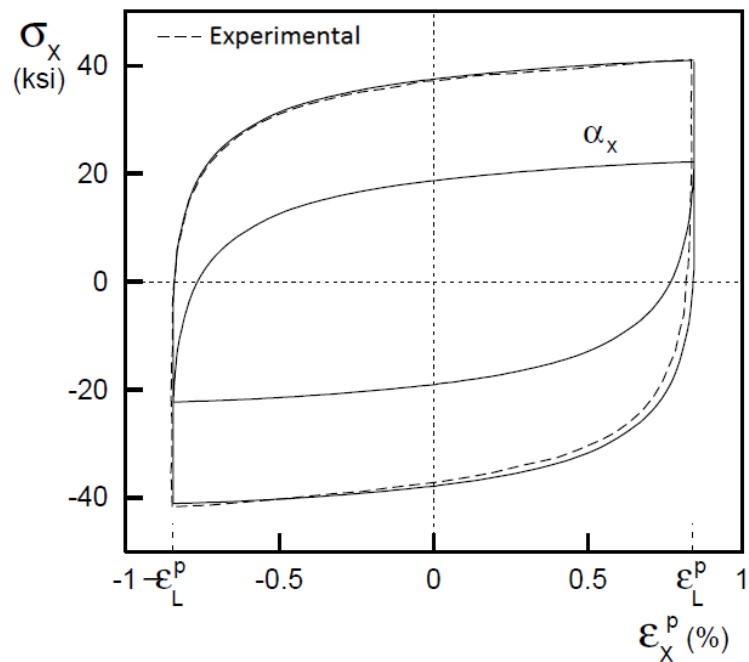


Figura 2.13 - Resultados do modelo de Ohno-Wang para laço de histerese estável com deformação controlada (Bari e Hassan, 2000).

Com a seleção apropriada das constantes de material, o modelo de Ohno-Wang pode fornecer previsões do colapso incremental com uma concordância maior com os resultados experimentais do que modelos como o de Chaboche, como apresentado na Figura 2.14.

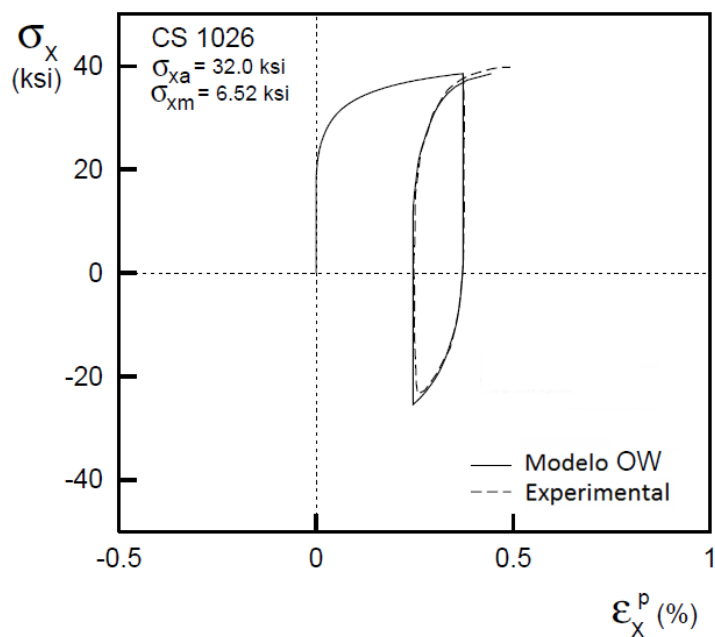


Figura 2.14 - Resultados do modelo de Ohno e Wang para laço de histerese estável com tensão controlada (Bari e Hassan, 2000).

O fato do modelo usar o termo $\langle \dot{\epsilon}^p \otimes \frac{\beta_i}{q} \rangle$ em lugar de $\dot{\epsilon}^p$ na regra de Armstrong e Frederick melhora a capacidade do modelo de Ohno-Wang em simular o colapso incremental em casos multiaxiais, pois mesmo embora ambos os termos produzirem o mesmo resultado em casos uniaxiais, eles produzem diferentes direções de endurecimento cinemático em casos de carregamento multiaxial (Ohno e Wang, 1993).

Contudo, a grande falha do modelo Ohno-Wang continua sendo a incapacidade em descrever corretamente o colapso incremental para os carregamentos não proporcionais (Jiang e Sehitoglu, 1994).

2.3.5 Jiang

Compreender e ser capaz de reproduzir com um certo grau de confiabilidade resultados de um carregamento não proporcional é de extrema importância para a engenharia, uma vez que muitos componentes encontrados no dia a dia estão submetidos à carregamento não proporcionais. Alguns componentes que podem ser usados como exemplo são os pistões dos motores a combustão e o próprio virabrequim, conforme apresentado na Figura 2.15.

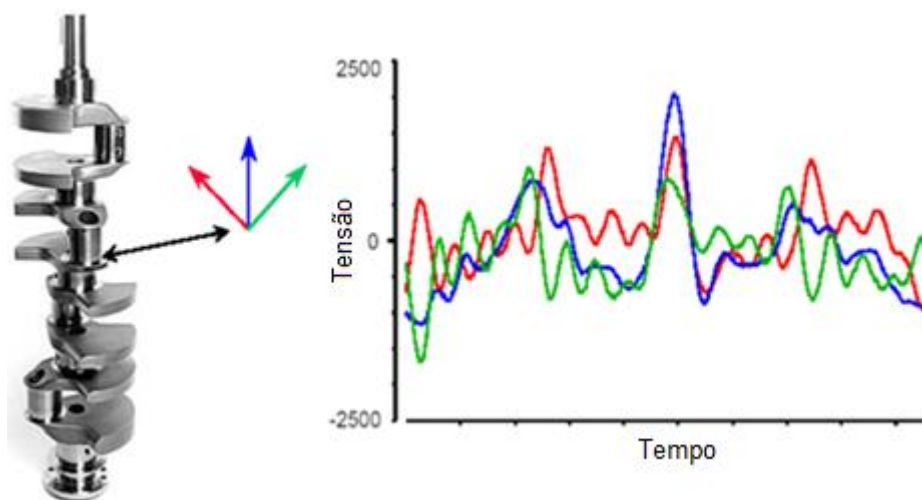


Figura 2.15 – Exemplo de carregamento não proporcional aplicado sobre um ponto material de um virabrequim durante o funcionamento do motor (eFatigue LLC, 2008).

Em 1996, Jiang e Sehitoglu propuseram uma melhoria para o modelo multilinear de Ohno-Wang com o objetivo de desenvolver um modelo mais

consistente sob condições de carregamentos não proporcionais, conforme a Equação 2.10:

$$\dot{\beta} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{2}{3} H_i^k \dot{\epsilon}^p - b_i \left(\frac{q}{H_i^k/b_i} \right)^{m_i} \dot{\epsilon}^p \beta_i \right] \quad (2.10)$$

Para carregamentos proporcionais, os modelos de Jiang e Ohno-Wang apresentam resultados próximos, contudo o modelo de Jiang ganha importância quando são analisadas condições de carregamento não proporcional, sendo o modelo de Jiang capaz de prever o colapso incremental nesses tipos de carregamentos (Bari e Hassan, 2000).

Isso ocorre, pois no modelo de Jiang, independente da posição do tensor cinemático na superfície de escoamento do material, geometricamente, o $\dot{\beta}_i$ sempre gera um ângulo obtuso com o β_i , não comprometendo assim a capacidade preditiva do modelo em carregamentos não proporcionais (Jiang e Sehitoglu, 1996a).

2.4 SUPERFÍCIE DE VON MISES COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO DE JIANG

Esta seção trata da formulação do modelo matemático elastoplástico para o caso tridimensional, considerando a superfície de escoamento de von Mises e o modelo de endurecimento cinemático proposto por Jiang apresentado na seção anterior. Assim como exposto na seção 2.2, o modelo será considerado independente do tempo tendo como apresentado no trabalho de Simo e Hughes (1998).

Para o equacionamento do modelo serão utilizadas as equações apresentadas na seção 2.2 na determinação da função de escoamento, vetor de fluxo, lei de fluxo plástico e leis de evolução das variáveis internas.

1- Decomposição aditiva das deformações

Dentro do contexto de pequenas deformações, assume-se que a deformação total sofrida por um corpo possa ser decomposta em duas parcelas, uma elástica e

outra plástica. Esta decomposição aditiva pode ser representada pela soma dos tensores de deformação elástica $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ e deformação plástica $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, conforme a Equação 2.11:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.11)$$

2- Lei elástica

Para este estudo, assume-se um comportamento elástico isotrópico para a relação tensão/deformação durante o regime elástico, podendo ser descrito pela lei de Hooke generalizada, conforme a Equação 2.12:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.12)$$

Onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor tensão de Cauchy e \mathbb{D} o tensor elástico isotrópico.

1. Função de escoamento

Conforme apresentado na seção 2.2, a função de escoamento de von Mises (1913) é definida pela Equação 2.1 com a abordagem do endurecimento cinemático.

$$\Phi = q - \sigma_{y0} \quad (2.1)$$

Contudo, devido a introdução do efeito do endurecimento plástico, a tensão equivalente de von Mises passa a ser definida com base no segundo invariante do tensor relativo $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{S} - \boldsymbol{\beta}$ (onde $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{I}$ é o tensor das tensões desviadoras) conforme a Equação 2.13:

$$q = \sqrt{3J_2(\boldsymbol{\eta})} \quad (2.13)$$

Por sua vez, o segundo invariante $J_2(\boldsymbol{\eta})$ é definido pela Equação 2.14:

$$J_2(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta} \quad (2.14)$$

Substituindo a Equação 2.14 na Equação 2.13, a tensão equivalente de von Mises passa a ser definida pela Equação 2.15:

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}} \quad (2.15)$$

Substituindo a Equação 2.15 na Equação 2.1, a função de escoamento de von Mises pode ser reescrita na forma da Equação 2.16:

$$\Phi = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}} - \sigma_{y0} \quad (2.16)$$

2. Vetor de fluxo

Substituindo a Equação 2.16 na Equação 2.3, é possível calcular o Vetor de Fluxo para o modelo que está sendo elaborado, conforme apresentado na Equação 2.17:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \left(\sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}} - \sigma_{y0} \right)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.17)$$

Separando os termos dentro do parêntese, tem-se a Equação 2.18:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial \sigma_{y0}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.18)$$

Onde a derivada do limite de escoamento pelo tensor tensão é dada pela Equação 2.19:

$$\frac{\partial \sigma_{y0}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad (2.19)$$

Substituindo a Equação 2.19 na Equação 2.18, obtém-se a Equação 2.20:

$$N = \frac{\partial \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.20)$$

Onde a derivada da tensão equivalente de von Mises em relação ao tensor tensão é dada pela Equação 2.21:

$$\frac{\partial \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}}} \frac{\partial (\boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.21)$$

Que por sua vez, a derivada da operação de dupla contração entre dois vetores relativos em relação ao tensor tensão é dada pela Equação 2.22:

$$\frac{\partial (\boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 2 \boldsymbol{\eta} : \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.22)$$

Onde a derivada do termo relativo em relação ao tensor função é dada pela Equação 2.23:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial [\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} - \boldsymbol{\beta}]}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.23)$$

Onde as derivadas do tensor tensão, traço do tensor tensão e tensor cinemático em relação ao tensor tensão são dadas respectivamente pelas Equações 2.24, 2.25 e 2.26:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{I}^4 \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{I} \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma} = 0 \quad (2.26)$$

Substituindo as Equações 2.24, 2.25 e 2.26 na Equação 2.23, ela pode ser reescrita na forma da Equação 2.27:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \sigma} = \mathbb{I}^4 - 1/3 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (2.27)$$

Substituindo a Equação 2.27 na Equação 2.22, ela pode ser reescrita como a Equação 2.28:

$$\frac{\partial(\eta:\eta)}{\partial \sigma} = 2\eta : (\mathbb{I}^4 - 1/3 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) = 2\eta \quad (2.28)$$

Por fim, substituindo a Equação 2.28 na Equação 2.21 obtém-se o Vetor de Fluxo do modelo, conforme apresentado na Equação 2.29:

$$\mathbf{N} = \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2} \eta:\eta}} 2\eta \quad (2.29)$$

Realizando alguns ajustes na Equação 2.29 ela pode ser reescrita na forma da Equação 2.30.

$$\mathbf{N} = \frac{3\eta}{2q} \quad (2.30)$$

3. Lei de fluxo plástico

A lei de fluxo plástico para o modelo é encontrada substituindo o a Equação 2.30 na 2.2, conforme apresentado pela Equação 2.31:

$$\dot{\varepsilon}^P = \dot{\gamma} \frac{3\eta}{2q} \quad (2.31)$$

4. Evolução das outras variáveis internas

Para o caso do Modelo Matemático abordado neste trabalho, além da Lei de evolução de Fluxo Plástico, se faz necessário também a definição da lei de evolução para mais duas variáveis internas. Estas variáveis são a deformação plástica equivalente $\bar{\epsilon}^P$ e o tensor cinemático do material β .

A lei de evolução da para a deformação plástica equivalente $\bar{\epsilon}^P$ é apresentada abaixo pela Equação 2.32:

$$\dot{\bar{\epsilon}}^P = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^P : \dot{\epsilon}^P} \quad (2.32)$$

Substituindo na Equação 2.32 a Equação 2.31, obtém-se a Equação 2.33:

$$\dot{\bar{\epsilon}}^P = \sqrt{\frac{2}{3} \left(\dot{\gamma} \frac{3\eta}{2q} : \dot{\gamma} \frac{3\eta}{2q} \right)} \quad (2.33)$$

Realizando as devidas manipulações a Equação 2.33 pode ser escrita na forma da Equação 2.34.

$$\dot{\bar{\epsilon}}^P = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2} \eta : \eta \frac{1}{q^2}} \quad (2.34)$$

Que por sua vez pode ser escrita na forma da Equação 2.35.

$$\dot{\bar{\epsilon}}^P = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{\frac{3}{2} \eta : \eta}{\frac{3}{2} \eta : \eta}} \quad (2.35)$$

Substituindo na Equação 2.35 a Equação 2.15, chega-se a conclusão que a lei de evolução da para a deformação plástica equivalente tem o mesmo valor do multiplicador plástico, conforme apresentado na Equação 2.36.

$$\dot{\bar{\epsilon}}^P = \dot{\gamma} \quad (2.36)$$

Já a lei de evolução para o endurecimento cinemático utilizando a metodologia de Jiang pode ser dada pela Equação 2.37:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^n \frac{2}{3} H_i^k \boldsymbol{\varepsilon}^P - b_i \boldsymbol{\beta}_i \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P \left(\frac{q_i b_i}{H_i^k} \right)^{m_i} \quad (2.37)$$

Onde o expoente m_i é dado pela Equação 2.38:

$$m_i = A_{oi} \left\langle 2 - \mathbf{N} : \frac{\boldsymbol{\beta}_i}{q_i} \right\rangle \quad (2.38)$$

Com o intuito de facilitar a elaboração do modelo numérico, a partir dessa etapa do trabalho, será adotada a estratégia de simplificação para o modelo de Jiang onde o expoente m_i deixa de ser considerado como uma função, conforme apresentado pela Equação 2.38, e passa a assumir valores constantes durante as simulações, passando a ser tratado, portanto como mais uma constante material envolvida na análise.

5. Lei de complementaridade de Kuhn-Tucker

A condição de complementaridade de Kuhn-Tucker é parte fundamental da modelagem do comportamento elastoplástico e estabelece que a evolução da deformação pode ocorrer somente quando o estado de tensão estiver definido sobre a superfície de escoamento $\Phi = 0$. Formalmente, essa relação é expressa como:

$$\dot{\gamma} \geq 0; \Phi \leq 0; \dot{\gamma} \Phi = 0$$

Assim, se $\Phi < 0$, correspondendo à situação em que o estado de tensão esteja definido no interior do domínio elástico, então o produto $\dot{\gamma} \Phi = 0$ impõe $\dot{\gamma} = 0$, isto é, não se observa evolução da deformação plástica. Por outro lado, se $\dot{\gamma} > 0$, isto é, se há evolução da deformação plástica, então necessariamente $\Phi = 0$, ou seja, o estado de tensão está definido sobre a superfície de escoamento.

O modelo constitutivo apresentado neste capítulo pode ser escrito de maneira resumida conforme o Quadro 2.1.

Quadro 2.1 - Modelo constitutivo com função de escoamento de von Mises e endurecimento cinemático de Jiang.

1.	Decomposição aditiva das deformações	$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$
2.	Lei Elástica	$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$
3.	Função de Escoamento	$\phi = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}} - \sigma_{y0}$ $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{s} - \boldsymbol{\beta}$
4.	Lei de Fluxo Plástico	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{3\boldsymbol{\eta}}{2q}$
	E Lei de Evolução das Outras Variáveis Internas	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}$
		$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^n \frac{2}{3} H_i^k \boldsymbol{\varepsilon}^p - b_i \boldsymbol{\beta}_i \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \left(\frac{q_i b_i}{H_i^k} \right)^{m_i}$
5.	Regra de Complementaridade	$\dot{\gamma} \geq 0, \quad \phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \phi = 0$

3 ESTRATÉGIA NUMÉRICA

3.1 ALGORITMO DE RETORNO

Para a solução do conjunto de equações do modelo constitutivo de Jiang apresentado na seção anterior se faz necessário a formulação de um algoritmo de integração numérica das equações de evolução, uma vez que se trata de um modelo elastoplástico e portanto, dependente da trajetória.

Esta estratégia consiste em formular procedimentos de integração numérica capazes de atualizar as variáveis internas conhecidas, geralmente denominadas por α_n , no tempo t_n , para obter as variáveis internas α_{n+1} no tempo t_{n+1} , onde o incremento de deformação $\Delta\varepsilon$ se assume conhecido. Além disso, a discretização das equações constitutivas dentro do chamado pseudo-tempo $[t_n, t_{n+1}]$ é aplicada ao modelo, baseado n esquemas de Euler implícito (Simo e Hughes, 1998).

O procedimento de atualização das tensões baseado na chamada metodologia da decomposição do operador, também conhecida como metodologia do “operador *split*” (Simo e Hughes, 1998; De Souza Neto *et al.*, 2008), é especialmente adequado para a integração numérica do problema de evolução e têm sido amplamente utilizado na plasticidade computacional.

A metodologia da decomposição do operador consiste em dividir o problema em duas partes: Um preditor elástico, onde se monta um chamado “estado tentativa” assumindo-se o problema como completamente elástico, e um corretor plástico, onde a partir da violação da equação de lei elástica, faz-se uma correção do estado tentativa construído anteriormente, tendo como base a resolução, por meio do método de Newton-Raphson, de um sistema não linear de equações formado pela lei elástica, a função de escoamento e as equações de evolução. O método de Newton-Raphson é escolhido para solucionar o problema devido ao fato de se atingir uma taxa quadrática de convergência para a solução.

Na Figura 3.1 é apresentado o algoritmo de atualização, também chamado de algoritmo de mapeamento de retorno, das tensões e das variáveis internas.

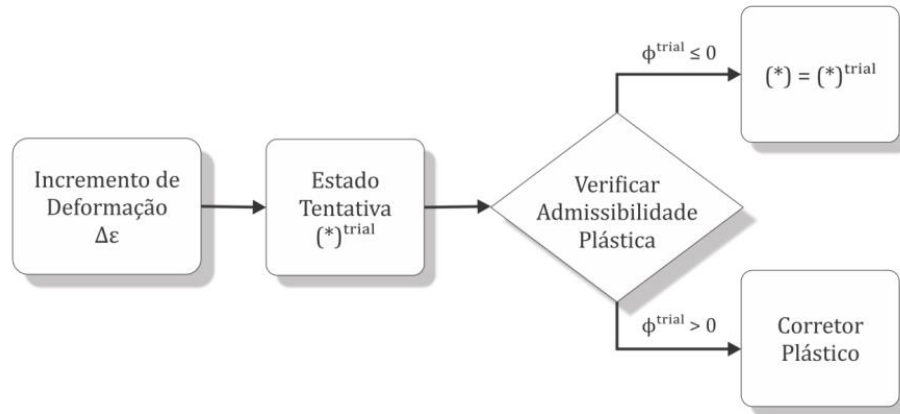


Figura 3.1 - Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas.

3.2 MODELO NUMERICO DE VON MISES COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO DE JIANG

A construção do algoritmo de atualização segue os seguintes passos:

Inicialmente é necessário elaborar um estado tentativa com base em um incremento de deformação $\Delta\varepsilon$ conhecido e nos valores da deformação elástica, ε_n^e e do conjunto das variáveis internas α_n , no início do intervalo do pseudo-tempo $[t_n, t_{n+1}]$. No modelo de endurecimento cinemático de Jiang o estado tentativa é dado pelas Equações 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4:

$$\varepsilon_{n+1}^{e\ trial} = \varepsilon_n^e + \Delta\varepsilon \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_{n+1}^{p\ trial} = \varepsilon_n^p \quad (3.2)$$

$$\sigma_{n+1}^{trial} = \mathbb{D}^e : \varepsilon_{n+1}^{e\ trial} \quad (3.3)$$

$$\beta_{n+1}^{trial} = \beta_n \quad (3.4)$$

Onde $\varepsilon_{n+1}^{e\ trial}$ é o tensor das deformações elásticas, σ_{n+1}^{trial} o tensor das tensões, $\varepsilon_{n+1}^{p\ trial}$ o tensor das deformações plásticas e β_{n+1}^{trial} o tensor cinemático, todos no estado tentativa.

Pelo fato deste ser um passo elástico, nem o tensor cinemático tentativa e nem o tensor das deformações plásticas, não sofrem variação, já que o limite de escoamento não é atingido.

É possível também calcular o tensor relativo tentativa $\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{trial}$, conforme apresentado na Equação 3.5.

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{s}_{n+1}^{trial} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{trial} \quad (3.5)$$

Onde $\boldsymbol{s}_{n+1}^{trial}$ é a parte desviadora do tensor tensão tentativa, determinada segundo a Equação 3.6.

$$\boldsymbol{s}_{n+1}^{trial} = 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ trial} \quad (3.6)$$

Onde a constante G representa a constante de Lamé denominada de módulo de cisalhamento e o termo $\boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ trial}$ a componente desviadora do tensor de deformações elásticas tentativa.

Após a construção do estado tentativa é preciso verificar se ele está dentro ou fora do limite de escoamento. Para isso, a função de escoamento é determinada com base nos termos definidos anteriormente. A função de escoamento para o modelo de von Mises com endurecimento puramente cinemático é definida pela Equação 3.7.

$$\phi^{trial} = \bar{q}_{n+1}^{trial} - \sigma_{y0} \quad (3.7)$$

Onde \bar{q}_{n+1}^{trial} é a tensão equivalente de von Mises, dada pela Equação 3.8.

$$\bar{q}_{n+1}^{trial} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta}_{n+1}^{trial} : \boldsymbol{\eta}_{n+1}^{trial}} \quad (3.8)$$

Caso ϕ^{trial} seja igual ou menor que zero, significa que o incremento de deformação prescrito inicialmente é puramente elástico e o estado tentativa

construído pode ser assumido como o estado real do material, ou seja, $(*)_{n+1} = (*)^{trial}_{n+1}$.

Porém, caso ϕ^{trial} seja maior que zero, é possível constatar que o material se encontra dentro do regime plástico, ou seja, o incremento de deformação prescrito possui componente plástico e se faz necessário aplicar o corretor plástico para corrigir o estado tentativa.

A correção do estado tentativa é feita a partir da remoção do incremento de deformação plástica da deformação elástica tentativa. Este processo é expresso pela Equação 3.9.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.9)$$

Onde o incremento de deformação plástica $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$ é determinado pela Equação 3.10, tendo como base na Lei de Fluxo Plástico (Equação 2.29).

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} \quad (3.10)$$

Onde $\mathbf{N}_{n+1} = 3\boldsymbol{\eta}_{n+1}/2\bar{q}_{n+1}$ e $\Delta\gamma$ representa o multiplicador plástico.

Substituindo a Equação 3.10 na 3.9, chega-se à Equação 3.11.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - \Delta\gamma \frac{3\boldsymbol{\eta}_{n+1}}{2\bar{q}_{n+1}} \quad (3.11)$$

Por fim, pode-se reescrever a Equação 3.11 em termos do campo de tensões, conforme apresentado na Equação 3.12.

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - 2G\Delta\gamma \frac{3\boldsymbol{\eta}_{n+1}}{2\bar{q}_{n+1}} \quad (3.12)$$

Considerando que o tensor das deformações elásticas pode ser decomposto em uma parte desviadora e outra volumétrica, por consequência o tensor das tensões também pode, conforme a Equação 3.13.

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1} + p_{n+1} \mathbf{I} \quad (3.13)$$

Portanto, a Equação 3.12 pode ser reescrita como:

$$\mathbf{S}_{n+1} + p_{n+1} \mathbf{I} = \mathbf{S}_{n+1}^{trial} + p_{n+1}^{trial} \mathbf{I} - 2G\Delta\gamma \frac{3\boldsymbol{\eta}_{n+1}}{2\bar{q}_{n+1}} \quad (3.14)$$

Pelo fato da função de escoamento de von Mises ser insensível à pressão hidrostática o termo volumétrico não se altera ($p_{n+1} = p_{n+1}^{trial}$). Portanto, a Equação 3.14 pode ser reescrita em função do termo desviador, conforme apresentado na Equação 3.15.

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1}^{trial} - 2G\Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} \quad (3.15)$$

Para atualizar o tensor da deformação plástica, ao invés de remover o incremento de deformação plástica, este deve ser adicionado. Conforme apresentado na Equação 3.16.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \frac{3\boldsymbol{\eta}_{n+1}}{2\bar{q}_{n+1}} \quad (3.16)$$

Por fim, para a evolução do tensor cinemático considerando três termos no somatório de Jiang, tem-se que:

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1} = \sum_{i=1}^2 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^i = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 + \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 + \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 \quad (3.17)$$

É necessário considerar a atualização de cada termo do tensor cinemático $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^i$ que compõe a Equação 3.17 separadamente, para depois atualizar $\boldsymbol{\beta}_{n+1}$ como a soma dos termos. Segundo a lei de Jiang (Equação 2.35), cada termo pode ser atualizado conforme a Equação 3.18:

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^i = \boldsymbol{\beta}_n^i + \Delta\gamma \left[\frac{2H_i^k}{3} \mathbf{N}_{n+1} - b_i \boldsymbol{\beta}_{n+1}^i \left(\frac{q_{n+1} b_i}{H_i^k} \right)^{m_i} \right] \quad (3.18)$$

Onde m_i será considerado uma constante do material neste trabalho.

Por fim, a função de escoamento no estado real é definida pela Equação 3.19.

$$\phi_{n+1} = \bar{q}_{n+1} - \sigma_{y0} \quad (3.19)$$

Analisando as Equações (3.15), (3.18) e (3.19), verifica-se a formação de um sistema não linear de equações, cujas variáveis, para três termos de Jiang, são \mathbf{S}_{n+1} , $\Delta\gamma$, $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1$, $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2$ e $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3$, já que seus valores são desconhecidos no estado real.

Para aplicação do método de Newton-Raphson é necessário escrever o sistema de equações na forma de equações residuais, conforme as Equações 3.20, 3.21, 3.22, 3.23 e 3.24.

$$R_{\mathbf{S}_{n+1}} = \mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{S}_{n+1}^{trial} + 2G\Delta\gamma\mathbf{N}_{n+1} \quad (3.20)$$

$$R_{\Delta\gamma} = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\eta}_{n+1}:\boldsymbol{\eta}_{n+1}} - \sigma_{y0} \quad (3.21)$$

$$R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 - \boldsymbol{\beta}_n^1 - \Delta\gamma \left[\frac{2H_1^k}{3}\mathbf{N}_{n+1} - b_1\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 \left(\frac{q_{n+1}b_1}{H_1^k} \right)^{m_1} \right] \quad (3.22)$$

$$R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 - \boldsymbol{\beta}_n^2 - \Delta\gamma \left[\frac{2H_2^k}{3}\mathbf{N}_{n+1} - b_2\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 \left(\frac{q_{n+1}b_2}{H_2^k} \right)^{m_2} \right] \quad (3.23)$$

$$R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 - \boldsymbol{\beta}_n^3 - \Delta\gamma \left[\frac{2H_3^k}{3}\mathbf{N}_{n+1} - b_3\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 \left(\frac{q_{n+1}b_3}{H_3^k} \right)^{m_3} \right] \quad (3.24)$$

O algoritmo de retorno para o modelo de von Mises com endurecimento cinemático de Jiang com três termos é apresentado de forma resumida no Quadro 3.1.

Quadro 3.1 - Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas para o modelo de von Mises com endurecimento cinemático de Jiang.

i) Dado um incremento de deformação $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$, determinar o estado tentativa:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} &= \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} & \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{i\ trial} &= \boldsymbol{\beta}_n^i \end{aligned} \quad \bar{q}_{n+1}^{trial} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta}_{n+1}^{trial} \cdot \boldsymbol{\eta}_{n+1}^{trial}}$$

ii) Verificar a admissibilidade plástica:

$$\phi^{trial} = \bar{q}_{n+1}^{trial} - \sigma_{y0}$$

Se $\phi^{trial} \leq 0$, então (passo elástico): $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{trial}$;

Se $\phi^{trial} > 0$, então (passo plástico): Algoritmo de retorno

iii) Algoritmo de retorno:

Resolver o sistema de equações não lineares pelo método de Newton-Raphson, tendo como variáveis \boldsymbol{S}_{n+1} , $\Delta \gamma$, $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1$, $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2$ e $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3$.

$$\left\{ \begin{aligned} R_{\boldsymbol{S}_{n+1}} &= \boldsymbol{S}_{n+1} - \boldsymbol{S}_{n+1}^{trial} + 2G\Delta\gamma\boldsymbol{N}_{n+1} \\ R_{\Delta\gamma} &= \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\eta}_{n+1}} - \sigma_{y0} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} &= \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 - \boldsymbol{\beta}_n^1 - \Delta\gamma \left[\frac{2H_1^k}{3} \boldsymbol{N}_{n+1} - b_1 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 \left(\frac{q_{n+1} b_1}{H_1^k} \right)^{m_1} \right] \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} &= \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 - \boldsymbol{\beta}_n^2 - \Delta\gamma \left[\frac{2H_2^k}{3} \boldsymbol{N}_{n+1} - b_2 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 \left(\frac{q_{n+1} b_2}{H_2^k} \right)^{m_2} \right] \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} &= \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 - \boldsymbol{\beta}_n^3 - \Delta\gamma \left[\frac{2H_3^k}{3} \boldsymbol{N}_{n+1} - b_3 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 \left(\frac{q_{n+1} b_3}{H_3^k} \right)^{m_3} \right] \end{aligned} \right.$$

iv) Atualizar as outras variáveis internas

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{S}_{n+1} + p_{n+1}^{trial} \boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 + \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 + \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - \Delta\gamma \boldsymbol{N}_{n+1}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial} + \Delta\gamma \boldsymbol{N}_{n+1}$$

v) Fim

Abaixo a Equação 3.25 traz o sistema de equações escrito da forma linearizada, pronto para a aplicação do método de Newton-Raphson.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \delta S_{n+1} \\ \delta \Delta\gamma \\ \delta \beta_{n+1}^1 \\ \delta \beta_{n+1}^2 \\ \delta \beta_{n+1}^3 \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} R_{S_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \\ R_{\beta_{n+1}^1} \\ R_{\beta_{n+1}^2} \\ R_{\beta_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k \quad (3.25)$$

A aplicação do método de Newton-Raphson para a resolução do sistema não linear onde o estado inicial $k = 0$ é admitido como estado tentativa é apresentado de forma resumida no Quadro 3.2.

Quadro 3.2 - Algoritmo de resolução do sistema não linear para o modelo de von Mises com endurecimento cinemático de Jiang.

i) Dado o estado tentativa como parâmetros iniciais:

$$\mathbf{S}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{S}_{n+1}^{trial} \quad \Delta\gamma^{(0)} = 0 \quad \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{i(0)} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{i\,trial}$$

ii) Resolver o sistema de equações para \mathbf{S}_{n+1} , $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1$, $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2$, $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3$ e $\Delta\gamma$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\mathbf{S}_{n+1}}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\mathbf{S}_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\mathbf{S}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\mathbf{S}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\mathbf{S}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \delta \mathbf{S}_{n+1} \\ \delta \Delta\gamma \\ \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 \\ \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 \\ \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} R_{\mathbf{S}_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k$$

iii) Calcular:

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{i(k+1)} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{i(k)} + \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{i(k+1)} \quad \mathbf{S}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{S}_{n+1}^{(k)} + \delta \mathbf{S}_{n+1}^{(k+1)}$$

$$\Delta\gamma^{(k+1)} = \Delta\gamma^{(k)} + \delta \Delta\gamma^{(k+1)}$$

iv) Verificar a convergência:

$$\phi^{(k+1)} = \bar{q}^{(k+1)} - \sigma_{y0} \quad \text{erro} = \frac{\phi^{(k+1)}}{\sigma_{y0}} \leq \text{tolerância}$$

v) Fim.

Onde:

$$\frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial S_{n+1}} = \mathbb{I} + 2G\Delta\gamma \frac{\partial N_{n+1}}{\partial S_{n+1}} \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} = 2GN_{n+1} \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^1} = 2G\Delta\gamma \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^2} = 2G\Delta\gamma \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^3} = 2G\Delta\gamma \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3} \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial S_{n+1}} = N_{n+1} \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} = 0 \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^1} = -N_{n+1} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^2} = -N_{n+1} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^3} = -N_{n+1} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial S_{n+1}} = -\Delta\gamma \left[\frac{2}{3} H_1^k \frac{\partial N_{n+1}}{\partial S_{n+1}} - b_1 \beta_{n+1}^1 m_1 \left(\frac{q_{n+1} b_1}{H_1^k} \right)^{m_1-1} \frac{b_1}{H_1^k} \otimes N_{n+1} \right] \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \Delta\gamma} = -\frac{2}{3} H_1^k N_{n+1} - b_1 \beta_{n+1}^1 \left(\frac{q_{n+1} b_1}{H_1^k} \right)^{m_1} \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^1} = \mathbb{I} - \Delta\gamma \left[\frac{2H_1^k}{3} \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} - b_1 \mathbb{I} \left(\frac{q_{n+1}b_1}{H_1^k} \right)^{m_1} - b_1 \beta_{n+1}^1 m_1 \left(\frac{q_{n+1}b_1}{H_1^k} \right)^{m_1-1} \frac{b_1}{H_1^k} \otimes N_{n+1} \right] \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^2} = -\Delta\gamma \left[\frac{2}{3} H_1^k \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} - b_1 \beta_{n+1}^1 m_1 \left(\frac{q_{n+1}b_1}{H_1^k} \right)^{m_1-1} \frac{b_1}{H_1^k} \otimes N_{n+1} \right] \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^3} = -\Delta\gamma \left[\frac{2}{3} H_1^k \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3} - b_1 \beta_{n+1}^1 m_1 \left(\frac{q_{n+1}b_1}{H_1^k} \right)^{m_1-1} \frac{b_1}{H_1^k} \otimes N_{n+1} \right] \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \mathcal{S}_{n+1}} = -\Delta\gamma \left[\frac{2}{3} H_2^k \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \mathcal{S}_{n+1}} - b_2 \beta_{n+1}^2 m_2 \left(\frac{q_{n+1}b_2}{H_2^k} \right)^{m_2-1} \frac{b_2}{H_2^k} \otimes N_{n+1} \right] \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \Delta\gamma} = -\frac{2}{3} H_2^k N_{n+1} - b_2 \beta_{n+1}^2 \left(\frac{q_{n+1}b_2}{H_2^k} \right)^{m_2} \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^1} = -\Delta\gamma \left[\frac{2}{3} H_2^k \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} - b_2 \beta_{n+1}^2 m_2 \left(\frac{q_{n+1}b_2}{H_2^k} \right)^{m_2-1} \frac{b_2}{H_2^k} \otimes N_{n+1} \right] \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^2} = \mathbb{I} - \Delta\gamma \left[\frac{2H_2^k}{3} \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} - b_2 \mathbb{I} \left(\frac{q_{n+1}b_2}{H_2^k} \right)^{m_2} - b_2 \beta_{n+1}^2 m_2 \left(\frac{q_{n+1}b_2}{H_2^k} \right)^{m_2-1} \frac{b_2}{H_2^k} \otimes N_{n+1} \right] \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^3} = -\Delta\gamma \left[\frac{2}{3} H_2^k \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3} - b_2 \beta_{n+1}^2 m_2 \left(\frac{q_{n+1}b_2}{H_2^k} \right)^{m_2-1} \frac{b_2}{H_2^k} \otimes N_{n+1} \right] \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \mathcal{S}_{n+1}} = -\Delta\gamma \left[\frac{2}{3} H_3^k \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \mathcal{S}_{n+1}} - b_3 \beta_{n+1}^3 m_3 \left(\frac{q_{n+1}b_3}{H_3^k} \right)^{m_3-1} \frac{b_3}{H_3^k} \otimes N_{n+1} \right] \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \Delta\gamma} = -\frac{2}{3} H_3^k N_{n+1} - b_3 \beta_{n+1}^3 \left(\frac{q_{n+1}b_3}{H_3^k} \right)^{m_3} \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^1} = -\Delta\gamma \left[\frac{2}{3} H_3^k \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} - b_3 \beta_{n+1}^3 m_3 \left(\frac{q_{n+1}b_3}{H_3^k} \right)^{m_3-1} \frac{b_3}{H_3^k} \otimes N_{n+1} \right] \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^2} = -\Delta\gamma \left[\frac{2}{3} H_3^k \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} - b_3 \beta_{n+1}^3 m_3 \left(\frac{q_{n+1} b_3}{H_3^k} \right)^{m_3-1} \frac{b_3}{H_3^k} \otimes N_{n+1} \right] \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^3} = \mathbb{I} - \Delta\gamma \left[\frac{2H_3^k}{3} \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3} - b_3 \mathbb{I} \left(\frac{q_{n+1} b_3}{H_3^k} \right)^{m_3} - b_3 \beta_{n+1}^3 m_3 \left(\frac{q_{n+1} b_3}{H_3^k} \right)^{m_3-1} \frac{b_3}{H_3^k} \otimes N_{n+1} \right] \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial N_{n+1}}{\partial s_{n+1}} = \frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[\mathbb{I} - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right] \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} = -\frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[\mathbb{I} - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right] \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} = -\frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[\mathbb{I} - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right] \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3} = -\frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[\mathbb{I} - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right] \quad (3.54)$$

4 SIMULAÇÕES

Com o objetivo de avaliar a capacidade do modelo numérico de Jiang proposto na seção anterior em descrever o comportamento elastoplástico de materiais dúcteis sob diferentes configurações de carregamento, sejam eles uniaxiais ou multiaxiais proporcionais ou não proporcionais, o modelo proposto será utilizado nas simulações de quatro históricos de carregamentos cíclicos com características distintas aplicados em três diferentes tipos de aços: O aço 304 (Itoh, 2001), o aço S460N (Jiang et al., 2007) e o aço SAE 1045 HR (FATEMI, 1998).

Em seguida, os resultados de amplitudes de tensão encontrados com o modelo de Jiang serão comparados como os resultados experimentais definidos por de Itoh (2001) para o aço 304, Jiang et al.(2007) para o aço S460N e Lesse & Morrow (1985) para o aço 1045 HR e também com os resultados encontrados para o modelo de Chaboche quando utilizados para simular os mesmos históricos de carregamento, para que por fim seja possível medir o nível de precisão dos resultados encontrados por Jiang.

Para as simulações serão usados, tanto para o modelo de Jiang quanto de Chaboche, o somatório de apenas três leis de endurecimento cinemático, onde a terceira leis será considerada como uma lei de evolução linear para ambos os modelos.

4.1 HISTÓRICOS DE CARREGAMENTO

Os quatro históricos de carregamentos cíclicos utilizados para a realização das simulações estão listados abaixo:

- Uniaxial do tipo tração pura (Trajetória A): São prescritas apenas deformações do tipo normal;
- Uniaxial do tipo torção pura (Trajetória B): São prescritas apenas deformações do tipo cisalhante;

- Multiaxial proporcional (Trajetória C): É prescrita uma combinação de deformações do tipo normal e cisalhante em uma proporção linear;
- Multiaxial não proporcional com trajetória retangular (Trajetória D): É prescrita uma combinação de deformações do tipo normal e cisalhante com uma trajetória retangular.

Os históricos de carregamentos utilizados nas simulações são apresentados na Figura 4.1.

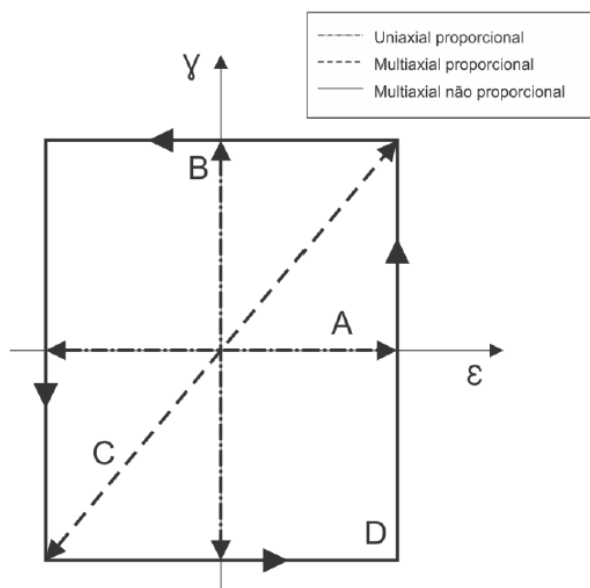


Figura 4.1 - Históricos de deformação considerados nas simulações.

4.2 PARÂMETROS DOS MATERIAS

Para a obtenção dos parâmetros dos materiais H_i^K , b_i e m_i necessários para a utilização do modelo de Jiang proposto na seção anterior foi realizado a regressão não linear (Método Mínimos Quadrados Não Linear) da curva da relação Ramberg-Osgood (1943) expressa pela Equação 4.1:

$$\epsilon_a^p = \left(\frac{\sigma_a}{H'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad (4.1)$$

Onde H' e n' são chamados de coeficiente e expoente de encruamento cíclico do material. Para este trabalho, seus valores foram obtidos de Itoh (2001) para o aço 304, Jiang et al.(2007) para o aço S460N e Lesse & Morrow (1985) para o aço 1045 HR.

Considerando uma amplitude de deformação plástica entre 0,05% e 0,4%, por meio da Equação 93, foram traçadas curvas de tensão/deformação para cada um dos três aços utilizados neste trabalho, conforme a Figura 4.2:

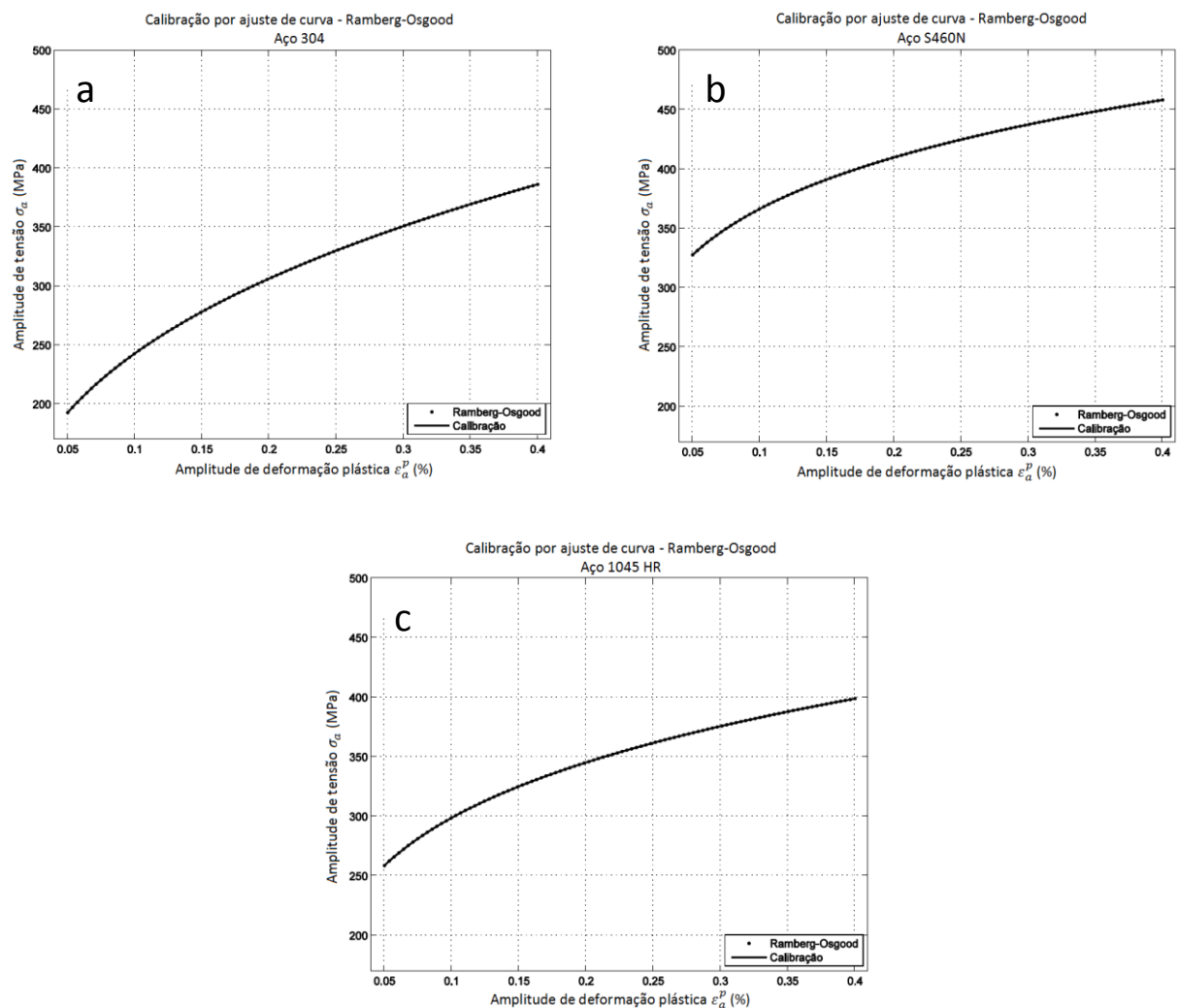


Figura 4.2 – Curva tensão/deformação de Ramberg-Osgood para os materiais (a) aço 304, (b) aço S460N e (c) aço 1045 HR.

Em seguida, utilizando o método da regressão não linear, as curvas de tensão/deformação encontradas pela relação Ramberg-Osgood foram ajustadas tanto para o modelo de Chaboche quanto para o modelo de Jiang, com o objetivo de definir os parâmetros de cada material para de cada um dos modelos.

Os parâmetros de Ramberg-Osgood encontrados para os aços 304, S460N e 1045 HR utilizado nas simulações estão listados nas Tabelas 4.1

Tabela 4.1 - Parâmetros dos materiais aço 304, S460N e 1045 HR.

Propriedade	Aço 304		Aço S460N		Aço 1045 HR	
	Chaboche	Jiang	Chaboche	Jiang	Chaboche	Jiang
H' [MPa]	2443	2443	1115	1115	1258	1258
n'	0,334	0,334	0,161	0,161	0,208	0,208
E [GPa]	193	193	208	208	202	202
ν	0,29	0,29	0,3	0,3	0,3	0,3
σ_e [MPa]	118	118	264	264	194	194
H_1^k [MPa]	89555	35844	38181	33306	39126	32936
b_1	1548	619	486	602	477	606
m_1	-	1,28	-	0,64	-	0,77
H_2^k [MPa]	46811	41744	90535	36876	87572	35424
b_2	454	405	1637	469	1612	432
m_2	-	0,82	-	0,03	-	0,12
H_3^k [MPa]	28108	28108	15903	15903	17917	17917
b_3	0	0	0	0	0	0
m_3	-	0	-	0	-	0

Importante ressaltar, que pelo fato do expoente m_i ser considerado como tendo valores constantes neste trabalho, os valores para o mesmo também foram definidos por meio do processo de calibração, assim como os valores dos demais parâmetros do material H_i^k e b_i .

4.3 RESULTADOS

A apresentação dos resultados foi dividida em duas seções, onde na primeira são apresentados os resultados encontrados para as trajetórias que possuem carregamentos proporcionais e na segunda são apresentados os resultados para a trajetória que possui carregamento não proporcional.

Importante informar, para elaboração da das curvas tensão/deformação para todos os casos, utilizou-se os valores encontrados para o quinquagésimo ciclo de carregamento, considerando assim que o laço de histerese estaria estabilizado.

4.3.1 Carregamentos proporcionais

Nesta seção, são comparados os resultados experimentais com os resultados encontrados para os modelos de Chaboche e Jiang utilizando as trajetórias proporcionais A, B e C.

Os resultado encontrados para as simulações são apresentados nas Figuras 4.3 à 4.9 para o aço 304 e Figuras 4.10 à 4.16 para o aço S460.

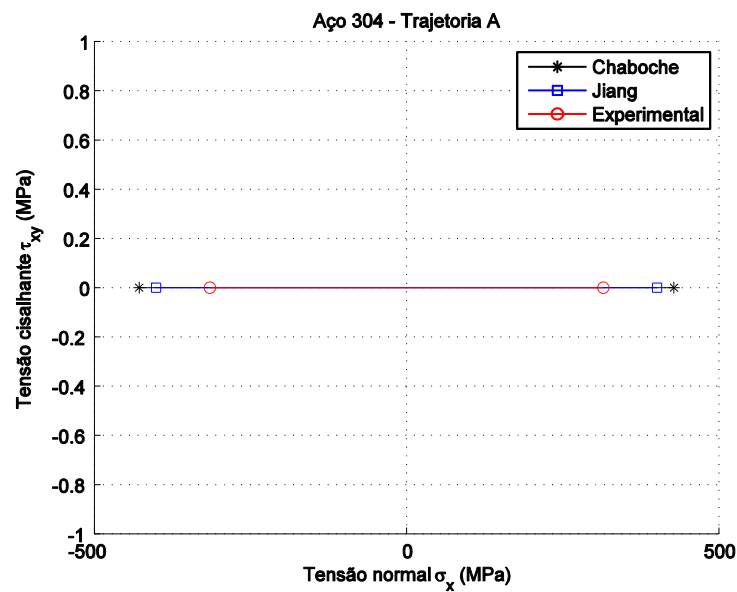


Figura 4.3 - Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial do tipo tração pura (Trajetória A) para os modelos Jiang e Chaboche e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_\alpha = 0,4 \%$ e $\gamma_\alpha = 0 \%$.

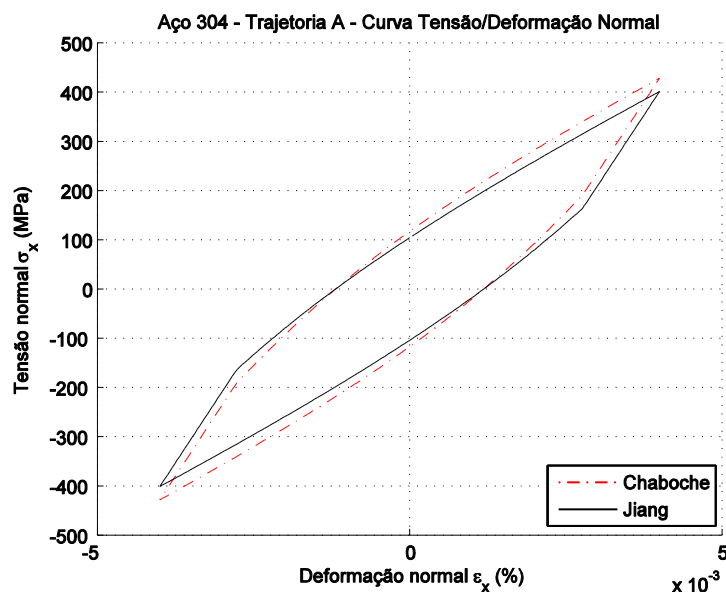


Figura 4.4 - Comparação das curvas de tensão-deformação estabilizada normais resultantes da simulação de carregamento uniaxial do tipo tração pura (Trajetória A) para os modelos Jiang e Chaboche usando o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4\%$ e $\gamma_a = 0\%$.

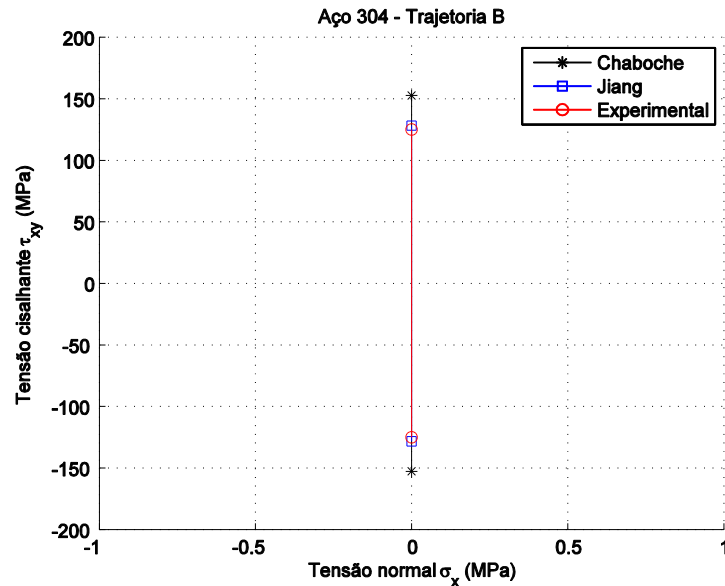


Figura 4.5 - Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial do tipo torção pura (Trajetória B) para os modelos Jiang e Chaboche e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0\%$ e $\gamma_a = 0,695\%$.

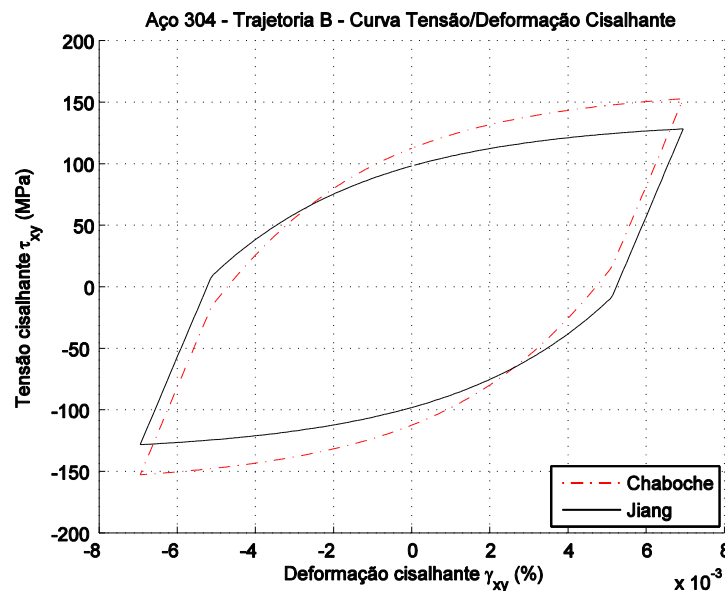


Figura 4.6 - Comparação das curvas de tensão-deformação cisalhantes resultantes da simulação de carregamento uniaxial do tipo torção pura (Trajetória B) para os modelos Jiang e Chaboche usando o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0\%$ e $\gamma_a = 0,695\%$.

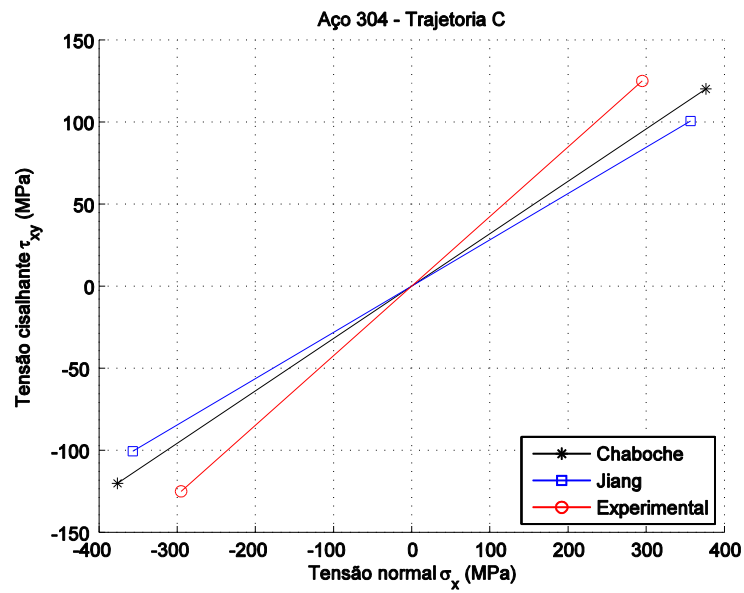


Figura 4.7 - Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para os modelos Jiang e Chaboche e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4\%$ e $\gamma_a = 0,695\%$.

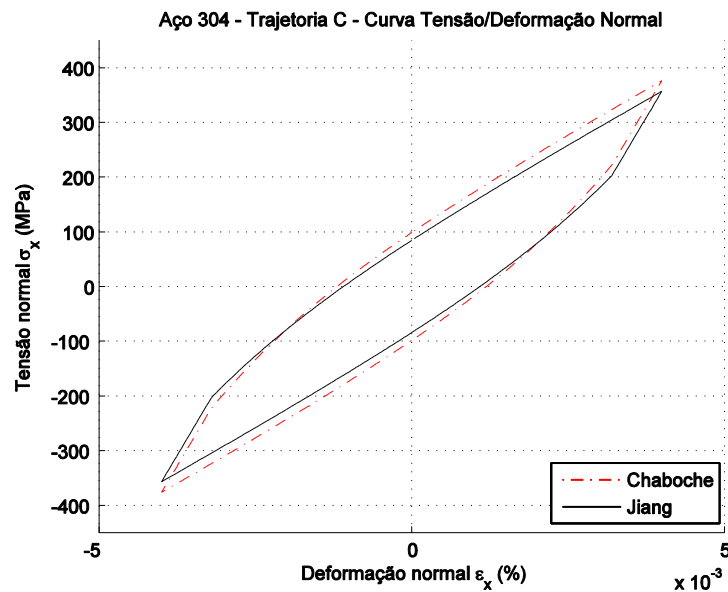


Figura 4.8 - Comparação das curvas de tensão-deformação normais resultantes da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para os modelos Jiang e Chaboche usando o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4\%$ e $\gamma_a = 0,695\%$.

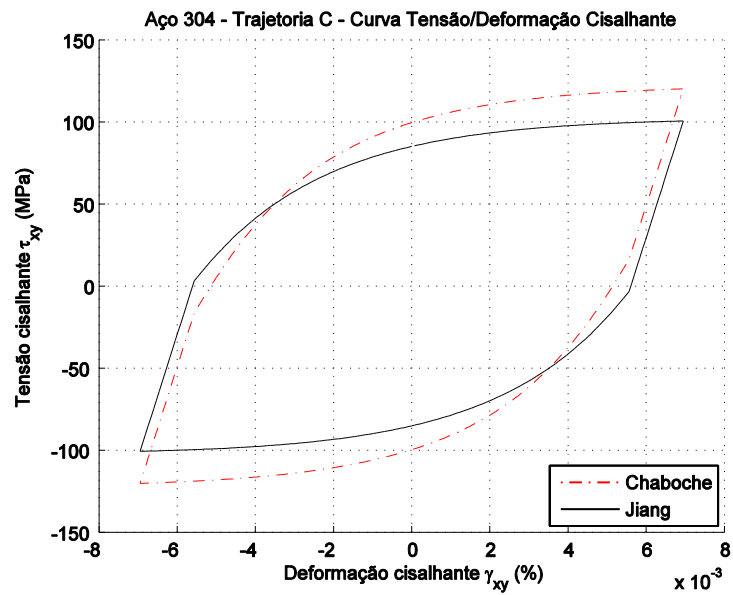


Figura 4.9 - Comparação das curvas de tensão-deformação cisalhantes resultantes da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para os modelos Jiang e Chaboche usando o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$.

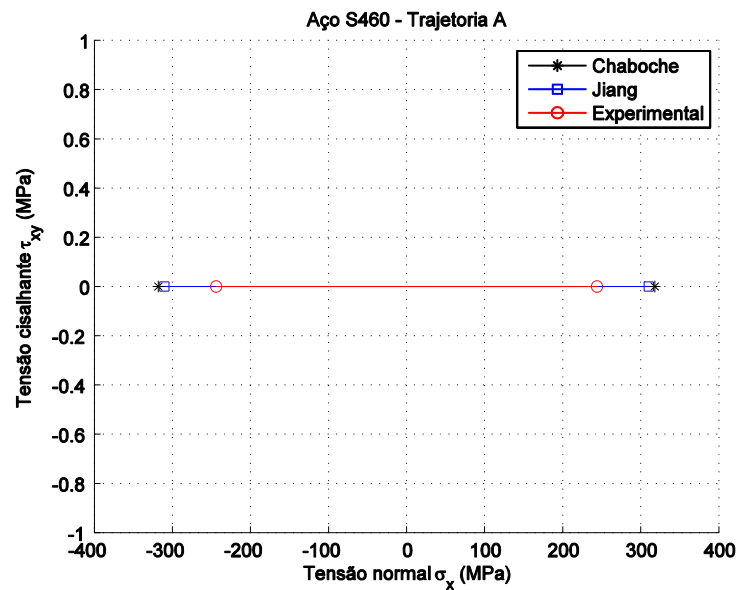


Figura 4.10 - Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial do tipo tração pura (Trajetória A) para os modelos Jiang e Chaboche e dados experimentais (Pereira, 2014) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173 \%$ e $\gamma_a = 0 \%$.

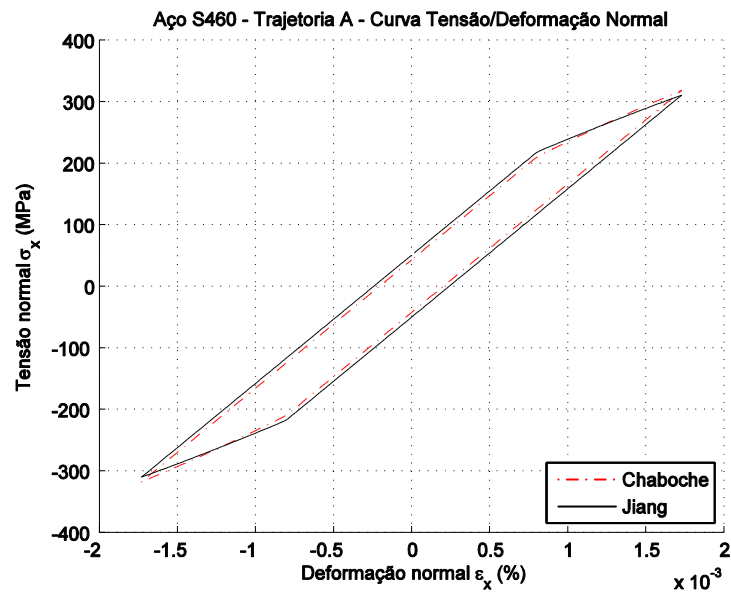


Figura 4.11 - Comparação das curvas de tensão-deformação normais resultantes da simulação de carregamento uniaxial do tipo tração pura (Trajetória A) para os modelos Jiang e Chaboche usando o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173 \%$ e $\gamma_a = 0 \%$.

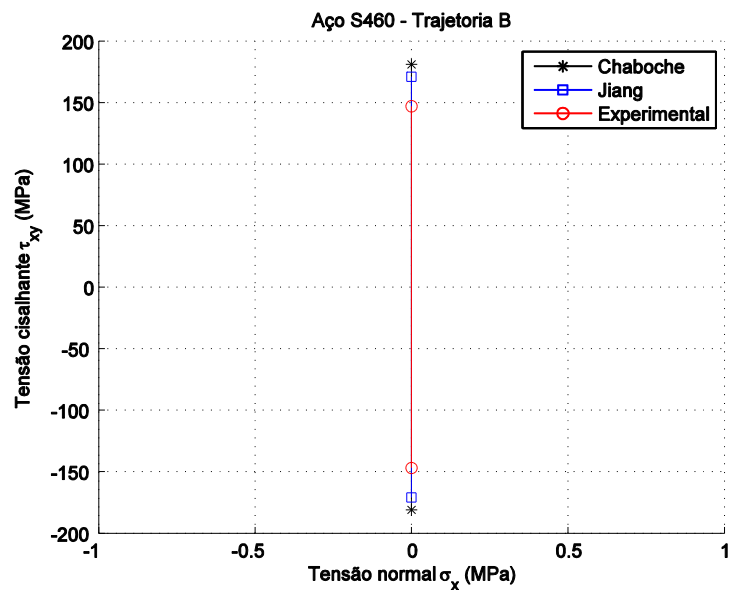


Figura 4.12 - Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial do tipo torção pura (Trajetória B) para os modelos Jiang e Chaboche e dados experimentais (Pereira, 2014) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0 \%$ e $\gamma_a = 0,3 \%$.

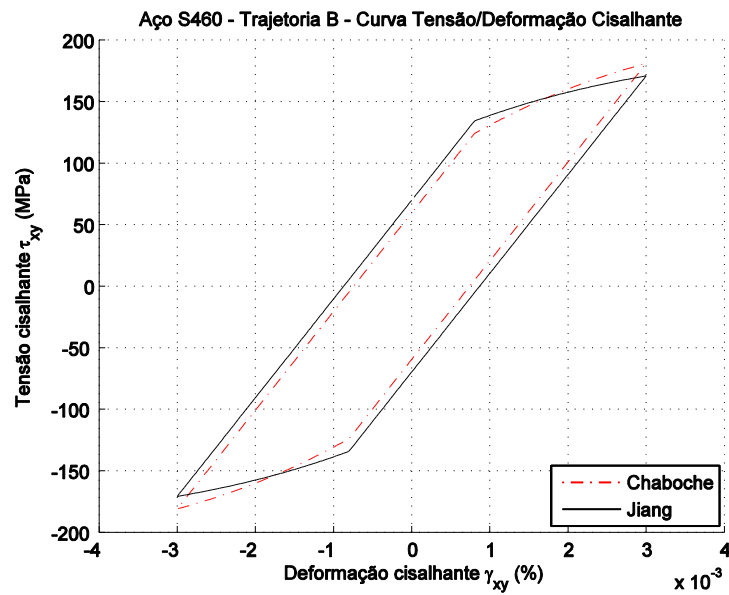


Figura 4.13 - Comparação das curvas de tensão-deformação cisalhantes resultantes da simulação de carregamento uniaxial do tipo torção pura (Trajetória B) para os modelos Jiang e Chaboche usando o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0\%$ e $\gamma_a = 0,3\%$.

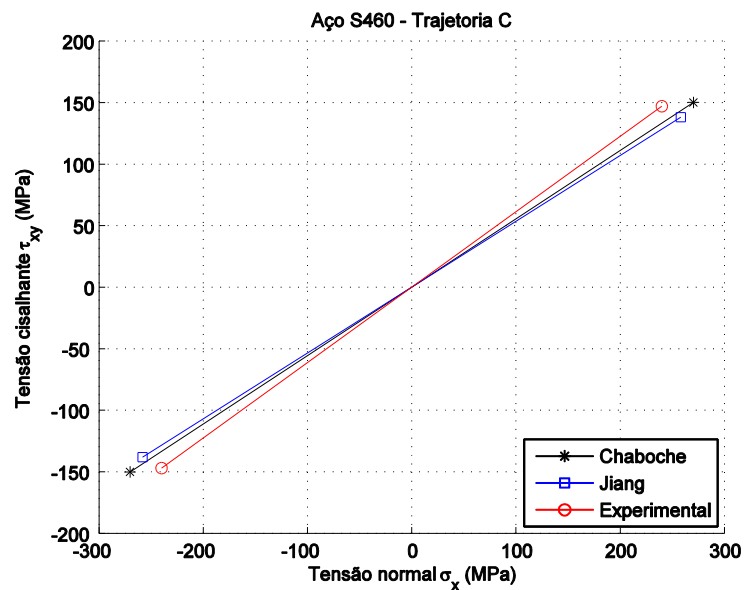


Figura 4.14 - Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para os modelos Jiang e Chaboche e dados experimentais (Pereira, 2014) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173\%$ e $\gamma_a = 0,3\%$.

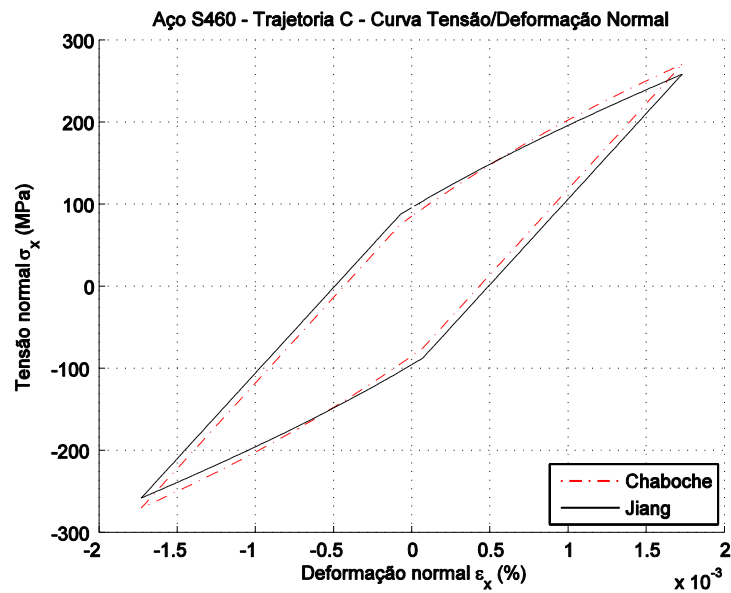


Figura 4.15 - Comparação das curvas de tensão-deformação normais resultantes da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para os modelos Jiang e Chaboche usando o aço S460N, com amplitudes de deformação $\epsilon_a = 0,173\%$ e $\gamma_a = 0,3\%$.

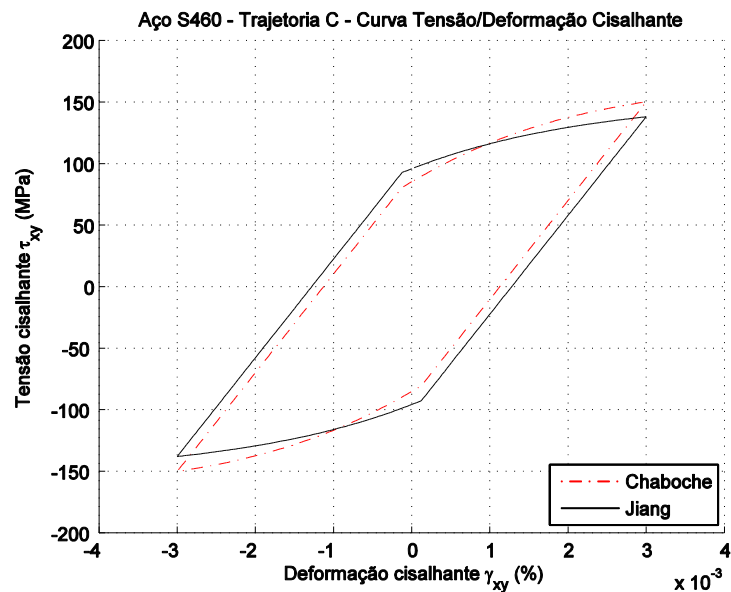


Figura 4.16 - Comparação das curvas de tensão-deformação cisalhantes resultantes da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para os modelos Jiang e Chaboche usando o aço S460N, com amplitudes de deformação $\epsilon_a = 0,173\%$ e $\gamma_a = 0,3\%$.

A Tabela 4.2 apresenta os resultados obtidos para os modelos de Chaboche e Jiang e os resultados experimentais para os aços 304 (Itoh, 2001) e aço S460N (Jiang et al., 2007).

Tabela 4.2 - Amplitudes de deformação prescritas e amplitudes de tensão experimentais e encontradas pelos modelos de Chaboche e Jiang para as trajetórias A, B e C e aços 304 e S460.

Material	Trajecória	ε_a (%)	γ_a (%)	σ_a^{exp} (MPa)	τ_a^{exp} (MPa)	σ_a^{CH} (MPa)	τ_a^{CH} (MPa)	σ_a^{Jiang} (MPa)	τ_a^{Jiang} (MPa)
Aço 304	A	0,4	0	315	0	428,2	0	401,1	0
	B	0	0,695	0	125	0	152,7	0	128,3
	C	0,4	0,695	295	125	376,3	120,2	356,9	100,6
Aço S460N	A	0,173	0	244	0	318	0	310,3	0
	B	0	0,3	0	147	0	181	0	170,8
	C	0,173	0,3	244	147	270,3	150,1	258,2	138,0

Analisando os resultados de amplitudes de tensão encontrados nesta seção, nota-se que para os carregamentos uniaxiais (Trajetórias A e B) as amplitudes de tensão normal e cisalhante encontradas pelo modelo de Jiang se aproximam mais dos valores de amplitude experimentais do que as encontradas pelo modelo de Chaboche. Porém, em ambos os modelos as amplitudes encontradas estão sobrestimadas em relação aos valores experimentais.

Já para o carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C), ambos modelos encontram valores de amplitudes de tensão próximos dos valores experimentais para o aço S460N. Contudo, para o aço 304 a análise dos resultados em amplitude de tensões encontradas é inconclusiva, já que nenhum dos modelos se aproxima de forma satisfatória dos valores experimentais.

Analisando as curvas de tensão/deformação obtidas, nota-se que para todos os casos o modelo de Jiang gera resultados mais conservadores que o modelo de Chaboche.

Vale apenas ressaltar que mesmo utilizando o modelo de Jiang para simular históricos de carregamentos proporcionais, a utilização de um expoente m_i diferente de zero ativa no modelo o termo de não proporcionalidade, o que acaba podendo acarretar uma distorção dos resultados encontrados, devido à inclusão indevida dos efeitos de uma não proporcionalidade em um carregamento proporcional.

4.3.2 Carregamentos não proporcionais

Nesta seção, são comparados os resultados experimentais com os resultados encontrados para os modelos de Chaboche e Jiang utilizando a trajetória não proporcional D.

Os resultado encontrados para as simulações são apresentados nas Figuras 4.17 à 4.19 para o aço 304, Figuras 4.20 à 4.22 para o aço S460 e Figuras 4.23 à 4.25 para o aço 1045 HR.

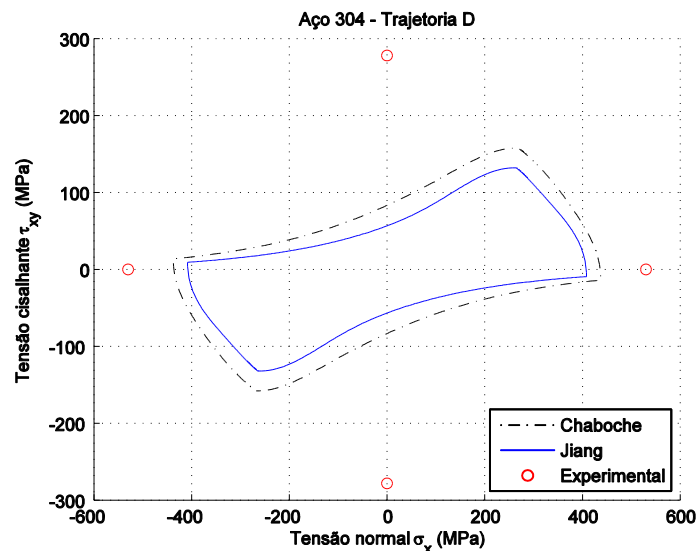


Figura 4.17 - Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para os modelos de Jiang e Chaboche e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4\%$ e $\gamma_a = 0,695\%$.

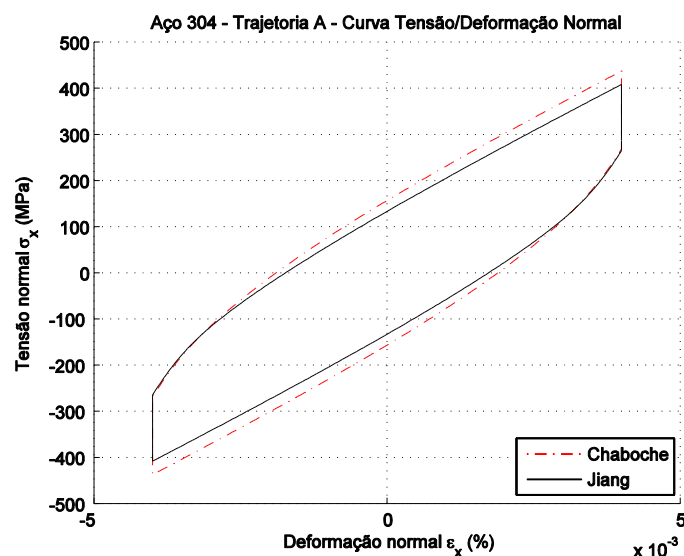


Figura 4.18 - Comparação das curvas de tensão-deformação normais resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para os modelos de Jiang e Chaboche usando o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4\%$ e $\gamma_a = 0,695\%$.

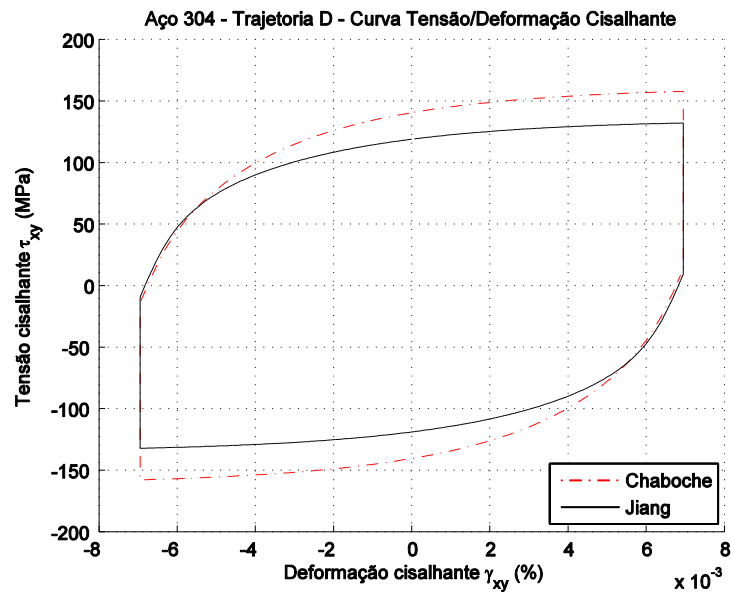


Figura 4.19 - Comparação das curvas de tensão-deformação cisalhantes resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para os modelos de Jiang e Chaboche usando o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4\%$ e $\gamma_a = 0,695\%$.

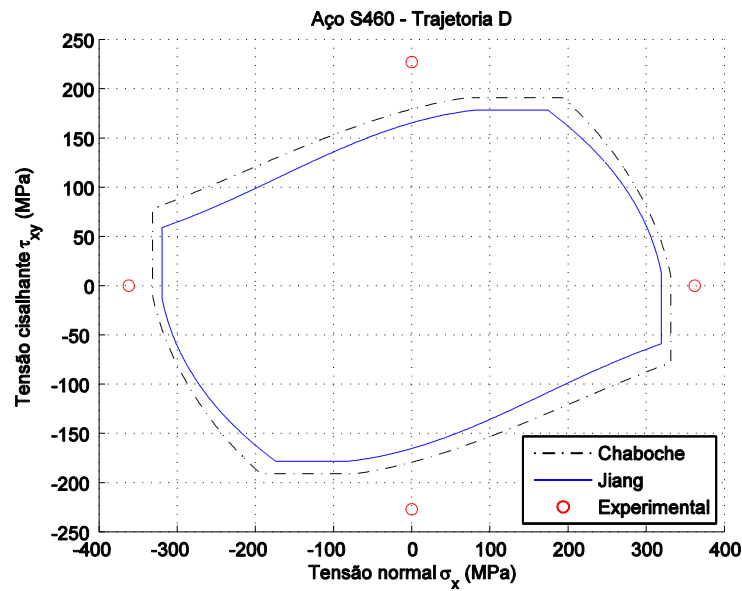


Figura 4.20 - Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para os modelos de Jiang e Chaboche e dados experimentais (Jiang et al., 2007) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4\%$ e $\gamma_a = 0,695\%$.

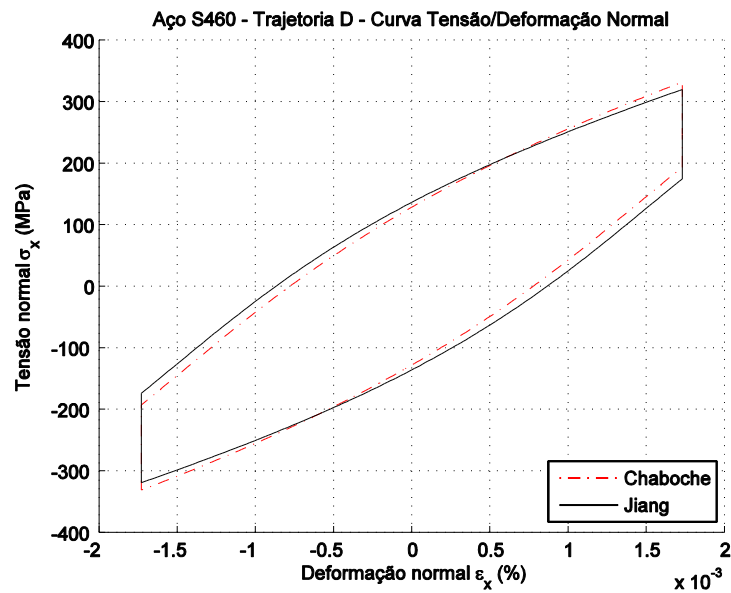


Figura 4.21 - Comparação das curvas de tensão-deformação normais resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para os modelos de Jiang e Chaboche usando o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173 \%$ e $\gamma_a = 0,3 \%$.

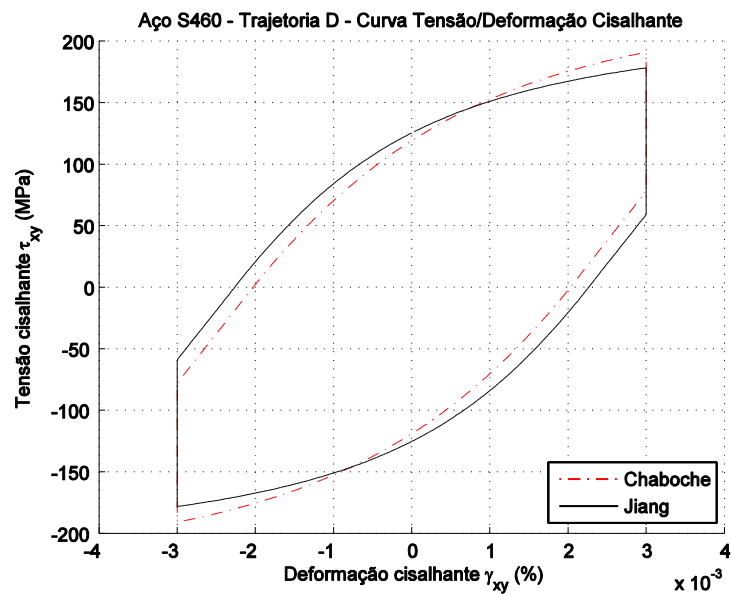


Figura 4.22 - Comparação das curvas de tensão-deformação cisalhantes resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para os modelos de Jiang e Chaboche usando o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173 \%$ e $\gamma_a = 0,3 \%$.

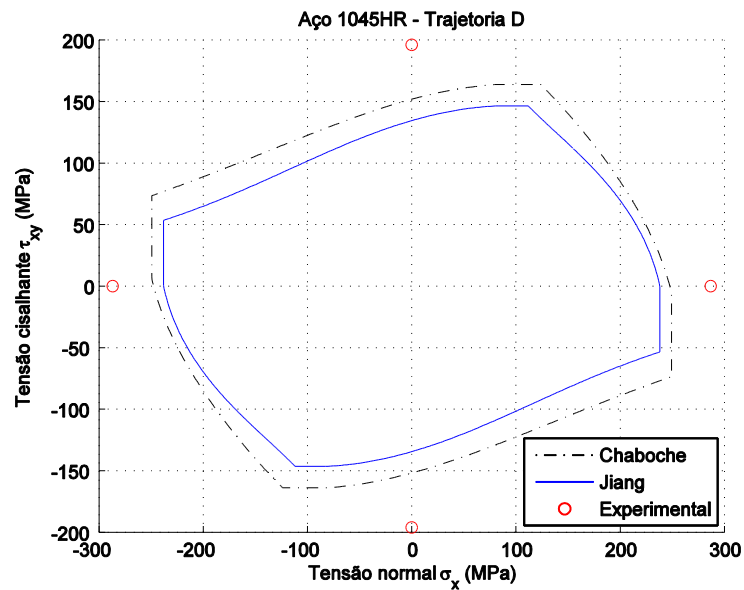


Figura 4.23 - Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para os modelos de Jiang e Chaboche e dados experimentais (FATEMI, 1998) para o aço SAE 1045HR, com amplitudes de deformação $\epsilon_a = 0,13\%$ e $\gamma_a = 0,34\%$.

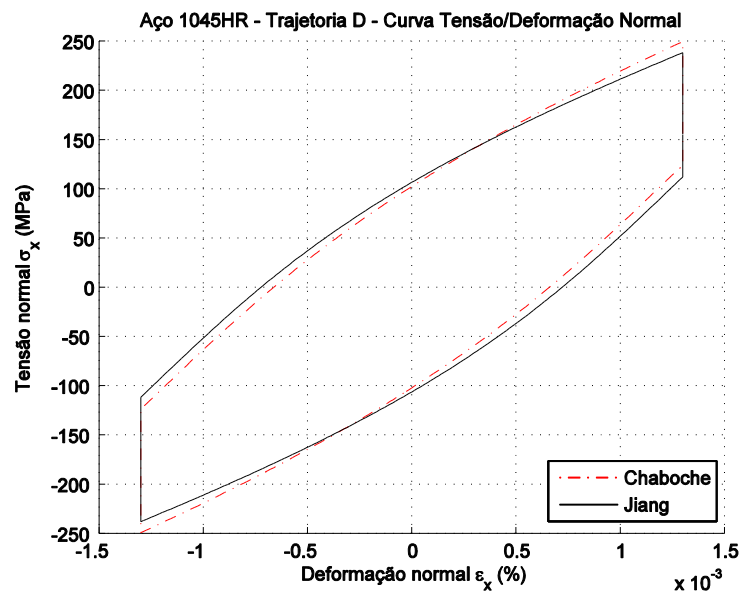


Figura 4.24 - Comparação das curvas de tensão-deformação normais resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para os modelos de Jiang e Chaboche usando o aço SAE 1045HR, com amplitudes de deformação $\epsilon_a = 0,13\%$ e $\gamma_a = 0,34\%$.

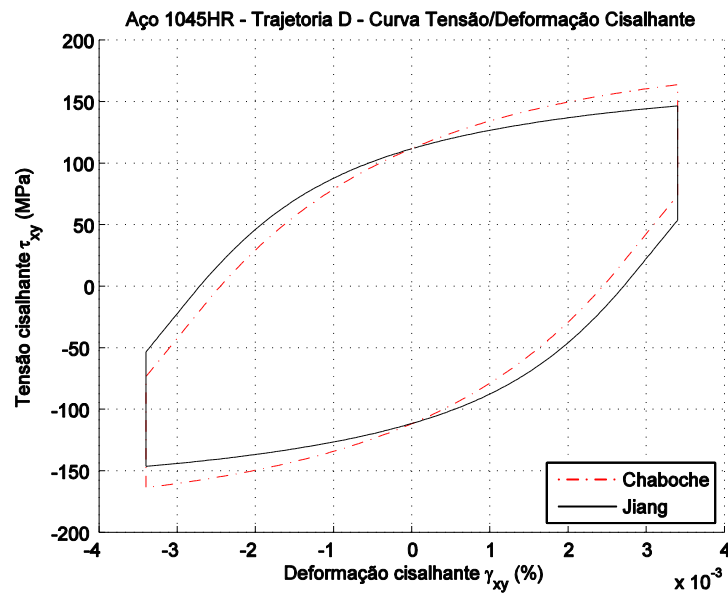


Figura 4.25 - Comparação das curvas de tensão-deformação cisalhantes resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para os modelos de Jiang e Chaboche usando o aço SAE 1045HR, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,13\%$ e $\gamma_a = 0,34\%$.

A Tabela 4.3 apresenta os resultados obtidos para os modelos de Chaboche e Jiang e os resultados experimentais para os aços 304 (Itoh, 2001), aço S460N (Jiang et al., 2007) e aço 1045 HR (FATEMI, 1998).

Tabela 4.3 - Amplitudes de deformação prescritas e amplitudes de tensão experimentais e encontradas pelos modelos de Chaboche e Jiang para a trajetória D e aços 304, S460 e 1045 HR.

Aço		304	S460N	1045 HR
Trajetória		Retangular	Retangular	Retangular
Deformação	ε_a (%)	0,4	0,173	0,13
	γ_a (%)	0,695	0,3	0,34
Experimental	σ_a (MPa)	530	362	286,8
	τ_a (MPa)	278	227	196
Chaboche	σ_a (MPa)	437,2	331,4	249,3
	τ_a (MPa)	157,8	190,9	163,7
Jiang	σ_a (MPa)	408,1	319,4	238
	τ_a (MPa)	132,1	178,2	146,4

Analisando os resultados de amplitudes de tensão encontrados nesta seção, nota-se que para o carregamento multiaxial não proporcional (Trajetórias D) as

amplitudes de tensão normal e cisalhante encontradas pelo modelo de Jiang são subestimadas em relação às amplitudes encontradas pelo modelo de Chaboche, que por sua vez também são subestimadas em relação aos valores experimentais retirados da literatura, principalmente para os caso das tensões cisalhantes.

Essa distorção dos resultados encontrados pelo modelo de Jiang ocorre devido o fato de ter sido utilizado valores constantes para o expoente m_i durante as simulações. Os resultados encontrados mostram que a utilização dessa estratégia de simplificação do modelo de Jiang penaliza a capacidade preditiva do mesmo, pois diminui sua sensibilidade aos efeitos da não proporcionalidade do carregamento, independente do tipo de aço utilizado na análise.

4.4 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho, apresentou-se um estudo sobre a utilização do modelo de endurecimento cinemático de Jiang utilizando a estratégia de simplificação do modelo onde se assumiu apenas valores constantes para o expoente m_i na simulação do comportamento elastoplástico de três diferentes tipos de aços (304, S460N e SAE 1045 HR) submetidos a carregamentos cíclicos de naturezas tanto proporcionais quanto não proporcionais.

Após a análise dos resultados, notou-se que para os casos dos históricos de carregamentos proporcionais (Trajetórias A, B e C), apesar da presença do termo de não proporcionalidade no modelo de Jiang, o mesmo gera bons resultados de amplitudes de tensão quando comparados com os valores experimentais para a maioria dos casos, exceto para o caso da simulação da trajetória C utilizado o aço 304, onde a simulação gera resultados de amplitudes de tensão não muito próximos dos esperados.

Já para o caso do histórico de carregamento não proporcional (Trajetória D), observou-se que a utilização de valores constantes para o expoente m_i afetou a capacidade preditiva do modelo de Jiang, fazendo com que o mesmo gerasse estimativas conservadoras para as amplitudes de tensão. Porém, mesmo assim o

modelo de Jiang foi capaz de obter resultados para amplitudes de tensão satisfatórios na mesma casa de grandeza dos resultados experimentais.

Por fim, conclui-se que a utilização da estratégia de simplificação do modelo de Jiang em que se assumem valores constantes para o expoente m_i compromete a sensibilidade do modelo aos efeitos da não proporcionalidade dos carregamentos, gerando resultados conservadores, que conseqüentemente podem resultar em estimativas de vidas à fadiga subestimadas dependendo de qual seja a finalidade do projeto, exigindo então mais atenção na utilização dessa simplificação do modelo de Jiang na simulação do comportamento elastoplástico de matérias dúcteis sob condições de carregamentos não proporcionais.

Como possível trabalho futuro está a realização de uma análise profunda do ganho na capacidade preditiva do modelo de Jiang ao se utilizar expoentes m_i na forma de funções dependentes do Tensor cinemático β e do Vetor de Fluxo N durante a simulação do comportamento elastoplástico de matérias dúcteis submetidos à históricos de carregamento não proporcionais.

Outro possível trabalho seria a realização de um estudo para mesurar de forma quantitativa a influência do termo de não proporcionalidade presente no modelo de Jiang na simulação de históricos de carregamentos puramente proporcionais aplicados à materiais dúcteis.

REFERÊNCIA BIBLIOGRAFICA

ARMSTRONG, P. J., FREDERICK, C. O. **A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect.** Report RD/B/N731, CEGB, Central Electricity Generating Board, Berkley, UK, 1966.

BARI, S., HASSAN. T. **Anatomy of coupled constitutive models for ratcheting simulation.** Int. J. Plasticity, 16, pp 381-409, 2000.

BARI, S. **Constitutive modeling for cyclic plasticity and ratcheting.** Thesis of doctorate degree, Department of civil engineering, North Carolina State University, Raleigh, NC, 135 p, 2001.

CALLISTER, W. D. Jr. **Ciência e engenharia de materiais: uma introdução.** 5ª ed. Rio de Janeiro, LTC, 2002.

CHABOCHE, J. L. **Time-independent Constitutive Theories for Cyclic Plasticity.** Int. J. Plasticity, 2, pp 149-188, 1986.

CHABOCHE, J. L. **Constitutive Equations for Cyclic Plasticity and Cyclic Viscoplasticity,** 1989.

CHABOCHE, J. L. **On Some Modifications of Kinematic Hardening to Improve the Description of Ratchetting Effects.** International Journal of Plasticity, 7, 661, 1991.

CHABOCHE, J. L. **Modeling of ratchetting: evaluation of various approaches.** Eur. J. Mech., A/Solids, No 13, pp 501-518, 1994.

FATEMI, A.; SOCIE, D. F. **A Critical Plane Approach To Multiaxial Fatigue Damage Including Out-Of-Phase Loading.** Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, Vol 11, No. 3, pp. 149-165, 1988.

ITOH, T. **Multiaxial Low Cycle Fatigue Life Prediction Under Non-Proportional Loading.** Memoirs of the Faculty of Engineering, Fukui University, 2001.

JIANG, Y. **Cyclic Plasticity with Emphasis on Ratchetting.** Ph.D. Dissertation, Mechanical Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, 1993.

JIANG, Y., SEHITOGLU, H. **Modeling of Cyclic Ratchetting Plasticity: Part I – Development of Constitutive Equations.** ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 63, pp. 720-725, 1996.

JIANG, Y., SEHITOGLU, H. **Modeling of Cyclic Ratchetting Plasticity: Part II – Comparison of model simulations with experiments.** ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 63, pp. 726-733, 1996.

JIANG, Y., KURATH, P. **Characteristics of the Armstrong-Frederick type plasticity models.** International Journal of Plasticity, Vol. 12, No. 3, pp. 387-415, 1996.

JIANG, Y., HERTEL, O., VORMWALD, M. **An experimental evaluation of three critical plane multiaxial fatigue criteria.** International Journal of Fatigue, 29, 1490–1502, 2007.

LESSE, G. E.; MORROW, J. **Low Cycle Fatigue Properties Of A 1045 Steel In Torsion.** Multiaxial Fatigue. ASTM STP 853, American Society for Testing and Materials, West Conshohocken, PA, pp. 482-496, 1985.

LOPES, J. P. **Implementação implícita do modelo de plasticidade cíclica de Chaboche.** Projeto de Graduação em Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF. 106 p, 2014.

OHNO, N., WANG, J. D. **Kinematic Hardening Rules with Critical State of Dynamic Recovery: Part I Formulation and Basic Features for Ratchetting Behavior.** International Journal of Plasticity, 9, 375, 1993a.

OHNO, N., WANG, J. D. **Kinematic Hardening Rules with Critical State of Dynamic Recovery: Part II Application to Experiments of Ratchetting Behavior.** International Journal of Plasticity, 9, 391, 1993.

PERREIRA, F. G. **Um estudo do parâmetro de Tanaka como medida do encruamento não proporcional, no contexto da plasticidade cíclica.** Dissertação de mestrado em Ciências Mecânicas, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF. 122 p, 2014.

PRAGER, W. **A new method of analyzing stresses and strains in work hardening plastic solids.** ASME J. App. Mech., 23, pp 493-496, 1955.

PRAGER, W. **The theory of plasticity: a survey of recent achievements.** Proceedings, Institution of Mechanical Engineers, 169:41-57, 1955.

RAMBERG, W.; OSGOOD, W. R. **Description of stress-strain curves by three parameters**. Technical Note no. 902, National Advisory Committee For Aeronautics, Washington – DC, 1943.

SIMO, J. C., HUGHES, T. J. R. **Computational Inelasticity**. Interdisciplinary Applied Mechanics, Vol. 7., Springer-Verlag, New York, 1998.

SOUZA NETO, E. A.; PERIC, D. E. .; OWEN, D. J. D. **Computational Methods for Plasticity**, 2008.

VON MISES, R. **Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand**. **Göttin. Nachr.** Journal of Mathematical Physics, vol. 1, pp. 582–592, 1913.

HOFF, H. **Beobachtungen über den Bauschinger-Effekt an weichen und mittelharten Stählen**. Düsseldorf, Verlag, Stahleisen, 1958.

ANEXO

		Pág.
Anexo I	Sub-rotina SUJIA3D para atualização das variáveis de estado do modelo cinemático de Jiang	78
Anexo II	Sub-rotina CTJIA3D para calculo da matriz tangente consistente	95

Anexo I – Sub-rotina SUJIA3D para atualização das variáveis de estado do modelo cinemático de Jiang

```
! BEGIN_SUBROUTINE SUCHA
! State update procedure for Jiang kinematic model.
!
! L. Malcher and R.S. Neves, july, 2015

SUBROUTINE SUJIA3D(DGAMA , IPROPS , LALGVA , NTYPE , RPROPS , RSTAVA ,
STRAN , &
                STRES , NRPROP , NIPROP , NRSTAV , NSTRA , NSTRE ,
NLALGV)
IMPLICIT NONE

!=====
===
!=====
===
!PARAMETER DECLARATION
INTEGER, PARAMETER:: IPHARD=14, KSTRE=6
!=====
===
!=====
===
!DATA DECLARATION
REAL(8) R0      /0.0D0/
REAL(8) RP5     /0.5D0/
REAL(8) R1      /1.0D0/
REAL(8) R2      /2.0D0/
REAL(8) R3      /3.0D0/
REAL(8) R4      /4.0D0/
REAL(8) R5      /5.0D0/
REAL(8) R27     /27.0D0/
REAL(8) R81     /81.0D0/
REAL(8) R243    /243.0D0/
REAL(8) R1458   /1458.0D0/
REAL(8) TOL     /1.D-06/
INTEGER MXITER  /50/
!=====
===
!=====
===
! DECLARATION OF ARGUMENTS
INTEGER NTYPE , NRPROP , NIPROP , NRSTAV , NSTRA , NSTRE , NLALGV

REAL(8) DGAMA

INTEGER, DIMENSION(NIPROP) :: IPROPS
REAL(8), DIMENSION(NRPROP) :: RPROPS
REAL(8), DIMENSION(NRSTAV) :: RSTAVA
REAL(8), DIMENSION(NSTRA)  :: STRAN
REAL(8), DIMENSION(NSTRE)  :: STRES
LOGICAL, DIMENSION(NLALGV) :: LALGVA
!=====
===
!=====
===
```

```

! DECLARATION OF LOCAL VARIABLES
LOGICAL IFPLAS , SUFAIL

INTEGER I , J , NHARD , IITER , K , NBACK

REAL(8) EPBARN , YOUNG , POISS , SIGMAT , SIGMAS , GMODU , BULK ,
R2G , R3G , &
EEV , P , EEVD3 , VARJ2T , QTRIAL , DETS , SIGMAY , XI
, PHI , &
EPBAR , HSLOPE , NORMS , SEQ , EQ2 , ADBETA , BDBETA ,
CDBETA , DDBETA , &
RESNOR , EQ3 , AUX01

REAL(8) PLFUN , DPLFUN

! FOURTH ORDER IDENTITY TENSOR
REAL(8) , DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: FOID
! SECOND ORDER IDENTITY TENSOR
REAL(8) , DIMENSION(NSTRE) :: SOID
! DEVIATORIC INDENTITY TENSOR
REAL(8) , DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: DFOID
! DEVIATORIC STRAIN TENSOR
REAL(8) , DIMENSION(NSTRE) :: EET, ETA, ETAN, BACKN, BACK
REAL(8) , DIMENSION(NSTRE) :: STRIAL
REAL(8) , DIMENSION(NSTRE) :: SINVT
REAL(8) , DIMENSION(NSTRE) :: PROSINVT
REAL(8) , DIMENSION(NSTRE) :: BETA
REAL(8) , DIMENSION(NSTRE) :: ALPHA
REAL(8) , DIMENSION(NSTRE) :: EQ1
REAL(8) , DIMENSION(6+6+6) :: EQ4
REAL(8) , DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: SDOTS
REAL(8) , DIMENSION(NSTRE) :: DXI
REAL(8) , DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: SITDSIT
REAL(8) , DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: PROSITDSIT
REAL(8) , DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: SITDS
REAL(8) , DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: PROSITDS
REAL(8) , DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: DSITDS
REAL(8) , DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: PRODSITDS
REAL(8) , DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: SDSINVT
REAL(8) , DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: DBETA
REAL(8) , DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: DALPHA
REAL(8) , DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: DALPHAB
REAL(8) , DIMENSION(14+6+6,14+6+6) :: MATRIX , INVMATRIX
REAL(8) , DIMENSION(14,14) :: MATRIX14 , INVMATRIX14
REAL(8) , DIMENSION(20,20) :: MATRIX20 , INVMATRIX20
REAL(8) , DIMENSION(14+6+6) :: RHS , RES
REAL(8) , DIMENSION(14) :: RHS14 , RES14
REAL(8) , DIMENSION(20) :: RHS20 , RES20
REAL(8) , DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: DXIDBETA
REAL(8) , DIMENSION(3,NSTRE) :: BACKNI
REAL(8) , DIMENSION(3,NSTRE) :: BACKI
REAL(8) , DIMENSION(3) :: HKSLOPE
REAL(8) , DIMENSION(3) :: BKIN
REAL(8) , DIMENSION(3) :: MEXP
REAL(8) , DIMENSION(3) :: CNP
! *****
! VARIÁVEIS NECESSÁRIAS PARA A DEFINIÇÃO DA VARIÁVEL DE
! ENCRUAMENTO

```

```

! FÃ•BIO REIS & FILIPE XAVIER - AUGUST, 2012
! *****
REAL(8), DIMENSION(NSTRE) :: SIGMA
! DUPLA CONTRACÃ+Ãfo ENTRE DALPHA E O TENSOR DAS TENSÃ•ES
! GLOBAIS
REAL(8), DIMENSION(NSTRE) :: DC_DALPHA_SIGMA
! DUPLA CONTRACÃ+Ãfo ENTRE ALPHA E SIGMA
REAL(8) DC_ALPHA_SIGMA
!=====
===
!=====
===
! INITILIZE LOCAL VARIABLES
IFPLAS=.FALSE.
SUFAIL=.FALSE.

I=0 ; J=0 ; NHARD=0 ; IITER=0 ; K=0 ; NBACK=0

EPBARN=R0 ; YOUNG=R0 ; POISS=R0 ; SIGMAT=R0 ; SIGMAS=R0 ;
GMODU=R0 ; BULK=R0
R2G=R0 ; R3G=R0 ; EEV=R0 ; P=R0 ; EEVD3=R0 ;
EET=R0 ; VARJ2T=R0
QTRIAL=R0 ; DETS=R0 ; SIGMAY=R0 ; XI=R0 ; PHI=R0 ;
EPBAR=R0 ; STRIAL=R0
HSLOPE=R0 ; NORMS=R0 ; SEQ=R0 ; PROSINVT=R0 ; BETA=R0 ;
ALPHA=R0 ; EQ1=R0
EQ2=R0 ; SDOTS=R0 ; ADBETA=R0 ; BDBETA=R0 ; CDBETA=R0 ;
DDBETA=R0 ; DXI=R0
SITDSIT=R0 ; PROSITDSIT=R0 ; SITDS=R0 ; PROSITDS=R0 ; DSITDS=R0 ;
PRODSITDS=R0 ; SDSINVT=R0
DBETA=R0 ; DALPHA=R0 ; MATRIX=R0 ; DXIDBETA=R0 ; HKSLOPE=R0 ;
BKIN=R0 ; EQ3=R0
BACKNI=R0 ; BACKI=R0 ; BACK=R0 ; BACKN=R0 ; ETA=R0 ;
ETAN=R0 ; EQ4=R0
DALPHAB=R0 ; MEXP=R0 ; CNP=R0 ; AUX01=R0

! INITILIZE THE FOURTH ORER IDENTITY TENSOR
FOID=R0
FOID(1,1)=R1
FOID(2,2)=R1
FOID(3,3)=R1
FOID(4,4)=R1
FOID(5,5)=R1
FOID(6,6)=R1
! INITILIZE THE SECON ORDER IDENTITY TENSOR
SOID=R0
SOID(1)=R1
SOID(2)=R1
SOID(3)=R1

! COMPUTE (FOID-(SOID \OTIMES SOID)/3)
DFOID=R0
DO I=1,NSTRE
  DO J=1,NSTRE
    DFOID(I,J)=FOID(I,J) - (R1/R3) *SOID(I) *SOID(J)
  ENDDO
ENDDO
DFOID(4,4)=DFOID(4,4) *R2

```


DFOID(5,5)=DFOID(5,5)*R2
DFOID(6,6)=DFOID(6,6)*R2

```
! *****
! VARIÁVEIS NECESSÁRIAS PARA A DEFINIÇÃO DA VARIÁVEL DE
! ENCRUAMENTO
! FÁBIO REIS & FILIPE XAVIER - AUGUST, 2012
! *****
SIGMA=R0 ; DC_DALPHA_SIGMA=R0 ; DC_ALPHA_SIGMA=R0
!=====
===
!=====
===
! STATE UPDATE
DGAMA=R0
STRES=R0
EPBARN=RSTAVA(KSTRE+1)
!
BACKNI(1,1)=RSTAVA(KSTRE+1+1)
BACKNI(1,2)=RSTAVA(KSTRE+1+2)
BACKNI(1,3)=RSTAVA(KSTRE+1+3)
BACKNI(1,4)=RSTAVA(KSTRE+1+4)
BACKNI(1,5)=RSTAVA(KSTRE+1+5)
BACKNI(1,6)=RSTAVA(KSTRE+1+6)
!
BACKNI(2,1)=RSTAVA(KSTRE+1+7)
BACKNI(2,2)=RSTAVA(KSTRE+1+8)
BACKNI(2,3)=RSTAVA(KSTRE+1+9)
BACKNI(2,4)=RSTAVA(KSTRE+1+10)
BACKNI(2,5)=RSTAVA(KSTRE+1+11)
BACKNI(2,6)=RSTAVA(KSTRE+1+12)
!
BACKNI(3,1)=RSTAVA(KSTRE+1+13)
BACKNI(3,2)=RSTAVA(KSTRE+1+14)
BACKNI(3,3)=RSTAVA(KSTRE+1+15)
BACKNI(3,4)=RSTAVA(KSTRE+1+16)
BACKNI(3,5)=RSTAVA(KSTRE+1+17)
BACKNI(3,6)=RSTAVA(KSTRE+1+18)
!
! SET SOME MATERIAL PROPERTIES
YOUNG=RPROPS(2)
POISS=RPROPS(3)
NHARD=IPROPS(3)
!
NBACK=IPROPS(4)
!
SIGMAY=RPROPS(4)
!
HKSLOPE(1)=RPROPS(5)
BKIN(1)=RPROPS(6)
MEXP(1)=RPROPS(7)
!
HKSLOPE(2)=RPROPS(8)
BKIN(2)=RPROPS(9)
MEXP(2)=RPROPS(10)
!
HKSLOPE(3)=RPROPS(11)
BKIN(3)=RPROPS(12)
```

```

MEXP (3) =RPROPS (13)
!
if (BKIN (1) .EQ. R0) THEN
    CNP (1) =HKSLOPE (1) /R1
ELSE
    CNP (1) =HKSLOPE (1) /BKIN (1)
ENDIF
if (BKIN (2) .EQ. R0) THEN
    CNP (2) =HKSLOPE (2) /R1
ELSE
    CNP (2) =HKSLOPE (2) /BKIN (2)
ENDIF
if (BKIN (3) .EQ. R0) THEN
    CNP (3) =HKSLOPE (3) /R1
ELSE
    CNP (3) =HKSLOPE (3) /BKIN (3)
ENDIF
! Shear and bulk moduli and other necessary constants
GMODU=YOUNG/ (R2* (R1+POISS) )
BULK=YOUNG/ (R3* (R1-R2*POISS) )
R2G=R2*GMODU
R3G=R3*GMODU
! COMPUTE THE ELASTIC TRIAL STATE
EEV=STRAN (1) +STRAN (2) +STRAN (3)
P=BULK*EEV
! ELASTIC TRIAL DEVIATORIC STRAIN
EEVD3=EEV/R3
EET (1) =STRAN (1) -EEVD3
EET (2) =STRAN (2) -EEVD3
EET (3) =STRAN (3) -EEVD3
EET (4) =STRAN (4) /R2
EET (5) =STRAN (5) /R2
EET (6) =STRAN (6) /R2
!
BACKN=R0
DO I=1, NBACK
    DO J=1, NSTRE
        BACKN (J) =BACKN (J) +BACKNI (I, J)
    ENDDO
ENDDO
!
ETAN (1) =R2G*EET (1) -BACKN (1)
ETAN (2) =R2G*EET (2) -BACKN (2)
ETAN (3) =R2G*EET (3) -BACKN (3)
ETAN (4) =R2G*EET (4) -BACKN (4)
ETAN (5) =R2G*EET (5) -BACKN (5)
ETAN (6) =R2G*EET (6) -BACKN (6)
! COMPUTE TRIAL EFFECTIVE STRESS
VARJ2T=ETAN (1) *ETAN (1) +ETAN (2) *ETAN (2) +ETAN (3) *ETAN (3) +&
    R2*ETAN (4) *ETAN (4) +R2*ETAN (5) *ETAN (5) +R2*ETAN (6) *ETAN (6)
QTRIAL=DSQRT (R3*VARJ2T/R2)
! CHECK FOR PLASTIC ADMISSIBILITY
PHI=QTRIAL-SIGMAY
IF (PHI/SIGMAY.GT.TOL) THEN
    ! PLASTIC DOMAIN
    IFPLAS=.TRUE.
    ! INITIALIZE VARIABLES FOR NEWTON-RAPHSON METHOD
    EPBAR=EPBARN

```

```

STRIAL=R2G*EET
STRES=STRIAL
BACK=BACKN
BACKI=BACKNI
ETA=ETAN
DO IITER=1,50
  ! NORMS -> ||S||
  NORMS=DSQRT(ETA(1)*ETA(1)+ETA(2)*ETA(2)+&
    ETA(3)*ETA(3)+R2*ETA(4)*ETA(4)+&
    R2*ETA(5)*ETA(5)+R2*ETA(6)*ETA(6))
  ! SEQ -- > SIGMA EQ
  SEQ=DSQRT(R3/R2)*NORMS
  ! COMPUTE ALPHA
  DO I=1,NSTRE
    ALPHA(I)=DSQRT(R3/R2)*ETA(I)/NORMS
  ENDDO
  !
  ! INITILIZE THE RESIDUAL EQUATION --> EQi
  DO I=1, NSTRE
    EQ1(I)=STRES(I)-STRIAL(I)+R2G*DGAMA*ALPHA(I)
  ENDDO
  !
  EQ2=EPBAR-EPBARN-DGAMA
  !
  EQ3=SEQ-SIGMAY
  DO I=1, NSTRE
    AUX01=R0
    AUX01=( (SIGMAY/CNP(1))**MEXP(1) )
    EQ4(0+I)=BACKI(1,I)-BACKNI(1,I)-
(R2/R3)*HKSLOPE(1)*DGAMA*ALPHA(I)+DGAMA*BKIN(1)*BACKI(1,I)*AUX01  !BETA
1
    AUX01=R0
    AUX01=( (SIGMAY/CNP(2))**MEXP(2) )
    EQ4(6+I)=BACKI(2,I)-BACKNI(2,I)-
(R2/R3)*HKSLOPE(2)*DGAMA*ALPHA(I)+DGAMA*BKIN(2)*BACKI(2,I)*AUX01  !BETA
2
    AUX01=R0
    AUX01=( (SIGMAY/CNP(3))**MEXP(3) )
    EQ4(12+I)=BACKI(3,I)-BACKNI(3,I)-
(R2/R3)*HKSLOPE(3)*DGAMA*ALPHA(I)+DGAMA*BKIN(3)*BACKI(3,I)*AUX01  !BETA
3
  ENDDO

  !=====
==
  !=====
==
  ! CONSTRUCT THE MATRIX WITH THE DERIVATIVES
  !=====
==
  !=====
==
  !*****
  ! COMPUTE S \OTIMES S
  !*****

```

```

SDOTS=R0
DO I=1,NSTRE
  DO J=1,NSTRE
    IF (J.GE.4) THEN
      SDOTS (I, J) =R2*ETA (I) *ETA (J)
    ELSE
      SDOTS (I, J) =ETA (I) *ETA (J)
    ENDIF
  ENDDO
ENDDO
! =====
! COMPUTE DALPHA
! =====
DALPHA=R0
DALPHAB=R0
DO I=1,NSTRE
  DO J=1,NSTRE
    DALPHA (I, J) =DSQRT (R3/R2) *FOID (I, J) /NORMS-&
      DSQRT (R3/R2) *SDOTS (I, J) / (NORMS**R3)

    DALPHAB (I, J) =-DSQRT (R3/2) *FOID (I, J) /NORMS+&
      DSQRT (R3/R2) *SDOTS (I, J) / (NORMS**R3)

  ENDDO
ENDDO
! =====
! DERIVADAS ASSOCIADAS À PRIMEIRA EQUAÇÃO DE RESÃ•DUO
! =====

MATRIX=R0
DO I=1,NSTRE
  DO J=1,NSTRE
    MATRIX (I, J) =FOID (I, J) +R2G*DGAMA*DALPHA (I, J)
  ENDDO
ENDDO
!
MATRIX (1, 7) =R0
MATRIX (2, 7) =R0
MATRIX (3, 7) =R0
MATRIX (4, 7) =R0
MATRIX (5, 7) =R0
MATRIX (6, 7) =R0
!
MATRIX (1, 8) =R2G*ALPHA (1)
MATRIX (2, 8) =R2G*ALPHA (2)
MATRIX (3, 8) =R2G*ALPHA (3)
MATRIX (4, 8) =R2G*ALPHA (4)
MATRIX (5, 8) =R2G*ALPHA (5)
MATRIX (6, 8) =R2G*ALPHA (6)

DO I=1,NSTRE
  DO J=1,NSTRE
    MATRIX (I, J+8) =R2G*DGAMA*DALPHAB (I, J) !BETA 1
    MATRIX (I, J+14) =R2G*DGAMA*DALPHAB (I, J) !BETA 2
    MATRIX (I, J+20) =R2G*DGAMA*DALPHAB (I, J) !BETA 3
  ENDDO
ENDDO
! =====

```

```

! DERIVADAS ASSOCIADAS À SEGUNDA EQUAÇÃO DE RESERVA
! =====
MATRIX(7,1)=R0
MATRIX(7,2)=R0
MATRIX(7,3)=R0
MATRIX(7,4)=R0
MATRIX(7,5)=R0
MATRIX(7,6)=R0
!
MATRIX(7,7)=R1
!
MATRIX(7,8)=-R1
!BETA 1
MATRIX(7,9)=R0
MATRIX(7,10)=R0
MATRIX(7,11)=R0
MATRIX(7,12)=R0
MATRIX(7,13)=R0
MATRIX(7,14)=R0
!BETA 2
MATRIX(7,15)=R0
MATRIX(7,16)=R0
MATRIX(7,17)=R0
MATRIX(7,18)=R0
MATRIX(7,19)=R0
MATRIX(7,20)=R0
!BETA 3
MATRIX(7,21)=R0
MATRIX(7,22)=R0
MATRIX(7,23)=R0
MATRIX(7,24)=R0
MATRIX(7,25)=R0
MATRIX(7,26)=R0
! =====
! DERIVADAS ASSOCIADAS À TERCEIRA EQUAÇÃO DE RESERVA
! =====
MATRIX(8,1)=DSQRT(R3/R2)*ETA(1)/NORMS
MATRIX(8,2)=DSQRT(R3/R2)*ETA(2)/NORMS
MATRIX(8,3)=DSQRT(R3/R2)*ETA(3)/NORMS
MATRIX(8,4)=R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(4)/NORMS)
MATRIX(8,5)=R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(5)/NORMS)
MATRIX(8,6)=R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(6)/NORMS)
!
MATRIX(8,7)=R0
MATRIX(8,8)=R0
!BETA 1
MATRIX(8,9)=-DSQRT(R3/R2)*ETA(1)/NORMS
MATRIX(8,10)=-DSQRT(R3/R2)*ETA(2)/NORMS
MATRIX(8,11)=-DSQRT(R3/R2)*ETA(3)/NORMS
MATRIX(8,12)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(4)/NORMS)
MATRIX(8,13)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(5)/NORMS)
MATRIX(8,14)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(6)/NORMS)
!BETA 2
MATRIX(8,15)=-DSQRT(R3/R2)*ETA(1)/NORMS
MATRIX(8,16)=-DSQRT(R3/R2)*ETA(2)/NORMS
MATRIX(8,17)=-DSQRT(R3/R2)*ETA(3)/NORMS
MATRIX(8,18)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(4)/NORMS)
MATRIX(8,19)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(5)/NORMS)

```

```

MATRIX(8,20)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(6)/NORMS)
!BETA 3
MATRIX(8,21)=-DSQRT(R3/R2)*ETA(1)/NORMS
MATRIX(8,22)=-DSQRT(R3/R2)*ETA(2)/NORMS
MATRIX(8,23)=-DSQRT(R3/R2)*ETA(3)/NORMS
MATRIX(8,24)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(4)/NORMS)
MATRIX(8,25)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(5)/NORMS)
MATRIX(8,26)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(6)/NORMS)
!
! =====
! DERIVADAS ASSOCIADAS À QUARTA EQUAÇÃO DE RESA•DUO
! =====
DO I=1,NSTRE
  DO J=1,NSTRE
    MATRIX(I+8,J)=-
(R2/R3)*HKSLOPE(1)*DGAMA*DALPHA(I,J) !BETA 1
    MATRIX(I+14,J)=-
(R2/R3)*HKSLOPE(2)*DGAMA*DALPHA(I,J) !BETA 2
    MATRIX(I+20,J)=-
(R2/R3)*HKSLOPE(3)*DGAMA*DALPHA(I,J) !BETA 3
  ENDDO
ENDDO
! BETA 1
MATRIX(9,7)=R0
MATRIX(10,7)=R0
MATRIX(11,7)=R0
MATRIX(12,7)=R0
MATRIX(13,7)=R0
MATRIX(14,7)=R0
! BETA 2
MATRIX(15,7)=R0
MATRIX(16,7)=R0
MATRIX(17,7)=R0
MATRIX(18,7)=R0
MATRIX(19,7)=R0
MATRIX(20,7)=R0
! BETA 3
MATRIX(21,7)=R0
MATRIX(22,7)=R0
MATRIX(23,7)=R0
MATRIX(24,7)=R0
MATRIX(25,7)=R0
MATRIX(26,7)=R0
!
DO I=1,NSTRE
  AUX01=R0
  AUX01=( (SIGMAY/CNP(1))*MEXP(1) )
  MATRIX(I+8,8)=- (R2/R3)*HKSLOPE(1)*ALPHA(I) +
BKIN(1)*BACKI(1,I)*AUX01 !BETA 1
  AUX01=R0
  AUX01=( (SIGMAY/CNP(2))*MEXP(2) )
  MATRIX(I+14,8)=- (R2/R3)*HKSLOPE(2)*ALPHA(I) +
BKIN(2)*BACKI(2,I)*AUX01 !BETA 2
  AUX01=R0
  AUX01=( (SIGMAY/CNP(3))*MEXP(3) )
  MATRIX(I+20,8)=- (R2/R3)*HKSLOPE(3)*ALPHA(I) +
BKIN(3)*BACKI(3,I)*AUX01 !BETA 3
ENDDO

```

```

!
DO I=1,NSTRE
  DO J=1,NSTRE
    AUX01=R0
    AUX01=( (SIGMAY/CNP(1))**MEXP(1) )
    MATRIX(I+8,J+8)=FOID(I,J) -
(R2/R3)*HKSLOPE(1)*DGAMA*DALPHAB(I,J) + DGAMA*BKIN(1)*FOID(I,J)*AUX01
!BETA 1
    MATRIX(I+8,J+14)=-
(R2/R3)*HKSLOPE(1)*DGAMA*DALPHAB(I,J) !BETA 1
    MATRIX(I+8,J+20)=-
(R2/R3)*HKSLOPE(1)*DGAMA*DALPHAB(I,J) !BETA 1
!
    MATRIX(I+14,J+8)=-
(R2/R3)*HKSLOPE(2)*DGAMA*DALPHAB(I,J) !BETA 2
    AUX01=R0
    AUX01=( (SIGMAY/CNP(2))**MEXP(2) )
    MATRIX(I+14,J+14)=FOID(I,J) -
(R2/R3)*HKSLOPE(2)*DGAMA*DALPHAB(I,J) + DGAMA*BKIN(2)*FOID(I,J)*AUX01
!BETA 2
    MATRIX(I+14,J+20)=-
(R2/R3)*HKSLOPE(2)*DGAMA*DALPHAB(I,J) !BETA 2
!
    MATRIX(I+20,J+8)=-
(R2/R3)*HKSLOPE(3)*DGAMA*DALPHAB(I,J) !BETA 3
    MATRIX(I+20,J+14)=-
(R2/R3)*HKSLOPE(3)*DGAMA*DALPHAB(I,J) !BETA 3
    AUX01=R0
    AUX01=( (SIGMAY/CNP(3))**MEXP(3) )
    MATRIX(I+20,J+20)=FOID(I,J) -
(R2/R3)*HKSLOPE(3)*DGAMA*DALPHAB(I,J) + DGAMA*BKIN(3)*FOID(I,J)*AUX01
!BETA 3
  ENDDO
ENDDO

```

```

!=====
==

```

```

! SOLVE THE EQUATION SYSTEM

```

```

!=====
==

```

```

!
IF (NBACK.EQ.1) THEN
  MATRIX14=R0
  DO I=1,14
    DO J=1,14
      MATRIX14(I,J)=MATRIX(I,J)
    ENDDO
  ENDDO
!
  RHS14=R0
  DO I=1,NSTRE
    RHS14(I)=-EQ1(I)
  ENDDO
  RHS14(7)=-EQ2
  RHS14(8)=-EQ3
  DO I=1,NSTRE

```

```

        RHS14(8+I)=-EQ4(I)
ENDDO
!
RES14=R0
CALL SOLVERMA(MATRIX14,RHS14,RES14,14)
!
RES=R0
DO I=1,14
    RES(I)=RES14(I)
ENDDO
ENDIF
IF (NBACK.EQ.2) THEN
    MATRIX20=R0
    DO I=1,20
        DO J=1,20
            MATRIX20(I,J)=MATRIX(I,J)
        ENDDO
    ENDDO
    !
    RHS20=R0
    DO I=1,NSTRE
        RHS20(I)=-EQ1(I)
    ENDDO
    RHS20(7)=-EQ2
    RHS20(8)=-EQ3
    DO I=1,12
        RHS20(8+I)=-EQ4(I)
    ENDDO
    !
    RES20=R0
    CALL SOLVERMA(MATRIX20,RHS20,RES20,20)
    !
    RES=R0
    DO I=1,20
        RES(I)=RES20(I)
    ENDDO
ENDIF
!
IF (NBACK.EQ.3) THEN
    RHS=R0
    DO I=1,NSTRE
        RHS(I)=-EQ1(I)
    ENDDO
    RHS(7)=-EQ2
    RHS(8)=-EQ3
    !
    DO I=1,18
        RHS(8+I)=-EQ4(I)
    ENDDO
    RES=R0
    CALL SOLVERMA(MATRIX,RHS,RES,26)
ENDIF
! UPDATE VARIABLES
STRES(1)=STRES(1)+RES(1)
STRES(2)=STRES(2)+RES(2)
STRES(3)=STRES(3)+RES(3)
STRES(4)=STRES(4)+RES(4)
STRES(5)=STRES(5)+RES(5)

```



```

STRES (6)=STRES (6)+RES (6)
EPBAR=EPBAR+RES (7)
DGAMA=DGAMA+RES (8)
BACKI (1,1)=BACKI (1,1)+RES (9)
BACKI (1,2)=BACKI (1,2)+RES (10)
BACKI (1,3)=BACKI (1,3)+RES (11)
BACKI (1,4)=BACKI (1,4)+RES (12)
BACKI (1,5)=BACKI (1,5)+RES (13)
BACKI (1,6)=BACKI (1,6)+RES (14)
IF (NBACK.EQ.2) THEN
    BACKI (2,1)=BACKI (2,1)+RES (15)
    BACKI (2,2)=BACKI (2,2)+RES (16)
    BACKI (2,3)=BACKI (2,3)+RES (17)
    BACKI (2,4)=BACKI (2,4)+RES (18)
    BACKI (2,5)=BACKI (2,5)+RES (19)
    BACKI (2,6)=BACKI (2,6)+RES (20)
ENDIF
IF (NBACK.EQ.3) THEN
    BACKI (2,1)=BACKI (2,1)+RES (15)
    BACKI (2,2)=BACKI (2,2)+RES (16)
    BACKI (2,3)=BACKI (2,3)+RES (17)
    BACKI (2,4)=BACKI (2,4)+RES (18)
    BACKI (2,5)=BACKI (2,5)+RES (19)
    BACKI (2,6)=BACKI (2,6)+RES (20)
    BACKI (3,1)=BACKI (3,1)+RES (21)
    BACKI (3,2)=BACKI (3,2)+RES (22)
    BACKI (3,3)=BACKI (3,3)+RES (23)
    BACKI (3,4)=BACKI (3,4)+RES (24)
    BACKI (3,5)=BACKI (3,5)+RES (25)
    BACKI (3,6)=BACKI (3,6)+RES (26)
ENDIF

```

```

!=====
==
! CHECK CONVERGENCE
!=====
==

RESNOR=R0
IF (DABS (STRES (1)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (1))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (1) /STRES (1))
ENDIF
IF (DABS (STRES (2)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (2))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (2) /STRES (2))
ENDIF
IF (DABS (STRES (3)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (3))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (3) /STRES (3))
ENDIF
IF (DABS (STRES (4)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (4))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (4) /STRES (4))

```

```

ENDIF
IF (DABS (STRES (5)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (5))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (5) /STRES (5))
ENDIF
IF (DABS (STRES (6)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (6))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (6) /STRES (6))
ENDIF
IF (EPBAR.LT. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (7))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (7) /EPBAR)
ENDIF
IF (DGAMA.LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (8))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (8) /DGAMA)
ENDIF
IF (DABS (BACKI (1, 1)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (9))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (9) /BACKI (1, 1))
ENDIF
IF (DABS (BACKI (1, 2)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (10))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (10) /BACKI (1, 2))
ENDIF
IF (DABS (BACKI (1, 3)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (11))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (11) /BACKI (1, 3))
ENDIF
IF (DABS (BACKI (1, 4)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (12))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (12) /BACKI (1, 4))
ENDIF
IF (DABS (BACKI (1, 5)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (13))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (13) /BACKI (1, 5))
ENDIF
IF (DABS (BACKI (1, 6)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (14))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (14) /BACKI (1, 6))
ENDIF
!
IF (NBACK.EQ.1) THEN
    BACK (1) =BACKI (1, 1)
    BACK (2) =BACKI (1, 2)
    BACK (3) =BACKI (1, 3)
    BACK (4) =BACKI (1, 4)
    BACK (5) =BACKI (1, 5)

```

```

        BACK(6)=BACKI(1,6)
ELSEIF (NBACK.EQ.2) THEN
    IF (DABS (BACKI (2,1)) .LE. TOL) THEN
        RESNOR=RESNOR+DABS (RES (15))
    ELSE
        RESNOR=RESNOR+DABS (RES (15) /BACKI (2,1))
    ENDIF
    IF (DABS (BACKI (2,2)) .LE. TOL) THEN
        RESNOR=RESNOR+DABS (RES (16))
    ELSE
        RESNOR=RESNOR+DABS (RES (16) /BACKI (2,2))
    ENDIF
    IF (DABS (BACKI (2,3)) .LE. TOL) THEN
        RESNOR=RESNOR+DABS (RES (17))
    ELSE
        RESNOR=RESNOR+DABS (RES (17) /BACKI (2,3))
    ENDIF
    IF (DABS (BACKI (2,4)) .LE. TOL) THEN
        RESNOR=RESNOR+DABS (RES (18))
    ELSE
        RESNOR=RESNOR+DABS (RES (18) /BACKI (2,4))
    ENDIF
    IF (DABS (BACKI (2,5)) .LE. TOL) THEN
        RESNOR=RESNOR+DABS (RES (19))
    ELSE
        RESNOR=RESNOR+DABS (RES (19) /BACKI (2,5))
    ENDIF
    IF (DABS (BACKI (2,6)) .LE. TOL) THEN
        RESNOR=RESNOR+DABS (RES (20))
    ELSE
        RESNOR=RESNOR+DABS (RES (20) /BACKI (2,6))
    ENDIF
BACK(1)=BACKI(1,1)+BACKI(2,1)
BACK(2)=BACKI(1,2)+BACKI(2,2)
BACK(3)=BACKI(1,3)+BACKI(2,3)
BACK(4)=BACKI(1,4)+BACKI(2,4)
BACK(5)=BACKI(1,5)+BACKI(2,5)
BACK(6)=BACKI(1,6)+BACKI(2,6)
ELSEIF (NBACK.EQ.3) THEN
    IF (DABS (BACKI (2,1)) .LE. TOL) THEN
        RESNOR=RESNOR+DABS (RES (15))
    ELSE
        RESNOR=RESNOR+DABS (RES (15) /BACKI (2,1))
    ENDIF
    IF (DABS (BACKI (2,2)) .LE. TOL) THEN
        RESNOR=RESNOR+DABS (RES (16))
    ELSE
        RESNOR=RESNOR+DABS (RES (16) /BACKI (2,2))
    ENDIF
    IF (DABS (BACKI (2,3)) .LE. TOL) THEN
        RESNOR=RESNOR+DABS (RES (17))
    ELSE
        RESNOR=RESNOR+DABS (RES (17) /BACKI (2,3))
    ENDIF
    IF (DABS (BACKI (2,4)) .LE. TOL) THEN
        RESNOR=RESNOR+DABS (RES (18))
    ELSE
        RESNOR=RESNOR+DABS (RES (18) /BACKI (2,4))

```

```

ENDIF
IF (DABS (BACKI (2, 5)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (19))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (19) /BACKI (2, 5))
ENDIF
IF (DABS (BACKI (2, 6)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (20))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (20) /BACKI (2, 6))
ENDIF
IF (DABS (BACKI (3, 1)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (21))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (21) /BACKI (3, 1))
ENDIF
IF (DABS (BACKI (3, 2)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (22))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (22) /BACKI (3, 2))
ENDIF
IF (DABS (BACKI (3, 3)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (23))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (23) /BACKI (3, 3))
ENDIF
IF (DABS (BACKI (3, 4)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (24))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (24) /BACKI (3, 4))
ENDIF
IF (DABS (BACKI (3, 5)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (25))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (25) /BACKI (3, 5))
ENDIF
IF (DABS (BACKI (3, 6)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (26))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (26) /BACKI (3, 6))
ENDIF
BACK (1) =BACKI (1, 1) +BACKI (2, 1) +BACKI (3, 1)
BACK (2) =BACKI (1, 2) +BACKI (2, 2) +BACKI (3, 2)
BACK (3) =BACKI (1, 3) +BACKI (2, 3) +BACKI (3, 3)
BACK (4) =BACKI (1, 4) +BACKI (2, 4) +BACKI (3, 4)
BACK (5) =BACKI (1, 5) +BACKI (2, 5) +BACKI (3, 5)
BACK (6) =BACKI (1, 6) +BACKI (2, 6) +BACKI (3, 6)
ENDIF
!
ETA (1) =STRES (1) -BACK (1)
ETA (2) =STRES (2) -BACK (2)
ETA (3) =STRES (3) -BACK (3)
ETA (4) =STRES (4) -BACK (4)
ETA (5) =STRES (5) -BACK (5)
ETA (6) =STRES (6) -BACK (6)
!
IF (RESNOR .LE. TOL) THEN
    RSTAVA (KSTRE+1) =EPBAR

```

```

RSTAVA (1) = (STRES (1) /R2G) + (R1/R3) *P/BULK
RSTAVA (2) = (STRES (2) /R2G) + (R1/R3) *P/BULK
RSTAVA (3) = (STRES (3) /R2G) + (R1/R3) *P/BULK
RSTAVA (4) = (STRES (4) /R2G) *R2
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! ATENĂ+Ăfo!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
RSTAVA (5) = (STRES (5) /R2G) *R2
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! ATENĂ+Ăfo!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
RSTAVA (6) = (STRES (6) /R2G) *R2
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! ATENĂ+Ăfo!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!
RSTAVA (7) =EPBAR
!
RSTAVA (8) =BACKI (1, 1)
RSTAVA (9) =BACKI (1, 2)
RSTAVA (10) =BACKI (1, 3)
RSTAVA (11) =BACKI (1, 4)
RSTAVA (12) =BACKI (1, 5)
RSTAVA (13) =BACKI (1, 6)
IF (NBACK.EQ.2) THEN
RSTAVA (14) =BACKI (2, 1)
RSTAVA (15) =BACKI (2, 2)
RSTAVA (16) =BACKI (2, 3)
RSTAVA (17) =BACKI (2, 4)
RSTAVA (18) =BACKI (2, 5)
RSTAVA (19) =BACKI (2, 6)
ELSEIF (NBACK.EQ.3) THEN
RSTAVA (14) =BACKI (2, 1)
RSTAVA (15) =BACKI (2, 2)
RSTAVA (16) =BACKI (2, 3)
RSTAVA (17) =BACKI (2, 4)
RSTAVA (18) =BACKI (2, 5)
RSTAVA (19) =BACKI (2, 6)
RSTAVA (20) =BACKI (3, 1)
RSTAVA (21) =BACKI (3, 2)
RSTAVA (22) =BACKI (3, 3)
RSTAVA (23) =BACKI (3, 4)
RSTAVA (24) =BACKI (3, 5)
RSTAVA (25) =BACKI (3, 6)
ENDIF
!
STRES (1) =STRES (1) +P
STRES (2) =STRES (2) +P
STRES (3) =STRES (3) +P
STRES (4) =STRES (4)
STRES (5) =STRES (5)
STRES (6) =STRES (6)
!
GOTO 1000
ENDIF
ENDDO
ELSE
! ELASTIC DOMAIN
STRES (1) =R2G*EET (1) +P
STRES (2) =R2G*EET (2) +P
STRES (3) =R2G*EET (3) +P
STRES (4) =R2G*EET (4)
STRES (5) =R2G*EET (5)
STRES (6) =R2G*EET (6)

```

```
RSTAVA (1) =STRAN (1)
RSTAVA (2) =STRAN (2)
RSTAVA (3) =STRAN (3)
RSTAVA (4) =STRAN (4)
RSTAVA (5) =STRAN (5)
RSTAVA (6) =STRAN (6)
ENDIF
1000 CONTINUE
LALGVA (1) =IFPLAS
LALGVA (2) =SUFAIL
RETURN
END
```

Anexo II – Sub-rotina CTJIA3D para calculo da matriz tangente consistente

```

! CONSISTENT TANGENT MATRIX FOR JIANG KINEMATIC MODEL IN 3D
! L. MALCHER AND R.S. NEVES, JULY, 2015
SUBROUTINE CTJIA3D(DGAMA , DMATX , EPFLAG , IPROPS , &
      NTYPE , RPROPS , RSTAVA , STREST , &
      NDDIM , NRPROPS , NIPROPS , NSTRES , &
      NRSTAV)
IMPLICIT NONE
!=====
=====
!=====
=====
!PARAMETER DECLARATION
INTEGER, PARAMETER:: IPHARD=14, KSTRE=6
!=====
=====
!DATA DECLARATION
REAL(8) R0 /0.0D0/
REAL(8) RP5 /0.5D0/
REAL(8) R1 /1.0D0/
REAL(8) R2 /2.0D0/
REAL(8) R3 /3.0D0/
REAL(8) R4 /4.0D0/
REAL(8) R5 /5.0D0/
REAL(8) R27 /27.0D0/
REAL(8) R81 /81.0D0/
REAL(8) R243 /243.0D0/
REAL(8) R1458 /1458.0D0/
!=====
===
!=====
===
! DECLARATION OF ARGUMENTS
INTEGER NTYPE , NDDIM , NRPROPS , NIPROPS , NSTRES , NRSTAV
LOGICAL EPFLAG
REAL(8) DGAMA

INTEGER, DIMENSION(NIPROPS) :: IPROPS

REAL(8) , DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: DMATX
REAL(8) , DIMENSION(NRPROPS) :: RPROPS
REAL(8) , DIMENSION(NRSTAV) :: RSTAVA
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES) :: STREST
!=====
===
!=====
===
! DECLARATION OF LOCAL VARIABLES
LOGICAL ERROR

INTEGER I , J , NHARD , K , NBACK

REAL(8) PLFUN , DPLFUN

```

```

REAL(8) EPBAR , YOUNG , POISS , SIGMAT , SIGMAS , GMODU , BULK , R2G
, &
R3G , P , SIGMAY , HSLOPE , DETS , NORMS , SEQ , XI ,
&
ADBETA , BDBETA , CDBETA , DDBETA , AUX01

```

```

REAL(8) , DIMENSION(NSTRES) :: SOID
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: FOID
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: DEVPRJ
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES) :: STRES
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES) :: SINVT
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES) :: PROSINVT
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES) :: BETA
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: DFOID
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES) :: ALPHA
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: SDOTS
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES) :: DXI
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: SITDSIT
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: PROSITDSIT
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: SITDS
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: PROSITDS
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: DSITDS
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: PRODSITDS
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: SDSINVT
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: DBETA
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: DALPHA
REAL(8) , DIMENSION(6,6) :: DALPHAB
REAL(8) , DIMENSION(14+6+6,14+6+6) :: MATRIX
REAL(8) , DIMENSION(14+6+6,14+6+6) :: MINVERSE
REAL(8) , DIMENSION(14,14) :: MATRIX14
REAL(8) , DIMENSION(14,14) :: MINVERSE14
REAL(8) , DIMENSION(20,20) :: MATRIX20
REAL(8) , DIMENSION(20,20) :: MINVERSE20
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: DXIDBETA

REAL(8) , DIMENSION(6) :: ETA
REAL(8) , DIMENSION(6) :: ETAN
REAL(8) , DIMENSION(6) :: BACK
REAL(8) , DIMENSION(6) :: BACKN

```

```

!NBACK=2;

```

```

REAL(8) , DIMENSION(3,6) :: BACKNI
REAL(8) , DIMENSION(3,6) :: BACKI
REAL(8) , DIMENSION(3) :: HKSLOPE
REAL(8) , DIMENSION(3) :: BKIN
REAL(8) , DIMENSION(3) :: MEXP
REAL(8) , DIMENSION(3) :: CNP

```

```

! *****
! VARIÁVEIS NECESSÁRIAS PARA A DEFINIÇÃO DA VARIÁVEL DE
! ENCRUAMENTO
! FÁBIO REIS & FILIPE XAVIER - AUGUST, 2012
! *****

```

```

REAL(8) , DIMENSION(6) :: SIGMA
! DUPLA CONTRACÇÃO ENTRE DALPHA E O TENSOR DAS TENSÕES
! GLOBAIS
REAL(8) , DIMENSION(6) :: DC_DALPHA_SIGMA

```



```
! DUPLA CONTRACÇÃO ENTRE ALPHA E SIGMA
REAL(8) DC_ALPHA_SIGMA
```

```
! INITIALIZE LOCAL VARIABLES
ERROR=.FALSE.
```

```
I=0 ; J=0 ; NHARD=0 ; K=0
```

```
SOID=R0      ; FOID=R0      ; DEVPRJ=R0      ; EPBAR=R0      ; YOUNG=R0      ;
POISS=R0
SIGMAT=R0    ; SIGMAS=R0    ; GMODU=R0      ; BULK=R0      ; R2G=R0      ;
R3G=R0
P=R0         ; STRES=R0     ; SIGMAY=R0     ; HSLOPE=R0    ; DETS=R0     ;
NORMS=R0
SEQ=R0       ; XI=R0        ; SINVT=R0      ; PROSINVT=R0 ; BETA=R0      ;
DFOID=R0
ALPHA=R0     ; ADBETA=R0    ; BDBETA=R0    ; CDBETA=R0    ; DDBETA=R0    ;
SDOTS=R0
DXI=R0       ; SITDSIT=R0  ; PROSITDSIT=R0 ; SITDS=R0     ; PROSITDS=R0 ;
DSITDS=R0
PRODSITDS=R0 ; SDSINVT=R0 ; DBETA=R0     ; DALPHA=R0    ; MINVERSE=R0 ;
DXIDBETA=R0
ETA=R0       ; ETAN=R0      ; BACK=R0      ; BACKN=R0     ; DALPHAB=R0   ;
BKIN=R0 ; MEXP=R0
BACKNI=R0    ; BACKI=R0    ; HKSLOPE=R0   ; BKIN=R0      ; MATRIX14=R0  ;
MINVERSE14=R0
MATRIX=R0    ; MATRIX20=R0 ; MINVERSE20=R0 ; CNP=R0      ; AUX01=R0
```

```
! *****
! VARIÁVEIS NECESSÁRIAS PARA A DEFINIÇÃO DA VARIÁVEL DE
! ENCRUAMENTO
! FÁBIO REIS & FILIPE XAVIER - AUGUST, 2012
! *****
```

```
SIGMA=R0 ; DC_DALPHA_SIGMA=R0 ; DC_ALPHA_SIGMA=R0
```

```
!=====
===
!=====
===
```

```
EPBAR=RSTAVA(KSTRE+1)
! Set some material properties
YOUNG=RPROPS(2)
POISS=RPROPS(3)
NHARD=IPROPS(3)
!
NBACK=IPROPS(4)
!
SIGMAY=RPROPS(4)
!
HKSLOPE(1)=RPROPS(5)
BKIN(1)=RPROPS(6)
MEXP(1)=RPROPS(7)
!
HKSLOPE(2)=RPROPS(8)
BKIN(2)=RPROPS(9)
MEXP(2)=RPROPS(10)
!
HKSLOPE(3)=RPROPS(11)
BKIN(3)=RPROPS(12)
```

```

MEXP (3) =RPROPS (13)
!
if (BKIN (1) .EQ. R0) THEN
    CNP (1) =HKSLOPE (1) /R1
ELSE
    CNP (1) =HKSLOPE (1) /BKIN (1)
ENDIF
if (BKIN (2) .EQ. R0) THEN
    CNP (2) =HKSLOPE (2) /R1
ELSE
    CNP (2) =HKSLOPE (2) /BKIN (2)
ENDIF
if (BKIN (3) .EQ. R0) THEN
    CNP (3) =HKSLOPE (3) /R1
ELSE
    CNP (3) =HKSLOPE (3) /BKIN (3)
ENDIF
!
! Shear and bulk moduli and other necessary constants
GMODU=YOUNG/ (R2* (R1+POISS) )
BULK=YOUNG/ (R3* (R1-R2*POISS) )
R2G=R2*GMODU
R3G=R3*GMODU

P= (STREST (1) +STREST (2) +STREST (3) ) /R3
STRES (1) =STREST (1) -P
STRES (2) =STREST (2) -P
STRES (3) =STREST (3) -P
STRES (4) =STREST (4)
STRES (5) =STREST (5)
STRES (6) =STREST (6)
!
BACKI (1, 1) =RSTAVA (NSTRES+1+1)
BACKI (1, 2) =RSTAVA (NSTRES+1+2)
BACKI (1, 3) =RSTAVA (NSTRES+1+3)
BACKI (1, 4) =RSTAVA (NSTRES+1+4)
BACKI (1, 5) =RSTAVA (NSTRES+1+5)
BACKI (1, 6) =RSTAVA (NSTRES+1+6)
!
BACKI (2, 1) =RSTAVA (NSTRES+1+7)
BACKI (2, 2) =RSTAVA (NSTRES+1+8)
BACKI (2, 3) =RSTAVA (NSTRES+1+9)
BACKI (2, 4) =RSTAVA (NSTRES+1+10)
BACKI (2, 5) =RSTAVA (NSTRES+1+11)
BACKI (2, 6) =RSTAVA (NSTRES+1+12)
!
BACKI (3, 1) =RSTAVA (NSTRES+1+13)
BACKI (3, 2) =RSTAVA (NSTRES+1+14)
BACKI (3, 3) =RSTAVA (NSTRES+1+15)
BACKI (3, 4) =RSTAVA (NSTRES+1+16)
BACKI (3, 5) =RSTAVA (NSTRES+1+17)
BACKI (3, 6) =RSTAVA (NSTRES+1+18)
!
IF (EPFLAG) THEN
!     PLASTIC DOMAIN
!     ! INITILIZE THE FOURTH ORER IDENTITY TENSOR
FOID=R0
FOID (1, 1) =R1

```

```

FOID (2,2)=R1
FOID (3,3)=R1
FOID (4,4)=R1
FOID (5,5)=R1
FOID (6,6)=R1
! INITILIZE THE SECON ORDER IDENTITY TENSOR
SOID=R0
SOID (1)=R1
SOID (2)=R1
SOID (3)=R1

! COMPUTE (FOID-(SOID \OTIMES SOID)/3)
DFOID=R0
DO I=1,NSTRES
  DO J=1,NSTRES
    DFOID (I,J)=FOID (I,J) - (R1/R3) *SOID (I) *SOID (J)
  ENDDO
ENDDO
DFOID (4,4)=DFOID (4,4) *R2
DFOID (5,5)=DFOID (5,5) *R2
DFOID (6,6)=DFOID (6,6) *R2
P=(STREST (1)+STREST (2)+STREST (3) ) /R3
STRES (1)=STREST (1) -P
STRES (2)=STREST (2) -P
STRES (3)=STREST (3) -P
STRES (4)=STREST (4)
STRES (5)=STREST (5)
STRES (6)=STREST (6)
!
!
BACK=R0
DO I=1, NBACK
  DO J=1, NSTRES
    BACK (J)=BACK (J) +BACKI (I,J)
  ENDDO
ENDDO
!
ETA (1)=STRES (1) -BACK (1)
ETA (2)=STRES (2) -BACK (2)
ETA (3)=STRES (3) -BACK (3)
ETA (4)=STRES (4) -BACK (4)
ETA (5)=STRES (5) -BACK (5)
ETA (6)=STRES (6) -BACK (6)
!
NORMS=DSQRT (ETA (1) *ETA (1) +ETA (2) *ETA (2) +&
             ETA (3) *ETA (3) +R2*ETA (4) *ETA (4) +&
             R2*ETA (5) *ETA (5) +R2*ETA (6) *ETA (6) )
SEQ=DSQRT (R3/R2) *NORMS
! COMPUTE ALPHA
DO I=1,NSTRES
  ALPHA (I) =DSQRT (R3/R2) *ETA (I) /NORMS
ENDDO
SIGMA=STRES
SIGMA (1)=SIGMA (1) +P
SIGMA (2)=SIGMA (2) +P
SIGMA (3)=SIGMA (3) +P
!=====

```

==

```

!=====
==
! CONSTRUCT THE MATRIX WITH THE DERIVATIVES
!=====
==
!=====
==
!*****
! COMPUTE S \OTIMES S
!*****
SDOTS=R0
DO I=1,NSTRES
  DO J=1,NSTRES
    IF (J.GE.4) THEN
      SDOTS (I, J)=R2*ETA (I) *ETA (J)
    ELSE
      SDOTS (I, J)=ETA (I) *ETA (J)
    ENDIF
  ENDDO
ENDDO
! =====
! COMPUTE DALPHA
! =====
DALPHA=R0
DALPHAB=R0
DO I=1,NSTRES
  DO J=1,NSTRES
    DALPHA (I, J)=DSQRT (R3/R2) *FOID (I, J) /NORMS-&
      DSQRT (R3/R2) *SDOTS (I, J) / (NORMS**R3)

    DALPHAB (I, J)=-DSQRT (R3/2) *FOID (I, J) /NORMS+&
      DSQRT (R3/R2) *SDOTS (I, J) / (NORMS**R3)

  ENDDO
ENDDO
! =====
! DERIVADAS ASSOCIADAS À PRIMEIRA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! =====

MATRIX=R0
DO I=1,NSTRES
  DO J=1,NSTRES
    MATRIX (I, J)=FOID (I, J) +R2G*DGAMA*DALPHA (I, J)
  ENDDO
ENDDO
!
MATRIX (1, 7)=R0
MATRIX (2, 7)=R0
MATRIX (3, 7)=R0
MATRIX (4, 7)=R0
MATRIX (5, 7)=R0
MATRIX (6, 7)=R0
!
MATRIX (1, 8)=R2G*ALPHA (1)
MATRIX (2, 8)=R2G*ALPHA (2)
MATRIX (3, 8)=R2G*ALPHA (3)
MATRIX (4, 8)=R2G*ALPHA (4)
MATRIX (5, 8)=R2G*ALPHA (5)

```

```

MATRIX (6,8)=R2G*ALPHA (6)

DO I=1,NSTRES
  DO J=1,NSTRES
    MATRIX (I,J+8)=R2G*DGAMA*DALPHAB (I,J) !BETA 1
    MATRIX (I,J+14)=R2G*DGAMA*DALPHAB (I,J) !BETA 2
    MATRIX (I,J+20)=R2G*DGAMA*DALPHAB (I,J) !BETA 3
  ENDDO
ENDDO
! =====
! DERIVADAS ASSOCIADAS À SEGUNDA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! =====
MATRIX (7,1)=R0
MATRIX (7,2)=R0
MATRIX (7,3)=R0
MATRIX (7,4)=R0
MATRIX (7,5)=R0
MATRIX (7,6)=R0
!
MATRIX (7,7)=R1
!
MATRIX (7,8)=-R1
!BETA 1
MATRIX (7,9)=R0
MATRIX (7,10)=R0
MATRIX (7,11)=R0
MATRIX (7,12)=R0
MATRIX (7,13)=R0
MATRIX (7,14)=R0
!BETA 2
MATRIX (7,15)=R0
MATRIX (7,16)=R0
MATRIX (7,17)=R0
MATRIX (7,18)=R0
MATRIX (7,19)=R0
MATRIX (7,20)=R0
!BETA 3
MATRIX (7,21)=R0
MATRIX (7,22)=R0
MATRIX (7,23)=R0
MATRIX (7,24)=R0
MATRIX (7,25)=R0
MATRIX (7,26)=R0
! =====
! DERIVADAS ASSOCIADAS À TERCEIRA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! =====
MATRIX (8,1)=DSQRT (R3/R2) *ETA (1) /NORMS
MATRIX (8,2)=DSQRT (R3/R2) *ETA (2) /NORMS
MATRIX (8,3)=DSQRT (R3/R2) *ETA (3) /NORMS
MATRIX (8,4)=R2* (DSQRT (R3/R2) *ETA (4) /NORMS)
MATRIX (8,5)=R2* (DSQRT (R3/R2) *ETA (5) /NORMS)
MATRIX (8,6)=R2* (DSQRT (R3/R2) *ETA (6) /NORMS)
!
MATRIX (8,7)=R0
MATRIX (8,8)=R0
!BETA 1
MATRIX (8,9)=-DSQRT (R3/R2) *ETA (1) /NORMS
MATRIX (8,10)=-DSQRT (R3/R2) *ETA (2) /NORMS

```

```

MATRIX (8, 11) = -DSQRT (R3/R2) *ETA (3) /NORMS
MATRIX (8, 12) = -R2* (DSQRT (R3/R2) *ETA (4) /NORMS)
MATRIX (8, 13) = -R2* (DSQRT (R3/R2) *ETA (5) /NORMS)
MATRIX (8, 14) = -R2* (DSQRT (R3/R2) *ETA (6) /NORMS)
!BETA 2
MATRIX (8, 15) = -DSQRT (R3/R2) *ETA (1) /NORMS
MATRIX (8, 16) = -DSQRT (R3/R2) *ETA (2) /NORMS
MATRIX (8, 17) = -DSQRT (R3/R2) *ETA (3) /NORMS
MATRIX (8, 18) = -R2* (DSQRT (R3/R2) *ETA (4) /NORMS)
MATRIX (8, 19) = -R2* (DSQRT (R3/R2) *ETA (5) /NORMS)
MATRIX (8, 20) = -R2* (DSQRT (R3/R2) *ETA (6) /NORMS)
!BETA 3
MATRIX (8, 21) = -DSQRT (R3/R2) *ETA (1) /NORMS
MATRIX (8, 22) = -DSQRT (R3/R2) *ETA (2) /NORMS
MATRIX (8, 23) = -DSQRT (R3/R2) *ETA (3) /NORMS
MATRIX (8, 24) = -R2* (DSQRT (R3/R2) *ETA (4) /NORMS)
MATRIX (8, 25) = -R2* (DSQRT (R3/R2) *ETA (5) /NORMS)
MATRIX (8, 26) = -R2* (DSQRT (R3/R2) *ETA (6) /NORMS)
!
! =====
! DERIVADAS ASSOCIADAS À QUARTA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! =====
DO I=1, NSTRES
    DO J=1, NSTRES
        MATRIX (I+8, J) = - (R2/R3) *HKSLOPE (1) *DGAMA *DALPHA (I, J)
!BETA 1
        MATRIX (I+14, J) = - (R2/R3) *HKSLOPE (2) *DGAMA *DALPHA (I, J)
!BETA 2
        MATRIX (I+20, J) = - (R2/R3) *HKSLOPE (3) *DGAMA *DALPHA (I, J)
!BETA 3
    ENDDO
ENDDO
! BETA 1
MATRIX (9, 7) =R0
MATRIX (10, 7) =R0
MATRIX (11, 7) =R0
MATRIX (12, 7) =R0
MATRIX (13, 7) =R0
MATRIX (14, 7) =R0
! BETA2
MATRIX (15, 7) =R0
MATRIX (16, 7) =R0
MATRIX (17, 7) =R0
MATRIX (18, 7) =R0
MATRIX (19, 7) =R0
MATRIX (20, 7) =R0
! BETA 3
MATRIX (21, 7) =R0
MATRIX (22, 7) =R0
MATRIX (23, 7) =R0
MATRIX (24, 7) =R0
MATRIX (25, 7) =R0
MATRIX (26, 7) =R0
!
DO I=1, NSTRES
    AUX01=R0
    AUX01=( (SIGMAY/CNP (1) ) **MEXP (1) )

```

```

      MATRIX(I+8,8)=- (R2/R3) *HKSLOPE(1) *ALPHA(I) +
BKIN(1) *BACKI(1,I) *AUX01 !BETA 1
      AUX01=R0
      AUX01=( (SIGMAY/CNP(2)) **MEXP(2) )
      MATRIX(I+14,8)=- (R2/R3) *HKSLOPE(2) *ALPHA(I) +
BKIN(2) *BACKI(2,I) *AUX01 !BETA 2
      AUX01=R0
      AUX01=( (SIGMAY/CNP(3)) **MEXP(3) )
      MATRIX(I+20,8)=- (R2/R3) *HKSLOPE(3) *ALPHA(I) +
BKIN(3) *BACKI(3,I) *AUX01 !BETA 3
      ENDDO
      !
      DO I=1,NSTRES
        DO J=1,NSTRES
          AUX01=R0
          AUX01=( (SIGMAY/CNP(1)) **MEXP(1) )
          MATRIX(I+8,J+8)=FOID(I,J) -
(R2/R3) *HKSLOPE(1) *DGAMA *DALPHAB(I,J) + DGAMA *BKIN(1) *FOID(I,J) *AUX01
!BETA 1
          MATRIX(I+8,J+14)=- (R2/R3) *HKSLOPE(1) *DGAMA *DALPHAB(I,J)
!BETA 1
          MATRIX(I+8,J+20)=- (R2/R3) *HKSLOPE(1) *DGAMA *DALPHAB(I,J)
!BETA 1
          !
          MATRIX(I+14,J+8)=- (R2/R3) *HKSLOPE(2) *DGAMA *DALPHAB(I,J)
!BETA 2
          AUX01=R0
          AUX01=( (SIGMAY/CNP(2)) **MEXP(2) )
          MATRIX(I+14,J+14)=FOID(I,J) -
(R2/R3) *HKSLOPE(2) *DGAMA *DALPHAB(I,J) + DGAMA *BKIN(2) *FOID(I,J) *AUX01
!BETA 2
          MATRIX(I+14,J+20)=-
(R2/R3) *HKSLOPE(2) *DGAMA *DALPHAB(I,J) !BETA 2
          !
          MATRIX(I+20,J+8)=- (R2/R3) *HKSLOPE(3) *DGAMA *DALPHAB(I,J)
!BETA 3
          MATRIX(I+20,J+14)=-
(R2/R3) *HKSLOPE(3) *DGAMA *DALPHAB(I,J) !BETA 3
          AUX01=R0
          AUX01=( (SIGMAY/CNP(3)) **MEXP(3) )
          MATRIX(I+20,J+20)=FOID(I,J) -
(R2/R3) *HKSLOPE(3) *DGAMA *DALPHAB(I,J) + DGAMA *BKIN(3) *FOID(I,J) *AUX01
!BETA 3
          ENDDO
        ENDDO
      ! INVERSE MATRIX
      IF (NBACK.EQ.1) THEN
        MATRIX14=R0
        DO I=1,14
          DO J=1,14
            MATRIX14(I,J)=MATRIX(I,J)
          ENDDO
        ENDDO
        CALL RMINVE (MATRIX14 , MINVERSE14 , 14 , ERROR)
      ENDIF
      IF (NBACK.EQ.2) THEN
        MATRIX20=R0
        DO I=1,20

```

```

        DO J=1,20
            MATRIX20 (I, J)=MATRIX (I, J)
        ENDDO
    ENDDO
    CALL RMINVE (MATRIX20 , MINVERSE20 , 20 , ERROR)
ENDIF
IF (NBACK.EQ.3) THEN
    CALL RMINVE (MATRIX , MINVERSE , 26 , ERROR)
ENDIF
!
DMATX=R0
DO I=1,NSTRES
    DO J=1,NSTRES
        DO K=1,NSTRES
            IF (NBACK.EQ.1) THEN

DMATX (I, J)=DMATX (I, J)+MINVERSE14 (I, K) *DFOID (K, J)
                ELSEIF (NBACK.EQ.2) THEN

DMATX (I, J)=DMATX (I, J)+MINVERSE20 (I, K) *DFOID (K, J)
                ELSEIF (NBACK.EQ.3) THEN
                    DMATX (I, J)=DMATX (I, J)+MINVERSE (I, K) *DFOID (K, J)
                ENDIF
            ENDDO
        ENDDO
    ENDDO

    DO I=1,NSTRES
        DO J=1,NSTRES
            DMATX (I, J)=R2G*DMATX (I, J)
        ENDDO
    ENDDO
!
    dmatx(1,1)=r0
!
    dmatx(1,1)=minverse(1,1)*dfoid(1,1)+minverse(1,2)*dfoid(2,1)+minve
rse(1,3)*dfoid(3,1)+&
!
r2*minverse(1,4)*dfoid(4,1)+r2*minverse(1,5)*dfoid(5,1)+r2*minverse(1,6
)*dfoid(6,1)
!
        dmatx(1,1)=r2g*dmatx(1,1)

! COLUMN 1 - XX
DMATX (1,1)=DMATX (1,1)+BULK
DMATX (2,1)=DMATX (2,1)+BULK
DMATX (3,1)=DMATX (3,1)+BULK
! COLUMN 2 - YY
DMATX (1,2)=DMATX (1,2)+BULK
DMATX (2,2)=DMATX (2,2)+BULK
DMATX (3,2)=DMATX (3,2)+BULK
! COLUMN 3 - ZZ
DMATX (1,3)=DMATX (1,3)+BULK
DMATX (2,3)=DMATX (2,3)+BULK
DMATX (3,3)=DMATX (3,3)+BULK
! COLUMN 4 - XY
DMATX (1,4)=DMATX (1,4)/R4
DMATX (2,4)=DMATX (2,4)/R4
DMATX (3,4)=DMATX (3,4)/R4

```



```

DMATX (4, 4) =DMATX (4, 4) /R4
DMATX (5, 4) =DMATX (5, 4) /R4
DMATX (6, 4) =DMATX (6, 4) /R4
! COLUMN 5 - YZ
DMATX (1, 5) =DMATX (1, 5) /R4
DMATX (2, 5) =DMATX (2, 5) /R4
DMATX (3, 5) =DMATX (3, 5) /R4
DMATX (4, 5) =DMATX (4, 5) /R4
DMATX (5, 5) =DMATX (5, 5) /R4
DMATX (6, 5) =DMATX (6, 5) /R4
! COLUMN 5 - XZ
DMATX (1, 6) =DMATX (1, 6) /R4
DMATX (2, 6) =DMATX (2, 6) /R4
DMATX (3, 6) =DMATX (3, 6) /R4
DMATX (4, 6) =DMATX (4, 6) /R4
DMATX (5, 6) =DMATX (5, 6) /R4
DMATX (6, 6) =DMATX (6, 6) /R4

ELSE
! ELASTIC DOMAIN
FOID (1, 1) =R1
FOID (2, 2) =R1
FOID (3, 3) =R1
FOID (4, 4) =RP5
FOID (5, 5) =RP5
FOID (6, 6) =RP5
SOID (1) =R1
SOID (2) =R1
SOID (3) =R1
DO I=1, NSTRES
DO J=1, NSTRES
DEVPRJ (I, J) =FOID (I, J) -SOID (I) *SOID (J) * (R1/R3)
ENDDO
ENDDO
DO I=1, NSTRES
DO J=I, NSTRES
DMATX (I, J) =R2G*DEVPRJ (I, J) +BULK*SOID (I) *SOID (J)
ENDDO
ENDDO
! Assemble lower triangle
! -----
DO J=1, NSTRES-1
DO I=J+1, NSTRES
DMATX (I, J) =DMATX (J, I)
ENDDO
ENDDO
ENDIF
RETURN
END

```

