Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Efeitos combinados de não-linearidades côncavas e convexas em alguns problemas elípticos.

por

Bertha Katherine Rodríguez Chávez

Brasília

2015

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Efeitos combinados de não-linearidades côncavas e convexas em alguns problemas elípticos.

por

Bertha Katherine Rodríguez Chávez *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 04 de Março de 2015

Comissão Examinadora:

Dr. Ricardo Ruviaro - UnB - Orientador

Dr. Jiazheng Zhou - UnB - Examinador

Dr. Reinaldo de Marchi - UFMT- Examinador

*O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração deste trabalho.

Aos meus pais, Noel e Flor.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por ter me concedido saúde e capacidade sobre todas as coisas nos momentos mais importantes dessa etapa de minha vida para conquistar meu sonho.

À minha família. Ao meu pai Noel, por todo o apoio, carinho e pelas palavras de força. À minha mãe Flor, fonte inesgotável de amor, por ter compreendido a distância. Os meus irmãos queridos, Diego e Isabel, por terem me dado muito carinho e afeto nos momentos que estivemos juntos. E por serem minha inspiração para continuar.

À meu namorado Ricardo pelo carinho e amor compartilhado durante quatro anos, caminhando juntos na consecução dos nossos objetivos. Sendo o meu apoio a cada passo que eu tenho tido desde o início de esta longa jornada.

Ao meu orientador Ricardo Ruviaro pela dedicação, paciência, atencão, comprensão e pelo exemplo de profissional que se tornou para mim. É mais que um professor, é um amigo.

Aos professores da banca Jiazheng Zhou e Reinaldo de Marchi pelas valiosas contribuições, enriquecendo ainda mais essa dissertação.

Aos professores da Pós-Graduação que me ajudaram a percorrer essa difícil trajetória em busca de conhecimento.

A todos os que fazem parte do Departamento de Matemática da UnB.

A todos meus amigos da UnB pelo companheirismo, motivação e pelos momentos compartilhados.

Agradeço ao *CNPq* pelo apoio financeiro à este trabalho.

Resumo

Neste trabalho estudaremos a existência, não existência e multiplicidade de soluções positivas para a família de problemas

$$\begin{cases} -\Delta u = f_\lambda(x,u), & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $f_\lambda : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ é um parâmetro, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com $N \geq 3$.

Os principais resultados utilizados são o Teorema do Passo da Montanha e o método de sub e super-solução.

Palavras-Chaves: Equações semilineares; não linearidades do tipo côncavo-convexas, Teorema do Passo da Montanha; sub e supersolução.

Abstract

In this work we study the existence, non-existence and multiplicity of positive solutions for the family of elliptic problem

$$\begin{cases} -\Delta u = f_\lambda(x,u), & x \in \Omega, \\ \quad u > 0, & x \in \Omega, \\ \quad u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

where $f_\lambda : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ is a real parameter, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded domain with $N \geq 3$.

To show the main results we used The Mountain Pass Theorem and The Sub and Supersolution.

Keywords: Semilinear equations, non-linearities of the concave-convex type, The Mountain Pass Theorem, Sub and Supersolution.

Sumário

Notações

Neste trabalho, fazemos uso das seguintes notações:

- $M, C, C_0, C_1, \ldots$ denotam constantes positivas (possivelmente diferentes).
- $\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx$ representada por $\int_{\mathbb{R}^N} f$.
- $B_R(p)$ denota a bola aberta de raio R com centro no ponto $p \in \mathbb{R}^N$; e $\partial B_R(p)$ denota a fronteira desta bola.
- $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$.
- Representaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o par dualidade entre os espaços E e seu dual E'.
- Representaremos a convergência fraca em E por " $\rightharpoonup$ " e a convergência forte por " $\rightarrow$."
- Representaremos por $u_n \uparrow u$, como u_n sendo uma sequência crescente que converge para u.
- Representaremos por $u_n \downarrow u$, como u_n sendo uma sequência decrescente que converge para u.
- $\operatorname{supp} \varphi$ denota o suporte da função φ.
- $|\Omega|$ ou $meas(\Omega)$ denota a medida de Lebesgue de um conjunto mensurável $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.
- χ_Ω denota a função característica do conjunto Ω.
- H denota $H_0^{1,2}(\Omega)$, dotado com a norma $\| u \|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$.
- $\| \cdot \|$ denota a norma do espaço H.
- Para $1 \leq p < N$, $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$ é o expoente crítico de Sobolev.
- $A = O(x)$ quando $\dfrac{A}{x} \leq M$, para alguma constante $M > 0$.
- $A_n = o_n(x)$ se $\dfrac{A_n}{x} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.
- $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$.
- $u^-(x) = \min\{u(x), 0\}$.

- $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N} \right)$ é o gradiente da função u.

- $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ é o Laplaciano da função u.

- $C(\Omega) = C(\Omega, \mathbb{R})$ denota o espaço das funções contínuas no Ω e $C_0(\Omega)$ são funções contínuas de suporte compacto em Ω.

- $C^k(\Omega)$, $k \geq 1$ inteiro, denota o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω e $C^\infty(\Omega) = \displaystyle\bigcap_{k \geq 1} C^k(\Omega)$.

- $C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ e $C_0^\infty(\Omega) = C^\infty \cap C_0(\Omega)$.

- $C^{0,\beta}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C(\Omega) : \displaystyle\sup_{x,y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\beta} < \infty \right\}$ com $0 < \beta < 1$, e $C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$ são as funções em $C^k(\Omega)$ tais que todas as derivadas parciais até a ordem k estão em $C^{0,\beta}$.

- $L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável } : \displaystyle\int_\Omega |u|^p \, dx < \infty \right\}$ em que $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \in \mathbb{R}^N$ é um aberto conexo, com norma dada por
$$\| u \|_p := \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço de funções mensuráveis que são limitadas quase sempre em Ω com norma dada por
$$\| u \|_\infty := \inf \{ C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega \}.$$

- $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}$ munido da norma $\| \nabla u \|_2$.

- Para $1 \leq p < \infty$,
$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \begin{array}{c} \exists \, g_1, g_2, \cdots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tais que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = - \int_\Omega g_i \varphi \, dx, \, \forall \, \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } i = 1, \cdots, N \end{array} \right\}$$
com norma dada por
$$\| u \|_{1,p} = \left[\int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p) \, dx \right]^{\frac{1}{p}}$$
e
$$W^{2,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{1,p}(\Omega), \text{ para todo } i = 1, \cdots, N \right\}.$$

- O primeiro autovalor de
$$\begin{cases} -\Delta \varphi = \lambda \varphi, & x \in \Omega, \\ \varphi = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$
é denotado por λ_1, φ_1 denota a correspondente autofunção satisfazendo $\varphi_1 > 0$ em Ω e tal que $\| \varphi_1 \|_2 = 1$.

Introdução

Nessa dissertação faremos um estudo baseados em dois artigos, primeiramente estudaremos o artigo de Ambrosetti, Brezis e Cerami [1] e na sequência o artigo apresentado por de Figueiredo, Gossez e Ubilla [12], sobre a existência, não existência e multiplicidade de soluções positivas para a família de problemas

$$\begin{cases} -\Delta u = f_\lambda(x,u), & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, $N \geq 3$ e $f_\lambda : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory, ou seja,
(i) $s \mapsto f(x,s)$ é contínua para quase todo $x \in \Omega$;
(ii) $x \mapsto f(x,s)$ é mensurável para todo $s \in \mathbb{R}$.

Esta dissertação está dividida em dois capítulos e três apêndices organizados da seguinte forma.

No Capítulo 1, estudaremos o trabalho de Ambrosetti, Brezis e Cerami [1]. Para isso consideramos o problema

$$(P_0) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q + u^p, & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $0 < q < 1 < p$. Este capítulo, esta dividido em três seções. Na primeira seção, estudaremos o Teorema 1.1 que trata da existência de uma solução positiva via sub e supersolução para o problema (P_0) para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$, garantimos ainda nesse teorema que o problema (P_0) têm ao menos uma solução quando $\lambda = \Lambda$ e fechamos a sua prova, mostrando que o problema (P_0) não possui solução quando $\lambda > \Lambda$.

Na sequência demonstraremos o Teorema 1.2 que garante a existência de um $A > 0$, verificando que o problema (P_0) tem no máximo uma solução quando $\lambda \in (0, \Lambda)$.

Dando continuidade ao estudo, nesse capítulo na seção 2 estudaremos o Teorema 1.3 que trata da existência de uma segunda solução por argumentos variacionais para o problema (P_0) quando $\lambda \in (0, \Lambda)$.

Por fim, na seção 3 deste capítulo apresentamos o Teorema 1.4 que garante a existência de infinitas soluções para o problema (P_0) para todo λ pequeno, isto é, $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

No Capítulo 2, estudamos o trabalho de Figueiredo, Gossez e Ubilla [12], onde trataremos a existência, não-existência e multiplicidade de soluções para a família de problemas

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f_\lambda(x,u), & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

com Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ e $\lambda > 0$ um parâmetro.

Este capítulo esta dividido em sete seções. Na primeira seção, estudaremos o Teorema 2.1 que sobre certas hipóteses, como por exemplo, sem a condição de crescimento, teremos que o problema (P) tem ao menos uma solução para $0 < \lambda < \Lambda$ e nenhuma solução para $\lambda > \Lambda$.

Na sequência, para a segunda seção apresentaremos a prova do Teorema 2.2 onde mostraremos a não existência de solução para o problema (P), quando λ grande, além de verificarmos que $\Lambda < \infty$.

Na terceira seção, apresentaremos a prova do Teorema 2.3, onde sob certas hipóteses garantimos a existência de uma solução para o problema (P) quando $\lambda = \Lambda$.

Para a quarta seção, daremos a prova do Teorema 2.4, onde mostraremos sob certas hipóteses a existência de uma segunda solução para o problema (P) no caso subcrítico. Mostrando assim que o problema (P) tem ao menos duas soluções u, v para $0 < \lambda < \Lambda$, com $u < v$ em Ω.

Para a próxima seção, faremos a prova do Teorema 2.5 mostrando a existência de uma segunda solução no caso crítico, onde alguns termos poderão mudar de sinal, sobre essas condições e algumas hipóteses, mostraremos que o problema (P) tem ao menos duas soluções u, v para $0 < \lambda < \Lambda$, com $u < v$ em Ω.

Para a sexta e penúltima seção desse capítulo, apresentaremos a prova do Teorema 2.6, mostrando a existência de uma segunda solução no caso crítico, com algumas restrições no sinal de alguns termos e hipóteses um pouco distintas do teorema anterior, garantimos também que o problema (P) tem ao menos duas soluções u, v para $0 < \lambda < \Lambda$, com $u < v$ em Ω.

Na última seção, seção 2.7 apresentaremos algumas aplicações dos resultados apresentados anteriormente.

No Apêndice A apresentaremos resultados úteis para o bom entendimento da dissertação, destacamos como por exemplo: regularidade, princípio do máximo, desigualdades técnicas.

Para o Apêndice B, apresentamos com todos os detalhes a prova do Teorema do Passo da Montanha, utilizando o Lema de Deformação, Campo Pseudo-Gradiente, dentre outros fatos importantes para a prova do Teorema.

Por fim no Apêndice C, faremos um estudo sobre a definição e resultados de sub e supersolução.

Capítulo

1

Existência de Soluções Positivas

Neste capítulo consideramos o seguinte problema

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q + u^p, & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $0 < q < 1 < p \leq (N+2)/(N-2) := 2^* - 1$, com fronteira suave $\partial\Omega$, $N \geq 3$, Δ é o operador Laplaciano e λ é um parâmetro real.

Dizemos que $u \in H$, $u \neq 0$ em Ω é uma solução fraca para o problema (P_λ), se

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_\Omega |u|^{q-1} uv dx + \int_\Omega |u|^{p-1} uv dx.$$

O funcional associado ao problema (P_λ) é $I_\lambda : H \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2} \| u \|^2 - \frac{\lambda}{q+1} \int_\Omega |u|^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega |u|^{p+1} dx,$$

onde I_λ denota a energia de u e $I_\lambda \in C^1(H, \mathbb{R})$, assim

$$I'_\lambda(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega |u|^{q-1} uv dx - \int_\Omega |u|^{p-1} uv dx, \ \ \forall\, v \in H.$$

Portanto, encontrar solução fraca para o problema (P_λ) é equivalente a encontrar ponto crítico do funcional I_λ.

Agora, primeiramente mostraremos a existência de solução não trivial para o problema (P_λ) mediante o método de sub e supersolução.

1.1 Existência de uma solução pelo método de sub e supersolução

Para um primeiro resultado temos a garantia da existência de uma constante positiva $\Lambda \in \mathbb{R}$ tal que uma solução de (P_λ) existe se, e somente se, $0 < \lambda < \Lambda$. Para encontrar tal solução usamos o método de sub e supersolução. O termo essencial aqui é q e p pode ser arbitrário.

Teorema 1.1. *Para todo $0 < q < 1 < p$ existe $\Lambda \in \mathbb{R}$, $\Lambda > 0$, tal que:*

1. *Para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$ o problema (P_λ) tem uma solução mínima u_λ tal que $I_\lambda(u_\lambda) < 0$. Além disso, u_λ é crescente com respeito a λ.*
2. *Para $\lambda = \Lambda$, o problema (P_λ) têm ao menos uma solução fraca, $u \in H \cap L^{p+1}$.*
3. *Para todo $\lambda > \Lambda$, o problema (P_λ) não têm solução.*

Antes de demonstrarmos o Teorema 1.1, provaremos primeiramente alguns resultados adicionais que facilitaram a prova deste teorema. Inicialmente, considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, é um domínio regular e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^α. Dizemos que uma função $\underline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é uma *subsolução* do problema (1.1) se

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} \leq f(\underline{u}), & x \in \Omega, \\ \underline{u} \leq 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

e dizemos que uma função $\overline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é uma *supersolução* do problema (1.1) se

$$\begin{cases} -\Delta \overline{u} \geq f(\overline{u}), & x \in \Omega, \\ \overline{u} \geq 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.3}$$

Agora definimos $\Lambda := \sup\{\lambda > 0 : (P_\lambda) \text{ tem uma solução}\}$.

Lema 1.1. $0 < \Lambda < \infty$.

Demonstração. Seja e uma solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta e = 1, & x \in \Omega, \\ e = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Uma vez que $0 < q < 1 < p$, pode-se encontrar $\lambda_0 > 0$ tal que se $0 < \lambda \leq \lambda_0$, então existe $M = M(\lambda) > 0$ que satisfaz

$$M \geq \lambda M^q \parallel e \parallel_\infty^q + M^p \parallel e \parallel_\infty^p . \tag{1.4}$$

De fato, considere as funções

$$f(x) = x,$$
$$g(x) = Ax^q + Bx^p, \quad \text{onde} \quad 0 < q < 1 < p, \text{ tal que } A = \lambda \parallel e \parallel_\infty^q \text{ e } B = \parallel e \parallel_\infty^p .$$

Temos,

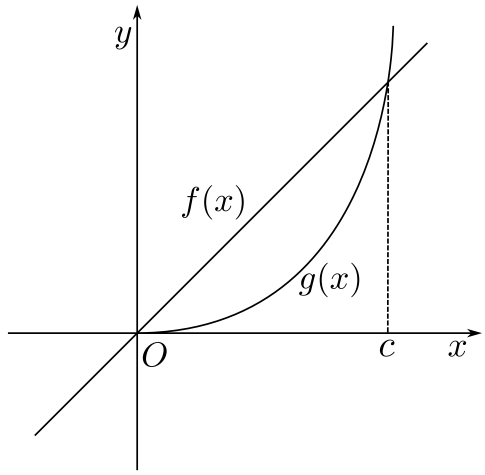
$$g'(x) = qAx^{q-1} + pBx^{p-1} > 0 \quad \text{para todo} \quad x > 0$$
$$g''(x) = q(q-1)Ax^{q-2} + p(p-1)Bx^{p-2} \quad \text{para todo} \quad x > 0$$

e $g(0) = 0$. Assim, g é côncava para cima em $[0, +\infty)$.

Logo, existe $c > 0$ tal que $f(x) \geq g(x)$, para $0 < x < c$. Portanto,

$$f(x) \geq g(x) \quad \Rightarrow x \geq Ax^q + Bx^p = \lambda \parallel e \parallel_\infty^q x^q + \parallel e \parallel_\infty^p x^p,$$

logo fazendo $x = M$ verificamos (1.4). A seguir é apresentado um esboço do comportamento das funções f e g, para um melhor entendimento dessa desigualdade.



Como consequência temos que a função Me verifica

$$-\Delta\left(Me\right) = M\left(-\Delta e\right) = M \geq \lambda M^q \parallel e \parallel_\infty^q + M^p \parallel e \parallel_\infty^p \geq \lambda\left(Me\right)^q + \left(Me\right)^p.$$

Assim, Me é uma supersolução de (P_λ). Mais ainda, para ε suficientemente pequeno $\varepsilon\varphi_1$ é uma subsolução de (P_λ), onde φ_1 é a autofunção do operador $-\Delta$ associada ao autovalor λ_1 em relação a Ω.

De fato, temos que

$$-\Delta(\varepsilon\varphi_1) = \varepsilon(\lambda_1\varphi_1) = \left(\frac{\varepsilon^{1-q}\lambda_1}{\lambda}\varphi_1^{1-q}\right)\lambda(\varepsilon\varphi_1)^q.$$

Agora, basta determinarmos $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left(\frac{\varepsilon^{1-q}\lambda_1}{\lambda}\varphi_1^{1-q}\right) \leq 1.$$

Como $\varphi_1 \in L^\infty(\Omega)$, existe $C > 0$ tal que

$$\varphi_1^{1-q}(x) \leq C, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

Logo

$$\left(\frac{\varepsilon^{1-q}\lambda_1}{\lambda}\varphi_1^{1-q}\right) \leq \varepsilon^{1-q}\left(\frac{\lambda_1 C}{\lambda}\right) \leq 1.$$

Portanto, podemos considerar

$$0 < \varepsilon \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda_1 C}\right)^{\frac{1}{1-q}},$$

o que implica que

$$\varepsilon(\lambda_1\varphi_1) = -\Delta(\varepsilon\varphi_1) \leq \lambda(\varepsilon\varphi_1)^q \leq \lambda(\varepsilon\varphi_1)^q + (\varepsilon\varphi_1)^p.$$

Assim, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e todo $\lambda > 0$, temos que $\varepsilon\varphi_1$ é subsolução de (P_λ). Tomando ε suficientemente pequeno, também temos que

$$\varepsilon\varphi_1 < Me.$$

De fato, considere $\bar{u}$ uma supersolução positiva do problema (P_λ). Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e definamos o conjunto $\Omega_1 := \{x \in \Omega\,,\, \mathrm{dist}(x;\partial\Omega) \leq \delta\}$. Como $\varphi_1, \bar{u} > 0$ em Ω e pela compacidade de $\overline{\Omega \setminus \Omega_1}$, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\frac{\bar{u}(x)}{\varphi_1(x)} \geq C_1, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega \setminus \Omega_1}. \tag{1.5}$$

Por outro lado, pelo Lema de Hopf (ver Apêndice A, Lema $A.1$) temos que $\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} < 0$ em $\partial\Omega$, e como $\partial\Omega$ é compacto, temos que existe $C_2 > 0$ tal que

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}(x) < C_2, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}_1.$$

Usando os mesmos argumentos, como $\varphi_1 \in C_0^1(\overline{\Omega})$ temos que existe $C_3 > 0$ tal que

$$\left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu}(x)\right| \leq C_3, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}_1.$$

Agora, considere a função $w : \overline{\Omega}_1 \to \mathbb{R}$ definida por $w(x) = \gamma\varphi_1(x) - \bar{u}(x)$ com $\gamma > 0$. Seja $C_0 = \inf\limits_{\overline{\Omega}_1}(\partial\varphi_1)/(\partial\nu)$. Assim, se $\gamma > C_1/C_0$ temos

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(x) = \gamma\frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu}(x) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}(x) \geq \gamma C_0 - C_2 > 0, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}_1. \tag{1.6}$$

Fixando $x \in \overline{\Omega}_1$, definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(t) = w(x + t\nu)$. Para cada $x \in \overline{\Omega}_1$, escolha um único $\tilde{x} \in \overline{\Omega}_1$ tal que a reta que passa por esses dois pontos coincida com a reta suporte do vetor normal exterior $\nu = \nu(\tilde{x})$. Assim, existe $\tilde{t} > 0$ tal que $x + \tilde{t}\nu = \tilde{x} \in \partial\Omega$. Temos que $w(\partial\Omega) \equiv 0$, daí

$$g(\tilde{t}) = w(x + \tilde{t}\nu) = w(\tilde{x}) = 0. \tag{1.7}$$

Note que g é a composta de duas funções de classe C^1, logo $g : \left[0, \tilde{t}\right] \to \mathbb{R}$ é contínua em $\left[0, \tilde{t}\right]$ e derivável em $\left(0, \tilde{t}\right)$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi \in \left(0, \tilde{t}\right)$, tal que

$$g(\tilde{t}) - g(0) = g'(\xi)(\tilde{t} - 0).$$

Por outro lado, como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial \nu}(x + \xi\nu) &= \lim_{z\to 0}\frac{w(x + \xi\nu + z\nu) - w(x + \xi\nu)}{z}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{w(x + (\xi + z)\nu) - w(x + \xi\nu)}{z}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{g(\xi + z) - g(\xi)}{z}\\
&= g'(\xi).
\end{aligned}$$

Daí, por (1.7) temos

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(x+\xi\nu)\tilde{t} = g'(\xi)\tilde{t} = g(\tilde{t}) - g(0) = -w(x).$$

Por (1.6) e sendo $\tilde{t} > 0$ segue que

$$-w(x) = \frac{\partial w}{\partial \nu}(x+\xi\nu)\tilde{t} > 0, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}_1.$$

Consequentemente, $w(x) \leq 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}_1$ e assim $w(x) = \gamma\varphi_1(x) - \bar{u} \leq 0$. Segue então que

$$\gamma\varphi_1 \leq \bar{u}(x), \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}_1$$

o que implica que

$$\frac{\bar{u}(x)}{\varphi_1(x)} \geq \gamma > 0, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}_1. \tag{1.8}$$

Logo, por (1.5) e (1.6) obtemos

$$\frac{\bar{u}(x)}{\varphi_1(x)} \geq C_4 > 0, \quad \forall\, x \in \Omega$$

onde $C_4 = \min\{C_2, \gamma\}$. Logo, tomando $0 < \varepsilon < C_2$ temos que $\varepsilon\varphi_1 \leq \bar{u}$. Portanto, tomando $\bar{u} = Me$, concluímos que $\varepsilon\varphi_1 \leq Me$.

Segue-se pelo teorema de sub e supersolução (ver Apêndice C, Teorema C.1) que (P_λ) tem uma solução u, tal que $\varepsilon\varphi_1 \leq u \leq Me$, sempre que $\lambda \leq \lambda_0$, e assim $\Lambda \geq \lambda_0$.

Agora, seja $\bar{\lambda}$ tal que

$$\bar{\lambda}t^q + t^p > \lambda_1 t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, t > 0. \tag{1.9}$$

Isto é possível, já que

$$\lambda_1 t - t^p \to -\infty \quad \text{quando} \quad t \to +\infty.$$

Então existe $t_0 > 1$ tal que

$$\lambda_1 t - t^p \leq 0, \quad \forall\, t \geq t_0.$$

Para $t \in (1, t_0]$ temos que existe $C > 0$, tal que

$$\lambda_1 t - t^p < Ct^q.$$

Para $t \in (0,1)$ temos

$$\lambda_1 t - t^p < \lambda_1 t < \lambda_1 t^q.$$

Daí, para $\bar{\lambda} = \max\{C, \lambda_1\}$ temos

$$\lambda_1 t - t^p < \bar{\lambda}t^q \quad \text{quando} \quad t > 0.$$

Se $u \in C^2(\Omega)$, $u > 0$ é uma solução do problema (P_λ) para $\lambda \in (0, \Lambda)$. Assim, multiplicando $(P)_\lambda$ por φ_1 e integrando sobre Ω, temos

$$\begin{aligned}
-\Delta u &= \lambda u^q + u^p, \\
\varphi_1 (-\Delta u) &= \varphi_1 \lambda u^q + \varphi_1 u^p; \quad 0 < q < 1 < p, \\
\int_\Omega \varphi_1 (-\Delta u)\, dx &= \int_\Omega \lambda \varphi_1 u^q dx + \int_\Omega \varphi u^p dx.
\end{aligned}$$

Aplicando agora a Segunda Identidade de Green (ver Apêndice A, Teorema $A.2$) e não esquecendo do fato que φ_1 é uma autofunção positiva associada a λ_1, temos que φ_1 é solução clássica, $\varphi_1 = 0$ sobre $\partial\Omega$ e segue do Lema de Hopf (ver Apêndice A, Lema $A.1$) que $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} < 0$ sobre $\partial\Omega$, temos que:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\lambda u^q + u^p)\varphi_1\, dx = \int_\Omega \varphi_1 (-\Delta u)\, dx &= \int_\Omega u\,(-\Delta \varphi_1)\, dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} dS - \int_{\partial\Omega} \varphi_1 \frac{\partial u}{\partial \nu} dS \\
&< \int_\Omega u\,(-\Delta \varphi_1)\, dx \\
&= \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1 u dx.
\end{aligned}$$

Logo pela escolha de $\bar{\lambda}$ obtemos

$$\lambda \int_\Omega u^q \varphi_1 dx + \int_\Omega u^p \varphi_1 dx < \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1 u dx < \bar{\lambda} \int_\Omega u^q \varphi_1 dx + \int_\Omega u^p \varphi_1 dx.$$

Assim, $\lambda < \bar{\lambda}$, e dessa forma $\Lambda \le \bar{\lambda}$.

Portanto,

$$0 < \Lambda < \infty.$$

$\square$

Lema 1.2. *Para todo $0 < \lambda < \Lambda$, o problema (P_λ) tem uma solução.*

Demonstração. Dado $\lambda < \Lambda$, seja u_μ uma solução do problema (P_μ)

$$(P_\mu) \quad \begin{cases} -\Delta u = \mu u^q + u^p, & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

assim temos que

$$\begin{cases} -\Delta u_\mu = \mu u_\mu^q + u_\mu^p, & x \in \Omega, \\ u_\mu > 0, & x \in \Omega, \\ u_\mu = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

considerando $\lambda < \mu < \Lambda$; logo

$$-\Delta u_\mu = \mu u_\mu^q + u_\mu^p > \lambda u_\mu^q + u_\mu^p,$$

assim, u_μ é supersolução de (P_λ). Por outro lado, pela demonstração do Lema 1.1 segue que $\varepsilon\varphi_1$ é subsolução de (P_λ) para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Dessa forma, $\varepsilon\varphi_1 < u_\mu$. Logo, pelo Teorema de sub-super solução, existe u solução de (P_λ), tal que

$$\varepsilon\varphi_1 \leq u \leq u_\mu.$$

Portanto, (P_λ) possui uma solução.

□

No que segue, mostraremos que (P_λ) possui solução mínima. Para isso, precisamos do seguinte lema:

Lema 1.3. *Suponha que $f(t)$ é uma função tal que $t^{-1}f(t)$ é decrescente para $t > 0$. Seja v e w satisfazendo,*

$$\begin{cases} -\Delta v \leq f(v), & x \in \Omega, \\ v > 0, & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.10}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta w \geq f(w), & x \in \Omega, \\ w > 0, & x \in \Omega, \\ w = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.11}$$

Então $w \geq v$ em Ω.

Demonstração. A prova foi inspirada pelo Método II em $([5], p.103)$. De (1.10) e (1.11) temos

$$\begin{aligned} -v\Delta w + w\Delta v &\geq f(w)v - f(v)w \\ &= vw\left(\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}\right). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Considere agora $\theta(t)$ uma função não decrescente e suave, tal que $\theta(0) = 0$, $\theta(t) \equiv 1$ para $t \geq 1$, e $\theta(t) \equiv 0$ para $t \leq 0$. Assim defina,

$$\theta_\varepsilon(t) = \theta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \qquad \text{onde} \qquad \theta_\varepsilon(t) \geq 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Multiplicando (1.12) por $\theta_\varepsilon\,(v - w)$ e integrando sobre Ω, obtemos

$$\int_\Omega [-v\Delta w + w\Delta v]\,\theta_\varepsilon\,(v - w)\;dx \geq \int_\Omega vw\left[\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}\right]\theta_\varepsilon\,(v - w)\;dx. \tag{1.13}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \int_\Omega [-v\Delta w + w\Delta v]\,\theta_\varepsilon(v - w)dx &= \int_\Omega (-v\Delta w \cdot \theta_\varepsilon(v - w) + w\Delta v \cdot \theta_\varepsilon(v - w))dx \\ &= \int_\Omega \Delta v\,[w\theta_\varepsilon(v - w)]\,dx - \int_\Omega \Delta w\,[v\theta_\varepsilon(v - w)]\,dx. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Aplicando a Primeira Identidade de Green (ver Apêndice A, Teorema $A.2$) em (1.14) e o fato que $v = w = 0$ em $\partial\Omega$; temos

$$\int_\Omega [-v\Delta w + w\Delta v]\,\theta_\varepsilon\,(v - w)\;dx = \int_\Omega \nabla w\nabla\,[v\theta_\varepsilon(v - w)]\;dx - \int_\Omega \nabla v\nabla\,[w\theta_\varepsilon(v - w)]\;dx.$$

Agora usando a regra da cadeia e agrupando termos, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega [-v\Delta w + w\Delta v]\,\theta_\varepsilon\,(v-w)\;dx &= \int_\Omega \nabla w\,[\nabla v\cdot\theta_\varepsilon(v-w) + v\theta'_\varepsilon(v-w)\,(\nabla v-\nabla w)]\;dx \\
&\quad - \int_\Omega \nabla v\,[\nabla w\theta_\varepsilon(v-w) + w\theta'_\epsilon\,(\nabla v-\nabla w)]\;dx \\
&= \int_\Omega \nabla w\cdot\nabla v\theta_\epsilon(v-w) + \nabla w\cdot v\theta'_\varepsilon(v-w)\,(\nabla v-\nabla w)\;dx \\
&\quad - \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla w\theta_\varepsilon(v-w) + \nabla v\cdot w\theta'_\varepsilon(v-w)\,(\nabla v-\nabla w)\;dx \\
&= \int_\Omega v\theta'_\varepsilon(v-w)\nabla w\cdot(\nabla v-\nabla w)\;dx \\
&\quad - \int_\Omega w\theta'_\varepsilon(v-w)\nabla v\cdot(\nabla v-\nabla w)\;dx.
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

Somando e subtraindo $\int_\Omega v\nabla v\,(\nabla v-\nabla w)\,\theta'_\varepsilon(v-w)dx$ em (1.15), e usando $\gamma_\varepsilon(t) := \int_0^t s\theta'_\varepsilon(s)\,ds$, temos que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega [-v\Delta w + w\Delta v]\,\theta_\varepsilon\,(v-w)\;dx &= \int_\Omega v\theta'_\varepsilon(v-w)\nabla w\cdot(\nabla v-\nabla w)\;dx - \int_\Omega w\theta'_\varepsilon(v-w)\nabla v\cdot(\nabla v-\nabla w)\;dx \\
&\quad + \int_\Omega v\nabla v\,(\nabla v-\nabla w)\,\theta'_\epsilon(v-w)dx - \int_\Omega v\nabla v\,(\nabla v-\nabla w)\,\theta'_\varepsilon(v-w)\,dx \\
&= \int_\Omega v\theta'_\varepsilon(v-w)\,(\nabla w-\nabla v)\,(\nabla v-\nabla w)\;dx \\
&\quad + \int_\Omega (v-w)\theta'_\varepsilon(v-w)\nabla v\,(\nabla v-\nabla w)\;dx \\
&\le \int_\Omega (v-w)\theta'_\varepsilon(v-w)\nabla v\,(\nabla v-\nabla w)\;dx \\
&= \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla\,[\gamma_\varepsilon(v-w)]\;dx.
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

Aplicando novamente a Primeira Identidade de Green em (1.16), segue que

$$
\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla\,[\gamma_\varepsilon(v-w)]\;dx = -\int_\Omega \Delta v\cdot\gamma_\varepsilon(v-w)dx. \tag{1.17}
$$

Agora, uma vez que

$$
0 \le \gamma_\varepsilon(t) \le \varepsilon, \qquad \forall\, t\in\mathbb{R},
$$

segue que

$$
\int_\Omega [-v\Delta w + w\Delta v]\,\theta_\varepsilon(v-w)\,dx \le \varepsilon.
$$

De fato, de (1.16) e (1.17) temos que

$$
\int_\Omega [-v\nabla w + w\nabla v]\,\theta_\varepsilon(v-w)\,dx \le \int_\Omega -\Delta v\gamma_\varepsilon(v-w)\,dx
$$

e sabe-se que $-\Delta v \le f(v)$, e $\gamma_\varepsilon \le \varepsilon$, para todo $t\in\mathbb{R}$; escolhendo um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos que

$$\int_{\Omega} [-v\Delta w + w\Delta v]\, \theta_\varepsilon(v-w)\, dx \leq \varepsilon. \tag{1.18}$$

Agora, aplicando a desigualdade (1.18) em (1.13) obtemos,

$$\int_{\Omega} vw \left[\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}\right] \theta_\varepsilon(v-w)\, dx \leq \varepsilon.$$

Fazendo, $\varepsilon \to 0$, temos

$$\int_{[v>w]} vw \left[\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}\right] dx \leq 0.$$

Por outro lado, $\dfrac{f(v)}{v} < \dfrac{f(w)}{w}$ sob $[v > w]$, isto é $meas\,[v > w] = 0$; então $v \leq w$.
Isto completa a prova do lema. □

Lema 1.4. *Para todo $0 < \lambda < \Lambda$, o problema (P_λ) tem uma solução mínima u_λ.*

Demonstração. Seja v_λ a única solução positiva de

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda v^q, & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Sabe-se que existe uma solução $u > 0$ de (P_λ) para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$ (Pelo Lema 1.2). Usaremos o símbolo u_λ, tal $\lambda \in (0, \Lambda)$ para denotar a solução mínima de (P_λ).

Agora, como

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q + u^p \geq \lambda u^q, & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Usando o Lema 1.3 com $w = u$ e $v = v_\lambda$ e definindo $f_\lambda(u) := \lambda u^q + u^p$, temos que

$$\begin{cases} -\Delta v_\lambda = \lambda v_\lambda^q \leq \lambda v_\lambda^q + v_\lambda^p = f_\lambda(v_\lambda), & x \in \Omega, \\ v_\lambda > 0, & x \in \Omega, \\ v_\lambda = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q + u^p = f_\lambda(u), & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

assim temos que

$$u \geq v_\lambda\,, \tag{1.19}$$

para qualquer solução u de (P_λ). Logo, é claro que v_λ é subsolução de (P_λ).

Considere agora a iteração monótona

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} = \lambda u_n^q + u_n^p, & x \in \Omega, \\ u_{n+1} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.20}$$

onde $u_0 = v_\lambda$, satisfazendo, $u_n \uparrow u_\lambda$, com u_λ solução de (P_λ).

Afirmação 1.1. *u_λ é solução mínima de (P_λ).*

De fato, se u é solução de (P_λ), por (1.19) temos que $u \geq v_\lambda$, assim u é supersolução de (P_λ). Então $u_n \leq u$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Para verificar isso usaremos indução, isto é, mostraremos que:

$$v_\lambda = u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \leq u.$$

De fato, primeiramente vamos mostrar que $v_\lambda = u_0 \leq u_1$. Como v_λ é uma subsolução de (P_λ), temos que

$$\begin{cases} -\Delta v_\lambda \leq \lambda v_\lambda^q + v_\lambda^p, & x \in \Omega, \\ v_\lambda \leq 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso u_1 é solução de (1.20) logo,

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = \lambda v_\lambda^q + v_\lambda^p, & x \in \Omega, \\ u_1 = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

dessa forma

$$\begin{cases} -\Delta v_\lambda \leq -\Delta u_1, & x \in \Omega, \\ v_\lambda \leq u_1, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

assim

$$\begin{cases} -\Delta (u_1 - v_\lambda) \geq 0, & x \in \Omega, \\ u_1 - v_\lambda \geq 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo, pelo Princípio do Máximo (ver Apêndice A, Teorema A.4), temos que $u_1 - v_\lambda \geq 0$ em Ω, ou seja $u_1 \geq v_\lambda$ em Ω. Agora, vamos mostrar que $u_1 \leq u$ em Ω. Como u é supersolução de (P_λ) temos

$$\begin{cases} -\Delta u \geq \lambda u^q + u^p, & x \in \Omega, \\ u \geq 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

e usando que $f_\lambda(\cdot)$ é crescente, temos que $f_\lambda(v_\lambda) \leq f_\lambda(u)$ e de (1.20), assim

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = \lambda u_0^q + u_0^p = \lambda v_\lambda^q + v_\lambda^p \leq \lambda u^q + u^p, & x \in \Omega, \\ u_1 = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

então,

$$\begin{cases} -\Delta u_1 \leq f_\lambda(u) \leq -\Delta u, & x \in \Omega, \\ u_1 \leq u, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

dessa forma segue que

$$\begin{cases} -\Delta (u - u_1) \geq 0, & x \in \Omega, \\ u - u_1 \geq 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Portanto, pelo Princípio do Máximo temos que $u_1 \leq u$ em Ω.

Agora, suponhamos por indução que vale, $v_\lambda = u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq u$, e mostraremos que $v_\lambda = u_0 \leq u_{n+1} \leq u$.

Por (1.20) considere as sequências u_n e u_{n+1} definidas por

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \lambda u_{n-1}^q + u_{n-1}^p, & x \in \Omega, \\ \quad u_n = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.21}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} = \lambda u_n^q + u_n^p, & x \in \Omega, \\ \quad u_{n+1} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.22}$$

subtraindo (1.21) de (1.22) temos

$$\begin{cases} -\Delta(u_{n+1} - u_n) = \lambda u_n^q + u_n^p - (\lambda u_{n-1}^q + u_{n-1}^p), & x \in \Omega, \\ \quad u_{n+1} - u_n = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.23}$$

contudo, como $f_\lambda(\cdot)$ é crescente, temos que

$$\lambda u_n^q + u_n^p - (\lambda u_{n-1}^q + u_{n-1}^p) \geq 0.$$

Portanto, pelo Princípio do Máximo $u_{n+1} - u_n \geq 0$, em Ω, isto é, $u_{n+1} \geq u_n$, em Ω. Análogo a demonstração de $u_1 \leq u$, em Ω, verifica-se que $u_{n+1} \leq u$, em Ω, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Mas como $u_n \uparrow u_\lambda$, temos que $u_\lambda \leq u$, demonstrando assim a afirmação. Concluímos assim que u_λ é solução mínima. $\square$

Observação 1.1. *É importante ressaltar que da teoria espectral para o operador dado por $-\Delta - a(x)$, onde $a(x) := \lambda q u^{q-1} + p u^{p-1}$, pode ser transferida para H, ainda se $a(x) = +\infty$ em $\partial\Omega$. Onde, observamos que*

$$\int_\Omega a\phi^2 dx \leq C_1 \parallel \phi \parallel^2, \qquad \forall\, \phi \in H. \tag{1.24}$$

Para verificarmos este fato, note que

$$\int_\Omega u^{q-1}\phi^2 dx = \int_\Omega u^q \left(\frac{1}{u}\phi\right)\phi dx \leq \|u\|_\infty^q \cdot \left\|\frac{\phi}{\delta}\right\|_2 \cdot \|\phi\,\|_2$$

onde $\delta(x) = dist(x, \partial\Omega)$. Pela desigualdade de Hardy (ver Apêndice A, Teorema A.13), temos

$$\left\|\frac{\phi}{\delta}\right\|_2 \leq C_2 \|\nabla\phi\|_2 = C_2\|\phi\|, \qquad \forall\, \phi \in H.$$

Segue que

$$\int_\Omega u^{q-1}\phi^2 dx \leq C_3 \parallel \phi \parallel^2 . \tag{1.25}$$

De modo análogo, mostra-se que

$$\int_\Omega u^{p-1}\phi^2 dx \leq C_4 \parallel \phi \parallel^2 . \tag{1.26}$$

Portanto, de (1.25) e (1.26), temos a desigualdade (1.24).

Mais ainda, a aplicação $\phi \mapsto \int_\Omega u\phi^2 dx$ é sequencialmente contínua para a topologia fraca de $H^{1,2}$, *pois*

$$\left|\int_\Omega u^{q-1}\left(\phi_n^2-\phi^2\right)dx\right| \leq \| u \|_\infty^q \left\|\frac{\phi_n+\phi}{\delta}\right\|_2 \| \phi_n-\phi \|_2 \to 0.$$

Lema 1.5. *Sejam $\psi \leq \Psi$ uma subsolução e uma supersolução respetivamente de (P_λ), e suponha que ψ não é solução. Seja u uma solução mínima, tal que $\psi \leq u \leq \Psi$. Então $\nu_1 := \lambda_1\left[-\Delta - a(x)\right] \geq 0$, onde $a = a(x) = \lambda q u^{q-1} + p u^{p-1}$ e $\lambda_1\left[-\Delta - a(x)\right]$ denota o primeiro autovalor de $-\Delta - a(x)$, com condição de Dirichlet sobre a fronteira.*

Demonstração. Suponha por contradição que $\nu_1 < 0$ e denotaremos por $\bar{\phi} > 0$ a correspondente autofunção, assim:

$$\begin{cases} -\Delta\bar{\phi} - a\bar{\phi} = \nu_1\bar{\phi}, & x \in \Omega \\ \bar{\phi} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Afirmamos que $u - \alpha\bar{\phi}$ é supersolução de (P_λ) para $\alpha > 0$, suficientemente pequeno.
De fato,

$$\begin{aligned} -\Delta(u-\alpha\bar{\phi}) &- \left[\lambda\left(u-\alpha\bar{\phi}\right)^q + \left(u-\alpha\bar{\phi}\right)^p\right] \\ &= -\Delta u + \alpha\Delta\bar{\phi} - \left[\lambda\left(u-\alpha\bar{\phi}\right)^q + \left(u-\alpha\bar{\phi}\right)^p\right] \\ &= \lambda u^q + u^p + \alpha\left(-\nu_1\bar{\phi} - a\bar{\phi}\right) - \left[\lambda\left(u-\alpha\bar{\phi}\right)^q + \left(u-\alpha\bar{\phi}\right)^p\right] \\ &= \lambda u^1 + u^p - \alpha\nu_1\bar{\phi} - \alpha a\bar{\phi} - \left[\lambda\left(u-\alpha\bar{\phi}\right)^q + \left(u-\alpha\bar{\phi}\right)^p\right] \\ &= \lambda u^q + u^p - \alpha\nu_1\bar{\phi} - \alpha\left(\lambda q u^{q-1} + p u^{p-1}\right)\bar{\phi} - \left[\lambda\left(u-\alpha\bar{\phi}\right)^q + \left(u-\alpha\bar{\phi}\right)^p\right]. \end{aligned}$$

Uma vez que $t \mapsto t^q$ é côncava, temos que

$$\left(u-\alpha\bar{\phi}\right)^q \leq u^q - \alpha q u^{q-1}\bar{\phi}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} -\Delta\left(u-\alpha\bar{\phi}\right) &- \left[\lambda\left(u-\alpha\bar{\phi}\right)^q + \left(u-\alpha\bar{\phi}\right)^p\right] \\ &= \lambda u^q + u^p - \alpha\nu_1\bar{\phi} - \alpha\left(\lambda q u^{q-1} + p u^{p-1}\right)\bar{\phi} - \left[\lambda\left(u-\alpha\bar{\phi}\right)^q + \left(u-\alpha\bar{\phi}\right)^p\right] \\ &\geq \lambda u^q + u^p - \alpha\nu_1\bar{\phi} - \alpha\lambda q u^{q-1}\bar{\phi} - \alpha p u^{p-1}\bar{\phi} - \lambda u^{q-1} + \alpha q u^{q-1}\bar{\phi} - \left(u-\alpha\bar{\phi}\right)^p \\ &= u^p - \alpha\nu_1\bar{\phi} - \alpha p u^{p-1}\bar{\phi} - \left(u-\alpha\bar{\phi}\right)^p \\ &= -\alpha\nu_1\bar{\phi} + o_n\left(\alpha\bar{\phi}\right) > 0, \end{aligned}$$

para $\alpha > 0$ pequeno, pois $\nu_1 < 0$ e $\bar{\phi} > 0$. Portanto, $u - \alpha\bar{\phi}$ é a supersolução de (P_λ). Mais ainda, como ψ não é solução, logo $u > \psi$ e, tomando α suficientemente pequeno, podemos também supor que $u - \alpha\bar{\phi} \geq \psi$. Logo (P_λ) tem uma solução $\tilde{u}$, com $\psi \leq \tilde{u} \leq u - \alpha\bar{\phi}$, uma contradição pois u é mínima. Isto prova o lema. □

Observamos que $\lambda_1\left[-\Delta - a(x)\right] \geq 0$ se, e somente se,

$$\int_\Omega \left(|\nabla\phi|^2 - a\phi^2\right)dx \geq 0, \quad \forall\, \phi \in H. \tag{1.27}$$

Assim, usando o Lema 1.5 com u_λ solução mínima, temos em particular que (1.27) com $a = a_\lambda =$

$\lambda q u_\lambda^{q-1} + p u_\lambda^{p-1}$, é satisfeita, isto é

$$\int_\Omega \left(|\nabla \phi|^2 - a_\lambda \phi^2 \right) dx \geq 0 \,, \quad \forall \, \phi \in H. \tag{1.28}$$

Agora temos todas as ferramentas necessárias para demonstrarmos o Teorema 1.1.

Demonstração do Teorema 1.1

Item 1. A partir dos Lemas 1.1, 1.2 e 1.4 segue que (P_λ) tem solução mínima u_λ para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$. Note que

$$I_\lambda\left(u_\lambda\right) = \frac{1}{2} \parallel u_\lambda \parallel^2 - \frac{\lambda}{q+1} \parallel u_\lambda \parallel_{q+1}^{q+1} - \frac{1}{p+1} \parallel u_\lambda \parallel_{p+1}^{p+1}.$$

Como u_λ é solução de (P_λ), temos que

$$I'_\lambda\left(u_\lambda\right) u_\lambda = 0,$$

assim, obtemos

$$\parallel u_\lambda \parallel^2 = \lambda \parallel u_\lambda \parallel_{q+1}^{q+1} + \parallel u_\lambda \parallel_{p+1}^{p+1}. \tag{1.29}$$

Pelo Lema 1.5 e a Observação 1.1, em particular da expresão (1.28) com $\phi = u_\lambda$, temos que

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_\lambda|^2 - (\lambda q u_\lambda^{q-1} + p u_\lambda^{p-1}) u_\lambda^2 \right) dx \geq 0,$$

logo, obtemos

$$\parallel u_\lambda \parallel^2 - \lambda q \parallel u_\lambda \parallel_{q+1}^{q+1} - p \parallel u_\lambda \parallel_{p+1}^{p+1} \geq 0.$$

Agora, por outro lado temos que $I_\lambda(u_\lambda) < 0$, pois

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_\lambda) &= \frac{1}{2} \parallel u_\lambda \parallel^2 - \frac{\lambda}{q+1} \parallel_{q+1}^{q+1} - \frac{1}{p+1} \parallel u_\lambda \parallel_{p+1}^{p+1} \\ &= \frac{1}{2} \left[\lambda \parallel u_\lambda \parallel_{q+1}^{q+1} + \parallel u_\lambda \parallel_{p+1}^{p+1} \right] - \frac{\lambda}{q+1} \parallel u_\lambda \parallel_{q+1}^{q+1} - \frac{1}{p+1} \parallel u_\lambda \parallel_{p+1}^{p+1} \\ &= \lambda \parallel u_\lambda \parallel_{q+1}^{q+1} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1} \right] + \parallel u_\lambda \parallel_{p+1}^{p+1} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right] \end{aligned}$$

entretanto,

$$0 < q < 1 < p \qquad \text{e} \qquad 1 < q+1 < 2 < p+1,$$

dessa forma:

$$\begin{array}{llllll} q+1 < 2 & \text{logo} & \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{q+1} & \text{assim} & \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{q+1} < 0 & \\ 2 < p+1 & \text{logo} & \dfrac{1}{p+1} < \dfrac{1}{2} & \text{assim} & \dfrac{1}{p+1} - \dfrac{1}{2} > 0 & \text{portanto} \;\; \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p+1} < 0. \end{array}$$

Concluímos que $I_\lambda\left(u_\lambda\right) < 0$.

Para completar a prova do Item 1, falta mostrarmos que

$$u_\lambda < u_{\bar{\lambda}} \quad \text{quando} \quad \lambda < \bar{\lambda}.$$

De fato, se $\lambda < \bar{\lambda}$ então $u_{\bar{\lambda}}$ é supersolução de (P_λ). Desde que, $\varepsilon > 0$ seja suficientemente pequeno $\varepsilon\phi_1$ é subsolução de (P_λ) e $\varepsilon\phi_1 < u_{\bar{\lambda}}$, então (P_λ) possui uma solução v com

$$\varepsilon\phi_1 \leq v \leq u_{\bar{\lambda}}.$$

Uma vez que u_λ é solução mínima de (P_λ), temos que $u_\lambda \leq v \leq u_{\bar{\lambda}}$. A desigualdade estrita segue pelo Princípio do Máximo Forte, pois u_λ não é identicamente igual a $u_{\bar{\lambda}}$. Isto completa a prova do Item 1.

Item 2. Seja (λ_n) uma sequência tal que $\lambda_n \uparrow \Lambda$. Uma vez que $u_n = u_{\lambda_n}$, pelo Item 1, temos que u_{λ_n} é solução mínima do problema (P_λ) e $I_{\lambda_n}(u_n) < 0$. Logo temos que , existe $C > 0$ tal que

$$\| \nabla u_n \|^2 \leq C \quad \text{e} \quad \| u_n \|_{p+1}^{p+1} \leq C,$$

assim (u_n) é uma sequência limitada em H, logo existe $u^* \in H$ tal que $u_n \rightharpoonup u^*$ em quase todo ponto de Ω. Além disso, temos que $(u_n) \subset L^{p+1}$ é limitada, assim $u_n \to \bar{u}$ fortemente em L^{p+1}. (ver Apêndice A, Proposição A.1).

Dessa forma, pela unicidade do limite e do fato que convergência forte implica convergência fraca, temos que $u^* = \bar{u}$. Portanto, $u^* \in H \cap L^{p+1}$ é solução fraca de (P_λ) para $\lambda = \Lambda$.

Item 3. Lembre que

$$\Lambda = \sup \{\lambda > 0 : \, (P_\lambda) \text{ tem solução } \}.$$

Logo, o Item 3 segue pela definição de Λ.

□

Observação 1.2. *Desde que $M(\lambda) \to 0$ quando $\lambda \to 0$ (veja a prova do Lema 1.1), segue $\| u_\lambda \|_\infty \to 0$ quando $\lambda \to 0$.*

O próximo resultado, estuda o comportamento de $\| u_\lambda \|_\infty$ quando $\lambda \to 0$, onde u_λ é solução de (P_λ).

Teorema 1.2. *Existe $A > 0$, tal que para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$ o problema (P_λ) tem no máximo uma solução u, tal que $\| u \|_\infty \leq A$.*

Na sequência apresentaremos um lema que será importante para a prova do Teorema 1.2.

Lema 1.6. *Suponha que z denota a única solução mínima satisfazendo*

$$\begin{cases} -\Delta z = z^q, & x \in \Omega, \\ z > 0, & x \in \Omega, \\ z = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.30}$$

Então existe $\beta > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} \left[|\nabla\phi|^2 - qz^{q-1}\phi^2 \right] dx \geq \beta \parallel \phi \parallel_2^2 , \qquad \forall\, \phi \in H. \tag{1.31}$$

Demonstração. Temos que o funcional associado ao problema (1.30) é

$$I(u) = \frac{1}{2} \parallel u \parallel^2 - \frac{1}{q+1} \parallel u \parallel_{q+1}^{q+1}$$

logo

$$z = \min I(u) = \min \left\{ \frac{1}{2} \parallel u \parallel^2 - \frac{1}{q+1} \parallel_{q+1}^{q+1}, \quad u \in H \right\}.$$

Assim, por (1.28) com $a = qz^{q-1}$ temos que

$$\int_{\Omega} \left[|\nabla\phi|^2 - qz^{q-1}\phi^2 \right] dx \geq 0, \qquad \forall\, \phi \in H,$$

isto é $\lambda_1 \left[-\Delta - qz^{q-1} \right] \geq 0$. Suponha que $\lambda_1 \left[-\Delta - qz^{q-1} \right] = 0$. Logo existe $\phi \in H$, $\phi > 0$ tal que

$$-\Delta\phi - qz^{q-1}\phi = 0 \ ,$$

e então

$$\int_{\Omega} \nabla\phi \cdot \nabla z \, dx = q \int_{\Omega} z^q \phi \, dx. \tag{1.32}$$

Por outro lado, usando (1.30) obtemos que

$$\int_{\Omega} \nabla\phi \cdot \nabla z \, dx = \int_{\Omega} z^q \phi \, dx.$$

A última expresão contradiz (1.32), pois $q < 1$. Então $\lambda_1 \left[-\Delta - qz^{q-1} \right] > 0$, isto é (1.31) é verdadeiro. □

Agora estamos prontos para demonstrar o Teorema 1.2.

Demonstração do Teorema 1.2

Considere $A > 0$ tal que

$$pA^{p-1} < \beta$$

onde β é o valor encontrado no Lema 1.6. Além disso, no Lema 1.1 mostramos que para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$, (P_λ) tem no máximo uma solução u, a qual pela Observação 1.2 satisfaz

$$\parallel u \parallel_\infty \leq A.$$

Suponha por contradição que (P_λ) tem uma segunda solução $w = u_\lambda + v$, tal que

$$\parallel w \parallel_\infty \leq A. \tag{1.33}$$

Note que como u_λ é solução mínima de (P_λ), então $v > 0$. Agora tomando $\zeta(x) = \lambda^{\frac{1}{1-q}} \cdot z(x)$, onde z é a mesma do Lema 1.6 obtemos

$$\begin{aligned} -\Delta\zeta &= -\Delta\left[\lambda^{\frac{1}{1-q}}.z\right] = \lambda^{\frac{1}{1-q}}(-\Delta z) \\ &= \lambda^{\frac{1}{1-q}}\cdot z^q \\ &= \lambda^{\frac{1}{1-q}}\cdot\left(\zeta\lambda^{\frac{-1}{1-q}}\right)^q \\ &= \lambda^{\frac{1}{1-q}}\zeta^q\lambda^{\frac{-q}{1-q}} = \lambda\cdot\zeta^q\,, \end{aligned} \tag{1.34}$$

então temos que, $-\Delta\zeta = \lambda\zeta^q$.

Mais ainda, temos que

$$-\Delta u_\lambda = \lambda u_\lambda^q + u_\lambda^p \geq \lambda u_\lambda^q,$$

e usando o Lema 1.3, considerando $f(t) = \lambda t^q$, $v = \zeta$ e $w = u_\lambda$, segue que

$$u_\lambda \geq \zeta = \lambda^{\frac{1}{1-q}}\cdot z. \tag{1.35}$$

Por outro lado, como $w = u_\lambda + v$ é solução de (P_λ) temos $-\Delta w = \lambda w^q + w^p$, isto é,

$$-\Delta(u_\lambda + v) = \lambda(u_\lambda + v)^q + (u_\lambda + v)^p.$$

Pela concavidade da função $f(t) = t^q$, $0 < q < 1$; temos que

$$\lambda(u_\lambda + v)^q \leq \lambda u_\lambda^q + \lambda q u_\lambda^{q-1}v$$

e assim,

$$\begin{aligned} -\Delta(u_\lambda + v) &= \lambda(u_\lambda + v)^q + (u_\lambda + v)^p \\ -\Delta u_\lambda - \Delta v &= \lambda(u_\lambda + v)^q + (u_\lambda + v)^p \\ -\Delta v &= \lambda(u_\lambda + v)^q + (u_\lambda + v)^p + \Delta u_\lambda \\ -\Delta v &= \lambda(u_\lambda + v)^q + (u_\lambda + v)^p - \lambda u_\lambda^q - u_\lambda^p \\ &\leq \lambda u_\lambda^q + \lambda q u_\lambda^{q-1}v + (u_\lambda + v)^p - \lambda u_\lambda^q - u_\lambda^p \\ &= \lambda q u_\lambda^{q-1}v + (u_\lambda + v)^p - u_\lambda^p \end{aligned}$$

provando que,

$$-\Delta v \leq \lambda q u_\lambda^{q-1}v + (u_\lambda + v)^p - u_\lambda^p. \tag{1.36}$$

Mais ainda de (1.35) temos

$$u_\lambda^{q-1} \leq \left(\lambda^{\frac{1}{1-q}}\, z\right)^{q-1} = \lambda^{-1}z^{q-1}. \tag{1.37}$$

Assim de (1.36) e (1.37) concluímos que:

$$\begin{aligned} -\Delta v &\leq \lambda q\left(\lambda^{-1}z^{q-1}\right)v + (u_\lambda + v)^p - u_\lambda^p \\ &= q z^{q-1}v + (u_\lambda + v)^p - u_\lambda^p. \end{aligned}$$

Além disso, como $u_\lambda + v = w \leq\parallel w \parallel_\infty \leq A$, temos que

$$(u_\lambda + v)^p - u_\lambda^p \leq pA^{p-1}v$$

e assim,

$$-\Delta v - qz^{q-1}v \leq (u_\lambda + v)^p - u_\lambda^p \leq pA^{p-1}v.$$

Agora, multiplicando esta desigualdade por v e integrando sobre Ω, sabendo que $v = 0$ em $\partial\Omega$, pois $v \in H$. Temos,

$$\begin{aligned}
-v\Delta v - qz^{q-1}v^2 &\leq pA^{p-1}v^2\\
\int_\Omega -v\Delta v - qz^{q-1}v^2\, dx &\leq \int_\Omega pA^{p-1}v^2\, dx\\
\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta}\, dS - \int_\Omega qz^{q-1}v^2\, dx &\leq \int_\Omega pA^{p-1}v^2\, dx\\
\int_\Omega (|\nabla v|^2 - qz^{q-1}v^2)\, dx &\leq pA^{p-1}\int_\Omega v^2\, dx.
\end{aligned}$$

Aplicando o resultado do Lema 1.6, com $\phi = v$ temos que existe $\beta > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\beta \parallel v \parallel_2^2 &= \beta \int_\Omega |v|^2\, dx\\
&\leq \int_\Omega (|\nabla v|^2 - qz^{q-1}v^2)\, dx\\
&\leq pA^{p-1}\int_\Omega v^2\, dx
\end{aligned}$$

assim,

$$\beta \int_\Omega |v|^2\, dx \leq pA^{p-1}\int_\Omega |v|^2\, dx,$$

mas como $pA^{p-1} < \beta$, segue que $v = 0$, o que é uma contradição pois $v > 0$. Concluindo assim a prova do Teorema 1.2. $\square$

Observação 1.3. *O comportamento de u_λ perto de $\lambda = 0$ é de tal forma que $u_\lambda \simeq \lambda^{\frac{1}{1-q}} z$.*

1.2 Existência de uma segunda solucão por argumentos variacionais

Nesta seção, consideraremos que

$$q < 1 < p \leq \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1.$$

Em particular, considere

$$f_\lambda(s) = \begin{cases} \lambda s^q + s^p, & s \geq 0,\\ 0, & s < 0 \end{cases} \qquad e \qquad F_\lambda(u) = \int_0^u f_\lambda(s) ds.$$

Assim, definimos o funcional $\bar{I}_\lambda : H \to \mathbb{R}$ como sendo

$$\bar{I}_\lambda(u) = \frac{1}{2} \parallel u \parallel^2 - \int_\Omega F_\lambda(u) dx.$$

Claramente, temos que $I_\lambda(u) = \bar{I}_\lambda(u)$ quando $u > 0$. Mais ainda, sabemos que pontos críticos de $\bar{I}_\lambda$ correspondem a soluções de (P_λ). Na seção anterior (no Lema 1.5 e Observação 1.1) garantem a existência de uma solução mínima u_λ de (P_λ) tal que $\nu_1 := \lambda_1[-\Delta - a_\lambda] \geq 0$. Se $\nu_1 > 0$ a solução é um mínimo local de $\bar{I}_\lambda$, mas se $\nu_1 = 0$ isto não é necessariamente o caso.

Para nosso objetivo que é encontrarmos uma segunda solução por métodos variacionais é essencial ter uma primeira solução a qual é também um mínimo local.

O resultado importante nesta seção é o seguinte,

Teorema 1.3. *Seja $0 < q < 1 < p \leq \dfrac{N+2}{N-2}$. Então para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$ o problema (P_λ) tem uma segunda solução $v_\lambda > u_\lambda$.*

Para fazermos a demonstração desse Teorema, mostraremos alguns resultados preliminares que serão úteis para a demonstração do Teorema.

Lema 1.7. *Para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$ o problema (P_λ) tem uma solução u, que é um mínimo local de $\bar{I}_\lambda$ na topologia C^1.*

Demonstração. Fixe $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda)$. Escolha $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2 < \Lambda$, e considere as soluções mínimas $u_1 := u_{\lambda_1}$ e $u_2 := u_{\lambda_2}$ definidas no Teorema 1.1. Então $u_1 \leq u_2$ e u_1, respectivamente u_2 é a subsolução, respectivamente a supersolução de (P_λ).

Mais ainda, como

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = \lambda_1 u_1^q + u_1^p, & x \in \Omega, \\ \quad u_1 = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u_2 = \lambda_2 u_2^q + u_2^p, & x \in \Omega, \\ \quad u_2 = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

então temos

$$\begin{aligned} -\Delta(u_2 - u_1) &= -\Delta u_2 + \Delta u_1 = \lambda_2 u_2^q + u_2^p - (\lambda_1 u_1^q + u_1^p) \\ &\geq \lambda_1 u_2^q + u_2^p - \lambda_1 u_1^q - u_1^p \\ &= \lambda_1 (u_2^q - u_1^q) + (u_2^p - u_1^p) \geq 0, \qquad x \in \Omega, \\ u_2 - u_1 &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Como $u_1 \neq u_2$ (pois $\lambda_1 < \lambda_2$), então pelo Lema de Hopf (ver Apêndice A o Lema A.1), temos

$$u_1 < u_2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \nu}(u_2 - u_1) < 0,$$

onde ν é o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$. Agora, considere

$$\tilde{f}_\lambda(x,s) = \begin{cases} f_\lambda(u_1(x)), & s \leq u_1, \\ f_\lambda(s), & u_1 < s < u_2, \\ f_\lambda(u_2(x)), & s \geq u_2, \end{cases}$$

$$\tilde{F}_\lambda(x,u) = \int_0^u \tilde{f}_\lambda(x,s)\, ds$$

e o funcional $\tilde{I}_\lambda : H \to \mathbb{R}$ dado por,

$$\tilde{I}_\lambda(u) = \frac{1}{2} \parallel u \parallel^2 - \int_\Omega \tilde{F}_\lambda(x,u)\, dx.$$

Como u_1 e u_2 são contínuas em $\overline{\Omega}$, então são limitadas em $\overline{\Omega}$. Portanto, $\tilde{f}_\lambda$ é uma função limitada, sendo assim, $\tilde{F}_\lambda(x,s) \leq C.s$, para todo $x \in \Omega$ e $t > 0$. Pela imersão de H em $L^1(\Omega)$ obtemos,

$$\tilde{I}_\lambda(u) \geq \frac{1}{2} \parallel u \parallel^2 - C \parallel u \parallel = \parallel u \parallel \left(\frac{1}{2} \parallel u \parallel - C \right),$$

para toda $u \in H$. Logo, $\tilde{I}_\lambda$ é coercivo e limitado inferiormente. Assim, $\tilde{I}_\lambda$ possui um mínimo global $u_\lambda \in W^{2,p}(\Omega)$, $\forall\, p < \infty$ e por sua vez u_λ é ponto crítico para $\tilde{I}_\lambda$. Portanto,

$$\begin{cases} -\Delta u_\lambda = \tilde{f}_\lambda(x, u_\lambda), & x \in \Omega, \\ \quad u_\lambda = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Agora, pela definição de $\tilde{f}_\lambda$, temos

$$f_\lambda(u_2) \geq \tilde{f}_\lambda(x, u_\lambda) \geq f_\lambda(u_1).$$

Desse modo, como u_1 e u_2 são soluções de (P_λ), temos

$$\begin{cases} -\Delta(u_1 - u_\lambda) = -\Delta u_1 + \Delta u_\lambda = \lambda_1 u_1^q + u_1^p - \tilde{f}_\lambda(x, u_\lambda) & \\ \qquad \leq \lambda u_1^q + u_1^p - \tilde{f}_\lambda(x, u_\lambda) = f_\lambda(x, u_1) - \tilde{f}_\lambda(x, u_\lambda) \leq 0, & x \in \Omega, \\ \quad u_1 - u_\lambda = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta(u_\lambda - u_2) = -\Delta u_\lambda + \Delta u_2 = \tilde{f}_\lambda(x, u_\lambda) - (\lambda_2 u_2^q + u_2^p) & \\ \qquad \leq \tilde{f}_\lambda(x, u_\lambda) - (\lambda u_2^q + u_2^p) = \tilde{f}_\lambda(x, u_\lambda) - f_\lambda(x, u_2) \leq 0, & x \in \Omega, \\ \quad u_\lambda - u_2 = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Novamente, pelo Lema de Hopf, temos que

$$\begin{cases} u_1 < u_\lambda < u_2, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu}(u_\lambda - u_1) < 0, & x \in \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu}(u_\lambda - u_2) < 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Lema A.2 (ver Apêndice A), $u_\lambda \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, $\alpha \in (0,1)$, assim, temos que $\parallel u - u_\lambda \parallel_{C^1} \leq \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, temos que $u_1 < u < u_2$, para todo $x \in \Omega$.

Dessa forma, por definição temos que

$$\tilde{f}_\lambda(x, u) = f_\lambda(x, u),$$

e consequentemente $\bar{I}_\lambda(u) = \tilde{I}_\lambda(u)$, para $u_1 < u < u_2$. Portanto, u_λ também é um minimizante local para $\bar{I}_\lambda$, na topologia C^1. □

A seguir fixaremos o λ e procuraremos uma segunda solução de (P_λ) da forma $u = u_0 + v$, onde u_0 denota a solução encontrada no Lema 1.7 e $v > 0$.

Dessa forma a correspondente equação para v fica

$$\begin{aligned} -\Delta v &= -\Delta(u_0 + v - u_0) = -\Delta(u_0+v) + \Delta u_0 \\ &= \lambda\,(u_0+v)^q + (u_0+v)^p - \lambda u_0^q - u_0^p. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Agora definimos

$$g(x,s) = g_\lambda(x,s) = \begin{cases} \lambda\,(u_0+s)^q - \lambda u_0^q + (u_0+s)^p - u_0^p, & s \geq 0, \\ 0, & s < 0, \end{cases}$$

$$G(v) = G_\lambda(v) = \int_0^v g(x,s)\,ds \quad \text{ e } \quad J(v) = J_\lambda(v) = \frac{1}{2}\parallel v \parallel^2 - \int_\Omega G(v)\,dx.$$

Se $v \in H, v \not\equiv 0$ é um ponto crítico de J, logo v é solução de (1.39) e, pelo Princípio do Máximo, $v > 0$ em Ω. Onde $u = u_0 + v$ é solução de (P_λ) e $u \neq u_0$. Nós argumentamos por contradição e assumimos que $v = 0$ é o único ponto crítico de J.

Lema 1.8. *$v = 0$ é um mínimo local de J em H.*

Demonstração. Como apresentado no Teorema A.12 (Apêndice A) é suficiente mostrar que $v = 0$ é um mínimo local de J na topologia de C^1. Assim, denotaremos por v^+ a parte positiva de v.

Logo,

$$\begin{aligned} G(v^+) - F(u_0+v^+) &= \int_0^{v^+} g(x,s)\,ds - \int_0^{u_0+v^+} f_\lambda(s)\,ds \\ &= \int_0^{v+} \lambda\,(u_0+s)^q - \lambda u_0^q + (u_0+s)^p - u_0^p\,ds - \int_0^{u_0+v^+} \lambda s^q + s^p\,ds \\ &= \left[\frac{\lambda}{q+1}\,(u_0+s)^{q+1} - \lambda u_0^q s + \frac{1}{p+1}\,(u_0+s)^{p+1} - u_0^p s\right]_0^{v^+} \\ &\quad - \left[\frac{\lambda}{q+1} s^{q+1} + \frac{1}{p+1} s^{p+1}\right]_0^{u_0+v^+} \\ &= \left[\frac{\lambda}{q+1}(u_0+v^+)^{q+1} - \lambda u_0^q v^+ + \frac{1}{p+1}(u_0+v^+)^{p+1} - u_0^p v^+\right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda}{q+1}(u_0+0)^{q+1} + \lambda u_0^q.0 - \frac{1}{p+1}(u_0+0)^{p+1} + u_0^p \cdot 0\right] \\ &\quad - \left[\frac{\lambda}{q+1}(u_0+v^+)^{q+1} + \frac{1}{p+1}(u_0+v^+)^{p+1} - \frac{\lambda}{q+1}.0^{q+1} - \frac{1}{p+1}.0^{p+1}\right] \\ &= \frac{\lambda}{q+1}(u_0+v^+)^{q+1} - \lambda u_0^q v^+ + \frac{1}{p+1}(u_0+v^+)^{p+1} - u_0^p v^+ \\ &\quad - \frac{\lambda}{q+1}u_0^{q+1} - \frac{1}{p+1}u_0^{p+1} - \frac{\lambda}{q+1}(u_0+v^+)^{q+1} - \frac{1}{p+1}(u_0+v^+)^{p+1} \\ &= -\frac{\lambda}{q+1}u_0^{q+1} - \lambda u_0^q v^+ - \frac{1}{p+1}u_0^{p+1} - u_0^p v^+. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Então,

$$\begin{aligned}
J(v) &= \frac{1}{2} \parallel v^+ \parallel^2 + \frac{1}{2} \parallel v^- \parallel^2 - \int_\Omega G(v^+)\,dx \\
&= \frac{1}{2} \parallel v^+ \parallel^2 + \frac{1}{2} \parallel v^- \parallel^2 - \int_\Omega F(u_0+v^+)\,dx \\
&+ \int_\Omega \left[\frac{\lambda}{q+1} u_0^{q+1} + \lambda u_0^q v^+ + \frac{1}{p+1} u_0^{p+1} + u_0^p v^+\right] dx \qquad (1.41)\\
&= \frac{1}{2} \parallel v^+ \parallel^2 + \frac{1}{2} \parallel v^- \parallel^2 - \int_\Omega F(u_0+v^+)\,dx \\
&+ \int_\Omega F(u_0)\,dx + \int_\Omega (\lambda u_0^q + u_0^p) v^+\,dx.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\bar{I}_\lambda(u_0+v^+) &= \frac{1}{2} \parallel u_0 + v^+ \parallel^2 - \int_\Omega F_\lambda(u_0+v^+)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u_0+v^+)|^2\,dx - \int_\Omega F_\lambda(u_0+v^+)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |\nabla u_0|^2 + |\nabla v^+|^2 + 2\nabla u_0 \nabla v^+\,dx\right] - \int_\Omega F_\lambda(u_0+v^+)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v^+|^2\,dx + \int_\Omega \nabla u_0 \nabla v^+\,dx - \int_\Omega F_\lambda(u_0+v^+)\,dx \qquad (1.42)\\
&= \frac{1}{2} \parallel u_0 \parallel^2 + \frac{1}{2} \parallel v^+ \parallel^2 + \left[\int_\Omega \frac{\partial u_0}{\partial \eta}\cdot v^+\,dS - \int_\Omega \Delta u_0 v^+\,dx\right] - \int_\Omega F_\lambda(u_0+v^+)\,dx \\
&= \frac{1}{2} \parallel u_0 \parallel^2 + \frac{1}{2} \parallel v^+ \parallel^2 + \int_\Omega (-\Delta u_0)\,v^+\,dx - \int_\Omega F_\lambda(u_0+v^+)\,dx \\
&= \frac{1}{2} \parallel u_0 \parallel^2 + \frac{1}{2} \parallel v^+ \parallel^2 + \int_\Omega (\lambda u_0^q + u_0^p)\,v^+\,dx - \int_\Omega F_\lambda(u_0+v^+)\,dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$J(v) = \frac{1}{2} \parallel v^+ \parallel^2 + \frac{1}{2} \parallel v^- \parallel^2 - \int_\Omega F(u_0+v^+)\,dx + \int_\Omega F(u_0)\,dx + \int_\Omega (\lambda u_0^q + u_0^p) v^+\,dx. \qquad (1.43)$$

Substituindo a expressão $-\int_\Omega F_\lambda(u_0+v^+)\,dx$ de (1.42) em (1.43) temos

$$\begin{aligned}
J(v) &= \frac{1}{2} \parallel v^+ \parallel^2 + \frac{1}{2} \parallel v^- \parallel^2 + \left[\bar{I}_\lambda(u_0+v^+) - \frac{1}{2} \parallel u_0 \parallel^2 - \frac{1}{2} \parallel v^+ \parallel^2 - \int_\Omega (\lambda u_0^q + u_0^p) v^+\,dx\right] \\
&+ \int_\Omega F(u_0)\,dx + \int_\Omega (\lambda u_0^q + u_0^p)\,dx \\
&= \frac{1}{2} \parallel v^- \parallel^2 + \bar{I}_\lambda(u_0+v^+) - \frac{1}{2} \parallel u_0 \parallel^2 + \int_\Omega F(u_0)\,dx \qquad (1.44)\\
&= \frac{1}{2} \parallel v^- \parallel^2 + \bar{I}_\lambda(u_0+v^+) - \left[\frac{1}{2} \parallel u_0 \parallel^2 - \int_\Omega F(u_0)\,dx\right] \\
&= \frac{1}{2} \parallel v^- \parallel^2 + \bar{I}_\lambda(u_0+v^+) - \bar{I}_\lambda(u_0).
\end{aligned}$$

Logo, $J(v) \geq 0$, pois pelo Lema 1.7 u_0 é um minimizante local para $\bar{I}_\lambda$. Daí existe $\varepsilon > 0$ tal que $\bar{I}_\lambda(u_0+v^+) - \bar{I}_\lambda(u_0) \geq 0$, para $\parallel v^+ \parallel_{C^1} \leq \varepsilon$.

Assim, v é um mínimo local na topologia C^1. Logo pelo Teorema A.12, segue que v é um mínimo local em H. $\square$

Lembre-se que J satisfaz a condição de Palais- Smale no nível $c \in \mathbb{R}$, denotada por $(PS)_c$, se para toda sequência $(u_n) \subset H$ satisfazendo

$$|J(u_n)| \leq c \qquad \text{e} \qquad J'(u_n) \to 0 \tag{1.45}$$

possui subsequência convergente.

Lema 1.9. *1. Se $p < \dfrac{N+2}{N-2}$ logo J_λ satisfaz $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

2. Se $p = \dfrac{N+2}{N-2}$ e se 0 é o único ponto crítico de J_λ, então J_λ satisfaz $(PS)_c$ para todo $c < \dfrac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$, onde S denota a melhor constante de Sobolev.

Demonstração. **Verificação para o caso $p < \dfrac{N+2}{N-2}$.**

Seja $(u_n) \subset H$ uma sequência $(PS)_c$ para J_λ, isto é

$$J_\lambda(u_n) \to c \quad \text{e} \quad J'_\lambda(u_n) \to 0 \quad \text{em } H^{-1},$$

assim

$$J_\lambda(u_n) = \frac{1}{2} \parallel u_n^- \parallel^2 + I_\lambda(u_0 + u_n^+) - I_\lambda(u_0) \to c \tag{1.46}$$

e

$$J'_\lambda(u_n)u_n^- = \parallel u_n^- \parallel^2 + I'_\lambda(u_0 + u_n^+)u_n^- - I'_\lambda(u_0)u_n^- \to 0. \tag{1.47}$$

Mas como u_0 é ponto crítico do funcional I_λ, temos em (1.47) que

$$J'_\lambda(u_n)u_n^- = \parallel u_n^- \parallel^2 + I'_\lambda(u_0 + u_n^+)u_n^- \to 0$$

logo,

$$\parallel u_n^- \parallel^2 \to 0 \quad \text{e} \quad I'_\lambda(u_0 + u_n^+)u_n^- \to 0. \tag{1.48}$$

Por outro lado, de (1.46) e usando o fato que $\parallel u_n^- \parallel^2 \to 0$, obtida em (1.48), temos

$$I_\lambda(u_0 + u_n^+) - I_\lambda(u_0) \to c,$$

assim

$$I_\lambda(u_0 + u_n^+) \to c + I_\lambda(u_0). \tag{1.49}$$

De (1.48) e (1.49) temos que $(u_0 + u_n)$ é uma sequência (PS) para I_λ, no nível $c + I_\lambda(u_0)$. Mas como I_λ satisfaz (PS) (ver Apêndice A o Lema A.3). Logo, segue que $(w_n) := (u_0 + u_n)$ possui subsequência convergente, isto é, existe $(w_{n_j}) \subset (w_n)$ convergente. Assim, $u_{n_j} = w_{n_j} - u_0$ é uma subsequência convergente. Portanto, J_λ satisfaz a condição de $(PS)_c$.

Daremos agora uma ideia da mesma prova apresentada acima, contudo, usaremos a condição de Ambrosetti-Rabinowitz (A-R).

A prova baseia-se no artigo dado em [3], então invocando o artigo mencionado, temos as seguintes condições:

(g_1) $|g(x,s)| \leq C_1 + C_2|s|^p$, onde $1 < p < \dfrac{N+2}{N-2}$,

(g_2) Se $G(u) = \displaystyle\int_0^u g(x,s)\,ds$, logo existe $R > 0$, $\mu > 2$ tal que $G(u) \leq \dfrac{1}{\mu} g(x,u)u$, $\forall\ |u| \geq R$, $x \in \overline{\Omega}$.

Finalmente temos o seguinte resultado como em [3]:

Resultado: *Se g satisfaz (g_1) e (g_2), logo o funcional J_λ satisfaz a condição (PS).*

Assim, se verificamos as condições (g_1) e (g_2) para nossa função g teríamos pelo resultado dado em [3], que J_λ satisfaz (PS).

Verificando as condições (g_1) e (g_2).

1. Condição (g_1) :
   Sendo
$$g(x,s) = \begin{cases} \lambda(u_0+s)^q - \lambda u_0^q + (u_0+s)^p - u_0^p, & s \geq 0, \\ 0, & s < 0. \end{cases}$$
   Temos que
$$\begin{aligned} |g(x,s)| &= |\lambda(u_0+s)^q - \lambda u_0^q + (u_0+s)^p - u_0^p| \\ &\leq \lambda|u_0+s|^q + \lambda|u_0|^q + |u_0+s|^p + |u_0|^p \\ &\leq \lambda|u_0+s|^p + \lambda|u_0|^p + |u_0+s|^p + |u_0|^p \\ &= (\lambda+1)|u_0+s|^p + (\lambda+1)|u_0|^p \\ &= a_1 + (\lambda+1)|u_0+s|^p \\ &\leq a_1 + (\lambda+1).C(u_0^p + s^p) \\ &\leq C_1 + C_2|s|^p. \end{aligned}$$
   Portanto, existem as constantes C_1 e C_2 tal que a desigualdade em (g_1) é satisfeita.

2. Condição (g_2) :
   Note que,
$$\lim_{u\to\infty} \frac{G(x,u)}{g(x,u)u} = \lim_{u\to+\infty} \left(\frac{\frac{\lambda(u_0+u)^{q+1}}{q+1} - \lambda u_0^q u + \frac{(u_0+u)^{p+1}}{p+1} - u_0^p u - \frac{\lambda u_0^{q+1}}{q+1} - \frac{u_0^{p+1}}{p+1}}{\lambda(u_0+u)^q u - \lambda u_0^q u + (u_0+u)^p u - u_0^p u} \right),$$
   como temos uma indeterminação, aplicamos L'Hospital. Logo temos,
$$\lim_{u\to+\infty} \left(\frac{\lambda(u_0+u)^q - \lambda u_0^q + (u_0+u)^p - u_0^p}{\lambda q(u_0+u)^{q-1}u + \lambda(u_0+u)^q - \lambda u_0^q + p(u_0+u)^{p-1}u + (u_0+u)^p - u_0^p} \right).$$
   Novamente temos uma indeterminação, assim aplicando L'Hospital mais uma vez, temos
$$\lim_{u\to+\infty} \left(\frac{\lambda q(u_0+u)^{q-1} + p(u_0+u)^{p-1}}{\begin{aligned}&\lambda q(q-1)(u_0+u)^{q-2}u + \lambda q(u_0+u)^{q-1} \\ &\qquad + \lambda q(u_0+u)^{q-1} + p(p-1)(u_0+u)^{p-2}u \\ &\qquad + 2p(u_0+u)^{p-1}\end{aligned}} \right).$$

Agora, note que como $0 < q < 1$, os termos que tem dependência de q tendem a zero. Por outro lado, note que o termo $p(u_0+u)^{p-1}$, no numerador aparece uma vez, e no denominador, duas vezes acompanhado do termo $p(p-1)(u_0+u)^{p-2}u$, assim o termo do denominador cresce mais rápido que o numerador, fazendo tender a zero toda a expressão. Para que fique mais claro, aplicaremos L'Hospital novamente nos termos com dependência de p, pois para os termos que contém q, esses tendem a zero. Assim temos,

$$\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{p(p-1)(u_0+u)^{p-2}}{p(p-1)(p-2)(u_0+u)^{p-3}u+3p(p-1)(u_0+u)^{p-2}}\right)=\frac{1}{p+1},$$

é claro assim que, o termo do denominador cresce mais rápido que o numerador, concluindo que $G(u)\leq\frac{1}{\mu}g(u)u$, com $\mu=p+1$. Portanto, como as condições do resultado são satisfeitas, J_λ satisfaz (PS). De fato, seja $(u_n)\subset H$ uma sequência tal que

$$J_\lambda(u_n)\to c \quad \text{e} \quad J'_\lambda(u_n)\to 0.$$

Agora, como

$$J_\lambda(u_n)=\frac{1}{2}\parallel u_n\parallel^2-\int_\Omega G_\lambda(u_n)dx$$

e usando a condição (g_2), temos que

$$c\geq\frac{1}{2}\parallel u_n\parallel^2-\int_\Omega G_\lambda(u_n)dx\geq\frac{1}{2}\parallel u_n\parallel-\frac{1}{\mu}\int_\Omega g_\lambda(u_n)u_n\,dx. \tag{1.50}$$

Desde que, como $J'_\lambda(u_n)\to 0$, temos que para todo $\varepsilon>0$, existe $N=N(\varepsilon)>0$ tal que para todo $n\geq N$,

$$|J'_\lambda(u_n)u_n|\leq\varepsilon\parallel u_n\parallel. \tag{1.51}$$

Tomando $\varepsilon=1$ e combinando-se (1.50) e (1.51), temos que

$$\begin{aligned}
c+o_n(1)&=J_\lambda(u_n)-\frac{1}{\mu}J'_\lambda(u_n)u_n\\
&\geq\frac{1}{2}\parallel u_n\parallel^2-\frac{1}{\mu}\int_\Omega g_\lambda(u_n)u_n\,dx-\frac{1}{\mu}\parallel u_n\parallel\\
&\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\parallel u_n\parallel^2-C-\frac{1}{\mu}\parallel u_n\parallel.
\end{aligned}$$

Então (u_n) é limitada em H, assim possui subsequência convergente.

Verificação para o caso $p=\dfrac{N+2}{N-2}$.

Seja $(w_n)\subset H$ uma sequência tal que

$$J'_\lambda(w_n)\to 0 \quad \text{e} \quad J_\lambda(w_n)\to c<\frac{S^{N/2}}{N}.$$

Note que w_n é limitada pois,

$$\frac{1}{p+1}J'_\lambda(w_n)(u_0+w_n)-J_\lambda(w_n)\leq\varepsilon_n\parallel u_0+w_n\parallel;\quad \varepsilon_n\to 0.$$

Na expressão acima, os termos de potência $p+1$ são cancelados, logo pode-se escrever como

$$\| w_n \|^2 \leq C \left(\| w_n \|^{q+1} + \| w_n \| + 1 \right),$$

assim, $\| w_n \|$ é limitada. Passando a uma subsequência se necessário, $w_n \rightharpoonup w_\lambda$ em H, $w_n \to w_\lambda$ em L^r, $1 < r < 2^*$.

Mais ainda, $u_0 + w_\lambda$ é solução de (P_λ) e assim ponto crítico de J_λ. Então

$$\frac{1}{p+1} J'_\lambda(w_n)(u_0 + w_n) - J_\lambda(w_n) = \frac{1}{N} \| w_n \|^2 + o_n(1) \to c.$$

Se $c = 0$, logo $w_n \to 0$ em H e a prova está concluída.

Afirmação 1.2. *$c = 0$ é a única possibilidade.*

De fato, suponha por contradição que $c \neq 0$. Podemos então supor que $\|w_n\|$ converge e como $I'_\lambda(w_n)w_n \to 0$, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \| w_n \|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (w_n^+)^{2^*} dx = Nc.$$

Por definição de S (ver Apêndice A expressão em A.21), temos que

$$\| w_n \|^2 \geq S \left(\int_\Omega |w_n|^{2^*} dx \right)^{2/2^*},$$

passando ao limite obtemos

$$cN \geq S(cN)^{2/2^*}$$

e assim $c \geq \dfrac{S^{N/2}}{N}$, se $c > 0$. Uma contradição com o Lema A.6 (ver Apêndice A).

Portanto, J_λ satisfaz $(PS)_c$ para todo $c < \dfrac{S^{N/2}}{N}$. □

Podemos agora apresentar a demonstração do Teorema 1.3.

Demonstração do Teorema 1.3

1. **CASO** $p < \dfrac{N+2}{N-2}$

   Primeiramente estudaremos o caso em que $1 < p < \dfrac{N+2}{N-2}$, onde temos que ocorre $(PS)_c$ para todo c. Mostraremos que do fato que $1 < p$, segue que para todo $v > 0$ teremos que $J_\lambda(tv) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$. Assim, seja $v \in H$. Desejamos aplicar o Teorema do Passo da Montanha (ver Apêndice B o Teorema B.1), para isso, primeiramente verificaremos que existe $v \notin B_{r_0}$ tal que $J_\lambda(v) \leq 0$.

   Temos de modo direto que $J(0) = 0 < \varepsilon$, pois pela expressão em (1.38) temos $J_\lambda(0) = \dfrac{1}{2} \| 0 \|^2 + \bar{I}_\lambda(u_0 + 0) - \bar{I}_\lambda(u_0) = 0$.

Agora, fixe $v \in H$, $v^+ \neq 0$ e escreva $w := tv$ para $t > 0$, assim temos que

$$J_\lambda(w) = \frac{1}{2} \parallel w \parallel^2 - \int_\Omega G(w)\,dx,$$

logo

$$\begin{aligned}
J_\lambda(tv) &= \frac{1}{2} \parallel tv \parallel^2 - \int_\Omega G(tv)\,dx \\
&= \frac{t^2}{2} \parallel v \parallel^2 - \int_\Omega \int_0^{tv^+} g(x,s)\,ds\,dx \\
&= \frac{t^2}{2} \parallel v \parallel^2 - \int_\Omega \int_0^{tv^+} \lambda(u_0+s)^q - \lambda u_0^q + (u_0+s)^p - u_0^p\,ds\,dx \\
&= \frac{t^2}{2} \parallel v \parallel^2 - \int_\Omega \int_0^{tv^+} \lambda(u_0+s)^q + (u_0+s)^p - (\lambda u_0^q + u_0)^p)\,ds\,dx \\
&= \frac{t^2}{2} \parallel v \parallel^2 - \int_\Omega \left(\frac{\lambda}{q+1}(u_0+tv^+)^{q+1} - \frac{\lambda}{q+1} u_0^{q+1} + \frac{1}{p+1}(u_0+tv^+)^{p+1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{p+1} u_0^{p+1} + tv^+ f_\lambda(u_0) \right) dx \qquad (1.52)\\
&= \frac{t^2}{2} \parallel v \parallel^2 - t^{q+1} \int_\Omega \frac{\lambda}{q+1} \left(\frac{u_0+tv^+}{t} \right)^{q+1} dx - t^{p+1} \int_\Omega \frac{1}{p+1} \left(\frac{u_0+tv^+}{t} \right)^{p+1} dx \\
&\quad + \int_\Omega \left(\frac{\lambda}{q+1} u_0^{q+1} + \frac{1}{p+1} u_0^{p+1} \right) dx + t \int_\Omega f_\lambda(u_0) v^+\,dx \\
&= \frac{t^2}{2} \parallel v \parallel^2 - t^{q+1} \int_\Omega \frac{\lambda}{q+1} \left(\frac{u_0+tv^+}{t} \right)^{q+1} dx - t^{p+1} \int_\Omega \frac{1}{p+1} \left(\frac{u_0+tv^+}{t} \right)^{p+1} dx \\
&\quad + \int_\Omega F_\lambda(u_0)\,dx + t \int_\Omega f_\lambda(u_0) v^+\,dx \\
&\leq \frac{t^2}{2} \parallel v \parallel^2 - t^{q+1} \int_\Omega \frac{\lambda}{q+1} \left(\frac{u_0}{t} + v^+ \right)^{q+1} dx - t^{p+1} \int_\Omega \frac{1}{p+1} \left(\frac{u_0}{t} + v^+ \right)^{p+1} dx \\
&\quad + C_1|\Omega| + tC_2|\Omega|
\end{aligned}$$

onde $F_\lambda(u_0) \leq C_2$ e $f_\lambda(u_0) \leq C_1$, em que C_1, C_2 são constantes reais positivas. Agora como $q+1 < 2 < p+1$, segue que

$$J_\lambda(w) = J_\lambda(tv) \to -\infty \qquad \text{quando} \quad t \to +\infty.$$

Assim, existe $t_0 > 0$ tal que

$$\parallel w \parallel = \parallel t_0 v \parallel > r_0 \qquad \text{e} \qquad J_\lambda(w) = J_\lambda(t_0 v) \leq 0.$$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned}
J_\lambda(tv) \quad &= \quad \frac{t^2}{2} \parallel v \parallel^2 - t^{q+1} \int_\Omega \frac{\lambda}{q+1} \left(\frac{u_0+tv^+}{t} \right)^{q+1} dx - t^{p+1} \int_\Omega \frac{1}{p+1} \left(\frac{u_0+tv^+}{t} \right)^{p+1} dx \\
&\quad + \int_\Omega F_\lambda(u_0)\,dx + t \int_\Omega f_\lambda(u_0) v^+ dx
\end{aligned}$$

e como todos os integrandos são positivos, temos que quando fizermos $t \to 0^+$, a potência que domina é 1 no caso "t", assim existe uma função $v_\lambda \in H$, $v_\lambda \neq 0$, tal que $J_\lambda(v_\lambda) = c \geq \varepsilon > 0$ e $J'_\lambda(v_\lambda)v_\lambda = 0$. Isto é, v_λ é um ponto crítico não trivial para J_λ.

Uma vez que $J_\lambda(u_\lambda) < 0$, onde u_λ é a primeira solução obtida pelo Teorema (1.1) e $J_\lambda(v_\lambda) > 0$ temos que $u_\lambda \neq v_\lambda$ e v_λ é a segunda solução para o problema (P_λ), isso decorre o Teorema do Passo da Montanha, além do fato que

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max \{J(\gamma(t)) \,:\, t \in [0,1]\}$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C\left([0,1], H\right) \,:\, \gamma(0) = 0,\, \gamma(1) \leq 0\}.$$

2. **CASO** $p = \dfrac{N+2}{N-2}$

Vamos mostrar que o funcional J_λ tem um ponto crítico não trivial no caso $p = 2^* - 1$. Novamente, J_λ possui um mínimo local na origem e pode-se encontrar $e \in H$, com $\| e \|$ suficientemente grande, tal que $J_\lambda(e) \leq 0$.

Suponha por contradição que 0 é o único ponto crítico de J_λ. Considere o Teorema do Passo da Montanha no nível

$$c_\lambda := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_\lambda(\gamma(t))$$

onde

$$\Gamma = \left\{\gamma \in C([0,1], H_0^1) \,|\, \gamma(0) = 0,\, \gamma(1) = e\right\}.$$

Para aplicar o Teorema do Passo da Montanha, considere $w_n \in H$ tal que

$$J'_\lambda(w_n) \to 0 \quad \text{e} \quad J_\lambda(w_n) \to c_\lambda \tag{1.53}$$

onde $0 \leq c_\lambda < \dfrac{S^{N/2}}{N}$, pelo Lema A.6 (ver Apêndice A).

O Lema (1.9) implica que $w_n \to w_\lambda$ em H. Então w_λ é um ponto crítico de J_λ, e assim, $w_\lambda = 0$ por suposição. Logo temos por (1.53) que

$$\frac{1}{p+1} J'_\lambda(w_n)(u_0 + w_n) - J_\lambda(w_n) = \frac{1}{N} \| w_n \|^2 + o_n(1) \to c_\lambda. \tag{1.54}$$

Note que se $c_\lambda = 0$, pode-se tomar w_n satisfazendo $\| w_n \| \to r$, $r > 0$ o que contradiz (1.54). Assim, $c_\lambda > 0$. Como $J'_\lambda(w_n)(w_n) \to 0$, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \| w_n \|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (w_n^+)^{2^*} dx = N c_\lambda.$$

Por definição de S temos

$$\| w_n \|^2 \geq S \left(|w_n|^{2^*}\right)^{2/2^*}.$$

Passando ao limite, temos

$$c_\lambda N \geq S(c_\lambda N)^{2/2^*}.$$

Segue que $c_\lambda \geq \dfrac{S^{N/2}}{N}$, se $c_\lambda > 0$. O que contradiz o Lema A.6 (ver Apêndice A).

Logo J_λ possui ponto crítico não trivial. $\square$

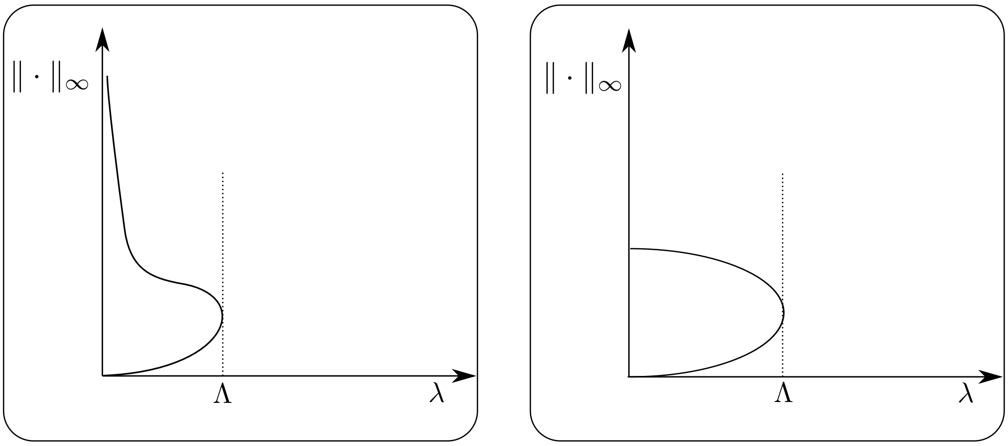
Observação 1.4. *Nos teoremas anteriores as soluções encontradas estão em H. Mas sabe-se que por [6], as soluções pertencem a todo $L^p(\Omega)$ e então as soluções são clássicas.*

Observação 1.5. *No caso $q = 0$ o problema (P_λ) é*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda + u^p, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

e a existência de ao menos duas soluções positivas quando $p = \dfrac{N+2}{N-2}$ forem estabelecidas em [23] para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno.

Os resultados acima, sugerem que a estrutura do conjunto de soluções positivas de (P_λ) olha-se como (ver Figura 1.1).



$p = \dfrac{N+2}{N-2}$ $\qquad$ $p < \dfrac{N+2}{N-2}$

Figura 1.1: Representação.

1.3 Existência de infinitas soluções

Nesta seção consideraremos o caso particular de (P_λ)

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{q-1}u + |u|^{p-1}u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

e mostraremos que para $\lambda > 0$ e pequeno, o problema (P) tem infinitas soluções. Mais precisamente, a presença do termo sublinear $|u|^{q-1}u$ produz a existência de infinitas soluções de (P), com energia negativa, sempre que $\lambda > 0$ é perto do zero. Por outro lado, o termo $|u|^{p-1}u$ tem um papel importante produzindo a existência de infinitas soluções com energia positiva, sempre que $p < \dfrac{N+2}{N-2}$.

Apresentaremos agora um importante resultado para essa seção.

Teorema 1.4. *1. Seja* $0 < q < 1 < p \leq \dfrac{N+2}{N-2}$. *Então existe* $\lambda^* > 0$ *tal que para todo* $\lambda \in (0, \lambda^*)$ *o problema* (P) *tem infinitas soluções tal que* $I_\lambda(u) < 0$.

2. Se $0 < q < 1 < p < \dfrac{N+2}{N-2}$. *Então para todo* $\lambda \in (0, \lambda^*)$ *o problema* (P) *tem também infinitas soluções tal que* $I_\lambda(u) > 0$.

Temos que se $p \leq \dfrac{N+2}{N-2}$ e para $u \in H$, definimos

$$I(u) = I_\lambda(u) = \frac{1}{2} \parallel u \parallel^2 - \frac{\lambda}{q+1} \parallel u \parallel_{q+1}^{q+1} - \frac{1}{p+1} \parallel u \parallel_{p+1}^{p+1}.$$

Os pontos críticos de I_λ sobre H são soluções de (P).

Seja $B_r = \{u \in H : \parallel u \parallel \leq r\}$. Usando a desigualdades de Sobolev e Hölder temos

$$I_\lambda(u) \geq \frac{1}{2} \parallel u \parallel^2 - \lambda C_1 \parallel u \parallel^{q+1} - C_2 \parallel u \parallel^{p+1}. \tag{1.55}$$

De (1.55) prontamente encontramos que existe $\lambda^* > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \lambda^*]$ existem $r, a > 0$ tal que

$(I.1)$ $I_\lambda(u) \geq a$ para todo $\parallel u \parallel = r$;

$(I.2)$ I_λ é limitada sobre B_r;

$(I.3)$ I_λ satisfaz (PS) sobre B_r.

Agora fixamos $\lambda \in (0, \lambda^*]$, e daremos a prova do Teorema 1.4 item 1.

Demonstração. 1. Seja

$$\Sigma = \{A \subset H : 0 \notin A,\, u \in A \Rightarrow -u \in A\}.$$

Para $A \in \Sigma$ o gênero Z_2 de A é denotado por $\gamma(A)$ (ver Apêndice $A.5$). Temos também

$$\mathcal{A}_{n,r} = \{A \in \Sigma : A \text{ é compacto },\, A \subset B_r,\, \gamma(A) \geq n\}.$$

Claramente, $\mathcal{A}_{n,r} \neq \emptyset$ para todo $n = 1, 2, \cdots$, pois

$$S_{n,\varepsilon} := \partial(H_n \cap B_\varepsilon) \in \mathcal{A}_{n,r}.$$

Onde H_n denota o subespaço $n-$ dimensional de H. Seja

$$b_{n,r} = \inf_{A \in \mathcal{A}_{n,r}} \max_{u \in A} I(u).$$

Cada $b_{n,r}$ é finito devido a $(I.2)$. Mais ainda, temos que

$$b_{n,r} < 0, \qquad \forall\, n \in N. \tag{1.56}$$

De fato, seja $w \in H_n$ tal que $\| w \|= \varepsilon$. Uma vez que

$$I(w) \leq \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \lambda C_1 \varepsilon^{q+1},$$

segue que $I(w) < 0$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Assim $b_{n,r} < 0$.

A seguir, note que $u \in B_r \cap \{I \leq 0\}$ o fluxo de maior descida η_t (definida através do campo vetorial pseudo-gradiente (ver Lema de Deformação em B.2 do Apêndice B) está bem definida para $t \in [0, \infty)$ e

$$\eta_t(u) \in B_r \cap \{I \leq 0\} \qquad \forall\, t \geq 0,$$

por $(I.1)$. Por outro lado de (1.56), $b_{n,r} < 0$ e (PS) é satisfeito em B_r por $(I.3)$; pode-se usar a Teoria de Lusternik- Schnirelman [19], para encontrar infinitos pontos críticos de I em B_r tal que $I(u) < 0$. Isto prova o item (1) do Teorema 1.4.

2. Agora consideramos $p < \dfrac{N+2}{N-2}$. Adaptaremos os argumentos do [3] para fazer a demonstração. Primeiro, note que $(I.1)$ não é o mesmo que I_1 de [3]. Mais ainda, seja

$$\hat{A}_0 = B_r \cup \{I \geq 0\},$$

claramente, temos que $H_n \cap \hat{A}_0$ é limitada para todo $n \in N$, isto é (I_5) de [3] é satisfeita. Logo temos que

$$\Gamma^* = \left\{ h \in C(H, H) \,:\, h \text{ é um homeomorfismo ímpar e } h(B_1) \subset \hat{A}_0 \right\},$$
$$\Gamma_n = \{K \in \Sigma \,:\, \gamma(K \cap h(\partial B_1)) \geq n, \forall h \in \Gamma^*\},$$

e

$$c_n = \inf_{K \in \Gamma_n} \max_{u \in K} I(u).$$

Note que o Lema 2.7 de [3] é satisfeita, escolhendo

$$h(u) = ru,$$

r definido em $(I.1 - I.3)$, temos que $h \in \Gamma^*$. Então encontramos novamente que $K \cap B_r \neq \emptyset$, $\forall\, K \in \Gamma_n$, e segue que

$$c_n \geq a > 0.$$

Mais ainda, seja $\phi = \eta_1$, assim obtemos

$$\phi^{-1}(\hat{A}_0) \subset \hat{A}_0. \tag{1.57}$$

Para mostrar este fato, é suficiente tomar $u \in B_r$, por outro lado, se $I(u) > 0$ logo $I(\phi^{-1}(u)) > I(u)$ e (1.57) é satisfeita trivialmente. Agora, se $u \in B_r$ e $w := \phi^{-1} \notin B_r$, logo existe $\tau < 1$ tal que $\eta_\tau(w) \in \partial B_r$. Por $(I.1)$ encontramos que $I(\eta_\tau(w)) \geq a > 0$. Então $I(w) \geq I(\eta_\tau(w)) > 0$ e $w \in \hat{A}_0$, provando (1.57).

Finalmente, como foi feito para J_λ, veja o Lema 1.9 (i), I também satisfaz (PS). Logo aplicando o Teorema 2.8 do artigo [3], temos a existência de infinitos pontos críticos de I tal que $I(u) > 0$.

□

Capítulo

2

Multiplicidade de Soluções

Estudaremos agora a existência, não-existência e multiplicidade de soluções para a família de problemas

$$(\tilde{P}_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta u = f_\lambda(x,u), & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ e $\lambda > 0$ um parâmetro. Um importante fato desta família é a dependência monótona sobre λ, isto é

$$f_\lambda(x,s) \leq f_{\lambda'}(x,s) \quad \text{se} \quad \lambda < \lambda'.$$

Nossa hipótese geral sobre a família $f_\lambda(x,s)$ é

(H) Para cada $\lambda > 0$, $f_\lambda : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory, com a propriedade de que para qualquer $s_0 > 0$, existe uma constante $A > 0$, tal que

$$|f_\lambda(x,s)| \leq A$$

em quase todo ponto de Ω, e todo $s \in [0, s_0]$. Além disso, se $\lambda < \lambda'$, então $f_\lambda(x,s) \leq f_{\lambda'}(x,s)$ em quase todo ponto de Ω e todo $s \geq 0$.

A seguinte hipótese trata acerca do comportamento de $f_\lambda(x,s)$ perto de $s = 0$; isto implica $f_\lambda(x,0) \geq 0$ e, como assumimos (H), vamos supor em todo o trabalho que:

(H_0) Para cada $\lambda > 0$ e cada $s_0 > 0$, existe $B > 0$ tal que

$$f_\lambda(x,s) \geq -B\,s,$$

para quase todo ponto de Ω e todo $s \in [0, s_0]$.

Vamos sempre considerar que $f_\lambda(x,s)$ possa ser estendido para $s < 0$, escrevendo $f_\lambda(x,s) = f_\lambda(x,0)$, para $\lambda > 0$ em quase todo ponto de Ω e $s < 0$.

Observamos que se $u \in H \cap L^\infty(\Omega)$ satisfaz a equação $-\Delta u = f_\lambda(x,u)$ em H, então pela hipótese (H) e a teoria de regularidade (ver Apêndice A.1) implicam que $u \in W^{2,r}(\Omega)$ para qualquer $r < \infty$, e assim $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Mais ainda, $u \geq 0$ (demonstrado mais na frente); e assim, temos $u > 0$ em Ω, e $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} < 0$ sobre $\partial\Omega$ se $u \neq 0$ (isto segue de (H_0) e o Princípio do Máximo forte). Aqui ν denota o vetor normal exterior unitário.

Observe também que o funcional associado é

$$I_\lambda(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F_\lambda(x,u)\,dx,$$

onde $F_\lambda(x,u) := \displaystyle\int_0^u f_\lambda(x,t)\,dt$, está bem definido para $u \in H \cap L^\infty(\Omega)$.

As duas próximas hipóteses, serão usadas no nosso primeiro resultado.

(H_e) Existe $\lambda > 0$ e a função g não decrescente, com $\inf\left\{\dfrac{g(s)}{s}\,,\ s > 0\right\} < \dfrac{1}{\| e \|_\infty}$, tal que

$$f_\lambda(x,s) \leq g(s)$$

em quase todo $x \in \Omega$ e todo $s \geq 0$; onde e é solução de

$$\begin{cases} -\Delta e = 1, & x \in \Omega, \\ e = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

e $\|\cdot\|_\infty$ denota a norma L^∞.

(H_{Ω_1}) Para qualquer $\lambda > 0$, existe um subdomínio suave Ω_1, $s_1 > 0$, e $\theta_1 > \lambda_1(\Omega_1)$ tal que

$$f_\lambda(x,s) \geq \theta_1\, s,$$

para quase todo ponto de Ω_1 e todo $s \in [0, s_1]$; aqui $\lambda_1(\Omega_1)$ denota o primeiro autovalor de $-\Delta$ sobre $H_0^1(\Omega_1)$.

Alguns comentários sobre as duas últimas hipóteses.

- A hipótese (H_e) é mais uma condição para garantir a existência de uma supersolução. Está condição é motivada pelo fato que uma supersolução para uma equação do tipo $-\Delta u = f(u)$ pode ser obtida se tivermos uma supersolução dada por uma outra equação da forma $-\Delta u = g(u)$, com $f(s) \leq g(s)\ \forall\, s$.
- A hipótese (H_{Ω_1}) é condição de sublinearidade local no 0, a que está satisfeita, por exemplo, se a seguinte condição mais forte ocorre

$$\lim_{\substack{s\to 0\\ s>0}} \frac{f_\lambda(x,s)}{s} = \infty, \qquad \text{uniformemente para } x \in \Omega_1.$$

A hipótese (H_{Ω_1}) é usada para construir a subsolução.

Teorema 2.1 (Existência de uma solução sem condição de crescimento)**.** *Sobre as hipóteses* (H), (H_0), (H_e) *e* (H_{Ω_1}), *existe* $0 < \Lambda \leq \infty$ *tal que o problema* $(\tilde{P}_\lambda)$ *tem ao menos uma solução* u *com* $I_\lambda(u) < 0$ *para* $0 < \lambda < \Lambda$, *e nenhuma solução para* $\lambda > \Lambda$.

Observação 2.1. *Note que, na presente generalidade Λ pode ser ∞. Um exemplo é fornecido pela família como acima tal que para cada $\lambda > 0$, existe $M_\lambda > 0$ com $f_\lambda(x, M_\lambda) < 0$ em quase todo ponto de Ω. Neste caso, a constante M_λ é uma supersolução.*

Teorema 2.2 (Não existência de soluções para λ grande)**.** *Sob as hipóteses (H), (H_0), (H_e), (H_{Ω_1}) e $(H_{\tilde{\Omega}})$, onde*

$(H_{\tilde{\Omega}})$ *Existe a função h com $h(\lambda) \to \infty$ quando $\lambda \to \infty$, um subdomínio suave $\tilde{\Omega}$ e $\tilde{m} \in L^\infty(\Omega)$ com $\tilde{m} \geq 0$, $\tilde{m} \not\equiv 0$, tal que*

$$f_\lambda(x, s) \geq h(\lambda)\tilde{m}(x)s$$

para todo $\lambda > 0$ em quase todo ponto de Ω e para todo $s \geq 0$.

Então $\Lambda < \infty$.

Observação 2.2. *A hipótese $(H_{\tilde{\Omega}})$ pode ser vista como uma versão localizada da condição suficiente de não existência para*

$$\begin{cases} -\Delta u = l(u), & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\inf \left\{ \dfrac{l(s)}{s}, \, s \geq 0 \right\} > \lambda_1(\Omega)$.

Devido à ausência da condição de crescimento, temos até agora definida uma solução como a função em $H \cap L^\infty(\Omega)$. Embora, se a seguinte condição de crescimento com respeito a s na não-linearidade de $f_\lambda(x, s)$ é assumida, então podemos falar de uma H solução no sentido usual:

(G) Para qualquer $[r, R] \subset \{\lambda > 0\}$, existem d_1, d_2 e $\sigma \leq 2^* - 1$ tal que

$$|f_\lambda(x, s)| \leq d_1 + d_2 s^\sigma$$

para todo $\lambda \in [r, R]$, e quase todo ponto em Ω e todo $s \geq 0$.

Observação 2.3. *Se $\sigma < 2^* - 1$ em (G), então qualquer $u \in H$, é solução de $-\Delta u = f_\lambda(x, u)$ que pertence a $W^{2,r}(\Omega)$ para qualquer $r < \infty$ e consequentemente a $C^1(\overline{\Omega})$. Está conclusão também é satisfeita se σ em (G) é igual a $2^* - 1$.*

Condição (G) com $\sigma \leq 2^* - 1$, também implica, que o funcional $I_\lambda(u)$ está bem definido para $u \in H$.

Nosso objetivo agora é provar a existência de uma solução para $\lambda = \Lambda$, podemos supor a seguinte condição:

$(AR)_d$ Para qualquer $[r, R] \subset \{\lambda > 0\}$, existe $\theta > 2$, $\rho < 2$, $d \geq 0$ e $s_0 \geq 0$, tal que

$$\theta F_\lambda(x, s) \leq s f_\lambda(x, s) + d s^\rho$$

para todo $\lambda \subset [r, R]$, quase todo ponto em Ω e todo $s \geq s_0$.

Observação 2.4. *Esta condição $(AR)_d$ é uma versão mais fraca da condição clássica de superquadraticidade de Ambrosetti-Rabinowitz.*

Teorema 2.3. *(Existência de uma solução para $\lambda = \Lambda$). Sob as hipóteses do Teorema (2.2), e além de (G), $(AR)_d$ e a continuidade de $f_\lambda(x,s)$ com respeito a λ (para quase todo ponto em Ω, e uniformemente limitado para s). Então o problema $(\tilde{P}_\lambda)$ tem ao menos uma solução u, com $I_\lambda(u) \leq 0$ para $\lambda = \Lambda$.*

Observação 2.5. *A uniformidade com respeito a $\lambda \in [r,R]$ em (G) e $(AR)_d$ é usado somente no Teorema (2.3) para tratar como o caso $\lambda = \Lambda$. Não é necessário nos seguintes teoremas $(2.4) - (2.6)$, onde $\lambda < \Lambda$ poderia ser fixo.*

Agora discutiremos a multiplicidade de soluções para famílias subcríticas, isto é, as que satisfazem (G) como $\sigma < 2^* - 1$. Nosso objetivo, é mostrar a existência de ao menos duas soluções quando $\lambda < \Lambda$. Para isso, temos que fortalecer um pouco algumas das hipóteses do Teorema (2.1). A condição (H_0) será representada por

$(H_0)'$ Para qualquer $\lambda > 0$ e todo $s_0 > 0$, existe $B \geq 0$, tal que em quase todo ponto de Ω,

$$s \mapsto f_\lambda(x,s) + Bs$$

é não-decrescente sob $[0, s_0]$, mais ainda $f_\lambda(x,0) \geq 0$ para todo $\lambda > 0$ em quase todo ponto de Ω.

Observação 2.6. *A condição $(H_0)'$ é um requisito clássico, quando tratamos com sub e supersoluções.*

A monotonicidade da família f_λ é também assumida e pode a ser estrita no seguinte sentido:

(M) Para qualquer $\lambda < \lambda'$ e todo $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ com $u > 0$ em Ω

$$f_\lambda(x,u(x)) \lneqq f_{\lambda'}(x,u(x)).$$

Também podemos supor que:

(H_{Ω_2}) Para todo $\lambda > 0$, existe um subdomínio Ω_2, s_2 e $\theta_2 > 0$ tal que

$$F_\lambda(x,s) \geq \theta_2 s^2$$

em quase todo ponto de Ω_2 e todo $s \geq s_2$.

Observação 2.7. *A condição (H_{Ω_2}) é implicada por uma condição de superlinearidade local no ∞, da forma*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f_\lambda(x,s)}{s} = \infty,$$

uniformemente para $x \in \Omega_2$. Isto é utilizado junto com $(AR)_d$ para verificarmos a geometria do Teorema do Passo da Montanha.

Teorema 2.4. *(Existência de uma segunda solução no caso subcrítico). Além das hipóteses do Teorema (2.1), suponha (G) como $\sigma < 2^* - 1$, $(AR)_d$, $(H_0)'$, (M) e (H_{Ω_2}). Então o problema $(\tilde{P}_\lambda)$ tem ao menos duas soluções u, v para $0 < \lambda < \Lambda$, com $u < v$ em Ω, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} > \dfrac{\partial v}{\partial \nu}$ sobre $\partial\Omega$ e $I_\lambda(u) < 0$.*

Finalmente, consideramos multiplicidade para as famílias críticas. Isto é, que $f_\lambda(x,s)$ comporta-se no infinito como $b(x)s^p$ com $p = 2^* - 1$. Então escrevemos a função f_λ como

$$f_\lambda(x,s) = h_\lambda(x,s) + b(x)s^p \tag{2.1}$$

onde distinguimos dois casos:

i. h_λ satisfaz (G) com $\sigma < 1$, $b(x)$ pode mudar de sinal;

ii. h_λ satisfaz (G) com $\sigma < 2^* - 1$, $b(x) \geq 0$ em Ω.

Estudaremos primeiro o caso (i).

Teorema 2.5. *(Existência de uma segunda solução no caso crítico com $\sigma < 1$). Além das hipóteses do Teorema (2.1), suponha que $f_\lambda(x,s)$ satisfaz $(H_0)'$ e (M). Suponha também que $f_\lambda(x,s)$ pode-se escrever como em (2.1) com $p = 2^* - 1$, $h_\lambda(x,s)$ satisfazendo (G) com $\sigma < 1$, e $h_\lambda(x,s)$ não decrescente em relação a s para qualquer $\lambda > 0$ em quase todo ponto de Ω. Suponha também que, $b(x)$ em (2.1) não é identicamente nula, com $b \in L^\infty(\Omega)$ e satisfazendo*

(b) para algum $x_0 \in \Omega$, alguma bola $B_1 \subset \Omega$ em torno de x_0, alguma constante M e algum γ com $\gamma > 2^*$ quando $N \geq 5, \gamma \geq 2^*$ quando $N = 4$ e $\gamma > 3/5$ quando $N = 3$, têm-se

$$0 \leq \| b \|_\infty - b(x) \leq M|x - x_0|^\gamma$$

em quase todo ponto de B_1.

Então o problema $(\tilde{P}_\lambda)$ tem ao menos duas soluções u, v para $0 < \lambda < \Lambda$, com $u < v$ em Ω, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} > \dfrac{\partial v}{\partial \nu}$ sobre $\partial\Omega$ e $I_\lambda(u) < 0$.

Observação 2.8. *A hipótese (b) implica $\| b^- \|_\infty \leq \| b^+ \|_\infty$, com algumas limitações sobre a forma em que $b(x)$ se aproxima de $\| b \|_\infty$. Isso é trivial se $b(x) = \| b \|_\infty$ em quase todo ponto de uma bola pequena.*

Agora, estudaremos o caso crítico (ii).

Teorema 2.6. *(Existência de uma segunda solução no caso crítico com $\sigma < 2^* - 1$). Em adição das hipóteses do Teorema (2.1) suponha que $f_\lambda(x,s)$ satisfaz $(H_0)'$ e (M). Suponha também que $f_\lambda(x,s)$ pode-se escrever como em (2.1), com $p = 2^* - 1,$, $h_\lambda(x,s)$ satisfaz (G) com $\sigma < 2^* - 1$, $h_\lambda(x,s)$ não decrescente com respeito a s, para qualquer $\lambda > 0$ em quase todo ponto de Ω, e $h_\lambda(x,s)$ satisfaz $(AR)_d$. Suponha ainda que b em (2.1) é não negativa e não é identicamente nula em Ω, pertencendo a $L^\infty(\Omega)$ e satisfaz a condição (b) acima. Então o problema $(\tilde{P}_\lambda)$ tem ao menos duas soluções u, v para $0 < \lambda < \Lambda$, com $u < v$ em Ω, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} > \dfrac{\partial v}{\partial \nu}$ sobre $\partial\Omega$ e $I_\lambda(u) < 0$.*

Observação 2.9. *No Teorema (2.6), $h_\lambda(x,s)$ permite-se qualquer crescimento subcrítico, sob a hipótese $(AR)_d$ para $h_\lambda(x,s)$ e $b(x) \geq 0$.*

2.1 Existência de uma solução sem condição de crescimento

Nesta seção mostraremos o Teorema 2.1.

Demonstração. Começamos provando a existência de uma supersolução de $(\tilde{P}_\lambda)$ para o valor de λ dado pela hipótese (H_e). Denotaremos por e a solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta e = 1, & x \in \Omega, \\ e = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Tomando λ e g da hipótese (H_e), existe $M > 0$ tal que $\dfrac{1}{\| e \|_\infty} \geq \dfrac{g(M \| e \|_\infty)}{M \| e \|_\infty}$, então $M \geq g(M \| e \|_\infty)$ assim temos,

$$-\Delta(Me) = M(-\Delta e) = M \geq g(M \| e \|_\infty) \geq g(Me) \geq f_\lambda(x, Me).$$

Isto mostra que Me é uma supersolução clássica de $(\tilde{P}_\lambda)$.

Agora, construiremos uma subsolução de $(\tilde{P}_\lambda)$ utilizando o subdomínio Ω_1, dada pela hipótese (H_{Ω_1}). Seja $\varphi_1 > 0$ a autofunção associada ao primeiro autovalor $\lambda_1(\Omega_1)$ do problema

$$(PA) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega_1, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega_1, \end{cases}$$

onde Ω_1 é o subdomínio dado pela hipótese (H_{Ω_1}).

A regularidade de φ_1 nos permite estendê-la para todo Ω fazendo

$$u(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in \Omega_1, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_1, \end{cases}$$

de modo que $u \in H \cap L^\infty(\Omega)$.

Vamos denotar $u_\varepsilon = \varepsilon u$ para $\varepsilon > 0$. Como $\partial\Omega$ é de classe C^1, dado $v \in C_0^\infty(\Omega)$, com $v \geq 0$, vale

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \eta} v dx - \int_\Omega (\Delta u_\varepsilon) v dx,$$

como o suporte de v está contido em Ω e $u_\epsilon = 0$ em $\Omega \setminus \Omega_1$ concluímos que

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla v dx = -\int_{\Omega_1} (\Delta u_\varepsilon) v dx. \tag{2.2}$$

Por (H_{Ω_1}), sabemos que existe $s_1 > 0$ tal que

$$f_\lambda(x, s) \geq \theta_1 s > \lambda_1(\Omega_1) s$$

em quase todo ponto de Ω, sempre que $0 \leq s \leq s_1$. Logo, tomando $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon \| u \|_\infty \leq s_1$, temos que

$$f_\lambda(x, u_\varepsilon) \geq \theta_1 u_\varepsilon > \lambda_1(\Omega_1) u_\varepsilon \quad \text{em quase todo ponto de } \Omega \tag{2.3}$$

pois $0 \leq \varepsilon u \leq s_1$.

Além disso, como φ_1 é uma autofunção associada ao autovalor λ_1 do problema (PA) e $v \geq 0$ segue que $(-\Delta u_\varepsilon) v = \lambda_1(\Omega_1) u_\varepsilon v$. Logo por (2.2) e (2.3) temos

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla v dx = -\int_{\Omega_1} (\Delta u_\varepsilon) v dx = \int_{\Omega_1} \lambda_1(\Omega_1) u_\varepsilon v dx \leq \int_{\Omega_1} f_\lambda(x, u_\epsilon) v dx \tag{2.4}$$

como $u_\varepsilon = 0$ em $\Omega \setminus \Omega_1$ e (H_0) nos garante que $f(x,0) \geq 0$ então $\displaystyle\int_{\Omega\setminus\Omega_1} f_\lambda(x,u_\lambda)vdx \geq 0$, e portanto

$$\int_{\Omega_1} f_\lambda(x,u_\varepsilon)vdx \leq \int_{\Omega_1} f_\lambda(x,u_\varepsilon)vdx + \int_{\Omega\setminus\Omega_1} f_\lambda(x,u_\varepsilon)vdx = \int_{\Omega} f_\lambda(x,u_\varepsilon)vdx,$$

logo por (2.3) concluímos que,

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla v dx \leq \int_\Omega f_\lambda(x,u_\varepsilon)vdx \tag{2.5}$$

e assim $u_\varepsilon = \varepsilon u$ é uma subsolução fraca para o problema $(\tilde{P}_\lambda)$.

Como o suporte de ε está contido em $\overline{\Omega}_1$ e além disso $\Omega_1 \subset\subset \Omega$, a supersolução Me atinge mínimo positivo em $\overline{\Omega}_1$. Portanto, se é necessário, podemos tomar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, de tal forma que $\varepsilon \parallel u \parallel \leq Me(x)$, $x \in \overline{\Omega}_1$.

Tomando $\underline{c} = -\varepsilon \parallel u \parallel_\infty$ e $\bar{c} = M \parallel e \parallel_\infty$, temos que

$$\underline{c} \leq \varepsilon u \leq Me \leq \bar{c}, \quad x \in \Omega.$$

Logo, pelo Teorema de sub e supersolução (ver Apêndice C, Teorema C.2), o problema $(\tilde{P}_\lambda)$ admite uma solução fraca $u \in H \cap L^\infty(\Omega)$ que satisfaz $\varepsilon u \leq u \leq Me$, para o valor λ dada na hipótese (H_e).

Assim, prova-se que

$$\Lambda = \sup\Big\{\lambda > 0\,,\, (\tilde{P}_\lambda) \text{ tem uma solução } \Big\} > 0.$$

Faltaría mostra que para cada $0 < \lambda < \Lambda$, $(\tilde{P}_\lambda)$ tem uma solução u tal que $I_\lambda(u) < 0$.

Seja $0 < \lambda < \Lambda$, e tome $\bar{\lambda}$ tal que $\lambda < \bar{\lambda} < \Lambda$ e $(\tilde{P}_{\bar{\lambda}})$ tem solução $\bar{u}$, isto é possível pela definição de Λ.

Como a família f_λ é monótona, temos que

$$-\Delta\bar{u} = f_{\bar{\lambda}}(x,\bar{u}) \geq f_\lambda(x,\bar{u}),$$

o que mostra que $\bar{u}$ é uma supersolução de $(\tilde{P}_\lambda)$.

Pelo feito anteriormente, usando o subdomínio Ω_1 da hipótese (H_{Ω_1}) mostra que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $\varepsilon\varphi_1$ é uma subsolução fraca de $(\tilde{P}_\lambda)$; a qual satisfaz que $\varepsilon\varphi_1 \leq \bar{u}$ em Ω.

Agora, pelo Teorema 2.4 de [22] segue que existe uma solução $u_0 \in H \cap L^\infty(\Omega)$ de $(\tilde{P}_\lambda)$ a qual satisfaz

$$I_\lambda(u_0) = \min\{I_\lambda(u)\,;\, u \in H \;\text{ e }\; \varepsilon\varphi_1 \leq u \leq u \leq \bar{u}\}. \tag{2.6}$$

Por outro lado, por (H_{Ω_1}) temos para todo $\lambda > 0$, existe um subdomínio Ω_1 suave, $s_1 > 0$ e $\theta_1 > \lambda_1(\Omega_1)$ tal que

$$f_\lambda(x,s) \geq \theta_1 s \quad \text{ em quase todo ponto de } \Omega,$$

e para todo $0 \leq s \leq s_1$.

Assim,

$$\int_\Omega \int_0^u f_\lambda(x,s)\,ds\,dx \geq \int_\Omega \int_0^u \theta_1 s\,ds\,dx \geq 0$$

$$\int_\Omega F_\lambda(x,u)\,dx \geq 0, \;\; \forall\, u \in H. \tag{2.7}$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_\lambda(\varepsilon\varphi_1) &= \frac{\varepsilon^2}{2} \parallel \varphi_1 \parallel^2 - \int_\Omega F_\lambda(x, \varepsilon\varphi_1)\, dx \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2} \int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2\, dx - \int_\Omega F_\lambda(x, \varepsilon\varphi_1)\, dx. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Assim, sendo

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_0) &= \min\{I_\lambda(u)\,;\, u \in H \ \text{ e } \ \varepsilon\varphi_1 \le u \le \bar{u}\} \\ &\le I_\lambda(u)\,,\, u \in H \quad \text{ e } \quad \varepsilon\varphi_1 \le u \le \bar{u}, \end{aligned}$$

teríamos que

$$I_\lambda(u_0) \le I_\lambda(\varepsilon\varphi_1) = \frac{\varepsilon^2}{2} \int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2\, dx - \int_\Omega F_\lambda(x, \varepsilon\varphi_1)\, dx,$$

para ε suficientemente pequeno (tal que $\varepsilon\varphi_1 \le s_1$). Portanto temos que $I_\lambda(u_0) < 0$. Isto completa a prova do Teorema 2.1. □

2.2 Não existência de soluções para λ grande

Nesta seção mostraremos o Teorema 2.2.

Demonstração. Deve-se mostrar que para λ suficientemente grande o problema $(\tilde{P}_\lambda)$ não tem solução. Suponha por contradição que o problema $(\tilde{P}_\lambda)$ tem uma solução $u \in H \cap L^\infty(\Omega)$.

Seja agora, $\tilde{\varphi} > 0$ a autofunção associada ao primeiro autovalor $\lambda_1(\tilde{m}, \tilde{\Omega})$ do problema de autovalor com peso $\tilde{m}$.

$$(\overline{PA}) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda\tilde{m}(x)u\,, & x \in \tilde{\Omega}, \\ u = 0\,, & x \in \partial\tilde{\Omega}, \end{cases}$$

onde $\tilde{\Omega}$ é um subdomínio dado pela hipótese $(H_{\tilde{\Omega}})$.

A regularidade de $\tilde{\varphi}$ nos permite estendê-lo para todo Ω fazendo

$$u(x) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(x), & x \in \tilde{\Omega}, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}, \end{cases}$$

de modo que $u \in H \cap L^\infty(\Omega)$. Então temos que,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi\, dx &= \int_{\partial\tilde{\Omega}} u\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\nu}\, dx + \int_{\tilde{\Omega}} u(-\Delta\tilde{\varphi})dx \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} u(-\Delta\tilde{\varphi})\, dx \\ &\le \int_{\tilde{\Omega}} u(\lambda_1(\tilde{m}, \tilde{\Omega})\tilde{\varphi}\tilde{m})\, dx = \lambda_1(\tilde{m}, \tilde{\Omega}) \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}u\tilde{\varphi}\, dx. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Por outro lado, pela hipótese $(H_{\tilde{\Omega}})$ temos

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\tilde{\varphi}\, dx = \int_\Omega f_\lambda(x,u)\tilde{\varphi}dx \ge h(\lambda) \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}u\tilde{\varphi}\, dx. \tag{2.10}$$

Como $\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}u\tilde{\varphi}\, dx > 0$, e de (2.9) e (2.10) temos que

$$h(\lambda)\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}u\tilde{\varphi}dx \leq \int_{\Omega} \nabla u \nabla\tilde{\varphi}dx \leq \lambda_1(\tilde{m},\tilde{\Omega})\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}u\tilde{\varphi}dx \tag{2.11}$$

assim, $h(\lambda) \leq \lambda_1(\tilde{m},\tilde{\Omega})$. O que é uma contradição, pois $h(\lambda) \to +\infty$, quando $\lambda \to +\infty$. Isto completa a prova do Teorema 2.2. □

2.3 Existência de uma solução para $\lambda = \Lambda$

Nesta seção mostraremos o Teorema 2.3.

Demonstração. A continuidade de f_λ com respeito a λ, bem como as hipóteses (G) e $(AR)_d$ que são satisfeitas uniformemente para todo $\lambda \in [r,R]$, serão utilizadas aqui.

Seja $\lambda_k \to \Lambda$ com $0 < \lambda_k < \Lambda$, e λ_k crescente; e seja u_k a solução do problema $(\tilde{P}_{\lambda_k})$ com $I(u_k) < 0$.

Primeiro mostraremos que a sequência (u_k) é limitada em H.

Afirmação 2.1. *(u_k) é limitada em H.*

De fato, como

$$I(u_k) = I_{\lambda_k}(u_k) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_k|^2\, dx - \int_\Omega F_{\lambda_k}(x,u_k)\, dx < 0,$$

assim,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_k|^2\, dx < \int_\Omega F_{\lambda_k}(x,u_k)\, dx.$$

Pela hipótese $(AR)_d$, temos

$$\frac{\theta}{2}\int_\Omega |\nabla u_k|^2\, dx < \int_\Omega (u_k f_{\lambda_k}(x,u_k) + du_k^\rho)dx + C_1\,,$$

assim

$$\frac{\theta}{2} \parallel u_k \parallel^2 - \int_\Omega u_k f_{\lambda_k}(x,u_k)\, dx \leq d\int_\Omega u_k^\rho dx + C_1, \tag{2.12}$$

para alguma constante positiva C_1.

Mas $\int_\Omega u_k f_{\lambda_k}(x,u_k)\, dx = \parallel u_k \parallel^2$ pois de fato, como u_k é solução de $(\tilde{P}_{\lambda_k})$, segue que, u_k é um ponto crítico de I_{λ_k}, assim $I'_{\lambda_k}(u_k)u_k = 0$, logo $\parallel u_k \parallel^2 - \int_\Omega f_\lambda(x,u_k)u_k\, dx = 0$. E consequentemente de (2.12) temos,

$$\frac{\theta}{2} \parallel u_k \parallel^2 - \parallel u_k \parallel^2 \leq d\int_\Omega u_k^\rho\, dx + C_1$$

$$\left(\frac{\theta}{2} - 1\right) \parallel u_k \parallel^2 \leq C_2 \parallel u_k \parallel^\rho + C_1$$

para alguma constante positiva C_2.

Como $\rho < 2$, segue que $\parallel u_k \parallel^\rho \leq \parallel u_k \parallel^2$, assim

$$\left[\left(\frac{\theta}{2} - 1\right) - C_2\right] \parallel u_k \parallel^2 \leq C_1$$

$$\parallel u_k \parallel^2 \leq \frac{C_1}{\left[\left(\frac{\theta}{2} - 1\right) - C_2\right]}$$

agora, como $\theta > 2$ segue que (u_k) é limitada em H.

Fazendo uso da limitação em (G), note que em particular para subsequências $u_k \to u$ em $H \cap C(\overline{\Omega})$. Para $\sigma < 2^* - 1$, é de modo direto. Ver [4]. Para $\sigma = 2^* - 1$, ver [7].

É verdade que u é solução de $-\Delta u = f_\Lambda(x,u)$ em Ω e $u \geq 0$ em Ω e $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, e também temos que $I_\Lambda(u) \leq 0$.

Somente resta-nos mostrar que u não é identicamente nula.

Afirmação 2.2. *u não é identicamente nula.*

Suponha por contradição que $u \equiv 0$.

Utilizaremos a hipótese (H_{Ω_1}) para $\lambda = \lambda_1$, o primeiro elemento da sequência crescente λ_k. Considere $(u_k) \subset H$ tal que $u_k \to 0$.

Seja como antes, Ω_1 o subdomínio correspondente e $\varphi_1 > 0$ a autonfunção associada ao primeiro autovalor $\lambda_1(\Omega_1)$ de $-\Delta$ sobre $H_0^1(\Omega_1)$. Temos

$$\int_\Omega \nabla u_k \nabla \varphi_1 \, dx = \int_{\Omega_1} f_{\lambda_k}(x,u_k)\varphi_1 \, dx \geq \int_{\Omega_1} f_{\lambda_1}(x,u_k)\varphi_1 \, dx \geq \theta_1 \int_{\Omega_1} u_k \varphi_1 \, dx, \tag{2.13}$$

para k suficientemente grande (assim $0 \leq u_k \leq s_1$ para $x \in \Omega_1$, o que é possível desde que $u_k \to 0$ uniformemente em $\overline{\Omega}$). Por outro lado,

$$\int_{\Omega_1} \nabla u_k \nabla \varphi_1 \, dx = \int_{\partial\Omega_1} u_k \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} \, dx + \int_{\Omega_1} u_k(-\Delta\varphi_1) \, dx \leq \lambda_1(\Omega_1) \int_{\Omega_1} u_k \varphi_1 \, dx \tag{2.14}$$

assim, como $\displaystyle\int_{\Omega_1} u_k \varphi_1 \, dx > 0$ e de (2.13) combinado com (2.14) segue que $\theta_1 \leq \lambda_1(\Omega_1)$. O que é uma contradição, pois $\theta_1 > \lambda_1(\Omega_1)$. Isto completa a prova do Teorema (2.3). □

2.4 Existência de uma segunda solução no caso subcrítico

Nesta seção mostraremos o Teorema 2.4.

Demonstração. Deve-se mostrar a existência de uma segunda solução de $(\tilde{P}_\lambda)$ para cada $0 < \lambda < \Lambda$. Fixe λ, introduzimos $\underline{u}, \bar{u}$ e considerando a solução u_0 de $(\tilde{P}_\lambda)$ construída no Teorema (2.1).

Afirmação 2.3. *As seguintes desigualdades são verdadeiras*

$$\begin{gathered} \underline{u} < u_0 < \bar{u}, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial \underline{u}}{\partial \nu} > \frac{\partial u_0}{\partial \nu} > \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}, \quad x \in \partial\Omega, \end{gathered} \tag{2.15}$$

onde $\underline{u} := \varepsilon\varphi_1$, com φ_1 primeira autofunção de $(-\Delta)$ em $H_0^1(\Omega_1)$.

De fato, seja $\varphi_1 > 0$ a autonfunção associada ao primeiro autovalor $\lambda_1(\Omega_1)$ do problema

$$(PA) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega_1, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega_1, \end{cases}$$

onde Ω_1 é um subdomínio dado pela hipótese (H_{Ω_1}) e como $\underline{u} = \varepsilon\varphi_1$ é subsolução, temos que

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} \leq f_\lambda(x, \underline{u}), & x \in \Omega_1, \\ \quad \underline{u} \leq 0, & x \in \partial\Omega_1. \end{cases}$$

Por outro lado, como u_0 é solução de $(\tilde{P}_\lambda)$ temos que

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = f_\lambda(x, u_0), & x \in \Omega, \\ \quad u_0 = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Pela regularidade de φ_1 permite estender $\underline{u}$ para todo Ω fazendo

$$\underline{u}(x) = \begin{cases} \varepsilon\varphi_1(x), & x \in \Omega_1, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_1, \end{cases}$$

assim temos que

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} \leq f_\lambda(x, \underline{u}), & x \in \Omega, \\ \quad \underline{u} \leq 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

É claro que

$$\begin{aligned} \underline{u} < u_0 < \bar{u}, \quad & x \in \Omega \setminus \Omega_1, \\ \frac{\partial \underline{u}}{\partial \nu} > \frac{\partial u_0}{\partial \nu} > \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}, \quad & x \in \partial\Omega \setminus \partial\Omega_1. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Por outro lado, $\underline{u} \not\equiv u_0$ em Ω_1, mais ainda usando a hipótese $(H_0)'$ obtemos que para um B adequado

$$\begin{cases} -\Delta(u_0 - \underline{u}) \geq f_\lambda(x, u_0) - f_\lambda(x, \underline{u}) \geq -B(u_0 - \underline{u}), & x \in \Omega_1, \\ \quad (u_0 - \underline{u}) \geq 0, & x \in \partial\Omega_1, \end{cases}$$

assim pelo Princípio do Máximo Forte, temos

$$\begin{cases} \quad u_0 - \underline{u} > 0, & x \in \Omega_1, \\ \dfrac{\partial(u_0 - \underline{u})}{\partial \nu} < 0, & x \in \partial\Omega_1. \end{cases} \tag{2.17}$$

Mostraremos agora que $u_0 < \bar{u}$ em Ω_1 e que $\dfrac{\partial u_0}{\partial \nu} > \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}$ sobre $\partial\Omega_1$.

Como $\bar{u}$ é supersolução de $(\tilde{P}_\lambda)$, pela definição de Λ, existe $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{u}$ é solução de $(\tilde{P}_\lambda)$ assim

$$-\Delta \bar{u} = f_{\bar{\lambda}}(x, \bar{u}),$$

e como $\Omega_1 \subset \Omega$ é um subdomínio, teríamos que

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u} \geq f_\lambda(x, \bar{u}), & x \in \Omega_1, \\ \quad \bar{u} \geq 0, & x \in \partial\Omega_1, \end{cases}$$

assim, utilizando a hipótese (M), temos

$$\begin{cases} -\Delta(\bar{u}-u_0) = -\Delta\bar{u} - (-\Delta u_0) = f_{\bar{\lambda}}(x,\bar{u}) - f_\lambda(x,u_0) \geq 0, & x \in \Omega_1, \\ (\bar{u}-u_0) \geq 0, & x \in \partial\Omega_1, \end{cases}$$

logo pelo Princípio do Máximo forte, temos que

$$\begin{cases} \overline{u} - u_0 > 0, & x \in \Omega_1, \\ \dfrac{\partial(\bar{u}-u_0)}{\partial\nu} < 0, & x \in \partial\Omega_1. \end{cases} \tag{2.18}$$

De (2.16), (2.17) e (2.18) a afirmação segue.

Afirmação 2.4. *u_0 é mínimo local de I_λ sobre H.*

De fato, de (2.15) temos que $\{u \in H \,:\, \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\}$ contém uma vizinhança de u_0 em $C_0^1(\overline{\Omega})$. Mas por (2.6) temos que

$$I_\lambda(u_0) = \min\{I_\lambda(u) \,:\, u \in H,\, \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\}$$

logo u_0 é mínimo local de I_λ sobre $C_0^1(\Omega)$. Mas como $\sigma < 2^* - 1$ (caso subcrítico) e pelo Teorema A.12, temos que u_0 é também um mínimo local de I_λ sobre H. (Maiores detalhes ver Lema 1.7.)

A segunda solução será construída na forma $u_0 + w$, onde u_0 é a primeira solução e w satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta w = g_\lambda(x,w), & x \in \Omega, \\ w \not\equiv 0, & x \in \Omega, \\ w = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.19}$$

onde $g_\lambda(x,s) := f_\lambda(x, u_0 + s^+) - f_\lambda(x,u_0)$. Esta ferramenta, já foi considerada anteriormente com $a(x) \equiv b(x) \equiv 1$.

Afirmação 2.5. *A solução w de* (2.19) *é não negativa.*

Suponha por contradição que $w < 0$. Agora multiplique (2.19) por $(-w^-)$. Assim temos que

$$-\Delta w(-w^-) = -g_\lambda(x,w)w^-,$$

logo integrando sobre Ω e aplicando uma das identidades do Green, temos que

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \nabla w(\nabla w^-)\,dx &= -\int_\Omega g_\lambda(x,w)w^-\,dx \\ \int_\Omega |\nabla w^-|^2\,dx &= -\int_\Omega g_\lambda(x,w)w^-\,dx \\ \| w^- \|^2 &= -\int_\Omega \big[f_\lambda(x,u_0+w^+) - f_\lambda(x,u_0)\big]\,w^-\,dx. \end{aligned}$$

Como f_λ satisfaz $(H_0)'$, segue que

$$\big[f_\lambda(x,u_0+w^+) - f_\lambda(x,u_0)\big] \geq 0,$$

agora note que, como $w < 0$ segue que $w^- = -w$ e assim $-w^- = w < 0$. então temos que

$$\| w^- \|^2 = -\int_\Omega \left[f_\lambda(x, u_0 + w^+) - f_\lambda(x, u_0)\right] w^- \, dx < 0.$$

O que é uma contradição. Concluindo assim a afirmação.

Agora, consideramos

$$\begin{cases} -\Delta w = g_\lambda(x, w), & x \in \Omega, \\ w \geq 0, & x \in \Omega, \\ w = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.20}$$

mas como $g_\lambda(x, s) = f_\lambda(x, u_0 + s^+) - f_\lambda(x, u_0) \geq 0$ segue que

$$\begin{cases} -\Delta w \geq 0, & x \in \Omega, \\ w = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo pelo Princípio do Máximo e a hipótese $(H_0)'$ temos que w satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta w > 0, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu} < 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde ν é o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$.

Assim, $u_0 + w$ será a segunda solução de $(\tilde{P}_\lambda)$ a qual satisfaz as hipóteses do Teorema 2.4. Escrevendo

$$G_\lambda(x, s) := \int_0^s g_\lambda(x, t) \, dt$$

e

$$J_\lambda(w) := \frac{1}{2} \int_\Omega |w|^2 - \int_\Omega G_\lambda(x, w) \, dx.$$

Assim, devemos procurar um ponto crítico não negativo de J_λ sobre H. Concluindo assim a afirmação.

Afirmação 2.6. $J_\lambda(w) = I_\lambda(u_0 + w^+) - I_\lambda(u_0) + \frac{1}{2} \| w^- \|^2$.

De fato,

$$\begin{aligned} G_\lambda(x, s^+) - F_\lambda(x, u_0 + s^+) &= \int_0^{s^+} g_\lambda(x, t) \, dt - \int_0^{u_0 + s^+} f_\lambda(x, t) \, dt \\ &= \int_0^{s^+} \left[f_\lambda(x, u_0 + t) - f_\lambda(x, u_0)\right] dt - \int_0^{u_0 + s^+} f_\lambda(x, t) \, dt \\ &= F_\lambda(x, u_0 + s^+) - F_\lambda(x, u_0) - f_\lambda(x, u_0) s^+ - F_\lambda(x, u_0 + s^+) - F_\lambda(x, 0) \\ &= -F_\lambda(x, u_0) - f_\lambda(x, u_0) s^+. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} J_\lambda(w) &= \frac{1}{2} \| w^+ \|^2 + \frac{1}{2} \| w^- \|^2 - \int_\Omega G_\lambda(x, w^+) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \| w^+ \|^2 + \frac{1}{2} \| w^- \|^2 - \int_\Omega F_\lambda(x, u_0 + w^+) \, dx + \int_\Omega F_\lambda(x, u_0) \, dx + \int_\Omega f_\lambda(x, u_0) w^+ \, dx. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(u_0+w^+) &= \frac{1}{2}\parallel u_0+w^+\parallel^2 - \int_\Omega F_\lambda(x,u_0+w^+)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u_0+w^+)|^2\,dx - \int_\Omega F_\lambda(x,u_0+w^+)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |\nabla u_0|^2 + |\nabla w^+|^2 + 2\nabla u_0\nabla w^+\,dx\right] - \int_\Omega F_\lambda(x,u_0+w^+)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |w^+|^2\,dx + \int_\Omega \nabla u_0\nabla w^+\,dx - \int_\Omega F_\lambda(x,u_0+w^+)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\parallel u_0\parallel^2 + \frac{1}{2}\parallel w^+\parallel^2 + \left[\int_\Omega \frac{\partial u_0}{\partial \nu}w^+\,dS - \int_\Omega \Delta u_0 w^+\,dx\right] - \int_\Omega F_\lambda(x,u_0+w^+)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\parallel u_0\parallel^2 + \frac{1}{2}\parallel w^+\parallel^2 + \int_\Omega (-\Delta u_0)w^+\,dx - \int_\Omega F_\lambda(x,u_0+w^+)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\parallel u_0\parallel^2 + \frac{1}{2}\parallel w^+\parallel^2 + \int_\Omega f_\lambda(x,u_0)w^+\,dx - \int_\Omega F_\lambda(x,u_0+w^+)\,dx.
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

Agora, como

$$
J_\lambda(w) = \frac{1}{2}\parallel w^+\parallel^2 + \frac{1}{2}\parallel w^-\parallel^2 - \int_\Omega F_\lambda(x,u_0+w^+)\,dx + \int_\Omega F_\lambda(x,u_0)\,dx + \int_\Omega f_\lambda(x,u_0)w^+\,dx \tag{2.22}
$$

substituindo a expressão $-\int_\Omega F_\lambda(x,u_0+w^+)\,dx$ de (2.21) em (2.22), temos que

$$
\begin{aligned}
J_\lambda(w) &= \frac{1}{2}\parallel w^+\parallel^2 + \frac{1}{2}\parallel w^-\parallel^2 + \left[I_\lambda(u_0+w^+) - \frac{1}{2}\parallel u_0\parallel^2 - \frac{1}{2}\parallel w^+\parallel^2 - \int_\Omega f_\lambda(x,u_0)w^+\,dx\right] \\
&+ \int_\Omega F_\lambda(x,u_0)\,dx + \int_\Omega f_\lambda(x,u_0)w^+\,dx \\
&= \frac{1}{2}\parallel w^-\parallel^2 + I_\lambda(u_0+w^+) - \frac{1}{2}\parallel u_0\parallel^2 + \int_\Omega F_\lambda(x,u_0)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\parallel w^-\parallel^2 + I_\lambda(u_0+w^+) - \left[\frac{1}{2}\parallel u_0\parallel^2 - \int_\Omega F_\lambda(x,u_0)\,dx\right] \\
&= I_\lambda(u_0+w^+) - I_\lambda(u_0) + \frac{1}{2}\parallel w^-\parallel^2 .
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
J_\lambda(w) = I_\lambda(u_0+w^+) - I_\lambda(u_0) + \frac{1}{2}\parallel w^-\parallel^2 . \tag{2.23}
$$

Concluindo assim a afirmação.

Afirmação 2.7. *$w=0$ é um mínimo local de J_λ sobre H.*

De fato, é suficiente mostrar que $w=0$ é um mínimo local de J_λ na topologia C^1. Por (2.23) temos que

$$
J_\lambda(w) = I_\lambda(u_0+w^+) - I_\lambda(u_0) + \frac{1}{2}\parallel w^-\parallel^2,
$$

logo $J_\lambda(w) \geq 0$, pois pela afirmação (2.4) temos que u_0 é um mínimo local de I_λ, daí existe $r>0$ tal que

$$
I_\lambda(u_0+w^+) - I_\lambda(u_0) \geq 0, \ \text{ para } \parallel w^+\parallel_{C^1} \leq r.
$$

Assim, $w = 0$ é um mínimo local na topologia C^1. Logo $J_\lambda(0) \leq J_\lambda(w)$, para todo $w \in B(0,r)$ em H. Concluindo assim a afirmação.

Afirmação 2.8. *Supondo a hipótese (G) com $\sigma < 2^* - 1$ e $(AR)_d$ temos que I_λ satisfaz a condição (PS) sobre H.*

De fato, primeiramente pela hipótese (H_0), f é estendida sobre todo $\Omega\times\mathbb{R}$, escrevendo agora $f_\lambda(x,s) = f_\lambda(x,0)$ em quase todo ponto de Ω e todo $s < 0$. Assim, é claro que (G) implica que I_λ é um funcional C^1 sobre H.

Seja $(u_n) \subset H$ uma sequência (PS), isto é, $I_\lambda(u_n) \to c$ e $I'_\lambda(u_n) \to 0$.

Assim, para θ como na condição $(AR)_d$, existe uma constante $C_1 > 0$ e uma sequência $\varepsilon_n \to 0$ tais que

$$\theta I_\lambda(u_n) - I'_\lambda(u_n)u_n \leq C_1 + \varepsilon_n \parallel u_n \parallel .$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \theta I_\lambda(u_n) - I'_\lambda(u_n)u_n &= \frac{\theta}{2} \parallel u_n \parallel^2 - \theta \int_\Omega F_\lambda(x,u_n)\,dx - \parallel u_n \parallel^2 + \int_\Omega f_\lambda(x,u_n)u_n\,dx \\ &= \left(\frac{\theta}{2} - 1\right) \parallel u_n \parallel^2 - \int_\Omega \left(\theta F_\lambda(x,u_n) - u_n f_\lambda(x,u_n)\right)\,dx \\ &\leq C_1 + \varepsilon_n \parallel u_n \parallel \end{aligned} \tag{2.24}$$

onde a última integral pode escrever-se como

$$\int_\Omega \left(\theta F_\lambda(x,u_n) - u_n f_\lambda(x,u_n)\right)\,dx = \int_{\Omega_{1_n}\cup\Omega_{2_n}\cup\Omega_{3_n}} \left(\theta F_\lambda(x,u_n) - u_n f_\lambda(x,u_n)\right)\,dx$$

onde estamos denotando

$$\begin{aligned} \Omega_{1_n} &= \{x \in \Omega \,:\, u_n(x) < 0\}\,, \\ \Omega_{2_n} &= \{x \in \Omega \,:\, 0 \leq u_n(x) \leq s_0\}\,, \\ \Omega_{3_n} &= \{x \in \Omega \,:\, u_n(x) > s_0\}\,. \end{aligned}$$

Observe agora que,

$$\int_{\Omega_{1_n}} \left(\theta F_\lambda(x,u_n) - u_n f_\lambda(x,u_n)\right)\,dx = 0,$$

pois $f_\lambda(x,s) = F_\lambda(x,s) = 0$, quando $s < 0$.

Agora, por a hipótese (G) existem $1 \leq \sigma < 2^* - 1$, $d_1, d_2 > 0$ tais que

$$|f_{\lambda(x,s)}| \leq d_1 + d_2 s^\sigma$$

em quase todo ponto de Ω e para todo $s \geq 0$. Integrando de 0 a s temos que

$$|F_\lambda(x,s)| \leq d_1 s + d_3|s|^{\sigma+1},$$

logo

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{2_n}} (\theta F_\lambda(x,u_n) - u_n f_\lambda(x,u_n))\, dx &\leq \int_{\Omega_{2_n}} |F_\lambda(x,u_n)|\, dx + \int_{\Omega_{2_n}} |u_n f_\lambda(x,u_n)| dx \\ &\leq \theta \int_{\Omega_{2_n}} (u_n d_1 + d_3|u_n|^{\sigma+1})\, dx + \int_{\Omega_{2_n}} (|u_n d_1 + d_2|u_n|^{\sigma+1})\, dx \\ &\leq \theta s_0 d_1 \int_\Omega dx + \theta s_0^{\sigma+1} d_3 \int_\Omega dx + s_0 d_1 \int_\Omega dx + d_3 s_0^{\sigma+1} \int_\Omega dx \\ &\leq C_2,\end{aligned}$$

onde C_2 é uma constante positiva.

Considerando agora a hipótese $(AR)_d$, e a desigualdade de Hölder segue que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{3_n}} (\theta F_\lambda(x,u_n) - u_n f_\lambda(x,u_n))\, dx &\leq d \int_{\Omega_{3_n}} u_n^\rho\, dx \leq d \int_\Omega (u_n^+)^\rho\, dx \\ &\leq d \left(\int_\Omega 1^{\left(\frac{2^*}{\rho}\right)'}\, dx \right)^{\frac{1}{(2^*/\rho)'}} \left(\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}\, dx \right)^{(\rho/2^*)} \\ &= C_3 \parallel u_n^+ \parallel_{2^*}^\rho \leq C_4 \parallel u_n^+ \parallel^\rho .\end{aligned} \tag{2.25}$$

Sendo que nesta última desigualdade, utilizamos a imersão de Sobolev $H \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$. Logo, por (2.24) e (2.25) temos que

$$\left(\frac{\theta}{2} - 1\right) \parallel u_n \parallel^2 \leq C_2 + C_4 \parallel u_n^+ \parallel^\rho + \varepsilon_n \parallel u_n \parallel$$

como $\rho < 2$, concluímos que (u_n) é limitada em H.

Observemos agora que

$$I'(u) = u - L'(u) \quad \text{ em } H',$$

onde

$$\begin{aligned} L : H &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto L(u) = \int_\Omega F_\lambda(x,u)\, dx \end{aligned}$$

e

$$L'(u)v = \int_\Omega f_\lambda(x,u) v\, dx$$

para $u, v \in H$. Mas pela Proposição A.2, temos que $L' : H \to H'$ é compacto. Logo, como (u_n) é limitada, existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que

$$L'(u_{n_j}) \to v \text{ em } H,$$

com isso,

$$u_{n_j} = I'(u_{n_j}) + L'(u_{n_j}) \to v$$

isto é, (u_n) possui subsequência convergente. Assim, I_λ satisfaz a condição (PS), e concluímos a afirmação.

Agora, olharemos para uma relação em que 0 é um minimizador de J_λ. Assim, ou existe $w \in B(0,r)$ com $w \neq 0$ e $J_\lambda(w) = 0$, ou $J_\lambda(0) < J_\lambda(w)$ para todo $w \in B(0,r)$ com $w \neq 0$.

No primeiro caso, w é um mínimo local não-nulo de J_λ e assim um ponto crítico de J_λ. Logo a prova está concluída.

No segundo caso, o Teorema 5.10 de [11] garante que para cada $r > 0$ suficientemente pequeno

$$J_\lambda(0) < \inf\{J_\lambda(w) : w \in H \text{ e } \| w \| = r\}. \tag{2.26}$$

Nosso objetivo é aplicar o Teorema do Passo da Montanha.

Afirmação 2.9. *Existe alguma função $u_2 \in H$ tal que $J_\lambda(tu_2) \to -\infty$ quando $t \to \infty$.*

De fato, pela hipótese (H_{Ω_2}) temos que, para todo $\lambda > 0$, existe Ω_2, s_2 e $\theta_2 > 0$ tal que

$$F_\lambda(x,s) \geq \theta_2 s^2$$

em quase todo ponto de Ω_2 e $s \geq s_2$.

E pela hipótese $(AR)_d$, existe $\theta > 2$, $\rho < 2, d \geq 0$ e $s_0 \geq 0$ tal que

$$\theta F_\lambda(x,s) \leq s f_\lambda(x,s) + ds^\rho.$$

Tome $s_3 = \max\{s_0, s_2\}$. Assim, temos que a hipótese $(AR)_d$ é

$$\theta F_\lambda(x,s) \leq s f_\lambda(x,s) + ds^\rho \tag{2.27}$$

em quase todo ponto de Ω_2 e para todo $s \geq s_3$. Dividindo a expressão (2.27) por $sF_\lambda(x,s) \neq 0$ temos que

$$\frac{\theta F_\lambda(x,s)}{sF_\lambda(x,s)} \leq \frac{sf_\lambda(x,s)}{sF_\lambda(x,s)} + \frac{ds^\rho}{sF_\lambda(x,s)}$$

o que implica que

$$\frac{\theta}{s} \leq \frac{f_\lambda(x,s)}{F_\lambda(x,s)} + \frac{ds^{\rho-1}}{F_\lambda(x,s)}. \tag{2.28}$$

Integrando (2.28) de s_3 a s, utilizando a hipótese (H_{Ω_2}) e lembrando que $\rho < 2$ temos

$$\begin{aligned}
\int_{s_3}^{s} \frac{\theta}{t}\, dt &\leq \int_{s_3}^{s} \frac{f_\lambda(x,t)}{F_\lambda(x,t)}\, dt + d\int_{s_3}^{s} \frac{t^{\rho-1}}{F_\lambda(x,t)}\, dt \\
\ln\left(\frac{s}{s_3}\right)^\theta &\leq \ln\left(\frac{F_\lambda(x,s)}{F_\lambda(x,s_3)}\right) + d\int_{s_3}^{s} \frac{t^{\rho-1}}{\theta_2 t^2}\, dt \\
&\leq \ln\left(\frac{F_\lambda(x,s)}{F_\lambda(x,s_3)}\right) + \frac{d}{\theta_2}\int_{s_3}^{\infty} t^{\rho-3}\, dt \\
&\leq \ln\left(\frac{F_\lambda(x,s)}{F_\lambda(x,s_3)}\right) - \frac{ds_3^{\rho-2}}{\theta_2(\rho-2)},
\end{aligned}$$

logo

$$-\frac{ds_3^{\rho-2}}{\theta_2(\rho-2)} \geq \ln\left[\left(\frac{s}{s_3}\right)^\theta\right] - \ln\left[\frac{F_\lambda(x,s)}{F_\lambda(x,s_3)}\right] = \ln\left[\frac{s^\theta F_\lambda(x,s_3)}{s_3^\theta F_\lambda(x,s)}\right].$$

Aplicando a função exponencial na expressão anterior, temos que

$$F_\lambda(x,s) \geq F_\lambda(x,s_3)\left(\frac{s}{s_3}\right)^\theta \exp\left(\frac{ds_3^{\rho-2}}{\theta_2(\rho-2)}\right) = C_1 s^\theta \tag{2.29}$$

em quase todo ponto de Ω_2, para todo $s \geq s_3, \theta > 2$ pela hipótese $(AR)_d$ e onde C_1 é uma constante positiva.

Analogamente, obtemos para G_λ que para algum s_3' e $C' > 0$,

$$G_\lambda(x,s) \geq C's^\theta,$$

em quase todo ponto de Ω_2, e todo $s \geq s_3'$. Assim, tomamos uma função suave u_2 com suporte em Ω_2 e $u_2 \geq 0$, $u_2 \not\equiv 0$, $F_\lambda(x,0) = 0$, e consideramos tu_2 onde t é suficientemente grande. Logo

$$\begin{aligned}
J_\lambda(tu_2) &= \frac{t^2}{2} \parallel u_2 \parallel^2 - \int_\Omega G_\lambda(x,tu_2)\,dx \\
&= \frac{t^2}{2} \parallel u_2 \parallel^2 - \int_{\Omega_2} G_\lambda(x,tu_2)\,dx \\
&\leq \frac{t^2}{2} \parallel u_2 \parallel^2 - \int_{\Omega_2} C'(tu_2)^\theta dx \\
&\leq \frac{t^2}{2} \parallel u_2 \parallel^2 - C_1 t^\theta \int_{\Omega_2} (u_2)^\theta\,dx \\
&= \frac{t^2}{2} \parallel u_2 \parallel^2 - C_4 t^\theta
\end{aligned}$$

onde C_4 é uma constante positiva. Como $\theta > 2$, implica que na expressão anterior $J_\lambda(tu_2) \to -\infty$ quando $t \to \infty$. Concluindo assim a afirmação.

Da afirmação anterior, pode-se aplicar o Teorema do Passo da Montanha a J_λ, assim existe w um ponto crítico de J_λ com $J_\lambda(w) = c$ e $J_\lambda'(w) = 0$. Isto completa a prova do Teorema 2.4. $\square$

2.5 Existência de uma segunda solução no caso crítico com $\sigma < 1$

Nesta seção mostraremos o Teorema 2.5.

Demonstração. Fixe λ com $0 < \lambda < \Lambda$. Procederemos como no começo da prova do Teorema (2.4), considerando u_0 o mínimo local de I_λ sobre H e só deve-se mostrar a existência de uma solução de (2.19), onde $g_\lambda(x,s)$ agora é da forma

$$g_\lambda(x,s) := h_\lambda(x,u_0+s^+) - h_\lambda(x,u_0) + b(x)\left[(u_0+s^+)^p - u_0^p\right],$$

lembrando que $f_\lambda(x,s) = h_\lambda(x,s) + b(x)s^p$. O funcional associado J_λ fica

$$J_\lambda(w) = \frac{1}{2} \parallel w \parallel^2 - \int_\Omega G_\lambda(x,w)\,dx,$$

onde agora

$$G_\lambda(x,s) := H_\lambda(x,u_0+s^+) - H_\lambda(x,u_0) - h_\lambda(x,u_0)s^+ + b(x)\left[\frac{(u_0+s^+)^{p+1} - u_0^{p+1}}{p+1} - u_0^p s^+\right]$$

onde

$$H_\lambda(x,s) := \int_0^s h_\lambda(x,t)\,dt.$$

Como antes provamos que, 0 é um mínimo local de J_λ em H. Assim, só deve-se mostrar a existência de um ponto crítico não trivial de J_λ.

Suponha por contradição que 0 é o único ponto crítico de J_λ. Logo, para alguma bola $B(0,r)$ em H,

$$J_\lambda(0) \leq J_\lambda(w) \tag{2.30}$$

para todo $w \in B(0,r)$. Utilizando o Lema $A.7$ e o Teorema 5.10 de [11] garante que para cada $r > 0$ suficientemente pequeno, temos que

$$0 = J_\lambda(0) < \inf \{J_\lambda(w) \, : \, , w \in H, \parallel w \parallel = r\} .$$

Nosso objetivo é aplicar o Teorema do Passo da Montanha. Para isso, mostraremos a existência de $u_1 \neq 0$, $u_1 \in H$ tal que

$$J_\lambda(u_1) < 0 \quad \text{e} \quad \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_\lambda(\gamma(t)) < c_0,$$

onde $c_0 = \dfrac{S^{N/2}}{N \parallel b \parallel_\infty^{(N-2)/2}}$. Uma vez feito isso, asseguraremos a existência de um ponto crítico não trivial para J_λ, o que é uma contradição e a prova do Teorema (2.5) será concluída.

Para construir u_1, considere as funções da forma $t\psi_\mu$ com $t > 0$ e

$$\psi_\mu(x) := d\xi(x) \left(\frac{\mu}{\mu^2 + |x - x_0|} \right)^{(N-2)/2}$$

onde $\mu > 0$, x_0 é da hipótese (b), ξ é uma função suave não-negativa fixa, com $\xi \equiv 1$ perto de x_0 e com suporte em uma bola B_2 de centro x_0 (onde B_2 é escolhida tal que $\overline{B}_2 \subset B_1$ e $b(x) \geq \varepsilon$ em quase todo ponto de B_2, para algum $\varepsilon > 0$) e a constante normalizadora $d > 0$ é tomada tal que ψ_1 satisfaz $-\Delta\psi_1 = \psi_1^{(N+2)/(N-2)}$ perto de x_0.

Afirmação 2.10. *Para cada $\mu > 0$, $J_\lambda(t\psi_\mu) \to -\infty$, $t \to +\infty$.*

Lembre-se que $p = 2^* - 1$, assim

$$\begin{aligned}
J_\lambda(t\psi_\mu) &= \frac{t^2}{2} \parallel \psi_\mu \parallel^2 - \int_\Omega G_\lambda(x, t\psi_\mu)\, dx \\
&= \frac{t^2}{2} \parallel \psi_\mu \parallel^2 - \int_\Omega H_\lambda(x, t\psi_{mu} + u_0) - H_\lambda(x, u_0) + b(x) \left[\frac{(u_0 + t\psi_\mu)^{p+1} - u_0^{p+1}}{p+1} - u_0^p t\psi_\mu \right] dx \\
&\leq \frac{t^2}{2} \parallel \psi_\mu \parallel^2 - \int_\Omega H_\lambda(x, t\psi_{mu} + u_0) - H_\lambda(x, u_0) - \int_\Omega b(x) \left[\frac{(t\psi_\mu)^{p+1}}{p+1} + u_0^{p-1} \frac{(t\psi_\mu)^2}{2} \right] dx.
\end{aligned}$$

Agora, considerando que h_λ satisfaz a hipótese (G) e que $b \in L^\infty(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned}
J_\lambda(t\psi_\mu) &\leq \frac{t^2}{2} \parallel \psi_\mu \parallel^2 - \int_\Omega \left[\int_0^{t\psi_\mu + u_0} h_\lambda(x,s)\, ds - \int_0^{u_0} h_\lambda(x,s)\, ds \right] dx \\
&- \int_\Omega b(x) \frac{t^{p+1}}{p+1} \psi_\mu^{p+1}\, dx - \frac{t^2}{2} \int_\Omega b(x)(\psi_\mu)^2\, dx \\
&= \frac{t^2}{2} \parallel \psi_\mu \parallel^2 - \int_\Omega \int_{u_0}^{t\psi_\mu + u_0} h_\lambda(x,s)\, ds\, dx \\
&- \parallel b \parallel_\infty \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_\Omega \psi_\mu^{p+1}\, dx - \parallel b \parallel_\infty \frac{t^2}{2} \int_\Omega \psi_\mu^2\, dx \\
&\leq \frac{t^2}{2} \parallel \psi_\mu \parallel^2 - \int_\Omega \int_{u_0}^{t\psi_\mu + u_0} (d_1 + d_2 s^\sigma)\, ds\, dx \\
&- \parallel b \parallel_\infty \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_\Omega \psi_\mu^{p+1}\, dx - \parallel b \parallel_\infty \frac{t^2}{2} \int_\Omega \psi_\mu^2\, dx \\
&\leq \frac{t^2}{2} \parallel \psi_\mu \parallel^2 - C - \parallel b \parallel_\infty \frac{t^{2^*}}{2^*} \int_\Omega \psi_\mu^{2^*}\, dx - \parallel b \parallel_\infty \frac{t^2}{2} \int_\Omega \psi_\mu^2\, dx,
\end{aligned}$$

como $2^* > 2$, para todo $N \geq 3$ segue que $J_\lambda(t\psi_\mu) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$, assim existe $t = t_\mu > 0$ tal que $J_\lambda(t_\mu \psi_\mu) < 0$. Pelo Lema $(A.7)$ temos que para μ suficientemente pequeno,

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_\lambda(\gamma(t)) < c_0 = \frac{S^{N/2}}{N \parallel b \parallel_\infty^{(N-2)/2}},$$

onde $\Gamma = \left\{ \gamma \in C([0,1], H_0^1)),\ \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = u_1 = t_\mu \psi_\mu \right\}$, assim, J_λ tem um ponto crítico não trivial, o que é uma contradição.

Portanto, o Problema $(\tilde{P}_\lambda)$ tem ao menos duas soluções no caso crítico com $\sigma < 1$. Isto completa a prova do Teorema 2.5. □

2.6 Existência de uma segunda solução para o caso crítico com $\sigma < 2^* - 1$

Nesta seção mostraremos o Teorema 2.6.

Demonstração. O argumento para mostrar que qualquer (w_n) satisfazendo que $J_\lambda(w_n) \to c$ e $J'_\lambda(w_n) \to 0$ é limitada, é a seguinte.

Note que em nossa situação, $H_\lambda(x,s) \geq 0$ e assim θ da condição $(AR)_d$ para h_λ pode ser escolhido tal que $2 < \theta < p+1$. Logo estimaremos

$$\Phi(w_n) := J_\lambda(w_n) - \frac{1}{\theta} J'_\lambda(w_n)(u_0 + w_n).$$

Como $J_\lambda(w_n) \to c$, logo $|J_\lambda(w_n)| \leq c$ e como $J'_\lambda(w_n) \to 0$, temos que $|J'_\lambda(w_n)\varphi| \leq \varepsilon_n \parallel \varphi \parallel$, onde $\varepsilon_n \to 0$. Assim,

$$\Phi(w_n) \leq c + \frac{\varepsilon_n}{\theta} \parallel u_0 + w_n \parallel . \tag{2.31}$$

Por outro lado, estendendo $\Phi(w_n)$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\Phi(w_n) &= J_\lambda(w_n) - \frac{1}{\theta} J'_\lambda(w_n)(u_0 + w_n) \\
&= \frac{1}{2} \parallel w_n \parallel^2 - \int_\Omega G_\lambda(x, w_n) dx - \frac{1}{\theta}\left[\int_\Omega |\nabla w_n||\nabla(u_0 + w_n)|\, dx - \int_\Omega g_\lambda(x, w_n)(u_0 + w_n)\, dx\right] \\
&= \frac{1}{2} \parallel w_n \parallel^2 - \int_\Omega H_\lambda(x, u_0 + w_n^+)\, dx - H_\lambda(x, u_0) - h_\lambda(x, u_0) w_n^+\, dx \\
&\quad + b(x)\left[\frac{(u_0 + w_n^+)^{p+1} - u_0^{p+1}}{p+1} - u_0^p w_n^+\right] - \frac{1}{\theta}\left[\int_\Omega |\nabla w_n||\nabla u_0|\, dx + \int_\Omega |\nabla w_n|^2\, dx\right. \\
&\quad \left. - \int_\Omega \left(h_\lambda(x, u_0 + w_n^+) - h_\lambda(x, u_0) + b(x)\left[(u_0 + w_n^+)^p - u_0^p\right]\right)(u_0 + w_n^+)\, dx\right] \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \parallel w_n \parallel^2 - \int_\Omega \left[H_\lambda(x, w_n^+ + u_0) - \frac{1}{\theta} h_\lambda(x, u_0 + w_n^+)(u_0 + w_n^+)\, dx\right] \\
&\quad - \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{\theta}\right)\int_\Omega b(x)(u_0 + w_n^+)^{p+1}\, dx + \int_\Omega \left[H_\lambda(x, u_0) + h_\lambda(x, u_0) w_n^+ + b(x)\frac{u_0^{p+1}}{p+1}\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\theta} h_\lambda(x, u_0)(u_0 + w_n^+) + b(x)\frac{u_0^{p+1}}{\theta}\right] dx.
\end{aligned}
$$

A última integral denotamos como $A_n := A(w_n)$, assim temos

$$
\begin{aligned}
\Phi(w_n) = &\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \parallel w_n \parallel^2 - \int_\Omega \left[H_\lambda(x, w_n^+ + u_0) - \frac{1}{\theta} h_\lambda(x, u_0 + w_n^+)(u_0 + w_n^+)\right] dx \\
&- \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{\theta}\right)\int_\Omega b(x)(u_0 + w_n^+)^{p+1}\, dx + A_n.
\end{aligned} \tag{2.32}
$$

Afirmação 2.11. *A_n é um termo de primeira ordem, isto é $\parallel A_n \parallel \leq C_1 + C_2 \parallel w_n \parallel$ para algumas constantes positivas C_1 e C_2.*

De fato, temos que

$$
A_n = \int_\Omega \left[H_\lambda(x, u_0) + h_\lambda(x, u_0) w_n^+ + b(x) u_0^{p+1}\left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{\theta}\right) + \frac{1}{\theta} h_\lambda(x, u_0)(u_0 + w_n^+)\right] dx.
$$

Como h_λ satisfaz $(AR)_d$ temos que

$$
\theta H_\lambda(x, u_0) \leq u_0 h_\lambda(x, u_0) + d u_0^\rho,
$$

onde $\rho < 2, \theta > 2$. assim,

$$
H_\lambda(x, u_0) \leq \frac{u_0}{\theta} h_\lambda(x, u_0) + \frac{d}{\theta} u_0^\rho,
$$

logo

$$
\begin{aligned}
|A_n| \leq \int_\Omega &\left[\frac{|u_0|}{\theta}|h_\lambda(x, u_0)| + \frac{d}{\theta}|u_0|^\rho + |h_\lambda(x, u_0)||w_n^+|\right. \\
&\left. + b(x)|u_0|^{p+1}\left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{\theta}\right) + \frac{1}{\theta}|h_\lambda(x, u_0)||u_0 + w_n^+|\right] dx,
\end{aligned}
$$

como $h_\lambda(x,s) = f_\lambda(x,s) - b(x)s^p$, e pela hipótese (H) segue que

$$|h_\lambda(x,s)| \leq |f_\lambda(x,s)| + |b(x)||s|^p \leq A + \parallel b \parallel_\infty |s|^p$$

e assim,

$$|H_\lambda(x,s)| = \Big| \int_0^s h_\lambda(x,t)\,dt \Big| \leq \int_0^s A + \parallel b \parallel_\infty t^p\,dt = As + \parallel b \parallel_\infty \frac{s^{p+1}}{p+1}.$$

Logo temos que

$$\begin{aligned} |A_n| \leq \int_\Omega \Bigg[& \frac{|u_0|}{\theta} A|u_0| + \parallel b \parallel_\infty \frac{|u_0|^{p+1}}{p+1} + \frac{d}{\theta}|u_0|^\rho + 1 \\ & + \left(A|u_0| + \parallel b \parallel_\infty \frac{|u_0|^{p+1}}{p+1} \right) |w_n| + b(x)|u_o|^{p+1} C \\ & + \frac{1}{\theta} \left(A|u_0| + \parallel b \parallel_\infty \frac{|u_0|^{p+1}}{p+1} \right) (|u_0| + |w_n|) \Bigg]\,dx. \end{aligned}$$

Então $\parallel A_n \parallel \leq C_1 + C_2 \parallel w_n \parallel$, para alguma constante C_1, C_2, sendo

$$\begin{aligned} C_1 = \int_\Omega \Bigg[& \frac{|u_0|^2}{\theta} A + \parallel b \parallel_\infty \frac{|u_0|^{p+1}}{p+1} + \frac{d}{\theta}|u_0|^\rho + 1 + b(x)|u_0|^{p+1} C \\ & + \frac{1}{\theta} \left(A|u_0| + \parallel b \parallel_\infty \frac{|u_0|^{p+1}}{p+1} \right) (|u_0|) \Bigg]\,dx \\ C_2 = \int_\Omega \Bigg[& A|u_0| + \parallel b \parallel_\infty \frac{|u_0|^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{\theta} \left(A|u_0| + \parallel b \parallel_\infty \frac{|u_0|^{p+1}}{p+1} \right) \Bigg]\,dx. \end{aligned}$$

Concluindo assim a afirmação.

Portanto de (2.31) e (2.32) temos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \parallel w_n \parallel^2 = & \int_\Omega \left[H_\lambda(x, u_0 + w_n^+) - \frac{1}{\theta} h_\lambda(x, u_0 + w_n^+)(u_0 + w_n^+) \right] dx \\ & + \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{\theta} \right) \int_\Omega b(x)(u_0 + w_n^+)^{p+1}\,dx + A_n', \end{aligned}$$

para um outro termo de primeira ordem A_n'.

Considerando a hipótese $(AR)_d$, $2 < \theta < p+1$ e $b(x) \geq 0$, temos que w_n é limitada. Logo, J_λ satisfaz (PS). Isto completa a prova do Teorema (2.6). □

2.7 Aplicações

Como aplicação dos resultados anteriores, consideraremos agora o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x) u^q + b(x) u^p, & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.33}$$

onde $0 \leq q < 1 < p$, e agora consideramos

$$f_\lambda(x,s) = \lambda a(x) s^q + b(x) s^p;$$

sendo assim que I_λ é da seguinte forma

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega a(x)(u^+)^{q+1}\,dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega b(x)(u^+)^{p+1}\,dx.$$

Teorema 2.7. *Seja $0 \leq q < 1 < p$ e suponha que $a, b \in L^\infty(\Omega)$ com*

(i) $a(x) \geq 0$ em quase todo ponto de Ω,

(ii) $a(x) \geq \varepsilon_1 > 0$ em quase todo ponto de alguma bola B_1.

Então existe $0 < \Lambda < \infty$ tal que o problema (2.33) tem ao menos uma solução u com $I_\lambda(u) < 0$ para $0 < \lambda < \Lambda$ e não tem solução para $\lambda > \Lambda$. Se além disso,

(iii) $b(x) \geq 0$ em quase todo ponto de alguma bola B_2 com $a(x), b(x) \not\equiv 0$ sobre B_2.

Então $\Lambda < \infty$. Mais ainda, se $p \leq 2^* - 1$ logo o problema (2.33) tem ao menos uma solução u com $I_\lambda(u) \leq 0$ para $\lambda = \Lambda$.

Demonstração. É suficiente verificar as hipóteses dos Teoremas (2.1); (2.2) e (2.3).

- **Verificando a hipótese** (H).
  De fato, como $a, b \in L^\infty(\Omega)$ segue que para qualquer $s_0 > 0$

$$\begin{aligned} |f_\lambda(x,s)| &= |\lambda a(x)s^q + b(x)s^p| \leq \| a \|_\infty \lambda s^q + \| b \|_\infty s^p \\ &\leq \| a \|_\infty \lambda s_0^q + \| b \|_\infty s_0^p = A, \end{aligned}$$

  em quase todo ponto de Ω e todo $s \in [0, s_0]$. Assim, existe uma constante A tal que satisfaz a hipótese (H).

- **Verificando a hipótese** (H_0).
  Para cada $\lambda > 0$ e cada $s_0 > 0$, temos que

$$f_\lambda(x,s) = \lambda a(x)s^q + b(x)s^p \geq b(x)s^p \geq -b(x)s.$$

  Por outro lado, existe $x \in \Omega$ fixado tal que $b(x) = \| b \|_\infty$, assim tomando $B = \| b \|_\infty > 0$, temos que a hipótese (H_0) é satisfeita.

- **Verificando a hipótese** (H_e).
  Tome $g(s) = \lambda \| a \|_\infty s^q + \| b \|_\infty s^p$ com λ suficientemente pequeno, assim
  Afirmação: g é não decrescente.
  De fato, seja $s_1 < s_2$, logo

$$\begin{aligned} g(s_1) &= \lambda \| a \|_\infty s_1^q + \| b \|_\infty s_1^p \\ &< \lambda \| a \|_\infty s_2^q + \| b \|_\infty s_2^p = g(s_2). \end{aligned}$$

  Concluindo a afirmação.

  Afirmação: $f_\lambda(x,s) \leq g(s)$.
  De fato,

$$\begin{aligned} f_\lambda(x,s) &= \lambda a(x)s^q + b(x)s^p \\ &\leq \lambda \| a \|_\infty s^q + \| b \|_\infty s^p = g(s), \end{aligned}$$

em quase todo ponto de Ω e todo $s \geq 0$. Concluindo afirmação.
Portanto, das afirmações anteriores temos que a hipótese (H_e) é satisfeita.

- **Verificando a hipótese** (H_{Ω_1}).
De fato, para toda $\lambda > 0$, por (ii) temos que

$$f_\lambda(x,s) = \lambda a(x)s^q + b(x)s^p \geq \lambda\varepsilon_1 s^q + b(x)s^p,$$

em quase todo ponto de alguma bola B_1, assim tomando $\Omega_1 = B_1$ temos que

$$f_\lambda(x,s) \geq \lambda\varepsilon_1 s^q + b(x)s^p \geq \lambda\varepsilon s^q \geq \lambda\varepsilon_1 s.$$

Tomando $\lambda\varepsilon = \theta_1 > \lambda_1(\Omega_1)$, a hipótese é verificada.

Assim, do resultado do Teorema (2.1) segue que existe $0 < \Lambda < \infty$ tal que o problema (2.33) tem ao menos uma solução u com $I_\lambda(u) < 0$ para $0 < \lambda < \Lambda$ e não tem solução para $\lambda > \Lambda$.

Agora para a segunda parte do resultado, precisamos verificar as seguintes hipóteses:

- **Verificando a hipótese** $(H_{\tilde{\Omega}})$.
Da hipótese (iii) temos que $b(x) \geq 0$ em quase todo ponto de alguma bola B_2, com $a(x), b(x) \not\equiv 0$ sobre B_2.
Temos que $f_\lambda(x,s) = \lambda a(x)s^q + b(x)s^p$.

Afirmação 2.12. *Seja $A, B \geq 0$ e $0 \leq q < 1 < p$ logo existe $c = c(p,q) > 0$ tal que*

$$As^q + Bs^p \geq cA^{\frac{p-1}{p-q}}B^{\frac{1-q}{p-q}}s$$

para todo $s \geq 0$.

De fato, seja $s > 1$ e pela desigualdade de Young temos que

$$\begin{aligned}
A^{\frac{p-1}{p-q}}B^{\frac{1-q}{p-q}}s &= (As)^{\frac{p-1}{p-q}}(Bs)^{\frac{1-q}{p-q}} \\
&\leq \left(\frac{p-1}{p-q}\right)As + \left(\frac{1-q}{p-q}\right)Bs \\
&\leq \left(\frac{p-1}{p-q}\right)As^q + \left(\frac{1-q}{p-q}\right)Bs^p \\
&\leq \max\left\{\frac{p-1}{p-q}, \frac{1-q}{p-q}\right\}(As^q + Bs^p).
\end{aligned}$$

Tomando $c(p,q) = \dfrac{1}{\max\left\{\frac{p-1}{p-q}, \frac{1-q}{p-q}\right\}}$ a afirmação segue. De modo análogo mostra-se para $s = 0$ e $0 < s < 1$.

Assim, tomando $\tilde{\Omega} = B_2$ (subdomínio suave), $\tilde{m} = a(x)^{\frac{p-1}{p-q}}b(x)^{\frac{1-q}{p-q}}$ e $h(\lambda) = \lambda\frac{1}{\max\left\{\frac{p-1}{p-q}, \frac{1-q}{p-q}\right\}}$. Temos pela afirmação que

$$f_\lambda(x,s) = \lambda a(x)s^q + b(x)s^p \geq h(\lambda)\tilde{m}(x)s,$$

verificando-se a hipótese $(H_{\tilde{\Omega}})$. Logo, o resultado do Teorema 2.2 conclui a segunda parte do Teorema 2.7.

Para finalizar a prova do Teorema 2.7 só falta mostrar as hipótese (G) e $(AR)_d$.

- **Verificando a hipótese** (G).
Para todo $[r,R] \subset \{\lambda > 0\}$

$$\begin{aligned}|f_\lambda(x,s)| &= |\lambda a(x)s^q + b(x)s^p| \\ &\leq \lambda|a(x)|s^q + |b(x)|s^p \\ &\leq \lambda \parallel a \parallel_\infty s^q + \parallel b \parallel_\infty s^p \\ &\leq \lambda \parallel a \parallel_\infty s^p + \parallel b \parallel_\infty s^p \\ &= (\lambda \parallel a \parallel_\infty + \parallel b \parallel_\infty)\, s^p\end{aligned}$$

em quase todo ponto de Ω para todo $s \geq 0$. Assim, tomando $d_1 = 0$, $d_2 = \lambda \parallel a \parallel_\infty + \parallel b \parallel_\infty$ e $p = \sigma$; verifica-se a hipótese (G).

- **Verificando a hipótese** $(AR)_d$.
Tome $\theta = p+1$, $\rho = q+1$, $d = R\left(\frac{\theta}{p+1} - 1\right) \parallel a \parallel_\infty$ e $s_0 = 0$, temos que

$$\begin{aligned}\theta F_\lambda(x,s) - sf_\lambda(x,s) &= \theta \int_0^s f_\lambda(x,t)dt - s(\lambda a(x)s^q + b(x)s^p) \\ &= \theta \int_0^s \lambda a(x)t^q + b(x)t^p\, dt - \lambda a(x)s^{q+1} - b(x)s^{p+1} \\ &= (p+1)\left[\frac{\lambda}{q+1}a(x)s^{q+1} + \frac{b(x)}{p+1}s^{p+1}\right] - \lambda a(x)s^{q+1} + b(x)s^{p+1} \\ &= \left[\left(\frac{p+1}{q+1}\right) - 1\right]\lambda a(x)s^{q+1} \leq \left[[\left(\frac{p+1}{q+1}\right) - 1\right] R \parallel a \parallel_\infty s^{q+1}\end{aligned}$$

para todo $\lambda \in [r,R]$, $s \geq 0$. Assim, a hipótese $(AR)_d$ é satisfeita.

Logo, a última parte do Teorema 2.7 segue do resultado do Teorema 2.3. Isto completa a prova do Teorema 2.7.

$\square$

Teorema 2.8. *Seja* $0 \leq q < 1 < p$ *e suponha* $a, b \in L^\infty(\Omega)$ *com*

(i) $a(x) \geq 0$ *em quase todo ponto de* Ω*,*

(ii) $a(x) \geq \varepsilon_1 > 0$ *em quase todo ponto de alguma bola* B_1.

Suponha ainda que, ou $p < 2^* - 1$ *e*

(iv) $b(x) \geq \varepsilon_2 > 0$ *em quase todo ponto de alguma bola* B_2*,*

ou $p = 2^* - 1$ *e a condição* (b) *do Teorema 2.5 para* $b(x)$.

Então o problema tem ao menos duas soluções u, v *para* $0 < \lambda < \Lambda$*, com* $u < v$ *em* Ω*,* $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} > \dfrac{\partial v}{\partial \nu}$ *sobre* $\partial\Omega$ *e* $I_\lambda(u) < 0$.

Note que (b) é uma condição mais forte que (iv). Note também que $b(x)$ acima é permitido mudar de sinal em Ω.

Demonstração. É suficiente verificar as hipóteses dos Teoremas 2.4 e 2.5. A verificação das hipóteses $(H), (H_0), (H_e), (H_{\Omega_1}), (G)$ e $(AR)_d$ é como no Teorema anterior. Apenas falta verificar $(H_0)', (M)$ e (H_{Ω_2}).

- **Verificação da Hipótese** $(H_0)'$
  Para todo $\lambda > 0$, e para todo $s_0 > 0$, seja $s_1, s_2 \in [0, s_0]$ tal que $s_1 < s_2$, tomando $B =\| a \|_\infty + \| b \|_\infty$ segue que
$$\begin{aligned} f_\lambda(x, s_1) + Bs &= \lambda a(x) s_1^q + b(x) s_1^p + (\| a \|_\infty + \| b \|_\infty)\, s \\ &\leq \lambda a(x) s_2^q + b(x) s_2^p + (\| a \|_\infty + \| b \|_\infty)\, s \\ &= f_\lambda(x, s_2) + Bs. \end{aligned}$$
  Verificando-se a hipótese $(H_0)'$.

- **Verificação da Hipótese** (M)
  Para todo $\lambda < \lambda'$ e para todo $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ com $u > 0$ em Ω,
$$f_\lambda(x, u(x)) = \lambda a(x) u^q + b(x) u^p \leq \lambda' a(x) u^q + b(x) u^p = f_{\lambda'}(x, u(x)).$$
  Verificando-se a hipótese (M).

- **Verificação da Hipótese** (H_{Ω_2}) Para todo $\lambda > 0$,
$$\begin{aligned} F_\lambda(x, s) &= \int_0^s f_\lambda(x, t)\, dt = \int_0^s \lambda a(x) t^q + b(x) t^p\, dt \\ &= \frac{\lambda}{q+1} a(x) s^{q+1} + \frac{b(x)}{p+1} s^{p+1} \\ &\geq \frac{\lambda}{q+1} a(x) s^{q+1} + \varepsilon_2 \frac{1}{p+1} s^{p+1} \\ &\geq \varepsilon_2 \frac{1}{p+1} s^{p+1} \geq \varepsilon_2 \frac{1}{p+1} s^2. \end{aligned}$$
  Tomando $\theta_2 = \dfrac{\varepsilon_2}{p+1}$, $\Omega_2 = B_2$ e $s_2 = 1$, verifica-se a hipótese H_{Ω_2}.

Assim, aplicando o Teorema 2.4 segue que o problema (P_λ) com $p < 2^* - 1$ tem ao menos uma duas soluções u, v para $0 < \lambda < \Lambda$, com $u < v$ em Ω, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} > \dfrac{\partial v}{\partial \nu}$ sobre $\partial\Omega$ e $I_\lambda(u) < 0$.

Agora, no caso $p = 2^* - 1$ com as hipóteses o Teorema 2.5 satisfeitas. Isto completa a prova do Teorema 2.8. □

Agora resolveremos o problema,
$$(P_\lambda)_* \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda c(x)(u+1)^p, & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$
onde $1 < p \leq 2^* - 1, c(x) \geq 0$.

Aqui o funcional associado fica
$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \frac{\lambda}{p+1} \int_\Omega c(x)(u^+ + 1)^{p+1}\, dx.$$

Teorema 2.9. *Seja $p > 1$ e suponha $c \in L^\infty(\Omega)$ com*
$$c(x) \geq 0 \ \textit{ em quase todo ponto de } \Omega \ \textit{ e } c(x) \geq \varepsilon > 0 \textit{ em quase todo ponto de alguma bola } B.$$

Então existe $0 < \Lambda < \infty$ *tal que* $(P_\lambda)_*$ *tem ao menos uma solução* u*, com* $I_\lambda(u) < 0$ *para* $0 < \lambda < \Lambda$ *e não tem solução para* $\lambda > \Lambda$*. Mais ainda, se* $p \leq 2^* - 1$*, logo o problema* $(P_\lambda)_*$ *tem ao menos uma solução* u*, com* $I_\lambda(u) \leq 0$ *para* $\lambda = \Lambda$*.*

Demonstração. Deve-se verificar as hipóteses dos Teoremas 2.1, 2.2 e 2.3.

- **Verificação da Hipótese** (H)
  De fato, para cada $\lambda > 0$, temos que

$$|f_\lambda(x,s)| = |\lambda c(x)(s+1)^p| \leq \lambda \parallel c \parallel_\infty |s_0 + 1|^p$$

  em quase todo ponto de Ω e para todo $s \in [0, s_0]$. Assim, tomando $A = \lambda \parallel c \parallel_\infty |s_0 + 1|^p$, a hipótese (H) é verificada.

- **Verificação da Hipótese** (H_0)
  De fato, para cada $\lambda > 0$ e cada $s_0 > 0$, temos que

$$\begin{aligned} f_\lambda(x,s) &= \lambda c(x)(s+1)^p \\ &\geq \lambda c(x)(s^p + 1) \\ &= \lambda c(x)s^p + \lambda c(x) \\ &\geq \lambda c(x)s^p \\ &\geq -\lambda c(x)s. \end{aligned}$$

  Por outro lado, existe $x \in \Omega$ tal que $c(x) = \parallel c \parallel_\infty$. Asim, tomando $B = \lambda \parallel c \parallel_\infty$, temos que a hipótese (H_0) é satisfeita.

- **Verificação da Hipótese** (H_e)
  Tome $g(s) = \lambda \parallel c \parallel_\infty (s+1)^p$ para λ suficientemente pequeno, logo

$$f_\lambda(x,s) = \lambda c(x)(s+1)^p \leq \lambda \parallel c \parallel (s+1)^p = g(s),$$

  em quase todo ponto de Ω e todo $s \geq 0$. Verificando-se assim a hipótese (H_e).

- **Verificação da Hipótese** (H_{Ω_1})
  Para todo $\lambda > 0$, temos que

$$f_\lambda(x,s) = \lambda c(x)(s+1)^p \geq \lambda\varepsilon(s^p + 1) \geq \lambda\varepsilon s^p \geq \lambda\varepsilon s,$$

  em quase todo ponto de B_1 e todo $s \in [0, s_1]$. Tomando $\Omega_1 = B$, $\theta_1 = \lambda\varepsilon > \lambda_1(\Omega_1)$ a hipótese (H_{Ω_1}) é verificada.

- **Verificação da Hipótese** $(H_{\tilde{\Omega}})$
  Como por hipótese $c(x) \geq \varepsilon > 0$ em alguma bola B segue que

$$f_\lambda(x,s) = \lambda c(x)(s+1)^p \geq \lambda c(x)s^p + \lambda c(x).$$

  Tomando $\tilde{\Omega} = B$, $h(\lambda) = \lambda$ e $\tilde{m}(x) = \varepsilon$ verifica-se a hipótese $(H_{\tilde{\Omega}})$.

- **Verificação da Hipótese** (G)
  Para todo $[r, R] \subset \{\lambda > 0\}$, temos que

$$\begin{aligned}|f_\lambda(x,s)| &= |\lambda c(x)(s+1)^p| \leq \lambda \parallel c \parallel_\infty |s+1|^p \\ &\leq \lambda \parallel c \parallel_\infty M(s^p+1) \\ &= \lambda \parallel c \parallel_\infty Ms^p + \lambda \parallel c \parallel_\infty M.\end{aligned}$$

  Tomando $d_1 = \lambda \parallel c \parallel_\infty M$, $d_2 = \lambda \parallel c \parallel_\infty M$ e $\sigma = p$ segue a verificação de (G).

- **Verificação da Hipótese** $(AR)_d$
  Para todo $[r, R] \subset \{\lambda > 0\}$, temos que

$$\begin{aligned}\theta F_\lambda(x,s) - sf_\lambda(x,s) &= \theta \int_0^s f_\lambda(x,t)\,dt - s(\lambda c(x)(s+1)^p) \\ &= \theta \int_0^s \lambda c(x)(t+1)^p\,dt - s\lambda c(x)(s+1)^p \\ &= \theta\lambda c(x)\frac{(s+1)^{p+1}}{p+1} - s\lambda c(x)(s+1)^p \\ &= \lambda c(x)(s+1)^p\left[\left(\frac{\theta}{p+1} - 1\right)(s+1) + 1\right] \\ &\leq R \parallel c \parallel_\infty \left[\left(\frac{\theta}{p+1} - 1\right)(s+1) + 1\right](s+1)^p.\end{aligned}$$

  Assim, escolhendo θ com $2 < \theta < p+1$, o lado direito da desigualdade acima é ≤ 0 para s suficientemente grande, logo $(AR)_d$ é satisfeito com $d = 0$. Isto completa a prova do Teorema 2.9.

$\square$

Apêndice

$\mathcal{A}$

Resultados Importantes

Teorema A.1. *(Teorema da Divergência)(ver [16]). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado com fronteira regular, $F : \Omega \to \mathbb{R}^N$ é um campo vetorial em Ω, $F \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, ν é o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$. Então,*

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F(x)dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu dS. \tag{A.1}$$

Teorema A.2. *(As Identidades de Green)(ver [16]). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio onde vale o teorema da divergência e sejam $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então valem as seguintes identidades:*

1. $\displaystyle\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS;$
2. $\displaystyle\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dx = -\int_{\Omega} u\Delta v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u \, dS;$
3. $\displaystyle\int_{\Omega} u\Delta v - v\Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS,$

   onde $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ é a derivada direcional na direção do vetor unitário exterior ν.

Definição A.1. *(Espaço Paracompacto)(ver [15]) Um espaço topológico X diz-se paracompacto se é Hausdorff e cada cobrimento aberto de X tem um refinamento aberto localmente finito.*

Teorema A.3. *(Desigualdade do Valor Médio)(ver [14]). Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ diferenciável em cada ponto do segmento de reta aberto $(a, a+v)$ e tal que sua restrição ao segmento fechado $[a, a+v] \subset \Omega$ seja contínua. Se $|f'(x)| \le M$ para todo $x \in (a, a+v)$, então*

$$|f(a+v) - f(a)| \le M|v|.$$

Consideramos agora o problema

$$\begin{cases} Lu = f, & x \in \Omega, \\ \ \ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um aberto e limitado contido em $\mathbb{R}^N$ e $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é desconhecida, $u = u(x)$. Onde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é conhecida, e L denota os operadores elípticos de segunda ordem, que são da seguinte forma:

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{N} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

onde $a^{ij}, b^i, c : \Omega \to \mathbb{R}$, são funções contínuas. Sobre esse formato, apresentamos o seguinte resultado.

Lema A.1. *(Lema de Hopf)(ver [18]). Seja $\Omega \in \mathbb{R}^N$, suponha $u \in C^2 \cap (\Omega)C^1(\overline{\Omega})$ e $c \equiv 0$ em Ω. Suponha ainda que $Lu \geq 0$ em Ω e que exista um ponto $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $u(x_0) > u(x)$ para todo $x \in \Omega$. Finalmente, suponha que existe uma bola $B \subset \Omega$ com $x_0 \in \partial\Omega$. Logo,*

1. *$\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$, onde ν é o vetor normal unitário exterior a B em x_0;*
2. *Se $c \geq 0$ em Ω, a mesma conclusão do item anterior é valida sempre que $u(x_0) \geq 0$.*

Teorema A.4. *(Princípio do Máximo)(ver [18]). Seja $u \in H$ solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = h, & x \in \Omega, \\ \qquad u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{A.2}$$

onde $h \in L^\sigma(\Omega)$, $\sigma = 2N/(N+2)$, λ é um parâmetro real não-negativo e $h \geq 0$ em Ω. Então $u \geq 0$ em Ω. Além disso, se $h > 0$ em um conjunto de medida positiva, então $u > 0$ em Ω.

Se $u \in C^1(\overline{\Omega})$, então a derivada normal exterior $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x) < 0$, para todo $x \in \Omega$.

Teorema A.5. *(Princípio do Máximo Forte)(ver [16]). Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ com $\Delta u \geq 0 (\Delta u \leq 0)$ em Ω e suponha que existe um ponto $y \in \Omega$ tal que*

$$u(y) = \sup_{\Omega} u \left(\inf_{\Omega} u \right).$$

Então u é constante.

Teorema A.6. *(Princípio do Máximo Fraco)(ver [16]). Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ com $\Delta u \geq 0 (\Delta u \leq 0)$ em Ω. Então*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \left(\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u \right).$$

Definição A.2. *Sejam $A \subset \Omega$ um conjunto mensurável e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função. Se diz que f é mensurável se $\{x \in A \,|\, f(x) > \alpha\}$ é mensurável para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Definição A.3. *(ver [2]). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 1$. Diz-se que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory se:*

a) $f(\cdot, s)$ é mensurável em Ω, qualquer que seja $s \in \mathbb{R}$ fixado;

b) $f(x, \cdot)$ é contínua em $\mathbb{R}$ em quase todo ponto de Ω.

Teorema A.7. *(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)(ver [4].) Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis, as quais convergem em quase toda parte para uma função mensurável f a valores reais. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo n, então f é integrável e*

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu.$$

Teorema A.8. *(ver [17]) Sejam $f \in L^p(\Omega)$ com $1 < p < +\infty$ e k uma constante real não-negativa. Então existe uma única $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que*

$$\begin{cases} -\Delta u + ku = f, & x \in \Omega, \\ \qquad\quad u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{A.3}$$

além disso, existe uma constante C independente de f e u tal que

$$\| u \|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \| f \|_{L^p(\Omega)} . \tag{A.4}$$

Em particular, se $p > \dfrac{N}{2}$ e $\varphi \in C(\overline{\Omega})$, então existe uma única $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + ku = f, & x \in \Omega, \\ \qquad\quad u = \varphi, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{A.5}$$

Definição A.4. . *Uma função $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é dita Hölder contínua de exponente α, $0 < \alpha < 1$, se*

$$H_\alpha [u] = \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty.$$

Definição A.5. *(Espaço $C(\overline{\Omega})$). Designamos por $C(\overline{\Omega})$ o espaço das funções contínuas $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, munido da norma*

$$\| u \|_0 = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|.$$

Definição A.6 (Espaço $C^m(\overline{\Omega})$). *Designamos por $C^m(\overline{\Omega})$, $m \in \mathbb{N}$, o espaço de todas as funções $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que juntamente com todas as derivadas de ordem inferior ou igual a m são contínuas em $\overline{\Omega}$. Ele é um espaço de Banach se munido com a norma*

$$\| u \|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\sigma| \leq m} \| D^\sigma u \|_0,$$

em que $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N)$, com $\sigma_i \in \mathbb{N}$, $|\sigma| = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_N$ e

$$D^\sigma u(x) = \frac{\partial^{|\sigma|} u(x)}{\partial x_1^{\sigma_1} \partial x_2^{\sigma_2} \ldots \partial x_N^{\sigma_N}}.$$

Definição A.7 (Espaço $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$). *Designamos por $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ o espaço das funções pertencentes a $C^m(\overline{\Omega})$ cujas m-ésimas derivadas são Hölder contínuas de expoente α, $0 < \alpha < 1$, em $\overline{\Omega}$. Ele é um espaço de*

Banach se munido com a norma

$$\| u \|_{C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})} = \| u \|_{C^m(\overline{\Omega})} + \sum_{|\sigma|=m} H_\alpha \left[D^\sigma u \right].$$

Denotaremos $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *por* $C^\alpha(\overline{\Omega})$ *e* $\| \cdot \|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$ *por* $\| \cdot \|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}$.

Teorema A.9. *(Estimativa de Schauder). Sejam* $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ *e* $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *a solução única de (A.6). Então existe uma constante* C*, que independe de* f *e* u*, tal que*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C \|f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}, \quad \forall\, u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Teorema A.10. *(ver [24]) Seja* Ω *um domínio de classe* $C^{1,1}$ *em* $\mathbb{R}^N$*. Então se* $h \in L^p(\Omega)$*, com* $1 < p < \infty$*, o problema de Dirichlet* $-\Delta u = h$ *em* Ω*,* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *tem uma única solução* $u \in W^{2,p}(\Omega)$*.*

Teorema A.11. *(Teorema de Schauder)(ver [8]). Suponha que* Ω *é limitado e de classe* $C^{2,\alpha}$ *com* $0 < \alpha < 1$*. Então para cada* $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *existe uma única solução* $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & x \in \Omega, \\ \qquad\quad u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{A.6}$$

Proposição A.1. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto limitado, denote* $H = H(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ *e seja* $p \in [1, +\infty)$ *tal que* $p < 2^*$ *se* $N \geq 3$*. Se* $(u_n) \subset H$ *é uma sequência limitada, então existe uma subsequência* $(u_{n_j}) \subseteq (u_n)$ *tal que*

$$\begin{aligned} &u_{n_j} \rightharpoonup u \text{ fracamente em } H; \\ &u_{n_j} \to u \text{ fortemente em } L^p(\Omega); \\ &u_{n_j} \to u \text{ em quase todo ponto de } \Omega. \end{aligned}$$

Considerando agora o funcional da forma

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega F(x, u) \, dx,$$

definido sobre H, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, e

$$F(x, u) = \int_0^u f(x, s) \, ds.$$

Supondo f mensurável em x, contínua em u e verificando

$$|f(x, u)| \leq c(1 + |u|^p) \quad \text{com} \quad p \leq \frac{N+2}{N-2}.$$

Teorema A.12. *(Ver [7]). Suponha* $u_0 \in H$ *é um mínimo local de* Φ *na topologia de* C^1*, isto é existe algum* $r > 0$ *tal que*

$$\Phi(u_0) \leq \Phi(u_0 + v), \ \forall v \in C_0^1(\overline{\Omega}) \text{ com } \| v \|_{C^1} \leq r.$$

Então u_0 *é um mínimo local de* Φ *na topologia de* H*, isto é existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que*

$$\Phi(u_0) \leq \Phi(u_0 + v), \ \forall v \in H_0^1(\overline{\Omega}) \text{ com } \| v \|_{H^1} \leq \varepsilon_0.$$

Teorema A.13 (Desigualdade de Hardy). *Dado $p > 1$ e $f \in L^p(0,\infty)$, $f \geq 0$ então*

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f(x)^p\,dx.$$

A.1 Regularidade

Vamos agora estabelecer a regularidade $C^{2,\alpha}$ das soluções fracas de (P_λ) pertencentes a $H^1(\Omega)$.

Lema A.2. *Seja $v \in H^1(\Omega)$ uma solução do problema (P_λ), então $v \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ para algum $\alpha \in (0,1)$.*

Demonstração. Seja $v \in H^1(\Omega)$ uma solução de (P_λ) fixado. E denotemos

$$f_\lambda(x) = f_\lambda(x, v(x)) = \lambda(v^+(x))^q + (v^+)^p.$$

Pela imersão contínua $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ para $r = 2^*$, como $v \in H^1(\Omega)$, então $v \in L^r(\Omega)$. Daí

$$\int_\Omega (v^+)^{q\frac{r}{p}} = \int_{\{(v^+)\leq 1\}} (v^+)^{q\frac{r}{p}}\,dx + \int_{\{(v^+)\geq 1\}} (v^+)^{q\frac{r}{p}}\,dx \leq |\Omega| + \int_\Omega (v^+)^r\,dx < \infty.$$

Logo,

$$\left(\int_\Omega |f_\lambda(x)|^{r/p}\,dx \right)^{p/r} < \infty,$$

ou seja, $f_\lambda(x) \in L^\vartheta(\Omega)$, para $\vartheta = \dfrac{r}{p}$. Como $1 < p < 2^* - 1$, obtemos

$$\vartheta = \frac{r}{p} > \frac{2^*}{2^*-1}.$$

Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\vartheta = \frac{2^*}{2^*-1}(1+\varepsilon).$$

Podemos escrever o problema como uma equação elíptica linear não homogênea.

$$\begin{cases} -\Delta v = f_\lambda(x), & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{A.7}$$

De acordo como o Teorema de Regularidade para equações elípticas lineares não homogêneas (ver Apêndice A Teorema A.10), como $f_\lambda \in L^\vartheta(\Omega)$, temos que $v \in W^{2,\vartheta}(\Omega)$.

Se $2\vartheta > N$, pelas imersões de Sobolev temos que $W^{2,\vartheta}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\vartheta}(\overline{\Omega})$. Sendo $v \in C^{0,\vartheta}(\Omega)$, assim $f_\lambda(x,v) \in C^{0,\vartheta}(\overline{\Omega})$. Logo pelo Teorema (ver Teorema A.11) temos que $v \in C^{2,\vartheta}(\overline{\Omega})$.

Se $2\vartheta = N$, então temos que $W_0^{2,\vartheta}(\Omega) \hookrightarrow L^\gamma(\Omega)$, para todo $\gamma > \vartheta$. Logo, tomando $\dfrac{\gamma}{p} > \dfrac{N}{2}$ temos que $v \in L^\gamma(\Omega)$. Claramente, vemos que $f_\lambda \in L^\xi(\Omega)$, para $\psi = \dfrac{\gamma}{p}$ então pelo Teorema $A.10$, temos $v \in W^{2,\xi}(\overline{\Omega})$. Pelas imersões de Sobolev, $v \in C^{0,\xi}(\overline{\Omega})$, assim $f_\lambda \in C^{0,\vartheta}(\overline{\Omega})$. Daí pelo teorema de Schauder (ver Teorrema A.11) segue que $v \in C^{2,\xi}(\overline{\Omega})$.

No caso em que $2\vartheta < N$, pelo Teorema de Imersões de Sobolev, temos

$$W^{2,\vartheta}(\Omega) \hookrightarrow L^{r_1}(\Omega),$$

com $r_1 = \dfrac{N\vartheta}{N-2\vartheta}$. Como $v \in W^{2,\vartheta}(\Omega)$, então $v \in L^{r_1}(\Omega)$ e tem-se

$$\int_\Omega (v^+)^{q\frac{r_1}{p}} = \int_{\{(v^+)\leq 1\}} (v^+)^{q\frac{r_1}{p}}\, dx + \int_{\{(v^+)\geq 1\}} (v^+)^{q\frac{r_1}{p}}\, dx \leq |\Omega| + \int_\Omega (v^+)^{r_1}\, dx < \infty$$

e resulta que

$$\left(\int_\Omega |f_\lambda(x)|^{r_1/p}\, dx\right)^{p/r_1} < \infty.$$

Logo $f_\lambda(x) \in L^{\vartheta_1}(\Omega)$, com $\vartheta_1 = \dfrac{r_1}{p}$. Então, $v \in W^{2,\vartheta_1}(\Omega)$.

Para mostrar que a regularidade de v foi melhorada, é necessário mostrar que

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta} = \frac{r_1}{r} > 1.$$

Temos que

$$r_1 = \frac{N\left(\frac{2^*}{2^*-1}(1+\varepsilon)\right)}{N - 2\left(\frac{2^*}{2^*-1}\right)(1+\varepsilon)} = \frac{2^*N(1+\varepsilon)}{N(2^*-1) - 2(2^*)(1+\varepsilon)}.$$

Daí

$$\frac{r_1}{r} = \frac{2^*N(1+\varepsilon)}{N(2^*-1) - 2(2^*)(1+\varepsilon)}.\frac{1}{2^*} = \frac{N(1+\varepsilon)}{N(2^*-1) - 2(2^*)(1+\varepsilon)}.$$

Assim, basta verificarmos que

$$N(2^*-1) - 2(1+\varepsilon)2^* > 0 \tag{A.8}$$

e

$$N(1+\varepsilon) > N(2^*-1) - 2(2^*)(1+\varepsilon). \tag{A.9}$$

A partir de $(A.8)$, temos

$$N(2^*-1) > 2(1+\varepsilon)2^*$$

o que implica que

$$\frac{N(2^*-1)}{2(2^*)} - 1 > \varepsilon$$

e por $(A.9)$, temos

$$\begin{aligned} N(2^*-1) &< N(1+\varepsilon) + 2(1+\varepsilon)2^* \\ &= (N + 2(2^*))(1+\varepsilon), \end{aligned}$$

daí

$$\frac{N(2^*-1)}{N+2(2^*)} - 1 < \varepsilon. \tag{A.10}$$

Assim,

$$\frac{N(2^*-1)}{N+2(2^*)} - 1 < \varepsilon < \frac{N(2^*-1)}{2(2^*)} - 1. \tag{A.11}$$

Podemos encontrar um $\varepsilon > 0$ satisfazendo $(A.11)$, consequentemente, temos

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta} > 1.$$

Pelo Teorema de Regularidade (ver Teorema $A.10$), assim como para $\vartheta_1 > \vartheta$ temos $v \in W^{2,\vartheta_1}(\Omega)$, também para qualquer ϑ_k suficientemente grande, $v \in W^{2,\vartheta_k}(\Omega)$. Quando $2\vartheta_k > N$, pelo Teorema de Imersão de Sobolev podemos ter que $v \in C^{0,\vartheta}(\overline{\Omega})$, $f_\lambda \in C^{0,\vartheta}(\overline{\Omega})$, então $v \in C^{2,\vartheta}(\overline{\Omega})$ pelo Teorema de Schauder, ver Teorema $A.11$.

□

A.2 I_λ satisfaz a condição (PS)

Consideramos o problema

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q + u^p, & x \in \Omega, \\ \quad u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um aberto limitado, contido em $\mathbb{R}^N$, com $0 < q < 1 < p < 2^* - 1$ e λ um parâmetro real. O funcional associado ao problema (P_λ) é

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2} \parallel u \parallel^2 - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega u^{q+1}dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega u^{p+1}dx.$$

Lema A.3. *I_λ satisfaz a condição $(PS)_c$.*

Demonstração. Mostraremos que toda sequência (PS) possui subsequência convergente.

Seja $(v_n) \subset H(\Omega)$ uma sequência (PS), isto é,

$$I_\lambda(v_n) \to c, \quad \text{e} \quad I'_\lambda(v_n) \to 0 \text{ em } H^{-1}(\Omega). \tag{A.12}$$

Por $(A.12)$ podemos assumir que (v_n) satisfaz

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n|^2\,dx - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega (v_n^+)^{q+1}\,dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (v_n^+)^{p+1}\,dx = c + o_n(1). \tag{A.13}$$

Agora, pela definição de I'_λ temos

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2\,dx = I'_\lambda(v_n)v_n + \lambda\int_\Omega (v_n^+)^{q+1}\,dx + \int_\Omega (v_n^+)^{p+1}dx. \tag{A.14}$$

Sustituindo $(A.14)$ em $(A.13)$ obtemos

$$\begin{aligned} c + o_n(1) = {} & \frac{1}{2}I'_\lambda(v_n)v_n + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (v_n^+)^{q+1}\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (v_n^+)^{p+1}\,dx \\ & - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega (v_n^+)^{q+1}\,dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (v_n^+)^{p+1}\,dx, \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} \lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q-1}\right)\int_\Omega (v_n^+)^{q+1}\,dx + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega (v_n^+)^{p+1}\,dx &= c - \frac{1}{2}I'_\lambda(v_n)u_n + o_n(1) \\ \frac{\lambda(q-1)}{2(q+1)}\int_\Omega (v_n^+)^{q+1}\,dx + \frac{p-1}{2(p+1)}\int_\Omega (v_n^+)^{p+1}\,dx &= c - \frac{1}{2}I'_\lambda(v_n)v_n + o_n(1). \end{aligned}$$

Seja $c_1 = \dfrac{p-1}{2(p+1)}$ e $c_2 = \dfrac{\lambda(1-q)}{2(p+1)}$. Como $0 < q < 1 < p$, vemos claramente que $c_1, c_2 > 0$. Assim,

$$c_1 \int_\Omega (v_n^+)^{p+1}\,dx \le c_2 \int_\Omega (v_n^+)^{q+1}\,dx + C + \| I'_\lambda(v_n) \|_{H^{-1}} \| v_n \|,$$

isto é,

$$\| v_n^+ \|_{p+1}^{p+1} \le C \| v_n^+ \|_{q+1}^{q+1} + C + C \| I'_\lambda(v_n) \|_{H^{-1}} \| v_n \| \tag{A.15}$$

Combinando $(A.13)$ e $(A.15)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \| v_n \|^2 &= \frac{\lambda}{q+1} \| v_n^+ \|_{q+1}^{q+1} + \frac{1}{p+1} \| v_n^+ \|_{p+1}^{p+1} + C + o_n(1) \\
&\le \frac{\lambda}{q+1} \| v_n^+ \|_{q+1}^{q+1} + \frac{1}{p+1} + \Big(C \| v_n^+ \|_{q+1}^{q+1} + C + C \| I'_\lambda(v_n) \|_{H^{-1}} \| v_n \| \Big) + C \\
&= C \| v_n^+ \|_{q+1}^{q+1} + C + C \| I'_\lambda(v_n) \|_{H^{-1}} \| v_n \| .
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Pela imersão compacta de $H \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$, temos que

$$\| v_n \|^2 \le C \| v_n^+ \|^{q+1} + C + C \| v_n \| .$$

Deduzimos então que existe uma constante C tal que $\| v_n \| \le C$. Consequentemente, (v_n) é limitada em H e então existe uma subsequência $(v_{n_j}) \subset (v_n)$ fracamente convergente em H. Além disso, temos uma outra desigualdade,$\| v_n^+ \|_{p+1}^{p+1} \le C$, que é dada pela imersão $H(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$.

Assim, podemos deduzir o seguinte

$$\begin{array}{lll}
v_{n_j} \to v & \text{fortemente em } L^{p+1}(\Omega) & \text{para } 2 < p+1 < 2^*; \\
v_{n_j} \to v & \text{fortemente em } L^{q+1}(\Omega) & \text{para } 1 < q+1 < p+1; \\
v_{n_j} \to v & \text{em quase todo ponto de } \Omega. &
\end{array}$$

Considere P_j, $P_0 : H \to \mathbb{R}$ dados por

$$P_j(\varphi) = \lambda \int_\Omega (v_{n_j}^+)^q \varphi\,dx + \int_\Omega (v_{n_j}^+)^p \varphi\,dx$$

e

$$P_0(\varphi) = \lambda \int_\Omega (v^+)^q \varphi\,dx + \int_\Omega (v^+)^p \varphi\,dx.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
|(P_j - P_0|) &= |\lambda \int_\Omega \left((v_{n_j}^+)^q - (v^+)^q\right) \varphi\, dx + \int_\Omega \left((v_{n_j}^+)^p - (v^+)^p\right) \varphi\, dx| \\
&\le \left(\int_\Omega \left((v_{n_j}^+)^q - (v^+)^q\right)^{\frac{q+1}{q}} dx\right)^{\frac{q}{q+1}} \left(\int_\Omega |\varphi|^{q+1}\, dx\right)^{\frac{1}{q+1}} \\
&+ \left(\int_\Omega \left((v_{n_j}^+)^p - (v^+)^p\right)^{\frac{p+1}{p}} dx\right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_\Omega |\varphi|^{p+1}\, dx\right)^{\frac{1}{p+1}} \\
&\le c \parallel \varphi \parallel \left(\int_\Omega \left((v_{n_j}^+)^q - (v^+)^q\right)^{\frac{q+1}{q}} dx\right)^{\frac{q}{q+1}} \\
&+ c \parallel \varphi \parallel \left(\int_\Omega \left((v_{n_j}^+)^p - (v^+)^p\right)^{\frac{p+1}{p}} dx\right)^{\frac{p}{p+1}}.
\end{aligned}
\tag{A.17}
$$

Como $v_{n_j} \to v$ em quase todo ponto de Ω vemos que $v_{n_j}^+ \to v^+$ em quase todo ponto de Ω e como $v_{n_j} \to v$ em $L^{q+1}(\Omega)$, então existe $l \in L^{q+1(\Omega)}$ tal que

$$
v_{n_j}^+ \le |v_{n_j}(x)| \le l(x) \quad \text{em quase todo ponto de } \Omega.
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\left((v_{n_j}^+)^q - (v^+)^q\right)^{\frac{q+1}{q}} &\le \left((v_{n_j}^+)^q + (v^+)^q\right)^{\frac{q+1}{q}} \le c\left((v_{n_j}^+)^{q+1} + (v^+)^{q+1}\right) \\
&\le c\left(|l(x)|)^{q+1} + (v^+)^{q+1}\right) \in L^1(\Omega).
\end{aligned}
\tag{A.18}
$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$
\int_\Omega \left((v_{n_j}^+)^q - (v^+)^q\right)^{\frac{q+1}{q}} dx \to 0.
$$

Por outro lado, como $v_n \to v$ em $L^{p+1}(\Omega)$, então existe $l_1 \in L^{p+1}(\Omega)$ tal que

$$
|v_{n_j}(x)| \le l_1(x) \quad \text{em quase todo ponto de } \Omega.
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
\left((v_{n_j})^p - (v^+)^p\right)^{\frac{p+1}{p}} &\le C\left((v_{n_j})^p + (v^+)^p\right) \\
&\le C(l_1^{p+1}(x) + |v|^{p+1}) \in L^1(\Omega).
\end{aligned}
\tag{A.19}
$$

Logo, novamente pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$
\int_\Omega \left((v_{n_j}^+)^p - (v^+)^p\right)^{\frac{p+1}{p}} dx \to 0.
$$

Portanto, $P_j \to P_0$ em $H^{-1}(\Omega)$, ou ainda

$$
\lambda(v_{n_j}^+)^q + (v_{n_j}^+)^p \to \lambda(v^+)^q + (v^+)^p \quad \text{em } H^{-1}(\Omega).
$$

Pelo Teorema de Representação de Riesz, para cada $f_\lambda(w) = \lambda(w^+)^q + (w^+)^p$ em $H^{-1}(\Omega)$, o problema

$$
(\tilde{P}) \quad \begin{cases} -\Delta u = f_\lambda(w), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}
$$

tem uma única solução $u \in H^1(\Omega)$.

Considere $\Phi : H^{-1} \to H^1$, e seja $u = \Phi(f_\lambda(w))$. Notamos que Φ é uma isometria, pois é um isomorfismo que preserva o produto interno.

Como u é a única solução do problema $(\tilde{P})$, então satisfaz

$$\int_\Omega f_\lambda(w)\varphi dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \langle u, \varphi \rangle = \langle \Phi(f_\lambda(w), \varphi \rangle \,,$$

para todo $\varphi \in H(\Omega)$. Assim,

$$\begin{aligned} \langle I'_\lambda(w), \varphi \rangle &= \langle w, \varphi \rangle - \int_\Omega f_\lambda(w)\varphi dx \\ &= \langle w, \varphi \rangle - \langle \Phi(f_\lambda(w), \varphi \rangle \\ &= \langle w - \Phi(f_\lambda(w), \varphi \rangle \,. \end{aligned} \tag{A.20}$$

Logo,

$$I'_\lambda(w) = w - \Phi(f_\lambda(w)).$$

Sendo Φ contínua, temos que

$$\Phi(f_\lambda(v_{n_j})) \to \Phi(f_\lambda(v) \quad \text{em } H.$$

Por $(A.12)$ temos que

$$I'_\lambda(v_{n_j}) = v_{n_j} - \Phi(f_\lambda(v_{n_j})) \to 0 \quad \text{em } H^{-1}(\Omega),$$

consequentemente,

$$v_{n_j} \to \Phi(f_\lambda(v)) \quad \text{em } H.$$

Pela unicidade do limite fraco, temos que $v = \Phi(f_\lambda(v))$, mas $u = \Phi(f_\lambda(v))$. Assim $v = u$. E portanto, I_λ satisfaz a condição (PS). $\square$

A.3 A constante de Sobolev

Para darmos prosseguimento ao nosso estudo, introduziremos os seguintes espaços

$$\mathcal{D}^{1,2}(\Omega) = \left\{ u \in L^{2^*}(\Omega) \,:\, \nabla u \in L^2(\Omega) \right\},$$

onde $\mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega)$ é o fecho, na métrica da convergência uniforme, do conjunto das funções de suporte compacto contido em Ω. No decorrer de nosso trabalho será de muita importância a utilização da constante de Sobolev

$$S = \inf_{\substack{u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \\ \|u\|^{2^*} = 1}} \| \nabla u \|^2 \,. \tag{A.21}$$

O Teorema $A.14$ que apresentaremos a seguir, nos garante que a constante S é atingida. Logo existe $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx = S \quad \text{e} \quad \| u \|_{2^*} = 1.$$

Pode-se mostrar, que as funções que realizam esse mínimo estão relacionadas com a função

$$v(x) = \frac{C_N}{(1+|x|^2)^{(N-2)/2}}, \tag{A.22}$$

em que $C_N = [N(N-2)]^{(N-2)/4}$.

A função acima é tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \, dx = S^{N/2} = \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*} \, dx.$$

Desse modo, se $u = \dfrac{v}{\| v \|^{2^*},}$ então $\| u \|_{2^*} = 1$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx = S.$$

Lema A.4. *(Concentração de Compacidade) Seja $(u_n) \subset \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência tal que*

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \quad em \ \ \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N), \\ |\nabla(u_n - u)|^2 &\rightharpoonup \mu \quad em \ \ \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \\ |u_n - u|^{2^*} &\rightharpoonup \nu \quad em \ \ \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \\ u_n &\to u \quad em \ quase \ todo \ ponto \ de \ \mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{A.23}$$

Defina

$$\mu_\infty = \lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{|x|>R} |\nabla u_n|^2 \, dx, \qquad \nu_\infty = \lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{|x|>R} |u_n|^{2^*} \, dx. \tag{A.24}$$

Então

$$\begin{aligned} \| \nu \|^{2/2^*} &\leq S^{-1} \| \mu \|, \\ \nu_\infty^{2/2^*} &\leq S^{-1} \mu_\infty, \\ \overline{\lim_{n\to\infty}} |\nabla u_n|_2^2 &= |\nabla u|_2^2 + \| \mu \| + \mu_\infty, \\ \overline{\lim_{n\to\infty}} |u_n|_{2^*}^{2^*} &= |u|_{2^*}^{2^*} + \| \nu \| + \nu_\infty. \end{aligned} \tag{A.25}$$

Além disso, se $u = 0$ e $\| \nu \|^{2/2^*} = S^{-1} \| \mu \|$, então cada uma das medidas μ e ν se concentram em um único ponto.

Teorema A.14. *Seja $(u_n) \subset \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ uma sequência tal que*

$$\| u_n \|_{2^*} = 1 \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \| \nabla u_n \|_2^2 = S.$$

Então existe $(y_n, \lambda_n) \subset \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$ tal que a sequência

$$v_n(x) = \lambda_n^{(N-2)/2} u_n(\lambda_n x + y_n),$$

possui subsequência convergente. Observe que se $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, $(y, \lambda) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$ e $v(x) = \lambda^{(N-2)/2} u(\lambda x + y)$ então

$$\| v \|_{2^*} = \| u \|_{2^*} \qquad e \qquad \| \nabla u \|_2 = \| \nabla v \|_2 .$$

Demonstração. Definamos

$$P_n(\lambda) = \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_\lambda(y)} |u_n|^{2^*}.$$

Como

$$\lim_{\lambda\to 0^+} P_n(\lambda) = 0, \ \lim_{\lambda\to\infty} P_n(\lambda) = 1,$$

existe $\lambda_n > 0$ tal que $P_n(\lambda_n) = \dfrac{1}{2}$. Além disso existe $y_n \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_{B_{\lambda_n}(y_n)} |u_n|^{2^*} = P_n(\lambda_n) = \frac{1}{2}.$$

Isto ocorre porque existe uma sequência $(y_{k,n}) \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{B_{\lambda_n}(y_{k,n})} (y_{k,n})|u_n|^{2^*} = P_n(\lambda_n).$$

Tal sequência não pode ser ilimitada pois

$$\lim_{|y|\to\infty} \int_{B_{\lambda_n}(y)} |u_n|^{2^*} = 0.$$

Logo, existe um valor y_n tal que, a menos de subsequência, $y_{k,n} \to y_n$ quando $k \to \infty$. Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos

$$\int_{B_{\lambda_n}(y_n)} |u_n|^{2^*} = P_n(\lambda_n) = \frac{1}{2}.$$

Defina $v_n(x) = u_n^{y_n,\lambda_n}(x)$, temos $\|v_n\|_{2^*} = \|u_n\|_{2^*} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|\nabla v_n\|_2^2 = \|\nabla u_n\|_2^2 = S$ e após de uma mudança de variável temos

$$\frac{1}{2} = \int_{B_1(0)} |v_n|^{2^*} = \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |v_n|^{2^*}. \tag{A.26}$$

Sendo (v_n) limitada em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, existe $v \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que a menos de subsequências

$$\begin{aligned} v_n &\rightharpoonup v \quad \text{em } \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N), \\ |\nabla(v_n - v)|^2 &\rightharpoonup \mu \quad \text{em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \\ |v_n - v|^{2^*} &\rightharpoonup \nu \quad \text{em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \\ v_n &\to v \quad \text{em quase todo ponto de } \mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{A.27}$$

Mostraremos agora que v atinge o valor S. Do Lema $(A.4)$ temos que

$$\begin{aligned} S &= \overline{\lim_{n\to\infty}} \|\nabla v_n\|_2^2 = \|\nabla u\|_2^2 + \| \mu \| + \mu_\infty, \\ 1 &= \overline{\lim_{n\to\infty}} \|u_n\|_{2^*}^{2^*} = \|u\|_{2^*}^{2^*} + \| \nu \| + \nu_\infty, \end{aligned} \tag{A.28}$$

$$\| \nu \|^{2/2^*} \leq S^{-1} \| \mu \|, \ \nu_\infty^{2/2^*} \leq S^{-1} \mu_\infty. \tag{A.29}$$

Afirmamos que cada valor $\| v \|_{2^*}^{2^*}$, $\| \nu \|$ e ν_∞ é igual a 0 ou 1. De fato, se algum destes valores estivesse no intervalo $(0,1)$, poderíamos usar a desigualdade

$$(a+b)^t < a^t + b^t,\ a,b>0, \quad 0<t<1,$$

concluindo que

$$1 = (\| v \|_{2^*} + \| \nu \| + \nu_\infty)^{2/2^*} < \| v \|_{2^*}^2 + \| \nu \|^{2/2^*} + \nu_\infty^{2/2^*}.$$

Da desigualdade acima, definição de S e as equações $(A.28)$ e $(A.29)$ implicam que

$$S < S(\| v \|_{2^*}^2 + \| \nu \|^{2/2^*} + \nu_\infty^{2/2^*}) \leq \| \nabla v \|_2^2 + \| \mu \| + \mu_\infty = S.$$

O que é absurdo. Logo $\| v \|_{2^*}^{2^*}$, $\| \nu \|$, $\nu_\infty \in \{0,1\rangle$. A equação $(A.26)$ implica que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{|x|>1} |v_n|^{2*} = \frac{1}{2}.$$

Como

$$\int_{|x|>R} |v_n|^{2*} \leq \int_{|x|>1} |v_n|^{2*}, \quad \text{se} \quad R>1,$$

então, $\nu_\infty \leq \frac{1}{2}$, logo $\nu_\infty = 0$. Se $\| \nu \| = 1$ então $\| v \|_{2^*}^{2^*} = 0$ e assim $v=0$, logo

$$\| \nu \|^{2/2^*} \geq S^{-1} \| \mu \| \ .$$

De $(A.29)$ concluímos que

$$\| \nu \|^{2/2^*} = S\|\mu\|.$$

Como $v=0$, segue que a medida ν está concentrada em um único ponto $z \in \mathbb{R}^N$. De $(A.26)$ obtemos que

$$\frac{1}{2} = \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |v_n|^{2^*} \geq \int_{B_1(z)} |v_n|^{2^*} = \lim_{n\to\infty} \int_{B_1(z)} d\nu = \| v \| = 1.$$

E isto é uma contradição. Assim, $\| v \|_{2^*}^{2^*} = 1$ e portanto $\| \nu \| = 0$, $\nu_\infty = 0$. De $(A.28)$ concluímos que

$$\| \nabla v \|_2^2 = S = \lim_{n\to\infty} \| \nabla v_n \|_2^2 \ .$$

□

Lema A.5. *As seguintes desigualdades são verdadeiras:*

1. *Existe uma constante $C(p)>0$ tal que*

$$\frac{(r+s)^{p+1} - r^{p+1}}{p+1} - r^p \geq \frac{s^{p+1}}{p+1} + Cr^{p-1}s^2, \quad r,s\geq 0,\ p>1.$$

2. *Para $r,s \geq 0$, $0<q<1$, afirmamos que existe uma constante $C(q)>0$ tal que*

$$\frac{(r+s)^{q+1} - r^{q+1}}{q+1} - r^q s \leq C(q) s^{q+1}.$$

Demonstração. 1. Mostraremos que, para todo $p > 1$ existe uma constante $C = C(p) > 0$ tal que

$$\frac{(r+s)^{p+1} - r^{p+1}}{p+1} - r^p \geq \frac{s^{p+1}}{p+1} + Cr^{p-1}s^2, \quad r, s \geq 0.$$

$$(a+b)^p \geq a^p + b^p + Ca^{p-1}b, \quad \forall\, a, b \geq 0. \tag{A.30}$$

De fato, se considerarmos $t = \dfrac{b}{a}$ é suficiente mostrarmos que

$$(1+t)^p \geq 1 + t^p + Ct, \quad \forall\, 0 < t < 1. \tag{A.31}$$

A desigualdade $(A.31)$ segue do fato que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{(1+t)^p - 1 - t^p}{t} = p > 0,$$

onde para determinarmos esse limite foi usado L'Hospital, agora da definição de limite temos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|t - 0| < \delta$, implica que

$$\left| \frac{(1+t)^p - 1 - t^p}{t} - p \right| < \varepsilon,$$

logo

$$(1+t)^p > 1 + t^p + (p - \varepsilon)t.$$

Assim, considerando a função $g(t) = (r+t)^p - r^p$, $t, r \geq 0$. Temos que

$$\begin{aligned} g(t) &= +(r+t)^p - r^p, \quad (r, t > 0) \\ &\geq (r+t)^p - r^p \\ &\geq r^p + t^p + Car^{p-1}t - r^p \\ &= t^p + Ctr^{p-1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^s g_\lambda(t)\, dt &= \int_0^s (r+t)^p - r^p \, dt \\ &= \left(\frac{(r+t)^{p+1}}{p+1} - r^p t \right)_0^s \\ &= \frac{(r+s)^{p+1}}{p+1} - r^p s - \frac{r^{p+1}}{p+1} \\ &= \frac{(r+s)^{p+1} - r^{p+1}}{p+1} - r^p s. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\int_0^s g_\lambda(t)\,dt &= \int_0^s (r+t)^p - r^p\,dt \\
&\geq \int_0^s t^p - Cr^{p-1}t\,dt \\
&= \left[\frac{t^{p+1}}{p+1-Cr^{p-1}\frac{t^2}{2}}\right]_0^s \\
&= \frac{s^{p+1}}{p+1} - Cr^{p-1}\frac{s^2}{2}.
\end{aligned}
$$

Obtendo assim

$$
\frac{(r+s)^{p+1}-r^{p+1}}{p+1} - r^p \geq \frac{s^{p+1}}{p+1} + Cr^{p-1}s^2, \quad r,s \geq 0,\, p>1.
$$

2. Mostraremos que para $r,s \geq 0$, $0<q<1$, que existe uma constante $C=C(q)>0$ tal que

$$
\frac{(r+s)^{q+1}-r^{q+1}}{q+1} - r^q s \leq C(q)s^{q+1}.
$$

Poderíamos usar a desigualdade $(r+t)^q < r^q + t^q$, $r,t \geq 0$, $0<q<1$. Assim teríamos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^s (r+t)^q\,dt &\leq \int_0^s r^q + t^q\,dt \\
\frac{(r+s)^{q+1}-r^{q+1}}{q+1} &\leq r^q s + \frac{s^{q+1}}{q+1} \\
\frac{(r+s)^{q+1}-r^{q+1}}{q+1} - r^q s &\leq \frac{s^{q+1}}{q+1}.
\end{aligned} \tag{A.32}
$$

Considerando $C=C(q)=\dfrac{1}{q+1}$, temos que, existe $C=C(q)$ tal que

$$
\frac{(r+s)^{q+1}-r^{q+1}}{q+1} - r^q s \leq C(q)s^{q+1}.
$$

□

Lema A.6. $c_\lambda < \dfrac{S^{N/2}}{N}$.

Demonstração. Seguindo a linha de demonstração de [13]. Defina

$$
v_\varepsilon(x) := \frac{C_N\varepsilon^{(N-2)/2}}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{(N-2)/2}}
$$

onde $C_N = (N(N-2))^{(N-2)/4}$, assim v_ε satisfaz

$$
-\Delta v_\varepsilon = v_\varepsilon^{2^*-1}, \quad x \in \mathbb{R}^N.
$$

Agora, escolha uma função $\eta \in C_0^\infty(B_\rho(0))$ tal que $0 \leq \eta(x) \leq 1$ e $\eta(x)=1$ para todo $x \in B_{\rho/2}(0)$, $\rho > 0$. E defina

$$
u_\varepsilon(x) = \eta(x)v_\varepsilon(x),
$$

para ε_0 suficientemente pequeno, existe $R > 0$ tal que $J_\lambda(Ru_\varepsilon) < 0$, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Isto é, se escrevemos $\gamma(t) = tRu_\varepsilon$, $t \in [0,1]$, logo $\gamma \in \Gamma$. Assim

$$c_\lambda \leq \max_{t\in[0,1]} J_\lambda(tu_\varepsilon).$$

Assim precisamos mostrar que

$$\max_{t\in[0,1]} J_\lambda(tu_\varepsilon) < \frac{S^{N/2}}{N}. \tag{A.33}$$

Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} \| u_\varepsilon \|^2 &= S^{N/2} + O(\varepsilon^{N-2}) \\ \| u_\varepsilon \|_{2^*}^{2^*} &= S^{N/2} + O(\varepsilon^{N}) \end{aligned} \tag{A.34}$$

e para algumas constantes K_1, K_2 e K_3 temos

$$\| u_\varepsilon \|_2^2 = \begin{cases} K_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{N-2}), & N \geq 5, \\ K_2\varepsilon^2|\ln\varepsilon^2| + O(\varepsilon^2), & N = 4, \\ K_3\varepsilon + O(\varepsilon^2), & N = 3. \end{cases} \tag{A.35}$$

Mais ainda

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u_\varepsilon|^{q+1}\,dx &\leq \int_{B_\varepsilon} \frac{(C_N\varepsilon)^{\frac{(N-2)}{2}(q+1)}}{\varepsilon^{(N-2)(q+1)}}\,dx + \int_{B_\rho\setminus B_\varepsilon} \frac{(C_N\varepsilon)^{\frac{(N-2)}{2}(q+1)}}{|x|^{(N-2)(q+1)}}\,dx \\ &\leq C\varepsilon^{\frac{(N-2)(1-q)+4}{2}} + C\varepsilon^{\frac{(N-2)}{2}(q+1)} \int_\varepsilon^\rho r^{q(2-N)+1}\,dr \end{aligned} \tag{A.36}$$

e assim,

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^{q+1}\,dx \leq \begin{cases} C\varepsilon^{\frac{(N-2)(1-q)+4}{2}} + C\varepsilon^{\frac{(N-2)}{2}(q+1)}, & q \neq \dfrac{2}{N-2}, \\ C\varepsilon^{\frac{(N-2)(1-q)+4}{2}} + C\varepsilon^{\frac{(N-2)}{2}(q+1)} + C\varepsilon^{\frac{(N-2)}{2}(q+1)}|\ln\varepsilon|, & q = \dfrac{2}{N-2}. \end{cases} \tag{A.37}$$

Então,

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^{q+1}\,dx \leq \begin{cases} o_n(\varepsilon^2), & N \geq 6, \\ o_n(\varepsilon^{(N-2)/2}), & 3 \leq N \leq 5. \end{cases} \tag{A.38}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(0)} u_\varepsilon^{2^*}\,dx \leq \int_{B_\rho(o)} |x|^\gamma u_\varepsilon^{2^*}\,dx &= \int_{B_{\rho/\varepsilon}(0)} |\varepsilon x|^\gamma v_\varepsilon^{2^*}(\varepsilon x)\,dx + O(\varepsilon^N) \\ &= \varepsilon^\gamma \int_{B_{\rho/\varepsilon}(0)} \frac{|x|^\gamma C_N^{2^*}}{(1+|x|)^N}\,dx + O(\varepsilon^N) \\ &= O(\varepsilon^\gamma) + O(\varepsilon^N). \end{aligned} \tag{A.39}$$

Agora dividimos a prova em dois casos.

1. *Caso* $N \geq 6$.

Note que temos (Ver Lema anterior)

$$\lambda\left[\frac{(tu_\varepsilon+u_0)^{q+1}-u_0^{q+1}}{q+1}-u_0^q(tu_\varepsilon)\right]\geq -C(tu_\varepsilon)^{q+1} \tag{A.40}$$

e

$$\left[\frac{(tu_\varepsilon+u_0^p)^{p+1}-u_0}{p+1}-u_0^p(tu_\varepsilon)\right]\geq\left[\frac{(tu_\varepsilon)^{p+1}}{p+1}+u_0^{p-1}\frac{(tu_\varepsilon)^2}{2}\right], \tag{A.41}$$

mas lembre-se que $p=2^*-1$. Então

$$\begin{aligned} J_\lambda(tu_\varepsilon) &= \frac{1}{2}t^2\parallel u_\varepsilon\parallel^2-\int_\Omega G(tu_\varepsilon)\,dx\\ &= \frac{t^2}{2}\parallel u_\varepsilon\parallel^2-\int_\Omega\lambda\left[\frac{(tu_\varepsilon+u_0)^{q+1}-u_0^{q+1}}{q+1}-u_0^q(tu_\varepsilon)\right]dx\\ &\quad+\int_\Omega\left[\frac{(tu_\varepsilon+u_0)^{p+1}-u_0^{p+1}}{p+1}-u_0^p(tu_\varepsilon)\right]dx. \end{aligned} \tag{A.42}$$

De $(A.41)$ e $(A.40)$ temos

$$\begin{aligned} J_\lambda(tu_\varepsilon) &\leq \frac{t^2}{2}\parallel u_\varepsilon\parallel^2+C\int_\Omega(tu_\varepsilon)^{q+1}\,dx-\int_\Omega\frac{(tu_\varepsilon)^{p+1}}{p+1}\,dx+\frac{u_0^{p-1}}{2}\\ &= \frac{t^2}{2}\parallel u_\varepsilon\parallel^2+Ct^{q+1}\int_\Omega u_\varepsilon^{q+1}\,dx-\frac{t^{p+1}}{p+1}\int_\Omega u_\varepsilon^{p+1}\,dx-C\frac{t^2}{2}\int_\Omega u_\varepsilon^2\,dx\\ &= \frac{t^2}{2}\left(\parallel u_\varepsilon\parallel^2-C\parallel u_\varepsilon\parallel_2^2\right)-\frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega u_\varepsilon^{2^*}\,dx+Ct^{q+1}\int_\Omega u_\varepsilon^{q+1}\,dx. \end{aligned} \tag{A.43}$$

Assim,

$$J_\lambda(tu_\varepsilon)\leq\frac{1}{N}\left[\frac{\parallel u_\varepsilon\parallel^2-C\parallel u_\varepsilon\parallel_2^2}{\left(\int_\Omega u_\varepsilon^{2^*}\right)^{2/2^*}}\right]^{N/2}+Ct^{q+1}\int_\Omega u_\varepsilon^{q+1}\,dx. \tag{A.44}$$

Usando $(A.34)$, $(A.35)$, $(A.38)$ e $(A.39)$ temos

$$\begin{aligned} J_\lambda(tu_\varepsilon) &\leq \frac{1}{N}\left[\frac{S^{N/2}-C\varepsilon^2+O(\varepsilon^{N-2})}{\left(S^{N/2}+O(\varepsilon^\gamma)+O(\varepsilon^N)\right)^{2/2^*}}\right]^{N/2}+o_n(\varepsilon^2)\\ &= \frac{1}{N}\left[\frac{S^{N/2}-C\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)}{(S^{N/2}+o(\varepsilon^2))^{2/2^*}}\right]^{N/2}+o_n(\varepsilon^2)\\ &= \frac{S^{N/2}}{N}\left[1-C\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)\right]+o_n(\varepsilon^2)\\ &< \frac{S^{N/2}}{N} \end{aligned} \tag{A.45}$$

para ε suficientemente pequeno (com $N\geq 6$, e $\gamma>2$).

2. *Caso* $3\leq N\leq 5$

Usando $(A.38)$ e a segunda desigualdade do Lema A.5, temos

$$J_\lambda(tu_\varepsilon) \leq \frac{t^2}{2} \parallel u_\varepsilon \parallel^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*} \int_\Omega u_\varepsilon^{2^*}\, dx - C_0 \frac{t^p}{p} \parallel u_\varepsilon \parallel_p^p + o_n(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}).$$

Note que $\parallel u_\varepsilon \parallel_p^p = C_1 \varepsilon^{(N-2)/2} + O(\varepsilon^{(N+2)/2})$, $C_1 > 0$, segue que

$$\begin{aligned} J_\lambda(tu_\varepsilon) &\leq \frac{t^2}{2} S^{N/2} - \frac{t^{2^*}}{2^*} S^{N/2} - C\frac{t^p}{p} \varepsilon^{(N-2)/2} + o(\varepsilon^{(N-2)/2}) + O(\varepsilon^{(N+2)/2}) + O(\varepsilon^N) + O(\varepsilon^\gamma) \\ &= \frac{t^2}{2} S^{N/2} - \frac{t^{2^*}}{2^*} S^{N/2} - C\frac{t^p}{p} \varepsilon^{(N-2)/2} + o_n(\varepsilon^{(N-2)/2}) \end{aligned} \tag{A.46}$$

usando $(A.34)$, $(A.39)$ e que $\gamma > \dfrac{N-2}{2}$, chamando t_ε o máximo do lado direito para $t \in [0,1]$, logo t_ε satisfaz

$$S^{N/2} = t_\varepsilon^{2^*-2} S^{N/2} + t_\varepsilon^{2^*-3} C \varepsilon^{(N-2)/2} + o_n(\varepsilon^{(N-2)/2})$$

assim

$$t_\varepsilon = 1 - C\varepsilon^{(N-2)/2} t_\varepsilon^{2^*-3} + o_n(\varepsilon^{(N-2)/2}).$$

Então

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0,R]} J_\lambda(tu_\varepsilon) &\leq \frac{t_\varepsilon^2}{2} S^{N/2} - \frac{t_\varepsilon^{2^*}}{2^*} S^{N/2} - C t_\varepsilon^{2^*-3} \varepsilon^{(N-2)/2} + o_n(\varepsilon^{(N-2)/2}) \\ &= \frac{1}{2} S^{N/2} - \frac{1}{2^*} S^{N/2} - C t_\varepsilon^{2^*-3} \varepsilon^{(N-2)/2} + o_n(\varepsilon^{(N-2)/2}) \\ &= \frac{1}{N} S^{N/2} - C t_\varepsilon^{2^*-3} \varepsilon^{(N-2)/2} + o_n(\varepsilon^{(N-2)/2}) \\ &< \frac{1}{N} S^{N/2}, \end{aligned} \tag{A.47}$$

para ε suficientemente pequeno. Assim, $c_\lambda < \dfrac{1}{N} S^{N/2}$ completando a prova do Lema.

□

Lema A.7. $c_\lambda < \dfrac{S^{N/2}}{\parallel b \parallel_\infty^{\frac{N-2}{2}} N}$.

Demonstração. A demonstração é análoga à demonstração do Lema A.6.
Defina

$$v_\varepsilon(x) := \frac{C_N \varepsilon^{(N-2)/2}}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{(N-2)/2}}$$

onde $C_N = (N(N-2))^{(N-2)/4}$, assim v_ε satisfaz

$$-\Delta v_\varepsilon = v_\varepsilon^{2^*-1}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Agora, escolha uma função $\eta \in C_0^\infty(B_\rho(0))$ tal que $0 \leq \eta(x) \leq 1$ e $\eta(x) = 1$ para todo $x \in B_{\rho/2}(0)$, $\rho > 0$. E defina

$$u_\varepsilon(x) = \eta(x) v_\varepsilon(x),$$

para ε_0 suficientemente pequeno, existe $R > 0$ tal que $J_\lambda(Ru_\varepsilon) < 0$, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Isto é, se escrevemos $\gamma(t) = tRu_\varepsilon$, $t \in [0,1]$, logo $\gamma \in \Gamma$. Assim

$$c_\lambda \leq \max_{t\in[0,1]} J_\lambda(tu_\varepsilon).$$

Assim precisamos mostrar que

$$\max_{t\in[0,1]} J_\lambda(tu_\varepsilon) < \frac{S^{N/2}}{\| b \|_\infty^{\frac{(N-2)}{2}} N}.$$

Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} \| u_\varepsilon \|^2 &= S^{N/2} + O(\varepsilon^{N-2}) \\ \| u_\varepsilon \|_{2^*}^{2^*} &= S^{N/2} + O(\varepsilon^N) \end{aligned} \tag{A.48}$$

e para algumas constantes K_1, K_2 e K_3 temos

$$\| u_\varepsilon \|_2^2 = \begin{cases} K_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{N-2}), & N \geq 5, \\ K_2\varepsilon^2 |\ln \varepsilon^2| + O(\varepsilon^2), & N = 4, \\ K_3\varepsilon + O(\varepsilon^2), & N = 3. \end{cases} \tag{A.49}$$

Mais ainda

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u_\varepsilon|^{q+1}\,dx &\leq \int_{B_\varepsilon} \frac{(C_N\varepsilon)^{\frac{(N-2)}{2}(q+1)}}{\varepsilon^{(N-2)(q+1)}}\,dx + \int_{B_\rho\setminus B_\varepsilon} \frac{(C_N\varepsilon)^{\frac{(N-2)}{2}(q+1)}}{|x|^{(N-2)(q+1)}}\,dx \\ &\leq C\varepsilon^{\frac{(N-2)(1-q)+4}{2}} + C\varepsilon^{\frac{(N-2)}{2}(q+1)} \int_\varepsilon^\rho r^{q(2-N)+1}\,dr \end{aligned} \tag{A.50}$$

e assim,

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^{q+1}\,dx \leq \begin{cases} C\varepsilon^{\frac{(N-2)(1-q)+4}{2}} + C\varepsilon^{\frac{(N-2)}{2}(q+1)}, & q \neq \dfrac{2}{N-2}, \\ C\varepsilon^{\frac{(N-2)(1-q)+4}{2}} + C\varepsilon^{\frac{(N-2)}{2}(q+1)} + C\varepsilon^{\frac{(N-2)}{2}(q+1)}|\ln\varepsilon|, & q = \dfrac{2}{N-2}. \end{cases} \tag{A.51}$$

Então,

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^{q+1}\,dx \leq \begin{cases} o_n(\varepsilon^2), & N \geq 6, \\ o_n(\varepsilon^{(N-2)/2}), & 3 \leq N \leq 5. \end{cases} \tag{A.52}$$

Agora, note que

$$\int_{B_\rho(0)} b(x)u_\varepsilon^{2^*}\,dx = \| b \|_\infty \int_{B_\rho(0)} u_\varepsilon^{2^*}\,dx - \int_{B_\rho(0)} (\| b \|_\infty - b(x))u_\varepsilon^{2^*}\,dx.$$

Assim, utilizando a hipótese (b) e fazendo uma mudança de variáveis, temos

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(0)} (\| b \|_\infty - b(x))u_\varepsilon^{2^*}\,dx \leq \int_{B_\rho(o)} |x|^\gamma u_\varepsilon^{2^*}\,dx &= \int_{B_{\rho/\varepsilon}(0)} |\varepsilon x|^\gamma v_\varepsilon^{2^*}(\varepsilon x)\,dx + O(\varepsilon^N) \\ &= \varepsilon^\gamma \int_{B_{\rho/\varepsilon}(0)} \frac{|x|^\gamma C_N^{2^*}}{(1+|x|)^N}\,dx + O(\varepsilon^N) \\ &= O(\varepsilon^\gamma) + O(\varepsilon^N). \end{aligned} \tag{A.53}$$

Então
$$\int_{B_\rho(0)} b(x)u_\varepsilon^{2^*} = \| b \|_\infty u_\varepsilon^{2^*}\, dx = \| b \|_\infty \| u_\varepsilon \|_{2^*}^{2^*} + O(\varepsilon^\gamma) + O(\varepsilon^N).$$

Agora dividimos a prova em dois casos.

1. *Caso* $N \geq 6$.
   Note que temos (Ver Lema anterior)
$$a(x)\left[\frac{(tu_\varepsilon + u_0)^{q+1} - u_0^{q+1}}{q+1} - u_0^q(tu_\varepsilon)\right] \geq -C(tu_\varepsilon)^{q+1} \tag{A.54}$$
   e
$$b(x)\left[\frac{(tu_\varepsilon + u_0^p)^{p+1} - u_0}{p+1} - u_0^p(tu_\varepsilon)\right] \geq b(x)\left[\frac{(tu_\varepsilon)^{p+1}}{p+1} + u_0^{p-1}\frac{(tu_\varepsilon)^2}{2}\right], \tag{A.55}$$
   mas lembre-se que $p = 2^* - 1$. Então
$$\begin{aligned} J_\lambda(tu_\varepsilon) &= \frac{1}{2}t^2 \| u_\varepsilon \|^2 - \int_\Omega G(tu_\varepsilon)\, dx \\ &= \frac{t^2}{2} \| u_\varepsilon \|^2 - \int_\Omega a(x)\lambda\left[\frac{(tu_\varepsilon + u_0)^{q+1} - u_0^{q+1}}{q+1} - u_0^q(tu_\varepsilon)\right] dx \\ &+ \int_\Omega b(x)\left[\frac{(tu_\varepsilon + u_0)^{p+1} - u_0^{p+1}}{p+1} - u_0^p(tu_\varepsilon)\right] dx. \end{aligned} \tag{A.56}$$

   De $(A.55)$ e $(A.54)$ temos
$$\begin{aligned} J_\lambda(tu_\varepsilon) &\leq \frac{t^2}{2} \| u_\varepsilon \|^2 + C\int_\Omega (tu_\varepsilon)^{q+1}\, dx - \int_\Omega b(x)\frac{(tu_\varepsilon)^{p+1}}{p+1}\, dx + \frac{u_0^{p-1}}{2} \\ &= \frac{t^2}{2} \| u_\varepsilon \|^2 + Ct^{q+1}\int_\Omega u_\varepsilon^{q+1}\, dx - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_\Omega b(x)u_\varepsilon^{p+1} - C\frac{t^2}{2}\int_\Omega u_\varepsilon^2\, dx \\ &= \frac{t^2}{2}\left(\| u_\varepsilon \|^2 - C \| u_\varepsilon \|_2^2\right) - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega b(x)u_\varepsilon^{2^*} + Ct^{q+1}\int_\Omega u_\varepsilon^{q+1}\, dx. \end{aligned} \tag{A.57}$$

   Assim,
$$J_\lambda(tu_\varepsilon) \leq \frac{1}{N}\left[\frac{\| u_\varepsilon \|^2 - C \| u_\varepsilon \|_2^2}{\left(\int_\Omega b(x)u_\varepsilon^{2^*}\right)^{2/2^*} dx}\right]^{N/2} + Ct^{q+1}\int_\Omega u_\varepsilon^{q+1}\, dx. \tag{A.58}$$

Usando $(A.48)$, $(A.49)$, $(A.52)$ e $(A.53)$ temos

$$\begin{aligned} J_\lambda(tu_\varepsilon) &\leq \frac{1}{N}\left[\frac{S^{N/2} - C\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{N-2})}{\left(\| b \|_\infty S^{N/2} + O(\varepsilon^\gamma) + O(\varepsilon^N)\right)^{2/2^*}}\right]^{N/2} + o_n(\varepsilon^2) \\ &= \frac{1}{N}\left[\frac{S^{N/2} - C\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)}{(\| b \|_\infty S^{N/2} + o(\varepsilon^2))^{2/2^*}}\right]^{N/2} + o_n(\varepsilon^2) \\ &= \frac{S^{N/2}}{\| b \|_\infty^{\frac{N-2}{2}} N}\left[1 - C\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)\right] + o_n(\varepsilon^2) \\ &< \frac{S^{N/2}}{\| b \|_\infty^{\frac{N-2}{2}} N} \end{aligned} \tag{A.59}$$

para ε suficientemente pequeno (com $N \geq 6$, e $\gamma > 2$).

2. *Caso* $3 \leq N \leq 5$

$(A.38)$ e a segunda desigualdade do Lema A.5, temos

$$J_\lambda(tu_\varepsilon) \leq \frac{t^2}{2} \| u_\varepsilon \|^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega b(x) u_\varepsilon^{2^*}\, dx - C_0\frac{t^p}{p} \| u_\varepsilon \|_p^p + o_n(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}),\ C_0 > 0.$$

Note que $\| u_\varepsilon \|_p^p = C_1\varepsilon^{(N-2)/2} + O(\varepsilon^{(N+2)/2})$, $C_1 > 0$, segue que

$$\begin{aligned} J_\lambda(tu_\varepsilon) &\leq \frac{t^2}{2}S^{N/2} - \frac{t^{2^*}}{2^*} \| b \|_\infty S^{N/2} - C\frac{t^p}{p}\varepsilon^{(N-2)/2} + o(\varepsilon^{(N-2)/2}) + O(\varepsilon^{(N+2)/2}) + O(\varepsilon^N) + O(\varepsilon^\gamma) \\ &= \frac{t^2}{2} \| b \|_\infty S^{N/2} - \frac{t^{2^*}}{2^*}S^{N/2} - C\frac{t^p}{p}\varepsilon^{(N-2)/2} + o_n(\varepsilon^{(N-2)/2}) \end{aligned} \tag{A.60}$$

usando $(A.48)$, $(A.53)$ e que $\gamma > \dfrac{N-2}{2}$, chamando t_ε o máximo do lado direito para $t \in [0,1]$, logo t_ε satisfaz

$$S^{N/2} = t_\varepsilon^{2^*-2} \| b \|_\infty S^{N/2} + t_\varepsilon^{2^*-3}C\varepsilon^{(N-2)/2} + o_n(\varepsilon^{(N-2)/2})$$

assim

$$t_\varepsilon = \frac{1}{\| b \|_\infty^{\frac{N-2}{4}}} - C\varepsilon^{(N-2)/2}t_\varepsilon^{2^*-3} + o_n(\varepsilon^{(N-2)/2}).$$

Então

$$\begin{aligned} \max_{t\in[0,R]} J_\lambda(tu_\varepsilon) &\leq \frac{t_\varepsilon^2}{2}S^{N/2} - \frac{t_\varepsilon^{2^*}}{2^*} \| b \|_\infty S^{N/2} - Ct_\varepsilon^{2^*-3}\varepsilon^{(N-2)/2} + o_n(\varepsilon^{(N-2)/2}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{S^{N/2}}{\| b \|_\infty^{\frac{N-2}{2}}} - \frac{1}{2^*}\frac{S^{N/2}}{\| b \|_\infty^{\frac{N-2}{2}}} - Ct_\varepsilon^{2^*-3}\varepsilon^{(N-2)/2} + o_n(\varepsilon^{(N-2)/2}) \\ &= \frac{1}{N}\frac{S^{N/2}}{\| b \|_\infty^{\frac{N-2}{2}}} - Ct_\varepsilon^{2^*-3}\varepsilon^{(N-2)/2} + o_n(\varepsilon^{(N-2)/2}) \\ &< \frac{1}{N}\frac{S^{N/2}}{\| b \|_\infty^{\frac{N-2}{2}}}, \end{aligned} \tag{A.61}$$

para ε suficientemente pequeno. Assim, $c_\lambda < \dfrac{1}{N}S^{N/2}$ completando a prova do Lema.

□

Considerando o seguinte problema

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & x \in \Omega, \\ u \geq 0,\, u \neq 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Onde, Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ e $f : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory.

Definição A.8 (Sublinearidade). *Dizemos que o Problema (P) é sublinear no 0 se existe $\alpha > \lambda_1(\Omega)$ e $s_0 > 0$ tal que*

$$f(x,s) \geq \alpha s, \quad \text{para quase todo ponto em } \Omega \ \text{ e todo } 0 \leq s \leq s_0.$$

Onde $\lambda_1(\Omega)$ denota o primeiro autovalor de $-\Delta$ sobre H.

Definição A.9 (Superlinearidade). *Dizemos que o Problema (P) é superlinear no ∞ se existe $\beta > \lambda_1(\Omega)$ e $s_1 \geq 0$ tal que*

$$f(x,s) \geq \beta s, \quad \text{para quase todo ponto em } \Omega \ \text{ e todo } s \geq s_1.$$

Proposição A.2. *Sejam Ω um domínio limitado e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory. Suponha que existam $1 \leq \sigma < 2^* - 1$, $d_1 \in L^{\sigma'}(\Omega)$ e $d_2 > 0$ tais que*

$$|f(x,s)| \leq d_1(x) + d_2|s|^{\sigma-1}$$

em quase todo ponto de Ω e para todo $s \in \mathbb{R}$. Ent ao o funcional J definido como $J(u) = \int_\Omega F(x,u)\,dx$ com $F(x,u) = \displaystyle\int_0^u f_\lambda(x,t)\,dt$ é de classe C^1 de H em $\mathbb{R}$, com

$$J'(u)v = \int_\Omega f(x,u)v\,dx$$

para todo $v \in H$. Além disso,

$$J' : H \to H^{-1}$$

é compacto.

A.4 Funcionais com simetria e teoria de índice

As aplicações mais notáveis dos métodos de minimax são resultados que garantem a existência de múltiples pontos críticos de funcionais os quais são invariante sob a ação de um grupo de simetrias. Nesta seção apresentaremos algumas ferramentas para tratar o estudo da multiplicidade de soluções. Para isso, seja E um espaço de Banach real, $\mathcal{G}$ um grupo de aplicações de E sobre E, e $I \in C^1(E,\mathbb{R})$. Dizemos que I é invariante por $\mathcal{G}$ se $I(gu) = I(u)$ para tudo $g \in \mathcal{G}$ e $u \in E$. Como exemplo, suponha que I é par, isto é, $I(u) = I(-u)$ para tudo $u \in E$. Logo I é invariante por $\mathcal{G} = \{id, -id\} \simeq \mathbb{Z}_2$.

Definição A.4.1. *(Ver [21]) Seja E um espaço de Banach real e seja $\mathcal{E}$ que denota a família de conjuntos $A \subset E \setminus \{0\}$ tal que A é fechado em E e é simétrica com respeito a 0, isto é, $x \in A$ implica que $-x \in A$. Para $A \in \mathcal{E}$, definimos o gênero de A, como sendo n (denotado por $\gamma(A) = n$) se existe uma aplicação* *par $\varphi \in C(A, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ e n é o inteiro mais pequeno que satisfaz esta propriedade. Se não existir tal n finito, dizemos que $\gamma(A) = \infty$. Além disso, definimos que $\gamma(\emptyset) = 0$.*

Observação A.1. *Se $A \in \mathcal{E}$ e $\gamma(A) > 1$, logo A contém infinitos pontos distintos.*

As principais propriedades do gênero são coletados na seguinte proposição. Para $A \in \mathcal{E}$ e $\delta > 0$, seja $N_\delta(A)$ que denota uma $\delta-$vizinhança uniforme de A, isto é, $N_\delta(A) = \{x \in E \,|\, \| x - A \| \leq \delta\}$.

Proposição A.3. *(Ver [21]) Seja $A, B \in \mathcal{E}$. Logo,*

1. *Se $x \neq 0$, $\gamma(\{x\} \cup \{-x\}) = 1$;*

2. *Se existe uma aplicação par $f \in C(A, B)$ logo $\gamma(A) \leq \gamma(B)$;*

3. *Se $A \subset B$, $\gamma(A) \leq \gamma(B)$;*

4. *Se A é compacto, $\gamma(A) < \infty$ e existe um $\delta > 0$ é tal que $N_\delta(A) \in \mathcal{E}$ e $\gamma(N_\delta(A)) = \gamma(A)$.*

No seguinte resultado, calculamos o gênero de uma importante classe de conjuntos.

Proposição A.4. *(Ver [21]) Se $A \subset \mathcal{E}$, Ω é uma vizinhança simétrica e limitada de 0 em $\mathbb{R}^k$, e existe uma aplicação $h \in C(A, \partial\Omega)$ com h um homeomorfismo ímpar, logo $\gamma(A) = k$.*

Corolário A.1. *$\gamma(S^{m-1}) = m$.*

Teorema A.15. *(Ver[21]) Se $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ funcional par , logo $I|_{S^{m-1}}$ tem ao menos m pares de pontos críticos distintos.*

Apêndice

$\mathcal{B}$

Teorema do Passo da Montanha

B.1 Lema de Deformação Quantitativo

O lema da deformação é um resultado que garante a existência de uma aplicação $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que, dado $\varepsilon > 0$ pequeno, podemos deformar o conjunto $I^{c+\varepsilon}$ no conjunto $I^{c-\varepsilon}$, onde aqui c é um valor regular de I, isto é, não existe pontos críticos do funcional I no nível c. No sentido topológico, os conjuntos $I^{c+\epsilon}$ e $I^{c-\epsilon}$ são iguais. O lema de deformação que aqui apresentaremos é devido a Willem [25]. Para um melhor entendimento, fixaremos uma notação, isto é, iremos denotar por X um espaço de Banach com norma $\| \cdot \|$, denotaremos também por $\| \cdot \|_{X'}$ a norma no dual de X e por $| \cdot |_p$ a norma em $L^p(\Omega)$ e para todo número real d e $I : X \to \mathbb{R}$, definimos $I^d = \{u \in X : I(u) \leq d\}$. Para o estudo do Lema de Deformação Quantitativo vamos a precisar do seguinte resultado.

B.1.1 Campo Pseudo-Gradiente

Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que $v \in X$ é um vetor pseudo-gradiente para I em $u \in \tilde{X} = \{w \in X \, : \, I'(w) \neq 0\}$ se

$$\| v \| \leq 2 \| I'(u) \|_{X'} \qquad \text{e} \qquad I'(u)v \geq \| I'(u) \|_{X'}^2 .$$

Um campo pseudo-gradiente para I em X é uma aplicação $V : \tilde{X} \to X$ tal que

(a) V é localmente Lipschitziana;

(b) para cada $u \in \tilde{X}$, $V(u)$ é um vetor pseudo-gradiente para I.

Lema B.1. *Se $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ então existe um campo pseudo-gradiente para I em $\tilde{X}$.*

Demonstração. Dado $u \in \tilde{X}$ existe, por definição, $w \in X$ tal que $\| w \|_X = 1$ e

$$I'(u)w > \frac{2}{3} \| I'(u) \|_{X'} .$$

Então $z = \frac{3}{2} \parallel I'(u) \parallel w$ é um vetor pseudo-gradiente para I em u. De fato,

$$\parallel z \parallel = \frac{3}{2} \parallel I'(u) \parallel_{X'} \parallel w \parallel = \frac{3}{2} \parallel I'(u) \parallel_{X'} < 2 \parallel I'(u) \parallel_{X'}$$

e

$$I'(u)z = \frac{3}{2} \parallel I'(u) \parallel_{X'} I'(u)w > \frac{3}{2} \parallel I'(u) \parallel_{X'} \frac{2}{3} \parallel I'(u) \parallel_{X'} = \parallel I'(u) \parallel_{X'}^2 .$$

Pela continuidade de I', existe uma vizinhança N_u de u tal que para todo $v \in N_u$

$$I'(v)z \geq \parallel I'(v) \parallel_{X'}^2, \quad \text{e} \quad \parallel z \parallel \leq 2 \parallel I'(v) \parallel_{X'} . \tag{B.1}$$

Note que a família $\mathcal{N} = \{N_u\}_{u \in \tilde{X}}$ é uma cobertura aberta de $\tilde{X}$. Como $\tilde{X}$ é um espaço métrico, então é paracompacto (ver Apêndice A, definição A.1). Logo, existe uma cobertura $\mathcal{M} = \{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de $\tilde{X}$, aberta e localmente finita que refina $\mathcal{N}$, isto é, para cada $u \in \tilde{X}$ existem índices $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ e uma vizinhança W_u de u tal que $W_u \cap M_\lambda \neq \emptyset$ com $\lambda \in \Lambda_n = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, ou seja, a intersecção citada é não vazia apenas para um número finito de índices λ. Além disso, para cada $M_\lambda \in \mathcal{M}$ existe $N_u \in \mathcal{N}$ tal que $M_\lambda \subset N_u$. Seja z_λ um vetor pseudo-gradiente para I em M_λ. Então $z_\lambda = z$ satisfaz $(B.1)$ para cada $u \in M_\lambda$.

Seja agora $d_\lambda(u)$ a distância de u ao complemento de M_λ. Então a função d_λ é Lipschitziana e além disso $supp(d_\lambda) \subseteq M_\lambda$. Defina

$$f_\lambda(u) = \frac{d_\lambda u}{\sum\limits_{k \in \Lambda_n} d_k(u)}.$$

Observe que f_λ está bem definida, pois para cada $u \in \tilde{X}$, $\sum_{k \in \Lambda_n} d_k(u) < \infty$ é não nulo. Além disso como o refinamento é localmente finito, tem-se que, $0 \leq f_\lambda \leq 1$ e para cada $u \in \tilde{X}$,

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(u) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{d_\lambda(u)}{\sum_{k \in \Lambda_n} d_k(u)} = 1. \tag{B.2}$$

Verifiquemos agora que

$$V(u) := \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(u) z_\lambda$$

é um campo pseudo-gradiente para I em $\tilde{X}$. Temos por $(B.1)$ e $(B.2)$ que

$$\parallel V(u) \parallel \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \left| d_\lambda(u) / \sum_{k \in \Lambda_n} d_k(u) \right| \parallel z \parallel < 2 \parallel I'(u) \parallel_{X'}, \tag{B.3}$$

e novamente de $(B.1)$ segue que

$$\begin{aligned} I'(u)V(u) &= I'(u) \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(u) z_\lambda \\ &= \frac{3}{2} \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(u) \parallel I'(u) \parallel_{X'} I'(u)w \\ &\geq \parallel I'(u) \parallel_{X'}^2, \end{aligned}$$

ou seja

$$I'(u)V(u) \geq \parallel I'(u) \parallel_{X'}^2 . \tag{B.4}$$

Portanto, segue de $(B.3)$ e $(B.4)$ que V é um campo pseudo-gradiente para I em $\tilde{X}$. Resta mostrar que V é localmente Lipschitziana. Para isso, basta observar que V é uma soma finita de funções localmente Lipchitzianas, visto que a cobertura $\mathcal{M}$ de $\tilde{X}$ é um refinamento localmente finito de $\mathcal{N}$ e as funções d_λ são localmente Lipschitzianas. Portanto, V é um campo pseudo-gradiente para I em $\tilde{X}$.

□

Lema B.2. ***(Lema de Deformação Quantitativo)*** *Sejam X um espaço de Banach, $S \subseteq X$, $\delta > 0$ e defina*

$$S_\delta = \{u \in X \, : \, dist(u, S) \leq \delta\}.$$

Sejam $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$\| I'(u) \|_{X'} \geq \frac{4\varepsilon}{\delta}, \, \forall u \in I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}. \tag{B.5}$$

Então existe uma função $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ de tal forma que:

1. $\eta(0, u) = u, \ \forall \, u \in X;$
2. $\eta(t, u) = u, \ \forall \, (t, u) \notin [0,1] \times I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]);$
3. $\eta(1, I^{c+\varepsilon} \cap S) \subseteq I^{c-\varepsilon} \cap S_\delta.$

Demonstração. Seja $\tilde{X} = \{u \in X \, : \, I'(u) \neq 0\}$. Pelo Lema B.1 temos que existe um campo pseudo-gradiente para I em $\tilde{X}$, isto é, uma aplicação

$$v \, : \, \tilde{X} \to X$$

tal que, para todo $u \in \tilde{X}$,

(D1) $\| v(u) \|_X \leq 2 \| I'(u) \|_{X'}$;

(D2) $I'(u)v(u) \geq \| I'(u) \|^2_{X'}$.

Defina

$$A = I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta} \quad \text{e} \quad B = I^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap S_{2\delta}$$

e $\psi \, : \, X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(u) = \frac{d(u, X \setminus A)}{d(u, X \setminus A) + d(u, B)}.$$

Note que

$$0 \leq \psi \leq 1, \, \psi \equiv 0 \text{ em } X \setminus A \text{ e } \psi \equiv 1 \text{ em } B.$$

Mostraremos que ψ é localmente Lipschitziana. De fato, considere $u_1, u_2 \in X$ e denotaremos, para $i = 1, 2$,

$$d^i_{u,X,A} = d(u_i, X \setminus A) \text{ e } d^i_{u,B} = d(u_i, B).$$

Logo

$$
\begin{aligned}
|\psi(u_1)-\psi(u_2)=\Big| & \frac{\left(d^2_{u,X,A}+d^2_{u,B}\right)d^1_{u,X,A}-\left(d^1_{u,X,A}+d^1_{u,B}\right)d^2_{u,X,A}}{\left(d^1_{u,X,A}+d^1_{u,B}\right)\left(d^2_{u,X,A}+d^2_{u,B}\right)}\Big| \\
= \Big| & \frac{d^1_{u,X,A}d^2_{u,B}-d^2_{u,X,A}d^1_{u,B}}{\left(d^1_{u,X,A}+d^1_{u,B}\right)\left(d^2_{u,X,A}+d^2_{u,B}\right)}\Big| \\
= \Big| & \frac{d^1_{u,X,A}d^2_{u,B}-d^2_{u,X,A}d^2_{u,B}+d^2_{u,X,A}d^2_{u,B}-d^2_{u,X,A}d^1_{u,B}}{\left(d^1_{u,X,A}+d^1_{u,B}\right)\left(d^2_{u,X,A}+d^2_{u,B}\right)}\Big| \\
= \Big| & \frac{d^2_{u,B}\left(d^1_{u,X,A}-d^2_{u,X,A}\right)+d^2_{u,X,A}\left(d^2_{u,B}-d^1_{u,B}\right)}{\left(d^1_{u,X,A}+d^1_{u,B}\right)\left(d^2_{u,X,A}+d^2_{u,B}\right)}\Big|.
\end{aligned}
$$

Desde que a função distância é uma contração fraca, veja [14][Ex.3, pag.31] temos que

$$
|d^1_{u,X,A}-d^2_{u,X,A}| \leq \| u_1-u_2 \| \quad \text{e} \quad |d^2_{u,B}-d^1_{u,B}| \leq \| u_1-u_2 \| \ .
$$

Logo,

$$
|\psi(u_1)-\psi(u_2)| \leq \frac{\| u_1-u_2 \| \, d^2_{u,B} + \| u_1-u_2 \| \, d^2_{u,X,A}}{\left(d^1_{u,X,A}+d^1_{u,B}\right)\left(d^2_{u,X,A}+d^2_{u,B}\right)} = \frac{\| u_1-u_2 \|}{d^1_{u,X,A}+d^1_{u,B}}.
$$

Utilizando o fato de que a função distância é localmente Lipschitziana. Temos que, para qualquer que seja $w \in X$,

$$
d^1_{w,X,A}+d^1_{w,B} > 0.
$$

Logo, existe uma constante $k>0$ e uma vizinhança W de w tal que

$$
d^1_{\overline{w},X,A}+d^1_{\overline{w},B} \geq \frac{1}{k} > 0 \ \text{ para todo } \ \overline{w} \in W.
$$

Assim,

$$
|\psi(u_1)-\psi(u_2)| \leq k \, \| u_1-u_2 \| \tag{B.6}
$$

dessa forma ψ é localmente Lipschitziana.

Definimos agora a função $\Phi : X \to X$ por

$$
\Phi(u) = \begin{cases} -\psi(u)\dfrac{v(u)}{\| v(u) \|^2}, & u \in A, \\ 0, & u \in \overline{X \setminus A}. \end{cases}
$$

Por $(D2)$ e por $B.1$ temos

$$
\| \Phi(u) \| \leq \frac{1}{\| v(u) \|} \leq \frac{1}{\| I'(u) \|} \leq \frac{\delta}{4\varepsilon}. \tag{B.7}
$$

Note que, dado $u \in X$ existe uma vizinhança B_u tal que ψ e v são localmente Lipschitzianas em B_u. Agora considere $u_1,\, u_2 \in B_u$ e sejam

$$f(u_i) = \frac{v(u_i)}{\| v(u_i) \|^2} \quad \text{e} \quad f_i(u_j) = \frac{v(u_i)}{\| v(u_j) \|^2} \quad \text{para} \quad i, j = 1, 2.$$

Logo, se $u_1, u_2 \in \overline{X \setminus A}$, temos,

$$\| \Phi(u_1) - \Phi(u_2) \| = 0 \leq \| u_1 - u_2 \| .$$

Se considerarmos $u_1 \in A$ e $u_2 \in \overline{X \setminus A}$, obtemos que,

$$\begin{aligned}
\| \Phi(u_1) - \Phi(u_2) \| &= \| -\psi(u_1) f(u_1) \| \\
&= \| -\psi(u_1) f(u_1) + \psi(u_2) f(u_1) \| \\
&\leq \frac{\delta}{4\varepsilon} |\psi(u_1) - \psi(u_2)| \quad \text{por } B.7 \\
&\leq \frac{k\delta}{4\varepsilon} \| u_1 - u_2 \| \quad \text{por } B.6 \\
&= k_1 \| u_1 - u_2 \| .
\end{aligned}$$

Assim, se $u_1, u_2 \in A$, então

$$\begin{aligned}
\| \Phi(u_1) - \Phi(u_2) \| &= \| -\psi(u_1) f(u_1) + \psi(u_2) f(u_2) \| \\
&= \| -\psi(u_1) f(u_1) + \psi(u_1) f(u_2) - \psi(u_1) f(u_2) + \psi(u_2) f(u_2) \| \\
&\leq \| f(u_1) - f(u_2) \| + \frac{\delta}{4\varepsilon} |\psi(u_1) - \psi(u_2)| \\
&\leq \| f(u_1) - f_1(u_2) \| + \| f_1(u_2) - f(u_2) \| + \frac{\delta}{4\varepsilon} |\psi(u_1) - \psi(u_2)|.
\end{aligned}$$

Agora usando a desigualdade de Cauchy- Schwarz segue que

$$\begin{aligned}
\| f(u_1) - f_1(u_2) \| &\leq \| v(u_1) \| \left| \frac{\| v(u_2) \|^2 - \| v(u_1) \|^2}{\| v(u_1) \|^2 \| v(u_2) \|^2} \right| \\
&= \frac{| \langle v(u_2) - v(u_1), v(u_2) + v(u_1) \rangle |}{\| v(u_1) \| \| v(u_2) \|^2} \\
&\leq \frac{\| v(u_1) + v(u_2) \|}{\| v(u_1) \| \| v(u_2) \|^2} \| v(u_1) - v(u_2) \| \\
&\leq k_2 \| u_1 - u_2 \|,
\end{aligned}$$

já que v é localmente Lipschitziana. Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
\| f_1(u_2) - f(u_2) \| &= \left\| \frac{v(u_1)}{\| v(u_2) \|^2} - \frac{v(u_2)}{\| v(u_2) \|^2} \right\| \\
&\leq \frac{\delta^2}{16\varepsilon^2} \| v(u_1) - v(u_2) \| \\
&\leq k_3 \| u_1 - u_2 \|
\end{aligned}$$

e, como

$$\frac{\delta}{4\varepsilon} |\psi(u_1) - \psi(u_2)| \leq k_1 \| u_1 - u_2 \|$$

concluímos que

$$\| \Phi(u_1) - \Phi(u_2) \| \leq C \| u_1 - u_2 \|$$

onde $C = k_1 + k_2 + k_3$. Portanto Φ é localmente Lipschitziana.

Considere agora o seguinte problema de Cauchy em espaços de Banach,

$$(P)_u \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\sigma(t,u) &= \Phi(\sigma(t,u), \\ \sigma(0,u) &= u. \end{cases}$$

Como Φ é localmente Lipschitziana, temos que, para cada $u \in X$, o problema acima tem uma única solução contínua $\sigma(\cdot,u)$ definida para t em um intervalo maximal (t_u^-, t_u^+).

Afirmação B.1. $t_u^{\pm} = \pm\infty$.

De fato, seja σ a solução de $(P)_u$ e suponhamos que $t_u^+ < \infty$. Considere também uma sequência $(t_n) \subset (-\infty, t_u^+)$ tal que $t_n \to t_u^+$. Logo da limitação de Φ, temos que

$$\| \sigma(t_m,u) - \sigma(t_n,u) \| = \left\| \int_{t_n}^{t_m} \frac{d}{d\xi}\sigma(\xi,u)\, d\xi \right\| = \left\| \int_{t_n}^{t_m} \Phi(\sigma(\xi,u))\, d\xi \right\| \leq C|t_m - t_n|.$$

Como $(t_n) \subset \mathbb{R}$ é uma sequência de Cauchy, então $(\sigma(t_n,u))$ também o é. Daí

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(t_n,u) = \tilde{u} \in X.$$

Considerando o problema de Cauchy em espaços de Banach

$$(P)_{\tilde{u}} \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\sigma(t,u) &= \Phi(\sigma(t,u), \\ \sigma(t_u^+,u) &= \tilde{u}, \end{cases}$$

podemos usar o Teorema de Picard para estender σ em um intervalo do tipo $(t_u^+ - k_1, t_u^+ + k_1)$, contradizendo a maximalidade de t_u^+. A prova para t_u^- a ideia é totalmente análoga.

A dependência contínua de soluções de $(P)_u$ com relação aos dados iniciais implica que $\sigma \in C(\mathbb{R} \times X, X)$. Desse modo, podemos definir a deformação

$$\eta : [0,1] \times X \to X \quad \text{tal que} \quad \eta(t,u) = \sigma(\delta t, u).$$

Verifiquemos as condições $(1) - (3)$. Pela própria definição da função η temos que $\eta(0,u) = u$ para todo $u \in X$. Logo η satisfaz (1). Para verificar (2), observe que $\Phi \equiv 0$ em $X \setminus A$ e portanto $\sigma(t,u) = u$ é solução de $(P)_u$, segue que $\eta(t,u) = u$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Para verificarmos (3) seja $t > 0$ e $u \in X$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos que

$$\begin{aligned} \| \sigma(\delta t,u) - u \| &= \| \int_0^{\delta t} \frac{d}{ds}\sigma(s,u)\, ds \| \\ &\leq \int_0^{\delta t} \| \frac{d}{ds}\sigma(s,u) \|\, ds \\ &= \int_0^{\delta t} \| \Phi(\sigma(s,u)) \|\, ds \\ &\leq \delta t. \end{aligned}$$

Logo, para todo $t \in [0,1]$ temos

$$\| \sigma(\delta t, u) - u \| \leq \delta.$$

Assim,

$$\min_{t\in[0,1]} \| \sigma(\delta t, u) - u \| \leq \delta,$$

verificando que, para todo $u \in S$, $\sigma(\delta t, u) \in S_{\delta.}$ Dessa forma $\sigma(\delta, S) \subseteq S_\delta$. Note que se $\sigma(t,u) \notin A$, $\psi(\sigma(t,u)) = 0$ e consequentemente $\dfrac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) = 0$. Caso contrário,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) &= I'(\sigma(t,u))\frac{d}{dt}\sigma(t,u) \\
&= I'(\sigma(t,u))\Phi(\sigma(t,u)) \\
&= -\frac{\psi(\sigma(t,u))}{\| v(\sigma(t,u)) \|} I'(\sigma(t,u))v(\sigma(t,u)).
\end{aligned}$$

Como ψ é não negativa e de $(D2)$, temos que

$$I'(\sigma(t,u))v(\sigma(t,u)) \geq 0,$$

logo

$$\frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) \leq 0.$$

Assim concluímos que $I(\eta(\cdot,u))$ é não crescente para todo $u \in X$. Tomando agora $u \in I^{c+\varepsilon} \cap S$, vamos dividir a prova em dois passos:

Passo 1: Existe $t_0 \in [0, \delta)$ tal que $I(\eta(t_0,u)) < c - \varepsilon$.

Como $I(\eta(\cdot,u))$ é não-crescente, tem-se que

$$I(\eta(t,u)) < c - \varepsilon \, , \, \forall \, t \geq t_0$$

e portanto

$$\eta(1,u) = \sigma(\delta,u) \in I^{c-\varepsilon}.$$

Como $\sigma(\delta,S) \subseteq S_\delta$ obtemos que

$$\eta(1,u) = \sigma(\delta,u) \in I^{c-\varepsilon} \cap S_\delta.$$

Passo 2: Para todo $t \in [0, \delta\,)$ temos,

$$c - \varepsilon \leq I(\sigma(t,u)) \leq I(\sigma(0,u)) = I(u) \leq c + \varepsilon.$$

Logo

$$\sigma(t,u) \in B.$$

Assim, usando que $\psi \equiv 1$ em B, $(D1)$, $(D2)$ e $(B.1)$, obtemos

$$\begin{aligned}
I(\sigma(\delta,u)) &= I(\sigma(0,u)) + \int_0^\delta \frac{d}{ds} I(\sigma(s,u))\,ds \\
&= I(u) + \int_0^\delta I'(\sigma(s,u))\Phi(\sigma(s,u))\,ds \\
&= I(u) - \int_0^\delta I'(\sigma(s,u))\psi(\sigma(s,u)) \frac{v(\sigma(s,u))}{\| v(\sigma(s,u)) \|}\,ds \\
&= I(u) - \int_0^\delta \frac{I'(\sigma(s,u))v(\sigma(s,u))}{\| v(\sigma(s,u)) \|}\,ds \\
&\leq I(u) - \int_0^\delta \frac{\| I'(\sigma(s,u)) \|^2}{\| v(\sigma(s,u)) \|}\,ds \\
&\leq I(u) - \frac{1}{2}\int_0^\delta \| I'(\sigma(s,u)) \|\,ds \\
&\leq I(u) - \frac{1}{2}\int_0^\delta \frac{4\epsilon}{\delta}\,ds \\
&= I(u) - 2\varepsilon \\
&\leq c - \varepsilon.
\end{aligned}$$

verificando assim o item (3) e concluindo a prova do Lema. □

B.2 O Teorema do Passo da Montanha

O Teorema do Passo da Montanha, devido a Ambrosetti−Rabinowitz [3], é uma importante ferramenta para obtenção de pontos críticos para funcionais $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Conforme veremos mais em diante, é possível escolher I de tal forma que seus pontos críticos sejam soluções de certas equações diferencias parciais.

Como estamos interessados em obter pontos críticos para um dado funcional $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, precisamos provar alguma propiedade de compacidade para o mesmo.

Dizemos que $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$ que denotaremos por $(PS)_c$ se toda sequência $(u_n) \subseteq X$ satisfazendo,

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = c \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} \| I'(u_n) \|_{X'} = 0, \tag{B.8}$$

possui subsequência convergente. A uma sequência (u_n) cumprindo $(B.4)$, chamamos de sequência de Palais- Smale no nível c.

A condição de compacidade que usaremos, a apresentada acima, se deva a Brezis e Niremberg (ver [7]). Sua versão original foi introduzida por Palais-Smale.

Proposição B.1. *Seja $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ tal que $I(0) = 0$ e,*

(I_1) *existem $\rho, \alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$;*

(I_2) *existe $e \in X$ tal que $\| e \|_X > \rho$ e $I(e) < 0$.*

Seja

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$$

onde

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X) \,:\, \gamma(0) = 0 \;\; e \;\; \gamma(1) = e\}.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $u \in X$ tal que

(i) $u \in I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$;

(ii) $\| I'(u) \|_{X'} \leq 2\varepsilon$.

Demonstração. Seja $e \in X$ dado por (I_2) e $\gamma \in \Gamma$. Então $e \notin B_\rho(0)$ e, como $\gamma \in \Gamma$, existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $\gamma(t_0) \in \partial B_\rho(0)$. Assim $\gamma([0,1]) \cap \partial B_\rho(0) \neq \emptyset$. Logo, por (I_1), temos que

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \geq \inf_{w\in\partial B_\rho(0)} I(w) \geq \alpha.$$

Tomando o ínfimo para $\gamma \in \Gamma$, concluímos que $c \geq \alpha \geq 0$.

Suponha, por contradição, que a proposição seja falsa. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\| I'(u) \|_{X'} > 2\varepsilon$ para todo $u \in I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$.

Observe que a afirmação acima permanece válida se subtituirmos ε por ε_0 tal que $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$. Logo, podemos supor que ε é pequeno de modo que $c - 2\varepsilon > 0$. Estamos então nas hipóteses do Lema B.1, considerando $S = X$ e $\delta = 2$. Assim, existe uma função contínua $\eta : [0,1] \times X \to X$ satisfazendo:

(i) $\eta(1, u) = u\,, \forall\, u \notin I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$;

(ii) $\eta(1, I^{c+\varepsilon}) \subseteq I^{c-\varepsilon}$.

Pela definição de c, existe $\tilde{\gamma} \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} I(\tilde{\gamma}) \leq c + \varepsilon. \tag{B.9}$$

Defina agora $h : [0,1] \to X$ por

$$h(t) = \eta(1, \widetilde{\gamma(t)}).$$

Observe que $h \in C([0,1], X)$ pois $\eta \in C([0,1] \times X, X)$. Como $\tilde{\gamma} \in \Gamma$, temos que, $\tilde{\gamma}(0) = 0$, $\tilde{\gamma}(1) = e$ e além disso, como $I(e) < c - 2\varepsilon$, segue de (i) que

$$h(0) = \eta(1, \widetilde{\gamma(0)}) = \eta(1, 0) = 0$$

e

$$h(1) = \eta(1, \tilde{\gamma}(1)) = \eta(1, e) = e,$$

onde concluímos que $h \in \Gamma$. Assim, temos que

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} I(h(t)). \tag{B.10}$$

Usando (ii) e $(B.5)$ obtemos

$$h(t) = \eta(1, \tilde{\gamma}(t)) \in I^{c-\varepsilon}\,, \;\text{ para todo } t \in [0,1].$$

Desta forma

$$\max_{t\in[0,1]} I(h(t)) \leq c - \varepsilon. \tag{B.11}$$

Logo, de $(B.6)$ e $(B.7)$, concluímos que

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} I(h(t)) \leq c - \varepsilon,$$

o que é um absurdo. □

Corolário B.1. *Sob as hipóteses da Proposição $B.1$, existe uma sequência de Palais- Smale no nível c para I.*

Demonstração. Note que pela Proposição $B.1$, para cada $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$, existe $u_n \in X$ de modo que

(i) $u_n \in I^{-1}\left([c - 2/n, c + 2/n]\right);$

(ii) $\| I'(u_n) \|_{X'} \leq 2/n$.

Então,

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = c \ \text{ e } \lim_{n\to\infty} \| I'(u_n) \|_{X'} = 0,$$

e portanto existe uma sequência de Palais−Smale no nível c. □

Agora estamos em condições de demonstrar o

Teorema B.1 (Teorema do Passo da Montanha). *Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ tal que $I(0) = 0$ e*

(I_1) *existem $\rho, \alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$;*

(I_2) *existe $e \in X$ tal que $\| e \|_X > \rho$ e $I(e) < 0$.*

Suponha que I satisfaz $(PS)_c$ com

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$$

onde $\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X),\ \gamma(0) = 0 \ \text{ e } \ \gamma(1) = e\}$. Então existe $u \neq 0$ tal que $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$.

Demonstração. Pelo Corolário $B.1$ existe uma sequência de Palais-Smale $(u_n) \subseteq X$ no nível c. Como I satisfaz $(PS)_c$, a menos de subsequência, $u_n \to u \in X$. Como $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, devemos necessariamente ter $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$. logo c é um valor crítico de I. Além disso, como $I(0) = 0$ e $I(u) = c > 0$, devemos ter $u \not\equiv 0$. □

Apêndice

C

Sub e supersolução

Antes de enunciarmos o Teorema de Sub- Supersolução, definamos sub e supersolução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{C.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, é um domínio regular e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de clase C^α.

Quando falamos de solução de $(C.1)$ estamos nos referindo, a menos que se diga algo contrário, à solução clássica, isto é, uma função $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisfaz $(C.1)$.

Definição C.0.1. *Uma função $\underline{U} \in C^2(\overline{\Omega})$ é dita uma subsolução do problema $(C.1)$ se*

$$\begin{cases} -\Delta \underline{U} \leq f(\underline{U}), & x \in \Omega, \\ \underline{U} \leq 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{C.2}$$

Definição C.0.2. *Uma função $\overline{U} \in C^2(\overline{\Omega})$ é dita uma supersolução do problema $(C.1)$ se*

$$\begin{cases} -\Delta \overline{U} \geq f(\overline{U}), & x \in \Omega, \\ \overline{U} \geq 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{C.3}$$

Teorema C.1. *Suponhamos que o problema $(C.1)$ possua uma subsolução $\underline{U}$ e uma supersolução $\overline{U}$, com $\underline{U} \leq \overline{U}$ em Ω. Suponhamos, ainda, que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja de classe C^α e*

$$f(t_1) - f(t_2) \geq -k(t_1 - t_2), \tag{C.4}$$

para alguma constante $k \geq 0$ e para todo $t_1 \geq t_2$, $|t_1|$, $|t_2| \leq \max\left\{\| \underline{U} \|_\infty, \| \overline{U} \|_\infty\right\}$. Então o problema $(C.1)$ possui soluções $U, V \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tai que $\underline{U} \leq U \leq V \leq \overline{U}$. Além disso, qualquer solução u de $(C.1)$ com $\underline{U} \leq u \leq \overline{U}$ é tal que $U \leq u \leq V$, ou seja, U é solução mínima e V é solução máxima com respeito ao intervalo $\left[\underline{U}, \overline{U}\right]$.

Demonstração. Inicialmente, demonstraremos a existência de solução para o problema em questão. Para tanto, consideremos a função

$$g(t) = f(t) + kt, \tag{C.5}$$

onde $k \geq 0$ e $|t\| \leq \max\left\{\| \underline{U} \|_\infty, \| \overline{U} \|_\infty\right\}$. Note que, por $(C.4)$, g é crescente neste intervalo. Definamos, indutivamente, uma sequência de funções $u_n \in C^2(\overline{\Omega})$ por $u_0 = \underline{U}$ e, para todo $n \geq 1$, u_n é a solução única do problema linear

$$\begin{cases} -\Delta u_n + k u_n = g(u_{n-1}), & x \in \Omega, \\ u_n = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{C.6}$$

Afirmação C.1. *A função* $g(u_{n-1}) \in C^\alpha(\overline{\Omega})$.

Com efeito, sendo $u_n \in C^2(\overline{\Omega})$ temos, pela Desigualdade do Valor Médio (ver Apêndice A, Teorema $A.3$), que existe $M > 0$ tal que

$$|u_{n-1}(x) - u_{n-1}(y)| \leq M|x-y|,$$

o que implica

$$\begin{aligned} \frac{|g(u_{n-1})(x) - g(u_{n-1})(y)|}{|x-y|^\alpha} &= \frac{|f(u_{n-1})(x) + ku_{n-1}(x) - f(u_{n-1})(y) - ku_{n-1}(y)|}{|x-y|^\alpha} \\ &\leq \frac{|f(u_{n-1})(x) - f(u_{n-1})(y)|}{|x-y|^\alpha} + k\frac{|u_{n-1}(x) - u_{n-1}(y)}{|x-y|^\alpha} \\ &\leq \frac{|f(u_{n-1})(x) - f(u_{n-1})(y)|}{|x-y|^\alpha} + kM\frac{|x-y|}{|x-y|^\alpha} \\ &= \frac{|f(u_{n-1})(x) - f(u_{n-1})(y)|}{|x-y|^\alpha} + kM|x-y|^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sup_{x\neq y}\frac{|g(u_{n-1})(x) - g(u_{n-1})(y)|}{|x-y|^\alpha} &\leq \sup_{x\neq y}\frac{|f(u_{n-1})(x) - f(u_{n-1})(y)|}{|x-y|^\alpha} \\ &\quad + kM\sup_{x\neq y}|x-y|^{1-\alpha} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Uma vez que $g(u_{n-1}) \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, pelo Teorema de Schauder (ver Apêndice A, Teorema $A.11$), o problema $(C.6)$ possui uma única solução $u_n \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Afirmação C.2. $\underline{U} = u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \cdots \leq \overline{U}$.

De fato, mostremos, primeiramente, que $\underline{U} = u_0 \leq u_1$ em Ω. Como $\underline{U}$ é subsolução de $(C.1)$, temos que

$$\begin{cases} -\Delta \underline{U} \leq f(\underline{U}), & x \in \Omega, \\ \underline{U} \leq 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Se $k \geq 0$, então

$$\begin{cases} -\Delta \underline{U} + k\underline{U} \leq f(\underline{U}) + k\underline{U}, & x \in \Omega, \\ \underline{U} \leq 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

isto é

$$\begin{cases} -\Delta \underline{U} + k\underline{U} \leq g(\underline{U}), & x \in \Omega, \\ \underline{U} \leq 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Sendo u_1 solução de $(C.6)$, segue

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + k u_1 = g(\underline{U}), & x \in \Omega \\ u_1 = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{C.7}$$

daí

$$\begin{cases} -\Delta \underline{U} + k\underline{U} \leq -\Delta u_1 + k u_1, & x \in \Omega, \\ \underline{U} \leq u_1, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

implica em

$$\begin{cases} -\Delta(u_1 - \underline{U}) + k(u_1 - \underline{U}) \geq 0, & x \in \Omega, \\ u_1 - \underline{U} \geq 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo princípio do máximo (ver apêndice A, Teorema $A.4$), $u_1 - \underline{U} \geq 0$, em Ω, ou seja, $\underline{U} \leq u_1$ em Ω.

Agora mostraremos que $u_1 \leq \overline{U}$ em Ω. Sendo $\overline{U}$ supersolução de $(C.1)$, temos

$$\begin{cases} -\Delta \overline{U} \geq f(\overline{U}), & x \in \Omega \\ \overline{U} \geq 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Se $k \geq 0$, então

$$\begin{cases} -\Delta \overline{U} + k\overline{U} \geq f(\overline{U}) + k\overline{U}, & x \in \Omega \\ \overline{U} \geq 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} -\Delta \overline{U} + k\overline{U} \geq g(\overline{U}), & x \in \Omega \\ \overline{U} \geq 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Por g ser crescente, segue que $g(\underline{U}) \leq g(\overline{U})$ e de $(C.7)$ obtemos

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + k u_1 \leq g(\overline{U}), & x \in \Omega \\ u_1 = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

e assim,

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + k u_1 \leq -\Delta \overline{U} + k\overline{U}, & x \in \Omega \\ u_1 \leq \overline{U}, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde,

$$\begin{cases} -\Delta(\overline{U} - u_1) + k(\overline{U} - u_1) \geq 0, & x \in \Omega, \\ \overline{U} - u_1 \leq 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo, usando o princípio do máximo, $u_1 \leq \overline{U}$ em Ω.

Agora, suponhamos que $\underline{U} = u_0 \leq \cdots u_{n-1} \leq u_n \leq \cdots \leq \overline{U}$ e mostremos que $\underline{U} \leq u_{n+1} \leq \overline{U}$. Considerando as equações que definem u_n e u_{n+1}, temos

$$\begin{cases} -\Delta u_n + k u_n = g(u_{n-1}), & x \in \Omega, \\ u_n = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{C.8}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} + k u_{n+1} = g(u_n), & x \in \Omega, \\ u_{n+1} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{C.9}$$

Daí, subtraindo membro a membro as equações em $(C.8)$ e $(C.9)$, obtemos

$$\begin{cases} -\Delta(u_{n+1} - u_n) + k(u_{n+1} - u_n) = g(u_n) - g(u_{n-1}), & x \in \Omega \\ u_{n+1} - u_n = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Como g é crescente, $g(u_n) - g(u_{n-1}) \geq 0$ e, pelo princípio do máximo, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ em Ω, isto é $u_n \leq u_{n+1}$ em Ω.

Evidentemente, $\underline{U} \leq u_{n+1}$ em Ω. Com o raciocínio análogo para mostrar que $u_1 \leq \overline{U}$ em Ω, chega-se a $u_{n+1} \leq \overline{U}$ em Ω. Portanto,

$$\underline{U} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \overline{U} \quad \text{em } \Omega\,, \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{C.10}$$

Por $(C.10)$ e em virtude da monotonicidade de (u_n), existe uma função U, definida em $\overline{\Omega}$, tal que $u_n \to U$ pontualmente em $\overline{\Omega}$. E uma vez que $\underline{U}, \overline{U} \in C^2(\overline{\Omega})$, temos $\underline{U}, \overline{U} \in L^p(\Omega)$ para todo $p \geq 1$.

De $(C.10)$ segue

$$|u_n| \leq \max\left\{\| \underline{U} \|_\infty, \| \overline{U} \|_\infty\right\} = K \quad \text{em } \Omega\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Definamos a seguinte sequência

$$h_n = |u_n - U|^p$$

e note que

$$h_n \to 0$$

pontualmente em $\overline{\Omega}$ e

$$\begin{cases} |h_n| \leq 2^p\left(|K|^p + |K|^p\right) \\ \quad\;\; = 2^{p+1}K^p \ \text{ em } \Omega\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

onde $2^{p+1}K^p \in L^1(\Omega)$. Logo, aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue(ver apêndice A, Teorema A.7), temos

$$\| u_n - U \|_{L^p(\Omega)}^p = \int_\Omega |u_n - U|^p \, dx \to 0,$$

ou seja,

$$u_n \to U \ \text{ em } \ L^p(\Omega).$$

Da existência de uma constante real $M > 0$ tal que

$$|u_n| \leq M \quad \text{em } \overline{\Omega}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

e da continuidade de g, obtemos uma constante $C > 0$ de modo que

$$|g(u_n) \leq C \quad \text{em } \overline{\Omega}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

onde segue que $g(u_n) \in L^p(\Omega)$. Além disso, $g(u_n) \to g(U)$ pontualmente em $\overline{\Omega}$ e, novamente, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\| g(u_n) - g(U) \|_{L^p(\Omega)}^p = \int_\Omega |g(u_n) - g(U)|^p \, dx \to 0,$$

isto é,

$$g(u_n) \to g(U) \quad \text{em } L^p(\Omega).$$

Sendo $g(u_{n-1}) \in L^p(\Omega)$ satisfazendo $(C.6)$, então $u_n \in W^{2,p}(\Omega)$ (ver apêndice A)e existe uma constante C, que não depende de n tal que

$$\| u_n - u_m \|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \| g(u_{n-1}) - g(u_{m-1}) \|_{L^p(\Omega)} . \tag{C.11}$$

Logo, (u_n) é uma sequência de Cauchy em $W^{2,p}(\Omega)$, pois $(g(u_n))$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$. Por $W^{2,p}(\Omega)$ ser um espaço de Banach, existe $\tilde{U} \in W^{2,p}(\Omega)$ tal que $u_n \to \tilde{U}$ em $W^{2,p}(\Omega)$. além disso, por

$$\| u_n - \tilde{U} \|_{L^p(\Omega)} \leq \| u_n - \tilde{U} \|_{W^{2,p}(\Omega)},$$

segue que $u_n \to \tilde{U}$ em $L^p(\Omega)$. Assim, pela unicidade do limite, obtemos $U = \tilde{U}$ e daí,

$$u_n \to U \ \text{ em } W^{2,p}(\Omega).$$

Tomando $p > N$, tem-se a imersão compacta $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$. Isso implica

$$u_n \to U \quad \text{em } C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Pela estimativa de Schauder, obtemos

$$\| u_n \|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C \| g(u_{n-1}) \|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega})} , \forall n \in \mathbb{N}. \tag{C.12}$$

Consequentemente, (u_n) é limitada em $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Desde que $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega})$ compactamente ,existe uma subsequência de (u_n) que converge para U em $C^2(\overline{\Omega})$. Como (u_n) é monótona, a sequência toda converge para U em $C^2(\overline{\Omega})$. Uma vez que

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} + k u_{n+1} = f(u_n) + k u_n, & x \in \Omega \\ u_{n+1} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

passando ao limite, segue- se

$$\begin{cases} -\Delta U + kU = f(U) + kU, & x \in \Omega \\ U = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

e daí

$$\begin{cases} -\Delta U = f(U), & x \in \Omega \\ U = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Analogamente, obtemos uma sequência não$-$crescente (v_n) tal que

$$\underline{U} \leq \cdots \leq v_{n+1} \leq v_n \leq \cdots \leq v_0 = \overline{U}$$

de modo que $v_n \to V$ em $C^2(\overline{\Omega})$ e

$$\begin{cases} -\Delta V = f(V), & x \in \Omega \\ V = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, $\underline{U} \leq U \leq V \leq \overline{U}$ em Ω.

Mostraremos agora as existências das soluções minimal e maximal respectivamente com respeito ao intervalo $\left[\underline{U}, \overline{U}\right]$. Seja u uma solução de $(C.1)$ com $\underline{U} \leq u \leq \overline{U}$ em Ω. Considere o intervalo $[\underline{U}, u]$ e apliquemos o procedimento anterior para obter uma sequência não$-$decrescente em que

$$\underline{U} \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \leq u,$$

com $u_n \to U$. Logo, $U \leq u$ é solução mínima com respeito a $\left[\underline{U}, \overline{U}\right]$. Analogamente, se demonstra a existência da solução maximal. $\square$

C.1 Sub e supersolucão fraca

O lema a seguir assegura, sob certas condições, a existência de pontos críticos para funcionais definidos em espaços de Banach reflexivos. Ele será usado na demonstração do Teorema de sub e supersolução fraca.

Lema C.1. *Sejam X um espaço de Banach reflexivo com norma $\| \cdot \|_X$, $M \subset X$ um subconjunto fechado na topologia fraca e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional limitado inferiormente satisfazendo:*

(I_1) *$I(u) \to \infty$ quando $\| u \|_X \to \infty$, $u \in M$, ou seja, I é coerciva;*

(I_2) *toda sequência $(u_n) \subset M$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em X satisfaz*

$$I(u) \leq \liminf_{n\to\infty} I(u_n).$$

Então I atinge ínfimo em M.

Demonstração. Seja $\alpha = \inf\{I(u) : u \in M\}$ e (u_n) uma sequência minimizante em M, ou seja, tal que $I(u_n) \to \alpha$. Uma vez que I é coercivo, temos que (u_n) é limitado, pois caso contrário existiria uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que $\| u_{n_j} \| \to \infty$ e portanto $I(u_{n_j}) \to \infty$. Como X é reflexivo, a menos de subsequência, existe $u \in X$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente. Mas como M é fracamente fechado, então $u \in M$. Usando a hipótese de que I é fracamente semicontínuo inferiormente, temos que

$$I(u) \leq \liminf_{n\to\infty} I(u_n) = \alpha$$

e portanto I atinge ínfimo em M. $\square$

Consideremos o problema

$$(P1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u)\,, & x \in \Omega \\ u = 0\,, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, $N \geq 3$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory.

Uma solução fraca do problema $(P1)$ é uma função $u \in H$ que satisfaz

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = \int_\Omega f(x,u) v \, dx \,, \; \forall v \in H.$$

As soluções fracas de $(P1)$ são pontos críticos do funcional $I : H \to \mathbb{R}$, dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega F(x,u) \, dx.$$

onde

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t) \, dt.$$

Definição C.1. *Dizemos que* $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ *é uma subsolução fraca para o problema* $(P1)$ *se* $\underline{u} \leq 0$ *em* $\partial\Omega$ *e*

$$\int_\Omega \nabla \underline{u} \nabla v \, dx \leq \int_\Omega f_\lambda(x, \underline{u}) v \, dx$$

para todo $v \in H \cap L^\infty(\Omega)$, $v \geq 0$. *Analogamente* $\overline{u} \in H^1(\Omega)$ *é supersolução fraca para o problema* $(P1)$ *se* $\overline{u} \geq 0$ *em* $\partial\Omega$ *e*

$$\int_\Omega \nabla \overline{u} \nabla v \, dx \geq \int_\Omega f_\lambda(x, \overline{u}) v \, dx$$

para todo $v \in H \cap L^\infty(\Omega), v \geq 0$.

Teorema C.2 (Teorema de sub e supersolução)**.** *Suponha que* $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ *é uma subsolução fraca e que* $\overline{u} \in H^1(\Omega)$ *é uma supersolução fraca para o problema* (P_λ). *Suponha ainda que existam constantes* $\underline{c}, \overline{c} \in \mathbb{R}$ *tais que* $\underline{c} \leq \underline{u} \leq \overline{u} \leq \overline{c}$ *em quase todo ponto de* Ω. *Então o problema* $(P1)$ *admite uma solução fraca* $u \in H$ *satisfazendo* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ *em quase todo ponto de* Ω.

Demonstração. Vamos considerar o funcional

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega F(x,u) \, dx.$$

onde $F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,t) \, dt$, restrito ao conjunto

$$M = \{u \in H \, ; \, \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x) \;\text{ em quase todo ponto de } \Omega\}.$$

Como por definição $\overline{u}, \underline{u} \in L^\infty(\Omega)$, então $M \subset L^\infty(\Omega)$. Observemos que, dado $u \in M$, temos que $|u(x)| \leq C_1$ em quase todo ponto de Ω, onde $C_1 = \max\{|\overline{c}|, |\underline{c}|\}$. Portanto, como $f(x,\cdot)$ é contínua, vale

$$\begin{aligned} |F(x,u(x))| &= \Big| \int_0^{u(x)} f(x,t) dt \Big| \\ &\leq \int_0^{u(x)} |f(x,t)| dt \\ &\leq \int_0^{C_1} |f(x,t)| \, dt \\ &= C_2 \end{aligned}$$

em quase todo ponto de Ω.

Deseja−se garantir a existência de um mínimo local para o funcional I. Para isso, vamos verificar as hipóteses do Lema C.1 Sabemos que H é reflexivo. Além disso, seja $(v_n) \subset M$ tal que $v_n \to v$ em H. A menos de subsequência,

$$\begin{cases} (v_n) \text{ é limitada em } H, \\ v_n \to v \text{ em } L^2(\Omega), \\ v_n(x) \to v(x) \text{ em quase todo ponto de } \Omega \end{cases}$$

e portanto $\underline{u}(x) \leq v(x) \leq \bar{u}(x)$ em quase todo ponto de Ω. Logo $v \in M$ e com isso M é fechado.

Dados agora $u, v \in M$ e $t \in [0,1]$, temos que $(1-t)v + tu \in H$. Além disso, em quase todo ponto de Ω vale

$$t\underline{u} \leq tu \leq t\bar{u},$$
$$(1-t)\underline{u} \leq (1-t)v \leq (1-t)\bar{u}.$$

Somando as desigualdades segue que

$$\underline{u} \leq (1-t)v + tu \leq \bar{u} \qquad \text{em quase todo ponto de } \Omega,$$

onde concluímos que M é convexo. Sendo M fechado e convexo, concluímos que M é fracamente fechado. Observemos que

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega F(x,u)\,dx \\ &\geq \frac{1}{2} \parallel u \parallel^2 - \int_\Omega C_2\,dx \\ &= \frac{1}{2} \parallel u \parallel^2 - C_2|\Omega|, \end{aligned}$$

portanto I é limitado inferiormente em M e $I(u) \to \infty$ quando $\parallel u \parallel \to \infty$ em M.

Resta mostrar que I é fracamente semi−contínuo inferiormente, ou seja, que I satisfaz a condição I_2. Seja $(u_n) \subset M$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em H. Como a imersão $H \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é compacta e (u_n) é limitada,

$$\begin{aligned} u_{n_j} &\to u && \text{em } L^2(\Omega), \\ u_{n_j}(x) &\to u(x) && \text{em quase todo ponto de } \Omega, \end{aligned} \tag{C.13}$$

para alguma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$.

Como $|F(x,u_n(x))| \leq C_2$ uniformemente, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\lim_{n_j\to\infty} \int_\Omega F(x,u_{n_j})\,dx = \int_\Omega \lim_{n_j\to\infty} F(x,u_{n_j})\,dx = \int_\Omega F(x,u)\,dx.$$

Segue então que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega F(x,u_n)\,dx = \int_\Omega F(x,u)\,dx \tag{C.14}$$

pois, caso contrário, existiria uma constante $d > 0$ e uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ tal que

$$\left| \int_\Omega F(x,u_{n_k})\,dx - \int_\Omega F(x,u)\,dx \right| \geq d.$$

Mas (u_{n_k}) também é limitada, e o mesmo argumento em $(C.13)$ nos daria uma contradição. Usando agora o fato de que $\| \cdot \|^2$ é fracamente semi−contínua inferiormente e $(C.14)$, segue que

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} I(u_n) &= \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} \parallel u_n \parallel^2 - \int_\Omega F(x,u_n)\,dx \right) \\
&\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2} \parallel u_n \parallel^2 + \liminf_{n\to\infty} \left(- \int_\Omega F(x,u_n)\,dx \right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2} \parallel u_n \parallel^2 - \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega F(x,u_n)\,dx \\
&\geq \frac{1}{2} \parallel u \parallel^2 - \int_\Omega F(x,u)\,dx \\
&= I(u).
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema $(C.1,)$ I atinge mínimo em M, que chamaremos de u.

Dados $\varphi \in H \cap L^\infty(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$, seja

$$v_\varepsilon = \min\{\overline{u}, \max\{\underline{u}, u + \varepsilon\varphi\}\} = u + \ \varepsilon\varphi - \varphi^\varepsilon + \varphi_\varepsilon,$$

onde

$$\begin{aligned}
\varphi^\varepsilon &= \max\{0, u + \varepsilon\varphi - \overline{u}\} \geq 0, \\
\varphi_\varepsilon &= -\min\{0, u + \varepsilon\varphi - \underline{u}\} \geq 0.
\end{aligned}$$

Observemos que $v_\varepsilon \leq \bar{u}$ e, nos pontos onde $\overline{u} \geq \max\{\underline{u}, u + \varepsilon\varphi\}$, $v_\varepsilon \geq \underline{u}$. Portanto $v_\varepsilon \in M$. Além disso, se $u + \varepsilon\varphi - \bar{u} > 0$, o operado traço (ver definição no apêndice A), logo satisfaz

$$0 \leq T(\varphi^\varepsilon) = T(u + \varepsilon\varphi - \overline{u}) = T(u - \bar{u}) \leq 0.$$

Por outro lado, se $u + \varepsilon\varphi - \underline{u} < 0$, então

$$0 \leq T(\varphi_\varepsilon) = T(-u - \varepsilon\varphi + \underline{u}) = T(\underline{u} - u) \leq 0.$$

Logo, $\varphi^\varepsilon, \varphi_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty$.

Usando a hipótese de que $|F(x,u)| \leq C_2$, e a definição de diferenciabilidade mostra que I é diferenciável na direção de $v_\varepsilon - u$. Como u é mínimo em M, para $t \in (0,1)$,

$$\frac{I(u + t(v_\varepsilon - u)) - I(u)}{t} = \frac{I((1-t)u + tv_\varepsilon) - I(u)}{t} \geq 0,$$

onde $(1-t)u + tv_\varepsilon \in M$, visto que M é convexo. Logo

$$0 \leq \lim_{t\to 0^+} \frac{I(u + t(v_\varepsilon - u)) - I(u)}{t} = I'(u)(v_\varepsilon - u) = \varepsilon I'(u)\varphi - I'(u)\varphi^\varepsilon + I'(u)\varphi_\varepsilon,$$

onde se conclui que

$$I'(u)\varphi \geq \frac{1}{\varepsilon}\left[I'(u)\varphi^\varepsilon - I'(u)\varphi_\varepsilon\right] \tag{C.15}$$

Como $\overline{u}$ é supersolução fraca, então

$$I'(\overline{u})\varphi^\varepsilon = \int_\Omega \nabla\overline{u}\nabla\varphi^\varepsilon - \int_\Omega f(x,\overline{u})\varphi^\varepsilon \geq 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
I'(u)\varphi^{\varepsilon} &= I'(\overline{u})\varphi^{\varepsilon} + (I'(u) - I'(\overline{u}))\varphi^{\varepsilon} \\
&\geq (I'(u) - I'(\overline{u}))\varphi^{\varepsilon} \\
&= \int_{\Omega} \{\nabla(u-\overline{u})\nabla\varphi^{\varepsilon} - (f(x,u) - f(x,\overline{u}))\varphi^{\varepsilon}\} \\
&= \int_{\tilde{\Omega}_{\varepsilon}} \{\nabla(u-\overline{u})\nabla(u+\varepsilon\varphi-\overline{u}) - (f(x,u)-f(x,\overline{u}))(u+\varepsilon\varphi-\overline{u})\},
\end{aligned} \tag{C.16}$$

onde $\tilde{\Omega}_{\varepsilon} = \{x \in \Omega\,,\, u(x) + \varepsilon\varphi(x) \geq \overline{u}(x)\}$. Observe que nesse caso só calculamos a integral em $\tilde{\Omega}_{\varepsilon}$, pois se $x \notin \tilde{\Omega}_{\varepsilon}, \varphi^{\varepsilon}(x) = 0$. Mas se $x \in \tilde{\Omega}_{\varepsilon}$ é tal que $u(x) = \overline{u}(x)$, então $\nabla(u(x) - \overline{u}(x)) = 0$ e $f(x,u(x)) - f(x,\overline{u}(x)) = 0$. Logo $(C.16)$ implica que

$$I'(u)\varphi^{\varepsilon} \geq \int_{\Omega_{\varepsilon}} \{\nabla(u-\overline{u})\nabla(u+\ \varepsilon\varphi-\overline{u}) - (f(x,u)-f(x,\overline{u}))(u+\varepsilon\varphi-\overline{u})\}, \tag{C.17}$$

onde $\Omega_{\varepsilon} = \{x \in \Omega\,;\, u(x) + \varepsilon\varphi(x) \geq \overline{u}(x) > u(x)\}$. Sejam agora

$$\begin{aligned}
\Omega_{\varepsilon}^{+} &= \{x \in \Omega_{\varepsilon}\,;\, f(x,u(x)) - f(x,\overline{u}(x)) \geq 0\}, \\
\Omega_{\varepsilon}^{+} &= \{x \in \Omega_{\varepsilon}\,;\, f(x,u(x)) - f(x,\overline{u}(x)) \leq 0\}.
\end{aligned}$$

Em Ω_{ε}^{+} valem as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}
(f(x,u)-f(x,\overline{u}))(u+\varepsilon\varphi-\overline{u}) &= (f(x,u)-f(x,\overline{u}))(u-\overline{u}) + (f(x,u)-f(x,\overline{u}))\varepsilon\varphi \\
&\leq (f(x,u)-f(x,\overline{u}))\varepsilon\varphi \\
&\leq \varepsilon|f(x,u)-f(x,\overline{u})||\varphi|
\end{aligned} \tag{C.18}$$

enquanto em Ω_{ε}^{-}, como $|u-\overline{u}| = \overline{u} - u \leq \varepsilon\varphi$,

$$\begin{aligned}
(f(x,u)-f(x,\overline{u}))(u+\varepsilon\varphi-\overline{u}) &\leq (f(x,u)-f(x,\overline{u}))(u-\overline{u}) \\
&\leq |f(x,u)-f(x,\overline{u})|(\overline{u}-u) \\
&\leq \varepsilon|f(x,u)-f(x,\overline{u})||\varphi|.
\end{aligned} \tag{C.19}$$

Logo, por $(C.18)$ e $(C.19)$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{\varepsilon}} (f(x,u)-f(x,\overline{u}))(u+\varepsilon\varphi-\overline{u}) &= \int_{\Omega_{\varepsilon}^{+}} (f(x,u)-f(x,\overline{u}))(u+\epsilon\varphi-\overline{u}) + \\
&\quad \int_{\Omega_{\varepsilon}^{-}} (f(x,u)-f(x,\overline{u}))(u+\varepsilon\varphi-\overline{u}) \\
&\leq \int_{\Omega_{\varepsilon}^{+}} \varepsilon|f(x,u)-f(x,\overline{u})||\varphi| + \\
&\quad \int_{\Omega_{\varepsilon}^{-}} \varepsilon|f(x,u)-f(x,\overline{u})||\varphi| \\
&= \varepsilon\int_{\Omega_{\varepsilon}} |f(x,u)-f(x,\overline{u})||\varphi|.
\end{aligned} \tag{C.20}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(u-\overline{u})\nabla(u+\varepsilon\varphi-\overline{u}) &= \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(u-\overline{u})\nabla(u-\overline{u}) + \varepsilon\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(u-\overline{u})\varphi \\ &\geq \varepsilon\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(u-\overline{u})\varphi.\end{aligned} \tag{C.21}$$

Por $(C.17)$, $(C.20)$ e $(C.21)$, temos

$$\frac{I'(u)\varphi^\varepsilon}{\varepsilon} \geq \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(u-\overline{u})\varphi - \int_{\Omega_\varepsilon} |f(x,u)-f(x,\overline{u})||\varphi|. \tag{C.22}$$

Como $|\Omega_\varepsilon| \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$ e os integrandos acima não depende de ε,

$$\liminf_{\varepsilon\to 0^+} \frac{I'(u)\varphi^\varepsilon}{\varepsilon} \geq 0. \tag{C.23}$$

De maneira análoga, prova-se que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+} \frac{I'(u)\varphi_\varepsilon}{\varepsilon} \leq 0. \tag{C.24}$$

Logo, por $(C.15)$,

$$\begin{aligned}I'(u)\varphi &\geq \liminf_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{I'(u)\varphi^\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{I'(u)\varphi_\varepsilon}{\varepsilon}\right) \\ &\geq \liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{I'(u)\varphi^\varepsilon}{\varepsilon} + \liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{-I'(u)\varphi_\varepsilon}{\varepsilon} \\ &= \liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{I'(u)\varphi^\varepsilon}{\varepsilon} - \limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{I'(u)\varphi_\varepsilon}{\varepsilon} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, $I'(u)\varphi \geq 0$ para todo $\varphi \in H(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. Invertendo o sinal de φ, temos que $I'(u)\varphi \leq 0$. Logo

$$I'(u)\varphi = 0$$

para todo $\varphi \in H \cap L^\infty(\Omega)$. Dada agora $\varphi \in H$ consideremos $(\varphi_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_n \to \varphi$ em H. Temos que,

$$0 = \lim_{n\to\infty} I'(u)\varphi_n = I'(u)\varphi$$

e portanto $I'(u) = 0$. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Ambrosetti, A., Brezis, H. and Cerami, G. *Combined Effects of Concave and Convex Nonlinearities in Some Elliptic Problems.*, Journal of Functional Analysis **122** (1994), 519−543.

[2] Ambrosetti, A. and Prodi, G., *A Primer of Nonlinear Analysis.*, Cambridge University Press, New York, (1993).

[3] Ambrosetti, A. and Rabinowitz, P. H., *Dual variational methods in critical point theory and applications.*, J. Functional Analysis **14** (1973), 349−381.

[4] Bartle, R.G., *Elements of Integration and Lebesgue Measuare.*, Wiley Classics Library Edition Published, New York, (1995).

[5] Brezis, H. and Kamin, S., *Sublinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^n$., Manuscripta Math. **74** (1992), 87−106.

[6] Brezis, H. and Kato T., *Remarks on the Schrödinger operator with singular complex potentials.*, Jour. Math. Pures Appl. **58** (1983), 137−151.

[7] Brezis, H. and Nirenberg, L., H^1 *versus* C^1 *local minimizers.*, C.R. Acad. Sci. Paris, **317** (1993), 465−472.

[8] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.*, Springer - Verlag, (2010).

[9] Clark, D.C., *A variant of the Ljusternik-Schnirelmann theory.* Indiana Univ. Math. J. 22 (1972), 65−74.

[10] de Figueiredo, D.G., *Equações Elípticas não Lineares.*, 11^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, (1997).

[11] de Figueiredo, D.G., *Lectures on the Ekeland Variational Principle with Applications and Detours.*, Tata Inst. Fund. Res. Lectures Math. Phys. **81**, Springer (1989) Zbl 0688.49011 MR 1019559

[12] de Figueiredo, D.G., Gossez, J.P and Ubilla, P., *Multiplicity results for a family of semilinear elliptic problems under local superlinearity and sublinearity.*, J. Eur. Math. Soc **8** (2006), 269−286.

[13] de Paiva., *Nonnegative solutions of elliptic problems with sublinear indefinite nonlinearity.*, Journal of Functional Analysis., **261** (2011), 2569−2586.

[14] Elon, L.L., *Análise Real Vol. 2.*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, (2004).

[15] Elon, L.L., *Espaços Métricos.*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, (2005).

[16] Gilbarg, D. and Trundinger, N.S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.*, Classics in Mathematics, Springer, 3^a Edição, New York, (2001).

[17] Kavian, O., *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problémes Elliptiques.*, Springer-Verlag, (1993).

[18] Lawrence, C.E., *Partial Differential Equations.*, American Mathematical Society, U.S.A., **19** (1998).

[19] Lusternik L., Schnirelmann L., *Méthodes Topologiques dans les Problèmes Variationnels.*, Francia, (1934).

[20] Mignot, F. and Puel, J. P., *Sur une classe de problèmes nonlinéaires avc nonlinéarité positive, croissante, convexe.*, Comm. Partial Differential Equations **5** (1980), 791−836.

[21] Paul H.R., *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Eaquations.*, Expository lectures from the CBMS Regional Conference, Miami, **45** (1984).

[22] Struwe, M., *Variational Methods.* Springer (1990) Zbl 0746.49010 MR 1078018.

[23] Tarantelo G., *On nonhomogeneus elliptic equations involving critical Sobolev exponent.*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **9** (1992), 281−304.

[24] Trudinger, N.S., *On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations.*, Comm. Pure Appl. Math., **20** (1967), 721−747.

[25] Willem, M., Minimax Theorems., Volume 24, Birkhauser, Boston, 1996.