Universidade de Brasília

Faculdade de Administração, Contabilidade e Economia - FACE

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

Racionalidade Limitada com Correspondências de Escolha

CAIO GUIMARÃES FIGUEIREDO

Dissertação de Mestrado

Orientador: Prof. Dr. Gil Riella

Brasília-DF

2015

CAIO GUIMARÃES FIGUEIREDO

Racionalidade Limitada com Correspondências de Escolha

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre em Economia. Programa de Pós-Graduação em Economia, Universidade de Brasília

Orientador: Prof. Dr. Gil Riella

Brasília - DF
2015

CAIO GUIMARÃES FIGUEIREDO

Racionalidade Limitada com Correspondências de Escolha

Dissertação apresentada como exigência do Curso de Mestrado em Economia da Universidade de Brasília.

Avaliação

BANCA EXAMINADORA

____

Professor Dr. Gil Riella

Orientador

____

Professor Dr. Leandro Nascimento

Membro interno

____

Professor Dr. José Heleno Faro

Membro externo

Brasília, DF. Março de 2015

AGRADECIMENTOS

À minha companheira Lara pelas leituras atentas com amor e paciência.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Gil Riella, sem sua disposição, ideias e correções esse trabalho não teria sido possível.

RESUMO

Esse trabalho se encarregará de discutir os limites e restrições impostos pela utilização de **funções** de escolha para derivação de modelos de decisão. Bem como apresentar modelos de racionalidade limitada que se utilizam de funções de escolha, e adaptá-los para o uso de **correspondências** de escolha.

ABSTRACT

This work will discuss the limits and restrictions of models derived with choice **functions**. As well as present bounded rational models that uses choice functions, and adapt them to work with choice **correspondences**.

Racionalidade Limitada com Correspondências de Escolha

Caio Figueiredo

9 de abril de 2015

1 Introdução

Em teoria da decisão, entendido como o ramo da economia dedicado a estudar a racionalização e os resultados de uma decisão ótima, são necessárias algumas primitivas para se criar um modelo de escolha: um superconjunto $\mathcal{X}$ de alternativas possíveis de escolha, uma coleção de subconjuntos de $\mathcal{X}$, que chamaremos de $\mathcal{A}$, e que define os possíveis problemas de escolha, e uma **correspondência de escolha** c que relaciona cada problema e sua solução. Ou seja, o conjunto de objetos escolhidos. No entanto, na recente literatura axiomática sobre modelos de racionalidade limitada, o uso de **funções de escolha** se tornou prática comum.

Funções de escolha facilitam a análise e simplificam o enunciado dos axiomas. Esta é a principal razão para a popularização de seu uso nos modelos recentes de racionalidade limitada. Porém, se de um lado a utilização de funções simplifica a criação e análise do modelo econômico, por outro, impõe restrições ao modelo, que serão expostas em seção a seguir.

Este trabalho, portanto, se ocupará de apresentar não só as restrições impostas pela utilização de funções como também trabalhos que utilizam esse tipo de alicerce. Trabalhos expostos, nos ocuparemas em adaptá-los para a utilização de correspondências de escolha, mostrando assim que mesmo modelos originalmente pensados para funcionarem com funções podem ser facilmente adaptados para o uso de correspondências.

Deste modo, este trabalho se estrutura da seguinte maneira: Na seção 1, serão apresentadas e discutidas as restrições impostas pela utilização de funções de escolha, nas seções 2 e 3 serão apresentados de maneira breve, respectivamente, o modelo tradicional e seus limites. As próximas quatro seções serão dedicadas a apresentação e adaptação de dois modelos alternativos criados recentemente. De forma que, as seções 4 e 5 serão dedicadas ao modelo de escolha introduzido no paper de Cherepanov et al. [2013] e as 6 e 7 ao modelo de Masatlioglu [2012]. Por fim, a seção 8 fará uma rápida conclusão, e o apêndice conterá as demonstrações matemáticas de teoremas secundários para o artigo.

2 As restrições advindas das funções de escolha

A utilização de funções de escolha impõe dois tipos de restrições ao modelo de decisão: as restrições comportamentais e as analíticas.

Pode ser estranho pensar que conceitos tão abstratos como funções e correspondências possam representar uma restrição comportamental, mas esta existe e é ordinária, derivada diretamente da definição desses conceitos. Assim, se de um lado, as correspondências são definidas como relações que conectam conjuntos a conjuntos de cardinalidade indeterminada. De outro, as funções são definidas como relações que conectam um conjunto a um elemento univalorado. De forma que ao utilizarmos correspondências, estamos dizendo que, dado um problema de escolha, é possível que observemos o tomador de decisão escolher qualquer alternativa dentro do subconjunto de possibilidades. Diversamente, com a utilização de funções de escolha, nós impomos a restrição de que, fixado o problema de escolha, sempre se observa o tomador de decisão escolher a mesma opção.[1] E assim temos nossa restrição comportamental. Com funções de escolha, o tomador de decisões nunca se mostrará indeciso ou indiferente.

Continuando, temos uma restrição analítica, que será expressa no teorema de Nishimura e Ok [2012], ao qual chamaremos de **não continuidade de funções de escolha**:

Teorema 1. *Fixe $\mathcal{X}$ um espaço métrico que seja ou compacto ou conexo por arcos. Então, existe uma função de escolha contínua se, e somente se, $\mathcal{X}$ for homeomórfico a um subconjunto de $\mathbb{R}$.*[2]

Em outras palavras temos que uma função de escolha nunca poderá ser contínua se $\mathcal{X}$ for "mais complexo" que $\mathbb{R}$. Isto implica, por exemplo, que funções de escolha não podem ser contínuas em $\mathbb{R}^2$, ou em qualquer $\mathbb{R}^n$ em que $n \neq 1$. Já em problemas de escolha que envolvem risco a restrição é ainda maior, como a escolha se dá no espaço de loterias (medidas de probabilidade sobre um conjunto X, ou seja, $\mathcal{X} = \sigma(X)$), para a função ser contínua X não poderá ter mais do que dois elementos.

Pensar a função de escolha como contínua é de grande importância para o arcabouço de Teoria da Decisão pois, não só é razoável, com também é frequentemente necessário para se derivar funções utilidade, ou para, pelo menos, garantir a existência de máximos e mínimos. Deste modo, fica claro que a utilização de funções de escolha impede a derivação de resultados importantes para uma grande gama de universos de escolha.

[1] Exemplifiquemos, dado um problema de escolha $S \in \mathcal{A}$, se c é uma função de escolha então $c(S) = x$ para algum $x \in S$, e logo **sempre** que o tomador de decisão for confrontado com S ele escolherá x. Diferentemente, se c for uma **correspondência** de escolha, $c(S)$ poderá ser igual a um conjunto mais rico de elementos, digamos $c(S) = \{x, y, z\}$, assim quando confrontado com S o tomador de decisão poderá escolher algum dos elementos em $c(S)$, ou seja, x, y, ou z.

[2] Para demonstração ver Nishimura e Ok [2012].

Entendemos então, que utilização a de funções de escolha são **demasiadamente restritivas**, e que devem, sempre que possível, ser evitadas.

3 Modelo Tradicional

Será apresentado, primeiramente, o modelo tradicional de escolha. Com o intuito de fortalecer os conceitos que utilizaremos mais adiante e estabelecermos um padrão de comparação. O modelo tradicional é simples e generalista, para descrevê-lo precisamos, porém, além das primitivas lembradas acima, definir uma relação de preferência.

Ordinariamente, denotamos a relação de preferência por $\succsim$ e dizemos que para qualquer par de elementos $x, y \in \mathcal{X}$: $x \succsim y$ significa que x é pelo menos tão bom (ou preferível) quanto y. Dessa forma, dado o par x, y a relação de preferência estabelece uma das quatro possibilidades a seguir:

- É verdade que $x \succsim y$ e é verdade que $y \succsim x$
- É verdade que $x \succsim y$ mas não é verdade que $y \succsim x$
- Não é verdade que $x \succsim y$ mas é verdade que $y \succsim x$
- Não é verdade que $x \succsim y$ e não é verdade que $y \succsim x$

O primeiro caso caracteriza uma relação de indiferença, normalmente denotada por $\sim$, nesse caso nós dizemos que x é indiferente a y. No segundo e terceiro casos temos relações de preferências fortes, normalmente denotadas por $\succ$, nesse caso nós dizemos que x é fortemente preferível a y (ou o contrário). Por fim, o quarto caso denota a não existência de preferência entre x e y, o que podemos interpretar como dois bens sobre os quais um individuo é incapaz de definir uma opinião.

Definida a relação de preferência, podemos definir a correspondência de escolha de maneira simples e intuitiva: dizemos que dado um conjunto de escolha S, o tomador de decisões sempre escolherá o conjunto dos $\succsim$-melhores elementos de S. De maneira formal:

$$c(S) = \{x \in S : x \succsim y \ \forall y \in S\}$$

Porém, para completar o modelo precisamos ainda de alguns axiomas que sejam, simultaneamente, simples e intuitivos, e garantam o comportamento da escolha como definido. Dessa maneira estruturamos melhor o modelo e facilitamos sua análise. Assim é desejável estabelecer, do lado da preferência, as seguintes estruturas:

- Transitividade: Para todo $x, y, z \in S$, se $x \succsim y$ e $y \succsim z$ então $x \succsim z$

- Completude: Dado dois pontos $x, y \in \mathcal{X}$ temos pelo menos uma das duas possibilidades: $x \succsim y$ ou $y \succsim x$.[3]

Essas estruturas são tradicionais na Teoria da Decisão. A Transitividade impõe certa coerência à decisão dizendo que se x é $\succsim$-melhor que y então ele também é $\succsim$-melhor do que tudo que é $\succsim$-pior do que y. Já a Completude impõe que o tomador de decisão é sempre capaz de escolher entre qualquer par de alternativas, impossibilitando a quarta alternativa de comparação apresentada acima.

Já no âmbito da correspondência de escolha, é comum estabelecer dois axiomas:

- Escolha não vazia: Para qualquer conjunto $S \in \mathcal{A}$ finito, temos que $c(S) \neq \varnothing$.[4]

- Axioma Fraco da Preferência Revelada: para qualquer par de elementos $x, y \in \mathcal{X}$ e de problemas de escolha $S, T \in \mathcal{A}$, com $x, y \in S \cap T$ se $x \in c(S)$ e $y \notin c(S)$ então $y \notin c(T)$

Temos agora o seguinte resultado, conhecido como Teorema Fundamental da Escolha Revelada:

Teorema 2. *Seja $\mathcal{X}$ um conjunto qualquer e $\mathcal{A}$ um espaço de problemas de escolha que contém todos os subconjuntos de $\mathcal{X}$ com 3 ou menos elementos. Uma correspondência de escolha satisfaz o Axioma Fraco da Preferência Revelada e Escolha não vazia se, e somente se, existe uma relação de preferência $\succsim$ completa e transitiva tal que para qualquer $S \in \mathcal{A}$, $c(S) = \{x \in S : x \succsim y \ \forall y \in S\} \neq \varnothing$.*

Estabelecemos com esse teorema a base da teoria econômica da escolha, a partir dela poderemos derivar muitos resultados tradicionais na economia, como a função de utilidade e a função demanda.

Por fim, é importante que se estabeleça aqui o padrão das simbologias que serão utilizadas para definir as relações de preferência. Deixaremos a definição mais tradicional $\succsim$ apenas para as relações, completas e transitivas, que caracterizam o modelo de escolha. $\succ$ e $\sim$ serão, respectivamente, as

[3] Como ficará mais claro abaixo, em modelos de funções de escolha todos os elementos de $\mathcal{X}$ são incomparáveis com eles próprios, porém ainda gostariam de manter a noção de que se eles forem comparáveis com todos os outros membros de $\mathcal{X}$ a completude se mantém. Assim adicionamos a condição de que todos os pontos $x, y \in \mathcal{X}$ são comparáveis se $x \neq y$. Já em modelos com correspondência de escolha essa regra adicional se faz desnecessária.

[4] O Axioma da escolha não vazia é ao mesmo tempo simples e crucial. Assim, por simplicidade, assumiremos esse axioma em todos os modelos a seguir, mesmo que não o seja declarado explicitamente.

partes assimétricas e simétricas[5] de $\succsim$. Já as letras R e P serão utilizadas para simbolizar a relação de preferência revelada do modelo, e, se necessário e especificado, outros tipo de relação. Assim R e P não são necessariamente completas nem transitivas, e similarmente a $\succ$, P sempre simbolizará a parte assimétrica de R. Observe que em modelos de funções de escolha, a relação é sempre assimétrica de modo que apenas a letra P e o simbolo $\succ$ serão utilizados.

4 Modelos com racionalidade limitada

O modelo tradicional é simples e geral o suficiente para conseguirmos extrair muitas ideias e conclusões sobre escolha do consumidor. Porém, nos últimos anos podemos observar crescente preocupação da comunidade econômica com os limites desse modelo. Isso se deve ao surgimento e consolidação de correntes críticas, que questionam os próprios axiomas que sustentam a teoria tradicional de escolha.

Considere o exemplo a seguir:[6] Dado as alternativas: trabalhar (t) ou ver um filme (f), o tomador de decisão escolhe ver um filme (f), porém caso esteja presente a opção de visitar um parente no hospital (h), o tomador de decisão escolhe trabalhar (t). Essa situação viola claramente o modelo tradicional de racionalização, já que não satisfaz o Axioma Fraco da Preferência Revelada.[7] Porém, não é difícil explicar o acontecimento. Quando confrontado com a opção de visitar um parente no hospital, o tomador de decisão se constrange em praticar uma atividade de lazer (ver um filme), mas ainda prefere trabalhar a ir ao hospital.

Muitos outros exemplos podem ser imaginados, vários já foram constatados por experimentos comportamentais. Problemas como esse são o foco de um número crescente de papers em teoria da decisão, esse trabalho, porém, tratará de dois: **Rationalization** de Vadim Cherepanov, Timothy Feddersen e Alvaro Sandroni e **Revealed Attention** de Yusufcan Masatlioglu, Daisuke Nakajima e Erkut Ozbay.

5 Rationalization

A partir deste momento assumiremos que $\mathcal{X}$ é um conjunto finito e que $\mathcal{A}$ é o espaço de todos os subconjuntos não vazios de $\mathcal{X}$.

Cherepanov et al. [2013] desenvolveram um modelo alternativo, buscando resolver partes dos limites do modelo tradicional e torná-lo mais abrangente.

[5]Entendemos por assimétrica qualquer relação ($\succ$) tal que $x \succ y$ implica que não pode ser verdade que $y \succ x$. Por simetria entendemos justamente o contrário, dizemos que $\sim$ é simétrico se para todo $x \sim y$ temos que é verdade que $y \sim x$.

[6]Retirado de Cherepanov et al. [2013].

[7]Seja $S = \{t, f\}, T = \{t, f, h\}$ temos que $t, f \in S \cap T, f \in c(S), t \notin c(S)$ mas $t \in c(T)$.

Para isso, introduziram um novo conceito: a **restrição psicológica**.

Neste arcabouço o tomador de decisões nem sempre considera com seriedade todas as alternativas a sua disposição, pois, por exemplo, a simples presença de uma alternativa pode excluir outra alternativa do processo decisório. Dessa forma, a maximização se dará não sobre todo o conjunto de escolha, mas somente sob aqueles bens que são racionalizáveis.

Vejamos brevemente a estrutura desse modelo. Precisaremos, de forma similar ao modelo tradicional, de primitivas, axiomas e um teorema de representação.

A restrição psicológica será então uma correspondência $\psi : \mathcal{A} \Rightarrow 2^{\mathcal{X}}$ que, em geral, terá como resultado qualquer subconjunto não vazio do conjunto da escolha ($\varnothing \neq \psi(S) \subseteq S \ \forall S \in \mathcal{A}$). Porém, é desejável adicionar alguma estrutura que faça sentido do ponto de vista comportamental e facilite a análise. Assim, Cherepanov et al. firmam as seguintes estruturas:

Estrutura 1.
$$\forall S \subseteq T \in \mathcal{A}, \psi(T) \cap S \subseteq \psi(S)$$

A intuição da estrutura acima é a seguinte: se o tomador de decisão é capaz de racionalizar x em um conjunto de alternativas maior, ou seja mais complexo, então ele também é capaz de racionalizar x para qualquer subconjunto, mais simples, desse conjunto. Existe ainda uma razão adicional para a adoção dessa estrutura, observe a seguinte definição alternativa:

Estrutura 2. ***Restrição Psicológica gerada por Racionalizações:*** *Existe uma coleção finita de preferências transitivas $\mathcal{R}$ tal que $\psi(S) = \{x \in S : \exists R \in \mathcal{R}$ tal que $xRy, \forall y \in S\}$.*

Seguindo essa estrutura, para todo bem pertencente à restrição psicológica existe um processo de racionalização pelo qual o indivíduo escolheria aquele bem. Nas palavras de Cherepanov et al, um bem é racionalizado se existe alguma razão subjetiva pela qual o tomador de decisão justifica sua escolha.

O ponto importante, porém, é que as duas estruturas acimas são equivalentes, como poderemos ver no teorema abaixo, demonstrado em apêndice:

Teorema 3. *Uma restrição psicológica é gerada por racionalizações se, e somente se, obedecer a estrutura 1.*

Continuamos com a definição de preferência revelada:

Definição 1. *Para um par $x, y \in \mathcal{X}$ dizemos que x é revelado preferido a y (**x P y**) se existe um par de problemas de escolha $S, T \in \mathcal{A}$ tais que $x, y \in S \subseteq T, c(S) = x$ e $c(T) = y$*

A definição da preferência revelada segue a mesma intuição da definição do modelo tradicional, temos que x é revelado preferido a y se x é escolhido perante a possibilidade de y. Porém, neste modelo, a mera presença de y no conjunto de alternativas não garante que ele está sendo racionalizado, assim precisamos ter convicção de que ele também pertence à restrição psicológica desse conjunto. Para isso note o significado do par de problemas de escolha S e T, como y é escolhido em T, ele é racionalizado em T ($y \in \psi(T)$), então pela estrutura da restrição psicológica, temos que, como $y \in S$ e $S \subseteq T$, y é racionalizado em S. Assim quando x é escolhido em S, y estava sendo racionalizado. Logo, podemos afirmar que x é revelado preferido a y.

Por fim caracterizaremos a função de escolha que representa esse modelo:

Definição 2. *Dizemos que uma função c pode ser representada por um modelo de Rationalization se existe uma relação de preferência $\succ$ assimétrica, completa e transitiva sobre $\mathcal{X}$ e uma restrição psicológica ψ tal que:*

$$c(S) = \max(\succ, \psi(S)) \ \forall S \in \mathcal{A}$$[8]

Definidas as primitivas podemos enunciar o seguinte axioma:

Correntes Acíclicas. *Uma função de escolha c satisfaz Correntes Acíclicas se, e somente se, não existe uma corrente de alternativas $\{x_0, ..., x_n\}$ tal que $x_i P x_{i+1}, i = 0, ..., n-1$ e $x_n P x_0$.*

O axioma acima introduz um conceito importante, a **aciclicidade**. Como podemos observar, um conjunto de preferências reveladas satisfaz o axioma quando não viola transitividade. Com isso garantimos, através de resultados tradicionais, que as preferências reveladas possam ser estendidas para uma relação completa e transitiva sobre $\mathcal{X}$, argumentos que usaremos na demonstração do teorema de representação:

Teorema 4. ***Cherepanov et al. [2013]:*** *Uma função de escolha c pode ser representada por um modelo de Rationalization se, e somente se, satisfaz correntes acíclicas.*[9]

6 Rationalization com correspondência

Nos cabe agora mostrar que é simples adaptar o modelo apresentado para funcionar com correspondências.

Note, primeiramente, que as estruturas da restrição psicológicas são independentes do processo de escolha do tomador de decisão, e portanto, não

[8] É necessário definir esse conceito que será usado extensivamente durante o artigo, e que tem significado as vezes ambíguo. Em modelos com relação de preferências assimétrica entenderemos o subconjunto $\max(\succ, S)$ de qualquer $S \in 2^{\mathcal{X}}$, como o conjunto do melhor elemento de S ou: $\{x \in S : x \succ y \ \forall y \in S, \text{ com } y \neq x\}$, já em modelos em que a relação não é assimétrica a restrição de $y \neq x$ não se faz necessária e o conjunto passa a poder ter mais do que eu elemento, assim, temos que : $\max(\succsim, S) = \{x \in S : x \succsim y \ \forall y \in S\}$.

[9] O teorema será demonstrado no apêndice, para mais informações ver Cherepanov et al. [2013].

necessitam de qualquer modificação. Já a caracterização da preferência revelada se modifica sensivelmente, pois usar funções como regra de escolha obriga a preferência a ser sempre forte, ou assimétrica. Já o uso de correspondências enriquece as relações, permitindo que se possa observar ao mesmo tempo que xRy e yRx. Deste modo temos:

Definição 3. *Para um par $x, y \in \mathcal{X}$ dizemos que x é revelado preferido a y (**xRy**) se existe um par de problemas de escolha S, T tais que $x, y \in S \subseteq T, x \in c(S)$ e $y \in c(T)$. Se xRy e não existe nenhum par de problemas de escolha tais que yRx, dizemos que xPy*

Seguindo temos a esperada mudança da, agora, correspondência que representa o modelo:

Definição 4. *Dizemos que uma correspondência c pode ser representada por um modelo de Rationalization se existe uma relação de preferência completa e transitiva $\succsim$ sobre $\mathcal{X}$ e uma restrição psicológica ψ tal que:*

$$c(S) = \max(\succsim, \psi(S)) \ \forall S \in \mathcal{A}$$

Modificado a caracterização do modelo é preciso adaptar o axioma afim de torná-lo suficiente para sustentar o teorema de representação. Enunciamos, então, o seguinte axioma:

Correntes Acíclicas. *Seja uma sequência qualquer $x_1, ..., x_n \in \mathcal{X}$ tal que $x_1R...Rx_n$, então para todo $S \subseteq T$ com $x_1, x_n \in S$, se $x_1 \in c(T)$ e $x_n \in c(S)$, então: $x_1 \in c(S)$.*

Para compreender melhor o axioma acima precisamos definir de forma mais rica o conceito de aciclicidade:

Definição 5. *Diremos que R é acíclico se sempre que $x_1R...Rx_n$ não temos que x_nPx_1.*

É intuitivo pensar que o Axioma garante que a relação R seja sempre acíclica, algo que usaremos no teorema de representação, e que será demonstrado no lema a seguir:

Lema 1. *Se c satisfaz Correntes Acíclicas, então R é acíclico.*

Demonstração. *Assuma que c satisfaz Correntes Acíclicas, pegue $x_1, ..., x_n \in \mathcal{X}$ com $x_1R...Rx_n$. Fixe $S \subseteq T$ com $x_1, x_n \in S$, $x_1 \in c(T)$ e $x_n \in c(S)$, pelo axioma sabemos que $x_1 \in c(S)$, Isto mostra que x_1Rx_n e, logo, não é verdade que x_nPx_1.* ■

O Axioma também nos permite estabelecer um simples, porém importante, resultado da preferência revelada:

Lema 2. *Se existem dois problemas de escolha* $S \subseteq T$ *com* $x, y \in S, y \in c(T), x \in c(S)$ *mas* $y \notin c(S)$*, e c satisfaz correntes acíclicas , então* xPy*.*

Por outro lado, se xPy*, então existem dois problemas de escolha* $S \subseteq T$ *com* $x, y \in S, y \in c(T), x \in c(S)$ *mas* $y \notin c(S)$

Demonstração. *Primeiro assuma que existem dois problemas de escolha* $S \subseteq T \in \mathcal{A}$*, com* $x, y \in S$*,* $y \in c(T), x \in c(S)$*, mas* $y \notin c(S)$*. É simples ver que* xRy*, logo basta provar que não pode ser* yRx*. Suponha, por absurdo, que* yRx*, temos então pelo axioma que* $y \in c(S)$ *o que é uma contradição. Concluímos que* xPy*.*

Agora assuma xPy*, então existe um par de problemas de escolha* $S \subseteq T \in \mathcal{A}$ *com* $x, y \in S$*,* $y \in c(T)$*,* $x \in c(S)$*. Note agora que se* $y \in c(S)$ *também seria verdade que* yRx[10]*, contradizendo a hipótese inicial.* ■

Agora podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 5. *Uma correspondência de escolha c pode ser representada por um modelo de Rationalization se, e somente se, satisfaz correntes acíclicas.*

Demonstração. *Em primeiro lugar, assuma que existe um modelo de rationalization (* $\succsim, \psi$ *) que representa c. Fixe* $x_1, ..., x_n \in \mathcal{X}$ *com* $x_1 R ... R x_n$*, é fácil ver que isso implica que* $x_1 \succsim ... \succsim x_n$*, como* $\succsim$ *é transitiva obtemos que* $x_1 \succsim x_n$*. Agora pegue dois problemas de escolha* $S \subseteq T$ *com* $x_1 \in c(T)$ *e* $x_n \in c(S)$*, observe que* $x_1 \in \psi(S)$ *pela estrutura 1 da restrição psicológica e que como* $x_n \in c(S)$*, temos que* $x_n \succsim y \ \forall y \in \psi(S)$*. Assim, por transitividade, concluímos que* $x_1 \succsim y \ \forall y \in \psi(S)$ *e logo* $x_1 \in c(S)$*.*

Agora assuma que c satisfaz Correntes Acíclicas, então, pelo Lema 1, R é uma relação acíclica. Isto implica que existe uma relação $\succsim$ *completa e transitiva que estende R. Assim defina:*

$$\psi(S) = \{x \in S : \exists S^* \in \mathcal{A} \text{ com } S \subseteq S^* \text{ e } x \in c(S^*)\}$$

Observemos primeiramente que $\psi(S)$ *respeita as estruturas estabelecidas anteriormente. Para demonstrar isso, fixe dois problemas de escolha* $S, S^* \in \mathcal{A}$ *com* $S \subseteq S^*$ *e pegue* $x \in \psi(S^*) \cap S$*. Então, pela definição, existe* $\widetilde{S} \in \mathcal{A}$ *tal que* $S^* \subseteq \widetilde{S}$ *e* $x \in c(\widetilde{S})$*. Agora perceba que* $S \subseteq \widetilde{S}$*, logo pela definição temos que* $x \in \psi(S)$*. Concluímos assim que* $\psi(S^*) \cap S \subseteq \psi(S)$*.*[11]

Por fim, note que:

$$c(S) = \max(\succsim, \psi(S))$$

Para demonstrar isso pegue $x \in c(S)$ *e note que* $xRy \ \forall y \in \psi(S)$*, de modo que* $x \in \max(\succsim, \psi(S))$*. Agora pegue* $x \in \max(\succsim, \psi(S))$ *e* $y \in c(S)$*.*

[10] Para ver isso perceba que $S \subseteq S$, e logo $x \in c(S)$ e $y \in c(S)$ implicaria que tanto xRy, quanto yRx.

[11] Isto garante que ψ satisfaz a estrutura 1, e, pelo teorema 3, que ψ também pode ser gerada por racionalizações.

Pela definição de $\psi(S)$, existe S^* tal que $S \subseteq S^*$ e $x \in c(S^*)$. Deste modo, se $x \notin c(S)$, o Lema 2 implica que yPx. Como $x \succsim y$, pois $y \in \psi(S)$, e $\succsim$ estende R, temos uma contradição. Assim constata-se que $x \in c(S)$.

Concluímos que c pode ser representado por um modelo de Rationalization.

■

7 Revealed Attention

Masatlioglu et al. [2012] elaboraram no mesmo ambiente de Cherepanov et al. um modelo alternativo. Nesse modelo, temos novamente que o tomador de decisão não racionaliza todo o conjunto de alternativas, mas apenas um de seus subconjuntos, que, agora, será denominado de Filtro de Atenção.

Da mesma forma que a restrição psicológica definida no modelo anterior, o Filtro de Atenção também pode ser qualquer subconjunto não vazio do conjunto de alternativas. Assim, se chamarmos o filtro de atenção de Γ, temos que $\Gamma : \mathcal{A} \Rightarrow 2^{\mathcal{X}}$ é uma correspondência e $\varnothing \neq \Gamma(S) \subseteq S\ \forall S \in \mathcal{A}$. Os autores, porém, escolhem trabalhar apenas com os filtros que satisfazem a definição abaixo:

Definição 6. *Uma correspondência Γ é um filtro de atenção se $\forall S \in \mathcal{A}, \Gamma(S) = \Gamma(S \backslash \{x\})$ sempre que $x \notin \Gamma(S)$.*

Temos, então, que uma correspondência é um filtro de atenção se sempre que retirarmos do conjunto de alternativas algo que ele já não prestava atenção em primeiro lugar, o conjunto de atenção permanece o mesmo. É importante destacar que apesar da similaridade nenhum dos dois modelos apresentados é caso particular do outro, ou seja: nem um filtro de atenção obedece as estruturas de uma restrição psicológica, nem uma restrição psicológica é um Filtro de Atenção.[12]

Para continuar definiremos a preferência revelada desse modelo:

Definição 7. *xPy se existe T tal que $x \in c(T) \neq c(T \backslash \{y\})$.*

A definição de preferência revelada é um tanto diferenciada da anterior, basicamente porque a estrutura do filtro da atenção é diferente da estrutura da restrição psicológica. Note, porém, que a intuição permanece a mesma:

[12] Para ver isso, defina $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$ e $\mathcal{A} = 2^{\mathcal{X}} \backslash \{\varnothing\}$. Agora, defina $\Gamma(\{x, y, z\}) = \{x, y\}$, $\Gamma(\{y, z\}) = \{z\}$ e $\Gamma(S) = S$ para qualquer outro $S \in \mathcal{A}$, e note que Γ satisfaz as condições de um filtro de atenção. Porém, $\Gamma(\{x, y, z\}) \cap \{y, z\} \not\subseteq \Gamma\{y, z\}$ e logo Γ não satisfaz a estrutura 1 das restrições psicológicas. Por fim, defina $\psi(\{x, y, z\}) = \{x\}$, $\psi(\{x, y\}) = \{x, y\}$ e $\psi(S) = S$ para qualquer outro $S \in \mathcal{A}$, note que ψ satisfaz a estrutura 1 das restrições psicológicas, porém, $z \notin \psi(\{x, y, z\})$ e $\psi(\{x, y, z\} \backslash \{z\}) \neq \psi(\{x, y, z\})$. Logo ψ não é um Filtro de Atenção.

x será preferido a y, se x for escolhido quando o tomador de decisão "prestar atenção" em y.[13]

Antes de prosseguir definiremos, brevemente, a função de escolha que representa este modelo:

Definição 8. *Uma função de escolha é uma escolha com atenção limitada se existir uma relação de preferência $\succ$ assimétrica, completa e transitiva sobre $\mathcal{X}$ e um filtro de atenção Γ tal que $c(S) = \max(\succ, \Gamma(S))$, $\forall S \in \mathcal{A}$.*

Como esperado a definição da função que representa o modelo é bastante similar ao modelo anterior (e também ao modelo tradicional), ainda que com suas particularidades.

Podemos, por fim, enunciar o axioma de representação, similar ao tradicional Axioma Fraco da Preferência Revelada:

AFPR(AL). [14] *Para qualquer problema de escolha S, existe $x^* \in S$ tal que, para qualquer T com $x^* \in T$, se $c(T) \in S$ e $c(T) \neq c(T \backslash \{x^*\})$, então $c(T) = x^*$*

Esse axioma nos diz que para qualquer problema de escolha S existe um $\succsim$-melhor elemento chamado de x^*, para o qual sempre que a escolha de um conjunto estiver em S, e se prestar atenção em x^*, ele será escolhido. Particularmente, a escolha de S será x^* sempre que se prestar atenção em x^*.

Teorema 6. ***Masatlioglu et al.**: c satisfaz AFPR(AL) se, e somente se, c é uma escolha com atenção limitada.*[15]

8 Revealed Attention com correspondência

A adaptação do modelo para o uso de correspondências de escolha se dará de modo bastante similar ao que fizemos com o modelo de Rationalization. A utilização de correspondência não modifica as definições de Filtro de Atenção, porém, modifica sensivelmente a estrutura da preferência revelada:

Definição 9. *Defina a relação binária R por xRy se, e somente se, $\exists S \in \mathcal{A}$ com $x \in c(S)$ e $c(S) \neq c(S \backslash \{y\})$. Quando xRy e não é verdade que yRx, dizemos que: xPy.*

[13]Perceba: $c(T) \neq c(T \backslash \{y\})$ implica que $y \in \Gamma(T)$, pois $y \notin \Gamma(T)$ implicaria que $\Gamma(T) = \Gamma(T \backslash \{y\})$ e logo $c(T) = c(T \backslash \{y\})$.

[14]Acrônimo para Axioma Fraco da Preferência Revelada com Atenção Limitada.

[15]A demonstração está disponível no apêndice. Para mais informações ver Masatlioglu et al. [2012].

Observe que preferência revelada segue a mesma lógica das definições anteriores, com x sendo revelado preferido a y, se x for escolhido em algum conjunto em que é revelado a atenção em y. Continuamos definindo a correspondência que representa o modelo:

Definição 10. *Seja $S \in \mathcal{A}$ e Γ um filtro de atenção, a correspondência de escolha $c(S)$ é uma escolha com atenção limitada se existe uma relação de preferência completa e transitiva $\succsim$ em $\mathcal{X}$, tal que $c(S) = \max(\succsim, \Gamma(S)), \forall S \in \mathcal{A}$.*

E para finalizar, precisamos, novamente, generalizar o axioma do modelo com função para que possamos obter um teorema de representação no caso de correspondências de escolha. Considere o seguinte postulado:

AFPR(AL). *Para todo problema de escolha S existe um subconjunto não vazio de S: $Q(S)$ tal que $\forall T$ com $c(T) \cap S \neq \varnothing$, se $c(T) \neq c(T \backslash y)$ para algum $y \in Q(S)$, então:*

$$c(T) \cap S = \{x \in Q(S) : c(T) \neq c(T \backslash x)\}$$

O axioma nos diz que para todo problema de escolha T que tenha parte da escolha em S, se o tomador de decisão presta atenção em algum bem em $Q(S)$, então a escolha de T que pertence a S será igual aos elementos de $Q(S)$ em que se presta atenção em T.

Para melhor interpretar esse axioma refletiremos sobre um caso particular: O que o axioma nos diria sobre a escolha no próprio conjunto S? Nós temos que se $c(S) \neq c(S \backslash \{y\})$ para algum $y \in Q(S)$ então $c(S) = \{x \in Q(S) : c(S) \neq c(S \backslash \{x\})\}$, ou seja se o tomador de decisão presta atenção em algum ponto em $Q(S)$ a escolha dele é igual a todos os pontos em $Q(S)$ em que ele presta atenção. Assim podemos interpretar $Q(S)$ a modo similar ao x^* usado no modelo de Masatlioglu et al.

Antes de prosseguir, demonstremos um lema particularmente interessante:

Lema 3. *Se c satisfaz AFPR(AL) e $\exists S$ tal que $x \in c(S), y \notin c(S)$ e $c(S) \neq c(S \backslash \{y\})$, então xPy.*

Alternativamente, se xPy temos que existe $S \in \mathcal{A}$ tal que $x \in c(S)$, $y \notin c(S)$ e $c(S) \neq c(S \backslash \{y\})$.

Demonstração. *Para provar a primeira afirmação note que xRy, e logo precisamos apenas demonstrar que não é verdade que yRx. Para isso, fixe o conjunto $\{x, y\}$, observe que $y \notin Q(\{x, y\})$ pois $x \in c(S), c(S) \neq c(S \backslash \{y\})$ mas $y \notin c(S) \cap \{x, y\}$. Temos assim que $\{x\} = Q(\{x, y\})$, pois esse é não vazio por definição. Deste modo $\forall T$ com $c(T) \neq c(T \backslash \{x\})$ nós temos que $y \notin c(T)$.*[16] *Concluímos que xPy.*

[16]Note que: se $y \in c(T)$ então $y \in c(T) \cap \{x, y\}$, mas $y \notin \{z \in Q(\{x, y\}) : c(T) \neq c(T \backslash \{z\})\}$, violando o Axioma.

Por fim, assuma que xPy, assim sabemos que existe $S \in \mathcal{A}$ tal que $x \in c(S)$ e $c(S) \neq c(S \backslash \{y\})$, agora observe que como $x \in c(S)$ temos que $c(S) \neq c(S \backslash \{x\})$, então se fosse verdade que $y \in c(S)$ teríamos que yRx, o que é uma contradição. Logo $y \notin c(S)$. Como queríamos demonstrar. ■

Similarmente ao modelo anterior, o axioma atual também garante que as preferências reveladas sejam acíclicas, como demonstraremos nos lemas a seguir:

Lema 4. *Para todo $x, y \in S \in \mathcal{A}$ com $x \in S$ e $y \in Q(S)$, temos que se xRy então $x \in Q(S)$.*

Demonstração. *Note que como xRy existe um conjunto $T \in \mathcal{A}$ tal que $x \in c(T), c(T) \neq c(T \backslash \{y\})$. Pegue um conjunto S como o definido na afirmação ($x \in S$ e $y \in Q(S)$), então pelo axioma temos que $c(T) \cap S = \{z \in Q(S) : c(T) \neq c(T \backslash \{z\})\}$. Agora como $x \in c(T) \cap S$ e $c(T) \neq c(T \backslash \{x\})$, temos que $x \in Q(S)$.* ■

Lema 5. *Se c satisfaz AFPR(LA) então R é acíclica.*

Demonstração. *Para ver isso, pegue $x_1, ..., x_n \in \mathcal{X}$ com $x_1 R ... R x_n$. Agora fixe o cojunto $T = \{x_1, ..., x_n\}$ e observe que como, pelo axioma, $Q(S)$ é não vazio, então existe $i \in \mathbb{N}$, $i \leq n$ tal que $x_i \in Q(S)$. Além disso, pelo Lema 4, temos que, se $x_i \in Q(T)$ então $x_{i-1} \in Q(T)$. Deste modo, temos por indução que $x_1 \in Q(T)$. Mas agora é claro que para todo S com $x_n \in c(S)$ e $c(S) \neq c(S \backslash \{x_1\})$ nós temos que $x_1 \in c(S)$. Agora, pelo Lema 3, concluímos que não é verdade que $x_n P x_1$.* ■

Por fim enunciamos o seguinte resultado:

Teorema 7. *Uma correspondência de escolha c satisfaz AFPR(AL) se e somente se c é uma escolha com atenção limitada.*

Demonstração. *Assuma, primeiramente, que c é uma escolha com atenção limitada. Para cada problema de escolha S, defina $Q(S) = \max(\succsim, S)$. Fixe T com $c(T) \cap S \neq \varnothing$ e $A = \{x \in Q(S) : c(T) \neq c(T \backslash \{x\})\} \neq \varnothing$. Pegue $x \in c(T) \cap S$ e $y \in A$, provaremos que $x \in A$ e $y \in c(T) \cap S$, de modo que $c(T) \cap S = A$, como queremos demonstrar. Para isso observe que $x \in \max(\succsim, \Gamma(T) \cap S)$ e $y \in \Gamma(T) \cap S$, pois $c(T) \neq c(T \backslash \{y\})$. Logo $x \succsim y$ e, por transitividade, $x \in \max(\succsim, S) = Q(S)$, como $c(T) \neq c(T \backslash \{x\})$ concluímos que $x \in A$. Por outro lado, podemos concluir que $y \succsim x$, pois $y \in \max(\succsim, S)$ e $x \in S$. Agora como $y \in \Gamma(T)$ temos por transitividade que $y \in c(T)$ e, em particular, $y \in c(T) \cap S$.*

Finalmente assuma que c satisfaz AFPR(AL). Pelo Lema 5, R é uma relação acíclica. Isto implica que existe uma relação completa e transitiva $\succsim$ que estenda R. Defina a correspondência Γ por $\Gamma(S) := \{y \in S : x \succ y$ para algum $x \in c(S)\} \cup c(S)$. Precisamos da seguinte afirmação:

Afirmação 1. *Para todo problema de escolha* $S, c(S) = \max(\succsim, \Gamma(S))$

Demonstração. *Fixe* S. *Note que como* $c(S) \neq c(S \backslash \{x\})$ *para todo* $x \in c(S)$. *Então, para todo par de elementos distintos* $x, y \in c(S)$ *nós temos que* xRy. *Como* $\succsim$ *é um extensão de* R, *isto implica que* $x \sim y$ *para todo* $x, y \in c(S)$. *Agora, dada a definição de* Γ, *é claro que* $c(S) = \max(\succsim, \Gamma(S))$ ■

Falta, então, mostrar que Γ *é um filtro de atenção. Para ver isto, fixe* S *e suponha que* $y \in S \backslash \Gamma(S)$. *Por construção, isto implica que* $y \succsim x$ *para todo* $x \in c(S)$. *Note agora que se* $c(S) \neq c(S \backslash \{y\})$, *então pelo Lema 3 teríamos que* xPy *para todo* $x \in c(S)$ *e, consequentemente, nós teríamos* $x \succ y$ *para todo* $x \in c(S)$. *Como isto não é verdade, nós concluímos que* $c(S) = c(S \backslash \{y\})$. *Agora é simples ver que* $\Gamma(S) = \Gamma(S \backslash \{y\})$. ■

9 Conclusão

Este trabalho buscou demonstrar as fragilidades de se criar modelos de escolha com a utilização de funções ao invés de correspondências. Deste modo, foi destacado que, sob o ponto de vista econômico, a utilização de funções representa uma hipótese comportamental, excluindo da análise situações de indecisões e indiferenças. Do lado analítico, sua utilização representa uma forte restrição topológica, como mostrado por Nishimura e Ok [2012]. Por fim, foi demonstrado que a transformações de modelos de escolha com funções para modelos de escolha com correspondência é, por vezes, simples e direta.

Utilizamos, para isso, dois diferentes modelos de escolhas criados recentemente, de alguma relevância, e que fazem uso de funções de escolha para sua construção. Os modelos foram apresentados e, depois, modificados para a utilização de correspondências. Isso foi feito de modo sutil, **sem modificar as peculiaridades dos modelos**, e breve, **sem adicionar demasiada complexidade**, demonstrando assim que é possível usar correspondências mesmo em modelos que foram criados tendo em mente o uso de funções.

Finalmente, acredita-se que esse trabalho abre caminho para que outros modelos, derivados com funções de escolha, sejam adaptados para o uso de correspondências. Ademais, superado o problema de dimensionalidade, imposto pelo **teorema da não continuidade das funções de escolha**[17], podemos generalizar os modelos para utilização de correspondências de escolhas contínuas em espaços de alternativas mais complexos.

[17] Teorema 1.

Bibliografia

Vandim Cherepanov, Timothy Feddersen, and Alvaro Sandroni. Rationalization. *Theoretical Economics*, 8:775–800, 2013. ISSN 1933-6837. doi: 10.3982/TE970. URL `http://doi.wiley.com/10.3982/TE970`.

David M. Kreps. *Microeconomic Foundations I: Choice and Competitive Markets*. Princeton University Press, Princeton, 2007.

Elon Lages Lima. *Análise Real Vol.1. Funções de uma Variável*. IMPA, Rio de Janeiro, 2012. ISBN 978-85-244-0048-3.

Daisuke e Ozbay Erkut Y. Masatlioglu, Yusufcan e Nakajima. Revealed attention. *American Economic Review*, 102:2183–2205, 2012. ISSN 00028282. doi: 10.1257/aer.102.5.2183.

Efe Nishimura, Hiroki e Ok. Non-Existence of Continuous Choice Functions. pages 1–10, 2012.

Efe Ok. *Real Analysis with Economic Applications*. Princeton University Press, Princeton, 2007. URL `https://files.nyu.edu/eo1/public/Papers-PDF/NoChoiceFunction2.pdf`.

Apêndice

A Modelo Tradicional

Teorema. *Uma correspondência de escolha satisfaz o Axioma Fraco da Preferência Revelada e Escolha não vazia se, e somente se, existe uma relação de preferência $\succsim$ completa e transitiva tal que para qualquer $S \in \mathcal{A}$, $c(S) = \max(\succsim, S)$, com $c(S) \neq \varnothing$.*

Suponha primeiro que exista uma relação de preferência completa e transitiva, $\succsim$, tal que para todo $S \in \mathcal{A}, c(S) = \{x \in S : x \succsim y \ \forall y \in S\} \neq \varnothing$. É evidente que c satisfaz escolha não vazia. Agora suponha que $x, y \in \mathcal{X}$ sejam tais que existe $S \in \mathcal{A}$ com $x \in c(S)$, mas $y \notin c(S)$. Isto só pode ocorrer se $x \succ y$. Mas então, é claro que, para todo $T \in \mathcal{A}$ com $x \in T$, nós temos que $y \notin c(T)$. Isto é, c satisfaz o Axioma Fraco da preferência revelada.

Agora suponha que c seja uma correspondência de escolha que satisfaça Escolha não Vazia e o Axioma Fraco da Preferência Revelada. Defina a relação $\succsim$ por $x \succsim y$ se, e somente se, $x \in c(\{x, y\})$. Por Escolha não Vazia, é claro que $\succsim$ é completa. Agora suponha que $x \succsim y$ e $y \succsim z$. Isto é, $x \in c(\{x, y\})$ e $y \in c(\{y, z\})$. Se $y \in c(\{x, y, z\})$, então o Axioma Fraco da Preferência Revelada implica que $x \in c(\{x, y, z\})$, se $z \in c(\{x, y, z\})$, então o Axioma Fraco da Preferência Revelada implica que $y \in c(\{x, y, z\})$, e logo pelo argumento anterior $x \in c(\{x,y,z\})$, como $c(\{x,y,z\}) \neq \varnothing$ temos que, necessariamente, $x \in c(\{x,y,z\})$. Agora uma nova aplicação do Axioma Fraco da Preferência Revelada implica que $x \in c(\{x,z\})$ e, consequentemente, $x \succsim z$. Nós concluímos que $\succsim$ é transitiva. Finalmente fixe $S \in \mathcal{A}$ e suponha que $x \in c(S)$. Pelo Axioma Fraco da Preferência Revelada, $x \in c(\{x,y\})$ para todo $y \in S$. Isto é $x \succsim y$ para todo $y \in S$. Suponha agora que $x \in S$ seja tal que $x \succsim y$ para todo $y \in S$. Pegue $y \in c(S)$. Por hipótese, $x \in c(\{x,y\})$ e agora o Axioma Fraco da Preferência Revelada implica que $x \in c(S)$. Nos concluímos que $c(S) = \{x \in S : x \succsim y \ \forall y \in S\}$. ■

B Rationalization

Demonstração do Teorema 3

Assuma primeiro que ψ é gerada por racionalizações. Pegue $x \in S \subseteq T$ e $x \in \psi(T)$. Por definição, existe um racional $R \in \mathcal{R}$ tal que $xRy \ \forall y \in T$, como $S \subseteq T$ então fica claro que $xRy \ \forall y \in S$, e logo $x \in \psi(S)$. Como queríamos demonstrar.

Assuma, agora, que a restrição psicológica ψ satisfaz a estrutura 1. Para cada $S \in \mathcal{A}$ defina a relação R_S por xR_Sy se e somente se $x \in \psi(S)$ e $y \in S$. Defina $\mathcal{R} = \{R_S : S \in \mathcal{A}\}$. É obvio que, para todo $S \in \mathcal{A}$, se $x \in \psi(S)$ então existe $R_S \in \mathcal{R}$ tal que $xR_Sy \ \forall y \in S$. Agora suponha que exista $R \in \mathcal{R}$ tal que xRy para todo $y \in S$ e algum $x \in S$. Pela definição de $\mathcal{R}$, isso só pode acontecer se existe $T \in \mathcal{A}$ com $S \subseteq T$ e $x \in \psi(T)$. Pelas propriedades de ψ concluímos que $x \in \psi(S)$. Logo, para todo $S \in \mathcal{A}, \psi(S) = \{x \in S : \exists R \in \mathcal{R}$ com $xRy, \forall y \in S\}$. ■

Demonstração do Teorema 4

Suponha primeiro que c seja representado por um modelo de Rationalization, $(\succsim, \psi)$. É imediato checar que c satisfaz Correntes Acíclicas.

Agora, assuma que c satisfaz Correntes Acíclicas. Fica claro, então, que podemos estender as preferências reveladas para uma relação $\succ$ completa e transitiva. Defina:

$$\psi(S) = \{c(S^*) : S \subseteq S^* \in \mathcal{A}\}$$

Observe que $c(S) = \max(\succ, \psi(S))$. Não obstante $\psi(S)$ obedece as estruturas estabelecidas anteriormente: fixe dois problemas de escolha $S, S^* \in \mathcal{A}$ com $S \subseteq S^*$, pegue $x \in \psi(S^*) \cap S$, é claro que se $x = c(S), x \in \psi(S)$, assuma o contrário $x \neq c(S)$, então existe $\widetilde{S} \in \mathcal{A}$ tal que $S^* \subseteq \widetilde{S}$ e $x = c(\widetilde{S})$, deste modo é claro que $S \subseteq \widetilde{S}$ e como $x \in S$ concluímos que $x \in \psi(S)$. ■

C Atenção Revelada

Demonstração do Teorema 6

Para a demonstração do Teorema, precisaremos do seguinte Lema:

Lema 6. *A relação de preferências reveladas P é acíclica se, e somente se, c satisfaz AFPR(AL)*

Demonstração. *Suponha que P tenha um ciclo: $x_1P...Px_1$. Então para cada $i = 1,...,k-1$ existe T_i tal que $x_i = c(T_i) \neq c(T_i\backslash\{x_{i+1}\})$ e $x_k = c(T_k) \neq c(T_k\backslash\{x_1\})$. Agora tome o conjunto $S = \{x_1,...,x_k\}$. Então, para todo $x \in S$, existe T tal que $c(T) \in S$ e $c(T) \neq C(T\backslash\{x\})$ mas $x \neq c(T)$. Logo AFPR(LA) é violado.*

Agora suponha que P seja acíclica. Então todo conjunto $S \in \mathcal{A}$ tem ao menos um elemento x tal que não existe $y \in S$ com yPx. Ou seja, não existe y com $y = c(T) \neq c(T\backslash\{x\})$ para algum $T \in \mathcal{A}$. Desta forma, para qualquer T , se $c(T) \in S$ e $c(T) \neq c(T\backslash\{x\})$ então deve ser que $x = c(T)$, exatamente o que define AFPR(AL).

Voltando à demonstração do Teorema, assuma que c é uma escolha com atenção limitada, então qualquer conjunto de preferências reveladas deve ser acíclico (pois $\succ$ é transitivo). Logo, pelo Lema 6, c satisfaz AFPR(LA).

Agora, suponha que c satisfaz AFPR(LA), então, pelo Lema 6, o conjunto de preferência reveladas deve ser acíclico. Deste modo existe uma extensão do conjunto de preferências reveladas $\succ$ que é completa e transitiva. Agora defina:

$$\Gamma(S) = \{x \in S : c(S) \succ x\} \cup \{c(S)\}\}$$

É simples ver que $c(S)$ é o único elemento que é $\succ$-melhor em $\Gamma(S)$. Falta apenas provar que Γ é um filtro de atenção. Para isso pegue $x \in S\backslash\Gamma(S)$. Então, por construção, não podemos ter que $c(S)Px$. Logo, pela definição da preferência revelada deve ser que $c(S) = c(S\backslash\{x\})$ e logo $\Gamma(S) = \Gamma(S\backslash\{x\})$. ∎