Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Irracionalidade de números envolvendo raízes não exatas e frações contínuas

Hugo Silva Noleto

Brasília
2014

Hugo Silva Noleto

Irracionalidade de números envolvendo raízes não exatas e frações contínuas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Diego Marques Ferreira

Brasília
2014

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade de Brasília. Acervo 1016320.

Noleto, Hugo Silva.

N791i Irracionalidade de números envolvendo raízes não exatas e frações contínuas / Hugo Silva Noleto. -- 2014.

69 f. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) - Universidade de Brasília, Departamento de Matemática, 2014.

Orientação: Diego Marques Ferreira.

Inclui bibliografia.

1. Números irracionais. 2. Raízes numéricas. 3. Frações contínuas. I. Ferreira, Diego Marques. II. Título.

CDU 51

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Irracionalidade de Números Envolvendo Raízes Não Exatas e Frações Contínuas

por

Hugo Silva Noleto*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 03 de julho de 2014.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Diego Marques Ferreira – MAT/UnB (Orientador)

Mário José de Souza

Prof. Dr. Mário José de Souza – UFG/GO (Membro)

Kellcio O. Araújo

Prof. Dr. Kellcio Oliveira Araújo – MAT/UnB (Membro)

Resumo

Este trabalho tem como objetivo demonstrar a irracionalidade de vários números que envolvem raízes não exatas e representar números racionais e raízes quadradas não exatas na forma de uma fração contínua, além de apresentar exercícios envolvendo esses temas e que podem ser utilizados pelo professor do ensino básico em sala de aula. Haverá demonstrações de irracionalidade de números da forma $\sqrt[m]{x}$, $(a+\sqrt{x})^n$ e $\sqrt{x_1} \pm \sqrt{x_2}$ e, utilizando alguns conhecimentos de nível superior, provaremos a irracionalidade das expressões $(a+b\sqrt[m]{x})^n$, $\sqrt[m]{x} \pm \sqrt[n]{y}$ e da constante de Euler e. Além disso, serão apresentadas técnicas que permitem gerar outros números irracionais que envolvam raízes não exatas, através de resultados provenientes do estudo dos polinômios. Veremos também, que existem métodos iterativos que permitem escrever números racionais e raízes quadradas não exatas como uma fração contínua. Neste segundo caso, tal representação pode ser uma fração contínua simples ou não, que permite aproximar o valor da raiz quadrada o quanto quisermos, através de cálculos simples, que podem facilmente ser efetuados por alunos de ensino fundamental e médio.

Palavras-chaves

Irracionalidade, raízes não exatas, frações contínuas.

Abstract

The main goal of this work is to demonstrate the irrationality of several numbers involving non-exact roots and how to represent rational numbers and non-exact square roots in the form of continued fractions. In addition, we present exercises involving these topics, which can be used by secondary school teachers in their classroom. The irrationality of numbers in the form $\sqrt[m]{x}$, $(a+\sqrt{x})^n$ e $\sqrt{x_1} \pm \sqrt{x_2}$ will be demonstrated and, using university-level Mathematics, we will prove the irrationality of the expressions $(a+b\sqrt[m]{x})^n$, $\sqrt[m]{x} \pm \sqrt[n]{y}$ and of the Euler constant e. Moveover, we will present techniques allowing the construction of other irrational numbers involving non-exact roots related to results obtained in the study of polynomials. We will also see that there are iterative methods that allow us to write rational numbers and non-exact square roots as continued fractions. In the latter case, such representation may be simple or not and it allows us to approximate the value of the square root as much as we wish, using simple calculations, which can be easily done by primary and/or secondary students.

Keywords

Irrationality, non-exact roots, continuous fractions.

Sumário

Introdução

No estudo dos conjuntos numéricos, o conjunto dos números irracionais é certamente o menos explorado nos ensinos fundamental e médio. Em geral, quando um professor trabalha com esse conjunto, um exemplo bastante utilizado são o das raízes não exatas. Quando dizemos que uma raiz não exata é um número irracional, concluimos que ela é representada por uma dízima não periódica. Em sala de aula, para mostrar esse fato, o professor escreve algumas casas decimais desse número e afirma não ter um padrão (período) nas infinitas casas decimais que não foram escritas, o que não justifica que esse número seja uma dízima não periódica, ou seja, não justifica sua irracionalidade. A demonstração da irracionalidade das raízes não exatas é um tema que pode ser trabalhado nos ensinos fundamental e médio e que, além de aumentar o conhecimento do aluno com relação a números irracionais, leva-os a uma experiência de demonstrar algo em matemática, e não apenas aceitá-lo, como se fosse uma verdade absoluta. Um outro ponto tratado no conjunto dos números irracionais, é o de aproximar o valor de uma raiz (quadrada, geralmente), por meio de um número racional, uma vez que é impossível descrever um número irracional, pelo fato de ele ter infinitas casas decimais que não tem nenhum período em sua representação. Uma das formas de escrever, por exemplo, as 3 primeiras casas decimais do número $\sqrt{5}$, é descobrir dois números "consecutivos" com 3 casas decimais, digamos x e y, de modo que $x < \sqrt{5} < y$, e daí considerar x como sendo essa aproximação. No caso de $\sqrt{5}$, basta fazer os passos:

1. Como $2^2 = 4 < 5$ e $3^2 = 9 > 5$, então $2 < \sqrt{5} < 3$
2. Como $2,2^2 = 4,84 < 5$ e $2,3^2 = 5,29 > 5$, então $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$
3. Como $2,23^2 = 4,9729 < 5$ e $2,24^2 = 5,0176 > 5$, então $2,23 < \sqrt{5} < 2,24$
4. Como $2,236^2 = 4,999696 < 5$ e $2,237^2 = 5,004169 > 5$, então $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$

Portanto $x = 2,236$ é uma aproximação com 3 casas decimais para $\sqrt{5}$. Porém, usando esse método, os cálculos a serem utilizados podem vir a ser muito trabalhosos a medida que aumentamos o número de casas decimais na aproximação, fazendo com que o aluno demore muito tempo para achar tal aproximação ou se perca ou erre algum cálculo.

O presente trabalho, além de conter demonstrações de irracionalidade de vários números envolvendo raízes não exatas, apresenta também métodos menos trabalhosos para aproximação de raízes quadradas não exatas, através do estudo das frações contínuas e de seus convergentes.

Portanto, o objetivo final do trabalho, é dar, ao professor que o ler, a possibilidade de trabalhar mais com números irracionais em suas aulas, tanto no uso de demonstrações de irracionalidade, como no uso de frações contínuas, mostrando outros métodos de aproximação, além de diversos outros problemas envolvendo números irracionais, que podem ser encontrados em olimpíadas de matemática, ENEM, vestibulares, entre outros.

1 Preliminares

Esta seção contém definições, propriedades e demonstrações de alguns resultados que serão usados para o desenvolvimento deste trabalho.

1.1 Conjuntos numéricos

1.1.1 O conjunto dos números naturais

Esse conjunto surgiu pela necessidade de contagem de objetos, quando o homem desenvolveu o comércio e o sistema de trocas. No começo eram usados os dedos, pedras, ou nós de uma corda para realizar uma contagem ou fazer uma medição de terra. O próximo passo foi a criação e o uso de símbolos para representar uma certa quantidade, que são os numerais. Com a evolução da matemática, o homem foi aprimorando essas representações, e introduzindo ao mundo o conceito de número natural, até que no século XIX, através dos axiomas de Peano, foi construído o conjunto dos números naturais, com todas as características que conhecemos hoje. Esse conjunto serviu como base para a criação dos outros conjuntos numéricos. O conjunto dos números naturais é representado por

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}.$$

1.1.2 O conjunto dos números inteiros

Com o início do Renascimento surgiu a expansão comercial, que aumentou a circulação de dinheiro, obrigando os comerciantes a expressarem situações envolvendo lucros e prejuízos. Com isso, os números naturais não eram suficientes para representar qualquer quantidade, uma vez que, para cada número natural, poderia ser representado o ganho ou a perda dessa quantidade. Dessa forma, surgiram os números negativos e um novo conjunto numérico, o conjunto dos números inteiros, que é representado pela letra Z, ou, mais comumente, pelo símbolo $\mathbb{Z}$. Segue abaixo a representação do conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots\}.$$

Os números com o sinal de menos $(-)$ na frente são chamados de números negativos e indicam perda, prejuízo. Os números com o sinal de mais $(+)$ são chamados de números positivos e indicam ganho, lucro. O sinal de $+$ é facultativo nos números positivos.

Neste conjunto o zero é um elemento central, pois para cada número à sua direita, há um respectivo oposto à sua esquerda (inverso aditivo). Utilizamos o símbolo $\subset$ para indicar que um conjunto está contido em outro. Como o conjunto dos números naturais é um subconjunto do conjunto dos números inteiros, temos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Podemos também dizer que o conjunto dos números inteiros contém ($\supset$) o conjunto dos números naturais ($\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$).

Para representarmos os números inteiros excluindo o zero, utilizamos a seguinte notação:

$$\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

Temos ainda outros subconjuntos especiais dos números inteiros, cujas representações e significados são:

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}$ - Conjunto dos números inteiros não negativos.

$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}$ - Conjunto dos números inteiros positivos.

$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$ - Conjunto dos números inteiros não positivos.

$\mathbb{Z}_-^* = \{\ldots, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$ - Conjunto dos números inteiros negativos.

Note que $\mathbb{Z}_+^* = \mathbb{N}$.

1.1.3 O conjunto dos números racionais

Analisando os conjuntos já mencionados, podemos observar que a soma e a multiplicação de dois números naturais quaisquer, dá um número natural como resposta e a soma , subtração e multiplicação de dois números inteiros quaisquer dá um número inteiro como resposta. Isso equivale a dizer que o conjunto dos números naturais é fechado para as operações de adição e multiplicação e o conjunto dos números inteiros é fechado para as operações de adição, subtração e multiplicação. Verifica-se, no entanto, que esse fato não vale para a operação de divisão, uma vez que, o resultado da operação "2 dividido por 4", por exemplo, não tem resposta no conjunto dos números inteiros. Para "fechar" a operação de divisão também, é necessário abordar outros números, denominados frações, cuja notação é dada por $\frac{a}{b}$, que representa o resultado da divisão de a por b, sendo a e b números inteiros. Nota-se que $b \neq 0$, pois $\frac{0}{0}$ é uma indeterminação (infinitas soluções) e $\frac{a}{0}$ não existe, para qualquer inteiro $a \neq 0$. Tem-se ainda que, a é chamado de numerador e b de denominador da fração. Note também que, se $b = 1$, então $\frac{a}{b}$ é um número inteiro, pois $\frac{a}{1} = a$. Temos então que o conjunto formado pelas frações, que é fechado para as quatro operações básicas, é chamado de conjunto dos números racionais e é representado pela letra Q, ou pelo símbolo $\mathbb{Q}$, que pode ser descrito da seguinte forma:

$$\mathbb{Q} = \{\tfrac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\}.$$

Além da forma fracionária, um número racional pode ser escrito na forma decimal. Para passar uma fração para a sua forma decimal, basta dividirmos o numerador da fração pelo denominador. O quociente dessa divisão será a forma decimal da fração. Por exemplo, a forma decimal da fração $\frac{2}{5}$ é o número decimal 0,4, pois $2 \div 5 = 0,4$. Em alguns casos, o processo de divisão de um número inteiro por outro nunca termina, fazendo com que a parte decimal do quociente seja infinita, como por exemplo na fração $\frac{28}{3}$, cujo número decimal equivalente é 9,3333..., que é um número decimal com infinitas casas decimais iguais a 3. Esse número é dito uma dízima periódica, cujo período é igual à 3. Os períodos de uma dízima periódica podem ter mais de um algarismo, como por exemplo a dízima -14,34783478..., cujo período é formado por 4 algarismos. Tal dízima também pode ser representada por -14,$\overline{3478}$.

Além da forma decimal, toda fração pode ser escrita na forma de uma fração irredutível, ou seja, uma fração que não tem como mais ser reduzida (ou simplificada). Reduzir uma fração, nesse caso, é o ato de dividirmos o numerador e o denominador de uma fração por um divisor comum (diferente de ± 1) desses dois números. Quando isso não for possível, então a fração estará na forma irredutível. Por exemplo, a fração $\frac{12}{18}$ pode ser reduzida para a fração $\frac{6}{9}$, pois dividimos o numerador e o denominador por 2, que é um divisor comum de 12 e 18. A fração $\frac{6}{9}$ pode ser reduzida para a fração $\frac{2}{3}$, basta dividir 6 e 9 por 3. A fração $\frac{2}{3}$ não pode mais ser reduzida, pois 2 e 3 não tem divisores comuns diferentes de ± 1. Portanto $\frac{2}{3}$ é uma fração irredutível e as frações $\frac{12}{18}$, $\frac{6}{9}$ e $\frac{2}{3}$ são frações equivalentes, pois representam a mesma quantidade, que é o número decimal 0,$\overline{6}$.

1.1.4 O conjunto dos números irracionais

Como o próprio nome já diz, um número é irracional quando ele não é racional, ou seja, quando não puder ser representado na forma de uma fração. Para representar o conjunto dos números irracionais, utilizamos a letra I, ou ainda o símbolo $\mathbb{I}$. Portanto, temos que:

$$\mathbb{I} = \{a : a \text{ não é racional}\}.$$

Fazem parte do conjunto dos números irracionais as dízimas não periódicas, que são números que tem infinitas casas decimais, porém não possuem período. Dois números irracionais bastante conhecidos na matemática são o número $\pi = 3,1415...$, que é a uma constante que representa a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro e é bastante utilizada em trigonometria, e temos também a constante $e = 2,718281...$, que aparece no estudo de funções exponenciais. Além dessas duas constantes, outro exemplo de números irracionais são as raízes não exatas, como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt[3]{10}$, ou seja, soluções não inteiras de $\sqrt[m]{x}$. A demonstração da irracionalidade dos números da forma $\sqrt[m]{x}$ é um dos temas principais desse trabalho e será feita em capítulos posteriores.

Diferentemente do que acontece com os números racionais, a realização de qualquer uma das quatro operações aritméticas entre dois números irracionais quaisquer não terá obrigatoriamente como resultado também um número irracional. Por exemplo $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$ e $-\frac{2\pi}{\pi} = -2$. Portanto, o resultado de qualquer umas das 4 operações principais entre irracionais poderá tanto pertencer a $\mathbb{Q}$, quanto pertencer a $\mathbb{I}$.

1.1.5 O conjunto dos números reais

O conjunto dos números reais, que está representado pela letra R, ou pelo símbolo $\mathbb{R}$, é a união entre o conjunto dos números racionais e o conjuntos dos números irracionais. Portanto, podemos fazer as seguintes relações entre os conjuntos numéricos vistos anteriormente:

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$

1.2 Noções de teoria dos números

Para a demonstração da irracionalidade de raízes não exatas e suas representações como frações contínuas, usaremos (diretamente ou indiretamente) alguns resultados provenientes da teoria dos números, dos quais serão enunciados e, alguns deles, demonstrados nesse capítulo.

1.2.1 Indução matemática

O princípio de indução matemática (efeito dominó) é um método usado para demonstrar que uma propriedade $(P(n); n \in \mathbb{N})$ é válida para todo número natural maior ou igual a um número natural dado. Existem dois princípios da indução que são geralmente utilizados em tais demonstrações:

- **1º princípio da indução**

  Dado $P(n)$ uma propriedade referente a números naturais, temos que se:

  (i) $P(n_0)$ é válido, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$;

  (ii) Supondo que, se $P(n)$ é válido para algum $n \geq n_0$ (Hipótese de indução), então $P(n+1)$ também é válido.

  Então $P(n)$ é válido para todo $n \geq n_0$.

Exemplo 1. *Demonstrar, pelo 1º princípio da indução, que*

$$1+2+3+\cdots+n=\sum_{i=1}^{n} i=\tfrac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $P(n): \sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$, *temos:*

(i) $\sum_{i=1}^{1} i=1=\frac{1(1+1)}{2}$, *ou seja,* $P(1)$ *é válida*

(ii) Vamos supor que $P(n)$ *é válida para algum* $n \geq n_0$. *Então:*

$\sum_{i=1}^{n+1}=\sum_{i=1}^{n} i+n+1=\frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$\Rightarrow P(n+1)$ *é válida.*

Portanto, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} i=\tfrac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

- **2º princípio da indução**

  Dado $P(n)$ uma propriedade referente a números naturais, temos que se:

  (i) $P(1)$ é válida;

  (ii) Dado $n_0 \in \mathbb{N}$ e supondo $P(n)$ válida para todo $n \leq n_0$, implica que $P(n+1)$ é válida.

  Então $P(n)$ é válido para todo $n \in \mathbb{N}$

Exemplo 2. *Considere a sequência* $A_n=4A_{n-1}-4A_{n-2}$, *com termos iniciais* $A_1=2$ *e* $A_2=4$. *Então* $A_n=2^n$.

Sendo $P(n): A_n=2^n$, *temos:*

(i) $A_1=2=2^1$, *portanto* $P(1)$ *é válida.*

(ii) Dado $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 1$, *vamos supor que* $P(n)$ *é válida para todo* $n \leq n_0$. *Então temos que:*

$A_{n+1}=4A_n-4A_{n-1}=4\cdot 2^n-4\cdot 2^{n-1}=2^{n+2}-2^{n+1}=2^{n+1}(2-1)=2^{n+1}$

$\Rightarrow P(n+1)$ *é válida.*

Portanto, pelo 2º princípio da indução, temos que:

$$A_n=2^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.2.2 Divisibilidade de números inteiros

Proposição 1. ***(O algoritmo da divisão)***

Sejam a, b dois números naturais. Então existem únicos números naturais q e r tais que:

$$a = qb + r \text{ e } 0 \leq r < b$$

onde q se chama quociente e r o menor resto não-negativo na divisão de a por b

Demonstração. **Existência de q e r**

Se $a = 0$, então basta escolher $q = r = 0$. Vamos supor então que $a \geq 1$. Daí, temos 3 casos:

- **Caso 1** $(a < b)$: Nesse caso, basta escolher $q = 0$ e $r = a$, verificando assim, as condições:

$$a = 0 \cdot b + a, \text{ onde } 0 \leq a < b$$

- **Caso 2** $(a = b)$: Nesse caso, basta escolher $q = 1$ e $r = 0$, verificando assim, as condições:

$$a = 1 \cdot b + 0$$

- **Caso 3** $(a > b)$: Seja X o conjunto

$$X = \{a \in \mathbb{N} : a = qb + r, \text{ com } q \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq r < b\}$$

Note que $1 \in X$, pois $1 = 1.1 + 0$.

Vamos supor, como hipótese de indução, que $k \in X$, para todo $1 \leq k < a$, ou seja, que $\{1, 2, \ldots, a-1\} \subset X$. Como $a > b > 0$, temos que $0 < a - b < a$ e também, pela hipótese de indução, que existem q_1 e r números inteiros, tais que

$$a - b = q_1 b + r, \text{ com } 0 \leq r < b$$

Fazendo $q = q_1 + 1$, temos:

$a - b = (q - 1)b + r \Rightarrow a = qb + r$, com $0 \leq r < b$

Portanto, pelo 2º princípio da indução, temos que $a \in X, \forall a \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$a = qb + r, \text{ com } q \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq r < b$$

para todo $a \in \mathbb{N}$.

Como já havíamos provado para o caso $a = 0$, então podemos concluir que

$$a = qb + r, \text{ com } q \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq r < b$$

para todo $a \in \mathbb{N}$.

Unicidade de q e r

Suponhamos que existam q_1, q_2, r_1 e $r_2 \in \mathbb{N}$ tais que $a = q_1b + r_1$ e $a = q_2b + r_2$. Logo:

$$q_1b + r_1 = q_2b + r_2 \Rightarrow (q_1 - q_2)b = r_2 - r_1$$

Como $0 \leq r_1 < b$ e $0 \leq r_2 < b$, então:

$0 - r_1 \leq r_2 - r_1 < b - r_1 \Rightarrow -b < r_2 - r_1 < b$ (pois $-b < -r_1$ e $b - r_1 \leq b$)

$\Rightarrow 0 \leq |r_2 - r_1| < b$

Sendo assim, temos:

$|r_2 - r_1| < b \Rightarrow |q_1 - q_2|\, b < b$

$\Rightarrow |q_1 - q_2| < 1$

Como q_1 e q_2 são naturais, então $|q_1 - q_2| = 0$, ou seja, $q_1 = q_2$. Dessa forma, $r_2 - r_1 = 0$ e $r_1 = r_2$ também. Portanto, se $a = bq + r$, com $q \in \mathbb{N}$ e $0 \leq r < b$, então q e r são únicos.

□

Exemplo 3. *Para $a = 100$ e $b = 7$, temos $q = 14$ e $r = 2$, pois $100 = 7 \cdot 14 + 2$*

Para $a = 17$ e $b = 2$, temos $q = 8$ e $r = 1$, pois $17 = 2 \cdot 8 + 1$

Para $a = 48$ e $b = 12$, temos $q = 4$ e $r = 0$, pois $48 = 12 \cdot 4 + 0$

Para $a = 22$ e $b = 39$, temos $q = 0$ e $r = 22$, pois $22 = 39 \cdot 0 + 22$

Definição 1. *Dizemos que um inteiro b é divisível por um inteiro a (também a divide b ou b é múltiplo de a) se existe $q \in \mathbb{Z}$, tal que $b = aq$.*

Observação 1. *Escrevemos $a \mid b$ se a divide b e $a \nmid b$, se a não divide b.*

Propriedades: Para todos os números $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, valem as seguintes propriedades:

1. $a \mid 0, 1 \mid b, a \mid a$.
2. $a \mid 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$ e $0 \mid b \Leftrightarrow b = 0$.
3. Se $a \mid b$ e $c \mid d$, então $ac \mid bd$.
4. Se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$ (Transitividade).
5. $a \mid b$ e $b \mid a \Leftrightarrow a = \pm b$.
6. Se $a \mid b$ e $b \neq 0$, então $|a| \leq |b|$.
7. Se $a \mid b$ e $a \mid c$, então $a \mid bx + cy, \forall x, y \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 4. *4 | 20, 3 | -6, -10 | 200. Porém 4 ∤ 10, 19 ∤ -47.*

Definição 2. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com pelo menos um deles diferente de zero. O máximo divisor comum entre a e b é o número natural*

$$d = mdc(a, b)$$

definido pelas duas propriedades:

1. *$d \mid a$ e $d \mid b$ (i.e d é divisor comum de a e b).*
2. *Se algum $c \in \mathbb{N}$ dividir ambos a e b, então $c \mid d$.*

Em outras palavras, d é o maior divisor comum de a e b

Teorema 1. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, não ambos nulos e seja $d = mdc(a, b)$. Então existem x_1, $y_1 \in \mathbb{Z}$ tais que*

$$ax_1 + by_1 = d.$$

Definição 3. *Os números $a, b \in \mathbb{Z}$ chamam-se relativamente primos (ou primos entre si) se $mdc(a, b) = 1$.*

Exemplo 5. *$mdc(15, -46) = 1$, logo 15 e -46 são primos entre si.*

Observação 2. *Uma fração $\frac{a}{b}$ é irredutível se a e b forem primos entre si.*

Proposição 2. *Os números $a, b \in \mathbb{Z}$, não ambos nulos, são relativamente primos, se e somente se existem $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$ tais que*

$$ax_1 + by_1 = 1$$

Demonstração. Seja $d = mdc(a, b)$. Então, se $d = 1$, existem x_1, y_1 tais que $ax_1+by_1 = 1$, pelo Teorema 1. Reciprocamente, se existem x_1, y_1 tais que $ax_1 + by_1 = 1$ e como $d \mid a$ e $d \mid b$, então $d \mid ax_1 + by_1$, então $d \mid 1$, e portanto $d = 1$, ou seja, a e b são primos entre si. □

Corolário 1. ***(Lema de Euclides)*** *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tais que $a \mid bc$ e $mdc(a, b) = 1$. Então $a \mid c$.*

Demonstração. Como $a \mid bc$ e $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$, então existem r, x e y tais que $ar = bc$ e $ax + by = 1$. Temos então que:

$$c = c(ax + by) = cax + cby = cax + ary = a(cx + ry) \Rightarrow a \mid c.$$ □

1.2.3 Números primos

Definição 4. *Um número inteiro $p > 1$ é chamado primo, se ele tem exatamente 2 divisores positivos, a saber 1 e p. Indicamos por*

$$\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ é primo}\}$$

o conjunto de todos os números primos.

Um número $n > 1$ é dito composto, se ele não é primo.

Exemplo 6. *2,3,5,7,11,13,17,19,23,29 são números primos.*

4,6,8,9,10,12,14,15,16,18 não são números primos.

Observação 3. *2 é o único número primo par.*

Observação 4. *O número 1 não é primo nem composto.*

Proposição 3. *Seja $p \in \mathbb{P}$. Então*

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, \text{ se } p \mid ab, \text{ então } p \mid a \text{ ou } p \mid b.$$

Ou seja, se um número primo divide um produto de 2 fatores, então ele divide um dos fatores.

Demonstração. Vamos supor que $p \mid ab$ e $p \nmid a$. Então $\mathrm{mdc}(a, p) = 1$, logo, pelo Corolário 1, segue que $p \mid b$. □

Teorema 2. ***(O teorema fundamental da aritmética)*** *Para todo número inteiro $n > 1$ existem únicos primos distintos $p_1, \ldots, p_r$, tais que $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ e únicos números $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{N}$ tais que*

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$$

Este produto é chamado de decomposição primária de n.

1.3 Polinômios

Definição 5. ***(Polinômio)***

Um polinômio $P(x)$ de grau n (notação: $gr(P) = n$) em uma variável x é uma expressão da forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \text{ com } a_n \neq 0$$

Os números $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são chamados de coeficientes do polinômio. Se todos os coeficientes pertencem a um conjunto numérico K, então dizemos que $P(x) \in K[x]$. Se um polinômio é da forma $P(x) = a_0$, com $a_0 \neq 0$, então dizemos que P tem grau 0. Se $P(x) \equiv 0$ (polinômio nulo), então não é definido grau para esse polinômio, usando assim a notação $gr(P) = -\infty$.

Observação 5. *Em um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, o coeficiente a_n é chamado de coeficiente líder de $P(x)$, e o coeficiente a_0 é chamado de coeficiente (ou termo) independente de $P(x)$.*

Observação 6. *Se um polinômio $P(x)$ tem coeficiente líder igual a 1, então $P(x)$ é chamado de polinômio mônico.*

1.3.1 Operações entre polinômios

As operações entre polinômios são feitas da seguinte maneira:

Adição: Dados dois polinômios $A(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $B(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ (Vamos supor, sem perda de generalidade, que $m \leq n$), temos que o polinômio $C(x) = A(x) + B(x)$ é dado por:

$$C(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)x^k$$

Neste caso, $b_k = 0$, para $k > m$.

Exemplo 7. *Dados* $A(x) = 5x^3 + 12x^2 - x + 1$ *e* $B(x) = x^2 + 14x$*, calcular* $C(x) = A(x) + B(x)$*. Então, temos que:*

$$C(x) = (5+0)x^3 + (12+1)x^2 + (-1+14)x + (1+0) = 5x^3 + 13x^2 + 13x + 1.$$

Subtração: Dados 2 polinômios $A(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $B(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ (Vamos supor, sem perda de generalidade, que $m \leq n$), temos que o polinômio $C(x) = A(x) - B(x)$ é dado por:

$$C(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k)x^k$$

Neste caso, $b_k = 0$, para $k > m$.

Exemplo 8. *Dados* $A(x) = 5x^3 + 12x^2 - x + 1$ *e* $B(x) = x^2 + 14x$*, calcular* $C(x) = A(x) - B(x)$*. Então, temos que:*

$$C(x) = (5-0)x^3 + (12-1)x^2 + (-1-14)x + (1-0) = 5x^3 + 11x^2 - 15x + 1.$$

Multiplicação: Dados 2 polinômios $A(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $B(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$, temos que o polinômio $C(x) = A(x)B(x)$ é dado por:

$$C(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right) \left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j \right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k$$

Exemplo 9. *Dados* $A(x) = 5x^3 + 12x^2 - x + 1$ *e* $B(x) = x^2 + 14x$*, calcular* $C(x) = A(x)B(x)$*. Então, temos que:*

$$\begin{aligned} C(x) &= (5.1)x^5 + (5.14 + 12.1)x^4 + (5.0 + 12.14 + (-1).1)x^3 + (12.0 + (-1).14 + 1.1)x^2 + \\ &\quad ((-1).0 + 1.14)x + 1.0 \\ &= 5x^5 + 94x^4 + 167x^3 - 13x^2 + 14x. \end{aligned}$$

Divisão: Na divisão entre 2 polinômios, $A(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $B(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$, encontramos únicos polinômios, $Q(x)$ e $R(x)$, tais que

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x), \text{ tal que } gr(R(x)) < gr(B(x)).$$

O polinômio $Q(x)$ é chamado de quociente da divisão e $R(x)$ de resto da divisão.

Observação 7. *Assim como acontece entre números naturais, se na divisão de $A(x)$ por $B(x)$, o resto for o polinômio nulo, ou seja, se existe $Q(x)$ tal que*

$$A(x) = B(x)Q(x),$$

então dizemos que $B(x) \mid A(x)$.

Para efetuar a divisão de $A(x)$ e $B(x)$, vamos supor que $n > m$, pois se $n = m$, então $Q(x) = 1$ e $R(x) = 0$ e se $n < m$, então $Q(x) = 0$ e $R(x) = A(x)$. Depois, façamos o algoritmo abaixo:

1. Divida o monômio de maior grau na composição de $A(x)$ por $b_m x^m$. Chame-o de $K(x)$;

2. Armazene o valor de $K(x)$;

3. Calcule o polinômio $C(x)$, onde $C(x) = A(x) - K(x)B(x)$;

4. Defina $A(x) := C(x)$ e volte para o passo 1;

Repetindo esse ciclo até obter $C(x)$, tal que $gr(C(x)) < gr(B(x))$, finalizamos a operação e aí temos:

$$Q(x) = \text{soma dos } K(x)\text{'s armazenados e } R(x) = C(x)$$

Exemplo 10. *Dados $A(x) = 5x^3 + 12x^2 - x + 1$ e $B(x) = x^2 + 14x$, calcular $Q(x)$ e $R(x)$ tais que $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$. Temos que:*

1ª iteração: $K(x) = 5x^3/x^2 = 5x$ e $C(x) = 5x^3 + 12x^2 - x + 1 - (5x)(x^2 + 14x) = -58x^2 - x + 1$

2ª iteração: $K(x) = -58x^2/x^2 = -58$ e $C(x) = -58x^2 - x + 1 - (-58)(x^2 + 14x) = 811x + 1$

Como $gr(811x + 1) = 1 < 2 = gr(B(x))$, então a operação termina na 2ª iteração e:

$$Q(x) = 5x - 58 \text{ e } R(x) = 811x + 1.$$

Em uma divisão da forma $A(x)/B(x)$, tal que $B(x) = x - t$, e $t \in \mathbb{R}$, temos um método alternativo para realizar a divisão, que é chamado de método de Briot-Ruffini, criado por Charles Auguste Briot e Paolo Ruffini que é descrito pelo seguinte algoritmo:

1. Crie uma tabela $2 \times (n + 2)$, onde $n = gr(A(x))$. Na 1ª coluna da primeira linha coloque o número real t e nas $n + 1$ colunas restantes, os coeficientes de $A(x)$, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$, exatamente nesta ordem.

t	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0
			$\cdots$		

2. Obtenha os coeficientes c_k, com k variando entre 0 e $n-1$ e o polinômio constante $R(x)$, de maneira que :

$$\begin{cases} c_{n-1} = a_n \\ c_k = c_{k+1} \cdot t + a_{k+1}, \text{ para } k = 0, \ldots, n-2 \\ R(x) = c_0 \cdot t + a_0 \end{cases}$$

t	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0
	c_{n-1}	c_{n-2}	$\cdots$	c_0	$R(x)$

Temos então que $Q(x) = c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_1x + c_0$ é o quociente e $R(x) = c_0.t + a_0$ é o resto da divisão de $A(x)$ por $B(x) = x - t$.

Exemplo 11. *Vamos achar o quociente e o resto da divisão de* $A(x) = 12x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 9x + 10$ *por* $B(x) = x - 9$*, usando o método de Briot-Ruffini:*

9	12	-4	2	-9	10
	12	$12 \cdot 9 - 4 = 104$	$104 \cdot 9 + 2 = 938$	$938 \cdot 9 - 9 = 8433$	$8433 \cdot 9 + 10 = 75907$

Portanto, o coeficiente e o resto são, respectivamente, $Q(x) = 12x^3 + 104x^2 + 938x + 8433$ *e* $R(x) = 75907$*. Portanto, temos que:*

$$12x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 9x + 10 = (x-9).(12x^3 + 104x^2 + 938x + 8433) + 75907.$$

1.3.2 Igualdade de polinômios

Dizemos que os polinômios $A(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $B(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ são iguais (ou idênticos), se eles têm mesmo grau (ou seja, $n = m$) e $a_k = b_k$, para todo $k = 0, \ldots, n$.

Exemplo 12. *Sejam* $A(x) = (m+n+p)x^4 - (p+1)x^3 + mx^2 + (n-p)x + n$ *e* $B(x) = 2mx^3 + (2p+7)x^2 + 5mx + 2m$*. Quais são os valores de* m, n *e* p *para que se tenha* $A(x) = B(x)$*?*

Temos então que:

$$\begin{cases} m+n+p=0 \\ -p-1=2m \\ m=2p+7 \\ n-p=5m \\ n=2m \end{cases}$$

que nos dá $m=1, n=2$ *e* $p=-3$.

1.3.3 Raiz de um polinômio

Temos que um número real a é dito uma raiz de um polinômio $P(x)$, se $P(a)=0$.

Proposição 4. *Um número real* a *é raiz de um polinômio* $P(x)$ *se, e somente se,*

$$(x-a) \mid P(x).$$

Demonstração. Se $(x-a) \mid P(x)$, então existe $Q(x)$ tal que $P(x)=Q(x)(x-a)$. Então:

$$P(a)=Q(a)(a-a)=0.$$

Portanto, a é raiz de $P(x)$.

Suponha agora que a é raiz de $P(x)$. Dividindo $P(x)$ por $x-a$, temos:

$$P(x)=Q(x)(x-a)+R(x),$$

em que $R(x)$ é um polinômio cujo grau é menor do que 1. Então $R(x)=c$, com c constante. Então

$$P(x)=Q(x)(x-a)+c.$$

Como a é raiz de P, então temos que:

$$P(a)=0 \Rightarrow Q(a)(a-a)+c=0 \Rightarrow c=0$$

e então $P(x)=Q(x)(x-a)$, logo $(x-a) \mid P(x)$.

□

1.3.4 Polinômios irredutíveis

Seja K um conjunto numérico. Dizemos que um polinômio $P(x)$ é irredutível em $K[x]$, se não é possível escrever $P(x) = A(x)B(x)$, onde $A(x)$, $B(x) \in K[x]$, e ambos tenham graus maiores ou iguais a 1. Caso um polinômio não seja irredutível em $K[x]$, dizemos que o polinômio é redutível em $K[x]$.

Proposição 5. *Se $P(x)$ é um polinômio irredutível em $K[x]$, então ele não possui raízes em K.*

Demonstração. Uma maneira equivalente de se enunciar essa proposição, é dizer que, se um polinômio possui raízes em K, então ele é redutível em $K[x]$ (contra-positiva). Seja então $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ um polinômio que tem raízes em K. Sejam ainda $x_1, \ldots, x_n \in K$ (não necessariamente distintas) tais raízes. Então, temos que:

$$P(x) = a_n \prod_{j=1}^{n} (x - x_k) = (a_n x - a_n x_1) \prod_{j=2}^{n} (x - x_k),$$

ou seja, $P(x)$ é o produto de n polinômios de grau 1, tal que cada polinômio tem coeficientes em K. Portanto $P(x)$ é redutível em $K[x]$. $\square$

Observação 8. *A recíproca da proposição 5 não é verdadeira. Um polinômio que não contém raízes em K pode ser redutível em $K[x]$. O polinômio $x^4 + 4$, por exemplo, não tem raízes inteiras, porém pode ser escrito como $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.*

Observação 9. *Todo polinômio é redutível em $\mathbb{C}[x]$, onde $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos.*

Exemplo 13.

1. *As raízes do polinômio $P(x) = x^2 - 5x + 6$ são 2 e 3, portanto $P(x)$ é redutível em $\mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x]$ e $\mathbb{C}[x]$.*

2. *As raízes do polinômio $Q(x) = x^2 - 2$ são $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$, portanto $Q(x)$ é redutível em $\mathbb{R}[x]$e $\mathbb{C}[x]$. Por outro lado, se tentarmos escrever $x^2 - 2$ como produto de 2 polinômios com coeficientes racionais, ambos com grau maior ou igual a 1, teríamos o seguinte:*

$$x^2 - 2 = A(x)B(x).$$

Como $P(x)$ é mônico e de grau 2, então segue que $A(x)$ e $B(x)$ também são mônicos, ambos com grau 1. Logo

$$x^2 - 2 = (x - a)(x - b),$$

onde a e b são números racionais. Então temos que $(x-a) \mid P(x)$ e $(x-b) \mid P(x)$. Logo, pela proposição 4, temos que a e b são raízes de $P(x)$, o que é um absurdo. Portanto, não é possível escrever $P(x)$ como um produto de polinômios com coeficientes racionais e com graus maiores ou iguais a 1. Portanto, $P(x)$ é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$, logo, irredutível também em $\mathbb{Z}[x]$.

Definição 6. ***(Polinômio primitivo)***

Um polinômio $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ é dito primitivo se o mdc entre os seus coeficientes for igual a 1.

Exemplo 14. *O polinômio $x^3+2x^2-5x+10$ é primitivo, pois $mdc(1,2,-5,10)=1$. Já o polinômio $2x^4-8$ não é primitivo, pois $mdc(2,0,0,0,-8)=2$.*

Proposição 6. *Sejam $F(x)$ e $G(x)$ dois polinômios. Temos que F e G são primitivos se, se somente se, FG é primitivo.*

Demonstração. Sejam $F(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $G(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} b_j x^j$ polinômios, tal que FG é primitivo. Suponha que F ou G não seja primitivo (digamos F). Então existe p primo tal que $p \mid a_i$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n$, então segue que $p \mid c_k$, coeficientes de FG, para todo $k = 0, 1, \ldots, m+n$, logo FG não é primitivo (Absurdo!). Então $F(x)$ e $G(x)$ são primitivos.

Vamos supor agora que $F(x)$ e $G(x)$ sejam primitivos. Seja p um número primo, i o menor natural tal que $p \nmid a_i$ e $p \mid a_k$, para todo $k < i$ e j o menor natural tal que $p \nmid b_j$ e $p \mid a_k$, para todo $k < j$. Seja c_k um dos coeficientes de $F(x)G(x)$. Temos que

$$c_{i+j} = a_0 b_{i+j} + a_1 b_{i+j-1} + \cdots + a_i b_j + \cdots + a_{i+j-1} b_1 + a_{i+j} b_0.$$

Temos então que p não divide o termo $a_i b_j$, porém divide todos os restantes da soma acima. Portanto $p \nmid c_{i+j}$. Como p é qualquer, então segue que não existe um p primo que divida todos os coeficientes de $F(x)G(x)$. Portanto $F(x)G(x)$ é primitivo. □

Vamos usar o conceito de polinômio primitivo para demonstrar o seguinte lema.

Lema 1. ***(Gauss)***

Se $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ é um polinômio irredutível em $\mathbb{Z}[x]$, então $P(x)$ também é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$.

Demonstração. Vamos supor por absurdo, que $P(x)$ é redutível em $\mathbb{Q}[x]$. Então existem polinômios $G(x), H(x) \in \mathbb{Q}[x]$, ambos com grau maior ou igual a 1, tal que $P(x) = G(x)H(x)$. Como G e H são polinômios com coeficientes racionais, então cada um desses coeficientes são representados por frações irredutíveis. Sejam m_1 o mmc dos denominadores dos coeficientes de $G(x)$ e m_2 o mmc dos denominadores dos coeficientes de $H(x)$. Temos então que m_1 e m_2 são os menores naturais tais que $m_1G(x), m_2H(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Seja p_1 um primo tal que p_1 divide todos os coeficientes de $m_1G(x)$, então $\frac{m_1}{p_1}G(x) \in \mathbb{Z}$, o que contraria a minimalidade de m_1. De maneira análoga não existe um primo que divida todos os coeficientes de $m_2H(x)$. Portanto m_1G e m_2H são primitivos. Temos ainda que:

$$m_1m_2P(x) = m_1G(x)m_2H(x)$$

onde o lado direito da igualdade é um polinômio primitivo, pois representa o produto de polinômios primitivos. Então o lado esquerdo da igualdade é também um polinômio primitivo. Mas isso só é possível se $m_1 = m_2 = 1$. Daí, temos que $G(x), H(x) \in \mathbb{Z}[x]$, o que é um absurdo, pois $p(x)$ é irredutível em $\mathbb{Z}[x]$ por hipótese. Portanto, $P(x)$ é irredutível em $\mathbb{Q}$.

$\square$

2 A irracionalidade das raízes não exatas

Nesse capítulo, iremos demonstrar a irracionalidade dos números da forma $\sqrt[m]{x}$, onde $\sqrt[m]{x}$ é uma raiz não exata, ou seja, não existe um número inteiro a, tal que $a^m = x$. Mas antes, veremos demonstrações de irracionalidade de outras raízes, que vão auxiliar na demonstração de que $\sqrt[m]{x}$ é irracional.

2.1 Irracionalidade de $\sqrt{2}$

A irracionalidade de $\sqrt{2}$ é demonstrada de forma bem simples e interessante ao mesmo tempo, onde se usa a prova por absurdo. Vamos supor, nesse caso, que $\sqrt{2}$ é um número racional e chegar em uma contradição. Digamos então que:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \text{com } b \neq 0, \mathbf{(1)}$$

onde $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível $(\text{mdc}(a, b) = 1)$. Elevando ambos os lados da igualdade **(1)** ao quadrado, obtemos:

$$\frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2 \text{ é um número par.}$$

Segue que se a^2 é par, então a também é par. Para demonstrar isso, utilizamos outra demonstração por absurdo:

Demonstração. Vamos supor que a é ímpar, então temos que:

a é ímpar $\Rightarrow a = 2k + 1$, para algum $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow a^2 = (2k + 1)^2$

$\Rightarrow a^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$\Rightarrow a^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

$\Rightarrow a^2 = 2q + 1, q \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow a^2$ é ímpar,

o que é um absurdo, pois partimos da hipótese de que a^2 é par. Então, se a^2 for par, não tem como a ser ímpar, portanto a também é par. □

Sendo assim, se a é par, então existe um inteiro c, tal que $a = 2c$. Logo, temos que:

$a^2 = 2b^2 \Rightarrow (2c)^2 = 2b^2 \Rightarrow 2b^2 = 4c^2 \Rightarrow b^2 = 2c^2$

$\Rightarrow b^2$ é par

$\Rightarrow b$ é par

Mas se a e b são pares, então mdc(a,b) $\neq 1$, ou seja, a fração $\frac{a}{b}$ não é irredutível, o que contradiz a hipótese de que $\frac{a}{b}$ é irredutível. Então, partindo do pressuposto de que $\sqrt{2}$ é racional, chegamos à uma contradição, portanto, $\sqrt{2}$ não é racional, logo $\sqrt{2}$ é irracional.

2.2 Irracionalidade de $\sqrt{p}$, com p primo

Vamos agora generalizar o argumento anterior para todos os números da forma $\sqrt{p}$, onde p é um número primo. A demonstração é parecida com a da irracionalidade de $\sqrt{2}$. Vamos supor que $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$. Logo, temos que:

$\sqrt{p} = \frac{a}{b}(b \neq 0 \text{ e } mdc(a,b) = 1) \Rightarrow p = \frac{a^2}{b^2}$

$\Rightarrow a^2 = pb^2$

$\Rightarrow p \mid a^2$

Usando a Proposição 3, do Capítulo 2, temos que, se $p \mid a^2$, então $p \mid a$. Portanto, podemos escrever que $a = kp$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Então, temos:

$a^2 = pb^2 \Rightarrow (kp)^2 = pb^2$

$\Rightarrow k^2p^2 = pb^2$

$\Rightarrow b^2 = k^2p$

$\Rightarrow p \mid b^2$

$\Rightarrow p \mid b$

Dessa forma, $p \mid a$ e $p \mid b$, contrariando a hipótese de que mdc$(a,b) = 1$. Portanto $\sqrt{p}$ não pode ser racional, logo $\sqrt{p}$ é irracional.

2.3 Irracionalidade de $\sqrt[m]{p^r}$, com p primo e $r < m$

Generalizando um pouco mais, vamos agora demonstrar que $\sqrt[m]{p^r}$ é um número irracional, onde p é primo, $r, m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ e $r < m$. Como fizemos em situações anteriores, vamos supor que $\sqrt[m]{p^r} \in \mathbb{Q}$. Então temos:

$\sqrt[m]{p^r} = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$ e $\mathrm{mdc}(a,b) = 1$) $\Rightarrow p^r = \dfrac{a^m}{b^m}$

$\Rightarrow a^m = p^r b^m$

$\Rightarrow p^r \mid a^m$

$\Rightarrow p \mid a^m$

$\Rightarrow p \mid a$ (Proposição 3)

Então $a = kp$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Daí, temos

$(kp)^m = p^r b^m \Rightarrow k^m p^m = p^r b^m$

$\Rightarrow b^m = k^m p^s$, onde $s = m - r > 0$ (pois $m > r$)

$\Rightarrow p^s \mid b^m$

$\Rightarrow p \mid b^m$

$\Rightarrow p \mid b$

Daí $p \mid a$ e $p \mid b$, mas isso contradiz o fato de que $\mathrm{mdc}(a,b) = 1$, logo $\sqrt[m]{p^r}$ é irracional.

2.4 Irracionalidade de $\sqrt[m]{p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_t^{r_t}}$

Vamos agora demonstrar a irracionalidade de $\sqrt[m]{p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_t^{r_t}}$, onde $p_1, \ldots, p_t$ são primos distintos, $r_1, \ldots, r_t \in \mathbb{N}$ e $r_k < m$, para todo $k = 1, \ldots, t$. Suponnha então que $\sqrt[m]{p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_t^{r_t}} \in \mathbb{Q}$. Daí, temos que:

$\sqrt[m]{p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_t^{r_t}} = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$ e $\mathrm{mdc}(a,b) = 1$) $\Rightarrow p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_t^{r_t} = \dfrac{a^m}{b^m}$

$\Rightarrow a^m = b^m p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_t^{r_t}$

$\Rightarrow p_1^{r_1} \mid a^m$

$\Rightarrow p_1 \mid a^m$

$\Rightarrow p_1 \mid a$

Portanto $a = kp_1$, para algum $k \in \mathbb{Z}$ e

$(kp_1)^m = b^m p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_t^{r_t} \Rightarrow k^m p_1^m = b^m p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_t^{r_t}$

$\Rightarrow k^m p_1^s = b^m p_2^{r_2} p_3^{r_3} \cdots p_t^{r_t}$, onde $s = m - r_1 > 0$

$\Rightarrow p_1^s \mid b^m p_2^{r_2} p_3^{r_3} \cdots p_t^{r_t}$

$\Rightarrow p_1 \mid b^m p_2^{r_2} p_3^{r_3} \cdots p_t^{r_t}$

Como $p_1, p_2, \ldots, p_t$ são primos distintos, então segue que $p_1 \nmid p_2^{r_2} p_3^{r_3} \cdots p_t^{r_t}$. Portanto, pela Proposição 3, segue que $p_1 \mid b^m$, portanto $p_1 \mid b$.

Logo, $p_1 \mid a$ e $p_1 \mid b$, que contradiz o fato de que $\operatorname{mdc}(a,b) = 1$. Portanto $\sqrt[m]{p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_t^{r_t}}$ é irracional.

2.5 Irracionalidade de $\sqrt[m]{x}$, com $x \in \mathbb{N}$

Vamos considerar valores de x, de modo que não exista um número inteiro (logo, racional) que, elevado a m, dê x como resultado.

Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, podemos garantir que existem primos distintos $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e números naturais $c_1, c_2, \ldots, c_n$, tais que

$$x = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \cdots p_n^{c_n}$$

Para garantir ainda que, $\sqrt[m]{x}$ não seja uma raiz exata, devemos ter que pelo menos um c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ não seja múltiplo de m. Caso contrário, todos os c_i's seriam múltiplos de m e assim, todos os primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$ seriam extraídos do radicando, fazendo com que $\sqrt[m]{x}$ fosse um número inteiro.

Digamos então, sem perda de generalidade, que, dos n primos que compõem a forma fatorada de x, t deles, digamos $p_1, p_2, \ldots, p_t$, têm expoentes que não são múltiplos de m e o restante, $p_{t+1}, p_{t+2}, \ldots, p_n$, têm expoentes que são múltiplos de m. Note que t varia entre 1 e n. De acordo com o algoritmo da divisão (Proposição 1 do Capítulo 2), temos que:

$$\begin{cases} c_i = mq_i + r_i, \text{ com } 0 < r_i < m \text{ para } i = 1, 2, \ldots, t \\ c_j = mq_j, \text{ para } j = t+1, t+2, \ldots, n \end{cases}$$

Dessa forma, temos:

$$\sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{p_1^{c_1} p_2^{c_2} \cdots p_t^{c_t} p_{t+1}^{c_{t+1}} p_{t+2}^{c_{t+2}} \cdots p_n^{c_n}}$$

$$= \sqrt[m]{p_1^{mq_1+r_1} p_2^{mq_2+r_2} \cdots p_t^{mq_t+r_t} p_{t+1}^{mq_{t+1}} p_{t+2}^{mq_{t+2}} \cdots p_n^{mq_n}}$$

$$= \sqrt[m]{(p_1^{mq_1} p_1^{r_1})(p_2^{mq_2} p_2^{r_2}) \cdots (p_t^{mq_t} p_t^{r_t}) p_{t+1}^{mq_{t+1}} p_{t+2}^{mq_{t+2}} \cdots p_n^{mq_n}}$$

$$= p_1^{q_1} p_2^{q_2} \cdots p_n^{q_n} \sqrt[m]{p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_t^{r_t}}$$

que equivale ao produto de um número racional não-nulo $(p_1^{q_1} p_2^{q_2} \cdots p_n^{q_n})$ com um número irracional $(\sqrt[m]{p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_t^{r_t}})$, que é um número irracional (demonstração na seção 3).

3 Gerando outros números irracionais

Vimos na seção anterior a irracionalidade de números da forma $\sqrt[m]{x}$, com $x, m \in \mathbb{N}$ e $m > 1$. Neste capítulo, veremos algumas técnicas que permitem gerar outros números irracionais que envolvem raízes não exatas.

3.1 Irracionalidade de $(a + \sqrt{x})^n$

Vimos no capítulo preliminar, que o conjunto dos números racionais é fechado para as 4 operações básicas. Portanto, se a e b são números racionais, então $a+b$, $a-b$, ab e $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$ são números racionais também. Vimos também que o mesmo não acontece no conjunto dos números irracionais. No entanto, vamos mostrar que são irracionais números da forma $a \pm \theta$, $a\theta$ e $\frac{1}{\theta}$, onde a é um racional não nulo e θ é um irracional.

Observação 10. *O caso* $\frac{\theta}{a}, a \neq 0$ *se equivale ao caso* $a\theta$*, pois* $\frac{\theta}{a} = \frac{1}{a}.\theta = b\theta$*, onde* $b \in \mathbb{Q}$*.*

- Irracionalidade de $a \pm \theta$

  Para demonstrar tal irracionalidade, vamos supor que $a + \theta = b$, onde $b \in \mathbb{Q}$. Como $a \in \mathbb{Q}$. Daí, temos:

  $a + \theta = b \Rightarrow \theta = b - a \Rightarrow \theta \in \mathbb{Q}$ (Absurdo!)

  Portanto $a + \theta$ é irracional.

  Substituindo θ por $-\theta$, mostramos que $a - \theta$ também é irracional.

- Irracionalidade de $a\theta$

  Neste caso, supondo que $a\theta = b$, com $b \in \mathbb{Q}$, temos que:

  $a\theta = b \Rightarrow \theta = \dfrac{b}{a} \overset{a \neq 0}{\Rightarrow} \theta \in \mathbb{Q}$ (Absurdo!)

  Portanto $a\theta$ é irracional.

- Irracionalidade de $\dfrac{1}{\theta}$

  Supondo que $\dfrac{1}{\theta} = b$, com $b \in \mathbb{Q}$, temos:

  $\dfrac{1}{\theta} = b \Rightarrow \theta = \frac{1}{b} \Rightarrow \theta \in \mathbb{Q}$ (Absurdo!)

  Portanto $\dfrac{1}{\theta}$ é irracional.

Com isso, vamos verificar a irracionalidade de números da forma $(a + \sqrt{x})^n$, tal que $a \in \mathbb{Q}, \sqrt{x} \in \mathbb{I}$ e $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que:

$$(a+\sqrt{x})^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} x^{\frac{i}{2}} = A + B\sqrt{x}$$

onde $A = \sum_{i\ par, i \leq n} \binom{n}{i} a^{n-i} x^{\frac{i}{2}}$, $B = \sum_{j\ impar, j \leq n} a^{n-j} x^{\frac{j-1}{2}} \in \mathbb{Q}^*$.

Como A e B são racionais, então segue que $B\sqrt{x}$ é irracional (pois $\sqrt{x}$ é irracional) e $A + B\sqrt{x}$ é irracional, pois equivale a uma soma de um número racional com um número irracional. Portanto $(a+\sqrt{x})^n$ é irracional.

3.2 O critério de Eisenstein

O critério de Eisenstein permite provar a irredutibilidade de alguns polinômios em $\mathbb{Z}[x]$, fazendo com que esse critério se torne uma poderosa ferramenta para achar infinitos números irracionais.

Teorema 3. ***(Critério de Eisenstein)***

Seja $F(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ um polinômio de grau $n > 1$. Suponha que exista um primo p tal que:

- $p \nmid a_n$
- $p \mid a_i$, *para* $i = 0, 1, \ldots, n-1$
- $p^2 \nmid a_0$

Então F não pode ser escrito como um produto de polinômios em $\mathbb{Z}[x]$ cujos graus são maiores ou iguais a 1. Em outras palavras, F é irredutível em $\mathbb{Z}[x]$, logo, pelo Lema de Gauss, irredutível em $\mathbb{Q}[x]$.

Demonstração. Vamos supor por absurdo, que $F(x) = G(x)H(x)$, onde $G, H \in \mathbb{Z}[x]$, ambos com grau maior ou igual a 1. Podemos escrever:

$$G(x) = b_r x^r + b_{r-1} x^{r-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \text{ e } H(x) = c_s x^s + c_{s-1} x^{s-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

onde $r, s \geq 1$ e $r + s = n$. Como existe um primo p, tal que $p \mid a_0$, mas $p^2 \nmid a_0$, temos que:

$p \mid a_0 \Rightarrow p \mid b_0 c_0 \Rightarrow p \mid b_0$ ou $p \mid c_0$, mas não ambos (pois $p^2 \nmid a_0$)

Vamos supor, sem perda de generalidade, que $p \mid b_0$ e $p \nmid c_0$. Então, temos:

$p \mid a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0 \Rightarrow p \mid b_1 c_0 \Rightarrow p \mid b_1$

$p \mid a_2 = b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 \Rightarrow p \mid b_2c_0 \Rightarrow p \mid b_2$

$\vdots$

$p \mid a_m = b_0c_m + b_1c_{m-1} + \cdots + b_{m-1}c_1 + b_mc_0 \Rightarrow p \mid b_m$

onde $m = \min(r, s)$. Daí, temos 2 casos:

Caso 1: $r \leq s$: Nesse caso, temos:

$m = r \Rightarrow p \mid b_r \Rightarrow p \mid b_rc_s = a_n$ (Absurdo!)

Caso 2: $r > s$: Então $r = s + k$, com $k > 0$. Daí, temos:

$$m = s \Rightarrow p \mid b_s$$

Logo:

$p \mid a_{s+1} = b_1c_s + b_2c_{s-1} + \cdots + b_sc_1 + b_{s+1}c_0 \Rightarrow p \mid b_{s+1}$

$p \mid a_{s+2} = b_2c_s + b_3c_{s-1} + \cdots + b_{s+1}c_1 + b_{s+2}c_0 \Rightarrow p \mid b_{s+2}$

$\vdots$

$p \mid a_r = a_{s+k} = b_kc_s + b_{k+1}c_{s-1} + \cdots + b_{r-1}c_1 + b_rc_0 \Rightarrow p \mid b_r$

Mas $p \mid b_r \Rightarrow p \mid b_rc_s = a_n$ (Absurdo!)

Portanto, supondo que F é redutível, chegamos a uma contradição, logo, F é irredutível.

$\square$

Dessa forma, podemos concluir que as raízes reais de certos polinômios são irracionais, como nos exemplos abaixo:

Exemplo 15. *Seja* $F(x) = x^2 + 10x - 5$. *Temos que:*

- $5 \nmid 1$
- $5 \mid -5$ *e* $5 \mid 10$
- $5^2 \nmid -5$

Portanto, pelo critério de Eisenstein, F *não tem raízes racionais. Resolvendo a equação* $F(x) = 0$, *temos:*

$x^2 + 10x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$

$\Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{120}}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{-10 \pm 2\sqrt{30}}{2}$

$\Rightarrow x = -5 \pm \sqrt{30}$

$\Rightarrow -5 + \sqrt{30}$ *e* $-5 - \sqrt{30}$ *são números irracionais.*

Exemplo 16. *Seja* $G(x) = x^4 - 11x^2 - 33 = 1x^4 + 0x^3 - 11x^2 + 0x - 33$. *Temos que:*

- $11 \nmid 1$
- $11 \mid -33, 11 \mid 0, 11 \mid -11$ *e* $11 \mid 0$
- $11^2 \nmid -33$

Portanto, pelo critério de Eisenstein, G não tem raízes racionais. Resolvendo a equação $G(x) = 0$, *temos:*

$x^4 - 11x^2 - 33 = 0 \Rightarrow y^2 - 11y - 33 = 0$ *(Fazendo* $y = x^2$*)*

$\Rightarrow y = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4.1.(-33)}}{2.1}$

$\Rightarrow y = \frac{11 \pm \sqrt{253}}{2}$

Como $x = \pm\sqrt{y}$, *então segue que* $x = \pm\sqrt{\frac{11 \pm \sqrt{253}}{2}}$. *Portanto* $\sqrt{\frac{11+\sqrt{253}}{2}}$ *e* $-\sqrt{\frac{11+\sqrt{253}}{2}}$ *são números irracionais.*

Além de gerar números irracionais, o critério de Eisenstein ajuda a mostrar, em alguns casos, se um dado número real é irracional ou não. Por exemplo:

Exemplo 17. *Mostre que* $\sqrt{\sqrt{3} + 1}$ *é um número irracional.*

Para mostrar esse fato, vamos descobrir um polinômio que tenha $\sqrt{\sqrt{3} + 1}$ *como raiz. Para isso, temos:*

$$x = \sqrt{\sqrt{3} + 1}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos:

$x^2 = \sqrt{3} + 1 \Rightarrow x^2 - 1 = \sqrt{3}$

Elevando novamente os 2 lados ao quadrado, obtemos:

$x^4 - 2x^2 + 1 = 3 \Rightarrow x^4 - 2x^2 - 2 = 0$

Portanto, $\sqrt{\sqrt{3}+1}$ *é raiz do polinômio* $x^4 - 2x^2 - 2$*, que, de acordo com o critério de Einsenstein, é irredutível em* $\mathbb{Q}[x]$*. Logo,* $\sqrt{\sqrt{3}+1}$ *é um número irracional.*

Uma outra demonstração para a irracionalidade de $\sqrt{\sqrt{3}+1}$ *é a seguinte: Suponha que* $\sqrt{\sqrt{3}+1} = \frac{a}{b}$ *irredutível e* $a, b \geq 1$*. Então temos:*

$$\sqrt{3} + 1 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \sqrt{3}b^2 + b^2 = a^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}b^2 = a^2 - b^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$\Rightarrow 3b^4 = (a+b)^2(a-b)^2$$

Como $(a, b) = 1$*, então* $((a+b)^2, b^4) = (a^2 + 2ab + b^2, b^4) = 1$*, então temos que:*

$$(a+b)^2 \mid 3 \Rightarrow (a+b)^2 \leq 3$$

$$\Rightarrow a + b \leq \sqrt{3} < 2 \text{ (Absurdo!)}$$

pois $a + b \geq 1 + 1 = 2$*. Portanto* $\sqrt{\sqrt{3}+1}$ *é irracional.*

3.3 Irracionalidade de $\sqrt{x_1} \pm \sqrt{x_2}$

Vimos no capítulo anterior, que a adição ou subtração de números irracionais não garante que o resultado é também um número racional. Vamos demonstrar, nessa seção, que números da forma $\sqrt{x_1} \pm \sqrt{x_2}$ é um número irracional, onde $\sqrt{x_1}$ e $\sqrt{x_2}$ são números irracionais e $x_1 \neq x_2$. Para demonstrar primeiramente a irracionalidade de $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$, vamos descobrir um polinômio com coeficientes inteiros que tenha o número $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ como raiz. Temos então que:

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = x \Rightarrow \sqrt{x_1} = x - \sqrt{x_2}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, temos:

$$x_1 = x^2 - 2\sqrt{x_2}x + x_2 \Rightarrow x^2 - (x_1 - x_2) = 2\sqrt{x_2}x$$

Elevando novamente ambos os lados ao quadrado, temos:

$$x^4 - 2(x_1 - x_2)x^2 + (x_1 - x_2)^2 = 4x_2x^2 \Rightarrow x^4 - 2(x_1 + x_2)x^2 + (x_1 - x_2)^2 = 0$$

Então $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ é raiz de $x^4 - 2(x_1 + x_2)x^2 + (x_1 - x_2)^2 = 0$. Note que o critério de Eisenstein não se aplica nesse polinômio, pois caso exista um primo p, tal que $p \mid (x_1 - x_2)^2$, então $p \mid (x_1 - x_2)$, logo $p^2 \mid (x_1 - x_2)^2$, o que não poderia acontecer para poder se aplicar o critério. Vamos então supor que $x^4 - 2(x_1 + x_2)x^2 + (x_1 - x_2)^2$ tenha uma raiz racional $\frac{p}{q}$. Substituindo x por $\frac{p}{q}$ no polinômio em questão, temos:

$(\frac{p}{q})^4 - 2(x_1 + x_2)(\frac{p}{q})^2 + (x_1 - x_2)^2 = 0 \Rightarrow p^4 - 2(x_1 + x_2)p^2q^2 + (x_1 - x_2)^2q^4 = 0$

$\Rightarrow [p^2 - (x_1 - x_2)q^2]^2 - 4bp^2q^2 = 0$

$\Rightarrow [p^2 - (x_1 - x_2)q^2]^2 = 4bp^2q^2$

$\Rightarrow p^2 - (x_1 - x_2)q^2 = \pm 2p^2q^2\sqrt{x_2}$ **(2)**

Temos então que o lado esquerdo da igualdade **(2)** é um número racional e o lado direito é um número irracional (pois é o produto entre um número racional não nulo $(\pm 2p^2q^2)$ com um número irracional $(\sqrt{x_2})$, o que é uma contradição. Portanto $x^4 - 2(x_1 + x_2)x^2 + (x_1 - x_2)^2$ não possui raízes racionais, logo $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ é irracional.

Substituindo $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}$ nesse mesmo polinômio, temos:

$x^4 - 2(x_1 + x_2)x^2 + (x_1 - x_2)^2 = (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^4 - 2(x_1 + x_2)(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 + (x_1 - x_2)^2$

$= x_1^2 - 4x_1\sqrt{x_1x_2} + 6x_1x_2 - 4x_2\sqrt{x_1x_2} + x_2^2 - 2(x_1 + x_2)(x_1 - 2\sqrt{x_1x_2} + x_2) + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$

$= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 - 4x_1\sqrt{x_1x_2} - 4x_2\sqrt{x_1x_2} - 2x_1^2 + 4x_1\sqrt{x_1x_2} - 2x_1x_2 - 2x_1x_2 + 4x_2\sqrt{x_1x_2} - 2x_2^2$

$= 0$

Portanto, $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}$ também é raiz de $x^4 - 2(x_1 + x_2)x^2 + (x_1 - x_2)^2$, que é um polinômio que não possui raízes racionais. Logo, $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}$ também é um número irracional.

Para demonstrar a irracionalidade de $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}$ à partir da irracionalidade de $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$, poderíamos também, supor que $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}$ é racional, daí teríamos que

$$(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) \in \mathbb{I},$$

pois teríamos uma multiplicação entre um número racional e um irracional. Mas isso é um absurdo, pois $(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) = x_1 - x_2$, que é um número racional. Portanto, $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}$ é irracional.

3.4 Um Teorema sobre raízes racionais

Um outro método importante para descobrir se um número é irracional, é utilizando o seguinte teorema, que vamos chamar de Teorema das raízes racionais.

Teorema 4. ***(Teorema das raízes racionais)*** *Seja $\frac{p}{q}$ uma fração irredutível, tal que $\frac{p}{q}$ é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, com $a_n \neq 0$. Então:*

$$p \mid a_0 \ e \ q \mid a_n$$

Demonstração. Temos que:

$\frac{p}{q}$ é raiz de $f \Rightarrow a_n(\frac{p}{q})^n + a_{n-1}(\frac{p}{q})^{n-1} + \cdots + a_1(\frac{p}{q}) + a_0 = 0$

$\Rightarrow \frac{a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_kp^kq^{n-k} + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n}{q^n} = 0$

$\Rightarrow a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_kp^kq^{n-k} + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$

Temos então que:

$p \mid 0 \Rightarrow p \mid (a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_kp^kq^{n-k} + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n)$

Como $a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_kp^kq^{n-k} + \cdots + a_1pq^{n-1}$ é múltiplo de p, então segue que:

$p \mid a_0q^n \Rightarrow p \mid a_0$ (pois $mdc(p, q) = 1$).

Temos ainda que:

$q \mid 0 \Rightarrow q \mid (a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_kp^kq^{n-k} + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n)$

Como $a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 \cdots + a_kp^kq^{n-k} + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n$ é múltiplo de q, então segue que:

$q \mid a_np^n \Rightarrow q \mid a_n$ (pois $mdc(p, q) = 1$)

□

Vejamos alguns exemplos onde podemos verificar a irracionalidade de um número através desse teorema:

Exemplo 18. *Mostre que* $\sqrt[3]{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}$ *é um número irracional*

Fazendo $\sqrt[3]{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = x$*, temos:*

$\sqrt[3]{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = x \Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = x^3$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = x^3 - 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = x^6 - 2x^3 + 1$

$\Rightarrow x^6 - 2x^3 + \frac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow 2x^6 - 4x^3 + 1 = 0$

Portanto, $\sqrt[3]{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}$ *é raiz do polinômio* $2x^6 - 4x^3 + 1$*. Supondo que* $\sqrt[3]{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}$ *seja um* *número racional da forma $\frac{p}{q}$ irredutível, temos então, pelo teorema das raízes racionais, que $p \mid 1$ e $q \mid 2$. Isso nos dá:*

$$\frac{p}{q} = \pm\tfrac{1}{2} \text{ ou } \pm 1$$

Porém, temos que $\sqrt[3]{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} > \sqrt[3]{1} = 1$, logo

$$\sqrt[3]{1+\tfrac{1}{\sqrt{2}}} \neq \pm\tfrac{1}{2} \text{ e } \sqrt[3]{1+\tfrac{1}{\sqrt{2}}} \neq \pm 1$$

Portanto $\sqrt[3]{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$ não pode ser um número racional, logo $\sqrt[3]{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$ é irracional.

De forma geral, supondo que $\sqrt[n]{1+\frac{1}{\sqrt[m]{a}}} = \frac{p}{q}$, onde $\frac{p}{q}$ é fração irredutível e $\sqrt[m]{a} \in \mathbb{I}$, temos

$1+\frac{1}{\sqrt[m]{a}} = \frac{p^n}{q^n} \Rightarrow \frac{q^n}{\sqrt[m]{a}} = p^n - q^n$

$\Rightarrow q^{mn} = a(p^n - q^n)^m$

$\Rightarrow (p^n - q^n)^m \mid q^{mn}$

Mas como $(p,q)=1$, então $mdc((p^n-q^n)^m, q^{mn}) = 1$, logo $(p^n-q^n)^m = 1$, portanto

$q^{mn} = a \Rightarrow q^n = \sqrt[m]{a} \Rightarrow q^n \in \mathbb{I}$ *(Absurdo!)*

Portanto $\sqrt[n]{1+\frac{1}{\sqrt[m]{a}}}$ é irracional.

Exemplo 19. *Mostre que $\sqrt[5]{13+\sqrt[3]{10-2\sqrt{3}}}$ é um número irracional.*

Fazendo $\sqrt[5]{13+\sqrt[3]{10-2\sqrt{3}}} = x$, temos:

$\sqrt[5]{13+\sqrt[3]{10-2\sqrt{3}}} = x \Rightarrow \sqrt[3]{10-2\sqrt{3}} = x^5 - 13$

$\Rightarrow 10 - 2\sqrt{3} = x^{15} - 39x^{10} + 507x^5 - 2197$

$\Rightarrow -2\sqrt{3} = (x^{15} + k(x)) - 2207$, *onde* $k(x) = 507x^5 - 39x^{10}$

$\Rightarrow 12 = (x^{15} + k(x))^2 - 2(x^{15} + k(x)).2207 + 2207^2$

$\Rightarrow x^{30} + 2k(x)x^{15} + k(x)^2 - 4414x^{15} - 2207k(x) + 4870837 = 0$

$\Rightarrow x^{30} + f(x) + 4870837 = 0$, *onde* $f(x) = 2k(x)x^{15} + k(x)^2 - 4414x^{15} - 2207k(x)$ *é um polinômio cujo grau é menor do que 30 e seu coeficiente independente é não nulo.*

Então $\sqrt[5]{13+\sqrt[3]{10-2\sqrt{3}}}$ *é raiz do polinômio* $x^{30}+f(x)+4870837$. *Percebam que mesmo sem saber os coeficientes de* $f(x)$, *podemos analisar as raízes racionais do polinômio* $x^{30}+f(x)+4870837$. *Pelo Teorema das raízes racionais, temos que, se uma fração irredutível* $\frac{p}{q}$ *é raiz de* $x^{30}+f(x)+4870837$, *então* $p \mid 4870837$ *e* $q \mid 1$. *Como* 4870837 *é primo, então as possíveis raízes racionais do polinômio dado são:*

$$\frac{p}{q} = \pm 1 \ \textit{ou} \ \pm 4870837$$

Mas, temos que:

$$\sqrt[5]{13+\sqrt[3]{10-9}} < \sqrt[5]{13+\sqrt[3]{10-2\sqrt{3}}} < \sqrt[5]{13+\sqrt[3]{10-2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{14} < \sqrt[5]{13+\sqrt[3]{10-2\sqrt{3}}} < \sqrt[5]{15}$$

Portanto $\sqrt[5]{13+\sqrt[3]{10-2\sqrt{3}}}$ *não pode ser igual a nenhum dos candidatos a raiz racional de um polinômio do qual ele é uma das raízes. Logo* $\sqrt[5]{13+\sqrt[3]{10-2\sqrt{3}}}$ *é irracional.*

4 Frações contínuas

Definição 7. ***(Frações contínuas)***

Uma fração contínua é uma expressão da forma

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{\ddots}}},$$

onde a_0 *é um número inteiro e* $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ *são números naturais. Se todos os* b_j*'s forem iguais a 1, então a expressão*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

será chamada de fração contínua simples, que pode ser representada também como $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$*. Já a expressão*

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{\ddots a_{n-1} + \cfrac{b_n}{a_n}}}}$$

é chamada de fração contínua finita, assim como a expressão

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

é uma fração contínua simples finita, cuja representação é dada por $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$*.*

4.1 Representando um número racional como uma fração contínua

Dado um número racional $\frac{p}{q}$ positivo e irredutível, tal que $p > q > 1$, temos, pelo algoritmo da divisão que, existem únicos inteiros a_0, b_0 tais que

$$p = qa_0 + b_0,$$

onde $a_0 \neq 0$ (pois $p > q$) e $0 < b_0 < q$. Note que $b_0 \neq 0$, caso contrário p seria um múltiplo de q e isso contradiz o fato de que $\frac{p}{q}$ é irredutível.

Portanto, $\frac{p}{q} = \frac{qa_0+b_0}{q} = \frac{qa_0}{q} + \frac{b_0}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{b_0}}$

Afirmação: $\frac{q}{b_0}$ é irredutível.

Demonstração 1. *Suponha que $mdc(q, b_0) = d$. Em particular, $d \mid p$. Daí $d \mid mdc(p, q) = 1$, implicando que $d = 1$. Portanto $\frac{q}{b_0}$ é irredutível.*

Sendo assim, podemos repetir o processo feito com $\frac{p}{q}$ para a fração $\frac{q}{b_0}$, pois $q > b_0$ e $\frac{q}{b_0}$ é irredutível. Então existem inteiros positivos a_1 e b_1 tais que

$$q = b_0a_1 + b_1,$$

onde $a_1 \neq 0$ e $0 < b_1 < b_0$.

Daí, temos que

$\frac{q}{b_0} = \frac{b_0a_1+b_1}{b_0} = a_1 + \frac{b_1}{b_0} = a_1 + \frac{1}{\frac{b_0}{b_1}}$.

Logo:

$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{b_0}} = a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{\frac{b_0}{b_1}}}$,

onde a fração $\frac{b_0}{b_1}$ é irredutível e $b_0 > b_1$.

Portanto, podemos repetir novamente esse processo para a fração $\frac{b_0}{b_1}$, obtendo inteiros a_2 e b_2 tais que $b_0 = b_1a_2 + b_2$ e assim concluir que $\frac{b_0}{b_1} = a_2 + \frac{1}{\frac{b_1}{b_2}}$.

Esse processo termina quando chegamos a uma equação da forma $b_{n-2} = b_{n-1}a_n + b_n$, onde $b_{n-1} = 1, b_{n-2} = a_n$ e $b_n = 0$. Daí basta considerarmos os $n + 1$ quocientes encontrados $a_0, a_1, \ldots, a_n$ e escrevermos a fração como uma fração contínua, que fica assim:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{\ddots a_{n-2}+\frac{1}{a_{n-1}+\frac{1}{a_n}}}}}.$$

Temos então que toda fração da forma $\frac{p}{q}$ irredutível, tal que $p > q$, pode ser escrita como uma fração contínua simples finita. Para estender para todas as frações, incluindo as frações $\frac{p}{q}$, tal que $p < q$, basta provarmos a seguinte afirmação:

Afirmação: Se $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$, $\frac{p}{q}$ irredutível e $p > q$, então $\frac{q}{p} = [0; a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Demonstração. $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] \Rightarrow \frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$

$$\Rightarrow \frac{q}{p} = \frac{1}{\frac{p}{q}} = \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}} = 0 + \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}} = [0; a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

□

Sendo assim, podemos concluir que $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$, onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são os quocientes obtidos nas divisões sucessivas de p e q, para toda fração irredutível.

Exemplo 20. *Vamos escrever as frações* $\frac{7}{3}, \frac{101}{74}, -\frac{768}{43}, \frac{15}{31}$ *como frações contínuas simples.*

- $7 = 3.\boldsymbol{2} + 1 \longrightarrow 3 = 1.\boldsymbol{3} + 0$
  $\Rightarrow \frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = [2; 3]$.
- $101 = 74.\boldsymbol{1} + 27 \longrightarrow 74 = 27.\boldsymbol{2} + 20 \longrightarrow 27 = 20.\boldsymbol{1} + 7 \longrightarrow 20 = 7.\boldsymbol{2} + 6 \longrightarrow 7 = 6.\boldsymbol{1} + 1 \longrightarrow 6 = 1.\boldsymbol{6} + 0$
  $\Rightarrow \frac{101}{74} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{6}}}}} = [1; 2, 1, 2, 1, 6]$.
- $768 = 43.\boldsymbol{17} + 37 \longrightarrow 43 = 37.\boldsymbol{1} + 6 \longrightarrow 37 = 6.\boldsymbol{6} + 1 \longrightarrow 6 = 1.\boldsymbol{6} + 0$
  $\Rightarrow -\frac{768}{43} = -17 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \frac{1}{6}}} = [-17; 1, 6, 6]$.
- $15 = 31.\boldsymbol{0} + 15 \longrightarrow 31 = 15.\boldsymbol{2} + 1 \longrightarrow 15 = 1.\boldsymbol{15} + 0$
  $\Rightarrow \frac{15}{31} = 0 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{15}} = [0; 2, 15]$.

4.2 Representando uma raiz quadrada não exata como uma fração contínua

Sabemos que um número racional pode ser representado por uma fração contínua simples e finita. E como será que se comportam os números irracionais? Em particular, como se comportam as raízes não exatas? Sabemos que, caso possamos representar um número irracional como fração contínua, essa representação é infinita, pois toda fração contínua finita corresponde a um número finito de adições e divisões entre frações, cujo resultado é um número racional.

Para descobrir uma representação em fração contínua de uma raiz quadrada não exata, por exemplo, vamos relembrar a seguinte regra de fatoração

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Substituindo a por $\sqrt{2}$ e b por 1, temos o seguinte:

$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2})^2 - 1 \Rightarrow (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1$

$\Rightarrow \sqrt{2}-1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

Adicionando 2 nos dois lados da equação, obtemos:

$\Rightarrow 2+\sqrt{2}-1 = 2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

$\Rightarrow \sqrt{2}+1 = 2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

Percebam que a expressão $\sqrt{2}+1$ aparece dos 2 lados da igualdade. Podemos então substituir $\sqrt{2}+1$ por $2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ do lado direito da igualdade, obtendo:

$$\sqrt{2}+1 = 2+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}.$$

Fazendo novamente esse processo, obteremos:

$$\sqrt{2}+1 = 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}}.$$

Seguindo infinitamente esse processo, teremos:

$$\sqrt{2}+1 = 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\ddots}}}}.$$

Portanto

$$\sqrt{2} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\ddots}}}} \quad \mathbf{(3)}$$

que também pode ser representado por $[1;2,2,2,\ldots]$ ou ainda por $[1;\bar{2}]$.

Porém a repetição infinita do processo não é uma prova consistente para a igualdade **(3)**. Para demonstrar essa igualdade, vamos assumir que:

$$x = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\ddots}}}} \Rightarrow x+1 = 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\ddots}}}} \quad \mathbf{(4)}$$

Temos ainda que:

$x - 1 = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\ddots}}}} \Rightarrow \frac{1}{x-1} = 2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\ddots}}}$ **(5)**

Combinando as igualdades **(4)** e **(5)**, concluímos que x é um número tal que:

$$x + 1 = \frac{1}{x-1}$$

Resolvendo essa última igualdade, temos:

$(x+1)(x-1) = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Como $x > 0$, então concluímos que $x = \sqrt{2}$.

Agora, seja x uma fração contínua definida como:

$$x = a + \frac{b}{2a+\frac{b}{2a+\frac{b}{\ddots}}}$$

onde a e b são números naturais. Temos que:

$$x - a = \frac{b}{2a+\frac{b}{2a+\frac{b}{\ddots}}} \quad \textbf{(6)}$$

E também temos que:

$$\frac{b}{x+a} = \frac{b}{2a+\frac{b}{2a+\frac{b}{\ddots}}} \quad \textbf{(7)}$$

Combinando as igualdades **(6)** e **(7)** temos:

$x - a = \frac{b}{x+a} \Rightarrow (x+a)(x-a) = b$

$\Rightarrow x^2 - a^2 = b$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{a^2 + b}.$

Como a e b estão definidos como números naturais, então $x > 0$. Logo:

$$x = \sqrt{a^2 + b}.$$

Podemos então concluir que:

$$\sqrt{n} = a + \frac{b}{2a+\frac{b}{2a+\frac{b}{\ddots}}}, a, b \in \mathbb{N} \ \mathbf{(8)}$$

Observe que a igualdade **(8)** equivale à igualdade **(3)** para $a = b = 1$, pois $2 = 1^2 + 1$. Temos então que a igualdade **(8)** prova que toda raiz quadrada não exata pode ser escrita como uma fração contínua infinita, podendo ser simples ou não, pois todo número natural pode ser escrito na forma $a^2 + b$. A representação de uma raiz quadrada não exata será representada por uma fração contínua simples se $b = 1$, ou seja, se o radicando for sucessor de um quadrado perfeito, por exemplo, 2, 5, 10, 17, 26, etc. Caso contrário, utilizando esse método, a raiz quadrada não exata será escrita como uma fração contínua infinita não simples.

Temos ainda que uma mesma raiz quadrada não exata pode ser escrita como uma fração contínua de mais de uma maneira. Isso porque a equação

$$a^2 + b = n$$

com $a, b, n \in \mathbb{N}$, n fixo, pode ter mais do que uma solução (a, b). Por exemplo, a equação $a^2 + b = 5$ tem duas soluções naturais, $(1, 4)$ e $(2, 1)$. Portanto

$$\sqrt{5} = 1 + \frac{4}{2+\frac{4}{2+\frac{4}{\ddots}}} \text{ ou } \sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{\ddots}}}.$$

Já $\sqrt{200}$ tem 14 maneiras distintas de se escrever como uma fração contínua (nesse método), uma vez que a equação $a^2+b = 200$ tem 14 soluções naturais distintas: $(a, 200-a^2)$, para $a = 1, 2, 3, \ldots, 14$.

4.3 Convergente de uma fração contínua

Uma aplicação interessante na representação de uma raiz quadrada não exata como uma fração contínua é o fato de podermos aproximar o valor da raiz o quanto quisermos. Para isso, dado

$$x = a_0 + \frac{b_1}{a_1+\frac{b_2}{a_2+\frac{b_3}{\ddots}}}$$

uma fração contínua infinita, vamos considerar como $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números racionais, onde:

$$c_0 = a_0$$

$$c_1 = a_0 + \frac{b_1}{a_1}$$

$$c_2 = a_0 + \frac{b_1}{a_1+\frac{b_2}{a_2}}$$

$$\vdots$$

$$c_n = a_0 + \frac{b_1}{a_1+\frac{b_2}{a_2+\frac{b_3}{\ddots a_{n-1}+\frac{b_n}{a_n}}}}.$$

Cada termo c_k da sequência é chamado de convergente ou fração parcial de x. Quanto maior o índice do convergente, mais próximo ele está do valor de x.

Como cada convergente é escrito como uma fração contínua finita, então ele é um número racional. Digamos que $c_k = \frac{p_k}{q_k}, k \in \mathbb{N}$. Então, dado uma fração contínua com coeficientes $a_0, a_1, \ldots$ e $b_1, b_2, \ldots$, temos:

$c_0 = a_0$, portanto $p_0 = a_0$ e $q_0 = 1$

$c_1 = a_0 + \frac{b_1}{a_1} = \frac{a_0a_1+b_1}{a_1}$, portanto $p_1 = a_0a_1 + b_1$ e $q_1 = a_1$

$c_2 = a_0 + \frac{b_1}{a_1+\frac{b_2}{a_2}} = a_0 + \frac{b_1}{\frac{a_1a_2+b_2}{a_2}} = a_0 + \frac{b_1a_2}{a_1a_2+b_2} = \frac{a_0a_1a_2+a_0b_2+b_1a_2}{a_1a_2+b_2} = \frac{a_2(a_0a_1+b_1)+a_0b_2}{a_1a_2+b_2.1}$

$= \frac{a_2p_1+b_2p_0}{a_2q_1+b_2q_0}$, portanto $p_2 = a_2p_1 + b_2p_0$ e $q_2 = a_2q_1 + b_2q_0$.

Vamos supor que a expressão encontrada para c_2 seja válida para algum c_k, $k \geq 2$, ou seja

$$c_k = \frac{a_kp_{k-1}+b_kp_{k-2}}{a_kq_{k-1}+b_kq_{k-2}} \quad \textbf{(9)}$$

Daí, temos que:

$$c_{k+1} = a_0 + \frac{b_1}{a_1+\frac{b_2}{\ddots a_{k-1}+\frac{b_k}{a_k+\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}}}}.$$

Substituindo a_k por $a_k + \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}$ na equação **(9)**, podemos concluir que:

$$c_{k+1} = \frac{(a_k+\frac{bk+1}{a_{k+1}})p_{k-1}+b_kp_{k-2}}{(a_k+\frac{bk+1}{a_{k+1}})q_{k-1}+b_kq_{k-2}} = \frac{a_{k+1}a_kp_{k-1}+b_{k+1}p_{k-1}+a_{k+1}b_kp_{k-2}}{a_{k+1}a_kq_{k-1}+b_{k+1}q_{k-1}+a_{k+1}b_kq_{k-2}} = \frac{a_{k+1}(a_kp_{k-1}+b_kp_{k-2})+b_{k+1}p_{k-1}}{a_{k+1}(a_kq_{k-1}+b_kp_{k-2})+b_{k+1}q_{k-1}}$$

$$= \frac{a_{k+1}p_k+b_{k+1}p_{k-1}}{a_{k+1}q_k+b_{k+1}q_{k-1}}.$$

Portanto, pelo 1º princípio da indução, segue que os convergentes

$$c_n = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{\ddots a_{n-1}+\frac{b_n}{a_n}}}}$$

de uma fração contínua

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{\ddots}}}$$

podem ser escritos como:

$$c_n = \frac{p_n}{q_n}, \text{ onde } p_n = a_np_{n-1} + b_np_{n-2} \text{ e } q_n = a_nq_{n-1} + b_nq_{n-2},$$

onde $p_0 = a_0, q_0 = 1$, $p_1 = a_0a_1 + b_1$ e $q_1 = a_1$.

Teorema 5. *Para todo $n > 0$ vale a relação*

$$p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n = (-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n} b_i,$$

onde $\frac{p_n}{q_n}$ é o n-ésimo convergente da fração contínua $a_0 + \cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{\ddots}}}$

Demonstração. Temos que:

$$p_1q_0 - p_0q_1 = (a_0a_1 + b_1).1 - a_0.a_1 = b_1 = (-1)^{1+1}\prod_{i=1}^{1} b_i$$

Vamos supor agora que seja verdadeira a igualdade:

$$p_kq_{k-1} - p_{k-1}q_k = (-1)^{k+1}\prod_{i=1}^{k} b_i,$$

para algum $k > 0$. Então temos que:

$$p_{k+1}q_k - p_kq_{k+1} = (a_{k+1}p_k + b_{k+1}p_{k-1})q_k - p_k(a_{k+1}q_k + b_{k+1}q_{k-1})$$

$$= b_{k+1}(p_{k-1}q_k - p_kq_{k-1}) = b_{k+1}(-1)(p_kq_{k-1} - p_{k-1}q_k) = b_{k+1}(-1)(-1)^{k+1}\prod_{i=1}^{k} b_i$$

$$= (-1)^{k+2}\prod_{i=1}^{k+1} b_i.$$

Portanto, pelo 1º princípio da indução, temos que:

$$p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n = (-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n} b_i,$$

para todo $n > 0$. □

Teorema 6. *A sequência c_{nn} satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $c_{2n} < c_{2n+2}, \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $c_{2n+1} > c_{2n+3}, \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $c_{2n} < c_{2n+2} < c_{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

Demonstração.

(i) Temos que:

$$c_{2n+2} - c_{2n} = \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p_{2n+2}q_{2n} - p_{2n}q_{2n+2}}{q_{2n}q_{2n+2}}$$

$$= \frac{(a_{2n+2}p_{2n+1} + b_{2n+2}p_{2n})q_{2n} - p_{2n}(a_{2n+2}q_{2n+1} + b_{2n+2}q_{2n})}{q_{2n}q_{2n+2}}$$

$$= \frac{a_{2n+2}(p_{2n+1}q_{2n} - p_{2n}q_{2n+1})}{q_{2n}q_{2n+2}} = \frac{a_{2n+2}}{q_{2n}q_{2n+2}}(-1)^{2n+2}\prod_{i=1}^{2n+1} b_i > 0.$$

Portanto, $c_{2n} < c_{2n+2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) Temos que:

$$c_{2n+3} - c_{2n+1} = \frac{p_{2n+3}}{q_{2n+3}} - \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = \frac{p_{2n+3}q_{2n+1} - p_{2n+1}q_{2n+3}}{q_{2n+1}q_{2n+3}}$$

$$= \frac{(a_{2n+3}p_{2n+2} + b_{2n+3}p_{2n+1})q_{2n+1} - p_{2n+1}(a_{2n+3}q_{2n+2} + b_{2n+3}q_{2n+1})}{q_{2n+1}q_{2n+3}}$$

$$= \frac{a_{2n+3}(p_{2n+2}q_{2n+1} - p_{2n+1}q_{2n+2})}{q_{2n+1}q_{2n+3}} = \frac{a_{2n+3}}{q_{2n+1}q_{2n+3}}(-1)^{2n+3}\prod_{i=1}^{2n+2} b_i < 0.$$

Portanto, $c_{2n+1} > c_{2n+3}, \forall n \in \mathbb{N}$.

(iii) A desigualdade $c_{2n} < c_{2n+2}$ já foi mostrada no item (i). Vamos então mostrar que $c_{2n+2} < c_{2n+1}$. Temos que:

$$c_{2n+2} - c_{2n+1} = \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} - \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = \frac{p_{2n+2}q_{2n+1} - p_{2n+1}q_{2n+2}}{q_{2n+1}q_{2n+2}}$$

$$= \frac{(a_{2n+2}p_{2n+1} + b_{2n+2}p_{2n})q_{2n+1} - p_{2n+1}(a_{2n+2}q_{2n+1} + b_{2n+2}q_{2n})}{q_{2n+1}q_{2n+2}}$$

$$= \frac{-b_{2n+2}(p_{2n+1}q_{2n} - p_{2n}q_{2n+1})}{q_{2n+1}q_{2n+2}} = \frac{-b_{2n+2}}{q_{2n+1}q_{2n+2}}(-1)^{2n+2}\prod_{i=1}^{2n+2} b_i < 0$$

Portanto $c_{2n+2} < c_{2n+1}$, logo, $c_{2n} < c_{2n+2} < c_{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. □

4.4 Aproximação de raízes quadradas usando os convergentes

Utilizando o Teorema 6 e a expressão $\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \frac{b}{\ddots}}}$ podemos concluir que:

$$c_{2n} < \sqrt{a^2+b} < c_{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

onde c_k são os convergentes de $\sqrt{a^2+b}$. Analisando esses convergentes temos o seguinte:

$c_0 = a$

$\Rightarrow c_1 = a + \frac{b}{2a} = a + \frac{b}{a+a} = a + \frac{b}{a+c_0}$

$\Rightarrow c_2 = a + \frac{b}{2a+\frac{b}{2a}} = a + \frac{b}{a+a+\frac{b}{2a}} = a + \frac{b}{a+c_1}$

$\vdots$

$\Rightarrow c_n = a + \frac{b}{a+c_{n-1}}$ **(10)**

Utilizando a recursão da equação **(10)**, vamos resolver alguns exemplos.

Exemplo 21. *Achar uma aproximação de $\sqrt{2}$, com um erro menor do que 10^{-4}.*

Ou seja, achar as 4 primeiras casas decimais de $\sqrt{2}$. Devemos então achar 2 convergentes consecutivos, cuja representação na forma decimal tenha as 4 primeiras casas decimais iguais, que serão também as 4 primeiras casas decimais de $\sqrt{2}$. Logo, temos:

$\sqrt{2} = [1;\overline{2}] \Rightarrow c_0 = 1$

$\Rightarrow c_1 = 1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2} = 1,5$

$\Rightarrow c_2 = 1 + \frac{1}{1+\frac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} = 1,4$

$\Rightarrow c_3 = 1 + \frac{1}{1+\frac{7}{5}} = 1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12} = 1,41\overline{6}$

$\Rightarrow c_4 = 1 + \frac{1}{1+\frac{17}{12}} = 1 + \frac{12}{29} = \frac{41}{29} \cong 1,41379$

$\Rightarrow c_5 = 1 + \frac{1}{1+\frac{41}{29}} = 1 + \frac{29}{70} = \frac{99}{70} = 1,41\overline{428571}$

$\Rightarrow c_6 = 1 + \frac{1}{1+\frac{99}{70}} = 1 + \frac{70}{169} = \frac{239}{169} \cong 1,4142012$

Como $c_6 < \sqrt{2} < c_5$ *(Teorema 6), então podemos concluir que:*

$$\sqrt{2} \cong 1,4142$$

com um erro menor do que 10^{-4}.

Exemplo 22. *Achar uma aproximação de* $\sqrt{35}$*, com um erro menor do que* 10^{-6}.

Devemos, primeiramente, encontrar a e b naturais tal que $a^2+b=35$. *Vamos escolher* $a=5$ *e* $b=10$. *Analisando os convergentes de* $\sqrt{35}$*, temos:*

$\sqrt{35} = 5 + \frac{10}{10+\frac{10}{10+\frac{10}{\ddots}}} \Rightarrow c_0 = 5$

$\Rightarrow c_1 = 5 + \frac{10}{5+5} = 5 + 1 = 6$

$\Rightarrow c_2 = 5 + \frac{10}{5+6} = 5 + \frac{10}{11} = \frac{65}{11} = 5,9\overline{09}$

$\Rightarrow c_3 = 5 + \frac{10}{5+\frac{65}{11}} = 5 + \frac{11}{12} = \frac{71}{12} = 5,91\overline{6}$

$\Rightarrow c_4 = 5 + \frac{10}{5+\frac{71}{12}} = 5 + \frac{120}{131} = \frac{775}{131} \cong 5,91603053$

$\Rightarrow c_5 = 5 + \frac{10}{5+\frac{775}{131}} = 5 + \frac{131}{143} = \frac{846}{143} \cong 5,91608392$

$\Rightarrow c_6 = 5 + \frac{10}{5+\frac{846}{143}} = 5 + \frac{1430}{1561} = \frac{9235}{1561} \cong 5,91607944$

$\Rightarrow c_7 = 5 + \frac{10}{5+\frac{9235}{1561}} = 5 + \frac{1561}{1704} = \frac{10081}{1704} \cong 5,91607981$

Como $c_6 < \sqrt{35} < c_7$*, então podemos concluir que:*

$$\sqrt{35} \cong 5,916079$$

com um erro menor do que 10^{-6}.

4.5 Escrevendo uma raiz quadrada como fração contínua simples

Vimos que, para um número natural n não quadrado perfeito, tal que $n = a^2 + b$, tem-se que

$$\sqrt{n} = a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \frac{b}{\ddots}}}.$$

Dessa forma, apenas os sucessores de quadrados perfeitos teriam suas raízes quadradas escritas como frações contínuas simples, pois teriam $b = 1$ na sua representação. Nessa seção, vamos buscar um método para escrever qualquer raiz quadrada como uma fração contínua simples.

Vamos considerar então x como sendo uma raiz quadrada não exata. Seja a_0 o maior número natural menor do que x (Notação: $a_0 = \lfloor x \rfloor$). Temos que:

$$x = a_0 + x - a_0,$$

onde $a_0 \geq 1$ (pois $x > 1$) e $0 < x - a_0 < 1$. Fazendo $x_1 = \frac{1}{x - a_0}$, temos:

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}.$$

Como $0 < x - a_0 < 1$, então segue que $x_1 = \frac{1}{x - a_0} > 1$. Daí, seja $a_1 = \lfloor x_1 \rfloor$. Então temos:

$$x_1 = a_1 + x_1 - a_1,$$

onde $a_1 \geq 1$ (pois $x_1 > 1$) e $0 < x_1 - a_1 < 1$. Fazendo $x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1}$, temos:

$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}}$

tal que $x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1} > 1$. Seguindo esse processo um número finito de vezes, obtemos:

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots a_{n-1} + \frac{1}{x_n}}}},$$

onde $x_n = \frac{1}{x_{n-1} - a_{n-1}} > 1$.

Sendo assim, poderíamos desenvolver infinitamente esse processo, obtendo:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}.$$

Vamos então obter a fração contínua simples de algumas raízes quadradas:

Exemplo 23. *Obter as frações contínuas de $\sqrt{3}$ e de $\sqrt{7}$.*

- $\sqrt{3} = \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \sqrt{3} - \lfloor\sqrt{3}\rfloor = 1 + (\sqrt{3} - 1) \Rightarrow a_0 = 1$ *e* $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$
  $\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1 = 1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2} \Rightarrow a_1 = 1$ *e* $x_2 = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} + 1$
  $\sqrt{3} + 1 = 2 + (\sqrt{3} + 1) - 2 = 2 + (\sqrt{3} - 1) \Rightarrow a_2 = 2$ *e* $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

  Perceba que $x_3 = x_1$, o que implica que $x_4 = x_2, x_5 = x_3, \ldots$, ou seja, $x_{i+2} = x_i, i \in \mathbb{N}$, fazendo com que $a_{j+2} = a_j, j \in \mathbb{N}$ também. Dessa forma, a representação de $\sqrt{3}$ como uma fração contínua simples fica:

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}} = [1; 1, 2, 1, 2, \ldots] = [1; \overline{1, 2}\,].$$

- $\sqrt{7} = 2 + (\sqrt{7} - 2) \Rightarrow a_0 = 2$ *e* $x_1 = \frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{3}$
  $\frac{\sqrt{7}+2}{3} = 1 + \frac{\sqrt{7}+2}{3} - 1 = 1 + \frac{\sqrt{7}-1}{3} \Rightarrow a_1 = 1$ *e* $x_2 = \frac{3}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}+1}{2}$
  $\frac{\sqrt{7}+1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{7}+1}{2} - 1 = 1 + \frac{\sqrt{7}-1}{2} \Rightarrow a_2 = 1$ *e* $x_3 = \frac{2}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}+1}{3}$
  $\frac{\sqrt{7}+1}{3} = 1 + \frac{\sqrt{7}+1}{3} - 1 = 1 + \frac{\sqrt{7}-2}{3} \Rightarrow a_3 = 1$ *e* $x_4 = \frac{3}{\sqrt{7}-2} = \sqrt{7} + 2$
  $\sqrt{7} + 2 = 4 + (\sqrt{7} + 2) - 4 = 4 + (\sqrt{7} - 2) \Rightarrow a_4 = 4$ *e* $x_5 = \frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{3}$.

  Assim, $x_5 = x_1, x_6 = x_2, \ldots$, logo $x_{i+4} = x_i, i \in \mathbb{N}$ e $a_{j+4} = a_j, j \in \mathbb{N}$, portanto:

$$\sqrt{7} = [2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \ldots] = [2; \overline{1, 1, 1, 4}\,].$$

Percebam que tanto na representação de $\sqrt{3}$ quanto na de $\sqrt{7}$, os coeficientes se repetem, formando um período. Outro detalhe é que nas 2 representações o número do período é o dobro da parte inteira (a_0). Para demonstrar que esse fato acontece com todas as raízes quadradas não exatas, vamos as seguintes definições.

Definição 8. *Uma fração contínua simples e infinita é dita periódica, se ela é da forma:*

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \overline{a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n}\,].$$

Se ela for da forma

$$[\overline{a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n}\ ]$$

ela é denominada puramente periódica.

Definição 9. *Um número irracional x é dito quadrático se ele for solução de uma equação quadrática com coeficientes inteiros, ou seja, se ele for solução de*

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ onde } a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0$$

Temos então o seguinte teorema:

Teorema 7. *Um número irracional é representado por uma fração contínua simples periódica se, e somente se, ele é quadrático.*

Demonstração. Seja x um número irracional representado por uma fração contínua simples e periódica. Então:

$$x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n}\ ] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, x_k]$$

onde $x_k = [\overline{a_k; a_{k+1}, \ldots, a_n}\ ] = [a_k; a_{k+1}, \ldots, a_n, x_k]$

Pela igualdade **(9)**, temos:

$$x_k = \frac{x_k\overline{p}_n + \overline{p}_{n-1}}{x_k\overline{q}_n + \overline{q}_{n-1}},$$

onde $\frac{\overline{p}_{n-1}}{\overline{q}_{n-1}}$ e $\frac{\overline{p}_n}{\overline{q}_n}$ são os 2 últimos convergentes de $[a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n]$.

Então, temos:

$x_k = \frac{x_k\overline{p}_n + \overline{p}_{n-1}}{x_k\overline{q}_n + \overline{q}_{n-1}} \Rightarrow \overline{q}_n x_k^2 + \overline{q}_{n-1}x_k = \overline{p}_n x_k + \overline{p}_{n-1}$

$\Rightarrow \overline{q}_n x_k^2 + (\overline{q}_{n-1} - \overline{p}_n)x_k - \overline{p}_{n-1} = 0$ **(11)**

Mas por outro lado, x_k é o k-ésimo "coeficiente" de x. Então temos:

$x = c_k = \frac{x_k p_{k-1} + 1.p_{k-2}}{x_k q_{k-1} + 1.q_{k-2}} \Rightarrow x_k q_{k-1} x + q_{k-2} x = x_k p_{k-1} + p_{k-2}$

$\Rightarrow x_k(q_{k-1}x - p_{k-1}) = p_{k-2} - q_{k-2}x$

$\Rightarrow x_k = \frac{p_{k-2} - q_{k-2}x}{q_{k-1}x - p_{k-1}}$ **(12)**

onde $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ e $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ são os $(k-2)$-ésimos e $(k-1)$-ésimos convergentes de x.

Substituindo o valor de x_k da equação **(12)** na equação **(11)**, temos o seguinte:

$\overline{q}_n(\frac{p_{k-2}-q_{k-2}x}{q_{k-1}x-p_{k-1}})^2 + (\overline{q}_{n-1} - \overline{p}_n)\frac{p_{k-2}-q_{k-2}x}{q_{k-1}x-p_{k-1}} - \overline{p}_{n-1} = 0$

$\Rightarrow \overline{q}_n(p_{k-2}-q_{k-2}x)^2 + (\overline{q}_{n-1}-\overline{p}_n)(p_{k-2}-q_{k-2}x)(q_{k-1}x-p_{k-1}) - \overline{p}_{n-1}(q_{k-1}x-p_{k-1})^2 = 0$

$\Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$

onde $a = \overline{q}_n q_{k-2}^2 - (\overline{q}_{n-1} - \overline{q}_n)q_{k-2}q_{k-1} - \overline{p}_{n-1}q_{k-1}^2$

$b = 2(\overline{p}_{n-1}p_{k-1}q_{k-1} - \overline{q}_n p_{k-2}q_{k-2}) + (\overline{q}_{n-1} - \overline{p}_n)(q_{k-2}q_{k-1} + q_{k-2}p_{k-1})$

e $c = \overline{q}_n p_{k-2}^2 - (\overline{q}_{n-1} - \overline{p}_n)p_{k-2}p_{k-1} - \overline{p}_{n-1}p_{k-1}^2$.

Portanto a, b e c são números inteiros, com $a \neq 0$ (pois x é irracional e raiz do polinômio, logo o grau da equação não pode ser menor do que 2). Então, x é raiz de uma equação quadrática, logo x é um irracional quadrático.

Vamos supor agora, que x é um irracional quadrático. Então existem A, B e C inteiros, $A \neq 0$, tais que

$$Ax^2 + Bx + C = 0, \quad \textbf{(13)}$$

Portanto

$$x = \frac{m+\sqrt{d}}{n},$$

onde $m = -B$, $d = B^2 - 4AC$ e $n = 2A$.

Como x é irracional, por hipótese, então

$$x = [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, \ldots] = [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k]$$

onde $x_k = [a_k; a_{k+1}, \ldots]$. Além disso, sendo c_k o k-ésimo convergente de x_k, temos que:

$$c_k = x = \frac{x_k p_{k-1} + p_{k-2}}{x_k q_{k-1} + q_{k-2}} \quad \textbf{(14)}$$

onde $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ e $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ são os $(k-2)$-ésimos e $(k-1)$-ésimos convergentes de x.

Substituindo a igualdade **(14)** na equação **(13)**, temos:

$A(\frac{x_k p_{k-1}+p_{k-2}}{x_k q_{k-1}+q_{k-2}})^2+B\frac{x_k p_{k-1}+p_{k-2}}{x_k q_{k-1}+q_{k-2}}+C=0 \Rightarrow A(x_k p_{k-1}+p_{k-2})^2+B(x_k p_{k-1}+p_{k-2})(x_k q_{k-1}+q_{k-2})+C(x_k q_{k-1}+q_{k-2})^2=0$

$\Rightarrow A_k x_k^2+B_k x_k+C_k=0,$

onde $A_k=Ap_{k-1}^2+Bp_{k-1}q_{k-1}+Cq_{k-1}^2-1^2$, $B_k=2Ap_{k-1}p_{k-2}+B(p_{k-1}q_{k-2}+p_{k-2}q_{k-1})+2Cq_{k-1}q_{k-2}$ e $C_k=Ap_{k-2}^2+Bp_{k-2}q_{k-2}+Cq_{k-2}^2$.

Vamos supor que $A_k=0$. Então:

$Ap_{k-1}^2+Bp_{k-1}q_{k-1}+Cq_{k-1}^2=0 \Rightarrow p_{k-1}=\frac{-Bq_{k-1}\pm\sqrt{q_{k-1}^2(B^2-4AC)}}{2A}$

$p_{k-1}=q_{k-1}\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$

$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$

Ou seja, $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ é raiz da equação $Ay^2+By+C=0$, o que é um absurdo, pois x, que é um número irracional, também é raiz dessa equação, logo, essa equação não tem raízes racionais.

Sendo assim, $A_k\neq 0$ e x_k é raiz de $A_k y^2+B_k y+C_k=0$

Temos ainda que:

$B_k^2-4A_kC_k=(B^2-4AC)(p_{k-1}q_{k-2}-p_{k-2}q_{k-1})^2$

Como $p_{k-1}q_{k-2}-p_{k-2}q_{k-1}=(-1)^k\prod_{i=1}^{k-1}b_i$, e todos os b_i's são iguais a 1, então segue que

$$p_{k-1}q_{k-2}-p_{k-2}q_{k-1}=(-1)^k$$

Daí:

$$B_k^2-4A_kC_k=B^2-4AC$$

Ou seja,

$$x_k=\frac{m_k+\sqrt{d}}{n_k}$$

$m_k=-B_k$ e $n_k=B_k^2-4A_kC_k$

Mostramos então que $x_k=[a_k;a_{k+1},a_{k+2},\ldots]$ é um irracional quadrático, para todo $k\geq 0$, que é raiz da equação $A_ky^2+B_ky+C_k$, onde $A_k,B_k,C_k\in\mathbb{Z}$.

Agora, seja $\overline{x}$ uma das raízes da equação $Ay^2 + By + C = 0$. Como x também é uma das raízes dessa equação, então temos que:

$$Ay^2 + By + C = A(y - x)(y - \overline{x})$$

Escolhendo $y = \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$, temos:

$|A(\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}})^2 + B\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} + C| = |A(\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - x)(\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \overline{x})| = |A||x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}||\overline{x} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}|$

Como $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ é um convergente de x, então temos que $|x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}| < \frac{1}{q_{k-1}^2}$. Então:

$$|A(\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}})^2 + B\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} + C| < \frac{|A|}{q_{k-1}^2}|\overline{x} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}|$$

Pela desigualdade triangular, temos que:

$|\overline{x} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}| \leq |\overline{x} - x| + |x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}| < |x - \overline{x}| + \frac{1}{q_{k-1}^2} < |x - \overline{x}| + 1$

Então:

$$|A(\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}})^2 + B\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} + C| < \frac{|A|}{q_{k-1}^2}(|x - \overline{x}| + 1)$$

Multiplicando ambos os lados por q_{k-1}^2, temos:

$|Ap_{k-1} + Bp_{k-1}q_{k-1} + Cq_{k-1}^2| = |A_k| < |A|(|x - \overline{x}| + 1)$

Como $C_k = A_{k-1}$, então:

$|C_k| < |A|(|x - \overline{x}| + 1)$

E por fim, como $B_k^2 - 4A_kC_k = B^2 - 4AC$, então temos que:

$B_k^2 = B^2 - 4AC + 4A_kC_k < B^2 - 4AC + 4|A|^2(|x - \overline{x}| + 1)^2 = B^2 + 4[A^2(|x - \overline{x}| + 1)^2 - AC)]$

$\Rightarrow |B_k| < \sqrt{B^2 + 4[A^2(|x - \overline{x}| + 1)^2 - AC]}$

Portanto, tomando $M = \max\{|A|(|x - \overline{x}| + 1); \sqrt{B^2 + 4[A^2(|x - \overline{x}| + 1)^2 - AC]}\}$, temos que $|A_k|, |B_k|$ e $|C_k|$ são todos menores do que M. Portanto, como A_k, B_k e C_k são inteiros, então existe um número finito de escolhas para tais coeficientes, portanto, em algum momento, teremos que x_k, x_{k+r_1} e x_{k+r_2}, com $r_1, r_2 > 0, k \geq 0$ serão raízes da mesma equação quadrática, fazendo com que, dos 3 números irracionais citados, 2 deles sejam iguais. Digamos então que $x_k = x_{k+r}$, para algum $r > 0$. Então temos que:

$x_k = [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots] = [a_{k+r}; a_{k+r+1}, a_{k+r+2}, \ldots] = x_{k+r}$

Daí $a_{k+i} = a_{k+r+i}, \forall i \geq 0$, fazendo com que

$$x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, x_k] = [a_0; a_1, \ldots, \overline{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+r-1}}\ ]$$

Portanto, x é representado como uma fração contínua periódica.

$\square$

Temos também o seguinte teorema

Teorema 8. *Um número irracional quadrático* $x = \frac{m+\sqrt{d}}{n}$ *é puramente periódico se, e somente se,*

$$x > 1 \text{ } e \text{ } -1 < \overline{x} < 0$$

onde $\overline{x} = \frac{m-\sqrt{d}}{n}$ *é o conjugado de* x*.*

Demonstração. Vamos supor que x é puramente periódico. Então $x = [\overline{a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k}\ ]$. Como $a_j > 1$, para todo $i \geq 0$, então $x > 1$. E como $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, x]$, então, temos:

$x = \frac{xp_k + p_{k-1}}{xq_k + q_{k-1}} \Rightarrow q_k x^2 + q_{k-1}x = p_k x + p_{k-1}$

$\Rightarrow q_k x^2 + (q_{k-1} - p_k)x - p_{k-1} = 0$

onde $\frac{p_k}{q_k}$ e $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ são os $k-1$-ésimo e k-ésimo convergente de x.

Então x é raiz do polinômio $f(y) = q_k y^2 + (q_{k-1} - p_k)y - p_{k-1}$. Temos ainda que:

$$f(-1) = q_k - q_{k-1} + p_k - p_{k-1}$$

Mas $p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$ e $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$, então conclui-se que $p_k > p_{k-1}$ e $q_k > q_{k-1}$. Daí:

$$f(-1) > 0$$

Temos ainda que $f(0) = -p_{k-1} < 0$. Então, pelo teorema do valor intermediário, segue que $\overline{x}$, que é a outra raiz de $f(x)$, está entre -1 e 0.

Seja agora $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ um número irracional tal que $x > 1$ e $-1 < \overline{x} < 0$. Seja então $x_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$. Temos ainda que $x_0 = x$, logo $\overline{x_0} = \overline{x}$ e $-1 < \overline{x_0} < 0$. Vamos supor então que $-1 < \overline{x_r} < 0$, para algum $r \geq 0$. Então, se $x_r = \frac{m_r + \sqrt{d}}{n_r}$, temos que $\overline{x}_r = \frac{m_r - \sqrt{d}}{n_r}$. Daí, temos:

$\overline{x}_{r+1} = \frac{m_{r+1}-\sqrt{d}}{n_{r+1}} = \frac{(m_{r+1}-\sqrt{d})n_r}{d-m_{r+1}^2} = \frac{(m_{r+1}-\sqrt{d})n_r}{(\sqrt{d}+m_{r+1})(\sqrt{d}-m_{r+1})} = -\frac{n_r}{\sqrt{d}+m_{r+1}} = \frac{n_r}{-a_r n_r + m_r - \sqrt{d}}$

$= \frac{1}{\frac{m_r-\sqrt{d}}{n_r}-a_r} = \frac{1}{\overline{x}_r - a_r}$

Sendo assim, como $-1 < \overline{x}_r < 0$, então temos:

$-1 - a_r < \overline{x}_r - a_r < -a_r \Rightarrow -\frac{1}{a_r} < \frac{1}{\overline{x}_r - a_r} < -\frac{1}{1+a_r}$

$\Rightarrow -1 < -\frac{1}{a_r} < \overline{x}_{r+1} < -\frac{1}{1+a_r} < 0$

Portanto, pelo princípio da indução, temos que $-1 < \overline{x}_k < 0$, para todo $k \geq 0$.

Temos então que:

$\overline{x}_{k+1} = \frac{1}{\overline{x}_k - a_k} \Rightarrow \frac{1}{\overline{x}_{k+1}} = \overline{x}_k - a_k$

Daí:

$-1 < \overline{x}_k < 0 \Rightarrow -1 - a_k < \overline{x}_k - a_k < -a_k$

$\Rightarrow -1 - a_k < \frac{1}{\overline{x}_{k+1}} < -a_k$

$\Rightarrow a_k < -\frac{1}{\overline{x}_{k+1}} < a_k + 1$

$\Rightarrow 0 < -\frac{1}{\overline{x}_{k+1}} - a_k < 1$

$\Rightarrow a_k = \left\lfloor -\frac{1}{\overline{x}_{k+1}} \right\rfloor, \forall k > 0$

Como x é irracional quadrático, então, pelo teorema 7, temos que ele é periódico. Portanto, existem i e j, com $0 < i < j$, tal que $x_i = x_j$. Então $\overline{x}_i = \overline{x}_j$ e

$a_{i-1} = \left\lfloor -\frac{1}{\overline{x}_i} \right\rfloor = \left\lfloor -\frac{1}{\overline{x}_j} \right\rfloor = a_j$

$\Rightarrow x_{i-1} = a_{i-1} + \frac{1}{x_i} = a_{j-1} + \frac{1}{x_j} = x_{j-1}$

Portanto, $x_i = x_j$ implica que $x_{i-1} = x_{j-1}$. Continuando com esse raciocínio, teremos $x_{i-l} = x_{j-l}$, com $l = 0, 1, 2, \ldots, i$. Portanto, temos que $x_0 = x_{j-i}$, logo

$$x = [\overline{a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{j-i-1}}\ ]$$

$\square$

Temos então, que $\left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor + \sqrt{d}$ é um número irracional quadrático (pois ele é da forma $\frac{m+\sqrt{d}}{n}$, onde $m = \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor$ e $n = 1$) e seu conjugado é dado por $\left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor - \sqrt{d}$, que é um número entre -1 e 0. Portanto, pelo teorema 8, temos que:

$$\left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor + \sqrt{d} = [\overline{a_0'; a_1, \ldots, a_{k-1}}\ ]$$

onde $a_0' = \left\lfloor \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor + \sqrt{d} \right\rfloor = 2 \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor$

Então

$\sqrt{d} = \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor + \sqrt{d} - \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor = [\overline{a_0'; a_1, \ldots, a_{k-1}}\ ] - \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor = [a_0'; \overline{a_1, \ldots, a_{k-1}, a_0'}\ ] - \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor$

$= [2 \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor; \overline{a_1, \ldots, a_{k-1}, a_0'}\ ] - \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor = [\left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor; \overline{a_1, \ldots, a_{k-1}, a_0'}\ ]$

Fazendo $a_0 = a_0'/2$, temos então que:

$$\sqrt{n} = [a_0; \overline{a_1, \ldots, a_{k-1}, 2a_0}\ ]$$

onde $a_0 = \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor$.

Temos então que todo irracional quadrático (em especial a raiz quadrada não exata) pode ser escrita na forma de uma fração contínua simples.

Para aproximar valores de números irracionais escritos como fração contínua simples, temos o seguinte teorema:

Teorema 9. *Seja x um número irracional e $\frac{p_n}{q_n}$ um de seus convergentes. Então, temos que:*

$$|x - \tfrac{p_n}{q_n}| < \tfrac{1}{q_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Demonstração. Temos que:

$|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}| = |\frac{p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}}{q_n q_{n+1}}| = |\frac{(-1)^{n+2}}{q_n q_{n+1}}| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$

Como $q_{n+1} = p_{n+1}q_n + q_{n+1}q_{n-1}$, então $q_n < q_{n+1}$ e segue que:

$|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$

Como x é um número que está entre $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, então segue que:

$$|x - \tfrac{p_n}{q_n}| < |\tfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \tfrac{p_n}{q_n}| < \tfrac{1}{q_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

□

Usando o teorema 9, vamos resolver alguns exemplos:

Exemplo 24.

Consiga uma aproximação para $\sqrt{3}$ *com um erro menor do que* 10^{-4}

Queremos então achar $\frac{p_n}{q_n}$ *tal que* $|\sqrt{3} - \frac{p_n}{q_n}| < 10^{-4}$. *Então basta achar o convergente* $\frac{p_n}{q_n}$ *tal que*

$\frac{1}{q_n^2} \leq 10^{-4} \Rightarrow q_n^2 \geq 10^4 \Rightarrow q_n \geq 10^2$

Como $\sqrt{3} = [1; \overline{1, 2}\,]$, *então temos que:*

$c_0 = 1 \Rightarrow p_0 = q_0 = 1$

$c_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2 \Rightarrow p_1 = 2$ *e* $q_1 = 1$

$c_2 = \frac{a_2p_1+b_2p_0}{a_2q_1+b_2q_0} = \frac{2.2+1.1}{2.1+1.1} = \frac{5}{3} \Rightarrow p_2 = 5$ *e* $q_2 = 3$

$c_3 = \frac{a_3p_2+b_3p_1}{a_3q_2+b_3q_1} = \frac{1.5+1.2}{1.3+1.1} = \frac{7}{4} \Rightarrow p_3 = 7$ *e* $q_3 = 4$

$c_4 = \frac{a_4p_3+b_4p_2}{a_4q_3+b_4q_2} = \frac{2.7+1.5}{2.4+1.3} = \frac{19}{11} \Rightarrow p_4 = 19$ *e* $q_4 = 11$

$c_5 = \frac{a_5p_4+b_5p_3}{a_5q_4+b_5q_3} = \frac{1.19+1.7}{1.11+1.4} = \frac{26}{15} \Rightarrow p_5 = 26$ *e* $q_5 = 15$

$c_6 = \frac{a_6p_5+b_6p_4}{a_6q_5+b_6q_4} = \frac{2.26+1.19}{2.15+1.11} = \frac{71}{41} \Rightarrow p_6 = 71$ *e* $q_6 = 41$

$c_7 = \frac{a_7p_6+b_7p_5}{a_7q_6+b_7q_5} = \frac{1.71+1.26}{1.41+1.15} = \frac{97}{56} \Rightarrow p_7 = 97$ *e* $q_7 = 56$

$c_8 = \frac{a_8p_7+b_8p_6}{a_8q_7+b_8q_6} = \frac{2.97+1.71}{2.56+1.41} = \frac{265}{153} \Rightarrow p_8 = 265$ *e* $q_8 = 153$

Daí, como $q_8 \geq 10^2$, *então segue que* $c_8 = \frac{265}{153} \cong 1,7320261438$ *é uma aproximação para* $\sqrt{3}$ *com erro menor do que* 10^{-4}, *ou seja, as 4 primeiras casas deimais de* $\sqrt{3}$ *são 7,3,2 e 0.*

5 Problemas envolvendo irracionalidade e frações contínuas

1. **(OBM 2006) Sejam x e y números racionais. Sabendo que $\frac{x-5\sqrt{2006}}{4-y\sqrt{2006}}$ também é um número racional, quanto vale o produto xy?**

   Solução: Se $\frac{x-5\sqrt{2006}}{4-y\sqrt{2006}}$ é racional, então

   $\frac{x-5\sqrt{2006}}{4-y\sqrt{2006}} = \frac{x-5\sqrt{2006}}{4-y\sqrt{2006}} . \frac{4+y\sqrt{2006}}{4+y\sqrt{2006}} = \frac{4x-10030y}{16-2006y^2} + \frac{xy-20}{16-2006y^2}\sqrt{2006}$

   Portanto $\frac{x-5\sqrt{2006}}{4-y\sqrt{2006}}$ é um número da forma $A + B\sqrt{2006}$ (onde A e B são números racionais) que é racional se $B = 0$. Portanto $xy - 20 = 0 \Rightarrow xy = 20$.

2. **Mostre que, se a, b e c são inteiros ímpares, então o polinômio $ax^2 + bx + c$ não tem raiz racional**.

   Solução: Suponha que $\frac{p}{q}$, irredutível, é raiz de $ax^2 + bx + c$. Temos então que:

   $a(\frac{p}{q})^2 + b\frac{p}{q} + c = 0 \Rightarrow ap^2 + bpq + cq^2 = 0$

   Como $\frac{p}{q}$ é irredutível, então pelo menos um entre p e q é ímpar. Temos então 3 casos:

   Caso 1: p e q ímpares. Então:

   $\underbrace{ap^2}_{I} + \underbrace{bpq}_{I} + \underbrace{cq^2}_{I} = 0 \Rightarrow$ nº ímpar $= 0$ (Absurdo!)

   Caso 2: p ímpar e q par. Então:

   $\underbrace{ap^2}_{I} + \underbrace{bpq}_{P} + \underbrace{cq^2}_{P} = 0 \Rightarrow$ nº ímpar $= 0$ (Absurdo!)

   Caso 3: p par e q ímpar. Então:

   $\underbrace{ap^2}_{P} + \underbrace{bpq}_{P} + \underbrace{cq^2}_{I} = 0 \Rightarrow$ nº ímpar $= 0$ (Absurdo!)

   Portanto, não existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ que seja raiz de $ax^2 + bx + c$. Então $ax^2 + bx + c$ não tem raízes racionais.

3. **Mostre que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ não podem ser termos de uma mesma progressão aritmética**.

   Solução: Vamos supor que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ sejam termos de uma mesma P.A. Então, existem a_1, m, n, r e s tais que

   $\sqrt{2} = a_1 + (m-1)r$, $\sqrt{3} = a_1 + (n-1)r$ e $\sqrt{5} = a_1 + (s-1)r$

   onde a_1 é o primeiro termo da P.A, r é a razão da P.A e $m, n, s \in \mathbb{N}$. Temos então que:

   $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{a_1+(s-1)r-a_1-(n-1)r}{a_1+(n-1)r-a_1-(m-1)r} = \frac{(s-n)r}{(n-m)r} = \frac{s-n}{n-m}$, que é um número racional.

   Mas

$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-3$

Portanto $\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}$ é um número racional. Mas, se $x = \sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}$, então temos que:

$\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6} = x \Rightarrow \sqrt{15}+\sqrt{10} = x+\sqrt{6}$

$\Rightarrow 25+10\sqrt{6} = x^2+2x\sqrt{6}+6$

$\Rightarrow 2\sqrt{6}(5-x) = x^2-19$

$\Rightarrow 24(x^2-10x+25) = x^4-38x^2+361$

$\Rightarrow x^4-62x^2+240x-239 = 0$

Então $\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}$ é raiz da equação $x^4-62x^2+240x-239=0$. Para que um número racional $\frac{p}{q}$ seja raiz de $x^4-62x^2+240x-239=0$, é necessário que $p \mid -239$ e $q \mid 1$. Portanto

$$\frac{p}{q} = \pm 1 \text{ ou } \pm 239$$

Mas temos que:

$1 < \sqrt{15} < \sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6} < 2\sqrt{16} = 8 < 239$

Portanto $\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}$ não pode ser um número racional, logo, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ não podem ser termos de uma P.A.

4. **Que número racional equivale a fração contínua** $[3;2,4,5,10]$**?**

   Solução: Temos que:

   $[3;2,4,5,10] = 3+\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{10}}}} = 3+\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{10}{51}}} = 3+\frac{1}{2+\frac{51}{214}} = 3+\frac{214}{479} = \frac{1651}{479}.$

5. **Escreva as frações contínuas dos números** $\frac{15}{8}$**,** $-\frac{30}{23}$ **e** $\frac{7}{48}$.

   Solução: Temos que

   - $15 = \mathbf{1}\cdot 8+7 \Rightarrow 8 = \mathbf{1}\cdot 7+1 \Rightarrow 7 = \mathbf{7}\cdot 1+0 \Rightarrow \frac{15}{8} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{7}} = [1;1,7].$
   - $30 = \mathbf{1}\cdot 23+7 \Rightarrow 23 = \mathbf{3}\cdot 7+2 \Rightarrow 7 = \mathbf{3}\cdot 2+1 \Rightarrow 2 = \mathbf{2}\cdot 1+0$
     $\Rightarrow -\frac{30}{23} = -1+\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}} = [1;3,3,2]..$
   - $7 = \mathbf{0}\cdot 48+7 \Rightarrow 48 = \mathbf{6}\cdot 7+6 \Rightarrow 7 = \mathbf{1}\cdot 6+1 \Rightarrow 6 = \mathbf{6}\cdot 1+0$
     $\Rightarrow \frac{7}{48} = 0+\frac{1}{6+\frac{1}{1+\frac{1}{6}}} = [0;6,1,6]$

6. **Escreva 3 frações contínuas que equivalem a** $\sqrt{6}$**, uma simples e duas não simples.**

   Solução: Para escrever as frações contínuas não simples, vamos usar a igualdade

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{\ddots}}}$$

Como $6 = 1^2 + 5$ e $6 = 2^2 + 2$, então temos que:

$$\sqrt{6} = 1 + \cfrac{5}{2+\cfrac{5}{2+\cfrac{5}{\ddots}}} \text{ ou } \sqrt{6} = 2 + \cfrac{2}{4+\cfrac{2}{4+\cfrac{2}{\ddots}}}$$

Para escrever a fração contínua simples, temos o seguinte

$\sqrt{6} = 2 + \sqrt{6} - 2 = 2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{6}-2}} = 2 + \frac{1}{\frac{\sqrt{6}+2}{2}} \Rightarrow a_0 = 2$ e $x_1 = \frac{\sqrt{6}+2}{2}$;

$\frac{\sqrt{6}+2}{2} = 2 + \frac{\sqrt{6}+2}{2} - 2 = 2 + \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{6}-2}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{6}+2} \Rightarrow a_1 = 2$ e $x_2 = \sqrt{6} + 2$;

$\sqrt{6} + 2 = 4 + (\sqrt{6} + 2) - 4 = 4 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{6}-2}} = 4 + \frac{1}{\frac{\sqrt{6}+2}{2}} \Rightarrow a_2 = 4$ e $x_3 = \frac{\sqrt{6}+2}{2}$.

Como $x_3 = x_1$, então segue que $x_{k+2} = x_k$ e $a_{j+2} = a_j$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $j \in \mathbb{Z}_+$. Portanto

$$\sqrt{6} = 2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ddots}}}}} = [2; \overline{2, 4}\,]$$

7. **Mostre que a fração contínua simples que equivale ao número de ouro** $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ **é dada por** $[1; \overline{1}\,]$

   Solução: Fazendo $x = [1; \overline{1}\,]$, temos:

   $x - 1 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}} = \frac{1}{x} \Rightarrow x(x-1) = 1$

   $\Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$

   $\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

   Como $x > 0$, então segue que $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

8. **Quem é maior,** $[1; 2, 3, \ldots, 2009, 2010]$ **ou** $[1; 2, 3, \ldots, 2009, 2011]$**?**

   Solução: Temos que $[1; 2, 3, \ldots, 2009, 2011] = [1; 2, 3, \ldots, 2009, 2010, 1]$, onde $c_0 = 1$, $c_1 = [1; 2], c_2 = [1; 2, 3], \ldots$ são os convergentes de $[1; 2, 3, \ldots, 2009, 2010, 1]$. Então

   $$c_{2009} = [1; 2, \ldots, 2010] \text{ e } c_{2010} = [1; 2, \ldots, 2010, 1]$$

   Pelo Teorema 6, temos que $c_{2n} < c_{2n-1}$, para todo n natural. Então $c_{2010} < c_{2009}$, portanto

$$[1; 2, \ldots, 2009, 2010] > [1; 2, \ldots, 2009, 2011]$$

9. **Encontre as 6 primeiras casas decimais de $\sqrt{80}$.**

   Solução: A fração contínua simples que representa $\sqrt{80}$ é $[8; \overline{1, 16}\,]$. Temos ainda que

$$\left|\sqrt{80} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$$

onde $\frac{p_n}{q_n}$ é um dos convergentes de $\sqrt{80}$. Como queremos descobrir as 6 primeiras casas decimais de $\sqrt{80}$, então queremos achar $\frac{p_n}{q_n}$ tal que

$$\left|\sqrt{80} - \frac{p_n}{q_n}\right| < 10^{-6}$$

Combinando as duas desigualdades, então temos que achar um convergente de $\sqrt{80}$ tal que $b_n > 10^3$. O primeiro convergente onde isso acontece é o $c_6 = \frac{48952}{5473}$, cuja forma decimal é aproximadamente $8,94427188$, e que tem as 6 primeiras casas decimais iguais as 6 primeiras casas decimais de $\sqrt{80}$.

6 Apêndice

6.1 Teoria dos corpos $\times$ irracionalidade

6.1.1 Definição de corpo

Para a definirmos o que é um corpo, é necessário saber o conceito de grupo.

Definição 10. ***(Grupo)***

Uma estrutura algébrica com uma composição interna $(G, \cdot)$ é denominada um grupo, se

(i) $a(bc) = (ab)c$ para todos $a, b, c \in G$;

(ii) Existe um único $e \in G$, tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$, para todo $a \in G$ (elemento neutro);

(iii) Para todo $a \in G$, existe um único $a^{-1} \in G$ com $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ (inverso).

Um exemplo de grupo é o $(\mathbb{Z}, +)$, pois a operação de adição é associativa, 0 é o elemento neutro e $-a$ é o inverso.

Um subgrupo de um grupo $(G, \cdot)$ é uma estrutura $(H, \cdot)$, onde $H \subseteq G$ e $(H, \cdot)$ é um grupo. Temos ainda que um grupo $(G, \cdot)$ é dito abeliano, se vale

$$a \cdot b = b \cdot a,$$

para todo $a, b \in G$.

Vamos então a definição de um corpo.

Definição 11. ***(Corpo)***

Seja K um conjunto não-vazio sobre o qual podem ser definidas as operações binárias $+$ e $\cdot$. A estrutura $(K, +, \cdot)$ é um corpo se

(i) $(K, +)$ é um grupo abeliano;

(ii) $(K - \{0\}, \cdot)$ é um grupo abeliano (0 elemento neutro da operação $+$);

(iii) $(a + b)c = ac + bc$, para todo $a, b, c \in K$.

Note que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ não é um corpo, pois $(\mathbb{Z} - \{0\}, \cdot)$ não é um grupo. Já $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ são corpos.

6.1.2 Extensão de um corpo

Definição 12. ***(Subcorpo)***

Dado um corpo C, temos que K é dito subcorpo de C se K é um corpo e $K \subseteq C$.

Definição 13. ***(Extensão de um corpo)***

Dados dois corpos L e K, dizemos que L é uma extensão de K (notação $L \mid K$), quando K for um subcorpo de L. Neste caso, consideramos L como um K-espaço vetorial.

Seja $L \mid K$ uma extensão de corpos. Dizemos que $\alpha \in L$ é algébrico sobre K, quando existe um polinômio $P \in K[x]$ não nulo, tal que $P(a) = 0$, isto é, quando α for raiz de um polinômio não nulo com coeficientes em K.

Definição 14. ***(Polinômio minimal)***

Sejam $L \mid K$ uma extensão de corpos e $\alpha \in L$ algébrico sobre K. O polinômio minimal de α sobre K, denotado por $P_{\alpha,K}$, é o polinômio mônico de menor grau com coeficientes em K que tem α como raiz. Nesse caso, o grau de α é definido como o grau de seu polinômio minimal, isto é, $gr(P_{\alpha,K})$.

Exemplo 25. *O número $\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$ é algébrico de grau 4 e seu polinômio minimal é $x^4 - 14x^2 + 9$. O polinômio minimal de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ é $x^2 - \frac{1}{2}$.*

Seja $L \mid K$ extensão de corpos e $\alpha \in L$ algébrico sobre K. Temos então o conjunto

$$K(\alpha) = \{\tfrac{P(\alpha)}{Q(\alpha)} : P, Q \in K[x], Q(\alpha) \neq 0\},$$

que é chamado de adjunção de α em K.

O grau da extensão $L \mid K$, denotada por $[L : K]$, é igual à dimensão de L como K-espaço vetorial. Dizemos também que β é uma base da extensão $L \mid K$, quando β é base do K-espaço vetorial.

Teorema 10. *Sejam $L \mid K$ uma extensão e $\alpha \in L$ algébrico sobre K de grau n. Então $[K(\alpha) : K] = n$ e $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ é uma base de $L \mid K$.*

6.1.3 Irracionalidade de $(a + b\sqrt[m]{x})^n$ e $\sqrt[m]{x} + \sqrt[n]{y}$

Proposição 7. *Sejam $a, b \in \mathbb{Q}^*$, m inteiro maior do que 1 e $\sqrt[m]{x} \in \mathbb{I}$, com $x \in \mathbb{Q}$. Então o número $(a + b\sqrt[m]{x})^n$ é irracional.*

Demonstração. Vamos considerar a e b positivos, à princípio. Temos que:

$(a + b\sqrt[m]{x})^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \sqrt[m]{x^i} = \sum_{i=0}^{n} A_i \sqrt[m]{x^i},$

tal que $A_k = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Vamos supor que $(a + b\sqrt[m]{x})^n = B \in \mathbb{Q}$. Então temos que:

$$B = A_0 + A_1\sqrt[m]{x} + A_2\sqrt[m]{x^2} + \cdots + A_n\sqrt[m]{x^n}.$$

Temos então 2 casos:

Caso 1: $n < m$

Temos que:

$B = A_0 + A_1\sqrt[m]{x} + A_2\sqrt[m]{x}^2 + \cdots + A_n\sqrt[m]{x^n} \Rightarrow (A_0 - B)\cdot 1 + A_1\sqrt[m]{x} + A_2\sqrt[m]{x^2} + \cdots + A_n\sqrt[m]{x^n} = 0$

Como $\sqrt[m]{x}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$ de grau m, então pelo Teorema 10 temos que $[Q(\sqrt[m]{x}) : Q] = m$ e $\{\sqrt[m]{x}, \sqrt[m]{x^2}, \ldots, \sqrt[m]{x^{m-1}}\}$ é uma base de $\mathbb{Q}(\sqrt[m]{x}) \mid \mathbb{Q}$.

Como $n < m$, então $\{1, \sqrt[m]{x}, \sqrt[m]{x^2}, \ldots, \sqrt[m]{x^n}\} \subseteq \{1, \sqrt[m]{x}, \sqrt[m]{x^2}, \ldots, \sqrt[m]{x^{m-1}}\}$ e daí:

$(A_0 - B) + A_1\sqrt[m]{x} + A_2\sqrt[m]{x^2} + \cdots + A_n\sqrt[m]{x^n} = 0 \Rightarrow A_0 - B = 0$

$\Rightarrow B = A_0$

$\Rightarrow b\sqrt[m]{x} = 0,$

que é um absurdo, pois b é não nulo e $\sqrt[m]{x}$ é irracional.

Caso 2: $n \geq m$

Seja r o maior inteiro tal que $rm \leq n$. Então $n - rm = t \geq 0$. Daí

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt[m]{x})^n &= \sum_{i=0}^{m-1} A_i \sqrt[m]{x^i} + x \sum_{i=m}^{2m-1} a_i \sqrt[m]{x^{i-m}} + \cdots + x^r \sum_{i=rm}^{n=rm+t} A_i \sqrt[m]{x^{i-m}} \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} B_i \sqrt[m]{x^i},\end{aligned}$$

onde

$$B_k = \begin{cases} \sum_{i=0}^{r} x^i A_{im+k}, \text{ para } 0 \leq k \leq t \\ \sum_{i=0}^{r-1} x^i A_{im+k}, \text{ para } t < k \leq m-1 \end{cases}$$

Então, como $1, \sqrt[m]{x}, \ldots, \sqrt[m]{x^{m-1}}$ forma uma base para $\mathbb{Q}(\sqrt[m]{x}) \mid \mathbb{Q}$, segue que:

$$B_1 = B_2 = \cdots = B_{m-1} = 0,$$

que é um absurdo, pois cada B_k equivale a soma de números positivos, logo, também são positivos.

Portanto, segue que $(a + b\sqrt[m]{x})^n$ é um número irracional, para $a, b > 0$. Caso a e b fossem negativos, o número permaneceria o mesmo (se n for par) ou apenas trocaria de sinal (se n for ímpar), portanto, continuaria irracional. Se apenas um entre a e b fosse negativo (digamos b), então teríamos os casos:

Caso 1: $n < m$

A demonstração da irracionalidade nesse caso é análoga ao caso 1 com a e b positivos, pois chegaríamos a mesma conclusão de que $b\sqrt[m]{x} = 0$, o que seria um absurdo.

Caso 2: $n > m$

Temos que

$$(a + b\sqrt[m]{x})^n = \sum_{i=0}^{m-1} B_i \sqrt[m]{x^i},$$

onde os B_k's considerados são os mesmos do caso 2 com a e b positivos. Se m é par, então segue que B_k é uma soma de números positivos se k for par, e uma soma de números negativos se k for ímpar. Daí, supondo que $(a + b\sqrt[m]{x})^n$ é racional, chegaríamos a conclusão que $B_1 = B_2 = \cdots = B_{m-1} = 0$, o que é um absurdo. Se m é ímpar, então $(a - b\sqrt[m]{x})^n = (a + b\sqrt[m]{-x})^n$, que é um número irracional, pelo caso 2 com a e b positivos. Então segue que $(a + b\sqrt[m]{x})^n$ é irracional para todo $a, b \in \mathbb{Q}$ não nulos e $\sqrt[m]{x}$ irracional.

□

Proposição 8. *Sejam m, n inteiros maiores do que 1 e x, y racionais tais que $\sqrt[m]{x}$ e $\sqrt[n]{y}$ são números irracionais. Então $\sqrt[m]{x} \pm \sqrt[n]{y}$ é irracional.*

Demonstração. Suponha que $\sqrt[m]{x} + \sqrt[n]{y} = a \in \mathbb{Q}$. Então temos que

$$\sqrt[n]{y} = a - \sqrt[m]{x} \Rightarrow y = (a - \sqrt[m]{x})^n,$$

que é um absurdo, pois y é um número racional e $(a - \sqrt[m]{x})^n$ é um número irracional (proposição 7). Portanto $\sqrt[m]{x} + \sqrt[n]{y}$ é irracional.

De maneira análoga, mostramos que $\sqrt[m]{x} - \sqrt[n]{y}$ também é irracional (pois $(a + \sqrt[m]{x})^n$ é irracional). Portanto, segue que $\sqrt[m]{x} \pm \sqrt[n]{y}$ é irracional.

□

6.2 Obtendo a fração contínua da constante e

Teorema 11. *A fração contínua de e é dada por:*

$$e = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5+\cfrac{5}{\ddots}}}}}} = [2; (1,1), (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), \ldots].$$

Demonstração. Queremos mostrar que $e = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$, onde $\frac{p_n}{q_n}$ é um convergente da fração contínua de e. Para isso, vamos mostrar que $p_n = (n+1)! + n!$ e $q_n = d_n + d_{n+1}$, para todo $n \geq 0$, onde d_n é o número de desarranjos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, isto é, o número de permutações dos elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ que não preserva a posição de nenhum elemento. A função d_n obedece a seguinte recursão

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}), \text{ onde } d_1 = 0 \text{ e } d_2 = 1.$$

Resolvendo a recursão acima, obtemos

$$d_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Daí, dados $a_0 = 2$, $b_1 = 1$, $a_n = n, \forall n \geq 1$ e $b_n = n-1, \forall n \geq 2$, temos:

$$p_0 = 2 = (0+1)! + 0!$$

Supondo agora, que $p_k = (k+1)! + k!$ para todo $k \leq n$, temos que:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= a_{n+1}p_n + b_{n+1}p_{n-1} = (n+1)[(n+1)! + n!] + n[n! + (n-1)!] \\ &= (n+2)(n+1)! + (n+1)n! = (n+2)! + (n+1)! \end{aligned}$$

Temos ainda que:

$$q_1 = 1 = 0 + 1 = d_1 + d_2$$

Supondo agora que $q_k = d_k + d_{k+1}$, para todo $k \leq n$, então temos:

$$q_{n+1} = a_{n+1}q_n + b_{n+1}q_{n-1} = (n+1)(d_n + d_{n+1}) + n(d_{n-1} + d_n) = d_{n+2} + d_{n+1}$$

Portanto, pelo princípio da indução, temos que $p_n = (n+1)! + n!$ e $q_n = d_n + d_{n+1}$ para todo $n \geq 0$. Dessa forma, temos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+n!}{d_n+d_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n+1}}{\frac{d_n}{(n+1)!}+\frac{d_{n+1}}{(n+1)!}}=\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}}$$

Mas temos que a série de Taylor de e^x é dada por $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, portanto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}=\frac{1}{e^{-1}}=e$$

Logo,

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5+\cfrac{5}{\ddots}}}}}}=[2;(1,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),\ldots]$$

$\square$

Referências

[1] ANDRADE, E.X.L. ; BRACCIALI, C.F **Frações Contínuas: Propriedades e Aplicações**. SMABC, ed. Plêiade, 2005, vol. 20.

[2] BALOF, B. ; JENNE, H. **Tilings, Continued Fractions, Derangements, Scramblings, and e**. Disponível em https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL17/Balof/balof22.pdf. Acesso em 20/04/2014.

[3] BESKIN, N.M. **Frações Contínuas**. Tradução de: Pedro Lima. ed. Mir, 1987.

[4] BRUEN A. ; FORCINITO, M.A. **Cryptography, Information Theory and Error-Correction: A Handbook for the 21st Century**. Wiley-Interscience, 2004.

[5] ENDLER O. **Teoria dos corpos**. Ministério da ciência e tecnologia - Conselho nacional de desenvolvimento científico e tecnológico, IMPA.

[6] HEFEZ, A. **Elementos de aritmética**. SBM, 2005.

[7] IEZZI, G. ; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar 1- Conjuntos - Funções** 9ª ed., 2013.

[8] MARQUES D. **Teoria dos Números Transcendentes**. 1^a ed., SBM, 2013.

[9] NIVEN, I. ; ZUCKERMAN, H.S. ; MONTGOMERY, H.L. **An Introduction to The Theory of Numbers** Fifth Edition, Jhon Wiley & Sons, Inc.

[10] SILVA J.C.R. da **O estudo das frações contínuas**. Disponível em http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/12007/JoseCarlosRamosdaSilva.pdfLTC. Acesso em 15/04/2014.