

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ANÁLISE TRIDIMENSIONAL DE ESTRUTURAS  
GEOTÉCNICAS SUBMETIDAS A REFORÇO E  
DRENAGEM**

**RAÚL DARÍO DURAND FARFÁN**

**ORIENTADOR: MÁRCIO MUNIZ DE FARIAS, Ph.D.**

**TESE DE DOUTORADO EM GEOTECNIA**

**PUBLICAÇÃO: G.TD-054/08**

**BRASÍLIA/DF: MARÇO/2008**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ANÁLISE TRIDIMENSIONAL DE ESTRUTURAS GEOTÉCNICAS  
SUBMETIDAS A REFORÇO E DRENAGEM**

**RAÚL DARÍO DURAND FARFÁN**

TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR.

APROVADA POR:

---

**MÁRCIO MUNIZ DE FARIAS, Ph.D. (UnB)  
(ORIENTADOR)**

---

**ENNIO MARQUES PALMEIRA, Ph.D. (UnB)  
(EXAMINADOR INTERNO)**

---

**RENATO PINTO DA CUNHA, Ph.D. (UnB)  
(EXAMINADOR INTERNO)**

---

**EURÍPEDES DO AMARAL VARGAS JUNIOR, Ph.D. (PUC-RIO)  
(EXAMINADOR EXTERNO)**

---

**ANNA LAURA LOPES DA SILVA NUNES, Ph.D. (COPPE/UFRJ)  
(EXAMINADOR EXTERNO)**

DATA: BRASÍLIA/DF, 19 DE MARÇO DE 2008.

## FICHA CATALOGRÁFICA

DURAND, RAUL

Análise Tridimensional de Estruturas Geotécnicas Submetidas a Reforço e Drenagem.

[Distrito Federal] 2008.

xxiii, 153 p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Doutor, Geotecnia, 2008)

Tese de Doutorado - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental

- |                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| 1. Solo Grampeado    | 2. Elementos Finitos |
| 3. Solo Não Saturado | 4. Reforços e Drenos |
| I. ENC/FT/UnB        | II. Título (série)   |

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

DURAND, R. (2007). Análise Tridimensional de Estruturas Geotécnicas Submetidas a Reforço e Drenagem. Tese de Doutorado, Publicação G.TD-054/08, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 137 p.

## CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Raúl Darío Durand Farfán

TÍTULO DA TESE: Análise Tridimensional de Estruturas Geotécnicas Submetidas a Reforço e Drenagem

GRAU / ANO: Doutor / 2008

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor se reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

Raúl Darío Durand Farfán  
Urbanización Marcavalle H-13, Wanchaq  
Cusco - Peru

# Dedicatória

*Ao esforço das pessoas dedicadas  
ao desenvolvimento da Ciência e da  
Tecnologia.*

# Agradecimentos

Ao professor Márcio Muniz de Farias pela orientação deste trabalho.

Ao professor Manoel Porfírio Cordão Neto pelas críticas construtivas e pelo valioso apoio no estudo da teoria dos solos não saturados aplicada a elementos finitos.

Ao colega e amigo Dorival de Moraes Pedroso pelo apoio na modelagem do solo não saturado e pelas inúmeras horas de trabalho e discussão no desenvolvimento do projeto MechSys.

A Heber Augusto Cotarelli de Andrade pelo apoio inicial com a modelagem de inclusões pelo método dos elementos finitos.

A Sirlene Brito Costa pelas correções associadas à Língua Portuguesa.

Ao Programa de Pós-Graduação em Geotecnia.

Aos colegas Marcos Aires, Ary Franck, Gregorio Luis e Paulo Roberto pelo apoio e companheirismo e a todas as pessoas que apoiaram o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq pelo aporte financeiro.

## RESUMO

# ANÁLISE TRIDIMENSIONAL DE ESTRUTURAS GEOTÉCNICAS SUBMETIDAS A REFORÇO E DRENAGEM

Este trabalho visa o desenvolvimento e o aperfeiçoamento de técnicas numéricas que auxiliem no estudo do comportamento de estruturas geotécnicas tais como túneis, escavações a céu aberto e obras de contenção. Entre as medidas estabilizantes neste tipo de estruturas é comum a aplicação de reforços de geometria linear, tais como ancoragens e grampos. Adicionalmente, é utilizada também a aplicação de drenos com a finalidade de reduzir as poropressões e, conseqüentemente, aumentar as tensões efetivas. A técnica do Solo Grampeado é um claro exemplo da aplicação conjunta destas medidas de estabilização. O método dos elementos finitos (MEF) é a ferramenta numérica mais comumente utilizada na análise deste tipo de obra. No entanto, o uso deste método na simulação de inclusões de geometria linear não é uma tarefa simples. Inicialmente, a geração da malha de elementos finitos de uma análise convencional, especialmente em condições tridimensionais, é muito mais complicada e dispendiosa em termos de tempo na presença de inclusões. Isto torna mais complicada a análise de diferentes alternativas na fase de projeto, uma vez que cada configuração de inclusões em estudo demanda a geração de uma nova malha. Neste sentido, este trabalho estuda técnicas nas quais é permitido que as inclusões atravessem os elementos sólidos. Desta maneira, é possível analisar diferentes configurações de reforços e drenos utilizando uma única malha de fundo. Uma das técnicas estudadas corresponde ao método denominado embutido. Denomina-se assim porque a rigidez ou permeabilidade das inclusões é incorporada ou embutida nos elementos sólidos atravessados. No entanto, este método apresenta algumas desvantagens como a dificuldade de simular a interface solo-reforço e a dificuldade na aplicação de condições de contorno nas inclusões. Para superar estes inconvenientes, é apresentado um novo método denominado semi-embutido. Neste caso, as inclusões são conectadas à malha por meio de elementos de interface. Tais elementos de interface possuem um extremo conectado à inclusão e o outro extremo é ancorado num elemento da malha. Desta maneira, torna-se possível a simulação do contato solo-reforço e a aplicação de condições de contorno nas inclusões. Por outro lado, o estudo do efeito conjunto de reforços e drenos no comportamento de um maciço só é possível através de uma análise de deformação e fluxo acoplados. Neste tipo de análise é conveniente considerar o fluxo não saturado para avaliar a posição da linha freática. Por esta razão, torna-se necessária a modelagem do solo não saturado. No desenvolvimento deste trabalho, foi necessária a implementação e validação do programa de elementos finitos para a realização de análises acopladas incluindo a modelagem do solo não saturado. Este programa serviu de base para as implementações das técnicas de simulação de inclusões como reforços e drenos. Finalmente, foram realizadas análises de taludes hipotéticos com o objetivo de avaliar o efeito das inclusões e as disposições de reforço e drenos que representam maior contribuição na estabilidade do maciço.

## ABSTRACT

# THREE-DIMENSIONAL ANALYSIS OF GEOTECHNICAL STRUCTURES SUBJECT TO REINFORCEMENT AND DRAINAGE

The behavior of geotechnical retaining structures is studied in this work. The application of linear shape inclusions like nails and drains is one of the techniques to improve the stability conditions of this kind of structures. In addition, the application of sub-horizontal drains is a common solution to reduce the pore-pressure and consequently to increase the effective stresses. The Soil Nailing technique is one example of the combined application of this type of techniques. It is common to use the finite element method (FEM) to simulate this application. However, using the FEM to simulate structures that include linear shaped inclusions is not a trivial task. Initially, the mesh generation in a conventional analysis of this type, especially on three-dimensional conditions, becomes complicated due to the difficulty of considering the inclusions in the analysis. The study of different possible alternatives during this preliminary analysis is an even harder task because every new inclusions configuration demands a new finite element mesh. The aim of the present work is to study techniques to simulate the behavior of geotechnical retaining structures where the inclusions can trespass the solid elements from the FEM mesh. This turns possible to analyze different inclusions configurations such as reinforcements and drains using only one background mesh. One of these techniques is the embedded method. In this method the inclusions' stiffness or permeability are embedded into the trespassed solid elements. However, this method presents some difficulties such as simulating the soil-reinforcement interface and the application of boundary conditions. To overcome these disadvantages a new method (the semi-embedded method) is presented. In this method, the inclusions are connected to the mesh via interface elements. These interface elements have one node connected to the inclusion and the other one is anchored into a solid element. So, it is possible to simulate the soil-reinforcement contact and the application of boundary conditions in the inclusions. The study of the simultaneous effect of reinforcements and drains on the soil mass behavior also becomes possible through a deformation - flow coupled analysis. The consideration of unsaturated flow is convenient in this kind of analysis to evaluate the location of the phreatic line. To achieve the main goals of this work, it was necessary the implementation and validation of a finite element program to carry out coupled analysis including the unsaturated soil modelling. This program was used to implement and validate the studied techniques. Finally, some simulations were carried out using hypothetical slopes to evaluate the inclusions' effect and the best drains and reinforcements configurations for the stability of the soil mass.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Objetivos .....	3
1.2	Escopo do Trabalho .....	4
<b>2</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b>	<b>6</b>
2.1	Técnica do Solo Grampeado .....	7
2.1.1	Processo construtivo .....	9
2.1.2	Drenagem .....	9
2.1.3	Dimensionamento .....	10
2.2	Análise de inclusões via o método de elementos finitos .....	13
2.3	Solos Não Saturados .....	17
2.3.1	Resistência e deformabilidade .....	19
2.3.2	Propriedades hidráulicas .....	21
<b>3</b>	<b>Modelagem do Solo Não Saturado</b>	<b>24</b>
3.1	Teoria da Elastoplasticidade para material não saturado .....	25
3.2	Modelo elastoplástico para solos não saturados .....	28
3.2.1	Influência da sucção .....	29
3.2.2	Função de plastificação .....	30
3.2.3	Lei de fluxo .....	31
3.2.4	Lei de endurecimento .....	32
3.2.5	Parâmetros e condições iniciais .....	32
3.2.6	Comentários sobre o BBM .....	33
3.3	Modelagem das propriedades hidráulicas .....	34
3.4	Análise de deformação e fluxo acoplados pelo MEF .....	35
3.4.1	Equação de equilíbrio mecânico .....	36
3.4.2	Equação de conservação de massa .....	37
3.4.3	Solução do sistema de equações acoplado .....	39
3.5	Validações .....	40

3.5.1	Adensamento unidimensional .....	41
3.5.2	Adensamento bidimensional .....	42
3.5.3	Fluxo em solo não saturado .....	43
3.5.4	Trajétórias de sucção e tensão em solo não saturado .....	44
<b>4</b>	<b>Algoritmos Auxiliares Utilizados nas Implementações</b>	<b>47</b>
4.1	Mapeamento inverso.....	48
4.2	Função de localização .....	49
4.3	Interseção das inclusões com os elementos sólidos .....	51
4.4	Matriz Jacobiana não quadrada.....	53
4.5	Interpolação pseudolinear de valores nodais .....	55
4.6	Extrapolação.....	60
4.6.1	Quando o número de pontos dados é maior que o número de nós.....	62
4.6.2	Quando o número de pontos dados é igual ao número de nós.....	63
4.6.3	Quando o número de pontos dados é menor que o número de nós.....	63
4.6.4	Exemplos numéricos.....	67
4.7	Orientação em um ponto qualquer de uma barra curva .....	70
<b>5</b>	<b>Modelagem dos Reforços</b>	<b>71</b>
5.1	Abordagem pelo método discreto.....	72
5.2	Abordagem pelo método embutido .....	74
5.2.1	Formulação derivada da compatibilidade de deslocamentos.....	75
5.2.2	Formulação derivada da compatibilidade de deformações .....	77
5.3	Abordagem pelo método semi-embutido.....	78
5.4	Relação constitutiva para os reforços .....	86
5.5	Modelagem constitutiva da interface.....	86
5.5.1	Cálculo da tensão normal à superfície do reforço .....	87
5.5.2	Relação constitutiva para a interface .....	89
5.6	Validações.....	91
5.6.1	Análise das tensões axiais em barras de treliça.....	92
5.6.2	Avaliação das tensões cisalhantes num ensaio de arrancamento .....	94

5.6.3	Comparação entre os métodos embutido e semi-embutido .....	96
5.6.4	Comparação entre a interpolação convencional e a pseudolinear na previsão das forças axiais.....	99
5.7	Comentários sobre a modelagem dos reforços.....	102
<b>6</b>	<b>Modelagem dos Drenos</b>	<b>105</b>
6.1	Abordagem pelo método discreto.....	105
6.2	Abordagem pelo método embutido .....	108
6.3	Abordagem pelo método semi-embutido.....	110
6.4	Modelagem constitutiva.....	115
6.5	Validações.....	116
6.5.1	Sistema de drenos no interior de elementos sólidos .....	117
6.5.2	Avaliação dos valores de permeabilidade dos elementos conectores .....	118
6.5.3	Avaliação de superfície freática para diferentes comprimentos do dreno .....	120
6.5.4	Adensamento radial .....	122
6.6	Comentários sobre a modelagem dos drenos.....	125
<b>7</b>	<b>Estudo do Desempenho das Inclusões</b>	<b>127</b>
7.1	Talude hipotético utilizado nas análises .....	128
7.2	Seqüências construtivas .....	131
7.3	Avaliação do comprimento dos grampos.....	132
7.4	Avaliação da inclinação dos grampos .....	135
7.5	Avaliação do comprimento dos drenos.....	137
7.6	Comentários com relação às análises realizadas .....	140
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>141</b>
8.1	Conclusões .....	141
8.1.1	Com relação à metodologia utilizada .....	141
8.1.2	Com relação às análises de solo grampeado .....	144
8.2	Recomendações para pesquisas futuras .....	145
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>148</b>

# Lista de Figuras

Figura 2.1 - Seção transversal típica de uma obra com solo grampeado (modificado - Lazarte <i>et al.</i> , 2003).....	7
Figura 2.2 - Detalhe do grampo (Lazarte <i>et al.</i> , 2003).....	8
Figura 2.3 - Seção transversal de uma obra típico com solo grampeado (modificado - Porterfield <i>et al.</i> , 1994).....	9
Figura 2.4 - Drenagem utilizada conjuntamente com a técnica de solo grampeado: a) detalhe de um dreno sub-horizontal (modificado - Byrne <i>et al.</i> , 1998); b) drenos de tipo superficial.....	10
Figura 2.5 - Configuração dos drenos em uma obra de solo grampeado (modificado - Lazarte <i>et al.</i> , 2003).....	10
Figura 2.6 - Modos de ruptura externa e interna em obras de solo grampeado (modificado - Lazarte <i>et al.</i> , 2003).....	11
Figura 2.7 - Ensaio de arrancamento: a) Macaco hidráulico utilizado no ensaio (modificado - Porterfield <i>et al.</i> , 1994); b) Exemplo do gráfico de ciclos de carga obtido do ensaio (modificado - Azambuja <i>et al.</i> , 2001).....	12
Figura 2.8 - Relação de $q_s$ com resultados de ensaios de SPT (modificado - Ortigão & Palmeira, 1997).....	12
Figura 2.9 - Deslocamento horizontal máximo observado em taludes grampeados.....	13
Figura 2.10 - Malhas de elementos finitos para diferentes abordagens: a) Método Discreto; b) Método Embutido.....	15
Figura 2.11 - Interpretação da contribuição de um segmento de reforço na rigidez do elemento atravessado através da transformação em um elemento sólido equivalente.....	15
Figura 2.12 - Representação do esquema de simulação da interface para prever deslocamentos relativos pelo Método Embutido (modificado - Hartl, 2002).....	16
Figura 2.13 - Curva característica típica de um solo (modificado - Fredlund & Rahardjo, 1993).....	19
Figura 2.14 - Curva característica e curva de condutividade hidráulica para argila siltosa roxa (modificado - Rahardjo <i>et al.</i> , 2003): a) curva característica; b) curva de condutividade hidráulica.....	22
Figura 3.1 - Trajetória de secagem para planos de tensão hidrostática constante.....	26

Figura 3.2 - Idealização dos esquemas de integração: a) Forward Euler; b) Modified Euler.....	28
Figura 3.3 - Modelo BBM: a) aumento do tamanho da superfície de plastificação devido à sucção. b) domínio elástico limitado pelas curvas LC e SI. ....	30
Figura 3.4 - Superfícies de plastificação: a) BBM; b) BarcelonaX.....	31
Figura 3.5 - Curvas aproximadas; a) sucção versus umidade volumétrica; b) sucção versus condutividade hidráulica. ....	35
Figura 3.6 - Simulação do adensamento unidimensional: a) malha de elementos finitos, condições de contorno e propriedades utilizadas; b) excesso de poropressão para diferentes intervalos de tempo. ....	41
Figura 3.7 - Malha de elementos finitos, condições de contorno e propriedades da análise de adensamento 2D.....	42
Figura 3.8 - Recalque da superfície para vários intervalos de tempo para carga distribuída retangular. ....	43
Figura 3.9 - Simulação do fluxo não saturado: a) malha de elementos finitos, condições de contorno e propriedades utilizadas; b) carga hidráulica obtida na cota $z = 0$ para diferentes valores de tempo transcorrido. ....	44
Figura 3.10 - Simulação de trajetórias tensão-sucção em solo não saturado: a) malha de elementos finitos e condições de contorno; b) trajetórias analisadas. ....	44
Figura 3.11 - Resultado das simulações de trajetórias de molhagem. ....	46
Figura 3.12 - Resultado das simulações de trajetórias de secagem. ....	46
Figura 4.1 - Esquematização do mapeamento inverso. ....	48
Figura 4.2 - Algoritmo para a execução do Mapeamento Inverso. ....	49
Figura 4.3 - Função de localização para um elemento triangular; a) sinal da função no interior, na borda e fora do elemento; b) lugar geométrico no espaço $\xi, \eta, \zeta$ . ....	50
Figura 4.4 - Representação de um elemento de barra atravessando elementos da malha. ....	51
Figura 4.5 - Algoritmo para a discretização de uma inclusão.....	53
Figura 4.6 - Transformação de coordenadas entre sistemas de diferente dimensão: a) Elemento unidimensional (de 3D para 1D); b) Elemento bidimensional (de 3D para 2D).....	54
Figura 4.7 - Caso de interpolação inapropriada no domínio de um elemento. ....	56
Figura 4.8 - Comparação entre o ajuste polinomial e o ajuste linear para um conjunto de cinco valores. ....	56
Figura 4.9 - Funções exponenciais utilizadas na interpolação pseudolinear para um elemento unidimensional de três nós.....	57

Figura 4.10 - Exemplo de interpolação; a) aproximação polinomial; b) aproximação pseudolinear. ....	59
Figura 4.11 - Exemplo de interpolação; a) aproximação polinomial; b) aproximação pseudolinear. ....	59
Figura 4.12 - Representação esquemática da extrapolação local em um elemento de quatro nós.....	60
Figura 4.13 - Interpretação geométrica do processo de translação em 1D. ....	66
Figura 4.14 - Algoritmo utilizado na extrapolação de valores internos para os nós. ....	67
Figura 4.15 - Superfícies geradas por interpolação de valores nodais: a) superfície limitada pelos pontos de integração; b) superfície limitada pelos nós. ....	68
Figura 4.16 - Superfícies geradas por interpolação de valores nodais: a) superfície gerada utilizando a Eq. 4.34; b) superfície gerada utilizando a Eq. 4.43. ....	70
Figura 4.17 - Inclinação de uma barra em um dado ponto. ....	70
Figura 5.1 - Posição dos reforços com relação aos elementos sólidos numa análise pelo Método Discreto. ....	72
Figura 5.2 - Possível posição dos reforços numa análise pelo Método Discreto.....	74
Figura 5.3 - Pontos de integração do elemento de barra embutido. ....	75
Figura 5.4 - Idealização do reforço conectado aos elementos sólidos através de elementos de interface.....	78
Figura 5.5 - Elementos de interface representados por um conjunto de três molas. ....	80
Figura 5.6 - Representação esquemática do deslocamento relativo de um elemento de mola. ....	81
Figura 5.7 - Superfícies do reforço associadas aos nós e conseqüentemente aos elementos de interface para elementos de barra de dois e três nós.....	81
Figura 5.8 - Diagrama de corpo livre para o elemento de mola.....	82
Figura 5.9 - Relação tensão-deformação elástica perfeitamente plástica própria de um reforço de aço.....	86
Figura 5.10 - Representação das tensões normais à superfície do reforço. ....	87
Figura 5.11 - Representação das tensões cisalhante e normal na interface solo-grampo.....	89
Figura 5.12 - Trajetórias para diferentes valores da relação tensão cisalhante-deslocamento: a) no espaço $\tau-u$ ; b) no espaço $u-\sigma n-\tau$ . ....	90
Figura 5.13 - Análise de uma treliça introduzida em elementos sólidos pelo método embutido: malha de elementos finitos e condições de contorno.....	92
Figura 5.14 - Resultados da análise comparados com os valores analíticos.....	93

Figura 5.15 - Análise de uma treliça introduzida em elementos sólidos pelo método semi-embutido: malha de elementos finitos e condições de contorno.....	93
Figura 5.16 - Resultados da análise comparados com os valores analíticos.....	94
Figura 5.17 - Malha de elementos finitos e condições de contorno utilizadas na simulação do ensaio de arrancamento.....	94
Figura 5.18 - Resultados para diferentes níveis de carregamento: a) Razão entre a tensão cisalhante na interface e a tensão cisalhante máxima; b) Razão entre a força axial na barra e a força axial máxima. ....	96
Figura 5.19 - Análise comparativa: a) malha de elementos finitos utilizada; b) resultados do deslocamento horizontal da parede após escavação. ....	98
Figura 5.20 - Força axial nas três linhas de grampos para diferentes valores de módulos da interface. ....	98
Figura 5.21 - Elemento hexaédrico de 20 nós com duas barras embutidas de 3 nós.....	99
Figura 5.22 - Forças axiais nos reforços 1 e 2 calculadas nos pontos de integração, utilizando a interpolação convencional e a interpolação pseudo-linear. ....	100
Figura 5.23 - Diferenças na previsão das forças axiais nos reforços pela utilização dos métodos de interpolação convencional e pseudolinear.....	100
Figura 5.24 - Força axial nas três linhas de grampos pelos métodos embutido e semi-embutido utilizando a interpolação convencional e a pseudolinear. ....	101
Figura 6.1 - Representação da face de percolação utilizada conjuntamente com o método embutido. ....	110
Figura 6.2 - Idealização do elemento conector solo-dreno.....	110
Figura 6.3 - Idealização dos elementos de dreno conectados aos elementos sólidos através de elementos de conexão. ....	111
Figura 6.4 - Elementos de barra de três nós vinculado ao elemento sólido por meio de elementos conectores solo-dreno. ....	111
Figura 6.5 - Elemento conector com os respectivos volumes nodais.....	113
Figura 6.6 - Posições dos drenos com relação ao lençol freático.....	115
Figura 6.7 - Variação da permeabilidade do elemento conector com a diferença de poropressão. ....	116
Figura 6.8 - Análise de tubos em elementos sólidos pelo método embutido: a) malha de elementos finitos e condições de contorno; b) resultados obtidos. ....	118
Figura 6.9 - Resultados da análise de tubos em elementos sólidos pelo método embutido: a) poropressão após o primeiro estágio; b) velocidade axial após o segundo estágio.....	118

Figura 6.10 - Teste de avaliação da permeabilidade do dreno: a) Geometria da malha e condições de contorno; b) Carga hidráulica na linha A-B, para diferentes valores de $k$ . .....	120
Figura 6.11 - Campo de poropressões positivas mostrando a superfície freática produzida pela inclusão do dreno. ....	120
Figura 6.12 - Malhas de elementos e condições de contorno utilizadas: a) simulação pelo método semi-embutido; b) simulação pelo programa SEEP/W.....	121
Figura 6.13 - Comparação da superfície freática para diferentes comprimentos de dreno. ...	122
Figura 6.14 - Vista em planta (a) e com corte (b) da aplicação de drenos verticais. ....	122
Figura 6.15 - Malha 3D utilizada na simulação de adensamento radial: a) isometria; b) vista lateral mostrando as condições de contorno. ....	124
Figura 6.16 - Vista em planta da localização das linhas drenantes para a simulação de drenos verticais.....	124
Figura 6.17 - Grau de adensamento radial ao longo do tempo para diferentes valores de $n$ ..	125
Figura 7.1 - Malha de elementos finitos do talude hipotético utilizado nas simulações .....	128
Figura 7.2 - Curvas aproximadas utilizadas nas análises; a) sucção versus grau de saturação; b) sucção versus condutividade hidráulica. ....	130
Figura 7.3 - Sequências de simulação: a) utilizada no estudo do desempenho dos reforços; b) utilizada no estudo do desempenho dos drenos. ....	132
Figura 7.4 - Configurações utilizadas no estudo de diferentes comprimentos de grampos....	133
Figura 7.5 - Forças axiais nos grampos nas configurações com comprimentos de 6 m e 8 m.....	133
Figura 7.6 - Forças axiais nos grampos nas configurações com comprimentos de 10 m e 12 m.....	134
Figura 7.7 - Resultados das análises: a) deslocamentos relativos nos grampos para a configuração com comprimentos de 12 m; b) resultados do deslocamento horizontal da parede após escavação para as quatro configurações analisadas. ....	135
Figura 7.8 - Configurações utilizadas no estudo de diferentes inclinações de grampos. ....	136
Figura 7.9 - Forças axiais nos grampos nas configurações com inclinações de 0° e 5°.....	136
Figura 7.10 - Forças axiais nos grampos nas configurações com inclinações de 10° e 15° .	137
Figura 7.11 - Resultados da análise: a) tensão cisalhante e resistência no contato na configuração com grampos horizontais; b) resultados do deslocamento horizontal da parede após escavação para as quatro configurações analisadas. ....	137
Figura 7.12 - Configurações utilizadas no estudo do desempenho dos drenos. ....	138

Figura 7.13 - Forças axiais nos grampos correspondentes a primeira (a) e segunda (b) configuração.....	139
Figura 7.14 - Força axial nos grampos correspondente à terceira configuração de drenos (a) e resultados do deslocamento horizontal da parede após escavação para as três configurações (b).....	139
Figura 7.15 - Superfície freática incluindo o campo de poropressões para as análises realizadas com drenos de 8 m e 14 m. ....	140

# Lista de Tabelas

Tabela 3.1 - Parâmetros utilizados no BBM.....	33
Tabela 3.2 - Condições iniciais e constantes necessárias no BBM.....	33
Tabela 3.3 - Propriedades do material e constantes utilizadas na simulação.....	45
Tabela 4.1 - Dados do segundo exemplo de interpolação. ....	58
Tabela 4.2 - Dados do primeiro exemplo de interpolação.....	59
Tabela 4.3 - Dados do exemplo 1.....	68
Tabela 4.4 - Resultados do Exemplo 1.....	68
Tabela 4.5 - Dados do exemplo 2.....	69
Tabela 4.6 - Resultados do Exemplo 2.....	69
Tabela 5.1 - Propriedades dos materiais utilizados na simulação.....	92
Tabela 5.2 - Propriedades dos materiais utilizados na simulação.....	95
Tabela 5.3 - Propriedades dos materiais utilizados na simulação.....	97
Tabela 5.4 - Propriedades dos materiais utilizados na simulação.....	99
Tabela 5.5 - Comparação entre os métodos para simulação de reforços.....	103
Tabela 6.1 - Propriedades dos materiais utilizados na simulação.....	117
Tabela 6.2 - Parâmetros e propriedades dos materiais utilizados nas simulações.....	119
Tabela 6.3 - Parâmetros e propriedades dos materiais utilizados nas simulações.....	121
Tabela 6.4 - Propriedades dos materiais utilizados na simulação.....	123
Tabela 7.1 - Parâmetros e constantes utilizadas para simular o solo pelo modelo BarcelonaX.....	129
Tabela 7.2 - Parâmetros e propriedades das inclusões utilizados nas análises.....	130

## Lista de Símbolos, Nomenclatura e Abreviações

$\gamma_w$	Peso específico da água
$\beta$	Parâmetro que controla a taxa de variação da rigidez com a sucção
$\xi$	Variável de endurecimento do tipo deformação
$\dot{\epsilon}_v$	Taxa de deformação volumétrica
$\dot{\epsilon}_v^p$	Taxa de deformação volumétrica plástica
$\phi$	Ângulo de atrito
$\phi'$	Ângulo de atrito efetivo
$\phi^b$	Ângulo de atrito com relação à sucção matricial
$\kappa$	Coef. de compressibilidade do solo no trecho descarga-recarga
$\kappa_s$	Coef. de compressibilidade para incrementos de sucção no trecho descarga-recarga
$\lambda_0$	Coef. de compressibilidade do solo saturado no trecho virgem
$\lambda_s$	Coef. de compressibilidade para incrementos de sucção no trecho virgem
$\Lambda$	Multiplicador plástico
$\sigma$	Tensão
$\sigma_n$	Tensão normal
$\sigma$	Vetor que contém as componentes de tensão
$\tau$	Tensão cisalhante
$\theta_w$	Conteúdo volumétrico de água
$\nu$	Coeficiente de Poisson
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tensor de tensões
$\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$	Tensor de taxa de tensões
$\underline{\underline{\sigma}}_{ini}$	Tensor de tensões correspondente a um estado inicial
$\underline{\underline{\sigma}}'$	Tensor de tensões efetivas
$\underline{\underline{\dot{\sigma}}}'$	Tensor de taxa de tensões efetivas
$\underline{\underline{\epsilon}}$	Tensor de deformações

$\underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}}}$	Tensor de taxa de deformações
$\underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}}}^e$	Tensor de taxa de deformações elásticas
$\underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}}}^p$	Tensor de taxa de deformações plásticas
$A$	Área
$A_{sec}$	Área da seção de uma inclusão
$A_{lat}$	Área da interface de uma inclusão com o solo
$\mathbf{b}$	Vetor de massa
$\mathbf{b}_w$	Vetor de massa do fluido
$B$	Parâmetro do modelo BarcelonaX que permite ajustar o fechamento da superfície de plastificação na direção da sucção.
$\mathbf{B}$	Matriz da relação deformação-deslocamento
$\mathbf{B}_p$	Matriz que permite associar poropressão nodal com gradiente hidráulico
$c$	Coesão
$c_v$	Coeficiente de adensamento
$c'$	Coesão efetiva
$\mathbf{C}$	Matriz de acoplamento que associa poropressão com força
$\underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}^e$	Tensor elástico de quarta ordem da relação deformação - tensão
$\underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}^{ep}$	Tensor elastoplástico de quarta ordem da relação deformação - tensão
$d_{sec}$	Diâmetro da seção de uma barra
$\underline{\underline{\mathbf{d}}}}^e$	Tensor elástico de segunda ordem da relação deformação - sucção
$\underline{\underline{\mathbf{d}}}}^{ep}$	Tensor elastoplástico de segunda ordem da relação tensão - sucção
$\mathbf{D}$	Matriz da relação tensão - deformação
$\underline{\underline{\underline{\mathbf{D}}}}^e$	Tensor elástico de quarta ordem da relação tensão - deformação
$\underline{\underline{\underline{\mathbf{D}}}}^{ep}$	Tensor elastoplástico de quarta ordem da relação tensão - deformação
$e$	Índice de vazio
$E$	Módulo de elasticidade
$\mathbf{E}$	Matriz de extrapolação
$F$	Função de plastificação

<b>F</b>	Vetor de forças
$\mathbf{F}_{mol\_x'}$	Vetor de forças com 6 componentes de um elemento de mola de dois nós na direção $x'$
$\mathbf{F}_{mol\_loc\_x'}$	Vetor de forças com 2 componentes de um elemento de mola 1D de dois nós na direção $x'$
$\mathbf{F}_{semi\_x'}$	Vetor de forças de um elemento de mola semi-embutido na direção $x'$
$\mathbf{F}_{semi}$	Vetor de forças de um elemento de interface semi-embutido
$g$	Gradiente hidráulico em um elemento de dreno
$G$	Função potencial plástico
$\mathbf{G}_{x'}$	Matriz de transformação de deslocamentos de um elemento semi-embutido em deslocamentos de um elemento de mola 1D na direção $x'$
<b>H</b>	Matriz de permeabilidade
$\mathbf{H}_{con}$	Matriz de permeabilidade de um elemento conector solo-dreno 1D
$\mathbf{H}_{semi}$	Matriz de permeabilidade de um elemento conector solo-dreno semi-embutido
<b>J</b>	Módulo ou determinante do Jacobiano
<b>J</b>	Jacobiano
$k$	Permeabilidade
$\bar{k}$	Drenabilidade do elemento conector solo-dreno
$k_c$	Parâmetro que controla o aumento da coesão aparente com o aumento da sucção
$k_s$	Permeabilidade em condição saturada
$K_e$	Módulo tensão cisalhante-deslocamento relativo da interface
<b>K</b>	Matriz de rigidez
$\mathbf{K}_{mol\_x'}$	Matriz de rigidez $6 \times 6$ de um elemento de mola na direção $x'$
$\mathbf{K}_{mol\_loc\_x'}$	Matriz de rigidez $2 \times 2$ de um elemento de mola 1D na direção $x'$
$\mathbf{K}_{semi\_x'}$	Matriz de rigidez de um elemento de mola semi-embutido na direção $x'$
$\mathbf{K}_{semi}$	Matriz de rigidez de um elemento de interface semi-embutido
<b>L</b>	Matriz de acoplamento que associa deslocamento com volume
$m_v$	Coefficiente de variação volumétrica
<b>m</b>	Vetor de seis componentes, três dos quais iguais a um e os restantes iguais a zero

$M$	Inclinação da linha de estados críticos
$\mathbf{M}$	Matriz de transformação de deslocamentos nodais de um elemento de interface semi-embutido em deslocamentos nodais de um elemento de mola
$\mathbf{M}_w$	Matriz de transformação de poropressões nodais de um elemento conector semi-embutido em poropressões nodais do elemento conector de 2 nós correspondente
$\mathbf{N}$	Vetor/Matriz que contém as funções de forma associadas com deslocamento avaliadas em um/vários pontos
$\mathbf{N}_p$	Vetor/Matriz que contém as funções de forma associadas com poropressão avaliadas em um/vários pontos
MEF	Método dos elementos finitos
MEL	Método de equilíbrio limite
$n$	Porosidade
$OCR$	Razão de pré-consolidação
$p_{atm}$	Pressão atmosférica
$p_{ref}$	Pressão de referência
$p_0$	Tensão de pré-consolidação
$p_0^*$	Tensão de pré-consolidação para a condição saturada
$p_s$	Tensão que representa o aumento no efeito coesivo no modelo Barcelona
$p$	Tensão média
$\mathbf{P}$	Vetor de valores de poropressão nodal
$\mathbf{P}_{con}$	Vetor de valores de poropressão nodal de um elemento conector
$\mathbf{P}_{semi}$	Vetor de valores de poropressão nodal de um elemento conector semi-embutido
$\mathbf{P}_{x'}$	Matriz que permite obter os deslocamentos na direção $x'$ de um elemento de mola
$q$	Tensão desvio
$q_s$	Resistência ao arrancamento da interface solo-reforço
$\mathbf{Q}$	Vetor de volumes nodais
$\mathbf{Q}_{con}$	Vetor de volumes nodais de um elemento conector solo-dreno
$\mathbf{Q}_{semi}$	Vetor de volumes nodais de um elemento conector semi-embutido

$r$	Razão entre os valores mínimo e saturado do coeficiente de compressibilidade virgem
$r_1, r_2, r_3$	Componentes de direção de uma barra 3D no espaço $x, y$ e $z$
$\underline{r}$	Derivada da função potencial plástico com relação ao tensor de tensões
$s$	Sucção
$s_0$	Máximo valor de sucção já atingido pelo solo
$s_{ini}$	Sucção matricial correspondente a um estado inicial
$S$	Superfície
$S_r$	Grau de saturação
$\mathbf{S}_{x'}$	Matriz que permite obter o deslocamento relativo de um elemento de mola na direção $x'$ em função dos deslocamentos nodais do elemento de interface semi-embutido
$\mathbf{S}_w$	Matriz que permite obter o valor de poropressão relativa de um elemento conector de 2 nós em função das poropressões nodais do elemento conector semi-embutido
$t$	Tempo
$T$	Fator tempo em problemas de adensamento
$T_r$	Fator tempo em problemas de adensamento radial
$\mathbf{T}$	Matriz de rotação de deslocamentos ou tensões
$u_a$	Tensão intersticial de ar
$u_e$	Excesso de poropressão
$u_r$	Deslocamento relativo em um elemento de mola
$u_{wr}$	Diferença de poropressão entre o nó do dreno e o nó embutido na simulação de drenos pelo método semi-embutido
$u_w$	Tensão intersticial de água (poropressão)
$U_r$	Grau de adensamento radial
$\mathbf{U}$	Vetor de valores de deslocamentos nodais
$\mathbf{U}_{mol\_x'}$	Vetor de deslocamentos com 6 componentes de um elemento de mola na direção $x'$
$\mathbf{U}_{mol\_loc\_x'}$	Vetor de deslocamentos com 2 componentes de um elemento de mola 1D na direção $x'$

$\mathbf{U}_{semi\_x'}$	Vetor de deslocamentos de um elemento de mola semi-embutido na direção $x'$
$\mathbf{U}_{semi}$	Vetor de deslocamentos de um elemento de interface semi-embutido
$\mathbf{v}$	Vetor de velocidade de fluxo
$v$	Resultante da velocidade de fluxo
$v$	Velocidade de fluxo em um elemento conector solo-dreno
$v$	Volume específico
$v_{ini}$	Volume específico correspondente a um estado inicial
$\underline{\mathbf{v}}$	Derivada da função de plastificação com relação ao tensor de tensões
$V$	Volume
$z$	Variável de endurecimento do tipo tensão

# Capítulo 1

## Introdução

Uma área importante da Geotecnia é a que lida com a melhoria das condições de estabilidade do maciço em obras tais como contenção de taludes, escavações a céu aberto e túneis, por exemplo. Nestes casos é comum a inclusão de reforço lineares e drenagem com a finalidade de garantir as condições de estabilidade do maciço. Dentre as opções existentes, uma relativamente recente, e que se tem constituído como uma alternativa às técnicas convencionais, é a técnica do Solo Grampeado. Este é um tipo de solução que vem ganhando espaço nas obras civis devido a algumas vantagens tais como economia e rapidez de execução.

No dimensionamento deste tipo de obras é freqüente o uso de ferramentas numéricas. Desta forma, previamente às análises, é necessário definir alguns aspectos como: o método numérico a ser utilizado, a possibilidade de usar modelos bi ou tridimensionais, a possibilidade de utilizar acoplamento entre os fenômenos de deformação e fluxo, a possibilidade de considerar o solo como não saturado, os métodos a serem utilizados para a representação do reforço e a drenagem, dentre outros. Cada um destes itens tem maior ou menor relevância dependendo das características do projeto tais como: importância, vida útil, complexidade da geometria, condições de contorno, processos transientes, etc. Na prática, existem vários métodos de análise de maciços reforçados. Dentre eles tem-se o método de equilíbrio limite (MEL), e os métodos de domínio ou aproximados como o método de diferenças finitas e o método de elementos finitos (MEF). Estruturas geotécnicas, como o solo grampeado, são freqüentemente analisadas utilizando métodos que consideram critérios de estabilidade local e/ou global baseados no MEL. No entanto, estes métodos desconsideram o estado atual de tensões e poropressões do maciço o qual pode ser determinante na estabilidade. O MEF possui certas características favoráveis que justificam a sua aplicação, tais como a possibilidade de considerar menor quantidade de hipóteses e de ter maior flexibilidade com relação à definição da geometria e à aplicação das condições de contorno. Em geral, o MEF constitui-se como uma técnica efetiva para resolver problemas de contorno (Bathe, 1982; Zienkiewicz & Taylor, 1989). Desta forma, este método pode ser aplicado a uma ampla quantidade de fenômenos físicos, dentre os quais as análises de deformação e de fluxo através de meios porosos são de grande interesse para a Geotecnia. Normalmente, estes

dois fenômenos, por razões de simplicidade, são analisados isoladamente. Entretanto, a análise simultânea, denominada de análise de deformação e fluxo acoplados, leva em consideração as mudanças na deformação devido ao fluxo e vice-versa, especialmente em uma situação transiente. Adicionalmente, com o auxílio do MEF pode-se considerar o solo como não saturado. Isto implica na utilização de modelos constitutivos que associam as variações de tensão e poropressão (ou sucção) simultaneamente. Grande parte das obras geotécnicas, o que inclui as obras de reforço em solos, encontra-se no âmbito do solo não saturado, porém as análises de projeto deste tipo de obras, devido a razões conservadoras e à variabilidade das condições climáticas, consideram a hipótese de que o solo se encontra saturado. Em alguns casos, considerar esta hipótese despreza o ganho de resistência devido à sucção e pode levar ao sobre-dimensionamento das obras de contenção afetando o custo da obra. Portanto, dependendo das condições climáticas e das dimensões e importância da obra, pode ser conveniente a consideração do solo na condição natural, freqüentemente não saturada.

Outro aspecto associado às análises, é a necessidade de definir se estas devem ser realizadas em duas ou três dimensões. Na prática, a maioria das análises de estabilidade é realizada representando a geometria do problema através de domínios bidimensionais. Segundo Zhang *et al.* (1999), as análises de deformação plana não são apropriadas para representar o comportamento de estruturas reforçadas tais como o solo grampeado. Considerando a geometria linear do reforço, esta não é adequada para ser simulada com propriedades equivalentes em análises bidimensionais, salvo em certas ocasiões quando se tem distribuições regulares e pouco espaçadas de reforço. Porém, dependendo das necessidades da obra, os espaçamentos horizontais assim como os comprimentos dos reforços podem ser variados. Situações análogas podem ser consideradas com relação à aplicação de drenos sub-horizontais. Desta forma, a extensão para análises tridimensionais torna-se apropriada em análises mais refinadas.

Na análise de inclusões como reforços e drenos, e da sua contribuição no maciço em aspectos como deformabilidade e estabilidade, algumas considerações devem ser realizadas. Por exemplo, a modelagem dos reforços deve considerar o comportamento da interface existente com o solo, região na qual é possível de acontecer ruptura e deslizamento. Por outro lado, a modelagem dos drenos deve considerar a situação em que um dreno se encontre parcial ou totalmente fora da região saturada. Entre os métodos existentes para a simulação de inclusões pelo MEF estão os métodos discreto, embutido e homogêneo. O método discreto corresponde à aplicação convencional do MEF, a qual tem o inconveniente de exigir uma nova malha de elementos para cada nova configuração de reforço. Isto ocorre porque as conectividades dos elementos que representam os reforços devem ser compatíveis com os nós

da malha de elementos do meio circundante. O método embutido, no entanto, permite que reforços atravessem os elementos sólidos podendo assim utilizar uma mesma malha de fundo para analisar diferentes configurações de reforço. Neste método, os reforços são divididos em segmentos virtuais correspondentes a cada elemento sólido atravessado. A contribuição de cada segmento é calculada em função da sua geometria e sua posição com relação ao elemento atravessado. Por outro lado, no método homogeneizado, as propriedades dos elementos sólidos da região reforçada são convenientemente modificadas para levar em consideração o efeito do reforço. No entanto, este método só é mais apropriado quando se têm distribuições regulares de reforço. Como na técnica do solo grampeado é possível ter distribuições irregulares de reforço e onde as propriedades da interface são de grande importância no dimensionamento, o método homogeneizado não representa uma alternativa de análise apropriada.

Neste trabalho, pretende-se estudar métodos de análise de estruturas geotécnicas que consideram inclusões, tais como reforços e drenos, na melhora das condições de estabilidade. Para isto, o trabalho considera etapas que envolvem a formulação, implementação e aplicação destes métodos. As implementações consideram o desenvolvimento de um programa de elementos finitos capaz de realizar análises tridimensionais de deformação e fluxo acoplados em solo não saturado. Na modelagem das inclusões, três métodos são apresentados. Os métodos existentes como o discreto e o embutido são reformulados e um novo método denominado semi-embutido é introduzido. O método semi-embutido combina algumas características dos métodos discreto e embutido. Entre estas características tem-se: a possibilidade de ter reforços em posição arbitrária na malha de elementos, a utilização sem inconvenientes de elementos de interface, a aplicação de condições de contorno diretamente sobre os reforços, dentre outras. Algumas ferramentas existentes associados ao MEF e necessárias à implementação são aproveitados, como por exemplo, os conceitos de mapeamento inverso e de função de contorno. Outras ferramentas adicionais, consideradas também necessárias, como a extrapolação local e a interpolação pseudolinear de valores nodais são introduzidas. Finalmente, após as implementações e a validação dos métodos estudados, estes são aplicados na análise de taludes hipotéticos com o objetivo de avaliar o efeito das inclusões e as disposições de reforço e drenos que fornecem maior contribuição na estabilidade do maciço.

## 1.1 Objetivos

Esta pesquisa visa o estudo de métodos de análise de inclusões através do MEF em que a disposição de tais inclusões não dependa da geometria da malha de elementos. O estudo pretende mostrar as vantagens na utilização deste tipo de abordagem. As inclusões em estudo

correspondem aos reforços e drenos, ambos de geometria linear. Adicionalmente, pretende-se mostrar também as vantagens da adequada configuração de inclusões no maciço quanto à deformabilidade e estabilidade.

Para cumprir estes objetivos as seguintes etapas foram estabelecidas:

- Escrever o código computacional de elementos finitos, capaz de realizar análises de deformação e fluxo acoplados em meio não saturado, que sirva de ferramenta para o estudo de métodos de análise de inclusões como reforços e drenos;
- Desenvolver e/ou aperfeiçoar os métodos existentes para a análise de inclusões por meio do MEF;
- Validar as implementações e os métodos propostos por meio de comparações com soluções analíticas ou por comparação com outras ferramentas;
- Realizar análises de casos hipotéticos que mostrem a aplicabilidade e as vantagens dos métodos propostos;
- Realizar análises de casos hipotéticos para verificação da eficiência da distribuição das inclusões.

## 1.2 Escopo do Trabalho

Os tópicos abordados neste trabalho são descritos em uma seqüência conveniente para seu melhor entendimento. Assim, começa-se pela revisão da teoria necessária para a formulação de métodos de análise de estruturas geotécnicas e das inclusões. Posteriormente, são abordadas a implementação, validação e aplicação dos métodos estudados. Para prover uma melhor visão geral do trabalho, a seguir, é apresentado um breve resumo de cada capítulo.

O **Capítulo 2** apresenta uma revisão bibliográfica associada à técnica de solo grampeado, solos não saturados e aos métodos de análise de reforços por meio do MEF. A revisão da técnica do solo grampeado é necessária de modo a se entender os aspectos construtivos a serem simulados posteriormente. Uma vez que se pretende considerar o solo na condição não saturada, é realizada uma breve revisão da Mecânica dos Solos Não Saturados destacando aspectos como resistência, deformabilidade e permeabilidade. Adicionalmente, é apresentado um breve resumo dos métodos baseados no MEF disponíveis na literatura para a análise de inclusões como reforços e drenos.

O **Capítulo 3** é associado à modelagem do solo não saturado. Este capítulo apresenta resumidamente a teoria convencional da Elastoplasticidade aplicada a solos não saturados. Nesta parte encontra-se um resumo da formulação do modelo elastoplástico desenvolvido por Alonso *et al.* (1990), uma vez que tal formulação é utilizada na implementação e análise de alguns casos com solo não saturado. Posteriormente é apresentada a formulação do MEF

utilizada para as análises de deformação e fluxo acoplados. A parte do fluxo abrange o fluxo em meio não saturado. Na parte final deste capítulo são apresentados os resultados da validação das implementações realizadas.

Previamente ao estudo e formulação dos métodos para simular inclusões, o **Capítulo 4** mostra as ferramentas matemáticas e numéricas auxiliares desenvolvidas necessárias para a análise de elementos de reforço e drenagem em estruturas geotécnicas pelo MEF.

O **Capítulo 5** refere-se à modelagem dos reforços. Neste capítulo são formulados os métodos de análise e os modelos constitutivos necessários para simular os reforços e a interface com o solo pelo MEF. A seguir, são apresentados os resultados de testes de validação dos métodos estudados e das implementações realizadas. Para terminar este capítulo, alguns comentários sobre a utilização e limitações associadas aos métodos propostos são apontados.

O **Capítulo 6** apresenta a modelagem dos drenos. Este capítulo contempla as formulações dos métodos de análise e os modelos constitutivos para simular drenos. São apresentados os resultados de validação dos métodos estudados e das implementações realizadas. Na parte final deste capítulo, são realizados alguns comentários sobre a modelagem dos drenos.

O **Capítulo 7** apresenta os casos estudados neste trabalho. Alguns casos hipotéticos são analisados com o objetivo de mostrar a aplicabilidade dos métodos estudados. Nas análises são simulados aspectos construtivos como escavação por estágios, aplicação dos reforços e os drenos, tempo entre estágios, etc. Estas análises visam também destacar as vantagens da adequada disposição das inclusões no maciço. Finalmente os resultados são examinados e discutidos.

No **Capítulo 8** são apresentadas as conclusões obtidas neste trabalho. As conclusões são divididas em dois grupos. O primeiro com relação aos métodos de simulação de inclusões estudados e o segundo com relação às análises realizadas. Finalmente, são colocadas também as recomendações para pesquisas futuras com relação aos métodos desenvolvidos.

## Capítulo 2

### Revisão Bibliográfica

A revisão bibliográfica está dividida em três partes. A primeira está relacionada com a técnica de contenção de taludes denominada de solo grampeado. Esta técnica representa principalmente o tipo de obra que contempla a aplicação conjunta de obras de reforço e drenagem. Assim, são estudadas as características desta técnica como as principais vantagens e desvantagens, materiais utilizados, seqüência construtiva, etc. com o objetivo de identificar as informações técnicas que posteriormente serão necessárias nas simulações através do MEF. Entre estas informações técnicas encontram-se a geometria dos reforços, propriedades da interface solo-grampo, propriedades dos drenos, características do faceamento, seqüência construtiva e mecanismos de ruptura. Maiores informações sobre a técnica de solo grampeado podem ser encontradas nos trabalhos de Clouterre (1991), Ortigão & Palmeira (1992), Ortigão *et al.* (1993), Porterfield *et al.* (1994), Byrne *et al.* (1998), Lazarte *et al.* (2003), Ortigão & Sayão (2004), dentre outros.

Em seguida, é realizado um resumo sobre as formas de análise de estruturas reforçadas por inclusões por meio da utilização do MEF. Assim, são descritas as abordagens existentes na literatura, entre as quais se encontram os métodos Discreto, Homogeneizado e Embutido. Especial atenção é dada ao método Embutido, uma vez que este servirá como referência às formulações desenvolvidas neste trabalho. O método embutido tem a vantagem de permitir a análise de diferentes configurações de reforço em um mesmo domínio sem precisar refazer a malha de elementos finitos. Vários pesquisadores têm estudado este método para analisar reforços, embora nem sempre utilizando esta denominação, mas atendendo ao mesmo princípio. Entre eles podem ser citados Elwi & Hudrey (1989), Charbel (1996), Bello (1997), Da Silva (1999), Hartl *et al.* (2000), Hartl (2002), Durand (2003) e Durand & Farias (2004). Adicionalmente, autores como Andrade (2003) e Durand & Farias (2006) utilizaram extensões do método embutido na representação de elementos drenantes na simulação de fluxo em maciços de solo.

A parte final desta revisão trata sobre a teoria da Mecânica dos Solos Não Saturados. A revisão sobre este tema se justifica uma vez que o presente trabalho inclui a análise de deformação e fluxo acoplados em meios porosos. Este tipo de análise permite simular o efeito

dos drenos sub-horizontais utilizados conjuntamente com solo grampeado com a finalidade de reduzir o nível do lençol freático. Assim, durante esta revisão são vistos aspectos como a deformabilidade, resistência e permeabilidade do solo não saturado. Informações abrangentes sobre o comportamento do solo não saturado podem ser encontradas nos trabalhos de Fredlund & Rahardjo (1993), Jucá (1993), Farias (2004), dentre outros.

## 2.1 Técnica do Solo Grampeado

O solo grampeado é um sistema de contenção, aplicado em taludes, que emprega barras (grampos), concreto projetado, e drenagem (superficial e profunda). Algumas das primeiras aplicações foram realizadas na França aproximadamente em 1970, como uma extensão do novo método austríaco de túneis, NATM (Clouterre, 1991). O uso do solo grampeado como método de reforço tem crescido rapidamente na estabilização de taludes íngremes e em escavações. A principal característica da técnica de solo grampeado é a rapidez de execução comparada a obras de contenção equivalentes. Comparações entre custos em obras de contenção mostram que o solo grampeado fornece uma economia de até 40% com relação à cortina atirantada (Ortigão & Palmeira, 1992).

O conceito fundamental do solo grampeado é reforçar o terreno com inclusões passivas pouco espaçadas com a finalidade de introduzir resistência à tração e ao cisalhamento no maciço (Ortigão *et al.*, 1993). A presença de uma face flexível, associada com reforços curtos, faz com que o maciço possa se deformar, mobilizando esforços nos grampos que garantem a estabilidade do conjunto. A Figura 2.1 mostra a seção típica de uma obra em solo grampeado.

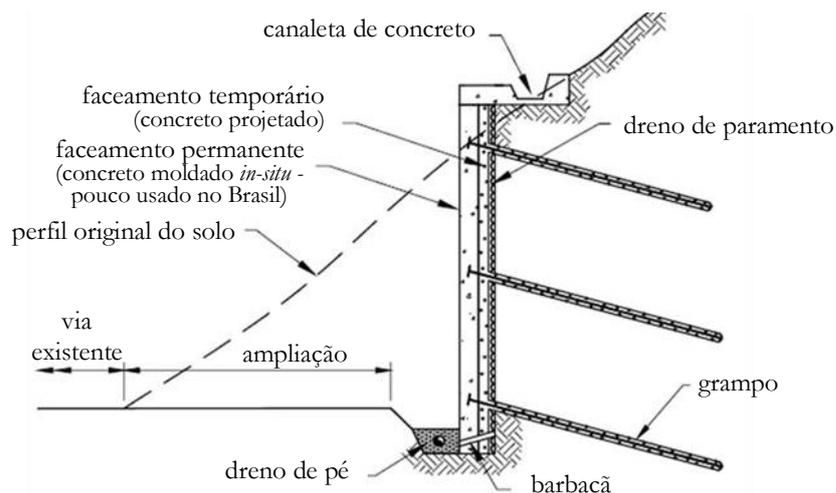


Figura 2.1 - Seção transversal típica de uma obra com solo grampeado (modificado - Lazarte *et al.*, 2003).

Os grampos podem ser injetados ou cravados. Dentre os cravados, estes podem ser por percussão, por rotação (grampo parafuso) e mediante ar comprimido. Nos grampos injetados,

podem ser colocadas uma ou várias barras de aço com diâmetro de 1” a 1½” em perfurações de 4”. Os espaçamentos vertical e horizontal entre grampos usualmente variam de um a dois metros. A Figura 2.2 mostra detalhadamente as características de um grampo após instalação.

Em lugar de barras de aço é possível a utilização de materiais sintéticos como barras ou fibras FRP (*Fibre-reinforced polymer*) (Ortigão, 1996). Estes materiais apresentam maior resistência à tração (cerca de três vezes a resistência do aço), menor módulo de elasticidade, menor peso específico, alta resistência à corrosão e até maior facilidade para serem cortados. No entanto, seu custo é bastante elevado com relação ao aço. Burgoyne (1999) mostra que um maior custo inicial pode ser compensado por outras economias como em transporte e manejo.

A diferença básica da técnica do solo grampeado com relação ao uso de tirantes é a pequena protensão aplicada no grampo, que em geral só visa garantir o contato da face com o maciço. Além disso, os grampos são aplicados em espaçamentos menores e a zona ancorada se estende ao longo do grampo, mobilizando tensões por atrito.

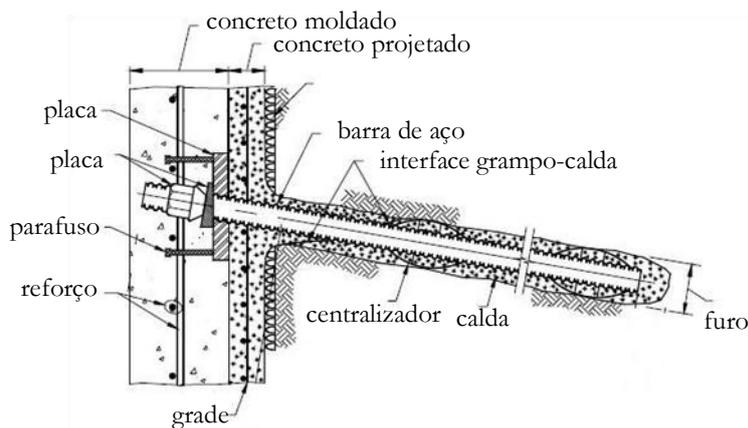


Figura 2.2 - Detalhe do grampo (Lazarte *et al.*, 2003).

Paredes verticais ou quase verticais requerem uma face flexível. Assim, na maioria dos casos é utilizado concreto projetado no faceamento. Adicionalmente, é possível o uso de SFRC (*steel fibre reinforce concrete*), que são fibras de aço de alta resistência à tração misturadas no concreto como agregado para obter uma maior resistência e minimizar o trincamento da face.

Vários autores destacam as vantagens e desvantagens do solo grampeado na literatura (Clouterre, 1991; Ortigão *et al.* 1993; Byrne *et al.*, 1998; Lazarte *et al.*, 2003). Entre as principais vantagens da técnica têm-se: economia, velocidade de instalação do reforço, velocidade de execução do paramento, utilização de equipamentos leves, adaptabilidade da técnica a diferentes características geométricas da superfície do terreno a ser estabilizado e flexibilidade na utilização de obras combinadas. Entretanto, entre as desvantagens tem-se a

necessidade de um sistema eficiente de rebaixamento do lençol em caso de presença de água. Em condições de drenagem inadequada após a realização da obra, particularmente em solos argilosos, é possível ocorrer um elevado grau de saturação ao redor dos grampos, o que pode conduzir a uma redução significativa do atrito solo grampo, prejudicando assim a integridade do maciço. Outra desvantagem associada a técnica do solo grampeado são os maiores deslocamentos produzidos pela flexibilidade da estrutura.

### 2.1.1 Processo construtivo

Quando a técnica do solo grampeado é aplicada em obras com escavações por níveis, é seguida uma seqüência de execução conjuntamente com a instalação dos grampos e drenos e da concretagem do faceamento. Após a escavação de cada camada, é aplicada uma fina cobertura de concreto projetado. Ocasionalmente pode ser utilizada uma armadura ou malha de faceamento. A aplicação do concreto projetado permite a execução de perfurações sem que ocorra degradação do solo. A seguir, os grampos são instalados e é procedida a injeção de calda de cimento, liberando a face para a inserção de armaduras e gabaritos para concluir o faceamento. Ao fim dos trabalhos de armação é realizado o lançamento do concreto projetado na face. A Figura 2.3 mostra de forma concisa as etapas do processo construtivo.

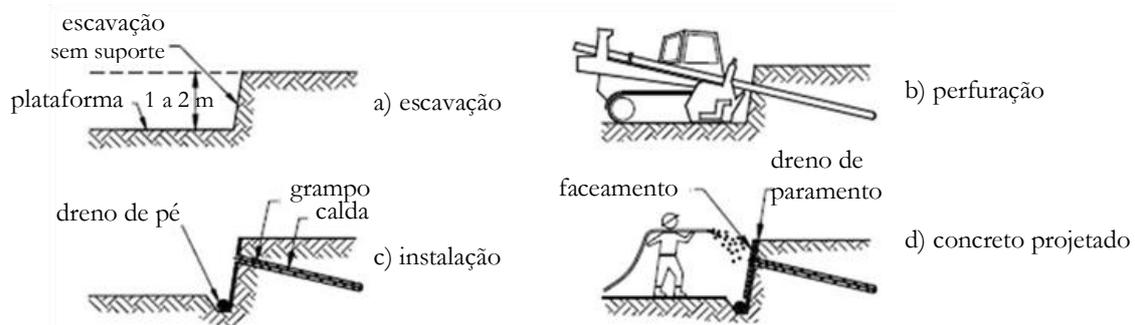


Figura 2.3 - Seção transversal de uma obra típica com solo grampeado (modificado - Porterfield *et al.*, 1994)

### 2.1.2 Drenagem

Sistemas de drenagem visam proporcionar o escoamento das águas retidas nos maciços, de forma a aliviar as poropressões positivas capazes de comprometer a estabilidade do talude. Normalmente os sistemas de drenagem se compõem de drenos sub-horizontais profundos, drenos de superfície, drenos de paramento e drenos de pé (Figura 2.4). Na prática usual, recomendam-se serviços de drenagem profunda e de superfície.

Os drenos sub-horizontais profundos são drenos lineares embutidos no maciço com comprimentos de 6 a 18 m (Figura 2.4a). Os drenos são elaborados com tubos perfurados e introduzidos transversalmente nos taludes por cravação ou mediante escavação. Estes últimos

podem ser constituídos por tubos plásticos de 1½” a 2” de diâmetro instalados em perfurações de 2½” a 4” de diâmetro. Nos cortes, estes são instalados geralmente no sentido ortogonal ao eixo.

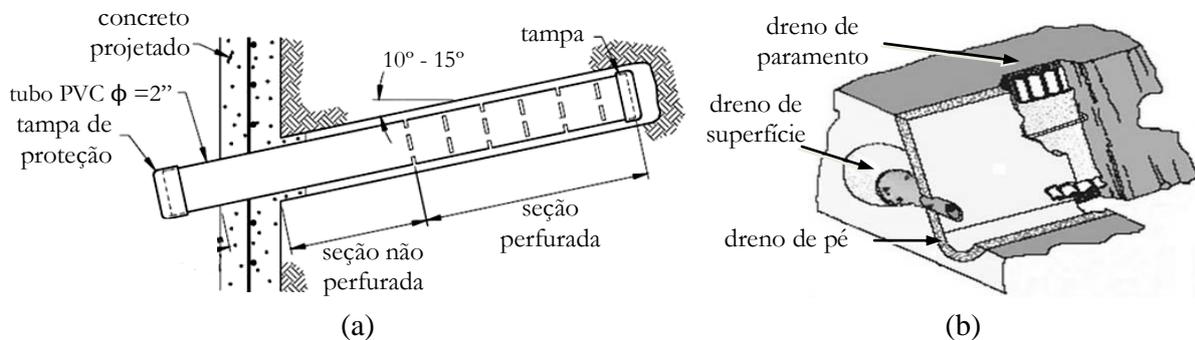


Figura 2.4 - Drenagem utilizada conjuntamente com a técnica de solo grampeado: a) detalhe de um dreno sub-horizontal (modificado - Byrne *et al.*, 1998); b) drenos de tipo superficial (modificado - Zirlis *et al.*, 1999).

Para os drenos de superfície (situados atrás e adjacentes ao revestimento de concreto) usam-se barbacãs que consistem na escavação de uma cavidade com cerca de 40 x 40 x 40 cm, preenchida com material granular, tendo como saída um tubo de PVC drenante com inclinação descendente (dreno pontual). O dreno de parâmetro é obtido com a instalação de uma calha plástica ondulada revestida por manta geotêxtil numa escavação de 10 a 30 cm na direção vertical da crista até o pé do talude. Tem-se, ainda, a canaleta de pé, que é considerada um dreno linear. A Figura 2.5 mostra a configuração dos sistemas de drenagem em uma obra de solo grampeado onde destacam-se os drenos sub-horizontais profundos.

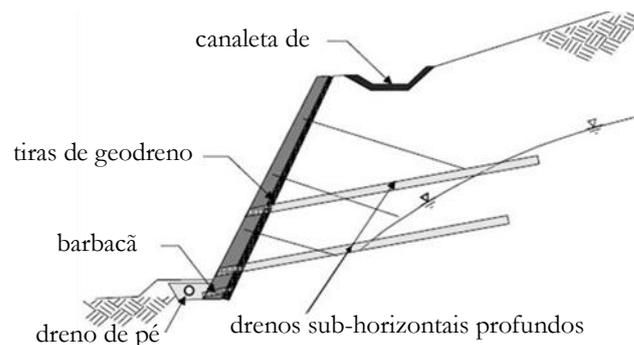


Figura 2.5 - Configuração dos drenos em uma obra de solo grampeado (modificado - Lazarte *et al.*, 2003).

### 2.1.3 Dimensionamento

Os métodos de dimensionamento de obras em solo grampeado atendem principalmente à prevenção contra diferentes modos de ruptura. Lazarte *et al.* (2003), após a compilação de vários trabalhos, mostra os modos de ruptura existentes em obras de solo grampeado. Estes modos se dividem em três, sendo estes de ruptura interna, externa e de face. Este trabalho

ênfatisa os dois primeiros modos, deixando um papel secundário aos modos de ruptura de face. Considerando os modos de ruptura mostrados na Figura 2.6, os tipos de ruptura analisados neste trabalho são por estabilidade global e por ruptura no contato solo-grampo. A possibilidade de ruptura no contato barra-calda e de ruptura da própria barra não são contempladas neste trabalho devido à pouca ocorrência destes tipos de ruptura no solo grampeado.

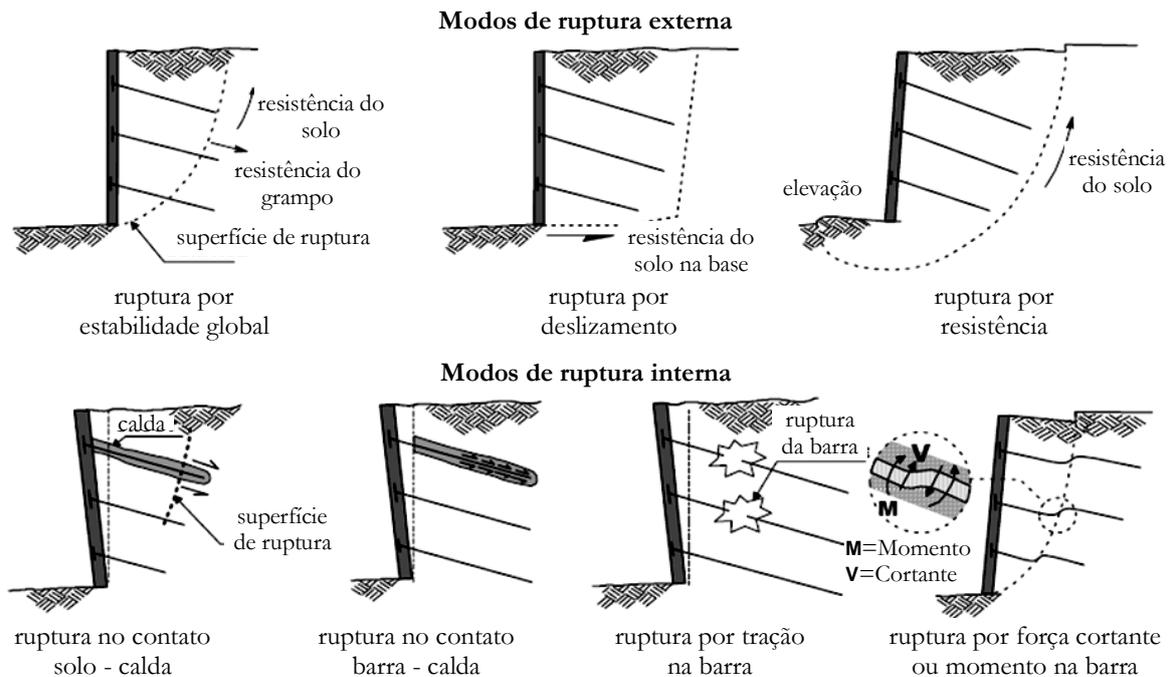


Figura 2.6 - Modos de ruptura externa e interna em obras de solo grampeado (modificado - Lazarte *et al.*, 2003).

Considerando os tipos de ruptura mencionados, as informações que se tornam necessárias para o dimensionamento são os parâmetros de resistência e deformação do solo, as propriedades mecânicas do grampo e os parâmetros relacionados à interface solo-grampo (contato solo - calda de cimento). Adicionalmente existem outros fatores importantes no dimensionamento como a geometria do maciço, espaçamento entre grampos, etapas construtivas, etc.

O parâmetro mais importante associado à interface solo-grampo é o valor de resistência ao arrancamento ( $q_s$ ), que representa uma medida da resistência da interface. Por esta razão, este valor é de grande importância no dimensionamento. A obtenção deste parâmetro pode ser realizada através de ensaios de arrancamento. A Figura 2.7 mostra esquematicamente o sistema utilizado no ensaio do arrancamento do grampo e um exemplo dos resultados obtidos no ensaio.

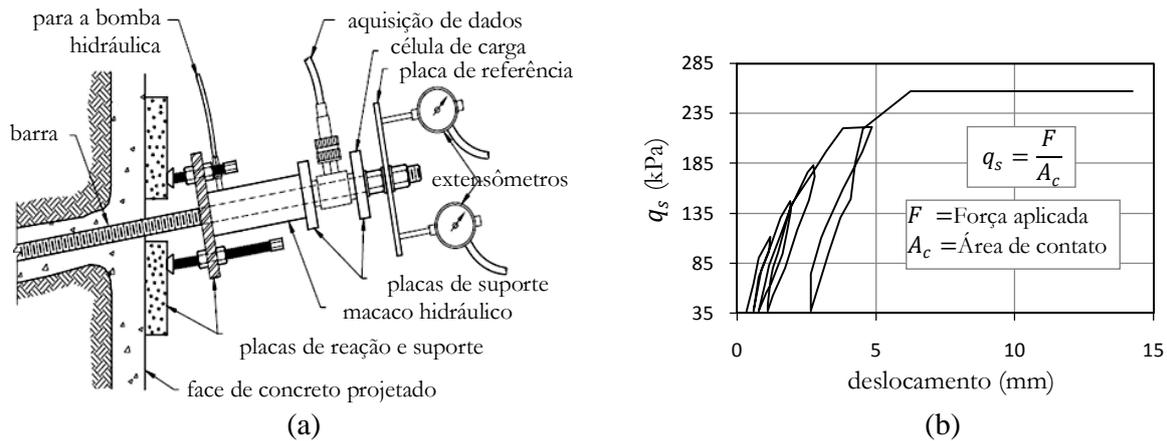


Figura 2.7 - Ensaio de arrancamento: a) Sistema utilizado no ensaio (modificado - Porterfield *et al.*, 1994); b) Exemplo do gráfico de ciclos de carga obtido do ensaio (modificado - Azambuja *et al.*, 2001).

No entanto, não é costume a realização de ensaios de arrancamento antes da execução de uma obra. Desta forma, o valor de resistência ao arrancamento é estimado na etapa de projeto e verificado durante a construção, desta vez sim, por meio de ensaios de arrancamento. A estimativa utilizada durante o dimensionamento pode ser baseada em resultados de obras nas proximidades ou mediante correlações com ensaios pressiométricos (Clouterre, 1991) ou ensaios SPT (Ortigão & Palmeira, 1997). A Figura 2.8 mostra as correlações obtidas do  $q_s$  com os valores obtidos de ensaios SPT. Em geral, o valor do  $q_s$  varia pouco com a profundidade e freqüentemente este valor é assumido como constante.

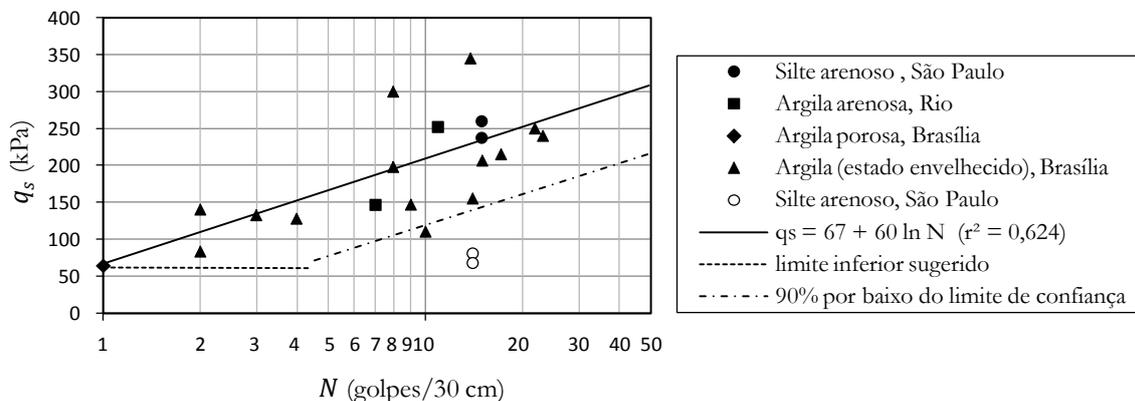


Figura 2.8 - Relação de  $q_s$  com resultados de ensaios de SPT (modificado - Ortigão & Palmeira, 1997).

Quanto aos métodos de cálculo usados no dimensionamento em obras com solo grampeado, muitos deles são baseados no método de equilíbrio limite (MEL), onde a superfície potencial de ruptura é examinada. Dentro destes métodos podem ser citados o método de Davis modificado (Elias & Juran, 1991), o método alemão (Stocker *et al.*, 1979) e o método multicritério (Schlosser, 1982). Por outro lado, métodos de domínio, como o método

de diferenças finitas ou o MEF, podem também ser utilizados. Estes últimos incorporam o estado de tensões e inclusive de poropressões existentes no maciço.

A efetividade da utilização de sistema de reforços pode ser avaliada em função do acréscimo do fator de segurança. Em taludes escavados reforçados com grampos, é possível avaliar a efetividade em função do deslocamento horizontal máximo ocorrido após o término dos processos de escavação e instalação dos sistemas de reforço. Normalmente, as obras em solo grampeado mostram deslocamentos horizontais da ordem de 0,1% a 0,5% da altura. Estas percentagens podem ser consideradas como valores referenciais. A Figura 2.9 mostra uma compilação de medidas de deslocamento horizontal máximo observadas em obras de solo grampeado.

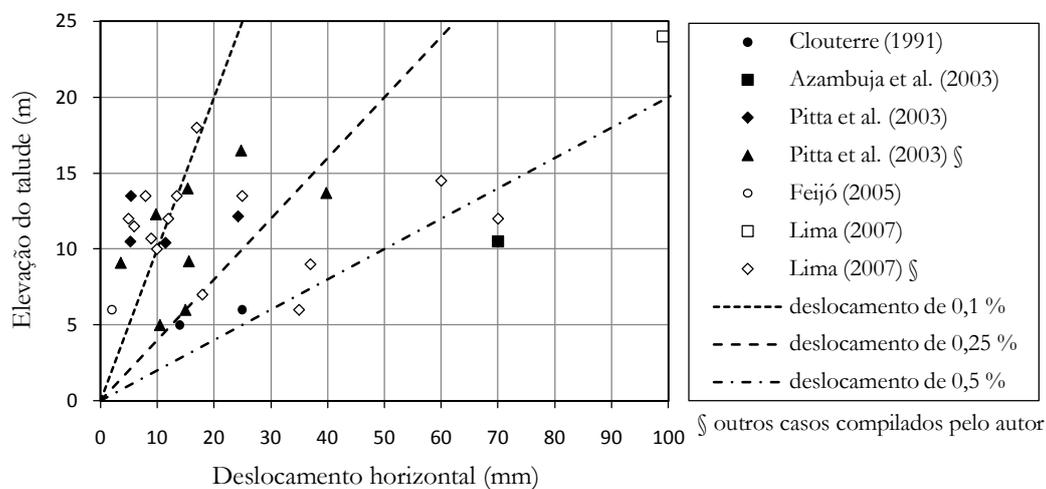


Figura 2.9 - Deslocamento horizontal máximo observado em taludes grampeados.

O dimensionamento pode considerar também o efeito dos sistemas de drenagem. Isto é possível especialmente por meio do uso de métodos de domínio. Usualmente, a efetividade dos drenos é interpretada em termos da redução do nível do lençol freático e do acréscimo do fator de segurança do talude comparado com o caso em que os drenos não sejam considerados.

## 2.2 Análise de inclusões via o método de elementos finitos

O MEF é freqüentemente empregado na análise de estruturas reforçadas. As principais vantagens da utilização do MEF, com relação às análises baseadas no MEL, são a incorporação do estado atual de tensões e poropressões e a previsão de deslocamentos.

Alguns autores como Zhang *et al.* (1999) e Galli *et al.* (2004) destacam a importância de se realizar análises tridimensionais em estruturas geotécnicas estabilizadas por meio de reforços de geometria linear. No entanto, grande parte das pesquisas considera o caso de estado plano de deformações, simulando este tipo de reforços como se fossem lâminas com propriedades

equivalentes. Alguns casos que não atendem à condição de deformação plana são geralmente reduzidos a esta condição devido à praticidade e a economia computacional. Entretanto, as análises 2D não podem representar adequadamente a interação solo grampo (Zhang *et al.*, 1999). Adicionalmente, as análises 2D são incapazes de representar características associadas a disposições não regulares de reforço. Deste modo, dependendo da importância da obra e das condições do problema, as análises 3D são a alternativa apropriada na realização de uma análise mais representativa.

Quando uma estrutura é modelada baseada num mecanismo contínuo, é evidente que os reforços representam uma descontinuidade na distribuição da rigidez. Para tratar esta descontinuidade, Kwak & Filippou (1990) relatam três métodos existentes para a modelagem de inclusões: o homogeneizado (*smearred*), o discreto e o embutido (*embedded*).

O método homogeneizado representa a abordagem mais simples na análise de estruturas reforçadas. Este método é adequado para distribuições regulares de reforço, de tal modo que as propriedades dos elementos, na região reforçada da estrutura, são alteradas uniformemente. Também é possível considerar o material reforçado como um novo material cujas propriedades podem ser obtidas experimentalmente. Este método é mais apropriado para a simulação de algumas estruturas de concreto armado onde a distribuição de reforço seja regular, no entanto, não é apropriado para a análise de estruturas reforçadas com o solo grampeado. Isto se deve a que no solo grampeado os reforços podem ser distribuídos em forma irregular no talude, além disso, os reforços podem ter inclinações e comprimentos variados.

O método discreto corresponde à utilização convencional do MEF, onde os reforços são considerados na análise como elementos de barra ou viga, sendo possível a análise de distribuições irregulares do reforço. No entanto, como é evidente, na análise discreta, a conectividade dos elementos que representam o reforço deve ser compatível com os nós dos elementos sólidos ao redor. Este fato traz a desvantagem de se ter que gerar uma nova malha para cada nova configuração de reforço a ser analisada em um mesmo domínio. As malhas geradas para trabalhar com este método requerem, ainda, refinamentos que acompanhem adequadamente a geometria do reforço, condicionando assim, a geometria dos elementos sólidos (Figura 2.10a). Esta situação é mais complicada em malhas 3D devido à carência de geradores tridimensionais que abordem este problema, obrigando, muitas vezes, à intervenção manual durante a geração.

Por outro lado, no método embutido, é permitido que os reforços atravessem os elementos sólidos sem restrições, portanto, é possível utilizar uma mesma malha de fundo e analisar diferentes configurações de reforço. Esta característica torna-se a principal vantagem deste

método. A Figura 2.10b mostra a disposição dos reforços com relação aos elementos sólidos numa análise pelo método embutido. Nesta figura é possível observar que os reforços não possuem conectividade com os nós dos elementos sólidos. Desta forma, a princípio, a posição dos reforços é definida somente em função dos seus pontos inicial e final.

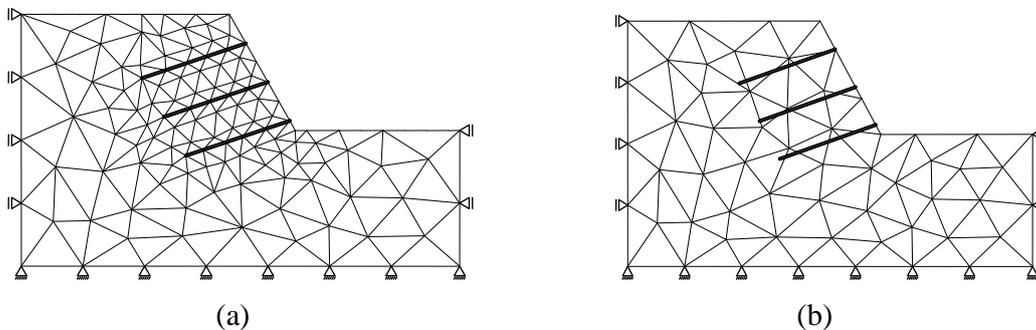


Figura 2.10 - Malhas de elementos finitos para diferentes abordagens: a) Método Discreto; b) Método Embutido.

Uma vez definidos os pontos inicial e final de um reforço, uma rotina de pré-processamento deve determinar os pontos de interceptação do reforço com os elementos sólidos. Desta forma são obtidos vários segmentos virtuais de reforço, cada um deles contido dentro de um elemento atravessado. No método embutido, a contribuição de cada segmento de reforço pode ser interpretada como um acréscimo na rigidez do correspondente elemento sólido atravessado. Esta contribuição de rigidez é realizada de forma localizada, dependendo do comprimento e da posição do segmento de reforço dentro do elemento que o contém. Uma forma de visualizar este processo é considerando que o segmento de reforço possa ser transformado em um elemento sólido equivalente. Este elemento sólido equivalente deverá ser da mesma natureza que o elemento atravessado. Desta forma as matrizes de rigidez terão as mesmas dimensões e poderão ser somadas durante a análise. A Figura 2.11 mostra esquematicamente este processo.

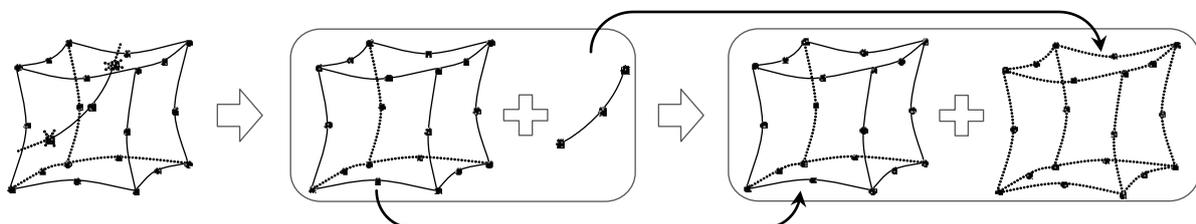


Figura 2.11 - Interpretação da contribuição de um segmento de reforço na rigidez do elemento atravessado através da transformação em um elemento sólido equivalente.

Um dos trabalhos pioneiros em aplicar o método embutido foi elaborado por Elwi & Hrudey (1989). Eles aplicaram o método em análises 2D de concreto reforçado. Os autores contemplaram também a possibilidade de considerar reforços curvos. Posteriormente, Bello

(1997) desenvolveu uma formulação 2D aplicada à simulação de reforços verticais passivos (estacas). Nas suas implementações utilizou o algoritmo da Relaxação Dinâmica aplicado a problemas de equilíbrio. Este algoritmo é baseado na geração de forças internas contrárias ao movimento de massa do solo instável. Soluções similares foram implementadas por Da Silva (1999) para o caso de reforços como grampos, e por Charbel (1996) para o caso de cabos e tirantes em maciços rochosos.

Em geral, o método embutido considera a hipótese da compatibilidade de deslocamentos entre os reforços e os elementos sólidos (aderência perfeita na interface entre o reforço e o material reforçado). Ou seja, não se considera a existência de deslocamento relativo entre os dois materiais. No entanto, o comportamento da interface é particularmente importante porque pode determinar o nível de transmissão de tensões do material reforçado para o reforço, além de estabelecer a ruptura no contato. Para obter uma medida do deslocamento relativo, Hartl *et al.* (2000) desenvolveram um esquema que incorpora elementos de interface, modificando assim o método embutido. No entanto, os autores notaram a necessidade de realizar dois níveis de análise. Um para o sistema global considerando a hipótese de aderência perfeita e outro para um novo sistema representado por uma treliça unidimensional que associa todos os segmentos do reforço junto a molas (elementos de interface) que assumem deslocamentos prescritos provenientes do primeiro sistema (Figura 2.12). Os deslocamentos nestes dois sistemas devem ser compatibilizados através de um processo iterativo global, o que torna o método dispendioso. Posteriormente, Durand (2003) aplicou uma abordagem similar na simulação de solo reforçado, porém, com o mesmo inconveniente.

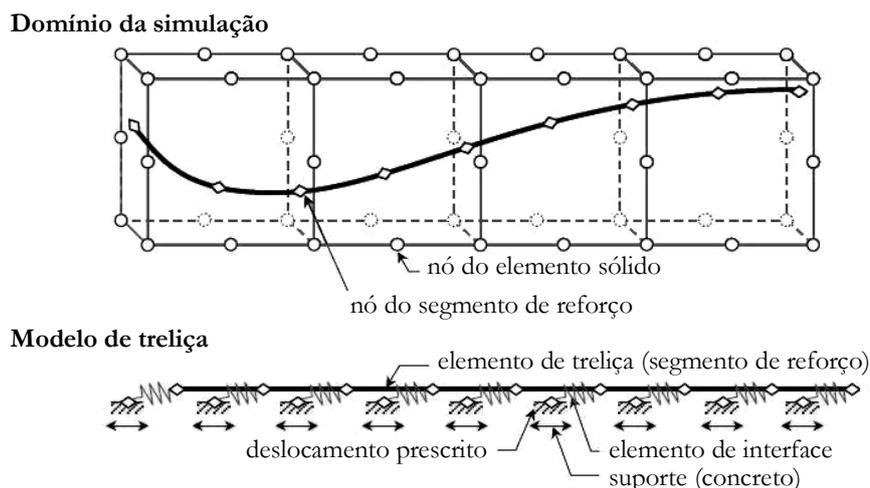


Figura 2.12 - Representação do esquema de simulação da interface para prever deslocamentos relativos pelo Método Embutido (modificado - Hartl, 2002).

Outra desvantagem do método embutido encontra-se na dificuldade de aplicar condições de contorno nos reforços, uma vez que estes são interpretados na análise como segmentos

virtuais que não possuem conexão direta com a malha de elementos finitos e, portanto, não possuem nós visíveis a nível global. A possibilidade da aplicação de condições de contorno no reforço é particularmente útil, por exemplo, na simulação de ensaios de arrancamento, onde é aplicada uma força ou deslocamento imposto no extremo do reforço. Durand (2003) utilizou uma série de artifícios para simular ensaios de arrancamento em conjunto com elementos de interface. A característica principal da sua abordagem consistia em fazer com que as condições de contorno fossem distribuídas e aplicadas nos nós de um elemento sólido adicional localizado no extremo do reforço.

Por outro lado, é possível a análise de elementos drenantes por meio de métodos similares aos utilizados nos reforços. A análise de drenos pelo método discreto representa a abordagem convencional, no entanto, é possível estender o método embutido aplicado em reforços para este tipo de análise. Em geral, existem poucos trabalhos que estudam o uso de métodos que não sejam baseados numa abordagem discreta. Entre estes trabalhos tem-se o de Andrade (2003) que desenvolveu uma formulação para a simulação de elementos drenantes tais como poços e drenos sub-horizontais em condições 2D e 3D. Na sua formulação, o autor transforma a matriz de permeabilidade de um segmento de dreno em outra equivalente de dimensões compatíveis com as do elemento atravessado. Desta forma, durante a análise, a matriz de permeabilidade transformada do dreno pode ser adicionada à matriz de permeabilidade do elemento atravessado, levando em conta assim o efeito drenante. Posteriormente, Durand & Farias (2006) estudam o comportamento de drenos sub-horizontais em análises de equilíbrio e fluxo acoplado 3D. Na formulação, os autores utilizam a hipótese da compatibilidade de gradientes hidráulicos entre o elemento de dreno embutido e o elemento atravessado para obter a matriz de permeabilidade equivalente do dreno. Porém, esta formulação somente seria aplicável em situações de saturação completa.

### **2.3 Solos Não Saturados**

A mecânica dos solos não saturados é objeto de contínuo estudo devido à dificuldade de aplicar a mecânica de solos tradicional aos problemas geotécnicos nos quais se considera o solo como não saturado. As dificuldades encontradas durante o estudo dos solos não saturados tais como, o conhecimento da influência das variáveis de tensão, fenômenos de histerese e permeabilidade não linear, entre outras, têm forçado muitos estudos e projetos geotécnicos a serem desenvolvidos baseados na teoria dos solos saturados, ou seja, na condição mais desfavorável em termos de resistência e deformabilidade.

Segundo Fredlund & Morgenstern (1977), o solo não saturado é um sistema constituído por quatro fases. A quarta fase seria constituída pela interface ar-água, denominada de película contráctil. Os autores concluíram que esta interface possui propriedades distintas das

do ar e da água separadamente. Em suas análises, os autores consideram que duas das fases se equilibram sob pressões prescritas (partículas sólidas e película contráctil) e as outras duas fluem sob pressões aplicadas.

O comportamento mecânico dos solos é regido pelo seu estado de tensão. Um dos maiores descobrimentos associados ao estado de tensões do solo saturado é o princípio das tensões efetivas (Terzaghi, 1925, *apud*, Fredlund & Rahardjo, 1993). De acordo com o princípio das tensões efetivas, a resposta mecânica do solo, tanto em termos de deformabilidade como de resistência ao cisalhamento, são funções exclusivas das variações na tensão efetiva.

No caso dos solos não saturados, algumas expressões foram inicialmente propostas para as tensões efetivas visando modificar a equação de Terzaghi, de forma que, somente uma variável de tensão seria necessária para descrever a deformação volumétrica e a resistência ao cisalhamento. Uma das expressões mais conhecidas é a proposta por Bishop (1959):

$$\sigma' = \sigma - u_a + \chi(u_a - u_w) \quad (2.1)$$

onde  $\sigma'$  é a tensão efetiva,  $\sigma$  é a tensão total,  $u_a$  é a tensão intersticial de ar,  $u_w$  é a tensão intersticial da água (poropressão), e  $\chi$  é um parâmetro altamente dependente do grau de saturação. No entanto, Donald (1960), *apud* Jucá (1993), questiona o parâmetro  $\chi$  indicando que este é influenciado pela trajetória de tensões. Posteriormente, pesquisadores entre os quais Burland (1964) e Matyas & Radhakrishna (1968) propuseram que as variações no estado de tensão e poropressão fossem tratadas de forma independente, uma vez que o comportamento mecânico do solo depende das trajetórias dos componentes de tensão e da poropressão e não apenas da trajetória de tensões efetivas. Com isso, eles enfatizaram a importância de separar as duas variáveis de tensões ( $\sigma - u_a$ ) e ( $u_a - u_w$ ). Esta separação permitiria a análise de fenômenos que acontecem a tensões constantes.

Matyas & Radhakrishna (1968) introduziram o conceito de superfícies de estado para representar graficamente as relações entre cada uma das variáveis de estado (grau de saturação e índice de vazios, por exemplo) e o estado de tensões do solo não saturado. No entanto, a existência de histerese foi um fator limitante nesta proposta.

Posteriormente, Fredlund & Morgenstern (1977), através do equilíbrio das faces do solo, sugeriram que, dentro de algumas alternativas, ( $\sigma - u_a$ ) e ( $u_a - u_w$ ) representam a melhor combinação de variáveis para definir o estado de tensões do solo. A justificativa da escolha destas variáveis é a separação da tensão da fase sólida e das pressões de poros da fase líquida. O termo ( $\sigma - u_a$ ) é conhecido como tensão líquida e representa o excesso de tensão com relação à tensão na fase ar. O termo ( $u_a - u_w$ ) é a diferença de tensão entre os dois fluidos e é conhecido como sucção mátrica ou simplesmente sucção.

Quando a sucção aumenta, o conteúdo de água diminui, mas de forma não linear e com histerese. A relação entre sucção e conteúdo de água é chamada de curva característica (Figura 2.13). A natureza desta relação está diretamente relacionada à composição granulométrica e estrutura do solo. Outros fatores que influenciam esta relação são a geometria dos poros e a quantidade e composição mineralógica da porção fina.

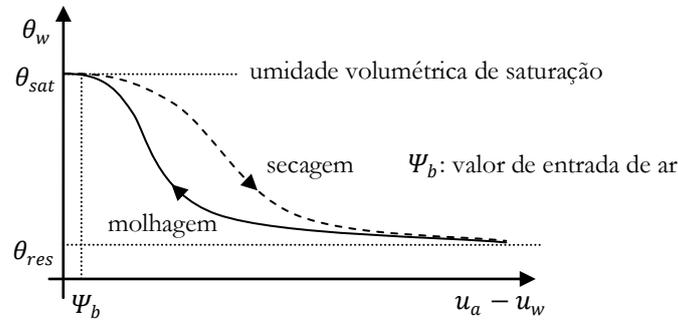


Figura 2.13 - Curva característica típica de um solo (modificado - Fredlund & Rahardjo, 1993).

### 2.3.1 Resistência e deformabilidade

De forma geral, o efeito da sucção pode ser considerado como um acréscimo na rigidez do solo produzido pela ação intergranular gerada que tende a manter as partículas mais fortemente unidas. Segundo Jucá (1993), este efeito é claramente visualizado através da variação da coesão aparente e, em menor nível, da variação do ângulo de atrito.

A determinação da resistência ao cisalhamento dos solos não saturados inicialmente se desenvolveu baseada na tensão efetiva. Uma das expressões mais conhecidas foi a proposta por Bishop *et al.* (1960), *apud* Jucá (1993), e se baseia no uso do critério de Mohr-Coulomb e na expressão das tensões efetivas de Bishop (1959):

$$\tau = c' + (\sigma - u_a + \chi(u_a - u_w)) \operatorname{tg} \phi' \quad (2.2)$$

sendo  $\tau$  a resistência ao cisalhamento do solo,  $c'$  a coesão efetiva e  $\phi'$  o ângulo de atrito efetivo. O principal inconveniente desta equação é o uso do parâmetro  $\chi$  como indicado anteriormente.

Fredlund *et al.* (1978) propuseram uma expressão similar na qual incorporam o ângulo de atrito com relação à sucção matricial ( $\phi^b$ ) o qual é considerado constante:

$$\tau = c' + (\sigma - u_a) \operatorname{tg} \phi' + (u_a - u_w) \operatorname{tg} \phi^b \quad (2.3)$$

Esta equação representa uma extensão da envoltória de Mohr-Coulomb para solos não saturados. Vários autores questionaram a validade desta equação, principalmente pelo fato de o termo  $\phi^b$  ser variável e não pode ser considerado como uma constante do material (Escario & Jucá, 1989; Mahalinga-Iyer & Williams, 1995).

Quanto à previsão da deformabilidade, Fredlund & Morgenstern (1976) apresentaram uma extensão da teoria elástica de Hooke em que se assume que o solo seja elástico, linear e isotrópico. Este modelo utiliza como envoltória de ruptura a superfície de estado para a resistência ao cisalhamento dada pela Eq. 2.3.

Alonso *et al.* (1987) analisaram as características de deformação de solos não saturados concluindo que a magnitude de expansão ou colapso depende da trajetória imposta de tensões e de umidade. Adicionalmente, os autores concluíram que alguns solos podem experimentar expansão ou colapso, e inclusive combinar ambos os fenômenos em um mesmo processo de molhagem, dependendo se as tensões externas são suficientemente baixas (expansão) ou altas (colapso).

A próxima etapa no estudo dos solos não saturados foi o desenvolvimento de modelos elastoplásticos que se caracterizam por tratar de forma conjunta a deformabilidade e a resistência. O modelo pioneiro foi o proposto por Alonso *et al.* (1990), posteriormente referido como *Barcelona Basic Model* (BBM) ou simplesmente Barcelona. Assumindo que o solo saturado é um caso particular do solo não saturado, os autores propuseram a extensão do modelo Cam-clay modificado previamente formulado por Roscoe & Burland (1968), *apud* Desai & Siriwardane (1984). O BBM utiliza duas superfícies de plastificação, uma para sucção e outra para as tensões. Com isto o modelo foi capaz de reproduzir algumas características básicas do comportamento do solo não saturado. Entre estas características têm-se o colapso após molhagem ou após compressão isotrópica, a mudança da rigidez e da resistência ao cisalhamento com a sucção e a moderada expansão após molhagem. No entanto, mudanças irreversíveis no volume e no grau de saturação após molhagem, ou a mudança irreversível no grau de saturação após secagem não puderam ser modeladas pelo BBM. A formulação deste modelo será detalhada no próximo capítulo.

Com a intenção de modelar a irreversibilidade da deformação volumétrica após molhagem em solos expansivos, Gens & Alonso (1992) propuseram mudanças conceituais no BBM mediante a combinação do comportamento microestrutural de minerais expansivos e do comportamento macroestrutural do solo em larga escala. Wheeler & Sivakumar (1995) propuseram uma formulação matemática similar ao BBM para melhor descrever o comportamento dos resultados de ensaios de amostras de solo não saturado, considerando uma nova equação para a superfície de plastificação associada à sucção. Posteriormente, Wheeler *et al.* (2003) apresentam um modelo constitutivo em que acoplam totalmente a histerese hidráulica com o comportamento mecânico. Por sua vez, Pinheiro (2004) apresenta uma modificação do BBM melhorando a sua capacidade em representar o comportamento mecânico fora do plano triaxial mediante a consideração do Plano Especialmente Mobilizado

(Matsuoka, 1974) e do tensor  $t_{ij}$  (Nakai & Mihara, 1984). Por outro lado, Sheng *et al.* (2004) utilizam princípios da termodinâmica para reproduzir o comportamento do solo em ciclos de secagem e molhagem. Mais recentemente, Pedroso (2006) apresenta uma extensão do BBM denominada BarcelonaX em que considera uma superfície de plastificação única no espaço das tensões e da sucção.

### 2.3.2 Propriedades hidráulicas

O fluxo no solo saturado é geralmente descrito mediante o uso da lei de Darcy. Segundo esta lei, a velocidade do fluxo através do solo está relacionada ao gradiente da carga hidráulica por meio do coeficiente de permeabilidade. A validade da lei de Darcy para o fluxo em solo não saturado foi verificada por Richard (1931), *apud* Fredlund & Rahardjo (1993).

O coeficiente de permeabilidade do solo saturado é função do índice de vazios (Lambe & Withman, 1979). No entanto, devido à baixa variação deste índice, este coeficiente geralmente é assumido como constante em problemas transientes. Por outro lado, Fredlund & Rahardjo (1993) indicam que o coeficiente de permeabilidade para solo não saturado é função do índice de vazios e do teor de umidade nos poros. Adicionalmente, eles indicam que devido à pequena variação no índice de vazios, o papel principal é atribuído ao teor de umidade nos poros. O teor de umidade pode ser expresso em função da umidade volumétrica, do grau de saturação ou da sucção. Quando a permeabilidade é representada graficamente em função de qualquer uma destas variáveis, é observada a presença de histerese. Fredlund & Rahardjo (1993) recomendam associar a permeabilidade com a umidade volumétrica por ser esta a variável com a qual é observada menor presença de histerese.

A previsão do teor de umidade em função da sucção pode ser realizada por meio da curva característica (Figura 2.14a), no entanto, esta curva apresenta histerese. Dentre as causas que originam a histerese pode-se citar o efeito de diferentes ângulos de contato dos meniscos em processos de molhagem e secagem. Outra das causas é o surgimento de ar preso nos poros durante processos de molhagem.

Na medida em que diminui o teor de umidade (ou o grau de saturação) do solo, o ar tende a ocupar os poros previamente ocupados pela água. De acordo com Philip (1969), *apud* Jucá (1993) isto conduz a uma rápida diminuição da secção disponível para o fluxo de água, pois o ar tende a ocupar os poros de maior tamanho. Este fato faz com que a água flua pelos poros de menor tamanho incrementando a tortuosidade do fluxo. Desta forma se explica a rápida diminuição da permeabilidade com a sucção.

Quanto ao termo permeabilidade, recentemente tem-se preferido o termo de condutividade hidráulica para se referir à permeabilidade do solo em condição não saturada (Machado & Zuquette, 2004). Assim, denomina-se de curva de condutividade hidráulica à função que relaciona a permeabilidade não saturada do solo com o seu teor de umidade ou sucção (Figura 2.14b).

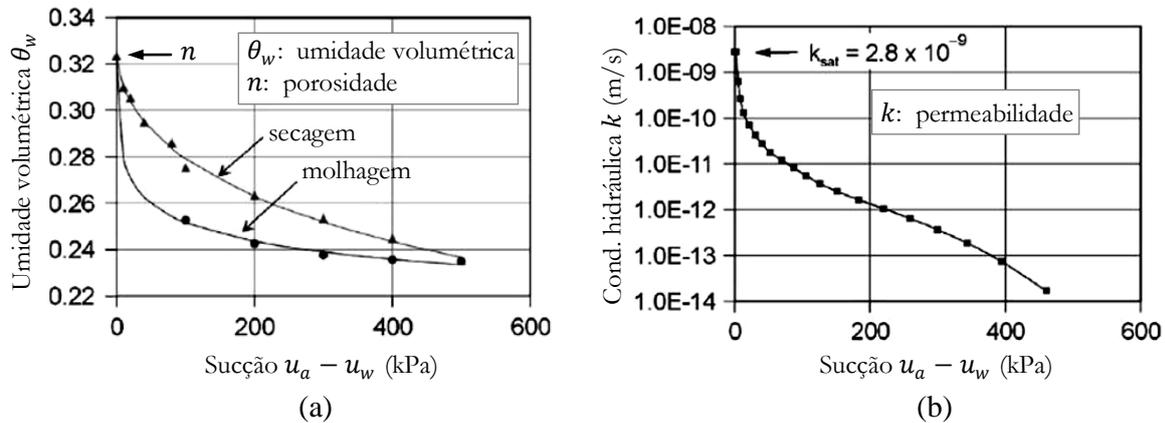


Figura 2.14 - Curva característica e curva de condutividade hidráulica para argila siltosa roxa (modificado - Rahardjo *et al.*, 2003): a) curva característica; b) curva de condutividade hidráulica.

Várias fórmulas semi-empíricas foram apresentadas para aproximar o valor da condutividade hidráulica ( $k$ ). Estas fórmulas em geral se encontram em função da permeabilidade na condição saturada ( $k_s$ ), da umidade volumétrica ( $\theta_w$ ) ou do grau de saturação ( $S_r$ ) e, ocasionalmente, do índice de vazios ( $e$ ). Uma das primeiras expressões foi proposta por Gardner (1958), *apud* Leong & Rahardjo (1997):

$$k = a\theta_w^b \quad (2.4)$$

onde  $a$  e  $b$  são parâmetros de ajuste. Por sua vez, Pereira (1996), que ainda inclui o valor da tensão média líquida ( $p$ ), propôs a seguinte relação:

$$k = ae^{b(p-u_a)} \left( \frac{\Psi_b}{u_a - u_w} \right)^\lambda \quad \text{para } u_a - u_w > \Psi_b \quad (2.5)$$

$$k = ae^{b(p-u_a)} \quad \text{para } u_a - u_w \leq \Psi_b$$

sendo  $a$ ,  $b$  e  $\lambda$  parâmetros de ajuste e  $\Psi_b$  o valor de entrada de ar. O valor de entrada de ar corresponde ao valor de sucção para o qual começa a entrar ar nos poros do solo. Mais tarde, Cordão Neto (2005) questiona o uso da tensão média líquida na proposta de Pereira, uma vez que, a permeabilidade no solo não saturado está mais associada ao índice de vazios que ao estado de tensões. Cordão Neto (2005) modifica a proposta de Pereira (2006) obtendo uma relação em função do índice de vazios  $e$ , do grau de saturação  $S_r$  e diversos parâmetros de ajuste  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ :

$$k = \frac{a + b \ln(e)}{1 + e^{\frac{c-S_r}{d}}} \quad (2.6)$$

Por sua vez, Sheng *et al.* (2003) utilizaram uma expressão mais simples em função da permeabilidade saturada  $k_s$ , do grau de saturação  $S_r$  e de um parâmetro de ajuste  $m$ :

$$k = k_s (S_r)^m \quad (2.7)$$

porém, a histerese não pode ser reproduzida. Nesta equação, o grau da saturação é aproximado por meio da seguinte expressão:

$$S_r = \frac{1}{(1 + (s/a)^b)^c} \quad (2.8)$$

sendo  $a$ ,  $b$ ,  $c$  parâmetros de ajuste e  $s$  a sucção.

Maiores informações sobre funções de permeabilidade para solo não saturado podem ser encontradas no trabalho de Leong & Rahardjo (1997).

## Capítulo 3

# Modelagem do Solo Não Saturado

Neste capítulo são mostradas as formulações utilizadas na modelagem do solo não saturado. Inicialmente é apresentada a extensão da formulação da teoria da Elastoplasticidade para considerar o comportamento do solo não saturado. Nesta parte é utilizada a álgebra tensorial em lugar da álgebra matricial na representação de grandezas como as tensões e deformações. Na álgebra tensorial é utilizada a notação de Gibbs em lugar da notação indicial para facilitar o entendimento físico das equações. Maiores informações sobre álgebra tensorial e a notação de Gibbs podem ser encontradas em Brannon (2003).

Em seguida, é visto brevemente o modelo para solos não saturados proposto por Alonso *et al.* (1990). Este modelo, pioneiro no estudo da previsão do comportamento tensão-deformação dos solos não saturados, foi escolhido para as simulações que envolvem esta condição no solo. Esta escolha é feita principalmente pela sua simplicidade e desempenho satisfatório amplamente documentados, apesar de algumas limitações. A formulação utilizada para representar o comportamento hidráulico do solo não saturado também é apresentada.

Posteriormente, é apresentada a formulação matricial de elementos finitos utilizada nas implementações para realizar análises de deformação e fluxo acoplados em material não saturado. Esta formulação é baseada especialmente no trabalho de Sheng *et al.* (2003).

Finalmente, são apresentados, ainda neste capítulo, os testes de validação realizados para verificar as implementações do MEF para análises de equilíbrio e fluxo acoplados para solo não saturado. Os testes realizados foram baseados naqueles utilizados por Britto & Gun (1987), Farias (1993) e Cordão-Neto (2005). Entre os testes realizados se encontram: a verificação do problema de adensamento unidimensional de Terzaghi (1943); a verificação dos deslocamentos sob carga retangular determinados pela teoria de Biot (1941) e a comparação do valor das poropressões, num domínio em que se tem o avanço da frente de saturação, com os valores obtidos com o programa SEEP/W (Geo-Slope-1995). Adicionalmente são incluídos testes de verificação de trajetórias de tensão e sucção no modelo BBM.

Uma vez que a pressão do ar se mantém constante (geralmente na pressão atmosférica) para a maioria de problemas geotécnicos, esta não será tratada como uma variável neste

trabalho. Desta forma, a sucção é simplesmente substituída pelo valor negativo da poropressão.

### 3.1 Teoria da Elastoplasticidade para material não saturado

Para o desenvolvimento das relações elastoplasticas, usando a notação tensorial, as seguintes convenções são utilizadas para as diversas entidades: (a) escalares são escritos em letras romanas ou gregas sem negrito; (b) tensores são escritos em letras romanas ou gregas em negrito e com um número de barras embaixo indicando sua ordem (número de índices variando no espaço de 1 a 3), por exemplo  $\underline{\underline{\mathbf{x}}}$  é um tensor de segunda ordem e  $\underline{\underline{\underline{\mathbf{c}}}}$  é um tensor de quarta ordem; (c) entidades não escalares, com índices variando de 1 a um número qualquer, mas que não constituem tensores por não atenderem às regras de transformação de eixos coordenados também são representadas em negrito, mas não apresentam barras embaixo, por exemplo  $\mathbf{z}$  pode representar um conjunto de valores quaisquer.

Além do mais as seguintes operações são definidas: (a) contração dupla representada com dois pontos “:”. A contração dupla resulta em uma entidade cuja ordem é igual a soma do número de barras abaixo das entidades multiplicadas, menos quatro. É usada, por exemplo, para definir a aplicação ou produto de um tensor de quarta ordem por um de segunda ordem, resultando em outro tensor de segunda ordem ( $\underline{\underline{\mathbf{g}}} = \underline{\underline{\underline{\mathbf{D}}}}^e : \underline{\underline{\mathbf{e}}}$ ). A contração dupla também é usada para definir o produto escalar entre dois tensores de segunda ordem ( $k = \underline{\underline{\mathbf{a}}} : \underline{\underline{\mathbf{b}}}$ ). O produto escalar entre dois vetores ou conjunto de variáveis do mesmo tamanho é representado por um ponto “.” ( $k = \mathbf{c} \cdot \mathbf{d}$ ). O produto diádico entre dois tensores é representado pelo símbolo “ $\otimes$ ”, resultando em um outro tensor cuja ordem é igual à soma das ordens dos tensores multiplicados ( $\underline{\underline{\underline{\mathbf{D}}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{B}}}$ ).

O estudo da previsão do comportamento mecânico dos solos é geralmente baseado na teoria da elastoplasticidade (Hill, 1971). O objetivo principal da elastoplasticidade é a previsão das deformações plásticas. O estado de deformação plástica de um material pode ser definido pelo tensor de deformação plástica  $\underline{\underline{\mathbf{e}}}^p$  e uma série de variáveis internas tipo deformação  $\underline{\underline{\mathbf{x}}}$ . As funções de resposta da plasticidade convencional são formuladas em função do tensor de tensões  $\underline{\underline{\mathbf{\sigma}}}$  e de uma série de variáveis internas tipo tensão  $\mathbf{z}$ . Os modelos baseados na elastoplasticidade devem definir: o comportamento elástico, a função de plastificação  $F$ , a direção das deformações plásticas  $\underline{\underline{\mathbf{r}}}$  e a lei de endurecimento.

A primeira hipótese da teoria da elastoplasticidade é a decomposição das deformações em elásticas e plásticas. Da mesma forma, as taxas de deformação podem ser decompostas em taxas de deformação elásticas e plásticas:

$$\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}} = \underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^e + \underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^p \quad (3.1)$$

onde  $\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}$  é o tensor de taxas de deformações;  $\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^e$  e  $\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^p$  são os tensores de taxas de deformações elásticas e plásticas, respectivamente.

Na modelagem do solo não saturado considera-se que a deformação elástica possui uma parcela de deformação devido à sucção. Desta forma tem-se:

$$\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^e = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^e : \underline{\dot{\underline{\underline{\sigma}}}} + \underline{\underline{\underline{\underline{c}}}}^e \dot{s} \quad (3.2)$$

onde  $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^e$  é o tensor elástico de quarta ordem que associa os incrementos de tensão  $\underline{\dot{\underline{\underline{\sigma}}}}$  com os incrementos de deformação elástica, e  $\underline{\underline{\underline{\underline{c}}}}^e$  é o tensor elástico de segunda ordem que associa as taxas de sucção  $\dot{s}$  com as taxas de deformação elástica. A partir de trajetórias de secagem para planos de tensão hidrostática constante (Figura 3.1), o tensor  $\underline{\underline{\underline{\underline{c}}}}^e$  pode ser definido como:

$$\underline{\underline{\underline{\underline{c}}}}^e = \frac{\kappa_s}{3(1+e)(s+p_{atm})} \underline{\underline{\underline{\underline{\delta}}}} \quad (3.3)$$

onde  $\kappa_s$  é o coeficiente de expansão devido à molhagem,  $e$  é o índice de vazios,  $p_{atm}$  é a pressão atmosférica e  $\underline{\underline{\underline{\underline{\delta}}}}$  é o tensor de segunda ordem que representa o delta de Kronecker.

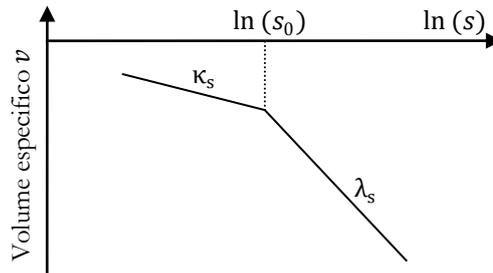


Figura 3.1 - Trajetória de secagem para planos de tensão hidrostática constante.

O tensor  $\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^p$ , por meio da teoria da lei de fluxo, pode se representado como  $\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^p = \Lambda \underline{\underline{\underline{\underline{r}}}}$ , onde  $\Lambda$  é o multiplicador plástico e  $\underline{\underline{\underline{\underline{r}}}} = \partial G / \partial \underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}$  representa a direção das deformações plásticas e é definida como a derivada da função potencial plástico  $G$  com relação ao tensor de tensões  $\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}$ . Considerando as Eqs. 3.1 e 3.2 o tensor de incrementos de deformação pode ser expresso como:

$$\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^e : \underline{\dot{\underline{\underline{\sigma}}}} + \underline{\underline{\underline{\underline{c}}}}^e \dot{s} + \underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^p \quad (3.4)$$

Nesta equação, é possível multiplicar os dois lados pelo tensor elástico de quarta ordem  $\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}^e$  e posteriormente isolar o tensor de tensões obtendo:

$$\underline{\dot{\underline{\underline{\sigma}}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}^e : \underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}} - \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}^e : \underline{\underline{\underline{\underline{c}}}}^e \dot{s} - \dot{\Lambda} \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}^e : \underline{\underline{\underline{\underline{r}}}} \quad (3.5)$$

Por outro lado, a função de plastificação, a qual depende também da sucção, conduz à condição de consistência dada por:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} : \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}} + \frac{\partial F}{\partial \underline{\mathbf{z}}} \cdot \underline{\dot{\mathbf{z}}} + \frac{\partial F}{\partial s} \dot{s} = 0 \quad (3.6)$$

onde  $\underline{\mathbf{z}}$  é o vetor que contém os parâmetros de endurecimento associados à tensão e à sucção.

Combinando as Eqs. 3.5 e 3.6 é possível determinar o valor do multiplicador plástico como:

$$\Lambda = \frac{1}{\Phi} \left( \underline{\mathbf{v}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e : \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\xi}}}} - \underline{\mathbf{v}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e : \underline{\underline{\mathbf{c}}}^e \dot{s} + c \dot{s} \right) \quad (3.7)$$

onde  $\underline{\mathbf{v}} = \partial F / \partial \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$ ,  $\Phi = \underline{\mathbf{v}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e : \underline{\underline{\mathbf{r}}} - \mathbf{y} \cdot (\mathbf{H}\mathbf{h})$ ,  $c = \partial F / \partial s$ ,  $\mathbf{y} = \partial F / \partial \underline{\mathbf{z}}$ ,  $\mathbf{h}$  é um vetor cujos componentes definem o tipo de endurecimento e  $\mathbf{H}$  é uma matriz diagonal de módulos de endurecimento, a qual relaciona o acréscimo do vetor de variáveis internas do tipo tensão  $\underline{\mathbf{z}}$  com o acréscimo do vetor de variáveis internas do tipo deformação  $\underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}}$  de acordo com a seguinte expressão:

$$\underline{\dot{\mathbf{z}}} = \mathbf{H} \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\xi}}}} \quad (3.8)$$

Substituindo a Eq. 3.7 na Eq. 3.5, a previsão do incremento de tensões é dada por:

$$\underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}} = \left( \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e - \frac{(\underline{\underline{\mathbf{D}}}^e : \underline{\underline{\mathbf{r}}}) \otimes (\underline{\mathbf{v}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e)}{\Phi} \right) : \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\xi}}}} - \left( \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e : \underline{\underline{\mathbf{c}}}^e - \frac{(\underline{\underline{\mathbf{D}}}^e : \underline{\underline{\mathbf{r}}}) \otimes (\underline{\mathbf{v}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e) : \underline{\underline{\mathbf{c}}}^e + c \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e : \underline{\underline{\mathbf{r}}}}{\Phi} \right) \dot{s} \quad (3.9)$$

Esta equação pode ser representada em função do tensor elastoplástico de quarta ordem  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{ep}$  e do tensor elastoplástico de segunda ordem  $\underline{\underline{\mathbf{d}}}^{ep}$  que associa incrementos de sucção com incrementos de tensão:

$$\underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{ep} : \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\xi}}}} - \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{ep} \dot{s} \quad (3.10)$$

onde as expressões correspondentes para  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{ep}$  e  $\underline{\underline{\mathbf{d}}}^{ep}$  são:

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{ep} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e - \frac{(\underline{\underline{\mathbf{D}}}^e : \underline{\underline{\mathbf{r}}}) \otimes (\underline{\mathbf{v}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e)}{\Phi} \quad (3.11)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{d}}}^{ep} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{ep} : \underline{\underline{\mathbf{c}}}^e - \frac{c \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e : \underline{\underline{\mathbf{r}}}}{\Phi} \quad (3.12)$$

A evolução das variáveis internas para incrementos de deformação e sucção é determinada por  $\underline{\dot{\mathbf{z}}} = \Lambda \mathbf{H}\mathbf{h}$  ou mais explicitamente por:

$$\underline{\dot{\mathbf{z}}} = \frac{\mathbf{H}\mathbf{h}}{\Phi} \underline{\mathbf{v}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e : \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\xi}}}} - \frac{\mathbf{H}\mathbf{h}}{\Phi} \left( c - \underline{\mathbf{v}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}}^e : \underline{\underline{\mathbf{c}}}^e \right) \dot{s} \quad (3.13)$$

As Eqs. 3.10 e 3.13, como em toda relação elastoplástica, representam relações não lineares e precisam ser integradas. Vários esquemas de integração, implícitos e explícitos, podem ser utilizados. Neste trabalho foram utilizados dois esquemas: o esquema de passos

constantes *Forward Euler* (FE) e o esquema de passos variáveis proposto por Sloan *et al.* (2001). No primeiro os incrementos de tensão e sucção são divididos em um número de incrementos previamente definido. Já no segundo, os passos são ajustados para atingir uma precisão previamente estabelecida. Neste último são realizadas avaliações pelo método de segunda ordem *Modified Euler* (ME). A Figura 3.2 mostra a idealização da integração por estes esquemas.

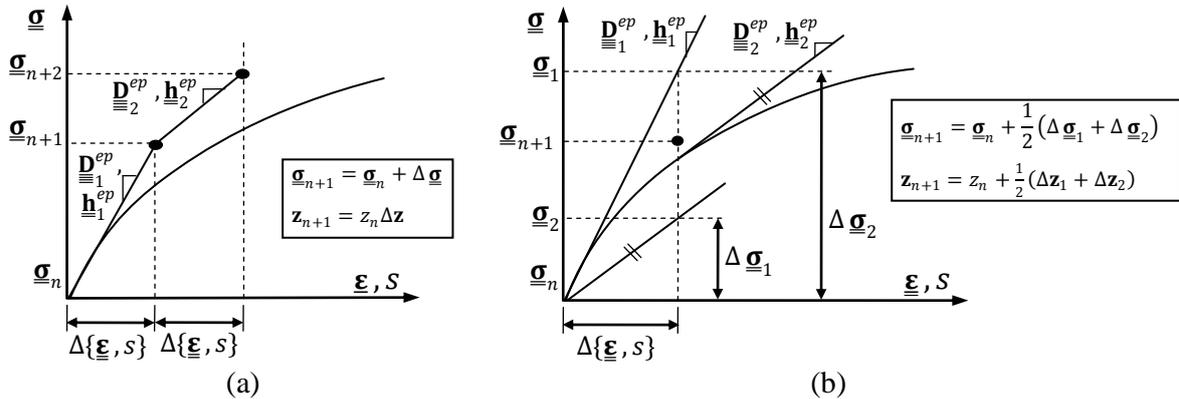


Figura 3.2 - Idealização dos esquemas de integração: a) *Forward Euler*; b) *Modified Euler*.

O esquema de integração de passos variáveis é dado por um esquema iterativo. Neste caso, a integração inicia com um passo predeterminado (por exemplo, 1% do incremento total). Neste passo as avaliações FE e ME são comparadas. O erro relativo obtido é utilizado na previsão de um fator pelo qual será multiplicado o tamanho do passo atual para obter o tamanho do próximo passo. Caso o erro estimado seja inferior a uma tolerância pré-definida, o passo é aceito. Caso contrário, o passo é rejeitado, o tamanho do passo é reduzido e integrado novamente. Este processo é repetido até completar o total do incremento. Maiores informações sobre este esquema automático de integração podem ser obtidas nos trabalhos de Sloan *et al.* (2001), Sheng *et al.* (2003), Pedroso (2006), dentre outros.

### 3.2 Modelo elastoplástico para solos não saturados

Neste trabalho, a modelagem de material não saturado é baseada no modelo elastoplástico BBM (*Barcelona Basic Model*) desenvolvido por Alonso *et al.* (1990). Este modelo utiliza os bem conhecidos princípios da Elastoplasticidade e se reduz ao modelo Cam-clay modificado quando o solo atinge a saturação. A seguir é apresentada a formulação deste modelo da forma em que é empregada nas implementações deste trabalho.

### 3.2.1 Influência da sucção

Para reproduzir o incremento da rigidez do solo devido ao acréscimo na sucção, o BBM considera a variação do índice de compressibilidade com a sucção  $s$  por meio da seguinte expressão:

$$\lambda(s) = \lambda_0((1 - r)\exp(-\beta s) + r) \quad (3.14)$$

Esta equação depende dos parâmetros  $r$  e  $\beta$  os quais são obtidos por ajuste das curvas de ensaios de consolidação isotrópica drenada para vários níveis de sucção constante.

Por outro lado, o modelo considera o aumento de resistência devido à sucção. Este aumento é simulado através da adição do efeito coesivo dado por:

$$p_s = k_c s \quad (3.15)$$

onde  $k_c$  representa um parâmetro constitutivo. Adicionalmente, o valor da tensão de pré-consolidação  $p_0$  torna-se também dependente da sucção (Figura 3.3a). Este efeito é considerado por meio de:

$$p_0 = p_{ref} \left( \frac{p_0^*}{p_{ref}} \right)^{\psi(s)} \quad \text{e} \quad \psi(s) = \frac{\lambda_0 - \kappa}{\lambda(s) - \kappa} \quad (3.16)$$

onde  $p_0^*$  é a tensão de pré-consolidação na condição saturada,  $p_{ref}$  é uma tensão de referência,  $\lambda_0$  é o coeficiente de compressibilidade do solo saturado no trecho virgem, e  $\kappa$  é o coeficiente de compressibilidade do solo no trecho descarga-recarga. A Eq. 3.16 reproduz o crescimento aparente da tensão de pré-adensamento com o aumento da sucção além do fenômeno de colapso observado em trajetórias de molhagem. Adicionalmente, esta equação representa a curva de plastificação denotada por LC (*Loading Collapse*).

Considerando que acréscimos de sucção podem induzir deformações irrecuperáveis, considera-se que valores de sucção superiores à máxima sucção já imposta ao ponto  $s_0$  geram deformações irreversíveis. Isto é representado pela curva de plastificação SI (*Suction Increase*) a qual é dada por:

$$s = s_0 \quad (3.17)$$

As curvas de plastificação LC e SI delimitam o domínio elástico no plano  $p$  versus  $s$ , como mostrado na Figura 3.3b.

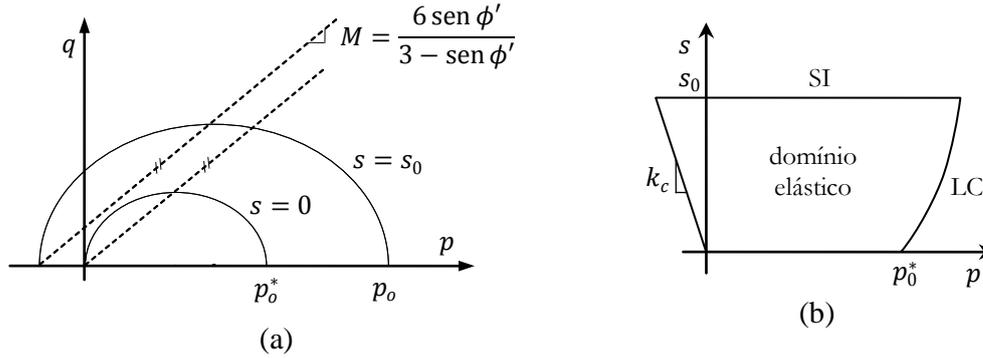


Figura 3.3 - Modelo BBM: a) aumento do tamanho da superfície de plastificação devido à sucção; b) domínio elástico limitado pelas curvas LC e SI.

### 3.2.2 Função de plastificação

A superfície de plastificação do BBM é definida no espaço  $(p, q, s)$  e é determinada pelas seguintes equações:

$$F_0(\underline{\sigma}, p_o^*, s) = F_0(p, q, p_o^*, s) = q^2 - M^2(p + p_s)(p_o(s, p_o^*) - p) \quad (3.18)$$

$$F_1(s, s_0) = s - s_0 \quad (3.19)$$

onde  $M$  é a inclinação da linha de estado crítico e  $p$  e  $q$  são os invariantes de tensão de Cambridge.

No entanto, neste trabalho é utilizada a extensão proposta por Pedroso (2006), na qual a superfície de plastificação é representada apenas por uma equação. A extensão, denominada de BarcelonaX, consiste em uma ligeira modificação do BBM com o objetivo de facilitar a implementação do modelo. Esta modificação cria uma suave transição entre as duas equações dadas pelo BBM. A equação desta superfície única no espaço  $(p, q, s)$  é dada por:

$$F(\underline{\sigma}, \mathbf{z}, s) = F(p, q, p_o^*, s_0, s) = q^2 - M^2(p + p_s)(p_o(s, p_o^*) - p) + C(s_0, s) \quad (3.20)$$

onde  $\mathbf{z}$  é o vetor constituído pelos parâmetros de endurecimento  $p_o^*$  e  $s_0$ . A função  $C(s_0, s)$  é dada por:

$$C(s_0, s) = p_{ref}^2 \left[ \exp\left(\frac{B(s - s_0)}{p_{ref}}\right) - \exp\left(\frac{-Bs_0}{p_{ref}}\right) \right] \quad (3.21)$$

onde  $B$  é o parâmetro adicional que permite ajustar a parte que representa a tampa da superfície na direção da sucção. A Figura 3.4 mostra no espaço  $(p, q, s)$  a idealização das superfícies de plastificação do BBM e da modificada.

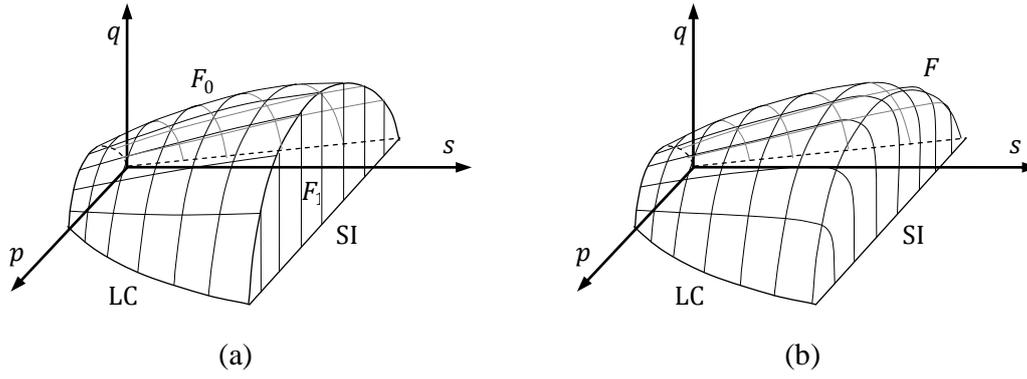


Figura 3.4 - Superfícies de plastificação: a) BBM; b) BarcelonaX.

Com relação aos termos restantes necessários na modelagem e que são obtidos da superfície de plastificação, tem-se:

$$\underline{\underline{v}} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = M^2(2p + k_s s - p_0) \frac{\mathbf{1}}{3} + 3 \underline{\underline{\sigma}}_s \quad (3.22)$$

$$c = \frac{\partial F}{\partial s} = M^2 \left( (p - p_0)k_s - (p + k_s s) \frac{\partial p_0}{\partial s} \right) + B p_{ref} \exp\left(\frac{B(s - s_0)}{p_{ref}}\right) \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_0^*} = \frac{-M^2(p + k_s s)\psi p_0}{p_0^*} \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial F}{\partial s_0} = \frac{-BC}{p_{ref}} \quad (3.25)$$

onde  $\underline{\underline{\sigma}}_s$  é o tensor desviador de tensões e  $\partial p_0 / \partial s$  é dado por:

$$\frac{\partial p_0}{\partial s} = \frac{p_0 \ln\left(\frac{p_0^*}{p_{ref}}\right) \psi \beta \lambda_0 (1 - r) \exp(-\beta s)}{\lambda(s) - \kappa} \quad (3.26)$$

### 3.2.3 Lei de fluxo

O BBM considera uma lei de fluxo não associada. A função potencial plástico é dada por:

$$G(\underline{\underline{\sigma}}, \mathbf{z}, s) = G(p, q, p_0^*, s_0, s) = \alpha q^2 - M^2(p + p_s)(p_0(s, p_0^*) - p) \quad (3.27)$$

onde:

$$\alpha = \frac{M(M - 9)(M - 3)}{9(6 - M)(1 - \kappa/\lambda_0)} \quad (3.28)$$

Desta forma, dada a lei de fluxo ( $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = \Lambda \underline{\underline{\mathbf{r}}}$ ), o tensor  $\underline{\underline{\mathbf{r}}}$  é determinado por:

$$\underline{\underline{\mathbf{r}}} = \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} = \frac{M^2(2p + k_s s - p_0)}{3} \underline{\underline{\mathbf{I}}} + 3\alpha \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_s \quad (3.29)$$

onde  $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$  é o tensor identidade de segunda ordem.

### 3.2.4 Lei de endurecimento

O BBM considera como variáveis internas a tensão de pré-consolidação para o estado saturado  $p_0^*$  e o máximo valor de sucção previamente atingido  $s_0$ . A atualização destas variáveis é definida pelas leis de endurecimento:

$$\dot{p}_0^* = \frac{\nu}{\lambda_0 - \kappa} p_0^* \dot{\varepsilon}_v^p = \frac{\nu}{\lambda_0 - \kappa} p_0^* \text{tr} \underline{\underline{\mathbf{r}}} \Lambda \quad (3.30)$$

$$\dot{s}_0 = \frac{\nu}{\lambda_s - \kappa_s} (s_0 + p_{atm}) \dot{\varepsilon}_v^p = \frac{\nu}{\lambda_s - \kappa_s} (s_0 + p_{atm}) \text{tr} \underline{\underline{\mathbf{r}}} \Lambda \quad (3.31)$$

Nestas equações,  $\lambda_0$  é o coeficiente de compressibilidade do solo saturado,  $\kappa$  é o coeficiente de compressibilidade no trecho descarga-recarga,  $\lambda_s$  é o coeficiente de compressibilidade associado à sucção e  $\kappa_s$  o coeficiente de compressibilidade associado à sucção no trecho descarga-recarga.

Com relação aos termos necessários na modelagem, é possível observar que  $\mathbf{h} = [\text{tr} \underline{\underline{\mathbf{r}}} \quad \text{tr} \underline{\underline{\mathbf{r}}}]^T$ ,  $\underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}} = [\dot{\varepsilon}_v^p \quad \dot{\varepsilon}_v^p]^T$  e  $\mathbf{H}$  é dado por:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\nu}{\lambda_0 - \kappa} p_0^* & 0 \\ 0 & \frac{\nu}{\lambda_s - \kappa_s} (s_0 + p_{atm}) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

### 3.2.5 Parâmetros e condições iniciais

Na Tabela 3.1 são listados de forma resumida todos os parâmetros utilizados no modelo BBM. Os quatro primeiros parâmetros listados estão diretamente relacionados à curva LC. Estes parâmetros são obtidos de ensaios de consolidação isotrópica drenada (carga e descarga) sob diferentes níveis de sucção constante. Desta forma, os parâmetros  $r$  e  $\beta$  são obtidos por ajuste de curva aos dados do ensaio. Os parâmetros  $\kappa_s$  e  $\lambda_s$  estão relacionados à curva SI. Estes parâmetros são obtidos de ensaios com ciclos de secagem e molhagem sob uma determinada tensão média constante. A obtenção dos parâmetros  $\nu$ ,  $M$  e  $k$  pode ser realizada a partir dos resultados de ensaios de resistência ao cisalhamento a diferentes valores de sucção. Adicionalmente aos parâmetros apresentados na Tabela 3.1 pode-se considerar o parâmetro  $B$  utilizado para controlar o fechamento da superfície de plastificação (BarcelonaX) na direção da sucção.

Tabela 3.1 - Parâmetros utilizados no BBM.

Símbolo	Definição
$\kappa$	Coefficiente de compressibilidade do solo no trecho descarga-recarga.
$\lambda_0$	Coefficiente de compressibilidade do solo saturado no trecho virgem.
$r$	Razão entre os valores mínimo e saturado do coeficiente de compressibilidade virgem.
$\beta$	Parâmetro que controla a taxa de variação da rigidez com a sucção.
$\kappa_s$	Coefficiente de compressibilidade para incrementos de sucção no trecho descarga-recarga.
$\lambda_s$	Coefficiente de compressibilidade para incrementos de sucção no trecho virgem.
$\nu$	Coefficiente de Poisson. Alternativamente pode-se considerar o módulo cisalhante.
$M$	Inclinação da linha de estados críticos.
$k_c$	Parâmetro que controla o aumento da coesão aparente com o aumento da sucção.

O BBM, como todo modelo elastoplástico, requer da definição das condições iniciais para estabelecer a sua configuração inicial. Adicionalmente é necessário definir o valor de algumas constantes requeridas pelo modelo. As condições iniciais e as constantes necessárias são listadas na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 - Condições iniciais e constantes necessárias no BBM.

Símbolo	Definição
$\underline{\sigma}_{ini}$	Estado de tensões inicial.
$s_{ini}$	Valor da sucção inicial.
$OCR$	Razão de pré-consolidação.
$s_0$	Máximo valor de sucção já atingido pelo solo.
$v_{ini}$	Volume específico inicial.
$p_{atm}$	Pressão atmosférica.
$p_{ref}$	Pressão de referência.

### 3.2.6 Comentários sobre o BBM

O BBM é baseado no modelo Cam-clay modificado, herdando, portanto algumas das desvantagens do Cam-clay, como por exemplo, a limitação à condição axissimétrica. A extensão do BBM adicionou algumas características como a capacidade de reproduzir trajetórias de tensão e de saturação não monotônicas; a previsão de fenômenos volumétricos como o colapso e a expansão para trajetórias de molhagem. No entanto, uma das críticas a este modelo é o aumento indefinido do colapso com relação ao nível de tensão atuante. Tal comportamento somente é observado até certo nível de tensão. Para níveis de tensão superiores a este limite, o colapso volumétrico é decrescente. Outra crítica é a ausência de uma variável ligada ao grau de saturação. Devido à ocorrência de histerese, é possível que,

para uma mesma sucção, a quantidade de água contida nos vazios seja diferente caso tenham ocorrido trajetórias de molhagem ou secagem.

Posteriormente à apresentação do BBM, algumas deficiências foram apontadas e foram propostas muitas modificações. Estas variantes geralmente são mais complexas envolvendo maiores cálculos e a necessidade de mais parâmetros. Por exemplo, Balmaceda (1991) propõe modificações para relacionar o volume específico e a tensão média líquida, de tal forma que seja previsto um colapso decrescente para altas tensões médias confinantes e, Wheeler *et al.* (2003) incorporam a influência do grau de saturação no comportamento tensão deformação, além de introduzir a histerese apresentada pela curva característica.

No entanto, o BBM constitui-se como a modelagem mais simples que leva em consideração as características básicas do comportamento do solo não saturado. No presente trabalho, a utilização de um modelo de solos saturados torna-se necessária especialmente na simulação de drenagem e redução do lençol freático sob influência do nível de tensões em análises de deformação e fluxo acoplados.

### 3.3 Modelagem das propriedades hidráulicas

As propriedades hidráulicas de interesse na modelagem realizada do solo não saturado são a umidade volumétrica  $\theta_w$  e a condutividade hidráulica  $k$ . Considerando que umidade volumétrica pode ser escrita em função da porosidade e do grau de saturação,  $\theta_w = nS_r$ , resta definir a expressão que represente o grau de saturação. Neste trabalho, o grau de saturação é simulado pela formulação utilizada por Sheng *et al.* (2003), cuja equação original é dada pela Eq. 2.8. Esta equação é função da sucção e de alguns parâmetros de ajuste. Tais parâmetros de ajuste são dependentes das unidades da sucção. Entretanto, neste trabalho foi introduzida uma leve modificação nesta fórmula de modo que os parâmetros de ajuste se tornem independentes das unidades. Isto é realizado através da normalização da sucção  $s$  pela pressão atmosférica  $p_{atm}$ . Além disso, a posição do parâmetro  $a$  na fórmula foi redefinida. Desta maneira, o cálculo do grau de saturação pode ser expresso como:

$$S_r = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{a s}{p_{atm}}\right)^b\right)^c} \quad (3.33)$$

Os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  devem ser ajustados aos resultados de ensaios experimentais.

Com relação à condutividade hidráulica, a formulação utilizada corresponde à Eq. 2.7. Esta equação é definida em função do grau de saturação além da permeabilidade para o estado saturado. Na Figura 3.5 mostra-se exemplos da variação da umidade volumétrica e da condutividade hidráulica com relação à sucção através desta formulação.

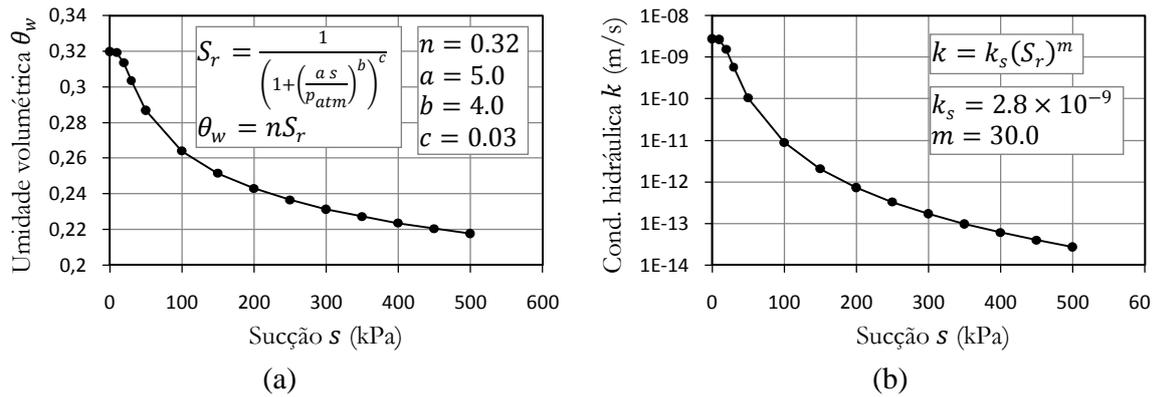


Figura 3.5 - Curvas aproximadas; a) sucção versus umidade volumétrica; b) sucção versus condutividade hidráulica.

### 3.4 Análise de deformação e fluxo acoplados pelo MEF

Problemas de equilíbrio e fluxo acoplados são comuns na Engenharia Geotécnica. Quando um solo (saturado ou não) é carregado, parte do carregamento é suportado pelo esqueleto sólido o qual sofre uma deformação inicial. A outra parte é suportada pelo líquido existente nos poros, gerando assim um excesso de poropressão. O fluido tende a escoar para as regiões de menor pressão, dissipando a poropressão em um processo transiente e originando deformações adicionais no esqueleto sólido até atingir o equilíbrio final. Terzaghi (1943) e Biot (1941) foram os primeiros a estudar este fenômeno em meio saturado (adensamento).

O equacionamento para a análise do comportamento mecânico dos solos não saturados pode ser derivado de princípios físicos ou termodinâmicos. Estas abordagens geralmente consideram dois conjuntos de equações diferenciais parciais; um para o equilíbrio mecânico e outro para o fluxo de água nos poros. Algumas formulações ainda consideram outros fenômenos como o fluxo de ar, a transferência de calor e o transporte de componentes químicos.

A seguir, é mostrada resumidamente a formulação de elementos finitos para a análise de deformação e fluxo acoplados em meio não saturado que considera os princípios de equilíbrio mecânico e de conservação de massa. Esta formulação foi baseada nos trabalhos de Farias (1993), Pereira (1996), Sloan *et al.* (1999), Potts & Zdravković (1999), Sheng & Sloan (2003), Sheng *et al.* (2003) e Cordão Neto (2005). Os tensores de tensão e deformação são expressos como vetores de seis componentes cada um, uma vez que tais tensores são simétricos e as equações de elementos finitos são geralmente formuladas em termos de matrizes e vetores. É preciso esclarecer, também, que as deformações atendem à convenção da Mecânica dos Solos, ou seja, são negativas em tração e positivas em compressão. Por sua vez, é considerado positivo o volume de fluxo que entra no domínio e negativo o volume que

sai. Adicionalmente, as equações estão escritas em termos de poropressão em lugar da sucção, sendo que a sucção corresponde a valores negativos de poropressão.

### 3.4.1 Equação de equilíbrio mecânico

A equação de equilíbrio mecânico é associada ao equilíbrio de forças num elemento de controle e pode ser expressa como:

$$\bar{\nabla}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

onde  $\bar{\nabla}$  é o operador diferencial dado por:

$$\bar{\nabla}^T = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{zx}]^T$  é o vetor de tensões totais e  $\mathbf{b} = [b_x \ b_y \ b_z]^T$  é o vetor das forças de corpo nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

Aplicando o teorema de Green-Gauss e o método dos resíduos ponderados de Galerkin na equação de equilíbrio para um elemento simples obtém-se:

$$\int_V \mathbf{B}_u^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} dV - \int_S \mathbf{N}_u^T \dot{\mathbf{t}} dS - \int_V \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} dV = 0 \quad (3.36)$$

onde  $\mathbf{N}_u = \mathbf{IN} = [\mathbf{IN}_1 \ \mathbf{IN}_2 \ \mathbf{IN}_3 \ \dots \ \mathbf{IN}_n]$  é a matriz que contém as funções de forma de um elemento finito de  $n$  nós e  $\mathbf{B}_u = [\bar{\nabla}N_1 \ \bar{\nabla}N_2 \ \bar{\nabla}N_3 \ \dots \ \bar{\nabla}N_n]$  é a matriz deformação-deslocamento ( $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_u \mathbf{U}$ ), sendo que  $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ 2\varepsilon_{xy} \ 2\varepsilon_{yz} \ 2\varepsilon_{zx}]^T$  e  $\mathbf{U}$  representa o vetor de deslocamentos nodais. Além disso,  $V$  é o volume do domínio e  $S$  é a superfície onde são aplicadas as forças de superfície  $\dot{\mathbf{t}}$ .

A taxa de tensão total pode ser relacionada às taxas de tensão líquida  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$  e de poropressão  $\dot{u}_w$  por meio da expressão:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}' + \varphi(S_r) \mathbf{m} \dot{u}_w \quad (3.37)$$

onde  $\varphi$  é uma função em termos do grau de saturação  $S_r$  (por exemplo,  $\varphi(S_r) = S_r$ ) e  $\mathbf{m} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ .

Como visto na teoria da elastoplasticidade, o incremento de tensão líquida pode ser relacionada aos incrementos de deformação e poropressão (sucção). Em notação matricial esta relação pode ser expressa como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{D}_{ep} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{d}^{ep} \dot{u}_w \quad (3.38)$$

onde  $\mathbf{D}_{ep}$  é a matriz elastoplasticidade tensão-deformação do esqueleto sólido e  $\mathbf{d}^{ep}$  é o vetor constitutivo da relação entre tensão e poropressão.

Considerando as Eqs. 3.37 e 3.38 na Eq. 3.36 obtém-se:

$$\int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{D}^{ep} \mathbf{B}_u \dot{\mathbf{U}} dV + \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{m} \varphi(S_r) \mathbf{N}_p^T \dot{\mathbf{P}} dV - \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{d}^{ep} \mathbf{N}_p^T \dot{\mathbf{P}} dV = \int_S \mathbf{N}_u^T \dot{\mathbf{t}} dS + \int_V \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} dV \quad (3.39)$$

onde  $\mathbf{U}$  é o vetor de deslocamentos nodais,  $\mathbf{N}_p = [N_{p1} \ N_{p2} \ N_{p3} \ \dots \ N_{pm}]^T$  é o vetor de funções de interpolação de poropressão e  $\dot{\mathbf{P}}$  o vetor de taxa de poropressões nodais. Considera-se que o campo de poropressões pode ser representado por  $m$  dos  $n$  nós do elemento ( $m \leq n$ ).

A Eq. 3.39 representa o sistema de equações da análise de equilíbrio em meios não saturados e pode ser reescrita na forma condensada como:

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{F}} \quad (3.40)$$

sendo:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{D}^{ep} \mathbf{B}_u dV \quad (3.41)$$

$$\mathbf{C} = \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{m} \varphi(S_r) \mathbf{N}_p^T dV - \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{d}^{ep} \mathbf{N}_p^T dV \quad (3.42)$$

$$\dot{\mathbf{F}} = \int_S \mathbf{N}_u^T \dot{\mathbf{t}} dS + \int_V \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} dV \quad (3.43)$$

$\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez do esqueleto sólido,  $\mathbf{C}$  é a matriz de acoplamento a qual converte poropressão em termos de força e  $\dot{\mathbf{F}}$  é o vetor de taxa de forças externas.

### 3.4.2 Equação de conservação de massa

A conservação da massa é expressa pela equação de continuidade. Neste caso a equação de continuidade relaciona a conservação de fluido nos poros e pode ser expressa por:

$$\nabla \cdot (\rho_w \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho_w n S_r) = 0 \quad (3.44)$$

onde  $\rho_w$  é a densidade do fluido nos poros,  $\mathbf{v}$  é o vetor de velocidade do fluido,  $t$  é o tempo,  $n$  é a porosidade e  $S_r$  é o grau de saturação. O operador  $\nabla$  é definido como:

$$\nabla = [\partial/\partial x \quad \partial/\partial y \quad \partial/\partial z]^T \quad (3.45)$$

Assumindo a hipótese de que o fluido é incompressível, o termo  $\rho_w$  na Eq. 3.44 é considerado constante e, portanto, pode ser simplificado. Por outro lado, o vetor de velocidade  $\mathbf{v}$  pode ser expresso pela lei de Darcy como:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{k}\nabla\left(\frac{u_w}{\gamma_w} + z\right) = -\frac{\mathbf{k}}{\gamma_w}(\nabla u_w + \mathbf{b}_w) \quad (3.46)$$

onde  $\mathbf{k}$  é a matriz de permeabilidade,  $\gamma_w$  é o peso específico do fluido nos poros,  $z$  é o componente cartesiano de elevação e  $\mathbf{b}_w = [0 \ 0 \ \gamma_w]^T$  é o vetor de massa do fluido.

Considerando a equação de Darcy e que  $\frac{\partial n}{\partial t} = -\varepsilon_v = -\mathbf{m}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , a Eq. 3.44 pode ser reescrita como:

$$\nabla \cdot (\mathbf{k}(\nabla u_w + \mathbf{b}_w)) - S_r \mathbf{m}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + n \frac{\partial S_r}{\partial u_w} \dot{u}_w = 0 \quad (3.47)$$

Utilizando o teorema de Green-Gauss, o teorema do divergente e a decomposição do domínio em elementos finitos na Eq. 3.44, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{B}_p^T \frac{\mathbf{k}}{\gamma_w} \mathbf{B}_p \mathbf{P} dV - \int_V \mathbf{N}_p^T S_r \mathbf{m}^T \mathbf{B}_p \dot{\mathbf{U}} dV + \int_V \mathbf{N}_p^T n \frac{\partial S_r}{\partial p} \mathbf{N}_p \dot{\mathbf{P}} dV = \\ \int_S \mathbf{N}_p^T \dot{q} dS + \int_V \mathbf{B}_p^T \frac{\mathbf{k}}{\gamma_w} \mathbf{b}_w dV \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde  $\mathbf{B}_p = [\nabla N_{p1} \ \nabla N_{p2} \ \nabla N_{p3} \ \dots \ \nabla N_{pm}]$ ,  $\mathbf{k}$  é a matriz constitutiva de permeabilidade,  $\gamma_w$  é o peso específico da água e  $\dot{q}$  a taxa de fluxo de superfície.

A Eq. 3.48 representa o sistema de equações da análise de fluxo e pode ser reescrita na forma condensada como:

$$\mathbf{L}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{M}\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{H}\mathbf{P} = \dot{\mathbf{Q}} \quad (3.49)$$

onde  $\mathbf{P}$  é o vetor de poropressões nodais e:

$$\mathbf{L} = - \int_V \mathbf{N}_p^T S_r \mathbf{m}^T \mathbf{B}_p dV \quad (3.50)$$

$$\mathbf{M} = \int_V \mathbf{N}_p^T n \frac{\partial S_r}{\partial u_w} \mathbf{N}_p dV \quad (3.51)$$

$$\mathbf{H} = \int_V \mathbf{B}_p^T \frac{\mathbf{k}}{\gamma_w} \mathbf{B}_p dV \quad (3.52)$$

$$\dot{\mathbf{Q}} = \int_S \mathbf{N}_p^T \dot{q} dS + \int_V \mathbf{B}_p^T \frac{\mathbf{k}}{\gamma_w} \mathbf{b}_w dV \quad (3.53)$$

$\mathbf{L}$  é a matriz de acoplamento que associa deslocamento com volume,  $\mathbf{M}$  é conhecida como a matriz de massa e associa poropressão com volume,  $\mathbf{H}$  é a matriz de permeabilidade e  $\dot{\mathbf{Q}}$  é o vetor de taxa volumes externos. Os componentes da matriz  $\mathbf{M}$  são iguais a zero quando o solo se encontra saturado.

### 3.4.3 Solução do sistema de equações acoplado

As equações de equilíbrio e conservação de massa podem ser representadas em um só sistema que pode ser expresso por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C} \\ \mathbf{L} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} \quad (3.54)$$

Este sistema é caracterizado pela sua não-linearidade, assimetria e mau condicionamento. A não linearidade decorre do uso de modelos elastoplásticos para simular a relação tensão-deformação-sucção ( $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{C}$ ), do grau de saturação dependente da poropressão/sucção ( $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{M}$ ) e da permeabilidade em função da sucção/grau de saturação ( $\mathbf{H}$ ). A assimetria provém do uso de uma lei de fluxo não associada para descrever o comportamento do esqueleto sólido. Finalmente, o mau condicionamento provém do fato de que os componentes das matrizes  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{M}$  não são da mesma ordem de magnitude, podendo diferir por um fator de  $10^6$  ou maior. Esta característica pode levar a erros de aproximação em programas computacionais que utilizam variáveis reais de precisão simples.

O sistema de equações dado pela Eq. 3.54 está escrito em forma de taxa e requer integração utilizando um número discreto de incrementos de tempo. Desta maneira podem ser obtidas soluções estacionárias aproximadas para o problema transiente. Para isto, pode ser considerado que para um intervalo de tempo  $\Delta t$ , os vetores  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{P}$  têm variação linear. Assim, para um dado incremento de tempo estes vetores podem ser expressos por:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix}_{t+\alpha\Delta t} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix}_t + \alpha \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{U} \\ \Delta\mathbf{P} \end{Bmatrix} \quad (3.55)$$

onde  $\alpha$  é um coeficiente que especifica em que ponto do intervalo de tempo se calcula a solução.

De maneira similar, as taxas de variação das incógnitas para um determinado intervalo de tempo são expressas por:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta t} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{U} \\ \Delta\mathbf{P} \end{Bmatrix} \quad (3.56)$$

Desta forma, considerando as Eqs. 3.55 e 3.56 na Eq. 3.54, o sistema de equações a ser resolvido é finalmente expresso por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C} \\ \mathbf{L} & \mathbf{M} + \alpha\Delta t\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{U} \\ \Delta\mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{F} \\ \Delta\mathbf{Q} - \Delta t\mathbf{HP} \end{Bmatrix} \quad (3.57)$$

Esta equação aplicada para intervalos constantes de tempo representa o esquema mais simples para resolver o sistema de equações dado pela Eq. 3.54. No entanto, podem ser considerados outros esquemas de ordem superior incluindo esquemas automáticos de

incrementos variáveis como os apresentados por Sheng *et al.* (2002), Sheng & Sloan (2003) e Sheng *et al.* (2003).

Após a solução do sistema de equações, o incremento de forças internas pode ser calculado por meio de:

$$\Delta \mathbf{F}_{int} = \mathbf{K}\Delta \mathbf{U} + \mathbf{C}\Delta \mathbf{P} = \int_V \mathbf{B}_u^T \Delta \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.58)$$

onde  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$  é vetor de incrementos de tensões totais. A determinação de  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$  deve ser realizada a partir da integração da relação constitutiva tensão-deformação-poropressão. Por sua vez, o incremento de volumes internos pode ser calculado como:

$$\Delta \mathbf{Q}_{int} = \mathbf{L}\Delta \mathbf{U} + \mathbf{M}\Delta \mathbf{P} + \Delta t \mathbf{H}\mathbf{P} = \int_V \mathbf{N}_p^T \Delta(nS_r) dV - \int_V \mathbf{B}_p^T \Delta t \mathbf{v} dV \quad (3.59)$$

em que  $\mathbf{v}$  é a velocidade do fluxo calculada pela Eq. 3.47. O termo  $\Delta t$  representa o incremento de tempo e o termo  $\Delta(nS_r)$  representa o incremento na umidade volumétrica e pode ser obtida conjuntamente com  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ . Em análises que somente envolvem fluxo não saturado (sem considerar o equilíbrio mecânico), esta quantidade pode ser obtida diretamente por meio da integração da curva característica.

### 3.5 Validações

As formulações descritas neste capítulo para análises de deformação e fluxo acoplados em meio não saturado foram implementadas em um programa de elementos finitos denominado Mechsys/FEM. Este programa foi desenvolvido durante esta pesquisa conjuntamente com o trabalho de Pedroso (2006). O código foi elaborado na linguagem C++ utilizando técnicas recentes de programação orientada a objeto. Entre as principais características deste programa têm-se: capacidade para realizar análises 3D de equilíbrio e fluxo; análises de construção e escavação por camadas; possui implementados modelos constitutivos baseados na teoria dos estados críticos; diversos algoritmos de integração das relações constitutivas; diversos esquemas de solução do sistema de equações não lineares, dentre outras. Além das implementações associadas com o problema de deformação e fluxo acoplados, posteriormente foram realizadas as implementações das técnicas estudadas para a simulação de inclusões.

A seguir, algumas análises são realizadas com o objetivo de validar as implementações de deformação e fluxo acoplados no programa de elementos finitos. Adicionalmente, algumas trajetórias de tensão-sucção em material não saturado também são avaliadas.

### 3.5.1 Adensamento unidimensional

Esta análise corresponde à simulação do adensamento unidimensional de acordo com a teoria de Terzaghi (1943). O problema convencional de Terzaghi considera uma coluna de solo saturado de altura  $h$  confinada lateralmente sobre a qual é aplicada uma carga distribuída  $p$ . Nesta análise é considerado que a água pode drenar somente pelo topo, sendo a base impermeável. A solução para o excesso de poropressão  $u_e$  da teoria unidimensional de Terzaghi é dada por:

$$u_e = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2p}{M} \text{sen}(MZ) \exp(-M^2 T) \quad (3.60)$$

onde  $M = \frac{\pi(2m+1)}{2}$ ,  $Z = z/h_d$ ,  $T = \frac{c_v t}{h_d^2}$ ,  $z$  é a profundidade,  $c_v$  o coeficiente de adensamento,  $h_d = h$  a altura de drenagem e  $t$  o tempo após a aplicação da carga distribuída  $p$ . O coeficiente de adensamento pode ser calculado por meio de  $c_v = \frac{k}{m_v \gamma_w}$ , onde  $m_v = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}$  é o coeficiente de variação volumétrica expresso em função do módulo de elasticidade  $E$  e do coeficiente de Poisson  $\nu$ .

A Figura 3.6a mostra a malha de elementos finitos, condições de contorno e propriedades utilizadas nesta simulação. A análise é realizada em dois estágios. O primeiro estágio somente considera a aplicação da carga distribuída. Esta carga é aplicada em um tempo muito pequeno de modo que a drenagem pelo topo é desprezível. O segundo estágio considera o adensamento ao longo do tempo por meio da drenagem em um só sentido em direção ao topo. A Figura 3.6b mostra a comparação entre os resultados dados pela Eq. 3.60 e os obtidos na simulação. Os resultados são considerados bastante satisfatórios.

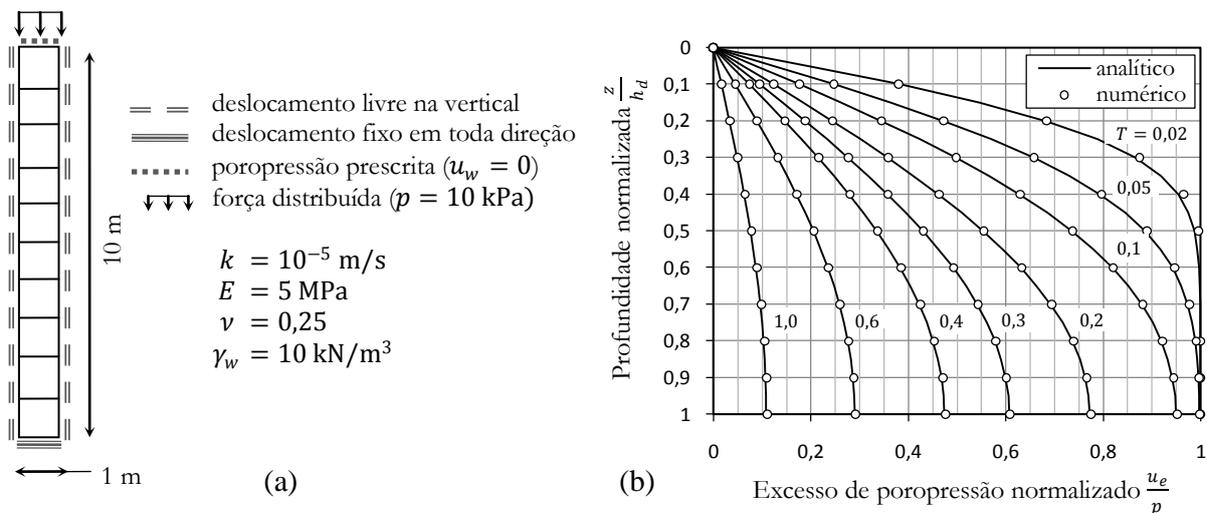


Figura 3.6 - Simulação do adensamento unidimensional: a) malha de elementos finitos, condições de contorno e propriedades utilizadas; b) excesso de poropressão para diferentes intervalos de tempo.

### 3.5.2 Adensamento bidimensional

Nesta simulação é realizada uma análise de adensamento bidimensional para prever os recalques superficiais de uma camada infinita devido à aplicação de uma carga distribuída  $p$  de largura  $l$  e de comprimento infinito (estado de deformação plana). O material é considerado saturado com a possibilidade de drenagem pelo topo.

Biot (1940) determinou a seguinte expressão para o cálculo do recalque superficial por adensamento para um tempo  $t$ :

$$w_s = 2m_v p \sqrt{\frac{c_v t}{\pi}} \left[ f\left(\frac{x+b}{\sqrt{c_v t}}\right) - f\left(\frac{x-b}{\sqrt{c_v t}}\right) \right] \quad (3.61)$$

onde  $b = \frac{l}{2}$  e a função  $f$  é dada por:

$$f(\xi) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \xi \ln\left(1 + \frac{4}{\pi\xi^2}\right) + \frac{1}{\pi} \text{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{\pi}\xi}{2}\right) + \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}(3.24 + \xi^2)} \quad (3.62)$$

Na simulação foi utilizada uma malha tridimensional, no entanto, restrições foram aplicadas para representar o estado plano de deformações. A Figura 3.7 mostra a projeção desta malha no plano  $yz$  incluindo as condições de contorno e as propriedades utilizadas. A análise é realizada em dois estágios. O primeiro estágio somente considera a aplicação da carga distribuída em um tempo suficientemente pequeno para que a drenagem pelo topo seja desprezível. O segundo estágio considera o adensamento ao longo do tempo através da saída de água pelo topo.

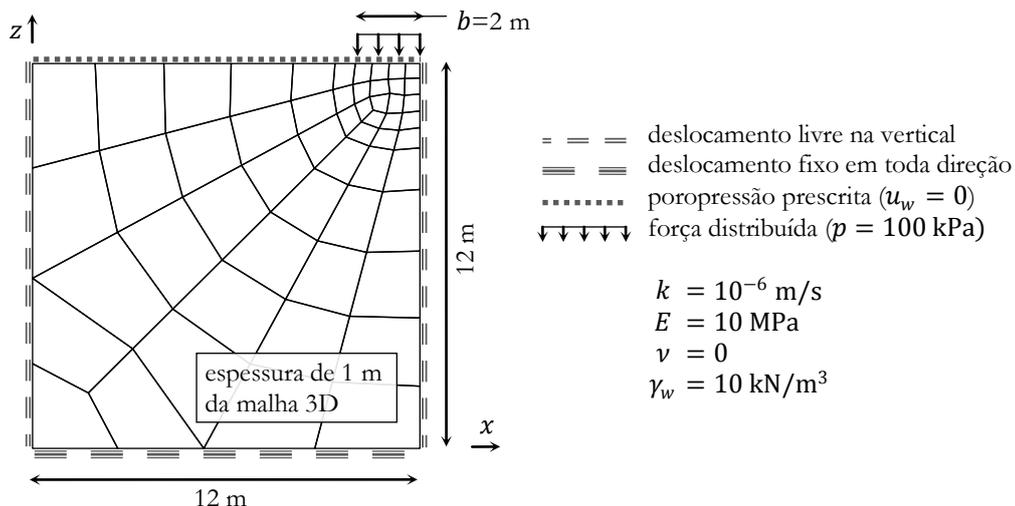


Figura 3.7 - Malha de elementos finitos, condições de contorno e propriedades da análise de adensamento 2D.

A Figura 3.8 mostra uma comparação entre os resultados obtidos pela Eq. 3.61 e os obtidos da simulação para diferentes tempos de adensamento. Os intervalos de tempo para a análise

foram calculados por meio de  $t = T^2 l^2 / c_v$ . Os recalques verticais foram normalizados pela quantidade  $w' = \frac{apl}{4\sqrt{\pi}}$ . Tais recalques somente são considerados após o estágio da aplicação da carga. As diferenças entre os valores calculados e os analíticos são relativamente pequenas e são atribuídas à discretização de um domínio finito na simulação, enquanto que a solução analítica é determinada para um meio semi-infinito.

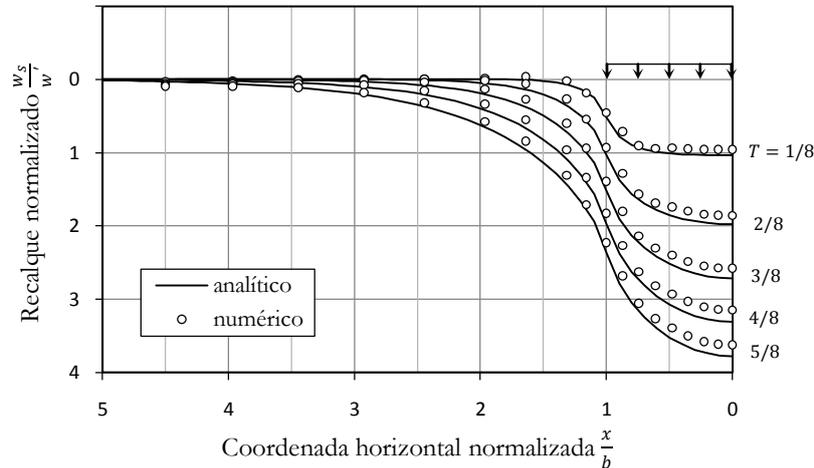


Figura 3.8 - Recalque da superfície para vários intervalos de tempo para carga distribuída retangular.

### 3.5.3 Fluxo em solo não saturado

A formulação e a implementação para a simulação do fluxo em solo não saturado é avaliada através de uma análise que envolve o avanço da frente de saturação. Nesta análise o solo se encontra inicialmente não saturado, a seguir são aplicadas condições de contorno tais que permitem o avanço da frente de saturação até alcançar o regime estacionário ao final da análise.

A Figura 3.9a mostra a malha de elementos finitos, as condições de contorno e as propriedades envolvidas na análise. A permeabilidade foi simulada por meio da Eq. 3.34 e o conteúdo volumétrico de água por meio de  $\theta_w = nS_r$ , onde o grau de saturação  $S_r$  é calculado através da Eq 3.33.

No início da análise, o nível de água se encontra na cota  $z = 0$ . A seguir é aplicada subitamente a condição de contorno de carga hidráulica (8,0 m) nos nós especificados na Figura 3.9a. Desta forma se pretende simular um enchimento rápido. Com o decorrer do tempo há o avanço da frente de saturação até atingir o regime estacionário. No regime estacionário é esperado que a freática seja horizontal e se localize no nível de 8,0 m.

Na Figura 3.9b são representados os valores de carga hidráulica dos nós de cota  $z = 0$  para diferentes valores de tempo transcorrido. Estes resultados são comparados com os valores

obtidos por meio do uso da ferramenta SEEP/W<sup>®</sup> (Geo-Slope, 1995). É possível observar uma excelente concordância entre os resultados. As pequenas diferenças são associadas às diferentes formas de ingresso de dados e dos algoritmos de solução do sistema de equações entre a ferramenta SEEP/W<sup>®</sup> e as implementações realizadas neste trabalho.

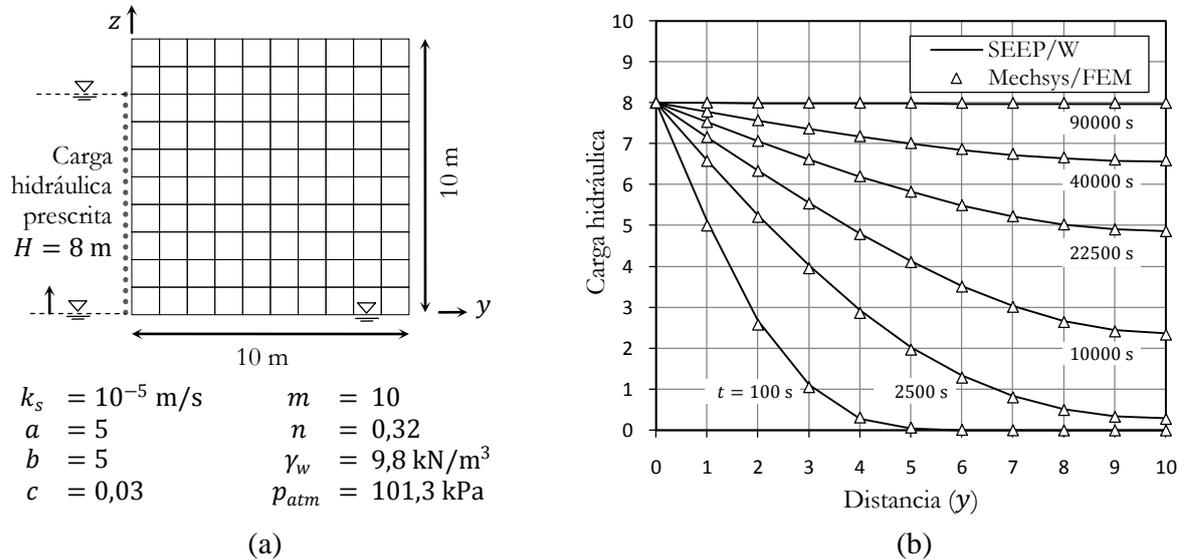


Figura 3.9 - Simulação do fluxo não saturado: a) malha de elementos finitos, condições de contorno e propriedades utilizadas; b) carga hidráulica obtida na cota  $z = 0$  para diferentes valores de tempo.

### 3.5.4 Trajetórias de sucção e tensão em solo não saturado

Foram realizadas análises via elementos finitos para verificar as implementações na reprodução de algumas das trajetórias, no plano tensão média-sucção, apresentadas no trabalho de Alonso *et al.* (1990). As análises desenvolvidas correspondem aos casos de deformação volumétrica induzida por molhagem e secagem. A malha de elementos finitos e as trajetórias simuladas são mostradas na Figura 3.10. Os parâmetros utilizados estão listados na Tabela 3.3.

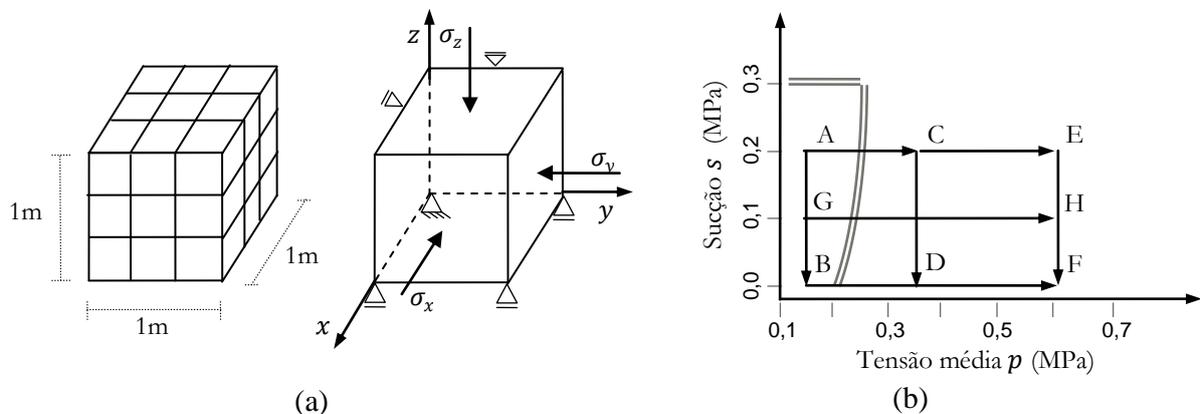


Figura 3.10 - Simulação de trajetórias tensão-sucção em solo não saturado: a) malha de elementos finitos e condições de contorno; b) trajetórias analisadas.

Tabela 3.3 - Propriedades do material e constantes utilizadas na simulação.

$\lambda_0$	0,2	$G$	10,0 MPa	$k$	0,6
$\kappa$	0,02	$r$	0,75	$\lambda_s$	0,08
$\phi_{cs}$	25,4°	$\beta$	12,5 MPa <sup>-1</sup>	$\kappa_s$	0,008
$p_0^*$	0,20 MPa	$p_{atm}$	0,101 MPa	$p_{ref}$	0,101 MPa
$B$	1000				

Nos resultados obtidos, os valores de tensão média e sucção são tomados do centro do elemento interno da malha. A Figura 3.11 mostra a comparação entre as trajetórias obtidas nas análises de ensaios de molhagem pelo MEF com as obtidas integrando-se diretamente as relações do modelo BBM em um único ponto. As trajetórias ABDE e AGHF evidenciam o aumento de volume específico devido a molhagem. Nas trajetórias ACDF e ACEF, onde houve aumento da tensão média, é possível observar a diminuição do volume específico. Além disso, estas trajetórias experimentam colapso por molhagem sob tensão média constante.

A Figura 3.12 mostra a comparação entre as trajetórias obtidas nas análises de ensaios de secagem pelo MEF com as obtidas integrando-se diretamente as relações do modelo BBM em um único ponto. Nas trajetórias BFE, BAE e BGHE é possível observar a diminuição do volume específico com ao aumento da sucção.

Nas simulações pelo MEF é necessário levar em conta também as condições de fluxo que consideram a sucção/poropressão como um grau de liberdade. Desta forma, o fluxo também deve ser modelado simultaneamente a partir de parâmetros apropriados para solos não saturados. Os resultados das trajetórias acima são sensíveis a estes parâmetros e também ao tempo estabelecido para cada estágio, uma vez que se trata de uma análise temporal. Nas simulações realizadas, foi adotado o tempo suficiente para cada estágio alcançar o equilíbrio hidrostático. Desta maneira foi possível reproduzir as trajetórias do BBM de forma satisfatória.

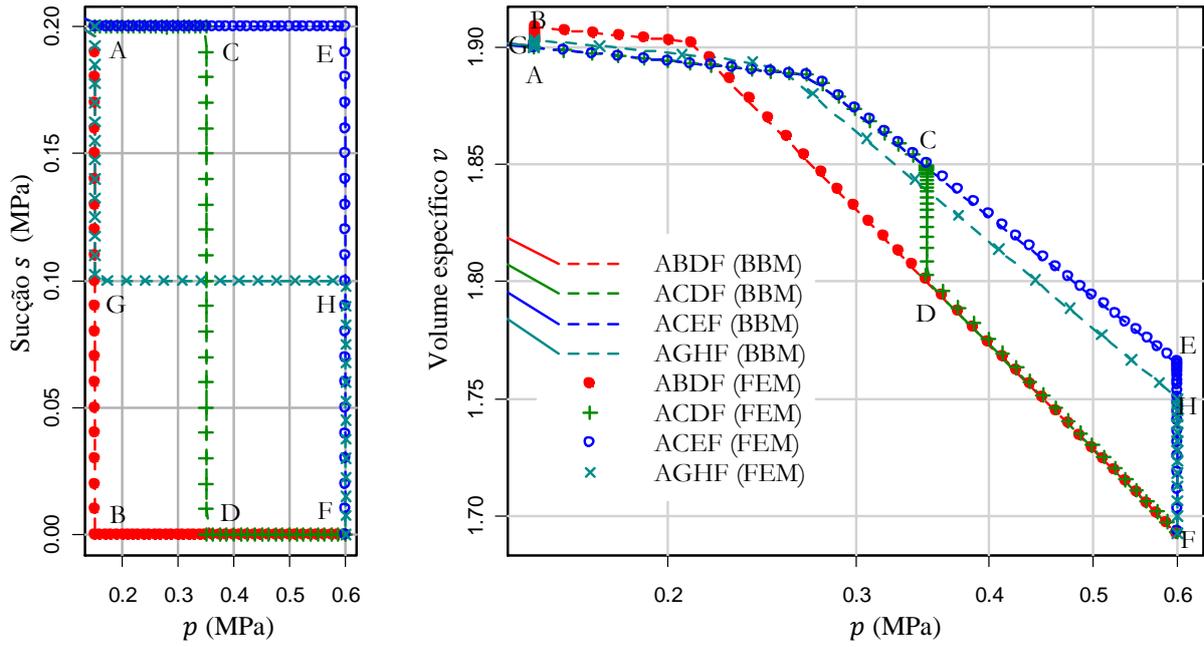


Figura 3.11 - Resultado das simulações de trajetórias de molhagem.

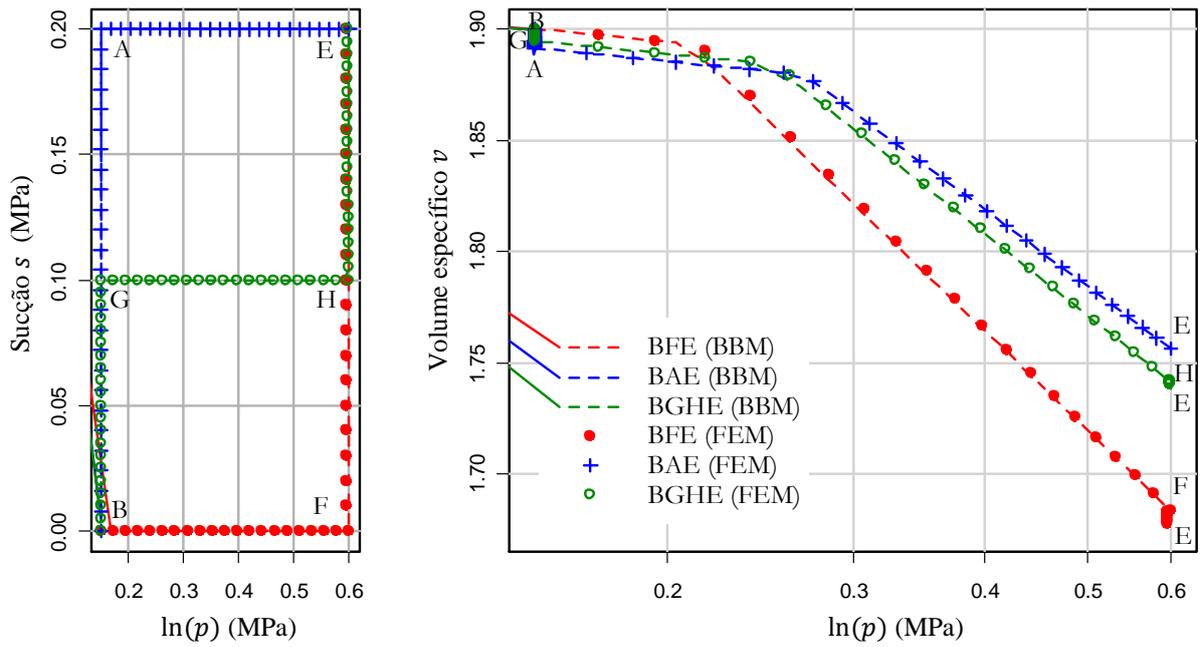


Figura 3.12 - Resultado das simulações de trajetórias de secagem.

## Capítulo 4

# Algoritmos Auxiliares Utilizados nas Implementações

Neste capítulo vários algoritmos auxiliares necessários para implementações do MEF são revistos, aperfeiçoados ou desenvolvidos especialmente para a modelagem de reforços e drenos. Alguns dos métodos para a análise de inclusões, os quais são estudados mais adiante, permitem que tais inclusões atravessem livremente a malha de elementos finitos. Desta forma, são apresentadas algumas ferramentas que visam a solução de alguns problemas geométricos associados a esta característica, como por exemplo, a determinação dos pontos de interseção das inclusões com os elementos sólidos. Para este propósito, são utilizados conceitos geométricos associados com o MEF como o Mapeamento Inverso e a Função de Localização.

Outro conceito estudado é o uso de matrizes Jacobianas retangulares. A aplicação destas matrizes se dá quando um elemento, cuja geometria está definida em um dado espaço, é mapeado para um espaço de menor dimensão. Por exemplo, o mapeamento de elementos de barra 3D para as coordenadas locais definidas em 1D.

Alguns métodos a serem estudados demandam a extrapolação de valores internos de um elemento para os nós. Isto pode ser realizado por meio de um procedimento de extrapolação local. Este tipo de extrapolação é denominado local uma vez que ocorre no interior de um elemento. Neste trabalho, é introduzido um procedimento de extrapolação generalizado aplicável a qualquer tipo de elemento sólido. Por outro lado, também é estudada a interpolação de valores nodais. Ocasionalmente quando se trabalha com elementos quadráticos ou de ordem superior é possível obter resultados indesejados por meio da interpolação convencional de valores nodais em um ponto arbitrário do domínio. Isto acontece porque as funções de forma são constituídas por polinômios e estes por natureza apresentam oscilações. Para contornar este problema é introduzido um procedimento de interpolação pseudolinear, de forma a simular uma variação linear dos valores nodais sobre o domínio do elemento.

Finalmente, e a título de generalização, é mostrado como se determina a inclinação de uma barra curva em um dado ponto do seu domínio a partir das coordenadas nodais. Embora

o uso de barras curvas não se aplique em problemas de solo grampeado, estes elementos são encontrados regularmente na simulação de revestimentos de túneis, por exemplo.

#### 4.1 Mapeamento inverso

Dadas as coordenadas globais de um dado ponto, o mapeamento inverso em elementos finitos consiste na determinação das correspondentes coordenadas locais com relação a um dado elemento (Farias & Naylor, 1998; Hartl *et al.*, 2000; Durand, 2003).

O mapeamento inverso é geralmente utilizado quando se quer calcular o valor de uma variável (por exemplo, deslocamento) no interior de um dado elemento e em uma posição que foi definida em coordenadas globais  $(x, y, z)$ . Desta forma, a obtenção das coordenadas locais deste ponto  $(\xi, \eta, \zeta)$  é necessária para posteriormente determinar o valor da variável por interpolação de valores nodais. A seguir, é apresentado o procedimento proposto por Durand (2003) que é utilizado neste trabalho para a execução do mapeamento inverso.

Seja um ponto  $P$  (Figura 4.1) de coordenadas globais  $\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T$ , deseja-se determinar as correspondentes coordenadas locais  $\mathbf{r} = [\xi \ \eta \ \zeta]^T$  associadas a um determinado elemento.

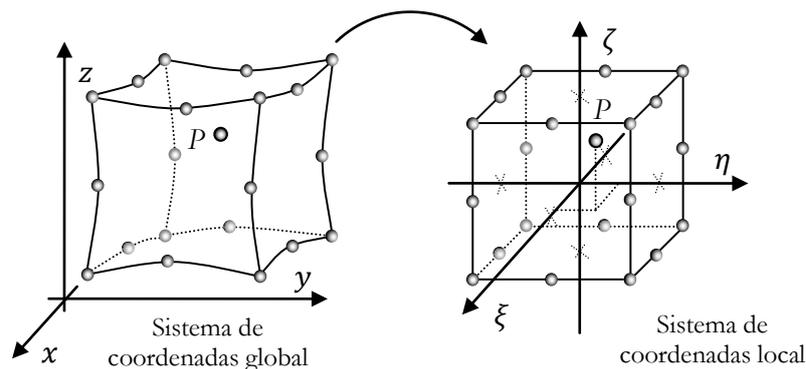


Figura 4.1 - Esquemática do mapeamento inverso.

No mapeamento convencional da geometria de elementos isoparamétricos (funções de forma coincidentes com as funções de interpolação), as coordenadas globais de um determinado ponto são calculadas através de uma relação direta utilizando as correspondentes coordenadas locais e as funções de forma, as quais são definidas em função das coordenadas locais. No mapeamento inverso, a determinação das coordenadas locais requer a solução de um sistema de equações não linear. Isto ocorre porque, no mapeamento inverso, as incógnitas  $(\xi, \eta, \zeta)$  se encontram nas funções de forma, as quais são geralmente definidas por polinômios com termos não lineares.

Para resolver o sistema de equações não linear associado ao mapeamento inverso, o método iterativo de Newton pode ser considerado como o mais apropriado devido a sua simplicidade e eficiência. A seguir explica-se como é executado este processo iterativo.

Inicialmente, para um dado ponto em coordenadas globais  $\mathbf{x}$ , arbitram-se valores quaisquer para suas coordenadas locais  $\mathbf{r}$ . A seguir, é iniciado o processo iterativo. Para cada iteração  $j$ , calculam-se as coordenadas globais  $\mathbf{x}'$  correspondentes a  $\mathbf{r}_j$  por meio do mapeamento convencional. Este resultado é comparado com as coordenadas globais  $\mathbf{x}$ , das quais se deseja obter as coordenadas locais, da seguinte forma:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}' = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{r}_j)x_i \\ \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{r}_j)y_i \\ \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{r}_j)z_i \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

A diferença  $\Delta \mathbf{x}$  obtida é utilizada para determinar uma nova aproximação das coordenadas locais  $\mathbf{r}_{j+1}$ . Assim, são determinados  $\Delta \mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}_{j+1}$ :

$$\Delta \mathbf{r} = (\mathbf{J}(\mathbf{r}_j))^{-T} \Delta \mathbf{x} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{r}_{j+1} = \mathbf{r}_j + \Delta \mathbf{r} \quad (4.3)$$

Na Eq. 4.2 o operador  $-T$  representa a inversa da matriz transposta. O termo  $\Delta \mathbf{r}$  representa a correção das coordenadas locais e o termo  $\mathbf{J}(\mathbf{r}_j)$  representa o Jacobiano de transformação de coordenadas do elemento dado avaliado em  $\mathbf{r}_j$ .

Este processo é repetido até que a diferença  $\Delta \mathbf{r}$ , cujo valor pode ser interpretado como o erro na aproximação, possua uma norma cujo valor seja menor que certa tolerância. A Figura 4.2 mostra o algoritmo que representa o procedimento antes explicado.

<b>Entrada:</b>	Coordenadas globais do ponto $\mathbf{x}$ , número máximo de iterações $nMaxIter$ , tolerância $\varepsilon = 0,001$ , coordenadas nodais $x_i, y_i, z_i$ .
<b>Saída:</b>	Coordenadas locais $\mathbf{r}$ .
$\mathbf{r}_0 = [\xi_0 \ \eta_0 \ \zeta_0]^T$	<i>!Inicialização com valores arbitrados</i>
<b>Para</b> $j = 0$ <b>até</b> $nMaxIter - 1$	
$\mathbf{x}' = [\sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{r}_j)x_i \ \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{r}_j)y_i \ \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{r}_j)z_i]^T$	<i>!interpolação de valores nodais</i>
$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$	<i>!determinação da variação global</i>
$\Delta \mathbf{r} = (\mathbf{J}(\mathbf{r}_j))^{-T} \Delta \mathbf{x}$	<i>!determinação da correção local</i>
$\mathbf{r}_{j+1} = \mathbf{r}_j + \Delta \mathbf{r}$	<i>!correção</i>
└ Se $ \Delta \mathbf{r}  < \varepsilon$ <b>parar</b>	<i>!critério de saída</i>
<b>retornar</b> $\mathbf{v}$	

Figura 4.2 - Algoritmo para a execução do mapeamento inverso.

## 4.2 Função de localização

Em certos tipos de análises via elementos finitos é necessário determinar se um determinado ponto se encontra no interior da malha e, dado o caso, em qual elemento. Assim,

é possível realizar alguns testes sobre cada elemento analisando a posição do ponto em questão. Alguns trabalhos desenvolveram métodos para determinar se um ponto se encontra no interior ou fora do elemento como o apresentado por Farias e Naylor (1998). Entretanto, uma forma simples de avaliar a posição de um ponto é dada através da utilização de uma função geométrica associada com a forma do elemento. A função mencionada é denominada de função de localização ( $f^c$ ) e foi introduzida por Durand (2003). A avaliação desta função em um ponto retorna um escalar cujo sinal determina a posição deste ponto com relação ao elemento (positivo: dentro; negativo: fora; zero: no contorno) e cujo valor absoluto fornece uma medida da proximidade do ponto com relação ao contorno do elemento.

Para cada tipo de elemento existe uma função de localização a qual é definida em termos das coordenadas naturais ( $\xi, \eta, \zeta$ ). As seguintes equações representam as expressões das funções de localização para elementos de forma triangular, quadrangular, tetraédrica e hexaédrica, respectivamente:

$$f_{triangular}^c = \min(\xi, \eta, 1 - \xi - \eta) \quad (4.4)$$

$$f_{tetraédrico}^c = \min(\xi, \eta, \zeta, 1 - \xi - \eta - \zeta) \quad (4.5)$$

$$f_{quadrangular}^c = \min(1 - \text{abs}(\xi), 1 - \text{abs}(\eta)) \quad (4.6)$$

$$f_{hexaédrico}^c = \min(1 - \text{abs}(\xi), 1 - \text{abs}(\eta), 1 - \text{abs}(\zeta)) \quad (4.7)$$

Caso o ponto a ser analisado esteja definido em coordenadas globais, as coordenadas locais correspondentes podem ser obtidas por meio do mapeamento inverso.

A título de exemplo, a Figura 4.3 mostra a representação gráfica da função de localização de um elemento triangular bidimensional onde é possível observar a variação do sinal e o lugar geométrico no espaço ( $\xi, \eta, f^c$ ).

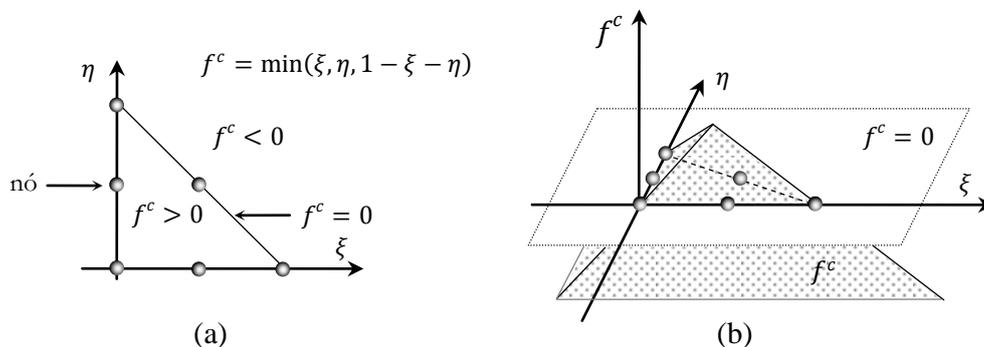


Figura 4.3 - Função de localização para um elemento triangular; a) sinal da função no interior, na borda e fora do elemento; b) lugar geométrico no espaço  $\xi, \eta, f^c$ .

### 4.3 Interseção das inclusões com os elementos sólidos

Este trabalho propõe métodos de análise de inclusões (reforços e drenos) via MEF cuja principal característica é que as inclusões possam atravessar os elementos da malha. Desta forma, uma única malha de fundo pode ser utilizada para analisar diferentes configurações das inclusões. A análise através destes métodos requer a informação dos segmentos contidos em cada elemento sólido atravessado, pois a partir destes segmentos é calculada a contribuição das inclusões no sistema.

A determinação dos segmentos é realizada a partir da determinação dos pontos de interseção da inclusão com os elementos sólidos da malha. O processo de determinar os segmentos correspondentes a uma inclusão pode ser entendido como a discretização automática da inclusão. A Figura 4.4 mostra como uma inclusão é dividida em três segmentos correspondentes aos três elementos atravessados.

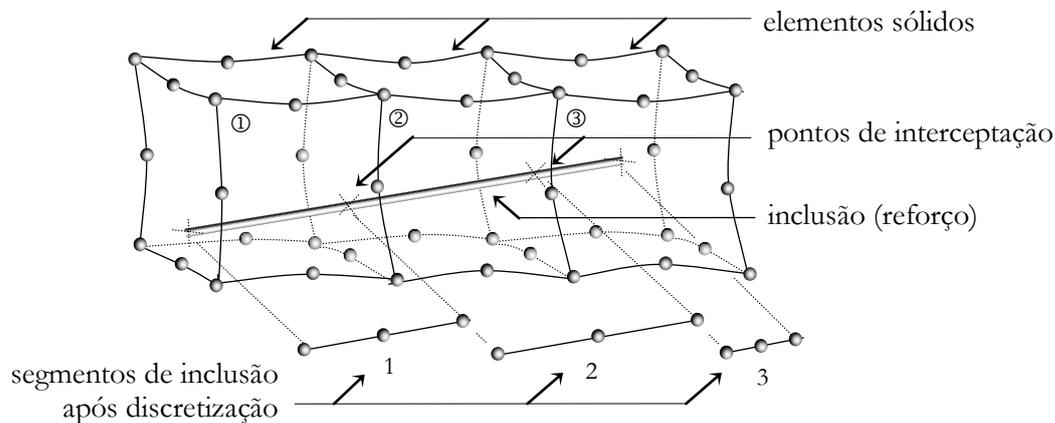


Figura 4.4 - Representação de um elemento de barra atravessando elementos da malha.

A seguir é apresentado o procedimento para a discretização de inclusões utilizado neste trabalho. Este algoritmo foi elaborado baseado no algoritmo apresentado por Durand (2003).

A função de localização, previamente abordada, é utilizada na determinação dos pontos de interseção. Esta função retorna valor zero quando é avaliada num ponto que corresponde ao contorno de um elemento. Desta forma, excluindo os pontos inicial e final do reforço, um ponto de interseção será determinado quando a função de localização avaliada para dois elementos vizinhos retorne zero em ambos simultaneamente.

Considerando que as inclusões não possuem curvas (linhas retas), a informação geométrica inicial destas é dada pelas coordenadas dos pontos inicial e final. Tendo estas coordenadas, é possível percorrer cada inclusão, a partir do ponto inicial até o final, testando diferentes pontos intermediários até encontrar os pontos de interseção. Para testar um número limitado

de pontos intermediários, avanços e retrocessos de tamanho apropriado devem ser realizados ao longo da inclusão.

Inicialmente são determinados os elementos que contêm os pontos inicial e final da inclusão. Isto é realizado testando a função de localização para cada elemento da malha. Ao percorrer a barra a partir de um dos extremos, um primeiro avanço é realizado com tamanho igual à metade do comprimento da barra, obtendo um primeiro ponto de teste. A seguir, é determinado qual é o elemento que contém este primeiro ponto de teste através do uso da função de localização. Uma vez determinado tal elemento, é verificado se este é o mesmo que contém o ponto inicial. Se for o mesmo (o que indica que o ponto de interseção ainda está à frente), será realizado outro avanço de tamanho igual à metade do anterior, e se for diferente (o que indica a presença de um ponto de interseção dentro do avanço realizado), será realizado um retrocesso com tamanho igual à metade do avanço anterior. Depois de realizado um avanço ou retrocesso, um novo ponto de teste é obtido. Uma vez mais, é determinado o elemento que contém este novo ponto de teste. Este último elemento obtido é comparado com o encontrado previamente para saber se houve um ponto de interseção na última translação. Este processo de avanços e retrocessos é realizado iterativamente até encontrar o ponto em que a função de interseção retorne um valor igual a zero para dois elementos vizinhos.

Após a determinação de um ponto de interseção, os avanços e retrocessos são reiniciados com um tamanho inicial igual à metade do restante do comprimento da inclusão. Com este procedimento, o comprimento total da inclusão é percorrido encontrando todos os elementos que foram atravessados e os respectivos pontos de interseção. Com esta informação, os segmentos contidos nos elementos atravessados são determinados.

Todo o processo previamente descrito pode ser referido como a discretização automática da inclusão em segmentos. A Figura 4.5 mostra resumidamente o algoritmo correspondente a este processo.

<b>Entrada:</b>	Vetor com as coordenadas do ponto inicial $\mathbf{P}_i$ , vetor com as coordenadas do ponto final $\mathbf{P}_f$ , vetor unitário com a direção da inclusão $\mathbf{n}$ , tolerâncias $\varepsilon$ e $\delta$ .
<b>Saída:</b>	Segmentos de inclusão que representaram os elementos de reforço/dreno.
<i>!Inicialização</i>	
$\mathbf{P} \leftarrow \mathbf{P}_i$	<i>!inicialização do ponto em teste <math>\mathbf{P}</math></i>
$\mathbf{P}_p \leftarrow \mathbf{P}_i$	<i>!inicialização do ponto que define o começo de uma porção <math>\mathbf{P}_p</math></i>
$step =  \mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i $	<i>!escalar que define o tamanho do avanço</i>
$ElemInicial \leftarrow AcharElem(\mathbf{P}_i + 0.01\mathbf{n})$	<i>!determinação do elemento inicial</i>
$ElemFinal \leftarrow AcharElem(\mathbf{P}_f - 0.01\mathbf{n})$	<i>!determinação do elemento final</i>
$Elem = ElemInicial$	<i>!inicialização do elemento em teste (Elem)</i>
<b>Por enquanto</b> $Elem \neq ElemFinal$	
$step \leftarrow step * (\frac{1}{2} + \varepsilon)$	<i>!redefinição do avanço</i>
$\mathbf{P} \leftarrow \mathbf{P}_p + step * \mathbf{n}$	<i>!n: vetor unitário com a direção da inclusão</i>
$Elem \leftarrow AcharElem(\mathbf{P})$	<i>!determinação do elemento que contém <math>\mathbf{P}</math></i>
<b>Se</b> $ElemAtras == Elem$	
$f_c = FuncContorno(MapInv(ElemProx, \mathbf{P}))$	<i>!função de contorno do elemento ElemProx em <math>\mathbf{P}</math></i>
<b>Se</b> $f_c < \delta$	<i>!ponto de interceptação localizado</i>
$SalvarSegmento(\mathbf{P}_p, \mathbf{P})$	<i>!salva o segmento entre <math>\mathbf{P}_p</math> e <math>\mathbf{P}</math></i>
$\mathbf{P}_p \leftarrow \mathbf{P}$	<i>!atualização de <math>\mathbf{P}_p</math></i>
<b>Se</b> $ElemProx \neq ElemFinal$	
$ElemAtras \leftarrow ElemProx$	<i>!atualização do elemento atrás</i>
$step =  \mathbf{P}_f - \mathbf{P} $	<i>!comprimento de inclusão remanescente</i>
<b>Se não</b>	
$step =  step $	<i>!determinação de avanço</i>
<b>Se não</b>	
$step = - step $	<i>!determinação de retrocesso</i>
$ElemProx = Elem$	
$SalvarSegmento(\mathbf{P}_p, \mathbf{P}_f)$	<i>!salva o segmento entre <math>\mathbf{P}_p</math> e <math>\mathbf{P}_f</math></i>

Figura 4.5 - Algoritmo para a discretização de uma inclusão.

#### 4.4 Matriz Jacobiana não quadrada

O Jacobiano de uma transformação de coordenadas relaciona espaços de dois sistemas, usualmente, com o mesmo número de dimensões. No entanto, ocasionalmente é necessário realizar uma transformação de coordenadas a partir de um espaço para outro que possui uma dimensão diferente. Neste caso a matriz Jacobiana adota uma forma não quadrada. Em elementos finitos, este tipo de transformação de coordenadas pode ser útil em casos em que elementos longitudinais (por exemplo, barras) localizados no espaço 3D sejam mapeados para um sistema local 1D. Outra aplicação que pode ser considerada encontra-se no mapeamento de elementos bidimensionais de juntas, placas ou outros elementos planos, localizados no espaço 3D cujas coordenadas locais são definidas no espaço 2D. Adicionalmente, a matriz Jacobiana não quadrada pode ser utilizada em análises 3D, onde é comum a aplicação de forças distribuídas na face de um elemento. Neste caso, as forças nodais correspondentes

podem ser calculadas em função da matriz Jacobiana da face. A Figura 4.6 mostra as transformações de coordenadas do espaço 3D para os espaços 1D e 2D.

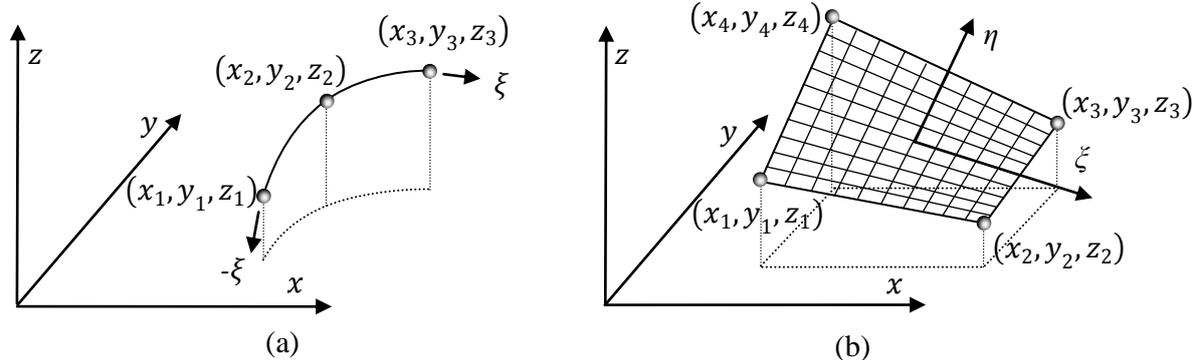


Figura 4.6 - Transformação de coordenadas entre sistemas de diferente dimensão: a) Elemento unidimensional (de 3D para 1D); b) Elemento bidimensional (de 3D para 2D).

Em implementações do MEF é usual a determinação da norma da matriz Jacobiana. Um dos usos da norma desta matriz encontra-se na montagem das matrizes associadas aos elementos, como a matriz de rigidez ou de permeabilidade. Esta norma é calculada através do determinante quando a matriz é quadrada. No entanto, quando a matriz Jacobiana é não quadrada, um procedimento diferente deve ser adotado. Assim, o cálculo desta norma é realizado com o auxílio da norma Euclidiana. Esta forma de cálculo é compatível com a utilizada por Hartl (2002).

Para o caso de um elemento unidimensional localizado no espaço de três dimensões (Figura 4.6a), a transformação se dá do sistema de coordenadas global  $(x, y, z)$  para o sistema de coordenadas local  $(\xi)$ . Assim, a matriz Jacobiana é dada por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Neste caso, em que a matriz Jacobiana é representada por uma matriz linha, sua norma é dada por:

$$\|\mathbf{J}\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2} \quad (4.9)$$

Por outro lado, para elementos 2D localizados no espaço 3D (Figura 4.6b), em que a transformação se dá do sistema de coordenadas global  $(x, y, z)$  para o sistema de coordenadas local  $(\xi, \eta)$ , a matriz Jacobiana é dada por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Neste caso, é possível determinar três projeções nos planos cartesianos  $xy$ ,  $yz$  e  $zx$ . Assim, pode-se determinar uma matriz Jacobiana de transformação de coordenadas  $\mathbf{J}_{xy}$ ,  $\mathbf{J}_{yz}$  e  $\mathbf{J}_{zx}$  para cada projeção:

$$\mathbf{J}_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}; \mathbf{J}_{yz} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix}; \mathbf{J}_{zx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

As normas destas matrizes ( $J_{xy}$ ,  $J_{yz}$  e  $J_{zx}$ ) podem ser calculadas por meio do determinante. Finalmente a norma da matriz Jacobiana não quadrada pode se determinada por meio da norma Euclidiana de  $J_{xy}$ ,  $J_{yz}$  e  $J_{zx}$ :

$$\|\mathbf{J}\| = \sqrt{J_{xy}^2 + J_{yz}^2 + J_{zx}^2} \quad (4.12)$$

#### 4.5 Interpolação pseudolinear de valores nodais

Existem algumas situações nas quais é de interesse obter o valor de uma variável em uma determinada localização dentro de um elemento. Em um elemento isoparamétrico, tal valor pode ser obtido utilizando os valores nodais e as funções de interpolação. No entanto, no MEF tradicional é utilizado a denominada formulação fraca. Nesta formulação, o equilíbrio de um elemento é satisfeito apenas em média. Toda a formulação no volume do elemento é transferida para os nós, onde são verificadas as condições de equilíbrio. Por esta razão, a rigor, os deslocamentos calculados no interior do elemento não necessariamente atendem a condição de equilíbrio. Entretanto, assume-se a existência de um dado campo de deslocamentos ao longo do elemento que atende a esta condição. A previsão destes deslocamentos por meio da interpolação convencional, que utiliza as próprias funções de forma do elemento, constitui uma alternativa. No entanto, as funções de interpolação convencionais são formuladas por meio de polinômios e, em alguns casos, os resultados retornam valores inapropriados em parte do domínio do elemento. Um exemplo disto é mostrado esquematicamente na Figura 4.7. Nesta figura, são interpolados os deslocamentos obtidos nos nós de uma das faces do elemento  $A$ . Como pode ser observado, dados os três deslocamentos positivos (na direção  $x$ ), é possível a obtenção de deslocamentos negativos em parte da face do elemento. De forma similar, a interpolação de valores no interior do elemento poderá retornar também valores pouco apropriados. Esta é uma situação comum no uso do

ajuste polinomial. No entanto, uma maneira de contornar esta situação é utilizar uma aproximação linear. Desta forma, no exemplo da Figura 4.7 seria possível realizar uma aproximação linear entre os nós da face analisada. Neste sentido, pode-se considerar a aproximação linear como outra alternativa na previsão de deslocamentos no interior do elemento.

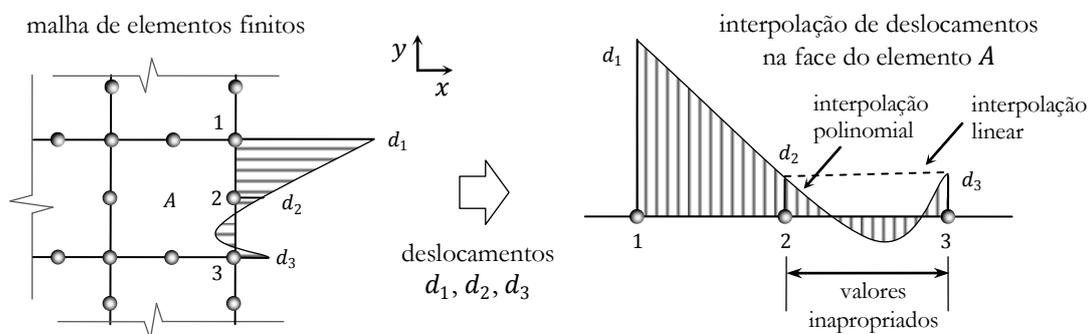


Figura 4.7 - Caso de interpolação inapropriada no domínio de um elemento.

A aproximação linear é facilmente visualizada em 1D, onde os valores nodais podem ser ligados por segmentos retos (Figura 4.8). No entanto, no caso 2D, uma aproximação linear entre os valores nodais poderia ser interpretada através de superfícies associadas entre nós próximos. Uma extensão análoga a esta idéia poderia ser considerada para o caso 3D.

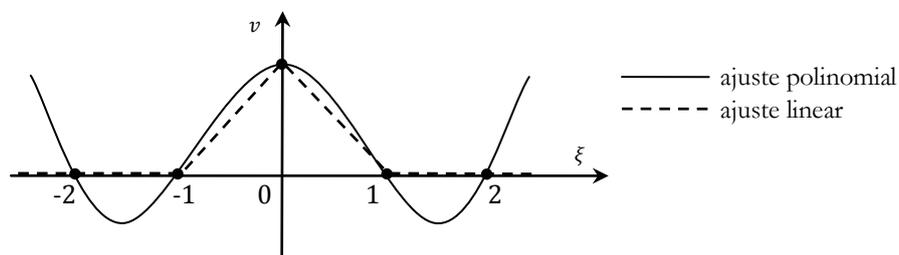


Figura 4.8 - Comparação entre o ajuste polinomial e o ajuste linear para um conjunto de cinco

Para abordar os três casos (1D, 2D e 3D), é proposto que a aproximação seja realizada por meio do uso de funções de interpolação que forneçam resultados compatíveis com uma aproximação linear entre os valores nodais. Entre algumas tentativas, foram escolhidas funções de interpolação baseadas em funções exponenciais. Desta forma, para cada nó  $i$  de um elemento é associada uma função exponencial  $g_i$ . Para elementos unidimensionais estas funções têm a seguinte forma:

$$g_i(\xi) = a^{-|\xi - \xi_i|} \quad (4.13)$$

onde  $\xi$  é a coordenada local onde esta função é avaliada,  $\xi_i$  é a coordenada local correspondente ao nó  $i$  e  $a$  é a base da função exponencial. Recomenda-se que  $a$  seja de valor

próximo e superior a um. A Figura 4.9 mostra o gráfico destas funções para um elemento unidimensional de três nós.

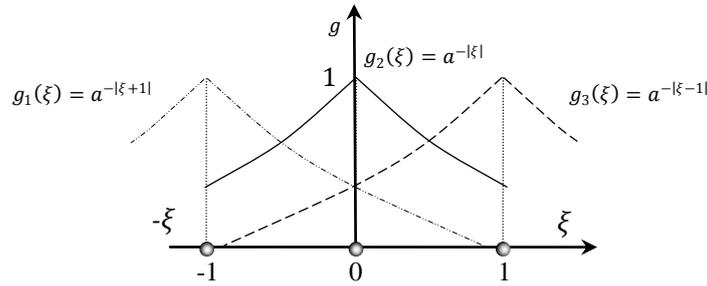


Figura 4.9 - Funções exponenciais utilizadas na interpolação pseudolinear para um elemento unidimensional de três nós.

As funções dadas pela Eq. 4.13 foram escolhidas por possuírem algumas características como: simetria, valor máximo igual a um quando  $\xi = \xi_i$ , e para valores de  $a$  próximos e superiores a um (entre 1 e 1,5 aproximadamente), os lados simétricos destas equações são aproximadamente retos. Estas características são favoráveis para que a combinação linear destas funções resulte em funções de interpolação que forneçam uma aproximação de tendência linear sobre o elemento. A interpolação utilizando tais funções é aqui denominada de pseudolinear uma vez que os resultados se aproximam muito a uma interpolação linear. Desta forma, para um elemento 1D de  $n$  nós, a função de interpolação pseudolinear é dada por:

$$L_i(\xi) = c_i^1 g_1(\xi) + c_i^2 g_2(\xi) + c_i^3 g_3(\xi) + \dots + c_i^n g_n(\xi) \quad (4.14)$$

onde  $L_i$  é a função de interpolação pseudolinear do nó  $i$  e  $c_i^j$  é o coeficiente do termo  $j$  da função de interpolação  $i$ .

A determinação dos coeficientes  $c_i^j$  pode ser realizada de forma convencional, ou seja, através da solução de um sistema de equações lineares. Este sistema é formado considerando a cada função igual a 1 no nó correspondente e zero nos outros. Resumidamente, estes coeficientes podem ser calculados por meio da seguinte equação, onde  $g_i^j$  representa a função exponencial associada ao nó  $i$  e avaliada no nó  $j$ :

$$\begin{bmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 & \dots & c_1^n \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 & \dots & c_2^n \\ c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 & \dots & c_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n^1 & c_n^2 & c_n^3 & \dots & c_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1^1 & g_1^2 & g_1^3 & \dots & g_1^n \\ g_2^1 & g_2^2 & g_2^3 & \dots & g_2^n \\ g_3^1 & g_3^2 & g_3^3 & \dots & g_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n^1 & g_n^2 & g_n^3 & \dots & g_n^n \end{bmatrix}^{-T} \quad (4.15)$$

Na Eq. 4.15 o operador “ $-T$ ” representa a inversa da matriz transposta. Uma vez obtidos os coeficientes  $c_i^j$ , as funções de interpolação pseudolinear  $L_i$  para o caso 1D podem ser avaliadas por meio da Eq. 4.14 ou diretamente por meio de:

$$L_i(\xi) = \sum_{j=1}^n c_i^j a^{-|\xi-\xi_j|} \quad (4.16)$$

onde o somatório é realizado ao longo dos nós e  $\xi_j$  representa a coordenada local do nó  $j$ .

As extensões desta equação para os casos 2D e 3D, respectivamente, são:

$$L_i(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^n c_i^j a^{-|\xi-\xi_j|-|\eta-\eta_j|} \quad (4.17)$$

$$L_i(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{j=1}^n c_i^j a^{-|\xi-\xi_j|-|\eta-\eta_j|-|\zeta-\zeta_j|} \quad (4.18)$$

Em elementos cujas funções de forma são formuladas em base a polinômios de primeiro grau, os resultados da interpolação convencional e da interpolação pseudolinear são semelhantes, tornando prescindível a utilização do último. Entre os elementos que atendem a esta situação têm-se: o elemento de barra de dois nós, o elemento triangular de três nós, o elemento tetraédrico de quatro nós, o elemento hexaédrico de oito nós, dentre outros.

A seguir são ilustrados dois exemplos de aplicação da interpolação pseudolinear em um elemento bidimensional Lagrangiano de oito nós. Dados os valores nodais, os valores no interior do domínio são interpolados utilizando as funções de interpolação convencional e pseudolinear.

A Tabela 4.1 mostra os dados associados ao primeiro exemplo. Neste exemplo é atribuído o valor um para os três primeiros nós e zero para os restantes. A Figura 4.10 mostra os resultados correspondentes. Nesta figura é possível observar que a interpolação pseudolinear não gera valores negativos como é o caso da interpolação convencional.

Tabela 4.1 - Dados do segundo exemplo de interpolação.

nó	1	2	3	4
$\xi$	-1	0	1	1
$\eta$	-1	-1	-1	0
valor	1	1	1	0
nó	5	6	7	8
$\xi$	1	0	-1	-1
$\eta$	1	1	1	0
valor	0	0	0	0

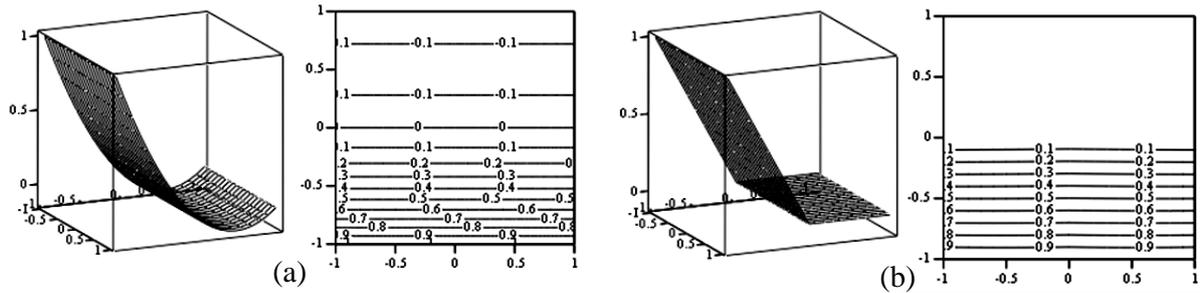


Figura 4.10 - Exemplo de interpolação; a) aproximação polinomial; b) aproximação pseudolinear.

No segundo caso, os valores atribuídos aos nós são mostrados na Tabela 4.2. Nesta tabela observa-se que é atribuído um para o nó dois e zero para os restantes. A Figura 4.11 mostra os resultados correspondentes.

Tabela 4.2 - Dados do primeiro exemplo de interpolação.

nó	1	2	3	4
$\xi$	-1	0	1	1
$\eta$	-1	-1	-1	0
valor	0	1	0	0
nó	5	6	7	8
$\xi$	1	0	-1	-1
$\eta$	1	1	1	0
valor	0	0	0	0

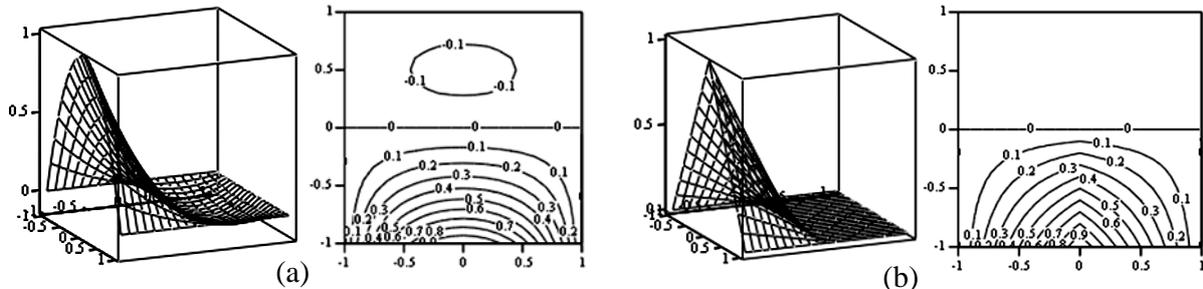


Figura 4.11 - Exemplo de interpolação; a) aproximação polinomial; b) aproximação pseudolinear.

Neste trabalho, as funções de interpolação pseudolinear são utilizadas alternativamente às funções de forma em alguns dos métodos para a análise de reforços vistos mais adiante. Uma vez que nestes métodos, os reforços atravessam elementos sólidos, existem pontos de interesse no interior dos elementos onde os deslocamentos precisam ser aproximados. No Capítulo 5 é realizada uma análise de elementos finitos para avaliar as diferenças na previsão de forças axiais nos reforços quando são utilizados os métodos de interpolação convencional e pseudolinear.

## 4.6 Extrapolação

Nos problemas formulados através de elementos finitos, as variáveis principais, tais como deslocamentos em problemas de equilíbrio e altura de carga hidráulica em problemas de fluxo, são calculados nos nós dos elementos. No entanto, variáveis secundárias ou variáveis derivadas são calculadas em pontos internos como, por exemplo, os pontos de integração. Estas variáveis podem ser, por exemplo, as componentes de tensão e deformação no problema de equilíbrio, ou velocidades de fluxo e gradientes hidráulicos no problema de fluxo. A Figura 4.12 mostra o processo de extrapolação a partir de valores internos em um elemento bidimensional.

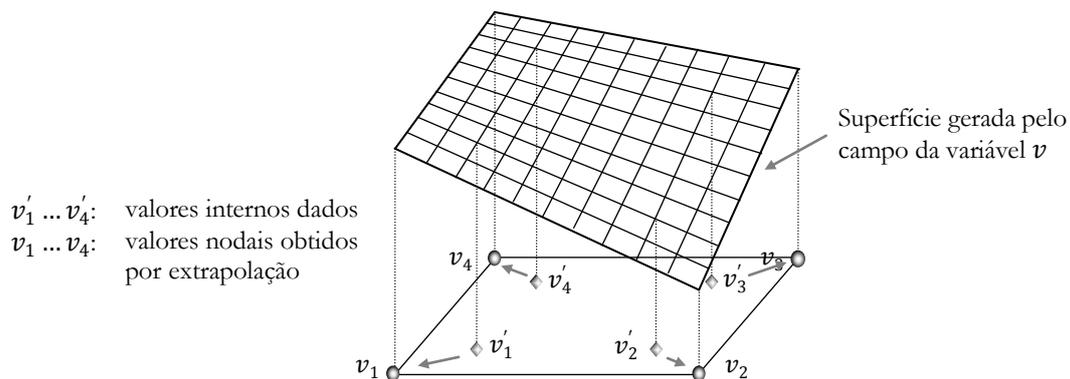


Figura 4.12 - Representação esquemática da extrapolação local em um elemento de quatro nós.

Muitas aplicações requerem que os valores calculados em pontos internos sejam extrapolados para os nós. Este é o caso da maioria de programas de pós-processamento de elementos finitos os quais determinam os valores nodais, em função dos valores nos pontos de integração, para logo calcular por interpolação o valor das variáveis ao longo dos elementos. Outra aplicação encontra-se no uso de malhas auto-adaptivas onde os valores calculados na malha devem ser transportados para os pontos de integração de uma nova malha (Zienkiewicz & Zhu, 1987). Uma aplicação em problemas associados à estabilidade em Geotecnia é na procura da superfície crítica através do método denominado de Programação Dinâmica (Yamagami & Ueta, 1988; Farias & Aguero-Martinez, 2005).

No caso do problema de barras embutidas, objeto desta tese, também é necessário calcular as tensões normais atuantes em alguns pontos da barra para verificar se há possibilidade de ruptura por deslizamento da interface, por exemplo. Estas tensões normais de confinamento da barra são provenientes do solo circundante, ou seja, neste caso, são calculadas em função do estado de tensões dos elementos atravessados. Portanto, faz-se necessário algum algoritmo de extrapolação das tensões calculadas nos pontos de integração dos elementos atravessados para os seus pontos nodais, e a partir destes valores nodais pode-se fazer uma interpolação para os pontos de interesse ao longo da barra.

A determinação dos valores nodais pode ser realizada através de um processo de minimização que envolve a malha inteira (Zienkiewicz & Taylor, 1989). Este procedimento é denominado de extrapolação global. Por outro lado, é possível realizar um processo de extrapolação independentemente para cada elemento. Este processo, denominado de extrapolação local, é menos abrangente que o anterior, gerando certa descontinuidade entre elementos vizinhos, a qual pode ser suavizada tomando-se uma média das contribuições de todos os elementos que compartilham o mesmo nó. Por outro lado, a extrapolação local pode ser melhor orientada à determinação do valor de uma variável em um ponto específico no próprio interior do elemento. Por exemplo, neste trabalho, é necessária a determinação do estado de tensão em um ponto arbitrário no interior de um dado elemento. Para isto, as tensões nos pontos de integração são extrapoladas para os nós do elemento e posteriormente interpoladas para o ponto desejado. Uma vez que este processo é repetido numerosas vezes, a utilização da extrapolação global neste tipo de casos se torna inviável devido ao elevado custo computacional.

Alguns procedimentos de extrapolação são descritos na literatura (Hinton & Campbell, 1974). Entretanto, estes procedimentos somente são aplicados a certos tipos de elementos e em casos particulares, o que justifica o desenvolvimento de um procedimento geral. Durand & Farias (2005) sugerem que um processo de extrapolação local generalizado deve atender aos seguintes requisitos:

- Ser aplicável a qualquer tipo de elemento convencional (elementos sólidos e linha), tanto em duas quanto em três dimensões;
- Ser válido para qualquer número de nós e qualquer número de pontos internos (i.e. pontos de integração);
- Minimizar o erro quando os valores nos pontos internos dados são recalculados por interpolação a partir dos valores obtidos por extrapolação;
- O procedimento deve manter uma suave variação do campo gerado dentro do elemento após a extrapolação, evitando oscilações.

A seguir, é brevemente deduzido o método proposto para a extrapolação local, o qual é dividido em três casos. O primeiro para quando o número de pontos dados ( $m$ ) é maior que o número de nós ( $n$ ), o segundo quando o número de pontos dados é igual ao número de nós e o terceiro quando o número de pontos dados é menor que o número de nós. Esta divisão é realizada, uma vez que, dependendo dos valores de  $m$  e  $n$ , podem ser obtidos sistemas de equações sobre-determinados, bem determinados e sub-determinados, os quais requerem tratamentos específicos. Em resumo, dado um vetor de valores internos  $\mathbf{v}'$  que contém valores

de uma variável em determinadas posições, deseja-se obter os correspondentes valores nodais  $\mathbf{v}$ .

Na dedução a seguir, é utilizado o conceito de matriz inversa generalizada de Moore e Penrose (Lancaster & Tismenetsky, 1985; Barnett, 1990). Este conceito indica que, dada uma matriz não quadrada  $\mathbf{A}$ , a sua inversa generalizada  $\mathbf{A}^+$  pode ser calculada pela seguinte equação, caso o número de linhas seja maior ao número de colunas:

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad (4.19)$$

e pela seguinte equação, caso o número de colunas seja maior ao número de linhas.

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \quad (4.20)$$

A seguir são abordados os três casos de extrapolação previamente mencionados.

#### 4.6.1 Quando o número de pontos dados é maior que o número de nós

Neste caso tem-se que  $m > n$ , ou seja, o número de dados é maior ao número de incógnitas, o que torna o sistema sobre-determinado. Desta forma, a solução deve ser obtida de tal forma que o erro seja minimizado.

Sendo  $v_i$  os valores nodais obtidos por extrapolação, o valor em cada ponto interno  $j$  pode ser recalculado em função destes valores. Isto pode ser expresso como:

$$v_j^r = \sum_{i=1}^n N_i^j v_i \quad (4.21)$$

onde  $v_j^r$  é o valor recalculado da variável no ponto dado  $j$  e  $N_i^j$  é a função de forma do nó  $i$  avaliada nas coordenadas locais do ponto dado  $j$ .

Esta equação também pode ser expressa como:

$$\begin{Bmatrix} v_1^r \\ v_2^r \\ \vdots \\ v_m^r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^1 & N_2^1 & \dots & N_n^1 \\ N_1^2 & N_2^2 & \dots & N_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_1^m & N_2^m & \dots & N_n^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

ou ainda em forma condensada como:

$$\mathbf{v}^r = \mathbf{N} \mathbf{v} \quad (4.23)$$

onde  $\mathbf{v}^r$  representa o vetor contendo os valores recalculados nos pontos dados,  $\mathbf{N}$  a matriz contendo as funções de interpolação do elemento e  $\mathbf{v}$  o vetor contendo os valores nodais.

Os valores recalculados  $\mathbf{v}^r$  podem, em alguma medida, diferir daqueles originalmente estabelecidos  $\mathbf{v}'$ . Assim, uma medida de erro gerado na extrapolação pode ser definida como:

$$E = \sum_{j=1}^m (v_j' - v_j^r)^2 \quad (4.24)$$

Esta medida de erro pode ser minimizada mediante a utilização do método de mínimos quadrados. Este procedimento é análogo ao utilizado por Hinton & Owen (1979) em processos de extrapolação. Desta forma, para obter os valores nodais  $\mathbf{v}$  que forneçam o menor erro possível, a Eq. 4.24 é derivada com relação aos valores nodais e posteriormente igualada a zero:

$$\frac{\partial E}{\partial v_i} = \frac{\partial}{\partial v_i} \sum_{j=1}^m (v_j' - v_j^r)^2 = 0 \quad (4.25)$$

Como  $v_j^r$  pode ser expresso em função dos valores nodais  $v_i$ , esta equação pode ser expressa em função dos valores nodais  $v_i$  e dos valores originalmente impostos nos pontos dados  $v_j'$ , resultando em um sistema de  $n$  equações com  $n$  incógnitas ( $v_1 \dots v_n$ ). A solução deste sistema de equações leva à determinação do vetor de valores nodais  $\mathbf{v}$  por meio da seguinte expressão:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{v}^r \quad (4.26)$$

O resultado de operar o termo  $(\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T$  é uma matriz  $n \times m$  a qual pode ser aplicada a qualquer vetor  $\mathbf{v}^r$  com  $m$  valores correspondentes aos pontos internos dados, obtendo assim os  $n$  valores nodais correspondentes.

Utilizando o conceito de matriz inversa generalizada, o vetor  $\mathbf{v}$  pode ainda ser expresso pela seguinte equação, onde  $\mathbf{N}^+$  corresponde à matriz inversa generalizada de  $\mathbf{N}$ :

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}^+ \mathbf{v}' \quad (4.27)$$

#### 4.6.2 Quando o número de pontos dados é igual ao número de nós.

Quando  $m = n$ , o problema tem uma única solução, e os valores dados podem ser exatamente reproduzidos por interpolação dos valores nodais previamente calculados, ou seja, o erro dado pela Eq. 4.24 é igual a zero. Neste caso a matriz  $\mathbf{N}$  é quadrada e inversível e o vetor  $\mathbf{v}$  pode ser calculado simplesmente por:

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{v}' \quad (4.28)$$

#### 4.6.3 Quando o número de pontos dados é menor que o número de nós.

Finalmente, quando  $m < n$  o problema é sub-determinado uma vez que o número de incógnitas é superior ao número de dados. A Eq. 4.26 não pode ser utilizada, pois o termo

$\mathbf{N}^T \mathbf{N}$ , neste caso, é singular. Por esta razão, a seguir é formulado um procedimento alternativo.

Considere-se que os  $n$  valores nodais podem ser expressos como uma combinação linear das funções de forma  $N_i^j$ , sendo  $N_i^j$  a função de forma do nó  $i$  avaliada no ponto dado  $j$ . Esta hipótese pode ser representada matematicamente como:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 N_1^1 + a_2 N_1^2 + \dots + a_m N_1^m \\ a_1 N_2^1 + a_2 N_2^2 + \dots + a_m N_2^m \\ \vdots \\ a_1 N_n^1 + a_2 N_n^2 + \dots + a_m N_n^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^m a_j N_1^j \\ \sum_{j=1}^m a_j N_2^j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_j N_n^j \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

onde  $a_j$  ( $j = 1 \dots m$ ) representam os  $m$  coeficientes da combinação linear a serem determinados.

Esta equação pode ser expressa em forma condensada por meio da seguinte expressão, onde  $\mathbf{a}$  representa o vetor contendo os  $m$  coeficientes.

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}^T \mathbf{a} \quad (4.30)$$

Uma vez determinados os coeficientes, os valores nos pontos dados poderiam ser recalculados por interpolação como:

$$\begin{Bmatrix} v_1^r \\ v_2^r \\ \vdots \\ v_m^r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^m a_j N_i^j) N_i^1 \\ \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^m a_j N_i^j) N_i^2 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^m a_j N_i^j) N_i^m \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

O erro desta estimativa pode também ser definido pela Eq. 4.24. Os coeficientes  $a_1 \dots a_m$  podem ser determinados através da minimização deste erro utilizando o método de mínimos quadrados. Assim, derivando a Eq. 4.24 com relação aos coeficientes  $a_1 \dots a_m$ , tem-se:

$$\frac{\partial E}{\partial a_k} = \frac{\partial}{\partial a_k} \sum_{j=1}^m (v_j' - v_j^r)^2 = 0 \quad (4.32)$$

Como  $v_j^r$  pode ser expresso em função dos valores nodais  $v_i$ , esta equação pode ser expressa em função dos coeficientes e os valores originalmente impostos nos pontos dados  $v_j'$  resultando em um sistema de  $m$  equações com  $m$  incógnitas. A solução deste sistema de equações leva à determinação do vetor  $\mathbf{a}$ , que contém  $a_1 \dots a_m$ , mediante a seguinte expressão:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{v}' \quad (4.33)$$

Substituindo esta equação na Eq. 4.30, os valores nodais podem ser calculados por  $\mathbf{v} = \mathbf{N}^T (\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{v}'$ , sendo o mesmo que:

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}^+ \mathbf{v}' \quad (4.34)$$

Como o sistema é subdeterminado, a Eq. 4.34, mesmo que fornecendo um erro igual a zero (avaliando a Eq. 4.24), pode gerar valores nodais que não satisfazem o critério de movimento de corpo rígido (Zienkiewicz & Taylor, 1989). Por exemplo, dados valores iguais nos pontos dados (o que representaria um campo constante) a Eq. 4.34 produz um conjunto de valores nodais que diferem do valor imposto nos pontos dados. Quando visualizada, sobre o elemento, a superfície que representa o campo produzido pelos valores nodais gerados, pode-se observar a presença de oscilações.

Neste caso, para garantir uma variação suave do campo gerado e evitar oscilações é necessário acrescentar mais equações ao sistema. Evidentemente, estas equações poderiam derivar, por exemplo, de uma medida da curvatura da superfície que representa o campo gerado. No entanto, isto requer algumas derivadas de ordem superior da função que definiria a superfície do campo gerado, formando o processo de minimização mais complexo. Entretanto, um procedimento simples que tenta manter uma suave variação do campo, sem acrescentar novas equações ou o cálculo de mais derivadas, é descrito a seguir.

A única situação na qual a Eq. 4.34 garante, em campos constantes, valores nodais iguais aos valores dados, é quando os valores a serem extrapolados são todos iguais a zero. Esta característica é utilizada para melhorar o processo de extrapolação, inicialmente ajustando os pontos dados por meio de uma função (que pode ser de uma reta, plano ou hiper-plano; dependendo da dimensão do elemento). O objetivo desta equação é representar uma nova referência para os dados a serem extrapolados. Assim, os valores impostos nos pontos dados são diminuídos pelos valores nesses pontos obtidos usando a função de ajuste. O processo pode ser interpretado como uma projeção. Os valores trasladados podem ser agora extrapolados para os nós (Figura 4.13). Finalmente, os valores assim obtidos são levados de volta para a referência original mediante a adição de uma quantidade que representa o valor da função de ajuste avaliada nos correspondentes pontos nodais.

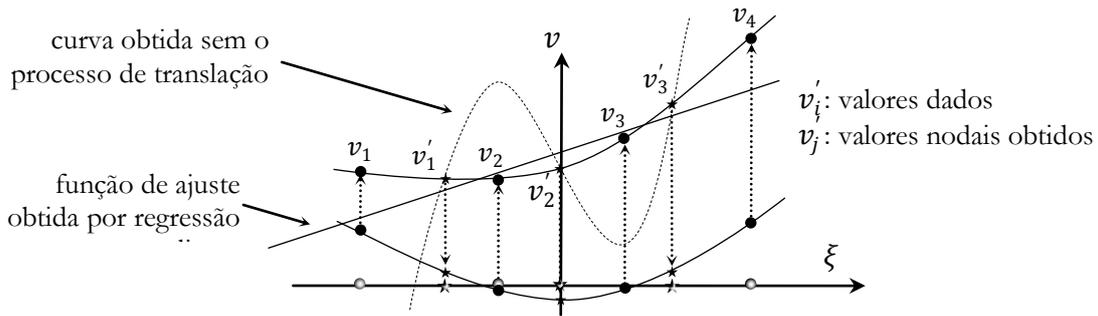


Figura 4.13 - Interpretação geométrica do processo de translação em 1D.

Este procedimento garante um mínimo erro de ajuste e ao mesmo tempo preserva a tendência dada pelos pontos internos, sem a necessidade de adicionar novas equações ou restrições. Considerando este procedimento, a Eq. 4.34 pode ser modificada para:

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}^+(\mathbf{v}' - \bar{\mathbf{v}}') + \bar{\mathbf{v}} \quad (4.35)$$

em que  $\bar{\mathbf{v}}'$  e  $\bar{\mathbf{v}}$  representam os valores associados às translações dos valores a partir dos pontos dados e dos nós, respectivamente.

A função de melhor ajuste  $P$  é representada pela equação de uma linha em 1D, um plano em 2D, e um hiper-plano em 3D, respectivamente. Assim, para os três casos, tem-se, respectivamente:

$$\begin{aligned} P(\xi) &= b_1\xi + b_2 \\ P(\xi, \eta) &= b_1\xi + b_2\eta + b_3 \\ P(\xi, \eta, \zeta) &= b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta + b_4 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Nesta equação,  $b_i \dots b_{D+1}$  são os coeficientes que definem  $P$ , sendo  $D$  a dimensão do elemento. Estes coeficientes são obtidos em função das coordenadas locais dos pontos dados,  $\xi'$ , e dos valores a serem extrapolados,  $\xi$ . Estas coordenadas locais podem ser representadas para 1D, 2D e 3D, respectivamente, por:

$$\xi' = \begin{bmatrix} \xi'_1 & 1 \\ \xi'_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \xi'_m & 1 \end{bmatrix}; \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 & 1 \\ \xi_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \xi_n & 1 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$\xi' = \begin{bmatrix} \xi'_1 & \eta'_1 & 1 \\ \xi'_2 & \eta'_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi'_m & \eta'_m & 1 \end{bmatrix}; \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_n & \eta_n & 1 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$\xi' = \begin{bmatrix} \xi'_1 & \eta'_1 & \zeta'_1 & 1 \\ \xi'_2 & \eta'_2 & \zeta'_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi'_m & \eta'_m & \zeta'_m & 1 \end{bmatrix}; \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_n & \eta_n & \zeta_n & 1 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Os coeficientes da equação de melhor ajuste podem ser agrupados em um vetor  $\mathbf{b}$  e serem calculados por regressão linear obtendo  $\mathbf{b} = (\xi'^T \xi')^{-1} \xi'^T \mathbf{v}'$ , ou simplesmente:

$$\mathbf{b} = \xi'^+ \mathbf{v}' \quad (4.40)$$

Após a obtenção do vetor  $\mathbf{b}$ , os vetores  $\bar{\mathbf{v}}'$  e  $\bar{\mathbf{v}}$  podem ser calculados respectivamente por  $\bar{\mathbf{v}}' = \xi' \mathbf{b}$  e  $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\xi} \mathbf{b}$ , ou ainda por:

$$\bar{\mathbf{v}}' = \xi' \xi'^+ \mathbf{v}' \quad (4.41)$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\xi} \xi'^+ \mathbf{v}' \quad (4.42)$$

Finalmente, substituindo na Eq. 4.35 e após algumas simplificações, os valores nodais podem ser calculados por:

$$\mathbf{v} = [\mathbf{N}^+ (\mathbf{I} - \xi' \xi'^+) + \bar{\xi} \xi'^+] \mathbf{v}' \quad (4.43)$$

É importante notar que o termo  $\mathbf{N}^+$  das Eqs. 4.27 e 4.43, depende somente do tipo de elemento. Assim este termo pode ser calculado somente uma vez para cada tipo de elemento e salvo para ser usado em todos os elementos da malha inteira.

Para ter uma visão mais clara do processo de extrapolação local proposto, a Figura 4.14 mostra o algoritmo correspondente.

<b>Entrada:</b> Vetor de valores no interior do elemento a serem extrapolados $\mathbf{v}'$ , número de nós $n$ , número de pontos internos $m$ , coordenadas locais dos pontos internos $\xi'$ , coordenadas locais dos nós $\xi$ .	
<b>Saída:</b> Vetor de valores nodais $\mathbf{v}$ .	
<b>Se</b> $m = n$	<i>!comparação entre o número de nós e pontos dados</i>
$\mathbf{E} = \mathbf{N}^{-1}$	<i>!matriz de extrapolação</i>
<b>Se não</b>	
<b>Se</b> $m > n$	<i>!comparação entre o número de nós e pontos dados</i>
$\mathbf{E} = \mathbf{N}^+$	<i>!matriz de extrapolação</i>
<b>Se não</b>	
$\mathbf{E} = \mathbf{N}^+ (\mathbf{I} - \xi' \xi'^+) + \bar{\xi} \xi'^+$	<i>!matriz de extrapolação</i>
$\mathbf{v} = \mathbf{E} \mathbf{v}'$	<i>!extrapolação de valores internos</i>
<b>retornar</b> $\mathbf{v}$	

Figura 4.14 - Algoritmo utilizado na extrapolação de valores internos para os nós.

#### 4.6.4 Exemplos numéricos

A seguir, são realizados dois exemplos em que se aplicam o processo de extrapolação.

*Exemplo 1.*

Neste exemplo, é considerado um elemento quadrilateral com quatro nós e quatro pontos de dados (pontos de integração de Gauss) cujas coordenadas locais são mostradas na Tabela 4.3. É considerado também um conjunto de valores definidos nos pontos de integração e que são mostrados no final da Tabela 4.3.

Assim, tem-se que o número de nós é igual ao de pontos de integração, e o problema pode ser resolvido pela Eq. 4.28. Os resultados da extrapolação se encontram na Tabela 4.4. A Figura 4.15 mostra a superfície gerada por interpolação dos valores nodais obtidos.

Tabela 4.3 - Dados do exemplo 1.

Nó	1	2	3	4
$\xi$	-1,00	1,00	1,00	-1,00
$\eta$	-1,00	-1,00	1,00	1,00
ponto dado	p1	p2	p3	p4
$\xi$	-0,577	0,577	0,577	-0,577
$\eta$	-0,577	-0,577	0,577	0,577
valor	1,00	0,00	0,00	0,00

Tabela 4.4 - Resultados do Exemplo 1.

Nó	1	2	3	4
valor	1,866	-0,500	0,134	-0,500
ponto dado	p1	p2	p3	p4
erro	0,00	0,00	0,00	0,00

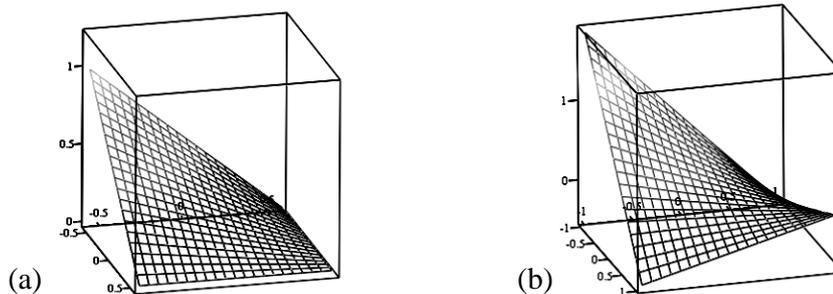


Figura 4.15 - Superfícies geradas por interpolação de valores nodais: a) superfície limitada pelos pontos de integração; b) superfície limitada pelos nós.

### Exemplo 2

É considerado um elemento quadrilateral com oito nós e quatro pontos de integração cujas coordenadas locais são dadas na Tabela 4.5. Neste exemplo, foi escolhido deliberadamente um conjunto de dados nos pontos de integração os quais fazem parte de um plano. Esta escolha foi feita com a finalidade de verificar a tendência dos valores extrapolados, ou seja,

neste exemplo, espera-se que os valores extrapolados se encontrem contidos no plano formado pelos valores dados.

Tabela 4.5 - Dados do exemplo 2.

nó	1	2	3	4
$\xi$	-1,00	0,00	1,00	1,00
$\eta$	-1,00	-1,00	-1,00	0,00
nó	5	6	7	8
$\xi$	1,00	0,00	-1,00	-1,00
$\eta$	1,00	1,00	1,00	0,00
ponto dado	1	2	3	4
$\xi$	-0,577	0,577	0,577	-0,577
$\eta$	-0,577	-0,577	0,577	0,577
valor	1,00	0,00	-1,00	0,00

Para efetuar a extrapolação, e obter os correspondentes valores nodais, foram utilizadas as Eqs. 4.34 e 4.43 com o objetivo de avaliar a qualidade dos resultados, os quais são mostrados na Tabela 4.6.

Tabela 4.6 - Resultados do Exemplo 2.

nó	1	2	3	4
valor Eq. 4.34	1,733	-0,867	0,000	-0,867
valor Eq. 4.43	0,577	1,155	0,000	-1,155
nó	5	6	7	8
valor Eq. 4.34	-1,733	-0,867	0,000	0,867
valor Eq. 4.43	-0,577	-1,155	0,000	1,155
Ponto dado	1	2	3	4
erro Eq. 4.34	0,00	0,00	0,00	0,00
erro Eq. 4.43	0,00	0,00	0,00	0,00

Pode ser visto que as duas equações satisfazem à condição de erro mínimo. No entanto, quando a Eq. 4.34 é utilizada, a superfície apresenta oscilações (Figura 4.16a). Nota-se também que a Eq. 4.43 fornece uma tendência mais apropriada, ou seja, os valores extrapolados fazem parte do mesmo plano formado pelos valores dados (Figura 4.16b).

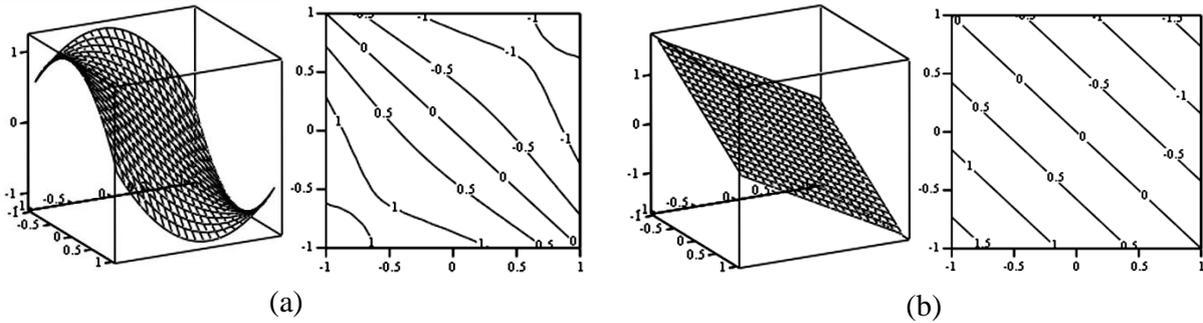


Figura 4.16 - Superfícies geradas por interpolação de valores nodais: a) superfície gerada utilizando a Eq. 4.34; b) superfície gerada utilizando a Eq. 4.43.

#### 4.7 Orientação em um ponto qualquer de uma barra curva

No estudo de elementos com geometria 1D, tais como barras, torna-se necessária a determinação da sua orientação em um ponto arbitrário do seu domínio, especialmente quando os elementos são curvos. A determinação da orientação de uma barra qualquer é dada aqui como generalização.

A orientação em um dado ponto de uma barra pode ser definida por meio de um vetor unitário  $[r_1 \ r_2 \ r_3]$  como mostra a Figura 4.17. Neste ponto, cuja coordenada local é  $\xi$ , a orientação é definida como a derivada das coordenadas globais  $\mathbf{x} = [x \ y \ z]$  com relação à coordenada longitudinal  $L$ :

$$[r_1 \ r_2 \ r_3] = \left[ \frac{\partial x}{\partial L} \quad \frac{\partial y}{\partial L} \quad \frac{\partial z}{\partial L} \right] = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial L} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial L} \quad (4.44)$$

Sendo que a matriz Jacobiana de transformação de coordenadas é dada por  $\mathbf{J} = \partial \mathbf{x} / \partial \xi$  e seu correspondente módulo por  $J = \partial L / \partial \xi$ , o cálculo da orientação num ponto da barra se resume a:

$$[r_1 \ r_2 \ r_3] = \frac{\mathbf{J}}{|\mathbf{J}|} = \frac{\mathbf{J}}{J} \quad (4.45)$$

Esta expressão será utilizada posteriormente quando seja necessário fazer referência à orientação de uma barra.

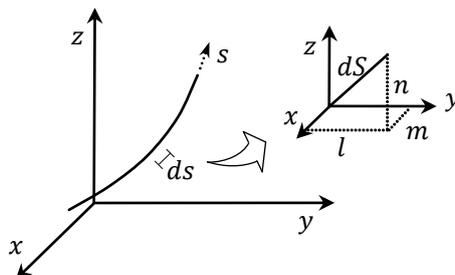


Figura 4.17 - Inclinação de uma barra em um dado ponto.

## Capítulo 5

### Modelagem dos Reforços

Este capítulo contempla a formulação utilizada na modelagem de reforços. Desta forma, são vistos aspectos associados ao MEF e à modelagem constitutiva dos reforços e da interface. Na representação do reforço pelo MEF, três métodos são descritos: o discreto, o embutido e o semi-embutido. Uma característica muito importante dos dois últimos é que estes permitem a análise de estruturas reforçadas onde a malha não depende da geometria nem da disposição dos reforços. Neste sentido, estes métodos permitem que diferentes configurações de reforço sejam analisadas para um mesmo domínio utilizando uma mesma malha de fundo. Isto é possível por que os elementos que representam os reforços não precisam possuir conectividade com os elementos sólidos, sendo que tais elementos sólidos podem ser atravessados.

Na formulação dos métodos discreto e embutido apresentada é considerada a hipótese de aderência perfeita entre o reforço e o solo, ou seja, estes métodos não consideram o deslocamento relativo existente entre o reforço e o solo. A formulação pelo método embutido pode ser derivada da compatibilidade de deslocamentos ou de deformações entre os elementos de reforço e os elementos sólidos atravessados. Uma das abordagens aqui apresentada é similar à utilizada por Durand (2003), a qual é derivada da compatibilidade de deslocamentos. No entanto, uma formulação alternativa derivada da compatibilidade de deformações é também considerada.

Por outro lado, o deslocamento relativo pode ser considerado por meio do método semi-embutido. O método semi-embutido é um novo método introduzido nesta pesquisa. Este método utiliza elementos de interface para representar o contato entre o reforço e o solo. Assim, é apresentada a formulação do elemento finito de interface e a correspondente modelagem constitutiva.

Adicionalmente, neste capítulo são apresentados os testes de validação da formulação proposta. Finalmente é realizada uma discussão sobre a aplicação e limitações dos métodos e da modelagem constitutiva estudados.

### 5.1 Abordagem pelo método discreto

A análise de estruturas reforçadas através do método discreto corresponde à utilização de elementos tipo barra na forma convencional do MEF. Assim, a posição dos elementos de barra na malha de elementos finitos é tal que seus nós são sempre coincidentes com os nós dos elementos circundantes. A Figura 5.1 mostra esquematicamente a posição dos elementos de barra com relação aos elementos sólidos.

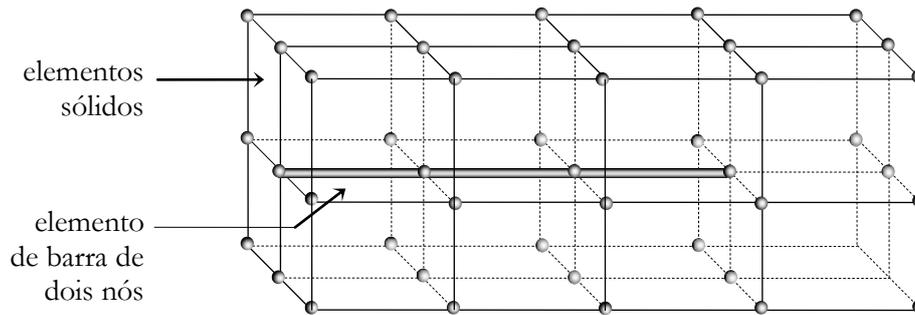


Figura 5.1 - Posição dos reforços com relação aos elementos sólidos numa análise pelo Método Discreto.

Para proceder com este método numa análise de equilíbrio é necessária a determinação da matriz de rigidez de um elemento de barra. A formulação da matriz de rigidez para uma barra de dois nós é bastante comum na literatura. Entretanto, neste trabalho é apresentada a determinação da matriz de rigidez de uma barra de  $n$  nós no espaço 3D.

Para formular a matriz de rigidez de uma barra é necessária a determinação de uma expressão para a deformação axial no seu domínio em função dos seus deslocamentos nodais. Desta forma, para um ponto qualquer que pertença a uma barra de comprimento  $L$ , é possível associar a este ponto um comprimento infinitesimal  $dL$ . A deformação axial neste ponto é dada então por  $\frac{\Delta dL}{dL}$ . Considerando que os componentes de deslocamento no ponto, nas três direções cartesianas, são dadas por  $\mathbf{u} = [u \ v \ w]^T$ , as componentes da variação do comprimento com relação a  $dL$  são dadas por  $\frac{d\mathbf{u}}{dL} = \left[ \frac{\partial u}{\partial L} \ \frac{\partial v}{\partial L} \ \frac{\partial w}{\partial L} \right]^T$ . Projetando o vetor  $\frac{d\mathbf{u}}{dL}$  na direção  $[r_1 \ r_2 \ r_3]$  da barra é possível obter a deformação axial da barra no ponto em questão por meio de:

$$\varepsilon = [r_1 \ r_2 \ r_3] \left[ \frac{\partial u}{\partial L} \ \frac{\partial v}{\partial L} \ \frac{\partial w}{\partial L} \right]^T \quad (5.1)$$

Considerando que a localização do ponto na barra é dada pela coordenada local  $\xi$ , os deslocamentos neste ponto podem ser expressos em função dos deslocamentos nodais utilizando as funções de forma. Desta forma e, utilizando a regra da cadeia, é possível expressar a deformação axial como:

$$\varepsilon = [r_1 \ r_2 \ r_3] \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial L} u_i \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial L} v_i \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial L} w_i \right]^T \quad (5.2)$$

Considerando a matriz Jacobiana  $\mathbf{J}$  e seu correspondente módulo  $J$  avaliados em  $\xi$ , é possível substituir os termos  $\frac{\partial \xi}{\partial L}$  por  $\frac{1}{J}$  e  $[r_1 \ r_2 \ r_3]$  por  $\frac{\mathbf{J}}{J}$  na Eq. 5.2. A determinação da matriz Jacobiana para um elemento de barra pode ser vista no item 4.4. Realizando as substituições antes indicadas obtém-se:

$$\varepsilon = \frac{\mathbf{J}}{J^2} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} u_i \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} v_i \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} w_i \right]^T \quad (5.3)$$

Organizando esta equação de forma conveniente é possível reescrevê-la em forma matricial como:

$$\varepsilon = \frac{\mathbf{J}}{J^2} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{(1 \times 3n)}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

Esta equação associa a deformação axial com o vetor de deslocamentos nodais por meio da matriz deformação-deslocamento  $\mathbf{B}$ . Note-se que as operações dadas na Eq. 5.4 para determinar  $\mathbf{B}$  fornecem como resultado uma matriz linha.

Uma vez obtida a matriz  $\mathbf{B}$ , a matriz de rigidez de um elemento de barra pode ser calculada por meio da formulação convencional do MEF como:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T D \mathbf{B} dV \quad (5.5)$$

onde  $D$  representa o escalar constitutivo que relaciona as taxas de tensão e deformação axial ( $\dot{\sigma} = D \dot{\varepsilon}$ ). Para uma barra linear elástica tem-se que  $D = E$ , em que  $E$  é o módulo de Young. Adicionalmente,  $V$  representa o volume do elemento de barra. O diferencial  $dV$  pode ser substituído por  $dV = A dL$ , em que  $L$  o comprimento e  $A$  é a área da secção transversal da barra.

Após a obtenção dos deslocamentos nodais e do incremento de deformações, as tensões axiais são obtidas por meio da relação constitutiva (por exemplo, linear elástica). Finalmente, o incremento de forças internas correspondente para um acréscimo de tensão axial  $\Delta \sigma$  pode ser calculado através de:

$$\Delta \mathbf{F} = \int_V \mathbf{B}^T \Delta \sigma dV \quad (5.6)$$

Uma vez que os nós dos elementos de barra se encontram diretamente conectados aos elementos da malha, este método assume que existe uma aderência perfeita entre os reforços e o meio circundante. Esta hipótese não é conveniente na simulação de estruturas reforçadas como o solo grampeado uma vez que desconsidera as propriedades da interface na qual é possível acontecer deslizamento e/ou ruptura. No entanto, é possível a consideração de elementos de interface entre os reforços e os elementos sólidos. Uma vez que neste trabalho é apresentado posteriormente o método semi-embutido, o qual leva em conta o comportamento da interface, o uso de elementos de interface pelo método discreto não é explorado.

Por outro lado, existe uma grande dificuldade em se aplicar o método discreto no estudo de estruturas reforçadas devido aos problemas na geração da malha de elementos finitos. Na análise de um caso real é possível ter reforços de comprimentos e inclinações variados, para os quais a malha deve estar adequadamente adaptada em termos de conectividade. Obter esta adaptação não é uma tarefa fácil devido à escassez de geradores que considerem a presença de reforços, especialmente em situações 3D. A geração de malhas nestas condições pode conduzir a malhas de baixa qualidade ou ao aumento de elementos e nós, acrescentando o número de graus de liberdade do sistema.

## 5.2 Abordagem pelo método embutido

Este método possibilita uma representação dos reforços na sua exata posição espacial, sem nenhum incremento nos graus de liberdade no sistema, uma vez que permite que os reforços atravessem livremente os elementos sólidos da malha de elementos finitos. Desta forma, é possível a utilização de uma única malha de fundo em uma análise na qual se pretende estudar diferentes configurações de reforço. A Figura 5.2 mostra esquematicamente a disposição de um reforço com relação aos elementos sólidos.

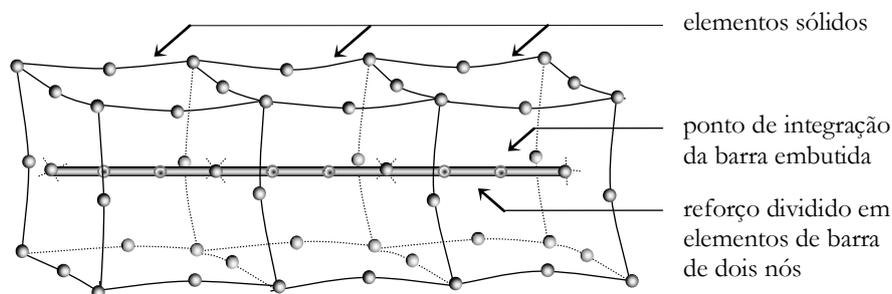


Figura 5.2 - Possível posição dos reforços numa análise pelo Método Discreto

A parte inicial na aplicação deste método consiste na discretização dos reforços. Uma vez definidas as posições dos reforços para a análise, cada reforço é discretizado, ou dividido, em

elementos de barra denominados “embutidos”. Esta divisão é realizada em função dos elementos sólidos atravessados, de forma que para cada elemento sólido atravessado corresponde um elemento de barra embutido. Este procedimento de divisão pode ser realizado por meio do algoritmo apresentado previamente no item 4.3. Os elementos de barra embutidos obtidos são considerados “virtuais” uma vez que estes não possuem conectividade com a malha de elementos e a sua contribuição é considerada com aumento na rigidez do elemento atravessado. Desta maneira, os elementos embutidos não possuem nós visíveis em nível global, razão pela qual, não é possível a aplicação de condições de contorno diretamente sobre estes reforços.

A contribuição de um elemento de barra embutido pode ser levada em conta em termos da sua matriz de rigidez. No entanto, é necessário determinar uma matriz de rigidez equivalente cujas dimensões sejam compatíveis com as do elemento sólido. Desta forma, as matrizes de rigidez da barra embutida e do sólido atravessado podem ser somadas posteriormente durante a montagem da matriz de rigidez global.

A principal hipótese utilizada neste método é a existência de aderência perfeita entre os reforços e o solo. Nesta hipótese, os dois materiais possuem o mesmo campo de deslocamentos e conseqüentemente de deformações. Deste modo é possível derivar a formulação da matriz de rigidez por meio da compatibilidade de deslocamentos ou de deformações. A seguir, são apresentadas as formulações correspondentes a estas duas alternativas.

### 5.2.1 Formulação derivada da compatibilidade de deslocamentos

A formulação aqui apresentada é baseada nos trabalhos de Andrade (2003), e Durand (2003). Inicialmente, considere-se um elemento sólido atravessado por um elemento de barra embutido, como mostrado na Figura 5.3. Nesta figura podem-se observar os nós do elemento embutido, dois dos quais correspondem aos pontos de intercepção com as faces do elemento sólido. Adicionalmente, pode-se observar também a localização dos pontos de integração do elemento embutido.

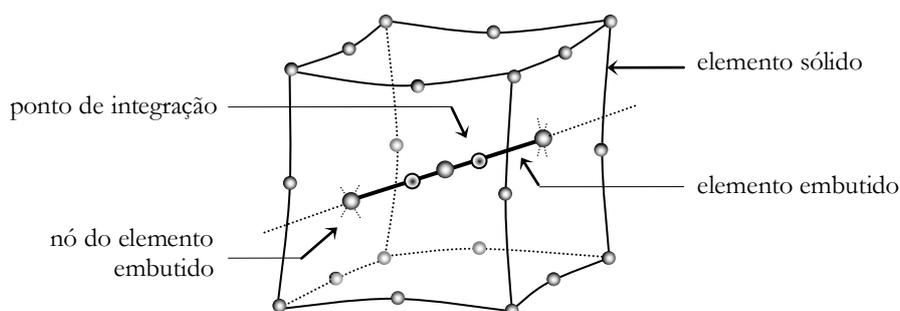


Figura 5.3 - Pontos de integração do elemento de barra embutido.

Por meio das funções de interpolação do elemento sólido atravessado, é possível expressar os deslocamentos dos nós do elemento embutido em função dos deslocamentos nodais do elemento atravessado. Desta forma pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} u_{emb_1} \\ v_{emb_1} \\ w_{emb_1} \\ u_{emb_2} \\ v_{emb_2} \\ \vdots \\ u_{emb_m} \\ v_{emb_m} \\ w_{emb_m} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,1} & 0 & 0 & N_{2,1} & 0 & \cdots & N_{n,1} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,1} & 0 & 0 & N_{2,1} & \cdots & 0 & N_{n,1} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & N_{n,1} \\ N_{1,2} & 0 & 0 & N_{2,2} & 0 & \cdots & N_{n,2} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,2} & 0 & 0 & N_{2,2} & \cdots & 0 & N_{n,2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{1,m} & 0 & 0 & N_{2,m} & 0 & \cdots & N_{n,m} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,m} & 0 & 0 & N_{2,m} & \cdots & 0 & N_{n,m} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,m} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & N_{n,m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{atr_1} \\ v_{atr_1} \\ w_{atr_1} \\ u_{atr_2} \\ v_{atr_2} \\ \vdots \\ u_{atr_n} \\ v_{atr_n} \\ w_{atr_n} \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

onde  $m$  é o número de nós da barra embutida,  $n$  é o número de nós do elemento atravessado,  $u_{emb_1}, v_{emb_1}, w_{emb_1}, \dots, u_{emb_m}, v_{emb_m}, w_{emb_m}$  são os deslocamentos nodais da barra embutida,  $u_{atr_1}, v_{atr_1}, w_{atr_1}, \dots, u_{atr_n}, v_{atr_n}, w_{atr_n}$  são os deslocamentos nodais do elemento atravessado e  $N_{i,j}$  representa a função de forma do nó  $i$  do elemento atravessado avaliada na posição correspondente à do nó  $j$  do elemento embutido. A avaliação de  $N_{i,j}$  requer a determinação das coordenadas locais do nó  $j$  da barra embutida no sistema local associado com o elemento atravessado. Estas coordenadas locais podem ser calculadas por meio do mapeamento inverso das coordenadas globais do nó  $j$  da barra. A Eq. 5.7 pode ser escrita na forma condensada como  $\mathbf{U}_{emb} = \mathbf{N}'\mathbf{U}_{atr}$  em que  $\mathbf{U}_{emb}$  é o vetor de deslocamentos da barra,  $\mathbf{U}_{atr}$  é a matriz de deslocamentos do elemento atravessado e  $\mathbf{N}'$  é a matriz que permite associar estes deslocamentos.

Tendo associado os deslocamentos de ambos os elementos, a deformação axial da barra pode ser escrita em função dos deslocamentos nodais do elemento atravessado como  $\varepsilon = \mathbf{B}\mathbf{N}'\mathbf{U}_{atr}$ , sendo que  $\mathbf{B}$  é a matriz deformação-deslocamento de um elemento de barra convencional. Considerando a matriz linha  $\mathbf{B}_{emb} = \mathbf{B}\mathbf{N}'$ , a deformação axial pode ser reescrita como:

$$\varepsilon_{emb} = \mathbf{B}_{emb} \mathbf{U}_{atr} \quad (5.8)$$

Uma vez expressa a deformação axial da barra em função dos deslocamentos nodais do elemento atravessado, a matriz de rigidez do elemento de barra embutido pode ser determinada por:

$$\mathbf{K}_{emb} = \int_V \mathbf{B}_{emb}^T D \mathbf{B}_{emb} dV \quad (5.9)$$

A integração numérica desta equação é realizada através dos pontos de integração do elemento de barra (Figura 5.3). Durante a montagem da matriz de rigidez global, a matriz de

rigidez do elemento embutido pode ser adicionada à do elemento sólido ou pode ser montada diretamente sobre a matriz de rigidez global, como se houvesse dois elementos sobrepostos naquela região. Após a montagem e a solução do sistema, o vetor de incrementos de forças internas de um elemento de barra embutido pode ser calculado em função do incremento de tensão axial  $\Delta\sigma$  como:

$$\Delta\mathbf{F}_{emb} = \int_V \mathbf{B}_{emb}^T \Delta\sigma dV \quad (5.10)$$

O tamanho do vetor  $\Delta\mathbf{F}_{emb}$  é compatível com as dimensões do elemento atravessado.

### 5.2.2 Formulação derivada da compatibilidade de deformações

A abordagem aqui apresentada é baseada nos trabalhos de Elwi & Hrudey (1989) e Hartl *et al.* (2000). Nesta abordagem, é necessário obter a deformação axial da barra a partir do campo de deformações do elemento atravessado. O vetor de deformações dentro do elemento sólido é dado por  $\boldsymbol{\varepsilon}_{atr} = \mathbf{B}_{atr} \mathbf{U}_{atr}$ , em que  $\mathbf{B}_{atr}$  representa a matriz deformação-deslocamento do elemento atravessado. Dado este vetor, a determinação da deformação axial em um ponto do domínio da barra pode ser obtida por meio da projeção do vetor  $\boldsymbol{\varepsilon}_{atr}$  na direção  $[r_1 \ r_2 \ r_3]$  da barra. Esta projeção é realizada por meio de uma matriz  $\mathbf{T}$ , de forma que a deformação axial resulta definida como  $\varepsilon_{emb} = \mathbf{T}\boldsymbol{\varepsilon}_{atr}$  ou em forma mais explícita como:

$$\varepsilon_{emb} = \mathbf{T} \underbrace{\mathbf{B}_{atr} \mathbf{U}_{atr}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_{atr}} \quad (5.11)$$

onde a matriz  $\mathbf{T}$  pode ser expressa como  $\mathbf{T} = [r_1^2 \ r_2^2 \ r_3^2 \ r_1 r_2 \ r_2 r_3 \ r_1 r_3]$ .

Uma vez obtida a deformação axial da barra em função dos deslocamentos nodais do elemento atravessado, a matriz de rigidez do elemento embutido fica determinada por:

$$\mathbf{K} = \int (\mathbf{T}\mathbf{B}_{atr})^T D \mathbf{T}\mathbf{B}_{atr} dV \quad (5.12)$$

Na integração numérica desta equação, a matriz  $\mathbf{B}_{atr}$  deve ser avaliada para os pontos de integração do elemento embutido. Desta forma, é necessário encontrar as coordenadas locais destes pontos no sistema associado ao elemento atravessado. Estas coordenadas podem ser obtidas por meio da aplicação do mapeamento inverso nas coordenadas globais dos pontos de integração da barra.

Após a solução do sistema e da determinação dos deslocamentos nodais e do incremento de tensão axial  $\Delta\sigma$  no elemento embutido, as forças internas podem ser calculadas como:

$$\Delta\mathbf{F} = \int_V (\mathbf{T}\mathbf{B}_{atr})^T \Delta\sigma dV \quad (5.13)$$

Durante a integração numérica desta equação, devem ser levadas em conta as mesmas considerações feitas para a matriz de rigidez.

### 5.3 Abordagem pelo método semi-embutido

Este método constitui uma nova abordagem na análise de inclusões combinando algumas características favoráveis dos métodos discreto e embutido, no entanto, utilizando uma estratégia diferente. Entre estas características se encontram a possibilidade de aplicar condições de contorno diretamente nas inclusões e a simulação do deslocamento relativo existente entre o reforço e o solo. De maneira similar ao método embutido, os reforços são inicialmente discretizados em segmentos correspondentes a cada elemento atravessado. Entretanto, estes segmentos são considerados como elementos de barra reais que se conectam aos elementos sólidos por meio de elementos de interface. As barras discretas atendem à formulação vista no item 5.1, enquanto que a formulação dos elementos de interface é apresentada neste item.

Em uma análise pelo método semi-embutido, uma vez definida a posição do reforço na malha de elementos finitos, a discretização deste é realizada automaticamente, gerando de forma dinâmica os elementos de barra e os correspondentes elementos de interface. A Figura 5.4 mostra a idealização do reforço conectado à malha por meio de elementos de interface. A localização dos elementos de interface não necessariamente coincide com a posição dos nós do elemento sólido, desta maneira, a formulação dos elementos de interface deve levar em conta este aspecto.

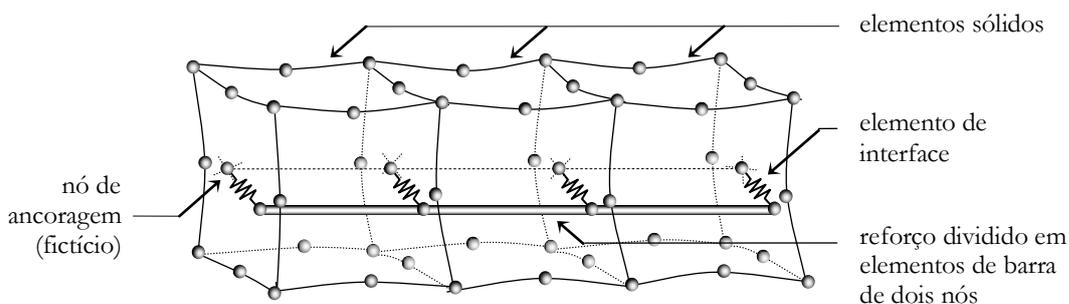


Figura 5.4 - Idealização do reforço conectado aos elementos sólidos através de elementos de interface.

Devido ao fato de as barras serem elementos discretos, os nós dos elementos de barra são visíveis a nível global. Desta forma, e diferentemente do método embutido, é possível a aplicação de condições de contorno nas barras como forças ou deslocamentos impostos. Esta característica permite, por exemplo, a simulação de ensaios de arrancamento. Por outro lado, os elementos de reforço possuem conexão entre si. Desta forma, é possível a transmissão direta de tensões entre estes elementos fornecendo um comportamento solidário ao reforço completo. Adicionalmente, é possível considerar trechos do reforço com diferentes

propriedades da interface. Esta característica permite a simulação de reforços atravessando diferentes materiais e, inclusive, de reforços com regiões ancoradas e regiões livres, como no caso de uma cortina atirantada.

Considerando que os elementos de barra correspondentes ao reforço são elementos discretos convencionais, então novos pontos nodais (e, portanto, mais graus de liberdade) devem ser adicionados ao sistema. Formam-se assim dois sistemas, um de elementos sólidos e outro de barras interligadas. Estes dois sistemas devem ser interligados de modo a formarem um sistema único. Esta ligação é feita por elementos de molas. As molas não têm comprimento, mas possuem dois nós distintos, ambos com as mesmas coordenadas, as quais correspondem ao ponto de interseção entre o reforço e o elemento sólido atravessado. Um extremo da mola corresponde ao nó real adicionado para definir o elemento de barra, enquanto que o outro extremo da mola corresponde a um nó virtual no elemento sólido, aqui chamado de nó de ancoragem. Os deslocamentos dos nós reais da barra são graus de liberdade adicionais e têm suas próprias equações de equilíbrio, consideradas no sistema global. Já os deslocamentos dos nós de ancoragem são provenientes do campo de deslocamentos do elemento atravessado e podem ser calculados de acordo com as equações de compatibilidade apresentadas na Eq. 5.7. Portanto, os nós de ancoragem não adicionam graus de liberdades extras ao sistema. A rigidez da mola numa dada direção permitirá, dessa forma, o movimento relativo entre a barra e o sólido circundante, servindo de elemento de interface. A denominação semi-embutida provém do fato de que somente um dos dois nós do elemento de interface é embutido (fictício).

A função dos elementos de interface é de transmitir o campo de deslocamentos dos elementos sólidos de forma a mobilizar tensões nas barras, além de levar em conta o movimento relativo entre ambos os materiais e prever uma possível ruptura do contato. Uma vez que no espaço 3D são necessários três componentes de deslocamento, cada elemento de interface é representado por um conjunto de três elementos de mola em cada ponto de interseção da barra com o elemento sólido. É recomendado que uma das molas seja orientada na direção da barra e as outras duas em direções perpendiculares para reduzir as operações de mudanças de sistemas de eixos. A Figura 5.5 mostra esquematicamente como se constituem as molas nos elementos de interface.

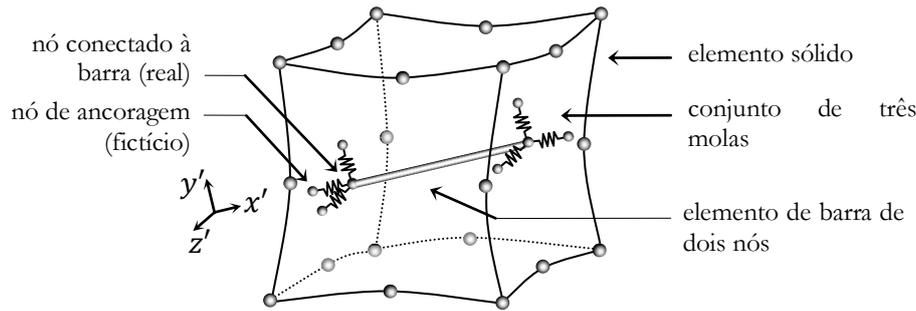


Figura 5.5 - Elementos de interface representados por um conjunto de três molas.

A mola na direção  $x'$  da barra é aquela que permite o cálculo do deslocamento relativo e a previsão de ruptura da interface. O objetivo das molas nas direções perpendiculares  $y'$  e  $z'$  é de servir como trilho para o deslizamento evitando tornar o sistema indeterminado por insuficiência de conectividades (sistema hipoestático). Desta forma, a rigidez das molas perpendiculares deve ser considerada o suficientemente alta de forma a restringir o movimento da barra nestas duas direções permitindo somente, se necessário, o deslocamento relativo na direção axial. As direções secundárias  $y'$  e  $z'$  podem ser constituídas por qualquer par de vetores perpendiculares à barra e perpendiculares entre si. Neste sentido, considerando que  $\mathbf{v}_{x'}$  representa um vetor na direção  $x'$ , um segundo vetor perpendicular  $\mathbf{v}_{y'}$  pode ser obtido através do produto vetorial de  $\mathbf{v}_{x'}$  e um outro vetor arbitrário  $\mathbf{w}$  que não seja paralelo ao próprio  $\mathbf{v}_{x'}$ . Um terceiro vetor  $\mathbf{v}_{z'}$  pode ser obtido através do produto vetorial de  $\mathbf{v}_{x'}$  e  $\mathbf{v}_{y'}$ . Estas operações são indicadas na seguinte equação:

$$\mathbf{v}_{y'} = \mathbf{v}_{x'} \times \mathbf{w} \text{ em que } (\mathbf{w} \nparallel \mathbf{v}_{x'}) \text{ e } \mathbf{v}_{z'} = \mathbf{v}_{x'} \times \mathbf{v}_{y'} \quad (5.14)$$

A matriz de rigidez do elemento de interface é constituída pela soma das matrizes de rigidez dos elementos de mola nas três direções. A seguir, realiza-se a dedução da matriz de rigidez de um elemento de mola, por exemplo, a que se encontra na direção  $x'$ .

O comportamento dos elementos de mola é determinado por uma relação entre a tensão cisalhante do contato  $\tau$  e o deslocamento relativo  $u_r$ . Esta relação pode ser expressa por:

$$\tau = K_{x'} u_r \quad (5.15)$$

onde  $k_{x'}$  representa a rigidez do contato na direção  $x'$ . As unidades de  $k_{x'}$  correspondem à tensão sobre deslocamento. Adicionalmente,  $k_{x'}$  pode atender a uma relação não linear e/ou atender a um critério de ruptura. Desta forma, torna-se necessária a modelagem constitutiva para representar o comportamento da interface. Esta modelagem é abordada no item 5.5.

A Figura 5.6 mostra esquematicamente a interpretação do deslocamento relativo existente entre os dois nós (1 e 1\*) de uma mola orientada na direção  $x'$ . O nó 1\* se encontra ancorado

no elemento sólido e o nó 1 se encontra conectado com o elemento de barra. Nesta figura é possível observar dois estágios. Num primeiro estágio, as posições dos nós do elemento de mola são coincidentes. Posteriormente, após a deformação da malha, a mola é mobilizada e seus deslocamentos nodais determinam o deslocamento relativo  $u_r = u_{1^*} - u_1$ .

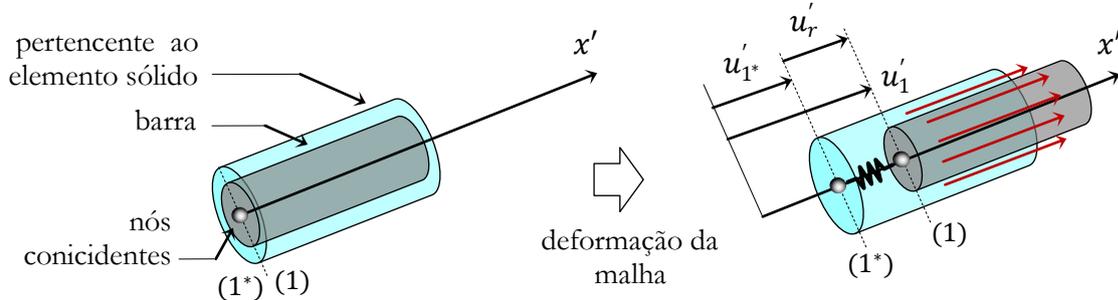


Figura 5.6 - Representação esquemática do deslocamento relativo de um elemento de mola.

O deslocamento relativo  $u_r$  pode ser expresso em forma matricial como:

$$u_r = \underbrace{[1 \quad -1]}_L \begin{Bmatrix} u_{1^*} \\ u_1 \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

Uma vez que o elemento de mola representa o comportamento do contato entre o reforço e o solo em uma dada direção, a tensão cisalhante pode ser estimada por meio de  $\tau = F/A_{lat}$ , onde  $F$  representa a força suportada pela mola e  $A_{lat}$  representa a porção de área da superfície lateral do reforço que é associada ao elemento de interface. A Figura 5.7 mostra as porções de área correspondentes a cada nó para os elementos de barra de dois e três nós.

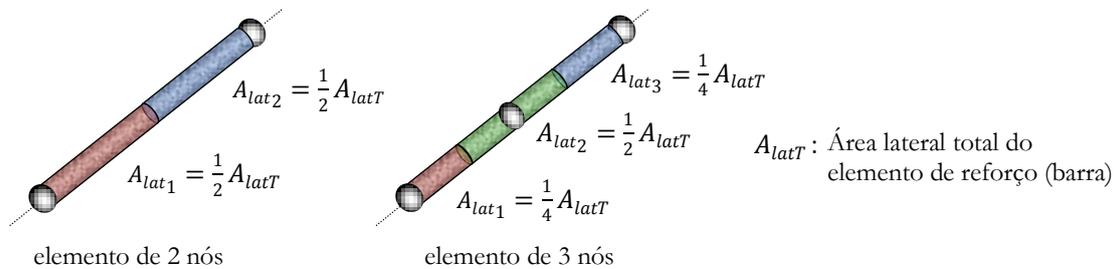


Figura 5.7 - Superfícies do reforço associadas aos nós e conseqüentemente aos elementos de interface para elementos de barra de dois e três nós.

Na determinação da matriz de rigidez de um elemento de mola, considera-se a condição de equilíbrio. A Figura 5.8 mostra o diagrama de corpo livre para o elemento de mola na direção  $x'$ . Nesta figura,  $\mathbf{U}_{mol\ 1^*}$  e  $\mathbf{U}_{mol\ 1}$  representam os deslocamentos nodais no sistema global (com três componentes), enquanto que  $u_{1^*}$  e  $u_1$  representam os deslocamentos correspondentes projetados para o sistema local da mola definido, neste caso, pelo eixo  $x'$ .  $F_{1^*}$  e  $F_1$  representam as forças nodais no sistema local do elemento de mola.

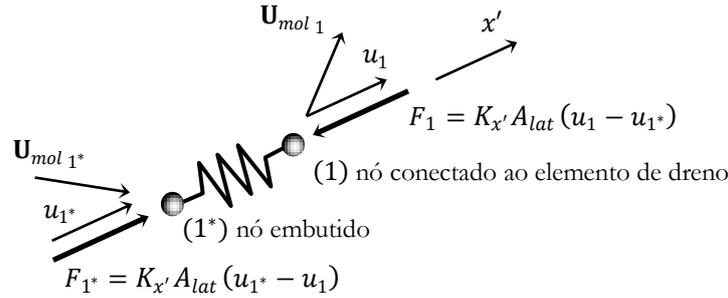


Figura 5.8 - Diagrama de corpo livre para o elemento de mola.

Por meio da determinação das expressões para as forças nodais é possível montar a matriz de rigidez  $\mathbf{K}_{mol\_loc\_x'}$  do elemento de mola na direção  $x'$ :

$$\begin{Bmatrix} F_{1^*} \\ F_1 \end{Bmatrix} = \underbrace{K_{x'} A_{lat} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{mol\_loc\_x'}} \begin{Bmatrix} u_{1^*} \\ u_1 \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

Esta equação pode ser escrita de forma condensada como  $\mathbf{F}_{mol\_loc\_x'} = \mathbf{K}_{mol\_loc\_x'} \mathbf{U}_{mol\_loc\_x'}$  onde  $\mathbf{U}_{mol\_loc\_x'}$  é o vetor com os deslocamentos nodais que foram projetados na direção  $x'$  e  $\mathbf{F}_{mol\_loc\_x'}$  é o vetor com as forças nodais correspondente. A matriz de rigidez  $\mathbf{K}_{mol\_loc\_x'}$  pode ser expressa em função da matriz  $\mathbf{L}$ , definida na Eq. 5.16, como:

$$\mathbf{K}_{mol\_loc\_x'} = K_{x'} A_{lat} \mathbf{L}^T \mathbf{L} \quad (5.18)$$

No sistema global (3D), os deslocamentos de cada nó da mola possuem três componentes. O vetor que define os deslocamentos nodais da mola no espaço 3D é dado por  $\mathbf{U}_{mol} = [u_{1^*} \ v_{1^*} \ w_{1^*} \ u_1 \ v_1 \ w_1]^T$  onde  $u_{1^*}$ ,  $v_{1^*}$  e  $w_{1^*}$  são os deslocamentos do nó ancorado e  $u_1$ ,  $v_1$  e  $w_1$  são os deslocamentos do nó conectado à barra. Os deslocamentos dados por  $\mathbf{U}_{mol}$  precisam ser relacionados com os deslocamentos do elemento de mola no sistema local  $\mathbf{U}_{mol\_loc\_x'} = [u_{1^*} \ u_1]^T$ . Isto é possível por meio de uma transformação dada por:

$$\mathbf{U}_{mol\_loc\_x'} = \mathbf{P}_{x'} \mathbf{U}_{mol} \quad (5.19)$$

onde  $\mathbf{P}_{x'}$  é uma matriz de transformação em função dos componentes da orientação do eixo  $x'$ , neste caso,  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$ . A matriz  $\mathbf{P}_{x'}$  pode ser escrita explicitamente como:

$$\mathbf{P}_{x'} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Por sua vez, as forças nodais do elemento de mola no sistema global são dadas por  $\mathbf{F}_{mol\_x'} = [F_{x1^*} \ F_{y1^*} \ F_{z1^*} \ F_{x1} \ F_{y1} \ F_{z1}]^T$ , onde os três primeiros componentes correspondem ao nó ancorado e os três últimos correspondem ao nó da barra. Este vetor de forças pode ser transformado no vetor de forças correspondente ao sistema local  $\mathbf{F}_{mol\_loc\_x'}$  por meio de

$\mathbf{F}_{mol\_x'} = \mathbf{P}_{x'}^T \mathbf{F}_{mol\_loc\_x'}$ . Substituindo-se nesta equação  $\mathbf{F}_{mol\_loc\_x'}$  em função da matriz de rigidez obtém-se  $\mathbf{F}_{mol\_x'} = \mathbf{P}_{x'}^T \mathbf{K}_{mol\_loc\_x'} \mathbf{U}_{mol\_loc\_x'}$ . Fazendo a substituição das expressões correspondentes para  $\mathbf{K}_{mol\_loc\_x'}$  e  $\mathbf{U}_{mol\_loc\_x'}$ , dadas pelas Eqs. 5.18 e 5.19, obtém-se a seguinte expressão para  $\mathbf{F}_{mol\_x'}$ :

$$\mathbf{F}_{mol\_x'} = \underbrace{\mathbf{P}_{x'}^T \overbrace{K_{x'} A_{lat} \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{P}_{x'}}^{\mathbf{K}_{mol\_loc\_x'}}}_{\mathbf{K}_{mol\_x'}} \mathbf{U}_{mol} \quad (5.21)$$

Nesta equação  $\mathbf{K}_{mol\_x'}$  representa a matriz de rigidez do elemento de mola na direção  $x'$  transformada para o sistema global. As dimensões desta matriz são de  $6 \times 6$ , uma vez que esta envolve dois nós com três graus de liberdade cada um. Considerando  $\mathbf{G}_{x'} = \mathbf{L} \mathbf{P}_{x'}$ , a matriz  $\mathbf{K}_{mol\_x'}$  pode ser escrita como:

$$\mathbf{K}_{mol\_x'} = K_{x'} A_{lat} \mathbf{G}_{x'}^T \mathbf{G}_{x'} \quad (5.22)$$

onde  $\mathbf{G}_{x'} = [r_1 \ r_2 \ r_3 \ -r_1 \ -r_2 \ -r_3]$ . A matriz  $\mathbf{G}_{x'}$  relaciona o vetor de deslocamentos  $\mathbf{U}_{mol}$  do elemento de mola com o deslocamento relativo  $u_r$  na direção  $x'$ .

Entretanto, considerando o aspecto semi-embutido, é necessário considerar os deslocamentos do nó ancorado em função dos deslocamentos nodais do elemento atravessado. Neste sentido, pretende-se transformar a matriz  $\mathbf{K}_{mol\_x'}$  de forma a que associe os deslocamentos nodais dos  $n$  nós do elemento atravessado em substituição dos deslocamentos do nó ancorado. A matriz de rigidez procurada é denominada de matriz de rigidez semi-embutida  $\mathbf{K}_{semi\_x'}$ . Esta matriz relaciona o vetor de deslocamentos  $\mathbf{U}_{semi}$ , que contém os deslocamentos nodais do elemento atravessado e do nó conectado à barra, com o vetor de forças correspondente  $\mathbf{F}_{semi\_x'}$ .

O vetor de deslocamentos na direção  $x'$   $\mathbf{U}_{mol\_x'}$  pode ser obtido em função do vetor  $\mathbf{U}_{semi}$  por meio de uma matriz de transformação  $\mathbf{M}$  como é mostrado a seguir:

$$\mathbf{U}_{mol\_x'} = \mathbf{M} \mathbf{U}_{semi} \quad (5.23)$$

Esta transformação pode ser escrita explicitamente como:

$$\begin{Bmatrix} u_1^* \\ v_1^* \\ w_1^* \\ u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_{6 \times (3n+1)}} \begin{Bmatrix} u_{atr\ 1} \\ v_{atr\ 1} \\ w_{atr\ 1} \\ u_{atr\ 2} \\ v_{atr\ 2} \\ \vdots \\ v_{atr\ n} \\ w_{atr\ n} \\ \hline u_{bar} \\ v_{bar} \\ w_{bar} \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

Nesta última equação,  $u_{atr\ 1}, v_{atr\ 1}, w_{atr\ 1}, \dots, u_{atr\ n}, v_{atr\ n}, w_{atr\ n}$  são os deslocamentos nodais do elemento atravessado;  $u_{bar}, v_{bar}, w_{bar}$  são os deslocamentos do nó correspondente ao elemento de barra e  $N_i$  representa a função de forma do nó  $i$  do elemento atravessado avaliada na posição do elemento de mola.

Por outro lado, o vetor de forças nodais da mola na condição semi-embutida  $\mathbf{F}_{semi\_x'}$  pode ser associado com o vetor  $\mathbf{F}_{mol\_x'}$  por meio de  $\mathbf{F}_{semi\_x'} = \mathbf{M}^T \mathbf{F}_{mol\_x'}$ . Substituindo nesta equação  $\mathbf{F}_{mol\_x'}$  em função da matriz de rigidez  $\mathbf{K}_{mol\_x'}$  obtém-se  $\mathbf{F}_{semi\_x'} = \mathbf{M}^T \mathbf{K}_{mol\_x'} \mathbf{U}_{mol}$ . Substituindo nesta última equação as expressões correspondentes para  $\mathbf{K}_{mol\_x'}$  e  $\mathbf{U}_{mol}$ , dadas pelas Eqs. 5.22 e 5.23, obtém-se a seguinte expressão para o vetor  $\mathbf{F}_{semi\_x'}$ :

$$\mathbf{F}_{semi\_x'} = \underbrace{\mathbf{M}^T \mathbf{G}_{x'}^T (K_{x'} A_{lat}) \mathbf{G}_{x'}}_{\mathbf{K}_{semi\_x'}} \mathbf{M} \mathbf{U}_{semi} \quad (5.25)$$

Nesta última equação é possível deduzir a matriz de rigidez semi-embutida  $\mathbf{K}_{semi\_x'}$  do elemento de mola na direção  $x'$ . Fazendo  $\mathbf{S}_{x'} = \mathbf{G}_{x'} \mathbf{M}$ , a matriz de rigidez semi-embutida  $\mathbf{K}_{semi\_x'}$  pode ser escrita como:

$$\mathbf{K}_{semi\_x'} = K_{x'} A_{lat} \mathbf{S}_{x'}^T \mathbf{S}_{x'} \quad (5.26)$$

As dimensões da matriz  $\mathbf{K}_{semi\_x'}$  são de  $3(n+1) \times 3(n+1)$ . Por sua vez, os vetores  $\mathbf{U}_{semi}$  e  $\mathbf{F}_{semi\_x'}$  têm dimensão  $3(n+1)$ . Estas dimensões correspondem aos  $n$  nós do elemento sólido e ao nó conectado à barra, todos com três graus de liberdade. Por outro lado,  $\mathbf{S}_{x'}$  pode ser expressa em forma explicita como:

$$\mathbf{S}_{x'} = [N_1 r_1 \quad N_1 r_2 \quad N_1 r_3 \quad N_2 r_1 \quad N_2 r_2 \quad \dots \quad N_n r_2 \quad N_n r_3 \quad | \quad -r_1 \quad -r_2 \quad -r_3] \quad (5.27)$$

Por meio da matriz  $\mathbf{S}_{x'}$  é possível expressar diretamente o valor do deslocamento relativo por meio de  $u_r = \mathbf{S}_{x'} \mathbf{U}_{semi}$ .

Até aqui, somente foi determinada a matriz de rigidez semi-embutida  $\mathbf{K}_{semi\_x'}$  de um elemento de mola na direção  $x'$ . As correspondentes matrizes para as direções  $y'$  e  $z'$  são obtidas de forma análoga. Uma vez determinadas as três matrizes, a matriz que representa o elemento de interface é constituída pela soma das parcelas associadas a cada mola, ou seja:

$$\mathbf{K}_{semi} = \mathbf{K}_{semi\_x'} + \mathbf{K}_{semi\_y'} + \mathbf{K}_{semi\_z'} \quad (5.28)$$

ou de forma mais explícita:

$$\mathbf{K}_{semi} = K_{x'} A_{lat} \mathbf{S}_{x'}^T \mathbf{S}_{x'} + K_{y'} A_{lat} \mathbf{S}_{y'}^T \mathbf{S}_{y'} + K_{z'} A_{lat} \mathbf{S}_{z'}^T \mathbf{S}_{z'} \quad (5.29)$$

Após a montagem e a solução do sistema é necessário determinar o vetor de incrementos de forças internas, correspondentes ao elemento de interface semi-embutido, para um dado incremento de deslocamentos. Este vetor de forças internas é constituído pela soma dos vetores de forças internas dos três elementos de mola  $\Delta \mathbf{F}_{int\_semi} = \Delta \mathbf{F}_{int\_semi\_x'} + \Delta \mathbf{F}_{int\_semi\_y'} + \Delta \mathbf{F}_{int\_semi\_z'}$ . Considerando a mola na direção  $x'$  na condição semi-embutida, e considerando uma relação linear para a rigidez, o vetor de incrementos de forças internas  $\Delta \mathbf{F}_{semi\_x'}$ , para um dado vetor de incrementos de deslocamentos  $\Delta \mathbf{U}_{semi}$ , é dado por:

$$\Delta \mathbf{F}_{semi\_x'} = \mathbf{K}_{semi\_x'} \Delta \mathbf{U}_{semi} \quad (5.30)$$

Substituindo a expressão correspondente para a matriz  $\mathbf{K}_{semi\_x'}$  na Eq. 5.30, obtém-se a seguinte expressão para o vetor  $\Delta \mathbf{F}_{semi\_x'}$ :

$$\Delta \mathbf{F}_{semi\_x'} = \mathbf{S}_{x'}^T \underbrace{K_{x'} \mathbf{S}_{x'}^T \Delta \mathbf{U}_{semi}}_{\Delta \tau} A_{lat} = \mathbf{S}_{x'}^T \Delta \tau A_{lat} \quad (5.31)$$

No caso do elemento de interface estudado, considera-se que a direção  $x'$  é coincidente com a direção da barra. Neste sentido, o elemento de mola na direção  $x'$  pode ser utilizado para prever o deslocamento relativo e/ou ruptura entre o solo e o reforço. Desta forma, é possível utilizar uma relação não linear para  $K_x$ , tornando-se necessária a integração do incremento de tensão  $\Delta \tau$  para um dado incremento de deslocamento relativo  $\Delta u_r$ . Por sua vez, nas molas nas direções  $y'$  e  $z'$ , as quais servem de trilho para o movimento, é conveniente que se estabeleça um comportamento linear com valores elevados de rigidez. Finalmente, considerando os três elementos de mola, o incremento de forças internas de um elemento de interface semi-embutido pode ser escrito como:

$$\Delta \mathbf{F}_{semi} = \mathbf{S}_{x'}^T \Delta \tau A_{lat} + (\mathbf{K}_{semi\_y'} + \mathbf{K}_{semi\_z'}) \Delta \mathbf{U}_{semi} \quad (5.32)$$

Os vetores  $\Delta \mathbf{F}_{int\_semi}$  e  $\Delta \mathbf{U}_{semi}$  correspondem ao elemento de interface semi-embutido e, portanto, possuem dimensão  $3(n + 1)$ .

#### 5.4 Relação constitutiva para os reforços

Nos três métodos previamente descritos é possível estabelecer para a barra, sem inconvenientes, uma relação constitutiva não linear ou elastoplástica. No entanto, em muitas aplicações na Geotecnia, uma relação linear pode ser suficiente.

Em reforços tipo grampos, a resistência da inclusão provém principalmente do aço (ou de materiais sintéticos tipo FRP), cujo comportamento geralmente é representado por uma relação elástica até a tensão de escoamento ( $f_y$ ), seguido de um comportamento perfeitamente plástico (Figura 5.9). Entretanto, no solo reforçado, o reforço possui uma resistência bem superior que a do solo e da interface, portanto, é de se esperar que ocorra o deslizamento do reforço ou a plastificação no solo muito antes que o escoamento ou ruptura do aço. Nestas condições, é possível assumir para o aço uma relação tensão-deformação do tipo elástico linear tanto em compressão quanto em tração. A contribuição de rigidez e de resistência da nata de cimento que recobre o aço pode ser desprezada, uma vez que a nata pode quebrar ou apresentar trincas durante a vida útil da obra, tendo como função principal a proteção do aço. Entretanto, em análises nas quais seja de interesse a contribuição da nata de cimento, é possível estabelecer para o reforço um módulo elástico combinado. Este módulo combinado é obtido pela média dos módulos do aço e da nata ponderados pelas suas respectivas áreas na secção do reforço.

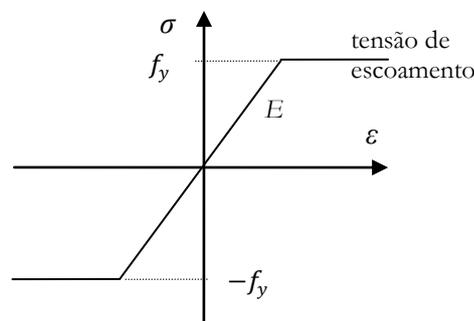


Figura 5.9 - Relação tensão-deformação elástica perfeitamente plástica própria de um reforço de aço.

#### 5.5 Modelagem constitutiva da interface

O comportamento da interface solo-grampo (solo-nata de cimento) pode ser determinante no desempenho de uma estrutura de solo reforçado, uma vez que a mobilização ou ruptura desta reduz a transmissão de esforços do maciço para o reforço.

Na modelagem constitutiva da interface, é estabelecido um módulo para relacionar o deslocamento relativo entre o solo e o grampo com a tensão cisalhante que atua na superfície do contato. O limite desta tensão cisalhante é dado pela resistência do contato. Assumindo um

critério de ruptura do tipo Mohr-Coulomb, a resistência é função da aderência, do ângulo de atrito e da tensão normal no contato. Sendo que a tensão normal no contato pode ser diferente ao longo do grampo e variar durante os estágios de construção, é necessário um procedimento para determiná-lo durante a análise.

Por outro lado, o estudo do comportamento da interface aço-nata não é explorado neste tipo de aplicação. Isto é devido à elevada resistência e baixa deformabilidade do contato aço-nata em relação ao contato solo-nata.

### 5.5.1 Cálculo da tensão normal à superfície do reforço

A tensão normal ao reforço interfere diretamente na resistência do contato solo-grampo. Desta forma, é vista sua determinação previamente à modelagem constitutiva da interface. A Figura 5.10 mostra esquematicamente a disposição das tensões normais à superfície do reforço. Nas análises pelo método semi-embutido, é necessário o conhecimento deste valor nas posições correspondentes à localização dos elementos de interface. Como a tensão normal, para um dado ponto do reforço, pode variar na direção radial e longitudinal, deve-se utilizar uma aproximação para um valor médio. O procedimento apresentado para o cálculo de uma aproximação da tensão normal média para um dado ponto ao longo do reforço é baseado na interpolação e rotação das tensões no interior do elemento sólido que contém o reforço.

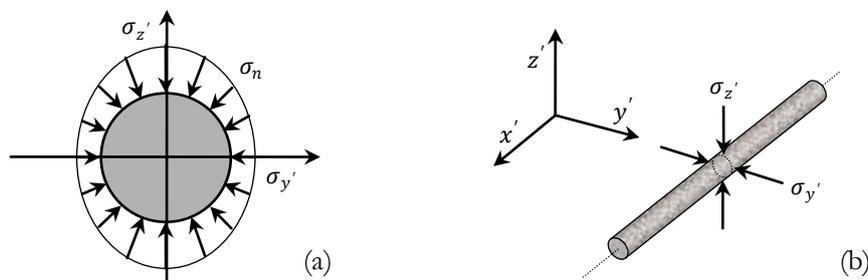


Figura 5.10 - Representação das tensões normais à superfície do reforço: a) campo de tensões agindo na seção do reforço; a) componentes de tensão agindo em um ponto do reforço.

Inicialmente, o campo de tensões do elemento sólido é dado pelos vetores de tensão correspondentes nos pontos de integração. Estas tensões são extrapoladas para os nós e posteriormente interpoladas na posição do reforço onde se encontra conectado o elemento de interface. Finalmente, o vetor de tensões obtido é rotacionado para o sistema associado com a orientação da barra. O vetor resultante pode ser expresso por:

$$\sigma_{x'y'z'} = \mathbf{T}_\sigma (\mathbf{N}^T \mathbf{E} \mathbf{S}_{ip})^T \quad (5.33)$$

Nesta equação, a matriz de extrapolação  $\mathbf{E}$  permite a extrapolação da matriz  $\mathbf{S}_{ip}$ , que contém as tensões nos pontos de integração, para os nós do elemento sólido. A matriz  $\mathbf{E}$  pode

ser determinada pelo procedimento explicado no item 4.6. As dimensões da matriz  $\mathbf{E}$  são de  $n \times m$ , onde  $n$  é o número de nós do elemento sólido e  $m$  o número de pontos de integração correspondente. Cada linha da matriz  $\mathbf{S}_{ip}$  contém os seis componentes de tensão de um ponto de integração, assim, as dimensões de esta matriz são de  $m \times 6$ . O vetor  $\mathbf{N}$  contém os valores correspondentes às funções de forma do elemento sólido e permite a interpolação dos valores de tensão nodais para determinar o vetor de tensões na posição do elemento de interface. A matriz de transformação  $\mathbf{T}_\sigma$  permite rotacionar este vetor para o sistema  $x'y'z'$  cujo eixo  $x'$  está orientado na direção da barra. Os eixos  $y'$  e  $z'$  correspondem a duas direções perpendiculares à barra. A matriz  $\mathbf{T}_\sigma$  corresponde a uma matriz convencional de rotação de tensões. A transformação dos componentes de tensão do sistema  $xyz$  para o sistema  $x'y'z'$  é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma}_{x'y'z'} = \mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{\sigma}_{xyz} \quad (5.34)$$

Se os co-senos diretores da rotação de tensões são dados por  $l_1 = \cos \theta_{xx'}$ ,  $l_2 = \cos \theta_{xy'}$ , ...,  $n_2 = \cos \theta_{zy'}$ ,  $n_3 = \cos \theta_{zz'}$ , a Eq. 5.34 pode ser escrita de forma explicita como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \sigma_{z'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & 2l_1m_1 & 2m_1n_1 & 2n_1l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & 2l_2m_2 & 2m_2n_2 & 2n_2l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & 2l_3m_3 & 2m_3n_3 & 2n_3l_3 \\ l_1l_2 & m_1m_2 & n_1n_2 & l_1m_2 + l_2m_1 & m_1n_2 + m_2n_1 & l_1n_2 + l_2n_1 \\ l_2l_3 & m_2m_3 & n_2n_3 & l_2m_3 + l_3m_2 & m_2n_3 + m_3n_2 & l_2n_3 + l_3n_2 \\ l_3l_1 & m_3m_1 & n_3n_1 & l_3m_1 + l_1m_3 & m_3n_1 + m_1n_3 & l_3n_1 + l_1n_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad (5.35)$$

Uma vez obtido o vetor  $\boldsymbol{\sigma}_{x'y'z'}$ , a tensão normal à superfície em um dado ponto ao longo da barra pode ser aproximada em função das componentes de tensão associadas ao plano  $y'z'$  ( $\sigma_{y'}$  e  $\sigma_{z'}$ ) por meio de:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{y'} + \sigma_{z'}}{2} \quad (5.36)$$

Quando se trata de uma análise de deformação e fluxo acoplados, a tensão normal obtida pela Eq. 5.36 deve ser diminuída do valor de poropressão correspondente de forma a obter a tensão normal efetiva. O valor correspondente de poropressão, neste caso, é obtido por interpolação dos valores nodais do elemento atravessado.

A obtenção de um valor negativo de  $\sigma_n$ , indicaria uma possível situação de abertura no contato, eliminando a contribuição do reforço na estabilidade no maciço. Embora seja possível obter esta situação em algumas ocasiões, especialmente hipotéticas, isto não foi observado nos casos estudados, uma vez que isto indicaria a presença de tensões normais de tração no solo.

### 5.5.2 Relação constitutiva para a interface

As tensões atuantes no contato são dadas pela tensão cisalhante e a tensão normal. A Figura 5.11 mostra esquematicamente a superfície da interface onde atuam estas tensões. Neste trabalho, o comportamento da interface é representado por um comportamento tensão cisalhante-deslocamento do tipo linear até atingir a resistência do contato dada pelo critério Mohr-Coulomb. Após este ponto, adota-se um comportamento perfeitamente plástico. Esta modelagem da interface pode ser realizada através do uso da teoria da elastoplasticidade.

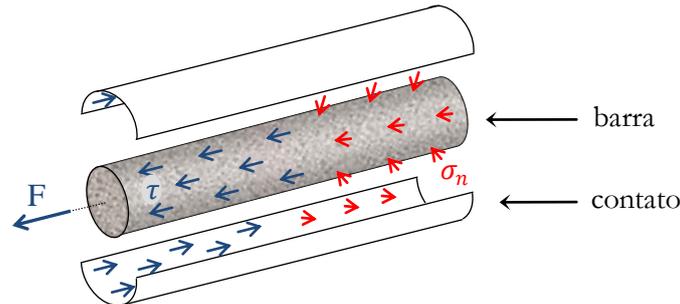


Figura 5.11 - Representação das tensões cisalhante e normal na interface solo-grampo.

O comportamento elástico tensão cisalhante-deslocamento é definido por uma constante  $K_e$  que determina o nível de transmissão de tensões do solo para o reforço. Quanto maior o valor de  $K_e$  maior é a transmissão de tensões. O limite máximo possível para a transmissão de tensões corresponde a um valor de  $K_e = \infty$ , que por sua vez se compara à hipótese de aderência perfeita. O valor de  $K_e$  pode ser determinado por meio de:

$$K_e = \frac{q_s}{s_{max}} \quad (5.37)$$

Nesta equação,  $q_s$  representa a medida da resistência ao arrancamento da interface. Este valor pode ser obtido do ensaio de arrancamento do reforço. Um exemplo dos resultados de um ensaio de arrancamento foi apresentado na Figura 2.7b. A variável  $s_{max}$  representa o deslocamento associado ao comportamento elástico para um dado valor de resistência ao arrancamento. O valor de  $q_s$  pode ser definido como a razão entre a força máxima aplicada  $F_{max}$  e a área  $A_{int}$  do contato do reforço com o solo:

$$q_s = \frac{F_{max}}{A_{int}} \quad (5.38)$$

A Figura 5.12 mostra as trajetórias de tensão-deslocamento para diferentes valores de  $K_e$  ( $K_A$ ,  $K_B$  e  $K_C$ ). O critério de ruptura Mohr-Coulomb representa uma condição limite a estas trajetórias.

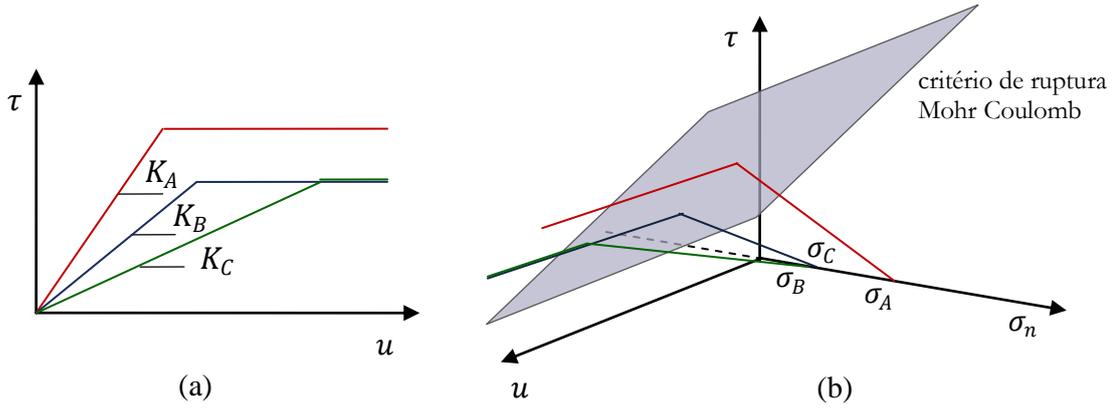


Figura 5.12 - Trajetórias para diferentes valores da relação tensão cisalhante-deslocamento: a) no espaço  $\tau$ - $u$ ; b) no espaço  $u$ - $\sigma_n$ - $\tau$ .

Na modelagem elastoplástica é necessário determinar o módulo elastoplástico  $K_{ep}$  para simular o comportamento da interface após o estado de tensão dado por  $\tau$  ter atingido a superfície de plastificação. Considera-se a hipótese de que a tensão normal permanece invariável durante o deslizamento da barra. Por outro lado, considera-se o deslocamento relativo  $u_r$  como a variável que mobiliza  $\tau$ .

Levando em conta o critério de ruptura dado por  $\tau = c_{int} + \sigma_n \operatorname{tg} \phi_{int}$ , em que  $c_{int}$  representa a aderência ou coesão e  $\phi_{int}$  representa o ângulo de atrito da interface, é possível derivar a função de plastificação como:

$$F = \frac{\tau - c_{int}}{\sigma_n} - \operatorname{tg} \phi_{int} - z \tag{5.39}$$

em que  $z$  representa a variável de endurecimento tipo tensão e determina a variação do tamanho da superfície de plastificação. Dada a função de plastificação, a condição de consistência é dada por:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \tau} \dot{\tau} + \frac{\partial F}{\partial z} \dot{z} = 0 \tag{5.40}$$

Uma vez que só existe um componente de deslocamento em análise, a lei de fluxo pode ser expressa por  $G = \tau$ . Considerando a relação entre tensão cisalhante e deslocamento relativo no trecho elástico ( $\dot{\tau} = K_e \dot{u}_{re}$ ), a decomposição do deslocamento relativo em elástico e plástico ( $\dot{u}_r = \dot{u}_{re} + \dot{u}_{rp}$ ) e que o deslocamento relativo plástico possa ser representado por  $\dot{u}_{rp} = \Lambda(\partial G / \partial \tau)$ , em que  $\Lambda$  é o multiplicador plástico, a tensão cisalhante pode ser expressa por:

$$\dot{\tau} = K_e \left( \dot{u}_r - \Lambda \frac{\partial G}{\partial \tau} \right) \tag{5.41}$$

Levando em conta uma variável de endurecimento associada ao deslocamento  $\xi$  e que esta seja dada por meio de uma medida do trabalho plástico  $W_p = \tau \dot{u}_{rp}$ , o incremento da variável interna tipo tensão pode ser escrita como  $\dot{z} = H\dot{W}_p$ , em que  $H$  representa o módulo plástico. Esta abordagem se baseia no trabalho de Nakai (1985) para elementos de junta elastoplásticos em duas dimensões.

Substituindo a Eq. 5.40 na Eq. 5.41 e substituindo  $\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{1}{\sigma_n}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial z} = -1$ ,  $\frac{\partial G}{\partial \tau} = 1$ ; o multiplicador plástico pode ser escrito como:

$$\Lambda = \frac{K_e \dot{u}_r}{K_e + H \sigma_n \tau} \quad (5.42)$$

Combinando as Eqs. 5.42 e 5.41 é possível obter a expressão para o módulo elastoplástico  $K_{ep}$ :

$$K_{ep} = K_e - \frac{K_e^2}{K_e + H \sigma_n \tau} \quad (5.43)$$

Adicionalmente, o incremento do tamanho da superfície de plastificação pode ser expresso por:

$$\dot{z} = \frac{K_e H \tau}{K_e + H \sigma_n \tau} \dot{u}_r \quad (5.44)$$

Com o intuito de simular um comportamento elástico perfeitamente plástico, é conveniente fazer com que  $H \cong 0$ . Assumir  $H = 0$  tornaria  $K_{ep}$  igual a zero, fazendo com que posteriormente a análise de elementos finitos conduza a um sistema indeterminado. A integração da relação tensão cisalhante-deslocamento pode ser realizada de maneira convencional.

## 5.6 Validações

A seguir, algumas análises são realizadas como o objetivo de validar as implementações dos métodos de análise de reforços. Inicialmente são avaliadas as tensões axiais em sistemas de treliça introduzidas em elementos sólidos. Os resultados obtidos são comparados com os valores analíticos. Posteriormente, é avaliada a relação constitutiva da interface. Para isto, são analisadas as tensões cisalhantes em um ensaio de arrancamento. Neste teste, é possível observar a ruptura progressiva da interface devido à aplicação progressiva da carga estimada de arrancamento. Por outro lado, é realizada uma análise comparativa dos resultados obtidos por meio dos métodos embutido e semi-embutido. Nesta análise pode-se observar também a influência da rigidez da interface na transmissão de tensões do maciço para o reforço.

Finalmente é realizada uma análise comparativa onde são observadas as diferenças no uso dos métodos de interpolação convencional e pseudo-linear na previsão das forças axiais dos reforços.

### 5.6.1 Análise das tensões axiais em barras de treliça

Nesta análise pretende-se verificar as forças axiais de sistemas de treliça que se encontram no interior de um conjunto de elementos sólidos. Os resultados obtidos são comparados com as tensões obtidas de forma analítica considerando a treliça isoladamente. A Figura 5.13 mostra a configuração dos reforços, os quais atravessam os elementos sólidos. Nestas condições, os métodos embutido e semi-embutido podem ser aplicados na previsão das forças axiais e conseqüentemente das tensões axiais.

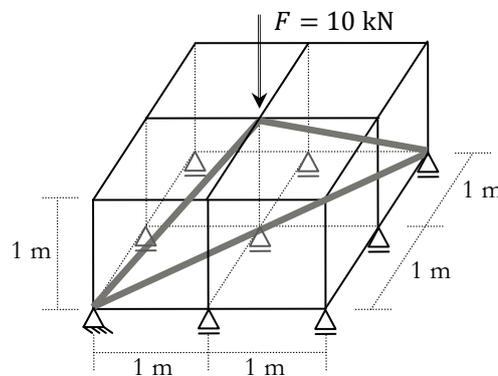


Figura 5.13 - Análise de uma treliça introduzida em elementos sólidos pelo método embutido: malha de elementos finitos e condições de contorno.

Para obter resultados comparáveis com os valores calculados considerando a treliça de forma isolada, é necessário atribuir baixa rigidez aos elementos sólidos. Desta forma as cargas são transferidas preferencialmente aos reforços. Os elementos sólidos são simulados por elementos hexaédricos de oito nós e os reforços por elementos de barra de dois nós. O carregamento é aplicado no topo da treliça. As propriedades e parâmetros utilizados na análise são mostrados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 - Propriedades dos materiais utilizados na simulação.

Material	Modelo	Parâmetros/Propriedades	
Sólidos	elástico linear	$E = 2 \text{ kPa}$	$\nu = 0,20$
Barras	elástico linear	$E = 200 \text{ GPa}$	$A_{sec} = 0,01 \text{ m}^2$

Nesta análise, inicialmente é aplicado o método embutido. Neste método é necessário que o ponto de aplicação da carga seja coincidente com um nó da malha, uma vez que no estudo deste método não foi contemplada a aplicação de condições de contorno diretamente sobre os elementos de barra. Na solução a seguir as barras não são consideradas discretas, tendo sua

rigidez embutida na do sólido circundante. Os resultados da análise são mostrados na Figura 5.14, os quais incluem as reações  $R$  e as tensões axiais ( $\sigma_A$  e  $\sigma_B$ ) obtidas. Estes resultados foram idênticos aos valores obtidos em forma analítica.

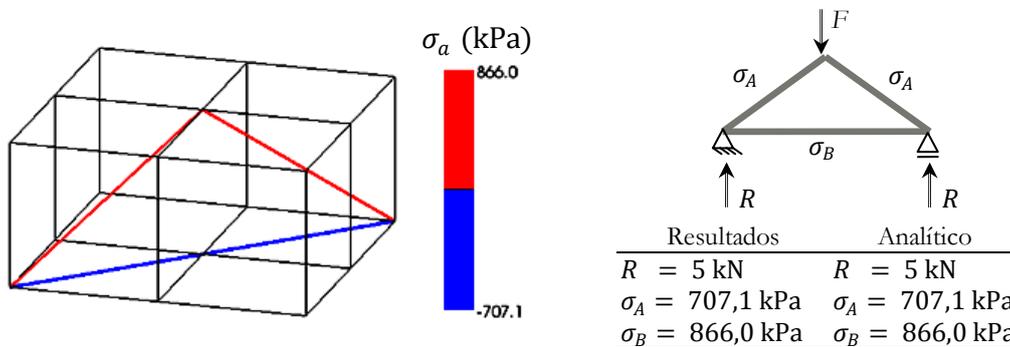


Figura 5.14 - Valores obtidos da análise numérica pelo método embutido comparados com os valores analíticos.

É possível também aplicar este teste ao método semi-embutido. Neste caso, uma vez que este método inclui o comportamento da interface, é necessário considerar uma elevada rigidez no contato, de forma a simular a condição de aderência perfeita. Os resultados obtidos pela aplicação do método semi-embutido foram similares e satisfatórios.

Adicionalmente, é realizada uma análise na qual o ponto de aplicação de carga não é coincidente com um dos nós dos elementos sólidos. Neste caso é necessária a aplicação do método semi-embutido, uma vez que neste método os nós dos reforços são visíveis a nível global. As propriedades utilizadas são as mesmas que para o teste anterior. A geometria da treliça foi reduzida por um fator igual a 3/4 com relação à anterior. A Figura 5.15 mostra a configuração do teste e a Figura 5.16 os resultados obtidos para as tensões axiais nas barras. Uma vez mais, estes resultados foram idênticos com os obtidos de forma analítica.

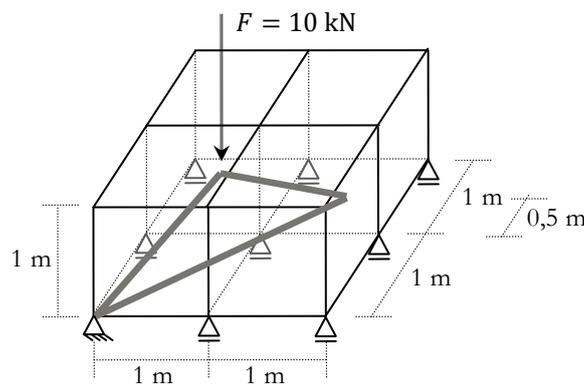


Figura 5.15 - Análise de uma treliça introduzida em elementos sólidos pelo método semi-embutido: malha de elementos finitos e condições de contorno.

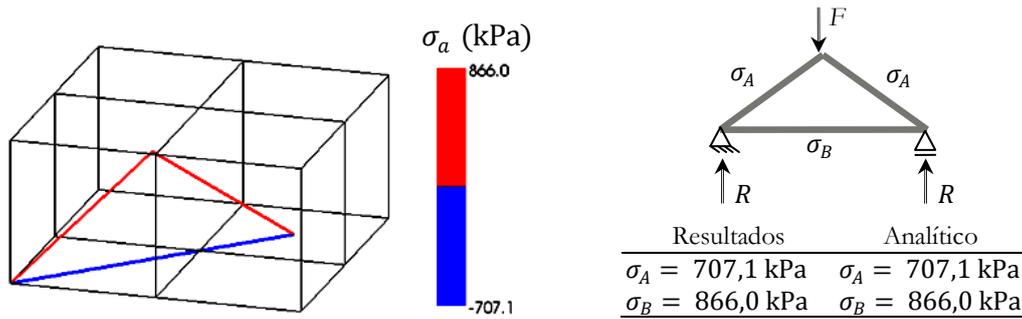


Figura 5.16 - Valores obtidos da análise numérica com o método semi-embutido comparados com os valores analíticos.

### 5.6.2 Avaliação das tensões cisalhantes num ensaio de arrancamento

Com o objetivo de avaliar o comportamento da interface é realizada a simulação de um ensaio de arrancamento de um grampo por meio do método semi-embutido. Neste teste pretende-se aplicar no reforço a força necessária para determinar a ruptura de toda a interface. A Figura 5.17 mostra a malha de elementos finitos e as condições de contorno utilizadas na simulação. Foram utilizados elementos hexaédricos de oito nós para os elementos sólidos. Para simular o reforço foram considerados elementos de barra de dois nós. O movimento de todos os elementos sólidos foi restringido para focar no comportamento da interface. A Tabela 5.2 mostra os parâmetros e propriedades dos materiais utilizados na análise. Note-se a diferença entre a área da seção da barra e a associada à interface. O estado de tensão inicial no solo foi adotado isotrópico e igual a 100 kPa.

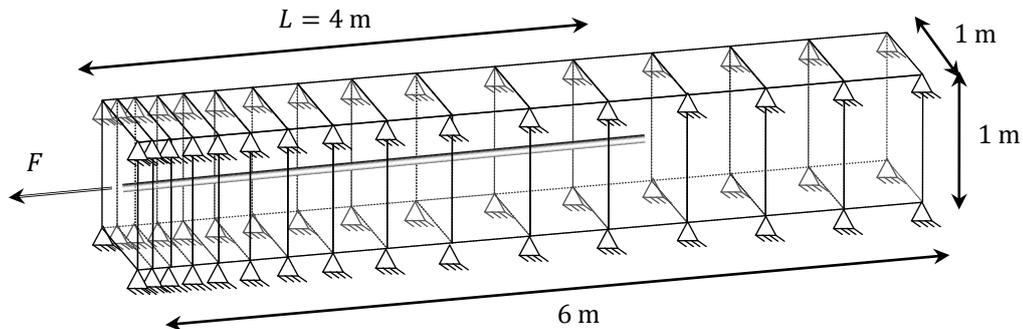


Figura 5.17 - Malha de elementos finitos e condições de contorno utilizadas na simulação do ensaio de arrancamento.

O módulo tensão cisalhante-deslocamento  $K_e$  da interface pode ser estimado em função da resistência ao arrancamento  $q_s$  e do deslocamento elástico  $s_{max}$  associado a este valor. Assumindo valores de  $q_s = 70 \text{ kPa}$  e de  $s_{max} = 0,7 \text{ mm}$ , o valor deste módulo da interface é dado por  $K_e = 100 \text{ MPa/m}$ . É importante notar que, o valor de  $q_s$  deve ser compatível com a resistência da interface, ou seja,  $q_s \cong c_{int} + \sigma_n \text{ tg } \phi_{int}$ .

Tabela 5.2 - Propriedades dos materiais utilizados na simulação.

Material	Modelo	Parâmetros/Propriedades	
Solo	elástico linear	$E = 4 \text{ kPa}$	$\nu = 0,0$
Barras	elástico linear	$E = 10 \text{ GPa}$	$A_{sec} = 0,005 \text{ m}^2$
Interface	elástico perf. plástico	$K_e = 100 \text{ MPa/m}$ $c_{int} = 10 \text{ kPa}$	$A_{sec} = 0,018 \text{ m}^2$ $\phi_{int} = 30^\circ$

Neste teste é aplicada uma força previamente calculada e equivalente a resistência do contato ao redor do reforço inteiro. Isto é realizado de forma a verificar o rompimento total da interface no final da aplicação da carga. O valor desta força pode ser estimado por:

$$F_{max} = A_{lat} (c_{int} + \sigma_n \operatorname{tg} \phi_{int}) \quad (5.45)$$

Nesta equação,  $A_{lat}$  representa a área lateral de todo o reforço. Tratando-se de um grampo, esta área é dada pela superfície do contato solo-grampo. O valor da tensão normal média  $\sigma_n$  atuante no reforço é considerada constante e igual a 100 kPa. A força de arrancamento estimada nestas condições é de  $F_{max} = 127,68 \text{ kN}$ .

Durante a análise, a força de arrancamento previamente estimada é aplicada gradualmente, verificando-se o rompimento progressivo da interface. A tensão normal calculada nos elementos de interface coincide, neste caso, com o valor da tensão isotrópica estabelecida. A Figura 5.18a mostra os resultados da razão entre a tensão cisalhante da interface e a tensão cisalhante máxima admissível  $\tau_{max}$  para vários níveis de carregamento. Nesta figura é possível visualizar a plastificação progressiva da interface. Quando foi aplicado o total da força de arrancamento estimada, o total da resistência da interface não foi mobilizado, sendo necessário aplicar 1% de carga adicional para garantir a ruptura total da interface. Ou seja, a interface aparenta ter maior resistência da que foi previamente atribuída. Isto ocorre porque, nos elementos de interface que atingiram plastificação mais cedo, nas seguintes etapas de carregamento, a superfície de plastificação experimenta um crescimento devido ao parâmetro de endurecimento escolhido. Esta característica é mais acentuada quanto menos rígido for o reforço, pois os elementos de interface que atingiram plastificação mais cedo experimentam maior deslocamento relativo. Em simulações nas quais a tensão média no solo é variável, é possível obter um ganho de resistência na interface devido a um acréscimo de tensão normal.

Por outro lado, na Figura 5.18b é mostrada a evolução das forças axiais do reforço durante o ensaio. Nesta figura é possível observar a compatibilidade da força aplicada no extremo de aplicação de carga e a redução da força axial ao longo do reforço.

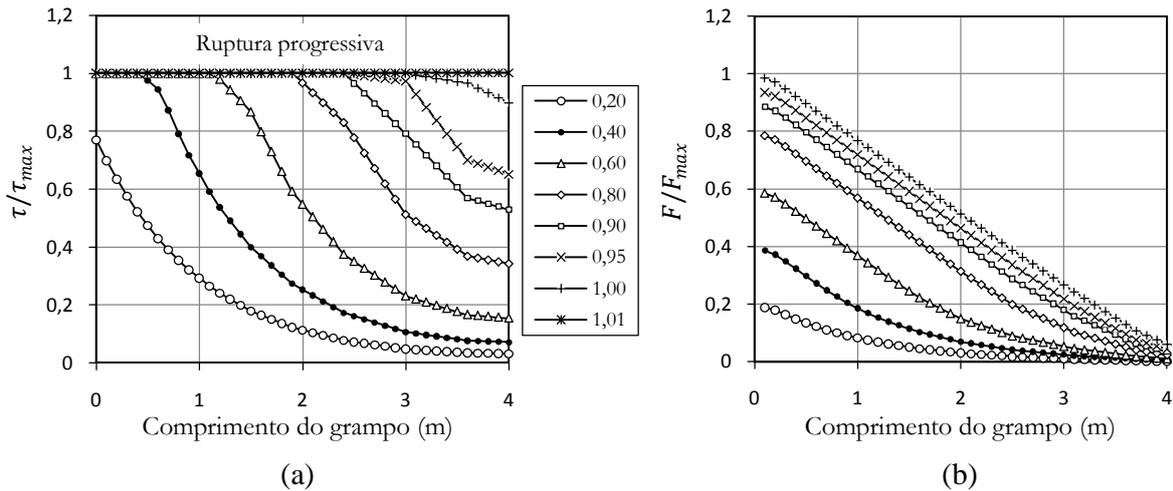


Figura 5.18 - Resultados para diferentes níveis de carregamento: a) Razão entre a tensão cisalhante na interface e a tensão cisalhante máxima; b) Razão entre a força axial na barra e a força axial máxima.

### 5.6.3 Comparação entre os métodos embutido e semi-embutido

O objetivo desta análise é de realizar uma comparação dos métodos embutido e semi-embutido na representação da deformabilidade do maciço e das tensões axiais dos reforços em um processo de escavação com solo grampeado. A interface solo-grampo é simulada pelo método semi-embutido utilizando diferentes valores para a relação tensão cisalhante-deslocamento relativo. A análise dos reforços sob a hipótese de aderência perfeita é simulada pelo método embutido.

A Figura 5.19a mostra a malha de elementos finitos e as condições de contorno utilizadas nesta análise. A figura corresponde a um corte da malha 3D onde os elementos utilizados são hexaedros de oito nós. A espessura da malha foi de 1,5 m de forma a simular um espaçamento horizontal dos grampos do mesmo valor. São aplicadas três linhas de grampos de comprimento igual a 8 m e de inclinação de um para oito. Os parâmetros e propriedades dos materiais utilizados na análise são mostrados na Tabela 5.3. Para o solo é assumido um modelo elástico uma vez que, neste exemplo, não se pretende analisar a plastificação do solo. O estado de tensões inicial corresponde a um estado geostático com  $K_0 = 0,5$ . Não é considerado fluxo no sistema. Durante a análise é simulado o processo de escavação e instalação dos grampos. Previamente ao processo de escavação, todos os grampos se encontram em estado inativo. Após a escavação de primeira camada, por exemplo, a primeira linha de grampos é ativada. Esta primeira linha de grampos somente será mobilizada após a deformação produzida pela escavação da segunda camada. A ativação dos grampos nos próximos estágios de escavação é realizada da maneira similar.

Quando se utiliza o método semi-embutido, é necessário simular a fixação que existe entre os grampos e a parede de escavação, sendo uma característica própria da técnica do solo grampeado. Desta forma, é fixado o deslocamento relativo dos grampos com a parede. Isto é possível por meio da atribuição de uma elevada rigidez no elemento de interface que conecta o extremo inicial do grampo com o maciço. Esta elevada rigidez pode ser considerada, por exemplo, como  $10^4$  vezes maior que o valor normalmente atribuído ao resto da interface. Um valor de  $K_e = 10$  MPa é considerado como sendo o valor referencial apropriado para a rigidez da interface.

Tabela 5.3 - Propriedades dos materiais utilizados na simulação.

Material	Modelo	Parâmetros/Propriedades	
Solo	elástico linear	$E = 3$ MPa $\gamma_s = 20$ kN/m <sup>3</sup>	$\nu = 0,15$
Barras	elástico linear	$E = 10^{11}$ kPa	$A_{sec} = 0,002$ m <sup>2</sup>
Interface	elástico perf. plástico	$K_e = 10$ MPa <sup>§</sup> $c_c = 10$ kPa	$A_{sec} = 0,018$ m <sup>2</sup> $\phi_c = 30^\circ$

§ valor referencial

A Figura 5.19b mostra o deslocamento horizontal da parede escavada para diferentes valores do módulo da interface. Neste gráfico se inclui o caso em que não se considera a aplicação do reforço e o caso analisado por meio do método embutido (que considera a hipótese de aderência perfeita). Estas duas condições limitam, aproximadamente, a possibilidade de deslocamento da parede. Deste gráfico é possível concluir, como já é esperado, que quanto maior é a rigidez utilizada na interface, os resultados pelo método semi-embutido são mais próximos à condição determinada pela aderência perfeita. Adicionalmente, pode-se concluir que os resultados obtidos utilizando o valor do  $K_e$  de referência (10 MPa) comparados com a condição de aderência perfeita não fornecem resultados muito distantes, sendo mais diferenciados nas proximidades do topo do talude.

A Figura 5.20 mostra as forças axiais para as três linhas de grampos considerando diferentes valores do módulo da interface e a condição de aderência perfeita. Neste caso, a condição de aderência perfeita (analisada utilizando o método embutido) apresenta alguns picos e oscilações na força axial ao longo das barras. Além disso, alguns extremos finais das barras apresentam elevados valores de força axial, como se existisse uma condição de ancoragem. Este comportamento pode ser explicado pela ausência da interface no método embutido, fazendo com que o campo de deformações dos elementos atravessados seja imposto diretamente aos elementos embutidos. Desta forma, a apresentação de picos e

oscilações é muito dependente da discretização do domínio. Uma discretização mais refinada pode diminuir este efeito.

Os resultados obtidos mostram que a utilização do método embutido pode levar a uma previsão incerta das forças axiais, fazendo com que algumas regiões dos reforços apresentem valores elevados em tração e inclusive em compressão. Este problema é superado através da aplicação do método semi-embutido por meio da consideração de elementos de interface. Assim, uma parte das deformações dos elementos atravessados é assimilada pela interface antes de ser transmitida para as barras.

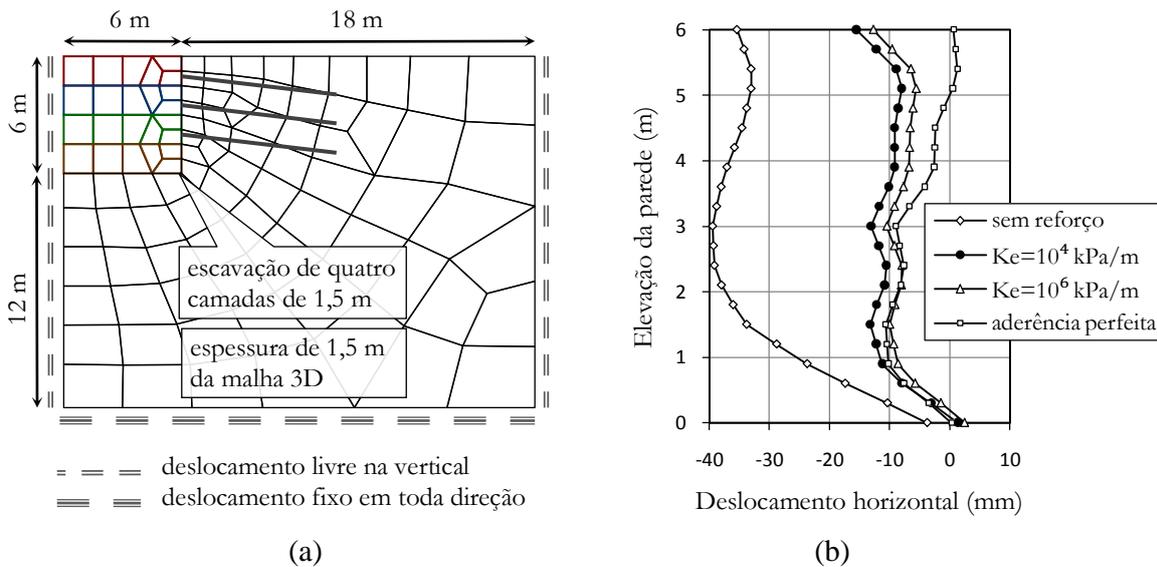


Figura 5.19 - Análise comparativa: a) malha de elementos finitos utilizada; b) resultados do deslocamento horizontal da parede após escavação.

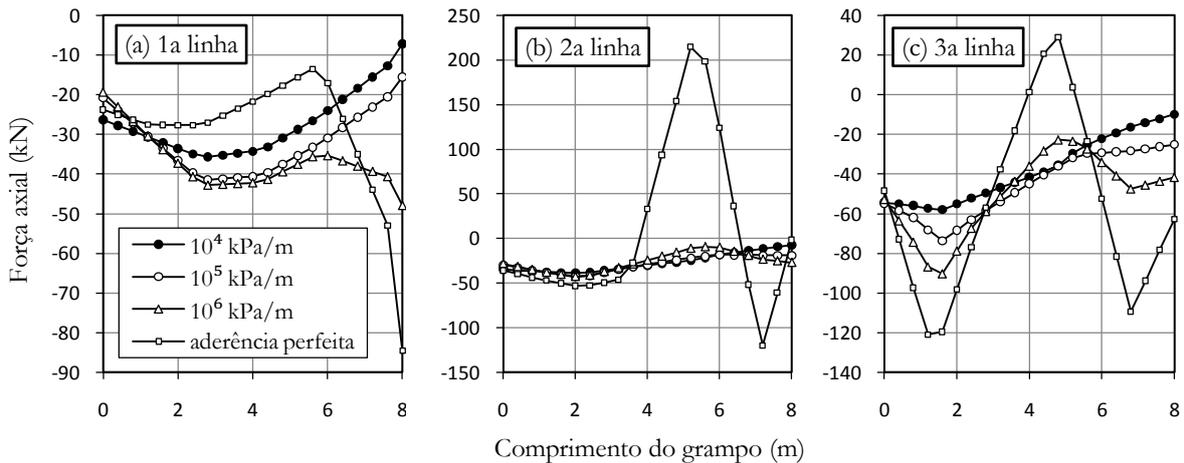


Figura 5.20 - Força axial nas três linhas de grampos para diferentes valores de módulos da interface.

### 5.6.4 Comparação entre a interpolação convencional e a pseudolinear na previsão das forças axiais

Os métodos embutido e semi-embutido, estudados neste trabalho, requerem a avaliação do deslocamento no interior dos elementos atravessados. Estes deslocamentos podem ser obtidos por meio da interpolação convencional ou da interpolação pseudolinear estudada no item 4.5. Neste item, pretende-se avaliar as diferenças obtidas pela utilização de um ou outro método de interpolação. Para isto, são avaliados os valores de força axial dos reforços.

Inicialmente, é realizada uma análise baseada em um único elemento sólido onde são aplicados deslocamentos impostos convenientemente escolhidos de forma a gerar previsões de deslocamentos, no interior do elemento, consideravelmente diferentes pelos dois métodos de interpolação. Desta forma, é analisado um elemento hexaédrico de 20 nós com dois reforços no interior (denominados 1 e 2). Utiliza-se nesta análise o método embutido, uma vez que este impõe o mesmo campo de deslocamentos do elemento sólido para os reforços. A Figura 5.21 mostra a geometria e as condições de contorno utilizadas. A Tabela 5.4 mostra as propriedades dos materiais utilizadas na análise.

Escolheu-se um elemento hexaédrico de 20 nós porque as suas funções de forma apresentam uma variação não linear ao longo dos seus eixos locais. Um elemento hexaédrico de 8 nós, por exemplo, não teria sido útil para esta análise pois suas funções de forma apresentam uma variação linear ao longo dos seus eixos locais, obtendo-se portanto, resultados semelhantes pelas duas formas de interpolação.

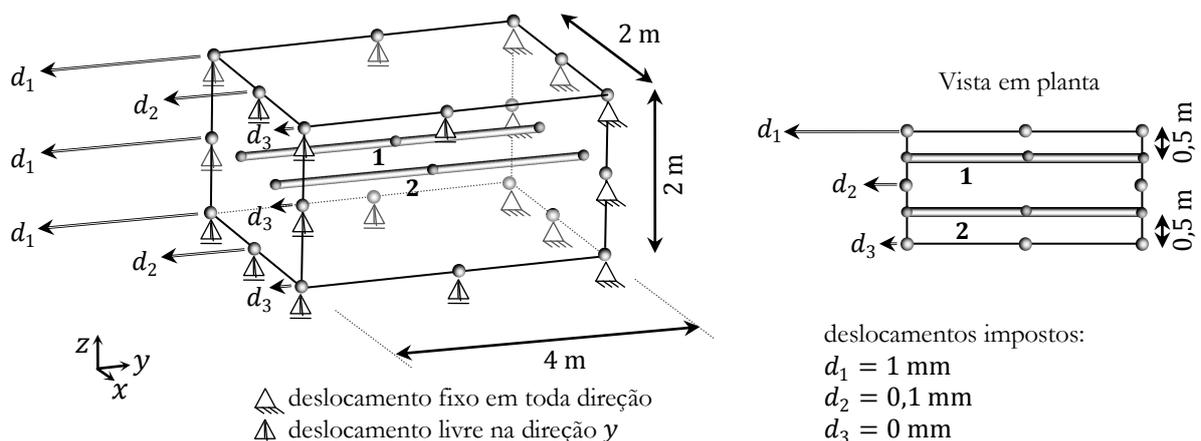


Figura 5.21 - Elemento hexaédrico de 20 nós com duas barras embutidas de 3 nós.

Tabela 5.4 - Propriedades dos materiais utilizados na simulação.

Material	Modelo	Parâmetros/Propriedades	
Solo	elástico linear	$E = 10 \text{ MPa}$	$\nu = 0$
Barras	elástico linear	$E = 100 \text{ GPa}$	$A_{sec} = 0,01 \text{ m}^2$

Dadas as condições de contorno que incluem os deslocamentos impostos  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$  mostrados na Figura 5.21, espera-se que o elemento sólido esteja submetido a tração na direção  $y$  em todo seu domínio e conseqüentemente induza tensões de tração em toda a extensão dos reforços. No entanto, isto não acontece quando é utilizada a interpolação convencional. A Figura 5.22 mostra os valores de força axial obtidos nos pontos de integração dos reforços 1 e 2.

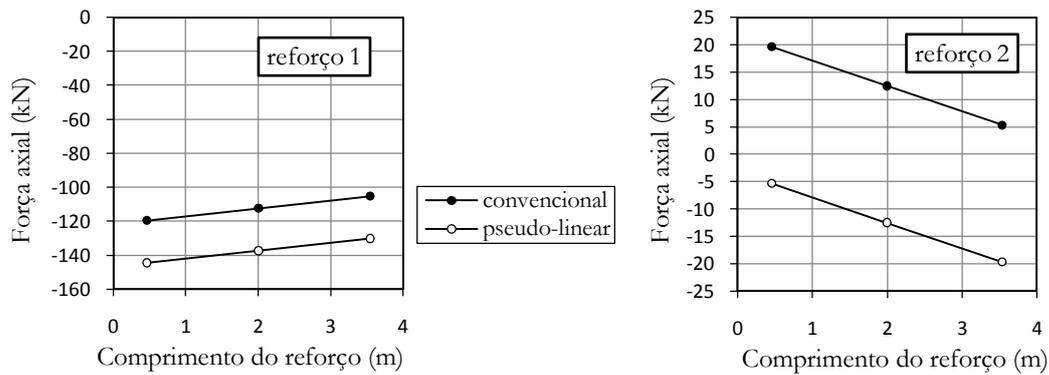


Figura 5.22 - Forças axiais nos reforços 1 e 2 calculadas nos pontos de integração, utilizando a interpolação convencional e a interpolação pseudo-linear.

Os resultados obtidos no reforço 1 mostram forças de tração com valores próximos para os dois métodos de interpolação. Entretanto, os valores obtidos para o reforço 2 mostram uma discrepância maior. Enquanto que para a interpolação pseudolinear são obtidos valores de força axial em tração, para a interpolação convencional são obtidos valores em compressão. Isto ocorre porque na interpolação convencional, entre os pontos de aplicação dos deslocamentos  $d_1$  e  $d_2$ , existem regiões onde a previsão de deslocamentos fornece resultados no sentido oposto. Por esta razão, o reforço 2 é comprimido em lugar de tracionado. Esta diferença na previsão das forças axiais pelos dois métodos de interpolação pode ser visualizada esquematicamente na Figura 5.23.



Figura 5.23 - Diferenças na previsão das forças axiais nos reforços pela utilização dos métodos de interpolação convencional e pseudolinéar.

Estes resultados mostram que a utilização da interpolação convencional na previsão de deslocamentos no interior do elemento pode levar a resultados inapropriados para as forças axiais dos reforços, enquanto que a interpolação pseudolinéar apresenta um comportamento mais factível.

No exemplo apresentado, foi analisado um único elemento sólido de forma a isolar uma condição onde a diferença nos resultados é evidente. No entanto, é de interesse avaliar as diferenças entre a utilização da interpolação convencional e da pseudolinear numa análise que envolva vários elementos, como por exemplo, a análise de um talude reforçado. Adicionalmente, é de interesse também avaliar a magnitude destas diferenças quando utilizado também o método semi-embutido. Portanto, o teste de solo grampeado apresentado no item 5.6.3 é refeito, desta vez, utilizando elementos hexaédricos de 20 nós. Neste sentido, são realizadas análises pelo método embutido e semi-embutido considerando os dois métodos de interpolação. No método semi-embutido, é considerada uma rigidez da interface  $K_e = 10 \text{ MPa/m}$ . Os resultados obtidos nestas análises, para a força axial nas três linhas de grampos, são mostrados na Figura 5.24.

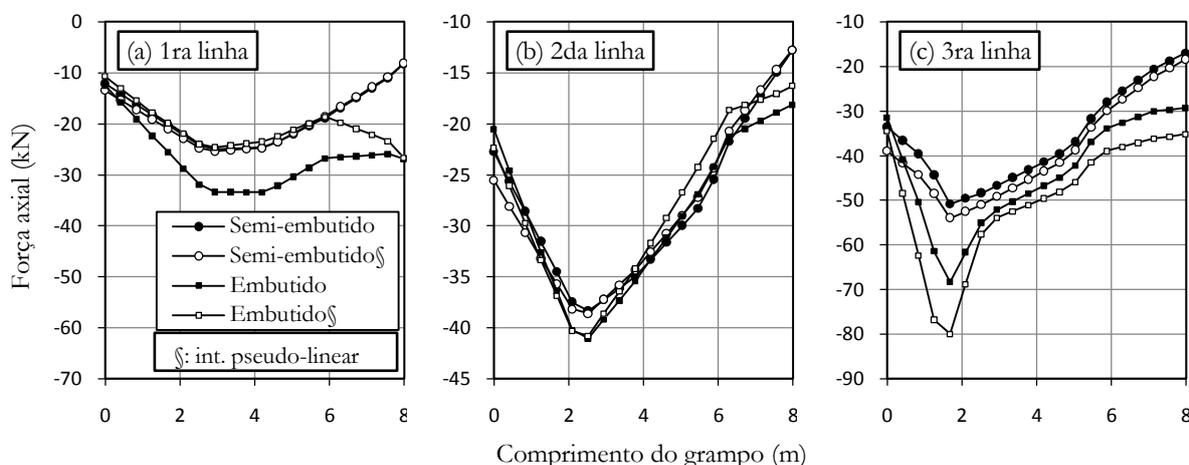


Figura 5.24 - Força axial nas três linhas de grampos pelos métodos embutido e semi-embutido utilizando a interpolação convencional e a pseudolinear.

Estes resultados mostram algumas diferenças entre a utilização da interpolação convencional e da pseudolinear. Entretanto, não é possível estabelecer claramente uma tendência. Por exemplo, os grampos da segunda linha mostram resultados muito próximos enquanto que na terceira linha as forças axiais de tração foram levemente superiores. Contudo, os resultados obtidos nas análises pelo método semi-embutido são muito mais próximos entre si do que os resultados obtidos pelo método embutido. Isto indica que em análises pelo método semi-embutido, e dependendo da rigidez adotada na interface, é possível prescindir da interpolação pseudolinear.

Outra característica que é possível observar na Figura 5.24 é a menor presença de picos nos resultados pelo método embutido em relação aos resultados obtidos na análise do item 5.6.3. Isto ocorre porque nesta nova análise são utilizados elementos de vinte nós em lugar de oito, obtendo um sistema com um maior número de graus de liberdade. Entretanto, os resultados obtidos pelo método semi-embutido foram parecidos em ambas as análises,

indicando que este método possui um bom desempenho mesmo em malhas constituídas por elementos simples como os elementos hexaédricos de oito nós.

### **5.7 Comentários sobre a modelagem dos reforços**

Os métodos embutido e semi-embutido mostram-se vantajosos com relação ao método discreto, especialmente no que se refere à reutilização da malha de elementos finitos. Como foi mostrado anteriormente, o método embutido, devido à utilização dos elementos atravessados na sua formulação, não adiciona graus de liberdade ao sistema. Por outro lado, o método semi-embutido adiciona alguns graus de liberdade, uma vez que, previamente à análise, são adicionados elementos de barra e de interface. Os nós adicionais gerados por este processo, por serem poucos, não representam um fator que possa incrementar significativamente os graus de liberdade do sistema e, por conseguinte, que possa reduzir o desempenho de uma análise.

Os métodos de análise de reforços que se apresentam neste capítulo podem ser aplicados independentemente do modelo constitutivo utilizado para simular o solo ou o reforço. O método embutido, devido à adoção da hipótese de aderência perfeita, não considera a existência da interface. No entanto, existem extensões deste método para levar em conta a interface como as apresentadas por Hartl (2002) e posteriormente por Durand (2003). Este tipo de extensões consiste na utilização de um segundo sistema, como o mostrado previamente no item 2.2. Esta abordagem não é analisada neste trabalho devido a seus inconvenientes associados com o maior número de operações, a convergência e a implementação. Por este motivo, para avaliar o comportamento da interface foi introduzido o método semi-embutido. O método semi-embutido apresenta uma série de vantagens com relação ao método embutido. Entre estas vantagens pode-se mencionar a possibilidade de utilizar elementos de interface de uma maneira mais natural e sem elevado custo computacional. Uma outra vantagem é que este método permite a aplicação de condições de contorno nos nós das inclusões, característica que o método embutido não contempla sem a utilização de artifícios. Uma comparação resumida entre os métodos estudados considerando vários dos aspectos mencionados acima é apresentada na Tabela 5.5.

Tabela 5.5 - Comparação entre os métodos para simulação de reforços

Característica	Método discreto	Método embutido	Método semi-embutido
Permite que os reforços atravessem livremente a malha	Não	Sim	Sim
Adiciona graus de liberdade ao sistema	Muitos	Nenhum	Poucos
Requer refazer a malha para testar novas configurações	Sim	Não	Não
Requer formulação especial	Não	Sim	Sim
Facilidade para aplicar condições de contorno	Sim	Não	Sim
Facilidade na simulação da interface	Sim	Não	Sim

Embora inclusões como grampos possam apresentar resistência à flexão, resultados de simulações utilizando elementos finitos mostraram que incorporar resistência à flexão aos reforços tem baixo efeito na deformação global da estrutura (Kenny & Kawai, 1996; Ortigão, 1997; Shiu & Chang, 2005). Isso ocorre porque os grampos são em geral barras de pequeno diâmetro e sua resistência à flexão, proporcional ao baixo momento de inércia da seção, é pequena. Por esta razão, neste trabalho, a contribuição à flexão é desconsiderada.

Na aplicação do método semi-embutido, é possível considerar duas áreas da seção associadas com um reforço tipo grampo. A primeira refere-se à seção do aço enquanto que a segunda refere-se à seção do reforço como um todo. Somente a seção do aço é considerada no cálculo da rigidez do reforço, desconsiderando a parte da seção do reforço correspondente à nata de cimento. Por sua vez, a seção total é considerada no cálculo da área lateral do reforço que representa o contato solo-grampo.

Nos métodos embutido e semi-embutido, é necessário determinar o deslocamentos de certos pontos no interior do elemento atravessado. Para este propósito, foi proposta a interpolação pseudolinear em substituição da interpolação convencional em elementos quadráticos ou de ordem superior. Os resultados de uma análise que envolve um único elemento mostram que a interpolação pseudolinear fornece resultados mais apropriados em relação à interpolação convencional. Por outro lado, as análises realizadas com vários elementos mostram poucas diferenças entre os resultados obtidos utilizando as duas formas de interpolação. No entanto, não é possível observar uma clara tendência. Estas diferenças foram ainda pouco perceptíveis nos resultados correspondentes ao método semi-embutido. Por esta razão, neste método, e dependendo da rigidez da interface e da acurácia desejada, pode-se prescindir da utilização da interpolação pseudolinear.

Com relação à resistência do contato solo-grampo, é possível ter uma redução da resistência solo-grampo devido a poropressões na água no meio circundante. A modelagem da interface contempla esta redução de resistência em análises que consideram fluxo no sistema

por meio da utilização da tensão efetiva. Por outro lado, a interface é simulada por um modelo elástico perfeitamente plástico. No entanto, uma modelagem mais acurada poderia prever a perda gradual da coesão após a ruptura da interface (*softening*).

Métodos de análise que permitem que as inclusões atravessem a malha têm um amplo campo de aplicação. Além da aplicação destes métodos na simulação da técnica do solo grampeado, outras possíveis aplicações incluem: reforço de taludes naturais, reforço de túneis, fundações com estacas, solos melhorados com estacas areia-brita, concreto armado, etc.

## Capítulo 6

# Modelagem dos Drenos

Neste capítulo são estudados os métodos utilizados na simulação da drenagem em maciços de solo, mais especificamente, dos drenos sub-horizontais que são instalados conjuntamente com os reforços em obras de solo grampeado. Neste sentido, é vista a formulação de elementos finitos e a modelagem constitutiva dos drenos. Na representação dos drenos sub-horizontais pelo MEF, e de forma análoga à simulação de reforços, são utilizadas as extensões dos métodos discreto, embutido e semi-embutido. Desta maneira, as mesmas vantagens e desvantagens associadas à geometria da malha podem ser consideradas com relação a estes métodos.

A abordagem pelo método embutido, na simulação de drenos, utiliza como hipótese a compatibilidade de gradientes hidráulicos entre o dreno e o solo. Esta abordagem é um tanto simples e possui algumas limitações, como por exemplo, não é apropriada na simulação de drenos quando o solo circundante se torna não saturado. O método semi-embutido, por sua vez, considera a presença de um elemento adicional de conexão, similar à interface em elementos de reforço, que permite e regula a passagem de fluido do solo para o dreno. Com esta abordagem, é possível simular o fluxo através de um dreno que percorre regiões de solo não saturado, por exemplo. Outra vantagem deste método é a possibilidade de aplicar condições de contorno, como poropressão imposta ou volume imposto, diretamente nos nós do elemento de dreno.

Posteriormente, ainda neste capítulo, são apresentados os testes de validação realizados para a formulação apresentada e as respectivas implementações. Finalmente, é incluída uma discussão sobre a aplicação e limitações dos métodos apresentados para a simulação de drenos.

### 6.1 Abordagem pelo método discreto

A análise da utilização de drenos pelo método discreto corresponde à utilização convencional de elementos tipo barra (ou neste caso dreno) numa análise de fluxo pelo MEF. Adicionalmente, considera-se que o dreno possa estar na condição não saturada. Na simulação de elementos de dreno, é necessário conhecer a formulação das matrizes de permeabilidade e de massa correspondentes. Neste caso, a formulação pode ser derivada da equação de

continuidade dada pela Eq. 3.44, no entanto, é necessário considerar que o fluxo é dado somente no sentido axial do dreno. Desta forma, é necessário associar a velocidade axial com o gradiente hidráulico e este último com a poropressão. A velocidade  $v$  do fluxo em um dado ponto no interior de um dreno pode ser expressa como:

$$v = -k \frac{\partial}{\partial L} \left( \frac{u_w}{\gamma_w} + z \right) = -k \left( \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial u_w}{\partial L} + \frac{\partial z}{\partial L} \right) \quad (6.1)$$

Nesta equação,  $k$  é a permeabilidade no sentido axial do dreno,  $u_w$  é o valor da poropressão no ponto em questão,  $\gamma_w$  é o peso específico da água,  $z$  é a coordenada de elevação e  $L$  é a coordenada longitudinal. O termo  $\frac{\partial u_w}{\partial L}$  é associado ao gradiente por poropressão e o termo  $\frac{\partial z}{\partial L}$  é associado ao gradiente por elevação. Este último pode ser substituído pelo componente  $r_3$  da matriz linha que representa a orientação do dreno  $[r_1 \ r_2 \ r_3]$ . Neste caso,  $r_3$  representa a inclinação do dreno.

Para determinar a matriz de permeabilidade de um elemento de dreno, é necessário estabelecer uma relação entre as variáveis nodais (poropressão) e o gradiente hidráulico no elemento. O gradiente  $g_p$  associado com a poropressão, em um dado ponto do dreno, pode ser expresso em função dos valores nodais por meio das funções de forma como:

$$g_p = \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial}{\partial L} \sum_{i=1}^n N_i u_{w_i} \quad (6.2)$$

Utilizando a coordenada local  $\xi$  do ponto, e considerando que o termo  $\frac{\partial \xi}{\partial L}$  é igual a  $\frac{1}{|J|}$ , sendo  $J$  o Jacobiano do elemento, este gradiente pode ser rescrito como:

$$g_p = \frac{1}{\gamma_w} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial L} u_{w_i} = \frac{1}{\gamma_w} \frac{1}{|J|} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} u_{w_i} \quad (6.3)$$

Organizando a Eq. 6.3 de forma conveniente, o gradiente por poropressão pode ser rescrito em forma matricial como:

$$g_p = \frac{1}{\gamma_w} \frac{1}{|J|} \underbrace{\left[ \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \quad \dots \quad \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \right]}_{\mathbf{B}_p} \begin{Bmatrix} u_{w_1} \\ u_{w_2} \\ u_{w_3} \\ \vdots \\ u_{w_n} \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

Nesta equação, a matriz linha  $\frac{1}{\gamma_w} \mathbf{B}_p$  permite associar os valores nodais de poropressão com o gradiente correspondente no interior do elemento de dreno. Uma vez obtida a matriz  $\mathbf{B}_p$ , e de forma similar à matriz de permeabilidade de um elemento sólido, a matriz de permeabilidade de um elemento de dreno pode ser calculada por meio de:

$$\mathbf{H} = \int_V \mathbf{B}_p^T \frac{k}{\gamma_w} \mathbf{B}_p dV \quad (6.5)$$

O diferencial de volume  $dV$  pode ser substituído por  $A_{sec} dL$ , sendo  $A_{sec}$  a área da secção transversal do dreno. Nas análises que envolvem solo não saturado, a permeabilidade pode ser considerada variável. Esta pode ser estimada em função, por exemplo, do grau de saturação, de forma similar à formulação apresentada no item 3.3. Por sua vez, a matriz de massa pode ser escrita de forma similar à matriz de massa dos elementos sólidos como:

$$\mathbf{M} = \int_V \mathbf{N}_p^T n \frac{\partial S_r}{\partial u_w} \mathbf{N}_p dV \quad (6.6)$$

onde  $\mathbf{N}_p = [N_{p1} \ N_{p2} \ N_{p3} \ \dots \ N_{pm}]^T$  é o vetor de funções de interpolação do elemento de dreno de  $m$  nós,  $n$  é a porosidade e  $S_r$  é o grau de saturação. Até aqui, considera-se o dreno preenchido com algum material, por exemplo, areia. Desta forma, pode-se associar o grau de saturação com a sucção por meio de uma relação não linear. Entretanto, em drenos ocios não é clara a definição de porosidade. Por esta razão pode ser conveniente considerar o dreno em regime saturado ( $S_r = 1$ ) e, portanto a matriz  $\mathbf{M}$  torna-se nula.

Por outro lado, o vetor de taxa de volumes externos pode ser calculado como:

$$\dot{\mathbf{Q}}_{ext} = \int_S \mathbf{N}_p^T \dot{q} dS + \int_V \mathbf{B}_p^T k r_3 dV \quad (6.7)$$

Nesta última equação, o diferencial  $dS$  está associado com a superfície lateral do elemento de dreno e pode ser representado por  $2\sqrt{\pi Ad}$ . Na prática são aplicadas condições de contorno de poropressão ou volume nos nós. O primeiro termo desta equação é colocado por generalização. O segundo termo é importante, uma vez que é associado ao fluxo devido à carga por elevação, ou seja, fluxo por gravidade.

Após a montagem e a solução do sistema de equações, o vetor de incrementos de volumes internos associados ao elemento de dreno pode ser calculado por meio de:

$$\Delta \mathbf{Q}_{int} = \mathbf{M} \Delta \mathbf{P} + \Delta t \mathbf{H} \mathbf{P} = \int_V \mathbf{N}_p^T n \Delta S_r dV - \int_V \mathbf{B}_p^T \Delta t v dV \quad (6.8)$$

Nesta equação,  $\Delta t$  representa o incremento de tempo,  $\Delta S_r$  representa o incremento no grau de saturação e  $v$  é a velocidade de fluxo axial no dreno a qual pode ser calculada pela Eq. 6.1 ou ainda pela expressão:

$$v = -k \left( \frac{1}{\gamma_w} \mathbf{B}_p \mathbf{P} + r_3 \right) \quad (6.9)$$

Em análises nas quais se considere o dreno trabalhando somente em regime saturado, a matriz  $\mathbf{M}$  é desconsiderada. Desta forma, o vetor de incrementos de volumes internos se reduz a:

$$\Delta \mathbf{Q}_{int} = \Delta t \mathbf{H} \mathbf{P} = - \int_V \mathbf{B}_p^T \Delta t \, vdV \quad (6.10)$$

## 6.2 Abordagem pelo método embutido

Neste método, é possível que os drenos sub-horizontais possam atravessar os elementos sólidos. Uma vez definida a posição dos drenos, no início da análise, estes são discretizados em vários segmentos ou elementos de dreno embutidos. Cada um destes elementos é correspondente a um elemento sólido atravessado.

Este método considera que um elemento de dreno embutido aumenta a capacidade de permitir a passagem de fluido do elemento atravessado. Ou seja, uma vez obtida a matriz de permeabilidade do elemento de dreno embutido, esta pode ser apropriadamente adicionada na matriz de permeabilidade do elemento atravessado, levando em conta assim o efeito drenante. Mais especificamente, é necessário obter para o dreno embutido uma matriz de permeabilidade equivalente cujas dimensões sejam compatíveis com as do elemento atravessado. Na obtenção desta matriz de permeabilidade é possível considerar duas abordagens. Uma primeira abordagem é baseada na compatibilidade dos campos de poropressões do elemento sólido com o elemento de dreno (Andrade, 2003). Esta abordagem é análoga à formulação de reforços embutidos baseada na compatibilidade de deslocamentos. Uma segunda alternativa é dada pela compatibilidade de gradientes hidráulicos entre o solo e os drenos (Durand, 2006). A seguir é descrita esta última abordagem considerando, no entanto, somente a situação em que o dreno se encontre saturado. Nesta condição, torna-se não necessária a consideração de armazenamento no dreno.

Inicialmente, considera-se que os gradientes associados com a poropressão, ao longo do domínio de um elemento sólido, possam ser calculados em função dos valores de poropressão nodais. Desta forma, os gradientes nas três direções podem ser juntados num vetor o qual pode ser calculado como  $\mathbf{g}_{atr} = \frac{1}{\gamma_w} \mathbf{B}_{p\_atr} \mathbf{P}_{atr}$ , em que  $\mathbf{B}_{p\_atr}$  representa a matriz  $\mathbf{B}_p$  do elemento sólido e  $\mathbf{P}_{atr}$  os valores nodais de poropressão. Uma vez obtido  $\mathbf{g}_{atr}$ , a determinação do gradiente em um ponto do domínio ao longo do elemento de dreno embutido pode ser feita através da projeção do vetor  $\mathbf{g}_{atr}$  na direção do dreno. Esta projeção é realizada com o auxílio da matriz  $\mathbf{T} = [r_1 \ r_2 \ r_3]$ , de forma que o gradiente no dreno embutido seja dado por  $g_{emb} = \mathbf{T} \mathbf{g}_{atr}$ . Esta expressão pode também ser escrita em termos de  $\mathbf{P}_{atr}$  como:

$$g_{emb} = \mathbf{T} \underbrace{\frac{1}{\gamma_w} \mathbf{B}_{p\_atr} \mathbf{P}_{atr}}_{\mathbf{g}_{atr}} \quad (6.11)$$

É possível considerar  $\mathbf{B}_{emb} = \mathbf{T} \mathbf{B}_{p\_atr}$  para converter a Eq. 6.11 em uma expressão análoga à Eq. 6.4. Desta forma, é possível escrever a matriz de permeabilidade do elemento embutido como:

$$\mathbf{H} = \int_V \mathbf{B}_{emb}^T \frac{k}{\gamma_w} \mathbf{B}_{emb} dV \quad (6.12)$$

Durante a integração da matriz de permeabilidade, os pontos de integração são tomados de maneira similar à integração da matriz de rigidez de um elemento embutido.

Por sua vez, o vetor de taxa de volumes externos pode ser calculado por:

$$\dot{\mathbf{Q}}_{ext} = \int_V \mathbf{B}_{emb}^T k r_3 dV \quad (6.13)$$

Note-se que nesta abordagem o vetor  $\dot{\mathbf{Q}}_{ext}$  não considera o termo associado com a aplicação de volumes como condição de contorno, diferentemente da Eq. 6.7.

Uma vez resolvido o sistema de equações, os incrementos de volume interno podem ser calculados por:

$$\Delta \mathbf{Q}_{int} = \Delta t \mathbf{H} \mathbf{P} = \int_V \mathbf{B}_{emb}^T \Delta t v dV \quad (6.14)$$

onde  $v$  é a velocidade do fluxo no dreno a qual pode ser calculada por:

$$v = k \left( \frac{1}{\gamma_w} \mathbf{T} \mathbf{B}_{p\_atr} \mathbf{P}_{atr} + r_3 \right) \quad (6.15)$$

Uma vez que o método embutido não permite a aplicação direta de condições de contorno nos elementos de dreno, a condição de descarga pode ser dada com o auxílio dos nós dos elementos atravessados. Desta maneira, a aplicação deste método na simulação de drenagem de taludes, por exemplo, requer a consideração de uma face de percolação (Figura 6.1), onde os nós possuem poropressão prescrita. Este procedimento não necessariamente representa a forma de descarga de um dreno sub-horizontal. No entanto, é possível limitar a região de descarga à face do elemento que se encontra no extremo do dreno.

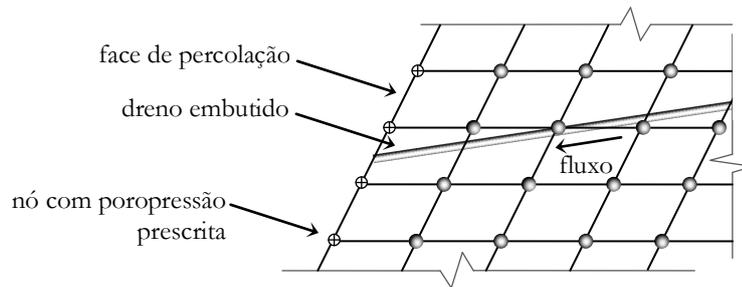


Figura 6.1 - Representação da face de percolação utilizada conjuntamente com o método embutido.

### 6.3 Abordagem pelo método semi-embutido

O estudo de elementos de dreno por meio deste método constitui uma abordagem inovadora no sentido em que se considera a modelagem da transmissão de fluido do solo para o dreno. Isto é realizado através da consideração de elementos de conexão, entre o solo e o dreno, os quais permitem e regulam a passagem de fluido. Estes elementos possuem certa analogia com os elementos de interface utilizados na simulação de reforços pelo método semi-embutido.

A simulação por este método considera duas partes, o elemento de dreno e o elemento conector solo-dreno. O elemento de dreno é simulado por meio da formulação do método discreto apresentado no item 6.1, no entanto, o elemento conector solo-dreno deve ser formulado em função do dreno e, também, do elemento atravessado. A Figura 6.2 mostra a idealização do fluxo perpendicular à superfície do dreno, sendo representado pelo elemento conector solo-dreno.

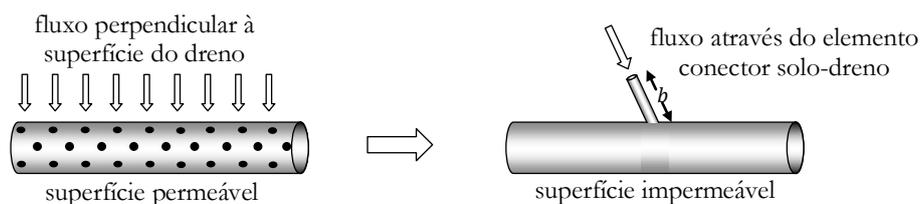


Figura 6.2 - Idealização do elemento conector solo-dreno

Uma vez definida a posição de um dreno sub-horizontal na malha de elementos finitos, no início da análise, este é discretizado automaticamente gerando de forma dinâmica os elementos de dreno e os correspondentes elementos conectores solo-dreno. A Figura 6.3 mostra como os elementos conectores vinculam os elementos de dreno com a malha de elementos finitos por meio de nós denominados embutidos. Uma vez que um dos nós de um elemento conector se encontra embutido, chama-se a este elemento de semi-embutido.

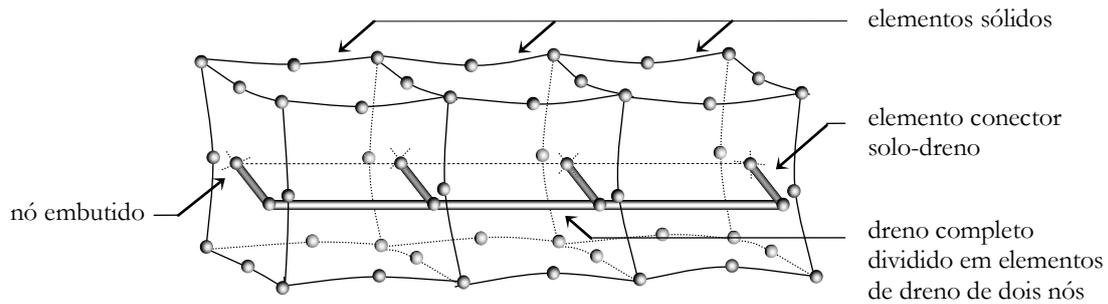


Figura 6.3 - Idealização dos elementos de drenos conectados aos elementos sólidos através de elementos de conexão.

Devido à presença dos elementos conectores, os nós dos elementos de drenos são visíveis a nível global. Desta forma, é possível a aplicação de condições de contorno como volumes ou valores de poropressão imposta nos nós dos elementos de drenos. Adicionalmente, os elementos de drenos possuem conexão entre si. Desta forma, o fluido que já entrou no drenos pode ser transmitido diretamente até o ponto de descarga sem depender dos elementos sólidos. Também é possível atribuir propriedades diferentes entre si aos elementos conectores. Esta característica poderia ser utilizada para simular a presença de um drenos que possui regiões permeáveis e impermeáveis.

Uma vez que os nós dos drenos estão associados a só um grau de liberdade (poropressão), é necessário somente um conector por nó. Isto é diferente do caso dos reforços onde eram necessárias três molas para representar um elemento de interface. A Figura 5.3 mostra o caso em que um elemento de drenos de três nós é vinculado ao elemento atravessado por meio dos nós embutidos e dos elementos conectores.

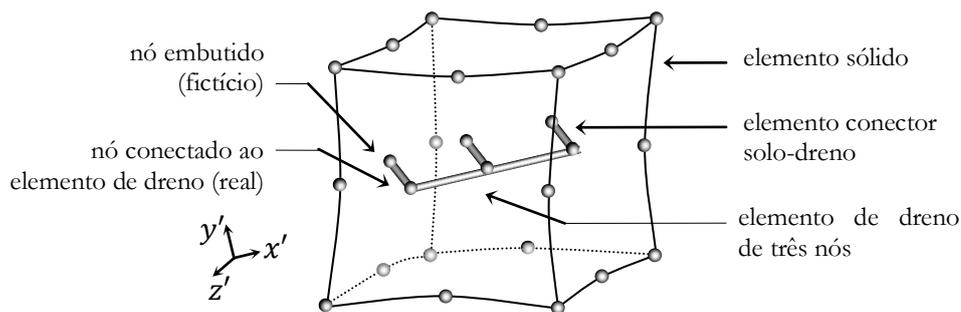


Figura 6.4 - Elementos de barra de três nós vinculado ao elemento sólido por meio de elementos conectores solo-dreno.

Uma vez que o elemento conector de drenos possui um domínio pontual, não é necessário levar em conta o grau de saturação, podendo ser considerado sempre como saturado. Para considerar o elemento conector numa análise de elementos finitos é necessário determinar a sua matriz de permeabilidade. Na dedução desta matriz, considera-se inicialmente a analogia com um tubo. Desta forma, tem-se que o comportamento hidráulico em um tubo cheio pode ser representado por  $v = -k\mathcal{g}$ , sendo  $v$  a velocidade,  $k$  a permeabilidade e  $\mathcal{g}$  o gradiente. O

gradiente de poropressão em um tubo pode ser calculado por  $\mathcal{G} = \frac{u_{w1^*} - u_{w1}}{b\gamma_w}$ , onde  $u_{w1^*}$  é o valor de poropressão no nó embutido,  $u_{w1}$  é o valor de poropressão no nó conectado ao dreno e  $b$  representa o comprimento do tubo. Introduzindo a poropressão relativa  $u_{wr} = u_{w1^*} - u_{w1}$ , é possível expressar o gradiente como  $\mathcal{G} = \frac{u_{wr}}{b\gamma_w}$ . Desta forma, a velocidade do fluxo num tubo pode ser expressa por:

$$v = -\frac{k}{b} \frac{u_{wr}}{\gamma_w} \quad (6.16)$$

Por sua vez, o elemento conector solo-dreno não possui comprimento. Neste sentido, considera-se que a velocidade no elemento conector seja dada por:

$$v = -\frac{\bar{k}}{\gamma_w} u_{wr} \quad (6.17)$$

onde  $\bar{k}$  representa a drenabilidade do elemento conector solo-dreno. Neste caso, as unidades de  $\bar{k}$  são dadas por velocidade sobre comprimento.  $\bar{k}$  pode atender a uma relação não linear, por exemplo, com o objetivo de permitir ou limitar a passagem de água durante a simulação. As considerações sobre a não linearidade de  $\bar{k}$  são apresentadas no próximo item.

Considera-se que o elemento conector possui uma determinada seção transversal  $A_{sec}$ . Desta maneira, a vazão  $\dot{Q}$  (taxa de volume de água) que escoar através da seção  $A_{sec}$  pode ser calculada por  $\dot{Q} = v A_{sec}$ . Esta vazão corresponde ao fluxo de água que atravessa a superfície lateral do dreno. Considerando a expressão da velocidade dada na Eq. 6.17, a vazão  $\dot{Q}$  pode ser expressa como:

$$\dot{Q} = -\frac{\bar{k}}{\gamma_w} u_{wr} A_{sec} \quad (6.18)$$

A determinação da poropressão relativa  $u_{wr}$  pode ser dada em função do vetor de poropressões nodais  $\mathbf{P}_{con} = [u_{w1^*} \ u_{w1}]^T$  e a matriz  $\mathbf{L} = [1 \ -1]$  por meio de  $u_{wr} = \mathbf{L}\mathbf{P}_{con}$ . Esta equação pode ser escrita explicitamente como:

$$u_{wr} = [1 \ -1] \begin{Bmatrix} u_{w1^*} \\ u_{w1} \end{Bmatrix} \quad (6.19)$$

A Figura 6.5 mostra esquematicamente um elemento conector com as respectivas vazões nodais. No equacionamento formulado, foi adotado que o volume de água que entra no domínio do elemento conector é positivo.

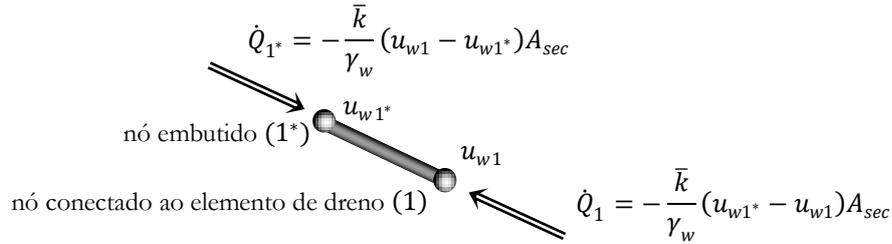


Figura 6.5 - Elemento conector com os respectivos volumes nodais

Através da determinação das expressões dos volumes nodais é possível montar a matriz de permeabilidade  $\mathbf{H}_{con}$  do elemento conector como:

$$\begin{Bmatrix} \dot{Q}_{1*} \\ \dot{Q}_1 \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{\bar{k}}{\gamma_w} A_{sec} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_{con}} \begin{Bmatrix} u_{w1*} \\ u_{w1} \end{Bmatrix} \quad (6.20)$$

Esta equação pode ser escrita em forma condensada como  $\dot{\mathbf{Q}}_{con} = \mathbf{H}_{con} \mathbf{P}_{con}$ , onde  $\dot{\mathbf{Q}}_{con}$  é o vetor de taxa de volumes nodais (vazões) e  $\mathbf{P}_{con}$  é o vetor de poropressões nodais. Por sua vez, a matriz de permeabilidade do elemento conector pode ser expressa em termos da matriz  $\mathbf{L}$  como:

$$\mathbf{H}_{con} = \frac{\bar{k}}{\gamma_w} A_{sec} \mathbf{L}^T \mathbf{L} \quad (6.21)$$

Esta matriz possui dimensões de  $2 \times 2$  correspondendo aos dois nós do elemento conector. Entretanto, levando em conta o aspecto semi-embutido, é necessário considerar que a poropressão do nó embutido pode ser calculada em função dos  $n$  valores nodais do elemento atravessado. Neste sentido, pretende-se transformar a matriz  $\mathbf{H}_{con}$  de forma a que associe os graus de liberdade do elemento sólido em substituição do nó embutido. A matriz procurada é denominada de matriz de permeabilidade semi-embutida  $\mathbf{H}_{semi}$ . Esta matriz relaciona o vetor de poropressões nodais  $\mathbf{P}_{semi}$ , que contém as poropressões nodais do elemento atravessado e do nó conectado ao elemento de dreno, com o vetor de taxa de volumes nodais correspondente  $\dot{\mathbf{Q}}_{semi}$ .

O vetor de poropressões nodais  $\mathbf{P}_{con}$  do elemento conector pode ser obtido em função do vetor  $\mathbf{P}_{semi}$  por meio de uma matriz de transformação  $\mathbf{M}_w$  como é mostrado a seguir:

$$\mathbf{P}_{con} = \mathbf{M}_w \mathbf{P}_{semi} \quad (6.22)$$

Esta equação pode ser escrita explicitamente como:

$$\begin{Bmatrix} u_{w1^*} \\ u_{w1} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & \dots & N_n & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & | & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_w} \begin{Bmatrix} u_{w atr 1} \\ u_{w atr 2} \\ u_{w atr 3} \\ \vdots \\ u_{w atr n} \\ u_{w dren o} \end{Bmatrix} \quad (6.23)$$

Nesta equação,  $u_{w atr 1}, u_{w atr 2}, u_{w atr 3}, \dots, u_{w atr n}$  são os valores nodais de poropressão do elemento atravessado;  $u_{w dren o}$  é o valor de poropressão correspondente ao nó que se conecta ao elemento de dreno e  $N_i$  representa a função de forma do nó  $i$  do elemento atravessado avaliada na posição do nó embutido.

Por outro lado, o vetor de taxa de volumes nodais do elemento conector na condição semi-embutida  $\dot{\mathbf{Q}}_{semi}$  pode ser associado com o vetor  $\dot{\mathbf{Q}}_{con}$  por meio de  $\dot{\mathbf{Q}}_{semi} = \mathbf{M}_w^T \dot{\mathbf{Q}}_{con}$ . Substituindo nesta equação  $\dot{\mathbf{Q}}_{con}$  em função da matriz de permeabilidade  $\mathbf{H}_{con}$  obtém-se  $\dot{\mathbf{Q}}_{semi} = \mathbf{M}_w^T \mathbf{H}_{con} \mathbf{P}_{con}$ . Substituindo nesta última equação as expressões correspondentes para  $\mathbf{H}_{con}$  e  $\mathbf{P}_{con}$ , dadas pelas Eqs. 6.21 e 6.22, obtém-se a seguinte expressão para o vetor  $\mathbf{Q}_{semi}$ :

$$\dot{\mathbf{Q}}_{semi} = \mathbf{M}_w^T \underbrace{\mathbf{L}^T \frac{\overbrace{\mathbf{H}_{con}}}{\bar{k}} A_{sec}}_{\mathbf{H}_{semi}} \mathbf{L} \mathbf{M}_w \mathbf{P}_{semi} \quad (6.24)$$

Nesta equação é possível deduzir a matriz de permeabilidade semi-embutida  $\mathbf{H}_{semi}$  do elemento conector solo-dreno. Fazendo  $\mathbf{S}_w = \mathbf{L} \mathbf{M}_w$ , a matriz de permeabilidade semi-embutida pode ser expressa como:

$$\mathbf{H}_{semi} = \mathbf{S}_w^T \frac{\bar{k}}{\gamma_w} \mathbf{S}_w A_{sec} \quad (6.25)$$

É importante notar que a matriz de permeabilidade possui dimensões  $(n + 1) \times (n + 1)$  e os vetores  $\mathbf{P}_{semi}$  e  $\dot{\mathbf{Q}}_{semi}$  possuem dimensão  $n + 1$ , uma vez que o elemento conector na condição semi-embutida está associado aos  $n$  nós do elemento sólido e a um nó de um elemento de dreno. Por sua vez, a matriz  $\mathbf{S}_w$  pode ser expressa de forma explícita como:

$$\mathbf{S}_w = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad \dots \quad N_n \quad | \quad 1] \quad (6.26)$$

Através da matriz  $\mathbf{S}_w$  é possível expressar o valor da poropressão relativa  $u_{rw}$  simplesmente como  $u_{wr} = \mathbf{S}_w \mathbf{P}_{semi}$ . O valor de  $u_{wr}$  é positivo se o nó embutido possui poropressão maior que o nó conectado ao elemento de dreno. Este caso, por exemplo, corresponde à situação quando o fluxo se dá do solo para o dreno. Por outro lado, é

importante que  $\bar{k}$  seja da mesma ordem que a permeabilidade do dreno, de maneira que este elemento não apresente resistência à passagem da água.

Após a solução do sistema, o vetor de incrementos de volumes nodais, para um dado incremento de tempo  $\Delta t$ , pode ser calculado por:

$$\Delta \mathbf{Q}_{semi} = \mathbf{H}_{semi} \Delta t \mathbf{P}_{semi} \quad (6.27)$$

Substituindo nesta equação a expressão corresponde para  $\mathbf{H}_{semi}$ , obtém-se:

$$\Delta \mathbf{Q}_{semi} = \mathbf{S}_w^T \frac{\bar{k}}{\gamma_w} \mathbf{S}_w A_{sec} \Delta t \mathbf{P}_{semi} = \mathbf{S}_w^T \frac{\bar{k}}{\gamma_w} \underbrace{\mathbf{S}_w \mathbf{P}_{semi}}_{-\nu} A_{sec} \Delta t \quad (6.28)$$

Desta forma, o vetor de incremento de volumes internos pode ser expresso em termos da velocidade  $\nu$  como:

$$\Delta \mathbf{Q}_{semi} = -\mathbf{S}_w^T \nu \Delta t A_{sec} \quad (6.29)$$

O vetor  $\Delta \mathbf{Q}_{semi}$ , como é evidente, possui as mesmas dimensões que o vetor  $\dot{\mathbf{Q}}_{semi}$ .

#### 6.4 Modelagem constitutiva

Na modelagem de elementos como drenos é possível considerar três casos (a, b e c na Figura 6.6). O primeiro caso (a) corresponde ao dreno em regime saturado, ou seja, na região saturada do talude. Nesta situação, é possível considerar para o dreno um valor de permeabilidade constante. O segundo caso (b) é quando o dreno é atingido parcialmente pelo nível freático. Isto acontece quando a superfície freática, no avanço de saturação ou em secagem, atinge parcialmente o domínio do dreno. Neste caso, a água que entra no dreno escoo pelo próprio dreno até alcançar o ponto de saída. O terceiro caso (c) se apresenta quando o nível freático se encontra inferior ao dreno.

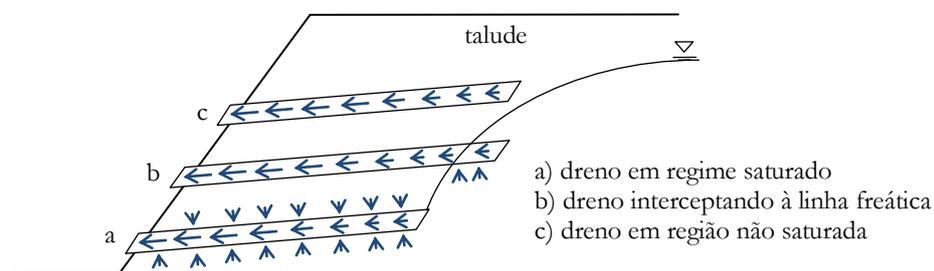


Figura 6.6 - Posições dos drenos com relação ao lençol freático.

Nos dois últimos casos, a permeabilidade do dreno pode ser estabelecida em função da sucção e do grau de saturação utilizando uma formulação similar à apresentada no item 3.3.

Desta forma, a previsão da permeabilidade do dreno pode ser condicionada para reduzir ou eliminar o fluxo quando o solo ao redor se encontra por debaixo do nível de saturação.

Em geral, a permeabilidade do dreno é bem superior à permeabilidade do solo, assim, é possível arbitrar para o dreno um valor elevado. Este valor arbitrado não representa uma falta de acurácia nos resultados, uma vez que se pretende simular uma condição de superfície livre ao longo do domínio do dreno.

Nas simulações pelo método semi-embutido, os drenos encontram-se conectados à massa do solo através de elementos conectores de dreno. Neste sentido, neste método é necessário especificar também o modelo constitutivo para os conectores. A direção do fluxo nos elementos conectores depende do valor de poropressão relativa  $u_{wr}$  entre o nó conectado ao dreno e o nó embutido. Neste caso, o sinal de  $u_{wr}$  determina a direção do fluxo. Quando a poropressão do nó embutido é maior do que a poropressão no nó do dreno ( $u_{wr} > 0$ ) o fluxo se dá do solo para o dreno. No caso oposto, quando a poropressão no nó do dreno é maior que a poropressão do nó embutido ( $u_{wr} < 0$ ), o fluxo se dá em direção ao solo. Na simulação de drenos sub-horizontais, por exemplo, é conveniente considerar o fluxo somente do solo para o dreno. Desta forma, a permeabilidade torna-se função da poropressão relativa, como mostra a Figura 6.7.

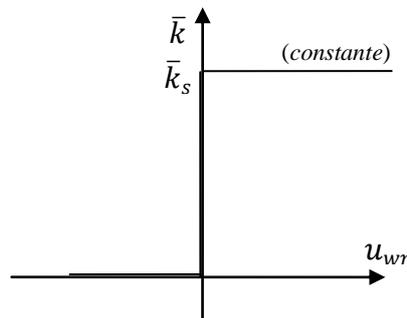


Figura 6.7 - Variação da permeabilidade do elemento conector com a diferença de poropressão.

Uma vez que o método semi-embutido permite a representação de elementos conectores com comportamento não linear, é possível, neste caso, utilizar nos drenos uma modelagem simples com permeabilidade constante. Por outro lado, é possível atribuir diferentes comportamentos para os elementos conectores ao longo de um elemento de dreno. Esta característica é útil na simulação de drenos constituídos por um trecho perfurado e um trecho liso, por exemplo.

## 6.5 Validações

A seguir, são realizadas algumas simulações com o intuito de validar a formulação desenvolvida e as implementações realizadas com relação à simulação de drenos. Em um

primeiro caso são aplicados os métodos embutido e semi-embutido em um sistema hipotético de drenos nos quais se faz circular água em regime saturado. Os drenos se encontram no interior de elementos sólidos de baixa permeabilidade de forma a forçar o fluxo através dos próprios drenos. Nesta análise é aplicado um volume imposto e são verificadas as velocidades axiais e os volumes de saída. Após este primeiro estudo de validação, são realizadas análises pelo método semi-embutido em casos em que se tem fluxo não saturado. Estas análises são realizadas com o objetivo de avaliar os valores apropriados de permeabilidade para os drenos e de verificar a redução do nível do lençol freático. Estas verificações foram realizadas por comparação com os resultados do programa SEEP/W. Finalmente, é realizada uma análise de verificação baseada na teoria de adensamento radial. Neste caso, é simulado um dreno vertical instalado em uma camada de solo submetida a um carregamento na superfície. Após a análise, os valores de adensamento radial ao longo do tempo são comparados com valores obtidos em forma analítica por meio da teoria de Barron (1948).

### 6.5.1 Sistema de drenos no interior de elementos sólidos

Nesta análise é simulado o fluxo através de dois drenos colocados no interior de elementos sólidos. Os elementos sólidos são simulados por elementos hexaédricos de oito nós e os drenos são representados por elementos lineares de dois nós. A Tabela 6.1 mostra as propriedades dos materiais utilizados na análise. Nos elementos sólidos é considerada uma permeabilidade muito baixa com a finalidade de que o fluido escoe preferencialmente através dos drenos.

Tabela 6.1 - Propriedades dos materiais utilizados na simulação.

Material	Modelo	Parâmetros/Propriedades	
Sólidos	fluxo linear	$k = 10^{-10}$ m/s	
Tubos	fluxo linear	$\bar{k} = 1$ m/s/m	$A_{sec} = 0,01$ m <sup>2</sup>

Uma primeira análise é realizada por meio da utilização do método embutido. A Figura 6.8a mostra a malha de elementos finitos utilizada onde é possível observar a disposição dos drenos.

Inicialmente é considerado um estado de poropressão igual a zero em todo o domínio. A seguir a análise foi realizada em dois estágios. Num primeiro estágio, são aplicadas condições de contorno de forma a gerar um estado hidrostático com o nível da água corresponde à altura de 1 m. Após isto, num segundo estágio, é aplicado um volume imposto igual a 1 m<sup>3</sup> em um tempo de 100 s. Os drenos possuem uma parte comum por onde é aplicado um volume imposto. Este ponto comum corresponde ao nó 14 da malha de elementos sólidos. Também é estabelecida a condição de descarga fazendo a poropressão igual a zero nos nós 1 e 9. Estas

condições de contorno são aplicadas nos elementos sólidos, dado que não há como aplicá-las diretamente aos drenos pelo método embutido. A velocidade do fluido nos tubos e os volumes de descarga obtidos são comparados com os valores analíticos, como mostra a Figura 6.8b. Estes resultados foram bastante satisfatórios. A Figura 6.9a mostra o campo de poropressões hidrostático que foi gerado nos drenos antes da aplicação do volume imposto. Nesta figura pode-se observar que é possível gerar uma condição hidrostática nos drenos, uma vez que o gradiente considerado na formulação contém um componente de gravidade. Ou seja, os drenos permitem, também, a simulação do fluxo por gravidade. A Figura 6.9b mostra os valores de velocidade do fluxo ao longo dos tubos após a aplicação do volume imposto.

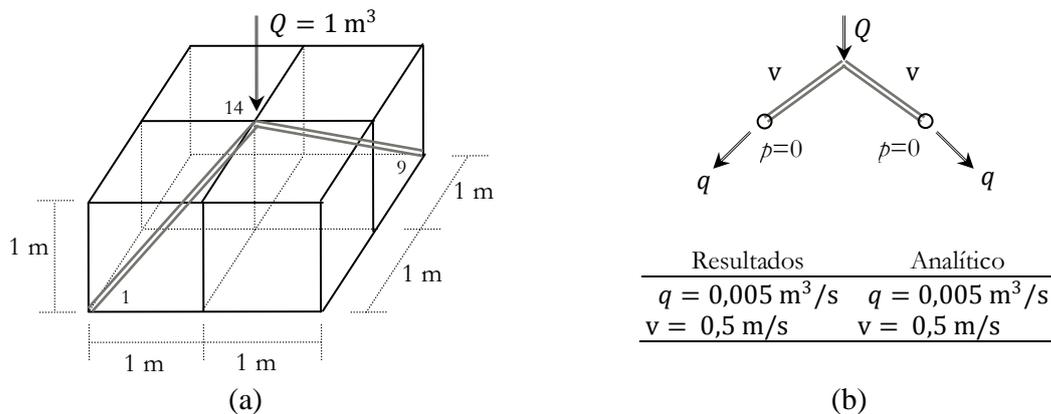


Figura 6.8 - Análise de tubos em elementos sólidos pelo método embutido: a) malha de elementos finitos e condições de contorno; b) comparação dos resultados obtidos.

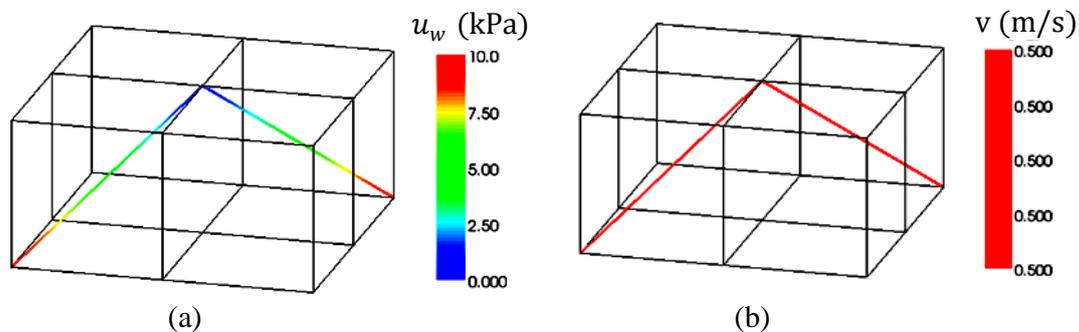


Figura 6.9 - Resultados da análise de tubos em elementos sólidos pelo método embutido: a) poropressão após o primeiro estágio; b) velocidade axial após o segundo estágio.

Esta mesma análise foi realizada novamente, porém, utilizando-se desta vez o método semi-embutido. Neste caso foi utilizado  $\bar{k} = 1 \text{ m/s/m}$  e  $A_{sec} = 0,01 \text{ m}^2$  para os elementos conectores. Nesta segunda análise foram obtidos resultados, para as velocidades de fluxo e para os volumes de descarga, totalmente semelhantes aos obtidos com o método embutido.

### 6.5.2 Avaliação dos valores de permeabilidade dos elementos conectores

Este teste não constitui propriamente uma validação, no entanto, pretende determinar os valores apropriados do parâmetro  $\bar{k}$  a serem atribuídos aos elementos conectores utilizados

pelo método semi-embutido. Estes valores são considerados referenciais e serão utilizados em análises posteriores. Para este propósito, é simulado um dreno instalado em um bloco de solo cujo nível inicial da água se encontra na superfície. A aplicação do dreno faz com que a linha freática reduza o nível em direção ao dreno. O fluxo através do solo é simulado pela formulação dada no item 3.3. Durante a análise, são realizadas várias simulações variando o parâmetro  $\bar{k}$  em forma crescente. De maneira simultânea, a permeabilidade do dreno  $k$  é alterada por meio da relação  $k = \bar{k} \times (1 \text{ m})$ , de forma a manter a mesma ordem de grandeza entre os dois parâmetros. O objetivo desta análise é determinar o valor de  $\bar{k}$  a partir do qual valores superiores fornecem o mesmo estado estacionário. Nesta análise, um determinado estado estacionário é caracterizado pela carga hidráulica ao longo de uma linha localizada na altura do dreno. Desta forma, espera-se obter o valor de  $\bar{k}$  a partir do qual a carga hidráulica ao longo desta linha torna-se constante. A Tabela 6.2 mostra as propriedades e parâmetros dos materiais utilizados na análise. A Figura 6.10a mostra a malha de elementos finitos utilizada, incluindo as condições de contorno. Nesta figura é possível observar a linha AB onde são avaliados os valores de carga hidráulica. A espessura da malha estruturada 3D é de 3 m e possui sete divisões. Tanto o dreno quanto a linha AB se encontram exatamente no meio desta espessura.

Tabela 6.2 - Parâmetros e propriedades dos materiais utilizados nas simulações.

Material	Modelo	Parâmetros/Propriedades		
Solo	fluxo não saturado	$k_s = 10^{-4} \text{ m/s}$ $n = 0.32$	$a = 5$ $b = 4$	$c = 0.03$ $m = 30$
Drenos	fluxo linear	$k = 10^{-4} \text{ até } 10^2 \text{ m/s}$	$A_{sec} = 0,02 \text{ m}^2$	
Conectores	fluxo linear	$\bar{k} = 10^{-4} \text{ até } 10^2 \text{ m/s/m}$	$A_{sec} = 0,02 \text{ m}^2$	
Outras constantes		$\gamma_w = 9,8 \text{ kN/m}^3$	$p_{atm} = 101,3 \text{ kPa}$	

O tempo de análise para cada simulação foi estabelecido igual a 100 000 s. Este tempo foi o suficiente para atingir a condição estacionária para todos os valores de permeabilidade simulados. A Figura 6.10b mostra a carga hidráulica na linha AB para os diferentes valores de  $\bar{k}$  analisados. Neste gráfico é possível observar que os valores de carga hidráulica se estabilizam quando  $\bar{k}$  atinge valores de  $10^2 \text{ m/s/m}$  ou superiores.

Dadas as condições geométricas dos elementos de dreno e do elemento conector, foi observado que o valor de  $\bar{k}$  apropriado para este tipo de análise corresponde a  $10^2 \text{ m/s/s}$ . Consequentemente o valor associado de permeabilidade do dreno  $k$  é de  $10^2 \text{ m/s}$ .

A rigor, os elementos drenantes não possuem dimensões axiais. Por esta razão a definição das áreas da seção do dreno ou dos elementos conectores não são determinantes na análise.

Isto ocorre porque, durante a montagem das matrizes de permeabilidade, estes valores são multiplicados com os valores de  $k$  ou  $\bar{k}$ , os quais possuem uma ordem de grandeza dada em potências de 10. Considerando o valor referencial para a permeabilidade do dreno de  $k = 10^2$  m/s é possível relacionar este com a permeabilidade utilizada nos elementos sólidos. Desta forma, para as condições dadas nesta análise, obtém-se que a permeabilidade dos drenos se encontra na ordem de  $10^6$  vezes a permeabilidade dos elementos sólidos. Finalmente, a título de exemplo, a Figura 6.11 mostra a superfície freática produzida para a análise com  $\bar{k} = 10^2$  m/s/m.

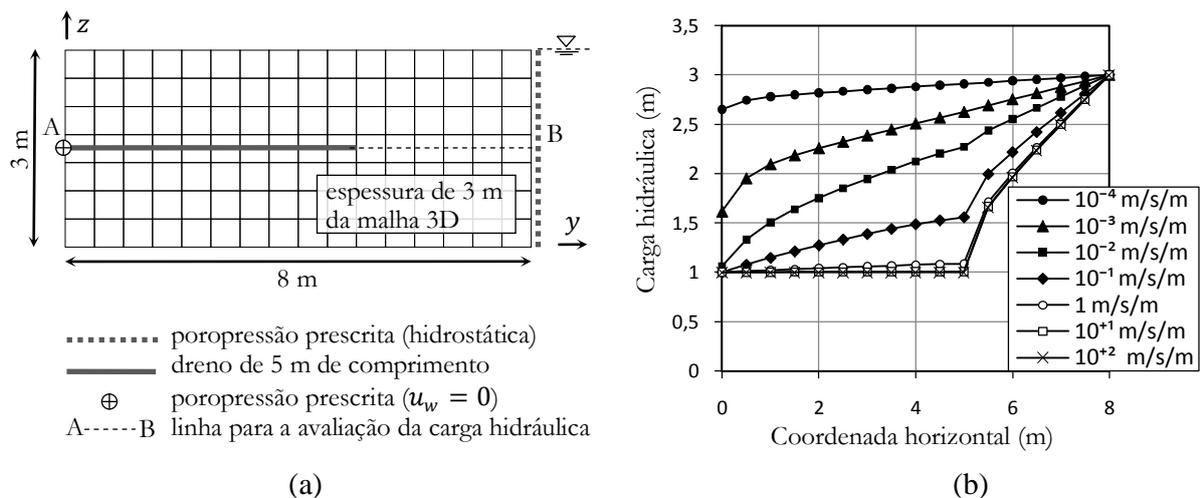


Figura 6.10 - Teste de avaliação da permeabilidade do dreno: a) Geometria da malha e condições de contorno; b) Carga hidráulica na linha A-B, para diferentes valores de  $\bar{k}$ .

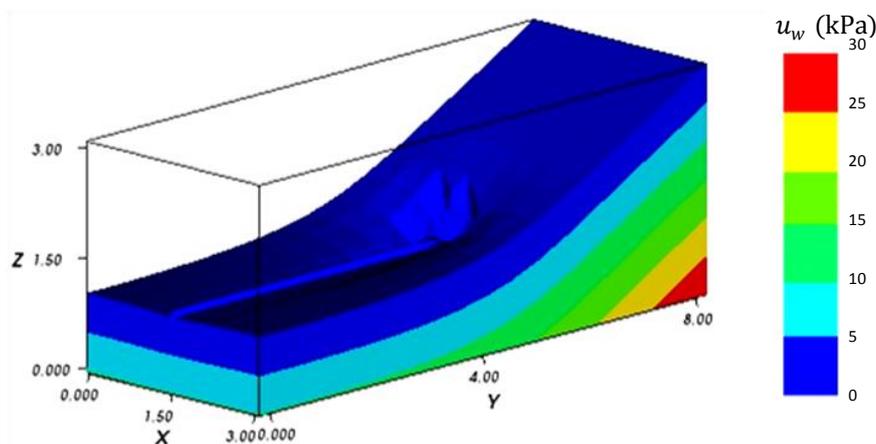


Figura 6.11 - Campo de poropressões positivas mostrando a superfície freática produzida pela inclusão do dreno.

### 6.5.3 Avaliação de superfície freática para diferentes comprimentos do dreno

Neste item pretende-se verificar a posição da superfície freática após a aplicação de drenos de diferentes comprimentos. Uma vez que os métodos apresentados neste capítulo pretendem simular uma condição de superfície livre ao longo dos drenos, as superfícies freáticas são

comparadas com os resultados de uma análise estacionária realizada pelo programa SEEP/W (Geo-Slope, 1995) onde os drenos são simulados por meio de condições de contorno correspondentes a uma superfície livre.

Uma primeira análise é realizada por meio das formulações e implementações elaboradas neste trabalho correspondentes ao método semi-embutido. Nesta análise é simulada a drenagem produzida pela presença de drenos de 2, 3, 4 e 5 m de comprimento. Estas simulações são realizadas para um tempo suficiente até obter uma situação estacionária. O fluxo através do solo é simulado pela formulação dada no item 3.3. Em uma segunda análise, utilizando o programa SEEP/W, são simulados os mesmos comprimentos dos drenos em um domínio bidimensional. A geometria das malhas de elementos finitos das duas análises e as correspondentes condições de contorno são mostradas na Figura 6.12. Nesta figura é possível observar uma leve diferença entre as malhas. Por exemplo, na malha utilizada para a simulação pelo método semi-embutido tem-se que os drenos encontram-se em posição tal, que atravessam os elementos sólidos.

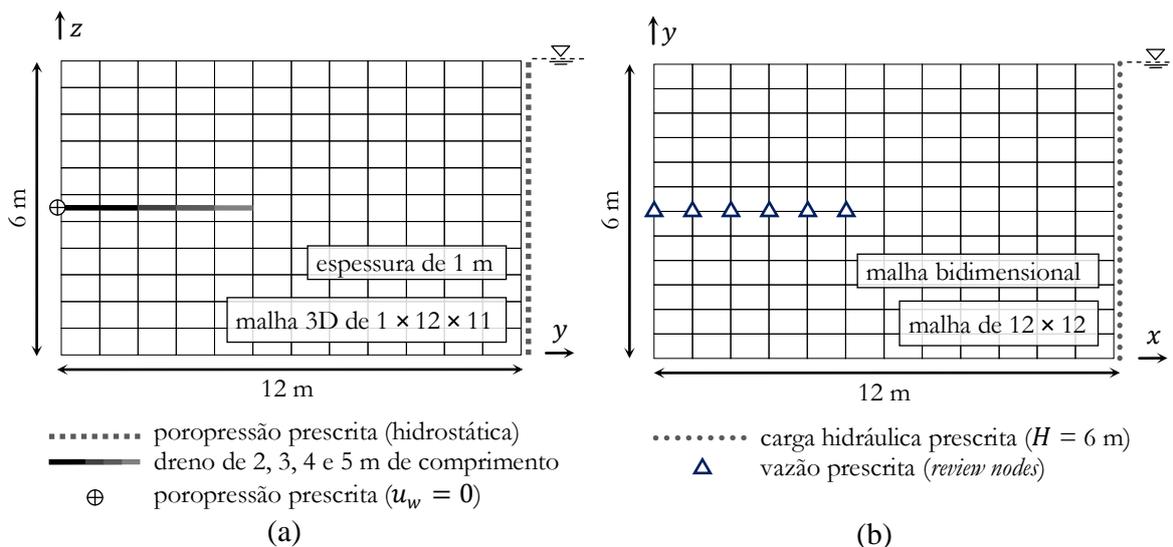


Figura 6.12 - Malhas de elementos e condições de contorno utilizadas: a) simulação pelo método semi-embutido; b) simulação pelo programa SEEP/W.

A Tabela 6.4 mostra as propriedades e parâmetros dos materiais utilizados nas simulações.

Tabela 6.3 - Parâmetros e propriedades dos materiais utilizados nas simulações.

Material	Modelo	Parâmetros/Propriedades		
Solo	fluxo não saturado	$k_s = 10^{-5}$ m/s $n = 0.32$	$a = 5$ $b = 4$	$c = 0.03$ $m = 30$
Drenos	fluxo linear	$k = 10^2$ m/s	$A_{sec} = 0,02$ m <sup>2</sup>	
Conectores	fluxo linear	$\bar{k} = 10^2$ m/s/m	$A_{sec} = 0,02$ m <sup>2</sup>	
Outras constantes		$\gamma_w = 9,8$ kN/m <sup>3</sup>	$p_{atm} = 101,3$ kPa	

Em ambos os casos, o nível do lençol freático inicial foi estabelecido na cota de 6 m. Após a simulação dos drenos, foi obtida a nova posição do lençol freático. A Figura 6.13 mostra a comparação dos resultados obtidos na análise pelo método semi-embutido, para diferentes comprimentos de drenos, com os resultados obtidos com o programa SEEP/W. É possível observar uma boa concordância entre os resultados. Considera-se que as diferenças são decorrentes, principalmente, do fato da malha utilizada no programa SEEP/W ser uma malha 2D enquanto que na simulação pelo método semi-embutido é utilizada uma malha 3D com espessura de 1 m. Outra causa das diferenças é atribuída à diferença entre os métodos para simular os drenos.

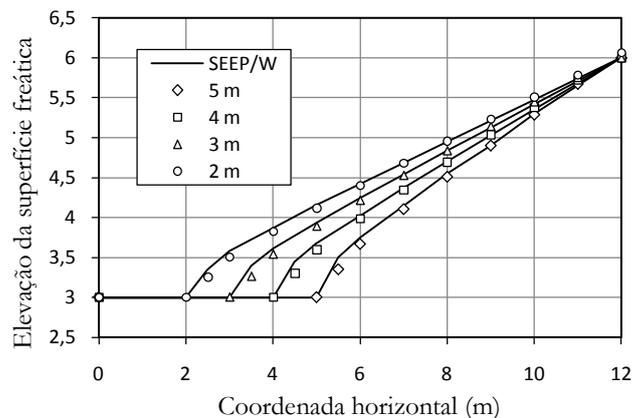


Figura 6.13 - Comparação das superfícies freáticas para diferentes comprimentos de dreno obtidas pelo método semi-embutido e pelo SEEP/W.

#### 6.5.4 Adensamento radial

Nesta análise é verificada a variação do grau de adensamento radial de uma camada de solo submetida a um dado carregamento na superfície e onde são instalados drenos verticais. A Figura 6.14 mostra esquematicamente uma vista em planta e em corte dos drenos verticais.

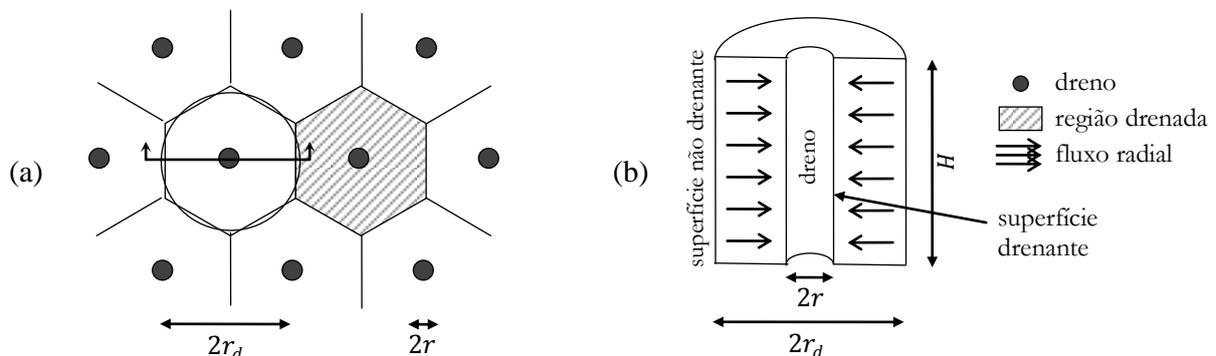


Figura 6.14 - Vista em planta (a) e em corte (b) dos drenos verticais.

A determinação do grau de adensamento radial pode ser feita analiticamente através de formulação apresentada por Barron (1948). Neste caso, considera-se a hipótese de que as

deformações verticais são iguais. Desta forma, tem-se o valor analítico para o grau de adensamento radial dado por:

$$U_r = 1 - \exp\left(\frac{-8T_r}{F(n)}\right); \quad n = \frac{r_d}{r_w} \quad (6.30)$$

onde  $F_r$  é o fator tempo radial e  $n$  é a razão dada pelo raio da região drenada  $r_d$  e o raio do dreno  $r_w$ . O fator tempo radial pode ser calculado por  $T_r = \frac{c_{vr} t}{(2r_d)^2}$ , onde  $c_{vr} = \frac{k}{m_v \gamma_w}$  e  $m_v = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}$ . Adicionalmente, a função  $F$  é definida por:

$$F(n) = \frac{n^2}{n^2 - 1} \ln(n) - \frac{3n^2 - 1}{4n^2} \quad (6.31)$$

Nesta simulação foi utilizado o método semi-embutido. A Figura 6.15a mostra a malha 3D utilizada na análise, a qual foi estabelecida para simular um dreno vertical. Dada a simetria radial do dreno e da correspondente região drenada, a malha representa somente a quarta parte do volume drenado. Na Figura 6.15b é apresentada uma vista lateral da malha onde é possível observar as condições de contorno. Nesta geometria 3D são simulados drenos de diferentes raios, cujos efeitos no grau de adensamento são, mais adiante, comparados com os valores obtidos de forma analítica. Nesta análise não foi considerada a drenagem vertical através do solo, uma vez que somente a avaliação do adensamento radial causado pela presença dos drenos é de interesse. Desta forma, consideram-se impermeáveis as superfícies superior e inferior do domínio. Os parâmetros e propriedades dos materiais utilizadas na análise são apresentados na Tabela 6.4.

Tabela 6.4 - Propriedades dos materiais utilizados na simulação.

Material	Modelo	Parâmetros/Propriedades	
Solo	linear elástico com fluxo linear	$E = 5000 \text{ kPa}$ $\nu = 0,25$	$k_s = 10^{-5} \text{ m/s}$
Drenos	fluxo linear	$k = 10^2 \text{ m/s}$	$A_{sec} = 0,1 \text{ m}^2$
Conectores	fluxo linear	$k = 10^2 \text{ m/s/m}$	$A_{sec} = 0,1 \text{ m}^2$
Outras constantes		$\gamma_w = 9,8 \text{ kN/m}^3$	

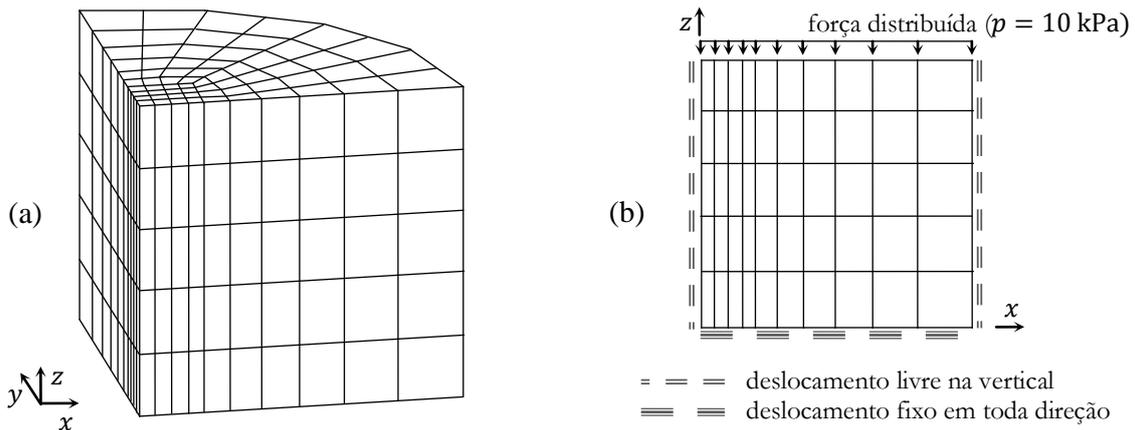


Figura 6.15 - Malha 3D utilizada na simulação de adensamento radial: a) isometria; b) vista lateral mostrando as condições de contorno.

Uma vez que os drenos quando formulados como elementos finitos não possuem as mesmas dimensões não axiais, uma forma de simular drenos com grandes diâmetros seria a instalação de várias linhas drenantes que representem a geometria espacial do dreno vertical. Cada linha drenante corresponde a um conjunto de elementos tipo dreno com seus respectivos elementos de conexão. A Figura 6.16 mostra em planta as distribuições de linhas drenantes para representar os drenos verticais de raios iguais a 0,1 m; 0,25 m e 0,5 m. Nas análises observou-se que a presença de cinco linhas drenantes é suficiente para representar a superfície livre gerada pelos drenos verticais estudados.

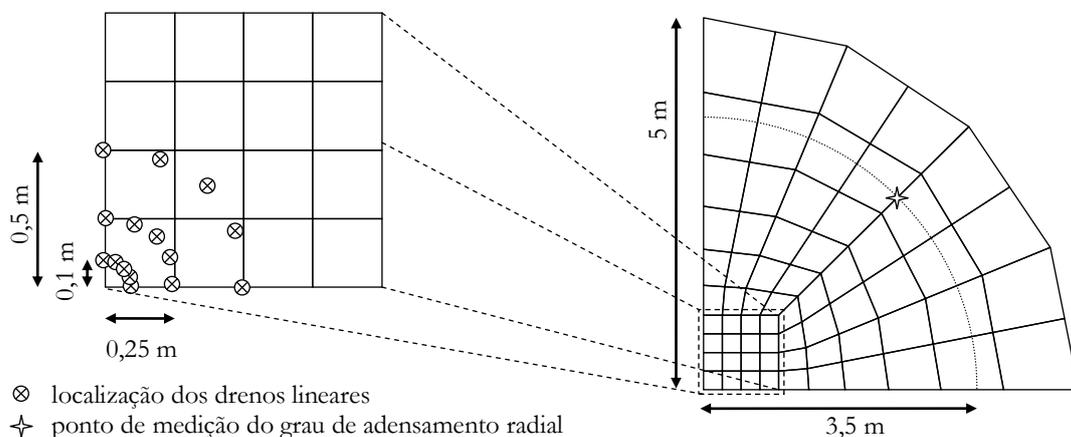


Figura 6.16 - Vista em planta da localização das linhas drenantes para a simulação de drenos verticais.

Considerando-se que na formulação analítica, a previsão do adensamento radial refere-se ao valor médio da camada, nesta análise foi necessário escolher um ponto apropriado para a medição do grau de adensamento, uma vez que este varia com a distância ao dreno vertical. A Figura 6.16 mostra o ponto de medição do grau de adensamento radial. Este ponto foi obtido através da determinação do raio que corresponde a uma área de setor circular igual à metade

do setor circular correspondente à área drenada. Desta forma, o arco determinado por este raio separa a área drenada em duas partes iguais.

No início da análise, o solo se encontra totalmente saturado e o campo de poropressões corresponde a um estado hidrostático. Nesta etapa, as linhas drenantes já se encontram ativas nas posições correspondentes. A seguir, e em um tempo muito pequeno, é aplicada uma carga distribuída  $p = 10$  kPa na superfície da camada. Este carregamento gera um excesso de poropressão no solo  $u_e = 10$  kPa. Posteriormente, é observada a redução no excesso de poropressão ao longo do tempo. Durante este período, o grau de adensamento radial é avaliado por meio de  $U_r = 1 - u_e/p$ . Neste caso, o grau de adensamento radial é igual ao total. A Figura 6.17 mostra os resultados no grau de adensamento ao longo do tempo para diferentes valores de  $n$ , os quais correspondem aos raios de 0,1 m, 0,25 m e 0,5 m. Os resultados mostram-se bastante satisfatórios, no entanto, algumas discrepâncias se devem a fatores como o nível de discretização do domínio e a representação de um dreno vertical por um número finito de linhas drenantes.

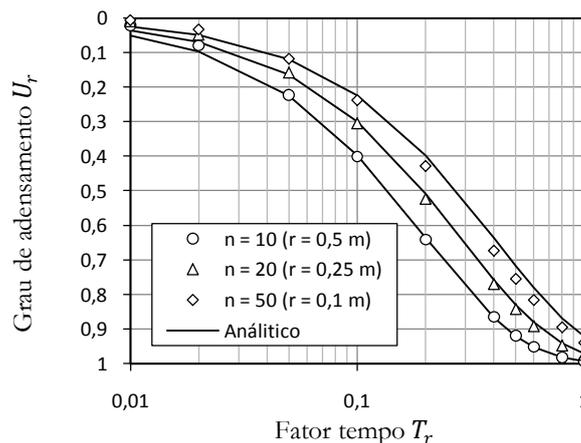


Figura 6.17 - Comparação dos valores numéricos e analíticos dos graus de adensamento radial ao longo do tempo para diferentes valores de  $n$ .

## 6.6 Comentários sobre a modelagem dos drenos

Neste capítulo foi visto que os métodos embutido e semi-embutido representam alternativas ao método discreto na simulação de drenos pelo MEF. A abordagem pelo método embutido apresentada considera somente o caso em que o solo ao redor do dreno se encontre em estado de saturação. No entanto, a abordagem pelo método semi-embutido considera a possibilidade de que o solo se encontre na condição não saturada, além de aplicar, com facilidade condições de contorno diretamente sobre os nós dos drenos.

Nas análises convencionais de elementos finitos, quando um dreno se encontra numa região de solo não saturado, tal dreno é considerado como inexistente e não intervém na

montagem do sistema de equações. O objetivo disto é evitar a interferência da presença do dreno no campo de poropressões do maciço. No entanto, pelo método semi-embutido, a situação em que o dreno se encontra na região não saturada é abordada por meio da utilização de uma relação constitutiva nos elementos conectores. Esta relação pode ser estabelecida para reduzir ou eliminar o fluxo nestas condições. Inclusive, dado que é utilizada uma relação deste tipo para os elementos conectores, é possível considerar o dreno sempre em condição saturada. Por outro lado, foi visto que não é determinante estabelecer com precisão as propriedades geométricas dos elementos drenantes como a área da seção dos drenos ou dos elementos de conexão. Isto ocorre porque no cálculo da matriz de permeabilidade, estes valores são multiplicados pelo valor da permeabilidade do dreno  $k$  ou o parâmetro  $\bar{k}$  do elemento conector, os quais geralmente são dados em potências de 10.

A modelagem pelo método semi-embutido pode ser utilizada sem inconvenientes na simulação de drenos verticais, como foi mostrado. No entanto, dado que é de interesse avaliar o grau de adensamento para um dado diâmetro de dreno e sendo este bastante significativo em relação à região drenada, é necessário considerar o contorno inteiro do dreno através de várias linhas drenantes.

De forma similar à análise de reforços pelos métodos embutido e semi-embutido, neste caso, é possível a aplicação das funções de interpolação pseudolinear em elementos sólidos quadráticos ou de ordem superior. Isto é necessário para se obter uma aproximação linear na interpolação dos valores de poropressão dos nós dos elementos atravessados para as posições de interceptação com os drenos.

## Capítulo 7

### Estudo do Desempenho das Inclusões

Neste capítulo são realizadas simulações pelo MEF de escavações com solo grampeado com vistas a se avaliar o desempenho das inclusões sob diversas configurações. Além disso, estas simulações pretendem mostrar a aplicabilidade do método semi-embutido. Neste sentido, é realizado o estudo da contenção de uma escavação, onde são analisadas diferentes configurações de grampos e drenos com o fim de aumentar a resistência, diminuir a deformabilidade do maciço e reduzir o nível do lençol freático. O desempenho das inclusões é avaliado em função das forças axiais desenvolvidas nos grampos e do deslocamento horizontal da face de escavação.

Existem na literatura alguns estudos que analisaram diferentes configurações de reforços em taludes de solo grampeado, como por exemplo, os trabalhos de Lima (2002), Shiu & Chang (2005), dentre outros. Entretanto, estes estudos somente abordam a aplicação de grampos, sendo de interesse o estudo de casos nos quais seja considerada a aplicação de drenos sub-horizontais e a sua interação conjuntamente com os reforços no comportamento do talude. No estudo desenvolvido neste capítulo, é apresentada inicialmente a avaliação do desempenho dos grampos utilizando diversas configurações com variação do comprimento e da inclinação dos grampos. A seguir são estudadas diversas configurações de drenos sub-horizontais aplicados conjuntamente com os reforços. As diversas configurações de drenos analisadas foram obtidas variando o comprimento dos mesmos. Por outro lado, neste tipo de análises onde são testadas diferentes configurações de inclusões, é de interesse que o método selecionado para simular as inclusões considere que estas possam atravessar os elementos sólidos permitindo a utilização de uma única malha de fundo. Dentre os métodos que permitem este tipo de análises, o método semi-embutido foi escolhido por apresentar características como permitir a aplicação de condições de contorno nas inclusões e também permitir a simulação da interface.

O tipo de problema supracitado requer uma análise transiente de deformação e fluxo acoplados. Para simular o comportamento mecânico do solo é considerado o modelo elastoplástico BarcelonaX (Pedroso, 2006) o qual é uma extensão do modelo para solos não saturados Barcelona (Alonso, 1990). O comportamento hidráulico do solo foi simulado pela

formulação apresentada no item 3.3. Adicionalmente, a análise por elementos finitos da execução de uma obra de solo grampeado requer a simulação apropriada da seqüência de construção. Neste sentido, devem ser considerados aspectos como a desativação dos elementos que representam o solo e a ativação dos elementos que representam as inclusões. Neste estudo foram consideradas duas seqüências de escavação. Uma para a análise do desempenho dos reforços e outra para a análise do desempenho dos drenos.

Após a apresentação dos resultados dos estudos realizados, e para finalizar este capítulo, são realizados alguns comentários relevantes com relação aos aspectos de simulação utilizados e aos resultados obtidos.

### 7.1 Talude hipotético utilizado nas análises

Para realizar o estudo do desempenho de diferentes configurações de inclusões é considerado um talude hipotético correspondente a uma escavação vertical reforçada pela técnica do solo grampeado. O talude vertical em estudo é resultado de uma escavação de 9 m de profundidade realizada em seis camadas de 1,5 m de espessura. Nesta escavação são aplicadas inclusões dispostas com espaçamentos verticais e horizontais de 1,5 m. A Figura 7.1 mostra uma vista 2D da malha tridimensional utilizada nas análises. Esta figura mostra também as condições de contorno adotadas. A malha possui uma espessura de 1,5 m a qual corresponde ao espaçamento horizontal das inclusões, tanto drenos quanto grampos. A Figura 7.1 ainda mostra, a título de exemplo, uma disposição das inclusões no maciço. Entretanto, esta disposição é variável durante as análises.

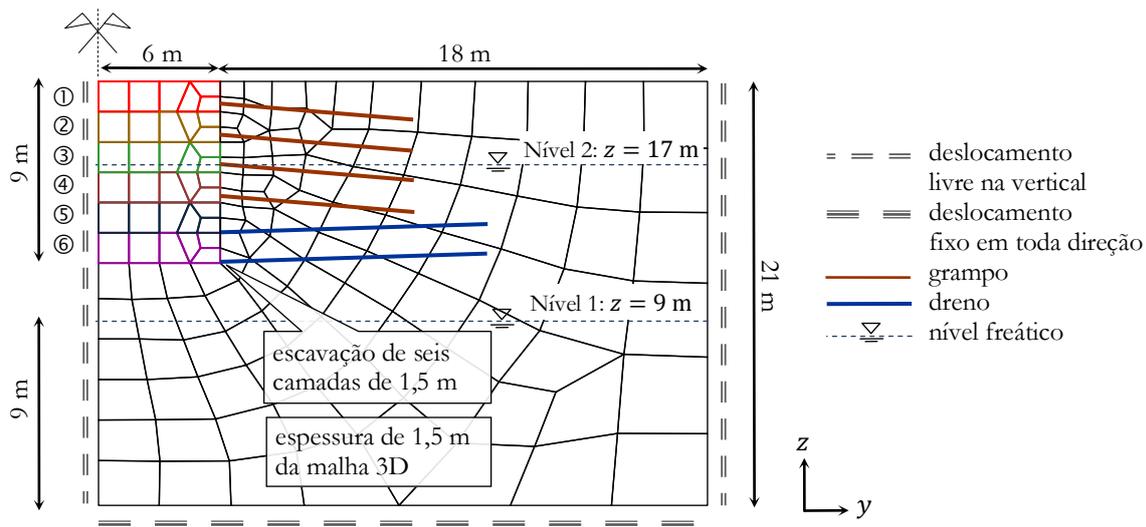


Figura 7.1 - Malha de elementos finitos do talude hipotético utilizado nas simulações.

Para representar o solo foram utilizados elementos hexaédricos de oito nós. Uma vez que é utilizado o método semi-embutido, cada inclusão é representada por um conjunto de

elementos interconectados de barra ou dreno. Neste caso, são utilizados elementos de barra de dois nós e elementos de dreno de dois nós.

Nas análises que envolvem o estudo do desempenho dos reforços, considera-se que o nível freático se encontra na cota  $z = 9$  m, ou seja, abaixo do nível de escavação. Esta consideração é realizada porque se pretende estudar inicialmente o comportamento dos reforços livre da variação do nível do lençol freático, entretanto, considerando o efeito da sucção. Por outro lado, nas análises associadas ao estudo do desempenho dos drenos, é considerado o nível freático na cota  $z = 17$  m. Desta maneira, tem-se que parte da massa de solo a ser escavada encontra-se inicialmente sob o nível freático. Neste caso é considerada a aplicação de drenos sub-horizontais para contribuir na redução do nível do lençol freático.

Na modelagem do solo foi considerado o modelo BarcelonaX utilizando, no possível, parâmetros compatíveis com a argila porosa de Brasília. Parâmetros de deformabilidade como os coeficientes de compressibilidade  $\kappa$  e  $\lambda_0$  foram obtidos do trabalho de Chissolucombe (2001) que utilizou o modelo Cam-clay no estudo numérico da escavação do túnel do metrô de Brasília. Por outro lado, os coeficientes de compressibilidade para incrementos de sucção e os parâmetros  $r$  e  $\beta$  necessários à modelagem pelo modelo BarcelonaX foram arbitrados. Os parâmetros associados ao comportamento hidráulico, como a permeabilidade saturada  $k_s$ , foram obtidos do trabalho de Guimarães (2002) que estudou o comportamento do solo de Brasília com relação ao desempenho de estacas escavadas. Este último autor, por exemplo, apresenta várias curvas de armazenamento obtidas para diferentes profundidades. Neste caso, tentou-se reproduzir a curva de armazenamento para uma profundidade de 4 m, desta forma, a Figura 7.2a mostra a variação do grau de saturação com a sucção adotada. A redução da permeabilidade com a sucção pode ser observada na Figura 7.2b. A Tabela 7.1 mostra resumidamente os parâmetros e constantes utilizados para o solo nas análises.

Tabela 7.1 - Parâmetros e constantes utilizadas para simular o solo pelo modelo BarcelonaX.

	Parâmetros/Propriedades		
Solo	$\lambda_0 = 0,07$	$\lambda_s = 0,02$	$r = 0,9$
	$\kappa = 0,014$	$\kappa_s = 0,002$	$\beta = 0.125 \text{ kPa}^{-1}$
	$\nu = 0,3$	$\phi = 25^\circ$	$k = 0,6$
	$B = 1000 \text{ §}$		
Fluxo	$k_s = 10^{-6} \text{ m/s}$	$a = 10$	$b = 1,5$
	$c = 0,1$	$m = 10$	$n = 0,62$
Constantes	$p_{atm} = 101 \text{ kPa}$	$p_{ref} = 101 \text{ kPa}$	$\gamma_w = 9,8 \text{ kN/m}^3$

§: Parâmetro adicional necessário no modelo BarcelonaX

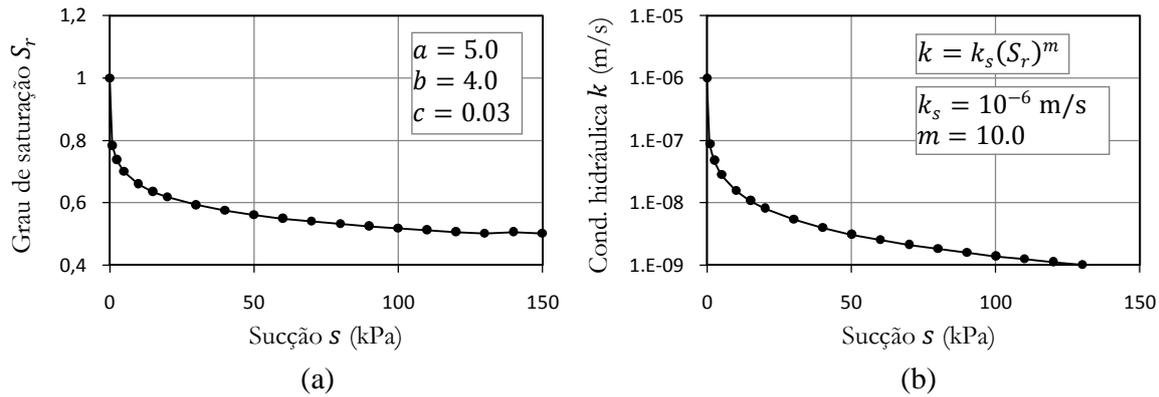


Figura 7.2 - Curvas aproximadas utilizadas nas análises; a) sucção versus grau de saturação; b) sucção versus condutividade hidráulica.

Com relação aos reforços, são consideradas propriedades compatíveis com uma obra de solo grampeado convencional. Para o contato solo-reforço foram adotados valores do ensaio de arrancamento como o valor da resistência ao arrancamento  $q_s = 50$  kPa e o deslocamento associado a este igual a  $s_{max} = 2,5$  mm. A razão entre estes dois valores determina o módulo da interface, neste caso  $K_e = 20$  MPa/m. Para os elementos drenantes são utilizados parâmetros compatíveis com os resultados obtidos no teste do item 6.5.2. A Tabela 7.2 mostra resumidamente os parâmetros e propriedades das inclusões.

Tabela 7.2 - Parâmetros e propriedades das inclusões utilizados nas análises.

Material	Parâmetros/Propriedades	
Barras	$E = 210$ GPa	$A_{sec} = 5,1$ cm <sup>2</sup> ( $d_{sec} = 2,54$ cm)
Interface	$K_e = 20$ MPa/m $c_c = 0$ kPa	$A_{sec} = 78$ cm <sup>2</sup> ( $d_{sec} = 10$ cm) $\phi_c = 23^\circ$
Drenos	$k = 1$ m/s	$A_{sec} = 0,01$ m <sup>2</sup>
Conectores	$\bar{k} = 1$ m/s/m	$A_{sec} = 0,01$ m <sup>2</sup>

Com relação às condições iniciais, o estado inicial de poropressões corresponde a um estado hidrostático enquanto que o estado inicial de tensões corresponde a um estado geostático. Para isto foi considerado o peso específico saturado  $\gamma_{sat} = 16,1$  kN/m<sup>3</sup> e o peso específico natural  $\gamma_{nat} = 12,3$  kN/m<sup>3</sup>. Estes valores são compatíveis com os valores apresentados por Guimarães (2002). As tensões horizontais foram obtidas utilizando um coeficiente de empuxo no repouso  $K_0 = 0,55$ . Adicionalmente, são consideradas uma razão de pré-adensamento  $OCR = 1,4$  e uma sucção máxima já atingida pelo solo igual a  $s_{max} = 100$  KPa. O volume específico inicial foi considerado constante  $v = 2,63$  correspondente a uma porosidade de  $n = 0,62$ .

## 7.2 Seqüências construtivas

Neste capítulo podem ser diferenciadas basicamente duas seqüências construtivas. A primeira é associada ao estudo do desempenho dos reforços e a segunda está associada ao estudo do desempenho dos drenos aplicados conjuntamente com os reforços. A Figura 7.3 mostra estas duas seqüências construtivas. Nesta figura, os estágios de simulação são indicados por números onde os sobrescritos “+” e “-” indicam ativação e desativação de elementos, respectivamente. Um número com o sobrescrito “T” representa um estágio da análise onde somente foi aplicado tempo.

A primeira seqüência construtiva é detalhada a seguir. A Figura 7.3a mostra esta seqüência construtiva envolvendo 6 camadas de escavação, 5 linhas de grampos e um total de 6 estágios. No primeiro estágio a primeira camada é escavada, ou seja, os elementos correspondentes a esta camada são desativados. A desativação destes elementos envolve a aplicação de forças na superfície de escavação correspondentes às tensões geradas pelos elementos escavados. Estas forças mobilizam tensões no maciço as quais, neste primeiro estágio, devem ser suportadas pelo próprio talude. Posteriormente, o segundo estágio consiste na ativação da primeira linha de grampos (grampos superiores) e a escavação da segunda camada por meio da desativação dos elementos correspondentes. Esta etapa de escavação envolve a aplicação de forças que mobilizam tensões no maciço e também nos reforços da primeira linha de grampos. Depois disto, no terceiro estágio é ativada a segunda linha de grampos e a seguir é realizada a escavação da terceira camada. Esta escavação mobiliza tensões no maciço e, desta vez, nos reforços da primeira e segunda linha. Os próximos estágios são realizados seguindo este padrão até concluir a altura da escavação.

Por outro lado, a segunda seqüência construtiva mostrada na Figura 7.3b foi utilizada para analisar uma situação em que a escavação atinge o nível freático. Em casos como este, o procedimento convencional seria o de realizar o rebaixamento do lençol freático previamente à escavação, usando-se, por exemplo, um sistema de ponteiras verticais. Entretanto, nesta análise é considerada uma forma de rebaixamento por meio da aplicação de condição de superfície livre na face da escavação. Posteriormente, durante a escavação é considerada também a aplicação de drenos sub-horizontais os quais contribuem na redução do nível do lençol freático, se for permitido um tempo suficiente até a nova etapa de escavação. Na Figura 7.3b pode-se observar, além da aplicação de cinco linhas de grampos, a aplicação de quatro linhas de drenos, completando um total de 14 estágios. Considerando o nível do lençol freático na cota  $z = 17$  m há três linhas de grampos acima e duas linhas de grampos abaixo do nível de água inicial. Desta forma, considera-se os três primeiros estágios da mesma forma que para a primeira seqüência construtiva. Depois disto, a seqüência é alterada para iniciar a

aplicação dos drenos sub-horizontais. Desta maneira, no quarto estágio é ativada a primeira linha de drenos. A ativação dos drenos envolve a consideração de condição de contorno de poropressão  $u_w = 0$  no extremo dos drenos correspondente à face de escavação. No quinto é aplicado um determinado tempo para permitir a redução do lençol freático pela ação dos drenos. Somente no sexto estágio é ativada a terceira linha de grampos e é realizada a escavação da quarta camada. Este mesmo padrão é repetido para os estágios subsequentes até concluir a altura da escavação.

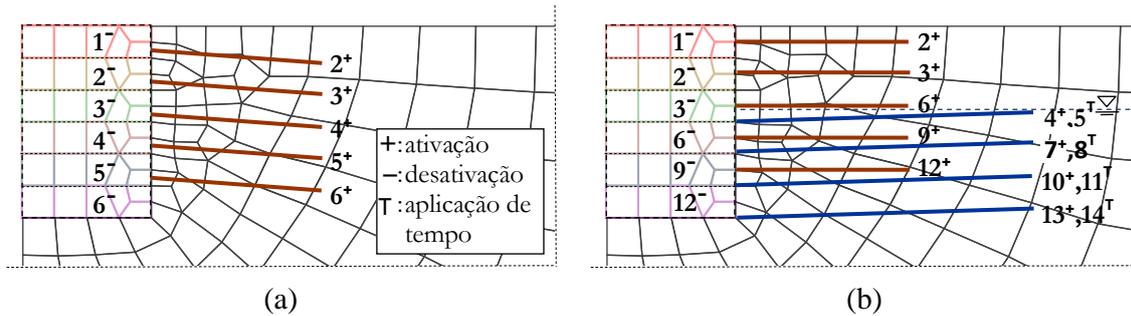


Figura 7.3 - Sequências de simulação: a) utilizada no estudo do desempenho dos reforços; b) utilizada no estudo do desempenho dos drenos.

### 7.3 Avaliação do comprimento dos grampos

O primeiro estudo apresentado neste capítulo corresponde à análise de quatro configurações de reforços onde foram considerados comprimentos de grampos diferentes. Cada configuração possui cinco linhas de grampos com inclinação constante igual a  $5^\circ$ . Os diferentes comprimentos de grampos utilizados para cada configuração correspondem a 8 m, 10 m, 12 m e 14 m. A Figura 7.4 mostra estas quatro configurações. O desempenho do talude reforçado é avaliado em função da deformabilidade do talude e da mobilização dos grampos. Para isto são avaliados os deslocamentos horizontais na face de escavação e as forças axiais nos reforços. A análise foi realizada utilizando a primeira seqüência construtiva detalhada no item 7.2, considerado um tempo de um dia para cada estágio. Entretanto, foi observado que, neste caso, o tempo aplicado tem um efeito mínimo no comportamento dos grampos. Isto ocorre porque nesta análise é considerado o nível do lençol freático abaixo do nível da escavação. Desta forma, a escavação das camadas altera pouco o estado de poropressões na região não saturada. Nestas condições, o fluxo não saturado não é determinante no comportamento do talude, no entanto, a sucção existente é considerada de importância uma vez que aumenta o efeito coesivo.

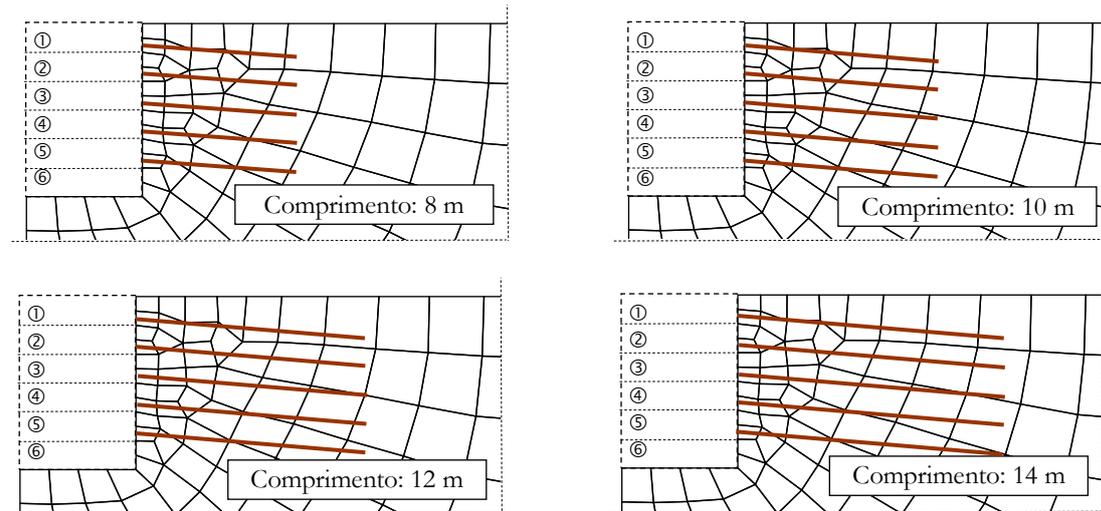


Figura 7.4 - Configurações utilizadas no estudo de diferentes comprimentos de grampos.

A Figura 7.5 e a Figura 7.6 mostram as forças axiais das cinco linhas de grampos, para os diversos comprimentos, obtidas após a conclusão de todo o processo de escavação. Nestas figuras torna-se evidente que quanto maior o comprimento dos grampos, maior é a força axial desenvolvida. Entre os resultados apresentados, e especialmente na quinta linha de grampos, é possível observar pontos com uma rápida mudança nas forças axiais. Este efeito está associado com a localização dos pontos de interseção entre a barra e o elemento sólido. Quando se têm pontos de interseção muito próximos de um nó de canto, obtém-se um segmento de reforço muito pequeno que é causa de tais discontinuidades. Uma vez que os grampos são mobilizados, em parte, em função dos deslocamentos dos elementos atravessados, as forças axiais dos segmentos ao longo do grampo podem apresentar algumas mudanças, algumas vezes abruptas, de acordo como o campo de deslocamentos dos elementos sólidos. Entretanto, quanto mais refinada é a malha, menor é este efeito.

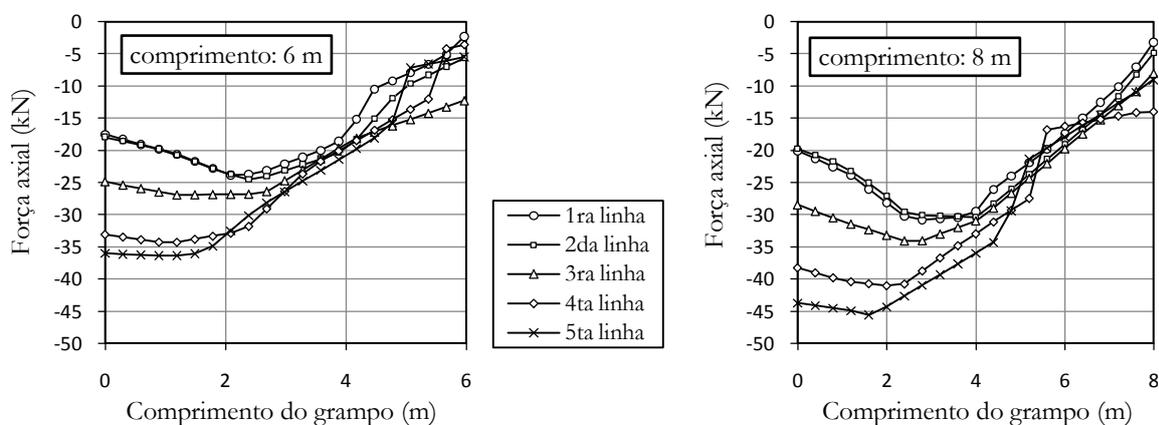


Figura 7.5 - Forças axiais nos grampos nas configurações com comprimentos de 6 m e 8 m.

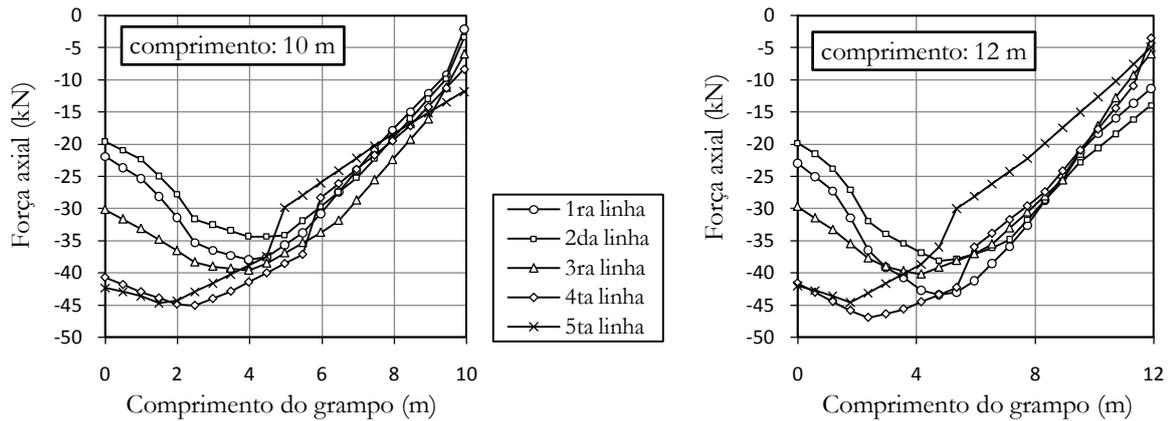


Figura 7.6 - Forças axiais nos grampos nas configurações com comprimentos de 10 m e 12 m.

A configuração de grampos com comprimento igual a 12 m apresentou maiores tensões cisalhantes no contato em relação às outras configurações. A Figura 7.7a mostra os valores de tensão cisalhante desenvolvidos nos contatos solo-grampo desta configuração comparados com os valores de resistência do contato. Neste caso, observa-se que as tensões cisalhantes na maior parte dos contatos, para as cinco linhas de grampos, se encontram ainda abaixo da resistência do contato, entretanto, existem algumas poucas regiões que já atingiram ruptura. O valor da resistência no contato é calculado em função da tensão normal média ao reforço e os parâmetros de resistência do próprio contato. Na Figura 7.7a é possível observar que a resistência do contato para as cinco linhas de grampos se mantém aproximadamente constante e ao redor dos 50 kPa. Uma vez que a resistência do contato está associada diretamente com o valor da resistência ao arrancamento  $q_s$ , é possível concluir que o valor de  $q_s$ , para uma escavação vertical, se mantém aproximadamente constante mesmo para diversas profundidades. Na Figura 7.7b são mostrados os deslocamentos horizontais da face de escavação para as quatro configurações analisadas após a conclusão do processo de escavação. Nesta figura pode-se observar que quanto maiores os comprimentos dos grampos menores deslocamentos horizontais são obtidos.

O desenvolvimento de maiores forças axiais nos grampos é associado a um melhor desempenho destes uma vez que são assimiladas maiores deformações provenientes do maciço. Por outro lado considera-se benéfico reduzir, no que for possível, o desenvolvimento de deslocamentos horizontais na face de escavação do talude. Neste sentido, atribui-se um melhor desempenho à configuração de grampos que fornece menores deslocamentos horizontais. Considerando estes aspectos, conclui-se que a quarta configuração, constituída por grampos de 12 m, apresentou melhor desempenho com relação às outras configurações.

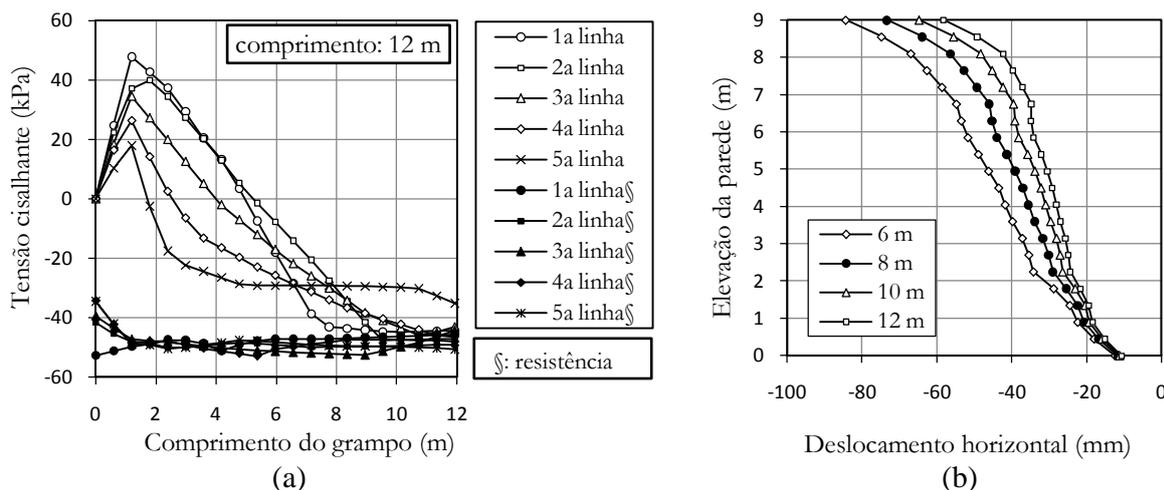


Figura 7.7 - Resultados das análises: a) tensão cisalhante e resistência no contato para uma configuração com comprimentos de grampos de 12 m; b) resultados do deslocamento horizontal da parede após escavação para as quatro configurações analisadas.

Em geral, existe a tendência que quanto maior é o comprimento do grampo, maior é o desempenho deste. No entanto, esta característica tende a apresentar um limite. Por exemplo, a variação existente entre as forças axiais das configurações com 10 m e 12 m (Figura 7.6) é pequena com relação à variação entre as configurações de 6 m e 8 m. Entretanto, os comprimentos a serem adotados em obra devem ser avaliados também em função de aspectos como economia, disponibilidade de materiais, uso da obra, dentre outros.

#### 7.4 Avaliação da inclinação dos grampos

Este estudo corresponde à análise de quatro configurações de reforços onde foram consideradas diferentes inclinações para os grampos. Cada configuração é constituída de cinco linhas de grampos com comprimento igual a 8 m. As inclinações analisadas em cada configuração correspondem a ângulos de  $0^\circ$ ,  $5^\circ$ ,  $10^\circ$  e  $15^\circ$ . A Figura 7.8 mostra as quatro configurações analisadas. A análise comparativa do desempenho dos grampos é realizada em função dos deslocamentos na face de escavação e as forças axiais obtidas nos reforços. A análise foi realizada utilizando a primeira seqüência construtiva detalhada no item 7.2 considerado um tempo de um dia para cada estágio.

A Figura 7.9 e a Figura 7.10 mostram as forças axiais nas cinco linhas de grampos para as quatro configurações analisadas após a conclusão do processo de escavação. Neste caso, pode ser observado que os grampos horizontais desenvolveram maiores forças axiais. Isto corresponde à tendência de movimento horizontal do talude. Para maiores inclinações é observada redução progressiva nos valores de tensão axial de tração nos reforços. Embora os grampos horizontais apresentem melhor desempenho, é necessário considerar em obra uma inclinação suficiente para garantir a adequada aplicação da calda de cimento.

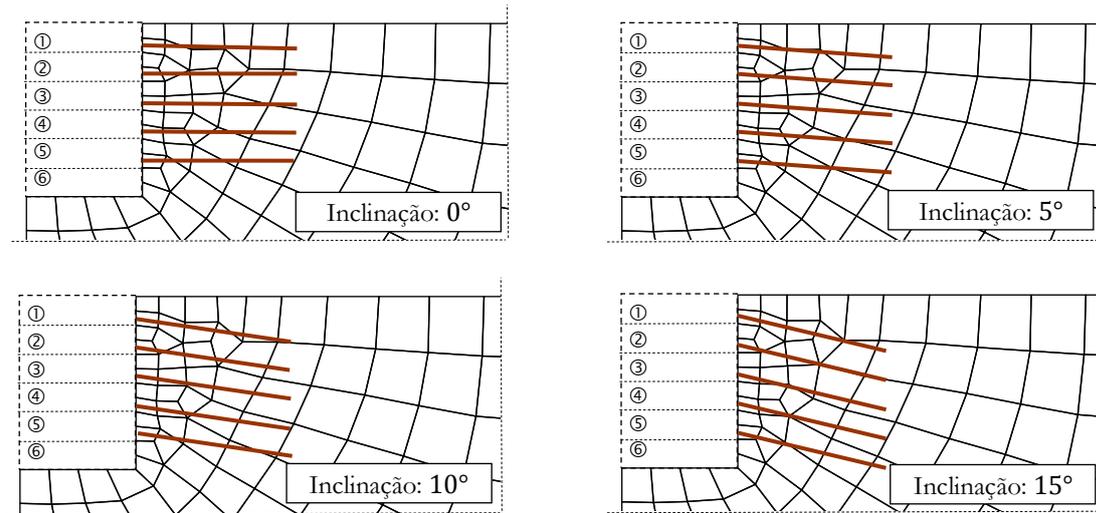


Figura 7.8 - Configurações utilizadas no estudo de diferentes inclinações de grampos.

Adicionalmente, foi observado que a configuração de grampos horizontais apresentou maiores tensões cisalhantes no contato em relação às outras configurações. A Figura 7.11a mostra os valores de tensão cisalhante desenvolvidos nos contatos solo-grampo desta configuração comparados com os valores de resistência do contato. Neste caso, é possível observar que algumas regiões dos contatos, das cinco linhas de grampos, atingiram ruptura.

A Figura 7.11b mostra os deslocamentos horizontais da face do talude obtidos para as quatro configurações analisadas após a conclusão do processo de escavação. Neste caso, é possível observar que quanto menor a inclinação dos reforços, menores são os deslocamentos horizontais na face do talude. Isto ocorre porque, devido ao processo de escavação, o talude tende a apresentar deslocamentos horizontais. Desta maneira, os reforços horizontais tendem a conter de maneira mais direta o movimento do talude.

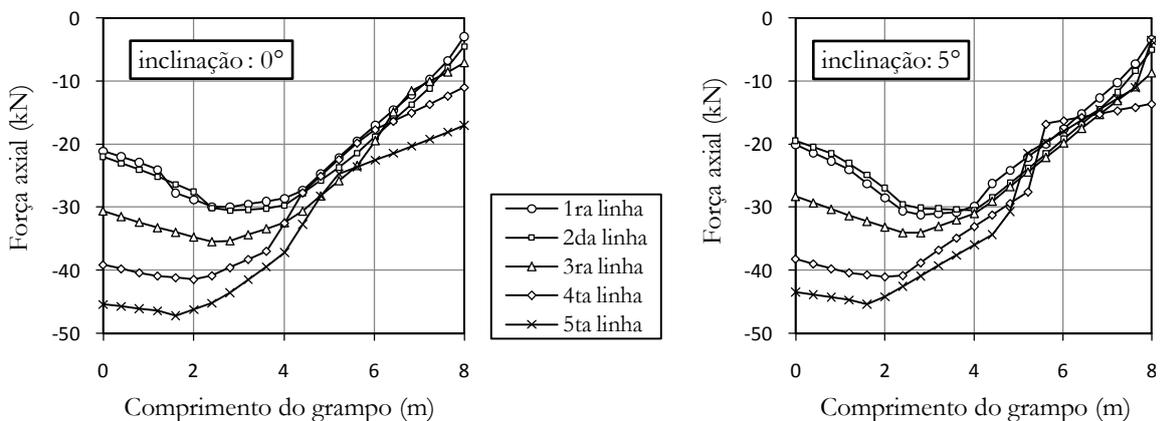


Figura 7.9 - Forças axiais nos grampos nas configurações com inclinações de 0° e 5°.

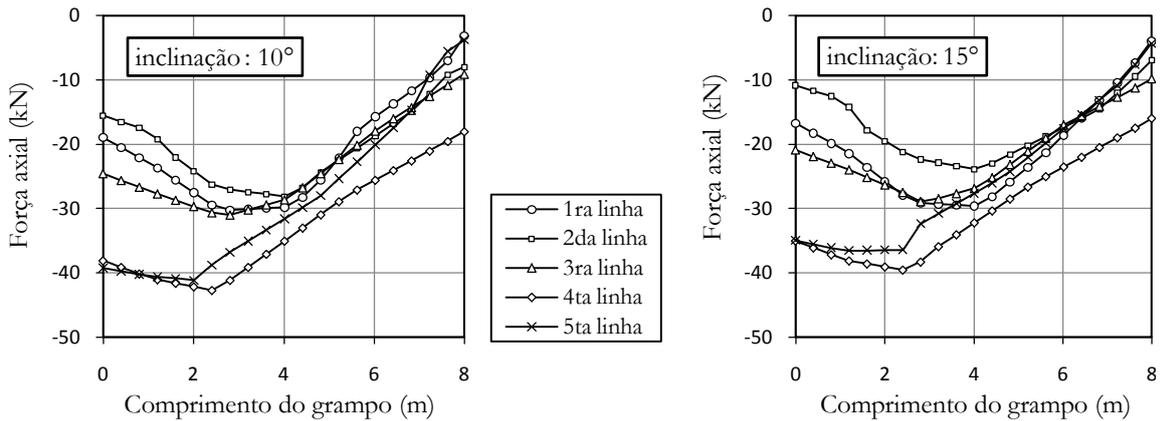


Figura 7.10 - Forças axiais nos grampos nas configurações com inclinações de 10° e 15°.

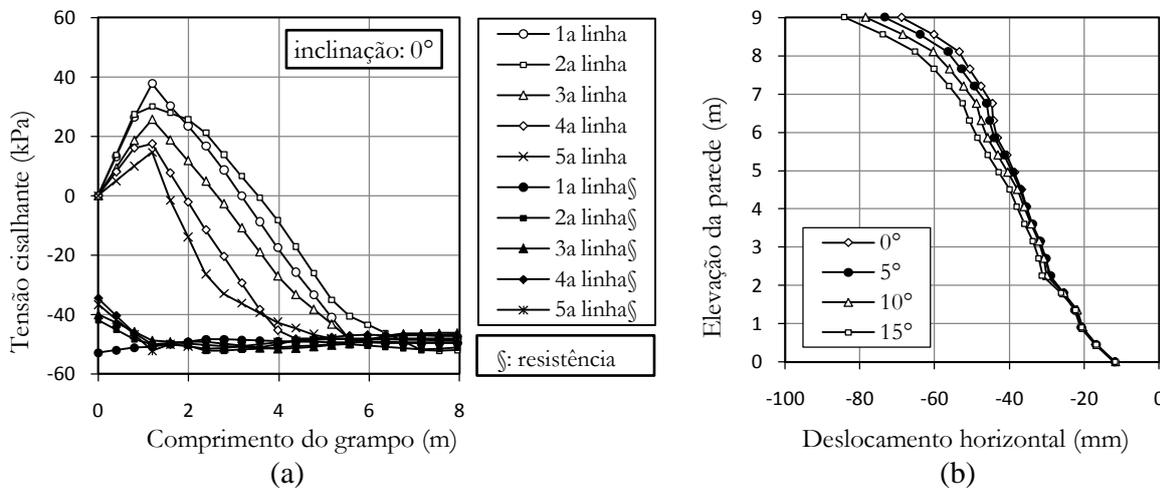


Figura 7.11 - Resultados da análise: a) tensão cisalhante e resistência no contato na configuração com grampos horizontais; b) resultados do deslocamento horizontal da parede após escavação para as quatro configurações analisadas.

### 7.5 Avaliação do comprimento dos drenos

Este estudo corresponde à análise da escavação de um talude vertical onde é considerada a instalação de drenos sub-horizontais para reduzir o nível do lençol freático previamente à instalação dos grampos. Neste estudo é considerado que o nível freático se encontra na cota  $z = 17$  m. A configuração dos reforços foi considerada constante enquanto são analisadas três configurações de drenos. A configuração dos reforços é constituída por cinco linhas de grampos horizontais de 8 m aplicados na metade da altura de cada camada. Dada esta configuração dos reforços e o nível do lençol freático, há duas linhas de grampos, correspondentes à quarta e à quinta linha que se encontram abaixo do nível inicial do lençol freático. Neste caso foram aplicadas de quatro linhas de drenos sub-horizontais. Os drenos de todas as configurações foram considerados com uma inclinação de 5° e foram localizados na parte inferior das camadas correspondentes. No extremo dos drenos, coincidente com a face

de escavação, foi considerado condição de contorno de superfície livre. As diferentes configurações de drenos analisadas correspondem a comprimentos de 8, 11 e 14 m como é mostrado na Figura 7.12.

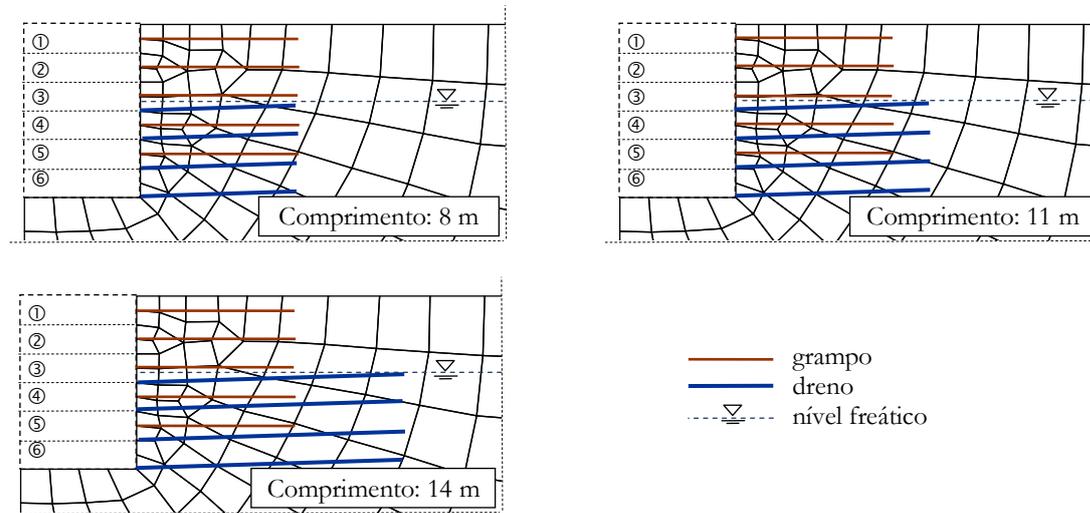


Figura 7.12 - Configurações utilizadas no estudo do desempenho dos drenos.

De forma similar às análises anteriores, a análise comparativa do desempenho dos drenos é realizada em função dos deslocamentos na face de escavação e as forças axiais obtidas nos reforços. Adicionalmente foi verificada a redução do nível do lençol freático.

A seqüência construtiva utilizada neste estudo corresponde à segunda seqüência descrita no item 7.2. Para os estágios que somente envolvem a aplicação de reforços, ou seja, até a escavação da terceira camada, foi considerado um tempo de um dia. Já no estágio correspondente à instalação das linhas de drenos sub-horizontais foi considerado em um tempo bem curto, no entanto, foi considerado um tempo de dois dias para permitir a drenagem após a ativação de cada linha de drenos. Desta maneira é garantida a redução do lençol freático previamente à instalação dos grampos, de modo que estes últimos se encontrem fora da região saturada.

A Figura 7.13a, a Figura 7.13b e a Figura 7.14a mostram as forças axiais desenvolvidas nos grampos para as três configurações de drenos após 15 dias da conclusão do processo de escavação e a aplicação da última linha de drenos. Os resultados para as forças axiais não apresentam uma clara tendência. Por exemplo, as forças axiais máximas desenvolvidas em cada linha de grampos se mantiveram semelhantes para as três configurações. Por outro lado, a Figura 7.14b mostra os deslocamentos horizontais obtidos na face de escavação para os três casos analisados. Neste caso, para maiores comprimentos de drenos os deslocamentos da face foram levemente maiores. Isto está associado à maior consolidação da região drenada quando os drenos possuem maior comprimento.

Uma vez que as forças axiais não apresentam um padrão bem definido, um dos critérios para a determinação do comprimento de dreno a ser adotado pode ser dado em função de deslocamentos horizontais máximos predefinidos. Em geral, considera-se de maior importância a drenagem da região reforçada.

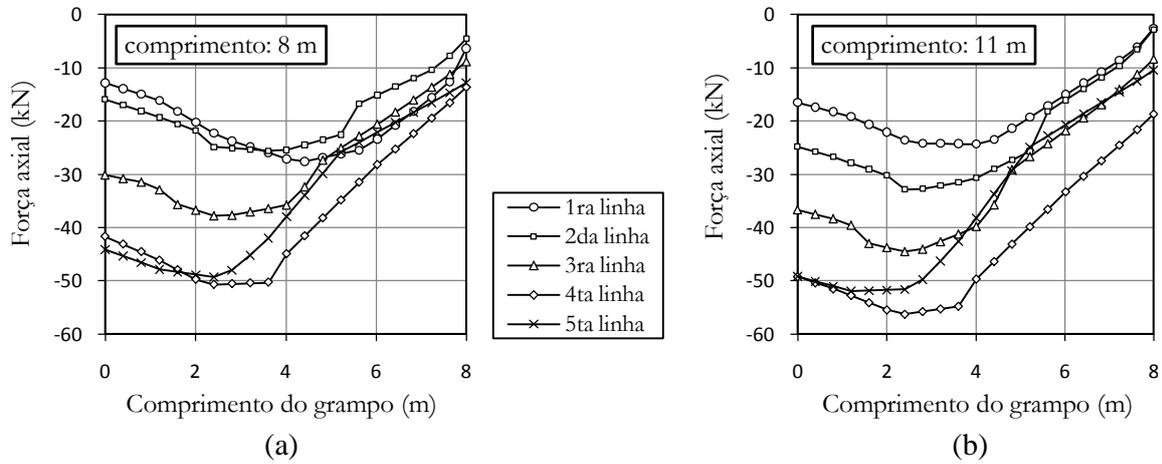


Figura 7.13 - Forças axiais nos grampos correspondentes a primeira (a) e segunda (b) configuração.

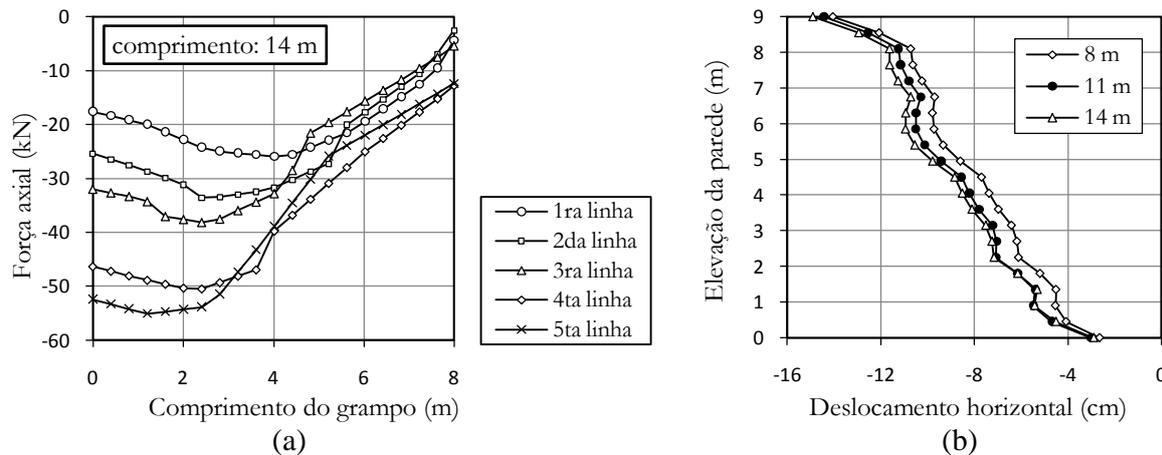


Figura 7.14 - Força axial nos grampos correspondente à terceira configuração de drenos (a) e resultados do deslocamento horizontal da parede após escavação para as três configurações (b).

A Figura 7.15 mostra a superfície freática e as distribuições de poropressão para as configurações de drenos correspondentes a 8 m e 14 m após 15 dias da instalação da última linha de drenos, uma vez que, neste tempo foi atingida a condição estacionária. Nesta figura é importante observar que a superfície freática acompanha aproximadamente a inclinação do dreno inferior. Segundo estes resultados, pode-se observar que os drenos superiores não têm contribuição após a etapa de construção, no entanto, estes podem ser úteis posteriormente numa eventual elevação do lençol freático ou no entupimento da última linha de drenos.

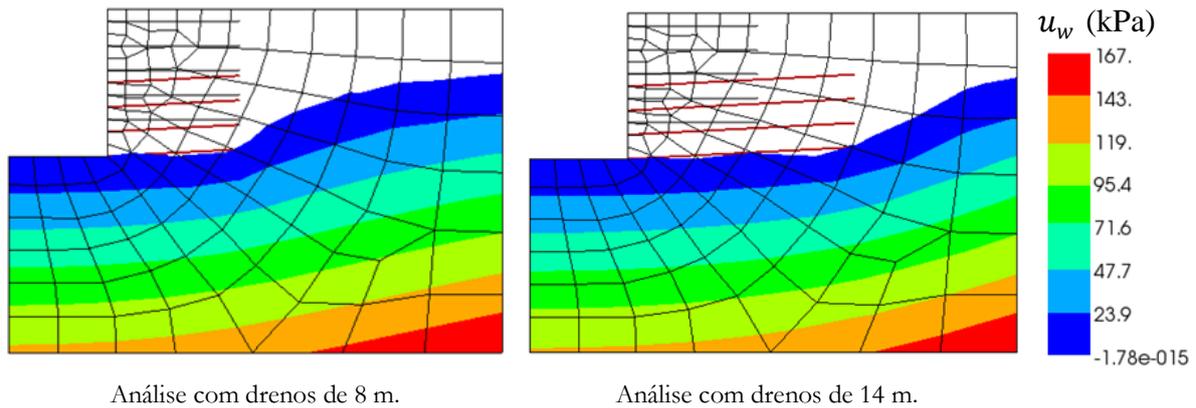


Figura 7.15 - Superfície freática incluindo o campo de poropressões para as análises realizadas com drenos de 8 m e 14 m.

## 7.6 Comentários com relação às análises realizadas

Neste capítulo foram estudadas diferentes configurações de inclusões com a finalidade de avaliar o desempenho destas. O desempenho das inclusões foi avaliado em função das forças axiais desenvolvidas nos grampos e os deslocamentos horizontais da face de escavação. No entanto, um estudo mais amplo poderia incluir a avaliação do cálculo do fator de segurança do talude associado a cada configuração.

Nas análises realizadas tentou-se reproduzir vários aspectos associados a uma obra em solo grampeado. Existem, contudo, alguns aspectos que não foram levados em conta neste estudo. Por exemplo, durante as simulações não foi considerada a presença do faceamento. No entanto, foi considerada uma conexão rígida entre o reforço e a face de escavação. Por outro lado, Sivakumar Babu *et al.* (2002) concluem que a simulação da espessura do faceamento não tem uma influência significativa.

Baseado nas análises apresentadas neste capítulo, pode-se observar que os métodos desenvolvidos para a análise de inclusões abrem um caminho amplo no estudo do comportamento de obras de contenção como o solo grampeado. Por exemplo, foi mostrada a possibilidade de estudar a aplicação conjunta de reforços e drenos com diversas configurações e com diversas seqüências construtivas. Neste tipo de estudos podem ser avaliados aspectos como deslocamentos do maciço, forças axiais nos grampos, tensões cisalhantes nos contatos solo-grampo, redução do lençol freático, etc.

# Capítulo 8

## Conclusões

A finalidade deste trabalho foi o desenvolvimento e a implementação de métodos de análise de inclusões lineares tais como reforços e drenos utilizando o MEF. A ferramenta numérica desenvolvida permite a simulação conjunta de reforços e drenos por meio de uma análise de deformação e fluxo acoplados. Dado o efeito dos reforços na deformabilidade do maciço e, dos drenos na redução do nível do lençol freático, tornou-se necessário também o estudo da modelagem do solo na condição não saturada. Uma característica procurada neste trabalho, com relação à simulação de inclusões, foi o estudo de métodos que permitam a utilização de uma única malha de fundo para testar diferentes configurações de inclusões no maciço. Estes métodos são posteriormente aplicados no estudo do comportamento de estruturas reforçadas pela técnica denominada de solo grampeado. Este capítulo mostra as principais conclusões obtidas neste trabalho e também as recomendações sugeridas para pesquisas futuras.

### 8.1 Conclusões

As conclusões foram divididas em duas partes. A primeira parte refere-se aos métodos utilizados para a simulação de reforço e drenagem pelo MEF. A segunda parte refere-se às conclusões associadas com a aplicação dos métodos em simulações da técnica do solo grampeado.

#### 8.1.1 Com relação à metodologia utilizada

*A implementação computacional do modelo BarcelonaX (Pedroso, 2006) é mais simples quando comparada com a implementação do modelo básico de Barcelona (Alonso et al., 1990). O modelo Barcelona é bastante simples e capaz de simular certas características dos solos parcialmente saturados. A desvantagem da formulação apresentada no modelo Barcelona, do ponto de vista de implementação computacional, é a definição de duas superfícies de plastificação no espaço das tensões e da sucção, sendo que estas duas superfícies devem ter evolução acoplada. No entanto, é possível formular uma única superfície como apresentado pelo modelo BarcelonaX.*

*O método de interpolação pseudolinear constitui-se como uma alternativa à interpolação convencional de valores nodais quando se pretende calcular o valor de uma variável no interior de um elemento. Nos métodos formulados (embutido e semi-embutido) é necessária a avaliação de variáveis como deslocamentos ou poropressões no interior do domínio de um elemento sólido. Em certos casos, os resultados obtidos por interpolação convencional no interior do elemento podem apresentar valores inesperados. Um exemplo disto é a possibilidade de obter valores internos negativos gerados a partir de valores nodais positivos e vice-versa. Nestes casos, a interpolação pseudolinear de valores nodais apresentada neste trabalho constitui-se como uma alternativa às funções de interpolação convencional, uma vez que, tende a fornecer uma variação linear entre os nós dos elementos.*

*O algoritmo apresentado para a determinação dos pontos de interseção das inclusões com a malha de elementos finitos representa um método eficiente e de uso geral. Um procedimento convencional baseado na Geometria Analítica torna-se pouco aplicável, complexo e propenso a múltiplos erros, dado que requer a avaliação das múltiplas situações de interseção existentes. No entanto, no algoritmo apresentado, a determinação dos pontos de interseção é bastante simplificada por meio do auxílio da denominada função de localização. Em resumo, pode-se dizer que este algoritmo é simples, rápido e seguro.*

*O método de extrapolação local apresentado é apropriado para a determinação de valores no interior de um elemento em casos em que a extrapolação global é proibitiva. Casos como a determinação dos valores nodais da malha inteira a partir dos valores calculados nos pontos de integração requerem um processo de extrapolação global. No entanto, há casos em que é necessário obter os valores nodais de um dado elemento para um uso limitado. Neste caso, a quantidade de cálculos desnecessários na extrapolação global justifica o uso da extrapolação local. Neste trabalho, o processo de extrapolação local é formulado a partir de um processo de minimização que garante certo nível de acurácia.*

*Os métodos de análise de inclusões formulados neste trabalho são independentes da dimensão do espaço, do tipo de elementos da malha e dos modelos constitutivos utilizados. Os métodos que permitem que os reforços atravessem os elementos sólidos, por exemplo, podem ser aplicados em malhas 2D e 3D constituídas por diversos tipos de elementos sólidos. Adicionalmente, diversos modelos constitutivos para simular o solo, as inclusões e as interfaces podem ser utilizados.*

*Os métodos para a simulação de inclusões formulados neste trabalho não demandam maior tempo de análise. No método embutido, por exemplo, uma vez definida a posição dos reforços, estes são divididos em segmentos e são levados em conta por meio dos elementos atravessados pela inclusão sem acrescentar o número de graus de liberdade do sistema. Já no*

caso do método semi-embutido, após a definição dos reforços, os elementos de barra e de interface são gerados dinamicamente acrescentando somente os graus de liberdade correspondentes aos nós dos elementos de barra. Estes graus de liberdade adicionais não representam uma quantidade que possa alterar o tempo de solução do sistema de forma significativa.

*O método semi-embutido apresentado permite a simulação da interface entre as inclusões e o solo.* No caso de reforços, os elementos de interface representam o comportamento mecânico do contato existente entre o reforço e os elementos sólidos. Desta forma, é possível elaborar um determinado modelo constitutivo que possa simular o deslizamento relativo e ruptura no contato. No caso de elementos drenantes, a interface representa o comportamento hidráulico do contato. Esta interface, por meio do modelo atribuído, pode ser utilizada para reduzir ou eliminar a passagem do fluido do dreno em direção ao solo.

*O método semi-embutido permite a aplicação de condições de contorno sobre as inclusões.* O método semi-embutido é um dos métodos que permite a análise de diferentes configurações de inclusões no maciço sem precisar refazer a malha de elementos finitos. Este método utiliza elementos reais para representar as inclusões, diferentemente do método embutido o qual utiliza elementos fictícios. Desta maneira, no método semi-embutido, os nós dos elementos de inclusão permitem a aplicação de condições de contorno. Esta característica permite a aplicação de forças ou deslocamentos impostos em reforços e de volumes ou poropressões impostas em drenos.

*Recomenda-se o método semi-embutido, ao invés do método embutido, na análise de reforços.* No método embutido, resultados de força axial ao longo dos reforços podem apresentar picos e oscilações. Por outro lado, o método semi-embutido inclui elementos de interface que permitem uma variação mais apropriada das forças axiais no reforço. Adicionalmente, neste método, os segmentos de barras contidas nos elementos sólidos são conectados entre si, resultando em um comportamento mais solidário do reforço.

*Os métodos para simular elementos drenantes tendem a representar uma condição de superfície livre ao longo do domínio dos drenos.* Dada uma condição de superfície livre num dos extremos do dreno e dado que os valores de permeabilidade atribuídos para os drenos são muito superiores aos atribuídos para o solo, os drenos tendem a representar uma condição de superfície livre. Esta característica é verificada utilizando-se o método semi-embutido através de exemplos de validação.

*Em alguns casos é necessária a aplicação de várias linhas drenantes para representar a aplicação de um único dreno em campo.* Quando o corpo do dreno a ser simulado possui um volume considerável com relação ao volume drenado, como acontece no caso de drenos

verticais de areia, é necessária a aplicação de várias linhas drenantes para representar a constituição espacial do dreno. Estas linhas drenantes devem estar dispostas de maneira a representar a superfície do dreno de areia, por exemplo, de forma a simular uma condição de superfície livre similar à gerada em campo.

*O método semi-embutido pode ser aplicado na simulação de drenos para diferentes condições de saturação do solo.* É possível que os drenos tenham diversas posições com relação ao nível freático existente no talude. Estes podem se encontrar na região saturada ou não saturada. Análises convencionais de elementos finitos consideram os drenos na região não saturada como inexistentes. No entanto, através do método semi-embutido, é possível simular a transição de uma situação para outra através da modelagem dos drenos e dos elementos conectores.

### **8.1.2 Com relação às análises de solo grampeado**

*Com o objetivo de obter melhores previsões de deformabilidade de um talude em escavação, recomenda-se o uso de modelos elastoplástico para simular o solo.* Análises realizadas utilizando um modelo constitutivo que possui um comportamento elástico linear podem fornecer informações preliminares. Entretanto, os resultados de deformabilidade assim obtidos não se mostram compatíveis com os observados em campo.

*A modelagem de problemas de deformação e fluxo acoplados por meio de modelos de solos não saturados demanda um tempo computacional consideravelmente mais longo.* Por exemplo, na utilização do modelo Barcelona (Alonso *et al.*, 1990), muito tempo é dedicado à integração da relação constitutiva, onde é necessária múltiplas avaliações das matrizes elastoplásticas.

*A inclinação dos grampos influencia no comportamento do talude.* Quanto maior a inclinação dos grampos, menores são as forças axiais desenvolvidas nos grampos, reduzindo o efeito estabilizante. Desta forma, na simulação de um talude reforçado, é recomendável analisar o maior número de configurações de forma a obter a configuração na qual os reforços são mobilizados dentro dos limites desejados.

*As previsões de força axial nos reforços através do método semi-embutido são dependentes dos parâmetros da interface.* O nível de transmissão de deformações por parte dos elementos sólidos atravessados para os reforços é dependente dos parâmetros da interface. Por exemplo, quanto maior a rigidez da interface, maiores são os valores de forças axiais nos reforços. Por esta razão, com o objetivo de realizar uma análise mais refinada, é recomendada a obtenção acurada dos parâmetros da interface a partir de ensaios de arrancamento.

*Nos casos analisados, a resistência do contato solo-grampo permaneceu aproximadamente constante para diversas profundidades.* A resistência do contato é função dos parâmetros de resistência como coesão e ângulo de atrito do contato e da tensão normal ao reforço. Esta tensão normal é calculada em função do estado de tensões do solo que, por sua vez, varia ao longo do processo de escavação. Para as diversas configurações de reforço analisadas, em um talude vertical de 9 m de altura, obteve-se que, embora o estado de tensões mude com a escavação, os valores de tensão normal aos reforços se mantiveram aproximadamente constantes para diversas profundidades. Por esta razão, os valores de resistência do contato nos grampos permaneceram, também, aproximadamente constantes. Uma vez que a resistência do contato está diretamente associada com o valor da resistência ao arrancamento  $q_s$ , pode-se concluir, a partir dos resultados obtidos, que o valor de  $q_s$  apresenta pouca variação com a profundidade.

*As linhas de drenos superiores utilizadas na técnica do solo grampeado indicaram desempenho insignificante.* Após a instalação dos drenos, o nível da água, eventualmente, torna-se reduzido até a altura do dreno inferior, deixando os drenos superiores sem utilidade. Isto é consistente com os estudos realizados por Martin et al. (1994) e por Rahardjo et al (2003). Neste caso, tem-se que o solo acima dos drenos inferiores normalmente se encontra com poropressão negativa. Desta forma, em casos de obras provisórias ou naquelas onde as condições climáticas garantem uma baixa variação do nível do lençol freático, torna-se possível considerar a sucção para efeitos de projeto.

*A redução do nível do lençol freático deve ser realizada por meio da aplicação de drenos sub-horizontais na parte mais baixa do talude.* Dado que o nível freático se reduz até a altura do dreno inferior, os drenos sub-horizontais devem ser instalados na parte mais inferior possível do talude.

*Os métodos embutido e semi-embutido permitem obter com relativa facilidade a configuração ótima de inclusões num maciço.* Uma vez que estes métodos permitem que os reforços sejam aplicados na análise após a definição da malha de elementos finitos, é possível utilizar uma única malha de fundo e testar diferentes configurações de inclusões até obter a configuração ótima com relação a aspectos como economia, tempo de execução, processos construtivos, etc.

## **8.2 Recomendações para pesquisas futuras**

*Recomenda-se a incorporação de resistência à flexão nos elementos de reforço.* Foi visto que os reforços são pouco mobilizados por flexão. No entanto, ampliar os métodos estudados para considerar rigidez à flexão permitiria a realização de análises mais acuradas.

*Recomenda-se a ampliação dos métodos propostos para a simulação de reforços planos.* Os métodos estudados somente incluem a simulação de reforços lineares, no entanto, muitas aplicações na Geotecnia consideram reforços como telas ou membranas geossintéticas.

*Recomenda-se o desenvolvimento de métodos para a simulação de outros tipos de drenagem.* Obras de contenção como o solo grampeado empregam técnicas adicionais de drenagem além da aplicação de drenos sub-horizontais. Tais técnicas incluem o uso de mantas drenantes ou drenos de paramento. A simulação destas técnicas de drenagem permitiria uma representação mais acurada da drenagem no talude.

*Recomenda-se complementar este estudo por meio da determinação do fator de segurança com técnicas baseadas no MEF.* Os casos estudados neste trabalho são avaliados em função da deformabilidade do talude e da redução do nível do lençol freático. No entanto, esta avaliação pode ser mais rigorosa se for incluído o cálculo do fator de segurança do talude. Recomenda-se que a obtenção deste fator seja baseada no MEF, dado que é possível considerar o estado atual de tensões e poropressões.

*Recomenda-se o estudo da variação do valor da resistência ao arrancamento da interface com a profundidade.* Das análises realizadas foi concluído que a resistência ao arrancamento apresenta pouca variação com a profundidade. No entanto, neste trabalho somente foram estudadas escavações verticais. Desta forma, recomenda-se o estudo deste parâmetro em taludes com outras geometrias.

*Recomenda-se estudar o efeito do faceamento em obras de escavação e reforço como o solo grampeado.* Uma das utilidades do faceamento em obras de solo grampeado é de conter o solo da face de escavação. No entanto, recomenda-se estudar se este desempenha uma função estrutural considerável, uma vez que, a cabeça dos grampos é fixada no faceamento. Adicionalmente, recomenda-se, nas simulações, o uso de elementos de interface no contato da face com o talude.

*Recomenda-se o estudo de poços verticais.* Este trabalho contempla a simulação de drenos verticais, no entanto, a extensão dos métodos estudados para sua aplicação na simulação de poços verticais requer testes de validação com soluções analíticas.

*Recomenda-se realizar um estudo comparativo de resultados de análises 3D e 2D.* Este trabalho aborda a análise de inclusões em condições tridimensionais. A realização de um estudo comparativo entre análises 3D e 2D torna-se particularmente útil para indicar até que ponto as análises bidimensionais de estruturas reforçadas podem ser consideradas satisfatórias.

*Recomenda-se realizar uma análise comparativa com resultados obtidos por meio de técnicas baseadas no método de equilíbrio limite.* Neste trabalho, as técnicas estudadas para a

simulação de inclusões são baseadas no MEF. A realização de um estudo comparativo entre as duas abordagens seria útil para indicar até onde os dois tipos de análises fornecem resultados compatíveis.

*Recomenda-se a aplicação das técnicas estudadas no estudo de taludes inclinados e escalonados.* Neste trabalho foi estudado o desempenho de diferentes configurações de inclusões em um talude hipotético vertical. Desta forma, recomenda-se ampliar este estudo para outras geometrias como taludes inclinados e escalonados.

*Recomenda-se a aplicação das técnicas estudadas na simulação de obras reais monitoradas de solo grampeado.* A aplicação em casos reais representa a maior utilidade dos métodos estudados. Além disso, os resultados destas análises podem fornecer importantes informações as quais podem contribuir no aperfeiçoamento destes métodos.

---

## Referências Bibliográficas

Alonso, E.E., Gens, A. & Josa, A. (1990). A constitutive model for partially saturated soils. *Géotechnique*, 40(3):405-430.

Alonso, E.E., Gens, A. & Hight, D.W. (1987). Special soil problems - General report. Ninth European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Dublin, Ireland, Session 5, pp. 1-60.

Andrade, H.A.C. (2003). Implementação de procedimentos numéricos para a análise de elementos drenantes em solos. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 125 p.

Azambuja, E., Strauss, M. & Gobbi, F.S. (2001). Caso histórico de um sistema de contenção em solo grampeado em Porto Alegre, RS. COBRAE 2001, Rio de Janeiro, Brasil, pp. 435-443.

Balmaceda, A. (1991). Compacted Soils: A theoretical and experimental study. PhD Thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Espanha, 433 p.

Barnett, S. (1990). Matrices, methods and applications. Oxford University Press, New York, USA, 450 p.

Barron, R.A. (1948). Consolidation of fine grained soils by drain wells. *ASCE*, 113: 718-754.

Bathe, K.J. (1982). Finite element procedures in engineering science. Prentice-Hall, New Jersey, USA, 735 p.

Bello, L.A.L. (1997). Estudo numérico sobre o uso de estacas de bambu-cal na estabilização de encostas. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 141 p.

Biot, M.A. (1941). General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, 12:155-164.

Bishop, A.W. (1959). The principle of effective stress. *Tenisk Ukeblad*, 106(39):177-197

Brannon, R.M. (2003). Functional and Structured Tensor Analysis for Engineers. Internet: <http://www.mech.utah.edu/~brannon/gobag.html>, Albuquerque, USA, 300 p.

Britto, A. M. & Gunn, M. J. (1987). Critical state soil mechanics via finite elements. John Wiley & Sons.

Burland, J.B. (1964). Effective stress in partly saturated soils. *Géotechnique*, 14(1):64-68.

Burgoyne, C.J. (1999). Advanced composites in civil engineering in Europe. *Structural Engineering International*, 9(4):267-273.

- Byrne, R.J., Cotton, D., Porterfield, J., Wolschlag, C. & Ueblacker, G. (1998). Manual for design and construction monitoring of soil nail walls. Report FHWA-SA-96-69R, Washington DC, USA, 530 p.
- Charbel, P.A. (1996). Implementação numérica de modelo de comportamento de cabos/tirantes em maciços rochosos. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 104 p.
- Chissolucombe, I. (2003). Simulação numérica para a avaliação de danos em edificações adjacentes à escavação de um túnel. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília, Brasil, 194 p.
- Clouterre (1991). Recommandations Clouterre. Ministère de l'Équipement, du Logement, des Transports et de l'Espace. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, France.
- Cordão Neto, M.P. (2005). Análise hidro-mecânica de barragens de terra construídas com materiais colapsíveis. Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, Brasília, Brasil, 152 p.
- Da Silva, J.C. (1999). Análise de estruturas grampeadas. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 127 p.
- Desai, C.S. & Siriwardane, H.J. (1984). Constitutive laws for engineering materials. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, USA, 464 p.
- Durand, R. (2003). Método da rigidez embutida na análise tridimensional de reforços via elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília, 95 p.
- Durand, R. & Farias, M.M. (2004). Embedded stiffness approach to compute the optimum configuration of reinforcements. Ninth International Symposium on Numerical Models in Geomechanics. Ottawa, Canada.
- Durand, R. & Farias, M.M. (2005). A generalized method for the extrapolation of internal values to the nodal points of finite elements. 2nd International Workshop in New Frontiers in Computational Geotechnics, Fortaleza, Brazil, pp. 21-28.
- Durand, R. & Farias, M.M. (2006). Uma nova técnica para a consideração de reforço e drenagem em taludes via elementos finitos. XIII Congresso Brasileiro em Mecânica dos Solos e Engenharia Geotécnica. Curitiba, Brasil.
- Elias V. and Juran, I. (1991), Soil nailing for stabilization of highway slopes and excavations. Report FHWA-RD-89-193, Washington DC, USA.
- Elwi, A.E. & Hrudey, T.M. (1989). Finite element model for curved embedded reinforcements. Engineering Mechanics, ASCE, 115(4): 740-754.
- Escario, V. & Juca, J. (1989). Strength and deformation of partly saturated soils. 12th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Rio de Janeiro, Brasil, 3:43-46
- Farias, M.M. (1993). Numerical analysis of clay core dams. PhD Thesis, University College of Swansea, Swansea, UK, 161 p.

- Farias, M.M. (2004). Modelagem constitutiva para o comportamento mecânico de solos não saturados. 5to Simpósio Brasileiro de Solos Não Saturados, São Carlos, Brasil, 2: 527-542.
- Farias, M.M. & Aguero-Martinez, D.S. (2005). Slope stability analysis of three-dimensional problems using dynamic programming and enhanced limit equilibrium methods. 2nd International Workshop in New Frontiers in Computational Geotechnics, Fortaleza, Brazil, pp. 127-134.
- Farias, M.M. & Naylor, D.J. (1998). Safety analysis using finite elements. *Computers and Geotechnics*. Elsevier Science, 22(2): 165-181.
- Feijó R.L. (2003). Monitoração de uma escavação experimental grampeada em solo residual gnáissico não saturado. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 157 p.
- Fredlund, D.G. & Morgenstern, N.R. (1976). Constitutive relations for volume change in unsaturated soils. *Canadian Geotechnical Journal*, 13(3):261-276.
- Fredlund, D.G. & Morgestern, N.R. (1977). Stress state variables for unsaturated soils. *Geotechnics Div. ASCE*, 103:446-447.
- Fredlund, D.G., Morgestern, N.R., & Widger, R.A. (1978). The shear strength of unsaturated soils. *Canadian Geotechnical Journal*, 15(3): 313-321.
- Fredlund, D.G. & Rahardjo, H. (1993). *Soil mechanics for unsaturated soils*. John Wiley & Sons, New York, USA, 517 p.
- Galli, G., Grimaldi, A. & Leonardi, A. (2004). Three-dimensional modelling of tunnel excavation and lining. *Computer and Geotechnics*. 31: 171-183.
- Gens, A. & Alonso. E.E. (1992). A framework for the behaviour of unsaturated expansive clay. *Canadian Geotechnical Journal*, 29:1013-1032.
- GEO-SLOPE International Ltd. (1995). *SEEP/W user's guide*. Calgary, Alberta, Canada.
- Guimarães, R.C. (2002). Análise das propriedades e comportamento de um perfil de solo laterítico aplicada ao estudo do desempenho de estacas escavadas. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília, 183 p.
- Hartl, H. (2002). Development of a continuum-mechanics-based tool for 3D finite element analysis of reinforced concrete structures and application to problems of soil-structure interaction. PhD Thesis, Graz University of Technology, Graz, Austria, 250 p.
- Hartl, H., Sparowitz L. & Elgamal A. (2000). The 3D computational modeling of reinforced and prestressed concrete structures. 3rd International PhD Symposium in Civil Engineering, Vienna, Austria, 2: 69-79.
- Hill, R. (1971). *The mathematical theory of plasticity*. Oxford University Press, London, England, 355 p.
- Hinton, E. & Campbell, J.S. (1974). Local and global smoothing of discontinuous finite element a functions using a least square method. *Numerical Methods in Engineering*, 8:461-480.

- Hinton, E. & Owen, D.R.J. (1979). An introduction to finite element computations. Pineridge Press, Swansea, UK, 385 p.
- Jucá, J.F.T. (1993). Comportamiento de los suelos parcialmente saturados bajo succión controlada. Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas. España, 241 p.
- Kenny, M.J. & Kawai, Y. (1996). The effect of bending stiffness of soil nails on wall deformation. International Symposium on Earth Reinforcements, Fukuoka, Kyushu, Japan, pp. 771-774.
- Kwak, H.G. & Filippou, F.C. (1990). Finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic loads. Report No. UCB/SEMM-90/14, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, USA, 120 p.
- Lambe, T.W. & Whitman, R.V. (1979). Soil Mechanics. John Wiley & Sons, New York, USA, 533 p.
- Lancaster P. & Tismenetsky M. (1985). The Theory of Matrices. 2<sup>nd</sup> Edition. Academic Press, Florida, USA, 570 p.
- Lazarte C. A., Elias V., Espinoza R. D. & Sabatini P. J. (2003). Geotechnical Engineering Circular No. 7- Soil Nail Walls, FHWA Publication No. FHWA-IF-03-017. Columbia, USA, 305 p.
- Leong E.C. & Rahardjo H. (1997). Permeability functions for unsaturated soils. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. 123(12):1118-1126.
- Lima A.P. (2002). Deformabilidade e estabilidade de taludes em solo grampeado. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 180 p.
- Lima A.P. (2007). Comportamento de uma escavação grampeada em solo residual de gnaíse. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 431 p.
- Machado, S.L. & Zuquette, L.V. (2004). Transporte de massa e mecanismo de retenção em solos não saturados. 5<sup>o</sup> Simpósio Brasileiro de Solos Não Saturados, São Carlos, 2: 545-572.
- Mahalinga-Iyer, U. & Williams, D.J. (1995). Unsaturated strength behaviour of compacted lateritic soils. Géotechnique, 45(2): 317-320.
- Martin, R.P., Siu, K.L. & Premchitt, J. (1994). Performance of horizontal drains in Hong Kong. Special project Report, SPR 11/94, Geotechnical Engineering Office, Civil Engineering Department, Hong Kong, p. 106.
- Matsuoka, H. (1974). Stress-strain relationships of clays based on the mobilized plane. Soils and Foundations, 14(2):77-87.
- Matyas, E.L. & Radhakrishna, H.S. (1968). Volume change characteristics of partially saturated soils. Géotechnique, 18(4):432-448.
- Nakai, T. & Mihara, Y. (1984). A new mechanical quantity for soils and its application to elastoplastic constitutive models. Soil and Foundations, 24(2):82-94.

- Nakai, T. (1985). Finite element computations for active and passive earth pressure problems of retaining wall. *Soils and Foundations*, 25(3):98-112.
- Ortigão, J.A.R. (1996). FRP application in geotechnical engineering. ASCE 4th Materials Engineering Conference, Washington DC, USA, pp. 535-544.
- Ortigão, J.A.R. (1997). Ensaio de arrancamento em obras de solo grampeado. *Solos e Rochas*, 20(1):39-43.
- Ortigão, J.A.R. & Palmeira, E.M. (1992). Solo grampeado, técnica para estabilização de encostas e escavações. 1ª Conferência Brasileira de Estabilização de Encostas e Escavações, 1ª COBRAE, Rio de Janeiro, 1:181-196.
- Ortigão, J.A.R. & Palmeira, E.M. (1997). Optimized design for soil nailed walls. 3<sup>rd</sup> Conference on Ground Improvement Geosystems. London, Thomas Telford, pp. 368-374.
- Ortigão, J.A.R. & Sayão, A.S.F.J. (2004): Handbook of slope stabilization. Springer, Berlim, Alemanha, 478 p.
- Ortigão, J.A.R., Zirlis, A.Z. & Palmeira, E.M. (1993). Experiência com solo grampeado no Brasil 1970-1993. *Solos e Rochas*, 16(4):291-304.
- Pereira, J.H.F. (1996). Numerical analysis of the mechanical behavior of collapsing earth dams during first reservoir filling. PhD Thesis, University of Saskatchewan, Saskatoon, Canada, 449p.
- Pedroso, D.M. (2006). Representação matemática do comportamento mecânico cíclico de materiais granulares saturados e não saturados. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 225 p.
- Pinheiro, M. (2004). Tij-unsat: um novo modelo elastoplástico para solos não saturados. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 191p.
- Porterfield, J. A., Cotton, D.M. & Byrne, R.J. (1994). Soil nailing field inspectors manual, demonstration project 103. Publication No. FHWA-SA-93-068, Washington, D.C., USA.
- Potts, D.M. & Zdravković, L. (1999). Finite element analysis in geotechnical engineering: theory. Thomas Telford, London, UK, 440 p.
- Pitta, C.A., Souza, G.J.T. & Zirlis, A.C. Solo grampeado: alguns detalhes executivos - ensaios - casos de obras. Solo Grampeado: Projeto, Execução, Instrumentação e Comportamento, ABMS/Sinduscon-SP, 2003. São Paulo, pp. 1-20
- Rahardjo, H., Hritzuk, K.J., Leong, E.C. & Rezaur, R.B. (2003). Effectiveness of horizontal drains for slope stability. *Engineering Geology*. Elsevier Science, 69:295-308.
- Schlosser, F. (1982). Behavior and design of soil nailing. International Symposium on Recent Development in Ground Improvement Technique, Bangkok, pp. 399-413.
- Sivakumar Babu, G.L., Srinivasa Murthy, B.R. & Srinivas, A. (2002). Analysis of construction factors influencing the behavior of soil-nailed earth retaining walls. *Ground Improvement* 6(3): 137-143.

- Sheng D., Sloan S.W. & Abbo A.J. (2002). An automatic Newton-Raphson scheme, *The International Journal of Geomechanics*, 2(4): 471-502.
- Sheng, D. & Sloan, S.W. (2003). Time stepping schemes for coupled displacement and porepressure analysis. *Computing Mechanics*, 31:122-134.
- Sheng D., Sloan S.W., Gens A. & Smith D.W., (2003). Finite element formulation and algorithms for unsaturated soils, Part I Theory, *International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics*, 27(9), 745-765.
- Sheng, D., Sloan, S.W. & Gens A. (2004). A constitutive model for unsaturated soils: thermomechanical and computational aspects. *Computational Mechanics*, 33:453-465.
- Shiu, Y.K. & Chang, G.W.K. (2005). Effects of inclination, length pattern and bending stiffness of soil nails on behaviour of nailed structures. GEO Report No. 197, Geotechnical Engineering Office, Hong Kong, China, 116 p.
- Sloan, S. W., Abbo, A. J., & Sheng, D. (2001). Refined explicit integration of elastoplastic models with automatic error control. *Engineering Computations*, 18:121-154.
- Stocker, M.F., Korber, G.W., Gassler, G., & Gudehus, G. (1979), Soil nailing. *International Conference on Soil Reinforcement*, Paris, France, 2:469-474.
- Terzaghi, K. (1943). *Theoretical Soil Mechanics*. John Wiley and Sons, USA, 510 p.
- Wheeler, S.J. & Sivakumar V. (1995). An elasto-plastic critical state framework for unsaturated soil. *Géotechnique*. 45(1): 35-53.
- Wheeler, S.J., Sharma, R.S. & Buissom M.S.R. (2003). Coupling of hydraulic hysteresis and stress-strain behavior in usaturated soils. *Géotechnique* 53(1):41-44.
- Yamagami, T. & Ueta, Y. (1988). Search for critical slip lines in finite element stress field by dynamic programming. *International Conference on Numerical Methods in Geomechanics*, Innsbruck, pp. 1347-1352.
- Zhang, M.J., Song, E.X. & Chen, Z.Y. (1999). Ground movement analysis of soil nailing construction by three-dimensional finite element modeling. *Computers and Geotechnics*, 25: 191-204.
- Zienkiewicz, O.C. & Taylor R.L. (1989). *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, London, UK, 1:648 p.
- Zienkiewicz, O.C. & Zhu, J.Z. (1987). A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Numerical Methods in Engineering*. 24:337-357.
- Zirlis, A.C., Do Val, E.C. & Neme, P.A. (1999). Solo grampeado: projeto, execução e instrumentação, ABMS, NRSP, São Paulo, 69 p.