

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**ANÁLISE DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM REGIME
TRANSIENTE EM MATERIAIS ANISOTRÓPICOS APLICANDO O
MEC**

MIÉLLE SILVA PESTANA

ORIENTADORA: CARLA TATIANA MOTA ANFLOR

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS

PUBLICAÇÃO: ENM.DM – 215A/2014

BRASÍLIA/DF: ABRIL – 2014

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**ANÁLISE DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM REGIME
TRANSIENTE EM MATERIAIS ANISOTRÓPICOS APLICANDO O
MEC**

MIÉLLE SILVA PESTANA

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS
MECÂNICAS DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
CIÊNCIAS MECÂNICAS**

APROVADA POR:

**Prof^a Carla Tatiana Mota Anflor, Dr. (PCMEC-UNB)
(Orientadora)**

**Prof^o. Jhon N. V. Goulart, Dr. (PCMEC -UnB)
(Examinador Interno)**

**Sandi Itamar Schafer de Souza, Dr. (UFRN)
(Examinador Externo)**

BRASÍLIA/DF, ABRIL DE 2014

FICHA CATALOGRÁFICA

PESTANA, MIÉLLE SILVA.

Análise de Transferência de Calor em Regime Transiente em Materiais Anisotrópicos Aplicando o MEC.

xvi, 101p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2014).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Ciências Mecânicas.

1. Transferência de calor
2. Condutividade térmica efetiva
3. Método dos Elementos de Contorno.
4. Isotropia
5. Anisotropia

I. ENM/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

PESTANA, M. S. (2014). Análise de Transferência de Calor em Regime Transiente em Materiais Anisotrópicos Aplicando o MEC. Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas, Publicação ENM.DM – 215A/2014, Departamento de Ciências Mecânicas, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 101p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Miélle Silva Pestana.

TÍTULO: Análise de Transferência de Calor em Regime Transiente em Materiais Anisotrópicos Aplicando o MEC.

GRAU: Mestre

ANO: 2014

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Miélle Silva Pestana

QE 28, Conjunto M, casa 23, Guará II

CEP: 71.060-132, Brasília – DF – Brasil.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiro a Deus, cujo nome é Jeová por sempre cuidar de mim como pai amoroso. Um agradecimento especial a minha orientadora Prof^a Carla Anflor, por toda sua paciência, confiança, incentivo na realização deste trabalho, és uma referência para mim como profissional e pessoa.

A minha família que sempre mostrou preocupação genuína e muito amor, principalmente a minha mãe Deuseny, o meu pai de criação João Simplício, a minha tia Maria Luiza, meus primos Mariana e Gabriel que me acolheram generosamente na sua casa e me trataram com muito amor, a minha irmã Mirian e meu pai Luiz pelo incentivo. As minhas tias Jarimária e Gisele que sempre acretiram em mim, a minha vó Maria, mulher guerreira que me inspira a continuar lutando.

Ao meu querido companheiro João Paulo, que nestes dias difíceis sempre me apoiou e incentivou a não desistir e continuar lutando, muito obrigada pela paciência! Ao Sr. João Rocha, Dona Auta, Simone, Tatiane e Fabiana, muito obrigada pelo incentivo!

Ao Grupo de Mecânica Experimental e Computacional (GMEC), onde tive a felicidade de fazer grandes amizades e viver experiências marcantes na minha vida. Muito obrigada queridos amigos, Angélica, que carinhosamente ouviu meus lamentos e sempre teve uma palavra amiga, a Tatiane que sempre me motivou a continuar e me proporcionou bons momentos de descontração. Ao Tiago, pelas muitas vezes que me fez rir e perceber o quanto a vida pode ser animada mesmo em momentos difíceis. Ao casal querido Jhony e Carolina pelo carinho demonstrado. Adrián pela frase de incentivo: “Miélle de mi vida de mi corazón”. Aos professores Jhon Goulart, Jorge Luiz e Éder Albuquerque que sempre mostraram prontidão em ajudar-me e sempre me incentivaram a continuar perseverando.

A todos os meus amigos que tive a oportunidade de conviver no SG9, em especial o grande mestre Dalmo Costa pelo incentivo, pelas muitas vezes que pacientemente me ajudou e tirou muitas dúvidas, sou muito grata Dalmo! Também aos meus amigos Lenir, Rogérisson, Eliane, Guilherme, Jaime e Diogo, obrigada por todo carinho demonstrado!

Aos professores que farão parte da banca examinadora, professores Sandi Itamar Schafer, Jhon Goulart e a professora Carla Anflor, obrigada pela prontidão!

*Dedicado a minha
amada mãe Deuseny*

RESUMO

ANÁLISE DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM REGIME TRANSIENTE EM MATERIAIS ANISOTRÓPICOS APLICANDO O MEC

Autor: Miéle Silva Pestana

Orientador: Carla Tatiana Mota Anflor

Programa de pós-Graduação em Ciências Mecânicas

Brasília, Abril 2014

O trabalho apresenta um estudo sobre condutividade térmica efetiva de um meio poroso em regime transiente de transferência de calor. A microporosidade do material é representada através da inserção de furos no domínio da geometria. O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é empregado para resolver as equações diferenciais que regem os problemas potenciais em regime transiente. A análise foi realizada empregando Elementos de Volumes Representativos (EVR's), que é um método que aplica a Teoria dos Campos Médios para encontrar as propriedades efetivas (macroscópicas) deste material micro-poroso. Tanto os diâmetros dos furos como também a fração de volume do material são pré-determinados. A condutividade térmica é avaliada localmente pela razão entre a média do fluxo de calor e a média do gradiente de temperatura do domínio. A técnica utilizada para materiais isotrópicos é estendida para o estudo do comportamento da condução de calor em meios anisotrópicos, utilizando o método conhecido como mapeamento de domínio ou transformação linear. São avaliados alguns exemplos numéricos, verificando o comportamento da condutividade térmica efetiva em materiais isotrópicos e anisotrópicos.

Palavras Chaves: *Transferência de calor, Condutividade térmica efetiva, Método dos Elementos de Contorno, Isotropia, Anisotropia.*

ABSTRACT

ANALYSIS OF HEAT TRANSFER UNDER TRANSIENT IN MATERIALS ANISOTROPIC APPLYING BEM

Author: Miéle Silva Pestana

Supervisor: Carla Tatiana Mota Anflor

Programa de pós-Graduação em Ciências Mecânicas

Brasília, april 2014

The presents a study on effective thermal conductivity of porous media in transient heat transfer. The microporosity of the material is represented by the insertion holes in the field of geometry. The Boundary Element Method (BEM) is employed to solve the differential equations governing the potential problems in the transient regime. The analysis was performed using Representative Volume Elements (RVE's), which is a method that applies the theory Midfields to find the effective properties (macroscopic) of this micro-porous material. Both the diameters of the holes as well as the volume fraction of the material are pre-determined. The thermal conductivity is evaluated locally by the ratio between the average volumetric heat flux and volumetric average temperature gradient of the field. The technique used for isotropic materials is extended to the study of the behavior of heat conduction in anisotropic media using the method known as domain mapping or linear transformation. Some numerical examples are evaluated by checking the behavior of the effective thermal conductivity in isotropic and anisotropic materials.

Keywords: *Heat transfer, effective thermal conductivity, Boundary Element Method, Isotropy, Anisotropy.*

SUMÁRIO

ABSTRACT	7
1. INTRODUÇÃO	1
1.2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	3
1.3. OBJETIVOS DO TRABALHO	9
1.4. ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	9
2. TRANSFERÊNCIA DE CALOR TRANSIENTE	11
2.1. EQUAÇÕES GOVERNANTES	12
3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA A EQUAÇÃO DA DIFUSÃO TRANSIENTE	15
3.1. EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO	15
3.2. DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL USANDO ELEMENTOS CONSTANTES	20
3.3. EXPRESSÃO MATRICIAL	23
4. ELEMENTOS DE VOLUMES REPRESENTATIVOS (EVR) E CONDUTIVIDADE TÉRMICA EFETIVA	27
4.1. ELEMENTOS DE VOLUMES REPRESENTATIVOS (EVR)	27
4.2. CONDUTIVIDADE TÉRMICA EFETIVA	29
5. RESULTADOS NUMÉRICOS	31
5.1. PROBLEMA POTENCIAL UNIDIMENSIONAL	32
5.1.1. CASO 1: ISOTRÓPICO	33
5.1.2. DEFINIÇÃO DE PONTO ESTACIONÁRIO	38
5.1.3. CASO 2: ANISOTRÓPICO	48
5.1.3.1. Método de Transformação de coordenadas	49
5.1.3.2. Validação da técnica de mapeamento de domínio	63
5.2. PROBLEMA POTENCIAL BIDIMENSIONAL	65
5.2.1. Resultados para meios isotrópicos	65
5.2.2. Resultados para meios anisotrópicos	68
6. ADIMENSIONALIZAÇÃO DO TEMPO	71
7. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	80
7.1. SUGESTÕES DE CONTINUIDADE DO TRABALHO	80
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	82

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. (a) Representação de uma microestrutura com malha de elementos finitos. (b) Representação de uma microestrutura com malha de elementos de contorno.	3
Figura 2. Condução de calor transiente e permanente em uma placa.....	11
Figura 3. Distribuição unidimensional de temperatura e fluxo de calor.	13
Figura 4. Condições de contorno.....	16
Figura 5. Aproximação da geometria.	20
Figura 6. Discretização no tempo.	21
Figura 7. Intervalo de tempo.	23
Figura 8. Esquema exemplificando um EVR.	28
Figura 9. Esquema ilustrativo para razão de volume constante: matrizes com (a) 4, (b) 9 e (c) 16 furos.	29
Figura 10. Ilustração do sentido do fluxo de calor q cruzando as fronteiras AB e CD.	30
Figura 11. (a) Discretização e condições de contorno do EVR. (b) Fluxo médio q e temperatura média u	32
Figura 12. Localização dos pontos de controle.	33
Figura 13. Variação da temperatura à medida que a placa atinge o regime permanente para os materiais isotrópicos, matrizes: (a) Sólida, (b) 1, (c) 4, (d) 9, (e) 16 e (f) 25 furos.....	34
Figura 14. Variação da temperatura à medida que a placa atinge o regime permanente para os materiais isotrópicos, matrizes: (g) 30, (h) 35, (i) 42, (j) 48, (l) 54 e (m) 60 furos.	35
Figura 15. Variação da temperatura média e fluxo médio para matrizes: (a) sólida, (b) 1, (c) 4 e (d) 9 furos.	36
Figura 16. Variação da temperatura média e fluxo médio para matrizes: (e) 16, (f) 25, (g) 30, (h) 35, (i) 42, (j) 48, (l) 54 e (m) 60 furos.	37
Figura 17. Tempo para atingir o regime permanente na matriz com 1, 4, 9, 16, 25, 30, 35, 42, 48, 54 e 60.	38
Figura 18. Sistema Cartesiano ilustrativo onde P é o ponto estacionário.....	39
Figura 19. Gráficos da derivada da temperatura da matriz (a) sólida, com (b) 1, (c) 4, (d) 9, (e) 16 e (f) 25 furos.....	40
Figura 20. Gráficos da derivada da temperatura da matrizes: (g) 30, (h) 35, (i) 42, (j) 48, (l) 54 e (m) 60 furos.	41

Figura 21. Média da temperatura e derivada da temperatura adimensionalizadas para meios isotrópicos: matriz com 1 furo.....	42
Figura 22. Valor da condutividade térmica em relação ao número de furos.....	45
Figura 23. Gráfico dos desvios médios (casos isotrópicos): condutividades térmicas efetivas em relação ao número de furos presentes nas matrizes.....	46
Figura 24. Variação da temperatura das soluções analíticas e numéricas com a coordenada x e com $\Delta t= 20s$	48
Figura 25. Esquema ilustrativo do mapeamento geométrico utilizado.	50
Figura 26. (a) Discretização e condições de contorno do EVR. (b) Fluxo médio q e temperatura média u	52
Figura 27. Localização dos pontos de controle.	52
Figura 28. Variação da temperatura à medida que a placa atinge o regime permanente para materiais anisotrópico, matrizes: (a) Sólida, (b) 1, (c) 4, (d) 9, (e) 16, (f) 25 furos.....	53
Figura 29. Variação da temperatura à medida que a placa atinge o regime permanente para materiais anisotrópico, matrizes: (g) 30, (h) 35, (i) 42, (j) 48, (l) 54 e (m) 60 furos.....	54
Figura 30. Variação da temperatura média e fluxo médio para matrizes: (a) sólida, (b) 1, (c) 4 e (d) 9 furos.	55
Figura 31. Variação da temperatura média e fluxo médio para matrizes: (e) 16, (f) 25, (g) 30, (h) 35, (i) 42, (j) 48, (l) 54 e (m) 60 furos.	56
Figura 32. Tempo para atingir o regime permanente na matriz com 1, 4, 9, 16, 25, 30, 35, 42, 48, 54 e 60 furos.	57
Figura 33. Gráficos da derivada da temperatura para matriz sólida (a), com (b) 1, (c) 4, (d) 9, (e) 16 e (f) 25 furos.....	58
Figura 34. Gráficos da derivada da temperatura para matrizes com (g) 30, (h) 35, (i) 42, (j) 48, (l) 54 e (m) 60 furos.....	59
Figura 35. Média da temperatura e derivada da temperatura adimensionalizadas para meios anisotrópicos matriz com 1 furo.	60
Figura 36. Condutividade térmica efetiva pelo número de furos inseridos na matriz.....	62
Figura 37. Gráfico dos desvios médios (casos anisotrópicos): condutividades térmicas efetivas em relação ao número de furos.	63
Figura 38. Tempo para atingir o regime estacionário pelo número de furos para diferentes valores do k_{xx} , k_{yy} e k_{xy}	64
Figura 39. Condições de contorno do EVR.....	65

Figura 40. Campo de temperatura matrizes: (a) sólida, (b) 1 furo, (c) 4 furos e (d) 9 furos.	66
Figura 41. Variação da temperatura média e fluxo médio para matrizes: (a) sólida, (b) um, (c) quatro e (d) nove furos.	67
Figura 42. Tempo para atingir o regime permanente pelo número de furos para meios isotrópicos.....	67
Figura 43. Campo de temperatura matrizes: (a) sólida, (b) 1 furo, (c) 4 furos e (d) 9 furos.	68
Figura 44. Variação da temperatura média e fluxo médio para matrizes: (a) sólida, (b) um, (c) quatro e (d) nove furos.	69
Figura 45. Tempo para atingir o regime permanente pelo número de furos para meios anisotrópicos.....	70
Figura 46. Condutividade térmica efetiva em relação ao número de furos: matriz sólida e com 1, 4, 9 furos.	70
Figura 47. Tempo adimensionalizado para os casos isotrópicos para matrizes: sólida e com (a) 1, (b) 4, (c) 9, (d) 16 e (f) 25 furos.	73
Figura 48. Tempo adimensionalizado para os casos isotrópicos para matrizes: com (a) 30, (b) 35, (c) 42, (d) 48, (e) 54 e (f) 60 furos.	74
Figura 49. Tempo adimensionalizado para atingir o regime estacionário para os casos isotrópicos.....	75
Figura 50. Tempo adimensionalizado para os casos anisotrópicos matrizes: Sólida, com (a) 1, (b) 4, (c) 9, (d) 16 e (f) 25 furos.	76
Figura 51. Tempo adimensionalizado para os casos anisotrópicos matrizes: com (a) 30, (b) 35, (c) 42, (d) 48, (e) 54 e (f) 60 furos.....	77
Figura 52. Tempo adimensionalizado para atingir o regime estacionário para os casos anisotrópicos.....	78
Figura 53. Tempo adimensionalizado para atingir o regime permanente pelo número de furos.....	79

ÍNDICES DE TABELAS

Tabela 1. Matriz sólida e com 1, 4, 9, 16, 25, 30, 35, 42, 54, 56 e 60 furos.	44
Tabela 2. Cálculos do Desvio Médio do K_{eff}	46
Tabela 3. Temperatura analítica e numérica na coordenada x e com $\Delta t= 20s$	47
Tabela 4. Matriz sólida e com 1, 4, 9, 16, 25, 30, 35, 42, 54, 56 e 60 furos.	61
Tabela 5. Cálculos do Desvio Padrão do k_{eff}	62
Tabela 6. Resultados obtidos do tempo para atingir o regime estacionário para diferentes casos anisotrópicos com matrizes com 1, 4 e 9 furos.	64

LISTA DE SÍMBOLOS

Caracteres Romanos

[A]	Vetor de condição de contorno conhecidas no MEC.	-
A_f	Área total de furos	[m ²]
A_p	Área da placa	[m ²]
$\overline{AB} \quad \overline{CD}$	Delimitação da fronteira	[W]
B	Fonte térmica	-
c^i	Matriz de coeficientes que depende da geometria do contorno	-
D	Conta interna limite	[m]
D_f	Distância entre centro de furos	[m]
[F]	Vetor de condições de contorno	-
[G]	Matriz de potenciais	-
[H]	Matriz de fluxos	-
k_{eff}	Condutividade térmica efetiva	[w/mk]
k_m	Condutividade térmica média	[w/mk]
k_{xx}	Condutividade térmica na direção x	[w/mk]
k_{yy}	Condutividade térmica na direção y	[w/mk]
k_{xy}	Condutividade térmica na direção xy	[w/mk]
k_1	Condutividade do material base (modelos analíticos)	[w/mk]
k_2	Condutividade do furo (modelos analíticos)	[w/mk]
[K]	Tensor condutividade térmica	-
L	Aresta do EVR	[m]
N	Número de incógnitas	-
N_f	Número de furos	-
n_e	Número de elementos	-

\bar{P}	Sentido do fluxo de calor que cruza a fronteira	-
Q	Vetor coluna dos valores nodais da derivada normal do potencial	-
\bar{q}	Fluxo de calor prescrito	-
Δq	Variação do fluxo	-
$ q_{esq} $	Módulo do fluxo de calor que cruza a fronteira \overline{AB}	-
$ q_{dir} $	Módulo do fluxo de calor que cruza a fronteira \overline{CD}	-
$[Q]$	Matriz de correção da posição dos nós físicos	-
R	Distância entre o ponto fonte e o ponto campo	[m]
R	Raio do furo	[m]
R'	Tolerância entre o contorno e os furos	[m]
$(U_H - U_L)$	Diferencial de temperatura	[k]
U	Vetor coluna dos potenciais nodais	-
\bar{u}	Potencial prescrito	-
u^*	Solução fundamental do potencial	-
W	Função peso arbitrária	-
X	Coordenada original no eixo da abscissa	-
\hat{x}	Coordenada mapeada no eixo da coordenada	-
$x_c y_c$	Coordenadas do centro dos furos	-
Y	Coordenada original no eixo da ordenada	-
\hat{y}	Coordenada mapeada no eixo da abscissa	-

Caracteres gregos

Ω	Domínio do problema
Γ	Contorno do domínio
Γ_1	Parcela do contorno exterior da matriz
Γ_2	Parcela do contorno exterior da matriz
ξ	Ponto fonte
δ	Delta de Dirac
η	Direção normal
σ	Desvio padrão das amostras
$\phi_1 \phi_2$	Função de interpolação

Símbolos e operadores matemáticos

∇	Vetor gradiente
\cup	União de conjuntos
\cap	Interseção de conjuntos

Sub-índices e Subscritos

0	Relativo ao ponto fonte
x	Componente na direção “x”
y	Componente na direção “y”
eff	Indica valor efetivo
exp	Indica valor obtido com base em dados experimentais
i, j	Índices variam de 1 a n_e
i	Referente ao ponto i do domínio

Sobrescritos

*	Solução fundamental
-	Condição de contorno prescrita
\rightarrow	Vetor

Siglas

MEC	Método dos elementos de contorno
MEF	Método dos elementos finitos
MDF	Método das diferenças finitas
EVR	Elemento de volume representativo

1. INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas pesquisadores têm dedicado seus esforços no desenvolvimento de materiais de alto desempenho (resistência à vida a fadiga, alta tenacidade, resistência ao desgaste, etc.). Neste sentido, os estudos antes realizados em materiais homogêneos foram naturalmente estendidos a materiais heterogêneos de natureza isotrópica e anisotrópica. Ao tratar-se de materiais de engenharia, quase tudo na natureza pode ser considerado heterogêneo, sendo que suas propriedades são intimamente dependentes de sua microestrutura. A determinação de características macroscópicas de materiais heterogêneos é um problema essencial em muitas aplicações de engenharia e ciência. Estudar a relação entre fenômenos microestruturais e o comportamento macroscópico não só permite prever o comportamento de materiais que já existem, mas também fornece uma ferramenta para o projeto de microestruturas de materiais tal que o comportamento macroscópico resultante se ajuste com características desejadas.

A caracterização de materiais, ou seja, a determinação de suas propriedades físicas é atualmente um ramo bastante promissor e importante em diversos setores (setores industrial, elétrico, científico, controle de qualidade entre outros) todos esses setores dependem da disponibilidade de materiais com propriedades físicas e químicas bem definidas e que tenham, precisão e confiabilidade. A título de exemplo, pode-se citar, controle da temperatura em equipamentos industriais, mecânicos ou eletrônicos, ou seja, a temperatura de uma superfície quente não pode ultrapassar um determinado valor crítico que pode conduzir à fusão de um material ou a deterioração da resistência mecânica de uma estrutura ou equipamento. É o caso, por exemplo, do núcleo de um reator nuclear e da superfície exterior de veículos aeroespacial.

Assim, o desenvolvimento de novos materiais de alto desempenho é um fator muito importante no progresso industrial. Um grande número de produtos de uso cotidiano e alto impacto social, que vão desde a indústria de embalagens até a automotiva, passando pela alimentícia, cosmética, agrotêxtil, construção, tubulações, eletrodomésticos, indumentária de segurança aproveitam os mais recentes avanços da engenharia e da ciência dos materiais.

Desta forma, encontrar as propriedades dos materiais tornou-se uma tarefa prioritária e estratégica. É por esse motivo que busca-se cada vez mais o desenvolvimento de técnicas numéricas eficientes de modelagem de materiais. A chave do êxito de muitos

materiais modernos está no comportamento “sob medida” para sua aplicação. Isto se consegue, fundamentalmente, a partir da manipulação de sua microestrutura. A filosofia básica na construção de tais materiais é escolher combinações de materiais das fases para produzir as propriedades macroscópicas ou efetivas desejadas. Com objetivo de reduzir o custo com procedimentos experimentais, é possível hoje fazer previsões do comportamento de novos materiais usando simulações numéricas, acelerando o desenvolvimento de materiais.

A análise da microestrutura de um material é possível somente quando são empregados modelos de materiais homogeneizados, isto é, o material é considerado como se fosse homogêneo na macro escala com propriedades efetivas advindas do comportamento estudado nas escalas inferiores. São usadas muitas formas para obtenção dessas propriedades efetivas, como a *Teoria Matemática de Homogeneização*, o qual é aplicada principalmente a materiais com estruturas internas periódica (Sanchez-Palencia E., 1981) ou métodos analíticos e semi-analíticos, como o *Método de Mori-Tanaka* (Nemat-Nasser S. e Hori M., 1999).

Neste trabalho é utilizado um esquema de aproximação computacional empregando a Teoria de Campos Médios, também chamada de Teoria de Propriedades Efetivas ou Método de Análise EVR (Zohdi T. I., 2002, Hori M. e Nemat-Nasser S., 1999). O método é baseado no fato das propriedades efetivas medidas em experimentos serem relações entre médias (no volume de amostra de material micro-estrutural) dos campos internos das variáveis envolvidas (Hori M. e Nemat-Nasser S., 1999). Através de uma amostra representativa de material essa relação é calculada, ou seja, é uma amostra de material que incorpore uma quantidade suficiente de micro-heterogeneidades. Esta amostra é referida na literatura como Elemento de Volume Representativo (EVR). Assim, é determinada a condutividade térmica efetiva (K_{eff}) através de uma análise estatística sobre uma série de EVR's submetidos a um potencial térmico.

Para resolver as equações diferenciais que regem o problema estudado é utilizado um dos métodos numéricos que combinam com a micro-mecânica fornecendo uma ferramenta eficiente para a modelagem do comportamento dos materiais. Os métodos numéricos mais utilizados são, Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método das Diferenças Finitas (MDF). Neste trabalho o MEC foi empregado para resolver o problema de transferência de calor de problemas potenciais em materiais porosos. O MEC transforma parte da equação diferencial que governa o problema em uma equação integral de contorno. Através de uma discretização

do contorno do problema as integrais são aproximadas por integrações efetuadas em cada elemento. E estas integrais obtidas numericamente, formam um sistema de equações que relacionam potenciais e fluxos em todos os elementos que aproximam o contorno.

A Figura 1 ilustra uma microestrutura discretizada com elementos finitos e com elementos de contorno. É possível verificar que o MEC não utiliza uma discretização refinada. Outro fator interessante de ser observado recai no fato de que no MEC não há dependência de malha ao transladar os furos dentro do domínio. A aproximação da solução é realizada somente no contorno do domínio, conseqüentemente dispensa o uso de malhas no interior do domínio de solução.

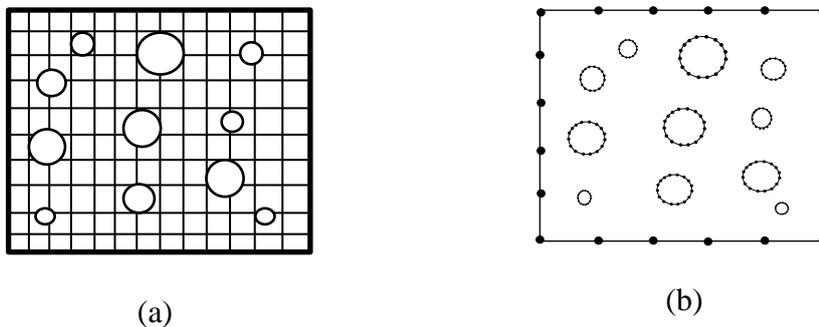


Figura 1. (a) Representação de uma microestrutura com malha de elementos finitos. (b) Representação de uma microestrutura com malha de elementos de contorno.

Neste sentido, este trabalho tem por objetivo estudar a influência do comportamento de sólidos em nível de microestrutura quando submetido ao regime transiente de transferência de calor empregando o MEC. A formulação é aplicada a materiais isotrópicos e anisotrópicos.

1.2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Estudos de propriedades condutivas térmicas e fenômenos físicos microscópicos de materiais porosos têm atraído à atenção da comunidade científica, como por exemplo, no trabalho de Kim et al. (2003), onde os autores desenvolveram um método integral para determinar a condutividade térmica variando com a temperatura sem usar medições internas de temperatura, usando um modelo unidimensional, foi aquecido uma das faces e a outra isolada. Utilizou-se o método integral par resolver o problema inverso de condução de calor não linear, considerando que a condutividade térmica era uma função linear da temperatura. A distribuição de temperatura para o método integral foi assumida como uma

função polinomial de terceira ordem onde os coeficientes da equação foram encontrados utilizando dois fluxos de calor impostos e duas temperaturas medidas no contorno.

Encontra-se ainda, trabalho como do Kwon et al. (2009) que estudaram a condutividade térmica efetiva dos principais materiais utilizados na construção de painéis para isolamento térmico, como fibras e espumas. Foi construída para cada material em análise uma microestrutura, utilizando simplificações e idealizações para a modelagem do fenômeno de condução sólida para cada caso. Concluíram que a condutividade térmica efetiva é função da porosidade, da condutividade sólida pura e das propriedades mecânicas do material.

O MEC tem sido cada vez mais utilizado na solução de problemas, sua principal característica é a redução da dimensão do problema, devido à maneira que a malha do problema é discretizada. O método mostra-se eficiente principalmente quando o domínio de estudo é infinito ou semi-infinito. De acordo com Brebbia e Dominguez, (1989), o MEC tem sido uma ferramenta eficiente que pode ser uma opção alternativa aos Elementos Finitos. Principalmente em casos particulares onde uma melhor aproximação dos resultados é requerida, como problemas de concentração de tensões ou onde o domínio se estende ao infinito. Além disso, de acordo com Senna (2003), dentre as características interessantes do MEC, pode-se destacar sua aplicação em diversas áreas, como da Física e da Engenharia, por exemplo, em mecânica estrutural, mecânica de fratura, plasticidade, visco plasticidade, geomecânica, entre outras áreas.

Existem muitos outros estudos sobre propriedades efetivas de materiais heterogêneos, onde é usado como ferramenta numérica o MEC. Buroni F. C. (2006), estuda problemas aplicados à elasticidade e a micromecânica, onde foi verificado que o MEC mostra-se uma ferramenta apropriada. É por esse e outros aspectos positivos, que o MEC tem sido utilizado cada vez mais nos últimos anos em modelagens da micromecânica de materiais compostos. Dondero et al. (2011), realizaram um trabalho onde desenvolveram uma metodologia numérica para o cálculo da condutividade térmica efetiva de materiais micro-heterogêneos. Foram usados valores da condutividade térmica efetiva para prever analiticamente os campos de temperatura ao longo de dois materiais com variações de espaço das frações de áreas nulas. No trabalho através de cuidadosas experiências os resultados numéricos e analíticos foram de acordo com os campos de temperatura medidos com uma câmera termográfica. No trabalho de Chatterjee et al. (2007), desenvolveram uma formulação com o MEC em três dimensões em regime permanente, foi avaliado materiais compósitos com fibras de reforço. O MEC foi representado por um sistema

curvilíneo, cilíndrico e com potenciais e fluxos apresentados em termos de funções trigonométricas num cubo de fibras randômicas. Apresentaram algumas integrais semi-analíticas, proporcionando um processo de solução mais rápido e com menor custo computacional.

Pode-se citar ainda, estudos como o de Wang e Pan (2008), estudaram um método analítico para prever a condutividade térmica efetiva de espumas porosas com células abertas o qual foi posteriormente comparado com métodos experimentais, mostrando concordância nesses resultados. Foi verificado que a condutividade térmica efetiva das espumas porosas com células abertas é muito mais elevada do que a dos materiais granulados com a mesma porosidade.

No presente trabalho é utilizado um esquema de aproximação computacional empregando a Teoria de Campos Médios, também chamada de Teoria de Propriedades Efetivas apresentadas em Olek et al.(2013) e Zohdi (2002) para determinar o elemento de volume representativo (EVR). Tratando-se de EVR, Yao et al. (2004) apresenta uma modelagem utilizando o método dos elementos de contorno (MEC) para materiais compostos. Foi analisado um material composto por uma matriz com inclusões sólidas. Utilizou-se um problema de sub-regiões, no qual o EVR é considerada a região principal e cada uma das inclusões é uma sub-região a ser analisada. Foi desenvolvida uma formulação especial para o MEC, as conectividades foram entre as sub-regiões, isto é, pontos comuns que ligam as sub-regiões e que, portanto, dividem mesmas condição de contorno. Os resultados apresentados mostraram-se satisfatórios, pois provou-se que o MEC é de fato eficiente para análises bidimensionais lineares com EVR's com grande número de inclusões de materiais diferentes. Além disso, foi feita uma comparação dos resultados numéricos com os analíticos, e houveram concordâncias entre eles.

Zarichta (2008), apresentou um estudo sobre a condutividade térmica efetiva de materiais micro-porosos em duas dimensões utilizado o Método dos Elementos de Contorno (MEC) como ferramenta numérica. Foi usada uma metodologia para estimativa de condutividade térmica efetiva em materiais micro-porosos de comportamento isotrópico e ortotrópico. O estudo foi concentrado no desenvolvimento de uma metodologia aplicada à microestruturas com furos dispersos em sua matriz. Através da implementação numérica, os furos são gerados de forma aleatória no domínio de um Elemento de Volume Representativo (EVR). Essa metodologia provou que furos isolados podem facilmente serem estendidos para problemas com duas ou mais fases em casos aplicados a inclusões condutoras de calor. Deste modo, foi observado que é vantajoso utilizar materiais

ortotrópicos com frações de volume apreciáveis, pois os vazios anulam o seu efeito, homogeneizando as propriedades efetivas em ambas as direções. Assim, a metodologia proposta permite a análise tanto de materiais isotrópicos como ortotrópicos.

Ainda sobre EVR, Soares et al. (2008), realizaram um estudo sobre materiais micro heterogêneos onde usaram a técnica de homogeneização para determinar o EVR de um material bifásico, foi realizado sobre uma matriz polimérica de PMMA com inclusões esféricas de borracha. O material foi considerado elástico linear e não foi considerado o descolamento entre matriz e nódulos, foi utilizado o Método dos Elementos Finitos (FEM). O critério usado para a determinação do EVR é a convergência dos valores do módulo de compressibilidade e do módulo de elasticidade transversal em relação ao tamanho da amostra. Como a distribuição das partículas é aleatória, foi definido um valor médio e o desvio das propriedades a partir dos resultados obtidos para seis simulações. Os valores obtidos foram comparados ainda com limites obtidos de desenvolvimentos teóricos clássicos da Micromecânica, e tais resultados mostraram-se com uma boa aproximação.

Outros trabalhos também merecem destaque, como o de Öchsner et al. (2006), no qual utilizaram modelos periódicos e aleatórios com aplicações em espumas metálicas do tipo Lotus, com o objetivo de determinar as propriedades térmicas efetivas onde um modelo tridimensional foi estudado com o intuito de encontrar um EVR ideal de suas amostras numéricas. Então, usaram modelos analíticos para comparar e validar os modelos numéricos. A implementação numérica usando o Método de Elementos de Contorno acoplado ao FMM (Y. J. Liu, 2009) mostrou-se eficaz, permitindo a solução de um grande número de problemas em pouco tempo. A metodologia empregada mostrou-se versátil, pois é possível utilizar a mesma para trabalhar em conjunto com algoritmos de otimização no projeto de materiais com propriedades de condutividade sob medida. Finalmente os autores confrontaram resultados analíticos e numéricos os quais apresentaram uma precisão satisfatória.

Alguns estudos foram realizados na análise de processos onde o tempo desempenha um papel primordial, como por exemplo, Effren (1997), estudou a condução de calor em regime transiente e implementou um código computacional utilizando o MEC, resolvendo os problemas de difusão usando soluções fundamentais dependentes do tempo, através de um processo de marcha no tempo. Os resultados numéricos para os exemplos apresentados na literatura mostraram uma boa aproximação.

Chang et al. (1984), empregam a solução fundamental dependente do tempo no contexto do método direto para resolver problemas de condução de calor bidimensional no

meio isotrópico e anisotrópico. A discretização da equação integral de contorno foi realizada com divisões no espaço e o tempo com valores constantes para as variáveis. Outra formulação integral alternativa para a solução do problema transiente é o acoplamento do elemento de contorno com o método das diferenças finitas proposta por Brebbia e Walker (1980). Nesta aproximação, a derivada no tempo é aproximada na forma de uma diferença finita é um procedimento de diferença finita empregado passo a passo para uma solução de avanço no tempo.

Vanzuit (2007), desenvolveu uma formulação do MEC para fluxo de calor, foi empregada como solução fundamental a equação de Laplace. Utilizou-se uma solução fundamental não dependente do tempo. O processo de marcha no tempo empregando esquemas de diferenças finitas e Houbolt foram usados nesse estudo. Foram analisados alguns exemplos no qual os resultados obtidos com o MEC foram de acordo com a solução analítica, o que indica a eficiência do método proposto para resolver a equação da difusão. E os esquemas adotados para a marcha do tempo, tanto para diferenças finitas regressivas como o método de Houbolt obtiveram respostas confiáveis.

Além disso, encontra-se ainda sobre problemas de difusão de calor transiente, trabalhos como o de Zambrozuski (2010), onde é apresentada uma solução para problemas de difusão linear transiente utilizando o MEC e o Método de Aproximação Explícita de Green (MAEG) com o MEC, adotando um modelo em meios isotrópicos e homogêneo. Usou-se nesse estudo o processo de marcha no tempo com o MEC, iniciando com valores diferentes de zero. Os resultados do procedimento do MAEG com uso do MEC foram comparados com o MEC e com soluções analíticas, mostrou-se concordância.

Devido à importância do tema para a Engenharia, desde a década de 50, muitos pesquisadores têm se preocupado com o estudo de meios anisotrópicos. E alguns estudos sobre esse tema são tratados no presente trabalho. Pode-se citar Lee e Mal (1990), apresentaram uma formulação para o MEC, para a análise de meios anisotrópicos planos, onde foram discretizadas as equações integrais desse plano, o que tornou tais formulações diferentes de outras normalmente usadas. Assumiram as incógnitas do problema como funções lineares de uma variável complexa, em cada elemento de contorno, realizaram de forma exata as integrações para contornos arbitrários sem integrar numericamente, tornando o método de fato, vantajoso.

Shiah e Tan, (1997), desenvolveram um estudo sobre problemas anisotrópicos, aplicando uma técnica de mapeamento do domínio. A vantagem dessa abordagem é que um problema anisotrópico pode ser resolvido usando o MEC, onde um domínio

anisotrópico é mapeado para um novo domínio de comportamento isotrópico, no entanto, matematicamente é equivalente ao domínio original. As equações de transformação de coordenadas são apresentadas nesse estudo, dois exemplos numéricos foram analisados um com domínio quadrado e o outro foi um círculo unitário, e ambos foram submetidos a condições de contorno mistas. Como as soluções analíticas dos exemplos estudados eram conhecidas, foi possível comparar com os resultados numéricos, onde a margem de erro mostrou-se muito pequena. Assim, provou-se que a técnica de mapeamento de domínio é de fato, eficiente.

Shiah (2005), realizou um estudo utilizando a técnica direta de mapeamento do domínio usando termo elasticidade associada ao MEC, foi estudado a condução de calor em meios anisotrópicos 2D e 3D. O problema totalmente anisotrópico foi resolvido usando códigos do MEC padrão para problemas isotrópicos regidos pela equação de Poisson com modificações relativamente pequenas. Três exemplos numéricos foram apresentados para ilustrar a facilidade e precisão do esquema proposto nesse estudo.

Vanalli (2004), desenvolveu formulações e códigos computacionais que possibilitem a análise bidimensional estática de meios contínuos anisotrópicos visco plásticos reforçados ou não por fibras. As análises numéricas envolvem aplicações dos Métodos dos Elementos de Contorno (MEC) e dos Elementos Finitos (MEF). No estudo envolvendo o MEC, a análise de plasticidade e visco plasticidade em meios anisotrópicos foi feita de maneira original, destacando-se a consideração da lei de fluxo plástico não associativa e o tratamento de viscosidade apenas com integrais de contorno, sem a utilização de aproximações de domínio. Foi apresentada uma quantidade significativa de exemplos possibilitando a verificação da eficiência das formulações e dos códigos desenvolvidos, que foram comparados com resultados analíticos e experimentais disponíveis na literatura.

Ainda sobre materiais anisotrópicos, Marczak et al. (2011), apresentaram dois novos métodos para obter a solução fundamental para um problema de transferência de calor tridimensionais em materiais anisotrópicos. Um desses métodos é através da transformada de Radon e Fourier, que daria a solução analítica que concordasse com os resultados obtidos através da técnica de mapeamento de domínio. O segundo método apresenta a solução através de uma integral de linha ao longo de um semicírculo. E de fato, encontraram uma solução fundamental menos conhecida, porém, através dela pode-se encontrar a solução para problemas de transferência de calor em materiais anisotrópicos sem usar a técnica de transformação de coordenadas. Até mesmo materiais compósitos

modelados em um EVR contendo grande número de inclusões podem ser resolvidos usando essas novas funções.

Nos últimos anos o estudo do comportamento da condução de calor em meios anisotrópicos cresceu de forma considerável, devido a grande aplicação desses materiais na engenharia. Porém, ainda são poucos os resultados relativos à transferência de calor em meios anisotrópicos na literatura. Segundo Carlaw e Jaeger (1959) e Özisik (1980), são poucos os livros-texto que dedicam conteúdo significativo a problemas de condução de calor em corpos anisotrópicos.

1.3. OBJETIVOS DO TRABALHO

Este trabalho tem como objetivo o estudo sobre condutividade térmica efetiva de um meio poroso em regime transiente de transferência de calor. A formulação do código permite a geração de furos no domínio do EVR, com raios fixos e uma fração volumétrica pré-determinada. Os furos representam a microporosidade do material. As análises são aplicadas a problemas potenciais em regime transiente, onde as equações diferenciais são resolvidas numericamente pelo método de elementos de contorno. É proposta uma metodologia que permite analisar materiais isotrópicos e anisotrópicos.

1.4. ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Este trabalho é organizado em sete capítulos, o primeiro dos quais é a presente introdução. As equações governantes dos problemas de transferência de calor transiente são apresentadas no Capítulo 2. Para resolver as equações diferenciais que regem o problema de condução de calor o Capítulo 3 apresenta o Método de Elementos de Contorno para problemas transientes de transferência de calor. A modelagem numérica da microestrutura do material é apresentada no Capítulo 4, onde é explicado como foi determinado o tamanho do EVR dos casos estudados, ainda neste capítulo é apresentada a formulação para condutividade térmica efetiva. Após apresentadas todas as formulações do código desenvolvido, o Capítulo 5 apresenta os resultados das propriedades efetivas tanto para problemas potenciais isotrópicos como também anisotrópicos, além disso, é feita uma comparação do comportamento de ambos os materiais quando submetidos à transferência de calor em regime transiente. Ainda neste capítulo são abordados também alguns

exemplos usando uma nova condição de contorno. A fim de elaborar uma teoria mais geral independente de qualquer variável no sistema de unidade, no Capítulo 6 são apresentados os resultados dos tempos abordados no trabalho adimensionalizados. Finalmente o Capítulo 7 apresenta as principais conclusões e sugestões para a continuação do presente trabalho.

2. TRANSFERÊNCIA DE CALOR TRANSIENTE

A termodinâmica preocupa-se com a quantidade de calor transferido quando um sistema passa de um estado de equilíbrio para outro. No entanto, a ciência que busca a determinação das taxas de tais transferências de energia é a transferência de calor. Ou seja, ela pode ser definida como o trânsito de energia provocado por desequilíbrio térmico. A transferência de calor possui tanto direção quanto magnitude. A taxa de condução de calor (\dot{Q}) em determinada direção é proporcional ao gradiente de temperatura (Çengel, 2009).

Quando em um meio a temperatura não varia com o tempo a condução de calor é dita permanente, enquanto a transiente implica na variação ao longo do tempo ou dependência do tempo (Gumerato et al., 2006).

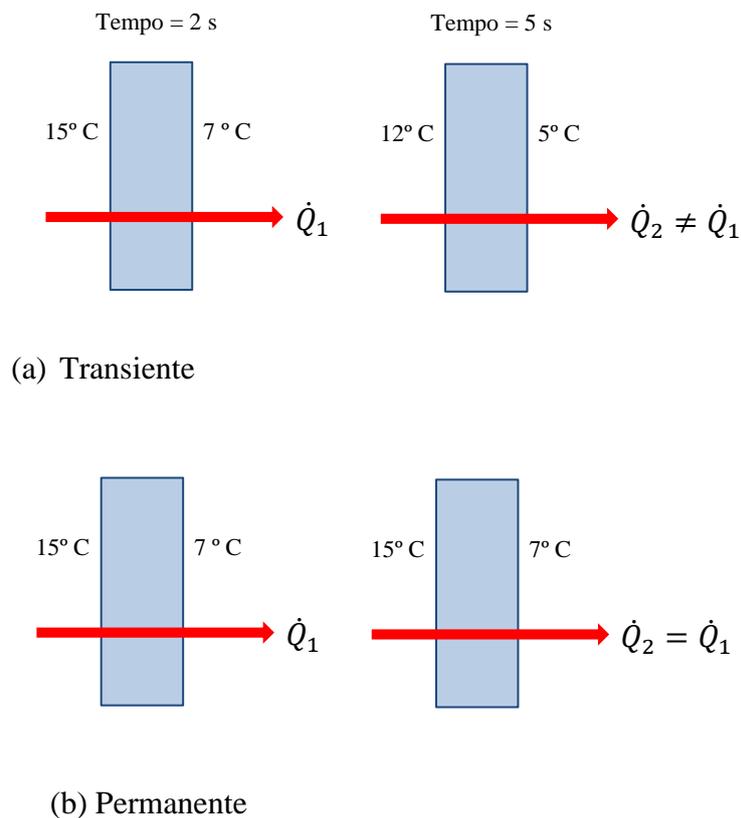


Figura 2. Condução de calor transiente e permanente em uma placa.

2.1. EQUAÇÕES GOVERNANTES

A equação de calor na física é um modelo matemático que descreve a difusão térmica em meios sólidos, isto é, mostra como a quantidade de calor se propaga em um corpo qualquer. Essa equação diferencial parcial também é conhecida como equação da difusão. Para o caso de um sólido homogêneo e sem geração interna de calor segundo Oliveira (2011), a forma mais elementar dessa equação é apresentada na equação (2.1.1).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\rho c_p}{k} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.1.1)$$

Onde x , y e z são as coordenadas espaciais do sólido tridimensional. Em problemas bidimensionais, são duas as coordenadas espaciais, x e y .

Um problema de transferência de calor é dito unidimensional se a temperatura no meio varia em apenas uma direção, com a variação de temperatura e transferência de calor nas outras direções sendo desprezíveis ou zero. A taxa de condução de calor por um meio em uma determinada direção (por exemplo, na direção x) é proporcional à diferença de temperatura ao longo do meio e à área normal à direção da transferência de calor, no entanto, é inversamente proporcional à distância naquela direção (Mendonça, 2005). Esse processo foi expresso na forma diferencial pela lei de condução de calor de Fourier para condução de calor unidimensional conforme a equação (2.1.2).

$$q(x) = -k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.1.2)$$

Onde q é o fluxo de calor por unidade de área, k é a condutividade térmica do material e u é a temperatura no ponto x . O fluxo q é o módulo de um vetor, ou seja, $q > 0$ indica que o fluxo se dirige no sentido positivo de x , e $q < 0$ no sentido negativo. Deste modo, o sinal negativo na equação (2.1.2) indica que, quando o gradiente de temperatura é positivo, isto é, a temperatura cresce com x , o calor flui da direita para esquerda, da seção x_2 para x_1 conforme ilustrado na Figura 3.

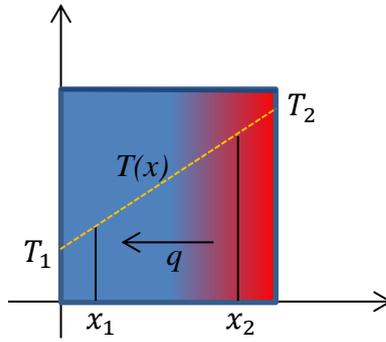


Figura 3. Distribuição unidimensional de temperatura e fluxo de calor.

Assim, a equação de condução de calor transiente unidimensional para materiais isotrópicos, isto é, materiais que possuem as mesmas propriedades em todas as direções é escrita conforme a equação (2.1.3) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.1.3)$$

Em que a propriedade $\alpha = k/\rho c_p$ é a difusividade térmica do material e representa quão rápido o calor se propaga através dele. Sendo ρ a massa específica e c_p o calor específico do material.

No entanto, para materiais anisotrópicos, como fibras e materiais compostos, as propriedades podem variar de acordo com a direção, o que torna a análise de transferência de calor para esse tipo de material muito mais complexa do que para os materiais isotrópicos. Assim, é necessário expressar a condutividade térmica como uma quantidade tensorial para considerar a variação com a direção (Marczak et. al, 2010).

$$k = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.1.4)$$

$$\begin{aligned} q_x'' &= -k_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - k_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} - k_{yz} \frac{\partial u}{\partial z} \\ q_y'' &= -k_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} - k_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} - k_{yz} \frac{\partial u}{\partial z} \\ q_z'' &= -k_{xz} \frac{\partial u}{\partial x} - k_{yz} \frac{\partial u}{\partial y} - k_{zz} \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

De (2.1.5) obtêm-se a equação de difusão de calor para materiais anisotrópicos:

$$k_{xx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_{yy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k_{zz} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2k_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2k_{xz} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2k_{yz} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.1.6)$$

O objetivo de estudo desse trabalho para os casos anisotrópicos é resolver problemas bidimensionais sem geração interna de calor, assim, simplificando a equação (2.1.6) obtêm-se a equação (2.1.7).

$$k_{xx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_{yy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2k_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.1.7)$$

3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA A EQUAÇÃO DA DIFUSÃO TRANSIENTE

3.1. EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

Neste capítulo serão apresentadas as equações integrais de contorno correspondentes aos problemas governados pela equação da difusão transiente, nos quais as variáveis são, o potencial (u) e sua derivada normal, o fluxo (q).

O problema de fluxo de calor é governado pela equação diferencial, dada pela Eq. (2.1.1), que de acordo com Brebbia et. al (1984) pode ser reescrita de acordo com a equação (3.1).

$$\nabla^2 u(x,t) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0, \quad x \in \Omega \quad (3.1)$$

O coeficiente α , que é a difusividade térmica admite interpretações diferentes de acordo com o problema físico em consideração. Supondo-se que seja constante no tempo e no espaço, com as seguintes condições de contorno conforme a equação (3.2) e equação (3.3).

- Condições de contorno essenciais ou de Dirichlet:

$$u(x,t) = \bar{u}(x,t) \text{ em } \Gamma_u, t > 0, \quad (3.2)$$

- Com as condições de contorno naturais ou de Neumann:

$$q(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial n} = \bar{q}(x,t) \text{ em } \Gamma_q, t > 0 \quad (3.3)$$

Com a condição inicial:

$$u(x,t) = u_0(x,t) \text{ para } t = 0, \text{ no domínio } \Omega \quad (3.4)$$

Onde u é o potencial, q a sua derivada na direção normal ao contorno. Os termos \bar{u} , \bar{q} , são constantes. Γ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ representa o contorno constituído de N elementos de contorno que limitam o domínio. O contorno Γ_i é chamado de Γ_u quando as condições de contorno conhecidas são os potenciais dos pontos pertencentes a este contorno e Γ_q quando as condições de contorno conhecidas forem o fluxo.

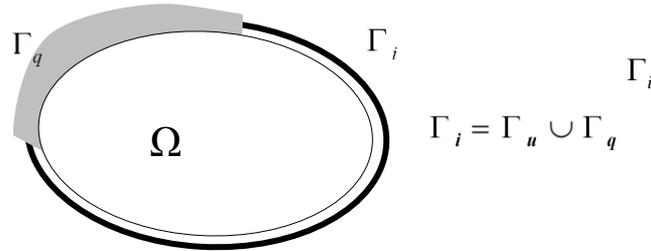


Figura 4. Condições de contorno.

Brebbia (1992), apresenta três maneiras para resolver este problema. A primeira usa a Transformada de Laplace, a segunda a aproximação de diferenças finitas para retirar a dependência do tempo, no entanto, para obter um bom resultado o dt tem que ser pequeno. A terceira maneira utiliza a solução fundamental dependente do tempo e é esta que será adotada.

Aplicando o Método dos Resíduos Ponderados para resolver a equação (3.1) combinada com as condições dadas nas equações (3.2, 3.3 e 3.4) e considerando sua dependência do tempo obtém-se a integral conforme a equação (3.5).

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Omega} \left[\nabla^2 u(x, t) + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right] u^*(\xi, x, t_F, t) d\Omega(x) dt \\
 &= \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma_q} [q(x, t) - \bar{q}(x, t)] u^*(\xi, x, t_F, t) d\Gamma(x) dt \\
 & - \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma_u} [u(x, t) - \bar{u}(x, t)] q^*(\xi, x, t_F, t) d\Gamma(x) dt
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Onde:

$$q^*(\xi, x, t_F, t) = \frac{\partial u^*(\xi, x, t_F, t)}{\partial n(x)} \quad (3.6)$$

Integrando por partes duas vezes o Laplaciano e uma vez a derivada no tempo da equação (3.5) obtêm-se a equação (3.7):

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Omega} \left[\nabla^2 u^*(\xi, x, t_F, t) + \frac{1}{\alpha} \frac{u^*(\xi, x, t_F, t)}{\partial t} \right] u(x, t) d\Omega(x) dt \\ & - \frac{1}{\alpha} \left[\int_{\Omega} u(x, t) u^*(\xi, x, t_F, t) d\Omega(x) \right]_{t=t_0}^{t=t_F} = \\ & - \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} q(x, t) u^*(\xi, x, t_F, t) d\Gamma(x) dt \\ & + \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} u(x, t) q^*(\xi, x, t_F, t) d\Gamma(x) dt \end{aligned} \quad (3.7)$$

A integração de domínio envolvendo o integrando $\nabla^2 u^*$ na equação (3.7) pode ser evitada com o uso de uma função de ponderação, denominada solução fundamental quando empregada no desenvolvimento de formulações do MEC, e que seja solução da equação (3.8).

$$\nabla^2 u^*(\xi, x) = -\delta(\xi, x) \quad (3.8)$$

Onde é a função Delta de Dirac. Deste modo, a solução fundamental é interpretada como sendo o efeito em um ponto x , denominado ponto campo, de um Delta de Dirac aplicado em um ponto ε , denominado ponto fonte. O Delta de Dirac possui a propriedade conforme apresentada na equação (3.9).

$$\int_{\Omega} \delta(\xi, x) f(x) d\Omega(x) = f(\xi); \xi \in \Omega \quad (3.9)$$

Substituindo a equação (3.8) na integral de domínio do lado esquerdo da equação (3.7) e posterior aplicação da propriedade equação (3.9) resulta a equação integral (3.10) para o ponto $\xi \in \Omega$.

$$\begin{aligned} u(\xi, t) + \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} u(x, t) q^*(\xi, x; t_F, t) d\Gamma(x) dt = \\ \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} q(x, t) u^*(\xi, x; t_F, t) d\Gamma(x) dt - \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} u^*(\xi, t) d\Omega \end{aligned} \quad (3.10)$$

Onde:

$$\int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} q(x, t) u^*(\xi, x; t_F, t) d\Gamma(x) dt = \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma_u} q u^* d\Gamma_u dt + \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma_q} \bar{q} u^* d\Gamma_q dt \quad (3.11)$$

$$\int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} u(x, t) q^*(\xi, x; t_F, t) d\Gamma(x) dt = \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma_q} u q^* d\Gamma_q dt + \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma_u} \bar{u} q^* d\Gamma_u dt \quad (3.12)$$

Tomando-se o limite da Eq. (3.10) quando o ponto fonte ξ tende ao contorno Γ , tal como descrito em Brebbia et al. (1984), obtêm-se a equação básica para a presente formulação do Método dos Elementos de Contorno:

$$\begin{aligned} c(\xi, t) u(\xi, t) + \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} u(x, t) q^*(\xi, x; t_F, t) d\Gamma(x) dt = \\ \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} q(x, t) u^*(\xi, x; t_F, t) d\Gamma(x) dt - \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} u^*(\xi, t) d\Omega \end{aligned} \quad (3.13)$$

Esta equação é válida para pontos ξ internos Eq. (3.10) ou pertencentes ao contorno Γ , mas é necessário observar que, para o espaço bidimensional, os valores de $c(\xi, t)$ são calculados, como descrito em Brebbia et al. (1984), admitindo-se os seguintes valores:

$$c(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi \notin \Omega \\ \frac{1}{2} & \text{se } \xi \in \text{ contorno suave} \\ 1 & \text{se } \xi \in \Omega \end{cases} \quad (3.14)$$

A solução fundamental da equação dependente do tempo u^* para o domínio bidimensional é apresentada no Brebbia (1984), conforme a equação (3.15).

$$u^*(\xi, x, t_F, t) = \frac{1}{(4\pi\alpha\Gamma)^{\frac{d}{2}}} \exp\left[\frac{-r^2(\xi, x)}{4\pi\alpha\Gamma}\right] H(\Gamma) \quad (3.15)$$

Onde:

$$\Gamma = t_F - t$$

t_F - o tempo de observação

t - o tempo de aplicação da fonte

d - dimensão do problema, no caso bidimensional considerado $d = 2$.

$H(\Gamma)$ - função Heaviside, indica que a solução é zero para $t > t_F$, ou seja, não pode haver resposta antes de ocorrer à aplicação da fonte pontual.

A solução fundamental e sua derivada normal para este problema bidimensional são apresentadas no Brebbia (1984), conforme a equação (3.16).

$$u^*(\xi, x, t_F, t) = \frac{1}{4\pi\alpha\Gamma} \exp\left[\frac{-r^2(\xi, x)}{4\alpha\Gamma}\right] \quad (3.16)$$

$$q^*(\xi, x, t_F, t) = \frac{d(\xi, x)}{8\pi\alpha^2\Gamma^2} \exp\left[\frac{-r^2(\xi, x)}{4\alpha\Gamma}\right] \quad (3.17)$$

Onde r é a distância entre o ponto fonte ξ e o ponto campo x assim calculada:

$$r(\xi, x) = \sqrt{[x(\xi) - x(x)]^2 + [y(\xi) - y(x)]^2} \quad (3.18)$$

$\Gamma = t_F - t$ e $d(\xi, x)$ é a projeção da distância r sobre a normal ao contorno:

$$d(\xi, x) = [x(\xi) - x(x)] n_x + [y(\xi) - y(x)] n_y \quad (3.19)$$

Onde n_x é o cosseno diretor da normal ao elemento no qual o ponto campo pertence em relação ao eixo x e n_y é o cosseno diretor desta normal em relação ao eixo y .

3.2. DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL USANDO ELEMENTOS CONSTANTES

Para obter uma solução aproximada para as incógnitas no contorno, a geometria real é substituída por um conjunto de elementos nos quais o comprimento do arco original é substituído por segmentos de reta definidos por dois nós geométricos por elemento.

O sentido positivo de percurso do contorno é o que deixa o domínio sempre à esquerda (Figura 5).

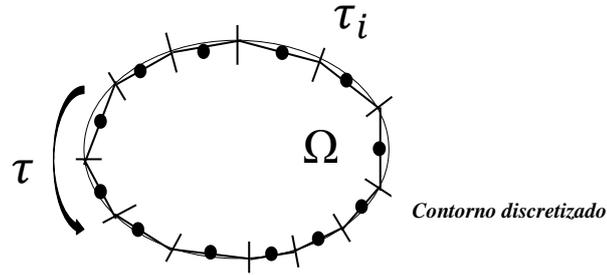


Figura 5. Aproximação da geometria.

Escrevendo a equação (3.5) permutando a ordem de integração no espaço e no tempo, obtém-se:

$$\begin{aligned} c(\xi)U(\xi, t_F) &= \alpha \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j, t_0}^{t_F} \int q(x, t) u^*(\xi, x; t_F, t) dt d\Gamma_j(x) \\ &\quad - \alpha \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j, t_0}^{t_F} \int u(x, t) q^*(\xi, x; t_F, t) dt d\Gamma_j(x) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Onde NE é o número de elementos.

Para a discretização funcional no tempo, considera-se que u e q são constantes em cada intervalo dentro de cada elemento Γ_j :

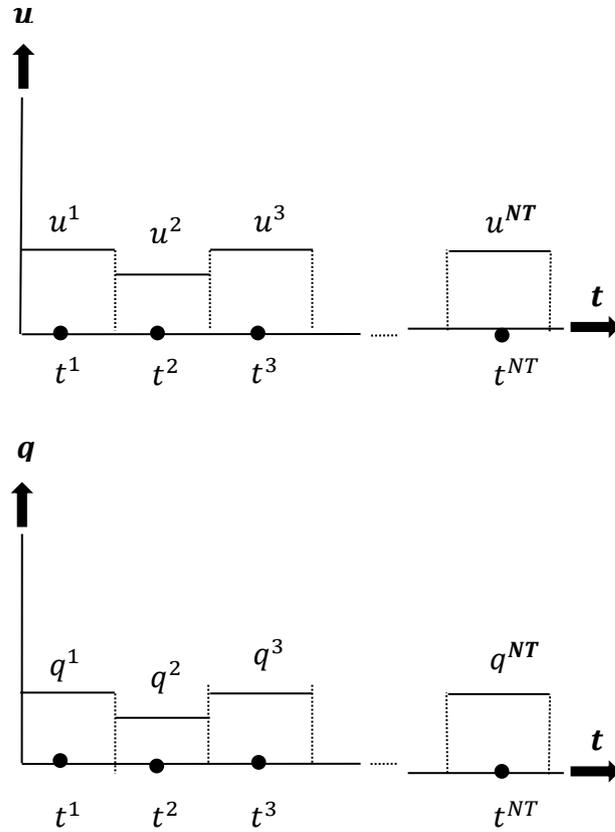


Figura 6. Discretização no tempo.

Quando o contorno é suave em $\xi, \beta = \pi$, assim, $c = 0,5$. Então, a equação (3.2.1) pode ser reescrita como:

$$0,5u_i^{NT} = \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} \sum_{k=1}^{NT} q^k(x) \int_{t_0^k}^{t_f^k} \alpha u^*(\xi, x; t_F, t) dt d\Gamma_j(x) - \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} \sum_{k=1}^{NT} u^k(x) \int_{t_0^k}^{t_f^k} \alpha q^*(\xi, x; t_F, t) dt d\Gamma_j(x) \quad (3.2.2)$$

Onde: NT - Número de intervalos em que o período de tempo considerados é dividido;

$u_i^{NT} = u(\xi_i, t_F)$ é o valor de u no tempo t^{NT} no ponto ξ_i ;

t_0^k - tempo inicial do intervalo;

t_f^k - tempo final do intervalo.

É feita a discretização funcional espacial tomando-se $u^k(x)$ e $q^k(x)$ constantes em cada elemento. Aplicando essa aproximação obtêm-se a equação (3.2.3).

$$0,5u_i^{NT} = \sum_{K=1}^{NT} \sum_{j=1}^{NE} q_j^k \int_{\Gamma_j t_0^k}^{t_f^k} \int \alpha u^*(\xi, x; t_F, t) dt d\Gamma_j(x) - \sum_{K=1}^{NT} \sum_{j=1}^{NE} u_j^k \int_{\Gamma_j t_0^k}^{t_f^k} \int \alpha q^*(\xi, x; t_F, t) dt d\Gamma_j(x) \quad (3.2.3)$$

Esta expressão depende dos valores de u e q nos nós funcionais do contorno de todos os tempos discretos t^t, t^2, \dots, t^{NT} .

A equação (3.2.3) pode ser escrita conforme a equação (3.2.4).

$$0,5u_i^{NT} = \sum_{K=1}^{NT} \left(\sum_{j=1}^{NE} q_j^k \int_{\Gamma_j} U_k^*(\xi, x) d\Gamma_j(x) - \sum_{j=1}^{NE} u_j^k \int_{\Gamma_j} Q_k^*(\xi, x) d\Gamma_j(x) \right) \quad (3.2.4)$$

Onde:

$$U_k^*(\xi, x) = \int_{t_0^k}^{t_f^k} \alpha u^*(\xi, x; t_F, t) dt \quad (3.2.5)$$

$$Q_k^*(\xi, x) = \int_{t_0^k}^{t_f^k} \alpha q^*(\xi, x; t_F, t) dt \quad (3.2.6)$$

As expressões $U_k^*(\xi, x)$ e $Q_k^*(\xi, x)$ integradas de forma analítica resulta na equação (3.2.7).

$$U_k^*(\xi, x) = \frac{1}{4\pi} \left[E_1(a_0^k) - E_1(a_f^k) \right] \quad (3.2.7)$$

$$Q_k^*(\xi, x) = -\frac{1}{2\pi r} \left[\exp(-a_0^k) \exp(-a_f^k) \right] \frac{\partial r}{\partial n}$$

$$\text{Onde: } a_0^k = \frac{r^2}{4\alpha(t_F - t_0^k)} \text{ e } a_f^k = \frac{r^2}{4\alpha(t_F - t_f^k)}$$

E_1 – Função Exponencial-Integral

A figura 7 mostra um intervalo de tempo k e a notação escolhida:

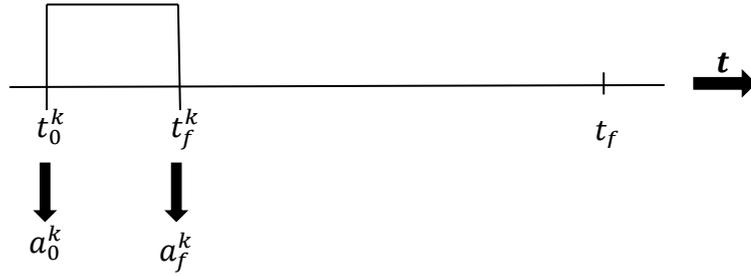


Figura 7. Intervalo de tempo.

3.3. EXPRESSÃO MATRICIAL

A equação (3.2.4) pode ser escrita em termos dos coeficientes de influência de H e G para cada ponto de colocação:

$$0,5 u_i^{NT} = \sum_{k=1}^{NT} \left(\sum_{j=1}^{NE} G_{ij}^k q_j^k - \sum_{j=1}^{NE} \hat{H}_{ij}^k u_j^k \right) \quad (3.3.1)$$

Sendo u_j^k e q_j^k valores de u e q no meio de cada intervalo de tempo para cada elemento, admitindo constantes em todo o intervalo.

$$G_{ij}^k = \int_{\Gamma_j} U_{k(\varepsilon, x)}^* d\Gamma_j(x) \quad (3.3.2)$$

$$\hat{H}_{ij}^k = \int_{\Gamma_j} Q_{k(\varepsilon, x)}^* d\Gamma_j(x) \quad (3.3.3)$$

$$H_{ij}^k = \begin{cases} \hat{H}_{ij}^k + 0,5 \text{ se } k=1 \text{ e } i=j \\ \hat{H}_{ij}^k \text{ nos demais casos} \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Quando o ponto fonte pertence ao elemento campo para o primeiro intervalo de tempo há uma integração singular.

Na integração singular ($k = 1$ e $i = j$):

$$\hat{H}_{ij}^k = 0 \quad (3.3.5)$$

$$G_{ii}^1 = G_R + G_S \quad (3.3.6)$$

Onde: G_R – Regular, calculado pela Integração de Gauss sem o termo de ln

G_S – Singular, o termo de ln integrado analiticamente.

Empregando a quadratura de Gauss, os coeficientes G_{ij}^k e H_{ij}^k são calculados pelas equações (3.3.2) e (3.3.3).

Escrevendo a equação (3.3.1) para cada ponto fonte, obtém-se o seguinte sistema de equação:

$$\sum_{k=1}^{NT} [H]^k \{u\}^{NT-k+1} = \sum_{k=1}^{NT} [G]^k q^{NT-k+1} \quad (3.3.7)$$

Como não são conhecidos a priori os valores de u_j e q_j em todos os tempos, é necessário um esquema de marcha no tempo a partir de $NT = 1$ para encontrar os valores de $\{u\}$ e $\{q\}$ no tempo NT . Assim, para $NT = 1$ na equação (3.3.7) obtém-se a equação (3.3.8).

$$[H]^1 \{u\}^1 = [G]^1 \{q\}^1 \quad (3.3.8)$$

Após a aplicação das condições de contorno, a equação (3.3.8) pode ser reescrita com a equação (3.3.9).

$$[A]^1 \{x\}^1 = \{f\}^1 \quad (3.3.9)$$

Encontrando a solução da equação (3.3.9), são fornecidos os valores de u_j^1 e q_j^1 em todo o contorno discretizado. Deste modo, conhecendo u_j^1 e q_j^1 em todo o contorno, é possível avançar no tempo e calcular u_j^2 e q_j^2 usando a equação (3.3.7) particularizada para $NT = 2$:

$$\sum_{k=1}^2 [H]^k \{u\}^{3-k} = \sum_{k=1}^2 [G]^k \{q\}^{3-k} \quad (3.3.10)$$

Ou

$$[H]^1 \{u\}^2 + [H]^2 \{u\}^1 = [G]^1 \{q\}^2 + [G]^2 \{q\}^1 \quad (3.3.11)$$

Pode ser reescrita de acordo com as equações (3.3.12) e (3.3.13).

$$[H]^1 \{u\}^2 = [G]^1 \{q\}^2 + \{h\}^2 \quad (3.3.12)$$

$$\{h\}^2 = [G]^2 \{q\}^1 - [H]^2 \{u\}^1 \quad (3.3.13)$$

Aplicando as condições de contorno na equação (3.3.12) resultará em um sistema de equações conforme a equação (3.3.14).

$$[A]^1 \{x\}^2 = \{f\}^2 + \{h\}^2 \quad (3.3.14)$$

Depois de resolvida esta equação, os valores de u_j^2 e q_j^2 em todo o contorno são encontrados. Portanto, o processo continua até atingir o nível de tempo NT desejado:

$$[H]^1 \{u\}^{NT} = [G]^1 \{q\}^{NT} + \{h\}^{NT} \quad (3.3.15)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \{u\}^{NT} &= \sum_{k=2}^{NT} \left([G]^k \{q\}^{NT-k+1} - [H]^k \{u\}^{NT-k+1} \right) \\ &= \left([G]^2 \{q\}^{NT-1} - [H]^2 \{u\}^{NT-1} \right) \\ &\quad + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left([G]^3 \{q\}^{NT-2} - [H]^3 \{u\}^{NT-2} \right) \\
& + \\
& \dots \\
& \left([G]^{NT} \{q\}^1 - [H]^{NT} \{u\}^1 \right)
\end{aligned} \tag{3.3.16}$$

Observa-se que neste processo de marcha no tempo $\{h\}^{NT}$ possui apenas termos conhecidos dos coeficientes de influência e dos valores de u_j e q_j em tempos anteriores, ou seja, de 1 a $NT - 1$. Aplicando as condições de contorno em NT obtém-se um sistema de equações algébricas conforme a equação (3.3.17).

$$[A]^1 \{x\}^{NT} = \{f\}^{NT} - \{h\}^{NT} \tag{3.3.17}$$

Obtendo a solução dessa equação é fornecido também os valores de u_j^{NT} e q_j^{NT} em todo o contorno.

4. ELEMENTOS DE VOLUMES REPRESENTATIVOS (EVR) E CONDUTIVIDADE TÉRMICA EFETIVA

4.1. ELEMENTOS DE VOLUMES REPRESENTATIVOS (EVR)

Alguns materiais como os metálicos apresentam propriedades com características predominantemente isotrópicas do ponto de vista macroscópico. No entanto, quando a escala é reduzida ao nível micro-estrutural, a homogeneidade da amostra, observada macroscopicamente, deixa de existir.

É possível verificar que as micro-estruturas de materiais metálicos, entre outros, são compostas por agrupamentos de diferentes tipos de grãos com suas respectivas propriedades. Quando observado em nível de micro-estrutura, a amostra apresenta uma natureza tipicamente heterogênea, assim, tanto a geometria como a posição e também a frequência com a qual as heterogeneidades se fazem presentes apresentam grande impacto nas suas propriedades físicas (Ostoja-Starzewski, 2006). Quando a busca pela escala de observação para qual as propriedades físicas efetivas de diferentes sub-amostras de um material deixam de oscilar, convergindo para um comportamento isotrópico é chamado de Elementos de Volumes Representativos (EVR).

Neste trabalho, a implementação numérica gera furos no domínio de um Elemento de Volume Representativo (EVR). Este método aplica a Teoria de Campos Médios para encontrar as propriedades efetivas (macroscópicas) de um material micro-poroso. É um processo de avaliação das propriedades efetivas de materiais heterogêneos, ou seja, as quantidades físicas representativas são aproximadas do comportamento macroscópico do material através de relações entre médias, as quais conduzem a campos médios volumétricos calculados na porção representativa do material (Santos Júnior, 2008). Esta relação deve ser calculada sobre uma amostra representativa de material que traga informações em quantidade suficiente das micro-heterogeneidades, ou seja, é o menor volume onde as propriedades do material em análise mantêm-se representativas.

Assim, através de uma análise estatística de uma série de EVR's submetidos a um potencial térmico é possível determinar a condutividade térmica efetiva (K_{eff}).

Portanto, um EVR é uma amostra suficientemente pequena para ser considerada como um ponto material do domínio analisado, mas suficientemente grande para conter uma mostra estatisticamente representativa da microestrutura, conforme ilustrado na Figura 8.

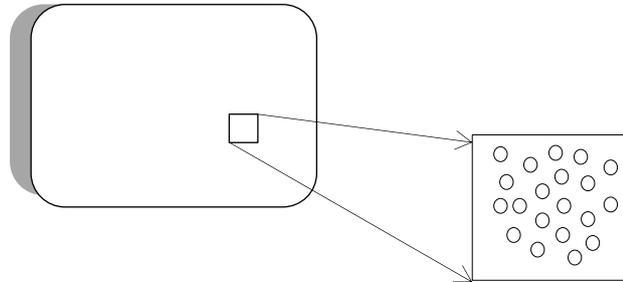


Figura 8. Esquema exemplificando um EVR.

Assim, a metodologia usada neste trabalho é de aumentar cada vez mais o número de furos, mantendo-se a mesma razão de volume ocupada pelos mesmos, ao invés de alterar o comprimento característico do domínio em análise (eq. 4.1.2). Em resultado desse aumento do número de furos, o diâmetro de cada um é reduzido, alcançando assim, um efeito análogo ao da variação do comprimento característico (Zarichta, 2008 e Buroni, 2006). Este procedimento é ilustrado na Figura 9, que apresenta uma placa com 4, 9 e 16 furos respectivamente, onde a razão de volume ocupada pelos mesmos é mantida constante mesmo variando o número de furos. No presente trabalho, a razão de volume ocupada pelos furos é mantida em 0,087, porém, o número de furos é aumentado gradativamente.

O tamanho do EVR, compreendido por quatro arestas de lado L , é calculado em função das seguintes variáveis prescritas: Número de furos (N_f), raio dos furos (r) e fração de volume (ε). A fração de volume é a razão entre a área total de furos (A_f) e pela área total da placa (A_p) conforme a equação 4.1.1.

$$\left. \begin{aligned} A_p &= l^2 \\ A_f &= N_f \cdot \pi r^2 \\ \varepsilon &= \frac{A_f}{A_p} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.1)$$

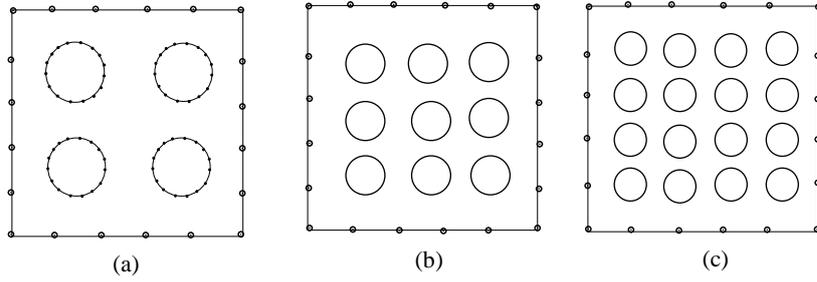


Figura 9. Esquema ilustrativo para razão de volume constante: matrizes com (a) 4, (b) 9 e (c) 16 furos.

O tamanho do EVR pode ser estimado por:

$$L^2 = \left(\frac{N_f \pi r^2}{\varepsilon} \right) = r \sqrt{\frac{N_f \pi}{\varepsilon}} \quad (4.1.2)$$

4.2. CONDUTIVIDADE TÉRMICA EFETIVA

Em problemas de condução de calor, a condutividade térmica é um tensor de segunda ordem. Localmente é dada pela razão entre a média volumétrica do fluxo de calor e a média volumétrica do gradiente de temperatura em um EVR. Seguindo (Kakaç S. & Yener Y., 1993), a equação governante da lei de condução, conhecida também como equação de calor de Fourier, conforme apresentada na equação (4.2.1).

$$q = -k \nabla u \therefore \{q\} = -[k] \{\nabla u\} \quad (4.2.1)$$

Onde $q = [q_x \ q_y]^T$. Em um sistema de coordenadas retangular, as duas componentes do fluxo q são:

$$\left. \begin{aligned} q_x &= -k_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - k_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \\ q_y &= -k_{yx} \frac{\partial u}{\partial x} - k_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4.2.2)$$

Onde k_{ij} são os coeficientes do tensor condutividade térmica [K]:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \quad (4.2.3)$$

Uma forma simples de se estimar a condutividade térmica efetiva na direção \bar{q} , ilustrada na Figura 10, pode ser encontrada em Wang M. & Pan N. (2008), onde a seguinte equação de condutividade térmica efetiva é apresentada conforme a equação (4.2.4).

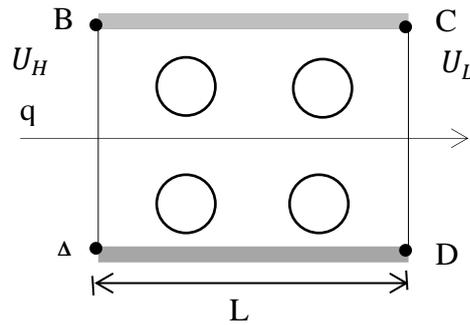


Figura 10. Ilustração do sentido do fluxo de calor q cruzando as fronteiras AB e CD .

$$k_{eff} = \frac{qL}{(U_H - U_L)} \quad (4.2.4)$$

Sendo q o fluxo de calor entre as fronteiras \overline{AB} e \overline{CD} , o diferencial de potencial $(U_H - U_L)$ e L a dimensão que representa o lado da placa. A condutividade térmica efetiva é calculada através da integral do fluxo no lado esquerdo ou direito do EVR. Isso é realizado somando-se as contribuições de todos os elementos sobre o lado L . Para o caso de elementos constantes a k_{eff} é calculada pela equação (4.2.5).

$$k_{eff} = \frac{\sum_{i=1}^{ne} \left(\frac{q_i}{ne} \right) \cdot L}{(U_H - U_L)} \quad (4.2.5)$$

Onde ne é o número de elementos utilizados para discretizar a aresta em análise e q_i representa o fluxo de calor no “i-ésimo” elemento desta aresta calculado pelo MEC.

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentados os resultados encontrados no estudo de materiais microporosos, tanto para materiais isotrópicos como para anisotrópicos. A implementação computacional foi desenvolvida em linguagem MATLAB, onde é gerado um arquivo de entrada que fornece todas as informações necessárias para a análise no MEC.

Este estudo indicará a influência da quantidade de furos em relação as suas propriedades térmicas para materiais micro-porosos. Neste trabalho, o termo “microporoso” são definidos como formas circulares, isoladas entre si e com raio constante dentro do domínio limitado. Os vazios da matriz são considerados isolados devido à condutividade térmica média do ar ser muito baixa (aproximadamente 0.025 W/m.K) em comparação com outros materiais. Deste modo, cada poro da matriz pode ser considerado um isolante (Öchsner, et al. 2006). Além disso, é importante salientar que o efeito convectivo também foi desprezado. As constantes do tensor de condutividade da matriz considerados neste trabalho são as seguintes:

$$\text{Modelo isotrópico } k_{xx} = k_{yy} \quad k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$\text{Modelo anisotrópico } k_{xx} < k_{yy} > k_{xy} \quad k = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 3 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

O tensor da condutividade para materiais isotrópicos apresenta somente valores de uma unidade nos sentidos x e y . No entanto, para materiais anisotrópicos, segundo Zarichta (2008), recomenda-se o valor no sentido k_{yy} três vezes maior do que o fluxo no sentido k_{xx} , enfatizando o sentido preferencial do fluxo de calor no material. É importante salientar que

estes valores referem-se à condutividade térmica do material da matriz, porém, os furos apresentam condutividade zero (isolados). Assim, se busca definir um EVR tanto para materiais isotrópicos como para anisotrópicos onde a condutividade térmica efetiva atinja o regime estacionário.

Neste capítulo serão apresentados primeiramente o comportamento das propriedades efetivas para meios isotrópicos e anisotrópicos para um caso unidimensional. Na sequência, será apresentado também um estudo das propriedades efetivas para meios isotrópicos e anisotrópicos, porém, para um caso bidimensional.

5.1. PROBLEMA POTENCIAL UNIDIMENSIONAL

Para avaliar a influência do número de furos no tempo para atingir o regime estacionário na transferência de calor foram avaliadas doze matrizes, sendo a primeira sólida, da segunda até a décima segunda com 1, 4, 9, 16, 25, 30, 35, 42, 48, 54 e 60 furos respectivamente. O contorno externo da placa foi discretizado com 24 elementos constantes, enquanto que, os furos tiveram como condição de contorno prescrita fluxos iguais a zero ou isolados e foram discretizados sempre com 16 elementos constantes conforme ilustrado na Figura 11a. O tempo de análise para a transferência de calor no regime transiente foi de 35 segundos, o passo de tempo utilizado foi de 0.175 segundos (Effren, 1997). A integração numérica foi realizada utilizando a quadratura de Gauss com seis pontos.

O objetivo deste trabalho consiste em determinar a condutividade térmica efetiva, o fluxo médio na aresta direita e a temperatura média na aresta inferior da placa para cada uma das matrizes propostas conforme a Figura 11b.

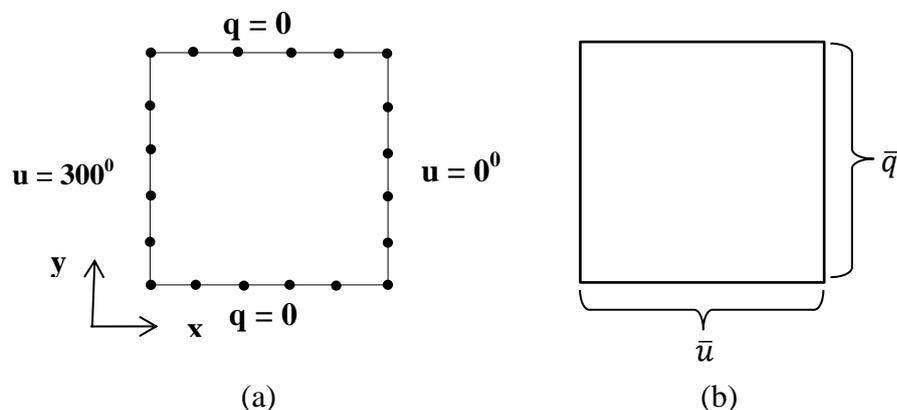


Figura 11. (a) Discretização e condições de contorno do EVR. (b) Fluxo médio q e temperatura média u .

Outra variável de interesse é a variação do tempo em relação à quantidade de furos até que o regime permanente seja atingido.

5.1.1. CASO 1: ISOTRÓPICO

Um material é isotrópico se suas propriedades mecânicas e térmicas são as mesmas em todas as direções. Os materiais isotrópicos podem ter estruturas microscópicas homogêneas ou não homogêneas. Por exemplo, o aço demonstra comportamento isotrópico, apesar de sua estrutura microscópica ser não homogênea (Shigley et al., 2005).

Nesta seção são apresentados os resultados encontrados para material isotrópico. As Figuras 13 e 14 apresentam os gráficos que mostram as mudanças da temperatura, para matrizes sólida, com 1, 4, 9, 16, 25, 30, 35, 42, 48, 54 e 60 furos respectivamente, à medida que o tempo transcorre até que a placa atinja o regime permanente. Os valores calculados referem-se aos valores dos nós físicos do n° 1 ao 6 localizados na aresta inferior da placa conforme a Figura 12, plotados para cada incremento de tempo até que o regime permanente seja alcançado. É possível verificar que o comportamento para todos os casos analisados é semelhante, não possibilitando a princípio diferenciação entre o comportamento de cada caso. No entanto, é possível verificar que em todos os casos foi alcançado o regime permanente.

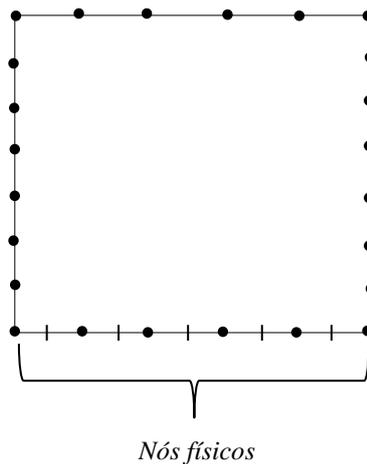
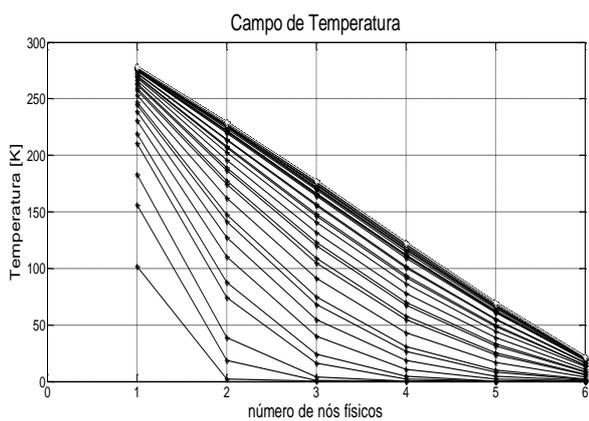
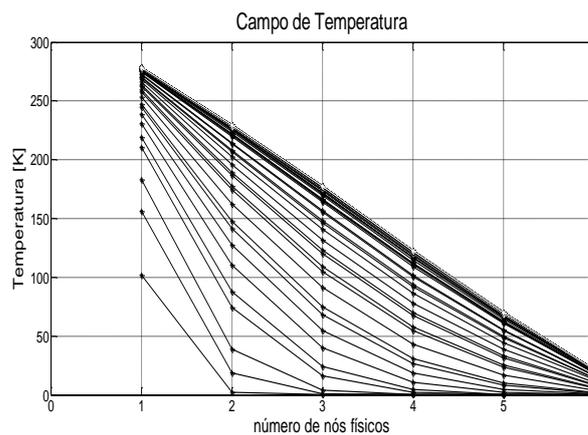


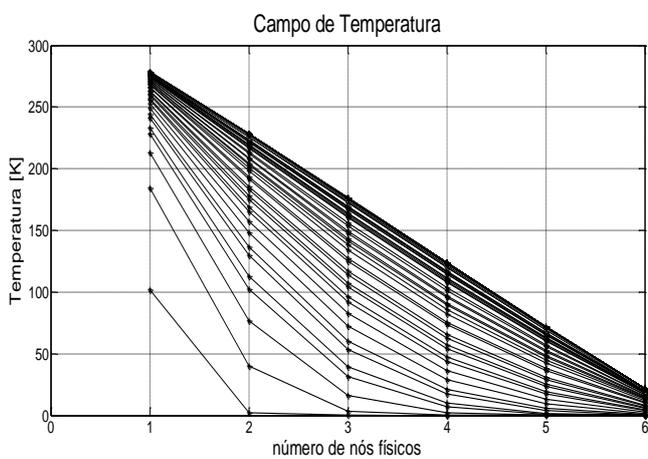
Figura 12. Localização dos pontos de controle.



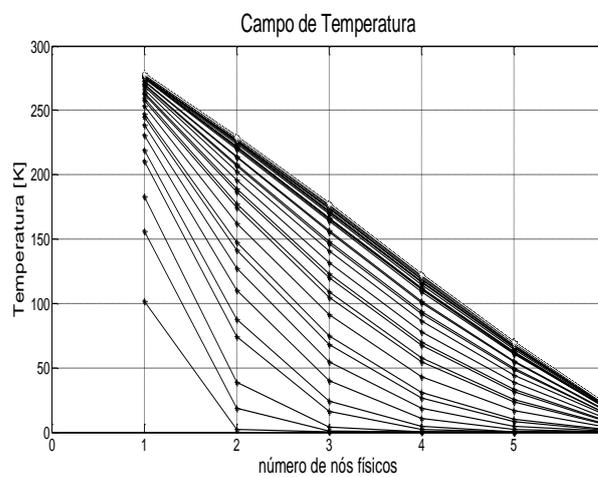
(a)



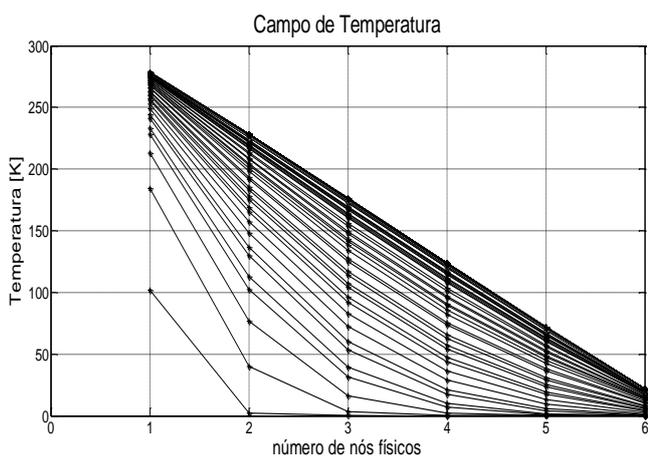
(b)



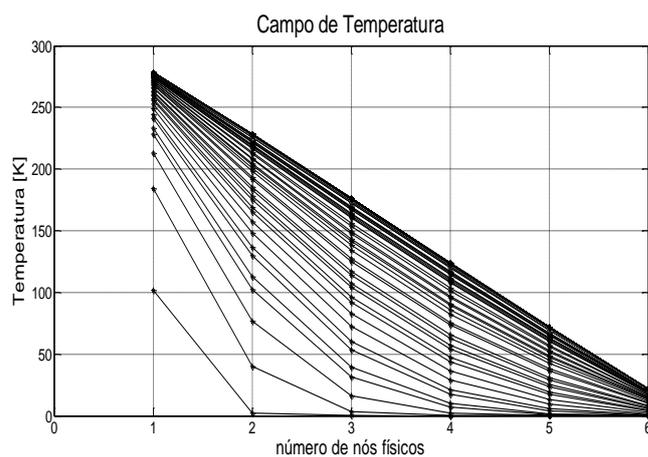
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 13. Variação da temperatura à medida que a placa atinge o regime permanente para os materiais isotrópicos, matrizes: (a) Sólida, (b) 1, (c) 4, (d) 9, (e) 16 e (f) 25 furos.

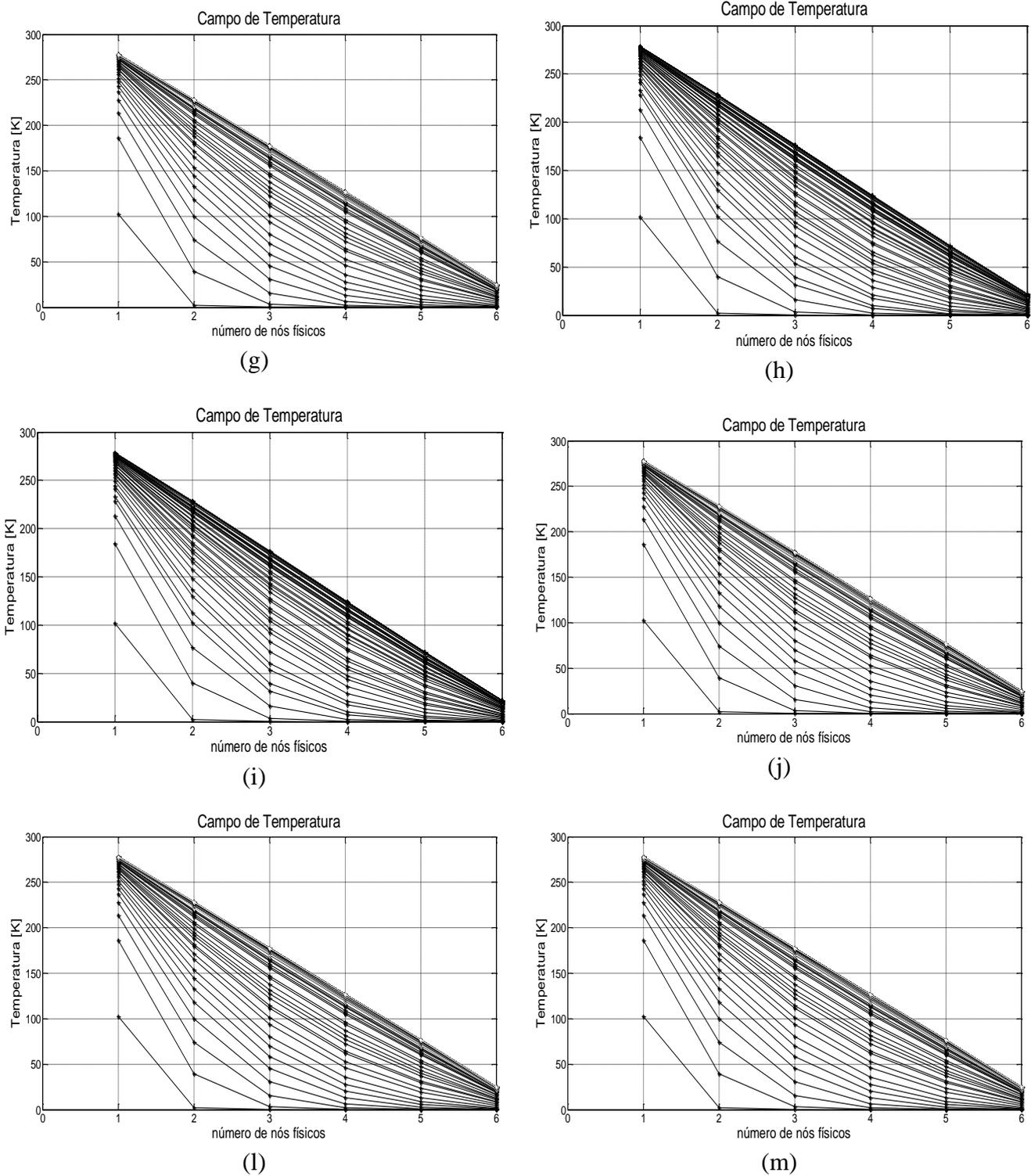


Figura 14. Variação da temperatura à medida que a placa atinge o regime permanente para os materiais isotrópicos, matrizes: (g) 30, (h) 35, (i) 42, (j) 48, (l) 54 e (m) 60 furos.

Nas Figuras 15 e 16 foi plotado a média das temperaturas calculadas na aresta inferior e a média do fluxo na aresta direita da placa. Analisando o histórico de temperatura

para cada caso apresentado é possível observar que a matriz sólida atinge o regime permanente a partir de 24 segundos. Sendo que, a placa com um, quatro, nove, dezesseis, vinte cinco, trinta e trinta cinco furos atingem o regime permanente em 21.88, 20, 19.25, 19.07, 18.55, 18.02 e 18.02 segundos, respectivamente. Neste sentido verifica-se que para uma maior quantidade de furos existentes na matriz, mais rápido será o processo de transferência de calor até que se atinja o regime permanente. No entanto, a partir de 42 furos o tempo para atingir o regime permanente também estabiliza, ou seja, o tempo é de 17.85 segundos para matrizes com 42, 48, 54 e 60 furos (Figura 17).

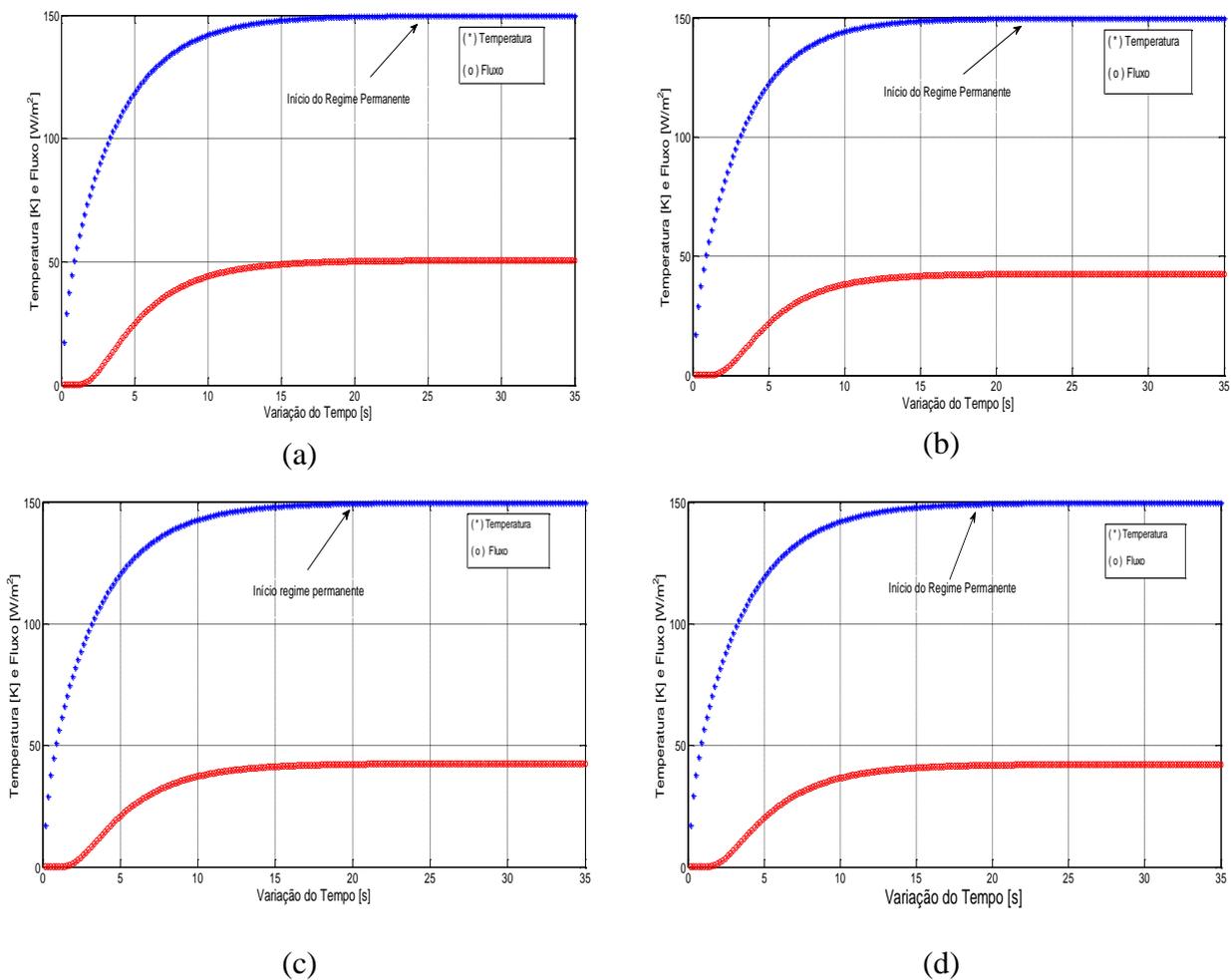
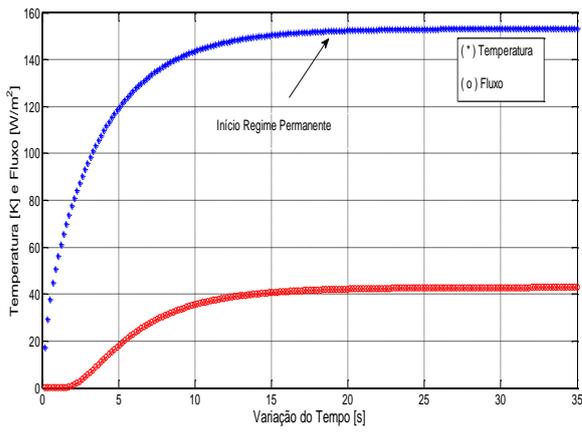
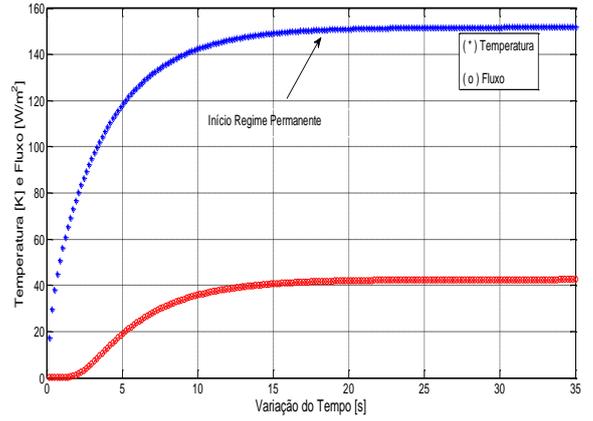


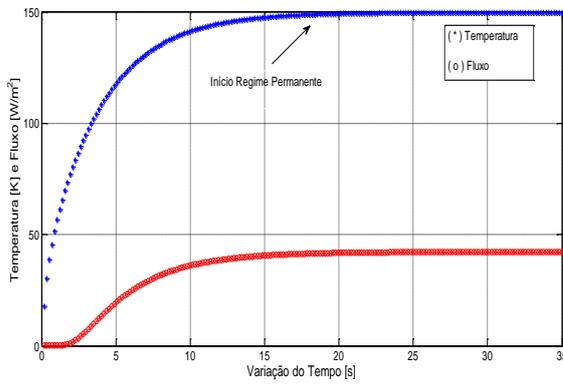
Figura 15. Variação da temperatura média e fluxo médio para matrizes: (a) sólida, (b) 1, (c) 4 e (d) 9 furos.



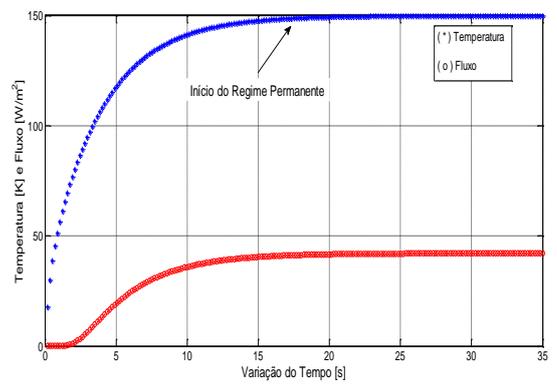
(e)



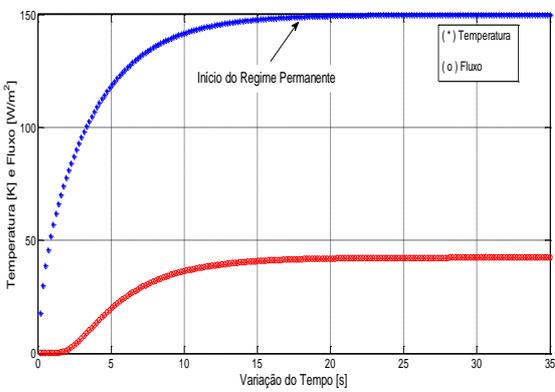
(f)



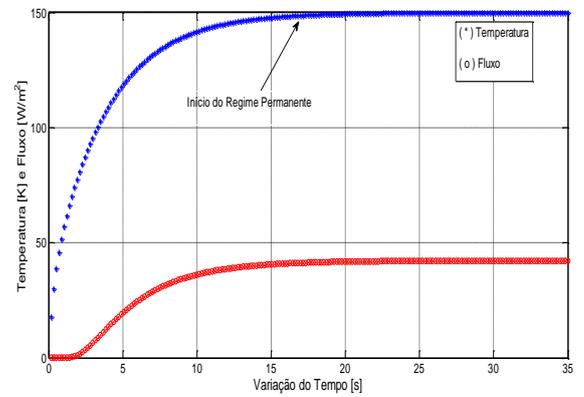
(g)



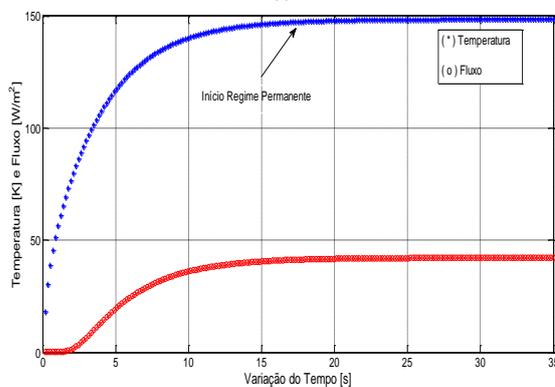
(h)



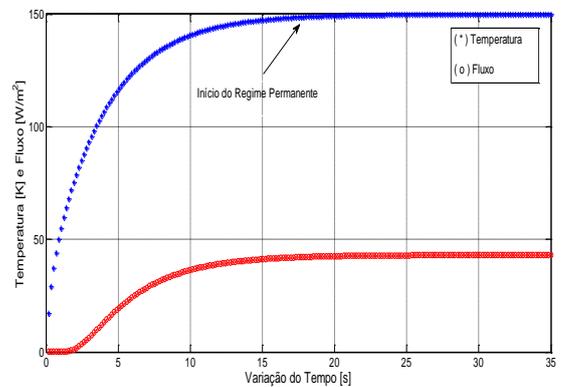
(i)



(j)



(l)



(m)

Figura 16. Variação da temperatura média e fluxo médio para matrizes: (e) 16, (f) 25, (g) 30, (h) 35, (i) 42, (j) 48, (l) 54 e (m) 60 furos.

É possível verificar que o gráfico do fluxo de calor apresenta uma inclinação da curva com um comportamento diferente no início do processo para todas as matrizes avaliadas, isto é, apresenta valores iguais à zero em até aproximadamente dois segundos. Isso porque a difusividade térmica para os materiais isotrópicos neste trabalho possui valor igual a $1 \text{ m}^2/\text{s}$. Ou seja, como a difusividade térmica descreve quão rapidamente um material reage às mudanças de temperatura, é esperado que com um valor baixo dessa propriedade, haverá um atraso do fluxo de calor na aresta direita da placa, onde o fluxo de calor está sendo avaliado.

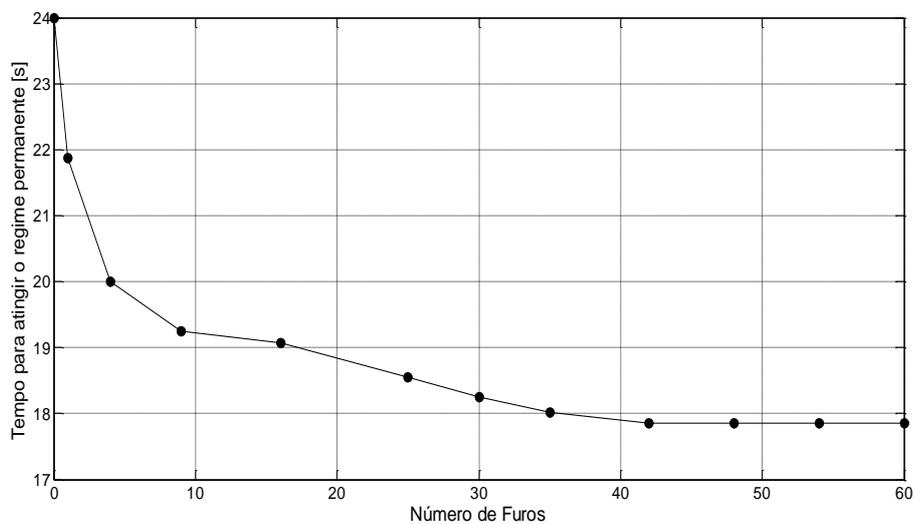


Figura 17. Tempo para atingir o regime permanente na matriz com 1, 4, 9, 16, 25, 30, 35, 42, 48, 54 e 60.

5.1.2. DEFINIÇÃO DE PONTO ESTACIONÁRIO

Em matemática, um ponto estacionário, também chamado de ponto crítico é um ponto no domínio de uma função onde a primeira derivada é nula. Ou seja, é um ponto em uma curva no qual sua primeira derivada é zero, tal que a tangente é paralela ao eixo da variável independente (isto é, no sistema Cartesiano bidimensional usual, é horizontal, como em P na Figura 18). Assim, um ponto crítico é aquele que o gradiente ou variação similar de uma função se anula.

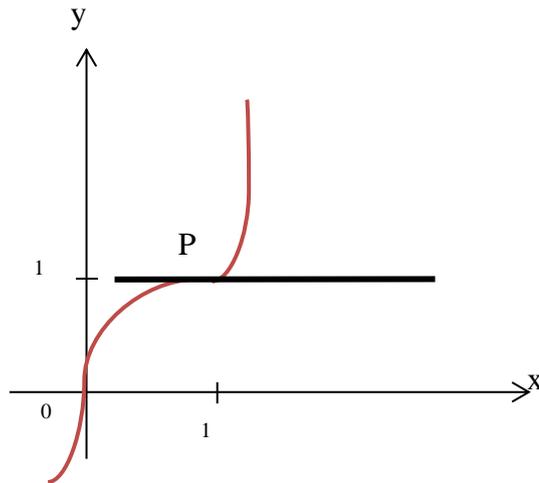


Figura 18. Sistema Cartesiano ilustrativo onde P é o ponto estacionário.

Um dos questionamentos neste trabalho consistiu na definição do valor do gradiente zero para definir quando o problema entra no regime estacionário. Pois a curva da média da temperatura apresenta uma pequena oscilação, devido a alguns fatores, como precisão numérica do computador, discretização da malha e ordem dos polinômios de interpolação. Assim, neste trabalho entende-se como o gradiente da temperatura sendo zero, quando o resultado numérico apresentou valor igual a zero em três casas decimais após a vírgula. As Figuras 19 e 20 apresentam o ponto estacionário de todos os casos estudados.

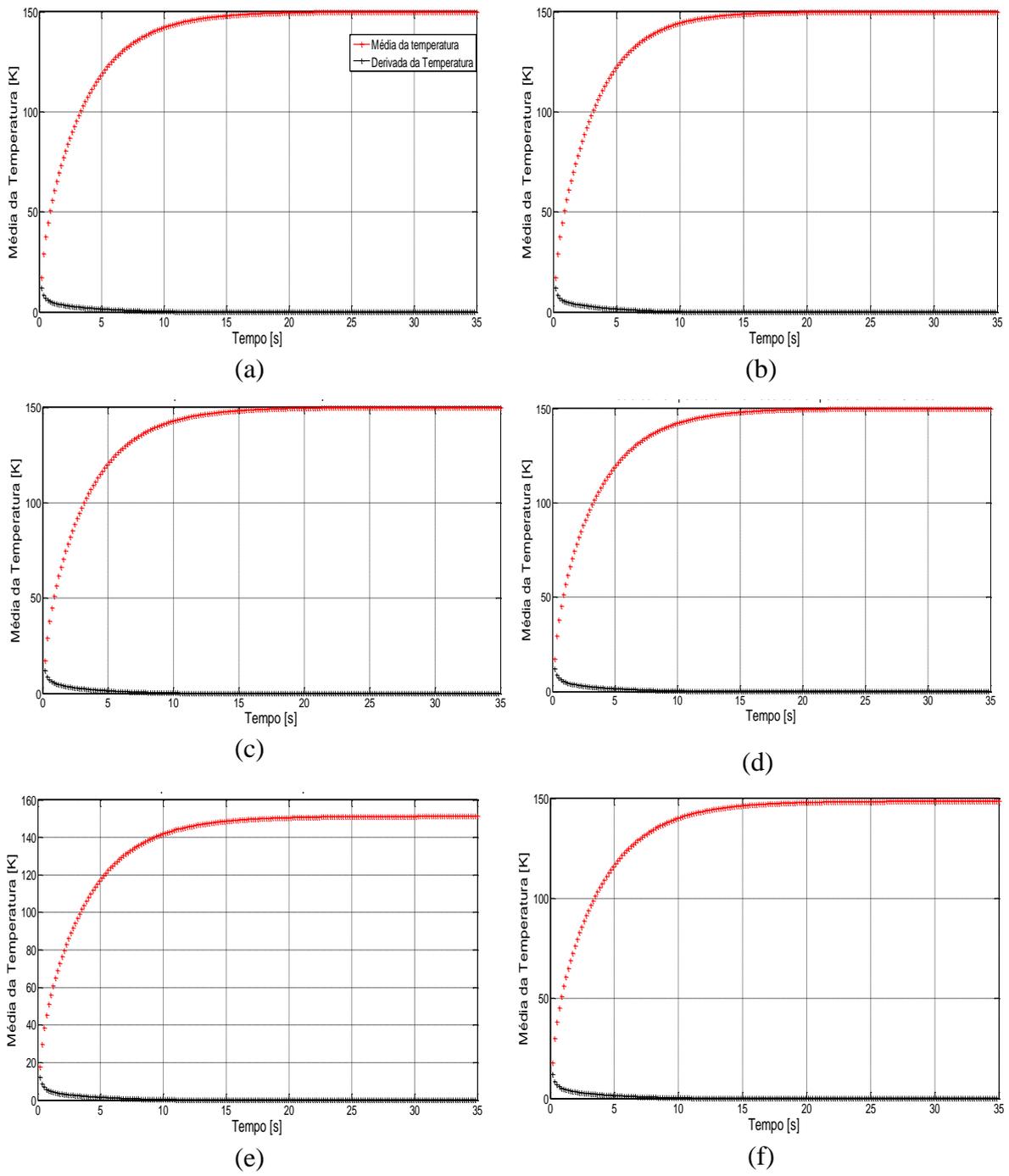
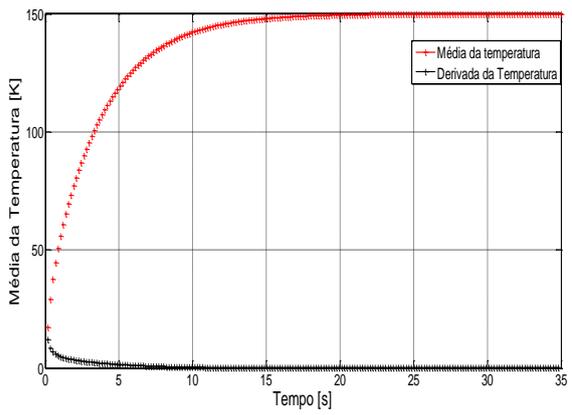
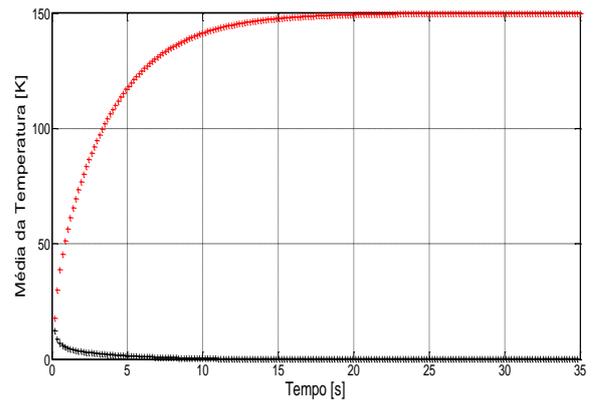


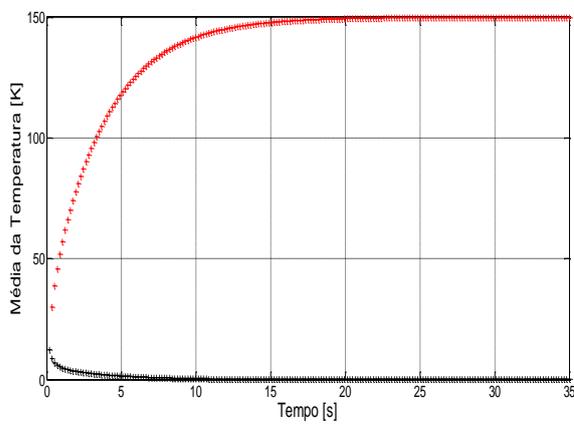
Figura 19. Gráficos da derivada da temperatura da matriz (a) sólida, com (b) 1, (c) 4, (d) 9, (e) 16 e (f) 25 furos.



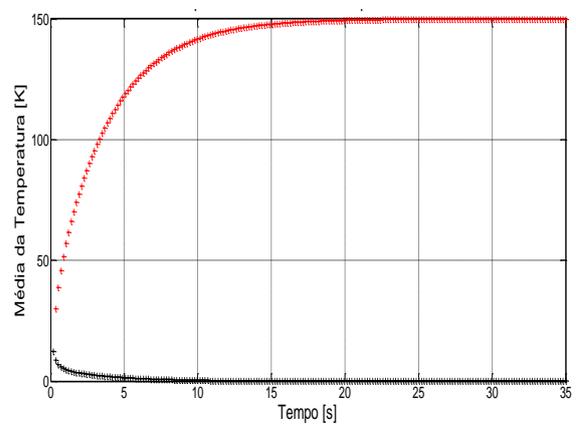
(g)



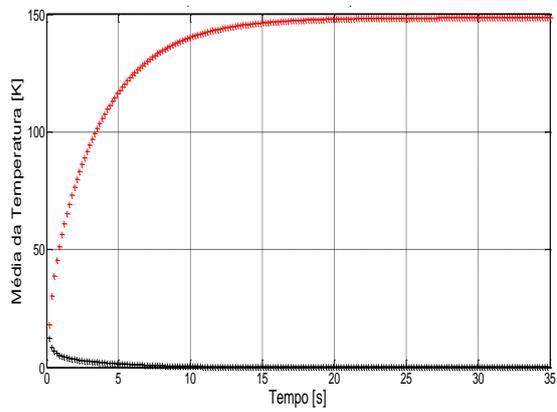
(h)



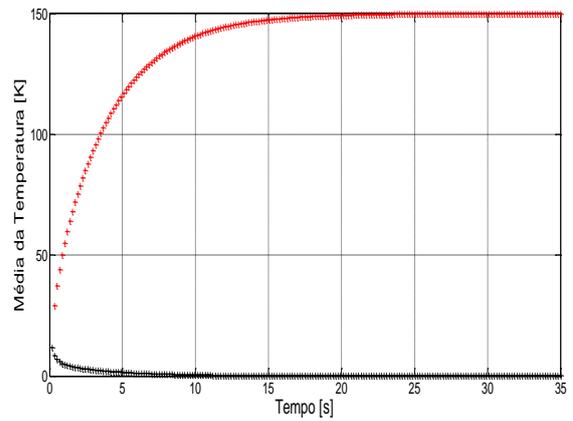
(i)



(j)



(l)



(m)

Figura 20. Gráficos da derivada da temperatura da matrizes: (g) 30, (h) 35, (i) 42, (j) 48, (l) 54 e (m) 60 furos.

Ao observar as Figuras 19 e 20 verifica-se que de fato, na matriz sólida, a média da temperatura atinge o regime estacionário a partir de 24 segundos, e nas demais matrizes o tempo de transiência diminui à medida que aumenta-se o número de furos. Porém, após quarenta e dois furos o tempo para atingir o regime estacionário estabiliza-se.

A Figura 21 apresenta os resultados da média da temperatura e da sua derivada adimensionalizadas para melhor análise gráfica do comportamento da temperatura até atingir o regime estacionário, onde o gradiente da mesma é igual a zero.

Onde, $\Psi = \bar{u}$ (média da temperatura) e $\phi = \bar{u}_{\max}$ (média da temperatura máxima). A equação da derivada da temperatura adimensionalizada é dada pela equação (5.1.2.1).

$$\frac{\partial \bar{u} / \partial x}{(\partial \bar{u} / \partial x)_{\max}} \quad (5.1.2.1)$$

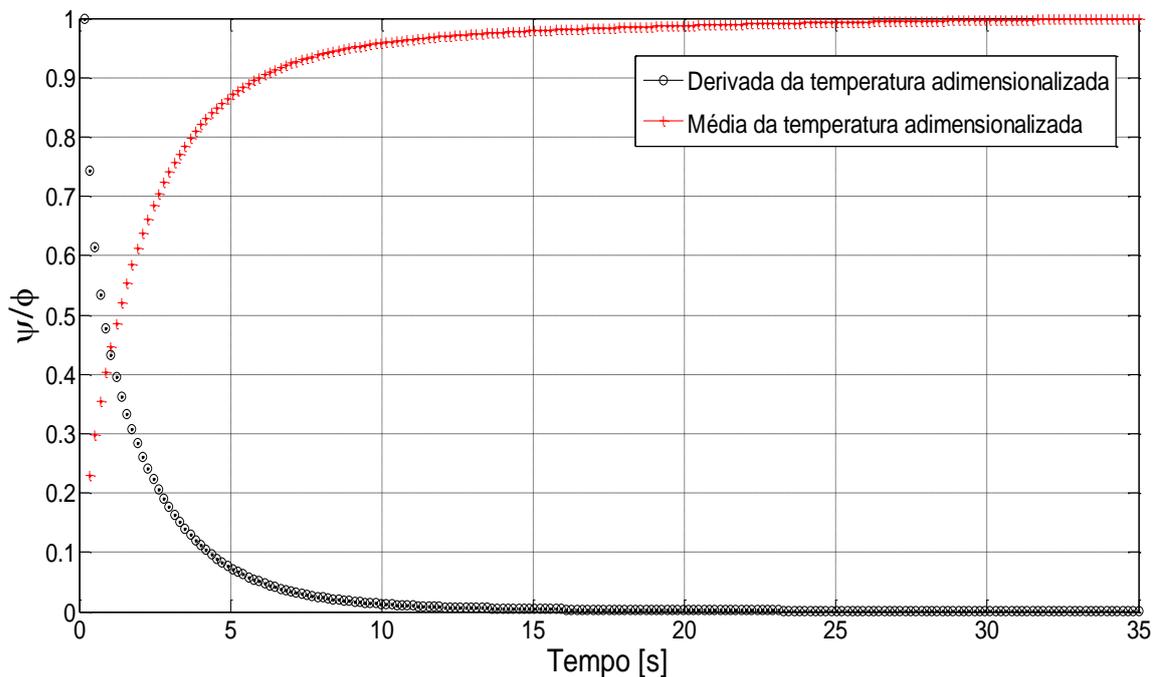
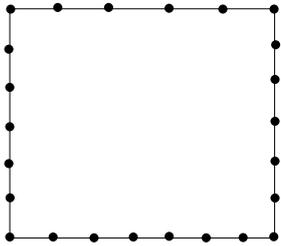
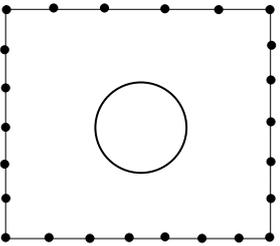
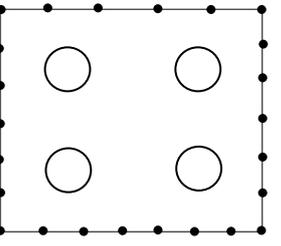
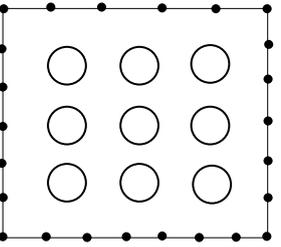
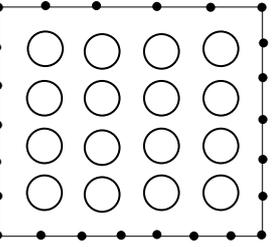
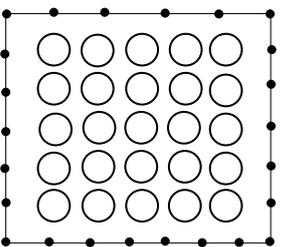
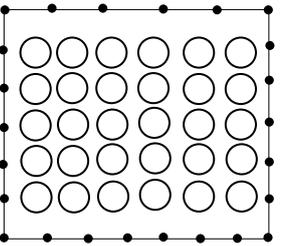
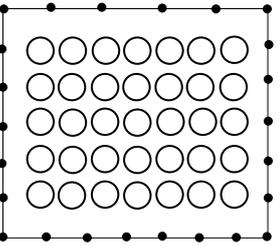
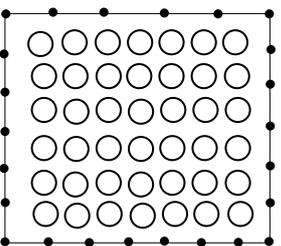
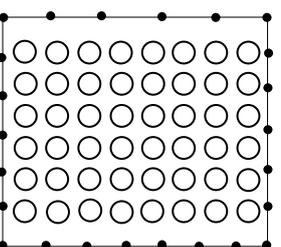
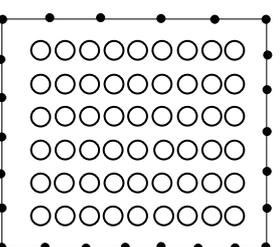
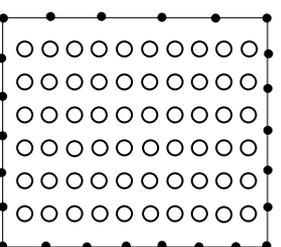


Figura 21. Média da temperatura e derivada da temperatura adimensionalizadas para meios isotrópicos: matriz com 1 furo.

A Tabela 1 apresenta o somatório dos fluxos realizados na aresta direita da placa e o K_{eff} para cada um dos casos analisados. É possível verificar que a placa sólida apresentou um fluxo de 50.5376 W/m^2 e uma condutividade térmica efetiva de 1.0108 W/mK .

No entanto, para os casos onde foram inseridos furos no domínio da placa o fluxo e a condutividade térmica efetiva sofreram uma pequena alteração. É importante salientar que o EVR representativo foi mantido sempre com uma razão de volume constante, que neste caso é definida como a razão entre a área dos furos e área da placa sólida (eq. 4.1.1). Na mesma tabela ainda é possível concluir que o valor do K_{eff} sofre uma pequena oscilação que demonstra a sua dependência em relação à quantidade e posição dos furos. Porém, a partir de 42 furos esta oscilação diminui de forma significativa conforme é possível observar na Figura 22.

Tabela 1. Matriz sólida e com 1, 4, 9, 16, 25, 30, 35, 42, 54, 56 e 60 furos.

<p>Matriz Sólida</p> $q = \int qdL = 50.5376 \text{ W/m}^2$ $k_{\text{eff}} = 1.0108 \text{ W/mK}$ 	<p>1 furo</p> $q = \int qdL = 42.5153 \text{ W/m}^2$ $k_{\text{eff}} = 0.8503 \text{ W/mK}$ 	<p>4 furos</p> $q = \int qdL = 42.5078 \text{ W/m}^2$ $k_{\text{eff}} = 0.8502 \text{ W/mK}$ 
<p>9 furos</p> $q = \int qdL = 42.5052 \text{ W/m}^2$ $k_{\text{eff}} = 0.8501 \text{ W/mK}$ 	<p>16 furos</p> $q = \int qdL = 42.5039 \text{ W/m}^2$ $k_{\text{eff}} = 0.8501 \text{ W/mK}$ 	<p>25 furos</p> $q = \int qdL = 42.5048 \text{ W/m}^2$ $k_{\text{eff}} = 0.8454 \text{ W/mK}$ 
<p>30 furos</p> $q = \int qdL = 42.1465 \text{ W/m}^2$ $k_{\text{eff}} = 0.8429 \text{ W/mK}$ 	<p>35 furos</p> $q = \int qdL = 42.079 \text{ W/m}^2$ $k_{\text{eff}} = 0.8416 \text{ W/mK}$ 	<p>42 furos</p> $q = \int qdL = 42.3289 \text{ W/m}^2$ $k_{\text{eff}} = 0.8445 \text{ W/mK}$ 
<p>48 furos</p> $q = \int qdL = 42.1880 \text{ W/m}^2$ $k_{\text{eff}} = 0.8440 \text{ W/mK}$ 	<p>54 furos</p> $q = \int qdL = 42.1884 \text{ W/m}^2$ $k_{\text{eff}} = 0.8442 \text{ W/mK}$ 	<p>60 furos</p> $q = \int qdL = 42.1886 \text{ W/m}^2$ $k_{\text{eff}} = 0.8443 \text{ W/mK}$ 

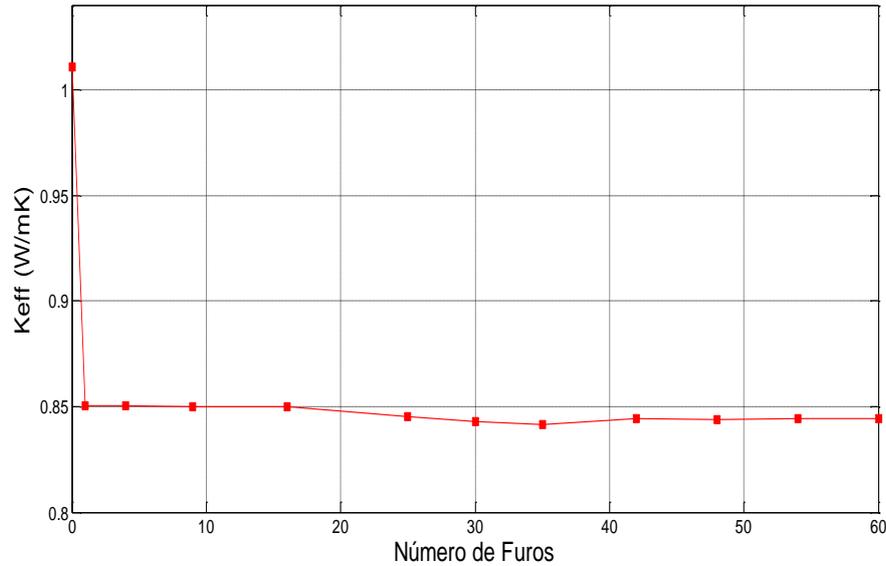


Figura 22. Valor da condutividade térmica em relação ao número de furos.

Os resultados obtidos da condutividade térmica efetiva para meios isotrópicos podem ser tratados de forma estatística de acordo com a equação (5.1.1). A média (k_m) das condutividades efetivas e o desvio médio simples D_M destes resultados estão calculados e apresentados conforme a Tabela 2. O desvio médio simples é uma medida da dispersão dos resultados em relação à média de uma sequência de resultados.

$$k_m = \sum_{i=1}^n \left(\frac{k_i}{n} \right) \quad \therefore \quad D_M = \frac{|k_i - k_m|}{n} \quad (5.1.1)$$

A partir dos resultados das condutividades térmicas efetivas encontrados para cada matriz avaliada, com diferentes quantidades de furos com fração de volume constante, realiza-se uma análise de convergência a fim de que a condição de EVR seja determinada. Nota-se que as propriedades efetivas apresentam uma pequena oscilação à medida que aumenta-se o número de furos inseridos na matriz conforme a Figura 22. O gráfico dos valores das condutividades efetivas e desvios médios associados, em função do número de furos presentes nas matrizes é apresentado na Figura 23. Este gráfico foi produzido a partir dos dados contidos na Tabela 2.

Da análise dos resultados apresentados na Tabela 2 e também do gráfico da Figura 23, é possível observar que para pequenas quantidades de furos os resultados das condutividades térmicas efetivas apresentam uma pequena variação. No entanto, esses

valores para poucos furos encontram-se associados a uma oscilação maior de desvios médios. Quanto mais furos são inseridos, os valores de desvio médio são cada vez menores. A partir de cerca de 42 furos inseridos, o desvio médio associado passa a apresentar pouca variação diante do acréscimo de mais furos. Portanto, diante deste comportamento relativamente estabilizado, assume-se que é possível definir a configuração com 42 furos como EVR.

Tabela 2. Cálculos do Desvio Médio do K_{eff} .

Quantidade de furos	$k_{eff} \left(\frac{W}{m.K} \right)$	Desvio padrão D_M
1	0.8503	0.0042
4	0.8502	0.0041
9	0.8501	0.0040
16	0.8501	0.0040
25	0.8454	0.0007
30	0.8429	0.0032
35	0.8416	0.0045
42	0.8445	0.0018
48	0.8440	0.0020
54	0.8442	0.0019
60	0.8443	0.0018

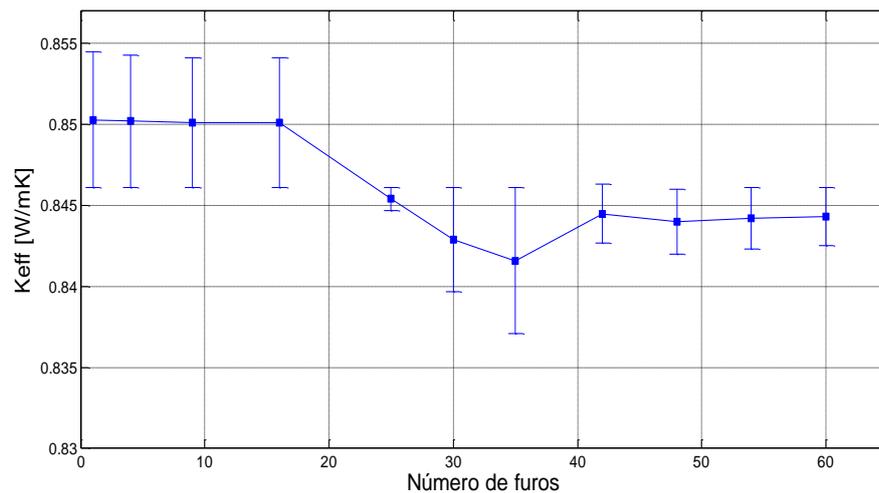


Figura 23. Gráfico dos desvios médios (casos isotrópicos): condutividades térmicas efetivas em relação ao número de furos presentes nas matrizes.

É possível validar a solução numérica obtida por elementos de contorno das temperaturas do presente trabalho com a solução analítica apresentada por Effren (1997), conforme a equação (5.1.2). Esses resultados analíticos são apresentados na Tabela 3, onde foram encontrados os valores da temperatura dos pontos de zero à seis das coordenadas de x .

$$T(x,t) = \frac{300(6-x)}{6} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-600}{i\pi} e^{\left(\frac{-i\pi\alpha}{6}\right)^2 t} \text{sen}\left(\frac{i\pi x}{6}\right) \quad (5.1.2)$$

Onde a difusidade térmica α é considerada igual a $1 \text{ m}^2/\text{s}$.

Tabela 3. Temperatura analítica e numérica na coordenada x e com $\Delta t = 20\text{s}$.

Coordenada x	Solução analítica (K)	Solução numérica (K)	Erro (%)
0	300	300.00	0%
1	274.7946	272.1891	0.94%
2	224.4387	220.3500	1.82%
3	174.2332	168.6331	3.21%
4	124.2300	121.5233	2.17%
5	74.4387	68.8034	7.57%
6	24.7945	20.3490	17.9%

A Figura 24 apresenta as curvas para os resultados analíticos das temperaturas encontrados através da equação (5.1.2) e os resultados numéricos apresentados neste trabalho. Fazendo uma análise comparativa entre os resultados numéricos e analíticos, verifica-se uma precisão satisfatória entre os mesmos. Entretanto, o resultado analítico no ponto 6 da coordenada x apresentou um erro percentual maior, ou seja, não houve uma concordância significativa entre os resultados analíticos e numéricos.

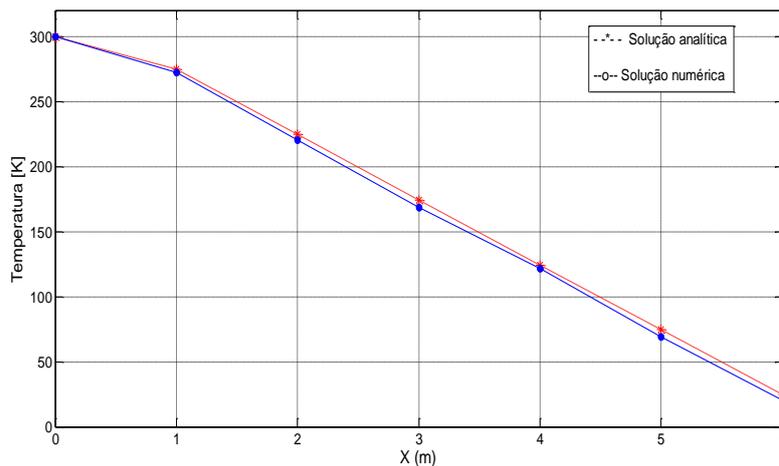


Figura 24. Variação da temperatura das soluções analíticas e numéricas com a coordenada x e com $\Delta t = 20$ s.

5.1.3. CASO 2: ANISOTRÓPICO

Nos últimos anos o estudo do comportamento da condução de calor em meios anisotrópicos tem sido de grande interesse ao campo da engenharia, devido as crescentes aplicações desses materiais. Lekhnitskii (1963) classifica como isotrópico o sólido cujas propriedades mecânicas e térmicas são constantes para quaisquer direções estabelecidas a partir de um determinado ponto, ou seja, são invariantes para todas as transformações de coordenadas. No entanto, um sólido anisotrópico possuem propriedades mecânicas diferentes em direções diferentes, ou seja, essas propriedades não são simétricas em relação a qualquer plano ou eixo.

Grande parte dos materiais estruturais apresentam algum grau de anisotropia. Pode-se citar, por exemplo, a madeira que é naturalmente ortotrópica, outros, como os compósitos são anisotrópicos devido ao processo de fabricação. Materiais anisotrópicos artificiais, como os compósitos estruturais, foram originalmente desenvolvidos para a indústria aeroespacial, pois oferecerem elevadas propriedades de rigidez e resistência quando comparadas ao seu peso próprio (Shigley et al., 2005 e Schlar, 1994). Assim, os compósitos têm encontrado um campo de aplicações amplo, por exemplo, aplicações nas indústrias navais, automotivas, eletroeletrônicas e na construção civil.

Devido ao aumento das aplicações industriais dos materiais compósitos, o estudo de meios anisotrópicos tem sido motivo de atenções para muitos pesquisadores. Green & Zerna (1954) estudaram a distribuição de tensões numa chapa ortotrópica tracionada com um orifício interno. Os resultados obtidos foram comparados com um material isotrópico,

foi verificado que existem diferentes comportamentos mecânicos da chapa, dependendo da direção de aplicação das tensões. Rizzo & Shippy (1970) desenvolveram a primeira formulação do MEC para problemas elásticos lineares planos, não isotrópicos, utilizaram uma solução fundamental para a análise de problemas ortotrópicos. Em alguns exemplos de sólidos ortotrópicos foi aplicado a abordagem direta de solução para o estudo de tensões, usando elementos constantes para aproximar as variáveis e a geometria do problema. Albuquerque (2001) aplicou a formulação do MEC para análise de problemas dinâmicos lineares envolvendo estruturas constituídas de materiais anisotrópicos.

No entanto, na literatura ainda é escasso os resultados relacionados à transferência de calor em meios anisotrópicos. O progresso alcançado na análise desses problemas no decorrer dos anos tem sido relativamente menor que o alcançado na Mecânica isotrópica e ainda, na maioria das vezes, esse progresso originou somente aplicações destinadas à análise de meios ortotrópicos ou transversalmente isotrópicos. (Vanalli, L.,2004 e Shiah, 2005).

Assim, para estudar o comportamento de materiais anisotrópicos no presente trabalho foi utilizado uma técnica de mapeamento conforme conhecido por método de mapeamento de domínio (ou transformação linear de coordenadas).

5.1.3.1. Método de Transformação de coordenadas

O método da transformação de coordenadas lineares consiste em inicialmente mapear um domínio anisotrópico para um novo domínio de comportamento isotrópico, no entanto, matematicamente equivale ao domínio original (Shiah e Tan, 1997; Ma e Chang, 2003; Shiah e Tan, 2004 e Anflor, 2007).

Existem algumas vantagens em usar este procedimento, entre elas: Aplicar o código do MEC para formulação isotrópica em materiais de comportamento anisotrópicos sem alterar sua formulação. Ou seja, calcula-se o problema no domínio isotrópico e só depois as variáveis são levadas para o domínio original.

É importante enfatizar que, o mapeamento é feito tanto na geometria do problema como também nas condições de contorno de Neumann. Para encontrar a solução final no domínio original e dos fluxos, aplica-se a inversa do mapeamento geométrico e do fluxo conforme esquema apresentado na Figura 25.

Antes de aplicar o mapeamento de domínio a equação governante para os meios anisotrópicos e dada por:

$$k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial XY^2} \right) \quad (5.1.3.1)$$

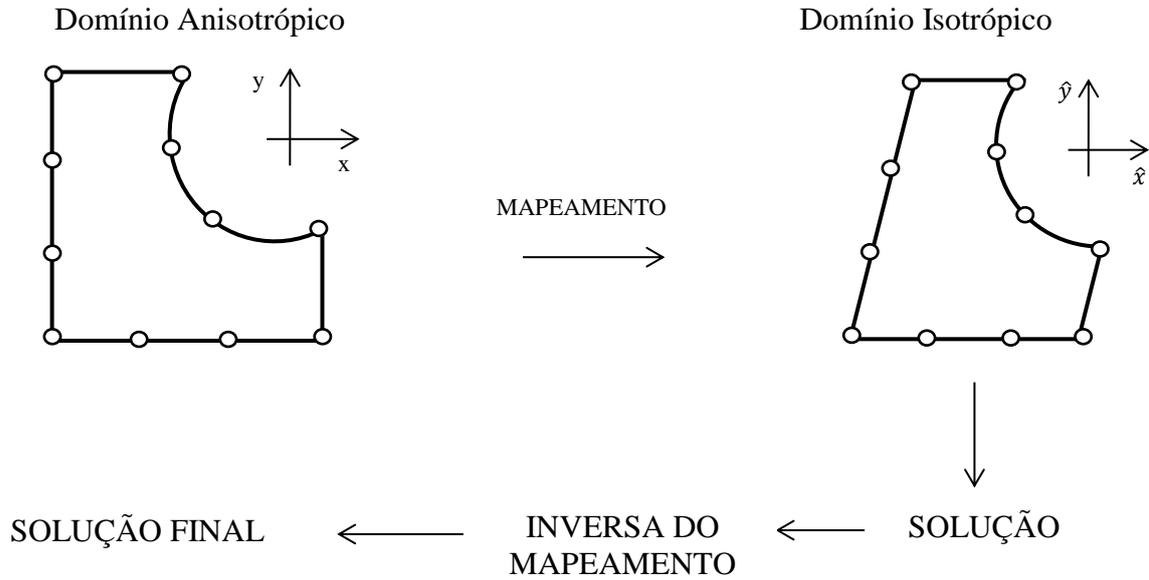


Figura 25. Esquema ilustrativo do mapeamento geométrico utilizado.

São utilizadas as coordenadas efetivas na forma matricial para transformar o domínio anisotrópico em um equivalente isotrópico:

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (5.3.1.2)$$

Onde as variáveis α , β e k são respectivamente:

$$\alpha = \frac{-k_{xy}}{k_{yy}} \therefore \beta = \frac{k}{k_{yy}} \therefore k_{eq} = \sqrt{k_{xx}k_{yy} - k_{xy}^2} \quad (5.3.1.3)$$

Depois de converter o domínio original anisotrópico (x, y) para um domínio isotrópico (\hat{x}, \hat{y}) , a equação governante no domínio transformado é representada pela equação (5.3.1.4).

$$k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right) = 0 \quad (5.3.1.4)$$

Onde k é a condutividade térmica fornecida pela equação (5.3.1.3).

As condições de contorno de Neumann também devem ser transformadas uma vez que o fluxo depende da normal da geometria:

$$\left. \begin{aligned} q_y &= -k \frac{\partial u}{\partial y} = q_{\hat{y}} \\ q_x &= \beta q_{\hat{x}} - \alpha q_{\hat{y}} \end{aligned} \right\} \quad (5.3.1.4)$$

Assim, as condições de contorno de Neumann são novamente obtidas como uma função das condições de contorno do domínio original. Basta fazer a inversão da equação (5.3.1.4), obtêm-se:

$$\left. \begin{aligned} q_{\hat{y}} &= q_y \\ q_{\hat{x}} &= \frac{q_x + \alpha q_y}{\beta} \end{aligned} \right\} \quad (5.3.1.5)$$

Através da equação (5.3.1.2) é realizado o mapeamento da geometria.

Por comodidade a Figura 11 foi repetida nesta seção para ilustrar as condições de contorno utilizadas para determinar as propriedades efetivas para meios anisotrópicos, conforme a Figura 26.

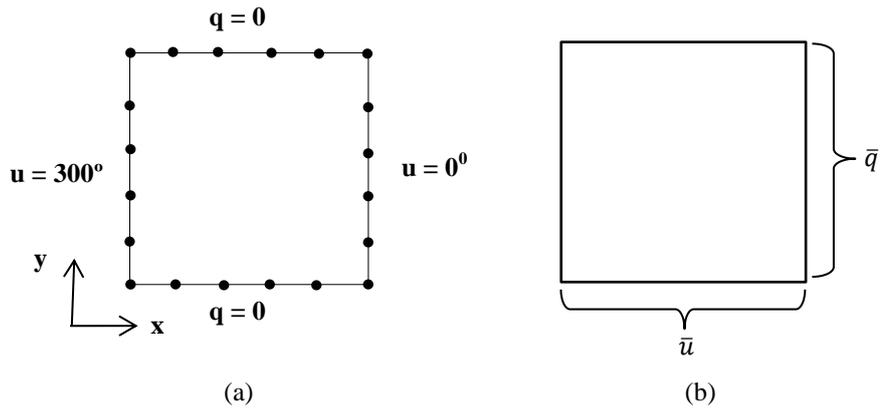


Figura 26. (a) Discretização e condições de contorno do EVR. (b) Fluxo médio q e temperatura média u .

As Figuras 28 e 29 apresentam os gráficos que mostram as mudanças da temperatura, para a placa sólida, com 1, 4, 9, 16, 25, 30, 35, 42, 48, 54 e 60 furos, à medida que o tempo transcorre até que a placa atinja o regime permanente. Os valores das temperaturas foram calculados nos pontos de controle ou nós físicos do número 1 ao 6 localizados na aresta inferior da placa conforme ilustrado na Figura 27, foram plotados para cada incremento de tempo até que o regime permanente seja alcançado. É possível verificar, que assim como para os materiais isotrópicos o comportamento para todos os casos analisados é semelhante também para materiais anisotrópicos, não possibilitando a diferenciação entre o comportamento de cada caso. Porém, verifica-se que em todos os casos foi alcançado o regime permanente.

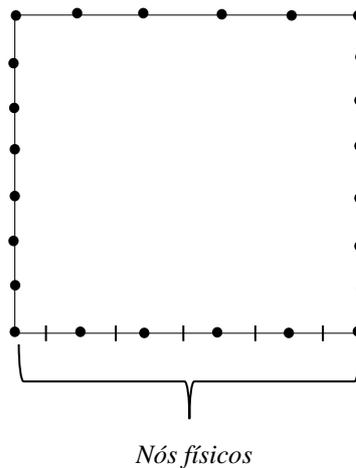


Figura 27. Localização dos pontos de controle.

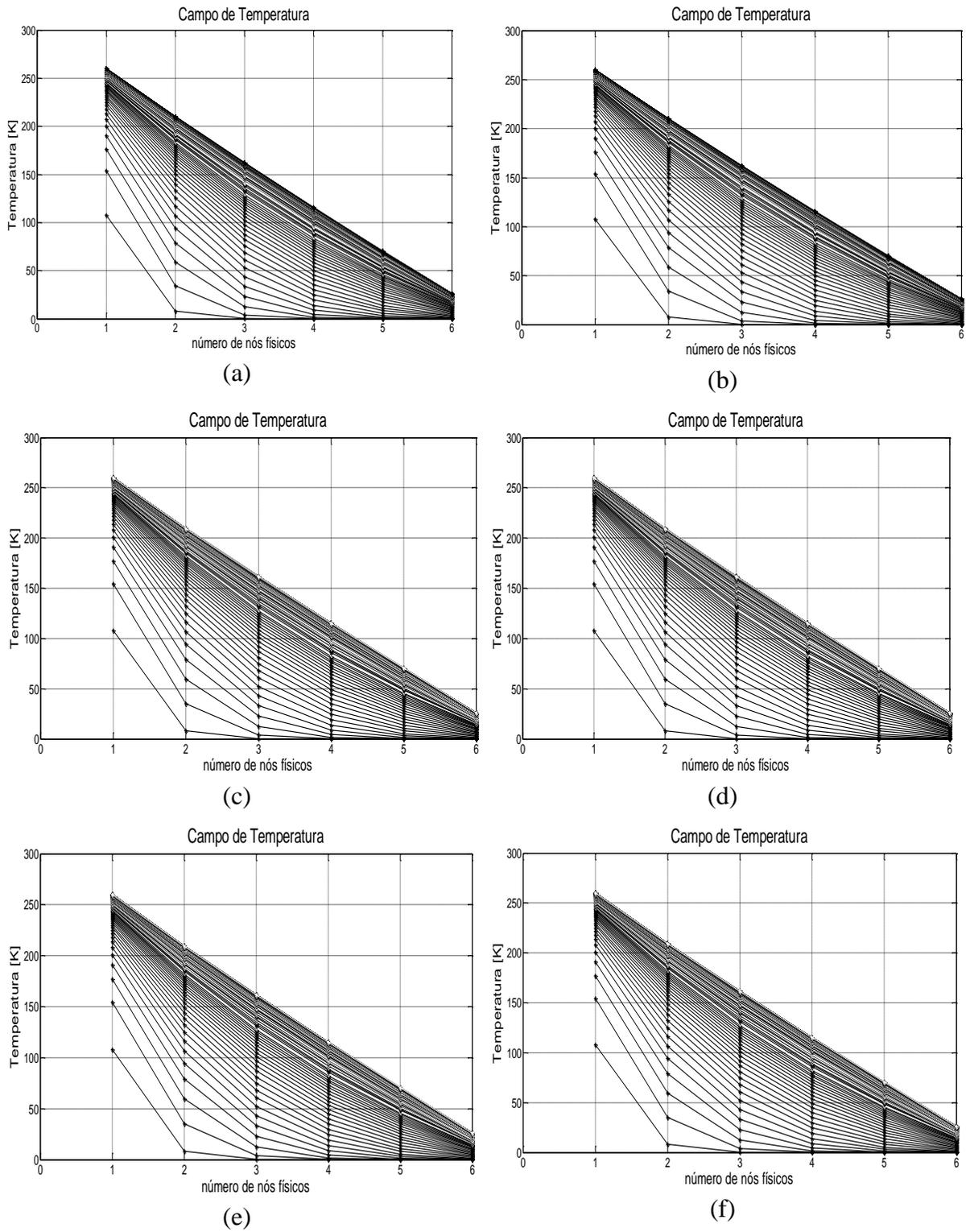


Figura 28. Variação da temperatura à medida que a placa atinge o regime permanente para materiais anisotrópico, matrizes: (a) Sólida, (b) 1, (c) 4, (d) 9, (e) 16, (f) 25 furos.

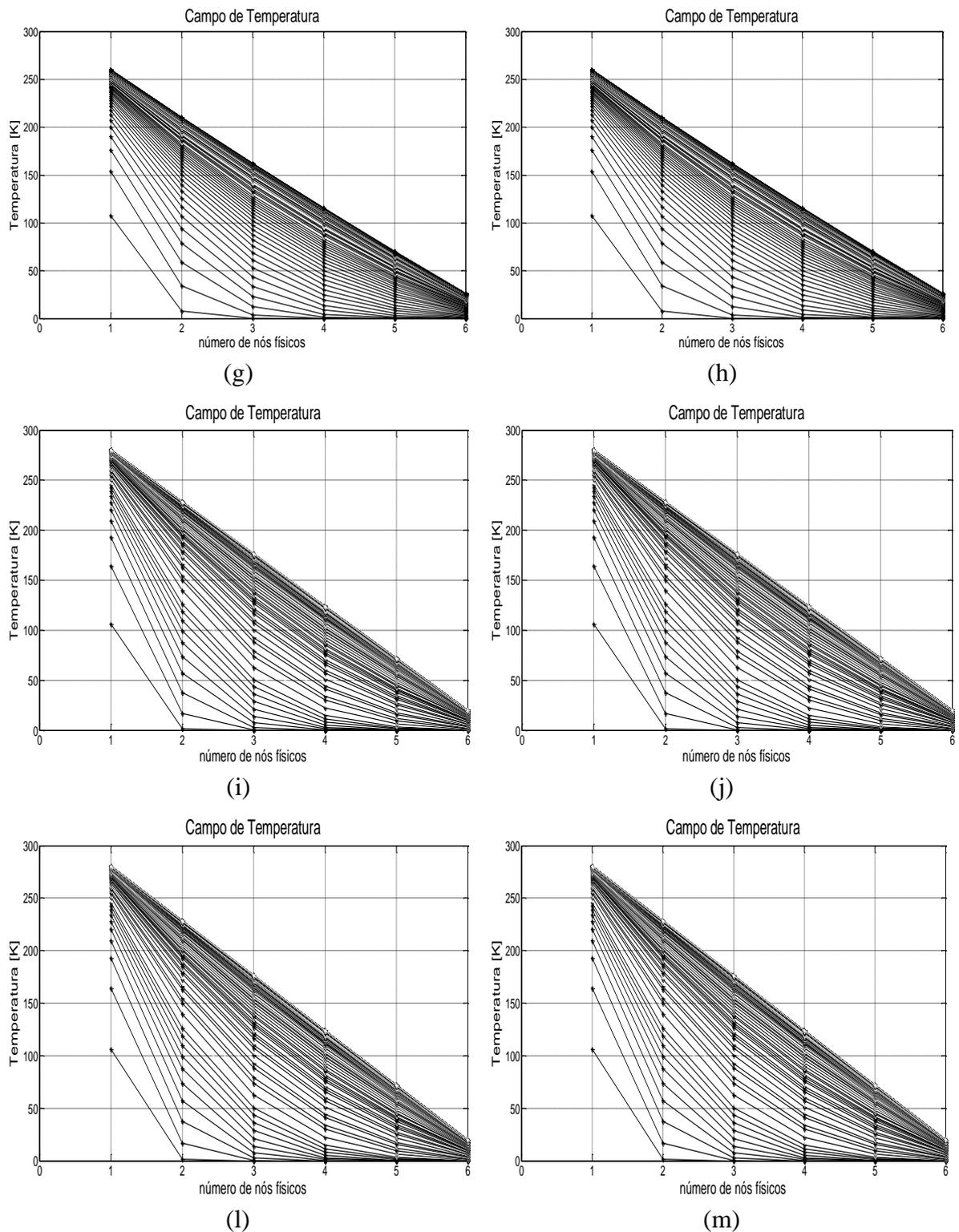


Figura 29. Variação da temperatura à medida que a placa atinge o regime permanente para materiais anisotrópico, matrizes: (g) 30, (h) 35, (i) 42, (j) 48, (l) 54 e (m) 60 furos.

A fim de verificar o instante em que a temperatura e o fluxo entraram no regime estacionário, foi plotado para os problemas anisotrópicos a média das temperaturas calculadas na aresta inferior e a média do fluxo na aresta direita da placa conforme as

Figuras 30 e 31. Ao analisar o histórico de temperatura para cada caso apresentado, observa-se que a matriz sólida atinge o regime permanente a partir de 33.77 segundos. Sendo que, a placa com um, quatro, nove, dezesseis, vinte cinco, trinta e trinta cinco atingem o regime permanente em 32.9, 32.73, 31.67, 30.8, 29.92, 28.17, 26.75 e 26.25 segundos, respectivamente. É importante salientar que a partir de 42 furos o tempo para atingir o regime permanente é estabilizado conforme ilustrado na Figura 32. Neste sentido, é possível verificar que assim como nos problemas isotrópicos já avaliados, nos casos anisotrópicos também quanto maior a quantidade de furos existentes na matriz, mais rápido será o processo de transferência de calor até que se atinja o regime permanente.

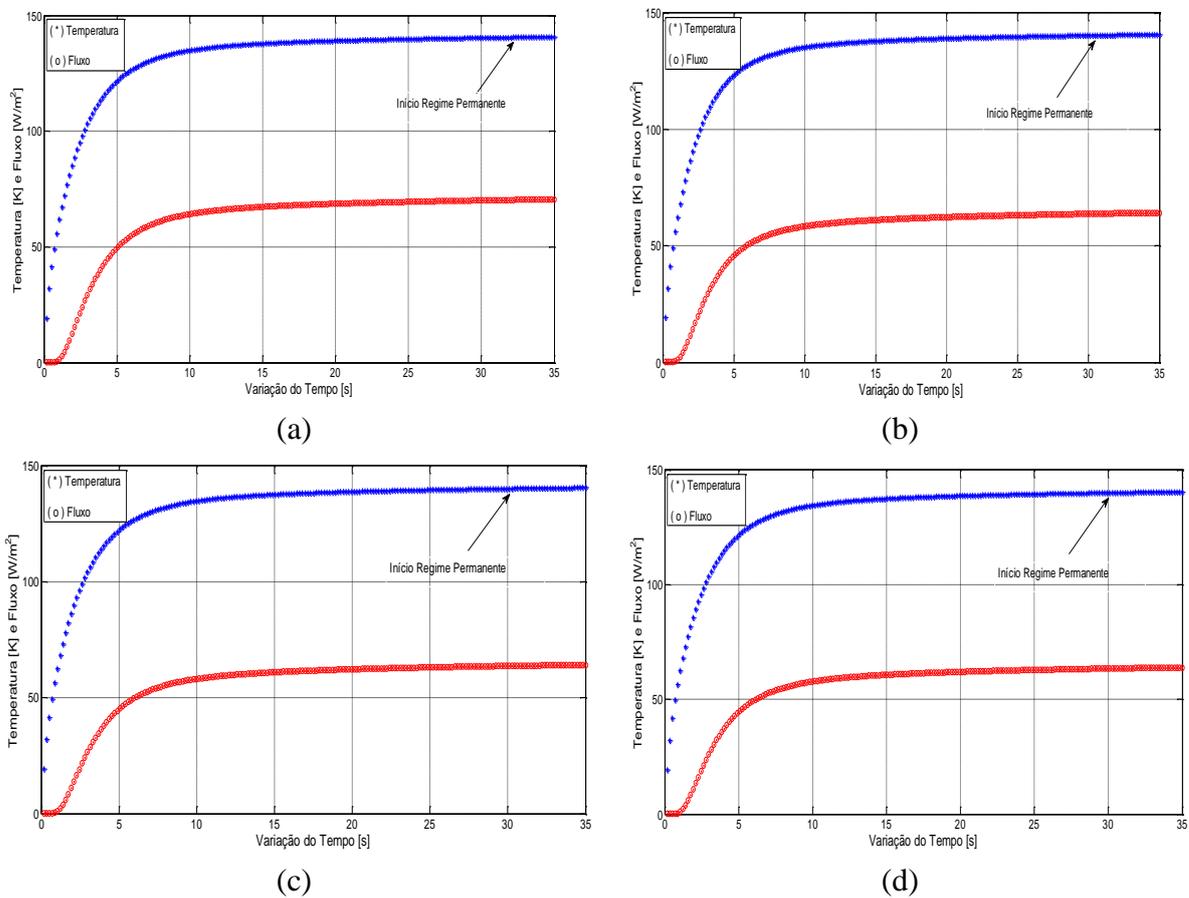
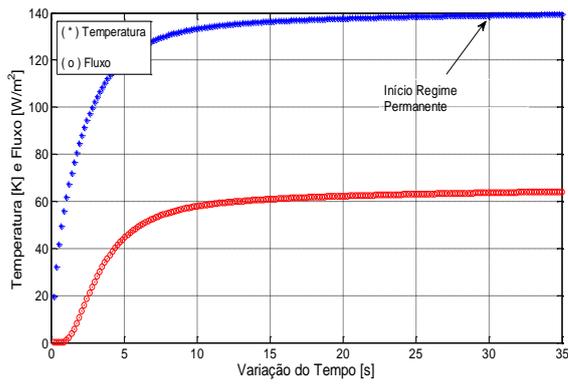
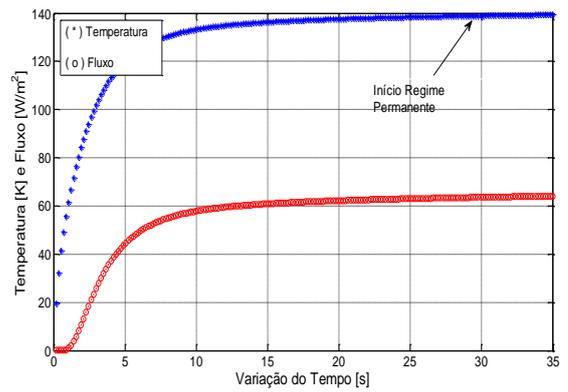


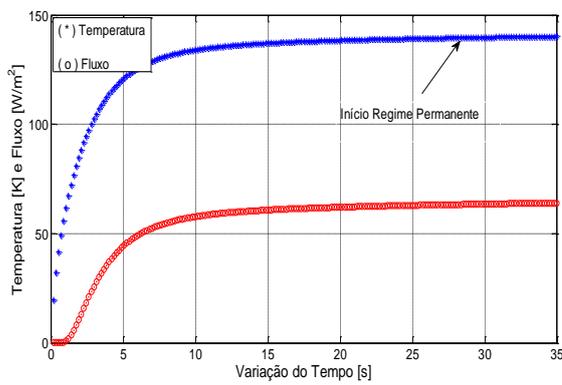
Figura 30. Variação da temperatura média e fluxo médio para matrizes: (a) sólida, (b) 1, (c) 4 e (d) 9 furos.



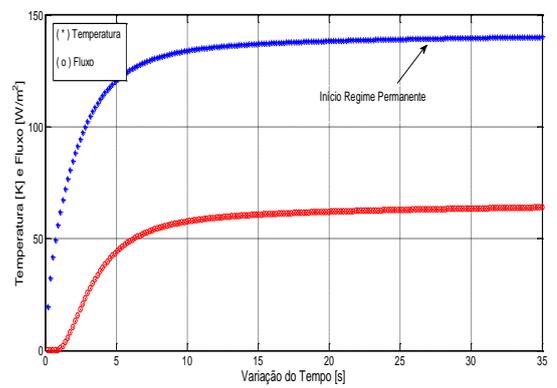
(e)



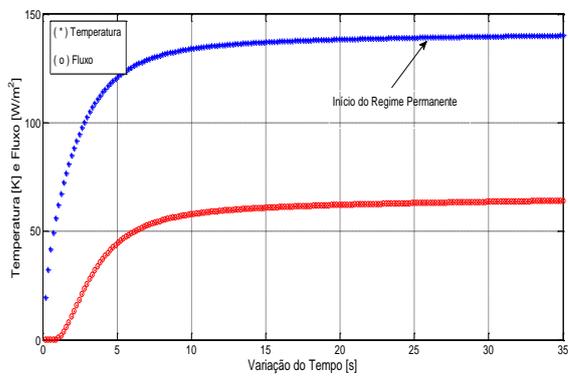
(f)



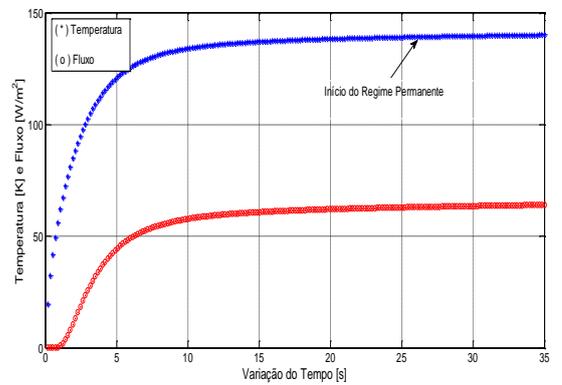
(g)



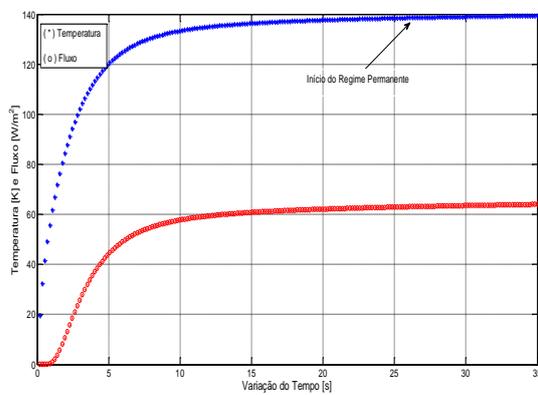
(h)



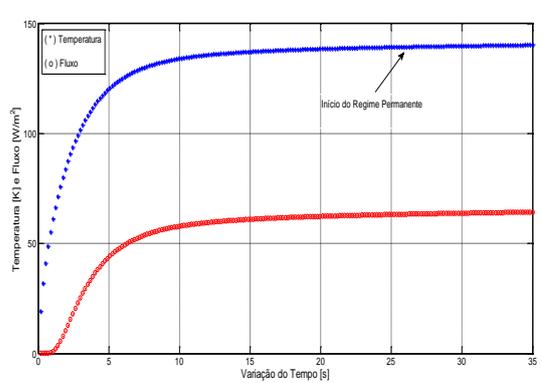
(i)



(j)



(l)



(m)

Figura 31. Variação da temperatura média e fluxo médio para matrizes: (e) 16, (f) 25, (g) 30, (h) 35, (i) 42, (j) 48, (l) 54 e (m) 60 furos.

Para os casos anisotrópicos estudados nota-se que o fluxo para todas as matrizes avaliadas apresenta valores iguais à zero em até aproximadamente um segundo, isso porque a difusividade térmica para os materiais anisotrópicos neste trabalho possui valor igual a $1.658 \text{ m}^2/\text{s}$. Assim, a difusividade térmica para os materiais anisotrópicos reage mais rapidamente às mudanças de temperatura do que para os materiais isotrópicos que apresenta a difusividade térmica igual a $1 \text{ m}^2/\text{s}$, ou seja, quanto maior o valor desta propriedade, mais rápido o fluxo de calor mudará a sua inclinação na curva do gráfico que apresenta o processo de transferência de calor.

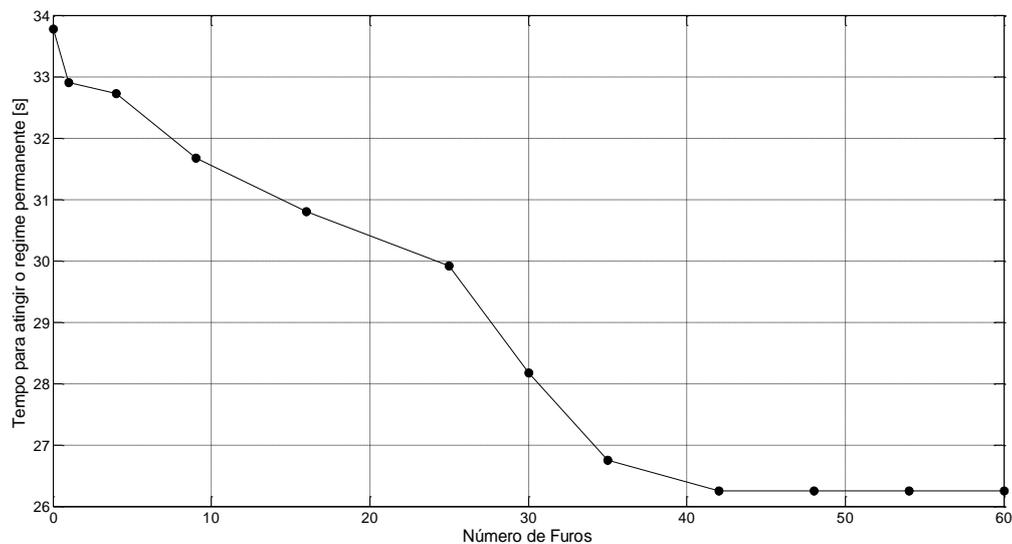
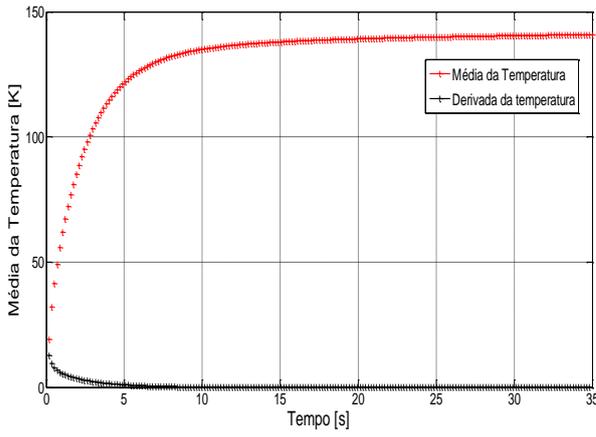
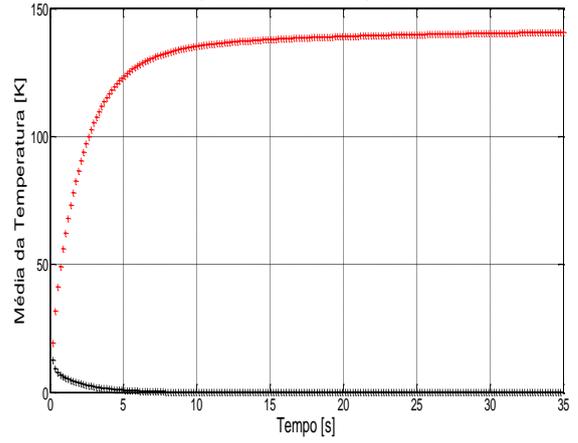


Figura 32. Tempo para atingir o regime permanente na matriz com 1, 4, 9, 16, 25, 30, 35, 42, 48, 54 e 60 furos.

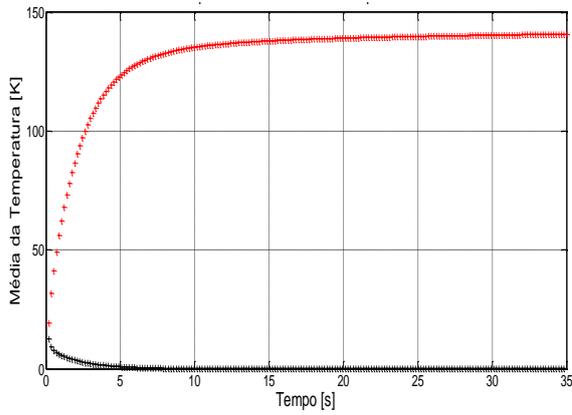
Em todos os casos estudados nesta seção, também foi encontrado o ponto estacionário da temperatura conforme as Figuras 33 e 34. É importante salientar, que neste trabalho entende-se como o gradiente da temperatura sendo zero, quando o resultado numérico apresentou valor igual a zero em três casas decimais após a vírgula.



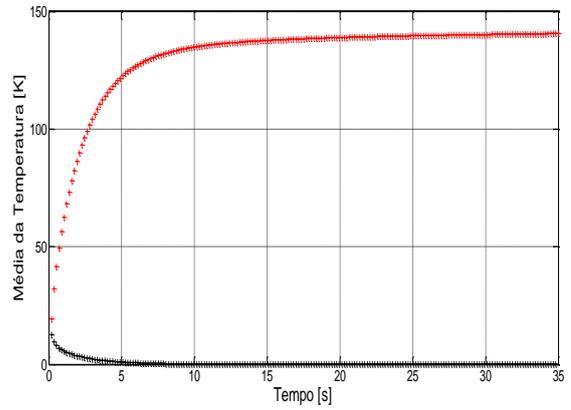
(a)



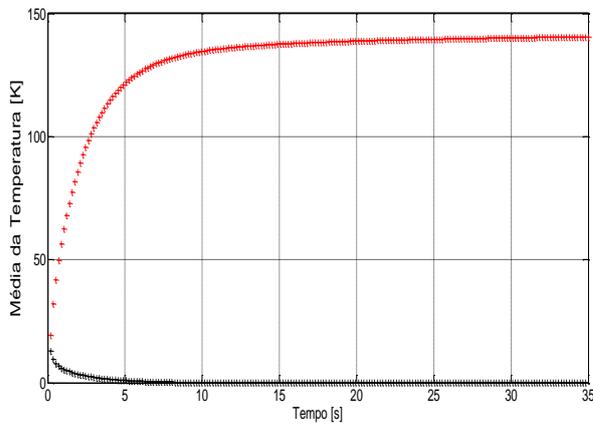
(b)



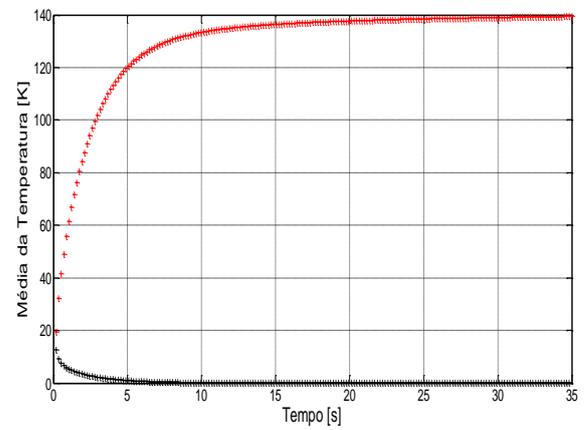
(c)



(d)

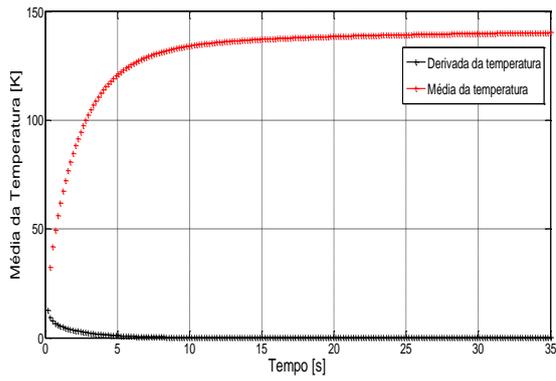


(e)

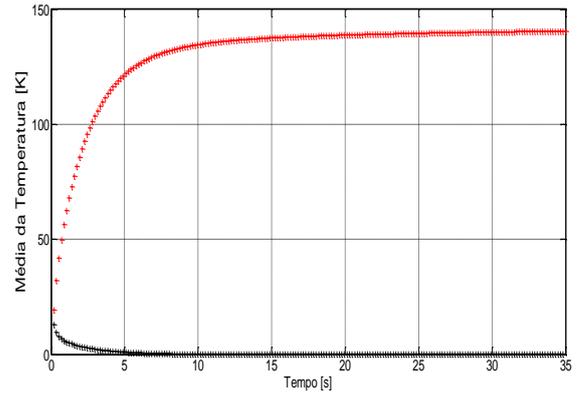


(f)

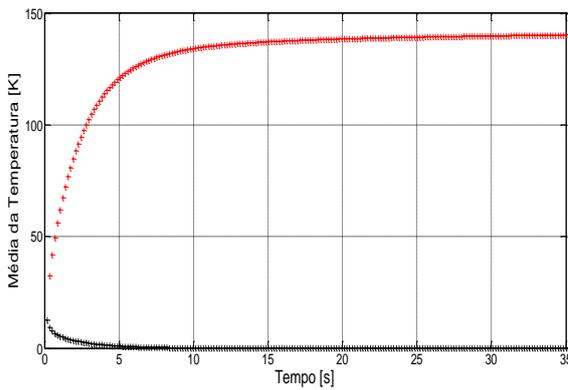
Figura 33. Gráficos da derivada da temperatura para matriz sólida (a), com (b) 1, (c) 4, (d) 9, (e) 16 e (f) 25 furos.



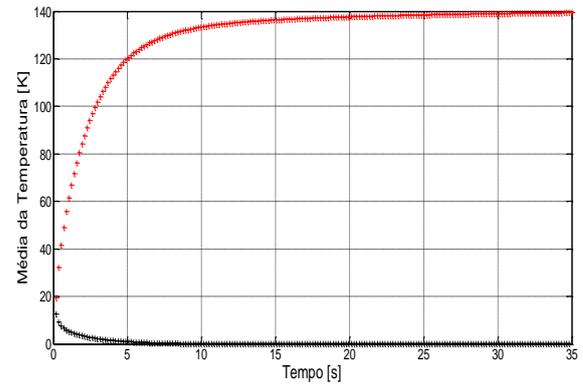
(g)



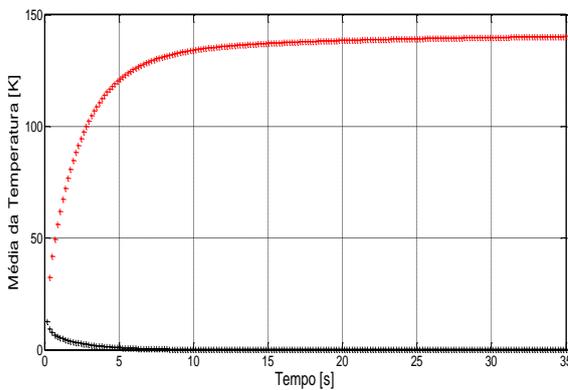
(h)



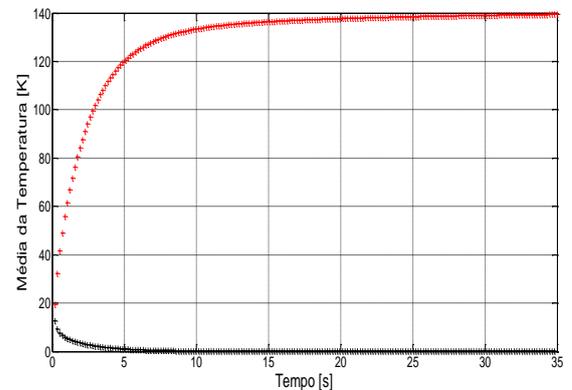
(i)



(j)



(l)



(m)

Figura 34. Gráficos da derivada da temperatura para matrizes com (g) 30, (h) 35, (i) 42, (j) 48, (l) 54 e (m) 60 furos.

Para melhorar visualizar o comportamento gráfico da média da temperatura e da sua derivada foi realizado uma adimensionalização em uma das matrizes avaliadas para meios anisotrópicos conforme apresentado na Figura 35.

Onde, $\Psi = \bar{u}$ (média da temperatura) e $\phi = \bar{u}_{\max}$ (média da temperatura máxima). A equação da derivada da temperatura adimensionalizada é dada pela equação (5.3.1.6).

$$\frac{\partial \bar{u} / \partial x}{(\partial \bar{u} / \partial x)_{\max}} \quad (5.3.1.6)$$

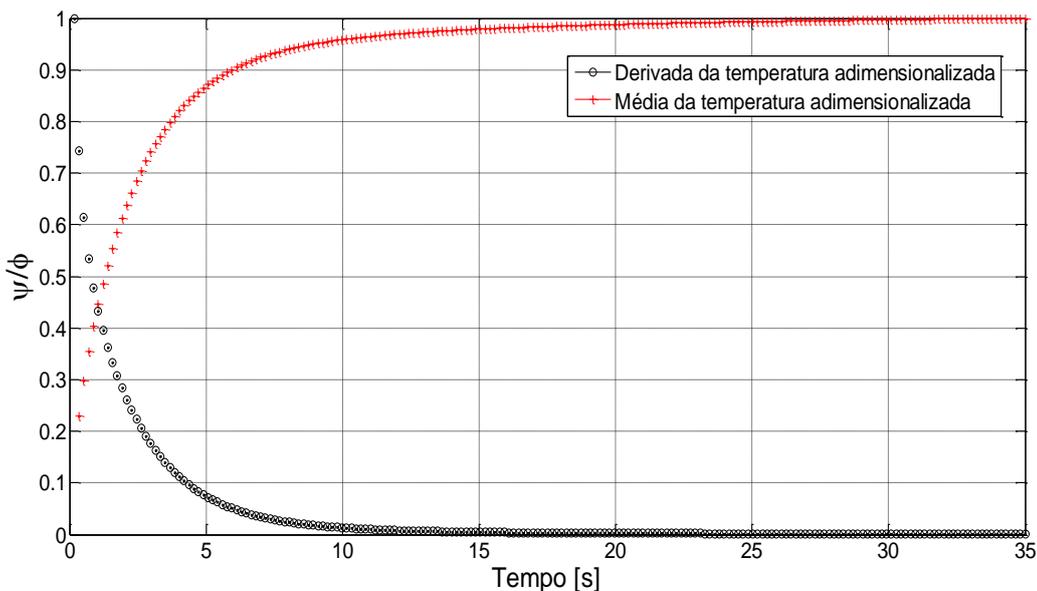
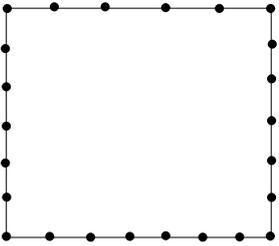
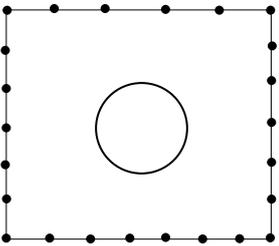
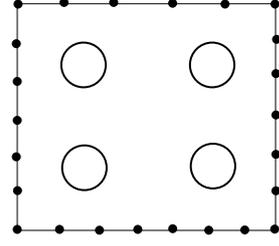
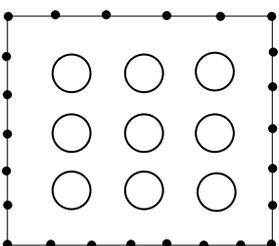
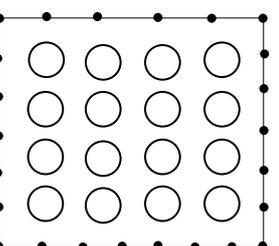
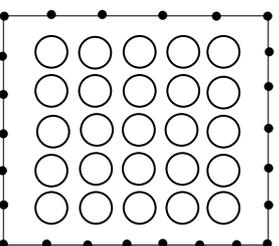
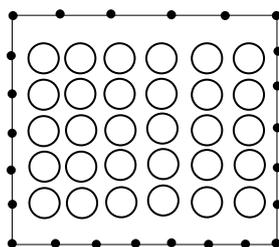
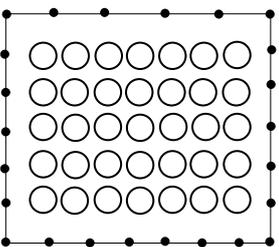
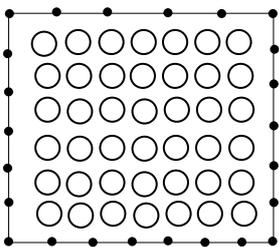
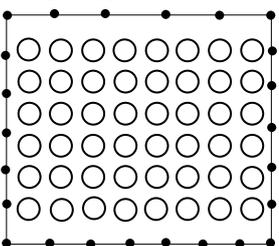
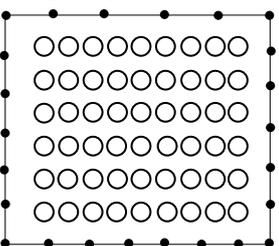
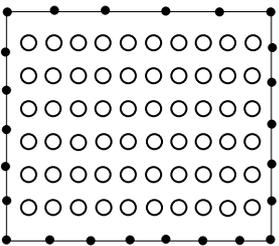


Figura 35. Média da temperatura e derivada da temperatura adimensionalizadas para meios anisotrópicos matriz com 1 furo.

A Tabela 4 apresenta o somatório dos fluxos realizados na aresta direita da placa e o K_{eff} para cada um dos casos analisados no estudo dos problemas anisotrópicos. Verifica-se que a placa sólida apresentou um fluxo de 70.56 W/m^2 e uma condutividade térmica efetiva de 1.4113 W/mK . Porém, para os casos onde foram inseridos furos no domínio da placa o fluxo e a condutividade térmica efetiva sofreram uma pequena oscilação. Isso demonstra que tais propriedades dependem da quantidade e posição dos furos, no entanto, essa oscilação foi diminuindo a partir de 42 furos conforme apresentado na Figura 36. Para o estudo de materiais anisotrópicos o EVR representativo também foi mantido sempre com uma razão de volume constante. A curva da Figura 36 mostra um aspecto importante, quanto maior a porosidade do material, maior é a queda da condutividade térmica efetiva.

Tabela 4. Matriz sólida e com 1, 4, 9, 16, 25, 30, 35, 42, 54, 56 e 60 furos.

<p>Matriz Sólida</p> $q = \int qdL = 70.56 \text{ W/m}^2$ $k_{\text{eff}} = 1.4113 \text{ W/mK}$ 	<p>1 furo</p> $q = \int qdL = 64.18 \text{ W/m}^2$ $k_{\text{eff}} = 1.2837 \text{ W/mK}$ 	<p>4 furos</p> $q = \int qdL = 64.15 \text{ W/m}^2$ $k_{\text{eff}} = 1.2831 \text{ W/mK}$ 
<p>9 furos</p> $q = \int qdL = 64.13 \text{ W/m}^2$ $k_{\text{eff}} = 1.2826 \text{ W/mK}$ 	<p>16 furos</p> $q = \int qdL = 64.11 \text{ W/m}^2$ $k_{\text{eff}} = 1.2823 \text{ W/mK}$ 	<p>25 furos</p> $q = \int qdL = 64.10 \text{ W/m}^2$ $k_{\text{eff}} = 1.2820 \text{ W/mK}$ 
<p>30 furos</p> $q = \int qdL = 64.02 \text{ W/m}^2$ $k_{\text{eff}} = 1.2805 \text{ W/mK}$ 	<p>35 furos</p> $q = \int qdL = 63.94 \text{ W/m}^2$ $k_{\text{eff}} = 1.2789 \text{ W/mK}$ 	<p>42 furos</p> $q = \int qdL = 63.38 \text{ W/m}^2$ $k_{\text{eff}} = 1.2717 \text{ W/mK}$ 
<p>48 furos</p> $q = \int qdL = 63.82 \text{ W/m}^2$ $k_{\text{eff}} = 1.2705 \text{ W/mK}$ 	<p>54 furos</p> $q = \int qdL = 63.91 \text{ W/m}^2$ $k_{\text{eff}} = 1.2707 \text{ W/mK}$ 	<p>60 furos</p> $q = \int qdL = 63.86 \text{ W/m}^2$ $k_{\text{eff}} = 1.2704 \text{ W/mK}$ 

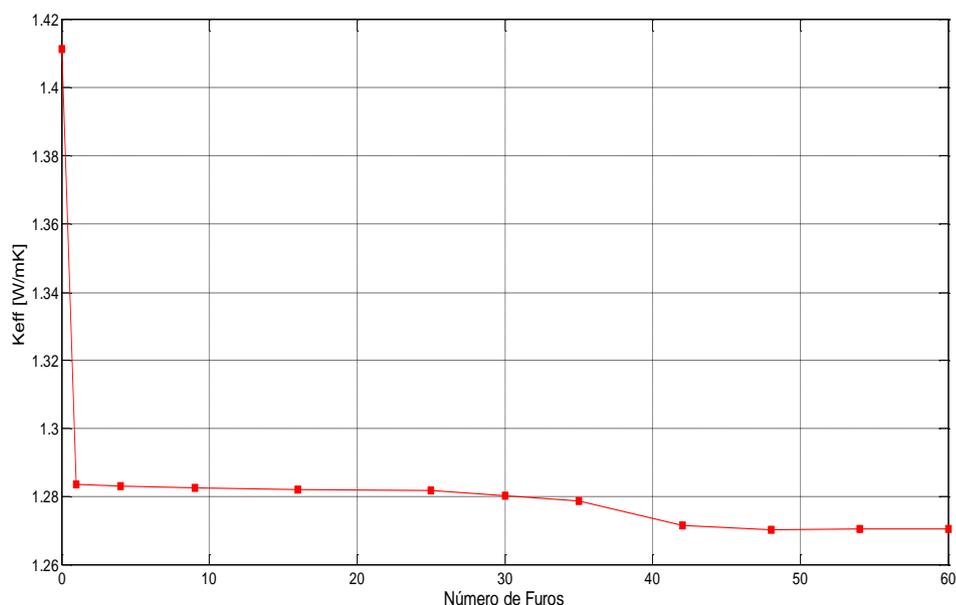


Figura 36. Condutividade térmica efetiva pelo número de furos inseridos na matriz.

A Tabela 5 apresenta os resultados encontrados da condutividade térmica efetiva para meios anisotrópicos tratados de forma estatística de acordo com a equação (5.1.1). Onde foi calculado o desvio médio D_M destes resultados.

Tabela 5. Cálculos do Desvio Padrão do k_{eff} .

Quantidade de furos	$k_{eff} \left(\frac{W}{m.K} \right)$	Desvio médio D_M
1	1.2837	0.0059
4	1.2831	0.0053
9	1.2826	0.0048
16	1.2823	0.0045
25	1.2820	0.0042
30	1.2805	0.0027
35	1.2788	0.0001
42	1.2717	0.0061
48	1.2705	0.0073
54	1.2707	0.0071
60	1.2704	0.0074

Analisando os resultados das condutividades térmicas efetivas para todas as matrizes avaliadas, é possível determinar-se um EVR. Nota-se que as propriedades efetivas apresentam uma pequena oscilação à medida que aumenta-se o número de furos inseridos na matriz. A Figura 37 apresenta o gráfico dos valores das condutividades efetivas e

desvios médios associados em função do número de furos presentes nas matrizes. Este gráfico foi produzido através dos dados contidos na Tabela 5.

Pode-se observar que a partir de 42 furos inseridos na matriz, o desvio médio associado passa a apresentar pouca variação diante do acréscimo de mais furos. Assim, diante deste comportamento estabilizado, assume-se que é possível definir a configuração com 42 furos como EVR.

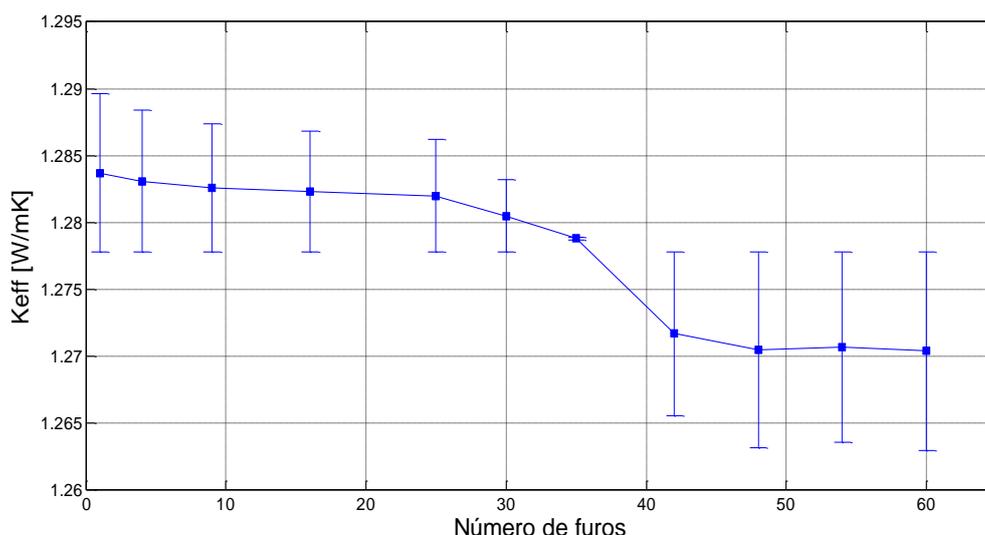


Figura 37. Gráfico dos desvios médios (casos anisotrópicos): condutividades térmicas efetivas em relação ao número de furos.

É possível observar que tanto para os casos isotrópicos como também anisotrópicos, os desvios médios da condutividade térmica efetiva entre 16 e 35 furos apresentaram uma maior oscilação. Essa variação acentuada do desvio médio deve-se ao fato de que no presente trabalho não foi estudado a posição dos furos. Deste modo, quanto maior a quantidade de furos na matriz, as posições dos mesmos não influenciará nos resultados da condutividade térmica efetiva, conseqüentemente os valores dos desvios médios apresenta neste caso, uma menor oscilação.

5.1.3.2. Validação da técnica de mapeamento de domínio

Neste trabalho, foi utilizado o mesmo código numérico de materiais isotrópicos para obter as propriedades efetivas dos materiais anisotrópicos, com algumas alterações, aplicando a técnica de mapeamento de domínio. A fim de validar essa técnica são

apresentados na Tabela 6 cinco exemplos com as matrizes com 1, 4 e 9 furos. Sendo o primeiro exemplo, um caso isotrópico. O segundo, terceiro, quarto e quinto exemplos possuem valores diferentes para k_{yy} e k_{xy} , representando assim casos anisotrópicos. Foram encontrados os tempos para atingir o regime estacionário em todos os exemplos, com objetivo de avaliar se estes tempos convergirão para o caso isotrópico analisado. Para isso, os valores do k_{yy} e k_{xy} foram diminuídos gradativamente até aproximarem-se do primeiro exemplo isotrópico conforme a Figura 38. Assim, foi possível observar que os resultados tenderam para um caso isotrópico, confirmando a correta aplicação da técnica de mapeamento de domínio.

Tabela 6. Resultados obtidos do tempo para atingir o regime estacionário para diferentes casos anisotrópicos com matrizes com 1, 4 e 9 furos.

<i>Matrizes</i>	<i>Exemplo 1: Isotrópico</i>	<i>Exemplo 2: Anisotrópico</i>	<i>Exemplo 3: Anisotrópico</i>	<i>Exemplo 4: Anisotrópico</i>	<i>Exemplo 5: Anisotrópico</i>
	$k_{xx} = 1.0$ $k_{yy} = 1.0$ $k_{xy} = 0$	$k_{xx} = 1.0$ $k_{yy} = 3.0$ $k_{xy} = 0.5$	$k_{xx} = 1.0$ $k_{yy} = 2.0$ $k_{xy} = 0.3$	$k_{xx} = 1.0$ $k_{yy} = 1.5$ $k_{xy} = 0.2$	$k_{xx} = 1.0$ $k_{yy} = 1.1$ $k_{xy} = 0.1$
1 furo	21.88 s	32.9 s	27.4 s	25.0 s	22.01 s
4 furos	20.00 s	32.7 s	26.0 s	23.1 s	20.23s
9 furos	19.25 s	31.6 s	22.4 s	21.3 s	19.65s

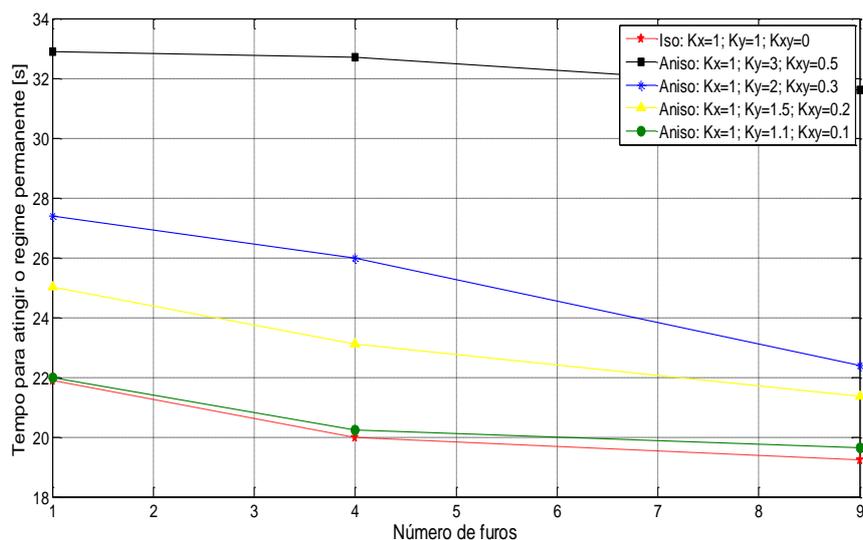


Figura 38. Tempo para atingir o regime estacionário pelo número de furos para diferentes valores do k_{xx} , k_{yy} e k_{xy} .

5.2. PROBLEMA POTENCIAL BIDIMENSIONAL

Nesta seção são apresentados exemplos onde a condução de calor para meios isotrópicos e anisotrópicos foram analisados usando uma nova condição de contorno. O objetivo é analisar o comportamento das propriedades efetivas e também avaliar o tempo de transiência até que o regime permanente seja alcançado. Esse consiste em uma placa quadrada de dimensões 6 x 6 unidades, onde prescreve-se temperatura em três arestas (direita, esquerda e superior) e fluxo nulo na aresta inferior conforme ilustrado na Figura 39. Nestes exemplos, a placa também foi discretizada com 24 elementos constantes. Serão apresentados os resultados para matrizes sólida, com 1, 4 e 9 furos.

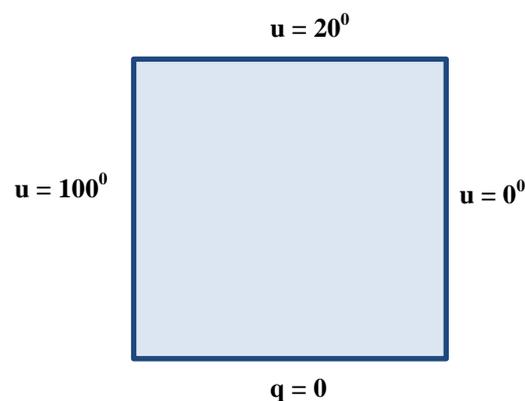


Figura 39. Condições de contorno do EVR.

5.2.1. Resultados para meios isotrópicos

É possível observar na Figura 40 as mudanças da temperatura para cada uma das matrizes estudadas, à medida que o tempo decorre até que a placa atinja o regime estacionário. Foram calculados valores referentes aos nós físicos do n° 1 ao 6 (aresta inferior da placa) plotados para cada incremento de tempo até que o regime permanente seja alcançado. Como nos casos avaliados na seção (5.1) verifica-se também neste exemplo que o comportamento do campo da temperatura para todos os exemplos analisados são semelhante. E em todos os casos foi alcançado o regime permanente.

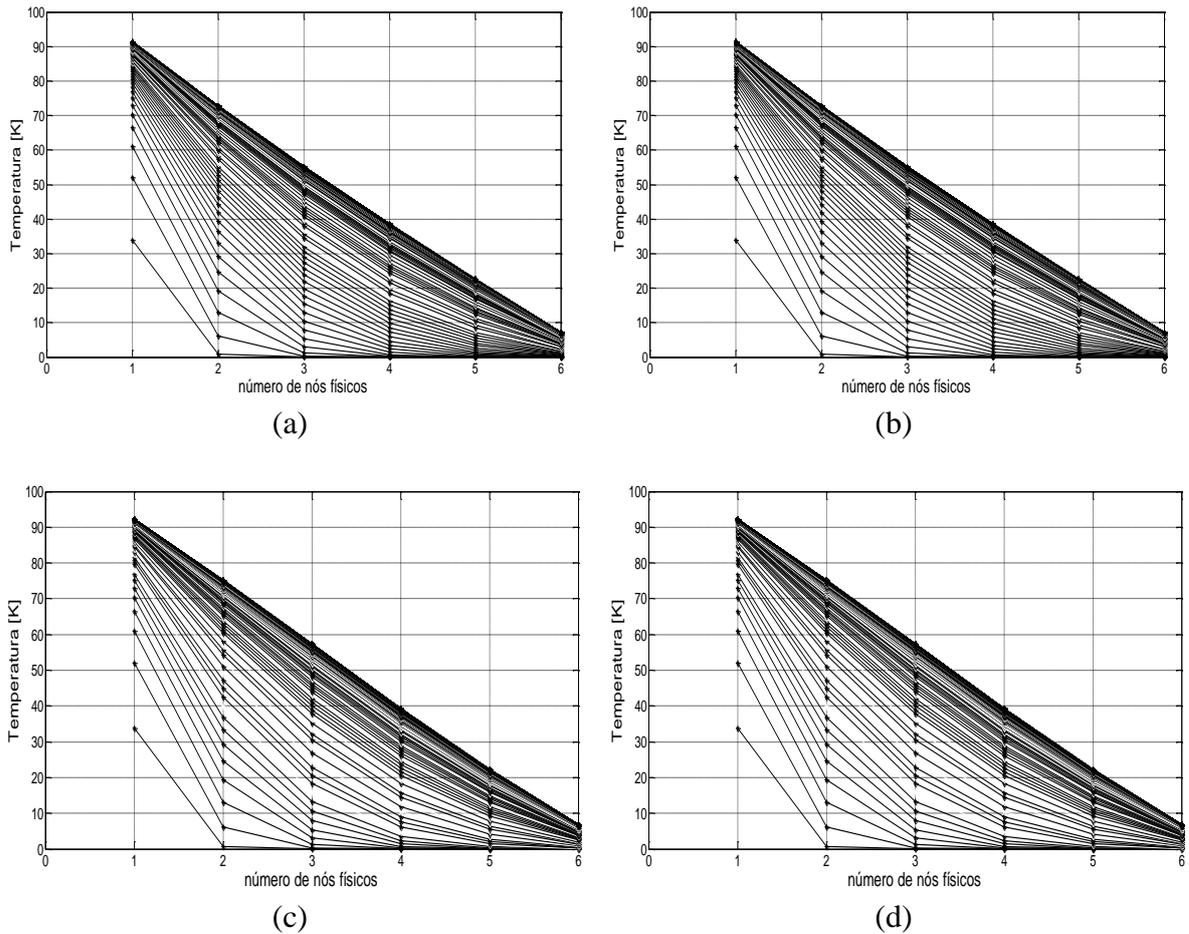
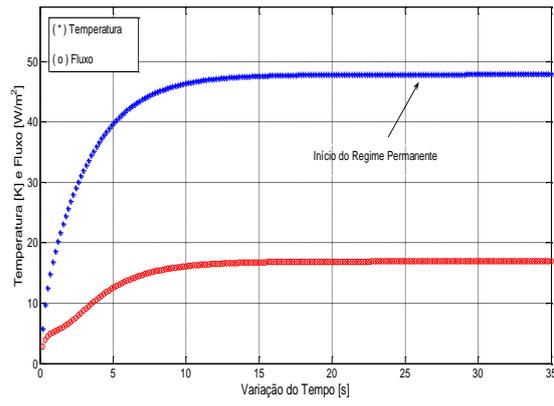
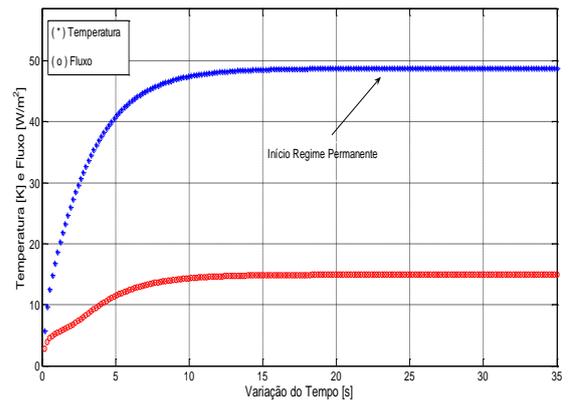


Figura 40. Campo de temperatura matrizes: (a) sólida, (b) 1 furo, (c) 4 furos e (d) 9 furos.

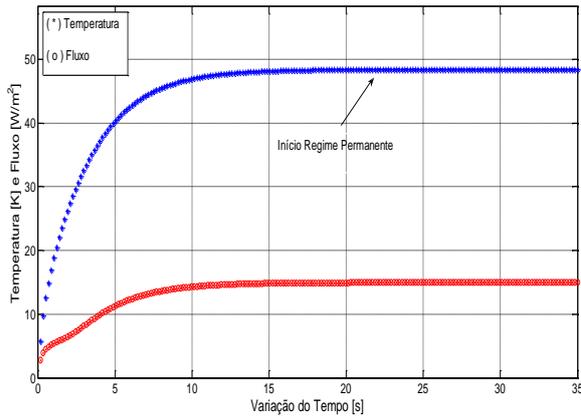
Além disso, foi plotado a média das temperaturas calculadas na aresta inferior e a média do fluxo na aresta direita da placa conforme a Figura 41. Observa-se que os tempos para atingir o regime estacionário, para a matriz sólida foi de 26.25 segundos . No entanto, a placa com um, quatro e nove furos atingem o regime permanente em 23.27, 22.22 e 21 segundos, respectivamente de acordo com a Figura 42. Como nos casos já avaliados, é possível observar que utilizando uma nova condição de contorno o comportamento do tempo é análogo. Ou seja, quanto maior a quantidade de furos existentes na matriz, mais rápido será o processo de transferência de calor até que se atinja o regime permanente.



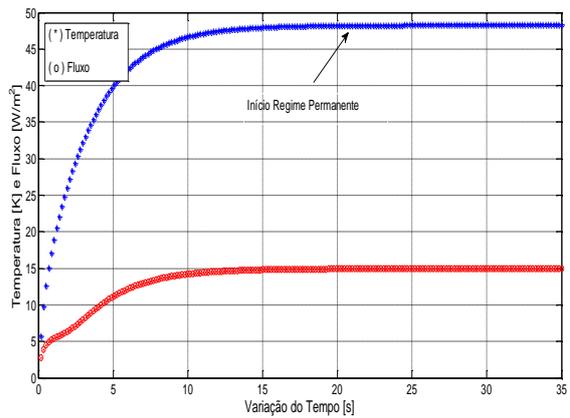
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 41. Variação da temperatura média e fluxo médio para matrizes: (a) sólida, (b) um, (c) quatro e (d) nove furos.

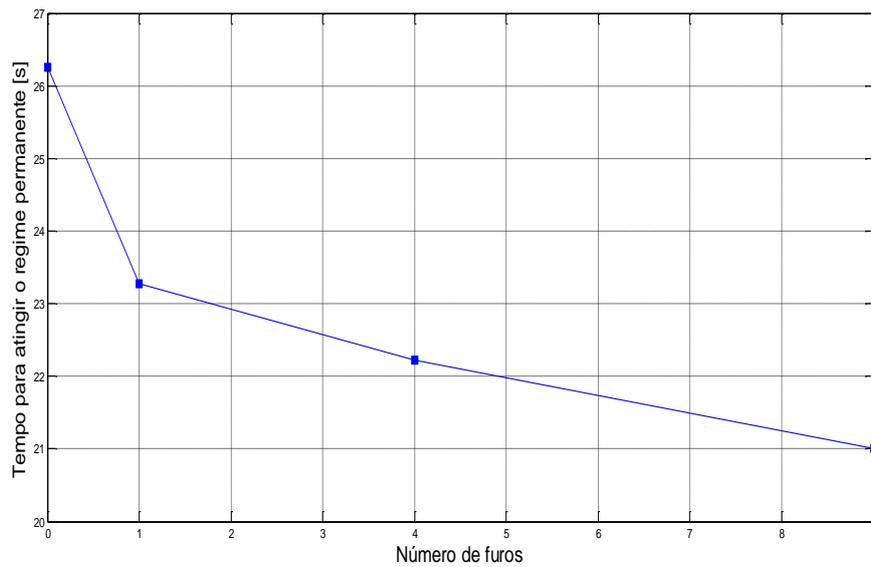


Figura 42. Tempo para atingir o regime permanente pelo número de furos para meios isotrópicos.

5.2.2. Resultados para meios anisotrópicos

Para os meios anisotrópicos foi plotado o campo da temperatura conforme a Figura 43, que mostra os gráficos das mudanças da temperatura a cada passo de tempo até que a placa atinja o regime permanente. E o comportamento para todas as matrizes estudadas é semelhante, não há distinção entre o comportamento de cada caso. Mas, em todos os casos foi alcançado o regime permanente.

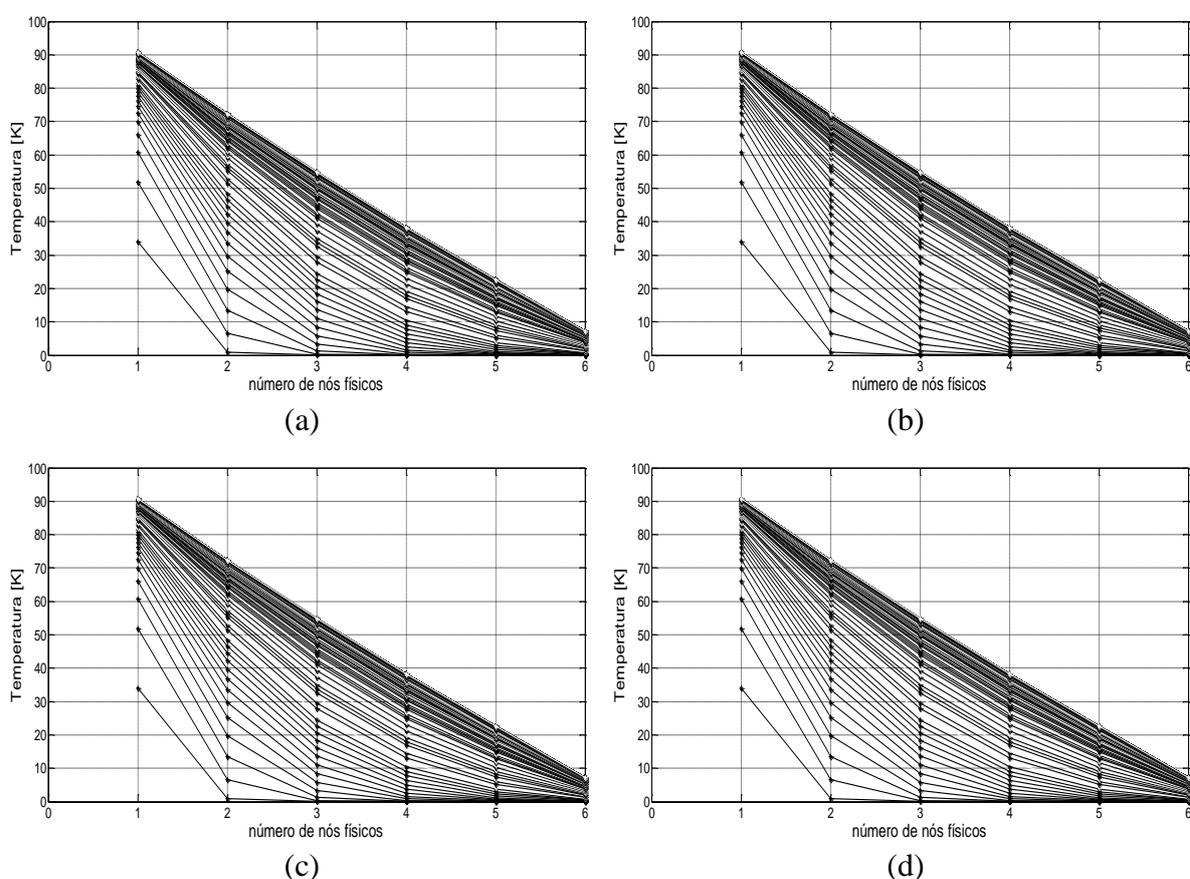


Figura 43. Campo de temperatura matrizes: (a) sólida, (b) 1 furo, (c) 4 furos e (d) 9 furos.

A Figura 44 mostra a média das temperaturas calculadas na aresta inferior e a média do fluxo na aresta direita da placa. Ainda é possível verificar os tempos para atingir o regime estacionário, para a matriz sólida foi de 26.42 segundos. Porém, a placa com um, quatro e nove furos atingem o regime permanente em 23.63, 22.22 e 21 segundos, respectivamente conforme apresentado na Figura 45. É importante ressaltar que para as condições de contorno impostas, os tempos para atingir o regime permanente para meios

anisotrópicos foram os mesmos tempos encontrados para os meios isotrópicos. Ou seja, o processo de transferência de calor até atingir o regime permanente para materiais anisotrópicos são condizentes com os materiais isotrópicos.

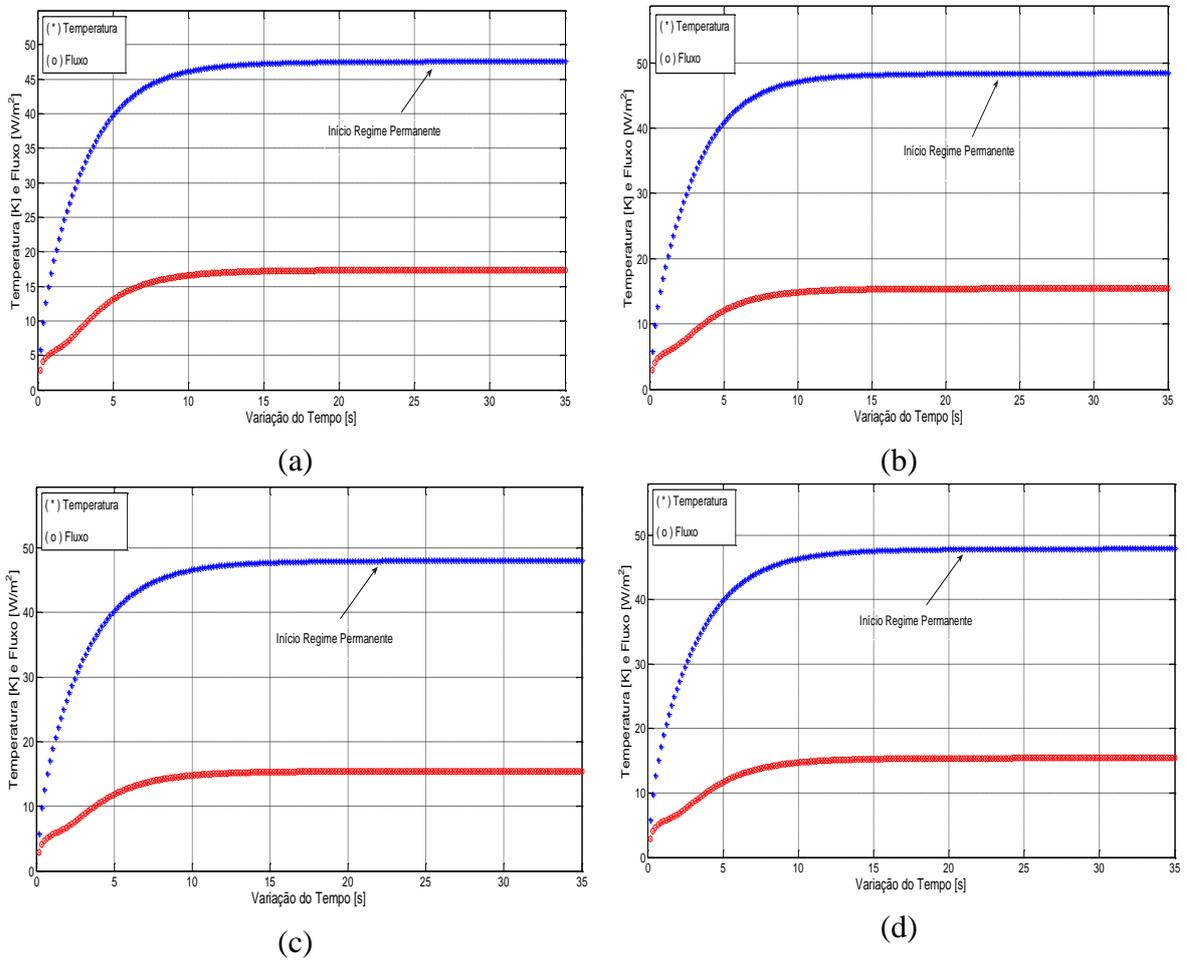


Figura 44. Variação da temperatura média e fluxo médio para matrizes: (a) sólida, (b) um, (c) quatro e (d) nove furos.

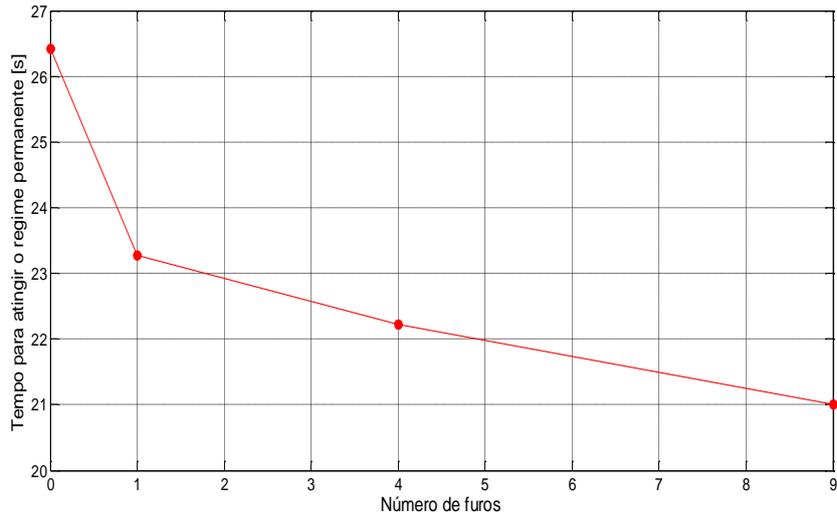


Figura 45. Tempo para atingir o regime permanente pelo número de furos para meios anisotrópicos.

É possível verificar na Figura 46 os resultados das condutividades térmicas efetivas para meios isotrópicos e anisotrópicos. Embora as condições de contorno usadas nesta seção tenham sido diferentes dos exemplos avaliados em seções anteriores, pode-se observar que o comportamento das propriedades efetivas foi similar.

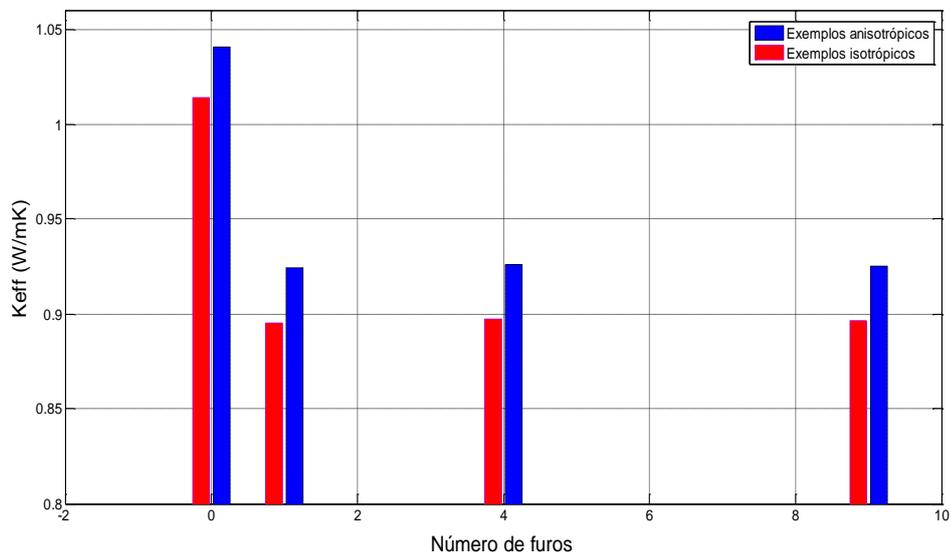


Figura 46. Condutividade térmica efetiva em relação ao número de furos: matriz sólida e com 1, 4, 9 furos.

6. ADIMENSIONALIZAÇÃO DO TEMPO

Nesta seção propõe-se uma adimensionalização do tempo para atingir o regime estacionário para os casos isotrópicos e anisotrópicos. Em alguns estudos é importante usar uma formulação do problema adimensionalizado, principalmente quando a preocupação é identificar os parâmetros físicos e se deseja elaborar uma teoria mais geral independente de qualquer sistema de unidade. Ou seja, a adimensionalização reduz o número de variáveis independentes, isso faz com que seja prático para realizar estudos paramétricos e também para apresentar resultados em forma gráfica (Bejan, 1948 e Çengel, 2009).

Uma grandeza adimensional ou número adimensional é um número desprovido de qualquer unidade física que o defina - portanto é um número puro. Ou seja, os números adimensionais são definidos como produtos ou quocientes de quantidades no qual as unidades se cancelam. Dentre os números adimensionais pode-se citar o número de Fourier (Fo), que em engenharia é um número que caracteriza a condução de calor (Andrade, 2011) conforme a equação 6.1.

$$\tau = \frac{\alpha \cdot t}{L^2} = \text{tempo adimensional, ou número de Fourier} \quad (6.1)$$

Onde:

- α é a difusividade térmica $[m^2 / s]$
- t é o tempo característico $[s]$
- L é o comprimento da placa em análise.

Assim, o tempo para atingir o regime estacionário no problema da condução transiente de calor, pode ser expresso em forma adimensional tanto para os casos isotrópicos como anisotrópicos.

A equação 6.2 apresenta a adimensionalização da equação de calor para meios isotrópicos.

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{k \partial u^2}{\partial x^2} \\ \frac{T}{t} &= \frac{k}{\rho c_p} \cdot \frac{u}{L^2} \\ \frac{1}{t} &= \frac{\alpha}{L^2} \\ t &= \frac{L^2 \left[m^2 \right]}{\alpha \left[m^2 / s \right]} = \frac{L^2}{\alpha} [s] \end{aligned} \quad (6.2)$$

Sendo que α é a difusidade térmica: $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$, onde k é a condutividade térmica, ρ é a massa específica e c_p é o calor específico.

A equação 6.2 pode ser descrita conforme a equação 6.3.

$$t^* = \frac{\alpha t \left[s.m^2 / s \right]}{L^2 \left[m^2 \right]} \quad (6.3)$$

Para os casos anisotrópicos têm-se a equação 6.4.

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k_1 \partial u^2}{\partial x^2} + \frac{k_2 \partial u^2}{\partial x^2} + \frac{k_3 \partial u^2}{\partial x^2} \quad (6.4)$$

Aplicando a mesma regra de análise de escala na equação 6.4 obtêm-se a equação 6.5.

$$t^* = \frac{t(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \left[s.m^2 / s \right]}{L^2 \left[m^2 \right]} \quad (6.5)$$

As Figuras 47 e 48 apresentam o tempo adimensionalizado para os casos isotrópicos estudados.

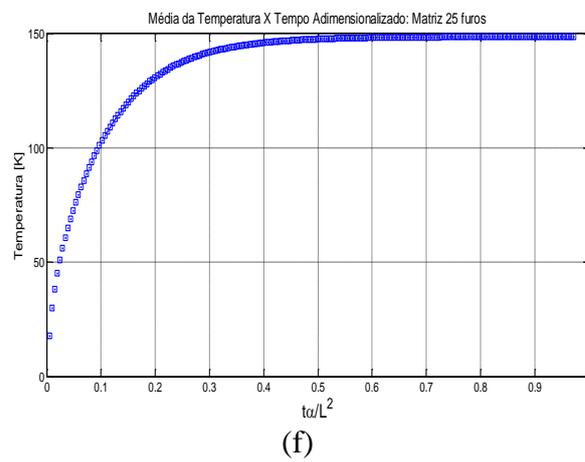
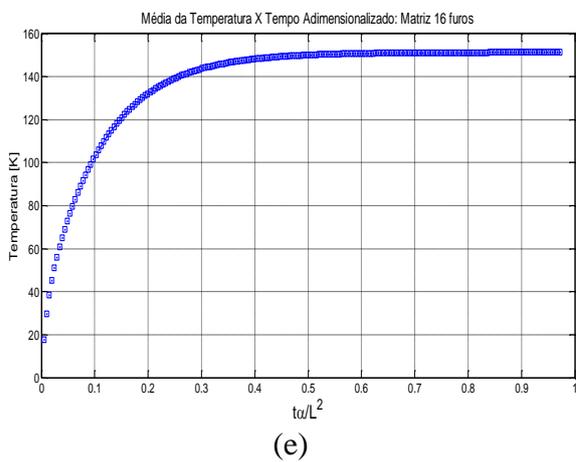
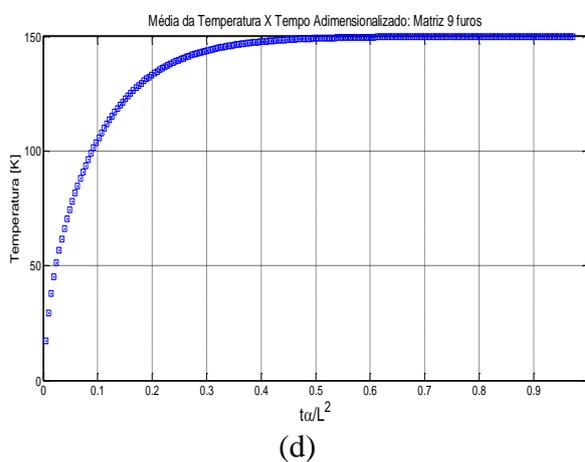
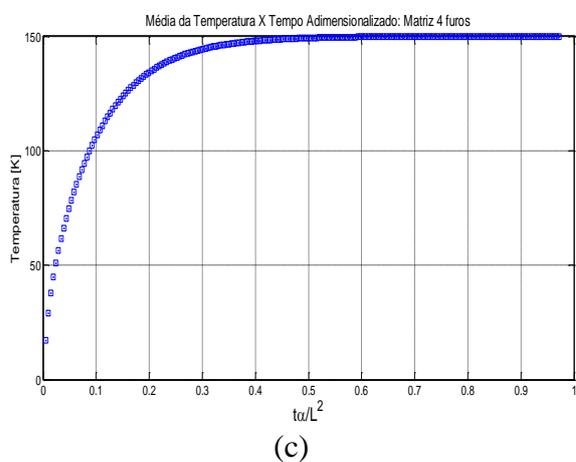
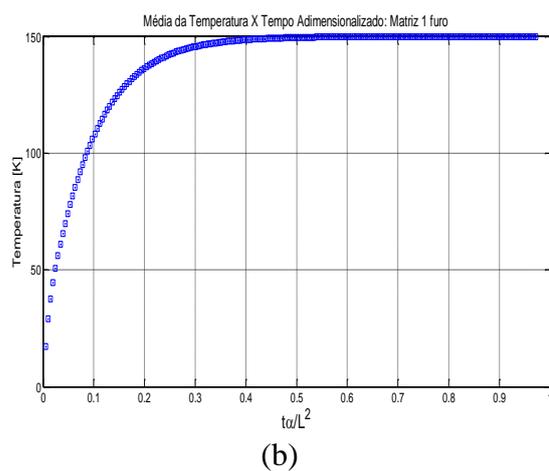
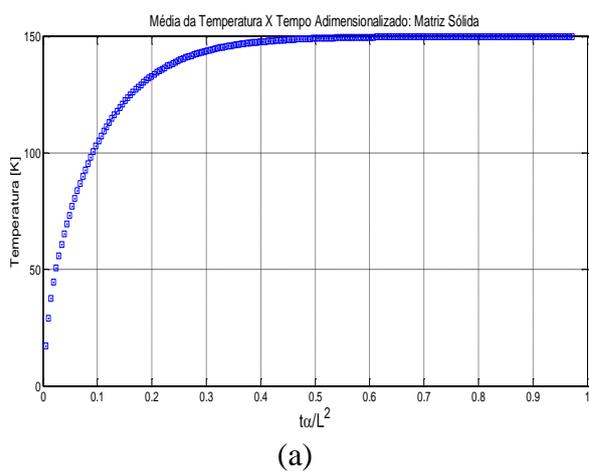


Figura 47. Tempo adimensionalizado para os casos isotrópicos para matrizes: sólida e com (a) 1, (b) 4, (c) 9, (d) 16 e (f) 25 furos.

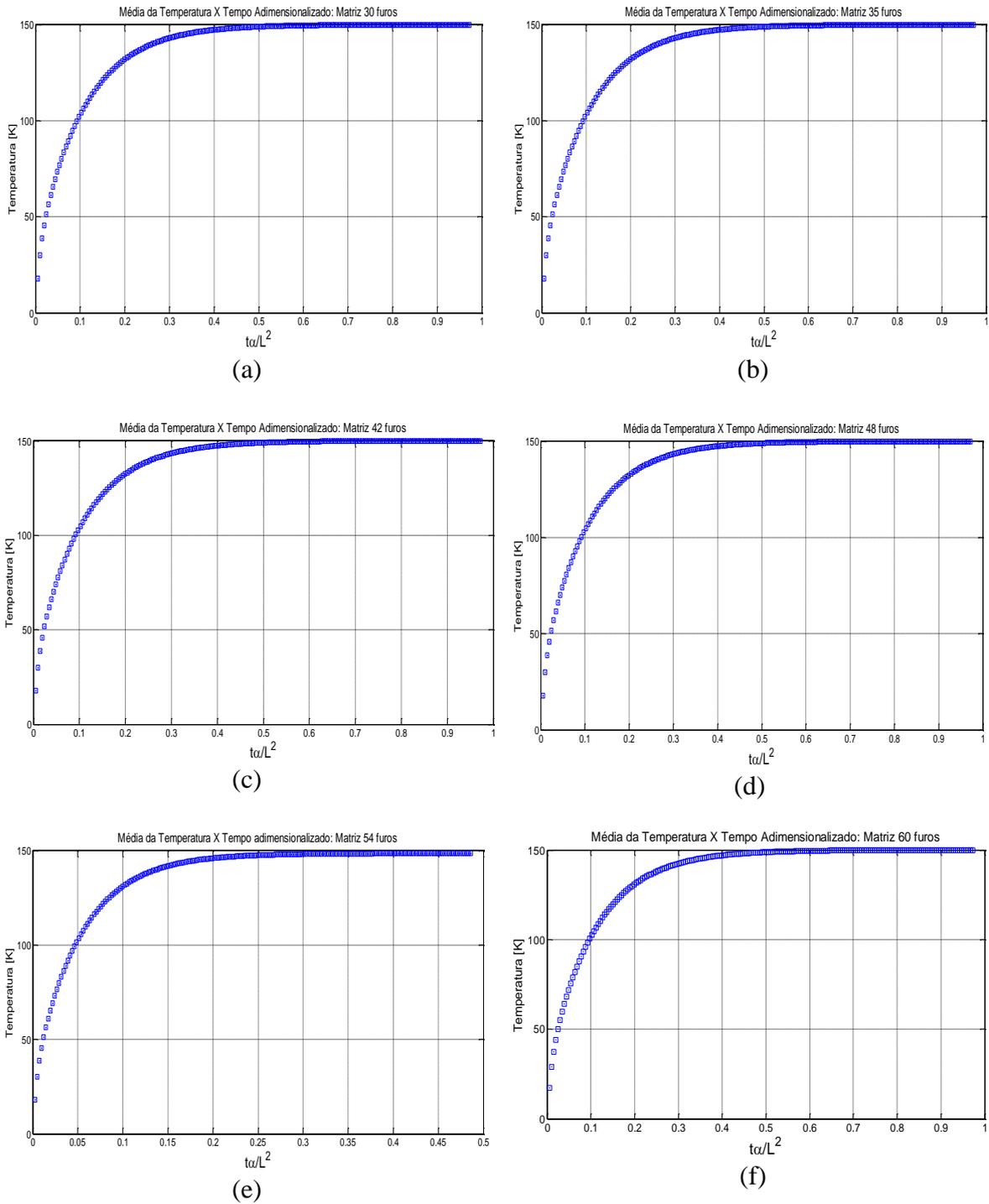


Figura 48. Tempo adimensionalizado para os casos isotrópicos para matrizes: com (a) 30, (b) 35, (c) 42, (d) 48, (e) 54 e (f) 60 furos.

Ao observar o histórico da temperatura pelo tempo adimensionalizado para cada caso apresentado, nota-se que a matriz sólida atinge o regime permanente a partir de 0.4812. Sendo que, as placas com um, quatro, nove, dezesseis, vinte cinco, trinta, trinta cinco, quarenta e dois, quarenta e oito, cinquenta e quatro e sessenta furos atingem o regime permanente em 0.4764, 0.4521, 0.4424, 0.4229, 0.4182, 0.4132, 0.4053, 0.4035, 0.4035, 0.4035 e 0.4035 respectivamente, conforme a Figura 49.

Assim, verifica-se que para os tempos adimensionalizados ocorre um comportamento similar ao tempo medido em segundos. Ou seja, quanto maior a quantidade de furos inseridos na matriz, mais rápido será o processo de transferência de calor até que se atinja o regime permanente para matriz com um à trinta e cinco furos inseridos. Porém, a partir de quarenta e dois furos os tempos para atingir o regime estacionário se estabiliza independente do aumento do número de furos na matriz.

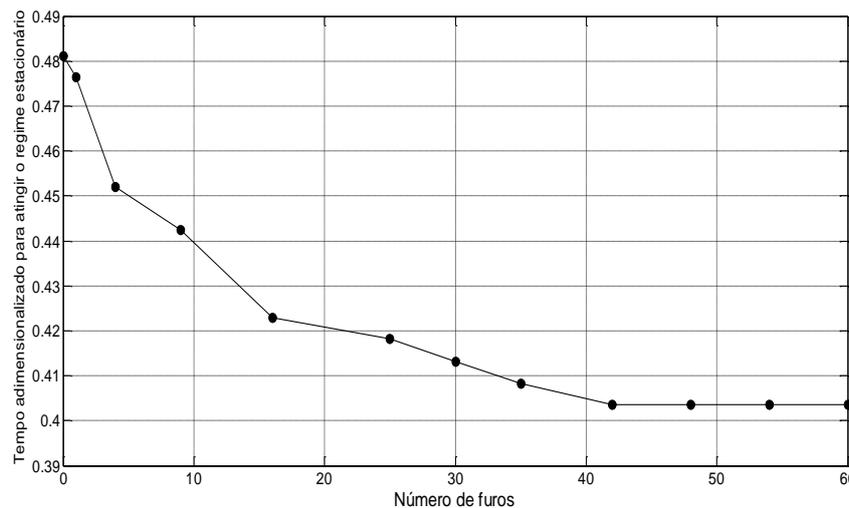


Figura 49. Tempo adimensionalizado para atingir o regime estacionário para os casos isotrópicos.

Também foi avaliado o tempo adimensionalizado para os casos anisotrópicos estudados, conforme as Figuras 50 e 51.

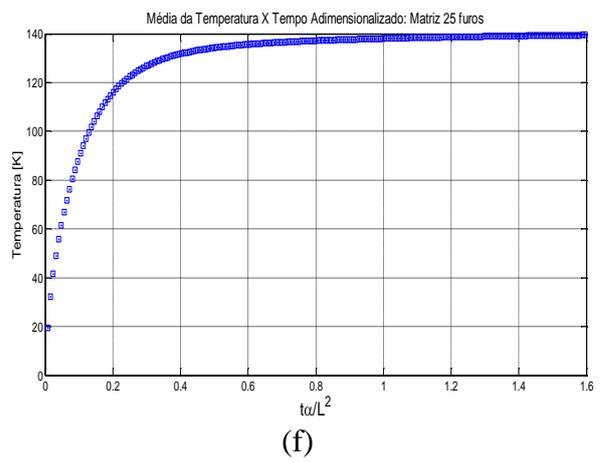
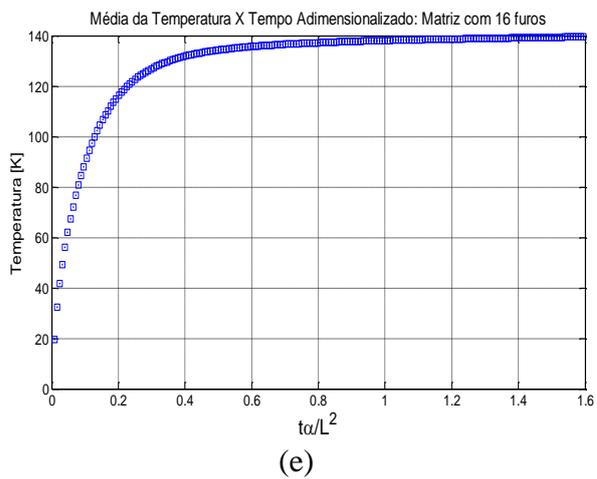
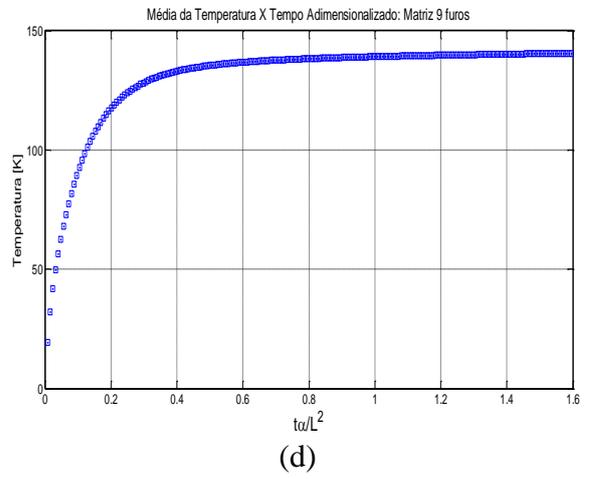
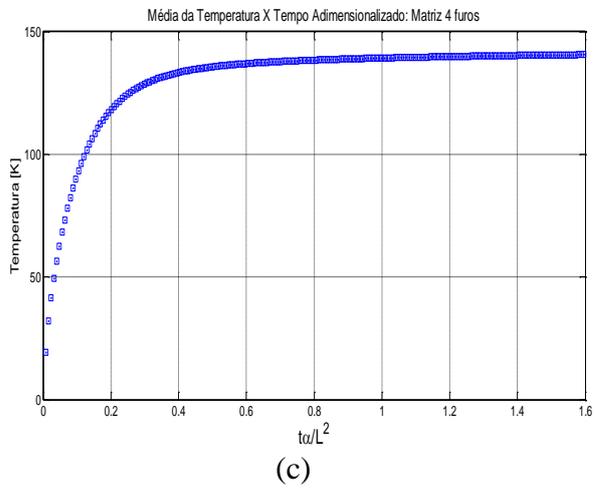
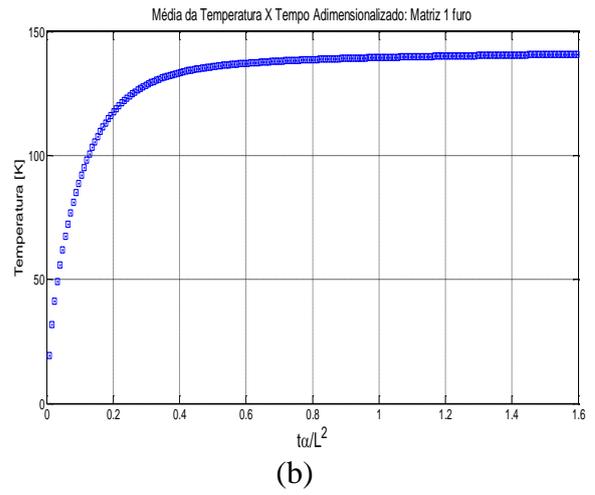
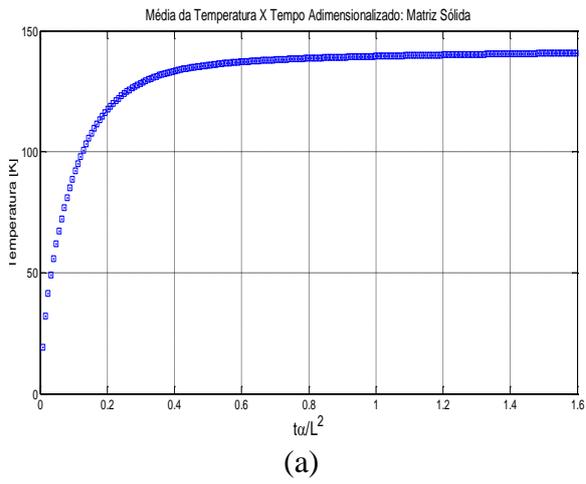


Figura 50. Tempo adimensionalizado para os casos anisotrópicos matrizes: Sólida, com (a) 1, (b) 4, (c) 9, (d) 16 e (f) 25 furos.

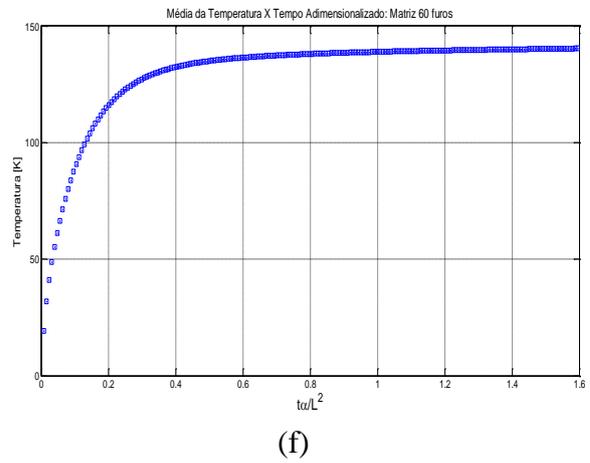
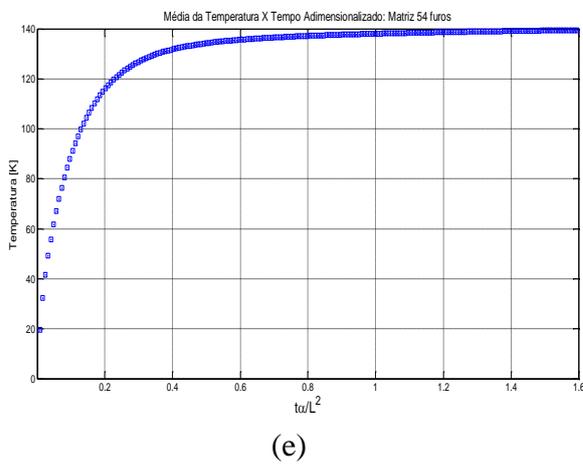
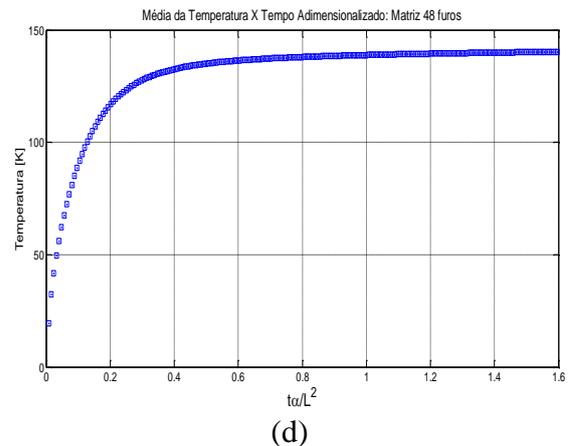
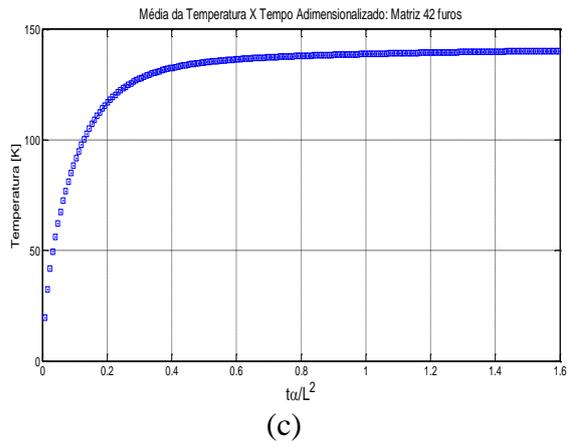
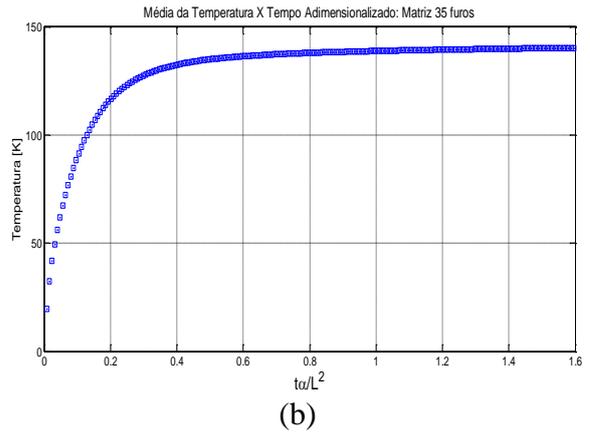
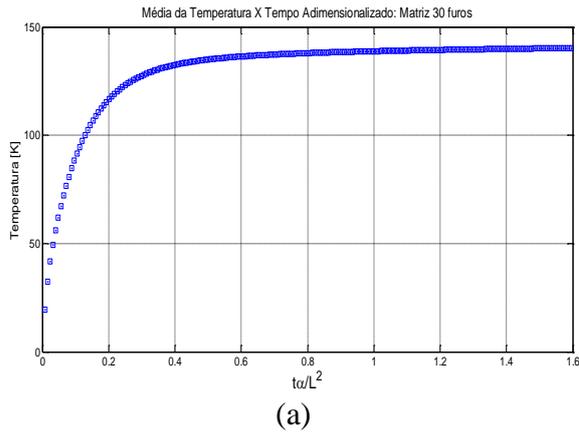


Figura 51. Tempo adimensionalizado para os casos anisotrópicos matrizes: com (a) 30, (b) 35, (c) 42, (d) 48, (e) 54 e (f) 60 furos.

É possível verificar analisando o histórico da temperatura pelo tempo adimensionalizado para os casos anisotrópicos, que a matriz sólida atinge o regime permanente a partir de 1.499. Porém, a placa com um, quatro, nove, dezesseis, vinte cinco, trinta, trinta cinco, quarenta e dois, quarenta e oito, cinquenta e quatro e sessenta furos atingem o regime permanente em 1.475, 1.451, 1.450, 1.419, 1.378, 1.346, 1.341, 1.338, 1.338, 1.338 e 1.338, respectivamente conforme a Figura 52. Portanto, quanto mais furos na matriz, mais rápido também é transferência de calor até que se atinja o regime permanente. No entanto, verifica-se que a partir de quarenta e dois furos os tempos para atingir o regime estacionário estabilizam-se.

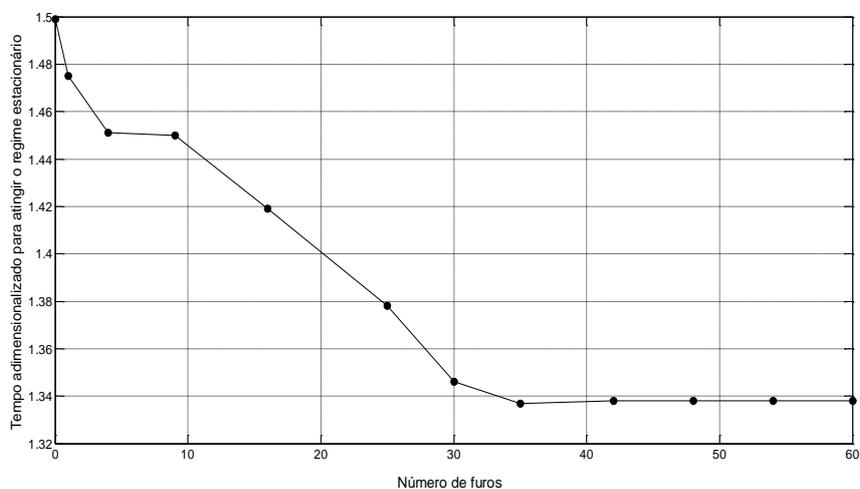


Figura 52. Tempo adimensionalizado para atingir o regime estacionário para os casos anisotrópicos.

Portanto, nota-se que para os casos anisotrópicos o tempo de transiência foi maior do que para os isotrópicos conforme é possível verificar na Figura 53. Isso porque a condutividade térmica efetiva de um material depende não apenas de sua estrutura, mas também de alterações nessa estrutura que venham a causar anisotropia na condutividade térmica efetiva. Assim, a anisotropia causa uma dissipação de calor com diferentes taxas em diferentes direções e, nessas condições, o tempo para atingir o regime permanente será maior do que para os materiais isotrópicos, que possuem as mesmas propriedades físicas independentemente da direção considerada (Silva, 2010).

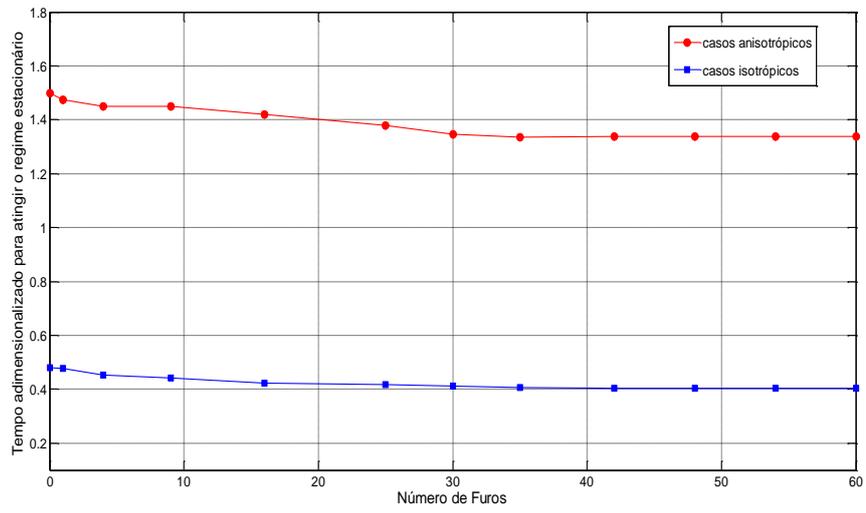


Figura 53. Tempo adimensionalizado para atingir o regime permanente pelo número de furos.

7. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Apresentou-se neste trabalho uma metodologia numérica para a determinação de propriedades efetivas em materiais microporosos isotrópicos e anisotrópicos representados por um EVR com uma razão de volume constante. Como ferramenta numérica para solução de equações diferenciais do problema de condução de calor foi utilizado o MEC, utilizando soluções fundamentais dependentes do tempo. O MEC mostrou-se eficiente tanto na precisão dos resultados como também na modelagem do problema.

Os resultados demonstraram que a medida que aumentou-se a porosidade da placa os valores da condutividade térmica efetiva diminuíram gradativamente até alcançar um regime estacionário. E ao atingir um EVR de razão de volume constante tanto para os materiais isotrópicos como também para os anisotrópicos as condutividades térmicas efetivas não sofreram mais alterações, no entanto, o mesmo não acontece para o tempo de transição de regime transiente para permanente. Um aumento do número de furos na matriz faz com que o tempo de transiência em ambos os materiais diminua. Esse processo continua até que seja alcançada uma faixa ideal de EVR, nesta condição, o tempo de transiência também se estabiliza.

No entanto, foi possível verificar que para os materiais anisotrópicos o tempo de transiência é maior do que para os materiais isotrópicos, pois as propriedades físicas do mesmo são distintas em direções diferentes, o que justifica um tempo maior para atingir o regime permanente. Porém, quando foi definido uma configuração ideal de EVR, os tempos para atingir o regime permanente mantiveram-se os mesmos.

Através do tratamento estatístico dos resultados, verificou-se que a partir de 42 furos inseridos na matriz para ambos os materiais avaliados, o desvio médio associado passa a apresentar pouca variação diante do acréscimo de mais furos. Portanto, diante deste comportamento estabilizado, assume-se que é possível definir a configuração com 42 furos como EVR tanto para materiais isotrópicos como para anisotrópicos.

7.1. SUGESTÕES DE CONTINUIDADE DO TRABALHO

São indicadas para a continuação deste trabalho as seguintes sugestões:

- Estendê-lo para problemas de otimização de parâmetros onde será possível analisar além da quantidade de furos a influência da posição dos mesmos;

- Implementar ao código atual inclusões de materiais com diferentes condutividades térmicas;
- Utilizar furos ou inclusões com geometrias distintas, como na forma de um losango ou elíptica, por exemplo.
- Usar diferentes tipos de elementos de contorno (linear, quadrática, cúbico entre outros) para avaliar o comportamento dos resultados.
- Implementar elementos de contorno em três dimensões para que seja possível a avaliação de geometrias complexas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Albuquerque, E. L., Sollero, P., Aliabadi, M. H. (2002). The boundary element method applied to time dependent problems in anisotropic materials. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39, pg.1405-1422.
- Albuquerque, E.L. (2001). Análise de Problemas dinâmicos em Materiais Anisotrópicos usando o Método dos Elementos de Contorno. 120f. *Tese (doutorado em engenharia mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.*
- Andrade, D. O. (2011). Desenvolvimento de formulações adimensionais para simulação da transferência de calor e massa na secagem de grãos. *Dissertação (mestrado em engenharia mecânica). Universidade Federal Fluminense, Niterói.*
- Anflor, C. T. M. (2007). Otimização Evolucionária e Topológica em Problemas Governados pela Equação de Poisson empregando o Método dos Elementos de Contorno. *Tese (doutorado em engenharia mecânica). Universidade Federal do Rio Grande do Sul.*
- Bejan, A. (1948). Convection Heat Transfer. Department of Mechanical Engineering and Materials Science. Duke University. Durham, North Carolina.
- Brebbia, C. A.; Dominguez, J. *Boundary Elements: An Introductory Course, Southampton: McGraw Hill, 1989.*
- Brebbia, c.a., Telles, j.c.f., Wrobel, l.c. (1984). *Boundary Element Techniques – Theory and Applications in Engineering, v. 1, Springer-Verlag.*
- Brebbia, C.A.; Walker, S. (1980); *Boundary elements Techniques in Engineering. Newnes-Butterworths, Londres.*
- Buroni F.C. (2006). “Modelagem e Projeto Computacional de Materiais micro-porosos com Distribuição Aleatória Utilizando uma Formulação de Elementos de Contorno”. *Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. Brasil.*
- Chang, Y.P.; Kang, C.S.; Chen D.J. (1984). The Use of Fundamental Greens’s Function for the Solution of Problems of Heat Conduction in Anisotropic Media. *Boundary element techniques –Theory and application in engineering, Springer-Verlag, Berlin and New York.*

- Chatterjee, J.; Henry, D.P.; Ma, F. e Banerjee, P. K. (2007). An Efficient BEM Formulation of Three-dimensional Steady-State Heat Conduction Analysis of Composites. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol 51, 1439-1452.
- Çengel, Yunus A. (2009). Transferência de calor e massa: uma abordagem prática. *Tradução Luiz Felipe Mendes de Moura. 3.ed. São Paulo: McGraw-Hill.*
- Dondero M., Cisilino A., Carella J., Tomba. P. (2011). “ Effective Thermal conductivity of functionally graded random micro-heterogeneous materials using representative volume elemento and BEM”, *Faculty of Engineering National University of Mar del Plata, 7600 Mar del Plata, Argentina.*
- Effren, T. C. (1997). “Implementação computacional do Método dos Elementos de Contorno para solução de problemas de difusão”. *Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. Brasil.*
- Gumerato, H. F.; Schmidt, F. L. e Goldoni, J. S. (2006). Transferência de calor transiente na agitação linear intermitente de latas. *Ciências Tecnologia de Alimentos – UNICAMP, Campinas – SP.*
- Kakaç, S., Yener Y. (1993). Heat Conduction, Third Edition, Taylor & Francis Publishers.
- Kim S., Kim M. C., Kim K. Y., “Estimation of Temperature-Dependent Thermal Conductivity With a Simple Integral Approach”, *Int. Comm. Heat Transfer*, vol. 30, nº 4, p. 485-494, 2003.
- Kwon, Y.W., R.E. Cooke. and C. Park (2003). Representative unit-cell for open-cell metal foams with or without elastic filler. *Material science and engineering*, A343.
- Lee, K.J., Mal, A.K. (1990). A boundary element method for plane anisotropic elastic media. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 57, pg. 600-606.
- Lekhnitskii, S.G. (1963). Theory of Elasticity of an Anisotropic Body. 1a ed. Moscou: Mir. 430p.
- Lekhnitskii, S.G., TSAI, S.W., CHERONT, T (1968). Anisotropic Plates. 1a ed. *New York: Gordon and Breach Science Publishers. 534p.*
- Marczak, R.J e Denda, M. (2010). New derivations of the fundamental solution for heat conduction problems in three-dimensional general anisotropic media. *International Journal of Heat and Mass Transfer.*
- Mendonça, P. T. (2005) Transferência de Calor Pelo MEF. Grupo de Análise e Projeto Mecânico. Disponível em: <<http://www.grante.ufsc.br>>.
- Nemat-Nasser S. and Hori M. (1999). Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Solids, 2nd Edition, Elsevier.

- Olek, Z.; Taylor, R. e Fox, D. (2013). The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. Chapter 7 - *Material Constitution Using Representative Volume Elements, Pages 215-233 Butterworth Heinemann.*
- Ostoja-Starzewski, M. (2006). “Material Spatial Randomness: From Statistical to Representative Volume Element”. *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol 21, pp.112-132.
- Ozisik, M. N. (1990). Transferência de calor, um texto básico. Rio de Janeiro, *Guanabara Dois.*
- Öchsner A., Tane M. & Nakajima H (2007). Prediction of the Thermal Properties of Lotus-type and Quasi-isotropic Porous Metals: Numerical and Analytical Methods. *Materials Letters*, 2006, vol.60, pp.2690-2694.
- Rizzo, F. J. (1967). An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quarterly Journal of Applied Mathematics*, vol.25, pg.83-95.
- Rizzo, F. J., Shippy, D. J. (1970). A method for stress determination in plane anisotropic elastic bodies. *Journal of Composite Materials* vol.4, pg. 36.61.
- Santos Junior, Arnaldo dos (2008). Um estudo sobre estimativas de erro de modelagem em estruturas de materiais heterogêneos. *Dissertação apresentada a Universidade Federal de Alagoas, Maceió.*
- Schlar, N.A. Anisotropic Analysis Using Boundary Elements. *Topics in Engineering. Computational Mechanics Publications*, (1994), 142p.
- Senna, A.M.S.(2003). Uma Nova Formulação do Método dos Elementos de Contorno para a Análise Propagação de Ondas Escalares. Rio de Janeiro. *Tese de Doutorado. COPPE/UFRJ.*
- Shiah, Y.C. & Tan, C.L. (1997). BEM treatment of two-dimensional anisotropic field problems by direct domain mapping. *Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Carleton University, Ottawa, Ontario Canada.*
- Shiah, Y.C. (2005). Heat Conduction in Multiply Adjoined Anisotropic Media with Embedded Point Heat Sources. *Department of Aeronautical Engineering. Feng Chia University.*
- Shigley, J. E.; Mischke, C. R.; Budynas, R. G. (2005). Projeto de Engenharia Mecânica; tradução João Batista de Aguiar, José Manuel de Aguiar. 7. Ed. Porto Alegre: Bookman.

- Silva, C. F. (2010) Condutividade Térmica, Difusividade Térmica e Calor Específico em Rochas Ígneas e Metamórficas: Comportamento Isotrópico e Anisotrópico. *Universidade Federal da Bahia - Instituto de Geociências.*
- Soares, G.P. ; Iturrioz, I.; Cisilino, A. (2008). Aplicação do Método dos Elementos Finitos na homogeneização das propriedades mecânicas de materiais compostos. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional.*
- Vanalli, L. (2004). O MEC e o MEF aplicados à análise de problemas viscoplásticos em meios anisotrópicos e compostos. Tese (Doutorado), 194p – *Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.*
- Vanzuit, R. J. (2007). Análise do fluxo bidimensional de calor pelo Método dos Elementos de Contorno com soluções fundamentais independentes do tempo. *Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Paraná.*
- Wang M.& Pan N. (2008). “Modeling and Prediction of the Effective Thermal Conductivity of Random Open-cell Porous Foams”. *International Journal of Heat and Transfer, Vol.51, pp.1325-1331.*
- Liu, Y. J. (2009). Fast Multipole Boundary Element Method - Theory and Applications in Engineering. Cambridge University Press, Cambridge.
- Yao, Z.; Fanzhong, K.; Wang, H.; Wang, P. (2004). 2D Simulation of composite materials using BEM Original Research Article Engineering Analysis with Boundary Elements, *Volume 28, Issue 8, Pages 927-935.*
- Zambrozuski, N.J.M. (2010). Análise de problemas difusivos transientes utilizando o método de aproximação explícita de Green e o método dos elementos de contorno. *Tese de doutorado da Universidade Federal do Rio de Janeiro.*
- Zarichta, C. (2008). “Um Estudo sobre Condutividade Térmica Efetiva em Materiais Micro-porosos Utilizando o Método dos Elementos de Contorno”. *Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.*
- Zohdi, T. I. (2002). An adaptive-recursive staggering strategy for simulating multifield coupled processes in micro heterogeneous solids. *International journal for numerical methods in engineering 53:1511–1532.*