

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE GAMA / FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE
MATERIAIS DA ENGENHARIA**

**MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO VIRTUAL
APLICADO A PROBLEMAS POTENCIAIS**

ANGÉLICA DE ALMEIDA OLIVEIRA BRAMBILA

**ORIENTADORA: Dra. Carla Tatiana Mota Anflor
CO-ORIENTADOR: Dr. Jhon Nero Vaz Goulart**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS
DA ENGENHARIA**

**PUBLICAÇÃO: 014A/2014
BRASÍLIA/DF: ABRIL – 2014**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE GAMA / FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE
MATERIAIS DA ENGENHARIA.**

ANGÉLICA DE ALMEIDA OLIVEIRA BRAMBILA

**MÉTODOS DOS ELEMENTOS DE CONTORNO VIRTUAL APLICADO
A PROBLEMAS POTENCIAIS**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA DA FACULDADE GAMA E FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA.

**ORIENTADOR: Dra. Carla Tatiana Mota Anflor
CO-ORIENTADOR: Dr. Jhon Nero Vaz Goulart**

**BRASÍLIA
2014**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE GAMA / FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE
MATERIAIS DA ENGENHARIA.**

**MÉTODOS DOS ELEMENTOS DE CONTORNO VIRTUAL APLICADO
A PROBLEMAS POTENCIAIS**

ANGÉLICA DE ALMEIDA OLIVEIRA BRAMBILA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA DA FACULDADE GAMA E FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA.

APROVADA POR:

**Prof. Dra. Carla Tatiana Mota Anflor
(Orientador)**

**Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque
(Examinador Interno)**

**Prof. Dr. Sandi Itamar Schafer de Souza
(Examinador Externo)**

FICHA CATALOGRÁFICA

ANGÉLICA DE ALMEIDA OLIVEIRA BRAMBILA
MÉTODOS DOS ELEMENTOS DE CONTORNO VIRTUAL APLICADO A
PROBLEMAS POTENCIAIS, [Distrito Federal] 2014.

88 p. 210 x 297 mm (FGA/FT/UnB, Mestre, Integridade de Materiais da Engenharia, 2014).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade UnB Gama. Programa de Pós-Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia.

1. Método dos Elementos de Contorno 2. Contorno virtual

3. Problema de Motz

I. FGA/FT/UnB

II. Título (série): Métodos Numéricos

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

BRAMBILA, A. A. O. (2014). MÉTODOS DOS ELEMENTOS DE CONTORNO VIRTUAL APLICADO A PROBLEMAS POTENCIAIS. Dissertação de Mestrado em Integridade de Materiais da Integridade da Engenharia, Publicação 014A./2014, Faculdade UnB Gama/FT/Universidade de Brasília, DF, 88 p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: ANGÉLICA DE ALMEIDA OLIVEIRA BRAMBILA.

TÍTULO: MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO VIRTUAL APLICADO A PROBLEMAS POTENCIAIS

GRAU: Mestre

ANO: 2014

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

NOME: Angélica de Almeida oliveira Brambila

E-mail: angel_alt@hotmail.com

Brasília, DF – Brasil

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela proteção de todos os dias e por me dar força e coragem para chegar até aqui.

Aos meus pais Raimundo e Edite, pelas suas orações diárias realizadas com ternura e simplicidade me concedendo as suas bênçãos com todo amor.

Ao meu esposo Alberto, que segurou as pontas nesses dois anos principalmente nas férias viajando quase o tempo todo sozinho, que também me aturou muitas vezes cansada e quase sempre nervosa. Agradeço pela preocupação de me buscar a noite no ponto de ônibus ou me levar de manhã quando ainda estava escuro, mesmo cansado e com sono ainda ficava dando voltas de carro até que eu entrasse no ônibus. Agradeço por ser bem mais que um marido, por ser um companheiro e amigo, porque a beleza do amor não está nas palavras, mas sim em atitudes como as que eu recebo de carinho.

Aos meus irmãos Eliane e Orivaldo, que me entenderam e me ouviram muitas vezes reclamar por ter que deixá-los mais cedo no nosso encontro oficial de final de ano.

À professora Carla, que disponibilizou parte do seu tempo para realizar uma ótima orientação e usando de sua experiência e conhecimento não mediu esforços para o desenvolvimento desse trabalho.

Ao professor Jhon, pela atenção, sugestões e suporte durante esses últimos meses.

Aos integrantes do GMEC, que trouxeram a beleza da juventude para a minha vida. Em especial a grande amiga Miélle (Mi), que me encorajou todos os dias, durante horas ao telefone, repetindo a frase “Tudo vai dar certo”. Ao Adrian pela gentileza em Buenos Aires e por me deixar mandar em tudo. Ao Tiago (Ti), por entender as minhas piadas, me auxiliar no trânsito (ele sabe chegar a todos os lugares sem errar) e ajudar a transformar os problemas com a simplicidade de um sorriso. A Tatiane (Tati) por trazer a delicadeza e incentivo para o grupo sempre com alegria. Ao casal Jhony e Carol, que sempre se mostraram dispostos a ajudar no que fosse necessário. Ao Kaio, que levou música para nossos encontros. Aos colegas Lucas e Maria Luiza pela companhia em nossos encontros. Não posso

esquecer-me do Carlos Daniel, que sempre esteve presente, representando bravamente o grupo.

À Patrícia, que foi a primeira pessoa que conheci e abriu as portas de sua casa para que eu entrasse como amiga.

Aos colegas de disciplinas, Vinícius que me ajudou muito no começo me encorajando a não desistir e Ricardo, Jayme, Mello, Maurílio, Afonso e outros que fizeram das nossas aulas momentos de descontração e grupos de estudos divertidíssimos.

Aos colegas de trabalho pelo incentivo e colaboração em toda essa jornada.

Aos membros que compõem esta banca, professor Éder e professor Sandi pelas contribuições dadas a este trabalho.

RESUMO

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é um método em que necessita de informação apenas do contorno do domínio para a solução da equação governante. O método é deduzido do Teorema de Green e utiliza as soluções fundamentais para determinar variáveis desconhecidas. Nesta técnica existe uma singularidade quando o ponto fonte for coincidente com o ponto campo. Para resolver esse problema, geralmente são empregadas integrações numéricas especiais e/ou integração analítica. Com o intuito de evitar a integração analítica, uma técnica alternativa, conhecida como Método dos Elementos de Contorno virtual (MECV), é implementada para resolver o problema de singularidade. Esta técnica é aplicada no conhecido problema de Motz, utilizado neste trabalho como referência. Neste sentido, o principal objetivo deste trabalho baseia-se na investigação da distância ótima de um contorno virtual utilizando a técnica do MECV. A distância entre o contorno real e o contorno virtual é definida como um percentual do tamanho do elemento (β) e a precisão da solução numérica é avaliada para cada incremento deste β . Outra distância a ser avaliada é a influência do fator (α) no interior do elemento linear descontínuo utilizado. O MECV regular é aplicado e o problema discretizado com tamanhos de elementos iguais e diferentes. Nesta técnica os pontos fontes são colocados no contorno virtual externo ou interno ao domínio. Com base nos resultados obtidos, pode-se observar que a utilização do MECV externo fornece valores muito precisos com um β de 9% e α de 10%. A aplicação do MECV externo discretizado com elementos de tamanhos diferentes não demonstraram resultados satisfatórios.

Palavras Chave: Métodos dos Elementos de Contorno, Contorno Virtual, Problema de Motz.

ABSTRACT

The Boundary Element Method (BEM) is classified as a boundary method once no informations inside the domain are required for solving the governing equation. The method is deduced from the Green's Theorem and uses the fundamental solutions for determining the unknown variables. In this technique when the source point coincides with the field point singularities arise. Generally special numerical integrations and/or analytical solutions are employed for solving the singularities. An alternative technique called as Virtual Boundary Element Method (VBEM) is implemented to solve the singularities and avoid analytical integrations. A potential problem as well-known as Motz's Problem is used as benchmark. In this sense the main goal of this work relies on investigating the best distance of a virtual boundary using the VBEM technique. The distance between the real and virtual boundary was set as a percentual of the element size (β) and the numerical solution accuracy is taken into account as the value this β increase. Other distance to be evaluated is the influence of factor (α) inside the linear discontinuous element. MECV is applied and the problem discretized with same lengths and different lengths of elements. In this technique the sources points are is taken out to the virtual boundary external or internal to the domain. The formulation with the external MECV have presented highly accurate results for a β of 9% and for a α of 10%. Discretization with elements different lengths has not demonstrated satisfactory results.

Keywords: Boundary Element Method, Virtual Boundary, Motz's Problem

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Classificação dos métodos numéricos.	19
Figura 1.2 – Contorno real e virtual de uma placa fina e elástica.....	21
Figura 1.3 – (a) Cilindro rígido elástico em contato com uma superfície côncava; (b) Discretização do cilindro elástico e da superfície côncava. Fonte: Kanber et al (2003).....	22
Figura 1.4 – Problema de domínios múltiplos e MECV.	24
Figura 2.1 – Definição da Equação de Laplace.....	27
Figura 2.2 – Distância r entre o ponto fonte e o ponto campo.....	29
Figura 2.3: Função de forma para elemento linear contínuo.....	30
Figura 2.4 – Discretização com elementos lineares contínuos.....	31
Figura 2.5 – Discretização com elementos lineares descontínuos.....	32
Figura 2.6: Elemento j linear descontínuo e funções de forma para elementos descontínuos.....	32
Figura 2.7 – Discretização com 4 elementos descontínuos e 8 nós.....	34
Figura 3.1 – MEC Tradicional.....	35
Figura 3.2 – Menor distância recomendada do ponto de colocação ao elemento integrado.	36
Figura 3.3 – MECV.....	41
Figura 3.4 – Ponto fonte no elemento de contorno regular suave.....	42
Figura 3.5 – Ponto fonte no elemento de contorno regular variável.....	42
Figura 3.6 – Métodos dos elementos de contorno virtual irregular.....	43
Figura 4.1 – MECV regular externo.....	44

Figura 4.2 – Problema de Motz e suas condições de contorno.....	45
Figura 4.3 – Distribuição de temperatura analítica e numérica com o MECV externo.	46
Figura 4.4 – Pontos de controle.	46
Figura 4.5 – Detalhe do β para os pontos de controle 7, 8 e 9 e variando os pontos de Gauss.....	47
Figura 4.6 – Detalhe do β para os pontos de controle 7, 8 e 9 e 6 pontos de Gauss.	47
Figura 4.7 – Erros relativos percentuais nos nós físicos 7, 8 e 9 e betas iguais a 1, 3, 5, 7 e 9%.	49
Figura 4.8 – Erros relativos percentuais nos nós físicos 7, 8 e 9 e betas iguais a 5, 6, 7, 8 e 9%.	49
Figura 4.9 – Erros relativos percentuais nos nós físicos 7, 8 e 9 e betas iguais 9, 10, 11, 12 e 13%.	50
Figura 4.10 – Erros relativos percentuais nos nós físicos 19, 20 e 21 e betas iguais 1, 3, 5, 7 e 9%.	50
Figura 4.11 – Erros relativos percentuais nos nós físicos 19, 20 e 21 e betas iguais a 5, 6, 7, 8 e 9%.	51
Figura 4.12 – Erros relativos percentuais nos nós 19, 20 e 21 e betas iguais 9, 10, 11, 12 e 13%.	51
Figura 4.13 – Erros relativos percentuais nos nós físicos 34, 35 e 36 e betas iguais 1, 3, 5, 7 e 9%.	52
Figura 4.14 – Erros relativos percentuais nos nós físicos 34, 35 e 36 e betas iguais a 5, 6, 7, 8 e 9%.	52
Figura 4.15 – Erros relativos percentuais nos nós físicos 34, 35 e 36 e betas iguais 9, 10, 11, 12 e 13%.	52

Figura 4.16 – Erros relativos percentuais nos nós físicos 48, 49 e 50 e betas iguais 1, 3, 5, 7 e 9%.....	53
Figura 4.17 – Erros relativos percentuais nos nós físicos 48, 49 e 50, betas iguais 1, 3, 5, 7 e 9% e Gauss iguais a 10 e 12.....	53
Figura 4.18 – Erros relativos percentuais nos nós físicos 48, 49 e 50 e betas iguais a 5, 6, 7, 8 e 9%.....	53
Figura 4.19 – Erros relativos percentuais nos nós 48, 49 e 50 e betas iguais 9, 10, 11, 12 e 13%.....	54
Figura 4.20 – Erros relativos percentuais nos nós físicos 62, 63 e 64, betas iguais 1, 3, 5, 7 e 9%.....	54
Figura 4.21 – Erros relativos percentuais ampliados nos nós físicos 62, 63 e 64 e betas iguais a 1, 3, 5, 7 e 9%.....	55
Figura 4.22 – Erros relativos percentuais nos nós físicos 62, 63 e 64 e betas iguais a 6, 7, 8, 9 e 10%.....	55
Figura 4.23 – Detalhe da localização dos pontos internos.....	56
Figura 4.24 – Solução Analítica x MECV externo com 6, 8, 10 e 12 pontos de Gauss.....	58
Figura 4.25 – Distribuição da temperatura analítica e numérica com MECV externo.....	58
Figura 4.26 – Erro de temperatura utilizando MECV externo nos pontos internos da aresta \overline{AO}	59
Figura 4.27 – Erro de temperatura com MECV externo nos pontos internos da aresta \overline{OB}	59
Figura 4.28 – Distribuição do fluxo na direção x avaliado com MECV externo.....	61
Figura 4.29 – Cálculo do erro do fluxo na direção x avaliado com o MECV externo.....	61
Figura 4.30 – Distribuição do fluxo na direção y avaliado com o MECV externo.....	62

Figura 4.31 - Cálculo do erro do fluxo na direção y avaliado com o MECV externo.	62
Figura 4.32 – Erro resultante do fluxo nos pontos internos avaliado com o MECV externo.	63
Figura 4.33 – Resultante analítica e numérica do fluxo avaliadas com o MECV externo.	64
Figura 4.34 – Fator α no elemento descontínuo.....	66
Figura 4.35 – Detalhe da localização dos pontos internos.	66
Figura 4.36 – Erros percentuais nos pontos de controle 7, 8 e 9 e alfas iguais a 10, 20, 30 e 40%.	66
Figura 4.37 – Erros percentuais ampliados nos pontos de controle 7, 8 e 9.....	67
Figura 4.38 – Distribuição da temperatura nos pontos internos variando α	69
Figura 4.39 – Cálculo do erro de temperatura na aresta \overline{AO} variando α	69
Figura 4.40 – Cálculo do erro de temperatura na aresta \overline{OB} variando α	70
Figura 4.41 – Distribuição do fluxo na direção x variando α	71
Figura 4.42 – Cálculo do erro do fluxo na direção x variando α	71
Figura 4.43 – Distribuição do fluxo na direção y variando α	72
Figura 4.44 – Cálculo do erro do fluxo na direção y variando α	72
Figura 4.45 – Resultante analítica e numérica do fluxo variando α	73
Figura 4.46 – Erro resultante do fluxo variando α	73
Figura 4.47 – Detalhe da discretização irregular.	76
Figura 4.48 – Pontos de controle.	76
Figura 4.49 – Distribuição da temperatura com elementos irregulares e betas iguais a 1, 3, 5, 7 e 9%.	77

Figura 4.50 – Distribuição da temperatura com elementos irregulares e betas iguais a 10, 20, 30 40 e 50%.	77
Figura 4.51 – Erro de temperatura nos pontos de controle 7, 8 e 9 com elementos irregulares e betas iguais a 10, 20, 30, 40 e 50%.	78
Figura 4.52 – Erro de temperatura nos pontos de controle com elementos irregulares.	78
Figura 4.53 – Técnica de sub-elementação com a forma progressiva.	79
Figura 4.54 – Problema de fluxo de água subterrânea.	80
Figura 4.55 – Geometria e condições de contorno do problema.	80
Figura 4.56 – Distribuição do fluxo sobre todo o contorno do problema com MECV externo.	81
Figura 4.57 – Distribuição da temperatura sobre todo o contorno do problema com MECV externo.	81
Figura 4.58 – Distribuição da temperatura na aresta \overline{EF}	82
Figura 4.59 – Distribuição da temperatura na aresta \overline{FA}	82
Figura 4.60 – Distribuição da temperatura na aresta \overline{BC}	82

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Regras para integração unidimensional de integrais regulares.....	36
Tabela 2 – Temperatura analítica e numérica para os pontos internos avaliados com MECV externo.....	57
Tabela 3 – Erro de potencial para pontos internos avaliados com MECV externo....	57
Tabela 4 – Solução analítica e numérica do Fluxo resultante avaliados com o MECV externo.	64
Tabela 5 – Erro resultante do fluxo nos pontos internos avaliado com o MECV externo.	65
Tabela 6 – Temperatura analítica e numérica para os pontos internos variando α .	67
Tabela 7 – Erro de potencial para pontos internos variando α	68
Tabela 8 – Solução analítica e numérica do Fluxo resultante em pontos internos variando α	74
Tabela 9 – Erro resultante do fluxo nos pontos internos variando α	74
Tabela 10 – Geometria da discretização.....	76

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MEC	Métodos dos elementos de contorno
MEF	Métodos dos elementos finitos
MECV	Métodos dos elementos de contorno virtual
PVC	Problema de valor de contorno
Ω	domínio
Ω'	domínio infinito
Γ	contorno que delimita o domínio
Γ'	contorno virtual
d	distancia entre o contorno real e o contorno virtual
N_e	número de elementos do contorno
L_t	comprimento do contorno virtual
L	comprimento médio dos elementos
∇^2	operador Laplaciano
u	potencial
\vec{n}	vetor normal
w	função peso
q	fluxo
u^*	solução fundamental do potencial
q^*	solução fundamental do fluxo
x	ponto fonte

x'	ponto campo
Φ_1, Φ_2	funções de interpolação linear
r	distância entre o ponto fonte e o ponto campo
l	comprimento dos elementos
w_s	peso para quadratura de Gauss
S	números de pontos de Gauss
E_R	erro relativo percentual
N	solução numérica
A	solução analítica
β	distância ótima entre o contorno real e o virtual
α	distância dos nós físicos no interior do elemento descontínuo
v	campo de velocidade
K	coeficiente de permeabilidade do solo
h	potencial hidráulico

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	REVISÃO SOBRE APLICAÇÃO DE CONTORNOS VIRTUAIS.....	20
1.2	OBJETIVOS DO TRABALHO	24
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	25
2	O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC)	26
2.1	EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO.....	26
2.2	DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO.....	29
2.3	FORMULAÇÃO MATRICIAL.....	32
3	CONTORNO VIRTUAL NO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO ...	35
3.1	CLASSIFICAÇÃO DAS INTEGRAIS NO MEC.....	35
3.1.1	Integração das Integrais Regulares.....	36
3.1.2	Integração quase-singular	37
3.1.3	Integração Fracamente Singular.....	37
3.2	CLASSIFICAÇÃO DO MECV.....	40
3.2.1	Métodos dos Elementos de Contorno Regular	41
3.2.2	Métodos dos Elementos de Contorno Irregular	42
4	RESULTADOS NUMÉRICOS PARA O MECV EXTERNO	44
4.1	PROBLEMA DE MOTZ	44
4.1.1	Avaliação dos Pontos Internos para o MECV Regular Externo	56
4.1.2	Avaliação da Variável α no Interior do Elemento Descontínuo.....	65
4.1.3	Avaliação com Discretização Irregular.....	75

4.2	PLOBLEMA DE FLUXO DE ÁGUA SUBTERRÂNEA	79
5	CONCLUSÃO	83
5.1	PROPOSTA DE CONTINUIDADE	84
	REFERÊNCIAS.....	86

1 INTRODUÇÃO

Os métodos numéricos dedicados para análise de problemas de engenharia têm evoluído significativamente nos últimos anos. No desenvolvimento destes métodos grande esforços são empregados com o objetivo de aumentar a precisão numérica e a confiança em projetos de engenharia. Neste sentido os métodos numéricos devem gerar soluções com um grau de confiança satisfatório, permitindo assim que haja uma redução significativa do custo de projeto devido à necessidade de realização de inúmeros protótipos para testes experimentais. A técnica numérica para análise de engenharia mais popular é sem dúvida o Método dos Elementos Finitos (MEF) a qual é fundamentada na representação e solução aproximada de um problema de valor de contorno (PVC) em termos de equações diferenciais parciais. Outro método concorrente ao MEF é conhecido como Método dos elementos de contorno (MEC) que também resolve a mesma classe de problemas, porém baseado em equações integrais.

Para que as simulações computacionais tenham resultados precisos e eficientes, três fatores podem ser levados em consideração: o tipo de problema, o grau de precisão e tempo computacional. Sendo assim, a escolha do método numérico mais apropriado na solução de um problema está relacionada às suas características, as quais são geralmente apresentadas sob a forma de vantagens e desvantagens.

No MEF a equação diferencial governante é substituída por equações integrais que são aproximadas por equações algébricas. O domínio do problema é inteiramente dividido em subdomínios, que são os elementos finitos, formando as malhas (Becker,1992). Essa discretização faz com que o método necessite de informação de todo o domínio do problema resultando em matrizes esparsas e simétricas. Esta é a característica mais evidente, mas contribui para que o número de equações geradas possa aumentar muito o custo computacional. Em contrapartida, o MEF possui facilidade em se modelar e aplicar as condições de contorno. Para (Becker,1992), é o método mais desenvolvido comercialmente para problemas não-lineares e sua matemática é bem familiar para os engenheiros.

No MEC apenas o contorno é discretizado, o que garante a geração de malhas somente na superfície do problema, esse é um dos motivos que faz do MEC uma ferramenta mais vantajosa sobre os métodos de domínio. Outras vantagens do MEC podem ser destacadas em Katsikadelis (2002), entre elas está, a facilidade da aplicação das condições de contorno, inclusive em problemas tridimensionais com alta precisão computacional; aplicação em problemas com peculiaridades geométrica, resolução de problemas com equações parciais muito complexas, aplicação do método em domínios infinitos e um custo computacional pequeno devido a entrada de dados ser apenas do contorno. A implementação numérica do MEC possui um sistema de equações algébricas lineares onde suas matrizes são cheias e não simétricas, mas este inconveniente é contrabalançado pela dimensão de matrizes menores quando comparadas com as matrizes do MEF. Outra desvantagem desse método é que ele é menos utilizado na comercialização e sua matemática é mais complexa. Além disso, o tratamento da integração singular leva mais tempo quando comparados com outros métodos. A Figura 1.1 representa um mesmo problema gerado com malhas para auxiliar na comparação de cada um dos métodos.

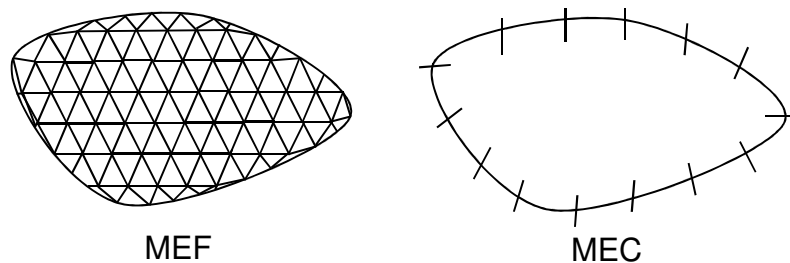


Figura 1.1 – Classificação dos métodos numéricos.

A representação da equação integral de um PVC pode ser interpretada como a solução exata do problema. No entanto os erros introduzidos na solução são provenientes da discretização do problema, com a conseqüente aproximação da geometria e variação funcional dentro de cada elemento e finalmente pelo tipo de integração numérica empregada. Alternativamente estes erros podem ser reduzidos com o aumento da discretização do problema, mas a qualidade das soluções será dependente da precisão do tipo de integração numérica utilizada.

A principal dificuldade neste processo de integração consiste no fato de que a integração das soluções fundamentais, conhecidas por Kernels, serem

frequentemente singulares, ou seja, tendem ao infinito quando o ponto fonte e ponto campo são coincidentes. Podem-se identificar cinco tipos de integrais dependendo da Kernel e da posição relativa do ponto de colocação com respeito ao elemento a ser integrado, as quais são: regular, quase singular, fracamente singular, fortemente singular e hipersingular.

As integrais singulares podem ser evitadas aplicando-se uma técnica conhecida como método dos elementos de contorno virtual (MECV), o qual consiste em um *offset* do contorno real Guzelbey (2000). O contorno virtual será utilizado para posicionar o ponto fonte toda vez que este for coincidente com o ponto campo, ou seja, quando a Kernel for singular. A utilização de contornos virtuais possui vantagens como, o tratamento analítico é bastante reduzido, pode-se facilmente estender o uso de um programa já implementado para outras formulações (trocar as soluções fundamentais) ou trocar o tipo de elemento (trocar as funções de forma). No caso de haver integrais singulares para tratar, muitas integrais analíticas devem ser refeitas quando se troca soluções fundamentais ou funções de forma. Em contra partida, há também desvantagens, a modelagem precisa de um contorno extra, o que introduz novos parâmetros empíricos para serem ajustados (distância do contorno virtual ao contorno real). Desta forma, o custo computacional pode aumentar.

1.1 REVISÃO SOBRE APLICAÇÃO DE CONTORNOS VIRTUAIS

Os primeiros estudos envolvendo contorno virtual (colocação do ponto fonte fora do contorno) e suas principais aplicações para problemas de engenharia foram desenvolvidos na década de 90. Desde então, o método foi continuamente aplicado em diversos tipos de problemas, apresentando resultados satisfatórios. Na literatura, este método também é apresentado como contorno fictício ou contorno artificial.

Um dos trabalhos pioneiros a empregar contorno virtual foi Sun et al (1991) apud Jianqiang et al (2011), a finalidade era eliminar a integral singular e manter as vantagens da equação integral de contorno.

Com base no MECV, Huanchun et al (1997), implementaram um sistema de

equações lineares para satisfazer as condições de contorno. O método foi aplicado em um domínio Ω ocupado por uma placa fina e elástica com contorno Γ . O domínio foi estendido a um domínio infinito Ω' com contorno virtual Γ' , como mostrado na Figura 1.2. Uma carga transversal e um momento de flexão normal são distribuídos sobre o contorno virtual. As equações integrais discretizadas no contorno virtual foram solucionadas usando mínimos quadrados e a distância entre o contorno virtual e o contorno real (*offset*) utilizado, foi de 20% do comprimento do lado da placa. Com esse método as vantagens do MECV são mantidas e os cálculos iterativos das integrais são evitados.

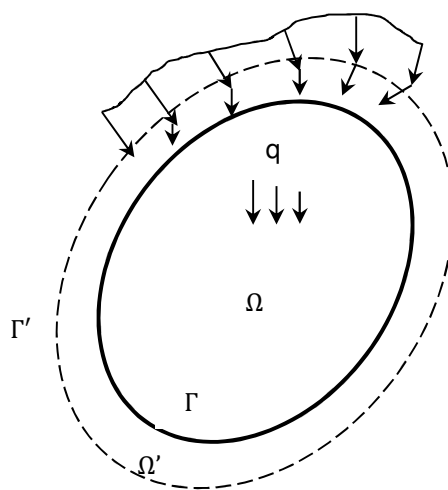


Figura 1.2 – Contorno real e virtual de uma placa fina e elástica..

Guzelbey et al (2000) testaram algumas técnicas empregando contorno virtual em uma viga engastada com carga vertical. Nas técnicas utilizadas foram examinadas a distância (*offset*) entre o contorno real e o virtual, entre 0,01 e 10 *offsets*, com 1 *offset* correspondente ao comprimento do elemento. Na integração com singularidade, devido a programação usada no estudo, o método de contorno virtual foi realizado, integrando o ponto fonte virtual com todos os nós do elemento considerado. Assim que a singularidade fosse eliminada a integração do MEC tradicional era imediatamente adotada. O método também é satisfatório quando aplicado em geometrias mais complexas devido a sua característica híbrida.

O mesmo conceito foi usado por Kanber et al (2003), em problemas de elasticidade de contato. Um dos modelos usado como estudo ilustrado na Figura 1.3

foi um problema de contato entre um cilindro rígido elástico e uma superfície côncava. Os resultados concordaram muito bem com uma variedade de contornos virtuais. Os autores constataram que o método pode ser utilizado em geometrias mais complexas e aplicado facilmente em todo tipo de programa de elementos de contorno.

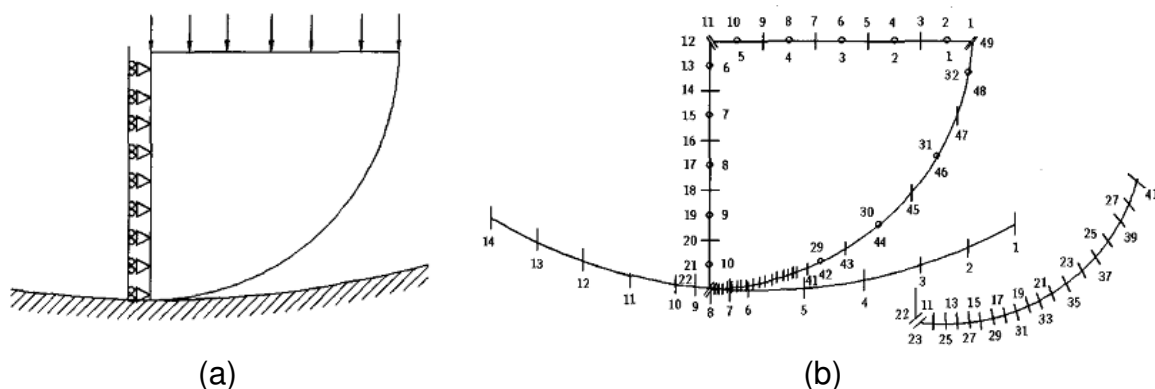


Figura 1.3 – (a) Cilindro rígido elástico em contato com uma superfície côncava; (b) Discretização do cilindro elástico e da superfície côncava. Fonte: Kanber et al (2003).

Weian et al (2005) aplicaram a técnica de elemento de contorno virtual em problemas de elasticidade para analisar o comportamento mecânico dos meios piezoelétricos. O método supõe que existem cargas fictícias atuando sobre o contorno virtual no interior de um domínio infinito. Desta forma, o método do contorno virtual é desenvolvido juntamente com as equações fundamentais para problemas planos piezoelétricos. As soluções numéricas demonstraram precisão aceitável deste método.

O método do contorno virtual também foi aplicado por Li et al. (2006), com a finalidade de evitar o cálculo da integral singular no contorno. O método foi constatado ser um dos mais utilizados métodos numéricos, para analisar os sólidos magneto-eletroelásticos com cargas virtuais determinadas por mínimos quadrados.

Lai et al. (2011) também aplicaram MECV com a finalidade de estabelecer uma relação de mapeamento entre o ponto fonte sobre os contornos reais e virtuais. A distância entre os contornos virtuais e contornos reais (*offset*) foram discutidos junto com a discretização do contorno virtual. Sun et al (1991) apud Lai et al (2011) e Silva (1996), estudaram a distância d entre o contorno real e virtual. Sun et al (1991) apud Lai et al (2011) demonstrou que a distância (*offset*) d mínima entre o contorno virtual e o real está relacionada com o número de elementos N_e do contorno. A

sugestão é supor que o comprimento total do contorno virtual L_v e o tamanho de qualquer elemento sobre o contorno virtual são iguais, assim a distância mínima é dado por $d = (L_v / N_e) / 2$. Para elementos discretizados com tamanhos diferentes, o *offset* é o comprimento da metade do elemento menor. Para reduzir a complexidade computacional, os elementos não devem ser muito pequenos.

A geometria do contorno virtual pode ser arbitrária e para Sun et al (1999) apud Weian et al (2005) é estabelecido uma razão entre o contorno virtual e o real. No entanto, é observado que a precisão do resultado não é satisfatória quando *offset* se torna muito próximo. Isso acontece devido à interferência da singularidade da solução fundamental. Para Silva (1996), quando um ponto fonte x é retirado para fora do domínio a uma distância $d = \varepsilon L$, onde ε é um coeficiente positivo e L é o comprimento médio dos elementos adjacentes, uma técnica chamada sub-elementação é aplicada. Esta técnica consiste na discretização dos próximos elementos a ser considerados. Sendo que o primeiro elemento deverá ter o comprimento de εL e sua extremidade estará a uma distância R do ponto fonte x . O segundo elemento deverá ter um comprimento R e sua extremidade deverá estar a uma distância R_1 de x e assim sucessivamente. Silva (1996) afirmou que com esta técnica é possível obter bons resultados. No caso de Lai et al. (2011) ao aplicar os conhecimentos de Sun et al (1991), não chegaram a uma conclusão definitiva sobre a localização do contorno virtual

A combinação de alguns métodos com o MECV foi discutido em problemas de elasticidade com domínio múltiplos por Haitao et al (2007) e Xu et al (2012). O novo método tem característica de um método sem malha, sem integral singular, possui a matriz dos coeficientes simétrica e pode ser utilizado para analisar domínios múltiplos bidimensional de estruturas compostas por subdomínios contendo diferentes materiais geométricos, um deles pode ser visualizado na Figura 1.4. Xu et al (2013) ainda compararam as propriedade do MECV combinada com outros métodos com o MEC convencional. A junção do MECV e o método de interpolação com uma função de base com estruturas radiais demonstraram maior precisão e eficiência computacional que o MEC convencional.

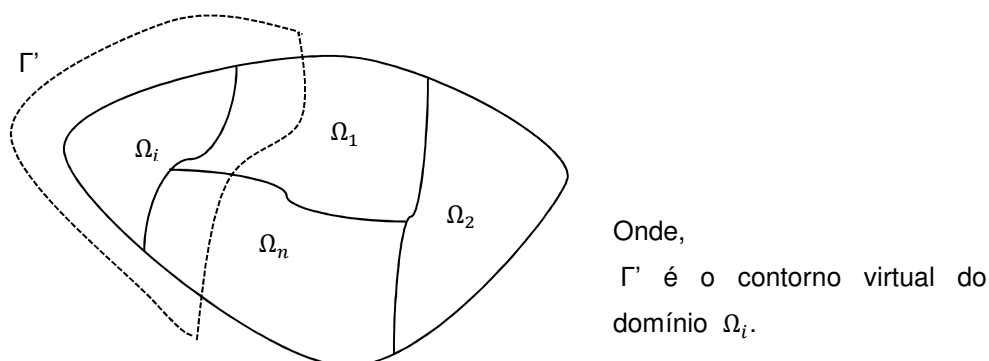


Figura 1.4 – Problema de domínios múltiplos e MECV.

Diversos métodos numéricos têm sido propostos para a solução do problema de Motz. Segundo Wang (2005) e Li et al (2006) o problema de Motz é referencial, sendo frequentemente conhecido por ser utilizado em pesquisas que apresentam problemas com contornos singulares. Para Georgio et al (1996) o contorno singular do problema ocorre onde as condições de contorno mudam da temperatura ($u = 0$) para o fluxo ($q = 0$).

Com a presente revisão bibliográfica é possível verificar que o presente tema ainda é atual e merece atenção.

1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO

A finalidade deste trabalho é apresentar um estudo que possibilite evitar a integração analítica quando houver singularidade, isto é, quando o ponto fonte for coincidente com o ponto campo no momento da integração. Através da introdução do MECV, o cálculo analítico da integral singular no contorno não será mais necessário e este será substituído por uma integração numérica. O segundo objetivo deste estudo consiste em determinar a melhor distância do contorno virtual e do contorno real na qualidade da solução do problema. Outro interesse refere-se na verificação da melhor posição do ponto de colocação dentro do elemento linear descontínuo. Ao contrário do elemento linear contínuo, o qual possui seus nós físicos nos extremos do elemento; no elemento linear descontínuo os nós físicos são deslocados a um valor α para o interior do elemento. A influência do valor de α

associado a melhor distância de *offset* na qualidade da solução de um problema, também são objetos de interesse deste estudo.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Para facilitar a compreensão do tema abordado, este texto será organizado em 5 capítulos. O capítulo 1 é a presente introdução, onde estão apresentados: a relevância do tema relacionado à aplicação da técnica do contorno virtual, uma revisão bibliográfica sobre os principais trabalhos e seus resultados obtidos e ainda os objetivos deste trabalho. O capítulo 2 faz uma breve apresentação do Método dos Elementos de Contorno para problemas potenciais, que será utilizado na aplicação do Contorno virtual. O capítulo 3 apresenta as principais técnicas de integração das Kernels e a teoria da técnica do MECV, bem como as suas classificações. O capítulo 4 refere-se aos resultados numéricos obtidos empregando o MECV e MEC tradicional. Finalmente no capítulo 5 são apresentadas conclusões finais e propostas de continuidade.

2 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC)

O MEC é um método computacional para a solução de equações diferenciais parciais que são transformadas em equações integrais sobre o contorno em estudo. A equação integral de contorno pode ser deduzida com base em considerações dos resíduos ponderados, Teorema recíproco de Betti, 2º identidade de Green e princípios fundamentais como trabalho virtual. As fundamentações deste capítulo vêm de estudos realizados nos textos de Brebbia & Dominguez (1992) e Kane (1994).

2.1 EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

Considerando a equação de Poisson em um domínio bidimensional:

$$\nabla^2 u = b \quad (2.1)$$

Onde, $\nabla^2(\) = \frac{\partial^2(\)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\)}{\partial x_2^2}$ é o operador Laplaciano, x_1 e x_2 são as duas coordenadas e b é a fonte térmica. O vetor normal (\vec{n}) do contorno (Γ) aponta para fora do domínio (Ω). A equação (2.1) é multiplicada por uma função peso w e pode ser escrita como,

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u - b) w d\Omega = 0 \quad (2.2)$$

Integrando a equação (2.2) por partes em relação a x_1 e x_2 , resulta em:

$$\int_{\Omega} \left(-\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} - bw \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} w d\Gamma = 0 \quad (2.3)$$

O termo $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}$ é o fluxo q . Realizando novamente uma integração

por partes, agora na equação (2.3) tem-se:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} u + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} u - bw \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} w d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial n} u d\Gamma = 0 \quad (2.4)$$

A equação (2.4) ainda pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) w \, d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla^2 w) u \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} w \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial n} u \, d\Gamma = 0 \quad (2.5)$$

A equação (2.5) é reescrita como a forma conhecida por Teorema de Green.

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) w - (\nabla^2 w) u \, d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} w - \frac{\partial w}{\partial n} u \right) d\Gamma \quad (2.6)$$

O contorno (Γ) do domínio (Ω) é dividido em duas partes e denotado por $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. As condições de contorno para a equação de potencial podem ser classificadas da seguinte forma:

- Condição de Dirichlet define o valor da função no contorno, ou seja, $u = \bar{u}$ sobre o contorno Γ_1 .
- Condição de Neumann é a derivada da temperatura em relação a componente normal, ou seja, é o fluxo $q = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}$ sobre o contorno Γ_2 .

Onde \bar{u} e \bar{q} indicam os valores conhecidos conforme ilustrado na Figura 2.1.

Aplicando as condições de contorno na equação (2.4) tem-se:

$$\int_{\Omega} ((\nabla^2 w) u - bw) \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} q w \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{q} w \, d\Gamma - \int_{\Gamma_1} u \frac{\partial w}{\partial n} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} \, d\Gamma = 0 \quad (2.7)$$

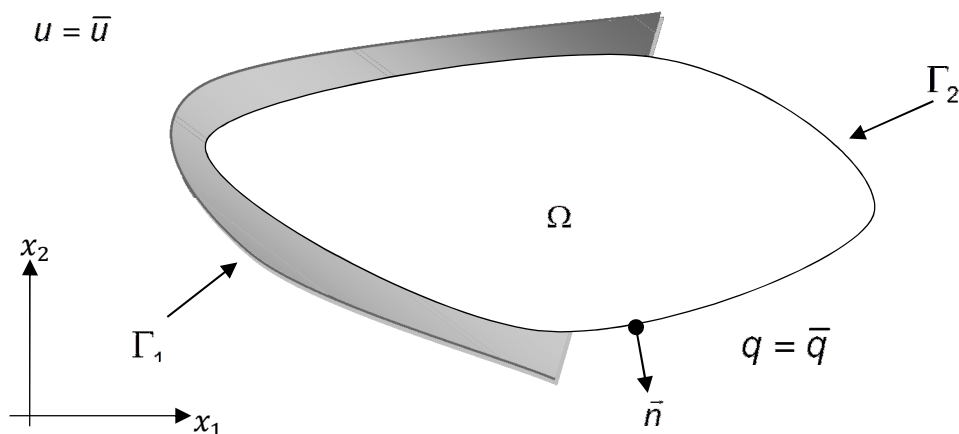


Figura 2.1 – Definição da Equação de Laplace.

A equação (2.7) é integrada por partes para obter a equação original de Laplace, o que resulta em:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} - bw \right) d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial n} u d\Gamma + \int_{\Gamma_1} qw d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{q} w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} u \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dividindo a primeira integral no contorno Γ , em dois termos Γ_1 e Γ_2 , a equação (2.8) é reescrita como:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} - bw \right) d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial n} u d\Gamma + \int_{\Gamma_1} qw d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{q} w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Integrando por partes novamente,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} ((\nabla^2 u)w - bw) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma} w q d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial n} u d\Gamma + \int_{\Gamma_1} qw d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{q} w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

A organização da equação (2.10) resulta em:

$$\int_{\Omega} ((\nabla^2 u - b)w) d\Omega + \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) w d\Gamma = 0 \quad (2.11)$$

Considerando a não existência de fontes de calor no domínio, isto é, $b=0$. A equação integral de contorno que descreve o potencial u e o fluxo q sobre um contorno Γ é reescrita como:

$$c^i u^i(x) + \int_{\Gamma} u(x) q^*(x, x') d\Gamma = \int_{\Gamma} q(x) u^*(x, x') d\Gamma \quad (2.12)$$

Onde u^* e q^* são respectivamente a solução fundamental de potencial e fluxo em x devido a uma carga unitária aplicada em x' .

$$u^* = \frac{1}{2\pi k} \int_{\Gamma} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\Gamma \quad (2.13)$$

$$q^* = k \frac{\partial u^*}{\partial \vec{n}}$$

Onde \vec{n} é a direção do fluxo, k a condutividade térmica e $r = \|x - x^*\|$ a distância do ponto onde a fonte de calor é concentrada (ponto fonte), até um ponto onde se deseja calcular o valor da temperatura (ponto campo), como mostrado na Figura 2.2.

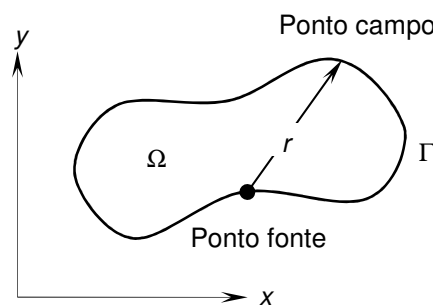


Figura 2.2 – Distância r entre o ponto fonte e o ponto campo

O parâmetro c^i depende da posição do ponto fonte i que é dado por:

$$c^i = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in (\Omega) \\ \frac{1}{2}, & \text{se } i \in (\Gamma) \\ 0, & \text{se } i \notin (\Omega, \Gamma) \end{cases} \quad (2.14)$$

Quando o contorno é suave, ou seja, quando não é canto, o parâmetro $c = \frac{1}{2}$.

2.2 DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO

É necessário discretizar o contorno Γ , para encontrar um sistema de equações lineares, que possibilite encontrar os valores desconhecidos e assim resolver a equação integral de contorno. O contorno é dividido em N segmentos ou elementos como visto na Figura 2.4. Geralmente a discretização do contorno Γ é realizada usando elementos de contorno lineares, onde os nós físicos são os extremos do segmento e as equações integrais de contorno serão escritas como a soma de integrais de parte deste contorno.

Os valores de u e q em qualquer ponto do elemento são escritos em termos de valores nodais e duas funções de interpolação Φ_1 e Φ_2 .

$$u(\xi) = \Phi_1 u^1 + \Phi_2 u^2 = [\Phi_1 \Phi_2] \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

$$q(\xi) = \Phi_1 q^1 + \Phi_2 q^2 = [\Phi_1 \Phi_2] \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

Onde ξ é um ponto de integração definido no intervalo $[-1,1]$. A equação (2.16) apresenta as funções de forma lineares.

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2}(1-\xi) \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2}(1+\xi) \end{aligned} \quad (2.16)$$

A Figura 2.3 ilustra as funções de forma lineares contínuas enquanto a Figura 2.4 apresenta a discretização com elementos lineares contínuos.

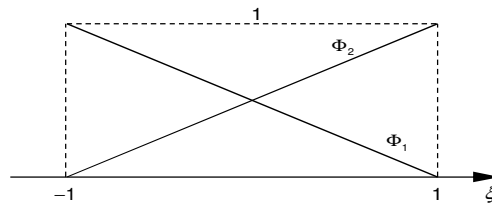


Figura 2.3: Função de forma para elemento linear contínuo

Outro tipo de elemento utilizando MEC é o elemento linear descontínuo, que consiste em deslocar os nós de dois elementos lineares que se encontram na extremidade do elemento, para evitar que se tenham duas normais em um mesmo ponto. O elemento linear descontínuo é composto por nós físicos e geométricos diferentes como visto na Figura 2.5. Se os dois nós de um elemento são deslocados a partir da extremidade numa distância a e b respectivamente, a equação (2.14) pode ser particularizada da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} u^a \\ u^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1(\xi_a) & \Phi_2(\xi_a) \\ \Phi_1(\xi_b) & \Phi_2(\xi_b) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

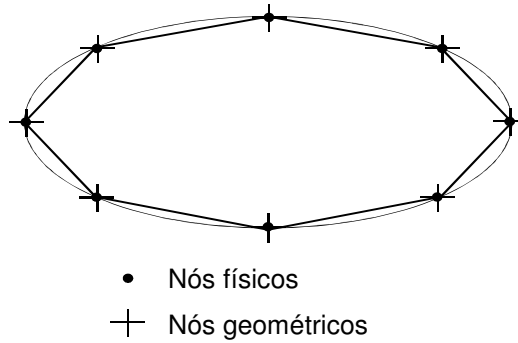


Figura 2.4 – Discretização com elementos lineares contínuos.

Onde as coordenadas locais para os pontos nodais são:

$$\begin{aligned}\xi_a &= \left(\frac{2a}{l}\right) - 1 \\ \xi_b &= 1 - \left(\frac{2b}{l}\right)\end{aligned}\quad (2.18)$$

O valor de u pode se encontrado em qualquer ponto do elemento em termo dos valores nodais, então substituindo a equação (2.18) na equação (2.17) tem-se:

$$u(\xi) = [\Phi_1 \quad \Phi_2] Q \begin{Bmatrix} u^a \\ u^b \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

Onde,

$$Q = \frac{1}{l-a-b} \begin{bmatrix} l-b & -a \\ -b & l-a \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

As funções de interpolação modificadas para os nós deslocados são dadas, multiplicando a matriz Φ por Q , obtendo,

$$\bar{\Phi} = \Phi Q = [\bar{\Phi}_1 \quad \bar{\Phi}_2] \quad (2.21)$$

E as funções modificadas são dadas por,

$$\bar{\Phi}_1 = \frac{-1+b+\xi}{-2+a+b} \quad \text{e} \quad \bar{\Phi}_2 = \frac{-1+a+\xi}{-2+a+b} \quad (2.22)$$

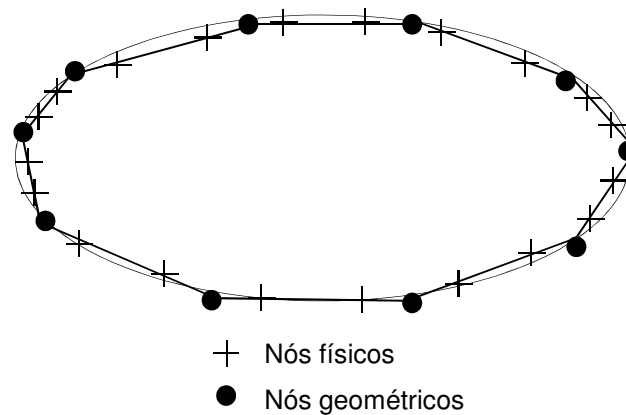


Figura 2.5 – Discretização com elementos lineares descontínuos.

A mesma relação é escrita para o fluxo,

$$q(\xi) = [\Phi_1 \ \Phi_2] Q \begin{Bmatrix} q^a \\ q^b \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

As figuras de interpolação, modificadas para o elemento linear descontínuo, estão ilustradas na Figura 2.6.

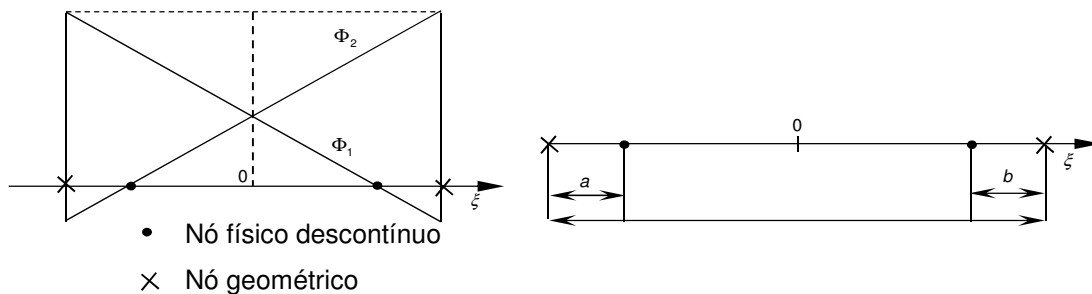


Figura 2.6: Elemento j linear descontínuo e funções de forma para elementos descontínuos.

2.3 FORMULAÇÃO MATRICIAL

Após a discretização sobre um elemento j qualquer do contorno, conforme a Figura 2.5, o lado esquerdo da equação (2.12) pode ser reescrita:

$$\int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\Phi_1 \ \Phi_2] q^* d\Gamma \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [h_1^{jj} \ h_2^{jj}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

Onde para cada elemento ' j ', têm-se dois termos,

$$\begin{aligned}
 h_1^{jj} &= \int_{\Gamma_j} \Phi_1 q^* d\Gamma \\
 h_2^{jj} &= \int_{\Gamma_j} \Phi_2 q^* d\Gamma
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

A integral sobre o lado direito da equação (2.12) é realizada de forma análoga,

$$\int_{\Gamma_j} q u^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\Phi_1 \ \Phi_2] u^* d\Gamma \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = [g_1^{jj} \ g_2^{jj}] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}
 \tag{2.24}$$

Onde,

$$\begin{aligned}
 g_1^{jj} &= \int_{\Gamma_j} \Phi_1 u^* d\Gamma \\
 g_2^{jj} &= \int_{\Gamma_j} \Phi_2 u^* d\Gamma
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

As equações (2.23) e (2.25) são substituídas em todos os elementos 'j' da discretização da equação (2.12) que é reescrita,

$$c^j u^j + \sum_{j=1}^N H^{jj} u^j = \sum_{j=1}^{2N} G^{jj} q^j
 \tag{2.26}$$

Se o contorno for suave tem-se $c = \frac{1}{2}$ como é o caso do MEC. Desta forma a equação (2.12) é reescrita como,

$$\frac{1}{2} u^j(x) + \int_{\Gamma} u(x) q^*(x, x') d\Gamma = \int_{\Gamma} q(x) u^*(x, x') d\Gamma
 \tag{2.27}$$

Após a aplicação de todas as condições de contorno, o sistema da equação (2.22) é reordenado. Um exemplo simples como o da Figura 2.7 é apresentado para o entendimento da formulação matricial,

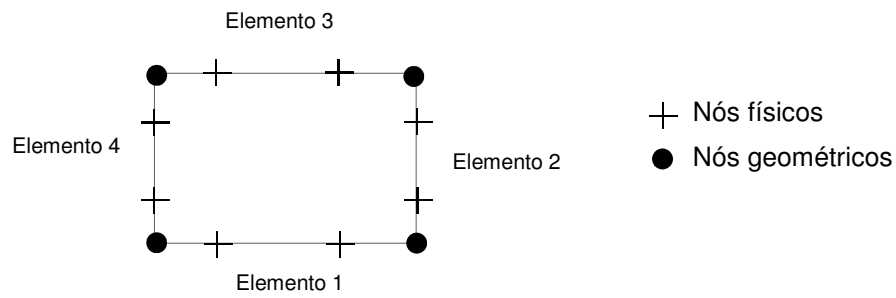


Figura 2.7 – Discretização com 4 elementos descontínuos e 8 nós.

$$\begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{18} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{81} & \dots & H_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \vdots \\ \bar{u}_4 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{18} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{81} & \dots & G_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_4 \\ \bar{q}_1 \\ \vdots \\ \bar{q}_4 \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

As equações integrais são resolvidas empregando a quadratura de Gauss no MEC. Quando a singularidade estiver presente nas soluções fundamentais a quadratura de Gauss deve ser substituída pela integração analítica. Colocando os valores de potencial e fluxo desconhecidos da equação (2.28), do lado esquerdo e os valores conhecidos do lado direito, resulta no seguinte sistema de equações:

$$[A]\{X\}=[F] \quad (2.29)$$

3 CONTORNO VIRTUAL NO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

No MEC tradicional, os pontos fontes encontram-se sobre o contorno do domínio e a forma de integração do método está ilustrada na Figura 3.1.



Figura 3.1 – MEC Tradicional.

Na formulação dos elementos de contorno, a determinação das grandezas das variáveis básicas depende da quantidade de pontos fontes. A influência de cada ponto fonte sobre o ponto campo é apenas uma função de uma distância r entre dois pontos. As soluções fundamentais, equação (2.13), estão presentes nas matrizes G e H da equação integral de contorno, equação (2.26). Essas soluções contêm os termos $\ln r$ e $1/r$ pertencentes respectivamente a u^* e q^* . Esses termos se tornam singulares na integração, quando o ponto fonte e o ponto campo se tornam muito próximo. A singularidade ocorre porque r se aproxima de zero e os termos $\ln r$ e $1/r$ tendem ao infinito. Desta forma os elementos da matriz de incidência não podem ser resolvidos pelo MEC tradicional aplicando quadratura Gaussiana. Convencionalmente a integração singular é determinada analiticamente.

A apresentação do MECV acontecerá logo após um estudo realizado sobre a classificação das integrais existentes no MEC.

3.1 CLASSIFICAÇÃO DAS INTEGRAIS NO MEC

O MEC é um campo extremamente atrativo para o desenvolvimento e testes de técnicas de integrações. Quando se tratando de um problema a ser resolvido via MEC, dependendo do tipo de solução fundamental e da distância do ponto fonte ao ponto campo haverá cinco tipos de integrais a serem resolvidas: regular, quase-

singular, fracamente singular, fortemente singular e integrais hipersingulares. Nesta seção serão descritos sucintamente alguns dos principais tratamentos empregados para os três primeiros tipos de integral (regular, quase-singular, fracamente singular) conforme apresentado em Wrobel (2002) e na sequência a técnica de contorno virtual.

3.1.1 Integração das Integrais Regulares

O método mais comum para a integração de integrais regulares é o método dos elementos de contorno. As integrais regulares são aquelas em que o ponto fonte e campo não pertencem ao mesmo elemento, independentemente do tipo de Kernel. Para problemas de MEC 1D as integrais regulares podem ser avaliadas numericamente por Gauss Legendre apresentado conforme a equação (3.1).

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \sum_{s=1}^S A_s f(\eta_s) \quad (3.1)$$

Onde A_s e η_s são os pesos e as abscissas, respectivamente. O número de pontos de Gauss é representado pela variável S . Para problemas 2D, apresenta-se um simples conjunto de regras baseado na distância entre o ponto de colocação e o centro do elemento (d) e o comprimento do elemento (l), conforme a Tabela 1. A Figura 3.2 apresenta o esquema para aplicar as regras da Tabela 1.

Tabela 1 – Regras para integração unidimensional de integrais regulares.

Condição	Quadratura de Gauss
$d > 5.5 l$	2
$5.5 l \geq d > 1.5 l$	4
$1.5 l \geq d$	6

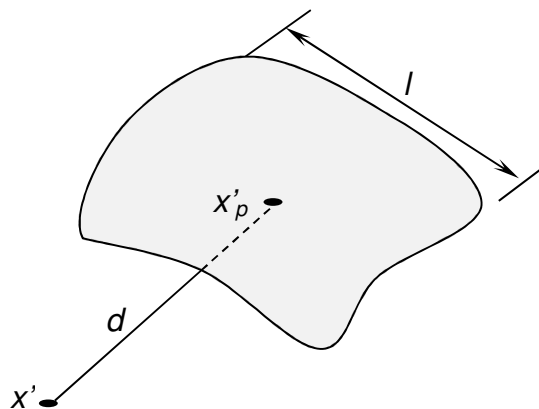


Figura 3.2 – Menor distância recomendada do ponto de colocação ao elemento integrado.

3.1.2 Integração quase-singular

Integrais quase singulares são aquelas integrais que possuem o ponto de colocação muito próximo ao elemento a ser integrado. Neste caso alguns tratamentos são necessários para evitar que a proximidade do ponto fonte ao ponto campo não perturbe o integrando. Algumas técnicas têm sido empregadas para avaliar este tipo de integral, como por exemplo, Subdivisão do elemento, Integração Gaussiana Adaptativa, Técnicas de integração de variáveis e Integrações Semi-analíticas baseadas em expansões de séries.

3.1.2.1 Técnica da subdivisão do elemento

A técnica da subdivisão consiste em dividir o elemento sob integração em n subintervalos geralmente de mesmo comprimento. A ordem da quadratura, dependendo do Kernel também poderá ser aumentada.

3.1.2.2 Regularização e técnica de transformação

Esta técnica foi proposta por Telles (1987) para lidar com integrais near-singular e weakly-singular. A técnica envolve uma troca de variáveis, onde o Jacobiano é forçado a ser zero no caso de integrais fracamente singulares ou tomar um valor ótimo dependendo da distância do ponto de colocação ao elemento sobre consideração (integral quase singular). Esta transformação resulta em uma concentração de pontos de Gauss próximo ao ponto de colocação x' ou sua posição x'_p (projeção de x' com distância mínima).

3.1.3 Integração Fracamente Singular

O tipo de integral a ser tratada dependerá da posição do nó de colocação dentro do elemento a ser integrado. A singularidade da Kernel será da ordem de $O(\ln(1/R))$ e $O(1/R)$ para problemas 2D e 3D, respectivamente. Existem três possibilidades básicas de tratamento destes tipos de integrais:

- Integração Gaussiana Ponderada
- Transformação de variáveis (quadratura de Telles)
- Subtração da singularidade

3.1.3.1 Integração Gaussiana Ponderada

A fórmula Gaussiana com a função peso $\ln(1/\eta)$ tem sido usada para o tratamento de $\ln(1/R)$ no MEC.

$$\int_0^1 f(\eta) \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta = \sum_{s=1}^S w_s f(\eta_s) \quad (3.2)$$

Onde w_s e η_s são os pesos e as abscissas para a quadratura Gaussiana logarítmica, respectivamente. Para elementos quadráticos ou de alta ordem com contornos curvos, a distância r entre os pontos de colocação ou integração podem ser escritos como:

$$r(x', x(\eta)) = (\eta - \eta') r_d \quad (3.3)$$

Para elementos retos $r_d = l/2$ onde l representa o comprimento do elemento. A integral envolvendo o termo $\ln(1/r)$ pode ser escrito como:

$$\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1}{r}\right) N_\alpha(\eta) J(\eta) d\eta = \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1}{\eta - \eta'}\right) N_\alpha(\eta) J(\eta) d\eta - \int_{-1}^1 \ln(r_d) N_\alpha(\eta) J(\eta) d\eta \quad (3.4)$$

Como a quadratura para a fórmula logarítmica ponderada é gerada no intervalo η é $[0,1]$ a primeira integral do lado direito da equação (3.4) precisa ser transformada. Para a singularidade em $\eta' = +1$ e $\eta' = -1$, a transformação é dada por:

$$\eta' = 1 - 2\eta \quad e \quad \eta' = 2\eta - 1 \quad (3.5)$$

Para elementos quadráticos ou de alta ordem, a singularidade deve ser ajustada dentro do intervalo de integração. Neste caso, a distância r pode ser redefinida como:

$$\begin{aligned} r &= (\eta - \eta') r_R & -1 \leq \eta \leq \eta' \\ r &= (\eta - \eta') r_L & \eta' \leq \eta \leq 1 \end{aligned} \quad (3.6)$$

A primeira integral do lado direito da equação (3.4) pode ser escrita como a soma de duas integrais:

$$\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1}{\eta - \eta'}\right) N_\alpha(\eta) J(\eta) d\eta = \int_{-1}^{\eta'} \ln\left(\frac{1}{\eta - \eta'}\right) N_\alpha(\eta) J(\eta) d\eta + \int_{\eta'}^1 \ln\left(\frac{1}{\eta - \eta'}\right) N_\alpha(\eta) J(\eta) d\eta \quad (3.7)$$

A integral (3.7) necessita ser ajustada ao intervalo $[0,1]$ para que a equação (2) possa ser utilizada. A transformação é dada por:

$$\begin{aligned} \eta' &= (\eta'+1)(1-\eta) - 1 & -1 \leq \eta \leq \eta' \\ \eta' &= (1-\eta')\eta - \eta' & \eta' \leq \eta \leq 1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

A grande dificuldade de empregar a integração Gaussiana ponderada consiste no fato de que a integral tem que ser separada em uma parte singular e outra não-singular. Este procedimento pode ser até simples para problemas potenciais bi-dimensionais, mas relativamente complicados para formulações do MEC axissimétricos onde a singularidade não é explícita.

3.1.3.2 Técnica da transformação de variável (Telles)

Esta técnica tem por objetivo realizar uma transformação de uma variável de maneira que o Jacobiano da transformação resultante cancele exatamente a singularidade ou ainda enfraqueça o efeito da singularidade de maneira que uma relativa quadratura de baixa ordem possa ser utilizada para resolver a integração. Telles (1987) propôs uma técnica de transformação de variável para a integração de integrais fracamente singulares para problemas bidimensionais. A transformação é dada por,

$$\eta = \eta' + \frac{1}{2} [1 - (\eta')^2] \quad (3.9)$$

Para a singularidade em $\eta=1$. O Jacobiano da transformação é dado por,

$$J = \frac{d\eta}{d\eta'} = 1 - \eta' \quad (3.10)$$

$$\int_{-1}^1 \ln(1-\eta) d\eta = \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{(1-\eta')^2}{2}\right) (1-\eta') d\eta' \quad (3.11)$$

Na quadratura proposta por Telles foi utilizada uma transformação baseada em um polinômio de terceiro grau para poder ajustar a integral com singularidade dentro do intervalo de integração $[-1,1]$. Considerando então um polinômio de terceiro grau,

$$\eta(\xi) = a\xi^3 + b\xi^2 + c\xi + d \quad (3.12)$$

E impondo as seguintes condições

$$\left. \frac{d^2\eta}{d\xi^2} \right|_{\eta'} = 0 \quad ; \quad \left. \frac{d\eta}{d\xi} \right|_{\eta'} = 0 \quad ; \quad \eta(1) = 1 \quad ; \quad \eta(-1) = -1 \quad (3.13)$$

Onde as constantes da equação (3.12) podem ser avaliadas como:

$$a = \frac{1}{1+\bar{\xi}^2} \quad ; \quad b = -\frac{3\bar{\xi}}{1+\bar{\xi}^2} \quad ; \quad c = \frac{3\bar{\xi}^2}{1+\bar{\xi}^2} \quad ; \quad d = -b \quad (3.14)$$

Onde $\bar{\xi}$ é o valor de ξ que satisfaz $\eta(\bar{\xi}) = \bar{\eta}$ dado por,

$$\bar{\xi} = \sqrt[3]{\bar{\eta}\eta^* + |\eta^*|} + \sqrt[3]{\bar{\eta}\eta^* - |\eta^*|} + \bar{\eta} \quad (3.15)$$

Neste caso o Jacobiano da transformação resulta em,

$$J = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{3(\xi - \bar{\xi})}{1 + 3\bar{\xi}^2} \quad (3.16)$$

A grande característica desta transformação recai no fato de que os pontos de integração são automaticamente concentrados próximos à singularidade do ponto $\bar{\xi}$.

3.2 CLASSIFICAÇÃO DO MECV

Uma das formas alternativas à integração analítica é utilizando o MECV. Esse método consiste no deslocamento do ponto fonte para fora do domínio finito, quando este coincide com o ponto campo. Dessa forma a distância r entre o ponto campo e ponto fonte se torna um valor finito diferente de zero e a singularidade na integração desaparece. Para os demais campos a integração pode ser realizada utilizando o MEC tradicional ou adotar técnicas diferentes de integração via MECV. No tratamento da singularidade utilizando MECV observa-se que o coeficiente c^i da equação (2.12) terá valor zero, já que o ponto fonte é posicionado fora do domínio, conforme mostrado na Figura 3.3. Neste caso, para o cálculo desses pontos singulares a equação (2.26) será reescrita como,

$$\sum_{j=1}^N H^j u^j = \sum_{j=1}^{2N} G^j q^j \quad (3.1)$$

A distância entre o contorno real e o contorno virtual conhecida como *offset*, pode ser determinada por uma relação entre os dois contornos. No entanto, é observado que o ajuste da distância ótima, denotada neste trabalho por β , ainda é um problema para o MECV. Caso esta distância seja muito pequena, as integrais se tornam quase singulares, o que exige mais pontos de integração para um cálculo adequado. Caso esta distância seja muito grande, as linhas das matrizes $[H]$ e $[G]$ se tornam muito parecidas e o problema tende a ficar mal condicionado, especialmente se houver muitos elementos.

O MECV é classificado em contorno regular e contorno irregular. No caso específico do contorno regular, este ainda apresenta duas variações, sendo uma delas conhecida por contorno virtual suave e a outra por contorno virtual variável. Ambos os métodos serão discutidos na sequência deste texto.

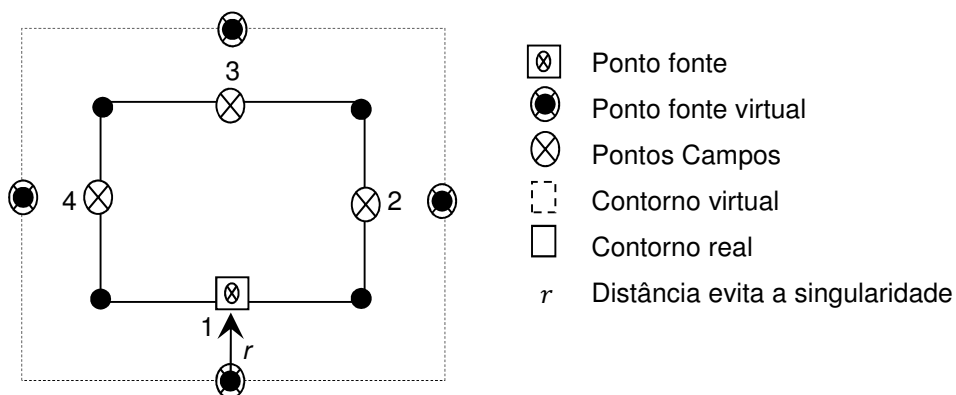


Figura 3.3 – MECV

3.2.1 Métodos dos Elementos de Contorno Regular

Neste método todas as integrações são realizadas com o ponto de colocação no contorno virtual, desta forma, as integrais de contorno não serão singulares e os coeficientes c^i sempre terão valor zero. A precisão do método depende da localização dos contornos virtuais e para ajustar o *offset*, pode ser usado um contorno virtual suave ou um contorno virtual variável. No método virtual suave, o *offset* será o comprimento da metade dos elementos como mostra a Figura 3.4. Maiores detalhes podem ser encontrados em Guzelbey (2000) e Kanber (2003).

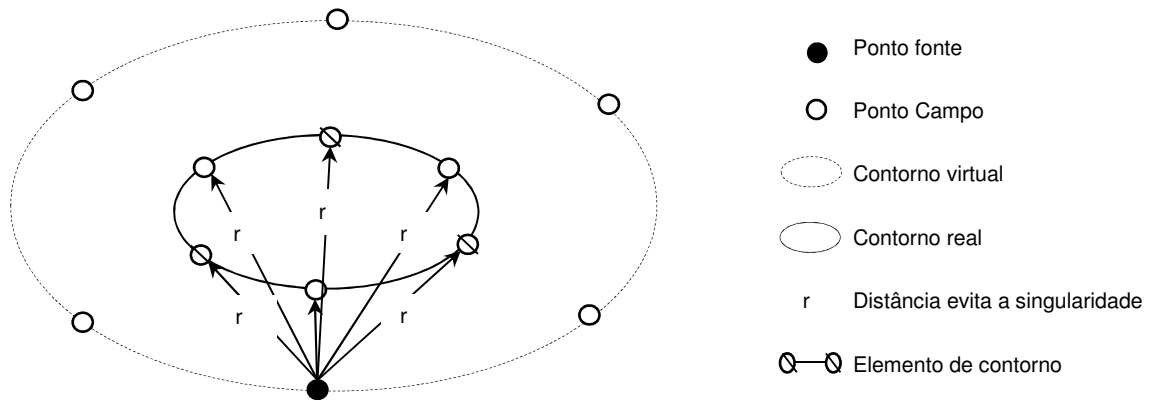


Figura 3.4 – Ponto fonte no elemento de contorno regular suave.

No método de contorno variável, o *offset* é a média do comprimento dos elementos adjacentes e deslocados a partir dos nós centrais do elemento de contorno, conforme a Figura 3.5.

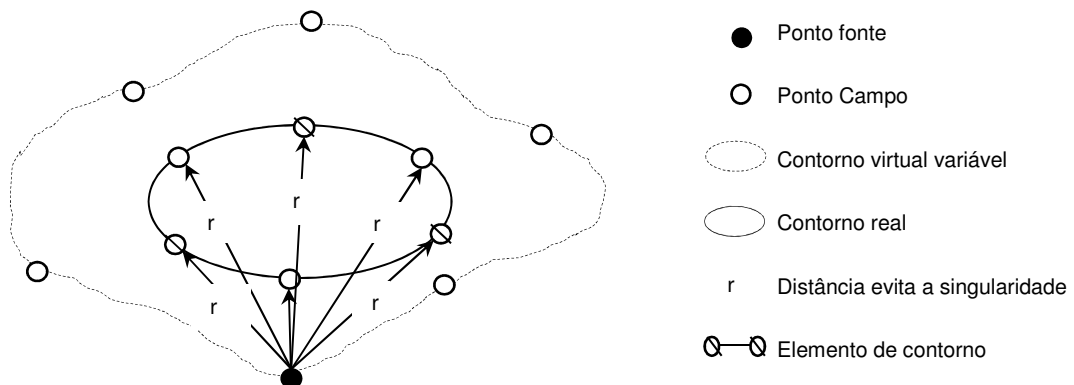


Figura 3.5 – Ponto fonte no elemento de contorno regular variável

3.2.2 Métodos dos Elementos de Contorno Irregular

O método dos elementos de contorno irregular é uma alternativa híbrida para evitar a singularidade. Nesta técnica os pontos fontes permanecem no contorno real antes de coincidirem com o ponto campo (ponto fonte \neq ponto campo). Quando o ponto fonte e o ponto campo coincidirem, o ponto fonte é posicionado em um contorno virtual fora do domínio finito, afastado a uma distância do contorno real. Quando o ponto fonte estiver posicionado sobre o contorno virtual, o raio será diferente de zero e a integração numérica poderá ser empregada, conforme ilustrado na Figura 3.6 (a).

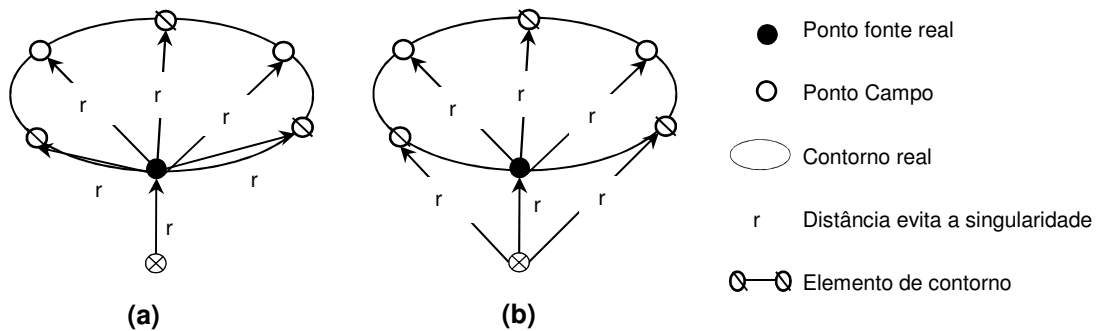


Figura 3.6 – Métodos dos elementos de contorno virtual irregular

Na ausência de singularidade $r \neq 0$, o MEC tradicional será aplicado normalmente. O *offset* pode ser uma constante ou uma variável conforme visto anteriormente. Devido a problemas de singularidade, no momento em que o ponto fonte coincide com o ponto do campo $r = 0$, o ponto fonte virtual integrará os nós do elemento de contorno relacionado em vez apenas do ponto fonte real. Quando um novo ponto não pertencente a esse elemento for considerado, o nó do contorno virtual será substituído pelo ponto fonte real como visto na Figura 3.6 (b). Quando a geometria for complexa, segundo Guzelbey et al (2000), não é recomendado o método do contorno regular. Neste caso o método de contorno irregular é o mais recomendado devido a sua característica híbrida e por oferecer um desempenho satisfatório para uma maior variação de *offsets*. Isto também se deve ao fato, de que o MEC tradicional é usado sempre que os pontos fontes e campos não forem coincidentes.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS PARA O MECV EXTERNO

Neste capítulo será realizado um estudo para determinar a distância ótima do *offset* (β) empregando o MECV regular em problemas clássicos da teoria de potencial. A técnica de colocação utilizada será no contorno virtual externo ao problema analisado, denotada por MECV externo. Nesta técnica o ponto fonte estará sempre posicionado sobre o contorno virtual externo ao problema conforme ilustrado na Figura 4.1. A quantidade de pontos de Gauss empregados na integração numérica também será considerado. Uma vez observada a técnica, a quantidade mínima de pontos de Gauss e a melhor distância de *offset*, será avaliada a melhor configuração da variável α no interior do elemento descontínuo.

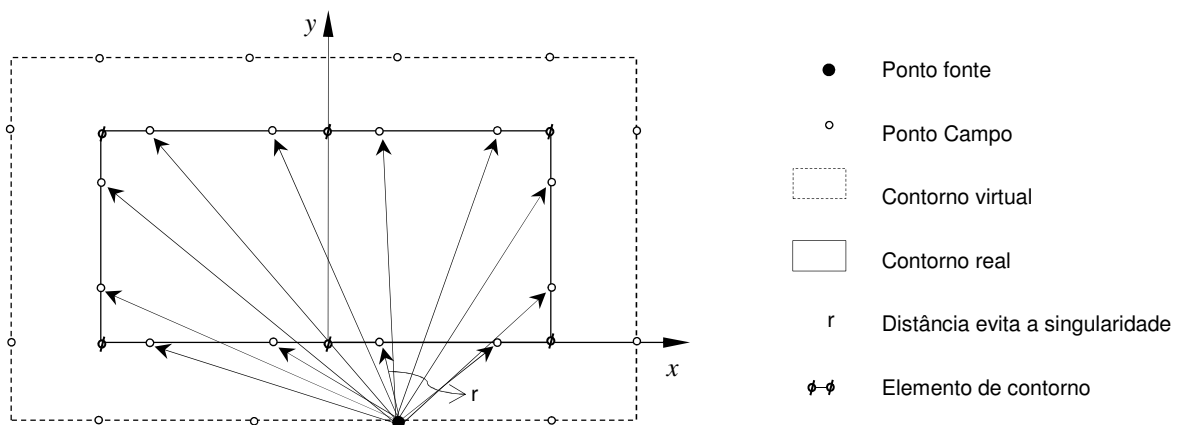
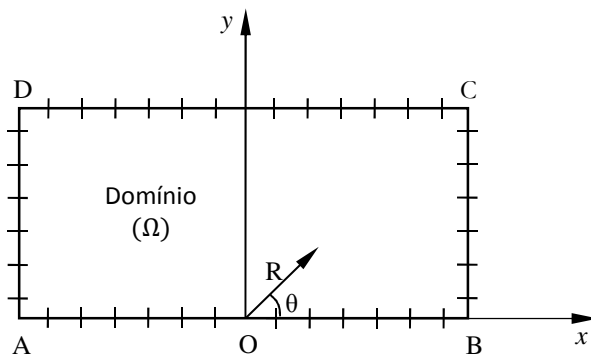


Figura 4.1 – MECV regular externo.

4.1 PROBLEMA DE MOTZ

O primeiro caso estudado é o conhecido problema de Motz, onde sua principal característica está em apresentar suas condições de contorno mistas variando R conforme o ângulo theta (θ) como ilustrado na Figura 4.2. O domínio é discretizado com 42 elementos lineares descontínuos iguais onde a solução da temperatura é conhecida ($u_{analítico}$). A verificação da qualidade da solução também será realizada nos pontos internos do domínio. Para a avaliação do comportamento da solução numérica de forma mais objetiva foram escolhidos alguns nós físicos como pontos de controle e no interior do domínio foi criada uma linha de pontos internos pré-definida.



Condições de contorno

$$q = -\frac{1}{2\sqrt{r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \theta + \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) \text{ em } \overline{CD}$$

$$q = \frac{1}{2\sqrt{r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \sin \theta - \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta \right) \text{ em } \overline{BC}$$

$$q = \frac{1}{2\sqrt{r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \theta + \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) \text{ em } \overline{AD}$$

$$q = 0 \text{ em } \overline{OB}$$

$$u = 0 \text{ em } \overline{AO}$$

$$u_{\text{analítico}} = \cos \frac{\theta}{2} \sqrt{R}$$

Figura 4.2 – Problema de Motz e suas condições de contorno

A Figura 4.3 apresenta a solução analítica e numérica da distribuição da temperatura para o problema utilizando 12 pontos de Gauss. A medida de β é calculada como o percentual do comprimento do elemento do contorno original. A curva sólida representa a solução analítica e as demais curvas correspondem a *offsets* variando de 1 a 9% do tamanho do elemento. Observa-se que as soluções numéricas com β igual a 1 e 3% se afastam da solução analítica mostrando o problema de singularidade quando o ponto de colocação está muito próximo do contorno. As demais curvas estão sobrepostas o que a princípio sugere uma convergência das soluções numéricas para a solução analítica do problema. No entanto, uma análise mais detalhada da distribuição da temperatura é realizada utilizando 3 pontos de controle, escolhidos arbitrariamente em cada segmento do problema onde é conhecido o fluxo conforme ilustrado na Figura 4.4. Os pontos de controle escolhidos do segmento \overline{OB} são os nós físicos 7 e 8 pertencentes ao elemento 4 e o nó físico 9 pertencente ao elemento 5. No segmento \overline{BC} os pontos de controle são os nós físicos 19 e 20 pertencentes ao elemento 10 e o nó físico 21 pertencente ao elemento 11. Para o segmento \overline{CD} foram escolhidos 6 pontos de controle representados pelos seguintes nós físicos 34, 35 e 36 e 48, 49 e 50; sendo o nó 34 pertencente ao elemento 17, os nós 35 e 36 pertencentes ao elemento 18, o nó 48 pertencente ao elemento 24 e os nós 49 e 50 pertencentes ao elemento 25. No último segmento onde o fluxo é prescrito foram escolhidos os nós físicos 62 pertencente ao elemento 31 e os nós físicos 63 e 64 pertencentes ao elemento 32.

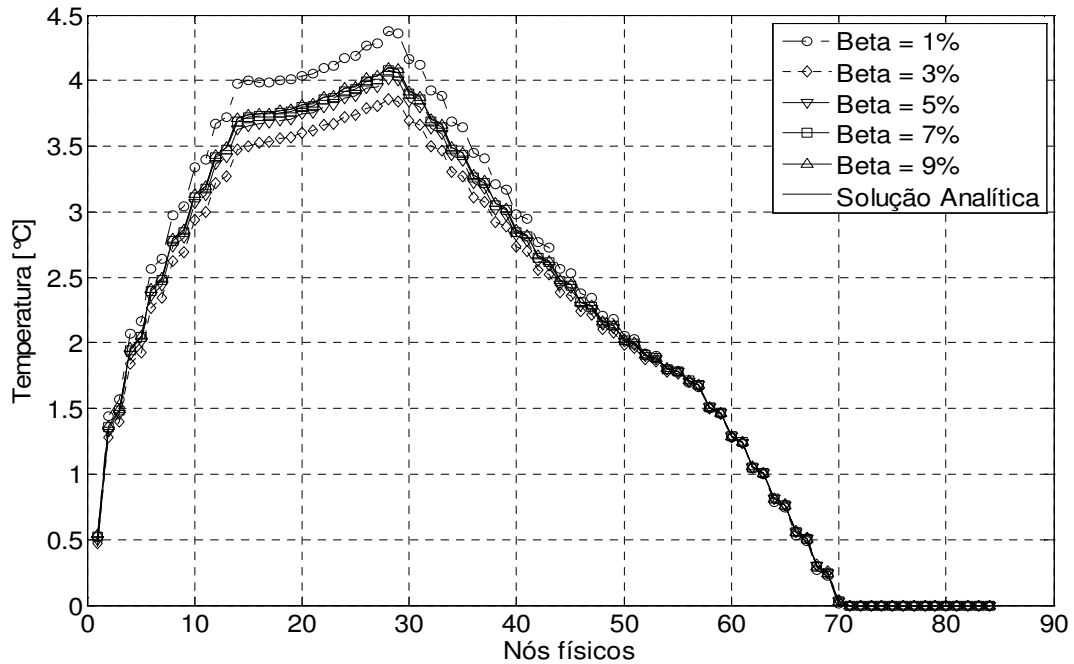


Figura 4.3 – Distribuição de temperatura analítica e numérica com o MECV externo.

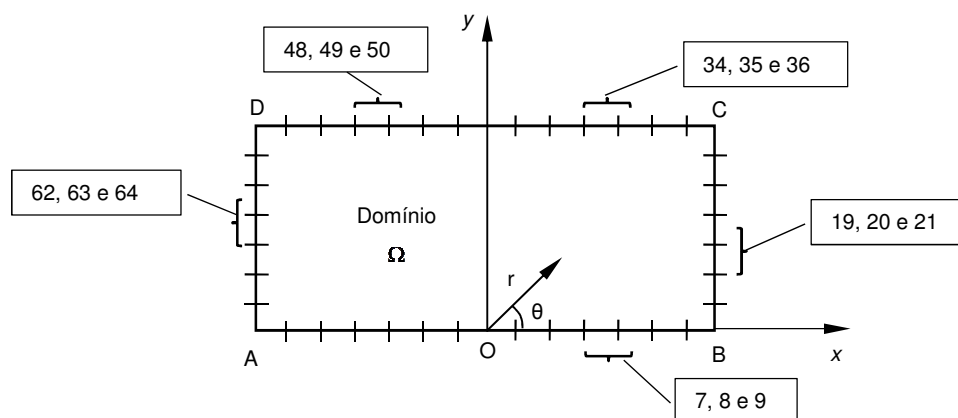


Figura 4.4 – Pontos de controle.

Primeiramente será analisada a distribuição da temperatura utilizando como pontos de controle os nós físicos 7, 8 e 9 pertencentes ao segmento \overline{OB} e integradas com os seguintes pontos de Gauss 6, 8, 10, 12. Os resultados demonstram que à medida que há um incremento em β há uma tendência do valor numérico se aproximar ou se afastar do valor analítico de temperatura, conforme ilustrado na Figura 4.5.

Na integração com 8, 10 e 12 pontos de Gauss a curva numérica com β de 9% se aproxima da solução analítica em todos os nós físicos. A integração utilizando 6 pontos de Gauss nota-se a curva com β de 1% se afastando das demais soluções

sobrepostas com a solução analítica. Esta integração é ampliada na Figura 4.6 e também sugere que um β de 9% é a melhor distância encontrada nesta análise.

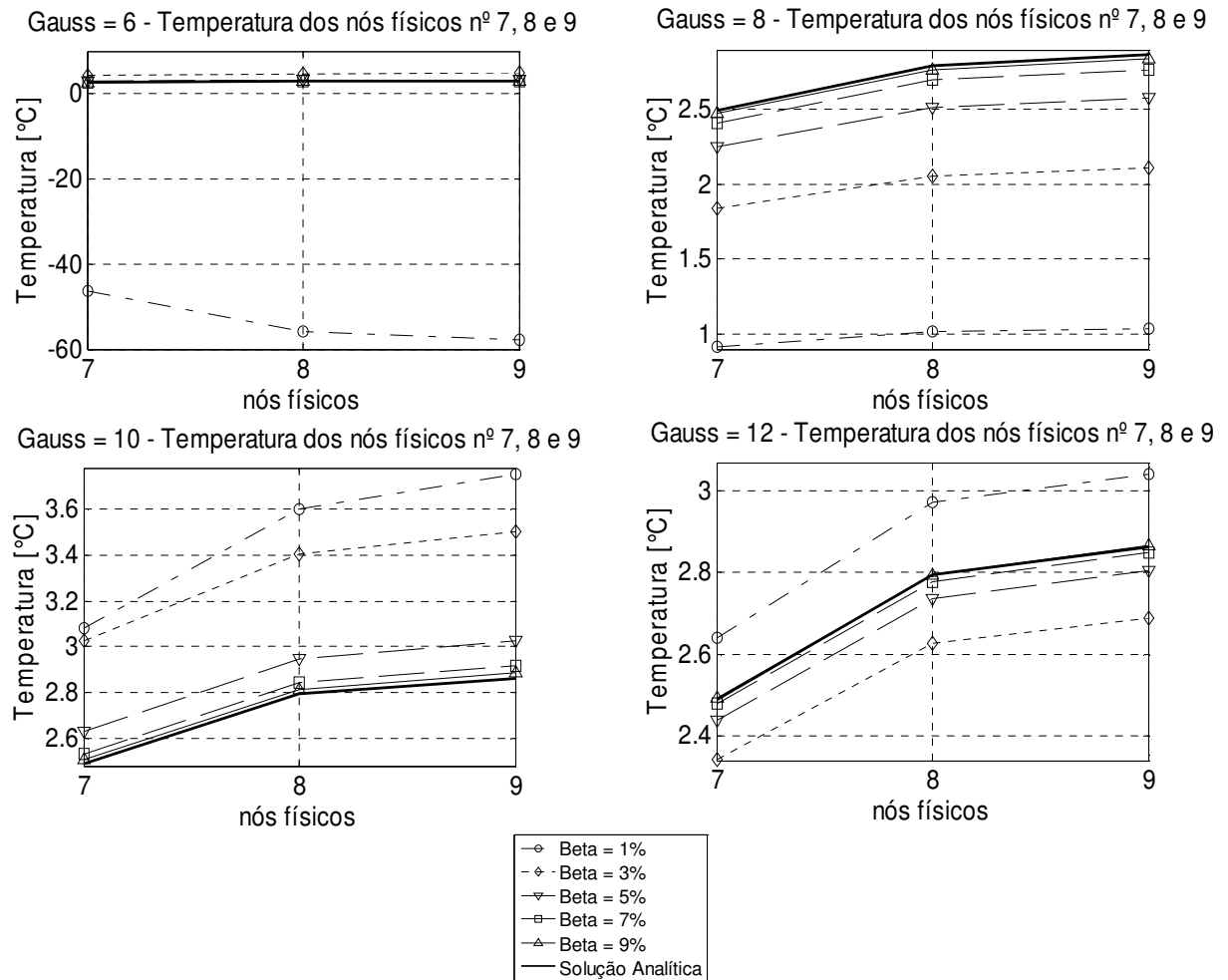


Figura 4.5 – Detalhe do β para os pontos de controle 7, 8 e 9 e variando os pontos de Gauss.

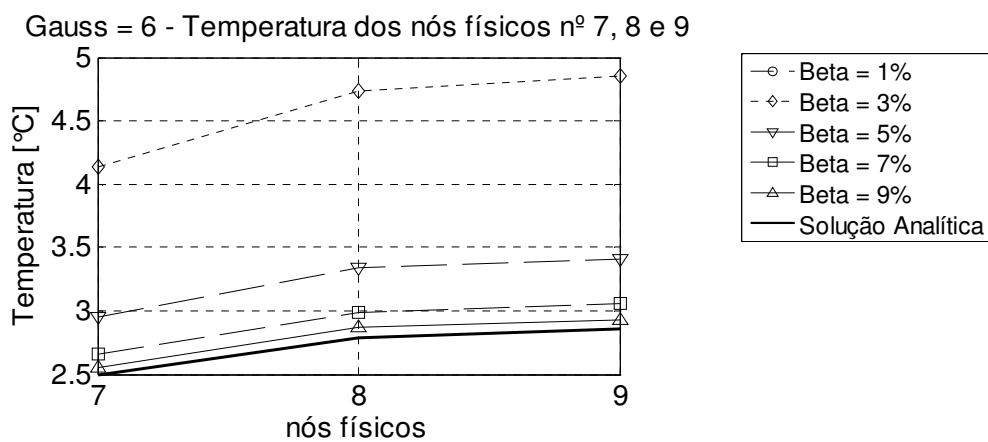


Figura 4.6 – Detalhe do β para os pontos de controle 7, 8 e 9 e 6 pontos de Gauss.

Em todos os resultados as curvas com valores de β igual a 1% e 3% foram as mais afastadas da solução analítica o que indica a influência da singularidade do integrando. No entanto, acima de 3% as curvas tendem a se aproximar mais da curva analítica, embora sempre exista uma que melhor se aproxima. Observa-se que as curvas numéricas com valores de β entre 7% e 9% recaem sobre a curva analítica para integração realizada com 8, 10 e 12 pontos de Gauss. A princípio entende-se que a distância ótima para o *offset* é de 9% do valor do elemento do contorno original.

As análises realizadas anteriormente se confirmam ao calcular o erro relativo percentual E_R de cada incremento de β no problema de Motz é dado pela equação:

$$E_R = \frac{|N - A|}{A} \cdot 100\% \quad (4.1)$$

Onde N é a solução numérica da temperatura e A é a solução analítica do problema.

O cálculo do erro utilizado para encontrar a distância ótima das curvas numéricas nos nós físicos 7, 8 e 9 está apresentado na Figura 4.7. Com o intuito de verificar a veracidade do valor de β , a Figura 4.8 apresenta uma análise, realizada com valores de β variando entre 5% e 9% com passo de 1 e Gauss igual a 6, 8, 10 e 12. A análise em questão mostra as mesmas conclusões anteriores que a distância ótima encontrada está com um $\beta=9\%$. No sentido de continuar a sondagem do β , a Figura 4.9 mostra os pontos de controle da aresta \overline{OB} avaliados com β iguais a 9, 10, 11, 12 e 13%, utilizando 12 pontos de Gauss. A escolha de 12 pontos de Gauss vem da observação das análises anteriores, onde os erros menores são apresentados com estes pontos. A princípio para a aresta \overline{OB} é constatado que a distância ótima está mesmo com um β de 9% e nota-se que a medida que é implementado maior pontos de Gauss o erro tende a diminuir.

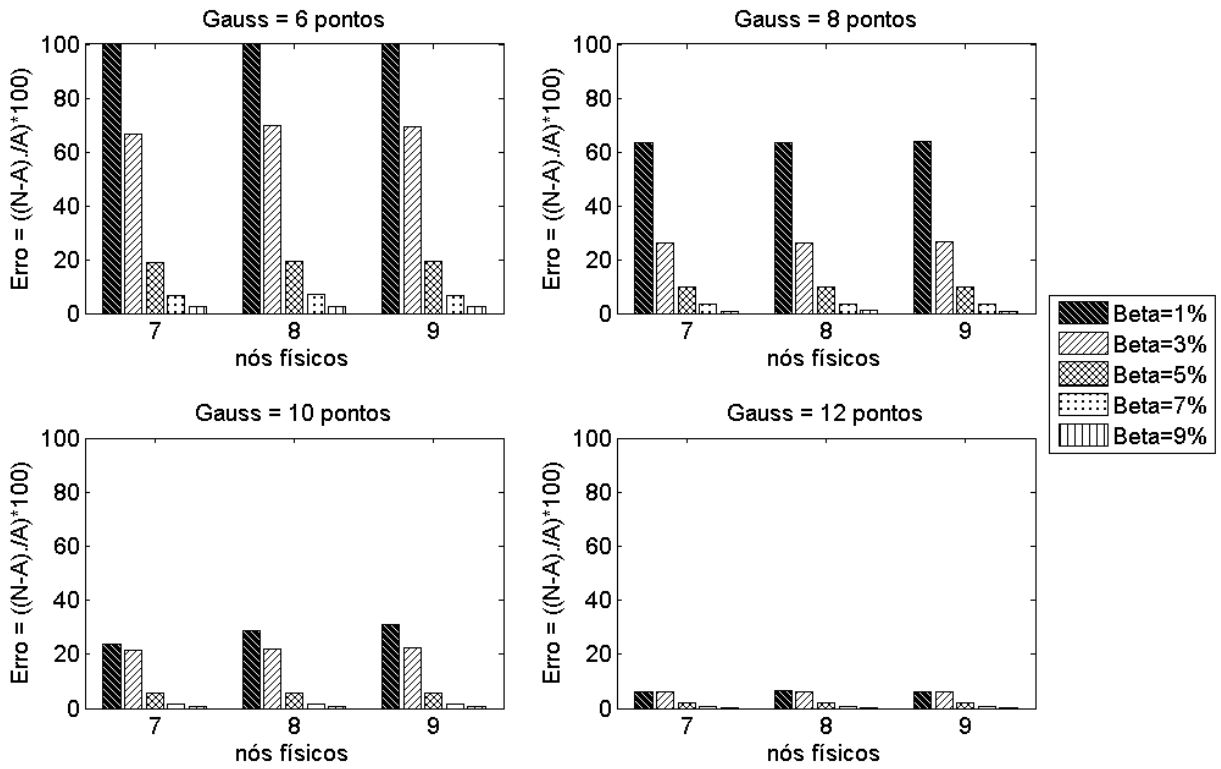


Figura 4.7 – Erros relativos percentuais nos nós físicos 7, 8 e 9 e betas iguais a 1, 3, 5, 7 e 9%.

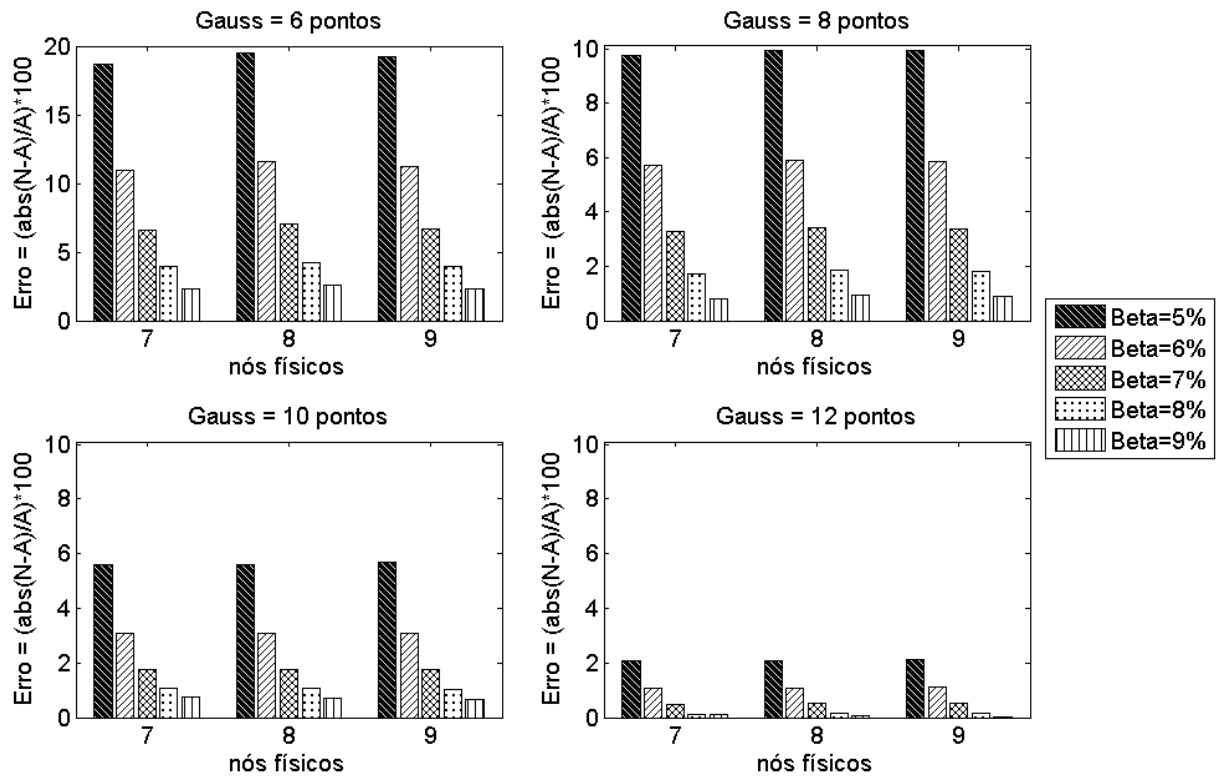


Figura 4.8 – Erros relativos percentuais nos nós físicos 7, 8 e 9 e betas iguais a 5, 6, 7, 8 e 9%.

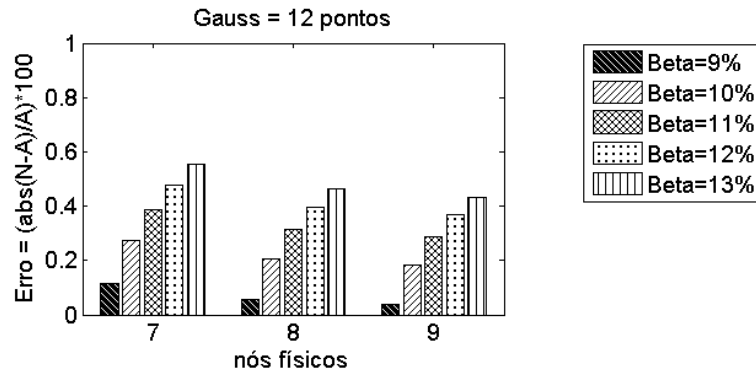


Figura 4.9 – Erros relativos percentuais nos nós físicos 7, 8 e 9 e betas iguais 9, 10, 11, 12 e 13%.

Para efeito de verificação do comportamento do campo de temperatura nos demais segmentos do problema em estudo, optou-se por verificar os erros relativos percentuais utilizando todos os pontos de controle conforme ilustrados na Figura 4.4. Os pontos de controle são avaliados com pontos de Gauss 6, 8, 10 e 12 e valores de betas iguais a 1, 3, 5, 7 e 9%. Em seguida a avaliação para o melhor β é apresentada observando 4 betas antes e 4 depois, com passo de 1 e utilizando 12 pontos de Gauss. No segmento \overline{BC} os nós físicos n° 19, 20 e 21 tomados como pontos de controle desta aresta, apresentam o melhor β com 9%, conforme ilustrado na Figura 4.10.

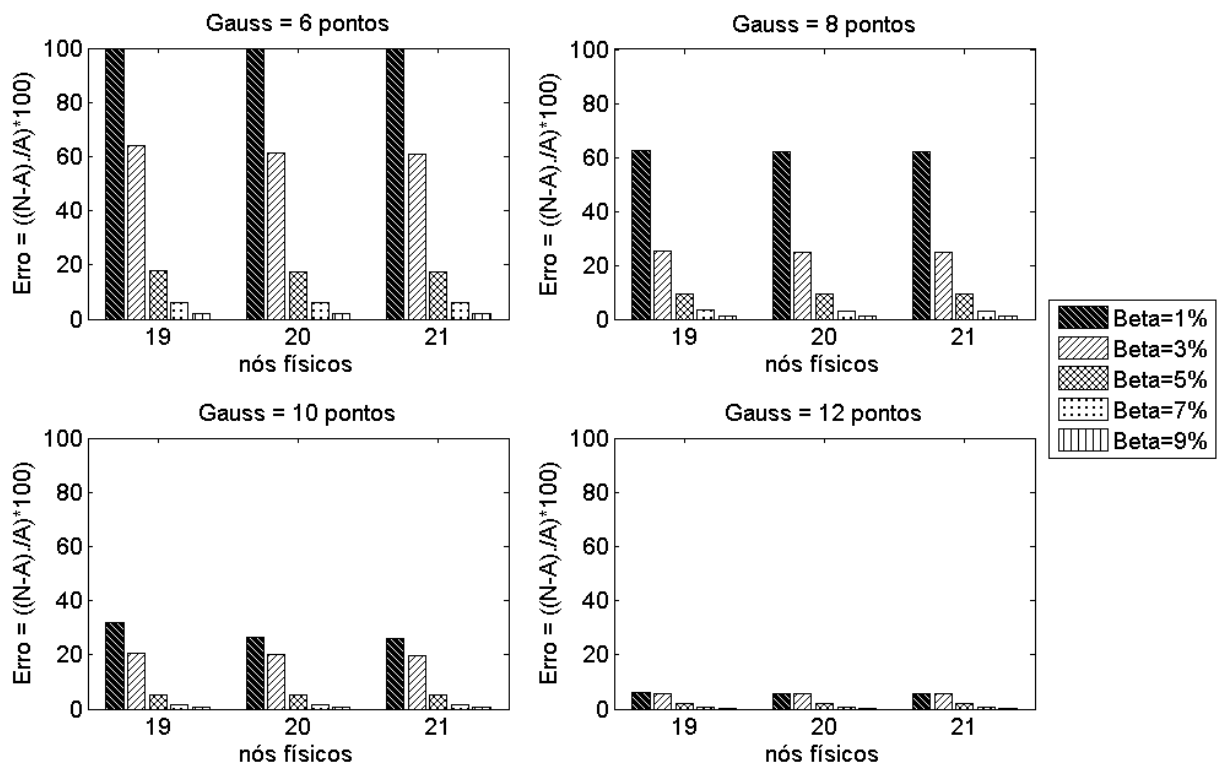


Figura 4.10 – Erros relativos percentuais nos nós físicos 19, 20 e 21 e betas iguais 1, 3, 5, 7 e 9%.

A Figura 4.11 e a Figura 4.12 também sugerem 9% como a distância ótima encontrada para a aresta \overline{BC} .

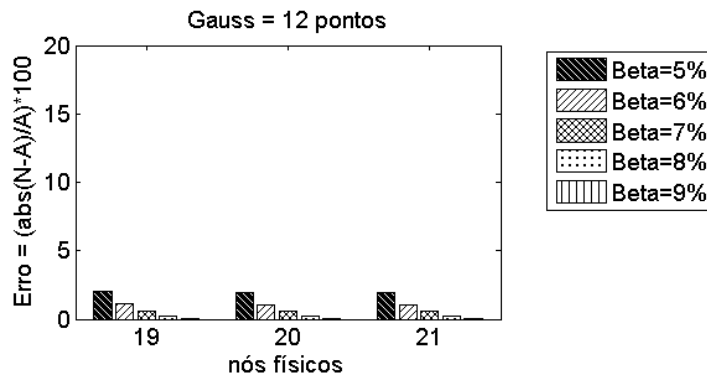


Figura 4.11 – Erros relativos percentuais nos nós físicos 19, 20 e 21 e betas iguais a 5, 6, 7, 8 e 9%.

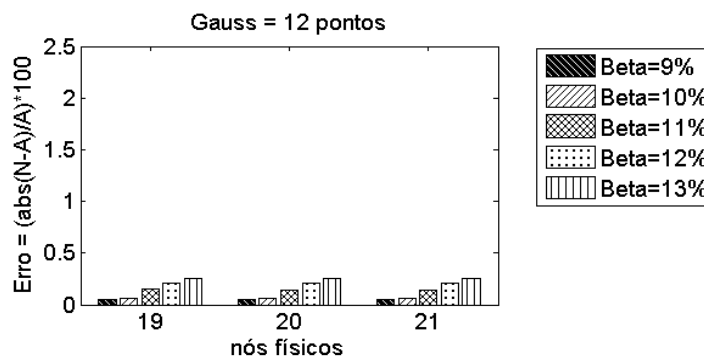


Figura 4.12 – Erros relativos percentuais nos nós 19, 20 e 21 e betas iguais 9, 10, 11, 12 e 13%.

No segmento \overline{CD} foram analisados 6 pontos de controle. Na primeira metade deste segmento foram avaliados os nós 34, 35 e 36 conforme mostra a Figura 4.13. Com o auxílio da Figura 4.14 e Figura 4.15 pode-se concluir que para os primeiros nós do segmento o melhor β é representado com 9%. Igualmente, para os últimos nós do segmento, conforme representado na Figura 4.16, o melhor β está representado com 9%. Para a avaliação realizada com 10 e 12 pontos de Gauss os detalhes podem ser mais bem visualizados na Figura 4.17. Os resultados para a segunda metade do segmento são confirmados na Figura 4.18 quando avaliados betas entre 5 e 9% e na Figura 4.19 quando avaliados betas entre 9 e 13%. Portanto, a aresta \overline{CD} também permanece a distância ótima encontrada com um β de 9% do tamanho do elemento.

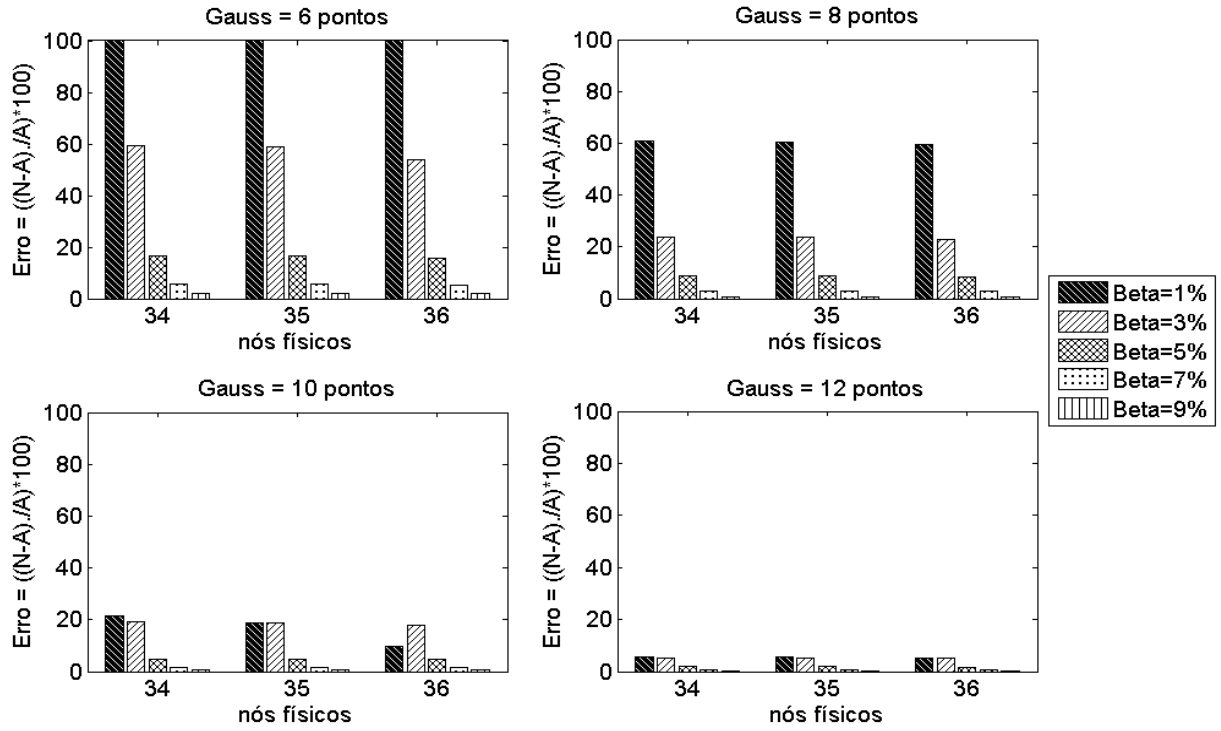


Figura 4.13 – Erros relativos percentuais nos nós físicos 34, 35 e 36 e betas iguais 1, 3, 5, 7 e 9%.

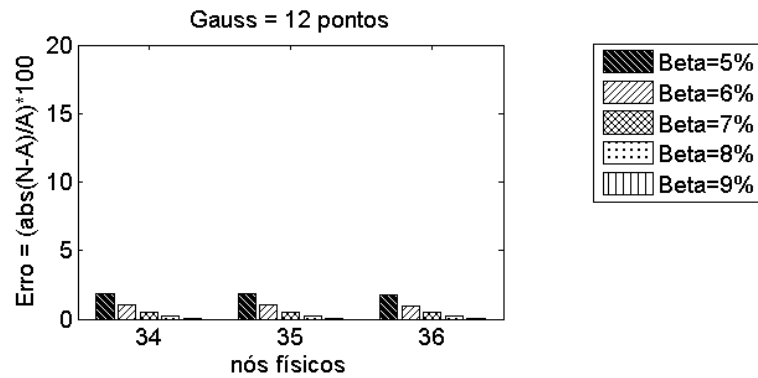


Figura 4.14 – Erros relativos percentuais nos nós físicos 34, 35 e 36 e betas iguais a 5, 6, 7, 8 e 9%.

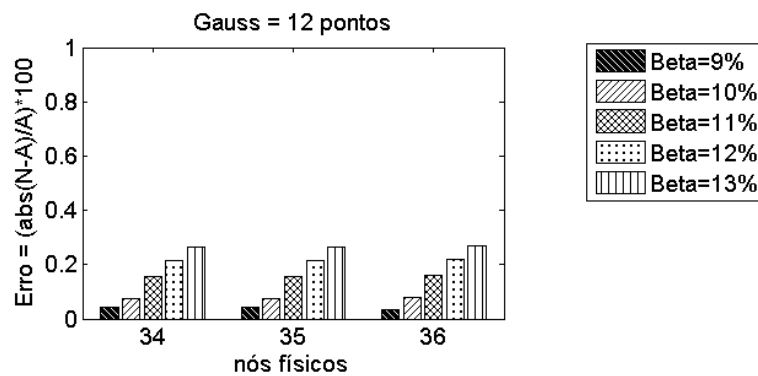


Figura 4.15 – Erros relativos percentuais nos nós físicos 34, 35 e 36 e betas iguais 9, 10, 11, 12 e 13%.

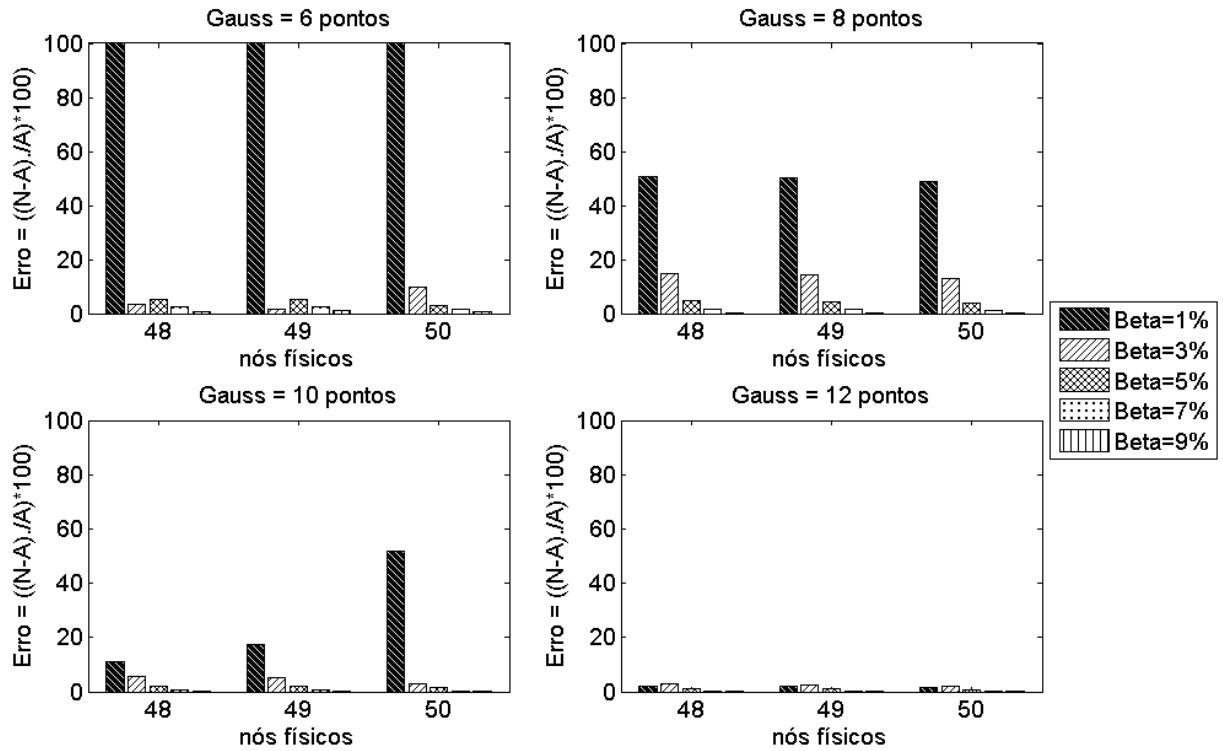


Figura 4.16 – Erros relativos percentuais nos nós físicos 48, 49 e 50 e betas iguais 1, 3, 5, 7 e 9%.

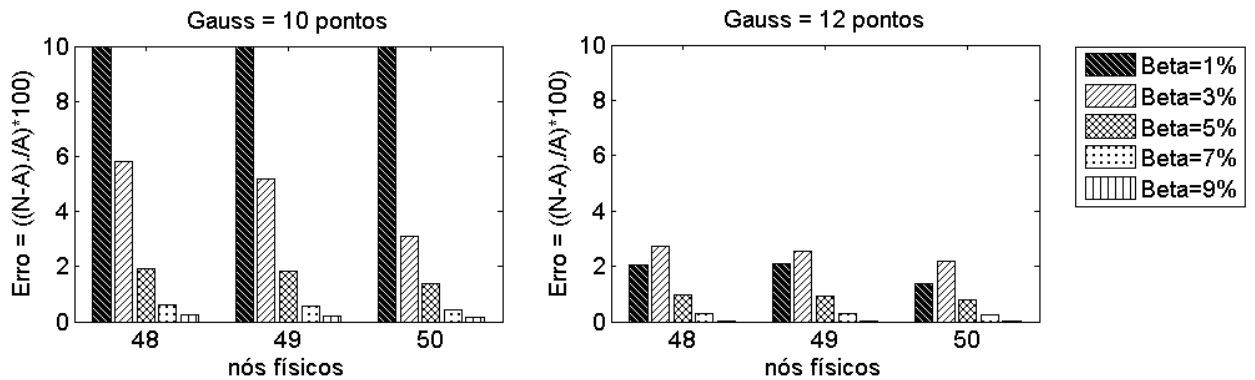


Figura 4.17 – Erros relativos percentuais nos nós físicos 48, 49 e 50, betas iguais 1, 3, 5, 7 e 9% e Gauss iguais a 10 e 12.

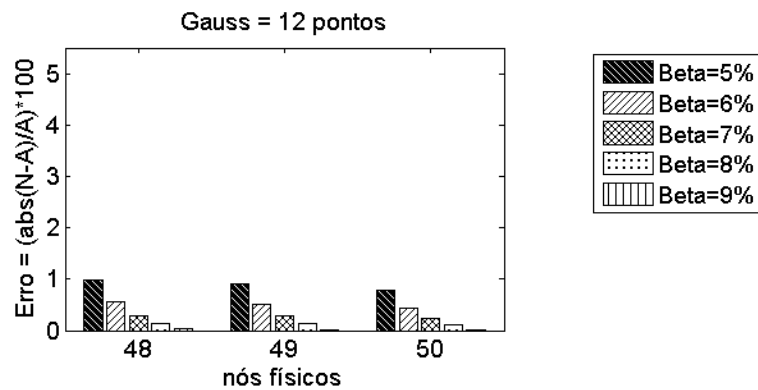


Figura 4.18 – Erros relativos percentuais nos nós físicos 48, 49 e 50 e betas iguais a 5, 6, 7, 8 e 9%.

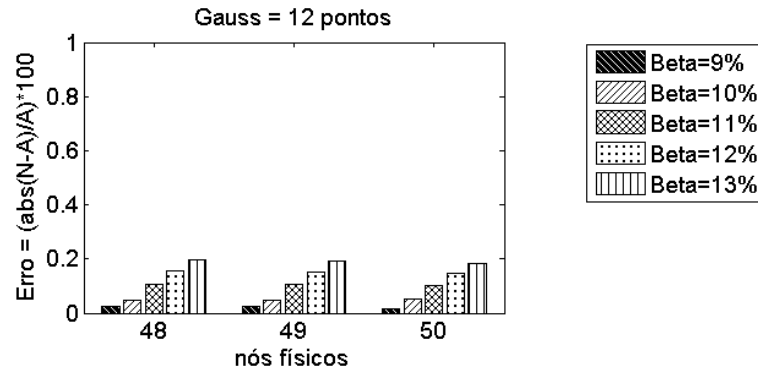


Figura 4.19 – Erros relativos percentuais nos nós 48, 49 e 50 e betas iguais 9, 10, 11, 12 e 13%.

Os erros referentes aos nós físicos 62, 63 e 64 do segmento estão apresentados conforme a Figura 4.20. A Figura 4.21 apresenta os mesmos resultados apresentados na Figura 4.20, porém com o fundo de escala alterado para permitir uma melhor visualização dos resultados. Foi observada uma oscilação do erro para os valores de beta entre 7 e 9% em relação aos pontos de Gauss. Neste caso, a análise deste segmento será diferente dos segmentos anteriores. Para esta aresta as integrações serão realizadas com maior quantidade de pontos de Gauss a fim de verificar se esta oscilação tende a estabilizar. Na Figura 4.22 os erros são apresentados para este caso utilizando 10, 12, 16 e 20 pontos de Gauss com betas variando de 6 a 10%. Foi possível verificar que com o aumento de pontos de Gauss a distância ótima converge para um β igual a 7%.

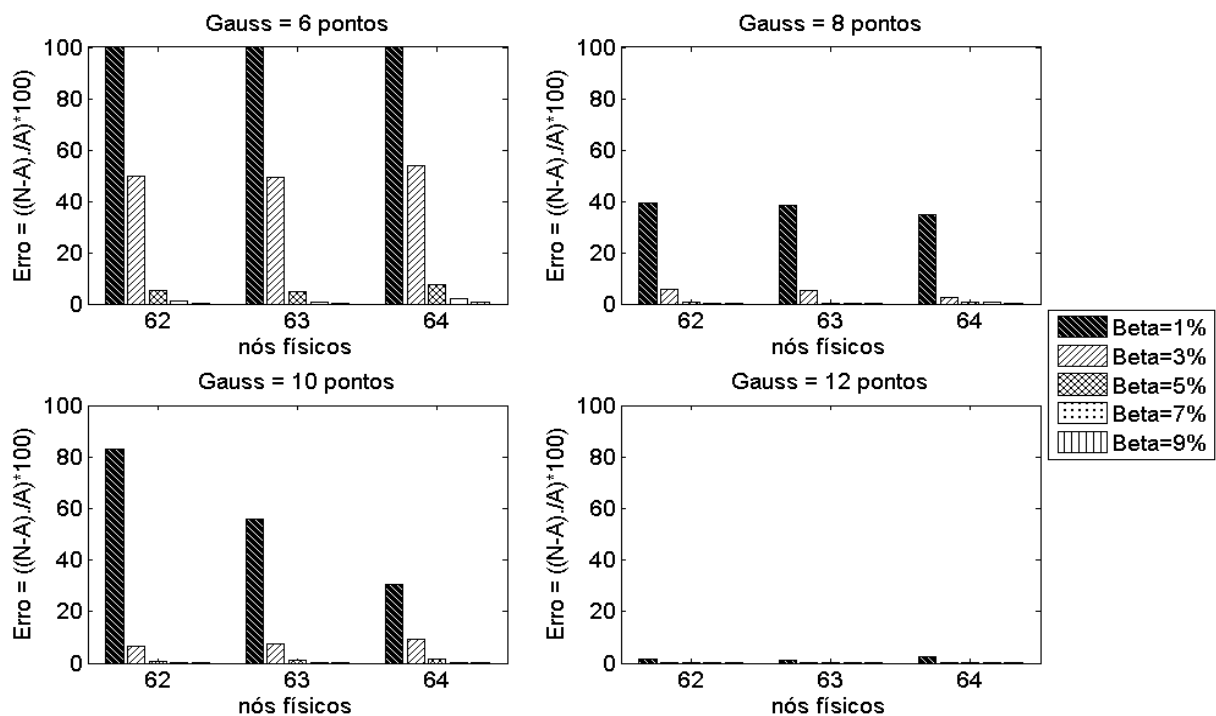


Figura 4.20 – Erros relativos percentuais nos nós físicos 62, 63 e 64, betas iguais 1, 3, 5, 7 e 9%.

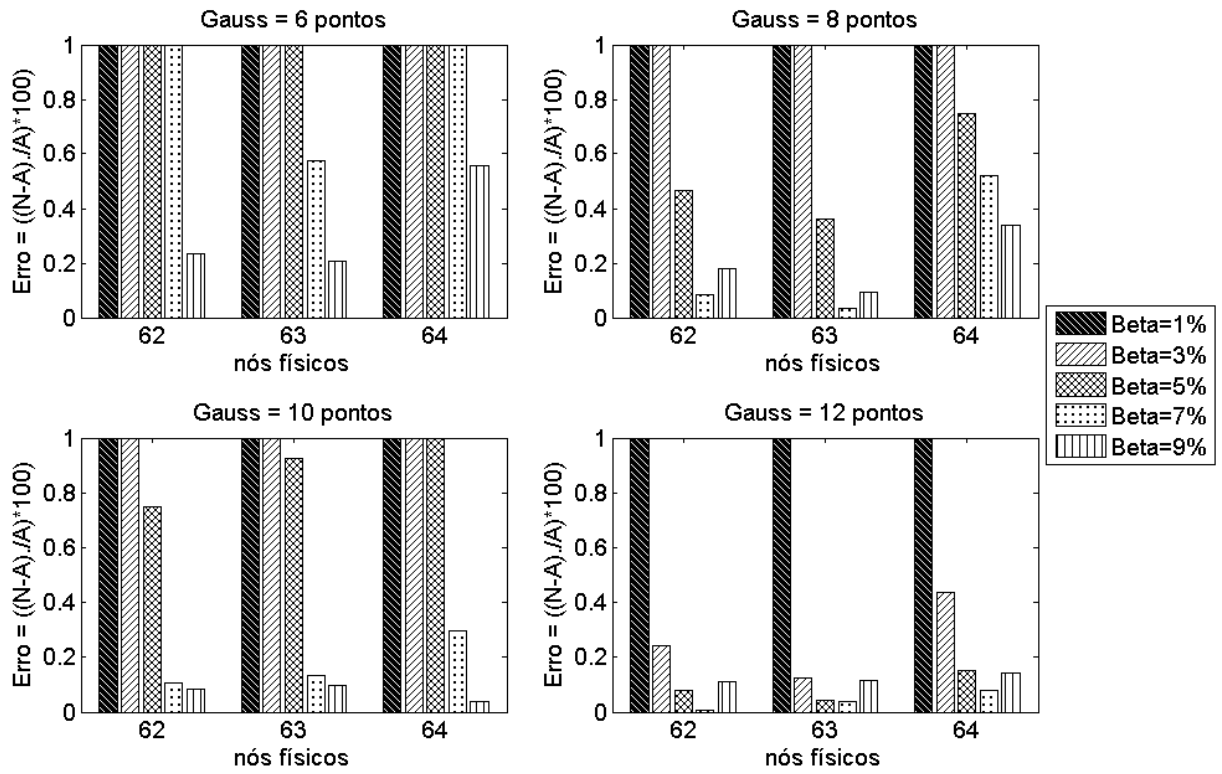


Figura 4.21 – Erros relativos percentuais ampliados nos nós físicos 62, 63 e 64 e betas iguais a 1, 3, 5, 7 e 9%.

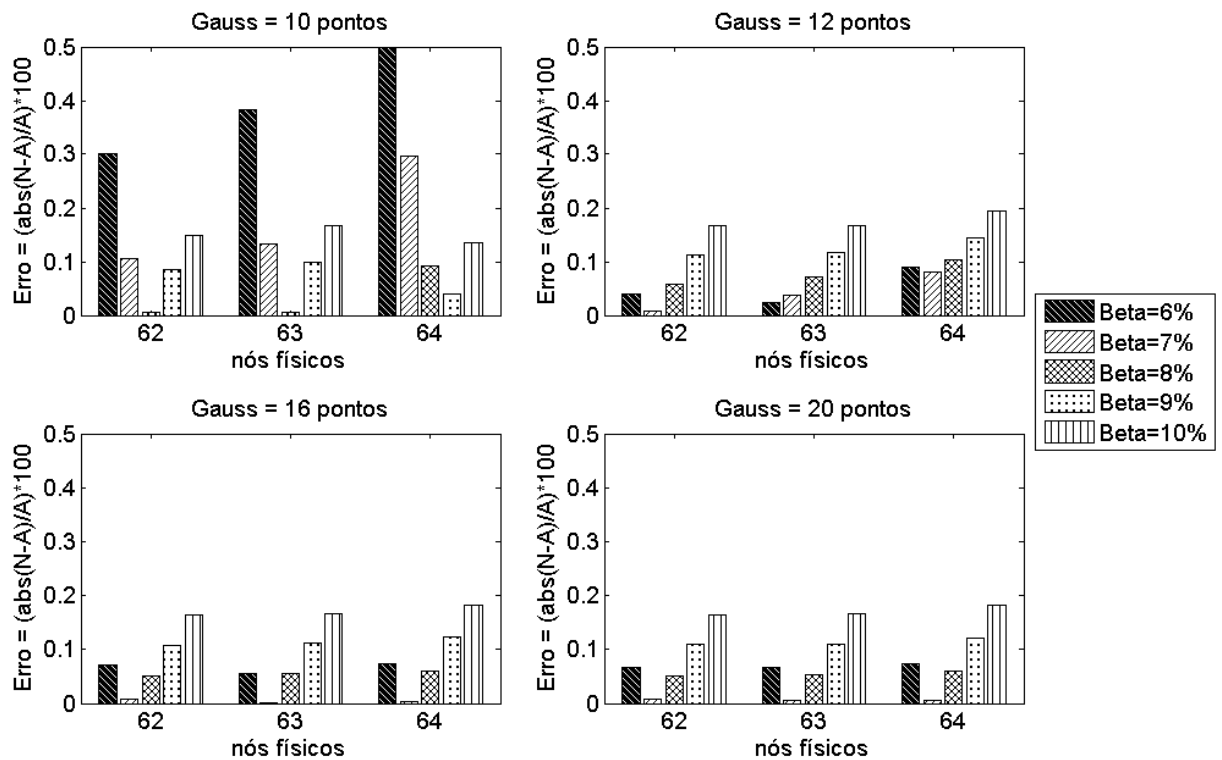


Figura 4.22 – Erros relativos percentuais nos nós físicos 62, 63 e 64 e betas iguais a 6, 7, 8, 9 e 10%.

4.1.1 Avaliação dos Pontos Internos para o MECV Regular Externo

Alguns dos pontos internos ao problema de Motz também foram avaliados com o objetivo de verificar o comportamento dos resultados da temperatura e garantir uma investigação mais precisa. Os pontos internos escolhidos no domínio, possuem abscissas de $[-13:1:13]$ e ordenada 1, conforme ilustrados na Figura 4.23. A quantidade de pontos de Gauss pode influenciar na qualidade da solução numérica, e geralmente, para problemas potenciais utiliza-se 6 pontos de Gauss como padrão. Neste sentido as análises para os pontos internos utilizando MECV serão realizadas com 6, 8, 10 e 12 pontos de Gauss para a determinação da qualidade e comportamento da solução referente aos pontos internos.

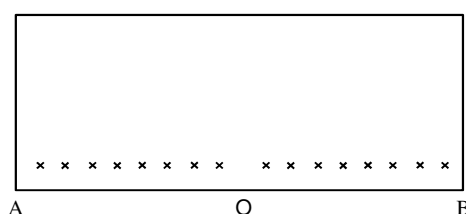


Figura 4.23 – Detalhe da localização dos pontos internos.

A Tabela 2 apresenta as coordenadas dos pontos internos e seus respectivos resultados de potenciais para cada tipo de *offset* enquanto que a Tabela 3 apresenta o erro entre a solução analítica e os resultados obtidos via MECV externo e regular.

A Figura 4.24 mostra a solução analítica e as soluções numéricas da temperatura. Observa-se na abscissa, para valores menores que 0 as curvas numéricas convergem para a solução analítica, entretanto em pontos internos bem próximo de 0, todas as soluções numéricas se distanciam e para valores maiores que 0 as curvas com betas iguais a 1 e 3% se afastam mais. Os intervalos ampliados podem ser visualizados na Figura 4.25 onde é possível verificar que um β de 9% possui uma melhor convergência.

Observando a curva com β de 1%, nota-se que ela se afasta muito da solução analítica, isso pode ser visualizado na integração com 6, 8 e 10 pontos de Gauss. Este problema acontece porque existe a singularidade, devido ao ponto de colocação estar muito próximo ao contorno real. Por essa razão a curva de 1%, nos próximos gráficos, será substituída por 2,5%.

Tabela 2 – Temperatura analítica e numérica para os pontos internos avaliados com MECV externo.

Coordenadas		Solução	Potencial MECV [°C]				
x	y	Analítica	$\beta = 1\%$	$\beta = 3\%$	$\beta = 5\%$	$\beta = 7\%$	$\beta = 9\%$
-13	1	0,1388	0,1272	0,1484	0,1416	0,1394	0,1389
-12	1	0,1445	0,1361	0,1509	0,1462	0,1448	0,1445
-11	1	0,1509	0,1443	0,1555	0,1520	0,1510	0,1508
-10	1	0,1583	0,1529	0,1616	0,1589	0,1582	0,1581
-9	1	0,1669	0,1624	0,1691	0,1670	0,1665	0,1666
-8	1	0,1771	0,1733	0,1782	0,1767	0,1764	0,1766
-7	1	0,1895	0,1860	0,1894	0,1884	0,1884	0,1886
-6	1	0,2048	0,2016	0,2034	0,2029	0,2031	0,2035
-5	1	0,2247	0,2212	0,2212	0,2214	0,2219	0,2224
-4	1	0,2519	0,2470	0,2451	0,2460	0,2469	0,2477
-3	1	0,2923	0,2831	0,2788	0,2807	0,2823	0,2835
-2	1	0,3627	0,3382	0,3308	0,3347	0,3377	0,3401
-1	1	0,5318	0,4452	0,4320	0,4389	0,4443	0,4485
0	1	0,7071	0,7128	0,6889	0,7003	0,7086	0,7149
1	1	1,0637	1,1118	1,0714	1,0879	1,0986	1,1060
2	1	1,4507	1,4796	1,4219	1,4429	1,4549	1,4622
3	1	1,7541	1,7884	1,7153	1,7404	1,7535	1,7609
4	1	2,0149	2,0568	1,9693	1,9984	2,0128	2,0204
5	1	2,2469	2,2958	2,1947	2,2277	2,2435	2,2513
6	1	2,4578	2,5139	2,3997	2,4365	2,4536	2,4617
7	1	2,6524	2,7151	2,5884	2,6288	2,6472	2,6557
8	1	2,8339	2,9033	2,7644	2,8083	2,8281	2,8368
9	1	3,0046	3,0803	2,9296	2,9770	2,9980	3,0071
10	1	3,1662	3,2483	3,0861	3,1367	3,1590	3,1685
11	1	3,3200	3,4083	3,2347	3,2886	3,3122	3,3220
12	1	3,4671	3,5617	3,3768	3,4339	3,4587	3,4689
13	1	3,6082	3,7092	3,5130	3,5732	3,5992	3,6098

Tabela 3 – Erro de potencial para pontos internos avaliados com MECV externo.

Coordenadas		MECV Erro do Potencial				
x	y	1%	3%	5%	7%	9%
-13	1	8,3378	6,9258	2,0589	0,4671	0,1055
-12	1	5,7725	4,4358	1,2185	0,2091	0,0182
-11	1	4,3748	3,0668	0,7362	0,0435	0,0531
-10	1	3,4098	2,0937	0,3782	0,0922	0,1208
-9	1	2,7074	1,3142	0,0673	0,2301	0,2029
-8	1	2,1787	0,6373	0,2274	0,3790	0,3016
-7	1	1,8014	0,0182	0,5519	0,5725	0,4461
-6	1	1,5706	0,7033	0,9368	0,8325	0,6544
-5	1	1,5628	1,5311	1,4801	1,2500	1,0137
-4	1	1,9277	2,6718	2,3381	1,9695	1,6571
-3	1	3,1705	4,6278	3,9861	3,4467	3,0272
-2	1	6,7451	8,7842	7,7161	6,8757	6,2234
-1	1	16,2944	18,7663	17,4651	16,4564	15,6652
0	1	0,8077	2,5731	0,9647	0,2077	1,0989
1	1	4,5238	0,7250	2,2770	3,2826	3,9835
2	1	1,9896	1,9831	0,5367	0,2877	0,7960
3	1	1,9540	2,2127	0,7800	0,0314	0,3861
4	1	2,0799	2,2631	0,8171	0,1004	0,2724
5	1	2,1754	2,3233	0,8541	0,1520	0,1942
6	1	2,2813	2,3632	0,8676	0,1714	0,1580
7	1	2,3638	2,4130	0,8901	0,1950	0,1230
8	1	2,4489	2,4518	0,9020	0,2055	0,1046
9	1	2,5196	2,4950	0,9194	0,2199	0,0846
10	1	2,5921	2,5308	0,9306	0,2270	0,0735
11	1	2,6573	2,5696	0,9457	0,2372	0,0605
12	1	2,7280	2,6043	0,9573	0,2429	0,0530
13	1	2,7994	2,6397	0,9712	0,2504	0,0446

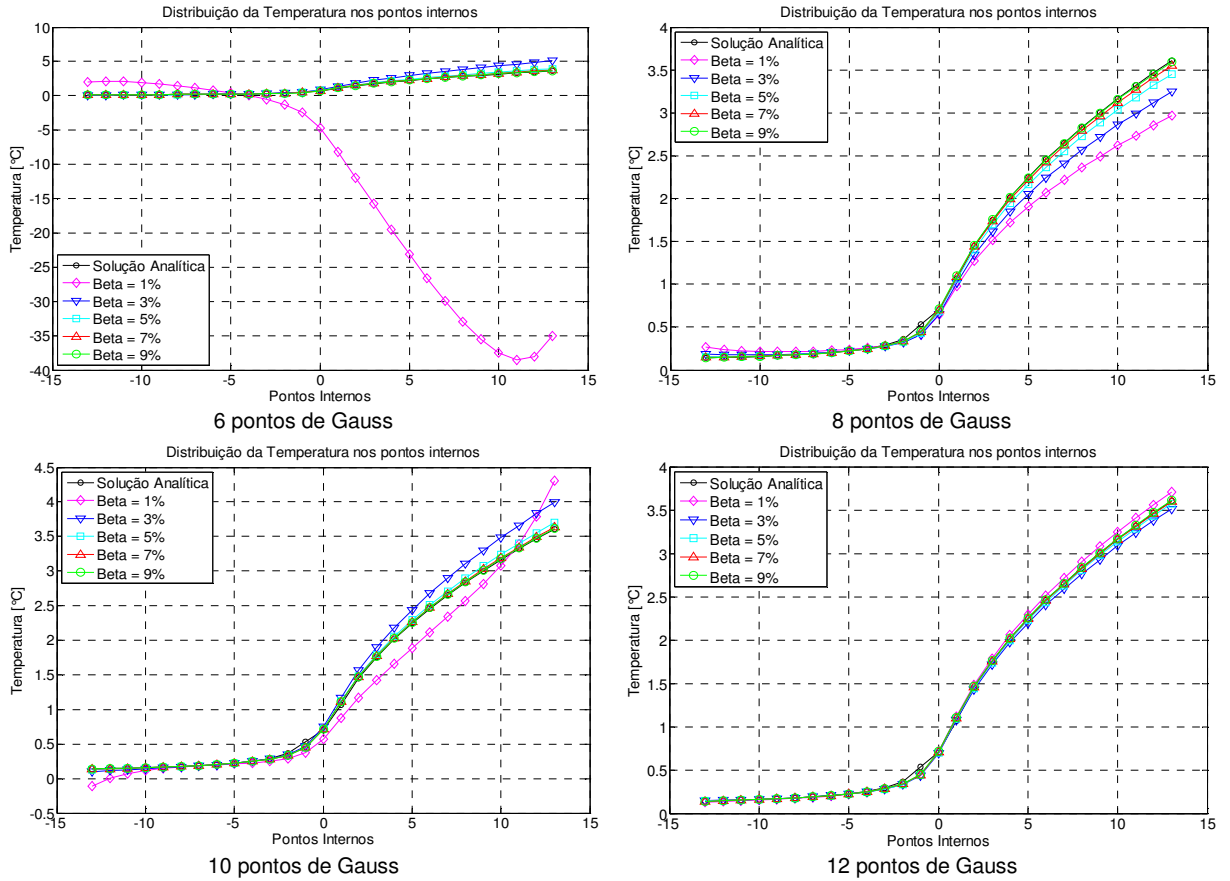


Figura 4.24 – Solução Analítica x MECV externo com 6, 8, 10 e 12 pontos de Gauss.

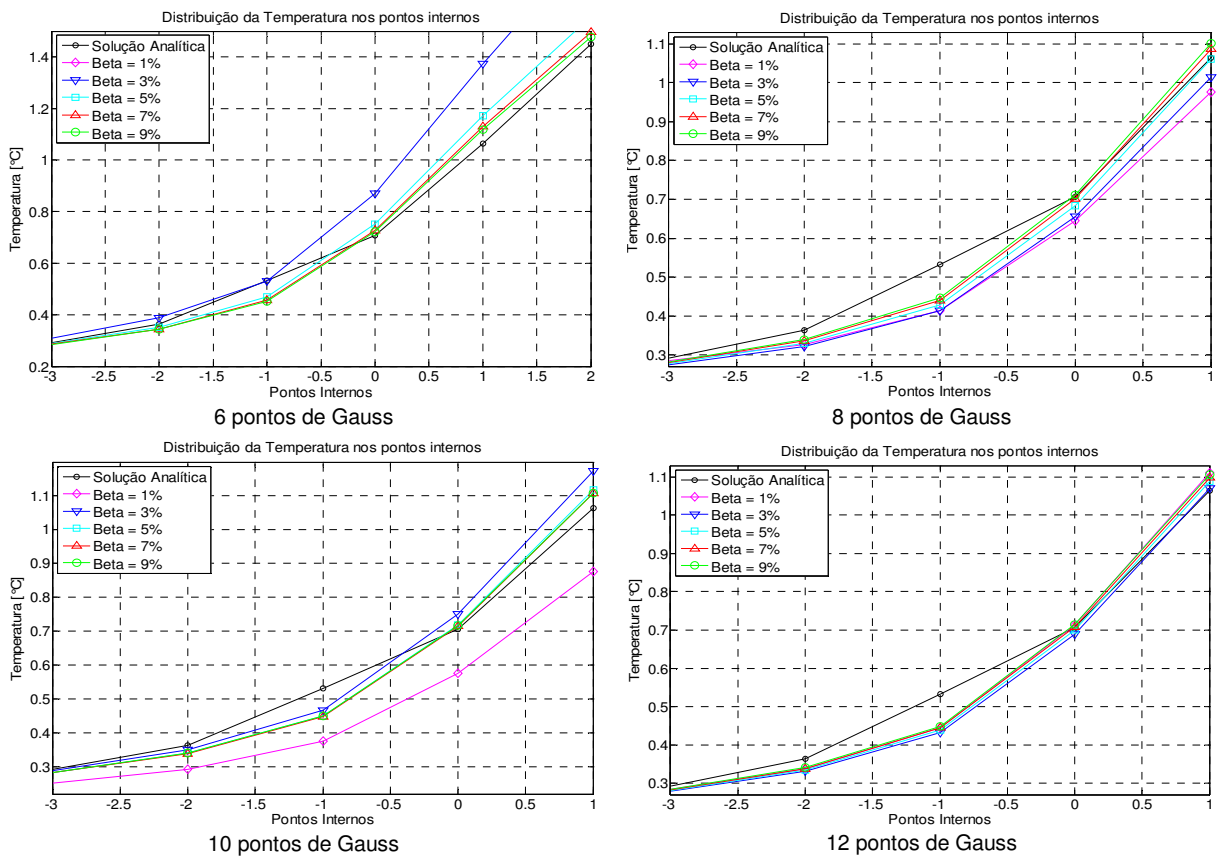


Figura 4.25 – Distribuição da temperatura analítica e numérica com MECV externo.

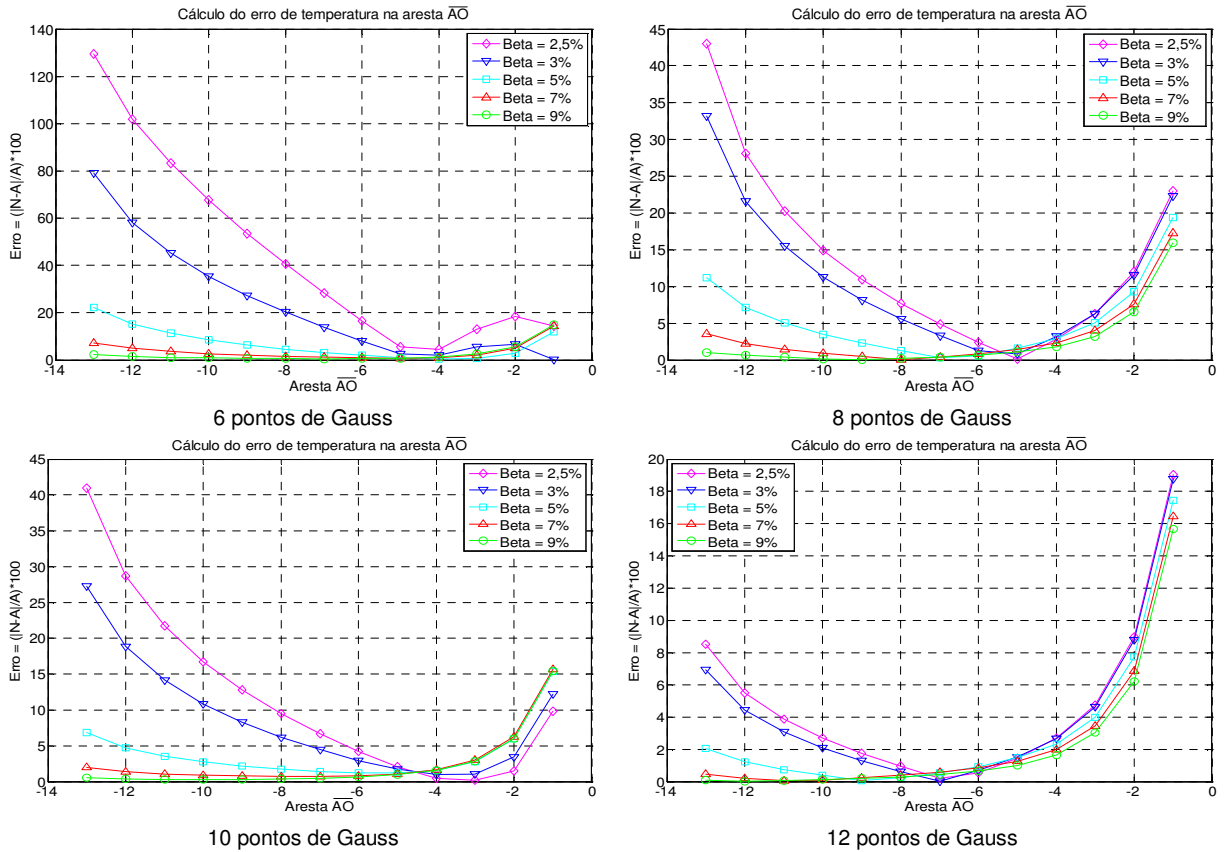


Figura 4.26 – Erro de temperatura utilizando MECV externo nos pontos internos da aresta \overline{AO} .

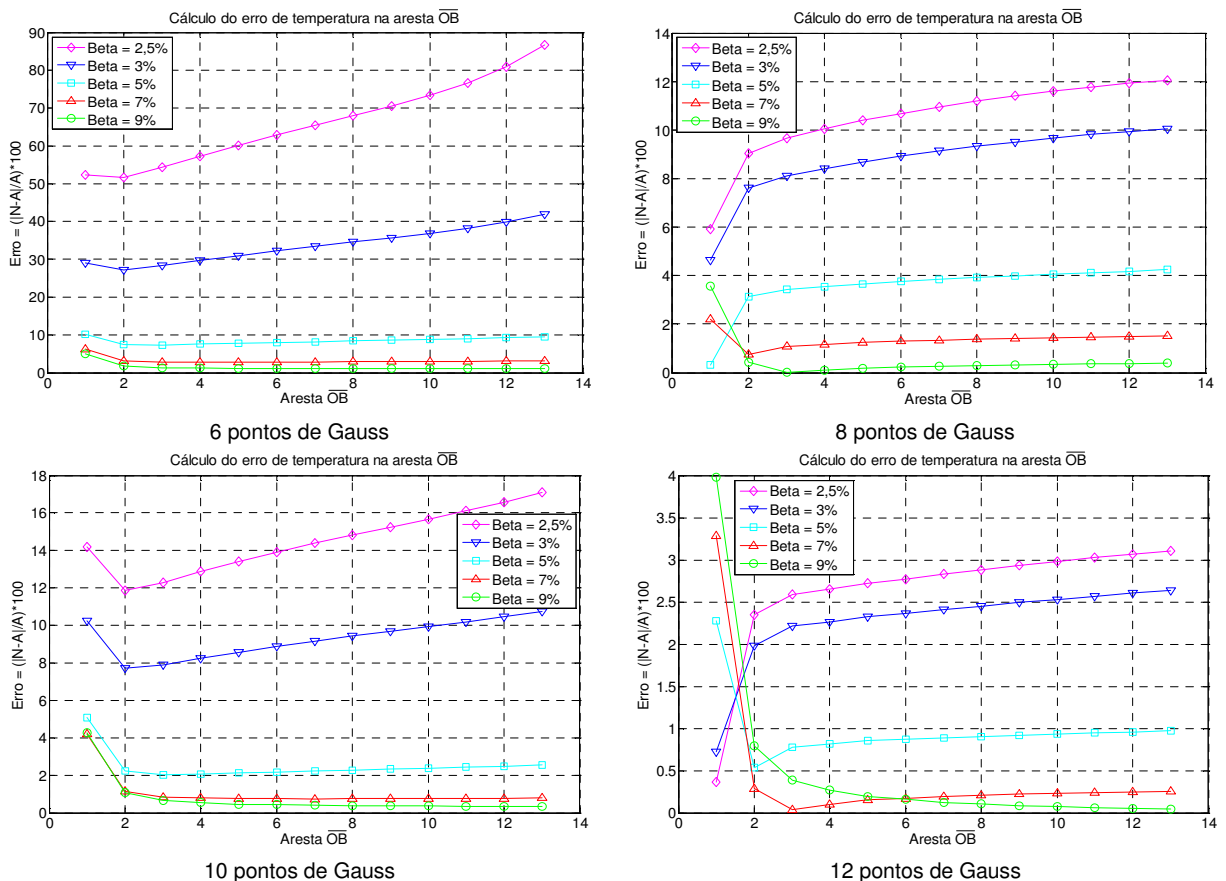


Figura 4.27 – Erro de temperatura com MECV externo nos pontos internos da aresta \overline{OB} .

Após a análise do campo de temperatura nos pontos internos, apresenta-se o comportamento do fluxo na direção x , direção y e sua resultante. A solução analítica para o fluxo na direção x (q_x) é dada pela equação (4.2):

$$q_x = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sqrt{r}} \quad (4.2)$$

A solução analítica para o fluxo na direção y (q_y) é dada pela equação (4.3):

$$q_y = \frac{\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sqrt{r}} \quad (4.3)$$

A resultante analítica do fluxo nos pontos internos (R_q) é dada pela equação (4.4)

$$R_q = \sqrt{(q_x)^2 + (q_y)^2} \quad (4.4)$$

A Figura 4.28 mostra a distribuição do fluxo na direção x e a Figura 4.29 mostra os resultados de erros destes fluxos, em relação à utilização de pontos de Gauss. Analisando a aresta \overline{AO} que pode ser observada, à esquerda de zero nas abscissas dos gráficos, o erro ocorre com $\beta=9\%$. Um comportamento semelhante pode ser verificado com a vantagem de que a oscilação próxima ao ponto A da aresta é reduzida significativamente, conforme aumenta os pontos de Gauss. Avaliando à aresta \overline{OB} que pode ser observada, à direita de zero também nas abscissas dos gráficos, percebe-se que o erro está com um β de 9%. Ao se aproximar da abscissa zero as curvas oscilam muito.

A distribuição do fluxo também é avaliada na direção y variando os pontos de Gauss, como mostra a Figura 4.30. Observando a Figura 4.31 e Figura 4.32, é possível verificar que os resultados de betas foram semelhantes aos apresentados na direção x , indicando que um β de 9% é a distância ótima de *offset*.

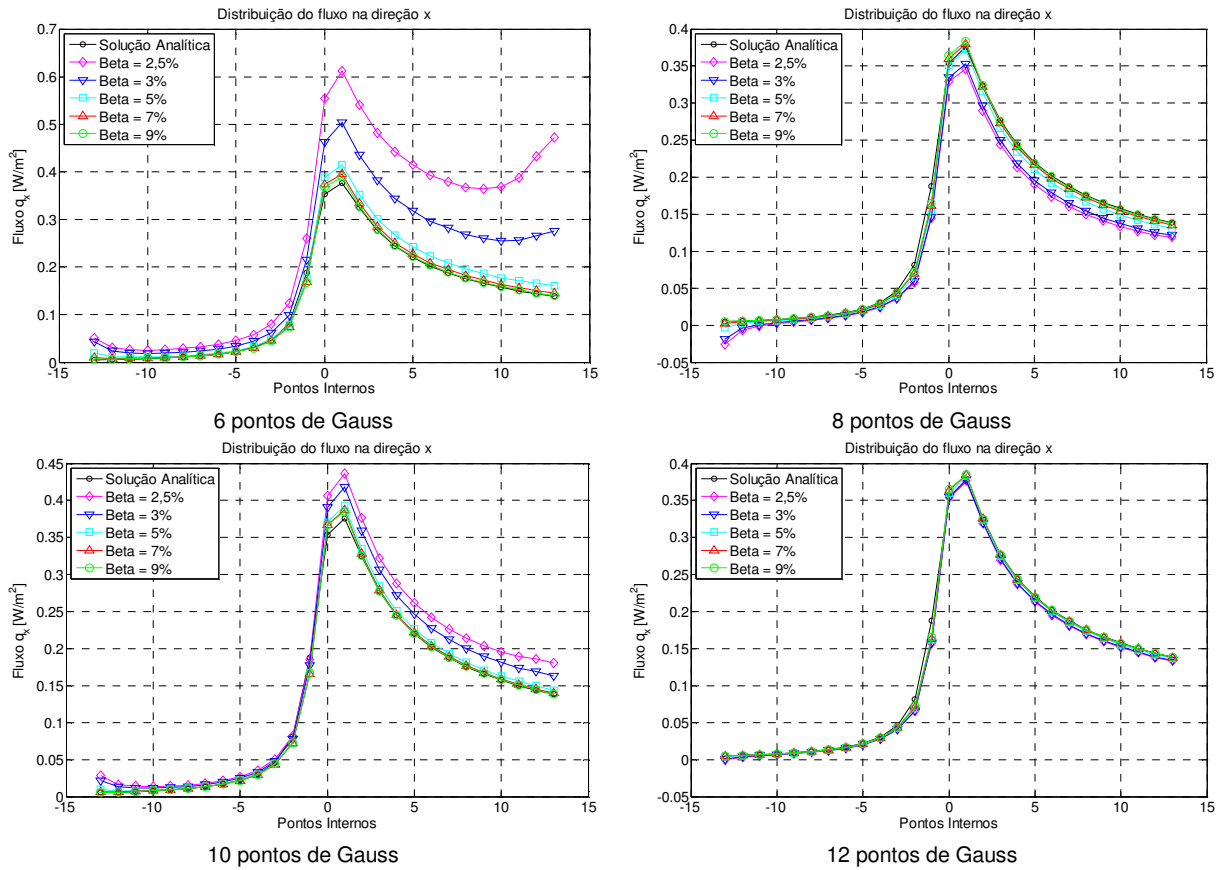


Figura 4.28 – Distribuição do fluxo na direção x avaliado com MECV externo.

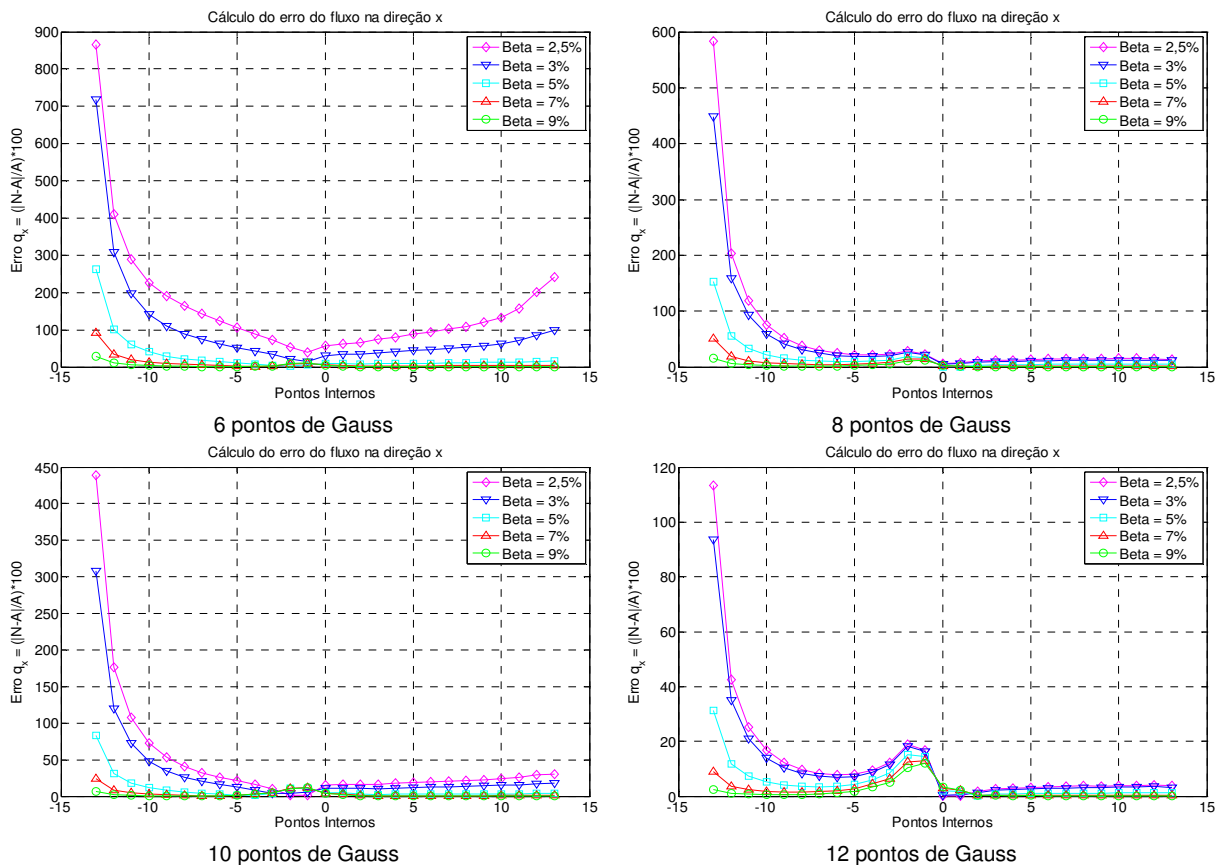


Figura 4.29 – Cálculo do erro do fluxo na direção x avaliado com o MECV externo.

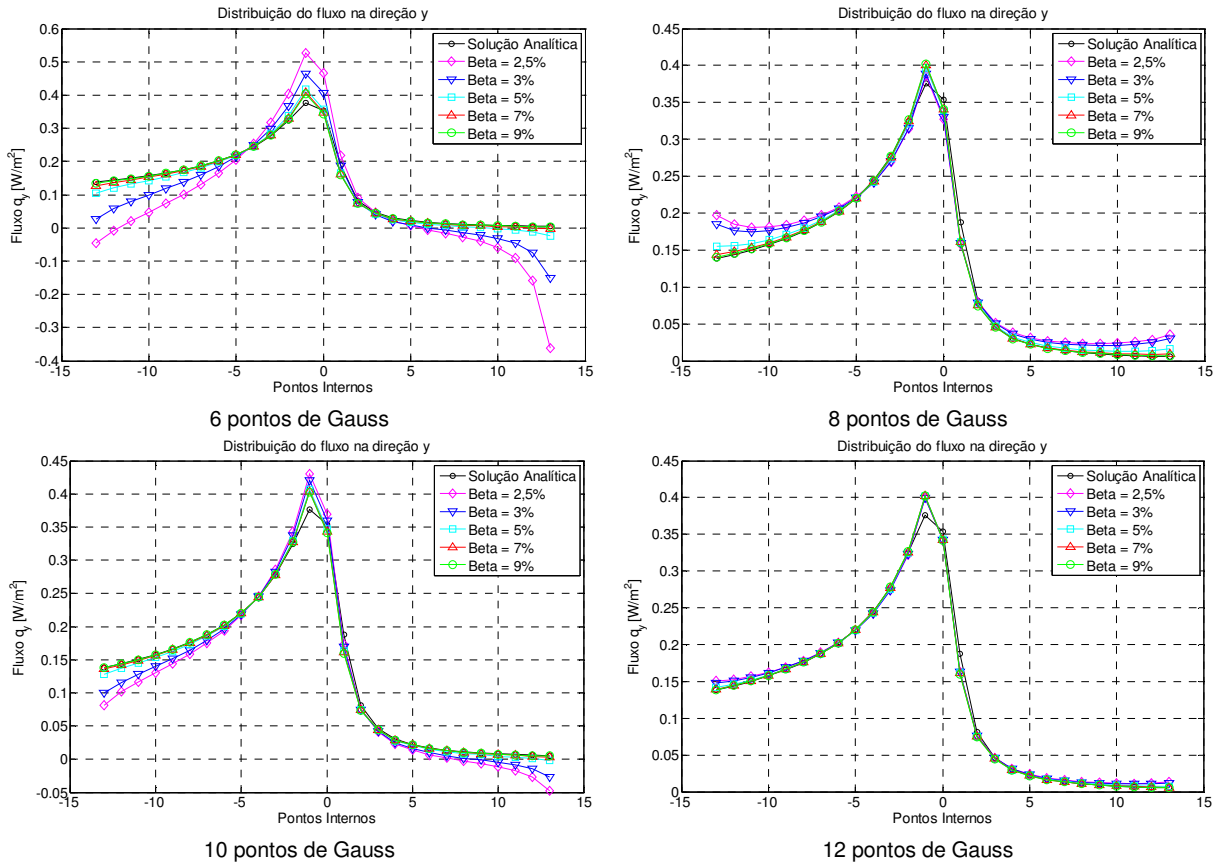


Figura 4.30 – Distribuição do fluxo na direção y avaliado com o MECV externo.

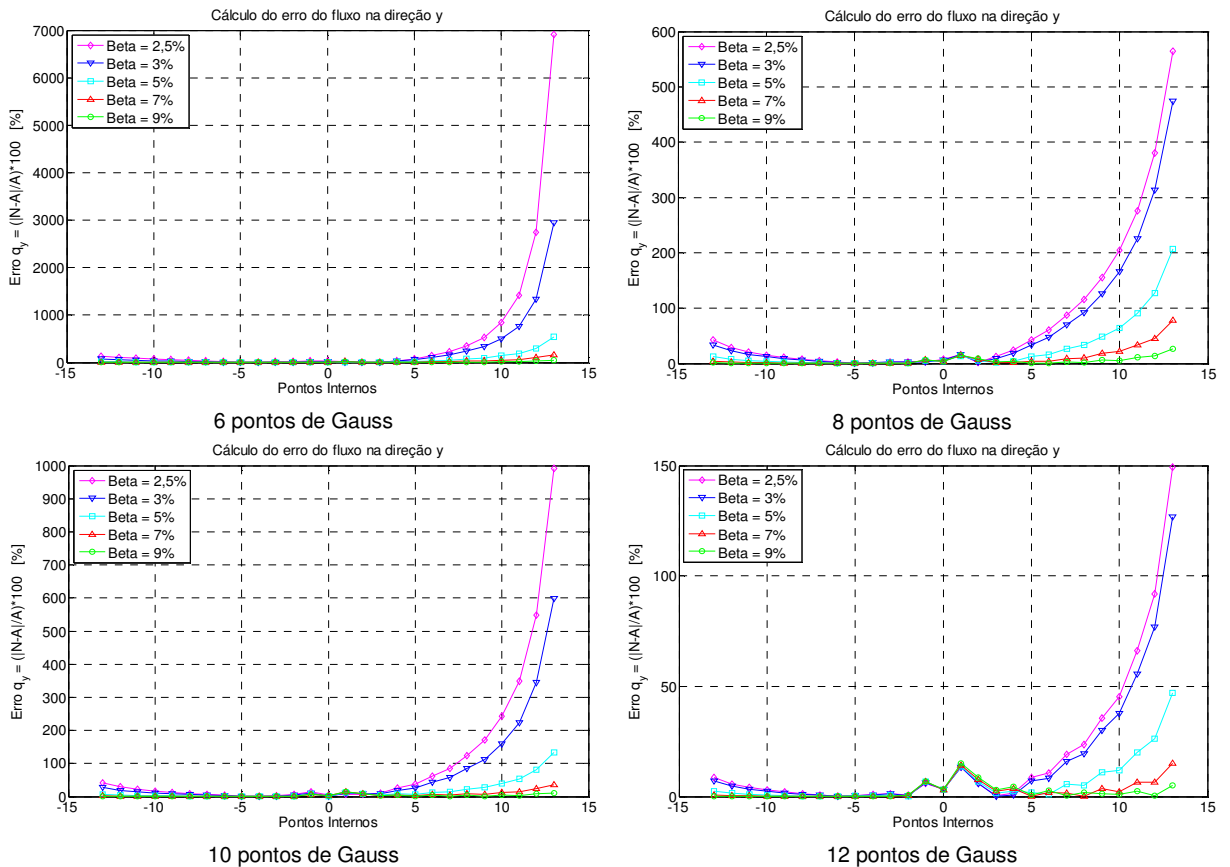


Figura 4.31 - Cálculo do erro do fluxo na direção y avaliado com o MECV externo.

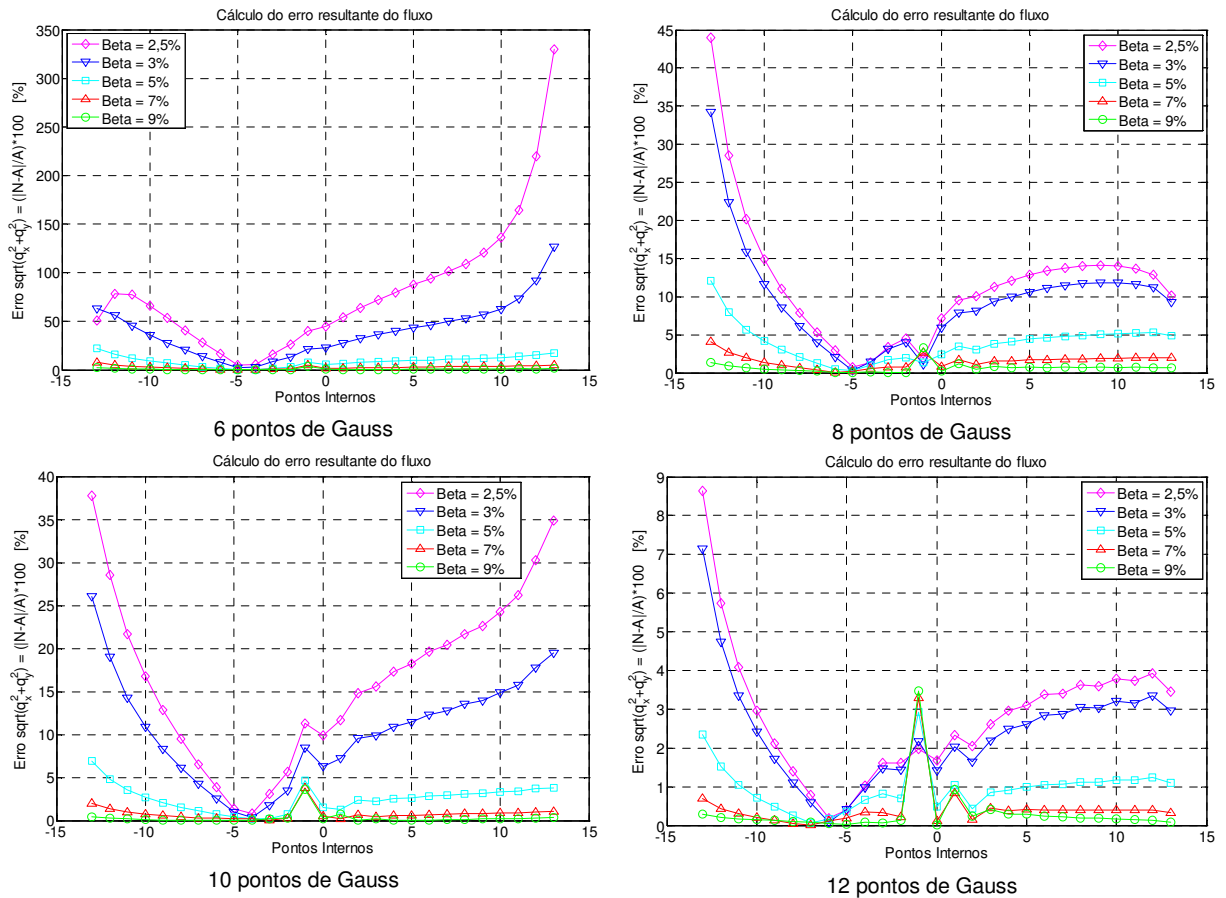


Figura 4.32 – Erro resultante do fluxo nos pontos internos avaliado com o MECV externo.

A Figura 4.33 apresenta o erro resultante do fluxo e sua solução analítica. Os resultados concordam bem com a solução analítica devido à sobreposição das curvas.

A Tabela 4 apresenta o resultado da solução analítica e os resultados via MECV nos pontos internos, mostrando a oscilação dos resultados de erros encontrados na aresta \overline{OB} . Na Tabela 5 pode ser observado o erro do fluxo resultante nos pontos internos.

Segundo Cruz (2001), à medida que se aumenta os pontos de integração local, a precisão do resultado também aumenta, isto significa que o número de pontos de integração pode influenciar o resultado. Desta forma, entende-se que aumentando os pontos de Gauss, obtêm-se melhores resultados para resolver o problema de descontinuidade de fluxo.

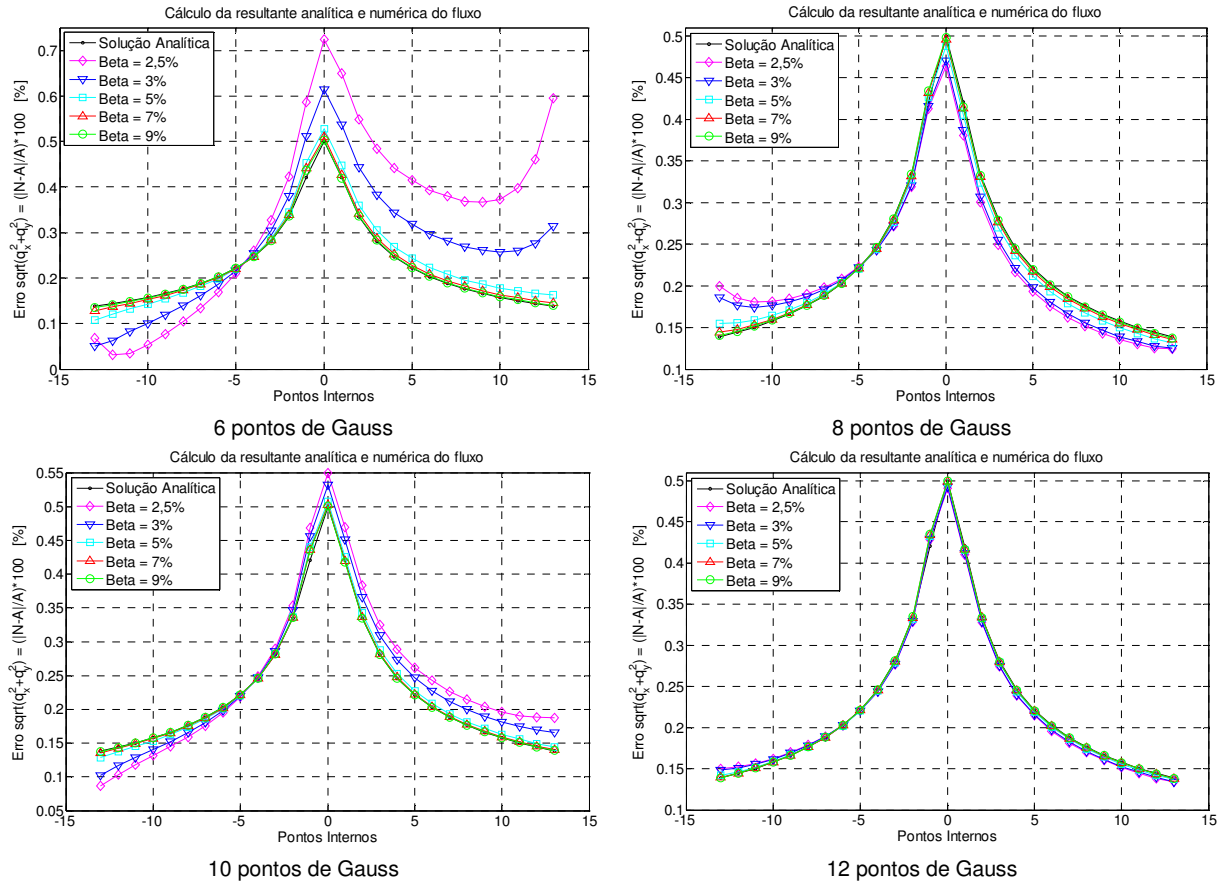


Figura 4.33 – Resultante analítica e numérica do fluxo avaliadas com o MECV externo.

Tabela 4 – Solução analítica e numérica do Fluxo resultante avaliados com o MECV externo.

Coordenadas		Solução Analítica	MECV Fluxo resultante pontos internos [W/m ²]				
x	y		$\beta = 1\%$	$\beta = 3\%$	$\beta = 5\%$	$\beta = 7\%$	$\beta = 9\%$
-13	1	0,1385	0,1273	0,1484	0,1417	0,1394	0,1389
-12	1	0,1441	0,1357	0,1509	0,1463	0,1447	0,1444
-11	1	0,1504	0,1439	0,1555	0,1520	0,1509	0,1507
-10	1	0,1577	0,1524	0,1615	0,1589	0,1580	0,1579
-9	1	0,1662	0,1617	0,1690	0,1669	0,1664	0,1664
-8	1	0,1761	0,1725	0,1780	0,1765	0,1762	0,1763
-7	1	0,1880	0,1851	0,1891	0,1881	0,1880	0,1882
-6	1	0,2027	0,2004	0,2029	0,2024	0,2025	0,2028
-5	1	0,2214	0,2197	0,2205	0,2206	0,2210	0,2215
-4	1	0,2462	0,2448	0,2438	0,2446	0,2454	0,2461
-3	1	0,2812	0,2802	0,2770	0,2789	0,2803	0,2814
-2	1	0,3344	0,3362	0,3296	0,3320	0,3336	0,3348
-1	1	0,4204	0,4404	0,4296	0,4328	0,4343	0,4351
0	1	0,5000	0,5091	0,4929	0,4976	0,4994	0,5000
1	1	0,4204	0,4295	0,4119	0,4160	0,4170	0,4166
2	1	0,3344	0,3444	0,3289	0,3329	0,3339	0,3336
3	1	0,2812	0,2895	0,2750	0,2788	0,2799	0,2800
4	1	0,2462	0,2535	0,2401	0,2440	0,2453	0,2455
5	1	0,2214	0,2287	0,2156	0,2192	0,2205	0,2208
6	1	0,2027	0,2093	0,1970	0,2006	0,2019	0,2023
7	1	0,1880	0,1948	0,1826	0,1860	0,1873	0,1876
8	1	0,1761	0,1822	0,1707	0,1741	0,1754	0,1758
9	1	0,1662	0,1725	0,1611	0,1643	0,1655	0,1658
10	1	0,1577	0,1636	0,1527	0,1559	0,1571	0,1575
11	1	0,1504	0,1567	0,1457	0,1487	0,1499	0,1502
12	1	0,1441	0,1502	0,1393	0,1423	0,1435	0,1439
13	1	0,1385	0,1450	0,1344	0,1370	0,1380	0,1384

Tabela 5 – Erro resultante do fluxo nos pontos internos avaliado com o MECV externo.

Coordenadas		MECV Erro do fluxo resultante				
x	y	1%	3%	5%	7%	9%
-13	1	8,0811	7,1374	2,3393	0,6889	0,2854
-12	1	5,8405	4,7296	1,5137	0,4391	0,2099
-11	1	4,3742	3,3466	1,0481	0,3051	0,1755
-10	1	3,4049	2,4139	0,7197	0,2009	0,1414
-9	1	2,6579	1,7120	0,4754	0,1294	0,1264
-8	1	2,0655	1,1073	0,2486	0,0487	0,0961
-7	1	1,5545	0,5889	0,0575	0,0113	0,0851
-6	1	1,1490	0,0713	0,1626	0,1075	0,0389
-5	1	0,7907	0,4151	0,3665	0,1845	0,0220
-4	1	0,5689	0,9818	0,6542	0,3420	0,0724
-3	1	0,3408	1,4710	0,8220	0,3231	0,0696
-2	1	0,5363	1,4413	0,7007	0,2158	0,1280
-1	1	4,7424	2,1759	2,9350	3,2992	3,4795
0	1	1,8231	1,4149	0,4814	0,1127	0,0085
1	1	2,1427	2,0268	1,0513	0,8303	0,9188
2	1	2,9890	1,6491	0,4268	0,1440	0,2451
3	1	2,9495	2,1966	0,8494	0,4413	0,4184
4	1	2,9313	2,4808	0,9054	0,3775	0,2897
5	1	3,2804	2,6116	0,9890	0,4215	0,2982
6	1	3,2227	2,8387	1,0412	0,3922	0,2337
7	1	3,5900	2,8661	1,0634	0,4016	0,2271
8	1	3,4836	3,0571	1,1154	0,3895	0,1899
9	1	3,8465	3,0319	1,1156	0,3914	0,1844
10	1	3,7446	3,2052	1,1710	0,3895	0,1610
11	1	4,1743	3,1638	1,1698	0,3911	0,1569
12	1	4,2257	3,3439	1,2443	0,3994	0,1390
13	1	4,7420	2,9546	1,0962	0,3178	0,0713

No MECV externo foi possível avaliar que com 12 pontos de Gauss um β de 9% é a distância ótima encontrada.

4.1.2 Avaliação da Variável α no Interior do Elemento Descontínuo

Neste trabalho foi apresentada uma técnica de contorno virtual, denominada de MECV externo. As análises foram realizadas utilizando um fator α igual a 10% do tamanho do elemento discretizado. A próxima etapa consiste na verificação da melhor localização dos nós físicos, no interior do elemento descontínuo, conforme ilustrado na Figura 4.34. Neste sentido, a sensibilidade da distância α também será avaliada em relação à distância β , utilizando o MECV externo na aresta \overline{OB} . Os resultados são obtidos observando betas iguais a 1, 3, 5, 7 e 9% e alfas iguais a 10, 20, 30 e 40% do tamanho do elemento com 12 pontos de Gauss. Uma vez avaliados os pontos de controle 7, 8 e 9 é realizado uma verificação dos alfas nos pontos internos escolhidos no domínio com abscissas variando de [-13:1:13] e ordenada 1, conforme apresentados na Figura 4.35.

A Figura 4.36 apresenta os erros avaliados nos pontos de controle 7, 8 e 9. O gráfico com alfa igual a 10% apresenta os melhores erros. Para uma melhor

avaliação os intervalos são ampliados na Figura 4.37 e obtém-se a confirmação que um alfa igual a 10% é o melhor fator para o elemento descontínuo.

A Tabela 6 e Tabela 7 a apresentam respectivamente os valores de temperatura nos pontos internos variando os alfas e os valores dos erros destas temperaturas.

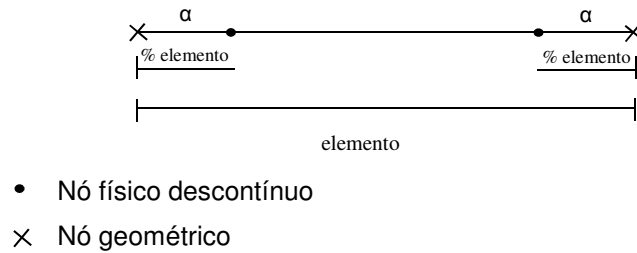


Figura 4.34 – Fator α no elemento descontínuo.

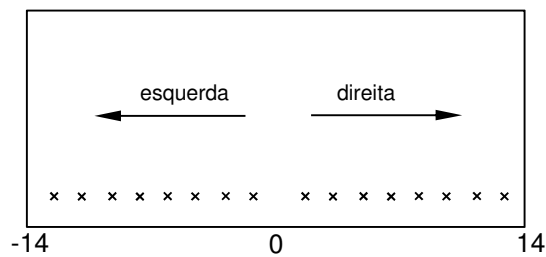


Figura 4.35 – Detalhe da localização dos pontos internos.

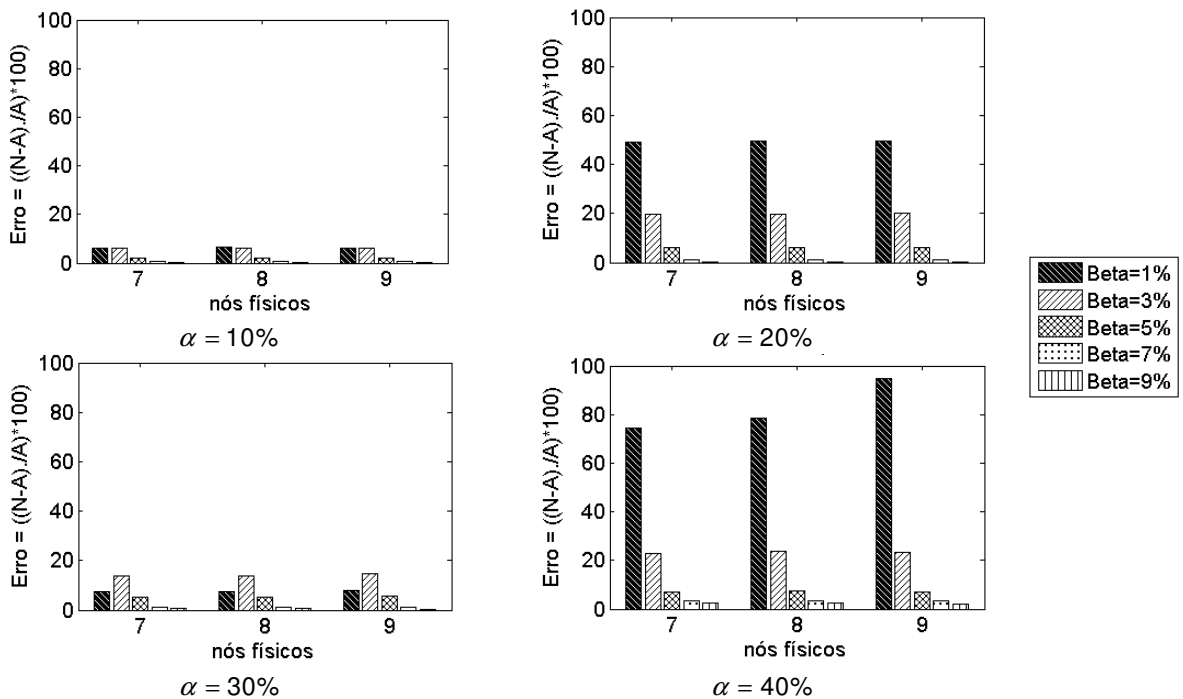


Figura 4.36 – Erros percentuais nos pontos de controle 7, 8 e 9 e alfas iguais a 10, 20, 30 e 40%.

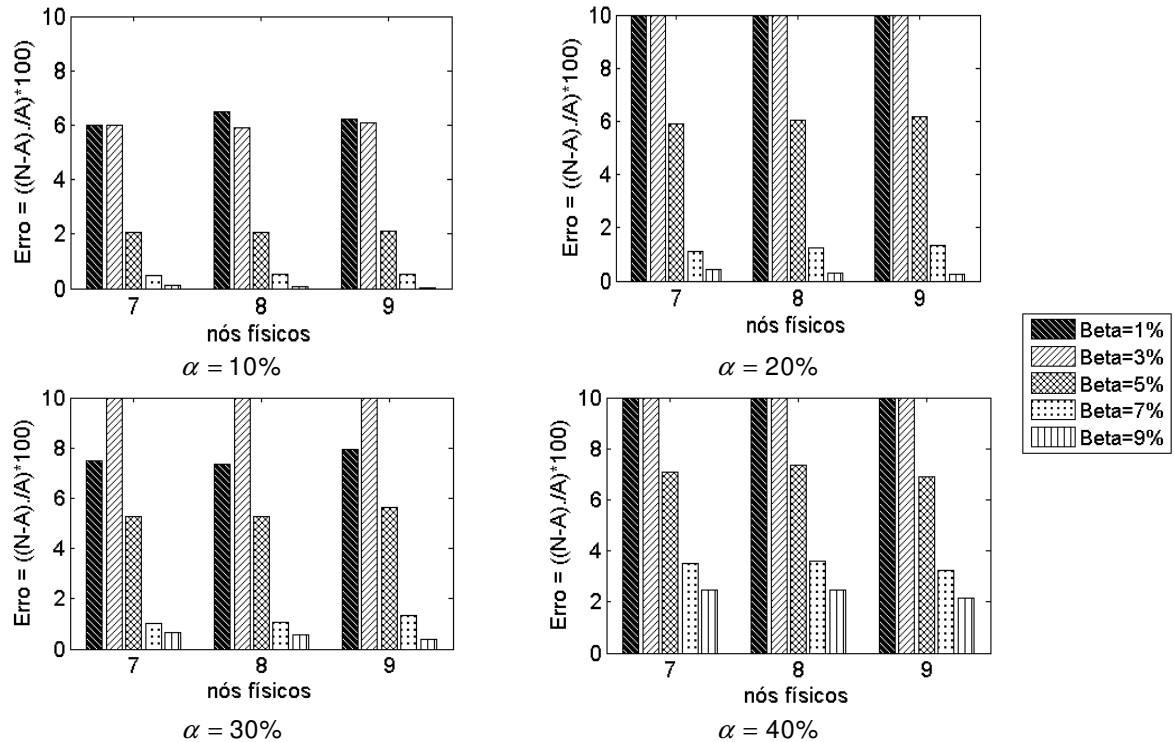


Figura 4.37 – Erros percentuais ampliados nos pontos de controle 7, 8 e 9.

Tabela 6 – Temperatura analítica e numérica para os pontos internos variando α .

Coordenadas		Solução	Potencial MECV [°C]			
x	y	Análítica	$\alpha = 10\%$	$\alpha = 20\%$	$\alpha = 30\%$	$\alpha = 40\%$
-13	1	0,1388	0,1389	0,1409	0,1416	0,1403
-12	1	0,1445	0,1445	0,1462	0,1462	0,1462
-11	1	0,1509	0,1508	0,1524	0,1520	0,1529
-10	1	0,1583	0,1581	0,1597	0,1589	0,1605
-9	1	0,1669	0,1666	0,1682	0,1670	0,1693
-8	1	0,1771	0,1766	0,1783	0,1767	0,1798
-7	1	0,1895	0,1886	0,1905	0,1884	0,1925
-6	1	0,2048	0,2035	0,2057	0,2029	0,2083
-5	1	0,2247	0,2224	0,2252	0,2214	0,2287
-4	1	0,2519	0,2477	0,2515	0,2460	0,2566
-3	1	0,2923	0,2835	0,2893	0,2807	0,2973
-2	1	0,3627	0,3401	0,3508	0,3347	0,3645
-1	1	0,5318	0,4485	0,4682	0,4389	0,4922
0	1	0,7071	0,7149	0,7447	0,7003	0,7807
1	1	1,0637	1,1060	1,1385	1,0879	1,1807
2	1	1,4507	1,4622	1,4905	1,4429	1,5311
3	1	1,7541	1,7609	1,7852	1,7404	1,8238
4	1	2,0149	2,0204	2,0422	1,9984	2,0799
5	1	2,2469	2,2513	2,2712	2,2277	2,3088
6	1	2,4578	2,4617	2,4803	2,4365	2,5181
7	1	2,6524	2,6557	2,6731	2,6288	2,7114
8	1	2,8339	2,8368	2,8534	2,8083	2,8923
9	1	3,0046	3,0071	3,0229	2,9770	3,0626
10	1	3,1662	3,1685	3,1836	3,1367	3,2241
11	1	3,3200	3,3220	3,3365	3,2886	3,3779
12	1	3,4671	3,4689	3,4828	3,4339	3,5252
13	1	3,6082	3,6098	3,6232	3,5732	3,6666

Tabela 7 – Erro de potencial para pontos internos variando α .

Coordenadas		MECV Erro do Potencial			
x	y	$\alpha = 10\%$	$\alpha = 20\%$	$\alpha = 30\%$	$\alpha = 40\%$
-13	1	0,1055	1,5415	2,6279	1,0723
-12	1	0,0182	1,2022	2,0756	1,2213
-11	1	0,0531	1,0061	1,7756	1,3119
-10	1	0,1208	0,8758	1,5965	1,3857
-9	1	0,2029	0,7681	1,4705	1,4538
-8	1	0,3016	0,6751	1,3845	1,5344
-7	1	0,4461	0,5676	1,3087	1,6161
-6	1	0,6544	0,4392	1,2474	1,7193
-5	1	1,0137	0,2219	1,1476	1,8049
-4	1	1,6571	0,1517	0,9937	1,8910
-3	1	3,0272	1,0384	0,4757	1,6877
-2	1	6,2234	3,2878	1,1327	0,5150
-1	1	15,6652	11,9667	9,3584	7,4480
0	1	1,0989	5,3116	8,2256	10,4146
1	1	3,9835	7,0407	9,1770	11,0049
2	1	0,7960	2,7445	4,1315	5,5424
3	1	0,3861	1,7758	2,7761	3,9733
4	1	0,2724	1,3558	2,1414	3,2299
5	1	0,1942	1,0839	1,7320	2,7547
6	1	0,1580	0,9146	1,4689	2,4528
7	1	0,1230	0,7818	1,2669	2,2248
8	1	0,1046	0,6885	1,1207	2,0625
9	1	0,0846	0,6089	0,9991	1,9295
10	1	0,0735	0,5491	0,9053	1,8290
11	1	0,0605	0,4955	0,8234	1,7429
12	1	0,0530	0,4534	0,7576	1,6761
13	1	0,0446	0,4150	0,6989	1,6188

Os pontos internos serão avaliados variando os alfas e mantendo o melhor beta encontrado de 9%. A distribuição de temperatura pode ser visualizada na Figura 4.38 e aparentemente indica o melhor fator como sendo 10%.

Por outro lado, a Figura 4.39 apresenta o cálculo do erro na aresta \overline{AO} e indica que um alfa de 10% não é o mais adequado para valores muito próximos de zero na abscissa. Devido à descontinuidade impostas pelas condições de contorno nesses valores, ocorre uma variação nos resultados de alfa próximos a zero. Em relação à aresta \overline{OB} , a Figura 4.40 indica que alfa igual a 10% pode ser considerado como o melhor fator em todos os pontos internos.

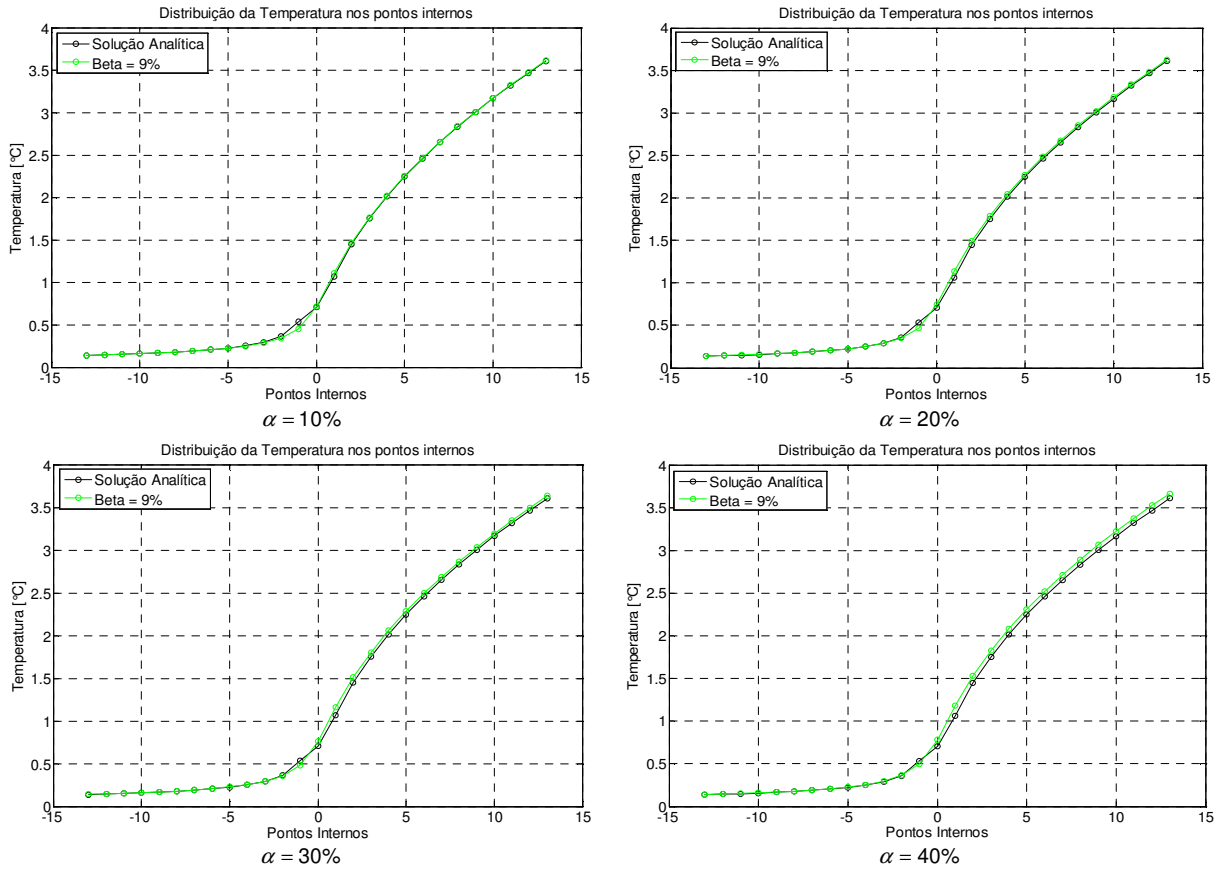


Figura 4.38 – Distribuição da temperatura nos pontos internos variando α .

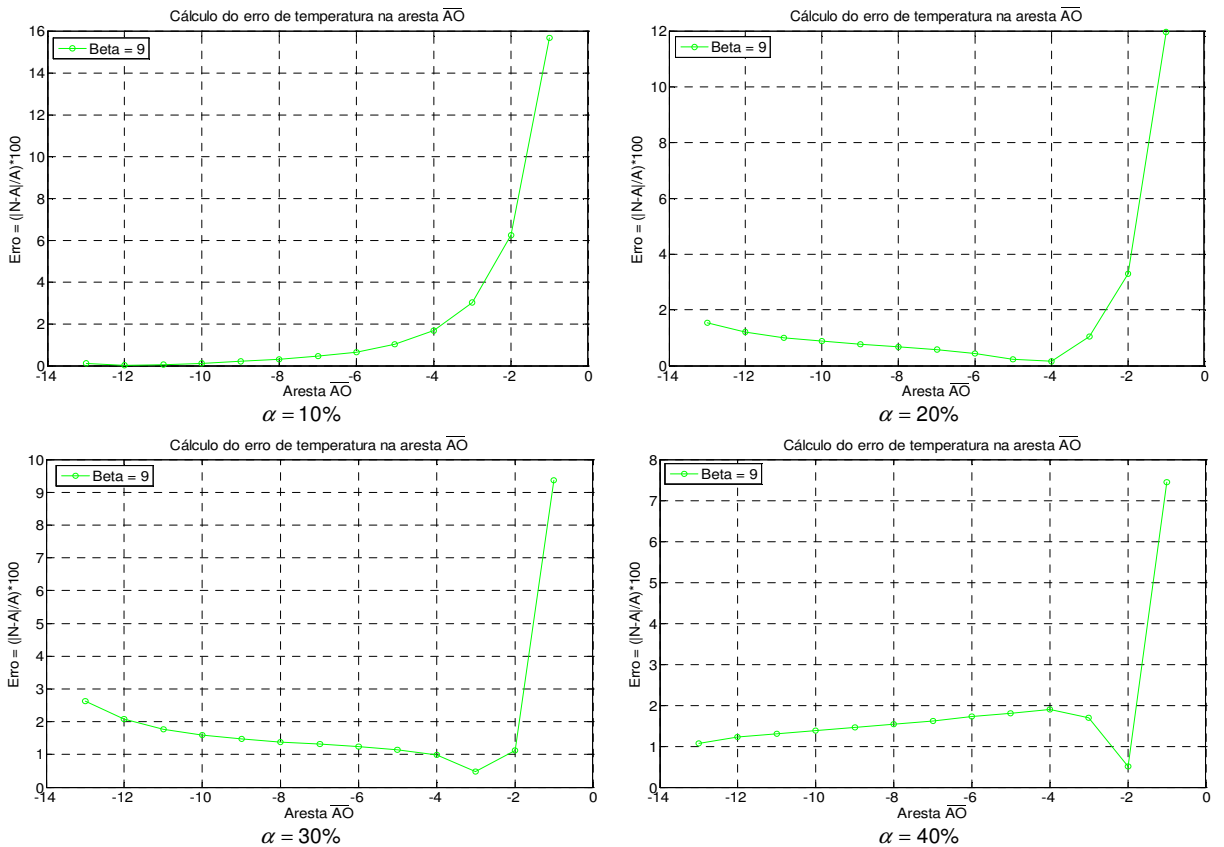


Figura 4.39 – Cálculo do erro de temperatura na aresta \overline{AO} variando α .

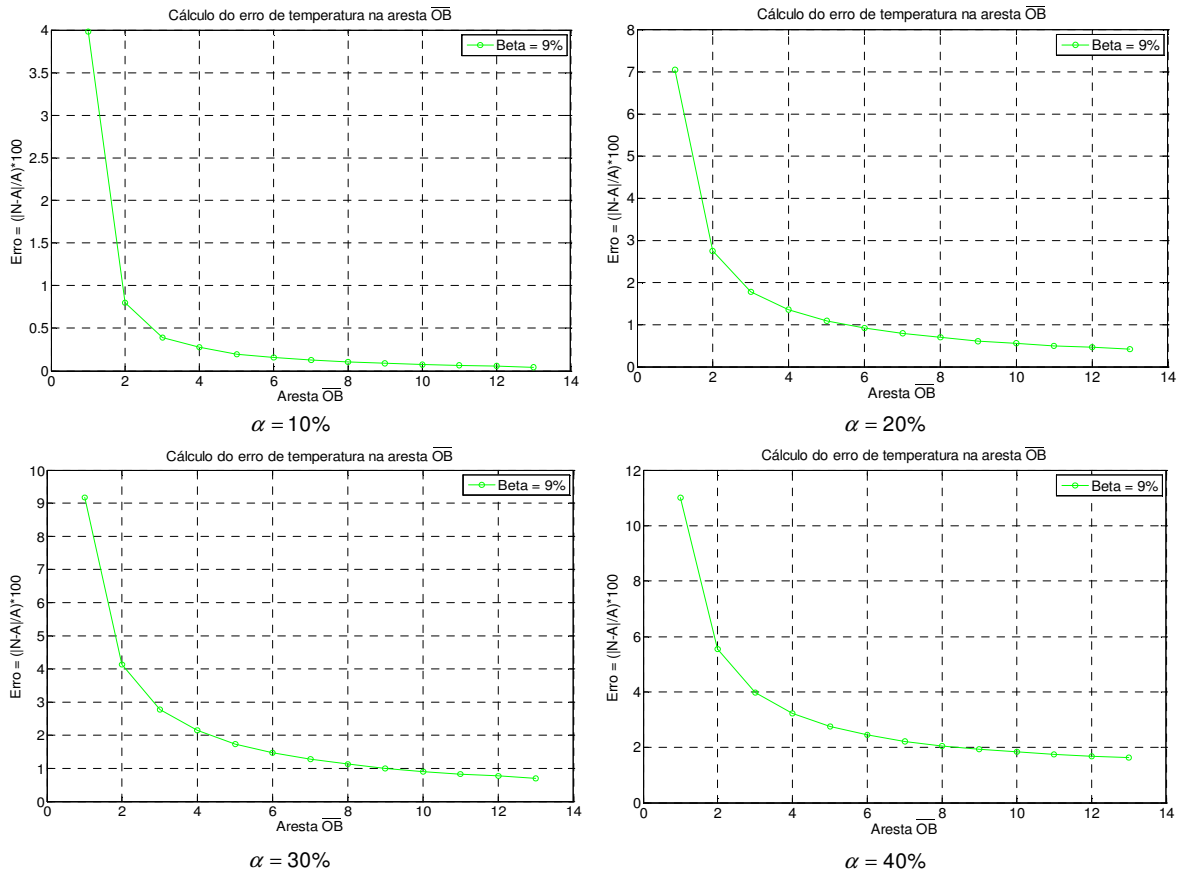


Figura 4.40 – Cálculo do erro de temperatura na aresta \overline{OB} variando α .

A Figura 4.41 apresenta o fluxo na direção x enquanto a Figura 4.42 apresenta os seus respectivos erros. Pode ser observado que à esquerda de zero na abscissa, um alfa com 20% é o mais indicado na maioria dos pontos e à direita de zero um alfa igual a 10% pode ser considerado.

A distribuição do fluxo na direção y é apresentada na Figura 4.43 e seus erros podem ser visualizados na Figura 4.44. Um alfa igual a 10% é indicado nesta análise como sendo o melhor fator.

Avaliando a resultante do fluxo na Figura 4.45 e Figura 4.46, percebe-se que um alfa de 10% obteve resultados satisfatórios em todos os pontos internos avaliados.

A Tabela 8 apresenta o resultado da solução analítica e numérica para o fluxo nos pontos internos enquanto a Tabela 9 apresenta o erro do fluxo resultante nos pontos internos.

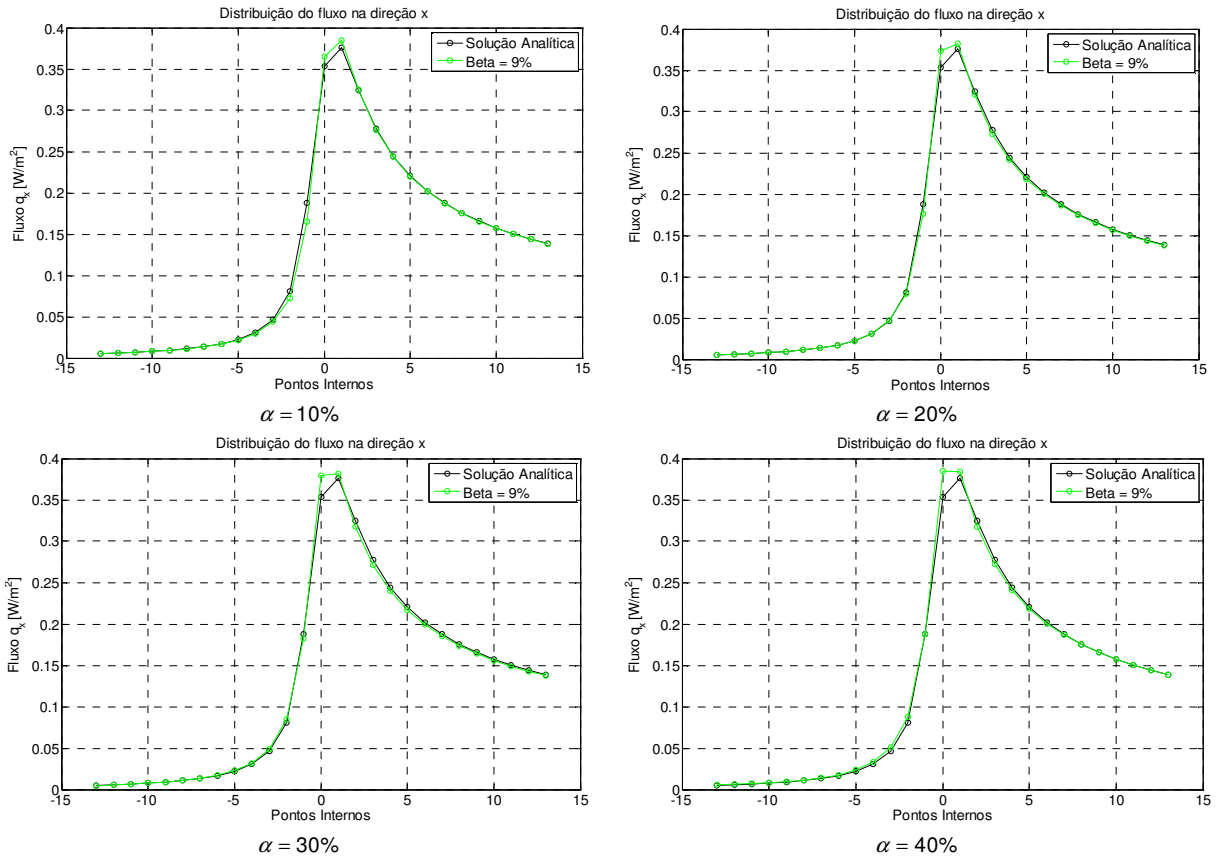


Figura 4.41 – Distribuição do fluxo na direção x variando α .

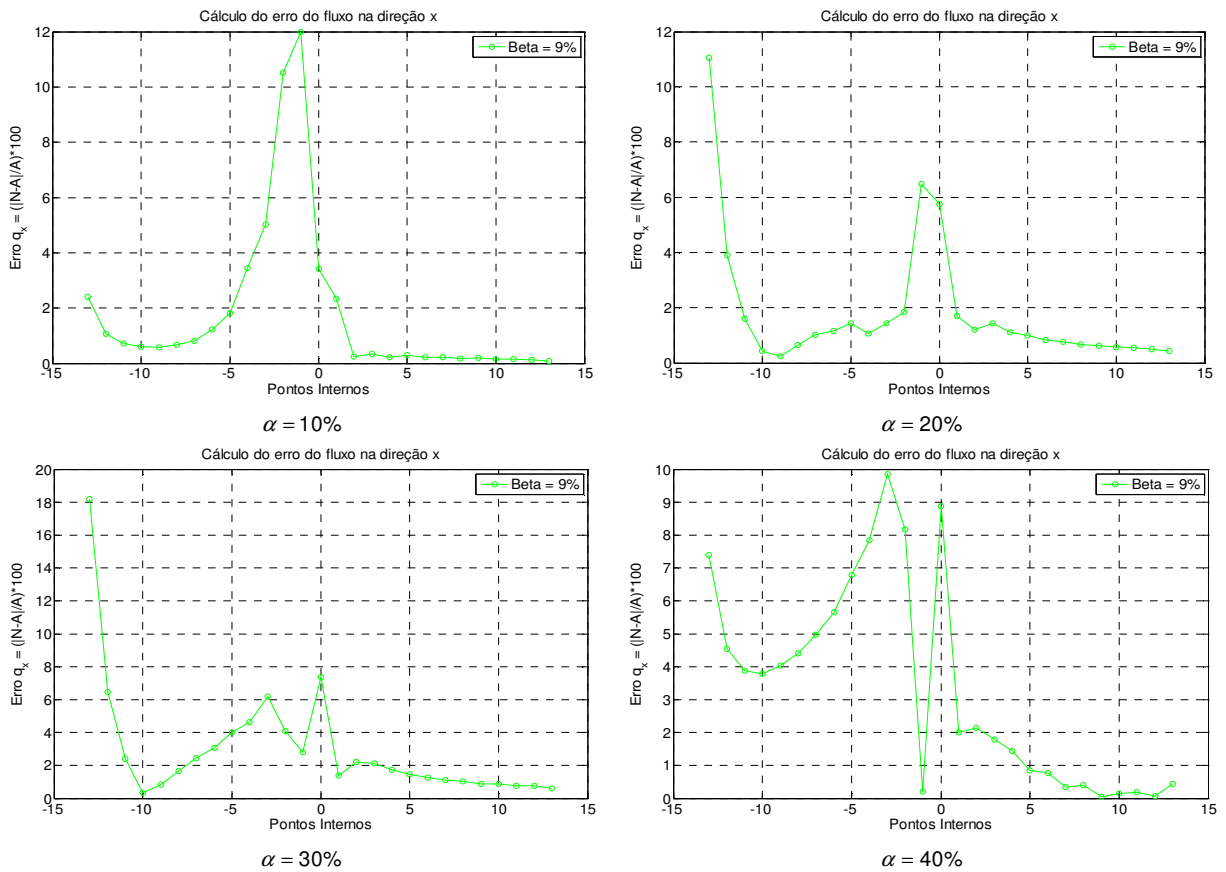


Figura 4.42 – Cálculo do erro do fluxo na direção x variando α .

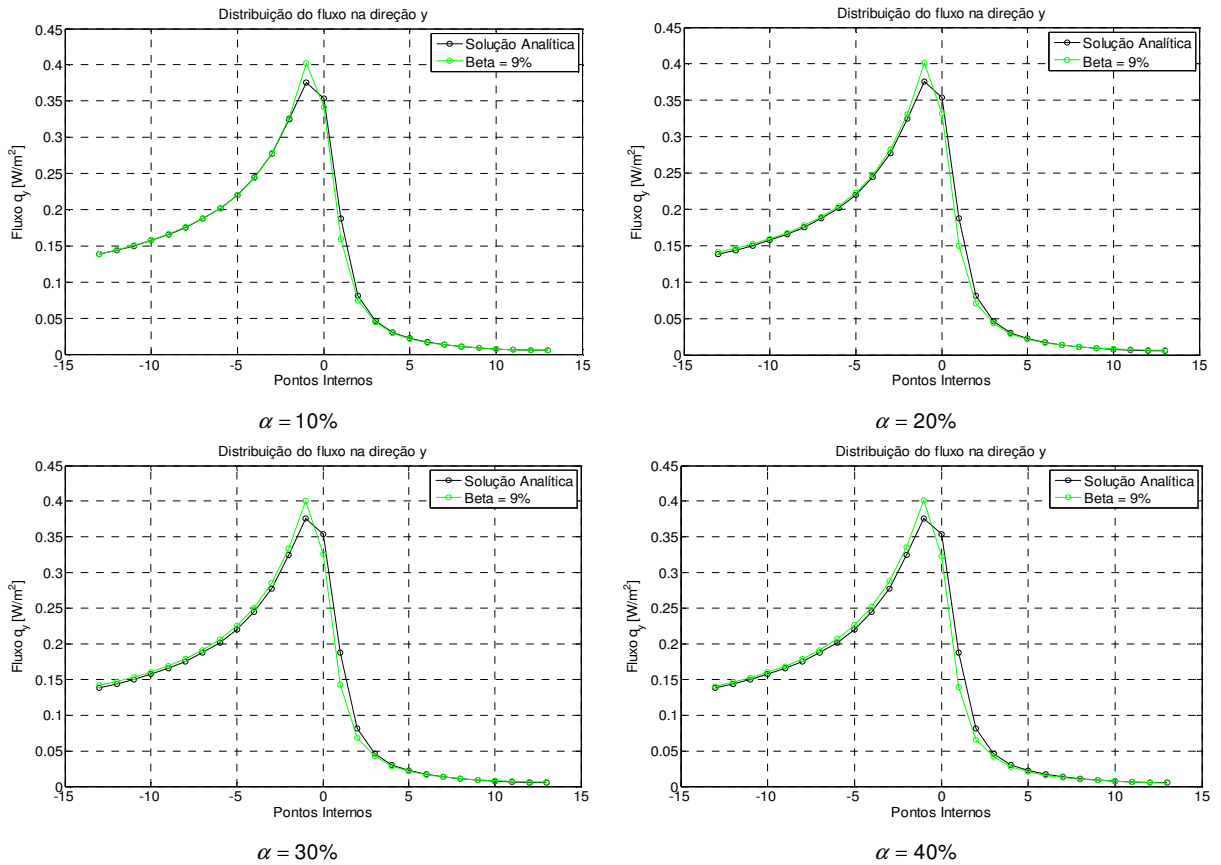


Figura 4.43 – Distribuição do fluxo na direção y variando α .

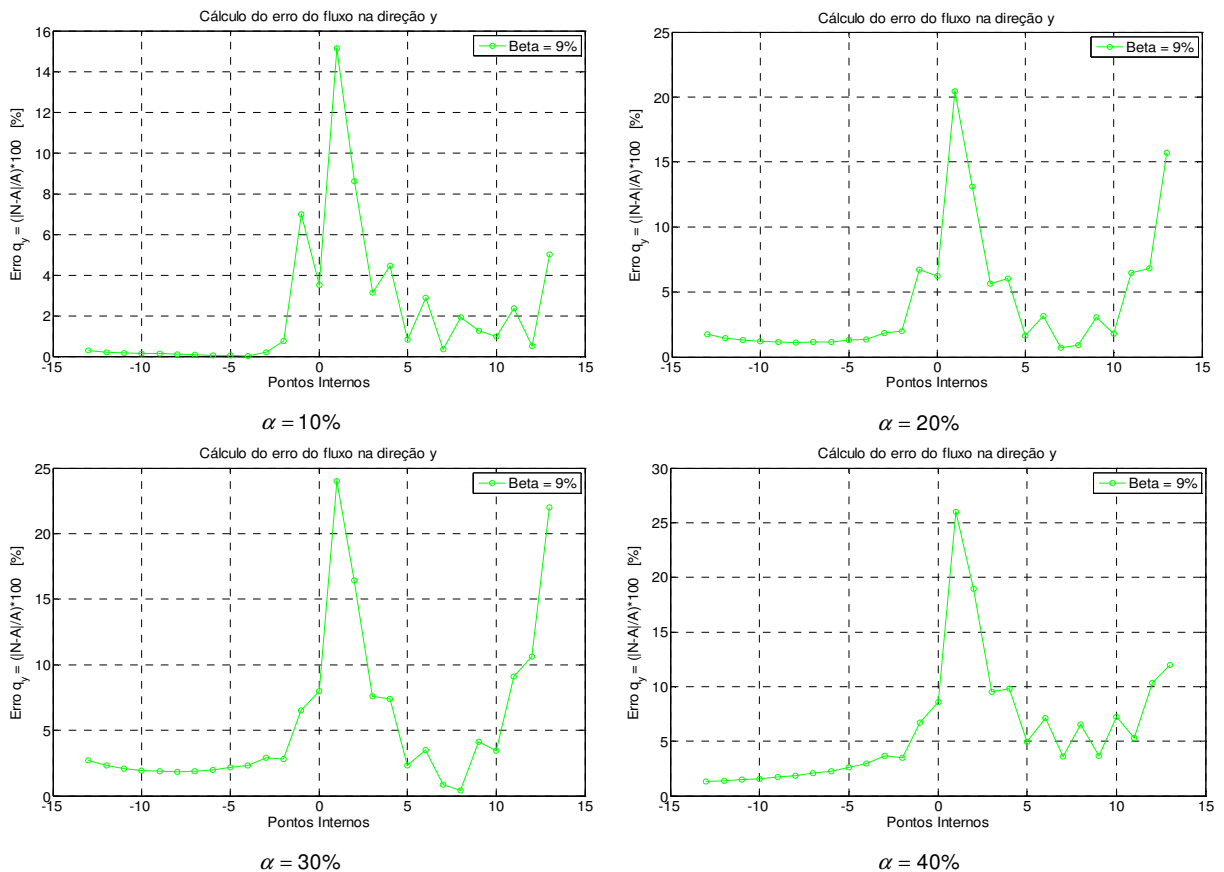


Figura 4.44 – Cálculo do erro do fluxo na direção y variando α .

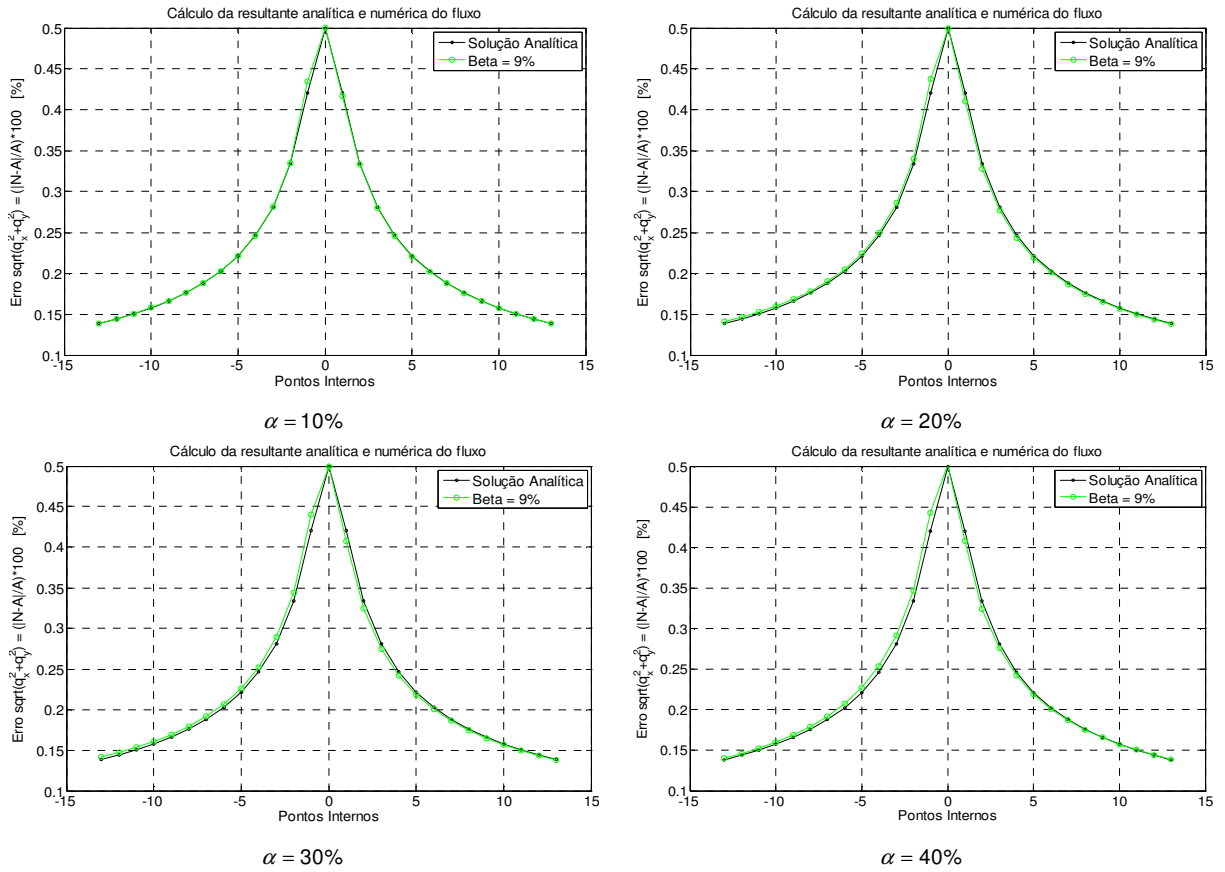


Figura 4.45 – Resultante analítica e numérica do fluxo variando α .

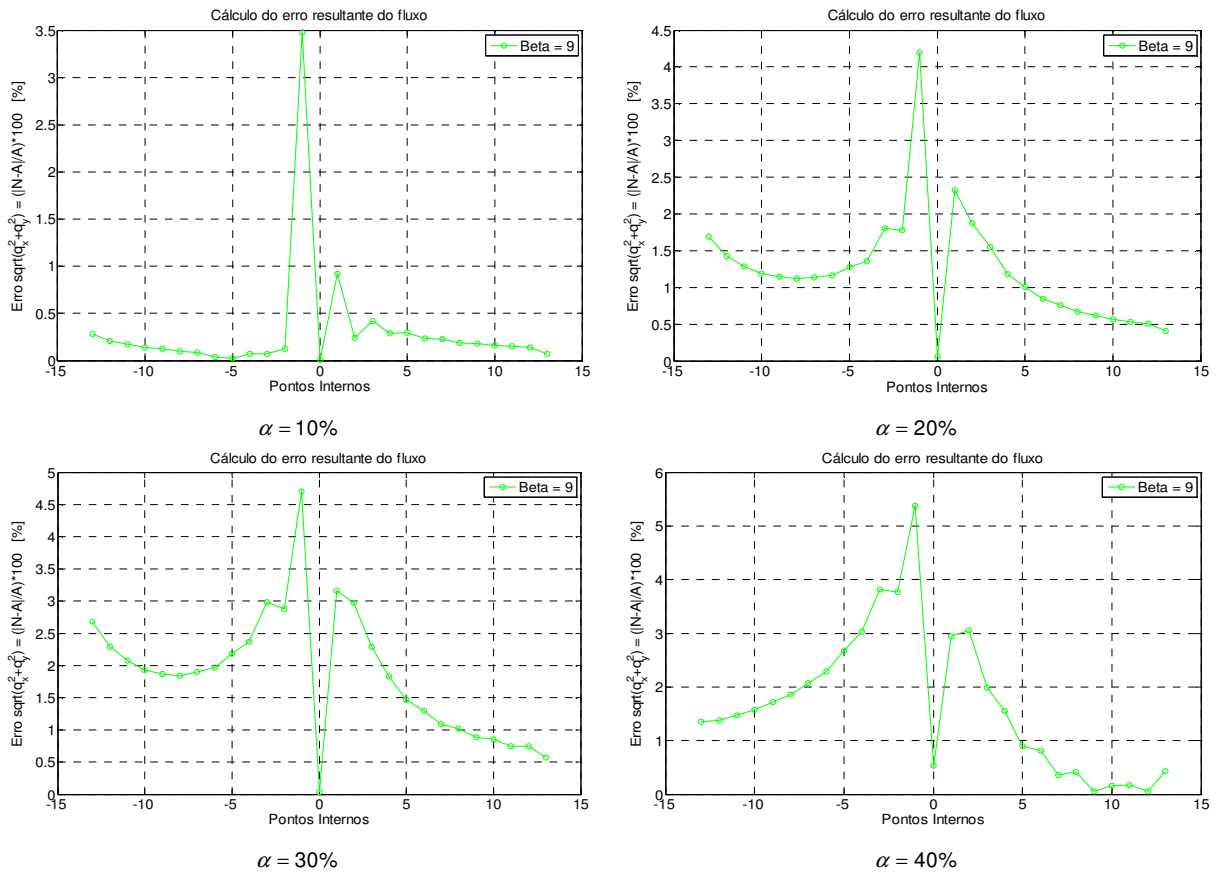


Figura 4.46 – Erro resultante do fluxo variando α .

Tabela 8 – Solução analítica e numérica do Fluxo resultante em pontos internos variando α .

Coordenadas		Solução	MECV Fluxo resultante pontos internos [W/m ²]			
x	y	Análítica	$\alpha = 10\%$	$\alpha = 20\%$	$\alpha = 30\%$	$\alpha = 40\%$
-13	1	0,1385	0,1389	0,1408	0,1422	0,1403
-12	1	0,1441	0,1444	0,1461	0,1474	0,1461
-11	1	0,1504	0,1507	0,1524	0,1536	0,1527
-10	1	0,1577	0,1579	0,1596	0,1608	0,1602
-9	1	0,1662	0,1664	0,1681	0,1693	0,1690
-8	1	0,1761	0,1763	0,1781	0,1793	0,1794
-7	1	0,1880	0,1882	0,1902	0,1916	0,1919
-6	1	0,2027	0,2028	0,2051	0,2067	0,2074
-5	1	0,2214	0,2215	0,2243	0,2263	0,2274
-4	1	0,2462	0,2461	0,2496	0,2521	0,2537
-3	1	0,2812	0,2814	0,2863	0,2895	0,2919
-2	1	0,3344	0,3348	0,3403	0,3440	0,3470
-1	1	0,4204	0,4351	0,4381	0,4402	0,4430
0	1	0,5000	0,5000	0,4997	0,4998	0,5027
1	1	0,4204	0,4166	0,4107	0,4072	0,4081
2	1	0,3344	0,3336	0,3281	0,3244	0,3242
3	1	0,2812	0,2800	0,2768	0,2747	0,2756
4	1	0,2462	0,2455	0,2433	0,2417	0,2424
5	1	0,2214	0,2208	0,2192	0,2182	0,2194
6	1	0,2027	0,2023	0,2010	0,2001	0,2011
7	1	0,1880	0,1876	0,1866	0,1860	0,1874
8	1	0,1761	0,1758	0,1749	0,1743	0,1754
9	1	0,1662	0,1658	0,1651	0,1647	0,1661
10	1	0,1577	0,1575	0,1568	0,1564	0,1575
11	1	0,1504	0,1502	0,1496	0,1493	0,1507
12	1	0,1441	0,1439	0,1434	0,1430	0,1442
13	1	0,1385	0,1384	0,1379	0,1377	0,1391

Tabela 9 – Erro resultante do fluxo nos pontos internos variando α .

Coordenadas		MECV Erro do fluxo resultante			
x	y	$\alpha = 10\%$	$\alpha = 20\%$	$\alpha = 30\%$	$\alpha = 40\%$
-13	1	0,2854	1,6919	2,6778	1,3525
-12	1	0,2099	1,4278	2,2870	1,3734
-11	1	0,1755	1,2867	2,0753	1,4713
-10	1	0,1414	1,1873	1,9302	1,5761
-9	1	0,1264	1,1454	1,8706	1,7116
-8	1	0,0961	1,1163	1,8440	1,8550
-7	1	0,0851	1,1409	1,8965	2,0672
-6	1	0,0389	1,1638	1,9692	2,2951
-5	1	0,0220	1,2821	2,1826	2,6778
-4	1	0,0724	1,3617	2,3675	3,0241
-3	1	0,0696	1,8068	2,9787	3,8169
-2	1	0,1280	1,7792	2,8770	3,7720
-1	1	3,4795	4,1990	4,7003	5,3673
0	1	0,0085	0,0612	0,0304	0,5307
1	1	0,9188	2,3259	3,1559	2,9424
2	1	0,2451	1,8758	2,9730	3,0550
3	1	0,4184	1,5488	2,2883	1,9815
4	1	0,2897	1,1849	1,8313	1,5581
5	1	0,2982	1,0083	1,4662	0,8931
6	1	0,2337	0,8498	1,2974	0,8145
7	1	0,2271	0,7597	1,0891	0,3605
8	1	0,1899	0,6737	1,0240	0,4164
9	1	0,1844	0,6210	0,8789	0,0501
10	1	0,1610	0,5677	0,8587	0,1619
11	1	0,1569	0,5349	0,7442	0,1709
12	1	0,1390	0,5014	0,7468	0,0490
13	1	0,0713	0,4124	0,5689	0,4301

Nesta análise, a implementação do MECV externo com um β de 9% foram considerados para uma avaliação do fator α no interior do elemento descontínuo e os resultados foram satisfatórios quando avaliados com um α de 10%.

4.1.3 Avaliação com Discretização Irregular

Nesta seção, a discretização do problema será realizada com elementos descontínuos de tamanhos diferentes conforme apresentados na Tabela 10 e na Figura 4.47. O método aplicado será o MECV externo com um fator alfa de 10%. A distância ótima de *offset* será analisada nos pontos de controle apresentados na Figura 4.4, repetida por conveniência.

A distribuição de temperatura com betas iguais a 1, 3, 5, 7 e 9% é mostrada na Figura 4.49, onde se percebe o afastamento das curvas numéricas em relação à solução analítica. Neste sentido, tornou-se necessário uma avaliação com betas maiores, como apresentada pela Figura 4.50. Observa-se que os novos betas com 20, 30, 40 e 50% concordam bem com a solução analítica e que a curva com 10% ainda se afasta das demais. Ao se calcular o erro da temperatura na Figura 4.51, verifica-se que os erros menores para os nós 7 e 8 estão com beta de 30% e para o nó 9 com beta de 40%. Nota-se ainda que os resultados são estabilizados a partir de 16 pontos de Gauss. Desta forma as análises da Figura 4.52 serão realizadas com 16 pontos de Gauss em todos os pontos de controle com betas de 10, 20, 30 e 50%. Nesta figura, pode ser observado que para os nós 19, 20, 21 34 e 36 o erro menor está com um beta de 40% e para os nós 35 e 62 com beta de 10%. Por outro lado, para os nós 48, 49, 50, 63 e 64 o menor erro está com beta de 50%, o que indica que a procura pela distância ótima pode ainda não estar finalizada nas arestas que contêm estes pontos de controle e que de uma forma geral, os resultados nos nós físicos apresentam imprecisões. Neste sentido, para minimizar o problema, pode ser adequado à utilização de uma técnica de sub-elementação adotado por Silva (1996). A proposta é fazer uma sub-elementação em cada elemento do problema considerado.

Tabela 10 – Geometria da discretização.

Elemento	x	y	Elemento	x	y	Elemento	x	y
1	0	0	15	14	14	29	-14	14
2	0,8	0	16	11	14	30	-14	11,6
3	3	0	17	9,5	14	31	-14	12
4	3,2	0	18	7,9	14	32	-14	9,1
5	8	0	19	6,3	14	33	-14	6,5
6	11	0	20	5	14	34	-14	5
7	13	0	21	1,4	14	35	-14	3
8	14	0	22	0	14	36	-14	0
9	14	2,1	23	-1	14	37	-13,5	0
10	14	4	24	-2,2	14	38	-11	0
11	14	5	25	-4,1	14	39	-9	0
12	14	7,9	26	-7,4	14	40	-9,8	0
13	14	8,6	27	-8,2	14	41	-7	0
14	14	10	28	-10	14	42	-4	0

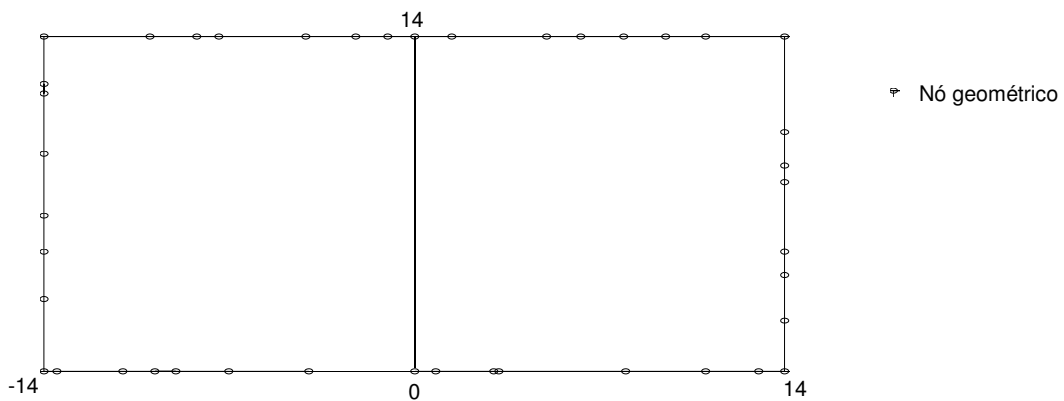


Figura 4.47 – Detalhe da discretização irregular.

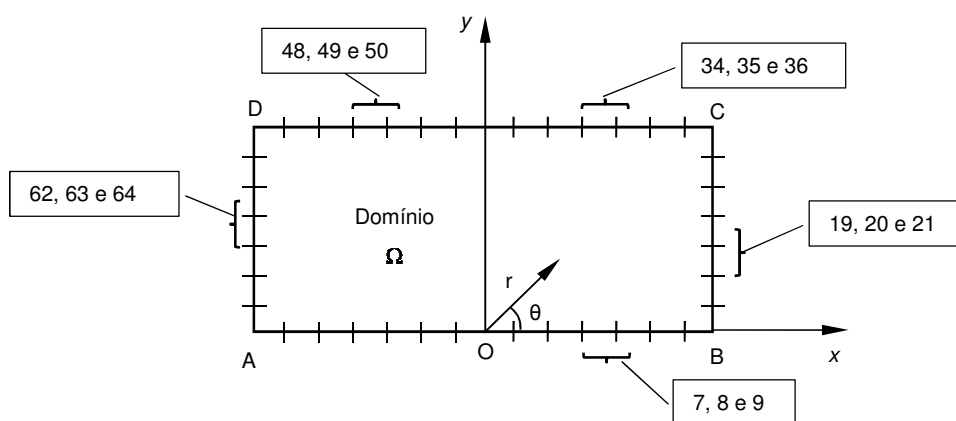


Figura 4.48 – Pontos de controle.

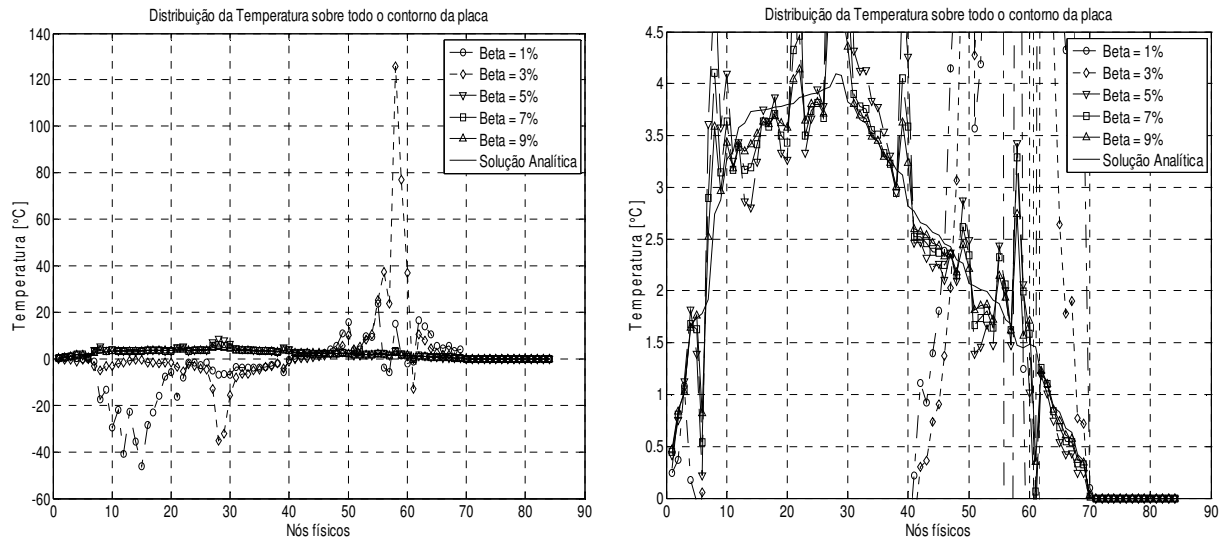


Figura 4.49 – Distribuição da temperatura com elementos irregulares e betas iguais a 1, 3, 5, 7 e 9%.

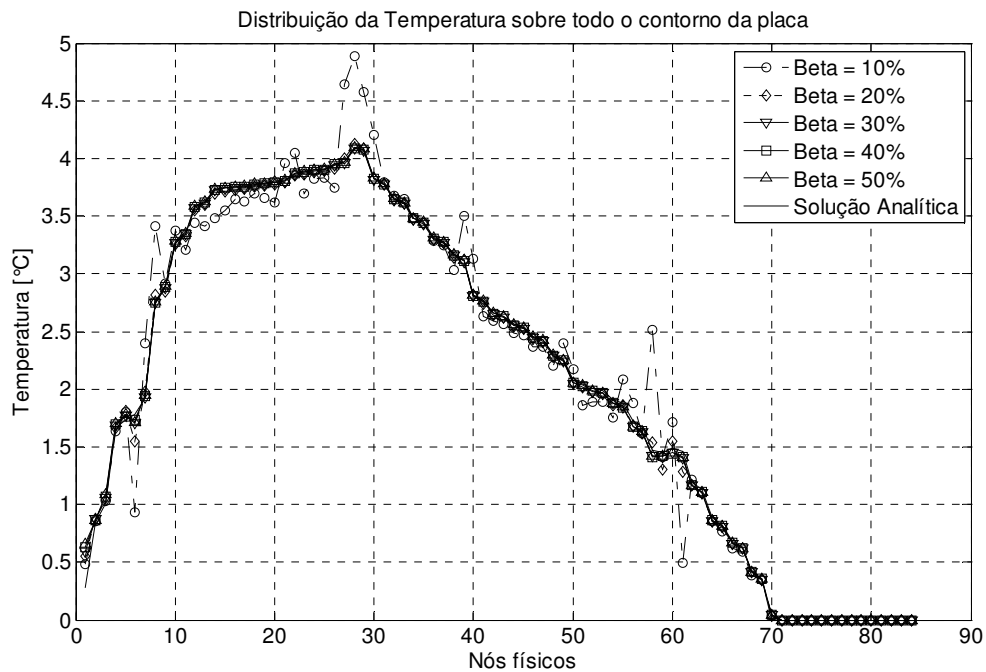


Figura 4.50 – Distribuição da temperatura com elementos irregulares e betas iguais a 10, 20, 30 40 e 50%.

A técnica de sub-elementação consiste basicamente em dividir o elemento considerado, em elementos menores chamados de sub-elementos. Estes sub-elementos segundo Leonel (2006) podem ter o mesmo comprimento ou tomar a forma progressiva conforme visto na Figura 4.53.

No entanto, mesmo que o tamanho dos sub-elementos aumentem de forma progressiva, não é vantajoso aplicar esta técnica, visto que ela recai em um problema com discretização irregular.

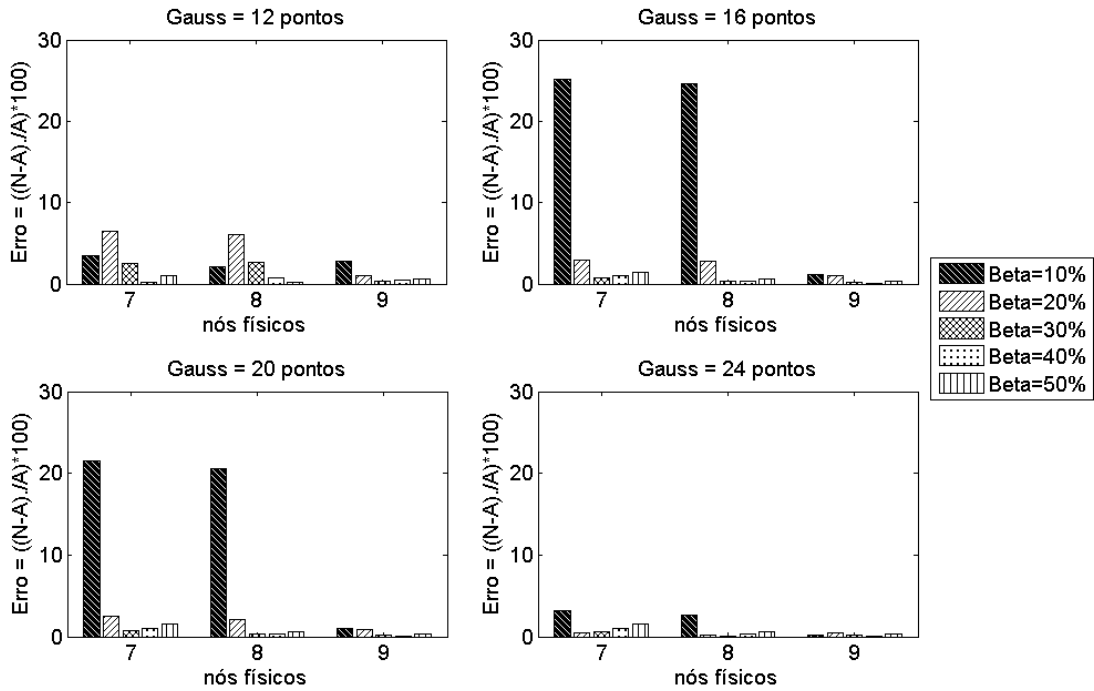


Figura 4.51 – Erro de temperatura nos pontos de controle 7, 8 e 9 com elementos irregulares e betas iguais a 10, 20, 30, 40 e 50%.

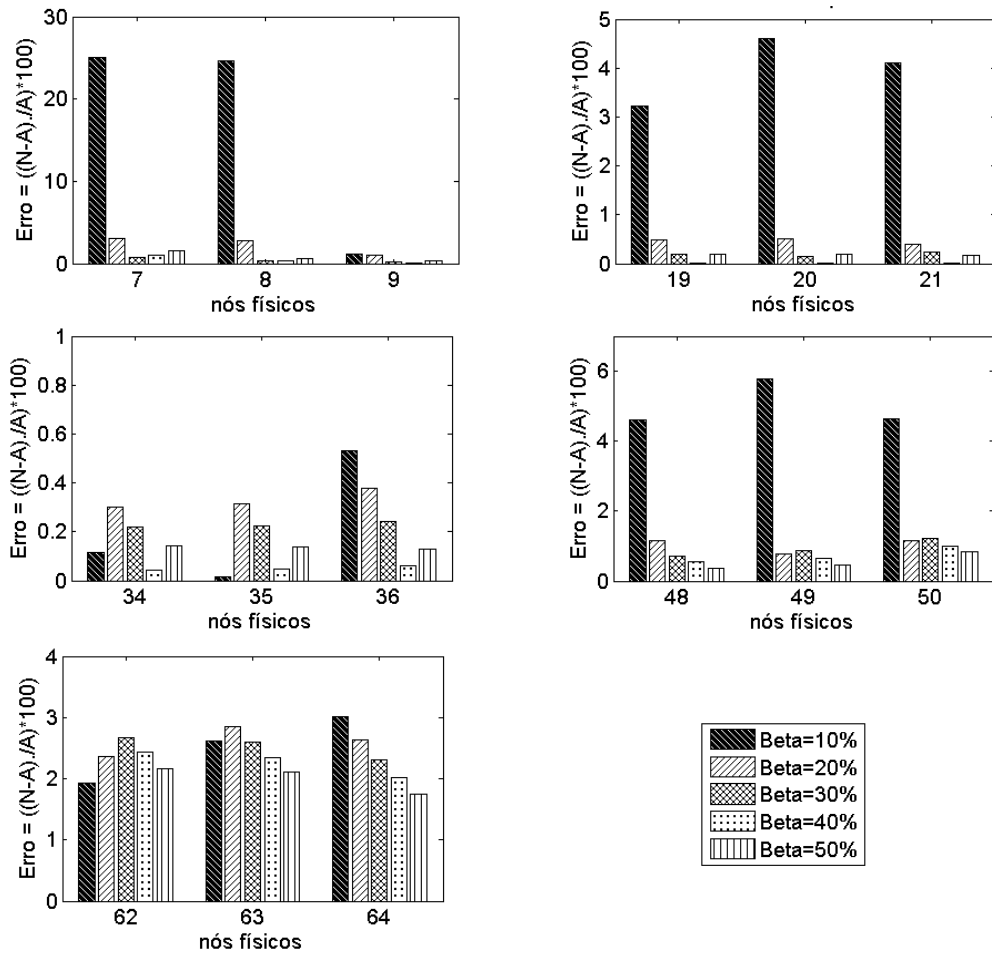


Figura 4.52 – Erro de temperatura nos pontos de controle com elementos irregulares.

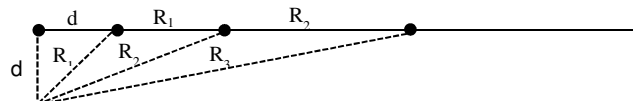


Figura 4.53 – Técnica de sub-elementação com a forma progressiva.

Caso a técnica de sub-elementação seja escolhida com elementos discretizados com tamanhos iguais, o problema recai no MECV externo. Neste caso adota-se o menor elemento do problema e todos os demais elementos são subdivididos por esse primeiro. Desta forma, o critério estabelecido para encontrar uma única distância de *offset* e posicionar o ponto de colocação no exterior do domínio é o mesmo utilizado no MECV externo.

Neste estudo, o MECV externo foi aplicado no problema discretizado com elementos irregulares. Os resultados demonstraram valores elevados para os *offsets*, ainda que utilizasse 16 pontos de Gauss na integração. Com o objetivo de minimizar esse problema, a técnica de sub-elementação foi proposta, no entanto, devido ao acréscimo de nós físicos o método não foi implementado.

4.2 PROBLEMA DE FLUXO DE ÁGUA SUBTERRÂNEA

Este problema conhecido também como percolação da água estuda a influência de uma escavação no deslocamento da água através do solo. A escavação é grande o suficiente para permitir um estudo plano do problema conforme está apresentado na Figura 4.54, onde se observa a existência de uma camada impermeável na parte inferior da escavação. Considera-se que não há nenhuma influência da escavação, a uma distância de 100 metros do seu centro. O fluxo de água deve ser calculado na parte inferior da escavação para estimar a capacidade de uma bomba de eliminar esta água.

O fluxo de água através do solo é definido pela lei de Darcy. Para o caso isotrópico esta lei assume a forma da equação (4.5).

$$\nu = -K \nabla h \quad (4.5)$$

Onde ν é o campo de velocidade, K é o coeficiente de permeabilidade do solo e h é o potencial hidráulico.

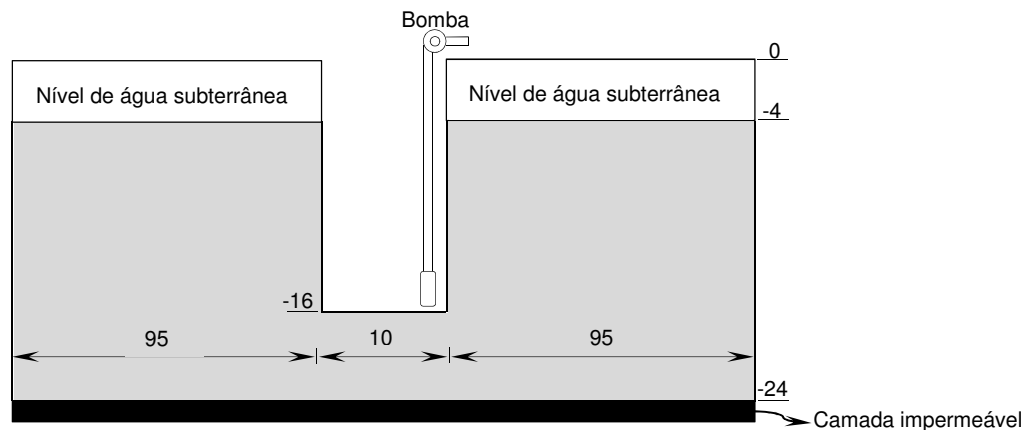


Figura 4.54 – Problema de fluxo de água subterrânea.

Considerando a água e o solo ambos incompressíveis tem-se que o problema é governado pela equação de Laplace, onde se observa uma descontinuidade de fluxo no ponto B . As condições de contorno, apresentadas por París et al (1997), foram aplicadas utilizando a simetria do problema e ilustradas na Figura 4.55.

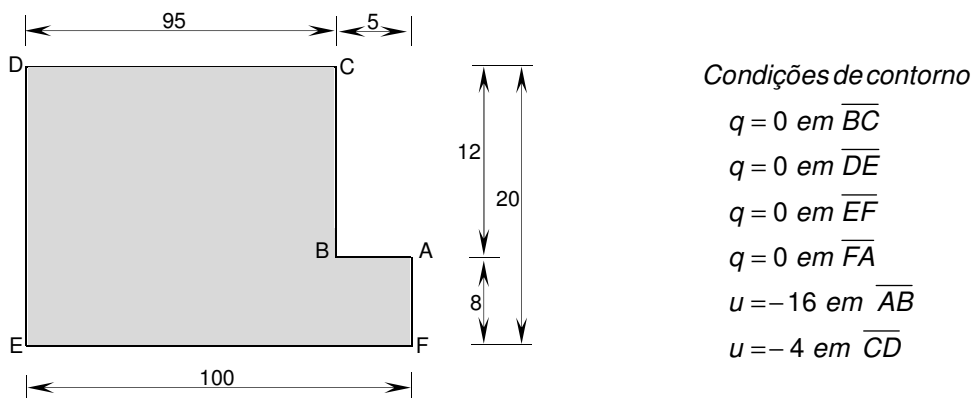


Figura 4.55 – Geometria e condições de contorno do problema.

O MECV externo será implementado no problema discretizado com 240 elementos descontínuos de mesmo tamanho. Os resultados serão apresentados utilizando 12 pontos de Gauss, um *offset* de 9% do tamanho do elemento e uma distância α no interior do elemento descontínuo de 10% do tamanho do elemento.

A Figura 4.56 e a Figura 4.57 apresentam o fluxo e a temperatura respectivamente, sobre todo o contorno do problema e uma descontinuidade de fluxo pode ser observada em alguns pontos. Neste sentido, uma análise mais precisa é realizada em três arestas e os resultados podem ser visualizados juntamente com as soluções apresentados por Cruz (2001). A Figura 4.58, Figura

4.59 e Figura 4.60 apresentam a distribuição da temperatura respectivamente nas arestas \overline{EF} , \overline{FA} e \overline{BC} .

Os resultados da distribuição de temperatura apresentadas por Cruz (2001) possui a mesma geometria que o apresentado neste trabalho, porém realizada com uma malha pouco refinada. As arestas \overline{EF} e \overline{BC} foram discretizadas por Cruz (2001) com 4 elementos quárticos e a aresta \overline{FA} com 2 elementos quárticos. Isto justifica as abscissas apresentarem valores distintos uma vez que as mesmas representam os nós físicos.

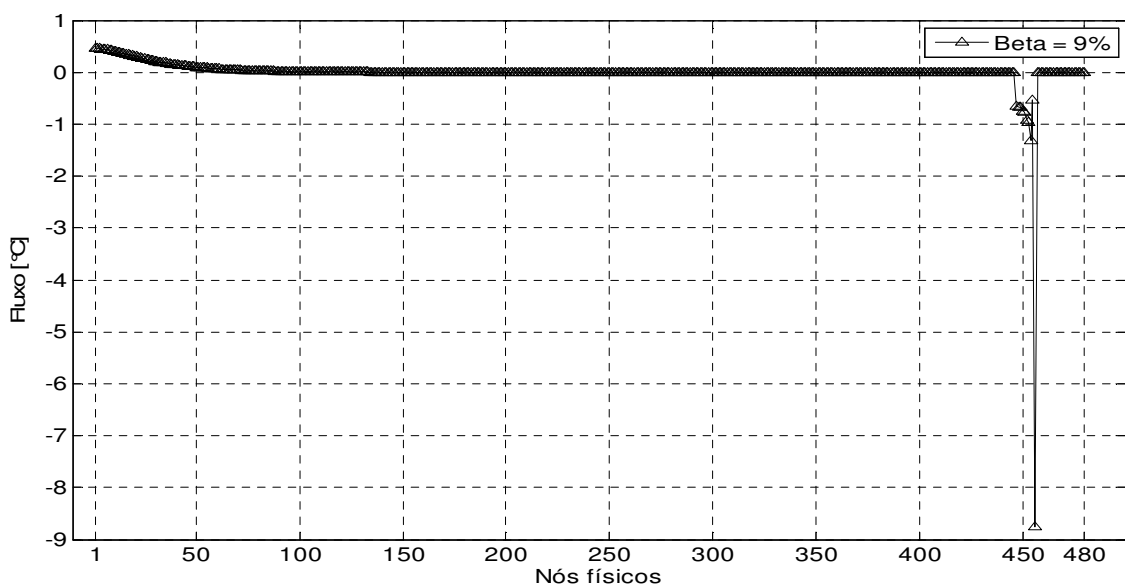


Figura 4.56 – Distribuição do fluxo sobre todo o contorno do problema com MECV externo.

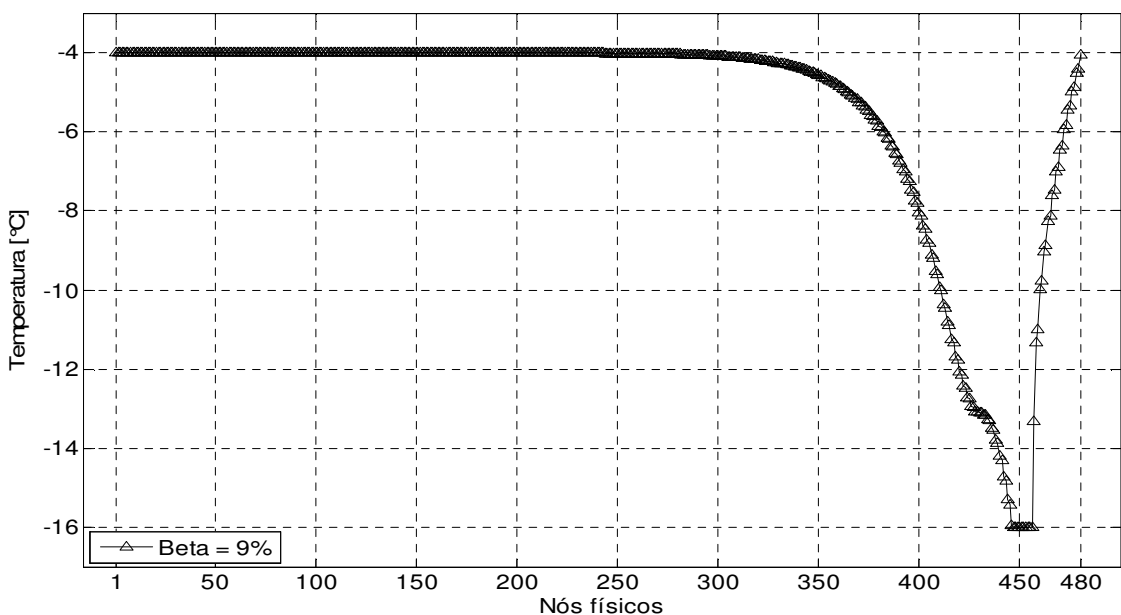
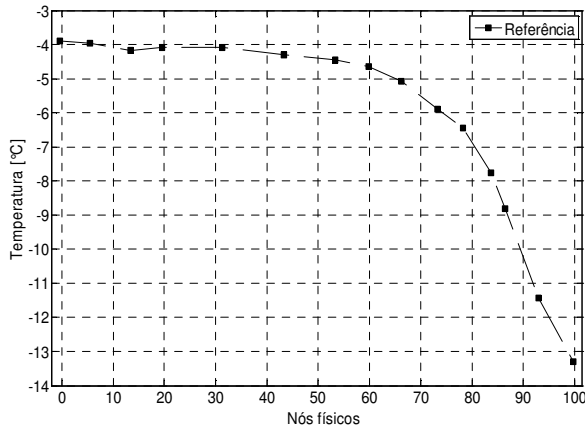
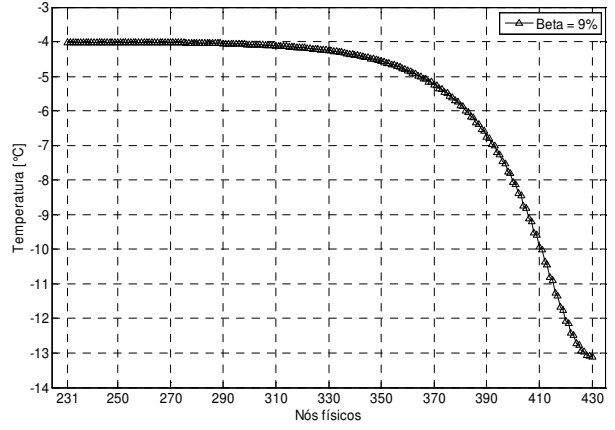


Figura 4.57 – Distribuição da temperatura sobre todo o contorno do problema com MECV externo.

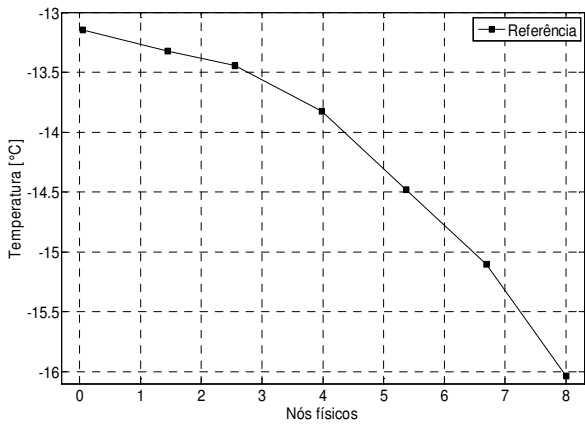


Aresta \overline{EF} - Cruz (2001)

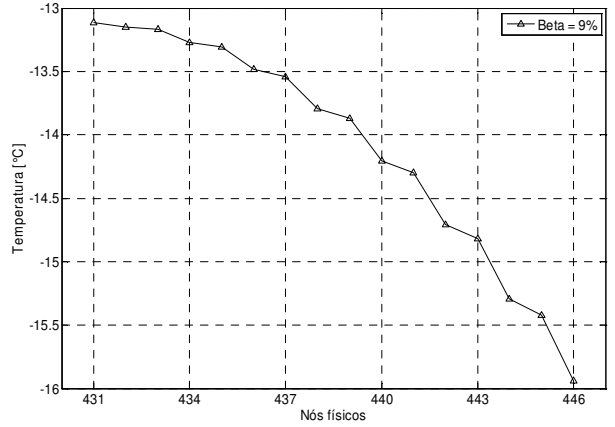


Aresta \overline{EF} - MECV externo

Figura 4.58 – Distribuição da temperatura na aresta \overline{EF} .

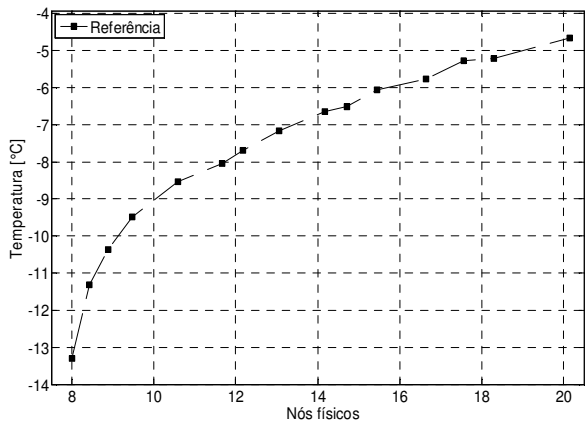


Aresta \overline{FA} - Cruz (2001)

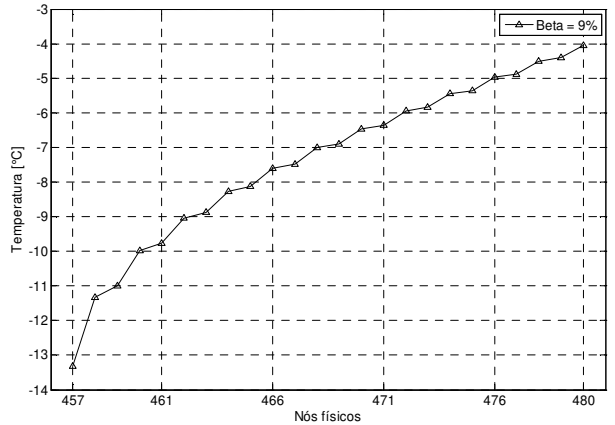


Aresta \overline{FA} - MECV externo

Figura 4.59 – Distribuição da temperatura na aresta \overline{FA} .



Aresta \overline{BC} - Cruz (2001)



Aresta \overline{BC} - MECV externo

Figura 4.60 – Distribuição da temperatura na aresta \overline{BC} .

As soluções numéricas dos fluxos e das temperaturas obtidas com o MECV externo concordaram bem com os resultados apresentados por e por Cruz (2001).

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentado um método de colocação em um contorno virtual regular para problemas de transferência de calor. O método implementado não-singular se baseia na formulação direta dos elementos de contorno e foi aplicado no problema de Motz e no problema de fluxo de água subterrânea, utilizando elementos lineares descontínuos em sua discretização. As avaliações consistiram em uma busca pela melhor distância entre o contorno real e o contorno virtual observando-se os pontos de Gauss na integração. Avaliou-se também a distância do nó físico dentro do elemento descontínuo e por último a influência dos tamanhos iguais e diferentes da discretização do problema. Ao empregar-se o contorno virtual foi demonstrada a possibilidade em se trabalhar com MEC utilizando apenas integração numérica, evitando assim a solução de integrais analíticas, devido à coincidência entre o ponto fonte e o ponto campo.

O MECV externo foi implementado no problema de Motz, na avaliação dos *offsets*. Primeiramente analisou-se o problema discretizado com tamanhos iguais utilizando um fator alfa de 10%. Os resultados obtidos apresentaram uma boa concordância com a solução analítica. Através destes resultados foi possível verificar que ao empregar o MECV externo, um beta de 9% apresentou valores muito próximos ao da solução analítica do problema estudado utilizando 12 ou mais pontos de Gauss. Acredita-se que a precisão do resultado aumenta à medida que se aumenta o número de pontos de integração apenas no local onde há uma descontinuidade de fluxo. Mesmo assim, a confiabilidade dos resultados se mostraram tão eficazes que o MECV externo aplicado ao problema de Motz foi adotado como o método referencial neste trabalho, na avaliação do alfa e na discretização do problema com tamanhos de elementos diferentes.

Após a determinação do beta no problema de Motz, foi proposta uma avaliação do fator alfa no elemento descontínuo. As análises da primeira etapa foram realizadas com um fator alfa igual a 10% do tamanho do elemento. Na verificação da melhor localização deste fator, empregando um contorno virtual externo, foi demonstrado que 10% apresentou melhor concordância nos resultados obtidos.

Nesta mesma linha de investigação, realizou-se a discretização do problema com tamanhos de elementos diferentes e foi observado que a formulação com esta discretização não é vantajosa. Ao aplicar o método, os resultados nos nós físicos para os valores dos betas apresentaram imprecisões nos resultados. Na determinação da distância ótima de *offset*, é interessante notar que esta técnica exige mais pontos de integração e um aprofundamento maior da pesquisa. A proposta de se utilizar sub-elementação com tamanhos de elementos iguais ou diferentes também não se mostrou adequada. Com a aplicação desta técnica, entende-se que ao aumentar progressivamente o tamanho dos elementos obtêm-se o problema inicial de discretização irregular e a aplicação com elementos iguais faz com que o problema recaia na utilização direta do MECV externo. Desta forma, a implementação torna-se inviável em problemas de otimização gerando aumento do custo computacional.

Os resultados obtidos com o MECV externo no problema de Motz foram implementados para avaliar o problema de fluxo de água subterrânea. As soluções numéricas para o fluxo e para a temperatura concordaram bem com soluções apresentadas nas literaturas.

Através dos estudos realizados neste trabalho, pode-se concluir que para problemas potenciais recomenda-se o emprego do MECV externo regular com 12 pontos de Gauss, um *offset* de 9% e um fator α de 10% do tamanho do elemento discretizado.

5.1 PROPOSTA DE CONTINUIDADE

Através do estudo desenvolvido neste trabalho pode-se constatar que um contorno virtual pode ser aplicado numericamente apresentando resultados precisos. Acredita-se que tal procedimento possa ser expandido para outros tipos de problemas uma vez que este método apenas propõe o posicionamento do ponto fonte no exterior do domínio, mantendo toda a característica de integração do MEC. O que não se pode afirmar nesta investigação é se o valor de beta de 9% encontrado para o MECV regular com ponto de colocação externo ao domínio é o mesmo para todos os tipos de problemas. Desta forma, sugere-se como continuidade aplicar o método em problemas de sub-regiões, problemas de

elasticidade; problemas de fratura, problemas de contato e outros problemas. Ainda neste sentido seria interessante que as técnicas de contorno virtual regular e irregular fossem confrontadas.

REFERÊNCIAS

- BECKER, A. A., *The boundary element method in engineering: a complete course*. McGraw-Hill, Great Britain, 1992.
- KATSIKADELIS, J. T., *Boundary Elements Theory and applications*. Elsevier, 2002.
- GUZELBEY I.H., TONUÇ G., *Boundary element analysis using artificial boundary node approach*. Communications in Numerical Methods in Engineering. Commun. Numer. Meth. Engng; 16: 769-776, 2000.
- SUN H. C., LI X. H., ZHANG L. Z., *Virtual boundary element-collocation method for solving problems of elasticity*. Chin. J. Comput. Mech. 8, 15, 1991.
- LAI J. GONG Y., YIN H., DUAN Z., WEI Y., *Virtual boundary element method for multistage depressed collector of traveling-wave tubes*. American Stitute of Physics, Phis. Plasmas 18, 043106, 2011.
- HUANCHUN S., WEIAN Y., *Virtual boundary for solving the element-linear complementary equations elastic obstacle problems of thin plate*. Finite Elements in Analysis and Design 27, 153-161, 1997.
- KANBER B., GUZELBEY I. H., ERKLIĞ A., *Boundary element analysis of contact problems using artificial boundary node approach*. Acta Mechanica Sinica, Vol.19, No.4, 0567-7718, 2003.
- WEIAN Y., WANG H. *Virtual boundary element integral method for 2-D piezoelectric media*. Finite Elements in Analysis and Design, 41, 875–891, China, 2005.
- LI CHUAN X., LI, WEI-AN YAO. *Virtual boundary element-integral collocation method for the plane magnetoelastic solids*. Engineering Analysis with Boundary Elements 30, 709–717, 2006.
- SUN H., ZHANG L., et al., *Nonsingularity Boundary Element Methods*, Dalian University of Technology Press, Dalian, 1999 (in Chinese).
- SILVA, N.A., *Aplicação do Método dos Elementos de contorno à placas com enrijecedores utilizando a teoria de Reissner*. São Carlos, Tese de doutorado, 1996.

HAITAO, S., YUANHAN W., *The Meshless Virtual Boundary Method and its applications to 2D elasticity problems*. Acta Mechanica Solida Sinica, 20, 0894-9166, China, 2007.

XU Q., ZHANG Z., SI W., *Virtual boundary meshless least square collocation method for calculation of 2D multi-domain elastic problems*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 36, 696–708, 2012.

XU Q., YANG D.-S., *Solving multi-domain 2D heat conduction problems by the least squares collocation method with RBF interpolation on virtual boundary*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 0955-7997, 2013.

WANG J., TSAY T.-K., *Analytical evaluation and application of the singularities in boundary element method*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 29, 241-256, 2005.

LI Z.C., CHAN Y. L., GEORGIU G.C., XENOPHONTOS C., *Special Boundary Approximation Methods for Laplace Equation Problems with Boundary Singularities-Applications to the Motz Problem*. Computers and Mathematics Applications, 51, 115-142, 2006.

GEORGIU G.C., OLSON L., SMYRLIS Y. S., *A Singular Function Boundary Integral Method for the Laplace Equation*. 12, 127-134, 1996.

BREBBIA C. A. & DOMINGUEZ J., *Boundary Elements. An introductory Course. Second Edition*. Computacional Mechanics publications. Southampton Boston – Mc Graw-Hill Book Company, 1992.

KANE, J. H., *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. Prentice hall, New Jersey, 1994.

WROBEL, L.C., *The Boundary Element Method, Vol 1. Applications in Thermo-Fluids and Acoustics*. Wiley, 2002.

RIBEIRO, G. O., RIBEIRO, T.S.A., JORGE A. B., CRUSE, T.A., *Evaluation of Non-Singular BEM Algorithms for Potential Problems*. J. of the Braz Soc. Of Mech. Sci.&Eng. Vol. XXXI, No. 3/261, 2009.

LEONEL, E. D., *Método dos Elementos de Contorno aplicado à análise de sólidos multi-fraturados*. São Carlos, Dissertação de mestrado, 2006.

PARÍS, F., CAÑAS, J, *Boundary Element Method: Fundamentals and Applications*. Oxford University Press, 1997.

CRUZ, J. P., *Formulações não-singulares do Método dos Elementos de Contorno aplicadas Problemas bidimensionais de potencial*. Belo Horizonte, Dissertação de mestrado, 2001.