Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Identidades Graduadas e o Produto Tensorial de Álgebras

por

Gabriel Silva Carvalho

Orientador: José Antônio Oliveira de Freitas

Brasília
2014

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Identidades Graduadas e o Produto Tensorial de Álgebras

por

Gabriel Silva Carvalho*

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 27 de junho de 2014.

Comissão Examinadora:

José Antônio O. Freitas

Prof. Dr. José Antônio Oliveira de Freitas – MAT/UnB (Orientador)

Thiago Castilho de Mello

Prof. Dr. Thiago Castilho de Mello – Unifesp/SP (Membro)

[illegible]

Prof. Dr. Alexei Krassilnikov – MAT/UnB (Membro)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade de Brasília. Acervo 1016197.

Carvalho, Gabriel Silva.
C331i Identidades graduadas e o produto tensorial de álgebras / Gabriel Silva Carvalho. -- 2014.
92 f. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) - Universidade de Brasília, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2014.
Inclui bibliografia.
Orientação: José Antônio Oliveira de Freitas.

1. Álgebra. 2. Grassmann, Teoria da extensão de. 3. Polinômios. I. Freitas, José Antônio Oliveira de. II. Título.

CDU 512

Aos meus pais, à Leni e à Camila.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por essa oportunidade.

A minha família, em particular aos meus pais Joaquim e Jurany por me mostrarem a importância do estudo, conhecimento, educação e dedicação. Por nunca terem deixado faltar nada, tanto no sentido físico quanto sentimental. A Leni por todo carinho e atenção nos momentos mais difíceis. Aos meus irmãos por serem os meus exemplos. Vocês são a minha eterna inspiração.

À Camila, por todo amor e paciência que empregou nessa caminhada ao meu lado. Agradeço por mesmo nos momentos mais difíceis não ter me deixado desistir e por sempre ter acreditado em mim. A sua força durante todos esses anos foi essencial. A sua família por todo apoio e carinho que me ofereceram durante esta caminhada.

Ao professor José Antônio por ter me aceitado como orientando de mestrado, mesmo na adversidade do meu limite de tempo escasso. Agradeço por tanto conhecimento compartilhado, pela paciência, pelas sugestões e por sempre me receber com extrema cordialidade e educação. Agradeço por tudo o que me ensinou.

Aos demais membros da banca examinadora, formada pelos professores Alexei Krassilnivok e Thiago Castilho de Mello, por terem aceitado avaliar o meu trabalho.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Matemática da UnB. Em particular, gostaria de agradecer ao professor Mauro Luiz Rabelo, pelo valioso período em que estive no PETMAT, aprendendo muito sobre Matemática, sobre a docência e sobre responsabilidade social. Agradeço a professora Aline Gomes da Silva Pinto por em seu curso de "Álgebra 2" ter feito eu me apaixonar pela área.

Aos meus amigos, por todos os momentos de descontração que passamos juntos. Em particular, a Victor Jatobá e a Bruno Xavier por todas as manhãs, tardes e noites de estudo. Pelas pizzas e risadas compartilhadas. Sem vocês esta experiência não teria sido a mesma. Agradeço também a Yuri Santos que mesmo a quilômetros de distância sempre esteve disposto a ajudar e trocar valiosas informações sobre álgebra.

Resumo

Neste trabalho introduzimos as noções básicas do estudo de PI-álgebras. Descrevemos um sistema de geradores das identidades polinomiais graduadas das álgebras do tipo $M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$, em que E é a álgebra de Grassmann e α e β são funções que induzem uma $\mathbb{Z}_2$-graduação sobre E. Apresentamos uma forma alternativa para a prova de uma das PI-equivalências do Teorema de Kemer.

Apresentamos resultados que relacionam as identidades graduadas das álgebras A e $A \otimes E$. Como resultado mostramos a PI-equivalência entre $M_2(E)$ e $M_{1,1}(E) \otimes E$, um caso particular do Teorema de Kemer.

Palavras-chave: PI-álgebras, identidades graduadas, produtos tensoriais, álgebras de Grassmann.

Abstract

In this work we introduce the basics of the studies of PI-álgebras. We describe a system of generators of graded polynomial identities of algebras of type $M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$, where E is the Grassmann algebra and α e β are maps that induce a $\mathbb{Z}_2$-gradings. We show an alternative proof of some of the PI-equivalences of kemer's theorem.

We present results that relate the graded identities of the algebras A and $A \otimes E$. As a result, we show the PI-equivalence of $M_2(E)$ and $M_{1,1}(E) \otimes E$, a particular case of Kemer's Theorems.

Keywords: PI-algebra, graded identities, tensor products, Grassmann algebra.

Sumário

Introdução

Uma identidade polinomial de uma álgebra associativa A sobre um corpo é um polinômio em variáveis não-comutativas que se anula sobre toda a álgebra. Uma álgebra que satisfaz ao menos uma identidade não trivial é chamada de PI-álgebra. São exemplos de PI-álgebras as álgebras comutativas, as álgebras de dimensão finita e as álgebras de matrizes quadradas sobre corpos. O objetivo de estudar PI-álgebras é tentar entender como a existência de identidades polinomiais influência a estrutura das álgebras que as satisfazem.

Identidades polinomiais de álgebras são encontradas em trabalhos antigos de Dehn [9] e Wagner [36]. Mas o interesse geral na PI-teoria começou após o artigo de Kaplansky [22]. Mais tarde, Kaplansky, em [23], também elaborou uma extensa lista de problemas relevantes na teoria de anéis com vários problemas que hoje são estudados pela PI-álgebra. Na mesma epóca foi demonstrado o Teorema de Amitsur-Levistsky [3] o qual afirma que a álgebra $M_n(K)$ das matrizes $n \times n$ sobre um corpo K satisfaz a identidade *standard* de grau $2n$. Ainda na mesma época Spetch apresentou o seguinte problema: "O T-ideal de identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra é sempre finitamente gerado?". Este problema ficou conhecido como o problema de Specht. A resposta afirmativa deste teorema, em característica zero, foi obtida por Kemer [25] e [24]. Em seu trabalho, Kemer ainda classificou as álgebras T-primas, a menos de PI-equivalência, no que ficou conhecido como o teorema do produto tensorial de Kemer. Denotamos por $A \sim B$ se A e B satisfazem as mesmas identidades polinomiais.

Teorema 0.0.1 (Kemer)**.** *Se K é um corpo de característica zero, então*

i) $E \otimes E \sim M_{1,1}(E)$;

ii) $M_{p,q}(E) \otimes E \sim M_{p+q}(E)$;

iii) $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E) \sim M_{pr+qs,ps+qr}(E)$.

Provas alternativas deste teorema foram dadas em [32], [10] e [12]. Também foi provado em [4] e [5] que para característica positiva as afirmações i) e ii) falham. Por outro lado, Kemer não mostrou como encontrar as bases finitas. Atualmente a descrição das identidades é conhecida apenas para algumas álgebras. Encontramos algumas descrições em [15], [26], [27] e [29].

Devido ao trabalho de Kemer, uma importante parte do estudo de PI-álgebras se concentra nas identidades graduadas das matrizes $M_n(K)$ e $M_n(E)$, onde E denota a álgebra de Grassmann. Muito sobre estas graduações foi feito em [35], [34], [17] e [10]. Em [7], Bahturin e Drensky descreveram a relação entre identidades G-graduadas da álgebra G-graduada $M_n(K)$ e as identidades $G \times H$-graduadas das álgebras $M_m(K) \otimes M_n(K)$, onde $M_n(E)$ possui H-graduação.

Nesta dissertação apresentamos os fundamentos da PI-teoria além de nos aprofundarmos no estudo das identidades G-graduadas das álgebras $M_n(E)$ e alguns de seus produtos tensoriais. Mais especificamente, daremos uma base das identidades $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$-graduadas da álgebra das matrizes $M_n(E)$ e faremos uma demonstração alternativa da afirmação *iii*) do teorema de Kemer. Também apresentaremos as subálgebras de $M_m(E)$ que não admitem identidades monomiais não triviais e descreveremos a sequência de cocaracteres da álgebra $M_2(E)$.

No Capítulo 1 são introduzidos os conceitos e resultados básicos da PI-teoria. Também construímos e exemplificamos o Produto Tensorial e apresentamos os conceitos básicos da representação de grupos.

No Capítulo 2 nos aprofundamos no estudo de PI-álgebras apresentando a G-graduação e as identidades G-graduadas de uma álgebra. Mostramos a relação entre o T-ideal e o T_G-ideal graduado. Apresentamos o espaço dos monômios multilineares graduados V_n^G e definimos a sequencia de codimensões. Estudamos as definições básicas de representações de grupos simétricos e por fim o conceito de base multiplicativa.

No Capítulo 3 nos concentramos nos resultados obtidos por Di Vincenzo e Nardozza em [14]. Estudamos álgebras do tipo $M_\alpha(E) \subset M_m(E)$, onde $\alpha : \{1, \ldots, m\} \to \mathbb{Z}_2$ é uma função que induz uma $\mathbb{Z}_2$-graduação sobre E. Mostraremos que o produto tensorial $M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$, onde $M_\beta(E) \subset M_n(E)$, pode ser visto como uma álgebra $\mathbb{Z}_{mn}$-graduada e descreveremos um sistema de geradores das suas identidades polinomiais. Por fim mostraremos de forma alternativa a afirmação *iii*) do teorema de Kemer.

No Capítulo 4 nos concentramos nos resultados obtidos em [13]. Tomamos a K-álgebra G-graduada A e consideramos a álgebra $A \otimes E$. Deduzimos então as identidades $G \times \mathbb{Z}_2$-graduadas de $A \otimes E$ partindo das identidades G-graduadas de A. Mostramos também a PI-equivalência entre $M_{1,1}(E) \otimes E$ e $M_2(E)$, um caso particular do teorema de Kemer. Por fim apresentamos a sequência de cocaracteres de $M_2(E)$.

Capítulo 1

Identidade Polinomiais e PI-Álgebra

Neste capítulo introduziremos definições básicas que serão necessárias para o desenvolvimento e compreensão da dissertação, construindo alguns dos principais objetos de estudo, como a álgebra de Grassmann E e a álgebra das matrizes sobre a álgebra de Grassmann $M_n(E)$. Alguns dos resultados apresentados neste capítulo foram encontrados em [2] e [18].

Iniciaremos com a definição de álgebra e seus resultados elementares, definimos identidades polinomiais, PI-álgebras e T-ideais. Depois, definimos variedades de álgebras e estudamos sua relação com T-ideais. Apresentaremos as definições e consequências básicas sobre representações e por fim construímos o produto tensorial sobre R-módulos.

1.1 Álgebras

Seja A um espaço vetorial sobre um corpo K, então:

Definição 1.1.1. Dizemos que A é uma álgebra (ou K-álgebra) se A é munido com uma operação binária $*$ (i.e. uma função $* : (A, A) \to A$) chamada multiplicação, tal que para quaisquer $a, b, c \in A$ e qualquer $\alpha \in K$, temos:

i. $(a + b) * c = a * c + b * c$

ii. $a * (b + c) = a * b + a * c$

iii. $\alpha(a * b) = (\alpha a) * b = a * (\alpha b)$.

Denotaremos a multiplicação por $\cdot$ e escreveremos ab ao invés de $a \cdot b$

Definição 1.1.2. Dizemos que uma álgebra A é:

i. **Associativa** se o produto de A é associativo, isto é, $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer a, b, $c \in A$.

ii. **Comutativa** se o produto é comutativo, isto é, se $ab = ba$ para quaisquer a, $b \in A$.

iii. **Unitária(ou com unidade)** se o produto de A possui elemento neutro, isto é, se existe $1_A \in A$ tal que $1_A \cdot a = a \cdot 1_A = a$ para todo $a \in A$.

Para melhor compreensão, mencionaremos alguns exemplos de álgebras sobre um corpo K. Dentre estes, chamamos atenção para os Exemplos 1.1.4, 1.1.6 e 1.1.12 que serão importantes no decorrer do trabalho.

Exemplo 1.1.3. Qualquer extensão L do corpo base K com a operação usual é uma K-álgebra.

A dimensão da K-álgebra é a sua dimensão como K-espaço. Se a dimensão é finita, A chama-se álgebra de dimensão finita.

Exemplo 1.1.4. Seja $M_n(K)$ o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ com entradas em K. Munido da operação produto usual de matrizes, $M_n(K)$ é uma álgebra com unidade, que é exatamente a matriz identidade $I_{n\times n}$. Destacamos que nesta álgebra as matrizes e_{ij}, com $1 \leq i, j \leq n$, onde e_{ij} é a matriz elementar cuja única entrada não nula está na i-ésima linha e j-ésima coluna, formam uma base para $M_n(K)$ e, portanto, $\dim M_n(K) = n^2$.

Generalizando, se A é uma K-álgebra e se consideramos o espaço vetorial $M_n(A)$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em A, definindo um produto em $M_n(A)$ análogo ao produto usual em $M_n(K)$, obtemos uma estrutura de K-álgebra em $M_n(A)$.

Exemplo 1.1.5. Sejam G um grupo e K um corpo. Denotaremos por $KG = K[G]$ o conjunto de todas as somas formais finitas $\sum\limits_{g\in G} \alpha_g g$; $\alpha_g \in K$. O conjunto KG possui estrutura de anel com respeito as operações

$$+ : \left(\sum_{g\in G} \alpha_g g\right) + \left(\sum_{g\in G} \beta_g g\right) = \sum_{g\in G} (\alpha_g + \beta_g) g$$

$$\cdot : \left(\sum_{g\in G} \alpha_g g\right) \cdot \left(\sum_{h\in G} \beta_h h\right) = \sum_{g,h\in G} (\alpha_g \beta_h) gh = \sum_{l\in G} \gamma_l l,$$

em que $0 = \sum\limits_{g\in G} 0 \cdot g$ e $\lambda \left(\sum\limits_{g\in G} \alpha_g g\right) = \sum\limits_{g\in G} (\lambda \alpha_g) g$, para $\lambda \in K$, $l = gh$ e $\gamma_l = \alpha_g \beta_h$, para $g, h \in G$.

Assim, munido destas operações, temos que KG é uma K-álgebra associativa e unitária com unidade $1_K 1_G$, onde G (visto em KG) forma uma base para KG. Assim segue que $\dim KG = |G|$.

A álgebra KG é dita uma álgebra de grupo sobre K. Ela tem importante papel no estudo de representações, em especial a álgebra KS_n, onde S_n é o grupo das permutações.

Exemplo 1.1.6. O K-espaço

$$M_{k,l}(K) = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix},$$

onde P, Q, R e S são matrizes de dimensão $k \times k$, $k \times l$, $l \times k$ e $l \times l$, respectivamente, com $k \geq l > 0$, é uma K-álgebra associativa, unitária e não comutativa de dimensão $(k+l)^2$, com o produto usual de matrizes.

Definição 1.1.7.

i. Um subespaço S da álgebra A é chamado de subálgebra se é fechado para a multiplicação, isto é, se s_1, $s_2 \in S$ implica que $s_1 \cdot s_2 \in S$

ii. Um subespaço I de A é um ideal (bilateral) de A se xa, $ax \in I$, para quaisquer $x \in I$ e $a \in A$.

Seja agora A uma álgebra e I um ideal de A. Consideramos o espaço vetorial quociente $A/I = \{a + I \mid a \in A\}$, onde $a + I = \{a + x \mid x \in I\}$. Para cada $a \in A$, vamos denotar $a + I$ por $\overline{a}$. As operações de soma e produto por escalar são definidas por

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} \text{ e } \lambda\overline{a} = \overline{\lambda a}$$

para a, $b \in A$ e $\lambda \in K$. Considere agora o produto

$$\cdot : A/I \times A/I \to A/I$$

$$(\overline{a}, \overline{b}) \to \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab}.$$

Este produto está bem definido e é bilinear. Portanto, A/I munido desta operação é uma álgebra, chamada de **álgebra quociente** de A por I.

Definição 1.1.8. Seja A uma álgebra associativa com unidade e S um subconjunto de A. Definimos:

i. A subálgebra de A gerada por S, denotada por $K\langle S\rangle$, como sendo a interseção de todas as subálgebras de A que contém $S \cup \{1\}$.

ii. O ideal de A gerado por S como sendo a interseção de todos os ideias de A que contém S.

Se $A = K\langle S \rangle$, então dizemos que S gera A como álgebra ou que S é um conjunto gerador de A como álgebra. Uma caracterização de subálgebra gerada e ideal gerado por um conjunto de uma álgebra associativa é dada a seguir. Sejam A uma álgebra associativa com unidade e S um subconjunto não vazio de A. Então:

i. A subálgebra de A gerada por S coincide com o subespaço de A gerado pelo conjunto

$$\{1, s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_k} \mid i_1, i_2, \ldots, i_k \in \mathcal{I}, s_i \in S\},$$

onde $\mathcal{I}$ é um conjunto de índices. Note que o produto $s_{i_1}\cdots s_{i_k}$ irá abranger diferentes comprimentos.

ii. O ideal de A gerado por S coincide com o subespaço de A gerado por

$$\{asb \mid s \in S, a, b \in A\}.$$

Definição 1.1.9. Sejam A e B duas álgebras. Uma transformação linear $\phi : A \to B$ é um homomorfismo de álgebras se

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$

para todo $x, y \in A$. Se A e B possuírem unidade, vamos exigir que $\phi(1_A) = 1_B$.

Se o homomorfismo ϕ for bijetor, ou seja injetor e sobrejetor, dizemos que ϕ é um **isomorfismo**. Quando existe um isomorfismo $\phi : A \to B$, dizemos que A e B são álgebras isomorfas e denotaremos por $A \cong B$. Se ϕ é um homomorfismo de A em A dizemos que ϕ é um **endomorfismo**.

Denotamos por

i. $EndA$ o conjunto de todos os endomorfismos de A.

ii. $Im\phi$ a imagem da transformação ϕ, isto é, $Im\phi = \{\phi(a) \mid a \in A\}$.

iii. $Ker\phi$ o núcleo de ϕ, isto é, $Ker\phi = \{a \in A \mid \phi(a) = 0\}$.

Exemplo 1.1.10. Seja V um K-espaço vetorial. Então $End_K(V)$, o conjunto das transformações lineares de V munido da composição de funções, é uma K-álgebra com unidade (operador identidade).

É bastante conhecido e de fácil verificação que $Ker\phi$ é ideal de A e que $Im\phi$ é subálgebra de B. Com isso, temos o importante teorema do homomorfismo de álgebras.

Teorema 1.1.11 (Teorema do homomorfismo de álgebras)**.** *Sejam A e B álgebras e $\phi : A \to B$ um homomorfismo de álgebras. Então*

$$A/Ker\phi \cong Im\phi.$$

Vamos agora construir um importante objeto que será amplamente utilizado e estudado no decorrer desta dissertação, a álgebra de Grassmann. Para tal, começaremos apresentando a álgebra livre.

Sejam $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável de variáveis não comutativas. A álgebra livre associativa $K\langle X\rangle$ livremente gerada por X sobre K é o K-espaço que tem por base o conjunto de monômios $\{x_{i_1} \ldots x_{i_n} \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$, onde chamamos estes monômios de palavras e denotaremos por 1 a palavra vazia (comprimento zero). Dois monômios da álgebra $K\langle X\rangle$ são iguais se eles possuem o mesmo comprimento e termos iguais nas respectivas posições, ou seja, $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n} = x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}$ se, e somente se, $n = m$ e $i_1 = j_1$, $i_2 = j_2$, ... , $i_n = j_n$. Os elementos de $K\langle X\rangle$ são chamados de polinômios.

Consideremos em $K\langle X\rangle$ a multiplicação de monômios definida por justaposição, ou seja,

$$(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}) \cdot (x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}) = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}.$$

Podemos estender esta operação para todo $K\langle X\rangle$ por linearidade. Com isso, $K\langle X\rangle$ munido deste produto é uma álgebra associativa com elemento neutro 1. A cardinalidade de X é chamada de **posto**. Observe que se a cardinalidade de X for finita a construção de $K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ é análoga.

Agora, finalmente, vamos construir a álgebra de Grassmann, encerrando os nossos exemplos de álgebras sobre um corpo.

Exemplo 1.1.12. Seja $K\langle X\rangle$ a álgebra livre sobre $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, de posto enumerável e seja I o ideal bilateral gerado pelo conjunto dos polinômios $\{x_ix_j+x_jx_i \mid i, j \geq 1\}$. Então a álgebra de Grassman E é tal que $E \cong K\langle X\rangle/I$.

Se escrevermos $e_i = x_i + I$ para $i = 1, 2, \ldots$, então E tem a seguinte representação

$$E = \langle 1, e_1, e_2, \ldots \mid e_ie_j = -e_je_i\rangle, \quad \text{para todo} \quad i, j \geq 1,$$

pois $e_ie_j + e_je_i = (x_i + I) \cdot (x_j + I) + (x_j + I) \cdot (x_i + I) = (x_ix_j + x_jx_i) + I = 0 + I$.

Denote por S_n o grupo simétrico sobre $\{1, 2, \ldots, n\}$. É fácil ver que para quaisquer $1 \leq k < l \leq n$

$$e_{i_1}\cdots e_{i_{k-1}}e_{i_k}e_{i_{k+1}}\cdots e_{i_{l-1}}e_{i_l}e_{i_{l+1}}\cdots e_{i_n} = -e_{i_1}\cdots e_{i_{k-1}}e_{i_l}e_{i_{k+1}}\cdots e_{i_{l-1}}e_{i_k}e_{i_{l+1}}\cdots e_{i_n},$$

uma vez que $e_ie_j = -e_je_i$. Portanto, escrevendo qualquer permutação $\sigma \in S_n$ como produto de transposições, obtemos que

$$e_{\sigma(i_1)} \cdots e_{\sigma(i_n)} = (sgn\sigma) e_{i_1} \cdots e_{i_n},$$

em que $sgn\sigma$ é o sinal da permutação σ (i.e, $sgn\sigma = 1$ se σ for par e $sgn\sigma = -1$ se σ for ímpar). Segue que

$$B = \{1, e_{i_1} \cdots e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_k\}$$

gera E sobre K. Vamos verificar agora que B é base de E. De fato, suponha que $h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i = 0$ é uma relação com o número minimal de coeficientes não-nulos α_i, onde $w_i \in B$. Se o elemento e_m aparece em w_1, mas não aparece em w_2, temos que $e_m w_1 = 0$, pois $e_i^2 = 0$, e que $e_m h = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i e_m w_i = 0$. Isto contradiz a minimalidade de h, portanto B é base de E.

É conveniente escrever E na forma $E = E_0 \oplus E_1$, onde

$$E_0 = span\{e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_{2k}, \quad k \geq 0\}$$

$$E_1 = span\{e_{i_1} \cdots e_{i_{2k+1}} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_{2k+1}, \quad k \geq 0\},$$

de onde temos que $E_0 E_0 + E_1 E_1 \subset E_0$ e $E_0 E_1 + E_1 E_0 \subset E_1$.

1.2 Identidades Polinomiais

Seja K um corpo, X um conjunto de variáveis não comutativas e $K\langle X \rangle$ a álgebra livre associativa de X sobre K. Escreveremos um polinômio $f \in K\langle X \rangle$ da forma $f = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para indicar que $x_1, \ldots, x_n \in X$ são as únicas variáveis que ocorrem em f.

Definimos $\deg(\alpha m)$, o grau do monômio αm, $\alpha \in K$, como o comprimento da palavra m. Da mesma forma, definimos $\deg_{x_i}(\alpha m)$, o grau de αm na variável x_i, como o número de ocorrências de x_i em αm. Naturalmente, o grau de f, denotado por $\deg f$, é o grau máximo entre seus monômios. Análogo para $\deg_{x_i} f$.

Exemplo 1.2.1. Seja $m(x, y, z) = 2x^2yz^3x$. Temos que $\deg_x m = 3$, $\deg_y m = 1$, $\deg_z m = 3$ e $\deg m = 7$.

Exemplo 1.2.2. Seja $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 x_2 x_3^3 x_1 - 3x_1 x_2 x_3^4$, temos que $\deg_{x_1} f = 3$, $\deg_{x_2} f = 1$, $\deg_{x_3} f = 4$ e $\deg f = 7$.

Sejam A uma álgebra e $h : X \to A$ uma função arbitrária de modo que $h(x_i) = a_i$, para $x_i \in X$ e $a_i \in A$. Esta aplicação pode ser estendida unicamente por um homomorfismo $\phi_h : F\langle X \rangle \to A$ tal que $\phi_h(1) = 1_A$ e

$$\phi_h(x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}) = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n}, \text{ onde } \quad \phi_{h|_h} = h.$$

Esta propriedade é conhecida como Propriedade Universal de $K\langle X\rangle$.

Dado $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$, denotamos por $f(a_1, \ldots, a_n)$ a imagem de f por ϕ_h. Note que, como A é álgebra, $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é um elemento de A obtido por substituição dos $x_i's$ por $a_i's$ em f.

Definição 1.2.3. Seja A uma K-álgebra e $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$. Dizemos que f é uma identidade polinomial de A, se $f(a_1, a_2, \ldots a_n) = 0$, para todos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.

Seja Φ o conjunto de todos os homomorfismo $\phi : K\langle X\rangle \to A$. Então é claro que $f \equiv 0$ é identidade polinomial de A se, e somente se, $f \in \bigcap_{\phi\in\Phi} Ker\,\phi$. De fato, se $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0$ então para qualquer $\phi : K\langle X\rangle \to A$, temos que

$$\phi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n)) = f(a_1, \ldots, a_n) = 0,$$

logo $f \in Ker\phi$, para qualquer $\phi \in \Phi$. Assim, $f \in \bigcap_{\phi\in\Phi} Ker\,\phi$. Por outro lado, se $f \in \bigcap_{\phi\in\Phi} Ker\,\phi$, então dados quaisquer $a_1, \ldots, a_n$ e uma função $h : X \to A$; $\quad h(x_i) = a_i$, para $i = 1, \ldots, n$, existe um homomorfismo $\phi : K\langle X\rangle \to A$, tal que $\phi_{|X} = h$, daí segue que

$$0 = \phi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(\phi(x_1), \phi(x_2), \ldots, \phi(x_n)) = f(a_1, \ldots, a_n),$$

logo $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ é identidade de A.

Dizemos que $f \equiv 0$ é uma identidade de A ou que A satisfaz $f \equiv 0$. Como $f = 0$ é uma identidade polinomial trivial para qualquer álgebra A, temos a seguinte definição:

Definição 1.2.4. Se uma K-álgebra A satisfaz uma identidade polinomial não trivial $f \equiv 0$, então dizemos que A é uma **PI-álgebra** ou álgebra com identidades polinomiais.

Para melhor compreender o conceito de PI-álgebra, vamos ver alguns exemplos.

Exemplo 1.2.5. Se A é uma álgebra comutativa e $[x, y] = xy - yx$ o comutador de Lie. Então A é uma PI-álgebra, pois $f(x, y) = [x, y] \equiv 0$ em A.

Exemplo 1.2.6. Se A é uma álgebra nilpotente, ou seja, $A^n = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então A é uma PI-álgebra. De fato,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdots x_n$$

é uma identidade para A.

Exemplo 1.2.7. Seja $UT_n(K)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem n sobre K. Para simplificar o caso, vamos começar avaliando $n = 3$. Note que, se x, $y \in UT_n(K)$, então

$$[x, y] = xy - yx = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ 0 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

para quaisquer x, $y \in UT_3(K)$.

Vemos então que $[x, y]$ é triangular estritamente superior. Tomando o caso geral, em $UT_n(K)$ temos que $[x, y]$ é estritamente triangular superior para todo n. Assim, temos que $[x, y]^n = 0$, pois a primeira coluna de $[x, y]$ é nula e a cada produto uma coluna subsequente se anula. Portanto, $UT_n(K)$ é PI-álgebra, pois satisfaz o polinômio

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = [x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}].$$

Exemplo 1.2.8. Primeiramente, note que na álgebra das matrizes $M_2(K)$ se $a = [x, y]$, com $x, y \in M_2(K)$, temos que $tr(a) = 0$. Por outro lado, o polinômio característico é tal que

$$x^2 - tr(a)x + det(a)I = 0,$$

em que $I = I_{2\times 2}$. Substituindo x por a, temos que

$$a^2 = -det(a)I.$$

Assim, a^2 é uma matriz escalar e então comuta com qualquer outra matriz. Daí, $M_2(K)$ é uma PI-álgebra, pois satisfaz o polinônio

$$\left[[x, y]^2, z\right]$$

Exemplo 1.2.9. A álgebra de Grassmann E é uma PI-álgebra, pois satisfaz a identidade polinomial $[[x, y], z] \equiv 0$. De fato, como E_0 coincide com o centro de E, qualquer comutador de dois elementos de E torna-se uma combinação linear de monômios e_i's de comprimento par. Assim, $[E, E] \subset E_0$ e a conclusão é imediata.

1.3 T-ideais e variedades de álgebras

Dada uma álgebra A, denotamos por

$$T(A) = \{f \in K\langle X\rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}$$

o conjunto das identidades polinomiais de A. Claramente, $T(A)$ é um ideal bilateral de $K\langle X\rangle$, pois se $f \equiv 0$, então $af \equiv 0$ e $fa \equiv 0$, para todo $a \in K\langle X\rangle$. Mais ainda, se

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T(A)$ e $g_1, \ldots, g_n$ são polinômios arbitrários de $K\langle X\rangle$ é claro que $f(g_1, \ldots, g_n) \in T(A)$.

Como todo endomorfismo de $K\langle X\rangle$ (homomorfismo de $K\langle X\rangle$ em $K\langle X\rangle$) é determinado pela função $x \mapsto g$, em que $x \in X$ e $g \in K\langle X\rangle$, segue que $T(A)$ é um ideal invariante com respeito aos endomorfismos de $K\langle X\rangle$.

Proposição 1.3.1. *Dado uma álgebra A, considere $T(A) = \{f \in K\langle X\rangle \mid f \equiv 0\}$ o conjunto das identidades polinomiais de A. O conjunto $T(A)$ é fechado sob os endomorfismo de $K\langle X\rangle$.*

Demonstração. Sejam $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in T(A)$, g_1, g_2, $\ldots$, $g_n \in K\langle X\rangle$ e tome $\phi \in End(K\langle X\rangle)$, onde $\phi(x_i) \to g_i$. Temos que

$$\phi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(\phi(x_1, \ldots, x_n)) = f(g_1, \ldots, g_n) \equiv 0,$$

pois $g_i(a_1, \ldots, a_n) \in A$, com $a_1, \ldots, a_n \in A$ e $f \in T(A)$. Assim, $\phi(f) \equiv 0$, para todo $f \in K\langle X\rangle$. Logo $\phi(T(A)) \subset T(A)$.

$\square$

Os ideais com essa propriedade são chamados de T-ideais.

Definição 1.3.2. Um ideal I de $K\langle X\rangle$ é um **T-ideal** se $\phi(I) \subset I$ para todo endomorfismo ϕ de $K\langle X\rangle$.

Assim, temos que $T(A)$ é um T-ideal de $K\langle X\rangle$. Por outro lado, não é difícil verificar que todo T-ideal é deste tipo. De fato, se I é T-ideal, então $\frac{K\langle X\rangle}{I}$ é PI-álgebra, uma vez que, se $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ e $g_1, \ldots, g_n \in K\langle X\rangle$, então

$$f(\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_n}) = \overline{f(g_1, \ldots, g_n)} = \overline{0},$$

pois $f(g_1, \ldots, g_n) \in I$. Assim, $I \subset T(K\langle X\rangle/I)$. Por outro lado, se $f(x_1, \ldots, x_n) \in T(K\langle X\rangle/I)$, então para $\overline{x_i} = x_i + I$ temos

$$\overline{0} = f(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) = \overline{f(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Logo, $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ e assim $T(K\langle X\rangle/I) \subset I$. Portanto, $I = T(K\langle X\rangle/I)$.

Definição 1.3.3. Dado um conjunto não vazio $S \subset K\langle X\rangle$, a classe de todas as álgebras A tais que f são identidades em A, $\forall f \in S$, é chamada de variedade e denotada por $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$ determinada por S.

Uma variedade $\mathcal{V}$ é não trivial se $S \neq 0$ e é própria se S é não trivial e $V(S) \neq 0$.

Exemplo 1.3.4. Seja $S = \{[x, y]\}$, então $\mathcal{V}(S)$ é a classe de todos as álgebras comutativas.

Exemplo 1.3.5. Seja $S = \{x^n\}$, então $\mathcal{V}(S)$ é a classe de todas as álgebras que são nil de expoente limitado n.

Se $S \subset K\langle X\rangle$, denotamos por $\langle S\rangle_T$ o T-ideal gerado por S. Assim, $\langle S\rangle_T = \bigcap\limits_{A\in\mathcal{V}(S)} T(A)$. Definimos então que $T(\mathcal{V}) = \langle S\rangle_T$. O teorema de Birkhoff caracteriza uma variedade.

Teorema 1.3.6 (Birkhoff). *Seja $\mathcal{V}$ uma classe não vazia de álgebras. Então $\mathcal{V}$ é uma variedade se, e somente se,*

*i. Se $A \in \mathcal{V}$ e $B \to A$ é um monomorfismo (**homomorfismo injetor**), então $B \in \mathcal{V}$.*

*ii. Se $A \in \mathcal{V}$ e $A \to B$ é um epimorfismo (**homomorfismo sobrejetor**), então $B \in \mathcal{V}$.*

iii. Se $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma}$ é uma família de álgebras e $A_\lambda \in \mathcal{V}$, para todo $\lambda \in \Gamma$, então $\prod\limits_{\lambda\in\Gamma} A_\lambda \in \mathcal{V}$.

Tomemos agora uma variedade $\mathcal{V}$, uma álgebra $A \in \mathcal{V}$ e $Y \subset A$ um subconjunto de A. Dizemos que A é relativamente livre sobre Y, se para qualquer álgebra $B \in \mathcal{V}$ e para qualquer função $\alpha : Y \to B$, existe um homomorfismo $\beta : A \to B$ estendendo α. Este homomorfismo é único. Quando $\mathcal{V}$ é a variedade de todas as álgebras, a definição coincide com a de álgebra livres sobre Y.

Teorema 1.3.7. *Sejam X um conjunto não vazio, $K\langle X\rangle$ uma álgebra livre sobre X e $\mathcal{V}$ uma variedade com ideal correspondente $T(\mathcal{V}) \subset K\langle X\rangle$. Então $K\langle X\rangle/T(\mathcal{V})$ é relativamente livre sobre o conjunto $\overline{X} = \{x + T(\mathcal{V}) \mid x \in X\}$. Além disso, quaisquer duas álgebras relativamente livres com respeito a $\mathcal{V}$ de mesmo posto são isomorfas.*

Demonstração. Seja $B \in \mathcal{V}$ e $\alpha : \overline{X} \to B$ uma função. Definimos então $\beta : X \to B$ por $\beta(x) = \alpha(x + T(\mathcal{V}))$. Como $K\langle X\rangle$ é uma álgebra livre podemos estender β para todo $K\langle X\rangle$ pela função $\overline{\beta} : K\langle X\rangle \to B$. Observe que, se $f \in T(\mathcal{V})$, então $\overline{\beta}(f) = 0$. Assim, $T(\mathcal{V}) \subset Ker(\overline{\beta})$ e α pode ser estendido a um homomorfismo $\overline{\alpha} : K\langle X\rangle/T(\mathcal{V}) \to B$, onde $\overline{\alpha}\,(g + T(\mathcal{V})) = \overline{\beta}(g)$. Então $K\langle X\rangle/T(\mathcal{V})$ é uma álgebra relativamente livre sobre $\overline{X}$.

Agora, sejam $F_1, F_2 \in \mathcal{V}$ álgebras relativamente livres de mesmo posto sobre $X = \{x_i \mid i \in I\}$ e $Y = \{y_i \mid i \in I\}$, respectivamente. Existem homomorfismos $\alpha_1 : F_1 \to F_2$ e $\alpha_2 : F_2 \to F_1$, tais que

$$\alpha_1(x_i) = g_i \text{ e } \alpha_2(g_i) = x_i.$$

É claro que $\alpha_1 \circ \alpha_2 = id$ e $\alpha_2 \circ \alpha_1 = id$. Portanto, temos um isomorfismo e $F_1 \cong F_2$.
□

Com isso, temos que a correspondência entre T-ideais e variedades é bem entendida.

Teorema 1.3.8. *Existe uma correspondência biunívoca entre T-ideais de $K\langle X\rangle$ e variedades de álgebras. Nesta correspondência a variedade $\mathcal{V}$ corresponde ao T-ideal de identidades $T(\mathcal{V})$ e o T-ideal I corresponde a variedade de álgebras satisfazendo todas as identidades de I.*

Demonstração. Se I_1 e I_2 são T-ideais, $I_1 \neq I_2$, então existe $f \in I_1 \backslash I_2$, sem perda de generalidade. Assim, $K\langle X\rangle/I_2$ não satisfaz f. Logo, $K\langle X\rangle/I_2 \in \mathcal{V}(I_2)$ e $K\langle X\rangle/I_2 \notin \mathcal{V}(I_1)$. Portanto, $\mathcal{V}(I_1) \neq \mathcal{V}(I_2)$.

Por outro lado, se $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ são variedades, com $\mathcal{V}_1 \neq \mathcal{V}_2$, então existe $A \in \mathcal{V}_1 \backslash \mathcal{V}_2$. Logo, existe $f \in T(\mathcal{V}_2)$, tal que $f \notin T(A)$. Como, $T(A) \supset T(\mathcal{V}_1)$, segue que $T(\mathcal{V}_1) \neq T(\mathcal{V}_2)$.
□

Observação 1.3.9. Esta correspondência inverte inclusão, isto é,

$$\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_2 \Rightarrow T(\mathcal{V}_1) \supset T(\mathcal{V}_2),$$

$$S_1 \subset S_2 \Rightarrow \mathcal{V}(S_1) \supset \mathcal{V}(S_2),$$

em que $S_1, S_2 \subset K\langle X\rangle$.

Se $\mathcal{V}$ é uma variedade e A é uma K-álgebra tal que $T(A) = T(\mathcal{V})$, então dizemos que $\mathcal{V}$ é uma variedade gerada por A e escrevemos $\mathcal{V} = var(A)$.

1.4 Polinômios homogêneos e multilineares

Quando o corpo K é infinito, o estudo das identidades polinomiais de uma dada álgebra sobre K pode ser reduzido ao estudo de polinômios homogêneos e multilineares.

Seja $K_n = K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ uma álgebra livre de posto n, $n \geq 1$, sobre K. Então K_n é naturalmente decomposta como

$$K_n = K_n^{(1)} \oplus K_n^{(2)} \oplus \ldots,$$

onde $K_n^{(k)}$ é o subespaço gerado pelos monômios de grau k, $k \geq 1$. Como $K_n^{(i)} K_n^{(j)} \subset K_n^{(i+j)}$, para todo i, $j \geq 1$, dizemos que K_n tem estrutura de álgebra graduada. Cada termo $K_n^{(i)}$ é chamado de componente homogêneo de K_n.

Assim, podemos refinar a decomposição e escrever

$$K_n^{(k)} = \bigoplus_{i_1+\cdots+i_n=k} K_n^{(i_1,\ldots,i_n)},$$

em que $K_n^{(i_1,\ldots,i_n)}$ é o espaço gerado pelos monômios em que x_j tem grau i_j. Claramente, $K_n^{(i_1,\ldots,i_n)} K_n^{(j_1,\ldots,j_n)} \subset K_n^{(i_1+j_1,\ldots,i_n+j_n)}$ e neste caso K_n é multigraduada.

Definição 1.4.1. Um polinômio pertencente a $K_n^{(k)}$ para algum $k \geq 1$ é denominado **homogêneo** de grau k. Se f pertence a $K_n^{(i_1,\ldots,i_n)}$, então f é **multihomogêneo** de grau $(i_1, \ldots, i_n)$.

Exemplo 1.4.2. O polinômio

$$f(x, y) = xy + x^2 + y^2$$

é homogêneo de grau 2, enquanto o polinômio

$$g(x, y) = xy$$

é multihomogêneo de grau $(1, 1)$ e por consequência é homogêneo de grau 2.

Note pelo exemplo anterior que a condição de ser multihomogêneo é mais forte que a condição de ser homogêneo.

Exemplo 1.4.3. O polinômio

$$f(x, y, z) = x^2yz^3 - y^2x^2z + z^2yx^2$$

é homogêneo em x com $\deg_x f = 2$.

Sobre um corpo infinito podemos decompor qualquer polinômio f como

$$f = \sum_{i_1\geq 0,\ldots,i_j\geq 0} f^{(i_1,\ldots,i_n)},$$

onde $f^{(i_1,\ldots,i_n)} \in K_n^{(i_1,\ldots,i_n)}$ é uma combinação linear de monômios onde o grau de x_j é igual a i_j. Os polinômios $f^{(i_1,\cdots,i_n)}$ que não são nulos são chamados de componentes multihomogêneas de f com multigrau $(i_1, \ldots, i_n)$.

Exemplo 1.4.4. Seja $f(x, y, z) = xy + x^2y + xyz - yx$. Neste caso temos que $xy - yx$, x^2y e xyz são as componentes multihomogêneas de grau $(1, 1, 0)$, $(2, 1, 0)$ e $(1, 1, 1)$, respectivamente.

Teorema 1.4.5. *Seja K um corpo infinito. Se $f \equiv 0$ é uma identidade polinomial para a álgebra A, então toda componente multihomôgenea de f também é uma identidade polinomial para A.*

Demonstração. Para toda variável x_t, $1 \leq t \leq n$, podemos decompor $f = \sum_{i=0}^{n} f_i$, onde f_i é a soma de todos os monômios em que x_t tem grau i e $m = \deg_{x_t} f$ é o grau de f em relação a x_t. Vamos mostrar que, para todo x_t, $f_i \equiv 0$.

Tomemos então um t qualquer e seja $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ elementos distintos de K, estes vão existir pois K é infinito. Claramente, para todo $j = 0, \ldots, m$, temos que

$$f(x_1, \ldots, \alpha_j x_t, \ldots, x_m) \equiv 0.$$

Como cada componente f_i é homogênea de grau i, segue que

$$f_i(x_1, \ldots, \alpha_j x_t, \ldots, x_n) = \alpha_j^i f_i(x_1, \ldots, x_n).$$

Da decomposição de f e do fato anterior, segue que

$$f(x_1, \ldots, \alpha_j x_t, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_j^i f_i(x_1, \ldots, x_m) \equiv 0 \tag{1.4.1}$$

sobre A, para todo $j = 0, \ldots, m$. Assim, escrevendo a matriz de Vandermonde

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_0^m & \alpha_1^m & \ldots & \alpha_n^m \end{bmatrix}$$

e denotando $f_i(a_1, \ldots, a_n) = \overline{f_i}$, para todo $a_i, \ldots, a_n \in A$, então de 1.4.1, segue que

$$(\overline{f_n} \ldots \overline{f_n})\Delta = 0.$$

Como a matriz de Vandermonde é inversível, $\det \Delta \neq 0$, segue que

$$(\overline{f_n} \ldots \overline{f_n}) = 0.$$

Logo, $f_0 \equiv 0, \ldots, f_m \equiv 0$ são identidades sobre A.

$\square$

Note que a demonstração contínua válida se K é finito com $|K| > \deg f$. Por outro lado, se K possui q elementos, o polinômio $x^q - x$ é uma identidade para K, mas as componentes homogêneas x^q e x não são identidades.

Uma das consequências mais importantes do Teorema 1.4.5 é que sobre um corpo infinito todo T-ideal é gerado pelos polinômios multihomogêneos.

Definição 1.4.6. Um polinômio f é linear na variável x_i se x_i possui grau 1 em todos os monômios de f. Um polinômio que é linear em todas as variáveis é dito multilinear.

Em um polinômio multilinear $f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ cada variável aparece uma única vez em cada monômio. Assim, f tem o formato

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}.$$

Observação 1.4.7. Seja A uma K-álgebra gerada como espaço vetorial por um conjunto B sobre K. Se f é um polinômio multilinear que se anula em B, então f é uma identidade polinomial em A.

Demonstração. Sejam $a_i = \sum a_{ij}u_j, \ldots, \alpha_{in}u_n = \sum \alpha_{ij}u_j$ elementos de A, onde $u_j \in B$ e $\alpha_{ij} \in K$. Uma vez que $f(x_1, \ldots, x_n)$ é linear em cada variável, temos

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n} \alpha_{1i_1} \ldots \alpha_{ni_n} f(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) = 0$$

em A. □

Proposição 1.4.8. *Toda K-álgebra de dimensão finita n satisfaz o polinômio multilinear standard* $s_{n+1}(x_1, \ldots x_{n+1}) = \sum_{\sigma \in S_{n+1}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n+1)}$.

Demonstração. Como o polinômio em questão é multilinear, basta verificar que o mesmo se anula para elementos da base β de A. Seja $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de A, então, ao substituirmos cada x_i por um elemento de β, algum v_j aparecerá pelo menos duas vezes em cada monômio. Denotemos por x_{i_1} e x_{i_2} duas variáveis substituídas pelo mesmo v_j. Então, para cada $\sigma \in S_{n+1}$ par, os monômios associados às permutações σ e $(i_1 i_2)\sigma$ fornecem o mesmo elemento de A com o sinal trocado. Logo a soma de tais parcelas se anula e, portanto s_{n+1} é uma identidade para A. □

Definição 1.4.9. Dois conjuntos de polinômios são equivalentes se geram o mesmo T-ideal.

Definição 1.4.10. Seja S um conjunto de polinômios. Dizemos que f é uma consequência de S quando $f \in \langle S\rangle_T$.

Seja $f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ um polinômio multihomogêneo de grau k em x_1. Considere também as variáveis $y_1, y_2 \in X$, distintas de $x_2, \ldots, x_n$. Substituindo a variável x_1 de f por $y_1 + y_2$, obtemos o polinômio

$$h(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n).$$

Desenvolvendo a componente da direita, encontramos uma componente homogênea de grau 1 em y_1. Chamando essa componente de h_1, tem-se que $\deg_{y_2} h_1 = k - 1$ e que

$$h_1(x_1, x_1, \ldots, x_n) = kf(x_1, \ldots, x_n).$$

Exemplo 1.4.11. Tome o polinômio $f(x_1, x_2) = x_2x_1^2 + x_1x_2x_1$. Note que f é multihomogêneo de grau 2 em x_1. Sendo $y_1, y_2 \in X$, obtemos que

$$\begin{aligned} f(y_1 + y_2, x_2) &= x_2(y_1 + y_2^2) + (y_1 + y_2)x_2(y_1 + y_2) \\ &= x_2y_1^2 + x_2y_1y_2 + x_2y_2y_1 + x_2y_2^2 + y_1x_2y_1 + y_2x_2y_1 + y_1x_2y_2 + y_2x_2y_2. \end{aligned}$$

Logo,

$$h_1(y_1, y_2, x_2) = x_2y_1y_2 + x_2y_2y_1 + y_2x_2y_1 + y_1x_2y_2$$

e finalmente,

$$h_1(y_1, y_1, x_2) = x_2y_1^2 + x_2y_1^2 + y_1x_2y_1 + y_1x_2y_1 = 2x_2y_1^2 + 2y_1x_1y_1.$$

Portanto,

$$h_1(y_1, y_1, x_2) = 2f(x_1, x_2).$$

Teorema 1.4.12. *Se a álgebra A satisfaz uma identidade de grau k, então ela satisfaz uma identidade multilinear de grau $\leq k$.*

Demonstração. Seja $f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ uma identidade polinomial da álgebra A de grau k. Se cada variável x_i aparece com grau ≤ 1 , em todo monômio de f, então f é multilinear e o teorema segue diretamente. Portanto, vamos assumir que exista uma variável x_1 tal que $\deg_{x_1} f = d > 1$. Defina o polinômio

$$h(y_1, y_2, x_2, \ldots x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n) - f(y_1, x_2, \ldots, x_n) - f(y_2, x_2, \ldots, x_n).$$

Note que h é uma identidade polinomial de A e que h não é um polinômio nulo. De fato, suponha que $h = 0$. Qualquer função $X \to X$ pode ser estendida a um endomorfismo de $K\langle X\rangle$. Substituindo y_1 e y_2 por x_1 em h continuamos com o polinômio nulo, isto é

$$h(x_1, x_1, x_2 \ldots, x_n) = f(2x_1, x_2, \ldots, x_n) - 2f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Decompondo f na soma $f = f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_d$, onde f_k é a soma dos monômios em que x_1 tem grau k, obtemos

$$\begin{aligned} &- f_0 + (2-2)f_1 + (2^2 - 2)f_2 + \ldots + (2^d - 2)f_d = 0 \\ &f_0 = (2^2 - 2)f_2 + \ldots + (2^d - 2)f_d \end{aligned}$$

o que contradiz o fato de $d > 1$. Assim, $\deg_{y_1} h = d - 1 < \deg_{x_1} f$ e por um argumento indutivo nós obtemos a identidade multilinear de A desejada. $\square$

Teorema 1.4.13. *Se $charK = 0$, então cada polinômio não nulo $f \in K\langle X\rangle$ é equivalente a um conjunto finito de polinômios multilineares.*

Demonstração. Sabemos que f é equivalente ao conjunto de componentes homogêneas. Podemos assumir que $f(x_1, \ldots, x_n)$ é multihomogêneo. Utilizando o processo de multilinearização

$$f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{d} g_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n),$$

em que $\deg_{y_1} g_i = i$, $\deg_{y_2} g_i = d - i$ e $\deg_{x_t} g_i = \deg_{x_t} f$, $t = 2, \ldots, n$. Então todos os polinômios $g_i = g_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n)$ são consequências de f. Por outro lado,

$$g_i(y_1, y_1, x_2, \ldots, x_n) = \binom{d}{i} f(y_1, x_2, \ldots, x_n)$$

para cada i e como $charK = 0$ temos $\binom{d}{i} \neq 0$. Segue que f é consequência de qualquer $g_i, i = 1, \ldots, d - 1$.

□

Corolário 1.4.14. *Se $charK = 0$ e I é um T-ideal, então I é gerado por seus polinômios multilineares.*

Demonstração. Como $charK = 0$, K é um corpo infinito e portanto I é um ideal gerado por seus polinômios multihomogêneos. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ um polinômio multihomogêneo. Como I é um T-ideal, temos que $h(y_1, y_2, x_2, ..., x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, \ldots x_n) \in I$. Então, por K ser um corpo infinito, $h_1(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) \in I$, onde h_1 é a componente homogênea de h em que y_1 tem grau 1.

Da igualdade

$$h_1(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_n) = kf(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

e pela hipótese de $charK = 0$, segue que f é consequência de $h_1(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n)$. Assim, continuando o processo de linearização para h_1, encontraremos h_2 e então h_1 será consequência de h_2. Dessa forma, concluiremos que f é consequência de algum polinômio multilinear e é equivalente a ele.

□

1.5 Produto Tensorial e Identidades Polinomiais

Nesta seção definiremos o produto tensorial. Começaremos pelo produto tensorial de espaços vetoriais, por este ilustrar de forma mais fácil a ideia central e as vantagens desta operação. Depois faremos a construção do produto tensorial por meio de propriedade universal. Para uma visão mais aprofundada veja [8].

Definição 1.5.1. Sejam A e B K-espaços vetoriais sobre um corpo K, com bases formadas por $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, respectivamente. O **produto tensorial** $A \otimes_K B = A \otimes B$ de A e B é o espaço vetorial de base $\{a_i \otimes b_j \mid 1 \leq i \leq n \text{ e } 1 \leq j \leq m\}$. Em $A \otimes B$ tem-se que se $a = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$ e $b = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \beta_j b_j$, definimos

$$a \otimes b = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j b_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_j (a_i \otimes b_j),$$

em que $\alpha_i, \beta_j \in K$.

Os elementos $a \otimes b, a \in A, b \in B$, satisfazem as seguintes propriedades:

i. $(v_1 + v_2) \otimes b = (v_1 \otimes b) + (v_2 \otimes b)$

ii. $a \otimes (w_1 + w_2) = (a \otimes w_1) + (a \otimes w_2)$

iii. $(\lambda a) \otimes b = \lambda(a \otimes b) = a \otimes (\lambda b)$

para quaisquer v_1, $v_2, a \in A$, w_1, $w_2, b \in B$ e $\lambda \in K$.

Sejam A e B K-álgebras. Vamos definir o produto usual de $A \otimes B$ como o produto bilinear dado por

$$\cdot : (A \otimes B) \times (A \otimes B) \to (A \otimes B)$$

$$((a_1 \otimes b_1), (a_2 \otimes b_2)) \to (a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2 \otimes b_1 b_2)$$

O produto anterior está bem definido, pois se $a = a^{'}$ e $b = b^{'}$, tem-se que

$$(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = (ac \otimes bd) = (a^{'} c \otimes b^{'} d) = (a^{'} \otimes b^{'}) \cdot (c \otimes d).$$

Note que, o espaço $A \otimes B$ munido com está operação se torna uma K-álgebra chamada de produto tensorial.

Exemplo 1.5.2. Sejam A e B álgebras sobre $\mathbb{Q}$ tais que $A = B = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. As bases de A e B coincidem e são $\{1; \sqrt{2}\}$ e tomando a álgebra $A \otimes B$ temos a base $\{1 \otimes \sqrt{2}; 1 \otimes 1; \sqrt{2} \otimes 1; \sqrt{2} \otimes \sqrt{2}\}$. Tomando $r = \sqrt{2} \otimes 1 + 1 \otimes \sqrt{2}$ e $s = \sqrt{2} \otimes 1 - 1 \otimes \sqrt{2}$, segue que

$$rs = (\sqrt{2} \otimes 1)^2 - (1 \otimes \sqrt{2})^2 = 2 \otimes 1 - 1 \otimes 2 = 0.$$

Observe que $A \otimes B$ não é domínio.

Caracterização por uma propriedade universal

Para descrever o produto tensorial de modo universal, comecemos definindo o conceito de módulo.

Definição 1.5.3. Seja R um anel. Um conjunto M com operação binária $+$ chama-se um **R-módulo à esquerda** (módulo sobre R) se:

i. $(M, +)$ é um grupo abeliano;

ii. para quaisquer $m \in M$ e $r \in R$ existe um único $rm \in M$;

iii. $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$ para quaisquer $m \in M$ e $r_1, r_2 \in R$;

iv. $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$ para quaisquer $m_1, m_2 \in M$ e $r \in R$;

v. $(r_1r_2)m = r_1(r_2m)$ para quaisquer $m \in M$ e $r_1, r_2 \in R$.

Se R é um anel unitário, então um R-módulo chama-se unitário com unidade 1_R, se $1_Rm = m$ para qualquer $m \in M$. De modo análogo, define-se **R-módulo à direita**.

Exemplo 1.5.4. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K de dimensão n e $R = M_n(K)$. Definindo a multiplicação $R \times V \to V$ como $Bv \in V$, para $B \in M_n(K)$ e $v \in V$, temos que V é $M_n(K)$-módulo à esquerda.

Sejam M e N R-módulos a direita e a esquerda, respectivamente.

Definição 1.5.5. Uma aplicação $\phi : M \times N \to G$ é dita balanceada se satisfaz as seguintes propriedades:

i. $\phi(a_1 + a_2, b) = \phi(a_1, b) + \phi(a_2, b)$

ii. $\phi(a, b_1 + b_2) = \phi(a, b_1) + \phi(a, b_2)$

iii. $\phi(ar, b) = \phi(a, rb)$

Agora, podemos definir o produto tensorial por meio de uma propriedade universal.

Definição 1.5.6. Sejam M um R-módulo à direita e N um R-módulo à esquerda. Um grupo abeliano T juntamente com uma aplicação balanceada $\phi : M \times N \to T$, é dito um produto tensorial de M e N se para qualquer grupo abeliano aditivo A e qualquer aplicação balanceada $\psi : M \times N \to A$, existe um único homomorfismo de grupos $\overline{\psi} : M \times N \to A$, tal que $\psi = \overline{\psi} \circ \phi$.

Denotamos o produto tensorial T por $M \otimes N$, conforme citado anteriormente.

Lema 1.5.7. *Dado um conjunto X e um grupo abeliano livre F, para todo grupo abeliano G e para toda aplicação $f : X \to G$, existe um único homomorfismo $\overline{f} : F \to G$ tal que $\overline{f}_{|X} = f$.*

Demonstração. Seja $F = \langle \sum n_x x \mid n_x \in \mathbb{Z} \text{ e } x \in X \rangle$ e

$$\begin{aligned} \overline{f} : F \to & \quad G \\ A = \sum n_x x \to & \quad \sum n_x f(x), \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ G & \end{tikzcd}$$

Note que,

$$\begin{aligned} \overline{f}(a+b) &= \overline{f}\left(\sum n_x x + \sum m_x x\right) = \overline{f}\left(\sum (n_x + m_x) x\right) \\ &= \sum (n_x + m_x) f(x) = \overline{f}(a) + \overline{f}(b). \end{aligned}$$

Assim, $\overline{f}$ é homomorfismo e como F é livre $\overline{f}$ é unico. $\square$

Lema 1.5.8. *Seja F um grupo, $L \lhd F$ e $\pi : F \to F/L$ a projeção canônica. Para todo grupo G e para todo homomorfismo $\overline{f} : F \to G$ tal que $L \subset Ker(\overline{f})$, existe um homomorfismo $\psi : F/L \to G$ tal que $\psi \circ \pi = \overline{f}$.*

Demonstração. Defina $\psi(\overline{a}) = \overline{f}(a)$, para todo $a \in F$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\overline{f}"'] & F/L \arrow[dl, "\psi"] \\ G & \end{tikzcd}$$

Assim, $\psi \circ \pi = \overline{f}$. Como $L \subset \overline{f}$ segue que ψ está bem definido e claramente é um homomorfismo.

$\square$

Teorema 1.5.9. *Sejam A e B R-módulos à direita e à esquerda, respectivamente. Existe V e $\phi : A \times B \to V$ tal que $V = A \otimes B$ e V é único.*

Demonstração. Vamos começar demonstrando a existência. Seja $X = A \times B$ e F o grupo livre gerado por X. Defina L como o gerado por

$$(a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b); (a, b_1 + b_2) - (a, b_1) - (a, b_2); (ar, b) - (a, rb),$$

onde $a, a_1, a_2 \in A$, $b, b_1, b_2 \in B$ e $r \in R$. Seja $V = F/L$, temos que $V = F/L = A \otimes B$ é o produto tensorial de A e B com aplicação balanceada

$$\phi : \begin{array}{rc} A \times B \to & V \\ (a,b) \to & (a,b) + L \end{array}.$$

De fato, ϕ é balanceada, pois

$$\begin{aligned} \phi(a_1 + a_2, b) - \phi(a_1, b) - \phi(a_2, b) &= ((a_1 + a_2, b) + L) - ((a_1, b) + L) - ((a_2, b) + L) \\ &= (a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b) + L = 0, \end{aligned}$$

pois $(a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b) \in L$. Assim,

$$\phi(a_1 + a_2, b) = \phi(a_1, b) + \phi(a_2, b).$$

As demais propriedades que caracterizam a aplicação balanceada seguem de forma análoga.

Agora, seja G um grupo e $\varphi : A \times B \to G$ uma aplicação balanceada.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\varphi"] \arrow[d, "\phi"'] & G \\ V \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Pelo Lema 1.5.7, existe um homomorfismo $\overline{\varphi} : F \to G$, tal que $\overline{\varphi}_{|F} = \varphi$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & F \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\overline{\varphi}"] & V \arrow[dl, "\psi"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Note que $L \subset Ker(\overline{\varphi})$ e $\phi_{|F}$ na verdade é a projeção canônica. Assim, pelo Lema 1.5.8, existe um homomorfismo $\psi : V \to G$ tal que $\psi \circ \pi = \psi \circ \phi = \varphi$.

Resta mostrar a unicidade de ψ. Seja $f : V \to G$ um homomorfismo tal que $f \circ \phi = \varphi$. Temos que para $x \in X$

$$f \circ \phi(x) = f(x + L) = \varphi(x + L) = \psi(x + L),\ x \in X.$$

Portanto, $f(x + L) = \psi(x + L)$. É facil ver que podemos estender para qualquer $\alpha = \sum n_x x \in F$ e $f(\alpha + L) = \psi(\alpha + L)$. Portanto, $V = A \otimes B$.

Vamos mostrar agora que V é único a menos de isomorfismo. Suponha que existe $(V^{'}, \phi^{'})$ outro produto tensorial de A e B. Então, temos a existência de um único homomorfismo de R-módulos $j : V \to V^{'}$, tal que $\phi^{'} = j \circ \phi$.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\phi^{'}"] \arrow[d, "\phi"'] & V^{'} \\ V \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

Por outro lado, usando a propriedade universal sobre $(V^{'}, \phi^{'})$, temos um único homomorfismo $j^{'} : V^{'} \to V$ tal que $\phi = j^{'}\phi^{'}$.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\phi^{'}"'] & V \\ V^{'} \arrow[ur, "j^{'}"'] & \end{tikzcd}$$

Assim, pelos diagramas e pelo fato de que a extensão é única

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"'] & V \arrow[dl, "id_V"] \\ V & \end{tikzcd}$$

segue que $id_V = j^{'} \circ j$ e analogamente $id_{V^{'}} = j \circ j^{'}$. Assim, j é isomorfismo e concluímos a demonstração.

$\square$

Exemplo 1.5.10. Sendo A uma K-álgebra. A transformação linear

$$\Phi : M_n(K) \otimes A \to M_n(A)$$

$$e_{ij} \otimes a \to ae_{ij}$$

é um isomorfismo de álgebras. De fato, primeiramente, note que $\{ae_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n, a \in L\}$ é uma base para $M_n(A)$ como espaço vetorial, onde L é uma base de A. Considere a trasnformação linear definida por

$$\Psi : M_n(A) \to M_n(K) \otimes A$$
$$ae_{ij} \to e_{ij} \otimes a$$

Note que

$$\Psi\left(\Phi\left(\sum_{i,j}(e_{ij} \otimes a_{ij})\right)\right) = \Psi\left(\sum_{i,j} a_{ij}e_{ij}\right) = \sum_{i,j}(e_{ij} \otimes a_{ij})$$

e

$$\Phi\left(\Psi\left(\sum_{i,j}(a_{ij}e_{ij})\right)\right) = \Phi\left(\sum_{i,j}(e_{ij} \otimes a_{ij})\right) = \sum_{i,j} a_{ij}e_{ij}.$$

Logo, $\Phi^{-1} = \Psi$ e assim Φ é bijetiva. Resta mostrar que Φ é um homomorfismo. De fato, como Φ é linear, é suficiente mostrar que é homomorfismo nos elementos da base de $M_n(K) \otimes A$. Para tal, observe que

$$e_{ij}e_{vw} = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq v \\ e_{iw}, & \text{se } j = v \end{cases},$$

pois se $j \neq v$ todo elemento da matriz resultante dado por $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2l} + \ldots + a_{in}b_{nk}$ irá se anular.

Se $j \neq v$, temos que

$$\Phi\left((e_{ij} \otimes a)(e_{vw} \otimes b)\right) = \Phi(e_{ij}e_{vw} \otimes ab) = \Phi(0 \otimes ab) = 0 = ae_{ij}be_{vw} = \Phi(e_{ij} \otimes a)\Phi(e_{vw} \otimes b)$$

Por outro lado, se $j = v$, temos que

$$\Phi\left((e_{ij} \otimes a)(e_{vw} \otimes b)\right) = \Phi(e_{ij}e_{vw} \otimes ab) = abe_{iw} = ae_{ij}be_{vw} = \Phi(e_{ij} \otimes a)\Phi(e_{vw} \otimes b).$$

Segue que Φ é um homomorfismo bijetor, ou seja, é um isomorfismo e então $M_n(K) \otimes A \cong M_n(A)$ como álgebra.

Observação 1.5.11. Do exemplo anterior, tomando a álgebra de Grassmann E, temos que $M_n(K) \otimes E \cong M_n(E)$. Este produto tensorial será amplamente estudado no Capítulo 4 desta dissertação.

Veremos agora um importante exemplo que retrata o produto tensorial de álgebras de matrizes.

Exemplo 1.5.12. Se $A = M_n(K)$, pelo exemplo anterior, temos que $M_m(K) \otimes M_n(K) \cong M_m(M_n(K))$. Sendo

$$x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \in M_m(k)$$

e

$$y = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} \in M_n(k)$$

segue que

$$x \otimes y = \begin{pmatrix} a_{11} \otimes y & a_{12} \otimes y & \cdots & a_{1m} \otimes y \\ a_{21} \otimes y & a_{22} \otimes y & \cdots & a_{2m} \otimes y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \otimes y & a_{m2} \otimes y & \cdots & a_{mm} \otimes y \end{pmatrix}$$

onde cada termo $a_{ij} \otimes y$ tem o formato

$$a_{ij} \otimes y = \begin{pmatrix} a_{ij}b_{11} & a_{ij}b_{12} & \cdots & a_{ij}b_{im} \\ a_{ij}b_{21} & a_{ij}b_{22} & \cdots & a_{ij}b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ij}b_{m1} & a_{ij}b_{m2} & \cdots & a_{ij}b_{mm} \end{pmatrix}$$

para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Enfim, obtemos

$$x \otimes y = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1n} & \cdots & \cdots & a_{1m}b_{11} & \cdots & a_{1m}b_{1n} \\ a_{11}b_{21} & \cdots & a_{11}b_{2n} & \cdots & \cdots & a_{1m}b_{21} & \cdots & a_{1m}b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{nn} & \cdots & \cdots & a_{1m}b_{n1} & \cdots & a_{1m}b_{nn} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & \cdots & a_{m1}b_{1n} & \cdots & \cdots & a_{mm}b_{11} & \cdots & a_{mm}b_{1n} \\ a_{m1}b_{21} & \cdots & a_{m1}b_{2n} & \cdots & \cdots & a_{mm}b_{21} & \cdots & a_{mm}b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{nn} & \cdots & \cdots & a_{mm}b_{n1} & \cdots & a_{mm}b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Portanto, $M_{mn}(K) \cong M_m(M_n(K))$ e daí $M_m(K) \otimes M_n(K) \cong M_{mn}(K)$, em que o isomorfismo é dado por

$$\Phi : M_m(K) \otimes M_n(K) \to M_{mn}(K)$$

$$e_{ij} \otimes e_{vw} \to e_{n(i-1)+v,n(j-1)+w}$$

este produto é conhecido como o produto de Kronecker.

Para ilustrar o exemplo anterior, considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sobre $M_2(\mathbb{R})$, temos que

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 & 0\cdot 0 & 1\cdot 1 & 1\cdot 0 \\ 0\cdot 0 & 0\cdot 1 & 1\cdot 0 & 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 & 0\cdot 0 & 1\cdot 1 & 1\cdot 0 \\ 0\cdot 0 & 0\cdot 1 & 1\cdot 0 & 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sejam A uma K-álgebra, C uma K-álgebra comutativa e considere a K-álgebra $A \otimes_K C$. Algumas das identidades polinomiais de A podem ser identidades para $A \otimes_K C$.

Proposição 1.5.13. *Sejam A uma K-álgebra, C uma K álgebra comutativa não nilpotente e K um corpo de característica zero. Então $T(A \otimes_K C) = T(A)$.*

Demonstração. Seja f um polinômio multilinear em $T(A \otimes_K C)$. Como C é uma álgebra comutativa não nilpotente, existem $c_1, \ldots, c_n \in C$ tais que $c_1 \cdots c_n \neq 0$. Então, para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$, temos que

$$\begin{aligned} 0 = & f(a_1 \otimes c_1, \ldots, a_n \otimes c_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma (a_1 \otimes c_1) \cdots (a_n \otimes c_n) \\ = & \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma (a_1 \cdots a_n) \otimes (c_1 \cdots c_n) = f(a_1, \ldots, a_n) \otimes (c_1 \cdots c_n). \end{aligned}$$

Portanto, $T(A \otimes_K C) \subset T(A)$.

Por outro lado, sejam B_A e B_C bases de A e C, respectivamente. Então $B = \{a \otimes c \mid a \in B_A \text{ e } c \in B_C\}$ é uma base para $A \otimes_F C$. Agora seja f um polinômio multilinear em $T(A)$. Se $a_1, \ldots, a_n \in B_A$ e $c_1, \ldots, c_n \in B_C$, temos que

$$f(a_1 \otimes c_1, \ldots, a_n \otimes c_n) = f(a_1, \ldots, a_n) \otimes (c_1 \cdots c_n) = 0 \otimes (c_1 \cdots c_n) = 0$$

Logo $T(A) \subset T(A \otimes_K C)$ e $T(A) = T(A \otimes_K C)$.

$\square$

Corolário 1.5.14. *Sejam K um corpo de característica zero e F uma extensão do corpo K. Então as identidades polinomiais de A coincidem com as identidades da K-álgebra $A \otimes_K F$ consideradas sobre o corpo K.*

Mais do que isso, também podemos assumir que em algum sentido as identidades polinomiais de A sobre K coincidem com as identidades de $A \otimes_K F$ considerada sobre F.

Proposição 1.5.15. *Sejam A uma PI-álgebra sobre um corpo K e $F \supset K$ uma extensão do corpo. Então,*

$$T_K(A) \otimes_K F = T_F(A \otimes_K F),$$

em que $T_K(A)$ é o ideal das identidades de A consideradas sobre o corpo K e $T_F(A \otimes_K F)$ é o ideal das identidades de $A \otimes_K F$ consideradas sobre o corpo F.

Demonstração. Não é difícil verificar que $T_K(A) \otimes_K F \subset T_F(A \otimes_K F)$, basta ver que uma identidade polinomial multiplicada por uma constante continuará sendo uma identidade. Seja agora $f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{r} k_i M_i$, onde os M_i's são monômios distintos no alfabeto X e $k_i \in F$. Seja $\{b_1, \ldots, b_n, ...\}$ uma base do espaço vetorial F sobre K e seja $k_i = \sum \alpha_{ij} b_j$, $\alpha_{ij} \in K$, para todo $i = 1, \ldots, r$. Então

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} b_j M_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_{ij} M_i \right) \otimes b_j.$$

Como os $b_j' s$ são linearmente independentes sobre K, segue que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_{ij} M_i$ é uma identidade polinomial para todo $j = 1, \ldots, n$. Assim, $T_F(A \otimes_K F) \subset T_K(A) \otimes F$. □

1.6 Representações de grupos

Nesta seção apresentaremos definições e propriedades básicas de representações de grupos. Para maiores detalhes ver [8], [21], [33], [16] e [20]. Começaremos dando algumas definições sobre R-módulos.

Definição 1.6.1. Seja M um R-módulo. Um submódulo N de M é um subgrupo de M tal que $r \cdot n \in N$, para todo $r \in R$ e $n \in N$

Definição 1.6.2. Um R-módulo à esquerda $M \neq 0$ diz-se **simples** ou **irredutível** se não possui submódulo próprio, ou seja, submódulo diferente de 0 ou M.

Definição 1.6.3. Um R-módulo é **semissimples** se ele é uma soma direta finita de R-módulos simples.

Exemplo 1.6.4. Seja V um espaço vetorial (K-módulo) de dimensão finita. Então, para qualquer subespaço U de V, existe um subespaço W de V tal que $V = U \oplus W$. Portanto V é um F-módulo semissimples.

Após estas definições básicas de módulos, podemos dar início ao estudo de representações.

Definição 1.6.5. Sejam A uma K-álgebra unitária com unidade 1_A e V um espaço vetorial sobre K. Então uma K-representação de A é um homomorfismo de K-álgebras

$$\varphi : A \to End_K(V).$$

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K. Considere $GL(V)$ o conjunto das transformações lineares invertíveis de V em V. É fácil verificar que $GL(V)$ munido da operação composição de funções é um grupo. No caso particular de V ser de dimensão finita, temos que $GL(V) \cong GL_n(K)$, o grupo das matrizes invertíveis de ordem n.

Observação 1.6.6. A menos de menção contrária, o espaço vetorial V sobre K terá dimensão finita.

Definição 1.6.7. Sejam G um grupo e V um espaço vetorial.

i. Uma representação de G em V é um homomorfismo

$$\phi : G \to GL(V).$$

O grau da representação ϕ é igual a dimensão do espaço vetorial V. A representação ϕ é fiel se o núcleo de ϕ for trivial. Dizemos que ϕ é trivial se seu núcleo coincide com G.

ii. Duas representações $\phi : G \to GL(V)$ e $\rho : G \to GL(W)$ são equivalentes ou isomorfas se existe um isomorfismo $\theta : V \to W$ dos espaços vetoriais V e W tais que

$$(\theta \circ \phi(g))(v) = (\rho(g) \circ \theta)(v), v \in V, g \in G.$$

iii. Seja W um subespaço de V tal que $(\phi(G))(W) = W$. Então definimos uma representação $\psi : G \to GL(W)$ dada por

$$(\psi(g))(w) = (\psi(G))(w), g \in G, w \in W \subset V.$$

Está representação é chamada de subrepresentação da representação $\phi : G \to GL(V)$. A subrepresentação ψ é própria se $W \neq \{0\}$ e $W \neq V$.

iv. Se $\phi : G \to GL(V)$ e $\psi : G \to GL(W)$ são representações de G, então a representação $\rho = \phi \oplus \psi : G \to GL(V \oplus W)$ definida por

$$(\rho(g))(v, w) = ((\phi(g))(v), (\psi(g))(w)), g \in G, (v, w) \in V \oplus W,$$

é a soma direta de ϕ e ψ. De modo análogo, definimos a soma direta de um conjunto finito ou infinito de representações. O produto tensorial $\rho = \phi \otimes \psi : G \to GL(V \otimes W)$ é definido por

$$(\rho(g))(v \otimes w) = (\phi(g))(v) \otimes (\psi(g)(w)), g \in G, v \otimes w \in V \otimes W.$$

Em particular, uma importante parte no estudo de representações são as representações irredutíveis.

Definição 1.6.8. A representação $\phi : G \to GL(V)$ é irredutível se não possui nenhuma subrepresentação própria. A representação ϕ é chamada completamente redutível se é uma soma direta de representações irredutíveis.

Teorema 1.6.9 (Maschke)**.** *Seja $\rho : G \to GL(V)$ uma representação de dimensão finita de um grupo finito G. Se $charK \nmid |G|$, então ρ é completamente redutível, isto é, é uma soma direta de representações irredutíveis.*

Lema 1.6.10. *Sejam $\rho : G \to GL(V)$, $\psi : G \to GL(W)$ representações irredutíveis de G. Seja K um corpo algebricamente fechado e $f : V \to W$ uma transformação linear tal que $\rho \circ f = f \circ \psi$ para todo $g \in G$. Então:*

i. Se ρ e ψ não são isomorfas, então $f = 0$.

ii. Se $V = W$ e $\rho = \psi$, então existe $\lambda \in K$ tal que $f = \lambda id$, onde id é a identidade em W e $\lambda \in K$.

Agora, vamos considerar a álgebra de grupo KG definida anteriormente. Existe uma bijeção natural entre as representações do grupo G e as representações da álgebra KG.

Seja $\varphi : G \to GL(V)$ uma K-representação de G, podemos estender φ à KG. Defina

$$\psi : KG \to End_K(V),$$

em que $\psi(\sum_{g \in G} \alpha_g g) = \sum_{g \in G} \alpha_g \varphi(g)$, então ψ é uma K-representação de KG.

Reciprocamente, se $\psi : KG \to End_K(V)$ é uma K-representação de KG, podemos restringir ψ a G pela aplicação $\varphi : G \to GL(V)$ de tal modo que $\varphi(g) = \psi(1_K g)$, onde $g \in G$.

Seja M um KG-módulo. Podemos ver M como K-módulo, ou seja, um K-espaço vetorial. Primeiramente, note que para todo $\lambda \in F$ e todo $m \in M$ temos que $\lambda m = (\lambda 1_G)m$, com $1_G \in G$. Agora para todo $\varepsilon \in KG$, definimos a plicação

$$\varphi_\varepsilon : M \to M$$

$$m \to \varepsilon m.$$

Então $\varphi_\varepsilon \in End_K(M)$. De fato, para $\lambda \in K$ temos $\varphi_\varepsilon(\lambda m) = \varphi_\varepsilon((\lambda 1_G)m) = (\varepsilon\lambda 1_G)m = \lambda(\varepsilon m) = \lambda\varphi_\varepsilon(m)$, e a aplicação

$$\varphi : KG \to End_K(M)$$

$$\varepsilon \to \varphi_\varepsilon$$

é um homomorfismo de K-álgebras, ou seja φ é uma representação de FG com espaço de representação M.

Observação 1.6.11. Temos as seguintes correspondências:

$$FG\text{-módulos} \leftrightarrow \text{representação de } FG \leftrightarrow \text{representação de } G.$$

Definição 1.6.12. Um corpo K é um **corpo de decomposição** ou **split** de um grupo G finito se a álgebra de grupo FG é isomorfa à uma soma direta de anéis de matrizes sobre K, isto é, $KG \cong \bigoplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(K)$.

Teorema 1.6.13. *Sejam G um grupo finito e K um corpo tal que KG seja semissimples e split. Seja $\mu = \{M_1, \ldots M_k\}$ um conjunto completo das classes de isomorfismos de KG-módulos simples. Seja $n_i = \dim_K M_i$. Então:*

i. $|G| = \sum_{i=1}^{k} n_i^2$;

ii. Todo M_i aparece como fator de decomposição do módulo regular ${}_{FG}FG$ com multiplicidade n_i;

iii. $k =$ *número de classes de conjugação de G.*

Vamos agora definir o objeto mais importante de representações para nossa dissertação: o carácter associado a uma representação.

Definição 1.6.14. Seja $\rho : G \to GL(V)$ uma representação de G. Para cada $g \in G$ defina

$$\chi_\rho(g) = tr(\rho(g)),$$

em que $tr(\rho(g))$ é o traço da matriz $\rho(g)$. A função χ_ρ obtida é chamada de **carácter** da representação ρ. Além disso, $\deg \chi_\rho = \dim V$.

Observação 1.6.15. i. Segue das propriedades do traço de matrizes que o valor do carácter da representação ρ não depende da base de V.

ii. Se ρ for uma representação irredutível, dizemos que χ_ρ é um carácter irredutível de G

Lema 1.6.16. *i. Sejam f, g representações equivalentes de G. Então $\chi_g = \chi_f$.*

ii. Caracteres são constantes nas classes de conjugação do grupo.

Agora, consideremos $Irr(KG) = \{\chi_1, \ldots, \chi_r\}$ o conjunto dos caracteres irredutíveis de representações não equivalentes de um grupo G. Segue que:

Corolário 1.6.17. *Todo carácter de KG é uma combinação linear de elementos de $Irr(KG)$ com coeficientes inteiros não-negativos.*

Temos que o grau do carácter χ é dado por $\chi(1)$ e assim pelo Teorema 1.6.13 temos que

$$\sum_{\chi \in Irr(G)} \chi(1)^2 = |G|.$$

Exemplo 1.6.18. O grupo simétrico S_3 possui exatamente três classes de conjugação, pois as classes de conjugação dos grupos simétricos são dadas pelas suas estruturas ciclícas. Assim, ele possui três caracteres irredutivéis de graus $1, 1$ e 2, uma vez que

$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = |S_3|.$$

Teorema 1.6.19. *Sejam M e M' dois R-módulos e χ e χ' seus respectivos caracteres. Se $M \cong M'$, então $\chi = \chi'$.*

Capítulo 2

Álgebras Graduadas

Neste capítulo vamos nos aprofundar em algumas ferramentas para o estudo de PI-álgebras. Veremos de início a G-graduação de uma álgebra, um objeto chave. Depois veremos representações de grupos simétricos e definiremos codimensões. Por último definiremos a base multiplicativa de uma álgebra e estudaremos as G-graduações de $M_n(E)$, a álgebras de matrizes com entradas na álgebra de Grassmann E. Alguns dos resultados deste capitulo foram retirados de [18], [33], [16] e [21].

2.1 Álgebras Graduadas

Definição 2.1.1. Seja G um grupo. Uma álgebra A é dita G-graduada se A pode ser escrita como uma soma direta de subespaços $A^{(g)}$, ou seja $A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$, tais que para todo g, $h \in G$, $A^{(g)}A^{(h)} \subset A^{(gh)}$.

Observação 2.1.2. A definição de álgebra G-graduada pode também ser feita para um grupo aditivo, de forma análoga. Seja G um grupo aditivo de ordem r. A álgebra A é dita G-graduada se A pode ser escrita como soma direta de subespaços $A^{(g)}$, ou seja $A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$, tais que para todo g, $h \in G$, $A^{(g)}A^{(h)} \subset A^{(g+h)}$.

Da definição segue claramente que qualquer $a \in A$ pode ser escrito de modo único como uma soma $a = \sum_{g\in G} a^g$, tal que $a^g \in A^{(g)}$. Os subespaços $A^{(g)}$ são chamados de componentes homogêneos de A e um elemento $a \in A$ é homogêneo de grau g se $a \in A^{(g)}$. Denotamos o grau homogêneo do elemento a por $|a| = g$.

Um subespaço $B \subset A$ é graduado ou homogêneo se $B = \bigoplus_{g\in G}(B \cap A^{(g)})$. Em outras palavras, B é graduado se, para todo $b \in B$, $b = \sum_{g\in G} b^g$ implica que $b^g \in B$ para todo $g \in G$. Similarmente, podemos definir subálgebras graduadas, ideais graduados, etc. Note que se H é subgrupo de G, então claramente, $B = \bigoplus_{h\in H} A^h$ é uma subálgebra graduada de A.

Exemplo 2.1.3. Qualquer álgebra A pode ser graduada por qualquer grupo G definindo $A = A^{(e)}$ e $A^{(g)} = 0$ para $g \neq e$. Esta graduação é chamada de graduação trivial.

Exemplo 2.1.4. A álgebra de Grassmann E possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural $E = E_0 \oplus E_1$, onde E_0 é subespaço dos monômios de comprimento par e E_1 de comprimento ímpar sobre os geradores de E.

Exemplo 2.1.5. Assumindo que $X = \bigcup_{g\in G} X^g$ é uma união disjunta de conjuntos enumeráveis, então a álgebra livre $K\langle X\rangle$ é G-graduada de forma natural. Mais precisamente, para $x \in X^g$ definimos $|x| = g$ e se $w = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$, então $|w| = |x_{i_1}| + |x_{i_2}| + \ldots |x_{i_n}| \in G$. Mais ainda, a álgebra $K\langle X\rangle$ é um objeto livre na classe das álgebras G-graduadas.

Considere n um inteiro positivo e vamos tomar uma G-graduação da álgebra das matrizes sobre um corpo K, ou seja,

$$A = M_n(K) = \bigoplus_{g\in G} A^g.$$

Definição 2.1.6. A graduação acima é dita elementar, se existe uma n-upla $g = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ tal que $e_{ij} \in A^{g_i^{-1}g_j}$.

Definição 2.1.7. A graduação acima é chamada de fina se para qualquer $g \in G$ temos $\dim A^g \leq 1$.

Exemplo 2.1.8. Seja $G = \mathbb{Z}_n$. Para cada $\lambda \in \mathbb{Z}_n$ tomemos o subespaço $A^\lambda = \langle e_{ij} \mid \overline{j-i} = \lambda\rangle$. Note que $\overline{j-i} = \overline{0} \Leftrightarrow n|(j-i) \Leftrightarrow j-i = 0 \Leftrightarrow j = i$, uma vez que $1 \leq i, j \leq n$. Logo $A^{\overline{0}}$ é o conjunto das matrizes diagonais. Como $\{e_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ é base de $M_n(K)$, segue que

$$A = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}_n} A^\lambda.$$

Do Exemplo 1.5.10, temos

$$e_{ij}e_{vw} = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq v \\ e_{iw}, & \text{se } j = v. \end{cases}$$

Assim $A^{\lambda_1}A^{\lambda_2} \subset A^{\lambda_1+\lambda_2}$, pois se $\overline{j-i} = \lambda_1$ e $\overline{w-j} = \lambda_2$, então $\lambda_1 + \lambda_2 = \overline{j-i+w-j} = \overline{w-i}$. Logo $e_{iw} \in A^{\lambda_1+\lambda_2}$.

Portanto, temos uma $\mathbb{Z}_n$-graduação para $M_n(K)$. Claramente, esta é uma graduação elementar. Observe que os $\mathbb{Z}_n$-graus das matrizes em $A = M_n(K)$ estão posicionados da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \cdots & \overline{n-2} & \overline{n-1} \\ \overline{n-1} & \overline{0} & \cdots & \overline{n-3} & \overline{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{2} & \overline{3} & \cdots & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{2} & \cdots & \overline{n-1} & \overline{0} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.1.9. Seja $A = M_3(K)$ e $G = \mathbb{Z}_3$. Então $A^{(0)} = span\langle e_{11}, e_{22}, e_{33}\rangle$, $A^{(1)} = span\langle e_{12}, e_{23}, e_{31}\rangle$ e $A^{(2)} = span\langle e_{13}, e_{21}, e_{32}\rangle$. Ou seja, os $\mathbb{Z}_n$-graus estão distribuídos da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} \end{pmatrix}.$$

Vamos agora estudar o produto tensorial de álgebras graduadas.

Proposição 2.1.10. *Dadas duas álgebras graduadas $A = \bigoplus_{g\in G} A^g$ e $B = \bigoplus_{h\in H} B^h$, então $A \otimes B$ é $G \times H$-graduada e sua componente homogênea de grau $(g, h) \in G \times H$ é o subespaço*

$$(A \otimes B)^{(g,h)} = A^g \otimes B^h.$$

Demonstração. Dado um elemento qualquer $a \otimes b \in A \otimes B$, temos que $a \otimes b = \sum_{i\in I, j\in J} a_i \otimes b_j$, onde $a_i \in A = \bigoplus_{g\in G} A^g$ e $b_j \in B = \bigoplus_{h\in H} B^h$, para todo $i \in I$ e $j \in J$. Assim

$$a_i \otimes b_j = \left(\sum_{g\in G} a_{i_g}\right) \otimes \left(\sum_{h\in H} b_{j_h}\right) = \sum_{g\in G}\sum_{h\in H} a_{i_g} \otimes b_{j_h} = \sum_{(g,h)\in G\times H} a_{i_g} \otimes b_{j_h}$$

e

$$a \otimes b = \sum_{i\in I, j\in J} a_i \otimes b_j = \sum_{i\in I, j\in J} \left(\sum_{(g,h)\in G\times H} a_{i_g} \otimes b_{j_h}\right).$$

Logo,

$$A \otimes B = \bigoplus_{(g,h)\in G\times H} (A^g \otimes B^h).$$

Agora, vamos mostrar que esses subespaços definem uma graduação para $A \otimes B$. É suficiente considerarmos a prova somente para os elementos $x = a_{g_1} \otimes b_{h_1} \in A^{g_1} \otimes B^{h_1}$

e $y = a_{g_2} \otimes b_{h_2} \in A^{g_2} \otimes B^{h_2}$, com $a_{g_1} \in A^{g_1}$, $a_{g_2} \in A^{g_2}$, $b_{h_1} \in B^{h_1}$ e $b_{h_2} \in B^{h_2}$. Temos que,

$$xy = (a_{g_1} \otimes b_{h_1})(a_{g_2} \otimes b_{h_2}) = a_{g_1}a_{g_2} \otimes b_{h_1}b_{h_2}.$$

Assim, como $a_{g_1}a_{g_2} \in A^{g_1}A^{g_2} \subset A^{g_1g_2}$ e $b_{h_1}b_{h_2} \in B^{h_1}B^{h_2} \subset B^{h_1h_2}$ segue que $xy \in (A \otimes B)^{(g_1g_2,h_1h_2)}$. Portanto, $\{(A \otimes B)^{(g,h)} \mid g \in G, h \in H\}$ é uma $G \times H$- graduação para $A \otimes B$.

□

Observação 2.1.11. Se K é algebricamente fechado, qualquer G-graduação para $M_n(K)$ pode ser obtida por um produto tensorial de uma graduação elementar e uma graduação afim. Este resultado foi demonstrado em [6]

Definição 2.1.12. Sejam A e B álgebras G-graduadas. Um homomorfismo $\phi : A \to B$ é um homomorfismo G-graduado se $\phi(A^g) \subset B^g$, para todo $g \in G$. Do mesmo modo são definidos isomorfismos G-graduados.

2.2 Representação de S_n

Nesta seção vamos descrever alguns resultados básicos da teoria de representações do grupo simétrico sobre um corpo K de característica zero. Vamos apresentar a tabela de Young e enunciar alguns famosos resultados, como a Regra de Young e o Teorema de Littlewood-Richardson. Para uma visão mais aprofundada ver [16], [33] e [21].

Vamos começar definindo a partição de um inteiro.

Definição 2.2.1. Seja $n \geq 1$ um inteiro. Uma partição do inteiro n é uma sequência de inteiros $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ tal que

$$\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r \geq 0 \text{ e } \lambda_1 + \ldots + \lambda_r = n.$$

Denotaremos esta partição por $\lambda \vdash n$ ou $|\lambda| = n$.

Lembremos que as classes de conjugação de S_n são determinadas pelas suas estruturas cíclicas. Assim, os $\sigma \in S_n$ tais que $\sigma = \pi_1\pi_2 \cdots \pi_r$ com $\pi_1, \ldots, \pi_r$ sendo ciclos de comprimento $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \lambda_r \geq 1$ determinam uma classe de conjugação. Então a partição $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ determina uma única classe de conjugação de S_n. Também vimos na Seção 1.6 que o número de caracteres irredutíveis é determinado pelo número de classes de conjugação.

Desta maneira os caracteres irredutíveis de S_n são determinados pelas partições de n. Vamos denotar por χ_λ o S_n-carácter irredutível correspondente a $\lambda \vdash n$, e denotaremos por $d_\lambda = \chi_\lambda(1)$ o grau de χ_λ.

Teorema 2.2.2. *Seja n um inteiro positivo e K um corpo qualquer de característica 0. As representações irredutíveis de S_n estão em correspondência biunívoca com as partições λ de n. Denotamos por ϕ_λ, M_λ e χ_λ a representação irredutível correspondente a λ, o S_n-módulo irredutível e seu caracter, respectivamente.*

Definição 2.2.3. O diagrama de Young $[\lambda]$ da partição $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ é o conjunto de todas os pontos $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, tais que $1 \leq j \leq \lambda_i$, $i = 1, \ldots, r$. Apresentamos graficamente o diagrama de Young substituindo os pontos por quadrados tais que a primeira coordenada i (o índice das linhas), cresce de cima para baixo e a segunda cordenada j (o índice das colunas) cresce da esquerda para direita.

Exemplo 2.2.4. Seja $\lambda = (5, 3, 2, 1)$ uma partição de $n = 11$. Temos

$$[\lambda] = \ydiagram{5,3,2,1} .$$

Definição 2.2.5. Seja λ uma partição de n. Denote por $\lambda_j^{'}$ o comprimento da j-ésima coluna de $[\lambda]$. A partição $\lambda^{'} = (\lambda_1^{'}, \ldots, \lambda_l^{'})$ é chamada de partição conjugada e a tabela $[\lambda^{'}]$ de tabela conjugada.

Exemplo 2.2.6. A partição conjugada do exemplo anterior é dada por

$$[\lambda^{'}] = \ydiagram{4,3,2,1,1} .$$

Definição 2.2.7. i. Sejam λ, μ partições de n. Diremos que o diagrama $[\lambda]$ contém $[\mu]$ e escreveremos $[\lambda] \supset [\mu]$, se $\lambda_i \geq \mu_i$, para todo $i \geq 1$.

ii. A diferença $[\lambda] \backslash [\mu]$ de dois diagramas $[\lambda]$ e $[\mu]$ é definida como o conjunto dos quadrados de $[\lambda]$ que não pertencem a $[\mu]$

Exemplo 2.2.8. Dados os diagramas $\lambda = (5, 3, 1, 1)$ e $\mu = (3, 2)$, temos que

$$[\lambda] = \ydiagram{5,3,1,1} \quad \text{e } [\mu] = \ydiagram{3,2}.$$

Assim, temos que

$$\begin{ytableau} \; & \; & \; & X & X \\ \; & \; & X \\ X \\ X \end{ytableau}$$

onde os quadrados marcados por X são os elementos que estão na diferença $[\lambda] \backslash [\mu]$.

Definição 2.2.9. Uma Tabela de Young T_λ do diagrama $[\lambda]$, ou uma λ-tabela é um preenchimento dos quadrados $[\lambda]$ com inteiros positivos. A tabela T_λ é de conteúdo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, se α_i é o número de vezes que o inteiro i ocorre em T_λ. Se λ é uma partição de n e $\tau \in S_n$, denotamos por $T_\lambda(\tau)$ a tabela onde a primeira coluna contém os inteiros $\tau(1), \ldots, \tau(k_1)$ escritos de cima para baixo, a segunda coluna contém $\tau(k_1 + 1), \ldots, \tau(k_1 + k_2)$, etc.

Exemplo 2.2.10. A tabela $T_\lambda(\tau)$ para $\lambda = (3, 3, 1)$ e $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ é dada por

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 6 & 1 \\ \hline 4 & 7 & 3 \\ \hline 5 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

Definição 2.2.11. Uma tabela T_λ é do tipo **standard**, se os inteiros em cada coluna de T_λ aumenta da esquerda para a direita e de cima para baixo, respectivamente. Uma tabela T_λ é dita semistandard, se os inteiros em cada coluna crescem estritamente de cima para baixo e os inteiros em cada linha são crescente, com possíveis repetições, da esquerda para a direita.

Exemplo 2.2.12. A tabela

$$T_{(5,2,1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 & 7 & 8 \\ \hline 5 & 7 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-2} 6 & \multicolumn{4}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

não é standard, enquanto a tabela

$$T_{(4^2,1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 8 & 9 \\ \hline 7 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

é standard.

Teorema 2.2.13. *Dada uma partição $\lambda \vdash n$, o número de tabelas standard λ é igual a d_λ, o grau de χ_λ, onde χ_λ é o carácter irredutível.*

No próximo teorema damos uma decomposição em S_n-módulos irredutíveis de qualquer S_{n-1} induzido até S_n. Note que o grupo S_{n-1} pode ser imerso em S_n, ou seja, ele pode ser visto como o subgrupo de todas as permutações fixando o inteiro n. Sendo assim, denote por M_λ um S_{n-1}-módulo irredutível correspondente à partição $\lambda \vdash n-1$. Denotamos por $M_\lambda \uparrow S_n$ a indução correspondente à partição $\lambda \vdash n-1$. Então M_λ é considerado como S_n-módulo. Agora, seja M_μ um S_n-módulo correspondente à partição $\mu \vdash n$, e seja $S_{n-1} \leq S_n$. Denotamos por $M_\mu \downarrow S_{n-1}$ a restrição de M_μ a S_{n-1}. Então M_μ é considerado como S_{n-1}-módulo.

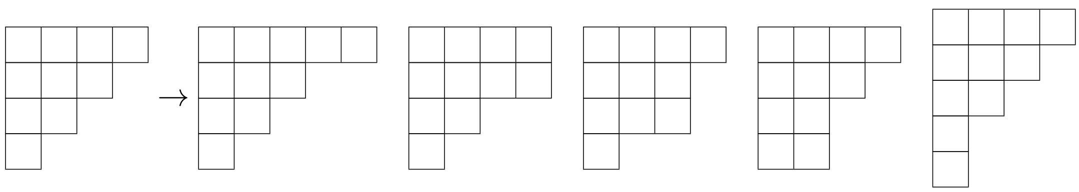
Teorema 2.2.14. *Sejam $\lambda \vdash n-1$, $\mu \vdash n$ e S_{n-1} contido em S_n como um subgrupo fixando o símbolo n. então:*

i. $M_\mu \downarrow S_{n-1} \cong \sum M_{\lambda^{(i)}}$, *onde o somatório percorre todas as partições $\lambda^{(i)}$ de $n-1$ tais que seus diagramas $[\lambda^{(i)}]$ são obtidos apagando-se um quadrado de cada diagrama $[\mu]$.*

ii. $M_\lambda \uparrow S_n \cong \sum M_{\mu^{(i)}}$, *onde o somatório é em todas as partições $\mu^{(i)}$ de n tais que seus diagramas $[\,u^{(i)}]$ são obtidos adicionando-se um quadrado ao diagrama de $[\lambda]$.*

Exemplo 2.2.15. Seja $n = 10$ e $\mu = (4, 3, 2, 1)$, então

$$M_{(4,3,2,1)} \uparrow S_{11} = M_{(5,3,2,1)} \oplus M_{(4,4,2,1)} \oplus M_{(4,3,3,1)} \oplus M_{(4,3,2,2)} \oplus M_{(4,3,2,1,1)}.$$



Definição 2.2.16. Sejam v, λ partições satisfazendo $[v] \supset [\lambda]$ e $T = T_{[v]\backslash[\lambda]}$ uma tabela de conteúdo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Seja $w(T) = b_1 \cdots b_n$ uma palavra nos símbolos $1, \ldots, m$ obtida a partir dos elementos de T escritos da direita para a esquerda e da primeira para a última linha. A palavra $w(T)$ é chamada **permutação reticulada** se para todo $r = 1, \ldots, n$ e $i = 1, \ldots, m-1$, o número de partições de i na sequência $b_1, \ldots, b_r$ não é menor que o número de participações de $i + 1$.

Exemplo 2.2.17. Sejam $v = (5, 4, 2, 1), \lambda = (3, 2)$ e $\alpha = (3, 2, 2)$. A tabela

$$T = T_{[v]\backslash[\lambda]} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \ & \ & \ & 1 & 1 \\ \hline \ & \ & 1 & 2 \\ \cline{1-4} 2 & 3 \\ \cline{1-2} 3 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

induz a palavra $w(T) = 1121323$ que é uma permutação reticulada.

Seja $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ uma partição em m partes de algum inteiro. Denotamos por $W_m(\lambda)$ o GL_m-módulo irredutível correspondente a λ. Podemos agora apresentar a Regra de Littlewood-Richarson.

Teorema 2.2.18 (Regra de Littlewood-Richardson)**.** *Sejam λ, μ, v partições $[\lambda] \subset [v]$, $|\lambda| + |\mu| = |v|$ e $c^v_{\lambda_\mu}$ o número de todas as $[v]\backslash[\lambda]$-tabelas semistandard de conteúdo μ tais que as palavras $w(T)$ correspondentes são permutações reticuladas. Então:*

i. O seguinte isomorfismo de GL_m-módulos verifica-se

$$W_m(\lambda) \otimes W_m(\mu) \cong \sum c^v_{\lambda_\mu} W_m(v),$$

onde o somatório percorre todos v tais que $[\lambda] \subset [v]$ e $|\lambda| + |\mu| = |v|$.

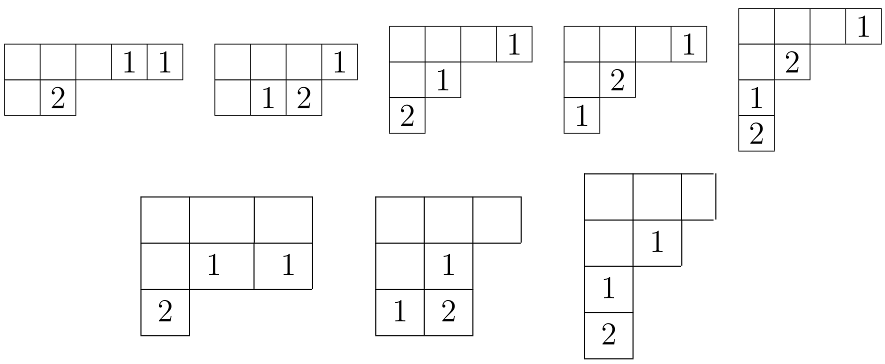
ii. Seja $|\lambda| = p$, $|\mu| = q$ e os grupos S_p e S_q mergulhados em S_{p+q} como subgrupos fixando, respectivamente os símbolos $p+1, \ldots, p+q$ e $1, \ldots, p$. O seguinte isomorfismo de S_{p+q}-módulos verifica-se

$$(M_\lambda \otimes M_\mu) \uparrow S_{p+q} \cong \sum c^v_{\lambda_\mu} M_v$$

onde o somatório é como em (i) e o produto tensorial $M_\lambda \otimes M_\mu$ é considerado com a estrutura natural de um $S_p \times S_q$-módulo.

Exemplo 2.2.19. Como um exemplo da Regra de Littlewood-Richadson, vamos tomar o produto tensorial entre $W_5(3,1) \otimes W_5(2,1)$, onde o subíndice 5 foi tomado sem nenhum motivo especial. Temos que

$$\begin{aligned} W_5(3,1) \otimes W_5(2,1) \cong\ & W_5(5,2) \oplus W_5(4,3) \oplus 2W_5(4,2,1) \\ & \oplus W_5(4,1^3) \oplus W_5(3^2,1) \oplus W_5(3,2^2) \oplus W_5(3,2,1^2) \end{aligned}$$



Um caso particular da Regra de Littlewood-Richardson é a Regra de Young dada a seguir.

Teorema 2.2.20 (Regra de Young). *Seja $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ e $q \geq 0$. Então*

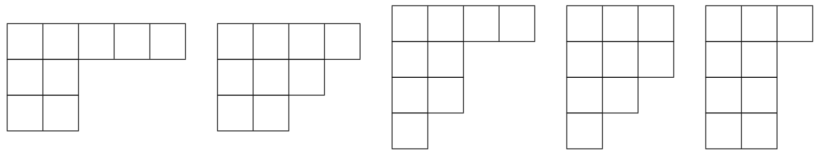
$$W_m(\lambda) \otimes W_m(q) \cong \sum W_m(v),$$

onde o somatório percorre todas as partições $v = (v_1, \ldots, v_m)$ de $|\lambda| + q$ tais que

$$v_1 \geq \lambda_1 \geq v_2 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq v_m \geq \lambda_m.$$

Exemplo 2.2.21. Para o produto tensorial $W_5(3,2^2) \otimes W_5(2)$ a Regra de Young nos dá:

$$W_5(3,2^2) \otimes W_5(2) \cong W_5(5,2^2) \oplus W_5(4,3,2) \oplus W_5(4,2^2,1) \oplus W_5(3^2,2,1) \oplus W_5(3,2^3)$$



Segue agora alguns resultados que serão utilizados no decorrer desta dissertação. Comecemos do seguinte resultado obtido por Gorenstein em [19], Teorema 7.1.

Teorema 2.2.22. *Sejam H e K grupos, $G = H \times K$ e seja F um corpo split para H e K. Se V/F é H-módulo irredutível e W/F é K-módulo irredutível, então o produto tensorial $V \otimes_K W$ é um G-módulo irredutível. Mais ainda, todo G-módulo irredutível sobre F é equivalente a um produto tensorial desta forma.*

De James [21], temos:

Lema 2.2.23. *Seja λ uma partição e λ' sua partição conjugada. Então o carácter induzido pela partição conjugada pode ser descrito da forma*

$$\chi_{\lambda'} = \chi_\lambda \otimes \chi_{(1^n)},$$

onde (1^n) é a partição do tipo $(\underbrace{1,1,1,\ldots,1}_{n})$.

2.3 T-ideais Graduados e Espaço Polinomial Multilinear

Anteriormente, vimos no Exemplo 2.1.5 que podemos induzir na álgebra $K\langle X\rangle$ uma G-graduação de forma natural e definimos o grau de um elemento. Vamos denotar a álgebra livre G-graduada por $K\langle X|G\rangle$.

Definição 2.3.1. Dado $f = f(x_1^{g_1},\ldots,x_n^{g_n}) \in K\langle X|G\rangle$, dizemos que a n-upla $(a_1,\ldots,a_n)$ é uma G-substituição admissível para f se $a_i \in A^{(g_i)}$ para todo $i = 1,\ldots,n$.

Definição 2.3.2. Um polinômio $f = f(x_1^{g_1},\ldots,x_n^{g_n})$ é uma **identidade polinomial** G-graduada de A se $f(a_1,\ldots a_n) = 0$ para toda G-substituição admissível de f.

Com estas definições podemos estender o conceito de T-ideal para álgebras G-graduadas.

Definição 2.3.3. Um ideal I de $K\langle X|G\rangle$ é um T_G-ideal se $\varphi(I) \subset I$ para todo endomorfismo G-graduado φ de $K\langle X|G\rangle$.

Observação 2.3.4. A álgebra $K\langle X|G\rangle$ tem a seguinte propriedade universal: dada qualquer álgebra G-graduada A, qualquer função $\Psi : X \to A$ tal que $\Psi(X^g) \subset A^g$, para todo $g \in G$, estende-se unicamente à um homomorfismo, $\overline{\Psi} : K\langle X|G\rangle \to A$ de álgebras G-graduadas.

Vamos denotar por $T_G(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais G-graduadas de A. Pela Observação 2.3.4 e pela Definição 2.3.3, segue que $T_G(A)$ é um T_G-ideal de $K\langle X|G\rangle$.

Lema 2.3.5. *Sejam A e B álgebras G-graduadas tais que $T_G(A) = T_G(B)$. Então $T(A) = T(B)$.*

Demonstração. Se A e B são álgebras G-graduadas tais que $T_G(A) \subset T_G(B)$, então $T(A) \subset T(B)$. De fato, se $f \in T(A)$ e $b_i = \sum_{g\in G} b_{i_g} \in B$, para todo $1 \leq i \leq n$, então

$$f\left(\sum_{g\in G} x_{1_g}, \ldots, \sum_{g\in G} x_{n_g}\right) \in T_G(A) \subset T_G(B).$$

Logo

$$f(b_1, \ldots, b_n) = f\left(\sum_{g\in G} b_{1_g}, \ldots, \sum_{g\in G} b_{n_g}\right) = 0$$

e portanto, $f(x_1, \ldots, x_n) \in T(B)$ e $T(A) \subset T(B)$. Daí se $T_G(A) = T_G(B)$, então $T(A) = T(B)$.

□

Vamos ver agora algumas definições e resultados de identidades polinomiais G-graduadas.

Definição 2.3.6. Seja

$$V_n^G := span_K\langle x_{\sigma(1)}^{g_1} x_{\sigma(2)}^{g_2} \cdots x_{\sigma(n)}^{g_n} \mid g_i \in G; \sigma \in S_n\rangle.$$

Os elementos de V_n^G são chamados de polinômios multilineares de grau n em $K\langle X|G\rangle$.

Na definição anterior observe que, não necessariamente, os g_i's são distintos. Podemos ter $g_i = g_j$, com $i \neq j$. Então V_n^G é um S_n-módulo a esquerda com a ação natural de S_n que permuta os índices, ou seja, se $\tau \in S_n$, então

$$\tau(x_{\sigma(1)}^{g_1} x_{\sigma(2)}^{g_2} \cdots x_{\sigma(n)}^{g_n}) = x_{\tau(\sigma(1))}^{g_{\tau(1)}} x_{\tau(\sigma(2))}^{g_{\tau(2)}} \cdots x_{\tau(\sigma(n))}^{g_{\tau(n)}}.$$

Mais ainda, assim como ocorre para um T-ideal, o T_G-ideal da álgebra G-graduada A é determinado pelos seus polinômios multilineares, isto é, por $V_n^G \cap T_G(A)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lema 2.3.7. *Se $charK = 0$ e I é um T_G-deal, então I é gerado por seus polinômios G-graduados multilineares.*

Definimos na seção anterior a partição de um inteiro. De forma análoga dizemos que uma família $\mathscr{G} := \{\mathscr{G}_g \subset \{1, \ldots, n\} \mid g \in G\}$ é uma G-partição de um conjunto $\widehat{n} := \{1, 2, \ldots, n\}$, se

$$\mathscr{G}_g \cap \mathscr{G}_h = \emptyset, \text{ se } g \neq h \text{ e } \bigcup_{g \in G} \mathscr{G}_g = \{1, \ldots, n\}.$$

Neste caso denotamos $\mathscr{G} \vdash_G n$. Todo monômio $m \in V_n^G$ define unicamente uma G-partição de $\widehat{n}$, chamada de $\mathscr{G}(m)$, dada pelos termos

$$\mathscr{G}_g(m) := \{j \in \{1, \ldots, n\} \mid x_j^g \text{ aparece em } m\} \text{ para } g \in G$$

e, para a G-partição $\mathscr{G}$ de $\{1, \ldots, n\}$, nós definimos

$$V_n^G(\mathscr{G}) := span\langle m \in V_n^G \mid m \text{ é monômio e } \mathscr{G}(m) = \mathscr{G}\rangle,$$

ou seja, é o espaço cujos geradores são os monômios com as mesmas variáveis de mesmo G-grau, mudando apenas a posição de seus termos.

Exemplo 2.3.8. Seja $m \in V_5^{\mathbb{Z}_4}$, tal que $m = x_1^{\bar{2}} x_2^{\bar{2}} x_3^{\bar{1}} x_4^{\bar{0}} x_5^{\bar{0}}$, então m define a seguinte partição de $\widehat{5}$:

$$\mathscr{G}_{\bar{0}}(m) = \{4, 5\}; \mathscr{G}_{\bar{1}}(m) = \{3\}; \mathscr{G}_{\bar{2}}(m) = \{1, 2\}; \mathscr{G}_{\bar{3}}(m) = \emptyset$$

e

$$\mathscr{G}(m) = \{\{4, 5\}, \{3\}, \{1, 2\}\}.$$

Exemplo 2.3.9. Seja $\mathscr{G}$ uma partição de $\widehat{4}$, $\mathscr{G} \vdash_G 4$. Tomemos $G = \mathbb{Z}_4$ e $\mathscr{G} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$, onde $\mathscr{G}_{\bar{0}} = \emptyset$, $\mathscr{G}_{\bar{1}} = \{1\}$, $\mathscr{G}_{\bar{2}} = \{2, 3\}$ e $\mathscr{G}_{\bar{3}} = \{4\}$. Assim, os $\mathbb{Z}_4$-graus das variáveis x_i, $i = 1, 2, 3, 4$ são dados por $x_1^{\bar{1}}, x_2^{\bar{2}}, x_3^{\bar{2}}$ e $x_4^{\bar{3}}$. Logo, o espaço dos monômios multilineares $V_4^{\mathbb{Z}_4}(\mathscr{G})$ induzidos pela partição $\mathscr{G}$ tem como seus geradores os possíveis produtos entre as quatro variáveis acima.

Observação 2.3.10. Em [11] foi demonstrado que

$$V_n^G = \bigoplus_{\mathscr{G} \vdash_G n} V_n^G(\mathscr{G}).$$

Mais ainda, também foi provado que

$$\frac{V_n^G}{V_n^G \cap T_G(A)} = \bigoplus_{\mathscr{G} \vdash_G n} \frac{V_n^G(\mathscr{G})}{V_n^G(\mathscr{G}) \cap T_G(A)}.$$

Ou seja, podemos decompor o espaço dos polinômios multilineares utilizando as suas partições.

Note que toda G-partição de $\widehat{n}$ define um subgrupo de S_n, dado por

$$H(\mathscr{G}) := \prod_{g \in G} Sym(\mathscr{G}_g).$$

A ação deste subgrupo sobre $V_n(\mathscr{G})$ determina uma estrutura de módulo. A ação age permutando as variavéis de mesmo G-grau.

Exemplo 2.3.11. No Exemplo 2.3.8, a partir do monômio $m = x_1^{\overline{2}} x_2^{\overline{2}} x_3^{\overline{1}} x_4^{\overline{0}} x_5^{\overline{0}}$ definimos a partição $\mathscr{G}(m) = \{\{4,5\},\{3\},\{1,2\}\}$ de $\widehat{5}$. Para esta partição temos

$$\begin{aligned} H(\mathscr{G}) &= Sym(\{4,5\}) \times Sym(\{3\}) \times Sym(\{1,2\}) \times Sym(\emptyset) \\ &\cong S_2 \times S_1 \times S_2. \end{aligned}$$

Assim,

$$(12) \times (1) \times (12)(x_1^{\overline{2}} x_2^{\overline{2}} x_3^{\overline{1}} x_4^{\overline{0}} x_5^{\overline{0}}) = x_2^{\overline{2}} x_1^{\overline{2}} x_3^{\overline{1}} x_5^{\overline{0}} x_4^{\overline{0}}.$$

Claramente, se $\mathscr{G}$ e $\mathscr{S}$ são G-partições de $\{1, \ldots, n\}$ tais que $|\mathscr{G}_g| = |\mathscr{S}_g|$ para cada $g \in G$, então $H(\mathscr{G})$ e $H(\mathscr{S})$ são equivalentes. Assim, fixando uma ordem em G, por exemplo $G = \{h_1, \ldots, h_n\}$, vamos denotar por $V_{n_1,\ldots,n_r}^G$ o $H(\mathscr{G})$-módulo de $V_n^G(\mathscr{G})$ onde $|\mathscr{G}_{g_i}| = n_i$ e as variáveis são $x_1^{h_1}, \ldots, x_{n_1}^{h_1}$, depois $x_{n_1+1}^{h_2}, \ldots, x_{n_1+n_2}^{h_2}$ e assim sucessivamente. Com isto, podemos trabalhar com cada G-grau do espaço dos polinômios multilineares de forma separada e isto será extremamente importante no decorrer de nosso trabalho.

2.4 A codimensão de uma Álgebra

Seja K um corpo de característica zero, $K\langle X \rangle$ a álgebra livre e A uma PI-álgebra sobre K. Sabemos que as identidades de A são geradas por polinômios multilineares.

Seja V_n o espaço dos polinômios multilineares sobre as variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Segue que o T-ideal de A, $T(A)$, é gerado pelos subespaços

$$(V_1 \cap T(A)) \oplus (V_2 \cap T(A)) \oplus \ldots \oplus (V_n \cap T(A)) \oplus \ldots.$$

É fácil ver que se A satisfaz todas as identidades de alguma PI-álgebra B, então $V_n \cap T(A) \supset V_n \cap T(B)$ e $\dim(V_n \cap T(A)) \geq \dim(V_n \cap T(B))$, para todo $n = 1, 2, \ldots$. Assim, a dimensão do espaço $V_n \cap T(A)$ fornece alguma informação sobre o crescimento das identidades de A.

Definição 2.4.1. O número inteiro não negativo

$$c_n(A) = \dim \left(\frac{V_n}{V_n \cap T(A)} \right)$$

é chamado de n-ésima codimensão da álgebra A.

Definição 2.4.2. Para $n \geq 1$, o S_n-carácter de $V_n(A) = V_n/(V_n \cap T(A))$ é chamado o n-ésimo cocaracter de A e é denotado por $\chi_n(A)$.

Observe que $V_n(A)$ tem estrutura de um S_n-módulo induzida pela estrutura de S_n-módulo que já existe em V_n.

Observação 2.4.3.

i. $c_n(A) = n! - \dim(V_n(A) \cap T(A)) \leq n!$. Então, se A não possui nenhuma identidade multilinear, temos que $c_n(A) = n!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii. A é uma PI-álgebra se, e somente se, $c_n(A) < n!$, para algum $n \in \mathbb{N}$. De fato, se A é uma PI-álgebra, existe $f \in T(A)$ tal que $f \neq 0$. Daí existe uma identidade polinomial multilinear para A de grau n e $\dim(V_n(A) \cap T(A)) \geq 1$. Portanto, $c_n(A) < n!$. A recíproca é direta.

Exemplo 2.4.4. Seja A uma álgebra nilpotente de índice $m \in \mathbb{N}$ $A^m = 0$. Então $c_n(A) = 0$, para todo $n \geq m$. De fato, todo monômio $x_1 \cdots x_n \in V_n$, com $n \geq m$ é identidade. Portanto, $V_n(A) \cap T(A) = V_n(A)$.

Exemplo 2.4.5. Se A é uma álgebra comutativa, então $c_n(A) \leq 1$, para todo $n \geq 1$. De fato, para todo $\sigma \in S_n$, temos que $a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} = a_1 \cdots a_n$, ou seja $a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} - a_1 \cdots a_n = 0$. Daí, $x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} - x_1 \cdots x_n \in V_n(A) \cap T(A)$ e consequentemente

$$\overline{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}} = \overline{x_1 \cdots x_n}$$

em $\frac{V_n(A)}{V_n(A) \cap T(A)}$. Logo, $\overline{x_1 \cdots x_n}$ gera $\frac{V_n(A)}{V_n(A) \cap T(A)}$ como espaço vetorial. Concluímos então que $c_n(A) = \dim \frac{V_n(A)}{V_n(A) \cap T(A)} \leq 1$.

Se A é uma PI-álgebra, então a sua sequência de codimensões é limitada por uma função de n. Este resultado foi demonstrado por Regev em [30].

Teorema 2.4.6 (Regev). *Se a álgebra A satisfaz uma identidade de grau $d \geq 1$, então $c_n(A) \leq (d-1)^{2n}$.*

Mais ainda, no mesmo artigo, Regev mostrou que:

Teorema 2.4.7. *Sejam A e B duas PI-álgebras sobre um corpo K. Então $c_n(A \otimes B) \leq c_n(A)c_n(B)$, para todo $n \geq 1$.*

Com estes resultados, podemos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 2.4.8. *Se A e B são PI-álgebras, então $A \otimes B$ é uma PI-álgebra.*

Demonstração. Do Teorema 2.4.6, existem inteiros d e l tais que $c_n(A) \leq d^n$ e $c_n(B) \leq l^n$ para todo $n \geq 1$. Então,

$$c_n(A \otimes B) \leq c_n(A)c_n(B) \leq (dl)^n,$$

para todo n. Como para algum k, $n! > k^n$ para um n suficientemente grande, temos que existe m tal que $c_m(A \otimes B) < m!$, ou seja, $A \otimes B$ é uma PI-álgebra. □

Observemos que a definição de codimensão pode ser estendida para álgebras G-graduadas:

$$c_n^{(h_1,\ldots,h_n)}(A) = \dim\left(\frac{V_n^{(h_1,\ldots,h_n)}}{V_n^{(h_1,\ldots,h_n)} \cap T_G(A)}\right)$$

é a n-ésima codimensão homogênea associada a $(h_1,\ldots,h_n)$, onde $h_1,\ldots,h_n \in G$. Assim, da Observação 2.3.10, temos que

$$\begin{aligned} c_n^{(h_1,\ldots,h_n)}(A) &= \dim\left(\frac{V_n^{(h_1,\ldots,h_n)}}{V_n^{(h_1,\ldots,h_n)} \cap T_G(A)}\right) \\ &= \dim\left(\bigoplus_{\mathscr{G} \vdash_G n} \frac{V_n^{(h_1,\ldots,h_n)}(\mathscr{G})}{V_n^{(h_1,\ldots,h_n)}(\mathscr{G}) \cap T_G(A)}\right). \end{aligned}$$

2.5 Base Multiplicativa

No Exemplo 2.1.8 vimos uma $\mathbb{Z}_n$-graduação elementar da álgebra $M_m(K)$, onde toda matriz elementar e_{ij} é homogênea. Podemos generalizar esta graduação elementar da seguinte forma: seja $\mu : \widehat{m} \to G$ uma função qualquer e defina o G-grau da matriz e_{ij} por $|e_{ij}| = \mu(j) - \mu(i) \in G$, em que G é um grupo abeliano. Com esta aplicação, temos que $M_m(K)$ é G-graduada. Mais ainda, ela possui uma G-graduação elementar.

De fato, sejam $e_{ij} \in A^{g_1}$ e $e_{vw} \in A^{g_2}$, então se $j \neq v$ temos que $e_{ij}e_{vw} \in A^{(g_1+g_2)}$ de modo trivial. Se $j = v$, então $e_{ij}e_{vw} = e_{iw}$ e

$$\begin{aligned}|e_{iw}| &= |e_{ij}e_{vw}| = |e_{ij}| + |e_{vw}| \\ &= \mu(j) - \mu(i) + \mu(w) - \mu(v) = \mu(w) + \mu(i) \\ &= g_1 + g_2.\end{aligned}$$

Como os e_{ij}'s formam uma base de $M_m(K)$ e $e_{ij}e_{vw} \in A^{(g_1+g_2)}$ temos uma G-graduação de $M_m(K)$. Além disso, como $\mu(j), \mu(i) \in G$, digamos $\mu(j) = g_j$ e $\mu(i) = -g_i$, temos que $|e_{ij}| = -g_i + g_j$. Portanto $e_{ij} \in A^{(-(g_i)+g_j)}$ e a G-graduação é elementar. A graduação acima tem um importante papel no estudo das G-graduações de $M_m(K)$.

Definição 2.5.1. Seja $\mu : \widehat{m} \to G$ uma função. Podemos transformar $M_m(K)$ em uma álgebra G-graduada, definindo

$$|e_{ij}| := \mu(j) - \mu(i).$$

Uma G-graduação deste tipo é chamada de G-graduação elementar de $M_m(K)$.

Observe que redefinimos a G-graduação elementar e, conforme visto, as duas definições são equivalentes. Além disso, toda G-graduação elementar pode ser construída através de uma função μ. Denotaremos por $(M_m(K), \mu)$ a álgebra G-graduada $M_m(K)$ com graduação elementar induzida por μ.

Observação 2.5.2. Em particular se tomarmos $G = \mathbb{Z}_n$ e $\mu(i) = \bar{i}$, para todo $i \in \widehat{m}$ ou então $G = \mathbb{Z}$ e $\mu : \widehat{m} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ a função inclusão, temos as duas graduações introduzidas por Vasilovsky em [35] e [34]. Note que a primeira entre estas foi exatamente a utilizada no Exemplo 2.1.8.

As componentes G-homogêneas de grau g em $(M_m(K), \mu)$ são os subespaços $A^g = (M_m(K), \mu)^g = span_k\langle e_{ij} \mid \mu(j) - \mu(i) = g\rangle$. Para qualquer graduação elementar podemos tomar a base canônica $\mathcal{B} = \{e_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq m\}$ que é homogênea e satisfaz a propriedade

$$\forall a, b \in \mathcal{B} \text{ se } ab \neq 0, \text{ então } ab \in \mathcal{B}. \tag{2.5.1}$$

Esta propriedade não é válida para toda álgebra graduada. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 2.5.3. A álgebra de Grassmann com $\mathbb{Z}_2$-graduação natural $E = E_0 \oplus E_1$ não satisfaz a propriedade (2.5.1). De fato, tomando uma base linear ordenada $e_1, e_2, \ldots$ do espaço vetorial infinito E, o conjunto $\mathcal{E} = \{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k} \mid k \in \mathbb{N}, e_{i_1} \leq e_{i_2} \leq \ldots \leq e_{i_k}\}$ é uma base canônica de E. Considere $\mathcal{E}_0$ o conjunto dos vetores de comprimento par e $\mathcal{E}_1$ os de comprimento ímpar. Temos que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1$, logo $\mathcal{E}$ é $\mathbb{Z}_2$-homogênea, mas a propriedade (2.5.1) falha. Note que, se $a = e_{i_1}$ e $b = e_{i_2}$, então $ab = e_{i_2}e_{i_1} \notin \mathcal{E}$, pois $e_{i_2}e_{i_1} = -e_{i_1}e_{i_2}$. Entretanto, observe que ab pertence $\mathcal{E}$ a menos de sinal.

Vamos generalizar a propriedade (2.5.1) da seguinte forma:

Definição 2.5.4. Seja $A = \bigoplus_{g\in G} A^g$ uma álgebra G-graduada e seja $\mathcal{B}$ uma base linear de A. Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma **base multiplicativa** de A se $\mathcal{B}$ é homogênea com respeito a G-graduação e se

$$\forall a, b \in \mathcal{B} \text{ se } ab \neq 0, \text{ então existe } c \in K - \{0\} \text{ tal que } cab \in \mathcal{B} \tag{2.5.2}$$

Exemplo 2.5.5. Seja $\mu : \widehat{m} \to G$ uma função. A álgebra das matrizes $M_m(E) \cong M_m(K) \otimes E$ possui uma $G \times \mathbb{Z}_2$-graduação natural dada por $(M_m(K) \otimes (E), \mu)^{(g,\delta)} = (M_m(K), \mu)^g \otimes E^\delta$. Observe que a base $\{ae_{ij} \mid a \in \mathcal{E}, 1 \leq i, j \leq m\}$ de $M_m(E)$ é multiplicativa.

No decorrer deste trabalho, vamos exibir uma base das identidade $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$-graduadas de $(M_m(E), \mu)$. Vamos começar trabalhando com as subálgebras de $M_m(E)$.

Definição 2.5.6. Seja $m \in \mathbb{N}$ e $\alpha : \widehat{m} \to \mathbb{Z}_2$ uma função. Defina

$$M_\alpha(E) = span_k\langle ae_{ij} \mid i, j \in \widehat{m}, a \in \mathcal{E}_{\alpha(i)+\alpha(j)}\rangle \subset M_m(E).$$

Note que $\alpha(i) + \alpha(j)$ varia entre $\overline{0}$ e $\overline{1}$. É fácil ver que $M_\alpha(E)$ é subálgebra de $M_m(E)$. De fato, se $S_1, S_2 \in M_\alpha(E)$, onde $S_1 = ae_{ij}$ e $S_2 = be_{vw}$, com $j = v$, caso contrário caímos no caso trivial, temos que $ae_{ij}be_{vw} = abe_{iw}$ e

$$|ab| = |a| + |b| = \alpha(i) + \alpha(j) + \alpha(v) + \alpha(w) = \alpha(i) + \alpha(w)$$

e portanto $ab \in \mathcal{E}_{\alpha(i)+\alpha(w)}$. Logo, $S_1S_2 \in M_\alpha(E)$ e $M_\alpha(E)$ é subálgebra. Além disso, tomando uma função qualquer $\mu : \widehat{m} \to G$, temos que $M_\alpha(E)$ é uma subálgebra $G\times\mathbb{Z}_2$-graduada da álgebra $M_m(E)$ com G-graduação elementar induzida por μ. Mais precisamente a componente homogênea de $M_\alpha(E)$ de grau $(g, \delta) \in G \times \mathbb{Z}_2$ é formada pelas matrizes

$$x = \sum a_{ij}e_{ij},$$

em que $a_{ij} \in E_\delta \cap E_{\alpha(i)+\alpha(j)}$, se $\mu(j) - \mu(i) = g$ e $a_{ij} = 0$, caso contrário. Claramente, podemos ter algumas componentes triviais. Vamos denotar esta álgebra $G\times\mathbb{Z}_2$-graduada por $(M_\alpha(E), \mu)$. É imediato ver que

$$\mathcal{B}_\alpha = \{ae_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq m, a \in \mathcal{E}_{\alpha(i)+\alpha(j)}\}$$

é uma base multiplicativa de $M_\alpha(E)$.

Exemplo 2.5.7. Sejam $\mu : \widehat{2} \to \mathbb{Z}_2$, $\mu(i) = \bar{i}$ e $\alpha : \widehat{2} \to \mathbb{Z}_2$ tal que $\alpha(i) = \bar{i}$. Assim a álgebra $M_\alpha(E)$ é $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-graduada e $(M_\alpha(E), \mu)$ é da forma

$$M_\alpha(E) = \begin{pmatrix} E_0 & E_1 \\ E_1 & E_0 \end{pmatrix}$$

e suas componentes homogêneas são

$$M_\alpha(E)^{(0,0)} = span_K\langle ae_{11}, ae_{12} \mid a \in \mathcal{E}_0\rangle$$

$$M_\alpha(E)^{(0,1)} = \emptyset$$

$$M_\alpha(E)^{(1,0)} = \emptyset$$

$$M_\alpha(E)^{(1,1)} = span_K\langle ae_{12}, ae_{21} \mid a \in \mathcal{E}_1\rangle.$$

Observação 2.5.8. Sejam $(M_\alpha(E), \mu)$ e $(M_\beta(E), v)$ duas subálgebras $G\times\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_m(E)$. Se $\sigma \in S_m$, então a função

$$f : (M_\alpha(E), \mu) \to (M_\beta(E), v)$$

$$ae_{ij} \to ae_{\sigma(i)\sigma(j)}$$

é um isomorfismo graduado se, e somente se

$$\begin{cases} \mu(j) - \mu(i) = v(\sigma(j)) - v(\sigma(i)) \\ \alpha(i) + \alpha(j) = \beta(\sigma(i)) + \beta(\sigma(j)) \end{cases},$$

para todo $i, j \in \widehat{m}$.

Lembramos que um isomorfismo G-graduado preserva os G-graus. Em particular, temos:

Proposição 2.5.9. *Se $\mu : \widehat{m} \to \mathbb{Z}_m$ é uma bijeção, então para qualquer $\alpha : \widehat{m} \to \mathbb{Z}_2$ existe $\beta : \widehat{m} \to \mathbb{Z}_2$ tais que $(M_\alpha(E), \mu)$ e $(M_\beta(E), l)$ são isomorfas como $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$-álgebras, onde $l : \widehat{m} \to \mathbb{Z}_m$ é uma função definida por $l(k) = \overline{k}$ para todo $k \in \widehat{m}$.*

Demonstração. Se $\mu : \widehat{m} \to \mathbb{Z}_m$ é uma bijeção, podemos ver μ como uma permutação $\sigma \in Sym(\mathbb{Z}_m) \cong S_m$. Defina $\beta : \widehat{m} \to \mathbb{Z}_2$, tal que $\beta(\sigma(j)) = \alpha(j)$. Seja

$$f : (M_\alpha(E), \mu) \to (M_\beta(E), v)$$

$$ae_{ij} \to ae_{\sigma(i)\sigma(j)}.$$

Assim,

$$\mu(j) - \mu(i) = \sigma(j) - \sigma(i) = l(\sigma(j)) - l(\sigma(i))$$

e

$$\alpha(i) + \alpha(j) = \beta(\sigma(i)) + \beta(\sigma(j)).$$

Portanto, pela Observação 2.5.8, segue que

$$(M_\alpha(E), \mu) \cong (M_\beta(E), l).$$

$\square$

A proposição anterior garante que estudar uma $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$-graduação para $(M_\alpha(E), \mu)$ é equivalente a estudar uma $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$-graduação de uma álgebra $(M_\beta(E), l)$. Portanto, no restante da dissertação $M_\alpha(E)$ denota a álgebra $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$-graduada $(M_\alpha(E), l)$, onde l é a função $l(k) = \overline{k}$ para todo $k \in \widehat{m}$. Mais ainda, vamos identificar a função $\alpha : \widehat{m} \to \mathbb{Z}_2$ com a sequência $\alpha(1)\alpha(2)\alpha(3)\ldots\alpha(m)$. Note que as álgebras $M_{p,q}(E)$ são do tipo $M_\alpha(E)$, onde α é a sequência $\alpha = \underbrace{00\cdots0}_{p}\underbrace{11\cdots1}_{q}$. Os elementos de $M_{p,q}(E)$ são matrizes em blocos do tipo

$$\begin{pmatrix} (E_0)_{p\times p} & (E_1)_{p\times q} \\ (E_1)_{q\times p} & (E_0)_{q\times q} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.5.10. Sejam $m = 4$ e $\alpha = 0011$. Então,

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} E_0 & E_0 & E_1 & E_1 \\ E_0 & E_0 & E_1 & E_1 \\ E_1 & E_1 & E_0 & E_0 \\ E_1 & E_1 & E_0 & E_0 \end{pmatrix}.$$

Assim, a base $\mathcal{B}$ é formado pelos seguintes elementos, separados pelas suas $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$-graduações:

$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$-grau	matriz elementar	α está em
$(0,0)$	$e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{44}$	$\mathcal{E}_0$
$(0,1)$		
$(1,0)$	e_{12}, e_{34}	$\mathcal{E}_0$
$(1,1)$	e_{23}, e_{41}	$\mathcal{E}_1$
$(2,0)$		
$(2,1)$	$e_{13}, e_{24}, e_{31}, e_{42}$	$\mathcal{E}_1$
$(3,0)$	e_{21}, e_{43}	$\mathcal{E}_0$
$(3,1)$	e_{14}, e_{32}	$\mathcal{E}_1$

Capítulo 3

Identidades Polinomiais Graduadas de Álgebras T-primas

Sejam $M_\alpha(E) \subset M_m(E)$ e $M_\beta(E) \subset M_n(E)$. O produto tensorial $M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$ pode ser visto como uma álgebra $\mathbb{Z}_{mn}$-graduada. Neste capítulo, iremos descrever um sistema de geradores para as identidades polinomiais graduadas de $M_\alpha(E)$ e para $M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$. Provaremos também que $M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$ é PI-equivalente como álgebra graduada a uma álgebra do tipo $M_\epsilon \subset M_{mn}(E)$. Este resultado fornece uma prova alternativa de umas das PI-equivalências do Teorema de Kemer, a saber $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E) \sim M_{pr+qs,ps+qr}(E)$. Por fim, classificaremos todas as álgebras graduadas do tipo $M_\alpha(E) \subset M_m(E)$ que não possuem identidades monomiais não triviais. Os resultados deste capítulo foram apresentados no artigo [14] por Di Vincenzo e Nardozza.

3.1 As subálgebras $M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$

Sejam $M_\alpha(E)$ e $M_\beta(E)$ subálgebras de $M_m(E)$ e $M_n(E)$, respectivamente. Nesta seção vamos construir o produto tensorial entre estas álgebras e estudar suas graduações.

Sejam $ae_{ij} \in \mathcal{B}_\alpha$ e $be_{uv} \in \mathcal{B}_\beta$ elementos da base de $M_\alpha(E)$ e $M_\beta(E)$, respectivamente. Temos que $ae_{ij} \otimes be_{uv}$ está na base de $M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$. Assim, podemos construir a seguinte $\mathbb{Z}_{mn} \times \mathbb{Z}_2$-graduação de $M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$: se $ae_{ij} \in \mathcal{B}_\alpha$ e $be_{uv} \in \mathcal{B}_\beta$, então

$$|ae_{ij} \otimes be_{uv}| := (\overline{n(j-i)+v-u}, \alpha(i)+\alpha(j)+\beta(u)+\beta(v)) \in \mathbb{Z}_{mn} \times \mathbb{Z}_2.$$

Note que a base $\mathcal{B} = \{ae_{ij} \otimes be_{uv} \mid ae_{ij} \in \mathcal{B}_\alpha, be_{uv} \in \mathcal{B}_\beta\}$ é uma base multiplicativa para $M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$. No decorrer deste trabalho vamos provar que a álgebra graduada

$M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ é PI-equivalente a $M_{pr+qs,ps+qr}(E)$, que é uma das afirmações do Teorema de Kemer.

Exemplo 3.1.1. Seja $\alpha = 01$ e $\beta = 00$. Então as álgebras $M_\alpha(E)$ e $M_\beta(E)$ possuem $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-graduações do tipo

$$M_\alpha(E) = \begin{pmatrix} E_0 & E_1 \\ E_1 & E_0 \end{pmatrix} \text{ e } M_\beta(E) = \begin{pmatrix} E_0 & E_0 \\ E_0 & E_0 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E) = \begin{pmatrix} E_0E_0 & E_0E_0 & E_1E_0 & E_1E_0 \\ E_0E_0 & E_0E_0 & E_1E_0 & E_1E_0 \\ E_1E_0 & E_1E_0 & E_0E_0 & E_0E_0 \\ E_1E_0 & E_1E_0 & E_0E_0 & E_0E_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 & E_0 & E_1 & E_1 \\ E_0 & E_0 & E_1 & E_1 \\ E_1 & E_1 & E_0 & E_0 \\ E_1 & E_1 & E_0 & E_0 \end{pmatrix}.$$

Logo, a lista de elementos da base multiplicativa para $M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$, com $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$-graduação é

$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$-grau	matrizes elementares	α está em	β está em
$(0,0)$	$e_{11} \otimes e_{11}, e_{11} \otimes e_{22}, e_{22} \otimes e_{11}, e_{22} \otimes e_{22}$	$\mathcal{E}_0$	$\mathcal{E}_0$
$(0,1)$	nenhuma		
$(1,0)$	$e_{11} \otimes e_{12}, e_{22} \otimes e_{12}$	$\mathcal{E}_0$	$\mathcal{E}_0$
$(1,1)$	$e_{12} \otimes e_{21}, e_{21} \otimes e_{21}$	$\mathcal{E}_1$	$\mathcal{E}_0$
$(2,0)$	nenhuma		
$(2,1)$	$e_{12} \otimes e_{11}, e_{21} \otimes e_{11}, e_{12} \otimes e_{22}, e_{21} \otimes e_{22}$	$\mathcal{E}_1$	$\mathcal{E}_0$
$(3,0)$	$e_{11} \otimes e_{21}, e_{22} \otimes e_{21}$	$\mathcal{E}_0$	$\mathcal{E}_0$
$(3,1)$	$e_{12} \otimes e_{12}, e_{21} \otimes e_{12}$	$\mathcal{E}_1$	$\mathcal{E}_0$

Note que a álgebra M_α é do tipo $M_{1,1}$, M_β do tipo $M_{2,0}$ e a álgebra resultante é isomorfa a uma álgebra $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$-graduada do tipo $M_{pq+rs,ps+qr}(E) = M_{2,2}(E)$.

Iremos agora estudar as identidades graduadas destas álgebras. Como assumimos que K possui característica zero, o T-ideal de uma K-álgebra A é gerado pelos seus polinômios multilineares. Portanto se $\mathcal{B}$ é base multiplicativa de A e f é multilinear, para verificar se f é identidade, devido a sua linearidade, basta verificar se ele pertence ao núcleo de algum homomorfismo $S : K\langle X|G\rangle \to A$, tal que $S(x_i) \in \mathcal{B}$, para qualquer i. Neste caso, chamamos S de **substituição standard** e denotamos $f_{|S}$ a restrição de f em S.

Note que se f é um monômio e S é uma substituição standard, então $f_{|S} = 0$ ou $cf_{|S} \in \mathcal{B}$, para algum $c \in K - \{0\}$. De fato, se $f_{|S} \neq 0$, então $f_{|S} = b_1 \cdots b_n$, onde $b_1, \ldots, b_n \in \mathcal{B}$ e como $\mathcal{B}$ é base multiplicativa, temos que $cf_{|S} \in \mathcal{B}$, para algum c.

Seja G um grupo finito ou enumerável e $\mathcal{M}$ o conjunto dos monômios multilineares da álgebra G-graduada $K\langle X|G\rangle$, ou seja, $\mathcal{M} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n^G$. Então:

Proposição 3.1.2. *Seja A uma álgebra G-graduada com base multiplicativa $\mathcal{B}$. Seja $\mathcal{N}$ um conjunto de identidades graduadas de A e denote por I o T_G-ideal gerado por $\mathcal{N}$. Suponha que para todo h, $h' \in \mathcal{M}\backslash T_G(A)$ exista uma substituição standard S e uma constante $c \in K - \{0\}$ tal que*

$$0 \neq h_{|S} = ch'_{|S} \textit{ se, e somente se, } h \equiv ch' \pmod{I}$$

então $T_G(A)$ é gerado por $\mathcal{N} \cup (\mathcal{M} \cap T_G(A))$.

Demonstração. Seja J o T_G-ideal gerado por $\mathcal{N} \cup (\mathcal{M} \cap T_G(A))$. É claro que $I \subset J \subset T_G(A)$. Vamos mostrar que $T_G(A) \subset J$.

Suponha que exista um polinômio multilinear $f = f(x_1, \ldots x_n) \in T_G(A)$ e que $f \notin J$. Podemos escrever

$$f \equiv \sum_{i=1}^{t} c_i f_i \qquad (\text{mod } J), f_i \in \mathcal{M} \text{ e } c_i \in K.$$

Tomemos o menor t com esta propriedade. Necessariamente $t \geq 2$, pois se $t = 1$, então $f = f_i \in \mathcal{M} \cap T_G(A)$ e $\mathcal{M} \cap T_G(A) \subset J$. Além disso, como $f_i \notin T_G(A)$ existe uma substituição standard tal que $f_{i|S} \neq 0$ e $f_{|S} = 0$. Logo,

$$c_1 f_{1|S} = -\sum_{i=2}^{t} c_i f_{i|S}.$$

Observe que, $f_{i|S}$ é produto de elementos da base multiplicativa $\mathcal{B}$, ou seja, $f_{i|S}$ resulta em um elemento da base $\mathcal{B}$ de A a menos de um coeficiente não nulo. Como $f_{|S}$ é a soma de elementos da base $\mathcal{B}$, existe $j \in \{2, \ldots, t\}$, digamos $j = 2$, tal que $f_{1|S} = cf_{2|S}$ para algum $c \in K - \{0\}$.

Finalmente,

$$f \equiv (c_1 c + c_2) f_2 + \sum_{i=3}^{t} c_i f_i \pmod{J}$$

o que contradiz a minimalidade de t. Assim, $f \in J$ e $T_G(A) \subset J$.

□

Em [35], Vasilovsky provou que para $A = M_m(K)$ com $\mathbb{Z}_m$-graduação o conjunto $\mathcal{N}$ é dado pelos polinômios

$$x_1 x_2 - x_2 x_1 \text{ com } |x_1| = |x_2| = 0$$

$$x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1 \text{ com } |x_1| = |x_3| = -|x_2|$$

e $\mathcal{M} \cap T_{\mathbb{Z}_m}(A) = \emptyset$. Um resultado similar ocorre para a álgebra $M_{p,q}(E) \otimes E$, veja **??** teorema 4.1.

3.2 Identidades polinomiais graduadas de $M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$

Nesta seção iremos descrever um conjunto de geradores para o ideal de todas as identidades $\mathbb{Z}_{mn} \times \mathbb{Z}_2$-graduadas das álgebras graduadas $M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$. No decorrer desta seção, considere $R = M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$ e denotaremos por $|\cdot|_{mn}$ o $\mathbb{Z}_{mn}$-grau do elemento homogêneo α de R, enquanto $|\cdot|$ denota o $\mathbb{Z}_{mn} \times \mathbb{Z}_2$-grau completo.

Observação 3.2.1. É fácil ver que $|ae_{ij} \otimes be_{uv}| = (0, 0)$ se, e somente se, $i = j$ e $u = v$. Como consequência, temos que $|ae_{ii} \otimes be_{uu}| = (0, 0)$ e $R^{(0,1)} = 0$, pois

$$\alpha(i) + \alpha(i) + \beta(u) + \beta(u) = 2\alpha(i) + 2\beta(u) = 0.$$

Em outras palavras, todo monômio em $K\langle X\rangle$ de grau $(0, 1)$ é uma identidade polinomial graduada de R.

Sejam $G = \mathbb{Z}_{mn} \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathcal{N}$ o conjunto de polinômios multilineares dado por:

$$x_1x_2 - x_2x_1, \text{ onde } |x_1| = |x_2| = (0, 0) \in G;$$

$$x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1, \text{ onde } |x_1| = |x_3| = -|x_2| = (t, 0) \in G;$$

$$x_1x_2x_3 + x_3x_2x_1, \text{ onde } |x_1| = |x_3| = -|x_2| = (t, 1) \in G.$$

Lema 3.2.2. $\mathcal{N} \subset T_G(R)$

Demonstração. Vamos demonstrar que os três polinômios acima de fato são identidades G-graduadas. Como os polinômios são multilineares, podemos trabalhar apenas com os elementos da base.

Sejam $w_h := a_he_{i_hj_h} \otimes b_he_{u_hv_h} \in \mathcal{B}$ para $h = 1, 2, 3$, elementos da base multiplicativa, e assuma que $|w_1|_{mn} = |w_3|_{mn} = -|w_2|_{mn}$. Temos que $|w_1w_2|_{mn} = |w_1|_{mn} + |w_2|_{mn} = 0$ e se $w_1w_2w_3 \neq 0$, então $w_1w_2 \neq 0$ e $|w_1w_2| = (0, 0)$, pois caso contrário $|w_1w_2| = (0, 1)$ e w_1w_2 seria identidade G-graduada. Observe que,

$$w_1w_2w_3 = a_1a_2a_3e_{i_1j_1}e_{i_2j_2}e_{i_3j_3} \otimes b_1b_2b_3e_{u_1v_1}e_{u_2v_2}e_{u_3v_3} \neq 0,$$

logo $j_1 = i_2$ e $v_1 = u_2$ e

$$w_1w_2 = a_1a_2e_{i_1j_2} \otimes b_1b_2e_{u_1v_2}.$$

Pela afirmação anterior, como $|w_1w_2| = (0,0)$, segue que $i_1 = j_2$ e $u_1 = v_2$. Por um argumento análogo, temos que $|x_2x_3| = (0,0)$ e

$$i_2 = j_1 = j_3; \quad i_1 = j_2 = i_3; \quad u_2 = v_1 = v_3; \quad u_1 = v_2 = u_3.$$

Assim,

$$w_1 = a_1e_{ij} \otimes b_1e_{uv}; w_2 = a_2e_{ji} \otimes b_2e_{vu}; w_3 = a_3e_{ij} \otimes b_3e_{uv},$$

para $1 \leq i,j \leq m$ e $1 \leq u,v \leq n$.

Logo, $w_1w_2w_3 = a_1a_2a_3e_{ij} \otimes b_1b_2b_3e_{uv}$ e $w_3w_2w_1 = a_3a_2a_1e_{ij} \otimes b_3b_2b_1e_{uv}$, com $a_h \in \mathcal{E}_{\alpha(i)+\alpha(j)}$ e $b_h \in \mathcal{E}_{\beta(u)+\beta(v)}$, para $h = 1,2,3$.

Finalmente, se $|w_1| = |w_3| = -|w_2| = (t,0)$, então $a_3, a_2, a_1, b_3, b_2, b_1 \in \mathcal{E}_0$ e

$$\begin{aligned} w_1w_2w_3 - w_3w_2w_1 &= a_1a_2a_3e_{ij} \otimes b_1b_2b_3e_{uv} - a_3a_2a_1e_{ij} \otimes b_3b_2b_1e_{uv} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Se $|w_1| = |w_3| = -|w_2| = (t,1)$, então a_3,a_2,$a_1 \in \mathcal{E}_0$ e b_3, b_2, $b_1 \in \mathcal{E}_1$ ou a_3, a_2, $a_1 \in \mathcal{E}_1$ e b_3, b_2, $b_1 \in \mathcal{E}_0$ e, de qualquer modo,

$$\begin{aligned} w_1w_2w_3 + w_3w_2w_1 &= a_1a_2a_3e_{ij} \otimes b_1b_2b_3e_{uv} + a_3a_2a_1e_{ij} \otimes b_3b_2b_1e_{uv} \\ &= a_1a_2a_3e_{ij} \otimes b_1b_2b_3e_{uv} + (-1)^{(13)}a_1a_2a_3e_{ij} \otimes b_1b_2b_3e_{uv} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Se $|w_1| = |w_2| = (0,0)$, então a_1, a_2, b_1, $b_2 \in \mathcal{E}_0$ e

$$\begin{aligned} w_1w_2 - w_2w_1 &= a_1a_2e_{ii} \otimes b_1b_2e_{uu} - a_2a_1e_{ii} \otimes b_2b_1e_{uu} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, os polinômios de $\mathcal{N}$ são identidades G-graduadas de R e portanto $\mathcal{N} \subset T_G(R)$.

$\square$

Lembremos que I denota o T_G-ideal de $K\langle X\rangle$ gerado por $\mathcal{N}$ e vamos denotar por $\delta(w)$ o $\mathbb{Z}_2$-grau de um elemento homogêneo w da álgebra G-graduada R.

Lema 3.2.3. *Sejam f, f' dois monômios multilineares no mesmo conjunto de variáveis e seja S uma substituição standard de R tal que $f'_{|S} = cf_{|S} \neq 0$ para algum $c \in K$. Então $f' \equiv cf \pmod I$.*

Demonstração. Seja $f = x_1x_2\cdots x_d$ e $f^{'} = f_\sigma = x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(d)}$ para algum $\sigma \in S_d$. Se $d = 1$, o resultado segue diretamente. Vamos assumir $d \geq 2$ e fazer uma indução sobre d. Primeiro, vamos provar que existe $c^{'} \in K$ tal que $f^{'} \equiv c^{'}x_1f^{''}(x_2,\ldots,x_d)$ (mod I). Para $1 \leq a \leq b \leq d$, definimos o submonômio $f^{[a,b]} = x_a \ldots x_b$.

Seja $S(x_h) = w_h = a_he_{i_hj_h} \otimes b_he_{u_hv_h} \in \mathcal{B}$, para $h = 1, 2, \ldots, d$. Como $f^{'}_{|S} = cf_{|S} \neq 0$, temos que

$$w_1w_2\cdots w_d = cw_{\sigma(1)}\cdots w_{\sigma(d)}$$

$$a_1\cdots a_he_{i_1j_d} \otimes b_1\cdots b_he_{u_1v_d} = ca_{\sigma(1)}\cdots a_{\sigma(d)}e_{i_{\sigma(1)}j_{\sigma(d)}} \otimes b_{\sigma(1)}\cdots b_{\sigma(d)}e_{u_{\sigma(1)}v_{\sigma(d)}}$$

de onde segue que $u_1 = u_{\sigma(1)}$ e $i_1 = i_{\sigma(1)}$. Assuma que $\sigma^{-1}(1) > 1$ e seja

$$t := \min\{j \leq d \mid \sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(1)\}.$$

Assim, $t > 1$ e mais ainda $\sigma^{-1}(t) < \sigma^{-1}(1) \leq \sigma^{-1}(t-1)$. Definimos,

$$l := \sigma^{-1}(t);$$

$$h := \sigma^{-1}(1);$$

$$k := \sigma^{-1}(t-1).$$

Note que o monômio $f^{'}$ pode ser reescrito da forma

$$f^{'} = f_\sigma^{[1,l-1]}f_\sigma^{[l,h-1]}f_\sigma^{[h,k]}f_\sigma^{[k+1,d]}.$$

Temos duas possibilidades para l: $l = 1$ ou $l > 1$. No primeiro caso, $l = 1$, segue que

$$|f_\sigma^{[1,h-1]}|_{mn} = |w_{\sigma(1)}\cdots w_{\sigma(h-1)}|_{mn} = \overline{n(j_{\sigma(h-1)} - i_{\sigma(1)}) + v_{\sigma(h-1)} + u_{\sigma(1)}}$$

e

$$|f_\sigma^{[h,k]}|_{mn} = |w_{\sigma(h)}\cdots w_{\sigma(k)}|_{mn} = \overline{n(j_{\sigma(k)} - i_{\sigma(h)}) + v_{\sigma(k)} + u_{\sigma(h)}}.$$

Observe que para $f \neq 0$, temos que

$$j_{\sigma(h-1)} = i_{\sigma(h)} \text{ e } v_{\sigma(h-1)} = u_{\sigma(h)}.$$

Assim,

$$j_{\sigma(h-1)} - i_{\sigma(1)} = i_{\sigma(h)} - i_1 = i_1 - i_1 = 0$$

$$v_{\sigma(h-1)} - u_{\sigma(1)} = u_{\sigma(h)} - u_1 = u_1 - u_1 = 0$$

$$j_{\sigma(k)} - i_{\sigma(k)} = j_{t-1} - i_1 = i_t - i_1 = i_{\sigma(l)} - i_1 = i_1 - i_1 = 0$$

$$v_{\sigma(k)} - u_{\sigma(h)} = v_{t-1} - u_1 = u_t - u_1 = u_{\sigma(l)} - u_1 = u_1 - u_1 = 0.$$

Portanto,

$$|f_\sigma^{[1,h-1]}|_{mn} = |f_\sigma^{[h,k]}|_{mn} = 0$$

e claramente $\delta(f_\sigma^{[1,h-1]}) = \delta(f_\sigma^{[h,k]}) = 0$, em que δ denota o $\mathbb{Z}_2$-grau, caso contrário os termos teriam G-grau $(0,1)$.

Como I contém o polinômio $x_1x_2 - x_2x_1$, para $|x_1| = |x_2| = (0,0)$, então

$$f^{'} \equiv f_\sigma^{[h,k]} f_\sigma^{[1,h-1]} f_\sigma^{[k+1,d]} \pmod{I}$$

e assim o monômio começa por x_1.

Tomando o segundo caso, $l > 1$, então por considerações semelhantes

$$j_{\sigma(l-1)} - i_{\sigma(1)} = i_{\sigma(l)} - i_1 = i_t - i_1$$

$$j_{\sigma(h-1)} - i_{\sigma(l)} = j_{\sigma(h)} - i_t = i_1 - i_t$$

$$v_{\sigma(l-1)} - u_{\sigma(1)} = u_{\sigma(l)} - u_1 = u_t - u_1$$

$$v_{\sigma(h-1)} - u_{\sigma(l)} = u_{\sigma(h)} - u_{\sigma(l)} = u_1 - u_t,$$

de onde segue que $|f_\sigma^{[1,l-1]}|_{mn} = -|f_\sigma^{[l,h-1]}|_{mn}$. Analogamente, $|f_\sigma^{[1,l-1]}|_{mn} = |f_\sigma^{[h,k]}|_{mn}$. Logo,

$$|f_\sigma^{[1,l-1]}|_{mn} = |f_\sigma^{[h,k]}|_{mn} = -|f_\sigma^{[l,h-1]}|_{mn}$$

e

$$\delta(f_\sigma^{[1,l-1]}) = \delta(f_\sigma^{[l,h-1]}) = \delta(f_\sigma^{[l,k]}),$$

caso contrário o produto entre duas destas componentes teria G-grau $(0,1)$.

Como $\mathcal{N} \subset I$, existe $c^{'} \in \{-1,1\}$ tal que

$$f^{'} \equiv c^{'} f_\sigma^{[h,k]} f_\sigma^{[l,h-1]} f_\sigma^{[1,l-1]} f_\sigma^{[k+1,d]} \pmod{I},$$

pois, $x_1x_2x_3 \pm x_3x_2x_1 \in \mathcal{N}$, com $|x_1| = |x_3| = -|x_2|$. Assim, $f^{'}$ também começa por x_1.

Em ambos os casos obtemos $c^{'}x_1f^{''}(x_2,\ldots,x_d) \equiv f^{'} \pmod{I}$ e então

$$c^{'}w_1f^{''}(w_2,\ldots,w_d) = f^{'}_{|S} = cf_{|S} = cw_1w_2\cdots w_d \neq 0.$$

De fato, pelo argumento de indução como $f^{''}$ tem comprimento $d-1$ a afirmação é válida para ele e podemos reescrever $c^{'}f^{''}(w_2,\ldots,w_d) = cw_2\cdots w_d \neq 0$, logo $f^{''}(x_2,\ldots,x_d) \equiv c^{''}x_2\cdots x_d \pmod{I}$. Portanto,

$$f^{'} \equiv c^{'}x_1f''(x_2,\ldots x_d) \equiv cx_1x_2\cdots x_d \pmod{I}.$$

□

Dos lemas anteriores e da Proposição 3.1.2 segue diretamente que:

Teorema 3.2.4. *$T_G(M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E))$ é gerado por $\mathcal{N} \cup (\mathcal{M} \cap T_G(R))$, ou seja, pelos polinômios*

$$x_1x_2 - x_2x_1, \ \textit{onde } |x_1| = |x_2| = (0,0)$$

$$x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1, \ \textit{onde } |x_1| = |x_3| = -|x_2| = (t,0), t \in \mathbb{Z}_{mn}$$

$$x_1x_2x_3 + x_3x_2x_1, \ \textit{onde } |x_1| = |x_3| = -|x_2| = (t,1), t \in \mathbb{Z}_{mn}$$

juntamente com todas as identidades monomiais multilineares que são identidades graduadas para $M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$.

Na verdade, o produto tensorial de $M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$ é PI-equivalente, como uma álgebra $\mathbb{Z}_{mn} \times \mathbb{Z}_2$-graduada, a uma subálgebra M_ϵ de $M_{mn}(E)$.

Observação 3.2.5. Seja $m, n \in \mathbb{N}$. Para todo $t \in \widehat{mn}$ existe um único par $(i,u) \in \widehat{m} \times \widehat{n}$, tal que $t = n(i-1) + u$. A garantia da existência de i e u vêm do algoritmo da divisão.

Agora, seja $M_\alpha(E) \subset M_m(E)$ e $M_\beta(E) \subset M_n(E)$. Para todo $t \in \widehat{mn}$, se $t = n(i-1) + u$ com $(i,u) \in \widehat{m} \times \widehat{n}$, defina $\epsilon : \widehat{m} \times \widehat{n} \to \mathbb{Z}_2$, em que $\epsilon := \alpha(i) + \beta(u)$ e considere a subálgebra $M_\epsilon(E)$.

Exemplo 3.2.6. Seja $\alpha = 01$ e $\beta = 00$. No Exemplo 3.1.1 vimos que a álgebra $M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$ possui $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$-graduação com $\mathbb{Z}_2$-grau do tipo

$$M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E) = \begin{pmatrix} E_0 & E_0 & E_1 & E_1 \\ E_0 & E_0 & E_1 & E_1 \\ E_1 & E_1 & E_0 & E_0 \\ E_1 & E_1 & E_0 & E_0 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, $m = n = 2$, $t \in \widehat{4}$ e $1 \leq i, u \leq 2$. Temos os seguintes pares ordenados (i,u)

t	$t = n(i-1) + u$	(i,u)
1	$1 = 2(1-1) + 1$	$(1,1)$
2	$2 = 2(1-1) + 2$	$(1,2)$
3	$3 = 2(2-1) + 1$	$(2,1)$
4	$4 = 2(2-1) + 2$	$(2,2)$

Assim, temos que

$$\epsilon(1) = \alpha(1) + \beta(1) = 0$$

$$\epsilon(2) = \alpha(1) + \beta(2) = 0$$
$$\epsilon(3) = \alpha(2) + \beta(1) = 1$$
$$\epsilon(4) = \alpha(2) + \beta(2) = 1$$

e $\epsilon = 0011$. Portanto, a álgebra M_ϵ tem $\mathbb{Z}_2$-grau coincidente com a álgebra $M_\alpha(E)\otimes M_\beta(E)$.

$$M_\epsilon(E) = \begin{pmatrix} E_0 & E_0 & E_1 & E_1 \\ E_0 & E_0 & E_1 & E_1 \\ E_1 & E_1 & E_0 & E_0 \\ E_1 & E_1 & E_0 & E_0 \end{pmatrix}.$$

Teorema 3.2.7. *$M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$ e $M_\epsilon(E)$ são PI-equivalentes como álgebras graduadas. Em particular são PI-equivalentes no sentido ordinário.*

Demonstração. No estudo de identidades G-graduadas de $M_\epsilon(E)$ podemos utilizar argumentos semelhantes ao caso $M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$. Para isto tomamos $M_\epsilon(E) = M_{\alpha'} \otimes M_{\beta'}$, com $M_{\alpha'}(E) \subset M_{mn}(E)$ e $M_{\beta'}(E) \subset M_1$ e $\beta^{'}(1) = 0$. Assim, pelo Teorema 3.2.4, $T_G(M_\epsilon(E))$ é gerado por $\mathcal{N} \cup (\mathcal{M} \cap T_G(M_\epsilon(E)))$. Vamos provar que se um polinômio f multilinear não é identidade de $M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$, também não será identidade de $M_\epsilon(E)$ e o contrário.

Seja $f = x_1 \cdots x_d \in \mathcal{M}$. Se $f \notin T_G(M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E))$, então existem elementos $w_1, \dots, w_d$ pertencentes à base de $M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$ tais que $w_1 \cdots w_d \neq 0$ e $|x_i| = |w_i|$, para todo $i = 1, \dots, d$.

Digamos que $w_l = a_l e_{i_l j_l} \otimes b_l e_{u_l v_l}$ e seja $h_l := n(i_l - 1) + u_l$, $k_l := n(j_l - 1) + v_l$ e $z_l := e_{h_l k_l} \in M_{mn}(K)$. Como $w_1 \cdots w_d \neq 0$, temos que $j_l = i_{l+1}$ e $v_l = u_{l+1}$, para $l = 1, \dots, d-1$. Logo,

$$k_l = n(i_{l+1} - 1) + u_{l+1} = h_{l+1}$$

e

$$z_1 \cdots z_d = e_{h_1 k_d} \neq 0.$$

Mais ainda, podemos encontrar $c_1, \dots, c_d \in E$, tais que $c_l \in E_{\epsilon(k_l)+\epsilon(h_l)}$ com $c_1 \cdots c_d \neq 0$. Como z_l pertence à base de $M_\epsilon(E)$, temos

$$\begin{aligned} |z_l| &= (k_l - h_l, \epsilon(k_l) + \epsilon(h_l)) \\ &= (n(j_l - 1) + v_l - (n(i_l - 1) + u_l), \alpha(i_l) + \beta(u_l) + \alpha(j_l) + \beta(v_l)) \\ &= (n(j_l - i_l) + v_l - u_l, \alpha(i_l) + \beta(u_l) + \alpha(j_l) + \beta(v_l)) \\ &= |w_l| = |x_l|. \end{aligned}$$

Assim, como temos uma substituição admissível em $M_\epsilon(E)$ que não anula f, segue que $f \notin T_G(M_\epsilon(E))$.

Por outro lado, se $f = x_1 \cdots x_d \notin T_G(M_\epsilon(E))$, então existem $z_1, \ldots, z_d$ elementos da base de $M_\epsilon(E)$, tais que $|z_i| = |x_i|$ e $z_1 \cdots z_d \neq 0$.

Tome $z_l = c_l e_{h_l k_l}$, onde h_l e k_l são como no caso anterior, com $1 \leq i_l, j_l \leq m$ e $1 \leq u_l, v_l \leq n$. Seja $w_l = a_l e_{i_l j_l} \otimes b_l e_{u_l v_l} \in M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$, onde $a_l \in E_{\alpha(i_l)+\alpha(j_l)}$ e $b_l \in E_{\beta(u_l)+\beta(v_l)}$ são elementos da álgebra de Grassmann tais que $a_1 \cdots a_d b_1 \cdots b_d \neq 0$. Então, por um raciocínio análogo, $|w_l| = |x_l|$ e $w_1 \cdots w_d \neq 0$. Com isto, $f \notin T_G(M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E))$.

Em outras palavras $T_G(M_\epsilon(E)) = T_G(M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E))$ e pelo Lema 2.3.5 segue que $M_\epsilon(E)$ é PI-equivalente a $M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$.

□

Com o resultado anterior podemos provar de forma fácil a terceira afirmação do famoso teorema estrutural de Kemer. Primeiramente, para melhor avaliar o comportamento dos objetos do tipo $M_{pr+qs,ps+qr}(E)$, tomemos o seguinte exemplo.

Exemplo 3.2.8. Sejam $M_{1,1}(E) \otimes M_{1,2}(E)$, $M_{1\cdot 1+1\cdot 2, 1\cdot 2+1\cdot 1}(E) = M_{3,3}(E)$ e $M_\epsilon(E) \subset M_6(E)$. As álgebras $M_{1,1}(E)$ e $M_{1,2}(E)$ podem ser reescritas na forma $M_\alpha(E)$ e $M_\beta(E)$, respectivamente, onde $\alpha = 01$ e $\beta = 011$. Para construir ϵ, observe que $m = 2$, $n = 3$, $t \in \widehat{6}$, $1 \leq i \leq 2$ e $1 \leq u \leq 3$. Temos os pares (i, u) associados a t e o respectivo $\epsilon(t)$ dado por:

t	$t = n(i-1) + u$	(i, u)	$\epsilon(t)$
1	$1 = 3(1-1) + 1$	$(1, 1)$	0
2	$2 = 3(1-1) + 2$	$(1, 2)$	1
3	$3 = 3(1-1) + 3$	$(1, 3)$	1
4	$4 = 3(2-1) + 1$	$(2, 1)$	1
5	$5 = 3(2-1) + 2$	$(2, 2)$	0
6	$6 = 3(2-1) + 3$	$(2, 3)$	0

Assim, $\epsilon = 011100$ e os $\mathbb{Z}_2$-grau das matrizes $M_\alpha(E) \otimes M_\beta(E)$ e $M_\epsilon(E)$ coincidem e são dados por

$$M_\epsilon(E) = M_{1,1}(E) \otimes M_{1,2}(E) = \begin{pmatrix} E_0 & E_1 & E_1 & E_1 & E_0 & E_0 \\ E_1 & E_0 & E_0 & E_0 & E_1 & E_1 \\ E_1 & E_0 & E_0 & E_0 & E_1 & E_1 \\ E_1 & E_0 & E_0 & E_0 & E_1 & E_1 \\ E_0 & E_1 & E_1 & E_1 & E_0 & E_0 \\ E_0 & E_1 & E_1 & E_1 & E_0 & E_0 \end{pmatrix}.$$

Observe que $M_{1,1}(E) \otimes M_{1,2}(E)$ possui 18 elementos com $\mathbb{Z}_2$-grau nulo. Por outro lado, os $\mathbb{Z}_2$-grau das componentes de $M_{3,3}(E)$ tem estrutura do tipo

$$M_{3,3} = \begin{pmatrix} E_0 & E_0 & E_0 & E_1 & E_1 & E_1 \\ E_0 & E_0 & E_0 & E_1 & E_1 & E_1 \\ E_0 & E_0 & E_0 & E_1 & E_1 & E_1 \\ E_1 & E_1 & E_1 & E_0 & E_0 & E_0 \\ E_1 & E_1 & E_1 & E_0 & E_0 & E_0 \\ E_1 & E_1 & E_1 & E_0 & E_0 & E_0 \end{pmatrix}$$

e $M_{3,3}(E)$ também possui 18 elementos com $\mathbb{Z}_2$-grau nulo. Assim, é possível criar um isomorfismo G-graduado entre $M_\epsilon(E)$ e $M_{3,3}(E)$ de forma trivial, reordenando os índices para que coincidam os graus. Com isto, estas álgebras são isomorfas, em particular são PI-equivalentes.

Corolário 3.2.9. *$M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ e $M_{pr+qs,ps+qr}(E)$ são PI-equivalentes.*

Demonstração. Seja $m = p + q$, $n = r + s$ e $G = \mathbb{Z}_{mn} \times \mathbb{Z}_2$. A álgebra $M_{p,q}(E)$ é a álgebra $M_\alpha(E)$, onde $\alpha = \underbrace{0\cdots0}_{p}\underbrace{1\cdots1}_{q}$. Da mesma forma $M_{r,s}(E) = M_\beta(E)$, para $\beta = \underbrace{0\cdots0}_{r}\underbrace{1\cdots1}_{s}$. Definimos então $M_\epsilon(E) \subset M_{mn}(E)$, onde

$$\epsilon = \underbrace{\underbrace{0\cdots0}_{r}\underbrace{1\cdots1}_{s}}_{p \text{ vezes}}\underbrace{\underbrace{1\cdots1}_{r}\underbrace{0\cdots0}_{s}}_{q \text{ vezes}}.$$

Pelo Teorema 3.2.7,

$$M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E) \sim M_\epsilon(E).$$

Por outro lado, $M_\epsilon(E)$ possui o mesmo número de entradas com elementos em E_0 que $M_{pr+qs,ps+qr}(E)$. Assim, tomando um isomorfismo canônico de rearranjo, temos que

$$M_\epsilon(E) \cong M_{pr+qs,ps+qr}(E).$$

Logo,

$$T(M_{pr+qs,ps+qr}(E)) = T(M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)).$$

$\square$

3.3 Identidades monômiais multilineares de $M_\alpha(E)$

Nesta seção vamos estudar as álgebras do tipo $M_\alpha(E) \subset M_m(E)$. Dos Teoremas 3.2.4 e 3.2.7, seus $T_{\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_2}$-ideais são gerados pelo conjunto $\mathcal{N}$ junto com alguns monômios multilineares graduados. Vasilovsky, também em [35], mostrou que $M_m(K)$ não possui identidades monomiais. No decorrer desta dissertação demonstraremos resultados similar para $M_m(E)$.

De modo geral as álgebras $M_\alpha(E)$, sempre possuem identidades monomiais multilineares: a indeterminada $x \in X$ é identidade monomial se, e somente se, a componente homogênea $(M_\alpha(E))^{|x|}$ de grau $|x| \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$ é nula. Por exemplo, se $|x| = (0,1)$, então $x \in T_{\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_2}(M_\alpha(E))$. Como as identidades deste tipo são óbvias desejamos isolá-las.

Definição 3.3.1. Sejam $\mathcal{I}_0 = \{x \in X \mid (M_\alpha(E))^{|x|} = 0\}$, I_0 o $T_{\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_2}$-ideal gerado por $\mathcal{I}_0$ e $\mathcal{M}_0 := \mathcal{M} \cap I_0$. Vamos chamar os elementos de $\mathcal{M}_0$ de identidades monomiais triviais.

É claro que estamos interessados nas identidades monomiais não triviais. Para um α genérico, existem, possivelmente, muitas delas. Na verdade uma pergunta mais interessante é: quando as identidades monomiais de $M_\alpha(E)$ são todas triviais?

Nesta seção, listaremos três classes de álgebras que não possuem identidades monomiais não trivias. Para simplificar a notação nas demonstrações vamos observar apenas as álgebras do tipo $M_\alpha(E)$, pois se E é a álgebra de Grassmann de um espaço vetorial de dimensão infinita, as álgebras $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$-graduadas $M_\alpha(E) \subset M_m(E)$ e $(M_m(K), l \times \alpha)$, onde $|e_{ij}| = (\overline{j-i}, \alpha(i) + \alpha(j))$, possuem exatamente as mesmas identidades monomiais $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$-graduadas. De fato, se $x_1 \cdots x_d$ é uma identidade monomial graduada satisfeita por $M_\alpha(E)$ para $v_1, \ldots, v_d \in \mathcal{E}$, sendo o $\mathbb{Z}_2$-grau de v_i coerente com x_i, então

$$v_1 e_{i_1j_1} v_2 e_{i_2j_2} \cdots v_d e_{i_dj_d} = 0 \Leftrightarrow e_{i_1j_1} e_{i_2j_2} \cdots e_{i_dj_d} = 0$$

e portanto $x_1 \cdots x_d$ também é uma identidade graduada de $M_m(K)$ e assim basta olhar para as identidades das álgebras do tipo $M_\alpha(E)$.

Proposição 3.3.2. *Para todo $m \geq 1$ a álgebra $M_{m,0}(E) := M_\omega(E) \subset M_m(E)$ não possui identidade monomial não trivial.*

Demonstração. Primeiramente, note que $M_{m,0}(E) = M_m(E_0)$. Seja $A = (M_m(K), l \times \omega)$ e $a = e_{12} + e_{23} + \ldots + e_{n1}$. Note que todos os elementos que compõem a tem $\mathbb{Z}_2$-grau nulo. Temos que $\delta(a) = \overline{0}$, $A^{(\overline{1},\overline{1})} = 0$ e $a \in A^{(\overline{1},\overline{0})}$. Mais ainda, $a^t \in A^{(\overline{t},\overline{0})}$ e $A^{(\overline{t},\overline{1})} = 0$, onde a^t denota o elemento a elevado a t. De fato,

$$\delta(a^t) = \underbrace{\delta(a) + \ldots + \delta(a)}_{t \text{ vezes}} = \overline{t}, \text{ para } t \in \mathbb{N}.$$

Como a^t é inversível, $\det a^t \neq 0$, toda componente homogênea não trivial possui algum elemento invertível e, portanto, $M_{m,0}(E)$ não possui identidade monomial não trivial. De fato, seja $x_1x_2\dots x_m$, com $|x_t| = (\overline{i_t}, \overline{0})$, uma identidade monomial não trivial de $M_{m,0}(E)$. Tomando a substituição admissível $a^{i_1}a^{i_2}\cdots a^{i_m}$, temos que

$$a^{i_1}a^{i_2}\cdots a^{i_m} = 0 \Leftrightarrow (a^{i_1}a^{i_2}\cdots a^{i_m})^{-1}(a^{i_1}a^{i_2}\cdots a^{i_m}) = 0$$

que é um absurdo. □

Antes de enunciarmos a próxima proposição, vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 3.3.3. Seja $M_\pi(E) \subset M_m(E)$, onde $\pi = 0101$. Temos que $M_\pi(E)$ possui a seguinte estrutura para os seus $\mathbb{Z}_2$-graus

$$M_\pi(E) = \begin{pmatrix} E_0 & E_1 & E_0 & E_1 \\ E_1 & E_0 & E_1 & E_0 \\ E_0 & E_1 & E_0 & E_1 \\ E_1 & E_0 & E_1 & E_0 \end{pmatrix}.$$

Note que, para qualquer $t \in \widehat{4}$, temos $(M_\pi(E))^{(\overline{t},\overline{0})} = 0$ ou $(M_\pi(E))^{(\overline{t},\overline{1})} = 0$.

Proposição 3.3.4. *Seja $m \equiv 0 \pmod 2$ e seja $\pi = 0101\dots01$. Então $M_\pi(E) \subset M_m(E)$ não possui identidade monomial não trivial.*

Demonstração. Note que $\delta(a_{i,i+1}) = \overline{1}$. Logo, todo elemento que compõe a tem $\mathbb{Z}_2$-grau nulo. Assim, $a^t \in A^{(\overline{t},\overline{t})}$ e $A^{(\overline{t},\overline{t+1})} = 0$, onde $A = M_\pi(E)$, para todo $t \in \mathbb{N}$. Pelos mesmos argumentos da demonstração anterior, temos que a^t é inversível e $M_\pi(E)$ não possui identidade monomial não trivial.

□

Proposição 3.3.5. *Sejam $0 < m \equiv 0 \pmod 4$ e*

$$\rho_1 = \underbrace{0110}\underbrace{0110}\dots\underbrace{0110}\ (m/4 \textit{ blocos })$$
$$\rho_2 = \underbrace{0011}\underbrace{0011}\dots\underbrace{0011}\ (m/4 \textit{ blocos }).$$

Então as álgebras $M_{\rho_1}(E), M_{\rho_2}(E) \subset M_m(E)$ não possuem identidades monomiais não triviais.

Demonstração. Seja $A = (M_m(K), l \times \rho_1)$ e suponha que A possui algumas identidades monomiais não triviais. Entre essas identidades, seja $f = x_1\cdots x_t = x_1f'x_t$ uma com comprimento mínimo t, $t \geq 2$, e defina $(\overline{h_i}, \epsilon_i) := |x_i|$.

Para simplificar a notação, vamos escrever $a \equiv b$ para denotar $a \equiv b \pmod 4$ e $(a, \delta) \equiv (b, \delta)$ para denotar $(\overline{a}, \delta) = (\overline{b}, \delta)$, com $a \equiv b \pmod 4$.

Se $e_{ij} \in \mathcal{B} \cap A^{(\overline{k},\delta)}$, então $k \equiv j-1$, ou seja, $j \equiv k+i$ e $\rho_1(i)+\rho_1(j)=\delta$. Seja $a = e_{12}+e_{23}+\ldots+e_{m,1}$. Vamos avaliar os índices i e j dentro das possibilidades de congruência $\mod 4$.

Se $k \equiv 2$, temos que $j \equiv i+2$ e $\rho_1(j) \neq \rho_1(i)$, pois um número e o que está duas posições a sua frente, dentro da congruência $\mod 4$, possuem imagens distintas. Assim, $A^{(\overline{k},\overline{0})}=0$ e $a^k \in A^{(\overline{k},\overline{1})}$.

Se $k \equiv 2$, temos que $j \equiv i$, logo $\rho_1(j)=\rho_1(i)$. Assim, $A^{(\overline{k},\overline{1})}=0$ e $a^k \in A^{(\overline{k},\overline{0})}$.

Assim, h_1 e h_t não podem ser congruentes a 0 ou 2, pois teríamos componentes triviais ou elementos invertíveis entre as substituições admissíveis, o que iria contrariar a minimalidade de t.

Agora, observe que, se $k \equiv 1$, temos que $j \equiv i+1$. Caso i seja par, j será ímpar, para manter a congruência e, mais ainda, $\rho_1(i)=\rho_1(i_1)=\rho_1(j)$. Logo, $\delta(e_{ij})=0$. Por outro lado, se i for ímpar, j será par e $\delta(e_{ij})=1$. O caso $k \equiv 3$ segue de forma análoga. Assim obtemos a seguinte tabela

k	δ	i	j
$k \equiv 1$	0	par	ímpar
$k \equiv 1$	1	ímpar	par
$k \equiv 3$	0	ímpar	par
$k \equiv 3$	1	par	ímpar

Note que as matrizes $e_{1,k+1}$ e $e_{m,k}$ pertencem a diferentes componentes homogêneas, a primeira de grau $(\overline{k},\rho_1(k+1))$ e a segunda de grau $(\overline{k},\rho_1(k))$, pois $\rho_1(1)=\rho_1(m)=\overline{0}$. Mais ainda, o elemento a^2 induz, por conjugação, um automorfismo graduado ϕ de A. Com abuso de notação vamos denotar por $\phi(e_{ij})=e_{\phi(i)\phi(j)}$, onde ϕ satisfaz uma permutação tal que $\phi^{-1}=(135\ldots m-1)(246\ldots m) \in S_m$, uma vez que $a^2=e_{13}+e_{24}+\ldots+e_{m,2}$ e $e_{ij}a^2=e_{i,j+2}$.

Se $k \equiv 1,3 \pmod 4$, então as $\frac{m}{2}$ matrizes que geram $A^{(\overline{k},\delta)}$ são todas conjugadas a $e_{1,k+1}$ ou $e_{m,k}$, pelo automorfismo anterior, de acordo com o $\mathbb{Z}_2$-grau. Como x_1f' não pode ser uma identidade devido a minimalidade de t, existe uma substituição standard S' tal que $(x_1f')_{|S}=e_{ij}$, onde $|e_{ij}|=|x_1f'|$. Finalmente, defina $S(x_l)=e_{i_lj_l}$.

Agora, note que se $|x_1f'|=(1,0)$ ou $(3,1)$, então j é impar e $|x_t| \equiv (1,1)$ ou $(3,0)$, caso contrário f é trivial. Similarmente, se $|x_1f'|=(1,1)$ ou $(3,0)$, então j é par e $|x_t| \equiv (1,0)$ ou $(3,1)$. Em todos os casos, existe $e_{ju} \in A^{(\overline{h_t},\epsilon_t)}$, e isto gera uma substituição standard S' tal que $f_{|S'}=e_{iu} \neq 0$, logo f não é identidade.

Tomemos agora os casos onde $|x_1f'| \equiv (2,1)$ ou $(0,0)$. Nestes casos, $t>2$, $f'_{|S}=e_{j_1j}$ e $|f'|=(\overline{h},\epsilon)$ com $h \equiv 1,3$, caso contrário f' seria trivial ou teria elemento invertível na sua componente. Como $f'x_t$ não pode ser identidade, existe uma substituição standard tal que $0 \neq (f'x_t)_{|S^*}=e_{pq}$. Claramente, para algum $r \in \widehat{m}$, $f'_{|S^*}=e_{pr}$ pertence a componente de gau $(\overline{h},\epsilon)$. Como $h \equiv 1,3$, existe um automorfismo G-graduado θ

de A tal que $\theta(e_{j_1j}) = e_{pr}$. Agora, tomemos a substituição standard S'' dada por $S''(x_l) = \theta(e_{i_lj_l})$ para $l = 1, \ldots, t-1$ e $S''(x_t) = e_rq$. Claramente, $f_{|S''} = e_{\theta(i_1)q}$ e f não é identidade.

Finalmente, note que as álgebras $M_{\rho_1}(E)$ e $M_{\rho_2}(E)$ são isomorfas como álgebras $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$-graduadas. Para tal tome $\theta = (12\ldots m) \in S_m$ e a função

$$t : M_{\rho_2}(E) \to M_{\rho_1}(E)$$
$$ae_{ij} \to ae_{\theta(i)\theta(j)}$$

que é bijetiva e preserva graduação.

□

Na verdade, as álgebras das Proposições 3.3.2, 3.3.4 e 3.3.5 são as únicas álgebras sem identidades monomiais não triviais. Mais precisamente:

Teorema 3.3.6. *Seja $m \geq 1$ e suponha que $M_\alpha(E) \subset M_m(E)$ não possui identidade monomial não trivial. Então*

i. $M_\alpha(E) = M_{m,0}(E)$ *ou*

ii. $M_\alpha(E) = M_\pi(E)$ *e* $m \equiv 0 \pmod 2$ *ou*

iii. $M_\alpha(E) \in \{M_{\rho_1}(E), M_{\rho_2}(E)\}$ *e* $m \equiv 0 \pmod 4$.

Demonstração. Seja $A := M_\alpha(E)$ e suponha que A não possui identidade monomial não trivial. Assuma que $\alpha(1) = 0 \in \mathbb{Z}_2$, pois α e $(\alpha+1)$ induzem a mesma graduação e assim não existe perda de generalidade. Se $\alpha = \omega$, onde ω denota a função nula, então $A = M_{m,0}(E) = M_m(E_0)$ e o teorema é verdadeiro de forma trivial. Suponha que $\alpha \neq \omega$ e considere o subespaço de grau $(1,1)$. Este espaço não é trivial, pois $\alpha \neq \omega$ e com isso existe algum i com imagem 1 e, portanto, algum elemento do tipo $a_{i-1,i}$ terá grau $(1,1)$. Existem então duas possibilidades: $A^{(1,0)} \neq 0$ ou $A^{(1,0)} = 0$.

Agora, note que se $i, j \in \widehat{m}$, então $e_{ii}Ae_{jj} \subset A^{(\overline{j-1}, \alpha(i)+\alpha(J))}$. Em particular,

$$A_1 := A^{(1,0)} \oplus A^{(1,1)} = e_{11}Ae_{22} \oplus e_{m-1,m-1}Ae_{mm} \oplus e_{mm}Ae_{11}.$$

Se $A^{(1,0)} = 0$, então $A_1 = A^{(1,1)}$ e todas as partes da soma estão em $A^{(1,1)}$. Assim, $\alpha(i+1) = \alpha(i) + 1$, para todo $1 \leq i \leq m$. De forma equivalente, temos que

$$\alpha(i) = \begin{cases} 0, & i \text{ for ímpar} \\ 1, & i \text{ for par} \end{cases}.$$

Entretanto, se m for ímpar, então $\alpha(m) + \alpha(1) = 0$ e $A^{(1,0)} \neq 0$. Logo, $A^{(1,0)} = 0$ se, e somente se, m é par e $\alpha = \pi = 0101\ldots01$. Daí $M_\alpha(E) = M_\pi$, com $m \equiv 0 \pmod 2$.

Suponha agora que $\alpha \neq \omega, \pi$ e considere (ciclicamente) as sequências não constantes dos $\mathbb{Z}_2$-graus das componentes da soma direta que formam A_1, dada por

$$\alpha(1)+\alpha(2), \alpha(2)+\alpha(3), \ldots, \alpha(m-1)+\alpha(m), \alpha(m)+\alpha(1).$$

Seja t o comprimento máximo entre as subsequências de zero consecutivos, de forma cíclica. Por exemplo, se $\alpha = 00110$, a sequência cíclica seria 01010 e $t = 2$. Assim, o monômio $x_1x_2\cdots x_tx_{t+1}$, com $|x_i| = (1,0)$, certamente é uma identidade monomial multilinear. De fato, qualquer substituição admissível de termos de grau $(1,0)$ teria algum par de termos consecutivos $e_{ij}e_{uv}$ com $j \neq u$. Como $x_1x_2\cdots x_tx_{t+1}$ tem grau $(t+1,0)$, temos que $A^{(t+1,0)} = 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que existe uma sequência cíclica

$$\underbrace{0\ldots0}_{t}\,\delta_1\delta_2\ldots 1.$$

É fácil ver que $\delta_1 = \delta_2 = \ldots \delta_t = 0$. De fato,

$$\begin{cases} \alpha(1)+\alpha(2)=0 \\ \alpha(2)+\alpha(3)=0 \\ \vdots \\ \alpha(t)+\alpha(t+1)=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha(1)=\alpha(2)=\cdots=\alpha(t+1).$$

Como $\alpha(t+1)+\alpha(t+2) = 1$, temos que $\alpha(t+1) \neq \alpha(t+2)$. Se $\delta_1 = 1$, então $\alpha(t+2) = \alpha(t+3) = 1$ e $\alpha(t+3) = \alpha(t+2)$. Portanto, $\alpha(t+3) = \alpha(2)$ e $e_{2,t+3} \in A^{(t+1,0)}$, o que é um absurdo, uma vez que $A^{(t+1,0)} = 0$. Logo, a sequência cíclica é do tipo

$$\underbrace{0\ldots0}_{t}\,1\,\underbrace{0\ldots0}_{t}\,1\ldots\underbrace{0\ldots0}_{t}\,1$$

e x_1x_2, com $|x_1| = |x_2| = (1,1)$ é uma identidade, pois, novamente, qualquer substituição admissível $e_{ij}e_{uv}$ tem $j \neq u$. Se $A^{(2,0)} \neq 0$, a identidade monomial é não trivial, assim suponha $A^{(2,0)} = 0$ e a sequência cíclica precisa ser

$$1010\ldots10 \text{ ou } 0101\ldots01.$$

Isto faz com que

$$\alpha = \rho_1 = \underbrace{0110}\underbrace{0110}\ldots\underbrace{0110} \text{ ou } \alpha = \rho_2 = \underbrace{0011}\underbrace{0011}\ldots\underbrace{0011}.$$

Logo, $M_\alpha(E) = M_{\rho_1}(E)$ ou $M_\alpha(E) = M_{\rho_2}(E)$.

$\square$

A menos de PI-equivalência, podemos caracterizar estas álgebras por decomposição de produtos tensoriais cujos fatores são as álgebras graduadas elementares sem identidades monomiais não trivias, $M_{m,0}(E), M_{2,\pi}(E) := M_{1,1}(E)$ e $M_{4,\rho}(E) := M_{\rho_1}(E) \subset M_4(E)$. Note que $M_{\rho_1}(E)$ é isomorfo a $M_{2,2}(E)$.

Corolário 3.3.7. *Seja $M_\gamma(E) \subset M_k(E)$ uma álgebra sem identidades monomias não triviais. Então:*

i. $M_\gamma(E) = M_{k,0}(E)$ *ou*

ii. $k = 2m$ *e* $M_\gamma(E) \sim M_{m,0}(E) \otimes M_{2,\pi}(E)$ *como álgebras* $\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_2$*-graduadas ou*

iii. $k = 4m$ *e* $M_\gamma(E) \sim M_{m,0}(E) \otimes M_{4,\rho_1}(E)$*, como álgebras* $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ *graduadas.*

Demonstração. A prova segue dos Teoremas 3.2.4 e 3.3.6 e da definição da função ϵ. É suficiente construir a função ϵ para cada uma das três álgebras descritas no teorema anterior. Por exemplo, no segundo caso, considere as álgebras $M_\gamma(E) \subset M_{2m}(E)$, $M_\alpha(E) \subset M_m(E)$ e $M_\beta(E) \subset M_2(E)$ e $\gamma = \underbrace{01\ldots01}_{2m}$. Seja $\alpha = \omega$, a função nula e $\beta = 01$. Claramente $\gamma(t) = \alpha(i) + \beta(u)$ e assim pelo Teorema 3.2.4 obtemos que $M_\gamma(E) \sim M_{m,0}(E) \otimes M_{2,\pi}(E)$.

□

Observação 3.3.8. Como $M_{4,\rho_1}(E)$ é isomorfa a $M_{4,\rho_2}(E) = M_{2,2}(E)$ como álgebras $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$-graduadas, podemos dizer que, a menos de PI-equivalência, as únicas álgebras sem identidades monomiais não triviais são $M_{n,0}(E)$, $M_{n,0}(E) \otimes M_{1,1}(E)$ e $M_{n,0}(E) \otimes M_{2,2}(E)$.

Capítulo 4

Identidades Polinomiais Graduadas de $A \otimes E$

Neste capítulo vamos considerar G um grupo, K um corpo de característica zero e A uma K-álgebra G-graduada. Vamos estudar as identidades $G \times \mathbb{Z}_2$-graduadas da álgebra $G \times \mathbb{Z}_2$-graduada $A \otimes E$ a partir das identidades G-graduadas de A. Como consequência, vamos descrever uma base das identidades $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_n(E)$ partindo de um resultado de Vasilovski. Mais ainda, daremos a sequência de cocaracteres graduados de $M_2(E)$ e mostraremos a PI-equivalência de $M_2(E)$ com $M_{1,1}(E) \otimes E$, um caso particular do teorema de Kemer. Os resultados deste capítulo foram obtidos no artigo [13].

4.1 A função ζ_J

Nesta seção iremos introduzir a principal ferramenta de nosso estudo, a função ζ_J. Será uma seção bastante técnica, mas mesmo assim, faremos algumas aplicações importantes, envolvendo cocaracteres e codimensões.

Vamos começar com uma álgebra G-graduada A e introduziremos a álgebra $G \times \mathbb{Z}_2$-graduada $A \otimes E$, onde E denota a álgebra de Grassmann, com componente homogênea dada por $(A \otimes E)^{(g,i)} := A^g \otimes E_i$. Queremos comparar as identidades G-graduadas de A com as $G \times \mathbb{Z}_2$-graduadas de $A \otimes E$.

Note que a álgebra livre $K\langle X|G \times \mathbb{Z}_2\rangle$ é tanto uma álgebra G-graduada quanto uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada. Começaremos com a $\mathbb{Z}_2$-graduação de $K\langle X|G \times \mathbb{Z}_2\rangle$. Seja m um monômio multilinear em $K\langle X|G \times \mathbb{Z}_2\rangle$, onde as variáveis de índice $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ possuem $\mathbb{Z}_2$-grau ímpar. Então, para algum $\sigma \in Sym(\{i_1, \ldots, i_k\})$, podemos reescrever m no formato

$$m = m_0 z_{\sigma(i_1)} m_1 z_{\sigma(i_2)} \ldots m_{k-1} z_{\sigma(i_k)} m_k,$$

onde $m_0, \ldots, m_k$ são monômios multilineares de grau par e $z_{\sigma(i_j)} \in X$ são as variáveis de grau ímpar. Note que a palavra vazia é uma palavra de $\mathbb{Z}_2$-grau par, logo algum m_i pode ser trivial.

Exemplo 4.1.1. Seja $K\langle X|\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2\rangle$ e m um monômio cujas variáveis com $\mathbb{Z}_2$-grau ímpar possuem índices $1 < 4 < 5$. Seja então $m = x_1^{(1,1)} x_2^{(0,0)} x_3^{(1,0)} x_5^{(2,1)} x_4^{(0,1)} x_6^{(0,0)}$. Podemos reescrever m no formato

$$m = m_0 x_{\sigma(1)} m_1 x_{\sigma(4)} m_2 x_{\sigma(5)} m_3,$$

em que $m_0 = 1$, $m_1 = x_2 x_3$, $m_2 = 1$, $m_3 = x_6$ e $\sigma = (45)$, e o $\mathbb{Z}_4$-grau foi omitido para simplificar a notação.

Assim como Kemer em [24], definimos $\zeta(m) := (-1)^{\sigma} m$. Note que $\zeta(\zeta(m)) = m$. Queremos, definir algo similar indo da G-graduação para a $G \times Z_2$-graduação da álgebra livre.

Definição 4.1.2. Seja $J \subset \mathbb{N}$ e $\varphi_J : K\langle X|G\rangle \to K\langle X|G \times \mathbb{Z}_2\rangle$ o único G-homomorfismo definido por

$$\varphi_J(x_i^{(g)}) := \begin{cases} x_i^{(g,0)}, & \text{se } i \notin J \\ x_i^{(g,1)}, & \text{se } i \in J \end{cases}.$$

Para um monômio multilinear $m \in V_n^G$, definimos

$$\zeta_J(m) := \zeta(\varphi_J(m)).$$

A função φ_J acrescenta o $\mathbb{Z}_2$-grau a uma variável G-graduada. Com isso ela é capaz de estender a graduação da álgebra livre se tornando uma $G \times \mathbb{Z}_2$-graduação. Vamos denotar simplesmente φ se o conjunto J estiver claro no contexto. Por linearidade ζ_J é estendida para todo o espaço G-graduado V_n^G. Se $f \in V_n^G$, então $\zeta_J(f)$ é uma elemento multilinear de $K\langle X|G \times \mathbb{Z}_2\rangle$.

Exemplo 4.1.3. Seja $G = \mathbb{Z}_3$, $m = x_6^{(2)} x_4^{(1)} x_1^{(1)} x_3^{(0)} x_2^{(0)} x_5^{(2)}$ e $J = \{1, 3, 4, 9\}$. Então

$$\varphi_J(m) = x_6^{(2,0)} x_4^{(1,1)} x_1^{(1,1)} x_3^{(0,1)} x_2^{(0,0)} x_5^{(2,0)}$$

e

$$\zeta_J(m) = (-1)^{(143)} x_6^{(2,0)} x_4^{(1,1)} x_1^{(1,1)} x_3^{(0,1)} x_2^{(0,0)} x_5^{(2,0)}$$

uma vez que $\sigma = (143)$, pois a primeira variável de grau ímpar é x_4, a segunda é x_1 e a última é x_1.

Podemos estender as identidades polinomiais multilineares G-graduadas para identidades polinomiais $G \times \mathbb{Z}_2$-graduadas.

Lema 4.1.4. *Seja f uma identidade polinomial multilinear G-graduada de A de grau n, e seja $J \subset \widehat{n}$. Então*

$$\zeta_J(f) \in T_{G\times\mathbb{Z}_2}(A \otimes E).$$

Demonstração. Como $\mathrm{char}K = 0$, $T_G(A)$ é multihomogêneo e podemos assumir que $f \in V_n^G(\mathscr{G})$ para alguma partição $\mathscr{G}$ de $\widehat{n}$. Seja $(a_1\otimes e_1, \ldots, a_n\otimes e_n)$ uma $G\times\mathbb{Z}_2$-substituição admissível para $\zeta_J(f)$ formada pelos geradores de $A \otimes E$. Pela multilinearidade, é suficiente mostrar que $\zeta_J(f)(a_1 \otimes e_1, \ldots, a_n \otimes e_n) = 0$. Seja $J = \{i_1, \ldots, i_t\}$, com $i_1 < i_2 < \ldots < i_t$. Todo monômio de f pode ser reescrito como

$$m = m_0 x^{g_1}_{\sigma(i_1)} m_1 x^{g_2}_{\sigma(i_2)} \cdots m_{t-1} x^{g_t}_{\sigma(i_t)} m_t,$$

em que os monômios m_i's são monômios nas variáveis restantes de G e $g_1, \ldots, g_t$ são elementos de G, não necessariamente distintos. Então

$$\zeta_J(m) = \overline{m}_0 x^{(g_1,1)}_{\sigma(i_1)} \overline{m}_1 x^{(g_2,1)}_{\sigma(i_2)} \cdots x^{(g_t,1)}_{\sigma(i_t)} \overline{m}_t,$$

em que para $j = 0, \ldots, t$ o monômio $\overline{m}_j := \varphi(m_j)$ possui $\mathbb{Z}_2$-grau par. Sejam $v_1, \ldots, v_l$ elementos de E_0. Temos

$$\begin{aligned}
\zeta_J(m)(a_1 \otimes e_1, \ldots, a_n \otimes e_n) &= (-1)^\sigma m(a_1, \ldots, a_m) \otimes v_0 e_{\sigma(i_1)} \ldots v_{t-1} e_{\sigma(i_t)} v_t \\
&= (-1)^\sigma m(a_1, \ldots, a_n) \otimes (-1)^\sigma e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_n} v_0 v_1 \ldots v_n \\
&= m(a_1, \ldots, a_n) \otimes e_1 \ldots e_n,
\end{aligned}$$

onde $v_l \in E_0$ comuta com qualquer elemento e o termo $(-1)^\sigma$ na segunda igualdade surgiu devido ao reordenamento dos elementos $e_{\sigma(i)} \in E_1$. Assim,

$$\zeta_J(f)(a_1 \otimes e_1, \ldots, a_n \otimes e_n) = f(a_1, \ldots, a_n) \otimes e_1 \ldots e_n.$$

Como $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é uma G-substituição admissível para f, temos que $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ e portanto

$$\zeta_J(f)(a_1 \otimes e_1, \ldots, a_n \otimes e_n) = 0.$$

□

Queremos mostrar que os polinômios obtidos desta forma, ou seja, através da aplicação de ζ_J nas identidades polinomiais de G são suficientes para descrever as identidades polinomiais $G \times \mathbb{Z}_2$-graduadas de $A \otimes E$. Para isso, primeiramente vamos criar uma bijeção entre as partições de G e $G \times \mathbb{Z}_2$.

Dado $J \subset \widehat{n}$, uma G-partição $\mathscr{G}$ de $\widehat{n}$ induz uma $G \times \mathbb{Z}_2$-partição $\mathscr{S}$ de $\widehat{n}$ definindo

$$\mathscr{S}^{(g,1)} := \mathscr{G}_g \cap J \quad \text{ e } \quad \mathscr{S}^{(g,0)} := \mathscr{G}_g \backslash J.$$

Por outro lado, começando com uma $G \times \mathbb{Z}_2$-partição $\mathscr{S}$ de $\widehat{n}$ podemos construir uma G-partição $\mathscr{G}$ agrupando a parte ímpar e par de $\mathscr{S}$ correspondente ao mesmo $g \in \mathscr{G}$

$$\mathscr{G}_g := \mathscr{S}^{(g,0)} \cup \mathscr{S}^{(g,1)}.$$

É claro que a correspondência $\mathscr{S} \rightleftharpoons \mathscr{G}$, para um J fixo, é uma bijeção.

Exemplo 4.1.5. Sejam $\widehat{n} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $G = \mathbb{Z}_2$ e $J = \{2, 3, 4\}$. Definindo a G-partição $\mathscr{G}_0 = \{1, 3\}$ e $\mathscr{G}_1 = \{2, 4, 5\}$ de $\widehat{n}$, temos então a partição induzida $\mathscr{S}$ dada por

$$\mathscr{S}^{(0,0)} = \mathscr{G}_0 \backslash J = \{1\}; \quad \mathscr{S}^{(1,0)} = \{5\}$$
$$\mathscr{S}^{(0,1)} = \mathscr{G} \cap J = \{3\}; \quad \mathscr{S}^{(1,1)} = \{2, 4\}.$$

Logo, temos uma $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-partição $\mathscr{S} = \{\mathscr{S}^{(0,0)}, \mathscr{S}^{(0,1)}, \mathscr{S}^{(1,0)}, \mathscr{S}^{(1,1)}\}$. Assim, o espaço $V_n^{G \times \mathbb{Z}_2}(\mathscr{S})$ é o espaço dos monômios multilineares gerados por todas as possibilidades de produtos entre as variáveis $x_1^{(0,0)}, x_3^{(0,1)}, x_5^{(1,0)}, x_2^{(1,1)}$ e $x_4^{(1,1)}$. Os elementos que possuem a segunda componente do grau igual a 1 seriam x_3, x_2, x_4, conforme esperado, uma vez que $J = \{2, 3, 4\}$.

Lema 4.1.6. *Seja*

$$f \in T_{G \times \mathbb{Z}_2}(A \otimes E) \cap V_n^{G \times \mathbb{Z}_2}(\mathscr{S}),$$

em que $\mathscr{S}$ é uma $G \times \mathbb{Z}_2$-partição de n, e defina

$$J := \bigcup_{g \in G} \mathscr{S}^{(g,1)}.$$

Então $f = \zeta_J(h)$ para algum $h \in T_G(A) \cap V_n^G(\mathscr{G})$, onde $\mathscr{G}$ é a G-partição de $\widehat{n}$ correspondente a $\mathscr{S}$.

Demonstração. Seja $J = \{i_1, \ldots, i_t\}$ com $i_1 < i_2 < \ldots < i_t$. Então podemos reescrever todo monômio m de f na forma

$$m = m_0 x_{\sigma(i_1)}^{(g_1,1)} m_1 x_{\sigma(i_2)}^{(g_2,1)} \ldots x_{\sigma(i_t)}^{(g_t,1)} m_t,$$

em que m_i são monômios de $\mathbb{Z}_2$-grau par em $K\langle X|G \times \mathbb{Z}_2\rangle$ e $\sigma \in Sym(J)$ é uma permutação. Em outras palavas

$$f=\sum \alpha_m m_0 x_{\sigma(i_1)}^{(g_1,1)} m_1 x_{\sigma(i_2)}^{(g_2,1)} \dots x_{\sigma(i_t)}^{(g_t,1)} m_t.$$

Seja $\zeta=\zeta_J$ e $\varphi=\varphi_J$ as funções definidas anteriormente. Vamos chamar de γ o G-homomorfismo de $K\langle X|G\times\mathbb{Z}_2\rangle$ em $K\langle X|G\rangle$ que deleta o $\mathbb{Z}_2$-grau, ou seja

$$\begin{aligned}\gamma: K\langle X|G\times\mathbb{Z}_2\rangle &\to K\langle X|G\rangle\\ x^{(g,i)} &\to x^g.\end{aligned}$$

Note que, $(\varphi\circ\gamma)(x_l^{(g,i)})=x_l^{(g,j)}$. Assim, se $i=1$, então $l\in J$ e portanto $j=1$. Como a volta também é válida, temos que

$$(\varphi\circ\gamma)(p)=p$$

para todo $p\in V_n^{G\times\mathbb{Z}_2}(\mathscr{S})$. Mais ainda, $(\gamma\circ\varphi)(q)=q$, para todo $q\in V_n^G(\mathscr{G})$, pois temos uma bijeção entre as partições.

Vamos agora definir $h:=(\gamma\circ\zeta)(f)\in V_n^G(\mathscr{G})$. Segue que

$$\begin{aligned}\zeta_J(h)&=(\zeta\circ\varphi)((\gamma\circ\zeta)(f))=\zeta((\varphi\circ\gamma)(\zeta(f)))\\&=f,\end{aligned}$$

pois $\zeta(f)\in V_n^{G\times Z_2}(\mathscr{S})$. Mais ainda, definimos

$$h=\sum(-1)^\sigma \alpha_m \overline{m}_0 x_{\sigma(i_1)}^{g_1}\overline{m}_1 x_{\sigma(i_2)}^{g_2}\dots x_{\sigma(i_t)}^{g_t}\overline{m}_i,$$

onde $\overline{m}_i=\gamma(m_i)$.

Queremos provar que h é uma identidade polinomial G-graduada de A. Seja $(a_1,\dots,a_n)$ uma substituição G-admissível de h em A, onde $a_i\in A^{(g)}$ se $i\in\mathscr{G}_g$. Como a álgebra de Grasmaan E é infinita, podemos escolher os elementos $e_1,\dots,e_n\in E$ tais que $e_1\cdots e_n\neq 0$ e $e_i\in E_1$ se, e somente se, $i\in J$. Assim $(a_1\otimes e_1,\dots,a_n\otimes e_n)$ é uma substituição $G\times\mathbb{Z}_2$-admissível de f. Portanto,

$$0=f(a_1\otimes e_1,\dots,a_n\otimes e_n)=\sum\alpha_m m(a_1\otimes e_1,\dots,a_n\otimes e_n).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}m(a_1\otimes e_1,\dots,a_n\otimes e_n)&=\gamma(m)(a_1,\dots,a_n)\otimes v_0 e_{\sigma(i_1)}\dots v_{t-1}e_{\sigma(i_t)}v_t\\&\qquad(-1)^\sigma\gamma(m)(a_1,\dots,a_n)\otimes e_1\cdots e_n\end{aligned}$$

onde $v_i\in E_0$, são os elementos que comutam, e o termo $(-1)^\sigma$ surgiu do reordenamento dos termos $e_{\sigma(i)}\in E_1$. Logo,

$$0 = f(a_1 \otimes e_1, \ldots, a_n \otimes e_n) = h(a_1, \ldots, a_n) \otimes e_i \cdots e_n$$

e assim $h(a_1, \ldots, a_n) = 0$, pois $e_1 \cdots e_n \neq 0$. Portanto, $h \in T_G(A)$.

□

Pelos lemas anteriores, temos uma importante relação que conecta a estrutura de $T_{G\times\mathbb{Z}_2}(A \otimes E)$ com $T_G(A)$. Mais precisamente, seja $J \subset \mathbb{N}$, se $\mathscr{G}$ é uma G-partição de $\widehat{n}$ e $\mathscr{S}$ é a $G \times \mathbb{Z}_2$-partição correspondente, então

$$V_n^{G\times\mathbb{Z}_2}(\mathscr{S}) \cap T_{G\times\mathbb{Z}_2}(A \otimes E) = \zeta_J(V_n^G(\mathscr{G}) \cap T_G(A)).$$

Em particular, vamos fixar a ordem de G, digamos $g_1 < g_2 < \ldots < g_r$ e considerar a ordem lexicográfica de $G \times \mathbb{Z}_2$. Seja

$$|\mathscr{S}^{(g_i,0)}| := p_i \quad \text{e} \quad |\mathscr{S}^{(g_i,1)}| := q_i. \tag{4.1.1}$$

Note que p_i é exatamente o número de variáveis com $G\times\mathbb{Z}_2$-grau $(g_i, 0)$, q_i é exatamente o número de variáveis com $G\times\mathbb{Z}_2$-grau $(g_i, 1)$ nos monômios de $V_n^{G\times\mathbb{Z}_2}(\mathscr{S})$. Além disso, $(p_i + q_i)$ representa exatamente o número de variáveis com G-grau g_i nos monômios de $V_n^G(\mathscr{G})$, para todo i. Então, $|\mathscr{G}_{g_i}| := p_i + q_i$ e pelo Lema 4.1.6

$$V_{p_1,q_1,\ldots,p_r,q_r}^{G\times\mathbb{Z}_2}(\mathscr{S}) \cap T_{G\times\mathbb{Z}_2}(A \otimes E) = \zeta_J(V_{p_1+q_1,\ldots p_r+q_r}^G(\mathscr{G}) \cap T_G(A)). \tag{4.1.2}$$

Mais ainda, temos que

$$\dim(V_{p_1,q_1,\ldots,p_r,q_r}^{G\times\mathbb{Z}_2} \cap T_{G\times\mathbb{Z}_2}(A \otimes E)) = \dim(V_{p_1+q_1,\ldots,p_r+q_r}^G \cap T_G(A)),$$

uma vez que ζ_J é injetiva.

Para ilustrar esta situação, vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 4.1.7. Considere o monômio $\mathbb{Z}_4$-graduado $m = x_2^{(1)}x_3^{(0)}x_4^{(2)}x_5^{(1)}x_1^{(3)}x_6^{(0)}x_7^{(2)}x_8^{(3)}$. Sendo $\mathscr{G}$ uma $\mathbb{Z}_4$-partição de $\widehat{8}$ induzida por m, temos que

$$\mathscr{G}_0 = \{3; 6\}; \mathscr{G}_1 = \{2; 5\}; \mathscr{G}_2 = \{4; 7\}; \mathscr{G}_3 = \{1; 8\}.$$

Daí, segue que $|\mathscr{G}_0| = |\mathscr{G}_1| = |\mathscr{G}_2| = |\mathscr{G}_3| = 2$.

Sendo $J = \{1, 3, 5, 7\}$, temos que

$$\begin{aligned}\zeta_J(m) &= (-1)^{(135)}x_2^{(1,0)}x_3^{(0,1)}x_4^{(2,0)}x_5^{(1,1)}x_1^{(3,1)}x_6^{(0,0)}x_7^{(2,1)}x_8^{(3,0)} \\ &= x_2^{(1,0)}x_3^{(0,1)}x_4^{(2,0)}x_5^{(1,1)}x_1^{(3,1)}x_6^{(0,0)}x_7^{(2,1)}x_8^{(3,0)}.\end{aligned}$$

Então

$$\mathscr{S}^{(0,0)} = \{6\}; \mathscr{S}^{(0,1)} = \{3\}; \mathscr{S}^{(1,0)} = \{2\}; \mathscr{S}^{(1,1)} = \{5\}$$

$$\mathscr{S}^{(2,0)} = \{4\}; \mathscr{S}^{(2,1)} = \{7\}; \mathscr{S}^{(3,0)} = \{8\}; \mathscr{S}^{(3,1)} = \{1\}.$$

Daí, segue que $|\mathscr{S}^{(0,0)}| = |\mathscr{S}^{(0,1)}| = |\mathscr{S}^{(1,0)}| = |\mathscr{S}^{(1,1)}| = |\mathscr{S}^{(2,0)}| = |\mathscr{S}^{(2,1)}| = |\mathscr{S}^{(3,0)}| = |\mathscr{S}^{(3,1)}| = 1$.

Enfim,

$$|\mathscr{G}_0| = |\mathscr{S}^{(0,0)}| + |\mathscr{S}^{(0,1)}| = 1 + 1 = 2$$
$$|\mathscr{G}_1| = |\mathscr{S}^{(1,0)}| + |\mathscr{S}^{(1,1)}| = 1 + 1 = 2$$
$$|\mathscr{G}_2| = |\mathscr{S}^{(2,0)}| + |\mathscr{S}^{(2,1)}| = 1 + 1 = 2$$
$$|\mathscr{G}_3| = |\mathscr{S}^{(3,0)}| + |\mathscr{S}^{(3,1)}| = 1 + 1 = 2.$$

Mais ainda, conforme dito acima, temos que

$$m \in V^{\mathbb{Z}_4}_{2,2,2,2}(\mathscr{G}) \text{ e } \zeta_J(m) \in V^{\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2}_{1,1,1,1,1,1,1,1}(\mathscr{S}).$$

Utilizando resultados conhecidos, vamos agora estudar algumas importantes aplicações da função ζ e dos lemas anteriores envolvendo codimensões e cocaracteres.

Proposição 4.1.8. *Seja A uma PI-álgebra G-graduada. Então*

$$c^{G\times\mathbb{Z}_2}_n(A\otimes E) = 2^n c^G_n(A).$$

Demonstração. Do artigo [11] de Di Vincezzo é conhecido que a G-codimensão de A e a sua codimensão graduada são relacionadas pela fórmula

$$c^G_n(A) = \sum_{n_1+\ldots+n_r=n} \binom{n}{n_1 n_2 \cdots n_r} c^G_{n_1,n_2,\ldots,n_r}(A) \tag{4.1.3}$$

onde

$$\binom{n}{n_1 n_2 \cdots n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}.$$

Portanto, para a $G\times\mathbb{Z}_2$-codimensão de $A\otimes E$, temos que

$$c^{G\times\mathbb{Z}_2}_n(A\otimes E) = \sum_{p_1+q_1+\cdots+p_r+q_r=n} \binom{n}{p_1 q_1 \cdots p_r q_r} c^{G\times\mathbb{Z}_2}_{p_1,q_1,\ldots,p_r,q_r}(A\otimes E).$$

De 4.1.2 segue que,

$$c^{G\times\mathbb{Z}_2}_{p_1,q_1,\ldots,p_r,q_r}(A\otimes E) = c^G_{p_1+q_1,\ldots,p_r+q_r}(A),$$

pois

$$\dim \frac{V^{G\times\mathbb{Z}_2}_{p_1,q_1,\ldots,p_r,q_r}(A\otimes E)}{V^{G\times\mathbb{Z}_2}_{p_1,q_1,\ldots,p_r,q_r}(A\otimes E)\cap T_G(A\otimes E)} = \dim \frac{V^G_{p_1+q_1,\ldots,p_r+q_r}(A)}{V^G_{p_1+q_1,\ldots,p_r+q_r}(A)\cap T_G(A)}.$$

Mais ainda, é fácil ver que

$$\binom{n}{p_1q_1\cdots p_rq_r} = \binom{n}{p_1+q_1\cdots p_r+q_r}\cdot\binom{p_1+q_1}{p_1}\cdots\binom{p_r+q_r}{p_r}.$$

Enfim, por 4.1.3 segue que

$$\begin{aligned}
c_n^{G\times\mathbb{Z}_2}(A\otimes E) &= \sum_{p_1+q_1+\ldots+p_r+q_r=n}\binom{n}{p_1q_1\cdots p_rq_r}c^{G\times\mathbb{Z}_2}_{p_1,q_1,\ldots,p_r,q_r}(A\otimes E)\\
&= \sum_{p_1+q_1+\ldots+p_r+q_r=n}\binom{n}{p_1+q_1\cdots p_r+q_r}\binom{p_1+q_1}{p_1}\cdots\binom{p_r+q_r}{p_r}c^{G}_{p_1+q_1,\ldots,p_r+q_r}(A)\\
&= \sum_{n_1+\ldots+n_r=n}\ \sum_{p_i+q_i=n_i}\binom{n}{n_1\cdots n_r}\binom{n_1}{p_1}\cdots\binom{n_r}{p_r}c^{G}_{n_1,\ldots,n_r}(A),
\end{aligned}$$

pois $p_i+q_i=n_i$. Agora note que,

$$\begin{aligned}
\sum_{p_i+q_i=n_i}\binom{n}{n_1\cdots n_r}\binom{n_1}{p_1}\cdots\binom{n_r}{p_r} &= \sum_{p_1}^{n_1}\cdots\sum_{p_r}^{n_r}\binom{n}{n_1\cdots n_r}\binom{n_1}{p_1}\cdots\binom{n_r}{p_r}\\
&= \binom{n}{n_1\cdots n_r}\sum_{p_1}^{n_1}\cdots\sum_{p_r}^{n_r}\binom{n_1}{p_1}\binom{n_2}{p_2}\cdots\binom{n_r}{p_r}\\
&= \binom{n}{n_1\cdots n_r}\sum_{p_1}^{n_1}\binom{n_1}{p_1}\sum_{p_2}^{n_2}\binom{n_2}{p_2}\cdots\sum_{p_r}^{n_r}\binom{n_r}{p_r}\\
&= \binom{n}{n_1\cdots n_r}2^{n_1}2^{n_2}\cdots 2^{n_r}.
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
c_n^{G\times\mathbb{Z}_2}(A\otimes E) &= \sum_{n_1+\ldots+n_r=n}\binom{n}{n_1\cdots n_r}2^{n_1+n_2+\ldots+n_r}c^{G}_{n_1,\ldots,n_r}(A)\\
&= 2^n\sum_{n_1+\ldots+n_r=n}\binom{n}{n_1\cdots n_r}c^{G}_{n_1,\ldots,n_r}(A)\\
&= 2^nc_n^G(A).
\end{aligned}$$

□

Em [17], Giambruno e Zaicev provaram que para toda PI-álgebra A, o limite $\lim_n\sqrt[n]{c_n(A)}$ existe e é um número inteiro, chamado de expoente de A (ou de $var(A)$. De modo análogo, para uma álgebra G-graduada A podemos considerar a sua sequência de codimensões $c_n^G(A)$ e o limite $\lim_n\sqrt[n]{c_n^G(A)}$, em que este limite é o expoente graduado de A (ou de $var(A)$). Apenas resultados parciais sobre a existência desses limites são conhecidos.

Corolário 4.1.9. *Considere $M_p(E)$ com a sua $\mathbb{Z}_2$-graduação natural. Então*

$$\lim_n \sqrt[n]{c_n^{\mathbb{Z}_2}(M_p(E))} = 2p^2.$$

Demonstração. Pela Proposição 4.1.8 temos

$$\begin{aligned}\lim_n \sqrt[n]{c_n^{G\times\mathbb{Z}_2}(A\otimes E)} &= \lim_n \sqrt[n]{2^n c_n^G(A)}\\ &= 2\lim_n \sqrt[n]{c_n^G(A)}.\end{aligned}$$

Como Regev descreveu o comportamento assintótico da sequência de codimensões para $A = M_p(K)$ em [31], sabemos que $\lim_n \sqrt[n]{c_n(M_p(K))} = p^2$. Logo tomando $G = \mathbb{Z}_2$ e considerando a $\mathbb{Z}_2$-graduação natural em $M_p(K)$ temos

$$\lim_n \sqrt[n]{c_n^{\mathbb{Z}_2}(A\otimes E)} = 2\lim_n \sqrt[n]{c_n^{\mathbb{Z}_2}(A)} = 2p^2.$$

$\square$

Vamos agora estudar as sequências de cocaracteres. Seja $\mathscr{S}$ uma $G\times\mathbb{Z}_2$-partição canônica de $\widehat{n}$. Por 4.1.1, seja $\mathscr{G}$ a sua G-partição associada, onde $J = \bigcup_{g\in G}\mathscr{S}^{(g,1)}$ são os índices das variáveis de $\mathbb{Z}_2$-grau ímpar em $V_n^{G\times\mathbb{Z}_2}(\mathscr{S})$. Recordemos que,

$$\begin{aligned}H := H(\mathscr{S}) &= Sym(\mathscr{S}^{(g_1,0)})\times Sym(\mathscr{S}^{(g_1,1)})\times\ldots\times Sym(\mathscr{S}^{(g_r,0)})\times Sym(\mathscr{S}^{(g_r,1)})\\ &\cong S_{p_1}\times S_{q_1}\times\ldots\times S_{p_r}\times S_{q_r}.\end{aligned}$$

Similarmente, seja $H(\mathscr{G}) \cong S_{p_1+q_1}\times\ldots\times S_{p_r+q_r}$ o grupo associado a G-partição $\mathscr{G}$. Note que $H \leq H(\mathscr{G})$, logo $V^G_{p_1+q_1,\ldots,p_r+q_r}$ e $V^{G\times\mathbb{Z}_2}_{p_1,q_1,\ldots,p_r,q_r}$ são ambos H-módulos.

Segue da teoria das representações de grupos simétricos que as representações irredutíveis de H e seus caracteres estão em correspondência bijetiva com as multipartições

$$\langle\underline{\lambda},\underline{\mu}\rangle := \langle\lambda_{(1)},\mu_{(1)},\ldots,\lambda_{(r)},\mu_{(r)}\rangle,$$

onde λ_i e μ_i são partições de p_i e q_i, respectivamente. Isto ocorre pois existe uma relação biunívoca entre os caracteres de grupos simétricos e suas partições. Mais precisamente se usarmos os mesmos símbolos λ_i e μ_i para denotar os caracteres irredutíveis associados as partições λ_i e μ_i, então o carácter do H-módulo irredutível associado com $\langle\underline{\lambda},\underline{\mu}\rangle$ é o produto tensorial $\lambda_{(1)}\otimes\mu_{(1)}\otimes\ldots\otimes\lambda_{(r)}\otimes\mu_{(r)}$. O H-carácter do módulo $V^{G\times\mathbb{Z}_2}_{p_1,q_1,\ldots,p_r,q_r}(A\otimes E)$ é o cocarácter $\chi^{G\times\mathbb{Z}_2}_{p_1,q_1,\ldots,p_r,q_r}(A\otimes E)$ e o H-carácter de $V^G_{p_1+q_1,\ldots,p_r+q_r}(A)$ é o cocarácter induzido $(\chi^G_{p_1+q_1,\ldots,p_r+q_r}(A))\downarrow H$.

Proposição 4.1.10. *Seja*

$$(\chi^G_{p_1+q_1,\ldots,p_r+q_r}(A))\downarrow H = \sum m_{\langle\underline{\lambda},\underline{\mu}\rangle}\langle\underline{\lambda},\underline{\mu}\rangle$$

o carácter do H-módulo

$$(V^G_{p_1+q_1,\ldots,p_r+q_r}/(V^G_{p_1+q_1,\ldots,p_r+q_r} \cap T_G(A))) \downarrow H.$$

Então o cocarácter do H-módulo

$$(V^{G\times\mathbb{Z}_2}_{p_1,q_1,\ldots,p_r,q_r}/(V^{G\times\mathbb{Z}_2}_{p_1,q_1,\ldots,p_r,q_r} \cap T_{G\times\mathbb{Z}_2}(A\otimes E))) \downarrow H$$

é

$$\chi^{G\times\mathbb{Z}_2}_{p_1,q_1,\ldots,p_r,q_r}(A\otimes E) = \sum m_{\langle\lambda,\mu\rangle}\langle\lambda,\mu^{'}\rangle,$$

onde

$$\langle\lambda,\mu^{'}\rangle := \lambda_{(1)}\otimes\mu^{'}_{(1)}\otimes\ldots,\lambda_{(r)}\otimes\mu^{'}_{(r)}$$

e $\mu^{'}_{(i)}$ é a partição conjugada de $\mu_{(i)}$.

Demonstração. Como $H \cong S_{p_1}\times S_{q_1}\times\ldots\times S_{p_r}\times S_{q_r}$, podemos escrever todo $h\in H$ da forma

$$h = \sigma_1\tau_1\ldots\sigma_r\tau_r \quad ;\sigma_i \in S_{p_i} \text{ e } \tau_i\in S_{q_i}.$$

Vamos considerar o H-módulo Ku sobre a ação dada por $hu := (-1)^{\tau_1\tau_2\cdots\tau_r}u$. Note que a ação de h é dada apenas pelos elementos das partições q_i's, que são exatamente os termos de $\mathbb{Z}_2$-grau ímpar. Da teoria de representações temos que se M é H-módulo irredutível com carácter $\langle\underline{\lambda},\underline{\mu}\rangle$, então o H-carácter irredutível do módulo $M\otimes Ku$ é $\langle\underline{\lambda},\underline{\mu}^{'}\rangle$, pois o carácter de $M\otimes Ku$ é do tipo $\chi^{\langle\underline{\lambda},\underline{\mu}\rangle}\otimes\chi^{(1^n)} = \chi^{\langle\underline{\lambda},\underline{\mu}\rangle^{'}}$, por James 6.6 **??**, e como a ação é apenas sobre os q_i's a conjugação será apenas sobre seus caracteres.

Sabemos que

$$V^{G\times\mathbb{Z}_2}_{p_1,q_1,\ldots,p_r,q_r} \cap T^G_{G\times\mathbb{Z}_2}(A\otimes E) = \zeta_J(V^G_{p_1+q_1,\ldots,p_r+q_r}\cap T_G(A))$$

então, devido ao fato anterior, para completarmos a demonstração, basta provar que

$$V_{p_1+q_1,\ldots,p_r+q_r}\otimes Ku \cong_H V^{G\times\mathbb{Z}_2}_{p_1,q_1,\ldots,p_r,q_r}$$

e que a imagem de $V^G_{p_1+q_1,\ldots p_r+q_r}\cap T_G(A)\otimes Ku$ sobre este isomorfismo é igual a $\zeta_J(V^G_{p_1+q_1,\ldots,p_r+q_r}\cap T_G(A))$. Vamos definir o isomorfismo de espaços vetoriais θ por

$$\theta : V^G_{p_1+q_1,\ldots,p_r+q_r}\otimes Ku \to \zeta_J(V^G_{p_1+q_1,\ldots,p_r+q_r}\cap T_G(A))$$

$$m\otimes u \to \zeta_J(m)$$

Então se $h := \prod\sigma\prod\tau\in H$, temos que $\theta(h(m\otimes u)) = h\theta(m\otimes u)$ e assim θ é um isomorfismo de H-módulos. De fato, sejam $J=\{j_1,\ldots,j_t\}, m := m_0x^{g_1}_{\sigma(j_1)}\ldots m_{t-1}x^{g_t}_{\sigma(j_t)}m_t$ e

$\sigma \in Sym(J)$. Então,

$$\begin{aligned}
\theta(h(m \times u)) &= \theta((hm) \otimes (-1)^{\prod \tau_j} u) \\
&= \theta((-1)^{\prod \tau_j} hm \otimes u) \\
&= (-1)^{\prod \tau_j} \theta(hm \otimes u) \\
&= (-1)^{\prod \tau_j} \zeta_J(\prod \sigma_i \prod \tau_j m) \\
&= (-1)^{\prod \tau_j} (-1)^{\prod \tau_j} (-1)^{\sigma} h\varphi(m) \\
&= (-1)^{\sigma} h\varphi(m) \\
&= h\sigma(m \otimes u).
\end{aligned}$$

Assim θ é um isomorfismo de H-módulos e segue que o submódulo $(V^G_{p_1+q_1,\ldots,p_r+q_r} \cap T_G(A)) \otimes Ku$ tem como imagem isomórfica $\zeta_J(V^G_{p_1+q_1,\ldots,p_r+q_r} \cap T_G(A))$. Como os isomorfismo vão preservar os caracteres e o carácter de $(V^G_{p_1+q_1,\ldots,p_r+q_r}) \otimes Ku$ é do tipo $\langle \underline{\lambda}, \underline{\mu}' \rangle$ o teorema está demonstrado.

□

4.2 Identidades graduadas para $A \otimes E$

Seja $J = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \mathbb{N}$ com $i_1 < \ldots < i_k$. Toda permutação $\alpha \in Sym(J)$ é determinada pela palavra $\alpha(i_1) \ldots \alpha(i_k)$ no alfabeto J. Dado $m \in \mathbb{N}$ e números inteiros positivos $t_1, \ldots, t_m$ tais que $t_1 + \ldots + t_m = k$, podemos dividir a palavra $\alpha(i_1) \ldots \alpha(i_k)$ em um produto de m subpalavras de comprimentos $t_1, \ldots t_m$ e reescrever

$$\alpha \equiv \underbrace{a_{1,1} \ldots a_{1,t_1}}_{t_1} \underbrace{a_{2,1} \ldots a_{2,t_2}}_{t_2} \ldots \underbrace{a_{m,1} \ldots a_{m,t_m}}_{t_m}.$$

Se $\pi \in S_m$ podemos permutar as m subpalavras de α por π. Assim, definimos a seguinte permutação de $Sym(J)$:

$$\alpha^{\pi} \equiv \underbrace{a_{\pi(1),1} \ldots a_{\pi(1),t_{\pi(1)}}}_{t_{\pi(1)}} \underbrace{a_{\pi(2),2} \ldots a_{\pi(2),t_{\pi(2)}}}_{t_{\pi(2)}} \ldots \underbrace{a_{\pi(m),m} \ldots a_{\pi(m),t_{\pi(m)}}}_{t_{\pi(m)}}.$$

Queremos comparar os sinais de α com o sinal de α^{π}. Vamos fazer isto da seguinte maneira: seja

$$D := \{i \in \widehat{m} \mid t_i \equiv 1 \pmod 2\}$$

isto é, D é formado pelos índices dos termos t_i que são ímpares. Se $D \neq \emptyset$, introduziremos a seguinte notação: $l_1 < l_2 < \ldots < l_s$ são os elementos de D e deletamos em $\pi(1) \ldots \pi(m)$ as letras que não estão em D. Denotamos por $\widetilde{\pi}$ a única permutação em $Sym(D)$ definida pela palavra obtida desta forma. Mais ainda, esta palavra define uma única permutação $\pi_1 \in Sym(s)$ tal que

$$\widetilde{\pi}(l_1)\dots\widetilde{\pi}(l_s) = l_{\pi_1(1)}\dots l_{\pi_1(s)}.$$

Antes de irmos ao próximo lema, vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 4.2.1. Tomemos a palavra $a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{2,1}a_{2,2}$ de comprimento 5. Pela própria construção é evidente que podemos olha-lá como duas subpalavras de comprimento 3, $\underbrace{a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}}_{3}$, e 2, $\underbrace{a_{2,1}a_{2,2}}_{2}$. Note que para trocar essas duas palavras de lugar seriam necessárias seis transposições. Para evidenciar isso, observe as transposições necessárias para levarmos $a_{2,1}$ até a primeira posição:

$$a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{2,1}a_{2,2} \leftrightarrow a_{1,1}a_{1,2}a_{2,1}a_{1,3}a_{2,2} \leftrightarrow a_{1,1}a_{2,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{2,2} \leftrightarrow a_{2,1}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{2,2}$$

e o mesmo ocorrerá para levarmos $a_{2,2}$ até a segunda posição.

Lema 4.2.2. *i. Se $D = \emptyset$, então $(-1)^{\alpha^\pi} = (-1)^\alpha$ para todo $\pi \in S_m$.*

ii. Se $D \neq \emptyset$, então $(-1)^{\alpha^\pi} = (-1)^\alpha(-1)^{\pi_1}$ para todo $\pi \in S_m$.

Demonstração. Como toda permutação em S_m é um produto de transposições do tipo $(r\ r+1)$, vamos assumir que $\pi = (r\ r+1)$. Então

$$\alpha^\pi = \underbrace{a_{1,1}\dots a_{1,t_1}}_{t_1}\dots\underbrace{a_{r+1,1}\dots a_{r+1,t_{r+1}}}_{t_{r+1}}\underbrace{a_{r,1}\dots a_{r,t_r}}_{t_r}\dots\underbrace{a_{m,1}\dots a_{,t_m}}_{m,t_m}$$

pois apenas as subpalavras de comprimento t_{r+1} e t_r são mudadas de lugar. Assim, α^π é obtido por $t_r \cdot t_{r+1}$ transposições de letras subsequentes das palavras de posições r e $r+1$ em α. Portanto, $(-1)^{\alpha^\pi} = (-1)^\alpha(-1)^{t_r \cdot t_{r+1}}$.

Se $D = \emptyset$, então $(-1)^{\alpha^\pi} = (-1)^\alpha$, pois t_r e t_{r+1} são pares. Se $D \neq \emptyset$, então existem $\widetilde{\pi} \in Sym(D)$ e $\pi_1 \in Sym(s)$, onde, claramente, $\widetilde{\pi}$ e π_1 tem o mesmo sinal. Mais ainda, se pelo menos uma entre t_r e t_{r+1} forem pares, então $\widetilde{\pi} = id$ e $(-1)^{\alpha^\pi} = (-1)^\alpha(-1)^{\pi_1} = (-1)^\alpha$. Finalmente, assumindo que t_r e t_{r+1} são ambas ímpares, temos que $\widetilde{\pi} = (r\ r+1)$ e $(-1)^{\alpha^\pi} = (-1)^\alpha(-1)^{t_r \cdot t_{r+1}} = (-1)^\alpha(-1)^{\pi_1}$, pois $t_r \cdot t_{r+1}$ é ímpar. □

Exemplo 4.2.3. Seja $w = w_1w_2w_3 \in V_8^G$, onde

$$w_1 = x_4^{(g_1)}x_2^{(g_3)}x_1^{(g_2)}; w_2 = x_3^{(g_1)}x_7^{(g_2)}; w_3 = x_5^{(g_2)}x_6^{(g_3)}.$$

Defina, $Supp\{w_i\} = \{j \in \mathbb{N} \mid x_j^{(g)}$ aparece em w_i para algum $g \in G\}$, com $i = 1, 2, 3$. Dado $J = \{1, 3, 5, 7\}$, temos

$$|J \cap Supp\{w_1\}| = 1 = t_1$$

$$|J \cap Supp\{w_2\}| = 2 = t_2$$

$$|J \cap Supp\{w_3\}| = 1 = t_3.$$

Note que $|J| = t_1 + t_2 + t_3$. Considere a palavra de índices $1, 3, 5, 7$ na mesma ordem em que estes índices aparecem em w, ou seja $\underbrace{1}_{t_1}\underbrace{37}_{t_2}\underbrace{5}_{t_3}$. Como uma permutação $\alpha \in Sym(J)$ a palavra pode ser descrita como

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Agora, fazendo $b_i = \varphi_J(w_i)$, temos

$$b_1 = \varphi(w_1) = x_4^{(g_1,0)} x_2^{(g_3,0)} x_1^{(g_2,1)}$$

$$b_2 = \varphi(w_2) = x_3^{(g_1,1)} x_7^{(g_2,1)}$$

$$b_3 = \varphi(w_3) = x_5^{(g_2,1)} x_6^{(g_3,0)}.$$

Observe que $\delta(b_1) = 1$, $\delta(b_2) = 0$ e $\delta(b_3) = 1$, onde δ denota o $\mathbb{Z}_2$-grau. Veja que $\delta(b_i) = 1$ se, e somente se, t_i é ímpar.

Lema 4.2.4. *Sejam $f := f(x_1^{g_1}, \ldots, x_m^{g_m}) \in V_m^G$, $w_1, \ldots, w_m$ monômios em $K\langle X|G\rangle$ tais que $\delta_G(w_i) = g_i$ e $f(w_1, \ldots, w_m) \in V_n^G$. Seja $J \subset \widehat{n}$. Então existe $D \subset \{1, \ldots, m\}$ e elementos homogêneos $b_1, \ldots, b_m \in K\langle X|G \times \mathbb{Z}_2\rangle$, tais que*

i. $\delta_{G\times\mathbb{Z}_2}(b_i) = \delta_{G\times\mathbb{Z}_2}(\varphi_D(x_i^{g_i}))$.

ii. $\zeta_J(f(w_1, \ldots, w_m)) = \pm g(b_1, \ldots, b_m)$, *onde* $g = \zeta_D(f)$.

Demonstração. Seja $f(x_1^{g_1}, \ldots, x_m^{g_m}) = \sum_{\pi\in S_m} c_\pi x_{\pi(1)}^{g_{\pi(1)}} \ldots x_{\pi(m)}^{g_{\pi(m)}}$ e tome monômios $w_1, \ldots,$ w_m tais que $w = w_1 \cdots w_m$ é multilinear, ou seja, os termos em todos os w_i's são distintos. Definimos,

$$Supp(w_i) := \{j \in \mathbb{N} \mid x_j^g \text{ ocorre em } w_i, \text{ para algum } g \in G\}.$$

Seja $J = \{i_1, \ldots, i_k\}$ e $|J \cap Supp(w_i)| := t_i$. Como $f(w_1, \ldots, w_m) \in V_n^G$, temos que a união dos índices dos w_i's são iguais a $\widehat{n}$. Logo, todo $i_t \in J$ é tal que $i_t \in Supp(w_j)$, para algum j. Assim, $\sum_{i=1}^m t_i = k$. Sejam

$$a_{1,1} \ldots a_{1,t_1} a_{2,1} \ldots a_{2,t_2} \ldots a_{m,1} a_{m,t_m}$$

as letras de índices $i_1, \ldots, i_k$ das variáveis de w na mesma ordem em que aparecem em w. Isto define a permutação $\alpha \in Sym(J)$

$$\alpha = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ a_{1,1} & \dots & a_{m,t_m} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, seja

$$D = \{i \mid t_i \equiv 1 \pmod 2\},$$

isto é, D é o índice dos monômios w_i's tais que a quantidade de elementos de w_i que estão em J é ímpar. Daí $\zeta_J(w) = (-1)^\alpha \varphi_J(w)$ e, para todo $\pi \in S_m$, pelo Lema 4.2.4 obtemos

$$\zeta_J(w_{\pi(1)} \cdots w_{\pi(m)}) = (-1)^{\alpha^\pi} \varphi_J(w_{\pi(1)} \dots w_{\pi(m)}) = (-1)^\alpha (-1)^{\pi_1} \varphi_J(w_{\pi(1)} \cdots w_{\pi(m)})$$

se $D \neq \emptyset$. Por outro lado, se $D = \emptyset$, segue que

$$\zeta_J(w_{\pi(1)} \cdots w_{\pi(m)}) = (-1)^{\alpha^\pi} \varphi_J(w_{\pi(1)} \cdots w_{\pi(m)}) = (-1)^\alpha \varphi_J(w_{\pi(1)} \cdots w_{\pi(m)}).$$

Agora, seja g o polinômio

$$g(x_1^{(g_1,h_1)}, \dots, x_m^{(g_m,h_m)}) = \zeta_D(f(x_1^{g_1}, \dots, x_m^{g_m}))$$

e

$$b_i := \varphi_J(w_i).$$

Observe que, para todo $i = 1, \dots, m$ o G-grau de b_i e w_i são iguas. Além disso, o $\mathbb{Z}_2$-grau de b_i é par se o $\mathbb{Z}_2$-grau de $\varphi_J(w_i)$ for par e isto ocorre se o número de variáveis de grau ímpar em $\varphi_J(w_i)$ for ímpar. Ou seja, b_i é par se, e somente se, $i \in D$. Mais ainda, $\varphi_D(x_i^{g_i})$ tem $\mathbb{Z}_2$-grau ímpar. Logo

$$\delta_{G\times\mathbb{Z}_2}(b_i) = \delta_{G\times\mathbb{Z}_2}(\varphi_D(x_i^{g_i}))$$

e a parte i) está demonstrada.

Para completar a demonstração, observe que se $D \neq \emptyset$, temos

$$\begin{aligned} g(x_1^{(g_1,h_1)}, \dots, x_m^{(g_m,h_m)}) &= \zeta_D \left(\sum_{\pi \in S_m} c_\pi x_{\pi(1)}^{g_{\pi(1)}} \cdots x_{\pi(m)}^{g_{\pi(m)}} \right) \\ &= \sum_{\pi \in S_m} c_\pi (-1)^{\pi_1} \varphi_D(x_{\pi(1)}^{g_{\pi(1)}} \cdots x_{\pi(m)}^{g_{\pi(m)}}) \end{aligned}$$

e assim, multiplicando ambos os membros por $(-1)^\alpha$ e substituindo os $b_1, \dots b_m$, obtemos

$$\begin{aligned} (-1)^\alpha g(b_1, \dots, b_m) &= (-1)^\alpha \sum c_\pi (-1)^{\pi_1} b_{\pi(1)} \cdots b_{\pi(m)} \\ &= \sum c_\pi (-1)^\alpha (-1)^{\pi_1} \varphi_J(w_{\pi(1)}) \cdots \varphi_J(w_{\pi(m)}) \\ &= \sum c_\pi \zeta_J(w_{\pi(1)} \cdots w_{\pi(m)}) \\ &= \zeta_J(f(w_1, \dots, w_m)). \end{aligned}$$

Analogamente, se $D = \emptyset$,

$$\begin{aligned} g(x_1^{(g_1,h_1)}, \ldots, x_m^{(g_m,h_m)}) &= \zeta_D \left(\sum_{\pi \in S_m} c_\pi x_{\pi(1)}^{g_{\pi(1)}} \cdots x_{\pi(m)}^{g_{\pi(m)}} \right) \\ &= \sum_{\pi \in S_m} c_\pi x_{\pi(1)}^{g_{\pi(1)}} \cdots x_{\pi(m)}^{g_{\pi(m)}} \end{aligned}$$

e, novamente, multiplicando ambos os membros por $(-1)^\alpha$ e substituindo os $b_1, \ldots b_m$, temos

$$\begin{aligned} (-1)^\alpha g(b_1, \ldots, b_m) &= (-1)^\alpha \sum c_\pi b_{\pi(1)} \cdots b_{\pi(m)} \\ &= \sum c_\pi (-1)^\alpha \varphi_J(w_{\pi(1)}) \cdots \varphi_J(w_{\pi(m)}) \\ &= \sum c_\pi \zeta_J(w_{\pi(1)} \cdots w_{\pi(m)}) \\ &= \zeta_J(f(w_1, \ldots, w_m)). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\zeta_J(f(w_1, \ldots, w_m)) = \pm g(b_1, \ldots, b_m),$$

onde $g = \zeta_D(f)$ e assim a segunda parte do lema está demonstrada.

$\square$

Teorema 4.2.5. *Seja $\mathscr{E} \subset K\langle X|G\rangle$ um sistema de geradores multilineares para $T_G(A)$. Então, o conjunto*

$$\{\zeta_J(f) \in K\langle X|G \times \mathbb{Z}_2 \mid f \in \mathscr{E}, J \subset \mathbb{N}\}$$

é um sistema de geradores multilineares para $T_{G\times\mathbb{Z}_2}(A \otimes E)$.

Demonstração. Seja U um $T_{G\times\mathbb{Z}_2}$-ideal gerado por

$$\{\zeta_J(f) \in K\langle X|G \times \mathbb{Z}_2\rangle \mid f \in \mathscr{E}, j \subset \mathbb{N}\}.$$

Pelo Lema 4.1.4, temos que $U \subset T_{G\times\mathbb{Z}_2}(A \otimes E)$, pois $\zeta_J(f) \in T_{G\times\mathbb{Z}_2}(A \otimes E)$. Seja $h \in T_{G\times\mathbb{Z}_2}(A \otimes E)$. Como char$K = 0$, podemos assumir que $h \in V^{G\times\mathbb{Z}_2}_{p_1,q_1\ldots,p_r,q_r} \cap T_{G\times\mathbb{Z}_2}(A \otimes E)$. Então pelo Lema 4.1.6, existe $\overline{h} \in V^G_{p_1+q_1,\ldots,p_r+q_r} \cap T_G(A)$ e $J \subset \mathbb{N}$ tal que $h = \zeta_J(\overline{h})$. Como $\overline{h}$ está no T_G-ideal gerado por $\mathscr{E}$, segue que

$$\overline{h} = \sum \alpha_f u_f f(w_1, \ldots, w_m) v_f$$

para algum $f \in \mathscr{E}$, para alguns monômios u_f, v_f, w_f e escalares α_f. Por outro lado, para cada f

$$\zeta_J(u_f f(w_1, \ldots, w_m) v_f) = \pm \zeta_J(u_f) \zeta_J(f) \zeta_J(v_f)$$

e pelo Lema 4.2.4 existe algum $D(f) = D \subset \{1, \dots m\}$ e elementos homogêneos $b_i = b_i(f)$, com $\delta_{G\times\mathbb{Z}_2}(b_i) = \delta_{G\times\mathbb{Z}_2}(\varphi_D(x_i^{g_i}))$ tais que $\zeta_J(f(w_1, \dots, w_m)) = \pm g(b_1, \dots, b_m)$, para $g = \zeta_D(f)$.

Observe que, em particular, $g = \zeta_D(f)$ está em U e a substituição $(b_1, \dots, b_m)$ é $G \times \mathbb{Z}_2$-admissível, logo $g(b_1, \dots, b_m) \in U$. Isto implica que

$$\zeta_J(\overline{h}) = \sum \pm\alpha_f \zeta_J(u_f)\zeta_J(f(w_1, \dots, w_m))\zeta_J(v_f) \in U,$$

pois u_f, v_f são monômios e $\zeta_J(f(w_1, \dots, w_m)) = \pm g(b_1, \dots, b_m) \in U$. Assim, $h \in U$ e $T_{G\times\mathbb{Z}_2}(A \otimes E) \subset U$.

$\square$

4.3 Identidades $Z_n \times \mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_n(E)$

A primeira aplicação do Teorema 4.2.5 descreve as identidades $Z_n \times \mathbb{Z}_2$-graduadas da álgebra de matrizes $M_n(E)$. Para tal, utilizaremos o resultado de Vasilovsky [35], no qual foi encontrado um conjunto de geradores para as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas da álgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada $M_n(K)$. Vasilovsky já havia descrito as identidades polinomiais $\mathbb{Z}$-graduadas da álgebra das matrizes $M_n(K)$ em [34]. Inicialmente, note que podemos utilizar o Teorema 4.2.5, pois $M_n(E) \cong M_n(K) \otimes (E)$ e assim se trata de uma álgebra do tipo $A \otimes E$.

Corolário 4.3.1. *O ideal $T_{\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_2}(M_n(E))$ é gerado pelo seguinte conjunto de identidades multilineares:*

$$[x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,0)}]$$
$$[x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,1)}]$$
$$x_1^{(0,1)}x_2^{(0,1)} + x_2^{(0,1)}x_1^{(0,1)}$$
$$x_1^{(i,0)}x_2^{(-i,0)}x_3^{(i,0)} - x_3^{(i,0)}x_2^{(-i,0)}x_1^{(i,0)}$$
$$x_1^{(i,0)}x_2^{(-i,0)}x_3^{(i,1)} - x_3^{(i,1)}x_2^{(-i,0)}x_1^{(i,0)}$$
$$x_1^{(i,0)}x_2^{(-i,1)}x_3^{(i,0)} - x_3^{(i,0)}x_2^{(-i,1)}x_1^{(i,0)}$$
$$x_1^{(i,1)}x_2^{(-i,1)}x_3^{(i,0)} + x_3^{(i,0)}x_2^{(-i,1)}x_1^{(i,1)}$$
$$x_1^{(i,1)}x_2^{(-i,0)}x_3^{(i,1)} + x_3^{(i,1)}x_2^{(-i,0)}x_1^{(i,1)}$$
$$x_1^{(i,1)}x_2^{(-i,1)}x_3^{(i,1)} + x_3^{(i,1)}x_2^{(-i,1)}x_1^{(i,1)}$$

para $i \in \mathbb{Z}_n$.

Demonstração. Por Vasilovsky, [35], o $T_{\mathbb{Z}_n}$-ideal de $M_n(K)$ é gerado pelo conjunto de monômios multilineares do tipo

$$\{[x_1^0, x_2^0]; x_1^i x_2^{-i} x_3^i - x_3^i x_2^{-1} x_1^i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}.$$

Pelo Teorema 4.2.5, temos que os elementos $\zeta_J(f)$, onde f pertence a base do T_G-ideal, formam uma base do $T_{G\times\mathbb{Z}_2}$-ideal. Então, variando $J \subset \{1,2,3\}$, onde $\{1,2,3\}$ é o conjunto dos possíveis índices, temos os geradores de $T_{G\times\mathbb{Z}_2}(M_n(E))$. Vamos começar avaliando o monômio $[x_1^0, x_2^0]$:

$$\begin{aligned}\zeta_J([x_1^0, x_2^0]) &= \zeta_J(x_1^0 x_2^0 - x_2^0 x_1^0)\\ &= \zeta_J(x_1^0 x_2^0) - \zeta_J(x_2^0 x_1^0)\\ &= (-1)^\sigma \varphi_J(x_1^0 x_2^0) - (-1)^\tau \varphi_J(x_2^0 x_1^0),\end{aligned}$$

onde $\sigma, \tau \in Sym(\{1,2,3\})$. Se $J = \emptyset$, então

$$\zeta_J([x_1^0, x_2^0]) = x_1^{(0,0)} x_2^{(0,0)} - x_2^{(0,0)} x_1^{(0,0)} = [x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,0)}].$$

Se $J = \{1\}$, então

$$\zeta_J([x_1^0, x_2^0]) = x_1^{(0,1)} x_2^{(0,0)} - x_2^{(0,0)} x_1^{(0,1)} = [x_1^{(0,1)}, x_2^{(0,0)}].$$

Se $J = \{2\}$, então

$$\zeta_J([x_1^0, x_2^0]) = x_1^{(0,0)} x_2^{(0,1)} - x_2^{(0,1)} x_1^{(0,0)} = [x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,1)}].$$

Observe que, em todos os casos anteriores $\sigma = \tau = id$ e $(-1)^\sigma = (-1)^\tau = 1$. Mais ainda, o caso $J = \{2\}$ gera um monômio que é consequência do monômio gerado em $J = \{1\}$ e o caso $J = \{3\}$ gera um monômio idêntico ao gerado em $J = \emptyset$.

Se $J = \{1,2\}$, então

$$\zeta_J([x_1^0, x_2^0]) = x_1^{(0,1)} x_2^{(0,1)} + x_2^{(0,1)} x_1^{(0,1)},$$

onde $\sigma = id$ e $\tau = (12)$.

Os casos $J = \{1,3\}$ e $J = \{2,3\}$ geram polinômios idênticos aos gerados em $J = \{1\}$ e $J = \{2\}$, pois não temos nenhuma variável de subíndice 3. Por último, o caso $J = \{1,2,3\}$ é análogo ao caso anterior, pois novamente não temos variável de índice 3. Com isso, concluímos a avaliação do gerador $[x_1^0, x_2^0]$.

Avaliando agora o monômio $x_1^i x_2^{-i} x_3^i - x_3^i x_2^{-i} x_1^i$, temos:

$$\begin{aligned}\zeta_J(x_1^i x_2^{-i} x_3^i - x_3^i x_2^{-i} x_1^i) &= \zeta_J(x_1^i x_2^{-i} x_3^i) - \zeta_J(x_3^i x_2^{-i} x_1^i)\\ &= (-1)^\sigma \varphi_J(x_1^i x_2^{-i} x_3^i) - (-1)^\tau \varphi_J(x_3^i x_2^{-i} x_1^i).\end{aligned}$$

Seguindo o raciocínio anterior, se $J = \emptyset$, então

$$\zeta_J(x_1^i x_2^{-i} x_3^i - x_3^i x_2^{-i} x_1^i) = x_1^{(i,0)} x_2^{(-i,0)} x_3^{(i,0)} - x_3^{(i,0)} x_2^{(-i,0)} x_1^{(i,0)}.$$

Se $J = \{1\}$, então

$$\zeta_J(x_1^i x_2^{-i} x_3^i - x_3^i x_2^{-i} x_1^i) = x_1^{(i,1)} x_2^{(-i,0)} x_3^{(i,0)} - x_3^{(i,0)} x_2^{(-i,0)} x_1^{(i,1)}.$$

Se $J = \{2\}$, então

$$\zeta_J(x_1^i x_2^{-i} x_3^i - x_3^i x_2^{-i} x_1^i) = x_1^{(i,0)} x_2^{(-i,1)} x_3^{(i,0)} - x_3^{(i,0)} x_2^{(-i,1)} x_1^{(i,0)}.$$

Se $J = \{3\}$, então

$$\zeta_J(x_1^i x_2^{-i} x_3^i - x_3^i x_2^{-i} x_1^i) = x_1^{(i,0)} x_2^{(-i,0)} x_3^{(i,1)} - x_3^{(i,1)} x_2^{(-i,0)} x_1^{(i,0)}.$$

Observe que em todos os casos anteriores $\sigma = \tau = id$. Mais ainda, o monômio obtido quando $J = \{3\}$ é consequência do obtido em $J = \{1\}$, pois $x_1^{(i,0)} x_2^{(-i,0)} x_3^{(i,1)} - x_3^{(i,1)} x_2^{(-i,0)} x_1^{(i,0)}$ é equivalente a $-(x_1^{(i,1)} x_2^{(-i,0)} x_3^{(i,0)} - x_3^{(i,0)} x_2^{(-i,0)} x_1^{(i,1)})$, após uma mudança de subíndices. Continuando:

Se $J = \{1, 2\}$, então

$$\zeta_J(x_1^i x_2^{-i} x_3^i - x_3^i x_2^{-i} x_1^i) = x_1^{(i,1)} x_2^{(-i,1)} x_3^{(i,0)} + x_3^{(i,0)} x_2^{(-i,1)} x_1^{(i,1)},$$

onde $\sigma = id$ e $\tau = (12)$.

Se $J = \{1, 3\}$, então

$$\zeta_J(x_1^i x_2^{-i} x_3^i - x_3^i x_2^{-i} x_1^i) = x_1^{(i,1)} x_2^{(-i,0)} x_3^{(i,1)} + x_3^{(i,1)} x_2^{(-i,0)} x_1^{(i,1)},$$

onde $\sigma = id$ e $\tau = (13)$.

Se $J = \{2, 3\}$, então

$$\zeta_J(x_1^i x_2^{-i} x_3^i - x_3^i x_2^{-i} x_1^i) = x_1^{(i,0)} x_2^{(-i,1)} x_3^{(i,1)} + x_3^{(i,1)} x_2^{(-i,1)} x_1^{(i,0)},$$

onde $\sigma = id$ e $\tau = (13)$. Mais ainda, note que o monômio obtido neste caso é consequência do obtido em $J = \{1, 2\}$.

Por último, se $J = \{1, 2, 3\}$, então

$$\zeta_J(x_1^i x_2^{-i} x_3^i - x_3^i x_2^{-i} x_1^i) = x_1^{(i,1)} x_2^{(-i,1)} x_3^{(i,1)} + x_3^{(i,1)} x_2^{(-i,1)} x_1^{(i,1)},$$

onde $\sigma = id$ e $\tau = (13)$.

Portanto, eliminando os casos em os monômios obtidos são consequências de outros ou são idênticos, chegamos a base do enunciado.

□

4.4 A álgebra $M_2(E)$

No restante da dissertação, vamos estudar a álgebra $M_2(E)$. O famoso teorema estrutural de Kemer diz que as álgebras $M_{k,l}(E) \otimes E$ e $M_{k+l}(E)$ são PI-equivalentes. Um caso particular deste resultado pode ser demonstrado com o que obtemos.

Teorema 4.4.1. *As álgebras $M_{1,1}(E) \otimes E$ e $M_2(E)$ são PI-equivalentes.*

Demonstração. Pelo resultado de Di Vincenzo, em [10], as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_{1,1}(E)$ são geradas pelo sistema $\{[x_1^0, x_2^0], x_1^1x_2^1x_3^1 + x_3^1x_2^1x_1^1\}$. Então, variando $J \subset \{1,2,3\}$ e usando o Teorema 4.2.5, da mesma forma como foi feito no corolário anterior, chegaremos na base de $T_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E) \otimes (E))$. Vamos começar avaliando o polinômio $[x_1^0, x_2^0]$:

$$\begin{aligned}\zeta_J([x_1^0, x_2^0]) &= \zeta_J(x_1^0x_2^0 - x_2^0x_1^0)\\ &= \zeta_J(x_1^0x_2^0) - \zeta_J(x_2^0x_1^0)\\ &= (-1)^\sigma\varphi_J(x_1^0x_2^0) - (-1)^\tau\varphi_J(x_2^0x_1^0),\end{aligned}$$

onde $\sigma, \tau \in Sym(\{1,2,3\})$. Se $J = \emptyset$, então

$$\zeta_J([x_1^0, x_2^0]) = x_1^{(0,0)}x_2^{(0,0)} - x_2^{(0,0)}x_1^{(0,0)} = [x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,0)}].$$

Se $J = \{1\}$, então

$$\zeta_J([x_1^0, x_2^0]) = x_1^{(0,1)}x_2^{(0,0)} - x_2^{(0,0)}x_1^{(0,1)} = [x_1^{(0,1)}, x_2^{(0,0)}].$$

Se $J = \{2\}$, então

$$\zeta_J([x_1^0, x_2^0]) = x_1^{(0,0)}x_2^{(0,1)} - x_2^{(0,1)}x_1^{(0,0)} = [x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,1)}].$$

Observe que, em todos os casos anteriores $\sigma = \tau = id$ e $(-1)^\sigma = (-1)^\tau = 1$. Mais ainda, o caso $J = \{1\}$ gera um monômio que é consequência do monômio gerado em $J = \{2\}$ e o caso $J = \{3\}$ gera um monômio idêntico ao gerado em $J = \emptyset$.

Se $J = \{1,2\}$, então

$$\zeta_J([x_1^0, x_2^0]) = x_1^{(0,1)}x_2^{(0,1)} + x_2^{(0,1)}x_1^{(0,1)},$$

onde $\sigma = id$ e $\tau = (12)$. O caso $J = \{1,2,3\}$ é análogo ao caso anterior. Com isso, concluímos a avaliação do gerador $[x_1^0, x_2^0]$. Avaliando agora o monômio $x_1^1x_2^1x_3^1 - x_3^1x_2^1x_1^1$, temos:

$$\begin{aligned}\zeta_J(x_1^1x_2^1x_3^1 + x_3^1x_2^1x_1^1) &= \zeta_J(x_1^1x_2^1x_3^1) + \zeta_J(x_3^1x_2^1x_1^1)\\ &= (-1)^\sigma\varphi_J(x_1^1x_2^1x_3^1) + (-1)^\tau\varphi_J(x_3^1x_2^1x_1^1).\end{aligned}$$

Seguindo o raciocínio anterior, se $J = \emptyset$, então

$$\zeta_J(x_1^1x_2^1x_3^1 - x_3^1x_2^1x_1^1) = x_1^{(1,0)}x_2^{(1,0)}x_3^{(1,0)} + x_3^{(1,0)}x_2^{(1,0)}x_1^{(1,0)}.$$

Se $J = \{1\}$, então

$$\zeta_J(x_1^1x_2^1x_3^1 - x_3^1x_2^1x_1^1) = x_1^{(1,1)}x_2^{(1,0)}x_3^{(1,0)} + x_3^{(1,0)}x_2^{(1,0)}x_1^{(1,1)}.$$

Se $J = \{2\}$, então

$$\zeta_J(x_1^1x_2^1x_3^1 + x_3^1x_2^1x_1^1) = x_1^{(1,0)}x_2^{(1,1)}x_3^{(1,0)} + x_3^{(1,0)}x_2^{(1,1)}x_1^{(1,0)}.$$

Se $J = \{3\}$, então

$$\zeta_J(x_1^1x_2^1x_3^1 + x_3^1x_2^1x_1^1) = x_1^{(1,0)}x_2^{(1,0)}x_3^{(1,1)} - x_3^{(1,1)}x_2^{(1,0)}x_1^{(1,0)}.$$

Observe que em todos os casos anteriores $\sigma = \tau = id$. Mais ainda, o monômio obtido quando $J = \{3\}$ é consequência do obtido em $J = \{1\}$.

Se $J = \{1, 2\}$, então

$$\zeta_J(x_1^1x_2^1x_3^1 + x_3^1x_2^1x_1^1) = x_1^{(1,1)}x_2^{(1,1)}x_3^{(1,0)} - x_3^{(1,0)}x_2^{(1,1)}x_1^{(1,1)},$$

onde $\sigma = id$ e $\tau = (12)$.

Se $J = \{1, 3\}$, então

$$\zeta_J(x_1^1x_2^1x_3^1 + x_3^1x_2^1x_1^1) = x_1^{(1,1)}x_2^{(1,0)}x_3^{(1,1)} - x_3^{(1,1)}x_2^{(1,0)}x_1^{(1,1)},$$

onde $\sigma = id$ e $\tau = (13)$.

Se $J = \{2, 3\}$, então

$$\zeta_J(x_1^1x_2^1x_3^1 + x_3^1x_2^1x_1^1) = x_1^{(1,0)}x_2^{(1,1)}x_3^{(1,1)} - x_3^{(1,1)}x_2^{(1,1)}x_1^{(1,0)},$$

onde $\sigma = id$ e $\tau = (13)$. Mais ainda, note que o monômio obtido neste caso é consequência do obtido em $J = \{1, 2\}$. Por último, se $J = \{1, 2, 3\}$, então

$$\zeta_J(x_1^1x_2^1x_3^1 + x_3^1x_2^1x_1^1) = x_1^{(1,1)}x_2^{(1,1)}x_3^{(1,1)} - x_3^{(1,1)}x_2^{(1,1)}x_1^{(1,1)},$$

onde $\sigma = id$ e $\tau = (13)$.

Obtemos assim o seguinte conjunto de geradores para $T_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E) \otimes (E))$:

$$[x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,0)}]$$
$$[x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,1)}]$$
$$x_1^{(0,1)}x_2^{(0,1)} + x_2^{(0,1)}x_1^{(0,1)}$$
$$x_1^{(1,0)}x_2^{(1,0)}x_3^{(1,0)} + x_3^{(1,0)}x_2^{(1,0)}x_1^{(1,0)}$$

$$x_1^{(1,1)}x_2^{(1,0)}x_3^{(1,0)} + x_3^{(1,0)}x_2^{(1,0)}x_1^{(1,1)}$$
$$x_1^{(1,0)}x_2^{(1,1)}x_3^{(1,0)} + x_3^{(1,0)}x_2^{(1,1)}x_1^{(1,0)}$$
$$x_1^{(1,1)}x_2^{(1,1)}x_3^{(1,0)} - x_3^{(1,0)}x_2^{(1,1)}x_1^{(1,1)}$$
$$x_1^{(1,1)}x_2^{(1,0)}x_3^{(1,1)} - x_3^{(1,1)}x_2^{(1,0)}x_1^{(1,1)}$$
$$x_1^{(1,1)}x_2^{(1,1)}x_3^{(1,1)} - x_3^{(1,1)}x_2^{(1,1)}x_1^{(1,1)}.$$

Por outro lado, do Corolário 4.3.1, os geradores das identidades $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ graduadas de $M_2(E)$ são:

$$[x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,0)}]$$
$$[x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,1)}]$$
$$x_1^{(0,1)}x_2^{(0,1)} + x_2^{(0,1)}x_1^{(0,1)}$$
$$x_1^{(1,0)}x_2^{(1,0)}x_3^{(1,0)} - x_3^{(1,0)}x_2^{(1,0)}x_1^{(1,0)}$$
$$x_1^{(1,1)}x_2^{(1,0)}x_3^{(1,0)} - x_3^{(1,0)}x_2^{(1,0)}x_1^{(1,1)}$$
$$x_1^{(1,0)}x_2^{(1,1)}x_3^{(1,0)} - x_3^{(1,0)}x_2^{(1,1)}x_1^{(1,0)}$$
$$x_1^{(1,1)}x_2^{(1,1)}x_3^{(1,0)} + x_3^{(1,0)}x_2^{(1,1)}x_1^{(1,1)}$$
$$x_1^{(1,1)}x_2^{(1,0)}x_3^{(1,1)} + x_3^{(1,1)}x_2^{(1,0)}x_1^{(1,1)}$$
$$x_1^{(1,1)}x_2^{(1,1)}x_3^{(1,1)} + x_3^{(1,1)}x_2^{(1,1)}x_1^{(1,1)}.$$

Observe que estas identidades foram obtidas tomando $i = \overline{1} \in \mathbb{Z}_2$. Não é necessário tomar $i = \overline{0} \in \mathbb{Z}_2$, pois os polinômios encontrados desta forma são consequências dos polinômios anteriormente descritos.

Assim, os geradores obtidos para $T_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(M_2(E))$ e $T_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E)\otimes E)$ coincidem a menos de sinal. Para acabar com este problema, vamos tomar o seguinte automorfismo de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$:

$$l := \begin{cases} (0,1) \to (0,1) \\ (1,0) \to (1,1) \end{cases}.$$

Após aplicarmos o automorfismo, as bases irão coincidir. Por exemplo, tomando $x_1^{(1,0)}x_2^{(1,0)}x_3^{(1,0)} + x_3^{(1,0)}x_2^{(1,0)}x_1^{(1,0)}$ que está na base de $T_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E) \otimes (E))$, temos

$$l(x_1^{(1,0)}x_2^{(1,0)}x_3^{(1,0)} + x_3^{(1,0)}x_2^{(1,0)}x_1^{(1,0)}) = x_1^{(1,1)}x_2^{(1,1)}x_3^{(1,1)} + x_3^{(1,1)}x_2^{(1,1)}x_1^{(1,1)},$$

que é um polinômio pertencente a base de $T_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(M_2(E))$.

Com respeito a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-graduação, $T_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(M_2(E))$ possui os mesmo geradores que $T_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E)\otimes(E))$. Logo, $T_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E)\otimes E) = T_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(M_2(E))$ e pelo Lema 2.3.5 as álgebras são PI-equivalentes.

$\square$

Agora, vamos descrever os cocaracteres para o $T_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}$-ideal de $M_2(E)$. Primeiramente, pelo resultado de Di Vicenzo [10], temos:

Lema 4.4.2. *Considere $M_2(K)$ com a $\mathbb{Z}_2$-graduação natural. Então,*

$$\chi^{\mathbb{Z}_2}_{n,0}(M_2(K)) = \begin{array}{|c|}\hline n \quad\quad\quad \\ \hline\end{array}$$

e para $m > 0$

$$\chi^{\mathbb{Z}_2}_{n,m}(M_2(K)) = \sum_{\substack{(n_1,n_2)\vdash n\\(m_1,m_2)\vdash m}} (n_1 - n_2 + 1) \begin{array}{|c|c|}\hline n_1 & \quad\quad \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{n_2} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|}\hline m_1 & \quad\quad \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{m_2} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}.$$

Vamos então demonstrar que:

Lema 4.4.3. *Sejam $H := S_{p_1}\times S_{q_1}\times S_{p_2}\times S_{q_2}$, $n = p_1 + q_1$ e $m = p_2 + q_2$. Então,*

$$\chi^{\mathbb{Z}_2}_{n,m}(M_2(K)) \downarrow H = \sum_{\substack{(a_i,b_i)\vdash p_i\\(c_i,d_i)\vdash q_i}} m_{\langle\lambda\rangle}\langle\lambda\rangle$$

onde

$$\langle\lambda\rangle = \begin{array}{|c|c|}\hline a_1 & \quad\quad \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{b_1} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|}\hline c_1 & \quad\quad \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{d_1} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|}\hline a_2 & \quad\quad \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{b_2} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|}\hline c_2 & \quad\quad \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{d_2} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array},$$

$$m_{\langle\lambda\rangle} = (k_1+1)(k_2+1)((a_1-b_1)+(c_1-d_1)-(k_1-1))$$

e $k_i := \min\{a_i - b_i, c_i - d_i\}$. Se $m = 0$, então

$$X^{\mathbb{Z}_2}_{n,0}(M_2(K)) \downarrow H = \begin{array}{|c|}\hline p_1 \quad\quad\quad \\ \hline\end{array} \otimes \begin{array}{|c|}\hline p_2 \quad\quad\quad \\ \hline\end{array}.$$

Demonstração. O lema anterior já caracteriza os cocaracteres de $M_2(K)$ e estes são do tipo $\upsilon\otimes\mu$, onde υ é um caracter gerado pela partição (n_1, n_2) de n e μ é um carácter gerado pela partição (m_1, m_2) de m. Além disto já conhecemos os coeficientes que acompanham cada um destes termos. Assim, determinar $\chi^{\mathbb{Z}_2}(M_2(K)) \downarrow H$ é equivalente a determinar $(\upsilon\otimes\mu)\downarrow H$, para cada $\upsilon\otimes\mu$ pertencente a base.

Observe que,

$$(\upsilon\otimes\mu)\downarrow H = \upsilon\downarrow(S_{p_1}\times S_{q_1})\otimes\mu\downarrow(S_{p_2}\times S_{q_2}),$$

pois (p_1, q_1) é uma partição de n assim como υ e o mesmo para (p_2, q_2) e μ. Por se tratarem de casos análogos, basta calcular a multiplicidade de cada componente da decomposição de $\upsilon = (n_1, n_2)\downarrow S_{p_1}\times S_{q_1}$.

Pela regra de Littlewood-Richardson, cada componente da imersão de $(n_1, n_2)\downarrow S_{p_1}\times S_{q_1}$ é do tipo

$$\begin{array}{|l|}\hline n_1 - x \\ \hline n_2 - y \\ \hline \end{array},$$

e pela Regra de Young cada uma destas componentes pode ser reescrita na forma

$$\begin{array}{|l|}\hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|l|}\hline c \\ \hline d \\ \hline \end{array}.$$

Utilizando o Teorema da Reciprocidade de Frobenius, ver [20], a multiplicidade destas componentes em

$$\begin{array}{|l|}\hline n_1 \\ \hline n_2 \\ \hline \end{array} \downarrow S_{p_1} \times S_{p_2}$$

é a mesma que a de v em

$$\begin{array}{|l|}\hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|l|}\hline c \\ \hline d \\ \hline \end{array} \uparrow S_n.$$

Como existe exatamente uma maneira de se obter

$$\begin{array}{|l|}\hline n_1 \\ \hline n_2 \\ \hline \end{array}$$

começando de

$$\begin{array}{|l|}\hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|l|}\hline c \\ \hline d \\ \hline \end{array}$$

está multiplicidade é 1. Os diagramas de duas linhas induzidas em S_n por esta dupla partição são

$$\begin{array}{|l|}\hline a + c - h \\ \hline b + h + d \\ \hline \end{array}$$

para $0 \leq h \leq k := \min\{a - b, c - d\}$, onde cada um entre este tem multiplicidade 1. O diagrama acima foi obtido utilizando a Regra de Littlewood-Richardson, retirando box's das primeiras linhas e colocando na segunda. Assim, pelo Lema 4.4.2, temos

$$(\chi_{n,m}(M_2(K))) \downarrow H = \sum_{\substack{(n_1,n_2)\vdash n \\ (m_1,m_2)\vdash m}} (n_1 - n_2 + 1)((n_1, n_2) \otimes (m_1, m_2)) \downarrow H$$

$$= \sum_{\substack{(a_i,b_i)\vdash p_i \\ (c_i,d_i)\vdash q_i}} \sum_{h_1=0}^{k_1} \sum_{h_2=0} k_2((a_1 - b_1) + (c_1 - d_1) - 2h_1 + 1) \cdot (a_1, b_1) \otimes (c_1, d_1) \otimes (a_2, b_2) \otimes (c_2, d_2).$$

O coeficiente foi encontrado da seguinte forma: como $n_1 = a_1 + c_1 - h$ e $n_2 = b_1 + a_1 + h$, segue que

$$\begin{aligned} n_1 - n_2 + 1 &= a_1 + c_1 - h - (b_1 + d_1 + h) + 1 \\ &= (a_1 - b_1) + (c_1 - d_1) - 2h + 1. \end{aligned}$$

Logo

$$(\chi_{n,m}(M_2(K))) \downarrow H = \sum_{\substack{(a_i,b_i)\vdash p_i \\ (c_i,d_i)\vdash q_i}} m_{\langle\lambda\rangle}\langle\lambda\rangle,$$

onde

$$\langle\lambda\rangle = \begin{array}{|l|l|}\hline a_1 & \qquad \\ \hline b_1 & \multicolumn{1}{l}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \otimes \begin{array}{|l|l|}\hline c_1 & \qquad \\ \hline d_1 & \multicolumn{1}{l}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \otimes \begin{array}{|l|l|}\hline a_2 & \qquad \\ \hline b_2 & \multicolumn{1}{l}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \otimes \begin{array}{|l|l|}\hline c_2 & \qquad \\ \hline d_2 & \multicolumn{1}{l}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

e

$$m_{\langle\lambda\rangle} = (k_1+1)(k_2+1)((a_1-b_1)+(c_1-d_1)-(k_1-1)).$$

De fato,

$$\sum_{h_1=0}^{k_1}\sum_{h_2}^{k_2}((a_1-b_1)+(c_1-d_1)-2h_1+1) = \sum_{h_1=0}^{k_1}(k_2+1)((a_1-b_1)+(c_1-d_1)+1-2(k_2+1)h_1$$

$$\begin{aligned}
&= (k_1+1)(k_2+1)((a_1-b_1)+(c_1-d_1)+1) - 2(k_2+1)\sum_{h_1=0}^{k_1} h_1 \\
&= (k_1+1)(k_2+1)((a_1-b_1)+(c_1-d_1)+1) - 2(k_2+1)\frac{(k_1)(k_1+1)}{2} \\
&= (k_1+1)(k_2+1)((a_1-b_1)+(c_1-d_1)-(k_1-1)).
\end{aligned}$$

O caso $m=0$ segue diretamente da primeira parte do Lema 4.4.2. $\square$

Da Proposição 4.1.10 e do Lema 4.4.2, segue diretamente seguinte corolário:

Corolário 4.4.4. *Temos*

$$\chi^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}_{p_1,q_1,p_2,q_2}(M_2(E)) = \sum_{\substack{(a_i,b_i)\vdash p_i \\ (c_i,d_i)\vdash q_i}} m_{\langle\lambda\rangle}\langle\lambda^*\rangle$$

onde

$$\langle\lambda^*\rangle = \begin{array}{|l|l|}\hline a_1 & \qquad \\ \hline b_1 & \multicolumn{1}{l}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|}\hline c_1 & d_1 \\ \cline{2-2} & \multicolumn{1}{c}{} \\ & \multicolumn{1}{c}{} \\ & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \otimes \begin{array}{|l|l|}\hline a_2 & \qquad \\ \hline b_2 & \multicolumn{1}{l}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|}\hline c_2 & d_2 \\ \cline{2-2} & \multicolumn{1}{c}{} \\ & \multicolumn{1}{c}{} \\ & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

e

$$m_{\langle\lambda\rangle} = (k_1+1)(k_2+1)((a_1-b_1)+(c_1-d_1)-(k_1-1)),$$

com $k_i := \min\{a_i - b_i, c_i - d_i\}$. *Em particular,*

$$\chi^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}_{p_1,q_1,0,0}(M_2(E)) = \boxed{\;p_1 \qquad\quad} \otimes \boxed{\begin{array}{c} q_1 \\ \\ \\ \\ \end{array}}\,.$$

4.5 Considerações Finais

Durante esta dissertação, mostramos a PI-equivalência entre as álgebras do tipo $M_\alpha(E)\otimes M_\beta(E)$ que em particular resulta na PI-equivalência entre as álgebras $M_{p,q}(E)\otimes M_{r,s}(E)$ e $M_{pr+qs,ps+qr}(E)$. Também demonstramos que as álgebras $M_{1,1}(E) \otimes E$ e $M_2(E)$ são PI-equivalentes. Ressaltamos que estas equivalências são válidas apenas sobre corpos de característica zero.

Para corpos de característica $p \neq 2$ primo foi demonstrado em [4] e [5] que $M_{1,1}(E)\otimes E$ e $M_2(E)$ não são PI-equivalentes, o mesmo ocorrendo com $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$. O caso $M_{p+q}(E)$ e $M_{p,q}(E) \otimes E$ foi provado em [28]. Bem como também a não PI-equivalência entre $M_{a,b}(E) \otimes M_{1,1}(E)$ e $M_{a+b,a+b}(E)$. Em [1] foi provado que $M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E)$ e $M_{ac+bc,ad+bc}(E)$ não são PI-equivalentes.

Bibliografia

[1] Alves, S. M.(2009) *PI (non)equivalence and Gelfand-Kirillov dimension in positive characteristic.* Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 58, no. 1, 109–124

[2] Alves, I. Z. M.(2013). *Álgebras e identidades graduadas.* Universidade de Brasília.

[3] Amitsur, A. S., & Levitzki, J.(1950). *Minimal identities for algebras.* Proceedings of the American Mathematical Society, 1(4), 449-463.

[4] Azevedo, S. S., Fidelis, M., & Koshlukov, P.(2004). *Tensor product theorems in positive characteristic.* Journal of Algebra, 276(2), 836-845.

[5] Azevedo, S. S., Fidelis, M., & Koshlukov, P.(2005). *Graded identities and PI equivalence of algebras in positive characteristic.* Communications in Algebra, 33(4), 1011-1022.

[6] Bahturin, Y. A., Sehgal, S. K., & Zaicev, M. V.(2001). *Group gradings on associative algebras.* Journal of Algebra, 241(2), 677-698.

[7] Bahturin, Y., & Drensky, V.(2002). *Graded polynomial identities of matrices.* Linear algebra and its applications, 357(1), 15-34.

[8] Curtis, C. W., & Reiner, I.(1962). *Representation theory of finite groups and associative algebras, (Vol. 356)* . American Mathematical Soc.

[9] Dehn, M. (1922). *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme.* In Festschrift David Hilbert zu Seinem Sechzigsten Geburtstag am 23. Januar 1922 (pp. 184-194). Springer Berlin Heidelberg.

[10] Di Vincenzo, O. M.(1992). *On the graded identities of* $M_{1,1}(E)$. Israel journal of mathematics, 80(3), 323-335.

[11] Di Vincenzo, O. M.(1996). *Cocharacters of G-graded algebras.* Communications in Algebra, 24(10), 3293-3310.

[12] Di Vincenzo, O. M., & Nardozza, V.(2002). *$\mathbb{Z}_{k+l} \times \mathbb{Z}_2$-graded identities for $M_{k,l}(E) \otimes E$*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 108.

[13] Di Vincenzo, O. M., & Nardozza, V.(2003). *Graded polynomial identities for tensor products by the Grassmann algebra.* Communications in Algebra, 31(3), 1453-1474.

[14] Di Vincenzo, O. M., & Nardozza, V.(2007). *Graded polynomial identities of verbally prime algebras.* Journal of Algebra and its Applications, 6(03), 385-401.

[15] Drenski, V. S.(1981). *A minimal basis of identities for a second-order matrix algebra over a field of characteristic* 0. Algebra and Logic, 20(3), 188-194.

[16] Freitas, J. A. O.(2006). *Identidades polinomiais para a algebra das matrizes de ordem dois sobre corpos de caracteristica zero.* Universidade de Campinas.

[17] Giambruno, A., & Zaicev, M.(1999). *Exponential codimension growth of PI algebras: an exact estimate.* Advances in Mathematics, 142(2), 221-243.

[18] Giambruno, A., & Zaicev, M.(2005). *Polynomial identities and asymptotic methods.* American Mathematical Soc. .

[19] Gorenstein, D.(1968). *Finite groups.* T Chelsea, New York.

[20] Isaacs, I. M.(1994). *Character theory of finite groups.* Academic Press, New York.

[21] James, G. D.(1987). *The representation theory of the symmetric groups.* Berlin.

[22] Kaplansky I.(1948). *Rings with a polynomial identity.* Amer. Math. Monthly 54, 496-500.

[23] Kaplansky, I.(1970). *"Problems in the Theory of Rings"Revisited.* American Mathematical Monthly, 445-454.

[24] Kemer, A. R.(1985). *Varietities and $\mathbb{Z}_2$-graded algebras.* Izvestiya: Mathematics, 25(2), 359-374.

[25] Kemer, A. R.(1987). *Finite basis property of identities of associative algebras.* Algebra and Logic, 26(5), 362-397.

[26] Koshlukov, P.(2001). *Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic* $p \neq 2$. Journal of Algebra, 241(1), 410-434.

[27] Krakowski, D., & Regev, A.(1973). *The polynomial identities of the Grassmann algebra.* Transactions of the American mathematical Society, 181, 429-438.

[28] Mota Alves, S., & Koshlukov, P.(2006) *Polynomial identities of algebras in positive characteristic.* J. Algebra 305, no. 2, 1149–1165

[29] Razmyslov, Y. P.(1973). *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero.* Algebra and Logic, 12(1), 47-63.

[30] Regev, A.(1972). *Existence of polynomial identities in* $A \otimes_F B$. Bulletin of the American Mathematical Society, 77(6), 1067-1069.

[31] Regev, A.(1984). *Codimensions and trace codimensions of matrices are asymptotically equal.* Israel Journal of Mathematics, 47(2-3), 246-250.

[32] Regev, A.(1990). *Tensor products of matrix algebras over the Grassmann algebra.* Journal of Algebra, 133(2), 512-526.

[33] Silva, R. A. D.(2013). *PI-Expoente de álgebras associativas.* Universidade de Brasília.

[34] Vasilovsky, S. Y.(1998). $\mathbb{Z}$*-graded polynomial identities of the full matrix algebra.* Communications in Algebra, 26(2), 601-612.

[35] Vasilovsky, S.(1999). $\mathbb{Z}_n$*-graded polynomial identities of the full matrix algebra of order n.* Proceedings of the American Mathematical Society, 127(12), 3517-3524.

[36] Wagner, W.(1937). *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme.* Mathematische Annalen, 113(1), 528-567.