Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Uma classe de equações diferenciais de terceira ordem que descrevem superfícies pseudo-esféricas

por

Tarcísio Castro Silva

Orientadora: Keti Tenenblat

Brasília

2014

Aos meus pais,

Alcebíades Evangelista de Castro e

Rozely Rosa de Castro.

Agradecimentos

Inicialmente a Deus, por esta grande oportunidade de evoluir.

À minha família. Em especial aos meus pais e aos meus irmãos, que sempre me apoiaram nos meus estudos.

À professora Keti Tenenblat pela oportunidade única de trabalhar sob a sua orientação, o que me proporcionou um imenso aprendizado. Agradeço pela confiança, paciência, disponibilidade constante em partilhar seus conhecimentos e pelas inúmeras sugestões que melhoraram consideravelmente a apresentação do trabalho.

Aos professores e membros da banca examinadora, João Paulo dos Santos, Xia Chang Yu, Diego Catalano Ferraioli e Luquésio Petrola de Melo Jorge, pelas críticas e sugestões que tornaram o meu trabalho melhor e indicaram-me vários caminhos a trilhar no prosseguimento de minha pesquisa matemática.

Ao professor Pedro Roitman, agradeço pelas sugestões que também incentivaram-me no prosseguimento de minha pesquisa matemática.

Aos amigos Marcelo Bezerra, Weslley Barreto, Bruno Nunes, Bruninho, Thaynara, Ricardo Ruviaro, Raquel Lehrer, Reinaldo e Raimundo, agradeço por me ajudarem com o estudo das disciplinas, exames de qualificação, hospedagem em Brasília e por partilharem vários momentos de alegria.

Ao CNPq e CAPES pelo apoio financeiro concedido durante a realização desta Tese.

"Se eu vi mais longe,

foi por estar de pé sobre os ombros de gigantes."

Isaac Newton

Resumo

Usando a noção de equação diferencial que descreve superfícies pseudo-esféricas, introduzida por S. S. Chern e K. Tenenblat, estudamos uma classe de equações do tipo

$$u_t - u_{xxt} = \lambda u u_{xxx} + G(u, u_x, u_{xx}).$$

Obtemos a completa classificação dessa classe de equações e fornecemos explicitamente um problema linear do qual a equação é a condição de integrabilidade. A classificação fornece famílias de equações diferenciais que contém, em particular, algumas importantes equações não lineares de onda dispersiva de terceira ordem, tais como a equação de Camassa-Holm e a equação de Degasperis-Procesi.

Provamos que não existem equações que descrevem superfícies esféricas na classe de equações estudadas.

Palavras-chave: equações diferenciais; superfícies pseudo-esféricas; superfícies esféricas

Abstract

Using the notion of diferential equation which describes pseudospherical surfaces, introduced by S. S. Chern and K. Tenenblat, we study a class of equations of type

$$u_t - u_{xxt} = \lambda u u_{xxx} + G(u, u_x, u_{xx}).$$

We obtain the complete classification of this class of equations and we explicitly give a linear problem for which the equation is the integrability condition. The classification provides families of differential equations which contain, in particular, some important third-order nonlinear dispersive wave equations, such as the Camassa-Holm equation and Degasperis-Procesi equation.

We prove that there are no equations describing spherical surfaces in the class of equations we studied.

Keywords: differential equations; pseudospherical surfaces; spherical surfaces

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **6**

2 Uma classe de equações $u_t - u_{xxt} = \lambda u u_{xxx} + G(u, u_x, u_{xx})$ **8**

2.1 Teorema de Caracterização 9

2.2 Teoremas de classificação de equações que descrevem superfícies pseudo-esféricas (Teoremas 2.2-2.5) 9

2.3 Exemplos 12

3 Demonstrações dos Teoremas **20**

3.1 Teorema de Caracterização 20

3.2 Teorema 2.2 26

3.3 Teorema 2.3 28

3.4 Teorema 2.4 30

3.5 Teorema 2.5 37

3.6 Um resultado de não existência de equações que descrevem superfícies esféricas 59

Referências **59**

Introdução

Em 1967, Gardner, Greene, Kruskal e Miura [12] estudaram um problema de Cauchy para a equação de Korteweg-de Vries, utilizando o método atualmente denominado de espalhamento inverso. Este trabalho deu origem a uma vasta literatura sobre o assunto, da qual destacamos os trabalhos de Lax [16] e Ablowitz, Kaup, Newell e Segur (AKNS) [1].

Em 1979, Sasaki [22] verificou que certas equações não lineares estavam relacionadas com superfícies de curvatura constante negativa. Mais tarde, em 1981, Chern e Tenenblat [7] obtiveram resultados relacionando a equação de Korteweg-de Vries com folheações de variedades riemannianas bi-dimensionais de curvatura constante. Em [2], Ablowitz, Beals e Tenenblat utilizaram o método do espalhamento inverso para obter soluções da equação generalizada de onda e da equação generalizada de sine-Gordon. O mesmo método foi utilizado por Beals e Tenenblat [3] para as versões intrínsecas dessas equações, que estão associadas a variedades riemannianas n-dimensionais de curvatura seccional constante.

Um dos pontos fundamentais para se aplicar o método do espalhamento inverso é obter um problema linear a um parâmetro, associado à equação não linear. Em 1986, Chern e Tenenblat [8] iniciaram um processo sistemático de obter um tal problema linear introduzindo a noção de uma equação diferencial para uma função real que descreve superficies pseudo-esféricas.

Se M^2 é uma variedade diferenciável bi-dimensional com coordenadas (x, t), diz-se que uma equação diferencial para uma função real $u(x, t)$ descreve superfícies pseudo-esféricas se existem 1-formas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, ($w_3 = w_{12}$ é a forma de conexão) onde as funções f_{ij}, $1 \leq j \leq 2$, dependem de u e um número finito de suas derivadas, tais que as equações de estrutura de uma superfície de curvatura constante -1, ou seja, $dw_1 = w_3 \wedge w_2$, $dw_2 = w_1 \wedge w_3$, $dw_3 = w_1 \wedge w_2$ são sastisfeitas sempre que u seja uma solução da equação diferencial. Em outras palavras, cada solução genérica da equação dá origem a uma métrica definida em um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ com curvatura Gaussiana constante e igual a -1. Uma equação diferencial que descreve superfícies pseudo-esféricas também pode ser caracterizada como a condição de integrabilidade de um problema linear da forma

$$\begin{pmatrix} dv_1 \\ dv_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w_2 & w_1 - w_3 \\ w_1 + w_3 & -w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Chern e Tenenblat [8], também efetuaram uma caracterização completa das equações de evolução do tipo

$$u_t = F(u, u_x, ..., \partial_x^k u)$$

que descrevem superfícies pseudo-esféricas sob a hipótese de que $f_{21} = \eta$ é um parâmetro. Tal caracterização contém importantes exemplos de equações tais como

$$\begin{array}{ll} u_t = u_{xx} + uu_x & \text{Burgers} \\ u_t = u_{xxx} + 6uu_x & \text{Korteweg-de Vries} \\ u_t = u_{xxx} + \frac{3}{2}u^2u_x & \text{Korteweg-de Vries modificada} \end{array}$$

Os resultados em [8] foram generalizados por Kamran e Tenenblat [15] que suprimiram a condição a priori sobre f_{21}. Eles também demonstraram um teorema de existência local garantindo que, dadas duas equações diferenciais descrevendo superfícies pseudo esféricas, então, sob certa hipótese técnica, existe localmente, uma aplicação levando cada solução genérica de um equação numa solução genérica da outra. E tal correspondência se origina, em última análise, do fato de que quaisquer duas métricas de mesma curvatura constante são localmente isométricas. Reyes [20], estendeu alguns aspectos da teoria de Kamran e Tenenblat ao caso em que F depende explicitamente também das variáveis x e t.

O conceito de um sistema de equações diferenciais que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas foi introduzido e investigado por Ding e Tenenblat [10]. Nessa classe de sistemas destaca-se a equação não linear de Schrödinger.

Se $f_{21} = \eta$ é um parâmetro, e as funções f_{11} e f_{31} não dependem de η, o problema (1) se reduz ao problema do espalhamento inverso considerado por Ablowitz et. al. [1], com η correspondendo ao parâmetro espectral. Equações como estas são ditas de tipo AKNS.

Quando se consegue associar uma família a um parâmetro de problemas lineares a uma equação diferencial não linear, existe a possibilidade de aplicar o método do espalhamento inverso em busca de determinação de soluções, e não apenas equações de tipo AKNS. Já no século XIX, havia sido observado que era possível encontrar soluções exatas para certas equações associadas a superfície de curvatura constante, como a de sine-Gordon, $u_{xt} = sin(u)$, resolvendo um problema linear a um parâmetro (Transformação de Bäcklund).

A aplicação do método do espalhamento inverso foi bem sucedida, por exemplo, em [4], por Beals, Rabelo e Tenenblat em equações que não são de tipo AKNS. Resultados associando uma família a um parâmetro de problemas lineares com $f_{21} = \eta$ foram obtidos em 1989 por Rabelo [18] para equações da forma

$$u_{xt} = F(u, u_x, ..., \partial_x^k u),$$

com $2 \leq k \leq 3$, tendo como ocorrência particular a equação

$$u_{xt} = u + \frac{1}{6}(u^3)_{xx}. \tag{2}$$

Em 1987, Jorge e Tenenblat [17] estudaram equações da forma

$$u_{tt} = F(u, u_x, u_{xx}, u_t).$$

Em 1990, Rabelo e Tenenblat [19] estudaram equações da forma

$$u_{xt} = F(u, u_x).$$

É importante ressaltar que a equação (2) apareceu, em 2004, em óptica não linear descrevendo a propagação de pulsos de luz ultra-curtos em fibras ópticas de silica [24]. Esses pulsos ultra curtos são muito importantes para as futuras tecnologias de transmissão óptica ultra-rápida de informação [23].

Antes de continuarmos registramos que, conforme em [10]: diz-se que uma equação diferencial para uma função real $u(x,t)$ descreve superfícies esféricas se ela é a condição necessária e suficiente para a existência de funções (reais) suaves f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, dependendo de u e suas derivadas tais que as 1-formas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, satisfazem as equações de estrutura de uma superfície de curvatura gaussiana constante 1, isto é, $d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2$, $d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3$ e $d\omega_3 = -\omega_1 \wedge \omega_2$.

Importantes exemplos de equações tais como

$$u_t - u_{xxt} = uu_{xxx} - 3uu_x + 2u_xu_{xx} \qquad \text{Camassa-Holm}$$
$$u_t - u_{xxt} = uu_{xxx} - 4uu_x + 3u_xu_{xx} \qquad \text{Degasperis-Procesi}$$

descrevem superfícies pseudo-esféricas. A primeira descreve a propagação unidirecional de ondas de águas rasas ao longo de um fundo plano e deve-se a Roberto Camassa e Darryl D. Holm [6]. Enquanto que a segunda modela dinâmicas não lineares de águas rasas e deve-se a Antonio Degasperis e Michela Procesi [9].

Motivados por essas equações, neste trabalho estudamos a classe de equações

$$u_t - u_{xxt} = \lambda uu_{xxx} + G(u, u_x, u_{xx}), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

que descrevem superfícies esféricas ou pseudo-esféricas.

Contudo, este estudo geral da classe de equações apresentada em (3) é muito difícil, razão pela qual fazia-se necessário acrescentar alguma condição no problema linear associado. Mas, qual poderia ser tal condição?

Em 2002, Reyes [21] verificou que a equação de Camassa-Holm descreve superfícies pseudo-esféricas tendo como problema linear

$$f_{11} = u_{xx} - u - \beta + \frac{\beta}{\eta^2} - \eta^{-2}, \quad f_{21} = \eta, \quad f_{31} = u_{xx} - u + 1,$$
$$f_{12} = -\frac{u_x\beta}{\eta} - \frac{\beta}{\eta^2} + u^2 - 1 + u\beta + \frac{u_x}{\eta} + \eta^{-2} - uu_{xx},$$
$$f_{22} = -\frac{\beta}{\eta} - \eta u + \eta^{-1} + u_x,$$
$$f_{32} = \frac{u\beta}{\eta^2} + u^2 - uu_{xx} + \eta^{-2} + \frac{u_x}{\eta} - \frac{u}{\eta^2} - u - \frac{\beta}{\eta^2} - \frac{u_x\beta}{\eta},$$

onde os parâmetros $\eta \neq 0$ e β satisfazem a relação $\eta^4 - \eta^2 + \beta^2\eta^2 = (\beta-1)^2$. A observação crucial é que tais 1-formas satisfazem a condição consideravelmente geral de que

$$f_{p1} = \mu_p f_{11} + \eta_p, \quad \mu_p, \eta_p \in \mathbb{R}, \quad 2 \leq p \leq 3. \tag{4}$$

Assim, o problema linear apresentado por Reyes motivou-nos a incluir (4) como uma hipótese adicional no problema linear associado. Esta condição também foi usada por Gomes [13] no estudo das equações de evolução de quinta ordem, e por Ferraioli e Tenenblat [11] no estudo das equações de evolução de quarta ordem, as quais descrevem superfícies pseudo-esféricas.

No Capítulo 2 da tese apresentamos inicialmente um teorema (Teorema 2.1) que caracteriza a classe de equações (3) sob a condição a priori (4). Em seguida enunciamos quatro teoremas (Teoremas 2.2-2.5) que fornecem a completa classificação de tais equações que descrevem superfícies pseudo-esféricas. Esses teoremas também mostram a não existência de tais equações que descrevem superfícies esféricas (Corolário 2.1), com a condição (4).

Os exemplos que serviram de motivação são casos particulares de uma classe de equações não lineares de onda dispersiva

$$u_t - u_{xxt} = \lambda u u_{xxx} + a u_x u_{xx} - \partial_x(bu + cu^2 + du^3)$$

cuja integrabilidade foi investigada em 2005 por Ivanov [14], onde λ, a, b, c e d são parâmetros constantes. Na Seção 2.3, exibimos uma grande variedade de exemplos dos quais se destacam aquelas equações de onda dispersiva que descrevem superfícies pseudo-esféricas.

O motivo pelo qual incluímos a constante λ na classe (3) deve-se ao fato de, no início, estarmos interessados num outro caso importante de equação não linear de onda dispersiva, a saber,

$$u_t - u_{xxt} = -u_x - u u_x \qquad \text{Benjamin-Bona-Mahony (BBM)}$$

que aparece em [5]. Contudo, pode-se verificar que a equação de BBM não descreve superfícies pseudo-esféricas sob a condição dada em (4). No Capítulo 3 apresentamos uma prova para os resultados obtidos no Capítulo 2.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo, faremos uma breve exposição de conceitos bem como das notações que serão usados no decorrer dos capítulos subsequentes.

Seja M^2 uma variedade riemanniana bi-dimensional. Se e_1, e_2 é um referencial ortonormal em M e w_1, w_2 é o co-referencial associado a e_1, e_2, sabemos do lema de Cartan que

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \omega_3 \wedge \omega_2, \\ d\omega_2 &= \omega_1 \wedge \omega_3, \end{aligned}$$

são as equações de estrutura de M^2 que determinam a 1-forma de conexão $\omega_3 := \omega_{12}$. Além disso, a equação de Gauss,

$$d\omega_3 = -K\omega_1 \wedge \omega_2,$$

determina a curvatura gaussiana K de M^2. Se $K = -1$ (resp. $K = 1$) diz-se que M^2 é uma *superfície pseudo-esférica* (resp. *superfície esférica*).

Como estamos interessados em estudar certa classe de equações que descrevem superfícies esféricas ou pseudo-esféricas, consideraremos a seguinte definição introduzida por Ding e Tenenblat que estende o conceito definido por Chern e Tenenblat de equações que descrevem superfícies pseudo-esféricas.

Definição 1.1 (Ding e Tenenblat, [10]) *Diz-se que uma equação diferencial para uma função real $u(x,t)$ descreve superfícies pseudo-esféricas (s.p.e.) (resp. superfícies esféricas (s.e.)) se ela é a condição necessária e suficiente para a existência de funções (reais) suaves f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, dependendo de u e suas derivadas, tais que as 1-formas,*

$$\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt,$$

satisfazem as equações de estrutura de uma superfície de curvatura gaussiana constante -1 (resp. 1), isto é,

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \omega_3 \wedge \omega_2, \\ d\omega_2 &= \omega_1 \wedge \omega_3, \\ d\omega_3 &= \delta\omega_1 \wedge \omega_2, \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde $\delta = 1$ (resp. -1).

Em outras palavras, segue da definição que para cada solução genérica da equação diferencial, teremos uma métria definida sobre M^2 cuja curvatura gaussiana é -1 (respectivamente 1). Soluções genéricas são aquelas para as quais $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$ num subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$.

Na literatura, faz-se uso das seguintes notações, as quais foram introduzidas por Chern e Tenenblat [8]:

$$z_0 := u, \quad z_1 := u_x, \quad z_2 := u_{xx}, \quad ..., \quad z_k := \partial_x^k u. \tag{1.2}$$

Neste trabalho, vamos considerar as equações cuja ordem máxima de derivação corresponde a $k = 3$. Por exemplo, a equação de Camassa-Holm

$$u_t - u_{xxt} = uu_{xxx} - 3uu_x + 2u_x u_{xx},$$

com o uso da notação acima, fica representada na forma

$$z_{0,t} - z_{2,t} = z_0 z_3 - 3z_0 z_1 + 2z_1 z_2.$$

CAPÍTULO 2

Uma classe de equações $u_t - u_{xxt} = \lambda u u_{xxx} + G(u, u_x, u_{xx})$

Motivados por importantes exemplos de equações tais como

$$z_{0,t} - z_{2,t} = z_0 z_3 - 3z_0 z_1 + 2z_1 z_2 \qquad \text{Camassa-Holm},$$
$$z_{0,t} - z_{2,t} = z_0 z_3 - 4z_0 z_1 + 3z_1 z_2 \qquad \text{Degasperis-Procesi},$$

(onde estamos usando a notação (1.2)), na Seção 2.1, enunciamos o teorema que caracteriza a classe de equações

$$z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda z_0 z_3 + G(z_0, z_1, z_2) \tag{2.1}$$

que descrevem superfícies esféricas ou pseudo-esféricas sob a condição de que as 1-formas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$ satisfazem

$$f_{p1} = \mu_p f_{11} + \eta_p, \quad \mu_p, \eta_p \in \mathbb{R}, \quad 2 \leq p \leq 3. \tag{2.2}$$

Na Seção 2.2, apresentamos os quatro teoremas que fornecem a completa classificação das equações que descrevem superfícies pseudo-esféricas e um resultado de não existência de tais equações que descrevem superfícies esféricas. Na Seção 2.3, apresentamos vários exemplos que são casos particulares dos teoremas de classificação, inclusive as equações de Camassa-Holm e de Degasperis-Procesi. As demonstrações dos teoremas deste capítulo serão dadas no Capítulo 3.

2.1 Teorema de Caracterização

Dada uma equação diferencial da forma (2.1) com 1-formas associadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, onde f_{p1} satisfazem (2.2), o próximo resultado fornece uma caracterização de tais equações que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou esféricas.

Teorema 2.1 *A equação*

$$z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda z_0 z_3 + G(z_0, z_1, z_2), \quad G \neq 0,$$

descreve superfícies pseudo-esféricas, $\delta = 1$, (resp. superfícies esféricas, $\delta = -1$), com 1-formas associadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, onde f_{ij} são funções reais e diferenciáveis de z_k, $0 \leq k \leq 3$, satisfazendo (2.2) se, e somente se, f_{ij} e G satisfazem

$$f_{11,z_0} \neq 0, \quad f_{11,z_0} + f_{11,z_2} = 0, \quad f_{i2,z_3} = 0, \quad f_{11,z_1} = f_{11,z_3} = 0, \tag{2.3}$$

$$f_{i2} = -\lambda z_0 f_{i1} + \phi_{i2}, \tag{2.4}$$

onde ϕ_{i2} são funções reais diferenciáveis de z_0 e z_1 satisfazendo

$$-f_{11,z_0}G + \sum_{i=0}^{1} z_{i+1} f_{12,z_i} + (\mu_2\phi_{32} - \mu_3\phi_{22})f_{11} + \eta_2\phi_{32} - \eta_3\phi_{22} = 0, \tag{2.5}$$

$$-\mu_2 f_{11,z_0}G + \sum_{i=0}^{1} z_{i+1} f_{22,z_i} - (\phi_{32} - \mu_3\phi_{12})f_{11} + \eta_3\phi_{12} = 0, \tag{2.6}$$

$$-\mu_3 f_{11,z_0}G + \sum_{i=0}^{1} z_{i+1} f_{32,z_i} - \delta(\phi_{22} - \mu_2\phi_{12})f_{11} + \delta\eta_2\phi_{12} = 0, \tag{2.7}$$

$$(\phi_{22} - \mu_2\phi_{12})f_{11} - \eta_2\phi_{12} \neq 0. \tag{2.8}$$

2.2 Teoremas de classificação de equações que descrevem superfícies pseudo-esféricas (Teoremas 2.2-2.5)

Afim de obter explicitamente as classes de equações contidas no Teorema 2.1, consideramos as seguintes notações

$$\ell := \ell(z_0, z_1) = (\phi_{22} - \mu_2\phi_{12})(z_0, z_1), \quad \gamma := \mu_2(\mu_3\eta_2 - \mu_2\eta_3) - \eta_3. \tag{2.9}$$

Dessa forma, obtemos os Teoremas de Classificação (Teoremas 2.2-2.5) que fornecem quatro classes de equações que correspondem aos casos em que

$$\begin{aligned} &\ell \equiv 0 \quad \text{e} \quad \gamma = 0, \qquad && \ell \not\equiv 0 \quad \text{e} \quad \gamma = 0, \\ &\ell \equiv 0 \quad \text{e} \quad \gamma \neq 0, \qquad && \ell \not\equiv 0 \quad \text{e} \quad \gamma \neq 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Teorema 2.2 *Seja $z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda z_0 z_3 + G(z_0, z_1, z_2)$, $G \neq 0$, uma equação que descreve superfícies pseudo-esféricas, $\delta = 1$, ou superfícies esféricas, $\delta = -1$, com 1-formas associadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, onde f_{ij} são funções reais e diferenciáveis de z_k, $0 \leq k \leq 3$, satisfazendo (2.2) e (2.3)-(2.8). Então $\ell \equiv 0$ e $\gamma = 0$ se, e somente se,*

$$\begin{aligned} &\delta = 1, \\ &G = \frac{1}{h'}(z_1\psi_{,z_0} + z_2\psi_{,z_1} \pm m\psi), \quad m \in \mathbb{R}, \quad m \neq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{11} &= h, & f_{12} &= \psi, \\ f_{21} &= \mu h + m\sqrt{1+\mu^2}, & f_{22} &= \mu\psi, \\ f_{31} &= \pm\sqrt{1+\mu^2}h \pm m\mu, & f_{32} &= \pm\sqrt{1+\mu^2}\psi, \end{aligned}$$

onde $\lambda = 0$ e $\mu \in \mathbb{R}$; $h(z_0 - z_2)$ e $\psi(z_0, z_1)$ são funções reais e diferenciáveis satisfazendo $h' \neq 0$ e $\psi \neq 0$.

Teorema 2.3 *Seja $z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda z_0 z_3 + G(z_0, z_1, z_2)$, $G \neq 0$, uma equação que descreve superfícies pseudo-esféricas, $\delta = 1$, ou superfícies esféricas, $\delta = -1$, com 1-formas associadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, onde f_{ij} são funções reais e diferenciáveis de z_k, $0 \leq k \leq 3$, satisfazendo (2.2) e (2.3)-(2.8). Então $\ell \equiv 0$ e $\gamma \neq 0$ se, e somente se,*

$$\begin{aligned} &\delta = 1, \\ &G = -\frac{\lambda}{h'}(z_1 h + z_0 z_1 h' + m_1 z_1 + m_2 z_2), \quad \lambda,\ m_1,\ m_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda m_2 \neq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{11} &= h, & f_{12} &= -\lambda z_0 h - \lambda m_2 z_1, \\ f_{21} &= \mu h + \eta, & f_{22} &= -\lambda\mu z_0 h - \lambda m_2 \mu z_1 - \lambda\eta z_0, \\ f_{31} &= \left[\tfrac{m_1(1+\mu^2)}{m_2\eta} - \tfrac{\mu}{m_2}\right] h + \tfrac{m_1\mu - \eta}{m_2}, & f_{32} &= -\lambda z_0 f_{31} - \tfrac{\lambda}{\eta}\left[m_1(1+\mu^2) - \mu\eta\right] z_1, \end{aligned}$$

onde $\eta \neq 0$ e $(m_2\eta)^2 = m_1^2 + (m_1\mu - \eta)^2$; $h(z_0 - z_2)$ é uma função real e diferenciável de $z_0 - z_2$ satisfazendo $h' \neq 0$.

Teorema 2.4 *Seja* $z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda z_0 z_3 + G(z_0, z_1, z_2)$, $G \neq 0$, *uma equação que descreve superfícies pseudo-esféricas,* $\delta = 1$, *ou superfícies esféricas,* $\delta = -1$, *com 1-formas associadas* $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, *onde* f_{ij} *são funções reais e diferenciáveis de* z_k, $0 \leq k \leq 3$, *satisfazendo* (2.2) *e* (2.3)-(2.8). *Então* $\ell \neq 0$ *e* $\gamma = 0$ *se, e somente se,*

$$\begin{aligned} &\delta = 1, \\ &G = \frac{1}{h'}\left[-\left(\lambda z_1 \pm \lambda m_1 z_0 \pm m_2\right)h - \lambda z_0 z_1 h' + z_1 \psi_{,z_0} + z_2 \psi_{,z_1} \pm m_1 \psi\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{11} &= h, & f_{12} &= -\lambda z_0 h + \psi, \\ f_{21} &= \mu h + m_1\sqrt{1+\mu^2}, & f_{22} &= -\lambda \mu z_0 h + \mu\psi + m_2\sqrt{1+\mu^2}, \\ f_{31} &= \pm\sqrt{1+\mu^2}h \pm m_1\mu, & f_{32} &= -\lambda z_0 f_{31} \pm \sqrt{1+\mu^2}\psi \pm \lambda m_1 \mu z_0 \pm m_2\mu, \end{aligned}$$

onde m_1, $m_2 \in \mathbb{R}$, $(\lambda m_1)^2 + m_2^2 \neq 0$; $h(z_0 - z_2)$ *e* $\psi(z_0, z_1)$ *são funções reais e diferenciáveis, com* $h' \neq 0$.

Teorema 2.5 *Seja* $z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda z_0 z_3 + G(z_0, z_1, z_2)$, $G \neq 0$, *uma equação que descreve superfícies pseudo-esféricas,* $\delta = 1$, *ou superfícies esféricas,* $\delta = -1$, *com 1-formas associadas* $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, *onde* f_{ij} *são funções reais e diferenciáveis de* z_k, $0 \leq k \leq 3$, *satisfazendo* (2.2) *e* (2.3)-(2.8). *Então* $\ell \neq 0$ *e* $\gamma \neq 0$ *se, e somente se,*

(*i*) $\delta = 1$,

$$\begin{aligned} G = {} & \lambda\left(z_1 z_2 - 2 z_0 z_1 - \tfrac{m}{\tau} z_1 \mp \tfrac{z_2}{\tau}\right) + \tau e^{\pm\tau z_1}\left(\tau z_0 z_2 \pm z_1 + m z_2\right)\varphi \\ & \pm e^{\pm\tau z_1}\left(\tau z_0 z_1 + \tau z_1 z_2 + m z_1 \pm z_2\right)\varphi' + z_1^2 e^{\pm\tau z_1}\varphi'', \quad \lambda, m, \tau \in \mathbb{R}, \quad \tau > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{11} &= a(z_0 - z_2) + b, \\ f_{21} &= \mu f_{11} + \eta, \\ f_{31} &= \pm\left(m - \tfrac{b\tau}{a}\right)\left(\tfrac{1+\mu^2}{\eta} f_{11} + \mu\right) \mp \tfrac{\tau}{a} f_{21}, \\ f_{12} &= -\lambda z_0 f_{11} + \left[\pm\tau(a z_0 + b)\varphi + a z_1 \varphi'\right] e^{\pm\tau z_1} \mp \tfrac{\lambda a}{\tau} z_1, \\ f_{22} &= \mu f_{12} - \lambda \eta z_0 \pm \eta\tau e^{\pm\tau z_1}\varphi, \\ f_{32} &= \pm\left(m - \tfrac{b\tau}{a}\right)\left[\tfrac{1+\mu^2}{\eta} f_{12} - \mu(\lambda z_0 \mp \tau e^{\pm\tau z_1}\varphi)\right] \mp \tfrac{\tau}{a} f_{22}, \end{aligned}$$

onde a, $b \in \mathbb{R}$, $a\eta \neq 0$, $(a\eta)^2 = (am - b\tau)^2 + [\mu(am - b\tau) - \tau\eta]^2$ *e* $\varphi(z_0)$ *é uma função real diferenciável,* *ou*

(ii) $\delta = 1$,

$$G = \lambda(z_1z_2 - 2z_0z_1 - m_1z_1 - m_2z_2) + \left(me^{\theta z_0} - \tfrac{\lambda}{\theta}\right)\left[-\theta(z_1z_2 - z_0z_1 + m_2z_2) + m_3z_1\right]$$

$$+m\theta e^{\theta z_0}\left(2z_1z_2 + z_0z_1 + m_1z_1 + m_2z_2 - m_2\theta z_1^2\right) + m\theta^2 e^{\theta z_0}\left(z_1 + m_2\right) z_1^2,$$

com $\lambda,\ \theta,\ m,\ m_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq 3,\ \theta \neq 0,\ \lambda^2 + m^2 \neq 0,$

$$\begin{aligned}
f_{11} &= a(z_0 - z_2) + a(m_1 + \theta m_2^2) \pm \tfrac{m_2\mu\theta}{\sqrt{1+\mu^2}},\\
f_{21} &= \mu f_{11} \mp m_2\theta\sqrt{1+\mu^2},\\
f_{31} &= \pm\sqrt{1+\mu^2} f_{11} - m_2\theta\mu \pm \tfrac{\theta}{a\sqrt{1+\mu^2}},\\
f_{12} &= -\lambda z_0 f_{11} + am\theta e^{\theta z_0}(z_1 + m_2)z_1 - \lambda a m_2 z_1\\
&\qquad +(-\theta m e^{\theta z_0} + \lambda)\left[-\tfrac{a}{\theta}(z_0 + m_1 + \theta m_2^2) \mp \tfrac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}(z_1 + m_2)\right],\\
f_{22} &= \mu f_{12} \pm \sqrt{1+\mu^2}\left[(z_1 + m_2)\left(-\theta m e^{\theta z_0} + \lambda\right) + \lambda m_2\theta z_0\right],\\
f_{32} &= \pm\sqrt{1+\mu^2} f_{12} + \left(\mu z_1 + m_2\mu \mp \tfrac{1}{a\sqrt{1+\mu^2}}\right)\left(-\theta m e^{\theta z_0} + \lambda\right) - \lambda\left(-m_2\mu\theta \pm \tfrac{\theta}{a\sqrt{1+\mu^2}}\right) z_0,
\end{aligned}$$

onde $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ *e* $a^2(1+\mu^2)[m_3 - \theta(m_1 + \theta m_2^2) - 1] = \theta^2.$

De acordo com os Teoremas 2.2-2.5, independente da escolha envolvendo ℓ e γ o valor de δ sempre corresponde a 1. Portanto, temos o seguinte resultado de não existência.

Corolário 2.1 *Não existe equação do tipo* $z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda z_0 z_3 + G(z_0, z_1, z_2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $G \neq 0$, *descrevendo superfícies esféricas* ($\delta = -1$) *com 1-formas associadas* $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, *onde* f_{ij} *são funções reais e diferenciáveis de* z_k, $0 \leq k \leq 3$, *satisfazendo* (2.2).

2.3 Exemplos

Vamos obter algumas equações particulares dos teoremas de classificação da seção anterior.

Exemplo 2.3.1 Na classe de equações descritas no Teorema 2.2, se tomarmos $h(z_0 - z_2) = z_0 - z_2$ e $\psi(z_0, z_1) = z_0^2 + z_1$, então obtemos a equação

$$z_{0,t} - z_{2,t} = z_2 + 2z_0z_1 \pm m(z_0^2 + z_1), \quad m \neq 0,$$

que descreve superfícies pseudo-esféricas com 1-formas associadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, onde

$$\begin{aligned} f_{11} &= z_0 - z_2, & f_{12} &= z_0^2 + z_1, \\ f_{21} &= \mu(z_0 - z_2) + m\sqrt{1+\mu^2}, & f_{22} &= \mu(z_0^2 + z_1), \\ f_{31} &= \pm\sqrt{1+\mu^2}(z_0 - z_2) \pm m\mu, & f_{32} &= \pm\sqrt{1+\mu^2}(z_0^2 + z_1), \end{aligned}$$

e $\mu \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.3.2 Na classe de equações descritas no Teorema 2.2, se tomarmos $h(z_0 - z_2) = z_0 - z_2$ e $\psi(z_0, z_1) = z_0 z_1$, então obtemos a equação

$$z_{0,t} - z_{2,t} = z_0 z_2 \pm m z_0 z_1 + z_1^2, \quad m \neq 0,$$

que descreve superfícies pseudo-esféricas com 1-formas associadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, onde

$$\begin{aligned} f_{11} &= z_0 - z_2, & f_{12} &= z_0 z_1, \\ f_{21} &= \mu(z_0 - z_2) + m\sqrt{1+\mu^2}, & f_{22} &= \mu z_0 z_1, \\ f_{31} &= \pm\sqrt{1+\mu^2}(z_0 - z_2) \pm m\mu, & f_{32} &= \pm\sqrt{1+\mu^2} z_0 z_1, \end{aligned}$$

e $\mu \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.3.3 Na classe de equações descritas no Teorema 2.2, se tomarmos $h(z_0 - z_2) = z_0 - z_2$, $\psi(z_0, z_1) = z_0^2 z_1$ e $m = 1$, então obtemos a equação

$$z_{0,t} - z_{2,t} = z_0^2 z_2 + 2 z_0 z_1^2 \pm z_0^2 z_1,$$

que descreve superfícies pseudo-esféricas com 1-formas associadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, onde

$$\begin{aligned} f_{11} &= z_0 - z_2, & f_{12} &= z_0^2 z_1, \\ f_{21} &= \mu(z_0 - z_2) + \sqrt{1+\mu^2}, & f_{22} &= \mu z_0^2 z_1, \\ f_{31} &= \pm\sqrt{1+\mu^2}(z_0 - z_2) \pm \mu, & f_{32} &= \pm\sqrt{1+\mu^2} z_0^2 z_1, \end{aligned}$$

e $\mu \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.3.4 Na classe de equações descritas no Teorema 2.2, se tomarmos $h(z_0-z_2) = z_0 - z_2$, $\psi(z_0, z_1) = z_0 z_1^2$ e $m = 1$, então obtemos a equação

$$z_{0,t} - z_{2,t} = 2z_0 z_1 z_2 \pm z_0 z_1^2 + z_1^3,$$

que descreve superfícies pseudo-esféricas com 1-formas associadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, onde

$$\begin{aligned} f_{11} &= z_0 - z_2, & f_{12} &= z_0 z_1^2,\\ f_{21} &= \mu(z_0 - z_2) + \sqrt{1+\mu^2}, & f_{22} &= \mu z_0 z_1^2,\\ f_{31} &= \pm\sqrt{1+\mu^2}(z_0 - z_2) \pm \mu, & f_{32} &= \pm\sqrt{1+\mu^2} z_0 z_1^2, \end{aligned}$$

e $\mu \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.3.5 Na classe de equações descritas no Teorema 2.2, se tomarmos $h(z_0-z_2) = z_0 - z_2$, $\psi(z_0, z_1) = e^{z_0 z_1}$ e $m = 1$, então obtemos a equação

$$z_{0,t} - z_{2,t} = (z_0 z_2 + z_1^2 \pm 1)e^{z_0 z_1},$$

que descreve superfícies pseudo-esféricas com 1-formas associadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, onde

$$\begin{aligned} f_{11} &= z_0 - z_2, & f_{12} &= e^{z_0 z_1},\\ f_{21} &= \mu(z_0 - z_2) + \sqrt{1+\mu^2}, & f_{22} &= \mu e^{z_0 z_1},\\ f_{31} &= \pm\sqrt{1+\mu^2}(z_0 - z_2) \pm \mu, & f_{32} &= \pm\sqrt{1+\mu^2} e^{z_0 z_1}, \end{aligned}$$

e $\mu \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.3.6 Na classe de equações descritas no Teorema 2.3, se tomarmos $h(z_0-z_2) = z_0 - z_2$, então obtemos a equação

$$z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda\left(z_0 z_3 + z_1 z_2 - 2z_0 z_1 - m_1 z_1 - m_2 z_2\right), \quad \lambda \neq 0, \quad m_2 \neq 0, \quad m_1 \in \mathbb{R},$$

que descreve superfícies pseudo-esféricas com 1-formas associadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, onde

$$\begin{aligned} f_{11} &= z_0 - z_2, & f_{12} &= -\lambda z_0(z_0 - z_2) - \lambda m_2 z_1,\\ f_{21} &= \mu(z_0 - z_2) + \eta, & f_{22} &= -\lambda\mu z_0(z_0 - z_2) - \lambda m_2 \mu z_1 - \lambda\eta z_0,\\ f_{31} &= \left[\tfrac{m_1(1+\mu^2)}{m_2\eta} - \tfrac{\mu}{m_2}\right](z_0 - z_2) + \tfrac{m_1\mu-\eta}{m_2}, & f_{32} &= -\lambda z_0 f_{31} - \tfrac{\lambda}{\eta}\left[m_1(1+\mu^2) - \mu\eta\right] z_1, \end{aligned}$$

$\eta \neq 0$ e $(m_2\eta)^2 = m_1^2 + (m_1\mu - \eta)^2$.

Exemplo 2.3.7 No Exemplo 2.3.6, considere $\lambda = 1$, $m_1 = 0$ e $m_2 = \pm 1$. Então, obtemos a equação

$$z_{0,t} - z_{2,t} = z_0 z_3 + z_1 z_2 - 2 z_0 z_1 \mp z_2,$$

que descreve superfícies pseudo-esféricas com 1-formas associadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, onde

$$\begin{aligned}
f_{11} &= z_0 - z_2, & f_{12} &= -z_0(z_0 - z_2) \mp z_1,\\
f_{21} &= \mu(z_0 - z_2) + \eta, & f_{22} &= -\mu z_0(z_0 - z_2) \mp \mu z_1 - \eta z_0,\\
f_{31} &= \mp\mu(z_0 - z_2) \mp \eta, & f_{32} &= -z_0 f_{31} + \mu z_1,
\end{aligned}$$

μ, $\eta \in \mathbb{R}$ e $\eta \neq 0$.

Exemplo 2.3.8 Na classe de equações descritas no Teorema 2.3, se tomarmos $h(z_0 - z_2) = e^{z_0 - z_2}$, $\lambda = 1$, $m_1 = 0$ e $m_2 = \pm 1$, então obtemos a equação

$$z_{0,t} - z_{2,t} = z_0 z_3 - z_1 - z_0 z_1 \mp z_2 e^{z_2 - z_0},$$

que descreve superfícies pseudo-esféricas com 1-formas associadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, onde

$$\begin{aligned}
f_{11} &= e^{z_0 - z_2}, & f_{12} &= -z_0 e^{z_0 - z_2} \mp z_1,\\
f_{21} &= \mu e^{z_0 - z_2} + \eta, & f_{22} &= -\mu z_0 e^{z_0 - z_2} \mp \mu z_1 - \eta z_0,\\
f_{31} &= \mp\mu e^{z_0 - z_2} \mp \eta, & f_{32} &= -z_0 f_{31} + \mu z_1,
\end{aligned}$$

μ, $\eta \in \mathbb{R}$ e $\eta \neq 0$.

Exemplo 2.3.9 Na classe de equações descritas no Teorema 2.4, se tomarmos $h(z_0 - z_2) = z_0 - z_2$ e $\psi \equiv 0$, então obtemos a equação

$$z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda\left(z_0 z_3 + z_1 z_2 + m_1 z_0 z_2 - 2 z_0 z_1 - m_1 z_0^2\right) - m_2 z_0 + m_2 z_2,$$

onde λ, m_1, $m_2 \in \mathbb{R}$ e $(\lambda m_1)^2 + m_2^2 \neq 0$, que descreve superfícies pseudo-esféricas com 1-formas associadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, onde

$$\begin{aligned}
f_{11} &= z_0 - z_2, & f_{12} &= -\lambda z_0(z_0 - z_2),\\
f_{21} &= \mu(z_0 - z_2) \pm m_1\sqrt{1+\mu^2}, & f_{22} &= -\lambda\mu z_0(z_0 - z_2) \pm m_2\sqrt{1+\mu^2},\\
f_{31} &= \pm\sqrt{1+\mu^2}(z_0 - z_2) + m_1\mu, & f_{32} &= -\lambda z_0 f_{31} + \lambda m_1 \mu z_0 + m_2\mu,
\end{aligned}$$

e $\mu \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.3.10 (Equação linear de Benjamin-Bona-Mahony (BBM)) No Teorema 2.4, considere $\lambda = 0$, $h(z_0 - z_2) = z_0 - z_2$, $m_2 = -\frac{m_1}{1-m_1^2}$, $\psi = \frac{m_1}{1-m_1^2} z_1 - \frac{1}{1-m_1^2} z_0$, com $m_1 \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Então a equação

$$z_{0,t} - z_{2,t} = -z_1,$$

descreve superfícies pseudo-esféricas com 1-formas associadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, onde

$$\begin{aligned}
&f_{11} = z_0 - z_2, && f_{12} = \tfrac{m}{1-m^2} z_1 - \tfrac{1}{1-m^2} z_0,\\
&f_{21} = \mu(z_0 - z_2) \pm m\sqrt{1+\mu^2}, && f_{22} = \mu f_{12} \mp \tfrac{m}{1-m^2}\sqrt{1+\mu^2},\\
&f_{31} = \pm\sqrt{1+\mu^2}(z_0 - z_2) + m\mu, && f_{32} = \pm\sqrt{1+\mu^2} f_{12} - \tfrac{m\mu}{1-m^2},
\end{aligned}$$

$m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ e $\mu \in \mathbb{R}$.

Como foi dito na introdução, as equações de Camassa-Holm e Degasperis-Procesi são casos particulares de uma classe de equações não lineares de onda dispersiva

$$z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda z_0 z_3 + a z_1 z_2 - \partial_x(b z_0 + c z_0^2 + d z_0^3) \tag{2.11}$$

que aparece em [14], onde λ, a, b, c e d são constantes reais. Nos próximos exemplos veremos que, além das equações de Camassa-Holm e Degasperis-Processi, outros casos particulares de (2.11) descrevem superfícies pseudo-esféricas.

Para tanto, reescreveremos (2.11) convenientemente da seguinte maneira

$$z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda z_0 z_3 + \tilde{G},$$

onde

$$\tilde{G} = a z_1 z_2 - b z_1 - 2c z_0 z_1 - 3d z_0^2 z_1. \tag{2.12}$$

Agora, usando G apresentada, por exemplo, no Teorema 2.4, a igualdade $G = \tilde{G}$ fornece

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h'}\left[-\left(\lambda z_1 + \lambda m_1 z_0 + m_2\right) h - \lambda z_0 z_1 h' + z_1 \psi_{,z_0} + z_2 \psi_{,z_1} + m_1 \psi\right] = a z_1 z_2\\
-b z_1 - 2c z_0 z_1 - 3d z_0^2 z_1.
\end{aligned}$$

Um cálculo simples nos mostra que

$$a = 3\lambda, \quad b = \frac{m_2}{m_1}(m_1^2 - 1), \quad c = \frac{\lambda m_1^2}{2}, \quad d = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&h(z_0 - z_2) = A(z_0 - z_2) + B, \\
&\psi = A\lambda z_0^2 + A\lambda z_1^2 - A\lambda m_1 z_0 z_1 - A m_2 z_1 + \left(\frac{Am_2}{m_1} + \lambda B\right) z_0 + \frac{Bm_2}{m_1},
\end{aligned}
$$

onde A e B são constantes reais com $Am_1 \neq 0$ e $\lambda^2 + m_2^2 \neq 0$.

Exemplo 2.3.11 Na classe de equações descritas no Teorema 2.4, se tomarmos

$$
\begin{aligned}
&h(z_0 - z_2) = A(z_0 - z_2) + B, \quad A,\ B \in \mathbb{R}, \quad A \neq 0, \\
&\psi = A\left(\lambda z_0^2 + \lambda z_1^2 - \lambda m_1 z_0 z_1 - m_2 z_1\right) + \left(\frac{Am_2}{m_1} + \lambda B\right) z_0 + \frac{Bm_2}{m_1}, \quad m_1 \neq 0,
\end{aligned}
$$

então obtemos a equação não linear de onda dispersiva

$$
z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda z_0 z_3 + 3\lambda z_1 z_2 - \lambda m_1^2 z_0 z_1 + \frac{m_2}{m_1}(1 - m_1^2) z_1,
$$

onde $\lambda^2 + m_2^2 \neq 0$, que descreve superfícies pseudo-esféricas com 1-formas associadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, onde

$$
\begin{aligned}
&f_{11} = A(z_0 - z_2) + B, \\
&f_{21} = \mu f_{11} + m_1\sqrt{1 + \mu^2}, \\
&f_{31} = \pm\sqrt{1 + \mu^2} f_{11} \pm m_1 \mu, \\
&f_{12} = -\lambda z_0 f_{11} + A\left(\lambda z_0^2 + \lambda z_1^2 - \lambda m_1 z_0 z_1 - m_2 z_1\right) + \left(\tfrac{Am_2}{m_1} + \lambda B\right) z_0 + \tfrac{Bm_2}{m_1}, \\
&f_{22} = \mu f_{12} + m_2\sqrt{1 + \mu^2}, \\
&f_{32} = \pm\sqrt{1 + \mu^2} f_{12} \pm m_2 \mu
\end{aligned}
$$

e $\mu \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.3.12 (Equação de Degasperis-Procesi) No Exemplo 2.3.11, se considerarmos $\lambda = 1$, $m_1 = 2$ e $m_2 = 0$, então obtemos a equação não linear de onda dispersiva

$$
z_{0,t} - z_{2,t} = z_0 z_3 + 3 z_1 z_2 - 4 z_0 z_1,
$$

que descreve superfícies pseudo-esféricas com 1-formas associadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, onde

$$
\begin{aligned}
&f_{11} = A(z_0 - z_2) + B, && f_{12} = A(z_0 z_2 - 2 z_0 z_1 + z_1^2), \\
&f_{21} = \mu f_{11} + 2\sqrt{1 + \mu^2}, && f_{22} = \mu A\left(z_0 z_2 - 2 z_0 z_1 + z_1^2\right), \\
&f_{31} = \pm\sqrt{1 + \mu^2} f_{11} \pm 2\mu, && f_{32} = \pm\sqrt{1 + \mu^2} A\left(z_0 z_2 - 2 z_0 z_1 + z_1^2\right).
\end{aligned}
$$

Exemplo 2.3.13 Na classe de equações descritas no item (i) do Teorema 2.5, considere $\varphi(z_0) = e^{z_0}$, $a = \theta = 1$ e $m = b = 0$. Então, obtemos a equação

$$z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda(z_0 z_3 + z_1 z_2 - 2z_0 z_1 \mp z_2) + (\pm z_0 z_1 + z_0 z_2 \pm z_1 z_2 \pm z_1 + z_2 + z_1^2)e^{z_0 \pm z_1}$$

que descreve superfícies pseudo-esféricas com 1-formas associadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, onde

$$\begin{aligned} f_{11} &= z_0 - z_2, & f_{12} &= -\lambda z_0 f_{11} \pm (z_0 \pm z_1)\, e^{z_0 \pm z_1} \mp \lambda z_1, \\ f_{21} &= \mu f_{11} + \eta, & f_{22} &= \mu f_{12} - \lambda \eta z_0 \pm \eta e^{z_0 + z_1}, \\ f_{31} &= \mp f_{21}, & f_{32} &= \mp f_{22}, \end{aligned}$$

$\eta \neq 0$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.3.14 Na classe de equações descritas no item (i) do Teorema 2.5, se considerarmos $\lambda = 1$, $m = 0$, $\tau = 1$ e $\varphi = 0$, então obtemos a equação não linear

$$z_{0,t} - z_{2,t} = z_0 z_3 + z_1 z_2 - 2z_0 z_1 \mp z_2,$$

que descreve superfícies pseudo-esféricas com 1-formas associadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, onde

$$\begin{aligned} f_{11} &= a(z_0 - z_2) + b, & f_{12} &= -z_0 f_{11} \mp a z_1, \\ f_{21} &= \mu f_{11} + \eta, & f_{22} &= \mu f_{12} - \eta z_0, \\ f_{31} &= \mp \tfrac{b}{a}\left(\tfrac{1+\mu^2}{\eta} f_{11} + \mu\right) \mp z_2, & f_{32} &= \mp \tfrac{b}{a}\left(\tfrac{1+\mu^2}{\eta} f_{12} - \mu z_0\right) \mp \tfrac{f_{22}}{a}, \end{aligned}$$

$a\eta \neq 0,\ b \in \mathbb{R}\ e\ (a\eta)^2 = b^2 + (b\mu + \eta)^2.$

Exemplo 2.3.15 (Equação de Camassa-Holm) Na classe de equações descritas no item (ii) do Teorema 2.5, se considerarmos $m = 0$, $\lambda = 1$ e $m_1 = -\frac{m_3}{\theta}$, $\theta \neq 0$, então obtemos a equação não linear de onda dispersiva

$$z_{0,t} - z_{2,t} = z_0 z_3 + 2z_1 z_2 - 3z_0 z_1,$$

que descreve superfícies pseudo-esféricas com 1-formas associadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$,

$1 \leq i \leq 3$, onde

$$
\begin{aligned}
f_{11} &= a(z_0 - z_2) + \frac{a}{2}\left[\theta m_2^2 - \frac{\theta}{a^2(1+\mu^2)} - \frac{1}{\theta}\right] \pm \frac{m_2\mu\theta}{\sqrt{1+\mu^2}},\\
f_{21} &= \mu f_{11} \mp m_2\theta\sqrt{1+\mu^2},\\
f_{31} &= \pm\sqrt{1+\mu^2} f_{11} - m_2\theta\mu \pm \frac{\theta}{a\sqrt{1+\mu^2}},\\
f_{12} &= -z_0 f_{11} - a m_2 z_1 - \frac{a}{\theta} z_0 - \frac{a}{2\theta}\left[\theta m_2^2 - \frac{\theta}{a^2(1+\mu^2)} - \frac{1}{\theta}\right] \mp \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}(z_1 + m_2),\\
f_{22} &= \mu f_{12} \pm \sqrt{1+\mu^2}(z_1 + m_2 + m_2\theta z_0),\\
f_{32} &= \pm\sqrt{1+\mu^2} f_{12} + \left(\mu z_1 + m_2\mu \mp \frac{1}{a\sqrt{1+\mu^2}}\right) - \theta\left(-m_2\mu \pm \frac{1}{a\sqrt{1+\mu^2}}\right) z_0
\end{aligned}
$$

e $a,\ m_2 \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$

Observação 2.3.1 A equação não linear de onda dispersiva de Benjamin-Bona-Mahony (BBM)

$$z_{0,t} - z_{2,t} = -z_1 - z_0 z_1,$$

não satisfaz nenhum dos Teoremas 2.2-2.5. Logo, a equação de BBM não descreve superfícies pseudo-esféricas, com a condição (2.2).

CAPÍTULO 3

Demonstrações dos Teoremas

Provaremos os resultados apresentados no Capítulo 2, começando com o teorema de caracterização e dando sequência com os teoremas de classificação.

3.1 Teorema de Caracterização

Prova do Teorema 2.1. Para $u(x,t) = z_0$ satisfazendo (2.1), note que

$$\begin{aligned} dz_0 \wedge dx &= -(\lambda z_0 z_3 + G)dx \wedge dt + dz_2 \wedge dx, \\ dz_i \wedge dt &= z_{i+1} dx \wedge dt, \quad 0 \leq i \leq 2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Trabalharemos no espaço das variáveis $(x, t, z_0, z_1, z_2, z_3)$ onde as formas dx, dt, dz_0, dz_1 e dz_2 estão relacionadas por (3.1).

Como as formas w_i satisfazem as equações de estrutura (1.1), vemos que

$$\begin{aligned} df_{11} \wedge dx + df_{12} \wedge dt + (f_{32}f_{21} - f_{31}f_{22})dx \wedge dt &= 0, \\ df_{21} \wedge dx + df_{22} \wedge dt + (-f_{11}f_{32} + f_{31}f_{12})dx \wedge dt &= 0, \\ df_{31} \wedge dx + df_{32} \wedge dt + \delta(f_{21}f_{12} - f_{11}f_{22})dx \wedge dt &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Substituindo

$$df_{ij} = \sum_{k=0}^{3} f_{ij,z_k} dz_k,$$

em (3.2), respectivamente,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{3} f_{11,z_k} dz_k \wedge dx + \sum_{k=0}^{3} f_{12,z_k} dz_k \wedge dt + (f_{32}f_{21} - f_{31}f_{22}) dx \wedge dt = 0,\\
&\sum_{k=0}^{3} f_{21,z_k} dz_k \wedge dx + \sum_{k=0}^{3} f_{22,z_k} dz_k \wedge dt + (-f_{11}f_{32} + f_{31}f_{12}) dx \wedge dt = 0,\\
&\sum_{k=0}^{3} f_{31,z_k} dz_k \wedge dx + \sum_{k=0}^{3} f_{32,z_k} dz_k \wedge dt + \delta(f_{21}f_{12} - f_{11}f_{22}) dx \wedge dt = 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Usando (3.1) em cada equação do sistema (3.3), respectivamente,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\neq 0,2} f_{11,z_k} dz_k \wedge dx + (f_{11,z_0} + f_{11,z_2}) dz_2 \wedge dx + f_{12,z_3} dz_3 \wedge dt\\
&+ \left[-f_{11,z_0}(\lambda z_0 z_3 + G) + \sum_{k=0}^{2} z_{k+1} f_{12,z_k} + f_{32}f_{21} - f_{31}f_{22} \right] dx \wedge dt = 0,\\
&\sum_{k\neq 0,2} f_{21,z_k} dz_k \wedge dx + (f_{21,z_0} + f_{21,z_2}) dz_2 \wedge dx + f_{22,z_3} dz_3 \wedge dt\\
&+ \left[-f_{21,z_0}(\lambda z_0 z_3 + G) + \sum_{k=0}^{2} z_{k+1} f_{22,z_k} - f_{11}f_{32} + f_{31}f_{12} \right] dx \wedge dt = 0,\\
&\sum_{k\neq 0,2} f_{31,z_k} dz_k \wedge dx + (f_{31,z_0} + f_{31,z_2}) dz_2 \wedge dx + f_{32,z_3} dz_3 \wedge dt\\
&+ \left[-f_{31,z_0}(\lambda z_0 z_3 + G) + \sum_{k=0}^{2} z_{k+1} f_{32,z_k} + \delta(f_{21}f_{12} - f_{11}f_{22}) \right] dx \wedge dt = 0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Em (3.4), podemos igualar a zero os coeficientes das várias 2-formas independentes, obtendo

$$f_{i1,z_1} = f_{i1,z_3} = 0, \quad f_{i1,z_0} + f_{i1,z_2} = 0, \quad f_{i2,z_3} = 0, \quad 1 \le i \le 3, \tag{3.5}$$

isto é, valem as igualdades de (2.3) e

$$\begin{aligned}
-f_{11,z_0}(\lambda z_0 z_3 + G) + \sum_{i=0}^{2} z_{i+1} f_{12,z_i} + f_{32}f_{21} - f_{31}f_{22} = 0,\\
-f_{21,z_0}(\lambda z_0 z_3 + G) + \sum_{i=0}^{2} z_{i+1} f_{22,z_i} - f_{11}f_{32} + f_{31}f_{12} = 0,\\
-f_{31,z_0}(\lambda z_0 z_3 + G) + \sum_{i=0}^{2} z_{i+1} f_{32,z_i} + \delta(f_{21}f_{12} - f_{11}f_{22}) = 0,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

onde reindexamos o somatório. Como podemos ver de (2.3), as funções f_{ij} não dependem da variável z_3, razão pela qual a derivada em z_3 de cada equação em (3.6) fornece

$$-\lambda z_0 f_{i1,z_0} + f_{i2,z_2} = 0, \quad 1 \leq i \leq 3, \tag{3.7}$$

que substituídas novamente em (3.6) fornecem

$$\begin{aligned}
-f_{11,z_0}G + \sum_{i=0}^{1} z_{i+1} f_{12,z_i} + f_{32}(\mu_2 f_{11} + \eta_2) - (\mu_3 f_{11} + \eta_3) f_{22} = 0,\\
-\mu_2 f_{11,z_0}G + \sum_{i=0}^{1} z_{i+1} f_{22,z_i} - f_{11}f_{32} + (\mu_3 f_{11} + \eta_3) f_{12} = 0,\\
-\mu_3 f_{11,z_0}G + \sum_{i=0}^{1} z_{i+1} f_{32,z_i} + \delta\left[(\mu_2 f_{11} + \eta_2) f_{12} - f_{11}f_{22}\right] = 0,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

onde usamos a hipótese (2.2). Como (3.8) corresponde às equações de estrutura (1.1), da equação (2.1) com $G \neq 0$, segue que $f_{11,z_0} \neq 0$. Portanto segue de (3.5) que vale (2.3).

Para $1 \leq i \leq 3$, por (3.7) podemos escrever

$$f_{i2,z_2} = \lambda z_0 f_{i1,z_0} = -\lambda z_0 f_{i1,z_2}.$$

Integrando em z_2, temos que existe uma função real e diferenciável ϕ_{i2} dependendo unicamente de z_0 e z_1 de modo que $f_{i2} = -\lambda z_0 f_{i1} + \phi_{i2}$. Portanto provamos (2.4).

Substituindo f_{i2} dada em (2.4) nas duas últimas parcelas de cada equaçao do sistema (3.8) obtemos (2.5)-(2.7). Observamos que (2.8) corresponde a $w_1 \wedge w_2 \neq 0$, o que garante a existência de uma métrica definida em um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ sobre a variedade bi-dimensional.

Reciprocamente, supondo que (2.3)-(2.8) sejam válidas, queremos mostrar que as 1-formas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$ satisfazem as equações de estrutura (1.1) se, e somente se, $z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda z_0 z_3 + G(z_0, z_1, z_2)$. Mas isto é um cálculo imediato.

□

Observação 3.1.1 Na relação (2.3) do Teorema 2.1, vemos que a função f_{11} satisfaz a equação diferencial linear

$$f_{11,z_0} + f_{11,z_2} = 0.$$

Decorre da teoria básica de EDP que tal equação tem por solução uma função $f_{11} = h(z_0 - z_2)$, com h sendo uma função real e diferenciável da variável $z_0 - z_2$ satisfazendo $h' \neq 0$, pois $f_{11,z_0} \neq 0$.

A análise dos teoremas de classificação obtidos a partir do Teorema 2.1 foi feita com base na escolha apresentada em (2.10). Note que ℓ consiste numa notação de uma função envolvendo ϕ_{12} e ϕ_{22}, que por sinal são funções que queremos encontrar. Observamos que

$$w_1 \wedge w_2 = [(\phi_{22} - \mu_2\phi_{12})f_{11} - \eta_2\phi_{12}]dx \wedge dt,$$

o que nos motivou a adotar a notação ℓ dada em (2.9).

A seguir vamos demonstrar três lemas que serão utilizados nas demonstrações dos Teoremas 2.2-2.5.

Lema 3.1.1 *Nas condições do Teorema* 2.1*,* (2.5)-(2.7) *são equivalentes às seguintes equações*

$$f_{11,z_0}G = \sum_{i=0}^{1} z_{i+1}f_{12,z_i} + (\mu_2\phi_{32} - \mu_3\phi_{22})f_{11} + \eta_2\phi_{32} - \eta_3\phi_{22}, \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}[-\mu_2(\mu_2\phi_{32} - \mu_3\phi_{22}) - \phi_{32} + \mu_3\phi_{12}]f_{11} + z_2\ell_{,z_1} + z_1\ell_{,z_0}\\ -\mu_2(\eta_2\phi_{32} - \eta_3\phi_{22}) + \eta_3\phi_{12} - \lambda\eta_2 z_1 = 0,\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}[-\mu_3(\mu_2\phi_{32} - \mu_3\phi_{22}) - \delta\ell]f_{11} + z_2(\phi_{32} - \mu_3\phi_{12})_{,z_1}\\ +z_1(\phi_{32} - \mu_3\phi_{12})_{,z_0} - \mu_3(\eta_2\phi_{32} - \eta_3\phi_{22}) + \delta\eta_2\phi_{12} - \lambda\eta_3 z_1 = 0,\end{aligned} \tag{3.11}$$

onde ℓ *é dada em* (2.9)*.*

Prova. Reescreva (2.5) tal como em (3.9) e substitua nas Equações (2.6) e (2.7), obtendo (3.10) e (3.11), respectivamente.

□

Consideremos a notação

$$Q = Q(z_0, z_1) := -\mu_2(\mu_2\phi_{32} - \mu_3\phi_{22}) - \phi_{32} + \mu_3\phi_{12}. \tag{3.12}$$

Lema 3.1.2 *Nas condições do Teorema* 2.1*, se* $Q \neq 0$ *então* (3.10) *e* (3.11) *são equivalentes ao seguinte sistema*

$$f_{11} = a(z_0 - z_2) + b, \tag{3.13}$$

$$\ell_{,z_1} - a[-\mu_2(\mu_2\phi_{32} - \mu_3\phi_{22}) - \phi_{32} + \mu_3\phi_{12}] = 0, \tag{3.14}$$

$$(\phi_{32} - \mu_3\phi_{12})_{,z_1} + a[\mu_3(\mu_2\phi_{32} - \mu_3\phi_{22}) + \delta\ell] = 0, \tag{3.15}$$

$$z_1\ell_{,z_0} - \mu_2(\eta_2\phi_{32} - \eta_3\phi_{22}) + \eta_3\phi_{12} - \lambda\eta_2 z_1 + (az_0 + b)\frac{\ell_{,z_1}}{a} = 0, \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} &z_1(\phi_{32} - \mu_3\phi_{12})_{,z_0} - \mu_3(\eta_2\phi_{32} - \eta_3\phi_{22}) + \delta\eta_2\phi_{12} - \lambda\eta_3 z_1 \\ &\qquad + (az_0 + b)\frac{(\phi_{32} - \mu_3\phi_{12})_{,z_1}}{a} = 0, \end{aligned} \tag{3.17}$$

onde a*,* $b \in \mathbb{R}$*, com* $a \neq 0$*.*

Prova. Com efeito, se $Q \neq 0$ então segue de (3.10) que

$$f_{11} = -z_2\frac{\ell_{,z_1}}{Q} - \frac{1}{Q}\left[z_1\ell_{,z_0} - \mu_2(\eta_2\phi_{32} - \eta_3\phi_{22}) + \eta_3\phi_{12} - \lambda\eta_2 z_1\right]. \tag{3.18}$$

De (2.3), f_{11} é solução da equação linear

$$f_{11,z_0} + f_{11,z_2} = 0,$$

portanto, obtemos

$$-z_2\left(\frac{\ell_{,z_1}}{Q}\right)_{,z_0} - \left\{\frac{1}{Q}\left[z_1\ell_{,z_0} - \mu_2(\eta_2\phi_{32} - \eta_3\phi_{22}) + \eta_3\phi_{12} - \lambda\eta_2 z_1\right]\right\}_{,z_0} - \frac{\ell_{,z_1}}{Q} = 0. \tag{3.19}$$

Derivando (3.19) em z_2, temos

$$\left(\frac{\ell_{,z_1}}{Q}\right)_{,z_0} = 0$$

que, integrando em z_0, fornece uma função real e diferenciável $M := M(z_1)$ satisfazendo

$$\frac{\ell_{,z_1}}{Q} = M. \tag{3.20}$$

Substituindo (3.20) em (3.19) e integrando o resultado em z_0,

$$\frac{1}{Q}\left[z_1\ell_{,z_0} - \mu_2(\eta_2\phi_{32} - \eta_3\phi_{22}) + \eta_3\phi_{12} - \lambda\eta_2 z_1\right] = -Mz_0 + N, \tag{3.21}$$

onde $N := N(z_1)$ é uma função real e diferenciável. E usando (3.20) e (3.21) novamente em (3.18), temos

$$f_{11} = (z_0 - z_2)M - N$$

mas, como f_{11} não depende da variável z_1, concluímos que existem constantes a e b tais que

$$M = a, \quad N = -b.$$

Logo, $f_{11} = a(z_0 - z_2) + b$ com $a \neq 0$, pois $f_{11,z_0} \neq 0$. Isto prova (3.13). De (3.20) e (3.21), com Q dada em (3.12), provamos (3.14) e (3.16), respectivamente.

Substituindo f_{11} dada em (3.13) em (3.11), segue a relação

$$\begin{aligned}[-\mu_3(\mu_2\phi_{32} - \mu_3\phi_{22}) - \delta\ell][a(z_0 - z_2) + b] + z_2(\phi_{32} - \mu_3\phi_{12})_{,z_1} \\ +z_1(\phi_{32} - \mu_3\phi_{12})_{,z_0} - \mu_3(\eta_2\phi_{32} - \eta_3\phi_{22}) + \delta\eta_2\phi_{12} - \lambda\eta_3 z_1 = 0.\end{aligned}$$

Podemos derivar a última equação em z_2 e substituir o resultado novamente em tal equação, o que nos fornecerá o seguinte sistema

$$\begin{aligned}(\phi_{32} - \mu_3\phi_{12})_{,z_1} + a[\mu_3(\mu_2\phi_{32} - \mu_3\phi_{22}) + \delta\ell] = 0, \\ z_1(\phi_{32} - \mu_3\phi_{12})_{,z_0} - \mu_3(\eta_2\phi_{32} - \eta_3\phi_{22}) + \delta\eta_2\phi_{12} - \lambda\eta_3 z_1 \\ +(az_0 + b)[-\mu_3(\mu_2\phi_{32} - \mu_3\phi_{22}) - \delta\ell] = 0,\end{aligned}$$

cujas equações são equivalentes a (3.15) e (3.17). Dessa forma, concluímos a demonstração do lema.

□

Lema 3.1.3 *Se $\ell \equiv 0$, então* (3.10) *e* (3.11) *são equivalentes ao seguinte sistema*

$$\phi_{32} - \mu_3\phi_{12} = 0, \tag{3.22}$$

$$-\gamma\phi_{12} - \lambda\eta_2 z_1 = 0, \tag{3.23}$$

$$[\mu_3(\mu_3\eta_2 - \mu_2\eta_3) - \delta\eta_2]\,\phi_{12} + \lambda\eta_3 z_1 = 0, \tag{3.24}$$

onde $\gamma = \mu_2(\mu_3\eta_2 - \mu_2\eta_3) - \eta_3$.

Prova. De fato, usando a hipótese de que $\ell = (\phi_{22} - \mu_2\phi_{12}) \equiv 0$ em (3.10),

$$[-\mu_2(\mu_2\phi_{32} - \mu_3\mu_2\phi_{12}) - \phi_{32} + \mu_3\phi_{12}]f_{11} - \mu_2(\eta_2\phi_{32} - \eta_3\mu_2\phi_{12}) \\ +\eta_3\phi_{12} - \lambda\eta_2 z_1 = 0. \qquad (3.25)$$

Ao derivarmos (3.25) com respeito a z_2, usando o fato de que $f_{11,z_2} = -f_{11,z_0} \neq 0$, verificamos a relação

$$\mu_2^2(\phi_{32} - \mu_3\phi_{12}) + \phi_{32} - \mu_3\phi_{12} = 0,$$

ou seja,

$$(1 + \mu_2^2)(\phi_{32} - \mu_3\phi_{12}) = 0,$$

donde concluímos que ϕ_{32} é dada em temos de ϕ_{12} por

$$\phi_{32} = \mu_3\phi_{12},$$

que substituída em (3.25), fornece

$$-\gamma\phi_{12} - \lambda\eta_2 z_1 = 0,$$

sendo $\gamma := \mu_2(\mu_3\eta_2 - \mu_2\eta_3) - \eta_3$. Isto justifica (3.22) e (3.23). E substituindo (3.22) e $\phi_{22} = \mu_2\phi_{12}$ em (3.11), obtemos (3.24).

□

3.2 Teorema 2.2

Nas hipóteses do Teorema 2.2 temos $\ell \equiv 0$ e $\gamma = 0$. Suponhamos que a equação

$$z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda z_0 z_3 + G(z_0, z_1, z_2)$$

descreve superfícies pseudo-esféricas, $\delta = 1$, ou superfícies esféricas, $\delta = -1$, com 1-formas associadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, onde f_{ij} são funções reais e diferenciáveis de z_k, $0 \leq k \leq 3$, satisfazendo (2.2) e (2.3)-(2.8). Queremos obter as funções ϕ_{i2} satisfazendo as equações (2.5)-(2.7) do Teorema (2.1), que pelo Lema (3.1.1) são equivalentes a (3.9)-(3.11). Por hipótese $\ell \equiv 0$, portanto segue do Lema 3.1.3, que as equações (3.10) e (3.11) são equivalentes a (3.22)-(3.24).

Ora, usando a hipótese de que $\gamma = 0$ em (3.23), temos que $\lambda\eta_2 = 0$. Daí, segue de (2.8) que $\lambda = 0$.

Substituindo $\lambda = 0$ em (3.24) e usando o fato de que $\phi_{12} \neq 0$ (veja (2.8)), obtemos a identidade

$$\mu_3(\mu_3\eta_2 - \mu_2\eta_3) - \delta\eta_2 = 0. \tag{3.26}$$

Afirmamos que $\delta = 1$. Com efeito, se $\delta = -1$ então segue de (3.26) que η_2 é dado pelo quociente

$$\eta_2 = \frac{\mu_2\mu_3\eta_3}{1+\mu_3^2}$$

e, por conseguinte,

$$\begin{aligned} 0 = \gamma \quad &= \mu_2(\mu_3\eta_2 - \mu_2\eta_3) - \eta_3 \\ &= \mu_2\left(\mu_3\tfrac{\mu_2\mu_3\eta_3}{1+\mu_3^2} - \mu_2\eta_3\right) - \eta_3 \\ &= -\eta_3\left(\tfrac{1+\mu_2^2+\mu_3^2}{1+\mu_3^2}\right) \end{aligned}$$

se, e somente se, $\eta_3 = 0$. Contudo, $\eta_3 = 0$ implica $\eta_2 = 0$, contrariando (2.8). Portanto, decorre a não existência do caso esférico para o teorema aqui tratado.

Note que, o fato de $\gamma = \mu_2(\mu_3\eta_2 - \mu_2\eta_3) - \eta_3 = 0$ nos permite isolar η_3 tal como

$$\eta_3 = \frac{\mu_2\mu_3\eta_2}{1+\mu_2^2}, \tag{3.27}$$

que substituído em (3.26), com $\delta = 1$, fornece

$$\mu_3 = \pm\sqrt{1+\mu_2^2}. \tag{3.28}$$

Pela relação (2.4) do Teorema 2.1,

$$f_{12} = -\lambda z_0 f_{11} + \phi_{12} = \phi_{12},$$

pois $\lambda = 0$. Assim, substituindo $f_{12} = \phi_{12}$, $\ell = \phi_{22} - \mu_2\phi_{12} \equiv 0$ e as equações (3.22), (3.27) e (3.28) em (3.9), resulta que

$$f_{11,z_0}G = z_1\phi_{12,z_0} + z_2\phi_{12,z_1} \pm \frac{\eta_2}{\sqrt{1+\mu_2^2}}\phi_{12}. \tag{3.29}$$

Defina

$$m := \frac{\eta_2}{\sqrt{1+\mu_2^2}}(\neq 0). \tag{3.30}$$

Portanto, segue de (3.27) juntamente com (3.28) que

$$\eta_3 = \pm m\mu_2. \tag{3.31}$$

Como $\phi_{12} \neq 0$ é uma função arbitrária, podemos denotar $\psi := \phi_{12}$ e, pela Observação 3.1.1, $h := h(z_0 - z_2) = f_{11}$. Logo, a equação que descreve G como no enunciado do Teorema 2.2, é obtida de (3.29) ao substituírmos $\phi_{12} = \psi$, $f_{11} = h$, $\mu_2 = \mu$ e dividirmos por h'. Segue de (3.28), (3.30), (3.31) e (2.2) que

$$f_{21} = \mu h + m\sqrt{1+\mu^2}, \quad f_{31} = \pm\sqrt{1+\mu^2}h \pm m\mu,$$

Novamente pela relação (2.4) do Teorema 2.1, com o $\lambda = 0$, $\ell = 0$, i.e., $\phi_{22} = \mu_2\phi_{12}$, concluímos de (3.22) e (3.28) que

$$f_{12} = \psi, \quad f_{22} = \mu\psi, \quad f_{32} = \pm\sqrt{1+\mu^2}\psi.$$

Observamos que de (2.8) temos $m\psi \neq 0$. Assim, fica demonstrada a condição necesssária.

Reciprocamente, se G e f_{ij} são dadas como no Teorema 2.2, com $\lambda = 0$ e $\delta = 1$, então queremos mostrar que as 1-formas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$ satisfazem as equações de estrutura (1.1) se, e somente se, $z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda z_0 z_3 + G$. Mas isto é um cálculo direto.

□

3.3 Teorema 2.3

Nas hipóteses do Teorema 2.3 temos $\ell \equiv 0$ e $\gamma \neq 0$. Suponhamos que a equação

$$z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda z_0 z_3 + G(z_0, z_1, z_2)$$

descreve superfícies pseudo-esféricas, $\delta = 1$, ou superfícies esféricas, $\delta = -1$, com 1-formas associadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, onde f_{ij} são funções reais e diferenciáveis de z_k, $0 \leq k \leq 3$, satisfazendo (2.2) e (2.3)-(2.8). Queremos obter as funções ϕ_{i2} satisfazendo as equações (2.5)-(2.7) do Teorema (2.1), que pelo Lema (3.1.1) são equivalentes a (3.9)-(3.11). Por hipótese $\ell \equiv 0$, portanto segue do Lema 3.1.3, que as equações (3.10) e (3.11) são equivalentes a (3.22)-(3.24).

Notemos de (3.23) que $\lambda \neq 0$, pois $\gamma \neq 0$ e, de (2.8), $\eta_2\phi_{12} \neq 0$. Além disso, concluímos de (3.23), $\ell \equiv 0$ e (3.22) que

$$\phi_{12} = -\frac{\lambda\eta_2}{\gamma}z_1, \quad \phi_{22} = -\frac{\lambda\mu_2\eta_2}{\gamma}z_1 \quad \text{e} \quad \phi_{32} = -\frac{\lambda\mu_3\eta_2}{\gamma}z_1. \tag{3.32}$$

Substituindo ϕ_{12} em (3.24) obtemos a identidade

$$(\mu_3\eta_2 - \mu_2\eta_3)^2 - \delta\eta_2^2 + \eta_3^2 = 0. \tag{3.33}$$

Decorre de (3.33) que $\delta = 1$ pois, caso contrário se $\delta = -1$, teríamos $\mu_3\eta_2 - \mu_2\eta_3 = \eta_2 = \eta_3 = 0$, isto é, $\eta_2 = 0$, o que contradiz $\eta_2\phi_{12} \neq 0$.

Pela relação (2.4), temos $f_{12} = -\lambda z_0 f_{11} + \phi_{12}$, com ϕ_{12} dada em (3.32). Por conseguinte, substituindo f_{12} bem como as expressões dadas em (3.32) em (3.9), concluímos que G é dada por

$$h'G = -\lambda\left[z_1 h + z_0 z_1 h' + \frac{\eta_2}{\gamma}(\mu_3\eta_2 - \mu_2\eta_3)z_1 + \frac{\eta_2}{\gamma}z_2\right],$$

onde $h := h(z_0 - z_2) = f_{11}$ (conforme Observação 3.1.1). Defina

$$m_1 := \frac{\eta_2}{\gamma}(\mu_3\eta_2 - \mu_2\eta_3) \quad e \quad m_2 := \frac{\eta_2}{\gamma}.$$

Observamos que $m_2 \neq 0$, já que $\eta_2 \neq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \mu_3\eta_2 - \mu_2\eta_3 = \frac{m_1}{m_2} \quad e \quad \eta_2 &= m_2\gamma \\ &= m_2[\mu_2(\mu_3\eta_2 - \mu_2\eta_3) - \eta_3] \\ &= m_2\left(\mu_2\frac{m_1}{m_2} - \eta_3\right) \\ &= m_1\mu_2 - m_2\eta_3. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Da segunda expressão de (3.34), obtemos

$$\eta_3 = \frac{m_1\mu_2 - \eta_2}{m_2}, \tag{3.35}$$

que substituída na primeira expressão de (3.34), fornece

$$\mu_3 = \frac{m_1(1 + \mu_2^2)}{m_2\eta_2} - \frac{\mu_2}{m_2}. \tag{3.36}$$

Finalmente, substituindo a primeira expressão de (3.34) e (3.35) em (3.33), com $\delta = 1$, segue que μ_2 e η_2 relacionam-se por

$$(m_2\eta_2)^2 = m_1^2 + (m_1\mu_2 - \eta_2)^2.$$

Para finalizarmos a condição necessária da demonstração, precisamos exibir as funções f_{ij}. Mas isto não oferece maiores dificuldades, pois de (2.2), (3.35) e (3.36) temos

$$f_{21} = \mu_2 h + \eta_2 \quad \text{e} \quad f_{31} = \left[\frac{m_1(1+\mu_2^2)}{m_2\eta_2} - \frac{\mu_2}{m_2}\right] h + \frac{m_1\mu_2 - \eta_2}{m_2}.$$

Novamente pela relação (2.4), e de (3.32), (3.35) e (3.36), temos que

$$\begin{aligned}
f_{12} &= -\lambda z_0 h - \lambda m_2 z_1,\\
f_{22} &= -\lambda\mu_2 z_0 h - \lambda m_2\mu_2 z_1 - \lambda\eta_2 z_0,\\
f_{32} &= -\lambda z_0 f_{31} - \frac{\lambda}{\eta_2}\left[m_1(1+\mu_2^2) - \mu_2\eta_2\right] z_1.
\end{aligned}$$

Mantivemos f_{31} na expressão de f_{32} apenas por simplicidade na escrita. Observamos que $\lambda\eta_2 m_2 \neq 0$ corresponde a (2.8).

Reciprocamente, se G e f_{ij} são dadas como no Teorema 2.3, com $\lambda \neq 0$ e $\delta = 1$, então queremos mostrar que as 1-formas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$ satisfazem as equações de estrutura (1.1) se, e somente se, $z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda z_0 z_3 + G$. Mas isto é um cálculo direto.

□

3.4 Teorema 2.4

Nas hipóteses do Teorema 2.4 temos $\ell \not\equiv 0$ e $\gamma = 0$. Suponhamos que a equação

$$z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda z_0 z_3 + G(z_0, z_1, z_2)$$

descreve superfícies pseudo-esféricas, $\delta = 1$, ou superfícies esféricas, $\delta = -1$, com 1-formas associadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, onde f_{ij} são funções reais e diferenciáveis de z_k, $0 \leq k \leq 3$, satisfazendo (2.2) e (2.3)-(2.8). Queremos obter as funções ϕ_{i2} satisfazendo as equações (2.5)-(2.7) do Teorema 2.1, que pelo Lema 3.1.1 são equivalentes a (3.9)-(3.11).

Afim de simplificarmos a nossa demonstração, consideremos Q dada em (3.12). Assim, dividiremos a demonstração em duas situações, a saber

(i) $Q \equiv 0$,

(ii) $Q \neq 0$, em um aberto.

Admitindo o item (i), segue pela substituição de (3.12) em (3.10) que

$$z_2\ell_{,z_1} + z_1\ell_{,z_0} - \mu_2(\eta_2\phi_{32} - \eta_3\phi_{22}) + \eta_3\phi_{12} - \lambda\eta_2 z_1 = 0. \tag{3.37}$$

Derivando (3.37) com respeito a z_2, obtemos

$$\ell_{,z_1} = 0.$$

Integrando em z_1, temos que existe uma função real e diferenciável $T := T(z_0)$ de modo que

$$\phi_{22} = \mu_2\phi_{12} + T \tag{3.38}$$

onde $T \not\equiv 0$ pois, por hipótese, $\ell \not\equiv 0$. Ao substituirmos (3.38) em (3.12), como $Q \equiv 0$ vemos que ϕ_{32} é dada pela relação

$$\phi_{32} = \mu_3\phi_{12} + \frac{\mu_2\mu_3}{1+\mu_2^2}T. \tag{3.39}$$

Agora, usando (3.38) e (3.39), observamos de (3.37) que ϕ_{12} e T relacionam-se por

$$\gamma\phi_{12} = z_1 T_{,z_0} - \frac{\mu_2}{1+\mu_2^2}\gamma T - \lambda\eta_2 z_1,$$

onde γ está definido em (2.9). Ora, usando a hipótese de que $\gamma = 0$ na última equação temos

$$T_{,z_0} - \lambda\eta_2 = 0$$

cuja integração em z_0 nos permite escrever

$$T = \lambda\eta_2 z_0 + A, \tag{3.40}$$

onde $A \in \mathbb{R}$ e $(\lambda\eta_2)^2 + A^2 \neq 0$, já que $T \not\equiv 0$. Finalmente, podemos usar (3.38) e (3.39), com T dada por (3.40), em (3.11) e obter a expressão

$$\left[\frac{\mu_3^2 - \delta(1+\mu_2^2)}{1+\mu_2^2}\right] T f_{11} + [-\mu_3(\mu_3\eta_2 - \mu_2\eta_3) + \delta\eta_2]\phi_{12} - \frac{\mu_3\gamma}{1+\mu_2^2}T + \frac{\lambda\gamma}{1+\mu_2^2}z_1 = 0,$$

ou seja, lembrando que $\gamma = 0$, resulta que

$$\left[\frac{\mu_3^2 - \delta(1+\mu_2^2)}{1+\mu_2^2}\right] T f_{11} + [-\mu_3(\mu_3\eta_2 - \mu_2\eta_3) + \delta\eta_2]\phi_{12} = 0. \tag{3.41}$$

Tomando a derivada de (3.41) com respeito a z_2 e observando que, em virtude de (2.3), $Tf_{11,z_2} \neq 0$ em um aberto, encontramos

$$\mu_3^2 - \delta(1+\mu_2^2) = 0,$$

ou seja, δ deve ser exatamente 1 e μ_3 é dada por

$$\mu_3 = \pm\sqrt{1+\mu_2^2}. \tag{3.42}$$

Note também de (2.9), que $\gamma = 0$ é equivalente a

$$\eta_3 = \frac{\mu_2\mu_3\eta_2}{1+\mu_2^2},$$

ou seja, por (3.42)

$$\eta_3 = \pm\frac{\mu_2\eta_2\sqrt{1+\mu_2^2}}{1+\mu_2^2}. \tag{3.43}$$

Além disso, as relações dadas em (3.42) e (3.43) satisfazem (3.41), com $\delta = 1$.

Usando (3.38) e (3.39), com T dada por (3.40), bem como as relações (3.42) e (3.43) em (3.9), encontramos G por meio da relação

$$h'G = -\left(\lambda z_1 \pm \lambda m_1 z_0 \pm m_2\right)h - \lambda z_0 z_1 h' + z_1\psi_{,z_0} + z_2\psi_{,z_1} \pm m_1\psi,$$

onde denotamos por

$$\psi := \phi_{12} \quad \text{e} \quad h := h(z_0 - z_2) = f_{11},$$

conforme Observação 3.1.1. Além disso, as constantes reais m_1 e m_2 são definidas por

$$m_1 := \frac{\eta_2}{\sqrt{1+\mu_2^2}}, \quad i.e, \quad \eta_2 = m_1\sqrt{1+\mu_2^2}, \tag{3.44}$$

$$m_2 := \frac{A}{\sqrt{1+\mu_2^2}}, \quad i.e, \quad A = m_2\sqrt{1+\mu_2^2}. \tag{3.45}$$

Como $(\lambda\eta_2)^2 + A^2 \neq 0$, temos que $(\lambda m_1)^2 + m_2^2 \neq 0$. Segue de (3.42)-(3.44) e (2.2) que

$$f_{21} = \mu_2 h + m_1\sqrt{1+\mu_2^2} \quad \text{e} \quad f_{31} = \pm\sqrt{1+\mu_2^2}h \pm m_1\mu_2.$$

Da relação (2.4) do Teorema 2.1, sabemos que

$$f_{i2} = -\lambda z_0 f_{i1} + \phi_{i2}, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Consequentemente, de (2.4) e das Equações (3.38) e (3.39), com T dada por (3.40) e A dada por (3.45), temos que

$$
\begin{aligned}
f_{12} &= -\lambda z_0 h + \psi, \\
f_{22} &= -\lambda \mu_2 z_0 h + \mu_2 \psi + m_2 \sqrt{1+\mu_2^2}, \\
f_{32} &= -\lambda z_0 f_{31} \pm \sqrt{1+\mu_2^2}\psi \pm \lambda m_1 \mu_2 z_0 \pm m_2 \mu_2,
\end{aligned}
$$

onde μ_3, η_3 e η_2 são obtidas de (3.42), (3.43) e (3.44), respectivamente. Observamos que $(\lambda m_1)^2 + m_2^2 \neq 0$ implica que (2.8) é satisfeita.

Reciprocamente, se G e f_{ij} são dadas como no Teorema 2.4, com λ satisfazendo $(\lambda m_1)^2 + m_2^2 \neq 0$, e $\delta = 1$, então queremos mostrar que as 1-formas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$ satisfazem as equações de estrutura (1.1) se, e somente se, $z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda z_0 z_3 + G$. Mas isto é um cálculo direto.

Embora tenhamos alcançado nosso objetivo no que se refere à obtenção da G e das f_{ij}, a presente análise estará completa com o estudo do item (ii), isto é, $Q \neq 0$, onde Q é dada por (3.12). Segue do Lema 3.1.2 que as equações (3.10) e (3.11) são equivalentes a (3.13)-(3.17). Vamos provar que essas equações não têm solução.

Ora, de (3.14) seque-se que ϕ_{32} é dada por

$$\phi_{32} = \frac{\mu_3}{1+\mu_2^2}(\mu_2\phi_{22} + \phi_{12}) - \frac{\ell_{,z_1}}{a(1+\mu_2^2)} \tag{3.46}$$

que, substituída em (3.15), fornece a equação diferencial parcial

$$\ell_{,z_1 z_1} - a^2 \alpha \ell = 0, \quad \alpha := \delta(1+\mu_2^2) - \mu_3^2. \tag{3.47}$$

A solução de (3.47) depende do sinal de α, ou seja,

$$\ell = re^{\tau z_1} + se^{-\tau z_1}, \quad \tau := |a|\sqrt{\alpha}, \quad \text{se} \quad \alpha > 0, \tag{3.48}$$

$$\ell = rz_1 + s, \quad \text{se} \quad \alpha = 0, \tag{3.49}$$

$$\ell = rcos(\theta z_1) + s\, sen(\theta z_1), \quad \theta = |a|\sqrt{-\alpha}, \quad \text{se} \quad \alpha < 0, \tag{3.50}$$

onde $r := r(z_0)$ e $s := s(z_0)$ são funções reais e diferenciáveis. Como $aQ \neq 0$, segue de (3.14) que

$$\ell_{,z_1} \neq 0. \tag{3.51}$$

Além disso, segue de (3.47) que $\alpha \geq 0$ implica que $\delta = 1$ e quando $\alpha < 0$ podemos ter $\delta = \pm 1$. Portanto, os dois primeiros casos determinam diretamente o valor de δ enquanto que o caso $\alpha < 0$ exige uma análise mais detalhada.

Se $\alpha > 0$, então segue de (3.46) e (3.48) que ϕ_{22} e ϕ_{32} são dados em termos de ϕ_{12} por

$$\begin{aligned}
\phi_{22} &= \mu_2\phi_{12} + re^{\tau z_1} + se^{-\tau z_1},\\
\phi_{32} &= \mu_3\phi_{12} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 - \frac{\tau}{a}\right)re^{\tau z_1} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 + \frac{\tau}{a}\right)se^{-\tau z_1}.
\end{aligned}$$

Essas expressões substituídas em (3.16), usando a hipótese de que $\gamma = 0$, fornecem

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\tau}{a}\left(az_0 + b + \frac{\mu_2\eta_2}{1+\mu_2^2}\right)r + z_1 r'\right]e^{\tau z_1} \\
&\qquad + \left[\frac{-\tau}{a}\left(az_0 + b + \frac{\mu_2\eta_2}{1+\mu_2^2}\right)s + z_1 s'\right]e^{-\tau z_1} - \lambda\eta_2 z_1 = 0.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Derivando (3.52) com respeito a z_0 e multiplicando o resultado por $e^{\tau z_1}$, temos

$$\begin{aligned}
0 \;=\; &\left[\frac{\tau}{a}\left(az_0 + b + \frac{\mu_2\eta_2}{1+\mu_2^2}\right)r + z_1 r'\right]_{,z_0} e^{2\tau z_1} \\
&+ \left[\frac{-\tau}{a}\left(az_0 + b + \frac{\mu_2\eta_2}{1+\mu_2^2}\right)s + z_1 s'\right]_{,z_0}.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Derivando (3.53) com respeito a z_1 e multiplicando o resultado por $e^{-2\tau z_1}$, obtemos

$$0 = r'' + 2\tau\left[\frac{\tau}{a}\left(az_0 + b + \frac{\mu_2\eta_2}{1+\mu_2^2}\right)r + z_1 r'\right]_{,z_0} + s''e^{-2\tau z_1}. \tag{3.54}$$

Derivando (3.54) com respeito a z_1, temos

$$0 = r'' - s''e^{-2\tau z_1},$$

o que ocorre se, e somente se, $r'' = s'' \equiv 0$, ou seja, existem constantes A, B, C e D tais que

$$r = Az_0 + B, \qquad s = Cz_0 + D. \tag{3.55}$$

Substituindo (3.55) em (3.54) e usando o fato de que $G \neq 0$, obtemos $A = B = 0$, isto é, $r = 0$. Por conseguinte, ao substituírmos (3.55) em (3.53), com $r = 0$, pelo mesmo argumento resulta que $C = D = 0$, ou seja, $s = 0$. Contudo, $r = s = 0$ implica $\ell = 0$, caracterizando um absurdo, já que por hipótese $\ell \not\equiv 0$. Isto significa que, se $\ell \neq 0$, $\gamma = 0$, $Q \neq 0$ e $\alpha > 0$ então não existe solução para (3.13)-(3.17).

Se $\alpha = 0$, então segue de (3.46) e (3.49) que ϕ_{22} e ϕ_{32} são dados por

$$\begin{aligned} \phi_{22} &= \mu_2\phi_{12} + z_1 r + s, \\ \phi_{32} &= \mu_3\phi_{12} + \frac{\mu_2\mu_3}{1+\mu_2^2}(z_1 r + s) - \frac{r}{a(1+\mu_2^2)}. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Substituindo (3.56) em (3.16) e, usando a hipótese de $\gamma = 0$, obtemos

$$\frac{(az_0+b)}{a}r + \frac{\mu_2\eta_2}{a(1+\mu_2^2)}r + z_1^2 r' + z_1 s' - \lambda\eta_2 z_1 = 0. \tag{3.57}$$

Considerando (3.57) como um polinômio em z_1 obtemos que

$$r' = 0 \quad \text{e} \quad s' - \lambda\eta_2 = 0,$$

ou seja, existem constantes A e B de forma que

$$r = A \quad \text{e} \quad s = \lambda\eta_2 z_0 + B.$$

Substituindo estas expressões em (3.57) e usando o fato de que (3.57) deve ser uma identidade para toda solução da equação diferencial obtemos $A = 0$, o que contradiz (3.51), pois $A = r = 0$ implica por (3.56) que $(\phi_{22} - \mu_2\phi_{12})_{,z_1} = A = 0$. Por conseguinte, se $\ell \neq 0$, $\gamma = 0$, $Q \neq 0$ e $\alpha = 0$ então não existe solução para (3.13)-(3.17).

Para concluírmos a demonstração, precisamos analisar o caso $\alpha < 0$, isto é, quando ocorre (3.50). Para tanto, se $\alpha < 0$ então segue de (3.46) e (3.50) que ϕ_{22} e ϕ_{32} são dados respectivamente por

$$\begin{aligned} \phi_{22} &= \mu_2\phi_{12} + r cos(\theta z_1) + s sen(\theta z_1), \\ \phi_{32} &= \mu_3\phi_{12} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 r - \frac{\theta}{a}s\right) cos(\theta z_1) + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 s + \frac{\theta}{a}r\right) sen(\theta z_1). \end{aligned}$$

Substituindo estas expressões em (3.16) e usando a hipótese de que $\gamma = 0$, segue que

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\theta(az_0+b)}{a}s + z_1 r' + \frac{\theta\mu_2\eta_2}{a(1+\mu_2^2)}s\right] cos(\theta z_1) \\ &\quad + \left[-\frac{\theta(az_0+b)}{a}r + z_1 s' - \frac{\theta\mu_2\eta_2}{a(1+\mu_2^2)}r\right] sen(\theta z_1) - \lambda\eta_2 z_1 = 0. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Derivando (3.58) com respeito a z_0, obtemos

$$\left[\frac{\theta(az_0+b)}{a}s + z_1 r' + \frac{\theta\mu_2\eta_2}{a(1+\mu_2^2)}s\right]_{,z_0} cos(\theta z_1) + \left[-\frac{\theta(az_0+b)}{a}r + z_1 s' - \frac{\theta\mu_2\eta_2}{a(1+\mu_2^2)}r\right]_{,z_0} sen(\theta z_1) = 0. \tag{3.59}$$

Derivando (3.59) com respeito a z_1,

$$r''cos(\theta z_1) - \theta\left[\frac{\theta(az_0+b)}{a}s + z_1 r' + \frac{\theta\mu_2\eta_2}{a(1+\mu_2^2)}s\right]_{,z_0} sen(\theta z_1) + s''sen(\theta z_1) + \theta\left[-\frac{\theta(az_0+b)}{a}r + z_1 s' - \frac{\theta\mu_2\eta_2}{a(1+\mu_2^2)}r\right]_{,z_0} cos(\theta z_1) = 0. \tag{3.60}$$

Finalmente, derivando (3.60) com respeito a z_1,

$$-2\theta r''sen(\theta z_1) - \theta^2\left[\frac{\theta(az_0+b)}{a}s + z_1 r' + \frac{\theta\mu_2\eta_2}{a(1+\mu_2^2)}s\right]_{,z_0} cos(\theta z_1) + 2\theta s''cos(\theta z_1) - \theta^2\left[-\frac{\theta(az_0+b)}{a}r + z_1 s' - \frac{\theta\mu_2\eta_2}{a(1+\mu_2^2)}r\right]_{,z_0} sen(\theta z_1) = 0.$$

Usando (3.59) nesta última equação, resulta que

$$-r''sen(\theta z_1) + s''cos(\theta z_1) = 0. \tag{3.61}$$

Note que podemos derivar (3.61) em relação à variável z_1 e obter uma certa equação que, juntamente com (3.61), fornece um sistema em termos de r'' e s'' cuja representação matricial

$$\begin{pmatrix} -sen(\theta z_1) & cos(\theta z_1) \\ cos(\theta z_1) & sen(\theta z_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r'' \\ s'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

permite-nos concluir que $r'' = s'' = 0$ como única solução.

Logo, existem constantes A, B, C e D satisfazendo

$$r = Az_0 + B \quad e \quad s = Cz_0 + D,$$

que substituídas em (3.60) fornece

$$-\left(2aCz_0 + aD + bC + \frac{\mu_2\eta_2}{1+\mu_2^2}C\right) sen(\theta z_1) + \left(-2aAz_0 - aB - bA - \frac{\mu_2\eta_2}{1+\mu_2^2}A\right) cos(\theta z_1) = 0. \tag{3.62}$$

Derivando (3.62) em z_0 e usando o fato de que as funções seno e cosseno são linearmente independentes, obtemos $A = C = 0$. Estes, por sua vez, quando substituídos novamente em (3.62) fornece

$$Dsen(\theta z_1) + Bcos(\theta z_1) = 0,$$

ou seja, $B = D = 0$. Portanto, $r = s = 0$, o que implica de (3.50) que $\ell = 0$, contradizendo nossa hipótese. Em resumo, supondo $\ell \neq 0$, $\gamma = 0$ e $Q \neq 0$ o sistema (3.13)-(3.17) não possui solução. Isto finaliza a prova.

$\square$

3.5 Teorema 2.5

Consideremos as notações

$$\beta := \mu_3\eta_2 - \mu_2\eta_3,\ \ \sigma := \mu_3\eta_3 - \mu_2\eta_2,\ \ \rho := -\mu_3\beta + \delta\eta_2 \text{ e } \alpha := \delta(1+\mu_2^2) - \mu_3^2, \tag{3.63}$$

onde $\delta = \pm 1$. Os seguintes resultados dados no Lemas 3.5.1 - 3.5.3 serão usados na demonstração do Teorema 2.5. Começaremos provando um lema que fornece algumas relações algébricas envolvendo as constantes μ_p e η_p, com $1 \leq p \leq 2$.

Lema 3.5.1 *Seja γ a constante definida em* (2.9)*. Se $\alpha > 0$ e $\gamma \pm \sqrt{\alpha}\eta_2 = 0$, então*

$$\rho \mp \sqrt{\alpha}\eta_3 = 0, \quad \sigma \mp \sqrt{\alpha}\beta = 0, \quad \beta^2 + \eta_3^2 - \eta_2^2 = 0.$$

Prova. Com efeito, note inicialmente que se $\alpha > 0$ e $\gamma \pm \sqrt{\alpha}\eta_2 = 0$, então $\delta = 1$ e

$$\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 \pm \sqrt{\alpha}\right) = \pm\frac{\sqrt{\alpha}}{\gamma(1+\mu_2^2)}(\gamma \pm \sqrt{\alpha}\eta_2) = 0.$$

Portanto, podemos escrever ρ como segue

$$\rho = -\frac{\gamma}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 \pm \sqrt{\alpha}\right).$$

Assim, usando (3.63) temos

$$\rho \mp \sqrt{\alpha}\eta_3 = -\frac{\gamma}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 \pm \sqrt{\alpha}\right) \mp \sqrt{\alpha}\eta_3 = -\frac{\mu_2\mu_3}{1+\mu_2^2}\left(\gamma \pm \sqrt{\alpha}\eta_2\right) = 0$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned}
\sigma \mp \sqrt{\alpha}\beta &= \mu_3\eta_3 - \mu_2\eta_2 \mp \sqrt{\alpha}(\mu_3\eta_2 - \mu_2\eta_3) \\
&= \mu_3(\eta_3 \mp \sqrt{\alpha}\eta_2) - \mu_2(\eta_2 \mp \sqrt{\alpha}\eta_3) \\
&= \mu_3(\eta_3 + \gamma) - \mu_2(\eta_2 \mp \sqrt{\alpha}\eta_3) \\
&= \mu_3(\eta_3 + \mu_2\beta - \eta_3) - \mu_2(\eta_2 \mp \sqrt{\alpha}\eta_3) \\
&= -\mu_2(\rho \mp \sqrt{\alpha}\eta_3) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
0 &= \eta_3(\gamma \pm \sqrt{\alpha}\eta_2) + \eta_2(\rho \mp \sqrt{\alpha}\eta_3) \\
&= \eta_3(\mu_2\beta - \eta_3 \pm \sqrt{\alpha}\eta_2) + \eta_2(-\mu_3\beta + \eta_2 \mp \sqrt{\alpha}\eta_3) \\
&= -(\beta^2 + \eta_3^2 - \eta_2^2).
\end{aligned}$$

Isto finaliza a prova do lema.

$\square$

Lema 3.5.2 *Nas condições do Teorema* 2.1*, sejam ℓ, γ e Q dados por* (2.9) *e* (3.12)*, respectivamente. Se $\gamma \neq 0$ então $\ell \neq 0$ se, e somente se, $Q \neq 0$.*

Prova. Nas condições do Teorema 2.1, o Lema 3.1.1 se verifica. Supondo $\ell \neq 0$, vamos mostrar que $Q \neq 0$. De fato, se $Q = 0$ então substituindo em (3.10) do Lema 3.1.1 obtemos

$$z_2\ell_{,z_1} + z_1\ell_{,z_0} - \mu_2(\eta_2\phi_{32} - \eta_3\phi_{22}) + \eta_3\phi_{12} - \lambda\eta_2 z_1 = 0. \tag{3.64}$$

Como ϕ_{i2} são funções diferenciáveis de z_0 e z_1, tomando a derivada de (3.64) com respeito a variável z_2, temos

$$\ell_{,z_1} = 0.$$

Integrando em z_1, temos que existe uma função real e diferenciável $T := T(z_0)$ tal que

$$\phi_{22} = \mu_2\phi_{12} + T, \tag{3.65}$$

com $T \not\equiv 0$ pois, por hipótese, $\ell \not\equiv 0$. Ao substituirmos (3.65) em (3.12), e igualando a zero vemos que ϕ_{32} é dada pela relação

$$\phi_{32} = \mu_3\phi_{12} + \frac{\mu_2\mu_3}{1+\mu_2^2}T. \tag{3.66}$$

Usando (3.65) e (3.66) em (3.64), como $\ell = T$, obtemos

$$\gamma\phi_{12} = z_1 T_{,z_0} - \frac{\mu_2}{1+\mu_2^2}\gamma T - \lambda\eta_2 z_1,$$

ou seja, usando a hipótese de que $\gamma \neq 0$, segue da última equação que ϕ_{12} é dada por

$$\phi_{12} = \frac{z_1}{\gamma}T_{,z_0} - \frac{\mu_2}{1+\mu_2^2}T - \frac{\lambda\eta_2}{\gamma}z_1. \tag{3.67}$$

Substituindo (3.67) em (3.65) e (3.66), vemos que ϕ_{22} e ϕ_{32} estão unicamente determinadas em termos da função T. Além disso,

$$\begin{aligned}
\mu_2\phi_{32} - \mu_3\phi_{22} &= -\frac{\mu_3}{1+\mu_2^2}T, \quad \phi_{32} - \mu_3\phi_{12} = \frac{\mu_2\mu_3}{1+\mu_2^2}T,\\
\eta_2\phi_{32} - \eta_3\phi_{22} &= \beta\phi_{12} + \frac{\gamma T}{1+\mu_2^2}.
\end{aligned}$$

Por conseguinte, ao substituirmos as funções ϕ_{i2} em (3.11) do Lema 3.1.1, obtemos usando (3.63)

$$-\frac{\alpha}{1+\mu_2^2}Tf_{11} + \rho\phi_{12} - \frac{\mu_3\gamma}{1+\mu_2^2}T + \frac{\mu_2\mu_3}{1+\mu_2^2}z_1 T_{,z_0} - \lambda\eta_3 z_1 = 0. \tag{3.68}$$

Derivando (3.68) com respeito a z_2 e usando o fato de que $Tf_{11,z_2} \not\equiv 0$, devemos ter $\alpha = 0$. Portanto

$$\mu_3^2 = 1 + \mu_2^2, \text{ e } \delta = 1. \tag{3.69}$$

Usando (3.67) e (3.69) em (3.68), obtemos

$$\rho\left(\frac{z_1}{\gamma}T' - \frac{\mu_2}{1+\mu_2^2}T - \frac{\lambda\eta_2}{\gamma}z_1\right) + \frac{\mu_2\mu_3}{1+\mu_2^2}z_1 T' - \frac{\mu_3\gamma}{1+\mu_2^2}T - \lambda\eta_3 z_1 = 0.$$

Derivando esta equação em z_1 e substituindo o resultado novamente na última equação, segue o sistema

$$\begin{aligned}
\frac{\rho}{\gamma}(T' - \lambda\eta_2) + \frac{\mu_2\mu_3}{1+\mu_2^2}T' - \lambda\eta_3 &= 0,\\
(-\mu_2\rho - \mu_3\gamma)T &= 0.
\end{aligned}$$

Como $T \not\equiv 0$, segue da segunda equação do último sistema e de (3.63) que

$$\mu_2\eta_2 = \mu_3\eta_3. \tag{3.70}$$

Contudo, de (3.69) e (3.70), um simples cálculo nos mostra a seguinte contradição

$$\gamma = \mu_2(\mu_3\eta_2 - \mu_2\eta_3) - \eta_3 = (\mu_3^2 - \mu_2^2 - 1)\eta_3 = 0$$

pois, por hipótese, $\gamma \neq 0$. Concluímos que se $\ell \neq 0$ então $Q \neq 0$.

Reciprocamente, supondo $Q \neq 0$ queremos mostrar que $\ell \neq 0$. Ora, se $\ell = 0$ então segue de (3.10) do Lema 3.1.1 que

$$Qf_{11} - \mu_2(\eta_2\phi_{32} - \eta_3\phi_{22}) + \eta_3\phi_{12} - \lambda\eta_2 z_1 = 0.$$

A derivada em z_2 da última equação fornece

$$Qf_{11,z_2} = 0,$$

o que caracteriza um absurdo, pois $f_{11,z_2} = -f_{11,z_0} \neq 0$.

□

Lema 3.5.3 *Nas condições do Teorema* 2.1, *sejam* ℓ *e* γ *dados por* (2.9). *Se* $\ell \neq 0$ *e* $\gamma \neq 0$ *então o sistema de equações* (2.5)-(2.7) *é equivalente a*

$$f_{11} = a(z_0 - z_2) + b \tag{3.71}$$

$$\phi_{32} = \frac{\mu_3}{1+\mu_2^2}(\mu_2\phi_{22} + \phi_{12}) - \frac{\ell_{,z_1}}{a(1+\mu_2^2)}, \tag{3.72}$$

$$\ell_{,z_1z_1} - a^2\alpha\ell = 0, \tag{3.73}$$

$$z_1\ell_{,z_0} + \frac{1}{a}\left(az_0 + b + \frac{\mu_2\eta_2}{1+\mu_2^2}\right)\ell_{,z_1} - \frac{\gamma}{1+\mu_2^2}(\mu_2\phi_{22} + \phi_{12}) - \lambda\eta_2 z_1 = 0, \tag{3.74}$$

$$\begin{aligned} z_1\left(\mu_2\mu_3\ell - \frac{\ell_{,z_1}}{a}\right)_{,z_0} + \frac{(az_0+b)}{a}\left(\mu_2\mu_3\ell - \frac{\ell_{,z_1}}{a}\right)_{,z_1} - \mu_3\left(\gamma\phi_{22} - \eta_2\frac{\ell_{,z_1}}{a}\right)& \\ -\alpha\eta_2\phi_{12} - \lambda\eta_3(1+\mu_2^2)z_1 = 0.& \end{aligned} \tag{3.75}$$

onde a, $b \in \mathbb{R}$, *com* $a \neq 0$, *e* α *é dado por* (3.63).

Prova. Nas condições do Teorema 2.1, pelo Lema 3.1.1 temos que (2.5)-(2.7) são equivalentes a (3.9)-(3.11). Pelo Lema 3.5.2, como $\ell \neq 0$ temos que $Q \neq 0$. Segue do Lema 3.1.2 que vale (3.71) e o sistema de equações (3.10)-(3.11) é equivalente a (3.13)-(3.17).

Observe que, da equação (3.14), podemos isolar ϕ_{32} como em (3.72). Portanto, temos

$$\begin{aligned}
\phi_{32} - \mu_3\phi_{12} &= \frac{\mu_3}{1+\mu_2^2}(\mu_2\phi_{22} + \phi_{12}) - \frac{\ell_{,z_1}}{a(1+\mu_2^2)} - \mu_3\phi_{12} \\
&= \frac{\mu_2\mu_3}{1+\mu_2^2}\phi_{22} - \frac{\mu_2^2\mu_3}{1+\mu_2^2}\phi_{12} - \frac{\ell_{,z_1}}{a(1+\mu_2^2)} \\
&= \frac{1}{1+\mu_2^2}\left[\mu_2\mu_3(\phi_{22} - \mu_2\phi_{12}) - \frac{\ell_{,z_1}}{a}\right] \\
&= \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3\ell - \frac{\ell_{,z_1}}{a}\right) \qquad (3.76)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mu_2\phi_{32} - \mu_3\phi_{22} &= \mu_2\left[\frac{\mu_3}{1+\mu_2^2}(\mu_2\phi_{22} + \phi_{12}) - \frac{\ell_{,z_1}}{a(1+\mu_2^2)}\right] - \mu_3\phi_{22} \\
&= -\frac{\mu_3}{1+\mu_2^2}(\phi_{22} - \mu_2\phi_{12}) - \frac{\mu_2\ell_{,z_1}}{a(1+\mu_2^2)} \\
&= \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(-\mu_3\ell - \mu_2\frac{\ell_{,z_1}}{a}\right).
\end{aligned}$$

Substituindo essas duas expressões na equação (3.15), obtemos (3.73), com α dado por (3.63). Por outro lado, usando (2.9) temos que

$$\begin{aligned}
\eta_2\phi_{32} - \eta_3\phi_{22} &= \eta_2\left[\frac{\mu_3}{1+\mu_2^2}(\mu_2\phi_{22} + \phi_{12}) - \frac{\ell_{,z_1}}{a(1+\mu_2^2)}\right] - \eta_3\phi_{22} \\
&= \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\gamma\phi_{22} + \mu_3\eta_2\phi_{12} - \eta_2\frac{\ell_{,z_1}}{a}\right). \qquad (3.77)
\end{aligned}$$

Substituindo (3.77) em (3.16), isto é,

$$\begin{aligned}
0 &= z_1\ell_{,z_0} - \mu_2(\eta_2\phi_{32} - \eta_3\phi_{22}) + \eta_3\phi_{12} - \lambda\eta_2 z_1 + (az_0 + b)\frac{\ell_{,z_1}}{a} \\
&= z_1\ell_{,z_0} - \frac{\mu_2}{1+\mu_2^2}\left(\gamma\phi_{22} + \mu_3\eta_2\phi_{12} - \eta_2\frac{\ell_{,z_1}}{a}\right) + \eta_3\phi_{12} - \lambda\eta_2 z_1 + (az_0 + b)\frac{\ell_{,z_1}}{a},
\end{aligned}$$

obtemos (3.74). Finalmente, substituindo (3.76) e (3.77) na equação (3.17), isto é,

$$\begin{aligned}
0 &= z_1\left(\phi_{32} - \mu_3\phi_{12}\right)_{,z_0} + \tfrac{(az_0+b)}{a}\left(\phi_{32} - \mu_3\phi_{12}\right)_{,z_1} - \mu_3\left(\eta_2\phi_{32} - \eta_3\phi_{22}\right) + \delta\eta_2\phi_{12} - \lambda\eta_3 z_1 \\
&= \tfrac{z_1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3\ell - \tfrac{\ell_{,z_1}}{a}\right)_{,z_0} + \tfrac{(az_0+b)}{a(1+\mu_2^2)}\left(\mu_2\mu_3\ell - \tfrac{\ell_{,z_1}}{a}\right)_{,z_1} - \tfrac{\mu_3}{1+\mu_2^2}\left(\gamma\phi_{22} - \eta_2\tfrac{\ell_{,z_1}}{a}\right) \\
&\qquad - \tfrac{\alpha\eta_2}{1+\mu_2^2}\phi_{12} - \lambda\eta_3 z_1
\end{aligned}$$

obtemos (3.75). Isto prova o lema.

□

Proposição 3.5.1 *Nas condições do Lema* 3.5.3*, se* $\alpha < 0$*, onde* α *é dado por* (3.63)*, então não existe solução para* (3.73)-(3.75).

Prova. Se $\alpha < 0$, então a solução de (3.73) é dada por

$$\ell = rcos(\theta z_1) + s\,sen(\theta z_1), \quad \theta = |a|\sqrt{-\alpha}, \tag{3.78}$$

onde $r := r(z_0)$ e $s := s(z_0)$ são funções reais e diferenciáveis. Assim, segue de (2.9) e (3.78) que ϕ_{22} é da forma

$$\phi_{22} = \mu_2\phi_{12} + rcos(\theta z_1) + ssen(\theta z_1). \tag{3.79}$$

Substituindo (3.78) e (3.79) em (3.74), temos que ϕ_{12} é dada por

$$\begin{aligned} \phi_{12} = \frac{1}{\gamma}&\left[\frac{\theta}{a}(az_0+b)s + z_1 r' + \frac{\mu_2}{1+\mu_2^2}\left(-\gamma r + \frac{\eta_2\theta}{a}s\right)\right] cos(\theta z_1) \\ &\frac{1}{\gamma}\left[-\frac{\theta}{a}(az_0+b)r + z_1 s' - \frac{\mu_2}{1+\mu_2^2}\left(\gamma s + \frac{\eta_2\theta}{a}r\right)\right] sen(\theta z_1) - \frac{\lambda\eta_2}{\gamma}z_1, \end{aligned} \tag{3.80}$$

pois $\gamma \neq 0$. Além disso, substituindo as relações

$$\begin{aligned} \mu_2\mu_3\ell - \frac{\ell_{,z_1}}{a} &= \left(\mu_2\mu_3 r - \frac{\theta}{a}s\right) cos(\theta z_1) + \left(\mu_2\mu_3 s + \frac{\theta}{a}r\right) sen(\theta z_1), \\ \gamma\phi_{22} - \eta_2\frac{\ell_{,z_1}}{a} &= \gamma\mu_2\phi_{12} + \left(\gamma r - \frac{\eta_2\theta}{a}s\right) cos(\theta z_1) + \left(\gamma s + \frac{\eta_2\theta}{a}r\right) sen(\theta z_1) \end{aligned}$$

e a equação (3.80) em (3.75), segue a identidade

$$\tilde{R}cos(\theta z_1) + \tilde{S}sen(\theta z_1) + \frac{\lambda}{\gamma}(1+\mu_2^2)[\beta^2 + \eta_3^2 - \eta_2^2]z_1 = 0, \tag{3.81}$$

onde, para simplificarmos a notação, introduzimos as seguintes funções

$$\tilde{R} := \frac{\alpha\eta_2\theta}{a\gamma}(az_0+b)s + \frac{\alpha\eta_2}{\gamma}z_1 r' - \frac{\theta}{a}z_1 s' + \frac{\theta^2}{a^2}(az_0+b)r - \sigma r + \frac{\sigma\eta_2\theta}{a\gamma}s, \tag{3.82}$$

e

$$\tilde{S} := -\frac{\alpha\eta_2\theta}{a\gamma}(az_0+b)r + \frac{\alpha\eta_2}{\gamma}z_1 s' + \frac{\theta}{a}z_1 r' + \frac{\theta^2}{a^2}(az_0+b)s - \sigma s - \frac{\sigma\eta_2\theta}{a\gamma}r. \tag{3.83}$$

Derivando (3.81) com respeito a z_0, vemos que

$$\tilde{R}_{,z_0} cos(\theta z_1) + \tilde{S}_{,z_0} sen(\theta z_1) = 0. \tag{3.84}$$

Agora, derivamos (3.84) com respeito a z_1 e substituímos $\tilde{R}_{z_0 z_1}$ e $\tilde{S}_{z_0 z_1}$, sendo $\tilde{R}$ e $\tilde{S}$ dados, respectivamente, por (3.82) e (3.83),

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\alpha\eta_2}{\gamma} r'' - \frac{\theta}{a} s''\right) cos(\theta z_1) - \theta \tilde{R}_{,z_0} sen(\theta z_1) \\ &+ \left(\frac{\alpha\eta_2}{\gamma} s'' + \frac{\theta}{a} r''\right) sen(\theta z_1) + \theta \tilde{S}_{,z_0} cos(\theta z_1) = 0. \end{aligned} \tag{3.85}$$

Continuando com o raciocínio, podemos derivar (3.85) novamente com respeito a z_1 e obter

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\alpha\eta_2}{\gamma} r'' - \frac{\theta}{a} s''\right) sen(\theta z_1) + \left(\frac{\alpha\eta_2}{\gamma} s'' + \frac{\theta}{a} r''\right) cos(\theta z_1) \\ -\frac{\theta}{2}[\tilde{R}_{,z_0} cos(\theta z_1) + \tilde{S}_{,z_0} sen(\theta z_1)] = 0, \end{aligned}$$

ou seja, pela equação (3.84) devemos ter que

$$-\left(\frac{\alpha\eta_2}{\gamma} r'' - \frac{\theta}{a} s''\right) sen(\theta z_1) + \left(\frac{\alpha\eta_2}{\gamma} s'' + \frac{\theta}{a} r''\right) cos(\theta z_1) = 0. \tag{3.86}$$

Donde concluímos que

$$\frac{\alpha\eta_2}{\gamma} r'' - \frac{\theta}{a} s'' = 0 \quad e \quad \frac{\alpha\eta_2}{\gamma} s'' + \frac{\theta}{a} r'' = 0.$$

Por sua vez, as últimas equações podem ser reescritas como

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha\eta_2}{\gamma} & -\frac{\theta}{a} \\ \frac{\theta}{a} & \frac{\alpha\eta_2}{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r'' \\ s'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

onde o determinante da matriz associada, $\left(\frac{\alpha\eta_2}{\gamma}\right)^2 + \frac{\theta^2}{a^2}$, é diferente de zero, pois $\theta = |a|\sqrt{-\alpha} \neq 0$. Logo, existem constantes A, B, C e D satisfazendo

$$r = Az_0 + B \quad e \quad s = Cz_0 + D.$$

Substituindo r e s em (3.85) obtemos

$$\begin{aligned} &-\left[2\left(\frac{\alpha\eta_2\theta}{\gamma} C + \frac{\theta^2}{a} A\right) z_0 + c_1\right] sen(\theta z_1) \\ &+ \left[2\left(-\frac{\alpha\eta_2\theta}{\gamma} A + \frac{\theta^2}{a} C\right) z_0 + c_2\right] cos(\theta z_1) = 0, \end{aligned} \tag{3.87}$$

onde para simplificar, estamos considerando a notação c_1 e c_2 para as constantes

$$c_1 := \frac{\alpha\eta_2\theta}{\gamma}\left(D + \frac{b}{a}C\right) + \frac{\theta^2}{a}\left(B + \frac{b}{a}A\right) + \sigma\left(-A + \frac{\eta_2\theta}{a\gamma}C\right),$$

$$c_2 := -\frac{\alpha\eta_2\theta}{\gamma}\left(B + \frac{b}{a}A\right) + \frac{\theta^2}{a}\left(D + \frac{b}{a}C\right) - \sigma\left(C + \frac{\eta_2\theta}{a\gamma}A\right).$$

Derivando (3.87) em z_0 e usando o fato de que as funções seno e cosseno são linearmente independentes, obtemos

$$\frac{\alpha\eta_2}{\gamma}C + \frac{\theta}{a}A = 0,$$
$$-\frac{\alpha\eta_2}{\gamma}A + \frac{\theta}{a}C = 0,$$

cuja representação matricial em termos de A e C é dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{\theta}{a} & \frac{\alpha\eta_2}{\gamma} \\ -\frac{\alpha\eta_2}{\gamma} & \frac{\theta}{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde a única solução possível é $A = C = 0$, visto que o determinante da matriz associada, $\frac{\theta^2}{a^2} + \left(\frac{\alpha\eta_2}{\gamma}\right)^2$, nunca se anula.

Voltando em (3.87) com $A = C = 0$ e usando as definições de c_1 e c_2 inferimos que

$$-\left(\frac{\alpha\eta_2}{\gamma}D + \frac{\theta}{a}B\right)sen(\theta z_1) + \left(-\frac{\alpha\eta_2}{\gamma}B + \frac{\theta}{a}D\right)cos(\theta z_1) = 0,$$

que por um raciocínio semelhante ao anterior fornece $B = D = 0$. Contudo, $A = B = C = D = 0$ implica que $r = s = 0$, razão pela qual temos

$$\ell = \phi_{22} - \mu_2\phi_{12} = rcos(\theta z_1) + ssen(\theta z_1) = 0,$$

contrariando nossa hipótese sobre ℓ.

$\square$

Proposição 3.5.2 *Nas condições do Teorema* 2.1*, sejam* ℓ*,* γ *e* α *dadas por* (2.9) *e* (3.63)*, respectivamente. Suponha* $\ell \neq 0$*,* $\gamma \neq 0$ *e* $\alpha > 0$*. Então, a equação diferencial* $z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda z_0 z_2 + G$ *descreve superfícies pseudo-esféricas com 1-formas associadas* $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$*, onde* f_{ij} *são funções reais e diferenciáveis de* z_k, $0 \leq k \leq 3$, *satisfazendo* (2.2) *e* (2.3)-(2.8)*, se, e somente se,*

$$\delta = 1,$$

$$G = \lambda\left(z_1z_2 - 2z_0z_1 - \frac{m}{\tau}z_1 \mp \frac{z_2}{\tau}\right) + \tau e^{\pm\tau z_1}\left(\tau z_0z_2 \pm z_1 + mz_2\right)\varphi \tag{3.88}$$
$$\pm e^{\pm\tau z_1}\left(\tau z_0z_1 + \tau z_1z_2 + mz_1 \pm z_2\right)\varphi' + z_1^2e^{\pm\tau z_1}\varphi'', \qquad \lambda, m \in \mathbb{R}, \quad \tau > 0,$$

$$\begin{aligned}
f_{11} &= a(z_0 - z_2) + b,\\
f_{21} &= \mu f_{11} + \eta,\\
f_{31} &= \pm\left(m - \tfrac{b\tau}{a}\right)\left(\tfrac{1+\mu^2}{\eta}f_{11} + \mu\right) \mp \tfrac{\lambda}{\tau}z_2,\\
f_{12} &= -\lambda z_0f_{11} + \left[\pm\tau(az_0 + b)\varphi + az_1\varphi'\right]e^{\pm\tau z_1} \mp \tfrac{\lambda a}{\tau}z_1,\\
f_{22} &= \mu f_{12} - \lambda\eta z_0 \pm \eta\tau e^{\pm\tau z_1}\varphi,\\
f_{32} &= \pm\left(m - \tfrac{b\tau}{a}\right)\left[\tfrac{1+\mu^2}{\eta}f_{12} - \mu(\lambda z_0 \mp \tau e^{\pm\tau z_1}\varphi)\right] \mp \tfrac{\tau}{a}f_{22},
\end{aligned} \tag{3.89}$$

onde a*,* $b \in \mathbb{R}$*,* $a\eta \neq 0$*,* $(a\eta)^2 = (am - b\tau)^2 + [\mu(am - b\tau) - \tau\eta]^2$ *e* $\varphi(z_0)$ *é uma função real e diferenciável.*

Prova. Com as hipóteses da proposição, segue dos Lemas 3.1.1, 3.1.2 e 3.5.2 que a equação diferencial $z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda z_0z_3 + G$ é caracterizada pelas equações (3.72)-(3.75) onde $\alpha > 0$. Portanto, a solução de (3.73) é dada por

$$\ell = re^{\tau z_1} + se^{-\tau z_1}, \quad \tau := |a|\sqrt{\alpha}, \tag{3.90}$$

onde $r := r(z_0)$ e $s := s(z_0)$ são funções reais e diferenciáveis. Logo, de (2.9) temos que ϕ_{22} é da forma

$$\phi_{22} = \mu_2\phi_{12} + re^{\tau z_1} + se^{-\tau z_1}, \tag{3.91}$$

que substituída em (3.74), fornece

$$\phi_{12} = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{\tau}{a}\left(az_0 + b + \frac{\mu_2\eta_2}{1+\mu_2^2}\right)r + z_1r' - \frac{\mu_2\gamma}{1+\mu_2^2}r\right]e^{\tau z_1} \tag{3.92}$$
$$+\frac{1}{\gamma}\left[-\frac{\tau}{a}\left(az_0 + b + \frac{\mu_2\eta_2}{1+\mu_2^2}\right)s + z_1s' - \frac{\mu_2\gamma}{1+\mu_2^2}s\right]e^{-\tau z_1} - \frac{\lambda\eta_2}{\gamma}z_1,$$

pois $\gamma \neq 0$. Assim, (3.91) e (3.92) determinam as funções ϕ_{22} e ϕ_{12}, respectivamente, em termos de r e s. Usando essas equações em (3.75), obtemos a identidade

$$Re^{\tau z_1} + Se^{-\tau z_1} + \frac{\lambda}{\gamma}\left(\beta^2 + \eta_3^2 - \eta_2^2\right) z_1 = 0, \tag{3.93}$$

onde, para simplificarmos os cálculos, denotamos por R e S, as seguintes funções

$$R = \left[\frac{\tau}{a}(az_0 + b)r + z_1 r'\right]\left[\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 - \frac{\tau}{a}\right)\right] + \frac{\sigma}{1+\mu_2^2}\left(1 - \frac{\tau\eta_2}{a\gamma}\right) r, \tag{3.94}$$

e

$$S = \left[-\frac{\tau}{a}(az_0 + b)s + z_1 s'\right]\left[\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 + \frac{\tau}{a}\right)\right] + \frac{\sigma}{1+\mu_2^2}\left(1 + \frac{\tau\eta_2}{a\gamma}\right) s. \tag{3.95}$$

Ao derivarmos (3.93) com respeito a z_0 e multiplicarmos o resultado por $e^{\tau z_1}$, vemos que

$$R_{,z_0} e^{2\tau z_1} + S_{,z_0} = 0. \tag{3.96}$$

Derivando (3.96) com respeito a z_1 e multiplicando o resultado por $e^{-2\tau z_1}$,

$$R_{,z_0 z_1} + 2\tau R_{,z_0} + S_{,z_0 z_1} e^{-2\tau z_1} = 0$$

que, ao substituírmos $R_{,z_0 z_1}$ e $S_{,z_0 z_1}$, sendo R e S dados, respectivamente, por (3.94) e (3.95),

$$\left[\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 - \frac{\tau}{a}\right)\right] r'' + 2\tau R_{,z_0} + \left[\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 + \frac{\tau}{a}\right)\right] s'' e^{-2\tau z_1} = 0. \tag{3.97}$$

Derivando (3.97) com respeito a z_1, novamente substituindo $R_{,z_0 z_1}$ e usando o fato de que $\tau \neq 0$, obtemos

$$\left[\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 - \frac{\tau}{a}\right)\right] r'' - \left[\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 + \frac{\tau}{a}\right)\right] s'' e^{-2\tau z_1} = 0. \tag{3.98}$$

Finalmente, ao derivarmos (3.98) com respeito a z_1 e substituirmos o resultado novamente em (3.98), obtemos o sistema

$$\left[\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 - \frac{\tau}{a}\right)\right] r'' = 0, \tag{3.99}$$

$$\left[\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 + \frac{\tau}{a}\right)\right] s'' = 0. \tag{3.100}$$

Vamos analisar o sistema formado por (3.99) e (3.100) nas seguintes etapas

(a) $r'' \neq 0$ e $s'' \neq 0$,

(b) $r'' \neq 0$ e $s'' \equiv 0$,

(c) $r'' \equiv 0$ e $s'' \neq 0$,

(d) $r'' \equiv 0$ e $s'' \equiv 0$.

Adimitindo o caso (a), segue de (3.99) e (3.100) que

$$\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 - \frac{\tau}{a}\right) = 0,$$
$$\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 + \frac{\tau}{a}\right) = 0.$$

Ao multiplicarmos a primeira equação acima por -1 e somarmos com a segunda, concluímos que $\tau = 0$, o que é um absurdo já que $\tau \neq 0$. Logo, não existe o caso (a).

Por outro lado, admitindo o item (b), existem constantes C e D de modo que $s = Cz_0 + D$. Além disso, a equação (3.100) segue satisfeita enquanto que, de (3.99), obtemos

$$\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 - \frac{\tau}{a}\right) = 0. \tag{3.101}$$

Substituindo $s = Cz_0 + D$ e (3.101) na equação (3.97) obtemos $R_{,z_0} = 0$ que, por sua vez, substituído em (3.96) fornece $S_{,z_0} = 0$. Usando S dada em (3.95) podemos ver que

$$0 = (S_{,z_0})_{,z_0} = C\left[\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 + \frac{\tau}{a}\right)\right].$$

Juntando a última equação com (3.101), como $\tau \neq 0$ então a única possibilidade acima é $C = 0$; isto, por sua vez, implica que

$$0 = S_{,z_0} = D\left[\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 + \frac{\tau}{a}\right)\right],$$

o que novamente implica $D = 0$. Logo, $s = 0$ e, portanto, $S = 0$. Substituindo (3.101) em (3.94), obtemos

$$R = \frac{\sigma}{1+\mu_2^2}\left(1 - \frac{\tau\eta_2}{a\gamma}\right) r,$$

e, usando o fato de que $R_{,z_0} = 0$ e $r'' \neq 0$, resta-nos

$$\sigma\left(1 - \frac{\tau\eta_2}{a\gamma}\right) = 0 \tag{3.102}$$

donde $R = 0$. A equação (3.93) com $S = R = 0$ fornece

$$\lambda\left(\beta^2 + \eta_3^2 - \eta_2^2\right) = 0. \tag{3.103}$$

Como a equação (3.101) equivale a $\frac{\alpha\eta_2}{\gamma} - \frac{\tau}{a} = 0$, isto é, $\gamma - \epsilon\sqrt{\alpha}\eta_2 = 0$ ($\epsilon = \pm 1$), temos que (3.102) é satisfeita independente de σ. Além disso, do Lema 3.5.1, $\beta^2 + \eta_3^2 - \eta_2^2 = 0$, ou seja, (3.103) vale para todo λ.

Usando as equações (3.91) e (3.92), com $s = 0$, bem como (3.72) e (3.13), em (3.9), concluímos que G é dada por

$$\begin{aligned} G = \lambda z_1 z_2 - 2\lambda z_0 z_1 - \frac{\lambda}{a}\left(b + \frac{\beta\eta_2}{\gamma}\right) z_1 - \frac{\lambda\eta_2}{a\gamma} z_2 \\ + \varphi e^{\tau z_1}\left[\tau^2 z_0 z_2 + (a\sigma + \beta\tau) z_0 + \tau z_1 + \left(\frac{b}{a}\tau^2 - a\sigma\right) z_2 + \frac{b}{a}(a\sigma + \beta\tau)\right] \\ + \varphi' e^{\tau z_1}\left[\tau z_0 z_1 + \tau z_1 z_2 + \left(\beta + \frac{b}{a}\tau\right) z_1 + z_2\right] + \varphi'' z_1^2 e^{\tau z_1}, \end{aligned}$$

onde $\varphi := \frac{r}{a\gamma} (\neq 0)$. Pelo Lema 3.5.1, temos que valem as identidades algébricas

$$a\sigma + \beta\tau = 0 \quad \text{e} \quad a\rho + \tau\eta_3 = 0, \tag{3.104}$$

o que nos permite simplificar G, obtendo

$$\begin{aligned} G = \lambda z_1 z_2 - 2\lambda z_0 z_1 - \frac{\lambda}{\tau} m z_1 - \frac{\lambda}{\tau} z_2 + \varphi e^{\tau z_1}\left(\tau^2 z_0 z_2 + \tau z_1 + \tau m z_2\right) \\ + \varphi' e^{\tau z_1}\left(\tau z_0 z_1 + \tau z_1 z_2 + m z_1 + z_2\right) + \varphi'' z_1^2 e^{\tau z_1}, \end{aligned}$$

onde definimos

$$m := \frac{b}{a}\tau + \beta. \tag{3.105}$$

Observamos que, com as relações $a\gamma - \tau\eta_2 = 0$, (3.105) e (3.90), obtemos

$$\begin{aligned} \mu_3 &= \frac{1 + \mu_2^2}{\eta_2}\left(m - \frac{b\tau}{a}\right) - \frac{\tau\mu_2}{a}, \\ \eta_3 &= \mu_2\left(m - \frac{b\tau}{a}\right) - \frac{\tau\eta_2}{a}, \end{aligned}$$

que substituídas em $a\rho + \tau\eta_3 = 0$ fornece $(a\eta_2)^2 = (am - b\tau)^2 + [\mu_2(am - b\tau) - \tau\eta_2]^2$. Além disso, as funções f_{ij} associadas são dadas por

$$\begin{aligned}
f_{11} &= a(z_0 - z_2) + b,\\
f_{21} &= \mu_2 f_{11} + \eta_2,\\
f_{31} &= \left(m - \tfrac{b\tau}{a}\right)\left(\tfrac{1+\mu_2^2}{\eta_2} f_{11} + \mu_2\right) - \tfrac{\tau}{a} f_{21},\\
f_{12} &= -\lambda z_0 f_{11} + \left[\tau(az_0 + b)\varphi + a z_1 \varphi'\right] e^{\tau z_1} - \tfrac{\lambda a}{\tau} z_1,\\
f_{22} &= \mu_2 f_{12} - \lambda \eta_2 z_0 + \eta_2 \tau \varphi e^{\tau z_1},\\
f_{32} &= \left(m - \tfrac{b\tau}{a}\right)\left[\tfrac{1+\mu_2^2}{\eta_2} f_{12} + \mu_2(-\lambda z_0 + \tau e^{\tau z_1}\varphi)\right] - \tfrac{\tau}{a} f_{22},
\end{aligned}$$

onde $\delta = 1$, $a\eta_2 \neq 0$, $\tau > 0$ e $\varphi(z_0)$ é uma função real e diferenciável satisfazendo $\varphi'' \neq 0$.

Note que $\varphi \neq 0$ corresponde a (2.8). Isto conclui a análise de (b), e fornece G e as funções f_{ij} dadas por (3.88) e (3.89) com os sinais superiores, onde denotamos $\mu := \mu_2$ e $\eta := \eta_2$.

Agora, vamos analisar o item (c), isto é, $r'' \equiv 0$ e $s'' \neq 0$. Note que existem constantes reais A e B tais que $r = Az_0 + B$. Além disso, (3.99) segue satisfeita enquanto que, da equação (3.100), temos a identidade

$$\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 + \frac{\tau}{a}\right) = 0. \tag{3.106}$$

Substituindo $r = Az_0 + B$ e (3.106) em (3.97) obtemos $R_{,z_0} = 0$ que, por sua vez, substituído em (3.96) fornece $S_{,z_0} = 0$. Usando R dada em (3.94) podemos ver que

$$0 = (R_{,z_0})_{,z_0} = A\left[\frac{\sigma}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 - \frac{\tau}{a}\right)\right].$$

Juntando a última equação com (3.106), com o mesmo argumento usado em (a) a única possibilidade acima é $A = 0$; isto, por sua vez, implica que

$$0 = R_{,z_0} = B\left[\frac{\sigma}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 - \frac{\tau}{a}\right)\right],$$

o que novamente implica $B = 0$. Logo, $r = 0$ implica $R = 0$. Substituindo (3.106) em (3.95), obtemos

$$S = \frac{\sigma}{1+\mu_2^2}\left(1 + \frac{\tau\eta_2}{a\gamma}\right) s,$$

e, usando o fato de que $S_{,z_0} = 0$ e $s'' \neq 0$, resta-nos

$$\sigma\left(1 + \frac{\tau\eta_2}{a\gamma}\right) = 0, \tag{3.107}$$

donde $S = 0$. A equação (3.93) com $S = R = 0$ fornece

$$\lambda\left(\beta^2 + \eta_3^2 - \eta_2^2\right) = 0. \tag{3.108}$$

Como a equação (3.106) equivale a $\frac{\alpha\eta_2}{\gamma} + \frac{\tau}{a} = 0$, isto é, $\gamma + \epsilon\sqrt{\alpha}\eta_2 = 0$ $(\epsilon = \pm 1)$, temos que (3.107) está satisfeita independente de σ. Além disso, do item (ii) do Lema 3.5.1, $\beta^2 + \eta_3^2 - \eta_2^2 = 0$, ou seja, (3.108) vale para todo λ.

Usando as equações (3.91) e (3.92), com $r = 0$, bem como (3.72) e (3.13), em (3.9), concluímos que G é dada por

$$\begin{aligned} G = {} & \lambda z_1 z_2 - 2\lambda z_0 z_1 - \frac{\lambda}{a}\left(b + \frac{\beta\eta_2}{\gamma}\right) z_1 - \frac{\lambda\eta_2}{a\gamma} z_2 \\ & + \varphi e^{-\tau z_1}\left[\tau^2 z_0 z_2 + (a\sigma - \beta\tau) z_0 - \tau z_1 + \left(\frac{b}{a}\tau^2 - a\sigma\right) z_2 + \frac{b}{a}(a\sigma - \beta\tau)\right] \\ & + \varphi' e^{-\tau z_1}\left[-\tau z_0 z_1 - \tau z_1 z_2 + \left(\beta - \frac{b}{a}\tau\right) z_1 + z_2\right] + \varphi'' z_1^2 e^{-\tau z_1}. \end{aligned}$$

onde $\varphi := \frac{s}{a\gamma}$. Pelo Lema 3.5.1, temos que valem as identidades algébricas

$$a\sigma - \beta\tau = 0 \quad \text{e} \quad a\rho - \tau\eta_3 = 0,$$

o que nos permite simplificar G, obtendo

$$\begin{aligned} G = {} & \lambda z_1 z_2 - 2\lambda z_0 z_1 - \frac{\lambda}{\tau} m z_1 + \frac{\lambda}{\tau} z_2 + \varphi e^{-\tau z_1}\left(\tau^2 z_0 z_2 - \tau z_1 + \tau m z_2\right) \\ & + \varphi' e^{-\tau z_1}\left(\tau z_0 z_1 - \tau z_1 z_2 - m z_1 + z_2\right) + \varphi'' z_1^2 e^{-\tau z_1}, \end{aligned}$$

com

$$m := \frac{b}{a}\tau - \beta. \tag{3.109}$$

Observamos que, com as relações $a\gamma + \tau\eta_2 = 0$ e (3.109), obtemos

$$\begin{aligned} \mu_3 &= -\frac{1 + \mu_2^2}{\eta_2}\left(m - \frac{b\tau}{a}\right) + \frac{\tau\mu_2}{a}, \\ \eta_3 &= -\mu_2\left(m - \frac{b\tau}{a}\right) + \frac{\tau\eta_2}{a}, \end{aligned}$$

que substituídas em $a\rho - \tau\eta_3 = 0$ fornece $(a\eta_2)^2 = (am - b\tau)^2 + [\mu_2(am - b\tau) - \tau\eta_2]^2$. Além disso, as funções f_{ij} associadas são dadas por

$$\begin{aligned}
f_{11} &= a(z_0 - z_2) + b, \\
f_{21} &= \mu_2 f_{11} + \eta_2, \\
f_{31} &= -\left(m - \tfrac{b\tau}{a}\right)\left(\tfrac{1+\mu_2^2}{\eta_2} f_{11} + \mu_2\right) + \tfrac{\tau}{a} f_{21}, \\
f_{12} &= -\lambda z_0 f_{11} + \left[-\tau(az_0 + b)\varphi + az_1\varphi'\right] e^{-\tau z_1} + \tfrac{\lambda a}{\tau} z_1, \\
f_{22} &= \mu_2 f_{12} - \lambda\eta_2 z_0 - \eta_2\tau\varphi e^{-\tau z_1}, \\
f_{32} &= -\left(m - \tfrac{b\tau}{a}\right)\left[\tfrac{1+\mu_2^2}{\eta_2} f_{12} - \mu_2(\lambda z_0 + \tau e^{-\tau z_1}\varphi)\right] + \tfrac{\tau}{a} f_{22},
\end{aligned}$$

onde $\delta = 1$, $a\eta_2 \neq 0$, $\tau > 0$ e $\varphi(z_0)$ é uma função real e diferenciável satisfazendo $\varphi'' \neq 0$.

Note que $\varphi \neq 0$ implica (2.8). Isto conclui a análise de (c) e fornece (3.88) e (3.89) com os sinais inferiores, onde denotamos $\mu := \mu_2$ e $\eta := \eta_2$.

Finalmente, suponhamos o item (d), isto é, $r'' \equiv 0$ e $s'' \equiv 0$. Temos que existem constantes reais A, B, C e D tais que

$$\begin{aligned}
r &= Az_0 + B, \\
s &= Cz_0 + D.
\end{aligned}$$

Assim, as equações (3.99) e (3.100) seguem trivialmente satisfeitas e, pela equação (3.97), temos $R_{,z_0} = 0$, o que implica por (3.96) que $S_{,z_0} = 0$. Usando as expressões de R e S dadas, respectivamente, por (3.94) e (3.95), podemos escrever

$$0 = (R_{,z_0})_{,z_0} = A\left[\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 - \frac{\tau}{a}\right)\right], \tag{3.110}$$

$$0 = (S_{,z_0})_{,z_0} = C\left[\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 + \frac{\tau}{a}\right)\right]. \tag{3.111}$$

Sabemos pelo item (a) que

$$\left[\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 - \frac{\tau}{a}\right)\right]^2 + \left[\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 + \frac{\tau}{a}\right)\right]^2 \neq 0,$$

o que nos sugere considerar a seguinte análise

$(d.1)$ $\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 - \frac{\tau}{a}\right) = 0$ e $\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 + \frac{\tau}{a}\right) \neq 0$,

$(d.2)$ $\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 - \frac{\tau}{a}\right) \neq 0$ e $\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 + \frac{\tau}{a}\right) = 0$,

$(d.3)$ $\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 - \frac{\tau}{a}\right) \neq 0$ e $\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 + \frac{\tau}{a}\right) \neq 0$.

Iniciando nosso estudo pelo item $(d.1)$, vemos que (3.112) segue satisfeita enquanto que, de (3.112), temos $C = 0$. Por conseguinte, usando novamente (3.95), com $C = 0$,

$$0 = S_{,z_0} = D\left[\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 + \frac{\tau}{a}\right)\right]$$

ou seja, $D = 0$ e $s = Cz_0 + D = 0$, donde $S = 0$. Convém lembarmos que $r^2 + s^2 \not\equiv 0$. Por outro lado, ja vimos que a primeira parcela de $(d.1)$ implica que $1 - \frac{\tau\eta_2}{a\gamma} = 0$. Logo $R = 0$.

Sendo $R = S = 0$, devemos ter por (3.93) que $\lambda(\beta^2 + \eta_3^2 - \eta_2^2) = 0$. Por um argumento análogo ao que usamos no item (b), $\beta^2 + \eta_3^2 - \eta_2^2 = 0$. E usando as equações (3.91) e (3.92) com $s = 0$ e $r = Az_0 + B$, onde $A^2 + B^2 \neq 0$, bem como as equações (3.72) e (3.13) em (3.9), concluímos que G é dada por

$$\begin{aligned} G = \lambda z_1 z_2 - 2\lambda z_0 z_1 - \frac{\lambda}{a}\left(b + \frac{\beta\eta_2}{\gamma}\right)z_1 - \frac{\lambda\eta_2}{a\gamma}z_2 \\ +\frac{1}{a\gamma}(Az_0+B)e^{\tau z_1}\left[\tau^2 z_0 z_2 + (a\sigma+\beta\tau)z_0 + \tau z_1 + \left(\frac{b}{a}\tau^2 - a\sigma\right)z_2 + \frac{b}{a}(a\sigma+\beta\tau)\right] \\ +\frac{A}{a\gamma}e^{\tau z_1}\left[\tau z_0 z_1 + \tau z_1 z_2 + \left(\beta + \frac{b}{a}\tau\right)z_1 + z_2\right]. \end{aligned}$$

Já vimos também que $a\rho + \tau\eta_3 = 0$ e $a\sigma + \beta\tau = 0$. Logo, usando tais relações em G, obtemos

$$\begin{aligned} G = \lambda z_1 z_2 - 2\lambda z_0 z_1 - \frac{\lambda}{\tau}m z_1 - \frac{\lambda}{\tau}z_2 + (\tilde{A}z_0 + \tilde{B})e^{\tau z_1}\left(\tau^2 z_0 z_2 + \tau z_1 + \tau m z_2\right) \\ +\tilde{A}e^{\tau z_1}\left(\tau z_0 z_1 + \tau z_1 z_2 + m z_1 + z_2\right), \end{aligned}$$

com $\tilde{A} := \frac{A}{a\gamma}$, $\tilde{B} = \frac{B}{a\gamma}$ e $m = \frac{b}{a}\tau + \beta$. As funções $f_{ij's}$ são dadas por

$$\begin{aligned} f_{11} &= a(z_0 - z_2) + b, \\ f_{21} &= \mu_2 f_{11} + \eta_2, \\ f_{31} &= \left(m - \tfrac{b\tau}{a}\right)\left(\tfrac{1+\mu_2^2}{\eta_2}f_{11} + \mu_2\right) - \tfrac{\tau}{a}f_{21}, \\ f_{12} &= -\lambda z_0 f_{11} + \left[\tau(az_0+b)(\tilde{A}z_0+\tilde{B}) + a\tilde{A}z_1\right]e^{\tau z_1} - \tfrac{\lambda a}{\tau}z_1, \\ f_{22} &= \mu_2 f_{12} - \lambda\eta_2 z_0 + \eta_2\tau(\tilde{A}z_0+\tilde{B})e^{\tau z_1}, \\ f_{32} &= \left(m - \tfrac{b\tau}{a}\right)\left\{\tfrac{1+\mu_2^2}{\eta_2}f_{12} + \mu_2[-\lambda z_0 + \tau e^{\tau z_1}(\tilde{A}z_0+\tilde{B})]\right\} - \tfrac{\tau}{a}f_{22} \end{aligned}$$

onde $\delta = 1$, $a\eta_2 \neq 0$, $\tilde{A}^2 + \tilde{B}^2 \neq 0$ e $\tau > 0$. Da mesma forma que em (b), vale a relação $(a\eta_2)^2 = (am - b\tau)^2 + [\mu_2(am - b\tau) - \tau\eta_2]^2$. Observamos também que $\tilde{A}^2 + \tilde{B}^2 \neq 0$

corresponde a (2.8). Isto conclui a análise de $(d.1)$ e fornece (3.88) e (3.89) com sinal superior e $\varphi = \tilde{A}z_0 + \tilde{B}$, onde denotamos $\mu := \mu_2$ e $\eta := \eta_2$.

Agora, supondo $(d.2)$, vemos que (3.112) segue satisfeita enquanto que, de (3.112), temos $A = 0$. Por conseguinte, usando novamente (3.94), com $A = 0$,

$$0 = R_{,z_0} = B\left[\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 - \frac{\tau}{a}\right)\right]$$

ou seja, $B = 0$ e $r = Az_0 + B = 0$, donde $R = 0$. Convém lembrarmos que $r^2 + s^2 \neq 0$. Já vimos (item (c)) que a segunda parcela de $(d.2)$ equivale a $1 + \frac{\tau\eta_2}{a\gamma} = 0$. Logo, $S = 0$. Sendo $R = S = 0$, devemos ter por (3.93) que $\lambda(\beta^2 + \eta_3^2 - \eta_2^2) = 0$. Por um argumento análogo ao usado no item (c) vemos também que $\beta^2 + \eta_3^2 - \eta_2^2 = 0$. E usando as equações (3.91) e (3.92) com $r = 0$ e $s = Cz_0 + D$, onde $C^2 + D^2 \neq 0$, bem como as equações (3.72) e (3.13) em (3.9), concluímos que G é dada por

$$\begin{aligned}
G &= \lambda z_1 z_2 - 2\lambda z_0 z_1 - \frac{\lambda}{a}\left(b + \frac{\beta\eta_2}{\gamma}\right)z_1 - \frac{\lambda\eta_2}{a\gamma}z_2 \\
&+\frac{1}{a\gamma}(Cz_0 + D)e^{-\tau z_1}\left[\tau^2 z_0 z_2 + (a\sigma - \beta\tau)z_0 - \tau z_1 + \left(\frac{b}{a}\tau^2 - a\sigma\right)z_2 + \frac{b}{a}(a\sigma - \beta\tau)\right] \\
&\qquad\qquad +\frac{C}{a\gamma}e^{-\tau z_1}\left[-\tau z_0 z_1 - \tau z_1 z_2 + \left(\beta - \frac{b}{a}\tau\right)z_1 + z_2\right]
\end{aligned}$$

Assim com no item (c), usando as relações $a\rho - \tau\eta_3 = 0$ e $a\sigma - \beta\tau = 0$, podemos simplificar G, obtendo

$$\begin{aligned}
G = \lambda z_1 z_2 - 2\lambda z_0 z_1 - \frac{\lambda}{\tau}mz_1 + \frac{\lambda}{\tau}z_2 + e^{-\tau z_1}\left[\tau^2 z_0 z_2 - \tau z_1 + \tau m z_2\right](\tilde{C}z_0 + \tilde{D}) \\
+\tilde{C}e^{-\tau z_1}\left[-\tau z_0 z_1 - \tau z_1 z_2 - mz_1 + z_2\right]
\end{aligned}$$

com $\tilde{C} = \frac{C}{a\gamma}$, $\tilde{D} := \frac{D}{a\gamma}$ e $m := \frac{b}{a}\tau - \beta$. Além disso, as funções $f_{ij's}$ são dadas por

$$\begin{aligned}
f_{11} &= a(z_0 - z_2) + b, \\
f_{21} &= \mu_2 f_{11} + \eta_2, \\
f_{31} &= -\left(m - \tfrac{b\tau}{a}\right)\left(\tfrac{1+\mu_2^2}{\eta_2}f_{11} + \mu_2\right) + \tfrac{\tau}{a}f_{21}, \\
f_{12} &= -\lambda z_0 f_{11} + \left[-\tau(az_0 + b)(\tilde{C}z_0 + \tilde{D}) + a\tilde{C}z_1\right]e^{-\tau z_1} + \tfrac{\lambda a}{\tau}z_1, \\
f_{22} &= \mu_2 f_{12} - \lambda\eta_2 z_0 - \eta_2\tau(\tilde{C}z_0 + \tilde{D})e^{-\tau z_1}, \\
f_{32} &= -\left(m - \tfrac{b\tau}{a}\right)\left\{\tfrac{1+\mu_2^2}{\eta_2}f_{12} - \mu_2[\lambda z_0 + \tau e^{-\tau z_1}(\tilde{C}z_0 + \tilde{D})]\right\} + \tfrac{\tau}{a}f_{22},
\end{aligned}$$

onde $\delta = 1$, $a\eta_2 \neq 0$, $\tau > 0$ e $\tilde{C}^2 + \tilde{D}^2 \neq 0$. Como vimos também em (c), vale a relação $(a\eta_2)^2 = (am - b\theta)^2 + [\mu_2(am - b\theta) - \theta\eta_2]^2$. Observamos que $\tilde{C}^2 + \tilde{D}^2 \neq 0$ corresponde a (2.8). Isto conclui a análise de $(d.2)$, que fornece (3.88) e (3.89) com sinal inferior e $\varphi = \tilde{C}z_0 + \tilde{D}$, onde denotamos $\mu := \mu_2$ e $\eta := \eta_2$.

Finalmente, consideremos o item $(d.3)$. Segue de (3.112) e (3.112) que $A = C = 0$. Usando as definições de R e S dadas, respectivamente, por (3.94) e (3.95), com $A = C = 0$ notamos que

$$0 = R_{,z_0} = B\left[\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 - \frac{\tau}{a}\right)\right],$$
$$0 = S_{,z_0} = D\left[\frac{\rho}{\gamma} + \frac{1}{1+\mu_2^2}\left(\mu_2\mu_3 + \frac{\tau}{a}\right)\right],$$

ou seja, $B = D = 0$. Portanto, concluímos que $r = s = 0$, ou seja,

$$\ell = \phi_{22} - \mu_2\phi_{12} = re^{\tau z_1} + se^{-\tau z_1} = 0,$$

contradizendo nossa hipótese sobre ℓ.

Para concluirmos, note que os casos (b), (c), $(d.1)$ e $(d.2)$ demonstram a Proposição 3.5.2.

Reciprocamente, se G e f_{ij} são dadas como na Proposição 3.5.2, onde $\delta = 1$ e λ qualquer, então queremos mostrar que as 1-formas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$ satisfazem as equações de estrutura (1.1) se, e somente se, $z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda z_0 z_3 + G$. Mas isto é um cálculo direto.

□

Proposição 3.5.3 *Nas condições do Teorema* 2.1*, sejam* ℓ*,* γ *e* α *dadas por* (2.9) *e* (3.63)*, respectivamente. Suponha* $\ell \neq 0$*,* $\gamma \neq 0$ *e* $\alpha = 0$*. Então, a equação diferencial* $z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda z_0 z_2 + G$ *descreve superfícies pseudo-esféricas com 1-formas associadas* $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$*,* $1 \leq i \leq 3$*, onde* f_{ij} *são funções reais e diferenciáveis de* z_k*,* $0 \leq k \leq 3$*, satisfazendo* (2.2) *e* (2.3)*-*(2.8)*, se, e somente se,*

$$\delta = 1,$$

$$G = \lambda(z_1z_2 - 2z_0z_1 - m_1z_1 - m_2z_2) + \left(me^{\theta z_0} - \frac{\lambda}{\theta}\right)[-\theta(z_1z_2 - z_0z_1 + m_2z_1) + m_3z_1]$$
$$+m\theta e^{\theta z_0}\left(z_0z_1 + 2z_1z_2 + m_1z_1 + m_2z_2 - m_2\theta z_1^2\right) + m\theta^2 e^{\theta z_0}(z_1 + m_2)z_1^2,$$

com λ, θ, m, $m_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$, $\theta \neq 0$, $\lambda^2 + m^2 \neq 0$,

$$\begin{aligned}
f_{11} &= a(z_0 - z_2) + a(m_1 + \theta m_2^2) \pm \tfrac{m_2\mu\theta}{\sqrt{1+\mu^2}},\\
f_{21} &= \mu f_{11} \mp m_2\theta\sqrt{1+\mu^2},\\
f_{31} &= \pm\sqrt{1+\mu^2} f_{11} - m_2\theta\mu \pm \tfrac{\theta}{a\sqrt{1+\mu^2}},\\
f_{12} &= -\lambda z_0 f_{11} + am\theta e^{\theta z_0}(z_1 + m_2)z_1 - \lambda a m_2 z_1\\
&\qquad + (-\theta m e^{\theta z_0} + \lambda)\left[-\tfrac{a}{\theta}(z_0 + m_1 + \theta m_2^2) \mp \tfrac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}(z_1 + m_2)\right],\\
f_{22} &= \mu f_{12} \pm \sqrt{1+\mu^2}(z_1 + m_2)\left(-\theta m e^{\theta z_0} + \lambda\right) \pm \lambda m_2\theta\sqrt{1+\mu^2} z_0,\\
f_{32} &= \pm\sqrt{1+\mu^2} f_{12} + \left(\mu z_1 + m_2\mu \mp \tfrac{1}{a\sqrt{1+\mu^2}}\right)\left(-\theta m e^{\theta z_0} + \lambda\right)\\
&\qquad - \lambda\left(-m_2\mu\theta \pm \tfrac{\theta}{a\sqrt{1+\mu^2}}\right) z_0,
\end{aligned}$$

onde $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ *e* $a^2(1+\mu^2)[m_3 - \theta(m_1 + \theta m_2^2) - 1] = \theta^2$.

Prova. Com as hipóteses da proposição, segue dos Lemas 3.1.1, 3.1.2 e 3.5.2 que a equação diferencial $z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda z_0 z_3 + G$ é caracterizada pelas equações (3.72)-(3.75) onde $\alpha = 0$. Portanto, a solução de (3.73) é dada por

$$\ell = r z_1 + s, \tag{3.112}$$

onde $r := r(z_0)$ e $s := s(z_0)$ são funções reais e diferenciáveis. Pela equação (3.112) e (2.9), ϕ_{22} é dada em termos de ϕ_{12} por

$$\phi_{22} = \mu_2\phi_{12} + r z_1 + s, \tag{3.113}$$

observando que, neste caso,

$$(\phi_{22} - \mu_2\phi_{12})_{,z_1} \not\equiv 0,$$

ou seja, $r \not\equiv 0$.

Substituindo (3.113) em (3.74) segue-se que

$$\phi_{12} = \frac{z_1}{\gamma}(r' z_1 + s') + \frac{1}{a\gamma}(a z_0 + b)r + \frac{\mu_2\eta_2}{a\mu_3^2\gamma} r - \frac{\mu_2}{\mu_3^2}(r z_1 + s) - \frac{\lambda\eta_2}{\gamma} z_1. \tag{3.114}$$

Substituímos (3.113) e (3.114) em (3.75) e obtemos

$$-\frac{z_1}{a}\left[r' - a\sigma r - \frac{\lambda a\mu_3^2}{\gamma}(\beta^2 + \eta_3^2 - \eta_2^2)\right] + \sigma\left(s - \frac{\eta_2}{a\gamma} r\right) = 0. \tag{3.115}$$

Observamos que $\sigma \neq 0$. De fato, se $\sigma = \mu_3\eta_3 - \mu_2\eta_2 = 0$ então

$$\gamma = \mu_2(\mu_3\eta_2 - \mu_2\eta_3) - \eta_3 = (\mu_3^2 - \mu_2^2 - 1)\eta_3 = -\alpha\eta_3 = 0$$

contradizendo nossa hipótese sobre γ.

Portanto, a derivada de (3.115) com respeito a z_1, substituída novamente na última equação, fornece

$$\begin{aligned} r' - a\sigma r &= \lambda a A, && (3.116)\\ s - \frac{\eta_2}{a\gamma} r &= 0, && (3.117) \end{aligned}$$

onde para simplificarmos as notações, estamos considerando em (3.116)

$$A := \frac{\mu_3^2}{\gamma}(\beta^2 + \eta_3^2 - \eta_2^2).$$

Como $\mu_3^2 = \mu_2^2 + 1$, vemos que

$$\begin{aligned} \beta^2 + \eta_3^2 - \eta_2^2 &= (\mu_3\eta_2 - \mu_2\eta_3)^2 + \eta_3^2 - \eta_2^2\\ &= \mu_3^2\eta_2^2 - 2\mu_3\eta_2\mu_2\eta_3 + \mu_2^2\eta_3^2 + \eta_3^2 - \eta_2^2\\ &= (1 + \mu_2^2)\eta_2^2 - 2\mu_3\eta_2\mu_2\eta_3 + \mu_2^2\eta_3^2 + \eta_3^2 - \eta_2^2\\ &= \mu_2^2\eta_2^2 - 2\mu_3\eta_2\mu_2\eta_3 + (\mu_2^2 + 1)\eta_3^2\\ &= \mu_2^2\eta_2^2 - 2\mu_3\eta_2\mu_2\eta_3 + \mu_3^2\eta_3^2\\ &= (\mu_2\eta_2 - \mu_3\eta_3)^2\\ &= \sigma^2, \end{aligned}$$

donde segue-se que $A = \frac{\mu_3^2\sigma^2}{\gamma}$.

Resumidamente, segue de (3.72), (3.113), (3.114) e (3.117) que as funções ϕ_{i2} satisfazem

$$\phi_{12} = \frac{z_1}{\gamma}\left(z_1 + \frac{\eta_2}{a\gamma}\right) r' + \frac{1}{a\gamma}(az_0 + b)r - \frac{\mu_2}{\mu_3^2} z_1 r - \frac{\lambda\eta_2}{\gamma} z_1, \quad (3.118)$$

$$\phi_{22} = \mu_2\phi_{12} + \left(z_1 + \frac{\eta_2}{a\gamma}\right) r, \quad (3.119)$$

$$\phi_{32} = \mu_3\phi_{12} + \frac{\mu_2}{\mu_3} z_1 r + \frac{\eta_3}{a\gamma} r, \quad (3.120)$$

com r solução de (3.116), ou seja,

$$r = Be^{a\sigma z_0} - \frac{\lambda\sigma\mu_3^2}{\gamma}, \quad \lambda^2 + B^2 \neq 0. \tag{3.121}$$

Ao substituímos as equações (3.118)-(3.121) e (3.13) em (3.9), vemos que G é dada por

$$\begin{aligned} G = \lambda z_1 z_2 - 2\lambda z_0 z_1 - \lambda\left(\frac{b}{a} + \frac{\beta\eta_2}{a\gamma}\right) z_1 - \frac{\lambda\eta_2}{a\gamma} z_2 \\ + \left(\frac{B}{a\gamma} e^{a\sigma z_0} - \frac{\lambda\sigma\mu_3^2}{a\gamma^2}\right)\left\{\frac{a\gamma}{\mu_3} z_1 z_2 - \frac{a\gamma}{\mu_3} z_0 z_1 + \left[1 - \frac{\gamma}{\mu_3^2}(\mu_3\sigma + \mu_2\beta) - \frac{b\gamma}{\mu_3}\right] z_1 + \frac{\eta_2}{\mu_3} z_2\right\} \\ \frac{Ba\sigma}{a\gamma} e^{a\sigma z_0}\left[2z_1 z_2 + z_0 z_1 + \left(\frac{b}{a} + \frac{\beta\eta_2}{a\gamma}\right) z_1 + \frac{\eta_2}{a\gamma} z_2 + \frac{\eta_2}{\mu_3} z_1^2\right] \\ \frac{B(a\sigma)^2}{a\gamma} e^{a\sigma z_0}\left(z_1 + \frac{\eta_2}{a\gamma}\right) z_1^2. \end{aligned} \tag{3.122}$$

Afim de obtermos a expressão de G dada como na Proposição 3.5.3, precisamos efetuar algumas mudanças na expressão acima. Começaremos afirmando que $\mu_3\sigma + \gamma = 0$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \mu_3\sigma + \gamma &= \mu_3(\mu_3\eta_3 - \mu_2\eta_2) + \mu_2(\mu_3\eta_2 - \mu_2\eta_3) - \eta_3 \\ &= -\eta_3(1 + \mu_2^2 - \mu_3^2) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $\alpha = 0$. Assim, $0 = \mu_3\sigma + \gamma = \mu_3\sigma + \mu_2\beta - \eta_3$ é equivalente a $\mu_3\sigma + \mu_2\beta = \eta_3$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} G = \lambda(z_1 z_2 - 2z_0 z_1 - m_1 z_1 - m_2 z_2) \\ + \left(me^{\theta z_0} - \frac{\lambda}{\theta}\right)[-\theta(z_1 z_2 - z_0 z_1 + m_2 z_2) + m_3 z_1] \\ + m\theta e^{\theta z_0}\left(2z_1 z_2 + z_0 z_1 + m_1 z_1 + m_2 z_2 - m_2\theta z_1^2\right) \\ + m\theta^2 e^{\theta z_0}(z_1 + m_2) z_1^2, \end{aligned} \tag{3.123}$$

com $m := \frac{B}{a\gamma}$, $m_1 := \frac{b}{a} + \frac{\beta\eta_2}{a\gamma}$, $m_2 := \frac{\eta_2}{a\gamma}$, $m_3 := 1 + \frac{\sigma\eta_3}{\mu_3} + b\sigma$ e $\theta := a\sigma (\neq 0)$. Um cálculo simples fornece

$$\begin{aligned} &\eta_2 = -m_2\theta\mu_3, \quad \eta_3 = -m_2\theta\mu_2 + \frac{\theta}{a\mu_3}, \quad \beta = -\theta m_2 - \frac{\theta\mu_2}{a\mu_3} \\ &B = -m\theta\mu_3, \quad b = a(m_1 + m_2^2\theta) + \frac{m_2\theta\mu_2}{\mu_3}, \quad r = \mu_3(-\theta m e^{\theta z_0} + \lambda), \end{aligned}$$

com a satisfazendo a relação $a^2(1+\mu_2^2)[m_3-\theta(m_1+\theta m_2^2)-1]=\theta^2$ e $\mu_3=\pm\sqrt{1+\mu_2^2}$. Observamos que $\lambda^2+m^2\neq 0$ corresponde a (2.8). Temos então,

$$
\begin{aligned}
f_{11} &= a(z_0-z_2)+a(m_1+\theta m_2^2)\pm\tfrac{m_2\mu_2\theta}{\sqrt{1+\mu_2^2}},\\
f_{21} &= \mu_2 f_{11}\mp m_2\theta\sqrt{1+\mu_2^2},\\
f_{31} &= \pm\sqrt{1+\mu_2^2}f_{11}-m_2\theta\mu_2\pm\tfrac{\theta}{a\sqrt{1+\mu_2^2}},\\
f_{12} &= -\lambda z_0 f_{11}+am\theta e^{\theta z_0}(z_1+m_2)z_1-\lambda a m_2 z_1\\
&\qquad +(-\theta m e^{\theta z_0}+\lambda)\left[-\tfrac{a}{\theta}(z_0+m_1+\theta m_2^2)\mp\tfrac{\mu_2}{\sqrt{1+\mu_2^2}}(z_1+m_2)\right],\\
f_{22} &= \mu_2 f_{12}\pm\sqrt{1+\mu_2^2}\left[(z_1+m_2)\left(-\theta m e^{\theta z_0}+\lambda\right)+\lambda m_2\theta z_0\right],\\
f_{32} &= \pm\sqrt{1+\mu_2^2}f_{12}+\left(\mu_2 z_1+m_2\mu_2\mp\tfrac{1}{a\sqrt{1+\mu^2}}\right)\left(-\theta m e^{\theta z_0}+\lambda\right)\\
&\qquad -\lambda\left(-m_2\mu_2\theta\pm\tfrac{\theta}{a\sqrt{1+\mu_2^2}}\right)z_0.
\end{aligned}
$$

Reciprocamente, se G e f_{ij} são dadas como na Proposição 3.5.3, com $\lambda^2+m^2\neq 0$ e $\delta=1$, então queremos mostrar que as 1-formas $w_i=f_{i1}dx+f_{i2}dt$ satisfazem as equações de estrutura (1.1) se, e somente se, $z_{0,t}-z_{2,t}=\lambda z_0 z_3+G$. Mas isto é um cálculo direto.

□

Prova do Teorema 2.5

Nas hipóteses do Teorema 2.5 temos $\ell\not\equiv 0$ e $\gamma\neq 0$. A equação

$$z_{0,t}-z_{2,t}=\lambda z_0 z_3+G(z_0,z_1,z_2)$$

descreve superfícies pseudo-esféricas, $\delta=1$, ou superfícies esféricas, $\delta=-1$, com 1-formas associadas $w_i=f_{i1}dx+f_{i2}dt$, $1\leq i\leq 3$, onde f_{ij} são funções reais e diferenciáveis de z_k, $0\leq k\leq 3$, satisfazendo (2.2) e (2.3)-(2.8).

Segue dos Lemas 3.5.2 e 3.5.3 que tais equações são caracterizadas pelo sistema (3.72)-(3.75), onde a solução de (3.73) depende do sinal de α. Quando $\alpha<0$, a Proposição 3.5.1 garante que não existe solução para o sistema. Dessa forma, os itens (i) e (ii) do Teorema 2.5, isto é, os casos em que $\alpha>0$ e $\alpha=0$, onde α é dado em (3.63), seguem das Proposições 3.5.2 e 3.5.3, respectivamente. Quando $\alpha\geq 0$, claramente vemos que $\delta=1$.

□

3.6 Um resultado de não existência de equações que descrevem superfícies esféricas

Como podemos ver, os resultados apresentados nos Teoremas 2.2-2.5, fornecem uma completa classificação para a classe de equações (2.1), sob a condição (2.2). Em todos estes resultados, observa-se que $\delta = 1$, o que prova o Corolário 2.1, isto é,

Não existe equação do tipo $z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda z_0 z_3 + G(z_0, z_1, z_2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *descrevendo superfícies esféricas* ($\delta = -1$) *com 1-formas associadas* $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, *onde* f_{ij} *são funções reais e diferenciáveis de* z_k, $0 \leq k \leq 3$, *satisfazendo* (2.2).

Referências

[1] Ablowitz, M. J.; Kaup, D. J.; Newell, A.; Segur, H. *The inverse scattering transform Fourier analysis for nonlinear problems.* Stud. Appl. Math. 53 (1974), 249-315.

[2] Ablowitz, M. J.; Beals, R.; Tenenblat, K. *On the solution of the generalized wave and generalized sine-Gordon equations.* Stud. Appl. Math. 74 (1986), 177-203.

[3] Beals, R.; Tenenblat, K. *An intrinsic generalization for the wave and sine-Gordon equations.* In: Lawson, B., et all (eds.): Differential Geometry. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Math. 52 (1991), 25-46.

[4] Beals, R.; Rabelo, M.; Tenenblat, K. *Backlünd transformations and inverse scattering for some pseudo-spherical surface equations.* Stud. Appl. Math. 81 (1989), 125-151.

[5] Benjamin, T.; Bona, J. L.; Mahony, J. J. *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems.* Philos. Trans. R. Soc. A 272 (1972), 47-78.

[6] Camassa, R.; Holm, D. D. *An integrable shallow water equation with peaked solitons.* Phys. Rev. Lett. 71 (11) (1993), 1661-1664.

[7] Chern. S. S.; Tenenblat, K. *Foliations on a surface of constant curvature and the modified Korteweg-deVries equations.* J. Diff. Geometry 16 (1981), 347-349.

[8] Chern, S. S.; Tenenblat, K. *Pseudospherical surfaces and evolution equations.* Stud. Appl. Math. 74 (1986), 55-83.

[9] Degasperis, A; Procesi, M. *Asymptotic Integrability, in Symmetry and Perturbation Theory.* Editors: Degasperis A and Gaeta G, World Scientific, Singapore (1999), 23-37.

[10] Ding, Q.; Tenenblat, K. *On differential systems describing surfaces of constant curvature.* J. Differential Equations 184 (2002), 185-214.

[11] Catalano Ferraioli, D.; Tenenblat, K. *Fourth order evolution equations which describe pseudospherical surfaces.* J. Differential Equations (to appear) DOI: 10.1016/j.jde.2014.06.010

[12] Gardner, C. S.; Greene, J. M.; Kruskal, M. D; Miura, R. M. *Method for solving the Korteweg-de Vries equation.* Phys. Rev. Lett. 19 (1967), 1095-1097.

[13] Gomes Neto, V. P. *Fifth-order evolution equations describing pseudospherical surfaces.* J. of Differential Equations 249 (2010), 2822-2865.

[14] Ivanov, R. *On the integrability of a class of nonlinear dispersive equations.* J. Nonlinear Math. Phys. 12 (4) (2005), 462-468.

[15] Kamran, N.; Tenenblat, K. *On differential equations describing pseudo-spherical surfaces.* J. Differential Equations 115 (1995), 75-98.

[16] Lax, P. D. *Integrals of nonlinear equations of evolutions and solitary waves.* Commun. Pure Appl. Math. 21 (1968), 467-490.

[17] Jorge, L. P.; Tenenblat, K. *Linear problems associated to evolution equations of type* $u_{tt} = F(u, u_x, u_{xx}, u_t)$. Stud. Appl. Math. 77 (1987), 103-117.

[18] Rabelo, M. L.; *On equations which describe pseudospherical surfaces.* Stud. Appl. Math. 81 (1989), 221-248.

[19] Rabelo, M. L.; Tenenblat, K. *On equations of type* $u_{xt} = F(u, u_x)$ *which describe pseudospherical surfaces.* J. Math. Phys. 31 (6) (1990), 1400-1407.

[20] Reyes, E. G. *Correspondence theorems for hierarchies of equations of pseudo-spherical type*. J. Differential Equations 225 (2006), 26-56.

[21] Reyes, E. G. *Geometric integrability of the Camassa-Holm equation*. Letters in Mathematical Physics 59 (2002), 117-131.

[22] Sasaki, R. *Soliton equations and pseudospherical surfaces*. Nuclear Physics B124 (1979), 343-357.

[23] Sakovich, S. *On integrability of the vector short pulse equation*. J. Phys. Soc. Jpn. 77 (2008).

[24] Schäfer, T.; Wayne, C. E. *Propagation of ultra-short optical pulses in cubic nonlinear media*. Physica D 196 (2004), 90-105.