Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado em Matemática

Multiplicidade Global de Soluções Positivas de um sistema elíptico semilinear via métodos topológicos

Ricardo Lima Alves
Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Pereira dos Santos

Brasília, 21 de março de 2014

Dedicatória

Aos meus pais, Luiz e Marina.

Agradecimentos

- A Deus por ter me concedido força para superar os obstáculos durante esta caminhada.

- À minha família por acreditar na minha capacidade e por sempre estar ao meu lado.

- À minha namorada, Juliana Cordeiro, pelo incentivo diário e pelo apoio em momentos difíceis.

- A todos os amigos do departamento de matemática da Unb. Dentre eles, agradeço a José Carlos, Keidna, Lais e Otto pela ajuda ímpar no desenvolvimento deste trabalho.

- Ao meu orientador, Carlos Alberto, pela paciência e pela experiência que pude adquirir com seus ensimanentos.

- Aos professores Claudianor Oliveira Alves, Jiazheng Zhou e Manuela Caetano M. de Rezende por participarem da banca examinadora deste trabalho e pelas valiosas sugestões.

- À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Sumário

Resumo

Neste trabalho, utilizaremos o Grau Topológico de Leray-Schauder, um Teorema de Índice de Ponto Fixo em cone, um Teorema de sub-supersolução e o método de blow-up para provar um resultado de Multiplicidade Global de Soluções Positivas para uma classe de sistemas elípticos semilineares de equações diferenciais parciais.

Palavras-chave: Grau Topológico de Leray-Schauder, Índice de Ponto Fixo em cone, sub-supersolução e Multiplicidade Global de Soluções Positivas.

Abstract

In this work we use the Leray-Schauder Topological degree, a Fixed Point Index theorem in cones, a sub-supersolution theorem and the blow-up method to prove a global result of Multiplicity of Positive Solutions for a class of semilinear elliptic systems of partial differential equations.

Keywords: Leray-Schauder Topological degree, Fixed Point Index in cones, sub-supersolution and Multiplicity of Positive Solutions.

Notações

- Se $x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$, então

$$|x|_1 := max\left\{|x_i| : i = 1, ..., N\right\},\ d_1(x,y) := |x-y|_1$$

e

$$|x|_2 := (x_1^2 + ... + x_n^2)^{\frac{1}{2}},\ d_2(x,y) = |x-y|_2;$$

- Identificaremos o conjunto das matrizes $M \times N$, denotado por $\mathbb{R}^{M\times N}$ com o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{MN}$, e se A é uma matriz então $|A|_1$ (respectivamente $|A|_2$) é a norma do supremo (respectivamente euclidiana) de A;

- $C(\overline{D})^N$ é o conjunto das funções contínuas de $\overline{D} \subset \mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}^N$ e

$$||\Phi||_{C(\overline{D})} = ||\Phi||_C := \sup\left\{|\Phi(x)|_1 : x \in \overline{D}\right\};$$

- $C(D)^N$ é o conjunto das funções contínuas de $D \subset \mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}^N$;

- $C(\overline{D})$ é o conjunto das funções contínuas de $\overline{D} \subset \mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}$ e $||\Phi||_{C(\overline{D})} = ||\Phi||_C := \sup\left\{|\Phi(x)| : x \in \overline{D}\right\}$;

- $C(D)$ é o conjunto das funções contínuas de $D \subset \mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}$;

- $C^1(\overline{D})^N$ é o conjunto das funções $\Phi \in C(\overline{D})^N$ tal que Φ admite uma extensão $\overline{\Phi}$ contínua em um aberto $D(\Phi)$ contendo $\overline{D} \subset \mathbb{R}^N$ e $\nabla\Phi$ é contínua em $D(\Phi)$. Se $\Phi \in C^1(\overline{D})^N$, então $||\Phi||_{C^1(\overline{D})} = ||\Phi||_{C^1} := \max\left\{||\Phi||_C, ||\nabla\Phi||_C\right\}$;

- $C^1(\overline{D})$ é o conjunto das funções $\Phi \in C(\overline{D})$ tal que Φ admite uma extensão $\overline{\Phi}$ contínua em um aberto $D(\Phi)$ contendo $\overline{D} \subset \mathbb{R}^N$ e $\nabla\Phi = (\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial\Phi}{\partial x_N})$ é contínuo em $D(\Phi)$. Se $\Phi \in C^1(\overline{D})$, então $||\Phi||_{C^1(\overline{D})} = ||\Phi||_{C^1} := \max\left\{||\Phi||_C, ||\nabla\Phi||_C\right\}$;

- $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = C^{k,\alpha}$ é o espaço das funções Holder contínuas e

$$||(u,v)||_{C^{k,\alpha}\times C^{k,\alpha}} = \max\{||u||_{C^{k,\alpha}}, ||v||_{C^{k,\alpha}}\},$$

onde $0 < \alpha < 1$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

- $W^{k,p}(\Omega)$ é o espaço de Sobolev munido com a norma usual $||\cdot||_{W^{k,p}}$, onde $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- Se $S \subset \mathbb{R}^N$, a distância de x a S é dada por $d_1(x,S) = \inf\{d_1(x,y) : y \in S\}$;
- $Q(x,r) := \left\{y \in \mathbb{R}^N : d_1(x,y) < r\right\}$ é o quadrado aberto de centro x e raio r;
- $B(x,r) := \left\{y \in \mathbb{R}^N : d_2(x,y) < r\right\}$ é a bola aberta de centro x e raio r;
- Se $S \subset \mathbb{R}^N$, então $\overline{S}$ é o fecho de S, $int(S)$ seu interior, ∂S sua fronteira e S^c seu complementar;
- Se $\Phi \in C^1(\overline{D})^N$, então $\nabla\Phi(x) = (\frac{\partial_i \Phi(x)}{\partial x_j})_{i,j=1,\ldots,N}$ e $J_\Phi(x) := det\nabla\Phi(x)$;
- Se $\Phi \in C^1(\overline{D})^N$, então S_Φ=$\{x \in D : J_\Phi(x) = 0\}$ é o conjunto dos pontos críticos de Φ;
- $C^\infty(\overline{D})^N$ é o conjunto das funções que admitem uma extensão a um aberto contendo $\overline{D}$, e $\nabla\overline{\Phi}$ é infinitamente derivável, onde $\overline{\Phi}$ é a extensão de Φ. Similarmente definimos $C^\infty(\overline{D})$;
- $C_c(D)^N$=$\left\{\Phi \in C(D)^N : Supp(\Phi) \subset\subset D\right\}$, onde $A \subset\subset B$ significa que $\overline{A}$ é compacto em B e $Supp(\Phi) = \overline{\{x : \ \Phi(x) \neq 0\}}$;
- $C_c(D)$=$\{\Phi \in C(D) : Supp(\Phi) \subset\subset D\}$;
- $C_c^\infty(D) = \{\Phi \in C^\infty(D) : Supp(\Phi) \subset D\}$;
- A notação $\hookrightarrow$ indica imersão contínua;
- O notação $\hookrightarrow\hookrightarrow$ indicar imersão compacta;
- $span(A)$ é o subespaço gerado por A.

Introdução

Neste trabalho, temos como objetivo principal estudar a Teoria do Grau e, em seguida, aplicar parte dela ao estudo de soluções positivas do sistema

$$(S): \qquad \begin{cases} - \triangle u = \lambda f_1(x,u)g_1(x,v), & \Omega \\ - \triangle v = \mu f_2(x,v)g_2(x,u), & \Omega \\ u,\ v \geq 0,\ \Omega,\ u = v = 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

com parâmetros $\lambda, \mu > 0$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 3)$ é um domínio aberto, limitado e suave, $f_i, g_i \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty), (0,\infty))$ e f_i, g_i $(i = 1,2)$ satisfazem condições apropriadas.

Recentemente, a pesquisa relativa a sistemas de equações diferenciais parciais com multiparâmetros tem sido realizada intensivamente, principalmente quanto a questões de existência, multiplicidade, não existência e comportamento assintótico de soluções, tanto em domínios limitados quanto no $\mathbb{R}^N$.

Várias dessas questões já são bem conhecidas para uma ampla classe de sistemas. Neste trabalho, apresentaremos um resultado de Cheng e Zhang [9] de 2013, que estabelece não apenas multiplicidade de solução positiva, mas um resultado de "Multiplicidade Global de Soluções Positivas" com respeito aos parâmetros $\lambda, \mu > 0$. Mais especificamente, construiremos uma curva simples Γ_0 que divide o primeiro quadrante do plano $\mathbb{R}^2$ em dois conjuntos abertos, O_1 e O_2 tais que (S) não tem solução, ou tem no mínimo uma solução ou no mínimo duas soluções positivas de acordo com (λ, μ) pertencer a O_2, a Γ_0 ou a O_1, respectivamente.

Algumas das ferramentas poderosas que utilizaremos para estabelecer tal resultado de multiplicidade global para (S) serão o Índice de Ponto Fixo em cone e o Grau Topológico de Leray-Schauder aplicado em um subconjunto aberto de um cone de $C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$.

O Grau $d(\Phi, D, p)$ é uma ferramenta que fornece uma maneira de saber se uma equação do tipo $\Phi(x) = p$ possui solução, onde $\Phi : \overline{D} \to X$ é contínua se $X = \mathbb{R}^N$ ou Φ é uma perturbação compacta da identidade, se X for um espaço vetorial real normado e $D \subset X$ for um aberto, limitado com $p \notin \Phi(\partial D)$. Se X é um espaço vetorial real normado, dizer que Φ é uma perturbação compacta da identidade significa dizer que $\Phi = I - T$, onde I é o operador identidade de X e $T : D \to X$ é um operador compacto.

Historicamente, conforme Deimling [13], o Grau Topológico para espaços de dimensão finita e funções contínuas foi introduzido por Brouwer, em 1912. Em seguida, segundo O'Regan, Cho e Chen [27], Leray e Schauder generalizaram o Grau de Brouwer para espaços vetoriais de dimensão infinita, em 1934.

De forma similar ao Grau de Brouwer em dimensão finita, o Grau de Leray-Shauder, ainda denotado por $d(\Phi, D, p)$, possui três propriedades que o caracterizam totalmente, as quais descrevemos a seguir. Assuma que X é um espaço vetorial real normado e $\dim X = \infty$. Para $D \subset X$ aberto e limitado, denotaremos por

$$K_1(D) = \{\Phi : \Phi = I - T,\ T : D \to X \text{ é compacto}\}$$

o conjunto das perturbações compactas da identidade. Segundo [13], existe uma única função

$$d : \big\{(\Phi, D, p) : D \subset X \text{ aberto e limitado},\ \Phi \in K_1(\overline{D}),\ p \notin \Phi(\partial D)\big\} \to \mathbb{Z},$$

chamada o Grau Topológico de Leray-Schauder, satisfazendo:

(d_1) $d(I, D, p) = 1$, se $p \in D$;

(d_2) $d(\Phi, D, p) = d(\Phi, D_1, p) + d(\Phi, D_2, p)$, sempre que D_1, D_2 forem subconjuntos abertos e disjuntos de D tais que $p \notin \Phi(\overline{D} \setminus (D_1 \cup D_2))$;

(d_3) $d(I - H(t, .), D, p(t))$ independe de $t \in J = [0, 1]$, sempre que $H : J \times \overline{D} \to \mathbb{R}^N$ for um operador compacto e $p : J \to \mathbb{R}$ uma função contínua com $p(t) \notin H(t, \partial D)$, para todo $t \in J$.

Observe que, na definição do Grau Topológico de Leray-Schauder, utiliza-se o fato do conjunto D ser aberto e limitado. Todavia, como veremos neste trabalho, existem problemas em que o domínio não possui tal topologia, isto é, não é necessariamente aberto e limitado. Isso motiva a definição de Índice de Ponto Fixo que, de uma certa forma, generaliza a função $d(\Phi, D, p)$ com respeito aos argumentos Φ, D e p.

Nesse sentido, considere X um espaço de Banach e $D \subset X$. Dizemos que D é um retrátil de X se existe uma aplicação contínua $R : X \to D$ tal que $R(x) = x$, para todo $x \in D$. Agora, se D é um retrátil de X, $U \subset D$ é aberto e limitado em D e $T : \overline{U} \to D$ é operador compacto tal que $T(x) \neq x$, para todo $x \in \partial U$, então definimos o Índice de Ponto Fixo de T em U com respeito a D, denotado por $i(T, U, D)$, como

$$i(T, U, D) = \begin{cases} d(I - T, U, 0), & \text{se } D = X \\ d(I - TR, B(0, r) \cap R^{-1}(U), 0), & \text{se } D \neq X, \end{cases}$$

onde $B(0, r)$ é qualquer bola contendo U, e R é uma retração arbitrária de D.

O teorema a seguir, sobre Índice de Ponto Fixo em cone, será de grande utilidade para demonstrar um resultado (ver Lema 41) que garante que o sistema (S) tem solução para parâmetros específicos λ, μ. Antes enunciar o teorema, dado $r > 0$, denotaremos por P um cone de um espaço de Banach X (ver apêndice),

$$P_r = \{x \in P : \ ||x|| < r\} \text{ e } \partial P_r = \{x \in P : \ ||x|| = r\}.$$

Teorema A: *Sejam X um espaço de Banach real e $P \subset X$ um cone. Suponha que, para $r > 0$, $T : \overline{P_r} \to P$ é compacto. Então*

i) $i(T, P_r, P) = 1$, se $||T(x)|| < ||x||$, para todo $x \in \partial P_r$;

ii) $i(T, P_r, P) = 0$, se $||T(x)|| > ||x||$, para todo $x \in \partial P_r$.

No capítulo 2, aplicaremos a Teoria do Grau Topológico de Leray-Schauder para estabelecer um teorema de sub-supersolução para o problema

$$(Z): \qquad \begin{cases} -\triangle u = F(x, u, v), \ x \in \Omega, \\ -\triangle v = G(x, u, v), \ x \in \Omega, \\ u = v = 0, \ x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $F, G : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^N$ são contínuas e satisfazem condições apropriadas.

Nesse sentido, entenderemos como uma subsolução (respectivamente, uma subsolução estrita) de (Z) um par $(\underline{u}, \underline{v}) \in C^2(\overline{\Omega}) \times C^2(\overline{\Omega})$ satisfazendo

$$(W): \qquad \begin{cases} -\triangle \underline{u} \leqslant F(x, \underline{u}, \underline{v})(<), \ x \in \Omega \\ -\triangle \underline{v} \leqslant G(x, \underline{u}, \underline{v})(<), \ x \in \Omega \\ \underline{u} \leqslant 0(<), \underline{v} \leqslant 0(<), \ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Analogamente, entenderemos por supersolução e supersolução estrita um par $(\overline{u}, \overline{v}) \in C^2(\overline{\Omega}) \times C^2(\overline{\Omega})$ que satisfaz (W), invertendo as respectivas desigualdades. Após essas definições, enunciaremos o seguinte teorema, que é um resultado provado em [9], onde os autores se apoiaram no método de sub-supersolução e na teoria do Grau Topológico de Leray-Schauder para demonstrá-lo:

Teorema B: *Suponha que $F(x, s, t)$ é monótona não-decrescente com respeito a t e $G(x, s, t)$ é monótona não-decrescente com respeito a s. Suponha ainda que $(\underline{u}, \underline{v})$, $(\overline{u}, \overline{v})$ são subsolução estrita e supersolução estrita de (Z), respectivamente, tais que $(\underline{u}(x), \underline{v}(x)) < (\overline{u}(x), \overline{v}(x))$, para todo $x \in$*

$\overline{\Omega}$. *Então* $d(I-T, \langle \underline{u}, \overline{u}\rangle \times \langle \underline{v}, \overline{v}\rangle, (0,0)) = 1,$ *onde*

$$\langle \underline{u}, \overline{u}\rangle \times \langle \underline{v}, \overline{v}\rangle = \left\{(u,v) \in C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega}) : (\underline{u}, \underline{v}) < (u,v) < (\overline{u}, \overline{v}) \ em\ \overline{\Omega}\right\}.$$

Em particular, o sistema (Z) *tem no mínimo uma solução* (u,v) *tal que* $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

No que segue, consideraremos as seguintes hipóteses para o sistema (S) (para $i = 1, 2$):

(H_1) g_i é limitada superiormente em $\overline{\Omega} \times [0, \infty)$;

(H_2) $g_i(x, s_1) \leq g_i(x, s_2)$ para $s_1 \leq s_2$;

(H_3) $\lim_{s\to\infty} \inf \min_{x\in\overline{\Omega}} \dfrac{f_i(x,s)}{s} > \dfrac{\delta_1}{\min_{x\in\overline{\Omega}} g_i(x,0)}$, onde δ_1 é o primeiro autovalor de $(-\triangle, H_0^1)$;

(H_4) existem $p_1, p_2 \in C(\overline{\Omega}, (0,\infty))$ e $q_1, q_2 \in (1, (N+2)/(N-2))$ tais que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f_i(x,s)}{s^{q_i}} = p_i(x) \text{ uniformemente com respeito a } x \in \overline{\Omega}.$$

Sob essas hipóteses, provaremos o seguinte teorema, devido a Cheng e Zhang em [9], que fornece um resultado conhecido como Multiplicidade Global de Soluções Positivas para o sistema (S).

Teorema C: *Suponha* $(H_1) - (H_4)$. *Então:*

i) *existem números reais* $\lambda_*, \mu_* > 0$ *e um arco simples* Γ_0 *tais que excluindo os seus pontos extremos* $(\lambda_*, 0)$ *e* $(0, \mu_*)$, $\Gamma_0 \subset (0,\infty)^2$ *separa* $(0,\infty)^2$ *em dois subconjuntos disjuntos* O_1 *e* O_2 *tais que o sistema* (S) *não tem solução, tem no mínimo uma solução ou no mínimo duas soluções positivas não triviais, de acordo com* $(\lambda, \mu) \in O_2, \Gamma_0$ *ou* O_1*, respectivamente,*

ii) *existem* $\lambda^* \geq \lambda_*$ *e* $\mu^* \geq \mu_*$ *tais que* (S) *não tem solução semitrivial, tem no mínimo uma solução semitrivial ou tem no mínimo duas soluções semitriviais positivas se* $(\lambda, \mu) \in \{(\lambda, 0) : \lambda > \lambda^*\} \cup \{(0, \mu) : \mu > \mu^*\}$, $(\lambda, \mu) \in \{(\lambda^*, 0), (0, \mu^*)\}$ *ou* $(\lambda, \mu) \in \{(\lambda, 0) : \lambda \in (0, \lambda^*)\} \cup \{(0, \mu) : \mu \in (0, \mu^*)\}$*, respectivamente.*

Recentemente, resultados desse tipo têm sido estudados por vários autores nas áreas de Equações Diferenciais Parciais e Equações Diferenciais Ordinárias. Em particular, um trabalho pioneiro nesse sentido foi apresentado por Ambrosetti, Brezis e Cerami [2], em 1994. Eles estudaram o problema

$$\begin{cases} -\triangle u = \lambda u^q + u^p, \ \Omega \\ u > 0, \ \Omega, \ u = 0, \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado e suave com $0 < q < 1 < p \leq (N+2)/(N-2)$, e provaram que existe um número real $\Lambda > 0$ tal que:

(i) para $\lambda \in (0, \Lambda)$, (1) tem no mínimo duas soluções;

(ii) para $\lambda = \Lambda$, (1) tem no mínimo uma solução;

(iii) para $\lambda > \Lambda$, (1) não tem solução.

Para obter no mínimo uma solução, os autores utilizaram métodos de sub-supersolução. Já para mostrar a existência de uma outra solução, utilizaram métodos variacionais. Outros autores, como Brezis e Nirenberg [6] (1993), García Azorero, Peral Alonso e Manfredi [18] (2000) e, mais recentemente, Fukagai e Narukawa [17] (2007), também estudaram resultados de Multiplicidade Global de Soluções Positivas para classes de equações diferenciais mais gerais.

Quanto à multiplicidade de soluções positivas para sistemas de equações diferenciais, em 2005, do Ó, Lorca e Ubilla [11] estudaram o problema

$$(L): \qquad \begin{cases} -u'' = f(t,u,v,\lambda,\mu) \text{ em } (0,1) \\ -v'' = g(t,u,v,\lambda,\mu) \text{ em } (0,1) \\ u(0) = u(1) = v(0) = v(1) = 0, \end{cases}$$

com f, g superlineares na origem e no infinito, $0 \leq \lambda, \mu < \infty$ parâmetros e com algumas hipóteses adicionais sobre f, g (ver [11]), provaram um resultado tipo "Multiplicidade Global de Soluções positivas" com respeito ao parâmetro $\mu > 0$, com o "congelamento" do parâmetro $\lambda > 0$. Eles utilizaram o Grau Topológico de Leray-Schauder para estudar o problema (L).

Os resultados em do Ó, Lorca, Sánches, Ubila [12] (2007) e Cheng and Yan [10] (2012) também são resultados de multiplicidade sobre soluções positivas para equações diferenciais ordinárias. O primeiro trabalho sobre resultados de Multiplicidade Global de Soluções Positivas para equações diferenciais ordinárias foi o trabalho de Cheng e Zhang [8] (2012).

Em 2012, Cheng e Zhang estudaram as soluções positivas do sistema de EDO's

$$\begin{cases} -u''(t) = \lambda h_1(t) f_1(u(t), v(t)), \ t \in (0,1) \\ -v''(t) = \mu h_2(t) f_2(u(t), v(t)), \ t \in (0,1) \\ \quad u(0) = u(1) = v(0) = v(1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

com respeito aos parâmetros $\lambda, \mu > 0$, onde $h_i \in C([0,1], \mathbb{R}^+)$, $f_i \in C([0, \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+), \mathbb{R}_0^+)$ $(i = 1, 2)$ sendo $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ e $\mathbb{R}_0^+ = (0, \infty)$. Além disso, h_i e f_i satisfazem as seguintes hipóteses (para $i = 1, 2$):

$(\tilde{H}_1)$ h_i não é identicamente nula em $[0,1]$;

$(\tilde{H}_2)$ $f_1(t, s_1) \leq f_1(t, s_2)$ se $s_1 \leq s_2$, e $f_2(t_1, s) \leq f_2(t_2, s)$ se $t_1 \leq t_2$;

$(\tilde{H}_3)$ $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \frac{f_1(t,0)}{t} = \infty$ e $\displaystyle\lim_{s \to \infty} \frac{f_2(0,s)}{s} = \infty$.

Eles mostraram a existência de um arco simples Γ_0 tal que as conclusões (i) e (ii) do Teorema C são satisfeitas para o sistema (2).

Nesse sentido, o Teorema C generaliza para o sistema (S) os resultados do trabalho em [8]. Os métodos utilizados em [8] para encontrar soluções para (2) foram o Grau Topológico de Leray-Schauder e o Índice de Ponto Fixo em cone. Em [9], também são utilizados o Grau Topológico de Leray-Schauder e o Índice de Ponto Fixo em cone para provar a existência de solução para o sistema (S).

Agora veremos como está dividido este trabalho. No capítulo 1 apresentaremos as definições e propriedades do Grau Topológico de Brouwer e de Leray-Schauder e do Índice do Ponto Fixo. Em seguida, demonstraremos o Teorema A. No capítulo 2 demonstraremos o Teorema B e o Teorema C, sendo que neste último utilizaremos métodos de blow-up, estimativas a priori e Índice de Ponto Fixo em cone para demonstrar alguns resultados que nos auxiliarão em sua prova.

Capítulo 1

Um estudo sobre O Grau Topológico

Neste capítulo, estudaremos o Grau Topológico $d(\Phi, D, p)$, onde $\Phi : \overline{D} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é contínua, $D \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e limitado e $p \notin \Phi(\partial D)$ (Grau de Brouwer). Em espaços vetoriais normados de dimensão infinita, consideraremos uma perturbação compacta da identidade, mas as condições sobre o domínio e p são as mesmas. O grau topológico é uma ferramenta que fornece uma maneira de saber se uma equação do tipo $\Phi(x) = p$ possui solução, onde Φ e p satisfazem as condições anteriores.

Existem duas maneiras diferentes de introduzir o Grau Topológico $d(\Phi, D, p)$: uma utiliza somente conceitos antigos de Topologia Algébrica e a outra, mais recente, é a forma analítica. Neste trabalho optamos pela segunda maneira, onde utilizamos o teorema de aproximação por funções diferenciais, Teorema da Função Inversa e o Lema de Sard. Conforme [13], a forma pela qual definimos o Grau Topológico em dimensão finita é devido a Brouwer, em 1912, e segundo O'Regan, Cho e Chen [27], Leray-Schauder generalizaram a Teoria do Grau Topológico de Brouwer para Espaços de Banach de dimensão infinita em 1934, estabelecendo então o conhecido Grau Topológico de Leray-Schauder, que é uma poderosa ferramenta para provar existência de solução para equações diferenciais parciais não lineares.

O material contido neste capítulo é baseado nos trabalhos de Ambroseti e Malchiodi [3], Chang [7], Drábek e Milota [14],[13], Fonseca e Gangbo [16], Guo e Lakshmikantham [22] e O'Regan, Cho e Chen [27] . A menos de menção contrária, $D \subset \mathbb{R}^N$ será aberto e limitado e, para não sobrecarregar a notação, utilizaremos as notações $C(\overline{D})^N = C(\overline{D})$ e $C^1(\overline{D})^N = C^1(\overline{D})$.

1.1 Grau Topológico para funções de classe C^1

Iniciamos esta seção relembrando algumas definições e notações. Considere $\Phi \in C^1(\overline{D})$. Se $x \in D$ é tal que $J_\Phi(x) = 0$, onde $J_\Phi(x)$ é o determinante jacobiano de Φ em x, então x é chamado um ponto crítico de Φ. Se $x \in D$ é um ponto crítico de Φ, chamaremos $\Phi(x) = p$ de valor crítico de Φ. De acordo com a nossa notação, $S_\Phi=\{x \in D : J_\Phi(x) = 0\}$ é o conjunto dos pontos críticos de Φ. Se $p \notin \Phi(S_\Phi)$, chamaremos p de valor regular de Φ.

Como consequência do Teorema da Função Inversa, obtemos o seguinte lema:

Lema 1. *Se p é valor regular de $\Phi \in C^1(\overline{D})$ e $p \notin \Phi(\partial D)$, então $\Phi^{-1}(p) = \{x \in \overline{D} : \Phi(x) = p\}$ é finito.*

Demonstração. De fato, suponha que $\Phi^{-1}(p) \subset \overline{D}$ seja infinito. Como $\overline{D}$ é limitado, $\Phi^{-1}(p)$ também o é, logo existe pelo menos um ponto de acumulação em $\Phi^{-1}(p)$, digamos y. Afirmamos que $y \notin \partial D$. De fato, caso contrário, pelo fato de y ser ponto de acumulação existiria $(x_n) \subset \Phi^{-1}(p)$, com $x_n \neq y$, para todo n, tal que $x_n \to y$. Por continuidade, $\Phi(x_n) \to \Phi(y)$. Mas $\Phi(x_n) = p$ para todo n, e assim $\Phi(y) = p$, contrariando o fato de que $p \notin \Phi(\partial D)$. Assim, $y \in D$ e Φ é diferenciável em y. Pelo Teorema da Função Inversa, podemos encontrar vizinhanças V_y de y e V_p de p tais que $\Phi : V_y \longrightarrow V_p$ é um difeomorfismo. Mas, para n suficientemente grande, $x_n \in V_y$ e $\Phi(x_n) = p = \Phi(y)$, com $x_n \neq y$, contrariando a injetividade de $\Phi |_{V_y}$. Logo, $\Phi^{-1}(p)$ é finito. □

O primeiro passo para construir o Grau para funções de classe C^1 será a próxima definição. Uma motivação para a Definição 1, utilizando análise complexa, pode ser encontrada em [7].

Definição 1. *Sejam $D \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado, $\Phi \in C^1(\overline{D})$. Se $p \notin \Phi(S_\Phi) \cup \Phi(\partial D)$, então definimos o grau de Φ em p com respeito a D, e denotamos por $d(\Phi, D, p)$, como:*

$$d(\Phi, D, p) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in \Phi^{-1}(p)} sgn(J_\Phi(x)), & se\ \Phi^{-1}(p) \neq \emptyset \\ 0, & se\ \Phi^{-1}(p) = \emptyset, \end{cases}$$

onde

$$sgn(t) = \begin{cases} 1, & se\ t > 0 \\ -1, & se\ t < 0. \end{cases}$$

De acordo com o Lema 1, a Definição 1 faz sentido, pois $\Phi^{-1}(p)$ é finito.

Observe que definimos $d(\Phi, D, p)$ para $p \notin \Phi(S_\Phi)$ e, utilizando o Teorema da Função Inversa, vimos que ele está bem definido. Para concluir a construção do Grau para funções de classe C^1, precisamos definir $d(\Phi, D, p)$ para $p \in \Phi(S_\Phi)$. A verificação de que a definição faz sentido para este caso é mais delicada, e por isto precisaremos de algumas proposições e lemas auxiliares.

A proposição abaixo nos diz que se fixarmos uma função C^1, então funções C^1 próximas dela, na topologia de $C^1(\overline{D})$, têm o mesmo grau.

Proposição 2. *Seja $\Phi \in C^1(\overline{D})$ e $p \notin \Phi(S_\phi) \cup \Phi(\partial D)$. Então existe $\delta > 0$ tal que se $\Psi \in C^1(\overline{D})$ e $||\Phi - \Psi||_{C^1} \leq \delta$, então $p \notin \Psi(S_\Psi) \cup \Psi(\partial D)$ e $d(\Phi, D, p) = d(\Psi, D, p)$.*

Demonstração. Temos dois casos a considerar:

Caso 1: $\Phi^{-1}(p) = \emptyset$.

Considere $\delta = \frac{1}{2}d_1(p, \Phi(\overline{D})) > 0$. Seja $\Psi \in C^1(\overline{D})$ tal que $||\Phi - \Psi||_{C^1} < \delta$. Então $\Psi^{-1}(p) = \emptyset$, pois se $\Psi(x) = p$ para algum $x \in \overline{D}$, teríamos que

$$|\Phi(x) - p|_1 \leq ||\Phi - \Psi||_{C^1} < \delta < d_1(p, \Phi(\overline{D})),$$

o que é impossível. Assim, $p \notin \Psi(S_\Psi)$ e $p \notin \Psi(\partial D)$. Segue por definição que

$$d(\Phi, D, p) = 0 = d(\Psi, D, p), \text{ para toda } \Psi \in C^1(\overline{D}), \text{ com } ||\Psi - \Phi||_{C^1} < \delta.$$

Caso 2: Suponha $\Phi^{-1}(p) = \{a_1, ..., a_n\}$.

Provaremos que existem $r > 0$ e $\delta > 0$ tais que se $\Psi \in C^1(\overline{D})$ e $||\Phi - \Psi||_{C^1} \leq \delta$, então $\Psi(x) = p$ admite exatamente uma solução em $Q(a_i, r)$, $i = 1, ..., k$.

Para provar este fato, precisaremos de algumas definições e afirmações.

Primeiramente fixaremos r_0 tal que

$$0 < r_0 < min\left\{\frac{d_1(a_i, a_j)}{3} : i \neq j, i, j = 1, ..., k\right\} \text{ e } r_0 < min\left\{\frac{d_1(a_i, \partial D \cup \Phi(S_\Phi))}{3} : i = 1, ..., k\right\}.$$

Definiremos ainda

$$Q(r) := Q(a_1, r) \cup ... \cup Q(a_k, r) \text{ para } r > 0 \text{ e } c := \min\{|J_\Phi(a_i)| : i = 1, ..., k\}. \tag{1.1}$$

Então temos que $c > 0$, pois $J_\Phi(a_i) \neq 0, i = 1, ..., k$. Desde que J_Φ é contínuo em $\overline{D}$, e por (1.1)

$$|J_\Phi(a_i)| \geq c > \frac{2}{3}c,$$

existem $0 < \overline{r_i} < r_0$, tais que

$$|J_\Phi(x)| \geq \frac{2}{3}c, \text{ para todo } x \in Q(a_i, \overline{r_i}) \subset \overline{D}.$$

Tomando

$$0 < r_1 < min\{\overline{r}_i\}_{i=1,...,k} < r_0,$$

obteremos que

$$|J_\Phi(x)| \geq \frac{2}{3}c, \quad \text{para todo } x \in Q(r_1). \tag{1.2}$$

A desigualdade (1.2) será utilizada logo após a demonstração da Afirmação 1.

Afirmação 1: Podemos escolher $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } ||\Phi - \Psi||_{C^1} \leq \delta_1, \text{ então } \sup\left\{|J_\Phi(x) - J_\Psi(x)| : x \in \overline{D}\right\} \leq \frac{1}{3}c.$$

De fato, desde que $\Phi \in C^1(\overline{D})$, a aplicação $T : \overline{D} \longmapsto \mathbb{R}^{N^2}$ definida por $T(x) = \nabla\Phi(x)$ é contínua, e portanto $T(\overline{D}) \subset \mathbb{R}^{N^2}$ é compacto. Assim, podemos encontrar uma vizinhança compacta (ou seja, o fecho de um conjunto aberto e limitado contendo $T(\overline{D})$) de $T(\overline{D})$ em $\mathbb{R}^{N^2}$. De fato, dado $\epsilon > 0$, temos que

$$T(\overline{D}) \subset \bigcup_{x \in \overline{D}} B(Tx, \epsilon),$$

e por hipótese de compacidade existem $\{x_1, ..., x_m\}$ tais que $T(\overline{D}) \subset \bigcup_{i=1}^m B(Tx_i, \epsilon)$. Passando o fecho, temos que $T(\overline{D}) \subset \overline{\bigcup_{i=1}^m B(Tx_i, \epsilon)}$. Então, $\overline{\bigcup_{i=1}^m B(Tx_i, \epsilon)}$ é a nossa vizinhança compacta procurada.

Agora chamaremos de K essa vizinhança compacta. A função

$$det : K \longrightarrow \mathbb{R} \text{ definida por } X \longmapsto detX,$$

é contínua, logo, uniformemente contínua. Sendo assim, dado $c > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|X - Y|_1 \leq \delta_1, X, Y \in K \text{ implica que } |detX - detY| < \frac{1}{3}c.$$

Em particular,

$$|\nabla\Phi(x) - \nabla\Psi(x)|_1 \leq \delta_1 \;\text{ implica que } |J_\Phi(x) - J_\Psi(x)| < \frac{1}{3}c. \tag{1.3}$$

Seja $\Psi \in C^1(\overline{D})$. Se $||\Phi - \Psi||_{C^1} \leq \delta_1$, então $|\nabla\Phi(x) - \nabla\Psi(x)|_1 \leq \delta_1$ para todo $x \in \overline{D}$, e assim, por (1.3), temos que $|J_\Phi(x) - J_\Psi(x)| < \frac{1}{3}c$, o que implica que $\sup\left\{|J_\Phi(x) - J_\Psi(x)| : x \in \overline{D}\right\} \leq \dfrac{1}{3}c$. Concluímos assim a demonstração da afirmação 1.

Seja $x \in Q(r_1)$. Por (1.2) e (1.3), segue que

$$|J_\Psi(x)| = |J_\Psi(x) - J_\Phi(x) + J_\Phi(x)| \geq |J_\Psi(x)| - |J_\Phi(x) + J_\Phi(x)| \geq \tfrac{2}{3}c - \tfrac{1}{3}c = \tfrac{1}{3}c,$$

e assim

$$\sup\{|J_\Psi(x)| : x \in Q(r_1)\} \geq \frac{1}{3}c, \text{ se } ||\Phi - \Psi||_1 \leq \delta_1. \tag{1.4}$$

De (1.4) concluímos que existe a inversa $(\nabla\Psi(a_i))^{-1}$ da matriz $\nabla\Psi(a_i)$. Fixemos $i \in \{1, ..., k\}$ e vamos resolver a equação $\Psi(x) = p$ em $Q(a_i, r_1)$. Para simplificar a notação, escreveremos

$$a =: a_i, \quad h := \Phi(a_i) - \Psi(a_i) = \Phi(a) - \Psi(a) \text{ e } V := (\nabla\Psi(a))^{-1}. \tag{1.5}$$

Defina $T, W : \overline{Q}(0, r_1) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ por

$$Tz := \Psi(a+z) - \Psi(a) - \nabla\Psi(a)z \ \text{ e } \ W(z) := V(h - Tz).$$

Observação 1: Temos que

$$\Psi(a+z) = p \text{ para algum } z \in \overline{Q}(0, r_1) \Leftrightarrow \Psi(a+z) = \Phi(a).$$

Por outro lado,

$$\Psi(a+z) = \Phi(a) \text{ para algum } z \in \overline{Q}(0, r_1) \Leftrightarrow W(z) = V(\nabla\Psi(a)z) = z.$$

Assim, estudar as soluções de $\Psi(a+z) = p$ em $\overline{Q}(0, r_1)$ é equivalente a estudar as soluções de $W(z) = z$ em $\overline{Q}(0, r_1)$.

Observação 2: Para $r \leq r_1$ e $a = a_i,\ i \in \{1, \cdots, k\}$, estudar as soluções de $\Psi(x) = p$ em $\overline{Q}(a, r)$, é equivalente a estudar as soluções de $\Psi(x + a) = p$ em $\overline{Q}(0, r)$.

Afirmação 2: A equação $W(z) = z$ admite exatamente uma solução em $Q(0, r)$, para algum $r < r_1$ e, quando $||\Phi - \Psi||_{C^1} < \delta$, para algum $\delta < \delta_1$.

Para provar a afirmação, mostraremos que W é uma contração e que $W(\overline{Q}(0, r)) \subset \overline{Q}(0, r)$, para algum $r < r_1$. Para isso, vamos estimar a componente $(Tz - Ty)_l$, para $y, z \in \overline{Q}(0, r)$ (o r é um parâmetro a determinar satisfazendo $r < r_1$).

$$\begin{aligned}
(Tz - Ty)_l &= \Psi_l(a+z) - \Psi_l(a+y) - (\nabla\Psi(a))(z-y)_l \\
&= \int_0^1 \frac{d\Psi_l(a + \theta z + (1-\theta)y)}{d\theta} d\theta - \sum_{j=1}^{i=N} \frac{\partial\Psi_l(a)(z_j - y_j)}{\partial x_j} \\
&= \int_0^1 \sum_{j=1}^{N} (z_j - y_j)[\frac{\partial\Psi_l(a + \theta z + (1-\theta)y)}{\partial x_j} - \frac{\partial\Psi_l(a)}{\partial x_j}] d\theta \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^N (z_j - y_j) \displaystyle\int_0^1 [\frac{\partial\Psi_l(u)}{\partial x_j} - \frac{\partial\Phi_l(u)}{\partial x_j} + \frac{\partial\Phi_l(u)}{\partial x_j} - \frac{\partial\Phi_l(a)}{\partial x_j} + \frac{\partial\Phi_l(a)}{\partial x_j} - \frac{\partial\Psi_l(a)}{\partial x_j}] d\theta,
\end{aligned}$$

onde $u = a + \theta z + (-\theta)y$, e utilizamos o Teorema Fundamental do Cálculo na segunda igualdade e a Regra da Cadeia na terceira igualdade. Dessa forma, vemos que

$$\begin{aligned}
|(Tz - Ty)_l| \leq \textstyle\sum_{j=1}^N |(z_j - y_j)| \displaystyle\int_0^1 [| \frac{\partial\Psi_l(u)}{\partial x_j} - \frac{\partial\Phi_l(a)}{\partial x_j} | + |\frac{\partial\Phi_l(u)}{\partial x_j} - \frac{\partial\Psi_l(a)}{\partial x_j}| \\
+ |\frac{\partial\Phi_l(u)}{\partial x_j} - \frac{\partial\Phi_l(a)}{\partial x_j}|] d\theta \leq \int_0^1 [N|z-y|_1 \cdot ||\Psi - \Phi||_{C^1} + N|z-y|_1 \cdot ||\Psi - \Phi||_{C^1} \\
+ N|z-y|_1 \cdot \epsilon(r)] d\theta \leq N|z-y|_1 \int_0^1 (2\delta + \epsilon(r)) d\theta,
\end{aligned} \tag{1.6}$$

onde

$$\epsilon(r) := \sup\left\{\int_0^1 |\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(a+\theta z+(1-\theta)y) - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(a)|d\theta : y,z \in \overline{Q}(0,r), i,j = 1,...,N\right\}.$$

Claramente, $\epsilon(r)$ é não-decrescente, pois se $r_v < r_w$, então $Q(0,r_v) \subset Q(0,r_w)$ e portanto $\epsilon(r_v) \leq \epsilon(r_w)$. Obviamente, $\lim_{r\to 0^+}\epsilon(r) = 0$. Utilizando a estimativa (1.6) e o fato de que V é linear e limitada, temos que

$$|W(z)-W(y)|_1 = |V(h-Tz)-V(h-Ty)|_1 \leq |V|_1|Tz-Ty|_1 \leq N|y-z|_1|V|_1(2\delta+\epsilon(r)). \quad (1.7)$$

A estimativa (1.7) fornecerá que W é uma contração para $\delta > 0$ e $r > 0$ apropriados. Antes de escolher $\delta > 0$ e $r > 0$, estimaremos $|W(z)|_1$ para todo $z \in \overline{Q}(0,r)$, e esta estimativa nos ajudará a provar que $W(\overline{Q}(0,r)) \subset \overline{Q}(0,r)$.

Utilizando a desigualdade triangular e o fato de V ser linear e limitado, temos que

$$\begin{aligned} |W(z)|_1 &\leq |W(z)-W(0)|_1 + |W(0)|_1 = |W(z)-W(0)|_1 + |V(h+T0)|_1 \\ &= |W(z)-W(0)|_1 + |V(h)|_1 \leq |W(z)-W(0)|_1 + |V|_1 \cdot |h|_1, \end{aligned} \quad (1.8)$$

e assim segue a estimativa desejada.

Agora escolheremos os parâmetros $r_1 > r$ e $\delta > 0$. Como $\lim_{r\to 0^+}\epsilon(r) = 0$ e $|V|_1$, $|h|_1$ são constantes, podemos tomar $r < r_1$ e $\delta < \delta_1$ tais que

$$N\epsilon(r)|V|_1 < \frac{1}{6}, \ |V|_1\delta \leq \frac{r}{6}, \ 2N\delta|V|_1 < \frac{1}{6}$$

e

$$\delta \leq \frac{l(r)}{2} = \frac{\min\{|\Phi(x)-p|_1 : x \notin Q(a_1,r)\cup ... \cup Q(a_k,r)\}}{2}.$$

Feita esta escolha, concluiremos a afirmação. Seja $\Psi \in C^1(\overline{D})$ satisfazendo $||\Phi - \Psi||_{C^1} \leq \delta$. Segue de (1.7) que

$$|W(z)-W(0)|_1 \leq N|z|_1|V|_1(2\delta+\epsilon(r)). \quad (1.9)$$

Utilizando as desigualdades $N\epsilon(r)|V|_1 < \frac{1}{6}$ e $2N\delta|V|_1 < \frac{1}{6}$ em (1.7), temos que

$$|W(z)-W(y)|_1 \leq \frac{|y-z|_1}{3},$$

ou seja, W é uma contração.

Finalmente mostraremos que $W(\overline{Q}(0,r)) \subset \overline{Q}(0,r)$. Lembrando da notação (1.5), segue da desigualdade $||\Phi - \Psi||_{C^1} \leq \delta$ que $|h|_1 \leq \delta$. Utilizando as desigualdades $|h|_1 \leq \delta$ e (1.9) na estimativa (1.8), temos que

$$|W(z)|_1 \leq N|z|_1|V|_1(2\delta + \epsilon(r)) + |V|_1\delta, \tag{1.10}$$

para todo $z \in \overline{Q}(0, r)$.

Pelas definições de δ e r, temos que (1.10) é equivalente a

$$|W(z)|_1 \leq rN|V|_1(2\delta + \epsilon(r)) + |V|_1\delta \leq \frac{r}{6} + \frac{r}{6} + \frac{r}{6} < r,$$

para todo $z \in \overline{Q}(0, r)$.

Portanto, $W(\overline{Q}(0, r)) \subset \overline{Q}(0, r)$. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, temos que $W(z) = z$ possui uma única solução em $\overline{Q}(0, r)$.

Por outro lado temos que $\Psi^{-1}(p) \subset Q(r)$. De fato, assuma que $\Psi(x) = p$, para algum $x \in \overline{D} \setminus Q(r)$. Então, pela definição de δ e $l(r)$, temos que

$$|\Phi(x) - \Psi(x)|_1 = |\Phi(x) - p|_1 \geq l(r) \geq 2\delta > \delta > |\Phi(x) - \Psi(x)|_1,$$

o que é impossível. Segue das observações 1 e 2 que a solução de $w(z) = z$ em $\overline{Q}(0, r)$ pertence a $Q(0, r)$. Provamos assim a afirmação 2.

Sejam Ψ, δ e r satisfazendo as hipóteses da afirmação 2. As observações 1 e 2, juntamente com a afirmação 2, implica que, para cada $i \in \{1, \cdots, k\}$, a equação $\Psi(x) = p$ admite exatamente uma solução em $Q(a_i, r)$. Observando o final da demonstração da afirmação 2, temos que $\Psi(x) \neq p$, para todo $x \in \overline{D} \setminus Q(r)$. Assim, podemos escrever

$$\Psi^{-1}(p) = \{b_1, ..., b_k\}. \tag{1.11}$$

Durante o resto da demonstração consideraremos $\Psi \in C^1(\overline{D})$, δ e r como nas hipóteses da afirmação 2.

Afirmação 3: $Q(r) \cap \partial D = \emptyset$.

De fato, se $x \in Q(r) \cap \partial D$ com $x \in Q(a_i, r) \subset Q(a_i, r_0)$ e $\partial D \subset \partial D \cup \Phi(S_\Phi)$, então

$$r_0 < \rho(a_i, \partial D \cup \Phi(S_\Phi)) \leq \rho(a_i, \partial D) \leq \rho(a_i, x) < r,$$

o que é impossível, pois $r \leq r_0$.

Temos ainda que

$$d(\Phi, D, p) = \sum_{i=1}^{k} sgn(J_\Phi(a_i)) \ \text{ e } \ d(\Psi, D, p) = \sum_{i=1}^{k} sgn(J_\Psi(b_i)). \tag{1.12}$$

Desde que, para todo $i \in \{1, ..., k\}$, J_Φ é contínuo em $Q(a_i, r)$ e $J_\Phi(x) \neq 0$ para todo $x \in Q(a_i, r)$, temos que J_Φ tem sinal constante em $Q(a_i, r)$, pelo Teorema do Valor Intermediário. Segue deste fato e de (1.11) que $sgn(J_\Phi(a_i)) = sgn(J_\Phi(b_i))$.

Finalmente:

Afirmação 4: Se $|J_\Phi(b_i) - J_\Psi(b_i)| \leq \frac{c}{3}$, onde c é definido por (1.1), então $sng(J_\Phi(b_i)) = sng(J_\Psi(b_i))$.

De fato, suponha que $J_\Phi(b_i) > 0$ e $J_\Psi(b_i) < 0$, então de (1.2) segue que

$$\frac{c}{3} \leq |J_\Phi(b_i)| = J_\Phi(b_i) < J_\Phi(b_i) - J_\Psi(b_i) = |J_\Phi(b_i) - J_\Psi(b_i)| \leq \frac{c}{3},$$

mas isto é impossível.

Analogamente, obtemos contradição se $J_\Phi(b_i) < 0$ e $J_\Psi(b_i) > 0$.

Logo, $sng(J_\Phi(b_i)) = sng(J_\Psi(b_i))$. Podemos concluir de (1.12) e da afirmação 1 que

$$d(\Phi, D, p) = d(\Psi, D, p) \text{ para } \Psi \in C^1(\overline{D}) \text{ tal que } ||\Phi - \Psi||_{C^1} \leq \delta.$$

□

O lema a seguir será utilizado para relacionar o Grau Topológico com a sua fórmula integral na Proposição 4.

Lema 3. *Considere $f \in C_c^1(\mathbb{R}^N), K := Supp(f)$, D um domínio aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$. Seja $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ um caminho contínuo tal que*

$$A := \{k + \gamma(s) : k \in K, s \in [0, 1]\} \subset D. \tag{1.13}$$

Então existe uma função $v \in C_c^1(D)$ tal que

$$div(v(x)) = f(x - \gamma(0)) - f(x - \gamma(1)), \ \textit{para todo } x \in D.$$

Demonstração. Primeiramente, observamos que como K e $\gamma([0, 1])$ são compactos, então $A = K + \gamma([0, 1])$ é compacto, e portanto $A \subset\subset D$.

A demonstração será baseada em dois casos:

Caso 1: Suponha que $\gamma(s) \equiv s\overline{x}$, onde $\overline{x} = y - k$ com $y \in D,\ k \in K$.

Sejam

$$F(x) := \int_0^1 f(x - \theta\overline{x})d\theta \ \text{ e } \ v(x) = \overline{x}F(x), \ x \in \overline{D}.$$

Claramente, $F \in C^1(\overline{D})$, pois f é $C^1(\overline{D})$. Além disso, $Supp(F) \subset A$. De fato, se $x \in \overline{D}$ é tal que $F(x) \neq 0$, então existe $\theta \in [0,1]$ tal que $f(x - \theta\overline{x}) \neq 0$ e assim $x - \theta\overline{x} \in K$, isto é, $x \in K + \theta\overline{x} \subset A$. Portanto, $x \in A$ e, como $A \subset\subset D$, concluímos que $v \in C_c^1(D)$. Como $f \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\begin{aligned} div(v(x)) &= \sum_{i=1}^N \overline{x_i}\frac{\partial F(x)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^N \overline{x_i}\int_0^1 \frac{\partial f(x-\theta\overline{x})}{\partial x_i}d\theta = \sum_{i=1}^N \overline{x_i}\int_0^1 \sum_{j=1}^N \frac{\partial f(x-\theta\overline{x})}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_i}d\theta \\ &= \sum_{i=1}^N \overline{x_i}\int_0^1 \frac{\partial f(x-\theta\overline{x})}{\partial x_i}d\theta = -\int_0^1 \frac{df(x-\theta\overline{x})}{d\theta}d\theta = f(x) - f(x-\overline{x}), \end{aligned}$$

onde derivamos sob o sinal da integral na segunda igualdade e utilizamos a Regra da Cadeia na terceira igualdade.

Caso 2: $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ é qualquer caminho contínuo satisfazendo (1.13).

Seja R a relação de equivalência definida em $[0,1]$ por

$$tRs \iff \text{ existe } v \in C_c^1(D) \text{ tal que } div(v(x)) = f(x-\gamma(s)) - f(x-\gamma(t)).$$

Provaremos que R é uma relação de equivalência.

1) tRt, para todo $t \in [0,1]$, pois tomando $v(x) \equiv 0$, teremos que existe $v \in C_c^1(D)$ tal que

$$0 = div(v(x)) = f(x-\gamma(t)) - f(x-\gamma(t)) = 0.$$

2) Sejam tRs e $v \in C_c^1(D)$, onde

$$div(v(x)) = f(x-\gamma(s)) - f(x-\gamma(t)).$$

Tomando $w(x) = -v(x)$, obtemos que $w \subset C_c^1(D)$ e

$$\begin{aligned} div(w(x)) = div(-v(x)) = -div(v(x)) &= -[f(x-\gamma(s)) - f(x-\gamma(t)] \\ &= f(x-\gamma(t)) - f(x-\gamma(s)), \end{aligned}$$

isto é, sRt.

3) Suponha que tRs e sRp. Então, existem $v, w \in C_c^1(D)$ tais que

$$div(v(x)) = f(x-\gamma(s)) - f(x-\gamma(t)), \ div(w(x)) = f(x-\gamma(p)) - f(x-\gamma(s)).$$

Tome $z(x) = v(x) + w(x)$. Então $Supp z \subset\subset D$ e

$$\begin{aligned} div(z(x)) &= div(v(x)) + div(w(x)) = [f(x-\gamma(s)) - f(x-\gamma(t)] + [f(x-\gamma(p)) - f(x-\gamma(s))] \\ &= f(x-\gamma(p)) - f(x-\gamma(t)), \end{aligned}$$

ou seja, tRp.

Fica assim demonstrado que tRs é uma relação de equivalênca. Então $[0,1]$ é a união disjunta de suas classes de equivalência. Como $[0,1]$ é conexo, se mostrarmos que cada classe de equivalência é um aberto, teremos que $[0,1]$ é formado por uma única classe de equivalência, a saber $[0,1]$, pois $[0,1]$ só admite cisão trivial.

Sejam $s \in [0,1]$ e C sua classe de equivalência. Mostremos que C é aberto em $[0,1]$. Ponha

$$x_t := \gamma(t) - \gamma(s), t \in [0,1].$$

Afirmamos que, para um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$\{t \in [0,1] : |t-s| < \epsilon\} \subset C.$$

Sejam

$$f_s(x) = f(x-\gamma(s)), \quad K_s = Supp(f_s) \ \text{ e } \ \eta = \frac{d_1(K_s, D^c)}{2}.$$

Temos que $\eta > 0$. Para ver isso é suficiente mostrar que $K_s \subset D$. Se x é tal que $f_s(x) \neq 0$, então $f(x-\gamma(s)) \neq 0$. Logo $x - \gamma(s) \in K$, o que implica que $x \in K + \gamma(s) \subset D$. Portanto, $K_s \subset D$ e $\eta > 0$. Pela continuidade de γ, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$|x_t|_1 < \eta, \text{ se } s \in [0,1] \text{ e } |t-s|_1 < \epsilon.$$

Definindo

$$A_s := \{k + \theta x_t : k \in K_s, \theta \in [0,1]\},$$

temos que $A_s \subset D$. De fato, se assumirmos que para algum $\theta \in [0,1], x = k + \theta x_t \in D^c$, então obtemos $|x-k|_1 = \theta |x_t|_1 < \theta \cdot \eta$ e, como $k \in K_s$,

$$d_1(K, D^c) \leq |x-k|_1 < \theta\eta < \eta = \frac{d_1(K_s, D^c)}{2} \leq d_1(K, D^c),$$

o que é impossível. Finalmente, usando o caso 1 temos que existe $v \in C_c^1(D)$ tal que

$$div(v(x)) = f_s(s) - f_s(x - x_t) = f(x-\gamma(s)) - f(x-\gamma(t)).$$

Portanto tRs e C é um aberto de $[0,1]$. Concluímos que $0R1$ e existe $v \in C_c^1(D)$ tal que

$$div(v(x)) = f(x - \gamma(1)) - f(x - \gamma(0)).$$

□

A seguinte fórmula foi introduzida por Heinz em 1959 para introduzir o Grau Topológico, e mostra que ele pode ser calculado na forma de integral.

Proposição 4. *Sejam* $\Phi \in C^1(\overline{D}), p \notin \Phi(\partial D) \cup \Phi(S_\Phi)$ *e* $f_\epsilon \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $\int_{\mathbb{R}^N} f_\epsilon dx = 1$ *e* $Supp(f_\epsilon) \subset Q(0,\epsilon)$. *Então existe* $\epsilon(p) > 0$ *tal que*

$$d(\Phi, D, p) = \int_D f_\epsilon(\Phi(x) - p) J_\Phi(x) dx,$$

para todo $0 < \epsilon < \epsilon(p)$.

Demonstração. Temos dois casos a considerar:
Caso 1: $\Phi^{-1}(p) = \emptyset$. Por definição, $d(\Phi, D, p) = 0$. Definindo $\delta := d_1(p, \Phi(\overline{D})) > 0$, temos que

$$|\Phi(x) - p|_1 \geq \delta > \epsilon, \text{ para todo } x \in \overline{D} \text{ e } 0 < \epsilon < \delta.$$

Portanto, $f_\epsilon(\Phi(x) - p) = 0$, para todo $x \in \overline{D}$, visto que $Supp(f_\epsilon) \subset Q(0,\epsilon)$ e assim

$$\int_D f_\epsilon(\Phi(x) - p) J_\Phi(x) dx = 0.$$

Caso 2: $\Phi^{-1}(p) = \{a_1, ..., a_k\}$. Escolha $r > 0$ tal que $B(a_i, r) \subset\subset D, i = 1, ..., k,$ $\overline{B}(a_i, r) \cap \overline{B}(a_j, r) = \emptyset$, se $i \neq j$, e $J_\Phi(x) \neq 0$ para todo $x \in \bigcup_{i=1}^{k} \overline{B}(a_i, r)$. Pelo Teorema da Função Inversa, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $Q(p, \epsilon_1) \subset \Phi(\overline{B}(a_i, r))$, para $i = 1, ..., k$, e Φ é um difeomorfismo de $\Phi^{-1}(Q(p, \epsilon_1)) \cap \overline{B}(a_i, r)$ sobre $Q(p, \epsilon_1)$.

Como $\overline{D} \setminus \bigcup_{i=1}^k B(a_i, r)$ é compacto, existe $\epsilon_2 > 0$ tal que $|\Phi(x) - p|_1 \geq \epsilon_2$, para todo $x \in \overline{D} \setminus \bigcup_{i=1}^k B(a_i, r)$. Como $\Phi(x) = p$ se, e somente se, $x = a_i$ para algum $i \in \{1, \cdots, k\}$, concluímos que

$$x \in D \text{ e } |\Phi(x) - p|_1 < \epsilon_2 \text{ implica que } x \in \bigcup_{i=1}^{k} \overline{B}(a_i, r).$$

Considere $\epsilon < min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Então, para $\epsilon > 0$ desta forma, obtemos

$$\begin{aligned}\int_D f_\epsilon(\Phi(x)-p)J_\Phi(x)dx &= \int_{|\Phi(x)-p|_1<\epsilon} f_\epsilon(\Phi(x)-p)|J_\Phi(x)|sgn(J_\Phi(a_i))dx \\ &= \sum_{i=1}^{k} sgn(J_\Phi(a_i)) \int_{Q(0,\epsilon)} f_\epsilon(y)dy = \sum_{i=1}^{k} sgn(J_\Phi(a_i)) \\ &= d(\Phi, D, p),\end{aligned}$$

onde usamos a mudança de variável $y = \Phi(x) - p$. □

A proposição a seguir diz que, fixado Φ e D, o Grau é constante nas componentes conexas de $\mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial D)$. Em particular, ele é uma função contínua em tais componentes.

Proposição 5. *Sejam $\Phi \in C^1(\overline{D})$, C uma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial D)$ e $p_1, p_2 \in C \setminus \Phi(S_\Phi)$. Então*

$$d(\Phi, D, p_1) = d(\Phi, D, p_2).$$

Demonstração. Vale lembrar que se C é um aberto de $\mathbb{R}^N$, então C é conexo se, e somente se, é conexo por caminho. Para demonstração da proposição, temos dois casos a considerar.
Caso 1: Assuma que $\Phi \in C^2(\overline{D})$.

Seja $\gamma : [0,1] \to C$ um caminho contínuo com $\gamma(0) = p_1$ e $\gamma(1) = p_2$. Considere $f_\epsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma família de funções dada pela Proposição 4 com $Supp(f_\epsilon) := K_\epsilon \subset Q(0, \epsilon)$. Por tal proposição, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ obtemos que

$$d(\Phi, D, p_i) = \int_D f_\epsilon(\Phi(x) - p_i)J_\Phi(x)dx, i = 1, 2.$$

Sejam ainda

$$\epsilon_1 := \frac{min\{\epsilon_0, d_1(\gamma, C^c)\}}{2} \quad \text{e} \quad A := \{k + \gamma(s) : k \in K_{\epsilon_1}, s \in [0,1]\}.$$

Provaremos a seguinte afirmação:
Afirmação: $A \subset C$.

Suponha que exista $k_0 + \gamma(s_0) \in C^c$ com $k_0 \in K_{\epsilon_1}, s_0 \in [0,1]$. Então,

$$\epsilon_1 < d_1(\gamma, C^c) \leq d_1(\gamma, k_0 + \gamma(s_0)) \leq |\gamma(s_0) - k_0 - \gamma(s_0)|_1 = |k_0|_1 < \epsilon_1,$$

pois $Suppf_{\epsilon_1} \subset Q(0, \epsilon_1)$ e $|k_0|_1 < \epsilon_1$, o que é uma contradição.

Logo, $A \subset C$ e, pelo Lema 3, existe $v \in C_c^1(C)$ tal que

$$div(v(x)) = f_{\epsilon_1}(x - p_1) - f_{\epsilon_1}(x - p_2) \text{ e } Supp(v) \subset C,$$

e isto implica que $Supp(v) \cap \Phi(\partial D) \subset C \cap \Phi(\partial D) = \emptyset$. Portanto, pelo Teorema 59 (ver apêndice) existe $u \in C_c^1(D)$ tal que

$$div(u(x)) = div(v(\Phi(x))J_\Phi(x) = [f_{\epsilon_1}(\Phi(x) - p_1) - f_{\epsilon_1}(\Phi(x) - p_2)]J_\Phi(x),$$

e, pelo Teorema do Divergente, concluímos que

$$\begin{aligned} d(\Phi, D, p_1) - d(\Phi, D, p_2) &= \int_D [f_{\epsilon_1}(\Phi(x) - p_1) - f_{\epsilon_1}(\Phi(x) - p_2)]J_\Phi(x)dx \\ &= \int_D div(v(\Phi(x))J_\Phi(x)dx = \int_D div(u(x))dx = 0. \end{aligned}$$

O caso 1 está demonstrado.

Caso 2: $\Phi \in C^1(\overline{D})$.

Considere C e $\gamma : [0,1] \to C$ como no caso 1. Pela Proposição 2, existem $\delta(p_i) > 0, i = 1, 2$ tais que

$$||\Psi - \Phi||_{C^1} \leq \delta(p_i) \text{ implica que } p_i \notin \ \Psi(\partial D) \cup \Psi(S_\Psi) \text{ e } d(\Phi, D, p_i) = d(\Psi, D, p_i), \tag{1.14}$$

Considere ainda

$$\delta := \frac{min\,\{\delta(p_1), \delta(p_2), d_1(\gamma, \Phi(\partial D))\}}{2}.$$

Provaremos que p_1, p_2 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \Psi(\partial D)$, para $||\Phi - \Psi||_{C^1} < \delta$. Se $x \in \partial D$ e $s \in [0,1]$, temos que

$$\begin{aligned} |\gamma(s) - \Psi(x)|_1 &= |\gamma(s) - \Phi(x) + \Phi(x) - \Psi(x)|_1 \geq |\gamma(s) - \Phi(x)|_1 - |\Phi(x) - \Psi(x)|_1 \\ &\geq d_1(\gamma(s), \Phi(\partial D)) - \frac{d_1(\gamma, \Phi(\partial D))}{2} \geq \frac{d_1(\gamma, \Phi(\partial D)}{2} > 0, \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que

$$|\Phi(x) - \Psi(x)|_1 \leq ||\Phi - \Psi||_{C^1} < \delta \leq \frac{d_1(\gamma, \Phi(\partial D))}{2},$$

pela definição de δ.

Portanto, $\gamma(s) \in \mathbb{R}^N \setminus \Psi(\partial D))$, para todo $s \in [0,1]$ e, desde que γ liga p_1 e p_2, deduzimos que p_1 e p_2 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \Psi(\partial D)$. Suponha, sem perda de generalidade, que $\delta_1 \leqslant \overline{\delta}$, onde $\overline{\delta}$ é dado pelo Teorema 55 (ver apêndice). Podemos então encontrar $\Psi \in C^2(\overline{D})$ tal que $||\Psi - \Phi||_1 \leq \delta_1$ e assim temos, pelo caso 1, que $d(\Psi, D, p_1) = d(\Psi, D, p_2)$. Segue deste fato e de (1.14) que

$$d(\Phi, D, p_1) = d(\Psi, D, p_1) = d(\Psi, D, p_2) = d(\Phi, D, p_2).$$

$\square$

Agora finalizaremos a construção do Grau para funções de classe C^1. A definição a seguir engloba o caso em que p pode ser valor crítico, e portanto sabemos definir o Grau para o caso em que p é valor regular ou valor crítico.

Definição 2. *Sejam $\Phi \in C^1(\overline{D})$ e $p \notin \Phi(\partial D)$ tal que $p \in \Phi(S_\Phi)$. Definimos $d(\Phi, D, p)$, o grau de Φ em p com respeito a D, como o número $d(\Phi, D, q)$ para qualquer $q \notin \Phi(S_\Phi) \cup \Phi(\partial D)$ tal que $|p - q|_1 < d_1(p, \Phi(\partial D))$.*

Justificaremos a Definição 2. Pelo Teorema de Sard, existe $q \notin \Phi(S_\Phi)$ tal que $d_1(q, \Phi(\partial D)) > 0$ e $|p - q|_1 < d_1(p, \Phi(\partial D)$. Portanto, $q \notin \Phi(S_\Phi) \cup \Phi(\partial D)$.

Assuma que $|q_i - p|_1 < d_1(p, \Phi(\partial D)), i = 1, 2$, são tais que $q_i \notin \Phi(\partial D) \cap \Phi(S_\Phi), i = 1, 2$. Então $q_i \in B(p, d_1(p, \Phi(\partial D))) \subset \mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial D), i = 1, 2$. Desde que $B(p, d_1(p, \Phi(\partial D)))$ é conexo contido em $\mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial D)$, deduzimos que $B(p, d_1(p, \Phi(\partial D)))$ está contido em uma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial D)$. Portanto p, q_1 e q_2 estão na mesma componente conexa e, pela Proposição 5, segue que

$$d(\Phi, D, q_1) = d(\Phi, D, q_2).$$

Dessa maneira, concluímos a nossa justificativa.

Definiremos, a seguir, o que são homotopias. Uma homotopia pode ser considerada como uma deformação de uma curva ou de uma função em outra função. Elas desempenham papel fundamental neste trabalho e serão utilizadas constantemente.

Definição 3. *Sejam $\Phi, \Psi \in C^1(\overline{D})$ e $H : \overline{D} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^N$. Dizemos que H é uma C^1 homotopia entre Φ e Ψ se:*

1) $H_t \in C^1(\overline{D})$ para cada $t \in [0, 1]$, onde $H_t(x) = H(x, t)$;

2) $\lim\limits_{t \to s} ||H_t - H_s||_{C^1} = 0$ para todo $s \in [0, 1]$;

3) $H_0(x) = \Phi(x), H_1(x) = \Psi(x)$ para todo $x \in \overline{D}$.

O teorema abaixo contém as principais propriedades do Grau definido nesta seção. O item 1 nos diz que, fixados Φ e D nas condições da definição de Grau, então o Grau é constante nas componentes conexas de $\mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial D)$ e, em particular, é uma função contínua em tais componentes conexas. O item 2 nos garante que o Grau é localmente constante na variável Φ, já o item 3 significa que $d(\cdot, D, p)$ é invariante sobre homotopias e o item 4 que $d(\cdot, \cdot, \cdot)$ é invariante por translação no primeiro e terceiro argumentos.

Teorema 6. *Assuma que $\Phi \in C^1(\overline{D})$. Então:*

1. *$d(\Phi, D, \cdot)$ é constante em cada componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial D)$;*

2. *Se $p \notin \Phi(\partial D)$, então existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$||\Psi - \Phi||_{C^1} \leq \epsilon \text{ implica que } p \notin \Psi(\partial D) \text{ e } d(\Phi, D, p) = d(\Psi, D, p);$$

3. Se H é uma C^1 homotopia entre Φ, Ψ e $p \notin H_t(\partial D)$ para todo $t \in [0,1]$, então $d(\Phi, D, p) = d(\Psi, D, p)$;

4. Se $p \notin \Phi(\partial D)$, então $d(\Phi + a, D, p + a) = d(\Phi, D, p)$.

Demonstração. **Prova de 1**. Sejam C uma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial D)$ e $p_1, p_2 \in C$. Pelo Teorema de Sard existe $q_1 \notin \Phi(S_\Phi)$ tal que $|p_1 - q_1|_1 < d_1(p_1, \Phi(\partial D))$. Claramente $q_1 \in C$, pois $B(p_1, d_1(p_1, \Phi(\partial D))) \subset \mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial D)$. De modo similar, podemos encontrar $q_2 \notin \Phi(S_\Phi)$ tal que $q_2 \in B(p_2, d_1(p_2, \Phi(\partial D))) \subset \mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial D)$. Desde que $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial D)$ estão na mesma componente conexa, segue pela Proposição 5 que

$$d(\Phi, D, q_1) = d(\Phi, D, q_2).$$

Assim, por definição temos que

$$d(\Phi, D, p_1) = d(\Phi, D, q_1) = d(\Phi, D, q_2) = d(\Phi, D, p_2).$$

Prova de 2. Pelo Teorema de Sard existe $q \in \mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial D)$ tal que $q \notin \Phi(S_\Phi)$ e $|p - q|_1 < d_1(p, \Phi(\partial D))/2$. Portanto, p e q estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial D)$. Pela Proposição 2, existe $0 < \epsilon_0 < d_1(p, \Phi(\partial D)/2$ tal que

$$q \notin \Psi(S_\Psi) \cup \Psi(\partial D) \ \text{ e } d(\Psi, D, q) = d(\Phi, D, q) \ \text{ sempre que } ||\Phi - \Psi||_{C^1} \leq \epsilon_0. \tag{1.15}$$

Provaremos que $p \notin \Psi(\partial D)$ sempre que $||\Phi - \Psi||_{C^1} \leq \epsilon_0$. Para todo $x \in \partial D$ temos que

$$|\Psi(x) - p|_1 \geq |\Phi(x) - p|_1 - |\Psi(x) - \Phi(x)|_1 > |p - q|_1, \tag{1.16}$$

onde usamos o fato de que

$$||\Phi - \Psi||_{C^1} \leq \epsilon_0 \text{ implica que } |\Psi(x) - \Phi(x)|_1 \leq \epsilon_0 \leq \frac{d_1(p, \Phi(\partial D)}{2} \leq \frac{|p - \Phi(x)|_1}{2},$$

isto é,

$$|p - \Phi(x)|_1 - |\Psi(x) - \Phi(x)|_1 \geq \frac{|p - \Phi(x)|_1}{2}.$$

Tomando o ínfimo para $x \in \partial D$ em (1.16), obtemos que

$$d_1(p, \Psi(\partial D)) \geq \frac{d_1(p, \Phi(\partial D)}{2} > |p - q|_1. \tag{1.17}$$

Por (1.17) segue que $p \notin \Psi(\partial D)$. Para concluir a prova deste item, note que por (1.17) p e q estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \Psi(\partial D)$. Por definição, pelo item 1 e por (1.15) concluímos que

$$d(\Psi, D, p) = d(\Psi, D, q) = d(\Phi, D, q) = d(\Phi, D, p).$$

Prova de 3. Seja $u : [0,1] \to \mathbb{Z}$ definida por $u(t) = d(H_t, D, p)$. Mostraremos que u é contínua, e para isso fixaremos $t \in [0,1]$. Pelo item 2, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$||H_t - H_s||_{C^1} \leq \epsilon \text{ implica que } d(H_t, D, p) = d(H_s, D, p).$$

Desde que $\lim\limits_{s \to t} ||H_t - H_s||_{C^1} = 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|t - s| < \delta \text{ implica que } ||H_t - H_s||_{C^1} \leq \epsilon,$$

isto é, $|t - s| < \delta$ implica que $|u(s) - u(t)| < \epsilon$.

Como uma consequência disso e da conexidade de $[0,1]$, deduzimos que u é constante em $[0,1]$, ou seja,

$$d(\Phi, D, p) = d(u(0), D, p) = d(u(1), D, p) = d(\Psi, D, p).$$

Prova de 4. Considere $q \notin \Phi(S_\Phi)$ com $|p-q|_1 < d_1(p, \Phi(\partial D))$. Temos que $d_1(p+a, (\Phi+a)(\partial D)) = d_1(p, \Phi(\partial D))$ e q é valor regular de Φ se, e somente se, $q + a$ é valor regular de $\Phi + a$. Desde que

$$|p - a - (q + a)|_1 = |p - q|_1 < d_1(p + a, (\Phi + a)(\partial D)),$$

com $q + a \notin (\Phi + a)(\partial D)$, segue pela Proposição 4 que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} d(\Phi + a, D, q + a) &= \int_D f_\epsilon(\Phi(x) + a - (q + a)) J_{\Phi + a}(x) dx \\ &= \int_D f_\epsilon(\Phi(x) - q) J_\Phi(x) dx = d(\Phi, D, q), \end{aligned}$$

para $0 < \epsilon < \epsilon_0$ e f_ϵ como na Proposição 4.

Portanto,

$$d(\Phi + a, D, p + a) = d(\Phi + a, D, q + a) = d(\Phi, D, q) = d(\Phi, D, p).$$

□

O próximo corolário nos diz que funções que são iguais na fronteira têm o mesmo Grau. Isso é conveniente quando lidamos com funções difíceis de calcular o Grau, mas sabemos que esta função é igual na fronteira a uma função que é mais fácil de calcular o Grau ou que já sabemos seu Grau.

Corolário 7. *Sejam $\Phi, \Psi \in C^1(\overline{D})$ tais que $\Phi(x) = \Psi(x)$ para $x \in \partial D$. Então para todo $p \in \mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial D)$,*

$$d(\Phi, D, p) = d(\Psi, D, p).$$

Demonstração. Seja $H(x,t) = (1-t)\Phi(x) + t\Psi(x)$ uma homotopia entre Φ e Ψ. Temos que $p \notin H_t(\partial D)$ para todo $t \in [0,1]$. De fato, se existissem $t_0 \in [0,1]$ e $x_0 \in \partial D$ com

$$p = H(x_0, t_0) = (1-t_0)\Phi(x_0) + t_0\Psi(x_0),$$

então teríamos de $\Phi(x_0) = \Psi(x_0)$ que

$$p = (1-t_0)\Phi(x_0) + t_0\Psi(x_0) = \Phi(x_0),$$

e portanto $p \in \Phi(\partial D)$. Mas isso é uma contradição.

Logo, para todo $t \in [0,1]$, temos que $p \notin H_t(\partial D)$ e, aplicando o Teorema 6 item 3, obtemos que

$$d(\Phi, D, p) = d(H_0, D, p) = d(H_1, D, p) = d(\Psi, D, p),$$

e demonstramos assim o corolário. □

1.2 Grau Topológico para funções contínuas

Nesta seção definiremos o Grau para funções contínuas, finalizando assim a construção do Grau de Brouwer (Grau em dimensão finita).

Definição 4. *Sejam $\Phi \in C(\overline{D})$ e $p \notin \Phi(\partial D)$. Definimos o grau de Φ em p com respeito a D, como sendo $d(\Psi, D, p)$ para qualquer $\Psi \in C^1(\overline{D})$ tal que $||\Psi - \Phi||_C < d_1(p, \Phi(\partial D))$.*

Justificaremos a definição 4. Pelo Teorema 55 (ver apêndice) encontramos $\Psi \in C^1(\overline{D})$ tal que $||\Psi - \Phi||_C < d_1(p, \Phi(\partial D))$. Desde que $p \notin \Phi(\partial D), \Psi \in C^1(\overline{D})$ e $||\Psi(x) - \Phi(x)||_C < d_1(p, \Phi(\partial D))$ segue que $p \notin \Psi(\partial D)$, pois se $\Psi(x) = p$ para algum $x \in \partial D$ então $|p - \Phi(x)|_1 < d_1(p, \Phi(\partial D))$, o que é impossível.

Agora afirmamos que, se $\Psi_1, \Psi_2 \in C^1(\overline{D})$ são tais que

$$||\Psi_1(x) - \Phi(x)||_C < d_1(p, \Phi(\partial D)) \text{ e } ||\Psi_2(x) - \Phi(x)||_C < d_1(p, \Phi(\partial D)),$$

então

$$d(\Psi_1, D, p) = d(\Psi_2, D, p).$$

De fato, seja

$$H(x,t) := t\Psi_1(x) + (1-t)\Psi_2(x),\ x \in \overline{D}, t \in [0,1],$$

uma homotopia entre Ψ_1 e Ψ_2. Temos que $p \notin H_t(\partial D)$ para todo $t \in [0,1]$, porque para todo $x \in \overline{D}$ obtemos que

$$\begin{aligned}|H(x,t) - \Phi(x)|_1 &= |t(\Psi_1(x) - \Phi(x)) + (1-t)(\Psi_2(x) - \Phi(x))|_1 \\ &\leq t|((\Psi_1(x) - \Phi(x))|_1 + (1-t)|(\Psi_2(x) - \Phi(x))|_1 \\ &< td_1(p, \Phi(\partial D)) + (1-t)d_1(p, \Phi(\partial D)) = d_1(p, \Phi(\partial D)).\end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 6 item 3 segue que

$$d(\Psi_1, D, p) = d(H_0, D, p) = d(H_1, D, p) = d(\Psi_2, D, p),$$

completando a nossa justificativa.

A próxima proposição diz que na Definição 4 podemos escolher uma Ψ tal que p é valor regular de Ψ. Ela será utilizada adiante e também é de grande utilidade em aplicações teóricas.

Proposição 8. . *Na Definição 4, a função Ψ pode ser escolhida tal que $p \notin \Psi(S_\Psi)$.*

Demonstração. Sejam $K \in C^1(\overline{D})$ tal que

$$||\Phi - K||_C < \frac{d_1(p, \Phi(\partial D))}{2}, \tag{1.18}$$

e p' um valor regular de K tal que

$$|p' - p|_1 < \frac{d_1(p, \Phi(\partial D))}{2}. \tag{1.19}$$

Defina

$$\Psi(x) = K(x) + p - p'.$$

Claramente $\Psi \in C^1(\overline{D})$. Mostraremos que Ψ satisfaz as condições da proposição. Primeiro provaremos que p é valor regular de Ψ. Como p, p' são constantes, temos que $J_\Psi(x) = J_K(x)$, para todo $x \in \overline{D}$. De (1.18) e (1.19) segue que

$$|\Psi(x) - \Phi(x)|_1 = |K(x) + p - p' - \Phi(x)|_1 \leq |K(x) - \Phi(x)|_1 + |p' - p|_1 < d_1(p, \Phi(\partial D), \tag{1.20}$$

para todo $x \in \overline{D}$.

Por outro lado, $\Psi(x) = p$ para $x \in \overline{D}$ se, e somente se, $K(x) = p'$. Este fato, juntamente com $J_\Psi(x) = J_K(x)$, para todo $x \in \overline{D}$, implicam que p é valor regular de Ψ, isto é, $p \notin \Psi(S_\Psi)$.

Agora provaremos que $p \notin \Psi(\partial D)$. Se $p \in \Psi(\partial D)$, então $p^{'} \in K(\partial D)$. De (1.18) e (1.19), segue que

$$d_1(p, K(\partial D)) \leq |p - p^{'}|_1 + d_1(p^{'}, K(\partial D)) = |p - p^{'}|_1 < \frac{d_1(p, \Phi(\partial D))}{2} \tag{1.21}$$

e, para todo $x \in partial D$,

$$\begin{aligned} |K(x) - p|_1 \geq |\Phi(x) - p|_1 - |K(x) - \Phi(x)|_1 > d_1(p, \Phi(\partial D)) - \frac{d_1(p, \Phi(\partial D))}{2} \\ = \frac{d_1(p, \Phi(\partial D))}{2}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Tomando o ínfimo em (1.22) com respeito a $x \in \partial D$ temos que

$$d_1(p, K(\partial D)) > \frac{d_1(p, \Phi(\partial D))}{2},$$

o que contradiz (1.21).

Finalmente, lembrando que $\overline{D}$ é compacto e tomando o supremo em (1.20), temos que

$$||\Psi - \Phi||_C < d_1(p, \Phi(\partial D)),$$

o que completa a demonstração da proposição. □

1.3 Propriedades do Grau Topológico de Brouwer

Nesta seção estudaremos, em forma de teoremas, as principais propriedades do Grau de Brouwer.

A primeira propriedade é de fundamental importância em Análise e é conhecida como propriedade de solução. Ela diz que se $d(\Phi, D, p) \neq 0$, então a equação $\Phi(x) = p$ admite solução em D.

Teorema 9. *Assuma que $\Phi \in C(\overline{D})$, $p \notin \Phi(\partial D)$ e $d(\Phi, D, p) \neq 0$. Então existe $x \in D$ tal que $\Phi(x) = p$.*

Demonstração. Suponha que $p \notin \Phi(D)$. Desde que $p \notin \Phi(\partial D)$, temos que $p \notin \Phi(\overline{D})$ e, como $\Phi(\overline{D})$ é compacto, $d_1(p, \Phi(\overline{D})) > 0$. Seja $\Psi \in C^1(\overline{D})$ tal que

$$||\Psi - \Phi||_C < d_1(p, \Phi(\overline{D})) \leq d_1(p, \Phi(\partial D)). \tag{1.23}$$

Por definição, $d(\Phi, D, p) = d(\Psi, D, p)$. Segue de (1.23) que $p \notin \Psi(\overline{D})$, pois se $p = \Psi(x)$, para algum $x \in \overline{D}$, então $|p - \Phi(x)|_1 < d_1(p, \Phi(\overline{D}))$, o que é impossível. Assim, $\Psi^{-1}(p) = \emptyset$ e, pela

Definição 1 temos que

$$0 = d(\Psi, D, p) = d(\Phi, D, p),$$

o que é uma contradição.

$\square$

Definiremos homotopia para funções contínuas. Uma homotopia pode ser vista como uma deformação contínua de uma função contínua em outra função contínua.

Definição 5. *Uma função $H : \overline{D} \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$ é uma homotopia entre $\Phi, \Psi \in C(\overline{D})$ se:*

1) H é contínua em $\overline{D} \times [0,1]$;

2) $H(x,0) = \Phi(x)$ e $H(x,1) = \Psi(x)$, para todo $x \in \overline{D}$.

O item 1 do teorema abaixo diz que $d(\cdot, D, p)$ é constante na variável Φ. Pelo item 2, sabemos que o Grau é invariante sobre homotopia, para qualquer $t \in [0,1]$. Já o item 3 significa que o Grau é constante nas componentes conexas de $\mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial D)$ e, em particular, uma função contínua de p em tais componentes.

Teorema 10. *Sejam $\Phi \in C(\overline{D})$ e $p \notin \Phi(\partial D)$. Então*

1. para toda $\Psi \in C(\overline{D})$ tal que $||\Psi - \Phi||_C < d_1(p, \Phi(\partial D))$, temos que $d(\Phi, D, p) = d(\Psi, D, p)$;

2. se $H(x,t) := H_t(x)$ é uma homotopia entre H_0, H_1 e $p \notin H_t(\partial D)$, para todo $t \in [0,1]$, então $d(H_t, D.p)$ não depende de $t \in [0,1]$;

3. se p_1, p_2 pertencem a mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial D)$, então $d(\Phi, D, p_1) = d(\Phi, D, p_2)$.

Demonstração. **Prova de 1**. Sejam $\Psi \in C(\overline{D})$ e $g \in C^1(\overline{D})$ tais que

$$||\Psi - \Phi||_C < d_1(p, \Phi(\partial D)) := r \text{ e } ||\Psi - g||_C < r - ||\Psi - \Phi||_C.$$

Destas desigualdades segue que

$$||\Phi - g||_C \leq ||\Phi - \Psi||_C + ||\Psi - g||_C < r$$

e, por definição,

$$d(\Phi, D, p) = d(g, D, p). \tag{1.24}$$

Provaremos que $||\Psi - g||_C < d_1(p, \Psi(\partial D))$. De fato, para todo $x \in \partial D$ temos que

$$|\Psi(x) - p|_1 \geq |\Phi(x) - p|_1 - |\Phi(x) - \Psi(x)|_1 \geq r - ||\Psi - \Phi||_C > ||\Psi - g||_C,$$

e utilizando o fato de que a restrição de $|\Psi - p|_1$ a ∂D atinge seu mínimo em ∂D, obtemos a desigualdade desejada tomando o ínfimo.

Assim, por definição, $d(\Psi, D, p) = d(g, D, p)$ pois $||\Psi - g||_C < d_1(p, \Psi(\partial D))$. Dessa igualdade e de (1.24) segue que

$$d(\Phi, D, p) = d(\Psi, D, p).$$

Prova de 2. Considere $u : [0, 1] \to \mathbb{Z}$ definida por $u(t) = d(H_t, D, p)$. Mostraremos que u é contínua. Fixaremos $t_0 \in [0, 1]$ e mostraremos que u é contínua em t_0. Dado $\epsilon \leq d_1(p, H_{t_0}(\partial D)) :=$ r existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } |t - t_0| < \delta \text{ então } ||H_t - H_{t_0}||_C < \epsilon \leq d_1(p, H_{t_0}(\partial D)),$$

e esta desigualdade, juntamente com o item 1, implicam que

$$u(t) = d(H_t, D, p) = d(H_{t_0}, D, p) = u(t_0) \ \text{ para } |t - t_0| < \delta.$$

Portanto, $|t - t_0| < \delta$ implica que $|u(t) - u(t_0)| < \epsilon$, isto é, u é contínua. Como uma consequência disso e da conexidade de $[0, 1]$, deduzimos que u é constante e, consequentemente, $d(H_t, D, p)$ não depende de t.

Prova de 3. Como $\Phi(\partial D)$ é fechado, segue que $\mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial D)$ é aberto, e isso implica que qualquer componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial D)$ é aberta (ver apêndice A_1). Pelo Teorema 54 (ver apêndice) um aberto de $\mathbb{R}^N$ é conexo se, e somente se, é conexo por caminho.

Sejam p_1, p_2 pertencentes a uma mesma componente conexa C de $\mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial D)$ e γ um caminho ligando p_1 a p_2 . Mostraremos que $d(\Phi, D, p_1) = d(\Phi, D, p_2)$. Considere $\Psi \in C^1(\overline{D})$ tal que

$$||\Psi - \Phi||_C < d_1(\gamma, C^c). \tag{1.25}$$

Como $C^c \cap \gamma([0, 1]) = \emptyset$, segue da compacidade de $\gamma([0, 1])$ que $d_1(\gamma, C^c) > 0$. Afirmamos que

$$d(\Psi, D, p_1) = d(\Phi, D, p_1) \text{ e } d(\Psi, D, p_2) = d(\Phi, D, p_2). \tag{1.26}$$

De fato, por (1.25) temos que

$$||\Psi - \Phi||_C < d_1(\gamma, C^c) \leq d_1(p_1, \Phi(\partial D)) \text{ e } ||\Psi - \Phi||_C < d_1(\gamma, C^c) \leq d_1(p_1, \Phi(\partial D)), \tag{1.27}$$

pois $p_1, p_2 \in \gamma([0, 1])$ e $\Phi(\partial D) \subset C^c$.

De (1.27) e por definição segue que (1.26) é satisfeito. Para finalizar a demonstração, provaremos que

$$d(\Psi, D, p_1) = d(\Psi, D, p_2). \tag{1.28}$$

Pela mesma justificativa de (1.27) e por (1.25) segue que

$$d_1(\gamma, \Psi(\partial D)) \geq d_1(\gamma, \Phi(\partial D)) - d_1(\Phi(\partial D), \Psi(\partial D)) \geq d_1(\gamma, C^c) - d_1(\Phi(\partial D), \psi(\partial D)) > 0.$$

Como $d_1(\gamma, \Psi(\partial D)) > 0$, temos que $\gamma \subset \mathbb{R}^N \setminus \Psi(\partial D)$, o que implica que p_1 e p_2 estão em uma mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \Psi(\partial D)$. Pelo Teorema 6 item 1 segue que (1.28) é satisfeito. Finalmente por (1.26) e (1.28) concluímos que

$$d(\Phi, D, p_1) = d(\Psi, D, p_1) = d(\Psi, D, p_2) = d(\Phi, D, p_2).$$

□

O próximo teorema nos garante que o Grau depende somente dos valores da função na fronteira.

Teorema 11. *Assuma que* $\Phi, \Psi \in C(\overline{D})$ *e* $\Phi\ |_{\partial D} = \Psi\ |_{\partial D}$. *Então* $d(\Phi, D, p) = d(\Psi, D, p)$ *para todo* $p \notin \Phi(\partial D)$.

Demonstração. Desde que $\Psi(\partial D) = \Phi(\partial D)$, então $d(\Psi, D, p)$ existe para $p \notin \Phi(\partial D)$, pois $p \notin \Psi(\partial D)$. Defina a homotopia

$$H(x,t) = t\Phi(x) + (1-t)\Psi(x), x \in \overline{D}, t \in [0,1].$$

Afirmamos que $p \notin H_t(\partial D)$, para todo $t \in [0,1]$. De fato, se $p \in H_{t_0}(\partial D)$, para algum $t_0 \in [0,1]$, então existe $x_0 \in \partial D$ tal que $p = H_{t_0}(x_0)$, o que implica que $p \in \Phi(x_0)$, pois $\Phi(x_0) = \Psi(x_0)$. Mas isso é uma contradição.

Logo, para todo $t \in [0,1]$, temos que $p \notin H_t(\partial D)$ e, pelo Teorema 10 item 2, segue que

$$d(H_1, D, p) = d(\Phi, D, p) = d(\Psi, D, p) = d(H_0, D, p).$$

□

O teorema a seguir nos diz que o Grau é invariante sobre translação no primeiro e no segundo argumentos de $d(\cdot,\cdot,\cdot)$.

Teorema 12. *Suponha que* $\Phi \in C(\overline{D})$, $p \notin \Phi(\partial D)$ *e* $q \in \mathbb{R}^N$. *Então*

$$d(\Phi - q, D, p - q) = d(\Phi, D, p).$$

Demonstração. Nosso objetivo será aplicar a Proposição 4. Pela Proposição 8, existe $\Psi \in C^1(\overline{D})$ tal que

$$||\Psi - \Phi||_C < d_1(p, \Phi(\partial D)), \tag{1.29}$$

$$d(\Psi, D, p) = d(\Phi, D, p), \tag{1.30}$$

e

$$p \notin \Psi(S_\Psi). \tag{1.31}$$

De (1.30) segue que

$$||(\Psi - q) - (\Phi - q)||_C = ||\Psi - \Phi||_C < d_1(p, \Phi(\partial D)) = d_1(p - q, \Phi(\partial D) - q)$$

e $p - q \notin (\Phi - p)(\partial D)$, pois se $\Phi(x_0) - q = p - q$, para algum $x_0 \in \partial D$, então $p \in \Phi(\partial D)$, o que é uma contradição.

Assim, por definição temos que

$$d(\Phi - q, D, p - q) = d(\Psi - q, D, p - q). \tag{1.32}$$

Provaremos que $p - q$ é valor regular de $\Psi - q$. Considere $x \in D$ tal que $\Psi(x) - q = p - q$. Esta igualdade implica que $\Psi(x) = p$ e, como q é constante, segue que $J_{\Psi-q}(x) = J_\Psi(x)$. Por estas duas últimas igualdades e por (1.31) temos que $J_{\Psi-q}(x) \neq 0$, isto é, $p - q$ é valor regular de $\Psi - q$. Considere $\epsilon > 0$ e f_ϵ como na Proposição 4. Então

$$\begin{aligned} d(\Psi - q, D, p - q) &= \int_D f_\epsilon(\Psi(x) - q - (p - q))J_{\Psi-q}(x)dx \\ &= \int_D f_\epsilon(\Psi(x) - p)J_\Psi(x)dx = d(\Psi, D, p). \end{aligned} \tag{1.33}$$

Segue de (1.30), (1.32) e (1.33) que

$$d(\Phi - q, D, p - q) = d(\Psi - q, D, p - q) = d(\Psi, D, p) = d(\Phi, D, p).$$

□

Teorema 13. *Sejam $H : \overline{D} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^N$ uma homotopia e $y : [0, 1] \to \mathbb{R}^N$ uma função contínua com $y(t) \notin H(t, \partial D) := H_t(\partial D)$, para todo $t \in [0, 1]$. Então $d(H_t, ., D, y(t))$ não depende de $t \in [0, 1]$.*

Demonstração. Para cada $t \in [0,1]$ defina

$$K_t(x) = H(x,t) - y(t) = H_t(x) - y(t), \ x \in \overline{D}.$$

Segue diretamente da definição de K_t que $y(t) \notin H_t(\partial D)$ se, e somente se, $0 \notin K_t(\partial D)$. Pelo Teorema 12, temos que

$$d(K_t, D, 0) = d(H_t - y(t), D, 0) = d(H_t - y(t) + y(t), D, 0 + y(t)) = d(H_t, D, y(t)). \quad (1.34)$$

Agora, observe que $K : \overline{D} \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$, definida por $K(x,t) = K_t(x)$, é uma homotopia entre $K_0 = H_0 - y(0)$ e $K_1 = H_1 - y(1)$. Pelo Teorema 10 item 2 e por (1.34), segue que

$$d(K_t, D, 0) = d(H_t, D, y(t))$$

é constante. □

O teorema a seguir é um resultado de localização de soluções. Uma interpretação da Propriedade de Decomposição para o caso $i = 2$ é a seguinte: Suponha que $d(\Phi, D, p) \neq 0$ e $d(\Phi, D_2, p) = 0$, então $d(\Phi, D, p) = d(\Phi, D_1, p)$, em particular, $\Phi(x) = p$ possui pelo menos uma solução em D_1.

Teorema 14. *Assuma que $\Phi \in C(\overline{D})$ e $p \notin \Phi(\partial D)$.*

1) *(Propriedade da Decomposição) Seja $D = \cup_{i\in\mathbb{N}} D_i$, onde D_i são abertos e dois a dois disjuntos. Então existem $\{a_1, ..., a_k\} \subset \mathbb{N}$ tais que*

$$d(\Phi, D, p) = \sum_{i=1}^{k} d(\Phi, D_{a_i}, p).$$

2) *(Propriedade de Excisão) Se $K \subset \overline{D}$ é compacto e tal que $p \notin \Phi(K)$, então*

$$d(\Phi, D, p) = d(\Phi, D \setminus K, p).$$

Demonstração. **Prova de 1**. Inicialmente verificaremos que $d(\Phi, D_i, p)$ é bem definido para todo $i \in \mathbb{N}$. Como os D_i' s são disjuntos, segue que $\partial D = \cup_{i=1}^{\infty} \partial D_i$, donde concluímos que $\partial D_i \subset \partial D$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Desta forma, $p \notin \Phi(\partial D)$ e $\Phi(\partial D_i) \subset \Phi(\partial D)$, e isso implica que $p \notin \Phi(D_i)$. Assim, $d(\Phi, D_i, p)$ é bem definido para todo $i \in \mathbb{N}$.

Agora concluiremos a demonstração do teorema. Pela Proposição 8, existe $\Psi \in C^1(\overline{D})$ tal que $p \notin \Psi(S_\Psi)$,

$$||\Psi - \Phi||_C < d_1(p, \Phi(\partial D)) \quad (1.35)$$

e

$$d(\Phi, D, p) = d(\Psi, D, p). \tag{1.36}$$

A desigualdade (1.35) implica que $||\Phi - \Psi||_{C(\overline{D}_i)} < d_1(p, \Phi(\partial D_i))$, para todo $i \in \mathbb{N}$, e assim por definição temos que

$$d(\Phi, D_i, p) = d(\Psi, D_i, p), \text{ para todo } i \in \mathbb{N}. \tag{1.37}$$

Desde que $p \notin \Psi(S_\Psi)$, temos que $\Psi^{-1}(p) = \{x_1, ..., x_v\}$, onde $v \in \mathbb{N}$ é fixo. Segue do fato de $\Psi^{-1}(p)$ ser finito e do Teorema 9 que existe um número finito k dos D_i' s tais que $d(\Phi, D_i, p) \neq 0$. Chamando de $D_{a_1}, ..., D_{a_k}$ esses abertos, temos $d(\Phi, D_{a_i}, p) \neq 0$, para $1 \leq i \leq k$.

Segue da Definição 1 que

$$d(\Psi, D, p) = \sum_{x \in \Psi^{-1}(p)} sgn(J_\Psi(x)) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{x \in \Psi^{-1}(p) \cap (D_{a_i})} sgn(J_\Psi(x)) = \sum_{i=1}^{k} d(\Psi, D_{a_i}, p)$$

e, por (1.36) e (1.37), concluímos que

$$d(\Phi, D, p) = d(\Psi, D, p) = \sum_{i=1}^{k} d(\Psi, D_{a_i}, p) = \sum_{i=1}^{k} d(\Phi, D_{a_i}, p).$$

Prova de 2. Pela Proposição 8, existe $\Psi \in C^1(\overline{D})$ tal que

$$||\Phi - \Psi||_C < d_1(p, \Phi(K \cup \partial D)), \tag{1.38}$$

$$d(\Phi, D, p) = d(\Psi, D, p) \tag{1.39}$$

e $p \notin \Psi(S_\Psi)$.

Agora mostraremos que $d(\Psi, D \setminus K, p)$ é bem definido e

$$d(\Psi, D, p) = d(\Psi, D \setminus K, p). \tag{1.40}$$

Primeiramente, por K ser compacto, segue que $D \setminus K$ é aberto. Resta provar que $p \notin \Psi(\partial(D \setminus K))$. A prova será por contradição. Se $p \in \Psi(\partial(D \setminus K))$, então existe $x \in \partial(D \setminus K)$ tal que $\Psi(x) = p$, e por (1.38) segue que $|p - \Phi(x)|_1 < d_1(p, \Phi(K \cup \partial D))$, mas isso é impossível pois $\partial(D \setminus K) \subset K \cup \partial D$. Concluímos assim que $d(\Psi, D \setminus K, p)$ está bem definido. De forma análoga mostramos que $d(\Phi, D \setminus K, p)$ está bem definido e por (1.38) segue que

$$||\Phi - \Psi||_{C(\overline{D}\setminus K)} \leq d_1(p, \Phi(\partial D)) \leq d_1(p, \Phi(\partial(D \setminus K)),$$

pois $\overline{D} \setminus K \subset \overline{D}$ e $\partial(D \setminus K) \subset \partial D \cup K$.

Assim, por definição temos que

$$d(\Phi, D \setminus K, p) = d(\Psi, D \setminus K, p). \tag{1.41}$$

Agora provaremos (1.40). Notamos que de $p \notin \Phi(K)$ segue que $p \notin \Psi(K)$. De fato, se $p \in \Psi(K)$, então existe $x \in K$ tal que $\Psi(x) = p$, e por (1.38) segue que $|p - \Phi(x)|_1 < d_1(p, \Phi(\partial D))$. Mas isso é uma contradição, e portanto, $p \notin \Psi(K)$.

Por outro lado, observe que $p \notin \Psi(K)$ implica que $\Psi^{-1}(p) \subset D \setminus K$, e portanto

$$d(\Psi, D, p) = \sum_{x \in \Psi^{-1}(p) \subset D} sgn(J_\Psi(x)) = \sum_{x \in \Psi^{-1}(p) \subset (D \setminus K)} sgn(J_\Psi(x)) = d(\Psi, D \setminus K, p), \tag{1.42}$$

e desta forma fica provado (1.40).

De (1.39), (1.40) e (1.41) concluímos que

$$d(\Phi, D \setminus K, p) = d(\Psi, D \setminus K, p) = d(\Psi, D, p) = d(\Phi, D, p),$$

e assim finalizamos a prova da proposição.

□

Corolário 15. *Suponha que $D_1 \subset D$ é um subconjunto aberto e que $p \notin \Phi(\overline{D} \setminus D_1)$. Então $d(\Phi, D, p) = d(\Phi, D_1, p)$.*

Demonstração. Desde que $K = \overline{D} \setminus D_1$ é compacto, com $p \notin \Phi(K)$ e $D \setminus K = D_1$ segue do Teorema 14 item 2 que $d(\Phi, D, p) = d(\Phi, D \setminus K, p) = d(\Phi, D_1, p)$. □

A seguir, definiremos o índice de uma solução isolada e veremos algumas de suas propriedades.

Definição 6. *Sejam $\Phi \in C(\overline{D}), p \notin \Phi(\partial D)$ e $x_0 \in D$ uma solução isolada de $\Phi(x) = p$, isto é, $\Phi(x_0) = p$ e existe uma vizinhança V de x_0 tal que $(V - \{x_0\}) \cap \Phi^{-1}(p) = \emptyset$. Seja Γ a coleção de todas as vizinhanças abertas V de x_0 tal que $\overline{V}$ não contém outra solução de $\Phi(x) = p$. Definimos o índice de Φ com respeito a (x_0, p) por*

$$i(\Phi, x_0, p) := d(\Phi, V, p),$$

para qualquer $V \in \Gamma$.

JUSTIFICATIVA:

(1) Para $V \in \Gamma$ (desde que $\overline{V} = V \cup \partial V$, $\Phi^{-1}(p) \cap (\overline{V} - \{x_0\}) = \emptyset$ e $\Phi(x_0) = p$) temos que $p \notin \Phi(\partial V)$ pela construção de V e, como consequência, $d(\Phi, D, p)$ está bem definido.

(2) Sejam $V_1, V_2 \in \Gamma$. Defina
$$V := V_1 \cup V_2 \in \Gamma$$
e
$$K := \overline{V}_1 \cap V_2^c.$$
Como V_2 é aberto, temos que V_2^c é fechado e, consequentemente, $\overline{V}_1 \cap V_2^c$ é fechado. Desde que $\overline{V}_1 \cap V_2^c$ é limitado, pois $\overline{V}_1 \cap V_2^c \subset \overline{D}$, obtemos que $\overline{V}_1 \cap V_2^c$ é compacto.

Observe que:
$$V_1 \cap \overline{V}_1^c = \emptyset \Rightarrow (V_1 \cap \overline{V}_1^c) \cup V_2 = V_2,$$
donde concluímos que
$$(V_1 \cup V_2) \cap (\overline{V}_1^c \cup V_2) = V_2 \Rightarrow V \cap (\overline{V}_1^c \cup V_2) = V_2,$$
e lembrando que $A/B = A \cap B^c$, segue que
$$V/K = V/(\overline{V}_1 \cap V_2^c) = V \cap (\overline{V}_1^c \cup V_2) = V_2.$$
Por outro lado, $p \notin \Phi(K)$, pois $K = \overline{V}_1 \cap V_2^c \subset \overline{V_1}$ e em $\overline{V_1}$ a única solução de $\Phi(x) = p$ é x_0 e, como $x_0 \notin K$ (pois $x_0 \in V_2$), segue que $p \notin \Phi(K)$. Pela propriedade de excisão,
$$d(\Phi, V, p) = d(\Phi, V/K, p) = d(\Phi, V \cap (\overline{V}_1^c \cup V_2), p) = d(\Phi, V_2, p).$$
Usando um argumento similar, temos que
$$d(\Phi, V, p) = d(\Phi, V_1, p).$$
Portanto,
$$d(\Phi, V_1, p) = d(\Phi, V_2, p).$$

O teorema a seguir estabelece uma fórmula que relaciona o Grau Topológico e as somas dos índices isolados. Além disso, uma fórmula simples para calcular o índice, sobre condições particulares, também é estabelecida.

Teorema 16. *Sejam $\Phi \in C(\overline{D})$ e $p \notin \Phi(\partial D)$.*

1) Se $\Phi^{-1}(p)$ é finito, então $d(\Phi, D, p) = \sum_{x \in \Phi^{-1}(p)} i(\Phi, x, p)$.

2) Se $\Phi \in C^1(\overline{D}), a \in \Phi^{-1}(p)$, e se $J_\Phi(a) \neq 0$, então a é uma solução isolada de $\Phi(x) = p$ e $i(\Phi, a, p) = (-1)^v$, onde v é o número de autovalores reais negativos de $\nabla\Phi(a)$, contando a multiplicidade algébrica.

Demonstração. **Prova de 1**: Desde que $\Phi^{-1}(p)$ é finito, cada $a \in \Phi^{-1}(p)$ é uma solução isolada, portanto, $i(\Phi, a, p)$ está bem definido. Seja $\Phi^{-1}(p) = \{a_1, ..., a_k\}$. Tome vizinhanças $V_1, ...V_k$ de $a_1, ..., a_k$, respectivamente, tais que

$$V_i \cap V_j = \emptyset,\ V_i \subset D, i = 1 \cdots, k \text{ e } (\overline{V_i} - \{a_i\}) \cap \Phi^{-1}(p) = \emptyset.$$

Por definição, $i(\Phi, a_i, p) = d(\Phi, V_i, p)$ e, usando as propriedades de decomposição e excisão,

$$\sum_{a_i \in \Phi^{-1}(p)} i(\Phi, a_i, p) = \sum_{i=1}^{k} d(\Phi, V_i, p) = d(\Phi, \cup_{i=1}^{k} V_i, p) = d(\Phi, D/K, p) = d(\Phi, D, p),$$

onde $K = \overline{D} / \cup_{i=1}^{k} V_i$.

Prova de 2: Seja $V \subset D$ aberto tal que $a \in V, \Phi(a) = p$ e $\Phi(x) \neq p$ para $x \in \overline{V}, x \neq a$. Por definição,

$$i(\Phi, a, p) = d(\Phi, V, p) = sgn(J_\Phi(a)).$$

Sejam $\lambda_1, ..., \lambda_n$ os autovalores de $\nabla\Phi(a)$. Então,

$$J_\Phi(a) = \lambda_1 ... \lambda_n.$$

Os autovalores complexos ocorrem aos pares, com $\alpha \cdot \overline{\alpha} > 0$. Assim, o sinal do Jacobiano depende da quantidade de números reais negativos, contando com suas multiplicidades, a qual chamamos de v, ou seja

$$i(\Phi, a, p) = sgn(J_\Phi(a)) = (-1)^v.$$

□

1.4 Aplicações do Grau Topológico de Brouwer

Nesta seção usaremos o Grau de Brouwer para demonstrar dois teoremas fundamentais em diversas áreas da matemática: o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o Teorema de Borsuk.

Enuciaremos e demonstraremos o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Vários resultados podem ser demonstrados utilizando este teorema, como por exemplo o Teorema de Perron-Frobenius para autovalores de matrizes e o Teorema da Aplicação Sobrejetiva. Apesar de interessantes, estes resultados não serão apresentados neste trabalho e podem ser encontrados em [13].

Teorema 17. *(Ponto Fixo de Brouwer) Seja $D \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto não-vazio, compacto e convexo. Suponha que $f : D \to D$ é uma função contínua. Então f possui um ponto fixo, ou seja, existe $x \in D$ tal que $f(x) = x$. A conclusão ainda é válida se D é somente homeomorfo a um conjunto compacto convexo.*

Demonstração. Temos três casos a considerar:
Caso 1: $D = \overline{B}(0, r)$. Podemos assumir que $f(x) \neq x$ em ∂D, caso contrário, o teorema está provado. Note que

$$H(x, t) = x - tf(x), x \in \overline{D}, t \in [0, 1],$$

é uma homotopia entre a identidade I e f. Além disso, $0 \notin h(\partial \times [0, 1])$, pois

$$|H(x, t)|_2 = |x - tf(x)|_2 \geq |x|_2 - t|f(x)|_2 \geq r - tr = (1 - t)r > 0$$

em $[0, 1) \times \partial D$ e $h(x, 1) = x - f(x) \neq 0$, para $x \in \partial D$, por hipótese. Segue pela Invariância sobre Homotopia que

$$d(I - f, D, 0) = d(I - f, B(0, r), 0) = d(I, B(0, r), 0) = 1,$$

desde que $J_I(0) = 1$. Assim, pela Propriedade de Solução, existe $x \in B(0, r)$ tal que $x - f(x) = 0$.
Caso 2: D é um conjunto compacto e convexo. Como D é compacto, ele é fechado. Assim, pelo Teorema 72 (ver apêndice), f pode ser estendida a uma função $\overline{f} : \mathbb{R}^N \to conv(f(D))$. Desde que D é convexo e $f(D) \subset D$, segue que $conv(f(D)) \subset D$ e portanto $\overline{f}(\mathbb{R}^N) \subset D$.

Agora considere uma bola $\overline{B}(0, r)$ tal que $D \subset \overline{B}(0, r)$. Pelo caso 1, $\overline{f} : \overline{B}(0, r) \to D$ possui ponto fixo em $\overline{B}(0, r)$. Seja x esse ponto fixo, ou seja, $\overline{f}(x) = x$. Observe que $x = \overline{f}(x) \in D$ e, portanto, $f(x) = \overline{f}(x) = x$.
Caso 3: Considere A compacto, convexo e $h : A \to D$ um homeomorfismo.

Por hipótese, $h^{-1}fh : A \to A$ é contínua e, pelo caso 2, possui um ponto fixo x, ou seja, existe $x \in A$ tal que $(h^{-1}fh)(x) = x$, e que implica em $f(h(x)) = h(x)$. Mas $h(x) \in D$ e, fazendo $y = h(x)$, concluímos que $f(y) = y$. $\square$

Agora apresentaremos uma aplicação do Teorema 17.

Proposição 18. *Não existe uma função contínua $f : \overline{B}(0, 1) \to \partial B(0, 1)$ tal que $f(x) = x$, para todo $x \in \partial B(0, 1)$.*

Demonstração. Suponha que exista uma função contínua $f : \overline{B}(0, 1) \to \partial B(0, 1)$ tal que $f(x) = x$, para todo $x \in \partial B(0, 1)$. Defina $g : \overline{B}(0, 1) \to \partial B(0, 1)$ por $g = -f$. Como g é contínua e

$\overline{B}(0,1)$ compacta e convexa, segue do Teorema 17 que g tem um ponto fixo x_0 em $\overline{B}(0,1)$, isto é, $x_0 = g(x_0)$. Por outro lado, $|x_0|_2 = 1$ e $-x_0 = -f(x_0) = x_0$, o que implica que $x_0 = 0$. Mas isso é uma contradição, pois $|x_0|_2 = 1$. $\square$

Apresentaremos, a seguir, o teorema de Borsuk, também conhecido como Teorema da função ímpar.

Lembramos que $D \subset \mathbb{R}^N$ é simétrico com respeito à origem se $D = -D$, ou seja, $0 \in D$ e, se $x \in D$, então $-x \in D$. Uma função $f : D \to \mathbb{R}^N$, onde $D \subset \mathbb{R}^N$ é simétrico em relação à origem, é ímpar se $f(-x) = -f(x)$.

Teorema 19. *(Borsuk) Seja $D \subset \mathbb{R}^N$ aberto, limitado e simétrico com respeito à origem. Sejam $f \in C(\overline{D})$ ímpar e $0 \notin f(\partial D)$. Então $d(f, D, 0)$ é ímpar.*

Demonstração. A demonstração consiste em três afirmações.
Afirmação 1: Podemos assumir que $f \in C^1(\overline{D})$ e $J_f(0) \neq 0$. Pelo Teorema 55 (ver apêndice), existe $g_1 \in C^1(\overline{D})$ tal que $||g_1 - f||_C < d_1(0, f(\partial D))/2$. Considere a parte ímpar de g_1, definida por

$$g_2(x) = \frac{(g_1(x) - g_1(-x))}{2},$$

e $0 < \delta < d_2(0, f(\partial D))/2||I||_C$ suficientemente pequeno tal que δ não seja autovalor de $g_2'(0)$.

Defina $h = g_2 - \delta I$. Por definição temos que $h \in C^1(\overline{D})$, h é ímpar e $J_h(0) \neq 0$, porque se $J_h(0) = 0$, então $h'(0) = g_2'(0) - \delta I$ não é injetiva, e portanto existe $x \neq 0$ tal que $0 = h'(0)x = g_2'(0)x - \delta x$, donde concluímos que δ é autovalor de $g_2'(0)$. Mas isso é uma contradição.

Desde que

$$\begin{aligned}|h(x) - f(x)|_1 = |g_2(x) - \delta x - f(x)|_1 &= |\frac{(g_1(x) - g_1(-x))}{2} - f(x) - \delta x|_1 \\ &\leq \frac{|g_1(x) - f(x)|_1}{2} + \frac{|g_1(x) - f(x)|_1}{2} + \delta |I(x)|_1 \\ &\leq ||g_1 - f||_C + \delta \cdot ||I||_C < d_1(0, f(\partial D)),\end{aligned}$$

para todo $x \in \overline{D}$, segue por definição que $d(f, D, 0) = d(h, D, 0)$, e portanto podemos assumir que $f \in C^1(\overline{D})$ e $J_f(0) \neq 0$.
Afirmação 2: Considere que $f \in C^1(\overline{D})$ e $J_f(0) \neq 0$. Para concluir o teorema, basta encontrar $g \in C^1(\overline{D})$, com g ímpar, $0 \notin g(S_g)$ e $||g - f||_C < \epsilon$, onde $0 < \epsilon < d_1(0, f(\partial D))$.

Assim, por definição, teremos que

$$d(f, D, 0) = d(g, D, 0) = sgn(J_g(0)) + \sum_{0 \neq x \in g^{-1}(0)} sgn(J_g(x)). \tag{1.43}$$

Como $g(x) = 0$ implica que $-g(x) = g(-x) = 0$, segue que o conjunto $g^{-1}(0) \setminus \{0\}$ tem um número par de elementos. Assim, o somatório em (1.43) é um número par, e portanto o $d(f, D, 0)$ é ímpar, pois $sgn(J_g(0)) \neq 0$.

Afirmação 3: Podemos encontrar a função g da afirmação 2 por indução nos conjuntos

$$D_k = \{x \in D : \text{ existe } i \leq k, \text{ com } x_i \neq 0\}.$$

Observação: A seguir, utilizaremos a mesma notação para a função $g_k \in C^1(\overline{D})$, $k \leq N$ e sua restrição a D_k. A notação $g_k(S_{g_k}(D_k))$ será utilizada para o conjunto dos pontos críticos da restrição de g_k a D_k.

Usaremos o argumento de indução da seguinte forma:

1. encontraremos $g_1 \in C^1(\overline{D})$, com g_1 ímpar, $0 \notin g_1(S_{g_1}(D_1))$ e $||g_1 - f||_{C(\overline{D})} < d(0, f(\partial D))/2$;
2. supondo que encontramos $g_k \in C^1(\overline{D})$, com g_k ímpar, $0 \notin g_k(S_{g_k}(D_k))$ e

$$||g_k - f||_{C(\overline{D})} < \frac{(2^k - 1)d(0, f(\partial D))}{2^k} \text{ para } k < N,$$

mostraremos que existe $g_{k+1} \in C^1(\overline{D})$, com g_{k+1} ímpar, $0 \notin g_{k+1}(S_{g_{k+1}}(D_{k+1}))$ e

$$||g_{k+1} - f||_{C(\overline{D})} < \frac{(2^{k+1} - 1)d(0, f(\partial D))}{2^{k+1}},$$

o que completará o argumento de indução.

Prova de 1. Seja $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ ímpar tal que $\Phi'(0) = 0$ e $\Phi(t) = 0$ se, e somente se, $t = 0$. Pelo fato de $\overline{D}$ ser limitado, existe uma constante $R > 0$ tal que $|\Phi(x_i)| < R,\ 1 \leq i \leq N$, para todo $x = (x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_N) \in \overline{D}$.

Considere o conjunto aberto e limitado $D_1 = \{x \in D : x_1 \neq 0\}$ e defina

$$\overline{f} : D_1 \to \mathbb{R}^N \text{por } \overline{f}(x) = \frac{f(x)}{\Phi(x_1)}.$$

Pelo Teorema de Sard, existe $y_1 \notin \overline{f}(S_{\overline{f}})$, com $|y_1|_1 < d_1(0, f(\partial D))/2R$. Defina $g_1 : \overline{D} \to \mathbb{R}^N$ por $g_1(x) = f(x) - \Phi(x_1)y_1$. Observe que 0 é valor regular de g_1 em D_1, isto é, $0 \notin g_1(S_{g_1}(D_1))$. De fato,

$$\text{se } g_1(x) = 0 \text{ para algum } x \in D_1, \text{ então } y_1 = \frac{f(x)}{\Phi(x_1)} = \overline{f}(x)$$

e

$$g_1'(x) = f'(x) - \Phi'(x_1)\frac{f(x)}{\Phi(x_1)} = \Phi(x_1)[\frac{f'(x)\Phi(x_1) - \Phi'(x_1)f(x)}{\Phi^2(x_1)}] = \Phi(x_1)\overline{f}'(x),$$

e disso segue que $g_1'(x)$ é injetiva, pois $\overline{f}'(x)$ é injetiva. Este fato implica que $0 \notin g_1(S_{g_1}(D_1))$.

Segue pela definição de g_1 que

$$|f(x) - g_1(x)|_1 = |\Phi(x_1)y_1|_1 \leq R \cdot |y_1|_1 < \frac{d_1(0, f(\partial D))}{2}, \text{ para todo } x \in \overline{D},$$

isto é, $||f - g_k||_{C(\overline{D})} < d_1(0, f(\partial D))/2$.

Prova de 2. Agora suponha que encontramos $g_k \in C^1(\overline{D})$ ímpar, com

$$||f - g_k||_{C(\overline{D})} < \frac{(2^k - 1)d_1(0, f(\partial D))}{2^k},$$

e $0 \notin g_k(S_{g_k}(D_k))$, para $k < n$.

De modo análogo à Demonstração de 1, podemos encontrar um y_{k+1} tal que $|y_{k+1}|_1 < d_1(0, f(\partial D))/2^{k+1}R$ e 0 é valor regular de g_{k+1} no conjunto $\{x \in D : x_{k+1} \neq 0\}$, onde $g_{k+1} : \overline{D} \to \mathbb{R}^N$ é definida por $g_{k+1}(x) = g_k(x) - \Phi(x_{k+1})y_{k+1}$. Evidentemente g_{k+1} é ímpar e

$$\begin{aligned} ||f - g_{k+1}||_{C(\overline{D})} &\leq ||f - g_k||_{C(\overline{D})} + R \cdot |y_{k+1}|_1 < (\frac{2^k - 1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}})d_1(0, f(\partial D)) \\ &= \frac{(2^{k+1} - 1)}{2^{k+1}}d_1(0, f(\partial D)) < d_1(0, f(\partial D)). \end{aligned}$$

Observe que se $x \in D_{k+1}$ e $x_{k+1} = 0$, então $x \in D_k$ e, como consequência disso, $g_{k+1}(x) = g_k(x)$. Portanto $g'_{k+1}(x) = g'_k(x)$, o que implica que $J_{g_{k+1}}(x) \neq 0$. Disso concluímos que $0 \notin g_{k+1}(S_{g_{k+1}}(D_{k+1}))$. Assim, finalizamos o nosso argumento de indução.

Finalmente, observe que a função $g_N = g$ é ímpar e tal que $0 \notin g(S_g(D \setminus \{0\}))$, desde que $D_n = D \setminus \{0\}$. Por indução, vemos que $g'(0) = g'_1(0) = f'(0)$. Portanto, $0 \notin g(S_g(D))$ e o teorema fica demonstrado.

□

O próximo corolário é uma generalização do Teorema 19. Se as condições do corolário são satisfeitas, então a equação $f(x) = 0$ tem solução.

Corolário 20. *Seja $D \subset \mathbb{R}^N$ aberto, limitado e simétrico com respeito à origem. Seja $f \in C(\overline{D})$ tal que $0 \notin f(\partial D)$ e $f(-x) \neq \lambda f(x)$ em ∂D, para todo $\lambda \geq 1$. Então, $d(f, D, 0)$ é ímpar.*

Demonstração. Considere $H : [0, 1] \times \overline{D} \to \mathbb{R}^N$ definida por $H(t, x) = f(x) - tf(-x)$. Claramente, H é uma homotopia e, para todo $t \in [0, 1]$, temos que $0 \notin H_t(\partial D)$. De fato,

$$t = 0 \text{ implica que } h(0, x) = f(x) \neq 0, \text{ para todo } x \in \partial D, \text{ por hipótese,}$$

e

$$t = 1 \text{ implica que } H(1, x) = f(x) - f(-x) \neq 0, \text{ para todo } x \in \partial D$$

pois, por hipótese, $f(-x) \neq \lambda f(x)$, para todo $\lambda \geq 1$. Se $t \in (0,1)$ e existe $x \in \partial D$ tal que $H(t,x) = 0$, então

$$f(x) - tf(-x) = 0 \text{ implica que} f(-x) = \frac{f(x)}{t},$$

onde $\frac{1}{t} > 1$, o que contraria a hipótese.

Sendo assim, pela Invariância sobre Homotopia, temos que

$$d(f, D, 0) = d(g, D, 0),$$

onde $g(x) = f(x) - f(-x)$ é uma função ímpar com as mesmas hipóteses que a f. Sendo assim concluímos, pelo Teorema 19, que $d(f, D, 0)$ é ímpar. □

O próximo corolário é conhecido como Torema de Borsuk-Ulam. Ele diz que se $D \subset \mathbb{R}^N$ é como no enunciado do Teorema de Borsuk e $f : \partial D \to \mathbb{R}^M$ é contínua com $M < N$, então f não é injetiva. No Corolário 21 identificaremos $\mathbb{R}^M$ como um subconjunto de $\mathbb{R}^N$.

Corolário 21. *Sejam $D \subset \mathbb{R}^N$ como no Teorema de Borsuk e $f : \partial D \to \mathbb{R}^M$ contínua com $M < N$. Então $f(x) = f(-x)$, para algum $x \in \partial D$.*

Demonstração. Suponha que $f(x) - f(-x) \neq 0$, para todo $x \in \partial D$. Pelo Teorema 72 (ver apêndice), podemos estender f a uma função contínua $\overline{f} : \overline{D} \to \mathbb{R}^M$. Defina $g : \overline{D} \to \mathbb{R}^M$ por $g(x) = \overline{f}(x) - \overline{f}(-x)$ e veja que

$$x \in \partial D \text{ implica que } g(x) = f(x) - f(-x) \neq 0.$$

Observe que g é ímpar e $0 \notin g(\partial D)$. Assim, pelo Teorema 20, segue que $d(g, D, 0) \neq 0$. Seja $B(0, r)$ uma bola contida em uma mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus g(\partial D)$, então, pelo Teorema 10 item 3, temos que

$$d(g, D, y) = d(g, D, 0) \neq 0,$$

para todo $y \in B(0, r)$.

Assim, pelo Teorema 9, para todo $y \in B(0, r)$ existe $x \in D$ tal que $g(x) = y$, ou seja $B(0, r) \subset g(D) \subset \mathbb{R}^M$. Mas isso é uma contradição, pois nenhuma bola em $\mathbb{R}^N$ pode estar contida em $\mathbb{R}^M$, para $M < N$. □

1.5 Generalização do Grau Topológico

Nesta seção, estenderemos a noção de grau em algumas ocasiões mais gerais do que nas seções anteriores. Mais especificamente, definiremos o grau para domínios não necessariamente limitados do $\mathbb{R}^N$, e para funções com domínios e contradomínios em espaços euclidianos não necessariamente iguais. Os resultados desta seção seguem as ideias de [13].

Definição 7. *Sejam $f \in C(\overline{D})$, $p \notin f(\partial D)$ e $D \subset \mathbb{R}^N$ aberto (não necessariamente limitado). Suponha que $\sup|x - f(x)|_{\overline{D}} < \infty$. Seja $A \subset \mathbb{R}^N$ qualquer aberto e limitado tal que $f^{-1}(p) \subset A$. Então definimos o grau de f em p com respeito a D como sendo $d(f, D, p) := d(f, D \cap A, p)$.*

Vamos justificar a Definição 7. Provaremos que:

1. $f^{-1}(p)$ é compacto;
2. Se A e B são abertos e limitados tais que $f^{-1}(p) \subset A \cap B$, então $d(f, A \cap D, p) = d(f, B \cap D, p)$.

Prova de 1: Seja $(x_n) \subset f^{-1}(p)$. Então

$$|x_n - p|_1 = |x_n - f(x_n)|_1 \leq \sup |x - f(x)|_{\overline{D}} < \infty \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

isto é, $(x_n) \subset \overline{D}$ é limitada.

Daí, existe $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ tal que $x_{n_k} \to x \in \overline{D}$. Pela continuidade de f, segue que

$$f(x_{n_k}) = p \to f(x) = p,$$

donde concluímos que $x \in f^{-1}(p)$. Portanto, $f^{-1}(p)$ é compacto, e isso implica na existência de um aberto e limitado A tal que $f^{-1}(p) \subset A$.

Prova de 2: Suponha que A e B são conjuntos abertos e limitados tais que $f^{-1}(p) \subset A \cap B$. Considere o conjunto $A \cup B$ e vamos mostrar que $d(f, A \cup B, p)$ está bem definido. Veja que

$$f^{-1}(p) \subset A \cap B \text{ implica que } p \notin f(\partial(A \cup B)),$$

pois $[A \cap B] \cap [\partial(A \cup B)] = \emptyset$, e assim $d(f, A \cup B, p)$ está bem definido.

Agora defina os conjuntos compactos $K_1 = \overline{A \cup B} \setminus A \cap D$, $K_2 = \overline{A \cup B} \setminus B \cap D$ e note que $p \notin f(K_1) \cup f(K_2)$, pois $f^{-1}(p) \subset A \cap D$, $f^{-1}(p) \subset B \cap D$, por hipótese. Segue, da Propriedade de Excisão, que

$$d(f, A \cup B, p) = d(f, (A \cup B) \setminus K_1, p) = d(f, A \cap D, p)$$

e

$$d(f, A \cup B, p) = d(f, (A \cup B) \setminus K_2, p) = d(f, B \cap D, p),$$

e que implica em $d(f, D \cap A, p) = d(f, D \cap B, p)$.

Agora veremos um teorema que generaliza o grau para funções com domínio e contradomínio em espaços Euclidianos de dimensões diferentes.

Considere $f : \overline{D} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ contínua, com $M < N$, $p \in \mathbb{R}^M \setminus f(\partial D)$ e D aberto e limitado. Identificaremos $\mathbb{R}^M$ como subconjunto de $\mathbb{R}^N$, ou seja,

$$\mathbb{R}^M = \{(x_1, \cdots, x_M, ..., x_N) : x_{M+1} = ... = x_N = 0\} \subset \mathbb{R}^N,$$

e definiremos

$$g : \overline{D} \to \mathbb{R}^M \text{ por } g = I - f,$$

ou seja, $g(x) = (x_1 - f_1(x), ..., x_M - f_M(x), x_{M+1}, ..., x_N)$.

Observe que se $g(x) = p$, para algum $x \in D$, então $x = f(x) + p \in \mathbb{R}^M$, isto é, todas as soluções de $g(x) = p$ estão em $D \cap \mathbb{R}^M$ e portanto espera-se que $d(I - f, D, p)$ possa ser calculado pelo grau M-dimensional de $(I - f)\mid_{\overline{D \cap \mathbb{R}^M}}$. Este fato é provado no teorema abaixo.

Teorema 22. *Seja $f : \overline{D} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ contínua e $p \in \mathbb{R}^M \setminus g(\partial D)$, onde $g = I - f$. Então $d(g, D, p) = d(g_M, D \cap \mathbb{R}^M, p)$, onde g_M é restrição de g a $\overline{D \cap \mathbb{R}^M}$.*

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que $f \in C^1(\overline{D})$ e $p \notin g(S_g)$. Denotaremos por g_M a restrição de g a $\overline{D \cap \mathbb{R}^M}$ e por I_k a matriz identidade $k \times k$, para $k \in \mathbb{N}$. Suponha que $g(x) = p$, para algum $x \in D \cap \mathbb{R}^M$. Então,

$$J_{g_M}(x) = det \begin{bmatrix} 1 - \partial_1 f_1(x) & -\partial_2 f_1(x) & \cdots & -\partial_M f_1(x) \\ -\partial_1 f_2(x) & 1 - \partial_2 f_2(x) & \cdots & -\partial_M f_2(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\partial_1 f_M(x) & -\partial_2 f_M(x) & \cdots & 1 - \partial_M f_M(x) \end{bmatrix}$$

$$= det(I_M - (\partial_j f_i(x))).$$

Por outro lado, temos que

$$J_g(x) = det \begin{bmatrix} I_M - (\partial_j f_i(x)) & -(\partial_j f_i(x)) \\ (0) & I_{N-M} \end{bmatrix},$$

e desenvolvendo o último determinante, segundo a linha $N - M$, obtemos que $J_g(x) = J_{g_M}(x)$ e, portanto, $d(g_M, D \cap R^M, p) = d(g, D, p)$. □

Para encerrar esta seção, definiremos o Grau para funções definidas em subconjuntos abertos de um espaço vetorial real de dimensão finita.

Denotaremos por $\{e_1, \cdots, e_N\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^N$.

Definição 8. *Sejam X um espaço vetorial real normado de dimensão finita, $f : \overline{D} \to X$ uma função contínua e $p \notin f(\partial D)$. Então, definimos o grau de f em p com respeito a D por $d(f, D, p) = d(hfh^{-1}, h(D), h(p))$, onde $h : X \to \mathbb{R}^N$ é o homeomorfismo linear definido por $h(x_i) = e_i$ e $\{x_1, \cdots, x_N\}$ é uma base de X.*

Justificaremos a Definição 8, isto é, provaremos que ela independe da base $\{x_1, \cdots, x_N\}$. Primeiramente, note que o fato de $p \notin f(\partial D)$ implica que $h(p) \notin (hf)(\partial D) = (hfh^{-1})(h(\partial D)) = (hfh^{-1})(\partial h(D))$. Para justificar que a definição independe da base escolhida, consideraremos somente o caso em que $f \in C^1(\overline{D})$.

Sejam $\{x_1, \cdots, x_N\}$ e $\{y_1, \cdots, y_N\}$ duas bases de X e considere a matriz de mudança de base A. Sabemos que $\det A \neq 0$. Denotaremos por $\tilde{x} = A(x)$, $\tilde{D} = A(D)$ (observe que estamos identificando A com a transformação linear associada à matriz A) e $g(\tilde{x}) = Af(A^{-1}\tilde{x})$, para $\tilde{x} \in \tilde{D}$, as representações de x, D e f na base $\{y_1, \cdots, y_N\}$. Assim,

$$J_g(\tilde{x}) = \det A \cdot J_f(A^{-1}(\tilde{x})) \cdot \det A^{-1} = J_f(A^{-1}(\tilde{x})),$$

o que, pela Definição 1, implica na independência da base escolhida.

O grau, para espaço vetorial real normado, possui todas as propriedades do Grau de Brouwer estudado nas seções anteriores e nesta seção. Portanto, quando nos referirmos a alguma propriedade dele, citaremos os resultados das seções $1.1 - 1.4$ e desta seção.

1.6 Introdução ao Grau Topológico de Leray-Schauder

Nas seções anteriores estudamos o Grau Topológico de Brouwer, que é o estudo do Grau Topológico em espaços de dimensão finita. Nesta seção, estudaremos o Grau Topológico em espaços vetoriais normados de dimensão infinita, que passa a ser chamado Grau Topológico de Leray-Schauder. Todos os espaços vetoriais desta seção são sobre o corpo dos números reais.

Considere $X = C([0,1])$, isto é, o espaço vetorial normado das funções contínuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ com a norma usual, ou seja, $||f|| = \max\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$, $f_0 \in X$ tal que $f_0(s) = 1/2$, para todo $s \in [0,1]$ e $D = \{f \in X : ||f - f_0|| < 1/2\} = B(f_0, 1/2)$. Suponha que exista uma função

$$d : \Big\{(f, D, p) : D \subset X \text{ é aberto e limitado }, f : \overline{D} \to X \text{ é contínua e } p \notin f(\partial D)\Big\} \to \mathbb{Z},$$

satisfazendo as seguintes condições:

(i) $d(I, D, p) = 1$, se $p \in D$, onde I é o operador identidade de D;

(ii) Se $d(\Phi, D, p) \neq 0$, então $p \in \Phi(D)$;

(iii) $d(h_t, D, p)$ é independente de t, se h_t é uma homotopia (ver definição abaixo) tal que $p \notin h_t(\partial D)$, para todo $t \in [0,1]$.

Considere a função contínua

$$\gamma(s) = \begin{cases} s & 0 \leq s \leq 1/2 \\ 1 - s & 1/2 \leq s \leq 5/8 \\ \frac{5}{3}(s-1) & 5/8 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

e defina

$$\Phi : \overline{D} \to X \text{ por } \Phi(f) = \gamma \circ f.$$

As seguintes afirmações sobre Φ são verdadeiras:

$A_1)$ Φ é contínua;

$A_2)$ existe $f \in D$ tal que $\Phi(f) = p$, onde $p(s) = 1/4 + s/2$, para todo $s \in [0,1]$ e $p \notin \Phi(\partial D)$;

$A_3)$ a equação $f(s) = 1/2$ possui uma única solução, e essa solução é obtida quando $s = 1/2$;

$A_{4)}$ $f(s) > 1/2$ para $s \in (1/2, 1]$;

$A_5)$ existe $\epsilon > 0$ tal que se $s \in [1/2, 1/2+\epsilon]$, então $f(s) \in [1/2, 5/8]$, e isto implica que $\gamma \circ f(s) \in [3/8, 1/2]$.

Agora observe que p é crescente, o que implica que

$$p(s) > p(1/2) = 1/2, \text{ para todo } s \in (1/2, 1]. \tag{1.44}$$

Por A_2, segue que $1/4 + s/2 = p(s) = \gamma \circ f(s)$ e de A_5 temos que $f(s) \in [1/2, 5/8]$, para todo $s \in [1/2, 1/2 + \epsilon]$. Lembrando que γ é decrescente em $[1/2, 5/8]$, por definição, e $f(1/2) = 1/2$, obtemos que $p(1/2) = \gamma(f(1/2)) = \gamma(1/2) > \gamma(f(s)) = p(s)$, para $s \in (1/2, 1/2 + \epsilon]$, pois $f(s) > 1/2$, para $s \in (1/2, 1/2 + \epsilon]$, o que é impossível, por (1.44).

Dessa forma, uma das três condições $(i), (ii)$ ou (iii) falha. Este exemplo foi dado por Leray em 1936 (ver [16] para demonstração).

O exemplo acima diz que o Grau Topológico, em dimensão infinita, não pode ser considerado somente em operadores contínuos. Então, para generalizar o grau para dimensão infinita, consideramos perturbações compactas da identidade.

Para definir o Grau Topológico de Leray-Schauder precisamos de algumas ferramentas que serão de grande importância, não só para definir o Grau Topológico de Leray-Schauder, como também para o restante do capítulo.

A noção de operador compacto é de fundamental importância no restante deste trabalho. Eles desempenham papel fundamental em Análise Funcional e Equações Diferenciais Parciais. De fato, quando se trabalha com Equações Diferenciais Parciais não lineares, procuramos transformá-las em uma equação funcional, a qual geralmente envolve um operador compacto.

Definição 9. *Sejam E, F dois espaços vetorias normados e $M \subset E$. Dizemos que $T : M \to F$ é compacto se:*

(i) T é contínuo;

(ii) $\overline{T(A)}$ é compacto, para todo $A \subset M$ limitado.

Definição 10. *Seja E um espaço vetorial normado e $M \subset E$. Dizemos que M é de dimensão finita, se M está contido em um subespaço vetorial de dimensão finita de E.*

O próximo teorema diz que todo operador compacto, definido em um conjunto limitado, pode ser aproximado por um operador, cuja imagem é de dimensão finita.

Teorema 23. *Sejam E e F dois espaços vetoriais normados, munidos com normas $||.||_E, ||.||_F$ respectivamente. Assuma que $M \subset E$ é um conjunto limitado e seja $T : M \to F$ compacto. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $T_\epsilon : M \to F$ tal que $T_\epsilon(M)$ tem dimensão finita em F e $||T(x) - T_\epsilon(x)||_F < \epsilon$, para todo $x \in M$.*

Demonstração. Desde que M é limitado e T é compacto, segue que $\overline{T(M)}$ é compacto. Temos que

$$\overline{T(M)} \subset \bigcup_{p \in \overline{T(M)}} B(p, \epsilon)$$

e, usando compacidade, encontramos $p_1, \cdots, p_k \in \overline{T(M)}$ tais que

$$\overline{T(M)} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(p_i, \epsilon).$$

Defina $m_i(x, \epsilon) := \max\{0, \epsilon - ||T(x) - p_i||_F\}$, para $x \in M$, e considere

$$\theta_i(x, \epsilon) := \frac{m_i(x, \epsilon)}{\sum_{j=1}^{k} m_j(x, \epsilon)}, \quad \text{para } x \in M.$$

Claramente $m_i(\cdot, \epsilon)$ é contínua, pois é a composta da função $\max\{,\}$ com a função vetorial contínua $(0, \epsilon - ||T(x) - p_i||_F),\ x \in M$.

Afirmação: $\theta_i(\cdot, \epsilon) \to \mathbb{R}$ é contínua e está bem definida, $i = 1, \cdots, k$.

De fato, $m_i(\cdot, \epsilon)$ é contínua em M e, dado $x \in M$, existe $t \in \{1, \cdots, k\}$ tal que $T(x) \in B(p_t, \epsilon)$. Desta forma, temos que

$$||T(x) - p_t||_F < \epsilon,$$

donde concluímos que $m_t(x,\epsilon) > 0$, e portanto

$$\sum_{j=1}^{k} m_j(x,\epsilon) > 0,$$

o que significa que $\theta_i(\cdot,\epsilon)$ está bem definida. Por outro lado, como $\theta_i(\cdot,\epsilon)$ é o quociente de funções contínuas, segue que ela é contínua.

Defina

$$T_\epsilon(x) := \sum_{j=1}^{k} \theta_j(x,\epsilon)p_j, \quad \text{para } x \in M.$$

Seja $span(\{p_1,\cdots,p_k\}) = F_k$ o subespaço gerado por $\{p_1,\cdots,p_k\}$, então $dimF_k < \infty$ e, por definição, $T_\epsilon(M) \subset F_k$. Desde que

$$\sum_{j=1}^{k} \theta_j(x,\epsilon) = 1,$$

temos que

$$T(x) - T_\epsilon(x) = \sum_{j=1}^{k} \theta_j(x,\epsilon)T(x) - \sum_{j=1}^{k} \theta_j(x,\epsilon)p_j = \sum_{j=1}^{k} \theta_j(x,\epsilon)[T(x) - p_j],$$

o que implica que

$$||T(x) - T(x)_\epsilon||_F \leq \sum_{j=1}^{k} \theta_j(x,\epsilon)||T(x) -_p j||_F < \epsilon, \text{ para todo } x \in M.$$

□

Continuaremos utilizando a notação $d_1(p,A)$ (respectivamente $d_1(A,B)$) para a distância entre $p \in E$ e $A \subset E$ (respectivamente $A \subset E$ e $B \subset E$), onde E é um espaço vetorial normado. A mesma notação será usada se E for um espaço métrico.

Lembramo-nos que a definição 4 exigia que $p \notin \Phi(\partial D)$ e, como $\Phi(\partial D)$ é compacto, tínhamos que $d_1(p,\Phi(\partial D)) > 0$. O próximo lema generaliza este fato para perturbações compactas da identidade.

Lema 24. *Sejam X um espaço métrico, $D \subset X$ aberto e limitado, $T : \overline{D} \to X$ compacto e suponha que $p \notin \Phi(\partial D)$, onde $\Phi := I - T$. Então $r := d_1(p,\Phi(\partial D)) > 0$.*

Demonstração. Considere $\{x_k\} \subset \partial D$ tal que $r = \lim_{k\to\infty} d_1(p,\Phi(x_k))$. Desde que ∂D é limitada e $T : \overline{D} \to X$ é compacto, segue que $\{T(x_k)\}$ é relativamente compacto, e assim, a menos de subsequência, podemos admitir que $T(x_k) \to y \in X$.

Assuma que $r = 0$, isto é, $p = \lim_{k\to\infty} \Phi(x_k) = \lim_{k\to\infty}(x_k - T(x_k))$. Então $y + p = \lim_{k\to\infty} x_k \in \partial D$, e isso implica que

$$T(y+p) = \lim_{k\to\infty} T(x_k) = y.$$

Portanto,

$$\Phi(y+p) = y + p - T(y+p) = y + p - y = p,$$

e concluímos que $p \in \Phi(\partial D)$, o que é uma contradição. □

No que segue, X será um espaço normado, com uma norma $||\cdot||$ induzida por uma métrica, I o operador identidade de X, $T : \overline{D} \to X$ um operador compacto e $\Phi := I - T$. Assumiremos também que $p \notin \Phi(\partial D)$ e $D \subset X$ é aberto e limitado.

Em vista do Teorema 23, para $T : \overline{D} \to X$ compacto e $\epsilon > 0$, existe $T_\epsilon : \overline{D} \to X$ compacto tal que $span(T_\epsilon(\overline{D}))$ tem dimensão finita e $d_1(T(x), T_\epsilon(x)) < \epsilon$, para todo $x \in \overline{D}$.

A seguir, utilizaremos as seguintes notações

$$S_\epsilon := span(T_\epsilon(\overline{D})),\ D_\epsilon = D \cap S_\epsilon \text{ e } \Phi_\epsilon := x - T_\epsilon x.$$

Lema 25. *Para qualquer* $0 < \epsilon < d_1(p, \Phi(\partial D))$, *o grau* $d(\Phi_\epsilon, D_\epsilon, p)$ *está bem definido e é independente de* ϵ.

Demonstração. Temos que $r = d_1(p, \Phi(\partial D)) > 0$, pelo Lema 24. Seja $\partial_\epsilon D_\epsilon$ a fronteira de D_ϵ em S_ϵ.

Afirmação: $\partial_\epsilon D_\epsilon \subset \partial D$, para $0 < \epsilon < r$.

Com efeito, sejam $\delta > 0$ e $B(x, \delta)$ a bola em X com centro $x \in \partial_\epsilon D_\epsilon$ e raio δ e, $B(x, \delta_\epsilon)$ a bola de centro x e raio δ em S_ϵ (restrição de $B(x, \delta)$ a S_ϵ), então

$$B(x, \delta_\epsilon) \cap D_\epsilon \neq \emptyset \text{ e } B(x, \delta_\epsilon) \cap (S_\epsilon \setminus D_\epsilon) \neq \emptyset.$$

Daí

$$B(x, \delta_\epsilon) \cap D \cap S_\epsilon \neq \emptyset \text{ e } B(x, \delta_\epsilon) \cap (S_\epsilon \setminus D \cap S_\epsilon) \neq \emptyset,$$

e isso implica que

$$B(x, \delta_\epsilon) \cap D \neq \emptyset \text{ e } B(x, \delta_\epsilon) \cap [(X \setminus D) \cap S_\epsilon)] \neq \emptyset$$

e, consequentemente

$$B(x, \delta_\epsilon) \cap D \neq \emptyset \text{ e } B(x, \delta_\epsilon) \cap (X \setminus D) \neq \emptyset,$$

o que implica que

$$B(x, \delta) \cap D \neq \emptyset \text{ e } B(x, \delta) \cap (X \setminus D) \neq \emptyset$$

e, portanto $x \in \partial D$, isto é $\partial_\epsilon D_\epsilon \subset \partial D$.

Por outro lado, $p \notin \Phi_\epsilon(\partial_\epsilon D_\epsilon)$. Para provar isto, observe primeiramente que de

$$||Tx - T_\epsilon x|| < \epsilon < r, \text{ para todo } x \in \overline{D},$$

segue que

$$||\Phi(x) - \Phi_\epsilon(x)|| < \epsilon < r, \text{ para todo } x \in \overline{D}.$$

Se $p \in \Phi_\epsilon(\partial_\epsilon D_\epsilon)$, então $p = \Phi(x_0)$ para algum $x_0 \in \partial_\epsilon D_\epsilon \subset \partial D$, e assim

$$||\Phi(x_0) - p|| < r \leq ||\Phi(x_0) - p||,$$

o que é uma contradição.

Considere $\epsilon_1, \epsilon_2 \in (0, r)$ e defina

$$S_v := span(\{S_{\epsilon_1}, S_{\epsilon_2}\}) \text{ e } D_v := D \cap S_v.$$

Pelo Teorema 22,

$$\begin{aligned} d(\Phi_{\epsilon_1}, D_v, p) &= d(\Phi_{\epsilon_1}, D_v \cap S_{\epsilon_1}, p) = d(\Phi_{\epsilon_1}, D \cap S_v \cap S_{\epsilon_1}, p) \\ &= d(\Phi_{\epsilon_1}, D \cap S_{\epsilon_1}, p) = d(\Phi_{\epsilon_1}, D_{\epsilon_1}, p) \end{aligned} \tag{1.45}$$

e, analogamente

$$d(\Phi_{\epsilon_2}, D_v, p) = d(\Phi_{\epsilon_2}, D_{\epsilon_1}, p). \tag{1.46}$$

Claramente

$$H(x,t) = t\Phi_{\epsilon_1}(x) + (1-t)\Phi_{\epsilon_2}(x), \text{ para } t \in [0,1] \text{ e } x \in \overline{D_v}$$

é uma homotopia entre Φ_{ϵ_1} e Φ_{ϵ_2} e, para todo $t \in [0,1]$ temos que $p \notin H_t(\partial D_v)$. De fato,

$$\begin{aligned} ||H(t,x) - \Phi(x)|| &= ||t\Phi_{\epsilon_1}(x) + (1-t)\Phi_{\epsilon_2}(x) - \Phi(x)|| \\ &= ||t\Phi_{\epsilon_1}(x) + (1-t)\Phi_{\epsilon_2}(x) - (1-t)\Phi(x) - t\Phi(x)|| \\ &\leq t||\Phi_{\epsilon_1}(x) - \Phi(x)|| + (1-t)||\Phi_{\epsilon_2}(x) - \Phi(x)|| \\ &< t\epsilon_1 + (1-t)\epsilon_2 < tr + (1-t)r = r \end{aligned}$$

e

$$||H(t,x) - p|| \geq ||\Phi(x) - p|| - ||\Phi(x) - H(t,x)|| > ||\Phi(x) - p|| - r > 0,$$

para todo $x \in \partial D_v$, e isso implica que $p \notin H_t(\partial D_v)$, para todo $t \in [0,1]$.

Assim, pela Invariância sobre Homotopia, segue que

$$d(\Phi_{\epsilon_2}, D_v, p) = d(\Phi_{\epsilon_1}, D_v, p). \tag{1.47}$$

Por (1.45), (1.46) e (1.47), concluímos que

$$d(\Phi_{\epsilon_1}, D_{\epsilon_1}, p) = d(\Phi_{\epsilon_2}, D_{\epsilon_2}, p).$$

$\square$

Agora, estabeleceremos a principal definição desta seção.

Definição 11. *Sejam $T : \overline{D} \to X$ compacto, $\Phi := I - T$ e $p \notin \Phi(\partial D)$. O grau de Leray-Schauder de Φ em p com respeito a D é definido pelo Grau de Brouwer $d(\overline{\Phi}, D_v, p)$, onde $\overline{\Phi} := I - \overline{T}$, com $\overline{T} : \overline{D} \to X$ sendo compacto, tal que $||\overline{T}x - Tx|| < d_1(p, \Phi(\partial D))$, para todo $x \in \overline{D}$ e $\overline{T}$ é de dimensão finita, $D_v = D \cap V$ e V é qualquer subespaço vetorial de dimensão finita contendo p e $\overline{T}(\overline{D})$.*

Mostraremos que o grau de Leray-Schauder satisfaz todas as propriedades do Grau de Brouwer, através de teoremas. Veremos que grande parte deles, é consequência das propriedades do Grau de Brouwer.

Se $M \subset X$, denotaremos por $K(M)$ o conjunto dos operadores compactos de M em X e

$$K_1(M) := \{\Phi : \Phi = I - T, T \in K(M)\}.$$

O item (iii), do teorema abaixo é conhecido como propriedade de solução, e nos diz que, se $d(\Phi, D, p) \neq 0$, então a equação $\Phi(x) = p$ tem pelo menos uma solução em D. O item (i), é conhecido como propriedade de normalização.

Teorema 26. *As seguintes afirmações são satisfeitas:*

(i) $d(I, D, p) = 1$, para todo $p \in D$;

(ii) $d(I, D, p) = 0$, para todo $p \notin D$;

(iii) Se $d(\Phi, D, p) \neq 0$, então existe $x \in D$ tal que $\Phi(x) = p$.

Demonstração. (i) Defina $T_\epsilon(x) = 0$ para $x \in \overline{D}$, $S_\epsilon := \{p\}$ e $D_\epsilon = D \cap S_\epsilon$.

Claramente T_ϵ é de dimensão finita, logo, pela Definição 11, temos que,

$$d(I, D, p) = d(I, D_\epsilon, p)$$

e, por hipótese $p \in D$.

Dessa forma, $p \in D_\epsilon$ e assim, segue do Grau de Brouwer que

$$d(I, D_\epsilon, p) = 1.$$

(ii) Similarmente $d(I, D, p) = 0$, se $p \notin \overline{D}$.

(iii) Pelo Teorema 23, para todo natural n com $d_1(p, \Phi(\partial D)) > \dfrac{1}{n}$, existe $T_n : \overline{D} \to X$ tal que

$$||T_n(x) - T(x)||_x < \frac{1}{n}, \text{ para todo } x \in \overline{D} \text{ e } \dim T_n(\overline{D}) < \infty.$$

Considere $S_n := span(\{T_n(\overline{D}), p\})$. Pela Definição 11, temos que

$$d(I - T, D, p) = d(I - T_n, D_n, p),$$

onde $D_n = D \cap S_n$. Por hipótese, $d(I - T, D, p) \neq 0$ e disso segue que $d(I - T_n, D_n, p) \neq 0$, assim, pela propriedade de solução do Grau de Brouwer, existe $x_n \in D_n$ tal que

$$x_n - T_n(x_n) = p. \tag{1.48}$$

Desde que $T : \overline{D} \to X$ é compacto e $x_n \in \overline{D}$, com $\overline{D}$ limitado, podemos assumir que, a menos de subsequência $T(x_n) \to y \in X$. Portanto, por (1.48), (x_n) converge para algum $p + y \in \overline{D}$ e, usando a continuidade de Φ em $y + p$ obtemos que

$$\Phi(y + p) = \lim_{n\to\infty} \Phi(x_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n - Tx_n) = p,$$

e isso implica que $y + p \in D$, pois $p \notin \Phi(\partial D)$. Assim, a equação $\Phi(x) = p$ admite a solução $p + y$ em D.

□

Definiremos homotopia para operadores compactos. A grosso, modo uma homotopia entre operadores compactos, é uma deformação entre eles através de uma função satisfazendo as propriedades abaixo.

Definição 12. *Sejam $M \subset X$ e $H : M \times [0, 1] \to X$. Dizemos que H é uma homotopia de operadores compactos em M, se:*

(i) $H(., t) \in K(M)$, para cada $t \in [0, 1]$;

(ii) para todo conjunto limitado $L \subset M$ e $\epsilon > 0$ dados, existe $\delta > 0$ tal que $||H(x, s) - H(x, t)||_X < \epsilon$, sempre que $x \in L$ e $|s - t| < \delta$.

O teorema a seguir, garante que o Grau é invariante sobre homotopia em qualquer estágio da deformação. Em particular, considerando a função $f(t) = d(H(.,t), D, p) := d(H_t(.), D, p), t \in [0,1]$, onde D e p são fixos, teremos que f é contínua, onde H é uma homotopia entre os operadores compactos Φ e Ψ.

Teorema 27. *(Invariância Sobre Homotopia) Assuma que $H : \overline{D} \times [0,1] \to X$ é uma homotopia de operadores compactos em $\overline{D}$. Defina*

$$\Phi_t = I - H(.,t), \ t \in [0,1]$$

e assuma que $p \notin \Phi_t(\partial D)$, para todo $t \in [0,1]$. Então $d(\Phi_t, D, p)$ é independente de t.

Demonstração. Iniciamos fazendo uma afirmação.
Afirmação: Existe $k > 0$ tal que

$$||p - \Phi_t(x)|| \geq k, \text{ para todo } x \in \partial D \text{ e } t \in [0,1].$$

Suponha o contrário. Então, existem $\{t_n\} \subset [0,1]$ e $\{x_n\} \subset \partial D$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} ||p - \Phi_{t_n}(x_n)||_X = 0. \tag{1.49}$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\{t_n\}$ converge para $\tau \in [0,1]$ e, desde que $H(.,\tau)$ é compacto, $\{H(x_n,\tau)\}$ converge para algum $y \in X$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (x_n - H(x_n,\tau) + H(x_n,\tau)) = \lim_{n\to\infty} (\Phi_\tau(x_n) + H(x_n,\tau)) = p + y, \tag{1.50}$$

pois $\Phi_\tau(x_n) \to p$. De fato, utilizando o item (ii) da Definição 12 e (1.49), segue que

$$\lim_{n\to\infty} ||\Phi_\tau(x_n) - p||_X \leq \lim_{n\to\infty} (||\Phi_{t_n}(x_n) - \Phi_\tau(x_n)||_X + ||\Phi_{t_n}(x_n) - p||_X) = 0,$$

isto é, $\Phi_\tau(x_n) \to p$.

Usando (1.48), (1.49) e a continuidade de $H(\cdot,\tau)$, temos que $p = (p+y) - H(p+y,\tau) = \Phi_\tau(p+y)$. Mais isso é uma contradição, pois o fato de $(x_n) \subset \partial D$ implica, por (1.50) que $p + y \in \partial D$, e assim, $p \in \Phi_\tau(\partial D)$, o que é uma contradição.

Seja R a relação de equivalência definida em $[0,1]$ por

$$tRs \text{ se, e somente se, } d(\Phi_t, D, p) = d(\Phi_s, D, p).$$

Provaremos que as classes de equivalências de R são abertos em $[0,1]$. Fixemos $s \in [0,1]$

e, seja C a classe de equivalência de s com respeito a R. Considere

$$r = d_1(p, \Phi_s(\partial D)).$$

Então $r > 0$, pelo Lema 24. Fixe $\epsilon \in (0, \frac{r}{4})$. Pelo Teorema 23, existe um operador compacto

$$h_\epsilon : \overline{D} \to X \text{ tal que } \dim(h_\epsilon(\overline{D})) < \infty$$

e

$$||h_\epsilon(x) - H(x, s)||_X < \epsilon, \text{ para todo } x \in \overline{D}, \tag{1.51}$$

onde o s foi fixado acima.

Por definição, existe $\delta > 0$ tal que

$$|t - s| < \delta \Rightarrow ||H(x, t) - H(x, s)||_X < \epsilon, \forall x \in \overline{D}. \tag{1.52}$$

Seja V_ϵ um subespaço de dimensão finita contendo p e $h_\epsilon(\overline{D})$. Definimos

$$D_\epsilon := D \cap V_\epsilon.$$

Por (1.51), (1.52) e pela Definição 11, segue que

$$d(I - h_\epsilon, D_\epsilon, p) = d(I - H(., s), D, p) \tag{1.53}$$

e

$$||h_\epsilon(x) - H(x, t)|| \leq ||h_\epsilon(x) - H(x, s)|| + ||H(x, s) - H(x, t)|| < 2\epsilon < r,$$

para todo $|t - s| < \delta$.

Dessa forma,

$$d(I - h_\epsilon, D_\epsilon, p) = d(I - H(., t), D, p) \tag{1.54}$$

e de (1.53) e (1.54), concluímos que

$$d(I - H(., t), D, p) = d(I - H(., s), D, p).$$

Portanto, tRs. Concluímos que C é um conjunto aberto de $[0, 1]$ e, como $[0, 1]$ é conexo R admite somente uma classe de equivalência, logo $0R1$. □

O próximo teorema nos diz que, o grau de Leray-Schauder depende somente dos valores das funções na fronteira.

Teorema 28. *Assuma que* $\Phi, \Psi \in K_1(\overline{D}), \Phi \mid_{\partial D} = \Psi \mid_{\partial D}$ *e* $p \notin \Phi(\partial D)$. *Então* $d(\Phi, D, p) = d(\Psi, D, p)$.

Demonstração. Considere

$$H(x,t) = tT(x) + (1-t)S(x), t \in [0,1], \forall x \in \overline{D},$$

onde $T = I - \Phi$ e $S = I - \Psi$. Assim, H é uma homotopia de operadores compactos em $\overline{D}$. Como $\Phi = \Psi$ em ∂D, segue que $S = T$ em ∂D, e assim,

$$H(x,t) = tT(x) + (1-t)S(x) = S(x) = (I - \Phi)(x),$$

para todo $x \in \partial D$ e $t \in [0,1]$, e isso implica que $p \notin (I - H_t(\partial D))$, onde $H_t(\cdot) = H(\cdot, t)$.

Pelo Teorema 27 (Invariância sobre Homotopia), temos que

$$d(\Phi, D, p) = d(\Psi, D, p).$$

□

O próximo teorema nos diz que, o grau é invariante sobre translações no primeiro e terceiro argumento de $d(\cdot,\cdot,\cdot)$.

Teorema 29. *Assuma que* $\Phi \in K_1(\overline{D}), p \notin \Phi(\partial D)$ *e seja* $q \in X$. *Então* $d(\Phi, D, p) = d(\Phi - q, D, p - q)$.

Demonstração. Pelo Teorema 24, existe um operador compacto $\tilde{T} : \overline{D} \to X$, tal que $\dim(\tilde{T}(\overline{D})) < \infty$. Seja W um subespaço de dimensão finita que contém $\tilde{T}(\overline{D})$. Então, o subespaço $V = span(\{p, q, \tilde{T}(\overline{D})\})$ tem dimensão finita e contém p, q e $\tilde{T}(\overline{D})$.

Ainda, pelo Teorema 24, podemos supor, sem perda de generalidade que

$$||\tilde{T}(x) - T(x)||_X < d_1(p, \Phi(\partial D)), \text{ para todo } x \in \overline{D}.$$

Por definição

$$d(I - \tilde{T}, D_v, p) = d(\Phi.D, p), \tag{1.55}$$

onde

$$D_v := D \cap V, span(\{\tilde{T}(\overline{D}), p, p-q\}) \subset V$$

e

$$||(\tilde{T} + q)(x) - (T + q)(x)||_X < d_1(p - q, (\Phi - q)(\partial D)).$$

Desde que $span(\{\tilde{T}(\overline{D})+q, p, p-q\}) \subset V$, pois $\tilde{T}(\overline{D}) \subset V$ e $q \in V$, temos que

$$d(I-\tilde{T}-q, D_v, p-q) = d(\Phi - q, D, p-q) \tag{1.56}$$

e, aplicando o Teorema 12, obtemos que

$$d(I-\tilde{T}-q, D_v, p-q) = d(I-\tilde{T}, D_v, p)$$

e, essa igualdade, juntamente com (1.55) e (1.56), fornece a seguinte conclusão

$$d(\Phi, D, p) = d(\Phi - q, D, p-q).$$

□

O próximo teorema nos diz que, fixado uma função em $K_1(\overline{D})$ as funções próximas dela têm o mesmo grau, ou seja em uma vizinhança de $\Phi \in K_1(\overline{D})$ o grau de Leray-Schauder é constante.

Teorema 30. *Sejam $\Phi, \Psi \in K_1(\overline{D}), p \notin \Phi(\partial D)$ e*

$$||\Phi(x) - \Psi(x)||_X < r := d_1(p, \Phi(\partial D)), \text{ para todo } x \in \overline{D}.$$

Então $p \notin \Psi(\partial D)$ e $d(\Phi, D, p) = d(\Psi, D, p)$.

Demonstração. O fato de $p \notin \Psi(\partial D)$, segue imediatamente da desigualdade $||\Phi(x)-\Psi(x)||_X < r$, para todo $x \in \overline{D}$.

Considerando

$$H(x,t) = t\Phi(x) + (1-t)\Psi(x), \; x \in \overline{D}, 0 \le t \le 1,$$

temos que H é uma homotopia de operadores compactos e, para todo $x \in \partial D$

$$\begin{aligned} ||p - H_t(x)||_X &= ||p - \Phi(x) + (1-t)\Phi(x) - (1-t)\Psi(x)||_X \\ &\ge ||p - \Phi(x)||_X - (1-t)||\Phi(x) - \Psi(x)||_X. \end{aligned} \tag{1.57}$$

Usando o fato de que $||\Phi(x) - \Psi(x)||_X < r$ e $||p - \Phi(x)||_X \ge r := d_1(p, \Phi(\partial D))$, para todo $x \in \overline{D}$ temos, por (1.57), que

$$||p - H_t(x)||_X > r - (1-t)r = tr \ge 0, x \in \partial D$$

e, isso implica que, se $t \in [0,1]$, então $p \notin H_t(\partial D)$. Pelo Teorema 27 (Invariância sobre Homotopia), segue que,

$$d(\Phi, D, p) = d(\Psi, D, P).$$

$\square$

O teorema a seguir nos diz que, o Grau de Leray-Schauder é constante em cada componente conexa de $X \setminus \Phi(\partial D)$.

Teorema 31. *Sejam $\Phi \in K_1(\overline{D})$ e C uma componente conexa de $X \setminus \Phi(\partial D)$. Então $d(\Phi, D, .)$ é constante em C.*

Demonstração. Defina,

$$f : C \to \mathbb{Z} \text{ por } f(p) = d(\Phi, D, p).$$

Para provar o teorema é suficiente provar que f é contínua em C. Fixe $p \in C$ e seja $r := d_1(p, \Phi(\partial D))$. Temos que $r > 0$ e $B(p, r) \subset C$. Para $q \in \Omega$ defina

$$\Phi_q(x) = \Phi(x) - (q - p), \forall x \in \overline{D}.$$

Como Φ é uma perturbação compacta da identidade, segue que Φ_q também é uma perturbação compacta da identidade, ou seja, $\Phi_q \in K_1(\overline{D})$ e, assim, pelo Teorema 29

$$d(\Phi, D, q) = d(\Phi - (q - p), D, q - (q - p)) = d(\Phi_q, D, p). \tag{1.58}$$

Se $||p - q|| < r$, então

$$||\Phi(x) - \Phi_q(x)|| < d_1(p, \Phi(\partial D))$$

e, pelo Teorema 30

$$d(\Phi_q, D, p) = d(\Phi, D, p). \tag{1.59}$$

De (1.58) e (1.59), temos que

$$f(p) = d(\Phi, D, p) = d(\Phi, D, q) = f(q)$$

e, portanto $f : C \to \mathbb{Z}$ é constante e, desde que C é conexo, concluímos que $f(C) = \{f(p)\}$ para todo $q \in C$. $\square$

O teorema a seguir é muito importante em diversas aplicações. Ele é um resultado de localização de soluções de equações. Ele nos diz que se soubermos que $\Phi(x) = p$ tem uma solução em D, onde D é aberto e $K \subset \overline{D}$ é compacto, com $p \notin \Phi(K)$ e $p \notin \Phi(\partial D)$, então as soluções de $\Phi(x) = p$ estão no aberto $D \setminus K$.

Teorema 32. *Sejam $\Phi \in K_1(\overline{D})$ e $p \notin \Phi(\partial D)$. Então:*

(i) (Propriedade de Decomposição) Se $D = \cup_{i \in \mathbb{N}} D_i$ e D_i são abertos e mutuamente disjuntos, então existem $a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{N}$ tais que

$$d(\Phi, D, p) = \sum_{i=1}^{k} d(\Phi, D_{a_i}, p).$$

(ii) (Propriedade de Excisão) Se $K \subset \overline{D}$ é compacto e tal que $p \notin \Phi(K)$, então

$$d(\Phi, D, p) = d(\Phi, D \setminus K, p).$$

Demonstração. Aproxime $T = I - \Phi$ por $\tilde{T} \in K_1(\overline{D})$, tal que $\tilde{T}(\overline{D})$ é de dimensão finita e

$$||\tilde{T}(x) - T(x)||_X < d_1(p, \Phi(\partial D)), \forall x \in \overline{D}.$$

As propriedades (i) e (ii), seguem, das suas respectivas análogas ao grau em dimensão finita. □

Corolário 33. *Suponha que $D_1 \subset D$ é aberto e que $p \notin \Phi(\overline{D} \setminus D_1)$. Então $d(\Phi, D, p) = d(\Phi, D_1, p)$.*

Demonstração. É similar a prova do Corolário 15 e será omitida. □

Agora, utilizaremos o Grau de Leray-Schauder, para provar dois teoremas de grande importância em equações diferenciais parciais.

Teorema 34. *(Teorema do ponto fixo de Schauder) Sejam D um subconjunto aberto, limitado e convexo de um Espaço de Banach X, tal que $0 \in D$ e $T : \overline{D} \to X$ compacto, com $T(\overline{D}) \subset \overline{D}$. Então T tem um ponto fixo em $\overline{D}$, isto é, existe $x \in \overline{D}$ tal que $T(x) = x$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$T(x) \neq x, \text{ para todo } x \in \partial D, \tag{1.60}$$

pois caso contrário a demonstração do teorema acabou. Assim, podemos definir o grau $d(I - T, D, 0)$ e, para demonstrar o teorema provaremos que $d(I - T, D, 0) \neq 0$. Defina

$$H(x,t) = tT(x), \ t \in [0,1], \ x \in \overline{D} \text{ e } \Phi_t(x) = \Phi(x,t) = x - tT(x).$$

Claramente, H é uma homotopia de operadores compactos. Afirmamos que

$$\Phi(x,t) \neq 0, \text{para todo } (x,t) \in [0,1] \times \partial D. \tag{1.61}$$

Com efeito, se existissem $x_0 \in \partial D$ e $t_0 \in [0,1]$ tais que $\Phi(x_0, t_0) = 0$, então $x_0 = t_0 T(x_0)$. Por (1.60), segue que $t_0 < 1$. Desde que $T(\overline{D}) \subset \overline{D}$, temos que $T(x_0) \in \overline{D}$. Então, $t_0 < 1$ e D convexo, implica que $(1 - t_0)0 + t_0 T(x_0) = t_0 T(x_0) \in D$, o que contradiz o fato de que $t_0 T(x_0) = x_0 \in \partial D$. Desde que (1.61) é satisfeito, segue do Teorema 27 (Invariância sobre Homotopia), que

$$d(I - T, D, 0) = d(I, D, 0) = 1,$$

porque $0 \in D$. Usando o Teorema 26 (*iii*) (Propriedade de Solução), temos que existe $x \in D$ tal que $T(x) = x$. □

Teorema 35. *(Teorema do ponto fixo de Schaefer) Suponha que X é um Espaço de Banach e $K : X \times [0,1] \to X$ é um operador compacto satisfazendo $K(x, 0) = 0$, para todo $x \in X$. Se o conjunto $S = \{x \in X : \exists t \in [0,1]$ tal que $x = K(x,t)\}$ for limitado, então $K(\cdot, 1)$ tem um ponto fixo.*

Demonstração. Inicialmente, observe que K é uma homotopia de operadores compactos. Considere $r > 0$ grande, tal que $S \subset B(0, r)$. Defina

$$\Phi(x,t) = x - K(x,t), \text{ para todo } (x,t) \in \overline{B}(0,r) \times [0,1].$$

Afirmamos que $0 \notin \Phi(x,t)$, para todo $(x,t) \in \partial B(0,r) \times [0,1]$. De fato, caso o contrário ocorresse, existiria $(x_0, t_0) \in \partial B(0,r) \times [0,1]$, tal que $x_0 = K(x_0, t_0)$. Dessa forma $x_0 \in S$ e $x_0 \in \partial B(0,r)$ e, isso implica que $r = ||x_0|| < r$, o que é uma contradição.

Pelo Teorema 27 (Invariância por Homotopia), segue que

$$d(\Phi(\cdot,1), B(0,r), 0) = d(I - K(\cdot,1), B(0,r), 0) = d(I, B(0,r), 0) = 1,$$

e assim, pelo Teorema 26 (Propriedade de Solução), temos que $K(\cdot, 1)$ tem um ponto fixo. □

1.7 Índice de Ponto Fixo

Introduziremos a noção de Índice de Ponto Fixo, que generaliza, a noção de grau para domínios mais gerais do que os abertos de um Espaço de Banach. Ele será, também de grande utilidade no próximo capítulo.

Esta seção, segue as ideias em [22].

Definição 13. *Seja X um Espaço de Banach real. Um subconjunto não-vazio, fechado e convexo $P \subset X$ é chamado de cone, se:*

(i) $x \in P$, $\lambda \geq 0$ implica que $\lambda x \in P$;

(ii) $x \in P$, $-x \in P$ *implica que* $x = 0$.

Qualquer cone P de X, define uma ordem parcial em X, dada por

$$x \leq y, \text{ se } y - x \in P.$$

Se $x \leq y$ e $x \neq y$, escrevemos $x < y$. A definição a seguir, será útil para para definir o Índice de Ponto Fixo.

Definição 14. *Seja X um Espaço de Banach. Um subconjunto D de X é um retrátil de X, se existe uma aplicação contínua $R : X \to D$ tal que $R(x) = x$, para todo $x \in D$.*

Em outras palavras, D é um retrátil de X, se a aplicação identidade de D possuir um extensão definida em X e, esta extensão for contínua. Pelo Teorema de Dugundji, qualquer subconjunto não-vazio, fechado e convexo de X é um retrátil de X. Em particular, qualquer cone é um retrátil de X.

Observação: A aplicação R é chamada de retração.

A definição a seguir, é a definição mais importante desta seção. Definiremos o que entenderemos por Índice de Ponto Fixo e, pela própria definição, vemos que ele não tem nenhuma relação com o índice de solução isolada, que definimos na seção 1.3.

Definição 15. *Seja D um retrátil de um Espaço de Banach real X. Para qualquer conjunto aberto e limitado U de D e, qualquer operador compacto $T : \overline{U} \to D$, que não tem ponto fixo em ∂U, definimos o Índice de Ponto Fixo de T em U com respeito a D por:*

(a) *se $D = X$, então*

$$i(T, U, X) = d(I - T, U, 0), \tag{1.62}$$

onde $d(I - T, U, 0)$ é o grau de Leray-schauder.

(b) *se $D \neq X$, então*

$$i(T, U, D) = d(I - T \circ R, B(0, r) \cap R^{-1}(U), 0), \tag{1.63}$$

onde $B(0, r) \supset U$ e $R : X \to D$ é uma retração de D arbitrária.

Justificaremos o item **(b)** da definição, isto é, o Índice não depende da retração R e do raio r tomados. Seja $R : X \to D$ uma retração arbitrária. Obviamente, pelo fato de R ser contínua $R^{-1}(U) \cap B(0, r)$ é aberto e limitado em D, e se $x \in \overline{U}$, então $R(x) = x$, pois existe $(x_n) \subset U$ tal que $x_n \to x$ e, isso implica que $R(x_n) = x_n \to x = R(x)$. Na prova, precisaremos das seguintes relações:

$$\overline{B(0, R) \cap R^{-1}(U)} \subset \overline{R^{-1}(U)} \subset \overline{R^{-1}(\overline{U})} = R^{-1}(\overline{U}), \tag{1.64}$$

e

$$\text{se } x_0 \in R^{-1}(\overline{U}) \text{ e } T(R(x_0)) = x_0, \text{ então } x_0 \in U, \ T(x_0) = x_0. \tag{1.65}$$

Para provar essas relações, observe que

$$B(0,R) \cap R^{-1}(U) \subset R^{-1}(U) \subset R^{-1}(\overline{U})$$

e disso segue (1.64).

Para provar (1.65), note que se $x_0 \in R^{-1}(\overline{U})$ e $T(R(x_0)) = x_0$, então $R(x_0) \in \overline{U}$. Assim, $R(x_0) = R(T(R(x_0))) = T(R(x_0))$, pois $T(\overline{U}) \subset D$ e R é um retrátil de D e, disso segue que $R(x_0) \in U$, porque T não tem ponto fixo em ∂U. Por outro lado, $R(x_0) = T(R(x_0)) = x_0$, e dessa igualdade segue que $x_0 \in U$ e $T(x_0) = x_0$. Portanto (1.65) é satisfeito.

Provaremos que $i(T,U,D)$ independe de r. Considere $r_1 > r$. Desde que

$$U \subset B(0,r) \cap R^{-1}(U) \subset B(0,r_1) \cap R^{-1}(U),$$

por (1.65) sabemos que TR não tem ponto fixo em $\overline{B(0,r_1) \cap R^{-1}(U)} \setminus (B(0,r) \cap R^{-1}(U))$, e consequentemente, pela propriedade de excisão do Grau de Leray-Schauder

$$d(I - TR, B(0,r_1) \cap R^{-1}(U), 0) = d(I - TR, B(0,r) \cap R^{-1}(U), 0),$$

isto é, $i(A,U,D)$ independe de r.

Seja agora $R_1 : X \to D$, uma outra retração de D e $V = B(0,r) \cap R^{-1}(U) \cap R_1^{-1}(U)$. Então, V é aberto e limitado em X, $V \supset U$. Por (1.65), sabemos que TR não tem ponto fixo em $\overline{B(0,r) \cap R^{-1}(U)} \setminus V$ e TR_1 não tem ponto fixo em $\overline{B(0,r) \cap R_1^{-1}(U)} \setminus V$.

Assim, pelo Corolário 33, segue que

$$d(I - TR, B(0,r) \cap R^{-1}(U), 0) = d(I - TR, V, 0) \tag{1.66}$$

e

$$d(I - TR_1, B(0,r) \cap R_1^{-1}(U), 0) = d(I - TR_1, V, 0). \tag{1.67}$$

Agora, seja

$$h(t,x) = x - H(t,x),$$

onde

$$H(t,x) = R[tTR(x) + (1-t)TR_1(x)].$$

Claramente $H : [0,1] \times \overline{V} \to X$ é compacta. Provaremos que $0 \notin h(t, \partial V)$, para qualquer

$t \in [0,1]$. De fato, se existem $t_0 \in [0,1]$ e $x_0 \in \partial V$ tais que $h(t_0, x_0) = 0$, então

$$x_0 = R[t_0 T(R(x_0)) + (1 - t_0) T(R_1(x_0))] \in X$$

e, pelo fato de $R(x_0) = x_0$ e $R_1(x_0) = x_0$, segue que

$$x_0 = R[t_0 T(x_0) + (1 - t_0) T(x_0)] = R(T(x_0)).$$

Como $R\mid_D = I\mid_D$, segue que $T(x_0) = x_0$. Assim, por (1.65), $x_0 \in U \subset V$, o que é uma contradição com o fato de que $x_0 \in \partial V$. Assim, usando a invariância sobre homotopia do Grau de Leray-Schauder e, observando que

$$H(0, x) = R[TR_1 x] = TR_1(x)$$

e

$$H(1, x) = R[T(R(x))] = TR(x),$$

temos que

$$d(I - TR_1, V, 0) = d(I - TR, V, 0). \tag{1.68}$$

Segue de (1.66), (1.67) e (1.68) que

$$d(I - TR, B(0, r) \cap R^{-1}(U), 0) = d(I - TR_1, B(0, r) \cap R_1^{-1}(U), 0) \tag{1.69}$$

o que prova que $i(T, U, D)$ independe da escolha de r.

Segue, como esperado, que o Índice de Ponto Fixo definido definido acima, herda todas as propriedades do Grau de Leray-Schauder e, é caracterizado pelas seguintes propriedades:

(I_1) (Normalidade): $i(T, U, D) = 1$, se $T(x) = y_0$ para todo $x \in \overline{U}$, onde $y_0 \in U$ é constante;

(I_2) (Aditividade): $i(T, U, D) = i(T, U_1, D) + i(T, U_2, D)$, sempre que U_1 e U_2 são conjuntos abertos disjuntos de U tal que T não tem ponto fixo em $\overline{U} \setminus (U_1 \cup U_2)$;

(I_3) (Invariância por Homotopia): $i(H(t, .), U, D)$ é independente de t $(0 \leq t \leq 1)$, onde $H : [0,1] \times \overline{U} \to D$ é uma homotopia de aplicações compactas e $H(t, x) \neq x$ para qualquer $(x, t) \in [0,1] \times \partial U$;

(I_4) (Permanência): $i(T, U, D) = i(T, U \cap Y, Y)$, se Y é um retrátil de D e $T(\overline{U}) \subset Y$.

As propriedades acima, seguem das propriedades do Grau de Leray-Schauder, e podem ser encontradas em [22].

O teorema a seguir, generaliza as propriedades de excisão e solução do Grau de Leray-Schauder.

Teorema 36. *Sob as hipóteses da Definição 15, temos que o índice satisfaz:*

a) (excisão): $i(T, U, D) = i(T, U_0, D)$, sempre que U_0 é um subconjunto aberto de U tal que T não tem ponto fixo em $\overline{U} \setminus U_0$.

b) (Solução): se $i(T, U, D) \neq 0$, então T tem no mínimo um ponto fixo em U.

Demonstração. **Prova de** a): Observando que

$$i(T, \emptyset, 0) = d(I - TR, B(0, r) \cap R^{-1}(\emptyset), 0) = d(I - TR, \emptyset, 0) = 0,$$

e, pondo $U_1 = U_0$ e $U_2 = \emptyset$ em (I_2), obtemos que

$$i(T, U, D) = i(T, U_0, D) + i(T, \emptyset, D) = i(T, U_0, D).$$

Prova de b): Se T não tem ponto fixo em U, defina $U_0 = \emptyset$ em a), para obtermos

$$i(T, U, D) = i(T, \emptyset, D) = 0,$$

que é uma contradição.

□

1.8 Teorema do Índice de Ponto Fixo em cone

Nesta seção provaremos o Teorema A. Mas antes, prcisaremos de alguns lemas auxiliares.

Lembrando que, um espaço vetorial normado X é separável, se existe um subconjunto enumerável $K = \{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$ denso em X, ou seja, $\overline{K} = X$. Sob estas condições, o subespaço gerado por K é um subespaço fechado de X e, portanto um Espaço de Banach. Utilizaremos este fato na demontração do lema abaixo.

Os dois lemas a seguir, nos dão informações sobre o Índice de Ponto Fixo de um operador compacto T se, conhecemos um outro operador compacto, definido somente em $P \cap (\partial\Omega)$ e satisfazendo algumas relações com T, onde Ω é um subconjunto aberto e limitado de X.

Lema 37. *Seja X um espaço de Banach real e $P \subset X$ um cone fechado e convexo. Suponha que $T : P \cap \overline{\Omega} \to P$, $B : P \cap \partial\Omega \to P$ são compactos e $\Omega \subset X$ é aberto e limitado. Suponha ainda que:*

(a) $\inf\limits_{x \in P \cap \partial\Omega} ||Bx|| > 0$;

(b) $x - T(x) \neq tB(x)$, *para todo* $x \in P \cap \partial\Omega$ *e* $t \geqslant 0$.

Então

$$i(T, P \cap \Omega, P) = 0.$$

Demonstração. Como $P \cap \overline{\Omega}$ é fechado, segue pelo Teorema da Extensão de Dugundji, que podemos estender B, a um operador compacto de X sobre $\overline{conv}(B(P \cap \partial\Omega))$. Em particular, por restrição, podemos estender B, a um operador compacto de $P \cap \overline{\Omega}$ a P e

$$B(P \cap \overline{\Omega}) \subset \overline{conv}(B(P \cap \partial\Omega)). \tag{1.70}$$

No que segue, denotaremos por

$$M = conv(B(P \cap \partial\Omega)) \text{ e } F = B(P \cap \partial\Omega).$$

Primeiramente, mostraremos que

$$\inf_{y \in \overline{M}} ||y|| > 0. \tag{1.71}$$

Seja $X_0 = span(F)$ o subespaço de X gerado por F. Desde que, B é compacto, F é relativamente compacto e portanto X_0 é separável. O conjunto $P_0 = P \cap X_0$ é um cone de X_0. Com efeito, X_0 é um Espaço de Banach, $P_0 \neq \emptyset$, pois $0 \in P \cap X_0$, P_0 é convexo, porque é interseção de convexos e se:

$*$ $x \in P_0, \lambda \geq 0$, então $\lambda x \in P$ e $\lambda x \in X_0$, o que implica que $\lambda \in P_0$, pois X_0 é um subespaço e P é um cone;

$**$ $x \in P_0$ e $-x \in P_0$, então $x \in P$ e $-x \in P$, e como P é um cone $x = 0$.

Como $F \subset P$, pois B é um operador de P sobre (estamos considerando a mesma notação para B e sua extensão a $P \cap \overline{\Omega}$) e $F \subset X_0$, temos que $F \subset P_0$ e $\overline{conv}(F) \subset P_0$, porque P_0 é fechado e convexo.

Em virtude do Teorema 60, existe $f_0 \in X_0^*$, tal que $f_0(y) > 0$ para todo $y \in P_0$, com $y \neq 0$. Afirmamos que,

$$\inf_{y \in F} f_0(y) = \sigma > 0. \tag{1.72}$$

Com efeito, se $\sigma = 0$, então existiria $\{y_k\} \subset F$ tal que $f_0(y_k) \to 0$. Como F é relativamente compacto, podemos assumir, que a menos de subsequência $y_k \to y_0 \in P_0$ e, assim $f_0(y_k) \to f_0(y_0)$, e por unicidade do limite $f_0(y_0) = 0$. Pelo Teorema 60, temos que $y_0 = 0$ e, consequentemente $||y_k|| \to 0$ o que contradiz a hipótese (**a**). Logo (1.72), é satisfeito.

Para qualquer

$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \in M,$$

onde $y_i \in F, \lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, temos por (1.72), que

$$f_0(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_0(y_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma = \sigma$$

e, portanto por continuidade

$$f_0(y) \geq \sigma, \forall y \in \overline{M}. \tag{1.73}$$

Desde que, $\overline{M} = \overline{conv}(F)$ é compacto, pois o fecho da envoltória convexa de um conjunto relativamente conpacto é compacta e, como a norma é semicontínua inferiormente, existe $z_0 \in \overline{M}$ tal que

$$\inf_{y \in \overline{M}} ||y|| = ||z_0||. \tag{1.74}$$

Por (1.73), $f_0(z_0) \geq \sigma$, e isto implica que $z_0 \neq 0$, pois $f_0(y) \neq 0$ implica que $y \neq 0$ e, como $z_0 \in \overline{M}$, segue que $z_0 \neq 0$. Por (1.74), segue que (1.71) é satisfeito. De (1.70) e (1.71) obtemos que

$$\inf_{x \in P \cap \overline{\Omega}} ||Bx|| = a > 0. \tag{1.75}$$

Agora, é fácil verificar que $i(T, P \cap \Omega, P) = 0$. Seja

$$H(t, x) = T(x) + tB(x), x \in P \cap \overline{\Omega}, t \in [0, 1]$$

uma homotopia de operadores compactos. Pela hipótese (**b**), temos que $x \neq p \cap \partial\Omega$, para todo $t \in [0, 1]$. Pela Invariância Sobre Homotopia

$$i(T + tB, P \cap \Omega, P) = i(A, P \cap \Omega, P) \neq 0, \forall t > 0.$$

Observe que, estamos supondo $t > 0$ e, não somente $0 \leq t \leq 1$. Isso é possível, pois, observando a demonstração do Teorema 27, ela continua válida se trocarmos $[0, 1]$ por $[0, a], a > 0$. Seja

$$t_0 > (b + c)/a,$$

onde $b = \sup_{x \in P \cap \overline{\Omega}} ||x||$ e $c = \sup_{x \in P \cap \overline{\Omega}} ||T(x)||$. Temos que

$$i(T + t_0 B, P \cap \Omega, P) \neq 0$$

e, pela propriedade de solução do Índice de Ponto Fixo, existe $x_0 \in P \cap \Omega$ tal que

$$T(x_0) + t_0 B(x_0) = x_0.$$

Portanto

$$t_0 = \frac{||x_0 - T(x_0)||}{||B(x_0)||} \leq \frac{b+a}{a},$$

o que é uma contradição.

$\square$

O Lema 38 abaixo, é uma consequência do Lema 37.

Lema 38. *Seja $T : P \cap \overline{\Omega} \to P$ compacto, onde $\Omega \subset X$ é um subconjunto aberto de uma Espaço de Banach X. Suponha que:*

(i) $\inf\limits_{x \in P \cap \partial\Omega} ||Tx|| > 0;$

(ii) $T(x) \neq \lambda x,$ *para todo* $x \in P \cap \partial\Omega$ *e* $0 < \lambda \leqslant 1.$

Então

$$i(T, P \cap \Omega, P) = 0.$$

Demonstração. Tomando $B = A$ no Lema 37, vemos que a condição (**a**), do Lema 37, é a mesma condição (**i**). Também, a condição (**b**), do Lema 37 é verdadeira. De fato, se existissem $x_0 \in P \cap \partial\Omega$ e $t_0 \geq 0$, tal que $x_0 - T(x_0) = t_0 T(x_0)$, então $T(x_0) = \mu_0 x_0$, onde $\mu_0 = (1 + t_0)^{-1}$. Evidentemente $0 < \mu_0 \leq 1$, o que contradiz (**ii**). Portanto, do Lema 37, segue que

$$i(T, P \cap \Omega, P) = 0.$$

$\square$

Nesta seção e no Capítulo 2, usaremos as seguintes notações, para $r > 0$,

$$P_r = \{x \in P \mid ||x|| < r\},$$

$$\overline{P_r} = \{x \in P \mid ||x|| \leqslant r\},$$

$$\partial P_r = \{x \in P \mid ||x|| = r\}.$$

O teorema a seguir, será de grande utilidade no estudo do próximo capítulo. Ele será utilizado no Lema 41.

Teorema A. *Seja X um Espaço de Banach real e $P \subset X$ um cone. Suponha que $T : \overline{P_r} \to P$ é compacto, onde $r > 0$, então:*

(i) $i(T, P_r, P) = 1$, *se* $||T(x)|| < ||x||, \forall x \in \partial P_r$*;*

(ii) $i(T, P_r, P) = 0$, *se* $||T(x)|| > ||x||, \forall x \in \partial P_r$

Demonstração. **(i)** Defina

$$H : [0,1] \times \overline{P_r} \to P \text{ por } H(t,x) = tT(x).$$

Obviamente H é compacta. Também $H(t,x) \neq x$, para quaisquer $(t,x) \in [0,1] \times \partial P_r$. De fato, para $t = 0$ temos que $H(0,x) = 0$ e, $0 \notin \partial P_r$. Suponha que $t \in (0,1]$ e, que exista $x_0 \in \partial P_r$, tal que $H(t,x_0) = x_0$, então

$$tT(x_0) = x_0 \text{ implica que } t||T(x_0)|| = ||x_0||$$

e assim,

$$t||T(x_0)|| > ||T(x_0)||,$$

o que é uma contradição, pois $t \in (0,1]$ e, por (ii) $||T(x_0)|| > ||x_0||$.

Logo $H(t,x) \neq x$, para todo $(t,x) \in [0,1] \times \partial P_r$ e, pela propriedade de invariância sobre homotopia

$$i(H(1,.), P_r, P) = i(T, P_r, P) = i(H(0,.), P_r, P) = i(0, P_r, P) = 1,$$

onde a última igualdade, ocorre pela propriedade (I_1).

(ii) Por hipótese, temos que

$$\inf_{x \in \partial P_r} ||T(x)|| = \inf_{x \in P \cap \partial B_r} ||T(x)|| \geqslant \inf_{x \in \partial P_r} ||x|| = r > 0$$

e

$$T(x) \neq x, \text{ para todo } x \in \partial P_r.$$

De fato, se $T(x) = x$ para algum $x \in \partial P_r$, então

$$||T(x)|| = ||x|| > ||x||,$$

o que é uma contradição.

As condições **(i)** e **(ii)**, do Lema 38 são satisfeitas, e portanto

$$i(A, P_r, P) = 0.$$

$\square$

Finalizamos este capítulo, lembrando que a Teoria do Grau de Leray-Schauder e o Índice de Ponto Fixo, serão utilizados no Capítulo 2.

Capítulo 2

Sistemas Elípticos via Método Topológico

Neste capítulo, utilizaremos o Grau de Leray-Schauder e Índice de Ponto Fixo, juntamente com método de blow-up e métodos de sub-supersolução, para estudar o sistema

$$(S) \qquad \begin{cases} -\triangle u = \lambda f_1(x,u)g_1(x,v), \Omega \\ -\triangle v = \mu f_2(x,u)g_2(x,v), \Omega \\ u,\ v \geq 0,\ \Omega, u = v = 0, \partial\Omega \end{cases}$$

com respeito aos parâmetros $\lambda, \mu > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 3)$ é um domínio aberto limitado e suave e $f_i, g_i \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty), (0,\infty))(i = 1,2)$.

De uma forma mais específica, sob as hipóteses (para $i = 1,2$):

(H_1) g_i é limitadas superiormente em $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$;

(H_2) $g_i(x,s_1) \leq g_i(x,s_2)$ para $s_1 \leq s_2$;

(H_3) $\liminf\limits_{s\to\infty} \min\limits_{x\in\overline{\Omega}} \dfrac{f_i(x,s)}{s} > \dfrac{\delta_1}{\min\limits_{x\in\overline{\Omega}} g_i(x,0)}$, onde δ_1 é o primeiro autovalor de $(-\triangle, H_0^1)$;

(H_4) existem $p_1(x), p_2(x) \in C(\overline{\Omega}, (0,\infty))$ e $q_i \in (1, (N+2)/(N-2))$ tais que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f_i(x,s)}{s^{q_i}} = p_i(x) \text{ uniformemente com respeito a } x \in \overline{\Omega},$$

demonstraremos, seguindo as ideias em [9], o teorema principal deste capítulo:
Teorema C: *Suponha $(H_1) - (H_4)$. Então:*

i) existem números reais $\lambda_*, \mu_* > 0$ e um arco simples Γ_0 tal que excluíndo os seus pontos extremos $(\lambda_*, 0)$ e $(0, \mu_*)$, $\Gamma_0 \subset (0,\infty)^2$ separa $(0,\infty)^2$ em dois subconjuntos disjuntos O_1 e O_2 tais que o sistema (S) não tem solução, tem no mínimo uma solução ou no mínimo duas soluções positivas não triviais, de acordo com $(\lambda,\mu) \in O_2, \Gamma_0$ ou O_1 respectivamente;

ii) existem $\lambda^* \geq \lambda_*$ e $\mu^* \geq \mu_*$ tais que (S) não tem solução semitrivial, tem no mínimo *uma solução semitrivial ou tem mínimo duas soluções semitriviais positivas, se* $(\lambda,\mu) \in \{(\lambda,0) : \lambda > \lambda^*\} \cup \{(0,\mu) : \mu > \mu_*\}$, $(\lambda,\mu) \in \{(\lambda_*,0),(0,\mu_*)\}$ *ou* $(\lambda,\mu) \in \{(\lambda,0) : \lambda \in (0,\lambda^*)\} \cup \{(0,\mu) : \mu \in (0,\mu^*)\}$, *respectivamente.*

A ideia para demonstrar o **Teorema C**, será a seguinte:

Consideraremos primeiro o Problema de Dirichlet

$$(F): \qquad \begin{cases} -\triangle u = \psi, \ \Omega \\ u = 0, \ \partial\Omega, \end{cases}$$

onde ψ é contínua e, seu respectivo operador solução $\overline{S} : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$.

Em seguida, definiremos os seguintes operadores compactos

$$A^t_\lambda(.,.), B^t_\mu(.,.) : K \times K \to K \text{ e } T^t_{\lambda,\mu}(.,.) : K \times K \to K \times K,$$

por

$$(G): \qquad \begin{cases} A^t_\lambda(u,v) = \lambda\overline{S}[th_1(x,u,v) + (1-t)h_1(x,u,0)] \\ B^t_\mu(u,v) = \mu\overline{S}[th_2(x,u,v) + (1-t)h_2(x,u,0)] \\ T^t_{\lambda,\mu}(u,v) = (A^t_\lambda(u,v), B^t_\mu(u,v)) \end{cases}$$

para $t \in [0,1]$, onde $h_1(x,u,v) = f_1(x,u)g_1(x,v)$, $h_2(x,u,v) = f_2(x,v)g_2(x,u)$,

$$E = \left\{u \in C(\overline{\Omega}) : u = 0 \text{ em } \partial\Omega\right\} \text{ e } K = \left\{u \in E : u \geq 0 \text{ em } \overline{\Omega}\right\}.$$

Observando que, encontrar soluções positivas para (S), com respeito aos parâmetros λ e μ é, equivalente a encontrar pontos fixos para os operadores $T^1_{\lambda,\mu}$, com respeito aos parâmetros λ e μ, voltaremos nossa atenção ao estudo dos operadores $T^1_{\lambda,\mu}$. De uma forma mais clara, definiremos o conjunto

$$H = \left\{(\lambda,\mu) \in [0,\infty)^2 : \text{ existe } (u,v) \in K \times K \text{ tal que } T^1_{\lambda,\mu}(u,v) = (u,v)\right\}$$

e, estudaremos suas principais propriedades topológicas.

Através de vários lemas, estudaremos as propriedades de H. Mostraremos que H é não-vazio, fechado e limitado e que $int(H)$(o interior de H) é não-vazio. No Lema 45, observamos que os números

$$\lambda_* = \sup\{\lambda \in (0,\infty) : (\lambda,0) \in \partial(int(H))\}$$

e

$$\mu_* = \sup\{\mu \in (0,\infty) : (0,\mu) \in \partial(int(H))\},$$

são positivos.

Após o Lema 45, definimos

$$L(t) = \left\{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \mu = \lambda - t, t \in [-\mu_*, \lambda_*]\right\},$$

e assim,

$$\lambda(t) = \sup\left\{\lambda : (\lambda, \mu) \in L(t) \cap \overline{int(H)}\right\}, t \in [-\mu_*, \lambda_*]$$

e

$$\mu(t) = \lambda(t) - t,\ \Gamma(t) = (\lambda(t),\ \mu(t)),\ t \in [-\mu_*, \lambda_*],$$

ficam bem definidos, pelo fato de H ser limitado.

Mostraremos, no Lema 47 que:

$$\Gamma(t) = (\lambda(t), \mu(t)),\ t \in [-\mu_*, \lambda_*]$$

é um arco simples e contínuo. No Lema 47, também mostraremos que

$$\partial(int(H)) = \{\Gamma(t) : t \in [-\mu_*, \lambda_*]\} \cup \{(\lambda, 0) : \lambda \in [0, \lambda_*]\} \cup \{(0, \mu) : \mu \in [0, \mu_*]\}.$$

Para completar a estrutura do conjunto H, o Lema 48, nos fornece a existência de dois números $\lambda^* \geq \mu_*$ e $\mu^* \geq \mu_*$ tais que

$$\partial H = \{\Gamma(t) : t \in [-\mu_*, \lambda_*]\} \cup \{(\lambda, 0) : \lambda \in [0, \lambda^*]\} \cup \{(0, \mu) : \mu \in [0, \mu^*]\}.$$

De posse de toda esta estrutura, a curva Γ_0, a qual o nosso teorema principal se refere, é obtida restrigindo Γ ao intevalo aberto $(-\mu_*, \lambda_*)$. Então, finalizamos a demonstração do **Teorema C** utilizando métodos de sub-supersolução e Índice de Ponto Fixo.

Vale ressaltar que, no decorrer deste capítulo, vários resultados importantes de Equações Diferenciais Parciais serão utilizados. O princípio do máximo, será utilizado extensivamente, assim, como imersões compactas. No Lema 42, usamos estimativas interior de Gilbarg e Trudinger [21] e métodos de blow-up de Gidas e Spruck [19], [20]. O teorema de estimativa apriori, contido em Ambrosetti e Prodi [4] desempenha um papel importante, tanto em lemas, como para verificar se os operadores definidos neste capítulo estão bem definidos. Os demais resultados, podem ser confirmados ao longo do capítulo.

2.1 Teorema de Sub-supersolução via o Grau de Leray-Schauder

Nesta seção utilizaremos o Grau de Leray-Schauder para provar que o sistema

$$(Z): \qquad \begin{cases} -\triangle u = F(x,u,v), x \in \Omega \\ -\triangle v = G(x,u,v), x \in \Omega \\ u = v = 0, x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

possui uma solução, onde $F, G : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são contínuas e satisfazem condições apropriadas.

A noção de sub-supersolução, será de grande importância para provar que o sistema (Z) possui solução e na demonstração do **Teorema C**. Ela, fornecerá uma ideia de como construir um "bom domínio"para o operador $T^1_{\lambda,\mu}$, definido na seção 2.2. Veremos através do Índice de Ponto Fixo, que (S) tem pelo menos uma solução positiva nesse domínio.

Definição 16. *Sejam $\underline{u}, \underline{v} \in C^2(\overline{\Omega})$. Dizemos que $(\underline{u}, \underline{v})$ é uma subsolução (respectivamente subsolução estrita) de (Z), se*

$$\begin{cases} -\triangle \underline{u} \leqslant F(x,\underline{u},\underline{v})(<), \ x \in \Omega \\ -\triangle \underline{v} \leqslant G(x,\underline{u},\underline{v})(<), \ x \in \Omega \\ \underline{u} \leqslant 0(<0), \underline{v} \leqslant 0(<0), \ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Uma supersolução (respectivamente supersolução estrita) $(\overline{u}, \overline{v}) \in C^2(\overline{\Omega}) \times C^2(\overline{\Omega})$ é definida de maneira análoga, satisfazendo as desigualdades $\geq$ $(>)$.

Definição 17. *Uma função $F : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é monótona não-decrescente com respeito a t, se para todos x e s fixos*

$$F(x,s,t_1) \leqslant F(x,s,t_2), \ \textit{para } t_1 \leq t_2.$$

De maneira análoga, definimos F monótona não-decrescente com respeito a s.

Considere o operador ponto fixo associado a (Z)

$$T : C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega}), \text{ onde } T(\phi,\psi) := (u,v),$$

com $(u,v) \in C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$ sendo a única solução de

$$\begin{cases} -\triangle u = F(x,\phi,\psi), \ x \in \Omega \\ -\triangle v = G(x,\phi,\psi), \ x \in \Omega \\ u = v = 0, \ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Pelo Torema 65, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$||T(\Phi,\Psi)||_{C^{1,\alpha}\times C^{1,\alpha}} \leqslant C_1||(F(\cdot,\Phi,\Psi),G(\cdot,\Phi,\Psi))||_{C\times C}, \tag{2.2}$$

para toda $(\Phi,\Psi)\in C(\overline{\Omega})\times C(\overline{\Omega})$. Por essa desigualdade, segue que, se $\{(\Phi_n,\Psi_n)\}\subset C(\overline{\Omega})\times C(\overline{\Omega})$ for limitada, então $\{T(\Phi_n,\Psi_n)\}\subset C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})\times C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ é limitada. De fato, sendo $\{(\Phi_n,\Psi_n)\}$ limitada e F,G contínuas, segue que existe uma constante $C_2>0$, tal que

$$\max\{|F(x,\Phi_n(x),\Phi_n(x))|,|G(x,\Phi_n(x),\Phi_n(x))|\} < C_2, \text{ para todo } x\in\overline{\Omega},$$

isto é, $||(F(\cdot,\Phi_n,\Psi_n),(G(\cdot,\Phi_n,\Psi_n)||_{C\times C} < C_2$. Disso e de (2.2), segue que $\{T(\Phi_n,\Psi_n)\}$ é limitada em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})\times C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Assim, $T: C(\overline{\Omega})\times C(\overline{\Omega})\to C(\overline{\Omega})\times C(\overline{\Omega})$ é compacto, pois $\{(\Phi_n,\Psi_n)\}$ limitada em $C(\overline{\Omega})\times C(\overline{\Omega})$, implica que $\{T(\Phi_n,\Psi_n)\}$ é limitada em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})\times C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e, disso segue que $\{T(\Phi_n,\Psi_n)\}$ converge, a menos de subsequência em $C(\overline{\Omega})\times C(\overline{\Omega})$, pois $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})\times C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})\hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega})\times C(\overline{\Omega})$ (ver Teorema 62).

Observação: Durante essa seção, suporemos que $F(\cdot,\Phi,\Psi),G(\cdot,\Phi,\Psi)\in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ $(0<\alpha<1)$, para toda $\Phi,\Psi\in C(\overline{\Omega})$. Dessa forma, pelo Teorema 65, as soluções de (2.1) pertencem a $C^2(\Omega)\times C^2(\Omega)$, para toda $\Phi,\Psi\in C(\overline{\Omega})$. Em particular, as soluções de (Z) pertencem a $C^2(\Omega)\times C^2(\Omega)$.

A construção do operador T, nos auxiliará na demontração do teorema a seguir. Este teorema estabelece condições para que (Z) admita solução.

Teorema B : *Suponha que $F(x,s,t)$ é monótona não-decrescente com respeito a t e $G(x,s,t)$ é monótona não-decrescente com respeito a s. Suponha ainda que $(\underline{u},\underline{v})$, $(\overline{u},\overline{v})$ são subsolução estrita e supersolução estrita de (Z), respectivamente, tais que $(\underline{u}(x),\underline{v}(x))<(\overline{u}(x),\overline{v}(x))$, para todo $x\in\overline{\Omega}$. Então $d(I-T,\langle\underline{u},\overline{u}\rangle\times\langle\underline{v},\overline{v}\rangle,(0,0))=1$, onde*

$$\langle\underline{u},\overline{u}\rangle\times\langle\underline{v},\overline{v}\rangle=\left\{(u,v)\in C(\overline{\Omega})\times C(\overline{\Omega}):(\underline{u},\underline{v})<(u,v)<(\overline{u},\overline{v})\ \textit{em}\ \overline{\Omega}\right\}.$$

Em particular, o sistema (Z) tem no mínimo uma solução (u,v) tal que $u,v\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Primeiramente, provaremos que $\langle\underline{u},\overline{u}\rangle\times\langle\underline{v},\overline{v}\rangle$ é aberto em $C(\overline{\Omega})\times C(\overline{\Omega})$, e assim, tem sentido falar no Grau de Leray-Schauder do operador $I-T$. Para mostrar tal fato, é suficiente provar que

$$\langle\underline{u},\overline{u}\rangle=\left\{u\in C(\overline{\Omega}):\underline{u}<u<\overline{u}\text{ em }\overline{\Omega}\right\}$$

e

$$\langle\underline{v},\overline{v}\rangle=\left\{v\in C(\overline{\Omega}):\underline{v}<v<\overline{v}\text{ em } em\overline{\Omega}\right\},$$

são abertos em $C(\overline{\Omega})$, devido ao **Teorema 50**. Mostraremos que o primeiro conjunto acima é aberto, pois a demonstração para o segundo é análoga.

Seja $u \in \langle \underline{u}, \overline{u} \rangle$. Como $u, \underline{u}$, $\overline{u}$ são contínuas e, $\underline{u}(x) < u(x) < \overline{u}(x)$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, então existem $x_0, \overline{x}_0 \in \overline{\Omega}$, tais que

$$\delta_1 := |\underline{u}(x_0) - u(x_0)| = \inf \left\{ |\underline{u}(x) - u(x)| : x \in \overline{\Omega} \right\} > 0$$

e

$$\delta_2 := |\overline{u}(\overline{x}_0) - u(\overline{x}_0)| = \inf \left\{ |\overline{u}(x) - u(x)| : x \in \overline{\Omega} \right\} > 0.$$

Considere $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Temos que $B(u, \delta) \subset \langle \underline{u}, \overline{u} \rangle$. De fato, caso contário, existiria $f \in B(u, \delta)$, com $f \notin \langle \underline{u}, \overline{u} \rangle$, ou seja, $||f - u||_C < \delta$ e existe $\overline{x} \in \overline{\Omega}$, tal que $f(\overline{x}) \leqslant \underline{u}(\overline{x})$ ou $f(\overline{x}) \geqslant \overline{u}(\overline{x})$.

Suponha que $f(\overline{x}) \leqslant \underline{u}(\overline{x})$. Então, $f(\overline{x}) \leqslant \underline{u}(\overline{x}) < u(\overline{x})$, o que implica que

$$|u(\overline{x}) - f(\overline{x})| \geqslant |u(\overline{x}) - \underline{u}(\overline{x})| \geqslant \delta_1 \geqslant \delta$$

e disso segue que

$$||u - f||_{C(\overline{\Omega})} \geqslant \delta,$$

o que é uma contradição. Se $\overline{u}(\overline{x}) \leqslant f(\overline{x})$, de forma análoga, chegaremos a mesma contradição.

Dessa forma, concluímos que $\langle \underline{u}, \overline{u} \rangle \times \langle \underline{v}, \overline{v} \rangle$ é aberto. Obviamente, esse conjunto também é limitado superiormente por $||(\overline{u}, \overline{v})||_{C \times C}$ e inferiormente por $||(\underline{u}, \underline{v})||_{C \times C}$. Assim, tem sentido falar no grau de Leray-Schauder de $I - T$.

Agora, definimos as funções modificadas $F^*, G^* : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$F^*(x, y, z) = F(x, p_1(x, y, z), P_2(x, y, z)), \; G^*(x, y, z) = G(x, p_1(x, y, z), P_2(x, y, z)),$$

onde

$$p_1(x, y, z) = \max \{\underline{u}(x), \min \{y, \overline{u}(x)\}\} \text{ e } P_2(x, y, z) = \max \{\underline{v}(x), \min \{z, \overline{v}(x)\}\}.$$

A função F^* é contínua em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2$, pois é a composta de funções contínuas. Por outro lado, das desigualdades

$$\underline{u}(x) \leqslant p_1(x, y, z) \leqslant \overline{u}(x) \text{ e } \underline{v}(x) \leqslant P_2(x, y, z) \leqslant \overline{v}(x),$$

para todo $(x, y, z) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2$, segue que p_1, P_2 são limitadas, porque $\underline{u}, \overline{u}, \underline{v}$ e $\overline{v}$ são limitadas, por serem contínuas em um compacto. Disso segue que F^* é limitada em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2$, pois é a composta da função contínua F, com uma função vetorial, cujas funções coordenadas são limitadas.

Analogamente, G^* é limitada.

Considere o problema modificado

$$\begin{cases} -\triangle u = F^*(x,u,v), \ x \in \Omega \\ -\triangle v = G^*(x,u,v), \ x \in \Omega \\ \quad u = v = 0, \ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

e o correspondente operador compacto

$$T^*(\phi,\psi) : C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega}),$$

com $T^*(\phi,\psi) := (u,v) \in C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$ sendo a única solução de

$$\begin{cases} -\triangle u = F^*(x,\phi,\psi), x \in \Omega \\ -\triangle v = G^*(x,\phi,\psi), x \in \Omega \\ \quad u = v = 0, x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

A demonstração do teorema, é uma consequência das seguintes afirmações:
Afirmação 1: $T^*(\phi,\psi) = T(\phi,\psi)$, para $(\phi,\psi) \in \langle \underline{u},\overline{u}\rangle \times \langle \underline{v},\overline{v}\rangle$.
De fato, temos que

$$\underline{u} < \phi < \overline{u}, \ \underline{v} < \psi < \overline{v}$$

e, desde que

$$p_1(x,\phi(x),\psi(x)) = max\,\{\underline{u}(x),\phi(x)\} = \phi(x), \ P_2(x,\phi(x),\psi(x)) = max\,\{\underline{v}(x),\psi(x)\} = \psi(x),$$

concluímos que

$$F^*(x,\phi,\psi) = F(x,p_1(x,\phi,\psi),P_2(x,\phi,\psi)) = F(x,\phi,\psi)$$

e

$$G^*(x,\phi,\psi) = G(x,p_1(x,\phi,\psi),P_2(x,\phi,\psi)) = G(x,\phi,\psi).$$

Portanto, em $\langle \underline{u},\overline{u}\rangle \times \langle \underline{v},\overline{v}\rangle$, os sistemas (2.1) e (2.4) são equivalentes, ou seja, $T^*(\phi,\psi) = T(\phi,\psi)$.

Afirmação 2: Se (u,v) for solução de (2.3), então $(u,v) \in \langle \underline{u},\overline{u}\rangle \times \langle \underline{v},\overline{v}\rangle$. De fato, provaremos que $\underline{u} < u$ em $\overline{\Omega}$, pois os casos $u < \overline{u}$ e $\underline{v} < v < \overline{v}$ são similares. Primeiramente, provaremos que $\underline{u} \leqslant u$ em $\overline{\Omega}$. Por contradição, assuma que exista $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que $u(x_0) < \underline{u}(x_0)$. Observe que, para $x \in \partial\Omega$, temos que $u(x) = 0$ e $\underline{u}(x) < 0$, e assim, devemos, necessariamente ter $x_0 \in \Omega$. Considere a função contínua em Ω, $\underline{u} - u$. Pela continuidade de $\underline{u} - u$, existe um aberto não-vazio Ω_0, tal que

$$\begin{cases} u(x) < \underline{u}(x), \ x \in \Omega_0 \\ u(x) = \underline{u}(x), \ x \in \partial\Omega_0. \end{cases}$$

Segue, da continuidade de $\underline{u} - u$ no compacto $\overline{\Omega}_0$, que esta função, tem um máximo positivo em Ω_0. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \triangle(\underline{u}(x) - u(x)) &> -F(x, \underline{u}(x), \underline{v}(x)) + F^*(x, u(x), v(x)) \\ &= F(x, p_1(x, u(x), v(x)), P_2((x, u(x), v(x)) - F(x, \underline{u}(x), \underline{v}(x)) \\ &= F(x, \underline{u}(x), P_2(x, u(x), v(x)) - F(x, \underline{u}(x), v(x)) \geq 0, \end{aligned}$$

para todo $x \in \Omega_0$, onde a última desigualdade é verdadeira porque $F(x, s, t)$ é quase monótona não-decrescente em t e, $P_2(x, u(x), v(x)) \geq v(x)$. Pelo princípio do máximo (ver Teorema 68), temos que $\underline{u} - u$ tem um máximo em $\partial\Omega_0$. Mas isso é uma contradição, pois $\underline{u} - u$ tem um máximo positivo em Ω_0. Isso mostra que $\underline{u} \leq u$, em $\overline{\Omega}$.

Agora, provaremos que $\underline{u} < u$ em $\overline{\Omega}$. Segue, do fato de $\underline{u}$ ser subsolução estrita de (2.3) e, pela condição de fronteira de (2.3), que $\underline{u}(x) < 0 = u(x)$, para todo $x \in \partial\Omega$. Por contradição, assuma que existe $x^* \in \Omega$, tal que $\underline{u}(x^*) = u(x^*)$. Então, x^* é um ponto de máximo de $\underline{u} - u$ e satisfaz

$$\triangledown \underline{u}(x^*) = \triangledown u(x^*) \text{ e } \triangle\,(\underline{u} - u)(x^*) \leq 0.$$

Por outro lado, pela definição de F^* e, usando o fato de que $F(x, s, t)$ é monótona não-decrescente com respeito a s, segue que

$$\begin{aligned} \triangle(\underline{u} - u)(x^*) &> F^*(x^*, u(x^*), v(x^*)) - F(x^*, \underline{u}(x^*), \underline{v}(x^*)) \\ &= F(x^*, p_1(x^*, u(x^*), v(x^*)), P_2(x^*, u(x^*), v(x^*)) - F(x^*, \underline{u}(x^*), \underline{v}(x^*)) \\ &= F(x^*, u(x^*), P_2(x^*, u(x^*), v(x^*)) - F(x^*, \underline{u}(x^*), \underline{v}(x^*)) \geqslant 0, \end{aligned}$$

o que é uma contradição.

Afirmação 3: Existe uma bola $B((0,0), r) = \big\{(u, v) \in C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega}) : ||(u, v)||_{C \times C} < r\big\}$, tal que $T^*(C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})) \subset B((0,0), r)$, $\langle \underline{u}, \overline{u} \rangle \times \langle \underline{v}, \overline{v} \rangle \subset B((0,0), r)$ e $\langle \underline{u}, \overline{u} \rangle \times \langle \underline{v}, \overline{v} \rangle \cap (\partial B((0,0), r)) = \emptyset$.

Com efeito, sendo F^* e G^* limitadas, existe uma constante $C_3 > 0$, tal que

$$||(F^*(\cdot, \Phi, \Psi), G^*(\cdot, \Phi, \Psi))||_{C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})} \leqslant C_3 \text{ para todo } (\Phi, \Psi) \in C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$$

e, pelo **Teorema** 65, existe uma constante $C_4 > 0$, tal que

$$||T^*(\Phi, \Psi)||_{C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})} \leqslant C_4 ||(F^*(x, \Phi, \Psi), G^*(x, \Phi, \Psi))||_{C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})} \leqslant C_4 C_3,$$

para todo $(\Phi, \Psi) \in C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$.

Por outro lado, $\langle \underline{u}, \overline{u} \rangle \times \langle \underline{v}, \overline{v} \rangle$ é limitado, logo, existe um $r > C_4 C_3$, tal que

$$T^*(C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})) \subset B((0,0), r), \ \langle \underline{u}, \overline{u} \rangle \times \langle \underline{v}, \overline{v} \rangle \subset B((0,0), r)$$

e

$$\langle \underline{u}, \overline{u} \rangle \times \langle \underline{v}, \overline{v} \rangle \cap (\partial B((0,0), r)) = \emptyset.$$

Utilizaremos as afirmações acima, para aplicar algumas propriedades do Grau de Leray-Schauder aos operadores $I - T$, $I - T^*$. Lembrando que, $T = T^*$ em $\langle \underline{u}, \overline{u} \rangle \times \langle \underline{v}, \overline{v} \rangle$, obtemos que

$$d(I - T, \langle \underline{u}, \overline{u} \rangle \times \langle \underline{v}, \overline{v} \rangle, (0,0)) = d(I - T^*, \langle \underline{u}, \overline{u} \rangle \times \langle \underline{v}, \overline{v} \rangle, (0,0)).$$

Pela afirmação 2, todas as soluções de (2.3) pertencem a $\langle \underline{u}, \overline{u} \rangle \times \langle \underline{v}, \overline{v} \rangle$. Desse fato, segue que $(0,0) \notin (I - T^*)(B((0,0), r) \setminus \langle \underline{u}, \overline{u} \rangle \times \langle \underline{v}, \overline{v} \rangle)$, pois caso contrário, existiria $(\phi, \psi) \in B((0,0), r) \setminus \langle \underline{u}, \overline{u} \rangle \times \langle \underline{v}, \overline{v} \rangle)$, tal que

$$T^*(\phi, \psi) = (\phi, \psi),$$

e isso significa que (ϕ, ψ) é solução de (2.3), o que é uma contradição.

Pelo Corolário 33, temos que

$$d(I - T^*, \langle \underline{u}, \overline{u} \rangle \times \langle \underline{v}, \overline{v} \rangle, (0,0)) = d(I - T^*, B((0,0), r), (0,0)).$$

Finalmente, para completar a demonstração do teorema, consideraremos a homotopia

$$H(t, (\phi, \psi)) = tT^*(\phi, \psi), \ \text{onde} \ (t, (\phi, \psi)) \in [0,1] \times \overline{B}((0,0), r)$$

e, provaremos a última afirmação.

Afirmação 4. $(0,0) \notin (I - H)([0,1] \times \partial B((0,0), r))$.

Com efeito, suponha que exista $(t, (\phi, \psi)) \in [0,1] \times \partial B((0,0), r)$, tal que

$$tT^*(\phi, \psi) = (\phi, \psi).$$

Faremos as seguintes hipóteses sobre t:

$(*)$ $t = 1$. Nesse caso,

$$T^*(\phi, \psi) = (\phi, \psi)$$

e, pela afirmação 3, segue que (ϕ, ψ) seria solução de (2.3) fora de $\langle \underline{u}, \overline{u} \rangle \times \langle \underline{v}, \overline{v} \rangle$, o que é uma contradição.

$(**)$ $0 \leqslant t < 1$. Sobre esta hipótese, segue que

$$r = ||(\phi, \psi)||_{C\times C} = t||T^*(\phi, \psi)||_{C\times C} \leqslant tr < r,$$

o que é impossível.

Assim, podemos aplicar o Teorema 27, ou seja, a Invariância Sobre Homotopia e, obter

$$d(I - T^*, B((0,0), r), (0,0)) = d(I, B((0,0), r), (0,0)) = 1.$$

Lembrando, todas as igualdades acima, obtemos que

$$\begin{aligned} d(I - T, \langle \underline{u}, \overline{u}\rangle \times \langle \underline{v}, \overline{v}\rangle, (0,0)) &= d(I - T^*, \langle \underline{u}, \overline{u}\rangle \times \langle \underline{v}, \overline{v}\rangle, (0,0)) \\ &= d(I - T^*, B((0,0), r), (0,0)) \\ &= d(I, B((0,0), r), (0,0)) = 1. \end{aligned}$$

Segue, do Teorema 26 (propriedade de solução), que (2.1) tem solução. □

O próximo corolário, generaliza o teorema anterior, para um domínio tecnicamente maior. Ele, será utilizado no Lema 43.

Corolário 39. *Suponha que $F(x,s,t)$ é monótona não-decrescente com respeito a t e $G(x,s,t)$ é monótona não-decrescente com respeito a s. Suponha ainda que $(\underline{u}, \underline{v})$ e $(\overline{u}, \overline{v})$ são subsolução e supersolução de (Z), respectivamente, tais que $(\underline{u}(x), \underline{v}(x)) \leqslant (\overline{u}(x), \overline{v}(x))$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. Então o sistema (Z) tem no mínimo uma solução (u,v) com $(u,v) \in [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$, onde*

$$[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}] = \left\{(u,v) \in C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega}) : (\underline{u}, \underline{v}) \leqslant (u,v) \leqslant (\overline{u}, \overline{v}),\ \ em\ \overline{\Omega}\right\}.$$

Em particular $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Considere F^*, G^* e T^*, como no teorema anterior. Denotaremos por

$$\Lambda = (\{\underline{u}\} \times [\underline{v}, \overline{v}]) \cup (\{\overline{u}\} \times [\underline{v}, \overline{v}]) \cup ([\underline{u}, \overline{u}] \times \{\underline{v}\}) \cup ([\underline{u}, \overline{u}] \times \{\overline{v}\})$$

a fronteira de $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$ e $\langle \underline{u}, \overline{u}\rangle \times \langle \underline{v}, \overline{v}\rangle$.

Se o operador T, possui um ponto fixo em Λ, o teorema acabou, pois os pontos fixos de T são soluções de (Z). Suponha que T não tenha ponto fixo em Λ. Nesse caso, procedemos como no **Teorema B** e mostramos que

$$d(I - T, \langle \underline{u}, \overline{u}\rangle \times \langle \underline{v}, \overline{v}\rangle, (0,0)) = 1,$$

o que implica, pelo Teorema 26 (propriedade de solução), que (Z) possui uma solução.

□

2.2 Multiplicidade Global de Soluções Positivas

Nesta seção, provaremos nosso resultado principal. Para todo $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, definiremos um operador compacto $T^1_{\lambda,\mu}$, associado ao sistema (S) e estudaremos, através de vários lemas, as propriedades Topológicas do conjunto

$$H = \left\{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : T^1_{\lambda,\mu} \text{ possui ponto fixo em } K \times K\right\} \text{ (ver notação abaixo)},$$

para provar a existência de soluções de (S). Uma segunda solução, será encontrada utilizando Índice de Ponto Fixo.

Vários resultados importantes, sobre Equações Diferenciais Parciais serão utilizados ao longo desta seção, tais como: regularização de soluções, princípio do máximo e método de blow-up.

Agora, estabeleceremos as estruturas analíticas funcionais, para a prova do Teorema A. Como primeiro passo, definiremos os operadores $T^1_{\lambda,\mu}$. Mas antes, estabeleceremos algumas notações e faremos algumas definições.

Por conveniência, introduziremos as seguintes notações, durante toda esta seção:

$$E = \left\{u \in C(\overline{\Omega}) : u = 0, \text{ em } \partial\Omega\right\},$$

$$K = \left\{u \in E : u(x) \geqslant 0, \forall x \in \overline{\Omega}\right\} \subset E,$$

$$K_r = \{u \in K : ||u|| < r\},$$

$$\partial K_r = \{u \in K : ||u|| = r\}.$$

Observe que E é um Espaço de Banach, pois é um subespaço fechado de $C(\overline{\Omega})$ e que K é um cone de E.

Observação 1: Durante essa seção, suporemos que $f_1(\cdot, u)g_1(\cdot, v), f_2(\cdot, v)g_2(\cdot, u) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ $(0 < \alpha < 1/2)$, para toda $u, v \in K$. Assim, pelo Teorema 65, as soluções de (S) pertencem a $C^2(\overline{\Omega}) \times C^2(\overline{\Omega})$.

O lema a seguir, restringe o estudo do sistema (S), com respeito aos parâmetros λ, μ ao primeiro quadrante de $\mathbb{R}^2$.

Lema 40. *Se (u, v) for uma solução de (S) para algum $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, então $(\lambda, \mu) \in [0, \infty)^2$.*

Demonstração. Suponha que (u, v) seja uma solução de (S) com parâmetros $(\lambda, \mu) \notin [0, \infty)^2$.

Suponha, sem perda de generalidade, que $\lambda < 0$. Assim, $\triangle u = -\lambda f_1(x,u)g_1(x,v) > 0$, o que implica que $u \neq 0$. Pelo Teorema 68 (princípio do máximo fraco), segue que $0 \leq u(x) \leq 0$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, donde concluímos que $u = 0$. Mais isso contardiz o fato de que $u \neq 0$. Logo, se (u,v) for solução de (S) com parâmetros (λ,μ), então $(\lambda,\mu) \in [0,\infty)^2$.

□

Seja $\overline{S} : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ o operador solução do problema

$$(F) \qquad \begin{cases} -\triangle u = \psi, \ \Omega \\ u = 0, \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Sabemos que:

1 . $\overline{S}$ é linear;

2 . $\overline{S} : C(\overline{\Omega}) \to C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$;

3 . $\overline{S}$ é compacto;

4 . $\overline{S}$ é monótono não-decrescente em $C(\overline{\Omega})$.

Agora, vamos iniciar a construção dos operadores $T^1_{\lambda,\mu}$. Para $t \in [0,1]$, $(\lambda,\mu) \in [0,\infty)^2$ e $u, v \in K$, definimos

$$A^t_\lambda(.,.), B^t_\mu(.,.) : K \times K \to K \text{ e } T^t_{\lambda,\mu}(.,.) : K \times K \to K \times K$$

por

$$\begin{cases} A^t_\lambda(u,v) = \lambda\overline{S}[th_1(x,u,v) + (1-t)h_1(x,u,0)] \\ B^t_\mu(u,v) = \mu\overline{S}[th_2(x,u,v) + (1-t)h_2(x,u,0)] \\ T^t_{\lambda,\mu}(u,v) = (A^t_\lambda(u,v), B^t_\mu(u,v)), \end{cases} \tag{2.5}$$

onde $h_1(x,u,v) = f_1(x,u)g_1(x,v)$ e $h_2(x,u,v) = f_2(x,v)g_2(x,u)$.

Agora, faremos as seguintes afirmações:

Afirmação 1: Os operadores acima estão bem definidos.

É suficiente mostrar que A^t_λ está bem definido, pois o caso de B^t_μ é análogo e, $T^t_{\lambda,\mu}$ está bem definido, se A^t_λ e B^t_μ estão bem definidos.

Incialmente, pela condição de fronteira de (F), segue que $A^t_\lambda(u,v) = 0$ em $\partial\Omega$, para todo $(u,v) \in K \times K$. Para provar que $A^t_\lambda(u,v) \geq 0$ em Ω, note que

$$-\triangle A^t_\lambda(u,v) = \lambda[tf_1(x,u)g_1(x,v) + (1-t)f_1(x,u)g_1(x,0)] \text{ em } \Omega,$$

e disso segue que

$$-\triangle A^t_\lambda(u,v) \geq \lambda f_1(x,u)g_1(x,0) > 0 \text{ em } \Omega, \tag{2.6}$$

pois $f_1, g_1 \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty)), (0,\infty))$ e, pela hipótese (H_2), temos que $g_1(x,s)$ é monótona não-decrescente com respeito a s.

Como (2.6) é satisfeito, segue, do princípio do máximo, que $A^t_\lambda(u,v) \geq 0$ em Ω, isto é $A^t_\lambda(u,v) \in K$.

Afirmação 2: $A^t_\lambda(.,.), B^t_\mu(.,.), T^t_{\lambda,\mu}$ e $T_{\lambda,\mu}(u,v,t) := T^t_{\lambda,\mu}(u,v)$ são compactos.

É suficiente mostrar que

$$A^t_\lambda, B^t_\mu : K \times K \times [0,1] \to K,$$

são compactos, pois os outros casos decorrem da compacidade deles. Também, é suficiente demonstrar que A^t_λ é compacto, pois de modo análogo, mostra-se que B^t_μ é compacto.

Seja $\{(u_n,v_n,t_n)\} \subset K \times K \times [0,1]$ uma sequência limitada. Estamos considerando a norma do máximo em $K \times K \times [0,1]$. Desde que $\{(u_n,v_n,t_n)\}$ é limitada, cada componente dessa sequência é limitada no espaço a qual ela pertence, assim, podemos encontrar um conjunto compacto $\tilde{K} \subset [0,\infty)^2$, tal que $(u_n(x),v_n(x)) \in \tilde{K}$, para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Assim, segue, da continuidade de h_1 e h_2 em $\overline{\Omega} \times \tilde{K}$, que existe uma constante $C_5 > 0$, tal que

$$||t_n h_1(\cdot,u_n,v_n) + (1-t_n)h_1(\cdot,u_n,0)||_C < C_5, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \tag{2.7}$$

e isso implica que a sequência $\{t_n h_1(\cdot,u_n,v_n) + (1-t_n)h_1(\cdot,u_n,0)\} \subset C(\overline{\Omega})$ é limitada.

Usando a compacidade de $\overline{S}$ e (2.7), segue, a menos de subsequência, que

$$A^{t_n}_\lambda(u_n,v_n) = \lambda\overline{S}[t_n h_1(\cdot,u_n,v_n) + (1-t_n)h_1(\cdot,u_n,0)] \to w \text{ em } C(\overline{\Omega}), \tag{2.8}$$

quando $n \to \infty$.

A convergência (2.8), implica que $w \in K$, desde que K é um subespaço fechado de $C(\overline{\Omega})$. Disso, concluímos que $A^t_\lambda(\cdot,\cdot)$ é compacto.

Agora, veja que, para $t = 1$ encontrar pontos fixos para $T^1_{\lambda,\mu}(\cdot,\cdot)$, com espeito aos parâmetros λ, μ, é equivalente a encontrar soluções para (S), com respeito esses parâmetros. Voltaremos nossa atenção, ao estudo dos operadores $T^1_{\lambda,\mu}(\cdot,\cdot)$.

O lema a seguir, garante que o conjunto

$$H = \left\{(\lambda,\mu) \in [0,\infty)^2 : T^1_{\lambda,\mu}(\cdot,\cdot) \text{ tem ponto fixo em } K \times K\right\}$$

é não-vazio.

Lema 41. *Suponha $(H_1)-(H_2)$ satisfeitos. Então dado $r > 0$, existe um $(\lambda_r, \mu_r) \in (0, \infty)^2$ tal que para todo $(\lambda, \mu) \in [0, \lambda_r] \times [0, \mu_r] \setminus \{(0,0)\}$ o operador $T^1_{\lambda,\mu}$ tem ponto fixo não-nulo em $K_r \times K_r$.*

Demonstração. Para qualquer $r > 0$ dado, denote por

$$\alpha = \sup_{(u,v)\in\partial(K_r\times K_r)} ||\overline{S}h_1(\cdot, u, v)||_C \tag{2.9}$$

e

$$\beta = \sup_{(u,v)\in\partial(K_r\times K_r)} ||\overline{S}h_2(\cdot, u, v)||_C. \tag{2.10}$$

Afirmamos que $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. De fato, considere $(u, v) \in \partial(K_r \times K_r)$ e note que

$$h_1(x, u(x), v(x)) = f_1(x, u(x))g_1(x, v(x)) > 0 \text{ e } h_2(x, u(x), v(x)) = f_2(x, v(x))g_2(x, u(x)) > 0,$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$. Desde que, $w(x) = \overline{S}h_1(x, u(x), v(x))$ satisfaz

$$\begin{cases} -\triangle w(x) = h_1(x, u(x), v(x)), \Omega \\ w = 0, \partial\Omega \end{cases}$$

com $h_1(x, u(x), v(x)) > 0$, para todo $x \in \Omega$, segue que $w \neq 0$ em Ω, o que implica que

$$\alpha = \sup_{(u,v)\in\partial(K_r\times K_r)} ||\overline{S}h_1(\cdot, u, v)|| > 0$$

Analogamente, $\beta > 0$.

Considere $(\lambda_r, \mu_r) = (\frac{r}{2\alpha}, \frac{r}{2\beta})$. Para qualquer $(\lambda, \mu) \in [0, \lambda_r] \times [0, \mu_r]$, por (2.9), temos que

$$||A^1_\lambda(u, v)|| = \lambda||\overline{S}h_1(\cdot, u, v)|| \leqslant \alpha\lambda \leqslant \frac{r}{2} < r = ||(u, v)||, \forall(u, v) \in \partial(K_r \times K_r), \tag{2.11}$$

Analogamente,

$$||B^1_\mu(u, v)|| \leq \mu\beta < r = ||(u, v)||, \forall(u, v) \in \partial(K_r \times K_r). \tag{2.12}$$

De (2.11) e (2.12), segue que

$$||T^1_{\lambda,\mu}(u, v)|| = \max\left\{||A^1_\lambda(u, v)||, ||B^1_\mu(u, v)||\right\} < r = ||(u, v)||, (u, v) \in \partial(K_r \times K_r)$$

e, como $T^1_{\lambda,\mu}$ é compacto, segue do **Teorema A** que

$$i(T^1_{\lambda,\mu}, K_r \times K_r, K \times K) = 1$$

e, como uma consequência disso, existe $(u,v) \in K_r \times K_r$ tal que

$$T^1_{\lambda,\mu}(u,v) = (u,v).$$

Devemos ter ainda $(u,v) \neq (0,0)$, pois se $\lambda \neq 0$

$$\begin{cases} -\triangle u = \lambda h_1(x,u,v) > 0, \Omega \\ u = 0, \partial\Omega \end{cases}$$

ou, se $\mu \neq 0$

$$\begin{cases} -\triangle v = \mu h_1(x,u,v) > 0, \Omega \\ v = 0, \partial\Omega \end{cases}$$

em qualquer caso, se $\lambda \neq 0$ ou $\mu \neq 0$, temos $(u,v) \neq (0,0)$. □

Observação 2: $int(H) \subset (0,\infty)^2$.

Segue, do fato de (S) não possuir solução para $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2/[0,\infty)^2$, que $H \subset [0,\infty)^2$. Agora, devemos mostrar que, não existe em $int(H)$ pontos da forma $(\lambda,0)$ ou $(0,\mu)$ com $\lambda,\mu \geq 0$. Seja $(\lambda,\mu) \in int(H)$, então existe um quadrado aberto com $Q((\lambda,\mu),r) \subset H$, onde $r > 0$. Nesse quadrado, existe um ponto (λ_0,μ_0) tal que $\lambda_0 < \lambda$ e $\mu_0 < \mu$ e, isso implca que $(\lambda,\mu) \in (0,\infty)^2$, pois como $(\lambda_0,\mu_0) \in H$, segue que $\lambda_0,\mu_0 \geq 0$. Assim, $int(H) \subset (0,\infty)^2$.

O próximo lema, será utilizida para provar que H é fechado. Para demonstrá-lo, utilizaremos resultados de regularidade e o método de blow-up de Gidas e Spruck [19] e [20].

Lema 42. *Assuma que $(H_1)-(H_2)$ e (H_4) são satisfeitos. Defina*

$$S_u = \left\{u \in K : A^t_\lambda(u,v) = u, (\lambda,t) \in I_1 \times [0,1], (u,v) \in K \times K\right\}$$

$$S_v = \left\{v \in K : B^t_\mu(u,v) = v, (\mu,t) \in I_2 \times [0,1], (u,v) \in K \times K\right\},$$

onde $I_i = [a_i,b_i]$ $(i = 1,2)$ para constantes $b_i > a_i > 0$ dadas. Então, existem constantes $\overline{C}_i > 0$ tais que $||u|| \leqslant \overline{C}_1$, para todo $u \in S_u$ e $||v|| \leqslant \overline{C}_2$, para todo $u \in S_v$. Em particular, o conjunto

$$S_{u,v} = \left\{(u,v) \in K \times K : T^1_{\lambda,\mu}(u,v) = (u,v), (\lambda,\mu) \in I_1 \times I_2, t \in [0,1], (u,v) \in K \times K\right\}$$

é limitado.

Demonstração. Provaremos que existe uma constante $\overline{C}_1$ tal que $||u|| \leqslant \overline{C}_1$, para todo $u \in S_u$. O outro caso é similar. Nosso objetivo, será aplicar o método de blow-up de Gidas e Spruck [20]. Argumentaremos por contradição e, faremos algumas definições para chegar ao nosso objetivo.

Dados $0 < a_1 < b_1$, suponha por contradição que existam sequências $(\lambda_k,t_k) \subset I_1 \times [0,1]$ e

$(u_k, v_k) \subset K \times K$, tais que $A_{\lambda_k}^{t_k}(u_k, v_k) = u_k$ e $||u_k|| \to \infty$ quando $n \to \infty$. Isto é, existem duas sequências de números reais $(\lambda_k) \subset I_1, (t_k) \subset [0,1]$ e $(u_k, v_k) \in K \times K$, satisfazendo

$$\begin{cases} - \triangle u_k = \lambda_k[t_k h_1(x, u_k, v_k) + (1-t_k)h_1(x, u_k, 0)], \Omega \\ u_k, \ v_k \geq 0 \ \ \Omega, \ u_k = 0, \partial\Omega \end{cases} \tag{2.13}$$

e $\lim\limits_{k\to\infty} ||u_k|| = \infty$.

Desde que, o segundo membro da primeira equação de (2.13) é positivo, segue, pelo princípio do máximo que $u_k > 0$ em Ω e, portando $M_k = \sup\limits_{x\in\Omega} u_k(x) > 0$. Dessa forma, podemos concluir que o máximo de u_k é atingido em Ω, isto é, existem $(\rho_k) \subset \Omega$, tais que

$$M_k = \sup_{x\in\Omega} u_k(x) = u_k(\rho_k) \to \infty, \tag{2.14}$$

pois $||u_k|| \to \infty$, quando $k \to \infty$.

Assumiremos que $\lambda_k \to \lambda \in I_1, t_k \to t \in [0,1]$ e $\rho_k \to \rho$, quando $k \to \infty$, a menos de subsequências.

Temos dois casos a considerar:

Caso 1: $\rho \in \Omega$. Considere $2d = d_2(\rho, \partial\Omega) > 0$ e a sequência σ_k de números positivos, definida por

$$\sigma_k^{\frac{2}{q-1}} M_k = 1. \tag{2.15}$$

Agora, considere $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que $|\rho - \rho_k|_2 < d$, para todo $k > k_0$ e defina $\overline{u}_k : B(0, d/\sigma_k) \to \mathbb{R}$ por

$$\overline{u}_k(y) = \sigma_k^{\frac{2}{q-1}} u_k(x), \tag{2.16}$$

onde $y = (x - \rho_k)/\sigma_k$.

Desde que, $M_k \to \infty$, segue que $\sigma_k \to 0$. Assim,

$$\overline{u}_k(y) = \sigma_k^{\frac{2}{q-1}} u_k(x) \ \ y \in B(0, d/\sigma_k),$$

está bem definida, para k grande.

Notando que $x = \sigma_k y + \rho_k$ e, usando a regra da cadeia duas vezes, obtemos que

$$\begin{aligned} - \triangle \overline{u}_k(y) &= - \triangle \sigma_k^{\frac{2}{q-1}} u_k(\sigma_k y + \rho_k) = \sigma_k^{\frac{2q}{q-1}}(- \triangle u_k(\sigma_k y + \rho_k)) \\ &= \sigma_k^{\frac{2q}{q-1}} \lambda_k[t_k h_1(\sigma_k y + \rho_k, \sigma_k^{\frac{-2}{q-1}} \overline{u}_k(y), v_k(\sigma_k y + \rho_k)) \\ &+(1-t_k)h_1(\sigma_k y + \rho_k, \sigma_k^{\frac{-2}{q-1}} \overline{u}(y), 0)], \end{aligned} \tag{2.17}$$

para $y \in B(0, d/\sigma_k)$.

Agora, usando as hipóteses $(H_1)-(H_2)$, segue que, a sequência $\{g(x,v_n)\}$ é uniformemente limitada e, por (H_4), temos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} \left| \frac{f_1(\sigma_k y+\rho_k, \sigma_k^{\frac{-2}{q-1}}\overline{u}_k(y))}{\sigma_k^{\frac{-2q}{q-1}}(\overline{u}_k(y))^q} - p_1(\sigma_k y+\rho_k) \right| \\
&= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\sigma_k^{\frac{2q}{q-1}} f_1(\sigma_k y+\rho_k, \sigma_k^{\frac{-2}{q-1}}\overline{u}_k(y)) - p_1(\sigma_k y+\rho_k)(\overline{u}_k(y))^q}{(\overline{u}_k(y))^q} \right| = 0,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

uniformimente, para todo $y\in B(0,R)$, onde $R>0$ é arbitrário e, $B(0,R)\subset B(0,d/\sigma_k)$ para algum $k\in\mathbb{N}$, isto é, para todo $\epsilon>0$, existe um $k_0\in\mathbb{N}$ que depende somente de ϵ, tal que $k>k_0$, implica que

$$\left| \frac{\sigma_k^{\frac{2q}{q-1}} f_1(\sigma_k y+\rho_k, \sigma_k^{\frac{-2}{q-1}}\overline{u}_k(y)) - p_1(\sigma_k y+\rho_k)(\overline{u}_k(y))^q}{(\overline{u}_k(y))^q} \right| < \epsilon,$$

para qualquer $y\in B(0,R)$ e todo $R>0$, com $B(0,R)\subset B(0,d/\sigma_k)$, para $k>k_0$.

Além disso, de (2.15), segue que $\overline{u}_k(y)=\sigma_k^{\frac{2}{q-1}}u_k(x)\le \sigma_k^{\frac{2}{q-1}}M_k=1$, ou seja, $(\overline{u}_k(y))^q$ é limitada por 1.

Dessa forma, por (2.18) e pelo fato de $(\overline{u}_k(\cdot))^q$ ser limitada, concluímos que

$$\lim_{k\to\infty} \left| \sigma_k^{\frac{2q}{q-1}} f_1(\sigma_k y+\rho_k, \sigma_k^{\frac{-2}{q-1}}\overline{u_k}(y)) - p_1(\sigma_k y+\rho_k)(\overline{u_k}(y))^q \right| = 0, \tag{2.19}$$

uniformemente, para todos $y\in B(0,R)$ e $R>0$.

Por (2.19), segue que, a menos de um número finito de termos, as sequências

$$S_k(y)=\sigma_k^{\frac{2q}{q-1}} f_1(\sigma_k y+\rho_k, \sigma_k^{\frac{-2}{q-1}}\overline{u}_k(y)) - p_1(\sigma_k y+\rho_k)(\overline{u}_k(y))^q$$

são uniformemente limitadas para todos $y\in B(0,R)$ e $R>0$. De fato, por (2.19), existe $k_0\in\mathbb{N}$ que não depende de y e R, tal que $k>k_0$, implica que

$$|\, S_k(y)|<1, \text{ para todo } y\in B(0,R),$$

onde $B(0,R)\subset B(0,d/\sigma_{k_1})$, para algum $k_1>k_0$ fixo, isto é, as sequências $(S_k(y))$ são uniformemente limitadas. Observe que, as limitações não dependem de R. Em particular, as sequências são uniformementes limitadas em $B(0,d/\sigma_k)$, para k grande.

Agora, desprezando esse número finito de termos e, mantendo a mesma notação, temos que $S_k(y)$ é uniformemente limitada, para todo $y\in B(0,\frac{d}{\sigma_k})$.

Escrevendo

$$|\sigma_k^{\frac{2q}{q-1}} f_1(\sigma_k y + \rho_k, \sigma_k^{\frac{-2}{q-1}} \overline{u}_k(y))| \leq |S_k(y)| + |p_1(\sigma_k y + \rho_k)(\overline{u}_k(y))^q|$$

e lembrando que p_1 é uniformemente limitada, pois é contínua e definida em um compacto, segue que

$$W_k(y) = \sigma_k^{\frac{2q}{q-1}} f_1(\sigma_k y + \rho_k, \sigma_k^{\frac{-2}{q-1}} \overline{u}_k(y))$$

é uniformemente limitada, isto é, existe uma constante $C_6 > 0$, tal que $|W_k(y)| < C_6$, para todos $y \in B(0, R)$ e $R > 0$. Em particular, como R é arbitrário

$$|W_k(y)| < C_6, \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^N \tag{2.20}$$

e, assim, essa sequência é uniformemente limitada em $\mathbb{R}^N$.

Por (2.16), segue que

$$\sup_{y \in B(0, \frac{d}{\sigma_k})} \overline{u}_k(y) = 1,$$

isto é, $\overline{u}_k \in L^p(B(0, d/\sigma_k))$, para todo $p > 1$ e, pela hipótese (H_1), temos que g_1 é limitada. Assim, como

$$- \triangle \overline{u}_k(y) = \lambda_k \sigma_k^{\frac{2q}{q-1}} f_1(\sigma_k y + \rho_k, \sigma_k^{\frac{-2}{q-1}} \overline{u}_k(y))[g_1(\sigma_k y + \rho_k, v_k(\sigma_k y + \rho_k) - g_1(\sigma_k y + \rho_k, 0)],$$

e (2.20) é satisfeito, concluímos, pelo Teorema 74, que existem constantes $C_i > 0$ $(i = 7, 8)$ tais que

$$||\overline{u}_k||_{W2,p(B(0,R))} \leq C_7(||u_k||_{L^p(B(0,d/\sigma_k))} + ||F_k||_{L^p(B(0,d/\sigma_k))}) \leq C_8, \tag{2.21}$$

para toda bola $B(0, R) \subset B(0, d/\sigma_k)$, onde

$$F_k(y) = \lambda_k \sigma_k^{\frac{2q}{q-1}} f_1(\sigma_k y + \rho_k, \sigma_k^{\frac{-2}{q-1}} \overline{u}_k(y))[g_1(\sigma_k y + \rho_k, v_k(\sigma_k y + \rho_k) - g_1(\sigma_k y + \rho_k, 0)]. \tag{2.22}$$

Agora, tome $p > N$ grande. Pelo Teorema 63, $W^{2,p}(B(0, R)) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{B(0, R)})$ $(0 < \alpha < 1)$, assim, por (2.21), segue que $(\overline{u}_k)$ é pré-compacto em $C^{1,\alpha}(\overline{B(0, R)})$. Dessa forma, existe uma subsequência $(\overline{u}_{k_j})$ convergindo para $\overline{u}_R$ em $W^{2,p}(\overline{B(0, R)}) \cap C^{1,\alpha}(\overline{B(0, R)})$. Pela Holder continuidade $\overline{u}_R(0) = 1$. Por (H_1), a sequência $(g_1(\cdot, v_{k_j}))$ é uniformemente limitada, o que implica que $(g_1(\sigma_{k_j} y + \rho_{k_j}, v_{k_j}(\sigma_{k_j} y + \rho_{k_j})))$ converge, a menos de subsequência, para $c \in (0, \infty)$ para cada $y \in B(0, R)$ fixo. Agora, fixaremos um $y \in B(0, R)$ e $R > 0$ grande.

Desde que

$$\begin{cases} t_{k_j} \to t, \lambda_{k_j} \to \lambda \in (0,\infty) \\ p_1(\sigma_{k_j} y + \rho_{k_j}) \to p_1(\rho) \\ g_1(\sigma_{k_j} y + \rho_{k_j}) \to c_0 \in (0,\infty), \end{cases}$$

segue, tomando o limite em (2.22), que

$$F_{k_j}(y) \to F(y),$$

onde

$$F(y) = a\overline{u}^q \text{ e } a = \lambda[tc + (1-t)c_0]p_1(\rho).$$

Agora, das convergências $\sigma_{k_j} \to 0$ e $\rho_{k_j} \to \rho$, segue que $g_1(\sigma_{k_j} y + \rho_{k_j}) \to c_0$, para todo $y \in B(0,R)$, onde $c_0 > 0$ é uma constante. Por outro lado, lembrando que (F_{k_j}) é uniformemente limitada e

$$-\triangle\, \overline{u}_{k_j}(y) = F_{k_j}(y),\ y \in B(0,R) \text{ e } \overline{u}_{k_j}(0) = 1, \tag{2.23}$$

segue que

$$\int_{B(0,R)} \triangledown \overline{u}_{k_j} \triangledown \varphi = \int_{B(0,R)} F_{k_j}\varphi \to \int_{B(0,R)} \triangledown \overline{u}_R \triangledown \varphi = \int_{B(0,R)} F\varphi\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\overline{B}(0,R)), \tag{2.24}$$

onde usamos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue em

$$\int_{B(0,R)} F_{k_j}\phi \to \int_{B(0,R)} F\phi,$$

e, o fato de que $\overline{u}_{k_j} \to \overline{u}_R$ em $C^{1,\alpha}(\overline{B(0,R)})$.

Segue, da última igualdade em (2.24), que $\overline{u}_R$ é solução fraca de

$$-\triangle\, \overline{u}_R(y) = F(y) = a\overline{u}_R^q(y),\ B(0,R). \tag{2.25}$$

Observação: Considere $R_1 > R$. Como veremos abaixo, é possível encontrar um função $\overline{u}_{R_1} \in C^{1,\alpha}(\overline{B(0,R_1)})$ $(0 < \alpha < 1)$, tal que $\overline{u}_{R_1}\, |_{B(0,R)} = \overline{u}_R$ e

$$-\triangle\, \overline{u}_{R_1}(y) = \tilde{F}(y) = a\overline{u}_{R_1}^q(y),\ B(0,R_1). \tag{2.26}$$

De posse de (2.26), faremos um argumento de bootstrap para ganhar a regularidade $C^2(B(0,R))$ de $\overline{u}_R$. Aplicando o Teorema 75, com $\Omega = B(0,R_1)$ e $\Omega' = B(0,R)$, segue que $\overline{u}_R \in W^{3,p}(B(0,R))$, pois $\tilde{F} \in W^{1,p}(B(0,R_1))$. Pelo Teorema 63, sabemos que $W^{3,p}(B(0,R)) \hookrightarrow C^{2,\alpha}(\overline{B(0,R)})$, e disso segue que $\overline{u}_R \in C^2(B(0,R))$.

Vamos usar o raciocínio acima para completar a demonstração desse caso. Para simplificar a notação escreveremos $B(0, R_i) = B_i$, com $i \in \mathbb{N}$. Considere $R_1 > 0$. Existe $k_1 \in \mathbb{N}$, tal que, se $k \geq k_1$, então $B_1 \subset B(0, d/\sigma_k)$. Pelo mesmo argumento acima, obtemos uma subsequência $(\overline{u}_{1k})$ de $(\overline{u}_k)$, tal que $\overline{u}_{1k} \to \overline{u}_1$ em $C^{1,\alpha}(\overline{B_1})$ e

$$-\triangle \overline{u}_1(y) = a\overline{u}_1^q(y) \text{ em } B_1, \quad \overline{u}_1(0) = 1,\ \overline{u}_1 \in C^2(B_1).$$

Seja $R_2 > R_1$. Existe $k_2 > k_1$ tal que, se $k \geq k_2$, então $B_2 \subset B(0, d/\sigma_k)$. Novamente, pelo mesmo argumento, encontramos uma subsequência $(\overline{u}_{2k})$ de $(\overline{u}_{1k})$, tal que $\overline{u}_{2k} \to \overline{u}_2$ em $C^{1,\alpha}(\overline{B_2})$ e

$$-\triangle \overline{u}_2(y) = a\overline{u}_2^q(y) \text{ em } B_2, \quad \overline{u}_2(0) = 1, \quad \overline{u}_1 \in C^2(B_2),$$

e, por continuidade única $\overline{u}_2 |_{B_1} = \overline{u}_1$.

Prosseguindo dessa forma, obtemos:

1. uma sequência (R_i), com $R_i \to \infty$, quando $i \to \infty$;
2. $k_j \in \mathbb{N}$, tal que $B_j \subset B(0, d/\sigma_k)$, se $k \geq k_j > k_{j-1}$;
3. uma subsequência $(\overline{u}_{jk})$ de $(\overline{u}_{(j-1)k})$, tal que $\overline{u}_{jk} \to \overline{u}_j$, onde

$$\begin{cases} -\triangle \overline{u}_j(y) = a\overline{u}_j^q(y),\ B_j \\ \overline{u}_j(0) = 1,\ \overline{u}_j \in C^2(B_j),\ \overline{u}_j |_{B_{j-1}} = \overline{u}_{j-1}, \end{cases}$$

para $j \geq 2$.

Defina a sequência diagonal $Z_k = \overline{u}_{kk}$ e, observe que Z_k é uma subsequência da sequência original $\overline{u}_k$. Considere a função $\overline{u} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definida por $\overline{u}(x) = Z_k(x)$. Temos que $\overline{u}$ está bem definida e, satisfaz

$$-\triangle \overline{u}(y) = a\overline{u}^q(y) \text{ em } \mathbb{R}^N, \quad \overline{u}(0) = 1, \quad \overline{u} \in C^2(\mathbb{R}^N),$$

pois $\overline{u} |_{B_j} = \overline{u}_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$ e $R_j \to \infty$, quando $j \to \infty$.

Considere

$$w(x) = \overline{u}(x/\sqrt{a}), x \in \mathbb{R}^N.$$

Então,

$$-\triangle w(x) = -\triangle \overline{u}(x/\sqrt{a}) = -\frac{\triangle \overline{u}(x/\sqrt{a})}{a} = \frac{a\overline{u}^q(x/\sqrt{a})}{a} = \overline{u}^q(x/\sqrt{a}) = w^q(x)\ x \in \mathbb{R}^N,$$

com $w \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Segue, do Teorema 70, que $w(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, ou seja, $\overline{u}^q(\frac{x}{\sqrt{a}}) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e, como as dilatações são bijetivas, temos que $\overline{u}(y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^N$. Mas isso contradiz o fato de que $\overline{u}(0) = 1$.

Caso 2: $\rho \in \partial\Omega$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que existe $\delta > 0$, tal que $B(\rho, \delta) \cap \partial\Omega$ está contido no hiperplano $H_0 = \{x \in \mathbb{R}^N : x_n = 0\}$. O caso em que $B(\rho, \delta) \cap \partial\Omega$ não está contido no hiperplano H_0, pode ser encontrado em [19].

Definimos $\overline{u}_k, \sigma_k$ como em (2.15) e (2.16). Seja $d_k = d_2(\rho_k, \partial\Omega)$, então $d_k = \rho_k \cdot e_k$, onde e_k é o vetor unitário normal a $\partial\Omega$ próximo de ρ, em $x_k \in \partial\Omega$, onde x_k é tal que $d_k = |\rho_k - x_k|_2$. Para k grande, $\overline{u}_k$ está bem definida em $H_k = B(0, \frac{\delta}{\sigma_k}) \cap \left\{y_n > -\frac{d_k}{\sigma_k}\right\}$ e satisfaz

$$\begin{cases} -\triangle \overline{u}_k(y) = \lambda_k \sigma_k^{\frac{2q}{q-1}} f_1(\sigma_k y + \rho_k, \sigma_k^{\frac{-2}{q-1}} \overline{u}_k(y))[g_1(\sigma_k y + \rho_k, v_k(\sigma_k y + \rho_k) - g_1(\sigma_k y + \rho_k, 0)], H_k \\ \overline{u}_k(0) = 1, \ \overline{u}_k(y) = 0 \text{ se } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.27}$$

Também

$$\sup_{y \in H_k} \overline{u}_k(y) = \overline{u}_k(0) = 1.$$

Afirmação: $\delta/\sigma_k > c_1 > 0$, para alguma constante uniforme c_1.

Para ver isso, notemos que, pela regularidade elíptica $| \bigtriangledown \overline{u}_k|_2$ é uniformemente limitado (pelo fato da sequência ser limitada) em $C^{1,\alpha}(\overline{H}_k)$ (ver Teorema 65) e, em particular, usando a desigualdade do valor médio existe uma constante C_9 tal que

$$|\overline{u}_k(0) - \overline{u}_k(0, \cdots, -\frac{d_k}{\sigma_k})| \leq C_9 \frac{d_k}{\sigma_k}$$

o que implica que

$$1 - \sigma_k^{\cfrac{2}{2-q}} \sup_{x \in \partial\Omega} u_k(x) = 1 \leq C_9 \frac{d_k}{\sigma_k},$$

pois $\sup\limits_{x \in \partial\Omega} u_k(x) = 0$.

Dessa forma, (d_k/σ_k) é limitada inferiormente.

Temos duas hipóteses sobre (d_k/σ_k):

1. (d_k/σ_k) não é limitada superiormente. Assim, existe alguma subsequência $\frac{d_{k_j}}{\sigma_{k_j}} \to \infty$ com $\overline{u}_{k_j}$ bem definida em $B(0, \frac{d_{k_j}}{\lambda_{k_j}})$ e $\overline{u}_{k_j}(0) = 1$. O argumento do caso 1 aplica-se, e chegamos a uma contradição.

2. (d_k/σ_k) é limitada superiormente e inferiormente. Passando, a uma subsequência, se necessário $\frac{d_k}{\lambda_k} \to s$, com $s > 0$. Repetindo o argumento de compacidade do caso 1, concluímos que, uma subsequência de $\overline{u}_k$ converge a $\overline{u}$, a qual é solução de

$$-\triangle \overline{u}(y) = \lambda[tc + (1-t)c_0]p_1(\rho)\overline{u}^q(y) := F(y) \quad H_s = \{y : y_n > -s\}, \ \overline{u} \in C^2(H_s).$$

Como no caso 1, temos que $\overline{u}(0) = 1$. Desde que $\overline{u}_k(y) = \sigma_k^{\frac{2}{q-1}} u_k(x) = 0$, para $x \in \partial\Omega$, concluímos que

$$\overline{u}(y) = 0, \text{ em } \left\{y \in \mathbb{R}^N : y_n = -s\right\}. \tag{2.28}$$

Fazendo a mudança de variável $x = (y_1, \cdots, y_n + s)$, e definindo

$$w(x) = \overline{u}(y) = \overline{u}(y_1, \cdots, y_n),$$

temos que

$$\begin{cases} -\triangle w(x) = -\triangle \overline{u}(y_1, \cdots, y_n) = F(y_1, \cdots, y_n) = F(y) = \overline{F}(x), \ x \in \mathbb{R}^N_+ \\ w(x) = 0 \ \left\{x \in \mathbb{R}^N : x_N = 0\right\} \end{cases}$$

A aplicação

$$(y_1, \cdots, y_n) \mapsto (y_1, \cdots, y_n + s) \tag{2.29}$$

transforma o semi-espaço $y_n \geq -s$, no semi-espaço $x_n \geq 0$ e $w(x) = 0$, se $x_n = y_n + s = 0$. Pelo Teorema 72, segue que $w(x) = 0$, e portanto $\overline{u}(y) = 0$, desde que a aplicação (2.29) é bijetiva. Mas isso contradiz a igualdade $\overline{u}(0) = 1$.

□

O lema a seguir, será utilizado várias vezes no decorrer desta seção. Ele, também será de fundamental importância no resto do trabalho.

Lema 43. *Assuma que $T^1_{\overline{\lambda},\overline{\mu}}$ tem um ponto fixo não-nulo em $(\overline{u}, \overline{v}) \in K \times K$, para algum $(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \in [0, \infty)^2 \setminus \{(0, 0)\}$, então $T^1_{\lambda,\mu}$ tem um ponto fixo não-nulo em $K \times K$, para todo $(\lambda, \mu) \in [0, \overline{\lambda}] \times [0, \overline{\mu}] \setminus \{(0, 0)\}$.*

Demonstração. Dado $(\lambda, \mu) \in [0, \overline{\lambda}] \times [0, \overline{\mu}] \setminus \{(0, 0)\}$, temos que $(\underline{u}, \underline{v}) = (0, 0)$ e $(\overline{u}, \overline{v})$ são pares de sub-supersoluções do sistema (S) com os parâmetros λ, μ. De fato, isso segue, do fato das funções f_i, g_i $(i = 1, 2)$ serem positivas e, porque

$$\begin{cases} -\triangle \overline{u} = \overline{\lambda} f_1(x, \overline{u}) g_1(x, \psi) \geqslant \lambda f_1(x, \overline{u}) g_1(x, \psi), \Omega \\ -\triangle \psi = \overline{\mu} f_2(x, \psi) g_2(x, \overline{u}) \geqslant \mu f_2(x, \psi) g_2(x, \overline{u}), \Omega \\ \overline{u} = 0, \psi = 0, \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim, pelo Corolário 39, segue que, o sistema (S), tem no mínimo uma solução não-nula, para $(\lambda, \mu) \in [0, \overline{\lambda}] \times [0, \overline{\mu}] \setminus \{(0, 0)\}$, isto é, $T^1_{\lambda,\mu}$ tem um ponto fixo não-nulo em $K \times K$, para todo $(\lambda, \mu) \in [0, \overline{\lambda}] \times [0, \overline{\mu}] \setminus \{(0, 0)\}$. □

Obeservação 3: Se $(\lambda_0, \mu_0) \in int(H)$, então $Q := (0, \lambda_0) \times (0, \mu_0) \subset int(H)$.

Considere $(\lambda_0, \mu_0) \in int(H)$. Pela observação 2, temos que $(\lambda_0, \mu_0) \in (0, \infty)^2$. Assim, pelo Lema 43, segue que, $Q = (0, \lambda_0) \times (0, \mu_0) \subset H$, e isso, implica que $Q \subset int(H)$, pois sendo Q um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, ele é uma vizinha aberta de cada um de seus pontos.

Agora, estudaremos as principais propriedades do conjunto H. A menos de menção contraria, os parâmetros λ e μ serão não-negativos, em virtude do Lema 40. Também, a menos de menção contraria, utilizaremos a norma do máximo $|\cdot|_1$ em $\mathbb{R}^2$ e, para não sobrecarregar a notação escreveremos $|\cdot|_1 = |\cdot|$.

Lema 44. *Assuma que $(H_1) - (H_4)$ são satisfeitos. Então:*

(i) $\{(0,0)\} \subsetneq H$;

(ii) *H é fechado e limitado;*

(iii) *$int(H)$ é não-vazio e limitado.*

Demonstração. **Prova de** (i): Claramente $(0,0) \in H$, pois $T^1_{0,0}(0,0) = (0,0)$. Pelo Lema 41, dado $r > 0$, existe $(\lambda_r, \mu_r) \in (0,\infty)^2$, tal que para todo $(\lambda, \mu) \in [0, \lambda_r] \times [0, \mu_r] \setminus \{(0,0)\}$ o operador $T^1_{\lambda,\mu}$ tem um ponto fixo em $K_r \times K_r$. Em particular, o retângulo aberto $(0, \lambda_r) \times (0, \mu_r) \subset H$ e, assim, $H \setminus \{(0,0)\}$ é não-vazio.

Prova de (ii): Seja $(\lambda_n, \mu_n) \subset H$, tal que $(\lambda_n, \mu_n) \to (\lambda, \mu)$. Queremos mostrar que $(\lambda, \mu) \in H$, ou seja, existe $(u, v) \in K \times K$ tal que $T^1_{\lambda,\mu}(u,v) = (u,v)$, ou equivalentemente

$$\begin{cases} -\triangle u = \lambda h_1(x,u,v), \Omega \\ -\triangle v = \mu h_2(x,u,v), \Omega \\ u = v = 0, \partial\Omega. \end{cases}$$

Desde que $T^1_{\lambda_n,\mu_n}(u_n, v_n) = (u_n, v_n)$, isto é:

$$\begin{cases} -\triangle u_n = \lambda_n h_1(x,u_n,v_n), \Omega \\ -\triangle v_n = \mu_n h_2(x,u_n,v_n), \Omega \\ u_n,\ v_n > 0\ \Omega \\ u_n = v_n = 0, \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.30}$$

segue, pelo Lema 42, que (u_n, v_n) é limitada em $K \times K$. Assim, $h_1(., u_n, v_n)$ e $h_2(., u_n, v_n)$ são uniformemente limitadas e, consequentemente, existe uma constante $C_{10} > 0$ tal que

$$||(h_1(., u_n, v_n), h_2(., u_n, v_n))||_{K\times K} \leqslant C_{10}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$((h_1(., u_n, v_n), h_2(., u_n, v_n)) \in (L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)), \forall p > 1.$$

Considere $p > 2N$ grande. Pelo Teorema 65,

$$||(u_n, v_n)||_{W^{2,p}} \leqslant C_{11}||(h_1(., u_n, v_n), h_2(., u_n, v_n))||_{K\times K} \leqslant C_{12}, \forall n \in \mathbb{N},$$

onde C_{12} é uma constante. Assim, de

$$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), 0 < \alpha < 1,$$

segue, a menos de subsequência, que

$$(u_n, v_n) \to (u, v) \text{ em } C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$$

o que implica que $(u, v) = (0, 0)$ em $\partial\Omega$, pois $(u_n, v_n) = (0, 0)$ em $\partial\Omega$. Além disso, de $u_n(x) \geqslant 0, v_n(x) \geqslant 0$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, temos que $u(x) \geqslant 0, v(x) \geqslant 0$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, o que significa que $(u, v) \in K \times K$.

Das convergências acima, obtemos as seguintes convergências uniformes

$$h_1(., u_n, v_n) \to h_1(., u, v) \text{ e } h_1(., u_n, v_n) \to h_1(., u, v)$$

e, como uma consequência disso, obtemos, por (2.30), que

$$\int_\Omega \triangledown u \triangledown \varphi = \int_\Omega \lambda h_1(x, u, v)\varphi$$

e

$$\int_\Omega \triangledown v \triangledown \varphi = \int_\Omega \mu h_2(x, u, v)\varphi,$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\overline{\Omega})$, e portanto, (u, v) é solução fraca de

$$\left\{ \begin{array}{c} -\triangle u = \lambda h_1(x, u, v), \Omega \\ -\triangle v = \mu h_2(x, u, v), \Omega \\ u = v = 0, \partial\Omega \end{array} \right.$$

o que significa que $T^1_{\lambda,\mu}(u, v) = (u, v)$ e, portanto $(\lambda, \mu) \in H$.

Agora, provaremos que H é limitado. Se H fosse ilimitado, então existiriam sequências $(u_n, v_n) \subset K \times K$ e $(\lambda_n, \mu_n) \subset [0, \infty)^2$, tais que

$$T^1_{\lambda_n,\mu_n}(u_n, v_n) = (u_n, v_n)$$

e

$$\lambda_n \to \infty \text{ ou } \mu_n \to \infty, \text{ quando } n \to \infty.$$

Sem perda de generalidade, suponha que $\lambda_n \to \infty$ com $n \to \infty$. Da hipótese (H_3), existem $\epsilon > 0$ e $s_0 > 0$, tais que

$$\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{f_1(x,s)}{s} > \frac{\delta_1 + \epsilon}{\min\limits_{x\in\overline{\Omega}} g_1(x,0)}, \quad \text{para } s > s_0. \tag{2.31}$$

Como f_1 é contínua e positiva no compacto $\overline{\Omega} \times [0, s_0]$, existe $\beta > 0$ tal que $f_1(x,s) \geqslant \beta$, para todo $(x,s) \in \overline{\Omega} \times [0, s_0]$. Assim,

$$\frac{f_1(x,s)}{s} \geqslant \frac{\beta}{s} > \frac{\beta}{s_0}, \text{ para todo } (x,s) \in \overline{\Omega} \times (0, s_0],$$

o que implica que

$$\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{f_1(x,s)}{s} \geqslant \frac{\beta}{s_0}, \text{ para todo } s \in (0, s_0]. \tag{2.32}$$

Por outro lado, de $\lambda_n \to \infty$, segue que

$$\frac{\lambda_M \beta}{s_0} > \frac{\delta_1 + \epsilon}{\min\limits_{x\in\overline{\Omega}} g_1(x,0)}, \tag{2.33}$$

para algum $M \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_M > 1$. De (2.31), (2.32) e (2.33), segue que

$$\frac{\lambda_M f_1(x,s)}{s} \geqslant \lambda_M \min_{x\in\overline{\Omega}} f_1(x,s)/s \geqslant \frac{\delta_1 + \epsilon}{\min\limits_{x\in\overline{\Omega}} g_1(x,0)},$$

para todos $x \in \overline{\Omega}$ e $s \in (0, \infty)$. Assim,

$$\lambda_M f_1(x,s) \min_{x\in\overline{\Omega}} g_1(x,0) \geqslant (\delta_1 + \epsilon)s, \text{ para todo } (x,s) \in \overline{\Omega} \times (0, \infty)$$

o que implica, por (H_2), que

$$\lambda_M f_1(x,s) g_1(x,t) \geqslant (\delta_1 + \epsilon)s, \text{ para todo } (x,s,t) \in \overline{\Omega} \times [0,\infty)^2. \tag{2.34}$$

Como $T^1_{\lambda_M,\mu_M}(u_M, v_M) = (u_M, v_M)$, temos que

$$-\triangle u_M = \lambda_M f_1(x, u_M) g_1(x, v_M) > (\delta_1 + \epsilon) u_M, \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Multiplicando, ambos os lados dessa última desigualdade, pela autofunção $\phi_1 > 0$ associada a δ_1, segue de (2.34), que

$$\delta_1 \int_\Omega u_M \phi_1 = \int_\Omega \nabla u_M \nabla \phi_1 = \lambda_M \int_\Omega \phi_1 f_1(x, u_M) g_1(x, v_M) > (\delta_1 + \epsilon) \int_\Omega \phi_1 u_M.$$

Mas isso é impossível, pela positividade de u_M, ϕ_1 e δ_1.

Prova de (iii): Segue, dos Lemas 41 e 43, que $int(H) \neq \emptyset$ e, pelo item **(ii)** deste teorema $int(H)$ é limitado.

$\square$

Com o objetivo, de utilizar todas as propriedades do conjunto $int(H)$ já estabelecidas, assumiremos as hipóteses $(H)_1 - (H_4)$ sastisfeitas, nos lemas a seguir.

O próximo lema, nos diz que, existem pontos da forma $(\lambda, 0)$, $(0, \mu)$ em $\partial(int(H))$, com $\lambda, \mu \geq 0$ e nos fornece, um conjunto compacto contendo $\partial(int(H))$.

Lema 45. *Assuma que* $(H_1) - (H_4)$ *são satisfeitos. Então, existem* $0 < \lambda_*, \mu_* < \infty$ *tais que*

$$\{(\lambda, 0) : \lambda \in [0, \lambda_*]\} \cup \{(0, \mu) : \mu \in [0, \mu_*]\} \subset \partial(intH) \text{ e } \overline{int(H)} \subset [0, \lambda_*] \times [0, \mu_*].$$

Demonstração. Primeiro, mostraremos que

$$\{\lambda \in (0, \infty) : (\lambda, 0) \in \partial(int(H))\} \neq \emptyset \text{ e } \{\mu \in (0, \infty) : (0, \mu) \in \partial(int(H))\} \neq \emptyset. \tag{2.35}$$

De fato, pelo Lema 44 (iii), existe $(\lambda_0, \mu_0) \in int(H)$ e, pela obeservação 4, $(0, \lambda_0) \times (0, \mu_0) \subset int(H)$. Mostraremos que

$$(\lambda_0, 0) \in \partial(int(H)). \tag{2.36}$$

Seja $Q = Q((\lambda_0, 0), r)$ um quadrado aberto de centro $(\lambda_0, 0)$ e raio $r > 0$, arbitrário. Se mostrarmos que $Q \cap (int(H)) \neq \emptyset$ e $Q \cap (int(H))^c \neq \emptyset$, onde $(int(H))^c$ é o complementar de $int(H)$ em $\mathbb{R}^2$, então $(\lambda_0, 0) \in \partial(int(H))$, desde que, Q foi arbitrário.

Começaremos provando que $Q \cap (int(H)) \neq \emptyset$. De fato, desde que, $(\lambda_0, 0) \in \overline{(0, \lambda_0) \times (0, \mu_0)}$, segue que $Q \cap [(0, \lambda_0) \times (0, \mu_0)] \neq \emptyset$ e, isso implica que $Q \cap (int(H)) \neq \emptyset$, pois $(0, \lambda_0) \times (0, \mu_0) \subset int(H)$.

Para provar que $Q \cap (int(H))^c \neq \emptyset$, considere $(\lambda_1, \mu_1) \in \mathbb{R}^2$, onde $\mu_1 < 0$, $|\lambda_1 - \lambda_0| < r$ e $|\mu_1| < r$. Claramente $(\lambda_1, \mu_1) \in (int(H))^c$, pois $int(H) \subset (0, \infty)^2$, pela obervação 3. Por outro lado, $(\lambda_1, \mu_1) \in Q$, e assim $(\lambda_1, \mu_1) \in Q \cap (int(H))^c$, o que implica que $Q \cap (int(H))^c \neq \emptyset$. Assim, fica provado (2.36).

De forma análoga, mostramos que

$$(0, \mu_0) \in \partial(int(H)). \tag{2.37}$$

Assim, segue de (2.36) e (2.37), que (2.35) é satisfeito.

Daí, por (2.35) e H limitado, segue que

$$\begin{cases} \lambda_* = \sup\left\{\lambda \in \mathbb{R}_0^+ : (\lambda, 0) \in \partial(int(H))\right\} \in (0, \infty) \\ \mu_* = \sup\left\{\mu \in \mathbb{R}_0^+ : (0, \mu) \in \partial(int(H))\right\} \in (0, \infty), \end{cases} \tag{2.38}$$

ficam bem definidos e são finitos.

Faremos agora, uma afirmação de caráter geral e, que será utilizada várias vezes nos lemas seguintes.

Afirmação: $\{(\lambda_*, 0), (0, \mu_*)\} \subset \partial(int(H)) \cap [d(int(H))]$, onde $d(int(H))$ é o conjunto dos pontos de acumulação de $int(H)$.

Mostraremos que $(\lambda_*, 0) \in \partial(int(H)) \cap [d(int(H))]$, pois o caso $(0, \mu_*) \in \partial(int(H)) \cap [d(int(H))]$ é análogo.

De fato, considere $(\lambda_n) \subset (0, \infty)$, com $(\lambda_n, 0) \in \partial(int(H))$, $\lambda_m \neq \lambda_n$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$ e

$$(\lambda_n, 0) \to (\lambda_*, 0).$$

Desde que $\partial(int(H))$ é fechada, segue que $(\lambda_*, 0) \in \partial(int(H))$. Para mostrar que $(\lambda_*, 0) \in d(int(H))$, provaremos que dado $r > 0$, existe $(\lambda_0, \mu_0) \in Q((\lambda_*, 0), r) \cap [int(H)]$, com $(\lambda_0, \mu_0) \neq (\lambda_*, 0)$.

Com efeito, existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $r_1 < r$, tais que $(\lambda_{n_0}, 0) \in Q((\lambda_*, 0), r)$ e

$$Q((\lambda_{n_0}, 0), r_1) \subset Q((\lambda_*, 0), r).$$

Segue de $(\lambda_{n_0}, 0) \in \partial(int(H))$, que existe $(\lambda_0, \mu_0) \in int(H) \cap Q((\lambda_{n_0}, 0), r_1)$, e isso implica que $(\lambda_0, \mu_0) \in Q((\lambda_*, 0), r) \cap [int(H)]$ e $(\lambda_0, \mu_0) \neq (\lambda_*, 0)$, pois $int(H) \subset (0, \infty)^2$. Disso segue que $(\lambda_*, 0) \in d(int(H))$.

Agora, provaremos que

$$\{(\lambda, 0) : \lambda \in [0, \lambda_*]\} \cup \{(0, \mu) : \mu \in [0, \mu_*]\} \subset \partial(int(H)). \tag{2.39}$$

Mostraremos que $(\lambda_0, 0) \in \partial(int(H))$, para $\lambda_0 \in [0, \lambda_*)$. O caso $(0, \mu_0) \in \partial(int(H))$, para $\mu_0 \in [0, \mu_*)$ é similar.

Como já foi visto $(\lambda_*, 0) \in d(int(H))$. Assim, considerando o quadrado aberto $Q((\lambda_*, 0), \lambda_* - \lambda_0)$, existe

$$(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \in int(H) \cap Q((\lambda_*, 0), \lambda_* - \lambda_0)$$

e, pela observação 3, temos que $(0, \overline{\lambda}) \times (0, \overline{\mu}) \subset int(H)$. O fato de $(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \in Q((\lambda_*, 0), \lambda_* - \lambda_0)$, implica que

$$\max\left\{|\lambda_* - \overline{\lambda}|, |\overline{\mu}|\right\} < \lambda_* - \lambda_0,$$

e disso segue que $\lambda_* - \overline{\lambda} < \lambda_* - \lambda_0$, isto é, $\lambda_0 < \overline{\lambda}$. Assim, concluímos que

$$(\lambda_0, 0) \in \overline{(0, \overline{\lambda}) \times (0, \overline{\mu})} \subset \overline{int(H)}. \tag{2.40}$$

Segue de (2.40), que existe uma sequência $(\lambda_n, \mu_n) \in int(H)$, tal que $(\lambda_n, \mu_n) \to (\lambda_0, 0)$ com $n \to \infty$. Por outro lado, é claro que existe uma sequência $(\tilde{\lambda}_n, \tilde{\mu}_n)$, com $\tilde{\mu}_n < 0$, tal que $(\tilde{\lambda}_n, \tilde{\mu}_n) \to (\lambda_0, 0)$ com $n \to \infty$. Pela observação 2, segue que $(\tilde{\lambda}_n, \tilde{\mu}_n) \in (int(H))^c$. Dessa forma, mostramos que existem duas sequências

$$(\lambda_n, \mu_n) \subset int(H) \text{ e } (\tilde{\lambda}_n, \tilde{\mu}_n) \subset (int(H))^c$$

tais que $(\lambda_n, \mu_n) \to (\lambda_0, 0)$ e $(\tilde{\lambda}_n, \tilde{\mu}_n) \to (\lambda_0, 0)$, quando $n \to \infty$, e disso segue que $(\lambda_0, 0) \in \partial(int(H)$. Fica, provado assim (2.39).

Finalmente, provaremos que $\overline{int(H)} \subset [0, \lambda_*] \times [0, \mu_*]$.

De fato, se

$$(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \in \overline{int(H)} \text{ e } (\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \notin [0, \lambda_*] \times [0, \mu_*],$$

então $\overline{\lambda} > \lambda_*$ ou $\overline{\mu} > \mu_*$, porque $\overline{int(H)} \subset [0, \infty)^2$. Sem perda de generalidade, suponha que $\overline{\lambda} > \lambda_*$. Como $(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \in \overline{int(H)}$, existe $(\lambda_n, \mu_n) \subset int(H)$, tal que

$$(\lambda_n, \mu_n) \to (\lambda, \mu)$$

e

$$T^1_{\lambda_n, \mu_n}(u_n, v_n) = (u_n, v_n), \text{ com } (u_n, v_n) \in K \times K.$$

Pelos Lemas 42 e 44, a sequência (u_n, v_n) é limitada e, assim, podemos argumentar, como no Lema 44, para provar que $T^1_{\overline{\lambda}, \overline{\mu}}$ tem um ponto fixo em $K \times K$. Portanto, pelo Lema 43, segue que $[0, \overline{\lambda}] \times [0, \overline{\mu}] \subset H$. Dessa forma, temos que

$$(\overline{\lambda}, 0) \in [0, \overline{\lambda}] \times [0, \overline{\mu}] = \overline{(0, \overline{\lambda}) \times (0, \overline{\mu})} \subset \overline{int(H)},$$

e disso segue que $(\overline{\lambda}, 0) \in \partial(int(H))$, pois $int(H) \subset (0, \infty)^2$. Assim, por (2.38), concluímos que $\overline{\lambda} \leqslant \lambda_*$. Mas isso é impossível, pois $\overline{\lambda} > \lambda$.

$\square$

Considere a seguinte família de retas:

$$L(t) = \left\{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \mu = \lambda - t, t \in [-\mu_*, \lambda_*]\right\} \tag{2.41}$$

e, apartir dela, considere também

$$\lambda(t) = \sup\left\{\lambda : (\lambda, \mu) \in L(t) \cap \overline{int(H)}\right\}, \ \mu(t) = \lambda(t) - t \tag{2.42}$$

e $\Gamma(t) = (\lambda(t), \mu(t))$, para $t \in [-\mu_*, \lambda_*]$.

Desde que $\overline{int(H)}$ é limitado (veja Lema 45), segue que os números acima estão bem definidos, para cada $t \in [-\mu_*, \lambda_*]$.

Lema 46. *Suponha que* $(H_1) - (H_4)$ *são satisfeitos, então* $\Gamma(t) \in L(t) \cap \partial(int(H))$, *para todo* $t \in [-\mu_*, \lambda_*]$. *Em particular* $T^1_{\lambda(t),\mu(t)}$, *possui ponto fixo, para cada* $t \in [-\mu_*, \lambda_*]$.

Demonstração. Por definição, para cada $t \in [-\mu_*, \lambda_*]$, existem $\lambda_n, \mu_n \geq 0$, tais que $\lambda_n \to \lambda(t)$ com $(\lambda_n, \mu_n) \in L(t) \cap \overline{int(H)}$. Desde que $\mu_n = \lambda_n - t$, segue que

$$\mu(t) := \lim_{n\to\infty} \mu_n = \lambda(t) - t, \ t \in [-\mu_*, \lambda_*].$$

Como $\overline{int(H)}$ é fechado, segue que $(\lambda(t), \mu(t)) \in \overline{int(H)}$, e assim,

$$\Gamma(t) = (\lambda(t), \mu(t)) \in L(t) \cap \overline{int(H)}, t \in [-\mu_*, \lambda_*].$$

Afirmação: $\Gamma(t) \notin int(H)$, $t \in [-\mu_*, \lambda_*]$.

Suponha que $\Gamma(t_0) \in int(H)$, para algum $t_0 \in [-\mu_*, \lambda_*]$ e, considere $r > 0$ e $\lambda_0 > \lambda(t_0) > 0$ tais que

$$Q((\lambda(t_0), \mu(t_0)), r) \subset H$$

e

$$|\lambda_0 - \lambda(t_0)| < r. \tag{2.43}$$

Por (2.43), segue que

$$|(\lambda_0 - t_0) - \mu(t_0)| = |(\lambda_0 - t_0) - (\lambda(t_0) - t_0)| = |\lambda_0 - \lambda(t_0)| < r. \tag{2.44}$$

De (2.43) e (2.44), concluímos que

$$(\lambda_0, \lambda_0 - t_0) \in Q((\lambda(t_0), \mu(t_0)), r) \subset H,$$

e, pelo Lema 43, segue que

$$(\lambda_0, \lambda_0 - t_0) \in \overline{(0, \lambda_0) \times (0, \lambda_0 - t_0)} \subset \overline{int(H)}$$

e portanto $(\lambda_0, \lambda_0 - t_0) \in L(t_0) \cap (\overline{int(H)})$ e $\lambda_0 > \lambda(t_0)$. Mas isto contradiz a definição de $\lambda(t_0)$. Assim, $\Gamma(t) \notin int(H)$, para todo $t \in [-\mu_*, \lambda_*]$, donde concluímos que $\Gamma(t) \in L(t) \cap [\partial(int(H))]$, para todo $t \in [-\mu_*, \lambda_*]$. □

O próximo lema, completa a estrutura do conjunto $int(H)$ e, caracteriza Γ e suas funções coordenadas.

Lema 47. *Assuma que $(H_1) - (H_4)$ são satisfeitos. Então:*

(i) *$\lambda(t)$ é monótona não-decrescente e $\mu(t)$ é monótona não-crescente, o que implica que*

$$\{\Gamma(t) : t \in [-\mu_*, \lambda_*]\} \text{ é um arco simples;}$$

(ii) $\{\Gamma(t) : t \in [-\mu_*, \lambda_*]\} \cap \{(\lambda, \mu) : \lambda\mu = 0\} = \{(\lambda_*, 0), (0, \mu_*)\}$;

(iii) *$\partial(int(H))$ é uma curva fechada simples e*

$$\partial(int(H)) = \{\Gamma(t) : t \in [-\mu_*, \lambda_*]\} \cup \{(\lambda, 0) : \lambda \in [0, \lambda_*]\} \cup \{(0, \mu) : \mu \in [0, \mu_*]\}\,;$$

(iv) $\overline{int(H)} = \displaystyle\bigcup_{t \in [-\mu_*, \lambda_*]} \{(\lambda, \mu) \in L(t) : 0 \le \lambda \le \lambda(t), 0 \le \mu \le \mu(t)\}.$

Demonstração. **(i)** Primeiramente, provaremos que $\lambda(t)$ é não-decrescente. A prova será por contradição. Suponha que existam $t_1, t_2 \in [-\mu_*, \lambda_*]$, com $t_1 < t_2$ e $\lambda(t_1) > \lambda(t_2)$. Disso, segue que

$$\mu(t_1) = \lambda(t_1) - t_1 > \lambda(t_2) - t_1 > \lambda(t_2) - t_2 = \mu(t_2).$$

Assim, pelos Lemas 43 e 46, segue que $(0, \lambda(t_1)) \times (0, \mu(t_1)) \subset int(H)$, pois $\lambda(t_1) > \lambda(t_2) \ge 0$ e $\mu(t_1) > \mu(t_2) \ge 0$. Considere um número real positivo λ_0, tal que $\lambda(t_2) < \lambda_0 < \lambda(t_1)$. As desigualdades $\lambda(t_2) < \lambda_0 < \lambda(t_1)$ e $t_1 < t_2$, implicam que

$$\mu(t_2) = \lambda(t_2) - t_2 < \lambda_0 - t_2 < \lambda(t_1) - t_2 < \lambda(t_1) - t_1 = \mu(t_1)$$

e disso segue que $(\lambda_0, \lambda_0 - t_2) \in L(t_2) \cap \overline{int(H)}$, pois

$$(\lambda_0, \lambda_0 - t_2) \in (0, \lambda(t_1)) \times (0, \mu(t_1)) \subset int(H).$$

Mas isso contradiz a definição de $\lambda(t_2)$. Portanto $\lambda(t)$, $t \in [-\mu_*, \lambda_*]$ é não-decrescente.

De forma análoga, provamos que $\mu(t)$ é monótona não-crescente.

Para completar a demonstração deste item, provaremos que Γ é um arco simples. Sem perda de generalidade, podemos assumir a norma da soma $|\cdot|_s$ em $\mathbb{R}^2$ e $t_2 > t_1$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} |\Gamma(t_1) - \Gamma(t_2)|_s &= |\lambda(t_1) - \lambda(t_2)| + |\lambda(t_1) - t_1 - \lambda(t_2) + t_2| \\ &\geq |\lambda(t_1) - \lambda(t_2)| - |\lambda(t_1) - \lambda(t_2)| + |t_1 - t_2| = |t_1 - t_2|. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Por outro lado, como $\mu(t)$ é monótona não-crescente, segue que $\mu(t_2) = \lambda(t_2) - t_2 \leq \lambda(t_1) - t_1 = \mu(t_1)$, isto é, $0 \leq \lambda(t_2) - \lambda(t_1) \leq t_2 - t_1$, pois $\lambda(t)$ é monótona não-decrescente. Dessa última desigualdade, concluímos que

$$|\Gamma(t_1) - \Gamma(t_2)|_s \leq 2|\lambda(t_1) - \lambda(t_2)| + |t_1 - t_2| \leq 3|t_2 - t_1|. \tag{2.46}$$

Portanto, para todo $t_1, t_2 \in [-\mu_*, \lambda_*]$, segue, de (2.45) e (2.46), que

$$|t_1 - t_2| \leq |\Gamma(t_1) - \Gamma(t_2)|_s \leq 3|t_1 - t_2|. \tag{2.47}$$

De (2.47), concluímos que Γ é injetiva, contínua e sua inversa também é contínua, e portanto $\Gamma(t)$ é homeomorfa a $[-\mu_*, \lambda_*]$, ou seja, $\Gamma(t)$ é um arco simples.

(ii) Pelo Lema 45,

$$\{(\lambda, 0) : \lambda \in [0, \lambda_*]\} \cup \{(0, \mu) : \mu \in [0, \mu_*]\} \subset \partial(intH) \text{ e } \overline{int(H)} \subset [0, \lambda_*] \times [0, \mu_*]. \tag{2.48}$$

Pelo Lema 46, segue que $\Gamma(-\mu_*) = (\lambda(-\mu_*), \mu(-\mu_*)) \in L(-\mu_*) \cap \partial(int(H))$. Assim, por (2.48), temos que $(\lambda(-\mu_*), \mu(-\mu_*)) \in [0, \lambda_*] \times [0, \mu_*]$ e, disso segue que

$$0 \leq \mu(-\mu_*) = \lambda(-\mu_*) + \mu_* \leq \mu_*,$$

que implica que $0 \leq \lambda(-\mu_*) \leq 0$, isto é,

$$\lambda(-\mu_*) = 0. \tag{2.49}$$

Agora, mostraremos que $\lambda(t) > 0$, para todo $t \in (-\mu_*, \lambda_*]$.

Afirmação: $\lambda(t) > 0$, para todo $t \in (-\mu_*, 0]$.

De fato, pelo Lema 45, sabemos que $(0, \mu_*) \in d(int(H))$. Então, dado $t \in (-\mu_*, 0]$, existe

$$(\lambda_0, \mu_0) \in int(H) \cap Q((0, \mu_*), \frac{\epsilon}{2}) \subset (0, \infty)^2,$$

onde $\epsilon = t + \mu_*$.

Provaremos que

$$(\lambda_0, \lambda_0 - t) \in L(t) \cap \overline{int(H)}. \tag{2.50}$$

De fato, $(\lambda_0, \mu_0) \in Q((0, \mu_*), \epsilon/2)$ implica que

$$\lambda_0 < \frac{t + \mu_*}{2} \text{ e } \mu_* - \mu_0 < \frac{t + \mu_*}{2},$$

e assim,

$$\lambda_0 + \mu_* - \mu_0 < t + \mu_*,$$

e, disso segue que $\lambda_0 - t < \mu_0$.

Por outro lado, pela observação 3, temos que $(0, \lambda_0) \times (0, \mu_0) \subset int(H)$, pois $(\lambda_0, \mu_0) \in int(H)$. Claramente $(\lambda_0, \lambda_0 - t) \in \overline{(0, \lambda_0) \times (0, \mu_0)}$, e assim, concluímos que $(\lambda_0, \lambda_0 - t) \in \overline{int(H)}$. Pela definição de $L(t)$, temos que $(\lambda_0, \lambda_0 - t) \in L(t)$. Portanto (2.50) é satisfeito.

Segue, da definição de $\lambda(t)$ que $\lambda(t) \geq \lambda_0 > 0$. Assim, $\lambda(t) > 0$ para todo $t \in (-\mu_*, 0]$.

Sendo $\lambda(t)$ monótona não-decrescente em $[-\mu_*, \lambda_*]$, temos pela afirmação acima, que

$$\lambda(t) \geq \lambda(0) > 0, \quad \text{para todo } t \in (-\mu_*, \lambda_*]. \tag{2.51}$$

Assim, por (2.49) e (2.51), concluímos que

$$\{t \in [-\mu_*, \lambda_*] : \lambda(t) = 0\} = \{-\mu_*\}.$$

De forma similar, provamos que

$$\mu(t) > 0, \text{ para todo } t \in [-\mu_*, \lambda_*)$$

e

$$\{t \in [-\mu_*, \lambda_*] : \mu(t) = 0\} = \{\lambda_*\}.$$

Assim, o item **(ii)**, fica demonstrado.

(iii) Do Lema 45,

$$\{(\lambda, 0) : \lambda \in [0, \lambda_*]\} \cup \{(0, \mu) : \mu \in [0, \mu_*]\} \subset \partial(intH)$$

e, pelo Lema 46,

$$\Gamma(t) \in L(t) \cap \partial(int(H)) \subset \partial(int(H)), \text{ para todo } t \in [-\mu_*, \lambda_*].$$

Portanto,

$$\{\Gamma(t) : t \in [-\mu_*, \lambda_*]\} \cup \{(\lambda, 0) : \lambda \in [0, \lambda_*]\} \cup \{(0, \mu) : \mu \in [0, \mu_*]\} \subset \partial(int(H)).$$

Vamos provar a inclusão contraria. Para qualquer

$$(a, b) \in \partial(int(H)) \setminus \{(\lambda, 0) : \lambda \in [0, \lambda_*]\} \cup \{(0, \mu) : \mu \in [0, \mu_*]\}, \tag{2.52}$$

temos que $(a, b) \in (0, \lambda_*] \times (0, \mu_*]$, pelo Lema 45. Considere $t_0 = a - b$, e observe que $t_0 \in [-\mu_*, \lambda_*]$ e

$$(a, b) \in L(t_0), \tag{2.53}$$

pois $(a, b) = (a, a - (a - b))$.

De (2.52) e (2.53), segue que $(a, b) \in L(t_0) \cap \overline{int(H)}$. Assim, pela definição de $\lambda(t_0)$, temos que $a \leq \lambda(t_0)$.

Portanto,

$$\{(a, b), (\lambda(t_0), \mu(t_0))\} \subset L(t_0) \text{ e } a \leq \lambda(t_0).$$

Provaremos que $a = \lambda(t_0)$. Se $a < \lambda(t_0)$, então

$$\mu(t_0) = \lambda(t_0) - (a - b) = (\lambda(t_0) - a) + b > b,$$

e assim, $(a, b) \in (0, \lambda(t_0)) \times (0, \mu(t_0))$. Pelo Lema 43, temos $(0, \lambda(t_0)) \times (0, \mu(t_0)) \subset int(H)$. Portanto $(a, b) \in int(H)$. Mas isso contradiz (2.52).

Por outro lado, $a = \lambda(t_0)$ implica que $\mu(t_0) = a - t_0 = a - (a - b)$, ou seja, $\mu(t_0) = a$, donde concluímos que

$$(a, b) = (\lambda(t_0), \mu(t_0)) \in \{\Gamma(t) : t \in [-\mu_*, \lambda_*]\}.$$

Dessa forma, fica provado a inclusão contraria.

Finalmente, provaremos que $\partial(int(H))$ é uma curva fechada e simples. Claramente

$$\{(\lambda, 0) : \lambda \in [0, \lambda_*]\} \cup \{(0, \mu) : \mu \in [0, \mu_*]\}$$

é um arco simples.

Por outro lado, pelos itens (i) e (ii) deste lema,

$$\{\Gamma(t) : t \in [-\mu_*, \lambda_*]\}$$

e

$$\{(\lambda, 0) : \lambda \in [0, \lambda_*]\} \cup \{(0, \mu) : \mu \in [0, \mu_*]\},$$

têm justamente os pontos finais $\{(\lambda_*, 0), (0, \mu_*)\}$ em comum e, Γ é um arco simples. Portanto, $\partial(int(H))$ é uma curva fechada e simples.

(iv) Seja

$$(a, b) \in \bigcup_{t \in [-\mu_*, \lambda_*]} \{(\lambda, \mu) \in L(t) : 0 \leq \lambda \leq \lambda(t), 0 \leq \mu \leq \mu(t)\},$$

então, existe um $t_0 \in [-\mu_*, \lambda_*]$ tal que $(a, b) \in L(t_0)$ e

$$0 \leq a \leq \lambda(t_0),\ \ 0 \leq b \leq \mu(t_0). \tag{2.54}$$

Temos, as seguintes hipóteses a considerar:

* $a = 0$ ou $b = 0$. Suponha, sem perda de generalidade, que $b = 0$. Neste caso, pelo Lema 45, $0 \leq a \leq \lambda_*$. Por outro lado, o item (iii) deste lema, implica que

$$(a, 0) \in \partial(int(H)) \subset \overline{int(H)}.$$

** $a > 0$ e $b > 0$. Sob essa hipótese, segue dos Lemas 43 e 46, que

$$(a, b) \in \overline{(0, \lambda(t_0)) \times (0, \mu(t_0))} \subset \overline{int(H)}.$$

Dessa forma, concluímos que

$$\bigcup_{t \in [-\mu_*, \lambda_*]} \{(\lambda, \mu) \in L(t) : 0 \leq \lambda \leq \lambda(t), 0 \leq \mu \leq \mu(t)\} \subset \overline{int(H)}.$$

Por outro lado, dado $(a, b) \in \overline{int(H)}$, temos que $(a, b) \in [0, \lambda_*] \times [0, \mu_*]$, pelo Lema 45. Além disso, $t_0 = a - b \in [-\mu_*, \lambda_*]$ é tal que $(a, b) \in L(t_0)$ e assim $(a, b) \in L(t_0) \cap \overline{int(H)}$. Pela definição de $\lambda(t_0)$ e $\mu(t_0)$, temos que $a \leq \lambda(t_0)$ e $b \leq \mu(t_0)$. Portanto,

$$(a, b) \in \bigcup_{t \in [-\mu_*, \lambda_*]} \{(\lambda, \mu) \in L(t) : 0 \leq \lambda \leq \lambda(t), 0 \leq \mu \leq \mu(t)\}.$$

Completamos, assim a prova.

$\square$

O próximo lema, caracteriza totalmente o conjunto H.

Lema 48. *Assuma que* $(H_1)-(H_4)$ *são satisfeitos. Então, existem* $\lambda^* \geq \lambda_*$ *e* $\mu^* \geq \mu_*$*, tais que*

$$\partial H = \{\Gamma(t) : t \in [-\mu_*, \lambda_*]\} \cup \{(\lambda, 0) : \lambda \in [0, \lambda^*]\} \cup \{(0, \mu) : \mu \in [0, \mu^*]\}.$$

Demonstração. **Caso 1**: $\overline{int(H)} = H$.

Considere $\lambda^* = \lambda_*$ e $\mu^* = \mu_*$. Segue, dos Lemas 44 e 47, que

$$\partial H = \partial(int(H)) = \{\Gamma(t) : t \in [-\mu_*, \lambda_*]\} \cup \{(\lambda, 0) : \lambda \in [0, \lambda^*]\} \cup \{(0, \mu) : \mu \in [0, \mu^*]\}.$$

Caso 2: $\overline{int(H)} \subsetneq H$.

Inicialmente, faremos uma afirmação.

Afirmação 1:

$$\emptyset \neq H \setminus \overline{int(H)} \subset \left\{(\lambda, \mu) \in [0, \infty)^2 : \lambda\mu = 0\right\}. \tag{2.55}$$

De fato, suponha que exista $(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \in H \setminus \overline{int(H)}$ e $(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \in (0, \infty)^2$. Como, $\overline{int(H)}$ é fechado, então $\overline{int(H)}^c \cap (0, \infty)^2$ é aberto e, assim, dado $(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \in \overline{int(H)}^c \cap (0, \infty)^2$, existe um quadrado aberto $Q((\overline{\lambda}, \overline{\mu}), r)$, tal que

$$Q((\overline{\lambda}, \overline{\mu}), r) \subset (0, \infty)^2 \text{ e } Q((\overline{\lambda}, \overline{\mu}), r) \cap \overline{int(H)} = \emptyset.$$

Por outro lado, de $(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \in H$, segue do Lema 43, que

$$Q((\overline{\lambda}, \overline{\mu}), r) \cap \left\{(\lambda, \mu) : 0 < \lambda < \overline{\lambda}, 0 < \mu < \overline{\mu}\right\} \subset H,$$

e, argumentando como na observação 3, obtemos que

$$Q((\overline{\lambda}, \overline{\mu}), r) \cap \left\{(\lambda, \mu) : 0 < \lambda < \overline{\lambda}, 0 < \mu < \overline{\mu}\right\} \subset int(H),$$

o que implica que $(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \in \overline{int(H)}$. Mas isso é uma contradição. Fica, provado assim, a afirmação 1.

Note que

$$H \setminus \overline{int(H)} = \partial H \setminus \partial(int(H)). \tag{2.56}$$

De fato, se $(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \in H \setminus \overline{int(H)}$, então $(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \in H$ e $(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \notin \overline{int(H)} = \partial(int(H)) \cup (int(H))$ e assim, concluímos que

$$(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \notin \partial(int(H)). \tag{2.57}$$

Por outro lado, pelo Lema 43, dado qualquer quadrado aberto $Q((\overline{\lambda}, \overline{\mu}), r)$, existem $0 <$

$\lambda < \overline{\lambda}$ e $0 < \mu < \overline{\mu}$, com $(\lambda, \mu) \in H$ tais que $(\lambda, \mu) \in Q((\overline{\lambda}, \overline{\mu}), r) \cap H$ e, dessa forma

$$Q((\overline{\lambda}, \overline{\mu}), r) \cap H \neq \emptyset. \tag{2.58}$$

Pelo fato de $H \setminus \overline{int(H)} \subset \{(\lambda, \mu) \in [0, \infty)^2 : \lambda\mu = 0\}$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\overline{\mu} = 0$. Logo, podemos encontrar $(\overline{\lambda}, \mu) \in Q((\overline{\lambda}, 0), r)$, com $|\mu| < r$ e $\mu < 0$, e portanto

$$Q((\overline{\lambda}, \overline{\mu}), r) \cap H^c \neq \emptyset. \tag{2.59}$$

Desde que, o quadrado aberto $Q((\overline{\lambda}, \overline{\mu}), r)$ foi arbitrário, segue de (2.58) e (2.59), que $(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \in \partial H$. Assim, por (2.57), concluímos que

$$H \setminus \overline{int(H)} \subset \partial H \setminus \partial(int(H)). \tag{2.60}$$

Agora, considere $(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \in \partial H \setminus \partial(int(H)) \subset H$, pois H é fechado. Como $int(H) \cap \partial H = \emptyset$, segue que $(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \notin int(H)$ o que implica que $(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \notin int(H) \cup \partial(int(H)) = \overline{int(H)}$. Logo,

$$(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \in H \setminus \overline{int(H)},$$

e isso implica que

$$\partial H \setminus \partial(int(H)) \subset H \setminus \overline{int(H)}. \tag{2.61}$$

De (2.60) e (2.61) segue (2.56).

Denote por

$$\lambda^* = \sup\{\lambda : (\lambda, 0) \in \partial H\} \tag{2.62}$$

e

$$\mu^* = \sup\{\mu : (0, \mu) \in \partial H\}. \tag{2.63}$$

Por H ser limitado e de (2.38) temos que $0 < \lambda_* \leq \lambda^* < \infty$ e $0 < \mu_* \leq \mu^* < \infty$. Por definição, existem sequências $(\lambda_n, 0), (0, \mu_n) \in \partial H$ tais que

$$(\lambda_n, 0) \to (\lambda^*, 0), \text{ quando } n \to \infty$$

e

$$(0, \mu_n) \to (0, \mu^*), \text{ quando } n \to \infty.$$

Como ∂H é fechado, temos que $(\lambda^*, 0), (0, \mu^*) \in \partial H \subset H$, pois H é fechado. Pelo Lema 43, segue que

$$\{(\lambda, 0) : \lambda \in [0, \lambda^*]\} \cup \{(0, \mu) : \mu \in [0, \mu^*]\} \subset \partial H \tag{2.64}$$

e de (2.62) e (2.63), temos

$$[\{(\lambda,0):\lambda>\lambda^*\}\cup\{(0,\mu):\mu>\mu^*\}]\cap\partial H=\emptyset.$$

Agora, observe que, de

$$H=\overline{int(H)}\dot{\bigcup}(H\setminus\overline{int(H)}),$$

segue que

$$\partial H=\partial(\overline{int(H)})\cup\partial(H\setminus\overline{int(H)}). \tag{2.65}$$

Assim, pelo Lema 47 (iii), e por (2.65), concluímos que

$$\partial H=\{\Gamma(t):t\in[-\mu_*,\lambda_*]\}\cup\{(\lambda,0):\lambda\in[0,\lambda_*]\}\cup\{(0,\mu):\mu\in[0,\mu_*]\}\cup\partial(H\setminus\overline{int(H)}). \tag{2.66}$$

Denotando por

$$B=\{\Gamma(t):t\in[-\mu_*,\lambda_*]\}\cup\{(\lambda,0):\lambda\in[0,\lambda^*]\}\cup\{(0,\mu):\mu\in[0,\mu^*]\},$$

mostraremos que

$$\partial H=B, \tag{2.67}$$

e isso concluirá a demonstração do lema.

Por (2.55), (2.62), (2.63) e (2.64), segue que

$$\partial H\setminus\partial(int(H))=\{(\lambda,0):\lambda\in(\lambda_*,\lambda^*]\}\cup\{(0,\mu):\mu\in(\mu^*,\mu_*]\},$$

Por outro lado, de (2.56), temos

$$\partial(H\setminus\overline{int(H)})=\partial(\partial H\setminus\partial(int(H))=\{(\lambda,0):\lambda\in[\lambda_*,\lambda^*]\}\cup\{(0,\mu):\mu\in[\mu_*,\mu^*]\}. \tag{2.68}$$

Seja $(\overline{\lambda},\overline{\mu})\in\partial H$. É suficiente análisar o caso em que $(\overline{\lambda},\overline{\mu})\in\partial(H\setminus\overline{int(H)})$. Por (2.68), segue que $\lambda_*\leq\overline{\lambda}\leq\lambda^*$ e $\overline{\mu}=0$ ou $\overline{\lambda}=0$ e $\mu_*\leq\overline{\mu}\leq\mu^*$ e, em qualquer caso $(\overline{\lambda},\overline{\mu})\in B$. Logo,

$$\partial H\subset B. \tag{2.69}$$

Considere $(\overline{\lambda},\overline{\mu})\in B$. Se $(\overline{\lambda},\overline{\mu})=(\overline{\lambda},0)$, com $\overline{\lambda}\leq\lambda^*$ ou $(\overline{\lambda},\overline{\mu})=(0,\overline{\mu})$, com $\overline{\mu}\leq\mu^*$, então $(\overline{\lambda},\overline{\mu})\in\partial H$, por (2.64). Se $(\overline{\lambda},\overline{\mu})\in\{\Gamma(t):t\in[-\mu_*,\lambda_*]\}$, então $(\overline{\lambda},\overline{\mu})\in\partial(int(H))\subset H$ pelo Lema 46 e por H ser fechado, e isso implica que $(\overline{\lambda},\overline{\mu})\notin int(H)$, pois $\partial(int(H))\cap int(H)=\emptyset$.

Dessa forma, concluímos que $(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \in \partial H$ porque $(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \in H = \partial H \cup int(H)$. Logo,

$$B \subset \partial H. \tag{2.70}$$

Por (2.69) e (2.70), segue (2.67). Assim, fica provado o lema.

□

Agora, estamos com todas as ferramentas para demonstrar o **Teorema C**.

Demostração do Teorema C

Demonstração. **(i)** Pelo Lema 47, $\{\Gamma(t) : t \in [-\mu_*, \lambda_*]\}$ é um arco simples com pontos extremos $(\lambda_*, 0)$ e $(0, \mu_*)$, e separa $(0, \infty)^2$ em dois subconjuntos disjuntos $int(H)$ e $(0, \infty)^2 \setminus \overline{int(H)}$. Denote por

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \{\Gamma(t) : t \in (-\mu_*, \lambda_*)\}, \\ O_1 &= int(H), \\ O_2 &= (0, \infty)^2 \setminus \overline{int(H)} = (0, \infty)^2 \setminus \overline{O_1}. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Pelo Lema 47, temos que $\Gamma_0 \subset \overline{int(H)}$ e, como $int(H) \subset \overline{int(H)}$, segue que

$$\Gamma_0 \cup O_1 \subset \overline{int(H)}.$$

Por outro lado, se $\emptyset \neq H \setminus \overline{int(H)}$, então por (2.55), temos que

$$H \setminus \overline{int(H)} \subset \left\{(\lambda, \mu) \in [0, \infty)^2 : \lambda\mu = 0\right\}.$$

Logo,

$$O_2 \cap H = O_2 \cap [(H \setminus \overline{int(H)}) \cup \overline{int(H)}] = \emptyset.$$

Pelo item **(ii)** do Lema 44, H é fechado, logo todas as soluções de (S), pertencem a H, e consequentemente (S) não tem solução para $(\lambda, \mu) \in O_2$. Agora, observe que, as soluções triviais para (S), são obtidas quando $(\lambda, \mu) = (0, 0)$. De fato, $0 = -\triangle\, 0 = \lambda f_i(0, x) g_i(x, 0)$ para $i = 1, 2$ implica que $\lambda = \mu = 0$, pois as funções f_1, f_2, g_1 e g_2 nunca se anulam.

Assim, para $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ as soluções de (S) são não triviais, se existirem. Agora, se $(\lambda, \mu) \in \Gamma_0 \cup O_1$, como $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, temos que (S), tem no mínimo uma solução não-trivial.

Afirmação 1: O sistema (S), tem no mínimo duas soluções não-triviais para $(\lambda, \mu) \in O_1$.

Tome $(\lambda, \mu) \in O_1$. Então, como O_1 é aberto, existe $(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \in O_1$, com $\lambda < \overline{\lambda}$ e $\mu < \overline{\mu}$.

Primeiro, provaremos que existe um conjunto aberto e limitado $W \subset C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$, tal que

$$i(T^1_{\lambda,\mu}, W \cap (K \times K), K \times K) = 1. \tag{2.72}$$

Seja (ϕ, ψ) uma solução não-trivial positiva de (S), com $(\lambda, \mu) = (\overline{\lambda}, \overline{\mu})$.

Note que, como h_1 é contínua em $\overline{\Omega} \times [0, ||\phi||]$ e $h_1 > 0$, então h_1 tem um mínimo positivo em $\overline{\Omega} \times [0, ||\phi||]$. Dessa forma,

$$q_1 = \min\left\{h_1(x, y, 0) : (x, y) \in \overline{\Omega} \times [0, ||\phi||]\right\} > 0. \tag{2.73}$$

Analogamente,

$$q_2 = \min\left\{h_2(x, y, 0) : (x, y) \in \overline{\Omega} \times [0, ||\psi||]\right\} > 0.$$

Afirmação 2: Existe $\epsilon_1 \in (0, 1)$, tal que para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_1]$, temos

$$\lambda[h_1(x, \phi + \epsilon, \psi + \epsilon) - h_1(x, \phi, \psi)] < (\overline{\lambda} - \lambda)q_1, x \in \overline{\Omega}. \tag{2.74}$$

De fato, caso o contrário, para todo $n > 1, n \in \mathbb{N}$ existiriam $\epsilon_n \in (0, \frac{1}{n}]$ e $x_n \in \overline{\Omega}$ tais que

$$\lambda[h_1(x_n, \phi(x_n) + \epsilon_n, \psi(x_n) + \epsilon_n) - h_1(x_n, \phi(x_n), \psi(x_n))] \geq (\overline{\lambda} - \lambda)q_1 > 0. \tag{2.75}$$

Assim, a menos de subsequência, temos que $x_n \to x \in \overline{\Omega}$ e consequentemente

$$0 = \lim_{n\to\infty} \lambda[h_1(x_n, \phi(x_n) + \epsilon_n, \psi(x_n) + \epsilon_n) - h_1(x_n, \phi(x_n), \psi(x_n))] \geq (\overline{\lambda} - \lambda)q_1 > 0,$$

o que é uma contradição. Portanto, (2.74) é satisfeito.

Analogamente, existe $\epsilon_2 \in (0, 1)$, tal que para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_2]$ temos que

$$\mu[h_2(x, \phi + \epsilon, \psi + \epsilon) - h_2(x, \phi, \psi)] < (\overline{\mu} - \mu)q_2, \ x \in \overline{\Omega}.$$

Tome $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Então, para todo $\overline{\epsilon} \in (0, \epsilon]$, temos que

$$\begin{cases} \lambda[h_1(x, \phi + \overline{\epsilon}, \psi + \overline{\epsilon}) - h_1(x, \phi, \psi)] < (\overline{\lambda} - \lambda)q_1, \ x \in \overline{\Omega} \\ \mu[h_2(x, \phi + \overline{\epsilon}, \psi + \overline{\epsilon}) - h_2(x, \phi, \psi)] < (\overline{\mu} - \mu)q_2, \ x \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Dessa forma, pela monotocidade de $h_1(x, s, t)$ em relação a t e por (2.73), obtemos que

$$\begin{aligned} \lambda h_1(x, \phi + \overline{\epsilon}, \psi + \overline{\epsilon}) - \overline{\lambda} h_1(x, \phi, \psi) &< (\overline{\lambda} - \lambda)q_1 - (\overline{\lambda} - \lambda)h_1(x, \phi, \psi) \\ &\leq (\overline{\lambda} - \lambda)[q_1 - h_1(x, \phi, 0)] \leq 0, \end{aligned}$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$.

Analogamente,

$$\mu h_2(x, \phi + \overline{\epsilon}, \psi + \overline{\epsilon}) - \overline{\mu} h_2(x, \phi, \psi) < (\overline{\mu} - \mu)[q_2 - h_2(x, 0, \psi)] \leq 0,$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$.

Sejam $\overline{u} = \phi + \epsilon$ e $\overline{v} = \psi + \epsilon$. Então,

$$\begin{cases} -\triangle \overline{u} = -\triangle \phi = \overline{\lambda} h_1(x, \phi, \psi) > \lambda h_1(x, \phi + \epsilon, \psi + \epsilon), x \in \Omega \\ -\triangle \overline{v} = -\triangle \psi = \overline{\mu} h_2(x, \phi, \psi) > \mu h_2(x, \phi + \epsilon, \psi + \epsilon), x \in \Omega \\ \overline{u} = \overline{v} = \epsilon > 0, x \in \partial\Omega \end{cases}$$

o que significa que $(\overline{u}, \overline{v})$ é supersolução estrita de (S). Sejam $\underline{u} = \underline{v} = -\epsilon$, então $(\underline{u}, \underline{v})$ é subsolução estrita de (S), se definirmos $h_i(x, s, t) = h_i(x, |s|, |t|)$ para todo $(s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, isto é, se estendermos h_i a $\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Denote,

$$W = \left\{(u, v) \in C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega}) : (\underline{u}, \underline{v}) < (u, v) < (\overline{u}, \overline{v})\right\}.$$

Pelo Teorema 16, segue que (2.72) é satisfeito com o conjunto W.
Afirmação 3: Existe $R > 0$ grande, tal que $\overline{W \cap (K \times K)} \subsetneq K_R \times K_R$ e $i(T^1_{\lambda,\mu}, K_R \times K_R, K \times K) = 0$.

Com efeito, escolha $(\gamma, \kappa) \in O_2$ com $\gamma > \lambda$ e $\kappa > \mu$. Além disso, escolha R grande tal que $R > max\left\{\overline{C}_1, \overline{C}_2\right\}$, onde $\overline{C}_1$ e $\overline{C}_2$ são as constantes do Lema 42, com $I_1 = [\lambda, \gamma]$ e $I_2 = [\mu, \kappa]$, respectivamente.

Afirmamos que

$$i(T^1_{\gamma,\kappa}, K_R \times K_R, K \times K) = 0,$$

pois, caso contrário, existiria $(u, v) \in K_R \times K_R$ tal que $T^1_{\gamma,\kappa}(u, v) = (u, v)$, e assim $(\gamma, \kappa) \in H$, o que é uma contradição, pois $O_2 \cap H = \emptyset$.

Também, como $(\lambda, \mu) \in O_1$, temos que $\lambda > 0$ e $\mu > 0$. Considere

$$\Psi : K_R \times K_R \times [0, 1] \to K \times K$$

definida por

$$\Psi(u, v, t) = I(u, v) - [tT_{\lambda,\mu}(u, v) + (1 - t)T_{\gamma,\kappa}(u, v)].$$

onde I é a identidade sobre $K \times K$.

Temos, para todo $(u, v, t) \in \partial(K_R \times K_R) \times [0, 1]$, que $(0, 0) \neq \Psi(u, v, t)$. Com efeito, suponha por contradição que exista $(u,v,t) \in \partial(K_R \times K_R) \times [0,1]$ tal que

$$tT_{\lambda,\mu}(u,v) + (1-t)T_{\gamma,\kappa}(u,v) = (u,v). \tag{2.76}$$

Então, denotando por

$$T_{\lambda,\mu}(u,v) = (u_1,v_1) \text{ e } T_{\gamma,\kappa}(u,v) = (u_2,v_2),$$

segue de (2.76), que

$$\begin{cases} -\triangle u = -\triangle [tu_1 + (1-t)u_2] = t\lambda h_1(x,u,v) + (1-t)\gamma h_1(x,u,v), \Omega \\ -\triangle v = -\triangle [tv_1 + (1-t)v_2] = t\mu h_2(x,u,v) + (1-t)\kappa h_2(x,u,v)\Omega \\ u = v = 0, \partial\Omega, \end{cases}$$

ou seja, (u,v) é uma solução do sistema

$$\begin{cases} -\triangle u = [t\lambda + (1-t)\gamma]h_1(x,u,v), \ \Omega \\ -\triangle v = [t\mu + (1-t)\kappa]h_2(x,u,v), \ \Omega \\ u = v = 0, \partial\Omega. \end{cases}$$

Como $t\lambda + (1-t)\gamma \in [\lambda,\gamma]$ e $t\mu + (1-t)\kappa \in [\mu,\kappa]$, segue, pelo Lema 42, a contradição $R = ||(u,v)||_{K\times K} \leq \max\left\{\overline{C}_1, \overline{C}_2\right\}$, pois $R > \max\left\{\overline{C}_1, \overline{C}_2\right\}$.

Aplicando, a invariância por homotopia, obtemos

$$i(T^1_{\lambda,\mu}, K_R \times K_R, K \times K) = i(T^1_{\gamma,\kappa}, K_R \times K_R, K \times K) = 0. \tag{2.77}$$

Aplicaremos a propriedade de adição do Índice de Ponto Fixo, com os seguinte abertos de $K_R \times K_R$:

$$W \cap (K \times K) \text{ e } K_R \times K_R \setminus \overline{W \cap (K \times K)}.$$

Denotando por

$$A = [W \cap (K \times K)] \cup [(K_R \times K_R) \setminus \overline{W \cap (K \times K)}],$$

temos que

$$(0,0) \notin (I - T^1_{\lambda,\mu})(\overline{K_R \times K_R} \setminus A).$$

Com efeito, se o contrário fosse verdade, existiria $(u,v) \in \partial(K_R \times K_R)$ ou $(u,v) \in \partial(W \cap (K \times K))$ tal que

$$T^1_{\lambda,\mu}(u,v) = (u,v),$$

pois

$$\overline{K_R \times K_R} \setminus A = \partial(K_R \times K_R) \cup \partial(W \cap (K \times K).$$

No caso em que $(u,v) \in \partial(K_R \times K_R)$, chegamos a contradição, com $R = ||(u,v)||_{K\times K} \leq \max\{\overline{C}_1, \overline{C}_2\} < R$.

No caso em que $(u,v) \in \partial(W \cap (K \times K))$, temos $u \in \{\underline{u}, \overline{u}\}$ ou $v \in \{\underline{v}, \overline{v}\}$, o que implica que

$$T^1_{\lambda,\mu}(u,v) \neq (u,v),$$

porque $\underline{u}, \underline{v}$ são subsoluções estritas e $\overline{u}, \overline{v}$ são supersoluções estritas.

Agora, podemos aplicar a propriedade da adição do Índice de Ponto Fixo (Propriedade (I_2)) para obter

$$\begin{aligned} i(T^1_{\lambda,\mu}, K_R \times K_R \setminus \overline{W \cap (K \times K)}, K \times K) &= i(T^1_{\lambda,\mu}, K_R \times K_R, K \times K) \\ &\quad -i(T^1_{\lambda,\mu}, W \cap (K \times K), K \times K) = -1. \end{aligned} \tag{2.78}$$

Concluímos, de (2.72) e (2.78), que $T^1_{\lambda,\mu}$ tem no mínimo dois pontos fixos não-triviais em $K_R \times K_R$, isto é, o sistema (S) possui no mínimo duas soluções positivas para $(\lambda,\mu) \in O_1$.

(ii) Por conveniência, denotaremos por

$$L = \{(\lambda,0) : \lambda \in [0,\lambda^*)\} \cup \{(0,\mu) : \mu \in [0,\mu^*)\} \text{ e } L' = \{(\lambda,0) : \lambda > \lambda^*\} \cup \{(0,\mu) : \mu > \mu^*)\}.$$

Pelo Lema 48, temos

$$\{(\lambda^*,0),(0,\mu^*)\} \cup L \subset \partial H \text{ e } L' \cap H = \emptyset.$$

Pelo item (ii) do Lema 44, H é fechado. Logo, todas as soluções de (S) pertencem a H, o que implica que (S) não tem solução para $(\lambda,\mu) \in L'$. De forma análoga ao item anterior, vemos que (S) tem no mínimo uma solução semitrivial para $(\lambda,\mu) \in \{(\lambda^*,0),(0,\mu^*)\} \cup L \setminus \{(0,0)\}$.

Agora, é suficiente provar que (S) tem no mínimo duas soluções semitriviais positivas para $(\lambda,\mu) \in L \setminus \{(0,0)\}$.

Sem perda de generalidade, assuma que $\lambda \in (0,\lambda^*)$ e $\mu = 0$.

Afirmação 4: Existe um conjunto aberto e limitado $W_1 \subset C(\overline{\Omega})$ tal que

$$i(A^1_\lambda(.,)), W_1 \cap K, K) = 1. \tag{2.79}$$

De fato, seja $(u^*,0)$ uma solução positiva semitivial do sistema (S) com $(\lambda,\mu) = (\lambda^*,0)$, então, de forma análoga ao que fizemos no item anterior, existe $\epsilon \in (0,1)$ tal que, para todo

$\bar{\epsilon} \in (0, \epsilon]$ temos que

$$\lambda[h_1(x, u^* + \bar{\epsilon}, 0) - h_1(x, u^*, 0)] < (\lambda^* - \lambda)q, x \in \overline{\Omega}$$

onde $q = min\left\{h_1(x, s, 0) : (x, s) \in \overline{\Omega} \times [0, ||u^*||\right\} > 0$, e assim,

$$\lambda h_1(x, u^* + \epsilon, 0) - \lambda^* h_1(x, u^*, 0) < (\lambda^* - \lambda)[q - h_1(x, u^*, 0)] \leq 0, x \in \overline{\Omega}.$$

Seja $\overline{u} = u^* + \epsilon$, então

$$\begin{cases} -\triangle \overline{u} > \lambda h_1(x, \overline{u}, 0), x \in \Omega \\ \overline{u} > 0, x \in \partial\Omega \end{cases}$$

o que implica que $\overline{u}$ é supersolução estrita da primeira equação (com $v = 0$) do sistema (S). Seja $\underline{u} = -\epsilon$, então $\underline{u}$ é uma subsolução estrita da primeira equação (com $v = 0$) do sistema (S) se definirmos $h_1(x, s, 0) = h_1(x, |s|, 0)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Denote por

$$W_1 = \left\{u \in C(\overline{\Omega}) : \underline{u} < u < \overline{u}, \Omega\right\},$$

então, de forma análoga ao que foi feito no Teorema 2.1.1, sabemos que (2.79) é válido.

Afirmação 5: Existe $R > 0$ tal que,

$$\begin{cases} \overline{W_1 \cap K} \subsetneq K_R \\ i(A^1_\lambda(.,0), K_R, K) = 0. \end{cases}$$

De fato, escolha $(\overline{\lambda}, 0) \in L'$ e R grande tal que $R > \overline{C}_1$, onde $\overline{C}_1$ é a constante do Lema 42, com $I_1 = [\lambda, \overline{\lambda}]$. Com os argumentos do item anterior obtemos

$$i(A^1_\lambda(.,0), K_R, K) = i(A^1_{\overline{\lambda}}(.,0), K_R, K) = 0. \tag{2.80}$$

Aplicando a aditividade do Índice de Ponto Fixo (Propriedade (I_2)) e (2.79) e (2.80), temos

$$i(A^1_\lambda(.,0), K_R \setminus \overline{W_1 \cap K}, K) = i(A^1_\lambda(.,0), K_R, K) - A^1_\lambda(.,0), W_1 \cap K, K) = -1 \tag{2.81}$$

Portanto, por (2.79) e (2.81) o operador $A^1_\lambda(.,0)$ tem no mínimo dois pontos fixos não triviais em K_R, em outras palavras, o sistema (S) tem no mínimo duas soluções semitriviais positivas $(u_1, 0)$ e $(u_2, 0)$.

□

Aplicaremos o Teorema C, para estudar o sistema

$$(R): \qquad \begin{cases} -\triangle u = \lambda f(x,u), \ \Omega \\ u > 0, \ \Omega, \ u = 0, \ \partial\Omega, \end{cases}$$

com respeito ao parâmetro λ, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ é um domínio aberto, limitado e suave e $f \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty), (0,\infty))$.

Para estudar o sistema (R), consideraremos as seguintes hipóteses:

(R_1) $\liminf_{s\to\infty} \min_{x\in\overline{\Omega}} \dfrac{f(x,s)}{s} > \delta_1$, onde δ_1 é o primeiro autovalor de $(-\triangle, H_0^1(\Omega))$;

(R_2) existem $p \in C(\overline{\Omega}, (0,\infty))$ e $q \in (1, (N+2)/(N-2))$ tais que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s^q} = p(x) \text{ uniformemente com respeito a } x \in \overline{\Omega}.$$

O próximo corolário é uma consequência do Teorema C.

Corolário 49. *Suponha que $(R_1) - (R_2)$ são satisfeitos. Então, existe um número real positivo λ' tal que, (R) não tem solução, tem no mínimo uma solução ou tem no mínimo duas soluções positivas, se $\lambda > \lambda'$, $\lambda = \lambda'$ ou $\lambda \in (0, \lambda')$, respectivamente.*

Demonstração. Observe que, estudar o sistema (R) é equivalente a estudar as soluções semitriviais do sistema

$$\begin{cases} -\triangle u = \lambda f(x,u), \ \Omega \\ -\triangle v = 0 f(x,v), \ \Omega \\ u > 0 \ \Omega, \ v = 0 \ \Omega, \ u = v = 0 \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim, pelo Teorema C (ii), existe $\lambda' > 0$ tal que: (R) não tem solução se $\lambda > \lambda'$, tem no mínimo uma solução para $\lambda = \lambda'$ e não tem solução se $\lambda \in (0, \lambda')$. $\square$

Apêndice A

Resultados clássicos

A.1 Topologia

Neste apêndice, vamos recordar algumas definições e enunciar os principais resultados de Análise no $\mathbb{R}^N$ e Topologia que foram utilizados nesta dissertação.

Teorema 50. *Sejam X e Y espaços métricos e $A \subset X, B \subset Y$. Se A ou B for aberto, então $A \times B$ será aberto em $X \times Y$.*

Demonstração. Ver E.L. Lima [25]. □

Teorema 51. *Sejam $X_1, \cdots, X_n$ espaços métricos e $S_1 \subset X_1, \cdots, S_n \subset X_n$. Então $\overline{S_1 \times \cdots \times S_n} = \overline{S_1} \times \cdots \times \overline{S_n}$.*

Demonstração. Ver E.L. [26]. □

Teorema 52. *Dados $A \subset X$ e $B \subset Y$, onde X e Y são espaços métricos, tem-se que $\partial(A \times B) = (\partial A \times B) \cup (A \times \partial B)$ em $X \times Y$.*

Demonstração. Ver [26]. □

Lembraremos a definição de conjuntos conexos e componentes conexas, seguindo as ideias de [26].

Definição 18. *Seja X um espaço métrico. Uma cisão de X é uma decomposição $X = A \cup B$ de X como reunião de dois subconjuntos abertos e disjuntos A e B. A cisão $X = A \cup B$ diz-se trivial quando um dos abertos, A ou B é vazio.*

Definição 19. *Um espaço métrico X chama-se conexo quando a única cisão possível em X é a trivial. Um subconjunto S de um espaço métrico X diz-se um conjunto conexo quando o subespaço $S \subset X$ (isto é S é um espaço métrico com a métrica d induzida pela métrica de X) é conexo.*

Teorema 53. *Seja* $(S_\lambda)_{\lambda\in L}$ *uma família arbitrária de conjuntos conexos num espaço métrico* X. *Se todos os* S_λ *contêm o mesmo ponto* $a \in X$, *então a reunião* $S = \bigcup_{\lambda\in L} S_\lambda$ *é conexa.*

Demonstração. Ver [26]. □

Seja X um espaço métrico e considere o conjunto

$$C_x = \{\cup A : A \subset X \text{ é conexo e } x \in A\}.$$

O conjunto C_x é chamado de componente conexa de x em X. Observe que $C_x \neq \emptyset$, pois $\{x\} \subset C_x$. O conjunto C_x é conexo pelo Teorema 53, mais ainda, ele é o maior subconjunto conexo de X que contém $x \in X$. De fato, se S é conexo em X e $x \in S$, então S é um dos conjuntos conexos cuja união é C_x. Logo $S \subset C_x$.

Seja X um espaço métrico. A relação "existe um subconjunto conexo de X contendo os pontos x e y", simbolizada por $x \sim y$, é uma relação de equivalência em X. As classes de equivalência segundo esta relação são as componentes conexas de X. Isto significa que, $C_x = C_y$ se, e somente se $x \sim y$. De fato, neste caso temos $x, y \in C_x$ com C_x conexo, o que implica que $x \sim y$. Para provar a recíproca, suponha que exista um conjunto conexo S contendo x e y. Então $y \in S \subset C_x$, e como C_x é conexo obtemos que $C_x \subset C_y$. Analogamente se vê que $C_y \subset C_x$, donde $C_x = C_y$.

A família $(C_x)_{x\in X}$ das componentes conexas de um espaço métrico X fornece uma partição de X em subconjuntos disjuntos. Uma componente conexa C de um espaço métrico X é um subconjunto conexo máximo, isto é se S é conexo e $C \subset S$, então $C = S$. Além disso, se S é conexo e $S \cap C \neq \emptyset$, então $S \subset C$. Todo subconjunto conexo não-vazio de X está contido em uma única componente conexa.

Seja $S \subset X$ um subespaço de X, então tudo que foi dito acima continua válido para S. Suponha que S seja um suconjunto aberto de X, então todas as componentes conexas de S são abertas. Para demonstrar isso, relembraremos alguns fatos. Os abertos de S são da forma $S \cap A$ onde $A \subset X$ é aberto. Em particular, se $B(x, \epsilon) \subset S$, então $B(x, \epsilon) \subset S$ é aberto em S. Por outro lado, toda bola aberta $B^S(x, \epsilon)$ em S tem a forma $S \cap B(x, \epsilon)$, onde $B(x, \epsilon) \subset S$ é uma bola aberta em X, assim concluímos que $B(x, \epsilon) \subset S$ é uma bola em aberta em S, e em particular um subconjunto conexo de S.

Queremos mostrar que se C é uma componente conexa de S, então dado $x \in C$, existe uma bola aberta de X tal que $B(x, \epsilon) \subset C$. Seja $x \in C$, então $x \in S$. Como S é aberto em X, existe uma bola $B(x, \epsilon)$ em X, tal que $B(x, \epsilon) \subset S$, e pelo que foi visto acima, esta bola é um subconjunto conexo de S e portanto $B(x, \epsilon) \subset C$, devido ao fato de C ser um conjunto conexo máximo em S. Portanto, cada componente conexa de S é aberta.

Definição 20. *Um caminho em um espaço métrico X é uma aplicação contínua $f : [0,1] \to X$. Um espaço métrico X chama-se conexo por caminho quando dois pontos quaisquer de X podem ser ligados por um caminho contido em X. Um subconjunto $S \subset X$ diz-se conexo por caminho quando o subespaço S tem essa propriedade.*

Definição 21. *Um espaço métrico chama-se localmente conexo por caminho quando para todo $x \in X$ e toda vizinhança $x \ni V$ existe uma vizinhaça conexa por caminho $x \ni U$ tal que $x \in U \subset V$.*

Obsevação Se X é localmente conexo por caminho, todo subconjunto aberto de X tem a mesma propriedade. Também, todo espaço vetorial normado é localmente conexo por caminho. Segue que todo aberto de um espaço vetorial normado é localmente conexo por caminho.

Teorema 54. *Seja X um espaço métrico localmente conexo por caminho. Então X é conexo por caminho se, e somente se, é conexo.*

Demonstração. Ver [26]. □

Observação Segue do teorema acima que todo subconjunto aberto de um espaço vetorial normado é conexo por caminho.

Teorema 55. (a) *Sejam $A \subset \mathbb{R}^N$ compacto, $f : A \to \mathbb{R}^N$ contínua e $\epsilon > 0$. Então existe uma função $g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $|f(x) - g(x)|_2 < \epsilon$ em A, onde $|.|_2$ é norma euclidiana usual e $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ o espaço das funções infinitamente derivavéis (ver notação do capítulo 1).*

(b) *Dados $f \in C^1(\overline{D})$, $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tal que $D_\delta = \{x \in D : \varrho(x, \partial D) \geq \delta\} \neq \emptyset$, onde $\varrho(x, A) := inf\,\{|y - a|_2 : a \in A\}$, então existe $g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $|f - g| + max_{D_\delta}|f^{'}(x) - g^{'}(x)| \leq \epsilon$, onde $|.|$ é norma do máximo.*

Demonstração. Ver [13]. □

Teorema 56. *(Lema de Sard) Seja $D \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $\Phi \in C^1(D)$. Então $\mu_n(\Phi(S_\Phi)) = 0$ (ver capítulo 1 para notação), onde μ_n denota a medida n-dimensional de Lebesgue.*

Demonstração. Ver [13]. □

Teorema 57. *(Teorema do Divergente) Seja $D \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado e suponha que ∂D é C^1. Seja ainda $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^N$, $f \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$. Então*

$$\int_D div(f) = \int_{\partial D} f \cdot \nu dS,$$

onde ν é o vetor normal unitário exterior.

Demonstração. Ver L. Evans [15]. □

Teorema 58. *(Segunda Fórmula de Green) Sejam $f, g \in C^2(\overline{D})$. Suponha que as hipóteses do teorema anterior sejam satisfeitas sobre D. Então*

$$\int_D \bigtriangledown f \cdot \bigtriangledown g dx = -\int_D g \bigtriangleup f dx + \int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \nu} g dS.$$

Demonstração. Ver [15]. □

Teorema 59. *Sejam $D \subset \mathbb{R}$ aberto, limitado, $f \in C^2(D)$ e $g \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $supp(g) \cap \Phi(\partial D) = \emptyset$. Então existe $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$div(u(x)) = J_\Phi(x) div(g(f(x))) \ x \in D.$$

Demonstração. Ver [16]. □

Seja X um Espaço de Banach real e P um cone de X. Denotaremos por X^* o conjunto de todos os funcionais lineares e limitados em X, ou seja, $f \in X^*$ se $f : X \to \mathbb{R}$ é linear e existe uma constante $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c||x||$ para $x \in X$. Um funcional $f \in X^*$ é positivo com respeito ao cone P se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in P$. O conjunto de todos os funcionais lineares limitados e positivos é denotado por P^*, isto é,

$$P^* = \{f \in X^* : f(x) \geq 0, x \in P\}.$$

Teorema 60. *Sejam X um Espaço de Banach real e P um cone de X. Suponha que X é separável. Então existe $f_0 \in P^*$ tal que $f_0(x) > 0$ para todo $x > 0$.*

Demonstração. Ver [22]. □

Em particular $f(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$ em P, pois para todo $x \in P, x \neq 0$ temos $x > 0$, visto que $x - 0 \in P$.

A.2 Espaços de Banach e Equações Diferenciais Parciais

Neste apêndice vamos apresentar alguns resultados dos sobre Espaços de Banach e Equações Diferenciais Parciais que foram utilizados nesta dissertação. A notação deste apêndice é coerente com a notação do Capítulo 2. Em todo este apêndice, a menos de menção contrária, Ω será aberto e limitado. Utilizaremos as seguintes notações

$$L^1(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e integrável}\},$$

$$L^p(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\right\}.$$

Para $1 \leq p < \infty$ denotamos

$$||f||_{L^p} = ||f||_p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

A abreviação q.t.p. significará que uma propriedade é válida em quase todo ponto. Para $p = \infty$, lembramos que

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e existe uma constante } C \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\},$$

e

$$||f||_{L^\infty} = ||f||_\infty = inf\,\{C : |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

Teorema 61. *(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ que satisfaz*

(a) *$f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω,*

(b) *existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em Ω.*

Então $f \in L^1(\Omega)$ e $||f_n - f||_1 \to 0$.

Demonstração. Ver H. Brezis [5]. □

Observação: O Teorema 61 continua válido para L^p.

Definição 22. *O espaço $C^k(\overline{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}$ é o espaço das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ que, juntamente com todas as derivadas de ordem inferior ou igual a k, são uniformemente contínuas sobre $\overline{\Omega}$.*

O espaço $C^k(\overline{\Omega})$ é um Espaço de Banach munido da norma

$$||f||_{C^k(\overline{\Omega})} = ||f||_{C^k} = \max_{0\leq\sigma\leq k}\max_{x\in\overline{\Omega}} |D^\sigma f(x)|,$$

onde

$$\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_N), \text{ com } \sigma_i \in \mathbb{N}, \; |\sigma| = \sigma_1 + \cdots + \sigma_N,$$

e

$$D^\sigma f(x) = \frac{\partial^{|\sigma|} f(x)}{\partial x_1^{\sigma_1}\partial x_2^{\sigma_2}\cdots\partial x_N^{\sigma_N}}.$$

Observação: Para $k = 0$, $C^k(\overline{\Omega})$ é espaço das funções uniformemente contínuas em $\overline{\Omega}$, e portanto limitadas. Para $|\sigma| = 1$ temos que $D^\sigma f(x) = \bigtriangledown f(x)$ é o gradiente de f.

Definição 23. *O espaço $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, com $\alpha \in (0,1)$, é o subespaço de $C^k(\Omega)$ constituído pelas funções com k-ésima derivada sendo Holderianas com expoente α, isto é, que verificam*

$$H_{k,\alpha}(f) = \max_{|\sigma|=k}\sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|D^\sigma f(x) - D^\sigma f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty, \; com\; x \neq y.$$

De forma abreviada, temos

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ f \in C^k(\Omega) : H_{k,\alpha} < \infty \right\}.$$

O espaço $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ é um Espaço de Banach munido com a norma

$$||f||_{C^{k,\alpha}} = ||f||_{C^k} + H_{k,\alpha}(f).$$

Para $k = 0$ escreveremos $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ e também ecreveremos $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = C^{k,\alpha}$.

Definição 24. *Sejam X e Y espaços de Banach com $Y \subset X$ subespaço vetorial de X. Dizemos que Y tem imersão contínua em X, e escreveremos $Y \hookrightarrow X$, se o operador identidade $I : Y \to X$ for contínuo, isto é, existe um constante C tal que $||I(x)||_X = ||x||_X \leq C||x||_Y$.*

Definição 25. *Sejam X,Y Espaços de Banach com $Y \subset X$ subespaço vetorial de X. Dizemos que Y tem imersão compacta em X, e escreveremos $Y \hookrightarrow\hookrightarrow X$, se o operador identidade $I : Y \to X$ for compacto.*

Teorema 62. *Sejam k um inteiro não negativo e $\alpha \in (0, 1)$. Então $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$.*

Demonstração. Ver R.A. Adams [1]. □

Observação: Pela definição da norma $||.||_{C^k}$, temos que $C^k(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C(\Omega)$, e segue do teorema acima e por composição que $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\Omega)$.

Definição 26. *Seja $L^1_{loc}(\Omega) = \{f \in L^1(K) : K \subset \Omega$ é compacto$\}$. Dizemos que $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ é a derivada fraca de ordem σ de $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, e secreveremos*

$$g = D^{\sigma} f,$$

se

$$\int_{\Omega} f D^{\sigma} \phi dx = (-1)^{|\sigma|} \int_{\Omega} D^{\sigma} f \phi,$$

para toda $\phi \in C^{\infty}_c(\Omega)$, onde $C^{\infty}_c(\Omega) = \{f \in C^{\infty}(\Omega) : supp(f) \subset\subset \Omega\}$ e $supp(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$.

Observação: Lembremo-nos que $A \subset\subset B$ significa que $A \subset B$ e $\overline{A}$ é compacto em B.

Definição 27. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e k um inteiro não negativo. O Espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ consiste de todas as funções $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tais que para todo multiíndice σ com $|\sigma| \leq k$, $D^{\sigma} f$ existe no sentido fraco e pertence a $L^p(\Omega)$.*

Observação: Se $p = 2$, escreveremos $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ $(k = 0, 1, \cdots)$.

Se $f \in W^{k,p}(\Omega)$, então

$$||f||_{W^{k,p}(\Omega)} \begin{cases} (\sum_{|\sigma|\leq k} \int_{\Omega} |D^{\sigma} f|^p dx)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } 1 \leq p \leq \infty \\ \sum_{|\sigma|\leq k} ||D^{\sigma} f||_{L^{\infty}} \text{ se } p = \infty, \end{cases}$$

define uma norma em $W^{k,p}(\Omega)$. Denotaremos por $W_0^{k,p}(\Omega)$ o fecho de $C_c^{\infty}(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$.

Para $p = 2$ temos que $H^k(\Omega)$ e $W_0^{k,2}(\Omega) = H_0^k$ são Espaços de Hilbert.

Teorema 63. *Seja Ω um domínio limitado e suave. As seguintes imersões são satisfeitas:*

(a) *Se $kp < N$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$ para todo $1 \leqslant q < p^* = Np/(N-kp)$;*

(b) *Se $0 \leq m < k - \frac{N}{p} < m+1$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{m,\beta}(\overline{\Omega})$ para $\beta < \alpha = k - \frac{N}{p} - m$.*

Demonstração. Ver Gilbarg e Trudinger [21]. □

Teorema 64. *Seja Ω aberto e suave. Então*

(a) *$W_0^{k,p} \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$, para $kp < N$, $1 \leqslant q < \frac{Np}{N-kp}$;*

(b) *$W_0^{k,p} \hookrightarrow\hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$, para $0 \leq m < k - \frac{N}{p}$.*

Demonstração. Ver [21]. □

Denotaremos por L o operador diferencial tendo uma das seguintes formas

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} (a^{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{N} b^i(x) u_{x_i} + c(x)u, \tag{A.1}$$

ou

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} b^i(x) u_{x_i} + c(x)u, \tag{A.2}$$

onde a^{ij}, b^i, c $(i,j = 1, \cdots, N)$, $a^{ij} = a^{ji}$ são especificados de acordo com o problema em estudo.

Definição 28. *O operador L é uniformemente elíptico se existe $\theta > 0$ tal que*

$$\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2, \tag{A.3}$$

para todo $x \in \Omega$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Se $b^i = 0,\ c = 0$ escreveremos

$$L_1 u = \sum_{1\le i,j\le N} (a^{ij}(x)u_{x_j})_{x_i}.$$

Definição 29. *Seja $h \in L^2(\Omega)$. Uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -L_1 u = h(x),\ \Omega \\ u = 0,\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{A.4}$$

se

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} = \int_\Omega hv \text{ para toda } v \in C_c^\infty(\Omega).$$

Teorema 65. *Suponha que $a^{ij} \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Então as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) Seja $h \in L^p(\Omega)$, $2 \le p < \infty$. Então (A.4) tem uma única solução fraca $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ e a seguinte estimativa é satisfeita:

$$||u||_{W^{2,p}} \le c||h||_{L^p}.$$

(ii) Se $h \in L^\infty(\Omega)$ então $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ para todo $0 < \alpha < 1$ e

$$||u||_{C^{1,\alpha}} \le c||h||_{L^\infty}.$$

(iii) Se $h \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ então $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e

$$||u||_{C^{2,\alpha}} \le c||h||_{C^{0,\alpha}},$$

onde c é uma constante positiva que depende somente de Ω e em (i), (ii) a função u é solução fraca de (A.4).

Demonstração. Ver A. Ambrosetti e G. Prodi [4]. □

Lembemo-nos que o operador Laplaciano é definido como $\triangle u = \sum_{i=1}^{N} u_{x_i x_i}$. O teorema a seguir é conhecido como Estimativa Interior.

Teorema 66. *Seja $u \in W^{1,2}(\Omega)$ solução fraca de $\triangle u = h,\ h \in L^p(\Omega),\ 1 < p < \infty$, ou seja,*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega v \cdot h \text{ para toda } v \in C_c^\infty(\Omega).$$

Então $u \in W^{2,p}(\Omega_0)$ *para todo* $\Omega_0 \subset \Omega$, *e*

$$||u||_{W^{2,p}(\Omega_0)} \leq c(||u||_{L^p(\Omega)} + ||h||_{L^p(\Omega)}).$$

A constante c *depende somente de* p, N, Ω_0 *e* Ω. *Além disso,*

$$\triangle u = h \;\; q.t.p. \; em \; \Omega.$$

Demonstração. Ver J. Jost [23]. □

Definição 30. *O espaço* $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ *é definido como sendo*

$$W^{k,p}_{loc}(\Omega) = \left\{ u \in W^{k,p}(\Omega_0) \; para \; todo \; \Omega_0 \subset\subset \Omega \right\}.$$

Observação: Note que $W^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}_{loc}(\Omega)$.

Teorema 67. *Suponha que* L *tenha a forma* $(A.2)$. *Seja* $u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ *solução da equação elíptica* $Lu = h$ *em um domínio* Ω, *onde os coeficientes de* L *pertencem a* $C^{k-1,\alpha}(\Omega)$,$h \in C^{k-1,\alpha}(\Omega)$, *com* $1 < p, q < \infty$, $k \geq 1$, $0 < \alpha < 1$. *Então* $u \in C^{k+1,\alpha}(\Omega)$. *Além disso, se* Ω *é um domínio de classe* $C^{k+1,\alpha}$, *os coeficientes de* L *pertencem a* $C^{k-1,\alpha}(\overline{\Omega})$ *e* $h \in C^{k-1,\alpha}(\overline{\Omega})$, *então* $u \in C^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Ver [21]. □

Nos dois teoremas a seguir, suporemos que o operador L tem a forma $(A.2)$.

Teorema 68. *(Princípio do Máximo Fraco) Seja* L *um operador elíptico e suponha que*

$$Lu \geq 0 (\leq 0) \; em \; \Omega, \;\; c = 0 \; em \; \Omega,$$

com $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. *Então*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \; (\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u).$$

Demonstração. Ver [21]. □

Teorema 69. *Seja* L *um operador elíptico com* $c \leq 0$ *em* Ω. *Suponha que* $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *satisfaçam* $Lu = Lv$ *em* Ω, $u = v$ *em* $\partial\Omega$. *Então* $u = v$ *em* Ω. *Se* $Lu \geq Lv$ *em* Ω *e* $u \leq v$ *em* $\partial\Omega$, *então* $u \leq v$ *em* Ω.

Demonstração. Ver [21]. □

Os Teoremas 70 e 71 são conhecidos como resultados globais do tipo Liouville.

Teorema 70. *Sejam Ω um domínio limitado e $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ uma solução não negativa de*

$$-\triangle u = u^\alpha \text{ em } \mathbb{R}^N, \; N > 2,$$

com $1 < \alpha < (N+2)/(N-2)$. Então $u(x) = 0$.

Demonstração. Ver Gidas e Spruck [19] e [20]. □

Teorema 71. *Seja $\mathbb{R}^N_+$ o semi-espaço $\{x = (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$. Suponha que $u \in C^2(\mathbb{R}^N_+) \cap C(\{x \in \mathbb{R}^N : x_N \geq 0\})$ é uma solução não negativa de*

$$\begin{cases} -\triangle u = u^\alpha \text{ em } \mathbb{R}^N_+ \\ u = 0 \text{ em } x_N = 0, \end{cases}$$

com $1 < \alpha < (N+2)/(N-2)$. Então $u(x) = 0$.

Demonstração. Ver [19] e [20]. □

Teorema 72. *(Dugundji) Sejam X e Y espaços vetoriais normados, $A \subset X$ fechado e $F : A \to Y$ contínua. Então F possui uma extensão contínua $\overline{F} : X \to Y$ tal que $\overline{F}(X) \subset conv(F(A))$.*

Demonstração. Ver [13]. □

Teorema 73. *Sejam X e Y dois Espaços de Banach e D um subconjunto fechado de X. Suponha que o operador $T : D \to Y$ é compacto. Então existe um operador compacto $\overline{T} \to Y$ tal que $\overline{T}x = Tx$ para todo $x \in D$ e $\overline{T}(X) \subset \overline{conv}T(D)$.*

Demonstração. Ver [22]. □

Teorema 74. *Sejam Ω um domínio aberto, limitado e suave do $\mathbb{R}^N$. Suponha que $u \in W^{1,2}(\Omega)$ seja solução fraca de $-\triangle u = f$ em Ω, onde $f \in L^p(\Omega)$. Então $u \in W^{2,p}(\Omega')$ para todo $\Omega' \subset \Omega$, e*

$$||u||_{W2,p(\Omega')} \leq C(||u||_{L^p(\Omega)} + ||f||_{L^p(\Omega)}),$$

onde C é uma constante que depende somente de p, N, Ω' e Ω. Além disso, a igualdade

$$-\triangle u = f,$$

é satisfeita q.t.p em Ω.

Demonstração. Ver [23]. □

Teorema 75. *Suponha que* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *é solução fraca de*

$$-\triangle u = f \ \ em\ \Omega,$$

onde $f \in W^{k,2}(\Omega)$, $k \geq 1$ *e* Ω *é um domínio aberto, limitado e suave. Então, para todo domínio* $\Omega' \subset\subset \Omega$ *aberto, limitado e suave temos que* $u \in W^{k+2}(\Omega')$.

Demonstração. Ver [21]. □

Referências Bibliográficas

[1] R.A. Adams. *Sobolev Spaces. Academic Press, New York* , 1975, 2. ed.

[2] A. Ambrosetti, H. Brezis and G. Cerami. Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems. *Journal of Functional Analysis*, 122:519-543, 1994.

[3] A. Ambrosetti and A. Malchiodi.*Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems. Cambridge studies in avanced mathematics, New York*, 2007.

[4] A. Ambrosetti and G.Prodi. *A prime of Nonlinear Analysis. Cambridge studies in avanced mathematics, New York* , 2000.

[5] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer, New York*, 2010.

[6] H. Brezis and L. Nirenberg. H^1 versus C^1 local minimizers. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 317:465-472, 1993.

[7] K.C. Chang. *Methods in Nonlinear Analysis. Springer, New York*, 2005.

[8] X. Cheng and Z. Zhang. Positive Solutions for a Multi-parameter system of second order ordinary differential equation. *SCHIENCE CHINA*, 5:959-972, 2011.

[9] X. Cheng and Z. Zhang. Positive solutions for a class of multi-parameter elliptic systems. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 14:1551-1562, 2013.

[10] X. Cheng and X. Yan. A multiplicity Result of Positive Solutions for a class of Multi-parameter Ordinary Differential Systems. *Acta Mathematicae Applicatae Snica, English Series*, 4:653-662, 2012.

[11] J.M do Ó, S. Lorca and P, Ubila. Local superlinearity for elliptic systems involving parameters. *Journal of Differential Equations*, 19:1-19, 2005.

[12] J.M. do Ó, S. Lorca, J. Sánchez and P. Ubilla. Positive solutions for a class of multiparameter ordinary elliptic systems. *Jornal of Mathematical Analysis and Applications*, 332:1249-1266, 2007.

[13] K. Deimling. *Nonlinear Functional Analysis. Dover Publications, New York* , 2010.

[14] P. Drábek and J. Milota. *Methods of Nonlinear Analysis. Birkhäuser Advanced Texts, New York*, 2012, 2. ed.

[15] L.C. Evans. *Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics, EUA*, 2010, 2. ed.

[16] I. Fonseca and W. Gangbo. *Degree Theory in Analysis and Applications. Oxford Science Publications, New York*, 1995.

[17] N. Fukagai and K. Narukawa. On the existence of multiple positive solutions of quasilinear elliptic eigenvalue problems. *Annali di Matematica*, 3:539-564, 2007.

[18] J.P. García, I. Peral Alonso and J.J. Manfredi. Sobolev versus Hölder local minimizers global multiplicity for some quasilinear elliptic equations. *Communications in Contemporary Mathematics*, 3:385-404, 2000.

[19] B. Gidas and J. Spruck. A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations. *Communications in Partial Differential Equations*, 6:8, 883-901, 1981.

[20] B. Gidas and J. Spruck. Global and Local Behavior of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XXXIV*, 525-598, 1981.

[21] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equation of Second Order. Springer-Verlag, New York*, 2001.

[22] D. Guo and V. Lakshmikantham. *Nonlinear Problems in Abstract Cones.* Notes and reports in mathematics in science and engineering: v. 5, EUA, 1988.

[23] J. Jost. *Partial Differential Equations.* Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2007 2. ed.

[24] E.L. Lima. *curso de análise. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janaeiro*, 2010, Vol. 2, 11. ed.

[25] E.L. Lima. *Elementos de Topologia Geral. Textos Universitários, SBM, Rio de Janeiro*, 2009.

[26] E.L. Lima. *espaços métricos. Projeto Euclides, Rio de Janeiro*, 2007, 4. ed.

[27] D. O'Regan, Y.J. Cho and Y.Q. Chen. *Topological Degree Theory and Applications.* Series in mathematical Analysis and Aplications, EUA, 2006.