

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de
Pós-Graduação em Matemática-UnB como requisito parcial
para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientadora: Prof^a. Liliane de Almeida Maia

Sistemas Elípticos para Modelagem de Competição entre Espécies

Aristóteles Soares Benício Júnior¹

Brasília, 14 Dezembro de 2011

¹Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES/CNPq

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Sistemas Elípticos para Modelagem de Competição entre Espécies.

por

Aristóteles Soares Benício Júnior*

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

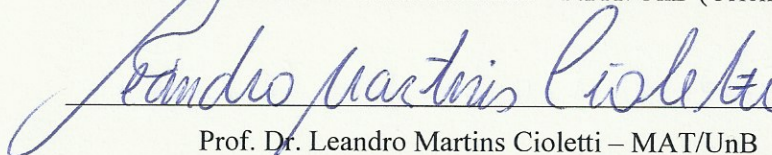
MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 14 de dezembro de 2011.

Comissão Examinadora:



Prof. Dra. Liliane de Almeida Maia – MAT/UnB (Orientadora)



Prof. Dr. Leandro Martins Cioletti – MAT/UnB



Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares – ICMC / USP

* O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Resumo

Estudaremos a existência de soluções positivas para uma classe de sistemas elípticos em \mathbb{R}^N como o sistema que segue:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(u(x)) - \frac{\partial}{\partial u} H(u(x), v(x)) , \text{ se } x \in \Omega; \\ -\Delta v(x) = f(v(x)) - \frac{\partial}{\partial v} H(u(x), v(x)) , \text{ se } x \in \Omega; \end{cases} \quad (P_{u,v})$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado regular, $N \geq 2$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ cujo crescimento satisfaz algumas propriedades (subcrítico e superquadrático) e a função $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é positiva, de classe $C^1(\mathbb{R}^2) \cap C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : st = 0\})$ e sua matriz Hessiana é não-positiva definida. Este tipo de sistemas pode ser encontrado em alguns problemas da Biologia, mais quando tratamos de situações em que duas ou mais espécies competem de alguma forma.

Abstract

We study the existence of positive solutions for a class of elliptic systems in \mathbb{R}^N like the system below:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(u(x)) - \frac{\partial}{\partial u} H(u(x), v(x)) , & \text{if } x \in \Omega; \\ -\Delta v(x) = f(v(x)) - \frac{\partial}{\partial v} H(u(x), v(x)) , & \text{if } x \in \Omega; \end{cases} \quad (P_{u,v})$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded regular domain, $N \geq 2$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ function which growth satisfy some properties (subcritical and superquadratic) and the function $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is positive, $C^1(\mathbb{R}^2) \cap C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : st = 0\})$ and its Hessian matrix is non-positive definite. This kind of system can be found when studying problems in Biology especially when we have interactions between two or more species.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pois sei que sem ele nada disso seria possível.

Agradeço à minha orientadora, a Professora Liliane, por toda a sua ajuda, por todos os seus ensinamentos e por não deixar de acreditar em mim, permitindo que este trabalho fosse realizado.

Agradeço aos Professores Leandro Cioletti e Sergio Monari, por aceitarem o convite para participar da banca examinadora e pelas sugestões e correções feitas.

Agradeço também a todos os meus professores, que tanto me ensinaram e sempre me ajudaram quando eu precisei. Em especial, agradeço aos Professores Arthur Vicentini, Mauro Rabelo e Jairo Cavalcante, por me ajudarem a ingressar no Mestrado; ao Professor Celius, por suas dicas com o Maple e com o \LaTeX - além das conversas divertidas - e ao Professor Ricardo Ruviano, pela ajuda - principalmente na reta final.

Agradeço a todos os funcionários do Departamento de Matemática da UnB.

Agradeço ao CNPq e à CAPES pelo apoio financeiro.

Agradeço à minha mãe Rosenelle e ao meu pai Aristóteles, que sempre cuidaram de mim e apoiaram-me em minhas decisões. Agradeço às minhas irmãs Atena e Rosenelle, por todo o carinho e apoio durante toda a minha vida, e à minha irmã Ana Beatriz, quem conheço há pouco tempo, mas que já tem um lugar especial em meu coração. Agradeço também aos meus avós maternos, Arlindo e Geralda, e aos meus avós paternos, Pina e Salviano, aos meus tios, às minhas tias e aos meus primos e primas, por constituírem esta família que eu amo tanto.

Agradeço à minha namorada Marina Gabriella e à sua mãe Regina, que me apoiaram em todos os momentos e não permitiram que eu desistisse deste sonho.

Enfim, agradeço aos meus amigos e colegas da graduação, Andrea, Caio, Dhiego, Diego, Daniel, Leonardo, Mônica, Rafael e Thiago, que sempre estiveram comigo nos momentos divertidos e nos difíceis; aos meus amigos e colegas da Pós-Graduação, Mayra, Ana, Gilberto, Linniker, Edmilson, Raimundo, Luís Felipe, Tarcísio, Reinaldo, entre outros, que também tiveram papel importante nessa conquista e aos meus amigos fora da UnB, Erick, Everton, Nycholas, Tiago e Yoshio, pessoas que não vejo mais com tanta frequência, mas com quem sei que posso contar sempre.

Sumário

Introdução	1
1 Resultados Preliminares	4
1.1 O Teorema do Passo da Montanha	4
1.2 A Variedade de Nehari e Igualdade das Energias	7
2 Existência de Solução Positiva para Sistemas	21
2.1 O Problema $(P_{u,v})$	21
2.2 Consequências Decorrentes das Hipóteses nas Não-Linearidades	26
2.3 Uma Classe de Sistemas Elípticos	35
2.3.1 Regularidade do funcional J	35
2.3.2 Obtendo Soluções Positivas para o Problema $(P_{u,v})$	43
2.4 Uma Versão Simplificada do Problema de Nehari.	70
2.4.1 Sistemas com Grandes Interações.	72
3 Sobre uma Solução que Muda de Sinal	88
3.1 Um Problema Equivalente	88
3.1.1 Uma Solução que Muda de Sinal para (P_w)	89
A Apêndices	98
A.1 Resultados de Métodos Variacionais	98
A.2 Acerca do Teorema de Miranda	101
A.3 Resultados de Equações Diferenciais Parciais	102
A.4 Resultados da Teoria do Grau	104
A.4.1 Propriedades do Grau	104
A.5 Resultados de Medida e Integração e Análise Funcional	105
Referências Bibliográficas	108

Introdução

Neste trabalho, estudaremos a existência de soluções positivas para uma classe de sistemas elípticos em \mathbb{R}^N como o sistema que segue:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(u(x)) - \frac{\partial}{\partial u} H(u(x), v(x)) , & \text{se } x \in \Omega; \\ -\Delta v(x) = f(v(x)) - \frac{\partial}{\partial v} H(u(x), v(x)) , & \text{se } x \in \Omega, \end{cases} \quad (P_{u,v})$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado regular, $N \geq 2$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ cujo crescimento satisfaz algumas propriedades (subcrítico e superquadrático) e a função $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é positiva, de classe $C^1(\mathbb{R}^2) \cap C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : st = 0\})$ e sua matriz Hessiana é não-positiva definida. Este tipo de sistema pode ser encontrado em alguns problemas da Biologia, mais quando tratamos de situações em que duas ou mais espécies competem de alguma forma, como podemos ver nas referências [5], [7] - [12] e [17].

Uma classe de sistemas que exemplifica este tipo de problema é o sistema Lotka-Volterra ([17]). A forma geral de tal sistema é representada da seguinte forma:

$$\frac{dP_i}{dt} = \left(a_i + \sum_{j=1}^n b_{ij} P_j \right) P_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

em que P_i é a densidade populacional da i -ésima população. Os coeficientes a_i tem crescimento linear e os coeficientes b_{ij} representam como a densidade da i -ésima espécie depende da densidade da j -ésima espécie, nos indicando o tipo de interação (mutualismo, concorrência ou predador-presa). O tipo de interação é dado pelo sinal dos coeficiente b_{ij} e b_{ji} . Por exemplo, se $b_{ij}, b_{ji} > 0$, então as espécies se interagem em mutualismo, pois ambas as populações crescem graças à interação. Se $b_{ij}, b_{ji} < 0$, então a interação é do tipo concorrência, pois o crescimento de ambas diminui quando há interação. Por fim, temos interação do tipo predador-presa quando $b_{ij} > 0$ e $b_{ji} < 0$. Neste caso, como na interação entre as espécies i e j a população de i cresce enquanto a de j decresce, concluímos que a espécie i preda a espécie j .

Embora este não seja o nosso objeto de estudo, certas analogias podem ser feita. Consideremos que as funções u e v são duas populações em uma região Ω em que o valor $u(x)$ representa a quantidade da primeira população na posição x de Ω e $v(x)$ é a quantidade da segunda população também na posição x de Ω . O sentido de procurarmos soluções positivas indica que ambas as populações estão presentes naquela região e, de alguma forma, coexistem. Dessa maneira, a interação entre as espécies é dada pela função H . Pelas hipóteses de H (**Seção 2.1**), mais especificamente (H_3), temos que o nosso problema configura uma relação de concorrência.

Baseando-se nas idéias do trabalho de M. Conti, S. Terracini e G. Verzini em [6], procuraremos as soluções para $(P_{u,v})$ utilizando o método de Nehari, método desenvolvido por Zeev Nehari em seu trabalho [19] de 1961.

Este método, cuja finalidade é ajudar na busca de soluções para problemas diferenciais ordinários que envolvam valor de fronteira e tenham um número estabelecido de zeros, mostrou-se ainda mais útil, tornando-se um método para encontrar soluções que mudam de sinal para equações diferenciais ordinárias de segunda ordem superlineares e equações diferenciais parciais radialmente simétricas, como pode ser visto em [3]. Tal método consiste em: seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ um domínio limitado com fronteira suave e $f \in C([0, \infty))$ uma função com crescimento superquadrático (propriedade proveniente da hipótese (f_2) da Seção 2.1). Usando a notação

$$F(s) = \int_0^s f(t) dt,$$

podemos definir o funcional

$$J(u) := \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - F(u(x)) \right) dx,$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Desta maneira, podemos definir uma função de conjuntos ϕ que associa a cada conjunto aberto $\omega \subset \Omega$ o seguinte valor:

$$\phi(\omega) := \inf_{\substack{w \in H_0^1(\omega) \\ w > 0}} \sup_{\lambda > 0} J(\lambda w).$$

Com estas definições, podemos introduzir o problema de Nehari que consiste em encontrar uma partição de Ω que atinja o seguinte ínfimo

$$\inf \{ \phi(\omega_1) + \phi(\omega_2) : \overline{\omega_1 \cup \omega_2} = \overline{\Omega}, \omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset \}. \quad (1)$$

Além disso, o par minimal nos dá os suportes das partes positiva e negativa da solução que muda de sinal para a equação diferencial associada a J^* (ver definição em (3.1)). E este procedimento é o que chamamos método de Nehari.

Além do método de Nehari, utilizaremos outros resultados de Métodos Variacionais como o Teorema do Passo da Montanha de Antonio Ambrosetti e Paul H. Rabinowitz, em [2] e uma alternativa deste mesmo teorema em que analisamos apenas as variações radiais das funções, resultado que foi baseado no trabalho [24]. Ainda com base nesta última referência, mostraremos a igualdade entre as energias obtidas em cada um dos métodos acima citados. A existência de solução dependerá destas teorias e de resultados de Teoria do Grau e de Álgebra Linear.

Também veremos uma variação do problema $(P_{u,v})$ em que existe um parâmetro de competição entre as duas espécies, ou seja,

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(u(x)) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial u} G(u(x), v(x)) & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v(x) = f(v(x)) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial v} G(u(x), v(x)) & \text{em } \Omega, \\ (u(x), v(x)) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega), \\ u(x) > 0, v(x) > 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (P_1)$$

Nosso interesse neste problema é o comportamento assintótico das soluções $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ do problema (P_1) quando $\varepsilon \rightarrow 0$, isto é, o que acontece com as nossas espécies quando o nosso parâmetro se torna cada vez maior. Mostraremos que neste caso, ocorre a segregação das espécies. Tal fenômeno pode ser observado em [9]. Note que este resultado é esperado, pois as dissipações de

cada espécie, representadas no sistema pelos valores Δu e Δv , são inversamente proporcionais às parcelas de interação entre as mesmas, que são representadas por $\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial u}$ e $\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial v}$.

O **Capítulo 1** é dedicado aos resultados preliminares de Métodos Variacionais que serão utilizados no decorrer deste trabalho. Tais resultados envolvem os estudos sobre o Teorema do Passo da Montanha e o método de Nehari que serão utilizados fortemente no **Capítulo 2** para obter soluções para o problema $(P_{u,v})$.

O **Capítulo 2** é destinado ao estudo do Problema $(P_{u,v})$ em si. Mostraremos a existência e a unicidade de solução para tal problema, além de mostrarmos que tal solução encontra-se sobre a variedade de Nehari. Para tanto, utilizaremos resultados análogos aos demonstrados no **Capítulo 1**. Após obtermos uma possível solução de $(P_{u,v})$, mostraremos que esta solução pode ser tomada como sendo positiva utilizando o Princípio do Máximo Forte.

Ainda neste capítulo, estudaremos o caso em que $H(s, t) = \frac{1}{\varepsilon} G(s, t)$ com $G(s, t) = 0$ se, e somente se, $st = 0$, ε fixado, e o que acontece quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Tal estudo nos mostrará que, quando H é desta forma, este limite tende a zero e, conseqüentemente, o par $(u_0, v_0) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ que é solução para o problema (P_0) , problema limite de (P_1) quando ε converge a 0, é formado por funções com suportes disjuntos.

O problema associado à equação

$$-\Delta w(x) = f(w(x)), \quad x \in \Omega, \quad (P_w)$$

será o nosso objeto de estudo no **Capítulo 3**. Utilizando os resultados dos capítulos anteriores, mostramos que é possível obter uma solução que muda de sinal para a equação (P_w) . Tal resultado vem do fato de v_0 ser solução de (P_0) , pois, facilmente, mostra-se que $-v_0$ também é solução de (P_0) , e, como veremos no **Capítulo 2**, as soluções u_0 e v_0 têm suportes disjuntos.

Por fim, no **Apêndice A** estão reunidos alguns resultados importantes que foram utilizados durante este trabalho. Estes resultados são dispostos da seguinte maneira: resultados de Métodos Variacionais, resultados do Teorema de Miranda, resultados de EDP, resultados de Teoria do Grau e resultados de Medida e Integração. A ordem de apresentação destes resultados foi escolhida de maneira a seguir a ordem de aparição durante o nosso trabalho, com exceção dos resultados de Medida e Integração, que ficaram por último por terem sido utilizados durante todo o trabalho. Como observação final, em todo este trabalho, denotaremos por C e M constantes positivas genéricas.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Nosso objetivo é apresentar e demonstrar alguns resultados que nos auxiliarão no desenvolvimento da dissertação. Estes resultados, especificamente, não serão utilizados diretamente. O que utilizaremos, de fato, são generalizações destes resultados.

Um destes resultados é o Teorema do Passo da Montanha, de autoria de Antonio Ambrosetti e Paul H. Rabinowitz em 1973, [2], que será o nosso objetivo na **Seção 1.1**. Este importante teorema do Cálculo Variacional garante, sob certas condições, a existência de um ponto crítico de um funcional, que é solução fraca de uma Equação Diferencial Parcial.

Também com o objetivo de aplicação em nosso trabalho, estudaremos, na **Seção 1.2**, a variedade de Nehari, definida com base nos trabalhos de Zeev Nehari, [18] e [19]:

Definição 1.0.1. *Dado J um funcional de classe C^1 em um espaço de Banach E em \mathbb{R} , a variedade de Nehari é definida como sendo o conjunto*

$$\mathcal{N} := \{u \in E \setminus \{0\} : \langle J'(u), u \rangle = 0\},$$

em que $J'(u)$ representa a derivada de Fréchet de J com relação a u .

O nosso estudo da variedade de Nehari estará focado em mostrar a relação que existe entre o Teorema do Passo da Montanha e o Método de Nehari, ou seja, a relação entre os níveis críticos obtidos em cada um dos métodos.

1.1 O Teorema do Passo da Montanha

Primeiramente, enunciaremos resultados que nos ajudarão a demonstrar o Teorema do Passo da Montanha como apresentado em [20], páginas 7 e 8.

Os resultados principais que utilizaremos são a condição de Palais-Smale e uma consequência do Lema da Deformação. O primeiro nos dá informações quanto a convergência de subsequências cuja imagem da sequência por um funcional continuamente diferenciável a Fréchet satisfaz certas condições a serem apresentadas. O segundo nos garante a existência de uma aplicação contínua que “deforma” uma faixa em torno de um valor crítico deixando apenas uma vizinhança de cada ponto crítico desta faixa fixa.

Seja E um espaço de Banach real. Denotaremos por $C^1(E, \mathbb{R})$ o conjunto dos funcionais Fréchet diferenciáveis e cujas derivadas a Fréchet são contínuas em E .

Definição 1.1.1. *Dizemos que $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Palais-Smale, que denotaremos por (PS) se qualquer sequência $(u_m) \subset E$ para a qual $J(u_m)$ é limitada e $J'(u_m) \rightarrow 0$, quando $m \rightarrow \infty$, possui uma subsequência convergente.*

A seguir, definiremos alguns conjuntos que nos auxiliarão nas demonstrações presentes neste capítulo.

Definição 1.1.2. *Seja E um espaço de Banach real. Suponha $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz (PS). Para $s, c \in \mathbb{R}$, definimos*

$$K_c := \{u \in E : J(u) = c \text{ e } J'(u) = 0\}$$

e

$$A_s := \{u \in E : J(u) \leq s\}.$$

A proposição enunciada a seguir é consequência direta do Lema da Deformação (Lema A.1.3), e que será de grande utilidade na demonstração do Teorema do Passo da Montanha.

Proposição 1.1.3. *Seja E um espaço de Banach real. Suponha que $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo (PS). Se $c \in \mathbb{R}$ não é um valor crítico de J , então, dado $\bar{\varepsilon} > 0$, existem $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ e $\eta \in C([0, 1] \times E, E)$ tais que:*

$$i) \quad \eta(1, u) = u \text{ se } J(u) \notin [c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}];$$

$$ii) \quad \eta(1, A_{c+\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}.$$

Demonstração:

i) Segue diretamente do item *i)* do Lema A.1.3.

ii) Segue diretamente do item *ii)* do Lema A.1.3. ■

Agora temos todos os resultados necessários para a demonstração do Teorema do Passo da Montanha (ver [20], págs. 7 e 8). Denotando por $B_\rho := \{u \in E : \|u\| < \rho\}$ a bola aberta em E com centro em 0 e raio ρ , temos:

Teorema 1.1.4. *(Teorema do Passo da Montanha) Seja E um espaço de Banach real e $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo (PS). Suponha que:*

$$J_1) \quad J(0) = 0;$$

$$J_2) \quad \text{Existem constantes } \rho, \alpha > 0 \text{ tais que } J|_{\partial B_\rho} \geq \alpha;$$

$$J_3) \quad \text{Existe } e \in E \setminus B_\rho \text{ tal que } J(e) \leq 0.$$

Então J tem um valor crítico $c \geq \alpha$. Além disso,

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} J(u), \tag{1.1}$$

em que $\Gamma = \{g \in C([0, 1], E) : g(0) = 0, g(1) = e\}$.

Demonstração: Mostraremos inicialmente que dadas as condições acima, existe $c \geq \alpha$ e que ele é dado pela expressão da equação (1.1). Como $g \in C([0, 1], E)$, com $g(0) = 0 \in B_\rho$ e $g(1) = e \in E \setminus B_\rho$, temos, pelo Teorema do Valor Intermediário que existe $d \in (0, 1)$ tal que $g(d) \in \partial B_\rho$. Assim, $g([0, 1]) \cap \partial B_\rho \neq \emptyset$, para todo $g \in \Gamma$. Como $J|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$, temos que $\inf_{w \in \partial B_\rho} J(w) \geq \alpha$. Dessa forma, dado $g \in \Gamma$, existe $u_{g,0} \in g([0, 1]) \cap \partial B_\rho$ e assim,

$$\max_{u \in g([0,1])} J(u) \geq J(u_{g,0}) \geq \inf_{w \in \partial B_\rho} J(w)$$

Portanto,

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} J(u) \geq \alpha.$$

Agora, mostraremos que este c é, de fato, valor crítico. Suponha que c não seja valor crítico de J . Pela Proposição 1.1.3, tomando $\bar{\varepsilon} = \frac{\alpha}{2}$, temos que existe $\varepsilon \in (0, \frac{\alpha}{2})$ e η satisfazendo *i*) e *ii*). Escolhendo $g \in \Gamma$ tal que

$$\max_{u \in g([0,1])} J(u) \leq c + \varepsilon, \quad (*)$$

que existe pois $c = \inf_{g \in \Gamma} M_g$, em que $M_g = \max_{u \in g([0,1])} J(u)$, pela definição de ínfimo, dado $\varepsilon > 0$, existe $g \in \Gamma$ tal que $M_g = \max_{u \in g([0,1])} J(u) \leq c + \varepsilon$. Considerando então $h(t) = \eta(1, g(t))$, temos que $h \in C([0, 1], E)$, pois, definindo $\Phi : E \rightarrow [0, 1] \times E$ por $\Phi(u) = (1, u)$, temos que Φ é contínua, de fato, se $|u - w| < \varepsilon$, temos

$$|\Phi(u) - \Phi(w)| = |(1, u) - (1, w)| = |(0, u - w)| = |u - w| < \varepsilon,$$

mostrando o que queríamos. Assim $h(t) = (\eta \circ \Phi \circ g)(t)$ é contínua por ser composição de funções contínuas.

Além disso, $g(0) = 0$, por definição, e $J(0) = 0$, por hipótese. Como $\alpha > 0$ e $c \geq \alpha$ concluímos que $c - \bar{\varepsilon} = c - \frac{\alpha}{2} \geq \frac{\alpha}{2}$. Logo,

$$g(0) = J(0) = 0 < \frac{\alpha}{2} \leq c - \bar{\varepsilon}.$$

Daí, temos que $h(0) = \eta(1, 0) = 0$, pois $0 = J(0) \notin [c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}]$.

Analogamente, $g(1) = e$ e $J(e) \leq 0 < \frac{\alpha}{2} \leq c - \bar{\varepsilon}$. Assim,

$$h(1) = \eta(1, g(1)) = \eta(1, e) = e,$$

pois $J(e) \notin [c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}]$. Consequentemente, $h \in \Gamma$ e

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} J(u) \leq \max_{u \in h([0,1])} J(u). \quad (**)$$

Mas, por (*), $\max_{u \in g([0,1])} J(u) \leq c + \varepsilon$, logo $g([0, 1]) \subset A_{c+\varepsilon}$. Portanto,

$$h([0, 1]) = \eta(1, g([0, 1])) \subset \eta(1, A_{c+\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}$$

e, por (**),

$$c \leq \max_{u \in h([0,1])} J(u) \leq c - \varepsilon,$$

o que é um absurdo! Concluímos assim que c é valor crítico de J . ■

Teorema 1.1.5. *Sejam E um espaço de Banach real e $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo (PS). Se J é limitado inferiormente, então,*

$$c = \inf_{u \in E} J(u)$$

é valor crítico de J .

Demonstração: Temos que c é finito, pois J é limitado inferiormente. Considere $S = \{u\} :$

$u \in E\}$, isto é, S é uma família de conjuntos formados por um só ponto. Assim,

$$c = \inf_{K \in S} \max_{u \in K} J(u),$$

pois $K = \{u\}$. Suponha então que c não é ponto crítico. Pela Proposição 1.1.3, dado $\bar{\varepsilon} > 0$, existem $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ e $\eta \in C([0, 1] \times E, E)$ tais que,

- $\eta(1, u) = u$ se $J(u) \notin [c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}]$;
- $\eta(1, A_{c+\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}$.

Mas, pela definição de c , dado $\delta > 0$, existe $K_\delta \in S$ tal que

$$\max_{u \in K_\delta} J(u) \leq c + \delta.$$

Por outro lado, $c = \inf_{K \in S} \max_{u \in K} J(u) \leq \max_{u \in K_\delta} J(u)$. Logo, $J(u) = \max_{u \in K_\delta} J(u) \in (c, c + \delta)$. Assim, tomando $\delta = \varepsilon$, temos que $J(u) \in (c, c + \varepsilon)$, e, conseqüentemente, $u \in A_{c+\varepsilon}$. Portanto,

$$\eta(1, u) \subset A_{c-\varepsilon}.$$

Se definirmos $h(u) = \eta(1, u)$, temos que $h(u) \in C^1(E, E)$, ou seja, $h(u) = v \in E$. Logo, se $M = \{v\} \in S$, obtemos

$$c \leq \max_{v \in M} J(v) \leq c - \varepsilon,$$

que é um absurdo. Logo, c é ponto crítico de J . ■

1.2 A Variedade de Nehari e Igualdade das Energias

Seja $1 \leq p < \infty$. Denotaremos por $W_0^{1,p}(\Omega)$ o fecho de $C_c^1(\Omega)$, o conjunto das funções continuamente diferenciáveis em Ω que tem suporte compacto, em $W^{1,p}(\Omega)$, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado. Denotaremos o espaço de Hilbert, $H_0^1(\Omega)$, por

$$H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega),$$

com o produto interno definido por

$$\langle u, v \rangle := \int_{\Omega} \left[\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + u(x)v(x) \right] dx. \quad (1.2)$$

Dessa forma, temos também a norma proveniente do produto interno definida por

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 := \langle u, u \rangle = \int_{\Omega} \left[|\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2 \right] dx. \quad (1.3)$$

Segue também, pela Desigualdade de Poincaré (Seção A.5.8) a seguinte norma equivalente de $H_0^1(\Omega)$:

$$\|u\| := \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.4)$$

Também definiremos a norma

$$\|u\|_{L^q(\Omega)}^q := \int_{\Omega} |u(x)|^q dx. \quad (1.5)$$

Esta última, que é a norma usual nos espaços $L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, será bastante utilizada durante todo o nosso trabalho, juntamente com as outras duas normas definidas acima.

A partir de agora, consideraremos $E := H_0^1(\Omega)$. Suponha que $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e $J(0) = 0$. Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ é ponto crítico de J se $\langle J'(u), w \rangle = 0$, para todo $w \in H_0^1(\Omega)$, logo, temos que uma condição necessária para que $u \in H_0^1(\Omega)$ seja ponto crítico de J é que $\langle J'(u), u \rangle = 0$. Como já foi definida, temos a variedade de Nehari, neste caso, como sendo o conjunto

$$\mathcal{N} = \{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} : \langle J'(u), u \rangle = 0\}. \quad (1.6)$$

Os próximos resultados, apresentados em [24], páginas 71 a 73, mostram que sob certas hipóteses para o funcional J , temos a igualdade entre os seguintes valores:

$$\begin{aligned} c &= \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)); \\ c_1 &= \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u); \\ c_2 &= \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \max_{t \geq 0} J(tu), \end{aligned} \quad (1.7)$$

em que $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H_0^1(\Omega)) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) < 0\}$. O primeiro refere-se ao valor crítico obtido através do Teorema do Passo da Montanha, Teorema 1.1.4, o segundo é obtido ao calcularmos o ínfimo sobre todos os pontos da variedade de Nehari e o terceiro é obtido calculando-se o ínfimo entre os máximos obtidos nas direções radiais.

Para mostrarmos tal igualdade, considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x, u) \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (P)$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, é um domínio limitado com fronteira suave. Consideremos então $F(x, u) = \int_0^u f(x, s) ds$. Assumimos as seguintes hipóteses:

$f_1)$ $f \in C(\Omega \times \mathbb{R})$ e, para algum $2 < p < 2^*$, existe $c_0 > 0$ tal que

$$|f(x, u)| \leq c_0(|u| + |u|^{p-1}).$$

$f_2)$ Existe $\mu > 2$ tal que, para todos $x \in \Omega$ e $u \in \mathbb{R}$,

$$\mu F(x, u) \leq u f(x, u).$$

$f_3)$ $f(x, u) = o(|u|)$ se $|u| \rightarrow 0$, uniformemente em $x \in \Omega$.

$f_4)$ Existe $R > 0$ tal que

$$\inf_{\substack{|x| > 0 \\ |u| > R}} F(x, u) > 0.$$

$f_5)$ $\frac{f(x, u)}{|u|}$ é função crescente de u em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, para todo $x \in \Omega$.

Primeiramente, note que, pelas hipóteses $f_1)$ e $f_3)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $C > 0$ tal que

$$|f(x, u)| \leq \varepsilon |u| + C |u|^{p-1}, \forall u \in \mathbb{R}.$$

De fato, pela hipótese f_3), dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, se $|u| < \delta$,

$$|f(x, u)| \leq \varepsilon|u|.$$

Além disso, pela hipótese f_1), para $|u| \geq \delta$, temos que

$$|f(x, u)| \leq c_0 \left(\frac{1}{|u|^{p-2}} + 1 \right) |u|^{p-1} \leq \frac{c_0(1 + \delta^{p-2})}{\delta^{p-2}} |u|^{p-1}.$$

Logo, tomando $C := \frac{c_0(1 + \delta^{p-2})}{\delta^{p-2}}$, temos que

$$|f(x, u)| \leq C|u|^{p-1},$$

de onde podemos concluir que

$$|f(x, u)| \leq \varepsilon|u| + C|u|^{p-1}, \text{ para todo } u \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

Assim, com tais hipóteses definimos o funcional de energia associado ao problema (P) ,

$$J(u) := \int_{\Omega} \left[\frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{u^2}{2} - F(x, u) \right] dx.$$

As soluções fracas do problema (P) , são definidas como as funções $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$\int_{\Omega} [\langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle + u(x)v(x) - f(u(x))v(x)] dx = 0,$$

ou seja, são dadas pelos pontos críticos do funcional J .

Lema 1.2.1. *Assumindo $f_1) - f_5$), para qualquer $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, existe um único $t(u) > 0$ tal que $t(u)u \in \mathcal{N}$, o máximo de $J(tu)$ é atingido em $t = t(u)$, a função*

$$\begin{aligned} \varphi : H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} &\longrightarrow [0, \infty) \\ u &\longmapsto t(u) \end{aligned}$$

é contínua e a aplicação $u \mapsto t(u)u$ é um homeomorfismo entre a esfera unitária de $H_0^1(\Omega)$ e \mathcal{N} .

Demonstração: Pela hipótese f_2), temos que existe $\mu > 2$ tal que, para todos $x \in \Omega$ e $s \in \mathbb{R}$,

$$\mu F(x, s) \leq s f(x, s).$$

Assim, se $|s| > R$, dado pela hipótese f_4), então

$$\frac{f(x, s)}{F(x, s)} \geq \frac{\mu}{s}, \text{ se } s \geq R$$

$$\frac{f(x, s)}{F(x, s)} \leq \frac{\mu}{s}, \text{ se } s \leq -R,$$

e, portanto, ao integrarmos ambos os lados da desigualdade de R a u , concluímos que,

para $s \geq R$,

$$\begin{aligned} \int_R^u \frac{f(x, s)}{F(x, s)} ds &\geq \int_R^u \frac{\mu}{s} ds \\ \Leftrightarrow \log |F(x, s)| \Big|_{s=R}^{s=u} &\geq \mu \log |s| \Big|_{s=R}^{s=u}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \log \frac{|F(x, u)|}{|F(x, R)|} &\geq \log \left(\frac{|u|}{R} \right)^\mu \\ \Leftrightarrow \frac{|F(x, u)|}{|F(x, R)|} &\geq \left(\frac{|u|}{R} \right)^\mu \\ \Leftrightarrow |F(x, u)| &\geq |F(x, R)| \left(\frac{|u|}{R} \right)^\mu. \end{aligned}$$

Agora, note que, pela hipótese f_4), $F(x, u) > 0$, e, portanto,

$$F(x, u) \geq \frac{|F(x, R)|}{R^\mu} |u|^\mu.$$

Temos também que, se $s \leq -R$,

$$\begin{aligned} \int_u^{-R} \frac{f(x, s)}{F(x, s)} ds &\leq \int_u^{-R} \frac{\mu}{s} dt \\ \Leftrightarrow \log |F(x, s)| \Big|_{s=u}^{s=-R} &\leq \mu \log |s| \Big|_{s=u}^{s=-R} \\ \Leftrightarrow \log \frac{|F(x, -R)|}{|F(x, u)|} &\leq \log \left(\frac{|-R|}{|u|} \right)^\mu \\ \Leftrightarrow \frac{|F(x, -R)|}{|F(x, u)|} &\leq \left(\frac{|-R|}{|u|} \right)^\mu \\ \Leftrightarrow |F(x, -R)| \left(\frac{|u|}{R} \right)^\mu &\leq |F(x, u)|, \end{aligned}$$

e, novamente pela hipótese f_4),

$$F(x, u) \geq \frac{|F(x, -R)|}{R^\mu} |u|^\mu.$$

Logo, se tomarmos $a_1 = \max \left\{ \frac{|F(x, R)|}{R^\mu}, \frac{|F(x, -R)|}{R^\mu} \right\}$, temos

$$F(x, u) \geq a_1 |u|^\mu, \text{ se } |u| \geq R.$$

Se $|u| \leq R$, como $F(x, u) - a_1 |u|^\mu$ é uma função contínua, pois é a soma de duas funções contínuas, como Ω é limitado, temos, pela compacidade de $\bar{\Omega} \times [-R, R]$, que, para u pertencente a este domínio, existem m e M em \mathbb{R} tais que

$$m \leq F(x, u) - a_1 |u|^\mu \leq M.$$

Daí, se tomarmos $a_2 = \max\{|m|, |M|\}$, temos

$$-a_2 \leq F(x, u) - a_1|u|^\mu \leq a_2,$$

e, portanto,

$$F(x, u) - a_1|u|^\mu \geq -a_2.$$

Ou seja,

$$F(x, u) \geq a_1|u|^\mu - a_2, \text{ se } (x, u) \in \bar{\Omega} \times [-R, R].$$

A partir daí, concluimos que, para todo $x \in \bar{\Omega}$ e $u \in \mathbb{R}$,

$$F(x, u) \geq a_1|u|^\mu - a_2. \quad (1.9)$$

Agora, seja $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ fixado e defina a função $g(t) = J(tu)$, para $t \in [0, \infty)$. Claramente, para $t \neq 0$, temos

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow J'(tu) \cdot u = \frac{1}{t} J'(tu) \cdot tu = 0$$

e, como $t \neq 0$, temos que $J'(tu) \cdot tu = 0$, logo, $tu \in \mathcal{N}$. Mas,

$$\begin{aligned} J'(tu) \cdot tu = 0 &\Leftrightarrow \int_{\Omega} [t^2 |\nabla u|^2 + t^2 u^2 - f(x, tu)tu] dx = 0 \\ &\Leftrightarrow \int_{\Omega} \left[|\nabla u|^2 + |u|^2 - \frac{1}{t} f(x, tu)u \right] dx = 0 \\ &\Leftrightarrow \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \frac{1}{t} \int_{\Omega} f(x, tu)u dx = 0 \\ &\Leftrightarrow \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \frac{1}{t} \int_{\Omega} f(x, tu)u dx. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Agora, se $u \neq 0$

$$\frac{f(x, tu)}{t} u = \frac{f(x, tu)}{tu} u^2$$

e, pela hipótese f_5), temos que $\frac{f(x, tu)}{tu} u^2$ é uma função estritamente crescente com relação a t , pois u está fixada. Portanto $\frac{1}{t} \int_{\Omega} f(x, tu)u dx$ é também uma função estritamente crescente com relação à variável t .

Além disso, temos que $g(t)$ satisfaz os seguintes resultados:

- $g(0) = 0$, pois,

$$g(0) = J(0u) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla(0u)|^2 + \frac{1}{2} (0u) - F(x, 0u) \right] dx = 0.$$

- Quando t é suficientemente pequeno, $g(t) > 0$. Note que, pela hipótese f_3), dado $0 < \varepsilon < 1$, existe $\delta(\varepsilon) = \delta > 0$ tal que, se $|s| < \delta$, então $|f(s)| < \varepsilon|u|$. Logo, dado $0 < \varepsilon < 1$, se tomarmos t tal que $|tu| < \delta(\varepsilon) = \delta$, temos que

$$F(x, tu) = \int_0^{tu} f(x, s) ds < \int_0^{tu} \varepsilon |s| ds.$$

Assim, se tomarmos $u > 0$, obtemos

$$F(x, tu) < \frac{\varepsilon}{2} s^2 \Big|_0^{tu} = \frac{\varepsilon}{2} |tu|^2, \quad (1.11)$$

enquanto que se $u < 0$,

$$F(x, tu) < \frac{\varepsilon}{2} (-s^2) \Big|_0^{tu} = \frac{-\varepsilon}{2} |tu|^2. \quad (1.12)$$

Logo, $F(x, tu) < \frac{\varepsilon}{2} |tu|^2$, e, portanto, segue que, se $|tu| < \delta$,

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla(tu)|^2 + \frac{1}{2} |tu|^2 - F(x, tu) \right] dx \\ &> \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla(tu)|^2 + \frac{1}{2} |tu|^2 - \frac{\varepsilon}{2} |tu|^2 \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla(tu)|^2 + \frac{1-\varepsilon}{2} |tu|^2 \right] dx \\ &= \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} [|\nabla(u)|^2 + (1-\varepsilon)|u|^2] dx \\ &\geq \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} [(1-\varepsilon)|\nabla(u)|^2 + (1-\varepsilon)|u|^2] dx \\ &= \frac{t^2(1-\varepsilon)}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 > 0, \end{aligned}$$

resultando assim o que queríamos.

- Quando t é suficientemente grande, $g(t) < 0$. De fato, por (1.9), obtemos

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla(tu)|^2 + \frac{1}{2} |tu|^2 - F(x, tu) \right] dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla(tu)|^2 + \frac{1}{2} |tu|^2 - (a_1 |tu|^\mu - a_2) \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{t^2}{2} (|\nabla(u)|^2 + |u|^2) - a_1 t^\mu |u|^\mu + a_2 \right] dx \\ &= a_2 |\Omega| + \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 t^2 - t^\mu \int_{\Omega} a_1 |u|^\mu dx. \\ &= C_1 + C_2 t^2 - C_3 t^\mu, \end{aligned}$$

em que $C_1 = a_2 |\Omega|$, $C_2 = \frac{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2}{2}$ e $C_3 = \int_{\Omega} a_1 |u|^\mu dx$. Assim, por μ ser maior que 2 e as constantes, C_1 , C_2 e C_3 serem estritamente maiores do que 0, temos que, quando t for suficientemente grande, a última expressão será estritamente negativa, como queríamos.

Com estes resultados, temos que existe $t(u) \in (0, \infty)$ tal que $g(t(u)) = \max_{t \in [0, \infty)} g(t)$. Mostraremos, agora, que este número real é único.

Suponha que existam t_1 e t_2 em \mathbb{R} , $0 < t_2 < t_1$ tais que

$$g(t_1) = \max_{t \in [0, \infty)} g(t) = g(t_2).$$

Segue, então, da equação (1.10) que

$$\frac{1}{t_1} \int_{\Omega} f(x, t_1 u) u \, dx = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \frac{1}{t_2} \int_{\Omega} f(x, t_2 u) u \, dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t_1} \int_{\Omega} f(x, t_1 u) u \, dx - \frac{1}{t_2} \int_{\Omega} f(x, t_2 u) u \, dx = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_{\Omega} \frac{f(x, t_1 u)}{t_1 u} u^2 \, dx - \int_{\Omega} \frac{f(x, t_2 u)}{t_2 u} u^2 \, dx = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_{\Omega} \left[\frac{f(x, t_1 u)}{t_1 u} - \frac{f(x, t_2 u)}{t_2 u} \right] u^2 \, dx = 0. \end{aligned}$$

Agora, como vimos anteriormente, a função $\frac{f(x, tu)}{tu}$ é estritamente crescente, logo

$$\frac{f(x, t_1 u)}{t_1 u} - \frac{f(x, t_2 u)}{t_2 u} > 0,$$

implicando em $\int_{\Omega} \left[\frac{f(x, t_1 u)}{t_1 u} - \frac{f(x, t_2 u)}{t_2 u} \right] u^2 \, dx > 0$ e, portanto, uma contradição. Tal contradição veio de considerarmos a existência de dois pontos de máximo para $g(t)$, assim, $t(u)$ é único.

Nosso próximo passo é mostrar que a aplicação $t(u)$ é contínua. Para tanto, consideremos uma sequência $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, tal que $u_n \rightarrow u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$. Note que $\{t(u_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ é uma sequência limitada, pois, se considerarmos $t(u_n) = t_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} t_n^2 \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} f(x, t_n u_n) t_n u_n \, dx \\ &\geq \int_{\Omega} \mu F(x, t_n u_n) \, dx, \end{aligned}$$

devido ao fato de $t_n u_n \in \mathcal{N}$ e à hipótese f_2). Além disso, pela equação (1.9), temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mu F(x, t_n u_n) \, dx &\geq \mu \int_{\Omega} [a_1 |t_n u_n|^\mu - a_2] \, dx \\ &= \tilde{a}_1 |t_n|^\mu \int_{\Omega} |u_n|^\mu \, dx - \tilde{a}_2, \end{aligned}$$

em que $\tilde{a}_1 = \mu a_1$ e $\tilde{a}_2 = \mu a_2 |\Omega|$. Assim, concluímos que

$$|t_n|^2 \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \geq \tilde{a}_1 |t_n|^\mu \int_{\Omega} |u_n|^\mu \, dx - \tilde{a}_2.$$

Como, fixado n , os valores \tilde{a}_1 , \tilde{a}_2 e $|t_n|$ são constantes positivas, temos que

$$\int_{\Omega} |u_n|^\mu dx < \infty,$$

ou seja, $u_n \in L^\mu(\Omega)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso, temos que

$$\tilde{a}_1 |t_n|^\mu \|u_n\|_{L^\mu(\Omega)}^\mu - |t_n|^2 \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \tilde{a}_2, \quad (1.13)$$

portanto, se $\{t_n\}$ fosse uma sequência ilimitada, para todo $M > 0$ existiria $n_M > 0$ tal que

$$\tilde{a}_1 |t_{n_M}|^\mu \|u_{n_M}\|_{L^\mu(\Omega)}^\mu - |t_{n_M}|^2 \|u_{n_M}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 > M,$$

pois $\mu > 2$, logo, para t_n suficientemente grande, o crescimento é regido por $|t_n|^\mu$. Como isso teria de valer para todo M , valeria para \tilde{a}_2 , o que contradiz a equação (1.13). Logo $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada.

Sabendo que a sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, temos, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass que existe uma subsequência, digamos $\{t_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, tal que $t_{n_k} \rightarrow t_0 \in \mathbb{R}$. Agora, como $u_n \rightarrow u$, temos que $u_{n_k} \rightarrow u$ e, portanto, $\|u_{n_k}\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$, ou seja, por (1.10)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_{n_k}} \int_{\Omega} f(x, t_{n_k} u_{n_k}) u_{n_k} dx = \frac{1}{t(u)} \int_{\Omega} f(x, t(u) u) u dx.$$

Mas, $t_{n_k} u_{n_k} \rightarrow t_0 u$, pois

$$\begin{aligned} |t_{n_k} u_{n_k} - t_0 u| &= |t_{n_k} u_{n_k} - t_{n_k} u + t_{n_k} u - t_0 u| \\ &\leq |t_{n_k} u_{n_k} - t_{n_k} u| + |t_{n_k} u - t_0 u| \\ &= |t_{n_k}| |(u_{n_k} - u)| + |(t_{n_k} - t_0)| |u| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Assim, escrevendo $f(x, u)$ como $f(u)$ para facilitar a compreensão,

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{t_{n_k}} \int_{\Omega} f(t_{n_k} u_{n_k}) u_{n_k} dx - \frac{1}{t_0} \int_{\Omega} f(t_0 u) u dx \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{t_{n_k}} \int_{\Omega} f(t_{n_k} u_{n_k}) u_{n_k} dx - \frac{1}{t_0} \int_{\Omega} f(t_{n_k} u_{n_k}) u_{n_k} dx \right| \\ &+ \left| \frac{1}{t_0} \int_{\Omega} f(t_{n_k} u_{n_k}) u_{n_k} dx - \frac{1}{t_0} \int_{\Omega} f(t_0 u) u dx \right| \\ &= \left| \left(\frac{1}{t_{n_k}} - \frac{1}{t_0} \right) \int_{\Omega} f(t_{n_k} u_{n_k}) u_{n_k} dx \right| + \left| \frac{1}{t_0} \int_{\Omega} [f(t_{n_k} u_{n_k}) u_{n_k} - f(t_0 u) u] dx \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{t_{n_k}} - \frac{1}{t_0} \right| \int_{\Omega} |f(t_{n_k} u_{n_k}) u_{n_k}| dx \\ &+ \left| \frac{1}{t_0} \right| \int_{\Omega} |f(t_{n_k} u_{n_k}) u_{n_k} - f(t_0 u) u| dx. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Agora, por f_1), segue que existe uma constante positiva $M_k > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(t_{n_k} u_{n_k}) u_{n_k}| dx &= \int_{\Omega} |f(t_{n_k} u_{n_k})| |u_{n_k}| dx \\ &\leq \int_{\Omega} c_0 (|t_{n_k} u_{n_k}|^2 + |t_{n_k} u_{n_k}|^p) dx \\ &= c_0 |t_{n_k}|^2 \|u_{n_k}\|_{L^2(\Omega)}^2 + |t_{n_k}|^p \|u_{n_k}\|_{L^p(\Omega)}^p = M_k, \end{aligned}$$

e, além disso,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(t_{n_k} u_{n_k}) u_{n_k} - f(t_0 u) u| dx &\leq \int_{\Omega} \left[|f(t_{n_k} u_{n_k}) u_{n_k} - f(t_0 u) u_{n_k}| \right. \\ &\quad \left. + |f(t_0 u) u_{n_k} - f(t_0 u) u| \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \left[|f(t_{n_k} u_{n_k}) - f(t_0 u)| |u_{n_k}| \right. \\ &\quad \left. + |f(t_0 u)| |u_{n_k} - u| \right] dx, \end{aligned}$$

e a última integral acima converge a zero quando $n_k \rightarrow \infty$, pela continuidade de f e o fato de $u_{n_k} \rightarrow u$. Assim, por $t_{n_k} \rightarrow t_0$, concluímos que (1.15) converge para 0 quando $k \rightarrow \infty$, ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_{n_k}} \int_{\Omega} f(x, t_{n_k} u_{n_k}) u_{n_k} dx = \frac{1}{t_0} \int_{\Omega} f(x, t_0 u) u dx.$$

Mas, pela unicidade do limite, segue que

$$\frac{1}{t_0} \int_{\Omega} f(x, t_0 u) u dx = \frac{1}{t(u)} \int_{\Omega} f(x, t(u) u) u dx,$$

provando a continuidade de t .

Por fim, note que a aplicação $u \mapsto t(u)u$, com domínio na esfera de raio 1 e imagem sobre a variedade de Nehari \mathcal{N} , é contínua (tal fato segue de (1.14)) e que sua inversa, a contração $\bar{u} \mapsto \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|}$, é também contínua. Logo, a aplicação $u \mapsto t(u)u$ é um homeomorfismo. \blacksquare

Antes de passarmos para o teorema que mostra a igualdade entre os valores críticos, c , c_1 e c_2 , mostraremos o seguinte lema:

Lema 1.2.2. *J satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha, condições J_1), J_2) e J_3) do Teorema do Passo da Montanha, e a condição de Palais-Smale, (PS).*

Demonstração: Note que

- Para mostrar que J satisfaz J_1), mostraremos que $J(0) = 0$. De fato,

$$J(0) = \int_{\Omega} \left[\frac{|\nabla 0|^2}{2} + \frac{0^2}{2} - F(x, 0) \right] dx.$$

Agora, por definição

$$F(x, 0) = \int_0^0 f(x, s) ds = 0,$$

e J_1) segue.

- Pela hipótese f_3), dado $0 < \varepsilon < 1$, temos que existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, de maneira análoga a utilizada para mostrarmos as equações (1.11) e (1.12), se $|u| < \delta$ obtemos

$$F(x, u) < \frac{\varepsilon}{2}|u|^2, \text{ se } u > 0$$

e

$$F(x, u) < \frac{-\varepsilon}{2}|u|^2, \text{ se } u < 0.$$

Daí, se tomarmos $0 < \rho < \delta$, temos que, para $u \in \overline{B_\rho(0)}$,

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_{\Omega} \left[\frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{|u|^2}{2} - F(x, u) \right] dx \\ &\geq \int_{\Omega} \left[\frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{|u|^2}{2} - \varepsilon \frac{|u|^2}{2} \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{|\nabla u|^2}{2} + (1 - \varepsilon) \frac{|u|^2}{2} \right] dx \\ &\geq \frac{(1 - \varepsilon)}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \varepsilon \frac{\|u\|^2}{2} \\ &\geq \left(\frac{1 - \varepsilon}{2} + \varepsilon C \right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

pois, $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ e $\|u\|$ são normas equivalentes. Agora, quando $u \in \partial B_\rho(0)$, temos $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \rho$, e portanto,

$$J(u) \geq \left(\frac{1 - \varepsilon}{2} + \varepsilon C \right) \rho =: \tilde{c} > 0.$$

Assim, concluímos que J satisfaz J_2).

- Para todo $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, temos que $u \in L^\mu(\Omega)$ e, por (1.9),

$$\begin{aligned} J(tu) &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla(tu)|^2 + \frac{1}{2} |tu|^2 - F(x, tu) \right] dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} t^2 |\nabla(u)|^2 + \frac{1}{2} t^2 |u|^2 - (a_1 t^\mu |u|^\mu - a_2) \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} t^2 (|\nabla(u)|^2 + |u|^2) - a_1 t^\mu |u|^\mu + a_2 \right] dx \\ &= a_2 |\Omega| + \frac{1}{2} t^2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - t^\mu \int_{\Omega} a_1 |u|^\mu dx. \\ &= C_1 + C_2 t^2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - C_3 t^\mu \|u\|_{L^\mu(\Omega)}^\mu, \end{aligned}$$

em que $C_1 = a_2 |\Omega|$, $C_2 = \frac{1}{2}$ e $C_3 = a_1$. Assim, por μ ser maior que 2 e as constantes, C_1 , C_2 e C_3 serem estritamente positivas, temos que, quando t for suficientemente grande, a última expressão será estritamente negativa.

- Mostraremos agora que J satisfaz a condição (PS). Para isto, seja uma seqüência

$\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in H_0^1(\Omega)$ tal que a sequência $\{J(u_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada e a sequência $\{J'(u_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0 quando $n \rightarrow \infty$. Provaremos que a sequência $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente. Primeiramente, mostraremos que a sequência $\{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. De fato, como $|J(u_n)| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{R}$ constante, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$, $\|J'(u_n)\|_{(H_0^1(\Omega))'} < \mu$, em que μ é dado por f_2) e $\|\cdot\|_{(H_0^1(\Omega))'}$ é a norma no espaço dual de $H_0^1(\Omega)$. Sendo assim, para todo $n > n_0$,

$$\begin{aligned} M + 1 &\geq J(u_n) - \frac{\|J'(u_n)\|_{(H_0^1(\Omega))'}}{\mu} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\geq J(u_n) - \frac{1}{\mu} \langle J'(u_n), u_n \rangle \\ &= \frac{1}{2} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} F(u_n(x)) dx - \frac{1}{\mu} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} f(u_n(x)) u_n(x) dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} [f(u_n(x)) u_n(x) - \mu F(u_n(x))] dx. \end{aligned}$$

Assim, pela hipótese f_2), como $\mu > 2$, temos que

$$\frac{(M + 1)(2\mu)}{\mu - 2} \geq \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

e, portanto, a sequência $\{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Deste resultado, podemos concluir que existe uma subsequência, que denotaremos por $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$. Agora, nos resta mostrar que $u_n \rightarrow u \in H_0^1(\Omega)$. Para isto, note que

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &= \langle J'(u_n), (u_n - u) \rangle - \langle J'(u), (u_n - u) \rangle \\ &\quad + \int_{\Omega} [f(u_n(x))(u_n(x) - u(x)) - f(u(x))(u_n(x) - u(x))] dx. \end{aligned}$$

Mas,

$$|\langle J'(u_n), (u_n - u) \rangle| \leq \|J'(u_n)\|_{(H_0^1(\Omega))'} \|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

pois $\|J'(u_n)\|_{(H_0^1(\Omega))'} \rightarrow 0$ e $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}$ é limitada, e conseqüentemente $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ é limitada. Além disso, pela definição de convergência fraca,

$$|\langle J'(u), (u_n - u) \rangle| \rightarrow 0,$$

nos restando mostrar que a integral $\int_{\Omega} [(f(u_n(x)) - f(u(x)))(u_n(x) - u(x))] dx$ converge

a 0 quando $n \rightarrow 0$. Para mostrarmos este fato, utilizaremos o resultado (1.8). Assim,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega} [(f(u_n(x)) - f(u(x)))(u_n(x) - u(x))] dx \right| \\
& \leq \int_{\Omega} |f(u_n(x)) - f(u(x))| |u_n(x) - u(x)| dx \\
& \leq \int_{\Omega} (|f(u_n(x))| + |f(u(x))|) |u_n(x) - u(x)| dx \\
& \leq \int_{\Omega} [\varepsilon(|u_n(x)| + |u(x)|) + C(|u_n(x)|^{p-1} + |u(x)|^{p-1})] |u_n(x) - u(x)| dx \\
& \leq \int_{\Omega} \varepsilon |u_n(x)| |u_n(x) - u(x)| dx + \int_{\Omega} \varepsilon |u(x)| |u_n(x) - u(x)| dx \\
& \quad + \int_{\Omega} C |u_n(x)|^{p-1} |u_n(x) - u(x)| dx + \int_{\Omega} C |u(x)|^{p-1} |u_n(x) - u(x)| dx.
\end{aligned}$$

Agora, utilizando a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega} [(f(u_n(x)) - f(u(x)))(u_n(x) - u(x))] dx \right| \\
& \leq \varepsilon \|u_n\|_2 \|u_n - u\|_2 + \varepsilon \|u\|_2 \|u_n - u\|_2 \\
& \quad + C \|u_n\|_p^{p-1} \|u_n - u\|_p + C \|u\|_p^{p-1} \|u_n - u\|_p
\end{aligned}$$

e, pelo Teorema A.5.5 e o fato de que $\|u_n - u\|_p \rightarrow 0$, para todo $p \in [1, p^*)$, concluímos que

$$\left| \int_{\Omega} [(f(u_n(x)) - f(u(x)))(u_n(x) - u(x))] dx \right| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow 0.$$

Assim, $\|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0$, mostrando que J satisfaz (PS).

Assim, temos que J satisfaz todas as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha (Teorema 1.1.4). \blacksquare

Agora, com a ajuda dos Lemas 1.2.1 e 1.2.2 mostrados anteriormente, provaremos o seguinte teorema:

Teorema 1.2.3. *Sob as hipóteses $f_1) - f_5)$, temos que*

$$c = c_1 = c_2$$

e que $c > 0$ é um valor crítico de J .

Demonstração: Pelo Lema 1.2.1, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
c_2 & := \inf_{u \in E \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} J(tu) \\
& = \inf_{u \in E \setminus \{0\}} J(t(u)u) \\
& \geq \inf_{\bar{u} \in \mathcal{N}} J(\bar{u}) = c_1,
\end{aligned}$$

sendo que, a desigualdade se deve ao fato de $t(u)u \in \mathcal{N}$, para todo $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$. Agora,

suponha que $\inf_{\bar{u} \in \mathcal{N}} J(\bar{u}) < c_2$. Então, existe $u_0 \in \mathcal{N}$ tal que $J(u_0) < c_2$. Mas, por $\mathcal{N} \subset H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$,

$$c_2 > J(u_0) = J(t(u_0)u_0) \geq \inf_{H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} J(t(u)u) = c_2.$$

O que é uma contradição. Logo, $c_1 = c_2$. Além disso, dado $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, temos que existe $t_1(u)$ suficientemente grande tal que $J(t_1(u)u) < 0$. Se definirmos γ_u como sendo

$$\gamma_u(s) = st_1(u)u,$$

teremos

$$\inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} J(tu) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \max_{s \in [0,1]} J(\gamma_u(s))$$

e, como γ_u diferenciável, $\gamma_u(0) = 0$ e $\gamma_u(1) < 0$, para todo $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, temos que $\gamma_u \in \Gamma$. Portanto,

$$c_2 := \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} J(tu) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \max_{s \in [0,1]} J(\gamma_u(s)) \geq \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) =: c.$$

Falta mostrar apenas que $c_1 \leq c$ para concluirmos a demonstração do teorema. Para tanto, note que a variedade de Nehari, \mathcal{N} , separa $H_0^1(\Omega)$ em dois conjuntos,

$$A := \{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} : \langle J'(u), u \rangle > 0\}$$

e

$$B := \{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} : \langle J'(u), u \rangle < 0\}.$$

Primeiramente, temos que $A \cap B = \emptyset$ e que existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(0) \subset A$. De fato, pelas hipóteses f_1) e f_3), temos que dado $0 < \varepsilon < 1$, existe $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ tal que, se $\|u\| < \delta_1$, então $|f(x, u)| \leq \varepsilon|u| + c_0|u|^p$. Assim, fixado $\varepsilon < \min\{\frac{1}{K(2)}, K(2)\}$, em que $K(2)$ é a constante de Sobolev, e tomando tal δ_1 , se $w \in B_{\delta_1}(0)$, temos,

$$\langle J'(w), w \rangle = \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} f(x, w)w \, dx. \quad (1.16)$$

Agora,

$$f(x, u)u \leq |f(x, u)u||u| \leq \varepsilon|u|^2 + c_0|u|^p,$$

e portanto,

$$-f(x, u)u \geq -|f(x, u)u| \geq -\varepsilon|u|^2 - c_0|u|^p.$$

Assim, temos pela desigualdade acima e pela equação (1.16) que

$$\begin{aligned} \langle J'(w), w \rangle &\geq \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} [\varepsilon|w|^2 + c_0|w|^p] \, dx \\ &= \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \varepsilon\|w\|_{L^2(\Omega)}^2 - c_0\|w\|_{L^p(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Agora, pelas imersões de Sobolev, existe uma constante $K(p) > 0$ dependendo apenas de Ω , p e n , tal que

$$\|w\|_{L^p(\Omega)} \leq K(p)\|w\|_{H_0^1(\Omega)}, \text{ para } 1 < p < 2^*.$$

Daí, escrevendo $M_1 = \varepsilon K(2)$ e $M_2 = c_0 K(p)$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle J'(w), w \rangle &\geq \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - M_1 \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - M_2 \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^p \\ &= (1 - M_1) \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - M_2 \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Mas, quando $\|w\| < \delta \leq \delta_1$, δ suficientemente pequeno, por $p > 2$ e $1 - M_1 > 0$, temos que $(1 - M_1) \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - M_2 \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^p > 0$. Dessa forma, temos que $\langle J'(w), w \rangle > 0$ para todo w em $B_\delta(0)$, e portanto, $B_\delta(0) \subset A$. Além disso, pela unicidade de $t(u)$ e pelo fato de g ser crescente para t pequeno, obtemos $g'(t) \geq 0$, $0 < t < t(u)$.

Agora, suponha que existe $\gamma \in \Gamma$ que não cruza \mathcal{N} , ou seja $\gamma(s) \notin \mathcal{N}$, para todo $s \in [0, 1]$. Consideraremos $\gamma(s) \neq 0$ para todo $s \in (0, 1]$, pois, se $\gamma(s) = 0$, então $\gamma(s) \notin \mathcal{N}$ por definição da variedade de Nehari. Pela definição de Γ , temos que $J(\gamma(1)) < 0$. Por outro lado, $t(\gamma(s)) \neq 1$ quando $s \in (0, 1]$ (pois se $t(\gamma(s)) = 1$, então $\gamma(s) \in \mathcal{N}$) e, para s suficientemente pequeno, $t(\gamma(s)) > 1$, por causa de $B_\delta(0)$. Assim, pela continuidade de t , temos que $t(\gamma(s)) > 1$, para todo $s \in (0, 1]$. Mas, se $t(\gamma(s)) > 1$, para todo $s \in (0, 1]$, então

$$J(t(\gamma(1))\gamma(1)) \geq 0, \forall 0 \leq t \leq t(\gamma(1)),$$

e, como $t(\gamma(1)) > 1$, temos que $J(\gamma(1)) \geq 0$, o que é um absurdo! Portanto, todo $\gamma \in \Gamma$ cruza \mathcal{N} e, assim,

$$\max_{s \in [0, 1]} J(\gamma(s)) \geq \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u) =: c_1, \forall \gamma \in \Gamma,$$

nos permitindo concluir que

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{s \in [0, 1]} J(\gamma(s)) \geq c_1 = c_2 \leq c.$$

Por fim, obtemos o fato de c ser valor crítico aplicando o Teorema do Passo da Montanha (Teorema 1.1.4). ■

Capítulo 2

Existência de Solução Positiva para Sistemas

Neste capítulo, nosso objetivo será o problema $(P_{u,v})$ que será definido na **Seção 2.1**. Este problema, como vimos na introdução, pode ser comparado a um sistema em que duas espécies interagem competitivamente. Começaremos o capítulo com a **Seção 2.1** na qual definiremos o problema sobre o qual o nosso trabalho é desenvolvido juntamente com hipóteses para f e H que são, respectivamente, a não-linearidade do problema e a função que representa a interação entre as funções. Nesta seção, também fazemos observações sobre algumas alterações feitas nas hipóteses (f_1) , (f_2) , (H_1) e (H_2) . Na **Seção 2.2**, apresentamos alguns resultados provenientes das hipóteses $(f_1) - (H_3)$ que serão importantes no decorrer deste trabalho.

Vamos obter soluções para o problema $(P_{u,v})$ na **Seção 2.3**, baseado no trabalho de M. Conti, S. Terracini e G. Verzini, [6]. Esta seção está dividida em 2 subseções. A **Subseção 2.3.1** é dedicada à demonstração de que o funcional J , associado ao problema $(P_{u,v})$ é de classe $C^1(H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Já na **Subseção 2.3.2** apresentaremos resultados que nos ajudarão a obter uma solução fraca para $(P_{u,v})$. Ao final desta subseção, mostraremos que esta solução fraca, é de fato uma solução clássica.

Por fim, na **Seção 2.4** apresentaremos resultados sobre uma versão simplificada do problema $(P_{u,v})$, em que não temos a interação entre as funções, ou seja, a função H é identicamente nula. Para isso, usaremos um método de aproximação que será apresentado na **Subseção 2.4.1**.

2.1 O Problema $(P_{u,v})$

O nosso objetivo neste trabalho é estudar o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(u(x)) - \frac{\partial}{\partial u} H(u(x), v(x)) , & \text{se } x \in \Omega; \\ -\Delta v(x) = f(v(x)) - \frac{\partial}{\partial v} H(u(x), v(x)) , & \text{se } x \in \Omega; \\ u(x) > 0, v(x) > 0 & , \text{ se } x \in \Omega, \end{cases} \quad (P_{u,v})$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $N \geq 2$, as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ são funções não-lineares que satisfazem as seguintes propriedades:

(f_1) $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e existem constantes positivas C, p tais que, para todo $s \in \mathbb{R}$ e para quase todo $x \in \Omega$, temos

$$|f_s(x, s)| \leq C(1 + |s|^{p-2}), \quad 2 < p < 2^*,$$

em que $2^* = +\infty$ quando $N = 2$ e $2^* = \frac{2N}{N-2}$ quando $N \geq 3$.

(f_2) Existe $\gamma > 0$, $(2 + \gamma \leq p)$, tal que, para todo $s \neq 0$ e para quase todo $x \in \Omega$,

$$f_s(x, s)s^2 > (1 + \gamma)f(x, s)s > 0.$$

(H_1) $H \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^+) \cap C^2(\mathbb{R}^2 \setminus X, \mathbb{R}^+)$, em que $X := \{(s, 0), (0, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$, e existem constantes $C > 0$ e $0 < \beta < \gamma$, tais que

$$|H_{ss}(x, s, t)|, |H_{st}(x, s, t)|, |H_{tt}(x, s, t)| \leq C(1 + |s|^\beta + |t|^\beta).$$

(H_2) Existe $0 < \alpha \leq \beta$ tal que a matriz Hessiana

$$Hess H := \begin{pmatrix} H_{ss}(s, t)s^2 - (1 + \alpha)H_s(s, t)s & H_{st}(s, t)st \\ H_{st}(s, t)st & H_{tt}(s, t)t^2 - (1 + \alpha)H_t(s, t)t \end{pmatrix}$$

é não-positiva definida para todo (s, t) tal que $s \neq 0$, $t \neq 0$ (ou seja, o determinante é não-negativo e os termos da diagonal principal são negativos ou nulos).

(H_3)

$$H(s, t) \geq 0, \quad H_s(s, t)s \geq 0, \quad H_t(s, t)t \geq 0, \quad \text{se } st \neq 0,$$

$$H(s, t) = H_s(s, t) = H_t(s, t) = 0, \quad \text{se } st = 0.$$

Observação 2.1.1. *Primeiramente, a hipótese (f_1) no trabalho de M. Conti, S. Terracini e G. Verzini, [6], é*

(f'_1) $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e existem constantes positivas C, p tais que, para todo $s \in \mathbb{R}$ e para quase todo $x \in \Omega$, temos

$$|f(x, s)| \leq C(1 + |s|^{p-1}), \quad 2 < p < 2^*,$$

em que $2^* = +\infty$ quando $N = 2$ e $2^* = \frac{2N}{N-2}$ quando $N \geq 3$.

Porém, só com esta hipótese não foi possível demonstrar a regularidade da aplicação Ψ (ver definição em 2.25), $\Psi \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus X, \mathbb{R})$ que será demonstrada na **Seção 2.3.2**. Mas, como podemos ver, a hipótese (f_1) , que enunciamos em nosso trabalho, implica aquela enunciada em [6], (f'_1) . De fato,

$$\begin{aligned} \int_0^s |f_s(x, \tau)| d\tau &\leq \int_0^s C(1 + |\tau|^{p-2}) d\tau \\ &\leq C(|s| + \frac{|s|^{p-1}}{p-1}) \\ &\leq C(|s| + |s|^{p-1}). \end{aligned}$$

Agora,

$$|f(x, s)| = \left| \int_0^s f_s(x, \tau) d\tau \right| \leq \int_0^s |f_s(x, \tau)| d\tau,$$

e

$$C(|s| + |s|^{p-1}) \leq 2C(1 + |s|^{p-1}),$$

pois, se $|s| \leq 1$,

$$C(|s| + |s|^{p-1}) \leq C(1 + |s|^{p-1}),$$

e se $|s| > 1$,

$$C(|s| + |s|^{p-1}) \leq C(|s|^{p-1} + |s|^{p-1}) \leq 2C|s|^{p-1} \leq 2C(1 + |s|^{p-1}).$$

Assim, temos

$$|f(x, s)| \leq 2C(1 + |s|^{p-1}).$$

Como em sua totalidade a hipótese (f_1) somente será necessária em um momento do nosso trabalho (para mostrar que o funcional Ψ é de classe C^2) na maioria das vezes, faremos referência à hipótese original (f'_1) .

Observação 2.1.2. Nossa segunda observação diz respeito à hipótese (f_2) . Em [6], esta hipótese é:

(f'_2) Existe $\gamma > 0$, $(2 + \gamma \leq p)$, tal que, para todo $s \neq 0$ e para quase todo $x \in \Omega$,

$$f_s(x, s)s^2 - (1 + \gamma)f(x, s)s > 0, \quad (2.1)$$

a partir disso, poderíamos concluir que $\frac{f(s)}{|s|}$ é uma função crescente (um resultado que é necessário mais adiante no artigo, ver página 882). Note que a partir de (f_2) é possível obter (f'_2) , pois

$$f_s(x, s)s^2 > (1 + \gamma)f(x, s)s > 0 \Rightarrow f_s(x, s)s^2 - (1 + \gamma)f(x, s)s > 0,$$

mas a direção contrária não é necessariamente verdade. Além disso, a conclusão de que $\frac{f(s)}{|s|}$ é uma função crescente nem sempre é obtida com (f'_2) , pois se considerarmos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo $f(s) = -s^{1+\varepsilon}$, com $0 < \varepsilon < \frac{p-2}{2}$, temos que, embora $\frac{f(s)}{|s|}$ seja decrescente, $f(s)$ satisfaz a hipótese (f_2) . De fato, se $s > 0$, então

$$\frac{f(s)}{|s|} = \frac{f(s)}{s} = \frac{-s^{1+\varepsilon}}{s} = -s^\varepsilon$$

que é decrescente, mas

$$f_s(s)s^2 - (1 + \gamma)f(s)s = -(1 + \varepsilon)s^\varepsilon s^2 - (1 + \gamma)(-s^{1+\varepsilon})s = s^{2+\varepsilon}[1 + \gamma - 1 - \varepsilon].$$

Fazendo então $\gamma = 2\varepsilon$, temos que $0 < \gamma < p - 2$ e que

$$f_s(x, s)s^2 - (1 + \gamma)f(x, s)s = \varepsilon s^{2+\varepsilon} > 0,$$

pois $s > 0$. Logo existe $0 < \gamma < p - 2$ tal que (2.1) é satisfeita, mas $\frac{f(s)}{|s|}$ não é crescente. Por este fato, alteramos a hipótese (f_2) para uma hipótese semelhante e usual quando se estuda este tipo de problema.

Observação 2.1.3. A hipótese (H_1) de [6] também foi alterada pelo mesmo motivo da hipótese (f_1) , isto é, foram necessárias estimativas sobre as derivadas de H para mostrar a regularidade da aplicação Ψ (ver definição em 2.25), e mais alguns outros resultados, como a regularidade do funcional de energia J associado ao sistema $(P_{u,v})$ (Seção 2.3.1), J de classe $C^1(H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. A hipótese original é dada a seguir

(H'_1) $H \in C^1(\mathbb{R}^2) \cap C^2(\mathbb{R}^2 \setminus X)$ e existe uma constante positiva $0 < \beta < \gamma$, tal que

$$|H(x, s, t)| \leq C(1 + |s| + |t|)^{1+\beta}. \quad (2.2)$$

Porém, assim como foi possível com a hipótese (f_1) , é possível obter a hipótese (H'_1) assumindo a hipótese (H_1) . Pela hipótese (H_1) ,

$$\begin{aligned} |H_s(x, s, t)| &\leq \left| \int_0^s H_{ss}(x, \tau, t) d\tau \right| \\ &\leq \int_0^s |H_{ss}(x, \tau, t)| d\tau \\ &\leq \int_0^s C(1 + |\tau|^\beta + |t|^\beta) d\tau \\ &= C(|s| + \frac{|s|^{1+\beta}}{1+\beta} + |s||t|^\beta) \\ &\leq C(|s| + |s|^{1+\beta} + |s||t|^\beta) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\leq C(1 + |s| + |s|^{1+\beta} + |s||t|^\beta). \quad (2.4)$$

Assim, se integrarmos novamente,

$$\begin{aligned} |H(x, s, t)| &\leq \left| \int_0^s H_s(x, \tau, t) d\tau \right| \\ &\leq \int_0^s |H_s(x, \tau, t)| d\tau \\ &\leq \int_0^s C(1 + |\tau| + |\tau|^{1+\beta} + |\tau||t|^\beta) d\tau \\ &= C \left(|s| + \frac{|s|^2}{2} + \frac{|s|^{2+\beta}}{2+\beta} + \frac{|s|^2|t|^\beta}{2} \right) \\ &\leq C(|s| + |s|^2 + |s|^{2+\beta} + |s|^2|t|^\beta) \\ &\leq C(1 + |s| + |s|^2 + |s|^{2+\beta} + |s|^2|t|^\beta) \\ &\leq C(1 + |s| + |t|)^{2+\beta}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

como queríamos.

Observação 2.1.4. Na hipótese (H_2) de [6], a definição de matrizes não-positivas definidas diz que os termos de sua diagonal principal devem ser estritamente negativos quando expressa na base de Jordan, porém, alguns autores, como por exemplo [15], consideram que os termos da diagonal também podem ser nulos. O fato de os termos da diagonal poderem ser nulos será usado na **Seção 2.4**, quando estudaremos o sistema $(P_{u,v})$ para o caso em que $H \equiv 0$. A alteração feita nos obriga a estudar casos particulares para a **Proposição 2.3.9**, mas veremos que não altera nenhum outro resultado do trabalho.

Antes de prosseguirmos, daremos exemplos de funções f e H satisfazendo as hipóteses (f_1) – (f_2) e (H_1) – (H_3) , respectivamente. Seja $\Omega \in \mathbb{R}^3$ um aberto limitado com fronteira suave. Um exemplo de função que satisfaz às hipóteses (f_1) e (f_2) é $f(x, s) = s|s|^3$. De fato, a derivada de f com relação a s é dada por

$$f_s(x, s) = |s|^3 + 3s|s|^2 \frac{s}{|s|} = 4|s|^3$$

e utilizando esta informação, mostraremos que f satisfaz as hipóteses (f_1) e (f_2) .

(f_1) Note que

$$|f_s(x, s)| = 4|s|^3 \leq 4(1 + |s|^3),$$

ou seja, $C = 4$ e, como $2^* = \frac{2 \cdot 3}{3 - 2} = 6$, temos $p = 5 < 2^*$, se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

(f_2) Mostraremos agora que f satisfaz a hipótese (f_2) . De fato, $f_s(x, s)s^2 = 4|s|^3s^2 = 4|s|^5$ e $f(x, s)s = s^2|s|^3 = |s|^5$. Logo, tomando $\gamma = \frac{5}{2}$, temos que, para $s \neq 0$,

$$f_s(x, s)s^2 = 4|s|^5 \geq \frac{7}{2}|s|^5 = (1 + \gamma)f(x, s)s > 0.$$

Consideremos ainda $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e $H(x, s, t) = s^2t^2$, como

$$H_s(x, s, t) = 2st^2, \quad H_t(x, s, t) = 2s^2t \text{ e}$$

$$H_{ss}(x, s, t) = 2t^2, \quad H_{st}(x, s, t) = 4st \text{ e } H_{tt}(x, s, t) = 2s^2,$$

mostraremos que $H(x, s, t)$ satisfaz às hipóteses $(H_1) - (H_3)$:

(H_1) A partir das derivadas acima, temos

$$|H_{ss}(x, s, t)| + 2|H_{st}(x, s, t)| + |H_{tt}(x, s, t)| = 2t^2 + 8st + 2s^2 \leq (2s + 2t)^2.$$

Agora, tomando $2 < \beta < \gamma$, pelo Lema A.5.4,

$$\begin{aligned} (2s + 2t)^2 &= 4(s + t)^2 \leq 4(1 + s + t)^2 \\ &\leq 4(1 + s + t)^\beta \\ &\leq 2^{2\beta}(1 + s^2 + t^2). \end{aligned}$$

Além disso, como a soma de H_{ss} , H_{st} e H_{tt} é menor que $4(s + t)^2$, temos que cada uma das parcelas é menor. Assim,

$$|H_{ss}(x, s, t)|, |H_{st}(x, s, t)|, |H_{tt}(x, s, t)| \leq 2^\beta(1 + |s|^2 + |t|^2).$$

Portanto, $H(s, x, t)$ satisfaz (H_1) .

(H_2) Para mostrar que $H(x, s, t)$ satisfaz (H_2) , mostraremos primeiro a existência de α tal que os elementos da diagonal principal da matriz Hessiana de H são não-positivos, depois mostraremos que o determinante da matriz Hessiana de H é não-negativo. Note que para $2 < \alpha \leq \beta$, temos que, para todo par $(s, t) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} H_{ss}(x, s, t)s^2 - (1 + \alpha)H_s(x, s, t)s &= 2s^2t^2 - (1 + \alpha)2s^2t^2 \\ &= -2\alpha s^2t^2 \\ &< 0. \end{aligned}$$

De maneira análoga, para os mesmos valores possíveis de α , temos

$$H_{tt}(x, s, t)t^2 - (1 + \alpha)H_t(x, s, t)t = -2\alpha s^2t^2 < 0, \text{ para todo par } (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Agora, o determinante da matriz Hessiana de H é dado por

$$\begin{aligned} (H_{ss}s^2 - (1 + \alpha)H_s s)(H_{tt}t^2 - (1 + \alpha)H_t t) - (H_{st}st)^2 &= 4\alpha^2 s^4 t^4 - 16s^4 t^4 \\ &= 4(\alpha^2 - 4)s^4 t^4 \\ &> 0, \end{aligned}$$

pois $\alpha > 2$, mostrando que $H(x, s, t)$ satisfaz (H_2) .

(H_3) Por fim, mostraremos que $H(x, s, t)$ satisfaz (H_3) . Note que

$$H(x, s, t) \geq 0 \text{ para todo } \text{par}(s, t) \in \mathbb{R}^2$$

e

$$H(x, s, t) = 0 \text{ se } st = 0.$$

Além disso,

$$H_s(x, s, t)s = H_t(x, s, t)t = 2(st)^2 \geq 0, \forall (s, t) \in \mathbb{R}^2$$

e, claramente,

$$H_s(x, s, t) = H_t(x, s, t) = 0, \text{ para os pares } (s, t) \in \mathbb{R}^2 \text{ com } st = 0.$$

Assim, $H(x, s, t)$ satisfaz (H_3) .

2.2 Consequências Decorrentes das Hipóteses nas Não-Linearidades

Nesta seção, mostraremos algumas consequências importantes das hipóteses da Seção 2.1. Tais consequências serão muito utilizadas durante todo o trabalho nos auxiliando na obtenção de resultados e simplificando nossas demonstrações. São elas:

I) $f(x, 0) = 0$, para todo $x \in \Omega$.

De fato, quando $s > 0$ temos de (f_2) que

$$f_s(x, s)s^2 > (1 + \gamma)f(x, s)s > 0 \Rightarrow f_s(x, s)s > (1 + \gamma)f(x, s) > 0. \quad (2.6)$$

Assim, como f é de classe $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, quando $s \rightarrow 0$, temos que $|f_s(x, s)| \rightarrow L < \infty$ e portanto, tomando o limite em (2.6) quando $s \rightarrow 0$, obtemos $f(x, s) \rightarrow 0$. Por outro lado, quando $s < 0$ temos que

$$f_s(x, s)s^2 > (1 + \gamma)f(x, s)s > 0 \Rightarrow f_s(x, s)s < (1 + \gamma)f(x, s) < 0,$$

e, analogamente, concluímos que $f(x, s) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow 0$. Com esta informação e o fato de f ser contínua concluímos que $f(x, 0) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

II) $\frac{f(x, s)}{|s|}$ é uma função crescente em Ω .

De fato, para todo $x \in \Omega$, se $s > 0$, então $\frac{f(x, s)}{|s|} = \frac{f(x, s)}{s}$ e daí,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{f(x, s)}{s} \right) &= \frac{f_s(x, s)s - f(x, s)}{s^2} \\ &= \frac{f_s(x, s)s^2 - f(x, s)s}{s^3} \\ &\geq \frac{f_s(x, s)s^2 - (1 + \gamma)f(x, s)s}{s^3}. \end{aligned}$$

Logo, por (f_2) , $f_s(x, s)s^2 - (1 + \gamma)f(x, s)s > 0$, e portanto

$$\frac{f_s(x, s)s^2 - (1 + \gamma)f(x, s)s}{s^3} > 0.$$

Caso $s < 0$, temos que $\frac{f(x, s)}{|s|} = -\frac{f(x, s)}{s}$. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(-\frac{f(x, s)}{s} \right) &= -\frac{f_s(x, s)s - f(x, s)}{s^2} \\ &= -\frac{f_s(x, s)s^2 - f(x, s)s}{s^3} \\ &= \frac{f_s(x, s)s^2 - f(x, s)s}{-s^3} \\ &\geq \frac{f_s(x, s)s^2 - (1 + \gamma)f(x, s)s}{-s^3} \end{aligned}$$

e, novamente de (f_2) , lembrando que $-s^3 > 0$, temos

$$\frac{f_s(x, s)s^2 - f(x, s)s}{-s^3} > 0.$$

Assim, concluímos que para todo $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a derivada da função $\frac{f(x, s)}{|s|}$ é positiva, logo $\frac{f(x, s)}{|s|}$ é crescente.

III) $f(x, s) = o(|s|)$ quando $s \rightarrow 0$.

Notemos que, se $s > 0$,

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{f(x, s)}{|s|^{1+\gamma}} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{f(x, s)}{s^{1+\gamma}} \right) = \frac{f_s(x, s)s^{1+\gamma} - f(x, s)(1 + \gamma)s^\gamma}{s^{2(1+\gamma)}}.$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{f(x, s)}{|s|^{1+\gamma}} \right) = [f_s(x, s)s^2 - f(x, s)(1 + \gamma)s] \frac{s^{1-\gamma}}{s^{2(1+\gamma)}},$$

e, pela hipótese (f_2) , temos que $\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{f(x, s)}{|s|^{1+\gamma}} \right) > 0$. O resultado é análogo para $s < 0$.

Sendo assim, $\frac{f(x, s)}{s^{1+\gamma}}$ é uma função crescente na variável s . Logo, para $|s| < 1$,

$$0 \leq \frac{|f(x, s)|}{|s|^{1+\gamma}} \leq \max\{|f(x, -1)|, |f(x, 1)|\}.$$

Mas, $\max\{|f(x, -1)|, |f(x, 1)|\}$ é uma função de x , digamos $k(x)$, logo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{|f(x, s)|}{|s|^{1+\gamma}} \leq k(x) \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \frac{|f(x, s)|}{|s|} \leq k(x)|s|^\gamma. \end{aligned}$$

Portanto, ao tomarmos o limite quando $s \rightarrow 0$, obtemos $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x, s)}{|s|} = 0$.

IV) Dado $\varepsilon > 0$, existe $C_1 > 0$ tal que,

$$|f(x, s)||s| \leq \varepsilon|s|^2 + C_1|s|^p. \quad (2.7)$$

De fato, seja $\varepsilon > 0$ qualquer. Pelo item III), temos que existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, se $|s| < \delta$, então

$$|f(x, s)| < \varepsilon|s|.$$

Logo,

$$|f(x, s)||s| < \varepsilon|s|^2. \quad (2.8)$$

Agora, segue da hipótese (f'_1) que

$$|f(x, s)||s| < C(|s| + |s|^p) = C \left(\frac{1}{|s|^{p-1}} + 1 \right) |s|^p,$$

e, portanto, para $|s| \geq \delta$, temos que

$$\begin{aligned} |f(x, s)||s| &< C \left(\frac{1}{|s|^{p-1}} + 1 \right) |s|^p \\ &\leq C \left(\frac{1}{\delta^{p-1}} + 1 \right) |s|^p \\ &= C_1|s|^p. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Assim, por (2.8) e (2.9), concluímos que

$$|f(x, s)||s| \leq \varepsilon|s|^2 + C_1|s|^p.$$

V) Existem $C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x, s) \geq C_2|s|^{1+\gamma} - C_3.$$

Tomando $s > 0$ em (f_2), se definirmos $\mu = (1+\gamma)$, então $f_s(x, s)s > \mu f(x, s)$. Assim, temos que $\frac{f_s(x, s)}{f(x, s)} > \frac{\mu}{s}$. Fixando $t_0 \in \mathbb{R}$ e integrando os dois lados da inequação com relação a s ,

obtemos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^s \frac{f_s(x, \tau)}{f(x, \tau)} d\tau &> \int_{t_0}^s \frac{\mu}{\tau} d\tau \\ \Leftrightarrow \log |f(x, \tau)| \Big|_{t_0}^s &> \mu \log |\tau| \Big|_{t_0}^s. \end{aligned}$$

Como μ , τ e $f(x, \tau)$ são todos positivos, aplicando as funções nos limites de integração temos que a desigualdade acima pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \log (f(x, s)) - \log (f(x, t_0)) &> \mu \log |s| - \mu \log |t_0| \\ \Leftrightarrow \log \left(\frac{f(x, s)}{f(x, t_0)} \right) &> \mu \log \left| \frac{s}{t_0} \right| \\ \Leftrightarrow \frac{f(x, s)}{f(x, t_0)} &> \left| \frac{s}{t_0} \right|^\mu \\ \Leftrightarrow f(x, s) &> \frac{f(x, t_0)}{t_0^\mu} |s|^\mu. \end{aligned}$$

De maneira semelhante, quando $s < 0$, temos $f_s(x, s)s < \mu f(x, s)$, e daí, calculando agora a integral de $-t_0$ até s , obtemos,

$$\begin{aligned} \int_{-t_0}^s \frac{f_s(x, \tau)}{f(x, \tau)} d\tau &< \int_{-t_0}^s \frac{\mu}{\tau} d\tau \\ \Leftrightarrow \log |f(x, \tau)| \Big|_{-t_0}^s &< \mu \log |\tau| \Big|_{-t_0}^s \\ \Leftrightarrow \log \left| \frac{f(x, s)}{f(x, -t_0)} \right| &< \log \left| \frac{s}{-t_0} \right|^\mu \end{aligned}$$

e, como $-t_0$ e s são negativos, temos que $f(x, -t_0) < 0$ e $f(x, s) < 0$, portanto, a desigualdade acima pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{f(x, s)}{f(x, -t_0)} &< \frac{|s|^\mu}{t_0^\mu} \\ \Leftrightarrow f(x, s) &< \frac{f(x, -t_0)}{t_0^\mu} |s|^\mu. \end{aligned}$$

Dessa forma, tomando $C_2 = \max \left\{ \left| \frac{f(x, -t_0)}{t_0^\mu} \right|, \left| \frac{f(x, t_0)}{t_0^\mu} \right| \right\}$, temos que, para todo $s \in \mathbb{R}$ tal que $|s| > t_0$,

$$f(x, s) > C_2 |s|^\mu.$$

Quando $|s| \leq t_0$, temos que a função $f(x, s) - C_2 |s|^\mu$ é contínua em $\Omega \times [-t_0, t_0]$, pois é diferença de funções contínuas. Agora, $\bar{\Omega} \times [-t_0, t_0]$ é compacto, logo existe $C_3 \in (0, +\infty)$ tal que $|f(x, s) - C_2 |s|^\mu| \leq C_3$, para todo $x \in \Omega$. Assim, temos que

$$-C_3 \leq f(x, s) - C_2 |s|^\mu \leq C_3$$

e daí, podemos concluir que quando $|s| \leq t_0$,

$$f(x, s) \geq C_2 |s|^\mu - C_3.$$

Assim, para qualquer $s \in \mathbb{R}$, tomando $\mu = 1 + \gamma$, temos que $f(x, s) \geq C_2|s|^{1+\gamma} - C_3$, como queríamos.

VI) *Existem constantes $C_4, C_3 > 0$ tais que, para todo $x \in \Omega$,*

$$F(x, s) \geq C_4|s|^{2+\gamma} - C_3|s|.$$

A partir da desigualdade obtida no resultado anterior, temos

$$F(x, s) = \int_0^s f(x, t) dt \geq \int_0^s C_2|t|^{1+\gamma} - C_3 dt.$$

Mas, se $s > 0$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^s C_2|t|^{1+\gamma} - C_3 dt &= \int_0^s C_2 t^{1+\gamma} - C_3 dt \\ &= \left[\frac{C_2}{2+\gamma} t^{2+\gamma} - C_3 t \right]_{t=0}^{t=s} \\ &= C_4 s^{2+\gamma} - C_3 s \\ &= C_4|s|^{2+\gamma} - C_3|s|, \end{aligned}$$

em que $C_4 = \frac{C_2}{2+\gamma}$. E, como $F(x, -s) = F(x, |s|)$, podemos concluir que

$$F(x, s) \geq C_4|s|^{2+\gamma} - C_3|s|. \quad (2.10)$$

VII) *Para todo $s \in \mathbb{R}$, a função*

$$\mathcal{F}(x, s) := f(x, s)s - (2 + \alpha)F(x, s) \geq 0, \text{ q.t.p. } x \in \Omega$$

Note que para o caso $s = 0$, o resultado é trivial. Se $s > 0$, pela à hipótese (f_2) , temos que

$$\begin{aligned} f_s(x, s)s^2 - (1 + \gamma)f(x, s)s > 0 &\Leftrightarrow f_s(x, s)s - (1 + \gamma)f(x, s) > 0 \\ &\Rightarrow \int_0^s (f_s(x, r)r - (1 + \gamma)f(x, r)) dr > 0, \end{aligned}$$

mas,

$$\begin{aligned} \int_0^s f_s(x, r)r dr - (1 + \gamma) \int_0^s f(x, r) dr > 0 &\Leftrightarrow f(x, r)r \Big|_0^s - (2 + \gamma) \int_0^s f(x, r) dr > 0 \\ &\Leftrightarrow f(x, s)s - (2 + \gamma)F(x, s) > 0, \end{aligned}$$

e, como $\alpha < \gamma$, temos que

$$f(x, s)s - (2 + \gamma)F(x, s) > f(x, s)s - (2 + \alpha)F(x, s) > 0, \text{ se } s > 0.$$

De forma análoga, temos que se $s < 0$, então

$$\begin{aligned} f_s(x, s)s^2 - (1 + \gamma)f(x, s)s > 0 &\Leftrightarrow f_s(x, s)s - (1 + \gamma)f(x, s) < 0 \\ &\Rightarrow \int_s^0 (f_s(x, r)r - (1 + \gamma)f(x, r)) dr < 0, \end{aligned}$$

mas,

$$\begin{aligned} \int_s^0 f_s(x, r)rdr - (1 + \gamma) \int_s^0 f(x, r)dr < 0 &\Leftrightarrow f(x, r)r \Big|_0^s + (2 + \gamma) \int_0^s f(x, r)dr < 0 \\ &\Leftrightarrow -f(x, s)s + (2 + \gamma)F(x, s) < 0 \\ &\Leftrightarrow f(x, s)s - (2 + \gamma)F(x, s) > 0 \end{aligned}$$

e, novamente, temos

$$f(x, s)s - (2 + \alpha)F(x, s) > 0, \text{ se } s < 0.$$

Assim, temos que, para todo $s \neq 0$,

$$\mathcal{F}(x, s) = f(x, s)s - (2 + \alpha)F(x, s) > 0. \quad (2.11)$$

VIII) A função $\mathcal{F}(s) := f(s)s - (\alpha + 2)F(s)$ é uma função crescente, para $s > 0$.

Temos pela hipótese (f_2) que, se $s > 0$,

$$f_s(s)s > (1 + \gamma)f(s) > 0.$$

Agora, como $\mathcal{F}(s) = f(s)s - (\alpha + 2)F(s)$, temos, para $s > 0$, que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(s) &= f'(s)s + f(s) - (\alpha + 2)f(s) \\ &= f'(s)s - (1 + \alpha)f(s) \\ &> 0, \end{aligned}$$

por (f_2) . Portanto, $\mathcal{F}(s)$ é crescente para $s > 0$.

IX) Para todo $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$(2 + \alpha)H(s, t) - H_s(s, t) - H_t(s, t) \geq 0, \forall x \in \Omega.$$

Primeiramente, se $st = 0$, temos, por (H_3) que $2 + \alpha H(s, t) - H_s(s, t) - H_t(s, t) = 0$, satisfazendo a desigualdade. Agora, fixado $x \in \Omega$, temos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 [H_{ss}(\xi s, \xi t)s^2\xi + H_{tt}(\xi s, \xi t)t^2\xi + 2H_{st}(\xi s, \xi t)st\xi] d\xi \\ &= [H_s(\xi s, \xi t)s + H_t(\xi s, \xi t)t] \Big|_{\xi=0}^{\xi=1} - \int_0^1 [H_s(\xi s, \xi t)s + H_t(\xi s + \xi t)t] d\xi, \end{aligned} \quad (2.12)$$

em que o termo a direita do sinal da igualdade foi obtido a partir da integral do lado

esquerdo da igualdade por meio de integração por partes. Agora, note que

$$H_s(\xi s, \xi t)s + H_t(\xi s + \xi t)t = \frac{\partial H(\xi s, \xi t)}{\partial \xi},$$

assim, ao aplicarmos o Teorema Fundamental do Cálculo na integral do lado direito da igualdade em (2.12), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [H_{ss}(\xi s, \xi t)s^2\xi + H_{tt}(\xi s, \xi t)t^2\xi + 2H_{st}(\xi s, \xi t)st\xi] d\xi \\ &= H_s(s, t)s + H_t(s, t)t - H(\xi s, \xi t) \Big|_{\xi=0}^{\xi=1} \\ &= H_s(s, t)s + H_t(s, t)t - H(s, t). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Agora, por (H_2) , temos que a matriz Hessiana de H ,

$$Hess H := \begin{pmatrix} H_{ss}(\xi s, \xi t)\xi^2 s^2 - (1 + \alpha)H_s(\xi s, \xi t)\xi s & H_{st}(\xi s, \xi t)\xi^2 st \\ H_{st}(\xi s, \xi t)\xi^2 st & H_{tt}(\xi s, \xi t)\xi^2 t^2 - (1 + \alpha)H_t(\xi s, \xi t)\xi t \end{pmatrix},$$

é uma matriz não-positiva definida, ou seja, ao aplicarmos a matriz de (H_2) a um mesmo vetor de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ duas vezes, obtemos como resultado um número real não-positivo. Com essa informação, aplicaremos a referida matriz ao vetor $(1, 1)$, no ponto $(\xi s, \xi t)$, obtendo assim,

$$\begin{aligned} & (1 \ 1) Hess H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= H_{ss}(\xi s, \xi t)\xi^2 s^2 + 2H_{st}(\xi s, \xi t)\xi^2 st + H_{tt}(\xi s, \xi t)\xi^2 t^2 \\ &\quad - (1 + \alpha)[H_s(\xi s, \xi t)\xi s + H_t(\xi s, \xi t)\xi t] \\ &\leq 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & H_{ss}(\xi s, \xi t)\xi^2 s^2 + 2H_{st}(\xi s, \xi t)\xi^2 st + H_{tt}(\xi s, \xi t)\xi^2 t^2 \\ &\leq (1 + \alpha)[H_s(\xi s, \xi t)\xi s + H_t(\xi s, \xi t)\xi t] \end{aligned} \quad (2.15)$$

e, integrando (2.15) com relação a ξ de 0 a 1 e utilizando o resultado obtido em (2.13), concluímos que

$$H_s(s, t)s + H_t(s, t)t - H(s, t) \leq (1 + \alpha)H(s, t).$$

Portanto,

$$H_s(s, t)s + H_t(s, t)t \leq (2 + \alpha)H(s, t). \quad (2.16)$$

Como o resultado obtido independe de x , temos que tal fato ocorre para todo $x \in \Omega$, concluindo assim que, se $s = u(x)$ e $t = v(x)$,

$$0 \leq H_u(u(x), v(x))u(x) + H_v(u(x), v(x))v(x) \leq (2 + \alpha)H(u(x), v(x)), \forall x \in \Omega.$$

- X) Se para algum ponto $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ tivermos $H_{ss}(s, t)s^2 - (1 + \alpha)H_s(s, t)s = 0$ ou $H_{tt}(s, t)t^2 - (1 + \alpha)H_t(s, t)t = 0$, então $H_{st}(s, t)st = 0$.

Note que o determinante da matriz Hessiana de H , $Hess H$, é dado pela expressão

$$\det(Hess H) = [H_{ss}(s, t)s^2 - (1 + \alpha)H_s(s, t)s][H_{tt}(s, t)t^2 - (1 + \alpha)H_t(s, t)t] - [H_{st}(s, t)st]^2.$$

Assim, se um dos fatores da primeira parcela é nulo, temos que

$$\det(Hess H) = -[H_{st}(s, t)st]^2 \leq 0.$$

Mas, por $Hess H$ ser não-positiva definida, hipótese (H_2) , temos que $\det(Hess H) \geq 0$. Logo, $[H_{st}(s, t)st]^2 = 0$ e portanto,

$$H_{st}(s, t)st = 0.$$

XI) Se $F(s) = F(|s|)$ e $H(s, t) = H(|s|, |t|)$, então $f(s) := \frac{d}{ds}F(s)$ satisfaz as hipóteses (f'_1) e (f_2) , desde que $f(s)$ satisfaça (f'_1) e (f_2) para $s > 0$, e H satisfaz as hipóteses $(H_1) - (H_3)$, desde que $H(s, t)$ satisfaça $(H_1) - (H_3)$ para $s > 0$ e $t > 0$.

De fato, como $F(s) = \int_0^s f(t)dt$, temos que, para $s > 0$,

$$F(-s) = \int_0^{-s} f(t)dt,$$

e, fazendo a mudança de variáveis $r = -t$, segue

$$\int_0^s f(r)dr = F(s) = F(|s|) = F(-s) = \int_0^s -f(-r)dr.$$

Assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$f(s) = -f(-s).$$

Temos também que

$$f_s(s) = \frac{d}{ds}(-f(-s)) = f_s(-s).$$

Agora, como $f(s)$ satisfaz as hipóteses (f'_1) e (f_2) quando $s > 0$, concluímos que, para $t < 0$

$$|f(t)| = |f(|t|)| \leq C(1 + |t|^{p-1})$$

e que

$$\begin{aligned} f_t(t)t^2 &> (1 + \gamma)f(t)t > 0 \\ \Leftrightarrow f_t(-t)(-t)^2 &> (1 + \gamma)[-f(-t)][-(-t)] > 0. \end{aligned}$$

Mas, como $t < 0$, $-t > 0$ e, portanto, a expressão do lado direito é verdadeira. Dessa forma, temos que f é tal que $f(s) = -f(-s)$ satisfaz (f'_1) e (f_2) . E assim, F pode ser tomada de forma que $F(s) = F(|s|)$.

De maneira semelhante, obtemos que H pode ser estendida simetricamente, pois, se $H(s, t) = H(|s|, |t|)$, então vale a seguinte relação entre as primeiras derivadas de H com relação a s e a t :

$$H_s(s, t) = \text{sgn}(s)H_s(|s|, |t|); \quad H_t(s, t) = \text{sgn}(t)H_t(|s|, |t|),$$

e para as segundas derivadas, temos

$$\begin{aligned} H_{ss}(s, t) &= \operatorname{sgn}(s)^2 H_{ss}(|s|, |t|) = H_{ss}(|s|, |t|); \\ H_{st}(s, t) &= \operatorname{sgn}(s)\operatorname{sgn}(t)H_{st}(|s|, |t|); \\ H_{tt}(s, t) &= \operatorname{sgn}(t)^2 H_{tt}(|s|, |t|) = H_{tt}(|s|, |t|), \end{aligned} \tag{2.17}$$

em que $\operatorname{sgn}(r)$ é o sinal de r . Assim, se H satisfaz $(H_1) - (H_3)$, então

- Note que, como (H_1) vale para $s > 0$ e $t > 0$, por (2.17), temos

$$\begin{aligned} |H_{ss}(s, t)| &= |H_{ss}(|s|, |t|)| \\ &\leq C(1 + |s|^\beta + |t|^\beta), \end{aligned}$$

para todo $(s, t) \in \mathbb{R}^2$. Analogamente,

$$|H_{tt}(s, t)| \leq C(1 + |s|^\beta + |t|^\beta),$$

para todo $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, e

$$\begin{aligned} |H_{st}(s, t)| &= |H_{st}(|s|, |t|)| |\operatorname{sgn}(s)| |\operatorname{sgn}(t)| \\ &= |H_{st}(|s|, |t|)| \\ &\leq C(1 + |s|^\beta + |t|^\beta). \end{aligned}$$

Mostrando que $H(|s|, |t|)$ satisfaz a hipótese (H_1) .

- Para mostrar que H satisfaz (H_2) para todo $(s, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, note que, por H satisfazer (H_2) quando $s > 0$ e $t > 0$, temos

$$\begin{aligned} H_{ss}(s, t)s^2 - (1 + \alpha)H_s(s, t)s &= H_{ss}(|s|, |t|)|s|^2 - (1 + \alpha)H_s(|s|, |t|)\operatorname{sgn}(s)s \\ &= H_{ss}(|s|, |t|)|s|^2 - (1 + \alpha)H_s(|s|, |t|)|s| \\ &< 0. \end{aligned}$$

O mesmo resultado vale para o outro elemento da diagonal da matriz Hessiana:

$$\begin{aligned} H_{tt}(s, t)t^2 - (1 + \alpha)H_t(s, t)t &= H_{tt}(|s|, |t|)|t|^2 - (1 + \alpha)H_t(|s|, |t|)\operatorname{sgn}(t)t \\ &= H_{tt}(|s|, |t|)|t|^2 - (1 + \alpha)H_t(|s|, |t|)|t| \\ &< 0. \end{aligned}$$

Além disso, temos a seguinte estimativa para o determinante de $Hess H$.

$$\begin{aligned} &[H_{ss}(s, t)s^2 - (1 + \alpha)H_s(s, t)s][H_{tt}(s, t)t^2 - (1 + \alpha)H_t(s, t)t] \\ &- H_{st}(s, t)^2(st)^2 \\ &= [H_{ss}(|s|, |t|)|s|^2 - (1 + \alpha)H_s(|s|, |t|)|s|][H_{tt}(|s|, |t|)|t|^2 - (1 + \alpha)H_t(|s|, |t|)|t|] \\ &- H_{st}(|s|, |t|)^2|s|^2|t|^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Dessa maneira, temos que H satisfaz (H_2) .

- Para provar que vale (H_3) para qualquer $(s, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, note que, se $st \neq 0$,

$$H(s, t) = H(|s|, |t|) \geq 0;$$

$$H_s(s, t)s = H_s(|s|, |t|)sgn(s)s = H_s(|s|, |t|)|s| \geq 0;$$

$$H_t(s, t)t = H_t(|s|, |t|)sgn(t)t = H_t(|s|, |t|)|t| \geq 0,$$

e que, se $st = 0$, então

$$H(s, t) = H(|s|, |t|) = 0;$$

$$H_s(s, t) = H_s(|s|, |t|)sgn(s) = 0;$$

$$H_t(s, t) = H_t(|s|, |t|)sgn(t) = 0,$$

pois, H satisfaz (H_3) quando $s > 0$ e $t > 0$. Assim, concluímos que $H(s, t)$ satisfaz as hipóteses $(H_1) - (H_3)$, para todo par $(s, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Esta última observação sobre a paridade das funções F e H será utilizada para obtermos funções estritamente positivas que satisfazem o sistema.

2.3 Uma Classe de Sistemas Elípticos

Nesta seção, o nosso objetivo é encontrar soluções fracas para o problema $(P_{u,v})$.

O nosso primeiro resultado se refere a existência de solução $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ para o sistema de equações $(P_{u,v})$ e afirma que:

Teorema 2.3.1. *Seja f satisfazendo $(f'_1) - (f_2)$ e H satisfazendo $(H_1) - (H_3)$. Então existe uma solução $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, com $u > 0$ e $v > 0$, para o problema descrito em $(P_{u,v})$.*

Tal solução será encontrada como ponto crítico do seguinte funcional associado ao sistema $(P_{u,v})$

$$J(u, v) := \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + \frac{1}{2} |\nabla v(x)|^2 - F(u(x)) - F(v(x)) + H(u(x), v(x)) \right] dx \quad (2.18)$$

considerando que $F(u(x)) = \int_0^{u(x)} f(s)ds$ e que F e H são funções estendidas simetricamente da seguinte forma:

$$F(s) = F(|s|), \text{ para todo } s \in \mathbb{R}, \text{ e} \quad (2.19)$$

$$H(s, t) = H(|s|, |t|), \text{ para todo } (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Antes de prosseguirmos, mostraremos um resultado que é de grande importância em nossos trabalhos. Falaremos sobre a regularidade do funcional J .

2.3.1 Regularidade do funcional J

Nesta seção, nosso objetivo é mostrar que o funcional J , descrito anteriormente, admite certa regularidade. De fato, mostraremos que J é de classe $C^1(H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Tal regularidade é muito importante tanto para garantirmos a existência de solução para o problema $(P_{u,v})$, via ponto crítico de funcional, quanto para encontrarmos tais soluções.

A fim de simplificar a notação, escreveremos apenas $\|\cdot\|_p$ no lugar de $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$, quando não houver dúvida.

Proposição 2.3.2. *O funcional J é de classe $C^1(H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.*

Demonstração: Primeiramente, mostraremos que o funcional J é contínuo. Seja $\{(u_m, v_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que $(u_m, v_m) \rightarrow (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Pela definição de J , temos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} |J(u_m, v_m) - J(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u_m|^2 + \frac{1}{2} |\nabla v_m|^2 - F(u_m) - F(v_m) + H(u_m, v_m) \right) dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} |\nabla v|^2 - F(u) - F(v) + H(u, v) \right) dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u_m|^2 - |\nabla u|^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v_m|^2 - |\nabla v|^2) dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega} (F(u_m) - F(u)) dx - \int_{\Omega} (F(v_m) - F(v)) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} (H(u_m, v_m) - H(u, v)) dx \right|. \end{aligned}$$

Assim, pela desigualdade triangular e a convergência pontual de $(u_m(x), v_m(x))$, a menos de subsequência, temos que

$$\begin{aligned} |J(u_m, v_m) - J(u, v)| &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| |\nabla u_m|^2 - |\nabla u|^2 \right| dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| |\nabla v_m|^2 - |\nabla v|^2 \right| dx \\ &\quad + \left| \int_{\Omega} (F(u_m) - F(u)) dx \right| + \left| \int_{\Omega} (F(v_m) - F(v)) dx \right| \\ &\quad + \left| \int_{\Omega} (H(u_m, v_m) - H(u, v)) dx \right|. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Agora, $\int_{\Omega} \left| |\nabla u_m|^2 - |\nabla u|^2 \right| dx \rightarrow 0$ e $\int_{\Omega} \left| |\nabla v_m|^2 - |\nabla v|^2 \right| dx \rightarrow 0$ visto que $\|u_m - u\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0$ e $\|v_m - v\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0$. Além disso, os funcionais $\int_{\Omega} F(u) dx$ e $\int_{\Omega} F(v) dx$ são contínuos em $H_0^1(\Omega)$ e o funcional $\int_{\Omega} H(u, v) dx$ é contínuo em $H_0^1(\Omega)$ (ver Lema 2.4.4 e similarmente para $H(u, v)$). Assim, $|J(u_m, v_m) - J(u, v)| < \varepsilon$, e portanto, concluímos que J é um funcional contínuo. A seguir, mostraremos que a derivada do funcional J existe e que é contínua. Por definição, temos que a derivada direcional do funcional J , denotada por $\nabla J(u, v)$, na direção (w, z) é dada por

$$\langle \nabla J(u, v), (w, z) \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [J((u, v) + t(w, z)) - J(u, v)],$$

quando o limite existe. Logo,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla J(u, v), (w, z) \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} \int_{\Omega} \left[\frac{|\nabla(u + tw)|^2}{2} + \frac{|\nabla(v + tz)|^2}{2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - F(u + tw) - F(v + tz) + H(u + tw, v + tz) \right] dx \right. \\
&\quad \left. - \int_{\Omega} \left[\frac{|\nabla(u)|^2}{2} + \frac{|\nabla(v)|^2}{2} - F(u) - F(v) + H(u, v) \right] dx \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} \int_{\Omega} \frac{2t \langle \nabla u, \nabla w \rangle}{2} + \frac{t^2}{2} |\nabla w|^2 + \frac{2t \langle \nabla v, \nabla z \rangle}{2} + \frac{t^2}{2} |\nabla z|^2 dx \right. \\
&\quad \left. - \int_{\Omega} [F(u + tw) - F(u)] - [F(v + tz) - F(v)] dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega} [H(u + tw, v + tz) - H(u, v)] dx \right).
\end{aligned}$$

Assim, calculando o limite obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla J(u, v), (w, z) \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla w \rangle dx + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \\
&\quad + \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \langle \nabla v, \nabla z \rangle dx + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2} \int_{\Omega} |\nabla z|^2 dx \\
&\quad - \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left[\frac{F(u + tw) - F(u)}{t} \right] dx - \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left[\frac{F(v + tz) - F(v)}{t} \right] dx \\
&\quad + \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left[\frac{H(u + tw, v + tz) - H(u, v)}{t} \right] dx.
\end{aligned}$$

Agora, pelo Teorema do Valor Médio, temos que, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \Omega$, existe $\theta_t(x) \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(u + tw) - F(u)}{t} \right| &= |f(u + \theta_t tw)| |w| \\
&\leq C(1 + |u + \theta_t tw|^{p-1}) |w|.
\end{aligned}$$

Mas, como queremos calcular o limite quando $t \rightarrow 0$, podemos considerar $t \in (0, 1)$. Assim, utilizando o resultado do Lema A.5.4,

$$\begin{aligned}
C(1 + |u + \theta_t tw|^{p-1}) |w| &\leq C(1 + 2^{p-2} (|u|^{p-1} + \theta_t^{p-1} t^{p-1} |w|^{p-1})) |w| \\
&\leq C(1 + 2^{p-2} (|u|^{p-1} + |w|^{p-1})) |w|,
\end{aligned}$$

e, ao integrarmos este último termo da desigualdade em Ω , obtemos, utilizando a desigualdade

de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} [C(1 + 2^{p-2}(|u|^{p-1} + |w|^{p-1}))|w|] dx &= C \int_{\Omega} |w| dx + 2^{p-2}C \int_{\Omega} |u|^{p-1}|w| dx \\
&\quad + 2^{p-2}C \int_{\Omega} |w|^p dx \\
&\leq C|\Omega|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |w|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + 2^{p-2}C \left(\int_{\Omega} (|u|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\Omega} |w|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + 2^{p-2}C \int_{\Omega} |w|^p dx,
\end{aligned}$$

Segue, de $u, w \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq 2^*$, que

$$\int_{\Omega} [C(1 + 2^{p-2}(|u|^{p-1} + |w|^{p-1}))|w|] dx \leq C|\Omega|^{\frac{1}{2}} \|w\|_2 + 2^{p-2}C \|u\|_p^{\frac{p-1}{p}} \|w\|_p + 2^{p-2}C \|w\|_p^p < \infty.$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.5.3), temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{F(u + tw) - F(u)}{t} dx = \int_{\Omega} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u + tw) - F(u)}{t} dx,$$

concluindo que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{F(u + tw) - F(u)}{t} dx = \int_{\Omega} f(u)w dx.$$

Analogamente, se trocarmos u por v e w por z , obtemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{F(v + tz) - F(v)}{t} dx = \int_{\Omega} f(v)z dx.$$

De maneira semelhante, temos que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{H(u + tw, v + tz) - H(u, v)}{t} \right| &\leq \left| \frac{H(u + tw, v + tz) - H(u + tw, v)}{t} \right| \\
&\quad + \left| \frac{H(u + tw, v) - H(u, v)}{t} \right|,
\end{aligned}$$

e, pelo Teorema do Valor Médio e por (H_1) , existem, para cada $x \in \Omega$, $\sigma_t(x), \zeta_t(x) \in (0, 1)$ tais que

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{H(u + tw, v + tz) - H(u + tw, v)}{t} \right| + \left| \frac{H(u + tw, v) - H(u, v)}{t} \right| \\
&\leq |H_v(u + tw, v + \sigma_t tz)| |z| + |H_u(u + \zeta_t tw, v)| |w| \\
&\leq C(1 + |u + tw|^{p-1} + |v + \sigma_t tz|^{p-1}) |z| + C(1 + |u + \zeta_t tw|^{p-1} + |v|^{p-1}) |w| \\
&\leq C(1 + 2^{p-2}(|u|^{p-1} + t^{p-1}|w|^{p-1} + |v|^{p-1} + \sigma_t^{p-1} t^{p-1} |z|^{p-1})) |z| \\
&\quad + C(1 + 2^{p-2}(|u|^{p-1} + \zeta_t^{p-1} t^{p-1} |w|^{p-1}) + |v|^{p-1}) |w|.
\end{aligned}$$

Como nosso objetivo é estudar o limite quando $t \rightarrow 0$, consideraremos $t \in (0, 1)$. Assim,

$$\begin{aligned} \left| \frac{H(u + tw, v + tz) - H(u, v)}{t} \right| &\leq C(1 + 2^{p-2}(|u|^{p-1} + |w|^{p-1} + |v|^{p-1} + |z|^{p-1}))|z| \\ &\quad + C(1 + 2^{p-2}(|u|^{p-1} + |w|^{p-1}) + |v|^{p-1})|w| \end{aligned}$$

Assim, novamente, integrando a expressão acima em Ω e aplicando a desigualdade de Hölder quando necessário, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| \frac{H(u + tw, v + tz) - H(u, v)}{t} \right| dx &\leq C|\Omega|(\|z\|_2 + \|w\|_2) + 2^{p-1}C(\|u\|_p^{p-1} \\ &\quad + \|w\|_p^{p-1} + \|v\|_p^{p-1})(\|z\|_p + \|w\|_p) + 2^{p-2}C\|z\|_p^p \\ &< \infty, \end{aligned}$$

e, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left[\frac{H(u + tw, v + tz) - H(u, v)}{t} \right] dx = \int_{\Omega} \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{H(u + tw, v + tz) - H(u, v)}{t} \right] dx,$$

e portanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left[\frac{H(u + tw, v + tz) - H(u, v)}{t} \right] dx = \int_{\Omega} \nabla H(u, v)(w, z) dx.$$

Logo o funcional J tem derivadas direcionais em todas as direções.

Por fim, mostraremos que ∇J é contínuo. Para tanto, escreveremos $E := H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ durante os cálculos com o objetivo de simplificar a notação. Mostraremos então que ∇J é limitado e contínuo, ou seja, que ∇J pertence a E' , o espaço dual de E . Para isso, definiremos os seguintes funcionais

$$\begin{aligned} (V_1(u, v))(w, z) &:= \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla w(x) \rangle + \langle \nabla v(x), \nabla z(x) \rangle dx, \\ (V_2(u, v))(w, z) &:= \int_{\Omega} f(u(x))w(x) dx, \\ (V_3(u, v))(w, z) &:= \int_{\Omega} f(v(x))z(x) dx, \\ (V_4(u, v))(w, z) &:= \int_{\Omega} H_u(u(x), v(x))w(x) + H_v(u(x), v(x))z(x) dx. \end{aligned}$$

Note que $(\nabla J(u, v))(w, z) = (V_1(u, v) + V_2(u, v) + V_3(u, v) + V_4(u, v))(w, z)$, logo se mostrarmos que os funcionais V_1 , V_2 , V_3 e V_4 são limitados e contínuos, teremos o resultado desejado.

- V_1 é limitado.

Para $(u, v) \in E$ fixado, pelas desigualdades de Cauchy-Schawrz e Hölder, e por (1.4), temos

$$\begin{aligned} |(V_1(u, v))(w, z)| &\leq \int_{\Omega} |\nabla u(x)| |\nabla w(x)| + |\nabla v(x)| |\nabla z(x)| dx \\ &\leq \|u\| \|w\| + \|v\| \|z\| \\ &\leq (\|u\| + \|v\|) (\|w\| + \|z\|) \\ &= \|(u, v)\| \|(w, z)\|. \end{aligned}$$

Assim, como (u, v) está fixado, temos que $V_1(u, v)$ é limitado.

- V_1 é contínuo.

Seja $\{(u_n, v_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ tal que $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v) \in E$. Desta forma, temos que

$$\begin{aligned} \|V_1(u_n, v_n) - V_1(u, v)\|_{E'} &= \sup_{\|(w, z)\|=1, (w, z) \in E} \left| \int_{\Omega} \left[\langle \nabla u_n(x) - \nabla u(x), \nabla w(x) \rangle \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \langle \nabla v_n(x) - \nabla v(x), \nabla z(x) \rangle \right] dx \right| \\ &\leq \sup_{\|(w, z)\|=1, (w, z) \in E} \int_{\Omega} \left[|\nabla u_n(x) - \nabla u(x)| |\nabla w(x)| \right. \\ &\quad \left. + |\nabla v_n(x) - \nabla v(x)| |\nabla z(x)| \right] dx \\ &\leq \sup_{\|(w, z)\|=1, (w, z) \in E} \|u_n - u\| \|w\| + \|v_n - v\| \|z\| \\ &\leq \|u_n - u\| + \|v_n - v\| \\ &= \|(u_n, v_n) - (u, v)\| \end{aligned}$$

e este último converge a zero quando $n \rightarrow \infty$, por hipótese.

Como V_2 e V_3 são semelhantes, tanto a demonstração de sua limitação quanto de sua continuidade são análogas, portanto provaremos estes resultados apenas para V_2

- V_2 é limitado.

Fixado $(u, v) \in E$, pela hipótese (f'_1) , temos que

$$\begin{aligned} |(V_2(u, v))(w, z)| &\leq \int_{\Omega} |f(u(x))| |w(x)| dx \\ &\leq \int_{\Omega} C(1 + |u(x)|^{p-1}) |w(x)| dx \\ &= C \left(\int_{\Omega} |w(x)| dx + \int_{\Omega} |u(x)|^{p-1} |w(x)| dx \right). \end{aligned}$$

Assim, utilizando a desigualdade de Hölder e o Teorema A.5.7, obtemos

$$\begin{aligned}
|(V_2(u, v))(w, z)| &\leq \int_{\Omega} C \left(\int_{\Omega} |w(x)| dx + \int_{\Omega} |u(x)|^{p-1} |w(x)| dx \right) \\
&\leq C \left(|\Omega|^{\frac{1}{2}} \|w\|_2 + \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\Omega} |w(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\
&\leq C \left(|\Omega|^{\frac{1}{2}} \|w\|_2 + \|u\|_p^{p-1} \|w\|_p \right) \\
&\leq C \left(|\Omega|^{\frac{1}{2}} K(2) + \|u\|_p^{p-1} K(p) \right) \|w\|
\end{aligned}$$

em que $K(2)$ e $K(p)$ são constantes independentes de w e z . Assim, como (u, v) está fixado, concluímos que V_2 é limitado.

- V_2 é contínuo.

Sejam $\{(u_n, v_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in E$ uma sequência tal que $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v) \in E$. Assim, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\|V_2(u_n, v_n) - V_2(u, v)\|_{E'} &\leq \sup_{\|(w, z)\|=1} \int_{\Omega} |f(u_n(x)) - f(u(x))| |w(x)| dx \\
&\leq \sup_{\|(w, z)\|=1} \|f(u_n) - f(u)\|_{p'} \|w\|_p,
\end{aligned}$$

em que $p' = \frac{p}{p-1}$ é o conjugado de p . Novamente pelo Teorema A.5.7, temos

$$\begin{aligned}
\|V_2(u_n, v_n) - V_2(u, v)\|_{E'} &\leq \sup_{\|(w, z)\|=1} K(p) \|f(u_n) - f(u)\|_{p'} \|w\| \\
&\leq K(p) \|f(u_n) - f(u)\|_{p'}.
\end{aligned}$$

Agora pelo Teorema A.1.5, temos que a aplicação $B : L^p(\Omega) \rightarrow L^{p'}(\Omega)$ definida por $B(u(x)) = f(u(x))$ é contínua, logo, como pelas imersões compactas de $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, com $1 \leq q < 2^*$ (Teorema A.5.6), temos $u_n, u \in L^p(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que

$$\|B(u_n) - B(u)\|_{p'} = \|f(u_n) - f(u)\|_{p'} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Portanto, temos que V_2 é contínuo.

Por fim, mostraremos que o funcional V_4 é limitado e contínuo, concluindo a demonstração de que ∇J é contínuo.

- V_4 é limitado.

Novamente, fixando $(u, v) \in E$, pelo resultado (2.4), temos que

$$\begin{aligned}
|(V_4(u, v))(w, z)| &= \left| \int_{\Omega} H_u(u(x), v(x)) w(x) + H_v(u(x), v(x)) z(x) dx \right| \\
&\leq \int_{\Omega} |H_u(u(x), v(x))| |w(x)| + |H_v(u(x), v(x))| |z(x)| dx \\
&\leq \int_{\Omega} C(1 + |u(x)|^{1+\beta} + |v(x)|^{1+\beta}) (|w(x)| + |z(x)|) dx.
\end{aligned}$$

Portanto, utilizando a desigualdade de Hölder e o Teorema A.5.7, concluímos que

$$\begin{aligned} |(V_4(u, v))(w, z)| &\leq C \left(|\Omega|^{\frac{1}{2}} (\|w\|_2 + \|z\|_2) + \|u\|_{2+\beta}^{1+\beta} (\|w\|_{2+\beta} + \|z\|_{2+\beta}) \right. \\ &\quad \left. + \|v\|_{2+\beta}^{1+\beta} (\|w\|_{2+\beta} + \|z\|_{2+\beta}) \right) \\ &\leq C \left(|\Omega|^{\frac{1}{2}} K(2) + K(2 + \beta) (\|u\|_{2+\beta}^{1+\beta} + \|v\|_{2+\beta}^{1+\beta}) \right) (\|w\| + \|z\|). \end{aligned}$$

novamente com $K(2)$ e $K(2 + \beta)$ constantes independentes de w e z . Assim, como (u, v) está fixado, segue que V_4 é limitado.

- V_4 é contínuo.

Sejam $\{(u_n, v_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in E$ uma sequência tal que $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v) \in E$. Assim, aplicando mais uma vez a desigualdade de Hölder e o Teorema A.5.7,

$$\begin{aligned} \|V_4(u_n, v_n) - V_4(u, v)\|_{E'} &\leq \sup_{\|(w, z)\|=1} \left\{ \int_{\Omega} |H_u(u_n(x), v_n(x)) - H_u(u(x), v(x))| |w(x)| \right. \\ &\quad \left. + |H_v(u_n(x), v_n(x)) - H_v(u(x), v(x))| |z(x)| dx \right\} \\ &\leq \sup_{\|(w, z)\|=1} \left\{ \|H_u(u_n, v_n) - H_u(u, v)\|_{\frac{\beta+2}{\beta+1}} \|w\|_{\beta+2} \right. \\ &\quad \left. + \|H_v(u_n, v_n) - H_v(u, v)\|_{\frac{\beta+2}{\beta+1}} \|z\|_{\beta+2} \right\} \\ &\leq K(\beta + 2) \left(\|H_u(u_n, v_n) - H_u(u, v)\|_{\frac{\beta+2}{\beta+1}} \right. \\ &\quad \left. + \|H_v(u_n, v_n) - H_v(u, v)\|_{\frac{\beta+2}{\beta+1}} \right), \end{aligned}$$

Novamente, pelo Teorema A.1.5, temos que a aplicação

$$\tilde{B} : L^{\beta+2}(\Omega) \times L^{\beta+2}(\Omega) \longrightarrow L^{\frac{\beta+2}{\beta+1}}(\Omega) \times L^{\frac{\beta+2}{\beta+1}}(\Omega)$$

definida por $\tilde{B}(u(x), v(x)) = (H_u(u(x), v(x)), H_v(u(x), v(x)))$ é contínua, logo, como $u_n, v_n \in L^{\beta+2}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $0 < 2 + \beta < p$, concluímos que

$$\begin{aligned} \|\tilde{B}(u_n, v_n) - \tilde{B}(u, v)\|_{\frac{\beta+2}{\beta+1}} &= \|(H_u(u_n, v_n), H_v(u_n, v_n)) - (H_u(u, v), H_v(u, v))\|_{\frac{\beta+2}{\beta+1}} \\ &= \|(H_u(u_n, v_n) - H_u(u, v), H_v(u_n, v_n) - H_v(u, v))\|_{\frac{\beta+2}{\beta+1}} \\ &= \|H_u(u_n, v_n) - H_u(u, v)\|_{\frac{\beta+2}{\beta+1}} + \|H_v(u_n, v_n) - H_v(u, v)\|_{\frac{\beta+2}{\beta+1}} \end{aligned}$$

e este último converge a 0 quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, temos que V_4 é contínuo.

Assim, com os resultados acima, podemos concluir que a aplicação ∇J é um funcional linear contínuo do espaço $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, como queríamos. ■

2.3.2 Obtendo Soluções Positivas para o Problema $(P_{u,v})$

Nosso interesse é procurar soluções fracas de $(P_{u,v})$. Para tanto, vamos buscar pontos críticos de J que atingem o menor valor de J quando restritos ao conjunto crítico \mathcal{N} , conjunto de Nehari para o sistema $(P_{u,v})$, que é definido por

$$\mathcal{N} := \{(u, v) \in \mathcal{T} : \frac{\partial J(u, v)}{\partial u} u = \frac{\partial J(u, v)}{\partial v} v = 0\}, \quad (2.21)$$

sendo

$$\mathcal{T} := \{(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) : u \neq 0, v \neq 0\}. \quad (2.22)$$

Seja

$$c := \inf_{(u,v) \in \mathcal{N}} J(u, v), \quad (2.23)$$

provaremos a seguinte proposição:

Proposição 2.3.3. *Sob as hipóteses $(f'_1) - (f_2)$ e $(H_1) - (H_3)$, existe um ponto crítico de J , $(u_c, v_c) \in \mathcal{N}$, tal que $J(u_c, v_c) = c$.*

Para demonstrar a proposição acima, utilizaremos alguns resultados preliminares. O primeiro destes resultados nos diz que restrito a cada uma das variáveis u e v , o funcional J satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha. Para tanto, definiremos o funcional

$$I(u) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - F(u(x)) \right] dx,$$

de maneira que $I(u) = J(u, 0)$ e $I(v) = J(0, v)$. Assim, temos o resultado a seguir:

Lema 2.3.4. *O funcional I satisfaz as hipóteses $J_1)$, $J_2)$ e $J_3)$ do Teorema 1.1.4.*

Demonstração: Pelos resultados de J e as definições de I e F , temos.

$J_1)$ $I(0) = 0$.

Note que, $I(0) = J(0, 0)$. Agora, na demonstração do Lema 2.3.6, mostramos que $J(0, 0) = 0$. Portanto, $I(0) = 0$.

$J_2)$ Existem $\rho, \alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_{\rho}(0)} > \alpha$.

De fato, pelo resultado IV), temos que, dado $0 < \varepsilon < M$, existe $C_1 > 0$ tal que,

$$|f(s)| \leq \varepsilon |s| + C_1 |s|^{p-1}.$$

Assim, como

$$F(s) \leq |F(s)| = \left| \int_0^s f(t) dt \right| \leq \int_0^s |f(t)| dt,$$

segue que

$$|F(s)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |s|^2 + \frac{C_1}{p} |s|^p. \quad (2.24)$$

Daí, temos que, dado $0 < \varepsilon < 1$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, se $\|u\| < \delta$, então

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_{\Omega} \left[\frac{|\nabla u(x)|^2}{2} - F(u(x)) \right] dx \\ &\geq \int_{\Omega} \left[\frac{|\nabla u(x)|^2}{2} - \left(\frac{\varepsilon}{2} |u(x)|^2 + \frac{C_1}{p} |u(x)|^p \right) \right] dx \\ &= \frac{\|u\|^2}{2} - \varepsilon \frac{\|u\|_2^2}{2} - \frac{C_1}{p} \|u\|_p^p. \end{aligned}$$

Agora, pela equivalência entre as normas $\|u\|$ e $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ e pela imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < 2^*$, obtemos constantes $K(2)$ e $K(p)$ tais que

$$\begin{aligned} \frac{\|u\|^2}{2} - \varepsilon \frac{\|u\|_2^2}{2} - \frac{C_1}{p} \|u\|_p^p &\geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{\varepsilon K(2)}{2} \|u\|^2 - \frac{C_1 K(p)}{p} \|u\|^p \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon K(2)}{2} \right) \|u\|^2 - \frac{C_1 K(p)}{p} \|u\|^p. \end{aligned}$$

Tomando $M_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon K(2)}{2} \right)$, $M_2 = \frac{C_1 K(p)}{p}$, $\varepsilon < \min \left\{ \frac{1}{K(2)}, 1 \right\}$, $\rho < \min \{ \delta, M_2^{-\frac{1}{p}} \}$ e $\alpha := M_1 \rho^2 - M_2 \rho^p$, concluímos que $I(u) \geq \alpha$ para todo $u \in \partial B_{\rho}(0)$.

J_3) Existe $e \in H_0^1(\Omega) \setminus B_{\rho}(0)$ tal que $I(e) \leq 0$.

Pelo resultado VI), temos que

$$F(s) \geq C_4 |s|^{2+\gamma} - C_3 |s|.$$

Assim, $-F(s) \leq C_3 |s| - C_4 |s|^{2+\gamma}$. Portanto,

$$\begin{aligned} I(tu) &= \int_{\Omega} \left[\frac{t^2 |\nabla u(x)|^2}{2} - F(tu(x)) \right] dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left[\frac{t^2 |\nabla u(x)|^2}{2} + C_3 t |u(x)| - C_4 t^{2+\gamma} |u(x)|^{2+\gamma} \right] dx, \end{aligned}$$

que é negativo quando t é suficientemente grande pelo fato de $\gamma > 0$.

Com isso, provamos que J_1), J_2) e J_3) são satisfeitas para I . ■

Fixado $(u, v) \in \mathcal{T}$, definimos

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda, \mu) &\longmapsto J(\lambda u, \mu v). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Lema 2.3.5. Ψ é uma função de classe C^2 em \mathbb{R}^2 exceto sobre os eixos coordenados.

Demonstração: Seja $\{(\lambda_n, \mu_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ um sequência tal que (λ_n, μ_n) converge a $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Logo, temos que $\lambda_n \rightarrow \lambda$ e $\mu_n \rightarrow \mu$ e, conseqüentemente, $\lambda_n^2 \rightarrow \lambda^2$ e $\mu_n^2 \rightarrow \mu^2$ e, fixado $(u, v) \in \mathcal{T}$,

$\lambda_n u \rightarrow \lambda u$ e $\mu_n v \rightarrow \mu v$, pontualmente. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
|\Psi(\lambda_n, \mu_n) - \Psi(\lambda, \mu)| &= \left| \int_{\Omega} \left[\frac{\lambda_n^2}{2} |\nabla u(x)|^2 + \frac{\mu_n^2}{2} |\nabla v(x)|^2 - F(\lambda_n u(x)) - F(\mu_n v(x)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + H(\lambda_n u(x), \mu_n v(x)) \right] dx - \int_{\Omega} \left[\frac{\lambda^2}{2} |\nabla u(x)|^2 + \frac{\mu^2}{2} |\nabla v(x)|^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - F(\lambda u(x)) - F(\mu v(x)) + H(\lambda u(x), \mu v(x)) \right] dx \right| \\
&= \left| \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\lambda_n^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2} \right) |\nabla u(x)|^2 + \left(\frac{\mu_n^2}{2} - \frac{\mu^2}{2} \right) |\nabla v(x)|^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (F(\lambda_n u(x)) - F(\lambda u(x))) - (F(\mu_n v(x)) - F(\mu v(x))) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (H(\lambda_n u(x), \mu_n v(x)) - H(\lambda u(x), \mu v(x))) \right] dx \right|.
\end{aligned}$$

Daí, pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned}
|\Psi(\lambda_n, \mu_n) - \Psi(\lambda, \mu)| &\leq \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\lambda_n^2 - \lambda^2| |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\mu_n^2 - \mu^2| |\nabla v(x)|^2 dx \\
&\quad + \int_{\Omega} |F(\lambda_n u(x)) - F(\lambda u(x))| dx \\
&\quad + \int_{\Omega} |F(\mu_n v(x)) - F(\mu v(x))| dx \\
&\quad + \int_{\Omega} |H(\lambda_n u(x), \mu_n v(x)) - H(\lambda u(x), \mu v(x))| dx.
\end{aligned}$$

Assim, pelas hipóteses (f'_1) e (H_1) , podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtendo a continuidade de Ψ a partir da continuidade das funções F e H .

Agora, note que o gradiente da aplicação Ψ é

$$\nabla \Psi(\lambda, \mu) = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \Psi(\lambda, \mu), \frac{\partial}{\partial \mu} \Psi(\lambda, \mu) \right),$$

cujas funções coordenadas são dadas por:

$$\Psi_{\lambda}(\lambda, \mu) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \Psi(\lambda, \mu) = \int_{\Omega} \left[\lambda |\nabla u(x)|^2 - f(\lambda u(x))u(x) + H_u(\lambda u(x), \mu v(x))u(x) \right] dx \quad (2.26)$$

e

$$\Psi_{\mu}(\lambda, \mu) = \frac{\partial}{\partial \mu} \Psi(\lambda, \mu) = \int_{\Omega} \left[\mu |\nabla v(x)|^2 - f(\mu v(x))v(x) + H_v(\lambda u(x), \mu v(x))v(x) \right] dx. \quad (2.27)$$

Sendo assim, se $\{(\lambda_n, \mu_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^2$ é uma sequência com $(\lambda_n, \mu_n) \rightarrow (\lambda, \mu)$, então,

$$\begin{aligned} |\Psi_\lambda(\lambda_n, \mu_n) - \Psi_\lambda(\lambda, \mu)| &= \left| \int_{\Omega} \left[(\lambda_n - \lambda) |\nabla u(x)|^2 - (f(\lambda_n u(x)) - f(\lambda u(x))) u(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (H_u(\lambda_n u(x), \mu_n v(x)) - H_u(\lambda u(x), \mu v(x))) u(x) \right] dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\lambda_n - \lambda| |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |f(\lambda_n u(x)) - f(\lambda u(x))| |u(x)| dx \\ &\quad + \int_{\Omega} |H_u(\lambda_n u(x), \mu_n v(x)) - H_u(\lambda u(x), \mu v(x))| |u(x)| dx. \end{aligned}$$

E, novamente, pelas hipóteses (f'_1) e (H_1) , aplicamos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e a continuidade de Ψ_λ segue da continuidade de f e H_u .

Analogamente, temos que

$$\begin{aligned} |\Psi_\mu(\lambda_n, \mu_n) - \Psi_\mu(\lambda, \mu)| &= \left| \int_{\Omega} \left[(\mu_n - \mu) |\nabla v(x)|^2 - (f(\mu_n v(x)) - f(\mu v(x))) v(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (H_v(\lambda_n u(x), \mu_n v(x)) - H_v(\lambda u(x), \mu v(x))) v(x) \right] dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\mu_n - \mu| |\nabla v(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |f(\mu_n v(x)) - f(\mu v(x))| |v(x)| dx \\ &\quad + \int_{\Omega} |H_v(\lambda_n u(x), \mu_n v(x)) - H_v(\lambda u(x), \mu v(x))| |v(x)| dx. \end{aligned}$$

E mais uma vez, a continuidade de Ψ_μ segue da continuidade de f e H_v .

Mostraremos agora que as derivadas segundas de Ψ são funções contínuas em $\mathbb{R}^2 \setminus X$. De fato,

$$\Psi_{\lambda\lambda}(\lambda, \mu) = \int_{\Omega} \left[|\nabla u(x)|^2 - f'(\lambda u(x)) u(x)^2 + H_{uu}(\lambda u(x), \mu v(x)) u(x)^2 \right] dx, \quad (2.28)$$

$$\Psi_{\mu\mu}(\lambda, \mu) = \int_{\Omega} \left[|\nabla v(x)|^2 - f'(\mu v(x)) v(x)^2 + H_{vv}(\lambda u(x), \mu v(x)) v(x)^2 \right] dx \quad (2.29)$$

e

$$\Psi_{\lambda\mu}(\lambda, \mu) = \int_{\Omega} H_{uv}(\lambda u(x), \mu v(x)) u(x) v(x) dx. \quad (2.30)$$

Daí, se $(\lambda_n, \mu_n) \rightarrow (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$\begin{aligned} |\Psi_{\lambda\lambda}(\lambda_n, \mu_n) - \Psi_{\lambda\lambda}(\lambda, \mu)| &= \left| \int_{\Omega} \left[|\nabla u(x)|^2 - f'(\lambda_n u(x))u(x)^2 + H_{uu}(\lambda_n u(x), \mu_n v(x))u(x)^2 \right] dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega} \left[|\nabla u(x)|^2 - f'(\lambda u(x))u(x)^2 + H_{uu}(\lambda u(x), \mu v(x))u(x)^2 \right] dx \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} \left[- \left(f'(\lambda_n u(x)) - f'(\lambda u(x)) \right) u(x)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(H_{uu}(\lambda_n u(x), \mu_n v(x)) - H_{uu}(\lambda u(x), \mu v(x)) \right) u(x)^2 \right] dx \right|, \end{aligned}$$

e, utilizando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, o que é possível pelas hipóteses (f_1) e (H_1) , temos que, mais uma vez, a continuidade de $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e $H \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus X, \mathbb{R})$ implica a continuidade de $\Psi_{\lambda\lambda}$ em $\mathbb{R}^2 \setminus X$. Analogamente, obtemos que

$$\begin{aligned} |\Psi_{\mu\mu}(\lambda_n, \mu_n) - \Psi_{\mu\mu}(\lambda, \mu)| &= \left| \int_{\Omega} \left[|\nabla v(x)|^2 - f'(\mu_n v(x))v(x)^2 + H_{vv}(\lambda_n u(x), \mu_n v(x))v(x)^2 \right] dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega} \left[|\nabla v(x)|^2 - f'(\mu v(x))v(x)^2 + H_{vv}(\lambda u(x), \mu v(x))v(x)^2 \right] dx \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} \left[- \left(f'(\mu_n v(x)) - f'(\mu v(x)) \right) v(x)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(H_{vv}(\lambda_n u(x), \mu_n v(x)) - H_{vv}(\lambda u(x), \mu v(x)) \right) v(x)^2 \right] dx \right|, \end{aligned}$$

de onde concluímos que $\Psi_{\mu\mu}$ é também contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus X$. Por fim, utilizando (H_1) e aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\begin{aligned} |\Psi_{\lambda\mu}(\lambda_n, \mu_n) - \Psi_{\lambda\mu}(\lambda, \mu)| &= \left| \int_{\Omega} H_{uv}(\lambda_n u(x), \mu_n v(x))u(x)v(x) dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega} H_{uv}(\lambda u(x), \mu v(x))u(x)v(x) dx \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} H_{uv}(\lambda_n u(x), \mu_n v(x)) - H_{uv}(\lambda u(x), \mu v(x))u(x)v(x) dx \right| \\ &= \int_{\Omega} \left| H_{uv}(\lambda_n u(x), \mu_n v(x)) - H_{uv}(\lambda u(x), \mu v(x)) \right| |u(x)| |v(x)| dx, \end{aligned}$$

que nos garante que $\Psi_{\lambda\mu}$ é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus X$, pois H_{uv} o é. ■

Lema 2.3.6. *A origem $(0, 0)$ é um mínimo local da aplicação Ψ .*

Demonstração: Primeiramente, note que $\Psi(0, 0) = J(0u, 0v) = 0$, pela hipótese (H_2) e o

resultado I). Além disso, devido à positividade de H , hipótese (H_3) , temos

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda, \mu) &= \int_{\Omega} \left[\frac{|\nabla \lambda u(x)|^2}{2} + \frac{|\nabla \mu v(x)|^2}{2} - F(\lambda u(x)) - F(\mu v(x)) + H(\lambda u(x), \mu v(x)) \right] dx \\ &\geq \int_{\Omega} \left[\frac{|\nabla \lambda u(x)|^2}{2} + \frac{|\nabla \mu v(x)|^2}{2} - F(\lambda u(x)) - F(\mu v(x)) \right] dx.\end{aligned}$$

Agora, pelo Teorema A.5.7, existe $M > 0$ tal que

$$M\|u\|_2^2 \leq \|u\|^2.$$

Assim, utilizando a desigualdade de Hölder e (2.24)

$$\begin{aligned}\left| \int_{\Omega} F(\lambda u(x)) dx \right| &\leq \int_{\Omega} \left[\frac{\varepsilon}{2} \lambda^2 |u(x)|^2 + \frac{C_1}{p} \lambda^p |u(x)|^p \right] dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \lambda^2 \|u\|_2^2 + \frac{C_1}{p} |\Omega|^{p-2} \lambda^p \|u\|_2^p \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \lambda^2 \|u\|_2^2 + C \lambda^p \|u\|_2^p.\end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$\left| \int_{\Omega} F(\mu v(x)) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \mu^2 \|v\|_2^2 + C \mu^p \|v\|_2^p.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda, \mu) &\geq \int_{\Omega} \left[\frac{|\nabla \lambda u(x)|^2}{2} + \frac{|\nabla \mu v(x)|^2}{2} - F(\lambda u(x)) - F(\mu v(x)) \right] dx \\ &\geq \frac{M}{2} \lambda^2 \|u\|_2^2 - \frac{\varepsilon}{2} \lambda^2 \|u\|_2^2 - C \lambda^p \|u\|_2^p \\ &\quad + \frac{M}{2} \mu^2 \|v\|_2^2 - \frac{\varepsilon}{2} \mu^2 \|v\|_2^2 - C \mu^p \|v\|_2^p \\ &= \frac{M - \varepsilon}{2} \lambda^2 \|u\|_2^2 - C \lambda^p \|u\|_2^p + \frac{M - \varepsilon}{2} \mu^2 \|v\|_2^2 - C \mu^p \|v\|_2^p \\ &= C \left\{ \lambda^2 \|u\|_2^p \left(\frac{M - \varepsilon}{2C \|u\|_2^{p-2}} - \lambda^{p-2} \right) + \mu^2 \|v\|_2^p \left(\frac{M - \varepsilon}{2C \|v\|_2^{p-2}} - \mu^{p-2} \right) \right\}.\end{aligned}$$

Agora, como u e v são fixados e $p > 2$, sempre que

$$|\lambda|, |\mu| < \min \left\{ \left(\frac{M - \varepsilon}{2C \|u\|_2^{p-2}} \right)^{\frac{1}{p-2}}, \left(\frac{M - \varepsilon}{2C \|v\|_2^{p-2}} \right)^{\frac{1}{p-2}} \right\}$$

temos que $\Psi(\lambda, \mu) > 0$. Portanto, como (u, v) foi tomado arbitrariamente, segue que a origem é um ponto de mínimo local da aplicação Ψ . \blacksquare

Agora, provaremos que os valores λ^* e μ^* , que são os máximos da função Ψ sobre os eixos coordenados, existem e são únicos.

Lema 2.3.7. *Existem únicos $\lambda^* \in \mathbb{R}$ e $\mu^* \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\Psi(\lambda^*, 0) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}} \Psi(\lambda, 0) \text{ e } \Psi(0, \mu^*) = \max_{\mu \in \mathbb{R}} \Psi(0, \mu).$$

Demonstração: Segue diretamente da aplicação do Lema 1.2.1 a cada uma das funções, $\Psi(\lambda, 0)$ e $\Psi(0, \mu)$, concluindo que tais λ^* e μ^* existem e são únicos. ■

Utilizando agora os quatro lemas anteriores, Lemas 2.3.4, 2.3.5, 2.3.6 e 2.3.7, mostraremos resultados que serão a base para a demonstração do Teorema 2.3.1. Tais resultados, os Lemas 2.3.8, 2.3.12 e 2.3.13, são de grande importância em todo este trabalho.

O Teorema 2.3.1, que é o nosso objetivo nesta seção e é resultado direto dos lemas descritos acima, será utilizado fortemente na demonstração do Teorema 2.4.1 que é o nosso objetivo na **Seção 2.4**. Além disso, os Lemas 3.1.4, 3.1.5 e 3.1.6, serão resultados semelhantes aos Lemas 2.3.8, 2.3.12 e 2.3.13, respectivamente. Portanto, utilizaremos os resultados obtidos nesta seção para demonstrarmos os resultados do **Capítulo 3**.

O primeiro destes resultados, o Lema 2.3.8, nos mostra que podemos utilizar o método de Nehari para obter soluções para o problema $(P_{u,v})$. Mostraremos que a função que fornece o supremo da variação radial de J em cada direção (u, v) existe, que tal supremo é único e que o elemento que atinge tal supremo pertence à variedade de Nehari. Mostraremos ainda que todo elemento da variedade de Nehari encontra-se fora de uma bola não-degenerada centrada em $(0, 0)$. Além disso, veremos que tal função é semicontínua inferiormente e ainda um resultado sobre a função que associa a cada $(u, v) \in \mathcal{T}$, um único par de números reais que satisfazem os resultados anteriores.

Lema 2.3.8. *Sejam $(u, v) \in \mathcal{T}$ e \mathcal{N} como definido em (2.21). Considere a seguinte função*

$$\Phi(u, v) := \sup_{\substack{\lambda > 0 \\ \mu > 0}} J(\lambda u, \mu v).$$

Então existe um único par de números positivos $\lambda(u, v)$ e $\mu(u, v)$ tais que

- i) $\Phi(u, v) = J(\lambda(u, v)u, \mu(u, v)v)$;*
- ii) $(\lambda(u, v)u, \mu(u, v)v) \in \mathcal{N}$;*
- iii) Existem $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ tais que se $(u, v) \in \mathcal{N}$ então $\|u\|_p \geq \gamma_1, \|v\|_p \geq \gamma_1$ e $\|u\| \geq \gamma_2, \|v\| \geq \gamma_2$;*
- iv) $\Phi(\cdot, \cdot)$ é semicontínua inferiormente com respeito à convergência fraca em \mathcal{T} ;*
- v) A aplicação $(u, v) \mapsto (\lambda(u, v), \mu(u, v))$ é contínua de \mathcal{T} em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.*

Antes de demonstrarmos este lema, estudaremos os pontos críticos da função $\Psi(\lambda, \mu)$, definida em (2.25). Pelo Lema 2.3.5, temos que Ψ é de classe $C^2(\mathbb{R}^2 \setminus X, \mathbb{R})$. Além disso, os Lemas 2.3.6 e 2.3.4 garantem que Ψ atinge um mínimo local na origem e possui a geometria do “passo da montanha” em cada um dos semi-eixos coordenados. Sendo assim, note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} &= \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \frac{\Psi(\lambda + \Delta \lambda, \mu) - \Psi(\lambda, \mu)}{\Delta \lambda} \\ &= \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \frac{J((\lambda + \Delta \lambda)u, \mu v) - J(\lambda u, \mu v)}{\Delta \lambda} \\ &= \frac{\partial J(\lambda u, \mu v)}{\partial u} \cdot u. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Assim, calculando a derivada de Gateaux de J no ponto $(\lambda u, \mu v)$ com relação à direção $(u, 0)$, utilizando as hipóteses (f'_1) , (H_1) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J(\lambda u, \mu v)}{\partial u} \cdot u &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla(\lambda + h)u|^2 - |\nabla\lambda u|^2 + |\nabla\mu v|^2 - |\nabla\mu v|^2) dx \right. \\
&\quad - \int_{\Omega} ([F((\lambda + h)u) + F(\lambda u)] - [F(\mu v) - F(\mu v)]) dx \\
&\quad \left. + \int_{\Omega} [H((\lambda + h)u, \mu v) - H(\lambda u, \mu v)] dx \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_{\Omega} \left[\frac{(2\lambda h + h^2)}{2} |\nabla u|^2 - (F((\lambda + h)u) - F(\lambda u)) \right] dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega} (H((\lambda + h)u, \mu v) - H(\lambda u, \mu v)) dx \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_{\Omega} \frac{(2\lambda + h)}{2} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} \frac{F((\lambda + h)u) - F(\lambda u)}{h} dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega} \frac{H((\lambda + h)u, \mu v) - H(\lambda u, \mu v)}{h} dx \right] \\
&= \int_{\Omega} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2\lambda + h)}{2} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F((\lambda + h)u) - F(\lambda u)}{h} dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{H((\lambda + h)u, \mu v) - H(\lambda u, \mu v)}{h} dx \\
&= \int_{\Omega} \frac{2\lambda}{2} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} \left(\frac{dF(\lambda u)}{du} u \right) dx + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial H(\lambda u, \mu v)}{\partial u} u \right) dx \\
&= \int_{\Omega} \left[\lambda |\nabla u|^2 - \left(\frac{dF(\lambda u)}{du} u \right) + \left(\frac{\partial H(\lambda u, \mu v)}{\partial u} u \right) \right] dx. \tag{2.32}
\end{aligned}$$

Daí, com λ em evidência, por (2.32), temos

$$\frac{\partial \Psi(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} = \lambda \int_{\Omega} \left[|\nabla u|^2 - \frac{1}{\lambda^2} (f(\lambda u)\lambda u) + \frac{1}{\lambda^2} (H_u(\lambda u, \mu v)\lambda u) \right] dx. \tag{2.33}$$

Analogamente, por (2.33), obtemos que

$$\frac{\partial \Psi(\lambda, \mu)}{\partial \mu} = \mu \int_{\Omega} \left[|\nabla v|^2 - \frac{1}{\mu^2} (f(\mu v)\mu v) + \frac{1}{\mu^2} (H_v(\lambda u, \mu v)\mu v) \right] dx. \tag{2.34}$$

Agora, seja $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ um ponto crítico de Ψ . Temos

$$\nabla \Psi(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \left(\frac{\partial \Psi(\bar{\lambda}, \bar{\mu})}{\partial \lambda}, \frac{\partial \Psi(\bar{\lambda}, \bar{\mu})}{\partial \mu} \right) = (0, 0)$$

e, portanto, das equações (2.33) e (2.34), obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda} \int_{\Omega} \left[|\nabla u|^2 - \frac{1}{\bar{\lambda}^2} (f(\bar{\lambda}u)\bar{\lambda}u) + \frac{1}{\bar{\lambda}^2} (H_u(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v)\bar{\lambda}u) \right] dx &= 0, \\
\bar{\mu} \int_{\Omega} \left[|\nabla v|^2 - \frac{1}{\bar{\mu}^2} (f(\bar{\mu}v)\bar{\mu}v) + \frac{1}{\bar{\mu}^2} (H_v(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v)\bar{\mu}v) \right] dx &= 0.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

De posse destas informações, provaremos a proposição a seguir:

Proposição 2.3.9. *Se $\bar{\lambda} \neq 0$ e $\bar{\mu} \neq 0$, então $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ é um máximo local de Ψ .*

Demonstração: De fato, sejam $\bar{\lambda} \neq 0$ e $\bar{\mu} \neq 0$, nosso objetivo é investigar a natureza do ponto crítico $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ de Ψ . Para isso, estudaremos o comportamento da forma quadrática associada ao par $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ que é definida por

$$\begin{aligned} Q(a, b) &= (a \ b) \begin{pmatrix} \Psi_{\lambda\lambda}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) & \Psi_{\lambda\mu}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \\ \Psi_{\lambda\mu}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) & \Psi_{\mu\mu}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \Psi_{\lambda\lambda}(\bar{\lambda}, \bar{\mu})a^2 + 2\Psi_{\lambda\mu}(\bar{\lambda}, \bar{\mu})ab + \Psi_{\mu\mu}(\bar{\lambda}, \bar{\mu})b^2, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Mostraremos que $Q(a, b) < 0$ para todo elemento $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Primeiramente, estimaremos o valor das segundas derivadas de Ψ , ou seja, $\Psi_{\lambda\lambda}$, $\Psi_{\lambda\mu}$ e $\Psi_{\mu\mu}$. De maneira análoga à utilizada para obter que $\frac{\partial\Psi(\lambda, \mu)}{\partial\lambda} = \frac{\partial J(\lambda u, \mu v)}{\partial u} \cdot u$, obtemos que $\Psi_{\lambda\lambda}(\lambda, \mu) = \frac{\partial^2\Psi(\lambda, \mu)}{\partial\lambda^2} = \frac{\partial^2 J(\lambda u, \mu v)}{\partial u^2} \cdot u^2$. Assim, segue que

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda\lambda}(\lambda, \mu) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{\partial J((\lambda + h)u, \mu v)}{\partial u} \cdot u - \frac{\partial J(\lambda u, \mu v)}{\partial u} \cdot u \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_{\Omega} \left((\lambda + h)|\nabla u|^2 - f((\lambda + h)u)u + H_u((\lambda + h)u, \mu v)u \right) dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega} \left(\lambda|\nabla u|^2 - f(\lambda u)u + H_u(\lambda u, \mu v)u \right) dx \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_{\Omega} \left(h|\nabla u|^2 - [f((\lambda + h)u) - f(\lambda u)]u \right) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \left([H_u((\lambda + h)u, \mu v) - H_u(\lambda u, \mu v)]u \right) dx \right] \\ &= \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 - (f'(\lambda u)u)u + (H_{uu}(\lambda u, \mu v)u)u \right) dx \end{aligned}$$

e, reescrevendo $(f'(\lambda u)u)u = f'(\lambda u)u^2$ e $(H_{uu}(\lambda u, \mu v)u)u = H_{uu}(\lambda u, \mu v)u^2$, obtemos a seguinte igualdade:

$$\Psi_{\lambda\lambda}(\lambda, \mu) = \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 - \frac{1}{\lambda^2} [f'(\lambda u)\lambda^2 u^2] + \frac{1}{\lambda^2} [H_{uu}(\lambda u, \mu v)\lambda^2 u^2] \right) dx$$

e portanto,

$$\Psi_{\lambda\lambda}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 - \frac{1}{\bar{\lambda}^2} [f'(\bar{\lambda}u)\bar{\lambda}^2 u^2] + \frac{1}{\bar{\lambda}^2} [H_{uu}(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v)\bar{\lambda}^2 u^2] \right) dx.$$

Agora, por (f_2) , temos que

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda\lambda}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) &\leq \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 - \frac{1+\gamma}{\bar{\lambda}^2} [f(\bar{\lambda}u)\bar{\lambda}u] + \frac{1}{\bar{\lambda}^2} [H_{uu}(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v)\bar{\lambda}^2 u^2] \right) dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 - \frac{1+\alpha}{\bar{\lambda}^2} [f(\bar{\lambda}u)\bar{\lambda}u] + \frac{1}{\bar{\lambda}^2} [H_{uu}(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v)\bar{\lambda}^2 u^2] \right) dx \end{aligned} \quad (2.37)$$

pois, por (H_2) temos $0 < \alpha < \gamma$. Assim, pela primeira equação de (2.35), temos que

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{\lambda^2} f(\bar{\lambda}u) \lambda u \right) dx = \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 + \frac{1}{\lambda^2} H_u(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v) \bar{\lambda}u \right) dx$$

e, substituindo a igualdade acima em (2.37), obtemos

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda\lambda}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) &\leq \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 - (1 + \alpha) \left(|\nabla u|^2 + \frac{1}{\lambda^2} H_u(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v) \bar{\lambda}u \right) + \frac{1}{\lambda^2} [H_{uu}(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v) \bar{\lambda}^2 u^2] \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left[-\alpha |\nabla u|^2 - \frac{(1 + \alpha)}{\lambda^2} H_u(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v) \bar{\lambda}u + \frac{1}{\lambda^2} H_{uu}(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v) \bar{\lambda}^2 u^2 \right] dx \\ &= -\alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\lambda^2} \int_{\Omega} \left(H_{uu}(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v) \bar{\lambda}^2 u^2 - (1 + \alpha) H_u(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v) \bar{\lambda}u \right) dx. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Analogamente, calculando $\Psi_{\mu\mu}(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ e utilizando a segunda equação de (2.35), temos que

$$\Psi_{\mu\mu}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leq -\alpha \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{\bar{\mu}^2} \int_{\Omega} \left(H_{vv}(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v) \bar{\mu}^2 v^2 - (1 + \alpha) H_v(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v) \bar{\mu}v \right) dx.$$

Além disso, calculando a derivada mista de Ψ , obtemos

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda\mu}(\lambda, \mu) &= \lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} \frac{J_u(\lambda u, (\mu + \Delta\mu)v)u - J_u(\lambda u, \mu v)u}{\Delta\mu} \\ &= \lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\mu} \left[\int_{\Omega} \left(\lambda |\nabla u|^2 - (f(\lambda u)u) + (H_u(\lambda u, (\mu + \Delta\mu)v)u) \right) dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega} \left(\lambda |\nabla u|^2 - (f(\lambda u)u) + (H_u(\lambda u, \mu v)u) \right) dx \right] \\ &= \lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\mu} \left[\int_{\Omega} (H_u(\lambda u, (\mu + \Delta\mu)v) - H_u(\lambda u, \mu v)) u dx \right] \\ &= \int_{\Omega} [(H_{uv}(\lambda u, \mu v))u] v dx \end{aligned}$$

e daí,

$$\Psi_{\lambda\mu}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \int_{\Omega} \frac{1}{\bar{\lambda}\bar{\mu}} [(H_{uv}(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v))\bar{\lambda}u] \bar{\mu}v dx.$$

Agora, ao substituirmos as estimativas para $\Psi_{\lambda\lambda}$, $\Psi_{\lambda\mu}$ e $\Psi_{\mu\mu}$ em (2.36), obtemos a seguinte estimativa para $Q(a, b)$

$$\begin{aligned} Q(a, b) &\leq a^2 \left[-\alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\lambda^2} \int_{\Omega} \left(H_{uu}(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v) \bar{\lambda}^2 u^2 - (1 + \alpha) H_u(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v) \bar{\lambda}u \right) dx \right] \\ &\quad + 2 \frac{ab}{\bar{\lambda}\bar{\mu}} \int_{\Omega} [(H_{uv}(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v))\bar{\lambda}u] \bar{\mu}v dx \\ &\quad + b^2 \left[-\alpha \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{\bar{\mu}^2} \int_{\Omega} \left(H_{vv}(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v) \bar{\mu}^2 v^2 - (1 + \alpha) H_v(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v) \bar{\mu}v \right) dx \right] \\ &= -\alpha a^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \alpha b^2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} [Q_H(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v)(a, b)] dx, \end{aligned} \quad (2.39)$$

em que

$$\begin{aligned} Q_H(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v)(a, b) &= \left(\frac{a}{\bar{\lambda}}\right)^2 H_{uu}(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v)\bar{\lambda}^2 u^2 - (1 + \alpha)H_u(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v)\bar{\lambda}u \\ &\quad + 2\frac{a}{\bar{\lambda}}\frac{b}{\bar{\mu}} (H_{uv}(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v))\bar{\lambda}u \bar{\mu}v \\ &\quad + \left(\frac{b}{\bar{\mu}}\right)^2 H_{vv}(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v)\bar{\mu}^2 v^2 - (1 + \alpha)H_v(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v)\bar{\mu}v. \end{aligned}$$

Analisando de forma geral uma forma quadrática associada à uma matriz quadrada simétrica de ordem 2, $q(a, b) = x_{11}a^2 + 2x_{12}ab + x_{22}b^2$, obtemos no caso $x_{11} \neq 0$ que

$$\begin{aligned} q(a, b) &= x_{11}a^2 + 2x_{12}ab + x_{22}b^2 + \frac{x_{12}^2}{x_{11}}b^2 - \frac{x_{12}^2}{x_{11}}b^2 \\ &= x_{11} \left(a^2 + 2\frac{x_{12}}{x_{11}}ab + \frac{x_{12}^2}{x_{11}^2}b^2 \right) + \left(x_{22}b^2 - \frac{x_{12}^2}{x_{11}}b^2 \right) \\ &= x_{11} \left(a + \frac{x_{12}}{x_{11}}b \right)^2 + \left(x_{22} - \frac{x_{12}^2}{x_{11}} \right) b^2. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Analogamente no caso $x_{22} \neq 0$, temos

$$q(a, b) = x_{22} \left(b + \frac{x_{12}}{x_{22}}a \right)^2 + \left(x_{11} - \frac{x_{12}^2}{x_{22}} \right) a^2. \tag{2.41}$$

Agora, com base na hipótese (H_2) , e denotando

$$\begin{aligned} x_{11} &= \frac{1}{\bar{\lambda}^2}a_{11}, \\ x_{12} &= \frac{1}{\bar{\lambda}\bar{\mu}}a_{12} = \frac{1}{\bar{\lambda}\bar{\mu}}a_{21} \text{ e} \\ x_{22} &= \frac{1}{\bar{\mu}^2}a_{22}, \end{aligned}$$

em que $a_{11} = H_{ss}(s, t)s^2 - (1 + \alpha)H_s(s, t)s$, $a_{12} = H_{st}(s, t)st$ e $a_{13} = H_{tt}(s, t)t^2 - (1 + \alpha)H_t(s, t)t$, temos as seguintes possibilidades:

- Caso $a_{11} \neq 0$ e $a_{22} \neq 0$:

como $a_{11} \neq 0$, temos que $x_{11} < 0$, pela definição de matriz não-positiva definida. Assim, a partir da equação (2.40) temos que $Q_H(a, b) \leq 0$, pois

$$\left(x_{22} - \frac{x_{12}^2}{x_{11}} \right) = \frac{1}{x_{11}} (x_{11}x_{22} - x_{12}^2) \leq 0,$$

já que a matriz Hessiana de H , definida em (H_2) , tem determinante não-negativo.

- Caso $a_{11} \neq 0$ e $a_{22} = 0$:

pelo resultado X), temos que o determinante de $Hess H$ é nulo. Logo, ao substituirmos os

valores x_{11} , x_{12} e x_{22} na equação (2.40) temos que

$$Q_H(a, b) = x_{11} \left(a + \frac{x_{12}}{x_{11}} b \right)^2 < 0.$$

- Caso $a_{22} \neq 0$ e $a_{11} = 0$:

de maneira análoga ao caso anterior, pelo resultado X), e a equação (2.41) temos que

$$Q_H(a, b) = x_{22} \left(b + \frac{x_{12}}{x_{22}} a \right)^2 < 0.$$

- Caso $a_{11} = 0$ e $a_{22} = 0$:

neste caso,

$$Q_H(a, b) = x_{11}a^2 + 2x_{12}ab + x_{22}b^2 = 0.$$

Assim, $Q_H(a, b) \leq 0$, e portanto, concluímos que $Q_H(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v)(a, b) \leq 0$. Desse modo, como $\|(u, v)\| \neq 0$, para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$\begin{aligned} Q(a, b) &\leq -\alpha a^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \alpha b^2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} [Q_H(\bar{\lambda}u, \bar{\mu}v)(a, b)] dx \\ &\leq \alpha a^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \alpha b^2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \\ &< 0, \end{aligned}$$

e portanto, o ponto $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ é um ponto de máximo. ■

Observação 2.3.10. Como Ψ é de classe $C^2(\mathbb{R}^2 \setminus X, \mathbb{R})$, temos que a matriz Hessiana de Ψ é simétrica para todo $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\lambda\mu \neq 0$. Portanto, esta matriz é diagonalizável (ver [15]), ou seja, existem funções $\xi_1(\lambda, \mu) \neq 0$ e $\xi_2(\lambda, \mu) \neq 0$ tais que

$$(a \ b) \begin{pmatrix} \Psi_{\lambda\lambda}(\lambda, \mu) & \Psi_{\lambda\mu}(\lambda, \mu) \\ \Psi_{\mu\lambda}(\lambda, \mu) & \Psi_{\mu\mu}(\lambda, \mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a' \ b') \begin{pmatrix} \xi_1(\lambda, \mu) & 0 \\ 0 & \xi_2(\lambda, \mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix},$$

para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, com $(a', b') \in \mathbb{R}^2$ sendo a representação de (a, b) na base apropriada. Logo, ao aplicarmos aos vetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$, obtemos que $\xi_1(\lambda, \mu) < 0$ e $\xi_2(\lambda, \mu) < 0$, para todo $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus X$. Assim,

$$\det \begin{pmatrix} \Psi_{\lambda\lambda}(\lambda, \mu) & \Psi_{\lambda\mu}(\lambda, \mu) \\ \Psi_{\mu\lambda}(\lambda, \mu) & \Psi_{\mu\mu}(\lambda, \mu) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \xi_1(\lambda, \mu) & 0 \\ 0 & \xi_2(\lambda, \mu) \end{pmatrix} > 0.$$

Sabendo então que $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ é ponto de máximo, provaremos agora outra afirmação que nos garante que, dadas as hipóteses sob as quais estamos trabalhando, existem exatamente 4 pontos de máximo para a aplicação $\Psi(\lambda, \mu)$.

Proposição 2.3.11. Existem exatamente quatro pontos críticos com componentes não-nulas, consequentemente máximos, cada um em um dos quadrantes de \mathbb{R}^2 .

Demonstração: Primeiramente, mostraremos que se $|\lambda| + |\mu| \rightarrow \infty$, então $\Psi(\lambda, \mu) \rightarrow -\infty$. Para

tanto, utilizaremos os resultados VI) e (2.5) para estimar a função Ψ . Assim

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda, \mu) &= J(\lambda u, \mu v) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla \lambda u(x)|^2 + \frac{1}{2} |\nabla \mu v(x)|^2 \right. \\ &\quad \left. - F(\lambda u(x)) - F(\mu v(x)) + H(\lambda u(x), \mu v(x)) \right] dx \\ &\leq \frac{1}{2} (|\lambda|^2 \|u\|^2 + |\mu|^2 \|v\|^2) \\ &\quad + \int_{\Omega} \left[C_3 |\lambda u(x)| - C_4 |\lambda u(x)|^{2+\gamma} + C_3 |\mu v(x)| - C_4 |\mu v(x)|^{2+\gamma} \right. \\ &\quad \left. + C(1 + |\lambda u(x)| + |\mu v(x)|)^{2+\beta} \right] dx,\end{aligned}$$

e, como u e v estão fixados e pertencem a todos os espaços $L^q(\Omega)$ em que $1 \leq q \leq p$, temos

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda, \mu) &\leq M_1(|\lambda|^2 + |\mu|^2) + M_2(|\lambda| + |\mu|) \\ &\quad - M_3(|\lambda|^{2+\gamma} + |\mu|^{2+\gamma}) + M_4(|\Omega| + |\lambda|^{2+\beta} + |\mu|^{2+\beta}),\end{aligned}\tag{2.42}$$

em que as constantes positivas M_1 , M_2 , M_3 e M_4 são dadas por:

$$\begin{aligned}M_1 &= \max\left\{\frac{\|u\|^2}{2}, \frac{\|v\|^2}{2}\right\}, \\ M_2 &= \max\{C_3|\Omega|\|u\|_2, C_3|\Omega|\|v\|_2\}, \\ M_3 &= \min\{C_4\|u\|_{2+\gamma}^{2+\gamma}, C_4\|v\|_{2+\gamma}^{2+\gamma}\} \text{ e} \\ M_4 &= \max\{C2^{1+\beta}, 2^{1+2\beta}C\|u\|_{2+\beta}^{2+\beta}, 2^{1+2\beta}C\|v\|_{2+\beta}^{2+\beta}\}.\end{aligned}$$

Agora, como $a^r + b^r \leq (a + b)^r$ sempre que $a, b \geq 0$ e $r > 1$, segue, da equação (2.42), que

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda, \mu) &\leq M_1(|\lambda| + |\mu|)^2 + M_2(|\lambda| + |\mu|) - M_3(|\lambda| + |\mu|)^{2+\gamma} \\ &\quad + M_4(|\Omega| + |\lambda| + |\mu|)^{2+\beta}.\end{aligned}$$

Logo, como $\gamma > \beta > 0$, quando $|\lambda| + |\mu| \rightarrow \infty$, temos que $\Psi(\lambda, \mu) \rightarrow -\infty$, como desejávamos. Tal resultado nos garante que Ψ possui pelo menos um máximo local em cada quadrante. Além disso, graças à Proposição 2.3.9, temos que Ψ é uma função côncava fora de uma bola de raio R , suficientemente grande, que denotaremos por $B_R \subset \mathbb{R}^2$. Assim,

$$\deg(\nabla \Psi, 0, B_R) = \deg(\Psi_\lambda, 0, [-R, R]).\deg(\Psi_\mu, 0, [-R, R]),$$

em que $\deg(\nabla \Psi, 0, B_R)$ representa o grau topológico de $\nabla \Psi$ em 0 relativo a B_R . Agora, para que $\nabla \Psi = (0, 0)$ é preciso que $\Psi_\lambda = \Psi_\mu = 0$. Mas, devido à geometria do funcional Ψ , temos

$$\deg(\Psi_\lambda, 0, [-R, R]) = -1 + 1 - 1 = -1 \text{ e}$$

$$\deg(\Psi_\mu, 0, [-R, R]) = -1 + 1 - 1 = -1,$$

em que -1 representa o grau nos pontos de máximo e $+1$ é o grau nos pontos de mínimo. Logo

$$\deg(\nabla \Psi, 0, B_R) = (-1).(-1) = 1.\tag{2.43}$$

Mostraremos agora que Ψ admite exatamente um ponto crítico em cada semieixo de \mathbb{R}^2 e que

o grau em cada um destes pontos é -1 . Para isto, mostraremos que o determinante da matriz Hessiana de Ψ nestes pontos é negativa. De fato, pelos Lemas 2.3.4 e 2.3.7, temos que existem pontos críticos ao longo de cada semieixo e que estes pontos são únicos. Denotaremos tais pontos críticos por $(+\lambda, 0)$, $(-\lambda, 0)$, $(0, +\mu)$, $(0, -\mu)$. O determinante da matriz Hessiana de Ψ em $(+\lambda, 0)$ é dado por

$$\det(\text{Hess } \Psi(+\lambda, 0)) = \Psi_{\lambda\lambda}(+\lambda, 0)\Psi_{\mu\mu}(+\lambda, 0) - (\Psi_{\lambda\mu}(+\lambda, 0))^2. \quad (2.44)$$

Agora, como $(+\lambda, 0)$ é ponto crítico, pela desigualdade (2.38), temos

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda\lambda}(+\lambda, 0) &\leq -\alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{+\lambda^2} \int (H_{uu}(+\lambda u, 0v)(+\lambda)^2 u^2 \\ &\quad - (1 + \alpha)H_u(+\lambda u, 0v)(+\lambda)u) dx \\ &< 0, \end{aligned} \quad (2.45)$$

pois, $\|u\| > 0$ e, pela hipótese (H_2) ,

$$\int (H_{uu}(+\lambda u, 0v) + \lambda^2 u^2 - (1 + \alpha)H_u(+\lambda u, 0v) + \lambda u) dx \leq 0.$$

Note que, embora a hipótese (H_2) esteja restrita para os pontos $(s, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus X$, utilizando um argumento de homotopia, é possível estendê-lo para os pontos $(\pm\lambda, 0)$ e $(0, \pm\mu)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \Psi_{\mu\mu}(+\lambda, 0) &= \int_{\Omega} [|\nabla v|^2 - f'(0v)v^2 + H_v v(+\lambda u, 0v)v] dx \\ &= \|v\|^2 + \int_{\Omega} f'(0)v^2 dx, \end{aligned} \quad (2.46)$$

e, por I) e III), temos que

$$0 = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(s) - f(0)}{s} = f'(0).$$

Logo,

$$\Psi_{\mu\mu}(+\lambda, 0) = \|v\|^2. \quad (2.47)$$

Temos também que

$$\Psi_{\lambda\mu}(+\lambda, 0) = \Psi_{\mu\lambda}(+\lambda, 0) = \int_{\Omega} H_{uv}(+\lambda u, 0v)uv dx = 0. \quad (2.48)$$

Assim, substituindo (2.45), (2.47) e (2.48) em (2.44), obtemos

$$\det(\text{Hess } \Psi(+\lambda, 0)) < 0$$

e, trocando $(+\lambda, 0)$ por $(-\lambda, 0)$,

$$\det(\text{Hess } \Psi(-\lambda, 0)) < 0.$$

De maneira análoga, obtemos também

$$\det(\text{Hess } \Psi(0, +\mu)) < 0$$

e

$$\det(\text{Hess } \Psi(0, -\mu)) < 0.$$

Concluimos então que cada ponto $(\pm\lambda, 0)$ e $(0, \pm\mu)$ têm grau -1 .

Além disso, como foi mostrado no Lema 2.3.6, $(0, 0)$ é mínimo local de Ψ , e, portanto, o grau na origem é 1.

Por fim, os últimos pontos críticos a serem analisados são os pontos de máximo obtidos na Proposição 2.3.11. Como vimos na Observação 2.3.10, o determinante $\det(\text{Hess } \Psi)$ nestes pontos é positivo, logo seu grau é $+1$. Assim, seja n a quantidade de tais pontos de máximos. Pela propriedade da excisão do grau, como $\deg(\nabla\Psi, 0, B_R)$ é a soma dos graus no $(0, 0)$, que é ponto de mínimo, nos pontos críticos sobre os eixos e nos pontos de máximo obtidos na Proposição 2.3.9, de (2.43), temos que

$$+1 = \deg(\nabla\Psi, 0, B_R) = (+1) \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + (+1) \cdot n.$$

Concluimos que $n = 4$, provando, assim, que Ψ possui 4 pontos de máximo. ■

Agora, demonstraremos o Lema 2.3.8.

Demonstração do Lema 2.3.8: Utilizaremos os resultados apresentados anteriormente para mostrar agora os itens *i*) a *v*) do Lema 2.3.8. Para isso, consideraremos $(\lambda(u, v), \mu(u, v))$ como sendo o máximo local presente em $(0, \infty) \times (0, \infty)$. Sabemos que este máximo existe e é único pois, pela Proposição 2.3.11, existe um único ponto crítico no 1º quadrante e, pela Proposição 2.3.9, este ponto crítico é máximo local. Sendo assim:

i) Como $(\lambda(u, v), \mu(u, v))$ é ponto de máximo de Ψ , temos que

$$\Psi(\lambda(u, v), \mu(u, v)) = \max_{\substack{\lambda > 0 \\ \mu > 0}} \Psi(\lambda, \mu).$$

Mas, pela definição de Ψ , temos

$$J(\lambda(u, v)u, \mu(u, v)v) = \max_{\substack{\lambda > 0 \\ \mu > 0}} J(\lambda u, \mu v) = \sup_{\substack{\lambda > 0 \\ \mu > 0}} J(\lambda u, \mu v)$$

e, daí, podemos concluir que $\Phi(u, v) = J(\lambda(u, v)u, \mu(u, v)v)$, como queríamos.

ii) Como $(\lambda(u, v), \mu(u, v))$ é ponto crítico de Ψ e, além disso, é também a única solução positiva de (2.35), temos

$$\Psi_\lambda(\lambda(u, v), \mu(u, v)) = \Psi_\mu(\lambda(u, v), \mu(u, v)) = 0$$

e, portanto,

$$\frac{1}{\lambda(u, v)} J_u(\lambda(u, v)u, \mu(u, v)v) \cdot \lambda(u, v)u = 0$$

e

$$\frac{1}{\mu(u, v)} J_v(\lambda(u, v)u, \mu(u, v)v) \cdot \mu(u, v)v = 0,$$

nos levando a concluir que

$$J_u(\lambda(u, v)u, \mu(u, v)v) \cdot \lambda(u, v)u = J_v(\lambda(u, v)u, \mu(u, v)v) \cdot \mu(u, v)v = 0$$

ou seja, $(\lambda(u, v)u, \mu(u, v)v) \in \mathcal{N}$.

iii) Seja $(u, v) \in \mathcal{N}$, então temos que $\lambda(u, v) = \mu(u, v) = 1$ e por (2.35)

$$0 = \int_{\Omega} \left[|\nabla u(x)|^2 - f(u(x))u(x) + H_u(u(x), v(x))u(x) \right] dx.$$

Agora, por (H_3) , temos que $H_u(u, v)u \geq 0$, e portanto

$$\int_{\Omega} \left[|\nabla u(x)|^2 - f(u(x))u(x) \right] dx \leq 0$$

logo,

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \leq \int_{\Omega} f(u(x))u(x) dx \leq \left| \int_{\Omega} f(u(x))u(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(u(x))||u(x)| dx.$$

Como, pelo Teorema A.5.7, existe $M > 0$ tal que

$$M\|u\|_p^2 \leq \|\nabla u\|_2^2,$$

temos que, dado $\varepsilon \in \left(0, \frac{M}{|\Omega|^{\frac{p}{p-2}}}\right)$, por IV), existe $C_1 > 0$ tal que

$$|f(u(x))||u(x)| \leq \varepsilon|u(x)|^2 + C_1|u(x)|^p.$$

Daí,

$$\begin{aligned} M\|u\|_p^2 &\leq \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} |f(u(x))||u(x)| dx \\ &\leq \int_{\Omega} \varepsilon|u(x)|^2 + C_1|u(x)|^p dx, \end{aligned}$$

e, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon|u(x)|^2 dx &\leq \varepsilon \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{2}{p}} |\Omega|^{\frac{p}{p-2}} \\ &= \varepsilon |\Omega|^{\frac{p}{p-2}} \|u\|_p^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$0 < (M - \varepsilon|\Omega|^{\frac{p}{p-2}})\|u\|_p^2 \leq C_1\|u\|_p^p,$$

concluindo que

$$\|u\|_p^{p-2} \geq \frac{M - \varepsilon|\Omega|^{\frac{p}{p-2}}}{C_1} =: \gamma_1^{p-2}.$$

Analogamente, trocando u por v , obtemos que

$$\|v\|_p^{p-2} \geq \gamma_1^{p-2},$$

concluindo a primeira parte da demonstração.

Para a segunda parte, note que, pela imersão de Sobolev (Teorema A.5.6), existe uma

constante $K(p) > 0$ independente de u e v tal que

$$\|u\|_p \leq K(p)\|u\| \text{ e } \|v\|_p \leq K(p)\|v\|.$$

Dessa forma, tomando $\gamma_2 := \frac{\gamma_1}{K(p)}$, obtemos

$$\|u\| \geq \gamma_2 \text{ e } \|v\| \geq \gamma_2,$$

concluindo a demonstração do item *iii*).

iv) Nosso objetivo agora é provar que a aplicação Φ é fracamente semicontínua inferiormente. Para isso, vamos considerar uma sequência $\{(u_n, v_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T}$ tal que (u_n, v_n) converge fracamente para $(u_0, v_0) \in \mathcal{T}$, o que denotaremos por $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u_0, v_0)$. Queremos mostrar que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n, v_n) \geq \Phi(u_0, v_0).$$

Como $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u_0, v_0)$, temos que

$$\|u_0\| + \|v_0\| = \|(u_0, v_0)\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|(u_n, v_n)\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} (\|u_n\| + \|v_n\|).$$

Além disso, utilizando a notação $\lambda_0 := \lambda(u_0, v_0)$ e $\mu_0 := \mu(u_0, v_0)$, note que

$$\begin{aligned} J(\lambda_0 u_0, \mu_0 v_0) - J(\lambda_0 u_n, \mu_0 v_n) &= \int_{\Omega} \left[\frac{\lambda_0^2}{2} (|\nabla u_0(x)|^2 - |\nabla u_n(x)|^2) \right. \\ &\quad + \frac{\mu_0^2}{2} (|\nabla v_0(x)|^2 - |\nabla v_n(x)|^2) \\ &\quad - (F(\lambda_0 u_0(x)) - F(\lambda_0 u_n(x))) \\ &\quad - (F(\mu_0 v_0(x)) - F(\mu_0 v_n(x))) \\ &\quad \left. + (H(\lambda_0 u_0(x), \mu_0 v_0(x)) - H(\lambda_0 u_n(x), \mu_0 v_n(x))) \right] dx \end{aligned} \quad (2.49)$$

Agora, pela hipótese (f'_1) , segue que, para cada $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} |F(\lambda_0 u_0(x)) - F(\lambda_0 u_n(x))| &\leq \int_{\lambda_0 u_n(x)}^{\lambda_0 u_0(x)} |f(s)| ds \\ &\leq \int_{\lambda_0 u_n(x)}^{\lambda_0 u_0(x)} C(1 + |s|^{p-1}) ds \\ &= C(|s| + |s|^p) \Big|_{\lambda_0 u_n(x)}^{\lambda_0 u_0(x)} \\ &= C(|\lambda_0 u_0(x)| - |\lambda_0 u_n(x)| + |\lambda_0 u_0(x)|^p - |\lambda_0 u_n(x)|^p) \\ &= C\lambda_0 (|u_0(x)| - |u_n(x)|) + C\lambda_0^p (|u_0(x)|^p - |u_n(x)|^p). \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega} (F(\lambda_0 u_0(x)) - F(\lambda_0 u_n(x))) dx &\leq \int_{\Omega} |F(\lambda_0 u_0(x)) - F(\lambda_0 u_n(x))| dx \\
&\leq \int_{\Omega} \left[C\lambda_0 (|u_0(x)| - |u_n(x)|) \right. \\
&\quad \left. + C\lambda_0^p (|u_0(x)|^p - |u_n(x)|^p) \right] dx \\
&\leq C\lambda_0 |\Omega|^{\frac{1}{p'}} (\|u_0\|_p - \|u_n\|_p) + C\lambda_0^p (\|u_0\|_p^p - \|u_n\|_p^p).
\end{aligned}$$

Analogamente

$$|F(\mu_0 v_0(x)) - F(\mu_0 v_n(x))| \leq C\mu_0 (|v_0(x)| - |v_n(x)|) + C\mu_0^p (|v_0(x)|^p - |v_n(x)|^p),$$

e assim

$$-\int_{\Omega} (F(\lambda_0 u_0(x)) - F(\lambda_0 u_n(x))) dx \leq C\mu_0 |\Omega|^{\frac{1}{p'}} (\|v_0\|_p - \|v_n\|_p) + C\mu_0^p (\|v_0\|_p^p - \|v_n\|_p^p).$$

Temos também que

$$\begin{aligned}
&|H(\lambda_0 u_0(x), \mu_0 v_0(x)) - H(\lambda_0 u_n(x), \mu_0 v(x))| \\
&\leq |H(\lambda_0 u_0(x), \mu_0 v_0(x)) - H(\lambda_0 u_0(x), \mu_0 v_n(x))| \\
&\quad + |H(\lambda_0 u_0(x), \mu_0 v_n(x)) - H(\lambda_0 u_n(x), \mu_0 v_n(x))|,
\end{aligned}$$

e, aplicando o Teorema do Valor Médio a cada uma das parcelas acima, obtemos

$$\begin{aligned}
&|H(\lambda_0 u_0(x), \mu_0 v_0(x)) - H(\lambda_0 u_n(x), \mu_0 v(x))| \\
&\leq |H_v(\lambda_0 u_0(x), \theta_v \mu_0 v_0(x) + (1 - \theta_v) \mu_0 v_n(x)) \mu_0 (v_0(x) - v_n(x))| \\
&\quad + |H_u(\theta_u \lambda_0 u_0(x) + (1 - \theta_u) \lambda_0 u_n(x), \mu_0 v_n(x)) \lambda_0 (u_0(x) - u_n(x))|,
\end{aligned}$$

em que $\theta_u, \theta_v \in [0, 1]$. Assim, pela hipótese (H_1) e pelo Lema A.5.4, concluímos que

$$\begin{aligned}
&|H(\lambda_0 u_0(x), \mu_0 v_0(x)) - H(\lambda_0 u_n(x), \mu_0 v(x))| \\
&\leq |H_v(\lambda_0 u_0(x), \theta_v \mu_0 v_0(x) + (1 - \theta_v) \mu_0 v_n(x)) \mu_0 (v_0(x) - v_n(x))| \\
&\quad + |H_u(\theta_u \lambda_0 u_0(x) + (1 - \theta_u) \lambda_0 u_n(x), \mu_0 v_n(x)) \lambda_0 (u_0 - u_n)| \\
&\leq C(1 + \lambda_0 |u_0(x)|^{p-1} + 2^{p-2} \mu_0^{p-1} (|v_0(x)|^{p-1} + |v_n(x)|^{p-1})) \mu_0 |v_0(x) - v_n(x)| \\
&\quad + C(1 + 2^{p-2} \lambda_0^{p-1} (|u_0(x)|^{p-1} + |u_n(x)|^{p-1}) + \mu_0 |v_n(x)|^{p-1}) \lambda_0 |u_0(x) - u_n(x)|.
\end{aligned}$$

Por tais estimativas, ao aplicarmos a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Poincaré à integral da expressão acima, obtemos

$$\int_{\Omega} |H(\lambda_0 u_0(x), \mu_0 v_0(x)) - H(\lambda_0 u_n(x), \mu_0 v(x))| dx \leq C \|v_0 - v_n\|_p + C \|u_0 - u_n\|_p,$$

em que C é constante dependendo de $|\Omega|$, p , λ_0 , μ_0 e das normas em $H_0^1(\Omega)$ de u_0 , u_n , v_0

e v_n . Dessa forma, de (2.49), podemos concluir que

$$\begin{aligned}
J(\lambda_0 u_0, \mu_0 v_0) - J(\lambda_0 u_n, \mu_0 v_n) &\leq \frac{\lambda_0^2}{2} (\|u_0\|_2^2 - \|u_n\|_2^2) \\
&\quad + \frac{\mu_0^2}{2} (\|v_0\|_2^2 - \|v_n\|_2^2) \\
&\quad + C \lambda_0 |\Omega|^{\frac{1}{p'}} (\|u_0\|_p - \|u_n\|_p) + C \lambda_0^p (\|u_0\|_p^p - \|u_n\|_p^p) \\
&\quad + C \mu_0 |\Omega|^{\frac{1}{p'}} (\|v_0\|_p - \|v_n\|_p) + C \mu_0^p (\|v_0\|_p^p - \|v_n\|_p^p) \\
&\quad + C \|v_0 - v_n\|_p + C \|u_0 - u_n\|_p,
\end{aligned} \tag{2.50}$$

que tende a zero quando $(u_n, v_n) \rightarrow (u_0, v_0)$ em $L^p(\Omega)$. Assim, temos que

$$J(\lambda_0 u_0, \mu_0 v_0) - J(\lambda_0 u_n, \mu_0 v_n) = o(1).$$

Logo, por (2.50)

$$\begin{aligned}
\Phi(u_0, v_0) &= J(\lambda_0 u_0, \mu_0 v_0) - J(\lambda_0 u_n, \mu_0 v_n) + J(\lambda_0 u_n, \mu_0 v_n) \\
&\leq J(\lambda_0 u_n, \mu_0 v_n) + o(1).
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Mas, $J(\lambda_0 u_n, \mu_0 v_n) \leq J(\lambda_n u_n, \mu_n v_n)$, em que $\lambda_n = \lambda(u_n, v_n)$ e $\mu_n = \mu(u_n, v_n)$. Assim,

$$\Phi(u_0, v_0) \leq J(\lambda_n u_n, \mu_n v_n) + o(1).$$

Portanto, quando tomamos o limite inferior quando $n \rightarrow 0$, obtemos a seguinte desigualdade

$$\Phi(u_0, v_0) \leq \liminf_{n \rightarrow 0} J(\lambda_n u_n, \mu_n v_n),$$

como queríamos.

v) Se considerarmos $X = \mathcal{T}$, $Y = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $Z = \mathbb{R}$ e

$$\chi(u, v, \lambda, \mu) = \left(\frac{\partial \Psi_{(u,v)}(\lambda, \mu)}{\partial \lambda}, \frac{\partial \Psi_{(u,v)}(\lambda, \mu)}{\partial \mu} \right)$$

no Teorema da Função Implícita (Teorema A.5.10), em que $\Psi_{(u,v)}(\lambda, \mu)$ é o valor da função $\Psi(\lambda, \mu)$ para um dado par (u, v) , $x = (u, v)$ e $y = (\lambda, \mu)$. Como, pelas Proposições 2.3.9 e 2.3.11, temos que existe $(u_0, v_0, \lambda_0, \mu_0) \in X \times Y$ tal que $\chi(u_0, v_0, \lambda_0, \mu_0) = 0$ e, além disso,

$$\left(\frac{\partial \chi(u_0, v_0, \lambda_0, \mu_0)}{\partial \lambda}, \frac{\partial \chi(u_0, v_0, \lambda_0, \mu_0)}{\partial \mu} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Psi_{(u_0, v_0)}(\lambda_0, \mu_0)}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 \Psi_{(u_0, v_0)}(\lambda_0, \mu_0)}{\partial \lambda \partial \mu} \\ \frac{\partial^2 \Psi_{(u_0, v_0)}(\lambda_0, \mu_0)}{\partial \lambda \partial \mu} & \frac{\partial^2 \Psi_{(u_0, v_0)}(\lambda_0, \mu_0)}{\partial \mu^2} \end{pmatrix},$$

que, como vimos na Observação 2.3.10, fixado $(u, v) \in \mathcal{T}$, tem determinante negativo, para todo $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : st = 0\}$, concluímos pelo Teorema A.5.10 que dado $(u_0, v_0) \in \mathcal{T}$, existe uma vizinhança conexa W de (u_0, v_0) e uma única aplicação $\zeta \in C^1(W, Y)$ tal que $\zeta(u_0, v_0) = (\lambda_0, \mu_0)$ e, para todo $(u, v) \in W$, temos $f(u, v, \zeta(u, v)) = 0$. Por um argumento de conexidade, concluímos que a função ζ , definida de forma que $\zeta(u, v) = (\lambda(u, v), \mu(u, v))$, é única e contínua em \mathcal{T} . ■

Graças à unicidade de $\lambda(u, v)$ e $\mu(u, v)$, obtida pelo Lema 2.3.8, podemos definir agora

$$d = \inf_{(u,v) \in \mathcal{T}} \Phi(u, v).$$

Definido dessa maneira, temos que $d \geq 0$, pois, como foi mostrado no Lema 2.3.6, quando λ e μ estão próximos de zero, $J(\lambda u, \mu v) \geq 0$ para todo $(u, v) \in \mathcal{T}$ e todo $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Assim,

$$d = \inf_{(u,v) \in \mathcal{T}} \Phi(u, v) = \inf_{(u,v) \in \mathcal{T}} \max_{\substack{\lambda > 0 \\ \mu > 0}} J(\lambda u, \mu v) \geq 0.$$

Além disso,

$$d = \inf_{(u,v) \in \mathcal{T}} \Phi(u, v) = \inf_{(u,v) \in \mathcal{T}} \max_{\substack{\lambda > 0 \\ \mu > 0}} J(\lambda u, \mu v) = \inf_{(u,v) \in \mathcal{T}} J(\lambda(u, v)u, \mu(u, v)v), \quad (2.52)$$

e, como $(\lambda(u, v)u, \mu(u, v)v) \in \mathcal{N}$, temos

$$d = \inf_{(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathcal{N}} J(\bar{u}, \bar{v}) \geq \inf_{(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathcal{N}} J(\bar{u}, \bar{v}),$$

em que $\bar{\mathcal{N}} = \{(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathcal{N} : \bar{u} = \lambda(u, v)u \text{ e } \bar{v} = \mu(u, v)v, \text{ com } (u, v) \in \mathcal{T}\}$. Suponhamos, então, que $d > c = \inf_{(u,v) \in \mathcal{N}} J(u, v)$. Assim, existe $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathcal{N}$ tal que $d > J(\tilde{u}, \tilde{v})$. Como $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$, temos que $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathcal{T}$ e

$$d \leq \Phi(\tilde{u}, \tilde{v}) = J(\lambda(\tilde{u}, \tilde{v})\tilde{u}, \mu(\tilde{u}, \tilde{v})\tilde{v}) = J(\tilde{u}, \tilde{v}) < d,$$

o que é um absurdo. Portanto, concluímos que

$$d = c. \quad (2.53)$$

Este último resultado nos será útil quando formos mostrar que o problema de minimizar J em \mathcal{N} tem solução.

Lema 2.3.12. *Existe $(u_c, v_c) \in \mathcal{N}$ tal que $J(u_c, v_c) = c$.*

Demonstração: Como definimos em (2.23),

$$c := \inf_{(u,v) \in \mathcal{N}} J(u, v) > 0.$$

Assim, temos que existe uma sequência minimizante em \mathcal{N} , ou seja, $\{(u_n, v_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{N}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n, v_n) = \inf_{(u,v) \in \mathcal{N}} J(u, v) = c.$$

Tal sequência pode ser tomada de tal forma que $J(u_n, v_n) \leq c + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois, caso contrário,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n, v_n) \geq c + 1 \neq c = \inf_{(u,v) \in \mathcal{N}} J(u, v),$$

e portanto $\{(u_n, v_n)\}$ não seria uma sequência minimizante. Como (u_n, v_n) pertence a \mathcal{N} , temos que $\nabla J(u_n, v_n) \cdot (u_n, v_n) = 0$, para todo n . Assim, considerando o valor α obtido na hipótese

(H_2), temos

$$\begin{aligned}
(\alpha + 2)(c + 1) &\geq (\alpha + 2)J(u_n, v_n) - \nabla J(u_n, v_n) \cdot (u_n, v_n) \\
&= (\alpha + 2) \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u_n|^2 + \frac{1}{2} |\nabla v_n|^2 - F(u_n) - F(v_n) + H(u_n, v_n) \right) dx \\
&\quad - \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^2 - f(u_n)u_n + H_u(u_n, v_n)u_n) dx \\
&\quad - \int_{\Omega} (|\nabla v_n|^2 - f(v_n)v_n + H_v(u_n, v_n)v_n) dx.
\end{aligned}$$

Podemos reescrever a inequação acima da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
(\alpha + 2)(c + 1) &\geq \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2) dx \\
&\quad + \int_{\Omega} (f(u_n)u_n - (\alpha + 2)F(u_n)) + \int_{\Omega} (f(v_n)v_n - (\alpha + 2)F(v_n)) dx \\
&\quad + \int_{\Omega} ((\alpha + 2)H(u_n, v_n) - H_u(u_n, v_n)u_n - H_v(u_n, v_n)v_n) dx. \tag{2.54}
\end{aligned}$$

Agora, pelos resultados VII) e IX), temos que as três últimas integrais de (2.54) são não-negativas. Portanto,

$$(\alpha + 2)(c + 1) \geq \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2) dx,$$

e assim

$$(\alpha + 2)(c + 1) \geq \frac{\alpha}{2} (\|u_n\|^2 + \|v_n\|^2).$$

Podemos então majorar a norma de (u_n, v_n) da seguinte forma

$$\|u_n\|^2 + \|v_n\|^2 \leq \frac{2(\alpha + 2)(c + 1)}{\alpha}. \tag{2.55}$$

Com a limitação dada em (2.55) para u_n e v_n , temos que existe $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathcal{T}$ tal que

$$(u_n, v_n) \rightharpoonup (\tilde{u}, \tilde{v}),$$

pois $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ é reflexivo. Além disso, como $H_0^1(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^p(\Omega)$ para todo $2 < p < 2^*$, temos que $u_n \rightarrow \tilde{u}$ e $v_n \rightarrow \tilde{v}$ em $L^p(\Omega)$. Consequentemente, $(u_n, v_n) \rightarrow (\tilde{u}, \tilde{v})$ em $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$, ou seja, neste espaço a convergência é forte. Agora, como

$$|\|u_n\|_p - \|\tilde{u}\|_p| \leq \|u_n - \tilde{u}\|_p,$$

temos que a convergência de $u_n \rightarrow \tilde{u}$ em $L^p(\Omega)$ implica na convergência das normas, ou seja, $\|u_n\|_p \rightarrow \|\tilde{u}\|_p$. Mas, pelo item *iii*) do Lema 2.3.8, temos que $\|u_n\|_p \geq \gamma_1$ e, assim, concluímos que $\|\tilde{u}\|_p \geq \gamma_1$. De maneira análoga, obtemos que $\|\tilde{v}\|_p \geq \gamma_1$.

Como Φ é uma função fracamente semicontínua inferiormente, propriedade provada no Lema 2.3.8 - item *iv*), temos que $\Phi(\tilde{u}, \tilde{v}) \leq c$. Mas, pela definição de d e (2.53), temos que

$$\Phi(\tilde{u}, \tilde{v}) \geq d = c.$$

Daí, podemos concluir de (2.52) e (2.53) que

$$c = \sup_{\substack{\lambda > 0 \\ \mu > 0}} J(\lambda \tilde{u}, \mu \tilde{v}),$$

e, pelo Lema 2.3.8 - itens *i*), *ii*) e *v*), existem únicos $\tilde{\lambda} = \lambda(\tilde{u}, \tilde{v})$ e $\tilde{\mu} = \mu(\tilde{u}, \tilde{v})$, tais que $(\tilde{\lambda}\tilde{u}, \tilde{\mu}\tilde{v}) \in \mathcal{N}$ e $c = J(\tilde{\lambda}\tilde{u}, \tilde{\mu}\tilde{v})$. Assim, se definirmos

$$(u_c, v_c) := (\tilde{\lambda}\tilde{u}, \tilde{\mu}\tilde{v}),$$

temos o resultado desejado. ■

Agora temos um candidato a elemento minimal para a variedade de Nehari, mas, para que o ponto encontrado seja, de fato, o ponto desejado, precisamos verificar se (u_c, v_c) é ponto crítico do funcional J . Com esse objetivo, enunciaremos e demonstraremos nosso próximo lema.

Lema 2.3.13. *Se $(u_c, v_c) \in \mathcal{N}$ é tal que $J(u_c, v_c) = c$, então (u_c, v_c) é ponto crítico de J .*

Demonstração: A demonstração para tal fato será dada por contradição. Sendo assim, suponha que $(u_c, v_c) \in \mathcal{N}$, $J(u_c, v_c) = c$, mas (u_c, v_c) não é ponto crítico, ou seja, $\nabla J(u_c, v_c) \neq 0$. Como J é um funcional de classe C^1 , temos que existem $\rho > 0$ e $\delta > 0$ satisfazendo $4\delta < \gamma_1$, γ_1 dado pelo item *iii*) do Lema 2.3.8, e

$$(u, v) \in B_\delta((u_c, v_c)) \Rightarrow \|\nabla J(u, v)\| \geq \rho.$$

Agora, pelo Lema A.1.3, temos que existe uma aplicação contínua $\eta : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ e uma constante $\nu > 0$ tais que:

- a) $\eta(u, v) = (u, v)$ para todo $(u, v) \notin B_{4\delta}((u_c, v_c)) \cap J^{-1}([c - 2\nu, c + 2\nu])$;
- b) $J(\eta(u, v)) \leq J(u, v)$ para todo $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$;
- c) Para todo $(u, v) \in B_{2\delta}((u_c, v_c)) \cap J^{-1}((-\infty, c + \nu])$, temos que $J(\eta(u, v)) \leq c - \nu$.

Note que os resultados *a*), *b*) e *c*) acima seguem diretamente dos itens *i*), *v*) e *ii*) do Lema A.1.3, respectivamente. Considere agora a aplicação $\Gamma(s, t) := (sRu_c, tRv_c)$, em que $R > 1$ é fixado de tal maneira que $(R - 1)\gamma_1 > 4\delta$. Afirmamos, primeiramente, que Γ é contínua. De fato, dados $\varepsilon > 0$ e um ponto $(s_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$, se tomarmos $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{R(\|u_c\| + \|v_c\|)}$, teremos que,

$$|(s, t) - (s_0, t_0)| < \delta \Rightarrow |s - s_0| < \delta \text{ e } |t - t_0| < \delta,$$

e, daí,

$$\begin{aligned} \|\Gamma(s, t) - \Gamma(s_0, t_0)\| &= \|(sRu_c, tRv_c) - (s_0Ru_c, t_0Rv_c)\| \\ &= |s - s_0|R\|u_c\| + |t - t_0|R\|v_c\| \\ &< \delta(R\|u_c\| + R\|v_c\|) \\ &= \frac{\varepsilon(R\|u_c\| + R\|v_c\|)}{R(\|u_c\| + \|v_c\|)} = \varepsilon. \end{aligned}$$

E, como (s_0, t_0) foi tomado arbitrariamente, temos que a aplicação Γ é contínua.

Estudemos agora a deformação do espaço definido pela imagem da aplicação Γ pela aplicação η . Nossa primeira observação sobre tal deformação é que

$$\sup_{s>0, t>0} J(\eta(\Gamma(s, t))) < c. \quad (2.56)$$

A desigualdade acima é estrita pelo fato de (u_c, v_c) ser o único ponto de máximo local restrito ao quadrante a que pertence na aplicação $(\lambda u_c, \mu v_c)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Caso contrário, para todo $r_n \in (0, c)$, $n \in \mathbb{N}$, com $r_n \rightarrow c$, existiria

$$(s_n R u_c, t_n R v_c) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \setminus B_{2\delta}(u_c, v_c) \quad (2.57)$$

tal que

$$J(s_n R u_c, t_n R v_c) \geq c - r_n.$$

Mas, neste caso,

$$0 < c - r_n \leq J(s_n R u_c, t_n R v_c) \leq c.$$

Agora, pelos resultados (2.4) e VI), dados $\lambda > 0$ e $\mu > 0$, temos

$$\begin{aligned} J(\lambda u_c, \mu v_c) &= \frac{1}{2}(\lambda^2 \|u_c\|^2 + \mu^2 \|v_c\|^2) - \int_{\Omega} F(\lambda u_c(x)) + F(\mu v_c(x)) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} H(\lambda u_c(x), \mu v_c(x)) dx \\ &\leq \frac{1}{2}(\lambda^2 \|u_c\|^2 + \mu^2 \|v_c\|^2) + \int_{\Omega} [C_3 \lambda |u_c(x)| - C_4 \lambda^{2+\gamma} |u_c(x)|^{2+\gamma}] dx \\ &\quad + \int_{\Omega} [C_3 \mu |v_c(x)| - C_4 \mu^{2+\gamma} |v_c(x)|^{2+\gamma}] dx + \int_{\Omega} C(1 + \lambda |u_c(x)| + \mu |v_c(x)|)^{2+\beta} dx. \end{aligned}$$

Assim, pela desigualdade de Hölder e a desigualdade do Lema A.5.4,

$$\begin{aligned} J(\lambda u_c, \mu v_c) &\leq \frac{1}{2}(\lambda^2 \|u_c\|^2 + \mu^2 \|v_c\|^2) + C_3 |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|u_c\|_2 \lambda - C_4 \|u_c\|_{2+\gamma}^{2+\gamma} \lambda^{2+\gamma} \\ &\quad + C_3 |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|v_c\| \mu - C_4 \|v_c\|_{2+\gamma}^{2+\gamma} \mu^{2+\gamma} + C(|\Omega| + \lambda^{2+\beta} \|u_c\|_{2+\beta}^{2+\beta} + \mu^{2+\beta} \|v_c\|_{2+\beta}^{2+\beta}) \\ &\leq M_1(\lambda + \mu)^2 + M_2(\lambda + \mu) - M_3(\lambda + \mu)^{2+\gamma} + M_4(\lambda + \mu)^{2+\beta} + M_4, \end{aligned} \quad (2.58)$$

em que as constantes são dadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} M_1 &:= \frac{1}{2} \max\{\|u_c\|^2, \|v_c\|^2\}, \\ M_2 &:= C_3 |\Omega|^{\frac{1}{2}} \max\{\|u_c\|_2, \|v_c\|_2\}, \\ M_3 &:= C_4 \max\{\|u_c\|_{2+\gamma}^{2+\gamma}, \|v_c\|_{2+\gamma}^{2+\gamma}\} \text{ e} \\ M_4 &:= 2^{2(\beta+1)} C \max\{\|u_c\|_{2+\beta}^{2+\beta}, \|v_c\|_{2+\beta}^{2+\beta}\} |\Omega|. \end{aligned}$$

Mas, como M_1 , M_2 , M_3 e M_4 são constantes positivas e (2.58) temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $\lambda + \mu > n_0$, $J(\lambda u_c, \mu v_c) < 0$. Daí, como $J(s_n R u_c, t_n R v_c) > 0$ para todo par (s_n, t_n) , temos que

$$s_n R + t_n R \leq n_0,$$

logo

$$s_n + t_n \leq \frac{n_0}{R}$$

e portanto, $s_n + t_n$ é uma sequência limitada. Assim, as sequências $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ são limitadas e, portanto, admitem subsequências convergentes. Digamos que $(s_{n_k}, t_{n_k}) \rightarrow (s_0, t_0)$, se $k \rightarrow \infty$. Temos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e pela continuidade do funcional J que

$$J(s_{n_k}Ru_c, t_{n_k}Rv_c) \rightarrow J(s_0Ru_c, t_0Rv_c).$$

Agora, para todo $k \in \mathbb{N}$, por (2.57),

$$\|(s_{n_k}Ru_c, t_{n_k}Rv_c) - (u_c, v_c)\| \geq 2\delta,$$

assim,

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \|(s_{n_k}Ru_c, t_{n_k}Rv_c) - (u_c, v_c)\| \geq 2\delta$$

e, pela continuidade da norma, temos

$$\|(s_0Ru_c, t_0Rv_c) - (u_c, v_c)\| \geq 2\delta.$$

Logo, $(s_0Ru_c, t_0Rv_c) \neq (u_c, v_c)$ e $J(s_0Ru_c, t_0Rv_c) = c$, contradizendo o fato de (u_c, v_c) ser o único ponto de máximo naquele quadrante de $(\lambda u_c, \mu v_c)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Provaremos, agora, que a aplicação $\eta \circ \Gamma$ intersecta a variedade \mathcal{N} , e assim, pela definição de c , teremos que

$$\sup_{s>0, t>0} J(\eta(\Gamma(s, t))) \geq c \quad (2.59)$$

obtendo uma contradição por (2.56) e (2.59). Para isso, vamos considerar a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ (s, t) &\mapsto (\lambda(\eta(\Gamma(s, t))) - 1, \mu(\eta(\Gamma(s, t))) - 1) \end{aligned}$$

que é contínua, pois $\eta \circ \Gamma$ é contínua e, pelo item v do Lema 2.3.8, $\Lambda(u, v) = (\lambda(u, v), \mu(u, v))$, com $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, também é contínua. Definindo

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b) &\mapsto \tau(a, b) = (a - 1, b - 1), \end{aligned}$$

temos que τ é contínua por ser a translação de uma aplicação contínua, no caso a aplicação identidade. Assim, a aplicação $\mathcal{H}(s, t) = \tau \circ \Lambda \circ \eta \circ \Gamma(s, t)$, definida como a composição de funções contínuas é contínua e segue o resultado.

Analisaremos, agora, os valores da aplicação \mathcal{H} na fronteira do domínio, ou seja, $\mathcal{H}(0, \cdot)$, $\mathcal{H}(1, \cdot)$, $\mathcal{H}(\cdot, 0)$, $\mathcal{H}(\cdot, 1)$. Para isso, seja $\zeta > 0$ tal que $\Gamma(\zeta, t) \notin B_{4\delta}((u_c, v_c))$, para todo $t \in [0, 1]$.

Tal ζ existe, pois, se $\zeta < \frac{1}{R} \left(1 - \frac{4\delta}{\|u_c\|}\right)$, temos que

$$\|\zeta Ru_c - u_c\| \geq \left| \|\zeta Ru_c\| - \|u_c\| \right| = |\zeta R - 1| \|u_c\|.$$

Mas, $\zeta < \frac{1}{R} \left(1 - \frac{4\delta}{\|u_c\|}\right) \Rightarrow \zeta R < 1$, pois $\|u_c\| \geq \gamma_1 > 4\delta > 0$. Logo

$$\|\zeta Ru_c - u_c\| \geq (1 - \zeta R)\|u_c\| > \left(1 - 1 + \frac{4\delta}{\|u_c\|}\right)\|u_c\| = 4\delta.$$

Assim, temos que

$$\|\Gamma(\zeta, t) - (u_c, v_c)\| = \|\zeta Ru_c - u_c\| + \|tRv_c - v_c\| \geq \|\zeta Ru_c - u_c\| > 4\delta,$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Portanto, $\Gamma(\zeta, t) \notin B_{4\delta}((u_c, v_c))$, para $t \in [0, 1]$. Agora, como $\Gamma(\zeta, t) \notin B_{4\delta}((u_c, v_c))$, temos, por a), que $\eta(\Gamma(\zeta, t)) = \Gamma(\zeta, t)$, logo, a primeira coordenada do vetor $\mathcal{H}(\zeta, t)$, a qual denotaremos por $\mathcal{H}_1(\zeta, t)$, será

$$\mathcal{H}_1(\zeta, t) = \lambda(\Gamma(\zeta, t) - 1) = \lambda(\zeta Ru_c, tRv_c) - 1.$$

Mas, como $(u_c, v_c) \in \mathcal{N}$, temos que $\lambda(\zeta Ru_c, tRv_c)$ é tal que

$$\lambda(\zeta Ru_c, tRv_c)\zeta R = 1.$$

Portanto, $\lambda(\zeta Ru_c, tRv_c) = \frac{1}{\zeta R}$ e $\mathcal{H}_1(\zeta, t) = \frac{1}{\zeta R} - 1$. Agora, como isto vale para todo $\zeta \in \left(0, \frac{1}{R} \left(1 - \frac{4\delta}{\|u_c\|}\right)\right)$ e pela continuidade da aplicação Λ , temos que

$$\mathcal{H}_1(0, t) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \mathcal{H}_1(\zeta, t) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{\zeta R} - 1 = +\infty > 0.$$

Calcularemos agora o valor de $\mathcal{H}_1(1, \cdot)$. Como

$$\begin{aligned} \|\Gamma(1, t) - (u_c, v_c)\| &= \|(Ru_c, tRv_c) - (u_c, v_c)\| \\ &= \|((R-1)u_c, (tR-1)v_c)\| \\ &= \|(R-1)u_c\| + \|(tR-1)v_c\| \\ &\geq \|(R-1)u_c\|. \end{aligned}$$

Agora, como $\|u_c\| \geq \gamma_1$, temos que $(R-1)\|u_c\| \geq (R-1)\gamma_1 > 4\delta$. Logo $\Gamma(1, t) \notin B_{4\delta}((u_c, v_c))$ e, conseqüentemente, $\eta(\Gamma(1, t)) = \Gamma(1, t)$. Daí, temos que

$$\mathcal{H}_1(1, t) = \lambda(\Gamma(1, t)) - 1 = \lambda(Ru_c, tRv_c) - 1,$$

e, novamente, pela definição de $\lambda(u, v)$ e o fato de (u_c, v_c) estar em \mathcal{N} , concluímos que $\lambda(Ru_c, tRv_c) = \frac{1}{R}$. Agora, $R > 1$, e portanto,

$$\mathcal{H}_1(1, t) = \frac{1}{R} - 1 < 0.$$

De maneira análoga, seja $0 < \sigma < \frac{1}{R} \left(1 - \frac{4\delta}{\|v_c\|}\right)$. Temos que

$$\|\sigma Rv_c - v_c\| \geq \left| \|\sigma Rv_c\| - \|v_c\| \right| = |\sigma R - 1|\|v_c\|.$$

Mas, $\sigma < \frac{1}{R} \left(1 - \frac{4\delta}{\|v_c\|}\right) \Rightarrow \sigma R < 1$, pois $\|v_c\| \geq \gamma_1 > 4\delta > 0$. Logo

$$\|\sigma R v_c - v_c\| \geq (1 - \sigma R)\|v_c\| > \left(1 - 1 + \frac{4\delta}{\|v_c\|}\right)\|v_c\| = 4\delta.$$

Assim, temos que

$$\|\Gamma(s, \sigma) - (u_c, v_c)\| = \|sRu_c - u_c\| + \|\sigma Rv_c - v_c\| \geq \|\sigma Rv_c - v_c\| > 4\delta,$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Portanto, $\Gamma(s, \sigma) \notin B_{4\delta}((u_c, v_c))$, para $t \in [0, 1]$. Agora, como $\Gamma(s, \sigma) \notin B_{4\delta}((u_c, v_c))$, temos, por a), que $\eta(\Gamma(s, \sigma)) = \Gamma(s, \sigma)$, logo, a segunda coordenada do vetor $\mathcal{H}(s, \sigma)$, que será representada por $\mathcal{H}_2(s, \sigma)$, será

$$\mathcal{H}_2(s, \sigma) = \mu(\Gamma(s, \sigma)) - 1 = \mu(sRu_c, \sigma Rv_c) - 1.$$

Mas, como $(u_c, v_c) \in \mathcal{N}$, temos que $\mu(sRu_c, \sigma Rv_c)$ é tal que

$$\mu(sRu_c, \sigma Rv_c)\sigma R = 1.$$

Portanto, $\mu(sRu_c, \sigma Rv_c) = \frac{1}{\sigma R}$ e $\mathcal{H}_2(s, \sigma) = \frac{1}{\sigma R} - 1$. Agora, como vale para todo $\sigma \in \left(0, \frac{1}{R} \left(1 - \frac{4\delta}{\|v_c\|}\right)\right)$ e pela continuidade da aplicação Λ , temos que

$$\mathcal{H}_2(s, 0) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \mathcal{H}_2(s, \sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma R} - 1 = +\infty > 0.$$

Agora, para $\mathcal{H}_2(\cdot, 1)$,

$$\begin{aligned} \|\Gamma(s, 1) - (u_c, v_c)\| &= \|(sRu_c, Rv_c) - (u_c, v_c)\| \\ &= \|((sR - 1)u_c, (R - 1)v_c)\| \\ &= \|(sR - 1)u_c\| + \|(R - 1)v_c\| \\ &\geq \|(R - 1)v_c\|. \end{aligned}$$

Assim, por $\|v_c\| \geq \gamma_1$, temos que $(R - 1)\|v_c\| \geq (R - 1)\gamma_1 > 4\delta$. Logo $\Gamma(s, 1) \notin B_{4\delta}((u_c, v_c))$ e, conseqüentemente, $\eta(\Gamma(s, 1)) = \Gamma(s, 1)$. Daí, temos que

$$\mathcal{H}_2(s, 1) = \mu(\Gamma(s, 1)) - 1 = \mu(sRu_c, Rv_c) - 1,$$

e, pela definição de $\mu(u, v)$ e o fato de (u_c, v_c) estar em \mathcal{N} , concluímos que $\mu(sRu_c, Rv_c) = \frac{1}{R}$.

Agora, $R > 1$, ou seja, $\frac{1}{R} < 1$ e, portanto,

$$\mathcal{H}_2(s, 1) = \frac{1}{R} - 1 < 0.$$

Com tais resultados para \mathcal{H} , estamos em condições de aplicar o Teorema de Miranda (Teorema A.2.2) que nos garante que existe um par $(s_0, t_0) \in (0, 1) \times (0, 1)$ tal que $\mathcal{H}(s_0, t_0) = (0, 0)$, ou seja,

$$\lambda(\eta(\Gamma(s_0, t_0))) = \mu(\eta(\Gamma(s_0, t_0))) = 1.$$

Daí, pelo item *ii*) do Lema 2.3.8, temos que $\eta(\Gamma(s_0, t_0)) \in \mathcal{N}$, de onde podemos concluir,

$$J(\eta(\Gamma(s_0, t_0))) \geq \inf_{(u,v) \in \mathcal{N}} J(u, v) = c,$$

resultando em (2.59) e obtendo assim uma contradição. Sendo assim, como não pode existir tal deformação η , temos que $\|\nabla J(u_0, v_0)\| = 0$, como queríamos, concluindo a demonstração do lema. ■

Tais resultados para os valores de $\mathcal{H}_1(0, \cdot)$, $\mathcal{H}_1(1, \cdot)$, $\mathcal{H}_2(\cdot, 0)$ e $\mathcal{H}_2(\cdot, 1)$ devem ao fato de J ser negativo quando se afasta da origem, graças à superquadraticidade de F , e as funções $\lambda(\cdot, \cdot)$ e $\mu(\cdot, \cdot)$ atingirem máximo positivo, ou seja, tal máximo deve ser atingido próximo da origem.

Agora que temos os Lemas 2.3.8, 2.3.12 e 2.3.13, podemos demonstrar facilmente a Proposição 2.3.3.

Demonstração da Proposição 2.3.3:

Pelo Lema 2.3.8, temos que \mathcal{N} é não-vazio, pelo Lema 2.3.12, temos que existe $(u_c, v_c) \in \mathcal{N}$ tal que

$$J(u_c, v_c) = c = \inf_{(u,v) \in \mathcal{N}} J(u, v)$$

e, pelo Lema 2.3.13, temos que (u_c, v_c) é um ponto crítico, como queríamos. ■

Com este último resultado, temos quase tudo o que precisamos para provarmos o Teorema 2.3.1. Só nos resta mostrar que é possível obter (u_c, v_c) com $u_c > 0$ e $v_c > 0$ e este será o nosso objetivo durante a demonstração do teorema.

Demonstração do Teorema 2.3.1: Para mostrar que existem funções estritamente positivas que satisfazem o sistema $(P_{u,v})$, note que, pelo Lema A.3.2 e pela paridade assumida no início a seção para F e H , temos que

$$\begin{aligned} J(|u_c|, |v_c|) &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla |u_c||^2 + \frac{1}{2} |\nabla |v_c||^2 - F(|u_c|) - F(|v_c|) + H(|u_c|, |v_c|) \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla u_c|^2 + \frac{1}{2} |\nabla v_c|^2 - F(u_c) - F(v_c) + H(u_c, v_c) \right] dx \\ &= c. \end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 2.3.13, temos que $(|u_c|, |v_c|)$ é um ponto crítico de J e portanto, suas componentes devem ser suaves pois f e H são funções de classe $C^1(\mathbb{R})$ e $C^1(\mathbb{R}^2)$, respectivamente. Dessa maneira, obtemos que $u_c = |u_c| \geq 0$ e $v_c = |v_c| \geq 0$. A partir de agora, nos referiremos a $|u_c|$ como \bar{u} . Assim, pela Proposição 2.3.3, temos que (\bar{u}, \bar{v}) é solução fraca do sistema $(P_{u,v})$ com exceção das restrições $u > 0$ e $v > 0$. Mas, pelo Teorema de Brézis-Kato (Teorema A.3.1), temos que $\bar{u}, \bar{v} \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$, com $0 < \alpha < 1$. Assim, pela Teoria de Regularidade de Schauder (Teorema A.3.4), segue que $\bar{u}, \bar{v} \in C^{2,\alpha}(\Omega, \mathbb{R}) \cap C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ e, portanto, é solução clássica para o problema $(P_{u,v})$. Além disso, como \bar{u}, \bar{v} são contínuas em $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Omega}$ é compacto, temos que

$$|\bar{u}(x)| \leq M \text{ e } |\bar{v}(x)| \leq M, \quad (2.60)$$

para algum $M > 0$. Para mostrarmos que $\bar{u} > 0$ e $\bar{v} > 0$, utilizaremos o Teorema A.3.3. Para isso, note que, como $\bar{u}(x) \geq 0$, temos que, se x é tal que $\bar{u}(x) = 0$, então $H_u(\bar{u}(x), \bar{v}(x)) = 0$ e

$\Delta \bar{u} = 0$, por (H_3) e I) e, se x é tal que $\bar{u}(x) > 0$, temos, por (H_3)

$$\frac{H_u(\bar{u}(x), \bar{v}(x))}{\bar{u}(x)} \bar{u}(x) > 0.$$

Com isso, definimos

$$c(x) := \begin{cases} \frac{H_u(\bar{u}(x), \bar{v}(x))}{\bar{u}(x)}, & \text{se } \bar{u}(x) \neq 0 \text{ e } \bar{v}(x) \neq 0 \\ 0 & \text{, se } \bar{u}(x) = 0 \text{ ou } \bar{v}(x) = 0 \end{cases} \quad (2.61)$$

e

$$\Delta \bar{u}(x) - c(x)\bar{u}(x) = -f(\bar{u}(x)) \leq 0, \quad (2.62)$$

pois, por (f_2) , temos que $f(s) > 0$ se, e somente se, $s > 0$. Mostraremos agora que

$$c(x) = \frac{H_u(\bar{u}(x), \bar{v}(x))}{\bar{u}(x)}$$

é limitado. De fato, pelos resultado (2.3) e (2.60), temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{H_u(\bar{u}(x), \bar{v}(x))}{\bar{u}(x)} \right| &\leq C(1 + |\bar{u}(x)|^\beta + |\bar{v}(x)|^\beta) \\ &\leq C(1 + 2M^\beta). \end{aligned}$$

Daí, aplicando o Princípio do Máximo Forte (Teorema A.3.3) com $Lu = \Delta u - c(x)u(x)$, temos que \bar{u} não pode atingir mínimo não-positivo em Ω a menos que \bar{u} seja constante. Mas como $\bar{u}(x) \geq 0$, se u atingir mínimo não-positivo, então

$$\min_{x \in \Omega} \bar{u}(x) = 0$$

e portanto, $\bar{u}(x) \equiv 0$, o que é absurdo, pois $\|\bar{u}\| \geq \gamma_2$. O mesmo resultado se aplica a \bar{v} . Mostrando que $\bar{u}(x) > 0$ e $\bar{v}(x) > 0$, para todo $x \in \Omega$. ■

2.4 Uma Versão Simplificada do Problema de Nehari.

O nosso objetivo nesta seção é estudar o problema

$$d_0 := \inf_{(u,v) \in \mathcal{T}} \sup_{\lambda > 0} J_0(\lambda u, \mu v), \quad (P_0)$$

$$\int_{\Omega} u^2 v^2 dx = 0 \quad \mu > 0$$

em que

$$J_0(u, v) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} |\nabla v|^2 - F(u) - F(v) \right] dx,$$

que é um problema semelhante ao da seção anterior, porém com u e v tendo suportes disjuntos, ou seja, se $x \in \Omega$ temos que $u(x) = 0$ ou $v(x) = 0$. Tal condição é dada pela restrição $\int_{\Omega} u^2 v^2 dx = 0$, imposta no cálculo do ínfimo em (P_0) . Como consequência dessa restrição, temos que, se H satisfaz as hipóteses $(H_1) - (H_3)$, então, para todo $x \in \Omega$, temos, por (H_3)

$$H(u(x), v(x)) = 0.$$

Dessa forma, tomando $H \equiv 0$, temos que H satisfaz $(H_1) - (H_3)$ e $J(u, v) = J_0(u, v)$ para todo par $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ com $\int_{\Omega} u^2 v^2 dx = 0$, em que $J(u, v)$ é como a definida na seção anterior. Mas, pelo item *i*) do Lema 2.3.8, temos que existem $\lambda(u, v)$ e $\mu(u, v)$, ambos em \mathbb{R} , tais que

$$J_0(\lambda(u, v)u, \mu(u, v)v) = J(\lambda(u, v)u, \mu(u, v)v) = \sup_{\substack{\lambda > 0 \\ \mu > 0}} J(\lambda u, \mu v) = \sup_{\substack{\lambda > 0 \\ \mu > 0}} J_0(\lambda u, \mu v),$$

sempre que $\int_{\Omega} u^2 v^2 dx = 0$. Logo podemos concluir que, pelo menos para os pares $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ de suportes disjuntos, existem $\lambda(u, v)$ e $\mu(u, v)$ tais que

$$J_0(\lambda(u, v)u, \mu(u, v)v) = \sup_{\substack{\lambda > 0 \\ \mu > 0}} J_0(\lambda u, \mu v).$$

Agora note que, se definirmos um conjunto equivalente a \mathcal{N} para o funcional J_0 , isto é,

$$\mathcal{N}_0 := \left\{ (u, v) \in \mathcal{T} : \frac{\partial J_0(u, v)}{\partial u} u = \frac{\partial J_0(u, v)}{\partial v} v = 0 \right\}, \quad (2.63)$$

teremos, pelo item *ii*) do Lema 2.3.8, que $(\lambda(u, v)u, \mu(u, v)v) \in \mathcal{N}_0$. Além disso, temos que o valor d_0 definido em (P₀) é igual a

$$c_0 := \inf_{\substack{(u, v) \in \mathcal{N}_0 \\ \int_{\Omega} u^2 v^2 dx = 0}} J_0(u, v). \quad (2.64)$$

De fato, a igualdade referida acima é devida ao seguinte fato:

$$\begin{aligned} d_0 &= \inf_{\substack{(u, v) \in \mathcal{T} \\ \int_{\Omega} u^2 v^2 dx = 0}} \sup_{\substack{\lambda > 0 \\ \mu > 0}} J_0(\lambda u, \mu v) \\ &= \inf_{\substack{(u, v) \in \mathcal{T} \\ \int_{\Omega} u^2 v^2 dx = 0}} J_0(\lambda(u, v)u, \mu(u, v)v). \end{aligned}$$

Mas, como $(\lambda(u, v)u, \mu(u, v)v) \in \mathcal{N}_0$, temos que

$$d_0 = \inf_{\substack{(u, v) \in \mathcal{T} \\ \int_{\Omega} u^2 v^2 dx = 0}} J_0(\lambda(u, v)u, \mu(u, v)v) \geq \inf_{\substack{(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathcal{N}_0 \\ \int_{\Omega} \tilde{u}^2 \tilde{v}^2 dx = 0}} J_0(\tilde{u}, \tilde{v}) = c_0. \quad (2.65)$$

Agora, $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{T}$, por definição, logo, se $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathcal{N}_0$ e $\int_{\Omega} \tilde{u}^2 \tilde{v}^2 dx = 0$, temos que $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathcal{T}$ e $\lambda(\tilde{u}, \tilde{v}) = \mu(\tilde{u}, \tilde{v}) = 1$. Assim,

$$J_0(\tilde{u}, \tilde{v}) \geq \inf_{\substack{(u, v) \in \mathcal{T} \\ \int_{\Omega} u^2 v^2 dx = 0}} J_0(\lambda(u, v)u, \mu(u, v)v) = d_0.$$

Daí, como isso vale para todo $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathcal{N}_0$ com $\int_{\Omega} \tilde{u}^2 \tilde{v}^2 dx = 0$, temos que

$$c_0 \geq d_0. \quad (2.66)$$

Portanto, de (2.65) e (2.66), segue que

$$c_0 = d_0. \quad (2.67)$$

Além disso, pelas hipóteses de crescimento da função f , temos que, para λ e μ pequenos, $J_0(\lambda u, \mu v) \geq 0$, para todo par $(u, v) \in \mathcal{T}$. Logo, $\sup_{\lambda > 0, \mu > 0} J_0(\lambda u, \mu v) \geq 0$ e, portanto, $d_0 \geq 0$.

Assim, d_0 e, conseqüentemente, c_0 são finitos.

O nosso objetivo nesta seção é provar o seguinte teorema:

Teorema 2.4.1. *Sob as hipóteses (f'_1) e (f_2) , o problema (P_0) tem solução $(u_0, v_0) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que $u_0 > 0$ e $v_0 > 0$. Além disso, $\text{supp}(u_0) \cup \text{supp}(v_0)$ é uma solução simplificada do problema de Nehari apresentado em (1).*

Ou seja, queremos obter $(u_0, v_0) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, u_0 e v_0 funções positivas com suportes disjuntos, tais que $J_0(u_0, v_0) = d_0$. Para tanto, vamos considerar os problemas (P_ε) , descritos a seguir, cujas soluções serão chamadas de $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$, e mostraremos que se ε converge a 0, as soluções $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ convergem fortemente para (u_0, v_0) em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

2.4.1 Sistemas com Grandes Interações.

Seja $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função satisfazendo $(H_1) - (H_3)$ e, tal que,

$$G(s, t) = 0 \text{ se, e somente se, } st = 0. \quad (2.68)$$

Se fixarmos $\varepsilon > 0$, temos que $\frac{1}{\varepsilon}G(s, t)$ também satisfaz $(H_1) - (H_3)$, pois:

$(G_\varepsilon 1)$ Note que, se G satisfaz (H_1) ,

$$|G(s, t)| \leq C(1 + |s| + |t|)^{2+\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon}|G(s, t)| \leq \frac{1}{\varepsilon}C(1 + |s| + |t|)^{2+\beta}.$$

Agora, como $\varepsilon > 0$ é fixo, temos que

$$\left| \frac{1}{\varepsilon}G(s, t) \right| = \frac{1}{\varepsilon}|G(s, t)| \leq \frac{1}{\varepsilon}C(1 + |s| + |t|)^{2+\beta} = \tilde{C}(1 + |s| + |t|)^{2+\beta}.$$

Logo, $\frac{1}{\varepsilon}G(s, t)$ satisfaz a hipótese (H_1) .

$(G_\varepsilon 2)$ Se G satisfaz a hipótese (H_2) , denotando a matriz Hessiana de G por A , teremos que a matriz Hessiana de $\frac{1}{\varepsilon}G(s, t)$, denotada por B , é dada por

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon}G_{ss}(s, t)s^2 - \frac{1}{\varepsilon}(1 + \alpha)G_s(s, t)s & \frac{1}{\varepsilon}G_{st}(s, t)st \\ \frac{1}{\varepsilon}G_{st}(s, t)st & \frac{1}{\varepsilon}G_{tt}(s, t)t^2 - \frac{1}{\varepsilon}(1 + \alpha)G_t(s, t)t \end{pmatrix} = \frac{1}{\varepsilon}A.$$

Logo, ao aplicarmos a B o vetor $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ pela esquerda e pela direita temos que

$$(a \ b) B \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} (a \ b) A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \leq 0,$$

pois $\varepsilon > 0$. Assim, mostramos que $\frac{1}{\varepsilon}G(s, t)$ satisfaz (H_2) .

$(G_\varepsilon 3)$ Por fim, se G satisfaz (H_3) , temos que o produto $\frac{1}{\varepsilon}G$ também satisfaz (H_3) pois a multiplicação por $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ não altera o sinal ou a nulidade da função.

Assim, temos que $G(s, t)$ satisfazendo $(H_1) - (H_3)$ implica $\frac{1}{\varepsilon}G(s, t)$ satisfaz $(H_1) - (H_3)$

Como $\frac{1}{\varepsilon}G(s, t)$ satisfaz $(H_1) - (H_3)$, podemos associar o seguinte problema

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u(x) = f(u(x)) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial u} G(u(x), v(x)) & , \text{ em } \Omega \\ -\Delta v(x) = f(v(x)) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial v} G(u(x), v(x)) & , \text{ em } \Omega \\ (u(x), v(x)) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \\ u(x) > 0, v(x) > 0 & , \text{ em } \Omega, \end{cases}$$

ao funcional de energia J_ε definido por

$$J_\varepsilon(u, v) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + \frac{1}{2} |\nabla v(x)|^2 - F(u(x)) - F(v(x)) + \frac{1}{\varepsilon} G(u(x), v(x)) \right] dx.$$

Nosso objetivo inicial é encontrar u_ε e v_ε , funções em $H_0^1(\Omega)$ tais que o par $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ é solução de

$$d_\varepsilon := \inf_{(u,v) \in \mathcal{T}} \sup_{\substack{\lambda > 0 \\ \mu > 0}} J_\varepsilon(\lambda u, \mu v). \quad (P_\varepsilon)$$

Note que, assim definidos, existe a seguinte relação entre d_0 e d_ε :

$$d_\varepsilon \leq d_0, \quad (2.69)$$

pois, como as funções u e v pertencentes a \mathcal{T} que satisfazem $\int_{\Omega} u^2 v^2 dx = 0$ formam um subconjunto de \mathcal{T} , temos que

$$d_\varepsilon = \inf_{(u,v) \in \mathcal{T}} \sup_{\substack{\lambda > 0 \\ \mu > 0}} J_\varepsilon(\lambda u, \mu v) \leq \inf_{\substack{(u,v) \in \mathcal{T} \\ \int_{\Omega} u^2 v^2 dx = 0}} \sup_{\lambda > 0} J_\varepsilon(\lambda u, \mu v).$$

Por outro lado, se u e v são tais que $\int_{\Omega} u^2 v^2 dx = 0$, temos que $G(u(x), v(x)) = 0$, para todo $x \in \Omega$. Assim, nesse subconjunto, temos que $J_\varepsilon(u, v) = J_0(u, v)$, ou seja,

$$\inf_{\substack{(u,v) \in \mathcal{T} \\ \int_{\Omega} u^2 v^2 dx = 0}} \sup_{\lambda > 0} J_\varepsilon(\lambda u, \mu v) = \inf_{\substack{(u,v) \in \mathcal{T} \\ \int_{\Omega} u^2 v^2 dx = 0}} \sup_{\lambda > 0} J_0(\lambda u, \mu v) = d_0.$$

Portanto, vale a desigualdade (2.69). Agora, provaremos uma proposição que relaciona as soluções dos problemas (P_ε) à solução do problema (P_0) . Tal proposição será fortemente utilizada na demonstração do Teorema 2.4.1.

Proposição 2.4.2. *Seja f uma função que satisfaça (f'_1) e (f_2) . Então*

- 1) *Para cada $\varepsilon > 0$, o problema (P_ε) tem uma solução $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$;*
- 2) *Existe $(u_0, v_0) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \rightarrow (u_0, v_0) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ e (u_0, v_0) é solução de (P_0) .*

Demonstração: Inicialmente, demonstraremos apenas a Parte 1), deixando a demonstração da Parte 2) para mais tarde, pois precisaremos de mais alguns resultados.

Seja $\varepsilon > 0$ fixado. Como $\frac{1}{\varepsilon}G(s, t)$ satisfaz as hipóteses $(H_1) - (H_3)$, podemos aplicar o Teorema 2.3.1 a J_ε considerando $H(s, t) := \frac{1}{\varepsilon}G(s, t)$, obtendo, imediatamente, a existência de uma solução de (P_ε) , a qual denotaremos por $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$, com $u_\varepsilon > 0, v_\varepsilon > 0$. Além disso, os Lemas 2.3.8 e 2.3.12 nos fornecem alguns resultados importantes:

- Podemos definir

$$c_\varepsilon := J(u_\varepsilon, v_\varepsilon) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2}(|\nabla u_\varepsilon|^2 + |\nabla v_\varepsilon|^2 - F(u_\varepsilon) - F(v_\varepsilon) + H(u_\varepsilon, v_\varepsilon)) \right] dx \quad (2.70)$$

$$\mathcal{N}_\varepsilon := \left\{ (u, v) \in \mathcal{T} : \frac{\partial J_\varepsilon(u, v)}{\partial u} u = \frac{\partial J_\varepsilon(u, v)}{\partial v} v = 0 \right\}.$$

Note que \mathcal{N}_ε é um conjunto não-vazio, pois $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \mathcal{N}_\varepsilon$.

- A partir de \mathcal{N}_ε , podemos concluir do Teorema 2.3.1 que

$$c_\varepsilon := \inf_{(u, v) \in \mathcal{N}_\varepsilon} J_\varepsilon(u, v).$$

- Definindo c_ε desta maneira, podemos concluir diretamente do Lema 2.3.8 que

$$c_\varepsilon = d_\varepsilon. \quad (2.71)$$

Além disso, ainda pelo Lema 2.3.8, tal igualdade nos garante que $c_\varepsilon \geq 0$.

Assim, de maneira análoga à da demonstração do Lema 2.3.12, temos que, dado $\varepsilon > 0$, existe uma sequência minimizante em \mathcal{N}_ε , ou seja, $\{(u_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{N}_\varepsilon$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_\varepsilon(u_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n) = \inf_{(u, v) \in \mathcal{N}_\varepsilon} J_\varepsilon(u, v) = c_\varepsilon.$$

Mas, como $J_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) = c_\varepsilon$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_\varepsilon(u_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n) = J_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon).$$

Tal sequência pode ser tomada de tal forma que $J_\varepsilon(u_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n) \leq c_\varepsilon + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois, caso contrário,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_\varepsilon(u_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n) \geq c_\varepsilon + 1 \neq c_\varepsilon = \inf_{(u, v) \in \mathcal{N}_\varepsilon} J_\varepsilon(u, v),$$

e, portanto, $\{(u_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n)\}$ não seria uma sequência minimizante. Como $(u_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n)$ pertence a \mathcal{N}_ε , temos que $\nabla J_\varepsilon(u_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n) \cdot (u_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n) = 0$, para todo n . Assim, considerando o valor α obtido na hipótese (H_2) , temos

$$\begin{aligned} (\alpha + 2)(c_\varepsilon + 1) &\geq (\alpha + 2)J_\varepsilon(u_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n) - \nabla J_\varepsilon(u_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n) \cdot (u_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n) \\ &= (\alpha + 2) \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}|\nabla u_\varepsilon^n|^2 + \frac{1}{2}|\nabla v_\varepsilon^n|^2 - F(u_\varepsilon^n) - F(v_\varepsilon^n) + H(u_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n) \right) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} (|\nabla u_\varepsilon^n|^2 - f(u_\varepsilon^n)u_\varepsilon^n + H_u(u_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n)u_\varepsilon^n) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} (|\nabla v_\varepsilon^n|^2 - f(v_\varepsilon^n)v_\varepsilon^n + H_v(u_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n)v_\varepsilon^n) dx \end{aligned}$$

e portanto, podemos reescrever a inequação acima da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
(\alpha + 2)(c_\varepsilon + 1) &\geq \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u_\varepsilon^n|^2 + |\nabla v_\varepsilon^n|^2) dx \\
&+ \int_{\Omega} (f(u_\varepsilon^n)u_\varepsilon^n - (\alpha + 2)F(u_\varepsilon^n)) dx + \int_{\Omega} (f(v_\varepsilon^n)v_\varepsilon^n - (\alpha + 2)F(v_\varepsilon^n)) dx \quad (2.72) \\
&+ \int_{\Omega} ((\alpha + 2)H(u_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n) - H_u(u_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n)u_\varepsilon^n - H_v(u_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n)v_\varepsilon^n) dx
\end{aligned}$$

Logo, de (f_2) , temos que $f(x, s)s - (2 + \alpha)F(x, s) > 0$, para todo $s \neq 0$. Como $(u_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n) \in \mathcal{N}_\varepsilon \subset \mathcal{T}$, temos que $u_\varepsilon^n \neq 0$ e $v_\varepsilon^n \neq 0$ em um conjunto de medida positiva de Ω e aí,

$$f(u_\varepsilon^n)u_\varepsilon^n - (2 + \alpha)F(u_\varepsilon^n) > 0 \text{ e } f(v_\varepsilon^n)v_\varepsilon^n - (2 + \alpha)F(v_\varepsilon^n) > 0.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} (f(u_\varepsilon^n)u_\varepsilon^n - (\alpha + 2)F(u_\varepsilon^n)) dx > 0 \text{ e } \int_{\Omega} (f(v_\varepsilon^n)v_\varepsilon^n - (\alpha + 2)F(v_\varepsilon^n)) dx > 0.$$

Além disso, por (2.16), temos que

$$(\alpha + 2)H(u_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n) - H_u(u_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n)u_\varepsilon^n - H_v(u_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n)v_\varepsilon^n > 0.$$

Assim, de (2.72), segue que

$$(\alpha + 2)(c_\varepsilon + 1) \geq \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u_\varepsilon^n|^2 + |\nabla v_\varepsilon^n|^2) dx,$$

ou seja,

$$\|u_\varepsilon^n\|^2 + \|v_\varepsilon^n\|^2 \leq \frac{2(\alpha + 2)}{\alpha}(c_\varepsilon + 1).$$

Agora, também pelo Lema 2.3.12, segue que $(u_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n) \rightharpoonup (u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, logo

$$\|u_\varepsilon\|^2 + \|v_\varepsilon\|^2 \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (\|u_\varepsilon^n\|^2 + \|v_\varepsilon^n\|^2).$$

Assim, pelo fato de $c_\varepsilon \leq c_0$, temos que

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon\|^2 + \|v_\varepsilon\|^2 &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (\|u_\varepsilon^n\|^2 + \|v_\varepsilon^n\|^2) \\
&\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2(\alpha + 2)}{\alpha}(c_\varepsilon + 1) \\
&\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2(\alpha + 2)}{\alpha}(c_0 + 1) \\
&= \frac{2(\alpha + 2)}{\alpha}(c_0 + 1).
\end{aligned}$$

Tomando, então, $\gamma_3 := \frac{2(\alpha + 2)}{\alpha}(c_0 + 1)$, obtemos a seguinte estimativa uniforme em $\varepsilon > 0$

$$\|u_\varepsilon\|^2 + \|v_\varepsilon\|^2 \leq \gamma_3. \quad (2.73)$$

Com este último resultado, concluímos que, passando para uma subsequência caso seja necessário, existe $(u_0, v_0) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que, se $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \rightharpoonup (u_0, v_0).$$

Além disso, pelo item *iii*) do Lema 2.3.8, temos que $\|u_\varepsilon\|_p \geq \gamma_1$ e $\|v_\varepsilon\|_p \geq \gamma_1$, para algum $\gamma_1 > 0$, independente de ε . Assim, como na demonstração do Lema 2.3.12, pela imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, temos que $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \rightarrow (u_0, v_0)$ em $L^p(\Omega)$ e, portanto, $\|u_\varepsilon\|_p \rightarrow \|u_0\|_p$ e $\|v_\varepsilon\|_p \rightarrow \|v_0\|_p$. Consequentemente, $\|u_0\|_p \geq \gamma_1$ e $\|v_0\|_p \geq \gamma_1$. ■

Este último resultado apresentado na demonstração da Parte 1) da proposição anterior, nos ajudará na demonstração da Parte 2) da mesma proposição. Mas antes de demonstrarmos a segunda parte, precisaremos de alguns resultados contidos nos lemas a seguir.

Lema 2.4.3. *Se $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ converge fracamente para (u_0, v_0) em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, então a integral $\int_\Omega f(u_\varepsilon)u_\varepsilon dx$ converge para $\int_\Omega f(u_0)u_0 dx$ e $\int_\Omega f(v_\varepsilon)v_\varepsilon dx$ converge para $\int_\Omega f(v_0)v_0 dx$.*

Demonstração: Começamos lembrando que, pelas imersões compactas de Sobolev, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para $1 \leq q < 2^*$, temos $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \rightarrow (u_0, v_0)$ em $L^p(\Omega)$, mas, pelo Teorema A.5.9, $u_\varepsilon(x) \rightarrow u_0(x)$, q.t.p. $x \in \Omega$, a menos de uma subsequência. Além disso, ainda pelo Teorema A.5.9, temos que existe $M \in L^p(\Omega)$ tal que esta subsequência satisfaz,

$$|u_\varepsilon(x)| < M(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Agora, por (f_1') ,

$$\begin{aligned} |f(u_\varepsilon(x))| |u_\varepsilon(x)| &\leq C(|u_\varepsilon(x)| + |u_\varepsilon(x)|^p) \\ &< C(|M(x)| + |M(x)|^p) \end{aligned} \quad (2.74)$$

q.t.p. $x \in \Omega$, a menos de subsequência. Mas, a integral à direita em (2.74) é finita, pois, pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} \int_\Omega C(|M(x)| + |M(x)|^p) dx &\leq C \left[|\Omega|^{p'} \left(\int_\Omega |M(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \int_\Omega |M(x)|^p dx \right] \\ &= C \left(|\Omega|^{p'} \|M\|_p + \|M\|_p^p \right), \end{aligned}$$

que é um valor finito por $M \in L^p(\Omega)$. Assim, podemos utilizar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtendo

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega f(u_\varepsilon(x))u_\varepsilon(x) dx &= \int_\Omega \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(u_\varepsilon(x))u_\varepsilon(x) dx \\ &= \int_\Omega f(u_0(x))u_0(x) dx, \end{aligned}$$

graças à continuidade de f . De maneira análoga, provamos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega f(v_\varepsilon(x))v_\varepsilon(x) dx = \int_\Omega f(v_0(x))v_0(x) dx,$$

concluindo assim o lema. ■

Lema 2.4.4. *Se $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ converge fracamente para (u_0, v_0) em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, então $\int_\Omega F(u_\varepsilon) dx$ converge para $\int_\Omega F(u_0) dx$ e $\int_\Omega F(v_\varepsilon) dx$ converge para $\int_\Omega F(v_0) dx$.*

Demonstração: Novamente, basta mostrarmos que o resultado vale para u_ε , pois a prova para v_ε pode ser obtida analogamente. Para mostrar que $\int_\Omega F(u_\varepsilon)dx$ converge para $\int_\Omega F(u_0)dx$, note que, por (f'_1)

$$|F(s)| \leq \int_0^s |f(t)|dt \leq C(|s| + |s|^p).$$

Assim, pela equação (2.74), podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtendo assim

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega F(u_\varepsilon(x))dx = \int_\Omega F(u_0(x))dx.$$

■

Mostraremos agora um resultado de grande importância para a demonstração do Lema 2.4.7, a seguir. Tal resultado afirma que, da maneira como foram tomadas, as funções u_0 e v_0 tem suporte disjunto. Mas, antes de demonstrá-lo, apresentaremos outro resultado que será necessário em sua demonstração.

Proposição 2.4.5. *Se $x \in \Omega_1 := \{x \in \Omega : G(u_0(x), v_0(x)) > 0\}$, então*

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} G(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x)) = \infty.$$

Demonstração: Seja $x \in \Omega_1$ e denotemos $0 < m(x) := G(u_0(x), v_0(x))$. Mostraremos que, dado $N > 0$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\frac{1}{\varepsilon_0} G(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x)) > N.$$

De fato, como G é contínua, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que, se $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, então

$$0 < \frac{m(x)}{2} < G(u_\varepsilon, v_\varepsilon),$$

ou seja,

$$0 < \frac{1}{\varepsilon} \frac{m(x)}{2} < \frac{1}{\varepsilon} G(u_\varepsilon, v_\varepsilon).$$

Assim, se N é um número qualquer positivo, tomando $\varepsilon_0 = \min \left\{ \varepsilon_1, \frac{1}{N} \frac{m(x)}{2} \right\}$, temos

$$\frac{1}{\varepsilon_0} G(u_{\varepsilon_0}, v_{\varepsilon_0}) > \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{m(x)}{2} > N,$$

como desejávamos. ■

Lema 2.4.6. *As funções u_0 e v_0 tem suportes disjuntos.*

Demonstração: Note que, por $d_\varepsilon \leq d_0$, em (2.69), e a igualdade $c_\varepsilon = d_\varepsilon$, em (2.71), temos que

$$d_0 \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} c_\varepsilon.$$

Assim, pela definição de c_ε , segue que

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} c_\varepsilon &= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \\ &= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2}(\|u_\varepsilon\|^2 + \|v_\varepsilon\|^2) \right. \\ &\quad - \int_{\Omega} F(u_\varepsilon(x))dx - \int_{\Omega} F(v_\varepsilon(x))dx \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} G(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))dx \right]. \end{aligned}$$

Agora, usando o Lema 2.4.4 e o fato da norma ser fracamente contínua, obtemos

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} c_\varepsilon &\geq \frac{1}{2}(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2) \\ &\quad - \int_{\Omega} F(u_0(x))dx - \int_{\Omega} F(v_0(x))dx \\ &\quad + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} G(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))dx. \end{aligned}$$

Mas $\|u_0\|$ e $\|v_0\|$ são finitas e, pela hipótese (f'_1) , temos que as integrais $\int_{\Omega} F(u_0(x))dx$ e $\int_{\Omega} F(v_0(x))dx$ também são finitas, daí, existe $M > 0$ tal que

$$M \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} G(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))dx. \quad (2.75)$$

Como G é uma função contínua e, para quase todo ponto $x \in \Omega$, $u_\varepsilon(x) \rightarrow u_0(x)$ em $L^p(\Omega)$ e $v_\varepsilon(x) \rightarrow v_0(x)$ em $L^p(\Omega)$, temos que, fixado $x \in \Omega$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x)) = G(u_0(x), v_0(x)).$$

Assim, considerando os seguintes conjuntos

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : G(u_0(x), v_0(x)) > 0\}$$

e

$$\Omega_2 = \{x \in \Omega : G(u_0(x), v_0(x)) = 0\},$$

temos que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ e, portanto, como $G(s, t) \geq 0$, por (H_3) , podemos aplicar o Lema de Fatou (Lema A.5.2),

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} G(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))dx &\geq \int_{\Omega} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} G(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))dx \\ &= \int_{\Omega_1} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} G(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))dx \\ &\quad + \int_{\Omega_2} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} G(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))dx. \end{aligned}$$

Logo, por (2.75) e pelo Lema 2.4.5,

$$M \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} G(u_{\varepsilon}(x), v_{\varepsilon}(x)) dx,$$

o que nos permite concluir que $|\Omega_1| = 0$, ou seja, a medida do conjunto Ω_1 é zero, pois caso contrário,

$$M \geq \int_{\Omega_1} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} G(u_{\varepsilon}(x), v_{\varepsilon}(x)) dx = \infty.$$

Assim, temos que $G(u_0(x), v_0(x)) = 0$ q.t.p. $x \in \Omega$. Mas, por definição,

$$G(s, t) = 0 \Leftrightarrow st = 0.$$

Daí, $u_0(x)v_0(x) = 0$ q.t.p. $x \in \Omega$, isto é, $\text{supp}(u_0) \cap \text{supp}(v_0) = \emptyset$. ■

Agora, temos todas as ferramentas que precisamos para demonstrar o Lema 2.4.7. Com este resultado, provaremos facilmente o Teorema 2.4.1, que é o nosso objetivo nesta seção. O lema a seguir traz alguns resultados de convergência de u_{ε} e v_{ε} , e conseqüentemente, das funções que dependem delas.

Lema 2.4.7. *Seja (u_0, v_0) o limite fraco de $(u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon})$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Então, valem as seguintes afirmações:*

- i) $(u_0, v_0) \in \mathcal{N}_0$, definido em (2.63);
- ii) $u_{\varepsilon} \rightarrow u_0$ e $v_{\varepsilon} \rightarrow v_0$ em $H_0^1(\Omega)$;
- iii) $\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G(u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$;
- iv) $c_{\varepsilon} \rightarrow c_0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demonstração: Primeiramente, como $(u_0, v_0) \in H_0^1(\Omega)$ e $\|u_0\|_p \geq \gamma_1 > 0$, pelo Teorema A.5.7, temos que

$$\|u_0\|_p \leq C \|\nabla u_0\|_2 = C \|u\|.$$

Logo, $\|(u_0, v_0)\| > 0$ e $(u_0, v_0) \in \mathcal{T}$. Assim, pelo Lema 2.3.8, existem $\lambda_0 > 0$ e $\mu_0 > 0$ tais que $(\lambda_0 u_0, \mu_0 v_0) \in \mathcal{N}_0$ e portanto,

$$\frac{\partial}{\partial u} J_0(\lambda_0 u_0, \mu_0 v_0) \lambda_0 u_0 = 0. \quad (2.76)$$

Como $(u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon})$ é solução de (P_{ε}) , temos que

$$\frac{\partial}{\partial u} J_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}) u_{\varepsilon} = 0. \quad (2.77)$$

Agora, tomando o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ em (2.77) temos, pelo Lema 2.4.3 e por $u_{\varepsilon} \rightharpoonup u_0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial u} J_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \cdot u_\varepsilon &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega} \left[|\nabla u_\varepsilon|^2 - f(u_\varepsilon)u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} G_u(u_\varepsilon, v_\varepsilon)u_\varepsilon \right] dx \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\|u_\varepsilon\|^2 - \int_{\Omega} f(u_\varepsilon)u_\varepsilon dx + \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} G_u(u_\varepsilon, v_\varepsilon)u_\varepsilon dx \right) \\
&\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon\|^2 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(u_\varepsilon)u_\varepsilon dx + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} G_u(u_\varepsilon, v_\varepsilon)u_\varepsilon dx \\
&\geq \|u_0\|^2 - \int_{\Omega} f(u_0)u_0 dx + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G_u(u_\varepsilon, v_\varepsilon)u_\varepsilon dx,
\end{aligned}$$

ou seja, por (2.77),

$$\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx - \int_{\Omega} f(u_0)u_0 dx + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G_u(u_\varepsilon, v_\varepsilon)u_\varepsilon dx \leq 0. \quad (2.78)$$

Por outro lado, pela definição de J_0 , segue

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u} J_0(\lambda_0 u_0, \mu_0 v_0) \cdot \lambda_0 u_0 &= \int_{\Omega} \left[\lambda_0^2 |\nabla u_0|^2 - f(\lambda_0 u_0)\lambda_0 u_0 \right] dx \\
&= \lambda_0^2 \int_{\Omega} \left[|\nabla u_0|^2 - \frac{f(\lambda_0 u_0)}{\lambda_0} u_0 \right] dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como λ_0 é diferente de zero, concluímos da expressão acima que

$$\int_{\Omega} \left[|\nabla u_0|^2 - \frac{f(\lambda_0 u_0)}{\lambda_0} u_0 \right] dx = 0. \quad (2.79)$$

Então, subtraindo (2.79) de (2.78), obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx - \int_{\Omega} f(u_0)u_0 dx + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G_u(u_\varepsilon, v_\varepsilon)u_\varepsilon dx - \int_{\Omega} \left[|\nabla u_0|^2 - \frac{f(\lambda_0 u_0)}{\lambda_0} u_0 \right] dx \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \int_{\Omega} \left[\frac{f(\lambda_0 u_0)}{\lambda_0} u_0 - f(u_0)u_0 \right] dx + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G_u(u_\varepsilon, v_\varepsilon)u_\varepsilon dx \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \int_{\Omega} \left[\left(\frac{f(\lambda_0 u_0)}{\lambda_0 u_0} - \frac{f(u_0)}{u_0} \right) u_0^2 \right] dx + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G_u(u_\varepsilon, v_\varepsilon)u_\varepsilon dx \leq 0.
\end{aligned}$$

Lembrando, agora, que $G_u(u_\varepsilon, v_\varepsilon)u_\varepsilon \geq 0$, por (H_3) , segue que o limite inferior

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G_u(u_\varepsilon, v_\varepsilon)u_\varepsilon dx \geq 0,$$

implicando em

$$\int_{\Omega} \left[\left(\frac{f(\lambda_0 u_0)}{\lambda_0 u_0} - \frac{f(u_0)}{u_0} \right) u_0^2 \right] dx \leq 0.$$

Assim, pela propriedade II), temos que $\frac{f(s)}{|s|}$ é uma função crescente e $\lambda_0 > 0$. Daí,

$$\lambda_0 u_0 \leq u_0,$$

e, portanto,

$$\lambda_0 \leq 1. \quad (2.80)$$

De maneira análoga, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial v} J_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon)v_\varepsilon = 0, \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} J_0(\lambda_0 u_0, \mu_0 v_0)\mu_0 v_0 = 0. \quad (2.82)$$

Novamente, tomando o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ em (2.81) temos, pelo Lema 2.4.3 e por $v_\varepsilon \rightharpoonup v_0$,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial v} J_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \cdot v_\varepsilon &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega} \left[|\nabla v_\varepsilon|^2 - f(v_\varepsilon)v_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} G_v(u_\varepsilon, v_\varepsilon)v_\varepsilon \right] dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\|v_\varepsilon\|^2 - \int_{\Omega} f(v_\varepsilon)v_\varepsilon dx + \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} G_v(u_\varepsilon, v_\varepsilon)v_\varepsilon dx \right) \\ &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_\varepsilon\|^2 - \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(v_\varepsilon)v_\varepsilon dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} G_v(u_\varepsilon, v_\varepsilon)v_\varepsilon dx \\ &\geq \|v_0\|^2 - \int_{\Omega} f(v_0)v_0 dx + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G_v(u_\varepsilon, v_\varepsilon)v_\varepsilon dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 dx - \int_{\Omega} f(v_0)v_0 dx + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G_v(u_\varepsilon, v_\varepsilon)v_\varepsilon dx \leq 0, \quad (2.83)$$

e, pela definição de J_0 , segue

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} J_0(\lambda_0 u_0, \mu_0 v_0)\mu_0 v_0 &= \int_{\Omega} \left[\mu_0^2 |\nabla v_0|^2 - f(\mu_0 v_0)\mu_0 v_0 \right] dx \\ &= \mu_0^2 \int_{\Omega} \left[|\nabla v_0|^2 - \frac{f(\mu_0 v_0)}{\mu_0} v_0 \right] dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $\mu_0 > 0$, concluímos da expressão acima que

$$\int_{\Omega} \left[|\nabla v_0|^2 - \frac{f(\mu_0 v_0)}{\mu_0} v_0 \right] dx = 0. \quad (2.84)$$

Então, subtraindo (2.84) de (2.83)

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 dx - \int_{\Omega} f(v_0)v_0 dx + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G_v(u_\varepsilon, v_\varepsilon)v_\varepsilon dx - \int_{\Omega} \left[|\nabla v_0|^2 - \frac{f(\mu_0 v_0)}{\mu_0} v_0 \right] dx \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \int_{\Omega} \left[\frac{f(\mu_0 v_0)}{\mu_0} v_0 - f(v_0)v_0 \right] dx + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G_v(u_\varepsilon, v_\varepsilon)v_\varepsilon dx \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \int_{\Omega} \left[\left(\frac{f(\mu_0 v_0)}{\mu_0 v_0} - \frac{f(v_0)}{v_0} \right) v_0^2 \right] dx + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G_v(u_\varepsilon, v_\varepsilon)v_\varepsilon dx \leq 0. \end{aligned}$$

E, novamente, como $G_v(u_\varepsilon, v_\varepsilon)v_\varepsilon \geq 0$, por (H_3) , segue que o limite

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G_v(u_\varepsilon, v_\varepsilon)v_\varepsilon dx \geq 0,$$

implicando em

$$\int_{\Omega} \left[\left(\frac{f(\mu_0 v_0)}{\mu_0 v_0} - \frac{f(v_0)}{v_0} \right) v_0^2 \right] dx \leq 0.$$

E mais uma vez, pela propriedade **II**), temos que

$$\mu_0 v_0 \leq v_0.$$

Portanto,

$$\mu_0 \leq 1. \quad (2.85)$$

Agora, pelo fato de $(\lambda_0 u_0, \mu_0 v_0) \in \mathcal{N}_0$, temos os seguintes resultados:

$$\frac{\partial}{\partial u} J_0(\lambda_0 u_0, \mu_0 v_0) \lambda_0 u_0 = \lambda_0^2 \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx - \int_{\Omega} f(\lambda_0 u_0) \lambda_0 u_0 dx = 0, \quad (2.86)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} J_0(\lambda_0 u_0, \mu_0 v_0) \mu_0 v_0 = \mu_0^2 \int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 dx - \int_{\Omega} f(\mu_0 v_0) \mu_0 v_0 dx = 0, \quad (2.87)$$

$$J_0(\lambda_0 u_0, \mu_0 v_0) = \int_{\Omega} \left[\frac{\lambda_0^2}{2} |\nabla u_0|^2 + \frac{\mu_0^2}{2} |\nabla v_0|^2 \right] dx - \int_{\Omega} [F(\lambda_0 u_0) + F(\mu_0 v_0)] dx \geq c_0. \quad (2.88)$$

Note que a última desigualdade vale graças ao Lema 2.4.6, pois $\text{supp}(u_0) \cap \text{supp}(v_0) = \emptyset$ e pela definição de c_0 em (2.64). Assim, $\text{supp}(\lambda_0 u_0) \cap \text{supp}(\mu_0 v_0) = \emptyset$ e portanto

$$J_0(\lambda_0 u_0, \mu_0 v_0) \geq \inf_{\substack{(u,v) \in \mathcal{N}_0 \\ \int_{\Omega} u^2 v^2 dx = 0}} J_0(u, v) = c_0.$$

Esta desigualdade é de grande importância, pois é a partir dela que todo o restante da demonstração será verdadeira. Multiplicando a desigualdade (2.88) por $(2 + \alpha)$, em que $\alpha > 0$ é dado pela hipótese (H_2) , e subtraindo as duas desigualdades anteriores, (2.86) e (2.87), obtemos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} (2 + \alpha)c_0 &\leq \frac{\lambda_0^2 \alpha}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx + \int_{\Omega} [f(\lambda_0 u_0) \lambda_0 u_0 - (2 + \alpha)F(\lambda_0 u_0)] dx \\ &\quad + \frac{\mu_0^2 \alpha}{2} \int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 dx + \int_{\Omega} [f(\mu_0 v_0) \mu_0 v_0 - (2 + \alpha)F(\mu_0 v_0)] dx, \end{aligned}$$

e, utilizando a notação do item **VIII**), podemos reescrever a inequação acima da seguinte forma

$$\begin{aligned} (2 + \alpha)c_0 &\leq \frac{\lambda_0^2 \alpha}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx + \int_{\Omega} \mathcal{F}(\lambda_0 u_0) dx \\ &\quad + \frac{\mu_0^2 \alpha}{2} \int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 dx + \int_{\Omega} \mathcal{F}(\mu_0 v_0) dx. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Por outro lado, com um raciocínio semelhante ao do Lema 2.3.13, como $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \mathcal{N}_\varepsilon$, temos que

$$\begin{aligned} (2 + \alpha)c_\varepsilon &= (2 + \alpha)J_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) = (2 + \alpha)J_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) - \langle \nabla J_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon), (u_\varepsilon, v_\varepsilon) \rangle \\ &= \alpha(\|u_\varepsilon\|^2 + \|v_\varepsilon\|^2) + \int_\Omega [f(u_\varepsilon)u_\varepsilon - (2 + \alpha)F(u_\varepsilon)] dx \\ &\quad + \int_\Omega [f(v_\varepsilon)v_\varepsilon - (2 + \alpha)F(v_\varepsilon)] dx \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega [(2 + \alpha)G(u_\varepsilon, v_\varepsilon) - G_u(u_\varepsilon, v_\varepsilon) - G_v(u_\varepsilon, v_\varepsilon)] dx. \end{aligned}$$

Assim, pelos Lemas 2.4.3 e 2.4.4 e a norma também ser fracamente contínua, tomando o limite inferior quando $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (2 + \alpha)c_\varepsilon &\geq \frac{1}{2}(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2) + \int_\Omega [f(u_0)u_0 - (2 + \alpha)F(u_0)] dx \\ &\quad + \int_\Omega [f(v_0)v_0 - (2 + \alpha)F(v_0)] dx + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega G(u_\varepsilon, v_\varepsilon) dx, \end{aligned} \quad (2.90)$$

e pela definição de \mathcal{F} , dada no item VIII), temos

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (2 + \alpha)c_\varepsilon = \frac{1}{2}(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2) + \int_\Omega \mathcal{F}(u_0) dx + \int_\Omega \mathcal{F}(v_0) dx + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega G(u_\varepsilon, v_\varepsilon) dx. \quad (2.91)$$

Porém, note que, por (2.69), (2.67) e (2.71),

$$c_0 = d_0 \geq d_\varepsilon = c_\varepsilon,$$

ou seja,

$$c_0 \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} c_\varepsilon. \quad (2.92)$$

Logo, por (2.89) e (2.91),

$$\begin{aligned} 0 \leq (2 + \alpha)(c_0 - \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} c_\varepsilon) &\leq \frac{\alpha}{2} \int_\Omega [(\lambda_0^2 - 1)|\nabla u_0|^2 + (\mu_0^2 - 1)|\nabla v_0|^2] dx \\ &\quad + \int_\Omega [\mathcal{F}(\lambda_0 u_0) - \mathcal{F}(u_0)] dx + \int_\Omega [\mathcal{F}(\mu_0 v_0) - \mathcal{F}(v_0)] dx \\ &\quad - \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega [(2 + \alpha)G(u_\varepsilon, v_\varepsilon) - G_u(u_\varepsilon, v_\varepsilon)u_\varepsilon - G_v(u_\varepsilon, v_\varepsilon)v_\varepsilon] dx. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha}{2} \int_\Omega [(\lambda_0^2 - 1)|\nabla u_0|^2 + (\mu_0^2 - 1)|\nabla v_0|^2] dx \\ &+ \int_\Omega [\mathcal{F}(\lambda_0 u_0) - \mathcal{F}(u_0)] dx + \int_\Omega [\mathcal{F}(\mu_0 v_0) - \mathcal{F}(v_0)] dx \\ &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega [(2 + \alpha)G(u_\varepsilon, v_\varepsilon) - G_u(u_\varepsilon, v_\varepsilon)u_\varepsilon - G_v(u_\varepsilon, v_\varepsilon)v_\varepsilon] dx \geq 0, \end{aligned} \quad (2.94)$$

sendo que a última desigualdade vem das hipóteses (H_2) e (H_3) , como foi demonstrado em (2.16). Agora, como \mathcal{F} é crescente, por (2.80) e (2.85) segue que

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} [(\lambda_0^2 - 1)|\nabla u_0|^2 + (\mu_0^2 - 1)|\nabla v_0|^2] dx \\ & + \int_{\Omega} [\mathcal{F}(\lambda_0 u_0) - \mathcal{F}(u_0)] dx + \int_{\Omega} [\mathcal{F}(\mu_0 v_0) - \mathcal{F}(v_0)] dx \geq 0 \end{aligned}$$

se, e somente se, $\lambda_0 = \mu_0 = 1$. Visto que $(\lambda_0 u_0, \mu_0 v_0) \in \mathcal{N}_0$, concluímos assim a demonstração do item *i*). Além disso, como $\lambda_0 = \mu_0 = 1$, concluímos, de (2.94) que

$$0 \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} [(2 + \alpha)G(u_\varepsilon, v_\varepsilon) - G_u(u_\varepsilon, v_\varepsilon)u_\varepsilon - G_v(u_\varepsilon, v_\varepsilon)v_\varepsilon] dx \geq 0,$$

ou seja,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} [(2 + \alpha)G(u_\varepsilon, v_\varepsilon) - G_u(u_\varepsilon, v_\varepsilon)u_\varepsilon - G_v(u_\varepsilon, v_\varepsilon)v_\varepsilon] dx = 0. \quad (2.95)$$

Com o auxílio deste último resultado, provaremos o item *ii*). Do fato que $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \rightharpoonup (u_0, v_0)$ em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ segue

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon\|^2 dx \geq \|u_0\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx$$

e

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_\varepsilon\|^2 dx \geq \|v_0\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 dx.$$

Suponha que $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx > \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx$. Então a equação (2.90) passa a ser estrita e, conseqüentemente, a inequação (2.93) passa a ser estrita. Daí,

$$\begin{aligned} 0 & \leq (2 + \alpha)(c_0 - \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} c_\varepsilon) < \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} [(\lambda_0^2 - 1)|\nabla u_0|^2 + (\mu_0^2 - 1)|\nabla v_0|^2] dx \\ & + \int_{\Omega} [\mathcal{F}(\lambda_0 u_0) - \mathcal{F}(u_0)] dx + \int_{\Omega} [\mathcal{F}(\mu_0 v_0) - \mathcal{F}(v_0)] dx \\ & - \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} [(2 + \alpha)G(u_\varepsilon, v_\varepsilon) - G_u(u_\varepsilon, v_\varepsilon)u_\varepsilon - G_v(u_\varepsilon, v_\varepsilon)v_\varepsilon] dx, \end{aligned}$$

e, daí,

$$0 > \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} [(2 + \alpha)G(u_\varepsilon, v_\varepsilon) - G_u(u_\varepsilon, v_\varepsilon)u_\varepsilon - G_v(u_\varepsilon, v_\varepsilon)v_\varepsilon] dx \geq 0,$$

o que é um absurdo. Logo $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx$, e, a menos de subsequência,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon\|^2 = \|u_0\|^2.$$

Portanto, pela equivalência das normas $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ e $\|\cdot\|$ no espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Agora, substituindo u_ε e u_0 por v_ε e v_0 , respectivamente, concluímos que

$$\|v_\varepsilon - v_0\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0,$$

provando, assim, o item *ii*).

Para provar o item *iii*), note que, por (2.88) e o fato de $\lambda_0 = 1$, temos que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx = \int_{\Omega} f(u_0)u_0 dx,$$

e, de maneira análoga, como $\mu_0 = 1$, temos

$$\int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 dx = \int_{\Omega} f(v_0)v_0 dx.$$

Substituindo as duas relações acima nas duas primeiras desigualdades de (2.90), obtemos

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G_u(u_\varepsilon, v_\varepsilon)u_\varepsilon dx \leq 0$$

e

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G_v(u_\varepsilon, v_\varepsilon)v_\varepsilon dx \leq 0.$$

Porém, pela hipótese (H_3), segue que

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G_u(u_\varepsilon, v_\varepsilon)u_\varepsilon dx \geq 0$$

e

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G_v(u_\varepsilon, v_\varepsilon)v_\varepsilon dx \geq 0,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Logo, podemos concluir que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G_u(u_\varepsilon, v_\varepsilon)u_\varepsilon dx = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G_v(u_\varepsilon, v_\varepsilon)v_\varepsilon dx = 0. \quad (2.96)$$

Desse modo, pela equação (2.95), segue

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} [(2 + \alpha)G(u_\varepsilon, v_\varepsilon) - G_u(u_\varepsilon, v_\varepsilon)u_\varepsilon - G_v(u_\varepsilon, v_\varepsilon)v_\varepsilon] dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} (2 + \alpha)G(u_\varepsilon, v_\varepsilon) dx - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G_u(u_\varepsilon, v_\varepsilon)u_\varepsilon dx - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G_v(u_\varepsilon, v_\varepsilon)v_\varepsilon dx \end{aligned}$$

e, como $(2 + \alpha) > 0$, por (2.96) concluímos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G(u_\varepsilon, v_\varepsilon) dx = 0,$$

como desejávamos. Provando, assim, item *iii*).

Para demonstrar o item *iv*), utilizaremos o item *iii*). Como $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G(u_\varepsilon, v_\varepsilon) dx = 0$, temos, por (2.90), que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_\varepsilon \geq J_0(u_0, v_0). \quad (2.97)$$

Além disso, pela desigualdade em (2.88) e sabendo que $\lambda_0 = \mu_0 = 1$, temos que $J_0(u_0, v_0) \geq c_0$. Logo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_\varepsilon \geq c_0.$$

Mas, por (2.92), $c_0 \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_\varepsilon$, provando que

$$c_\varepsilon \rightarrow c_0, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Agora, retornamos à demonstração da Proposição 2.4.2 para provarmos a Parte 2). ■

Demonstração da Proposição 2.4.2, Parte 2):

Note que pela Parte 1) da Proposição 2.4.2, existe $(u_0, v_0) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \rightharpoonup (u_0, v_0)$ em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Pelo item *ii*) do Lema 2.4.7, segue que

$$(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \rightarrow (u_0, v_0) \text{ em } H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

Além disso, pelas equações (2.92), (2.97) e (2.88), concluímos que

$$c_0 \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_\varepsilon \geq J_0(u_0, v_0) \geq c_0,$$

e, portanto, $J_0(u_0, v_0) = c_0$. Restando mostrar que u_0 e v_0 tem suportes disjuntos para que (u_0, v_0) seja solução de (P_0) . Para mostrar tal fato, note que, pelo item *iii*) do Lema 2.4.7, temos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} G(u_\varepsilon, v_\varepsilon) dx = 0.$$

Agora, $G(s, t) \geq 0$ para todo par $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, ou seja,

$$\int_{\Omega} G(u_\varepsilon, v_\varepsilon) dx \geq 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Sendo assim, podemos aplicar o Lema de Fatou (Lema A.5.2), obtendo assim,

$$0 \leq \int_{\Omega} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G(u_\varepsilon, v_\varepsilon) dx \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} G(u_\varepsilon, v_\varepsilon) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} G(u_\varepsilon, v_\varepsilon) dx = 0.$$

Logo, pela desigualdade acima,

$$\int_{\Omega} G(u_0, v_0) dx = 0,$$

pelo fato de $G(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ convergir para o limite $G(u_0(x), v_0(x))$ q.t.p. $x \in \Omega$ e G ser uma função contínua. Agora, para que a última integral seja nula, é necessário que $G(u_0(x), v_0(x)) = 0$, q.t.p. $x \in \Omega$. Mas, para que isso ocorra, como $G(s, t) = 0$ se, e somente se, $st = 0$, precisamos que em quase todo ponto x de Ω tenhamos $u_0(x)v_0(x) = 0$, isto é, $u_0(x) = 0$ ou $v_0(x) = 0$. Logo, se considerarmos

$$\Omega_{u_0} := \{x \in \Omega : u(x) = 0\}$$

$$\Omega_{v_0} := \{x \in \Omega : v(x) = 0\}$$

$$\tilde{\Omega} := \{x \in \Omega : u(x) \neq 0 \text{ e } v(x) \neq 0\},$$

temos que $\Omega = \Omega_{u_0} \cup \Omega_{v_0} \cup \tilde{\Omega}$ e $|\tilde{\Omega}| = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_0(x)^2 v_0(x)^2 dx &= \int_{\Omega_{u_0}} u_0(x)^2 v_0(x)^2 dx + \int_{\Omega_{v_0}} u_0(x)^2 v_0(x)^2 dx + \int_{\tilde{\Omega}} u_0(x)^2 v_0(x)^2 dx \\ &= \int_{\Omega_{u_0}} 0 \cdot v_0(x)^2 dx + \int_{\Omega_{v_0}} u_0(x)^2 \cdot 0 dx + \int_{\tilde{\Omega}} u_0(x)^2 v_0(x)^2 dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $\tilde{\Omega}$ é um conjunto de medida nula. Isto mostra que os suportes de u_0 e v_0 são disjuntos e que (u_0, v_0) é solução do problema (P_0) , finalizando a demonstração da Parte 2) da Proposição 2.4.2. ■

Agora, temos todos os resultados que precisamos para demonstrar o Teorema 2.4.1.

Demonstração do Teorema 2.4.1: Pela Parte 2) da Proposição 2.4.2, temos que $(u_0, v_0) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ é solução de (P_0) e, como consequência da Parte 1), temos que $\|u_0\|_p \geq \gamma$ e $\|v_0\|_p \geq \gamma$, o que implica que $u_0 \not\equiv 0$ e $v_0 \not\equiv 0$. Agora, pelo Teorema 2.3.1 temos que $u_\varepsilon(x) > 0$ e $v_\varepsilon(x) > 0$, para todo $\varepsilon > 0$. Assim, tomando o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ em (P_1) , vemos que o par (u_0, v_0) é solução para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(u(x)), & x \in \text{supp}(u) \\ -\Delta v(x) = f(v(x)), & x \in \text{supp}(v). \\ (u, v) \in \mathcal{T}. \end{cases} \quad (P_2)$$

Além disso, como $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ e $v_\varepsilon \rightarrow v_0$, em $H_0^1(\Omega)$, temos que $u_0 \geq 0$ e $v_0 \geq 0$ e, como (u_0, v_0) é solução do sistema, segue que

$$\Delta u_0(x) = -f(u_0(x)) \leq 0,$$

pois $u_0(x) \geq 0$. Logo, pelo Princípio do Máximo Forte, Teorema A.3.3, temos que $u_0(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$. O mesmo resultado pode ser obtido para $v_0(x)$, apenas trocando $u_0(x)$ por $v_0(x)$.

Por fim, note que se definirmos a função de conjuntos

$$\phi_0(\omega) := \inf_{\substack{w \in H_0^1(\omega) \\ w > 0}} \sup_{\lambda > 0} J(\lambda w),$$

os conjuntos $\text{supp}(u_0)$ e $\text{supp}(v_0)$ satisfazem o seguinte problema:

$$\phi_0(u_0) + \phi_0(v_0) = \inf \{ \phi(\omega_1) + \phi(\omega_2) : \omega_1, \omega_2 \subset \Omega, \omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset \},$$

que, como podemos ver, é um problema semelhante ao problema de Nehari, (1), retirando-se a obrigatoriedade de que $\overline{\omega_1} \cup \overline{\omega_2} = \overline{\Omega}$. É nesse sentido que dizemos que (u_0, v_0) é uma solução simplificada do problema de Nehari, pois, embora não satisfaça completamente ao problema, podemos tomar A e B , abertos em Ω , $A \cap B = \emptyset$, de tal forma que $\omega_1 \subset A$, $\omega_2 \subset B$ e tais A e B serão soluções de (1). Note que tais abertos existem, pois podemos tomar $A = \omega_1$ e $B = \Omega \setminus \omega_1$, por exemplo. ■

Capítulo 3

Sobre uma Solução que Muda de Sinal

Neste capítulo, estudaremos um problema semelhante ao sistema $(P_{u,v})$, mas neste caso procuramos soluções que mudam de sinal. Este estudo será desenvolvido na **Seção 3.1** e estará baseado nos resultados das **Seções 2.3** e **2.4**. Mostraremos que o funcional J_* associado à equação (P_3) , a ser definido, é equivalente ao funcional J_0 associado ao sistema (P_0) . Dessa forma, os resultados presentes na **Subseção 3.1.1** estarão relacionadas com aqueles presentes na **Subseção 2.3.2**.

3.1 Um Problema Equivalente

Seja (u_0, v_0) a solução de (P_0) dada pelo Teorema 2.4.1. Nosso objetivo agora é mostrar que $w_0 = u_0 - v_0$ é solução da seguinte equação.

$$-\Delta w(x) = f(x, w(x)) \quad (P_w)$$

provando, assim, o seguinte teorema:

Teorema 3.1.1. *Sob as hipóteses (f'_1) e (f_2) , a função $w_0 = u_0 - v_0$ é solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta w(x) = f(x, w(x)), \text{ em } \Omega, \\ w \in H_0^1(\Omega) \text{ e} \\ w \text{ muda de sinal exatamente uma vez.} \end{cases} \quad (P_3)$$

Observação 3.1.2. *Note que nas hipóteses (f'_1) e (f_2) , as estimativas dependem de x e são uniformes nesta variável, da mesma maneira que as hipóteses $f'_1 - f_5$ da **Seção 1.2**. Como todos os resultados obtidos são uniformes em x , optamos por não escrevê-lo até então, mas, como este é um resultado adicional do trabalho e suas demonstrações serão baseadas naquelas já feita, denotaremos as funções $f(s)$ e $F(s)$ por $f(x, s)$ e $F(x, s)$. Ressaltamos que tal mudança não altera os resultados já obtidos.*

Como veremos, este resultado nos leva a resposta de nosso objetivo principal que é o problema de Nehari, (1). A demonstração do teorema acima é baseada na equivalência entre o procedimento de aproximação mostrado anteriormente, **Subseção 2.4.1** e a técnica minimax do tipo Nehari, utilizada para provar a existência de uma solução que muda de sinal para a equação (P_w) .

3.1.1 Uma Solução que Muda de Sinal para (P_w)

Consideremos o funcional de energia associado a (P_w) , que é dado por:

$$J_*(w) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla w(x)|^2 - F(x, w(x)) \right] dx \quad (3.1)$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega)$.

Nosso interesse agora é estudar as funções de $H_0^1(\Omega)$ que satisfazem a equação (P_w) e que mudam de sinal, portanto, começaremos definindo o seguinte conjunto

$$\mathcal{T}_* := \{w \in H_0^1(\Omega) : w^+ \not\equiv 0, w^- \not\equiv 0\},$$

garantindo, assim, que, se $w \in \mathcal{T}_*$, a função w realmente muda de sinal. Definiremos também uma variedade de Nehari própria do funcional J_* , que denotaremos por \mathcal{N}_* , e

$$\mathcal{N}_* := \{u \in \mathcal{T}_* : \nabla J_*(u^+) \cdot u^+ = \nabla J_*(u^-) \cdot u^- = 0\}$$

e, ainda, um mínimo de J_* restrito a tal variedade

$$c_* := \inf_{u \in \mathcal{N}_*} J_*(u).$$

Afirmamos que

Proposição 3.1.3. *Existe uma função que muda de sinal $w_* \in H_0^1(\Omega)$ tal que $J_*(w_*) = c_*$ e*

$$-\Delta w_*(x) = f(x, w_*(x)), \quad x \in \Omega.$$

Observe que a proposição acima é bastante semelhante àquela da Seção 2.3, Proposição 2.3.3. De fato, a demonstração desta seguirá o mesmo raciocínio daquela, sendo também dividida em três partes. Porém, antes de passarmos à demonstração da Proposição 3.1.3, vamos fazer a seguinte consideração: note que, o estudo do funcional J_* em $H_0^1(\Omega)$, restrito às funções w que mudam de sinal apenas uma vez, e o estudo de J_0 em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, restrito aos pares (u, v) que satisfazem

$$\text{supp}(u) \cap \text{supp}(v) = \emptyset,$$

são equivalentes, já que

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), u := w^+ \text{ e } v := w^- \Rightarrow \begin{cases} J_*(w) = J_0(u, v) \\ \nabla J_*(w) = \nabla J_0(u, v), \end{cases}$$

pois,

$$\begin{aligned} J_*(w) &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla w(x)|^2 - F(x, w(x)) \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla(w^+(x) - w^-(x))|^2 - F(x, w^+(x) - w^-(x)) \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla(u(x) - v(x))|^2 - F(x, u(x) - v(x)) \right) dx. \end{aligned}$$

Agora, como $\text{supp}(u) \cap \text{supp}(v) = \emptyset$ e $F(x, 0) = 0$, temos que

$$F(x, u(x) - v(x)) = F(x, u(x)) + F(x, -v(x)),$$

e, por F ser uma função par, concluímos que

$$F(x, u(x) - v(x)) = F(x, u(x)) + F(x, v(x)).$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla(u(x) - v(x))|^2 dx &= \int_{\Omega} |\nabla u(x) - \nabla v(x)|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \left[|\nabla u(x)|^2 - 2\langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle + |\nabla v(x)|^2 \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \left[|\nabla u(x)|^2 + |\nabla v(x)|^2 \right] dx, \end{aligned}$$

sendo que, a última igualdade vem do fato de $u(x)$ e $v(x)$ terem suportes disjuntos, pois em $\text{supp}(u)$, $v(x) = 0$ q.t.p. $x \in \Omega$, logo, $\nabla v(x) = 0$ q.t.p. $x \in \Omega$ e o mesmo ocorre em $\text{supp}(v)$, logo,

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = 0.$$

Concluímos, então, que

$$J_*(w) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + \frac{1}{2} |\nabla v(x)|^2 - F(x, u(x)) - F(x, v(x)) \right) dx = J_0(u, v). \quad (3.2)$$

Para mostrarmos a igualdade entre os gradientes, note que, fazendo $u(x) := w^+(x)$ e $v(x) := w^-(x)$, temos que $w(x) = u(x) - v(x)$ e assim

$$\begin{aligned} \nabla J_*(w) &= \nabla J_*(u - v) \\ &= \left(\frac{\partial J_*(u - v)}{\partial u}, \frac{\partial J_*(u - v)}{\partial v} \right) \\ &= \left(\frac{\partial J_0(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial J_0(u, v)}{\partial v} \right) \\ &= \nabla J_0(u, v). \end{aligned}$$

Mostrando que não só é possível identificar os funcionais J_* e J_0 , como também os seus gradientes.

De posse destas informações, ficará mais fácil demonstrar os três resultados que seguem, dado que os mesmos se reduzem aos Lemas 2.3.8, 2.3.12 e 2.3.13. Estes três resultados, os Lemas 3.1.4, 3.1.5 e 3.1.6, são, como na **Subseção 2.3.2**, de grande importância para a demonstração da Proposição 3.1.3.

Lema 3.1.4. *Seja $w \in \mathcal{T}_*$ e considere*

$$\Phi(w) := \sup_{\substack{s > 0 \\ t > 0}} J_*(sw^+ - tw^-).$$

Então, existe um único par de números positivos $\lambda^+(w)$ e $\lambda^-(w)$ tais que:

- i) $\Phi(w) = J_*(\lambda^+(w)w^+ - \lambda^-(w)w^-)$;*
- ii) $\lambda^+(w)w^+ - \lambda^-(w)w^- \in \mathcal{N}_*$;*
- iii) Existem números $r_1, r_2 > 0$ tais que, se $w \in \mathcal{N}_*$, então $\|w^\pm\|_p \geq r_1$ e $\|w^\pm\|_{H_0^1(\Omega)} \geq r_2$;*

iv) $\Phi(\cdot)$ é semicontínua inferiormente com respeito à convergência fraca em \mathcal{T}_* ;

v) A aplicação $w \mapsto (\lambda^+(w), \lambda^-(w))$ é contínua de $H_0^1(\Omega)$ em \mathbb{R}^2 .

Demonstração:

i) Como $J_*(w) = J_*(w^+ - w^-) = J_*(u - v)$, segue, da equação (3.2), que

$$\Phi(w) = \sup_{\substack{s>0 \\ t>0}} J_*(sw^+ - tw^-) = \sup_{\substack{s>0 \\ t>0}} J_*(su - tv) = \sup_{\substack{s>0 \\ t>0}} J_0(su, tv).$$

Agora, como J_0 satisfaz às hipóteses do Lema 2.3.8 - item i), temos que existem $s(u, v) > 0$ e $t(u, v) > 0$ tais que

$$\sup_{\substack{s>0 \\ t>0}} J_0(su, tv) = J_0(s(u, v)u, t(u, v)v) = J_*(s(u, v)u - t(u, v)v).$$

Assim, como s e t dependem de $u = w^+$ e $v = w^-$, temos que s e t dependem de w . Daí,

$$\sup_{\substack{s>0 \\ t>0}} J_0(su, tv) = J_*(s(w)w^+ - t(w)w^-),$$

nos permitindo concluir que

$$\Phi(w) = J_*(\lambda^+(w)w^+ - \lambda^-(w)w^-),$$

em que $\lambda^+(w) = s(w) > 0$ e $\lambda^-(w) = t(w) > 0$, como queríamos.

ii) Usando novamente a equação (3.2) e o item anterior, temos que

$$J_*(\lambda^+(w)w^+ - \lambda^-(w)w^-) = J_0(\lambda^+(u, v)u, \lambda^-(u, v)v).$$

Sendo assim, pelo item ii) do Lema 2.3.8, segue que

$$(\lambda^+(u, v)u, \lambda^-(u, v)v) \in \mathcal{N}_0 := \left\{ (u, v) \in \mathcal{T} : \frac{\partial}{\partial u} J_0(u, v) \cdot u = \frac{\partial}{\partial v} J_0(u, v) \cdot v = 0 \right\}.$$

Note agora que, pela definição de \mathcal{N}_0 , quando $(u, v) \in \mathcal{N}_0$, temos $\nabla J_0(u, v)(u, v) = 0$. E, como, por (3.2), $\nabla J_*(w)w = \nabla J_0(u, v)(u, v) = 0$, para $w = u - v$, temos que $(u, v) \in \mathcal{N}_0$ se, e somente se, $w \in \mathcal{N}_*$. Logo, como $(\lambda^+(u, v)u, \lambda^-(u, v)v) \in \mathcal{N}_0$, temos que $(\lambda^+(w)w^+ - \lambda^-(w)w^-) \in \mathcal{N}_*$.

iii) Como vimos no item anterior, se $w \in \mathcal{N}_*$, então $(w^+, w^-) = (u, v) \in \mathcal{N}_0$. Assim, ao aplicarmos o item iii) do Lema 2.3.8 ao par (u, v) , concluímos que existem $\gamma > 0$ e $\gamma_1 > 0$ tais que, $\|u\|_{L^p(\Omega)} \geq \gamma$, $\|v\|_{L^p(\Omega)} \geq \gamma$, $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \geq \gamma_1$ e $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \geq \gamma_1$. Logo, se tomarmos $r_1 = \gamma$ e $r_2 = \gamma_1$, obtemos

$$\begin{aligned} \|w^+\|_{L^p(\Omega)} &= \|u\|_{L^p(\Omega)} \geq r_1, \\ \|w^-\|_{L^p(\Omega)} &= \|v\|_{L^p(\Omega)} \geq r_1, \\ \|w^+\|_{H_0^1(\Omega)} &= \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \geq r_2, \\ \|w^-\|_{H_0^1(\Omega)} &= \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \geq r_2, \end{aligned}$$

como desejávamos.

iv) Como $J_*(w) = J_0(u, v)$, temos que

$$\Phi(w) := \sup_{\substack{s>0 \\ t>0}} J_0(su, tv),$$

e, portanto, segue do item *iv)* do Lema 2.3.8 que Φ é semicontínua inferiormente.

v) Novamente, utilizando a igualdade $J_*(w) = J_0(u, v)$ e aplicando o item *v)* do Lema 2.3.8, temos o resultado desejado. ■

Como consequência imediata deste lema, temos o resultado

$$d_* := \inf_{w \in \mathcal{T}_*} \Phi(w) = c_*, \quad (3.3)$$

e, como para todo $w \in \mathcal{T}_*$, $\Phi(w) = J_0(\lambda^+(w)w^+, \lambda^-(w)w^-) \geq 0$, por consequência do Lema 2.3.8, concluímos que

$$0 \leq d_* = c_*, \quad (3.4)$$

provando que c_* é finito. Os resultados (3.3) e (3.4) acima serão muito importantes quando formos mostrar que o problema de minimizar J_* na variedade de Nehari \mathcal{N}_* tem solução. Provaremos agora um resultado análogo ao Lema 2.3.12.

Lema 3.1.5. *Existe $w_* \in \mathcal{N}_*$ tal que $J_*(w_*) = c_*$.*

Demonstração: Lembrando que $J_*(w) = J_0(u, v)$, segue que, como $c_* \geq 0$, existe uma seqüência minimizante em \mathcal{N}_* , ou seja, $\{(u_n, v_n)\} \in \mathcal{N}_*$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_0(u_n, v_n) = \inf_{(u, v) \in \mathcal{N}_*} J_0(u, v) = c_*.$$

Tal seqüência pode ser tomada de tal forma que $J_0(u_n, v_n) \leq c + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, como vimos no Lema 2.3.12. Como (u_n, v_n) pertence a \mathcal{N}_* , temos que $\nabla J_0(u_n, v_n) \cdot (u_n, v_n) = 0$, para todo n . Assim, considerando o valor α obtido na hipótese (H_2) , temos, de maneira análoga à feita na demonstração do Lema 2.3.12, que

$$\|u_n\|^2 + \|v_n\|^2 \leq \frac{2(\alpha + 2)(c + 1)}{\alpha}.$$

Daí, temos que existe $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathcal{T}$ tal que $(u_n, v_n) \rightharpoonup (\tilde{u}, \tilde{v})$, pois $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ é reflexivo. Além disso, como $H_0^1(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^q(\Omega)$ para todo $2 < q < 2^*$, temos que $u_n \rightarrow \tilde{u}$ e $v_n \rightarrow \tilde{v}$ em $L^p(\Omega)$. Consequentemente, $(u_n, v_n) \rightarrow (\tilde{u}, \tilde{v})$ em $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$, ou seja, neste espaço a convergência é forte. Agora, como

$$\left| \|u_n\|_p - \|\tilde{u}\|_p \right| \leq \|u_n - \tilde{u}\|_p,$$

temos que a convergência de $u_n \rightarrow \tilde{u}$ em $L^p(\Omega)$ implica na convergência das normas, $\|u_n\|_p \rightarrow \|\tilde{u}\|_p$. Mas, pelo item *iii)* do Lema 3.1.4, temos que $\|u_n\|_p \geq r_1$ e, assim, concluímos que $\|\tilde{u}\|_p \geq r_1$. De maneira análoga, obtemos que $\|\tilde{v}\|_p \geq r_1$.

Como Φ é uma função fracamente semicontínua inferiormente, propriedade provada no Lema 3.1.4 - item *iv)*, temos que $\Phi(\tilde{u}, \tilde{v}) \leq c$. Mas, pela definição de d_* , temos que

$$\Phi(\tilde{u}, \tilde{v}) \geq d_* = c_*.$$

Daí, podemos concluir que

$$c_* = \sup_{\substack{s>0 \\ t>0}} J_0(s\tilde{u}, t\tilde{v}),$$

e, pelo Lema 3.1.4 - itens *i*), *ii*) e *v*), existem únicos $\tilde{s} = s(\tilde{u}, \tilde{v})$ e $\tilde{t} = t(\tilde{u}, \tilde{v})$, tais que $(\tilde{s}\tilde{u}, \tilde{t}\tilde{v}) \in \mathcal{N}_*$ e $c_* = J_0(\tilde{s}\tilde{u}, \tilde{t}\tilde{v})$. Assim, se definirmos $w_* := \tilde{s}\tilde{u} - \tilde{t}\tilde{v}$, temos o resultado desejado. ■

E, finalmente, o terceiro resultado que nos permitirá demonstrar a Proposição 3.1.3, que consiste em mostrar que todo ponto de \mathcal{N}_* com imagem no nível c_* é ponto crítico de J_* .

Lema 3.1.6. *Se $w_* \in \mathcal{N}_*$ e $J_*(w_*) = c_*$, então w_* é ponto crítico de J_* .*

Demonstração: A demonstração deste lema será baseada na demonstração do Lema 2.3.13. Mais uma vez, considere $w_* = u_* - v_*$. Sendo assim, suponha que $w_* \in \mathcal{N}_*$, $J_*(w_*) = c_*$, mas w_* não é ponto crítico, ou seja, $\nabla J_*(w_*) \neq 0$. Como $J_*(w) = J_0(u, v)$ é um funcional de classe C^1 , temos que existem $\rho > 0$ e $\delta > 0$ tais que $4\delta < r_1$ e

$$(u, v) \in B_\delta((u_*, v_*)) \Rightarrow \|\nabla J_0(u, v)\| \geq \rho.$$

Agora, assim como no Lema 2.3.12, pelo Lema A.1.3, temos que existe uma aplicação contínua $\eta : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ e uma constante $\nu > 0$ tais que:

- a) $\eta(u, v) = (u, v)$ para todo $(u, v) \notin B_{4\delta}((u_*, v_*)) \cap J_0^{-1}([c_* - 2\nu, c_* + 2\nu])$;
- b) $J(\eta(u, v)) \leq J_0(u, v)$ para todo $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$;
- c) Para todo $(u, v) \in B_{2\delta}((u_*, v_*)) \cap J_*^{-1}((-\infty, c_* + \nu])$, temos que $J_*(\eta(u, v)) \leq c_* - \nu$.

Considere agora a aplicação $\Gamma(s, t) := (sRu_*, tRv_*)$, em que $R > 1$ é fixado de tal maneira que $(R - 1)r_1 > 4\delta$. Temos que a aplicação Γ é contínua. Agora

$$\sup_{\substack{s>0 \\ t>0}} J_*(\eta(\Gamma(s, t))) < c_*.$$

A demonstração do fato acima foi demonstrada na demonstração do Lema 2.3.12. Provaremos, agora, que a aplicação $\eta \circ \Gamma$ intersecta a variedade \mathcal{N}_* , e assim, pela definição de c_* , teremos que

$$\sup_{s>0, t>0} J_*(\eta(\Gamma(s, t))) \geq c_*,$$

nos levando a uma contradição. Para isso, vamos considerar a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ (s, t) &\mapsto (\lambda^+(\eta(\Gamma(s, t))) - 1, \lambda^-(\eta(\Gamma(s, t))) - 1) \end{aligned}$$

que é contínua. Analisando os valores da aplicação \mathcal{H} na fronteira do domínio, ou seja, $\mathcal{H}(0, \cdot)$, $\mathcal{H}(1, \cdot)$, $\mathcal{H}(\cdot, 0)$, $\mathcal{H}(\cdot, 1)$, de maneira análoga àquela da demonstração do Lema 2.3.13, obtemos. Seja $\zeta > 0$ tal que $\Gamma(\zeta, t) \notin B_{4\delta}((u_*, v_*))$, para todo $t \in [0, 1]$. Tal ζ existe, pois, se $\zeta < \frac{1}{R} \left(1 - \frac{4\delta}{\|u_*\|}\right)$, temos que

$$\|\zeta Ru_* - u_*\| \geq \left| \|\zeta Ru_*\| - \|u_*\| \right| = |\zeta R - 1| \|u_*\|.$$

Mas, $\zeta < \frac{1}{R} \left(1 - \frac{4\delta}{\|u_*\|}\right) \Rightarrow \zeta R < 1$, pois $\|u_*\| \geq r_1 > 4\delta > 0$. Logo

$$\|\zeta R u_* - u_*\| \geq (1 - \zeta R)\|u_*\| > \left(1 - 1 + \frac{4\delta}{\|u_*\|}\right)\|u_*\| = 4\delta.$$

Assim, temos que

$$\|\Gamma(\zeta, t) - (u_*, v_*)\| = \|\zeta R u_* - u_*\| + \|t R v_* - v_*\| \geq \|\zeta R u_* - u_*\| > 4\delta,$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Portanto, $\Gamma(\zeta, t) \notin B_{4\delta}((u_*, v_*))$, para $t \in [0, 1]$. Agora, como $\Gamma(\zeta, t) \notin B_{4\delta}((u_*, v_*))$, temos, por a), que $\eta(\Gamma(\zeta, t)) = \Gamma(\zeta, t)$, logo, a primeira coordenada do vetor $\mathcal{H}(\zeta, t)$, a qual denominaremos por $\mathcal{H}_1(\zeta, t)$, será

$$\mathcal{H}_1(\zeta, t) = \lambda^+(\Gamma(\zeta, t) - 1) = \lambda^+(\zeta R u_*, t R v_*) - 1.$$

Mas, como $(u_*, v_*) \in \mathcal{N}_0$, temos que $\lambda^*(\zeta R u_*, t R v_*)$ é tal que

$$\lambda^+(\zeta R u_*, t R v_*) \zeta R = 1.$$

Portanto, $\lambda^+(\zeta R u_*, t R v_*) = \frac{1}{\zeta R}$ e $\mathcal{H}_1(\zeta, t) = \frac{1}{\zeta R} - 1$. Agora, como vale para todo $\zeta \in \left(0, \frac{1}{R} \left(1 - \frac{4\delta}{\|u_*\|}\right)\right)$ e pela continuidade da aplicação $(u, v) \mapsto (\lambda^+(u, v), \lambda^-(u, v))$, temos que

$$\mathcal{H}_1(0, t) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \mathcal{H}_1(\zeta, t) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{\zeta R} - 1 = +\infty > 0.$$

Calcularemos agora o valor de $\mathcal{H}_1(1, \cdot)$. Como

$$\begin{aligned} \|\Gamma(1, t) - (u_*, v_*)\| &= \|(R u_*, t R v_*) - (u_*, v_*)\| \\ &= \|((R - 1)u_*, (tR - 1)v_*)\| \\ &= \|(R - 1)u_*\| + \|(tR - 1)v_*\| \\ &\geq \|(R - 1)u_*\|. \end{aligned}$$

Agora, como $\|u_*\| \geq r_1$, temos que $(R - 1)\|u_*\| \geq (R - 1)r_1 > 4\delta$. Logo $\Gamma(1, t) \notin B_{4\delta}((u_*, v_*))$ e, conseqüentemente, $\eta(\Gamma(1, t)) = \Gamma(1, t)$. Daí, temos que

$$\mathcal{H}_1(1, t) = \lambda^+(\Gamma(1, t) - 1) = \lambda^+(R u_*, t R v_*) - 1,$$

e, novamente, pela definição de $\lambda^+(u, v)$ e o fato de (u_*, v_*) estar em \mathcal{N}_* , concluímos que $\lambda^+(R u_*, t R v_*) = \frac{1}{R}$. Agora, $R > 1$, ou seja, $\frac{1}{R} < 1$ e, portanto,

$$\mathcal{H}_1(1, t) = \frac{1}{R} - 1 < 0.$$

De maneira análoga, seja $0 < \sigma < \frac{1}{R} \left(1 - \frac{4\delta}{\|v_*\|}\right)$, temos que

$$\|\sigma R v_* - v_*\| \geq \|\sigma R v_*\| - \|v_*\| = |\sigma R - 1|\|v_*\|.$$

Mas, $\sigma < \frac{1}{R} \left(1 - \frac{4\delta}{\|v_*\|}\right) \Rightarrow \sigma R < 1$, pois $\|v_*\| \geq r_1 > 4\delta > 0$. Logo

$$\|\sigma R v_* - v_*\| \geq (1 - \sigma R)\|v_*\| > \left(1 - 1 + \frac{4\delta}{\|v_*\|}\right)\|v_*\| = 4\delta.$$

Assim, temos que

$$\|\Gamma(s, \sigma) - (u_*, v_*)\| = \|sRu_* - u_*\| + \|\sigma Rv_* - v_*\| \geq \|\sigma Rv_* - v_*\| > 4\delta,$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Portanto, $\Gamma(s, \sigma) \notin B_{4\delta}((u_*, v_*))$, para $t \in [0, 1]$. Agora, como $\Gamma(s, \sigma) \notin B_{4\delta}((u_*, v_*))$, temos, por a), que $\eta(\Gamma(s, \sigma)) = \Gamma(s, \sigma)$, logo, a segunda coordenada do vetor $\mathcal{H}(s, \sigma)$, que será representada por $\mathcal{H}_2(s, \sigma)$, será

$$\mathcal{H}_2(s, \sigma) = \lambda^-(\Gamma(s, \sigma)) - 1 = \lambda^-(sRu_*, \sigma Rv_*) - 1.$$

Mas, como $(u_*, v_*) \in \mathcal{N}_*$, temos que $\lambda^-(sRu_*, \sigma Rv_*)$ é tal que

$$\lambda^-(sRu_*, \sigma Rv_*)\sigma R = 1.$$

Portanto, $\lambda^-(sRu_*, \sigma Rv_*) = \frac{1}{\sigma R}$ e $\mathcal{H}_2(s, \sigma) = \frac{1}{\sigma R} - 1$. Agora, como vale para todo $\sigma \in \left(0, \frac{1}{R} \left(1 - \frac{4\delta}{\|v_*\|}\right)\right)$ e, de novo pela continuidade da aplicação $(u, v) \mapsto (\lambda^+(u, v), \lambda^-(u, v))$, temos que

$$\mathcal{H}_2(s, 0) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \mathcal{H}_2(s, \sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma R} - 1 = +\infty > 0.$$

Agora, para $\mathcal{H}_2(\cdot, 1)$, como

$$\begin{aligned} \|\Gamma(s, 1) - (u_*, v_*)\| &= \|(sRu_*, Rv_*) - (u_*, v_*)\| \\ &= \|((sR - 1)u_*, (R - 1)v_*)\| \\ &= \|(sR - 1)u_*\| + \|(R - 1)v_*\| \\ &\geq \|(R - 1)v_*\|, \end{aligned}$$

se $\|v_*\| \geq r_1$, temos que $(R - 1)\|v_*\| \geq (R - 1)r_1 > 4\delta$. Logo $\Gamma(s, 1) \notin B_{4\delta}((u_*, v_*))$ e, consequentemente, $\eta(\Gamma(s, 1)) = \Gamma(s, 1)$. Daí, temos que

$$\mathcal{H}_2(s, 1) = \lambda^-(\Gamma(s, 1)) - 1 = \lambda^-(sRu_*, Rv_*) - 1,$$

e, pela definição de $\lambda^-(u, v)$ e o fato de (u_*, v_*) estar em \mathcal{N}_* , concluímos que $\lambda^-(sRu_*, Rv_*) = \frac{1}{R}$.

Agora, $R > 1$, ou seja, $\frac{1}{R} < 1$ e, portanto,

$$\mathcal{H}_2(s, 1) = \frac{1}{R} - 1 < 0.$$

Aplicando então o Teorema de Miranda (Teorema A.2.2) a aplicação \mathcal{H} , temos que existe um par $(s_0, t_0) \in (0, 1) \times (0, 1)$ tal que $\mathcal{H}(s_0, t_0) = (0, 0)$, ou seja,

$$\lambda^+(\eta(\Gamma(s_0, t_0))) = \lambda^-(\eta(\Gamma(s_0, t_0))) = 1.$$

Daí, pelo item *ii*) do Lema 3.1.4, temos que $\eta(\Gamma(s_0, t_0)) \in \mathcal{N}_*$, de onde podemos concluir que $J_0(\eta(\Gamma(s_0, t_0))) \geq \inf_{(u,v) \in \mathcal{N}_0} J_0(u, v) = c_0$, resultando na contradição. Sendo assim, como não pode existir tal η , temos que $\|\nabla J_0(u_*, v_*)\| = \|\nabla J_*(w_*)\| = 0$, como queríamos. ■

Agora, graças aos Lemas 3.1.4, 3.1.5 e 3.1.6, temos os resultados que precisamos para provar a Proposição 3.1.3.

Demonstração da Proposição 3.1.3:

Note que, pelo Lema 3.1.4, a variedade de Nehari, \mathcal{N}_* , é não-vazia e que $w_* \in \mathcal{N}_* \subset \mathcal{T}_* \subset H_0^1(\Omega)$. Além disso, pelo Lema 3.1.5, existe $w_* \in \mathcal{N}_*$ tal que $J_*(w_*) = c_*$ e, pelo Lema 3.1.6, tal w_* é ponto crítico do funcional J_* . Portanto, temos que w_* é solução da equação (P_w) . Por fim, w_* muda de sinal exatamente uma vez, pois, $u(x) = w^+(x) > 0$, $v(x) = w^-(x) > 0$ e, $u(x)$ e $v(x)$ tem suportes disjuntos. ■

Agora, mostraremos a equivalência entre o procedimento variacional no qual a prova da Proposição 3.1.3 se baseia e a técnica de aproximação que leva à definição de c_0 , utilizado na Seção 2.4. Tal equivalência será apresentada e demonstrada no lema a seguir.

Lema 3.1.7. *Sejam c_0 e c_* definidos como anteriormente. Então, $c_0 \equiv c_*$ e, colocando $w_0 := u_0 - v_0$, com $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \rightarrow (u_0, v_0)$, temos que w_0 é solução de (P_w) . Além disso, $\text{supp}(u_0) \cap \text{supp}(v_0)$ é solução de (1).*

Demonstração: Lembrando que, se $\text{supp}(u) \cap \text{supp}(v) = \emptyset$, então

$$J_0(u, v) = J_*(u - v).$$

Se tomarmos w_* como na Proposição 3.1.3 e definirmos $u_* := w_*^+$ e $v_* := w_*^-$, seremos capazes de provar que $c_0 \leq c_*$. De fato, como w_* é ponto crítico de J_* , temos que

$$\nabla J_*(w_*^+) \cdot w_*^+ = \frac{\partial}{\partial u} J_0(u_*, v_*) \cdot u_* = 0$$

e

$$\nabla J_*(w_*^-) \cdot w_*^- = \frac{\partial}{\partial v} J_0(u_*, v_*) \cdot v_* = 0$$

e, portanto, $(u_*, v_*) \in \mathcal{N}_0$. Como $c_0 = \inf_{(u,v) \in \mathcal{N}_0} J_0(u, v)$, temos que

$$c_0 \leq J_0(u_*, v_*) = J_*(u_* - v_*) = J_*(w_*) = c_*. \quad (3.5)$$

Para mostrarmos a desigualdade contrária, considere o par (u_0, v_0) como obtido na Proposição 2.4.2. Como $(u_0, v_0) \in \mathcal{N}_0$, temos que $w_0 := u_0 - v_0 \in \mathcal{T}_*$ e, por (3.2),

$$\nabla J_*(w_0) \cdot w_0 = \nabla J_0(u_0, v_0) \cdot (u_0, v_0) = 0.$$

Logo, $w_0 \in \mathcal{N}_*$. Além disso,

$$J_*(w_0) = J_0(u_0, v_0) = c_0,$$

e daí, concluímos que

$$c_* = \inf_{w \in \mathcal{N}_*} J_*(w) \leq J_*(w_0) = c_0. \quad (3.6)$$

Assim, pelas desigualdades (3.5) e (3.6), podemos concluir que $J_*(w_0) = c_*$ e, aplicando o Lema 3.1.5, temos garantido que w_0 é ponto crítico de J_* .

Além disso, pela Teoria de Regularidade de Equações Diferenciais Parciais, os conjuntos $\text{supp}(u_0)$ e $\text{supp}(v_0)$ são abertos e, por um argumento análogo ao da demonstração do Teorema 2.4.1, temos que $\text{supp}(u_0)$ e $\text{supp}(v_0)$ são soluções para o problema (1). ■

Apêndice A

Apêndices

Neste **Apêndice**, apresentamos resultados importantes que foram utilizados durante nosso trabalho. A **Seção A.1** está destinada ao estudo de resultados de Métodos Variacionais importantes, mas especificamente, o Lema da Deformação, que foi utilizado nos **Capítulos 1, 2 e 3**.

Na **Seção A.2**, apresentamos o Teorema de Miranda como foi enunciado e demonstrado em [22] e também uma variação que foi utilizada na demonstração dos Lemas 2.3.13 e 3.1.6.

A **Seção A.3** é destinada, principalmente, a resultados de teoria de regularização de soluções. Estes resultados, nos ajudam a garantir que as soluções fracas obtidas são de fatos clássicas e também que são estritamente positivas, no caso das soluções para o problema $(P_{u,v})$.

A **Seção A.4** possui a definição de grau topológico como enunciada em [24] e também algumas propriedades relativos à Teoria do Grau, na **Subseção A.4.1**.

Por último, na **Seção A.5**, apresentamos alguns resultados, em sua maioria, apenas o enunciado, que foram utilizados durante todo o nosso trabalho, principalmente nos cálculos.

A.1 Resultados de Métodos Variacionais

Para a demonstração do próximo resultado, apresentado em [24], consideraremos os seguintes conjunto:

$$\varphi^c = \{x \in X : \varphi(x) \leq c\}$$

$$S_\delta = \{x \in X : \text{dist}(x, S) \leq \delta\}$$

Definição A.1.1. *Seja M um espaço métrico, X um espaço normado e $h : M \rightarrow X' \setminus \{0\}$, uma aplicação contínua. Um campo vetorial pseudogradiante de h sobre M é um campo vetorial $g : M \rightarrow X$, localmente Lipschitz contínuo, tal que, para todo $u \in M$,*

$$\|g(u)\| \leq 2\|h(u)\|$$

$$\langle h(u), g(u) \rangle \geq \|h(u)\|^2.$$

Lema A.1.2. *Sob as hipóteses da definição anterior, existe um campo vetorial pseudogradiante de h sobre M*

Demonstração: Ver [24], páginas 37 e 38, Lemma 2.2. ■

Lema A.1.3. *(Lema da Deformação) Sejam X um espaço de Banach, $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon, \delta > 0$ tais que*

$$(\forall u \in \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}) : \|\varphi'(u)\| \geq \frac{8\varepsilon}{\delta}. \quad (\text{A.1})$$

Então existe $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$ tal que:

- i) $\eta(t, u) = u$, se $t = 0$ ou se $u \notin \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$;
- ii) $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon} \cap S) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$;
- iii) $\eta(t, \cdot)$ é um homeomorfismo de X , $\forall t \in [0, 1]$;
- iv) $\|\eta(t, u) - u\| \leq \delta$, $\forall u \in X$, $\forall t \in [0, 1]$;
- v) $\varphi(\eta(\cdot, u))$ é não-crescente, $\forall u \in X$;
- vi) $\varphi(\eta(t, u)) < c$, $\forall u \in \varphi^c \cap S_\delta$, $\forall t \in]0, 1]$.

Demonstração: (Segue como em [24], páginas 38 e 39, Lemma 2.3)

Pelo lema anterior existe um campo vetorial pseudogradiante g para ϕ' sobre $M := \{u \in X : \phi(u) \neq 0\}$. Definindo

$$\begin{aligned} A &:= \phi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}, \\ B &:= \phi^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap S_\delta, \\ \psi(u) &:= \frac{\text{dist}(u, X \setminus A)}{\text{dist}(u, X \setminus A) + \text{dist}(u, B)}, \end{aligned}$$

de maneira que ψ é um campo vetorial localmente Lipschitz contínuo, $\psi = 1$ sobre B e $\psi = 0$ sobre $X \setminus A$. Definimos também o seguinte campo vetorial localmente Lipschitz contínuo

$$f(u) := \begin{cases} -\psi(u)\|g(u)\|^{-2}g(u), & u \in A \\ 0 & u \in X \setminus A. \end{cases}$$

Pela Definição A.1.1 e pela hipótese (A.1), temos que $\|f(u)\| \leq \frac{\delta}{8\varepsilon}$ em X . Para cada $u \in X$, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\sigma(t, u) = f(\sigma(t, u)) \\ \sigma(0, u) = u \end{cases}$$

tem única solução $\sigma(\cdot, u)$ definida em \mathbb{R} . Além disso, σ é contínua em $\mathbb{R} \times X$. Definimos η em $[0, 1] \times X$ por $\eta(t, u) := \sigma(8\varepsilon t, u)$. Segue da Definição A.1.1 e da hipótese (A.1) que, para $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|\sigma(t, u) - u\| &= \left| \int_0^t f(\sigma(\tau, u)) d\tau \right| \\ &\leq \int_0^t |f(\sigma(\tau, u))| d\tau \\ &\leq \frac{\delta t}{8\varepsilon} \end{aligned} \tag{A.2}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\phi(\sigma(t, u)) &= \langle \phi'(\sigma(t, u)), \frac{d}{dt}\sigma(t, u) \rangle \\ &= \langle \phi'(\sigma(t, u)), f(\sigma(t, u)) \rangle \\ &\leq \frac{-\psi(\sigma(t, u))}{4}. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Com isso, podemos verificar facilmente os itens *i*), *iii*), *iv*), *v*) e *vi*). Agora, seja $u \in \phi^{c+\varepsilon} \cap S$. Se existe $t \in [0, 8\varepsilon]$ tal que $\psi(\sigma(t, u)) < c - \varepsilon$, então $\phi(\sigma(8\varepsilon, u)) < c - \varepsilon$ e *ii*) é satisfeita. Se

$$\sigma(t, u) \in \phi^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]), \forall t \in [0, 8\varepsilon],$$

obtemos de (A.2) e (A.3) que

$$\begin{aligned} \phi(\sigma(8\varepsilon, u)) &= \phi(u) + \int_0^{8\varepsilon} \frac{d}{dt} \phi(\sigma(t, u)) dt \\ &\leq \phi(u) - \frac{1}{4} \int_0^{8\varepsilon} \psi(\sigma(t, u)) dt \\ &= c + \varepsilon - 2\varepsilon = c - \varepsilon, \end{aligned}$$

e, novamente, *ii*) é satisfeito. ■

A seguir, mostraremos um resultado que foi utilizado para mostrar que ∇J é um funcional contínuo, mas antes deste resultado, demonstraremos o seguinte lema:

Lema A.1.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $1 \leq p < \infty$. Se $u_n \rightarrow u \in L^q(\Omega)$, existe uma subsequência $\{w_n\}$ de $\{u_n\}$ e $g \in L^q(\Omega)$ tais que para quase todo $x \in \Omega$, $w_n(x) \rightarrow u(x)$ e*

$$|u(x)|, |w_n(x)| \leq g(x).$$

Demonstração: (Segue como em [24], página 133, Appendix A, Lemma A.1)

Passando para uma subsequência caso seja necessário, podemos assumir que $u_n(x) \rightarrow u(x)$ q.t.p $x \in \Omega$. Assim, existe uma subsequência $\{w_n\} \subset \{u_n\}$ tal que

$$\|w_{j+1} - w_j\|_q \leq 2^{-j}, \forall j \geq 1.$$

Definindo

$$g(x) := |w_1(x)| + \sum_{j=1}^{\infty} |w_{j+1}(x) - w_j(x)|,$$

obtemos que, para quase todo $x \in \Omega$, $|w_n(x)| \leq g(x)$ e $|u(x)| \leq g(x)$. ■

Teorema A.1.5. *Sejam Ω tal que $|\Omega| < \infty$, $1 \leq q, r < \infty$, $f \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ e*

$$|f(x, u)| \leq c(1 + |u|^{\frac{q}{r}}).$$

Então, para todo $u \in L^q(\Omega)$, $f(\cdot, u) \in L^r(\Omega)$ e o operador

$$A : L^q(\Omega) \longrightarrow L^r(\Omega)$$

definido por $(Au)(x) := f(x, u(x))$ é contínuo.

Demonstração: (Segue como em [24], página 133-134, Appendix A, Theorem A.2)

A demonstração será apresentada em duas partes:

1) Suponha que $u \in L^q(\Omega)$. Assim,

$$|f(x, u(x))|^r \leq c^r (1 + |u|^{\frac{q}{r}})^r \in L^1(\Omega)$$

e portanto $f(\cdot, u) \in L^r(\Omega)$.

2) Suponha que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^q(\Omega)$ é uma seqüência que converge para $u \in L^q(\Omega)$. Seja $\{w_n\}$ uma subseqüência de $\{u_n\}$ e g uma função como as dadas no Lema A.1.4. Como

$$|f(x, w_n(x)) - f(x, u(x))|^r \leq 2^r c^r (1 + |g(x)|^{\frac{q}{r}})^r \in L^q(\Omega),$$

temos, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$f(\cdot, w_n) = Aw_n \rightarrow Au = f(\cdot, u) \in L^r(\Omega).$$

Assim, $Au_n \rightarrow Au \in L^r(\Omega)$. ■

A.2 Acerca do Teorema de Miranda

Teorema A.2.1. (*Teorema de Miranda*) Seja $G = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| < L, \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$ e suponha que a aplicação $F = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua no fecho de G , \overline{G} , de tal forma que $F(x) \neq \bar{0} := (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ para todo x na fronteira de G , ∂G , e que

i) $f_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, -L, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq 0$, para $1 \leq i \leq n$, e

ii) $f_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, +L, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq 0$, para $1 \leq i \leq n$.

Então, existe $x_0 \in G$ tal que $F(x_0) = \bar{0} \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: (Segue como em [22], páginas 701 e 702, Theorem 1)

Considere a homotopia

$$H : \overline{G} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

dada por $H(x, t) = (1 - t)F(x) + t(-x)$. Então, $H(x, t) \neq 0$ para $(x, t) \in \partial G$ e $t \in [0, 1]$. De fato, $H(x, 0) = F(x) \neq \bar{0}$, já que $\bar{0} \notin F(\partial G)$, e $H(x, 1) = -x \neq \bar{0}$, pois $\bar{0} \notin \partial G$. Além disso, se $H(x, t) = \bar{0}$ para algum $t \in (0, 1)$, temos

$$F(x) + t(1 - t)^{-1}(-x) = \bar{0},$$

o que é uma contradição por $t(1 - t)^{-1} > 0$ e pelo fato de as hipóteses i) e ii) garantirem que, para $x \in \partial G$, existe pelo menos um i tal que $f_i(x)(-x_i) > 0$. Assim, pelo teorema da invariância por homotopias da Teoria do Grau, segue que

$$\deg(F, \bar{0}, G) = \deg(H(\cdot, 0), \bar{0}, G) = \deg(H(\cdot, 1), \bar{0}, G),$$

em que $\deg(F, \bar{0}, G)$ indica o grau topológico de F em $\bar{0}$ relativo a G . Assim, $|\deg(F, \bar{0}, G)| = 1 \neq 0$ e o resultado segue do Teorema de Existência de Kronecker. ■

Corolário A.2.2. Seja $G = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \in (0, 2L), \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$ e suponha que a aplicação $F = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua no fecho de G , \overline{G} , de tal forma que $F(x) \neq \bar{0} := (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ para todo x na fronteira de G , ∂G , e que

i) $f_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq 0$, para $1 \leq i \leq n$, e

ii) $f_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 2L, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq 0$, para $1 \leq i \leq n$.

Então, existe $x_0 \in G$ tal que $F(x_0) = \bar{0} \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Considere a aplicação $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(x) := (g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))$ em que $g_i(x) := (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + L, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Temos que g é uma bijeção contínua por ser uma translação. Assim, restringindo g a um conjunto X tal que $g(\overline{X}) = \overline{G}$, temos que

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_{i-1}, -L, x_{i+1}, \dots, x_n) &= (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n); \\ g(x_1, \dots, x_{i-1}, +L, x_{i+1}, \dots, x_n) &= (x_1, \dots, x_{i-1}, 2L, x_{i+1}, \dots, x_n), \text{ para todo } 1 \leq i \leq n, \text{ e} \\ F \circ g(x) &= (f_1(g_1(x)), f_2(g_2(x)), \dots, f_n(g_n(x))). \end{aligned}$$

Logo, $F \circ g$ é contínua em \overline{X} , por hipótese,

$$f_i(g_i(x_1, \dots, x_{i-1}, -L, x_{i+1}, \dots, x_n)) = f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq 0, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n \text{ e}$$

$$f_i(g_i(x_1, \dots, x_{i-1}, +L, x_{i+1}, \dots, x_n)) = f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 2L, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq 0, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n.$$

Agora, pelo Teorema A.2.1, temos que existe $x_1 \in X$ tal que $F(g(x_1)) = \bar{0}$. Portanto, $x_0 := g(x_1) \in G$, é tal que $F(x_0) = \bar{G}$. ■

A.3 Resultados de Equações Diferenciais Parciais

Neste apêndice, apresentamos os resultados de Equações Diferenciais Parciais Elípticas que foram utilizados durante o trabalho para a regularização das soluções obtidas no mesmo. Estes resultados foram baseados nas referências [14] e [21].

Seja $\Omega \in \mathbb{R}^N$ um domínio qualquer. Considere um operador diferencial elíptico de segunda ordem da forma

$$Lu = a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u + b_i \frac{\partial}{\partial x_i} u + cu, \quad (\text{A.4})$$

em que os operadores $a_{ij} = a_{ji}$, b_i e c satisfazem a seguinte condição de elipticidade

$$a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2,$$

para alguma constante uniforme $\theta > 0$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Consideremos então a seguinte equação:

$$-\Delta u = g(\cdot, u), \text{ em } \Omega, \quad (\text{A.5})$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory, ou seja, $g(x, u)$ é uma função mensurável para todo $x \in \Omega$ e contínua na variável $u \in \mathbb{R}$. Além disso, vamos assumir que g satisfaz a seguinte condição de crescimento

$$|g(x, u)| \leq C(1 + |u|^p), \quad (\text{A.6})$$

com $p \leq \frac{N+2}{N-2}$, se $N \geq 3$. Dessa forma, por (A.6) e Teorema A.5.6, para qualquer $u \in H^1(\Omega)$ a composição $g(\cdot, u(\cdot)) \in H^{-1}(\Omega)$.

Com estas informações, apresentaremos o Teorema de Brézis-Kato. Este teorema nos permite garantir alguma regularidade às soluções fracas de um problema, dadas certas condições sobre a solução fraca, u , e sobre a não-linearidade, g .

Teorema A.3.1. (Teorema de Brézis-Kato) *Sejam Ω um domínio de \mathbb{R}^N e $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory tal que, para quase todo $x \in \Omega$ vale*

$$|g(x, u)| = a(x)(1 + |u|),$$

em que $a \in L^{\frac{N}{2}}_{loc}(\Omega)$ e $a \geq 0$. Seja também $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ uma solução fraca de

$$-\Delta u = g(\cdot, u) \text{ em } \Omega.$$

Então $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ para qualquer $p < \infty$. Se $u \in H^1_0(\Omega)$ e $a \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$, então $u \in L^p(\Omega)$ para qualquer $p < \infty$.

Demonstração: Ver [21], Appendix B, página 270 e 271, B.3 Lemma. ■

Lema A.3.2. *Seja $u \in H^1_0(\Omega)$. Então*

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla |u||^2 dx.$$

Demonstração: Para demonstrar tal fato, separaremos o conjunto Ω em três partes:

$$\Omega_+ := \{x \in \Omega : u(x) > 0\};$$

$$\Omega_0 := \{x \in \Omega : u(x) = 0\};$$

$$\Omega_- := \{x \in \Omega : u(x) < 0\}.$$

Note que $\Omega_+ \cup \Omega_0 \cup \Omega_- = \Omega$, pois para todo $x \in \Omega$, temos que x pertence a um dos três novos conjunto, logo $\Omega \subset \Omega_+ \cup \Omega_0 \cup \Omega_-$. Mas Ω_+ , Ω_0 e Ω_- são subconjuntos de Ω e, portanto, sua união também o é. Agora, a integral $\int_{\Omega} |\nabla |u||^2 dx$, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla |u||^2 dx &= \int_{\Omega_+} |\nabla |u||^2 dx + \int_{\Omega_0} |\nabla |u||^2 dx + \int_{\Omega_-} |\nabla |u||^2 dx \\ &= \int_{\Omega_+} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega_0} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega_-} |\nabla -u|^2 dx \\ &= \int_{\Omega_+} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega_0} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega_-} |-\nabla u|^2 dx \\ &= \int_{\Omega_+} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega_0} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega_-} |\nabla u|^2 dx \\ &= \int_{\Omega_+ \cup \Omega_0 \cup \Omega_-} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \end{aligned}$$

finalizando assim a demonstração. ■

Teorema A.3.3. *(Princípio do Máximo Forte)*

Seja L um operador uniformemente elíptico e $Lu \leq 0$ em um domínio Ω , não necessariamente limitado. Se $c \leq 0$ e $\frac{c}{\theta}$ é limitado, então u não pode atingir um mínimo não-positivo no interior de Ω a menos que u seja constante.

Demonstração: Ver [14], página 35, Theorem 3.5. ■

Teorema A.3.4. *Seja u uma solução em $W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ de uma equação elíptica $Lu = f$ em um domínio Ω , em que os coeficientes de L pertencem a $C^{k-1,1}(\Omega)$, $(C^{k-1,\alpha}(\Omega))$, $f \in W^{k,q}_{loc}(\Omega)$, $(C^{k-1,\alpha}(\Omega))$, com $1 < p, q < \infty$, $k \geq 1$, $0 < \alpha < 1$. Então $u \in W^{k+2,q}_{loc}(\Omega)$, $(C^{k+1,\alpha}(\Omega))$. Além disso, se $\Omega \in C^{k+1,1}$, $(C^{k+1,\alpha})$, L é estritamente elíptica em Ω com coeficientes em $C^{k-1,1}(\bar{\Omega})$, $(C^{k-1,\alpha}(\bar{\Omega}))$ e $f \in W^{k,q}(\Omega)$, $(C^{k-1,\alpha}(\bar{\Omega}))$, então $u \in W^{k+2,q}(\Omega)$, $(C^{k+1,\alpha}(\bar{\Omega}))$.*

A.4 Resultados da Teoria do Grau

Seja Ω um conjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^N e denote por $\partial\Omega$ a sua fronteira. O grau topológico de $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ representa, de maneira genérica, o número de vezes que o ponto b foi a imagem de f neste conjunto.

Definição A.4.1. *Seja $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que $b \notin f(\partial\Omega)$ e b é um valor regular de $f|_{\Omega}$. Se $u \in f^{-1}(b)$, então $f'(u)$ é invertível. Pelo Teorema da Função Inversa, $f^{-1}(b)$ é finito. Dessa forma, definimos o grau de f em b relativo a Ω por*

$$\deg(f, b, \Omega) = \sum_{u \in f^{-1}(b)} \operatorname{sgn}(\det(f'(u))).$$

A.4.1 Propriedades do Grau

Proposição A.4.2. *Sejam Ω um aberto limitado de \mathbb{R}^N e $b \in \mathbb{R}^N$. Suponha que $f_1, f_2 : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ são duas funções contínuas tais que $b \notin f_1(\partial\Omega) \cup f_2(\partial\Omega)$. Então, se*

$$\|f_1 - f_2\| \leq \frac{1}{4} \operatorname{dist}(b, f_1(\partial\Omega) \cup f_2(\partial\Omega)),$$

temos $\deg(f_1, b, \Omega) = \deg(f_2, b, \Omega)$.

Proposição A.4.3. *(Estabilidade relativa ao ponto) Seja Ω um aberto limitado e $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Suponha que $b, b' \in \mathbb{R}^N$ estão na mesma componente conexa de $f(\partial\Omega)^c$, então*

$$\deg(f, b, \Omega) = \deg(f, b', \Omega).$$

Demonstração: (Segue como em [16], página 103, 2.2 Proposition).

Basta mostrar que se $b' \in \mathbb{R}^N$ é suficientemente próximo de b , então o grau é o mesmo. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \frac{1}{4} \operatorname{dist}(b, f(\partial\Omega))$ e defina

$$f_0(x) := f(x) - b, \quad f_1(x) := f(x) - b'.$$

Note que, se $\operatorname{dist}(b', b) < \varepsilon$, então $\|f_0 - f_1\|_{\infty} < \varepsilon$, e, por consequência da Proposição A.4.2,

$$\deg(f, b, \Omega) = \deg(f_0, 0, \Omega) = \deg(f_1, 0, \Omega) = \deg(f, b', \Omega).$$

■

Proposição A.4.4. *(Aditividade) Sejam Ω_1 e Ω_2 dois abertos limitados disjuntos de \mathbb{R}^N e $f \in C(\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}, \mathbb{R}^N)$. Se b é um ponto de \mathbb{R}^N e $b \notin f(\partial\Omega_1) \cup f(\partial\Omega_2)$, então*

$$\deg(f, b, \Omega_1 \cup \Omega_2) = \deg(f, b, \Omega_1) + \deg(f, b, \Omega_2).$$

Demonstração: (Segue como em [16], página 103, 2.3 Proposition)

Note que basta aproximarmos f por funções regulares na definição. Note também que o resultado é direto se acrescentarmos a hipótese de que f é de classe C^1 . ■

Corolário A.4.5. *(Excisão) Sejam Ω um aberto limitado, uma função $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $K \subset \Omega$ um compacto e $b \in \mathbb{R}^N$ tal que $b \notin f(K) \cup f(\partial\Omega)$. Então*

$$\deg(f, b, \Omega) = \deg(f, b, \Omega \setminus K).$$

Demonstração: (Segue como em [16], página 103, 2.4 Corollaire)

Este resultado é verificado ao considerarmos $\Omega_1 = \Omega \setminus K$ e $\Omega_2 = K$. Assim, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, e como $b \notin f(K)$, temos que

$$\text{deg}(f, b, K) = 0.$$

Portanto,

$$\text{deg}(f, b, \Omega) = \text{deg}(f, b, \Omega \setminus K).$$

■

A.5 Resultados de Medida e Integração e Análise Funcional

Teorema A.5.1. (Desigualdade de Hölder) *Seja $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$, com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Então $fg \in L^1$ e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Demonstração: Ver [23], página 128, (8.6) Theorem. ■

Lema A.5.2. (Lema de Fatou)

Se $\{f_k\}$ é uma sequência de funções mensuráveis não-negativas em E , então

$$\int_E \left(\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \right) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx.$$

Demonstração: Ver [23], página 70, (5.17) Theorem. ■

Teorema A.5.3. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)

Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ que satisfaz

a) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p. x em Ω ;

b) *existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que, para todo n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$.*

Então, $f \in L^1$ e $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$.

Demonstração: Ver [23], página 76, (5.36) Theorem. ■

Lema A.5.4. *Seja $p \geq 1$. Então, para todo $a, b \in \mathbb{R}$, temos que*

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1} (a^p + b^p).$$

Demonstração: Primeiramente, note que, se $p \geq 1$, então a função x^p é convexa. Dessa maneira, temos que

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right)^p \leq \frac{a^p}{2} + \frac{b^p}{2}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^p} (a + b)^p &\leq \frac{a^p}{2} + \frac{b^p}{2} \\ \iff (a + b)^p &\leq 2^p \left(\frac{a^p}{2} + \frac{b^p}{2} \right) \\ \iff (a + b)^p &\leq 2^{p-1} (a^p + b^p), \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. ■

Teorema A.5.5. (Teorema de Rellich-Kondrachov)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado e de classe C^1 . Então as seguintes imersões são compactas:

$$\begin{aligned} W^{1,q}(\Omega) &\hookrightarrow L^p(\Omega), \forall p \in [1, q^*), \text{ em que } \frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = \frac{1}{N}, \text{ se } q < N; \\ W^{1,q}(\Omega) &\hookrightarrow L^p(\Omega), \forall p \in [q, +\infty), \text{ se } q = N; \\ W^{1,q}(\Omega) &\hookrightarrow C(\bar{\Omega}), \text{ se } q > N. \end{aligned}$$

Em particular, $W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é compacta para todo q e para todo N .

Demonstração: Ver [4], página 285, Theorem 9.16. ■

Teorema A.5.6. Se $1 \leq q < N$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado, então vale a imersão

$$W_0^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),$$

para qualquer $p \in [1, q^*]$.

Demonstração: Este resultado, segue do Teorema A.5.5, como podemos ver em [4], página 290, Remark 20. Ele segue do fato de $W_0^{1,q}(\Omega) \subset W^{1,q}(\Omega)$, por definição, e da imersão

$$W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

■

Teorema A.5.7. Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado e $1 \leq q < N$. Então, para todo $p \in [1, q^*]$, existe $C = C(n, p, q, |\Omega|) > 0$ tal que

$$\|u\|_p \leq C \|\nabla u\|_q,$$

para todo $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

Demonstração: Este resultado é consequência direta do Teorema A.5.6. ■

Teorema A.5.8. (Desigualdade de Poincaré)

Sejam $1 \leq q < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado. Então, existe uma constante C , dependendo de Ω e q tal que

$$\|u\|_q \leq C \|\nabla u\|_q, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega).$$

Em outras palavras, as normas $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ e $\|\nabla u\|_2$ são equivalentes.

Demonstração: Ver [4], página 290, Corollary 9.19. ■

Teorema A.5.9. Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tais que

$$\|f_n \rightarrow f\|_p \rightarrow 0.$$

Então, existem uma subsequência $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tais que:

a) $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$.

b) $|f_{n_k}| \leq h(x)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, q.t.p. $x \in \Omega$.

Demonstração: Ver [4], páginas 94 e 95, Theorem 4.9. ■

Teorema A.5.10. (*Teorema da Função Implícita Generalizado*)

Sejam X , Y e Z três espaços de Banach, $\Omega \subset X \times Y$ um aberto e $\chi \in C^1(\Omega, Z)$. Suponha que $(x_0, y_0) \in \Omega$ é tal que $\chi(x_0, y_0) = 0$ e que $\frac{\partial}{\partial y}\chi(x_0, y_0)$ é um homeomorfismo linear de Y em Z . Então, existe $\omega \subset X$, vizinhança conexa de x_0 e uma única aplicação $\varphi \in C^1(\omega, Y)$ tal que $\varphi(x_0) = y_0$ e, para todo $x \in \omega$, temos $\chi(x, \varphi(x)) = 0$.

Demonstração: Ver [13], páginas 275 e 276, (10.2.1). ■

Referências Bibliográficas

- [1] Uniqueness and stability for solutions of competing species equations with large interactions. *Comm. Appl. Nonlinear Anal.*, 1(2), 1994.
- [2] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz. Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal of Functional Analysis*, (14):349–381, 1973. [2](#), [4](#)
- [3] T. Bartsch and M. Willem. Infinitely many radial solutions of a semilinear elliptic problem on \mathbf{R}^N . *Arch. Rational Mech. Anal.*, 124(3):261–276, 1993. [2](#)
- [4] H. Brézis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext Series. Springer, 2010. [106](#)
- [5] R. S. Cantrell and C. Cosner. *Spatial Ecology Via Reaction-Diffusion Equations*. Wiley Series in Mathematical & Computational Biology. John Wiley & Sons, 2004. [1](#)
- [6] M. Conti, S. Terracini, and G. Verzini. Nehari’s problem and competing species systems. *Annales de l’Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, 19(6):871–888, 2002. [1](#), [21](#), [22](#), [23](#), [24](#)
- [7] C. Cosner and A. C. Lazer. Stable coexistence states in the volterra-lotka competition model with diffusion. 44(6):1112–1132, 1984. [1](#)
- [8] N. Dancer. Competing species systems with diffusion and large interactions. *Milan Journal of Mathematics*, 65:23–33, 1995.
- [9] N. Dancer and Y. Du. Competing species equations with diffusion, large interactions, and jumping nonlinearities. *Journal of Differential Equations*, 114(2):434–475, 1994. [2](#)
- [10] N. Dancer and Y. Du. Positive solutions for a three-species competition system with diffusion—i. general existence results. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 24(3):337–357, 1995.
- [11] N. Dancer and Y. Du. Positive solutions for a three-species competition system with diffusion—ii. the case of equal birth rates. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 24(3):359–373, 1995.
- [12] N. Dancer and Z. Zhang. Dynamics of lotka–volterra competition systems with large interaction. *Journal of Differential Equations*, 182(2):470–489, 2002. [1](#)
- [13] J. Dieudonné, M. D. Huet, and M. G. Julia. *Éléments D’Analyse - Tome 1 - Fondements De L’Analyse Moderne*. Gauthier-Villars, 1969. [107](#)
- [14] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in mathematics. Springer, 2001. [102](#), [103](#)

- [15] K. Hoffman and R. A. Kunze. *Linear algebra*. Prentice-Hall mathematics series. Prentice-Hall, 1961. [24](#), [54](#)
- [16] O. Kavian. *Introduction a la Theorie Des Points Critiques: Et Applications Aux Problemes Elliptiques*. Mathematiques Et Applications, Vol 13. Springer Verlag, 1993. [104](#), [105](#)
- [17] P. Korman and A. Leung. On the existence and uniqueness of positive steady states in the volterra-lotka ecological models with diffusion. *Applicable Analysis*, 26(2):145–160, 1987. [1](#)
- [18] Z. Nehari. On a class of nonlinear second-order differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, (95):101–123, 1960. [4](#)
- [19] Z. Nehari. Characteristic values associated with a class of non-linear second-order differential equations. *Acta Mathematica*, 105:141–175, 1961. [1](#), [4](#)
- [20] P. H. Rabinowitz. *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*. Number 65 in Regional Conference Series in Mathematics. American Mathematical Society, 1984. [4](#), [5](#)
- [21] M. Struwe. *Variational methods: applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer, 2008. [102](#), [103](#)
- [22] M. N. Vrahatis. A short proof and a generalization of miranda’s existence theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 107(3):pp. 701–703, 1989. [98](#), [101](#)
- [23] R. L. Wheeden and A. Zygmund. *Measure and integral: an introduction to real analysis*. Pure and applied mathematics. M. Dekker, 1977. [105](#)
- [24] M. Willem. *Minimax Theorems*, volume 24 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. Birkhäuser Boston, 1997. [2](#), [8](#), [98](#), [99](#), [100](#)