Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Álgebras associativas Lie nilpotentes de classe 4

por

Eudes Antonio da Costa

Brasília
2013

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Álgebras associativas Lie nilpotentes de classe 4

por

Eudes Antonio da Costa *

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA.

Brasília, 30 de Agosto de 2013.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Alexei Krassilnikov - UnB (Orientador)

Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov - UNICAMP/SP

Profa. Dra. Shirlei Serconek - UFG/GO

Prof. Dr. José Antônio Oliveira de Freitas - UnB

Prof. Dr. Victor Petrogradskiy - UnB

*O autor foi bolsista CNPq durante parte da elaboração deste trabalho.

Dedicatória

Aos meus filhos (Greco e Grieg), que aceitaram minha ausência para a realização deste.

À minha companheira Núbia, pelo apoio em todos os momentos e etapas do doutorado.

A meus pais, José Primo e Divina Reis (in memorian), que me ensinaram as virtudes da paciência e da persistência.

Agradecimentos

À Deus pelo dom da vida,

Ao professor Alexei, pela orientação e agradável convivência neste período.

À professora Shirlei Serconek (IME-IFG) pelo estímulo à busca de conhecimento.

À Universidade Federal do Tocantins pela liberação (institucional) parcial das atividades docentes. Ressalto ainda a atenção, o respeito e o apoio dos colegas do colegiado do curso de Matemática do câmpus de Arraias aos meus compromissos acadêmicos na UnB.

Aos professores da banca examinadora pelas sugestões e colaboraçoes na melhoria deste.

Aos professores e funcionários do departamento de Matemática da UnB, especial destaque aos professores Noraí Rocco e Rui Seimetz.

Aos meus familiares -irmãos(as), sobrinhos(as), tios(as)- de sangue, por lei ou por afeição, pelas valiosas palavras de incentivo.

Abraços fraternais aos colegas acadêmicos de estudo, de sala, de café... Todos vocês que muito me ajudou, uma palavra "Saudades destes dias".

Epígrafe

Que ninguém se engane, só se consegue a simplicidade através de muito trabalho.

Clarice Lispector

Resumo

Sejam K um anel associativo, comutativo e unitário e $K\langle X\rangle$ a K-álgebra associativa livre num conjunto não-vazio X de geradores livres. Defina um comutador normado à esquerda $[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ por $[a,b]=ab-ba$ e $[a,b,c]=\big[[a,b],c\big]$. Para $n\geq 2$, seja $T^{(n)}$ o ideal bilateral em $K\langle X\rangle$ gerado pelos comutadores $[a_1,a_2,\ldots,a_n] \quad (a_i\in K\langle X\rangle)$. A álgebra quociente $K\langle X\rangle/T^{(n+1)}$ pode ser vista como a K-álgebra universal associativa Lie nilpotente de classe n gerada por X.

É fácil ver que o ideal $T^{(2)}$ é gerado, como um ideal bilateral em $K\langle X\rangle$, pelos comutadores $[x_1,x_2] \quad (x_i\in X)$. É bem conhecido que o ideal $T^{(3)}$ é gerado pelos polinômios $[x_1,x_2,x_3]$ e $[x_1,x_2][x_3,x_4]+[x_1,x_3][x_2,x_4] \quad (x_i\in X)$. Um conjunto similar de geradores para $T^{(4)}$ é também conhecido. O resultado principal do presente trabalho é exibir um conjunto semelhante de geradores para $T^{(5)}$. Nós provaremos que o ideal $T^{(5)}$ é gerado, como um ideal bilateral em $K\langle X\rangle$, pelos seguintes polinômios:

$$
\begin{gathered}
[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5], \quad [x_1,x_2,x_3][x_4,x_5,x_6], \quad [x_1,x_2,x_3][x_4,x_5,x_6,x_7],\\
[x_1,x_2][x_3,x_4,x_5,x_6]+[x_6,x_2][x_3,x_4,x_5,x_1], \quad \big([x_1,x_2][x_3,x_4]+[x_1,x_3][x_2,x_4]\big)[x_5,x_6,x_7],\\
\big[[x_1,x_2][x_3,x_4]+[x_1,x_3][x_2,x_4],x_5,x_6\big],\\
\big[[x_1,x_2][x_3,x_4]+[x_1,x_3][x_2,x_4],x_5\big][x_6,x_7]+\big[[x_1,x_2][x_3,x_4]+[x_1,x_3][x_2,x_4],x_6\big][x_5,x_7],\\
\big([x_1,x_2][x_3,x_4]+[x_1,x_3][x_2,x_4]\big)\big([x_5,x_6][x_7,x_8]+[x_5,x_7][x_6,x_8]\big),
\end{gathered}
$$

com $x_i\in X$ para todo i.

Nós também descreveremos algumas componentes multilineares de $\mathbb{Z}\langle X\rangle/L_3$ e $\mathbb{Z}\langle X\rangle/L_4$, sendo L_n o n-ésimo termo da série central inferior de $\mathbb{Z}\langle X\rangle$ visto como um anel de Lie.

Abstract

Let K be a unital associative and commutative ring and let $K\langle X\rangle$ be the free associative K-algebra on a non-empty set X of free generators. Define a left-normed commutator $[x_1,x_2,\dots,x_n]$ by $[a,b]=ab-ba$ and $[a,b,c]=\big[[a,b],c\big]$. For $n\geq 2$, let $T^{(n)}$ be the two-sided ideal in $K\langle X\rangle$ generated by all commutators $[a_1,a_2,\dots,a_n] \quad (a_i\in K\langle X\rangle)$. The quotient algebra $K\langle X\rangle/T^{(n+1)}$ can be viewed as the universal Lie nilpotent associative K-algebra of class n generated by X.

It can be easily seen that the ideal $T^{(2)}$ is generated, as a two-sided ideal in $K\langle X\rangle$, by the commutators $[x_1,x_2] \quad (x_i\in X)$. It is well-known that $T^{(3)}$ is generated by the polynomials $[x_1,x_2,x_3]$ and $[x_1,x_2][x_3,x_4]+[x_1,x_3][x_2,x_4] \quad (x_i\in X)$. A similar generating set for $T^{(4)}$ is also known. The aim of the present work is to exhibit a similar generating set for $T^{(5)}$. We prove that the ideal $T^{(5)}$ is generated, as a two-sided ideal in $K\langle X\rangle$, by the following polynomials:

$$
\begin{gathered}
[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5], \quad [x_1,x_2,x_3][x_4,x_5,x_6], \quad [x_1,x_2,x_3][x_4,x_5,x_6,x_7],\\
[x_1,x_2][x_3,x_4,x_5,x_6]+[x_6,x_2][x_3,x_4,x_5,x_1], \quad \big([x_1,x_2][x_3,x_4]+[x_1,x_3][x_2,x_4]\big)[x_5,x_6,x_7],\\
\big[[x_1,x_2][x_3,x_4]+[x_1,x_3][x_2,x_4],x_5,x_6\big],\\
\big[[x_1,x_2][x_3,x_4]+[x_1,x_3][x_2,x_4],x_5\big][x_6,x_7]+\big[[x_1,x_2][x_3,x_4]+[x_1,x_3][x_2,x_4],x_6\big][x_5,x_7],\\
\big([x_1,x_2][x_3,x_4]+[x_1,x_3][x_2,x_4]\big)\big([x_5,x_6][x_7,x_8]+[x_5,x_7][x_6,x_8]\big),
\end{gathered}
$$

where $x_i\in X$ for all i.

We also describe some multilinear components of $\mathbb{Z}\langle X\rangle/L_3$ and $\mathbb{Z}\langle X\rangle/L_4$ where L_n is the n-th term of the lower central series of $\mathbb{Z}\langle X\rangle$ viewed as a Lie ring.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Seja R um anel associativo. O anel R pode ser visto como anel de Lie, com a multiplicação de Lie definida por $[a,b] = ab - ba$ com $a,b \in R$. Denotamos este anel de Lie por $[R]$. Para $i \geq 1$ seja $L_i(R)$ o ideal em $[R]$ definido recursivamente por $L_1(R) = R$ e $L_{i+1}(R) = [L_i, R]$. Em outras palavras $L_i(R)$ é o subgrupo aditivo de R gerado por todos comutadores $\big[[\ldots[a_1,a_2],\ldots,a_{i-1}],a_i\big]$ normados à esquerda de comprimento i, sendo $a_1,\ldots,a_i \in R$. Observamos que $L_i(R)$ é o i-ésimo termo da série central inferior do anel de Lie $[R]$. Para $i > 1$ seja $T^{(i)}(R)$ o ideal bilateral em R gerado pelos elementos de $L_i(R)$. Se para algum m tivermos $T^{(m)}(R) = 0$, ou equivalentemente $L_m(R) = 0$, então R é chamado anel associativo Lie nilpotente de classe m.

Em 1947, Jennings[24] publicou um dos primeiros estudos sobre anéis associativos Lie nilpotentes. Em particular, ele mostrou que se R é Lie nilpotente então $T^{(2)}(R)$ é um ideal nil enquanto que $T^{(3)}(R)$ é nilpotente. E mais, se R é finitamente gerado então $T^{(2)}(R)$ também é nilpotente. No caso em que R é um anel nil finitamente gerado, R é nilpotente se e somente se é associativo Lie nilpotente.

Vários autores contribuíram com o estudo de álgebras e anéis associativos Lie nilpotentes, sob vários pontos de vista. Listamos: Jennings [23, 1942]; Jennings [25, 1955]; Drazin e Gruenberg [14, 1953]; Tyler [38, 1975]; Gupta e Levin [22, 1983]; Shalev [37, 1989]; Du [16, 1992]; Krasilnikov [28, 1997]; Riley e Tasić [35, 1999]; Riley e Wilson [36, 1999]; Amberg e Sysak [1, 2001]; Amberg e Sysak [2, 2003]; Petrogradsky [33, 2011], entre outros.

Se R for um anel associativo não comutativo, é interessante considerar os sucessivos quocientes $B_i(R) = L_i(R)/L_{i+1}(R)$ para $i \geq 1$. O modelo de comportamento dos quocientes $B_i(R)$

é em linhas gerais, que eles caracterizam, passo por passo, o desvio de R ser comutativo. Os quocientes $B_i(R)$ juntos formam a soma direta $B(R) = \oplus_{i\geq 1} B_i(R)$. Observamos que $B(R)$ é uma álgebra de Lie graduada, pois temos que $[B_i(R), B_j(R)] \subset B_{i+j}(R)$.

Seja $R_m = \mathbb{C}\langle x_1, x_2, \ldots, x_m\rangle$ a $\mathbb{C}$-álgebra associativa livre finitamente gerada, sendo $\mathbb{C}$ o corpo dos complexos. Recentemente diversos estudos procuraram descrever a estrutura geométrica dos quocientes $B_i(R) = L_i(R)/L_{i+1}(R)$ e $N_i(R) = T^{(i)}(R)/T^{(i+1)}(R)$ para $R = R_m$, bem como para algumas álgebras quocientes de R_m. Nesta linha podemos destacar o trabalho pioneiro de Feigin e Shoikhet [18, 2007]. Neste trabalho eles, em particular, descreveram o quociente $B_{m,2} = L_2(R_m)/L_3(R_m)$ para o caso em que $m = 2, 3$. Em trabalhos posteriores, para algumas álgebras R, incluindo $R = R_m$, diversos pesquisadores, procuraram descrever algumas propriedades do quociente $B_i(R_m)$ para algum m e para $i > 3$. Entre tantos pesquisadores podemos destacar: Dobrovolska e Etingof [12, 2008]; Dobrovolska, Kim e Ma [13, 2008]; Etingof, Kim e Ma [17, 2009]; Arbesfeld e Jordan [3, 2010]; Balagović e Balasubramanian [5, 2012]; Bapat e Jordan [6, 2013]; Bond e Jordan [8, 2013]; Kerchev [30, 2013] e ainda Jordan e Orem [26, 2013]. Entretanto, o problema de descrever o quociente B_i para todo i e para qualquer m, e em particular o cálculo das séries de Hilbert destes espaços, ainda continuam em aberto.

Uma outra linha de pequisa segue o trabalho de Bhupatiraju, Etingof e outros [7, 2012]. Neste trabalho consideram a K-álgebra associativa livre finitamente gerada $R_m = K\langle x_1, x_2, \ldots, x_m\rangle$, sendo K o anel $\mathbb{Z}$ dos inteiros ou um corpo finito $\mathbb{F}_p$ (ou seja, anéis livres e $\mathbb{F}_p$-álgebras livres). No caso em que $K = \mathbb{Z}$, como eles destacam,"novas estruturas emergem". Apontam "um fato novo, rico e interessante é que os quocientes $B_{m,i}$ desenvolvem torção". Neste trabalho eles estudam os quocientes $B_{m,i}$ e $N_{m,i}$, usando de recurso computacional (o pacote MAGMA). Com base nestes dados experimentais provam alguns resultados e propõem uma série de conjecturas. Em particular, eles mostraram que $\mathbb{Z}\langle X\rangle / T^{(3)}$ é um grupo abeliano livre. Nesta direção, Krasilnikov [29, 2013] mostrou que $\mathbb{Z}\langle X\rangle / T^{(4)}$ não é um grupo abeliano livre. Observamos que $Q_{n+1} = K\langle X\rangle / T^{(n+1)}$ pode ser vista como a álgebra universal associativa Lie nilpotente de classe n.

Nosso trabalho seguirá, em parte, esta última linha. Consideramos K um anel associativo, comutativo e unitário e R a K-álgebra associativa unitária livre $K\langle X\rangle$ no conjunto não-vazio X, não necessariamente finito. Nós apresentaremos um conjunto gerador do ideal bilateral $T^{(5)}$ em R, ou seja, as relações da álgebra universal associativa Lie nilpotente de classe 4.

Observamos que a conforme definição do ideal bilateral $T^{(n)}$ em $K\langle X\rangle$ temos que $\{[a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}] \mid a_{i_j} \in K\langle X\rangle\}$ é um conjunto gerador deste ideal; no entanto tal conjunto é "muito grande" e mesmo quando o conjunto X é finito tal conjunto gerador é infinito. Fato mais importante ainda é que este conjunto gerador é inadequado para trabalharmos no quociente $K\langle X\rangle/T^{(n)}$. Assim faz-se necessário de um "bom" conjunto gerador do ideal $T^{(n)}$, que seja não apenas "menor" que $\{[a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_n}]\,|\,a_{i_j}\in K\langle X\rangle\}$ mas também apropriado para trabalharmos no quociente $K\langle X\rangle/T^{(n)}$, ou seja, um conjunto gerador que envolva apenas elementos do conjunto X de geradores livres. É fácil ver que um "bom" conjunto gerador do ideal $T^{(2)}$, como um ideal bilateral em $K\langle X\rangle$, é formado pelos comutadores $[x_1,x_2]\,(x_i\in X)$. É bem conhecido que o ideal $T^{(3)}$ é gerado pelos polinômios $[x_1,x_2,x_3]$ e $[x_1,x_2][x_3,x_4]+[x_1,x_3][x_2,x_4]\,(x_i\in X)$ e este "bom" conjunto gerador do ideal $T^{(3)}$ foi apresentado em diversos trabalhos: para o caso em que K é um corpo de característica 0, veja Latyshev[31, 1963] ou Drensky [15, 1999]; e para K um anel associativo qualquer, veja Popov[34, 1979] ou Gupta e Krasilnikov [21, 1999]. Quando K é um corpo de característica 0 a descrição de um "bom" conjunto gerador do ideal $T^{(4)}$ com 3 tipos de polinômios é um dos principais resultados do artigo de Etingolf, Kim e Ma [17, 2009]. Este resultado pode ainda ser deduzido do trabalho de Volichenko [39, 1978]. Para o caso em que K é um anel associativo, comutativo e unitário a descrição de um "bom" conjunto gerador do ideal $T^{(4)}$ com 5 tipos de polinômios foi apresentado no artigo de Deryabina e Krasilnikov [10, 2013] .

Observamos ainda que até o momento nosso conhecimento sobre torção nos grupos aditivos dos quocientes $\mathbb{Z}\langle X\rangle/T^{(n)}$ é bastante limitado. É fácil ver que $\mathbb{Z}\langle X\rangle/T^{(2)}$ é isomórfico ao anel $\mathbb{Z}[X]$ de polinômios comutativos em X, portanto o grupo aditivo de $\mathbb{Z}\langle X\rangle/T^{(2)}$ é um grupo abeliano livre. No trabalho de Bhupatiraju, Etingof e outros [7, 2012] eles provaram que o grupo aditivo de $\mathbb{Z}\langle X\rangle/T^{(3)}$ é também um grupo abeliano livre. Pelo resultado de Krasilnikov [29, 2013] o grupo aditivo de $\mathbb{Z}\langle X\rangle/T^{(4)}$ não é um grupo abeliano livre; precisamente é uma soma direta $A_1\oplus A_2$ de um grupo abeliano livre A_1 e um 3-grupo abeliano elementar A_2. Por meio de dados experimentais (cálculos computacionais usando o pacote MAGMA feitos em MIT e de comunicação restrita) é possivel conjecturar que o grupo aditivo de $\mathbb{Z}\langle X\rangle/T^{(5)}$ é um grupo abeliano livre enquanto que o grupo aditivo de $\mathbb{Z}\langle X\rangle/T^{(n)}$ para $n>5$ é uma soma direta de um grupo abeliano livre com um 3-grupo abeliano elementar. Porém nenhuma destas conjecturas foi confirmada até o momento. No trabalho de Deryabina e Krasilnikov [10, 2013], para obter a descrição do grupo aditivo de $\mathbb{Z}\langle X\rangle/T^{(4)}$, precisaram do conjunto gerador do ideal $T^{(4)}$. A descrição do conjunto gerador do ideal $T^{(5)}$ apresentado neste trabalho pode ser entendido como um primeiro passo para confirmar (ou não) a conjectura sobre o grupo aditivo de $\mathbb{Z}\langle X\rangle/T^{(5)}$.

Em vista dos resultados obtidos por Bhupatiraju, Etingof e outros [7, 2012] e Krasilnikov [29, 2013] sobre os grupos aditivos dos quocientes $\mathbb{Z}\langle X\rangle/L_n$ para vários n, neste trabalho estudamos também a componente multilinear dos quocientes $\mathbb{Z}\langle X\rangle/L_3$ e $\mathbb{Z}\langle X\rangle/L_4$ de grau 4 e 5, respectivamente.

1.1 As relações das álgebras universais associativas Lie nilpotentes

Seja R uma álgebra associativa qualquer. Lembramos que para qualquer inteiro positivo $n \geq 2$ indicamos por $T^{(n)}(R)$ o ideal bilateral em R, gerado pelos comutadores $[a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}]$ de comprimento n, com $a_i \in R$. Denota-se por $Q_n(R)$ a álgebra quociente $R/T^{(n)}(R)$. Observamos que $Q_n(R)$ é a (maior) álgebra quociente de R que satisfaz a identidade polinomial $[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}]$.

Recordemos que uma álgebra associativa qualquer R é associativa Lie nilpotente de classe no máximo n se $T^{(n+1)}(R) = 0$, isto é, $R = Q_{n+1}(R)$. É fácil verificar que álgebras associativas Lie nilpotente de classe 1 são álgebras comutativas, pois $R = Q_2(R)$.

Sejam K um anel associativo, comutativo e unitário e $R = K\langle X\rangle$ a K-álgebra associativa unitária livre no conjunto $X = \{x_i \,|\, i \in \Lambda\}$ de geradores livres, com $\Lambda \subset \mathbb{N}$. Então R é um K-módulo livre com base $\{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k} \,|\, k \geq 0, i_l \in \Lambda\}$ formado pelos monômios não-comutativos nas variáveis $x_1, x_2, \ldots$ Consideremos ainda $[R]$ a álgebra de Lie associada à R com a multiplicação de Lie $[a,b] = ab - ba$, para quaisquer $a, b \in R$. Consideramos o comutador $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ normado à esquerda assumindo $[a,b,c] = [[a,b],c]$, para quaisquer $a,b,c \in R$. Para a K-álgebra associativa unitária livre $R = K\langle X\rangle$ indicamos por $T^{(n)}$ o ideal bilateral $T^{(n)}(R)$ em $R = K\langle X\rangle$. E ainda $Q_{n+1} = K\langle X\rangle/T^{(n+1)}$ pode ser vista como a álgebra universal associativa Lie nilpotente de classe n. Observamos ainda que $Q_2 = K\langle X\rangle/T^{(2)}$ é a álgebra polinomial comutativa ou a álgebra universal associativa Lie nilpotente de classe 1.

Lembramos que o ideal bilateral $T^{(2)}$ é gerado, por definição, pelos comutadores $[a_{i_1}, a_{i_2}]$ de comprimento 2, com $a_i \in R$. É fácil verificar que os polinômios do tipo $[x_{i_1}, x_{i_2}], i_s \in \Lambda$ formam um conjunto gerador do ideal $T^{(2)}$.

Um conjunto gerador para o ideal $T^{(3)}$ é bem conhecido; veja por exemplo [31, Lemma 1], [21, Lemma 1], [18, Proposition 1] ou [7, Proposition 3.1].

Proposição 1. $[[31],[21],[18],[7]]$ *Seja K um anel associativo, comutativo e unitário e seja $K\langle X\rangle$ a K-álgebra associativa livre com o conjunto $X=\{x_i\,|\,i\in\Lambda\}$ de geradores livres, então o ideal $T^{(3)}$ é gerado, como um ideal em $K\langle X\rangle$, pelos polinômios*

$$[x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3}] \quad (i_s\in\Lambda),$$
$$[x_{i_1},x_{i_2}][x_{i_3},x_{i_4}]+[x_{i_1},x_{i_3}][x_{i_2},x_{i_4}] \quad (i_s\in\Lambda).$$

Observamos que nos trabalhos de Latyshev [31] e Feigin e Shoikhet [18] a Proposição 1 é enunciada no caso em que K é um corpo de característica 0, enquanto que no trabalho de Gupta e Krasilnikov [21] (que faz referência ao trabalho de Popov[34]) K é um anel associativo qualquer; já no trabalho de Bhupatiraju, Etingof e outros [7] K é o anel $\mathbb{Z}$ dos inteiros. O resultado anterior ainda pode ser deduzido do trabalho de: Di Vincenzo [11] ou Drensky [15, Lemma 5.1.1] se K é um corpo de característica 0, e do trabalho de Giambruno e Koshlukov [19] para um corpo infinito de característica $p>2$.

Observamos que no caso em que $\Lambda=\{1,2,\ldots,m\}$ for finito, $R_m=K\langle X\rangle$ significa a K-álgebra associativa livre com conjunto não-vazio X finito de geradores livres. Indicamos por $Q_{m,n}=Q_n(R_m)$ as álgebra quocientes $R_m/T^{(n)}$. Assim a Proposição 1 exibe as relações da álgebra $Q_{m,3}$, ou seja, as relações da álgebra universal associativa Lie nilpotente de classe 2.

Como já dissemos, para K um corpo de característica 0 um conjunto gerador do ideal $T^{(4)}$ foi apresentado no trabalho de Etingof, Kim e Ma [17]. Como os coeficientes dos polinômios geradores são todos inteiros, o resultado de Etingof, Kim e Ma [17] (Theorem 4.3) vale para qualquer corpo K de característica diferente de 3. Ainda para K um corpo de característica 0 este conjunto de geradores do ideal $T^{(4)}$ pode ser extraído do trabalho de Volichenko [39].

Proposição 2A. *[17, Theorem 4.3] Sejam K um corpo de característica 0 e $K\langle X\rangle$ a K-álgebra associativa livre sobre o conjunto $X=\{x_i\,|\,i\in\Lambda\}$ de geradores livres, então o ideal $T^{(4)}$ é gerado, como um ideal bilateral em $K\langle X\rangle$, pelos polinômios*

$$[x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4}] \quad (i_s\in\Lambda), \tag{1.1}$$
$$[x_{i_1},x_{i_2}][x_{i_3},x_{i_4},x_{i_5}] \quad (i_s\in\Lambda), \tag{1.2}$$
$$\big([x_{i_1},x_{i_2}][x_{i_3},x_{i_4}]+[x_{i_1},x_{i_3}][x_{i_2},x_{i_4}]\big)[x_{i_5},x_{i_6}] \quad (i_s\in\Lambda). \tag{1.3}$$

Recentemente Deryabina e Krasilnikov [10] exibiram o seguinte conjunto gerador para $T^{(4)}$, considerando K um anel associativo, comutativo e unitário.

Proposição 2B. *[10, Theorem 1.3] Seja K um anel associativo, comutativo e unitário e seja $K\langle X\rangle$ a K-álgebra associativa livre sobre o conjunto $X = \{x_i \,|\, i \in \Lambda\}$ de geradores livres, então o ideal $T^{(4)}$ é gerado, como um ideal bilateral em $K\langle X\rangle$, pelos polinômios*

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}] \quad (i_s \in \Lambda), \tag{1.4}$$

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}][x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}] \quad (i_s \in \Lambda), \tag{1.5}$$

$$[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}] + [x_{i_5}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_1}] \ (i_s \in \Lambda), \tag{1.6}$$

$$[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}] + [x_{i_1}, x_{i_3}][x_{i_2}, x_{i_4}, x_{i_5}] \ (i_s \in \Lambda), \tag{1.7}$$

$$\big([x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}] + [x_{i_1}, x_{i_3}][x_{i_2}, x_{i_4}]\big)[x_{i_5}, x_{i_6}] \quad (i_s \in \Lambda). \tag{1.8}$$

Observação 1.1. Observamos que $3[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}] \in T^{(4)}$ (veja Volinchenko [39] ou Etingof, Kim, Ma [17]). Com isso se K for um anel associativo, comutativo e unitário tal que $\frac{1}{3} \in K$ temos que $[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}] \in T^{(4)}$. Como os elementos $(1.5) - (1.7)$ pertencem ao ideal gerado por $[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}]\,(i_s \in \Lambda)$. Se $\frac{1}{3} \in K$ então o ideal gerado pelos elementos $(1.4) - (1.8)$ coincide com o ideal gerado por $(1.1) - (1.3)$.

Observamos que no caso em que $\Lambda = \{1, 2, \ldots, m\}$ for finito, $R_m = K\langle X\rangle$ significa a K-álgebra associativa livre com conjunto não-vazio X finito de geradores livres. Assim a Proposição 2 exibe as relações da álgebra $Q_{m,4}$, ou seja, as relações da álgebra universal associativa Lie nilpotente de classe 3.

O nosso resultado principal será exibir um conjunto gerador para o ideal bilateral $T^{(5)}$, ou seja, as relações da álgebra universal associativa Lie nilpotente de classe 4. Esperamos assim contribuir para uma futura descrição da álgebra Q_5. Observamos que este resutado foi postado em arXiv no último mês de junho [9].

Teorema 3. *Seja K um anel associativo comutativo unitário e seja $K\langle X\rangle$ a K-álgebra associativa livre com o conjunto $X = \{x_i \mid i \in \Lambda\}$ de geradores livres, então o ideal $T^{(5)}$ é gerado, como ideal bilateral em $K\langle X\rangle$, pelos polinômios*

$$
\begin{gathered}
[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}], \\
[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}] + [x_{i_6}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_1}], \\
[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}][x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}], \\
[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}][x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}, x_{i_7}], \\
\big([x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}] + [x_{i_1}, x_{i_3}][x_{i_2}, x_{i_4}]\big)[x_{i_5}, x_{i_6}, x_{i_7}], \\
\big[[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}] + [x_{i_1}, x_{i_3}][x_{i_2}, x_{i_4}], x_{i_5}, x_{i_6}\big], \\
\big[[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}] + [x_{i_1}, x_{i_3}][x_{i_2}, x_{i_4}], x_{i_5}\big][x_{i_6}, x_{i_7}] + \\
+\big[[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}] + [x_{i_1}, x_{i_3}][x_{i_2}, x_{i_4}], x_{i_6}\big][x_{i_5}, x_{i_7}], \\
\big([x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}] + [x_{i_1}, x_{i_3}][x_{i_2}, x_{i_4}]\big)\big([x_{i_5}, x_{i_6}][x_{i_7}, x_{i_8}] + [x_{i_5}, x_{i_7}][x_{i_6}, x_{i_8}]\big),
\end{gathered}
$$

com $i_s \in \Lambda$ para todo s.

Observação 1.2. Sejam K um anel associativo, comutativo e unitário e $R = K\langle X\rangle$ a K-álgebra associativa livre com o conjunto $X = \{x_i \mid i \in \Lambda\}$ de geradores livres, com $\Lambda \subset \mathbb{N}$. Seja ainda R_n um ideal bilateral em R, definido recursivamente por

$$R_0 = R \quad \text{e} \quad R_{n+1} = R[R_n, R]R \quad \text{para} \quad n \geq 0.$$

O estudo da série de ideais R_n foi iniciada por Jennings [23, 1942] pouco antes dos ideais $T^{(n)}$. Se para algum anel asssociativo R tivermos $R_n = 0$, para algum $n \geq 1$, então o anel R é chamado fortemente Lie nilpotente; veja por exemplo Petrogradsky [33].

Em contraste a um "bom" conjunto gerador do ideal $T^{(n)}$ e a descrição do grupo aditivo do anel quociente $\mathbb{Z}\langle X\rangle / T^{(n)}$, que nada sabemos para $n > 5$, um "bom" conjunto gerador do ideal R_n e a descrição do grupo aditivo de R/R_n são bem conhecidos para qualquer n. Mais precisamente, consideremos a série de conjuntos de comutadores X_n dado recursivamente por

$$X_0 = X \quad \text{e} \quad X_{n+1} = [X_n, X] \quad \text{para} \quad n \geq 0.$$

Para todo n segue do trabalho de Drazin e Gruenberg [14, 1953] que o ideal R_n é gerado por todos os produtos de comutadores da forma

$$x_{(n_1)} x_{(n_2)} \cdots x_{(n_l)},$$

com $x_{(n_r)} \in X_{n_r}$, $n_r \geq 1$ $(r = 1, \ldots, l)$ e $n_1 + n_2 + \cdots + n_l = n$. Por exemplo, o ideal R_2 é gerado por todos produtos de comutadores da forma

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}] \text{ e } [x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}];$$

com $i_s \in \Lambda$ para todo s. Enquanto que o ideal R_3 é gerado por todos produtos de comutadores da forma

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}],\ [x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}] \text{ e } [x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}][x_{i_5}, x_{i_6}];$$

com $i_s \in \Lambda$ para todo s. Já no trabalho [38, 1975] Tyler mostrou que o grupo aditivo de $\mathbb{Z}\langle X \rangle / R_n$ é um grupo abeliano livre e ainda descreveu explicitamente uma base deste grupo para todo n.

A série de ideais R_n (definida de outra forma) também foi considerada por Kapranov [27, 1998] que a usou para desenvolver uma versão de geometria algébrica não-comutativa. Uma tentativa de desenvolver uma construção análoga usando os ideais $T^{(n)}$ foi feita recentemente por Jordan e Orem [26, 2013].

1.2 A série central inferior de um anel associativo livre visto como um anel de Lie

Seja R um anel associativo não comutativo e $[R]$ o anel de Lie associado à R. Recordemos que $L_i(R)$ é o ideal em $[R]$ definido recursivamente por $L_1(R) = R$ e $L_{i+1}(R) = [L_i(R), R]$ para $i > 1$. Deste modo $L_i(R)$ é o i-ésimo termo da série central inferior de $[R]$. Como já dissemos, os sucessivos quocientes $B_i(R) = L_i(R)/L_{i+1}(R)$ para $i \geq 1$ tem sido objeto de interesse de diversos trabalhos recentes (veja por exemplo [18], [6], [12], [13]). No caso em que $R = \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, \ldots \rangle$ é o anel livre com geradores livres $x_1, x_2, \ldots$ novos fenômenos aparecem; tais quocientes desenvolvem torção, veja [7]. Para $R = \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, \ldots \rangle$ usamos a seguinte notação $L_i = L_i(R)$ e $B_i = B_i(R)$.

Seja $(m_1, m_2, \ldots)$ uma sequência infinita de inteiros, tal que $m_i \geq 0$ para todo i e $m_i > 0$ apenas para uma quantidade finita de índices i. Sejam $R = \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, \ldots \rangle$ e $R(m_1, m_2, \ldots)$ a componente multi-homogênea de R de multigrau $(m_1, m_2, \ldots)$ nas variáveis $x_1, x_2, \ldots$ respectivamente. Assim

$$R = \oplus_{(m_1, m_2, \ldots)} R(m_1, m_2, \ldots).$$

Cada elemento do ideal L_k em $[R]$ pode ser escrito como uma combinação linear de comutadores $[a_1,\ldots,a_l]$, $l \geq k$, onde $a_1,\ldots,a_l$ são monômios de $R = \mathbb{Z}\langle x_1,x_2,\ldots\rangle$. Observamos que os comutadores $[a_1,\ldots,a_l]$ são multi-homogêneos. Assim cada ideal L_k em $[R]$ é da forma

$$L_k = \oplus_{(m_1,m_2,\ldots)} L_k(m_1,m_2,\ldots),$$

sendo $L_k(m_1,m_2,\ldots) = L_k \cap R(m_1,m_2,\ldots)$ uma componente multi-homogênea de L_k de multigrau $(m_1,m_2,\ldots)$.

Observamos que

$$R/L_k \cong \oplus_{(m_1,m_2,\ldots)}(R/L_k)(m_1,m_2,\ldots),$$

com $(R/L_k)(m_1,m_2,\ldots) \cong R(m_1,m_2,\ldots)/L_k(m_1,m_2,\ldots)$. Da mesma forma

$$B_k = L_k/L_{k+1} \cong \oplus_{(m_1,m_2,\ldots)}(L_k/L_{k+1})(m_1,m_2,\ldots),$$

sendo $(L_k/L_{k+1})(m_1,m_2,\ldots) \cong L_k/L_{k+1}(m_1,m_2,\ldots)/L_k(m_1,m_2,\ldots)$. Portanto o estudo de R/L_k e de B_k pode ser reduzido, respectivamente, para o estudo das componentes multi-homogêneas de $(R/L_k)(m_1,m_2,\ldots)$ e $(L_k/L_{k+1})(m_1,m_2,\ldots)$ de multigrau $(m_1,m_2,\ldots)$.

Para o anel associativo finitamente gerado livre $R_m = \mathbb{Z}\langle x_1,x_2,\ldots,x_m\rangle$, o quociente $B_{m,k} = L_k(R_m)/L_{k+1}(R_m)$ foi estudado em Bhupatiraju, Etingof e outros [7] para alguns m e alguns k . Em particular eles mostraram a seguinte proposição:

Proposição 1.3. *[7, Theorem 4.1, Theorem 4.3]*

1. *Seja $R_2 = \mathbb{Z}\langle x_1,x_2\rangle$. Então $B_{2,2}$ é livre de torção.*
2. *Sejam $R_3 = \mathbb{Z}\langle x_1,x_2,x_3\rangle$ e $w = \left[x_1^{s-1}x_2^{q-1}x_3^{r-1}[x_1,x_2],x_3^{s-1}\right] \in B_{3,2}$ com s,q,r inteiros positivos. Então w é um elemento de torção com ordem dividindo $mdc(s,q,r)$. Se $mdc(s,q,r) = 2$ ou 3, então a ordem de w é igual ao $mdc(s,q,r)$.*

Bhupatiraju, Etingof e outros [7] apresentam ainda tabelas com dados experimentais (obtidos com recurso computacional: pacote MAGMA) de elementos de torção, em particular, para o quociente $B_{3,3}$ afirmam existir elementos de torção de ordem 2 e 3.

Neste trabalho apresentamos alguns resultados sobre o grupo aditivo R/L_k. Nossa contribuição será apresentar $R/L_k(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k+1 \text{ vezes}},0,\ldots)$ para $k = 3,4$.

Primeiro mostramos que $(R/L_3)(1,1,1,1,0,\dots)$ é uma soma direta de grupos cíclicos infinitos.

Teorema 4. *O grupo quociente* $(R/L_3)(1,1,1,1,0,\dots)$ *é um grupo abeliano livre de posto 10, isto é,*

$$(R/L_3)(1,1,1,1,0,\dots) \cong \underbrace{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{10\ vezes}. \tag{1.9}$$

Observamos que na demonstração do Teorema 4 nós explicitaremos os geradores dos grupos cíclicos infinitos do lado direito da equação (1.9). Em particular exibiremos os geradores da componente multilinear do grupo quociente $B_{4,3}$, ou seja, demonstramos que
$B_{4,3} = \big(L_3/L_4\big)(1,1,1,1,0,\dots)$ é livre de torção.

Consideremos $w = \big[x_1[x_2,x_3,x_4],x_5\big]$. Segue do trabalho de Feigin e Shoikhet [18, Lemma 2.2.1] que $w \in L_3$. Do trabalho de Bapat e Jordan [6, Lemma 6.1] deduz-se que $6w \in L_4$. Krasilnikov [29, Proposition 1.5] mostrou que $w \notin L_4$. Assim segue que $w+L_4$ é um elemento de torção com ordem d em L_3/L_4, sendo d um divisor de 6.

Aqui mostraremos a seguinte proposição:

Proposição 5. *Seja* $w = \big[x_1,x_2[x_5,x_4,x_3]\big]$. *Então* $3w \in L_4$.

Como $w \in L_3$, $w \notin L_4$ e $3w \in L_4$, segue da Proposição 5 que $w+L_4$ é um elemento de torção de ordem 3 na componente multilinear $(L_3/L_4)(1,1,1,1,0,\dots)$ do grupo aditivo L_3/L_4 .

Mostraremos ainda que o grupo aditivo de $(R/L_4)(1,1,1,1,1,0,\dots)$ não é livre de torção. Mais precisamente temos o seguinte:

Teorema 6. *O grupo quociente* $(R/L_4)(1,1,1,1,1,0,\dots)$ *é uma soma direta de um grupo abeliano livre de posto 56 com um grupo cíclico de ordem 3, ou seja,*

$$(R/L_4)(1,1,1,1,1,0,\dots) \cong \underbrace{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{56\ vezes}\oplus\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}. \tag{1.10}$$

Observamos que na demonstração do Teorema 6 nós descreveremos explicitamente geradores dos grupos cíclicos infinitos, do lado direito da equação (1.10), e um gerador de $\dfrac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$.

Observação 1.4. Para $m_1,m_2,\dots$ inteiros positivos fixados, $(R/L_k)(m_1,m_2,\dots)$ é um grupo abeliano finitamente gerado, ou seja, é uma soma direta de um conjunto finito de grupos cíclicos.

Até o momento pouco sabemos sobre a ordem destes termos cíclicos, ou seja, sobre a torção em $(R/L_k)(m_1, m_2, \ldots)$. Segundo dados experimentais em Bhupatiraju, Etingof e outros ([7]) aparecem elementos de torção em $(R/L_k)(m_1, m_2, \ldots)$ apenas de ordem 2 ou 3. Nada é conhecido sobre a existência de cíclicos de ordem que não sejam as citadas anteriormente, isto é, se aparecem (ou não) subgrupos cíclicos de ordem $p \neq 2, 3$ nos grupos aditivos $(R/L_k)(m_1, m_2, \ldots)$. Além do mais, ainda não foi provado que dado um k qualquer o grupo aditivo de R/L_k não pode conter p-torção para um conjunto infinito de números primos p. No entanto tal fato pode ser afirmado para o quociente $R/T^{(k)}$. De fato, os elementos de torção em $R/T^{(k)}$ juntamente com o elemento 0 formam um T-ideal $T/T^{(k)}$ em $R/T^{(k)}$. Caso o conjunto de primos p fosse infinito para algum k então o T-ideal $T/T^{(k)}$ não seria finitamente gerado, como T-ideal. Porém pelo resultado de Popov [34, 1979] cada T-ideal em $R/T^{(k)}$ é finitamente gerado, como T-ideal. Assim, para todo k, o grupo aditivo $R/T^{(k)}$ pode conter p-torção apenas para um conjunto finito de números primos p.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos básicos sobre álgebras associativas e álgebras de Lie. Consideramos K um anel associativo, comutativo e unitário. Seja $R = K\langle X\rangle$ a K-álgebra associativa unitária livre no conjunto $X = \{x_i \,|\, i \in \Lambda\}$ de geradores livres, com $\Lambda \subset \mathbb{N}$. Consideremos ainda $[R]$ a álgebra de Lie associada à R, com comutador $[a,b] := ab - ba$ normado à esquerda, ou seja, $[a,b,c] = [[a,b],c]$, para quaisquer $a,b,c \in R$. Lembramos que um subgrupo aditivo I é um ideal bilateral na álgebra associativa R se $R \cdot I \cdot R \subseteq I$. Nas duas últimas seções deste capítulo apresentamos as relações das álgebras universais associativas Lie nilpotentes de classe 2 e 3.

2.1 Álgebras associativas e álgebras de Lie

Seja K um anel associativo, comutativo e unitário. Definiremos a seguir objetos livres para anéis. Lembremos que a propriedade de possuir um objeto livre pode ser definida para várias estruturas algébricas.

Definição 2.1. Seja $X = \{x_i \mid i \in \Lambda\}$ um conjunto não vazio, com $\Lambda \subset \mathbb{N}$. O *anel associativo livre* $(\mathbb{Z}\langle X\rangle, +, \cdot)$ é definido como o anel com as seguintes propriedades:

1. $(\mathbb{Z}\langle X\rangle, +)$ é um grupo abeliano livre gerado livremente por

$$\{x_{i_1} \ldots x_{i_n} \mid x_i \in X, n = 1, 2, \ldots\};$$

2. A multiplicação de $(\mathbb{Z}\langle X\rangle, +, \cdot)$ é tal que

$$(x_{i_1}\dots x_{i_m})\cdot(x_{j_1}\dots x_{j_n}) = x_{i_1}\dots x_{i_m}x_{j_1}\dots x_{j_n}; \quad x_{i_k}, x_{j_l}\in X.$$

Agora exibiremos uma propriedade importante para anéis associativos livres, a *propriedade universal*.

Proposição 2.2. *Seja A um anel associativo. Então qualquer aplicação $\varphi : X \to A$ pode ser estendida a um único homomorfismo $f : K\langle X\rangle \to A$. Em outras palavras, existe um único homomorfismo $f : K\langle X\rangle \to A$ tal que $f(x) = \varphi(x)$, para todo $x \in X$.*

Demonstração: Definamos uma função $f : K\langle X\rangle \to A$ como segue. Seja

$$\bar{X} = \{x_{i_1}\dots x_{i_n} \mid x_i \in X, n = 1, 2, \dots\}.$$

Primeiramente,

$$\text{se } m\in\bar{X}, \text{ então } f(m) = f(x_{i_1}\dots x_{i_n}) = \varphi(x_{i_1})\dots\varphi(x_{i_n}).$$

Seja $p = \alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_r m_r \in K\langle X\rangle$, com $\alpha_j \in K$ e $m_j \in \bar{X}$ $(1 \le j \le r)$. Assim podemos definir

$$f(p) = \alpha_1 f(m_1) + \cdots + \alpha_r f(m_r).$$

Pela definição de f temos que $f(x) = \varphi(x)$ para quaisquer $x \in X$. Por outro lado é direto verificar que f é um homomorfismo. $\square$

Um anel de Lie é definido como um anel com multiplicação anticomutativa e satisfazendo a identidade de Jacobi. Mais precisamente temos a

Definição 2.3. O anel (L , + , [,]) é um anel de Lie, se

1. Para todos $x, y, z, w \in L$,

$$[x+y, z+w] = [x,z] + [y,z] + [x,w] + [y,w],$$

isto é, $[,]$ é bilinear.

2. Para todos $x, y, z \in L$,

$$[x,y,z] + [y,z,x] + [z,x,y] = 0 \quad ,$$

isto é, L satisfaz a identidade de Jacobi.

3. Para todo $x \in L$,
$$[x,x] = 0 \quad .$$

Observemos que um anel de Lie é anticomutativo. De fato, como $[a+b,a+b] = 0$ temos $[a,b] = -[b,a]$.

Daremos agora uma forma de obter o anel de Lie dado qualquer anel associativo A. Este método consiste em definir uma nova multiplicação para o anel associativo A. Seja $(A,+,\cdot)$ um anel associativo. Defina a seguinte operação em A:

$$\begin{array}{rll} [,]: & A \times A & \longrightarrow A \\ & (a,b) & \longmapsto [a,b] = ab - ba \quad . \end{array}$$

Podemos verificar que A com esta nova multiplicação é um anel de Lie. Este novo anel, isto é, $(A,+,[,])$ é chamado de anel de Lie associado (ou adjunto) à A e denotado por $[A]$.

Definição 2.4. Seja K um anel comutativo. Um K-módulo à esquerda ou um módulo à esquerda sobre K é um grupo aditivo M com multiplicação por escalar de K sobre M (isto é, uma aplicação de $K \times M$ para M), denotada por rm, para todo $r \in K$ e para todo $m \in M$, tal que para todos $r,s \in K$ e $m,n \in M$, temos:

1. $(r+s)m = rm + sm$;
2. $(rs)m = r(sm)$;
3. $r(m+n) = rm + rn$ e
4. $1m = m$, se K possui 1.

Analogamente, define-se K-módulo à direita. Se M é um K-módulo à direita e à esquerda, diremos que M é um K-bimódulo (bimódulo). Se o anel K for um corpo, ou um anel de divisão, então o K-módulo M é um espaço vetorial.

Definição 2.5. Uma *álgebra* A sobre um anel K associativo, comutativo e unitário é definida como um módulo sobre K com uma multiplicação $\cdot : A \times A \longrightarrow A$ com as seguintes propriedades:

1. A terna $(A,+,\cdot)$ é um anel, isto é, valem as leis distributivas:

$$(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z, \text{ para todos } x,y,z \in A,$$

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z, \text{ para todos } x,y,z \in A.$$

2. Para todos $x,y \in A$ e $\alpha \in K$, temos

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y).$$

A álgebra A é dita associativa, comutativa, de Lie ou com unidade conforme o anel $(A,+,\cdot)$ for, respectivamente, associativo, comutativo, de Lie ou com unidade.

Assim como para grupos e anéis, um homomorfismo de álgebras é uma função que preserva as operações das respectivas álgebras, mas precisamente temos a

Definição 2.6. Sejam A_1 e A_2 duas álgebras sobre um anel associativo, comutativo e unitário K. Uma aplicação $f : A_1 \to A_2$ chama-se um homomorfismo se:

1. f é um homomorfismo de K-módulos.
2. $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, para todos $x,y \in A$.

Os teoremas usuais que se referem a isomorfismos de módulos, anéis e grupos também são válidos, com as mesmas demonstrações, para álgebras. Além disso, também existem objetos livres para estas estruturas algébricas. Definimos estes objetos para álgebras associativas como segue.

Definição 2.7. Sejam K um anel associativo, comutativo e unitário e $X = \{x_i \mid i \in \Lambda\}$ um conjunto não vazio, com $\Lambda \subset \mathbb{N}$. A K-álgebra $K\langle X\rangle$ é definida como o K-módulo livre com base $\{x_{i_1} \ldots x_{i_n} \mid x_i \in X, n = 1,2,\ldots\}$ com uma multiplicação tal que

$$(x_{i_1} \ldots x_{i_m})(x_{j_1} \ldots x_{j_n}) = x_{i_1} \ldots x_{i_m} x_{j_1} \ldots x_{j_n}; \quad x_{i_k}, x_{j_l} \in X.$$

A K-álgebra $K\langle X\rangle$ chama-se *K-álgebra associativa livre* no conjunto X de geradores livres.

Agora exibiremos a *propriedade universal* para álgebras associativas.

Proposição 2.8. *Seja A uma K-álgebra associativa. Então qualquer aplicação $\varphi : X \to A$ pode ser estendida à um único homomorfismo $f : K\langle X\rangle \to A$. Em outras palavras, existe um único homomorfismo $f : K\langle X\rangle \to A$ tal que $f(x) = \varphi(x)$, para todos $x \in X$.*

A demonstração desta proposição faz-se de forma análoga à Proposição 2.2.

Daremos agora uma forma de obtenção de álgebras de Lie. Este método consiste em definir uma nova multiplicação para uma álgebra associativa. Seja $(A,+,\cdot)$ uma álgebra associativa. Podemos definir a seguinte operação em A:

$$\begin{array}{rll}[,]: & A\times A & \longrightarrow A \\ & (a,b) & \longmapsto [a,b]=ab-ba \end{array} .$$

Novamente é direto verificar que A com esta nova multiplicação é uma álgebra de Lie. Esta nova álgebra, isto é, $(A,+,[,])$ é chamada de álgebra de Lie associada (ou adjunta) à A e denotada por $[A]$.

2.2 Ideal bilateral e ideal de Lie

Definição 2.9. Seja A uma álgebra associativa qualquer.

1. Uma subálgebra em A é um subconjunto não vazio B de A tal que $B+B\subset B$ e $B\cdot B\subset B$.

2. Um ideal bitateral em A é um subconjunto não vazio I de A tal que $I+I\subset I$ e $A\cdot I\cdot A\subset I$.

3. Se I é um ideal bilateral em A, A/I é a álgebra quociente de A por I.

Na Definição 2.9, caso A seja um anel associativo tem-se analogamente o subanel em A, ideal bilateral em A e o anel quociente.

Definição 2.10. Sejam L uma álgebra de Lie e A,B subconjuntos não vazios de L. Denotamos por $[A,B]$ o conjunto das combinações lineares de elementos da forma $[a,b]$ sendo $a\in A$ e $b\in B$.

1. Uma subálgebra de Lie em L é um subconjunto não vazio A de L tal que $A+A\subset A$ e $[A,A]\subset A$.

2. Um ideal de Lie em L é um subconjunto não vazio I de L tal que $I+I\subset I$ e $[I,L]\subset I$.

3. Seja I um ideal de Lie em L, L/I é uma álgebra de Lie, denominada a álgebra de Lie quociente de L por I.

Na Definição 2.10 se L seja um anel de Lie tem-se analogamente o subanel de Lie em L, o ideal de Lie em L e o anel de Lie quociente.

Definição 2.11. Sejam A uma álgebra associativa qualquer e $[A]$ a álgebra de Lie associada à A.

1. Para $i \geq 1$ seja $L_i(A)$ o ideal de Lie em $[A]$ definido recursivamente por $L_1(A) = A$ e $L_{i+1}(A) = [L_i, A]$.
2. Para $i \geq 1$ seja $T^{(i)}(A)$ o ideal bilateral em A definido recursivamente por $T^{(1)}(A) = A$ e para $i \geq 2$, $T^{(i)}(A)$ é gerado pelos comutadores $[a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_i}]$ de comprimento i, com $a_j \in A$.
3. Se para algum m tivermos $T^{(m+1)}(A) = 0$ e $T^{(m)}(A) \neq 0$, ou equivalentemente $L_{m+1}(A) = 0$ e $L_m(A) \neq 0$, então A é chamada álgebra associativa Lie nilpotente de clase m.

Em outras palavras, veja que $L_i(A)$ é o subgrupo aditivo de $[A]$ gerado por todos comutadores $\big[[\ldots[a_1, a_2], \ldots, a_{i-1}], a_i\big]$ normados à esquerda de comprimento i, sendo $a_1, \ldots, a_i \in A$. Observamos que $L_i(A)$ é o i-ésimo termo da série central inferior do anel de Lie $[A]$. Observemos ainda que $T^{(i)}(A)$ é o ideal bilateral de A gerado pelos elementos de $L_i(A)$ para todo $i > 1$.

Observação 2.12. Para qualquer $i \geq 1$ e dado $y \in L_i$ temos que existem $a_1, \ldots, a_i \in A$ tal que $y = [a_1, a_2, \ldots, a_i]$. Assim para qualquer $a \in A$, temos que

$$[y, a] = \big[[a_1, a_2, \ldots, a_i], a\big] = [a_1, a_2, \ldots, a_i, a] = [a_1 a_2, a_3, \ldots, a_i, a] - [a_2 a_1, a_3 \ldots, a_i, a] \in L_i.$$

Portanto L_i é um ideal em $[A]$.

Na Definição 2.11 se A for a álgebra associativa unitária livre $R = K\langle X\rangle$ indicamos por $T^{(n)} := T^{(n)}(R)$. Assim para qualquer $n \geq 2$, indicamos por $T^{(n)}$ o ideal bilateral de $R = K\langle X\rangle$, gerado pelos comutadores $[a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}]$ de comprimento n com $a_i \in K\langle X\rangle$. E indicamos por $L_i := L_i(R)$ o subgrupo aditivo de $[R]$ gerado por todos comutadores $\big[[\ldots[a_1, a_2], \ldots, a_{i-1}], a_i\big]$ normados à esquerda de comprimento i, sendo $a_1, \ldots, a_i \in R$. E ainda denotamos por Q_{n+1} a álgebra quociente $R/T^{(n+1)}$. Observamos que Q_{n+1} é a (maior) álgebra associativa quociente de R que satisfaz a identidade polinomial $[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}, x_{i_{n+1}}]$. E ainda $Q_{n+1} = K\langle X\rangle / T^{(n+1)}$ pode ser vista como a álgebra universal associativa Lie nilpotente de classe n, ou seja, podemos demonstrarmos de forma análoga à Proposição 2.2 que Q_{n+1} é o objeto universal da classe de álgebra associativa Lie nilpotente de classe n .

2.3 Uma graduação em $K\langle X\rangle$

Dado um conjunto não vazio X, uma relação em X é um subconjunto de $X \times X$.

Definição 2.13.

1. Uma relação ($\leq_X$) no conjunto X é uma relação de ordem parcial se $\leq_X$ for reflexiva, antissimétrica e transitiva.
2. Uma ordem $\leq_X$ em X é uma relação de ordem linear (total) se para quaisquer $x, y \in X$ tivermos $x \leq_X y$ ou $y \leq_X x$.

Observação 2.14. O conjunto $X = \{x_j \,|\, j \in \Lambda\}$ possui uma relação de ordem linear ($\leq_X$) natural que é $x_i \leq_X x_j \Leftrightarrow i \leq j$, como $\subset \mathbb{N}$. Como consequência em $R = K\langle X\rangle$ temos $x_i^{k_i} \leq_R x_i^{k_j} \Leftrightarrow k_i \leq k_j$ para quaisquer k_i, k_j inteiros não negativos.

Consideremos K um anel associativo, comutativo e unitário. Seja $R = K\langle X\rangle$ a K-álgebra associativa unitária livre no conjunto $X = \{x_i \,|\, i \in \Lambda\}$ de geradores livres, com $\Lambda \subset \mathbb{N}$. Um monônio m_i é um elemento de R da forma $m_i(X) = x_{i1}^{k_{i1}} x_{i2}^{k_{i2}} \cdots x_{in}^{k_{in}}$ para $i \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq n, k_{ij}$ inteiros não negativos. Denotaremos por $M \subset R$ o conjunto de todos os monômios de R. No conjunto M, e consequentemente em R, introduziremos uma ordem linear, denominada *ordem lexicográfica*.

Definição 2.15. Seja $M \subset R$ o conjunto de monômios. Dados os monômios $m_i(X), m_j(X) \in M$. Dizemos que:

$$\begin{array}{rl}
m_i \leq_L m_j \Leftrightarrow \text{ se existir } r \in \{1, \ldots, n\} & \text{tal que} \\
x_{i_r}^{k_{i_r}} \leq_R x_{j_r}^{k_{j_r}}, \text{ ou seja, } i_r < j_r \text{ ou } i_r = j_r \text{ e } k_{i_r} \leq k_{j_r} & \text{e} \\
x_{i_s}^{k_{i_s}} = x_{j_s}^{k_{j_s}}, \text{ ou seja, } i_s = j_s \text{ e } k_{i_s} = k_{j_s} & \text{para } 1 \leq s \leq r-1.
\end{array}$$

Observação 2.16. Veja que $x_1x_2x_3x_4 \leq_L x_3x_1x_4$, $\quad x_2x_3^{2011} \leq_L x_2x_5x_1$, $\quad$ e $\quad x_1^{2011} \leq_L x_2$.

Usando a relação de ordem linear $\leq_L$ em $M \subset R$, podemos escrever um polinômio $p(X) \in R$, da seguinte forma

$$p(X) = \sum_{i}^{N} \alpha_i x_{i1}^{k_{i1}} x_{i2}^{k_{i2}} \cdots x_{in}^{k_{in}} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i m_i(X), \tag{2.1}$$

com $m_r \leq_L m_s$ se $r > s$, que denotaremos como a forma canônica de um polinômio $p(X) \in R$.

Definição 2.17. Para $p(X) \in R$ na forma canônica, ou seja, $p(X) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i m_i$ ($m_i \leq_L m_j$ se $i > j$), $0 \neq \alpha_1 \in K$, denominamos:

1. $\alpha_1 m_1$ é o termo líder do polinômio $p(X)$, denotamos por $\alpha_1 m_1 = lt(p)$,

2. m_1 é o monômio líder de $p(X)$, denotamos por $m_1 = lm(p)$,

3. α_1 é o coeficiente líder $p(X)$, denotamos por $\alpha_1 = lc(p)$.

Usando a ordem lexicográfica podemos graduar $R = K\langle X\rangle$ da seguinte forma:

$$R = R(1) \oplus R(2) \oplus R(3) \oplus \cdots,$$

onde $R(i)$ consiste de todos os monômios de grau i. Os subespaços $R(i)$'s são chamados de componentes homogêneas de $R = K\langle X\rangle$. Além disso, podemos decompor (graduar) cada componente $R(i)$ da seguinte forma:

$$R(i) = \sum_{i_1+\cdots+i_n=i} R(i_1,\ldots,i_n)$$

sendo cada $R(i_1,\ldots,i_n)$ o subespaço gerado por monômios de grau i_1 em $x_1,\ldots,i_n$ em x_n. Um elemento $f = f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in R(i_1,\ldots,i_n)$ é dito multi-homogêneo de multigrau $(i_1,\ldots,i_n)$. O elemento $f = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ é dito multilinear de grau n se é multi-homogêneo de multigrau $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n\ \text{vezes}},0,\ldots)$.

2.4 Resultados auxiliares

Nesta seção apresentamos alguns resultados conhecidos sobre os ideais $L_n(A)$ e $T^{(n)}(A)$ sobre A uma álgebra associativa qualquer ou $R = K\langle X\rangle$ a K-álgebra associativa unitária livre.

O próximo resultado é bem conhecido, veja [23] .

Lema 2.18. *Seja A uma álgebra associativa e $T^{(n)}(A)$ o ideal bilateral de A gerado pelos comutadores $[a_{i_1},\ldots,a_{i_n}]$ de comprimento n, então $R\cdot T^{(n)}\cdot R = R\cdot T^{(n)}$.*

Demonstração: Basta observar que

$$[a_1,a_2]r = r[a_1,a_2] + [a_1,a_2,r], \quad \forall r \in A, \forall [a_1,a_2] \in T^{(n)}(A).$$

Assim

$$s[a_1,a_2]r = sr[a_1,a_2] + s[a_1,a_2,r], \quad \forall r,s \in A, \forall [a_1,a_2] \in T^{(n)}(A).$$

□

Observação 2.19. Claramente temos que $T^{(n+1)}(A) \subset T^{(n)}(A)$ para qualquer $n \geq 2$, pois

$$[a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots, a_{i_n}, a_{i_{n+1}}] = \big[[a_{i_1}, a_{i_2}], a_{i_3}, \ldots, a_{i_n}, a_{i_{n+1}}\big], \text{ para qualquer } a_i \in A.$$

Seja $R = K\langle X \rangle$ a K-álgebra associativa unitária livre no conjunto $X = \{x_i \,|\, i \in \Lambda\}$ de geradores livres, com $\Lambda \subset \mathbb{N}$, sendo K um anel associativo, comutativo e unitário. Consideremos ainda $[R]$ a álgebra de Lie associada à R.

Observação 2.20. Na observação (1.2) podemos mostrar, de forma análoga a proposição anterior, que os ideais $R_{n+1} = R[R_n, R]R = R[R_n, R]$.

Lembramos que na Definição 2.11 se A for a álgebra associativa unitária livre $R = K\langle X \rangle$ indicamos por $T^{(n)} := T^{(n)}(R)$. Assim para qualquer $n \geq 2$, indicamos por $T^{(n)}$ o ideal bilateral de $R = K\langle X \rangle$, gerado pelos comutadores $[a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}]$ de comprimento n com $a_i \in K\langle X \rangle$. E indicamos por $L_i := L_i(R)$ o subgrupo aditivo de $[R]$ gerado por todos comutadores $\big[[\ldots[a_1, a_2], \ldots, a_{i-1}], a_i\big]$ normados à esquerda de comprimento i, sendo $a_1, \ldots, a_i \in R$.

O resultado seguinte é bem conhecido, veja [4, Theorem 1.6] .

Lema 2.21. *[4] Para quaisquer $x_i \in X$, $i \in \Lambda$ e n inteiro positivo, temos que*

$$[x_1, \ldots, x_n]_{\pi_l} \in T^{(n)}, \tag{2.2}$$

onde $[,]_{\pi_l}$ significa um arranjo com l comutadores na palavra associativa $x_1 \cdots x_n$.

Demonstração: Primeiro mostraremos que

$$[x_1, \ldots, x_n]_{\pi_l} \in L_n,$$

usando indução sobre a quantidade l de comutadores. Primeiro vejamos o caso em que $l = 2$. Observe que

$$\big[z, [x_{n-1}, x_n]\big] = -\big[[x_{n-1}, x_n], z\big] = -\big[x_{n-1}, x_n, z\big],$$

assim segue da Identidade de Jacobi que $[x_{n-1}, x_n, z] = [z, x_{n-1}, x_n] - [z, x_n, x_{n-1}]$. Portanto,

$$\big[z, [x_{n-1}, x_n]\big] = [z, x_n, x_{n-1}] - [z, x_{n-1}, x_n].$$

Tomando $z = [x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}]$, obtemos

$$\big[[x_1,x_2,\ldots,x_{n-2}],[x_{n-1},x_n]\big] = [x_1,x_2,\ldots,x_{n-2},x_n,x_{n-1}] - [x_1,x_2,\ldots,x_{n-2},x_{n-1},x_n]. \quad (2.3)$$

Para algum inteiro s com $1 \leq s < n$, considere o comutador $\big[[x_1,\ldots,x_s],[x_{s+1},\ldots,x_{n-1},x_n]\big]$. Como

$$\big[[x_1,\ldots,x_s],[x_{s+1},\ldots,x_{n-1},x_n]\big] = \big[[x_1,\ldots,x_s],[[x_{s+1},\ldots,x_{n-1}],x_n]\big],$$

podemos aplicar a equação (2.3) e assim obtemos

$$\begin{gathered}\big[[x_1,\ldots,x_s],[x_{s+1},\ldots,x_{n-1},x_n]\big] = \\ = \big[[x_1,\ldots,x_s],[x_{s+1},\ldots,x_{n-1}],x_n\big] - \big[[x_1,\ldots,x_s,x_n],[x_{s+1},\ldots,x_{n-1}]\big].\end{gathered}$$

Aplicamos novamente a equação (2.3) em $\big[[x_1,\ldots,x_s],[x_{s+1},\ldots,x_{n-1}]\big]$ e em $\big[[x_1,\ldots,x_s,x_n],[x_{s+1},\ldots,x_{n-1}]\big]$. Disto obtemos que $\big[[x_1,\ldots,x_s],[x_{s+1},\ldots,x_{n-1},x_n]\big]$ é uma combinação linear de comutadores de comprimento n, ou seja,

$$\big[[x_1,\ldots,x_s],[x_{s+1},\ldots,x_{n-1},x_n]\big] \in L_n.$$

Admita que para cada arranjo de comutadores de comprimento $r < l$ tenhamos que $\big[[x_1,\ldots,x_s]_{\pi_r}\big]$ é uma combinação linear de comutadores de comprimento s. Tomemos o arranjo de comutadores de comprimento l na palavra associativa $x_1 \cdots x_n$. Reescrevemos como um comutador de dois arranjos r_1, r_2 tal que $\big[[x_1,\ldots,x_s]_{\pi_{r_1}}\big]$ é um arranjo de comutadores na palavra associativa $x_1 \cdots x_s$ e $\big[[x_{s+1},\ldots,x_n]_{\pi_{r_2}}\big]$ é um arranjo na palavra associativa $x_{s+1} \cdots x_n$, ou seja,

$$[x_1,\ldots,x_n]_{\pi_l} = \big[[x_1,\ldots,x_s]_{\pi_{r_1}},[x_{s+1},\ldots,x_n]_{\pi_{r_2}}\big].$$

Pela hipótese de indução, aplicado aos arranjos de comutadores π_{r_1} e π_{r_2}, respectivamente, temos que

$$\begin{gathered}[x_1,\ldots,x_s]_{\pi_{r_1}} = \sum \alpha_{i_1,\ldots,i_s}[x_{i_1},\ldots,x_{i_s}], \quad 1 \leq i_j \leq s, \\ [x_{s+1},\ldots,x_n]_{\pi_{r_2}} = \sum \alpha_{i_{s+1},\ldots,i_n}[x_{i_{s+1}},\ldots,x_{i_n}], \quad s+1 \leq i_j \leq n.\end{gathered}$$

Pela linearidade do comutador, e pelo primeiro passo de indução, temos que $[x_{i_1},\ldots,x_{i_s}] \in L_s$ e

$[x_{i_{s+1}},\dots,x_{i_n}] \in L_{n-s}$, assim para cada comutador de comutador

$$\big[[x_{i_1},\dots,x_{i_s}],[x_{i_{s+1}},\dots,x_{i_n}]\big] \in L_n.$$

Portanto temos que

$$\big[[x_1,\dots,x_n]_{\pi_l}\big] \in L_n.$$

Para obtermos (2.2) basta observarmos que $L_n \subset T^{(n)}$. □

O resultado acima garante que cada comutador de comutadores de comprimento n (ou maior) é uma combinação linear de comutadores normados à esquerda de comprimento n.

O seguinte resultado é bem conhecido, veja por exemplo [32, Lemma 2].

Proposição 2.22. *[32, Lemma 2] Para quaisquer $a_i \in K\langle X\rangle$ e $n \geq 3$ tem-se,*

$$[a_1,a_2][a_3,a_4,\dots,a_n,a_{n+1}] + [a_{n+1},a_2][a_3,a_4,\dots,a_n,a_1] \in T^{(n)}.$$

Demonstração: Veja que

$$\begin{aligned}
[a_3,a_4,\dots,a_n,a_{n+1}a_1,a_2] &= \big[[a_3,a_4,\dots,a_n,a_{n+1}a_1],a_2\big] = \\
&= \big[a_{n+1}[a_3,a_4,\dots,a_n,a_1] + [a_3,a_4,\dots,a_n,a_{n+1}]a_1,a_2\big] = \\
&= a_{n+1}[a_3,a_4,\dots,a_n,a_1,a_2] + [a_{n+1},a_2][a_3,a_4,\dots,a_n,a_1] + \\
&\quad +[a_3,a_4,\dots,a_n,a_{n+1}][a_1,a_2] + [a_3,a_4,\dots,a_n,a_{n+1},a_2]a_1.
\end{aligned}$$

Pela definição do ideal $T^{(n)}$, Definição 2.11, temos

$$[a_3,a_4,\dots,a_n,a_{n+1}a_1,a_2], \quad [a_3,a_4,\dots,a_n,a_1,a_2] \quad \text{e} \quad [a_3,a_4,\dots,a_n,a_{n+1},a_2] \in T^{(n)},$$

assim

$$[a_3,a_4,\dots,a_n,a_{n+1}][a_1,a_2] + [a_{n+1},a_2][a_3,a_4,\dots,a_n,a_1] \in T^{(n)}.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
&[a_3,a_4,\dots,a_n,a_{n+1}][a_1,a_2] + [a_{n+1},a_2][a_3,a_4,\dots,a_n,a_1] = \\
&= [a_1,a_2][a_3,a_4,\dots,a_n,a_{n+1}] + [a_{n+1},a_2][a_3,a_4,\dots,a_n,a_1] + \\
&\quad + \big[[a_3,a_4,\dots,a_n,a_{n+1}],[a_1,a_2]\big].
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.21 temos que $\big[[a_3,a_4,\ldots,a_n,a_{n+1}],[a_1,a_2]\big] \in T^{(n)}$, assim segue o resultado. $\square$

Lema 2.23. *Para todo inteiro $n \geq 2$ e todo $k \in \{i_1,i_2,\ldots,i_n\} = \{1,2,\ldots,n\}$ temos*

$$[x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{k-2}},x_{i_{k-1}}\cdot x_k,x_{i_{k+1}},\ldots,x_n] \equiv [x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{k-2}},x_k\cdot x_{i_{k-1}},x_{i_{k+1}},\ldots,x_n] \mod L_n.$$

Demonstração: Veja que

$$\begin{gathered}[x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{k-2}},x_{i_{k-1}}\cdot x_k,x_{i_{k+1}},\ldots,x_n] = \\ = [x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{k-2}},x_k\cdot x_{i_{k-1}},x_{i_{k+1}},\ldots,x_n] + \big[x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{k-2}},[x_{i_{k-1}},x_k],x_{i_{k+1}},\ldots,x_n\big].\end{gathered}$$

Pela definição do ideal L_n, Definição 2.11, temos que

$$\big[x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{k-2}},[x_{i_{k-1}},x_k],x_{i_{k+1}},\ldots,x_n\big] \in L_n.$$

Assim segue o resultado. $\square$

Lema 2.24. *Para $\{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5\} = \{1,2,3,4,5\}$ temos:*

$$[x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4}\cdot x_{i_5}] = [x_{i_4}\cdot x_{i_5},x_{i_2},x_{i_1},x_{i_3}] - [x_{i_4}\cdot x_{i_5},x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3}] - [x_{i_4}\cdot x_{i_5},x_{i_3},x_{i_2},x_{i_1}] + [x_{i_4}\cdot x_{i_5},x_{i_3},x_{i_1},x_{i_2}].$$

Demonstração: Aplicando a antissimetria e a identidade de Jacobi, temos que

$$\begin{gathered}[x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4}\cdot x_{i_5}] = \big[[x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3}],x_{i_4}\cdot x_{i_5}\big] = -\big[x_{i_4}\cdot x_{i_5},[x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3}]\big] = \\ = -\Big[x_{i_4}\cdot x_{i_5},\big[[x_{i_1},x_{i_2}],x_{i_3}\big]\Big] = -\big[x_{i_4}\cdot x_{i_5},[x_{i_1},x_{i_2}],x_{i_3}\big] + \big[x_{i_4}\cdot x_{i_5},x_{i_3},[x_{i_1},x_{i_2}]\big] = \\ = -\big[x_{i_4}\cdot x_{i_5},x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3}\big] + \big[x_{i_4}\cdot x_{i_5},x_{i_2},x_{i_1},x_{i_3}\big] + \big[x_{i_4}\cdot x_{i_5},x_{i_3},x_{i_1},x_{i_2}\big] - \big[x_{i_4}\cdot x_{i_5},x_{i_3},x_{i_2},x_{i_1}\big].\end{gathered}$$

$\square$

Nas duas últimas seções apresentaremos alguns resultados conhecidos sobre os ideais $T^{(3)}$ e $T^{(4)}$, isto para mostrar ao leitor o método utilizado no próximo capítulo, onde exibimos as relações das álgebras universais associativas Lie nilpotentes de classe 4 . As demonstrações da Proposição 1 e da Proposição 2B, foram dadas respectivamente em Gupta e Krasilnikov [21, lemma 6] e Deryabina e Krasilnikov [10, Theorem 1.3].

Observação 2.25. Lembramos que o ideal $T^{(2)}$, como ideal bilateral de $K\langle X\rangle$, é gerado por definição, pelos comutadores $[a_{i_1},a_{i_2}]$ de comprimento 2, com $a_i \in R$. Para quaisquer com

$a_i \in R$, temos que

$$[a_{i_1}, a_{i_2}a_{i_3}] = a_{i_2}[a_{i_1}, a_{i_3}] + [a_{i_1}, a_{i_2}]a_{i_3},$$
$$[a_{i_2}, a_{i_1}] = -[a_{i_1}, a_{i_2}].$$

Assim é fácil verificar que os polinômios do tipo

$$[x_{i_1}, x_{i_2}],\ x_{i_s} \in X,\ i_s \in \Lambda,$$

formam um conjunto gerador do ideal $T^{(2)}$, ou ainda, as relações das álgebras universais associativas Lie nilpotentes de classe 1.

No caso em que Λ for finito, $\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$, o conjunto gerador do ideal $T^{(2)}$ é finito e é formado pelos elementos $[x_i, x_j]$, $1 \leq i < j \leq n$.

2.5 As relações das álgebras universais associativas Lie nilpotentes de classe 2

Observamos que conforme a Definição 2.11 temos que $T^{(3)}$ é o ideal de $\in K\langle X\rangle$ gerado pelos comutadores $[a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}]$ de comprimento 3, com $a_i \in K\langle X\rangle$.

O resultado seguinte é bem conhecido, veja por exemplo: [31, Lemma 1] ou [21, Lemma 6].

Proposição 1 ([31], [21]). *Os polinômios do tipo (2.4)-(2.5) formam um conjunto gerador do ideal bilateral $T^{(3)}$, como um ideal de $K\langle X\rangle$.*

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}] \quad i_s \in \Lambda, \tag{2.4}$$
$$[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}] + [x_{i_1}, x_{i_3}][x_{i_2}, x_{i_4}] \quad i_s \in \Lambda. \tag{2.5}$$

No caso em que Λ for finito, o conjunto gerador do ideal $T^{(3)}$ é finito.

Antes um resultado preliminar, veja: [15, Lemma 5.1.1] ou [7, Proposition 3.1] .

Proposição 2.26 ([15],[7]). *Para quaisquer $a_i \in K\langle X\rangle$ temos*

$$[a_1, a_2][a_3, a_4] + [a_1, a_3][a_2, a_4] \in T^{(3)}. \tag{2.6}$$

Demonstração: Na Proposição 2.22 tomando $n = 3$ obtemos

$$[a_1,a_2][a_3,a_4] + [a_4,a_2][a_3,a_1] \in T^{(3)}.$$

Como

$$[a_1,a_2][a_3,a_4] + [a_1,a_3][a_2,a_4] =$$
$$[a_1,a_2][a_3,a_4] + [a_4,a_2][a_3,a_1] + \big[[a_1,a_3],[a_2,a_4]\big] \in T^{(3)}.$$

Visto que pelo Lema 2.21 $\big[[a_1,a_3],[a_2,a_4]\big] \in T^{(3)}$. Assim obtemos (2.6). □

Corolário 2.5.1. *[7, Proposition 3.1] Para quaisquer $a_i \in K\langle X\rangle$ temos*

$$[a_1,a_2][a_1,a_3] \in T^{(3)}. \tag{2.7}$$

Demonstração: Pela Proposição 2.26 temos que

$$[a_1,a_2][a_4,a_3] + [a_1,a_4][a_2,a_3] \in T^{(3)}.$$

Tomando $a_4 = a_1$ obtemos (2.7). □

Agora apresentamos a
Demonstração da Proposição 1 .

Seja I o ideal bilateral em $K\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios (2.4) e (2.5). Devemos mostrar que $I \subset T^{(3)}$ e que $T^{(3)} \subset I$, ou seja $I = T^{(3)}$. Segue da Proposição 2.26 que $I \subset T^{(3)}$ visto que cada gerador de I pertence ao ideal $T^{(3)}$. Resta mostrarmos que $T^{(3)} \subset I$. Como $T^{(3)}$ é gerado por $[a_1,a_2,a_3]$, basta mostrarmos que os polinômios do tipo

$$[a_1,a_2,a_3] \tag{2.8}$$

pertencem ao ideal I, para quaisquer $a_i \in K\langle X\rangle$. Para este fim mostraremos que os polinômios do tipo

$$[a_1,a_2][a_3,a_4] + [a_1,a_3][a_2,a_4] \tag{2.9}$$

pertencem ao ideal I, para quaisquer $a_i \in K\langle X\rangle$. Claramente podemos assumir que cada a_i é um monômio.

Nós usaremos a indução no grau $m = deg f$ do polinômio f do tipo (2.8) ou do tipo (2.9).

Como base de indução, admita que o grau de f seja 3, assim temos que f é da forma (2.4), ou seja, cada a_i é um monômio de grau 1 e assim $f \in I$. Tomaremos f um polinômio do tipo (2.8), ou do tipo (2.9), de grau $m > 3$. Admita que para cada polinômio g do tipo (2.8), ou do tipo (2.9), de grau menor que m, temos que $g \in I$. Provaremos que também $f \in I$.

Suponha que o polinômio $f = f(a_1, a_2, a_3, a_4)$ é do tipo (2.9). Caso tenhamos $\deg f = 4$, então f é da forma (2.5), isto é, cada a_i é um monômio de grau 1 e assim $f \in I$. Admitamos que $\deg f = m > 4$, então para algum $i, 1 \leq i \leq 4$ teremos $a_i = a_i' a_i''$, sendo $\deg a_i'$, $\deg a_i'' < \deg a_i$.

Primeiro consideremos o caso em que $a_4 = a_4' a_4''$, então

$$\begin{gathered}
[a_1, a_2][a_3, a_4'a_4''] + [a_1, a_3][a_2, a_4'a_4''] = \\
= [a_1, a_2](a_4'[a_3, a_4''] + [a_3, a_4']a_4'') + [a_1, a_3](a_4'[a_2, a_4''] + [a_2, a_4']a_4'') = \\
= [a_1, a_2]a_4'[a_3, a_4''] + [a_1, a_3]a_4'[a_2, a_4''] + \big([a_1, a_2][a_3, a_4'] + [a_1, a_3][a_2, a_4']\big)a_4'' = \\
= a_4'\big([a_1, a_2][a_3, a_4''] + [a_1, a_3][a_2, a_4'']\big) + \big([a_1, a_2][a_3, a_4'] + [a_1, a_3][a_2, a_4']\big)a_4'' + \\
+ [a_1, a_2, a_4'][a_3, a_4''] + [a_1, a_3, a_4'][a_2, a_4''].
\end{gathered}$$

Pela hipótese de indução temos que

$$[a_1, a_2][a_3, b] + [a_1, a_3][a_2, b] \in I, \text{ para } b \in \{a_4', a_4''\}.$$

Assim obtemos que

$$a_4'\big([a_1, a_2][a_3, a_4''] + [a_1, a_3][a_2, a_4'']\big) + \big([a_1, a_2][a_3, a_4'] + [a_1, a_3][a_2, a_4']\big)a_4'' \in I.$$

Ainda pela hipótese de indução temos que $[a_1, a_2, a_4']$, $[a_1, a_3, a_4'] \in I$ pois são polinômios do tipo (2.8) e possuem grau menor que m. Assim os polinômios do tipo (2.9) pertencem ao ideal I quando $a_4 = a_4' a_4''$.

Observamos que

$$\begin{gathered}
[a_1, a_2][a_3, a_4] + [a_1, a_3][a_2, a_4] = \\
= [a_2, a_1][a_4, a_3] + [a_2, a_4][a_1, a_3] + \big[[a_1, a_3], [a_2, a_4]\big].
\end{gathered}$$

Afirmamos que

$$\big[[a_1, a_3], [a_2, a_4]\big] \in I. \tag{2.10}$$

Temos que

$$\big[[a_1,a_3],[a_2,a_4]\big] = [a_1,a_3,a_2,a_4] - [a_1,a_3,a_4,a_2] =$$
$$= \big[[a_1,a_3,a_2],a_4\big] - \big[[a_1,a_3,a_4],a_2\big] \in I,$$

pois $[a_1,a_3,a_2]$ e $[a_1,a_3,a_4]$ são da forma (2.8) com grau menor que m. Assim, pelo caso anterior, temos que os polinômios do tipo (2.9) pertencem ao ideal I quando $a_3 = a_3'a_3''$. Pela simetria entre a_2 e a_3, segue que os polinômios do tipo (2.9) também pertencem ao ideal I quando $a_2 = a_2'a_2''$.

Como

$$[a_1,a_2][a_3,a_4] + [a_1,a_3][a_2,a_4] =$$
$$= [a_4,a_2][a_3,a_1] + [a_4,a_3][a_2,a_1] + \big[[a_1,a_2],[a_3,a_4]\big] + \big[[a_1,a_3],[a_2,a_4]\big].$$

Pela afirmação (2.10) temos que $\big[[a_1,a_2],[a_3,a_4]\big]$ e $\big[[a_1,a_3],[a_2,a_4]\big] \in I$. Portanto temos que os polinômios do tipo (2.9) pertencem ao ideal I quando $a_1 = a_1'a_1''$.

Portanto qualquer polinômio $f(a_1,a_2,a_3,a_4)$ do tipo (2.9) de grau m pertence ao ideal I.

Agora suponha que o polinômio $f = f(a_1,a_2,a_3)$ é do tipo (2.8) com $\deg f = m > 3$, então para algum $i, 1 \le i \le 4$ teremos $a_i = a_i'a_i''$, sendo $\deg a_i'$, $\deg a_i'' < \deg a_i$.

Primeiro consideramos $a_3 = a_3'a_3''$, então

$$[a_1,a_2,a_3'a_3''] = a_3'[a_1,a_2,a_3''] + [a_1,a_2,a_3']a_3''.$$

Pela hipótese de indução temos que $[a_1,a_2,b] \in I$, para $b \in \{a_3',a_3'\}$ e consequentemente os polinômios do tipo (2.8) pertencem ao ideal I quando $a_3 = a_3'a_3''$.

Caso tenhamos $a_2 = a_2'a_2''$, então

$$[a_1,a_2'a_2'',a_3] = \big[a_2'[a_1,a_2''] + [a_1,a_2']a_2'',a_3\big] = \big[a_2'[a_1,a_2''],a_3\big] + \big[[a_1,a_2']a_2'',a_3\big] =$$
$$= a_2'[a_1,a_2'',a_3] + [a_2',a_3][a_1,a_2''] + [a_1,a_2'][a_2'',a_3] + [a_1,a_2',a_3]a_2'' =$$
$$= a_2'[a_1,a_2'',a_3] + [a_1,a_2',a_3]a_2'' + [a_1,a_2'][a_2'',a_3] + [a_1,a_2''][a_2',a_3] + \big[[a_2',a_3],[a_1,a_2'']\big].$$

Pela hipótese de indução temos que

$$[a_1, b, a_3] \in I, \quad \text{para } b \in \{a_2', a_2'\}.$$

Como os polinômios do tipo (2.9) de grau m pertencem ao ideal I, segue que

$$[a_1, a_2'][a_2'', a_3] + [a_1, a_2''][a_2', a_3] \in I.$$

Pela afirmação (2.10) temos que $\big[[a_2', a_3], [a_1, a_2'']\big] \in I$. Logo os polinômios do tipo (2.8) pertencem ao ideal I quando $a_2 = a_2'a_2''$.

Por fim, como $[a_1, a_2, a_3] = -[a_2, a_1, a_3]$, assim segue do caso anterior que os polinômios do tipo (2.8) pertencem ao ideal I quando $a_1 = a_1'a_1''$.

Portanto qualquer polinômio $f(a_1, a_2, a_3)$ do tipo (2.8) de grau m pertence ao ideal I. Com isso concluímos que $T^{(3)} \subset I$.

Isto termina a prova da Proposição 1.

2.6 As relações das álgebras universais associativas Lie nilpotentes de classe 3

Confome a Definição 2.11, temos que $T^{(4)}$ é o ideal bilateral de $K\langle X \rangle$ gerado pelos comutadores $[a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4}]$ de comprimento 4, com $a_i \in K\langle X \rangle$. O conjunto de geradores de $T^{(4)}$ foi apresentado por Deryabina e Krasilnikov [10].

Proposição 2B. *[10, Theorem 1.3] Os polinômios do tipo (2.11)-(2.15) formam um conjunto gerador do ideal $T^{(4)}$, como um ideal bilateral de $K\langle X \rangle$.*

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}] \ (i_s \in \Lambda), \tag{2.11}$$

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}][x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}] \ (i_s \in \Lambda), \tag{2.12}$$

$$[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}] + [x_{i_5}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_1}] \ (i_s \in \Lambda), \tag{2.13}$$

$$[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}] + [x_{i_1}, x_{i_3}][x_{i_2}, x_{i_4}, x_{i_5}] \ (i_s \in \Lambda), \tag{2.14}$$

$$([x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}] + [x_{i_1}, x_{i_3}][x_{i_2}, x_{i_4}])[x_{i_5}, x_{i_6}] \ (i_s \in \Lambda). \tag{2.15}$$

No caso em que Λ for finito, o conjunto gerador do ideal $T^{(4)}$ é finito.

Observação 2.27. Como caso particular do Lema 2.21 segue que para quaisquer $a_i \in K\langle X\rangle$, temos

$$\big[[a_1,a_2],[a_3,a_4]\big] \in T^{(4)},$$
$$\big[[a_1,a_2,a_3],[a_4,a_5]\big] \in T^{(5)} \subseteq T^{(4)}.$$

A proposição seguinte é bem conhecida, veja por exemplo: [32, Lemma 2], [20, Lemma 1], [17, Theorem 3.4] ou [29, Lemma 5]. Nos trabalhos de Latyshev [32] e Gordienko [20] K é um corpo qualquer de característica 0. No trabalho de Etingolf, Kim e Ma [17] o resultado é válido para K um corpo infinito de característica diferente de 3. Já no trabalho de Krasilnikov [29] K é o anel dos inteiros.

Proposição 2.28 ([32], [20], [17], [29]). *Para qualquer $a_i \in K\langle X\rangle$, temos*

$$[a_1,a_2][a_3,a_4,a_5]+[a_5,a_2][a_3,a_4,a_1] \in T^{(4)}, \tag{2.16}$$
$$[a_1,a_2][a_3,a_4,a_5]+[a_1,a_3][a_2,a_4,a_5] \in T^{(4)}. \tag{2.17}$$

Demonstração: A afirmação (2.16) segue da Proposição 2.22 para $n=4$.

Temos que

$$\begin{aligned}
[a_1,a_3a_2,a_4,a_5] &= \big[[a_1,a_3a_2],a_4,a_5\big] = \big[a_3[a_1,a_2]+[a_1,a_3]a_2,a_4,a_5\big] = \\
&= \big[a_3[a_1,a_2,a_4]+[a_3,a_4][a_1,a_2]+[a_1,a_3][a_2,a_4]+[a_1,a_3,a_4]a_2,a_5\big] = \\
&= a_3[a_1,a_2,a_4,a_5]+[a_3,a_5][a_1,a_2,a_4]+[a_3,a_4][a_1,a_2,a_5]+[a_3,a_4,a_5][a_1,a_2]+ \\
&+[a_1,a_3][a_2,a_4,a_5]+[a_1,a_3,a_5][a_2,a_4]+[a_1,a_3,a_4][a_2,a_5]+[a_1,a_3,a_4,a_5]a_2.
\end{aligned}$$

Pela Definição 2.11, temos que $[a_1,a_3a_2,a_4,a_5]$, $[a_1,a_2,a_4,a_5]$ e $[a_1,a_3,a_4,a_5] \in T^{(4)}$. Segue de (2.16) que $[a_3,a_5][a_1,a_2,a_4]+[a_3,a_4][a_1,a_2,a_5] \in T^{(4)}$.

Afirmamos que

$$[a_1,a_3,a_5][a_2,a_4]+[a_1,a_3,a_4][a_2,a_5] \in T^{(4)}. \tag{2.18}$$

Observamos que

$$
\begin{gathered}
[a_1,a_3,a_5][a_2,a_4]+[a_1,a_3,a_4][a_2,a_5]= \\
=[a_2,a_4][a_1,a_3,a_5]+[a_2,a_5][a_1,a_3,a_4]+\big[[a_1,a_3,a_5],[a_2,a_4]\big]+\big[[a_1,a_3,a_4],[a_2,a_5]\big]= \\
=-\big([a_4,a_2][a_1,a_3,a_5]+[a_5,a_2][a_1,a_3,a_4]\big)+\big[[a_1,a_3,a_5],[a_2,a_4]\big]+\big[[a_1,a_3,a_4],[a_2,a_5]\big]\in T^{(4)}.
\end{gathered}
$$

Segue de (2.16) que $[a_4,a_2][a_1,a_3,a_5]+[a_5,a_2][a_1,a_3,a_4]\in T^{(4)}$; da observação (2.27) segue que $\big[[a_1,a_3,a_5],[a_2,a_4]\big]$, $\big[[a_1,a_3,a_4],[a_2,a_5]\big]\in T^{(4)}$. Assim obtemos (2.18). Como consequência, temos que

$$[a_3,a_4,a_5][a_1,a_2]+[a_1,a_3][a_2,a_4,a_5]\in T^{(4)}.$$

Como

$$
\begin{gathered}
[a_3,a_4,a_5][a_1,a_2]+[a_1,a_3][a_2,a_4,a_5]= \\
=[a_1,a_2][a_3,a_4,a_5]+[a_1,a_3][a_2,a_4,a_5]+\big[[a_2,a_4,a_5],[a_1,a_3]\big],
\end{gathered}
$$

e sabemos que $\big[[a_2,a_4,a_5],[a_1,a_3]\big]\in T^{(4)}$, observação (2.27), assim obtemos

$$[a_1,a_2][a_3,a_4,a_5]+[a_1,a_3][a_2,a_4,a_5]\in T^{(4)}.$$

Portanto vale (2.17). □

O resultado seguinte também é bem conhecido, veja: [22, Theorem 3.2] ou [29, Corollary 2.2].

Proposição 2.29. *[22], [29] Para quaisquer $a_i\in K\langle X\rangle$, temos*

$$[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6]\in T^{(4)}. \tag{2.19}$$

Demonstração: Pela Proposição 2.28, temos que

$$\big[a_1,[a_2,a_3]\big][a_4,a_5,a_6]+[a_1,a_6]\big[a_4,a_5,[a_2,a_3]\big]\in T^{(4)},$$

Como

$$
\begin{gathered}
\big[a_4,a_5,[a_2,a_3]\big]= \\
=[a_4,a_5,a_2,a_3]-[a_4,a_5,a_3,a_2]\in T^{(4)},
\end{gathered}
$$

segue que

$$[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6] \in T^{(4)}.$$

□

O resultado seguinte pode ser extraído de Deryabina e Krasilnikov [10].

Proposição 2.30. *[10] Para quaisquer $a_i \in K\langle X\rangle$, temos*

$$\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6] \in T^{(4)}.$$

Demonstração: Segue da Proposição 2.28 que

$$[a_6,a_5][a_1a_4,a_2,a_3]+[a_1a_4,a_5][a_6,a_2,a_3] \in T^{(4)}.$$

Observemos que

$$\begin{gathered}
[a_6,a_5][a_1a_4,a_2,a_3]+[a_1a_4,a_5][a_6,a_2,a_3] = \\
= [a_6,a_5]\big[[a_1a_4,a_2],a_3\big]+[a_1a_4,a_5][a_6,a_2,a_3] = \\
= [a_6,a_5]\big[a_1[a_4,a_2]+a_4[a_1,a_2],a_3\big]+\big(a_1[a_4,a_5]+[a_1,a_5]a_4\big)[a_6,a_2,a_3] = \\
= [a_6,a_5]\big(a_1[a_4,a_2,a_3]+[a_1,a_2][a_4,a_3]+[a_1,a_3][a_4,a_2]+[a_1,a_2,a_3]a_4\big)+ \\
+\big(a_1[a_4,a_5]+[a_1,a_5]a_4\big)[a_6,a_2,a_3] = \\
= [a_6,a_5]a_1[a_4,a_2,a_3]+a_1[a_4,a_5][a_6,a_2,a_3]+ \\
+[a_6,a_5][a_1,a_2,a_3]a_4+[a_1,a_5]a_4[a_6,a_2,a_3]+ \\
+[a_6,a_5]\big([a_1,a_2][a_4,a_3]+[a_1,a_3][a_4,a_2]\big) = \\
= a_1\big([a_6,a_5][a_4,a_2,a_3]+[a_4,a_5][a_6,a_2,a_3]\big)+ \\
+\big([a_6,a_5][a_1,a_2,a_3]+[a_1,a_5][a_6,a_2,a_3]\big)a_4+ \\
+[a_6,a_5,a_1][a_4,a_2,a_3]-[a_1,a_5][a_6,a_2,a_3,a_4]+ \\
+[a_6,a_5]\big([a_1,a_2][a_4,a_3]+[a_1,a_3][a_4,a_2]\big) = \\
= a_1\big([a_6,a_5][a_4,a_2,a_3]+[a_4,a_5][a_6,a_2,a_3]\big)+ \\
+\big([a_6,a_5][a_1,a_2,a_3]+[a_1,a_5][a_6,a_2,a_3]\big)a_4+ \\
+[a_6,a_5,a_1][a_4,a_2,a_3]-[a_1,a_5][a_6,a_2,a_3,a_4]+ \\
+[a_5,a_6]\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big).
\end{gathered}$$

Pela Proposição 2.28, temos que,

$$[a_6,a_5][b,a_2,a_3]+[b,a_5][a_6,a_2,a_3]\in T^{(4)},\text{ para } b\in\{a_1,a_4\}.$$

Pela Proposição 2.29 temos que $[a_6,a_5,a_1][a_4,a_2,a_3]\in T^{(4)}$. Pela definição do ideal $T^{(4)}$ temos que $[a_6,a_2,a_3,a_4]\in T^{(4)}$. Assim,

$$[a_5,a_6]\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\in T^{(4)}.$$

Observamos que

$$\begin{gathered}[a_5,a_6]\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)=\\ =\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6]+\big[[a_5,a_6],[a_1,a_2]\big][a_3,a_4]+\\ +\big[[a_5,a_6],[a_1,a_3]\big][a_2,a_4]+[a_1,a_2]\big[[a_5,a_6],[a_3,a_4]\big]+[a_1,a_3]\big[[a_5,a_6],[a_2,a_4]\big].\end{gathered}$$

Segue da observação (2.27) que

$$\big[[a_5,a_6],[a_1,a_2]\big],\quad \big[[a_5,a_6],[a_1,a_3]\big],\quad \big[[a_5,a_6],[a_3,a_4]\big]\text{ e }\big[[a_5,a_6],[a_2,a_4]\big]\in T^{(4)}.$$

Assim obtemos

$$\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6]\in T^{(4)}.$$

$\square$

Corolário 2.6.1. *Para quaisquer $a_i\in K\langle X\rangle$, temos*

$$[a_1,a_2][a_1,a_3][a_1,a_4]\in T^{(4)}. \tag{2.20}$$

$$[a_1,a_2][a_1,a_3,a_4]\in T^{(4)}. \tag{2.21}$$

Demonstração: Segue da Proposição 2.30 que

$$([a_1,a_2][a_5,a_3]+[a_1,a_5][a_2,a_3])[a_6,a_4]\in T^{(4)},$$

tomando $a_5=a_6=a_1$ obtemos (2.20).

Segue da Proposição 2.28 que

$$[a_1,a_2][a_5,a_3,a_4]+[a_1,a_5][a_2,a_3,a_4]\in T^{(4)},$$

tomando $a_5 = a_1$ obtemos (2.21). $\square$

Agora apresentamos a

Demonstração do Proposição 2B .

Seja I o ideal bilateral em $K\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios (2.11)-(2.15). Devemos mostrar que $I \subseteq T^{(4)}$ e que $T^{(4)} \subseteq I$. Segue das Proposições (2.28)-(2.30) que $I \subseteq T^{(4)}$, visto que cada gerador do ideal I pertence ao ideal $T^{(4)}$. Resta-nos mostrar que $T^{(4)} \subseteq I$.

Como o ideal bilateral $T^{(4)}$ é gerado pelo polinômio $[a_1,a_2,a_3,a_4]$, $(a_i \in K\langle X\rangle)$, é suficiente mostrarmos que os polinômios do tipo

$$[a_1,a_2,a_3,a_4] \tag{2.22}$$

pertencem ao ideal I, para todo $a_i \in K\langle X\rangle$. Claramente podemos assumir que cada a_i é um monômio.

Para mostrarmos que os polinômios do tipo (2.22) pertencem ao ideal I, inicalmente provaremos que os polinômios do tipo

$$([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4])[a_5,a_6] \tag{2.23}$$

$$[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6] \tag{2.24}$$

$$[a_1,a_2][a_3,a_4,a_5]+[a_5,a_2][a_3,a_4,a_1] \tag{2.25}$$

$$[a_1,a_2][a_3,a_4,a_5]+[a_1,a_3][a_2,a_4,a_5] \tag{2.26}$$

pertencem ao ideal I, para todo $a_i \in K\langle X\rangle$.

Usaremos a indução no grau $m = \deg f$ do polinômio f, do tipo (2.22), ou do tipo (2.23),..., ou do tipo (2.26). Como base de indução, admita que $\deg f = 4$. Então f é do tipo (2.11) e cada a_i é um monômio de grau 1, assim $f \in I$. Como passo de indução, agora suponha que f é um polinômio do tipo (2.22), ou do tipo (2.23),..., ou do tipo (2.26), com $m = \deg f > 4$. Admita que, para cada polinômio g do tipo (2.22)-(2.26) de grau menor que m temos $g \in I$. Mostraremos que $f \in I$.

Consideremos $f = f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$ um polinômio do tipo (2.23). Caso tenhamos $\deg f = 6$ então f é do tipo (2.15), ou seja, cada a_i é um monômio de grau 1. Assim $f \in I$. Caso $m = \deg f > 6$ então para algum i $(1 \leq i \leq 6)$ temos $a_i = a_i' a_i''$, com $\deg a_i'$, $\deg a_i'' < \deg a_i$.

Se tivermos $a_6 = a_6'a_6''$ então

$$\begin{aligned}
&\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6'a_6''] = \\
&= \big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big(a_6'[a_5,a_6'']+[a_5,a_6']a_6''\big) = \\
&= \big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6'']a_6' - [a_5,a_6'',a_6']+[a_5,a_6']a_6''\big) = \\
&= \big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6'']a_6'+[a_5,a_6']a_6''\big) + \\
&- \big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6'',a_6'].
\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução temos que

$$\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,b] \in I, \text{ para } b \in \{a_6',a_6''\}.$$

Assim obtemos que

$$\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6'']a_6'+[a_5,a_6']a_6''\big) \in I.$$

Ainda pela hipótese de indução temos que

$$\begin{aligned}
&[a_3,a_4][a_5,a_6'',a_6'] + [a_6',a_4][a_5,a_6'',a_3] \in I, \\
&[a_1,a_2][a_5,a_6'',a_3] + [a_1,a_3][a_5,a_6'',a_2] \in I, \\
&[a_6',a_4][a_5,a_6'',a_2] + [a_2,a_4][a_5,a_6'',a_6'] \in I,
\end{aligned}$$

assim segue que,

$$\begin{aligned}
&\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6'',a_6'] = \\
&= [a_1,a_2]\big([a_3,a_4][a_5,a_6'',a_6']+[a_6',a_4][a_5,a_6'',a_3]\big) + \\
&-[a_6',a_4]\big([a_1,a_2][a_5,a_6'',a_3]+[a_1,a_3][a_5,a_6'',a_2]\big) + \\
&+[a_1,a_3]\big([a_6',a_4][a_5,a_6'',a_2]+[a_2,a_4][a_5,a_6'',a_6']\big) \in I.
\end{aligned}$$

Assim os polinômios do tipo (2.23) pertencem ao ideal I quando $a_6 = a_6'a_6''$.

Como $\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6] = -\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_6,a_5]$, segue que os polinômios do tipo (2.23) pertencem ao ideal I quando $a_5 = a_5'a_5''$.

Caso tenhamos $a_1 = a'_1 a''_1$ então

$$
\begin{gathered}
\big([a'_1 a''_1, a_2][a_3, a_4] + [a'_1 a''_1, a_3][a_2, a_4]\big)[a_5, a_6] = \\
= \big(a'_1[a''_1, a_2][a_3, a_4] + [a'_1, a_2]a''_1[a_3, a_4] + a'_1[a''_1, a_3][a_2, a_4] + [a'_1, a_3]a''_1[a_2, a_4]\big)[a_5, a_6] = \\
= a'_1\big([a''_1, a_2][a_3, a_4] + [a''_1, a_3][a_2, a_4]\big)[a_5, a_6] + \\
+ a''_1\big([a'_1, a_2][a_3, a_4] + [a'_1, a_3][a_2, a_4]\big)[a_5, a_6] + \\
+ \big([a'_1, a_2, a''_1][a_3, a_4] + [a'_1, a_3, a''_1][a_2, a_4]\big)[a_5, a_6].
\end{gathered}
$$

Pela hipótese de indução temos que

$$\big([b, a_2][a_3, a_4] + [b, a_3][a_2, a_4]\big)[a_5, a_6] \in I, \text{ para } b \in \{a'_1, a''_1\}.$$

Assim segue que

$$
\begin{gathered}
a'_1\big([a''_1, a_2][a_3, a_4] + [a''_1, a_3][a_2, a_4]\big)[a_5, a_6] + \\
+ a''_1\big([a'_1, a_2][a_3, a_4] + [a'_1, a_3][a_2, a_4]\big)[a_5, a_6] \in I.
\end{gathered}
$$

Temos que

$$
\begin{gathered}
[a'_1, a_2, a''_1][a_3, a_4] + [a'_1, a_3, a''_1][a_2, a_4] = \\
= [a_3, a_4][a'_1, a_2, a''_1] + [a_2, a_4][a'_1, a_3, a''_1] + \big[[a'_1, a_2, a''_1], [a_3, a_4]\big] + \big[[a'_1, a_3, a''_1], [a_2, a_4]\big].
\end{gathered}
$$

Como os polinômios do tipo (2.26) com grau menor que m pertencem ao ideal I (hipótese de indução), segue que

$$[a_3, a_4][a'_1, a_2, a''_1] + [a_2, a_4][a'_1, a_3, a''_1] = -\big([a_3, a_4][a_2, a'_1, a''_1] + [a_2, a_4][a_3, a'_1, a''_1]\big) \in I.$$

Afirmamos que

$$\big[[a'_1, a_2, a''_1], [a_3, a_4]\big] \in I. \tag{2.27}$$

Como

$$
\begin{gathered}
\big[[a'_1, a_2, a''_1], [a_3, a_4]\big] = \big[a'_1, a_2, a''_1, a_3, a_4\big] - \big[a'_1, a_2, a''_1, a_4, a_3\big] = \\
= \big[[a'_1, a_2, a''_1, a_3], a_4\big] - \big[[a'_1, a_2, a''_1, a_4], a_3\big] \in I,
\end{gathered}
$$

pois $[a'_1, a_2, a''_1, a_3]$, $[a'_1, a_2, a''_1, a_4] \in I$, visto que são polinômios da forma (2.22) com grau menor que m. Da mesma forma $\big[[a_1', a_3, a_1''], [a_2, a_4]\big] \in I$. Assim

$$\big([a_1', a_2, a_1''][a_3, a_4] + [a_1', a_3, a_1''][a_2, a_4]\big)[a_5, a_6] \in I.$$

Logo os polinômios do tipo (2.23) pertencem ao ideal I quando $a_1 = a_1' a_1''$.

Observamos que

$$\begin{aligned} &\big([a_1, a_2][a_3, a_4] + [a_1, a_3][a_2, a_4]\big)[a_5, a_6] = \\ = &\big([a_2, a_1][a_4, a_4] + [a_2, a_4][a_1, a_3]\big)[a_5, a_6] + \big[[a_1, a_3], [a_2, a_4]\big][a_5, a_6]. \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\big[[a_1, a_3], [a_2, a_4]\big] \in I. \tag{2.28}$$

Temos que

$$\big[[a_1, a_3], [a_2, a_4]\big] = [a_1, a_3, a_2, a_4] - [a_1, a_3, a_4, a_2] \in I,$$

visto que é uma combinação linear de polinômios da forma (2.22) com grau menor que m. Assim os polinômios do tipo (2.23) pertencem ao ideal I quando $a_2 = a_2' a_2''$. Pela simetria entre a_2 e a_3 os polinômios do tipo (2.23) pertencem ao ideal I quando $a_3 = a_3' a_3''$.

Observemos que

$$\begin{aligned} &\big([a_1, a_2][a_3, a_4] + [a_1, a_3][a_2, a_4]\big)[a_5, a_6] = \\ = &\big([a_4, a_3][a_2, a_1] + [a_4, a_2][a_3, a_1]\big)[a_5, a_6] + \big(\big[[a_1, a_2], [a_3, a_4]\big] + \big[[a_1, a_3], [a_2, a_4]\big]\big)[a_5, a_6]. \end{aligned}$$

Pela afirmação (2.28) temos que $\big[[a_1, a_2], [a_3, a_4]\big], \big[[a_1, a_3], [a_2, a_4]\big] \in I$. Logo os polinômios do tipo (2.23) pertencem ao ideal I quando $a_4 = a_4' a_4''$.

Portanto qualquer polinômio $f = f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ do tipo (2.23) de grau m pertence ao ideal I.

Agora consideremos um polinômio $f = f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ do tipo (2.24) de grau m. Caso tenhamos $\deg f = 6$ então f é do tipo (2.12), ou seja, cada a_i de f é um monômio de grau 1, assim $f \in I$. Caso tenhamos $m = \deg f > 6$ então para algum i $(1 \le i \le 6)$ temos $a_i = a_i' a_i''$, com $\deg a_i'$, $\deg a_i'' < \deg a_i$.

Se tivermos $a_3 = a_3'a_3''$ então

$$
\begin{gathered}
[a_1,a_2,a_3'a_3''][a_4,a_5,a_6] = \\
= a_3'[a_1,a_2,a_3''][a_4,a_5,a_6] + [a_1,a_2,a_3']a_3''[a_4,a_5,a_6] = \\
= a_3'[a_1,a_2,a_3''][a_4,a_5,a_6] + a_3''[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6] + [a_1,a_2,a_3',a_3''][a_4,a_5,a_6].
\end{gathered}
$$

Pela hipótese de indução temos que

$$[a_1,a_2,b][a_4,a_5,a_6] \in I, \text{ para } b \in \{a_3', a_3''\}.$$

Ainda pela hipótese de indução temos que $[a_1,a_2,a_3',a_3''] \in I$, pois é um polinômio do tipo (2.22) e possui grau menor que m. Assim temos que os polinômios do tipo (2.24) pertencem ao ideal I quando $a_3 = a_3'a_3''$.

Caso tenhamos $a_1 = a_1'a_1''$ então

$$
\begin{gathered}
[a_1'a_1'',a_2,a_3][a_4,a_5,a_6] = \left[a_1'[a_1'',a_2] + [a_1',a_2]a_1'',a_3\right][a_4,a_5,a_6] = \\
= \left(a_1'[a_1'',a_2,a_3] + [a_1',a_3][a_1'',a_2] + [a_1',a_2][a_1'',a_3] + [a_1',a_2,a_3]a_1''\right)[a_4,a_5,a_6] = \\
= a_1'[a_1'',a_2,a_3][a_4,a_5,a_6] + a_1''[a_1',a_2,a_3][a_4,a_5,a_6] + [a_1',a_2,a_3,a_1''][a_4,a_5,a_6] + \\
+ \left([a_1',a_3][a_1'',a_2] + [a_1',a_2][a_1'',a_3]\right)[a_4,a_5,a_6].
\end{gathered}
$$

Pela hipótese de indução temos que

$$[b,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6] \in I, \text{ para } b \in \{a_1', a_1''\}.$$

Como os polinômios do tipo (2.22) com grau menor que m pertencem ao ideal I (hipótese de indução), segue que

$$[a_1',a_2,a_3,a_1''] \in I.$$

Ainda pelas hipóteses assumidas temos

$$
\begin{gathered}
[a_1'',a_2][a_4,a_5,a_6] + [a_6,a_2][a_4,a_5,a_1''] \in I, \\
[a_1',a_3][a_4,a_5,a_1''] + [a_1'',a_3][a_4,a_5,a_1'] \in I, \\
[a_6,a_2][a_4,a_5,a_1'] + [a_1',a_2][a_4,a_5,a_6] \in I,
\end{gathered}
$$

assim temos que

$$\begin{aligned}
&\big([a_1',a_2][a_1'',a_3]+[a_1',a_3][a_1'',a_2]\big)[a_4,a_5,a_6]= \\
&=[a_1',a_3]\big([a_1'',a_2][a_4,a_5,a_6]+[a_6,a_2][a_4,a_5,a_1'']\big)+ \\
&-[a_6,a_2]\big([a_1',a_3][a_4,a_5,a_1'']+[a_1'',a_3][a_4,a_5,a_1']\big)+ \\
&+[a_1'',a_3]\big([a_6,a_2][a_4,a_5,a_1']+[a_1',a_2][a_4,a_5,a_6]\big)\in I.
\end{aligned}$$

Disto segue que os polinômios do tipo (2.24) pertencem ao ideal I quando $a_1=a_1'a_1''$.

Como $[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6]=-[a_2,a_1,a_3][a_4,a_5,a_6]$ segue que os polinômios do tipo (2.24) pertencem ao ideal I quando $a_2=a_2'a_2''$.

Observamos que $[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6]=[a_4,a_5,a_6][a_1,a_2,a_3]+\big[[a_1,a_2,a_3],[a_4,a_5,a_6]\big]$.

Afirmamos que

$$\big[[a_1,a_2,a_3],[a_4,a_5,a_6]\big]\in I. \tag{2.29}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\big[[a_1,a_2,a_3],[a_4,a_5,a_6]\big]&=\big[[a_1,a_2,a_3],[[a_4,a_5],a_6]\big]= \\
&=\big[[a_1,a_2,a_3],[a_4,a_5],a_6\big]-\big[[a_1,a_2,a_3,a_6],[a_4,a_5]\big]= \\
&=\big[[a_1,a_2,a_3,a_4],a_5,a_6\big]-\big[[a_1,a_2,a_3,a_5],a_4,a_6\big]-\big[[a_1,a_2,a_3,a_6],[a_4,a_5]\big]\in I,
\end{aligned}$$

visto que $[a_1,a_2,a_3,a_4]$, $[a_1,a_2,a_3,a_5]$ e $[a_1,a_2,a_3,a_6]\in I$, pois são da forma (2.22) e possuem grau menor que m. Pela simetria entre: a_3 e a_6, a_2 e a_5, a_1 e a_4 temos que os polinômios do tipo (2.24) pertencem ao ideal I quando $a_i=a_i'a_i''$ com $i\in\{4,5,6\}$.

Portanto qualquer polinômio $f=f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$ do tipo (2.24) de grau m pertence ao ideal I.

Consideremos um polinômio $f=f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$ do tipo (2.25) de grau m. Caso tenhamos $\deg f=5$ então f é do tipo (2.13) e cada a_i de f é um monômio de grau 1, assim $f\in I$. Caso tenhamos $m=\deg f>5$ então para algum i $(1\le i\le 5)$ temos $a_i=a_i'a_i''$, com $\deg a_i'$, $\deg a_i''<\deg a_i$.

Se tivermos $a_2 = a_2'a_2''$ então

$$
\begin{aligned}
&[a_1, a_2'a_2''][a_3,a_4,a_5] + [a_5, a_2'a_2''][a_3,a_4,a_1] = \\
&= \big(a_2'[a_1,a_2''] + [a_1,a_2']a_2''\big)[a_3,a_4,a_5] + \big(a_2'[a_5,a_2''] + [a_5,a_2']a_2''\big)[a_3,a_4,a_1] = \\
&= a_2'\big([a_1,a_2''][a_3,a_4,a_5] + [a_5,a_2''][a_3,a_4,a_1]\big) + \\
&+ \big([a_1,a_2'][a_3,a_4,a_5] + [a_5,a_2'][a_3,a_4,a_1]\big)a_2'' + \\
&- [a_1,a_2'][a_3,a_4,a_5,a_2''] - [a_5,a_2'][a_3,a_4,a_1,a_2''].
\end{aligned}
$$

Pela hipótese de indução temos que

$$[a_1,b][a_3,a_4,a_5] + [a_5,b][a_3,a_4,a_1] \in I \text{ para } a_2 \in \{a_2', a_2''\}.$$

Temos ainda que $[a_3,a_4,a_5,a_2'']$, $[a_3,a_4,a_1,a_2''] \in I$, pois são da forma (2.22) e possui grau menor que m. Assim os polinômios do tipo (2.25) pertencem ao ideal I quando $a_2 = a_2'a_2''$.

Caso tenhamos $a_1 = a_1'a_1''$ então

$$
\begin{aligned}
&[a_1'a_1'', a_2][a_3,a_4,a_5] + [a_5,a_2][a_3,a_4,a_1'a_1''] = \\
&= \big(a_1'[a_1'',a_2] + [a_1',a_2]a_1''\big)[a_3,a_4,a_5] + [a_5,a_2]\big(a_1'[a_3,a_4,a_1''] + [a_3,a_4,a_1']a_1''\big) = \\
&= a_1'\big([a_1'',a_2][a_3,a_4,a_5] + [a_5,a_2][a_3,a_4,a_1'']\big) + [a_5,a_2,a_1'][a_3,a_4,a_1''] + \\
&+ \big([a_1',a_2][a_3,a_4,a_5] + [a_5,a_2][a_3,a_4,a_1'][a_5,a_2]\big)a_1'' - [a_1',a_2][a_3,a_4,a_5,a_1''].
\end{aligned}
$$

Pela hipótese de indução temos que

$$[b,a_2][a_3,a_4,a_5] + [a_5,a_2][a_3,a_4,b] \in I, \text{ para } b \in \{a_1', a_1''\}.$$

Como os polinômios do tipo (2.22) com grau menor que m pertencem ao ideal I (hipótese de indução), segue que $[a_3,a_4,a_5,a_1'] \in I$. Já verificamos que os polinômios da forma (2.23) com grau m pertencem ao ideal I, assim $[a_3,a_4,a_1'][a_5,a_2,a_1''] \in I$. Assim os polinômios do tipo (2.25) pertencem ao ideal I quando $a_1 = a_1'a_1''$. Por simetria entre a_1 e a_5 temos que os polinômios do tipo (2.25) pertencem ao ideal I quando $a_5 = a_5'a_5''$.

Caso tenhamos $a_4 = a_4'a_4''$ então

$$
\begin{aligned}
&[a_1,a_2][a_3,a_4'a_4'',a_5]+[a_5,a_2][a_3,a_4'a_4'',a_1]= \\
&=[a_1,a_2]\left[a_4'[a_3,a_4'']+[a_3,a_4']a_4'',a_5\right]+[a_5,a_2]\left[a_4'[a_3,a_4'']+[a_3,a_4']a_4'',a_1\right]= \\
&=[a_1,a_2]\big(a_4'[a_3,a_4'',a_5]+[a_4',a_5][a_3,a_4'']+[a_3,a_4'][a_4'',a_5]+[a_3,a_4',a_5]a_4''\big)+ \\
&+[a_5,a_2]\big(a_4'[a_3,a_4'',a_1]+[a_4',a_1][a_3,a_4'']+[a_3,a_4'][a_4'',a_1]+[a_3,a_4',a_1]a_4''\big)= \\
&=\big([a_1,a_2][a_3,a_4'',a_5]+[a_5,a_2][a_3,a_4'',a_1]\big)a_4'+ \\
&+\big([a_1,a_2][a_3,a_4',a_5]+[a_5,a_2][a_3,a_4',a_1]\big)a_4''+ \\
&+[a_1,a_2]\big([a_4',a_5][a_3,a_4'']+[a_3,a_4'][a_4'',a_5]\big)+ \\
&+[a_5,a_2]\big([a_4',a_1][a_3,a_4'']+[a_3,a_4'][a_4'',a_1]\big)+ \\
&-[a_1,a_2][a_3,a_4'',a_5,a_4']-[a_5,a_2][a_3,a_4'',a_1,a_4'].
\end{aligned}
$$

Pela hipótese de indução, temos que

$$[a_1,a_2][a_3,b,a_5]+[a_5,a_2][a_3,b,a_1]\in I, \text{ para } b\in\{a_4',a_4''\}.$$

Ainda pela hipótese de indução temos que $[a_3,a_4'',a_5,a_4']$, $[a_3,a_4'',a_1,a_4']\in I$, pois são da forma (2.22) com grau menor que m.

Afirmamos que

$$[a_1,a_2]\big([a_4',a_5][a_3,a_4'']+[a_3,a_4'][a_4'',a_5]\big)\in I. \tag{2.30}$$

Observemos que

$$
\begin{aligned}
&[a_1,a_2]\big([a_4',a_5][a_3,a_4'']+[a_3,a_4'][a_4'',a_5]\big)= \\
&=[a_1,a_2]\big([a_3,a_4''][a_4',a_5]+[a_3,a_4'][a_4'',a_5]\big)+[a_1,a_2]\big[[a_3,a_4''],[a_4',a_5]\big]= \\
&=\big([a_3,a_4''][a_4',a_5]+[a_3,a_4'][a_4'',a_5]\big)[a_1,a_2]+\big[[a_1,a_2],[a_3,a_4'']\big][a_4',a_5]+[a_3,a_4'']\big[[a_1,a_2],[a_4',a_5]\big]+ \\
&+\big[[a_1,a_2],[a_3,a_4']\big][a_4'',a_5]+[a_3,a_4']\big[[a_1,a_2],[a_4'',a_5]\big]+[a_1,a_2]\big[[a_3,a_4''],[a_4',a_5]\big].
\end{aligned}
$$

Sabemos que os polinômios da forma (2.24) de grau m pertencem ao ideal I, assim segue que

$$\big([a_3,a_4''][a_4',a_5]+[a_3,a_4'][a_4'',a_5]\big)[a_1,a_2]\in I,$$

pela afirmação (2.28) temos que

$$\big[[a_1,a_2],[a_3,a_4'']\big],\ \big[[a_1,a_2],[a_4',a_5]\big],\ \big[[a_1,a_2],[a_3,a_4']\big],\ \big[[a_1,a_2],[a_4'',a_5]\big] \text{ e } \big[[a_3,a_4''],[a_4',a_5]\big]\in I.$$

Assim segue que a afirmação (2.30) é válida. Agora segue da afirmação (2.30) que

$$[a_5,a_2]\big([a_4',a_1][a_3,a_4'']+[a_3,a_4'][a_4'',a_1]\big)\in I.$$

Logo os polinômios do tipo (2.25) pertencem ao ideal I quando $a_4=a_4'a_4''$.

Como $[a_1,a_2][a_3,a_4,a_5]+[a_5,a_2][a_3,a_4,a_1]=-\big([a_1,a_2][a_4,a_3,a_5]+[a_5,a_2][a_4,a_3,a_1]\big)$, segue que os polinômios do tipo (2.25) pertencem ao ideal I quando $a_3=a_3'a_3''$.

Portanto qualquer polinômio $f=f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$ do tipo (2.25) de grau m pertence ao ideal I.

Consideremos um polinômio $f=f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$ do tipo (2.26) de grau m. Caso tenhamos $\deg f=5$ então f é do tipo (2.14) e cada a_i de f é um monômio de grau 1. Assim $f\in I$. Caso $m=\deg f>5$ então para algum i $(1\le i\le 5)$ temos $a_i=a_i'a_i''$, com $\deg a_i'$, $\deg a_i''<\deg a_i$.

Se tivermos $a_5=a_5'a_5''$ então

$$\begin{aligned}
&[a_1,a_2][a_3,a_4,a_5'a_5'']+[a_1,a_3][a_2,a_4,a_5'a_5'']=\\
&=[a_1,a_2]\big(a_5'[a_3,a_4,a_5'']+[a_3,a_4,a_5']a_5''\big)+[a_1,a_3]\big(a_5'[a_2,a_4,a_5'']+[a_2,a_4,a_5']a_5''\big)=\\
&=a_5'\big([a_1,a_2][a_3,a_4,a_5'']+[a_1,a_3][a_2,a_4,a_5'']\big)+\\
&+\big([a_1,a_2][a_3,a_4,a_5']+[a_1,a_3][a_2,a_4,a_5']\big)a_5''+\\
&+[a_1,a_2,a_5'][a_3,a_4,a_5'']+[a_1,a_3,a_5'][a_2,a_4,a_5''].
\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução temos que

$$[a_1,a_2][a_3,a_4,b]+[a_1,a_3][a_2,a_4,b]\in I,\ \text{para } b\in\{a_5',a_5''\}.$$

Já verificamos que os polinômios da forma (2.24) de grau m pertencem ao ideal I, assim temos

$$[a_1,a_2,a_5'][a_3,a_4,a_5''],\quad [a_1,a_3,a_5'][a_2,a_4,a_5'']\in I.$$

Assim os polinômios do tipo (2.26) pertencem ao ideal I quando $a_5=a_5'a_5''$.

Caso tenhamos $a_4 = a_4' a_4''$ então

$$
\begin{aligned}
&[a_1,a_2][a_3,a_4'a_4'',a_5]+[a_1,a_3][a_2,a_4'a_4'',a_5]= \\
&= [a_1,a_2]\big[a_4'[a_3,a_4'']+[a_3,a_4']a_4'',a_5\big]+[a_1,a_3]\big[a_4'[a_2,a_4'']+[a_2,a_4']a_4'',a_5\big]= \\
&= [a_1,a_2]\big(a_4'[a_3,a_4'',a_5]+[a_4',a_5][a_3,a_4'']+[a_3,a_4'][a_4'',a_5]+[a_3,a_4',a_5]a_4''\big)+ \\
&+[a_1,a_3]\big(a_4'[a_2,a_4'',a_5]+[a_4',a_5][a_2,a_4'']+[a_2,a_4'][a_4'',a_5]+[a_2,a_4',a_5]a_4''\big)= \\
&= \big([a_1,a_2][a_3,a_4'',a_5]+[a_1,a_3][a_2,a_4'',a_5]\big)a_4'+ \\
&+\big([a_1,a_2][a_3,a_4',a_5]+[a_1,a_3][a_2,a_4',a_5]\big)a_4''+ \\
&+[a_1,a_2]\big([a_4',a_5][a_3,a_4'']+[a_3,a_4'][a_4'',a_5]\big)+ \\
&+[a_1,a_3]\big([a_4',a_5][a_2,a_4'']+[a_2,a_4'][a_4'',a_5]\big)+ \\
&-[a_1,a_2][a_3,a_4'',a_5,a_4']-[a_1,a_3][a_2,a_4'',a_5,a_4'].
\end{aligned}
$$

Pela hipótese de indução temos que

$$[a_1,a_2][a_3,b,a_5]+[a_1,a_3][a_2,b,a_5]\in I, \qquad \text{para } b\in\{a_4',a_4''\}.$$

Como os polinômios do tipo (2.22) de grau menor que m pertencem ao ideal I (hipótese de indução), segue que

$$[a_3,a_4'',a_5,a_4'], \qquad [a_2,a_4'',a_5,a_4']\in I.$$

Segue da afirmação (2.30) que

$$
\begin{aligned}
&[a_1,a_2]\big([a_4',a_5][a_3,a_4'']+[a_3,a_4'][a_4'',a_5]\big)\in I, \\
&[a_1,a_3]\big([a_4',a_5][a_2,a_4'']+[a_2,a_4'][a_4'',a_5]\big)\in I.
\end{aligned}
$$

Assim os polinômios do tipo (2.26) pertencem ao ideal I quando $a_4 = a_4' a_4''$.

Caso tenhamos $a_3 = a'_3a''_3$ então

$$\begin{gathered}
[a_1,a_2][a'_3a''_3,a_4,a_5] + [a_1,a'_3a''_3][a_2,a_4,a_5] = \\
= [a_1,a_2]\left[a'_3[a''_3,a_4] + [a'_3,a_4]a''_3,a_5\right] + \left(a'_3[a_1,a''_3] + [a_1,a'_3]a''_3\right)[a_2,a_4,a_5] = \\
= [a_1,a_2]\left(a'_3[a''_3,a_4,a_5] + [a'_3,a_5][a''_3,a_4] + [a'_3,a_4][a''_3,a_5] + [a'_3,a_4,a_5]a''_3\right) + \\
+\left(a'_3[a_1,a''_3] + [a_1,a'_3]a''_3\right)[a_2,a_4,a_5] = \\
= a'_3\left([a_1,a_2][a''_3,a_4,a_5] + [a_1,a''_3][a_2,a_4,a_5]\right) + [a_1,a_2,a'_3][a''_3,a_4,a_5] + \\
+\left([a_1,a_2][a'_3,a_4,a_5] + [a_1,a'_3][a_2,a_4,a_5]\right)a''_3 - [a_1,a'_3][a_2,a_4,a_5,a''_3] + \\
+[a_1,a_2]\left([a'_3,a_5][a''_3,a_4] + [a'_3,a_4][a''_3,a_5]\right).
\end{gathered}$$

Pela hipótese de indução temos que

$$[a_1,a_2][b,a_4,a_5] + [a_1,b][a_2,a_4,a_5] \in I, \text{ para } b \in \{a'_3,a''_3\}.$$

Observemos que o polinômio $[a_2,a_4,a_5,a''_3] \in I$ pois é do tipo (2.22) com grau menor que m. Sabemos que os polinômios do tipo (2.24) de grau m pertencem ao ideal I, assim

$$[a_1,a_2,a'_3][a''_3,a_4,a_5] \in I.$$

Segue da afirmação (2.30) que

$$[a_1,a_2]\left([a'_3,a_5][a''_3,a_4] + [a'_3,a_4][a''_3,a_5]\right) \in I.$$

Assim os polinômios do tipo (2.26) pertencem ao ideal I quando $a_3 = a'_3a''_3$. Pela simetria entre a_2 e a_3 temos que os polinômios do tipo (2.26) pertencem ao ideal I quando $a_2 = a'_2a''_2$.

Caso tenhamos $a_1 = a'_1a''_1$ então

$$\begin{gathered}
[a'_1a''_1,a_2][a_3,a_4,a_5] + [a'_1a''_1,a_3][a_2,a_4,a_5] = \\
= \left(a'_1[a''_1,a_2] + [a'_1,a_2]a''_1\right)[a_3,a_4,a_5] + \left(a'_1[a''_1,a_3] + [a'_1,a_3]a''_1\right)[a_2,a_4,a_5] = \\
= a'_1\left([a''_1,a_2][a_3,a_4,a_5] + [a''_1,a_3][a_2,a_4,a_5]\right) + \\
+\left([a'_1,a_2][a_3,a_4,a_5] + [a'_1,a_3][a_2,a_4,a_5]\right)a''_1 + \\
-[a'_1,a_2][a_3,a_4,a_5,a''_1] - [a'_1,a_3][a_2,a_4,a_5a''_1].
\end{gathered}$$

Pela hipótese de indução temos que

$$[b,a_2][a_3,a_4,a_5]+[b,a_3][a_2,a_4,a_5]\in I, \quad \text{para } b\in\{a_1',a_1''\}.$$

Como os polinômios do tipo (2.22) com grau menor que m pertencem ao ideal I (hipótese de indução), segue que

$$[a_3,a_4,a_5,a_1''], \qquad [a_2,a_4,a_5a_1'']\in I.$$

Assim os polinômios do tipo (2.26) pertencem ao ideal I quando $a_1=a_1'a_1''$.

Portanto qualquer polinômio $f=f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$ do tipo (2.26) de grau m pertence ao ideal I.

Finalmente considere um polinômio $f=f(a_1,a_2,a_3,a_4)$ do tipo (2.22) de grau $m>4$. Assim para algum $i, 1\leq i\leq 4$, nós temos que $a_i=a_i'a_i''$ com $\deg a_i'$, $\deg a_i''<a_i$.

Se tivermos $a_4=a_4'a_4''$ então

$$[a_1,a_2,a_3,a_4'a_4'']=a_4'[a_1,a_2,a_3,a_4'']+[a_1,a_2,a_3,a_4']a_4''\in I.$$

Pela hipótese de indução, temos que

$$[a_1,a_2,a_3,b]\in I \quad \text{para } b\in\{a_4',a_4''\}.$$

Assim os polinômios do tipo (2.22) pertencem ao ideal I quando $a_4=a_4'a_4''$.

Caso tenhamos $a_3=a_3'a_3''$ então

$$\begin{aligned}
[a_1,a_2,a_3'a_3'',a_4] &= [a_3'[a_1,a_2,a_3'']+[a_1,a_2,a_3']a_3'',a_4]=\\
&= a_3'[a_1,a_2,a_3'',a_4]+[a_3',a_4][a_1,a_2,a_3'']+[a_1,a_2,a_3'][a_3'',a_4]+[a_1,a_2,a_3',a_4]a_3''=\\
&= a_3'[a_1,a_2,a_3'',a_4]+[a_1,a_2,a_3',a_4]a_3''+\big[[a_1,a_2,a_3'],[a_3'',a_4]\big]+\\
&\quad +[a_3',a_4][a_1,a_2,a_3'']+[a_3'',a_4][a_1,a_2,a_3'].
\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução temos que

$$[a_1,a_2,b,a_4]\in I, \text{ para } b\in\{a_3',a_3''\}.$$

Como os polinômios da forma (2.25) de grau m pertencem ao ideal I, segue que

$$[a_3', a_4][a_1, a_2, a_3''] + [a_3'', a_4][a_1, a_2, a_3'] \in I.$$

Pela afirmação (2.27) temos que $\big[[a_1, a_2, a_3''], [a_3', a_4]\big] \in I$. Assim os polinômios do tipo (2.22) pertencem ao ideal I quando $a_3 = a_3'a_3''$.

Se tivermos $a_2 = a_2'a_2''$ então

$$\begin{aligned}
[a_1, a_2'a_2'', a_3, a_4] &= [a_2'[a_1, a_2''] + [a_1, a_2']a_2'', a_3, a_4] = \\
&= [a_2'[a_1, a_2'', a_3] + [a_2', a_3][a_1, a_2''] + [a_1, a_2'][a_2'', a_3] + [a_1, a_2', a_3]a_2'', a_4] = \\
&= a_2'[a_1, a_2'', a_3, a_4] + [a_2', a_4][a_1, a_2'', a_3] + [a_2', a_3][a_1, a_2'', a_4] + [a_2', a_3, a_4][a_1, a_2''] + \\
&+ [a_1, a_2'][a_2'', a_3, a_4] + [a_1, a_2', a_4][a_2'', a_3] + [a_1, a_2', a_3][a_2'', a_4] + [a_1, a_2', a_3, a_4]a_2'' = \\
&= a_2'[a_1, a_2'', a_3, a_4] + [a_1, a_2', a_3, a_4]a_2'' + \\
&+ [a_2', a_4][a_1, a_2'', a_3] + [a_2', a_3][a_1, a_2'', a_4] + \\
&+ [a_2'', a_3][a_1, a_2', a_4] + [a_2'', a_4][a_1, a_2', a_3] + \big[[a_1, a_2', a_4], [a_2'', a_3]\big] + \big[[a_1, a_2', a_3], [a_2'', a_4]\big] + \\
&+ [a_1, a_2''][a_2', a_3, a_4] + [a_1, a_2'][a_2'', a_3, a_4] + \big[[a_2', a_3, a_4], [a_1, a_2'']\big].
\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução temos que

$$[a_1, b, a_3, a_4] \in I, \quad \text{para } b \in \{a_2', a_2''\}.$$

Como os polinômios do tipo (2.25) de grau m pertencem ao ideal I, segue que

$$\begin{aligned}
&[a_2', a_4][a_1, a_2'', a_3] + [a_2', a_3][a_1, a_2'', a_4] \in I, \\
&[a_2'', a_3][a_1, a_2', a_4] + [a_2'', a_4][a_1, a_2', a_3] \in I.
\end{aligned}$$

Como os polinômios do tipo (2.26) de grau m pertencem ao ideal I, assim otemos

$$[a_1, a_2'][a_2'', a_3, a_4] + [a_1, a_2''][a_2', a_3, a_4] \in I.$$

Pela afirmação (2.27) temos que

$$\big[[a_1, a_2', a_4], [a_2'', a_3]\big], \quad \big[[a_1, a_2', a_3], [a_2'', a_4]\big], \quad \big[[a_2', a_3, a_4], [a_1, a_2'']\big] \in I.$$

Assim os polinômios do tipo (2.22) pertencem ao ideal I quando $a_2 = a_2'a_2''$. Como temos

$[a_1, a_2, a_3, a_4] = -[a_2, a_1, a_3, a_4]$ segue que os polinômios do tipo (2.22) pertencem ao ideal I quando $a_1 = a_1' a_1''$.

Portanto qualquer polinômio $f = f(a_1, a_2, a_3, a_4)$ do tipo (2.22) de grau m pertence ao ideal I. Assim concluímos que $T^{(4)} \subseteq I$.

A prova da Proposição 2B está completa.

Capítulo 3

As relações das álgebras universais associativas Lie nilpotentes de classe 4

Em todo este capítulo K é um anel associativo, comutativo e unitário. Seja $R = K\langle X\rangle$ a K-álgebra associativa unitária livre no conjunto $X = \{x_i \,|\, i \in \Lambda\}$ de geradores livres, com $\Lambda \subset \mathbb{N}$. Seja ainda $[R]$ a álgebra de Lie associada à R com comutador $[a,b] = ab - ba$ normado à esquerda; assim para quaisquer $a,b,c \in R$, $[a,b,c] = \big[[a,b],c\big]$. Lembramos que $T^{(n)}$ é um ideal bilateral em $K\langle X\rangle$ gerado pelos comutadores $[a_{i_1},\ldots,a_{i_n}]$ de comprimento n.

Neste capítulo descreveremos um conjunto de polinômios que geram o ideal bilateral $T^{(5)}$ em $K\langle X\rangle$. Lembramos que uma álgebra associativa qualquer R é Lie nilpotente de classe no máximo n se $T^{(n+1)}(R) = 0$ e que a álgebra quociente $K\langle X\rangle / T^{(n+1)}$ pode ser vista como a K-álgebra universal associativa Lie nilpotente de classe n. Assim um conjunto de polinômios que geram o ideal bilateral $T^{(5)}$ descreve as relações das álgebras universais Lie nilpotentes de classe 4.

Conforme Definição 2.11, $T^{(5)}$ é o ideal bilateral em $K\langle X\rangle$ gerado por todos comutadores $[a_{i_1},a_{i_2},a_{i_3},a_{i_4},a_{i_5}]$ de comprimento 5, com $a_i \in K\langle X\rangle$.

Teorema 3. *Os polinômios do tipo (3.1)-(3.8) formam um conjunto gerador do ideal $T^{(5)}$, como* *um ideal bilateral em $K\langle X\rangle$.*

$$[x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4},x_{i_5}]\ (i_s\in\Lambda); \tag{3.1}$$

$$[x_{i_1},x_{i_2}][x_{i_3},x_{i_4},x_{i_5},x_{i_6}]+[x_{i_6},x_{i_2}][x_{i_3},x_{i_4},x_{i_5},x_{i_1}]\ (i_s\in\Lambda); \tag{3.2}$$

$$\big([x_{i_1},x_{i_2}][x_{i_3},x_{i_4}]+[x_{i_1},x_{i_3}][x_{i_2},x_{i_4}]\big)[x_{i_5},x_{i_6},x_{i_7}]\ (i_s\in\Lambda); \tag{3.3}$$

$$[x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3}][x_{i_4},x_{i_5},x_{i_6}]\ (i_s\in\Lambda); \tag{3.4}$$

$$[x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3}][x_{i_4},x_{i_5},x_{i_6},x_{i_7}]\ (i_s\in\Lambda); \tag{3.5}$$

$$\big[[x_{i_1},x_{i_2}][x_{i_3},x_{i_4}]+[x_{i_1},x_{i_3}][x_{i_2},x_{i_4}],x_{i_5},x_{i_6}\big]\ (i_s\in\Lambda); \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}&\big[[x_{i_1},x_{i_2}][x_{i_3},x_{i_4}]+[x_{i_1},x_{i_3}][x_{i_2},x_{i_4}],x_{i_5}\big][x_{i_6},x_{i_7}]+\\&+\big[[x_{i_1},x_{i_2}][x_{i_3},x_{i_4}]+[x_{i_1},x_{i_3}][x_{i_2},x_{i_4}],x_{i_6}\big][x_{i_5},x_{i_7}]\ (i_s\in\Lambda);\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}&\big([x_{i_1},x_{i_2}][x_{i_3},x_{i_4}]+[x_{i_1},x_{i_3}][x_{i_2},x_{i_4}]\big)\\&\big([x_{i_5},x_{i_6}][x_{i_7},x_{i_8}]+[x_{i_5},x_{i_7}][x_{i_6},x_{i_8}]\big)\ (i_s\in\Lambda).\end{aligned} \tag{3.8}$$

No caso em que Λ for finito, o conjunto gerador do ideal $T^{(5)}$ é finito.

Inicialmente mostraremos que cada elemento listado no Teorema 3 pertence ao ideal $T^{(5)}$.

3.1 Resultados auxiliares

Como caso particular do Lema 2.21 temos a seguinte observação.

Observação 3.1. *Para quaisquer $a_i\in K\langle X\rangle$,*

$$\begin{gathered}\big[[a_1,a_2,a_3],[a_4,a_5]\big]\in T^{(5)},\\ \big[[a_1,a_2,a_3,a_4],[a_5,a_6]\big]\in T^{(6)}\subset T^{(5)},\\ \big[[a_1,a_2,a_3],[a_4,a_5,a_6]\big]\in T^{(6)}\subset T^{(5)}.\end{gathered}$$

O próximo resultado segue diretamente da Proposição 2.22 para $n=5$.

Proposição 3.2. *Para quaisquer $a_i\in K\langle X\rangle$,*

$$[a_1,a_2][a_3,a_4,a_5,a_6]+[a_6,a_2][a_3,a_4,a_5,a_1]\in T^{(5)}.$$

Proposição 3.3. *Para quaisquer* $a_i \in K\langle X\rangle$*,*

$$[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6] \in T^{(5)}.$$

Demonstração: Sejam u_1,u_2 comutadores de comprimento 2 em $a_i\,(a_i \in K\langle X\rangle)$. Considere $y_1,y_2 \in K\langle X\rangle$, então pelo Lema 2.21 temos que $[u_1,y_1y_2,u_2] \in T^{(5)}$. Como

$$\begin{aligned}[u_1,y_1y_2,u_2] &= \big[y_1[u_1,y_2]+[u_1,y_1]y_2,u_2\big] = \\ &= y_1[u_1,y_2,u_2]+[y_1,u_2][u_1,y_2]+[u_1,y_1][y_2,u_2]+[u_1,y_1,u_2]y_2,\end{aligned}$$

novamente pelo Lema 2.21 temos $y_1[u_1,y_2,u_2]$, $[u_1,y_1,u_2]y_2 \in T^{(5)}$. Assim

$$[y_1,u_2][u_1,y_2]+[u_1,y_1][y_2,u_2] \in T^{(5)}.$$

Tome $u_1=[a_1,a_2]$, $u_2=[a_4,a_5]$, $y_1=a_3$ e $y_2=a_6$, então

$$\begin{aligned}[y_1,u_2][u_1,y_2]+[u_1,y_1][y_2,u_2] &= \big[a_3,[a_4,a_5]\big][a_1,a_2,a_6]+[a_1,a_2,a_3]\big[a_6,[a_4,a_5]\big] = \\ &= -[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6]-[a_1,a_2,a_6][a_4,a_5,a_3]+\big[[a_1,a_2,a_6],[a_4,a_5,a_3]\big].\end{aligned}$$

Pela Observação 3.1 temos que $\big[[a_1,a_2,a_6],[a_4,a_5,a_3]\big] \in T^{(5)}$. Assim

$$[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6]+[a_1,a_2,a_6][a_4,a_5,a_3] \in T^{(5)}. \tag{3.9}$$

Por fim, se u_1 é um comutador de grau 2, ainda pelo Lema 2.21 temos que $[u_1,a_3a_4,a_5,a_6] \in T^{(5)}$. Observemos que

$$\begin{aligned}[u_1,a_3a_4,a_5,a_6] &= \big[a_3[u_1,a_4]+[u_1,a_3]a_4,a_5,a_6\big] = \\ &= \big[a_3[u_1,a_4,a_5]+[a_3,a_5][u_1,a_4]+[u_1,a_3][a_4,a_5]+[u_1,a_3,a_5]a_4,a_6\big] = \\ &= a_3[u_1,a_4,a_5,a_6]+[a_3,a_6][u_1,a_4,a_5]+[a_3,a_5][u_1,a_4,a_6]+[a_3,a_5,a_6][u_1,a_4]+ \\ &\quad +[u_1,a_3][a_4,a_5,a_6]+[u_1,a_3,a_6][a_4,a_5]+[u_1,a_3,a_5][a_4,a_6]+[u_1,a_3,a_5,a_6]a_4 = \\ &= a_3[u_1,a_4,a_5,a_6]+[u_1,a_3,a_5,a_6]a_4+ \\ &\quad +[a_3,a_6][u_1,a_4,a_5]+[a_3,a_5][u_1,a_4,a_6]+ \\ &\quad +[a_4,a_5][u_1,a_3,a_6]+[a_4,a_6][u_1,a_3,a_5]+ \\ &\quad +\big[[u_1,a_3,a_6],[a_4,a_5]\big]+\big[[u_1,a_3,a_5],[a_4,a_6]\big]+ \\ &\quad +[a_3,a_5,a_6][u_1,a_4]+[u_1,a_3][a_4,a_5,a_6].\end{aligned}$$

Ainda pelo Lema 2.21 temos que $a_3[u_1,a_4,a_5,a_6]$ e $[u_1,a_3,a_5,a_6]a_4 \in T^{(5)}$. Agora usando a Proposição 3.2 obtemos que

$$[a_3,a_6][u_1,a_4,a_5]+[a_3,a_5][u_1,a_4,a_6] \in T^{(5)},$$
$$[a_4,a_5][u_1,a_3,a_6]+[a_4,a_6][u_1,a_3,a_5] \in T^{(5)}.$$

Pela Observação 3.1 temos que $\big[[u_1,a_3,a_6],[a_4,a_5]\big]$, $\big[[u_1,a_3,a_5],[a_4,a_6]\big] \in T^{(5)}$. Assim $[a_3,a_5,a_6][u_1,a_4]+[u_1,a_3][a_4,a_5,a_6] \in T^{(5)}$ e tomando $u_1=[a_1,a_2]$ temos

$$[a_3,a_5,a_6][u_1,a_4]+[u_1,a_3][a_4,a_5,a_6] = [a_3,a_5,a_6][a_1,a_2,a_4]+[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6] =$$
$$= [a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6]+[a_1,a_2,a_4][a_3,a_5,a_6]+\big[[a_3,a_5,a_6],[a_1,a_2,a_4]\big].$$

Ainda pela Observação 3.1 temos que $\big[[a_3,a_5,a_6],[a_1,a_2,a_4]\big] \in T^{(5)}$ e então

$$[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6]+[a_1,a_2,a_4][a_3,a_5,a_6] \in T^{(5)}. \tag{3.10}$$

Seja $a_i \in K\langle X\rangle$, $(1 \le i \le 6)$. Temos que

$$[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6] = sgn\sigma[a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)},a_{\sigma(3)}][a_{\sigma(4)},a_{\sigma(5)},a_{\sigma(6)}],$$

se $\sigma=(12)$ ou $\sigma=(45)$. Por (3.9) e (3.10), temos

$$\begin{aligned}[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6] &\equiv \\ &\equiv sgn\sigma[a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)},a_{\sigma(3)}][a_{\sigma(4)},a_{\sigma(5)},a_{\sigma(6)}] \pmod{T^{(5)}},\end{aligned} \tag{3.11}$$

se $\sigma=(36)$, $\sigma=(34)$ ou $\sigma=(16)$.

Como as transposições $\sigma=(12)$, $\sigma=(45)$, $\sigma=(36)$, $\sigma=(34)$ e $\sigma=(16)$ geram o grupo S_6 das permutações no conjunto $\{1,2,3,4,5,6\}$[1]. Segue que (3.11) vale para qualquer $\sigma \in S_6$ e qualquer $a_i \in K\langle X\rangle$, $(1 \le i \le 6)$.

Para completar a prova, pela Identidade de Jacobi, temos

$$\big([a_1,a_2,a_3]+[a_2,a_3,a_1]+[a_3,a_1,a_2]\big)[a_4,a_5,a_6]=0$$

[1]Como $(16)(36)(16)=(13)$, $(13)(34)(13)=(14)$, $(14)(45)(14)=(15)$ e as tranposições $(12),(13),(14),(15)$ e (16) geram S_6.

Por (3.11) acarreta que

$$3[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6] \in T^{(5)}. \tag{3.12}$$

Além disso, é claro que

$$[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6] \equiv [a_4,a_5,a_6][a_1,a_2,a_3] \pmod{T^{(5)}}.$$

Por outro lado, por (3.11), temos

$$[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6] \equiv -[a_4,a_5,a_6][a_1,a_2,a_3] \pmod{T^{(5)}}.$$

assim segue que

$$2[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6] \in T^{(5)}. \tag{3.13}$$

Agora de (3.12) e (3.13) implica que $[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6] \in T^{(5)}$ para todo $a_i \in K\langle X\rangle$. □

Corolário 3.1.1. *Para quaisquer $a_i \in K\langle X\rangle$,*

$$\left[a_1[a_2,a_3,a_4],a_5,a_6\right] \in T^{(5)}, \tag{3.14}$$

$$\left[[a_1,a_2,a_3]a_4,a_5,a_6\right] \in T^{(5)}. \tag{3.15}$$

Demonstração: Veja que

$$[a_1[a_2,a_3,a_4],a_5,a_6] = [a_1[a_2,a_3,a_4,a_5]+[a_1,a_5][a_2,a_3,a_4],a_6] =$$
$$= a_1[a_2,a_3,a_4,a_5,a_6]+[a_1,a_6][a_2,a_3,a_4,a_5]+[a_1,a_5][a_2,a_3,a_4,a_6]+[a_1,a_5,a_6][a_2,a_3,a_4].$$

Por definição temos que $a_1[a_2,a_3,a_4,a_5,a_6] \in T^{(5)}$. Segue da Proposição 3.2 que

$$[a_1,a_6][a_2,a_3,a_4,a_5]+[a_1,a_5][a_2,a_3,a_4,a_6] \in T^{(5)}.$$

Pela Proposição 3.3 temos que $[a_1,a_5,a_6][a_2,a_3,a_4] \in T^{(5)}$ e assim obtemos (3.14).

De modo similar obtemos (3.15). □

Proposição 3.4. *Para quaisquer $a_i \in K\langle X\rangle$,*

$$[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6,a_7] \in T^{(5)}. \tag{3.16}$$

Demonstração: Pela Proposição 3.2 temos que

$$\big[[a_2,a_3],a_1\big][a_4,a_5,a_6,a_7]+[a_7,a_1]\big[a_4,a_5,a_6,[a_2,a_3]\big]\in T^{(5)}.$$

Como

$$\big[a_4,a_5,a_6,[a_2,a_3]\big]=[a_4,a_5,a_6,a_2,a_3]-[a_4,a_5,a_6,a_3,a_2]\in T^{(5)},$$

segue que

$$[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6,a_7]\in T^{(5)}.$$

□

Corolário 3.1.2. *Para quaisquer $a_i\in K\langle X\rangle$,*

$$[a_1,a_2,a_3,a_4][a_5,a_6,a_7,a_8]\in T^{(5)}. \tag{3.17}$$

Demonstração: Como

$$[a_1,a_2,a_3,a_4][a_5,a_6,a_7,a_8]=\big[[a_1,a_2],a_3,a_4\big]\big[a_5,a_6,a_7,a_8\big],$$

segue pela Proposição 3.4 que $\big[[a_1,a_2],a_3,a_4\big]\big[a_5,a_6,a_7,a_8\big]\in T^{(5)}$ e obtemos (3.17). □

Corolário 3.1.3. *Para quaisquer $a_i\in K\langle X\rangle$,*

$$\big[[a_1,a_2],[a_3,a_4]\big][a_5,a_6,a_7]\in T^{(5)}. \tag{3.18}$$

$$\big[[a_1,a_2],[a_3,a_4]\big][a_5,a_6,a_7,a_8]\in T^{(5)}. \tag{3.19}$$

Demonstração: Segue do Lema 2.21 que

$$\big[[a_1,a_2],[a_3,a_4]\big]=[a_1,a_2,a_3,a_4]-[a_1,a_2,a_3,a_4].$$

Pela Proposição 3.4 temos que

$$\begin{aligned}\big[[a_1,a_2],[a_3,a_4]\big][a_5,a_6,a_7]&=\big([a_1,a_2,a_3,a_4]-[a_1,a_2,a_3,a_4]\big)[a_5,a_6,a_7]=\\&=[a_1,a_2,a_3,a_4][a_5,a_6,a_7]-[a_1,a_2,a_3,a_4][a_5,a_6,a_7]\in T^{(5)}.\end{aligned}$$

Portanto vale (3.18).

Do mesmo modo obtemos que

$$\big[[a_1,a_2],[a_3,a_4]\big][a_5,a_6,a_7,a_8] = [a_1,a_2,a_3,a_4][a_5,a_6,a_7,a_8] - [a_1,a_2,a_4,a_3][a_5,a_6,a_7,a_8].$$

Assim segue do Corolário 3.1.2 que $\big[[a_1,a_2],[a_3,a_4]\big][a_5,a_6,a_7,a_8] \in T^{(5)}$, e obtemos (3.19). □

Proposição 3.5. *Para quaisquer $a_i \in K\langle X\rangle$,*

$$\big([a_1,a_2][a_3,a_4] + [a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6,a_7] \in T^{(5)}.$$

Demonstração: Pela Proposição 3.3 temos que

$$[a_3,a_1a_4,a_2][a_5,a_6,a_7] \in T^{(5)}.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} [a_3,a_1a_4,a_2][a_5,a_6,a_7] &= \big[a_1[a_3,a_4] + [a_3,a_1]a_4, a_2\big][a_5,a_6,a_7] = \\ = \big(a_1[a_3,a_4,a_2] &+ [a_1,a_2][a_3,a_4] + [a_3,a_1][a_4,a_2] + [a_3,a_1,a_2]a_4\big)[a_5,a_6,a_7] = \\ = a_1[a_3,a_4,a_2][a_5,a_6,a_7] &+ [a_3,a_1,a_2][a_5,a_6,a_7]a_4 - [a_3,a_1,a_2][a_5,a_6,a_7,a_4] + \\ &+ \big([a_1,a_2][a_3,a_4] + [a_3,a_1][a_4,a_2]\big)[a_5,a_6,a_7]. \end{aligned}$$

Ainda pela Proposição 3.3 temos que

$$a_1[a_3,a_4,a_2][a_5,a_6,a_7], \quad [a_3,a_1,a_2][a_5,a_6,a_7]a_4 \in T^{(5)}.$$

Da Proposição 3.4 temos que

$$[a_3,a_1,a_2][a_5,a_6,a_7,a_4] \in T^{(5)}.$$

Assim obtemos que

$$\big([a_1,a_2][a_3,a_4] + [a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6,a_7] \in T^{(5)}.$$

□

Corolário 3.1.4. *Para quaisquer* $a_i \in K\langle X\rangle$,

$$\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6,a_7,a_8] \in T^{(5)}, \tag{3.20}$$

$$\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big[[a_5,a_6],[a_7,a_8]\big] \in T^{(5)}. \tag{3.21}$$

Demonstração: Inicialmente observemos que

$$\begin{aligned}&\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6,a_7,a_8] =\\ &= \big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big[[a_5,a_6],a_7,a_8\big].\end{aligned}$$

Agora fazendo $b_i = a_i$ para $1 \leq i \leq 4$, $b_5 = [a_5,a_6]$ e $b_i = a_{i+1}$ para $i = 6,7$ temos que pela Proposição 3.5 que

$$\big([b_1,b_2][b_3,b_4]+[b_1,b_3][b_2,b_4]\big)[b_5,b_6,b_7] \in T^{(5)}.$$

Portanto vale (3.20).

Segue do Lema 2.21 que

$$\big[[a_5,a_6],[a_7,a_8]\big] = [a_5,a_6,a_7,a_8]-[a_5,a_6,a_8,a_7].$$

Assim segue do caso anterior que,

$$\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big[[a_5,a_6],[a_7,a_8]\big] \in T^{(5)},$$

e obtemos (3.21). □

Corolário 3.1.5. *Para quaisquer* $a_i \in K\langle X\rangle$,

$$[a_1,a_2][a_1,a_3][a_1,a_2,a_3] \in T^{(5)}.$$

Demonstração: Segue diretamente da Proposição 3.5 que

$$\big([a_1,a_2][a_4,a_3]+[a_1,a_4][a_2,a_3]\big)[a_5,a_6,a_7] \in T^{(5)},$$

agora basta fazer $a_1 = a_4 = a_5$, $a_2 = a_6$ e $a_3 = a_7$. □

Proposição 3.6. *Para quaisquer $a_i \in K\langle X\rangle$,*

$$\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8]\big) \in T^{(5)}.$$

Demonstração: Pela Proposição 3.5, temos que

$$\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6a_7,a_8] \in T^{(5)}.$$

Observemos que

$$\begin{gathered}
\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6a_7,a_8] = \\
= \big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big[a_6[a_5,a_7]+[a_5,a_6]a_7,a_8\big] = \\
= \big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big) \\
\big(a_6[a_5,a_7,a_8]+[a_6,a_8][a_5,a_7]+[a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_6,a_8]a_7\big) = \\
= \big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_7,a_8]a_6+[a_5,a_6,a_8]a_7\big)+ \\
+\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8]\big)+ \\
+\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big(\big[[a_6,a_8],[a_5,a_7]\big]-[a_5,a_7,a_8,a_6]\big).
\end{gathered}$$

Novamente, pela Proposição 3.5,

$$\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,b,a_8] \in T^{(5)}, \text{ para } b \in \{a_6,a_7\}.$$

Assim

$$\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_7,a_8]a_6+[a_5,a_6,a_8]a_7\big) \in T^{(5)}.$$

Pelo Corolário 3.1.4 temos

$$\begin{gathered}
\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_7,a_8,a_6] \in T^{(5)}, \\
\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big[[a_6,a_8],[a_5,a_7]\big] \in T^{(5)}.
\end{gathered}$$

Assim segue que

$$\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8]\big) \in T^{(5)}.$$

□

Corolário 3.1.6. *Para quaisquer* $a_i \in K\langle X\rangle$,

$$[a_1,a_2][a_1,a_3][a_1,a_4][a_1,a_5] \in T^{(5)}.$$

Demonstração: Segue da Proposição 3.6 que

$$\big([a_1,a_2][a_6,a_3]+[a_1,a_6][a_2,a_3]\big)\big([a_7,a_4][a_8,a_5]+[a_7,a_8][a_4,a_5]\big) \in T^{(5)}.$$

Fazendo $a_6 = a_7 = a_8 = a_1$ obtemos o resultado. □

Proposição 3.7. *Para quaisquer* $a_i \in K\langle X\rangle$,

$$\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],a_5,a_6\big] \in T^{(5)}.$$

Demonstração: Temos que $[a_1,a_2a_3,a_4,a_5,a_6] \in T^{(5)}$, então

$$\begin{aligned}
[a_1,a_2a_3,a_4,a_5,a_6] &= \big[a_2[a_1,a_3]+[a_1,a_2]a_3,a_4,a_5,a_6\big] = \\
&= \big[a_2[a_1,a_3,a_4]+[a_2,a_4][a_1,a_3]+[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_2,a_4]a_3,a_5,a_6\big] = \\
&= \big[a_2[a_1,a_3,a_4],a_5,a_6\big]+\big[[a_1,a_2,a_4]a_3,a_5,a_6\big]+ \\
&+\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],a_5,a_6\big]-\Big[\big[[a_1,a_3],[a_2,a_4]\big],a_5,a_6\Big].
\end{aligned}$$

Segue do Corolário 3.1.1 que $\big[a_2[a_1,a_3,a_4],a_5,a_6\big]$, $\big[[a_1,a_2,a_4]a_3,a_5,a_6\big] \in T^{(5)}$. Do Lema 2.21 temos

$$\Big[\big[[a_1,a_3],[a_2,a_4]\big],a_5,a_6\Big] \in T^{(5)}.$$

Portanto

$$\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],a_5,a_6\big] \in T^{(5)}.$$

□

Corolário 3.1.7. *Para quaisquer* $a_i \in K\langle X\rangle$,

$$\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],[a_5,a_6]\big] \in T^{(5)}.$$

Demonstração: Segue diretamente da Proposição 3.7, uma vez que

$$\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],[a_5,a_6]\big] =$$
$$= \big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],a_5,a_6\big] - \big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],a_6,a_5\big].$$

□

Proposição 3.8. *Para quaisquer $a_i \in K\langle X\rangle$,*

$$\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],a_5\big][a_6,a_7]+$$
$$+\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],a_6\big][a_5,a_7] \in T^{(5)}.$$

Demonstração: Fazendo $y=[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]$ obtemos

$$\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],a_5\big][a_6,a_7]+\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],a_6\big][a_5,a_7] =$$
$$= [y,a_5][a_6,a_7]+[y,a_6][a_5,a_7].$$

Agora

$$[y,a_5][a_6,a_7]+[y,a_6][a_5,a_7] = [y,a_5](a_6a_7-a_7a_6)+[y,a_6](a_5a_7-a_7a_5) =$$
$$= [y,a_5]a_6a_7+[y,a_6]a_5a_7-[y,a_5]a_7a_6-[y,a_6]a_7a_5 =$$
$$= [y,a_5]a_6a_7+a_5[y,a_6]a_7-a_5[y,a_6]a_7+[y,a_6]a_5a_7-[y,a_5]a_7a_6-[y,a_6]a_7a_5 =$$
$$= [y,a_5a_6]a_7+[y,a_6,a_5]a_7-[y,a_5]a_7a_6-[y,a_6]a_7a_5 =$$
$$= [y,a_5a_6]a_7+[y,a_6,a_5]a_7-[y,a_5]a_7a_6+a_7[y,a_5]a_6+$$
$$-a_7[y,a_5]a_6-[y,a_6]a_7a_5+a_7[y,a_6]a_5-a_7[y,a_6]a_5 =$$
$$= [y,a_5a_6]a_7+[y,a_6,a_5]a_7-[y,a_5,a_7]a_6-a_7[y,a_5]a_6-[y,a_6,a_7]a_5-a_7[y,a_6]a_5 =$$
$$= [y,a_5a_6]a_7+[y,a_6,a_5]a_7-[y,a_5,a_7]a_6-[y,a_6,a_7]a_5+$$
$$-a_7[y,a_5]a_6-a_7a_5[y,a_6]+a_7a_5[y,a_6]-a_7[y,a_6]a_5 =$$
$$= [y,a_5a_6]a_7+[y,a_6,a_5]a_7-[y,a_5,a_7]a_6-[y,a_6,a_7]a_5-a_7[y,a_5a_6]-a_7[y,a_6,a_5] =$$
$$= [y,a_5a_6,a_7]+[y,a_6,a_5]a_7-[y,a_5,a_7]a_6-[y,a_6,a_7]a_5-a_7[y,a_6,a_5].$$

Pela Proposição 3.7 temos

$$[y,a_5a_6,a_7] = \big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],a_5a_6,a_7\big] \in T^{(5)},$$

bem como,

$$[y,a_6,a_5], \quad [y,a_5,a_7] \text{ e } [y,a_6,a_7] \in T^{(5)}.$$

Portanto

$$[y,a_5][a_6,a_7]+[y,a_6][a_5,a_7] \in T^{(5)},$$

com $y = [a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]$. □

3.2 Demonstração do Teorema 3

Seja I o ideal bilateral em $K\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios (3.1)-(3.8). Queremos mostrar que $I = T^{(5)}$, assim devemos mostrar que $I \subseteq T^{(5)}$ e que $T^{(5)} \subseteq I$. As Proposições 3.2 à 3.8 garantem que $I \subseteq T^{(5)}$, visto que cada gerador de I pertence ao ideal $T^{(5)}$. Resta-nos mostrar que $T^{(5)} \subseteq I$. Como o ideal bilateral $T^{(5)}$ é gerado pelos polinômios $[a_1,a_2,a_3,a_4,a_5]$, para quaisquer $a_i \in K\langle X\rangle$; assim é suficiente mostrar que os polinômios do tipo

$$[a_1,a_2,a_3,a_4,a_5] \tag{3.22}$$

pertencem ao ideal I para todo $a_i \in K\langle X\rangle$. Claramente podemos assumir que qualquer a_i é um monômio. Assim para mostrar que os polinômios dos tipo (3.22) pertencem ao ideal I, mostraremos que os seguintes polinômios pertencem ao ideal I, para quaisquer $a_i \in K\langle X\rangle$,

$$\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8]\big); \tag{3.23}$$

$$\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6,a_7]; \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}&[a_1,a_2]\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_7\big]+\\&+[a_7,a_2]\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_1\big];\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6,a_7]; \tag{3.26}$$

$$\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],a_5,a_6\big]; \tag{3.27}$$

$$[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6]; \tag{3.28}$$

$$[a_1,a_2][a_3,a_4,a_5,a_6]+[a_6,a_2][a_3,a_4,a_5,a_1]. \tag{3.29}$$

A prova será por indução no grau $m = \deg f$ dos polinômios f do tipo (3.22)-(3.29). É claro que para qualquer polinômio f do tipo (3.22)-(3.29) temos $m = \deg f \geq 5$. Como base de indução consideramos que o grau do polinômio f seja $m = 5$, assim temos que f é um polinômio do tipo (3.1), ou seja, cada a_i é um monômio de grau 1 e assim $f \in I$.

No passo de indução tomaremos f um polinômio do tipo (3.22)-(3.29) de grau $m = \deg f$. Para todo polinômio g do tipo (3.22)-(3.29) de grau menor que m, admita que $g \in I$. Provaremos que $f \in I$.

Afirmação 3.2.1. *Qualquer polinômio $f = f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8)$ de grau m, do tipo (3.23), pertence ao ideal I.*

Observemos que $f = f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8)$ é um polinômio da forma

$$f = \big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8]\big).$$

Caso tenhamos $\deg f = 8$ então cada a_i é um monômio de grau 1, ou seja, f é do tipo (3.8) e assim $f \in I$. Admita que $m = \deg f > 8$, então para algum i, $1 \leq i \leq 8$ nós temos $a_i = a_i' a_i''$, sendo $\deg a_i'$, $\deg a_i'' < \deg a_i$.

Primeiro consideremos o caso em que $a_8 = a_8' a_8''$, então

$$\begin{aligned}
&\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7,a_8'a_8'']+[a_5,a_7][a_6,a_8'a_8'']\big) = \\
&= \big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6]a_8'[a_7,a_8'']+[a_5,a_7]a_8'[a_6,a_8'']\big) + \\
&+\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7,a_8']a_8''+[a_5,a_7][a_6,a_8']a_8''\big) = \\
&= \big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7,a_8'']+[a_5,a_7][a_6,a_8'']\big)a_8' + \\
&+\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7,a_8']+[a_5,a_7][a_6,a_8']\big)a_8'' + \\
&-\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7,a_8'',a_8']+[a_5,a_7][a_6,a_8'',a_8']\big).
\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução temos,

$$\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7,b]+[a_5,a_7][a_6,b]\big) \in I, \text{ para } b \in \{a_8', a_8''\}.$$

Assim segue que

$$\begin{aligned}
&\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7,a_8'']+[a_5,a_7][a_6,a_8'']\big)a_8' \in I, \\
&\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7,a_8']+[a_5,a_7][a_6,a_8']\big)a_8'' \in I.
\end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6][a_7,a_8'',a_8'] \in I. \tag{3.30}$$

Observamos que

$$\begin{aligned}\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6][a_7,a_8'',a_8'] =\\ = \big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_7,a_8'',a_8'][a_5,a_6]+\big[[a_5,a_6],[a_7,a_8'',a_8']\big]\big).\end{aligned}$$

Afirmamos ainda que

$$\big[[a_5,a_6],[a_7,a_8'',a_8']\big] \in I. \tag{3.31}$$

Pois

$$\begin{aligned}\big[[a_5,a_6],[a_7,a_8'',a_8']\big] = -\big[[a_7,a_8'',a_8'],[a_5,a_6]\big] =\\ = [a_7,a_8'',a_8',a_6,a_5]-[a_7,a_8'',a_8',a_5,a_6] \in I,\end{aligned}$$

uma vez que $[a_7,a_8'',a_8',a_6,a_5]$ e $[a_7,a_8'',a_8',a_5,a_6]$ são polinômios do tipo (3.22) e possuem grau menor que m. Portanto, pela hipótese de indução, a afirmação (3.31) é válida.

Observemos que $\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_7,a_8'',a_8']$ é um polinômio do tipo (3.24) e possui grau menor que m e assim, pela hipótese de indução, pertence ao ideal I. Logo

$$\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_7,a_8'',a_8'][a_5,a_6] \in I.$$

Como consequência $\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6][a_7,a_8'',a_8'] \in I$ e assim a afirmação (3.30) é válida.

Agora segue da afirmação (3.30) que

$$\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_7][a_6,a_8'',a_8'] \in I.$$

Assim os polinômios do tipo (3.23) pertencem ao ideal I quando $a_8 = a_8'a_8''$.

Se $a_1 = a_1'a_1''$, então

$$\begin{aligned}
&\big([a_1'a_1'',a_2][a_3,a_4]+[a_1'a_1'',a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8]\big)=\\
&=\big(a_1'[a_1'',a_2][a_3,a_4]+a_1'[a_1'',a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8]\big)+\\
&+\big([a_1',a_2]a_1''[a_3,a_4]+[a_1',a_3]a_1''[a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8]\big)=\\
&=a_1'\big([a_1'',a_2][a_3,a_4]+[a_1'',a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8]\big)+\\
&+a_1''\big([a_1',a_2][a_3,a_4]+[a_1',a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8]\big)+\\
&+\big([a_1',a_2,a_1''][a_3,a_4]+[a_1',a_3,a_1''][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8]\big).
\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução,

$$\big([b,a_2][a_3,a_4]+[b,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8]\big)\in I,\ \text{para } b\in\{a_1',a_1''\}.$$

Assim segue que

$$\begin{aligned}
&a_1'\big([a_1'',a_2][a_3,a_4]+[a_1'',a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8]\big)\in I,\\
&a_1''\big([a_1',a_2][a_3,a_4]+[a_1',a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8]\big)\in I.
\end{aligned}$$

Afirmamos que

$$[a_1',a_2,a_1''][a_3,a_4]\big([a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8]\big)\in I. \tag{3.32}$$

Como

$$\begin{aligned}
&[a_1',a_2,a_1''][a_3,a_4]\big([a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8]\big)=\\
&=\big([a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8]\big)[a_1',a_2,a_1''][a_3,a_4]+\\
&-[a_1',a_2,a_1'']\big[[a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8],[a_3,a_4]\big]+\\
&-\big[[a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8],[a_1',a_2,a_1'']\big][a_3,a_4].
\end{aligned}$$

Observemos que $\big([a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8]\big)[a_1',a_2,a_1'']$ é um polinômio do tipo (3.24) e possui grau menor que m e assim, pela hipótese de indução, pertence ao ideal I. Logo

$$\big([a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8]\big)[a_1',a_2,a_1''][a_3,a_4]\in I.$$

Afirmamos que

$$\big[[a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8],[a_3,a_4]\big]\in I. \tag{3.33}$$

De fato,

$$\begin{gathered}\big[[a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8],[a_3,a_4]\big]=\\ =\big[[a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8],a_3,a_4\big]-\big[[a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8],a_4,a_3\big]\in I,\end{gathered}$$

pois é uma combinação linear de polinômios do tipo (3.27) com grau menor que m.

Afirmamos também que

$$\big[[a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8],[a_1',a_2,a_1'']\big]\in I. \tag{3.34}$$

Escrevendo $y=[a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8]$ na equação (3.34), obtemos que

$$\begin{gathered}\big[[a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8],[a_1',a_2,a_1'']\big]=\\ =\big[y,[a_1',a_2,a_1'']\big]=\big[y,[a_1',a_2]a_1'']\big]-\big[y,a_1''[a_1',a_2]\big]=\\ =[a_1',a_2][y,a_1'']+\big[y,[a_1',a_2]\big]a_1''-[y,a_1''][a_1',a_2]-a_1''\big[y,[a_1',a_2]\big]=\\ =\big[y,[a_1',a_2]\big]a_1''-a_1''\big[y,[a_1',a_2]\big]-\big[[y,a_1''],[a_1',a_2]\big]=\\ =\big[y,[a_1',a_2]\big]a_1''-a_1''\big[y,[a_1',a_2]\big]-\big[[y,a_1'',a_1'],a_2\big]+\big[[y,a_1'',a_2],a_1'\big]=\\ =\big[y,[a_1',a_2]\big]a_1''-a_1''\big[y,[a_1',a_2]\big]-\big[y,a_1'',a_1'\big]a_2+a_2\big[y,a_1'',a_1'\big]+\big[y,a_1'',a_2\big]a_1'-a_1'\big[y,a_1'',a_2\big]\in I.\end{gathered}$$

Visto que é uma combinação linear de polinômios do tipo (3.27) com grau menor que m e pertencem ao ideal I, pela hipótese de indução. Portanto a afirmação (3.32) é válida. Assim os polinômios do tipo (3.23) pertencem ao ideal I quando $a_1=a_1'a_1''$.

Se $a_7 = a_7'a_7''$, então

$$
\begin{aligned}
&\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7'a_7'',a_8]+[a_5,a_7'a_7''][a_6,a_8]\big) = \\
&= \big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6]a_7'[a_7'',a_8]+a_7'[a_5,a_7''][a_6,a_8]\big)+ \\
&+\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7',a_8]a_7''+[a_5,a_7']a_7''[a_6,a_8]\big) = \\
&= \big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7'',a_8]+[a_5,a_7''][a_6,a_8]\big)a_7'+ \\
&+\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7',a_8]+[a_5,a_7'][a_6,a_8]\big)a_7''+ \\
&-\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7'',a_8,a_7']+[a_5,a_7'][a_6,a_8,a_7'']\big)+ \\
&-\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big[[a_5,a_7''][a_6,a_8],a_7'\big] = \\
&= \big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7'',a_8]+[a_5,a_7''][a_6,a_8]\big)a_7'+ \\
&+\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7',a_8]+[a_5,a_7'][a_6,a_8]\big)a_7''+ \\
&-\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7'',a_8,a_7']+[a_5,a_7'][a_6,a_8,a_7'']\big)+ \\
&-\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_7''][a_6,a_8,a_7']+[a_5,a_7'',a_7'][a_6,a_8]\big).
\end{aligned}
$$

Pela hipótese de indução temos

$$\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][b,a_8]+[a_5,b][a_6,a_8]\big)\in I,\ \text{para } b\in\{a_7',a_7''\}.$$

Segue da afirmação (3.30) que

$$
\begin{aligned}
&\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6][a_7'',a_8,a_7']\in I,\\
&\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_7'][a_6,a_8,a_7'']\in I,\\
&\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_7''][a_6,a_8,a_7']\in I.
\end{aligned}
$$

Os polinômios do tipo (3.24) com grau menor que m pertencem ao ideal I (hipótese de indução), assim

$$\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_7'',a_7'][a_6,a_8]\in I.$$

Portanto os polinômios do tipo (3.23) pertencem ao ideal I quando $a_7 = a_7'a_7''$. Pela simetria entre a_6 e a_7 segue que os polinômios do tipo (3.23) pertencem ao ideal I quando $a_6 = a_6'a_6''$.

Observemos que

$$\begin{aligned}\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8]\big) = \\ = \big([a_5,a_6][a_7,a_8]+[a_5,a_7][a_6,a_8]\big)\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)+ \\ +\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],[a_5,a_6][a_7,a_8]\big]+\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+ \\ +[a_1,a_3][a_2,a_4],[a_5,a_7][a_6,a_8]\big].\end{aligned} \tag{3.35}$$

Assim da afirmação (3.33) temos

$$\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],[a_5,a_6][a_7,a_8]\big] =$$

$$=[a_5,a_6]\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],[a_7,a_8]\big]+\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],[a_5,a_6]\big][a_7,a_8]\in I.$$

Da mesma forma,

$$\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],[a_5,a_7][a_6,a_8]\big]\in I.$$

Pela equação (3.35) e pela simetria entre a_8 e a_4 (a_1 e a_5, a_7 e a_3, a_6 e a_2) temos que os polinômios do tipo (3.23) pertencem ao ideal I quando $a_4=a_4'a_4''$ (e respectivamente quando $a_5=a_5'a_5''$, $a_3=a_3'a_3''$ e $a_2=a_2'a_2''$).

Portanto os polinômios f do tipo (3.23) de grau m pertencem ao ideal I.

Afirmação 3.2.2. *Qualquer polinômio $f=f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)$ de grau m, do tipo (3.24), pertence ao ideal I.*

Observemos que $f=f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)$ é um polinômio da forma

$$f=\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6,a_7].$$

Caso tenhamos $\deg f=7$ então f é do tipo (3.3) e assim $f\in I$. Se $m=\deg f>7$, então para algum i, $1\le i\le 7$ nós temos $a_i=a_i'a_i''$, sendo $\deg a_i'$, $\deg a_i''<\deg a_i$.

Primeiro consideremos o caso em que $a_7 = a'_7 a''_7$. Então

$$
\begin{aligned}
&\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6,a'_7a''_7] = \\
&= \big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)\big(a'_7[a_5,a_6,a''_7]+[a_5,a_6,a'_7]a''_7\big) = \\
&= \big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6,a'_7]a''_7 + \\
&+[a_1,a_2][a_3,a_4]a'_7[a_5,a_6,a''_7]+[a_1,a_3][a_2,a_4]a'_7[a_5,a_6,a''_7] = \\
&= \big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6,a'_7]a''_7 + \\
&+a'_7[a_1,a_2][a_3,a_4][a_5,a_6,a''_7]+a'_7[a_1,a_3][a_2,a_4][a_5,a_6,a''_7] + \\
&+[a_1,a_2][a_3,a_4,a'_7][a_5,a_6,a''_7]+[a_1,a_3][a_2,a_4,a'_7][a_5,a_6,a''_7] + \\
&+[a_1,a_2,a'_7][a_3,a_4][a_5,a_6,a''_7]+[a_1,a_3,a'_7][a_2,a_4][a_5,a_6,a''_7] = \\
&= \big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6,a'_7]a''_7 + \\
&+a'_7\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6,a''_7] + \\
&+[a_1,a_2][a_3,a_4,a'_7][a_5,a_6,a''_7]+[a_1,a_3][a_2,a_4,a'_7][a_5,a_6,a''_7] + \\
&+[a_3,a_4][a_1,a_2,a'_7][a_5,a_6,a''_7]+[a_2,a_4][a_1,a_3,a'_7][a_5,a_6,a''_7] + \\
&+\big[[a_1,a_2,a'_7],[a_3,a_4]\big][a_5,a_6,a''_7]+\big[[a_1,a_3,a'_7],[a_2,a_4]\big][a_5,a_6,a''_7].
\end{aligned}
$$

Pela hipótese de indução, temos

$$\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6,b] \in I, \text{ para } b \in \{a'_7,a''_7\}.$$

Pela afirmação (3.31) segue que $\big[[a_1,a_2,a'_7],[a_3,a_4]\big]$, $\big[[a_1,a_3,a'_7],[a_2,a_4]\big] \in I$.

Os polinômios do tipo (3.28) de grau menor que m pertencem ao ideal I (hipótese de indução), assim

$$[a_3,a_4,a'_7][a_5,a_6,a''_7], \quad [a_2,a_4,a'_7][a_5,a_6,a''_7], \quad [a_1,a_2,a'_7][a_5,a_6,a''_7] \text{ e } [a_1,a_3,a'_7][a_5,a_6,a''_7] \in I.$$

Logo os polinômios do tipo (3.24) pertencem ao ideal I quando $a_7 = a'_7 a''_7$.

Consideremos o caso em que $a_6 = a_6'a_6''$. Então

$$\begin{gathered}
\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_4,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6'a_6'',a_7]= \\
= \big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_4,a_3][a_2,a_4]\big)\left[a_6'[a_5,a_6'']+[a_5,a_6']a_6'',a_7\right]= \\
= \big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_4,a_3][a_2,a_4]\big)a_6'[a_5,a_6',a_7]+ \\
+\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_4,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6'][a_6'',a_7]+[a_5,a_6''][a_6',a_7]\big)+ \\
+\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_4,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6',a_7]a_6''.
\end{gathered}$$

Pela hipótese de indução (e mesmo argumento no caso anterior) temos que

$$\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_4,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6',a_7]\in I,$$

$$\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_4,a_3][a_2,a_4]\big)a_6'[a_5,a_6',a_7]\in I.$$

Já verificamos que os polinômios do tipo (3.23) com grau m pertencem ao ideal I, assim

$$\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_4,a_3][a_2,a_4]\big)\big([a_5,a_6'][a_6'',a_7]+[a_5,a_6''][a_6',a_7]\big)\in I.$$

Logo os polinômios do tipo (3.24) pertencem ao ideal I quando $a_6 = a_6'a_6''$. Como

$$\begin{gathered}
\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_4,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6,a_7]= \\
=-\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_4,a_3][a_2,a_4]\big)[a_6,a_5,a_7],
\end{gathered}$$

segue que os polinômios do tipo (3.24) pertencem ao ideal I quando $a_5 = a_5'a_5''$.

Consideremos o caso em que $a_4 = a_4'a_4''$. Então

$$\begin{gathered}
\big([a_1,a_2][a_3,a_4'a_4'']+[a_4,a_3][a_2,a_4'a_4'']\big)[a_5,a_6,a_7]= \\
= \big([a_1,a_2]a_4'[a_3,a_4'']+[a_4,a_3]a_4'[a_2,a_4'']\big)[a_5,a_6,a_7]+ \\
+\big([a_1,a_2][a_3,a_4']a_4''+[a_4,a_3][a_2,a_4']a_4''\big)[a_5,a_6,a_7]= \\
= a_4'\big([a_1,a_2][a_3,a_4'']+[a_4,a_3][a_2,a_4'']\big)[a_5,a_6,a_7]+ \\
+a_4''\big([a_1,a_2][a_3,a_4']+[a_4,a_3][a_2,a_4']\big)[a_5,a_6,a_7]+ \\
+\big([a_1,a_2,a_4'][a_3,a_4'']+[a_4,a_3,a_4'][a_2,a_4'']\big)[a_5,a_6,a_7]+ \\
+\big([a_1,a_2][a_3,a_4',a_4'']+[a_4,a_3][a_2,a_4',a_4'']\big)[a_5,a_6,a_7]+ \\
+\big([a_1,a_2,a_4''][a_3,a_4']+[a_4,a_3,a_4''][a_2,a_4']\big)[a_5,a_6,a_7].
\end{gathered}$$

Pela hipótese de indução,

$$\big([a_1,a_2][a_3,b]+[a_1,a_3][a_2,b]\big)[a_5,a_6,a_7]\in I,\ \text{para } b\in\{a_4',a_4''\}.$$

Uma vez que os polinômios do tipo (3.28) com grau menor que m pertencem ao ideal I (hipótese de indução), temos

$$[a_3,a_4',a_4''][a_5,a_6,a_7],\quad [a_2,a_4',a_4''][a_5,a_6,a_7]\in I.$$

Afirmamos que

$$[a_1,a_2,a_4'][a_3,a_4''][a_5,a_6,a_7]\in I. \tag{3.36}$$

Observemos que

$$[a_1,a_2,a_4'][a_3,a_4''][a_5,a_6,a_7]=$$
$$[a_3,a_4''][a_1,a_2,a_4'][a_5,a_6,a_7]+\big[[a_1,a_2,a_4'],[a_3,a_4'']\big][a_5,a_6,a_7]\in I,$$

e pela afirmação (3.31) temos que $\big[[a_1,a_2,a_4'],[a_3,a_4'']\big]\in I$. Como os polinômios do tipo (3.28) com grau menor que m, por hipótese, pertencem ao ideal I, segue que $[a_1,a_2,a_4'][a_5,a_6,a_7]\in I$.

Agora segue da afirmação (3.36) que

$$[a_4,a_3,a_4'][a_2,a_4''][a_5,a_6,a_7],\quad [a_1,a_2,a_4''][a_3,a_4'][a_5,a_6,a_7],\quad [a_4,a_3,a_4''][a_2,a_4'][a_5,a_6,a_7]\in I.$$

Assim os polinômios do tipo (3.24) pertencem ao ideal I quando $a_4=a_4'a_4''$.

Caso tenhamos $a_3=a_3'a_3''$. Então

$$\begin{aligned}
&\big([a_1,a_2][a_3'a_3'',a_4]+[a_1,a_3'a_3''][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6,a_7]=\\
&=\big([a_1,a_2]a_3'[a_3'',a_4]+a_3'[a_1,a_3'][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6,a_7]+\\
&+\big([a_1,a_2][a_3',a_4]a_3''+[a_4,a_3']a_3''[a_2,a_4]\big)[a_5,a_6,a_7]=\\
&=a_3'\big([a_1,a_2][a_3'',a_4]+[a_1,a_3'][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6,a_7]+\\
&+a_3''\big([a_1,a_2][a_3',a_4]+[a_4,a_3'][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6,a_7]+\\
&+\big([a_1,a_2,a_3'][a_3'',a_4]+[a_4,a_3',a_3''][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6,a_7]+\\
&+\big([a_1,a_2][a_3',a_4,a_3'']+[a_1,a_2,a_3''][a_3',a_4]\big)[a_5,a_6,a_7].
\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, temos

$$\big([a_1,a_2][b,a_4]+[a_1,b][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6,a_7]\in I,\ \text{para } b\in\{a_3',a_3''\}.$$

Como os polinômios do tipo (3.28) com grau menor que m pertencem ao ideal I (hipótese de indução), assim

$$[a_3',a_4,a_3''][a_5,a_6,a_7]\in I.$$

Segue da afirmação (3.36) que

$$[a_1,a_2,a_3'][a_3'',a_4][a_5,a_6,a_7],\quad [a_4,a_3',a_3''][a_2,a_4][a_5,a_6,a_7],\quad [a_1,a_2,a_3''][a_3',a_4][a_5,a_6,a_7]\in I.$$

Assim os polinômios do tipo (3.24) pertencem ao ideal I quando $a_3=a_3'a_3''$. Pela Simetria entre a_3 e a_2 vemos que os polinômios do tipo (3.24) também pertencem ao ideal I quando $a_2=a_2'a_2''$.

Observemos que

$$\begin{aligned}\big([a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4]\big)[a_5,a_6,a_7]&=\\ =\big([a_4,a_3][a_2,a_1]+[a_4,a_2][a_3,a_1]\big)[a_5,a_6,a_7]&+\\ +\Bigg(\big[[a_1,a_2],[a_3,a_4]\big]+\big[[a_1,a_3],[a_2,a_4]\big]\Bigg)[a_5,a_6,a_7].&\end{aligned}\tag{3.37}$$

Afirmamos que

$$\big[[a_1,a_2],[a_3,a_4]\big][a_5,a_6,a_7]\in I.\tag{3.38}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}&\big[[a_1,a_2],[a_3,a_4]\big][a_5,a_6,a_7]=\\ &[a_1,a_2,a_3,a_4][a_5,a_6,a_7]-[a_1,a_2,a_4,a_3][a_5,a_6,a_7]=\\ &=[a_5,a_6,a_7][a_1,a_2,a_3,a_4]-[a_5,a_6,a_7][a_1,a_2,a_4,a_3]+\\ &+\big[[a_1,a_2,a_3,a_4],[a_5,a_6,a_7]\big]-\big[[a_1,a_2,a_4,a_3],[a_5,a_6,a_7]\big],\end{aligned}$$

e como os polinômios do tipo (3.26) com grau menor que m pertencem ao ideal I segue que $[a_1,a_2,a_3,a_4][a_5,a_6,a_7]$, $[a_1,a_2,a_4,a_3][a_5,a_6,a_7]\in I$.

Afirmamos ainda que

$$\big[[a_1,a_2,a_3,a_4],[a_5,a_6,a_7]\big]\in I.\tag{3.39}$$

Basta observar que

$$\begin{aligned}
&\big[[a_1,a_2,a_3,a_4],[a_5,a_6,a_7]\big] = \big[[a_1,a_2,a_3,a_4],[[a_5,a_6],a_7]\big] = \\
&= [a_1,a_2,a_3,a_4,[a_5,a_6],a_7] - \big[a_1,a_2,a_3,a_4,a_7,[a_5,a_6]\big] = \\
&= \big[[a_1,a_2,a_3,a_4,a_5],a_6,a_7\big] - \big[[a_1,a_2,a_3,a_4,a_6],a_5,a_7\big] - \big[[a_1,a_2,a_3,a_4,a_7],[a_5,a_6]\big].
\end{aligned}$$

Como os polinômios do tipo (3.22) com grau menor que m pertencem ao ideal I segue que $[a_1,a_2,a_3,a_4,a_5]$, $[a_1,a_2,a_3,a_4,a_6]$, $[a_1,a_2,a_3,a_4,a_7] \in I$. Assim a afirmação (3.39) é válida.

Agora segue da afirmação (3.39) que $\big[[a_1,a_2,a_4,a_3],[a_5,a_6,a_7]\big] \in I$. Com consequência temos que a afirmação (3.38) é válida.

Por fim da afirmação (3.38) temos $\big[[a_1,a_3],[a_2,a_4]\big][a_5,a_6,a_7] \in I$.

Da observação (3.37) temos a simetria entre a_1 e a_4. Logo os polinômios do tipo (3.24) pertencem ao ideal I quando $a_1 = a_1'a_1''$.

Portanto os polinômios f do tipo (3.24) de grau m pertencem ao ideal I.

Afirmação 3.2.3. *Qualquer polinômio $f = f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)$ de grau m, do tipo (3.25), pertence ao ideal I.*

Observemos que $f = f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)$ é um polinômio da forma

$$f = [a_1,a_2]\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_7\big] + [a_7,a_2]\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_1\big].$$

Caso tenhamos $\deg f = 7$ então f é do tipo (3.7) e assim $f \in I$. Se $m = \deg f > 7$, então para algum i, $1 \leq i \leq 7$ nós temos $a_i = a_i'a_i''$, sendo $\deg a_i'$, $\deg a_i'' < \deg a_i$.

Primeiro consideremos o caso em que $a_2 = a_2'a_2''$ então

$$\begin{aligned}
&[a_1,a_2'a_2'']\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_7\big] + [a_7,a_2'a_2'']\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_1\big] = \\
&= a_2'[a_1,a_2'']\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_7\big] + a_2'[a_7,a_2'']\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_1\big] + \\
&+[a_1,a_2']a_2''\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_7\big] + [a_7,a_2']a_2''\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_1\big] = \\
&= a_2'\big([a_1,a_2'']\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_7\big] + [a_7,a_2'']\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_1\big]\big) + \\
&+a_2''\big([a_1,a_2']\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_7\big] + [a_7,a_2']\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_1\big]\big) + \\
&+[a_1,a_2',a_2'']\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_7\big] + [a_7,a_2',a_2'']\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_1\big].
\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução temos

$$
\begin{gathered}
[a_1,b]\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_7\big]+\\
+[a_7,b]\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_1\big]\in I,\ \text{para } b\in\{a_2',a_2''\}.
\end{gathered}
$$

Afirmamos que

$$
[a_1,a_2',a_2'']\big[[a_3,a_4][a_5,a_6],a_7\big]\in I. \tag{3.40}
$$

Como

$$
\begin{gathered}
[a_1,a_2',a_2'']\big[[a_3,a_4][a_5,a_6],a_7\big]=[a_1,a_2',a_2''][a_3,a_4][a_5,a_6,a_7]+[a_1,a_2',a_2''][a_3,a_4,a_7][a_5,a_6]=\\
=[a_1,a_2',a_2''][a_5,a_6,a_7][a_3,a_4]+[a_1,a_2',a_2''][a_3,a_4,a_7][a_5,a_6]-[a_1,a_2',a_2'']\big[[a_5,a_6,a_7],[a_3,a_4]\big]=\\
=[a_1,a_2',a_2''][a_5,a_6,a_7][a_3,a_4]+[a_1,a_2',a_2''][a_3,a_4,a_7][a_5,a_6]+\\
-[a_1,a_2',a_2''][a_5,a_6,a_7,a_3,a_4]+[a_1,a_2',a_2''][a_5,a_6,a_7,a_4,a_3],
\end{gathered}
$$

pela hipótese de indução temos que os polinômios do tipo (3.22) com grau menor que m pertencem ao ideal I, assim

$$
[a_5,a_6,a_7,a_3,a_4],\quad [a_5,a_6,a_7,a_4,a_3]\in I.
$$

Novamente pela hipótese de indução temos que os polinômios do tipo (3.28) com grau menor que m pertencem ao ideal I, assim

$$
[a_1,a_2',a_2''][a_5,a_6,a_7],\quad [a_1,a_2',a_2''][a_3,a_4,a_7]\in I.
$$

Portanto a afirmação (3.40) é válida.

Agora segue da afirmação (3.40) que

$$
\begin{gathered}
[a_1,a_2'',a_2']\big[[a_3,a_4][a_5,a_6],a_7\big],\quad [a_1,a_2'',a_2']\big[[a_3,a_5][a_4,a_6],a_7\big],\\
[a_7,a_2'',a_2']\big[[a_3,a_4][a_5,a_6],a_1\big],\quad [a_7,a_2'',a_2']\big[[a_3,a_5][a_4,a_6],a_1\big]\in I.
\end{gathered}
$$

Logo os polinômios do tipo (3.25) pertencem ao ideal I quando $a_2=a_2'a_2''$.

Consideremos o caso em que $a_1 = a_1'a_1''$. Então

$$\begin{aligned}
&[a_1'a_1'', a_2]\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_7\big]+[a_7,a_2]\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_1'a_1''\big]=\\
&=a_1'[a_1'',a_2]\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_7\big]+[a_7,a_2]a_1'\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_1''\big]+\\
&+[a_1',a_2]a_1''\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_7\big]+[a_7,a_2]\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_1'\big]a_1''=\\
&=a_1'\big([a_1'',a_2]\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_7\big]+[a_7,a_2]\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_1''\big]\big)+\\
&+\big([a_1',a_2]\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_7\big]+[a_7,a_2]\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_1'\big]\big)a_1''+\\
&+[a_7,a_2,a_1']\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_1''\big]-[a_1',a_2]\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_7,a_1''\big].
\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução temos

$$\begin{gathered}
[b,a_2]\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_7\big]+\\
[a_7,a_2]\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],b\big]\in I,\ \text{para } b\in\{a_1',a_1''\}.
\end{gathered}$$

Ainda pela hipótese de indução temos que os polinômios do tipo (3.27) com grau menor que m pertencem ao ideal I assim

$$\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_7,a_1''\big]\in I.$$

Segue da afirmação (3.40) que

$$[a_7,a_2,a_1']\big[[a_3,a_4][a_5,a_6],a_1''\big],\quad [a_7,a_2,a_1']\big[[a_3,a_5][a_4,a_6],a_1''\big]\in I.$$

Logo os polinômios do tipo (3.25) pertencem ao ideal I quando $a_1 = a_1'a_1''$. Pela simetria entre a_1 e a_7, também temos que os polinômios do tipo (3.25) pertencem ao ideal I quando $a_7 = a_7'a_7''$.

Caso tenhamos $a_3 = a_3'a_3''$, então

$$
\begin{aligned}
&[a_1,a_2]\big[[a_3'a_3'',a_4][a_5,a_6]+[a_3'a_3'',a_5][a_4,a_6],a_7\big]+\\
&+[a_7,a_2]\big[[a_3'a_3'',a_4][a_5,a_6]+[a_3'a_3'',a_5][a_4,a_6],a_1\big]=\\
&=[a_1,a_2]\big[a_3'[a_3'',a_4][a_5,a_6]+a_3'[a_3'',a_5][a_4,a_6],a_7\big]+\\
&+[a_7,a_2]\big[a_3'[a_3'',a_4][a_5,a_6]+a_3'[a_3'',a_5][a_4,a_6],a_1\big]+\\
&+[a_1,a_2]\big[[a_3',a_4]a_3''[a_5,a_6]+[a_3',a_5]a_3''[a_4,a_6],a_7\big]+\\
&+[a_7,a_2]\big[[a_3',a_4]a_3''[a_5,a_6]+[a_3',a_5]a_3''[a_4,a_6],a_1\big]=\\
&=[a_1,a_2]\big[a_3'\big([a_3'',a_4][a_5,a_6]+[a_3'',a_5][a_4,a_6]\big),a_7\big]+\\
&+[a_7,a_2]\big[a_3'\big([a_3'',a_4][a_5,a_6]+[a_3'',a_5][a_4,a_6]\big),a_1\big]+\\
&+[a_1,a_2]\big[a_3''\big([a_3',a_4][a_5,a_6]+[a_3',a_5][a_4,a_6]\big),a_7\big]+\\
&+[a_7,a_2]\big[a_3''\big([a_3',a_4][a_5,a_6]+[a_3',a_5][a_4,a_6]\big),a_1\big]+\\
&+[a_1,a_2]\big[[a_3',a_4,a_3''][a_5,a_6]+[a_3',a_5,a_3''][a_4,a_6],a_7\big]+\\
&+[a_7,a_2]\big[[a_3',a_4,a_3''][a_5,a_6]+[a_3',a_5,a_3''][a_4,a_6],a_1\big]=\\
&=[a_1,a_2]a_3'\big[\big([a_3'',a_4][a_5,a_6]+[a_3'',a_5][a_4,a_6]\big),a_7\big]+\\
&+[a_7,a_2]a_3'\big[\big([a_3'',a_4][a_5,a_6]+[a_3'',a_5][a_4,a_6]\big),a_1\big]+\\
&+[a_1,a_2]a_3''\big[\big([a_3',a_4][a_5,a_6]+[a_3',a_5][a_4,a_6]\big),a_7\big]+\\
&+[a_7,a_2]a_3'\big[\big([a_3',a_4][a_5,a_6]+[a_3',a_5][a_4,a_6]\big),a_1\big]+\\
&+[a_1,a_2]\big[a_3',a_7\big]\big([a_3'',a_4][a_5,a_6]+[a_3'',a_5][a_4,a_6]\big)+\\
&+[a_7,a_2]\big[a_3',a_1\big]\big([a_3'',a_4][a_5,a_6]+[a_3'',a_5][a_4,a_6]\big)+\\
&+[a_1,a_2]\big[a_3'',a_7\big]\big([a_3',a_4][a_5,a_6]+[a_3',a_5][a_4,a_6]\big)+\\
&+[a_7,a_2]\big[a_3'',a_1\big]\big([a_3',a_4][a_5,a_6]+[a_3',a_5][a_4,a_6]\big)+\\
&+[a_1,a_2]\big[[a_3',a_4,a_3''][a_5,a_6]+[a_3',a_5,a_3''][a_4,a_6],a_7\big]+\\
&+[a_7,a_2]\big[[a_3',a_4,a_3''][a_5,a_6]+[a_3',a_5,a_3''][a_4,a_6],a_1\big]=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= a_3'\Big([a_1,a_2]\big[\big([a_3'',a_4][a_5,a_6]+[a_3'',a_5][a_4,a_6]\big),a_7\big] + \\
&+[a_7,a_2]\big[\big([a_3'',a_4][a_5,a_6]+[a_3'',a_5][a_4,a_6]\big),a_1\big]\Big) + \\
&+a_3''\Big([a_1,a_2]\big[\big([a_3',a_4][a_5,a_6]+[a_3',a_5][a_4,a_6]\big),a_7\big] + \\
&+[a_7,a_2]\big[\big([a_3',a_4][a_5,a_6]+[a_3',a_5][a_4,a_6]\big),a_1\big]\Big) + \\
&+[a_1,a_2,a_3']\big[\big([a_3'',a_4][a_5,a_6]+[a_3'',a_5][a_4,a_6]\big),a_7\big] + \\
&+[a_7,a_2,a_3']\big[\big([a_3'',a_4][a_5,a_6]+[a_3'',a_5][a_4,a_6]\big),a_1\big] + \\
&+[a_1,a_2,a_3'']\big[\big([a_3',a_4][a_5,a_6]+[a_3',a_5][a_4,a_6]\big),a_7\big] + \\
&+[a_7,a_2,a_3']\big[\big([a_3',a_4][a_5,a_6]+[a_3',a_5][a_4,a_6]\big),a_1\big] + \\
&+\big([a_1,a_2][a_3',a_7]+[a_7,a_2][a_3',a_1]\big)\big([a_3'',a_4][a_5,a_6]+[a_3'',a_5][a_4,a_6]\big) + \\
&+\big([a_1,a_2][a_3'',a_7]+[a_7,a_2][a_3'',a_1]\big)\big([a_3',a_4][a_5,a_6]+[a_3',a_5][a_4,a_6]\big) + \\
&+[a_1,a_2]\big[[a_3',a_4,a_3''][a_5,a_6]+[a_3',a_5,a_3''][a_4,a_6],a_7\big] + \\
&+[a_7,a_2]\big[[a_3',a_4,a_3''][a_5,a_6]+[a_3',a_5,a_3''][a_4,a_6],a_1\big].
\end{aligned}
$$

Pela hipótese de indução temos que

$$
\begin{aligned}
&[a_1,a_2]\big[\big([a_3'',a_4][a_5,a_6]+[a_3'',a_5][a_4,a_6]\big),a_7\big]+[a_7,a_2]\big[\big([a_3'',a_4][a_5,a_6]+[a_3'',a_5][a_4,a_6]\big),a_1\big] \in I,\\
&[a_1,a_2]\big[\big([a_3',a_4][a_5,a_6]+[a_3',a_5][a_4,a_6]\big),a_7\big]+[a_7,a_2]\big[\big([a_3',a_4][a_5,a_6]+[a_3',a_5][a_4,a_6]\big),a_1\big] \in I.
\end{aligned}
$$

Pela afirmação (3.40) obtemos

$$
\begin{aligned}
&[a_1,a_2,a_3']\big[[a_3'',a_4][a_5,a_6],a_7\big], \quad [a_1,a_2,a_3']\big[[a_3'',a_5][a_4,a_6],a_7\big] \in I,\\
&[a_7,a_2,a_3']\big[[a_3'',a_4][a_5,a_6],a_1\big], \quad [a_7,a_2,a_3']\big[[a_3'',a_5][a_4,a_6],a_1\big] \in I.
\end{aligned}
$$

Como os polinômios do tipo (3.28) de grau m pertencem ao ideal I, segue que

$$
\begin{aligned}
&\big([a_1,a_2][a_3',a_7]+[a_7,a_2][a_3',a_1]\big)\big([a_3'',a_4][a_5,a_6]+[a_3'',a_5][a_4,a_6]\big) \in I,\\
&\big([a_1,a_2][a_3'',a_7]+[a_7,a_2][a_3'',a_1]\big)\big([a_3',a_4][a_5,a_6]+[a_3',a_5][a_4,a_6]\big) \in I.
\end{aligned}
$$

Afirmamos que

$$[a_1,a_2]\big[[a_3',a_4,a_3''][a_5,a_6]+[a_3',a_5,a_3''][a_4,a_6],a_7\big]+ \\ +[a_7,a_2]\big[[a_3',a_4,a_3''][a_5,a_6]+[a_3',a_5,a_3''][a_4,a_6],a_1\big]\in I. \tag{3.41}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
&[a_1,a_2]\big[[a_3',a_4,a_3''][a_5,a_6]+[a_3',a_5,a_3''][a_4,a_6],a_7\big]+\\
&+[a_7,a_2]\big[[a_3',a_4,a_3''][a_5,a_6]+[a_3',a_5,a_3''][a_4,a_6],a_1\big]=\\
&=[a_1,a_2][a_3',a_4,a_3''][a_5,a_6,a_7]+[a_1,a_2][a_3',a_5,a_3''][a_4,a_6,a_7]+\\
&+[a_7,a_2][a_3',a_4,a_3''][a_5,a_6,a_1]+[a_7,a_2][a_3',a_5,a_3''][a_4,a_6,a_1]+\\
&+[a_1,a_2][a_3',a_4,a_3'',a_7][a_5,a_6]+[a_1,a_2][a_3',a_5,a_3'',a_7][a_4,a_6]+\\
&+[a_7,a_2][a_3',a_4,a_3'',a_1][a_5,a_6]+[a_7,a_2][a_3',a_5,a_3'',a_1][a_4,a_6]=\\
&=[a_1,a_2][a_3',a_4,a_3''][a_5,a_6,a_7]+[a_1,a_2][a_3',a_5,a_3''][a_4,a_6,a_7]+\\
&+[a_7,a_2][a_3',a_4,a_3''][a_5,a_6,a_1]+[a_7,a_2][a_3',a_5,a_3''][a_4,a_6,a_1]+\\
&+\big([a_1,a_2][a_5,a_6]+[a_7,a_2][a_5,a_6]\big)[a_3',a_4,a_3'',a_1]+\\
&+\big([a_1,a_2][a_4,a_6]+[a_7,a_2][a_4,a_6]\big)[a_3',a_5,a_3'',a_1]+\\
&+[a_1,a_2]\big[[a_3',a_4,a_3'',a_7],[a_5,a_6]\big]+[a_1,a_2]\big[[a_3',a_5,a_3'',a_7],[a_4,a_6]\big]+\\
&+[a_7,a_2]\big[[a_3',a_4,a_3'',a_1],[a_5,a_6]\big]+[a_7,a_2]\big[[a_3',a_5,a_3'',a_1],[a_4,a_6]\big].
\end{aligned}$$

Como os polinômios do tipo (3.28) de grau menor que m pertencem ao ideal I (hipótese de indução), segue que

$$[a_3',a_4,a_3''][a_5,a_6,a_7],\quad [a_3',a_5,a_3''][a_4,a_6,a_7]\in I,$$
$$[a_3',a_4,a_3''][a_5,a_6,a_1],\quad [a_3',a_5,a_3''][a_4,a_6,a_1]\in I.$$

Afirmamos que

$$\big[[a_3',a_4,a_3'',a_7],[a_5,a_6]\big]\in I. \tag{3.42}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
&\big[[a_3',a_4,a_3'',a_7],[a_5,a_6]\big]=\\
&=[a_3',a_4,a_3'',a_7,a_5,a_6]-[a_3',a_4,a_3'',a_7,a_6,a_5]=\\
&=[a_3',a_4,a_3'',a_7,a_5]a_6+a_5[a_3',a_4,a_3'',a_7,a_6]-a_6[a_3',a_4,a_3'',a_7,a_5]-[a_3',a_4,a_3'',a_7,a_6]a_5\in I,
\end{aligned}$$

pois pela hipótese de indução temos que

$$[a_3',a_4,a_3'',a_7,a_5], \quad [a_3',a_4,a_3'',a_7,a_6], \quad [a_3',a_4,a_3'',a_7,a_5] \quad \text{e} \quad [a_3',a_4,a_3'',a_7,a_6] \in I.$$

Agora da afirmação (3.42) temos

$$\big[[a_3',a_5,a_3'',a_7],[a_4,a_6]\big], \ \big[[a_3',a_4,a_3'',a_1],[a_5,a_6]\big], \quad \big[[a_3',a_5,a_3'',a_1],[a_4,a_6]\big] \in I.$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned}
&\big([a_1,a_2][a_5,a_6]+[a_7,a_2][a_5,a_6]\big)[a_3',a_4,a_3'',a_1] = \\
&= \big([a_1,a_2][a_5,a_6]+[a_7,a_2][a_5,a_6]\big)[a_3',a_4,a_3'']a_1 - \big([a_1,a_2][a_5,a_6]+[a_7,a_2][a_5,a_6]\big)a_1[a_3',a_4,a_3''] = \\
&= \big([a_1,a_2][a_5,a_6]+[a_7,a_2][a_5,a_6]\big)[a_3',a_4,a_3'']a_1 - a_1\big([a_1,a_2][a_5,a_6]+[a_7,a_2][a_5,a_6]\big)[a_3',a_4,a_3''] + \\
&\quad -\big[\big([a_1,a_2][a_5,a_6]+[a_7,a_2][a_5,a_6]\big),a_1\big][a_3',a_4,a_3''] = \\
&= \big([a_1,a_2][a_5,a_6]+[a_7,a_2][a_5,a_6]\big)[a_3',a_4,a_3'']a_1 - a_1\big([a_1,a_2][a_5,a_6]+[a_7,a_2][a_5,a_6]\big)[a_3',a_4,a_3''] + \\
&\quad -[a_1,a_2][a_5,a_6,a_1][a_3',a_4,a_3''] - [a_7,a_2][a_5,a_6,a_1][a_3',a_4,a_3''] + \\
&\quad -[a_1,a_2,a_1][a_5,a_6][a_3',a_4,a_3''] - [a_7,a_2,a_1][a_5,a_6][a_3',a_4,a_3''].
\end{aligned}$$

Como os polinômios do tipo (3.24) de grau menor que m pertencem ao ideal I (hipótese de indução), segue que

$$\begin{aligned}
&\big([a_1,a_2][a_5,a_6]+[a_7,a_2][a_5,a_6]\big)[a_3',a_4,a_3''] \in I, \\
&\big([a_1,a_2][a_5,a_6]+[a_7,a_2][a_5,a_6]\big)[a_3',a_4,a_3''] \in I.
\end{aligned}$$

Os polinômios do tipo (3.28) de grau menor que m pertencem ao ideal I, então

$$[a_5,a_6,a_1][a_3',a_4,a_3''], \quad [a_5,a_6,a_1][a_3',a_4,a_3''] \in I.$$

Pela afirmação (3.36) segue que

$$[a_1,a_2,a_1][a_5,a_6][a_3',a_4,a_3''], \quad [a_7,a_2,a_1][a_5,a_6][a_3',a_4,a_3''] \in I,$$

Assim

$$\big([a_1,a_2][a_5,a_6]+[a_7,a_2][a_5,a_6]\big)[a_3',a_4,a_3'',a_1] \in I.$$

Do mesmo modo tem-se que

$$\big([a_1,a_2][a_4,a_6]+[a_7,a_2][a_4,a_6]\big)[a_3',a_5,a_3'',a_1]\in I.$$

Logo a afirmação (3.41) é válida. Daí os polinômios do tipo (3.25) pertencem ao ideal I quando $a_3=a_3'a_3''$.

Observemos que

$$\begin{aligned}
&[a_1,a_2]\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_7\big]+[a_7,a_2]\big[[a_3,a_4][a_5,a_6]+[a_3,a_5][a_4,a_6],a_1\big]=\\
&=[a_1,a_2]\big[[a_4,a_3][a_6,a_5]+[a_4,a_6][a_3,a_5],a_7\big]+[a_7,a_2]\big[[a_4,a_3][a_6,a_5]+[a_4,a_6][a_3,a_5],a_1\big]+\\
&\quad+[a_1,a_2]\big[[a_3,a_5],[a_4,a_6],a_7\big]+[a_7,a_2]\big[[a_3,a_5],[a_4,a_6],a_1\big]
\end{aligned}\tag{3.43}$$

Assim

$$\big[[a_3,a_5],[a_4,a_6],a_7\big]\in I,$$

pois

$$\begin{gathered}\big[[a_3,a_5],[a_4,a_6],a_7\big]=\\ [a_3,a_5,a_4,a_6,a_7]-[a_3,a_5,a_6,a_4,a_7]\in I.\end{gathered}$$

Do mesmo modo segue que $\big[[a_3,a_5],[a_4,a_6],a_1\big]\in I$. Como consequência temos que

$$[a_1,a_2]\big[[a_3,a_5],[a_4,a_6],a_7\big]+[a_7,a_2]\big[[a_3,a_5],[a_4,a_6],a_1\big]\in I.$$

Segue da observação (3.43) a simetria entre os elementos a_3 e a_4. Assim os polinômios do tipo (3.25) pertencem ao ideal I quando $a_4=a_4'a_4''$. Devido ainda a simetria entre a_4 e a_5 (primeira linha) e entre a_3 e a_6 (segunda linha) segue que os polinômios do tipo (3.25) pertencem ao ideal I quando $a_5=a_5'a_5''$ e $a_6=a_6'a_6''$.

Portanto os polinômios f do tipo (3.25) de grau m pertencem ao ideal I.

Afirmação 3.2.4. *Qualquer polinômio $f=f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)$ de grau m, do tipo (3.26), pertence ao ideal I.*

Observemos que $f=f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)$ é um polinômio da forma

$$f=[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6,a_7].$$

Caso tenhamos $\deg f = 7$ então f é do tipo (3.5) e assim $f \in I$. Se $m = \deg f > 7$, então para algum i, $1 \leq i \leq 7$ nós temos $a_i = a_i' a_i''$, sendo $\deg a_i'$, $\deg a_i'' < \deg a_i$.

Se $a_7 = a_7' a_7''$, então

$$\begin{gathered}
[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6,a_7'a_7''] = \\
= [a_1,a_2,a_3]\big(a_7'[a_4,a_5,a_6,a_7'] + [a_4,a_5,a_6,a_7']a_7''\big) = \\
= [a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6,a_7']a_7' + [a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6,a_7']a_7'' - [a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6,a_7',a_7'].
\end{gathered}$$

Pela hipótese de indução temos que

$$[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6,b] \in I, \text{ para } b \in \{a_7', a_7''\}.$$

Como os polinômios do tipo (3.22) de grau menor que m pertencem ao ideal I (hipótese de indução), segue que $[a_4,a_5,a_6,a_7',a_7''] \in I$. Assim os polinômios do tipo (3.26) pertencem ao ideal I quando $a_7 = a_7' a_7''$.

Caso $a_6 = a_6' a_6''$, então

$$\begin{gathered}
[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6'a_6'',a_7] = [a_1,a_2,a_3]\big[a_6'[a_4,a_5,a_6''] + [a_4,a_5,a_6']a_6'', a_7\big] = \\
= [a_1,a_2,a_3]\big(a_6'[a_4,a_5,a_6'',a_7] + [a_6',a_7][a_4,a_5,a_6''] + [a_4,a_5,a_6'][a_6'',a_7] + [a_4,a_5,a_6',a_7]a_6''\big) = \\
= [a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6'',a_7]a_6' + [a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6',a_7]a_6'' - [a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6'',a_7,a_6'] + \\
+ [a_1,a_2,a_3][a_6',a_7][a_4,a_5,a_6''] + [a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6'][a_6'',a_7].
\end{gathered}$$

Pela hipótese de indução (como no caso anterior) temos

$$\begin{gathered}
[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6',a_7]a_6', \quad [a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6'',a_7]a_6' \in I, \\
[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6'',a_7,a_6'] \in I.
\end{gathered}$$

Como os polinômios do tipo (3.28) com grau menor que m pertencem ao ideal I (hipótese de indução), segue que $[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6'] \in I$. Observemos que

$$\begin{gathered}
[a_1,a_2,a_3][a_6',a_7][a_4,a_5,a_6''] = \\
= [a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6''][a_6',a_7] + [a_1,a_2,a_3]\big[[a_6',a_7],[a_4,a_5,a_6'']\big] \in I,
\end{gathered}$$

uma vez que $[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6'']$ é um polinômio do tipo (3.28) com grau menor que m. Segue da afirmação (3.31) que $\big[[a_6',a_7],[a_4,a_5,a_6'']\big] \in I$. Assim os polinômios do tipo (3.26) pertencem ao ideal I quando $a_6 = a_6' a_6''$.

Se tivermos $a_5 = a_5' a_5''$ então

$$
\begin{aligned}
&[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5'a_5'',a_6,a_7] = [a_1,a_2,a_3]\big[a_5'[a_4,a_5''] + [a_4,a_5']a_5'',a_6,a_7\big] = \\
&= [a_1,a_2,a_3]\big[a_5'[a_4,a_5'',a_6] + [a_5',a_6][a_4,a_5''] + [a_4,a_5'][a_5'',a_6] + [a_4,a_5',a_6]a_5'',a_7\big] = \\
&= [a_1,a_2,a_3]\big(a_5'[a_4,a_5'',a_6,a_7] + [a_4,a_5',a_6,a_7]a_5''\big) + \\
&+[a_1,a_2,a_3]\big([a_5',a_7][a_4,a_5'',a_6] + [a_5',a_6][a_4,a_5'',a_7]\big) + \\
&+[a_1,a_2,a_3]\big([a_5',a_6,a_7][a_4,a_5''] + [a_4,a_5'][a_5'',a_6,a_7]\big) + \\
&+[a_1,a_2,a_3]\big([a_4,a_5',a_7][a_5'',a_6] + [a_4,a_5',a_6][a_5'',a_7]\big) = \\
&= [a_1,a_2,a_3][a_4,a_5'',a_6,a_7]a_5' + [a_1,a_2,a_3][a_4,a_5',a_6,a_7]a_5'' - [a_1,a_2,a_3][a_4,a_5'',a_6,a_7,a_5'] + \\
&+[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5'',a_6][a_5',a_7] + [a_1,a_2,a_3][a_4,a_5'',a_7][a_5',a_6] + \\
&+[a_1,a_2,a_3][a_5',a_6,a_7][a_4,a_5''] + [a_1,a_2,a_3][a_5'',a_6,a_7][a_4,a_5'] + \\
&+[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5',a_7][a_5'',a_6] + [a_1,a_2,a_3][a_4,a_5',a_6][a_5'',a_7] + \\
&+[a_1,a_2,a_3]\big(\big[[a_5',a_7],[a_4,a_5'',a_6]\big] + \big[[a_5',a_6],[a_4,a_5'',a_7]\big] + \big[[a_4,a_5'],[a_5'',a_6,a_7]\big]\big).
\end{aligned}
$$

Pela hipótese de indução (como visto nos casos anteriores) temos que

$$
\begin{gathered}
[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5'',a_6,a_7], \quad [a_1,a_2,a_3][a_4,a_5',a_6,a_7] \in I, \\
[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5'',a_6], \quad [a_1,a_2,a_3][a_4,a_5'',a_7] \in I, \\
[a_1,a_2,a_3][a_5',a_6,a_7], \quad [a_1,a_2,a_3][a_5'',a_6,a_7] \in I, \\
a_1,a_2,a_3][a_4,a_5',a_7], \quad [a_1,a_2,a_3][a_4,a_5',a_6] \in I, \\
[a_4,a_5'',a_6,a_7,a_5'] \in I.
\end{gathered}
$$

Da afirmação (3.31) temos que

$$
\big[[a_5',a_7],[a_4,a_5'',a_6]\big], \quad \big[[a_5',a_6],[a_4,a_5'',a_7]\big], \quad \big[[a_4,a_5'],[a_5'',a_6,a_7]\big] \in I.
$$

Assim os polinômios do tipo (3.26) pertencem ao ideal I quando $a_5 = a_5'a_5''$. Como $[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6,a_7] = [a_1,a_2,a_3][-a_5,a_4,a_6,a_7]$, então os polinômios do tipo (3.26) pertencem ao ideal I quando quando $a_4 = a_4'a_4''$.

Caso tenhamos $a_3 = a_3'a_3''$ então

$$[a_1,a_2,a_3'a_3''][a_4,a_5,a_6,a_7] = \big(a_3'[a_1,a_2,a_3''] + [a_1,a_2,a_3']a_3''\big)[a_4,a_5,a_6,a_7] =$$
$$= a_3'[a_1,a_2,a_3''][a_4,a_5,a_6,a_7] + [a_1,a_2,a_3'][a_4,a_5,a_6,a_7]a_3'' - [a_1,a_2,a_3'][a_4,a_5,a_6,a_7,a_3''].$$

Pela hipótese de indução temos que

$$[a_1,a_2,b][a_4,a_5,a_6,a_7] \in I, \quad \text{para } b \in \{a_3',a_3''\}.$$

Como os polinômios do tipo (3.22) com grau menor que m pertencem ao ideal I (hipótese de indução) segue que $[a_4,a_5,a_6,a_7,a_3''] \in I$. Assim os polinômios do tipo (3.26) pertencem ao ideal I quando $a_3 = a_3'a_3''$.

Caso tenhamos $a_2 = a_2'a_2''$ então

$$[a_1,a_2'a_2'',a_3][a_4,a_5,a_6,a_7] = \big[a_2'[a_1,a_2''] + [a_1,a_2']a_2'',a_3\big][a_4,a_5,a_6,a_7] =$$
$$= \big(a_2'[a_1,a_2'',a_3] + [a_2',a_3][a_1,a_2''] + [a_1,a_2'][a_2'',a_3] + [a_1,a_2',a_3]a_2''\big)[a_4,a_5,a_6,a_7] =$$
$$= a_2'[a_1,a_2'',a_3][a_4,a_5,a_6,a_7] + [a_1,a_2',a_3]a_2''[a_4,a_5,a_6,a_7] +$$
$$+\big([a_2',a_3][a_1,a_2''] + [a_1,a_2'][a_2'',a_3]\big)[a_4,a_5,a_6,a_7] =$$
$$= a_2'[a_1,a_2'',a_3][a_4,a_5,a_6,a_7] + [a_1,a_2',a_3][a_4,a_5,a_6,a_7]a_2'' - [a_1,a_2',a_3][a_4,a_5,a_6,a_7,a_2''] +$$
$$+\big([a_1,a_2''][a_2',a_3] + [a_1,a_2'][a_2'',a_3]\big)[a_4,a_5,a_6,a_7] + \big[[a_2',a_3],[a_1,a_2'']\big][a_4,a_5,a_6,a_7].$$

Pela hipótese de indução (como no caso anterior),

$$[a_1,a_2'',a_3][a_4,a_5,a_6,a_7], \quad [a_1,a_2',a_3][a_4,a_5,a_6,a_7], \quad [a_4,a_5,a_6,a_7,a_2''] \in I.$$

Observemos que

$$\big([a_1,a_2''][a_2',a_3] + [a_1,a_2'][a_2'',a_3]\big)[a_4,a_5,a_6,a_7] =$$
$$= \big([a_1,a_2''][a_2',a_3] + [a_1,a_2'][a_2'',a_3]\big)\big([a_4,a_5,a_6]a_7 - a_7[a_4,a_5,a_6]\big) =$$
$$= \big([a_1,a_2''][a_2',a_3] + [a_1,a_2'][a_2'',a_3]\big)[a_4,a_5,a_6]a_7 +$$
$$-a_7\big([a_1,a_2''][a_2',a_3] + [a_1,a_2'][a_2'',a_3]\big)[a_4,a_5,a_6] +$$
$$-\big[([a_1,a_2''][a_2',a_3] + [a_1,a_2'][a_2'',a_3]),a_7\big][a_4,a_5,a_6].$$

Como os polinômios do tipo (3.24) com grau menor que m pertencem ao ideal I (hipótese de indução), temos

$$\begin{gathered}\big([a_1,a_2''][a_2',a_3]+[a_1,a_2'][a_2'',a_3]\big)[a_4,a_5,a_6]\in I,\\ \big([a_1,a_2''][a_2',a_3]+[a_1,a_2'][a_2'',a_3]\big)[a_4,a_5,a_6]\in I.\end{gathered}$$

Observemos que

$$\begin{gathered}\big[([a_1,a_2''][a_2',a_3]+[a_1,a_2'][a_2'',a_3]),a_7\big][a_4,a_5,a_6]=\\ =[a_1,a_2''][a_2',a_3,a_7][a_4,a_5,a_6]+[a_1,a_2'',a_7][a_2',a_3][a_4,a_5,a_6]+\\ +[a_1,a_2'][a_2'',a_3,a_7][a_4,a_5,a_6]+[a_1,a_2',a_7][a_2'',a_3][a_4,a_5,a_6]=\\ =[a_1,a_2''][a_2',a_3,a_7][a_4,a_5,a_6]+[a_2',a_3][a_1,a_2'',a_7][a_4,a_5,a_6]+\\ +[a_1,a_2'][a_2'',a_3,a_7][a_4,a_5,a_6]+[a_2'',a_3][a_1,a_2',a_7][a_4,a_5,a_6]+\\ +\big[[a_1,a_2'',a_7],[a_2',a_3]\big][a_4,a_5,a_6]+\big[[a_1,a_2',a_7],[a_2'',a_3]\big][a_4,a_5,a_6].\end{gathered}$$

Como os polinômios do tipo (3.28) com grau menor que m pertencem ao ideal I (hipótese de indução), obtemos

$$[a_2',a_3,a_7][a_4,a_5,a_6],\quad [a_1,a_2'',a_7][a_4,a_5,a_6],\quad [a_2'',a_3,a_7][a_4,a_5,a_6],\quad [a_1,a_2',a_7][a_4,a_5,a_6]\in I.$$

Pela afirmação (3.31), temos

$$\big[[a_1,a_2'',a_7],[a_2',a_3]\big],\quad \big[[a_1,a_2',a_7],[a_2'',a_3]\big]\in I.$$

Assim

$$\big[([a_1,a_2''][a_2',a_3]+[a_1,a_2'][a_2'',a_3]),a_7\big][a_4,a_5,a_6]\in I.$$

Afirmamos que

$$\big[[a_2',a_3],[a_1,a_2'']\big][a_4,a_5,a_6,a_7]\in I.$$

Observemos que

$$\begin{gathered}\big[[a_2',a_3],[a_1,a_2'']\big][a_4,a_5,a_6,a_7]=[a_2',a_3,a_1a_2''][a_4,a_5,a_6,a_7]-[a_2',a_3,a_2''a_1][a_4,a_5,a_6,a_7]=\\ =\big(a_1[a_2',a_3,a_2'']+[a_2',a_3,a_1]a_2''\big)[a_4,a_5,a_6,a_7]-\big(a_2''[a_2',a_3,a_1]-[a_2',a_3,a_2'']a_1\big)[a_4,a_5,a_6,a_7].\end{gathered}$$

Novamente, pela hipótese de indução, segue que

$$[a_2',a_3,a_2''][a_4,a_5,a_6,a_7]\in I,$$

$$[a_2', a_3, a_1]a_2''[a_4, a_5, a_6, a_7] \in I,$$

$$[a_2', a_3, a_1][a_4, a_5, a_6, a_7] \in I,$$

$$[a_2', a_3, a_2'']a_1[a_4, a_5, a_6, a_7] \in I.$$

Assim os polinômos do tipo (3.26) pertencem ao ideal I quando $a_2 = a_2'a_2''$. Como

$$[a_1, a_2, a_3][a_4, a_5, a_6, a_7] = -[a_2, a_1, a_3][a_4, a_5, a_6, a_7],$$

então os polinômios do tipo (3.26) pertencem ao ideal I quando $a_1 = a_1'a_1''$.

Portanto os polinômios f do tipo (3.26) de grau m pertencem ao ideal I.

Afirmação 3.2.5. *Qualquer polinômio $f = f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ de grau m, do tipo (3.27), pertence ao ideal I.*

Observemos que $f = f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ é um polinômio da forma

$$f = \big[[a_1, a_2][a_3, a_4] + [a_1, a_3][a_2, a_4], a_5, a_6\big].$$

Caso tenhamos $\deg f = 6$ então cada a_i é um monômio de grau 1 e f é do tipo (3.6) e assim $f \in I$. Suponha $m = \deg f > 6$, então para algum i, $1 \leq i \leq 6$ nós temos $a_i = a_i'a_i''$, sendo $\deg a_i'$, $\deg a_i'' < \deg a_i$.

Se $a_6 = a_6'a_6''$, então

$$\begin{gathered}\big[[a_1, a_2][a_3, a_4] + [a_1, a_3][a_2, a_4], a_5, a_6'a_6''\big] = \\ = a_6'\big[[a_1, a_2][a_3, a_4] + [a_1, a_3][a_2, a_4], a_5, a_6''\big] + \big[[a_1, a_2][a_3, a_4] + [a_1, a_3][a_2, a_4], a_5, a_6'\big]a_6''.\end{gathered}$$

Pela hipótese de indução temos

$$\big[[a_1, a_2][a_3, a_4] + [a_1, a_3][a_2, a_4], a_5, b\big] \in I, \text{ para } b \in \{a_6', a_6''\}.$$

Assim

$$a_6'\big[[a_1, a_2][a_3, a_4] + [a_1, a_3][a_2, a_4], a_5, a_6''\big] + \big[[a_1, a_2][a_3, a_4] + [a_1, a_3][a_2, a_4], a_5, a_6'\big]a_6'' \in I.$$

Logo, os polinômios do tipo (3.27) pertencem ao ideal I quando $a_6 = a_6'a_6''$.

Se tivermos $a_5 = a_5' a_5''$, então

$$\begin{aligned}
&\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],a_5'a_5'',a_6\big] = \\
&= \Big[a_5'\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],a_5''\big]+\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],a_5'\big]a_5'',a_6\Big] = \\
&= a_5'\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],a_5'',a_6\big]+\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],a_5',a_6\big]a_5''+ \\
&+[a_5',a_6]\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],a_5''\big]+\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],a_5'\big][a_5'',a_6] = \\
&= a_5'\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],a_5'',a_6\big]+\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],a_5',a_6\big]a_5''+ \\
&+[a_5',a_6]\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],a_5''\big]+[a_5'',a_6]\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],a_5'\big]+ \\
&+\Big[\big[[a_1,a_2][a_3,a_4],a_5'\big],[a_5'',a_6]\Big]+\Big[\big[[a_1,a_3][a_2,a_4],a_5'\big],[a_5'',a_6]\Big].
\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução temos que

$$\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],b,a_6\big]\in I, \text{ para } b\in\{a_5',a_5''\}.$$

Como os polinômios do tipo (3.25) com grau m pertencem ao ideal I, temos que

$$[a_5',a_6]\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],a_5''\big]+[a_5'',a_6]\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],a_5'\big]\in I.$$

Afirmamos que

$$\Big[\big[[a_1,a_2][a_3,a_4],a_5'\big],[a_5'',a_6]\Big]\in I. \tag{3.44}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
&\Big[\big[[a_1,a_2][a_3,a_4],a_5'\big],[a_5'',a_6]\Big] = \\
&= \big[[a_1,a_2][a_3,a_4,a_5']+[a_1,a_2,a_5'][a_1,a_2],[a_5'',a_6]\big] = \\
&= \big[[a_1,a_2][a_3,a_4,a_5'],[a_5'',a_6]\big]+\big[[a_1,a_2,a_5'][a_1,a_2],[a_5'',a_6]\big] = \\
&= [a_1,a_2]\big[[a_3,a_4,a_5'],[a_5'',a_6]\big]+\big[[a_1,a_2],[a_5'',a_6]\big][a_3,a_4,a_5']+ \\
&+[a_1,a_2,a_5']\big[[a_1,a_2],[a_5'',a_6]\big]+\big[[a_1,a_2,a_5'],[a_5'',a_6]\big][a_1,a_2].
\end{aligned}$$

E da afirmação (3.31) segue que

$$\big[[a_3,a_4,a_5'],[a_5'',a_6]\big],\quad \big[[a_1,a_2,a_5'],[a_5'',a_6]\big]\in I.$$

Agora da afirmação (3.38) temos

$$\big[[a_1,a_2],[a_5'',a_6]\big][a_3,a_4,a_5'], \quad [a_1,a_2,a_5']\big[[a_1,a_2],[a_5'',a_6]\big] \in I.$$

Assim a afirmação (3.44) é válida. Agora pela afirmação (3.44) obtemos

$$\Big[\big[[a_1,a_3][a_2,a_4],a_5'\big],[a_5'',a_6]\Big] \in I.$$

Logo os polinômios do tipo (3.27) pertencem ao ideal I quando $a_5 = a_5'a_5''$.

Caso tenhamos $a_4 = a_4'a_4''$ então

$$\begin{aligned}
&\big[[a_1,a_2][a_3,a_4'a_4'']+[a_1,a_3][a_2,a_4'a_4''],a_5,a_6\big] = \\
&= \big[[a_1,a_2]a_4'[a_3,a_4'']+[a_1,a_3]a_4'[a_2,a_4''],a_5,a_6\big]+\big[[a_1,a_2][a_3,a_4']a_4''+[a_1,a_3][a_2,a_4']a_4'',a_5,a_6\big] = \\
&= [\big([a_1,a_2][a_3,a_4'']+[a_1,a_3][a_2,a_4'']\big)a_4',a_5,a_6]+[\big([a_1,a_2][a_3,a_4']+[a_1,a_3][a_2,a_4']\big)a_4'',a_5,a_6]+ \\
&-\big[[a_1,a_2][a_3,a_4'',a_4']+[a_1,a_3][a_2,a_4'',a_4'],a_5,a_6\big].
\end{aligned}$$

Na expressão acima fazendo $y = \big([a_1,a_2][a_3,a_4'']+[a_1,a_3][a_2,a_4'']\big)$ e $z = \big([a_1,a_2][a_3,a_4']+[a_1,a_3][a_2,a_4']\big)$ obtemos

$$\begin{aligned}
&\big[[a_1,a_2][a_3,a_4'a_4'']+[a_1,a_3][a_2,a_4'a_4''],a_5,a_6\big] = \\
&= [ya_4',a_5,a_6]+[za_4'',a_5,a_6]-\big[[a_1,a_2][a_3,a_4'',a_4']+[a_1,a_3][a_2,a_4'',a_4'],a_5,a_6\big] = \\
&= \big[y[a_4',a_5]+[y,a_5]a_4',a_6\big]+\big[z[a_4'',a_5]+[z,a_5]a_4'',a_6\big]+ \\
&-\big[[a_1,a_2,a_5][a_3,a_4'',a_4']+[a_1,a_2][a_3,a_4'',a_4',a_5]+[a_1,a_3,a_5][a_2,a_4'',a_4']+[a_1,a_3][a_2,a_4'',a_4',a_5],a_6\big] = \\
&= [y,a_6][a_4',a_5]+y[a_4',a_5,a_6]+[y,a_5,a_6]a_4'+[y,a_5][a_4',a_6]+ \\
&+[z,a_6][a_4'',a_5]+z[a_4'',a_5,a_6]+[z,a_5,a_6]a_4''+[z,a_5][a_4'',a_6]+ \\
&-\big[[a_1,a_2,a_5][a_3,a_4'',a_4']+[a_1,a_3,a_5][a_2,a_4'',a_4'],a_6\big]+ \\
&-[a_1,a_2,a_6][a_3,a_4'',a_4',a_5]-[a_1,a_2][a_3,a_4'',a_4',a_5,a_6]+ \\
&-[a_1,a_3,a_6][a_2,a_4'',a_4',a_5]-[a_1,a_3][a_2,a_4'',a_4',a_5,a_6] = \\
&= [y,a_5,a_6]a_4'+[z,a_5,a_6]a_4''+y[a_4',a_5,a_6]+z[a_4'',a_5,a_6]+ \\
&+[y,a_6][a_4',a_5]+[y,a_5][a_4',a_6]+[z,a_6][a_4'',a_5]+[z,a_5][a_4'',a_6]+ \\
&-\big[[a_1,a_2,a_5][a_3,a_4'',a_4']+[a_1,a_3,a_5][a_2,a_4'',a_4'],a_6\big]+ \\
&-[a_1,a_2,a_6][a_3,a_4'',a_4',a_5]-[a_1,a_3,a_6][a_2,a_4'',a_4',a_5]+ \\
&-[a_1,a_2][a_3,a_4'',a_4',a_5,a_6]-[a_1,a_3][a_2,a_4'',a_4',a_5,a_6].
\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução temos

$$[y,a_5,a_6], \quad [z,a_5,a_6] \in I.$$

Como os polinômios do tipo (3.24) com grau m pertencem ao ideal I, temos

$$y[a_4',a_5,a_6], \quad z[a_4'',a_5,a_6] \in I.$$

Agora os polinômios do tipo (3.26) com grau m pertencem ao ideal I, então

$$[a_1,a_2,a_6][a_3,a_4'',a_4',a_5], \quad [a_1,a_3,a_6][a_2,a_4'',a_4',a_5] \in I.$$

Uma vez que os polinômios do tipo (3.28) com grau menor que m pertencem ao ideal I (hipótese de indução), então

$$[a_1,a_2,a_5][a_3,a_4'',a_4'], \quad [a_1,a_3,a_5][a_2,a_4'',a_4'] \in I.$$

Assim obtemos que

$$\big[[a_1,a_2,a_5][a_3,a_4'',a_4'] + [a_1,a_3,a_5][a_2,a_4'',a_4'],a_6\big] \in I.$$

Como os polinômios do tipo (3.22) com grau menor que m pertencem ao ideal I (hipótese de indução), temos

$$[a_3,a_4'',a_4',a_5,a_6], \quad [a_2,a_4'',a_4',a_5,a_6] \in I.$$

Afirmamos que

$$[y,a_6][a_4',a_5] + [y,a_5][a_4',a_6] \in I. \tag{3.45}$$

De fato, temos

$$\begin{gathered}[y,a_6][a_4',a_5] + [y,a_5][a_4',a_6] = \\ = [a_4',a_5][y,a_6] + [a_4',a_6][y,a_5] + \big[[y,a_6],[a_4',a_5]\big] + \big[[y,a_5],[a_4',a_6]\big].\end{gathered}$$

Como os polinômios do tipo (3.25) com grau m pertencem ao ideal I, então

$$[a_4',a_5][y,a_6] + [a_4',a_6][y,a_5] \in I.$$

Pela afirmação (3.44) temos que

$$\big[[y,a_6],[a_4',a_5]\big], \quad \big[[y,a_5],[a_4',a_6]\big] \in I.$$

Logo a afirmação (3.45) é válida. Agora segue da afirmaçao (3.45) que

$$[z,a_6][a_4'',a_5]+[z,a_5][a_4'',a_6] \in I.$$

Com isso obtemos que os polinômios do tipo (3.27) pertencem ao ideal I quando $a_4 = a_4'a_4''$.

Observemos que

$$\big[[a_2,a_1][a_4,a_3]+[a_2,a_4][a_1,a_3],a_5,a_6\big] =$$
$$\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],a_5,a_6\big]+\big[[[a_2,a_4],[a_1,a_3]],a_5,a_6\big]$$

Afirmamos que

$$\Big[\big[[a_2,a_4],[a_1,a_3]\big],a_5,a_6\Big] \in I. \tag{3.46}$$

Como

$$\Big[\big[[a_2,a_4],[a_1,a_3]\big],a_5,a_6\Big] =$$
$$= \big[[a_2,a_4,a_1,a_3,a_5],a_6\big]-\big[a_2,a_4,a_3,a_1,a_5],a_6\big] \in I,$$

uma vez que os polinômios $[a_2,a_4,a_1,a_3,a_5]$, $[a_2,a_4,a_3,a_1,a_5]$ são do tipo (3.22) com grau menor que m e logo pertencem ao ideal I.

Assim os polinômios do tipo (3.27) pertencem ao ideal I quando $a_3 = a_3'a_3''$. Pela simetria entre a_3 e a_2 segue que os polinômios do tipo (3.27) pertencem ao ideal I quando $a_2 = a_2'a_2''$.

Observemos ainda que

$$\big[[a_4,a_3][a_2,a_1]+[a_4,a_2][a_3,a_1],a_5,a_6\big] =$$
$$\big[[a_1,a_2][a_3,a_4]+[a_1,a_3][a_2,a_4],a_5,a_6\big]+\big[[[a_4,a_3],[a_2,a_1]],a_5,a_6\big]+\big[[[a_4,a_2],[a_3,a_1]],a_5,a_6\big].$$

Pela afirmação (3.46) temos

$$\Big[\big[[a_4,a_3],[a_2,a_1]\big],a_5,a_6\Big], \quad \Big[\big[[a_4,a_2],[a_3,a_1]\big],a_5,a_6\Big] \in I.$$

Logo os polinômios do tipo (3.27) pertencem ao ideal I quando $a_1 = a_1' a_1''$.

Portanto qualquer polinômio f do tipo (3.27) de grau m pertence ao ideal I.

Afirmação 3.2.6. *Qualquer polinômio $f = f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ de grau m, do tipo (3.28), pertence ao ideal I.*

Observemos que $f = f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ é um polinômio da forma

$$f = [a_1, a_2, a_3][a_4, a_5, a_6].$$

Caso tenhamos $\deg f = 6$ então cada a_i é um monômio de grau 1, ou seja, f é do tipo (3.4) e assim $f \in I$. Caso $m = \deg f > 6$, então para algum i, $1 \leq i \leq 6$ nós temos $a_i = a_i' a_i''$, sendo $\deg a_i'$, $\deg a_i'' < \deg a_i$.

Se tivermos $a_6 = a_6' a_6''$ então

$$\begin{aligned}
&[a_1, a_2, a_3][a_4, a_5, a_6' a_6''] = [a_1, a_2, a_3]\big(a_6'[a_4, a_5, a_6''] + [a_4, a_5, a_6']a_6''\big) = \\
&= a_6'[a_1, a_2, a_3][a_4, a_5, a_6''] + [a_1, a_2, a_3][a_4, a_5, a_6']a_6'' + [a_1, a_2, a_3][a_4, a_5, a_6'', a_6'].
\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução temos que

$$[a_1, a_2, a_3][a_4, a_5, b] \in I, \text{ para } b \in \{a_6', a_6''\}.$$

Como os polinômios do tipo (3.26) de grau m pertencem ao ideal I, segue que

$$[a_1, a_2, a_3][a_4, a_5, a_6'', a_6'] \in I.$$

Assim os polinômios do tipo (3.28) pertencem ao ideal I quando $a_6 = a_6' a_6''$.

Caso tenhamos $a_5 = a_5'a_5''$ então

$$\begin{gathered}
[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5'a_5'',a_6] = [a_1,a_2,a_3]\big[a_5'[a_4,a_5''] + [a_4,a_5']a_5'',a_6\big] = \\
= [a_1,a_2,a_3]\big(a_5'[a_4,a_5'',a_6] + [a_5',a_6][a_4,a_5''] + [a_4,a_5'][a_5'',a_6] + [a_4,a_5',a_6]a_5''\big) = \\
= [a_1,a_2,a_3][a_4,a_5'',a_6]a_5' + [a_1,a_2,a_3][a_4,a_5',a_6]a_5'' - [a_1,a_2,a_3][a_4,a_5'',a_6,a_5'] + \\
+[a_1,a_2,a_3]\big([a_4,a_5'][a_5'',a_6] + [a_4,a_5''][a_5',a_6]\big) + [a_1,a_2,a_3]\big[[a_5',a_6],[a_4,a_5'']\big] = \\
= [a_1,a_2,a_3][a_4,a_5'',a_6]a_5' + [a_1,a_2,a_3][a_4,a_5',a_6]a_5'' - [a_1,a_2,a_3][a_4,a_5'',a_6,a_5'] + \\
+\big([a_4,a_5'][a_5'',a_6] + [a_4,a_5''][a_5',a_6]\big)[a_1,a_2,a_3] + [a_1,a_2,a_3]\big[[a_5',a_6],[a_4,a_5'']\big] + \\
+\big[[a_1,a_2,a_3],[a_4,a_5'][a_5'',a_6]\big] + \big[[a_1,a_2,a_3],[a_4,a_5''][a_5',a_6]\big].
\end{gathered}$$

Pela hipótese de indução, temos

$$[a_1,a_2,a_3][a_4,b,a_6] \in I, \qquad \text{para } b \in \{a_5',a_5''\}.$$

Como os polinômios do tipo (3.26) de grau m pertencem ao ideal I, segue que

$$[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5'',a_6,a_5'] \in I.$$

Como os polinômios do tipo (3.24) de grau m pertencem ao ideal I, então

$$\big([a_4,a_5'][a_5'',a_6] + [a_4,a_5''][a_5',a_6]\big)[a_1,a_2,a_3] \in I.$$

Como os polinômios do tipo (3.26) de grau m pertencem ao ideal I, temos

$$[a_1,a_2,a_3]\big[[a_5',a_6],[a_4,a_5'']\big] = [a_1,a_2,a_3][a_5',a_6,a_4,a_5''] - [a_1,a_2,a_3][a_5',a_6,a_5'',a_4] \in I.$$

Obtemos da afirmação (3.31) que

$$\begin{gathered}
\big[[a_1,a_2,a_3],[a_4,a_5'][a_5'',a_6]\big] = \\
= [a_4,a_5']\big[[a_1,a_2,a_3],[a_5'',a_6]\big] + \big[[a_1,a_2,a_3],[a_4,a_5']\big][a_5'',a_6] \in I, \\
\text{e que } \big[[a_1,a_2,a_3],[a_4,a_5''][a_5',a_6]\big] \in I.
\end{gathered}$$

Daí os polinômios do tipo (3.28) pertencem ao ideal I quando $a_5 = a_5'a_5''$. Como temos,

$$[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6] = -[a_1,a_2,a_3][a_5,a_4,a_6],$$

então os polinômios do tipo (3.28) pertencem ao ideal I quando $a_4 = a_4'a_4''$.

Observemos que

$$[a_1,a_2,a_3][a_4,a_5,a_6] = [a_4,a_5,a_6][a_1,a_2,a_3] + \big[[a_1,a_2,a_3],[a_4,a_5,a_6]\big] \tag{3.47}$$

Afirmamos que

$$\big[[a_1,a_2,a_3],[a_4,a_5,a_6]\big] \in I \tag{3.48}$$

Temos que

$$\begin{gathered}\big[[a_1,a_2,a_3],[a_4,a_5,a_6]\big] = \\ = \Big[\big[[a_1,a_2,a_3],[a_4,a_5]\big],a_6\Big] - \big[[a_1,a_2,a_3,a_6],[a_4,a_5]\big].\end{gathered}$$

Pela afirmação (3.31) temos

$$\big[[a_1,a_2,a_3],[a_4,a_5]\big] \in I.$$

Pela afirmação (3.42) temos

$$\big[[a_1,a_2,a_3,a_6],[a_4,a_5]\big] \in I.$$

Assim a afirmação (3.47) é válida.

Segue da observação (3.47) a simetria entre os elementos a_1 e a_4, entre a_2 e a_5 e entre a_3 e a_6. Disto temos que os polinômios do tipo (3.28) pertencem ao ideal I quando $a_i = a_i'a_i''$ com $1 \leq i \leq 3$.

Portanto qualquer polinômio f do tipo (3.28) de grau m pertence ao ideal I.

Afirmação 3.2.7. *Qualquer polinômio $f = f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$ de grau m, do tipo (3.29), pertence ao ideal I.*

Observemos que $f = f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$ é um polinômio da forma

$$f = [a_1,a_2][a_3,a_4,a_5,a_6] + [a_6,a_2][a_3,a_4,a_5,a_1].$$

Caso tenhamos $\deg f = 6$ então cada a_i é um monômio de grau 1, ou seja, f é do tipo (3.2) e assim $f \in I$. Caso tenhamos $m = \deg f > 6$, então para algum i, $1 \leq i \leq 6$ nós temos $a_i = a_i'a_i''$, sendo $\deg a_i'$, $\deg a_i'' < \deg a_i$.

Primeiro consideremos o caso em que $a_1 = a_1'a_1''$, então

$$\begin{gathered}
[a_1'a_1'', a_2][a_3, a_4, a_5, a_6] + [a_6, a_2][a_3, a_4, a_5, a_1'a_1''] = \\
= \big(a_1'[a_1'', a_2] + [a_1', a_2]a_1''\big)[a_3, a_4, a_5, a_6] + [a_6, a_2]\big(a_1'[a_3, a_4, a_5, a_1''] + [a_3, a_4, a_5, a_1']a_1''\big) = \\
= a_1'\big([a_1'', a_2][a_3, a_4, a_5, a_6] + [a_6, a_2][a_3, a_4, a_5, a_1'']\big) + [a_6, a_2, a_1'][a_3, a_4, a_5, a_1''] + \\
+\big([a_3, a_4, a_5, a_6][a_1', a_2] + [a_3, a_4, a_5, a_1'][a_6, a_2]\big)a_1'' - [a_1', a_2][a_3, a_4, a_5, a_6, a_1''].
\end{gathered}$$

Pela hipótese de indução temos que

$$[b, a_2][a_3, a_4, a_5, a_6] + [a_6, a_2][a_3, a_4, a_5, b] \in I \text{ para } b \in \{a_1', a_1''\}.$$

O polinômio $[a_3, a_4, a_5, a_6, a_1'']$ é do tipo (3.22) com grau menor que m, e assim pela hipótese de indução pertence ao ideal I. Como $[a_6, a_2, a_1'][a_3, a_4, a_5, a_1'']$ é um polinômio do tipo (3.26) com grau m, segue que pertence ao ideal I. Portanto os polinômios do tipo (3.29) pertencem ao ideal I quando $a_1 = a_1'a_1''$.

Temos que

$$\begin{gathered}
[a_6, a_2][a_3, a_4, a_5, a_1] + [a_1, a_2][a_3, a_4, a_5, a_6] = \\
[a_1, a_2][a_3, a_4, a_5, a_6] + [a_6, a_2][a_3, a_4, a_5, a_1],
\end{gathered}$$

ou seja, a simetria entre a_1 e a_6. Assim de modo similar verifica-se que os polinômios do tipo (3.29) pertencem ao ideal I quando $a_6 = a_6'a_6''$.

Para o caso em que $a_5 = a_5'a_5''$ temos

$$\begin{gathered}
[a_1,a_2][a_3,a_4,a_5'a_5'',a_6]+[a_6,a_2][a_3,a_4,a_5'a_5'',a_1]= \\
[a_1,a_2]\left[a_5'[a_3,a_4,a_5'']+[a_3,a_4,a_5']a_5'',a_6\right]+[a_6,a_2]\left[a_5'[a_3,a_4,a_5'']+[a_3,a_4,a_5']a_5'',a_1\right]= \\
=[a_1,a_2]a_5'[a_3,a_4,a_5'',a_6]+[a_6,a_2]a_5'[a_3,a_4,a_5'',a_1]+ \\
+[a_1,a_2][a_5',a_6][a_3,a_4,a_5'']+[a_6,a_2][a_5',a_1][a_3,a_4,a_5'']+ \\
+[a_1,a_2][a_3,a_4,a_5'][a_5'',a_6]+[a_6,a_2][a_3,a_4,a_5'][a_5'',a_1]+ \\
+[a_1,a_2][a_3,a_4,a_5',a_6]a_5''+[a_6,a_2][a_3,a_4,a_5',a_1]a_5''= \\
=\big([a_1,a_2][a_3,a_4,a_5'',a_6]+[a_6,a_2][a_3,a_4,a_5'',a_1]\big)a_5'+ \\
+\big([a_1,a_2][a_3,a_4,a_5',a_6]+[a_6,a_2][a_3,a_4,a_5',a_1]\big)a_5''+ \\
-\big([a_1,a_2][a_3,a_4,a_5'',a_6,a_5']+[a_6,a_2][a_3,a_4,a_5'',a_1,a_5']\big)+ \\
+\big([a_1,a_2][a_5',a_6]+[a_6,a_2][a_5',a_1]\big)[a_3,a_4,a_5'']+ \\
+\big([a_1,a_2][a_5'',a_6]+[a_6,a_2][a_5'',a_1]\big)[a_3,a_4,a_5']+ \\
+[a_1,a_2]\big[[a_3,a_4,a_5'],[a_5'',a_6]\big]+[a_6,a_2]\big[[a_3,a_4,a_5'],[a_5'',a_1]\big].
\end{gathered}$$

Pela hipótese de indução temos

$$[a_1,a_2][a_3,a_4,b,a_6]+[a_6,a_2][a_3,a_4,b,a_1]\in I,\ \text{para } b\in\{a_5',a_5''\}.$$

Os polinômios do tipo (3.22) com grau menor que m pertencem ao ideal I, assim

$$[a_3,a_4,a_5'',a_6,a_5'] \text{ e } [a_3,a_4,a_5'',a_1,a_5']\in I.$$

Pela afirmação (3.31) temos que

$$\big[[a_3,a_4,a_5'],[a_5'',a_6]\big] \text{ e } \big[[a_3,a_4,a_5'],[a_5'',a_1]\big]\in I.$$

Como os polinômios do tipo (3.24) de grau m pertencem ao ideal I, segue que

$$\big([a_1,a_2][a_5',a_6]+[a_6,a_2][a_5',a_1]\big)[a_3,a_4,a_5'']\in I,$$

$$\big([a_1,a_2][a_5'',a_6]+[a_6,a_2][a_5'',a_1]\big)[a_3,a_4,a_5']\in I.$$

Portanto os polinômios do tipo (3.29) pertencem ao ideal I quando $a_5 = a_5'a_5''$.

No caso em que $a_4 = a_4'a_4''$ temos

$$
\begin{aligned}
&[a_1,a_2][a_3,a_4'a_4'',a_5,a_6]+[a_6,a_2][a_3,a_4'a_4'',a_5,a_1]= \\
&=[a_1,a_2]\big[a_4'[a_3,a_4'']+[a_3,a_4']a_4'',a_5,a_6\big]+[a_6,a_2]\big[a_4'[a_3,a_4'']+[a_3,a_4']a_4'',a_5,a_1\big]= \\
&=[a_1,a_2]\big[a_4'[a_3,a_4'',a_5]+[a_4',a_5][a_3,a_4'']+[a_3,a_4'][a_4'',a_5]+[a_3,a_4',a_5]a_4'',a_6\big]+ \\
&+[a_6,a_2]\big[a_4'[a_3,a_4'',a_5]+[a_4',a_5][a_3,a_4'']+[a_3,a_4'][a_4'',a_5]+[a_3,a_4',a_5]a_4'',a_1\big]= \\
&=[a_1,a_2]\big[a_4'[a_3,a_4'',a_5]+[a_3,a_4',a_5]a_4'',a_6\big]+[a_6,a_2]\big[a_4'[a_3,a_4'',a_5]+[a_3,a_4',a_5]a_4'',a_1\big]+ \\
&+[a_1,a_2]\big[[a_4',a_5][a_3,a_4'']+[a_3,a_4'][a_4'',a_5],a_6\big]+[a_6,a_2]\big[[a_4',a_5][a_3,a_4'']+[a_3,a_4'][a_4'',a_5]+,a_1\big]= \\
&=[a_1,a_2]\big[a_4'[a_3,a_4'',a_5,a_6]+[a_4',a_6][a_3,a_4'',a_5]+[a_3,a_4',a_5][a_4'',a_6]+[a_3,a_4',a_5,a_6]a_4''\big]+ \\
&+[a_6,a_2]\big[a_4'[a_3,a_4'',a_5,a_1]+[a_4',a_1][a_3,a_4'',a_5]+[a_3,a_4',a_5][a_4'',a_1+[a_3,a_4',a_5,a_1]a_4''\big]+ \\
&+[a_1,a_2]\big[[a_4',a_5][a_3,a_4'']+[a_4',a_3][a_5,a_4''],a_6\big]+[a_6,a_2]\big[[a_4',a_5][a_3,a_4'']+[a_4',a_3][a_5,a_4''],a_1\big]= \\
&=[a_1,a_2]a_4'[a_3,a_4'',a_5,a_6]+[a_6,a_2]a_4'[a_3,a_4'',a_5,a_1]+ \\
&+[a_1,a_2][a_3,a_4',a_5,a_6]a_4''+[a_6,a_2][a_3,a_4',a_5,a_1]a_4''+ \\
&+\big([a_1,a_2][a_4',a_6]+[a_6,a_2][a_4',a_1]\big)[a_3,a_4'',a_5]+ \\
&+[a_1,a_2][a_3,a_4',a_5][a_4'',a_6]+[a_6,a_2][a_3,a_4',a_5][a_4'',a_1]+ \\
&+[a_1,a_2]\big[[a_4',a_5][a_3,a_4'']+[a_4',a_3][a_5,a_4''],a_6\big]+[a_6,a_2]\big[[a_4',a_5][a_3,a_4'']+[a_4',a_3][a_5,a_4''],a_1\big].
\end{aligned}
$$

Conforme vimos no caso anterior, temos

$$
\begin{aligned}
&[a_1,a_2]a_4'[a_3,a_4'',a_5,a_6]+[a_6,a_2]a_4'[a_3,a_4'',a_5,a_1]\in I, \\
&[a_1,a_2][a_3,a_4',a_5,a_6]a_4''+[a_6,a_2][a_3,a_4',a_5,a_1]a_4''\in I, \\
&\big([a_1,a_2][a_4',a_6]+[a_6,a_2][a_4',a_1]\big)[a_3,a_4'',a_5]\in I, \\
&[a_1,a_2][a_3,a_4',a_5][a_4'',a_6]+[a_6,a_2][a_3,a_4',a_5][a_4'',a_1]\in I.
\end{aligned}
$$

Como os polinômios do tipo (3.25) com grau m pertencem ao ideal I, segue que

$$
\begin{aligned}
&[a_1,a_2]\big[[a_4',a_5][a_3,a_4'']+[a_4',a_3][a_5,a_4''],a_6\big]\in I, \\
&[a_6,a_2]\big[[a_4',a_5][a_3,a_4'']+[a_4',a_3][a_5,a_4''],a_1\big]\in I.
\end{aligned}
$$

Logo os polinômios do tipo (3.29) pertencem ao ideal I quando $a_4 = a_4'a_4''$.

Temos que

$$
\begin{gathered}
[a_1,a_2][a_4,a_3,a_5,a_6]+[a_6,a_2][a_4,a_3,a_5,a_1]= \\
-\big([a_1,a_2][a_3,a_4,a_5,a_6]+[a_6,a_2][a_3,a_4,a_5,a_1]\big),
\end{gathered}
$$

ou seja, a simetria entre os elementos a_3 e a_4. Assim os polinômios do tipo (3.29) pertencem ao ideal I quando $a_3 = a_3'a_3''$.

Se tivermos $a_2 = a_2'a_2''$, então

$$
\begin{gathered}
[a_1,a_2'a_2''][a_3,a_4,a_5,a_6]+[a_6,a_2'a_2''][a_3,a_4,a_5,a_1]= \\
=(a_2'[a_1,a_2'']+[a_1,a_2']a_2'')[a_3,a_4,a_5,a_6]+ \\
+(a_2'[a_6,a_2'']+[a_6,a_2']a_2'')[a_3,a_4,a_5,a_1]= \\
=a_2'[a_1,a_2''][a_3,a_4,a_5,a_6]+a_2'[a_6,a_2''][a_3,a_4,a_5,a_1]+ \\
+[a_1,a_2']a_2''[a_3,a_4,a_5,a_6]+[a_6,a_2']a_2''[a_3,a_4,a_5,a_1]= \\
=a_2'\big([a_1,a_2''][a_3,a_4,a_5,a_6]+[a_6,a_2''][a_3,a_4,a_5,a_1]\big)+ \\
+\big([a_1,a_2'][a_3,a_4,a_5,a_6]+[a_6,a_2'][a_3,a_4,a_5,a_1]\big)a_2''+ \\
-[a_1,a_2'][a_3,a_4,a_5,a_6,a_2'']-[a_6,a_2'][a_3,a_4,a_5,a_1,a_2''].
\end{gathered}
$$

Pela hipótese de indução temos

$$
\begin{gathered}
[a_1,b][a_3,a_4,a_5,a_6]+[a_6,b][a_3,a_4,a_5,a_1][a_6,b]\in I, \text{ para } b\in\{a_2',a_2''\}, \\
[a_3,a_4,a_5,a_6,a_2''],\quad [a_3,a_4,a_5,a_1,a_2'']\in I.
\end{gathered}
$$

Logo os polinômios do tipo (3.29) pertencem ao ideal I quando $a_2 = a_2'a_2''$.

Portanto qualquer polinômio f do tipo (3.29) de grau m pertence ao ideal I.

Finalmente,

Afirmação 3.2.8. *qualquer polinômio $f = f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$ de grau m, do tipo (3.22), pertence ao ideal I.*

Observemos que $f = f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$ é um polinômio da forma

$$
f=[a_1,a_2,a_3,a_4,a_5],
$$

com $m = \deg f > 5$. Então para algum i, $1 \leq i \leq 5$ temos $a_i = a_i' a_i''$, sendo $\deg a_i'$, $\deg a_i'' < \deg a_i$.

Se tivermos $a_5 = a_5' a_5''$ então

$$[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5' a_5''] = a_5'[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5''] + [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5'] a_5''.$$

Pela hipótese de indução temos que $[a_1, a_2, a_3, a_4, b] \in I$ para $b \in \{a_5', a_5''\}$. Assim os polinômios do tipo (3.22) pertencem ao ideal I quando $a_5 = a_5' a_5''$.

Caso tenhamos $a_4 = a_4' a_4''$ então

$$[a_1, a_2, a_3, a_4' a_4'', a_5] = \big[a_4'[a_1, a_2, a_3, a_4''] + [a_1, a_2, a_3, a_4'] a_4'', a_5\big] =$$
$$= a_4'[a_1, a_2, a_3, a_4'', a_5] + [a_4', a_5][a_1, a_2, a_3, a_4''] + [a_1, a_2, a_3, a_4'][a_4'', a_5] + [a_1, a_2, a_3, a_4', a_5] a_4'' =$$
$$= a_4'[a_1, a_2, a_3, a_4'', a_5] + [a_1, a_2, a_3, a_4', a_5] a_4'' +$$
$$+ [a_4', a_5][a_1, a_2, a_3, a_4''] + [a_4'', a_5][a_1, a_2, a_3, a_4'] + \big[[a_1, a_2, a_3, a_4'], [a_4'', a_5]\big].$$

Pela hipótese de indução temos que $[a_1, a_2, a_3, b, a_5] \in I$ para $b \in \{a_4', a_4''\}$. Da afirmação (3.42), obtemos

$$\big[[a_1, a_2, a_3, a_4'], [a_4'', a_5]\big] \in I.$$

Também temos que os polinômios do tipo (3.29) com grau m pertecem ao ideal I, assim

$$[a_4', a_5][a_1, a_2, a_3, a_4''] + [a_4'', a_5][a_1, a_2, a_3, a_4'] \in I.$$

Logo os polinômios do tipo (3.22) pertencem ao ideal I quando $a_4 = a_4' a_4''$.

No caso em que $a_3 = a_3' a_3''$ temos

$$[a_1, a_2, a_3' a_3'', a_4, a_5] = \big[a_3'[a_1, a_2, a_3''] + [a_1, a_2, a_3'] a_3'', a_4, a_5\big] =$$
$$= \big[a_3'[a_1, a_2, a_3', a_4] + [a_3', a_4][a_1, a_2, a_3''] + [a_1, a_2, a_3'][a_3'', a_4] + [a_1, a_2, a_3', a_4] a_3'', a_5\big] =$$
$$= a_3'[a_1, a_2, a_3', a_4, a_5] + [a_1, a_2, a_3', a_4, a_5] a_3'' +$$
$$+ [a_3', a_5][a_1, a_2, a_3'', a_4] + [a_3', a_4][a_1, a_2, a_3'', a_5] + [a_1, a_2, a_3', a_5][a_3'', a_4] + [a_1, a_2, a_3', a_4][a_3'', a_5] +$$
$$+ [a_3', a_4, a_5][a_1, a_2, a_3''] + [a_1, a_2, a_3'][a_3'', a_4, a_5].$$

Pela hipótese de indução temos que,

$$[a_1, a_2, b, a_4, a_5] \in I, \text{ para } b \in \{a_3', a_3''\}.$$

Como os polinômios do tipo (3.29) de qualquer grau m pertencem ao ideal I segue que

$$[a'_3,a_5][a_1,a_2,a''_3,a_4]+[a'_3,a_4][a_1,a_2,a''_3,a_5]\in I.$$

Observemos que

$$\begin{gathered}[a_1,a_2,a'_3,a_5][a''_3,a_4]+[a_1,a_2,a'_3,a_4][a''_3,a_5]=\\ =[a''_3,a_4][a_1,a_2,a'_3,a_5]+[a''_3,a_5][a_1,a_2,a'_3,a_4]+\big[[a_1,a_2,a'_3,a_5],[a''_3,a_4]\big]+\big[[a_1,a_2,a'_3,a_4],[a''_3,a_5]\big].\end{gathered}$$

Pela afirmação (3.42) temos

$$\big[[a_1,a_2,a'_3,a_5],[a''_3,a_4]\big],\quad \big[[a_1,a_2,a'_3,a_4],[a''_3,a_5]\big]\in I.$$

Novamente, os polinômios do tipo (3.29) de qualquer grau m pertencem ao ideal I assim

$$[a''_3,a_4][a_1,a_2,a'_3,a_5]+[a''_3,a_5][a_1,a_2,a'_3,a_4]\in I.$$

Daí obtemos que

$$[a_1,a_2,a'_3,a_5][a''_3,a_4]+[a_1,a_2,a'_3,a_4][a''_3,a_5]\in I.$$

Como consequência, os polinômios do tipo (3.29) pertencem ao ideal I quando $a_3=a'_3a''_3$.

Por fim, se tivermos $a_2=a'_2a''_2$, então

$$\begin{gathered}[a_1,a'_2a''_2,a_3,a_4,a_5]=\big[a'_2[a_1,a''_2]+[a_1,a'_2]a''_2,a_3,a_4,a_5\big]=\\ =\big[a'_2[a_1,a''_2,a_3]+[a'_2,a_3][a_1,a''_2]+[a_1,a'_2][a''_2,a_3]+[a_1,a'_2,a_3]a''_2,a_4,a_5\big]=\\ =\big[a'_2[a_1,a''_2,a_3]+[a_1,a'_2,a_3]a''_2,a_4,a_5\big]+\big[[a'_2,a_3][a_1,a''_2]+[a_1,a'_2][a''_2,a_3],a_4,a_5\big]=\\ =\big[a'_2[a_1,a''_2,a_3,a_4]+[a'_2,a_4][a_1,a''_2,a_3]+[a_1,a'_2,a_3][a''_2,a_4]+[a_1,a'_2,a_3,a_4]a''_2,a_5\big]+\\ +\big[[a'_2,a_3][a_1,a''_2]+[a_1,a'_2][a''_2,a_3],a_4,a_5\big]=\\ =a'_2[a_1,a''_2,a_3,a_4,a_5]+[a_1,a'_2,a_3,a_4,a_5]a''_2+\\ +[a'_2,a_5][a_1,a''_2,a_3,a_4]+[a'_2,a_4][a_1,a''_2,a_3,a_5]+[a_1,a'_2,a_3,a_5][a''_2,a_4]+[a_1,a'_2,a_3,a_4][a''_2,a_5]+\\ +[a'_2,a_4,a_5][a_1,a''_2,a_3]+[a_1,a'_2,a_3][a''_2,a_4,a_5]+\\ +\big[[a'_2,a_3][a_1,a''_2]+[a_1,a'_2][a''_2,a_3],a_4,a_5\big].\end{gathered}$$

Como no caso anterior, temos que

$$
\begin{gathered}
a_2'[a_1,a_2'',a_3,a_4,a_5], \quad [a_1,a_2',a_3,a_4,a_5]a_2'' \in I, \\
[a_2',a_5][a_1,a_2'',a_3,a_4]+[a_2',a_4][a_1,a_2'',a_3,a_5] \in I, \\
[a_1,a_2',a_3,a_5][a_2'',a_4]+[a_1,a_2',a_3,a_4][a_2'',a_5] \in I, \\
[a_2',a_4,a_5][a_1,a_2'',a_3], \quad [a_1,a_2',a_3][a_2'',a_4,a_5] \in I.
\end{gathered}
$$

Como os polinômios do tipo (3.27) de grau m pertencem ao ideal I, obtemos

$$\big[[a_2',a_3][a_1,a_2'']+[a_1,a_2'][a_2'',a_3],a_4,a_5\big] \in I.$$

Portanto os polinômios do tipo (3.22) pertencem ao ideal I quando $a_2 = a_2'a_2''$.

Temos que

$$[a_1,a_2,a_3,a_4,a_5] = -[a_2,a_1,a_3,a_4,a_5],$$

ou seja, a simetria entre os elementos a_1 e a_2. Daí obtemos que os polinômios do tipo (3.22) pertencem ao ideal I quando $a_1 = a_1'a_1''$.

Portanto para qualquer polinômio f do tipo (3.22) de grau m pertence ao ideal I.

As Afirmações 3.2.1 à 3.2.8 garantem que $T^{(5)} \subseteq I$. Com isso a prova do Teorema 3 está completa.

Capítulo 4

A série central inferior de um anel associativo livre visto como um anel de Lie

Sejam $R = \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, \ldots \rangle$ o anel livre com geradores livres $x_1, x_2, \ldots$ Lembramos que $[R]$ é o anel de Lie associado à R com $[a,b] = ab - ba$, quaisquer que sejam $a, b \in R$.

Seja $(m_1, m_2, \ldots)$ uma sequência infinita de inteiros, tal que $m_i \geq 0$ para todo i e $m_i > 0$ apenas para uma quantidade finita de índices i. Seja $R(m_1, m_2, \ldots)$ a componente multi-homogênea de R de multigrau $(m_1, m_2, \ldots)$ nas variáveis $x_1, x_2, \ldots$ respectivamente. Observemos que

$$R = \oplus_{(m_1, m_2, \ldots)} R(m_1, m_2, \ldots).$$

Seja $L_k = L_k(R)$ o ideal no anel de Lie $[R]$ definido recursivamente por $L_1(R) = R$ e $L_k(R) = [L_{k-1}, R]$ para qualquer inteiro $k > 1$. Escrevemos cada ideal L_k na forma

$$L_k(R) = \oplus_{(m_1, m_2, \ldots)} L_k(m_1, m_2, \ldots),$$

sendo cada $L_k(m_1, m_2, \ldots) = L_k \cap R(m_1, m_2, \ldots)$ a componente multi-homogênea de L_k de multigrau $(m_1, m_2, \ldots)$. Do mesmo modo o anel quociente pode ser escrito

$$R/L_k = \oplus_{(m_1, m_2, \ldots)} (R/L_k)(m_1, m_2, \ldots),$$

sendo $(R/L_k)(m_1, m_2, \ldots)$ a componente multi-homogênea de R/L_k de multigrau $(m_1, m_2, \ldots)$. Observemos que $(R/L_k)(m_1, m_2, \ldots) \cong \dfrac{R(m_1, m_2, \ldots)}{L_k(m_1, m_2, \ldots)}$.

O estudo do grupo aditivo R/L_k pode ser reduzido ao estudo de cada componente multi-homogênea de multigrau $(m_1, m_2, \ldots)$, ou seja, ao estudo dos grupos aditivos $(R/L_k)(m_1, m_2, \ldots)$.

Neste capítulo, para $k = 3,4$, estudaremos a componente multi-homogênea de multigrau $\underbrace{(1,1,\ldots,1)}_{k+1 \text{ vezes}}$ do grupo quociente R/L_k, ou seja, a componente multilinear de grau $k+1$ de R/L_k. Por simplicidade indicamos $(1,1,\ldots,1) = (\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n \text{ vezes}},0,\ldots)$, isto é, as n primeiras entradas são iguais a 1 e as demais iguais a 0.

Primeiro mostramos que $(R/L_3)(1,1,1,1)$ é uma soma direta de grupos cíclicos infinitos.

Teorema 4. *O grupo quociente $(R/L_3)(1,1,1,1)$ é um grupo abeliano livre de posto 10, isto é,*

$$(R/L_3)(1,1,1,1) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{10 \text{ vezes}}.$$

Na demonstração do Teorema 4 nós explicitaremos geradores dos grupos cíclicos infinitos. Assim $(R/L_3)(1,1,1,1)$ é um grupo abeliano livre. Em particular exibiremos os geradores da componente multilinear do grupo quociente $B_{4,3}$, ou seja, demonstramos que $B_{4,3}$ é livre de torção.

Para o anel associativo finitamente gerado livre $R_m = \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, \ldots, x_m\rangle$, Bhupatiraju, Etingof e outros [7] estudaram o grupo aditivo do quociente $B_{m,k} = L_k(R_m)/L_{k+1}(R_m)$. Em particular eles mostraram que $B_{2,2}$ é livre de torção e $B_{2,3}$ possui elemento de torção com ordem d, sendo d um divisor de 6. As tabelas com dados experimentais (obtidos com recurso computacional: pacote MAGMA) mostram que existem elementos de torção com ordem 2 ou 3 no quociente $B_{3,3}$.

Consideremos $w = \big[x_1[x_2,x_3,x_4],x_5\big]$. Do trabalho de Feigin e Shoikhet [18, Lemma 2.2.1] temos que $w \in L_3$. Krasilnikov [29, Proposition 1.5] mostrou que $w \notin L_4$. Do trabalho de Bapat e Jordan [6, Lemma 6.1] deduz-se que $6w \in L_4$, ou seja, $w + L_4$ é um elemento de torção com ordem d em L_3/L_4, sendo d um divisor de 6. Aqui mostraremos a seguinte proposição:

Proposição 5. *Seja $w = \big[x_1, x_2[x_5,x_4,x_3]\big]$. Então $3w \in L_4$.*

Segue da Proposição 5 que w é um elemento de torção de ordem 3 do grupo aditivo L_3/L_4, pois $w \in L_3$, $w \notin L_4$ e $3w \in L_4$.

Mostraremos ainda que uma componente multilinear de R/L_4 é soma direta de um grupo abeliano livre e um grupo cíclico de ordem 3. Mais precisamente o grupo aditivo de $(R/L_4)(1,1,1,1,1)$ não é livre de torção.

Teorema 6. *O grupo quociente $(R/L_4)(1,1,1,1,1)$ é uma soma direta de um grupo abeliano livre de posto 56 com um grupo cíclico de ordem 3, ou seja,*

$$(R/L_4)(1,1,1,1,1) \cong \underbrace{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{56\ vezes}\oplus\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}.$$

Na demonstração do Teorema 6 nós descreveremos explicitamente os geradores dos grupos cíclicos infinitos e um elemento de torção de ordem 3 que é o gerador de $\dfrac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$.

4.1 Resultados auxiliares

Seja P_n o grupo aditivo abeliano livre gerado por $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$ com $\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}=\{1,2,\ldots,n\}$. Observamos que P_n é a componente multi-homogênea de R de multigrau $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n\ \text{vezes}})$, ou seja, $P_n = R(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n\ \text{vezes}})$ é uma componente multilinear de R com as n primeiras entradas não-nulas. Observamos ainda que $(R/L_k)(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k+1\ \text{vezes}}) \cong P_{k+1}/(L_k\cap P_{k+1})$.

Observação 4.1. Segue do 3^o Teorema de homomorfismo de grupos que

$$P_n/(L_k\cap P_n) \cong \frac{P_n/(L_n\cap P_n)}{(L_k\cap P_n)/(L_n\cap P_n)}.$$

Portanto para obtermos a descrição do grupo aditivo $P_n/(L_k\cap P_n)$ consideramos o quociente de $P_n/(L_n\cap P_n)$ por $(L_k\cap P_n)/(L_n\cap P_n)$.

Observação 4.2. O conjunto de monômios $B=\big\{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}\,|\,\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}=\{1,2,\ldots,n\}\big\}$ é uma base do grupo abeliano livre P_n *com $n!$ elementos.*

O resultado seguinte é bem conhecido, veja [15].

Lema 4.3. *[15, Exercise 4.3.8] O conjunto de polinômios $\tilde{B}=\big\{[x_n,x_{i_2},\ldots,x_{i_n}]\,|\,\{i_2,i_3,\ldots,i_n\}=\{1,2,\ldots,n-1\}\big\}$ é uma base do grupo abeliano livre $L_n\cap P_n$.*

Demonstração: Usando a identidade de Jacobi (como no Lema 2.24), é possível mostrar que os elementos de $\tilde{B}$ geram $L_n \cap P_n$ como um subgrupo do grupo aditivo de R. Na ordem lexicográfica no conjunto de monômios mônicos, o termo líder de $[x_n, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}]$ é o monômio $x_n x_{i_2} \cdots x_{i_n}$. Portanto comutadores distintos de $\tilde{B}$ possuem termos líderes distintos. Assim segue que esses comutadores são linearmente independentes e formam uma base de $L_n \cap P_n$. □

Lema 4.4. *Seja* $\overline{B} = \{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n} \mid \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}, i_1 \neq n\}$. *Então* $\overline{B} + (L_n \cap P_n) = \{b + (L_n \cap P_n) \mid b \in \overline{B}\}$ *é uma base do grupo abeliano livre* $P_n/(L_n \cap P_n)$.

Demonstração: Observamos que $B = \overline{B} \dot{\cup} \tilde{B}$ (união disjunta) é uma base de P_n. Como $\tilde{B}$ é uma base de $L_n \cap P_n$ (Lema 4.3), segue que $\overline{B} + (L_n \cap P_n)$ é uma base do quociente. □

4.2 Demonstração do Teorema 4

Denotaremos por $\mathscr{B}_{(k)}$ o quociente $(L_k \cap P_{k+1})/(L_{k+1} \cap P_{k+1})$, ou seja, a componente multilinear de $B_{k+1,k}$. Assim $\mathscr{B}_{(3)}$ indica o quociente $(L_3 \cap P_4)/(L_4 \cap P_4)$.

Lema 4.5. *Considere o conjunto* $S_1 = \{v_i \mid 1 \leq i \leq 8\}$, *sendo:*

$$\begin{aligned} &v_1 = [x_3 x_4, x_2, x_1], \quad v_2 = [x_2 x_4, x_3, x_1], \quad v_3 = [x_3 x_4, x_1, x_2], \quad v_4 = [x_1 x_4, x_3, x_2], \\ &v_5 = [x_2 x_4, x_1, x_3], \quad v_6 = [x_1 x_4, x_2, x_3], \quad v_7 = [x_2 x_3, x_1, x_4], \quad v_8 = [x_1 x_3, x_2, x_4]. \end{aligned}$$

O conjunto $S_1 + (L_4 \cap P_4) = \{v_i + (L_4 \cap P_4) \mid v_i \in S_1\}$ *é um conjunto gerador de* $\mathscr{B}_{(3)}$.

Demonstração: Para $\{i_1, i_2, i_3, i_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$ os elementos de $(L_3 \cap P_4)$ são de um dos 3 tipos: $[x_{i_1} \cdot x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}]$, $[x_{i_1}, x_{i_2} \cdot x_{i_3}, x_{i_4}]$ ou $[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3} \cdot x_{i_4}]$ com $\{i_1, i_2, i_3, i_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Pela antissimetria e identidade de Jacobi podemos escrever os elementos destes dois últimos tipos como combinação linear do primeiro tipo. E mais, temos 4!=24 elementos do tipo $[x_{i_1} \cdot x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}]$, porém pela Proposição 2.23 podemos considerar $i_1 < i_2$ e assim temos um total de 12 elementos.

Mostraremos que os 8 elementos de $S_1 + (L_4 \cap P_4)$ listados acima geram $\mathscr{B}_3$. Como

$$[x_3 x_4, x_2] + [x_4 x_2, x_3] + [x_2 x_3, x_4] = 0,$$

obtemos que

$$\begin{aligned}&[x_3x_4,x_2,x_1]+[x_4x_2,x_3,x_1]+[x_2x_3,x_4,x_1]=\\&=\big[[x_3x_4,x_2]+[x_4x_2,x_3]+[x_2x_3,x_4],x_1\big]=0.\end{aligned}$$

Assim temos

$$[x_2x_3,x_4,x_1]=-[x_3x_4,x_2,x_1]-[x_2x_4,x_3,x_1] \quad \text{mod } (L_4\cap P_4) \quad \text{(Proposição 2.23)}.$$

Do mesmo modo obtemos que,

$$\begin{aligned}
[x_1x_3,x_4,x_2] &= -[x_3x_4,x_1,x_2]-[x_1x_4,x_3,x_2] \quad \text{mod } (L_4\cap P_4).\\
[x_1x_2,x_4,x_3] &= -[x_2x_4,x_1,x_3]-[x_1x_4,x_2,x_3] \quad \text{mod } (L_4\cap P_4).\\
[x_1x_2,x_3,x_4] &= -[x_2x_3,x_1,x_4]-[x_1x_3,x_2,x_4] \quad \text{mod } (L_4\cap P_4).
\end{aligned}$$

Portanto $S_1+(L_4\cap P_4)$ é um conjunto gerador de $\mathscr{B}_{(3)}$. □

Proposição 4.6. *Considere $S=\{u_i\,|\,1\le i\le 8\}$, sendo:*

$$\begin{aligned}
u_1 &= x_3[x_4,x_2,x_1]+[x_3,x_2][x_4,x_1]+[x_3,x_2,x_1]x_4+[x_3,x_1][x_4,x_2],\\
u_2 &= x_3[x_4,x_1,x_2]+[x_3,x_2][x_4,x_1]+[x_3,x_1][x_4,x_2]+[x_3,x_1,x_2]x_4,\\
u_3 &= [x_3,x_2][x_4,x_1]+[x_3,x_2,x_1]x_4-x_2[x_4,x_3,x_1]-[x_2,x_1][x_4,x_3],\\
u_4 &= [x_3,x_2,x_1]x_4-[x_3,x_1][x_4,x_2]-[x_3,x_1,x_2]x_4-[x_2,x_1][x_4,x_3]+x_1[x_4,x_2,x_3],\\
u_5 &= [x_3,x_1][x_4,x_2]+[x_3,x_1,x_2]x_4+[x_2,x_1][x_4,x_3]-x_1[x_4,x_3,x_2],\\
u_6 &= [x_3,x_1,x_2]x_4-x_2[x_4,x_3,x_1]+x_2[x_4,x_1,x_3],\\
u_7 &= x_2[x_4,x_3,x_1]-x_2[x_4,x_1,x_3]+x_1[x_4,x_2,x_3],\\
u_8 &= x_2[x_4,x_1,x_3]+x_1[x_4,x_3,x_2]-x_1[x_4,x_2,x_3].
\end{aligned}$$

O conjunto $S+(L_4\cap P_4)=\{u_i+(L_4\cap P_4)\,|\,u_i\in S\}$ é uma base de $\mathscr{B}_3$.

Demonstração: Observamos que o conjunto $S=\{u_i\,|\,1\le i\le 8\}$ é linearmente independente, pois cada u_i possui polinômio líder distinto. Assim para mostrarmos que $S+(L_4\cap P_4)$ é uma base, basta mostarmos que $S+(L_4\cap P_4)$ gera $\mathscr{B}_3$. Nossa estratégia será a seguinte: mostraremos que o conjunto $S_1+(L_4\cap P_4)$ (Lema 4.5) é equivalente, via redução do polinômio líder, ao conjunto $S+(L_4\cap P_4)$.

Façamos

$$\begin{aligned}u_1 := v_1 = [x_3x_4,x_2,x_1] = \big[x_3[x_4,x_2]+[x_3,x_2]x_4,x_1\big] = \\ = x_3[x_4,x_2,x_1]+[x_3,x_1][x_4,x_2]+[x_3,x_2][x_4,x_1]+[x_3,x_2,x_1]x_4 \equiv \\ \equiv x_3[x_4,x_2,x_1]+[x_3,x_2][x_4,x_1]+[x_3,x_2,x_1]x_4+[x_3,x_1][x_4,x_2] \mod (L_4\cap P_4).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_2 := v_3 = [x_3x_4,x_1,x_2] = \big[x_3[x_4,x_1]+[x_3,x_1]x_4,x_2\big] = \\ = x_3[x_4,x_1,x_2]+[x_3,x_2][x_4,x_1]+[x_3,x_1][x_4,x_2]+[x_3,x_1,x_2]x_4 \equiv \\ \equiv x_3[x_4,x_1,x_2]+[x_3,x_2][x_4,x_1]+[x_3,x_1][x_4,x_2]+[x_3,x_1,x_2]x_4 \mod (L_4\cap P_4).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_3 := -v_2 = -[x_2x_4,x_3,x_1] = -\big[x_2[x_4,x_3]+[x_2,x_3]x_4,x_1\big] = \\ = -(x_2[x_4,x_3,x_1]+[x_2,x_1][x_4,x_3]+[x_2,x_3][x_4,x_1]+[x_2,x_3,x_1]x_4) \equiv \\ \equiv -([x_2,x_3][x_4,x_1]+[x_2,x_3,x_1]x_4+x_2[x_4,x_3,x_1]+[x_2,x_1][x_4,x_3]) \mod (L_4\cap P_4) = \\ = [x_3,x_2][x_4,x_1]+[x_3,x_2,x_1]x_4-x_2[x_4,x_3,x_1]-[x_2,x_1][x_4,x_3] \mod (L_4\cap P_4).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_4 := v_6 = [x_1x_4,x_2,x_3] = \big[x_1[x_4,x_2]+[x_1,x_2]x_4,x_3\big] = \\ = x_1[x_4,x_2,x_3]+[x_1,x_3][x_4,x_2]+[x_1,x_2][x_4,x_3]+[x_1,x_2,x_3]x_4 \equiv \\ \equiv x_1[x_4,x_2,x_3]-[x_3,x_1][x_4,x_2]+[x_3,x_2,x_1]x_4-[x_3,x_1,x_2]x_4-[x_2,x_1][x_4,x_3] \mod (L_4\cap P_4) = \\ = [x_3,x_2,x_1]x_4-[x_3,x_1][x_4,x_2]-[x_3,x_1,x_2]x_4-[x_2,x_1][x_4,x_3]+x_1[x_4,x_2,x_3] \mod (L_4\cap P_4).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_5 := -v_4 = -[x_1x_4,x_3,x_2] = -\big[x_1[x_4,x_3]+[x_1,x_3]x_4,x_2\big] = \\ = -(x_1[x_4,x_3,x_2]+[x_1,x_2][x_4,x_3]+[x_1,x_3][x_4,x_2]+[x_1,x_3,x_2]x_4) \equiv \\ \equiv -([x_1,x_3][x_4,x_2]+[x_1,x_3,x_2]x_4+[x_1,x_2][x_4,x_3]+x_1[x_4,x_3,x_2]) \mod (L_4\cap P_4) = \\ = [x_3,x_1][x_4,x_2]+[x_3,x_1,x_2]x_4+[x_2,x_1][x_4,x_3]-x_1[x_4,x_3,x_2] \mod (L_4\cap P_4).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_6 := v_5-v_2 = [x_2x_4,x_1,x_3]-[x_2x_4,x_3,x_1] = \\ -[x_3,x_2][x_4,x_1]-[x_3,x_2,x_1]x_4+[x_3,x_1,x_2]x_4+x_2[x_4,x_1,x_3]+[x_2,x_1][x_4,x_3]+ \\ -(-[x_3,x_2][x_4,x_1]-[x_3,x_2,x_1]x_4+x_2[x_4,x_3,x_1]+[x_2,x_1][x_4,x_3]) = \\ \equiv [x_3,x_1,x_2]x_4-x_2[x_4,x_3,x_1]+x_2[x_4,x_1,x_3] \mod (L_4\cap P_4).\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_7 &:= -v_7+v_6+v_3-v_1 = \\
&= -[x_2x_3,x_1,x_4]+[x_1x_4,x_2,x_3]+[x_3x_4,x_1,x_2]-[x_3x_4,x_2,x_1] = \\
&= -(-x_3[x_4,x_2,x_1]+x_3[x_4,x_1,x_2]-[x_3,x_1][x_4,x_2]-x_2[x_4,x_3,x_1]+x_2[x_4,x_1,x_3]+ \\
&\quad -[x_2,x_1][x_4,x_3])+[x_3,x_2,x_1]x_4-[x_3,x_1,x_2]x_4-[x_3,x_1][x_4,x_2]-[x_2,x_1][x_4,x_3]+ \\
&\quad +x_1[x_4,x_2,x_3]+x_3[x_4,x_1,x_2]+[x_3,x_1][x_4,x_2]+[x_3,x_1,x_2]x_4+[x_3,x_2][x_4,x_1]+ \\
&\quad -(x_3[x_4,x_2,x_1]+[x_3,x_2][x_4,x_1]+[x_3,x_2,x_1]x_4+[x_3,x_1][x_4,x_2]) = \\
&\equiv x_2[x_4,x_3,x_1]-x_2[x_4,x_1,x_3]+x_1[x_4,x_2,x_3] \mod (L_4\cap P_4).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_8 &:= -v_8+v_5-v_3+v_1 = \\
&= -[x_1x_3,x_2,x_4]+[x_2x_4,x_1,x_3]-[x_3x_4,x_1,x_2]+[x_3x_4,x_2,x_1] = \\
&= -(x_3[x_4,x_2,x_1]-x_3[x_4,x_1,x_2]-[x_3,x_2][x_4,x_1]+[x_2,x_1][x_4,x_3]-x_1[x_4,x_3,x_2]+x_1[x_4,x_2,x_3])+ \\
&\quad +(-[x_3,x_2,x_1]x_4-[x_3,x_2][x_4,x_1]+[x_3,x_1,x_2]x_4+x_2[x_4,x_1,x_3]+[x_2,x_1][x_4,x_3])+ \\
&\quad -(x_3[x_4,x_1,x_2]+[x_3,x_1][x_4,x_2]+[x_3,x_1,x_2]x_4+[x_3,x_2][x_4,x_1])+ \\
&\quad +x_3[x_4,x_2,x_1]+[x_3,x_2][x_4,x_1]+[x_3,x_2,x_1]x_4+[x_3,x_1][x_4,x_2] = \\
&\equiv x_2[x_4,x_1,x_3]+x_1[x_4,x_3,x_2]-x_1[x_4,x_2,x_3] \mod (L_4\cap P_4).
\end{aligned}
$$

Como o conjunto $S+(L_4\cap P_4)$ é linearmente independente e é equivalente ao conjunto $S_1+(L_4\cap P_4)$, o qual gera $\mathscr{B}_3$. Segue que S é uma base de $\mathscr{B}_3$. □

Corolário 4.2.1. *O grupo $\mathscr{B}_3$ é abeliano livre de posto 8, isto é, $\mathscr{B}_3 \cong \underbrace{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{8\ vezes}$.*

Demonstração: Considere $G_i =< u_i+(L_4\cap P_4) >_{1\leq i\leq 8}$ o grupo cíclico (infinito) gerado por $u_i+(L_4\cap P_4)$, $u_i\in S$ (Proposição 4.6). Como cada grupo G_i é isomorfo a $\mathbb{Z}$, obtemos o resultado. □

O corolário anterior mostra que a componente multilinear de $B_{4,3}=L_3(R_4)/L_4(R_4)$ é livre de torção.

Lema 4.7. *Para $\{i_1,i_2,i_3,i_4\}=\{1,2,3,4\}$ cada conjunto $B_i \quad (1\leq i\leq 4)$ é uma base do grupo* *aditivo P_4, sendo*

$$B_1 = \{x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}\};$$
$$B_2 = \left\{[x_4, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}]\right\}\dot{\cup}\left\{x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} \,|\, i_1 \neq 4\right\};$$
$$B_3 = \left\{p_{1i} = [x_4, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}]\right\}\dot{\cup}\left\{p_{2i} = x_{i_1}[x_4, x_{i_3}, x_{i_4}]\right\}\dot{\cup}\left\{p_{3i} = [x_{i_1}, x_{i_2}][x_4, x_{i_4}] \,|\, i_1 > i_2\right\}\dot{\cup}$$
$$\dot{\cup}\left\{p_{4i} = [x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}]x_4 \,|\, i_1 > i_2, i_3\right\}\dot{\cup}\left\{m = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} \,|\, m \neq ml(p_{ji}),\ j = 1,2,3,4\right\};$$
$$B_4 = \left\{[x_4, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}]\right\}\dot{\cup}\left\{u_i \,|\, u_i \in S \text{ (Proposição 4.6)}\right\}\dot{\cup}$$
$$\dot{\cup}\left\{m = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} \,|\, i_1 \neq 4 \text{ e } m \neq ml(u_i),\ u_i \in S\right\};$$

Demonstração: Pela observação (4.2) temos que B_1 é uma base de P_4. Assim basta mostrarmos a equivalência entre os grupos gerados por cada $\langle B_i \rangle_{1 \leq i \leq 4}$.

Afirmação 4.2.1. $\langle B_1 \rangle \subset \langle B_2 \rangle$.

Consideremos $B_2 = B_{21}\dot{\cup}B_{22}$, com $B_{21} = \left\{[x_4, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}]\right\}$ e $B_{22} = \left\{x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} \,|\, i_1 \neq 4\right\}$. Dado um monômio qualquer $m = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} \in B_1$, se $i_1 \neq 4$ então $m \in B_{22} \subset B_2$. Caso contrário temos $i_1 = 4$, ou seja, $m = x_4x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}$. Então

$$\begin{aligned}
m &= x_4x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} - x_{i_4}x_4x_{i_2}x_{i_3} + x_{i_4}x_4x_{i_2}x_{i_3} = \\
&= [x_4x_{i_2}x_{i_3}, x_{i_4}] + x_{i_4}x_4x_{i_2}x_{i_3} = \\
&= [x_4x_{i_2}x_{i_3}, x_{i_4}] - [x_{i_3}x_4x_{i_2}, x_{i_4}] + [x_{i_3}x_4x_{i_2}, x_{i_4}] + x_{i_4}x_4x_{i_2}x_{i_3} = \\
&= [x_4x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}] + [x_{i_3}x_4x_{i_2}, x_{i_4}] + x_{i_4}x_4x_{i_2}x_{i_3} = \\
&= [x_4x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}] - [x_{i_2}x_4, x_{i_3}, x_{i_4}] + [x_{i_2}x_4, x_{i_3}, x_{i_4}] + [x_{i_3}x_4x_{i_2}, x_{i_4}] + x_{i_4}x_4x_{i_2}x_{i_3} = \\
&= [x_4, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}] + [x_{i_2}x_4, x_{i_3}, x_{i_4}] + [x_{i_3}x_4x_{i_2}, x_{i_4}] + x_{i_4}x_4x_{i_2}x_{i_3}.
\end{aligned}$$

Temos que $[x_4, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}] \in B_{21} \subset B_2$ e que $x_{i_4}x_4x_{i_2}x_{i_3} \in B_{22} \subset B_2$. É fácil ver que os polinômios $[x_{i_2}x_4, x_{i_3}, x_{i_4}]$, $[x_{i_3}x_4x_{i_2}, x_{i_4}]$ são escritos como combinação linear de monômios $m_i \in B_{22}$, ou seja, $[x_{i_2}x_4, x_{i_3}, x_{i_4}]$, $[x_{i_3}x_4x_{i_2}, x_{i_4}] \in \langle B_{22} \rangle$. Logo temos que $m \in \langle B_2 \rangle$.

Afirmação 4.2.2. $\langle B_2 \rangle \subset \langle B_3 \rangle$

Consideremos $B_3 = B_{31}\dot{\cup}B_{32}\dot{\cup}B_{33}\dot{\cup}B_{34}\dot{\cup}B_{35}$, com

$$\begin{gathered} B_{31} = \left\{[x_4, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}]\right\}, \qquad B_{32} = \left\{x_{i_1}[x_4, x_{i_3}, x_{i_4}]\right\}, \\ B_{33} = \left\{[x_{i_1}, x_{i_2}][x_4, x_{i_4}] \,|\, i_1 > i_2\right\}, \qquad B_{34} = \left\{[x_3, x_{i_2}, x_{i_3}]x_4\right\}, \\ B_{35} = \left\{m = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} \,|\, m \in B_1 \text{ e } m \neq ml(p), \quad p \in B_{31}\dot{\cup}B_{32}\dot{\cup}B_{33}\right\}. \end{gathered}$$

Dado um elemento qualquer $m \in B_2$, se $m \in B_{21}$ então $m \in B_{21} = B_{31} \subset B_3$. Agora se $m \in B_{22}$ então ocorre um dos 4 casos:

(1) Se $m = x_3x_{i_2}x_{i_3}x_4$ então

$$\begin{aligned} m &= x_3x_{i_2}x_{i_3}x_4 - [x_3, x_{i_2}, x_{i_3}]x_4 + [x_3, x_{i_2}, x_{i_3}]x_4 = \\ &= x_{i_2}x_3x_{i_3}x_4 + x_{i_3}x_3x_{i_2}x_4 - x_{i_3}x_{i_2}x_3x_4 + [x_3, x_{i_2}, x_{i_3}]x_4. \end{aligned}$$

Como temos $x_{i_2}x_3x_{i_3}x_4$, $x_{i_3}x_3x_{i_2}x_4$, $x_{i_3}x_{i_2}x_3x_4 \in B_{35}$ e $[x_3, x_{i_2}, x_{i_3}]x_4 \in \langle B_{34}\rangle$, segue que $m \in \langle B_3\rangle$.

(2) Se $m = x_{i_1}x_{i_2}x_4x_{i_4}$ com $i_1 > i_2$ então

$$\begin{aligned} m &= x_{i_1}x_{i_2}x_4x_{i_4} - [x_{i_1}, x_{i_2}][x_4, x_{i_4}] + [x_{i_1}, x_{i_2}][x_4, x_{i_4}] = \\ &= x_{i_1}x_{i_2}x_{i_4}x_4 + x_{i_2}x_{i_1}x_4x_{i_4} - x_{i_2}x_{i_1}x_{i_4}x_4 + [x_{i_1}, x_{i_2}][x_4, x_{i_4}]. \end{aligned}$$

Como temos $[x_{i_1}, x_{i_2}][x_4, x_{i_4}] \in \langle B_{33}\rangle$, pelo caso (1) temos que $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_4}x_4 \in \langle B_{33}\rangle$. Temos ainda que $x_{i_2}x_{i_1}x_{i_4}x_4$, $x_{i_2}x_{i_1}x_4x_{i_4} \in B_{35}$. Assim segue que $m \in \langle B_3\rangle$.

(3) Se $m = x_{i_1}x_4x_{i_3}x_{i_4}$ então

$$\begin{aligned} m &= x_{i_1}x_4x_{i_3}x_{i_4} - x_{i_1}[x_4, x_{i_3}, x_{i_4}] + x_{i_1}[x_4, x_{i_3}, x_{i_4}] = \\ &= x_{i_1}x_{i_3}x_4x_{i_4} + x_{i_1}x_{i_4}x_4x_{i_3} - x_{i_1}x_{i_4}x_{i_3}x_4 + x_{i_1}[x_4, x_{i_3}, x_{i_4}]. \end{aligned}$$

Como temos $x_{i_1}[x_4, x_{i_3}, x_{i_4}] \in \langle B_{32}\rangle$, pelo caso (1) temos que $x_{i_1}x_{i_4}x_{i_3}x_4 \in \langle B_3\rangle$. Pelo caso (2) temos que $x_{i_1}x_{i_3}x_4x_{i_4}$, $x_{i_1}x_{i_4}x_4x_{i_3} \in \langle B_3\rangle$. Assim segue que $m \in \langle B_3\rangle$.

(4) Se $m = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}$ é distinto dos casos (1), (2) e (3) então $m \in B_{35}$.

De qualquer modo, para qualquer $m \in B_2$, $m \in \langle B_3\rangle$.

Afirmação 4.2.3. $\langle B_3\rangle \subset \langle B_4\rangle$

Consideremos $B_4 = B_{41}\dot{\cup}B_{42}\dot{\cup}B_{43}$, sendo:

$$B_{41} = \left\{[x_4, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}]\right\}, \qquad B_{42} = \left\{u_i \,|\, u_i \in S \text{ (Proposição 4.6)}\right\},$$
$$B_{43} = \left\{m = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} \,|\, m \neq ml(p), p \in B_{41} \cup B_{42}\right\}.$$

Tome um elemento qualquer $m \in B_3$. Se $m \in B_{31}$ então $m \in B_{31} = B_{41} \subset B_4$. Admita que $m \in B_{32} \cup B_{33} \cup B_{34}$. Se m for monômio líder de algum u_i, por exemplo, $m = ml(u_1)$ então escreva o polinômio $p_1 = m - u_1$ e obtemos $p_1 = 0$ ou $ml(p_1) \neq ml(u_i)$ ou $ml(p_1) = ml(u_i)$, para algum i, $2 \leq i \leq 8$. Caso $p_1 = 0$ ou $ml(p_1) \neq ml(u_i)$ terminamos. Caso $ml(p_1) = ml(u_i)$ para algum i, com $2 \leq i \leq 8$, digamos $i = 2$, escrevemos $p_2 = p_1 - u_2 = m - u_1 - u_2$. Novamente se $p_2 = 0$ ou $ml(p_2) \neq ml(u_i)$ para algum i, com $3 \leq i \leq 8$ e terminamos. Caso contrário, repetimos o processo. Em no máximo 9 passos encontramos um polinômio $p_9 = 0$ ou $ml(p_9) \neq ml(u_i)$ com $1 \leq i \leq 8$. Se $p_9 = 0$ então m é escrito como combinação linear de elementos de $B_{42} \subset B_4$. Se $ml(p_9) \neq ml(u_i)$ com $1 \leq i \leq 8$ então $p_9 \in \langle B_{43}\rangle$ e m é escrito como combinação linear de elementos de $(B_{42} \cup B_{43}) \subset B_4$, ou seja, $m \in \langle B_{42} \cup B_{43}\rangle$. Assim $m \in \langle B_4\rangle$. Admita que $m \in B_{35} \subset B_{43}$. Portanto para qualquer $m \in B_3$ obtemos $m \in \langle B_4\rangle$.

Afirmação 4.2.4. $\langle B_4\rangle \subset \langle B_1\rangle$

Considere um polinômio $p \in B_4$. Então $p = m_1 + \cdots + m_k$, $k \geq 1$, sendo cada m_i um monômio. Observemos que cada $m_i \in B_1$. Assim $p \in \langle B_1\rangle$.

Assim temos a equivalência entre dois quaisquer conjuntos B_i, com $1 \leq i \leq 4$, e portanto concluímos que cada conjunto B_i, com $1 \leq i \leq 4$, é uma base de P_4. □

Observação 4.8. Segue da observação (4.2) que B_1 possui $4! = 24$ elementos. Pelo Lema 4.7 temos que B_1 é equivalente a $B_4 = B_{41}\dot{\cup}B_{42}\dot{\cup}B_{43}$. Como temos $3! = 6$ elementos em $B_{41} = \{[x_4, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}]\}$ e 8 elementos em $B_{42} = \{u_i \,|\, u_i \in S \text{ (Proposição 4.6)}, 1 \leq i \leq 8\} = S$, assim concluímos que existem 10 elementos em

$$B_{43} = \left\{m = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} \,|\, m \neq ml(p), p \in B_{41} \cup B_{42}\right\}.$$

Proposição 4.9. *Considere o conjunto* $\overline{B_4} = B_{42}\dot{\cup}B_{43}$. *Então*

$$\overline{B_4} + (L_4 \cap P_4) = \{b + (L_4 \cap P_4) \,|\, b \in \overline{B_4}\}$$

é uma base de $P_4/(L_4 \cap P_4)$.

Demonstração: Pelo Lema 4.7 temos que $B_4 = B_{41}\dot{\cup}B_{42}\dot{\cup}B_{43} = B_{41}\dot{\cup}\overline{B_4}$ é uma base do grupo abeliano livre P_4. Pelo Lema 4.3, o conjunto de monômios B_{41} é uma base do grupo abeliano $(L_4 \cap P_4)$. Assim, $\overline{B_4} + (L_4 \cap P_4)$ é uma base do grupo abeliano livre $P_4/(L_4 \cap P_4)$. $\square$

Demonstração do Teorema 4 .
Pela Proposição 4.9 temos que $\overline{B_4} + (L_4 \cap P_4)$ é uma base de $P_4/(L_4 \cap P_4)$. Como

$$\overline{B_4} + (L_4 \cap P_4) = (B_{42}\dot{\cup}B_{43}) + (L_4 \cap P_4) = \{b + (L_4 \cap P_4) \,|\, b \in B_{42} \text{ ou } b \in B_{43}\} =$$
$$= (B_{42} + L_4 \cap P_4)\dot{\cup}(B_{43} + L_4 \cap P_4).$$

Temos ainda que $B_{42} = \{u_i \,|\, u_i \in S, 1 \leq i \leq 8\} = S$ (Proposição 4.6). Assim segue que

$$\overline{B_4} + (L_4 \cap P_4) = (S + L_4 \cap P_4)\dot{\cup}(B_{43} + L_4 \cap P_4).$$

Pela Proposição 4.6 temos que $S + (L_4 \cap P_4)$ é uma base de $\mathscr{B}_3 = (L_3 \cap P_4)/(L_4 \cap P_4)$. Como $S \subset (L_3 \cap P_4)$ e $(L_4 \cap P_4) \subset (L_3 \cap P_4)$ obtemos que

$$B_{43} + (L_3 \cap P_4)$$

é uma base do grupo quociente aditivo $P_4/(L_3 \cap P_4) = \dfrac{P_4/(L_4 \cap P_4)}{(L_3 \cap P_4)/(L_4 \cap P_4)}$.

Considere o grupo cíclico infinito $H_i =< m_i + (L_3 \cap P_4) >$ com $m_i = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} \in B_{43}$. Pela observação (4.8) temos que existem 10 elementos em B_{43}. Como cada grupo cíclico infinito é isomorfo a $\mathbb{Z}$ obtemos que $P_4/(L_3 \cap P_4)$ é grupo abeliano livre de posto 10.

Terminamos a prova do Teorema 4.

4.3 Demonstração do Teorema 6

Indicaremos por $\mathscr{B}_{(4)}$ o quociente $(L_4 \cap P_5)/(L_5 \cap P_5)$.

Lema 4.10. *Considere o conjunto* $S_1 = \{v_i \,|\, 1 \leq i \leq 40\}$. *O conjunto*

$S_1+(L_5\cap P_5)=\{v_i+(L_5\cap P_5)\,|\,v_i\in S_1\}$ *gera* $\mathscr{B}_4$*, sendo:*

$$\begin{gathered}
v_1=[x_4x_5,x_3,x_2,x_1],\quad v_2=[x_4x_5,x_3,x_1,x_2],\quad v_3=[x_3x_5,x_4,x_2,x_1],\quad v_4=[x_3x_5,x_4,x_1,x_2],\\
v_5=[x_4x_5,x_2,x_3,x_1],\quad v_6=[x_4x_5,x_2,x_1,x_3],\quad v_7=[x_2x_5,x_4,x_3,x_1],\quad v_8=[x_2x_5,x_4,x_1,x_3],\\
v_9=[x_4x_5,x_1,x_3,x_2],\quad v_{10}=[x_4x_5,x_1,x_2,x_3],\quad v_{11}=[x_1x_5,x_4,x_3,x_2],\quad v_{12}=[x_1x_5,x_4,x_2,x_3],\\
v_{13}=[x_3x_5,x_2,x_4,x_1],\quad v_{14}=[x_3x_5,x_2,x_1,x_4],\quad v_{15}=[x_2x_5,x_4,x_3,x_1],\quad v_{16}=[x_2x_5,x_4,x_1,x_3],\\
v_{17}=[x_3x_5,x_1,x_4,x_2],\quad v_{18}=[x_3x_5,x_1,x_2,x_4],\quad v_{19}=[x_1x_5,x_3,x_4,x_2],\quad v_{20}=[x_1x_5,x_3,x_2,x_4],\\
v_{21}=[x_2x_5,x_1,x_4,x_3],\quad v_{22}=[x_2x_5,x_1,x_3,x_4],\quad v_{23}=[x_1x_5,x_2,x_4,x_3],\quad v_{24}=[x_1x_5,x_2,x_3,x_4],\\
v_{25}=[x_3x_4,x_2,x_5,x_1],\quad v_{26}=[x_3x_4,x_2,x_1,x_5],\quad v_{27}=[x_2x_4,x_3,x_5,x_1],\quad v_{28}=[x_2x_4,x_3,x_1,x_5],\\
v_{29}=[x_3x_4,x_1,x_5,x_2],\quad v_{30}=[x_3x_4,x_1,x_2,x_5],\quad v_{31}=[x_1x_4,x_3,x_5,x_2],\quad v_{32}=[x_1x_4,x_3,x_2,x_5],\\
v_{33}=[x_2x_4,x_1,x_5,x_3],\quad v_{34}=[x_2x_4,x_1,x_3,x_5],\quad v_{35}=[x_1x_4,x_2,x_5,x_3],\quad v_{36}=[x_1x_4,x_2,x_3,x_5],\\
v_{37}=[x_2x_3,x_1,x_5,x_4],\quad v_{38}=[x_2x_3,x_1,x_4,x_5],\quad v_{39}=[x_1x_3,x_2,x_5,x_4],\quad v_{40}=[x_1x_3,x_2,x_4,x_5].
\end{gathered}$$

Demonstração: Para $\{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5\}=\{1,2,3,4,5\}$ temos que os elementos de $(L_4\cap P_5)$ são de um dos 4 tipos $[x_{i_1}\cdot x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4},x_{i_5}]$, $[x_{i_1},x_{i_2}\cdot x_{i_3},x_{i_4},x_{i_5}]$, $[x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3}\cdot x_{i_4},x_{i_5}]$ ou $[x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4}\cdot x_{i_5}]$. Segue da antissimetria, identidade de Jacobi e Lema 2.24 que podemos escrever cada elemento do tipo $[x_{i_1},x_{i_2}\cdot x_{i_3},x_{i_4},x_{i_5}]$, $[x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3}\cdot x_{i_4},x_{i_5}]$ ou $[x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4}\cdot x_{i_5}]$ como combinação linear do primeiro tipo.

Temos um total de 5!=120 elementos dos tipo $[x_{i_1}\cdot x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4},x_{i_5}]$, mas pelo Lema 2.23 podemos considerar $i_1<i_2$ e assim temos um total de 60 elementos. Assim basta mostrar que os 20 elementos restantes do tipo $[x_{i_1}\cdot x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4},x_{i_5}]$ são escritos como combinação linear dos 40 elementos $v_i+(L_5\cap P_5)$, com $v_i\in S_1\quad(1\leq i\leq 40)$.

Recordemos que $[x_ax_b,x_c]+[x_bx_c,x_a]+[x_cx_a,x_b]=0$ e assim

$$\begin{aligned}
&[x_4x_5,x_3,x_i,x_j]+[x_3x_5,x_4,x_i,x_j]+[x_3x_4,x_5,x_i,x_j]=\\
&=\big[[x_4x_5,x_3]+[x_3x_5,x_4]+[x_3x_4,x_5],x_i,x_j\big]=0.
\end{aligned}$$

Portanto, $[x_3x_4,x_5,x_i,x_j]=-[x_4x_5,x_3,x_i,x_j]-[x_3x_5,x_4,x_i,x_j]$, com $\{x_i,x_j\}=\{x_1,x_2\}$.

Da mesma forma

$$[x_2x_4,x_5,x_i,x_j]=-[x_4x_5,x_2,x_i,x_j]-[x_2x_5,x_4,x_i,x_j],\ \text{com}\ \{x_i,x_j\}=\{x_1,x_3\},$$

$$[x_1x_4,x_5,x_i,x_j]=-[x_4x_5,x_1,x_i,x_j]-[x_1x_5,x_4,x_i,x_j],\ \text{com}\ \{x_i,x_j\}=\{x_2,x_3\},$$

$$[x_2x_3, x_5, x_i, x_j] = -[x_3x_5, x_2, x_i, x_j] - [x_2x_5, x_3, x_i, x_j], \text{ com } \{x_i, x_j\} = \{x_1, x_4\},$$

$$[x_1x_3, x_5, x_i, x_j] = -[x_3x_5, x_1, x_i, x_j] - [x_1x_5, x_3, x_i, x_j], \text{ com } \{x_i, x_j\} = \{x_2, x_4\},$$

$$[x_1x_2, x_5, x_i, x_j] = -[x_2x_5, x_1, x_i, x_j] - [x_1x_5, x_2, x_i, x_j], \text{ com } \{x_i, x_j\} = \{x_3, x_4\},$$

$$[x_2x_3, x_4, x_i, x_j] = -[x_3x_4, x_2, x_i, x_j] - [x_2x_4, x_3, x_i, x_j], \text{ com } \{x_i, x_j\} = \{x_1, x_5\},$$

$$[x_1x_3, x_4, x_i, x_j] = -[x_3x_4, x_1, x_i, x_j] - [x_1x_4, x_3, x_i, x_j], \text{ com } \{x_i, x_j\} = \{x_2, x_5\},$$

$$[x_1x_2, x_4, x_i, x_j] = -[x_2x_4, x_1, x_i, x_j] - [x_1x_4, x_2, x_i, x_j], \text{ com } \{x_i, x_j\} = \{x_3, x_5\},$$

$$[x_1x_2, x_3, x_i, x_j] = -[x_2x_3, x_1, x_i, x_j] - [x_1x_3, x_2, x_i, x_j], \text{ com } \{x_i, x_j\} = \{x_4, x_5\}.$$

Portanto o conjunto $S_1 + (L_5 \cap P_5)$ gera $\mathscr{B}_4$. □

Proposição 4.11. *Considere $S = \{u_i \mid 1 \leq i \leq 40\}$. O conjunto*

$$S + (L_5 \cap P_5) = \{u_i + (L_5 \cap P_5) \mid 1 \leq i \leq 40\}$$

é uma base de $\mathscr{B}_4$, sendo:

$u_1 = x_4[x_5, x_3, x_2, x_1] + [x_4, x_3][x_5, x_2, x_1] + \cdots;$ $u_2 = x_4[x_5, x_3, x_1, x_2] + [x_4, x_3][x_5, x_1, x_2] + \cdots;$

$u_3 = x_4[x_5, x_2, x_3, x_1] + [x_4, x_3][x_5, x_2, x_1] + \cdots;$ $u_4 = x_4[x_5, x_2, x_1, x_3] + [x_4, x_3][x_5, x_2, x_1] + \cdots;$

$u_5 = x_4[x_5, x_1, x_3, x_2] + [x_4, x_3][x_5, x_1, x_2] + \cdots;$ $u_6 = x_4[x_5, x_1, x_2, x_3] + [x_4, x_3][x_5, x_1, x_2] + \cdots;$

$u_7 = [x_4, x_3][x_5, x_2, x_1] + [x_4, x_3, x_2][x_5, x_1] + \cdots;$ $u_8 = [x_4, x_3][x_5, x_1, x_2] + [x_4, x_3, x_2][x_5, x_1] + \cdots;$

$u_9 = [x_4, x_3, x_2][x_5, x_1] + [x_4, x_3, x_2, x_1]x_5 + \cdots;$ $u_{10} = [x_4, x_3, x_2, x_1]x_5 - [x_4, x_3, x_1][x_5, x_2] + \cdots;$

$u_{11} = [x_4, x_3, x_1][x_5, x_2] + [x_4, x_3, x_1, x_2]x_5 + \cdots;$ $u_{12} = [x_4, x_3, x_1, x_2]x_5 - [x_4, x_2][x_5, x_3, x_1] + \cdots;$

$u_{13} = [x_4, x_2][x_5, x_3, x_1] + [x_4, x_2, x_3][x_5, x_1] + \cdots;$ $u_{14} = [x_4, x_2][x_5, x_1, x_3] + [x_4, x_2, x_3][x_5, x_1] + \cdots;$

$u_{15} = [x_4, x_2, x_3][x_5, x_1] + [x_4, x_2, x_3, x_1]x_5 + \cdots;$ $u_{16} = [x_4, x_2, x_3, x_1]x_5 - [x_4, x_2, x_1][x_5, x_3] + \cdots;$

$u_{17} = [x_4, x_2, x_1][x_5, x_3] + [x_4, x_2, x_1, x_3]x_5 + \cdots;$ $u_{18} = [x_4, x_2, x_1, x_3]x_5 - [x_4, x_1, x_3][x_5, x_2] + \cdots;$

$u_{19} = [x_4, x_1][x_5, x_3, x_2] + [x_4, x_1, x_3][x_5, x_2] + \cdots;$ $u_{20} = [x_4, x_1][x_5, x_2, x_3] + [x_4, x_1, x_3][x_5, x_2] + \cdots;$

$u_{21} = [x_4, x_1, x_3][x_5, x_2] + [x_4, x_1, x_3, x_2]x_5 + \cdots;$ $u_{22} = [x_4, x_1, x_3, x_2]x_5 - [x_4, x_1, x_2][x_5, x_3] + \cdots;$

$u_{23} = [x_4, x_1, x_2][x_5, x_3] + [x_4, x_1, x_2, x_3]x_5 + \cdots;$ $u_{24} = [x_4, x_1, x_2, x_3]x_5 - x_3[x_5, x_4, x_1, x_2] + \cdots;$

$u_{25}=x_3[x_5,x_4,x_2,x_1]-x_3[x_5,x_2,x_4,x_1]+\cdots$; $u_{26}=x_3[x_5,x_4,x_1,x_2]-x_3[x_5,x_2,x_4,x_1]+\cdots$;

$u_{27}=x_3[x_5,x_2,x_4,x_1]+[x_3,x_1][x_5,x_2,x_4]+\cdots$; $u_{28}=x_3[x_5,x_2,x_1,x_4]-x_3[x_5,x_1,x_4,x_2]+\cdots$;

$u_{29}=x_3[x_5,x_1,x_4,x_2]-x_3[x_5,x_1,x_2,x_4]+\cdots$; $u_{30}=x_3[x_5,x_1,x_2,x_4]+[x_3,x_2][x_5,x_4,x_1]+\cdots$;

$u_{31}=[x_3,x_2][x_5,x_4,x_1]-[x_3,x_2][x_5,x_1,x_4]+\cdots$; $u_{32}=[x_3,x_2][x_5,x_1,x_4]+[x_3,x_2,x_1][x_5,x_4]+\cdots$;

$u_{33}=[x_3,x_2,x_1][x_5,x_4]-2[x_3,x_1][x_5,x_4,x_2]+\cdots$; $u_{34}=[x_3,x_1][x_5,x_4,x_2]-2[x_3,x_1][x_5,x_2,x_4]+\cdots$;

$u_{35}=[x_3,x_1][x_5,x_2,x_4]-x_2[x_5,x_4,x_1,x_3]+\cdots$; $u_{36}=x_2[x_5,x_4,x_3,x_1]-x_2[x_5,x_3,x_4,x_1]+\cdots$;

$u_{37}=x_2[x_5,x_4,x_1,x_3]-x_2[x_5,x_3,x_4,x_1]+\cdots$; $u_{38}=x_2[x_5,x_3,x_4,x_1]+[x_2,x_1][x_5,x_4,x_3]+\cdots$;

$u_{39}=[x_2,x_1][x_5,x_4,x_3]+[x_2,x_1][x_5,x_3,x_4]+\cdots$; $u_{40}=\boldsymbol{3}\big([x_2,x_1][x_5,x_3,x_4]-x_1[x_5,x_3,x_4,x_2]\big)$.

Demonstração: Observamos que o conjunto $S=\{u_i\,|\,1\le i\le 40\}$ é linearmente independente, pois cada u_i possui polinômio líder distinto. Assim para mostrarmos que $S+(L_5\cap P_5)$ é uma base $\mathscr{B}_4$, basta mostarmos que $S+(L_5\cap P_5)$ gera $\mathscr{B}_4$. Nossa estratégia será a seguinte: mostraremos que o conjunto $S_1+(L_5\cap P_5)$ (Lema 4.10) é equivalente, via redução do polinômio líder, ao conjunto $S+(L_5\cap P_5)$.

Tomemos

$$\begin{aligned}
u_1 := v_1 = [x_4x_5,x_3,x_2,x_1] &= \big[x_4[x_5,x_3]+[x_4,x_3]x_5,x_2,x_1\big] = \\
&= \big[x_4[x_5,x_3,x_2]+[x_4,x_2][x_5,x_3]+[x_4,x_3][x_5,x_2]+[x_4,x_3,x_2]x_5,x_1\big] = \\
&= x_4[x_5,x_3,x_2,x_1]+[x_4,x_1][x_5,x_3,x_2]+[x_4,x_2][x_5,x_3,x_1]+[x_4,x_2,x_1][x_5,x_3]+ \\
&+[x_4,x_3][x_5,x_2,x_1]+[x_4,x_3,x_1][x_5,x_2]+[x_4,x_3,x_2][x_5,x_1]+[x_4,x_3,x_2,x_1]x_5 = \\
&\equiv x_4[x_5,x_3,x_2,x_1]+[x_4,x_3][x_5,x_2,x_1]+[x_4,x_3,x_2][x_5,x_1]+[x_4,x_3,x_2,x_1]x_5+ \\
&+[x_4,x_3,x_1][x_5,x_2]+[x_4,x_2][x_5,x_3,x_1]+[x_4,x_2,x_1][x_5,x_3]+[x_4,x_1][x_5,x_3,x_2] \mod (L_5\cap P_5).
\end{aligned}$$

De modo similar procedemos nos casos indicados abaixo,

$$\begin{aligned}
u_2 := v_2 = [x_4x_5,x_3,x_1,x_2] &\equiv \\
&\equiv x_4[x_5,x_3,x_1,x_2]+[x_4,x_3][x_5,x_1,x_2]+[x_4,x_3,x_2][x_5,x_1]+[x_4,x_3,x_1][x_5,x_2]+ \\
&+[x_4,x_3,x_1,x_2]x_5+[x_4,x_2][x_5,x_3,x_1]+[x_4,x_1][x_5,x_3,x_2]+[x_4,x_1,x_2][x_5,x_3] \mod (L_5\cap P_5);
\end{aligned}$$

$$u_3 := v_5 = [x_4x_5, x_2, x_3, x_1] \equiv$$
$$\equiv x_4[x_5,x_2,x_3,x_1] + [x_4,x_3][x_5,x_2,x_1] + [x_4,x_3,x_1][x_5,x_2] + [x_4,x_2][x_5,x_3,x_1] +$$
$$+[x_4,x_2,x_3][x_5,x_1] + [x_4,x_2,x_3,x_1]x_5 + [x_4,x_2,x_1][x_5,x_3] + [x_4,x_1][x_5,x_2,x_3] \mod (L_5 \cap P_5);$$

$$u_4 := v_6 = [x_4x_5, x_2, x_1, x_3] \equiv$$
$$\equiv x_4[x_5,x_2,x_1,x_3] + [x_4,x_3][x_5,x_2,x_1] + [x_4,x_2][x_5,x_1,x_3] + [x_4,x_2,x_3][x_5,x_1] +$$
$$+[x_4,x_2,x_1][x_5,x_3] + [x_4,x_2,x_1,x_3]x_5 + [x_4,x_1][x_5,x_2,x_3] + [x_4,x_1,x_3][x_5,x_2] \mod (L_5 \cap P_5);$$

$$u_5 := v_9 = [x_4x_5, x_1, x_3, x_2] \equiv$$
$$\equiv x_4[x_5,x_1,x_3,x_2] + [x_4,x_3][x_5,x_1,x_2] + [x_4,x_3,x_2][x_5,x_1] + [x_4,x_2][x_5,x_1,x_3] +$$
$$+[x_4,x_1][x_5,x_3,x_2] + [x_4,x_1,x_3][x_5,x_2] + [x_4,x_1,x_3,x_2]x_5 + [x_4,x_1,x_2][x_5,x_3] \mod (L_5 \cap P_5);$$

$$u_6 := v_{10} = [x_4x_5, x_1, x_2, x_3] \equiv$$
$$\equiv x_4[x_5,x_1,x_2,x_3] + [x_4,x_3][x_5,x_1,x_2] + [x_4,x_2][x_5,x_1,x_3] + [x_4,x_2,x_3][x_5,x_1] +$$
$$+[x_4,x_1][x_5,x_2,x_3] + [x_4,x_1,x_3][x_5,x_2] + [x_4,x_1,x_2][x_5,x_3] + [x_4,x_1,x_2,x_3]x_5 \mod (L_5 \cap P_5);$$

$$u_7 := -v_3 = -[x_3x_5, x_4, x_2, x_1] \equiv$$
$$\equiv [x_4,x_3][x_5,x_2,x_1] + [x_4,x_3,x_2][x_5,x_1] + [x_4,x_3,x_2,x_1]x_5 + [x_4,x_3,x_1][x_5,x_2] +$$
$$-x_3[x_5,x_4,x_2,x_1] - [x_3,x_2][x_5,x_4,x_1] - [x_3,x_2,x_1][x_5,x_4] - [x_3,x_1][x_5,x_4,x_2] \mod (L_5 \cap P_5);$$

$$u_8 := -v_4 = -[x_3x_5, x_4, x_1, x_2] \equiv$$
$$\equiv [x_4,x_3][x_5,x_1,x_2] + [x_4,x_3,x_2][x_5,x_1] + [x_4,x_3,x_1][x_5,x_2] + [x_4,x_3,x_1,x_2]x_5 +$$
$$-x_3[x_5,x_4,x_1,x_2] - [x_3,x_2][x_5,x_4,x_1] - [x_3,x_1][x_5,x_4,x_2] - [x_3,x_1,x_2][x_5,x_4] \mod (L_5 \cap P_5);$$

$$u_9 := v_{15} = [x_2x_5, x_4, x_3, x_1] \equiv$$
$$\equiv [x_4,x_3,x_2][x_5,x_1] + [x_4,x_3,x_2,x_1]x_5 - [x_4,x_2][x_5,x_3,x_1] - [x_4,x_2,x_3][x_5,x_1] +$$
$$-[x_4,x_2,x_3,x_1]x_5 - [x_4,x_2,x_1][x_5,x_3] - [x_3,x_2][x_5,x_4,x_1] - [x_3,x_2,x_1][x_5,x_4] +$$
$$+x_2[x_5,x_3,x_4,x_1] + [x_2,x_1][x_5,x_3,x_4] \mod (L_5 \cap P_5);$$

$$u_{10} := -v_{24} = -[x_1x_5, x_2, x_3, x_4] \equiv$$
$$\equiv [x_4, x_3, x_2, x_1]x_5 - [x_4, x_3, x_1][x_5, x_2] - [x_4, x_3, x_1, x_2]x_5 - [x_4, x_2, x_1][x_5, x_3] - [x_4, x_2, x_1, x_3]x_5 +$$
$$+[x_4, x_1][x_5, x_2, x_3] + [x_4, x_1, x_3][x_5, x_2] + [x_4, x_1, x_2][x_5, x_3] + [x_4, x_1, x_2, x_3]x_5 - [x_3, x_2, x_1][x_5, x_4] +$$
$$+[x_3, x_1][x_5, x_2, x_4] + [x_3, x_1, x_2][x_5, x_4] + [x_2, x_1][x_5, x_3, x_4] - x_1[x_5, x_2, x_3, x_4] \mod (L_5 \cap P_5);$$

$$u_{11} := v_{19} = [x_1x_5, x_3, x_4, x_2] \equiv$$
$$\equiv [x_4, x_3, x_1][x_5, x_2] + [x_4, x_3, x_1, x_2]x_5 - [x_4, x_1][x_5, x_3, x_2] - [x_4, x_1, x_3][x_5, x_2] +$$
$$-[x_4, x_1, x_3, x_2]x_5 - [x_4, x_1, x_2][x_5, x_3] - [x_3, x_1][x_5, x_4, x_2] - [x_3, x_1, x_2][x_5, x_4] +$$
$$-[x_2, x_1][x_5, x_3, x_4] + x_1[x_5, x_3, x_4, x_2] \mod (L_5 \cap P_5);$$

$$u_{12} := v_{15} - v_{22} = [x_2x_5, x_4, x_3, x_1] - [x_2x_5, x_1, x_3, x_4] \equiv$$
$$\equiv [x_4, x_3, x_1, x_2]x_5 - [x_4, x_2][x_5, x_3, x_1] + [x_4, x_2][x_5, x_1, x_3] - [x_4, x_2, x_3, x_1]x_5 +$$
$$+[x_4, x_2, x_1, x_3]x_5 - [x_4, x_1, x_2][x_5, x_3] - [x_4, x_1, x_2, x_3]x_5 - [x_3, x_2][x_5, x_4, x_1] +$$
$$+[x_3, x_2][x_5, x_1, x_4] - [x_3, x_1, x_2][x_5, x_4] + x_2[x_5, x_3, x_4, x_1] - x_2[x_5, x_1, x_3, x_4] \mod (L_5 \cap P_5);$$

$$u_{13} := -v_7 = -[x_2x_5, x_4, x_3, x_1] \equiv$$
$$\equiv [x_4, x_2][x_5, x_3, x_1] + [x_4, x_2, x_3][x_5, x_1] + [x_4, x_2, x_3, x_1]x_5 + [x_4, x_2, x_1][x_5, x_3] +$$
$$+[x_3, x_2][x_5, x_4, x_1] + [x_3, x_2, x_1][x_5, x_4] - x_2[x_5, x_4, x_3, x_1] - [x_2, x_1][x_5, x_4, x_3] \mod (L_5 \cap P_5);$$

$$u_{14} := -v_8 = -[x_2x_5, x_4, x_1, x_3] \equiv$$
$$\equiv [x_4, x_2][x_5, x_1, x_3] + [x_4, x_2, x_3][x_5, x_1] + [x_4, x_2, x_1][x_5, x_3] + [x_4, x_2, x_1, x_3]x_5 + [x_3, x_2][x_5, x_4, x_1] +$$
$$+[x_3, x_2, x_1][x_5, x_4] - [x_3, x_1, x_2][x_5, x_4] - x_2[x_5, x_4, x_1, x_3] - [x_2, x_1][x_5, x_4, x_3] \mod (L_5 \cap P_5);$$

$$u_{15} := -v_3 + v_{13} = -[x_3x_5, x_4, x_2, x_1] + [x_3x_5, x_2, x_4, x_1] \equiv$$
$$\equiv [x_4, x_2, x_3][x_5, x_1] + [x_4, x_2, x_3, x_1]x_5 - x_3[x_5, x_4, x_2, x_1] + x_3[x_5, x_2, x_4, x_1] +$$
$$-[x_3, x_1][x_5, x_4, x_2] + [x_3, x_1][x_5, x_2, x_4] \mod (L_5 \cap P_5);$$

$$u_{16} := v_{19} - v_{20} = [x_1x_5, x_3, x_4, x_2] - [x_1x_5, x_3, x_2, x_4] \equiv$$
$$\equiv [x_4, x_2, x_3, x_1]x_5 - [x_4, x_2, x_1][x_5, x_3] - [x_4, x_2, x_1, x_3]x_5 - [x_3, x_1][x_5, x_4, x_2] +$$
$$+ [x_3, x_1][x_5, x_2, x_4] + x_1[x_5, x_3, x_4, x_2] - x_1[x_5, x_3, x_2, x_4] \mod (L_5 \cap P_5);$$

$$u_{17} := v_{23} = [x_1x_5, x_2, x_4, x_3] \equiv [x_4, x_2, x_1][x_5, x_3] + [x_4, x_2, x_1, x_3]x_5 - [x_4, x_1][x_5, x_2, x_3] +$$
$$- [x_4, x_1, x_3][x_5, x_2] - [x_4, x_1, x_2][x_5, x_3] - [x_4, x_1, x_2, x_3]x_5 + [x_3, x_2, x_1][x_5, x_4] - [x_3, x_1][x_5, x_2, x_4] +$$
$$- [x_3, x_1, x_2][x_5, x_4] - [x_2, x_1][x_5, x_4, x_3] + x_1[x_5, x_2, x_4, x_3] \mod (L_5 \cap P_5);$$

$$u_{18} := -v_3 + v_4 + v_{13} - v_{18} =$$
$$= -[x_3x_5, x_4, x_2, x_1] + [x_3x_5, x_4, x_1, x_2] + [x_3x_5, x_2, x_4, x_1] - [x_3x_5, x_1, x_2, x_4] \equiv$$
$$\equiv [x_4, x_2, x_1, x_3]x_5 - [x_4, x_1, x_3][x_5, x_2] - [x_4, x_1, x_3, x_2]x_5 - x_3[x_5, x_4, x_2, x_1] + x_3[x_5, x_4, x_1, x_2] +$$
$$+ x_3[x_5, x_2, x_4, x_1] - x_3[x_5, x_1, x_2, x_4] + [x_3, x_2][x_5, x_4, x_1] - [x_3, x_2][x_5, x_1, x_4] \mod (L_5 \cap P_5);$$

$$u_{19} := -v_{11} = -[x_1x_5, x_4, x_3, x_2] \equiv$$
$$\equiv [x_4, x_1][x_5, x_3, x_2] + [x_4, x_1, x_3][x_5, x_2] + [x_4, x_1, x_3, x_2]x_5 + [x_4, x_1, x_2][x_5, x_3] +$$
$$+ [x_3, x_1][x_5, x_4, x_2] + [x_3, x_1, x_2][x_5, x_4] + [x_2, x_1][x_5, x_4, x_3] - x_1[x_5, x_4, x_3, x_2] \mod (L_5 \cap P_5);$$

$$u_{20} := -v_{12} = -[x_1x_5, x_4, x_2, x_3] \equiv$$
$$\equiv [x_4, x_1][x_5, x_2, x_3] + [x_4, x_1, x_3][x_5, x_2] + [x_4, x_1, x_2][x_5, x_3] +$$
$$+ [x_4, x_1, x_2, x_3]x_5 - [x_3, x_2, x_1][x_5, x_4] + [x_3, x_1][x_5, x_4, x_2] + [x_3, x_1, x_2][x_5, x_4] +$$
$$+ [x_2, x_1][x_5, x_4, x_3] - x_1[x_5, x_4, x_2, x_3] \mod (L_5 \cap P_5);$$

$$u_{21} := -v_{13} + v_{14} = -[x_3x_5, x_2, x_4, x_1] + [x_3x_5, x_2, x_1, x_4] \equiv$$
$$\equiv [x_4, x_1, x_3][x_5, x_2] + [x_4, x_1, x_3, x_2]x_5 - [x_4, x_1, x_2, x_3]x_5 - x_3[x_5, x_2, x_4, x_1] +$$
$$+ x_3[x_5, x_2, x_1, x_4] - [x_3, x_2][x_5, x_4, x_1] + [x_3, x_2][x_5, x_1, x_4] \mod (L_5 \cap P_5);$$

$$u_{22} := v_{15} - v_{16} = [x_2x_5, x_4, x_3, x_1] - [x_2x_5, x_4, x_1, x_3] \equiv$$
$$\equiv [x_4, x_1, x_3, x_2]x_5 - [x_4, x_1, x_2][x_5, x_3] - [x_4, x_1, x_2, x_3]x_5 - [x_3, x_2][x_5, x_4, x_1] +$$
$$+ [x_3, x_2][x_5, x_1, x_4] + x_2[x_5, x_3, x_4, x_1] - x_2[x_5, x_3, x_1, x_4] \mod (L_5 \cap P_5);$$

$$u_{23} := -v_8 + v_{21} = -[x_2x_5, x_4, x_1, x_3] + [x_2x_5, x_1, x_4, x_3] \equiv$$
$$\equiv [x_4, x_1, x_2][x_5, x_3] + [x_4, x_1, x_2, x_3]x_5 + [x_3, x_2][x_5, x_4, x_1] - [x_3, x_2][x_5, x_1, x_4] +$$
$$-x_2[x_5, x_4, x_1, x_3] + x_2[x_5, x_1, x_4, x_3] \mod (L_5 \cap P_5);$$

$$u_{24} := -v_4 + v_{14} - v_{14} + v_{17} =$$
$$= -[x_3x_5, x_4, x_1, x_2] + [x_3x_5, x_2, x_4, x_1] - [x_3x_5, x_2, x_1, x_4] + [x_3x_5, x_1, x_4, x_2] \equiv$$
$$\equiv [x_4, x_1, x_2, x_3]x_5 - x_3[x_5, x_4, x_1, x_2] + x_3[x_5, x_2, x_4, x_1] +$$
$$-x_3[x_5, x_2, x_1, x_4] + x_3[x_5, x_1, x_4, x_2] \mod (L_5 \cap P_5);$$

$$u_{25} := -v_1 + v_5 + v_{15} - v_{25} =$$
$$= -[x_4x_5, x_3, x_2, x_1] + [x_4x_5, x_2, x_3, x_1] + [x_2x_5, x_4, x_3, x_1] - [x_3x_4, x_2, x_5, x_1] \equiv$$
$$\equiv x_3[x_5, x_4, x_2, x_1] - x_3[x_5, x_2, x_4, x_1] + [x_3, x_1][x_5, x_4, x_2] - [x_3, x_1][x_5, x_2, x_4] +$$
$$+x_2[x_5, x_3, x_4, x_1] + [x_2, x_1][x_5, x_3, x_4] \mod (L_5 \cap P_5);$$

$$u_{26} := -2 \cdot v_1 - v_3 + v_4 + 2 \cdot v_5 + v_9 - v_{10} + v_{15} + v_{20} - v_{23} - v_{25} + v_{28} =$$
$$= -2 \cdot [x_4x_5, x_3, x_2, x_1] - [x_3x_5, x_4, x_2, x_1] + [x_3x_5, x_4, x_1, x_2] + 2 \cdot [x_4x_5, x_2, x_3, x_1] +$$
$$+[x_4x_5, x_1, x_3, x_2] - [x_4x_5, x_1, x_2, x_3] + [x_2x_5, x_4, x_3, x_1] + [x_1x_5, x_3, x_2, x_4] +$$
$$-[x_1x_5, x_2, x_4, x_3] - [x_3x_4, x_2, x_5, x_1] + [x_2x_4, x_3, x_1, x_5] \equiv$$
$$\equiv x_3[x_5, x_4, x_1, x_2] - x_3[x_5, x_2, x_4, x_1] + [x_3, x_2][x_5, x_4, x_1] - [x_3, x_2][x_5, x_1, x_4] +$$
$$-[x_3, x_2, x_1][x_5, x_4] + [x_3, x_1][x_5, x_4, x_2] - [x_3, x_1][x_5, x_2, x_4] + [x_3, x_1, x_2][x_5, x_4] +$$
$$-x_2[x_5, x_4, x_3, x_1] + x_2x_2[x_5, x_3, x_4, x_1] + x_2[x_5, x_1, x_4, x_3] - x_2[x_5, x_1, x_3, x_4] +$$
$$+[x_2, x_1][x_5, x_3, x_4] + x_1[x_5, x_3, x_2, x_4] - x_1[x_5, x_2, x_4, x_3] \mod (L_5 \cap P_5);$$

$$u_{27} := v_1 - v_5 + v_{13} - v_{27} =$$
$$= [x_4x_5, x_3, x_2, x_1] - [x_4x_5, x_2, x_3, x_1] + [x_3x_5, x_2, x_4, x_1] - [x_2x_4, x_3, x_5, x_1] \equiv$$
$$\equiv x_3[x_5, x_2, x_4, x_1] + [x_3, x_1][x_5, x_2, x_4] + x_2[x_5, x_4, x_3, x_1] - x_2[x_5, x_3, x_4, x_1] +$$
$$+[x_2, x_1][x_5, x_4, x_3] - [x_2, x_1][x_5, x_3, x_4] \mod (L_5 \cap P_5);$$

$$u_{28} := 2\cdot v_1 - v_2 + v_3 - v_4 - v_5 - v_6 + v_{10} + v_{11} - v_{12} - v_{20} - v_{22} + v_{23} + v_{25} - v_{28} - v_{30} =$$
$$= 2\cdot[x_4x_5,x_3,x_2,x_1] - [x_4x_5,x_3,x_1,x_2] + [x_3x_5,x_4,x_2,x_1] - [x_3x_5,x_4,x_1,x_2] - [x_4x_5,x_2,x_3,x_1] +$$
$$-[x_4x_5,x_2,x_1,x_3] + [x_4x_5,x_1,x_2,x_3] + [x_1x_5,x_4,x_3,x_2] - [x_1x_5,x_4,x_2,x_3] - [x_1x_5,x_3,x_2,x_4] +$$
$$-[x_2x_5,x_1,x_3,x_4] + [x_1x_5,x_2,x_4,x_3] + [x_3x_4,x_2,x_5,x_1] - [x_2x_4,x_3,x_1,x_5] - [x_3x_4,x_1,x_2,x_5] \equiv$$
$$\equiv x_3[x_5,x_2,x_1,x_4] - x_3[x_5,x_1,x_4,x_2] - [x_3,x_2][x_5,x_4,x_1] + [x_3,x_2][x_5,x_1,x_4] - [x_3,x_1,x_2][x_5,x_4] +$$
$$+x_2[x_5,x_4,x_3,x_1] - x_2[x_5,x_3,x_4,x_1] - x_2[x_5,x_1,x_4,x_3] - [x_2,x_1][x_5,x_3,x_4] + x_1[x_5,x_4,x_3,x_2] +$$
$$-x_1[x_5,x_4,x_2,x_3] - x_1[x_5,x_3,x_2,x_4] + x_1[x_5,x_2,x_4,x_3] \mod (L_5\cap P_5);$$

$$u_{29} := -v_7 + v_8 - v_9 + v_{10} + v_{15} - v_{19} + v_{24} - v_{25} + v_{26} =$$
$$= -[x_2x_5,x_4,x_3,x_1] + [x_2x_5,x_4,x_1,x_3] - [x_4x_5,x_1,x_3,x_2] + [x_4x_5,x_1,x_2,x_3] + [x_2x_5,x_4,x_3,x_1] +$$
$$-[x_1x_5,x_3,x_4,x_2] + [x_1x_5,x_2,x_3,x_4] - [x_3x_4,x_2,x_5,x_1] + [x_3x_4,x_2,x_1,x_5] \equiv$$
$$\equiv x_3[x_5,x_1,x_4,x_2] - x_3[x_5,x_1,x_2,x_4] - [x_3,x_2][x_5,x_4,x_1] + [x_3,x_2][x_5,x_1,x_4] +$$
$$+[x_3,x_1][x_5,x_4,x_2] - [x_3,x_1][x_5,x_2,x_4] + [x_3,x_1,x_2][x_5,x_4] - x_2[x_5,x_4,x_3,x_1] + x_2[x_5,x_4,x_1,x_3] +$$
$$+x_2[x_5,x_3,x_4,x_1] + [x_2,x_1][x_5,x_3,x_4] - x_1[x_5,x_3,x_4,x_2] + x_1[x_5,x_2,x_3,x_4] \mod (L_5\cap P_5);$$

$$u_{30} := -v_1 + v_2 - v_3 + v_4 + v_5 + v_7 - v_8 + v_9 - 2\cdot v_{10} + v_{13} +$$
$$+v_{20} - v_{23} - v_{24} - v_{26} - v_{27} + v_{28} + v_{29} =$$
$$= -[x_4x_5,x_3,x_2,x_1] + [x_4x_5,x_3,x_1,x_2] - [x_3x_5,x_4,x_2,x_1] + [x_3x_5,x_4,x_1,x_2] + [x_4x_5,x_2,x_3,x_1] +$$
$$+[x_2x_5,x_4,x_3,x_1] - [x_2x_5,x_4,x_1,x_3] + [x_4x_5,x_1,x_3,x_2] - 2\cdot[x_4x_5,x_1,x_2,x_3] + [x_3x_5,x_2,x_4,x_1] +$$
$$+[x_1x_5,x_3,x_2,x_4] - [x_1x_5,x_2,x_4,x_3] - [x_1x_5,x_2,x_3,x_4] - [x_3x_4,x_2,x_1,x_5] - [x_2x_4,x_3,x_5,x_1] +$$
$$+[x_2x_4,x_3,x_1,x_5] + [x_3x_4,x_1,x_5,x_2] \equiv$$
$$\equiv x_3[x_5,x_1,x_2,x_4] + [x_3,x_2][x_5,x_4,x_1] - [x_3,x_2][x_5,x_1,x_4] - [x_3,x_2,x_1][x_5,x_4] +$$
$$+[x_3,x_1][x_5,x_2,x_4] + x_2[x_5,x_4,x_3,x_1] - x_2[x_5,x_4,x_1,x_3] + x_2[x_5,x_1,x_4,x_3] - x_2[x_5,x_1,x_3,x_4] +$$
$$+[x_2,x_1][x_5,x_4,x_3] + x_1[x_5,x_3,x_2,x_4] - x_1[x_5,x_2,x_4,x_3] - x_1[x_5,x_2,x_3,x_4] \mod (L_5\cap P_5);$$

$$
\begin{gathered}
u_{31} := -v_1 - v_2 + 2\cdot v_5 - v_6 + 2\cdot v_9 - v_{10} + v_{16} + v_{20} - v_{21} - v_{23} + v_{28} + v_{32} = \\
= -[x_4x_5, x_3, x_2, x_1] - [x_4x_5, x_3, x_1, x_2] + 2\cdot [x_4x_5, x_2, x_3, x_1] - [x_4x_5, x_2, x_1, x_3] + 2\cdot [x_4x_5, x_1, x_3, x_2] + \\
-[x_4x_5, x_1, x_2, x_3] + [x_2x_5, x_4, x_1, x_3] + [x_1x_5, x_3, x_2, x_4] - [x_2x_5, x_1, x_4, x_3] - [x_1x_5, x_2, x_4, x_3] + \\
+[x_2x_4, x_3, x_1, x_5] + [x_1x_4, x_3, x_2, x_5] \equiv \\
\equiv [x_3,x_2][x_5,x_4,x_1] - [x_3,x_2][x_5,x_1,x_4] + [x_3,x_1][x_5,x_4,x_2] - [x_3,x_1][x_5,x_2,x_4] + \\
-x_2[x_5,x_4,x_3,x_1] + x_2[x_5,x_3,x_4,x_1] + x_2[x_5,x_3,x_1,x_4] - x_2[x_5,x_1,x_3,x_4] + \\
-x_1[x_5,x_4,x_3,x_2] + x_1[x_5,x_3,x_4,x_2] + x_1[x_5,x_3,x_2,x_4] - x_1[x_5,x_2,x_3,x_4] \mod (L_5 \cap P_5);
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
u_{32} := v_1 + v_3 - v_4 - v_5 - v_9 + v_{10} - v_{13} - v_{15} + v_{17} + \\
+v_{19} - v_{20} + v_{23} + v_{25} + v_{27} - v_{28} - v_{29} - v_{31} = \\
= [x_4x_5, x_3, x_2, x_1] + [x_3x_5, x_4, x_2, x_1] - [x_3x_5, x_4, x_1, x_2] - [x_4x_5, x_2, x_3, x_1] - [x_4x_5, x_1, x_3, x_2] + \\
+[x_4x_5, x_1, x_2, x_3] - [x_3x_5, x_2, x_4, x_1] - [x_2x_5, x_4, x_3, x_1] + [x_3x_5, x_1, x_4, x_2] + [x_1x_5, x_3, x_4, x_2] + \\
-[x_1x_5, x_3, x_2, x_4] + [x_1x_5, x_2, x_4, x_3] + [x_3x_4, x_2, x_5, x_1] + [x_2x_4, x_3, x_5, x_1] - [x_2x_4, x_3, x_1, x_5] + \\
-[x_3x_4, x_1, x_5, x_2] - [x_1x_4, x_3, x_5, x_2] \equiv \\
\equiv [x_3,x_2][x_5,x_1,x_4] + [x_3,x_2,x_1][x_5,x_4] - [x_3,x_1][x_5,x_4,x_2] - [x_3,x_1,x_2][x_5,x_4] + \\
-x_2[x_5,x_3,x_4,x_1] - x_2[x_5,x_1,x_4,x_3] + x_2[x_5,x_1,x_3,x_4] - x_2[x_2,x_1][x_5,x_4,x_3] + \\
+x_1[x_5,x_4,x_3,x_2] - x_1[x_5,x_3,x_2,x_4] + x_1[x_5,x_2,x_4,x_3] \mod (L_5 \cap P_5);
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
u_{33} := v_1 + v_3 - v_4 - v_5 + v_6 - v_9 - v_{13} - v_{15} + v_{17} + v_{19} - v_{20} + \\
+v_{21} + v_{23} + v_{25} + v_{27} - v_{28} - v_{29} - v_{31} - v_{35} = \\
= [x_4x_5, x_3, x_2, x_1] + [x_3x_5, x_4, x_2, x_1] - [x_3x_5, x_4, x_1, x_2] - [x_4x_5, x_2, x_3, x_1] + [x_4x_5, x_2, x_1, x_3] + \\
-[x_4x_5, x_1, x_3, x_2] - [x_3x_5, x_2, x_4, x_1] - [x_2x_5, x_4, x_3, x_1] + [x_3x_5, x_1, x_4, x_2] + [x_1x_5, x_3, x_4, x_2] + \\
-[x_1x_5, x_3, x_2, x_4] + [x_2x_5, x_1, x_4, x_3] + [x_1x_5, x_2, x_4, x_3] + [x_3x_4, x_2, x_5, x_1] + [x_2x_4, x_3, x_5, x_1] + \\
-[x_2x_4, x_3, x_1, x_5] - [x_3x_4, x_1, x_5, x_2] - [x_1x_4, x_3, x_5, x_2] - [x_1x_4, x_2, x_5, x_3] \equiv \\
\equiv [x_3,x_2,x_1][x_5,x_4] - x_2[x_3,x_1][x_5,x_4,x_2] + [x_3,x_1][x_5,x_2,x_4] - [x_3,x_1,x_2][x_5,x_4] + \\
-x_2[x_5,x_3,x_4,x_1] + x_2[x_5,x_1,x_3,x_4] - x_2[x_2,x_1][x_5,x_4,x_3] + x_1[x_5,x_4,x_3,x_2] + \\
+x_1[x_5,x_4,x_2,x_3] - x_1[x_5,x_3,x_2,x_4] \mod (L_5 \cap P_5);
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
u_{34} := -v_1 - v_2 + 2\cdot v_5 - 2\cdot v_6 + 2\cdot v_9 + v_{16} + v_{20} - v_{21} + v_{28} + v_{32} - v_{33} = \\
= -[x_4x_5,x_3,x_2,x_1] - [x_4x_5,x_3,x_1,x_2] + 2\cdot[x_4x_5,x_2,x_3,x_1] - 2\cdot[x_4x_5,x_2,x_1,x_3] + \\
+2\cdot[x_4x_5,x_1,x_3,x_2] + [x_2x_5,x_4,x_1,x_3] + [x_1x_5,x_3,x_2,x_4] - [x_2x_5,x_1,x_4,x_3] + \\
+[x_2x_4,x_3,x_1,x_5] + [x_1x_4,x_3,x_2,x_5] - [x_2x_4,x_1,x_5,x_3] \equiv \\
\equiv [x_3,x_1][x_5,x_4,x_2] - x_2\cdot[x_3,x_1][x_5,x_2,x_4] - x_2[x_5,x_4,x_3,x_1] + x_2[x_5,x_4,x_1,x_3] + \\
+x_2[x_5,x_3,x_4,x_1] + x_2[x_5,x_3,x_1,x_4] - x_2[x_5,x_1,x_4,x_3] - x_2[x_5,x_1,x_3,x_4] - x_1[x_5,x_4,x_3,x_2] + \\
+x_1[x_5,x_3,x_4,x_2] + x_1[x_5,x_3,x_2,x_4] + x_1[x_5,x_2,x_4,x_3] - x_1[x_5,x_2,x_3,x_4] \mod (L_5\cap P_5);
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
u_{35} := v_1 + v_3 - v_4 - 2\cdot v_{x_5} + 2\cdot v_6 - v_7 + v_8 - v_9 + v_{11} + \\
-v_{12} - v_{13} + v_{18} - v_{20} + v_{24} + v_{26} - v_{28} - v_{29} + v_{33} + v_{34} = \\
= [x_4x_5,x_3,x_2,x_1] + [x_3x_5,x_4,x_2,x_1] - [x_3x_5,x_4,x_1,x_2] - 2\cdot[x_4x_5,x_2,x_3,x_1] + \\
+2\cdot[x_4x_5,x_2,x_1,x_3] - [x_2x_5,x_4,x_3,x_1] + [x_2x_5,x_4,x_1,x_3] - [x_4x_5,x_1,x_3,x_2] + \\
+[x_1x_5,x_4,x_3,x_2] - [x_1x_5,x_4,x_2,x_3] - [x_3x_5,x_2,x_4,x_1] + [x_3x_5,x_1,x_2,x_4] + \\
-[x_1x_5,x_3,x_2,x_4] + [x_1x_5,x_2,x_3,x_4] + [x_3x_4,x_2,x_1,x_5] + \\
-[x_2x_4,x_3,x_1,x_5] - [x_3x_4,x_1,x_5,x_2] + [x_2x_4,x_1,x_5,x_3] + [x_2x_4,x_1,x_3,x_5] \equiv \\
\equiv [x_3,x_1][x_5,x_2,x_4] - x_2[x_5,x_4,x_1,x_3] - x_2[x_5,x_3,x_1,x_4] + x_2[x_5,x_1,x_4,x_3] + \\
+x_2[x_5,x_1,x_3,x_4] - [x_2,x_1][x_5,x_4,x_3] + x_1[x_5,x_4,x_3,x_2] - x_1[x_5,x_4,x_2,x_3] + \\
-x_1[x_5,x_3,x_2,x_4] + x_1[x_5,x_2,x_3,x_4] \mod (L_5\cap P_5);
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
u_{36} := -v_3 + v_4 - v_6 + v_7 - v_8 + v_{10} - v_{11} + v_{12} + v_{13} + v_{14} + \\
-v_{17} + -v_{18} - v_{24} - v_{25} - v_{27} + v_{28} + v_{29} + v_{31} - v_{32} - v_{34} + v_{35} + v_{37} = \\
= -[x_3x_5,x_4,x_2,x_1] + [x_3x_5,x_4,x_1,x_2] - [x_4x_5,x_2,x_1,x_3] + [x_2x_5,x_4,x_3,x_1] - [x_2x_5,x_4,x_1,x_3] + \\
+[x_4x_5,x_1,x_2,x_3] - [x_1x_5,x_4,x_3,x_2] + [x_1x_5,x_4,x_2,x_3] + [x_3x_5,x_2,x_4,x_1] + [x_3x_5,x_2,x_1,x_4] + \\
-[x_3x_5,x_1,x_4,x_2] - [x_3x_5,x_1,x_2,x_4] - [x_1x_5,x_2,x_3,x_4] - [x_3x_4,x_2,x_5,x_1] - [x_2x_4,x_3,x_5,x_1] + \\
+[x_2x_4,x_3,x_1,x_5] + [x_3x_4,x_1,x_5,x_2] + [x_1x_4,x_3,x_5,x_2] - [x_1x_4,x_3,x_2,x_5] + \\
-[x_2x_4,x_1,x_3,x_5] + [x_1x_4,x_2,x_5,x_3] + [x_2x_3,x_1,x_5,x_4] \equiv \\
\equiv x_2[x_5,x_4,x_3,x_1] - x_2[x_5,x_3,x_4,x_1] + x_2[x_2,x_1][x_5,x_4,x_3] + \\
-[x_2,x_1][x_5,x_3,x_4] - x_1[x_5,x_4,x_3,x_2] \mod (L_5\cap P_5);
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
u_{37} := v_5 - v_6 + v_9 - v_{10} + v_{13} - v_{14} + v_{17} - v_{18} + \\
- v_{22} - v_{24} + v_{25} - v_{26} + v_{29} - v_{30} - v_{34} - v_{36} = \\
= [x_4x_5, x_2, x_3, x_1] - [x_4x_5, x_2, x_1, x_3] + [x_4x_5, x_1, x_3, x_2] - [x_4x_5, x_1, x_2, x_3] + [x_3x_5, x_2, x_4, x_1] + \\
- [x_3x_5, x_2, x_1, x_4] + [x_3x_5, x_1, x_4, x_2] - [x_3x_5, x_1, x_2, x_4] - [x_2x_5, x_1, x_3, x_4] - [x_1x_5, x_2, x_3, x_4] + \\
+ [x_3x_4, x_2, x_5, x_1] - [x_3x_4, x_2, x_1, x_5] + [x_3x_4, x_1, x_5, x_2] - [x_3x_4, x_1, x_2, x_5] - [x_2x_4, x_1, x_3, x_5] + \\
- [x_1x_4, x_2, x_3, x_5] \equiv \\
\equiv x_2[x_5, x_4, x_1, x_3] - x_2[x_5, x_3, x_4, x_1] + x_2[x_5, x_3, x_1, x_4] - x_2[x_5, x_1, x_4, x_3] + \\
- x_2[x_5, x_1, x_3, x_4] + x_1[x_5, x_4, x_2, x_3] - x_1[x_5, x_3, x_4, x_2] + x_1[x_5, x_3, x_2, x_4] + \\
- x_1[x_5, x_2, x_4, x_3] - x_1[x_5, x_2, x_3, x_4] \mod (L_5 \cap P_5);
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
u_{38} := -v_1 + v_2 - v_3 + v_4 + v_5 + v_7 - v_8 - v_9 - v_{11} + v_{12} + v_{13} + v_{15} + \\
- v_{16} - v_{17} - v_{19} + v_{20} + v_{22} - v_{23} - v_{25} - v_{26} + v_{29} + v_{30} + v_{36} - v_{38} = \\
= -[x_4x_5, x_3, x_2, x_1] + [x_4x_5, x_3, x_1, x_2] - [x_3x_5, x_4, x_2, x_1] + [x_3x_5, x_4, x_1, x_2] + [x_4x_5, x_2, x_3, x_1] + \\
+ [x_2x_5, x_4, x_3, x_1] - [x_2x_5, x_4, x_1, x_3] - [x_4x_5, x_1, x_3, x_2] - [x_1x_5, x_4, x_3, x_2] + [x_1x_5, x_4, x_2, x_3] + \\
+ [x_3x_5, x_2, x_4, x_1] + [x_2x_5, x_4, x_3, x_1] - [x_2x_5, x_4, x_1, x_3] - [x_3x_5, x_1, x_4, x_2] - [x_1x_5, x_3, x_4, x_2] + \\
+ [x_1x_5, x_3, x_2, x_4] + [x_2x_5, x_1, x_3, x_4] - [x_1x_5, x_2, x_4, x_3] - [x_3x_4, x_2, x_5, x_1] - [x_3x_4, x_2, x_1, x_5] + \\
+ [x_3x_4, x_1, x_5, x_2] + [x_3x_4, x_1, x_2, x_5] + [x_1x_4, x_2, x_3, x_5] - [x_2x_3, x_1, x_4, x_5] \equiv \\
\equiv x_2[x_5, x_3, x_4, x_1] + [x_2, x_1][x_5, x_4, x_3] + [x_2, x_1][x_5, x_3, x_4] - x_1[x_5, x_4, x_3, x_2] \mod (L_5 \cap P_5);
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
u_{39} := -v_1 + v_2 - v_3 + v_4 + v_5 + v_7 - v_8 - v_9 - v_{11} + v_{13} + v_{13} + v_{15} - v_{16} - v_{17} + \\
- v_{19} + v_{20} - v_{23} - v_{24} - v_{25} - v_{26} + v_{29} + v_{30} + v_{33} + - v_{34} + v_{35} + v_{37} - v_{38} + v_{39} = \\
= -[x_4x_5, x_3, x_2, x_1] + [x_4x_5, x_3, x_1, x_2] - [x_3x_5, x_4, x_2, x_1] + [x_3x_5, x_4, x_1, x_2] + [x_4x_5, x_2, x_3, x_1] + \\
+ [x_2x_5, x_4, x_3, x_1] - [x_2x_5, x_4, x_1, x_3] - [x_4x_5, x_1, x_3, x_2] - [x_1x_5, x_4, x_3, x_2] + [x_1x_5, x_4, x_2, x_3] + \\
+ [x_3x_5, x_2, x_4, x_1] + [x_2x_5, x_4, x_3, x_1] - [x_2x_5, x_4, x_1, x_3] - [x_3x_5, x_1, x_4, x_2] - [x_1x_5, x_3, x_4, x_2] + \\
+ [x_1x_5, x_3, x_2, x_4] - [x_1x_5, x_2, x_4, x_3] - [x_1x_5, x_2, x_3, x_4] - [x_3x_4, x_2, x_5, x_1] - [x_3x_4, x_2, x_1, x_5] + \\
+ [x_3x_4, x_1, x_5, x_2] + [x_3x_4, x_1, x_2, x_5] + [x_2x_4, x_1, x_5, x_3] - [x_2x_4, x_1, x_3, x_5] + \\
+ [x_1x_4, x_2, x_5, x_3] + [x_2x_3, x_1, x_5, x_4] - [x_2x_3, x_1, x_4, x_5] + [x_1x_3, x_2, x_5, x_4] \equiv \\
\equiv [x_2, x_1][x_5, x_4, x_3] + [x_2, x_1][x_5, x_3, x_4] - x_1[x_5, x_4, x_3, x_2] - x_1[x_5, x_3, x_4, x_2] \mod (L_5 \cap P_5);
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
u_{40} := {} & -2\cdot v_1 + 2\cdot v_2 - v_3 + v_4 + 2\cdot v_5 + v_6 + v_7 - v_8 - 2\cdot v_9 - v_{10} + \\
& -v_{11} + v_{12} + v_{13} - v_{14} + 2\cdot v_{15} - 2\cdot v_{16} - v_{17} + v_{18} - 2\cdot v_{19} + 2\cdot v_{20} + \\
& +v_{21} - v_{22} - v_{23} - 2\cdot v_{24} - v_{25} - 2\cdot v_{26} + v_{27} - v_{28} + v_{29} + 2\cdot v_{30} - v_{31} + \\
& +v_{32} + 2\cdot v_{33} - 2\cdot v_{34} + v_{35} - v_{36} + v_{37} - v_{38} + 2\cdot v_{39} + v_{40} = \\
= {} & -2\cdot[x_4x_5,x_3,x_2,x_1] + 2\cdot[x_4x_5,x_3,x_1,x_2] - [x_3x_5,x_4,x_2,x_1] + [x_3x_5,x_4,x_1,x_2] + \\
& +2\cdot[x_4x_5,x_2,x_3,x_1] + [x_4x_5,x_2,x_1,x_3] + [x_2x_5,x_4,x_3,x_1] - [x_2x_5,x_4,x_1,x_3] + \\
& -2\cdot[x_4x_5,x_1,x_3,x_2] - [x_4x_5,x_1,x_2,x_3] - [x_1x_5,x_4,x_3,x_2] + [x_1x_5,x_4,x_2,x_3] + \\
& +[x_3x_5,x_2,x_4,x_1] - [x_3x_5,x_2,x_1,x_4] + 2\cdot[x_2x_5,x_4,x_3,x_1] - 2\cdot[x_2x_5,x_4,x_1,x_3] + \\
& -[x_3x_5,x_1,x_4,x_2] + [x_3x_5,x_1,x_2,x_4] - 2\cdot[x_1x_5,x_3,x_4,x_2] + 2\cdot[x_1x_5,x_3,x_2,x_4] + \\
& +[x_2x_5,x_1,x_4,x_3] - [x_2x_5,x_1,x_3,x_4] - [x_1x_5,x_2,x_4,x_3] - 2\cdot[x_1x_5,x_2,x_3,x_4] + \\
& -[x_3x_4,x_2,x_5,x_1] - 2\cdot[x_3x_4,x_2,x_1,x_5] + [x_2x_4,x_3,x_5,x_1] - [x_2x_4,x_3,x_1,x_5] + \\
& +[x_3x_4,x_1,x_5,x_2] + 2\cdot[x_3x_4,x_1,x_2,x_5] - [x_1x_4,x_3,x_5,x_2] + [x_1x_4,x_3,x_2,x_5] + \\
& +2\cdot[x_2x_4,x_1,x_5,x_3] - 2\cdot[x_2x_4,x_1,x_3,x_5] + [x_1x_4,x_2,x_5,x_3] - [x_1x_4,x_2,x_3,x_5] + \\
& +[x_2x_3,x_1,x_5,x_4] - [x_2x_3,x_1,x_4,x_5] + 2\cdot[x_1x_3,x_2,x_5,x_4] + [x_1x_3,x_2,x_4,x_5] \equiv \\
\equiv {} & \quad 3\big([x_2,x_1][x_5,x_3,x_4] - x_1[x_5,x_3,x_4,x_2]\big) \mod (L_5 \cap P_5).
\end{aligned}
$$

Como o conjunto $S + (L_5 \cap P_5)$ é linearmente independente e é equivalente ao conjunto $S_1 + (L_5 \cap P_5)$, o qual gera $\mathscr{B}_4$, temos que $S + (L_5 \cap P_5)$ é uma base $\mathscr{B}_4$. $\square$

Corolário 4.3.1. *O grupo $\mathscr{B}_4$ é abeliano livre de posto 40, isto é, $\mathscr{B}_4 \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{40 \text{ vezes}}$.*

Demonstração: Considere $G_i =< u_i \,|\, u_i \in S_1, 1 \le i \le 40 > +(L_5 \cap P_5)$ o grupo cíclico (infinito) gerado por u_i (Proposição 4.11). Como cada grupo G_i é isomorfo a $\mathbb{Z}$, obtemos o resultado. $\square$

Considere $w = \big[x_1, x_2[x_5,x_4,x_3]\big]$. Sabemos que $w \in L_3$, $w \notin L_4$ e $6w \in L_4$.

Demonstração da Proposição 5 .
Observemos que

$$
\begin{aligned}
w = \big[x_1, x_2[x_5,x_4,x_3]\big] &= x_2\big[x_1,[x_5,x_4,x_3]\big] + [x_1,x_2][x_5,x_4,x_3] = \\
&= -x_2[x_5,x_4,x_3,x_1] - [x_2,x_1][x_5,x_4,x_3];
\end{aligned}
$$

assim temos que $3w+(L_5\cap P_5)\in\mathscr{B}_4$, pois

$$3\cdot w = -3x_2[x_5,x_4,x_3,x_1]-3[x_2,x_1][x_5,x_4,x_3] = \\ = -3\cdot u_{36}-3\cdot u_{38}+6\cdot u_{39}-2\cdot u_{40}.$$

No entanto, $w_1 = w+u_{36}+u_{38}-2\cdot u_{39} = 2\big([x_2,x_1][x_5,x_3,x_4]-x_1[x_5,x_3,x_4,x_2]\big)$, ou seja,

$$w+(L_5\cap P_5)\notin\mathscr{B}_4.$$

Portanto obtemos que $3w\in L_4$ e $w\notin L_4$. $\square$

Segue da Proposição 5 que o elemento $w+L_4$ tem ordem 3 em L_3/L_4.

Considere o conjunto

$$S' = \{u_i'\,|\,u_i' = u_i\in S, 1\leq i\leq 39\}\dot\cup\{u_{40}'\},\quad \text{com} \quad u_{40}' = [x_2,x_1][x_5,x_3,x_4]-x_1[x_5,x_3,x_4,x_2],$$

sendo S o conjunto dado na Proposição 4.11.

Lema 4.12. *Para $\{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5\} = \{1,2,3,4,5\}$ cada conjunto B_i abaixo, com $1\leq i\leq 4$, é uma base do grupo aditivo P_5.*

$$\begin{gathered} B_1 = \{x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}\}; \\ B_2 = \big\{[x_5,x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4},x_{i_5}]\big\}\dot\cup\big\{x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}\,|\,i_1\neq 5\big\}; \\ B_3 = \big\{p_{1i} = [x_5,x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4},x_{i_5}]\big\}\dot\cup\big\{p_{2i} = x_{i_1}[x_5,x_{i_3},x_{i_4},x_{i_5}]\big\}\dot\cup\big\{p_{3i} = [x_{i_1},x_{i_2}][x_5,x_{i_4},x_{i_5}]\,|\,i_1>i_2\big\}\dot\cup \\ \dot\cup\big\{p_{4i} = [x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3}][x_5,x_{i_5}]\,|\,i_1>i_2,i_3\big\}\dot\cup\big\{p_{5i} = [x_4,x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4}]x_5\big\}\dot\cup \\ \dot\cup\big\{m = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}\,|\,m\neq ml(p_{ji})\ para\ 1\leq j\leq 5\big\}; \\ B_4 = \{[x_5,x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4},x_{i_5}]\}\dot\cup\{u_i'\,|\,u_i'\in S', 1\leq i\leq 40\}\dot\cup \\ \dot\cup\{m = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}\,|\,i_1\neq 5\ e\ m\neq ml(u_i'),\ u_i'\in S'\}. \end{gathered}$$

Demonstração: Pela observação (4.2) temos que B_1 é uma base de P_5. Assim basta mostrarmos a equivalência entre os grupos gerados por cada $\langle B_i\rangle_{1\leq i\leq 4}$.

Afirmação 4.3.1. $\langle B_1\rangle\subset\langle B_2\rangle$

Consideremos o conjunto $B_2 = B_{21}\dot\cup B_{22}$, sendo

$$B_{21} = \big\{[x_5,x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4},x_{i_5}]\big\}\quad \text{e} \quad B_{22} = \big\{x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}\,|\,i_1\neq 5\big\}.$$

Tome um elemento qualquer $m = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5} \in B_1$, se $i_1 \neq 5$ então $m \in B_{22} \subset B_2$. Caso $i_1 = 5$ temos $m = x_5x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}$. Observemos que

$$
\begin{gathered}
m = x_5x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5} - x_{i_5}x_5x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} + x_{i_5}x_5x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} = \\
= [x_5x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}, x_{i_5}] + x_{i_5}x_5x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} = \\
= [x_5x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}, x_{i_5}] - [x_{i_4}x_5x_{i_2}x_{i_3}, x_{i_5}] + [x_{i_4}x_5x_{i_2}x_{i_3}, x_{i_5}] + x_{i_5}x_5x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} = \\
= [x_5x_{i_2}x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}] + [x_{i_4}x_5x_{i_2}x_{i_3}, x_{i_5}] + x_{i_5}x_5x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} = \\
= [x_5x_{i_2}x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}] - [x_{i_3}x_5x_{i_2}, x_{i_4}, x_{i_5}] + [x_{i_3}x_5x_{i_2}, x_{i_4}, x_{i_5}] + \\
+ [x_{i_4}x_5x_{i_2}x_{i_3}, x_{i_5}] + x_{i_5}x_5x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} = \\
= [x_5x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}] + [x_{i_3}x_5x_{i_2}, x_{i_4}, x_{i_5}] + [x_{i_4}x_5x_{i_2}x_{i_3}, x_{i_5}] + x_{i_5}x_5x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} = \\
= [x_5x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}] - [x_{i_2}x_5, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}] + [x_{i_2}x_5, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}] + \\
+ [x_{i_3}x_5x_{i_2}, x_{i_4}, x_{i_5}] + [x_{i_4}x_5x_{i_2}x_{i_3}, x_{i_5}] + x_{i_5}x_5x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} = \\
= [x_5, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}] + [x_{i_2}x_5, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}] + [x_{i_3}x_5x_{i_2}, x_{i_4}, x_{i_5}] + [x_{i_4}x_5x_{i_2}x_{i_3}, x_{i_5}] + x_{i_5}x_5x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}.
\end{gathered}
$$

Observemos que $[x_5, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}] \in B_{21}$ e $x_{i_5}x_5x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} \in B_{22}$. Temos ainda que $[x_{i_2}x_5, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}]$ é escrito como combinação linear de elementos de B_{22}. Da mesma forma temos que $[x_{i_3}x_5x_{i_2}, x_{i_4}, x_{i_5}]$, $[x_{i_4}x_5x_{i_2}x_{i_3}, x_{i_5}] \in \langle B_{22}\rangle$. Assim obtemos que $m \in \langle B_2\rangle$.

Afirmação 4.3.2. $\langle B_2\rangle \subset \langle B_3\rangle$

Consideremos $B_3 = B_{31}\dot{\cup}B_{32}\dot{\cup}B_{33}\dot{\cup}B_{34}\dot{\cup}B_{35}\dot{\cup}B_{36}$ sendo:

$$
\begin{gathered}
B_{31} = \big\{[x_5, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}]\big\}, \quad B_{32} = \big\{x_{i_1}[x_5, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}]\big\}, \\
B_{33} = \big\{[x_{i_1}, x_{i_2}][x_5, x_{i_4}, x_{i_5}] \,|\, i_1 > i_2\big\}, \quad B_{34} = \big\{[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}][x_5, x_{i_5}] \,|\, i_1 > i_2, i_3\big\}, \\
B_{35} = \big\{[x_4, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}]x_5\big\}, \\
B_{36} = \big\{m = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5} \,|\, m \in B_1, m \neq ml(p), p \in B_{31}\dot{\cup}B_{32}\dot{\cup}B_{33}\dot{\cup}B_{34}\dot{\cup}B_{35}\big\}.
\end{gathered}
$$

Seja m um elemento qualquer de B_2. Caso $m \in B_{21} = B_{31} \subset B_3$. Suponha que $m \in B_{22}$. Então ocorre um dos 5 casos:

(1) se $m = x_4x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_5$, então escrevemos

$$
\begin{gathered}
m = x_4x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_5 - [x_4, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}]x_5 + [x_4, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}]x_5 = \\
= x_{i_2}x_4x_{i_3}x_{i_4}x_5 + x_{i_3}x_4x_{i_2}x_{i_4}x_5 - x_{i_3}x_{i_2}x_4x_{i_4}x_5 + x_{i_4}x_4x_{i_2}x_{i_3}x_5 - x_{i_4}x_{i_2}x_4x_{i_3}x_5 + \\
- x_{i_4}x_{i_3}x_4x_{i_2}x_5 + x_{i_4}x_{i_3}x_{i_2}x_4x_5 + [x_4, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}]x_5.
\end{gathered}
$$

Observemos que

$$x_{i_2}x_4x_{i_3}x_{i_4}x_5,\ x_{i_3}x_4x_{i_2}x_{i_4}x_5,\ x_{i_3}x_{i_2}x_4x_{i_4}x_5,\ x_{i_4}x_4x_{i_2}x_{i_3}x_5 \in B_{36},$$
$$x_{i_4}x_{i_2}x_4x_{i_3}x_5,\ x_{i_4}x_{i_3}x_4x_{i_2}x_5,\ x_{i_4}x_{i_3}x_{i_2}x_4x_5 \in B_{36},$$
$$[x_4x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}]x_5 \in B_{35},$$

assim segue que $m \in \langle B_3 \rangle$.

(2) se $m = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_5x_{i_5}$ com $i_1 > i_2, i_3$, então escrevemos

$$m = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_5x_{i_5} - [x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}][x_5, x_{i_5}] + [x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}][x_5, x_{i_5}] =$$
$$= x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_5}x_5 - x_{i_2}x_{i_1}x_{i_3}x_{i_5}x_5 + x_{i_2}x_{i_1}x_{i_3}x_5x_{i_5} - x_{i_3}x_{i_1}x_{i_2}x_{i_5}x_5 +$$
$$+ x_{i_3}x_{i_1}x_{i_2}x_5x_{i_5} + x_{i_3}x_{i_2}x_{i_1}x_{i_5}x_5 - x_{i_3}x_{i_2}x_{i_1}x_5x_{i_5} + [x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}][x_5, x_{i_5}].$$

Como temos

$$x_{i_2}x_{i_1}x_{i_3}x_{i_5}x_5,\ x_{i_2}x_{i_1}x_{i_3}x_5x_{i_5},\ x_{i_3}x_{i_1}x_{i_2}x_{i_5}x_5 \in B_{36},$$
$$x_{i_3}x_{i_1}x_{i_2}x_5x_{i_5},\ x_{i_3}x_{i_2}x_{i_1}x_{i_5}x_5,\ x_{i_3}x_{i_2}x_{i_1}x_5x_{i_5} \in B_{36}$$
$$[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}][x_5, x_{i_5}] \in B_{34}.$$

Caso $i_1 > i_2, i_3, i_5$, pelo caso (1) temos que $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_5}x_5 \in \langle B_3 \rangle$, caso contrário por hipótese $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_5}x_5 \in B_{36}$. Portanto segue que $m \in \langle B_3 \rangle$.

(3) se $m = x_{i_1}x_{i_2}x_5x_{i_4}x_{i_5}$ com $i_1 > i_2$, então escrevemos

$$m = x_{i_1}x_{i_2}x_5x_{i_4}x_{i_5} - [x_{i_1}, x_{i_2}][x_5, x_{i_4}, x_{i_5}] + [x_{i_1}, x_{i_2}][x_5, x_{i_4}, x_{i_5}] =$$
$$= x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_5x_{i_4} + x_{i_1}x_{i_2}x_{i_4}x_5x_{i_3} - x_{i_1}x_{i_2}x_{i_4}x_{i_3}x_5 - x_{i_2}x_{i_1}x_{i_3}x_5x_{i_4} +$$
$$+ x_{i_2}x_{i_1}x_{i_4}x_{i_3}x_5 - x_{i_2}x_{i_1}x_{i_4}x_5x_{i_3} + x_{i_2}x_{i_1}x_5x_{i_3}x_{i_4} + [x_{i_1}, x_{i_2}][x_5, x_{i_4}, x_{i_5}].$$

Como temos

$$x_{i_2}x_{i_1}x_{i_3}x_5x_{i_4},\ x_{i_2}x_{i_1}x_{i_4}x_{i_3}x_5,\ x_{i_2}x_{i_1}x_{i_4}x_5x_{i_3},\ x_{i_2}x_{i_1}x_5x_{i_3}x_{i_4} \in B_{36},$$
$$[x_{i_1}, x_{i_2}][x_5, x_{i_4}, x_{i_5}] \in B_{33}.$$

Caso $i_1 > i_2, i_3$ ou $i_1 > i_2, i_4$ pelo caso (2) temos que $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_5x_{i_4}, x_{i_1}x_{i_2}x_{i_4}x_5x_{i_3} \in \langle B_3 \rangle$. Caso contrário, teremos que $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_5x_{i_4}, x_{i_1}x_{i_2}x_{i_4}x_5x_{i_3} \in B_{36}$. Assim $m \in \langle B_3 \rangle$.

Caso $i_1 > i_2, i_3, i_4$ pelo caso (1) temos que $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_4}x_{i_3}x_5 \in \langle B_3\rangle$. Caso contrário, teremos que $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_4}x_{i_3}x_5 \in \langle B_3\rangle$. Assim $m \in \langle B_3\rangle$.

(4) se $m = x_{i_1}x_5x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}$, então escrevemos

$$\begin{aligned} m &= x_{i_1}x_5x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5} - x_{i_1}[x_5, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}] + x_{i_1}[x_5, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}] = \\ &= x_{i_1}x_{i_3}x_5x_{i_4}x_{i_5} + x_{i_1}x_{i_4}x_5x_{i_3}x_{i_5} + x_{i_1}x_{i_5}x_5x_{i_3}x_{i_4} - x_{i_1}x_{i_5}x_{i_3}x_5x_{i_4} + \\ &- x_{i_1}x_{i_5}x_{i_4}x_5x_{i_3} - x_{i_1}x_{i_4}x_{i_3}x_5x_{i_5} + x_{i_1}x_{i_5}x_{i_4}x_{i_3}x_5 + x_{i_1}[x_5, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}]. \end{aligned}$$

Como temos $x_{i_1}[x_5, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}] \in B_{32}$.

Caso $i_1 > i_3$ ou $i_1 > i_4$ ou $i_1 > i_5$, pelo pelo caso (3) temos que $x_{i_1}x_{i_3}x_5x_{i_4}x_{i_5}$, $x_{i_1}x_{i_4}x_5x_{i_3}x_{i_5}$, $x_{i_1}x_{i_5}x_5x_{i_3}x_{i_4} \in \langle B_3\rangle$. Caso contrário por hipótese temos que $x_{i_1}x_{i_3}x_5x_{i_4}x_{i_5}$, $x_{i_1}x_{i_4}x_5x_{i_3}x_{i_5}$, $x_{i_1}x_{i_5}x_5x_{i_3}x_{i_4} \in B_{36}$. Assim $m \in \langle B_3\rangle$.

Caso $i_1 > i_3, i_5$, ou $i_1 > i_5, i_4$, ou $i_1 > i_3, i_4$ pelo caso (2) temos que $x_{i_1}x_{i_5}x_{i_3}x_5x_{i_4}$, $x_{i_1}x_{i_5}x_{i_4}x_5x_{i_3}$, $x_{i_1}x_{i_4}x_{i_3}x_5x_{i_5} \in \langle B_3\rangle$. Caso contrário por hipótese temos que $x_{i_1}x_{i_5}x_{i_3}x_5x_{i_4}$, $x_{i_1}x_{i_5}x_{i_4}x_5x_{i_3}$, $x_{i_1}x_{i_4}x_{i_3}x_5x_{i_5} \in B_{36}$. Assim $m \in \langle B_3\rangle$.

Caso $i_1 > i_3, i_4, i_5$ pelo caso (1) temos que $x_{i_1}x_{i_5}x_{i_4}x_{i_3}x_5 \in \langle B_3\rangle$. Caso contrário por hipótese temos que $x_{i_1}x_{i_5}x_{i_4}x_{i_3}x_5 \in B_{36}$. Assim $m \in \langle B_3\rangle$.

(5) se $m = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}$ distinto dos casos (1), (2), (3) e (4) então $m \in B_{36}$.

De qualquer modo temos que para $m \in B_2$ temos $m \in \langle B_3\rangle$.

Afirmação 4.3.3. $\langle B_3\rangle \subset \langle B_4\rangle$

Consideremos $B_4 = B_{41}\dot{\cup}B_{42}\dot{\cup}B_{43}$ sendo:

$$\begin{aligned} B_{41} &= \{[x_5, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}]\}, \\ B_{42} &= \{u'_i \,|\, u'_i \in S', 1 \le i \le 40\}, \\ B_{43} &= \{m = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5} \,|\, m \in B_1, m \neq ml(p), p \in B_{41}\dot{\cup}B_{42}\}. \end{aligned}$$

Tome um elemento qualquer $m \in B_3$. Caso $m \in B_{31}$ então $m \in B_{31} = B_{41} \subset B_4$. Admita que $m \in B_{32}\dot{\cup}B_{33}\dot{\cup}B_{34}\dot{\cup}B_{35}\dot{\cup}$, caso m seja o monômio líder de algum u'_i, por exemplo, $m = ml(u'_1)$ então escreva o polinômio $p_1 = m - u'_1$. Temos $p_1 = 0$ ou $ml(p_1) = ml(u'_i)$, para algum i, $2 \le i \le 40$. Digamos $i = 2$ e escrevemos $p_2 = p_1 - u'_2 = m - u'_1 - u'_2$. Novamente temos $p_2 = 0$, caso contrário, repetimos o processo, em no máximo 41 passos encontramos um polinômio $p_{41} = 0$ ou $ml(p_{41}) \neq ml(u_i')$ com $1 \leq i \leq 41$. Se $p_{41} = 0$ então m é escrito como combinação linear de elementos de $B_{42} \subset B_4$. Se $ml(p_{41}) \neq ml(u_i')$ com $1 \leq i \leq 40$ então $p_{41} \in B_{43}$ e m é escrito como combinação linear de elementos de $(B_{42} \cup B_{43}) \subset B_4$, ou seja, $m \in \langle B_{42} \cup B_{43} \rangle$. Assim $m \in \langle B_4 \rangle$. Admita que $m \in B_{36} \subset B_{43}$. Portanto obtemos que $m \in \langle B_4 \rangle$.

Afirmação 4.3.4. $\langle B_4 \rangle \subset \langle B_1 \rangle$

Considere um polinômio $p \in B_4$ então $p = m_1 + \cdots + m_k$, m_i monômios, $k \geq 1$ com cada $m_i \in B_1$. Portanto $p \in \langle B_1 \rangle$.

Assim concluímos que dois quaisquer conjunto B_i são equivalente, com $1 \leq i \leq 4$. Portanto qualquer conjunto B_i, com $1 \leq i \leq 4$, é uma base de P_4. $\square$

Observação 4.13. Segue da observação (4.2) que B_1 possui $5! = 120$ elementos. Pelo Lema 4.12 temos que B_1 é equivalente a $B_4 = B_{41} \dot{\cup} B_{42} \dot{\cup} B_{43}$. Como temos $4! = 24$ elementos em $B_{41} = \{[x_5, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}], x_{i_5}]\}$ e temos 40 elementos em $B_{42} = \{u_i' \,|\, 1 \leq i \leq 40, u_i' \in S'\}$, segue que existem 56 elementos em

$$B_{43} = \{m = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5} \,|\, m \in B_1, m \neq ml(p), p \in B_{41} \dot{\cup} B_{42}\}.$$

Proposição 4.14. *Considere* $\overline{B_4} = B_{42} \dot{\cup} B_{43}$. *O conjunto*

$$\overline{B_4} + (L_5 \cap P_5) = \{b + (L_5 \cap P_5) \,|\, b \in \overline{B_4}\}$$

é uma base de $P_5/(L_5 \cap P_5)$*, sendo:*

$$B_{42} = \{u_i' \,|\, 1 \leq i \leq 40, u_i' \in S'\} = S',$$
$$B_{43} = \{m = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5} \,|\, m \in B_1, m \neq ml(p), p \in B_{41} \dot{\cup} B_{42}\}.$$

Demonstração: Pelo Lema 4.12 temos que

$$B_4 = B_{41} \dot{\cup} B_{42} \dot{\cup} B_{43} = B_{41} \dot{\cup} \overline{B_4}$$

é uma base de P_5. Pelo Lema 4.3, B_{41} é uma base de $(L_5 \cap P_5)$. Portanto $\overline{B_4} + (L_5 \cap P_5)$ é uma base do grupo quociente (aditivo abeliano livre) $P_5/(L_5 \cap P_5)$. $\square$

Demonstração do Teorema 6 .
Observemos que pela Proposição 4.14,

$$\overline{B_4} + (L_5 \cap P_5) = (B_{42} \dot{\cup} B_{43}) + (L_5 \cap P_5)$$

é uma base de $P_5/(L_5 \cap P_5)$. Sabemos que

$$\begin{gathered} B_{42} = \{u'_i \,|\, 1 \leq i \leq 40, u'_i \in S'\} = \\ = \{u'_i \,|\, u'_i = u_i \in S, 1 \leq i \leq 39\} \dot{\cup} \{u'_{40}\} = S', \end{gathered}$$

com $u'_{40} = [x_2, x_1][x_5, x_3, x_4] - x_1[x_5, x_3, x_4, x_2]$.

Pela Proposição 4.11, temos que $S + (L_5 \cap P_5)$ é uma base de $\mathscr{B}_4 = (L_4 \cap P_5)/(L_5 \cap P_5)$, sendo

$$\begin{gathered} S + (L_5 \cap P_5) = \{u_i + (L_5 \cap P_5) \,|\, u_i \in S, 1 \leq i \leq 40\} = \\ = \big(\{u_i \,|\, u_i \in S, 1 \leq i \leq 39\} \dot{\cup} \{u_{40}\}\big) + (L_5 \cap P_5), \end{gathered}$$

com $u_{40} = 3\big([x_2, x_1][x_5, x_3, x_4] - x_1[x_5, x_3, x_4, x_2]\big)$.

Portanto

$$\begin{gathered} \frac{\overline{B_4} + (L_5 \cap P_5)}{S + (L_5 \cap P_5)} = \\ = \Big(B_{43} \dot{\cup} \{\frac{u'_{40}}{u_{40}}\}\Big) + (L_4 \cap P_5) \end{gathered}$$

é uma base de $P_5/(L_4 \cap P_5) = \dfrac{P_5/(L_5 \cap P_5)}{(L_4 \cap P_5)/(L_5 \cap P_5)}$.

Considere o grupo cíclico infinito $H_i =< m_i + (L_4 \cap P_5) >$ com $m_i = x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} \in B_{43}$. Pela observação (4.8), temos que existem 56 elementos em B_{43} e cada grupo cíclico infinito é isomorfo a $\mathbb{Z}$. Claramente temos que $H =< \dfrac{u'_{40}}{u_{40}} + (L_4 \cap P_5) >$ é isomorfo a $\dfrac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$.

Concluímos a demonstração do Teorema 6.

Referências Bibliográficas

[1] B. Amberg, Y. Sysak, *Associative rings whose adjoint semigroup is locally nilpotent*, Archiv der Mathematik 76 (2001), 426-435.

[2] B. Amberg, Y. Sysak, *On associative rings with locally nilpotent adjoint semigroup*, Communications in Algebra 31 (2003): 123-132.

[3] N. Arbesfeld, D. Jordan, *New results on the lower central series quotients of a free associative algebra*, Journal of Algebra 323 (2010), 1813-1825.

[4] Y. A. Bahturin, *Identical relations in Lie algebras*, VNU Science Press BV, Netherlands, 1987.

[5] M. Balagović, A. Balasubramanian, *On the lower central series quotients of a graded associative algebra*, Journal of Algebra 328 (2011), 287-300.

[6] A. Bapat, D. Jordan, *Lower central series of free algebras in symmetric tensor categories*, Journal of Algebra 373 (2013), 299-311.

[7] S. Bhupatiraju, P. Etingof, D. Jordan, W, Kuszmaul, J. Li, *Lower central series of a free associative algebra over the integers and finite fields*, Journal of Algebra 372 (2012), 251-274 .

[8] B. Bond, D. Jordan, *The lower central series of the symplectic quotient of a free associative algebra*, Journal of Pure and Applied Algebra 217 (2013), 689-699.

[9] E. A. Costa, A. Krasilnikov, *Relations in universal Lie nilpotent associative algebras of class 4* . (www.arxiv.br/1306.4294) .

[10] G. Deryabina, A. Krasilnikov, *The torsion subgroup of the additive group of a Lie nilpotent associative ring of class 3*. (www.arxiv.org/1308.4172)

[11] O. M. Di Vincenzo, *A note on the identities of the Grassmann algebra*, Unione Matematica Italiana. Bollettino A 7 (5) (1981), 188-194.

[12] G. Dobrovolska, P. Etingof, *An upper bound for the lower central series quotients of a free associative algebra*, International Mathematics Research Notices IMRN (2008), no. 12, Art. ID rnn039, 10.

[13] G. Dobrovolska, J. Kim, X. Ma, *On the lower central series of an associative algebra*, Journal of Algebra 320 (2008), 213-237.

[14] M. P. Drazin, K. W. Gruenberg, *Commutators in associative rings*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 49 (1953), 590-594.

[15] V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras*, Graduate course in algebra, Springer, Singapore, 1999.

[16] X. K. Du, *The centers of a radical ring*, Canadian Mathematical Bulletin 35 (1992), 174-179.

[17] P. Etingof, J. Kim, X. Ma, *On universal Lie nilpotent associative algebras*, Journal of Algebra 321 (2009), 697-703.

[18] B. Feigin, B. Shoikhet, *On* $[A,A]/[A,A,A]$ *and on a* W_n*-action on the consecutive commutators of free asociative algebras*, Mathematical Research Letters 14 (2007), 781-795.

[19] A. Giambruno, P. Koshlukov, *On the identities of the Grassmann algebra in Characteristic* $p > 0$, Israel Journal of Mathematics 122 (2001), 305-316.

[20] A. S. Gordienko, *Codimensions of commutators of length 4*, Russian Mathematical Surveys 62 (2007), 187-188.

[21] C. K. Gupta, A. Krasilnikov, *A Solution of a problem of Plotkin an Vovsi and an application to varieties of groups*, Journal Austral. Math. Society (Series A) 67 (1999), 329-355.

[22] N. Gupta, F. Levin, *On the Lie ideals of a ring*, Journal of Algebra 81 (1983), 225-231.

[23] S. A. Jennings, *Central chains of ideals in an associative ring*, Duke Mathematical Journal 9 (1942), 341-355.

[24] S. A. Jennings, *On rings whose associated Lie rings are nilpotent*, Bulletin of the American Mathematical Society 53 (1947), 593-597.

[25] S. A. Jennings, *Radical rings with nilpotent associated groups*, Proceedings and Transactions of the Royal Society of Canada Sect. III 49 (1955), 31-38.

[26] D. Jordan, H. Orem, *An algebro-geometric construction of lower central series of associative algebras*. (www.arxiv.org/1302.3992)

[27] M. Kapranov, *Noncommutative geometry based on commutator expansions*, Journal Reine Angew. Mathematik 505 (1998), 73-118.

[28] A. Krasilnikov, *On the semigroup nilpotency and Lie nilpotency of associative algebras*, Matematicheskie Zametki 62 (1997), 510-519; translation in Mathematical Notes 62 (1997), 426-433. (in Russian)

[29] A. Krasilnikov, *The additive group of a Lie nilpotent associative ring*, Journal of Algebra 392 (2013), 10-22.

[30] G. Kerchev, *On the filtration of a free algebra by its associative lower central series*, Journal of Algebra 375 (2013), 322-327.

[31] V. N. Latysev, *On the choice of basis in a T-ideal*, Sibirskii Matematicheskii Zhurnal (Siberian Mathematical Journal) 4 (1963) 1122-1127. (in Russian)

[32] V. N. Latysev, *On finite generation of a T-ideal with the element* $[x_1,x_2,x_3,x_4]$, Sibirskii Matematicheskii Zhurnal (Siberian Mathematical Journal) 6 (1965), 1432-1434. (in Russian)

[33] V. M. Petrogradsky, *Codimension growth of strong Lie nilpotent associative algebras*, Communications in Algebra 39 (2011), 918-928.

[34] A. P. Popov, *Some finitely based varieties of rings*, C. R. Academie Bulgare Sciences 32 (1979), 855-858.

[35] D. M. Riley, V. Tasić, *Malcev nilpotent algebras*, Arch. Mathematik(Basel) 72 (1999), 22-27.

[36] D. M. Riley, M. C. Wilson, *Associative rings satisfying the Engel condition*, Proceedings of the American Mathematical Society 127 (1999), 973-976.

[37] A. Shalev, *On associative algebras satisfying the Engel condition*, Israel Journal Mathematics 67(1989), 287-290.

[38] R. Tyler, *On the lower central factors of a free associative ring*, Canadian Journal Mathematics 27 (1975), 434-438.

[39] I. B. Volichenko, *The T-ideal generated by the element* $[x_1, x_2, x_3, x_4]$, Preprint 22, Institute of Mathematics of the Academy os Sciences of the Belorussian SSR, (1978). (in Russian)