

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Superfícies de Weingarten especiais folheadas por círculos

por

**Igor de Alcântara Barroso**

Brasília

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Superfícies de Weingarten especiais folheadas por círculos

por

Igor de Alcântara Barroso \*

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília,  
como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

**MESTRE EM MATEMÁTICA**

Brasília

Comissão Examinadora:

---

Prof. Carlos Maber Carrion Riveros - UnB - Orientador

---

Prof. Armando Mauro Vasquez Corro - UFG - Examinador

---

Prof. Nilton Moura Barroso Neto - UnB - Examinador

---

\*O autor foi bolsista do Reuni durante a elaboração deste trabalho.

*ao Jaime, à Marília, ao Wilton,  
e à Ely*

# Agradecimentos

---

A presente dissertação é fruto de um longo trabalho. Apesar de diversas dificuldades e vários imprevistos, logrei concluir mais um capítulo de minha formação. Porém, eu não teria conseguido tal feito sem a ajuda e colaboração de muitas pessoas e quero agradecer especialmente algumas delas.

Primeiro, eu gostaria de agradecer meu orientador, professor Carlos Maber Carrion Riveros, pela confiança no meu trabalho, pela liberdade que me concedeu, e pelo apoio que me forneceu ao longo da jornada que levou à conclusão desta dissertação.

Primeiro, eu gostaria de agradecer aos professores que tanto me ensinaram ao longo de minha formação.

Obrigado aos docentes da Universidade de Brasília do Departamento de Matemática pela riqueza, qualidade, e diversidade dos ensinamentos que me foram ministrados.

Obrigado aos professores da Université Paris-Sud do *Magistère en Physique Fondamentale*, aos professores de *Classe Préparatoire MP/MPSI* dos Lycée Claude Bernard e Lycée Janson de Sailly pela tripla formação que recebi em matemática, física e computação. As armas que adquiri ainda na graduação me permitiram abordar este trabalho sob diversos ângulos.

Obrigado aos professores (e hoje colegas) do Lycée français François Mitterrand de Brasília, não só pela sólida base de conhecimentos, mas também pelos métodos de trabalho que ali adquiri, e que me levaram onde cheguei hoje.

Primeiro, eu gostaria de agradecer meus pais Hellem, Wilton e Ana Beatriz que fizeram de mim quem sou hoje e a quem devo tudo. Sou eternamente grato pelos esforços fornecidos, sacrifícios realizados, e carinho demonstrado. Espero que esta dissertação possa de alguma forma começar a retribuir o que fizeram por mim.

# Resumo

---

Baseado no trabalho de Rafael López [15], estudamos quais são as superfícies do espaço euclidiano de dimensão 3, folheadas por círculos, que satisfazem uma condição de Weingarten do tipo  $aH + bK = c$ , onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes e,  $H$  e  $K$  são respetivamente a curvatura média e Gaussiana. Distinguiremos dois casos. Se os planos de folheação não são paralelos, somente subconjuntos de esfera verificam a condição de Weingarten. No caso contrário, se os planos de folheação são paralelos, as superfícies são parte de superfícies de revolução, ou superfícies mínimas de Riemann ( $H = 0$ ) ou cones generalizados ( $K = 0$ ).

**Palavras chave:** Superfície cíclica, superfície de Weingarten, curvatura média e curvatura Gaussiana.

# Abstract

---

Based on an article by Rafel López [15], we study the surfaces in the Euclidean 3-space, foliated by circles that satisfy a Weingarten condition of the type  $aH + bK = c$ , where  $a$ ,  $b$  and  $c$  are constants, and  $H$ , and  $K$  denote the mean and Gaussian curvature, respectively. In order to do that, we will distinguish two cases. First, when the foliation planes are not parallel, we shall conclude that such a surface must be a subset of a sphere. When the foliation planes are parallel, such surface is either part of a surface of revolution, one of the Riemann's minimal examples (i.e.  $H = 0$ ), or a generalized cone (i.e.  $K = 0$ ).

**Keywords:** Ciclic surface, Weingarten surface, mean and Gaussian curvature.

# Sumário

---

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>4</b>
<b>2 Superfícies <math>SW</math> com planos de folheação não paralelos</b>	<b>7</b>
2.1 Cálculo da equação (1.3) . . . . .	7
2.2 Relação de Weingarten do tipo $aH + bK = 0$ . . . . .	11
2.3 Relação de Weingarten do tipo $aH + bK = c \neq 0$ . . . . .	19
<b>3 Superfícies <math>SW</math> com planos de folheação paralelos</b>	<b>29</b>
3.1 Cálculo da equação (1.3) . . . . .	29
3.2 Superfícies $SW$ de curvatura Gaussiana constante . . . . .	30
3.3 Superfícies $SW$ de curvatura média constante . . . . .	31
3.4 Relação de Weingarten do tipo $aH + bK = 0$ . . . . .	32
3.5 Relação de Weingarten do tipo $aH + bK = c \neq 0$ . . . . .	35
<b>4 Apêndice: Expressões - <i>Mathematica</i></b>	<b>39</b>
4.1 Expressões das curvaturas quando os planos de folheação não são paralelos	39
4.2 Derivação no referencial móvel de Frenet com o <i>Mathematica</i> . . . . .	40
4.3 Expressões das curvaturas quando os planos de folheação são paralelos . .	41
4.4 Resolução numérica de equações diferenciais e plotagem . . . . .	41
4.5 Especificações técnicas . . . . .	42
<b>Bibliografia</b>	<b>43</b>

# Introdução

---

Na segunda metade do século XIX, em busca das superfícies isométricas às superfícies de revolução, devemos a Weingarten [22, 23] a introdução da classe de superfícies que tem hoje seu nome.

**Definição 1.** *Seja  $S$  uma superfície no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . Dizemos que  $S$  é de Weingarten se existir alguma função suave  $\phi$  de duas variáveis, tal que as curvaturas principais  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  de  $S$  verifiquem  $\phi(\kappa_1, \kappa_2) = 0$ .*

Desde sua introdução, esta classe tem sido estudada por vários geômetras [2, 6, 8, 9, 21], e mais recentemente em [7, 12, 16, 18, 20]. Em [1] obtemos aplicações dessas superfícies na área de desenho assistido por computador e na pesquisa de formas. Contudo, o problema da classificação de todas as superfícies de Weingarten continua em aberto.

Observamos que a existência de uma relação entre as curvaturas principais de uma superfície  $S$  implica a existência de uma relação, esta entre suas curvaturas Gaussiana  $K$  e média  $H$ . O exemplo mais simples de tal relação é dado por

$$aH + bK = c \tag{1}$$

onde  $a^2 + b^2 \neq 0$ . Neste caso particular, dizemos que uma superfície para a qual (1) vale é *especial de Weingarten (SW)*.

Uma primeira abordagem às superfícies  $SW$  consiste em procurar as superfícies de revolução que sejam  $SW$ . Consideramos uma parametrização local de uma superfície de revolução

$$X(u, v) = (r(u) \cos v, r(u) \sin v, u).$$

Depois de calculadas as derivadas sucessivas, assim como os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental, a equação (1) se resume à equação diferencial

$$-4 \left( cr (1 + r'^2)^2 + br'' \right)^2 + a^2 (1 + r'^2) (1 + r'^2 - rr'')^2 = 0,$$

cujas resoluções responderia à pergunta inicial. Para soluções no casos onde  $H$  ou  $K$  são constantes, consultar [3, 4], e quando  $c = 0$ , ver [18].

Também na segunda metade do século XIX, devemos a Enneper [5] a noção de superfície cíclica. Esse tipo de superfície constitui uma classe mais ampla que aquela das superfícies de revolução, e por isso elas têm sido estudadas deste então.

**Definição 2.** *Uma superfície cíclica  $S$  do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  é uma superfície determinada por uma família suave a um parâmetro de planos, cujas interseções com  $S$  são partes de círculos.*

Fica portanto claro que essa classe inclui as superfícies de revolução, mas não se limita a elas. De fato, os planos de folheação não são necessariamente paralelos, e mesmo existindo dois círculos de folheação que se encontram em planos paralelos, as direções de seus raios não são necessariamente ortogonais à reta ligando seus centros. Também ressaltamos que a esfera é trivialmente cíclica, já que suas interseções com qualquer família de planos serão círculos. Em dimensão superior, a partir dos trabalhos de Nitsche e Jagy [10, 11, 17], hipersuperfícies com curvatura média constante e folheadas por esferas foram estudadas, inclusive por López [14].

Portanto, o objetivo deste trabalho é a busca por superfícies cíclicas  $SW$ , inspirado pelos resultados dos casos onde a curvatura Gaussiana ou a curvatura média é constante. Em ambos casos, é possível afirmar que tais superfícies estão contidas na esfera, ou que no caso contrário os planos de folheação são paralelos [5, 13, 17]. Em particular quando os planos de folheação são paralelos, tal superfície tem que ser um subconjunto de uma superfície de revolução. No caso contrário há duas alternativas. A primeira, ser uma superfície mínima de Riemann [19], o que ocorre quando  $H = 0$ . A segunda, ser um cone generalizado, uma superfície cíclica cujos centros dos círculos de folheação estão em uma reta, e cujos raios são dados por uma função linear. Isto ocorre quando  $K = 0$  [13].

Depois de fixadas algumas notações e estabelecidos alguns resultados clássicos sobre superfícies cíclicas, a segunda parte desta dissertação consistirá na demonstração de um primeiro teorema

**Teorema 1.** *Se  $S$  é uma superfície  $SW$  folheada por partes de círculos que se encontram em uma família a um parâmetro de planos, então  $S$  é um subconjunto de uma esfera, ou os planos de folheação são paralelos.*

Uma vez provado este resultado, passaremos ao estudo das superfícies folheadas por círculos que se encontram em planos paralelos. Em tal caso, provaremos que

**Teorema 2.** *Seja  $S$  uma superfície  $SW$  folheada por partes de círculos que se encontram em uma família a um parâmetro de planos paralelos. Então  $S$  é parte de uma superfície de revolução, ou  $S$  é parte de uma superfície mínima de Riemann, ou é parte de um cone generalizado.*

A partir desse último teorema obtemos facilmente dois corolários:

**Corolário 1.** *Toda superfície do espaço euclidiano que é folheada por círculos e que satisfaz uma condição do tipo  $aH + bK = c$  é uma superfície de revolução, uma superfície mínima de Riemann, ou um cone generalizado.*

**Corolário 2.** *Superfícies mínimas de Riemann e cones generalizados são as únicas superfícies cíclicas, não rotacionais, que satisfazem uma relação de Weingarten do tipo  $aH + bK = c$ .*

As demonstrações de ambos teoremas seguirão o mesmo procedimento. Primeiro exibimos uma parametrização local de uma superfície  $S$  que seja  $SW$ . Teremos duas parametrizações segundo que os planos de folheadura sejam ou não paralelos. Na sequência, com o auxílio do programa *Mathematica*, calculamos as curvaturas Gaussiana e média, cujas expressões inserimos na relação de Weingarten. Depois de simplificada a equação assim obtida, ela se reduz a um polinômio trigonométrico de grau 8 nulo. Pela independência linear de *coseno* e *seno* obtemos 17 equações que serão resolvidas.

# Preliminares

Primeiro, vamos fixar algumas notações. Sejam  $S$  uma superfície em  $\mathbb{R}^3$ ,  $U$  um aberto de  $\mathbb{R}^2$ . Consideremos uma parametrização local de  $S$

$$\begin{aligned} \mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow V \subset S \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \mathbf{X}(u, v) \end{aligned}$$

Sejam  $\mathbf{X}_u$ ,  $\mathbf{X}_v$  e  $N$  os campos de vetores definidos por

$$\mathbf{X}_u = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u}, \quad \mathbf{X}_v = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v}, \quad N = \frac{\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v|}.$$

Em cada plano tangente, a métrica induzida  $\langle, \rangle$  determina a primeira forma fundamental

$$I = \langle d\mathbf{X}, d\mathbf{X} \rangle = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

cujos coeficientes são funções diferenciáveis definidas por

$$E = \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle, \quad F = \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle, \quad G = \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle.$$

Além disso, temos definido a segunda forma fundamental dada por

$$II = -\langle dN, d\mathbf{X} \rangle = edu^2 + 2fdudv + gdv^2,$$

onde os coeficientes são função diferenciáveis definidas por

$$e = \langle N, \mathbf{X}_{uu} \rangle, \quad f = \langle N, \mathbf{X}_{uv} \rangle, \quad g = \langle N, \mathbf{X}_{vv} \rangle.$$

Dessa forma, as expressões clássicas das curvaturas média e Gaussiana são dadas por

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}, \quad K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Observando que

$$\begin{aligned} e &= \langle N, \mathbf{X}_{uu} \rangle \\ &= \left\langle \frac{\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v|}, \mathbf{X}_{uu} \right\rangle \\ &= \frac{1}{|\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v|} \langle \mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{uu} \rangle \\ &= \frac{1}{|\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v|} [\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{uu}]. \end{aligned}$$

onde  $[\cdot, \cdot, \cdot]$  é o produto misto (i.e. o determinante cujas linhas são os vetores do produto). E também observando que

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v| &= \sqrt{|\mathbf{X}_u|^2 \cdot |\mathbf{X}_v|^2 - \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle^2} \\ &= \sqrt{EG - F^2} \\ |\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v| &= \sqrt{W}, \quad \text{onde } W = EG - F^2, \end{aligned}$$

podemos reescrever os coeficientes da segunda forma fundamental como

$$e = \frac{[\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{uu}]}{\sqrt{W}}, \quad f = \frac{[\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{uv}]}{\sqrt{W}}, \quad g = \frac{[\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{vv}]}{\sqrt{W}}.$$

Usando essas expressões, as curvaturas se escrevem

$$H = \frac{G[\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{uu}] - 2F[\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{uv}] + E[\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{vv}]}{2W^{3/2}} := \frac{H_1}{2W^{3/2}}, \quad (1.1)$$

$$K = \frac{[\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{uu}][\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{vv}] - [\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{uv}]^2}{W^2} := \frac{K_1}{W^2}. \quad (1.2)$$

Conforme definido na introdução (1), dizemos que  $S$  é uma superfície de Weingarten especial ( $SW$ ) se existir uma relação do tipo :

$$aH + bK = c,$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes tais que  $a^2 + b^2 \neq 0$ .

Combinando (1),(1.1) e (1.2) obtemos que a condição para uma superfície ser  $SW$  é

$$\begin{aligned}a\frac{H_1}{2W^{3/2}} + b\frac{K_1}{W^2} &= c \\aH_1W^{1/2} + 2bK_1 &= 2cW^2 \\aH_1W^{1/2} &= 2cW^2 - 2bK_1 \\aH_1W^{1/2} &= 2(cW^2 - bK_1),\end{aligned}$$

e elevando ao quadrado

$$a^2H_1^2W - 4(cW^2 - bK_1)^2 = 0. \tag{1.3}$$

Os dois teoremas cujas demonstrações vamos expor agora, envolvem o cálculo de (1.3).

## Superfícies $SW$ com planos de folheação não paralelos

### 2.1 Cálculo da equação (1.3)

Seja  $(\Pi_u)_{u \in I}$  a família de planos de folheação tal que  $\forall u \in I$ ,  $\Pi_u \cap S$  seja uma parte de círculo. Seja  $Z$  um campo vetorial unitário normal a  $\Pi_u$ . Consideramos  $\Gamma = \Gamma(u)$  uma curva integral qualquer de  $Z$  definida em um aberto de  $I$ , e supomos  $\Gamma$  parametrizada pelo comprimento de arco. Logo,  $\mathbf{t}(u) = \Gamma'(u) = Z(\Gamma(u))$  é o vetor unitário tangente de  $\Gamma$ . Em particular, temos que

$$\begin{aligned} \forall u \in I, \quad \left| \frac{d\Gamma(u)}{du} \right|^2 &= 1, \\ \frac{d}{du} \left| \frac{d\Gamma(u)}{du} \right|^2 &= 0, \\ \left\langle \frac{d\Gamma(u)}{du}, \frac{d^2\Gamma(u)}{du^2} \right\rangle &= 0 \end{aligned}$$

Então, denotando por  $'$  a derivada em relação a  $u$ , definimos o vetor normal unitário  $\mathbf{n}$  a  $\Gamma$  por  $\mathbf{n} = \frac{\Gamma''(u)}{|\Gamma''(u)|}$ .

Finalmente, definimos o vetor binormal unitário  $\mathbf{b}$  por,  $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$ .

A base ortonormal  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  é chamada de *referencial móvel de Frenet* da curva  $\Gamma$ .

Isso nos permite explicitar uma parametrização local de  $S$

$$\mathbf{X}(u, v) = \mathbf{c}(u) + r(u)[\cos(v)\mathbf{n}(u) + \sin(v)\mathbf{b}(u)]. \quad (2.1)$$

onde,  $r = r(u) > 0$  e  $\mathbf{c} = \mathbf{c}(u)$  representam respectivamente o raio e o centro do círculo de folheação que se encontra no plano  $\Pi_u$ . Dado que precisaremos calcular as derivadas parciais de  $\mathbf{X}$ , convém calcular primeiro a derivada dos vetores do referencial de Frenet com relação a  $u$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= \Gamma', \\ \mathbf{t}' &= \Gamma'', \\ &= |\Gamma''| \cdot \frac{\Gamma''}{|\Gamma''|}, \\ &= |\Gamma''| \mathbf{n}, \\ \mathbf{t}' &= \kappa \mathbf{n}.\end{aligned}$$

Chamamos  $\kappa \geq 0$  de *curvatura* de  $\Gamma$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \frac{\Gamma''}{|\Gamma''|}, \\ \mathbf{n}' &= \frac{\Gamma''' \cdot |\Gamma''| - \Gamma'' \cdot \frac{\langle \Gamma'' | \Gamma''' \rangle}{|\Gamma''|}}{|\Gamma''|^2}, \\ &= \frac{\Gamma''' \cdot |\Gamma''|^2 - \Gamma'' \cdot \langle \Gamma'' | \Gamma''' \rangle}{|\Gamma''|^3}.\end{aligned}$$

Usando o fato de  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  ser uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ , vamos decompôr  $\mathbf{n}'$ .

Temos

$$\langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle = \frac{\langle \Gamma''', \Gamma'' \rangle \cdot |\Gamma''|^2 - \langle \Gamma'', \Gamma'' \rangle \cdot \langle \Gamma'', \Gamma''' \rangle}{|\Gamma''|^4} = 0.$$

Continuando,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{n}', \mathbf{t} \rangle &= \frac{\langle \Gamma''', \Gamma' \rangle \cdot |\Gamma''|^2 - \overbrace{\langle \Gamma'', \Gamma' \rangle}^{=0} \cdot \langle \Gamma'', \Gamma''' \rangle}{|\Gamma''|^3}, \\ \langle \mathbf{n}', \mathbf{t} \rangle &= \frac{\langle \Gamma''', \Gamma' \rangle}{|\Gamma''|}.\end{aligned}$$

Lembrando que  $\langle \Gamma', \Gamma'' \rangle = 0$ , e derivando, obtemos

$$\begin{aligned}\langle \Gamma'', \Gamma'' \rangle + \langle \Gamma', \Gamma''' \rangle &= 0, \\ \text{logo, } \langle \Gamma', \Gamma''' \rangle &= -|\Gamma''|^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{n}', \mathbf{t} \rangle &= -\frac{|\Gamma''|^2}{|\Gamma''|}, \\ &= -|\Gamma''|, \\ \langle \mathbf{n}', \mathbf{t} \rangle &= -\kappa.\end{aligned}$$

E finalizando a decomposição

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{n}', \mathbf{b} \rangle &= \langle \mathbf{n}', \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} \rangle, \\ &= \left\langle \mathbf{n}', \Gamma' \wedge \frac{\Gamma''}{|\Gamma''|} \right\rangle, \\ &= \frac{1}{|\Gamma''|} \langle \mathbf{n}', \Gamma' \wedge \Gamma'' \rangle, \\ &= \frac{\langle \Gamma''', \Gamma' \wedge \Gamma'' \rangle \cdot |\Gamma''|^2 - \overbrace{\langle \Gamma'', \Gamma' \wedge \Gamma'' \rangle}^{=0} \cdot \langle \Gamma'', \Gamma''' \rangle}{|\Gamma''|^3}, \\ &= \frac{[\Gamma', \Gamma'', \Gamma''']}{|\Gamma''|}, \\ \langle \mathbf{n}', \mathbf{b} \rangle &= \sigma.\end{aligned}$$

Assim temos que,  $\mathbf{n}' = -\kappa \mathbf{t} + \sigma \mathbf{b}$ , onde chamamos  $\sigma$  de *torção* da curva  $\Gamma$ .

E finalmente,

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}, \\ \mathbf{b}' &= \mathbf{t}' \wedge \mathbf{n} + \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}', \\ &= \kappa \underbrace{\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}}_{=0} + \mathbf{t} \wedge (-\kappa \mathbf{t} + \sigma \mathbf{b}), \\ &= -\kappa \underbrace{\mathbf{t} \wedge \mathbf{t}}_{=0} + \sigma \underbrace{\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}}_{=-\mathbf{n}}, \\ \mathbf{b}' &= -\sigma \mathbf{n}.\end{aligned}$$

Resumindo,

$$\begin{cases} \mathbf{t}' &= \kappa \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -\kappa \mathbf{t} + \sigma \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= -\sigma \mathbf{n} \end{cases} \quad (2.2)$$

Esse sistema de equações é conhecido como as *equações de Frenet*.

Também definimos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  três funções suaves de  $u$ , tais que

$$\mathbf{c}' = \alpha \mathbf{t} + \beta \mathbf{n} + \gamma \mathbf{b}. \quad (2.3)$$

Vamos usar as equações de Frenet (2.2) para calcular  $\mathbf{c}''$ . Para isso, usamos uma notação matricial e a lei de composição das velocidades.

$$\begin{aligned} \mathbf{c}' &= \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}_{Frenet} . \\ \text{Logo, } \mathbf{c}'' &= \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{bmatrix}_{Frenet} + \begin{bmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\sigma \\ 0 & \sigma & 0 \end{bmatrix}_{Frenet} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}_{Frenet} , \\ \mathbf{c}'' &= \begin{bmatrix} \alpha' - \kappa\beta \\ \beta' + \kappa\alpha - \sigma\gamma \\ \gamma' + \sigma\beta \end{bmatrix}_{Frenet} . \end{aligned}$$

Usando esse método, podemos calcular simplesmente as derivadas parciais sucessivas de  $\mathbf{X}$  com relação a  $u$ . Para a derivação com relação a  $v$ , podemos usar a derivada usual, uma vez que o referencial  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  não depende de  $v$ .

Com isso podemos agora calcular a equação (1.3). O resultado, depois de linearizados todos os termos em  $\cos(v)$  e  $\sin(v)$ , pode ser escrito da forma seguinte

$$\forall (u, v) \in U, \quad A_0(u) + \sum_{k=1}^8 A_k(u) \cos(kv) + B_k(u) \sin(kv) = 0. \quad (2.4)$$

Como os termos em  $\cos(kv)$  e em  $\sin(kv)$  são linearmente independentes, essa combinação linear é nula, se e somente se

$$\forall u \in I, \forall k = 1, \dots, 8, \quad A_0 = A_k = B_k = 0.$$

Para demonstrar o teorema 1 vamos seguir o seguinte raciocínio. Consideramos uma superfície cíclica  $S$  que seja  $SW$ . Supomos que os planos de folheação não são paralelos (i.e.  $\kappa \neq 0$ ) e obteremos dois resultados

- $S$  está contida em uma esfera ou,
- uma contradição, o que implicará que os planos de folheação *devem ser* paralelos (i.e.  $\kappa = 0$ ).

## 2.2 Relação de Weingarten do tipo $aH + bK = 0$

Vamos supor que  $c = 0$  em  $aH + bK = c$ . Enunciamos aqui 3 lemas para auxiliar na demonstração do teorema 1.

**Lema 1.** *Não existe superfície SW cíclica cujos círculos de folheação não são paralelos e cuja curvatura Gaussiana é nula.*

**Lema 2.** *Não existe superfície SW cíclica cujos círculos de folheação não são paralelos e cuja curvatura média é nula.*

**Lema 3.** *A esfera é a única superfície cíclica cujos círculos de folheação não são paralelos e que verifica uma condição de Weingarten do tipo*

$$aH + bK = 0.$$

### 2.2.1 Superfícies SW de curvatura Gaussiana nula (lema 1)

Aqui basta supor  $a = 0$ . Já que  $a^2 + b^2 \neq 0$  temos que  $b \neq 0$ . Segue então que  $K = 0$ , logo  $K_1 = 0$ . Observando que  $K_1$  se escreve como

$$K_1 = C_0(u) + \sum_{k=1}^4 C_k(u) \cos(kv) + D_k(u) \sin(kv).$$

Assim

$$K_1 = 0 \iff \forall u \in I, \forall k = 1, \dots, 4, \quad C_0 = C_k = D_k = 0.$$

Dado que

$$C_4 = \frac{1}{8}r^4\kappa^2(\beta^2 - \gamma^2 + r^2\kappa^2) \quad \text{e} \quad D_4 = \frac{1}{4}r^4\beta\gamma\kappa^2,$$

temos duas únicas soluções para  $D_4 = 0$ ,  $\beta = 0$  ou  $\gamma = 0$ .

#### 2.2.1.1 Caso $\beta = 0$

Neste caso, temos

$$C_4 = \frac{1}{8}r^4\kappa^2(-\gamma^2 + r^2\kappa^2) = 0, \text{ implica que } \gamma^2 = r^2\kappa^2,$$

o que por sua vez nos fornece que

$$C_3 = -\frac{3}{4}\alpha r^5\kappa^3 = 0, \text{ portanto } \alpha = 0.$$

Substituindo esses valores em  $D_3$ , temos

$$D_3 = \pm \frac{3}{4} r^5 \kappa^3 r' = 0, \text{ logo } r' = 0,$$

e finalmente, obtemos que  $C_2$  se escreve

$$C_2 = r^6 \kappa^4 = 0.$$

O que contradiz  $\kappa \neq 0$  e  $r > 0$

### 2.2.1.2 Caso $\gamma = 0$

Agora, supondo  $\gamma = 0$ , temos

$$C_4 = \frac{1}{8} r^4 \kappa^2 (\beta^2 + r^2 \kappa^2) = 0.$$

O que também contradiz nossas hipóteses.

□

## 2.2.2 Superfícies $SW$ de curvatura média nula (lema 2)

Aqui basta supor  $b = 0$ . Já que  $a^2 + b^2 \neq 0$  temos que  $a \neq 0$ . Segue então que  $H = 0$ , logo  $H_1 = 0$ . Observando que  $H_1$  se escreve como

$$H_1 = \overline{C}_0(u) + \sum_{k=1}^3 \overline{C}_k(u) \cos(kv) + \overline{D}_k(u) \sin(kv).$$

Assim

$$H_1 = 0 \iff \forall u \in I, \forall k = 1, \dots, 3, \quad \overline{C}_0 = \overline{C}_k = \overline{D}_k = 0.$$

Observando que

$$\overline{C}_3 = -\frac{1}{2} r^3 \kappa (\beta^2 - \gamma^2 + r^2 \kappa^2) \quad \text{e} \quad \overline{D}_3 = -r^3 \beta \gamma \kappa,$$

precisamos estudar apenas dois casos:  $\beta = 0$  ou  $\gamma = 0$

**2.2.2.1 Caso  $\beta = 0$** 

Temos então que  $\overline{C}_3$  se escreve como

$$\overline{C}_3 = \frac{1}{2}r^3\kappa(\gamma^2 - r^2\kappa^2).$$

Portanto,  $\overline{C}_3 = 0$  implica que  $\gamma^2 = \kappa^2r^2$ . Logo,

$$\overline{C}_2 = \frac{5}{2}\kappa^2r^4\alpha.$$

De  $\overline{C}_2 = 0$ , temos que  $\alpha = 0$ . Também temos

$$\overline{D}_2 = \frac{5}{2}r^4(\kappa'\gamma - \kappa\gamma').$$

De  $\overline{D}_2 = 0$ , temos que  $\kappa'\gamma - \kappa\gamma' = 0$ . Porém

$$\begin{aligned} (\kappa'\gamma - \kappa\gamma')\gamma &= \kappa'\gamma^2 - \kappa\gamma\gamma', \\ &= \kappa^2\kappa'r^2 - \kappa^2r(\kappa'r + \kappa r'), \\ &= -\kappa^3rr'. \end{aligned}$$

Portanto  $\kappa'\gamma - \kappa\gamma' = 0 \Leftrightarrow r' = 0$ .

Com essas condições, obtemos uma contradição com  $\overline{C}_1 = 0$ , ao observar que

$$\overline{C}_1 = -3\kappa^3r^5.$$

**2.2.2.2 Caso  $\gamma = 0$** 

Neste caso, temos

$$\overline{C}_3 = -\frac{1}{2}\kappa r^3(\beta^2 + \kappa^2r^2).$$

De  $\overline{C}_3 = 0$  obtemos uma contradição.

□

### 2.2.3 Demonstração do lema 3

Dado que  $a \neq 0$ , podemos supôr sem perda de generalidade que  $a = 1$ . Assim, os coeficientes  $A_8$  e  $B_8$  são dados por

$$\begin{aligned} A_8 = & \frac{1}{32} r^8 \kappa^2 \left\{ \beta^6 - \beta^4 [15\gamma^2 + (b^2 - 3r^2) \kappa^2] \right. \\ & + \beta^2 [15\gamma^4 + 6(b^2 - 3r^2) \gamma^2 \kappa^2 + r^2 (-2b^2 + 3r^2) \kappa^4] \\ & \left. - (\gamma^2 - r^2 \kappa^2)^2 [\gamma^2 + (b^2 - r^2) \kappa^2] \right\}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} B_8 = & \frac{1}{16} r^8 \beta \gamma \kappa^2 \left\{ 3\beta^4 - 2\beta^2 [5\gamma^2 + (b^2 - 3r^2) \kappa^2] \right. \\ & \left. + (\gamma^2 - r^2 \kappa^2) [3\gamma^2 + (2b^2 - 3r^2) \kappa^2] \right\}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dado que  $B_8 = 0$ , distinguimos 3 casos,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0$  e  $\beta\gamma \neq 0$ .

#### 2.2.3.1 Caso $\beta = 0$

Supondo  $\beta = 0$ , temos que  $A_8$  se escreve como

$$A_8 = -\frac{1}{32} r^8 \kappa^2 [\gamma^2 + (b^2 - r^2) \kappa^2] (\gamma^2 - r^2 \kappa^2)^2.$$

Logo, de  $A_8 = 0$  obtemos

$$\gamma^2 = \kappa^2 r^2 \quad \text{ou} \quad \gamma^2 = \kappa^2 (r^2 - b^2).$$

##### 2.2.3.1.1 Caso $\gamma^2 = \kappa^2 r^2$

Neste caso, temos

$$A_6 = \frac{9}{8} b^2 \kappa^6 r^{10} [(r')^2 - \alpha^2] \quad \text{e} \quad B_6 = \pm \frac{9}{4} b^2 \alpha \kappa^6 r^{10} r'.$$

Assim, deduzimos que  $\alpha = r' = 0$ . Porém, neste caso  $A_4 = -2b^2 \kappa^8 r^{12}$ , e  $A_4 = 0$  nos dá uma contradição.

##### 2.2.3.1.2 Caso $\gamma^2 = \kappa^2 (r^2 - b^2)$

Temos então  $\gamma = \pm \kappa \sqrt{r^2 - b^2}$ , com isso calculamos as coeficientes  $A_7$  e  $B_7$

$$A_7 = -\frac{1}{16} b^4 r^9 \alpha \kappa^7 \quad \text{e} \quad B_7 = \pm \frac{b^4 \kappa^7 r^{10} r'}{16 \sqrt{r^2 - b^2}}.$$

Então  $A_7 = 0$  e  $B_7 = 0$  implicam que  $\alpha = 0$  e  $r' = 0$ .

Logo

$$A_4 = \frac{1}{8}b^2r^8 (r^2 - b^2) (3b^2 + 5r^2) \kappa^8.$$

Por sua vez,  $A_4 = 0$  implica que  $r = \pm b$ , e então  $\gamma = 0$ .

Resumindo, temos  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ , ou seja  $\mathbf{c}' = 0$ , logo existe  $\mathbf{c}_0 \in \mathbb{R}^3$  tal que  $\forall u \in I$ ,  $\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}_0$ .

De (2.1) deduzimos que

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(u, v) &= \mathbf{c}(u) + r(u)[\cos(v) \mathbf{n}(u) + \sin(v) \mathbf{b}(u)], \\ \mathbf{X}(u, v) &= \mathbf{c}_0 + r[\cos(v) \mathbf{n}(u) + \sin(v) \mathbf{b}(u)], \\ |\mathbf{X}(u, v) - \mathbf{c}_0|^2 &= r^2 = b^2. \end{aligned}$$

Concluimos que a superfície  $S$  é um conjunto aberto da esfera de centro  $\mathbf{c}_0$  e de raio  $|b|$ .

### 2.2.3.2 Caso $\gamma = 0$

Agora, se  $\gamma = 0$ ,  $A_8$  se escreve como

$$A_8 = \frac{1}{32}r^8\kappa^2 (\beta^2 + r^2\kappa^2)^2 [\beta^2 + \kappa^2 (r^2 - b^2)].$$

Logo,  $A_8 = 0$  implica que  $\beta = \pm\kappa\sqrt{b^2 - r^2}$  e então

$$A_7 = -\frac{1}{16}b^4r^9\kappa^7 \left( \alpha \pm \frac{rr'}{\sqrt{b^2 - r^2}} \right).$$

Dado que  $A_7 = 0$ , temos que  $\alpha = \mp \frac{rr'}{\sqrt{b^2 - r^2}}$ , e então (2.3) nos dá

$$\mathbf{c}' = \mp \frac{rr'}{\sqrt{b^2 - r^2}} \mathbf{t} \pm \kappa\sqrt{b^2 - r^2} \mathbf{n} = \left( \pm\sqrt{b^2 - r^2} \mathbf{t} \right)'$$

Assim

$$\exists \mathbf{c}_0 \in \mathbb{R}^3, \text{ tal que } \mathbf{c} = \mathbf{c}_0 \pm \sqrt{b^2 - r^2} \mathbf{t}.$$

E portanto

$$\mathbf{X}(u, v) = \mathbf{c}_0 \pm \sqrt{b^2 - r^2} \mathbf{t} + r (\cos v \mathbf{n} + \sin v \mathbf{b}).$$

Donde segue que

$$|\mathbf{X}(u, v) - \mathbf{c}_0|^2 = b^2 - r^2 + r^2 = b^2.$$

Concluimos que  $S$  é um aberto da esfera de centro  $\mathbf{c}_0$  e de raio  $|b|$ .

### 2.2.3.3 Caso $\beta\gamma \neq 0$

Dado que  $B_8 = 0$ , podemos calcular  $\beta^2$  em função de  $\gamma^2$  a partir de (2.6)

$$\beta^2 = \frac{1}{3} \left[ 5\gamma^2 + (b^2 - 3r^2) \kappa^2 \pm \underbrace{\sqrt{16\gamma^4 + 4(b^2 - 3r^2)\gamma^2\kappa^2 + b^4\kappa^4}}_{=A} \right]. \quad (2.7)$$

Substituindo esse valor de  $\beta^2$  em  $A_8 = 0$  e lembrando que  $\kappa \neq 0$ , obtemos a seguinte equação

$$416\gamma^6 + 96(b^2 - 3r^2)\gamma^4\kappa^2 + 18b^4\gamma^2\kappa^4 + b^6\kappa^6 = \mp A(112\gamma^4 + 16(b^2 - 3r^2)\gamma^2\kappa^2 + b^4\kappa^4).$$

Elevando os dois lados ao quadrado e dividindo por  $\gamma \neq 0$ , essa equação é equivalente a

$$(\gamma^2 - r^2\kappa^2) \left[ (4\gamma^2 + b^2\kappa^2)^2 - 16r^2\kappa^2\gamma^2 \right] = 0.$$

O que nos leva a discutir os dois casos  $\gamma^2 = \kappa^2 r^2$  e  $(4\gamma^2 + b^2\kappa^2)^2 - 16\gamma^2\kappa^2 r^2 = 0$ .

#### 2.2.3.3.1 Caso $\gamma^2 = \kappa^2 r^2$

Neste caso, calculamos  $\beta^2$  usando (2.7)

$$\beta^2 = \frac{2\kappa^2}{3} (2r^2 + b^2) \quad \text{ou} \quad \beta^2 = 0.$$

Já que  $\beta \neq 0$ , descartamos o segundo valor. Usando os valores de  $\beta^2$  e  $\gamma^2$  em  $A_8$  obtemos que

$$A_8 = -\frac{1}{216} \kappa^8 r^8 (b^2 + 2r^2) (b^2 + 8r^2)^2.$$

Assim,  $A_8 = 0$  nos fornece uma contradição.

#### 2.2.3.3.2 Caso $(4\gamma^2 + b^2\kappa^2)^2 - 16\gamma^2\kappa^2 r^2 = 0$

Neste caso, calculamos  $\gamma^2$

$$\gamma^2 = \frac{\kappa^2}{4} \left( r \pm \sqrt{r^2 - b^2} \right)^2.$$

Agora podemos calcular  $\beta^2$ . Porém como as expressões de  $\beta^2$  e  $\gamma^2$  envolvem duas possibilidades de sinal ( $\pm$ ) e os sinais nessas duas expressões são independentes, devemos

estudar caso a caso.

$$\gamma_+^2 \quad \beta_+^2 : \quad \beta^2 = \frac{\kappa^2}{12} \left( -5b^2 + 2r^2 + 14r\sqrt{r^2 - b^2} \right), \quad (2.8)$$

$$\gamma_+^2 \quad \beta_-^2 : \quad \beta^2 = \frac{\kappa^2}{4} \left( b^2 - 2r^2 + 2r\sqrt{r^2 - b^2} \right) = -\frac{\kappa^2}{4} \left( r - \sqrt{r^2 - b^2} \right)^2, \quad (2.9)$$

$$\gamma_-^2 \quad \beta_+^2 : \quad \beta^2 = \frac{\kappa^2}{4} \left( b^2 - 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - b^2} \right) = -\frac{\kappa^2}{4} \left( r + \sqrt{r^2 - b^2} \right)^2, \quad (2.10)$$

$$\gamma_-^2 \quad \beta_-^2 : \quad \beta^2 = \frac{\kappa^2}{12} \left( -5b^2 + 2r^2 - 14r\sqrt{r^2 - b^2} \right). \quad (2.11)$$

Observamos que (2.9) e (2.10) não podem ocorrer, uma vez que  $\beta \neq 0$ . Nos resta então estudar os casos (2.8) e (2.11). Para isso recalculamos  $A_8$

$$A_8 = 0 \iff$$

$$\gamma_+^2 \quad \beta_+^2 : \quad (b^2 - r^2) \left[ b^4 - 14b^2r^2 + 16r^4 - (6b^2r - 16r^3) \sqrt{r^2 - b^2} \right] = 0,$$

$$\gamma_-^2 \quad \beta_-^2 : \quad (b^2 - r^2) \left[ b^4 - 14b^2r^2 + 16r^4 + (6b^2r - 16r^3) \sqrt{r^2 - b^2} \right] = 0.$$

Vamos mostrar em ambos os casos que a única solução é  $r^2 = b^2$ .

$$\begin{aligned} \gamma_+^2 \quad \beta_+^2 : \quad & (b^2 - r^2) \left[ b^4 - 14b^2r^2 + 16r^4 - (6b^2r - 16r^3) \sqrt{r^2 - b^2} \right] = 0 \\ \iff & (b^2 - r^2) \left[ b^2(b^2 - 8r^2) - 6b^2r^2 + 16r^4 - (6b^2r - 16r^3) \sqrt{r^2 - b^2} \right] = 0, \\ \iff & (b^2 - r^2) \left[ b^2(b^2 - 8r^2) + (16r^3 - 6b^2r) \left( r + \sqrt{r^2 - b^2} \right) \right] = 0, \\ \iff & (b^2 - r^2) \left[ b^2(b^2 - 8r^2) + 2r(8r^2 - 3b^2) \left( r + \sqrt{r^2 - b^2} \right) \right] = 0, \\ \iff & (b^2 - r^2) \left[ b^2(b^2 - 8r^2) + 2r(8r^2 - b^2) \left( r + \sqrt{r^2 - b^2} \right) - 4b^2r \left( r + \sqrt{r^2 - b^2} \right) \right] = 0, \\ \iff & (b^2 - r^2) \left[ (8r^2 - b^2) \left( -b^2 + 2r^2 + 2r\sqrt{r^2 - b^2} \right) - 4b^2r \left( r + \sqrt{r^2 - b^2} \right) \right] = 0, \\ \iff & (b^2 - r^2) \left[ (8r^2 - b^2) \left( r + \sqrt{r^2 - b^2} \right)^2 - 4b^2r \left( r + \sqrt{r^2 - b^2} \right) \right] = 0, \\ \iff & (b^2 - r^2) \left( r + \sqrt{r^2 - b^2} \right) \left[ (8r^2 - b^2) \left( r + \sqrt{r^2 - b^2} \right) - 4b^2r \right] = 0, \\ \iff & (b^2 - r^2) \left( r + \sqrt{r^2 - b^2} \right) \left( 8r^3 + 8r^2\sqrt{r^2 - b^2} - b^2r - b^2\sqrt{r^2 - b^2} - 4b^2r \right) = 0, \\ \iff & (b^2 - r^2) \underbrace{\left( r + \sqrt{r^2 - b^2} \right)}_{>0} \underbrace{\left[ r(8r^2 - 5b^2) + (8r^2 - b^2) \sqrt{r^2 - b^2} \right]}_{>0} = 0, \\ \iff & r^2 = b^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_-^2 \quad \beta_-^2 : & \quad (b^2 - r^2) \left[ b^4 - 14b^2r^2 + 16r^4 + (6b^2r - 16r^3) \sqrt{r^2 - b^2} \right] = 0 \\
\iff & \quad (b^2 - r^2) \left[ b^2 (b^2 - 8r^2) - 6b^2r^2 + 16r^4 + (6b^2r - 16r^3) \sqrt{r^2 - b^2} \right] = 0, \\
\iff & \quad (b^2 - r^2) \left[ b^2 (b^2 - 8r^2) + 2r (8r^2 - 3b^2) (r - \sqrt{r^2 - b^2}) \right] = 0, \\
\iff & \quad (b^2 - r^2) \left[ b^2 (b^2 - 8r^2) + 2r (8r^2 - b^2) (r - \sqrt{r^2 - b^2}) - 4b^2r (r - \sqrt{r^2 - b^2}) \right] = 0, \\
\iff & \quad (b^2 - r^2) \left[ (8r^2 - b^2) (-b^2 + 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - b^2}) - 4b^2r (r - \sqrt{r^2 - b^2}) \right] = 0, \\
\iff & \quad (b^2 - r^2) \left[ (8r^2 - b^2) (r - \sqrt{r^2 - b^2})^2 - 4b^2r (r - \sqrt{r^2 - b^2}) \right] = 0, \\
\iff & \quad (b^2 - r^2) (r - \sqrt{r^2 - b^2}) \left[ (8r^2 - b^2) (r - \sqrt{r^2 - b^2}) - 4b^2r \right] = 0, \\
\iff & \quad (b^2 - r^2) (r - \sqrt{r^2 - b^2}) (8r^3 - 8r^2\sqrt{r^2 - b^2} - b^2r + b^2\sqrt{r^2 - b^2} - 4b^2r) = 0, \\
\iff & \quad (b^2 - r^2) \underbrace{(r - \sqrt{r^2 - b^2})}_{>0} \left[ r (8r^2 - 5b^2) - (8r^2 - b^2) \sqrt{r^2 - b^2} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Vamos estudar o último fator

$$\begin{aligned}
r (8r^2 - 5b^2) - (8r^2 - b^2) \sqrt{r^2 - b^2} &= 0, \\
r (8r^2 - 5b^2) &= (8r^2 - b^2) \sqrt{r^2 - b^2},
\end{aligned}$$

elevando os dois lados ao quadrado,

$$\begin{aligned}
r^2 (64r^4 - 80b^2r^2 + 25b^4) &= (64r^4 - 16b^2r^2 + b^4) (r^2 - b^2), \\
64r^6 - 80b^2r^4 + 25b^4r^2 &= 64r^6 \underbrace{-64b^2r^4 - 16b^2r^4}_{=-80b^2r^4} + 16b^4r^2 + b^4r^2 - b^6, \\
8b^4r^2 &= -b^6.
\end{aligned}$$

O que é absurdo. Logo, neste caso também, a única solução é  $r^2 = b^2$ .

Consequentemente, usando (2.8) e (2.11), obtemos que nos dois casos

$$\beta^2 = \frac{-\kappa^2}{4} b^2.$$

O que, por sua vez, também é absurdo, dado que  $\beta \neq 0$ .

□

## 2.3 Relação de Weingarten do tipo $aH + bK = c \neq 0$

Neste caso, podemos assumir sem perda de generalidade que  $c = 1$ . Assim os coeficientes  $A_8$  e  $B_8$  são dados por

$$A_8 = -\frac{1}{32}r^8x_1, \quad B_8 = \frac{1}{16}\beta\gamma r^8x_2 \quad (2.12)$$

onde

$$\begin{aligned} x_1 = & \beta^8 - \beta^6 \left[ 28\gamma^2 + (a^2 + 2b - 4r^2) \kappa^2 \right] \\ & + \beta^4 \left[ 70\gamma^4 + 15(a^2 + 2b - 4r^2) \gamma^2 \kappa^2 + (b^2 - 3a^2r^2 - 6br^2 + 6r^4) \kappa^4 \right] \\ & - \beta^2 \left[ 28\gamma^6 + 15(a^2 + 2b - 4r^2) \gamma^4 \kappa^2 + 6(b^2 - 3a^2r^2 - 6br^2 + 6r^4) \gamma^2 \kappa^4 \right. \\ & \left. + r^2(-2b^2 + 3a^2r^2 + 6br^2 - 4r^4) \kappa^6 \right] \\ & + (\gamma^2 - r^2\kappa^2)^2 \left[ \gamma^4 + (a^2 + 2b - 2r^2) \gamma^2 \kappa^2 + (b^2 - a^2r^2 - 2br^2 + r^4) \kappa^4 \right], \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} x_2 = & -4\beta^6 + \beta^4 \left[ 28\gamma^2 + 3(a^2 + 2b - 4r^2) \kappa^2 \right] \\ & - 2\beta^2 \left[ 14\gamma^4 + 5(a^2 + 2b - 4r^2) \gamma^2 \kappa^2 + (b^2 - 3a^2r^2 - 6br^2 + 6r^4) \kappa^4 \right] \\ & + (\gamma^2 - r^2\kappa^2) \left[ 4\gamma^4 + (3a^2 + 6b - 8r^2) \gamma^2 \kappa^2 \right. \\ & \left. + (2b^2 - 3a^2r^2 - 6br^2 + 4r^4) \kappa^4 \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Descartamos o estudo dos casos clássicos ([13] e [17]) onde  $a = 0$  ou  $b = 0$  que correspondem respectivamente a  $K$  ou  $H$  constantes não nulas. Em ambos os casos, a superfície  $S$  esta contida em uma esfera ou os planos de folheação são paralelos.

Dada a expressão de  $B_8$  podemos distinguir os casos  $\gamma = 0$ ,  $\beta = 0$  e  $\beta\gamma \neq 0$ .

### 2.3.1 Caso $\gamma = 0$

De  $A_8 = 0$ , temos que

$$\beta^4 - \kappa^2(a^2 + 2b - 2r^2)\beta^2 + \kappa^4[b^2 - (a^2 + 2b)r^2 + r^4] = 0.$$

E então,

$$\beta^2 = \frac{1}{2}\kappa^2 \left( a^2 + 2b - 2r^2 \pm a\sqrt{a^2 + 4b} \right).$$

Distinguimos dois casos:  $a^2 + 4b = 0$  ou  $a^2 + 4b > 0$ .

### 2.3.1.1 Caso $a^2 + 4b = 0$

Temos

$$\beta = \pm \frac{\kappa}{2} \sqrt{a^2 - 4r^2}.$$

Calculando  $B_5$  obtemos

$$B_5 = \pm \frac{1}{128} a^4 r^7 \kappa^5 \sigma \sqrt{a^2 - 4r^2} \left( \sqrt{a^2 - 4r^2} \alpha \pm 2rr' \right)^2.$$

Dado que  $B_5 = 0$ , temos 3 possibilidades. Descartamos o caso  $a^2 - 4r^2 = 0$  pois implicaria que  $\beta = 0$  e esse caso será estudado na seção seguinte.

Se  $\sqrt{a^2 - 4r^2} \alpha \pm 2rr' = 0$ , então

$$\begin{cases} \alpha &= \mp \frac{2rr'}{\sqrt{a^2 - 4r^2}} \\ \beta &= \pm \frac{\kappa}{2} \sqrt{a^2 - 4r^2}, \\ \gamma &= 0 \end{cases}$$

donde segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{c}' &= \mp \frac{2rr'}{\sqrt{a^2 - 4r^2}} \mathbf{t} \pm \frac{\kappa}{2} \sqrt{a^2 - 4r^2} \mathbf{n}, \\ \mathbf{c}' &= \left( \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4r^2}}{2} \mathbf{t} \right)'. \end{aligned}$$

Assim,

$$\exists \mathbf{c}_0 \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}_0 \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4r^2}}{2} \mathbf{t},$$

logo de (2.1) temos

$$|\mathbf{X}(u, v) - \mathbf{c}_0|^2 = \frac{a^2 - 4r^2}{4} + r^2 = \frac{a^2}{4} = -b.$$

$S$  esta contida numa esfera.

Se  $\sigma = 0$ , o cálculo dos coeficientes  $A_5$  e  $A_4$  nos leva a considerar o mesmo valor de  $\alpha$  obtido acima. Portanto a conclusão será a mesma.

### 2.3.1.2 Caso $a^2 + 4b > 0$

O cálculo do coeficiente  $A_7$  nos dá

$$A_7 = \frac{ar^9\kappa^5}{64} \underbrace{\left[2b + a \left(a \pm \sqrt{a^2 + 4b}\right)\right]}_{=A} \underbrace{\left[a^3 + 4ab \pm (a^2 + 2b) \sqrt{a^2 + 4b}\right]}_{=B} (\alpha\kappa^2 - \kappa\beta' + \beta\kappa').$$

Observamos que

$$\begin{aligned} A &= 2b + a \left(a \pm \sqrt{a^2 + 4b}\right), \\ A &= \frac{1}{2} \left(a \pm \sqrt{a^2 + 4b}\right)^2 \neq 0 \quad \text{já que } b \neq 0. \end{aligned}$$

Também

$$\begin{aligned} B &= a^3 + 4ab \pm (a^2 + 2b) \sqrt{a^2 + 4b}, \\ B &= \sqrt{a^2 + 4b} \left[a\sqrt{a^2 + 4b} \pm (a^2 + 2b)\right], \\ B &= \sqrt{a^2 + 4b} \underbrace{\left[\pm 2b + a \left(\pm a + \sqrt{a^2 + 4b}\right)\right]}_{=\pm A} \neq 0. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} A_7 = 0 &\iff \alpha\kappa^2 - \kappa\beta' + \beta\kappa' = 0, \\ &\iff \alpha = \frac{\beta'\kappa - \beta\kappa'}{\kappa^2}, \\ &\iff \alpha = \left(\frac{\beta}{\kappa}\right)'. \end{aligned}$$

De (2.3) temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{c}' &= \left(\frac{\beta}{\kappa}\right)' \mathbf{t} + \beta \mathbf{n}, \\ \mathbf{c}' &= \left(\frac{\beta}{\kappa} \mathbf{t}\right)'. \end{aligned}$$

Assim

$$\exists \mathbf{c}_0 \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}_0 + \frac{\beta}{\kappa} \mathbf{t},$$

logo, de (2.1) temos

$$|\mathbf{X}(u, v) - \mathbf{c}_0|^2 = \frac{\beta^2}{\kappa^2} + r^2 = \frac{1}{2} \left( a^2 + 2b \pm a\sqrt{a^2 - 4b} \right),$$

portanto  $S$  esta contida numa esfera.

### 2.3.2 Caso $\beta = 0$

Agora temos

$$A_8 = -\frac{1}{32}r^8 (\gamma^2 - r^2\kappa^2)^2 \bar{x}_1, \quad A_7 = -\frac{1}{16}r^9 \alpha \kappa (\gamma^2 - r^2\kappa^2) y_1,$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \gamma^4 + (a^2 + 2b - 2r^2) \gamma^2 \kappa^2 + (b^2 - a^2 r^2 - 2br^2 + r^4) \kappa^4, \\ y_1 &= 8\gamma^4 + (7a^2 + 14b - 16r^2) \gamma^2 \kappa^2 + (6b^2 - 7a^2 r^2 - 14br^2 + 8r^4) \kappa^4. \end{aligned}$$

Dado que  $A_8 = A_7 = 0$ , estudamos os casos seguintes:  $\gamma^2 = \kappa^2 r^2$ ,  $\bar{x}_1 = \alpha = 0$  e  $\bar{x}_1 = y_1 = 0$ .

#### 2.3.2.1 Caso $\gamma^2 = \kappa^2 r^2$

Os coeficientes  $A_6$  e  $B_6$  são dados por

$$A_6 = -\frac{9}{8}b^2 \kappa^6 r^{10} \left[ \alpha^2 - (r')^2 \right], \quad B_6 = \pm \frac{9}{4}b^2 \alpha \kappa^6 r^{10} r'.$$

Logo,  $\alpha = r' = 0$ , e temos

$$A_4 = -2b^2 \kappa^8 r^{12},$$

e  $A_4 = 0$  nos fornece uma contradição.

#### 2.3.2.2 Caso $\bar{x}_1 = \alpha = 0$

De  $\bar{x}_1 = 0$  deduzimos a expressão de  $\gamma^2$

$$\gamma^2 = \frac{\kappa^2}{2} \left[ - (a^2 + 2b - 2r^2) \pm a\sqrt{a^2 + 4b} \right].$$

O que implica em

$$B_7 = \frac{1}{32} ar^9 \kappa^3 \underbrace{\left[ a^3 + 4ab \mp (a^2 + 2b) \sqrt{a^2 + 4b} \right]}_{=C} (\gamma^2 - r^2 \kappa^2) (\kappa \gamma' - \gamma \kappa').$$

Observando que

$$\begin{aligned} C &= a^3 + 4ab \mp (a^2 + 2b) \sqrt{a^2 + 4b}, \\ C &= \left( a\sqrt{a^2 + 4b} \mp a^2 \mp 2b \right) \sqrt{a^2 + 4b}, \\ C &= \mp \frac{1}{2} \left( a \pm \sqrt{a^2 + 4b} \right)^2 \sqrt{a^2 + 4b}. \end{aligned}$$

Portanto

$$C = 0 \iff a^2 + 4b = 0 \quad \text{dado que } b \neq 0.$$

O que nos leva a estudar dois casos segundo o valor de  $a^2 + 4b$

### 2.3.2.2.1 Caso $a^2 + 4b = 0$

Temos

$$\gamma^2 = \frac{1}{4} (4r^2 - a^2) \kappa^2, \quad A_5 = -\frac{1}{16} a^4 r^9 \gamma \kappa^4 \sigma (r')^2.$$

Se  $\gamma = 0 \iff 4r^2 - a^2 = 0$ , então  $r$  é constante e  $\mathbf{c}' = \vec{0}$ .

Logo  $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0$  e  $|\mathbf{X}(u, v) - \mathbf{c}_0|^2 = r^2$  e  $S$  esta contida numa esfera.

Se  $r' = 0$ , então  $A_4 = \frac{1}{128} a^4 r^8 (3a^2 + 4r^2) \gamma \kappa^6 = 0$  nos fornece uma contradição.

Se  $\sigma = 0$ , então calculando sucessivamente os coeficientes  $B_5$ ,  $A_4$  e  $A_3$  conseguimos obter de novo que  $r' = 0$  e portanto concluímos como acima.

### 2.3.2.2.2 Caso $a^2 + 4b > 0$

Então  $\gamma' \kappa - \gamma \kappa' = 0$ , logo  $r' = 0$ , e temos

$$A_5 = \frac{1}{16} a A C r^9 \gamma \kappa^6 \sigma.$$

Se  $\gamma = 0$ , concluímos como no caso anterior.

Se  $\sigma = 0$ , então  $A_4 = A_2 = 0$  implica  $\kappa = 0$ , contradição.

### 2.3.2.3 Caso $\overline{x_1} = y_1 = 0$

Temos que

$$8\overline{x_1} - y_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a^2 + 2b)\gamma^2 + \kappa^2 [2b^2 - (a^2 + 2b)r^2] = 0.$$

Observando que

$$a^2 + 2b \neq 0 \quad \text{pois senão teríamos} \quad \kappa = 0,$$

temos que

$$\gamma^2 = \frac{\kappa^2 [(a^2 + 2b)r^2 - 2b^2]}{(a^2 + 2b)}.$$

Usando este valor em  $\overline{x_1}$ , obtemos que

$$\overline{x_1} = -\frac{a^2 b^2 (a^2 + 4b) \kappa^4}{(a^2 + 2b)^2}.$$

Portanto

$$x_1 = 0 \iff a^2 + 4b = 0.$$

Logo,

$$\gamma^2 = \frac{\kappa^2}{4} (4r^2 - a^2).$$

Porém, depois de calcular os coeficientes  $A_5$ ,  $B_5$ ,  $A_4$ , e  $B_4$  obtemos uma contradição.

### 2.3.3 Caso $\beta\gamma \neq 0$

Lembrando as equações (2.12) e as expressões de  $x_1$  (2.13) e  $x_2$  (2.14), vamos usar o fato que  $x_1 = x_2 = 0$  e fazer uma combinação desses polinômios em  $\beta^2$  para obter um polinômio de grau 2 nulo.

Assim definimos

$$\begin{aligned} x_3 &= 4x_1 + \beta^2 x_2 = 0, \text{ e} \\ x_4 &= 4x_3 - \left[ 84\gamma^2 + \kappa^2 (a^2 + 2b - 4r^2) \right] x_2 = 0, \end{aligned}$$

onde  $x_4$  é um polinômio de grau 2 em  $\beta^2$  como desejado. Podemos então calcular  $\beta^2$  em função de  $\gamma^2$

$$\beta^2 = \frac{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - \eta\lambda\zeta}}{\eta}, \quad (2.15)$$

onde

$$\begin{aligned} \xi = & 960\gamma^6 + 320\kappa^2 (a^2 + 2b - 4r^2) \gamma^4 \\ & + 5\kappa^4 \left[ a^4 + 4a^2b + 12b^2 - 32(a^2 + 2b - 2r^2) r^2 \right] \gamma^2 \\ & + \kappa^6 \left[ b^2 (a^2 + 2b) - (3a^4 + 12a^2b + 4b^2) r^2 \right], \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\eta = 1344\gamma^4 + 80\kappa^2 (a^2 + 2b - 4r^2) \gamma^2 + (3a^4 + 12a^2b + 4b^2) \kappa^4, \quad (2.17)$$

$$\lambda = \gamma^2 - \kappa^2 r^2, \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \zeta = & 320\gamma^6 + 80\kappa^2 (3a^2 + 6b - 8r^2) \gamma^4 \\ & + \kappa^4 \left[ 3a^4 + 12a^2b + 164b^2 - 240(a^2 + 2b) r^2 + 320r^4 \right] \gamma^2 \\ & + \kappa^6 \left[ -3a^4 r^2 + 2a^2b (b - 6r^2) + 4b^2 (b - r^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Claramente, essa solução supõe que  $\eta \neq 0$ . Portanto o caso  $\eta = 0$  deve ser tratado separadamente.

Substituindo  $\beta^2$  em  $x_2$  pela expressão (2.15) que acabamos de encontrar, obtemos

$$x_2 = 0 \iff \lambda\mu\eta^3\rho^2 = 0,$$

onde

$$\mu = 16\gamma^4 + 8(a^2 + 2b - 2r^2) \gamma^2 \kappa^2 + a^2 (a^2 + 4b) \kappa^4, \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \rho = & \left[ 16\gamma^4 - 32r\gamma^3\kappa + 4(a^2 + 2b + 4r^2) \gamma^2 \kappa^2 - 4(a^2 + 2b) r\gamma\kappa^3 + b^2\kappa^4 \right] \\ & \left[ 16\gamma^4 + 32r\gamma^3\kappa + 4(a^2 + 2b + 4r^2) \gamma^2 \kappa^2 + 4(a^2 + 2b) r\gamma\kappa^3 + b^2\kappa^4 \right]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Assim, além do caso  $\eta = 0$ , temos 3 outros:  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 0$  e  $\rho = 0$ .

A seguir vamos expor por completo o caso  $\lambda = 0$ . A partir de (2.18) obtemos a expressão de  $\gamma$  que substituímos em (2.15). Assim podemos procurar a expressão do raio  $r$  dos círculos de folheação, e calculando os coeficientes  $A_k$  e  $B_k$  em ordem decrescente de  $k$  obtemos a contradição.

Devido à complexidade dos cálculos nos outros sub-casos, devemos nos limitar aqui a indicar as expressões de  $\gamma^2$  em cada um deles. Contudo, a resolução segue o mesmo caminho que indicado acima.

### 2.3.3.1 Caso $\lambda = 0$

De  $\lambda = 0$ , segue que  $\gamma^2 = \kappa^2 r^2$ . Logo, por um lado, temos

$$\beta^2 = 2\kappa^2 \frac{b^2 (a^2 + 2b) + 2r^2 [a^4 + 4a^2b + 28b^2 + 80(a^2 + 2b)r^2]}{3a^4 + 12a^2b + 4b^2 + 80(a^2 + 2b)r^2 + 1024r^4},$$

e por outro lado,

$$x_2 = -\beta^2 \left\{ 4\beta^4 - (3a^2 + 6b + 16r^2) \beta^2 \kappa^2 + 2 [b^2 + 2(a^2 + 2b)r^2] \kappa^4 \right\},$$

assim,

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta^2 &= \frac{\kappa^2}{8} \left[ 3a^2 + 6b + 16r^2 \pm \sqrt{9a^4 + 4(b + 8r^2)^2 + 4a^2(9b + 8r^2)} \right]. \end{aligned}$$

Comparando as duas expressões de  $\beta^2$ , concluímos que  $r^2$  assume um dos dois valores seguintes

$$r^2 = -\frac{a^2(a^2 + 4b)}{8(a^2 + 2b)} \quad \text{ou} \quad r^2 = -\frac{1}{16} \left( a^2 + 2b \pm a\sqrt{a^2 + 4b} \right).$$

Vamos considerar cada um desses valores possíveis.

#### 2.3.3.1.1 Caso $r^2 = -\frac{a^2(a^2 + 4b)}{8(a^2 + 2b)}$

Neste caso, temos

$$\beta^2 = \frac{1}{2} (a^2 + 2b) \kappa^2 \quad \text{e} \quad \gamma^2 = -\frac{a^2(a^2 + 4b)}{8(a^2 + 2b)} \kappa^2,$$

e então  $A_7 = \frac{a^2(a^2 + 4b)^5 r \alpha \kappa^7}{131072(a^2 + 2b)^3} = 0$ , implica que  $\alpha = 0$ . Consequentemente,

$$\begin{aligned} A_5 &= 4r^5 (-b^2 + 2(a^2 + 2b)r^2) \gamma^7 \sigma = 0, \\ B_5 &= r^5 (b^2 - 4(a^2 + 2b)r^2) \beta \gamma^6 \sigma = 0, \end{aligned}$$

implicam que

$$\beta A_5 + 4\gamma B_5 = 0.$$

Dai segue que

$$-8(a^2 + 2b)r^7 \beta \gamma^7 \sigma = 0 \quad \text{portanto} \quad \sigma = 0,$$

e finalmente, de

$$A_4 = \frac{a^{10} (a^2 + 4b)^6 (21a^6 + 130a^4b + 240a^2b^2 + 96b^3) \kappa^8}{4194304 (a^2 + 2b)^6} = 0, \text{ e}$$

$$B_4 = \frac{a^{10} (a^2 + 4b)^6 (21a^4 + 88a^2b + 96b^2) \beta \gamma \kappa^6}{1048576 (a^2 + 2b)^6} = 0,$$

obtemos que

$$21a^6 + 130a^4b + 240a^2b^2 + 96b^3 = 0,$$

$$21a^4 + 88a^2b + 96b^2 = 0.$$

Daqui temos então  $7a^4 + 24a^2b + 16b^2 = 0$ , cujas soluções são

$$b = \frac{a^2}{4} \left( -3 \pm \sqrt{2} \right).$$

Substituindo essas soluções em  $A_4$  e  $B_4$ , obtemos  $A_4 \neq 0$  e  $B_4 \neq 0$ , o que é absurdo.

### 2.3.3.1.2 Caso $r^2 = -\frac{1}{16} \left( a^2 + 2b \pm a\sqrt{a^2 + 4b} \right)$

Neste caso, temos

$$\beta^2 = \frac{1}{4} \left( a^2 + 2b \pm a\sqrt{a^2 + 4b} \right) \kappa^2 \quad \text{e} \quad \gamma^2 = -\frac{1}{16} \left( a^2 + 2b \pm a\sqrt{a^2 + 4b} \right) \kappa^2.$$

Logo  $\beta^2 = -4\gamma^2$ , o que é contraditório.

### 2.3.3.2 Caso $\eta = 0$

Da equação (2.17), obtemos que

$$\gamma^2 = \frac{\kappa^2}{168} \left\{ -5(a^2 + 2b - 4r^2) \pm \sqrt{2[-19a^4 - 76a^2b + 8b^2 - 100r^2(a^2 + 2b - 2r^2)]} \right\}.$$

Neste sub-caso  $x_4$  passa a ser um polinômio de grau 1 em  $\beta^2$ .

### 2.3.3.3 Caso $\mu = 0$

Da equação (2.20), obtemos  $\gamma^2$

$$\gamma^2 = \frac{\kappa^2}{4} \left[ - (a^2 + 2b - 2r^2) \pm \sqrt{(a^2 + 2b - 2r^2)^2 - a^2(a^2 + 4b)} \right].$$

### 2.3.3.4 Caso $\rho = 0$

Enfim, de (2.21) obtemos 4 expressões de  $\gamma^2$

$$\gamma^2 = \frac{\kappa^2}{16} \left( \pm 2r + \sqrt{-2(a^2 + 2b - 2r^2) \pm a\sqrt{a^2 + 4b}} \right)^2.$$

□

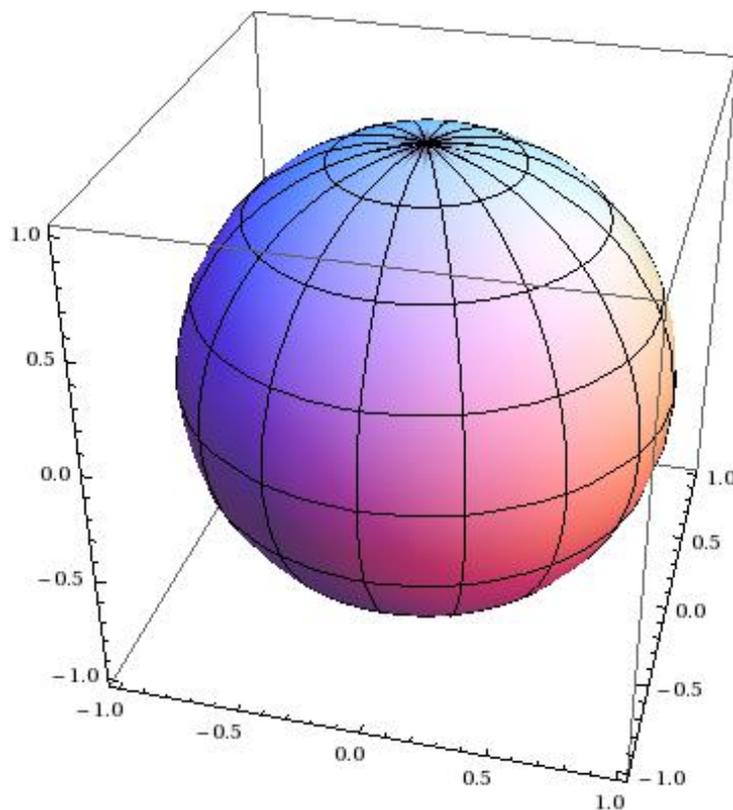


Figura 2.1: Esfera unitária.

## Superfícies $SW$ com planos de folheação paralelos

### 3.1 Cálculo da equação (1.3)

Supondo que os planos de folheação são todos ortogonais à terceira coordenada do referencial cartesiano, podemos parametrizar a superfície por

$$\mathbf{X}(u, v) = (f(u), g(u), u) + r(u) (\cos v, \sin v, 0), \quad (3.1)$$

onde  $f$ ,  $g$ , e  $r$  são funções suaves em  $u$  sobre algum intervalo  $I$ , e  $r > 0$  é o raio dos círculos de folheação. Com isso podemos calcular a equação, e chegamos à algo semelhante ao caso de folheações não paralelas (2.4).

$$\forall (u, v) \in I \times [0, 2\pi), \quad A_0(u) + \sum_{k=1}^8 A_k(u) \cos(kv) + B_k(u) \sin(kv) = 0. \quad (3.2)$$

Dessa forma, obtemos novamente 17 equações do tipo  $A_k(u) = 0$  e  $B_k(u) = 0$ .

Para concluir a demonstração do teorema, vamos distinguir os casos onde  $a = 0$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$  e  $abc \neq 0$ , descartando em primeiro lugar o estudo trivial dos casos onde  $a^2 + c^2 = 0$  (implica  $K = 0$ ) e  $b^2 + c^2 = 0$  (implica  $H = 0$ ). Nessas condições vamos mostrar que  $S$  é uma superfície de revolução.

**Observação 1.** Para  $S$  ser uma superfície de revolução basta termos  $f' = g' = 0$ .

## 3.2 Superfícies $SW$ de curvatura Gaussiana constante

Observamos que

$$a = 0 \iff K = \text{constante.}$$

Calculando os coeficientes, obtemos

$$A_8 = -\frac{1}{32}c^2r^8 (f'^8 - 28f'^6g'^2 + 70f'^4g'^4 - 28f'^2g'^6 + g'^8),$$

$$B_8 = \frac{1}{4}c^2r^8 f'g' (-f'^6 + 7f'^4g'^2 - 7f'^2g'^4 + g'^6).$$

O que nos leva a estudar os sub-casos:  $f', g' = 0$ ,  $f'g' \neq 0$  e  $c = 0$ . Este último será estudado separadamente no final deste capítulo (ver observação 2).

### 3.2.1 Caso $f'$ ou $g' = 0$

Supomos  $f' = 0$ , obtemos

$$A_8 = -\frac{1}{32}c^2r(u)^8 g'(u)^8,$$

$$B_8 = 0.$$

O que implica que  $g' = 0$  e portanto  $S$  é contida numa superfície de revolução. De modo perfeitamente análogo, se supomos inicialmente que  $g' = 0$  então obtemos

$$A_8 = -\frac{1}{32}c^2r(u)^8 f'(u)^8,$$

$$B_8 = 0.$$

Que por sua vez implica que  $f' = 0$ , portanto chegamos à mesma conclusão.

Vale observar que sob estas hipóteses, todos os coeficientes  $A_k$  e  $B_k$  são identicamente nulos, menos o coeficiente  $A_0$  que se escreve como

$$A_0 = -4r^6 \left( cr(1+r'^2)^2 + br'' \right)^2,$$

o que nos leva a considerar a equação diferencial

$$cr(1+r'^2)^2 + br'' = 0.$$

Uma solução numérica com o método Runge-Kutta nos fornece o seguinte gráfico

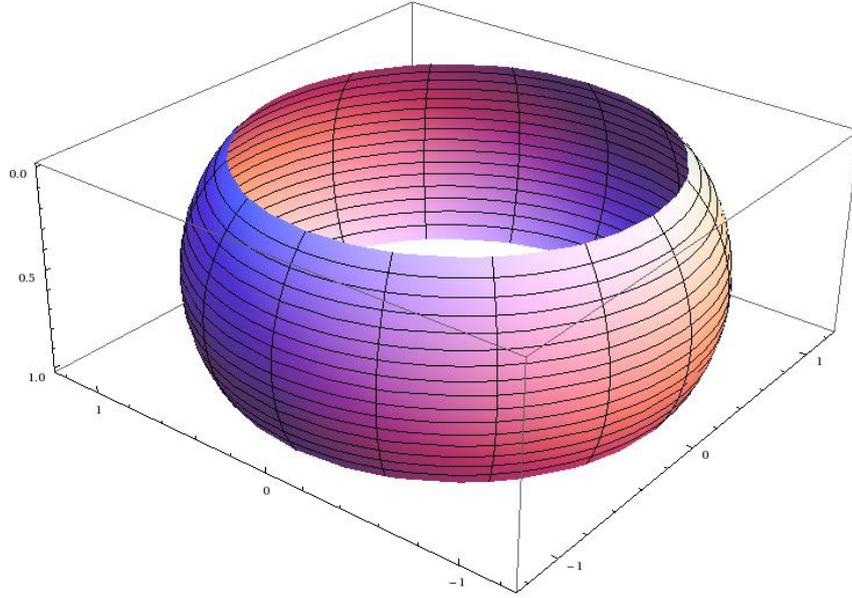


Figura 3.1: Superfície de revolução:  $f(u) = 0$ ,  $g(u) = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = 1$

### 3.2.2 Caso $f'g' \neq 0$

Aqui vamos reparametrizar a curva não constante  $u \mapsto (f(u), g(u))$  pelo comprimento de arco. Portanto, existe  $\phi$  tal que  $(f(u), g(u)) = (x \circ \phi(u), y \circ \phi(u))$ . Logo segue que

$$\phi'^2 = f'^2 + g'^2 \neq 0, \quad f'(u) = \phi'(u) \cos \phi(u), \quad g'(u) = \phi'(u) \sin \phi(u).$$

Com isso podemos reescrever os coeficientes, e temos que

$$A_8 = -\frac{1}{32}c^2r(u)^8\phi'(u)^8 \cos 8\phi(u),$$

$$B_8 = -\frac{1}{32}c^2r(u)^8\phi'(u)^8 \sin 8\phi(u).$$

Essas expressões claramente contradizem as equações  $A_8 = B_8 = 0$ , portanto não existe superfície  $S$  nessas condições.

## 3.3 Superfícies $SW$ de curvatura média constante

Observamos que

$$b = 0 \iff H = \text{constante}.$$

Neste caso temos exatamente as mesmas equações do caso anterior ( $a = 0$ ), chegando assim às mesmas conclusões.

### 3.4 Relação de Weingarten do tipo $aH + bK = 0$

Agora supondo  $c = 0$ , já temos que  $\forall k = 5, \dots, 8$   $A_k = B_k = 0$ . Calculando os coeficientes seguintes temos

$$\begin{aligned} A_4 &= \frac{1}{8}a^2r^6 \{2f'^2r' + f'[4g'r' - r(f'' + g'')] - g'[2g'r' + r(f'' - g'')]\} \\ &\quad \{2f'^2r' - f'[4g'r' + r(f'' - g'')] - g'[2g'r' - r(f'' + g'')]\}, \\ B_4 &= \frac{1}{4}a^2r^6 [-2f'^2r' + rf'f'' + g'(2g'r' - rg'')] [rg'f'' + f'(-4g'r' + rg'')]. \end{aligned}$$

Para simplificar a resolução, vamos considerar dois casos, primeiro  $f'$  ou  $g' = 0$ , e depois  $f'g' \neq 0$ .

#### 3.4.1 Caso $f' = 0$ ou $g' = 0$

Supomos  $f' = 0$ . Assim obtemos expressões mais simples

$$\begin{aligned} A_4 &= \frac{1}{8}a^2r^6g'^2(-2g'r' + rg'')^2, \\ B_4 &= 0. \end{aligned}$$

Assim,  $A_4 = 0$  implica que, ou  $g' = 0$ , no qual caso  $S$  é contida numa superfície de revolução, ou  $-2g'r' + rg'' = 0$ . Neste ultimo caso, podemos supor  $g' \neq 0$  e verificamos que

$$\begin{aligned} -2g'r' + rg'' &= 0, \\ \frac{g''}{g'} &= 2\frac{r'}{r} \quad (\text{já que } r > 0 \text{ e } g' \neq 0). \end{aligned}$$

Integrando,

$$\ln g' = 2 \ln r + C \quad , \text{ com } C \in \mathbb{R},$$

e tomando a exponencial de cada lado

$$g' = \lambda r^2 \quad , \text{ com } \lambda > 0.$$

Utilizando essa expressão de  $g'$ , conseguimos anular mais coeficientes, até considerarmos

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{1}{2}\lambda^2r^8(a^2A^2r^2 - 16b^2r'^2), \\ B_1 &= 2\lambda r^7r'(a^2A^2r - 8b^2r''), \end{aligned}$$

onde  $A = 1 + \lambda^2 r^4 + r'^2 - rr''$ . Claramente, pela equação  $A_2 = 0$ ,  $r' = 0$  implicaria em  $A = 0$ , o que seria absurdo. Portanto  $A_2 = B_1 = 0$  nos leva a resolver a seguinte equação

$$16b^2 r'^2 = 8b^2 r r'',$$

$$\frac{r''}{r'} = 2 \frac{r'}{r}, \text{ com } r' \neq 0 \text{ e } r > 0.$$

Integrando, obtemos

$$\ln r' = 2 \ln r + C, \text{ com } C \in \mathbb{R},$$

e tomando a exponencial de cada lado

$$r' = \gamma r^2, \text{ com } \gamma > 0,$$

$$\frac{-s'}{s^2} = \frac{\gamma}{s^2}, \text{ onde } s(u) = \frac{1}{r(u)},$$

$$s' = -\gamma.$$

Integrando,

$$s = -\gamma u + \delta, \text{ com } \delta \in \mathbb{R},$$

$$r = \frac{1}{-\gamma \cdot u + \delta},$$

$$r = \frac{\alpha}{u + \beta}, \text{ com } \alpha = -\frac{1}{\gamma} < 0 \text{ e } \beta = -\frac{\delta}{\gamma} \in \mathbb{R}.$$

Utilizando essa expressão em  $A_2 = 0$  chegamos à

$$-16b^2(u + \beta)^6 + a^2((u + \beta)^4 - \alpha^2 + \lambda^2 \alpha^4)^2 = 0.$$

Cujo termo de grau mais elevado é  $a^2 u^8$ . Portanto essa equação admite no máximo 8 soluções e não pode ser nula sobre um sub intervalo de  $I$ .

Se inicialmente supomos que  $g' = 0$ , chegamos as mesmas equações do caso onde  $f' = 0$  que acabamos de tratar, chegando assim às mesmas conclusões.

### 3.4.2 Caso $f'g' \neq 0$

Dada a expressão de  $B_4$

$$B_4 = \frac{1}{4} a^2 r^6 [-2f'^2 r' + r f' f'' + g' (2g' r' - r g'')] [r g' f'' + f' (-4g' r' + r g'')].$$

Podemos distinguir dois casos,

$$rg'f'' + f'(-4g'r' + rg'') = 0 \quad \text{ou} \quad -2f'^2r' + rf'f'' + g'(2g'r' - rg'') = 0.$$

### 3.4.2.1 Caso $rg'f'' + f'(-4g'r' + rg'') = 0$

Isolamos  $f''$  nessa relação e obtemos

$$f'' = f' \left( \frac{4r'}{r} - \frac{g''}{g'} \right). \quad (3.3)$$

Utilizamos essa expressão de  $f''$  em  $A_4$

$$A_4 = \frac{a^2r^6 (f'^2 + g'^2)^2 (-2g'r' + rg'')^2}{8g'^2}$$

Logo de  $A_4 = 0$  obtemos

$$-2g'r' + rg'' = 0.$$

A solução desta equação sabemos que é dada por  $g' = \lambda r^2$  com  $\lambda > 0$ . Assim, usando a equação (3.3).

$$\begin{aligned} f'' &= f' \left( \frac{4r'}{r} - \frac{2\lambda rr'}{\lambda r^2} \right), \\ \frac{f''}{f'} &= 2\frac{r'}{r}, \end{aligned}$$

e integrando, temos

$$f' = \mu r^2 \quad , \quad \text{com } \mu > 0.$$

Com essas expressões para  $f'$  e  $g'$ , calculamos os coeficientes  $B_2$  e  $B_1$

$$\begin{aligned} B_2 &= \lambda \mu r^8 \left( a^2 \bar{A}^2 r^2 - 16b^2 r'^2 \right), \\ B_1 &= 2\lambda r^7 r' \left( a^2 \bar{A}^2 r - 8b^2 r'' \right), \end{aligned}$$

onde,  $\bar{A} = 1 + (\lambda^2 + \mu^2)r^4 + r'^2 - rr''$ . Aqui o caso  $r' = 0$  também implicaria que  $\bar{A} = 0$  o que seria absurdo. Portanto descartando esse caso, nos resta a resolver a equação

$$16b^2 r'^2 = 8b^2 r r''.$$

Cuja solução já conhecemos

$$r = \frac{\alpha}{u + \beta}.$$

E calculando o coeficiente  $B_2$  nessas condições concluímos como no caso  $f' = 0$  que acabamos de tratar.

$$B_2 = \frac{\alpha^{10} \lambda \mu \left\{ -16b^2(u + \beta)^6 + a^2 [(u + \beta)^4 + \alpha^2 (-1 + \alpha^2 (\lambda^2 + \mu^2))]^2 \right\}}{(u + \beta)^{18}}.$$

### 3.4.2.2 Caso $-2f'^2 r' + r f' f'' + g'(2g'r' - r g'') = 0$

De modo semelhante, isolamos  $f''$  e obtemos

$$f'' = \frac{2r'(f'^2 - g'^2) + r g' g''}{r f'}.$$

Utilizamos essa expressão em  $A_4$ :

$$A_4 = -\frac{a^2 r^6 (f'^2 + g'^2)^2 (-2g'r' + r g'')^2}{8f'^2}.$$

Logo  $A_4 = 0$  implica que  $-2g'r' + r g'' = 0$ , ou seja, que para algum  $\lambda > 0$  temos  $g' = \lambda r^2$ . Usando essa expressão em  $f''$  chegamos à equação  $f'' = \frac{2f'r'}{r}$ , cuja solução é  $f' = \mu r^2$  para algum  $\mu > 0$ . Assim voltamos ao caso que acabamos de estudar.

## 3.5 Relação de Weingarten do tipo $aH + bK = c \neq 0$

Calculamos os primeiros coeficientes.

$$A_8 = -\frac{1}{32} c^2 r^8 (f'^8 - 28f'^6 g'^2 + 70f'^4 g'^4 - 28f'^2 g'^6 + g'^8),$$

$$B_8 = \frac{1}{4} c^2 r^8 f' g' (-f'^6 + 7f'^4 g'^2 - 7f'^2 g'^4 + g'^6).$$

Porém, a resolução das equações  $A_8 = B_8 = 0$  já foi feita quando estudamos o caso  $a = 0$ . Portanto neste caso a conclusão será a mesma do caso anterior.

Mostramos portanto que, nos casos estudados, toda superfície  $SW$  cíclica cujos planos de folheação são paralelos está contida em uma superfície de revolução. Porém para terminar a demonstração ainda nos falta estudar dois casos

$$a^2 + c^2 = 0 \quad \text{e} \quad b^2 + c^2 = 0$$

Nos casos onde  $K$  ou  $H$  eram constantes (i.e.  $a = 0$  e  $b = 0$  respectivamente), se desconsideramos superfícies rotacionais, nossos cálculos implicam que  $c = 0$  em ambos os casos. Ou seja, as únicas superfícies  $SW$ , cíclicas mas não rotacionais, e com curvatura Gaussiana ou média constante, têm sua curvatura constante igual a 0. Estudamos estes casos mais detalhadamente agora.

**Observação 2** ( $a^2 + c^2 = 0$ ). *Aqui temos naturalmente que a curvatura Gaussiana é nula. Observamos que nessas condições temos que*

$$f'' = g'' = r'' = 0.$$

*Ou seja,  $f$ ,  $g$ , e  $r$  são funções lineares em  $u$ . A superfície  $S$  é um cone generalizado.*

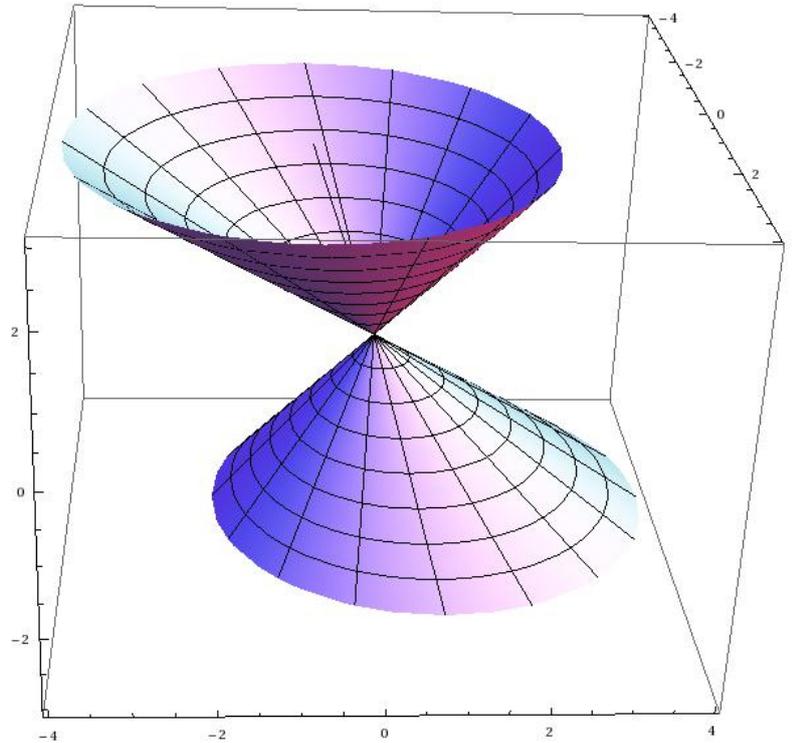


Figura 3.2: Cone generalizado:  $f(u) = 0.3u$ ,  $g(u) = -0.3u$ ,  $r(u) = u$

**Observação 3** ( $b^2 + c^2 = 0$ ). *Aqui temos naturalmente que a curvatura média é nula. Observamos que nessas condições temos que*

$$f' = \mu r^2, \quad g' = \lambda r^2, \quad 1 + (\lambda^2 + \mu^2) r^4 + r'^2 - r r'' = 0.$$

*Assim obtemos superfícies mínimas de Riemann ( $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ ) ou a catenoide ( $\lambda = \mu = 0$ ).*

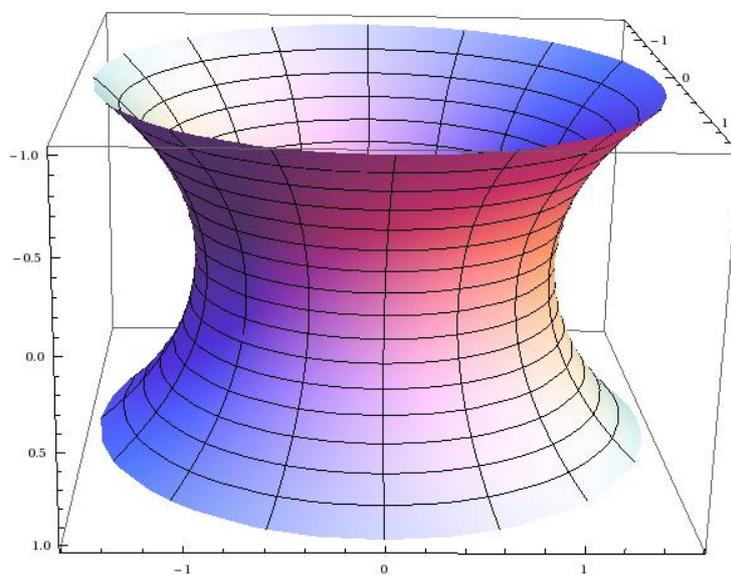


Figura 3.3: Catenoide:  $f(u) = 0$ ,  $g(u) = 0$ ,  $r(u) = \cosh u$

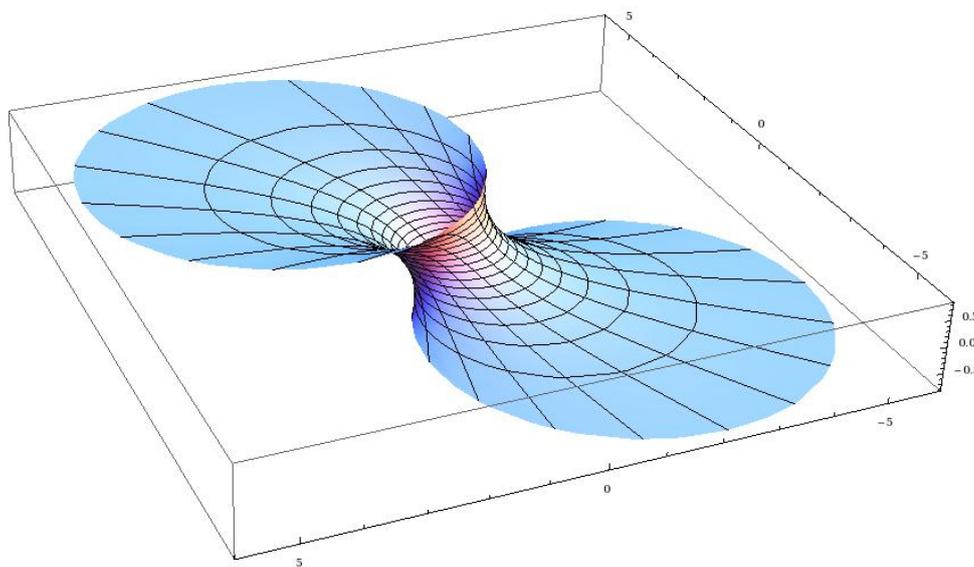


Figura 3.4: Exemplo de Riemann:  $\lambda = \mu = 1$

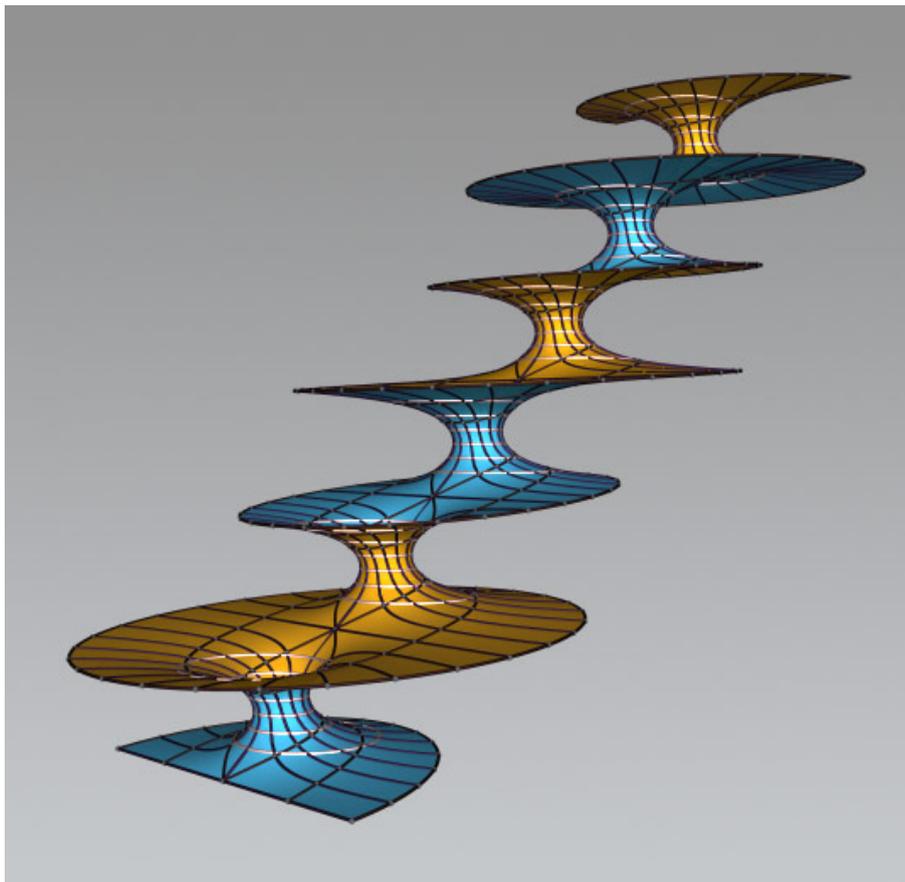


Figura 3.5: Exemplo de Riemann (fonte: Indiana University)

□

Essas observações concluem a demonstração do teorema (2) e assim combinando os dois teoremas demonstrados aqui obtemos trivialmente os dois corolários 1 e 2 enunciados na introdução. Em particular, ressaltamos que existem superfícies cíclicas  $SW$  além das superfícies de revolução: o cone generalizado (quando  $K = 0$ ), e as superfícies mínimas de Riemann (quando  $H = 0$ ).

## Apêndice: Expressões - *Mathematica*

### 4.1 Expressões das curvaturas quando os planos de folheação não são paralelos

Fornecemos aqui as expressões de  $W$ ,  $H_1$  e  $K_1$ .

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}r^2 (\beta^2 - \gamma^2 + r^2\kappa^2) \cos 2v + r^2\beta\gamma \sin 2v \\ &\quad + 2r^2 (\beta r' - r\alpha\kappa) \cos v + 2r^2\gamma r' \sin v \\ &\quad + \frac{1}{2}r^2 (2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + r^2\kappa^2 + 2r'^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_1 &= -\frac{1}{2}r^3\kappa (\beta^2 - \gamma^2 + r^2\kappa^2) \cos 3v - r^3\beta\gamma\kappa \sin 3v \\ &\quad + \frac{1}{2}r^3 [-6\beta\kappa r' + r\kappa (5\alpha\kappa + \beta') - \beta\kappa' r] \cos 2v + \frac{1}{2}r^3 [r\kappa\gamma' - \gamma (6\kappa r' + r\kappa')] \sin 2v \\ &\quad - \frac{1}{2}r^2 \{3r^3\kappa^3 - 4\alpha\beta r' + r [8\alpha^2\kappa + 3\kappa (\beta^2 + \gamma^2 + 2r'^2) - 2\beta\alpha' + 2\alpha (-\gamma\sigma + \beta')] \\ &\quad \quad + 2r^2 (r'\kappa' - \kappa r'')\} \cos v \\ &\quad - r^2 \{-2\alpha\gamma r' + r^2\kappa\sigma r' + r [-\gamma\alpha' + \alpha (\beta\sigma + \gamma')]\} \sin v \\ &\quad + \frac{1}{2}r^2 \{2\alpha^3 + r [2r' (-2\beta\kappa + \alpha') + r (\kappa (-2\gamma\sigma + \beta') - \beta\kappa')] \\ &\quad \quad + \alpha (2\beta^2 + 2\gamma^2 + 5r^2\kappa^2 + 2r'^2 - 2rr'')\}, \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_1 = & \frac{1}{8}r^4\kappa^2(\beta^2 - \gamma^2 + r^2\kappa^2)\cos 4v + \frac{1}{4}r^4\beta\gamma\kappa^2\sin 4v \\
& + \frac{1}{4}r^4\kappa\{4\beta\kappa r' + r[-\kappa(3\alpha\kappa + \beta') + \beta\kappa']\}\cos 3v \\
& + \frac{1}{4}r^4\kappa[-r\kappa\gamma' + \gamma(4\kappa r' + r\kappa')]\sin 3v \\
& + \frac{1}{2}r^3\{r^3\kappa^4 - 2\alpha\beta\kappa r' + r[\kappa(3\alpha^2\kappa + \kappa(\beta^2 + \gamma^2 + 3r'^2) - \beta\alpha' + \alpha(-\gamma\sigma + 2\beta')) - \alpha\beta\kappa'] \\
& \quad + r^2\kappa(r'\kappa' - \kappa r'')\}\cos 2v \\
& + \frac{1}{2}r^3\{\kappa[-2\alpha\gamma r' + r^2\kappa\sigma r' + r(-\gamma\alpha' + \alpha(\beta\sigma + 2\gamma'))] - r\alpha\gamma\kappa'\}\sin 2v \\
& - \frac{1}{4}r^3\{4\alpha^3\kappa + 4\alpha^2(-\gamma\sigma + \beta') + r\kappa[4r'(-2\beta\kappa + \alpha') + r(-4\gamma\kappa\sigma + 3\kappa\beta' - 3\beta\kappa')] \\
& \quad + \alpha(4\beta^2\kappa + 9r^2\kappa^3 + 8\kappa r'^2 - 4\beta\alpha' + 4rr'\kappa' - 8r\kappa r'')\}\cos v \\
& + \frac{1}{4}r^3[-4(\gamma\kappa + \alpha\sigma)(\alpha\beta + r\kappa r') + 4\alpha\gamma\alpha' - (4\alpha^2 + r^2\kappa^2)\gamma' + r^2\gamma\kappa\kappa']\sin v \\
& + \frac{1}{8}r^3\{3r^3\kappa^4 + r[\kappa(12\alpha^2\kappa + \kappa(3\beta^2 - 3\gamma^2 + 4r'^2) - 4\beta\alpha' + \alpha(-12\gamma\sigma + 8\beta')) - 4\alpha\beta\kappa'] \\
& \quad - 8\alpha(r'(2\beta\kappa - \alpha') + \alpha r'') + 4r^2\kappa(r'\kappa' - \kappa r'')\}.
\end{aligned}$$

Para obter os coeficientes  $A_k$  e  $B_k$ , usamos

```

eq = a2 h12 w - 4 (c w2 - b k1)2 ;
eqf = TrigFactor[eq] ;

```

Ressaltamos que a avaliação da segunda expressão acima pode ser particularmente exigente em termos de recursos. Fora a velocidade do processador, o fator limitante parece ser a memória RAM, um mínimo de 6 GB é recomendado.

## 4.2 Derivação no referencial móvel de Frenet com o *Mathematica*

Segue a implementação da técnica para derivação no referencial móvel de Frenet no *Mathematica* conforme explicado na seção 2.1.

```

x[u_, v_] = {0, r[u] Cos[v], r[u] Sin[v]};
inertie =  $\begin{pmatrix} 0 & -x[u] & 0 \\ x[u] & 0 & -\sigma[u] \\ 0 & \sigma[u] & 0 \end{pmatrix}$ ;
xu = { $\alpha[u]$ ,  $\beta[u]$ ,  $\gamma[u]$ } + D[x[u, v], u] + inertie.x[u, v];
xv = D[x[u, v], v];
xuu = FullSimplify[D[xu, u] + inertie.xu];
xuv = D[xu, v];
xvv = D[xv, v];

```

### 4.3 Expressões das curvaturas quando os planos de folheação são paralelos

Aqui fornecemos as expressões de  $W$ ,  $H_1$  e  $K_1$ .

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}r^2 (f'^2 - g'^2) \cos 2v + r^2 f' g' \sin 2v \\
&\quad + 2r^2 f' r' \cos v + 2r^2 g' r' \sin v \\
&\quad + \frac{1}{2}r^2 (2 + f'^2 + g'^2 + 2r'^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_1 &= r^2 (2f'r' - rf'') \cos v + r^2 (2g'r' - rg'') \sin v \\
&\quad + r^2 (1 + f'^2 + g'^2 + r'^2 - rr'')
\end{aligned}$$

$$K_1 = -r^3 f'' \cos v - r^3 g'' \sin v - r^3 r''$$

### 4.4 Resolução numérica de equações diferenciais e plotagem

Exibimos uma maneira de obter o gráfico de parte de uma superfície de Riemann.

```

s1 =
  NDSolve[{1 + (λ2 + μ2) r[u]4 + r'[u]2 - r[u] r''[u] == 0, f'[u] == μ r[u]2,
    g'[u] == λ r[u]2, f[0] == 0, g[0] == 0, r[0] == 1, r'[0] == 0} /. {λ → 1, μ → 1},
  {r[u], f[u], g[u]}, {u, -0.9, 0.9}, Method → "ExplicitRungeKutta"];

rsol[u_] = Evaluate[r[u] /. s1];
fsol[u_] = Evaluate[f[u] /. s1];
gsol[u_] = Evaluate[g[u] /. s1];

ParametricPlot3D[{u, fsol[u] + rsol[u] Cos[v], gsol[u] + rsol[u] Sin[v]},
  {u, -0.8, 0.8}, {v, 0, 2 π}, PerformanceGoal → "Quality"]

```

## 4.5 Especificações técnicas

Finalmente, para fins de comparação e reproduzibilidade, seguem as especificações técnicas relevantes do computador usado na elaboração deste trabalho.

- Hardware:
  - Processador: i7 2600K @ 4.4 GHz.
  - Memória RAM: 2 × 4 GB DDR3 - CL9-11-10-28 @ 2133 MHz.
  - Armazenamento: SSD 100 GB SATA 3.
- Sistema operacional: Fedora 19 (x64)
- Mathematica: versão 8.

# Referências Bibliográficas

---

- [1] B. van-Brunt, K. Grant, "I: Weingarten surfaces and surface shape investigation", *Potential applications of Weingarten surfaces in CAGD*, Comput. Aided Geom. Des. **13**, 1996, 569-582.
- [2] S. S. Chern, *Some new characterizations of the Euclidean sphere*, Duke Math. J. **12**, 1945, 279-290.
- [3] C. Delaunay, *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante*, J. Math. Pure Appl. **6**, 1841, 309-320.
- [4] L. Eisenhart, *Differential Geometry*, Boston: Gin and Co, 1909.
- [5] A. Enneper, *Die cyklischen Flächen*, Z. Math. Phys. **14**, 1869, 393-421.
- [6] P. Hartman, W. Winter, *Umbilical points and W-surfaces*, Am J Math **76**, 1954, 502-508.
- [7] J. A. Gálvez, A. Martínez, F. Milán, *Linear Weingarten Surfaces in  $\mathbb{R}^3$* , Monatsh Math **138**, 2003, 133-144.
- [8] H. Hopf, *Über Flächen mit einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen*, Math. Nachr. **4**, 1951, 232-249.
- [9] H. Hopf, "Differential Geometry in the Large", *Lect. Notes 1000*, Berlin Heidelberg New York: Springer, 1983.
- [10] W. C. Jagy, *Minimal hypersurfaces foliated by spheres*, Michigan Math J **38**, 1991, 255-270.
- [11] W. C. Jagy, *Sphere-foliated constant mean curvature submanifolds*, Rocky Mount J Math **28**, 1998, 983-1015.

- [12] W. Kühnel, M. Steller, *On closed Weingarten surfaces*, Monatsh Math **146**, 2005, 113-129.
- [13] R. López, *Cyclic surfaces of constant Gauss curvature*, Houston Math J **27**, 2001, 799-805.
- [14] R. López, "Cyclic hypersurfaces of constant curvature", In: K. Fukaya et al (eds), *Minimal Surfaces, Geometric Analysis and Symplectic Geometry*, Tokyo: Math Soc of Japan, 2002, 185-199.
- [15] R. López, *Special Weingarten surfaces foliated by circles*, Monatsch Math **154**, 2008, 289-302.
- [16] R. López, *On linear Weingarten surfaces*, Int j Math **19**, 2008, 439-448.
- [17] J. C. C. Nitsche, *Cyclic surfaces of constant mean curvature*, Nach Akad Wiss Göttingen, Math Phys II, **1**, 1989, 1-5.
- [18] B. Papantoniou, *Classification of the surfaces of revolution whose principal curvatures are connected by the relation  $A\kappa_1 + B\kappa_2 = 0$  where  $A$  or  $B$  is different from zero*, Bull Calcutta Math Soc **76**, 1984, 49-56.
- [19] B. Riemann, *Über die Flächen vom Kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung*, Abh Königl Ges Wissensch Göttingen Mathema Cl **13**, 1868, 329-333.
- [20] H. Rosenberg, R. Sa Earp, *The geometry of properly embedded special surfaces in  $\mathbb{R}^3$ ; e.g., surfaces satisfying  $aH + bK = 1$ , where  $a$  and  $b$  are positive*, Duke Math J **73**, 1994, 291-306.
- [21] K. Voss, *Über geschlossene Weingartensche Flächen*, Math Annalen **138**, 1959, 42-54.
- [22] J. Weingarten, *Über eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen*, J Reine Angew Math **59**, 1861, 382-393.
- [23] J. Weingarten, *Über die Flächen, derer Normalen eine gegebene Flächen berühren*, J Reine Angew Math **62**, 1863, 61-63.