

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

**O Degree Graph dos grupos alternados e de  
outros grupos simples**

Allan Kardec Messias da Silva

Brasília, 05 de Fevereiro de 2013

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

**O Degree Graph dos grupos alternados e de  
outros grupos simples**

Allan Kardec Messias da Silva<sup>1</sup>

Dissertação apresentada como requisito parcial para conclusão do Mestrado  
em Matemática

Comissão examinadora

---

Prof. Dr. Marco Antonio Pellegrini (Orientador) MAT/UnB

---

Profa. Dra. Irina Sviridova MAT/UnB

---

Prof. Dr. Ilir Snopche MAT/UFRj

Brasília, 05 de Fevereiro de 2013

---

<sup>1</sup>O autor foi bolsista da CNPq durante a elaboração dessa dissertação

## Agradecimento

Agradeço primeiramente a Deus que me deu oportunidade e conhecimento para atravessar esta etapa da minha vida, ao Professor Marco Antonio Pellegrini que teve paciência na orientação desse trabalho, e agradeço também aos meus pais e irmãos, e principalmente agradeço minha maravilhosa esposa Ana Lúcia.

## Dedicatória

Dedico este trabalho para meus pais Adhemar Messias e Sebastiana Alves, e a minha esposa Ana Lúcia que comigo enfrentou muitas dificuldades.

## Resumo

O presente trabalho é uma introdução ao estudo de um grafo chamado Degree Graph. Este grafo é associado aos graus dos caracteres de um grupo finito no seguinte modo: os vértices são os primos que dividem os graus dos caracteres irreduzíveis e dois vértices  $p, q$  são conexos com uma aresta se o grupo possui um caráter irreduzível cujo grau é divisível pelo produto  $pq$ . O Degree Graph foi estudado inicialmente em grupos solúveis e apenas a pouco teve seus estudos avançados para grupos não solúveis. Donald L. White completou o estudo para grupos simples em 2009 com o artigo ‘Degree Graphs of Simple Groups’, onde ele descreve para todos os grupos finitos simples os correspondentes Degree Graphs. Vamos neste trabalho mostrar estes estudos para todos os grupos alternados, e alguns grupos simples lineares, simpléticos e unitários.

O principal resultado que vamos ilustrar em detalhes é o fato que, se  $n \geq 9$ , o Degree Graph do grupo alternado  $\mathcal{A}_n$  é um grafo completo. Este resultado usa uma conjectura de Alvis, provada por Barry e Ward.

**Palavra chave:** Conjectura de Alvis. Degree Graphs. Grupos simples.

## Abstract

The present work is an introduction to the study of a graph called Degree Graph. This graph is associated to the degrees of the characters of a finite group in the following way: the vertices are the primes that divide the degrees of the irreducible characters and two vertices  $p, q$  are connected with an edge if the group has an irreducible character whose degree is divisible the product  $pq$ . The Degree Graph was initially studied for soluble groups and only recently also for non soluble groups. In 2009 Donald L. White completed the study for simple groups in the paper ‘Degree Graph of Simple Groups’, where he describes for all finite simple groups the corresponding Degree Graphs. In this work, we will illustrate these studies for all alternating groups and some simple linear, symplectic and unitary groups.

The main result that we will describe in detail is the fact that if  $n \geq 9$ , the Degree Graph of the alternating group  $\mathcal{A}_n$  is a complete graph. This result makes use of a conjecture of Alvis, proved by Barry Ward.

**Keywords:** Alvis conjecture. Degree Graphs. Simple groups.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>1 Resultados preliminares</b>	<b>11</b>
1.1 Representações e Caracteres . . . . .	11
1.2 Propriedades do Grupo Simétrico $\mathcal{S}_n$ . . . . .	22
<b>2 Uma Conjectura de Alvis</b>	<b>41</b>
2.1 A conjectura . . . . .	41
2.2 Escolha da partição de $n$ . . . . .	41
2.3 O conjunto $\mathcal{P}(\alpha_n)$ . . . . .	47
2.3.1 Primos médios quando $\kappa(n)$ é ímpar . . . . .	47
2.3.2 Primos médios quando $\kappa(n)$ for par . . . . .	68
2.3.3 Primos Pequenos . . . . .	93
<b>3 Degree Graphs</b>	<b>101</b>
3.1 Conceitos básicos sobre grafos . . . . .	101
3.2 O Degree Graph . . . . .	103
3.2.1 O Degree Graph de alguns Grupos Finitos Simples . . . . .	105





# Introdução

Na teoria de representações, a tabela de caracteres irreduzíveis de um grupo pode fornecer muitas informações sobre o grupo, como por exemplo: se o grupo é abeliano ou não; se tem subgrupos normais e conseqüentemente se o grupo é simples, ou se o grupo é solúvel. Mas em particular, os graus dos caracteres irreduzíveis de um grupo também foram motivos de estudos por diversos matemáticos em relação a um grafo chamado Degree Graph. O conjunto de vértices deste grafo é o conjunto dos primos divisores dos graus dos caracteres irreduzíveis de um grupo finito  $G$ . Uma aresta liga dois vértices  $p, q$  se existir algum grau de um caráter irreduzível de  $G$  tal que  $pq$  o divida. Inicialmente este grafo foi estudado somente para grupos solúveis, e só depois desenvolvido para outros tipos de grupos. Vamos mostrar um pouco desses estudos feitos em grupos não abelianos finitos simples, pois em grupos abelianos finitos simples (os grupos de ordens primas) esses estudos não são interessantes devido o conjunto de vértices ser vazio.

Aqui destacamos alguns artigos no estudo dos Degree Graphs, que são eles:

- The Diameter of the Character Degree Graph [18], escrito por O. Manz, W. Willems e T. R. Wolf em 1989;
- Diameters of Degree Graphs of Nonsolvable Groups [15], escrito por Mark L. Lewis e Donald L. White em 2005; e
- Degree Graph of Simple Groups [21], escrito por Donald L. White em 2009.

Este último artigo é um resumo completo dos estudos feitos durante anos por White. Para os grupos alternados ele contou com a ajuda de uma conjectura feita por D. L. Alvis em 1991 no artigo ‘Character Degrees of Simple Groups’ [1], produzido por ele Alvis e Barry. Esta conjectura diz existir um caráter irreduzível  $\chi$  do grupo alternado  $\mathcal{A}_n$  com  $n \geq 15$ , tal que todo primo  $p \leq n$  divide  $\chi(1)$ . Esta conjectura foi mostrada por Barry e Ward no artigo ‘On

conjecture of Alvis' em 2005. White também contou com a ajuda de outros artigos, como por exemplo:

- The Character of the Finite Simplectic Grupos  $Sp(4, q)$  [20], escrito por B. Srinivasan em 1968;
- The Character of the Finite Simplectic Groups  $Sp(4, q)$ ,  $q = 2^f$  [7], escrito por H. Enomoto em 1972;
- The Character Table for  $SL(3, q)$ ,  $SU(3, q^2)$ ,  $PSL(3, q)$  e  $PSU(3, q^2)$  [8], escrito por J. S. Frame e W. A. Simpson em 1973.

Estes artigos o ajuram no estudo dos Degree Graphs das famílias de grupos simples: Projetivo Especial Simplético  $PSp(4, q)$ , Projetivo Especial Linear  $PSL(3, q)$ , Projetivo Especial Unitário  $PSU(3, q^2)$ . Os outros grupos finitos simples que veremos os estudos dos seus Degree Graphs é a família de grupos simples Projetivo Especial Linear  $PSL(2, q)$ , que tem sua tabela de caracteres irredutíveis, por exemplo, no livro 'Group Representation Theory, part A' [6], escrito por Dornhoff em 1971, e os 26 grupos simples esporádicos que têm todas as tabelas de caracteres irredutíveis mostradas no livro 'Atlas of Finite Groups' [4], escrito por J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson em 1985.

No primeiro capítulo desta dissertação lembramos algumas informações básicas sobre a teoria de representações dos grupos finitos e, em particular, dos grupos simétricos e alternados. No segundo capítulo, ilustremos em detalhes a prova da conjectura de Alvis para depois aplicar este resultado ao estudo do Degree Graph dos grupos alternados e simétricos. Na parte final, descrevemos brevemente os Degree Graphs de outros grupos simples, lineares, simpléticos, unitários e esporádicos.

# Capítulo 1

## Resultados preliminares

Este primeiro capítulo tem como objetivo introduzir todos os resultados importantes que venhamos a precisar no decorrer do nosso trabalho sobre a Teoria de Representações de grupos simétricos.

### 1.1 Representações e Caracteres

Seja  $\mathbb{F}$  um corpo e seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita sobre  $\mathbb{F}$ , diremos neste caso que  $V$  é um  $\mathbb{F}$ -espaço.

**Definição 1.1.1** (Representação). *Seja  $G$  um grupo e seja  $V$  um  $\mathbb{F}$ -espaço. Uma representação de  $G$  em  $V$  é um homomorfismo de grupos  $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ , sendo  $GL(V)$  o grupo dos  $\mathbb{F}$ -automorfismos de  $V$ . Neste caso,  $V$  é chamado de um  $\mathbb{F}$ -espaço de representação de  $G$  e sua dimensão será chamada de grau da representação  $\varphi$ .*

Quando  $V$  for um  $\mathbb{F}$ -espaço de representação de  $G$ , denotemos por  $\varphi_g : V \rightarrow V$  a imagem  $\varphi(g) \in GL(V)$ .

**Observação 1.1.2.** *Tomemos por  $V$  um  $\mathbb{F}$ -espaço de representação de  $G$  com dimensão  $n$ . Denotemos por  $GL(n, \mathbb{F})$  o grupo das matrizes  $n \times n$  invertíveis com entradas em  $\mathbb{F}$ . Se fixarmos uma base de  $V$  podemos definir um isomorfismo*

$$\psi : GL(V) \rightarrow GL(n, \mathbb{F}),$$

*associando a cada automorfismo  $\varphi \in GL(V)$  a sua respectiva matriz em relação à base considerada.*

Então, similarmente definimos representação matricial da seguinte forma.

**Definição 1.1.3** (Representação Matricial). *Seja  $G$  um grupo e seja  $\mathbb{F}$  um corpo. Uma representação matricial de  $G$  com grau  $n$  sobre  $\mathbb{F}$  é um homomorfismo de grupos  $\psi : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{F})$ .*

Assuma que  $V, W$  são  $\mathbb{F}$ -espaços de representações de  $G$  pelas seguintes representações

$$\varphi : G \longrightarrow GL(V) \text{ e } \vartheta : G \longrightarrow GL(W).$$

Diremos que  $\varphi$  e  $\vartheta$  são representações equivalentes se existir um isomorfismo  $\tau : V \longrightarrow W$  tal que

$$\vartheta_g = \tau \circ \varphi_g \circ \tau^{-1}, \quad \forall g \in G.$$

Desta forma, duas representações matriciais de  $G$  sejam elas

$$\psi : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{F}) \text{ e } \xi : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{F}),$$

são representações equivalentes se existir uma matriz inversível  $U \in GL(n, \mathbb{F})$  tal que

$$\psi_g = U\xi_g U^{-1}, \quad \forall g \in G.$$

Facilmente se observa que para duas representações matriciais obtidas do mesmo  $\mathbb{F}$ -espaço de representação de  $G$ , por simplesmente mudando a base considerada sobre  $\mathbb{F}$ , temos essas representações equivalentes.

**Definição 1.1.4.** *Seja  $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$  uma representação do grupo  $G$ . Um subespaço  $W \subseteq V$  é dito  $G$ -subespaço de  $V$  se  $\varphi_g W \subseteq W$  para  $\forall g \in G$ .*

Tomemos  $W$  como  $G$ -subespaço de  $V$ , então  $\varphi$  induzirá uma representação de  $G$  em  $W$ . Denotemos essa representação por  $\varphi \downarrow_W$ .

Seja  $V$  um  $\mathbb{F}$ -espaço e sejam  $U_1, \dots, U_t$  subespaços vetoriais de  $V$  com dimensões  $a_1, \dots, a_t$ , respectivamente. Então a soma destes subespaços será definida por

$$U_1 + \dots + U_t = \{u_1 + \dots + u_t, u_i \in U_i \text{ com } 1 \leq i \leq t\}.$$

Iremos dizer que a soma  $U_1 + \dots + U_t$  será direta, se todo elemento desta soma poderá ser escrito de maneira única

$$u_1 + \dots + u_t, u_i \in U_i \text{ com } 1 \leq i \leq t.$$

Caso isto aconteça, denotaremos por  $U_1 \oplus \dots \oplus U_t$  sendo a soma direta (neste caso teremos que a dimensão da soma é a soma das dimensões).

**Definição 1.1.5.** *Seja  $V$  um  $\mathbb{F}$ -espaço de representação de  $G$  obtido por  $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ . Diremos que  $\varphi$  é:*

- (i) *Irredutível, se os únicos  $G$ -subespaços de  $V$  forem  $\{0\}$  e  $V$ ;*
- (ii) *Redutível, se não for irredutível;*
- (iii) *Completamente redutível, se  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$  onde cada  $V_i$  para  $1 \leq i \leq t$ , é um  $G$ -subespaço irredutível. Neste caso, escreveremos  $\varphi = \varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_t$  sendo  $\varphi_i = \varphi \downarrow_{V_i}$  para  $1 \leq i \leq t$  representações irredutíveis de  $G$ .*

Seja  $\psi : G \rightarrow GL(n, \mathbb{F})$  uma representação matricial do grupo  $G$  sobre o  $\mathbb{F}$ -espaço  $V$  e seja  $W$  um  $G$ -subespaço de  $V$  de dimensão  $m$ . Diremos que  $\psi$  é uma representação redutível, se existir uma matriz  $n \times n$  inversível  $C$  com coeficientes em  $\mathbb{F}$  tal que  $\forall g \in G$

$$C^{-1} \cdot \psi_g \cdot C = \left( \begin{array}{ccc|c} \phi_g & & & \omega_g \\ 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \theta_g \\ 0 & \cdots & 0 & \end{array} \right),$$

onde  $\phi : G \rightarrow GL(m, \mathbb{F})$  e  $\theta : G \rightarrow GL(n-m, \mathbb{F})$  são representações matriciais de  $G$ , e o inteiro  $m$  não depende da escolha de  $g$ .

A representação  $\psi$  é dita ser irredutível, se não for redutível e será completamente redutível ou decomponível, se existir uma matriz  $n \times n$  inversível  $C$  com coeficientes em  $\mathbb{F}$  tal que  $\forall g \in G$

$$C^{-1} \cdot \psi(g) \cdot C = \left( \begin{array}{ccccc} \phi_1(g) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi_2(g) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \phi_m(g) \end{array} \right) = \phi_1(g) \oplus \cdots \oplus \phi_m(g),$$

onde  $\phi_i$  são todas representações matriciais irredutíveis de  $G$ .

Um dos principais resultados sobre a redutibilidade de representações é devido a Heinrich Maschke que nos diz sobre determinadas circunstâncias que toda representação é completamente redutível.

**Teorema 1.1.6** (Teorema de Maschke). *Seja  $G$  um grupo finito e seja  $\mathbb{F}$  um corpo de característica que não divide a ordem de  $G$ . Então, toda representação de  $G$  sobre  $\mathbb{F}$  é completamente redutível.*

*Demonstração.* Ver [11] p. 4. □

Juntamente com a importância da redutibilidade das representações, está o estudo dos traços destas representações, pois neles é possível descobrir muitas informações sobre o nosso grupo. Em particular, quando as representações são irredutíveis.

**Definição 1.1.7** (Caráter). *Seja  $\varphi : G \rightarrow GL(n, \mathbb{F})$  uma representação matricial do grupo  $G$  sobre o corpo  $\mathbb{F}$ . Defina  $\theta : G \rightarrow \mathbb{F}$  a função  $\theta(g) = \text{tr}(\varphi(g))$ ,  $g \in G$ . Chamemos  $\theta$  de caráter de  $G$  associado a representação  $\varphi$ . Quando  $\varphi$  for uma representação irredutível, então diremos que  $\theta$  é um caráter irredutível.*

Assuma  $\varphi : G \rightarrow GL(n, \mathbb{F})$  como uma representação matricial do grupo  $G$ . Se  $\psi$  é uma representação de  $G$  equivalente a  $\varphi$ , então os caracteres de  $G$  associados as representações  $\varphi$  e  $\psi$  são iguais. Isto porque o traço de matrizes é invariante por conjugação.

Denotemos por  $\mathbb{C}$  o corpo dos números complexos. A proposição abaixo nos mostra algumas propriedades sobre representações realizadas sobre o corpo  $\mathbb{C}$ . Além disso, a partir de agora nossos grupos serão sempre finitos.

**Proposição 1.1.8.** *Seja  $G$  um grupo. Então, as seguintes propriedades são satisfeitas:*

- (i) *Existem  $r$  distintas representações irredutíveis  $\varphi_1, \dots, \varphi_r$  de  $G$  sobre  $\mathbb{C}$  respectivamente, a menos de equivalência com graus  $n_1 = 1, n_2, \dots, n_r$ , onde  $r$  é igual ao número de classes de conjugação de  $G$ . Em particular, fixamos por  $\varphi_1$  a representação obtida enviando todos os elementos do grupo  $G$  para identidade  $1_{\mathbb{C}}$ ; essa representação será chamada representação trivial de  $G$ ;*
- (ii)  $|G| = 1 + n_2^2 + \dots + n_r^2$ ;
- (iii) *Cada  $n_i$  divide  $|G|$ .*

*Demonstração.* Ver [11] p. 5 – 17. □

**Lema 1.1.9.** *Seja  $G$  um grupo. Assuma por  $\varphi_i : G \rightarrow GL(n_i, \mathbb{C})$  as representações matriciais irredutíveis de  $G$  e  $\theta_i$  seus caracteres associados. Então, as seguintes propriedades são satisfeitas:*

- (i)  $\theta_i(1)$  é o grau de  $\varphi_i$  e  $\theta_i(1)$  divide  $|G|$ ;
- (ii)  $\forall g \in G$ ,  $\theta_i(g)$  é soma de raízes  $d$ -ésima da unidade onde  $d$  é a ordem do elemento  $g$ . Em particular,  $\theta_i(g)$  é um inteiro algébrico;

- (iii)  $\forall g \in G, \theta_i(g^{-1}) = \overline{\theta_i(g)}$ ;
- (iv)  $\theta_i$  é uma função constante sobre as classes de conjugação de  $G$ ;
- (v) Se  $\varphi(g) = \varphi_1(g) \oplus \cdots \oplus \varphi_t(g), \forall g \in G$ , então  $\theta(g) = \theta_1(g) + \cdots + \theta_t(g)$ ;
- (vi) Sejam  $\varphi_i = [a_{rs}]$  e  $\varphi_j$  representações matriciais de graus  $n_i$  e  $n_j$  respectivamente. Definimos por

$$\varphi_i \otimes \varphi_j = \begin{bmatrix} a_{11}\varphi_j & \cdots & a_{1n}\varphi_j \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\varphi_j & \cdots & a_{nn}\varphi_j \end{bmatrix}$$

a representação de grau  $(n_i \cdot n_j)$  obtido pelo produto de Kronecker de  $\varphi_i$  e  $\varphi_j$ . Se para todo  $g \in G, \varphi(g) = \varphi_1(g) \otimes \cdots \otimes \varphi_t(g)$ , então  $\theta(g) = \theta_1(g) \cdots \theta_t(g)$ ;

- (vii) Duas representações têm o mesmo caráter se e somente são equivalentes.

*Demonstração.* Ver [11] p. 13 – 35. □

A partir de agora assuma que nossas representações serão realizadas sobre  $\mathbb{C}$ . Defina por  $\mathcal{Irr}(G)$  o conjunto de todos caracteres irredutíveis complexos do grupo  $G$ .

**Definição 1.1.10.** *Seja  $G$  um grupo e seja  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  uma função. Diremos que  $f$  é uma função de classe de  $G$  quando  $f$  for constante sobre as classes de conjugação de  $G$ . Denotemos por  $\mathcal{FC}(G)$  o conjunto das funções de classes do grupo  $G$ .*

Note que  $\mathcal{FC}(G)$  é um  $\mathbb{C}$ -espaço com dimensão igual ao número de classes de conjugação de  $G$ . Note ainda que todos os caracteres de  $G$  são de fato funções de classes de  $G$ . Em particular, o conjunto  $\mathcal{Irr}(G) \subseteq \mathcal{FC}(G)$ .

**Teorema 1.1.11.** *Seja  $G$  um grupo. Todo elemento  $\varphi$  em  $\mathcal{FC}(G)$  pode ser expressado unicamente na forma*

$$\varphi = \sum_{\chi \in \mathcal{Irr}(G)} a_\chi \chi, \quad a_\chi \in \mathbb{C}.$$

*Isto é,  $\mathcal{Irr}(G)$  é uma base para  $\mathcal{FC}(G)$ .*

*Demonstração.* Ver [11] p. 16. □

**Definição 1.1.12.** *Seja  $G$  um grupo e sejam  $\varphi, \psi$  elementos em  $\mathcal{FC}(G)$ . Definimos em  $\mathcal{FC}(G)$  o seguinte produto*

$$(\varphi, \psi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \overline{\psi(g)}.$$

Destaquemos algumas propriedades deste produto:

- (i)  $(\varphi, \psi)_G = \overline{(\psi, \varphi)_G}$ ;
- (ii)  $(\varphi, \varphi)_G > 0$  a menos que  $\varphi(g) = 0, \forall g \in G$ ;
- (iii)  $(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2, \psi)_G = a_1(\varphi_1, \psi)_G + a_2(\varphi_2, \psi)_G$ ;
- (iv)  $(\varphi, b_1\psi_1 + b_2\psi_2)_G = \overline{b_1}(\varphi, \psi_1)_G + \overline{b_2}(\varphi, \psi_2)_G$ .

Então, com estas propriedades  $(\ , \ )_G$  é um produto Hermitiano no  $\mathbb{C}$ -espaço  $\mathcal{FC}(G)$ .

**Teorema 1.1.13.** *Sejam  $\chi$  e  $\theta$  caracteres do grupo  $G$ . Então, as seguintes propriedades são satisfeitas:*

- (i)  $\chi \in \mathcal{Irr}(G) \iff (\chi, \chi)_G = 1$ ;
- (ii) *Se  $\chi, \theta \in \mathcal{Irr}(G)$  e  $\theta \neq \chi$ , então  $(\chi, \theta)_G = 0$ ;*
- (iii)  $(\theta, \chi)_G$  *é um inteiro não negativo;*
- (iv)  $(\theta, \chi)_G = (\chi, \theta)_G$ .

*Demonstração.* Ver [11] p. 20 – 21. □

**Proposição 1.1.14.** *Seja  $G$  um grupo e  $\mathcal{Irr}(G) = \{\chi_1 = 1_G, \chi_2, \dots, \chi_r\}$ . Então,  $\mathcal{Irr}(G)$  é uma base ortonormal de  $\mathcal{FC}(G)$  com respeito ao produto  $(\ , \ )_G$ .*

*Demonstração.* A demonstração segue dos teoremas 1.1.11 e 1.1.13. □

Assuma  $\theta$  um caráter do grupo  $G$  e  $\mathcal{Irr}(G)$  definido como na proposição acima. Então,  $\theta = a_1\chi_1 + \dots + a_r\chi_r$  onde  $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  e

$$(\theta, \chi_j)_G = \sum_{i=1}^r a_i (\chi_i, \chi_j)_G = a_j.$$

Se o produto for  $a_j \neq 0$ , isto mostra que  $\chi_j$  é uma componente de  $\theta$  com multiplicidade  $a_j$ . De certa forma, o produto  $(\ , \ )_G$  nos fornece informações sobre componentes em comum existentes nos caracteres que realizam o produto. Deste fato segue a seguinte definição.



**Definição 1.1.15.** *Seja  $\mathcal{Irr}(G) = \{\chi_1 = 1_G, \chi_2, \dots, \chi_r\}$  e sejam  $\theta = a_1\chi_1 + \dots + a_r\chi_r$  e  $\psi = b_1\chi_1 + \dots + b_r\chi_r$ , com  $a_i b_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , caracteres do grupo  $G$ . Defina por*

$$\theta \cap \psi = c_1\chi_1 + c_2\chi_2 + \dots + c_r\chi_r,$$

onde  $c_i = \min\{a_i, b_i\}$ .

Em palavras, a intersecção acima é a soma das componentes comum entre  $\theta$  e  $\psi$  multiplicadas por  $c_i$ .

**Observação 1.1.16.** *Note que*

$$(\theta, \psi)_G = \sum_{i,j=1}^r a_i b_j (\chi_i, \chi_j)_G = \sum_i a_i b_i.$$

Ao supormos  $(\theta, \psi)_G \geq 1$ , então  $\theta$  e  $\psi$  possuem componentes em comum. Agora se  $(\theta, \psi)_G = 1$ , então  $\theta$  e  $\psi$  têm uma única componente irredutível em comum; chamemos esta componente por  $\chi_s$ . Neste caso, o valor de  $c_s$  será exatamente 1, ou seja, o resultado de  $\theta \cap \psi = \chi_s$  é um caráter irredutível.

Assuma que  $\varphi : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  é uma representação matricial do grupo  $G$  e  $H \leq G$ . Denotamos por  $\varphi \downarrow_H$  a aplicação da representação  $\varphi$  restrita aos elementos  $h \in H$ . Chamemos a função  $\varphi \downarrow_H$  por  $\varphi$  restrita a  $H$ .

**Definição 1.1.17.** *Seja  $G$  um grupo e  $H \leq G$ . Suponha  $\varphi \in \mathcal{FC}(H)$ . Denote por  $\varphi^G$  a função de classe induzida para  $G$  definida por*

$$\varphi^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \varphi^\circ(xgx^{-1}), \text{ onde } \varphi^\circ(xgx^{-1}) = \begin{cases} \varphi(xgx^{-1}), & \text{se } xgx^{-1} \in H \\ 0, & \text{se } xgx^{-1} \notin H \end{cases}.$$

**Lema 1.1.18** (Reciprocidade de Frobenius). *Seja  $G$  um grupo e  $H \leq G$ . Suponha que  $\theta \in \mathcal{FC}(H)$  e  $\varphi \in \mathcal{FC}(G)$ . Então,*

$$(\theta^G, \varphi)_G = (\theta, \varphi \downarrow_H)_H$$

*Demonstração.* Ver [11] p. 62. □

**Proposição 1.1.19.** *Seja  $G$  um grupo e  $H \leq G$ . Suponha  $\varphi$  um caráter de  $H$ . Então,  $\varphi^G$  é um caráter de  $G$  com grau  $|G/H|\varphi(1)$ .*

*Demonstração.* Tome  $\chi \in \mathcal{Irr}(G)$ , então  $\chi \downarrow_H$  é um caráter de  $H$  e pelo lema 1.1.18

$$0 \leq (\varphi, \chi \downarrow_H)_H = (\varphi^G, \chi)_G.$$

Segue do teorema 1.1.13 que  $\varphi^G$  é um caráter de  $G$ , pois o produto acima é um inteiro não negativo. Já o grau de  $\varphi^G$  é obtido por

$$\varphi^G(1) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \varphi^\circ(x1x^{-1}) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \varphi(1) = |G/H|\varphi(1)$$

como queríamos.  $\square$

**Teorema 1.1.20.** *Seja  $G$  um grupo e  $H \leq K \leq G$ . Então, as seguintes propriedades são satisfeitas:*

- (i) *Se  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{FC}(H)$ , então  $(\varphi_1 + \varphi_2)^G = \varphi_1^G + \varphi_2^G$ ;*
- (ii) *Se  $\varphi \in \mathcal{FC}(H)$ , então  $(\varphi^K)^G = \varphi^G$ ;*
- (iii) *Se  $\varphi \in \mathcal{FC}(H)$  e  $\chi \in \mathcal{FC}(G)$ , então  $\chi \cdot \varphi^G = (\chi \downarrow_H \varphi)^G$ ;*
- (iv) *Se  $\chi \in \mathcal{FC}(G)$ , então  $(\chi \downarrow_H)^G = \chi \cdot 1_H^G$ ;*
- (v) *Se  $\chi \in \mathcal{FC}(G)$ , então  $(\chi \downarrow_H, \chi \downarrow_H)_H = (\chi, \chi \cdot 1_H^G)_G$ .*

*Demonstração.* No item (i) temos

$$\begin{aligned} (\varphi_1 + \varphi_2)^G(g) &= \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} (\varphi_1 + \varphi_2)^\circ(xgx^{-1}) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \varphi_1^\circ(xgx^{-1}) + \varphi_2^\circ(xgx^{-1}) \\ &= \varphi_1^G(g) + \varphi_2^G(g). \end{aligned}$$

No item (ii), considere  $\chi$  um qualquer caráter irredutível de  $G$ . Segue da reciprocidade de Frobenius que

$$((\varphi^K)^G, \chi)_G = (\varphi^K, \chi \downarrow_K)_K = (\varphi, (\chi \downarrow_K) \downarrow_H)_H = (\varphi, \chi \downarrow_H)_H = (\varphi^G, \chi)_G.$$

Segue da proposição 1.1.14 que  $(\varphi^K)^G = \varphi^G$ .

No item (iii)

$$\begin{aligned} (\chi \varphi^G)(g) &= \chi(g) \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \varphi^\circ(xgx^{-1}) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \chi^\circ(xgx^{-1}) \varphi^\circ(xgx^{-1}) \\ &= (\chi \downarrow_H \varphi)^G. \end{aligned}$$

No item (iv),  $\chi 1_H^G = (\chi \downarrow_H 1_H)^G = (\chi \downarrow_H)^G$ .

No item (v),  $(\chi, \chi 1_H^G)_G \stackrel{(iv)}{=} (\chi, (\chi \downarrow_H)^G)_G = (\chi \downarrow_H, \chi \downarrow_H)_H$ .  $\square$

**Teorema 1.1.21.** *Seja  $G$  um grupo e  $H \leq G$ . Suponha  $\chi$  um caráter de  $G$ . Então*

$$(\chi \downarrow_H, \chi \downarrow_H)_H \leq |G/H|(\chi, \chi)_G,$$

com a igualdade se e somente se  $\chi(g) = 0$  para todo elemento  $g \in G \setminus H$ .

*Demonstração.* Ver [11] p. 28. □

Vamos agora voltar as nossas atenções para quando o nosso subgrupo  $H$  for normal em  $G$ . Usaremos a notação  $H \triangleleft G$  para mostrar que tal fato acontece.

**Definição 1.1.22.** *Seja  $G$  um grupo e  $H \triangleleft G$ . Suponhamos que  $\varphi \in \mathcal{FC}(H)$  e definamos a função  $\varphi^g : H \rightarrow \mathbb{C}$  por*

$$\varphi^g(h) = \varphi(ghg^{-1}), \text{ onde } g \in G \text{ e } h \in H.$$

Chamemos cada  $\varphi^g$  por conjugado de  $\varphi$  sob a ação de  $G$ .

**Lema 1.1.23.** *Seja  $G$  um grupo e  $H \triangleleft G$ . Assuma que  $\varphi, \vartheta \in \mathcal{FC}(H)$  e  $\chi \in \mathcal{FC}(G)$ . Para  $x, y \in G$ , as seguintes propriedades são satisfeitas:*

- (i)  $\varphi^x \in \mathcal{FC}(H)$ ;
- (ii)  $(\varphi^x)^y = \varphi^{xy}$ ;
- (iii)  $(\varphi^x, \vartheta^x)_H = (\varphi, \vartheta)_H$ ;
- (iv)  $(\chi \downarrow_H, \varphi^x)_H = (\chi \downarrow_H, \varphi)_H$ ;
- (vi)  $\varphi^x$  é um caráter se também  $\varphi$  o for.

*Demonstração.* Ver [11] p. 78. □

Quando tivermos  $\varphi \in \mathcal{Irr}(H)$ , então todos seus conjugados distintos sob a ação de  $G$  são irredutíveis pelo item (iii) do lema acima.

Seja  $G$  um grupo e  $H \triangleleft G$ . Defina para  $\varphi \in \mathcal{Irr}(H)$

$$\mathcal{I}_G(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi^g(h) = \varphi(h), \forall h \in H\},$$

o grupo de inércia de  $\varphi$  sob a ação de  $G$ . Observe que  $H \leq \mathcal{I}(G) \leq G$  e caso  $\mathcal{I}_G(\varphi) = G$ , diremos que  $\varphi$  é um caráter  $G$ -invariante.

**Teorema 1.1.24** (Clifford). *Seja  $G$  um grupo e  $H \triangleleft G$ . Suponha  $\chi \in \mathcal{Irr}(G)$  com  $\theta$  uma componente irredutível de  $\chi \downarrow_H$  e  $\theta_1 = \theta, \theta_2, \dots, \theta_t$  seus conjugados distintos sob a ação de  $G$ . Então,*

$$\chi \downarrow_H = e \sum_{i=1}^t \theta_i,$$

onde  $e = (\chi \downarrow_H, \theta)_H$ .

*Demonstração.* Ver [11] p. 79. □

**Teorema 1.1.25.** *Seja  $G$  um grupo e  $H \triangleleft G$ . Suponha que  $\vartheta \in \mathcal{Irr}(H)$  e  $T = \mathcal{I}_G(\vartheta)$ . Agora defina por*

$$\mathcal{A} = \{\psi \in \mathcal{Irr}(T) \mid (\psi \downarrow_H, \vartheta)_H \neq 0\} \text{ e } \mathcal{B} = \{\chi \in \mathcal{Irr}(G) \mid (\chi \downarrow_H, \vartheta)_H \neq 0\}.$$

Então,

- (i) *Se  $\psi \in \mathcal{A}$ , então  $\psi^G$  é irredutível;*
- (ii) *A função  $\psi \mapsto \psi^G$  é uma bijeção entre os conjuntos  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ ;*
- (iii) *Se  $\psi^G = \chi$  com  $\psi \in \mathcal{A}$ , então  $\psi$  é a única componente irredutível de  $\chi \downarrow_T$  que está em  $\mathcal{A}$ ;*
- (iv) *Se  $\psi^G = \chi$  com  $\psi \in \mathcal{A}$ , então  $(\psi \downarrow_H, \vartheta)_H = (\chi \downarrow_H, \vartheta)_H$ .*

*Demonstração.* Ver [11] p. 82 – 83. □

**Teorema 1.1.26.** *Seja  $G$  um grupo e  $H \triangleleft G$  com  $|G/H| = p$  primo. Suponha  $\chi \in \mathcal{Irr}(G)$  e  $\theta$  uma componente irredutível de  $\chi \downarrow_H$  com  $\theta_1 = \theta, \theta_2, \dots, \theta_t$  seus conjugados distintos sob a ação de  $G$ . Então,*

- (i)  $\chi \downarrow_H$  é irredutível ou;
- (ii)  $\chi \downarrow_H = \sum_{i=1}^t \theta_i$ , onde  $t = p$ .

*Demonstração.* Ver [11] p. 85 – 86. □

Seja  $G$  um grupo finito e seja  $H \leq G$  não necessariamente normal. Um caráter  $\vartheta \in \mathcal{Irr}(H)$  é dito ser estendível a  $G$  se existir um caráter  $\chi \in \mathcal{Irr}(G)$  tal que  $\chi \downarrow_H = \vartheta$ .

**Corolário 1.1.27.** *Seja  $G$  um grupo e  $H \triangleleft G$ . Suponha que  $|G/H| = p$  é um primo e  $\vartheta \in \mathcal{Irr}(H)$  é  $G$ -invariante. Então,  $\vartheta$  é estendível para  $G$ .*

*Demonstração.* Seja  $\chi \in \mathcal{Irr}(G)$  uma componente de  $\vartheta^G$ , então pelo teorema 1.1.24,  $\chi \downarrow_H = e\vartheta$  para algum  $e$ , pelo teorema 1.1.26  $e = 1$ . Então,  $\chi \downarrow_H = \vartheta$  e portanto  $\vartheta$  é estendível para  $G$ .  $\square$

**Corolário 1.1.28.** *Sob as hipóteses do teorema 1.1.26. Denote por  $\mathcal{I}_\theta = \{\chi \in \mathcal{Irr}(G) \mid (\chi \downarrow_H, \theta)_H \geq 1\}$ . Então, segue que:*

- (1) *Se acontecer o item (i) no teorema 1.1.26, então  $|\mathcal{I}_\theta| = p$ ;*
- (2) *Se acontecer o item (ii) no teorema 1.1.26, então  $\theta^G \in \mathcal{Irr}(G)$  e  $\theta^G = \theta_i^G$  para qualquer conjugado distinto de  $\theta$  sob a ação de  $G$ .*

*Demonstração.* Segue do teorema 1.1.26, para todo  $\chi \in \mathcal{I}_\theta$  acontece o caso (i) ou (ii).

Suponha que acontece o item (i) do teorema 1.1.26. Então  $\theta$  é estendível para  $G$  pelo corolário 1.1.27. Assim,  $\theta^G = \sum_{\chi \in \mathcal{I}_\theta} \chi$  e ainda  $\theta^G(1) = |G/H| \cdot \theta(1)$ .

Agora  $\theta^G(1) = \sum_{\chi \in \mathcal{I}_\theta} \chi(1)$  e  $\theta(1) = \chi(1)$ , logo  $\theta^G(1) = \sum_{\chi \in \mathcal{I}_\theta} \chi(1) = |G/H| \cdot \chi(1)$  implicando  $|\mathcal{I}_\theta| = |G/H| = p$ , provando o item (1).

Agora suponha acontecer o item (ii) do teorema 1.1.26. Então  $\chi \downarrow_H = \sum_{i=1}^p \theta_i$  e conseqüentemente  $\mathcal{I}_G(\theta) = H$ , pois  $H \leq \mathcal{I}_G(\theta)$  e  $|G/\mathcal{I}_G(\theta)| = p$ . Agora considere  $T = H$  no teorema 1.1.25, então  $\theta^G$  é irredutível e além disso,

$$\begin{aligned} \theta_i^G(y) = (\theta^g)^G(y) &= \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} (\theta^g)^\circ(xy x^{-1}) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \theta^\circ(gxyx^{-1}g^{-1}), \quad (gx) = z \in G \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{z \in G} \theta^\circ(zyz^{-1}) \\ &= \theta^G \end{aligned}$$

para qualquer conjugado  $\theta_i$  de  $\theta$ . Isto conclui a demonstração.  $\square$

**Definição 1.1.29.** *Se  $H \triangleleft G$  e  $\tilde{\chi}$  é um caráter de  $G/H$ , então o caráter  $\chi$  de  $G$  que é dado por*

$$\chi(g) = \tilde{\chi}(Hg) \quad (g \in G)$$

*é chamado o elevado de  $\tilde{\chi}$  a  $G$ .*

**Teorema 1.1.30.** *Assuma que  $H \triangleleft G$ . Associando cada caráter de  $G/H$  com seu elevado a  $G$ , obtemos uma bijeção correspondente entre o conjunto de caracteres de  $G/H$  e o conjunto de caracteres  $\chi$  de  $G$  que satisfazem  $H \leq \text{Ker}(\chi)$ , onde  $\text{Ker}(\chi) = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$  é o núcleo de  $\chi$ . Deste modo, caracteres irredutíveis de  $G/H$  correspondem aos caracteres irredutíveis de  $G$  que têm  $H$  no seu núcleo.*

*Demonstração.* Ver [14] p. 169. □

**Teorema 1.1.31** (Mackey). *Seja  $G$  um grupo e  $H, K \leq G$ . Considere  $D$  o conjunto completo de representantes das classes laterais duplas  $HxK$  satisfazendo  $G = \bigcup_{x \in D} HxK$  união disjunta. Suponha  $\varphi$  sendo um caráter de  $H$  e  $\vartheta$  um caráter de  $K$ . Defina o caráter  $\vartheta^x$  em  $K^x$  por  $\vartheta^x(k) = \vartheta(xkx^{-1})$ . Então,*

$$(1) \quad \vartheta^G \downarrow_H = \sum_{x \in D} (\vartheta^x \downarrow_{H \cap K^x})^H;$$

$$(2) \quad (\varphi^G, \vartheta^G)_G = \sum_{x \in D} (\varphi \downarrow_{H \cap K^x}, \vartheta^x \downarrow_{H \cap K^x})_{H \cap K^x}.$$

*Demonstração.* A demonstração do item (1) é encontrada em [10] p. 218 – 219.

No item (2) utilizemos a reciprocidade de Frobenius e temos

$$\begin{aligned} (\varphi^G, \vartheta^G)_G &= (\varphi, \vartheta^G \downarrow_H)_H = \left( \varphi, \left( \sum_{x \in D} \vartheta^x \downarrow_{H \cap K^x} \right)^H \right)_H = \\ &= \left( \varphi \downarrow_{H \cap K^y}, \sum_{x \in D} \vartheta^x \downarrow_{H \cap K^x} \right)_{H \cap K^y} = \\ &= \sum_{x \in D} (\varphi \downarrow_{H \cap K^x}, \vartheta^x \downarrow_{H \cap K^x})_{H \cap K^x}. \end{aligned}$$

Isto conclui o teorema. □

## 1.2 Propriedades do Grupo Simétrico $\mathcal{S}_n$

Seja  $\Omega$  um conjunto finito de elementos. Uma permutação  $\pi$  sobre o conjunto  $\Omega$  é uma aplicação bijetiva  $\pi : \Omega \rightarrow \Omega$  que denotamos por

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & a & \dots \\ \dots & \dots & \pi(a) & \dots \end{pmatrix}.$$

O conjunto de todas permutações em  $\Omega$  juntamente com a operação de composição de aplicações formam um grupo. Este grupo é conhecido como grupo simétrico e denotemos por  $\mathcal{S}_\Omega$ . Em particular, se  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$  denotaremos  $\mathcal{S}_\Omega$  por  $\mathcal{S}_n$ .

**Definição 1.2.1.** *Sejam  $i_1, i_2, \dots, i_k, k \geq 1$  inteiros distintos em  $\{1, \dots, n\}$ . Uma permutação  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  é um  $k$ -ciclo se*

$$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_j) = i_{j+1}, j < k \text{ e } \sigma(i_k) = i_1$$

*e fixa todos os inteiros distintos de  $i_1, i_2, \dots, i_k$ . Escrevemos  $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ , mas também podemos escrever  $\sigma$  sendo  $(i_2, \dots, i_k, i_1), \dots, (i_k, i_1, \dots, i_{k-1})$  porém todas essas escrituras denotam a mesma permutação  $\sigma$ .*

Um elemento  $\tau \in \mathcal{S}_n$  é um ciclo se for um  $k$ -ciclo para algum  $k$ . Dois ciclos  $\sigma$  e  $\tau$  são ditos disjuntos se  $\sigma$  fixa todos os pontos movidos por  $\tau$  e vice-versa. Em particular, ciclos disjuntos sempre comutam.

**Exemplo 1.2.2.** *Tome dois ciclos em  $\mathcal{S}_n$ ,  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$  e  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ . Escreva  $\sigma = (152)(3)(4)(6)$  e  $\tau = (34)(1)(2)(5)(6)$ . Observemos que  $\sigma$  e  $\tau$  são de fato ciclos disjuntos e*

$$\sigma\tau = (152)(34)(6) = (34)(152)(6) = \tau\sigma,$$

*verificando assim que  $\sigma$  e  $\tau$  comutam.*

**Teorema 1.2.3.** *Cada elemento  $\pi \in \mathcal{S}_n$  possui uma escritura como produto de ciclos disjuntos  $\pi = \tau_1\tau_2\dots\tau_t$ , onde  $\tau_k$  são ciclos em  $\mathcal{S}_n$  com  $\tau_i$  e  $\tau_j$  disjuntos para  $i \neq j$ . Esta escritura será única a menos da ordem dos ciclos  $\tau_k$ .*

*Demonstração.* Ver [13] p. 5. □

Aplicamos sobre cada  $k$ -ciclo  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  uma função que chamemos por signo, definida por

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{se } k \text{ é ímpar} \\ -1, & \text{se } k \text{ é par} \end{cases}.$$

Agora considerando  $\pi = \tau_1\dots\tau_t$  a escritura de  $\pi$  por ciclos disjuntos. Defina por

$$\text{sgn}(\pi) = \prod_{k=1}^t \text{sgn}(\tau_k).$$

Segue do teorema 1.2.3 que o valor de  $\text{sgn}(\pi)$  é bem definido, pois o comprimento dos ciclos que aparecem na decomposição de ciclos disjuntos de  $\pi$  são unicamente determinados por  $\pi$ . Diremos que a permutação  $\pi$  é par quando  $\text{sgn}(\pi) = 1$  e ímpar quando  $\text{sgn}(\pi) = -1$ .

**Exemplo 1.2.4.** *Vejam os exemplos de permutações pares e ímpares. Tome as seguintes permutações já escritas em ciclos disjuntos  $a = (134)(25) \in \mathcal{S}_5$ ,  $b = (1)(236)(4)(578) \in \mathcal{S}_8$ ,  $c = (47)(125)(63) \in \mathcal{S}_7$  e  $d = (12) \in \mathcal{S}_2$ . Calculemos o signo em  $a, b, c$  e  $d$*

$$\text{sgn}(a) = -1, \text{sgn}(b) = 1, \text{sgn}(c) = 1 \text{ e } \text{sgn}(d) = -1.$$

*Então, as permutações  $b$  e  $c$  são pares e as permutações  $a$  e  $d$  são ímpares.*

Seja  $\pi = \tau_1 \dots \tau_t$  a decomposição de  $\pi$  em ciclos disjuntos. Denotemos por  $l_s$ ,  $1 \leq s \leq t$  o comprimento do ciclo  $\tau_s$ . Chamamos o conjunto (com eventuais repetições)  $\{l_1, l_2, \dots, l_t\}$  por estrutura cíclica de  $\pi$ .

**Exemplo 1.2.5.** *Seja  $\pi = (2, 5, 11)(1, 8, 9, 12, 15, 16)(3, 4, 10, 7)(6, 13)(14)$  a decomposição de  $\pi$  em ciclos disjuntos em  $\mathcal{S}_{16}$ . A estrutura cíclica de  $\pi$  é  $\{3, 6, 4, 2, 1\}$  e temos  $\text{sgn}(\pi) = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 1 = -1$ .*

Duas permutações  $\pi$  e  $\sigma$  em  $\mathcal{S}_n$  são ditas do mesmo tipo se elas tiverem a mesma estrutura cíclica.

**Exemplo 1.2.6.** *Tome  $(123)$  e  $(132)$  permutações em  $\mathcal{S}_3$ . Facilmente observamos que  $(123)$  e  $(132)$  são do mesmo tipo. Em particular,  $(123)$  e  $(132)$  são conjugados em  $\mathcal{S}_3$ . Esta conclusão também segue do próximo teorema.*

**Teorema 1.2.7.** *Dois elementos  $\alpha$  e  $\beta$  em  $\mathcal{S}_n$  são conjugados se e somente se forem do mesmo tipo em  $\mathcal{S}_n$ .*

*Demonstração.* Ver [13] p. 8 – 9. □

**Definição 1.2.8.** *Seja  $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_1 = 1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_r\}$  o conjunto das classes de conjugação de  $\mathcal{S}_n$ . Escolhamos como nosso representante da classe de conjugação  $\mathcal{C}_k$ , um qualquer elemento cuja estrutura cíclica satisfazer  $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_t$ . Em particular, denotemos por  $\mathcal{C}(\pi)$  a classe de conjugação de um qualquer elemento  $\pi \in \mathcal{S}_n$ .*

Importante observar que a soma dos elementos da estrutura cíclica de um qualquer elemento em  $\mathcal{S}_n$  deve ser  $n$ .

**Definição 1.2.9.** *Seja  $n$  um inteiro positivo e  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t\}$  uma sequência de inteiros positivos tais que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_t = n$ . Defina por  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t)$  e diremos que é uma partição de  $n$ , se  $\lambda_i \leq \lambda_{i-1}$  com  $2 \leq i \leq t$ . Caso  $\lambda$  for uma partição de  $n$ , então a denotamos por  $\lambda \vdash n$ .*



Duas partições  $\lambda \vdash n$  e  $\alpha \vdash n$  são dita distintas, se existe algum  $i$  que satisfaça  $\lambda_i \neq \alpha_i$ .

**Teorema 1.2.10.** *Denote por  $\mathcal{P}ar(n)$  o conjunto de todas as partições do inteiro  $n \geq 1$ . Existe uma bijeção  $f$  entre os conjuntos  $\mathcal{P}ar(n)$  e  $\mathcal{C}$ .*

*Demonstração.* Adote por  $\tau_j$  o representante da classe de conjugação  $\mathcal{C}_j$  como na definição 1.2.8 e considere sua estrutura cíclica sendo  $\{l_1, \dots, l_r\}$ . Então definimos a função  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}ar(n)$  por  $f(\mathcal{C}(\tau_j)) = (l_1, l_2, \dots, l_r)$ . Verifiquemos se  $f$  é a função procurada.

A função  $f$  é bem definida. Tomemos  $\tau_j$  e  $\tilde{\tau}_j$  dois representantes da mesma classe de conjugação  $\mathcal{C}_j$ . Segue do teorema 1.2.7 que  $\tau_j$  e  $\tilde{\tau}_j$  são do mesmo tipo em  $\mathcal{S}_n$  e portanto  $f(\mathcal{C}(\tau_j)) = f(\mathcal{C}(\tilde{\tau}_j))$ .

A função  $f$  é injetiva. Sejam  $\tau_i$  e  $\tau_j$  representantes das classes de conjugação  $\mathcal{C}(\tau_i)$  e  $\mathcal{C}(\tau_j)$  em  $\mathcal{S}_n$ . Suponha que  $f(\mathcal{C}(\tau_i)) = f(\mathcal{C}(\tau_j)) = \lambda$  uma partição em  $\mathcal{P}ar(n)$ . Então,  $\tau_i$  e  $\tau_j$  são do mesmo tipo em  $\mathcal{S}_n$  e segue do teorema 1.2.7 que  $\tau_i$  e  $\tau_j$  são conjugados. Portanto  $\mathcal{C}(\tau_i) = \mathcal{C}(\tau_j)$ .

A função  $f$  é sobrejetiva. Suponha  $\alpha = (l_1, l_2, \dots, l_r)$  uma partição em  $\mathcal{P}ar(n)$ . Formaremos um elemento  $\gamma \in \mathcal{S}_n$  tal que  $f(\mathcal{C}(\gamma)) = \alpha$ . Vamos a esta formação:

- Compondo o primeiro  $l_1$ -ciclo, os inteiros de 1 a  $l_1$ . Denotemos este ciclo por  $\gamma_1 = (1, 2, \dots, l_1)$ ;
- Compondo o segundo  $l_2$ -ciclo, os inteiros de  $l_1 + 1$  a  $(l_1 + l_2)$ . Denotemos este ciclo por  $\gamma_2 = (l_1 + 1, l_1 + 2, \dots, l_1 + l_2)$ ;
- Compondo nesta forma até o  $r$ -ésimo  $l_r$ -ciclo, formado por inteiros de  $(l_1 + l_2 + \dots + l_{r-1} + 1)$  a  $(l_1 + l_2 + \dots + l_{r-1} + l_r)$ . Denotemos este ciclo por  $\gamma_r = (l_1 + l_2 + \dots + l_{r-1} + 1, l_1 + l_2 + \dots + l_{r-1} + 2, \dots, l_1 + l_2 + \dots + l_{r-1} + l_r)$ .

Fácil ver que  $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_r$  é produto de ciclos disjuntos em  $\mathcal{S}_n$  e  $f(\mathcal{C}(\gamma)) = \alpha$ . Como  $\gamma$  satisfaz a definição 1.2.8 concluímos que  $f$  é sobrejetiva. Isto mostra que a função  $f$  é a bijeção procurada entre  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{P}ar(n)$ .  $\square$

Segue do teorema acima que cada classe de conjugação  $\mathcal{C}_i$  em  $\mathcal{S}_n$  corresponde a uma única partição  $\lambda$  em  $\mathcal{P}ar(n)$ . Neste caso, diremos que  $\lambda$  é a partição associada a  $\mathcal{C}_i$ .

A cada partição  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \vdash n$  iremos associar uma tabela que denotemos por  $T_\lambda$ , constituída por caixas alinhadas horizontalmente, verticalmente sendo justificadas à esquerda, satisfazendo as seguintes propriedades:

- A linha 1, terá  $\lambda_1$  caixas;
- A linha 2, terá  $\lambda_2$  caixas;

- ...
- A linha  $r$ , terá  $\lambda_r$  caixas.

**Exemplo 1.2.11.** *Seja  $\lambda = (4, 3, 3, 2, 2, 1)$  uma partição do inteiro 15. Sua tabela associada é*

$$T_{(4,3,3,2,2,1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow 4 \text{ caixas} \\ \rightarrow 3 \text{ caixas} \\ \rightarrow 3 \text{ caixas} \\ \rightarrow 2 \text{ caixas} \\ \rightarrow 2 \text{ caixas} \\ \rightarrow 1 \text{ caixa} \end{array}$$

Para  $\lambda \vdash n$  e  $T_\lambda$  sua tabela associada, iremos denotar por  $(T_\lambda)^t$  a sua tabela originada da transposição de linhas em  $T_\lambda$  por colunas, da seguinte maneira:

- linha 1 de  $T_\lambda$  será coluna 1 de  $(T_\lambda)^t$ ;
- linha 2 de  $T_\lambda$  será coluna 2 de  $(T_\lambda)^t$ ;
- ...
- linha  $r$  de  $T_\lambda$  será coluna  $r$  de  $(T_\lambda)^t$ .

Então é possível associar a tabela  $(T_\lambda)^t$  uma sequência  $\lambda^t = (\lambda_1^t, \dots, \lambda_s^t)$ , onde  $\lambda_i^t$  é igual a quantidade de caixas na coluna  $i$ . Veja que  $\lambda^t$  é de fato uma partição de  $n$  e chamemos por partição transposta de  $\lambda$ . Além disso, os valores das suas componentes  $\lambda_i^t$  podem ser calculados facilmente sendo

$$\lambda_i^t = |\{j \mid \lambda_j \geq i\}|.$$

Uma partição  $\lambda$  é dita auto-associada se e somente se  $\lambda = \lambda^t$ . Neste caso, obviamente temos  $T_\lambda = (T_\lambda)^t$ .

**Exemplo 1.2.12.** *Seja a partição  $\lambda = (3, 1, 1)$  do inteiro 5. Então sua tabela associada é*

$$T_{(3,1,1)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \text{ além disso } (T_\lambda)^t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} .$$

*Isto é,  $\lambda^t = (3, 1, 1) = \lambda$  e portanto  $\lambda$  é auto-associada.*



Vemos que a cada partição  $\lambda \vdash n$  podemos associar varias tabelas standards, consequentemente distintos subgrupos de Young, porém todos esses subgrupos são conjugados em  $\mathcal{S}_n$ . Logo para nossa teoria de representações em  $\mathcal{S}_n$ , subgrupos de Young possuem o mesmo caráter.

Então para nossos estudos seguintes é necessário o conhecimento de apenas um único subgrupo de Young para cada partição de  $n$ .

**Exemplo 1.2.16.** *No exemplo 1.2.15, associamos os seguintes subgrupos de Young*

$$S'_{(4,3,3,2,2,1)} = S_{\{1,3,4,6\}} \times S_{\{2,5,7\}} \times S_{\{8,9,10\}} \times S_{\{11,13\}} \times S_{\{12,15\}} \times S_{\{14\}} \text{ e}$$

$$S''_{(4,3,3,2,2,1)} = S_{\{1,2,3,5\}} \times S_{\{4,6,8\}} \times S_{\{7,9,11\}} \times S_{\{10,12\}} \times S_{\{13,14\}} \times S_{\{15\}}.$$

Segue do teorema 1.2.7 que os subgrupos de Young  $S'_{(4,3,3,2,2,1)}$  e  $S''_{(4,3,3,2,2,1)}$  são conjugados em  $\mathcal{S}_{15}$ .

Seja  $\lambda \vdash n$  e  $S_\lambda \leq \mathcal{S}_n$  um subgrupo de Young associado a  $\lambda$ . Sempre podemos determinar pelo menos dois caracteres lineares (caracteres de grau 1) em  $S_\lambda$ :

$$\begin{aligned} 1_{S_\lambda} : S_\lambda &\rightarrow \mathbb{C} \quad \text{onde} \quad 1_{S_\lambda}(\pi) = 1; \\ \varepsilon_{S_\lambda} : S_\lambda &\rightarrow \mathbb{C} \quad \text{onde} \quad \varepsilon_{S_\lambda}(\pi) = \text{sgn}(\pi), \end{aligned}$$

conhecidos por caráter principal e caráter signo respectivamente.

Tome  $S_\lambda$  e  $S_{\lambda^t}$  subgrupos de Young associados as partições  $\lambda$  e sua transposta  $\lambda^t$ . Considere  $D$  um conjunto completo de representantes das classes laterais duplas  $S_\lambda \pi S_{\lambda^t}$  onde  $\mathcal{S}_n = \bigcup_{\pi \in D} S_\lambda \pi S_{\lambda^t}$ . Segue do teorema 1.1.31 que

$$\begin{aligned} \left( 1_{S_\lambda}^{\mathcal{S}_n}, \varepsilon_{S_{\lambda^t}}^{\mathcal{S}_n} \right)_{\mathcal{S}_n} &= \sum_{\pi \in D} \left( 1_{S_\lambda} \downarrow_{S_\lambda \cap (S_{\lambda^t})^\pi}, \varepsilon_{S_{\lambda^t}}^\pi \downarrow_{S_\lambda \cap (S_{\lambda^t})^\pi} \right)_{S_\lambda \cap (S_{\lambda^t})^\pi} \\ &= \sum_{\pi \in D} \left( 1_{S_\lambda \cap (S_{\lambda^t})^\pi}, \varepsilon_{S_\lambda \cap (S_{\lambda^t})^\pi} \right)_{S_\lambda \cap (S_{\lambda^t})^\pi} \end{aligned} \quad (1.1)$$

onde denotamos por  $(S_{\lambda^t})^\pi = \pi S_{\lambda^t} \pi^{-1}$ .

Por serem caracteres lineares em  $\mathcal{S}_n$ ,  $1_{S_\lambda \cap (S_{\lambda^t})^\pi}$  e  $\varepsilon_{S_\lambda \cap (S_{\lambda^t})^\pi}$  acima, continuam sendo irredutíveis. Já o resultado em (1.1), depende apenas de quando  $1_{S_\lambda \cap (S_{\lambda^t})^\pi} = \varepsilon_{S_\lambda \cap (S_{\lambda^t})^\pi}$ . Agora como a interseção  $S_\lambda \cap (S_{\lambda^t})^\pi$  é o produto direto de grupos de permutações, então estes dois caracteres irredutíveis  $1_{S_\lambda \cap (S_{\lambda^t})^\pi}$  e  $\varepsilon_{S_\lambda \cap (S_{\lambda^t})^\pi}$  são iguais se e somente se  $S_\lambda \cap (S_{\lambda^t})^\pi = \{1\}$ . Portanto em (1.1)

$$\left( 1_{S_\lambda}^{\mathcal{S}_n}, \varepsilon_{S_{\lambda^t}}^{\mathcal{S}_n} \right)_{\mathcal{S}_n} = \sum_{\{\pi \in D \mid S_\lambda \cap (S_{\lambda^t})^\pi = \{1\}\}} 1. \quad (1.2)$$

Logo nosso trabalho em determinar  $\left(1_{S_\lambda}^{\mathcal{S}_n}, \varepsilon_{S_\lambda^t}^{\mathcal{S}_n}\right)_{\mathcal{S}_n}$ , resume-se a saber o número de classe laterais duplas  $S_\lambda \pi S_{\lambda^t}$  com a propriedade  $S_\lambda \cap (S_{\lambda^t})^\pi = \{1\}$ .

**Definição 1.2.17.** *Sejam  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \vdash n$  e  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \vdash n$ . Defina por  $A_\alpha^\lambda$  o conjunto das matrizes  $n \times n$  satisfazendo as seguintes condições:*

- (1) *Suas entradas possuem somente 0 ou 1;*
- (2) *A soma das entradas da primeira linha será  $\lambda_1$ , da segunda linha será  $\lambda_2$  assim até  $r$ -ésima linha somando  $\lambda_r$ ;*
- (3) *A soma das entradas da primeira coluna será  $\alpha_1$ , da segunda coluna será  $\alpha_2$  até a  $s$ -ésima coluna somando  $\alpha_s$ .*
- (4) *Todas outras linhas e colunas devem ter somas de entradas iguais a 0.*

**Exemplo 1.2.18.** *Sejam  $\lambda = (2, 1)$  e  $\alpha = (1, 1, 1)$  partições de 3. Então,  $A_\alpha^\lambda = \{A_1, A_2, A_3\}$  onde*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Teorema 1.2.19.** *Sejam  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \vdash n$  e  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \vdash n$ . Considere  $S_\lambda$  e  $S_\alpha$  seus subgrupos de Young respectivamente. Então o número de classes laterais duplas  $S_\lambda \pi S_\alpha$  com a propriedade  $S_\lambda \cap \pi S_\alpha \pi^{-1} = \{1\}$  é igual a  $|A_\alpha^\lambda|$ .*

*Demonstração.* Ver [13] p. 20. □

Vejamos alguns exemplos aplicando o teorema 1.2.19.

**Exemplo 1.2.20.** *No exemplo 1.2.18, comprovamos o resultado  $|A_\alpha^\lambda| = 3$ .*

**Exemplo 1.2.21.** *Sejam  $\lambda = (2, 1, 1)$  e  $\alpha = (2, 2)$  partições de 4. Então  $|A_\alpha^\lambda| = 2$ , sendo as matrizes*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 1.2.22.** Veremos agora um caso especial para esse cálculo. Considere  $\lambda = (3, 2)$  e  $\alpha = (2, 2, 1) = \lambda^t$  partições de 5. Afirmamos que  $|A_{\lambda^t}^{\lambda}| = 1$ , isto é, veremos que existe apenas uma matriz  $A$  satisfazendo a definição 1.2.17.

Seja  $A \in A_{\alpha}^{\lambda}$  esta nossa matriz, vamos a formação dela. Necessariamente teremos:

- Na primeira linha, a soma das entradas deverá ser 3. Mas a partição  $\alpha$  possui apenas três componentes, logo a única opção é colocar todos os 1's nas colunas 1 a 3. Então a primeira linha de  $A$  ficará assim

$$[ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 ];$$

- Na segunda linha, a soma das entradas deverá ser 2. Entretanto,  $\alpha_3 = 1$  e este 1 já está na coluna 3 da linha 1, logo a única opção é colocar todos os 1's nas colunas 1 a 2. Então a segunda linha de  $A$  ficará assim

$$[ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 ];$$

- Nas linhas 3, 4 e 5 devemos colocar todas entradas 0's.

Veja que existe  $A$ , porém foi formada sendo única. Portanto  $|A_{\alpha}^{\lambda}| = 1$  sendo esta matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Observação 1.2.23.** Veja que os 1's da matriz  $A$  foram colocados de acordo com a forma de sua tabela associada  $T_{(3,2)}$  e completando a matriz  $A$  com as outras entradas sendo todas 0's.

**Proposição 1.2.24.** Sejam  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \vdash n$  e  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \vdash n$ . Se  $\lambda^t = \alpha$ , então  $|A_{\alpha}^{\lambda}| = 1$ .

*Demonstração.* Temos que  $A_{\alpha}^{\lambda} \neq \emptyset$ , pois podemos construir uma matriz  $A \in A_{\alpha}^{\lambda}$ . Entretanto, veremos que  $A$  é única. Vamos a essa construção.

Temos que  $\lambda_1 = s$  e  $\alpha_1 = |\{j \mid \lambda_j \geq 1\}| = r$ , por  $\lambda$  ter  $r$  componentes e  $\alpha$  ter  $s$  componentes. Desta forma a linha 1 e coluna 1 de  $A$  ficam assim,

$$\begin{array}{l} 1 \rightarrow \\ \vdots \\ r \rightarrow \\ r+1 \\ \vdots \\ n \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & s & s+1 & \cdots & n \end{bmatrix}.$$

Vamos para a linha 2. Sabemos que  $\lambda_2 \leq \lambda_1 = s$ . Suponha que  $\lambda_2 = s$ , então a linha 2 fica assim

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & s & s+1 & \cdots & n \end{bmatrix}.$$

Se  $\lambda_2 = s_1 < s$ , afirmamos que todos os 1's da linha 2 deverão ser colocados nas colunas 1 a  $s_1$ , ou seja, todas colunas em  $s_1 + 1$  a  $s$  só conterão 0's, pois a soma das entradas na linha 2 deverá ser  $\lambda_2 = s_1$ . Suponha que exista uma coluna  $i$  com  $1 \leq i \leq s_1$ , tal que nesta coluna a entrada seja 0. Então existirá uma coluna  $p$  com  $s_1 + 1 \leq p \leq s$ , tal que nesta coluna a entrada seja 1. Neste caso  $\alpha_p = |\{j \mid \lambda_j \geq p\}| \geq 2$  por já existirem 2 linhas com 1's na coluna  $p$ . No entanto, para todo  $j > 2$  nenhum  $\lambda_j \geq p$  porque  $\lambda_r \leq \dots \leq \lambda_2 < p$ , contradizendo  $\alpha_p \geq 2$ .

Fazendo esse processo até a linha  $r$ , obtendo que os 1's da linha  $r$  devem ser colocados todos nas colunas 1 a  $\lambda_r$ . Desta maneira a matriz  $A$  terá a seguinte forma

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \lambda_1 \\ \vdots \\ \longrightarrow \lambda_i \\ \vdots \\ \longrightarrow \lambda_r \end{array},$$

colocando os 1's a mais esquerda possível em cada linha, ou seja, os 1's da matriz  $A$  terá a forma da tabela associada  $T_\lambda$ . Além disso, a matriz  $A$  é a única a satisfazer a definição 1.2.17 e portanto  $|A_\alpha^\lambda| = 1$ . Concluindo assim a demonstração dessa proposição.  $\square$

Segue da proposição 1.2.24 que na formula (1.2)

$$\left( 1_{S_\lambda}^{\mathcal{S}_n}, \varepsilon_{S_{\lambda^t}}^{\mathcal{S}_n} \right)_{\mathcal{S}_n} = 1.$$

De imediato pela observação 1.1.16 feita na seção anterior, existe uma única componente irredutível em  $1_{S_\lambda}^{\mathcal{S}_n} \cap \varepsilon_{S_{\lambda^t}}^{\mathcal{S}_n}$ .

**Definição 1.2.25.** *Seja  $\lambda \vdash n$ . Tomemos por  $S_\lambda$  e  $S_{\lambda^t}$  subgrupos de Young associados as partições  $\lambda$  e  $\lambda^t$  respectivamente. Defina por  $\chi_\lambda$  a única componente irredutível em  $1_{S_\lambda}^{\mathcal{S}_n} \cap \varepsilon_{S_{\lambda^t}}^{\mathcal{S}_n}$  sendo o caráter irredutível associado a  $\lambda$ .*

Consequência da definição acima,  $\chi_{\lambda^t}$  é o caráter irredutível associado a partição  $\lambda^t$  sendo obtido como componente irredutível em  $1_{S_{\lambda^t}}^{\mathcal{S}_n} \cap \varepsilon_{S_\lambda}^{\mathcal{S}_n}$ .

**Teorema 1.2.26.** *Seja  $n \geq 1$ . Então  $\{\chi_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$  é o conjunto completo dos caracteres irredutíveis de  $\mathcal{S}_n$ .*

*Demonstração.* Ver [13] p. 52. □

Vamos agora a determinar qual é o grau do caráter  $\chi_\lambda$ ,  $\lambda \vdash n$ .

**Definição 1.2.27.** *Seja  $\lambda \vdash n$  e  $T_\lambda$  sua tabela associada. Defina por  $h_{i,j}^\lambda$  um número natural localizado em  $T_\lambda$  na linha  $i$  coluna  $j$  sendo*

$$h_{i,j}^\lambda = (\text{o } n^\circ \text{ de linhas a baixo de } i) + (\text{o } n^\circ \text{ de colunas à direita de } j) + 1$$

O valor  $h_{i,j}^\lambda$  é chamado de comprimento de gancho. Em particular, se  $h_{i,j}^\lambda = q$  chamemos  $h_{i,j}^\lambda$  por  $q$ -gancho. Coloquemos agora no interior de cada caixa de posição  $(i, j)$  em  $T_\lambda$  seu respectivo comprimento de gancho  $h_{i,j}^\lambda$ . Denotemos esta tabela por  $\mathcal{H}_\lambda$  e chamaremos por gráfico de ganchos de  $\lambda$ . É importante ressaltarmos uma propriedades em  $\mathcal{H}_\lambda$ : os inteiros serão estritamente crescente nas linhas da direita para esquerda e nas colunas de baixo para cima. Nosso próximo capítulo usará muito o gráfico de ganchos, mas neste sua necessidade resumi-se apenas em determinar o grau de  $\chi_\lambda$ .

**Exemplo 1.2.28.** *No exemplo 1.2.11, seu gráfico de ganchos é*

$$\mathcal{H}_{(4,3,3,2,2,1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 9 & 7 & 4 & 1 \\ \hline 7 & 5 & 2 & \\ \hline 6 & 4 & 1 & \\ \hline 4 & 2 & & \\ \hline 3 & 1 & & \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array} .$$

**Teorema 1.2.29.** *Seja  $\lambda \vdash n$ . Considere  $\chi_\lambda$  o caráter irredutível associado a  $\lambda$  e  $\mathcal{H}_\lambda$  seu gráfico de ganchos. O grau de  $\chi_\lambda$  é dado por*

$$\chi_\lambda(1) = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{i,j}^\lambda}, \quad h_{i,j}^\lambda \in \mathcal{H}_\lambda.$$

*Demonstração.* Ver [13] p. 56. □

**Exemplo 1.2.30.** *No exemplo 1.2.28, segue do teorema 1.2.29 que o grau de  $\chi_{(4,3,3,2,2,1)}$  é*

$$\chi_{(4,3,3,2,2,1)}(1) = \frac{15!}{\prod_{i,j} h_{i,j}^{(4,3,3,2,2,1)}} = \frac{15!}{9 \cdot 7^2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4^3 \cdot 2^2 \cdot 1^4} = 128700.$$



Segue do teorema 1.2.29 que no grupo  $\mathcal{S}_n$  os únicos caracteres lineares são os caracteres associados as partições  $\lambda = (n) \vdash n$  e  $\lambda^t = (1, \dots, 1) \vdash n$ . Deste modo,  $\chi_\lambda = 1_{\mathcal{S}_n}$  ou  $\chi_\lambda = \varepsilon_{\mathcal{S}_n}$  e o mesmo caso para  $\chi_{\lambda^t}$ . Porém segue da definição 1.2.25 que  $\chi_\lambda = 1_{\mathcal{S}_n} \cap \varepsilon_{\mathcal{S}_{\lambda^t}}^{\mathcal{S}_n} = 1_{\mathcal{S}_n}$  e com isso  $\chi_{\lambda^t} = 1_{\mathcal{S}_{\lambda^t}}^{\mathcal{S}_n} \cap \varepsilon_{\mathcal{S}_n} = \varepsilon_{\mathcal{S}_n}$ . Portanto  $\chi_{(n)}$  e  $\chi_{(1, \dots, 1)}$  são em  $\mathcal{S}_n$  os respectivos caracteres principal e signo.

Importante observarmos que a propriedade  $\chi_{\lambda^t} = \varepsilon_{\mathcal{S}_n} \cdot \chi_\lambda$  é válida para os caracteres lineares, entretanto não resume só a eles como mostra o próximo teorema.

**Teorema 1.2.31.** *Sejam  $\lambda \vdash n$  e  $\chi_\lambda$  seu caráter irredutível associado. Então,  $\chi_{\lambda^t} = \varepsilon_{\mathcal{S}_n} \cdot \chi_\lambda$ .*

*Demonstração.* Segue do teorema 1.1.20

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathcal{S}_n} \cdot 1_{\mathcal{S}_\lambda}^{\mathcal{S}_n} &= \left( \varepsilon_{\mathcal{S}_n} \downarrow_{\mathcal{S}_\lambda} \cdot 1_{\mathcal{S}_\lambda} \right)^{\mathcal{S}_n} = \varepsilon_{\mathcal{S}_\lambda}^{\mathcal{S}_n} \text{ e} \\ \varepsilon_{\mathcal{S}_n} \cdot \varepsilon_{\mathcal{S}_{\lambda^t}}^{\mathcal{S}_n} &= \left( \varepsilon_{\mathcal{S}_n} \downarrow_{\mathcal{S}_{\lambda^t}} \cdot \varepsilon_{\mathcal{S}_{\lambda^t}} \right)^{\mathcal{S}_n} = 1_{\mathcal{S}_{\lambda^t}}^{\mathcal{S}_n}, \end{aligned}$$

utilizando os fatos de  $\chi_\lambda = 1_{\mathcal{S}_\lambda}^{\mathcal{S}_n} \cap \varepsilon_{\mathcal{S}_{\lambda^t}}^{\mathcal{S}_n}$  e  $\varepsilon_{\mathcal{S}_n}$  ser um caráter linear

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathcal{S}_n} \cdot 1_{\mathcal{S}_\lambda}^{\mathcal{S}_n} &= \varepsilon_{\mathcal{S}_n} \cdot \chi_\lambda + \dots = \varepsilon_{\mathcal{S}_\lambda}^{\mathcal{S}_n} \text{ e} \\ \varepsilon_{\mathcal{S}_n} \cdot \varepsilon_{\mathcal{S}_{\lambda^t}}^{\mathcal{S}_n} &= \varepsilon_{\mathcal{S}_n} \cdot \chi_\lambda + \dots = 1_{\mathcal{S}_{\lambda^t}}^{\mathcal{S}_n}, \end{aligned}$$

então  $\varepsilon_{\mathcal{S}_n} \cdot \chi_\lambda = \varepsilon_{\mathcal{S}_\lambda}^{\mathcal{S}_n} \cap 1_{\mathcal{S}_{\lambda^t}}^{\mathcal{S}_n} = \chi_{\lambda^t}$ . Portanto  $\chi_{\lambda^t} = \varepsilon_{\mathcal{S}_n} \cdot \chi_\lambda$ . Concluindo a demonstração do teorema.  $\square$

Vemos pelo teorema acima que os caracteres  $\chi_\lambda$  e  $\chi_{\lambda^t}$  diferem apenas pelo signo, ou seja, em elementos pares de  $\mathcal{S}_n$  ambos caracteres são iguais.

**Definição 1.2.32.** *Seja  $n$  um número natural. Defina para  $n \geq 2$  o grupo  $\mathcal{A}_n = \{\pi \in \mathcal{S}_n \mid \text{sgn}(\pi) = 1\}$ . Em outras palavras,  $\mathcal{A}_n$  é o conjunto das permutações pares em  $\mathcal{S}_n$  e o chamaremos por subgrupo alternado de  $\mathcal{S}_n$ . Agora para  $n = 1$ ,  $\mathcal{S}_1 = \mathcal{A}_1 = \{1\}$ .*

É bem conhecido que  $\mathcal{A}_n$  é um subgrupo normal em  $\mathcal{S}_n$  e para todo  $n \geq 2$ ,  $|\mathcal{S}_n/\mathcal{A}_n| = 2$ , isto é,  $|\mathcal{A}_n| = \frac{n!}{2}$ .

**Lema 1.2.33.** *Considere  $\lambda \vdash n$  e  $\chi_\lambda$  seu caráter irredutível associado. Então,  $\chi_\lambda \downarrow_{\mathcal{A}_n} = \chi_{\lambda^t} \downarrow_{\mathcal{A}_n}$  para todo  $\lambda \in \mathcal{P}\text{ar}(n)$ . Além disso, se  $\theta \in \text{Irr}(\mathcal{A}_n)$  é uma componente do caráter  $\chi_\lambda \downarrow_{\mathcal{A}_n}$ , então acontece uma das seguintes opções:*

- $\theta$  é  $\mathcal{S}_n$ -invariante;

- $\theta$  possui apenas dois conjugados distintos,  $\theta$  e  $\theta^{(12)}$ . Além disso, o grupo de inércia  $\mathcal{I}_{\mathcal{S}_n}(\theta) = \mathcal{A}_n$ .

*Demonstração.* Segue imediato do teorema 1.2.31 que  $\chi_\lambda \downarrow_{\mathcal{A}_n} = \chi_{\lambda^t} \downarrow_{\mathcal{A}_n}$  para todo  $\lambda \in \mathcal{P}ar(n)$ .

Agora para qualquer  $\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$ ,  $\sigma = (12)\omega$  com  $\omega \in \mathcal{A}_n$ . Assim, para qualquer  $\pi \in \mathcal{A}_n$  e  $\sigma \in \mathcal{S}_n$

$$\theta^\sigma(\pi) = \theta^{(12)\omega}(\pi) = \theta((12)\underbrace{\omega\pi\omega^{-1}}_{\in \mathcal{A}_n}(12)) = \theta^{(12)}(\pi).$$

Desta forma, ou  $\theta$  é  $\mathcal{S}_n$ -invariante ou então  $\mathcal{I}_{\mathcal{S}_n}(\theta) = \mathcal{A}_n$  pois  $(12) \notin \mathcal{A}_n$ . Neste caso,  $\theta$  e  $\theta^{(12)}$  são os únicos dois conjugados distintos de  $\theta$  por aplicação do teorema 1.1.26 item (ii) e  $p = |\mathcal{S}_n/\mathcal{I}_{\mathcal{S}_n}(\theta)| = 2$ .  $\square$

Veremos com o próximo teorema, sob quais condições a partição  $\lambda \vdash n$  terá seu caráter irreduzível associado  $\chi_\lambda$  ainda irreduzível no subgrupo alternado  $\mathcal{A}_n$ .

**Teorema 1.2.34.** *Seja  $n \geq 21$ . Considere  $\lambda \vdash n$  e  $\chi_\lambda$  seu caráter irreduzível associado. Suponha que  $\theta$  é uma componente irreduzível de  $\chi_\lambda \downarrow_{\mathcal{A}_n}$ . Então,*

- (1) *Se  $\lambda \neq \lambda^t$ , então  $\chi_\lambda \downarrow_{\mathcal{A}_n} = \chi_{\lambda^t} \downarrow_{\mathcal{A}_n} = \theta$  é irreduzível e  $\theta^{\mathcal{S}_n} = \chi_\lambda + \chi_{\lambda^t}$ ;*
- (2) *Se  $\lambda = \lambda^t$ , então  $\chi_\lambda \downarrow_{\mathcal{A}_n} = \chi_{\lambda^t} \downarrow_{\mathcal{A}_n} = \theta + \theta^{(12)}$  e  $\theta^{\mathcal{S}_n} = \chi_\lambda$ .*

*Demonstração.* Segue do teorema 1.1.26 juntamente com o lema 1.2.33 as seguintes opções:

- (i)  $\chi_\lambda \downarrow_{\mathcal{A}_n} = \chi_{\lambda^t} \downarrow_{\mathcal{A}_n} = \theta$  é irreduzível ou;
- (ii)  $\chi_\lambda \downarrow_{\mathcal{A}_n} = \chi_{\lambda^t} \downarrow_{\mathcal{A}_n} = \theta + \theta^{(12)}$ .

Defina por  $\mathcal{I}_\theta = \{\chi_\alpha \in \text{Irr}(\mathcal{S}_n) \mid (\chi_\alpha \downarrow_{\mathcal{A}_n}, \theta)_H \geq 1\}$ .

No item (1),  $\lambda \neq \lambda^t$ . Então,  $\chi_\lambda \neq \chi_{\lambda^t}$  pelo teorema 1.2.26. Se acontece o caso (ii), isto é,  $\chi_\lambda \downarrow_{\mathcal{A}_n} = \chi_{\lambda^t} \downarrow_{\mathcal{A}_n} = \theta + \theta^{(12)}$ , segue do corolário 1.1.28 que  $\theta^{\mathcal{S}_n} = (\theta^{(12)})^{\mathcal{S}_n}$  é irreduzível. Como, por Frobenius,

$$(\chi_\lambda, \theta^{\mathcal{S}_n})_{\mathcal{S}_n} = 1 = (\chi_{\lambda^t}, \theta^{\mathcal{S}_n})_{\mathcal{S}_n},$$

então  $\theta^{\mathcal{S}_n} = \chi_\lambda = \chi_{\lambda^t}$ , contrariando a nossa hipótese de  $\lambda \neq \lambda^t$ . Portanto  $\chi_\lambda \downarrow_{\mathcal{A}_n} = \chi_{\lambda^t} \downarrow_{\mathcal{A}_n} = \theta$  é irreduzível em  $\mathcal{A}_n$ . Além disso, segue do corolário 1.1.28,  $|\mathcal{I}_\theta| = 2$  e portanto  $\theta^{\mathcal{S}_n} = \sum_{\chi_\alpha \in \mathcal{I}_\theta} \chi_\alpha = \chi_\lambda + \chi_{\lambda^t}$ .

No item (2),  $\lambda = \lambda^t$ . Então,  $\chi_\lambda = \chi_{\lambda^t}$  pelo teorema 1.2.26. Se acontece o caso (i), isto é,  $\chi_\lambda \downarrow_{\mathcal{A}_n} = \chi_{\lambda^t} \downarrow_{\mathcal{A}_n} = \theta$ , então

$$1 = (\chi_\lambda \downarrow_{\mathcal{A}_n}, \chi_\lambda \downarrow_{\mathcal{A}_n})_{\mathcal{A}_n} < |\mathcal{S}_n/\mathcal{A}_n|(\chi_\lambda, \chi_\lambda)_{\mathcal{S}_n} = 2.$$

Segue do teorema 1.1.21 que para algum  $g \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$  temos  $\chi_\lambda(g) \neq 0$ . Entretanto, pelo teorema 1.2.31 segue que  $\chi_{\lambda^t} = \chi_\lambda \cdot \varepsilon_{\mathcal{S}_n}$  e portanto

$$\chi_{\lambda^t}(x) = \begin{cases} \chi_\lambda(x), & \text{se } x \in \mathcal{A}_n \\ -\chi_\lambda(x), & \text{se } x \notin \mathcal{A}_n \end{cases}.$$

Como  $\chi_\lambda(g) \neq 0$  para algum  $g \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$ , então  $\chi_\lambda \neq \chi_{\lambda^t}$  contrariando a hipótese de  $\lambda = \lambda^t$  e portanto  $\chi_\lambda \downarrow_{\mathcal{A}_n} = \chi_{\lambda^t} \downarrow_{\mathcal{A}_n} = \theta + \theta^{(12)}$ . Além disso, pelo corolário 1.1.28 segue que  $\theta^{\mathcal{S}_n} = (\theta^{(12)})^{\mathcal{S}_n} = \chi_\lambda$ . Concluindo a demonstração do teorema.  $\square$

Sabemos que o conjunto  $\mathcal{Irr}(\mathcal{S}_n)$  é realizado sobre o corpo  $\mathbb{C}$ , mas mostraremos agora que de fato  $\mathcal{Irr}(\mathcal{S}_n)$  já é realizado sobre  $\mathbb{Z}$  (anel dos números inteiros).

**Definição 1.2.35.** *Sejam  $G$  um grupo finito e  $\mathcal{C}_i$  uma classe de conjugação de  $G$ . Denotamos por  $\mathbb{Q}$  o corpo dos números racionais e faremos as seguintes definições:*

- $\mathcal{C}_i$  é dita classe real se  $\forall g \in \mathcal{C}_i$  seu inverso  $g^{-1} \in \mathcal{C}_i$ ;
- Um qualquer caráter  $\chi \in \mathcal{Irr}(G)$  é dito real se  $\chi(g) = \overline{\chi(g)}$ ,  $\forall g \in G$  ou racional se  $\chi(g) \in \mathbb{Q}$ ,  $\forall g \in G$ .

Seja  $L$  uma extensão finita sobre corpo  $K$ . Um elemento  $\alpha \in L$  é separável sobre  $K$  se  $\alpha$  é algébrico sobre  $K$  e o seu polinômio minimal  $p(x)$  é separável (não possui raízes múltiplas). A extensão  $L$  é dita separável se todo elemento  $\alpha \in L$  é separável.

Uma extensão  $L$  de  $K$  diz se o corpo de decomposição de um polinômio  $p(x) \in K[x]$  se for o menor corpo onde  $p(x)$  se decompõe num produto de termos de grau 1. Podemos denotar por  $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , onde  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  são as raízes de  $p(x)$  em  $L$ . A extensão  $L$  é dita normal se para todo polinômio irreduzível  $p(x) \in K[x]$  que possui uma raiz em  $L$ ,  $L$  contém seu corpo de decomposição.

Dizemos que  $L$  é uma extensão de Galois de um corpo  $K$  se  $L$  é uma extensão de dimensão finita, normal e separável sobre  $K$ .

Seja  $L$  uma extensão de Galois de um corpo  $K$  e seja  $p(x) \in K[x]$  um qualquer polinômio que tem  $L$  como seu corpo de decomposição. Indexemos

a  $L$  um grupo que tem a ação de permutar as raízes de  $p(x) \in L$  e fixar todos os elementos de  $K$ . Este grupo é conhecido como grupo de Galois e iremos denota-lo por  $Gal(L/K)$ .

**Lema 1.2.36.** *Seja  $G$  um grupo finito e sejam  $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_r\}$  suas classes de conjugação e  $\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_r\}$  seu conjunto completo de caracteres irreduzíveis complexos. Seja  $\mathcal{A}$  um grupo com ação de permutações sobre estes dois conjuntos. Assumindo que:*

- (1) *Para cada  $\alpha \in \mathcal{A}$  e cada  $i$ ,  $\mathcal{C}_i^\alpha$  é algum  $\mathcal{C}_j$ ;*
- (2)  *$\chi_i^\alpha(g) = \chi_i(g^\alpha)$  para todo  $g \in G$ ,  $\alpha \in \mathcal{A}$  e todo  $i$ .*

Então,

- (i) *Para qualquer  $\alpha \in \mathcal{A}$ , o número de classes de conjugações fixadas por  $\alpha$  é igual ao número de caracteres irreduzíveis fixados por  $\alpha$ ;*
- (ii) *O número de órbitas de  $\mathcal{A}$  em  $\{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_r\}$  é igual ao número de órbitas de  $\mathcal{A}$  em  $\{\chi_1, \dots, \chi_r\}$ .*

*Demonstração.* Ver [6] p. 67. □

No lema acima a priori precisamos somente que o corpo em questão contenha todos os caracteres irreduzíveis do grupo  $G$ , mas sem perda de generalidade podemos sempre assumir nossos caracteres sendo realizados sobre  $\mathbb{C}$ .

**Lema 1.2.37.** *Assuma que  $K$  é um corpo de característica zero e  $G$  é um grupo finito. Seja  $L \supseteq K$  uma extensão de Galois e o corpo de decomposição do polinômio mônico  $x^{|G|} - 1$ . Para qualquer inteiro  $m$  com  $(|G|, m) = 1$ , tomemos  $\alpha_m \in Gal(L/K)$  tal que  $\xi^{\alpha_m} = \xi^m$ , onde  $\xi$  é alguma raiz  $|G|$ -ésima da unidade. Então,*

$$\chi^{\alpha_m}(g) = \chi(g^m)$$

para todo caráter irreduzível  $\chi$  de  $G$  realizado sobre  $L$  e todo  $g \in G$ .

*Demonstração.* Ver [6] p. 115. □

**Teorema 1.2.38.** *Seja  $G$  um grupo finito e sejam  $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_r\}$  suas classes de conjugação e  $\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_r\}$  seu conjunto completo de caracteres irreduzíveis complexos. Então,*

- (a) *O número de caracteres irreduzíveis reais é igual ao número de classes de conjugação reais em  $G$ ;*

(b) As seguintes propriedades são equivalentes:

- (i) Todo caráter complexo de  $G$  é racional;
- (ii) Para todo inteiro  $m$  com  $(m, |G|) = 1$  e todo  $g \in G$ , temos  $g$  e  $g^m$  conjugados.

*Demonstração.* No item (a) define  $\mathcal{A} = \{1, \alpha\}$  o grupo de ordem 2, como sendo o grupo de permutação em  $G$  por  $g^\alpha = g^{-1}$  e em  $\mathcal{Irr}(G)$  por  $\chi_i^\alpha = \overline{\chi_i}$ . Então,

$$\chi_i^\alpha(g) = \overline{\chi_i(g)} = \chi_i(g^{-1}) = \chi_i(g^\alpha).$$

O resultado desejado segue do lema 1.2.36 item (i).

No item (b) tome  $\xi$  como uma raiz primitiva  $|G|$ -ésima da unidade e  $m$  um inteiro com  $(m, |G|) = 1$ . Escolhamos  $\alpha_m \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q})$  tal que,  $\xi^{\alpha_m} = \xi^m$ . Considere  $\mathcal{B}$  o grupo multiplicativo formado pelas classes residuais módulo  $|G|$  dos inteiros co-primos com  $|G|$ , então  $\mathcal{B} \cong \text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q})$ . Denotemos por  $\overline{m}$  a classe residual do inteiro  $m$  em  $\mathcal{B}$ . Faremos agora  $\overline{m}$  agir em  $G$  por  $g^{\overline{m}} = g^m$  e em  $\mathcal{Irr}(G)$  por  $\chi_i^{\overline{m}}(g) = \chi_i^{\alpha_m}(g)$ . Com esta ação estamos nas hipóteses do lema 1.2.37, então

$$\chi_i^{\overline{m}}(g) = \chi_i^{\alpha_m}(g) = \chi_i(g^m) = \chi_i(g^{\overline{m}}).$$

Agora estamos nas hipóteses do lema 1.2.36. Então, (i) acontece se e somente se  $\mathcal{B}$  fixa todos os caracteres irredutíveis, algo que acontece se e somente se  $\mathcal{B}$  tem  $r$  órbitas em  $\mathcal{Irr}(G)$  ( $r$  é o número de classes de conjugação de  $G$ ). Segue do lema 1.2.36 item (ii) que isto acontece se e somente se  $\mathcal{B}$  tem  $r$  órbitas nas classes de conjugação, ou equivalente a estar dizendo que  $\mathcal{B}$  fixa todas classes de conjugação de  $G$ , ou seja (ii) acontece. Isso conclui a demonstração.  $\square$

Como consequência desse teorema segue o imediato corolário.

**Corolário 1.2.39.** *A tabela de caracteres irredutíveis de  $\mathcal{S}_n$  é realizada sobre  $\mathbb{Z}$ .*

*Demonstração.* Tome  $m = n! - 1$  e  $\pi \in \mathcal{S}_n$ . Então,  $(m, n!) = 1$  e  $\pi^m = \pi^{n!-1} = \pi^{n!}\pi^{-1} = \pi^{-1}$  para todo  $\pi \in \mathcal{S}_n$ . Segue do teorema 1.2.38 item (b) que todo caráter irredutível é racional. No entanto, é bem conhecido que todo inteiro algébrico racional é de fato um inteiro, então para toda  $\lambda \vdash n$  temos  $\chi_\lambda(\pi) \in \mathbb{Z}$ ,  $\forall \pi \in \mathcal{S}_n$ .  $\square$

Procuremos agora em  $\mathcal{S}_n$  e em  $\mathcal{A}_n$  a propriedade de cada classe ser real. Qualquer grupo que satisfaz tal propriedade é dito ambivalente.

De fato, o grupo  $\mathcal{S}_n$  é ambivalente para todo  $n$  natural, pois todo elemento  $\pi \in \mathcal{S}_n$  tem seu inverso  $\pi^{-1}$  do mesmo tipo, então segue do teorema 1.2.7 que

$\pi$  e  $\pi^{-1}$  são conjugados. Mas o que podemos dizer sobre a ambivalência do seu subgrupo normal  $\mathcal{A}_n$ ? A resposta é que  $\mathcal{A}_n$  não é ambivalente para todo  $n$ . Iremos agora determinar para quais inteiros  $n$ , o grupo  $\mathcal{A}_n$  é ambivalente.

Defina para qualquer  $\pi \in \mathcal{S}_n$  o subgrupo  $\mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi) = \{\tau \in \mathcal{S}_n \mid \tau\pi = \pi\tau\}$ , chamado de centralizador de  $\pi$  em  $\mathcal{S}_n$ . Além disso, para melhor compreensão denote  $\mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi)$  a classe de conjugação de  $\pi$  em  $\mathcal{S}_n$  e por  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}_n}(\pi)$  a classe de conjugação de  $\pi$  em  $\mathcal{A}_n$ . Importante observar que devido o grupo  $\mathcal{A}_n$  ser normal em  $\mathcal{S}_n$ , para todo  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  temos  $\sigma\mathcal{A}_n\sigma^{-1} \subseteq \mathcal{A}_n$ . Consequentemente ou  $\mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi) \subseteq \mathcal{A}_n$  ou  $\mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi) \subseteq \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$  para cada  $\pi \in \mathcal{S}_n$ .

Considere  $\mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi) \subseteq \mathcal{A}_n$ , sabemos que  $|\mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi)| \geq |\mathcal{C}_{\mathcal{A}_n}(\pi)|$  e  $|\mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi)| = \frac{|\mathcal{S}_n|}{|\mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi)|}$ . Além disso,  $\mathbf{C}_{\mathcal{A}_n}(\pi)$  é um subgrupo em  $\mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi)$  e  $\frac{|\mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi)|}{|\mathbf{C}_{\mathcal{A}_n}(\pi)|} \leq 2$ , pois

$$|\mathcal{C}_{\mathcal{A}_n}(\pi)| \leq \frac{|\mathcal{S}_n|}{|\mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi)|} \implies \frac{|\mathcal{A}_n|}{|\mathbf{C}_{\mathcal{A}_n}(\pi)|} \leq \frac{|\mathcal{S}_n|}{|\mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi)|} \implies \frac{|\mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi)|}{|\mathbf{C}_{\mathcal{A}_n}(\pi)|} \leq 2.$$

Então,  $\frac{|\mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi)|}{|\mathbf{C}_{\mathcal{A}_n}(\pi)|} = 2$  ou  $\frac{|\mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi)|}{|\mathbf{C}_{\mathcal{A}_n}(\pi)|} = 1$ .

Temos  $\frac{|\mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi)|}{|\mathbf{C}_{\mathcal{A}_n}(\pi)|} = 2$  se e somente se  $\mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi) = \mathcal{C}_{\mathcal{A}_n}(\pi)$ . Pois  $|\mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi)| = 2|\mathcal{C}_{\mathcal{A}_n}(\pi)|$  se e somente se

$$|\mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi)| = \frac{|\mathcal{S}_n|}{2|\mathbf{C}_{\mathcal{A}_n}(\pi)|} = \frac{|\mathcal{A}_n|}{|\mathbf{C}_{\mathcal{A}_n}(\pi)|} \Leftrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi) = \mathcal{C}_{\mathcal{A}_n}(\pi) \text{ por } \mathcal{C}_{\mathcal{A}_n}(\pi) \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi).$$

Já o caso  $\frac{|\mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi)|}{|\mathbf{C}_{\mathcal{A}_n}(\pi)|} = 1$  se e somente se  $\mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi)$  se dividir em exatamente duas classes de conjugação de  $\mathcal{A}_n$  de mesma ordem  $\frac{|\mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi)|}{2}$ . De fato,  $|\mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi)| = |\mathcal{C}_{\mathcal{A}_n}(\pi)|$  se e somente se

$$|\mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi)| = \frac{|\mathcal{S}_n|}{|\mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi)|} = \frac{2|\mathcal{A}_n|}{|\mathbf{C}_{\mathcal{A}_n}(\pi)|} \Rightarrow \frac{|\mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi)|}{2} = \frac{|\mathcal{A}_n|}{|\mathbf{C}_{\mathcal{A}_n}(\pi)|} = |\mathcal{C}_{\mathcal{A}_n}(\pi)|.$$

A outra classe citada é formada pelos elementos  $\mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi) \setminus \mathcal{C}_{\mathcal{A}_n}(\pi)$ . Neste caso chamamos  $\mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi)$  de classe dividida de  $\mathcal{S}_n$ .

Então a verificação do subgrupo alternado  $\mathcal{A}_n$  em ser ambivalente, está relacionada em mostrar que as classes divididas de  $\mathcal{S}_n$  são todas reais.

**Lema 1.2.40.** *Seja  $\mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}$  uma classe de conjugação de  $\mathcal{S}_n$  e  $\lambda$  sua partição associada. Suponha  $\mathcal{C}_{\mathcal{S}_n} \subseteq \mathcal{A}_n$ . Então,  $\mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}$  é uma classe divide de  $\mathcal{S}_n$  se e somente se  $\lambda$  possuir somente componentes ímpares mutuamente co-primas.*

*Demonstração.* Ver [13] p. 12. □

**Exemplo 1.2.41.** *As classes de conjugação associadas as partições  $(3, 1)$ ,  $(17, 5, 3)$ ,  $(11, 7, 3, 1)$  são exemplo de classes divididas em  $\mathcal{S}_4$ ,  $\mathcal{S}_{25}$  e  $\mathcal{S}_{22}$ .*

Vamos então ao teorema que mostra para quais  $n \geq 2$ , o grupo alternado  $\mathcal{A}_n$  é ambivalente.

**Teorema 1.2.42.** *Os grupos  $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_5, \mathcal{A}_6, \mathcal{A}_{10}$  e  $\mathcal{A}_{14}$  são os únicos grupos alternados ambivalentes.*

*Demonstração.* Veja que  $\mathcal{A}_2 = \{1\}$ , logo nada a demonstrar neste caso. Supomos  $n \geq 3$ . Tome  $\pi$  um elemento de  $\mathcal{A}_n$  e  $\mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi)$  sua classe de conjugação em  $\mathcal{S}_n$ . Considere  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$  a partição associada a  $\mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi)$ . Escrevemos  $\pi = (i_1 \dots i_{\lambda_1}) \dots (j_1 \dots j_{\lambda_t})$  por ciclos disjuntos e definimos o elemento

$$\gamma_\pi = (i_2 i_{\lambda_1})(i_3 i_{\lambda_1-1}) \dots (j_2 j_{\lambda_t})(j_3 j_{\lambda_t-1}) \dots$$

que chamamos por conjugador padrão de  $\pi$  ou quando convir conjugador padrão da classe  $\mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\pi)$ . Observe que o elemento  $\gamma_\pi$  satisfaz a propriedade  $\gamma_\pi \pi \gamma_\pi^{-1} = \pi^{-1}$  para todo  $\pi \in \mathcal{A}_n$ .

Nosso primeiro objetivo é verificar quando o elemento  $\gamma_\pi \in \mathcal{A}_n$ . Note que  $\gamma_\pi \in \mathcal{A}_n$  se e somente se o número de componentes  $\lambda_i$  em  $\lambda$  congruentes a 3 mod 4 for par. Pois considere  $\lambda_r$  em  $\lambda$ . O conjugador padrão  $\gamma_\pi$  irá decompor o ciclo em  $\pi$  de comprimento  $\lambda_r$  em  $\frac{\lambda_r-1}{2}$  permutações ímpares de comprimento 2. Assim caso  $\lambda_r \equiv 3 \pmod{4}$  a paridade de  $\frac{\lambda_r-1}{2}$  é ímpar. No entanto, se  $\lambda$  tiver um número ímpar de componentes  $\lambda_i$  congruentes a 3 mod 4,  $\gamma_\pi$  terá signo ímpar. Portanto  $\gamma_\pi$  é par se e somente se  $\lambda$  possuir um número par de  $\lambda_i$  congruentes a 3 mod 4. Note ainda que o conjugador padrão tem signo invariante sobre as classe de conjugação de  $\mathcal{S}_n$ .

Suponha que toda classe divida  $\mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\omega)$  de  $\mathcal{S}_n$  tenha seu conjugador padrão sendo par. Então,  $\mathcal{A}_n$  é ambivalente. Pois para todo  $\tau \in \mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\omega)$ ,  $\gamma_\tau \tau \gamma_\tau^{-1} = \tau^{-1}$ . Portanto as duas classes de conjugação de  $\mathcal{A}_n$  geradas com a divisão de  $\mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\omega)$ , são reais em  $\mathcal{A}_n$ .

Agora suponha que alguma classe divida  $\mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\beta)$  em  $\mathcal{S}_n$  tenha seu conjugador padrão sendo ímpar. Neste caso,  $\mathcal{A}_n$  não é ambivalente. Pois considere  $\sigma \in \mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\beta)$  e  $\alpha \in \mathcal{A}_n$  tal que  $\alpha \sigma \alpha^{-1} = \sigma^{-1}$ . Deste modo,

$$\alpha \sigma \alpha^{-1} = \sigma^{-1} = \gamma_\sigma \sigma \gamma_\sigma^{-1} \implies \sigma = \alpha^{-1} \gamma_\sigma \sigma \gamma_\sigma^{-1} \alpha = (\alpha^{-1} \gamma_\sigma) \sigma (\alpha^{-1} \gamma_\sigma)^{-1},$$

contradizendo  $\mathbf{C}_{\mathcal{A}_n}(\sigma) = \mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(\sigma)$ , isto porque  $\alpha^{-1} \gamma_\sigma \notin \mathcal{A}_n$  por  $\gamma_\sigma$  ser ímpar. Portanto  $\mathcal{C}_{\mathcal{S}_n}(\beta)$  não é real em  $\mathcal{A}_n$ .

Então isto mostra que  $\mathcal{A}_n$  com  $n \in \{5, 6, 10, 14\}$  são ambivalentes. Pois as únicas classes divididas em questão são

$$(5) \vdash 5, \quad (5, 1) \vdash 6, \quad \begin{array}{l} (7, 3) \vdash 10 \\ (9, 1) \vdash 10 \end{array}, \quad \begin{array}{l} (13, 1) \vdash 14 \\ (11, 3) \vdash 14 \\ (9, 5) \vdash 14 \end{array} .$$

Nestas partições o número de componentes congruentes a  $3 \pmod{4}$  são 0 ou 2. Portanto o conjugador padrão nas classes associadas a estas partições é par.

Resta-nos mostrar que para cada  $n \notin \{5, 6, 10, 14\}$  temos uma classe dividida tal que seu conjugador padrão seja ímpar. Listemos abaixo essas classes:

- Para  $n = 4k$  com  $k \in \mathbb{N}$ , encontramos a classe dividida associada a partição  $(4k - 1, 1)$ . Nesta partição,  $4k - 1 \equiv 3 \pmod{4}$  e  $1 \not\equiv 3 \pmod{4}$ . Portanto o signo do seu conjugador padrão é ímpar;
- Para  $n = 4k + 1$  com  $2 \leq k \in \mathbb{N}$ , encontramos a classe dividida associada a partição  $(4k - 3, 3, 1)$ . Nesta partição,  $4k - 3 \not\equiv 3 \pmod{4}$ ,  $3 \equiv 3 \pmod{4}$  e  $1 \not\equiv 3 \pmod{4}$ . Portanto o signo do seu conjugador padrão é ímpar;
- Para  $n = 4k + 2$  com  $4 \leq k \in \mathbb{N}$ , encontramos a classe dividida associada a partição  $(4(k - 1) - 3, 5, 3, 1)$ . Nesta partição,  $4(k - 1) - 3 \not\equiv 3 \pmod{4}$ ,  $5 \not\equiv 3 \pmod{4}$ ,  $3 \equiv 3 \pmod{4}$  e  $1 \not\equiv 3 \pmod{4}$ . Portanto o signo do seu conjugador padrão é ímpar;
- Para  $n = 4k + 3$  com  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , encontramos a classe dividida associada a partição  $(4k + 3)$ . Nesta partição,  $4k + 3 \equiv 3 \pmod{4}$ . Portanto o signo do seu conjugador padrão é ímpar.

Isto conclui a demonstração do teorema. □



# Capítulo 2

## Uma Conjectura de Alvis

Neste capítulo vamos mostrar a prova dada por Michael J.J. Barry e Michael B. Ward em [2] para a Conjectura de Alvis.

### 2.1 A conjectura

**Definição 2.1.1.** *Seja  $G$  um grupo finito e seja  $S$  um subconjunto de  $\mathcal{Irr}(G)$ . O conjunto  $S$  é dito ser uma cobertura de  $G$ , se para cada primo  $p$  divisor de  $|G|$ , existir um caráter  $\chi$  em  $S$  tal que  $p$  divide  $\chi(1)$ . Caso  $G$  tenha uma cobertura, denotemos por  $cn(G)$  o mínimo das cardinalidades das coberturas de  $G$ , que chamemos por número de cobertura de  $G$ .*

No artigo [1], D.L. Alvis e M.J.J. Barry estudaram o número de cobertura dos grupos finitos simples. Os resultados deles foram que se  $G$  é um grupo não abeliano finito simples, então  $cn(G) \leq 3$ . Em particular para os grupos alternados, eles mostraram que  $cn(\mathcal{A}_n) \leq 2$  se  $n \geq 6$ . No final deste artigo, eles conjecturam um resultado geral mais forte, que ficou conhecido como Conjectura de Alvis.

**Teorema 2.1.2** (Conjectura de Alvis). *Para cada  $n \geq 15$ , o grupo  $\mathcal{A}_n$  possui um caráter irredutível cujo grau é divisível por todo primo  $p \leq n$ .*

A demonstração dessa conjectura é dada por todas as seguintes seções e será resumida no final deste capítulo.

### 2.2 Escolha da partição de $n$

Ao longo de todo este capítulo assumamos  $n$  sendo um número natural.

**Definição 2.2.1.** Para todo  $n \geq 1$  defina  $\kappa(n)$  sendo o único inteiro positivo  $k$  satisfazendo  $k^2 \leq n < (k+1)^2$ , isto é,  $\kappa(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$  a parte inteira de  $\sqrt{n}$ .

Suponha que  $k = \kappa(n)$  seja ímpar. Defina por  $a_i = k + \frac{k-1}{2} + 1 - i$  e forme as seguintes sequências:

$$A_1 = (a_1, a_2, \dots, a_k), \text{ se } k^2 = n;$$

$$A_2 = (a_1 + 1, a_2 + 1, \dots, a_j + 1, a_{j+1}, \dots, a_k), \text{ se } k^2 + j = n \text{ e } 1 \leq j \leq k;$$

$$A_3 = (a_1 + 2, a_2 + 2, \dots, a_j + 2, a_{j+1} + 1, \dots, a_k + 1), \text{ se } k^2 + k + j = n \text{ e } 1 \leq j \leq k.$$

**Lema 2.2.2.** As sequências  $A_1, A_2$  e  $A_3$  são partições de  $n$ .

*Demonstração.* Note que em todas sequências  $A_1, A_2$  e  $A_3$ , as componentes já estão em ordem não crescente. Tome por  $A_t^i$  a  $i$ -ésima componente de  $A_t$ . Primeiro mostremos que  $A_1$  é uma partição de  $n$ . Neste caso, basta verificar

se  $\sum_{i=1}^k A_1^i = n$ . Vamos ao calculo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k A_1^i &= \sum_{i=1}^k \left( k + \frac{k-1}{2} + 1 - i \right) \\ &= k \left( k + \frac{k-1}{2} + 1 \right) - \sum_{i=1}^k i \\ &= k^2 + \frac{k^2 + k}{2} - \frac{k(k+1)}{2} \\ &= k^2, \end{aligned}$$

então  $A_1$  é uma partição de  $n = k^2$ .

Compare  $A_2$  e  $A_1$ . Observe que  $A_2$  é obtido de  $A_1$  adicionando 1 nas primeiras  $j$  componentes. Assim em  $A_2$

$$\sum_{i=1}^k A_2^i = k^2 + j,$$

então  $A_2$  é uma partição de  $n = k^2 + j$ .

Agora compare  $A_3$  e  $A_1$ . Observe que  $A_3$  é obtida de  $A_1$  adicionando 2 nas primeiras  $j$  componentes, e adicionando 1 em todas componentes de  $j+1$  a  $k$ . Assim em  $A_3$

$$\sum_{i=1}^k A_3^i = k^2 + 2j + (k-j) = k^2 + k + j,$$

então  $A_3$  é uma partição de  $n = k^2 + k + j$ . Com isto concluímos a demonstração do lema.  $\square$

Suponha agora que  $k = \kappa(n)$  seja par. Defina por

$$a_i = \begin{cases} k + \frac{k}{2} - i, & \text{se } 1 \leq i \leq \frac{k}{2} \\ k + \frac{k}{2} + 1 - i, & \text{se } \frac{k}{2} + 1 \leq i \leq k \end{cases},$$

e forme as seguintes sequências:

$$B_1 = (a_1, a_2, \dots, a_k), \text{ se } n = k^2;$$

$$B_2 = (a_1, \dots, a_{\frac{k}{2}-j}, a_{\frac{k}{2}-j+1} + 1, \dots, a_{\frac{k}{2}} + 1, a_{\frac{k}{2}+1}, \dots, a_k), \text{ se } n = k^2 + j \text{ e } 1 \leq j \leq \frac{k}{2} - 1;$$

$$B_3 = (a_1, a_2 + 1, \dots, a_{\frac{k}{2}} + 1, a_{\frac{k}{2}+1}, \dots, a_{k-1}, a_k + 1), \text{ se } n = k^2 + \frac{k}{2};$$

$$B_4 = (a_1, a_2 + 1, \dots, a_{\frac{k}{2}} + 1, a_{\frac{k}{2}+1}, \dots, a_{k-j-1}, a_{k-j} + 1, \dots, a_k + 1), \text{ se } n = k^2 + \frac{k}{2} + j \text{ e } 1 \leq j \leq \frac{k}{2} - 1;$$

$$B_5 = (a_1 + 1, \dots, a_k + 1), \text{ se } n = k^2 + k;$$

$$B_6 = (a_1 + 1, \dots, a_{\frac{k}{2}-j} + 1, a_{\frac{k}{2}-j+1} + 2, \dots, a_{\frac{k}{2}} + 2, a_{\frac{k}{2}+1} + 1, \dots, a_k + 1), \text{ se } n = k^2 + k + j \text{ e } 1 \leq j \leq \frac{k}{2} - 1;$$

$$B_7 = (a_1+1, a_2+2, \dots, a_{\frac{k}{2}}+2, a_{\frac{k}{2}+1}+1, \dots, a_{k-1}+1, a_k+2), \text{ se } n = k^2+k+\frac{k}{2};$$

$$B_8 = (a_1+1, a_2+2, \dots, a_{\frac{k}{2}}+2, a_{\frac{k}{2}+1}+1, \dots, a_{k-j-1}+1, a_{k-j}+2, \dots, a_k+2), \text{ se } n = k^2+k+\frac{k}{2}+j \text{ e } 1 \leq j \leq \frac{k}{2} - 1;$$

$$B_9 = (a_1 + 2, \dots, a_k + 2), \text{ se } n = k^2 + 2k.$$

Observe que para  $\kappa(n) = 2$  a desigualdade  $1 \leq j \leq \frac{\kappa(n)}{2} - 1$  não é satisfeita. Neste caso, tome as seguintes sequências  $B_1 = (2, 2)$ ,  $B_3 = (3, 2)$ ,  $B_5 = (3, 3)$ ,  $B_7 = (4, 3)$  e  $B_9 = (4, 4)$ .

**Lema 2.2.3.** *As sequências  $B_1, B_2, \dots, B_9$  são partições de  $n$ .*

*Demonstração.* Novamente note que em todas as sequências  $B_1, B_2, \dots, B_9$  as componentes estão em ordem não crescente. Tome por  $B_t^i$  a  $i$ -ésima componente de  $B_t$ . Primeiro mostremos que  $B_1$  é uma partição de  $n$ . Vamos ao calculo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^k B_1^i &= \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \left( k + \frac{k}{2} - i \right) + \sum_{i=\frac{k}{2}+1}^k \left( k + \frac{k}{2} + 1 - i \right) \\
&= \frac{k}{2} \cdot \frac{3k}{2} - \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} i + \frac{k}{2} \left( \frac{3k+2}{2} \right) - \sum_{i=\frac{k}{2}+1}^k i \\
&= \frac{3k^2 + 3k^2 + 2k}{4} - \sum_{i=1}^k i \\
&= \frac{6k^2 + 2k}{4} - \frac{k(k+1)}{2} \\
&= \frac{6k^2 + 2k - 2k^2 - 2k}{4} \\
&= \frac{4k^2}{4} = k^2,
\end{aligned}$$

então  $B_1$  é uma partição de  $n = k^2$ .

Compare  $B_2$  e  $B_1$ . Observe que  $B_2$  é obtida de  $B_1$  adicionando 1 em todas as componentes de  $\frac{k}{2} - j + 1$  a  $\frac{k}{2}$ . Assim em  $B_2$

$$\sum_{i=1}^k B_2^i = k^2 + j,$$

então  $B_2$  é uma partição de  $n = k^2 + j$ .

Compare  $B_3$  e  $B_1$ . Observe que  $B_3$  é obtida de  $B_1$  adicionando 1 em todas as componentes de 2 a  $\frac{k}{2}$  e na componente  $k$ . Assim em  $B_3$

$$\sum_{i=1}^k B_3^i = k^2 + \left( \frac{k}{2} - 1 \right) + 1 = k^2 + \frac{k}{2},$$

então  $B_3$  é uma partição de  $n = k^2 + \frac{k}{2}$ .

Compare  $B_4$  e  $B_1$ . Observe que  $B_4$  é obtida de  $B_1$  adicionando 1 em todas as componentes de 2 a  $\frac{k}{2}$  e em todas as componentes de  $k - j$  a  $k$ . Assim em  $B_4$

$$\sum_{i=1}^k B_4^i = k^2 + \left( \frac{k}{2} - 1 \right) + (j + 1) = k^2 + \frac{k}{2} + j,$$

então  $B_4$  é uma partição de  $n = k^2 + \frac{k}{2} + j$ .

Compare  $B_5$  e  $B_1$ . Observe que  $B_5$  é obtido de  $B_1$  adicionando 1 em todas as  $k$  componentes. Assim em  $B_5$

$$\sum_{i=1}^k B_5^i = k^2 + k,$$

então  $B_5$  é uma partição de  $n = k^2 + k$ .

Compare  $B_6$  e  $B_1$ . Observe que  $B_6$  é obtido de  $B_1$  adicionando 1 em todas as componentes de 1 a  $\frac{k}{2} - j$  e em todas as componentes de  $\frac{k}{2} + 1$  a  $k$ , e ainda adicionando 2 em todas as componentes de  $\frac{k}{2} - j + 1$  a  $\frac{k}{2}$ . Assim em  $B_6$

$$\sum_{i=1}^k B_6^i = k^2 + \left(\frac{k}{2} - j\right) + \frac{k}{2} + 2j = k^2 + k + j,$$

então  $B_6$  é uma partição de  $n = k^2 + k + j$ .

Compare  $B_7$  e  $B_1$ . Observe que  $B_7$  é obtida de  $B_1$  adicionando 1 na componente 1 e em todas as componentes de  $\frac{k}{2} + 1$  a  $k - 1$ , e ainda adicionando 2 em todas as componentes de 2 a  $\frac{k}{2}$  e na componente  $k$ . Assim em  $B_7$

$$\sum_{i=1}^k B_7^i = k^2 + 1 + \left(\frac{k}{2} - 1\right) + 2\left(\frac{k}{2} - 1\right) + 2 = k^2 + 1 + \frac{k}{2} - 1 + k - 2 + 2 = k^2 + k + \frac{k}{2},$$

então  $B_7$  é uma partição de  $n = k^2 + k + \frac{k}{2}$ .

Compare  $B_8$  e  $B_1$ . Observe que  $B_8$  é obtida de  $B_1$  adicionando 1 na componente 1 e em todas as componentes de  $\frac{k}{2} + 1$  a  $k - j - 1$ , e ainda adicionando 2 em todas as componentes de 2 a  $\frac{k}{2}$  e em todas as componentes de  $k - j$  a  $k$ . Assim em  $B_8$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k B_8^i &= k^2 + 1 + \left(\frac{k}{2} - (j + 1)\right) + 2\left(\frac{k}{2} - 1\right) + 2(j + 1) \\ &= k^2 + 1 + \frac{k}{2} - j - 1 + k - 2 + 2j + 2 \\ &= k^2 + k + \frac{k}{2} + j, \end{aligned}$$

então  $B_8$  é uma partição de  $n = k^2 + k + \frac{k}{2} + j$ .

Agora o último caso. Compare  $B_9$  e  $B_1$ . Observe que  $B_9$  é obtida de  $B_1$  adicionando 2 em todas as  $k$  componentes. Assim em  $B_9$

$$\sum_{i=1}^k B_9^i = k^2 + 2k,$$

então  $B_9$  é uma partição de  $n = k^2 + 2k$ . Com isto concluímos a demonstração do lema.  $\square$

**Definição 2.2.4.** *Seja  $n \geq 1$  e seja  $\alpha_n$  a seguinte partição: se  $\kappa(n)$  for ímpar, então  $\alpha_n$  é uma das partições  $A_t$  com  $(t = 1, 2, 3)$  respeitando as condições associadas a  $A_t$ ; se  $\kappa(n)$  for par, então  $\alpha_n$  é uma das partições  $B_t$  com  $(t = 1, 2, \dots, 9)$  respeitando as condições associadas a  $B_t$ .*

**Proposição 2.2.5.** *Seja  $n \geq 2$  e seja  $\chi_{\alpha_n}$  o caráter irredutível de  $\mathcal{S}_n$  associado a partição  $\alpha_n$ . Então  $\chi_{\alpha_n} \downarrow_{\mathcal{A}_n}$  é irredutível quando:*

- $\kappa(n)$  é ímpar;
- $\kappa(n)$  é par e  $n \neq 4$ .

*Demonstração.* Segue pelo teorema 1.2.34 que  $\chi_{\alpha_n} \downarrow_{\mathcal{A}_n}$  é irredutível se, e somente se, a partição  $\alpha_n$  não é auto-associada. Pelo observação 1.2.14 é suficiente mostrar que sua tabela associada  $T_{\alpha_n}$  tem o números distintos de linhas e colunas.

Supomos  $k = \kappa(n)$  ímpar. Então o número de colunas em  $T_{\alpha_n}$  é um dos seguintes valores:

$$a_1, a_1 + 1 \text{ ou } a_1 + 2, \text{ onde } a_1 = k + \frac{k-1}{2}.$$

Já a quantia de linhas é sempre  $k$ .

Se  $k > 1$ , o menor número acima de colunas é  $k + \frac{k-1}{2} > k$ . Neste caso a quantia de colunas é sempre maior do que a de linhas em  $T_{\alpha_n}$ . Para  $k = 1$ , temos  $n = \{2, 3\}$ ,  $\alpha_2 = (2)$  e  $\alpha_3 = (3)$ . Portanto  $\chi_{\alpha_n} = 1_{\mathcal{S}_n}$ , e assim a restrição a  $\mathcal{A}_n$  continua a ser irredutível.

Agora supomos  $k$  sendo par. Então o número de colunas em  $T_{\alpha_n}$  é um dos seguintes valores:

$$a_1, a_1 + 1 \text{ ou } a_1 + 2, \text{ onde } a_1 = k + \frac{k}{2} - 1.$$

Enquanto a quantia de linhas é  $k$  sempre. Resolvendo a inequação  $k + \frac{k}{2} - 1 > k$  encontramos  $k > 2$ . Já para  $k = 2$ ,  $\alpha_n$  é auto-associada somente para  $\alpha_4 = (2, 2)$ . Concluindo a demonstração da proposição.  $\square$

**Definição 2.2.6.** *Para  $n \geq 9$  sejam  $\lambda \vdash n$  e  $\chi_\lambda$  o caráter irredutível de  $\mathcal{S}_n$  associado a partição  $\lambda$ . Definimos por  $\mathcal{P}_n$  o conjunto não vazio de todos os primos  $\leq n$ , e por  $\mathcal{P}(\lambda)$  o conjunto de todos os primos  $\leq n$  que dividem o grau de  $\chi_\lambda$ .*

Pelo teorema 1.2.34 para demonstrar o Teorema 2.1.2 (Conjectura de Alvis) é suficiente exibir uma partição  $\lambda \vdash n$  não auto-associada tal que  $\mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{P}_n$ . Mostraremos que, exceto para  $n = 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 32, 43$ , podemos considerar como  $\lambda$  a partição  $\alpha_n$ . Assim a proposição 2.2.5 implicará o resultado. Agora para os valores de  $n$  restantes, encontraremos uma outra partição apropriada  $\lambda$  para completar a demonstração.

## 2.3 O conjunto $\mathcal{P}(\alpha_n)$

Veja quando  $\kappa(n) = 1$  e  $n \geq 2$ , temos  $\chi_{\alpha_n} = 1_{\mathcal{S}_n}$  e assim  $\mathcal{P}(\alpha_n) = \emptyset \neq \mathcal{P}_n$ . Para  $\kappa(n) = 2$ , temos  $\alpha_4(1) = 2$ ,  $\alpha_5(1) = 5 = \alpha_6(1)$  e  $\alpha_7(1) = 2 \cdot 7 = \alpha_8(1)$  e com isso  $\mathcal{P}_4 = \{2, 3\} \neq \{2\}$ , para  $n = 5, 6$  temos  $\mathcal{P}_n = \{2, 3, 5\} \neq \{5\}$  e para  $n = 7, 8$  temos  $\mathcal{P}_n = \{2, 3, 5, 7\} \neq \{2, 7\}$ .

Assuma daqui em diante  $\kappa(n) \geq 3$ . Denotemos por  $\gamma_n$  o maior comprimento de gancho em  $\mathcal{H}_{\alpha_n}$  e utilizemos  $\kappa(n)$  e  $\gamma_n$  para particionar o conjunto  $\mathcal{P}_n$  em três subconjuntos:

- Primos em  $\{2, 3, \dots, \kappa(n)\}$  que chamamos de primos pequenos;
- Primos em  $\{\kappa(n)+1, \kappa(n)+2, \dots, \gamma_n\}$  que chamamos de primos médios;
- Primos em  $\{\gamma_n + 1, \gamma_n + 2, \dots, n\}$  que chamamos de primos grandes.

Observe que pela maneira que são definidas as partições  $\alpha_n$ , o conjunto  $\mathcal{P}(\alpha_n)$  não é vazio para  $\kappa(n) \geq 2$ , isto devido  $\chi_{\alpha_n}(1) > 1$  nestes casos. Se  $\kappa(n) = 2$ , vimos acima que  $\mathcal{P}_n \neq \mathcal{P}(\alpha_n)$  para todo  $n$ .

Mostraremos nas próximas seções que a partir um certo  $n$  sempre vamos ter  $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}(\alpha_n)$ , e para os casos onde a igualdade não acontecer encontraremos uma partição adequada  $\lambda_n \vdash n$  tal que  $\mathcal{P}(\lambda_n) = \mathcal{P}_n$ .

**Definição 2.3.1.** *Seja  $n \geq 9$  e seja  $q$  um inteiro positivo. Defina por  $L(n, q)$  o conjunto dos inteiros  $l$  tais que  $q$  aparece na linha  $l$  de  $\mathcal{H}_{\alpha_n}$ , e por  $LR(n, q)$  o maior inteiro em  $L(n, q)$ . Se  $L(n, q) = \emptyset$ , então ponha  $LR(n, q) = 0$ . Defina ainda por  $NH(n, q)$  o número de vezes que  $q$  ocorre em  $\mathcal{H}_{\alpha_n}$ .*

### 2.3.1 Primos médios quando $\kappa(n)$ é ímpar

Para toda esta subseção suponha  $k = \kappa(n)$  ímpar e também é necessário assumir que  $n \geq 25$ , isto é,  $k \geq 5$ . Agora, separe em cinco maneiras distintas o modo em que  $n$  é expressado em função de  $k$ , que são eles:

$$\begin{aligned} n_1 &= k^2, & n_2 &= k^2 + j, \text{ com } 1 \leq j < k, \\ n_3 &= k^2 + k + j \text{ com } 1 \leq j < k, & n_4 &= k^2 + k \text{ e} \\ n_5 &= k^2 + 2k. \end{aligned}$$

**Lema 2.3.2.** *Seja  $q$  um inteiro em  $\{k+1, k+2, \dots, \gamma_n\}$ . Então  $q$  ocorre nas três primeiras colunas em  $\mathcal{H}_{\alpha_n}$  (nas duas primeiras quando  $n = k^2$ ,  $n = k^2 + k$  ou  $n = k^2 + 2k$ ). Em particular, isso vale se  $q$  for um primo médio.*

*Demonstração.* Para fazer referência sublinhemos a linha  $j$  em todos os gráficos de gancho abaixo.

Começemos por  $n_1 = k^2$ . Neste caso,  $\alpha_{n_1} = A_1$ . O gráfico de ganchos  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$  possui pelo menos três colunas com  $k$  linhas, isto porque a última componente em  $\alpha_{n_1}$  é igual a  $\frac{k+1}{2} \geq 3$  quando  $k \geq 5$ . Segue abaixo as duas primeiras colunas

$$\begin{array}{cc} \gamma_{n_1} & \gamma_{n_1} - 1 \\ \gamma_{n_1} - 2 & \gamma_{n_1} - 3 \\ \dots & \dots \\ \frac{\gamma_{n_1} - 2(j-1)}{\gamma_{n_1} - 2j} & \frac{\gamma_{n_1} - 2(j-1) - 1}{\gamma_{n_1} - 2j - 1} \\ \dots & \dots \\ \gamma_{n_1} - 2(k-2) & \gamma_{n_1} - 2(k-2) - 1 \\ \gamma_{n_1} - 2(k-1) & \gamma_{n_1} - 2(k-1) - 1 \end{array}$$

O gancho  $\gamma_{n_1}$  é igual a  $a_1 + (k-1) = \frac{5k-3}{2}$  e todos os inteiros de  $\gamma_{n_1} - 2(k-1) - 1$  a  $\gamma_{n_1}$  ocorrem nestas duas colunas. Como

$$\gamma_{n_1} - 2(k-1) - 1 = \frac{5k-3}{2} - 2k + 1 = \frac{5k-3-4k+2}{2} = \frac{k-1}{2} < k,$$

então  $q$  ocorre em alguma dessas duas colunas.

Próximo caso é  $n_2 = k^2 + j$  com  $1 \leq j < k$ . Neste caso,  $\alpha_{n_2} = A_2$ . O gráfico de ganchos  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$  possui no mínimo três colunas com  $k$  linhas, por  $\alpha_{n_1}$  e  $\alpha_{n_2}$  ter em comum a última componente. Segue abaixo as três primeiras colunas

$$\begin{array}{ccc} \gamma_{n_2} & \gamma_{n_2} - 1 & \gamma_{n_2} - 2 \\ \gamma_{n_2} - 2 & \gamma_{n_2} - 3 & \gamma_{n_2} - 4 \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\gamma_{n_2} - 2(j-1)}{\gamma_{n_2} - (2(j+1) - 1)} & \frac{\gamma_{n_2} - (2j-1)}{\gamma_{n_2} - 2(j+1)} & \frac{\gamma_{n_2} - 2j}{\gamma_{n_2} - 2(j+1) - 1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n_2} - (2(k-1) - 1) & \gamma_{n_2} - 2(k-1) & \gamma_{n_2} - 2k + 1 \\ \gamma_{n_2} - (2k-1) & \gamma_{n_2} - 2k & \gamma_{n_2} - 2k - 1 \end{array}$$

O gancho  $\gamma_{n_2}$  é igual a  $\frac{5k-1}{2}$  e todos os inteiros de  $\gamma_{n_2} - 2k - 1$  a  $\gamma_{n_2}$  ocorrem nestas três colunas. Como

$$\gamma_{n_2} - 2k - 1 = \frac{5k-1}{2} - 2k - 1 = \frac{5k-1-4k-2}{2} = \frac{k-3}{2} < k,$$



então  $q$  ocorre em alguma dessas três colunas.

Próximo caso é  $n_3 = k^2 + k + j$  com  $1 \leq j < k$ . Neste caso,  $\alpha_{n_3} = A_3$ . Note que  $T_{\alpha_{n_3}}$  é obtida adicionando uma caixa à direita em todas as linhas de  $T_{\alpha_{n_2}}$ . Isto mostra que  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_3}}$  é obtido adicionando uma nova coluna à esquerda de  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$ , onde cada comprimento de gancho dessa nova coluna satisfaz  $h_{i,1}^{\alpha_{n_3}} = h_{i,1}^{\alpha_{n_2}} + 1$ . Então o gráfico de ganchos  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_3}}$  possui no mínimo quatro colunas com  $k$  linhas. Segue abaixo as três primeiras colunas

$$\begin{array}{ccc} \gamma_{n_2} + 1 & \gamma_{n_2} & \gamma_{n_2} - 1 \\ \gamma_{n_2} - 1 & \gamma_{n_2} - 2 & \gamma_{n_2} - 3 \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\gamma_{n_2} - (2(j-1) - 1)}{\gamma_{n_2} - 2j} & \frac{\gamma_{n_2} - 2(j-1)}{\gamma_{n_2} - (2(j+1) - 1)} & \frac{\gamma_{n_2} - (2j-1)}{\gamma_{n_2} - 2(j+1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n_2} - 2(k-2) & \gamma_{n_2} - (2(k-1) - 1) & \gamma_{n_2} - 2(k-1) \\ \gamma_{n_2} - 2(k-1) & \gamma_{n_2} - (2k-1) & \gamma_{n_2} - 2k \end{array}$$

Observe que o gancho  $\gamma_{n_3}$  é igual a  $\gamma_{n_2} + 1 = \frac{5k-1}{2} + 1 = \frac{5k+1}{2}$  e todos os inteiros de  $\gamma_{n_2} - 2k$  a  $\gamma_{n_2} + 1$  ocorrem nestas três colunas. Como

$$\gamma_{n_2} - 2k = \frac{5k-1}{2} - 2k = \frac{5k-1-4k}{2} = \frac{k-1}{2} < k.$$

então  $q$  ocorre em alguma dessas três colunas.

Próximo caso é  $n_4 = k^2 + k$ . Neste caso  $\alpha_{n_4} = A_2$ . Com a mesma justificativa anterior,  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_4}}$  é obtido adicionado uma nova coluna à esquerda de  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$ , onde cada comprimento de gancho dessa nova coluna satisfaz  $h_{i,1}^{\alpha_{n_4}} = h_{i,1}^{\alpha_{n_1}} + 1$ . Então, o gráfico de ganchos  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_4}}$  possui no mínimo quatro colunas com  $k$  linhas. Segue abaixo as duas primeiras colunas

$$\begin{array}{cc} \gamma_{n_1} + 1 & \gamma_{n_1} \\ \gamma_{n_1} - 1 & \gamma_{n_1} - 2 \\ \dots & \dots \\ \frac{\gamma_{n_1} - 2(j-2) - 1}{\gamma_{n_1} - 2(j-1) - 1} & \frac{\gamma_{n_1} - 2(j-1)}{\gamma_{n_1} - 2j} \\ \dots & \dots \\ \gamma_{n_1} - 2(k-3) - 1 & \gamma_{n_1} - 2(k-2) \\ \gamma_{n_1} - 2(k-2) - 1 & \gamma_{n_1} - 2(k-1) \end{array}$$

Observe que o gancho  $\gamma_{n_4}$  é igual a  $\gamma_{n_1} + 1 = \frac{5k-1}{2}$  e todos os inteiros de  $\gamma_{n_1} - 2(k-1)$  a  $\gamma_{n_1} + 1$  ocorrem nestas duas colunas. Como

$$\gamma_{n_1} - 2(k-1) = \frac{5k-3}{2} - 2k + 2 = \frac{5k-3-4k+4}{2} = \frac{k+1}{2} < k,$$

então  $q$  ocorre em alguma dessas duas colunas.

O último caso é  $n_5 = k^2 + 2k$ . Neste caso,  $\alpha_{n_5} = A_3$ . Como no caso anterior,  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_5}}$  é obtido de  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$ , mas agora adicionamos duas colunas à esquerda de  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$ , onde cada comprimento de gancho dessas novas colunas satisfaz  $h_{i,s}^{\alpha_{n_5}} = h_{i,s}^{\alpha_{n_1}} + 1$  com  $s \in \{1, 2\}$ . Então, o gráfico de ganchos  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_5}}$  possui no mínimo cinco colunas com  $k$  linhas. Segue abaixo as duas primeiras colunas

$$\begin{array}{cc} \gamma_{n_1} + 2 & \gamma_{n_1} + 1 \\ \gamma_{n_1} & \gamma_{n_1} - 1 \\ \dots & \dots \\ \frac{\gamma_{n_1} - 2(j-2)}{\gamma_{n_1} - 2(j-1)} & \frac{\gamma_{n_1} - 2(j-2) - 1}{\gamma_{n_1} - 2(j-1) + 1} \\ \dots & \dots \\ \gamma_{n_1} - 2(k-3) & \gamma_{n_1} - 2(k-3) - 1 \\ \gamma_{n_1} - 2(k-2) & \gamma_{n_1} - 2(k-2) - 1 \end{array}$$

O gancho  $\gamma_{n_5}$  é igual a  $\gamma_{n_1} + 2 = \frac{5k+1}{2}$  e todos os inteiros de  $\gamma_{n_1} - 2(k-2) - 1$  a  $\gamma_{n_1} + 2$  ocorrem nestas duas colunas. Como

$$\gamma_{n_1} - 2(k-2) - 1 = \frac{5k-3}{2} - 2k + 3 = \frac{5k-3-4k+6}{2} = \frac{k+3}{2} < k,$$

então  $q$  ocorre em alguma dessas duas colunas.

Se agora considerarmos  $q$  um primo médio, por definição  $q$  é um inteiro em  $\{k+1, k+2, \dots, \gamma_n\}$  e segue o caso particular e encerra a demonstração do lema.  $\square$

**Lema 2.3.3.** *Seja  $n$  tal que  $k^2 \leq n < k^2 + 2k$ . Se  $q$  é um inteiro em  $\{k+1, k+2, \dots, \gamma_n\}$ , então  $LR(n+1, q) \geq LR(n, q)$ . Em particular,  $LR(n_5, q) \geq LR(n_t, q)$  para todo inteiro  $1 \leq t \leq 4$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\alpha_n$  e  $\alpha_{n+1}$  as partições de  $n$  e  $n+1$  respectivamente como na definição 2.2.4. A tabela associada  $T_{\alpha_{n+1}}$  é obtida de  $T_{\alpha_n}$  por adição de uma caixa na extremidade direita de alguma linha. Considere  $v$  essa linha. Agora, comparemos  $\mathcal{H}_{\alpha_{n+1}}$  com  $\mathcal{H}_{\alpha_n}$  e façamos as seguintes observações sobre  $\mathcal{H}_{\alpha_{n+1}}$ :

- Todos comprimentos de gancho na linha  $v$  são aumentados em 1, e também há o aparecimento de um gancho de comprimento 1 na extremidade direita da linha  $v$ ;
- Todos comprimentos de gancho na coluna acima da caixa adicionada são aumentados em 1;

- Agora todos outros comprimentos de gancho são iguais àqueles de  $\mathcal{H}_{\alpha_n}$ .  
Dentre esses estão:
  - (a) Os comprimentos de ganchos nas três primeiras colunas das linha 1 a  $v - 1$ , pois a menor quantidade de colunas na partição  $\alpha_n$  é 3, que acontece quando  $\alpha_n = A_1$ ;
  - (b) Todos comprimentos de ganchos nas linhas  $v + 1$  a  $k$ .

Feitas essas observações, segue do lema 2.3.2 que ou

- (i)  $LR(n + 1, q) = LR(n, q)$ , se  $LR(n, q) > v$ ; ou
- (ii)  $LR(n + 1, q) \geq LR(n, q)$ , se  $LR(n, q) \leq v$ .

Portanto  $LR(n+1, q) \geq LR(n, q)$ , concluindo a demonstração deste lema.  $\square$

**Lema 2.3.4.** *Seja  $q = k + 2i$  ( $i \geq 1$ ) um inteiro ímpar em  $\{k + 1, k + 2, \dots, \gamma_n\}$ . Então, temos os seguintes valores de  $LR(n, q)$ , dependendo da classe residual de  $k \pmod{4}$ .*

$n$	$\gamma_n$	Paridade $\gamma_n$	$LR(n, q)$
$k \equiv 1 \pmod{4}$			
$k^2$	$\frac{5k-3}{2}$	ímpar	$\frac{3k+1}{4} - i$
$k^2 + j, 1 \leq j \leq k$	$\frac{5k-1}{2}$	par	$\frac{3k+1}{4} - i$
$k^2 + k + j, 1 \leq j \leq k$	$\frac{5k+1}{2}$	ímpar	$\begin{cases} \frac{3k+1}{4} - i & \text{se } q < \frac{5k+5}{2} - 2j \\ \frac{3k+5}{4} - i & \text{se } q \geq \frac{5k+5}{2} - 2j \end{cases}$
$k \equiv 3 \pmod{4}$			
$k^2$	$\frac{5k-3}{2}$	par	$\frac{3k-1}{4} - i$
$k^2 + j, 1 \leq j < k$	$\frac{5k-1}{2}$	ímpar	$\begin{cases} \frac{3k-1}{4} - i & \text{se } q < \frac{5k+3}{2} - 2j \\ \frac{3k+3}{4} - i & \text{se } q \geq \frac{5k+3}{2} - 2j \end{cases}$
$k^2 + k + j, 0 \leq j \leq k$	$\frac{5k+1}{2}$	par	$\frac{3k+3}{4} - i$

*Demonstração.* Vamos utilizar a mesma notação do lema 2.3.2.

Comecemos por  $n_1 = k^2$ . Segue do lema 2.3.2 que as duas primeiras colunas em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$  são

$$\begin{array}{cc} \gamma_{n_1} & \gamma_{n_1} - 1 \\ \gamma_{n_1} - 2 & \gamma_{n_1} - 3 \\ \dots & \dots \\ \frac{\gamma_{n_1} - 2(j-1)}{\gamma_{n_1} - 2j} & \frac{\gamma_{n_1} - 2(j-1) - 1}{\gamma_{n_1} - 2j - 1} \\ \dots & \dots \\ \gamma_{n_1} - 2(k-2) & \gamma_{n_1} - 2(k-2) - 1 \\ \gamma_{n_1} - 2(k-1) & \gamma_{n_1} - 2(k-1) - 1 \end{array}$$

Se  $k \equiv 1 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_1}$  é ímpar. Então, os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2(k-1)$  a  $\gamma_{n_1}$  ocorrem na coluna 1. Deste modo  $LR(n_1, \gamma_{n_1} - 2(m-1)) = m$  para  $1 \leq m \leq k$ . Como  $q > k$  é ímpar, considere  $LR(n_1, q) = m$  e então

$$\begin{aligned} q = k + 2i &= \gamma_{n_1} - 2(m-1) = \frac{5k-3}{2} - 2m + 2 \implies \\ 2i + 2m &= \frac{5k - 2k - 3 + 4}{2} \implies \\ m &= \frac{3k+1}{4} - i = LR(n_1, q). \end{aligned}$$

Se  $k \equiv 3 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_1}$  é par. Então, os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2(k-1) - 1$  a  $\gamma_{n_1} - 1$  ocorrem na coluna 2. Deste modo  $LR(n_1, \gamma_{n_1} - 2(m-1) - 1) = m$  para  $1 \leq m \leq k$ . Como  $q > k$  é ímpar, considere  $LR(n_1, q) = m$  e então

$$\begin{aligned} q = k + 2i &= \gamma_{n_1} - 2(m-1) - 1 = \frac{5k-3}{2} - 2m + 1 \implies \\ 2i + 2m &= \frac{5k - 2k - 3 + 2}{2} \implies \\ m &= \frac{3k-1}{4} - i = LR(n_1, q). \end{aligned}$$

O próximo caso é  $n_2 = k^2 + j$  com  $1 \leq j < k$ . Segue do lema 2.3.2 que as três primeiras colunas em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$  são

$$\begin{array}{ccc} \gamma_{n_2} & \gamma_{n_2} - 1 & \gamma_{n_2} - 2 \\ \gamma_{n_2} - 2 & \gamma_{n_2} - 3 & \gamma_{n_2} - 4 \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\gamma_{n_2} - 2(j-1)}{\gamma_{n_2} - (2(j+1) - 1)} & \frac{\gamma_{n_2} - (2j-1)}{\gamma_{n_2} - 2(j+1)} & \frac{\gamma_{n_2} - 2j}{\gamma_{n_2} - 2(j+1) - 1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n_2} - (2(k-1) - 1) & \gamma_{n_2} - 2(k-1) & \gamma_{n_2} - 2k + 1 \\ \gamma_{n_2} - (2k-1) & \gamma_{n_2} - 2k & \gamma_{n_2} - 2k - 1 \end{array}$$

Se  $k \equiv 1 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_2}$  é par. Então, os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_2} - (2j - 1)$  a  $\gamma_{n_2} - 1$  ocorrem nas linhas 1 a  $j$  da coluna 2, e os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_2} - (2k - 1)$  a  $\gamma_{n_2} - (2(j + 1) - 1)$  ocorrem nas linhas  $j + 1$  a  $k$  da coluna 1. Deste modo  $LR(n_2, \gamma_{n_2} - (2m - 1)) = m$  para  $1 \leq m \leq k$ . Como  $q > k$  é ímpar, considere  $LR(n_2, q) = m$  e então

$$\begin{aligned} q = k + 2i &= \gamma_{n_2} - (2m - 1) = \frac{5k - 1}{2} - (2m - 1) \implies \\ 2i + 2m &= \frac{5k - 2k - 1 + 2}{2} \implies \\ m &= \frac{3k + 1}{4} - i = LR(n_2, q). \end{aligned}$$

Se  $k \equiv 3 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_2}$  é ímpar. Então, os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_2} - 2(j - 1)$  a  $\gamma_{n_2}$  ocorrem nas linhas 1 a  $j$  da coluna 1, o inteiro ímpar  $\gamma_{n_2} - 2j$  ocorre na linha  $j$  da coluna 3, e os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_2} - 2k$  a  $\gamma_{n_2} - 2(j + 1)$  ocorrem nas linhas  $j + 1$  a  $k$  da coluna 2. Deste modo

$$LR(n_2, \gamma_{n_2} - 2m) = \begin{cases} m + 1, & \text{se } 0 \leq m \leq j - 1 \\ m, & \text{se } j \leq m \leq k \end{cases}.$$

Como  $q > k$  é ímpar, considere  $LR(n_2, q) = m$  e então

$$\begin{aligned} q = k + 2i &= \gamma_n - 2m = \frac{5k - 1}{2} - 2m \implies \\ 2i + 2m &= \frac{5k - 1 - 2k}{2} \implies \\ m &= \frac{3k - 1}{4} - i. \end{aligned}$$

Portanto,

$$LR(n_2, q) = \begin{cases} \frac{3k - 1}{4} - i, & \text{se } q < \gamma_n - 2(j - 1) = \frac{5k + 3}{2} - 2j \\ \frac{3k + 3}{4} - i, & \text{se } q \geq \gamma_n - 2(j - 1) = \frac{5k + 3}{2} - 2j \end{cases}.$$

Próximo caso é  $n_3 = k^2 + k + j$  com  $1 \leq j < k$ . Segue do lema 2.3.2 que

as três primeiras colunas em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_3}}$  são

$$\begin{array}{ccc} \gamma_{n_2} + 1 & \gamma_{n_2} & \gamma_{n_2} - 1 \\ \gamma_{n_2} - 1 & \gamma_{n_2} - 2 & \gamma_{n_2} - 3 \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\gamma_{n_2} - (2(j-1) - 1)}{\gamma_{n_2} - 2j} & \frac{\gamma_{n_2} - 2(j-1)}{\gamma_{n_2} - (2(j+1) - 1)} & \frac{\gamma_{n_2} - (2j-1)}{\gamma_{n_2} - 2(j+1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n_2} - 2(k-2) & \gamma_{n_2} - (2(k-1) - 1) & \gamma_{n_2} - 2(k-1) \\ \gamma_{n_2} - 2(k-1) & \gamma_{n_2} - (2k-1) & \gamma_{n_2} - 2k \end{array}$$

Se  $k \equiv 1 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_3} = \gamma_{n_2} + 1$  é ímpar. Então, os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_2} - (2(j-1) - 1)$  a  $\gamma_{n_2} + 1$  ocorrem nas linhas 1 a  $j$  da coluna 1, o inteiro ímpar  $\gamma_{n_2} - (2j-1)$  ocorre na linha  $j$  da coluna 3, e os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_2} - (2k-1)$  a  $\gamma_{n_2} - (2(j+1) - 1)$  ocorrem nas linhas  $j+1$  a  $k$  da coluna 2. Agora, comparemos  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$  com  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_3}}$  e façamos as seguintes observações:

- Há o aparecimento do gancho ímpar  $\gamma_{n_2} + 1 = \gamma_{\alpha_{n_3}}$  em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_4}}$  na posição  $(1, 1)$ ;
- Todos os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_2} - (2(j-1) - 1)$  a  $\gamma_{n_2} - 1$  em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$  têm uma ocorrência numa linha abaixo em respeito a  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_3}}$ ;
- Todos os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_2} - (2k-1)$  a  $\gamma_{n_2} - (2j-1)$  ocorrem em mesmas linhas em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$  e  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_3}}$ .

Então,

$$LR(n_3, q) = \begin{cases} LR(n_2, q), & \text{se } q < \gamma_{n_2} - (2(j-1) - 1) = \frac{5k+5}{2} - 2j \\ LR(n_2, q) + 1, & \text{se } q \geq \gamma_{n_2} - (2(j-1) - 1) = \frac{5k+5}{2} - 2j \end{cases}.$$

Portanto,

$$LR(n_3, q) = \begin{cases} \frac{3k+1}{4} - i, & \text{se } q < \frac{5k+5}{2} - 2j \\ \frac{3k+5}{4} - i, & \text{se } q \geq \frac{5k+5}{2} - 2j \end{cases}.$$

Veja que esta função é bem definida, pois o único problema talvez seria em  $q = \gamma_{n_3}$ , no entanto  $LR(n_2, \gamma_{n_3}) = 0$  pois  $L(n_2, \gamma_{n_3}) = \emptyset$  e portanto  $LR(n_3, \gamma_{n_3}) = 1$ .

Se  $k \equiv 3 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_3} = \gamma_{n_2} + 1$  é par. Então, os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_2} - 2(j - 1)$  a  $\gamma_{n_2}$  ocorrem nas linhas 1 a  $j$  da coluna 2, e os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_2} - 2(k - 1)$  a  $\gamma_{n_2} - 2j$  ocorrem nas linhas  $j + 1$  a  $k$  da coluna 1. Agora, comparemos  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$  com  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_3}}$  e façamos as seguintes observações:

- Todos os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_2} - 2(j - 1)$  a  $\gamma_{n_2}$  ocorrem em mesmas linhas em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$  e  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_3}}$ ;
- Todos os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_2} - 2(k - 1)$  a  $\gamma_{n_2} - 2j$  em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$  têm uma ocorrência numa linha abaixo em respeito a  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_3}}$ .

Então,

$$LR(n_3, q) = \begin{cases} LR(n_2, q) + 1, & \text{se } q \leq \gamma_n - 2j \\ LR(n_2, q), & \text{se } q \geq \gamma_n - 2j + 2 \end{cases}.$$

Portanto,

$$LR(n_3, q) = \begin{cases} \frac{3k+3}{4} - i, & \text{se } q \leq \gamma_n - 2j \\ \frac{3k+3}{4} - i, & \text{se } q \geq \gamma_n - 2j + 2 \end{cases} \implies LR(n_3, q) = \frac{3k+3}{4} - i.$$

Próximo caso é  $n_4 = k^2 + k$ . Segue do lema 2.3.2 que as duas primeiras colunas em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_4}}$  são

$$\begin{array}{cc} \gamma_{n_1} + 1 & \gamma_{n_1} \\ \gamma_{n_1} - 1 & \gamma_{n_1} - 2 \\ \dots & \dots \\ \gamma_{n_1} - 2(j - 2) - 1 & \gamma_{n_1} - 2(j - 1) \\ \gamma_{n_1} - 2(j - 1) - 1 & \gamma_{n_1} - 2j \\ \dots & \dots \\ \gamma_{n_1} - 2(k - 3) - 1 & \gamma_{n_1} - 2(k - 2) \\ \gamma_{n_1} - 2(k - 2) - 1 & \gamma_{n_1} - 2(k - 1) \end{array}$$

Se  $k \equiv 1 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_4} = \gamma_{n_1} + 1$  é par. Então, os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2(k - 1)$  a  $\gamma_{n_1}$  ocorrem na coluna 2. Agora, comparemos  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_4}}$  com  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$  e vejamos que todos os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2(k - 1)$  a  $\gamma_{n_1}$  ocorrem em mesmas linhas em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$  e  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_4}}$ . Então,

$$LR(n_4, q) = LR(n_1, q) = \frac{3k+1}{4} - i.$$

Se  $k \equiv 3 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_4}$  é ímpar. Então, os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2(k - 2) - 1$  a  $\gamma_{n_1} + 1$  ocorrem na coluna 1. Agora, comparemos  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_4}}$  com  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$  e façamos as seguintes observações:

- Há o aparecimento do gancho ímpar  $\gamma_{n_1} + 1 = \gamma_{n_4}$  em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_4}}$  na posição  $(1, 1)$ ;
- Todos os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2(k - 2) - 1$  a  $\gamma_{n_1} - 1$  em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$  têm uma ocorrência numa linha abaixo em respeito a  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_4}}$ .

Então,

$$LR(n_4, q) = LR(n_1, q) + 1 = \frac{3k - 1}{4} - i + 1 = \frac{3k + 3}{4} - i.$$

O último caso é  $n_5 = k^2 + 2k$ . Segue do lema 2.3.2 que as duas primeiras colunas em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_5}}$  são

$$\begin{array}{cc} \gamma_{n_1} + 2 & \gamma_{n_1} + 1 \\ \gamma_{n_1} & \gamma_{n_1} - 1 \\ \dots & \dots \\ \frac{\gamma_{n_1} - 2(j - 2)}{\gamma_{n_1} - 2(j - 1)} & \frac{\gamma_{n_1} - 2(j - 2) - 1}{\gamma_{n_1} - 2(j - 1) - 1} \\ \dots & \dots \\ \gamma_{n_1} - 2(k - 3) & \gamma_{n_1} - 2(k - 3) - 1 \\ \gamma_{n_1} - 2(k - 2) & \gamma_{n_1} - 2(k - 2) - 1 \end{array}$$

Se  $k \equiv 1 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_5} = \gamma_{n_1} + 2$  é ímpar. Então, os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2(k - 2)$  a  $\gamma_{n_1} + 2$  ocorrem na coluna 1. Agora, comparemos  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$  com  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_5}}$  e façamos as seguintes observações:

- Há o aparecimento do gancho ímpar  $\gamma_{n_1} + 2 = \gamma_{n_5}$  em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_5}}$  na posição  $(1, 1)$ ;
- Todos os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2(k - 2)$  a  $\gamma_{n_1}$  em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$  têm uma ocorrência numa linha abaixo em respeito a  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_5}}$ .

Então,

$$LR(n_5, q) = LR(n_1, q) + 1 = \frac{3k + 1}{4} - i + 1 = \frac{3k + 5}{4} - i.$$

Se  $k \equiv 3 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_5} = \gamma_{n_1} + 2$  é par. Então, os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2(k - 2) - 1$  a  $\gamma_{n_1} + 1$  ocorrem na coluna 2. Agora, comparemos  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$  com  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_5}}$  e façamos as seguintes observações:

- Há o aparecimento do gancho ímpar  $\gamma_{n_1} + 1 = \gamma_{n_4}$  em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_5}}$  na posição  $(1, 2)$ ;



- Todos os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2(k - 2) - 1$  a  $\gamma_{n_1} - 1$  em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$  têm uma ocorrência numa linha abaixo em respeito a  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_5}}$ .

Então,

$$LR(n_5, q) = LR(n_1, q) + 1 = \frac{3k - 1}{4} - i + 1 = \frac{3k + 3}{4} - i.$$

Concluimos assim a demonstração deste lema.  $\square$

Nosso próximo passo será encontrar cota superior para  $NH(n, q)$ , onde  $q = k + 2i$  ( $i \geq 1$ ).

**Lema 2.3.5.** *Nas hipóteses do lema anterior, temos as seguintes cotas superiores para  $NH(n, q)$ , dependendo da classe residual de  $k \pmod{4}$ .*

$n$	Cota Superior	Estrita quando
$k \equiv 1 \pmod{4}$		
$k^2 + j, 0 \leq j \leq k - 1$	$\frac{3k+1}{4} - i$	$0 < j$ e $q \in \{k + 1, \dots, 2k - 1\}$
$k^2 + k$	$\frac{3k+1}{4} - i$	-
$k^2 + k + j, 1 \leq j \leq k$	$\frac{3k+5}{4} - i$	$j < k$ e $q \in \{k + 1, \dots, 2k - 1\}$
$k \equiv 3 \pmod{4}$		
$k^2 + j, 0 \leq j \leq k - 1$	$\frac{3k+3}{4} - i$	$j = 0$ ou $0 < j$ e $q \in \{k + 1, \dots, 2k - 1\}$
$k^2 + k$	$\frac{3k+3}{4} - i$	-
$k^2 + k + j, 1 \leq j \leq k$	$\frac{3k+3}{4} - i$	$j < k$ e $q \in \{k + 1, \dots, 2k - 1\}$

*Demonstração.* Observe que cada comprimento de gancho ocorre no máximo uma vez por linha, desse modo  $NH(n, q) \leq LR(n, q)$ . Assim, naturalmente uma cota superior de  $NH(n, q)$  segue de imediato do lema 2.3.4. Também segue do lema 2.3.4 que essa cota é estrita quando  $k \equiv 3 \pmod{4}$  e  $n = k^2$ . Vamos agora encontrar os outros casos que essas cotas são estritas.

Utilizemos a mesma notação do lema 2.3.4.

Começemos por  $n_2 = k^2 + j$  com  $1 \leq j \leq k - 1$ . Pela maneira que é formada a partição  $\alpha_{n_2}$ , temos em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$  a existência de um bloco retangular

de tamanho  $j \times (k - j + 1)$  de comprimento de ganchos pares, como seguiu abaixo

$$\begin{array}{cccc} 2k & 2(k-1) & \dots & 2j \\ 2(k-1) & 2(k-2) & \dots & 2(j-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2(k-j+1) & 2(k-j) & \dots & 2 \end{array}, \quad (2.1)$$

onde o gancho  $2k$  ocorre na linha 1 e o gancho 2 ocorre na linha  $j$  de  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$ . Observe que existem pelo menos duas colunas de comprimento de ganchos pares acima, pois  $k - j + 1 \geq 2$ .

Note que o comprimento de gancho  $2j$  ocorre na mesma coluna que o gancho 2 (veja em (2.1)). Como o gancho 2 ocorre na penúltima caixa da linha  $j$  de  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$ , temos  $2j$  ocorrendo na coluna  $A_2^j - 1 = k + \frac{k-1}{2} + 1 - j + 1 - 1$ . No entanto, o gancho  $2k$  ocorre  $k - j$  colunas à esquerda de  $2j$ , com isso,  $2k$  ocorre na coluna  $k + \frac{k-1}{2} + 1 - j - (k - j) = \frac{k+1}{2} \geq 3$ .

Assuma  $q \in \{k + 1, k + 2, \dots, 2k - 1\}$ , então  $q - 1$  e  $q + 1$  são pares consecutivos em  $\{k, k + 2, \dots, 2k\}$ . Assim, pelo menos uma linha em (2.1) contendo ambos inteiros  $q - 1$  e  $q + 1$ . Seja  $r$  esta linha. Como os comprimentos de ganchos em qualquer linha são estritamente decrescentes, em particular na linha  $r$ , assim  $r \notin L(n_2, q)$ . Então,

$$NH(n_2, q) < \begin{cases} \frac{3k+1}{4} - i, & \text{se } k \equiv 1 \pmod{4} \\ \frac{3k+3}{4} - i, & \text{se } k \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}.$$

Próximo caso é  $n_3 = k^2 + k + j$  com  $1 \leq j \leq k - 1$ . Sabemos que o gráfico de ganchos  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_3}}$  é obtido adicionando uma coluna à esquerda de  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$ , com isto  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_3}}$  continua a ter o bloco retangular de tamanho  $j \times (k - j + 1)$  de comprimento ganchos pares, como mostrado em (2.1).

Assuma  $q \in \{k + 1, k + 2, \dots, 2k - 1\}$ , então a mesma linha  $r$  obtida no caso anterior satisfaz  $r \notin L(n_3, q)$ , e portanto

$$NH(n_3, q) < \begin{cases} \frac{3k+5}{4} - i, & \text{se } k \equiv 1 \pmod{4} \\ \frac{3k+3}{4} - i, & \text{se } k \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}.$$

Juntamente com a observação feita no início concluímos a demonstração do lema.  $\square$

**Observação 2.3.6.** *Continuando nas hipóteses do lema acima, veja que os únicos possíveis múltiplos de  $q$  em  $\mathcal{H}_{\alpha_n}$  são  $q$  e  $2q$ , porque o maior valor que  $\gamma_n$  assume nestes casos é  $\frac{5k+1}{2}$ , mas*

$$\frac{5k+1}{2} < \frac{5k+k}{2} = \frac{6k}{2} = 3k < 3q.$$

**Lema 2.3.7.** *Sejam  $q = k+2i$  ( $i > 1$ ) e  $2q$  inteiros em  $\{k+1, k+2, \dots, \gamma_n\}$ . Então temos as seguintes cotas superiores para  $NH(n, 2q)$ .*

$n$	Cota superior	Estrita quando
$k \equiv 1 \pmod{4}$		
$k^2 + j, 0 \leq j \leq k$	$\frac{k+3}{4} - 2i$	$j = 0$
$k^2 + k + j, 1 \leq j \leq k$	$\frac{k+3}{4} - 2i$	-
$k \equiv 3 \pmod{4}$		
$k^2 + j, 0 \leq j \leq k$	$\frac{k+1}{4} - 2i$	-
$k^2 + k + j, 1 \leq j \leq k$	$\frac{k+5}{4} - 2i$	-

*Demonstração.* Por  $NH(n, q) \leq LR(n, q)$  e devido a repetidas aplicações do lema 2.3.3,  $NH(n, q)$  é no máximo  $LR(k^2+2k, 2q)$  quando  $n = k^2+k+j$  com  $0 \leq j < k$ , e no máximo  $LR(k^2+k, 2q)$  quando  $n = k^2+j$  com  $0 \leq j < k$ .

Continuemos utilizar a mesma notação do lema 2.3.2, e comecemos por  $n_5 = k^2 + 2k$ . Segue do lema 2.3.2 que as duas primeiras colunas em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_5}}$  são

$$\begin{array}{cc} \gamma_{n_5} & \gamma_{n_5} - 1 \\ \gamma_{n_5} - 2 & \gamma_{n_5} - 3 \\ \dots & \dots \\ \gamma_{n_5} - 2(k-2) & \gamma_{n_5} - 2(k-2) - 1 \\ \gamma_{n_5} - 2(k-1) & \gamma_{n_5} - 2(k-1) - 1 \end{array}$$

Note que  $2q = 2(k+2i) \geq 2k+4 > \frac{k+3}{2} = \gamma_{n_5} - 2(k-1) - 1$ , então  $2q$  ocorre em alguma das colunas acima. Como  $\gamma_{n_5} > \gamma_{n_t}$  para  $t \in \{1, 2, 3, 4\}$ , segue que  $2q$  ocorre sempre em uma das duas primeiras colunas em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_t}}$ .

Se  $k \equiv 1 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_5}$  é ímpar. Então, os inteiros pares de  $\gamma_{n_5} - 2(k-1) - 1$  a  $\gamma_{n_5} - 1$  ocorrem na coluna 2. Deste modo  $LR(n_5, \gamma_{n_5} - 2(m-1) - 1) = m$  para  $1 \leq m \leq k$ . Como  $2q > k$  é par, considere  $LR(n_5, 2q) = m$

e então

$$\begin{aligned} 2q = 2(k + 2i) &= \gamma_{n_5} - 2(m - 1) - 1 = \frac{5k + 1}{2} - 2m + 1 \implies \\ 2m &= \frac{5k + 1 - 4k + 2 + 8i}{2} \implies \\ m &= \frac{k + 3}{4} - 2i = LR(n_5, 2q) \geq NH(n_5, 2q). \end{aligned}$$

Se  $k \equiv 3 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_5}$  é par. Então, os inteiros pares de  $\gamma_{n_5} - 2(k - 1)$  a  $\gamma_{n_5}$  ocorrem na coluna 1. Deste modo  $LR(n_5, \gamma_{n_5} - 2(m - 1)) = m$  para  $1 \leq m \leq k$ . Como  $2q > k$  é par, considere  $LR(n_5, 2q) = m$  e então

$$\begin{aligned} 2q = 2(k + 2i) &= \gamma_{n_5} - 2(m - 1) = \frac{5k + 1}{2} - 2m + 2 \implies \\ 2m &= \frac{5k + 1 - 4k + 4 + 8i}{2} \implies \\ m &= \frac{k + 5}{4} - 2i = LR(n_5, 2q) \geq NH(n_5, 2q). \end{aligned}$$

O próximo caso é  $n_4 = k^2 + k$ . Segue do lema 2.3.2 que as duas primeiras colunas em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_4}}$  são

$$\begin{array}{cc} \gamma_{n_4} & \gamma_{n_4} - 1 \\ \gamma_{n_4} - 2 & \gamma_{n_4} - 3 \\ \dots & \dots \\ \gamma_{n_4} - 2(k - 2) & \gamma_{n_4} - 2(k - 2) - 1 \\ \gamma_{n_4} - 2(k - 1) & \gamma_{n_4} - 2(k - 1) - 1 \end{array}$$

Se  $k \equiv 1 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_4}$  é par. Então, os inteiros pares de  $\gamma_{n_4} - 2(k - 1)$  a  $\gamma_{n_4}$  ocorrem na coluna 1. Deste modo  $LR(n_4, \gamma_{n_4} - 2(m - 1)) = m$  para  $1 \leq m \leq k$ . Como  $2q > k$  é par, considere  $LR(n_4, 2q) = m$  e então

$$\begin{aligned} 2q = 2(k + 2i) &= \gamma_{n_4} - 2(m - 1) = \frac{5k - 1}{2} - 2m + 2 \implies \\ 2m &= \frac{5k - 1 - 4k + 4 + 8i}{2} \implies \\ m &= \frac{k + 3}{4} - 2i = LR(n_4, 2q) \geq NH(n_4, 2q). \end{aligned}$$

Se  $k \equiv 3 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_4}$  é ímpar. Então, os inteiros pares de  $\gamma_{n_4} - 2(k - 1) - 1$  a  $\gamma_{n_4} - 1$  ocorrem na coluna 2. Deste modo  $LR(n_4, \gamma_{n_4} - 2(k - 1) - 1) = m$  para  $1 \leq m \leq k$ . Como  $2q > k$  é par, considere  $LR(n_4, 2q) = m$

e então

$$\begin{aligned} 2q = 2(k + 2i) &= \gamma_{n_4} - 2(m - 1) - 1 = \frac{5k - 1}{2} - 2m + 1 \implies \\ 2m &= \frac{5k - 1 - 4k + 2 + 8i}{2} \implies \\ m &= \frac{k + 1}{4} - 2i = LR(n_4, 2q) \geq NH(n_4, 2q). \end{aligned}$$

O último caso é  $n_1 = k^2$  para obtermos o caso estrito em  $n = k^2 + j$  com  $j = 0$ . Segue do lema 2.3.2 que as duas primeiras colunas em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$  são

$$\begin{array}{cc} \gamma_{n_1} & \gamma_{n_1} - 1 \\ \gamma_{n_1} - 2 & \gamma_{n_1} - 3 \\ \dots & \dots \\ \gamma_{n_1} - 2(k - 2) & \gamma_{n_1} - 2(k - 2) - 1 \\ \gamma_{n_1} - 2(k - 1) & \gamma_{n_1} - 2(k - 1) - 1 \end{array}$$

Se  $k \equiv 1 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_1}$  é ímpar. Então, os inteiros pares de  $\gamma_{n_1} - 2(k - 1) - 1$  a  $\gamma_{n_1} - 1$  ocorrem na coluna 2. Deste modo  $LR(n_1, \gamma_{n_1} - 2(m - 1) - 1) = m$  para  $1 \leq m \leq k$ . Como  $2q > k$  é par, considere  $LR(n_1, 2q) = m$  e então

$$\begin{aligned} 2q = 2(k + 2i) &= \gamma_{n_1} - 2(m - 1) - 1 = \frac{5k - 3}{2} - 2m + 1 \implies \\ 2m &= \frac{5k - 3 - 4k + 2 + 8i}{2} \implies \\ m &= \frac{k - 1}{4} - 2i = LR(n_1, 2q) \geq NH(n_1, 2q) \implies \\ NH(n_1, 2q) &< \frac{k + 3}{4} - 2i. \end{aligned}$$

Juntamente com a observação inicial concluímos a demonstração do lema.  $\square$

Antes de prosseguirmos, necessitamos introduzir um teorema de teoria dos números que é crucial para demonstrar o principal resultado dessa subseção. Além disso, daremos dois lemas adicionais que são muito úteis.

**Teorema 2.3.8.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$  a decomposição em primos distintos de  $n!$  é dado por*

$$n! = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} p^{a_p(n)},$$

onde os expoentes  $a_p(n)$  são calculados por  $a_p(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^m} \right\rfloor$ .

*Demonstração.* Ver [16] p. 41.  $\square$

**Lema 2.3.9.** *Suponha que  $i, j, k, l$  inteiros com  $i \geq 1$  e  $k \geq 2l - 3j - 12$ , então*

$$(k + 2i + j)(k - 3i + l) \leq k^2 + (j + l - 1)k + (l - 3)(j + 2).$$

*Demonstração.* Basta simplesmente expandir e completar o quadrado em  $i$  da seguinte forma:  $(k + 2i + j)(k - 3i + l)$  é igual a

$$\begin{aligned} & k^2 + (j + l)k + jl - 6i^2 - (k - 2l + 3j)i \\ = & k^2 + (j + l)k + jl + \frac{(k - 2l + 3j)^2}{24} - 6 \left( i + \frac{(k - 2l + 3j)}{12} \right)^2 \\ \leq & k^2 + (j + l)k + jl + \frac{(k - 2l + 3j)^2}{24} - 6 \left( 1 + \frac{(k - 2l + 3j)}{12} \right)^2 \\ = & k^2 + (j + l - 1)k + (l - 3)(j + 2). \end{aligned}$$

$\square$

**Lema 2.3.10.** *Suponha que  $i, j, k, l$  sejam inteiros, então*

$$(k + 2i + j) \left( \frac{3k + l}{4} - i + 1 \right) \leq \frac{25k^2 + (20j + 10l + 40)k + (2j + l + 4)^2}{32}.$$

*Demonstração.* Novamente basta expandir e completar o quadrado da seguinte forma:  $(k + 2i + j) \left( \frac{3k+l}{4} - i + 1 \right)$  é igual a

$$\begin{aligned} & \frac{25k^2 + (20j + 10l + 40)k + (2j + l + 4)^2}{32} - 2 \left( i - \frac{k - 2j + l + 4}{8} \right)^2 \\ \leq & \frac{25k^2 + (20j + 10l + 40)k + (2j + l + 4)^2}{32} \end{aligned}$$

$\square$

**Proposição 2.3.11.** *Assuma que  $k \geq 7$ . Se  $p = k + 2i$  ( $i \geq 1$ ) é um primo médio em  $\mathcal{P}_n$ , então  $p$  divide  $\chi_{\alpha_n}(1)$ .*

*Demonstração.* Por  $k^2 \leq n \leq k^2 + 2k$  e  $p$  ser um primo médio, temos

$$p = k + 2i \implies p^2 = k^2 + 4ki + 4i^2 \geq k^2 + 4k + 4 > k^2 + 2k \geq n.$$

Então segue do teorema 2.3.8 que o expoente de  $p$  na decomposição primária de  $n!$  é

$$a_p(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor.$$

Já sabemos que os únicos múltiplos de  $p$  em  $\mathcal{H}_{\alpha_n}$  são  $p$  e  $2p$  pela observação 2.3.6. Assim, uma vez mostrado que  $NH(n, p) + NH(n, 2p)$  (o número total de comprimentos de ganchos múltiplos de  $p$ ) for menor do que  $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ , seguirá que  $p$  divide o grau do caráter  $\chi_{\alpha_n}$ . Pois segue do teorema 1.2.29 que

$$\chi_{\alpha_n}(1) = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{i,j}^{\alpha_n}} = \frac{\prod_{v \in \mathcal{P}_n} v^{a_v(n)}}{\prod_{i,j} h_{i,j}^{\alpha_n}} = \frac{p^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} \prod_{v \in \mathcal{P}_n \setminus \{p\}} v^{a_v(n)}}{\prod_{i,j} h_{i,j}^{\alpha_n}}.$$

Tomando por  $C$  o produto de todos coeficientes dos múltiplos de  $p$ , obtemos

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha_n}(1) &= \frac{p^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} \prod_{v \in \mathcal{P}_n \setminus \{p\}} v^{a_v(n)}}{C p^{NH(n,p)+NH(n,2p)} \prod_{\{i,j|h_{i,j}^{\alpha_n} \neq p,2p\}} h_{i,j}^{\alpha_n}} \\ &= p^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor - (NH(n,p)+NH(n,2p))} \frac{\prod_{v \in \mathcal{P}_n \setminus \{p\}} v^{a_v(n)}}{C \prod_{\{i,j|h_{i,j}^{\alpha_n} \neq p,2p\}} h_{i,j}^{\alpha_n}}. \end{aligned}$$

Então, se  $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor > (NH(n, p) + NH(n, 2p))$ ,  $p$  divide  $\chi_{\alpha_n}(1)$ . A fim de mostrar essa desigualdade, basta verificar se  $p(NH(n, p) + NH(n, 2p) + 1) \leq n$ .

**Caso 1.** Suponha que  $2p$  é um comprimento de gancho em  $\mathcal{H}_{\alpha_n}$ . Veja que o maior valor possível de  $\gamma_n$  é  $\frac{5k+1}{2}$ . Assim,

$$\frac{\gamma_n}{2} \leq \frac{5k+1}{4} < \frac{5k+1}{4} + \frac{3k-5}{4} = \frac{8k-4}{4} = 2k-1,$$

e portanto  $p \leq \frac{\gamma_n}{2} \leq 2k-1$ . Isto nos permite explorar as cotas estritas no lema 2.3.5.

Começemos por  $n = k^2 + j$  com  $0 \leq j \leq k$ . Usando as cotas superiores dos lemas 2.3.5 e 2.3.7 quando possível as cotas estritas,  $NH(n, p) + NH(n, 2p)$  é no máximo:

- (i)  $(\frac{3k+1}{4} - i) + (\frac{k+3}{4} - 2i - 1) = k - 3i$ , quando  $j = 0$  e  $k \equiv 1 \pmod{4}$ ;
- (ii)  $(\frac{3k+1}{4} - i - 1) + (\frac{k+3}{4} - 2i) = k - 3i$ , quando  $0 < j < k$  e  $k \equiv 1 \pmod{4}$ ;
- (iii)  $(\frac{3k+3}{4} - i - 1) + (\frac{k+1}{4} - 2i) = k - 3i$ , quando  $j < k$  e  $k \equiv 3 \pmod{4}$ ;

- (iv)  $(\frac{3k+1}{4} - i) + (\frac{k+3}{4} - 2i) = k - 3i + 1$ , quando  $j = k$  e  $k \equiv 1 \pmod{4}$ ;  
(v)  $(\frac{3k+3}{4} - i) + (\frac{k+1}{4} - 2i) = k - 3i + 1$ , quando  $j = k$  e  $k \equiv 3 \pmod{4}$ .

Em (i),(ii) e (iii) temos pelo lema 2.3.9,

$$\begin{aligned} p(NH(n, p) + NH(n, 2p) + 1) &= (k + 2i)(k - 3i + 1) \implies \\ &\leq k^2 + (1 - 1)k + (1 - 3)2 \implies \\ &\leq k^2 - 4 < n. \end{aligned}$$

Em (iv) e (v) temos ainda pelo lema 2.3.9,

$$\begin{aligned} p(NH(n, p) + NH(n, 2p) + 1) &= (k + 2i)(k - 3i + 2) \implies \\ &\leq k^2 + (2 - 1)k + (2 - 3)2 \implies \\ &\leq k^2 + k - 2 = n - 2 < n \text{ (como } j = k\text{)}. \end{aligned}$$

Portanto em todos casos acima, temos  $p(NH(n, p) + NH(n, 2p) + 1) \leq n$  como queríamos.

Agora suponha  $n = k^2 + k + j$  com  $1 \leq j \leq k$ . Usando as cotas superiores dos lema 2.3.5 e 2.3.7, quando possível usar as cotas estritas, temos que  $NH(n, p) + NH(n, 2p)$  é no máximo:

- (vi)  $(\frac{3k+5}{4} - i - 1) + (\frac{k+3}{4} - 2i) = k - 3i + 1$  quando  $j < k$  e  $k \equiv 1 \pmod{4}$ ;  
(vii)  $(\frac{3k+3}{4} - i - 1) + (\frac{k+5}{4} - 2i) = k - 3i + 1$  quando  $j < k$  e  $k \equiv 3 \pmod{4}$ ;  
(viii)  $(\frac{3k+5}{4} - i) + (\frac{k+3}{4} - 2i) = k - 3i + 2$  quando  $j = k$  e  $k \equiv 1 \pmod{4}$ ;  
(ix)  $(\frac{3k+3}{4} - i) + (\frac{k+5}{4} - 2i) = k - 3i + 2$  quando  $j = k$  e  $k \equiv 3 \pmod{4}$ .

Em (vi) e (vii) temos pelo lema 2.3.9,

$$\begin{aligned} p(NH(n, p) + NH(n, 2p) + 1) &= (k + 2i)(k - 3i + 2) \implies \\ &\leq k^2 + (2 - 1)k + (2 - 3)2 \implies \\ &\leq k^2 + k - 2 < n. \end{aligned}$$

Em (viii) e (ix) temos ainda pelo lema 2.3.9,

$$\begin{aligned} p(NH(n, p) + NH(n, 2p) + 1) &= (k + 2i)(k - 3i + 3) \implies \\ &\leq k^2 + (3 - 1)k + (3 - 3)2 \implies \\ &\leq k^2 + 2k = n \text{ (como } k = j\text{)}. \end{aligned}$$

Portanto nos casos acima  $p(NH(n, p) + NH(n, 2p) + 1) \leq n$ . Isto encerra a prova do **caso 1**.



**Caso 2.** Suponha que  $2p$  agora não seja um comprimento de gancho em  $\mathcal{H}_{\alpha_n}$ . Assim,  $NH(n, 2p) = 0$  e basta mostrar  $p(NH(n, p) + 1) \leq n$ .

Suponhamos primeiro  $k \equiv 3 \pmod{4}$ . Pelos lemas 2.3.5 e 2.3.10, temos  $p(NH(n, p) + 1)$  é menor ou igual a

$$(k + 2i) \left( \frac{3k + 3}{4} - i + 1 \right) \leq \frac{25k^2 + 70k + 49}{32}. \quad (2.2)$$

Procurando as raízes da equação do segundo grau  $\frac{25k^2 + 70k + 49}{32} = k^2$ , encontramos  $k = (5 \pm 4\sqrt{2})$ . Por  $k$  ser um inteiro positivo, ao fazermos o estudo de sinais para a inequação  $\frac{25k^2 + 70k + 49}{32} \leq k^2$ , encontramos  $k \geq (5 + 4\sqrt{2}) \sim 10.66$ . Assim se  $k \geq 11$ ,  $p(NH(n, p) + 1) \leq k^2 \leq n$ . Entretanto, para completar a prova para  $k \equiv 3 \pmod{4}$ , resta-nos verificar apenas quando  $k = 7$ . Assuma então  $k = 7$ .

Se  $n = k^2 = 49$ ,  $\gamma_{49} = 16$  e os primos médios são 11 e 13. Agora escrevendo esses primos na forma  $7 + 2i$ , temos  $i$  igual a 2 e 3. Segue do lema 2.3.5 que  $NH(n, 11) \leq 3$  e  $NH(n, 13) \leq 2$ , então  $p(NH(n, p) + 1)$  é menor ou igual a:

- $11 \cdot (3 + 1) = 44 < 49$ , se  $p = 11$ ;
- $13 \cdot (2 + 1) = 39 < 49$ , se  $p = 13$ .

Agora se  $n = k^2 + j = 49 + j$  ou  $n = k^2 + k + j = 56 + j$  com  $1 \leq j < k$ ,  $\gamma_n$  é igual a 17 e 18 respectivamente, e os primos médios são 11, 13 e 17. Escrevendo esses primos na forma  $7 + 2i$ , temos  $i$  igual a 2, 3 e 5 respectivamente. Segue do lema 2.3.5 que  $NH(n, 11) \leq 3$ ,  $NH(n, 13) \leq 2$  e  $NH(n, 17) \leq 1$ , então  $p(NH(n, p) + 1)$  é menor ou igual a:

- $11 \cdot (3 + 1) = 44 < k^2 + 1 = 50$ , se  $p = 11$ ;
- $13 \cdot (2 + 1) = 39 < 50$ , se  $p = 13$ ;
- $17 \cdot (1 + 1) = 34 < 50$ , se  $p = 17$ .

Por último se  $n = k^2 + k = 56$  ou  $n = k^2 + 2k = 63$ ,  $\gamma_n$  novamente é igual a 17 e 18 respectivamente, e os primos médios são 11, 13 e 17. Escrevendo esses primos na forma  $7 + 2i$ , também novamente  $i$  é igual a 2, 3 e 5. Segue do lema 2.3.5 que  $NH(n, 11) \leq 4$ ,  $NH(n, 13) \leq 3$  e  $NH(n, 17) \leq 1$ , então  $p(NH(n, p) + 1)$  é menor ou igual a:

- $11 \cdot (4 + 1) = 55 < k^2 + k = 56$ , se  $p = 11$ ;
- $13 \cdot (3 + 1) = 52 < 56$ , se  $p = 13$ ;

- $17 \cdot (1 + 1) = 51 < 56$ , se  $p = 17$ .

Isto mostra que para todo  $k \equiv 3 \pmod{4}$ , de fato  $p(NH(n, p) + 1) \leq n$ .

Supomos agora  $k \equiv 1 \pmod{4}$ . Se  $n = k^2 + j$  com  $0 \leq j \leq k$ , segue dos lemas 2.3.10 e 2.3.5 que  $p(NH(n, p) + 1)$  é menor igual a

$$(k + 2i) \left( \frac{3k + 1}{4} - i + 1 \right) \leq \frac{25k^2 + 50k + 25}{32}. \quad (2.3)$$

Observe que  $\frac{25k^2 + 50k + 25}{32} < \frac{25k^2 + 70k + 49}{32} \leq k^2$  para  $k \geq 11$ . Entretanto, para completar a prova para este caso, resta-nos verificar quando  $k = 9$  na expressão (2.3). Assuma então  $k = 9$ , e temos

$$p(NH(n, p) + 1) \leq \frac{(5 \cdot 9 + 5)^2}{32} = \frac{50^2}{32} < 81 = 9^2.$$

Agora seja  $n = k^2 + k + j$  com  $1 \leq j \leq k$ . Segue dos lemas 2.3.10 e 2.3.5 que  $p(NH(n, p) + 1)$  é menor igual a

$$(k + 2i) \left( \frac{3k + 5}{4} - i + 1 \right) \leq \frac{25k^2 + 90k + 81}{32}. \quad (2.4)$$

Procurando as raízes da equação  $\frac{25k^2 + 90k + 81}{32} = k^2 + k + 1$ , encontramos  $k = \frac{29 \pm 4\sqrt{74}}{7}$ . Por  $k$  ser um inteiro positivo, ao fazermos o estudo de sinais para a inequação  $\frac{25k^2 + 90k + 81}{32} \leq k^2 + k + 1$ , encontramos  $k \geq \frac{29 + 4\sqrt{74}}{7} \sim 9.06$ . Assim se  $k \geq 10$ , temos  $p(NH(n, p) + 1) \leq k^2 + k + 1 \leq n$ . No entanto, para completar a prova para este caso resta verificar apenas  $k = 9$ .

Assuma então  $k = 9$ . Desta forma,  $n = 90 + j$  com  $1 \leq j \leq k$ . Neste caso  $\gamma_n$  é igual a 23, e os primos médio são 11, 13, 17, 19 e 23. Escrevendo esses primos na forma  $9 + 2i$ , temos que  $i$  é igual a 1, 2, 4, 5 e 7 respectivamente. Segue do lema 2.3.5 que

$$p(NH(n, p) + 1) \leq (k + 2i) \left( \frac{3k + 5}{4} - i + 1 \right). \quad (2.5)$$

Assim, ao substituir os valores de  $i$  em (2.5), temos que  $p(NH(n, p) + 1)$  é menor ou igual a:

- $11 \cdot 8 = 88 < 91$ , se  $p = 11$ ;
- $13 \cdot 7 = 91 = 91$ , se  $p = 13$ ;
- $17 \cdot 5 = 85 < 91$ , se  $p = 17$ ;

- $19 \cdot 4 = 76 < 91$ , se  $p = 19$ ;
- $23 \cdot 2 = 56 < 91$ , se  $p = 23$ .

Portanto para  $n = k^2 + k + j$  com  $1 \leq j \leq k$ , de fato  $p(NH(n, p) + 1) \leq n$ . Isto conclui o **caso 2** e completa a demonstração desta proposição.  $\square$

Agora vamos ver o que acontece se  $\kappa(n) = 3, 5$ , casos que não foram considerados na proposição acima. Veja as tabelas abaixo

Para $\kappa(n) = 3$		
$n$	$\alpha_n$	$\chi_{\alpha_n}(1)$
9	(4, 3, 2)	$2^3 \cdot 3 \cdot 7$
10	(5, 3, 2)	$2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
11	(5, 4, 2)	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$
12	(5, 4, 3)	$2^6 \cdot 3 \cdot 11$
13	(6, 4, 3)	$3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$
14	(6, 5, 3)	$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
15	(6, 5, 4)	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$

Para $\kappa(n) = 5$		
$n$	$\alpha_n$	$\chi_{\alpha_n}(1)$
25	(7, 6, 5, 4, 3)	$2^7 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$
26	(8, 6, 5, 4, 3)	$2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$
27	(8, 7, 5, 4, 3)	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$
28	(8, 7, 6, 4, 3)	$2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$
29	(8, 7, 6, 5, 3)	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$
30	(8, 7, 6, 5, 4)	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$
31	(9, 7, 6, 5, 4)	$2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$
32	(9, 8, 6, 5, 4)	$2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$
33	(9, 8, 7, 5, 4)	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$
34	(9, 8, 7, 6, 4)	$2^8 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$
35	(9, 8, 7, 6, 5)	$2^{15} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$

**Observação 2.3.12.** A proposição 2.3.11 é verificada para todo  $\kappa(n) \geq 3$  ímpar e  $n \geq 15$ , exceto para  $n = 25, 32$ . Nestes dois casos, temos de considerar uma partição diferente  $\lambda_n$  que é encontrada em [1] :

$n$	$\lambda_n$	$\chi_{\lambda_n}(1)$
25	(14, 4, 3, 3, 1)	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$
32	(18, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 1)	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31$

Note que  $\lambda_n$  não é auto-associada, mostrando que  $\chi_{\lambda_n} \downarrow_{\mathcal{A}_n}$  é irredutível.

Encerramos assim o caso onde  $\kappa(n)$  é ímpar.

### 2.3.2 Primos médios quando $\kappa(n)$ for par

Para toda esta subseção suponha  $k = \kappa(n)$  par e  $n \geq 16$ , isto é,  $k \geq 4$ . Também separemos em cinco maneiras distintas o modo em que  $n$  é expressado em função de  $k$ , que são eles:

$$\begin{aligned} n_1 &= k^2 + j, \quad 0 \leq j \leq \frac{k}{2} - 1, & n_2 &= k^2 + \frac{k}{2} + j, \quad 0 \leq j \leq \frac{k}{2} - 1, \\ n_3 &= k^2 + k + j, \quad 0 \leq j \leq \frac{k}{2} - 1, & n_4 &= k^2 + k + \frac{k}{2} + j, \quad 0 \leq j \leq \frac{k}{2} - 1 \text{ e} \\ n_5 &= k^2 + 2k. \end{aligned}$$

**Lema 2.3.13.** *Seja  $q$  um inteiro em  $\{k+1, k+2, \dots, \gamma_n\}$ . Então  $q$  ocorre nas duas primeiras colunas em  $\mathcal{H}_{\alpha_n}$ . Em particular, a mesma conclusão é obtida se  $q$  for um primo médio.*

*Demonstração.* Começemos por  $n_1 = k^2 + j$  com  $0 \leq j \leq \frac{k}{2} - 1$ . Neste caso,  $\alpha_{n_1}$  é igual a  $B_1$  ou  $B_2$ . O gráfico de ganchos  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$  possui pelo menos três colunas com  $k$  linhas, isto porque as componentes  $B_1^k$  e  $B_2^k$  são iguais a  $\frac{k+2}{2} \geq 3$  quando  $k \geq 4$ . Segue abaixo as duas primeiras colunas

$$\begin{array}{cc} \gamma_{n_1} & \gamma_{n_1} - 1 \\ \gamma_{n_1} - 2 & \gamma_{n_1} - 3 \\ \dots & \dots \\ \gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j - 1\right) - 1\right) & \gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j - 1\right) - 1\right) - 1 \\ \underline{\gamma_{n_1} - 2\left(\frac{k}{2} - j - 1\right)} & \underline{\gamma_{n_1} - 2\left(\frac{k}{2} - j - 1\right) - 1}, \\ \gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j\right) - 1\right) - 1 & \gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j + 1\right) - 1\right) \\ \dots & \dots \\ \gamma_{n_1} - 2\left((k-2) - 1\right) - 1 & \gamma_{n_1} - 2\left((k-1) - 1\right) \\ \gamma_{n_1} - 2\left((k-1) - 1\right) - 1 & \gamma_{n_1} - 2(k-1) \end{array}$$

onde a linha sublinhada é a número  $\frac{k}{2} - j$ . O gancho  $\gamma_{n_1}$  é igual a  $a_1 + (k-1) = \frac{5k-4}{2}$  e todos os inteiros de  $\gamma_{n_1} - 2(k-1)$  a  $\gamma_{n_1}$  ocorrem nestas duas colunas. Como

$$\gamma_{n_1} - 2(k-1) = \frac{5k-4}{2} - 2k + 2 = \frac{5k-4k-4+4}{2} = \frac{k}{2} < k,$$

então  $q$  ocorre em alguma dessas duas colunas.

Próximo caso é  $n_2 = k^2 + \frac{k}{2} + j$  com  $0 \leq j \leq \frac{k}{2} - 1$ . Neste caso,  $\alpha_{n_2}$  é igual a  $B_3$  ou  $B_4$ . O gráfico de ganchos  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$  possui pelo menos quatro colunas

com  $k$  linhas. Segue abaixo as duas primeiras colunas

$$\begin{array}{cc}
 \gamma_{n_2} & \gamma_{n_2} - 1 \\
 \gamma_{n_2} - 1 & \gamma_{n_2} - 2 \\
 \dots & \dots \\
 \gamma_{n_2} - 2((k-j-3) - 1) - 1 & \gamma_{n_2} - 2((k-j-2) - 1) \\
 \gamma_{n_2} - 2((k-j-2) - 1) - 1 & \gamma_{n_2} - 2((k-j-1) - 1) \\
 \hline
 \gamma_{n_2} - 2((k-j-1) - 1) & \gamma_{n_2} - 2((k-j-1) - 1) - 1 \\
 \dots & \dots \\
 \gamma_{n_2} - 2((k-2) - 1) & \gamma_{n_2} - 2((k-2) - 1) - 1 \\
 \gamma_{n_2} - 2((k-1) - 1) & \gamma_{n_2} - 2((k-1) - 1) - 1
 \end{array},$$

onde a linha sublinhada é a número  $k-j-1$ . O gancho  $\gamma_{n_2}$  é igual a  $\frac{5k-4}{2}$  e todos os inteiros de  $\gamma_{n_2} - 2(k-1) - 1$  a  $\gamma_{n_2}$  ocorrem nestas duas colunas. Como

$$\gamma_{n_2} - 2((k-1) - 1) - 1 = \frac{5k-4}{2} - 2k + 3 = \frac{5k-4k-4+6}{2} = \frac{k+2}{2} < k,$$

então  $q$  ocorre em algumas dessa duas colunas.

Próximo caso é  $n_3 = k^2 + k + j$  com  $0 \leq j \leq \frac{k}{2} - 1$ . Neste caso,  $\alpha_{n_3}$  é igual a  $B_5$  ou  $B_6$ . Note que  $T_{\alpha_{n_3}}$  é obtida adicionando uma caixa à direita em todas as linhas de  $T_{\alpha_{n_1}}$ . Isto mostra que  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_3}}$  é obtida adicionando uma nova coluna à esquerda de  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$ , onde cada comprimento de gancho dessa nova coluna satisfaz  $h_{i,1}^{\alpha_{n_3}} = h_{i,1}^{\alpha_{n_1}} + 1$ . Então, o gráfico de ganchos  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_3}}$  possui no mínimo quatro colunas com  $k$  linhas. Segue abaixo as duas primeiras colunas

$$\begin{array}{cc}
 \gamma_{n_1} + 1 & \gamma_{n_1} \\
 \gamma_{n_1} - 1 & \gamma_{n_1} - 2 \\
 \dots & \dots \\
 \gamma_{n_1} - 2((\frac{k}{2}-j-2) - 1) - 1 & \gamma_{n_1} - 2((\frac{k}{2}-j-1) - 1) \\
 \gamma_{n_1} - 2((\frac{k}{2}-j-1) - 1) - 1 & \gamma_{n_1} - 2((\frac{k}{2}-j) - 1) \\
 \hline
 \gamma_{n_1} - 2((\frac{k}{2}-j) - 1) & \gamma_{n_1} - 2((\frac{k}{2}-j) - 1) - 1 \\
 \dots & \dots \\
 \gamma_{n_1} - 2((k-2) - 1) & \gamma_{n_1} - 2((k-2) - 1) - 1 \\
 \gamma_{n_1} - 2((k-1) - 1) & \gamma_{n_1} - 2((k-1) - 1) - 1
 \end{array},$$

onde a linha sublinhada é a número  $\frac{k}{2} - j$ . O gancho  $\gamma_{n_3}$  é igual a  $\frac{5k-2}{2}$  e todos os inteiros de  $\gamma_{n_1} - 2((k-1) - 1) - 1$  a  $\gamma_{n_1}$  ocorrem nestas duas colunas. Como

$$\gamma_{n_1} - 2((k-1) - 1) - 1 = \frac{5k-4}{2} - 2k + 3 = \frac{5k-4k-4+6}{2} = \frac{k+2}{2} < k,$$

então  $q$  ocorre em alguma dessas duas colunas.

Próximo caso é  $n_4 = k^2 + k + \frac{k}{2} + j$  com  $0 \leq j \leq \frac{k}{2} - 1$ . Neste caso,  $\alpha_{n_4}$  é igual a  $B_7$  ou  $B_8$ . Com mesma justificativa anterior, o  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_4}}$  é obtido adicionando uma nova coluna à esquerda de  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$ , onde cada comprimento de gancho dessa nova coluna satisfaz  $h_{i,1}^{\alpha_{n_4}} = h_{i,1}^{\alpha_{n_2}} + 1$ . Então, o gráfico de ganchos  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_4}}$  possui pelo menos cinco colunas com  $k$  linhas. Segue abaixo as duas primeiras colunas

$$\begin{array}{cc} \gamma_{n_2} + 1 & \gamma_{n_2} - 1 \\ \gamma_{n_2} & \gamma_{n_2} - 1 \\ \dots & \dots \\ \gamma_{n_2} - 2((k-j-3) - 1) & \gamma_{n_2} - 2((k-j-3) - 1) - 1 \\ \gamma_{n_2} - 2((k-j-2) - 1) & \gamma_{n_2} - 2((k-j-2) - 1) - 1 \\ \hline \gamma_{n_2} - 2((k-j-2) - 1) - 1 & \gamma_{n_2} - 2((k-j-1) - 1) \\ \dots & \dots \\ \gamma_{n_2} - 2((k-3) - 1) - 1 & \gamma_{n_2} - 2((k-2) - 1) \\ \gamma_{n_2} - 2((k-2) - 1) - 1 & \gamma_{n_2} - 2((k-1) - 1) \end{array},$$

onde a linha sublinhada é a número  $k-j-1$ . O gancho  $\gamma_{n_4}$  é igual a  $\frac{5k-2}{2}$  e todos os inteiros de  $\gamma_{n_2} - 2((k-1) - 1)$  a  $\gamma_{n_2} + 1$  ocorrem nestas duas colunas. Como

$$\gamma_{n_2} - 2((k-1) - 1) = \frac{5k-4}{2} - 2k + 4 = \frac{5k-4k-4+8}{2} = \frac{k+4}{2} < k,$$

então  $q$  ocorre em alguma dessas duas colunas.

O último caso é  $n_5 = k^2 + 2k$ . Neste caso,  $\alpha_{n_5} = B_9$ . Com mesma justificativa dos casos anteriores,  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_5}}$  é obtida de  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$ , porém agora adicionamos duas novas colunas à esquerda e especialmente aqui  $n_1 = k^2$ , isto é,  $j = 0$ . Cada comprimento de gancho dessas novas colunas satisfaz  $h_{i,s}^{\alpha_{n_5}} = h_{i,s}^{\alpha_{n_1}} + 1$  com  $s \in \{1, 2\}$ . Então, o gráfico de ganchos  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_5}}$  possui no mínimo cinco colunas com  $k$  linhas. Segue abaixo as duas primeiras colunas

$$\begin{array}{cc} \gamma_{n_1} + 2 & \gamma_{n_1} + 1 \\ \gamma_{n_1} & \gamma_{n_1} - 1 \\ \dots & \dots \\ \gamma_{n_1} - 2(\frac{k}{2} - 1) & \gamma_{n_1} - 2(\frac{k}{2} - 1) - 1 \\ \gamma_{n_1} - 2\frac{k}{2} & \gamma_{n_1} - 2\frac{k}{2} - 1 \\ \hline \gamma_{n_1} - 2\frac{k}{2} - 1 & \gamma_{n_1} - 2(\frac{k}{2} + 1) \\ \dots & \dots \\ \gamma_{n_1} - 2(k-2) - 1 & \gamma_{n_1} - 2(k-1) \\ \gamma_{n_1} - 2(k-1) - 1 & \gamma_{n_1} - 2k \end{array},$$

onde a linha sublinhada é a número  $\frac{k}{2}$ . O gancho  $\gamma_{n_5}$  é igual a  $\frac{5k}{2}$  e todos os inteiros de  $\gamma_{n_1} - 2k$  a  $\gamma_{n_1} + 2$  ocorrem nestas duas colunas. Como

$$\gamma_{n_1} - 2k = \frac{5k - 4}{2} - 2k = \frac{5k - 4k - 4}{2} = \frac{k - 4}{2} < k,$$

então  $q$  ocorre em alguma dessa duas colunas.

Se agora considerarmos  $q$  um primo médio, por definição  $q$  é um inteiro em  $\{k + 1, k + 2, \dots, \gamma_n\}$  e segue o caso particular e encerra a demonstração desse lema.  $\square$

**Lema 2.3.14.** *Seja  $n$  tal que  $k^2 \leq n < k^2 + 2k$ . Se  $q$  é um inteiro em  $\{k + 1, k + 2, \dots, \gamma_n\}$ , então  $LR(n + 1, q) \geq LR(n, q)$ . Em particular,  $LR(n_5, q) \geq LR(n_t, q)$  para todo inteiro  $1 \leq t \leq 4$ .*

*Demonstração.* Proceda em forma análoga ao lema 2.3.3.  $\square$

**Lema 2.3.15.** *Seja  $q = k + 2i - 1$  ( $i \geq 1$ ) um inteiro ímpar em  $\{k + 1, k + 2, \dots, \gamma_n\}$ . Então, temos os seguintes valores em  $LR(n, q)$ , dependendo da classe residual de  $k \pmod{4}$ .*

$n$	$\gamma_n$	Paridade $\gamma_n$	$LR(n, q)$
$k \equiv 2 \pmod{4}$			
$k^2 + j$	$\frac{5k-4}{2}$	ímpar	$\frac{3k+2}{4} - i$
$k^2 + \frac{k}{2} + j$	$\frac{5k-4}{2}$	ímpar	$\begin{cases} \frac{3k+6}{4} - i & \text{se } q \leq \frac{k+4}{2} + 2j \\ \frac{3k+2}{4} - i & \text{se } q > \frac{k+4}{2} + 2j \end{cases}$
$k^2 + k + j$	$\frac{5k-2}{2}$	par	$\begin{cases} \frac{3k+6}{4} - i & \text{se } q \leq \frac{3k}{2} + 2j \\ \frac{3k+2}{4} - i & \text{se } q > \frac{3k}{2} + 2j \end{cases}$
$k^2 + k + \frac{k}{2} + j$	$\frac{5k-2}{2}$	par	$\frac{3k+6}{4} - i$
$k^2 + 2k$	$\frac{5k}{2}$	ímpar	$\frac{3k+6}{4} - i$
$k \equiv 0 \pmod{4}$			
$k^2 + j$	$\frac{5k-4}{2}$	par	$\begin{cases} \frac{3k+4}{4} - i & \text{se } q \leq \frac{3k-2}{2} + 2j \\ \frac{3k}{4} - i & \text{se } q > \frac{3k-2}{2} + 2j \end{cases}$
$k^2 + \frac{k}{2} + j$	$\frac{5k-4}{2}$	par	$\frac{3k+4}{4} - i$
$k^2 + k + j$	$\frac{5k-2}{2}$	ímpar	$\frac{3k+4}{4} - i$
$k^2 + k + \frac{k}{2} + j$	$\frac{5k-2}{2}$	ímpar	$\begin{cases} \frac{3k+8}{4} - i & \text{se } q \leq \frac{k+6}{2} + 2j \\ \frac{3k+4}{4} - i & \text{se } q > \frac{k+6}{2} + 2j \end{cases}$
$k^2 + 2k$	$\frac{5k}{2}$	par	$\begin{cases} \frac{3k+8}{4} - i & \text{se } q \leq \frac{3k+2}{2} \\ \frac{3k+4}{4} - i & \text{se } q > \frac{3k+2}{2} \end{cases}$

*Demonstração.* Iremos utilizar a mesma notação do lema 2.3.13.

Começemos por  $n_1 = k^2 + j$  com  $0 \leq j \leq \frac{k}{2} - 1$ . Segue do lema 2.3.13 que as duas primeiras colunas em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$  são

$$\begin{array}{cc}
\gamma_{n_1} & \gamma_{n_1} - 1 \\
\gamma_{n_1} - 2 & \gamma_{n_1} - 3 \\
\cdots & \cdots \\
\gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j - 1\right) - 1\right) & \gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j - 1\right) - 1\right) - 1 \\
\frac{\gamma_{n_1} - 2\left(\frac{k}{2} - j - 1\right)}{\gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j\right) - 1\right) - 1} & \frac{\gamma_{n_1} - 2\left(\frac{k}{2} - j - 1\right) - 1}{\gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j + 1\right) - 1\right)} \\
\cdots & \cdots \\
\gamma_{n_1} - 2\left(\left(k - 2\right) - 1\right) - 1 & \gamma_{n_1} - 2\left(\left(k - 1\right) - 1\right) \\
\gamma_{n_1} - 2\left(\left(k - 1\right) - 1\right) - 1 & \gamma_{n_1} - 2\left(k - 1\right)
\end{array}$$



Se  $k \equiv 2 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_1}$  é ímpar. Então, os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2(\frac{k}{2} - j - 1)$  a  $\gamma_{n_1}$  ocorrem nas linhas 1 a  $\frac{k}{2} - j$  da coluna 1, e os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2(\frac{k}{2} - j - 1)$  a  $\gamma_{n_1} - 2((\frac{k}{2} - j + 1) - 1)$  ocorrem nas linhas  $\frac{k}{2} - j + 1$  a  $k$  da coluna 2. Deste modo  $LR(n_1, \gamma_{n_1} - 2(m - 1)) = m$  para  $1 \leq m \leq k$ . Como  $q > k$  é ímpar, considere  $LR(n_1, q) = m$  e então

$$\begin{aligned} q = k + 2i - 1 &= \gamma_{n_1} - 2(m - 1) = \frac{5k - 4}{2} - 2m + 2 \implies \\ 2i + 2m &= \frac{5k - 4 + 4 - 2k + 2}{2} = \frac{3k + 2}{2} \implies \\ m &= \frac{3k + 2}{4} - i = LR(n_1, q). \end{aligned}$$

Se  $k \equiv 0 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_1}$  é par. Então, os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2((\frac{k}{2} - j - 1) - 1) - 1$  a  $\gamma_{n_1}$  ocorrem nas linhas 1 a  $\frac{k}{2} - j - 1$  da coluna 2, e os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2((k - 1) - 1) - 1$  a  $\gamma_{n_1} - 2((\frac{k}{2} - j) - 1) - 1$  ocorrem nas linhas  $\frac{k}{2} - j + 1$  a  $k$  da coluna 1. Deste modo

$$LR(n_1, \gamma_{n_1} - 2(m - 1) - 1) = \begin{cases} m, & \text{se } 1 \leq m < \frac{k}{2} - j - 1 \\ m + 1, & \text{se } \frac{k}{2} - j \leq m \leq k \end{cases}.$$

Como  $q > k$  é ímpar, considere  $LR(n_1, q) = m$  e então

$$\begin{aligned} q = k + 2i - 1 &= \gamma_{n_1} - 2(m - 1) - 1 = \frac{5k - 4}{2} - 2m + 1 \implies \\ 2i + 2m &= \frac{5k - 4 + 2 - 2k + 2}{2} = \frac{3k}{2} \implies \\ m &= \frac{3k}{4} - i. \end{aligned}$$

Portanto,

$$LR(n_1, q) = \begin{cases} \frac{3k}{4}, & \text{se } q > \gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j - 1\right) - 1\right) = \frac{3k + 2}{2} + 2j \\ \frac{3k + 4}{4}, & \text{se } q \leq \gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j - 1\right) - 1\right) = \frac{3k + 2}{2} + 2j \end{cases}.$$

O próximo caso é  $n_2 = k^2 + \frac{k}{2} + j$  com  $0 \leq j \leq \frac{k}{2} - 1$ . Segue do lema

2.3.13 que as duas primeiras colunas em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$  são

$$\begin{array}{cc} \gamma_{n_2} & \gamma_{n_2} - 1 \\ \gamma_{n_2} - 1 & \gamma_{n_2} - 2 \\ \cdots & \cdots \\ \gamma_{n_2} - 2((k-j-3) - 1) - 1 & \gamma_{n_2} - 2((k-j-2) - 1) \\ \gamma_{n_2} - 2((k-j-2) - 1) - 1 & \gamma_{n_2} - 2((k-j-1) - 1) \\ \hline \gamma_{n_2} - 2((k-j-1) - 1) & \gamma_{n_2} - 2((k-j-1) - 1) - 1 \\ \cdots & \cdots \\ \gamma_{n_2} - 2((k-2) - 1) & \gamma_{n_2} - 2((k-2) - 1) - 1 \\ \gamma_{n_2} - 2((k-1) - 1) & \gamma_{n_2} - 2((k-1) - 1) - 1 \end{array}$$

Se  $k \equiv 2 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_2}$  é ímpar. Então, o inteiro ímpar  $\gamma_{n_2}$  ocorre na linha 1 da coluna 1, os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_2} - 2((k-j-2) - 1)$  a  $\gamma_{n_2} - 2$  ocorrem nas linhas 2 a  $k-j-2$  da coluna 2, e os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_2} - 2((k-1) - 1)$  a  $\gamma_{n_2} - 2((k-j-1) - 1)$  ocorrem nas linhas  $k-j$  a  $k$  da coluna 1. Deste modo

$$LR(n_2, \gamma_{n_2} - 2(m-1)) = \begin{cases} m, & \text{se } 1 \leq m < k-j-1 \\ m+1, & \text{se } k-j-1 \leq m \leq k \end{cases}.$$

Como  $q > k$  é ímpar, considere  $LR(n_2, q) = m$  e então

$$\begin{aligned} q = k + 2i - 1 &= \gamma_{n_2} - 2(m-1) = \frac{5k-4}{2} - 2m + 2 \implies \\ 2i + 2m &= \frac{5k-4+4-2k+2}{2} = \frac{3k+2}{2} \implies \\ m &= \frac{3k+2}{4} - i. \end{aligned}$$

Portanto,

$$LR(n_2, q) = \begin{cases} \frac{3k+2}{4}, & \text{se } q > \gamma_{n_2} - 2((k-j-1) - 1) = \frac{k+4}{2} + 2j \\ \frac{3k+6}{4}, & \text{se } q \leq \gamma_{n_2} - 2((k-j-1) - 1) = \frac{k+4}{2} + 2j \end{cases}.$$

Se  $k \equiv 0 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_2}$  é par. Então, os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_2} - 2((k-j-2) - 1) - 1$  a  $\gamma_{n_2} - 1$  ocorrem nas linhas 2 a  $k-j-1$  da coluna 1, e os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_2} - 2((k-1) - 1) - 1$  a  $\gamma_{n_2} - 2((k-j-1) - 1) - 1$  ocorrem nas linhas  $k-j$  a  $k$  da coluna 2. Deste modo  $LR(n_2, \gamma_{n_2} - 2(m-1) - 1) = m+1$

para  $1 \leq m \leq k-1$ . Como  $q > k$  é ímpar, considere  $LR(n_2, q) = m+1$  e então

$$\begin{aligned} q = k + 2i - 1 &= \gamma_{n_2} - 2(m-1) - 1 = \frac{5k-4}{2} - 2m + 1 \implies \\ 2i + 2m &= \frac{5k-4+2-2k+2}{2} = \frac{3k}{2} \implies \\ m &= \frac{3k}{4} - i. \end{aligned}$$

Portanto,

$$LR(n_2, q) = \frac{3k+4}{4} - i.$$

O próximo caso é  $n_3 = k^2 + k + j$  com  $0 \leq j \leq \frac{k}{2} - 1$ . Segue do lema 2.3.13 que as duas primeiras colunas em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_3}}$  são

$$\begin{array}{cc} \gamma_{n_1} + 1 & \gamma_{n_1} \\ \gamma_{n_1} - 1 & \gamma_{n_1} - 2 \\ \dots & \dots \\ \gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j - 2\right) - 1\right) - 1 & \gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j - 1\right) - 1\right) \\ \frac{\gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j - 1\right) - 1\right) - 1}{\gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j\right) - 1\right)} & \frac{\gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j\right) - 1\right)}{\gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j\right) - 1\right) - 1} \\ \dots & \dots \\ \gamma_{n_1} - 2\left((k-2) - 1\right) & \gamma_{n_1} - 2\left((k-2) - 1\right) - 1 \\ \gamma_{n_1} - 2\left((k-1) - 1\right) & \gamma_{n_1} - 2\left((k-1) - 1\right) - 1 \end{array}$$

Se  $k \equiv 2 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_3} = \gamma_{n_1} + 1$  é par. Então, os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j - 1\right) - 1\right)$  a  $\gamma_{n_1}$  ocorrem nas linhas 1 a  $\frac{k}{2} - j - 1$  da coluna 2, e os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2\left((k-1) - 1\right)$  a  $\gamma_{n_1} - 2\left((k-j) - 1\right)$  ocorrem nas linhas  $\frac{k}{2} - j + 1$  a  $k$  da coluna 1. Agora, comparemos  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$  com  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_3}}$  e façamos as seguintes observações:

- Todos os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j - 1\right) - 1\right)$  a  $\gamma_{n_1}$  ocorrem em mesmas linhas em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$  e  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_3}}$ ;
- Todos os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2\left((k-1) - 1\right)$  a  $\gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j\right) - 1\right)$  em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$  têm uma ocorrência numa linha abaixo em respeito a  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_3}}$ .

Então,

$$LR(n_3, q) = \begin{cases} LR(n_1, q), & \text{se } q > \gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j\right) - 1\right) = \frac{3k}{2} + 2j \\ LR(n_1, q) + 1, & \text{se } q \leq \gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j\right) - 1\right) = \frac{3k}{2} + 2j \end{cases}.$$

Portanto,

$$LR(n_3, q) = \begin{cases} \frac{3k+2}{4} - i & \text{se } q > \frac{3k}{2} + 2j \\ \frac{3k+6}{4} - i, & \text{se } q \leq \frac{3k}{2} + 2j \end{cases}.$$

Se  $k \equiv 0 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_3} = \gamma_{n_1} + 1$  é ímpar. Então, os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j - 1\right) - 1\right) - 1$  a  $\gamma_{n_1} + 1$  ocorrem nas linhas 1 a  $\frac{k}{2} - j$  da coluna 1, e os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2\left((k-1) - 1\right) - 1$  a  $\gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j\right) - 1\right) - 1$  ocorrem nas linhas  $\frac{k}{2} - j + 1$  a  $k$  da coluna 2. Agora, comparemos  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$  com  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_3}}$  e façamos as seguintes observações:

- Há o aparecimento do gancho ímpar  $\gamma_{n_1} + 1 = \gamma_{n_3}$  em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_3}}$  na posição  $(1, 1)$ ;
- Todos os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j - 1\right) - 1\right) - 1$  a  $\gamma_{n_1} - 1$  em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$  têm uma ocorrência numa linha abaixo em respeito a  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_3}}$ ;
- Todos os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2\left((k-1) - 1\right) - 1$  a  $\gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j\right) - 1\right) - 1$  ocorrem em mesmas linhas em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$  e  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_3}}$ .

Então,

$$LR(n_3, q) = \begin{cases} LR(n_1, q) + 1, & \text{se } q > \gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j\right) - 1\right) - 1 = \frac{3k-2}{2} + 2j \\ LR(n_1, q), & \text{se } q \leq \gamma_{n_1} - 2\left(\left(\frac{k}{2} - j\right) - 1\right) - 1 = \frac{3k-2}{2} + 2j \end{cases}.$$

Portanto,

$$LR(n_3, q) = \begin{cases} \frac{3k}{4} - i + 1 = \frac{3k+4}{4} - i & \text{se } q > \frac{3k-2}{2} + 2j \\ \frac{3k+4}{4} - i, & \text{se } q \leq \frac{3k-2}{2} + 2j \end{cases}.$$

Isto é,

$$LR(n_3, q) = \frac{3k+4}{4} - i.$$

O próximo caso é  $n_4 = k^2 + k + \frac{k}{2} + j$  com  $0 \leq j \leq \frac{k}{2} - 1$ . Segue do lema

2.3.13 que as duas primeiras colunas em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_4}}$  são

$$\begin{array}{cc} \gamma_{n_2} + 1 & \gamma_{n_2} \\ \gamma_{n_2} & \gamma_{n_2} - 1 \\ \dots & \dots \\ \gamma_{n_2} - 2((k-j-3) - 1) & \gamma_{n_2} - 2((k-j-3) - 1) - 1 \\ \gamma_{n_2} - 2((k-j-2) - 1) & \gamma_{n_2} - 2((k-j-2) - 1) - 1 \\ \hline \gamma_{n_2} - 2((k-j-2) - 1) - 1 & \gamma_{n_2} - 2((k-j-1) - 1) \\ \dots & \dots \\ \gamma_{n_2} - 2((k-3) - 1) - 1 & \gamma_{n_2} - 2((k-2) - 1) \\ \gamma_{n_2} - 2((k-2) - 1) - 1 & \gamma_{n_2} - 2((k-1) - 1) \end{array}$$

Se  $k \equiv 2 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_4} = \gamma_{n_2} + 1$  é par. Então, os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_2} - 2((k-j-2) - 1)$  a  $\gamma_{n_2}$  ocorrem nas linhas 2 á  $k-j-1$  da coluna 1, e os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_2} - 2((k-1) - 1)$  a  $\gamma_{n_2} - 2((k-j-1) - 1)$  ocorrem nas linhas  $k-j$  a  $k$  da coluna 2. Agora, comparemos  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$  com  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_4}}$  e façamos as seguintes observações:

- Todos os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_2} - 2((k-j-2) - 1)$  a  $\gamma_{n_2}$  em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$  têm uma ocorrência numa linha abaixo em respeito a  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_4}}$ ;
- Todos os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_2} - 2((k-1) - 1)$  a  $\gamma_{n_2} - 2((k-j-1) - 1)$  ocorrem em mesmas linhas em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$  e  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_4}}$ .

Então,

$$LR(n_4, q) = \begin{cases} LR(n_2, q) + 1, & \text{se } q > \gamma_{n_2} - 2((k-j-1) - 1) = \frac{k+4}{2} + 2j \\ LR(n_2, q), & \text{se } q \leq \gamma_{n_2} - 2((k-j-1) - 1) = \frac{k+4}{2} + 2j \end{cases}$$

Portanto,

$$LR(n_4, q) = \begin{cases} \frac{3k+2}{4} - i + 1 = \frac{3k+6}{4} - i, & \text{se } q > \frac{k+4}{2} + 2j \\ \frac{3k+6}{4} - i, & \text{se } q \leq \frac{k+4}{2} + 2j \end{cases}$$

Isto é,

$$LR(n_4, q) = \frac{3k+6}{4} - i.$$

Se  $k \equiv 0 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_4} = \gamma_{n_2} + 1$  é ímpar. Então, o inteiro ímpar  $\gamma_{n_2} + 1$  ocorre na linha 1 da coluna 1, os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_2} - 2((k - j - 3) - 1) - 1$  a  $\gamma_{n_2} - 1$  ocorrem nas linhas 2 a  $k - j - 2$  da coluna 2, e os inteiros ímpares  $\gamma_{n_2} - 2((k - 2) - 1) - 1$  a  $\gamma_{n_2} - 2((k - j - 2) - 1) - 1$  ocorrem nas linhas  $k - j$  a  $k$  da coluna 1. Agora, comparemos  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$  com  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_4}}$  e façamos as seguintes observações:

- Há o aparecimento do gancho ímpar  $\gamma_{n_2} + 1 = \gamma_{n_4}$  em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_4}}$  na posição  $(1, 1)$ ;
- Todos os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_2} - 2((k - j - 3) - 1) - 1$  a  $\gamma_{n_2} - 1$  ocorrem em mesmas linhas em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$  e  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_4}}$ ;
- Todos os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_2} - 2((k - 2) - 1) - 1$  a  $\gamma_{n_2} - 2((k - j - 2) - 1) - 1$  em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$  têm uma ocorrência numa linha abaixo em respeito a  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_4}}$ .

Então,

$$LR(n_4, q) = \begin{cases} LR(n_2, q), & \text{se } q > \gamma_{n_2} - 2((k - j - 2) - 1) - 1 = \frac{k+6}{2} + 2j \\ LR(n_2, q) + 1, & \text{se } q \leq \gamma_{n_2} - 2((k - j - 2) - 1) - 1 = \frac{k+6}{2} + 2j \end{cases}.$$

Portanto,

$$LR(n_4, q) = \begin{cases} \frac{3k+4}{4} - i, & \text{se } q > \frac{k+6}{2} + 2j \\ \frac{3k+4}{4} - i + 1 = \frac{3k+8}{4} - i, & \text{se } q \leq \frac{k+6}{2} + 2j \end{cases}.$$

O último caso é  $n_5 = k^2 + 2k$ . Segue do lema 2.3.13 que as duas primeiras colunas em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_5}}$  são

$$\begin{array}{cc} \gamma_{n_1} + 2 & \gamma_{n_1} + 1 \\ \gamma_{n_1} & \gamma_{n_1} - 1 \\ \dots & \dots \\ \gamma_{n_1} - 2\left(\frac{k}{2} - 1\right) & \gamma_{n_1} - 2\left(\frac{k}{2} - 1\right) - 1 \\ \gamma_{n_1} - 2\frac{k}{2} & \gamma_{n_1} - 2\frac{k}{2} - 1 \\ \hline \gamma_{n_1} - 2\frac{k}{2} - 1 & \gamma_{n_1} - 2\left(\frac{k}{2} + 1\right) \\ \dots & \dots \\ \gamma_{n_1} - 2(k - 2) - 1 & \gamma_{n_1} - 2(k - 1) \\ \gamma_{n_1} - 2(k - 1) - 1 & \gamma_{n_1} - 2k \end{array}$$

Se  $k \equiv 2 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_5} = \gamma_{n_1} + 2$  é ímpar. Então, os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} + 2\frac{k}{2}$  a  $\gamma_{n_1} + 2$  ocorrem nas linhas 1 a  $\frac{k}{2}$  da coluna 1, e os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2k$  a  $\gamma_{n_1} - 2(\frac{k}{2} + 1)$  ocorrem nas linhas  $\frac{k}{2} + 1$  a  $k$  da coluna 2. Agora, comparemos  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$  com  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_5}}$  e façamos as seguintes observações:

- Há o aparecimento do gancho ímpar  $\gamma_{n_1} + 2 = \gamma_{n_5}$  em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_5}}$  na posição  $(1, 1)$ ;
- Todos os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2k$  a  $\gamma_{n_1}$  em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$  têm uma ocorrência numa linha abaixo em respeito a  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_5}}$ .

Então,

$$LR(n_5, q) = LR(n_1, q) + 1 = \frac{3k + 2}{4} - i + 1 = \frac{3k + 6}{4} - i.$$

Se  $k \equiv 0 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_5} = \gamma_{n_1} + 2$  é par. Então, os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2(\frac{k}{2} - 1) - 1$  a  $\gamma_{n_1} + 1$  ocorrem nas linhas 1 a  $\frac{k}{2} - 1$  da coluna 2, e os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2(k - 1) - 1$  a  $\gamma_{n_1} - 2\frac{k}{2} - 1$  ocorrem nas linhas  $\frac{k}{2} + 1$  a  $k$  da coluna 1. Agora, comparemos  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$  com  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_5}}$  e façamos as seguintes observações:

- Há o aparecimento do gancho ímpar  $\gamma_{n_1} + 1 = \gamma_{n_4}$  em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_5}}$  na posição  $(1, 2)$ ;
- Todos os inteiros ímpares de  $\gamma_{n_1} - 2(k - 1) - 1$  a  $\gamma_{n_1} - 1$  em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$  têm uma ocorrência numa linha abaixo em respeito a  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_5}}$ .

Então,

$$LR(n_5, q) = LR(n_1, q) + 1 = \begin{cases} \frac{3k + 4}{4} - 1, & \text{se } q > \frac{3k - 2}{2} \\ \frac{3k + 8}{4} - i, & \text{se } q \leq \frac{3k - 2}{2} \end{cases}.$$

Concluimos assim a demonstração deste lema.  $\square$

Determinemos agora as cotas superiores para  $NH(n, q)$ .

**Lema 2.3.16.** *Assuma que  $k \geq 8$ . Se  $q = k + 2i - 1$  ( $i \geq 1$ ) é um inteiro ímpar em  $\{k + 1, k + 2, \dots, \gamma_n\}$ , então temos as seguintes cotas superiores para  $NH(n, q)$ , dependendo da classe residual de  $k \pmod{4}$ . Em todos os casos,  $0 \leq j \leq \frac{k}{2} - 1$ .*

$k \equiv 2 \pmod{4}$		
$n$	Cota Superior	Estrita quando
$k^2 + j$	$\frac{3k+2}{4} - i$	$q \in (k, 2k - 3]$
$k^2 + \frac{k}{2} + j$	$\frac{3k+2}{4} - i$	$q \in (k, 2k - 7]$
$k^2 + k + j$	$\frac{3k+6}{4} - i$	$q \in (k, 2k - 3]$
$k^2 + k + \frac{k}{2} + j$	$\frac{3k+6}{4} - i$	$q \in (k, 2k - 5]$
$k^2 + 2k$	$\frac{3k+6}{4} - i$	$q \in (k, 2k - 3]$
$k \equiv 0 \pmod{4}$		
$k^2 + j$	$\frac{3k+4}{4} - i$	$q \in (k, 2k - 3]$
$k^2 + \frac{k}{2} + j$	$\frac{3k+4}{4} - i$	$q \in (k, 2k - 5]$
$k^2 + k + j$	$\frac{3k+4}{4} - i$	$q \in (k, 2k - 3]$
$k^2 + k + \frac{k}{2} + j$	$\begin{cases} \frac{3k+4}{4} - i, & \text{se } (n, q) \neq (79, 13) \\ 5 & \text{se } (n, q) = (79, 13) \end{cases}$	$\begin{cases} q \in (k, 2k - 7] \\ - \end{cases}$
$k^2 + 2k$	$\frac{3k+4}{4} - i$	$q \in (k, 2k - 5]$

*Demonstração.* Utilizemos a mesma notação usada no lema 2.3.13.

Começemos pelo caso  $n_1 = k^2 + j$  com  $0 \leq j \leq \frac{k}{2} - 1$ . As cotas superiores para  $NH(n_1, q)$  seguem direto do lema 2.3.15. Encontremos agora para quais  $q$  essas cotas são estritas.

Pela maneira que é formada a partição  $\alpha_{n_1}$ , temos em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$  a existência de um bloco retangular de tamanho  $(\frac{k}{2} - j) \times (\frac{k}{2} + j)$  de comprimentos de ganchos pares, como segui abaixo

$$\begin{array}{ccccccc}
 2k - 2 & 2k - 4 & \dots & k - 2j & & & \\
 2k - 4 & 2k - 6 & \dots & k - 2j - 2 & & & \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\
 k + 2j & k + 2j - 2 & \dots & 2 & & & 
 \end{array}, \tag{2.6}$$

onde o gancho  $2k - 2$  ocorre na linha 1 e o gancho 2 ocorre na linha  $\frac{k}{2} - j$  de  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$ . Observe que existem pelo menos quatro colunas de comprimento de gancho pares acima, pois  $\frac{k}{2} + j \geq 4$ .



Note que o gancho  $k-2j$  ocorre na mesma coluna que o gancho 2 (veja em (2.6)). Como o gancho 2 ocorre na penúltima caixa da linha  $\frac{k}{2} - j$  em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$ , temos  $k-2j$  ocorrendo na coluna  $B_t^{\frac{k}{2}-1} - 1 = k + \frac{k}{2} - (\frac{k}{2} - j) = k + j$  com  $t \in \{1, 2\}$ . No entanto, o gancho  $2k-2$  ocorre  $\frac{k}{2} + j - 1$  colunas à esquerda de  $k-2j$ , com isso,  $2k-2$  ocorre na coluna  $(k+j) - (\frac{k}{2} + j - 1) = \frac{k}{2} + 1 \geq 5$ .

Assuma  $q \in \{k+1, k+2, \dots, 2k-3\}$ , então  $q-1$  e  $q+1$  são pares consecutivos em  $\{k, k+2, \dots, 2k-2\}$ . Assim, pelo menos uma linha em (2.6) contém ambos inteiros  $q-1$  e  $q+1$ . Seja  $r$  esta linha. Como os comprimentos de ganchos em qualquer linhas são estritamente decrescentes, em particular na linha  $r$ ,  $r \notin L(n_1, q)$ . Então,

$$NH(n_1, q) < \begin{cases} \frac{3k+4}{4} - i, & \text{se } k \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{3k+2}{4} - i, & \text{se } k \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}.$$

Vamos agora ao caso  $n_3 = k^2 + k + j$  com  $0 \leq j \leq \frac{k}{2} - 1$ . As cotas superiores para  $NH(n_3, q)$  seguem direto do lema 2.3.15. Encontremos agora para quais  $q$  essas cotas são estritas.

Já sabemos que  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_3}}$  é obtido adicionando uma coluna à esquerda de  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$ , com isto  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_3}}$  continua a ter o bloco retangular de tamanho  $(\frac{k}{2} - j) \times (\frac{k}{2} + j)$ , como mostrado em (2.6).

Assuma  $q \in \{k+1, k+2, \dots, 2k-3\}$ , então a mesma linha  $r$  obtida no caso anterior satisfaz  $r \notin L(n_3, q)$  e portanto

$$NH(n_3, q) < \begin{cases} \frac{3k+4}{4} - i, & \text{se } k \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{3k+6}{4} - i, & \text{se } k \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}.$$

Próximo caso é  $n_2 = k^2 + \frac{k}{2} + j$  com  $0 \leq j \leq \frac{k}{2} - 1$ . As cotas superiores de  $NH(n_2, q)$  para  $k \equiv 0 \pmod{4}$  ou  $k \equiv 2 \pmod{4}$  com  $q > \frac{k+4}{2} + 2j$  seguem direto do lema 2.3.15, restando encontrar a cota superior para  $NH(n_2, q)$  quando  $k \equiv 2 \pmod{4}$  com  $q \leq \frac{k+4}{2} + 2j$ . Além disso falta encontrar para quais  $q$  essas cotas são estritas.

Pela maneira que é formada a partição  $\alpha_{n_2}$ , temos em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$  a existência de um bloco retangular de tamanho  $(k-2-j) \times (j+1)$  de comprimento de ganchos pares, como segui abaixo juntamente com as colunas de ganchos

ímpares ao seu redor

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 2k-3 & 2k-4 & 2k-6 & \dots & 2k-2j-4 & 2k-2j-7 \\
 2k-5 & 2k-6 & 2k-8 & \dots & 2k-2j-6 & 2k-2j-9 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 2j+5 & 2j+4 & 2j+2 & \dots & 4 & 1 \\
 2j+3 & 2j+2 & 2j & \dots & 2 & 
 \end{array} , \quad (2.7)$$

onde o gancho  $2k-4$  ocorre na linha 2 e o gancho 2 ocorre na linha  $k-j-1$  de  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$ . Observe que existem pelo menos uma colunas de comprimento de ganchos pares acima, pois  $j+1 \geq 1$ .

Note que o gancho  $(2k-2j-4)$  ocorre na mesma coluna que o gancho 2 (veja em 2.7). Como o gancho 2 ocorre na última caixa da linha  $k-j-1$  em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$ , temos  $2k-2j-4$  ocorrendo na coluna  $B_t^{k-j-1} = (k + \frac{k}{2} - k + j + 1) + 1 = \frac{k}{2} + j + 2$  com  $t \in \{3, 4\}$ . Entretanto, o gancho  $2k-4$  ocorre  $j$  colunas à esquerda de  $2k-2j-4$ , logo,  $2k-4$  ocorre na coluna  $(\frac{k}{2} + j + 2) - j = \frac{k}{2} + 2 \geq 6$ .

Assuma  $q \in \{k+1, k+2, \dots, 2k-5\}$ , então  $q$  ocorre na coluna mais à esquerda em (2.7), pois  $2j+3 \leq 2(\frac{k}{2}-1) + 3 = k+1$ . É fácil observar que se  $j \geq 1$ , vemos em (2.7) que o gancho  $q$  não ocorre na linha acima de sua ocorrência, pois teríamos duas colunas de comprimentos pares em (2.7). Agora se  $j = 0$ , teríamos em (2.7) apenas três colunas, onde a coluna de comprimento de ganchos pares será a coluna central como mostrado abaixo

$$\begin{array}{c|c|c}
 2k-3 & 2k-4 & 2k-7 \\
 2k-5 & 2k-6 & 2k-9 \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 5 & 4 & 1 \\
 3 & 2 & 
 \end{array}$$

Neste caso, cada comprimento de gancho par na coluna central tem comprimento 1 menor do que o gancho à esquerda e comprimento 3 maior do que o gancho à direita. Desse modo, é fácil ver que o gancho  $q$  continua a não ocorrer na coluna acima de sua ocorrência.

Então, existe uma linha  $r \in \mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$  que satisfaz  $r \notin L(n_2, q)$ . Para complementar o resultado, veja que se assumirmos  $k \equiv 2 \pmod{4}$  com  $q \leq \frac{k+4}{2} + 2j$ , temos  $k \geq 10$  e

$$q \leq \frac{k+4}{2} + 2j \leq \frac{k+4}{2} + 2\left(\frac{k}{2}-1\right) = \frac{3k}{2} \leq 2k-5.$$

Com isso,

$$NH(n_2, q) \begin{cases} < \frac{3k+4}{4} - i, & \text{se } k \equiv 0 \pmod{4} \\ < \frac{3k+2}{4} - i, & \text{se } k \equiv 2 \pmod{4} \text{ com } q > \frac{k+4}{2} + 2j. \\ \leq \frac{3k+2}{4} - i, & \text{se } k \equiv 2 \pmod{4} \text{ com } q \leq \frac{k+4}{2} + 2j \end{cases}$$

Faltando somente o caso estrito em  $k \equiv 2 \pmod{4}$  para  $q \leq \frac{k+4}{2} + 2j$  com  $q \in \{k+1, k+2, \dots, 2k-7\}$ . Já assumindo estas hipóteses e lembrando que  $k \geq 10$ , temos a seguinte cota inferior em  $j$

$$j \geq \frac{1}{2} \left( k + 2i - 1 - \frac{k+4}{2} \right) = \frac{k-6}{4} + i \geq 2.$$

Neste caso, existem em (2.7) no mínimo três colunas de comprimento de ganchos pares, como visto que a quantidade de coluna é  $j+1$ . Isto mostra que o gancho  $q$  não ocorre nas duas linhas acima de sua ocorrência. Assim,

$$NH(n_2, q) \leq LR(n_2, q) - 2 = \frac{3k+6}{4} - i - 2 < \frac{3k+6}{4} - i - 1 = \frac{3k+2}{4} - i.$$

Próximo caso é  $n_4 = k^2 + k + \frac{k}{2} + j$  com  $0 \leq j \leq \frac{k}{2} - 1$ . As cotas superiores de  $NH(n_4, q)$  para  $k \equiv 2 \pmod{4}$  ou  $k \equiv 0 \pmod{4}$  com  $q > \frac{k+6}{2} + 2j$  seguem direto do lema 2.3.15, restando encontrar a cota superior para  $NH(n_4, q)$  quando  $k \equiv 0 \pmod{4}$  com  $q \leq \frac{k+6}{2} + 2j$ . Além disso, falta encontrar para quais  $q$  essas cotas são estritas.

Sabemos que  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_4}}$  é obtido adicionando uma coluna à esquerda de  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$ , logo  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_4}}$  continua a ter o bloco retangular de tamanho  $(k-2-j) \times (j+1)$  de comprimento de ganchos pares, como mostrado em (2.7).

Assuma  $q \in \{k+1, k+2, \dots, 2k-5\}$ , então a mesma linha  $r$  obtida no caso anterior satisfaz  $r \notin L(n_4, q)$ . Isto já mostra as cotas estritas para  $k \equiv 2 \pmod{4}$  e  $k \equiv 0 \pmod{4}$  quando  $q > \frac{k+6}{2} + 2j$ . Além disso, já determina a cota superior em  $k \equiv 0 \pmod{4}$  quando  $q \leq \frac{k+6}{2} + 2j$  a menos para  $k=8$ ,  $q=13$  e  $j=3$ , pois nestas condições  $q=2k-3$  e ocorre na linha mais acima em (2.7) diferente de qualquer outro  $q \leq \frac{k+6}{2}$ , onde sempre temos  $q \leq 2k-5$ . Analisemos esse caso restante onde  $n_4 = 8^2 + 8 + 4 + 3 = 79$  e

$\alpha_{79} = (12, 12, 11, 10, 10, 9, 8, 7)$ , com gráfico de ganchos  $\mathcal{H}_{\alpha_{79}}$  abaixo

19	18	17	16	15	14	13	11	9	7	4	2
18	17	16	15	14	13	12	10	8	6	3	1
16	15	14	13	12	11	10	8	6	4	1	
14	13	12	11	10	9	8	6	4	2		
13	12	11	10	9	8	7	5	3	1		
11	10	9	8	7	6	5	3	1			
9	8	7	6	5	4	3	1				
7	6	5	4	3	2	1					

Encontremos acima  $NH(79, 13) = 5 = \frac{3 \cdot 8 + 8}{4} - 3 = LR(79, 13)$  e portanto

$$NH(n_4, q) \begin{cases} < \frac{3k+6}{4} - i, & \text{se } k \equiv 2 \pmod{4} \\ < \frac{3k+4}{4} - i, & \text{se } k \equiv 0 \pmod{4} \text{ com } q > \frac{k+6}{2} + 2j \\ \leq \frac{3k+4}{4} - i, & \text{se } k \equiv 0 \pmod{4}, q \leq \frac{k+6}{2} + 2j \text{ e } (n_4, q) \neq (79, 13) \\ 5, & \text{se } (n_4, q) = (79, 13) \end{cases}$$

Faltando o caso estrito em  $k \equiv 0 \pmod{4}$  para  $q \in \{k+1, \dots, 2k-7\}$  com  $q \leq \frac{k+6}{2} + 2j$ . Já assumindo estas hipóteses, temos a seguinte cota inferior em  $j$

$$j \geq \frac{1}{2} \left( k + 2i - 1 - \frac{k+6}{2} \right) = \frac{k-8}{4} + i$$

que é no mínimo 2 a menos quando  $k = 8$  e  $i = 1$ .

Assuma  $k > 8$ ,  $i > 1$  ou  $j \geq 2$ . Nesta condições, as duas linhas encontradas anteriormente em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_2}}$  que não têm a ocorrência do gancho  $q$ , continuam a satisfazer essa mesma propriedade em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_4}}$ . Então,

$$NH(n_4, q) \leq LR(n_4, q) - 2 < LR(n_4, q) - 1 = \frac{3k+8}{4} - i - 1 = \frac{3k+4}{4} - i.$$

Agora se  $k = 8$ ,  $i = 1$  e  $j = 1$ , então  $q = 9$  e  $n_4 = 77$  com gráfico de

ganchos  $\mathcal{H}_{\alpha_{77}}$  igual a

19	18	17	16	15	14	13	11	8	6	4	2
18	17	16	15	14	13	12	10	7	5	3	1
16	15	14	13	12	11	10	8	5	3	1	
14	13	12	11	10	9	8	6	3	1		
12	11	10	9	8	7	6	4	1			
10	9	8	7	6	5	4	2				
9	8	7	6	5	4	3	1				
7	6	5	4	3	2	1					

Encontremos acima  $NH(77, 9) = 4 < 6 = \frac{3 \cdot 8 + 4}{4} - 1$ . Portanto estrito como queríamos.

O último caso é  $n_5 = k^2 + 2k$ . As cotas superiores de  $NH(n_5, q)$  para  $k \equiv 2 \pmod{4}$  ou  $k \equiv 0 \pmod{4}$  com  $q > \frac{3k+4}{2}$  seguem direto do lema 2.3.15, restando encontrar a cota superior para  $NH(n_5, q)$  quando  $k \equiv 0 \pmod{4}$  com  $q \leq \frac{3k+2}{2}$ . Além disso, falta encontrar para quais  $q$  essas cotas são estritas.

Sabemos que o gráfico de ganchos  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_5}}$  é obtido adicionando duas colunas à esquerda de  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$ , onde especialmente  $n_1 = k^2$ , isto é,  $j = 0$ . Com isto  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_5}}$  continua a ter o bloco retangular de tamanho  $\frac{k}{2} \times \frac{k}{2}$  de comprimento de ganchos pares, como segui abaixo juntamente com sua coluna de ganchos ímpares mais à esquerda.

$$\begin{array}{c|cccc}
 2k-1 & 2k-2 & 2k-4 & \dots & k \\
 2k-3 & 2k-4 & 2k-6 & \dots & k-2 \\
 2k-5 & 2k-6 & 2k-8 & \dots & k-4 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 k+1 & k & k-2 & \dots & 2
 \end{array}, \quad (2.8)$$

onde o gancho  $2k-2$  ocorre na linha 1 e o gancho 2 ocorre na linha  $\frac{k}{2}$  de  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_5}}$ . Observe que existem pelo menos quatro colunas de comprimento de ganchos pares acima, pois  $\frac{k}{2} \geq 4$ .

Assuma  $q \in \{k+1, k+2, \dots, 2k-3\}$ , então a mesma linha  $r$  obtida em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_1}}$  satisfaz  $r \notin L(n_5, q)$ . Para complementar o resultado, veja que se assumirmos  $k \equiv 0 \pmod{4}$  com  $q \leq \frac{3k+2}{2}$ , temos  $k \geq 8$  e

$$q \leq \frac{3k+2}{2} \leq \frac{3k+2}{2} + \left(\frac{k}{2} - 4\right) = \frac{4k-6}{2} = 2k-3.$$

Portanto

$$NH(n_5, q) \begin{cases} < \frac{3k+6}{4} - i, & \text{se } k \equiv 2 \pmod{4} \\ < \frac{3k+4}{4} - i, & \text{se } k \equiv 0 \pmod{4} \text{ com } q > \frac{3k+2}{2} - i. \\ \leq \frac{3k+4}{4} - i, & \text{se } k \equiv 0 \pmod{4} \text{ com } q \leq \frac{3k+2}{2} \end{cases}$$

Faltando somente o caso estrito em  $k \equiv 0 \pmod{4}$  para  $q \in \{k+1, k+2, \dots, 2k-5\}$  com  $q \leq \frac{3k+2}{2}$ . Note que o gancho  $q$  ocorre na coluna mais à esquerda em (2.8), isto juntamente com o fato de ter no mínimo 4 colunas de comprimento de gancho pares em (2.8), mostra que  $q$  não ocorre nas duas linhas acima de sua ocorrência. Então,

$$NH(n_5, q) \leq LR(n_5, q) - 2 < \frac{3k+8}{4} - i - 1 = \frac{3k+4}{4} - i.$$

Concluimos a demonstração deste lema.  $\square$

**Observação 2.3.17.** Nas hipóteses do lema acima, o maior valor possível para  $\gamma_n$  é  $\frac{5k}{2}$ , mas

$$\frac{5k}{2} < \frac{5k+k}{2} = \frac{6k}{2} = 3k < 3q.$$

Isto é, os únicos múltiplos de  $q$  em  $\mathcal{H}_{\alpha_n}$  são  $q$  e  $2q$ .

**Lema 2.3.18.** Suponha  $k \geq 8$  e sejam  $q = k + 2i - 1$  ( $i \geq 1$ ) e  $2q$  inteiros em  $\{k+1, k+2, \dots, \gamma_n\}$ . Então temos as seguintes cotas superiores para  $NH(n, 2q)$ .

$n$	Cotas superiores	
	$k \equiv 2 \pmod{4}$	$k \equiv 0 \pmod{4}$
$k^2 + j, 0 \leq j \leq k$	$\frac{k+6}{4} - 2i$	$\frac{k+4}{4} - 2i$
$k^2 + k + j, 1 \leq j \leq k$	$\frac{k+6}{4} - 2i$	$\frac{k+8}{4} - 2i$

*Demonstração.* Utilizando-se de que  $NH(n, 2q) \leq LR(n, 2q)$  juntamente a repetidas aplicações do lema 2.3.14, segue que  $NH(n, 2q)$  é no máximo  $LR(k^2+k, 2q)$  quando  $n = k^2+j$  com  $0 \leq j \leq k$  e no máximo  $LR(k^2+2k, 2q)$  em todos os casos.

Utilizemos a mesma notação do lema 2.3.15, e comecemos por  $n_5 = k^2 + 2k$ . Segue do lema 2.3.15 que as duas primeiras colunas em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_5}}$  são

$$\begin{array}{cc} \gamma_{n_5} & \gamma_{n_5} - 1 \\ \gamma_{n_5} - 2 & \gamma_{n_5} - 3 \\ \dots & \dots \\ \gamma_{n_5} - 2 \left( \left( \frac{k}{2} - 1 \right) - 1 \right) & \gamma_{n_5} - 2 \left( \left( \frac{k}{2} - 1 \right) - 1 \right) - 1 \\ \frac{\gamma_{n_5} - 2 \left( \frac{k}{2} - 1 \right)}{\gamma_{n_5} - 2 \left( \frac{k}{2} - 1 \right) - 1} & \frac{\gamma_{n_5} - 2 \left( \frac{k}{2} - 1 \right) - 1}{\gamma_{n_5} - 2 \left( \left( \frac{k}{2} + 1 \right) - 1 \right)} \\ \gamma_{n_5} - 2 \left( \left( \frac{k}{2} + 1 \right) - 1 \right) - 1 & \gamma_{n_5} - 2 \left( \left( \frac{k}{2} + 2 \right) - 1 \right) \\ \dots & \dots \\ \gamma_{n_5} - 2 \left( (k - 1) - 1 \right) - 1 & \gamma_{n_5} - 2(k - 1) \end{array}.$$

Note que se  $q > k \geq 8$ , temos

$$\gamma_{n_5} - 2 \left( \frac{k}{2} - 1 \right) - 1 \leq \frac{5k}{2} - k + 1 = \frac{3k + 2}{2} < \frac{4k}{2} = 2k < 2q.$$

Portanto  $2q$  não ocorre abaixo da linha  $\frac{k}{2}$  em todos os gráficos de ganchos  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_t}}$  para  $t \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Se  $k \equiv 0 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_5}$  é par. Então, os inteiros pares de  $\gamma_{n_5} - 2 \left( \frac{k}{2} - 1 \right)$  a  $\gamma_{n_5}$  ocorrem nas linhas 1 a  $\frac{k}{2}$  da coluna 1. Deste modo  $LR(n_5, \gamma_{n_5} - 2(m - 1)) = m$  para  $1 \leq m \leq \frac{k}{2}$ . Como  $2q > k$  é par, considere  $LR(n_5, 2q) = m$  e então

$$\begin{aligned} 2q = 2k + 4i - 2 &= \gamma_{n_5} - 2(m - 1) = \frac{5k}{2} - 2m + 2 \implies \\ 2m &= \frac{5k + 4 + 4 - 4k}{2} - 4i \implies \\ m &= \frac{k + 8}{2} - 2i = LR(n_5, 2q) \geq NH(n_5, 2q). \end{aligned}$$

Se  $k \equiv 2 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_5}$  é ímpar. Então, os inteiros pares de  $\gamma_{n_5} - 2 \left( \frac{k}{2} - 1 \right) - 1$  a  $\gamma_{n_5} - 1$  ocorrem nas linhas 1 a  $\frac{k}{2}$  da coluna 2. Deste modo  $LR(n_5, \gamma_{n_5} - 2(m - 1) - 1) = m$  para  $1 \leq m \leq \frac{k}{2}$ . Como  $2q > k$  é par, considere  $LR(n_5, 2q) = m$  e então

$$\begin{aligned} 2q = 2k + 4i - 2 &= \gamma_{n_5} - 2(m - 1) - 1 = \frac{5k}{2} - 2m + 1 \implies \\ 2m &= \frac{5k + 2 + 4 - 4k}{2} - 4i \implies \\ m &= \frac{k + 6}{2} - 2i = LR(n_5, 2q) \geq NH(n_5, 2q). \end{aligned}$$

Próximo caso é  $n_3 = k^2 + k$ . Segue do lema 2.3.15 que as duas primeiras colunas em  $\mathcal{H}_{\alpha_{n_3}}$  são

$$\begin{array}{cc} \gamma_{n_3} & \gamma_{n_3} - 1 \\ \gamma_{n_3} - 2 & \gamma_{n_3} - 3 \\ \dots & \dots \\ \gamma_{n_3} - 2 \left( \left( \frac{k}{2} - 1 \right) - 1 \right) & \gamma_{n_3} - 2 \left( \left( \frac{k}{2} - 1 \right) - 1 \right) - 1 \\ \frac{\gamma_{n_3} - 2 \left( \frac{k}{2} - 1 \right)}{\gamma_{n_3} - 2 \left( \frac{k}{2} - 1 \right) - 1} & \frac{\gamma_{n_3} - 2 \left( \frac{k}{2} - 1 \right) - 1}{\gamma_{n_3} - 2 \left( \left( \frac{k}{2} + 1 \right) - 1 \right)} \\ \gamma_{n_3} - 2 \left( \left( \frac{k}{2} + 1 \right) - 1 \right) - 1 & \gamma_{n_3} - 2 \left( \left( \frac{k}{2} + 2 \right) - 1 \right) \\ \dots & \dots \\ \gamma_{n_3} - 2 \left( (k - 1) - 1 \right) - 1 & \gamma_{n_3} - 2(k - 1) \end{array}$$

Se  $k \equiv 0 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_3}$  é ímpar. Então, os inteiros pares de  $\gamma_{n_3} - 2\left(\frac{k}{2} - 1\right) - 1$  a  $\gamma_{n_3} - 1$  ocorrem nas linhas 1 a  $\frac{k}{2}$  da coluna 2. Deste modo  $LR(n_3, \gamma_{n_3} - 2(m - 1) - 1) = m$  para  $1 \leq m \leq \frac{k}{2}$ . Como  $2q > k$  é par, considere  $LR(n_3, 2q) = m$  e então

$$\begin{aligned} 2q = 2k + 4i - 2 &= \gamma_{n_3} - 2(m - 1) - 1 = \frac{5k - 2}{2} - 2m + 1 \implies \\ 2m &= \frac{5k - 2 + 2 + 4 - 4k}{2} - 4i \implies \\ m &= \frac{k + 4}{2} - 2i = LR(n_3, 2q) \geq NH(n_3, 2q). \end{aligned}$$

Se  $k \equiv 2 \pmod{4}$ , o gancho  $\gamma_{n_3}$  é par. Então, os inteiros pares de  $\gamma_{n_3} - 2\left(\frac{k}{2} - 1\right)$  a  $\gamma_{n_3}$  ocorrem nas linhas 1 a  $\frac{k}{2}$  da coluna 1. Deste modo  $LR(n_3, \gamma_{n_3} - 2(m - 1)) = m$  para  $1 \leq m \leq \frac{k}{2}$ . Como  $2q > k$  é par, considere  $LR(n_3, 2q) = m$  e então

$$\begin{aligned} 2q = 2k + 4i - 2 &= \gamma_{n_3} - 2(m - 1) = \frac{5k - 2}{2} - 2m + 2 \implies \\ 2m &= \frac{5k - 2 + 4 + 4 - 4k}{2} - 4i \implies \\ m &= \frac{k + 6}{2} - 2i = LR(n_3, 2q) \geq NH(n_3, 2q). \end{aligned}$$

Juntamente com a observação inicial concluímos a demonstração do lema.  $\square$

**Proposição 2.3.19.** *Assuma que  $k \geq 8$ . Se  $p = k + 2i - 1$  ( $i \geq 1$ ) é um primo médio em  $\mathcal{P}_n$ , então  $p$  divide  $\chi_{\alpha_n}(1)$ .*

*Demonstração.* Segue da proposição 2.3.11 que é suficiente mostrar que  $p(NH(n, q) + NH(n, 2q) + 1) \leq n$ .



**Caso 1.** Suponha que  $2p$  é um comprimento de gancho em  $\mathcal{H}_{\alpha_n}$ . Neste caso, não podemos ter  $k = 8$ , pois teríamos

$$8 < p \leq \frac{\gamma_n}{2} \leq \frac{5k}{4} = \frac{5 \cdot 8}{4} \leq 10.$$

Em particular, o caso especial  $(n, q) = (79, 13)$  do lema 2.3.16 não ocorre. Assumindo então  $k > 8$  e  $2q \leq \gamma_n \leq \frac{5k}{2}$ , temos

$$q \leq \frac{5k}{4} < \frac{5k}{4} + \frac{3k - 28}{4} = \frac{8k - 28}{4} = 2k - 7.$$

Isto nos permiti usar as cotas estritas do lema 2.3.16.

Usando as cotas superiores dos lemas 2.3.16 e 2.3.18 quando possível as cotas estritas,  $p(NH(n, p) + NH(n, 2p) + 1)$  é no máximo:

- (i)  $(\frac{3k+2}{4} - i - 1) + (\frac{k+6}{4} - 2i) = k - 3i + 1$  quando  $k^2 \leq n < k^2 + k$  e  $k \equiv 2 \pmod{4}$ ;
- (ii)  $(\frac{3k+4}{4} - i - 1) + (\frac{k+4}{4} - 2i) = k - 3i + 1$  quando  $k^2 \leq n \leq k^2 + k$  e  $k \equiv 0 \pmod{4}$ ;
- (iii)  $(\frac{3k+6}{4} - i - 1) + (\frac{k+6}{4} - 2i) = k - 3i + 2$  quando  $k^2 + k \leq n \leq k^2 + 2k$  e  $k \equiv 2 \pmod{4}$ ;
- (iv)  $(\frac{3k+4}{4} - i - 1) + (\frac{k+8}{4} - 2i) = k - 3i + 2$  quando  $k^2 + k < n \leq k^2 + 2k$  e  $k \equiv 0 \pmod{4}$ ;

Segue do lema 2.3.9 que  $p(NH(n, p) + NH(n, 2p) + 1)$  é no máximo

$$\begin{aligned} (k + 2i - 1)(k - 3i + 2) &\leq k^2 - 1 < n \text{ nos casos (i) e (ii), e} \\ (k + 2i - 1)(k - 3i + 3) &\leq k^2 + k \leq n \text{ nos caso (iii) e (iv).} \end{aligned}$$

Terminando assim a verificação para o **caso 1**.

**Caso 2.** Suponha que  $2p$  não seja um comprimento de gancho em  $\mathcal{H}_{\alpha_n}$ . Neste caso  $NH(n, 2p) = 0$ , sendo agora suficiente mostrar  $p(NH(n, p) + 1) \leq n$ .

Comecemos assumindo  $k = 8$ . Analisando o caso especial  $(n, p) = (79, 13)$ , vemos que  $13 \cdot (NH(79, 13) + 1) = 13 \cdot 6 = 78 < 79$ . A partir de agora assumimos  $(n, p) \neq (79, 13)$ . Desta forma,  $\gamma_n$  é no máximo  $\frac{5 \cdot 8}{2} = 20$  e os primo médios podem ser 11, 13, 17 e 19. Escrevendo esses primos na forma  $8 + 2i - 1$ , temos  $i$  igual a 2, 3, 5 e 7 respectivamente. Segue do lema 2.3.16 que  $p(NH(n, p) + 1)$  é menor igual a:

- $(8 + 2i - 1)(NH(8, p) + 1) = (7 + 2i)(8 - i) = 66$ , se  $p = 11$ ;

- $(8 + 2i - 1)(NH(8, p) + 1) = (7 + 2i)(8 - i) = 65$ , se  $p = 13$ ;
- $(8 + 2i - 1)(NH(8, p) + 1) = (7 + 2i)(8 - i) = 51$ , se  $p = 17$ ;
- $(8 + 2i - 1)(NH(8, p) + 1) = (7 + 2i)(8 - i) = 38$ , se  $p = 19$ .

Assim para  $n \geq 66$  ou  $i$  igual a 5 ou 6, temos  $p(NH(n, p) + 1) \leq n$ , restando então  $n$  igual a 64 ou 65 e  $i$  igual a 2 ou 3. Para estes casos olharemos diretamente em seus gráficos de ganchos.

Para  $n = 64$ , temos que  $\alpha_{64} = (11, 10, 9, 8, 8, 7, 6, 5)$  com  $\mathcal{H}_{\alpha_{64}}$  sendo

18	17	16	15	14	12	10	8	5	3	1
16	15	14	13	12	10	8	6	3	1	
14	13	12	11	10	8	6	4	1		
12	11	10	9	8	6	4	2			
11	10	9	8	7	5	3	1			
9	8	7	6	5	3	1				
7	6	5	4	3	1					
5	4	3	2	1						

Computando as ocorrências de 11 e 13 encontramos

$$p(NH(n, p) + 1) = \begin{cases} 11(3 + 1) = 44 < 64, & \text{quando } p = 11 \\ 13(2 + 1) = 39 < 64, & \text{quando } p = 13 \end{cases}.$$

Para  $n = 65$ , temos que  $\alpha_{65} = (11, 10, 9, 9, 8, 7, 6, 5)$  com  $\mathcal{H}_{\alpha_{65}}$  sendo

18	17	16	15	14	12	10	8	6	3	1
16	15	14	13	12	10	8	6	4	1	
14	13	12	11	10	8	6	4	2		
13	12	11	10	9	7	5	3	1		
11	10	9	8	7	5	3	1			
9	8	7	6	5	3	1				
7	6	5	4	3	1					
5	4	3	2	1						

Computando as ocorrências de 11 e 13 encontramos

$$p(NH(n, p) + 1) = \begin{cases} 11(3 + 1) = 44 < 65, & \text{quando } p = 11 \\ 13(3 + 1) = 52 < 65, & \text{quando } p = 13 \end{cases}.$$

Portanto se  $k = 8$ , temos  $p(NH(n, p) + 1) \leq n$ .

Agora assumamos  $k > 8$ . Usando os lemas 2.3.16 e 2.3.9,  $p(NH(n, p) + 1)$  é no máximo:

$$(a) (k + 2i - 1)\left(\frac{3k+2}{4} - i + 1\right) \leq \frac{25k^2+40k+16}{32} \text{ quando } k \equiv 2 \pmod{4} \text{ e } k^2 \leq n < k^2 + k;$$

$$(b) (k + 2i - 1)\left(\frac{3k+6}{4} - i + 1\right) \leq \frac{25k^2+80k+64}{32} \text{ quando } k \equiv 2 \pmod{4} \text{ e } k^2 + k \leq n \leq k^2 + 2k;$$

$$(c) (k + 2i - 1)\left(\frac{3k+4}{4} - i + 1\right) \leq \frac{25k^2+60k+36}{32} \text{ quando } k \equiv 0 \pmod{4} \text{ e } k > 8;$$

Primeiramente veja que  $\frac{25k^2+40k+16}{32} < \frac{25k^2+60k+36}{32}$ . Agora procurando as raízes da equação do segundo grau  $\frac{25k^2+60k+16}{32} = k^2$ , encontramos  $k = \frac{30 \pm 24\sqrt{2}}{7}$ . Por  $k$  ser um inteiro positivo, ao fazermos o estudo de sinais da inequação  $\frac{25k^2+60k+16}{32} \leq k^2$ , temos  $k \geq \frac{30+24\sqrt{2}}{7} \sim 9.13$ . Assim se  $k \geq 10$ ,  $p(NH(n, p) + 1) \leq k^2 \leq n$  nos itens (a) e (c).

Para o item (b), procurando as raízes da equação do segundo grau  $\frac{25k^2+80k+64}{32} = k^2 + k$ , encontramos  $k = \frac{24 \pm 32}{7}$ . Por  $k$  ser um inteiro positivo, ao fazermos o estudo de sinais da inequação  $\frac{25k^2+80k+64}{32} \leq k^2 + k$ , temos  $k \geq \frac{24+32}{7} = 8$ . Assim se  $k > 8$ ,  $p(NH(n, p) + 1) \leq k^2 + k \leq n$ . Concluindo a demonstração dessa proposição.  $\square$

Agora veremos o que acontece quando  $\kappa(n)$  é igual a 4 e 6, casos que não foram considerados na proposição acima. Vejamos nas tabelas abaixo

Para $\kappa(n) = 4$		
$n$	$\alpha_n$	$\chi_{\alpha_n}(1)$
16	(5, 4, 4, 3)	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
17	(5, 5, 4, 3)	$2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$
18	(5, 5, 4, 4)	$2^2 \cdot 3^4 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$
19	(5, 5, 5, 4)	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$
20	(6, 5, 5, 4)	$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$
21	(6, 6, 5, 4)	$2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$
22	(6, 6, 5, 5)	$2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$
23	(6, 6, 6, 5)	$2^2 \cdot 3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$
24	(7, 6, 6, 5)	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$

Para $\kappa(n) = 6$		
$n$	$\alpha_n$	$\chi_{\alpha_n}(1)$
36	(8, 7, 6, 6, 5, 4)	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$
37	(8, 7, 7, 6, 5, 4)	$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$
38	(8, 8, 7, 6, 5, 4)	$2^8 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$
39	(8, 8, 7, 6, 5, 5)	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$
40	(8, 8, 7, 6, 6, 5)	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$
41	(8, 8, 7, 7, 6, 5)	$2^7 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41$
42	(9, 8, 7, 7, 6, 5)	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41$
43	(9, 8, 8, 7, 6, 5)	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43$
44	(9, 9, 8, 7, 6, 5)	$2^{13} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43$
45	(9, 9, 8, 7, 6, 6)	$2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43$
46	(9, 9, 8, 7, 7, 6)	$2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43$
47	(9, 9, 8, 8, 7, 6)	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47$
48	(10, 9, 8, 8, 7, 6)	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47$

**Observação 2.3.20.** A proposição 2.3.19 é verificada para todo  $n \geq 16$  e  $\kappa(n)$  par, exceto para  $n = 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 43$ . Nestes oito casos, temos de considerar a partição  $\lambda_n$  encontrada em [1] :

$n$	$\lambda_n$	$\chi_{\lambda_n}(1)$
17	(7, 4, 3, 1, 1, 1)	$2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$
18	(9, 6, 2, 1)	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$
19	(8, 5, 4, 1, 1)	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$
20	(8, 7, 3, 1, 1)	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$
22	(13, 5, 2, 2)	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$
23	(12, 5, 2, 2, 2)	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$
24	(12, 5, 4, 2, 1)	$2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$
43	(9, 8, 7, 7, 6, 6)	$2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43$

Note também que aqui  $\lambda_n$  não é auto-associada, então  $\chi_{\lambda_n} \downarrow_{\mathcal{A}_n}$  é irredutível.

Finalizamos esta subseção com o seguinte teorema.

**Teorema 2.3.21.** Seja  $n \geq 15$  e  $p$  um primo médio em  $\mathcal{P}_n$ . Então existe uma partição  $\lambda \vdash n$  não auto-associada tal que todo  $p$  divide  $\chi_\lambda(1)$ .

*Demonstração.* Para  $n \geq 49$ , as proposições 2.3.11 e 2.3.19 mostram que tal partição  $\lambda$  é de fato a nossa partição  $\alpha_n$ . Agora para  $15 \leq n \leq 48$ , segue das observações 2.3.12 e 2.3.20 que  $\lambda$  continua a ser a nossa partição  $\alpha_n$ , exceto para  $n = 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 32, 43$ . Nestes dez casos, a partição procura é a partição  $\lambda_n$  mostrada nas observações 2.3.12 e 2.3.20.  $\square$

Particularmente, se olharmos nos graus dos caracteres  $\chi_\lambda$  com  $\lambda \vdash n$  para  $15 \leq n \leq 48$  do teorema acima, verificamos que de fato todos primos  $\leq n$  dividem  $\chi_\lambda(1)$ . Então, para primos pequenos resta analisar se para  $n \geq 49$  todos primos pequenos dividem  $\chi_\lambda(1)$ .

### 2.3.3 Primos Pequenos

Seja  $\lambda_n$  uma qualquer partição de  $n$ . Claramente, somente um número finito de números naturais  $q$  aparecem em  $\mathcal{H}_{\lambda_n}$ . É também claro que  $q$  deve ser  $\leq \gamma_n$ . Quando  $q$  não aparece em  $\mathcal{H}_{\lambda_n}$  (ou seja,  $\mathcal{H}_{\lambda_n}$  não possui nenhum  $q$ -gancho) diremos que  $\lambda_n$  é um  $q$ -core. De outro lado, se para um determinado  $q$  natural  $\lambda_n$  não seja um  $q$ -core, é sempre possível obter a partir de  $\lambda_n$  uma partição de um inteiro  $m < n$  que seja um  $q$ -core. Neste caso, denotemos por  $[\lambda_n]_q$  essa partição.

Mostremos agora como obter  $[\lambda_n]_q$ . Primeiramente, observe que nenhuma partição é um 1-core, pois o elemento da última coluna da última linha de  $\mathcal{H}_{\lambda_n}$  é sempre 1. Seja  $q \geq 2$  e seja  $\lambda_n$  uma partição que não seja um  $q$ -core. Suponha que o inteiro  $q$  aparece na posição  $(i, j)$  em  $\mathcal{H}_{\lambda_n}$ , isso significa que  $h_{i,j}^{\lambda_n} = q$ . Chamemos por  $q$ -aro o sub-diagrama formado de todas as caixas em  $T_{\lambda_n}$  de posição  $(r, s)$  tal que,  $r \geq i$  e  $s \geq j$ . Formemos assim dois tipos de  $q$ -aro:

- $q$ -aro simples, quando o  $q$ -aro é formado apenas por caixas da linha  $i$  e da coluna  $j$ ; ou
- $q$ -aro não simples.

O método que utilizamos para obter o  $[\lambda_n]_q$  é eliminar os  $q$ -aros em  $T_{\lambda_n}$  com a seguinte regra:

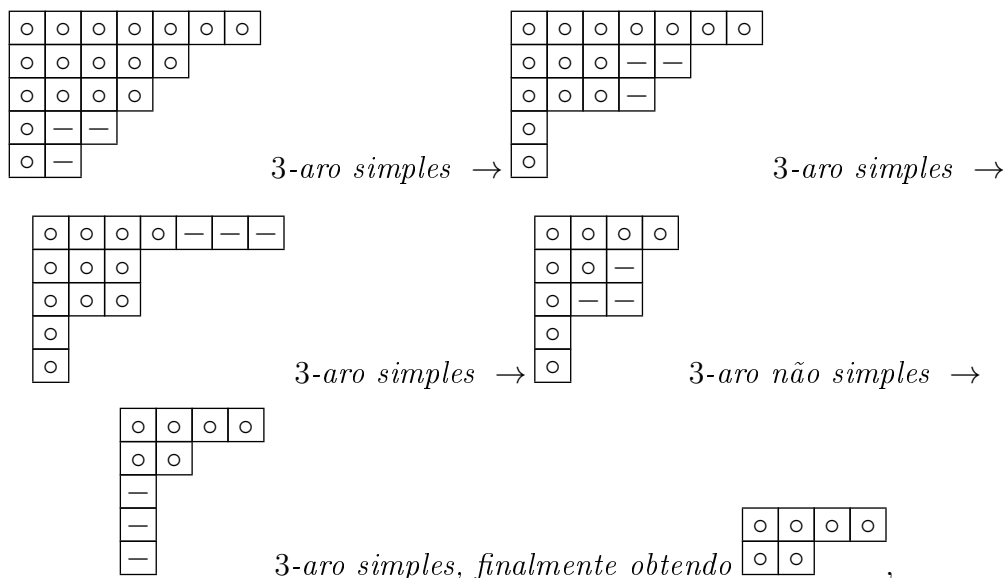
- Elimine todo o  $q$ -aro, se for simples; ou
- Elimine o  $q$ -aro com exceção da caixa de posição  $(i, j)$ , se for não simples.

Não existe única forma na eliminação desses  $q$ -aros, mas a partição  $[\lambda_n]_q$  é única e independe dessa ordem, como pode ser visto em [13] seção 2.7. Veja o exemplo abaixo.

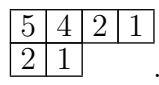
**Exemplo 2.3.22.** *Seja  $(7, 5, 4, 3, 2) \vdash 21$ . Seu gráfico de ganchos  $\mathcal{H}_{(7,5,4,3,2)}$  é*

11	10	8	6	4	2	1
8	7	5	3	1		
6	5	3	1			
4	3	1				
2	1					

Claramente  $(7, 5, 4, 3, 2)$  não é um 3-core. Encontremos agora o  $[(7, 5, 4, 3, 2)]_3$ . Simbolizemos por  $(-)$  eliminação e por  $(\circ)$  conservação de caixas.



um 3-core com gráfico de ganchos



Portanto  $[(7, 5, 4, 3, 2)]_3 = (4, 2) \vdash 6$ . Note que se mudarmos a ordem das eliminações dos 3-aros teríamos a mesma partição resultante.

Chamemos por  $q$ -peso a quantidade de  $q$ -aros excluídos até obtermos o  $q$ -core. No exemplo acima, o 3-peso é 5. Note que o 3-peso foi igual a quantidade de múltiplos de 3 que ocorre em  $\mathcal{H}_{(7,5,4,3,2)}$ . Segue dessa observação o próximo teorema.

**Teorema 2.3.23.** *Sejam  $\lambda_n$  uma qualquer partição de  $n$  e  $2 \leq q \in \mathbb{N}$ . A quantidade de múltiplos de  $q$  que ocorre em  $\mathcal{H}_{\lambda_n}$  é igual ao  $q$ -peso. Em particular,  $\lambda_n$  é um  $q$ -core se, e somente se, nenhum comprimento de gancho em  $\mathcal{H}_{\lambda_n}$  é divisível por  $q$ .*

*Demonstração.* Ver [13] p. 86. □

Segue do teorema acima que  $n > q \cdot (q\text{-peso})$  para qualquer  $q$ -gancho de  $\mathcal{H}_{\lambda_n}$ .

O lema a seguir nos mostra em determinadas circunstâncias qual é a relação entre a potência  $p^a$  de um primo  $p \leq k$  que pode ocorrer em  $\mathcal{H}_{\alpha_n}$  e a potência  $p^b$  a satisfazer  $p^b \leq n < p^{b+1}$ .

**Lema 2.3.24.** *Seja  $n \geq 32$  e seja  $p$  um primo  $\leq k = \kappa(n)$  com  $p \neq 5$  se  $100 \leq n \leq 124$ . Tome  $a$  e  $b$  inteiros definidos por  $p^a \leq \frac{5k+1}{2} < p^{a+1}$  e  $p^b \leq n < p^{b+1}$ . Então  $a < b$ .*

*Demonstração.* Seja  $c$  um inteiro positivo satisfazendo  $p^c \leq k < p^{c+1}$ . Claramente  $b \geq 2c$ , pois  $n \geq k^2$  e  $p^{2c} \leq k^2 < p^{(2c+1)+1}$ .

Primeiro assumamos que  $p = 2$ . Então,

$$\frac{5 \cdot 2^c + 1}{2} \leq \frac{5k+1}{2} \leq \frac{5 \cdot 2^{c+1} + 1}{2} < \frac{5 \cdot 2^{c+1} + 3 \cdot 2^{c+1}}{2} = \frac{8 \cdot 2^{c+1}}{2} = 2^{c+3},$$

implicando  $a \leq c+2$ . Se  $c > 2$ , então  $b \geq 2c > c+2 \geq a$ . Assumamos agora  $c$  igual a 1 ou 2. Deste modo,  $2^1 \leq k < 2^{2+1} \implies 5 \leq k \leq 7$  e  $\frac{5k+1}{2}$  igual a 13,  $\frac{31}{2}$  e 18 respectivamente. Portanto neste caso,  $a$  deve ser igual a 3 e 4, mas  $b \geq 5$  por  $2^5 \leq n$ , então  $b > a$ .

Agora assumamos  $p$  sendo um primo ímpar. Então,

$$\frac{5 \cdot p^c + 1}{2} \leq \frac{5k+1}{2} < \frac{5 \cdot p^{c+1} + 1}{2} < \frac{5 \cdot p^{c+1} + p^{c+1}}{2} = 3p^{c+1} \leq p^{c+2},$$

implicando  $a \leq c+1$ . Se  $c \geq 2$ , então  $b \geq 2c > c+1 \geq a$ . Resta verificar apenas quando  $c = 1$  e  $a$  igual a 1 ou 2.

Quando  $c = 1$  e  $a = 1$ , temos  $b \geq 2c = 2 > 1 = a$ . Agora quando  $c = 1$  e  $a = 2$ , temos  $p^2 \leq \frac{5k+1}{2} \implies p \leq \sqrt{\frac{5k+1}{2}}$ . Procurando as raízes da equação do segundo grau abaixo

$$\sqrt{\frac{5k+1}{2}} = \frac{10k-2}{25} \implies 200k^2 - 3205k - 617 = 0$$

encontramos  $k = \frac{641 \pm 25\sqrt{689}}{80}$ . Por  $k$  ser um inteiro positivo, ao fazermos o estudo de sinais para a inequação  $\sqrt{\frac{5k+1}{2}} \leq \frac{10k-2}{25}$ , achamos  $k \geq \frac{641+25\sqrt{689}}{80} \sim 16,21$ . Assim assumindo  $k \geq 17$ , segue

$$p^3 \leq \frac{5k+1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5k+1}{2}} \leq \frac{5k+1}{2} \cdot \frac{10k-2}{25} = \frac{50k^2-2}{50} = k^2 - \frac{1}{25} < n.$$

Portanto  $b \geq 3 > 2 = a$ . Agora assumindo  $5 \leq k \leq 16$ , temos  $32 \leq n \leq 288$  e  $13 \leq \frac{5k+1}{2} \leq \frac{81}{2}$ . Assim por  $a = 2$ , temos  $p = 3$  ou  $p = 5$ . Vejamos o que acontece em cada um desses casos:

- Se  $p = 3$  e  $c = 1$ , temos  $3^1 \leq k < 3^2 \implies 5 \leq k \leq 8 \implies 32 \leq n \leq 80$ . Assim  $b = 3 > 2 = a$ ;

- Se  $p = 5$  e  $a = 2$ , temos  $5^2 = 25 \leq \frac{5k+1}{2} \implies k \geq \frac{49}{5} \implies k \geq 10$ , pois  $k$  é um inteiro. Assim  $n \geq 100$ . No entanto, os inteiros em  $[100, 124]$  são excluído quando  $p = 5$ , portanto  $n \geq 125$  mostrando  $b \geq 3 > 2 = a$ . Encerrando a demonstração desse lema.

□

**Teorema 2.3.25.** *Seja  $n \geq 32$  e seja  $k = \kappa(n)$ . Se  $p$  é um primo pequeno em  $\mathcal{P}_n$ , então  $p$  divide  $\chi_{\alpha_n}(1)$ .*

*Demonstração.* Para cada inteiro positivo  $r$ , defina por  $\mathcal{D}_{\alpha_n}(p^r)$  a quantidade de comprimento de ganchos em  $\mathcal{H}_{\alpha_n}$  que são divisíveis por  $p^r$ . Segue do teorema 2.3.23 que  $\mathcal{D}_{\alpha_n}(p^r)$  é igual ao  $p^r$ -peso. Assim

$$n > \mathcal{D}_{\alpha_n}(p^r) \cdot p^r \implies \mathcal{D}_{\alpha_n}(p^r) < \frac{n}{p^r}.$$

Note que  $\mathcal{D}_{\alpha_n}(p^r)$  é um inteiro, logo  $\mathcal{D}_{\alpha_n}(p^r) \leq \left\lfloor \frac{n}{p^r} \right\rfloor$  para cada  $r$ .

Agora considere  $t \geq 2$  um número natural. Denotemos por  $x_p(t)$  o expoente de  $p$  na fatoração primária de  $t$ , desse modo

$$x_p \left( \prod_{i,j} h_{i,j}^{\alpha_n} \right) = \sum_{r=1}^{\infty} \mathcal{D}_{\alpha_n}(p^r) \quad \text{e} \quad x_p(n!) = \sum_{r=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^r} \right\rfloor.$$

Como  $\mathcal{D}_{\alpha_n}(p^r) \leq \left\lfloor \frac{n}{p^r} \right\rfloor$  para cada  $r$ , segue que  $x_p \left( \prod_{i,j} h_{i,j}^{\alpha_n} \right) \leq x_p(n!)$  para cada  $p$ .

Sabemos que o maior comprimento de gancho em  $\mathcal{H}_{\alpha_n}$  é  $\gamma_n$  que pode ter valores

$$\begin{aligned} & \frac{5k-3}{2}, \frac{5k-1}{2} \text{ e } \frac{5k+1}{2} && \text{quando } k \text{ é ímpar, ou} \\ & \frac{5k-4}{2}, \frac{5k-2}{2} \text{ e } \frac{5k}{2} && \text{quando } k \text{ é par.} \end{aligned}$$

Assuma que  $d, b, a$  são inteiros positivos definidos por  $p^d \leq \gamma_n < p^{d+1}$ ,  $p^a \leq \frac{5k+1}{2} < p^{a+1}$  e  $p^b \leq n < p^{b+1}$  respectivamente. Pela maneira que são definidos, claramente  $d \leq a$  pois para cada  $k$  temos  $\gamma_n \leq \frac{5k+1}{2}$ .

Segue do lema 2.3.24 que  $a < b$  para todo  $n \geq 32$  com  $p \neq 5$  quando  $100 \leq n \leq 124$ , mas isto implica pela observação acima que  $d < b$ . Agora para  $p = 5$  quando  $100 \leq n \leq 119$  ainda temos  $d < b$ , pois nestes casos  $\gamma_n = 23$  ou  $24 \implies 5 \leq \gamma_n \leq 5^2$  e  $5^2 \leq 100, \dots, 119 \leq 5^3$ , mostrando que  $b = 2$  e  $d = 1$ .





Se  $n = 122$ , temos  $\alpha_{122} = (17, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6)$  e  $\mathcal{H}_{\alpha_{121}}$  igual a

27	26	25	24	23	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	1
24	23	22	21	20	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1		
22	21	20	19	18	17	15	13	11	9	7	5	3	1			
20	19	18	17	16	15	13	11	9	7	5	3	1				
18	17	16	15	14	13	11	9	7	5	3	1					
16	15	14	13	12	11	9	7	5	3	1						
14	13	12	11	10	9	7	5	3	1							
12	11	10	9	8	7	5	3	1								
10	9	8	7	6	5	3	1									
8	7	6	5	4	3	1										
6	5	4	3	2	1											

Se  $n = 123$ , temos  $\alpha_{123} = (17, 16, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6)$  e  $\mathcal{H}_{\alpha_{123}}$  igual a

27	26	25	24	23	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	3	1
25	24	23	22	21	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	1	
22	21	20	19	18	17	15	13	11	9	7	5	3	1			
20	19	18	17	16	15	13	11	9	7	5	3	1				
18	17	16	15	14	13	11	9	7	5	3	1					
16	15	14	13	12	11	9	7	5	3	1						
14	13	12	11	10	9	7	5	3	1							
12	11	10	9	8	7	5	3	1								
10	9	8	7	6	5	3	1									
8	7	6	5	4	3	1										
6	5	4	3	2	1											

Se  $n = 124$ , temos  $\alpha_{124} = (17, 16, 15, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6)$  e  $\mathcal{H}_{\alpha_{124}}$  igual a

27	26	25	24	23	22	20	18	16	14	12	10	8	6	5	3	1
25	24	23	22	21	20	18	16	14	12	10	8	6	4	3	1	
23	22	21	20	19	18	16	14	12	10	8	6	4	2	1		
20	19	18	17	16	15	13	11	9	7	5	3	1				
18	17	16	15	14	13	11	9	7	5	3	1					
16	15	14	13	12	11	9	7	5	3	1						
14	13	12	11	10	9	7	5	3	1							
12	11	10	9	8	7	5	3	1								
10	9	8	7	6	5	3	1									
8	7	6	5	4	3	1										
6	5	4	3	2	1											

Note que  $x_5(n!) = \lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lfloor \frac{n}{5^2} \rfloor = 24 + 4 = 28$  e  $x_5(\prod_{i,j} h_{i,j}^{\alpha_n}) = \mathcal{D}_{\alpha_n}(5) + \mathcal{D}_{\alpha_n}(5^2) = 25$  para todo  $120 \leq n \leq 124$ , mostrando que 5 divide  $\chi_{\alpha_n}(1)$ . Isto encerra a demonstração do teorema.  $\square$

*Demonstração do teorema 2.1.2 (Conjectura de Alvis).* Suponha que  $n \geq 15$ . Tomemos a partição  $\lambda$  igual a  $\alpha_n$ , exceto para  $n = 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 32, 43$ . Para esses casos restantes, tomemos  $\lambda$  igual a  $\lambda_n$  mostrada nas observações 2.3.12 e 2.3.20. Note que  $\lambda$  é não auto-associada e portanto  $\chi_\lambda \downarrow_{\mathcal{A}_n}$  é irreduzível. Os teoremas 2.3.21 e 2.3.25 mostram que todos os primos pequenos e médio no conjunto  $\mathcal{P}_n$  dividem  $\chi_\lambda(1)$ . Agora seja  $p$  um primo grande em  $\mathcal{P}_n$ . Como em  $\mathcal{H}_\lambda$  não existe nenhum  $p$ -gancho devido  $p > \gamma$ , e  $p$  ocorrer em  $n!$ , temos que  $p$  é um divisor de  $\frac{n!}{\prod_{i,j} h_{i,j}^\alpha}$ . Então, segue do teorema 1.2.29 que  $p$  divide  $\chi_\lambda(1)$ . Isso encerra a demonstração da Conjectura de Alvis.  $\square$



# Capítulo 3

## Degree Graphs

Vamos neste capítulo dar uma idéia básica sobre grafos e estudar um em particular, conhecido por Degree Graph. Esse grafo no principio foi estudado para grupos solúveis e só a pouco teve estudos mais aprofundados em outros tipos de grupos. Iremos apresentar alguns desses estudos para alguns grupos simples. Referências para Degree Graph é [10] capítulo 30 e [19] capítulo 18.

### 3.1 Conceitos básicos sobre grafos

Para esta seção recomendamos a referência [5].

Seja  $K$  um conjunto e seja  $[K]^2$  o conjunto de todos os pares  $\{a, b\}$  tais que  $a, b \in K$ .

**Definição 3.1.1** (Grafo). *Um grafo  $\Gamma$  é um par  $(V(\Gamma), A(\Gamma))$  consistindo de um conjunto de vértices  $V(\Gamma) \neq \emptyset$  e um conjunto de arestas  $A(\Gamma) \subseteq [V]^2$ , onde cada aresta é determinada por uma função incidência  $\psi_\Gamma : V \rightarrow [V]^2$ .*

Um grafo  $\Gamma$  é dito orientado (ou dirigido) se o conjunto de arestas formarem um conjunto de pares ordenados, ou equivalente a dizer que existe uma função  $O : A(\Gamma) \rightarrow V$  que chamemos de origem e uma função  $D : A(\Gamma) \rightarrow V$  que chamemos de destino, e todas arestas  $a = \{u, v\} \in A(\Gamma)$  serem direcionadas por estas funções, onde  $O(a) = u$  é dito ser a origem de  $a$  e  $D(a) = v$  o destino de  $a$ . Já para grafos não orientados (ou não dirigidos), a aresta  $\{u, v\}$  e  $\{v, u\}$  denotam a mesma aresta  $a$ .

Em um grafo  $\Gamma$ : uma aresta com mesma ponta são chamadas de *loop* e uma aresta com distintas pontas um *link*; dois *link's* com as mesmas pontas são chamadas paralelas. Os vértices  $u, v$  de um aresta  $a = \{u, v\}$  são chamados de adjacentes ou incidentes de  $a$ .

**Definição 3.1.2.** Um grafo  $\Gamma$  é dito ser completo se e somente se o conjunto de vértices  $V(\Gamma)$  são todos adjacentes (ou todos incidentes de alguma arestas).

Pela definição acima obviamente não faz sentido analisar completude em grafos unitários ou vazios (grafos com um ou nenhum elemento no conjunto de vértices).

Um subgrafo  $\Phi$  de um grafo  $\Gamma$  é qualquer grafo tal que  $V(\Phi) \subseteq V(\Gamma)$  e  $A(\Phi) \subseteq A(\Gamma)$ .

**Definição 3.1.3** (Grafo Simples). Um grafo  $\Gamma$  é dito ser simples, se nenhuma aresta em  $A(\Gamma)$  é um loop e se nenhum par de arestas forem paralelas.

Para grafos não ordenados, sua simplicidade se dá pelo fato somente de não existir loop's, já que não são consideradas arestas paralelas.

**Exemplo 3.1.4.** Seja  $\Gamma$  o par  $V(\Gamma) = \{\text{números primos}\}$  e  $A(\Gamma) \subset [V(\Gamma)]^2$  definida pela função incidência  $\Psi_\Gamma : V \rightarrow [V(\Gamma)]^2$  unindo os vértices  $u, v$  se seus quadrados forem ímpares. O conjunto  $V(\Gamma)$  é infinito e todos seus elementos são adjacentes exceto com o vértice 2, pois  $2^2 = 4$  é par.

Os grafos comumente são expressados por desenhos, com vértices geralmente sendo pontos e arestas sendo um segmento (reto, curvo, circular, etc) ligando os vértices adjacentes.

**Definição 3.1.5.** Definimos por um caminho  $C$  em um grafo  $\Gamma$ , um subgrafo simples formado pelo par  $(V(C), A(C))$  com

$$\emptyset \neq V(C) = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \text{ e } A(C) = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\},$$

onde os  $x_i$  são todos distintos. Os vértices  $x_0$  e  $x_k$  são chamados de pontas e  $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$  de interior do caminho  $C$ .

Naturalmente um caminho  $C$  é expresso por  $x_0x_1 \cdots x_k$  e chamado de caminho  $x_0$  a  $x_k$  ou simplesmente caminho  $x_0 - x_k$ . Além disso,  $x_0x_1 \cdots x_k$  e  $x_kx_{k-1} \cdots x_0$  denotam o mesmo caminho. Dois ou mais caminhos são ditos independentes, se nenhum deles contém um vértice interno do outro. Dois caminhos  $x_0 - x_k$  são independentes se, e somente se,  $x_0$  e  $x_k$  são seus únicos vértices em comum.

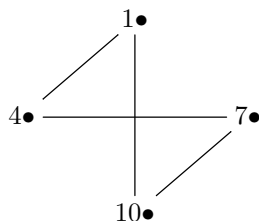
Um par de vértice  $\{u, v\}$  são ditos conexos se existir um caminho  $u - v$  os ligando.

A distância  $d_\Gamma(u, v)$  no grafo  $\Gamma$  para dois vértices  $u, v$  em  $V(\Gamma)$  é o menor comprimento do caminho  $u - v$  (o comprimento é a quantidade de arestas ligando os vértices). Caso tal caminho  $u - v$  não existir, então diremos que  $d_\Gamma(u, v) = \infty$ . Em particular, se o grafo for completo todos seus caminho têm comprimento 1.

**Definição 3.1.6.** Um grafo  $\Gamma$  com no mínimo dois vértices é dito ser conexo se para qualquer par de vértices forem vértices conexos em  $\Gamma$ , e desconexo caso contrário.

No entanto, em um grafo  $\Gamma$  se  $V(\Gamma)$  for unitário ou vazio não faz sentido verificar sua conexividade. Particularmente, um grafo é completo se e somente se for conexo e todo caminho tiver comprimento 1. Mas note que só a conexividade de um grafo não garante sua completude. Veja o exemplo a seguir.

**Exemplo 3.1.7.** Seja  $\Phi$  o par  $V(\Phi) = \{1, 4, 7, 10\}$  e  $A(\Phi) \subseteq [V(\Phi)]^2$  definida pela função incidência  $\Psi_\Phi : V(\Phi) \rightarrow [V(\Phi)]^2$  unindo vértices  $u, v$  se  $|u - v|$  é ímpar. O grafo  $\Phi$  fica assim



Note que o grafo  $\Phi$  é conexo porém não é completo devido os pares de vértices 4, 10 e 1, 7 não serem vértices adjacentes.

Em um grafo conexo  $\Gamma$ , definimos por diâmetro o

$$d(\Gamma) = \max\{d_\Gamma(u, v) \mid u, v \in V(\Gamma)\}.$$

Caso  $\Gamma$  é desconexo, então  $d(\Gamma) = \max\{d_\Gamma(u, v) \mid u - v \text{ é um caminho de } \Gamma\}$ .

Seja  $\Gamma$  um grafo. Chamemos por componente conexa  $\Gamma_i$ , um qualquer subgrafo conexo maximal de  $\Gamma$ . No caso em que  $V(\Gamma_i)$  é unitário, chamemos  $\Gamma_i$  de componente unitária. Como podemos ver, um grafo  $\Gamma$  desconexo, sempre pode ser particionado em componentes conexas e unitárias.

## 3.2 O Degree Graph

Vamos agora definir um importante grafo que é conhecido por Degree Graph. Este grafo tem um estudo completo para grupos finitos simples feito por Donald L. White em [21, 22, 23, 24] sobre completude, conexividade e diâmetro de tais grafos. Vamos nesta seção apresentar alguns desses resultados.

**Definição 3.2.1** (Degree Graph). Seja  $G$  um grupo finito e seja  $cd(G)$  o conjunto dos distintos graus dos caracteres irredutíveis de  $G$ . O Degree Graph

$\Delta(G)$  é o grafo simples não orientado formado pelo par  $(\rho(G), A(\Delta(G)))$ , onde  $\rho(G)$  é o conjunto dos primos divisores dos elementos de  $cd(G)$  e  $A(\Delta(G))$  consiste dos pares  $\{p, q\}$  tais que  $pq$  divide algum  $\alpha \in cd(G)$ .

Vejam alguns resultado para Degree Graphs em grupos solúveis.

**Teorema 3.2.2.** *Se  $G$  um grupo solúvel, então  $\Delta(G)$  tem no máximo duas componentes conexas. (Aqui estamos considerando componente unitária sendo conexa)*

*Demonstração.* Ver [10] p. 413. □

**Teorema 3.2.3.** *Seja  $G$  um grupo solúvel. Então as seguintes propriedades são satisfeitas:*

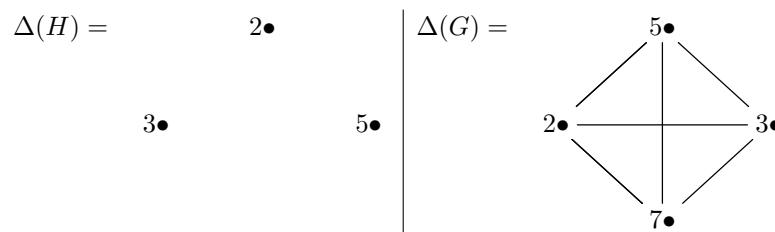
- (a) *Se  $\Delta(G)$  é conexo, então  $d(\Delta(G)) \leq 3$ ; ou*
- (b) *Se  $\Delta(G)$  tem duas componentes conexas  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$ , então  $\Delta_i$  é unitária ou completa para  $i = 1, 2$ .*

*Demonstração.* Ver [19] p. 243. □

Para mais resultados sobre Degree Graphs em grupos solúveis vejam em [10] capítulo 30 e [19] capítulo 18.

Vamos agora estudar os Degree Graphs em grupos finitos simples. Começamos com um exemplo nos grupos  $\mathcal{A}_n$ .

**Exemplo 3.2.4.** *Seja  $H = \mathcal{A}_5$  e  $G = \mathcal{A}_7$ . Pelo teorema 1.2.29 ou pelo Atlas [4] computamos os conjuntos  $cd(H) = \{1, 2^2, 3, 5\}$  e  $cd(G) = \{1, 2 \cdot 3, 2 \cdot 7, 3 \cdot 5, 5 \cdot 7, 2 \cdot 5, 3 \cdot 7\}$ . Com isso  $\rho(H) = \{2, 3, 5\}$  e  $\rho(G) = \{2, 3, 5, 7\}$ , com seus Degree Graphs a seguir*



*Note que  $\Delta(H)$  não é conexo e portanto não é completo. Mas  $\Delta(G)$  é completo, pois é conexo e todo caminho tem comprimento 1.*



### 3.2.1 O Degree Graph de alguns Grupos Finitos Simples

Enunciemos a seguinte classificação para grupos finitos simples. Cada grupo finito simples é isomorfo a um dos seguintes grupos:

- Um grupo cíclico  $\mathbb{Z}_p$  com ordem prima  $p$ ; ou
- Um grupo alternado  $\mathcal{A}_n$  com  $n \geq 5$ ; ou
- Um grupo simples do tipo Lie clássico ou excepcional; ou
- Um dos 26 grupos esporádicos.

Mais informações sobre essa classificação veja em [25].

Começemos enunciando um importante teorema para a análise dos Degree Graphs para grupos finitos simples.

**Teorema 3.2.5** (Itô-Michler). *Seja  $G$  um grupo não abeliano finito simples e seja  $\pi(G)$  o conjunto dos primos que dividem a ordem de  $G$ . Então  $\rho(G) = \pi(G)$ .*

*Demonstração.* Ver [19] observação 13.13. □

Segue do teorema acima que para todo grupo  $G$  não abeliano finito simples, se  $cn(G) = 1$  então seu Degree Graph é completo.

**Proposição 3.2.6.** *Para  $n \geq 5$ , o Degree Graph  $\Delta(\mathcal{A}_n)$  é completo a menos de  $n$  igual a 5, 6 e 8. Para  $n = 2, 3$  temos  $\rho(\mathcal{A}_n) = \emptyset$ , e  $n = 4$  temos  $\rho(\mathcal{A}_4) = \{3\}$ .*

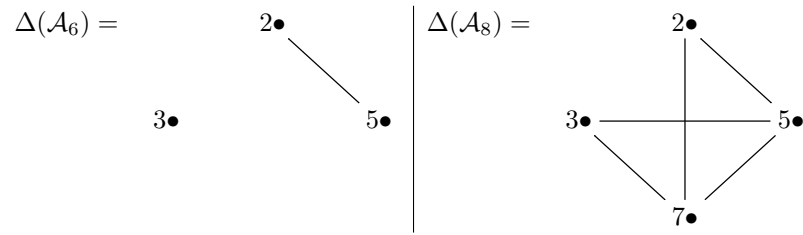
*Demonstração.* O teorema 2.1.2 (A conjectura de Alvis) mostra que o grafo  $\Delta(\mathcal{A}_n)$  é completo para  $n \geq 15$  devido ter o número de cobertura igual a 1. Para  $n = 2, 3$  os caracteres irreduzíveis são todos lineares, logo o conjunto  $\rho(\mathcal{A}_n) = \emptyset$ . Para  $n = 4$ , facilmente vemos que o conjunto  $\rho(\mathcal{A}_4) = \{3\}$  pelo teorema 1.2.29 ou pelo Atlas [4]. Para  $n = 5, 7$ , o resultado segue do exemplo anterior. Para  $n = 6, 8$ , segue do teorema 1.2.29 ou pelo Atlas [4] que

$$cd(\mathcal{A}_6) = \{1, 5, 2^3, 3^2, 2 \cdot 5\}$$

e

$$cd(\mathcal{A}_8) = \{1, 7, 2 \cdot 7, 2^2 \cdot 5, 3 \cdot 7, 2^2 \cdot 7, 5 \cdot 7, 3^2 \cdot 5, 2^3 \cdot 7, 2^6, 2 \cdot 5 \cdot 7\}.$$

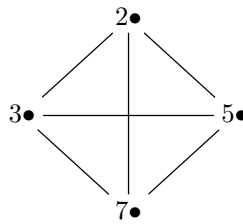
Com isso  $\rho(\mathcal{A}_6) = \{2, 3, 5\}$  e  $\rho(\mathcal{A}_8) = \{2, 3, 5, 7\}$ . Desta forma, os Degree Graphs ficam assim



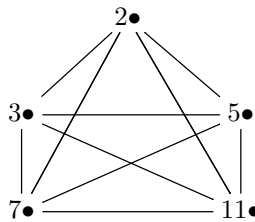
Agora façamos abaixo uma tabela considerando os outros valores de  $n$ . Nela exibiremos uma adequada cobertura para mostrar que os grafos  $\Delta(\mathcal{A}_n)$  são completos

$n$	$ \mathcal{A}_n $	$\lambda \vdash n$	$\chi_\lambda(1)$
9	$2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	$(5, 1, 1, 1, 1)$	$5 \cdot 7$
		$(5, 4)$	$2 \cdot 3 \cdot 7$
		$(5, 2, 2)$	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$
10	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$	$(4, 3, 3)$	$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
11	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$	$(5, 3, 2, 1)$	$2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
12	$2^9 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$	$(9, 2, 1)$	$320 = 2^6 \cdot 5$
		$(7, 1, 1, 1, 1, 1)$	$462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$
		$(6, 5, 1)$	$1155 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
13	$2^9 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	$(10, 1, 1, 1)$	$220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$
		$(7, 4, 2)$	$6006 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
		$(4, 3, 3, 2, 1)$	$15015 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
14	$2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$	$(5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	$715 = 5 \cdot 11 \cdot 13$
		$(8, 5, 1)$	$6006 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
		$(8, 4, 1, 1)$	$13650 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13$

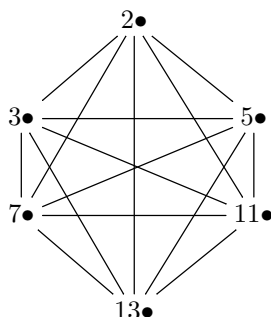
Veja como fica os Degree Graphs de  $\Delta(\mathcal{A}_n)$  para  $n = 9, 10$



Agora veja o  $\Delta(\mathcal{A}_n)$  para  $n = 11, 12$



Por último veja  $\Delta(\mathcal{A}_n)$  para  $n = 13, 14$



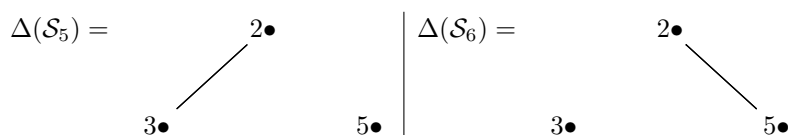
Facilmente se nota que todos os três Degree Graphs desenhados acima são completos. Com isto encerramos a demonstração dessa proposição.  $\square$

Uma pergunta natural é a seguinte. Se  $n \geq 2$ , para quais valores de  $n$  os grafos  $\Delta(\mathcal{S}_n)$  são iguais a  $\Delta(\mathcal{A}_n)$ ? A resposta para quando  $\Delta(\mathcal{A}_n)$  é completo, segue do teorema 1.2.29 que mostra que para cada caracteres irreduzíveis da cobertura  $S$  utilizada para mostrar a completude de  $\Delta(\mathcal{A}_n)$ ; ou tem o mesmo grau quando fazemos a indução dele a  $\mathcal{S}_n$ , ou tem o grau multiplicado por 2. Consequentemente a cobertura  $S$  mostra a completude de  $\Delta(\mathcal{S}_n)$ . Agora para responder os casos quando  $\Delta(\mathcal{A}_n)$  não são completos, façamos o estudo dos Degree Graphs dos grupos simétricos  $\mathcal{S}_n$ .

**Proposição 3.2.7.** *Os Degree Graphs  $\Delta(\mathcal{S}_n)$  ( $n \geq 2$ ) são completos, exceto para  $n = 2, 3, 4, 5, 6$ .*

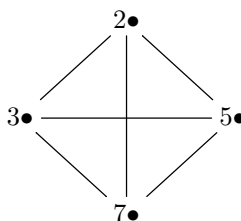
*Demonstração.* Como dissemos anteriormente para qualquer valor de  $n$  tal que o grafo  $\Delta(\mathcal{A}_n)$  é completo também teremos o grafo  $\Delta(\mathcal{S}_n)$  completo. Então segue da proposição 3.2.6 faltar verificar apenas  $n = 2, 3, 4, 5, 6, 8$ . Para estes  $n$ , os graus dos caracteres irreduzíveis de  $\mathcal{S}_n$  são encontrados nos apêndices de [13].

Começemos olhando na tabela de caracteres de  $\mathcal{S}_2$ . Como são todos caracteres lineares  $\rho(\Delta(\mathcal{S}_2)) = \emptyset$ . Para  $n = 3$ ,  $\rho(\Delta(\mathcal{S}_3)) = \{2\}$  é unitário. Para  $n = 4$ , o conjunto  $cd(\mathcal{S}_4) = \{1, 2, 3\}$ , isto é, todo par de vértices são desconexos. Para  $n = 5$ , o conjunto  $cd(\mathcal{S}_5) = \{1, 2^2, 5, 2 \cdot 3\}$ . Para  $n = 6$ , o conjunto  $cd(\mathcal{S}_6) = \{1, 2^4, 3^2, 5, 2 \cdot 5\}$ . Veja abaixo esses dois Degree Graphs



O último caso é  $n = 8$ . As partições  $(5, 1, 1, 1)$ ,  $(3, 3, 2)$ ,  $(4, 2, 1, 1)$  têm para seus caracteres irreduzíveis associados os respectivos graus:  $\chi_{(5,1,1,1)}(1) = 5 \cdot 7$ ;

$\chi_{(3,3,2)}(1) = 2 \cdot 3 \cdot 7$ ; e  $\chi_{(4,2,1,1)}(1) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ . Formando uma cobertura de  $\mathcal{S}_8$  adequada para mostrar que o Degree Graph  $\Delta(\mathcal{S}_8)$  é completo



Isto completa a demonstração dessa proposição. □

Pelas proposições 3.2.6 e 3.2.7, para  $n \geq 2$  os Degree Graphs  $\Delta(\mathcal{A}_n)$  e  $\Delta(\mathcal{S}_n)$  são distintos somente para  $n = 3, 4, 5, 8$ .

Vamos agora estudar os Degree Graphs dos grupos simples esporádicos. Veja na tabela abaixo os nomes dos 26 grupos esporádicos, notação adotada

e suas ordens:

Nome	Notação	Ordem
Mathieu	$M_{11}$	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$
"	$M_{12}$	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$
"	$M_{22}$	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
"	$M_{23}$	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
"	$M_{24}$	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
Janko	$J_1$	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$
Hall-Janko	$J_2$	$2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$
Janko	$J_3$	$2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19$
"	$J_4$	$2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$
Suzuki	$Suz$	$2^{13} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
Higman-Sims	$HS$	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$
McLaughlin	$M^cL$	$2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$
Conway	$Co_3$	$2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
"	$Co_2$	$2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
"	$Co_1$	$2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23$
Fischer	$Fi_{22}$	$2^{17} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
"	$Fi_{23}$	$2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23$
"	$Fi'_{24}$	$2^{21} \cdot 3^{16} \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29$
Held	$He$	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 17$
Lyons	$Ly$	$2^8 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67$
Rudvalis	$Ru$	$2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$
O'Nan	$O'N$	$2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 31$
Harada-Norton	$HN$	$2^{14} \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$
Thompson	$Th$	$2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$
Baby Monster	$B$	$2^{41} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 47$
Monster	$M$	$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$

Não entraremos em detalhes sobre definições e propriedades para estes grupos, mais informações veja em [25]. Já às tabelas de caracteres irredutíveis de todos os grupos esporádicos são encontradas no Atlas [4], facilitando assim o estudo dos Degree Graphs para estes grupos.

**Teorema 3.2.8.** *Seja  $G$  um grupo simples esporádico. A menos de  $G$  igual a  $M_{11}, M_{23}, J_1$ , temos que  $\Delta(G)$  é um grafo completo. Para os Degree Graphs não completos temos:  $d(\Delta(M_{11})) = d(\Delta(M_{23})) = 2$ ; e  $d(\Delta(J_1)) = 3$ .*

*Demonstração.* Nesta prova, todos os caracteres utilizados são encontrados em [4] e dados com a mesma notação lá enunciada.

Para os grupos  $Co_2, Co_1, Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24}, HN, Th, B, M$ , encontramos nas tabelas de caracteres irredutíveis os seguintes graus:

Grupos	Graus do caráter
$Co_2$	$\chi_{28}(1) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
$Co_1$	$\chi_{36}(1) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23$
$Fi_{22}$	$\chi_{24}(1) = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
$Fi_{23}$	$\chi_{43}(1) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23$
$Fi'_{24}$	$\chi_{34}(1) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29$
$HN$	$\chi_{29}(1) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$
$Th$	$\chi_{39}(1) = 2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$
$B$	$\chi_{65}(1) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 47$
$M$	$\chi_{188}(1) = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$

Para esses grupos, segue pelo teorema 3.2.5 que o número de cobertura é igual a 1, e dessa forma seus Degree Graphs são completos.

Para os grupos  $M_{12}, M_{22}, M_{24}, J_2, J_3, J_4, Suz, HS, M^cL, Co_3, He, Ly, Ru, O'N$  encontramos uma adequada cobertura para cada grupo, como poderemos ver abaixo:

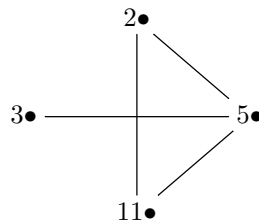
Grupos	Graus
$M_{12}$	$\chi_8(1) = 5 \cdot 11$ $\chi_{11}(1) = 2 \cdot 3 \cdot 11$ $\chi_{13}(1) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
$M_{22}$	$\chi_5(1) = 5 \cdot 11$ $\chi_6(1) = 3^2 \cdot 11$ $\chi_7(1) = 2 \cdot 7 \cdot 11$ $\chi_8(1) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
$M_{24}$	$\chi_{10}(1) = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ $\chi_{14}(1) = 3^2 \cdot 5 \cdot 23$ $\chi_{21}(1) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 2$ $\chi_{23}(1) = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
$J_2$	$\chi_7(1) = 3^2 \cdot 7$ $\chi_8(1) = 2 \cdot 5 \cdot 7$ $\chi_{10}(1) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
$J_3$	$\chi_9(1) = 2^4 \cdot 3 \cdot 17$ $\chi_{10}(1) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19$ $\chi_{13}(1) = 5 \cdot 17 \cdot 19$
$J_4$	$\chi_{19}(1) = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 43$ $\chi_{25}(1) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$ $\chi_{42}(1) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 37$

Continuação da tabela

<i>Suz</i>	$\chi_3(1) = 2^2 \cdot 7 \cdot 13$ $\chi_9(1) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$ $\chi_{13}(1) = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
<i>HS</i>	$\chi_4(1) = 2 \cdot 7 \cdot 11$ $\chi_{13}(1) = 3 \cdot 5^2 \cdot 11$ $\chi_{22}(1) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
<i>M<sup>c</sup>L</i>	$\chi_3(1) = 3 \cdot 7 \cdot 11$ $\chi_5(1) = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ $\chi_{12}(1) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$
<i>Co<sub>3</sub></i>	$\chi_{13}(1) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$ $\chi_{22}(1) = 5^3 \cdot 11 \cdot 23$ $\chi_{27}(1) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23$
<i>He</i>	$\chi_{12}(1) = 2^7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ $\chi_{17}(1) = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 17$ $\chi_{25}(1) = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17$
<i>Ly</i>	$\chi_9(1) = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 37 \cdot 67$ $\chi_{10}(1) = 3 \cdot 5 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67$ $\chi_{33}(1) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 67$
<i>Ru</i>	$\chi_{11}(1) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ $\chi_{21}(1) = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$ $\chi_{24}(1) = 3^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$
<i>O'N</i>	$\chi_{12}(1) = 3^2 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 31$ $\chi_{25}(1) = 2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31$ $\chi_{29}(1) = 2^5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$

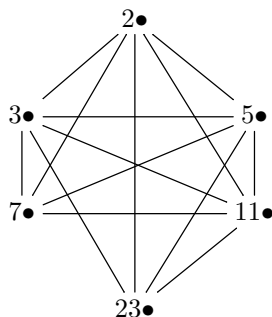
Nestes casos, é fácil observar que os Degree Graphs são completos. Já para os grupos restantes  $M_{11}$ ,  $M_{23}$  e  $J_1$ , os Degree Graphs não são completos como mostremos a seguir.

Para  $M_{11}$ , temos  $cd(M_{11}) = \{1, 2 \cdot 5, 11, 2^4, 2^2 \cdot 11, 3^2 \cdot 5, 5 \cdot 11\}$ . Assim  $\Delta(M_{11})$  é



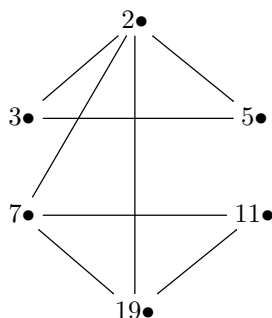
Note que de fato  $M_{11}$  não é completo e  $d(\Delta(M_{11}))=2$ .

Para  $M_{23}$ , temos  $cd(M_{23}) = \{1, 2 \cdot 11, 3^2 \cdot 5, 2 \cdot 5 \cdot 23, 3 \cdot 7 \cdot 11, 11 \cdot 23, 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11, 2^7 \cdot 7, 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11, 3^2 \cdot 5 \cdot 23, 2^3 \cdot 11 \cdot 23\}$ . Logo  $\Delta(M_{23})$  é



Desta forma, o  $\Delta(M_{23})$  não é completo e  $d(\Delta(M_{23})) = 2$ .

Para  $J_1$ , temos  $cd(J_1) = \{1, 2^3 \cdot 7, 2^2 \cdot 19, 7 \cdot 11, 2^3 \cdot 3 \cdot 5, 7 \cdot 19, 11 \cdot 19\}$ . Assim  $\Delta(J_1)$  é



Claramente  $\Delta(J_1)$  não é completo e  $d(\Delta(J_1)) = 3$ . Concluindo a demonstração desse teorema.  $\square$

Para os grupos do tipo Lie, três boas referências seriam [3], [17] e [25] para uma melhor compreensão da classificação destes grupos. Dentre os grupos de tipo Lie estão os grupos lineares, simpléticos, unitários e ortogonais que são conhecidos por grupos clássicos de tipo Lie. Geralmente esses grupos não são simples, mas encontramos simplicidade nos quocientes centrais de seus subgrupos como veremos a seguir. Com a ajuda das tabelas de caracteres irredutíveis encontradas em [7, 8, 20] faremos o estudo dos Degree Graphs para os grupos simples lineares, simpléticos e unitários. Começemos pelos grupos lineares simples.

Grupo Linear Simples. Seja  $\mathbb{F}_q$  um corpo finito de ordem  $q = p^k$ , onde  $p$  é um primo e  $k \geq 1$ , e seja  $V$  um  $\mathbb{F}_q$ -espaço de dimensão  $n$ . Como já dissemos anteriormente  $GL(V)$  é identificado com o grupo  $GL(n, q)$  (grupo das matrizes  $n \times n$  invertíveis sobre  $\mathbb{F}_q$ ). Denotemos por

$$SL(n, q) = \{M \in GL(n, q) \mid \det(M) = 1\},$$



este é o grupo Especial Linear. Seja  $\mathcal{Z}(SL(n, q))$  seu centro, o grupo quociente  $SL(n, q)/\mathcal{Z}(SL(n, q))$  é chamado Projetivo Especial Linear que é denotado por  $PSL(n, q)$ . Os grupos  $GL(n, q)$ ,  $SL(n, q)$ ,  $PSL(n, q)$ , e  $PGL(n, q) = GL(n, q)/\mathcal{Z}(GL(n, q))$  o grupo Projetivo Geral Linear, são chamados por grupos lineares.

A ordem dos grupos projetivos especiais lineares é

$$|PSL(n, q)| = \frac{1}{MDC(n, q-1)} q^{n(n-1)/2} \prod_{i=2}^n (q^i - 1),$$

Os grupos  $PSL(n, q)$  são simples exceto para os casos  $PSL(2, 2) \cong \mathcal{S}_3$  e  $PSL(2, 3) \cong \mathcal{A}_4$ . Existem alguns isomorfismos entre grupos  $PSL(n, q)$  com outros grupos, veja alguns mais importantes

$$\begin{aligned} PSL(2, 4) &\cong PSL(2, 5) \cong \mathcal{A}_5 \\ PSL(2, 7) &\cong PSL(3, 2) \\ PSL(2, 9) &\cong \mathcal{A}_6 \\ PSL(4, 2) &\cong \mathcal{A}_8. \end{aligned}$$

Mais detalhes sobre simplicidade e isomorfismos em  $PSL(n, q)$  veja em [25] p. 45 – 50.

Utilizando a tabela de caracteres irreduzíveis de  $PSL(2, q)$  encontrada em [6] e  $PSL(3, q)$  encontrada em [8], faremos o estudo dos Degree Graphs  $\Delta(PSL(n, q))$  para  $n = 2, 3$ .

Pelo teorema 1.1.30 poderemos encontrar os graus dos caracteres irreduzíveis de  $PSL(2, q)$  pela tabela de caracteres irreduzíveis de  $SL(2, q)$ , que é dada em [6] capítulo 38. Então, se  $q = p^k > 5$  é ímpar,  $\epsilon = (-1)^{(q-1)/2}$  temos

$$cd(PSL(2, q)) = \left\{ 1, q-1, q, q+1, \frac{q+\epsilon}{2} \right\},$$

ou

$$cd(PSL(2, q)) = \{1, 2^k - 1, 2^k, 2^k + 1\}, \text{ se } q = 2^k, k \geq 2.$$

**Teorema 3.2.9.** *Seja  $G \cong PSL(2, q)$ , onde  $q \geq 4$  é uma potência de um primo  $p$ .*

- (1) *Se  $q$  é par, então  $\Delta(G)$  é desconexo. O grafo  $\Delta(G)$  tem duas componentes conexas  $\pi(q-1)$ ,  $\pi(q+1)$  e uma unitária que é  $\{2\}$ . As componentes conexas  $\pi(q-1)$  e  $\pi(q+1)$  formam um subgrafo completo de  $\Delta(G)$ .*
- (2) *Se  $q > 5$  é ímpar, então  $\Delta(G)$  é desconexo. O grafo  $\Delta(G)$  tem uma componente conexa  $\pi((q-1)(q+1))$  e uma unitária  $\{2\}$ .*

- (a) A componente conexa  $\pi((q-1)(q+1))$  forma um subgrafo completo se e somente se  $q-1$  ou  $q+1$  for uma potência de 2.
- (b) Se ambos  $q-1$  e  $q+1$  não forem uma potência de 2, então  $\pi((q-1)(q+1))$  poderá ser particionado como  $\{2\} \cup M \cup P$ , onde  $M = \pi(q-1) - \{2\}$  e  $P = \pi(q+1) - \{2\}$  são ambos conjuntos não vazios. O subgrafo de  $\Delta(G)$  que corresponde a cada conjunto  $M, P$  é completo. Além disso, todos os primos em  $M, P$  são adjacentes a 2, mas nenhum primo em  $M$  é adjacente a qualquer outro primo em  $P$ .

*Demonstração.* Se  $q = 2^k$ ,  $k \geq 2$ , então

$$cd(G) = \{1, 2^k - 1, 2^k, 2^k + 1\}.$$

Como  $2^k - 1$  e  $2^k + 1$  são coprimos, então  $\Delta(G)$  é desconexo. Mas como podemos ver existem duas componentes conexas e uma unitária em  $\Delta(G)$ , que são

$$\{2\}, \pi(2^k - 1) \text{ e } \pi(2^k + 1).$$

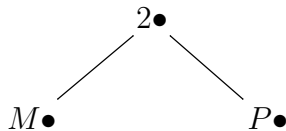
Observe que para cada componente conexa existe um grau divisível por todos os primos dessas componentes. Logo cada componente conexa forma um subgrafo completo de  $\Delta(G)$ . Isto mostra o item 1).

Se  $q = p^k > 5$  é ímpar, então

$$cd(G) = \left\{ 1, q-1, q, q+1, \frac{q+\epsilon}{2} \right\}.$$

Agora 2 divide ambos  $q-1$  e  $q+1$ , e  $\frac{q+\epsilon}{2}$  divide  $q+\epsilon$  (igual a  $q-1$  ou  $q+1$ ). Logo  $\Delta(G)$  é desconexo e possui uma componente conexa  $\pi((q-1)(q+1))$  e uma unitária  $\pi(q) = \{p\}$ .

Seja  $M = \pi(q-1) - \{2\}$  e  $P = \pi(q+1) - \{2\}$ . Dessa forma,  $MDC(q-1, q+1) = 2$ , assim nenhum primo em  $M$  é adjacente a qualquer outro primo em  $P$ , porém, cada primo em  $\pi((q-1)(q+1))$  é adjacente a 2 em  $\Delta(G)$ . Podemos expressar o subgrafo de  $\Delta(G)$  gerado por  $\pi((q-1)(q+1))$  da seguinte forma,



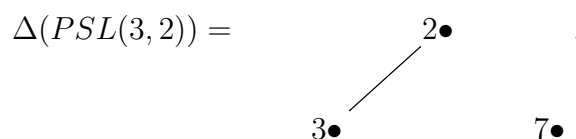
Com isso temos:

- Se  $q-1$  ou  $q+1$  for uma potência de 2, então  $M$  ou  $P$  é vazio, e o subgrafo da componente conexa  $\pi((q-1)(q+1))$  é completo.

- Se ambos  $q - 1$  e  $q + 1$  não forem potências de 2, então  $M$  e  $P$  são não vazios. Assim o subgrafo da componente conexa  $\pi((q - 1)(q + 1))$  é não completo, e ainda pode ser particionado como  $\{2\} \cup M \cup P$ .

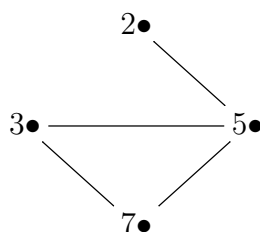
Completando a demonstração desse teorema. □

O próximo caso é descrever os Degree Graphs para os grupos simples  $PSL(3, q)$ . Note que  $PSL(3, 2) \cong PSL(2, 7)$ , logo se  $q = 2$ , o grafo  $\Delta(PSL(3, 2))$  é descrito no teorema 3.2.9 pelo item 2) letra (a) devido  $q + 1 = 8 = 2^3$ . Então seu Degree Graph é como segue abaixo



**Teorema 3.2.10.** *Seja  $G \cong PSL(3, q)$ , onde  $q > 2$  é uma potência de um primo  $p$ .*

- (1)  $\Delta(PSL(3, q))$  é completo se e somente se  $q$  é ímpar e  $q - 1 = 2^i 3^j$  para algum  $i \geq 1, j \geq 0$ ;
- (2) (a) Se  $q = 4$  então  $\Delta(PSL(3, 4))$  é



- (b) Se  $q \neq 4$ , então  $\rho(PSL(3, q)) = \{p\} \cup \pi((q - 1)(q + 1)(q^2 + q + 1))$ . O subgrafo de  $\Delta(PSL(3, q))$  corresponde a  $\pi((q - 1)(q + 1)(q^2 + q + 1))$  é um grafo completo, e  $p$  é adjacente a precisamente estes primos dividindo  $q + 1$  ou  $q^2 + q + 1$ .

*Demonstração.* Se  $q = 4$ , então  $G \cong PSL(3, 4)$  e sua tabela de caracteres irredutíveis é dado no Atlas [4]. Com isso temos o seguinte conjunto de graus

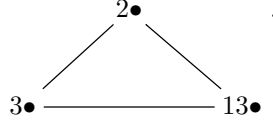
$$cd(G) = \{1, 2^2 \cdot 5, 5 \cdot 7, 3^2 \cdot 5, 3^2 \cdot 7, 2^6\}.$$

Logo o grafo  $\Delta(G)$  é como dissemos no item 2) letra (a). Note que este grafo não é completo, assim 1) é mostrado para este caso.

Se  $q = 3$ , então  $G \cong PSL(3, 3)$ , e ainda pelo Atlas [4] temos

$$cd(G) = \{1, 2^2 \cdot 3, 13, 2^4, 2 \cdot 13, 3^3, 3 \cdot 13\}.$$

Portanto segue abaixo que  $\Delta(G)$  é completo como dissemos em 1)

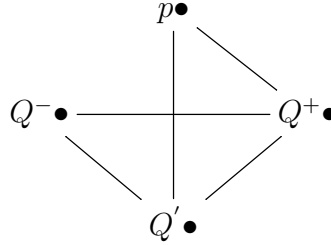


Neste caso,  $p = 3$ ,  $q - 1 = 2$ ,  $q + 1 = 4$ , e  $q^2 + q + 1 = 13$ . Logo  $\rho(G) = \{3\} \cup \pi(2 \cdot 4 \cdot 13) = \{3\} \cup \{2, 13\}$ , com isso segue 2) letra (b) para este caso.

Assuma agora que  $q = p^k > 4$ . Segue do artigo [8] que

$$cd(G) = \left\{ \begin{array}{l} 1, q^3, q(q+1), q^2+q+1, q(q^2+q+1), (q+1)\frac{(q^2+q+1)}{MDC(3, q-1)}, \\ (q+1)(q^2+q+1), (q-1)(q^2+q+1), (q-1)^2(q+1) \end{array} \right\}.$$

Assim todos os primos dividindo  $q - 1$ ,  $q + 1$ , ou  $q^2 + q + 1$  são adjacentes em  $\Delta(G)$ , e  $p$  é adjacente a precisamente estes primos dividindo  $q + 1$  ou  $q^2 + q + 1$ . Seja  $Q^- = \pi(q - 1)$ ,  $Q^+ = \pi(q + 1)$  e  $Q' = \pi(q^2 + q + 1)$ . Veja o que temos até agora para o grafo  $\Delta(G)$



Isto já mostra o item 2) letra (b). Note que  $\Delta(G)$  é completo se e somente se  $p$  for adjacente a todos os primos dividindo  $q - 1$ , mas isto acontecerá se e somente se cada primo dividindo  $q - 1$  também dividir ou  $q + 1$  ou  $q^2 + q + 1$ , devido existir em  $cd(G)$  os elementos  $q(q + 1)$ ,  $q(q^2 + q + 1)$ . Fazendo algumas análises temos

$$MDC(q - 1, q + 1) = \begin{cases} 1 & \text{se } q \text{ é par} \\ 2 & \text{se } q \text{ é ímpar} \end{cases}$$

e

$$MDC(q - 1, q^2 + q + 1) = \begin{cases} 1 & \text{se } q \not\equiv 1 \pmod{3} \\ 3 & \text{se } q \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$$

Assim para  $q > 4$ , o grafo  $\Delta(G)$  é completo se e somente se nenhum outro primo além de 2 ou 3 dividir  $q - 1$ , isto é, se e somente se  $q - 1 = 2^i 3^j$  para algum  $i \geq 0, j \geq 0$ . Só este fato já garante a completude de  $\Delta(G)$ , mas mostraremos que para isso  $q$  é sempre ímpar, ou seja,  $i \geq 1$ .

Supondo que  $q - 1 = 2^i 3^j$  e  $q$  é par, então  $q = 2^m$  para algum inteiro positivo  $m$ , assim  $q - 1 = 2^m - 1 = 3^j$ , ou seja,  $i = 0$ . Dessa forma:

- Ou  $j = 0$  e  $q = 2$ , contradizendo  $q > 4$ ;
- Ou  $2^m - 1$  é divisível por 3. Se  $2^m - 1$  é divisível por 3, temos  $2^m \equiv 1 \pmod{3}$ , mas como  $2 \equiv -1 \pmod{3}$ , isto implica que  $m = 2r$  é par e  $3^j = 2^{2r} - 1 = (2^r - 1)(2^r + 1)$ . Então,  $2^r - 1$  e  $2^r + 1$  são potências de 3 e são coprimos, isto implica  $2^r - 1 = 1$ . Assim  $r = 1, m = 2$ , e  $q = 2^m = 4$ , contradizendo ainda o fato de  $q > 4$ . Segue então o item 1) para  $q > 4$ . No entanto, basta observar que para  $q = 3$ , o item 1) também é satisfeito. Completando a demonstração desse teorema.

□

Os próximo grupos que iremos estudar seus Degree Graphs são os grupos simpléticos e unitários. Estes dois grupos são formados pelas isometrias que respeitam uma forma sesquilinear  $f$  que iremos definir a seguir.

**Definição 3.2.11.** *Seja  $\mathbb{F}_q$  um corpo de  $q$  elementos e seja  $\alpha$  um automorfismo de  $\mathbb{F}_q$ . Uma forma sesquilinear em um  $\mathbb{F}_q$ -espaço  $V$  é um mapa  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{F}_q$  satisfazendo*

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v, w) &= \lambda f(u, w) + f(v, w) \\ f(u, \lambda v + w) &= \lambda^\alpha f(u, v) + f(u, w) \end{aligned}$$

- $f$  é simétrica se  $\alpha = id$  e  $f(u, v) = f(v, u)$ ;
- $f$  é anti-simétrica se  $\alpha = id$  e  $f(u, v) = -f(v, u)$ ;
- $f$  é hermitiana se  $\alpha$  tem ordem 2 e  $f(u, v) = f(v, u)^\alpha$
- $f$  é alternada se  $f(v, v) = 0$ .

Em um corpo  $\mathbb{F}_{q^2}$  de  $q^2$  elementos, o automorfismo  $\alpha$  é definido por  $x^\alpha = \bar{x} = x^q$ .

Seja  $V$  um  $\mathbb{F}$ -espaço. Dizemos que  $u, v \in V$  são perpendiculares se  $f(u, v) = 0$  (que é equivalente a  $f(v, u)$  em cada caso), onde  $f$  é definida como uma das anteriores formas sesquilinear. Neste caso denotemos por  $u \perp v$ . Escrevemos

$$S^\perp = \{v \in V \mid v \perp s \text{ para todo } s \in S\},$$

para qualquer subconjunto  $S$  de  $V$ .  $S^\perp$  é chamado de espaço perpendicular de  $S$  em  $V$ . O radical de  $f$ , denotado por  $rad(f)$  é o conjunto  $V^\perp$ . A forma  $f$  é dita não-singular se o radical é  $\{0\}$ , e singular caso contrário.

Se  $f$  é uma forma sesquilinear em um espaço vetorial  $V$ , uma isometria de  $f$  (ou de  $V$ , se  $f$  é sub-entendida) é um mapa linear invertível  $g : V \rightarrow V$  que preserva a forma  $f$  no sentido que  $f(g(u), g(v)) = f(u, v)$  para todo  $u, v \in V$ . O conjunto de isometrias formam um grupo que depende das propriedades da sua forma sesquilinear, dois desses grupos são os simpléticos e unitários que definiremos agora.

Grupos Simpléticos Simples. Os grupos simpléticos  $Sp(2m, q)$  são os grupos de isometrias de uma forma sesquilinear  $f$  anti-simétrica, alternada e não-singular sobre  $V \cong \mathbb{F}_q^{2m}$ , isto é, os subgrupos de  $GL(2m, q)$  formados pelos elementos  $g$  tais que  $f(g(u), g(v)) = f(u, v)$  para todo  $u, v \in V$ . A ordem de  $Sp(2m, q)$  é

$$\prod_{i=1}^m (q^{2i} - 1) q^{2i-1} = q^{m^2} \prod_{i=1}^m (q^{2i} - 1).$$

Observe que  $Sp(2, q) = SL(2, q)$ . Os grupos  $PSp(2m, q)$  são definidos sendo o quociente de  $Sp(2m, q)$  pelo seu centro  $\mathcal{Z}(Sp(2m, q))$ . Sua ordem é igual a

$$q^{m^2} \prod_{i=1}^m (q^{2i} - 1) / d,$$

onde  $d = MDC(2, q - 1)$ . Os grupos  $PSp(2m, q)$  são simples para todo  $m > 2$  e para  $m = 2$  com  $q > 2$ . Mais informações sobre essa simplicidade veja em [25].

Grupos Unitários Simples. O grupo Geral Unitário  $GU(n, q^2)$  é definido como o grupo de isometrias de uma forma sesquilinear  $f$  hermitiana e não-singular sobre o  $\mathbb{F}_{q^2}$ -espaço  $V$ , isto é, o subgrupo de  $GL(n, q^2)$  consistindo dos elementos  $g$  que preserva a forma  $f$ , no sentido que  $f(g(u), g(v)) = f(u, v)$  para todo  $u, v \in V$ . A ordem de  $GU(n, q^2)$  é

$$\prod_{i=1}^n q^{i-1} (q^i - (-1)^i) = q^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^n (q^i - (-1)^i).$$

$GU(n, q^2)$  tem um subgrupo de índice  $q+1$  consistindo de todos os elementos com determinante 1, chamado de grupo Especial Unitário e denotado por  $SU(n, q^2)$ . Os grupos  $PSU(n, q^2)$  são obtidos do quociente de  $SU(n, q^2)$  pelo seu centro  $\mathcal{Z}(SU(n, q^2))$ , sua ordem é

$$\frac{q^{n(n-1)/2}}{(q+1) \cdot d} \prod_{i=1}^n (q^i - (-1)^i) = \frac{q^{n(n-1)/2}}{d} \prod_{i=2}^n (q^i - (-1)^i),$$

onde  $d = \text{MDC}(n, q+1)$ . Observe que  $PSU(2, q^2) \cong PSL(2, q)$ , então vamos considerar  $n \geq 3$ . Os grupos  $PSU(n, q^2)$  para  $n \geq 3$  são simples exceto em  $PSU(3, 2^2)$  que é um grupo solúvel de ordem 72.

Vamos agora estudar os Degree Graphs para alguns grupos simples destas duas famílias de grupos.

Começemos para os grupos simpléticos simples. Os Degree Graphs dos grupos simpléticos para  $m = 2$  e  $q > 2$ , é feito com a ajuda da tabela de caracteres irreduzíveis de  $Sp(4, q)$  dada em [7] e [20].

**Teorema 3.2.12.** *Seja  $G \cong PSp(4, q)$  um grupo simplético, onde  $q$  é potência de um primo  $p$ . Se  $G$  é simples, então  $\Delta(G)$  é um grafo completo.*

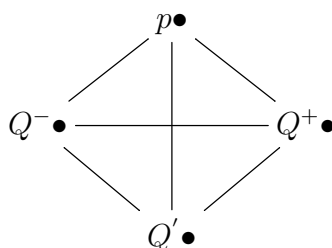
*Demonstração.* Se  $q = 2$ , temos  $PSp(4, 2) \cong \mathcal{S}_6$  e já conhecemos que seu Degree Graph é não completo.

Se  $q = 3$ , então  $|PSp(4, 3)| = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$  e segue do Atlas [4] que  $\mathcal{Irr}(PSp(4, 3))$  tem um caráter  $\chi_{11}$  (notação utilizado em [4]) tal que  $\chi_{11}(1) = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ . Assim  $cn(PSp(4, 3)) = 1$  mostrando que  $\Delta(PSp(4, 3))$  é um grafo completo.

Assuma agora  $q > 3$ . Se  $q$  é par, então  $\text{MDC}(2, q-1) = 1$ , assim  $PSp(4, q) = Sp(4, q)$ . Olhando na tabela de caracteres irreduzíveis de  $Sp(4, q)$  em [7], temos

$$\rho(PSp(4, q)) = \{\pi(q) = p, \pi(q-1), \pi(q+1), \pi(q^2+1)\}.$$

Ainda por [7] obtemos um cobertura de  $PSp(4, q)$  formada pelos caracteres  $\chi_5(k)$ ,  $\chi_{11}(k)$  e  $\chi_{13}(k)$  (notação utilizada em [7]) com seus respectivos graus iguais a  $(q-1)^2(q+1)^2$ ,  $q(q-1)(q^2+1)$  e  $q(q+1)(q^2+1)$ . Denotemos por  $Q^- = \pi(q-1)$ ,  $Q^+ = \pi(q+1)$  e  $Q' = \pi(q^2+1)$ , podemos expressar o grafo  $\Delta(S_4(q))$  para  $q$  par, da seguinte forma



Neste caso, o grafo  $\Delta(PSp(4, q))$  é completo.

Agora se  $q > 3$  é ímpar, então  $\text{MDC}(2, q-1) = 2$ , assim  $PSp(4, q) = Sp(4, q)/\{\pm id\}$ . Utilizando o teorema 1.1.30 encontramos os caracteres irreduzíveis de  $PSp(4, q)$  da tabela de caracteres irreduzíveis de  $Sp(4, q)$  dada em [20]. Ao observar as tabelas de caracteres irreduzíveis de  $PSp(4, q)$  obtidas em [7] e [20], temos que o conjunto  $\rho(PSp(4, q))$  não depende da paridade de

$q$ . Além disso, como no caso anterior conseguimos uma cobertura formada pelos caracteres  $\chi_1(j)$ ,  $\chi_7(q)$  e  $\chi_9(k)$  (notação utilizado em [20]) com os mesmos graus do caso anterior  $(q-1)^2(q+1)^2$ ,  $q(q-1)(q^2+1)$  e  $q(q+1)(q^2+1)$  respectivamente. Com isso concluímos a demonstração.  $\square$

A última família de grupos a ter o Degree Graph analisado serão os grupos unitários simples. Para  $n = 2$ , sabemos que  $PSU(2, q^2) \cong PSL(2, q)$  e já conhecemos seu Degree Graph, então vamos agora estudar o caso  $n = 3$ .

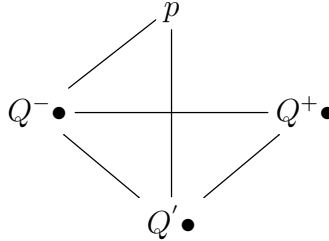
**Teorema 3.2.13.** *Seja  $G \cong PSU(3, q^2)$  um grupo unitário, onde  $q > 2$  é uma potência de um primo  $p$ . Então*

- 1) *O grafo  $\Delta(G)$  é completo se e somente se  $q$  satisfazer  $q+1 = 2^i 3^j$  para algum  $i \geq 0, j \geq 0$ ;*
- 2) *Se  $q > 2$ , então  $\rho(G) = \{p\} \cup \pi((q-1)(q+1)(q^2-q+1))$ . O subgrafo de  $\Delta(G)$  corresponde a componente conexa  $\pi((q-1)(q+1)(q^2-q+1))$  é completo, e  $p$  é adjacente a precisamente estes primos dividindo  $q-1$  ou  $q^2-q+1$ .*

*Demonstração.* Para  $q > 2$  a tabela de caracteres irredutíveis de  $G$  é encontrada em [8]. Dessa tabela temos

$$cd(G) = \left\{ \begin{array}{l} 1, q^3, q(q-1), q^2-q+1, q(q^2-q+1), (q-1)\frac{(q^2-q+1)}{MDC(3, q+1)}, \\ (q-1)(q^2-q+1), (q+1)(q^2-q+1), (q+1)^2(q-1) \end{array} \right\}.$$

Assim todos os primos dividindo  $q-1$ ,  $q+1$ , ou  $q^2-q+1$  são adjacentes em  $\Delta(G)$  e  $p$  é adjacente a precisamente estes primos dividindo  $q-1$  ou  $q^2-q+1$ . Denotando por  $Q^- = \pi(q-1)$ ,  $Q^+ = \pi(q+1)$  e  $Q' = \pi(q^2-q+1)$ . Veja o que temos até agora em  $\Delta(G)$



Isto já mostra o item 2). Note que  $\Delta(G)$  é completo se e somente se  $p$  for adjacente a todos os primos em  $\pi(q+1)$ , mas isto acontece se e somente se cada primo dividindo  $q+1$  também dividir  $q-1$  ou  $q^2-q+1$ , devido existir



em  $cd(G)$  os elementos  $q(q-1)$  e  $q(q^2-q+1)$ . Fazendo algumas observações temos

$$MDC(q-1, q+1) = \begin{cases} 1 & \text{se } q \text{ é par} \\ 2 & \text{se } q \text{ é ímpar} \end{cases}$$

e

$$MDC(q+1, q^2-q+1) = \begin{cases} 1 & \text{se } q \not\equiv -1 \pmod{3} \\ 3 & \text{se } q \equiv -1 \pmod{3}. \end{cases}$$

Assim  $\Delta(G)$  é completo se e somente se nenhum outro primo além de 2 ou 3 dividir  $q+1$ , isto é, se e somente se  $q+1 = 2^i 3^j$  para algum  $i \geq 0, j \geq 0$ . Isso conclui a afirmação 1) e termina a demonstração do teorema.  $\square$

Resumimos esse capítulo no seguinte corolário.

**Corolário 3.2.14.** *Seja  $G$  um grupo simples alternado, esporádico, ou um dos simples grupos clássicos de tipo Lie  $PSL(2, q), PSL(3, q), PSp(4, q)$  ou  $PSU(3, q^2)$ , onde  $q$  é uma potência de um primo  $p$ . O grafo  $\Delta(G)$  é desconexo se e somente se  $G \cong PSL(2, q)$ . Em todos outros casos  $\Delta(G)$  é conexo, seu diâmetro é no máximo 3, e completo exceto nos seguintes casos:*

- 1)  $d(\Delta(G)) = 3$  somente se  $G \cong J_1$ ;
- 2)  $d(\Delta(G)) = 2$  se  $G$  é isomorfo a:
  - (a)  $M_{11}, M_{23}$  ou  $\mathcal{A}_8$ ;
  - (b)  $PSL(3, q)$  onde  $q > 2$  é par ou  $q$  é ímpar e  $q-1$  é divisível por algum outro primo além de 2 ou 3; e
  - (c)  $PSU(3, q^2)$  onde  $q > 2$  e  $q+1$  é divisível por algum outro primo além de 2 ou 3.

*Demonstração.* Segue da proposição 3.2.6 que se  $G$  isomorfo a um grupo simples alternado, isto é,  $G \cong \mathcal{A}_n$  com  $n \geq 5$ ,  $\Delta(G)$  é conexo exceto para  $G \cong \mathcal{A}_n$  com  $n = 5, 6$ , e completo exceto para  $G \cong \mathcal{A}_n$  com  $n = 5, 6, 8$ . Como dissemos anteriormente  $\mathcal{A}_5 \cong PSL(2, 4)$  e  $\mathcal{A}_6 \cong PSL(2, 9)$  e seus Degree Graphs são desconexos como podemos ver na proposição 3.2.6. Isto juntamente com o teorema 3.2.9 mostra que  $\Delta(G)$  é desconexo se  $G \cong PSL(2, q)$ . Mas ainda falta mostrar a unicidade de  $G$  com esta propriedade.

Se  $G$  é isomorfo a um grupo simples esporádico, segue do teorema 3.2.8 que  $\Delta(G)$  é conexo para todo  $G$ , e completo exceto para  $G$  isomorfo a  $M_{11}, M_{23}$  ou  $J_1$ . Nestes casos,  $d(\Delta(M_{11})) = 2 = d(\Delta(M_{23}))$  e  $d(\Delta(J_1)) = 3$  como podemos ver no teorema 3.2.8. Isto juntamente com o fato de  $d(\Delta(\mathcal{A}_8)) = 2$  pela proposição 3.2.6 conclui o nosso item 2) letra (a).

Se  $G$  é isomorfo a um grupo linear simples  $PSL(3, q)$ , segue do teorema 3.2.9 que  $\Delta(G)$  é conexo, e completo se e somente se  $q$  é ímpar e  $q - 1 = 2^i 3^j$  para algum  $i \geq 1, j \geq 0$ . Nos casos que  $\Delta(G)$  não é completo, temos  $d(\Delta(G)) = 2$  pelo item 2) letra (b) do teorema 3.2.9, mostrando o nosso item 2) letra (b).

Se  $G$  é isomorfo a um grupo unitário simples  $PSU(3, q^2)$ , segue do teorema 3.2.13 que  $\Delta(G)$  é conexo, e completo se e somente se  $q + 1 = 2^i 3^j$  para algum  $i \geq 0, j \geq 0$ . Nos casos que  $\Delta(G)$  não é completo, temos  $d(\Delta(G)) = 2$  pelo item 2) do teorema 3.2.13, mostrando o nosso item 2) letra (c).

Então concluímos que  $\Delta(G)$  é desconexo se e somente se  $G \cong PSL(2, q)$  e encerramos a demonstração desse corolário.  $\square$

Donald L. White com os artigos Degree Graphs of Simple Groups Exceptional Lie Type [22], Degree Graphs of Simple Linear e Unitary Groups [23], Degree Graphs of Simple Orthogonal and Symplectic Groups [24], e Degree Graphs of Simple Groups [21], mostra o estudo completo sobre os Degree Graphs para grupos simples. Nestes artigos, ele constrói graus necessários para mostrar a completude dos Degree Graphs de certos grupos simples cuja tabela de caracteres irredutíveis não é completamente conhecida.

O corolário 3.2.14 também tem uma versão completa para grupo simples no artigo [21], que em relação ao nosso corolário muda de fato muito pouco como o leitor pode comparar.

**Corolário 3.2.15** (Versão completa do corolário 3.2.14). *Seja  $G$  um grupo finito simples. O grafo  $\Delta(G)$  é não-conexo se e somente se  $G \cong PSL(2, q)$  para alguma potência prima  $q$ . Se  $\Delta(G)$  é conexo, então  $d(\Delta(G))$  é no máximo 3 e  $\Delta(G)$  é um grafo completo exceto nos seguintes casos:*

- 1) *O  $d(\Delta(G)) = 3$  se e somente se  $G \cong J_1$ ;*
- 2) *O  $d(\Delta(G)) = 2$  se e somente se  $G$  é isomorfo a um dos seguintes grupos:*
  - (a) *O grupo esporádico de Mathieu  $M_{11}$  ou  $M_{23}$ ;*
  - (b) *O grupo alternado  $A_8$ ;*
  - (c) *O grupo de Suzuki  ${}^2B_2(q^2)$ , onde  $q^2 = 2^{2m+1}$  e  $m \geq 1$ ;*
  - (d) *O grupo linear  $PSL(3, q)$ , onde  $q > 2$  é par ou  $q$  é ímpar e  $q - 1$  é divisível por outro primo além de 2 ou 3;*
  - (e) *O grupo unitário  $PSU(3, q^2)$ , onde  $q > 2$  e  $q + 1$  é divisível por outro primo além de 2 ou 3.*

# Referências Bibliográficas

- [1] ALVIS, D. L.; BARRY, M.J.J., *Character Degrees of Simple Groups*. Journal of Algebra 140 (1991), 116-123.
- [2] BARRY, M. J. J.; WARD, M. B., *On a Conjecture of Alvis*. Journal of Algebra 294 (2005), 136-155.
- [3] CARTER, R. W., *Simples Groups of Lie Type*. John Wiley e Sons Ltd, 1972.
- [4] CONWAY, J. H.; CURTIS, R. T.; NORTON, S. P.; PARKER R. A.; WILSON, R. A, *Atlas of Finite Groups*. New York: Oxford University Press, 1985.
- [5] DIESTEL, R., *Graph Theory, Electronic Edition*. New York: 2005
- [6] DORNHOFF, L., *Group Representation Theory, Part A*. New York: Marcel Dekker, inc., 1971.
- [7] ENOMOTO H., *The Characters of the Finite Groups Symplectic Groups  $Sp(4, q)$ ,  $q = 2^f$* , Osaka J. Math. 9 (1972), 75 – 94.
- [8] FRAME J. S.; SIMPSON W. A., *The Character Table for  $SL(3, q)$ ,  $SU(3, q^2)$ ,  $PSL(3, q)$ ,  $PSU(3, q^2)$* . Canada Journal of Mathematics vol. XXV, N° 3, 1973, pp. 486 – 494
- [9] HERSTEIN, I. N., *Abstract Algebra 3ª edição*. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1999.
- [10] HUPPERT, B., *Character Theory of Finite Groups*. New York: Walter de Gruyter, 1998.
- [11] ISAACS, I. M., *Character Theory of Finite Groups*. London: Academic Press, 1976.

- [12] ———, *Finite Group Theory, Graduate Studies in Mathematics v. 92*. American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 2008.
- [13] JAMES, G.; KERBER A., *The Representation Theory of the Symmetric Groups*. London: Addison-Wesley, 1981.
- [14] JAMES, G.; LIEBECK, M., *Representations and Characters of Groups*, 2. ed. New York: Cambridge University Press, 2001.
- [15] LEWIS, M. L.; WHITE, D. L.; *Diameters of Degree Graphs of Nonsovable Groups II*, J. Algebra 312 (2007), 634 – 649
- [16] MAIER, R. R., *Teoria dos Números, 'texto de aula'*. 2005.
- [17] MALLE, G.; TESTERMAN, D., *Linear Algebraic Groups e Finite Groups of Lie Type*. New York: Cambridge University Press, 2011
- [18] MANZ, O.; WILLEMS, W.; WOLF, T. R., *The Diameter of the Character Degree Graph*. J. Reine Angewandte Math. 402 (1989), 181 – 198.
- [19] MANZ, O.; WOLF, T. R., *Representations of solvable Groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [20] SRINIVASAN B., *The Characters of the Finite Symplectic Group  $Sp(4, q)$* , Trans. Amer. Math. Soc. 131 (1968), 488 – 524.
- [21] WHITE, D. L., *Degree Graphs of Simple Groups*. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 2009.
- [22] ———, *Degree Graphs of Simple Groups of Exceptional Lie type*. Comm. Algebra 32 (2004), 3641 – 3649
- [23] ———, *Degree Graphs of Simple Linear e Unitary Groups*. Comm. Algebra 34 (2006), 2907 – 2921
- [24] ———, *Degree Graphs of Simple Orthogonal e Symplectic Groups*. J. Algebra 319 (2008), 833 – 845.
- [25] WILSON R. A., *The Finite Simple Groups*. London: Springer-Verlag limited, 2009.