

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Polinômios Centrais em Algumas Álgebras  
Associativas e Representações de Grupos**

Por

Élida Alves da Silva

Brasília

*2008*

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Polinômios Centrais em Algumas Álgebras  
Associativas e Representações de Grupos**

Por

Élida Alves da Silva<sup>1</sup>

Orientador: Prof. Dr. Alexei Krassilnikov

---

<sup>1</sup>O autor contou com o apoio financeiro parcial do CNPq.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# Polinômios Centrais em Algumas Álgebras Associativas e Representações de Grupos

Por

Élida Alves da Silva

Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade de Brasília, como parte dos requerimentos necessários para a obtenção do grau de Doutora em Matemática.

Comissão Examinadora:

---

Prof. Dr. Alexei Krassilnikov  
(Orientador)

---

Prof<sup>a</sup>. Dra. Ana Cristina Vieira  
Universidade Federal de Minas Gerais

---

Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov  
Universidade Estadual de Campinas

---

Prof. Dr. Said Najati Sidki  
Universidade de Brasília

---

Prof. Dr. Víktor Bekkert  
Universidade Federal de Minas Gerais

20 de junho de 2008

Para José Quintino (in memoriam), Cacilda Alves e Porfírio Júnior.

# Índice

Índice	iv
Resumo	v
Abstract	vi
Agradecimentos	vii
Introdução	1
1 Preliminares	11
2 Polinômios Centrais em Álgebras de Grassmann de Dimensão Infinita	17
3 Polinômios Centrais em Álgebras de Grassmann de Dimensão Finita	49
4 Um Subespaço Vetorial Verbal Limite	78
4.1 Um Subespaço Vetorial Verbal Não Finitamente Gerado $W$ . . . . .	80
4.2 Um Subespaço Vetorial Verbal $U \supset W$ Finitamente Gerado . . . . .	88
4.3 O Subespaço Vetorial Verbal Limite $W$ . . . . .	91
Referências Bibliográficas	97

# Resumo

Neste trabalho estudamos os polinômios centrais das álgebras de Grassmann.

Seja  $H$  uma álgebra de Grassmann não unitária de dimensão infinita, sobre um corpo infinito de característica prima  $p > 2$ . Seja  $\mathcal{C}$  o espaço vetorial dos polinômios centrais de  $H$ . Nosso resultado principal é:  $\mathcal{C}$  não é finitamente gerado como T-espaço. Este é o primeiro exemplo conhecido de uma álgebra associativa cujos polinômios centrais não possuem um conjunto gerador finito.

Determinamos o conjunto de geradores de  $\mathcal{C}$ , a saber

$$P = \{(x_1, x_2) + T(H), (x_1, x_2) \dots (x_{2q-1}, x_{2q}) x_1^{p-1} \dots x_{2q}^{p-1} + T(H) \mid q \in \mathbb{N}\},$$

onde  $T(H)$  denota o T-ideal de identidades polinomiais satisfeitas por  $H$ . Observamos que em 2000, Shchigolev [64] demonstrou que o T-espaço gerado por  $P$  não é finitamente gerado. Nossa contribuição foi demonstrar que o T-espaço gerado por  $P$  coincide com  $\mathcal{C}$ .

Determinamos também conjuntos de geradores dos T-espaços dos polinômios centrais das álgebras de Grassmann não unitárias de dimensão finita, sobre um corpo infinito de característica  $p > 2$ .

Além disso, apresentamos um exemplo de um subespaço vetorial verbal limite, em uma álgebra de um grupo relativamente livre, sobre um corpo de característica  $p = 2$ .

**Palavras-chave:** Álgebras de Grassmann, polinômios centrais, T-espaços, subespaço vetorial verbal limite.

# Abstract

In this work we study the central polynomials of the Grassmann algebras.

Let  $H$  be an infinite dimensional non-unitary Grassmann algebra over an infinite field of a prime characteristic  $p > 2$ . Let  $\mathcal{C}$  be the vector space of the central polynomials of  $H$ . Our main result is as follow:  $\mathcal{C}$  is not finitely generated as a T-space. This is the first example of an associative algebra whose central polynomials have no finite set of generators.

Let

$$P = \{(x_1, x_2) + T(H), (x_1, x_2) \dots (x_{2q-1}, x_{2q}) x_1^{p-1} \dots x_{2q}^{p-1} + T(H) \mid q \in \mathbb{N}\},$$

where  $T(H)$  stands for the T-ideal of the polynomial identities of  $H$ . We have proved that the set  $P$  generates  $\mathcal{C}$  as a T-space. In 2000 Shchigolev [64] proved that the T-space generated by  $P$  is not finitely generated. Our contribution is as follows this T-space generated by  $P$  coincides with  $\mathcal{C}$ .

We have also found sets of generators for the T-spaces of central polynomials of finite dimensional non-unitary Grassmann algebras over an infinite field of characteristic  $p > 2$ .

Moreover, we give an example of a limit verbal vector space in a group algebra of a relatively free group over a field of characteristic  $p = 2$ .

**Key-words:** Grassmann algebras, central polynomials , T-spaces, limit verbal vector subspace.

# Agradecimentos

A Deus pela saúde e oportunidade;

A meus pais pelo amor, sabedoria e apoio incondicional;

A meu esposo pelo companheirismo e dedicação;

A meus irmãos pelo estímulo e carinho;

A meus familiares pelo afeto e suporte;

A minha sogra (in memoriam) e meu sogro pelo entusiasmo e amizade;

Aos meus amigos pela compreensão e encorajamento;

Aos meus colegas do CAC/UFG pela oportunidade;

Ao Prof. Dr. Alexei Krassilnikov pela competência e orientação;

Aos professores da UnB pelos ensinamentos;

Aos funcionários da UnB pela disponibilidade e auxílio;



# Introdução

Faremos uma introdução histórica onde constam vários conceitos, resultados e artigos que evidenciam a relevância das estruturas envolvidas neste trabalho.

Sejam  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$  um conjunto infinito enumerável de símbolos,  $K$  um corpo e  $K\langle X \rangle$  a  $K$ -álgebra associativa livre não unitária, livremente gerada por  $X$ . Sejam  $A$  uma  $K$ -álgebra associativa e  $f(x_1, \dots, x_n)$  um elemento de  $K\langle X \rangle$ . Dizemos que  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$  é uma *identidade polinomial* ou, simplesmente, uma *identidade* em  $A$  se  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ , para todos  $a_1, \dots, a_n \in A$ . Se a álgebra  $A$  satisfaz uma identidade polinomial não trivial, então  $A$  é denominada *PI-álgebra* (PI significa “polynomial identity”).

A teoria de identidades polinomiais é uma sub-área importante da teoria de anéis. Podemos dividi-la em três eixos clássicos. No primeiro, dado um conjunto de identidades polinomiais procura-se quais as propriedades das álgebras que satisfazem tais identidades. No segundo, dado uma álgebra estuda-se quais identidades são satisfeitas por ela e qual a classe de álgebras que satisfaz essas identidades. E no terceiro, estuda-se a estrutura dos ideais de identidades.

Foram realizados trabalhos nesta área por M. Dehn [14] em 1922, por W. Wagner [74] em 1937 e por M. Hall [32] em 1943. Porém, só por volta de 1948 com o trabalho de I. Kaplansky [34] esta área ganhou força como linha de pesquisa.

Em 1950 foi publicado o Teorema de Amitsur e Levitzki [2] mostrando que o polinômio standard de grau  $2n$ ,  $s_{2n} = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{sign } \sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(2n)}$ , é uma identidade polinomial para a

---

álgebra  $M_n(K)$ , das matrizes  $n \times n$  com entradas em um corpo  $K$  de ordem diferente de 2 e 4. Além disso,  $M_n(K)$  não satisfaz identidades de grau menor e, a menos da constante multiplicativa,  $s_{2n} = 0$  é a única identidade de grau  $2n$  satisfeita por esta álgebra.

Na mesma época, W. Specht [71] apresentou a seguinte questão “É verdade que toda álgebra associativa sobre um corpo  $K$  de característica zero possui uma base finita para suas identidades polinomiais?” Essa pergunta, feita para álgebras associativas sobre corpos de característica qualquer, se tornou uma das questões centrais da Teoria de Identidades Polinomiais e ficou conhecida como *problema de Specht*. Em 1988, A. R. Kemer [37] respondeu essa questão de modo afirmativo, no caso de álgebras sobre corpos de característica 0. Por outro lado, em 1999 A. Ya. Belov [6], A. V. Grishin [25] (para característica 2), e V. V. Shchigolev [63] resolveram negativamente o problema, no caso de álgebras sobre corpos de característica prima.

Muitos autores deram suas contribuições à teoria de PI-álgebras, vide por exemplo [3], [4], [33], [38], [42], [50], [60], [68], [69].

Um *T-ideal* de  $K\langle X \rangle$  é um ideal fechado para todos os endomorfismos de  $K\langle X \rangle$ . Seja  $A$  uma  $K$ -álgebra, o conjunto de identidades polinomiais satisfeitas por  $A$  formam um T-ideal e todo T-ideal pode ser obtido desta maneira.

Dado um T-ideal  $I$ , as  $K$ -álgebras que satisfazem as identidades de  $I$  formam uma *variedade* de álgebras. Além disso, as identidades satisfeitas em uma variedade formam um T-ideal de  $K\langle X \rangle$ . Ou seja, existe uma correspondência biunívoca entre as variedades de álgebras associativas e os T-ideais de  $K\langle X \rangle$ . O primeiro estudo sistemático sobre T-ideais foi feito por Specht [71].

Na linguagem de T-ideais o problema de Specht se traduz na seguinte questão “É verdade que todo T-ideal da  $K$ -álgebra associativa livre de posto enumerável é finitamente gerado como T-ideal?”.

---

Seja  $K_1\langle X \rangle$  a  $K$ -álgebra associativa livre unitária, livremente gerada por  $X$ . Latyshev [49] demonstrou em 1963 que, sobre um corpo de característica zero, um T-ideal de  $K_1\langle X \rangle$  que possui  $(x_1, x_2, x_3)$  como elemento, onde  $(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1$ , é finitamente gerado. Em 1973, Razmyslov [57] encontrou uma base, composta por nove elementos, para as identidades da álgebra das matrizes de ordem 2 sobre um corpo  $K$  de característica 0. Drensky [17] encontrou uma base minimal, com dois elementos, para tais identidades em 1981. Em 2001, Koshlukov [44] explicitou conjuntos de geradores dos T-ideais das identidades das matrizes  $2 \times 2$ , sobre um corpo de característica prima  $p \neq 2$ . Para  $p > 5$  Koshlukov mostrou que os conjuntos de geradores são minimais. Em 2004, Colombo e Koshlukov [13] concluíram a descrição explicitando conjuntos de geradores minimais quando  $p = 3, 5$ . Em [7], [26] e [65] foram construídos exemplos de T-ideais não finitamente gerados.

As álgebras de Grassmann são PI-álgebras. Considerando as álgebras sobre corpos de característica 0, Krakowski e Regev [45] mostraram, em 1973, que o polinômio  $(x_1, x_2, x_3)$  constitui uma base para as identidades polinomiais da álgebra de Grassmann unitária de dimensão infinita. Ou seja, o T-ideal das identidades satisfeitas pela álgebra de Grassmann unitária de dimensão infinita pode ser gerado como T-ideal pelo polinômio  $(x_1, x_2, x_3)$ . Este mesmo fato foi demonstrado de maneira diferente, em 1991, por Di Vincenzo [15], que também exibiu bases finitas para as identidades das álgebras de Grassmann de um espaço vetorial  $k$ -dimensional, para todo  $k$ . Considerando as álgebras sobre corpos de característica prima, Stojanova-Venkova [72] exibiu, em 1980, bases finitas para as identidades satisfeitas pelas álgebras de Grassmann de um espaço vetorial  $k$ -dimensional, para todo  $k$ . Em 1981, Siderov [12] exibiu uma base finita para as identidades satisfeitas pela álgebra de Grassmann não unitária de dimensão infinita. Além disso, mostrou que todo T-ideal de  $K\langle X \rangle$  contendo  $(x_1, x_2, x_3)$  é finitamente gerado.

Outros resultados sobre álgebras de Grassmann, suas identidades polinomiais e tópicos relacionados foram obtidos por vários autores, vide por exemplo [9], [16], [18], [22], [43],

[55].

Sejam  $A$  uma  $K$ -álgebra com centro  $C$  e  $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$ . O polinômio  $f$  é um *polinômio central* para  $A$  se  $f(a_1, \dots, a_n)$  pertence a  $C$  para todos  $a_1, \dots, a_n \in A$  e  $f = 0$  não é uma identidade polinomial para  $A$ . Polinômios centrais têm muitas aplicações na teoria de álgebras com identidades polinomiais e simplificam várias demonstrações importantes. A existência de polinômios centrais foi essencial para a solução de vários problemas, especialmente, a extensão de teoremas básicos sobre anéis comutativos para PI-anéis. Para alguns resultados vide [11], [36], [58], [62], [70].

Artigos relacionados com o estudo de polinômios centrais se concentram em álgebras de matrizes, pois nem a existência de polinômios centrais para estas álgebras é um resultado imediato. Formanek [20] e Razmyslov [56] provaram, independentemente, a existência de polinômios centrais para as álgebras  $M_n(K)$  sobre um corpo  $K$ . Além disso, Razmyslov exibiu, no mesmo trabalho, polinômios centrais para outras classes importantes de álgebras, por exemplo, para as álgebras  $M_{a,b}$  (constituídas de matrizes de blocos, cujas entradas são elementos da álgebra de Grassmann unitária de dimensão infinita, onde os dois blocos da diagonal principal, de tamanhos  $a \times a$  e  $b \times b$ , são compostos por polinômios pares, e os dois blocos restantes compostos por polinômios ímpares). Um *ideal T-primo* é um T-ideal onde a inclusão  $I_1 I_2 \in I$ , com  $I_1$  e  $I_2$  T-ideais, implica  $I_1 \in I$  ou  $I_2 \in I$ . Uma *variedade T-prima* é uma variedade de álgebras que corresponde a um ideal T-primo de identidades. Em [8], Belov demonstrou que toda variedade T-prima de álgebras possui polinômios centrais, mas a descrição dos polinômios centrais em álgebras T-primas está longe de ser completada. O único caso em que a descrição está completa é para a álgebra  $M_2(K)$ , onde  $K$  é infinito de característica diferente de dois. Para maiores detalhes vide [10], [13], [21], [52], [59].

Seja  $U$  um subespaço vetorial de  $K\langle X \rangle$ .  $U$  é denominado *T-espaço* se é um subespaço vetorial invariante por todos os endomorfismos de  $K\langle X \rangle$ . De forma análoga podemos definir T-espaço de uma álgebra relativamente livre, ou seja, uma álgebra da forma

$K\langle X\rangle/T$ , onde  $T$  é um T-ideal de  $K\langle X\rangle$ . Os polinômios centrais de uma álgebra relativamente livre constituem um T-espaço. Na teoria de PI-álgebras os T-espaços abstratos são objetos relativamente novos que apareceram relacionados ao problema de Specht. Recentemente, vários autores obtiveram resultados relacionados a T-espaços e aplicações desta teoria à solução de problemas para álgebras com identidades polinomiais. A noção de T-espaços foi introduzida por Grishin ([23], [24], [25]), ele construiu o primeiro exemplo de T-espaço não finitamente gerado sobre um corpo de característica 2. V.V. Shchigolev construiu exemplos de T-espaços não finitamente gerados sobre corpos infinitos de característica prima  $p > 2$  em [64] e sobre corpos arbitrários de característica prima  $p > 0$  em [67].

A conexão que existe entre o problema de Specht e T-espaços não finitamente gerados em álgebras relativamente livres é estreita. Nos artigos [6], [25], [63] foram construídas variedades não finitamente geradas distintas e em todos eles alguns T-espaços não finitamente gerados foram cruciais nas construções. T-espaços não finitamente gerados e suas aplicações à solução do problema da base finita são explicitamente considerados em [27].

Para mais detalhes sobre T-espaços vide por exemplo [1], [23], [24], [25], [39], [40], [41], [64], [66].

As álgebras de Grassmann e a descrição dos polinômios centrais de uma álgebra dada são tópicos de relevância no estudo de álgebras com identidades polinomiais. Entretanto, ainda não existe uma descrição do T-espaço dos polinômios centrais das álgebras de Grassmann, sobre um corpo infinito de característica prima  $p > 2$ . Acreditamos que a explicação de não haver trabalhos nessa direção é o fato da existência de polinômios centrais em tais álgebras ser imediata, como por exemplo  $(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1$ . A proposta deste trabalho é exibir essa descrição para álgebras de Grassmann não unitárias sobre um corpo infinito de característica prima  $p \neq 2$ .

O primeiro capítulo é constituído de definições e resultados auxiliares necessários para

o desenvolvimento do trabalho.

Seja  $H$  a álgebra de Grassmann, não unitária, sobre um corpo infinito de característica prima  $p > 2$ . Seja  $\mathcal{C}$  o espaço dos polinômios centrais de  $H$ . Nosso resultado principal, obtido no segundo capítulo, é que  $\mathcal{C}$  não é finitamente gerado como  $T$ -espaço. Antes de desenvolvermos este trabalho não eram conhecidas álgebras associativas cujos polinômios centrais não possuem um conjunto gerador finito.

Ao contrário do esperado, não é possível obter os geradores de  $H$  de forma direta. Utilizaremos a interpretação dada através de álgebras de grupo. Mais precisamente, usaremos o isomorfismo existente entre a álgebra associativa livre da variedade gerada pela álgebra de Grassmann não unitária de posto infinito e um quociente do ideal de aumento da álgebra do grupo livre na variedade de todos os grupos de expoente  $p$  e nilpotentes de classe no máximo 2.

Nesta abordagem surgirá a necessidade de introduzir a noção de *subespaço vetorial verbal de uma álgebra de um grupo relativamente livre*. Sejam  $G$  um grupo relativamente livre,  $KG$  uma álgebra de grupo e  $U$  um subespaço de  $KG$ . O subespaço  $U$  é denominado subespaço vetorial verbal de  $KG$ , se é invariante por todos os endomorfismos de  $KG$ , induzidos pelos endomorfismos do grupo  $G$ . Analogamente, definimos subespaço vetorial verbal de um quociente da álgebra de um grupo relativamente livre. Esta noção já foi utilizada implicitamente em outros trabalhos, por exemplo [30] e [35].

Seja  $T(H)$  o conjunto de identidades satisfeitas por  $H$ . Mostramos o seguinte teorema:

**Teorema 2.2.** *O  $T$ -espaço dos polinômios centrais da álgebra de Grassmann de dimensão infinita  $H$  é gerado, como  $T$ -espaço em  $K\langle X \rangle/T(H)$ , por*

$$(x_1, x_2) + T(H)$$

e pelos polinômios

$$\{(x_1, x_2) \dots (x_{2q-1}, x_{2q}) x_1^{p-1} \dots x_{2q}^{p-1} + T(H) \mid q \in \mathbb{N}\}.$$

É bem conhecido e fácil demonstrar o fato que os polinômios do conjunto  $P$

$$P = \{(x_1, x_2) + T(H), (x_1, x_2) \dots (x_{2q-1}, x_{2q}) x_1^{p-1} \dots x_{2q}^{p-1} + T(H) \mid q \in \mathbb{N}\}$$

são centrais em  $H$  e, portanto, o  $T$ -espaço  $\mathcal{P}$  gerado por eles também é central.

Nossa contribuição foi demonstrar que  $\mathcal{P}$  coincide com  $\mathcal{C}$ .

Observamos que em 2000, Shchigolev [64] demonstrou que o  $T$ -espaço  $\mathcal{P}$ , gerado por  $P$ , não é finitamente gerado. Usando este resultado e o Teorema 2.2, obtemos o seguinte corolário.

**Corolário 2.40.** *O  $T$ -espaço dos polinômios centrais da álgebra de Grassmann de dimensão infinita  $H$  não é finitamente gerado.*

Seja  $V_k$  um espaço vetorial de dimensão  $k$  sobre  $K$ . Denotemos por  $H_k$  a álgebra de Grassmann não unitária de  $V_k$  sobre  $K$ .

No terceiro capítulo nosso objetivo é determinar os geradores dos  $T$ -espaços dos polinômios centrais das álgebras de Grassmann  $H_k$ . Dividiremos nosso estudo em dois casos distintos, o primeiro associado às álgebras de Grassmann  $H_{2n}$  e o segundo às álgebras de Grassmann  $H_{2n-1}$ . Seja  $T(H_k)$  o conjunto de identidades satisfeitas por  $H_k$ .

Como  $H_{2n}$  é subálgebra de  $H$ , os polinômios centrais de  $H$  são identidades ou polinômios centrais em  $H_{2n}$ . Mostraremos que todo polinômio central em  $H_{2n}$  é obtido desta forma. Usando este resultado demonstraremos o seguinte teorema.

**Teorema 3.1.** *O  $T$ -espaço dos polinômios centrais da álgebra de Grassmann  $H_{2n}$  é gerado, como  $T$ -espaço em  $K\langle X \rangle / T(H_{2n})$ , por*

$$(x_1, x_2) + T(H_{2n})$$

e pelos polinômios

$$\left\{ (x_1, x_2) \dots (x_{2q-1}, x_{2q}) x_1^{p-1} \dots x_{2q}^{p-1} + T(H_{2n}) \mid 0 < q \leq \frac{n}{2p-1} \right\}.$$

Posteriormente, mostraremos que os polinômios de  $T(H_{2n-2})$  são centrais em  $H_{2n-1}$  e que todo polinômio central em  $H_{2n-1}$  pode ser escrito como soma de dois polinômios, onde um é central em  $H$  e o outro pertence a  $T(H_{2n-2})$ . Utilizando estes dois resultados e o fato de que todo polinômio central em  $H$  é identidade ou polinômio central em  $H_{2n-1}$  demonstraremos o seguinte teorema.

Seja  $v_n$  o polinômio definido por

$$v_n = x_1 \circ \dots \circ x_{n-1} \circ x_n = (x_1 \circ \dots \circ x_{n-1})x_n + x_n(x_1 \circ \dots \circ x_{n-1}),$$

onde  $x_1 \circ x_2 = x_1x_2 + x_2x_1$ .

**Teorema 3.2.** *O T-espaço dos polinômios centrais da álgebra de Grassmann  $H_{2n-1}$  é gerado, como T-espaço em  $K\langle X \rangle/T(H_{2n-1})$ , por*

$$(x_1, x_2) + T(H_{2n-1}), (x_1 \circ \dots \circ x_{2n-2}) + T(H_{2n-1})$$

e pelos polinômios

$$\left\{ (x_1, x_2) \dots (x_{2q-1}, x_{2q}) x_1^{p-1} \dots x_{2q}^{p-1} + T(H_{2n-1}) \mid 0 < q \leq \frac{n}{2p-1} \right\}.$$

Observemos que, em álgebras de grupos relativamente livres, a noção semelhante a T-espaços de álgebras associativas, é a noção de subespaços vetoriais verbais. Estas estruturas são importantes para a resolução de alguns problemas.

Um exemplo de utilização do conceito e de resultados sobre subespaços vetoriais verbais foi dado no segundo capítulo deste trabalho. Determinamos o T-espaço dos polinômios centrais de uma álgebra associativa relativamente livre, mostrando que esta coincide com um subespaço vetorial verbal.

Para exibir uma outra possibilidade de utilização da noção de subespaços vetoriais verbais introduziremos alguns conceitos.

Sejam  $K$  um corpo,  $F$  um grupo livre, livremente gerado por  $x_1, x_2, \dots$  e  $KF$  a álgebra do grupo  $F$  sobre  $K$ . Sejam  $L$  um espaço vetorial sobre  $K$ ,  $G$  um grupo e



$\rho : G \rightarrow \text{Aut}(L)$  uma representação de  $G$ . Seja  $u(x_1, \dots, x_n) \in KF$ . Então,  $u(x_1, \dots, x_n) = 0$  é chamada *identidade da representação  $\rho$  do grupo  $G$*  se  $u(\rho(g_1), \dots, \rho(g_n)) = 0$  para quaisquer elementos  $g_1, \dots, g_n$  de  $G$ .

A classe de todas as representações de grupo sobre  $K$  que satisfazem um dado conjunto de identidades é denominado *variedade de representações de grupo*.

O estudo sistemático de identidades de representações de grupo foi iniciada por B. I. Plotkin. Conceitos básicos e resultados nesta direção podem ser encontrados em [54] e [73]. Um dos principais problemas no estudo de identidades é o problema da base finita: “O conjunto de todas as identidades de uma dada representação é equivalente a um conjunto finito de identidades?”. Segue de [53] que existem representações de grupo de dimensão infinita cujas identidades não possuem base finita. Contudo, o problema da base finita continua em aberto para representações de dimensão finita, sobre um corpo infinito. Para mais resultados vide, por exemplo, [29], [48], [46].

Um caso particular importante no estudo do problema da base finita é a construção de variedades limite de representações de grupos. Seja  $\mathcal{V}$  uma variedade. Se todas as subvariedades próprias de  $\mathcal{V}$  são definidas por conjuntos finitos de identidades e  $\mathcal{V}$  não pode ser definida por um conjunto finito de identidades, então  $\mathcal{V}$  é chamada *variedade limite*. Neste sentido, as variedades limite formam uma fronteira entre as variedades que são finitamente geradas e as que não são.

A existência de variedades limite segue do Lema de Zorn e do fato de que existem variedades de representações de grupos sem base finita de identidades. Um problema importante, ainda em aberto, é a construção de exemplos de variedades limite de representações de grupo. Acreditamos que subespaços vetoriais verbais limite poderão ser úteis para a resolução deste problema.

Nós apresentamos no quarto capítulo um exemplo de subespaço vetorial verbal limite sobre um corpo de característica 2. Além disso, esperamos que o subespaço vetorial verbal

construído no segundo capítulo, sobre um corpo de característica  $p > 2$ , também seja um subespaço vetorial verbal limite. Mas este é um assunto para estudos futuros.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo recordaremos definições e resultados importantes para nosso trabalho.

**Definição 1.1.** Sejam  $\mathcal{D}$  uma classe de álgebras associativas sobre um corpo  $K$  e  $F \in \mathcal{D}$  uma álgebra gerada por um conjunto  $X$ . A álgebra  $F$  é chamada uma *álgebra livre na classe  $\mathcal{D}$* , livremente gerada pelo conjunto  $X$ , se para qualquer álgebra  $R \in \mathcal{D}$ , toda aplicação  $\varphi : X \rightarrow R$  pode ser estendida a um homomorfismo  $\bar{\varphi} : F \rightarrow R$ . A cardinalidade  $|X|$  do conjunto  $X$  é chamada *posto* de  $F$ .

**Observação 1.2.** Se  $\mathcal{D}$  é a classe de todas as álgebras associativas sobre um corpo  $K$ , então  $F$  é denominada *álgebra associativa livre*. Caso contrário,  $F$  é denominada *álgebra associativa relativamente livre*.

Sejam  $K$  um corpo e  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ . Denotaremos por  $K_1\langle X \rangle$  a álgebra cuja base, como espaço vetorial sobre  $K$ , é composta pela palavra vazia e o conjunto de todas as palavras  $x_{i_1} \dots x_{i_n}$ , ( $x_{i_t} \in X$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ) e tem multiplicação definida por  $(x_{i_1} \dots x_{i_m})(x_{j_1} \dots x_{j_n}) = x_{i_1} \dots x_{i_m} x_{j_1} \dots x_{j_n}$  ( $x_{i_t}, x_{j_t} \in X$ ).

**Lema 1.3.** (i) A álgebra  $K_1\langle X \rangle$  é livre na classe de todas as álgebras associativas, sobre  $K$ , com unidade.

(ii) Se considerarmos o subespaço  $K\langle X \rangle$  de  $K_1\langle X \rangle$  gerado por todas as palavras de comprimento maior ou igual a um, obteremos uma álgebra associativa livre sem unidade, que é livre na classe de todas as álgebras associativas.

Agora, vamos introduzir o conceito de álgebras com identidades polinomiais.

**Definição 1.4.** (a) Sejam  $f = f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$  e  $R$  uma álgebra associativa sobre  $K$ . Dizemos que  $f = 0$  é uma *identidade polinomial* para  $R$  se  $f(r_1, \dots, r_n) = 0$  para todos  $r_1, \dots, r_n \in R$ .

(b) Se a álgebra associativa  $R$  satisfaz uma identidade polinomial não trivial, dizemos que  $R$  é uma *PI-álgebra* (PI significa “Polynomial Identity”).

**Exemplo 1.5.** a) Para toda álgebra comutativa  $A$  temos que  $(x_1, x_2) = 0$  é uma identidade polinomial, pois  $(a_1, a_2) = a_1a_2 - a_2a_1 = 0$  para todos  $a_1, a_2 \in A$ .

b) A álgebra  $M_2(K)$  é uma PI-álgebra, pois satisfaz a identidade polinomial não trivial  $s_4 = \sum_{\sigma \in S_4} \text{sign } \sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(4)}$ .

**Definição 1.6.** Sejam  $A$  uma  $K$ -álgebra com centro  $C$  e  $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$ . O polinômio  $f$  é um *polinômio central* para  $A$  se  $f(a_1, \dots, a_n)$  pertence a  $C$  para todos  $a_1, \dots, a_n \in A$  e  $f = 0$  não é uma identidade polinomial para  $A$ .

As classes de álgebras determinadas por identidades polinomiais serão denominadas variedades, vamos introduzir este conceito formalmente.

**Definição 1.7.** Seja  $\{f_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \in K\langle X \rangle \mid i \in I\}$  um conjunto de polinômios da álgebra associativa livre  $K\langle X \rangle$ . A classe  $\mathcal{V}$  de todas as álgebras associativas sobre  $K$  que satisfazem as identidades polinomiais  $f_i = 0$ ,  $i \in I$ , é chamada *variedade de álgebras associativas* definida pelo sistema de identidades polinomiais  $\{f_i \mid i \in I\}$ .

---

**Teorema 1.8.** (*Birkhoff*) *Uma classe de álgebras  $\mathcal{V}$  é uma variedade se, e somente se,  $\mathcal{V}$  é fechada a somas cartesianas, subálgebras e álgebras quocientes.*

**Definição 1.9.** O conjunto  $T(\mathcal{V})$  (respectivamente  $T(\mathcal{A})$ ) de todas as identidades polinomiais satisfeitas pela variedade  $\mathcal{V}$  (respectivamente pela álgebra  $\mathcal{A}$ ) é chamado *T-ideal*. Todo T-ideal pode ser obtido desta maneira.

**Lema 1.10.** *Para toda variedade  $\mathcal{V}$  o T-ideal  $T(\mathcal{V})$  é um ideal totalmente invariante de  $K\langle X \rangle$ , ou seja, um ideal de  $K\langle X \rangle$  fechado a todos os endomorfismos de  $K\langle X \rangle$ .*

É conhecido que dado um T-ideal  $I$ , as  $K$ -álgebras que satisfazem as identidades de  $I$  formam uma variedade de álgebras. Além disso, dada uma variedade, as identidades satisfeitas por ela formam um T-ideal de  $K\langle X \rangle$ . Ou seja, existe uma correspondência biunívoca entre as variedades de álgebras associativas e os T-ideais de  $K\langle X \rangle$ .

Ao trabalharmos com álgebras sobre corpos infinitos, é suficiente demonstrar que os resultados são válidos para polinômios multihomogêneos. Vamos demonstrar o lema que nos garante esta possibilidade.

**Definição 1.11.** Dizemos que um polinômio  $f(x_1, \dots, x_m) \in K\langle X \rangle$  é *homogêneo com respeito à variável  $x_1$* , se pode ser representado como uma combinação linear de monômios de mesmo grau, relativamente a  $x_1$ .

**Definição 1.12.** Dizemos que um polinômio  $f(x_1, \dots, x_m) \in K\langle X \rangle$  é *multi-homogêneo* se for homogêneo com respeito a todas as variáveis.

**Definição 1.13.** Dizemos que um polinômio  $f(x_1, \dots, x_m) \in K\langle X \rangle$  é *multilinear* se o grau com respeito a cada variável é um.

**Definição 1.14.** Uma identidade  $f(x_1, \dots, x_m) = 0$ , cujo membro esquerdo é um polinômio homogêneo, multihomogêneo ou multilinear é chamada *identidade homogênea, multihomogênea ou multilinear*, respectivamente.

**Definição 1.15.** Uma identidade polinomial  $g = 0$  é *consequência* das identidades polinomiais  $f_i = 0, i \in I$ , se  $g \in \langle f_i \mid i \in I \rangle^T$ , o T-ideal gerado por  $\{f_i \mid i \in I\}$ .

**Definição 1.16.** Dizemos que duas *identidades*  $g = 0$  e  $h = 0$  são *equivalentes*, se  $g = 0$  é consequência de  $h = 0$  e  $h = 0$  é consequência de  $g = 0$ , simultaneamente.

**Definição 1.17.** Dizemos que dois *sistemas de identidades*,  $S_1, S_2$  são *equivalentes*, se toda identidade de  $S_1$  é consequência das identidades de  $S_2$  e toda identidade de  $S_2$  é consequência das identidades de  $S_1$ .

**Lema 1.18.** *Sobre um corpo infinito, toda identidade polinomial  $f = f(x_1, \dots, x_m)$  é equivalente a um sistema finito de identidades polinomiais multihomogêneas.*

**Demonstração:**

Se  $f$  não é homogênea com respeito a  $x_1$ , escreva  $f = \sum_{i=0}^n f_i \in K\langle X \rangle$ , onde  $f_i$  é o componente homogêneo de  $f$  de grau  $i$  em  $x_1$ . Seja  $V$  o T-ideal de  $K\langle X \rangle$  gerado por  $f$ . Escolha  $n + 1$  elementos distintos  $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in K$ . Como  $V$  é T-ideal, então  $f(\alpha_j x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^n \alpha_j^i f_i(x_1, \dots, x_m)$  pertence a  $V$  para  $j = 0, \dots, n$ . Considerando estas equações como um sistema linear com incógnitas  $f_i, i = 0, \dots, n$ , temos que seu determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \cdots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (\alpha_j - \alpha_i)$$

é de Vandermond e diferente de zero. Logo, cada  $f_i(x_1, \dots, x_m)$  é uma combinação linear de identidades polinomiais da forma  $f(\alpha_j x_1, x_2, \dots, x_m)$ , ou seja, também pertencem a  $V$ .

Portanto, as identidades polinomiais  $f_i = 0$  são conseqüências de  $f = 0$ . Como  $f = 0$  é conseqüência deste sistema, obtemos a equivalência com um sistema de identidades polinomiais homogêneas com respeito a  $x_1$ .

Por indução sobre o número de variáveis  $m$ , obteremos a equivalência de  $f$  com um sistema de identidades polinomiais multihomogêneas.

■

Vamos introduzir algumas definições sobre álgebras de grupo e álgebras de Grassmann que serão utilizadas no desenvolvimento do trabalho.

**Definição 1.19.** Sejam  $K$  um corpo e  $G$  um grupo relativamente livre. Consideremos a álgebra de grupo  $KG$ . Dizemos que um ideal  $I \subset KG$  é *ideal verbal* se  $I$  é invariante por todos os endomorfismos da álgebra  $KG$  induzidos pelos endomorfismos do grupo  $G$ .

**Definição 1.20.** Seja  $V$  um  $K$ -espaço vetorial com base  $\{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ . A álgebra associativa livre  $K\langle e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \rangle$  com multiplicação induzida por  $e_\lambda^2 = 0$  e  $e_{\lambda_i}e_{\lambda_j} = -e_{\lambda_j}e_{\lambda_i}$  é denominada *álgebra de Grassmann de  $V$  sobre  $K$* .

**Observação 1.21.** a) Se  $V$  é de dimensão infinita, denotaremos por  $H$  a álgebra de Grassmann não unitária de  $V$  sobre  $K$  (*álgebra de Grassmann não unitária de dimensão infinita enumerável*) e o conjunto  $\{e_{i_1 \dots i_m} \mid m \geq 1; i_1 < \dots < i_m\}$  é uma base de  $H$ .

b) Se  $V$  é de dimensão  $k$ , denotaremos por  $H_k$  a álgebra de Grassmann não unitária de  $V$  sobre  $K$  (*álgebra de Grassmann não unitária de dimensão finita*) e o conjunto  $\{e_{i_1 \dots i_m} \mid m \geq 1; 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq k\}$  é uma base de  $H_k$ .

**Definição 1.22.** Seja  $G$  um grupo abeliano. Uma álgebra  $E$  é  *$G$ -graduada* se admite uma decomposição em uma soma direta de subespaços vetoriais  $E = \bigoplus_{g \in G} E_g$  tal que  $E_{g_1}E_{g_2} \subseteq E_{g_1g_2}$ , para todos  $g_1, g_2 \in G$ .

A álgebra  $H$  tem uma  $\mathbb{Z}_2$ -gradação natural. Lembremos que a base de  $H$  consiste de todos os produtos  $e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k}$ , onde  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  e  $k \geq 1$ . A  $\mathbb{Z}_2$ -gradação de  $H$  é definida por  $H = H_0 \oplus H_1$ , onde  $H_i$  é o subespaço vetorial gerado por todos os elementos da base tais que  $k \equiv i \pmod{2}$  para  $i = 0, 1$ . Os polinômios de  $H_0$  são denominados polinômios pares e os de  $H_1$ , polinômios ímpares de  $H$ . Além disso, os polinômios pares são centrais em  $H$ .

**Lema 1.23.** *Sejam  $d_1$  e  $d_2$  polinômios ímpares de  $H$ . Então,  $d_1d_2 = -d_2d_1$ .*

**Demonstração:**

Como todo polinômio ímpar é soma de monômios ímpares, podemos supor que  $d_1$  e  $d_2$  são monômios ímpares. Sejam  $d_1 = e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k}$  e  $d_2 = e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_l}$ . Então  $k$  e  $l$  são números ímpares. Portanto,

$$d_1d_2 = e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k}e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_l} = (-1)^{kl}e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_l}e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k} = -d_2d_1.$$

■

**Observação 1.24.** Em todo o trabalho usaremos a seguinte notação  $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$  e  $(a, b) = ab - ba$ .



## Capítulo 2

# Polinômios Centrais em Álgebras de Grassmann de Dimensão Infinita

Neste capítulo,  $K$  denota um corpo infinito arbitrário de característica prima  $p > 2$ .

Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão infinita sobre  $K$  e  $V_k$  um espaço vetorial de dimensão  $k$  sobre  $K$ .

Denotemos por  $H$  a álgebra de Grassmann, não unitária, de  $V$  sobre  $K$  e por  $H_k$  a álgebra de Grassmann, não unitária, de  $V_k$  sobre  $K$ .

Sejam  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$  um conjunto infinito enumerável de variáveis e  $K\langle X \rangle$  a álgebra associativa livre, não unitária, sobre  $K$ .

Siderov [12] encontrou, em 1981, uma base finita para as identidades satisfeitas por  $H$ , mostrou que o T-ideal das identidades satisfeitas por  $H$  é gerado, como T-ideal, pelos polinômios  $x_1^p$  e  $(x_1, x_2, x_3)$ . Além disso, provou que para um corpo arbitrário  $K$ , todo T-ideal de  $K\langle X \rangle$  contendo  $(x_1, x_2, x_3)$  é finitamente gerado. Em 1991, Regev [61] estudou as propriedades dos polinômios multilineares do T-ideal da álgebra de Grassmann de dimensão infinita (tanto unitária como não unitária) sobre um corpo finito.

Seja  $\mathcal{C}$  o espaço dos polinômios centrais de  $H$ . Nosso resultado principal, obtido neste capítulo, é que  $\mathcal{C}$  não é finitamente gerado como T-espaço. Antes de desenvolvermos este

trabalho não eram conhecidas álgebras associativas cujos polinômios centrais não possuem um conjunto gerador finito.

Ao contrário do esperado, não é possível obter os geradores de  $\mathcal{C}$  de forma direta. Utilizaremos a interpretação dada através de álgebras de grupo. Mais precisamente, usaremos o isomorfismo existente entre a álgebra relativamente livre da variedade gerada pela álgebra de Grassmann não unitária de posto infinito e um quociente do ideal de aumento da álgebra do grupo livre na variedade de todos os grupos de expoente  $p$ , nilpotentes de classe no máximo 2.

**Definição 2.1.** Um  $K$ -subespaço vetorial de  $K\langle X \rangle$  é chamado *T-espaço* se for um espaço invariante por todos os endomorfismos de  $K\langle X \rangle$ . De forma análoga definimos T-espaço de um quociente de  $K\langle X \rangle$  por um T-ideal.

Recordamos que  $T(H)$  denota o conjunto das identidades satisfeitas por  $H$ . Descreveremos agora como obtivemos nosso principal resultado. Primeiro provamos o seguinte teorema:

**Teorema 2.2.** *O T-espaço  $\mathcal{C}$  dos polinômios centrais da álgebra de Grassmann de dimensão infinita  $H$  é gerado, como T-espaço em  $K\langle X \rangle/T(H)$ , por*

$$(x_1, x_2) + T(H)$$

e pelos polinômios

$$\{(x_1, x_2) \dots (x_{2q-1}, x_{2q}) x_1^{p-1} \dots x_{2q}^{p-1} + T(H) \mid q \in \mathbb{N}\}.$$

É bem conhecido e fácil demonstrar o fato que os polinômios do conjunto  $P$

$$P = \{(x_1, x_2) + T(H), (x_1, x_2) \dots (x_{2q-1}, x_{2q}) x_1^{p-1} \dots x_{2q}^{p-1} + T(H) \mid q \in \mathbb{N}\}$$

são centrais em  $H$  e, portanto, o T-espaço  $\mathcal{P}$  gerado por eles também é central.

Nossa contribuição foi demonstrar que  $\mathcal{P}$  coincide com o T-espço  $\mathcal{C}$  dos polinômios centrais de  $H$ .

Observamos que em 2000, Shchigolev [64] demonstrou que o T-espço  $\mathcal{P}$ , gerado por  $P$ , não é finitamente gerado.

Finalmente, utilizando o resultado de Shchigolev e o Teorema 2.2, obtivemos o seguinte corolário

**Corolário 2.40.** *O T-espço  $\mathcal{C}$  dos polinômios centrais da álgebra de Grassmann de dimensão infinita  $H$  não é finitamente gerado.*

**Definição 2.3.** O T-ideal  $T$  de  $K\langle X \rangle$  é o T-ideal gerado por  $x_1^p$  e  $(x_1, x_2, x_3)$ .

Siderov [12] demonstrou que  $T(H) = T$ . Como o artigo é escrito em russo, visando tornar nosso trabalho mais independente, vamos apresentar essa demonstração. Para mostrar que  $T = T(H)$ , inicialmente, verificaremos que  $T$  está contido em  $T(H)$ .

**Lema 2.4.** [19, Exemplo 1.1.6] *As álgebras  $H$  e  $H_k$  satisfazem a identidade*

$$(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

**Demonstração:**

Sabemos que  $H_k \subseteq H$ , logo é suficiente mostrarmos que  $H$  satisfaz a identidade. Como  $(x_1, x_2, x_3)$  é linear em cada variável é suficiente verificarmos que os elementos da base de  $H$  satisfazem a identidade.

Seja  $(r_1, r_2) = (e_{i_1} \dots e_{i_m}, e_{j_1} \dots e_{j_n}) = (1 - (-1)^{mn}) e_{i_1} \dots e_{i_m} e_{j_1} \dots e_{j_n}$ . Temos que  $(r_1, r_2)$  é

não nulo se  $m$  e  $n$  são ímpares e  $e_{i_l} \neq e_{j_q}$  ( $1 \leq l \leq m$ ,  $1 \leq q \leq n$ ). Logo, se  $(r_1, r_2) \neq 0$ , então  $(r_1, r_2)$  é um polinômio par. Portanto,  $(r_1, r_2, r_3) = 0$  para todo  $r_3 \in H$ .

■

**Lema 2.5.** [61, Lema 1.2] *As álgebras  $H$  e  $H_k$  satisfazem as identidades*

$$\sum_{\rho \in S_p} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p)} = 0 \quad e \quad x_1^p = 0.$$

**Demonstração:**

Como  $H_k \subseteq H$ , é suficiente mostrarmos que  $H$  satisfaz tais identidades. Sejam  $w_1, \dots, w_p$  elementos de  $H$ .

Se no máximo um dos elementos  $w_1, \dots, w_p$  é um polinômio ímpar, então  $\sum_{\rho \in S_p} w_{\sigma(1)} \dots w_{\sigma(p)} = p! w_1 \dots w_p$ , pois os polinômios pares são centrais em  $H$ . Como a característica de  $K$  é  $p$ , temos  $\sum_{\rho \in S_p} w_{\sigma(1)} \dots w_{\sigma(p)} = 0$ .

Se  $w_i, w_j$  são polinômios ímpares, então para todo polinômio  $b \in H$ , temos  $w_i b w_j = -w_j b w_i$ . Logo,  $\sum_{\rho \in S_p} w_{\sigma(1)} \dots w_{\sigma(p)} = 0$ .

Portanto,  $H$  satisfaz a identidade  $\sum_{\rho \in S_p} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p)} = 0$ .

Seja  $w \in H$ ,  $w = \sum_{i=1}^r \alpha_i b_i$ , onde cada  $b_i$  é elemento da base de  $H$ , então  $w^p = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq r} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_p} b_{i_1} \dots b_{i_p}$ .

Se  $r < p$ , então em cada termo  $b_{i_1} \dots b_{i_p}$ , no mínimo dois dos  $(b_i)$ 's são iguais. Portanto,  $b_{i_1} \dots b_{i_p} = 0$  e conseqüentemente  $w^p = 0$ .

Se  $r \geq p$ , então  $w^p = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq r} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_p} b_{i_1} \dots b_{i_p} = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq r} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_p} \sum_{\rho \in S_p} b_{\sigma(i_1)} \dots b_{\sigma(i_p)} = 0$ .

Portanto,  $H$  satisfaz a identidade  $x_1^p = 0$ .

■

Pelos Lemas 2.4 e 2.5, podemos concluir o seguinte lema.

**Lema 2.6.** *O  $T$ -ideal  $T$  está contido em  $T(H)$ .*

Agora verificaremos que  $T(H)$  está contido em  $T$ .

**Lema 2.7.** *O  $T$ -ideal  $T$  contém todos os elementos da forma*

$$(x_1, x_3)(x_2, x_4) + (x_1, x_4)(x_2, x_3)$$

**Demonstração:**

Para todos  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , temos que  $(x_1x_2, x_3, x_4) \in T$ . Como

$$\begin{aligned} ((x_1x_2, x_3), x_4) &= (x_1(x_2, x_3) + (x_1, x_3)x_2, x_4) \\ &= (x_1(x_2, x_3), x_4) + ((x_1, x_3)x_2, x_4) \\ &= x_1(x_2, x_3, x_4) + (x_1, x_4)(x_2, x_3) + (x_1, x_3)(x_2, x_4) + (x_1, x_3, x_4)x_2 \end{aligned}$$

e

$$x_1(x_2, x_3, x_4), (x_1, x_3, x_4)x_2 \in T,$$

então

$$(x_1, x_4)(x_2, x_3) + (x_1, x_3)(x_2, x_4) \in T.$$

■

**Corolário 2.8.** *O  $T$ -ideal  $T$  contém o elemento  $(x_1, x_2)(x_2, x_3)$ .*

Seja

$$B = \{x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_m}^{\epsilon_m} (x_{j_1}, x_{j_2}) \dots (x_{j_{2q-1}}, x_{j_{2q}}) x_{j_1}^{\delta_1} \dots x_{j_{2q}}^{\delta_{2q}} \mid m, q \geq 0, \epsilon_l \in \{1, \dots, p-1\} (1 \leq l \leq m),$$

$$\delta_t \in \{0, \dots, p-1\} (1 \leq t \leq 2q), i_1 < \dots < i_m, j_1 < \dots < j_{2q}, i_r \neq j_s (1 \leq r \leq m, 1 \leq s \leq 2q)\}.$$

**Lema 2.9.** *O conjunto  $\{b + T \mid b \in B\}$  gera  $K\langle X \rangle/T$ , como espaço vetorial sobre  $K$ .*

**Demonstração:**

Seja  $y = x_{k_1}x_{k_2}\dots x_{k_n}$  um monômio de  $K\langle X \rangle$ . Sabemos que  $(x_i, x_j)$  é central módulo  $T$  para todos  $i, j \in \mathbb{N}$  e  $x_1^p \in T$ . Além disso, pelo Corolário 2.8,  $(x_1, x_2)(x_2, x_3) \in T$ . Podemos, então, reescrever  $y$  como combinação linear de elementos do tipo

$$x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_m}^{\epsilon_m} (x_{j_1}, x_{j_2}) \dots (x_{j_{2q-1}}, x_{j_{2q}}) x_{j_1}^{\delta_1} \dots x_{j_{2q}}^{\delta_{2q}} + t,$$

onde  $i_1 < \dots < i_m$ ,  $1 \leq \epsilon_i < p$  ( $1 \leq i \leq m$ ),  $x_{j_l} \neq x_{j_r}$  para  $l \neq r$ ,  $0 \leq \delta_l < p$  ( $1 \leq l \leq 2q$ ) e  $t \in T$ . Pelo Lema 2.7, para todos  $l_1, l_2, l_3, l_4 \in \mathbb{N}$ , temos que  $(x_{l_1}, x_{l_3})(x_{l_2}, x_{l_4})$  é igual a  $-(x_{l_1}, x_{l_4})(x_{l_2}, x_{l_3})$  módulo  $T$ , logo podemos supor  $j_1 < \dots < j_{2q}$ . Portanto,  $\{b + T \mid b \in B\}$  gera  $K\langle X \rangle/T$ . ■

**Corolário 2.10.** *O conjunto  $\{b + T(H) \mid b \in B\}$  gera  $K\langle X \rangle/T(H)$ .*

**Demonstração:**

Pelo Lema 2.9, o conjunto  $\{b + T \mid b \in B\}$  gera  $K\langle X \rangle/T$ . Pelo Lema 2.6,  $T \subseteq T(H)$ , então  $\{b + T(H) \mid b \in B\}$  gera  $K\langle X \rangle/T(H)$ . ■

Pelo Corolário 2.10, o conjunto  $\{b + T(H) \mid b \in B\}$  é um candidato natural a base de  $K\langle X \rangle/T(H)$ . Devemos verificar que  $B$  é linearmente independente módulo  $T(H)$ . Começaremos fixando uma relação de ordem sobre os elementos de  $B$ .

Seja  $b$  um elemento de  $B$ . Denotaremos o grau de  $b$  por  $\partial(b)$  e o grau de  $b$  relativamente a  $x_k$  por  $\partial_{x_k}(b)$ .

Se  $y = (x_i, x_j)$  dizemos que  $x_i$  e  $x_j$  pertencem a  $y$ .

**Definição 2.11.** [72, Definição 5] Sejam  $b_1$  e  $b_2$  elementos arbitrários de  $B$ . Dizemos que  $b_2 < b_1$  se uma das quatro afirmações seguintes for válida:

a)  $\partial(b_1) < \partial(b_2)$

b) Se  $\partial(b_1) = \partial(b_2)$  e o número de comutadores em  $b_1$  é menor que o número de comutadores em  $b_2$ .

c) Se  $\partial(b_1) = \partial(b_2)$ , o número de comutadores em  $b_1$  e  $b_2$  é o mesmo e existe  $l \geq 1$  tal que para todo  $k < l$ ,  $\partial_{x_k}(b_1) = \partial_{x_k}(b_2)$  e  $\partial_{x_l}(b_1) < \partial_{x_l}(b_2)$ .

d) Se  $\partial(b_1) = \partial(b_2)$ , o número de comutadores em  $b_1$  e  $b_2$  é o mesmo,  $\partial_{x_j}(b_1) = \partial_{x_j}(b_2)$  para todo  $x_j$ , existe  $l \geq 1$  tal que para  $k < l$ ,  $x_k$  pertence a um comutador em  $b_1$  se, e somente se, pertence a um comutador em  $b_2$ , e  $x_l$  pertence a algum comutador de  $b_1$  e não pertence a comutadores de  $b_2$ .

**Lema 2.12.** [72, Lema 7] a) Sejam  $h_1 = c_1 + g_1$  e  $h_2 = c_2 + g_2$ , elementos de  $H$  (respectivamente  $H_k$ ), tais que  $c_1, c_2$  são polinômios pares e  $g_1, g_2$  polinômios ímpares. Então,  $(h_1, h_2)h_1^{\beta_1}h_2^{\beta_2} = 2c_1^{\beta_1}c_2^{\beta_2}g_1g_2$ .

b) Seja  $v = \alpha_1b_1 + \dots + \alpha_sb_s$ , onde  $b_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ) são monômios de  $H$  (respectivamente  $H_k$ ) e  $\alpha_i \in K$  ( $1 \leq i \leq s$ ). Então,  $v^{s+1} = 0$ .

c) Seja  $w = e_{i_1}e_{i_2} + \dots + e_{i_{2s-1}}e_{i_{2s}}$  um elemento de  $H$  (respectivamente  $H_k$ ), tal que  $e_{i_j} \neq e_{i_l}$  para  $j \neq l$  ( $1 \leq j, l \leq 2s$ ). Então,  $w^s = s!e_{i_1} \dots e_{i_{2s}}$ .

d) Seja  $w = e_{i_1}e_{i_2} + \dots + e_{i_{2s-3}}e_{i_{2s-2}} + e_{i_{2s-1}}$  um elemento de  $H$  (respectivamente  $H_k$ ), tal que  $e_{i_j} \neq e_{i_l}$  para  $j \neq l$  ( $1 \leq j, l \leq 2s - 1$ ). Então,  $w^s = s!e_{i_1} \dots e_{i_{2s-1}}$ .

### Demonstração:

Essa demonstração é diferente da demonstração feita no Lema 7 de [72].

a) Sabemos que os polinômios pares são centrais. Além disso, para  $d_1, d_2$  polinômios ímpares, temos  $d_1d_2 = -d_2d_1$ . Logo se  $g$  é polinômio ímpar, temos  $g^2 = 0$ . Portanto,

$$\begin{aligned}
(h_1, h_2)h_1^{\beta_1}h_2^{\beta_2} &= (c_1 + g_1, c_2 + g_2)(c_1 + g_1)^{\beta_1}(c_2 + g_2)^{\beta_2} \\
&= (g_1, g_2) \left( \binom{\beta_1}{0} c_1^{\beta_1} + \binom{\beta_1}{1} c_1^{\beta_1-1} g_1 + \binom{\beta_1}{2} c_1^{\beta_1-2} g_1^2 + \dots + \binom{\beta_1}{\beta_1} g_1^{\beta_1} \right) \\
&\quad \times \left( \binom{\beta_2}{0} c_2^{\beta_2} + \binom{\beta_2}{1} c_2^{\beta_2-1} g_2 + \binom{\beta_2}{2} c_2^{\beta_2-2} g_2^2 + \dots + \binom{\beta_2}{\beta_2} g_2^{\beta_2} \right) \\
&= 2g_1g_2(c_1^{\beta_1} + \beta_1c_1^{\beta_1-1}g_1)(c_2^{\beta_2} + \beta_2c_2^{\beta_2-1}g_2) \\
&= 2g_1g_2c_1^{\beta_1}c_2^{\beta_2}.
\end{aligned}$$

b) Mostraremos por indução sobre  $s$ .

Para  $s = 1$ , temos  $(\alpha_1 b_1)^2 = \alpha_1^2 b_1^2 = 0$ .

Suponhamos que  $v^{s+1} = (\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_s b_s)^{s+1} = 0$ . Então,

$$\begin{aligned}
(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_s b_s + \alpha_{s+1} b_{s+1})^{s+2} &= (v + \alpha_{s+1} b_{s+1})^{s+2} \\
&= \binom{s+2}{0} v^{s+2} \binom{s+2}{1} v^{s+1} \alpha_{s+1} b_{s+1} \\
&\quad + \binom{s+2}{2} v^s (\alpha_{s+1} b_{s+1})^2 + \dots + \binom{s+2}{s+2} (\alpha_{s+1} b_{s+1})^{s+2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

c) Mostraremos por indução sobre  $s$ .

Para  $s = 2$ , temos  $(e_{i_1} e_{i_2} + e_{i_3} e_{i_4})^2 = e_{i_1} e_{i_2} e_{i_3} e_{i_4} + e_{i_3} e_{i_4} e_{i_1} e_{i_2} = 2e_{i_1} e_{i_2} e_{i_3} e_{i_4}$ .

Suponhamos que  $w^s = (e_{i_1} e_{i_2} + \dots + e_{i_{2s-1}} e_{i_{2s}})^s = s! e_{i_1} \dots e_{i_{2s}}$ . Então,



$$\begin{aligned}
(e_{i_1}e_{i_2} + \dots + e_{i_{2s+1}}e_{i_{2s+2}})^{s+1} &= (w + e_{i_{2s+1}}e_{i_{2s+2}})^{s+1} \\
&= \binom{s+1}{0}w^{s+1} + \binom{s+1}{1}w^s e_{i_{2s+1}}e_{i_{2s+2}} + \binom{s+1}{2}w^{s-1} \\
&\quad \times (e_{i_{2s+1}}e_{i_{2s+2}})^2 + \dots + \binom{s+1}{s+1}(e_{i_{2s+1}}e_{i_{2s+2}})^{s+1} \\
&= w^{s+1} + (s+1)s!e_{i_1}\dots e_{i_{2s}}e_{i_{2s+1}}e_{i_{2s+2}} \\
&= (s+1)!e_{i_1}\dots e_{i_{2s+2}}.
\end{aligned}$$

d) Mostraremos por indução sobre  $s$ .

Para  $s = 2$ , temos  $(e_{i_1}e_{i_2} + e_{i_3})^2 = e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3} + e_{i_3}e_{i_1}e_{i_2} = 2e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3}$ .

Suponhamos que  $w^s = (e_{i_1}e_{i_2} + \dots + e_{i_{2s-3}}e_{i_{2s-2}} + e_{i_{2s-1}})^s = s!e_{i_1}\dots e_{i_{2s-1}}$ . Então,

$$\begin{aligned}
(e_{i_1}e_{i_2} + \dots + e_{i_{2s}}e_{i_{2s+1}} + e_{i_{2s-1}})^{s+1} &= (w + e_{i_{2s}}e_{i_{2s+1}})^{s+1} \\
&= \binom{s+1}{0}w^{s+1} + \binom{s+1}{1}w^s e_{i_{2s}}e_{i_{2s+1}} \\
&\quad + \dots + \binom{s+1}{s+1}(e_{i_{2s}}e_{i_{2s+1}})^{s+1} \\
&= w^{s+1} + (s+1)s!e_{i_1}\dots e_{i_{2s-1}}e_{i_{2s}}e_{i_{2s+1}} \\
&= (s+1)!e_{i_1}\dots e_{i_{2s+1}}.
\end{aligned}$$

■

**Lema 2.13.** *Os elementos de  $B$  são linearmente independentes módulo  $T(H)$ .*

**Demonstração:**

Esta demonstração é baseada na demonstração do Lema 8 de [72].

Consideremos uma combinação linear arbitrária,  $f = \sum_{i=1}^t \alpha_i b_i$ , de elementos de  $B$ .

Suponhamos que o termo líder de  $f$  com respeito à Definição 2.11 é  $\alpha_1 b_1$ , onde  $\alpha_1 \in K$ ,  $\alpha_1 \neq 0$ . Seja  $b_1 = \prod_{k=1}^m x_{i_k}^{\epsilon_k} \prod_{l=1}^q (x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}})^{\delta_{2l-1}} x_{j_{2l}}^{\delta_{2l}}$ .

Definamos um homomorfismo  $\varphi : K\langle X \rangle / T(H) \rightarrow H$  por:

$$\varphi(x_{i_k}) = e_{i_k 1} e_{i_k 2} + \dots + e_{i_k (2\epsilon_k - 1)} e_{i_k (2\epsilon_k)} \text{ para } 1 \leq k \leq m,$$

$$\varphi(x_{j_t}) = e_{j_t 1} e_{j_t 2} + \dots + e_{j_t (2\delta_t - 1)} e_{j_t (2\delta_t)} + e_{j_t}, \text{ para } 1 \leq t \leq 2q,$$

$$\varphi(x_s) = 0, \text{ se } x_s \neq x_{i_k} \text{ (} 1 \leq k \leq m \text{) e } x_s \neq x_{j_t} \text{ (} 1 \leq t \leq 2q \text{),}$$

onde todos  $e_{j_t}, e_{i_k \gamma_k}, e_{j_t \beta_t}$  ( $1 \leq k \leq m, 1 \leq t \leq 2q, 1 \leq \gamma_k \leq 2\epsilon_k, 1 \leq \beta_t \leq 2\delta_t$ ) são elementos distintos da base de  $H$ .

Pelo Lema 2.12, itens a) e c), temos que  $\varphi(b_1) = \gamma_1 e_1 \dots e_d \neq 0$ , onde  $0 \neq \gamma_1 \in \mathbb{R}$ .

Agora vamos verificar o que acontece com os outros termos de  $f$ . Seja  $\alpha_m b_m$  um destes termos.

Se  $b_m$  possui alguma variável  $x_s$  distinta das variáveis de  $b_1$ , como  $\varphi(x_s) = 0$ , temos  $\varphi(b_m) = 0$ . Resta verificar os casos onde  $b_1$  e  $b_m$  não possuem variáveis distintas.

Pela escolha de  $b_1$  temos que  $b_m < b_1$ , então alguma das condições da Definição 2.11 é satisfeita.

**Caso 1)** Se  $\partial(b_1) < \partial(b_m)$ , então existe  $x_r$  tal que  $\partial_{x_r}(b_1) < \partial_{x_r}(b_m)$ . Consideraremos 4 possibilidades:

**a)**  $x_r$  não pertence a comutadores de  $b_1$  e de  $b_m$ . Seja  $\partial_{x_r}(b_1) = \epsilon_r$  e  $\varphi(x_r) = e_{r1} e_{r2} + \dots + e_{r(2\epsilon_r - 1)} e_{r(2\epsilon_r)}$ , como  $\partial_{x_r}(b_m) \geq \epsilon_r + 1$  e, pelo Lema 2.12 b),  $(\varphi(x_r))^{\epsilon_r + 1} = 0$ , então  $\varphi(b_m) = 0$ .

**b)** A variável  $x_r$  não pertence a comutadores de  $b_1$ , contudo pertence a algum comutador de  $b_m$ . Suponhamos  $x_r = x_{i_k}$ , como  $\varphi(x_{i_k})$  é elemento do centro de  $H$ ,  $\varphi(b_m) = 0$ .

c) A variável  $x_r$  pertence a algum comutador de  $b_1$ , porém não pertence a comutadores de  $b_m$ . Sejam  $\partial_{x_r}(b_1) = \delta_r + 1$  e  $\varphi(x_r) = e_{r1}e_{r2} + \dots + e_{r(2\delta_r-1)}e_{r(2\delta_r)} + e_r$ . Como  $\partial_{x_r}(b_m) \geq \delta_r + 2$  e, pelo Lema 2.12 b),  $(\varphi(x_r))^{\delta_r+2} = 0$ , temos  $\varphi(b_m) = 0$ .

d)  $x_r$  pertence a comutadores de  $b_1$  e de  $b_m$ . Sejam  $\partial_{x_r}(b_1) = \delta_r + 1$ ,  $\varphi(x_r) = e_{r1}e_{r2} + \dots + e_{r(2\delta_r-1)}e_{r(2\delta_r)} + e_r$  e  $\partial_{x_r}(b_m) = \delta_r + 1 + t$ , com  $t > 0$ . Se  $\varphi(x_s) = c_s + g_s$ , onde  $c_s$  é um polinômio par e  $g_s$  é um polinômio ímpar, então pelo Lema 2.12 a),  $(\varphi(x_r), \varphi(x_s))\varphi(x_r)^{\delta_r+t}\varphi(x_s)^{\delta_s} = 2(e_{r1}e_{r2} + \dots + e_{r(2\delta_r-1)}e_{r(2\delta_r)})^{\delta_r+t}c_s^{\delta_s}e_rg_s$ . Pelo Lema 2.12 b),  $(e_{r1}e_{r2} + \dots + e_{r(2\delta_r-1)}e_{r(2\delta_r)})^{\delta_r+t} = 0$ , então  $\varphi(b_m) = 0$ .

**Caso 2)** Se  $\partial(b_1) = \partial(b_m)$  e o número de comutadores em  $b_1$  é menor que o número de comutadores em  $b_m$ , então para algum  $k$  a variável  $x_{i_k}$  pertence a algum comutador de  $b_m$ , mas não pertence a nenhum comutador de  $b_1$ . Como  $\varphi(x_{i_k})$  é um elemento do centro de  $H$ , temos  $\varphi(b_m) = 0$ .

**Caso 3)** Se  $\partial(b_1) = \partial(b_m)$ , o número de comutadores em  $b_1$  e  $b_m$  é o mesmo e existe  $r \geq 1$  tal que para todo  $l < r$ ,  $\partial_{x_l}(b_1) = \partial_{x_l}(b_m)$  e  $\partial_{x_r}(b_1) < \partial_{x_r}(b_m)$ . Recaímos no Caso 1).

**Caso 4)** Se  $\partial(b_1) = \partial(b_m)$ , o número de comutadores em  $b_1$  e  $b_m$  é o mesmo,  $\partial_{x_j}(b_1) = \partial_{x_j}(b_m)$  para todo  $x_j$ , existe  $r \geq 1$  tal que para  $l < r$ ,  $x_l$  pertence a um comutador em  $b_1$  se, e somente se, pertence a um comutador em  $b_m$ , e  $x_r$  pertence a algum comutador de  $b_1$  e não pertence a comutadores de  $b_m$ . Neste caso, para algum  $k$ ,  $x_{i_k}$  pertence a um comutador em  $b_m$ , mas não pertence a nenhum comutador de  $b_1$ . Como  $\varphi(x_{i_k})$  é um elemento do centro de  $H$ , temos  $\varphi(b_m) = 0$ .

Portanto,  $\varphi(f) = \alpha_1\gamma_1e_1\dots e_d$ ,  $0 \neq \gamma_1 \in \mathbb{R}$ .

Se  $f = \sum_{i=1}^t \alpha_i b_i = 0 \pmod{T(H)}$ , temos  $\alpha_1\gamma_1e_1\dots e_d = 0$ , o que implica que  $\alpha_1 = 0$ .

Assim sucessivamente, verificamos que  $\alpha_i = 0$  ( $1 \leq i \leq t$ ).

Portanto,  $B$  é linearmente independente módulo  $T(H)$ . ■

**Proposição 2.14.** (Siderov [12, Teorema 3]) *Se  $K$  é um corpo arbitrário de característica prima  $p > 2$ , então  $T = T(H)$ .*

**Demonstração:**

Esta proposição foi citada sem demonstração em [22].

Pelo Lema 2.6,  $T \subseteq T(H)$ . No Lema 2.9, mostramos que o conjunto  $\{b + T \mid b \in B\}$  gera  $K\langle X \rangle/T$ . Pelo Corolário 2.10 e Lema 2.13, o conjunto  $\{b + T(H) \mid b \in B\}$  é base de  $K\langle X \rangle/T(H)$ . Logo,  $T(H) = T$ . ■

Nosso próximo objetivo é encontrar os geradores do  $T$ -espaço dos polinômios centrais da álgebra de Grassmann  $H$ , usaremos a interpretação de  $H$  como ideal de aumento de uma álgebra de grupo.

Sejam  $N_{2,p}$  a variedade de todos os grupos de expoente  $p$ , nilpotentes de classe no máximo 2 e  $G$  o grupo livre de  $N_{2,p}$  livremente gerado por  $a_1, a_2, a_3, \dots$ .

Consideremos a álgebra de grupo  $KG$  e o ideal  $T'$  de  $KG$  gerado por todos os elementos da forma

$$(g_1, g_2, g_3), \quad g_i \in G \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.1)$$

Sejam  $M = K\langle X \rangle/T$ ,  $M_1$  a álgebra unitária obtida adicionando a unidade a  $M$ . O  $K$ -espaço vetorial  $M_1$  pode ser decomposto como a soma direta  $M_1 = M \oplus K$ . Seja  $\Delta$  o ideal de aumento de  $KG$ .

Mostraremos que existe um isomorfismo entre a álgebra  $M_1$  e a álgebra de grupo

$KG/T'$ . Inicialmente, definiremos um homomorfismo de  $KG/T'$  em  $M_1$ .

**Lema 2.15.** *Seja  $G_1 = M + 1 = \{m + 1 \mid m \in M\}$ . Então,  $G_1$  é um grupo multiplicativo e pertence à variedade  $N_{2,p}$ .*

**Demonstração:**

Seja  $(m + 1) \in G_1$ , onde  $m \in M$ , como a característica do corpo  $K$  é  $p$  temos

$$(m + 1)^p = \binom{p}{0} m^p + \binom{p}{1} m^{p-1} + \dots + \binom{p}{p-1} m + \binom{p}{p} 1 = 1.$$

Logo,  $G_1$  é um grupo e satisfaz a identidade  $x^p = 1$ .

Em 1983, Gupta e Levin [31] mostraram que a identidade  $(x_1, x_2, x_3) = 0$  transfere, ou seja, se a identidade  $(x_1, x_2, x_3) = 0$  é satisfeita por uma álgebra unitária  $\mathcal{A}$ , então o grupo das unidades de  $\mathcal{A}$  satisfaz a identidade  $[x_1, x_2, x_3] = 1$ .

Logo,  $G_1$  satisfaz a identidade  $[x_1, x_2, x_3] = 1$ .

Portanto,  $G_1 \in N_{2,p}$ .

■

Consideremos a álgebra de grupo  $KG_1$ . Como  $(1 + x_i)^p = 1$ , temos que  $1 \in KG_1$  e conseqüentemente  $x_i \in KG_1$ , para todos  $i = 1, 2, \dots$ . Como  $G$  é o grupo livre na variedade  $N_{2,p}$  e  $G_1$  pertence a  $N_{2,p}$ , existe um homomorfismo  $\bar{\psi} : G \rightarrow G_1$ , onde  $\bar{\psi}(a_i) = x_i + 1$ . Além disso,  $\bar{\psi}$  pode ser estendido a um homomorfismo  $\psi : KG \rightarrow M_1$ . Contudo,

$$(x_1 + 1, x_2 + 1, x_3 + 1) = (x_1, x_2, x_3) = 0,$$

logo podemos estabelecer um homomorfismo  $\psi : KG/T' \rightarrow M_1$  definido por  $\psi(a_i + T') = (x_i + 1)$ .

Agora, definiremos um homomorfismo de  $M_1$  em  $KG/T'$ . Seja  $\mathcal{T}$  a variedade de

álgebras determinada pelo T-ideal  $T$ .

**Lema 2.16.** *A álgebra  $\Delta/T'$  pertence à variedade  $\mathcal{T}$ .*

**Demonstração:**

O polinômio  $(x_1, x_2, x_3)$  é multilinear, logo basta verificar que os geradores de  $\Delta/T'$ , como espaço vetorial, satisfazem a identidade  $(x_1, x_2, x_3) = 0$ . Como

$$(g_1 - 1, g_2 - 1, g_3 - 1) = (g_1, g_2, g_3)$$

pertence a  $T'$ ,  $\Delta/T'$  satisfaz a identidade  $(x_1, x_2, x_3) = 0$ .

Seja  $g - 1$  gerador de  $\Delta$ , como espaço vetorial. Temos que

$$(g - 1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} g^{p-k} (-1)^k = 0.$$

Logo,  $\Delta/T'$  satisfaz a identidade  $x_1^p = 0$ .

■

Como  $M$  é a álgebra relativamente livre de  $\mathcal{T}$  e  $\Delta/T'$  é gerado, como álgebra, pelo conjunto  $\{(a_1 - 1) + T', (a_2 - 1) + T', \dots\}$ , existe um homomorfismo  $\varphi : M \rightarrow \Delta/T'$  definido por  $\varphi(x_i) = (a_i - 1) + T'$ . Podemos, então definir um homomorfismo  $\phi : M_1 \rightarrow KG/T'$  por  $\phi(m) = \varphi(m)$ , para  $m \in M$  e  $\phi(1) = 1$ .

A aplicação  $\psi$  é a inversa de  $\phi$ . Logo,  $M_1$  e  $KG/T'$  são isomorfos e  $M$  e  $\Delta/T'$  também são. Demonstraremos alguns resultados usando  $KG/T'$ .

Vamos determinar uma base de  $KG/T'$ . Utilizaremos idéias análogas às utilizadas em [29].

Fixemos uma ordem linear arbitrária em  $G$  tal que  $g > 1$  para todo  $g \in G$ ,  $g \neq 1$ .

**Lema 2.17.** *O ideal  $T'$  de  $KG$  contém todos os elementos da forma*

$$(g_1, g_3)(g_2, g_4) + (g_1, g_4)(g_2, g_3), g_i \in G, i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (2.2)$$

**Demonstração:**

Para todos  $g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$ , temos que  $(g_1g_2, g_3, g_4) \in T'$ . Como

$$\begin{aligned} ((g_1g_2, g_3), g_4) &= (g_1(g_2, g_3) + (g_1, g_3)g_2, g_4) \\ &= (g_1(g_2, g_3), g_4) + ((g_1, g_3)g_2, g_4) \\ &= g_1(g_2, g_3, g_4) + (g_1, g_4)(g_2, g_3) + (g_1, g_3)(g_2, g_4) + (g_1, g_3, g_4)g_2 \end{aligned}$$

e

$$g_1(g_2, g_3, g_4), (g_1, g_3, g_4)g_2 \in T',$$

então

$$(g_1, g_4)(g_2, g_3) + (g_1, g_3)(g_2, g_4) \in T'.$$

■

**Corolário 2.18.** *O ideal  $T'$  contém os produtos da forma  $(g_{i_1}, g_{i_2})(g_{i_3}, g_{i_4})$  tais que  $g_{i_k} = g_{i_l}$  para alguns  $k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$ .*

**Lema 2.19.** *O ideal  $T'$  é gerado, como ideal em  $KG$ , pelos elementos da forma*

$$(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}) \quad (2.3)$$

e

$$(a_{i_1}, a_{i_3})(a_{i_2}, a_{i_4}) + (a_{i_1}, a_{i_4})(a_{i_2}, a_{i_3}). \quad (2.4)$$

**Demonstração:**

Seja  $Q$  o ideal gerado por todos os elementos (2.3) e (2.4). Como  $T'$  contém os elementos (2.1) e (2.2) para todos  $g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$ , então  $Q \subseteq T'$ .

Todo  $g_l \in G$  pode ser escrito na forma  $g_l = h_l w_l = a_{l_1}^{\varepsilon_{l_1}} \dots a_{l_{n_l}}^{\varepsilon_{l_{n_l}}} w_l$ , onde  $l_1 < \dots < l_{n_l}$ ,  $\varepsilon_{l_i} \in \{1, \dots, p-1\}$ ,  $i = 1, \dots, n_l$  e  $w_l \in G'$ , pois  $G$  é de expoente  $p$  e nilpotente de classe no máximo 2 e, conseqüentemente,  $G'$  é central em  $G$ . Temos

$$\begin{aligned} (g_1, g_3)(g_2, g_4) + (g_1, g_4)(g_2, g_3) &= (h_1 w_1, h_3 w_3)(h_2 w_2, h_4 w_4) + (h_1 w_1, h_4 w_4)(h_2 w_2, h_3 w_3) \\ &= (h_1, h_3)w_1 w_3 (h_2, h_4)w_2 w_4 + (h_1, h_4)w_1 w_4 (h_2, h_3)w_2 w_3 \\ &= ((h_1, h_3)(h_2, h_4) + (h_1, h_4)(h_2, h_3))w_1 w_2 w_3 w_4, \end{aligned}$$

onde  $w_1 w_2 w_3 w_4 \in G'$ . Portanto, é suficiente considerarmos  $g_l = a_{l_1}^{\varepsilon_{l_1}} \dots a_{l_{n_l}}^{\varepsilon_{l_{n_l}}}$ , com  $l_1 < \dots < l_{n_l}$  e  $\varepsilon_{l_i} \in \{1, \dots, p-1\}$ ,  $i = 1, \dots, n_l$ .

Seja  $\partial(g_l) = \varepsilon_{l_1} + \dots + \varepsilon_{l_{n_l}}$  o grau de  $g_l$ . Temos que  $\partial((g_1, g_2, g_3)) = \partial(g_1 g_2 g_3)$  e  $\partial((g_1, g_3)(g_2, g_4) + (g_1, g_4)(g_2, g_3)) = \partial(g_1 g_2 g_3 g_4)$ .

Mostraremos por indução, sobre o grau dos elementos (2.1) e (2.2), que  $T' \subseteq Q$ .

Os elementos (2.1), de grau 3, e (2.2), de grau 4, estão contidos em  $Q$ . Suponhamos que  $f \in T'$  é um elemento de grau  $k$  ( $k \geq 4$ ) e todos os elementos (2.1) e (2.2) de grau menor que  $k$  estão contidos em  $Q$ .

Consideremos  $f = (g_1, g_3)(g_2, g_4) + (g_1, g_4)(g_2, g_3)$  e  $g_3 = g'_3 g''_3$ , onde  $\partial(g'_3), \partial(g''_3) \geq 1$ . Então,

$$\begin{aligned} f &= (g_1, g'_3 g''_3)(g_2, g_4) + (g_1, g_4)(g_2, g'_3 g''_3) \\ &= (g'_3(g_1, g''_3) + (g_1, g'_3)g''_3)(g_2, g_4) + (g_1, g_4)(g'_3(g_2, g''_3) + (g_2, g'_3)g''_3) \\ &= g'_3(g_1, g''_3)(g_2, g_4) + (g_1, g_4)g'_3(g_2, g''_3) + (g_1, g'_3)g''_3(g_2, g_4) + (g_1, g_4)(g_2, g'_3)g''_3. \end{aligned}$$

Como, por hipótese de indução,

$$g'_3(g_1, g''_3)(g_2, g_4) + (g_1, g_4)g'_3(g_2, g''_3) = g'_3((g_1, g''_3)(g_2, g_4) + (g_1, g_4)(g_2, g''_3)) + (g_1, g_4, g'_3)(g_2, g''_3)$$

e

$$(g_1, g'_3)g''_3(g_2, g_4) + (g_1, g_4)(g_2, g'_3)g''_3 = ((g_1, g'_3)(g_2, g_4) + (g_1, g_4)(g_2, g'_3))g''_3 - (g_1, g'_3)(g_2, g_4, g''_3)$$



são elementos de  $Q$ , então  $f \in Q$ .

Caso  $\partial(g_3) = 1$ , então  $\partial(g_l) > 1$  para algum  $l \in \{1, 2, 4\}$ , e a demonstração segue de maneira análoga.

Portanto, todo elemento  $f$  da forma (2.2) está contido em  $Q$ .

Consideremos  $f = (g_1, g_2, g_3)$ .

Se  $g_3 = g'_3 g''_3$ ,  $\partial(g'_3), \partial(g''_3) \geq 1$ , então

$$f = (g_1, g_2, g'_3 g''_3) = g'_3(g_1, g_2, g''_3) + (g_1, g_2, g'_3)g''_3 \in Q.$$

Se  $\partial(g_3) = 1$ ,  $g_2 = g'_2 g''_2$ ,  $\partial(g'_2), \partial(g''_2) \geq 1$ , então

$$\begin{aligned} f &= (g_1, g'_2 g''_2, g_3) \\ &= (g'_2(g_1, g''_2) + (g_1, g'_2)g''_2, g_3) \\ &= (g'_2(g_1, g''_2), g_3) + ((g_1, g'_2)g''_2, g_3) \\ &= g'_2(g_1, g''_2, g_3) + (g'_2, g_3)(g_1, g''_2) + (g_1, g'_2)(g''_2, g_3) + (g_1, g'_2, g_3)g''_2 \in Q. \end{aligned}$$

Se  $\partial(g_2) = 1 = \partial(g_3)$ ,  $\partial(g_1) > 1$  a demonstração segue de maneira análoga.

Logo, todo elemento  $f$  da forma (2.1) está contido em  $Q$ , então  $T' = Q$ .

■

**Lema 2.20.** *Seja  $T_1$  o ideal em  $KG$  gerado pelos elementos da forma*

$$(a_{i_1}, a_{i_2})(a_{i_2}, a_{i_3}), \quad i_1, i_2, i_3 \in \mathbb{N}.$$

*Então,  $T_1 \subseteq T'$  é gerado pelos elementos da forma*

$$([a_{i_1}, a_{i_2}] - 1)([a_{i_2}, a_{i_3}] - 1), \quad i_1, i_2, i_3 \in \mathbb{N}.$$

**Demonstração:**

Pelo Corolário 2.18,  $T_1 \subseteq T'$ . Além disso, para todos  $i_1, i_2, i_3 \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} (a_{i_1}, a_{i_2})(a_{i_2}, a_{i_3}) &= a_{i_2} a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} ([a_{i_1}, a_{i_2}] - 1) - a_{i_2} a_{i_1} a_{i_3} a_{i_2} ([a_{i_1}, a_{i_2}] - 1) \\ &= a_{i_2} a_{i_1} a_{i_3} a_{i_2} ([a_{i_2}, a_{i_3}] - 1) ([a_{i_1}, a_{i_2}] - 1). \end{aligned}$$

Portanto, os elementos da forma  $(a_{i_1}, a_{i_2})(a_{i_2}, a_{i_3})$  e  $([a_{i_1}, a_{i_2}] - 1)([a_{i_2}, a_{i_3}] - 1)$  geram o mesmo ideal em  $KG$ .

■

**Corolário 2.21.** *Os elementos da forma  $([a_{i_1}, a_{i_2}] - 1)([a_{i_3}, a_{i_4}] - 1)$ , onde  $i_s = i_r$  para  $s, r \in \{1, 2, 3, 4\}$  pertencem a  $T_1$ .*

**Lema 2.22.**  *$T'$  é gerado, como ideal em  $KG$ , pelos elementos da forma*

$$([a_{i_1}, a_{i_3}] - 1)([a_{i_2}, a_{i_4}] - 1) + ([a_{i_1}, a_{i_4}] - 1)([a_{i_2}, a_{i_3}] - 1). \quad (2.5)$$

**Demonstração:**

Pelo Lema 2.19,  $T'$  é o ideal bilateral gerado pelos elementos

$$(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3})$$

e

$$(a_{i_1}, a_{i_3})(a_{i_2}, a_{i_4}) + (a_{i_1}, a_{i_4})(a_{i_2}, a_{i_3}), \quad i_1, i_2, i_3, i_4 \in \mathbb{N}.$$

Como

$$\begin{aligned} (a_{i_1}, a_{i_3})(a_{i_2}, a_{i_4}) &= a_{i_3} a_{i_1} a_{i_2} a_{i_4} ([a_{i_1}, a_{i_3}] - 1) - a_{i_3} a_{i_1} a_{i_4} a_{i_2} ([a_{i_1}, a_{i_3}] - 1) \\ &= a_{i_3} a_{i_1} a_{i_4} a_{i_2} ([a_{i_1}, a_{i_3}] - 1) ([a_{i_2}, a_{i_4}] - 1) (a_{i_1}, a_{i_4})(a_{i_2}, a_{i_3}) \\ &= a_{i_3} a_{i_1} a_{i_4} a_{i_2} [a_{i_4}, a_{i_1}] [a_{i_4} a_{i_1}, a_{i_3}] ([a_{i_1}, a_{i_4}] - 1) ([a_{i_2}, a_{i_3}] - 1) \\ &= a_{i_3} a_{i_1} a_{i_4} a_{i_2} (([a_{i_4}, a_{i_1}] - 1) + ([a_{i_4}, a_{i_3}] - 1) \\ &\quad + ([a_{i_1}, a_{i_3}] - 1) + 1) ([a_{i_1}, a_{i_4}] - 1) ([a_{i_2}, a_{i_3}] - 1) \\ &= a_{i_3} a_{i_1} a_{i_4} a_{i_2} ([a_{i_1}, a_{i_4}] - 1) ([a_{i_2}, a_{i_3}] - 1) \pmod{T_1} \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} & (a_{i_1}, a_{i_3})(a_{i_2}, a_{i_4}) + (a_{i_1}, a_{i_4})(a_{i_2}, a_{i_3}) \\ &= a_{i_3}a_{i_1}a_{i_4}a_{i_2}((a_{i_1}, a_{i_3}) - 1)(a_{i_2}, a_{i_4}) - 1 + ((a_{i_1}, a_{i_4}) - 1)(a_{i_2}, a_{i_3}) - 1 \pmod{T_1}. \end{aligned}$$

Logo, o ideal  $T_2$  em  $KG$  gerado por  $T_1$  e pelos elementos (2.4), coincide com o ideal gerado por  $T_1$  e pelos elementos (2.5). Contudo,  $T_1$  pode ser gerado pelos elementos

$$([a_{i_1}, a_{i_2}] - 1)([a_{i_2}, a_{i_3}] - 1) = ([a_{i_1}, a_{i_2}] - 1)([a_{i_2}, a_{i_3}] - 1) + ([a_{i_1}, a_{i_3}] - 1)([a_{i_2}, a_{i_2}] - 1)$$

assim,  $T_2$  é gerado pelos elementos (2.5). Como

$$\begin{aligned} (a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}) &= a_{i_3}a_{i_2}a_{i_1}([a_{i_2}a_{i_1}, a_{i_3}] - 1)([a_{i_1}, a_{i_2}] - 1) \\ &= a_{i_3}a_{i_2}a_{i_1}((a_{i_2}, a_{i_3}) - 1)([a_{i_1}, a_{i_3}] - 1) + ([a_{i_2}, a_{i_3}] - 1) \\ &\quad + ([a_{i_1}, a_{i_3}] - 1)([a_{i_1}, a_{i_2}] - 1) \\ &= 0 \pmod{T_1} \end{aligned}$$

temos,  $T' = T_2$  e o resultado segue. ■

**Definição 2.23.** Sejam  $G$  um grupo relativamente livre,  $KG$  a álgebra de grupo de  $G$  sobre  $K$  e  $U$  um subespaço de  $KG$ . O subespaço  $U$  é denominado *subespaço vetorial verbal* de  $KG$ , se é invariante por todos os endomorfismos de  $KG$ , induzidos pelos endomorfismos do grupo  $G$ . Analogamente, definimos subespaço vetorial verbal em um quociente de  $KG$  por um ideal verbal.

**Observação 2.24.**  $T'$  é o ideal verbal em  $KG$  gerado, como ideal verbal, por

$$f(a_1, a_2, a_3, a_4) = ([a_1, a_3] - 1)([a_2, a_4] - 1) + ([a_1, a_4] - 1)([a_2, a_3] - 1).$$

Além disso, os elementos  $([g_i, g_j] - 1)$  são centrais em  $KG$  quaisquer que sejam  $g_i, g_j \in G$ , logo  $T'$  é um subespaço vetorial verbal de  $KG$  gerado, como subespaço vetorial verbal, por

$$f(a_1, a_2, a_3, a_4)a_5.$$

Seja

$$A = \{a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_n}^{\varepsilon_n} ([a_{j_1}, a_{j_2}] - 1)^{\delta_1} \dots ([a_{j_{2m-1}}, a_{j_{2m}}] - 1)^{\delta_m} \mid n, m \geq 0, i_1 < \dots < i_n, \\ j_1 < j_2, \dots, j_{2m-1} < j_{2m}, [a_{j_1}, a_{j_2}] < \dots < [a_{j_{2m-1}}, a_{j_{2m}}], \varepsilon_t, \delta_s \in \{1, \dots, p-1\}, \\ \text{para todos } t, s \in \mathbb{N}\}.$$

**Lema 2.25.** *O conjunto  $A$  gera  $KG$ .*

**Demonstração:**

Os elementos de  $G'$  são centrais em  $G$  e para  $l < p$ ,  $[a_i, a_j]^l = [a_j, a_i]^{p-l}$ , logo o conjunto

$$\{a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_n}^{\varepsilon_n} [a_{j_1}, a_{j_2}]^{\delta_1} \dots [a_{j_{2m-1}}, a_{j_{2m}}]^{\delta_m}; n, m \geq 0, i_1 < \dots < i_n, j_1 < j_2, \dots, j_{2m-1} < j_{2m}, \\ [a_{j_1}, a_{j_2}] < \dots < [a_{j_{2m-1}}, a_{j_{2m}}], \varepsilon_t, \delta_s \in \{1, \dots, p-1\}, \text{ para todos } t, s \in \mathbb{N}\}$$

gera  $KG$ . Como,

$$[a_i, a_j]^l = (([a_i, a_j] - 1) + 1)^l = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} ([a_i, a_j] - 1)^{l-k},$$

onde  $\binom{l}{k}$  é tomado módulo  $p$ , então  $A$  gera  $KG$ . ■

Seja

$$A_0 = \{([a_{j_1}, a_{j_2}] - 1)^{\delta_1} \dots ([a_{j_{2m-1}}, a_{j_{2m}}] - 1)^{\delta_m}; m \geq 0, j_1 < j_2, \dots, j_{2m-1} < j_{2m}, \\ [a_{j_1}, a_{j_2}] < \dots < [a_{j_{2m-1}}, a_{j_{2m}}], \delta_s \in \{1, \dots, p-1\}, \text{ para todo } s \in \mathbb{N}\}.$$

**Corolário 2.26.** *O conjunto  $A_0$  gera  $KG'$ .*

Seja

$$A_1 = \{a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_n}^{\varepsilon_n} ([a_{j_1}, a_{j_2}] - 1) \dots ([a_{j_{2m-1}}, a_{j_{2m}}] - 1) \mid m, n \geq 0, i_1 < \dots < i_n, \\ j_1 < \dots < j_{2m}, \varepsilon_l \in \{0, \dots, p-1\}, \text{ para todo } l \in \mathbb{N}\}.$$

**Lema 2.27.** *O conjunto  $\{a + T' \mid a \in A_1\}$  é base do espaço vetorial quociente  $KG/T'$ .*

**Demonstração:**

Todo elemento de  $G$  pode ser escrito na forma  $a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_n}^{\varepsilon_n} w$ , onde  $i_1 < \dots < i_n$ ,  $w \in G'$ , e  $\varepsilon_l \in \{0, \dots, p-1\}$ , para todo  $l \in \mathbb{N}$ . Assim, para mostrar que  $\{a + T' \mid a \in A_1\}$  gera  $KG/T'$  é suficiente verificar que  $(w-1) + T'$  é uma combinação linear de elementos  $([a_{j_1}, a_{j_2}] - 1) \dots ([a_{j_{2m-1}}, a_{j_{2m}}] - 1) + T'$ , onde  $j_1 < \dots < j_{2m}$  para todo  $w \in G'$ .

Observemos que  $(w-1) + T'$  é uma combinação linear de elementos da forma  $([a_{j_1}, a_{j_2}] - 1) \dots ([a_{j_{2m-1}}, a_{j_{2m}}] - 1) + T'$ , onde  $j_k \neq j_l$  para todos  $k, l \in \mathbb{N}$  e  $j_1 < j_2, \dots, j_{2m-1} < j_{2m}$ . Além disso,  $([a_{j_1}, a_{j_3}] - 1)([a_{j_2}, a_{j_4}] - 1)$  é igual a  $-([a_{j_1}, a_{j_4}] - 1)([a_{j_2}, a_{j_3}] - 1)$  módulo  $T'$ . Então, para todos  $j_r, i_s$  ( $1 \leq r, s \leq 4$ ), onde  $\{j_1, j_2, j_3, j_4\} = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ , temos que  $([a_{j_1}, a_{j_2}] - 1)([a_{j_3}, a_{j_4}] - 1)$  é igual a  $\xi([a_{i_1}, a_{i_2}] - 1)([a_{i_3}, a_{i_4}] - 1)$  módulo  $T'$ , onde  $\xi \in \{-1, 1\}$ .

Portanto, para todo  $w \in G'$  o elemento  $(w-1) + T'$  é uma combinação linear de elementos da forma  $([a_{j_1}, a_{j_2}] - 1) \dots ([a_{j_{2m-1}}, a_{j_{2m}}] - 1) + T'$  onde  $j_1 < \dots < j_{2m}$ .

Resta verificar que o conjunto  $A_1$  é linearmente independente módulo  $T'$ .

Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão infinita com base  $\{e_1, e_2, \dots\}$ . Seja  $E$  a álgebra de Grassmann unitária de  $V$  sobre um corpo de característica prima  $p > 2$ . Como  $e_i^2 = 0$  os elementos  $(1 + e_i)$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) são invertíveis e  $(1 + e_i)^{-1} = (1 - e_i)$ .

Observemos que

$$[1 + e_i, 1 + e_j] = (1 - e_i)(1 - e_j)(1 + e_i)(1 + e_j) = 1 + 2e_i e_j$$

para todos  $i, j \in \mathbb{N}$ . Como o elemento  $e_i e_j$  é central em  $E$ , o grupo multiplicativo  $\mathcal{G}$  gerado por  $\{1 + e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  é nilpotente de classe 2. Além disso,

$$(1 + e_i)^p = \binom{p}{0} 1 + \binom{p}{1} e_i + \binom{p}{2} e_i^2 + \dots + \binom{p}{p} e_i^p = 1 + p e_i + 0 = 1,$$

logo  $E$  tem expoente  $p$ . Portanto, a aplicação  $\varepsilon$  definida por  $\varepsilon(a_i) = e_i + 1$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) pode ser estendida a um homomorfismo de  $G$  em  $\mathcal{G}$ .

Como

$$\begin{aligned} & \varepsilon(([a_{i_1}, a_{i_3}] - 1)([a_{i_2}, a_{i_4}] - 1) + ([a_{i_1}, a_{i_4}] - 1)([a_{i_2}, a_{i_3}] - 1)) \\ &= (2e_{i_1}e_{i_3})(2e_{i_2}e_{i_4}) + (2e_{i_1}e_{i_4})(2e_{i_2}e_{i_3}) = 0 \end{aligned}$$

para todos  $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \mathbb{N}$ , temos que  $T' \subseteq \ker \varepsilon$ , então existe um homomorfismo, que denotaremos pela mesma letra  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon : KG/T' \rightarrow E$  tal que  $\varepsilon(a_i + T') = 1 + e_i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ).

Porém,

$$\varepsilon(([a_{i_1}, a_{i_2}] - 1) \dots ([a_{i_{2l-1}}, a_{i_{2l}}] - 1)) = 2^l e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_{2l}}.$$

Então, o conjunto

$$\{([a_{i_1}, a_{i_2}] - 1) \dots ([a_{i_{2l-1}}, a_{i_{2l}}] - 1) + T' \mid l \geq 0, i_1 < i_2 < \dots < i_{2l}\}$$

é linearmente independente e forma uma base de  $(KG' + T')/T'$ .

Para completar a demonstração do lema resta observar que se  $T'$  é um ideal de  $KG$  gerado pelos elementos de  $KG'$  tais que  $\langle (KG' + T')/T', + \rangle$  é um  $p$ -grupo abeliano livre e  $\{v_j \mid j \in J\}$  é uma  $K$ -base de  $(KG' + T')/T'$ , então o conjunto

$$\{a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_n}^{\varepsilon_n} v_j + T' \mid n \geq 0, j \in J, \varepsilon_l \in \{1, \dots, p-1\} \text{ para todo } l \in \mathbb{N}\}$$

é uma base de  $KG/T'$ .

Logo,  $\{a + T' \mid a \in A_1\}$  é base de  $KG/T'$

■

Seja

$$A_2 = \{([a_{j_1}, a_{j_2}] - 1) \dots ([a_{j_{2m-1}}, a_{j_{2m}}] - 1) \mid m \geq 0, j_1 < j_2 < \dots < j_{2m}\}.$$

**Corolário 2.28.** *O conjunto*

$$\{a + (KG' \cap T') \mid a \in A_2\}$$

*gera*  $KG'/(KG' \cap T')$ . *Equivalentemente,*

$$\{a + T' \mid a \in A_2\}$$

*gera*  $(KG' + T')/T'$ .

**Lema 2.29.** *Para todos*  $g_1, g_2, g_3 \in G$ , *temos*

$$([g_1g_2, g_3] - 1) = ([g_1, g_3] - 1) + ([g_2, g_3] - 1) \pmod{T'}.$$

**Demonstração:**

Temos que

$$\begin{aligned} ([g_1g_2, g_3] - 1) &= ([g_1, g_3][g_2, g_3] - 1) \\ &= ([g_1, g_3] - 1)([g_2, g_3] - 1) + ([g_1, g_3] - 1) + ([g_2, g_3] - 1), \end{aligned}$$

como  $([g_1, g_3] - 1)([g_2, g_3] - 1) \in T'$ , temos

$$([g_1g_2, g_3] - 1) = ([g_1, g_3] - 1) + ([g_2, g_3] - 1) \pmod{T'}.$$

■

**Corolário 2.30.** *Para todos*  $a_{ij} \in G$ , *temos*

$$\begin{aligned} &([a_{11}\dots a_{1n_1}, a_{21}\dots a_{2n_2}] - 1) \\ &= ([a_{11}, a_{21}] - 1) + \dots + ([a_{11}, a_{2n_2}] - 1) + \dots + ([a_{1n_1}, a_{21}] - 1) + \dots + ([a_{1n_1}, a_{2n_2}] - 1) \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} ([a_{1i}, a_{2j}] - 1) \pmod{T'}. \end{aligned}$$

**Lema 2.31.** *Sejam  $q$  um número ímpar,  $s_{ij} = ([a_i, a_j] - 1)$  e*

$$x = a_1[\xi_{23}s_{23} + \dots + \xi_{2q}s_{2q} + \dots + \xi_{(q-1)q}s_{(q-1)q} + \xi_{2345}s_{23}s_{45} + \dots \\ + \xi_{(q-3)(q-2)(q-1)q}s_{(q-3)(q-2)s_{(q-1)q}} + \dots + \xi_{2\dots q}s_{23\dots s_{(q-1)q}}] + T'$$

*elemento de  $KG/T'$ , onde  $\xi_l \in K$ . Então  $x$  é elemento do centro de  $KG/T'$  se, e somente se,  $\xi_l = 0$  para todo multi-índice  $l$ .*

**Demonstração:**

Seja  $b$  um elemento arbitrário de  $G$ . Então

$$x^b = a_1([a_1, b] - 1)[\xi_{23}s_{23} + \dots + \xi_{2q}s_{2q} + \dots + \xi_{(q-1)q}s_{(q-1)q} + \xi_{2345}s_{23}s_{45} \\ + \dots + \xi_{(q-3)(q-2)(q-1)q}s_{(q-3)(q-2)s_{(q-1)q}} + \dots + \xi_{2\dots q}s_{23\dots s_{(q-1)q}}] + x + T'.$$

Logo,  $x$  está no centro de  $KG/T'$  se, e somente se,

$$x' = a_1([a_1, b] - 1)[\xi_{23}s_{23} + \dots + \xi_{2q}s_{2q} + \dots + \xi_{(q-1)q}s_{(q-1)q} + \xi_{2345}s_{23}s_{45} \\ + \dots + \xi_{(q-3)(q-2)(q-1)q}s_{(q-3)(q-2)s_{(q-1)q}} + \dots + \xi_{2\dots q}s_{23\dots s_{(q-1)q}}]$$

é elemento de  $T'$ , para todo  $b \in G$ . Fazendo  $b = a_{(q+1)}$ , temos

$$x' = a_1[\xi_{23}s_{12}s_{3(q+1)} + \dots + \xi_{2q}s_{12}s_{q(q+1)} + \dots + \xi_{(q-1)q}s_{1(q-1)s_{q(q+1)}} + \xi_{2345}s_{12}s_{34}s_{5(q+1)} \\ + \dots + \xi_{(q-3)(q-2)(q-1)q}s_{1(q-3)s_{(q-2)(q-1)s_{q(q+1)}}} + \dots + \xi_{2\dots q}s_{12}s_{34\dots s_{q(q+1)}}] + T',$$

que é a combinação linear de elementos distintos da base de  $KG/T'$ . Portanto  $x' \in T'$  se, e somente se,  $\xi_l = 0$  para todo multi-índice  $l$ . ■

**Corolário 2.32.** *Sejam  $q$  um número ímpar,  $s_{i_j i_i} = ([a_{i_j}, a_{i_i}] - 1)$  e*

$$x = a_{i_1}[\xi_{23}s_{i_2 i_3} + \dots + \xi_{2q}s_{i_2 i_q} + \dots + \xi_{(q-1)q}s_{i_{(q-1)} i_q} + \xi_{2345}s_{i_2 i_3} s_{i_4 i_5} \\ + \dots + \xi_{(q-3)(q-2)(q-1)q}s_{i_{(q-3)} i_{(q-2)} s_{i_{(q-1)} i_q}} + \dots + \xi_{2\dots q}s_{i_2 i_3 \dots s_{i_{(q-1)} i_q}}] + T'$$

*elemento de  $KG/T'$ , onde  $\xi_l \in K$ ,  $i_1 \neq i_2, \dots, i_q$  e  $i_2 < \dots < i_q$ . Então,  $x$  é elemento do centro de  $KG/T'$  se, e somente se,  $\xi_l = 0$  para todo multi-índice  $l$ .*



**Observação 2.33.** Se  $q$  é um número par a demonstração é análoga.

**Lema 2.34.** A álgebra  $R = KG/T'$  é a soma direta de subespaços vetoriais

$$(a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{q_i}}^{\epsilon_{i_{q_i}}} KG' + T')/T',$$

onde  $q_i \geq 0$ ,  $i_1 < \dots < i_{q_i}$ ,  $\epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_{q_i}} \in \{1, \dots, p-1\}$ . Mais ainda,  $R$  é uma álgebra  $\overline{G}$ -graduada, onde  $\overline{G} = G/G'$ .

**Demonstração:**

O espaço vetorial  $KG$  é a soma direta de subespaços vetoriais  $a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{q_i}}^{\epsilon_{i_{q_i}}} KG'$ , onde  $q_i \geq 0$ ,  $i_1 < \dots < i_{q_i}$ ,  $\epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_{q_i}} \in \{1, \dots, p-1\}$ . Seja  $T''$  o ideal de  $KG'$  gerado por todos os elementos da forma

$$([a_{i_1}, a_{i_3}] - 1)([a_{i_2}, a_{i_4}] - 1) + ([a_{i_1}, a_{i_4}] - 1)([a_{i_2}, a_{i_3}] - 1).$$

Então,

$$\begin{aligned} T' &= KG \cdot T'' \\ &= \bigoplus_{q_i \geq 0, i_1 < \dots < i_{q_i}, \epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_{q_i}} \in \{1, \dots, p-1\}} (a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{q_i}}^{\epsilon_{i_{q_i}}} KG') \cdot T'' \\ &= \bigoplus_{q_i \geq 0, i_1 < \dots < i_{q_i}, \epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_{q_i}} \in \{1, \dots, p-1\}} a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{q_i}}^{\epsilon_{i_{q_i}}} T'' \end{aligned}$$

Como  $a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{q_i}}^{\epsilon_{i_{q_i}}} T'' \subseteq T' \cap a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{q_i}}^{\epsilon_{i_{q_i}}} KG'$ , então

$$T' = \bigoplus_{q_i \geq 0, i_1 < \dots < i_{q_i}, \epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_{q_i}} \in \{1, \dots, p-1\}} (T' \cap a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{q_i}}^{\epsilon_{i_{q_i}}} KG').$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
KG/T' &= \frac{\bigoplus_{q_i \geq 0, i_1 < \dots < i_{q_i}, \epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_{q_i}} \in \{1, \dots, p-1\}} (a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{q_i}}^{\epsilon_{i_{q_i}}} KG')}{\bigoplus_{q_i \geq 0, i_1 < \dots < i_{q_i}, \epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_{q_i}} \in \{1, \dots, p-1\}} (T' \cap a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{q_i}}^{\epsilon_{i_{q_i}}} KG')} \\
&\simeq \bigoplus_{q_i \geq 0, i_1 < \dots < i_{q_i}, \epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_{q_i}} \in \{1, \dots, p-1\}} a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{q_i}}^{\epsilon_{i_{q_i}}} KG' / (T' \cap a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{q_i}}^{\epsilon_{i_{q_i}}} KG') \\
&\simeq \bigoplus_{q_i \geq 0, i_1 < \dots < i_{q_i}, \epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_{q_i}} \in \{1, \dots, p-1\}} (a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{q_i}}^{\epsilon_{i_{q_i}}} KG' + T') / T'.
\end{aligned}$$

Resta verificar que  $R$  é  $\overline{G}$ -graduada, onde  $\overline{G} = G/G'$ . Sejam

$$a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{q_i}}^{\epsilon_{i_{q_i}}} w + T' \in (a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{q_i}}^{\epsilon_{i_{q_i}}} KG' + T') / T'$$

e

$$a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_{q_j}}^{\epsilon_{j_{q_j}}} w' + T' \in (a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_{q_j}}^{\epsilon_{j_{q_j}}} KG' + T') / T',$$

então,

$$(a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{q_i}}^{\epsilon_{i_{q_i}}} w + T')(a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_{q_j}}^{\epsilon_{j_{q_j}}} w' + T') = a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{q_i}}^{\epsilon_{i_{q_i}}} a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_{q_j}}^{\epsilon_{j_{q_j}}} ww' + T'.$$

Assim, para algum  $k$

$$(a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{q_i}}^{\epsilon_{i_{q_i}}} w + T')(a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots a_{j_{q_j}}^{\epsilon_{j_{q_j}}} w' + T') \in (a_{k_1}^{\epsilon_{k_1}} \dots a_{k_{q_k}}^{\epsilon_{k_{q_k}}} KG' + T') / T',$$

onde  $q_k \leq 0$ ,  $k_1 < \dots < k_{q_k}$ ,  $\epsilon_{k_1}, \dots, \epsilon_{k_{q_k}} \in \{1, \dots, p-1\}$ .

■

**Observação 2.35.** Todo elemento de  $KG/T'$  pode ser escrito na forma

$$x = a_{1_1}^{\epsilon_{1_1}} \dots a_{1_{m_1}}^{\epsilon_{1_{m_1}}} z_1 + \dots + a_{l_1}^{\epsilon_{l_1}} \dots a_{l_{m_l}}^{\epsilon_{l_{m_l}}} z_l + T',$$

onde  $z_1, \dots, z_l \in KG'$ ,  $\epsilon_{1_1}, \dots, \epsilon_{l_{m_l}} \in \{1, \dots, p-1\}$ ,  $i_1 < \dots < i_{m_i}$ , para todo  $i = 1, \dots, l$ .

Além disso, para  $i \neq k$

$$a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{m_i}}^{\epsilon_{i_{m_i}}} \neq a_{k_1}^{\epsilon_{k_1}} \dots a_{k_{m_k}}^{\epsilon_{k_{m_k}}} \pmod{G'}.$$

**Lema 2.36.** *Seja*

$$x = a_{1_1}^{\epsilon_{1_1}} \dots a_{1_{m_1}}^{\epsilon_{1_{m_1}}} z_1 + \dots + a_{l_1}^{\epsilon_{l_1}} \dots a_{l_{m_l}}^{\epsilon_{l_{m_l}}} z_l + T'$$

*um elemento arbitrário do centro de  $KG/T'$ . Então*

$$a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{m_i}}^{\epsilon_{i_{m_i}}} z_i + T'$$

*pertence ao centro de  $KG/T'$ , para todo  $i = 1, \dots, l$ .*

**Demonstração:**

Para um elemento arbitrário  $b$  de  $G$ , temos

$$x^b = a_{1_1}^{\epsilon_{1_1}} \dots a_{1_{m_1}}^{\epsilon_{1_{m_1}}} z'_1 + \dots + a_{l_1}^{\epsilon_{l_1}} \dots a_{l_{m_l}}^{\epsilon_{l_{m_l}}} z'_l + x + T',$$

onde  $z'_i = [([a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}}, b] - 1) + \dots + ([a_{i_{m_i}}^{\epsilon_{i_{m_i}}}, b] - 1)]z_i$ .

Por hipótese  $x^b = x$ , então

$$a_{1_1}^{\epsilon_{1_1}} \dots a_{1_{m_1}}^{\epsilon_{1_{m_1}}} z'_1 + \dots + a_{l_1}^{\epsilon_{l_1}} \dots a_{l_{m_l}}^{\epsilon_{l_{m_l}}} z'_l \in T'.$$

Além disso,  $a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{m_i}}^{\epsilon_{i_{m_i}}}$  não é igual a  $a_{k_1}^{\epsilon_{k_1}} \dots a_{k_{m_k}}^{\epsilon_{k_{m_k}}}$  módulo  $G'$ , se  $i \neq k$ . Logo,  $z'_1, \dots, z'_l \in T$ . Portanto,

$$\begin{aligned} (a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{m_i}}^{\epsilon_{i_{m_i}}} z_i + T')^b &= a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{m_i}}^{\epsilon_{i_{m_i}}} [([a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}}, b] - 1) + \dots + ([a_{i_{m_i}}^{\epsilon_{i_{m_i}}}, b] - 1) + 1]z_i + T' \\ &= a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{m_i}}^{\epsilon_{i_{m_i}}} z'_i + a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{m_i}}^{\epsilon_{i_{m_i}}} z_i + T' \\ &= a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{m_i}}^{\epsilon_{i_{m_i}}} z_i + T'. \end{aligned}$$

Assim,  $a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{m_i}}^{\epsilon_{i_{m_i}}} z_i + T'$  pertence ao centro de  $KG/T'$ , para todo  $i$ . ■

**Teorema 2.37.** *Seja  $V$  o subespaço vetorial verbal de  $KG/T'$  gerado, como subespaço vetorial verbal, por*

$$\{a_1^{\epsilon_1} \dots a_{2m}^{\epsilon_{2m}} ([a_1, a_2] - 1) \dots ([a_{2m-1}, a_{2m}] - 1) + T' \mid m > 0, \epsilon_l \in \{0, \dots, p-1\}, l = 1, \dots, 2m\}.$$

*Então,  $V$  é o centro de  $KG/T'$  e de  $\Delta/T'$ .*

### Demonstração:

Sejam  $C$  o centro de  $KG/T'$ ,  $b$  um elemento arbitrário de  $G$  e

$$y = g_1^{\epsilon_1} \dots g_{2m}^{\epsilon_{2m}} ([g_1, g_2] - 1) \dots ([g_{2m-1}, g_{2m}] - 1) + T',$$

onde  $m > 0$ ,  $g_1, \dots, g_{2m} \in G$ ,  $\epsilon_l \in \{0, \dots, p-1\}$ , para  $l = 1, \dots, 2m$ . Então,

$$\begin{aligned} y^b &= g_1^{\epsilon_1} \dots g_{2m}^{\epsilon_{2m}} \{([g_1^{\epsilon_1}, b] - 1) + \dots + ([g_{2m}^{\epsilon_{2m}}, b] - 1)\} ([g_1, g_2] - 1) \dots ([g_{2m-1}, g_{2m}] - 1) + y + T' \\ &= y + T'. \end{aligned}$$

Portanto,  $V \subseteq C$ .

Seja  $y = a_{1_1}^{\epsilon_{1_1}} \dots a_{1_{m_1}}^{\epsilon_{1_{m_1}}} z_1 + T' \neq T'$  um elemento arbitrário de  $C$ , onde  $1 \neq a_{1_1}^{\epsilon_{1_1}} \dots a_{1_{m_1}}^{\epsilon_{1_{m_1}}} \notin G'$  e  $z_1 \in KG'$ . Como  $a_{1_1}^{\epsilon_{1_1}} \dots a_{1_{m_1}}^{\epsilon_{1_{m_1}}} = g_1 \notin G'$ , existe um automorfismo  $\psi$  de  $G$  tal que  $\psi(g_1) = a_1$ . Denotemos pela mesma letra  $\psi$  o automorfismo induzido de  $KG/T'$ . Então,  $\psi(y) = a_1 z'_1 + T'$  pertence a  $C$ . Pelo Corolário 2.32, todas as parcelas de  $z'_1$  contém  $a_1$ . Logo,  $a_1 z'_1 + T' \in V$  e, conseqüentemente,  $y = g_1 z_1 + T' \in V$ .

Suponhamos que os elementos de  $C$  da forma  $y = \sum_{i=1}^l g_i z_i + z_{l+1} + T'$  pertencem a  $V$  para todo  $0 \leq l \leq k$ , ( $1 \neq g_i = a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{m_i}}^{\epsilon_{i_{m_i}}} \notin G'$ ,  $z_i \in KG'$  e  $g_i \neq g_j \pmod{G'}$ , para  $i \neq j$ ).

Seja  $y'$  um elemento arbitrário de  $C$ ,  $y' = \sum_{i=1}^{k+1} g_i z_i + z_{k+2} + T'$ , onde  $1 \neq g_i = a_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \dots a_{i_{m_i}}^{\epsilon_{i_{m_i}}} \notin G'$ ,  $z_i \in KG'$ ,  $g_i \neq g_j \pmod{G'}$ , para  $i \neq j$ . Denotemos por  $\psi$  o automorfismo de  $G$  tal que  $\psi(g_1) = a_1$  e o automorfismo induzido de  $KG/T'$ .

Como  $\psi(y') = a_1 z'_1 + \sum_{i=2}^{k+1} g'_i z'_i + z'_{k+2} + T'$ , pertence a  $C$ ,  $g'_i \notin G'$  é da forma  $a_{k_1}^{\epsilon_{k_1}} \dots a_{k_{m_k}}^{\epsilon_{k_{m_k}}}$ ,  $z'_i \in KG'$  e  $g'_i \neq g'_j \pmod{G'}$ , pelo Lema 2.36,  $a_1 z'_1$  pertence a  $C$ . Logo todas as parcelas de  $z'_1$  contém  $a_1$ , conseqüentemente  $g_1 z_1 + T' \in V$ . Além disso, por hipótese de indução,  $\sum_{i=2}^{k+1} g'_i z'_i + z'_{k+2} + T'$  pertence a  $V$ . Assim,  $y' \in V$ , ou seja,  $V \supseteq C$ .

Portanto,  $V = C$ .

■

**Lema 2.38.** *O  $T$ -espaço dos polinômios centrais de  $K\langle X \rangle/T$  é gerado, como  $T$ -espaço, pelos polinômios*

$$\{(x_1, x_2) \dots (x_{2m-1}, x_{2m}) x_1^{\gamma_1} \dots x_{2m}^{\gamma_{2m}} + T \mid m > 0, \gamma_t \in \{0, \dots, p-1\}, 1 \leq t \leq 2m\}.$$

**Demonstração:**

O subespaço vetorial verbal dos polinômios centrais de  $\Delta/T'$  pode ser gerado pelo conjunto

$$\{a_1^{\epsilon_1} \dots a_{2m}^{\epsilon_{2m}} ([a_1, a_2] - 1) \dots ([a_{2m-1}, a_{2m}] - 1) + T' \mid m > 0, \epsilon_l \in \{0, \dots, p-1\}, l = 1, \dots, 2m\},$$

onde  $a_1, \dots, a_{2m}$  são geradores de  $G$ . Seja

$$y = a_1^{\epsilon_1} \dots a_{2m}^{\epsilon_{2m}} ([a_1, a_2] - 1) \dots ([a_{2m-1}, a_{2m}] - 1) + T'.$$

Como  $([g_i, g_j] - 1) = g_i^{-1} g_j^{-1} (g_i, g_j)$ , para todos  $g_i, g_j \in G$ , o elemento  $y$  pode ser reescrito na forma

$$y = (a_1, a_2) \dots (a_{2m-1}, a_{2m}) a_1^{\epsilon_1-1} \dots a_{2m}^{\epsilon_{2m}-1} + T'.$$

Ou seja, o subespaço vetorial dos polinômios centrais de  $\Delta/T'$  pode ser gerado, como subespaço vetorial, pelos elementos da forma

$$(g_{j_1}, g_{j_2}) \dots (g_{j_{2m-1}}, g_{j_{2m}}) g_{j_1}^{\epsilon_1-1} \dots g_{j_{2m}}^{\epsilon_{2m}-1} + T',$$

onde  $g_{j_l}$  são elementos do grupo  $G$ , para  $l \in \{1, \dots, 2m\}$ .

Seja  $\psi : KG/T' \rightarrow M_1$  o isomorfismo definido anteriormente por  $\psi(a_i + T') = (x_i + 1)$ , então

$$\begin{aligned} \psi(y) &= (x_1, x_2) \dots (x_{2m-1}, x_{2m}) (x_1 + 1)^{\epsilon_1-1} \dots (x_{2m} + 1)^{\epsilon_{2m}-1} + T \\ &= \sum_{\substack{0 \leq \gamma_t \leq \epsilon_t \\ 1 \leq t \leq 2m}} (x_1, x_2) \dots (x_{2m-1}, x_{2m}) x_1^{\gamma_1} \dots x_{2m}^{\gamma_{2m}} + T. \end{aligned}$$

Portanto, o T-espaco,  $\psi(V)$ , dos polinômios centrais de  $K\langle X\rangle/T$  pode ser gerado, como T-espaco, pelo conjunto

$$\{(x_1, x_2)\dots(x_{2m-1}, x_{2m})x_1^{\gamma_1}\dots x_{2m}^{\gamma_{2m}} + T \mid m > 0, \gamma_t \in \{0, \dots, p-1\}, 1 \leq t \leq 2m\}.$$

■

A partir dos resultados anteriores estamos em condições para demonstrar o resultado principal deste capítulo.

**Teorema 2.2.** *O T-espaco  $\mathcal{C}$  dos polinômios centrais da álgebra de Grassmann de dimensão infinita  $H$  é gerado, como T-espaco em  $K\langle X\rangle/T(H)$ , por*

$$(x_1, x_2) + T(H)$$

e pelos polinômios

$$\{(x_1, x_2)\dots(x_{2q-1}, x_{2q})x_1^{p-1}\dots x_{2q}^{p-1} + T(H) \mid q \in \mathbb{N}\}.$$

**Demonstração:**

Os geradores do T-espaco dos polinômios centrais da álgebra de Grassmann  $H$  são da forma

$$y = (x_1, x_2)\dots(x_{2q-1}, x_{2q})x_1^{\delta_1}\dots x_{2q}^{\delta_{2q}} + T,$$

onde  $0 \leq \delta_l < p$  ( $1 \leq l \leq 2q$ ). Sejam  $0 < \delta_l < p-1$ , temos que

$$\xi(x_l, x_{l+\xi})x_l^{\delta_l} + T = \frac{\xi}{\delta_l + 1}(x_l^{\delta_l+1}, x_{l+\xi}) + T,$$

onde  $\xi \in \{-1, 1\}$ . Logo

$$y = \frac{\xi}{\delta_l + 1}(x_1, x_2)\dots(x_l^{\delta_l+1}, x_{l+\xi})\dots(x_{2q-1}, x_{2q})x_1^{\delta_1}\dots x_{l-1}^{\delta_{l-1}}x_{l+1}^{\delta_{l+1}}\dots x_{2q}^{\delta_{2q}} + T.$$

Considerando o endomorfismo definido por  $\psi_l(x_l) = x_l^{\delta_l+1}$  e  $\psi_l(x_i) = x_i$  para  $i \neq l$ , verificamos que  $y$  é consequência de

$$(x_1, x_2)\dots(x_l, x_{l+\xi})\dots(x_{2q-1}, x_{2q})x_1^{\delta_1}\dots x_{l-1}^{\delta_{l-1}}x_{l+1}^{\delta_{l+1}}\dots x_{2q}^{\delta_{2q}} + T.$$

Se alguma das outras variáveis de  $y$  possui grau diferente de 1 e  $p$  repetimos o processo, após um número finito de passos verificamos que  $y$  pertence ao  $T$ -espaço gerado por

$$A' = \{(x_1, x_2) \dots (x_{2q-1}, x_{2q}) x_1^{\delta_1} \dots x_{2q}^{\delta_{2q}} + T \mid q \in \mathbb{N}, \delta_s \in \{0, p-1\}, 1 \leq s \leq 2q\}.$$

Seja  $a$  um elemento de  $A'$  que contém variáveis de grau 1.

Se  $a$  contém o elemento  $(x_{k_1}, x_{k_2}) + T$ ,  $\partial_{x_{k_1}}(a) = 1$  e  $\partial_{x_{k_2}}(a) = 1$ , então  $a = (x_{k_1}, x_{k_2})c + T$ , onde  $c + T$  é um elemento central módulo  $T$ . Logo,  $a = (x_{k_1}c, x_{k_2}) + T$  que é consequência de  $(x_1, x_2) + T$ .

Se  $a$  contém o elemento  $(x_{k_1}, x_{k_2}) + T$ ,  $\partial_{x_{k_1}}(a) = p$  e  $\partial_{x_{k_2}}(a) = 1$ , então  $a = (x_{k_1}, x_{k_2})x_{k_1}^{p-1}c + T$  onde  $c + T$  é um elemento central módulo  $T$ . Portanto,  $a = (x_{k_1}c, x_{k_2})x_{k_1}^{p-1} + T$  que é consequência de  $(x_{k_1}, x_{k_2})x_{k_1}^{p-1} + T$ , mas  $(x_{k_1}, x_{k_2})x_{k_1}^{p-1} + T = (x_{k_1}, x_{k_2}x_{k_1}^{p-1}) + T$  que é consequência de  $(x_1, x_2) + T$ .

Equivalentemente, se  $a$  contém o elemento  $(x_{k_1}, x_{k_2}) + T$ ,  $\partial_{x_{k_1}}(a) = 1$  e  $\partial_{x_{k_2}}(a) = p$ , então  $a$  é consequência de  $(x_1, x_2) + T$ .

Como  $T = T(H)$ , temos que  $a$  pertence ao  $T$ -espaço gerado por

$$(x_1, x_2) + T(H)$$

e pelos polinômios

$$\{(x_1, x_2) \dots (x_{2q-1}, x_{2q}) x_1^{p-1} \dots x_{2q}^{p-1} + T(H) \mid q \in \mathbb{N}\}.$$

■

O próximo resultado segue do Lema 13, demonstrado por Shchigolev, em [64].

**Lema 2.39.** (*Shchigolev*) *O  $T$ -espaço gerado por*

$$(x_1, x_2) + T(H)$$

e pelos polinômios

$$\{(x_1, x_2) \dots (x_{2q-1}, x_{2q}) x_1^{p-1} \dots x_{2q}^{p-1} + T(H) \mid q \in \mathbb{N}\}$$

não é finitamente gerado.

**Corolário 2.40.** *O  $T$ -espaço  $\mathcal{C}$  dos polinômios centrais da álgebra de Grassmann de dimensão infinita  $H$  não é finitamente gerado.*



## Capítulo 3

# Polinômios Centrais em Álgebras de Grassmann de Dimensão Finita

Neste capítulo,  $K$  denota um corpo infinito arbitrário de característica prima  $p > 2$ . Seja  $V_k$  um espaço vetorial de dimensão  $k$  sobre  $K$ . Denotemos por  $H_k$  a álgebra de Grassmann, não unitária, de  $V_k$  sobre  $K$ .

Em 1980, Stojanova-Venkova [72] encontrou bases finitas para as identidades satisfeitas por  $H_k$ , para todo  $k$ . Este artigo foi publicado em russo e não foi traduzido, logo os resultados a que fizermos referência serão enunciados e demonstrados neste trabalho.

Nosso objetivo principal neste capítulo é determinar os geradores do T-espaço dos polinômios centrais das álgebras de Grassmann  $H_k$ , para todo  $k$ . Dividiremos nosso estudo em dois casos distintos, o primeiro associado às álgebras de Grassmann  $H_{2n}$  e o segundo às álgebras de Grassmann  $H_{2n-1}$ . Recordemos que  $T(H_k)$  denota o conjunto de identidades satisfeitas por  $H_k$ .

Como  $H_{2n}$  é subálgebra de  $H$ , os polinômios centrais de  $H$  são identidades ou polinômios centrais em  $H_{2n}$ . Mostraremos que todo polinômio central em  $H_{2n}$  é obtido desta forma. Usando este resultado demonstraremos o seguinte teorema.

**Teorema 3.1.** *O T-espaço dos polinômios centrais da álgebra de Grassmann  $H_{2n}$  é gerado, como T-espaço em  $K\langle X\rangle/T(H_{2n})$ , por*

$$(x_1, x_2) + T(H_{2n})$$

e pelos polinômios

$$\left\{ (x_1, x_2) \dots (x_{2q-1}, x_{2q}) x_1^{p-1} \dots x_{2q}^{p-1} + T(H_{2n}) \mid 0 < q \leq \frac{n}{2p-1} \right\}.$$

Posteriormente, mostraremos que os polinômios de  $T(H_{2n-2})$  são centrais em  $H_{2n-1}$  e que todo polinômio central em  $H_{2n-1}$  pode ser escrito como soma de dois polinômios, onde um é central em  $H$  e o outro pertence a  $T(H_{2n-2})$ . Utilizando estes dois resultados e o fato de que todo polinômio central em  $H$  é identidade ou polinômio central em  $H_{2n-1}$  demonstraremos o seguinte teorema.

Seja  $v_n$  o polinômio definido por

$$v_n = x_1 \circ \dots \circ x_{n-1} \circ x_n = (x_1 \circ \dots \circ x_{n-1})x_n + x_n(x_1 \circ \dots \circ x_{n-1}),$$

onde  $x_1 \circ x_2 = x_1x_2 + x_2x_1$ .

**Teorema 3.2.** *O T-espaço dos polinômios centrais da álgebra de Grassmann  $H_{2n-1}$  é gerado, como T-espaço em  $K\langle X\rangle/T(H_{2n-1})$ , por*

$$(x_1, x_2) + T(H_{2n-1}), (x_1 \circ \dots \circ x_{2n-2}) + T(H_{2n-1})$$

e pelos polinômios

$$\left\{ (x_1, x_2) \dots (x_{2q-1}, x_{2q}) x_1^{p-1} \dots x_{2q}^{p-1} + T(H_{2n-1}) \mid 0 < q \leq \frac{n}{2p-1} \right\}.$$

Iniciaremos agora o estudo do primeiro caso, associado às álgebras de Grassmann  $H_{2n}$ .

Sejam  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$  um conjunto infinito enumerável de variáveis e  $K\langle X\rangle$  a álgebra associativa livre, não unitária, sobre  $K$ . Seja  $T$  o T-ideal de  $K\langle X\rangle$  gerado por  $x_1^p$  e  $(x_1, x_2, x_3)$ .

**Definição 3.3.** O T-ideal  $R_{n+1}$  em  $K\langle X \rangle$  é o T-ideal gerado por  $T$  e pelo polinômio  $v_{n+1} = x_1 \circ \dots \circ x_{n+1}$ .

Stojanova-Venkova [72] demonstrou que  $R_{n+1} = T(H_{2n})$ . Como este artigo é escrito em russo, vamos apresentar a demonstração aqui. Inicialmente, verificaremos que  $R_{n+1}$  está contido em  $T(H_{2n})$ .

Pelos Lemas 2.5 e 2.4,  $T \subseteq T(H_{2n})$ , logo resta mostrar que  $v_{n+1}$  pertence a  $T(H_{2n})$ . Precisaremos de um resultado adicional.

**Lema 3.4.** *Seja  $r$  uma identidade de  $H_{k-1}$  que não é identidade de  $H_k$ , então a imagem de  $r$  em  $H_k$  é um múltiplo de  $e_1 \dots e_k$ .*

**Demonstração:**

Como  $r$  não é identidade de  $H_k$ , existe um homomorfismo  $\varphi : K\langle X \rangle \rightarrow H_k$  tal que  $\varphi(r) \neq 0$ .

Consideremos os homomorfismos  $\psi_l : H_k \rightarrow H_{k-1}$  definidos por  $\psi_l(e_l) = 0$ ,  $\psi_l(e_k) = e_l$  e  $\psi_l(e_i) = e_i$  para  $i \neq k, l$ , onde  $1 \leq l < k$ . Seja  $\psi_k : H_k \rightarrow H_{k-1}$  definido por  $\psi_k(e_k) = 0$  e  $\psi_k(e_i) = e_i$  para  $i \neq k$ .

Como  $r$  é identidade em  $H_{k-1}$ , para cada  $l$ ,  $1 \leq l \leq k$ ,  $\psi_l(\varphi(r)) = 0$ . Assim, cada parcela de  $\varphi(r)$  deve conter  $e_l$  como fator para  $1 \leq l \leq k$ . Portanto,  $\varphi(r)$  é um múltiplo do elemento  $e_1 \dots e_k$ .

■

**Lema 3.5.** *A álgebra  $H_{2n}$  satisfaz a identidade*

$$x_1 \circ \dots \circ x_{n+1} = 0.$$

**Demonstração:**

Mostraremos por indução sobre  $n$ .

Para  $n = 1$ , seja  $y = (r_1 \circ r_2)$ . Se  $r_1, r_2 \in \{e_1, e_2\}$  e são distintos, como  $e_1 e_2 = -e_2 e_1$ , então  $y = 0$ . Caso contrário,  $e_1$  ou  $e_2$  é fator de  $r_1$  e  $r_2$  simultaneamente, logo  $y = 0$ .

Suponhamos que  $x_1 \circ \dots \circ x_n$  é identidade de  $H_{2n-2}$ . Devemos mostrar que  $x_1 \circ \dots \circ x_{n+1}$  é identidade de  $H_{2n}$ .

**Caso 1)** O polinômio  $v_n$  não é identidade em  $H_{2n-1}$ .

Seja  $z = r_1 \circ \dots \circ r_{n+1} = r_{n+1}(r_1 \circ \dots \circ r_n) + (r_1 \circ \dots \circ r_n)r_{n+1}$ . Pela hipótese de indução e pelo Lema 3.4,  $r_1 \circ \dots \circ r_n = \alpha e_1 \dots e_{2n-1}$ . Logo,  $z = r_{n+1} \alpha e_1 \dots e_{2n-1} + \alpha e_1 \dots e_{2n-1} r_{n+1}$ .

Se  $r_{n+1}$  é um polinômio ímpar, então  $z = -\alpha e_1 \dots e_{2n-1} r_{n+1} + \alpha e_1 \dots e_{2n-1} r_{n+1} = 0$ .

Se  $r_{n+1}$  é um polinômio par, então  $z = 2\alpha e_1 \dots e_{2n-1} r_{n+1} = 0$ , pois  $r_{n+1}$  deve conter como fator pelo menos um dos elementos  $e_1, \dots, e_{2n-1}$ .

**Caso 2)** O polinômio  $v_n$  é identidade em  $H_{2n-1}$ .

Se  $v_n$  é identidade em  $H_{2n}$ , então  $x_1 \circ \dots \circ x_{n+1}$  também o é.

Se  $v_n$  não é identidade em  $H_{2n}$ . Seja  $z = r_1 \circ \dots \circ r_{n+1} = r_{n+1}(r_1 \circ \dots \circ r_n) + (r_1 \circ \dots \circ r_n)r_{n+1}$ . Pelo Lema 3.4,  $r_1 \circ \dots \circ r_n = \alpha e_1 \dots e_{2n}$ . Logo,  $z = r_{n+1} \alpha e_1 \dots e_{2n} + \alpha e_1 \dots e_{2n} r_{n+1} = 0$ .

■

Portanto, pelos Lemas 2.5, 2.4, 3.5 podemos concluir o seguinte lema.

**Lema 3.6.** *O  $T$ -ideal  $R_{n+1}$  está contido em  $T(H_{2n})$ .*

Agora verificaremos que  $T(H_{2n})$  está contido em  $R_{n+1}$ . Precisaremos de alguns resultados adicionais.

**Lema 3.7.** [72, Lema 4] Os elementos da forma

$$(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s})x_{n-s+1}\dots x_{n+s} \quad e \quad x_1^n$$

pertencem a  $R_n$ , para  $s = 1, \dots, n - 1$ .

**Demonstração:**

Esta demonstração é diferente da demonstração feita em [72].

Mostraremos por indução sobre  $s$  que  $(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s})x_{n-s+1}\dots x_{n+s}$  é elemento de  $R_n$ .

Temos que  $x_1 \circ \dots \circ x_{n-1} \circ x_n x_{n+1} \in R_n$ , como

$$\begin{aligned} x_1 \circ \dots \circ x_{n-1} \circ x_n x_{n+1} &= (x_1 \circ \dots \circ x_{n-1})x_n x_{n+1} + x_n x_{n+1}(x_1 \circ \dots \circ x_{n-1}) \\ &= [(x_1 \circ \dots \circ x_{n-1})x_n + x_n(x_1 \circ \dots \circ x_{n-1})]x_{n+1} \\ &\quad + x_n[x_{n+1}(x_1 \circ \dots \circ x_{n-1}) + (x_1 \circ \dots \circ x_{n-1})x_{n+1}] \\ &\quad + x_n(x_1 \circ \dots \circ x_{n-1})x_{n+1} \\ &= (x_1 \circ \dots \circ x_n)x_{n+1} + x_n(x_1 \circ \dots \circ x_{n-1} \circ x_{n+1}) \\ &\quad + x_n(x_1 \circ \dots \circ x_{n-1})x_{n+1}, \end{aligned}$$

então  $x_n(x_1 \circ \dots \circ x_{n-1})x_{n+1} \in R_n$ , mas  $x_n(x_1 \circ \dots \circ x_{n-1})x_{n+1}$  é igual a  $-(x_1 \circ \dots \circ x_{n-1})x_n x_{n+1}$  módulo  $R_n$ , logo  $(x_1 \circ \dots \circ x_{n-1})x_n x_{n+1} \in R_n$ , ou seja, a afirmação vale para  $s = 1$ .

Suponhamos que  $(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s} \circ x_{n-s+1})x_{n-s+2}\dots x_{n+s-1} \in R_n$ . Temos que

$$\begin{aligned} r &= (x_1 \circ \dots \circ x_{n-s} \circ x_{n-s+1}x_{n-s+2})x_{n-s+3}\dots x_{n+s} \\ &= [(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s})x_{n-s+1}x_{n-s+2} + x_{n-s+1}x_{n-s+2}(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s})]x_{n-s+3}\dots x_{n+s} \\ &= [(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s})x_{n-s+1} + x_{n-s+1}(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s})]x_{n-s+2}\dots x_{n+s} \\ &\quad + x_{n-s+1}[x_{n-s+2}(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s}) + (x_1 \circ \dots \circ x_{n-s})x_{n-s+2}]x_{n-s+3}\dots x_{n+s} \\ &\quad + x_{n-s+1}(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s})x_{n-s+2}\dots x_{n+s} \\ &= (x_1 \circ \dots \circ x_{n-s+1})x_{n-s+2}\dots x_{n+s} + x_{n-s+1}(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s} \circ x_{n-s+2})x_{n-s+3}\dots x_{n+s} \\ &\quad + x_{n-s+1}(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s})x_{n-s+2}\dots x_{n+s}. \end{aligned}$$

Por hipótese de indução

$$(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s+1})x_{n-s+2}\dots x_{n+s-1} \quad e \quad (x_1 \circ \dots \circ x_{n-s} \circ x_{n-s+2})x_{n-s+3}\dots x_{n+s}$$

são elementos de  $R_n$ , portanto

$$(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s+1})x_{n-s+2}\dots x_{n+s} \quad e \quad x_{n-s+1}(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s} \circ x_{n-s+2})x_{n-s+3}\dots x_{n+s}$$

pertencem a  $R_n$ . Logo

$$x_{n-s+1}(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s})x_{n-s+2}\dots x_{n+s} \in R_n.$$

Como

$$((x_1 \circ \dots \circ x_{n-s})x_{n-s+1} + x_{n-s+1}(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s}))x_{n-s+2}\dots x_{n+s} \in R_n,$$

temos

$$(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s})x_{n-s+1}\dots x_{n+s} \in R_n.$$

Sabemos que  $x_1 \circ \dots \circ x_n$  pertence a  $R_n$ . Fazendo  $x_i = x_1$  para  $i = 2, \dots, n$ , temos que  $x_1 \circ \dots \circ x_1 = 2^{n-1}x_1^n$ , como a característica do corpo  $K$  é diferente de 2,  $x_1^n$  pertence a  $R_n$ .

■

**Corolário 3.8.** *Os elementos da forma*

$$(x_1 \circ \dots \circ x_{n+1-s})x_{n-s+2}\dots x_{n+1+s} \quad e \quad x_1^{n+1}$$

*pertencem a  $R_{n+1}$ , para  $s = 1, \dots, n$ .*

**Corolário 3.9.** *[72, Lema 4] Os elementos da forma*

$$x_1 \cdot \dots \cdot x_{2n+1}$$

*pertencem a  $R_{n+1}$ .*

**Lema 3.10.** *Temos que*

$$x_1 \circ \dots \circ x_n = 2^n x_1 \dots x_n + \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_{2k} \\ i_{2k+1} < \dots < i_n \\ 1 \leq k \leq n/2}} \xi_{i_1 \dots i_n} 2^{\eta_k} (x_{i_1}, x_{i_2}) \dots (x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}) x_{i_{2k+1}} \dots x_{i_n} + t,$$

onde  $t \in T$ ,  $\xi_{i_1 \dots i_n} = \pm 1$ ,  $\eta, \eta_k \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:**

Para  $n = 2$ , temos  $x_1 \circ x_2 = 2x_1x_2 - (x_1, x_2)$ , então a afirmação vale para  $n = 2$ .

Suponhamos que,

$$x_1 \circ \dots \circ x_n = 2^n x_1 \dots x_n + \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_{2k} \\ i_{2k+1} < \dots < i_n \\ 1 \leq k \leq n/2}} 2^{\eta_k} (x_{i_1}, x_{i_2}) \dots (x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}) x_{i_{2k+1}} \dots x_{i_n} + t,$$

onde  $t \in T$ . Logo,

$$\begin{aligned} x_1 \circ \dots \circ x_{n+1} &= (x_1 \circ \dots \circ x_n) x_{n+1} + x_{n+1} (x_1 \circ \dots \circ x_n) \\ &= (2^n x_1 \dots x_n + \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_{2k} \\ i_{2k+1} < \dots < i_n \\ 1 \leq k \leq n/2}} 2^{\eta_k} (x_{i_1}, x_{i_2}) \dots (x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}) x_{i_{2k+1}} \dots x_{i_n} + t) x_{n+1} \\ &\quad + x_{n+1} (2^n x_1 \dots x_n + \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_{2k} \\ i_{2k+1} < \dots < i_n \\ 1 \leq k \leq n/2}} 2^{\eta_k} (x_{i_1}, x_{i_2}) \dots (x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}) x_{i_{2k+1}} \dots x_{i_n} + t) \\ &= 2^{\eta+1} x_1 \dots x_{n+1} + \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_{2k'} \\ i_{2k'+1} < \dots < i_{n+1} \\ 1 \leq k' \leq (n+1)/2}} 2^{\eta_{k'}} (x_{i_1}, x_{i_2}) \dots (x_{i_{2k'-1}}, x_{i_{2k'}}) x_{i_{2k'+1}} \dots x_{i_{n+1}} + t'. \end{aligned}$$

■

**Corolário 3.11.** *Todo produto de elementos de  $K\langle X \rangle$  pode ser reescrito, módulo  $R_n$ , como combinação linear de produtos com no máximo  $(n - 1)$  fatores.*

**Demonstração:**

Pelo Lema 3.10, temos que  $2^n x_1 \dots x_n$  pode ser reescrito como combinação linear de

produtos com no máximo  $(n - 1)$  fatores módulo  $R_n$ ,

$$2^n x_1 \dots x_n = - \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_{2k} \\ i_{2k+1} < \dots < i_n \\ 1 \leq k \leq n/2}} \xi_{i_1 \dots i_n} 2^{\eta_k} (x_{i_1}, x_{i_2}) \dots (x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}) x_{i_{2k+1}} \dots x_{i_n} \pmod{R_n},$$

ou seja,  $2^n x_1 \dots x_n$  pertence ao T-ideal gerado por  $(x_1, x_2)$ . Como a característica do corpo  $K$  é diferente de 2,  $x_1 \dots x_n$  também pertence ao T-ideal gerado por  $(x_1, x_2)$ . Portanto,  $x_1 \dots x_n$  pode ser reescrito como combinação linear de produtos com no máximo  $(n - 1)$  fatores módulo  $R_n$ . ■

**Corolário 3.12.** *Todo produto de elementos de  $K\langle X \rangle$  pode ser reescrito, módulo  $R_{n+1}$ , como combinação linear de produtos com no máximo  $n$  fatores.*

Seja

$$\begin{aligned} B_{n+1} = & \{x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_m}^{\epsilon_m} (x_{j_1}, x_{j_2}) \dots (x_{j_{2q-1}}, x_{j_{2q}}) x_{j_1}^{\delta_1} \dots x_{j_{2q}}^{\delta_{2q}} \mid m, q \geq 0, i_1 < \dots < i_m, j_1 < \dots < j_{2q}, \\ & i_r \neq j_s \ (1 \leq r \leq m), \ (1 \leq s \leq 2q), \ 1 \leq \epsilon_l < \min\{p, n+1\} \ (1 \leq l \leq m) \\ & 0 \leq \delta_t < \min\{p, n+1\} \ (1 \leq t \leq 2q), \ \epsilon_1 + \dots + \epsilon_m + \delta_1 + \dots + \delta_{2q} + q \leq n\}. \end{aligned}$$

**Corolário 3.13.** *O conjunto  $\{b + R_{n+1} \mid b \in B_{n+1}\}$  gera  $K\langle X \rangle / R_{n+1}$ .*

**Demonstração:**

Pelo Lema 2.9, o conjunto  $\{b + T \mid b \in B\}$ , onde

$$\begin{aligned} B = & \{x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_m}^{\epsilon_m} (x_{j_1}, x_{j_2}) \dots (x_{j_{2q-1}}, x_{j_{2q}}) x_{j_1}^{\delta_1} \dots x_{j_{2q}}^{\delta_{2q}} \mid m, q \geq 0, \epsilon_l \in \{1, \dots, p-1\} \ (1 \leq l \leq m), \\ & \delta_t \in \{0, \dots, p-1\} \ (1 \leq t \leq 2q), \ i_1 < \dots < i_m, \ j_1 < \dots < j_{2q}, \ i_r \neq j_s \ (1 \leq r \leq m, 1 \leq s \leq 2q)\} \end{aligned}$$

gera  $K\langle X \rangle / T$ . Como  $T \subset R_{n+1}$ , então  $\{b + R_{n+1} \mid b \in B\}$  gera  $K\langle X \rangle / R_{n+1}$ . Pelo Corolário 3.12, todo elemento de  $B$  pode ser reescrito, módulo  $R_{n+1}$ , como combinação



linear de produtos com no máximo  $n$  fatores. Portanto,  $\{b + R_{n+1} \mid b \in B_{n+1}\}$  gera  $K\langle X \rangle / R_{n+1}$ .

■

**Corolário 3.14.** *O conjunto  $\{b + T(H_{2n}) \mid b \in B_{n+1}\}$  gera  $K\langle X \rangle / T(H_{2n})$ .*

**Demonstração:**

Pelo Corolário 3.13, o conjunto  $\{b + R_{n+1} \mid b \in B_{n+1}\}$  gera  $K\langle X \rangle / R_{n+1}$ . O Lema 3.6 garante que  $R_{n+1} \subset T(H_{2n})$ , então  $\{b + T(H_{2n}) \mid b \in B_{n+1}\}$  gera  $K\langle X \rangle / T(H_{2n})$ .

■

Pelo Corolário 3.14, o conjunto  $\{b + T(H_{2n}) \mid b \in B_{n+1}\}$  é um candidato natural à base de  $K\langle X \rangle / T(H_{2n})$ . Devemos verificar se  $B_{n+1}$  é linearmente independente módulo  $T(H_{2n})$ .

**Lema 3.15.** *Os elementos de  $B_{n+1}$  são linearmente independentes módulo  $T(H_{2n})$ .*

**Demonstração:**

Esta demonstração é baseada na demonstração do Lema 8 de [72].

Consideremos uma combinação linear arbitrária,  $f = \sum_{i=1}^t \alpha_i b_i$ , de elementos de  $B_{n+1}$ . Suponhamos que o termo líder de  $f$  com respeito à Definição 2.11 é  $\alpha_1 b_1$ , onde  $\alpha_1 \in K$ ,  $\alpha_1 \neq 0$ . Seja  $b_1 = \prod_{k=1}^m x_{i_k}^{\epsilon_k} \prod_{l=1}^q (x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}) x_{j_{2l-1}}^{\delta_{2l-1}} x_{j_{2l}}^{\delta_{2l}}$ .

Definamos um homomorfismo  $\varphi : K\langle X \rangle / T(H_{2n}) \rightarrow H_{2n}$  por:

$$\varphi(x_{i_k}) = e_{i_k 1} e_{i_k 2} + \dots + e_{i_k (2\epsilon_k - 1)} e_{i_k (2\epsilon_k)} \text{ para } 1 \leq k \leq m,$$

$$\varphi(x_{j_t}) = e_{j_t 1} e_{j_t 2} + \dots + e_{j_t (2\delta_t - 1)} e_{j_t (2\delta_t)} + e_{j_t}, \text{ para } 1 \leq t \leq 2q,$$

$$\varphi(x_s) = 0, \text{ se } x_s \neq x_{i_k} \text{ (} 1 \leq k \leq m \text{) e } x_s \neq x_{j_t} \text{ (} 1 \leq t \leq 2q \text{),}$$

onde todos  $e_{j_t}, e_{i_k \gamma_k}, e_{j_t \beta_t}$  ( $1 \leq k \leq m, 1 \leq t \leq 2q, 1 \leq \gamma_k \leq 2\epsilon_k, 1 \leq \beta_t \leq 2\delta_t$ ) são elementos distintos da base de  $H_{2n}$ . Este número de elementos distintos existe, pois pela definição de  $B_{n+1}$ , temos  $\epsilon_1 + \dots + \epsilon_m + \delta_1 + \dots + \delta_{2q} + q \leq n$ , logo o número de elementos distintos exigidos na imagem de  $b_1$  que é  $d = 2\epsilon_1 + 2\epsilon_2 + \dots + 2\epsilon_m + 2\delta_1 + \dots + 2\delta_{2q} + 2q$  é menor ou igual a  $2n$ .

Pelo Lema 2.12, itens a) e c),  $\varphi(b_1) = \gamma_1 e_1 \dots e_d \neq 0$ , onde  $0 \neq \gamma_1 \in \mathbb{R}$ .

Agora vamos verificar o que acontece com os outros termos de  $f$ . Seja  $\alpha_m b_m$  um destes termos.

Se  $b_m$  possui alguma variável  $x_s$  distinta das variáveis de  $b_1$ , como  $\varphi(x_s) = 0$ , temos  $\varphi(b_m) = 0$ . Resta verificar os casos onde  $b_1$  e  $b_m$  não possuem variáveis distintas.

Pela escolha de  $b_1$  temos que  $b_m < b_1$ , então alguma das condições da Definição 2.11 é satisfeita.

**Caso 1)** Se  $\partial(b_1) < \partial(b_m)$ , então existe  $x_r$  tal que  $\partial_{x_r}(b_1) < \partial_{x_r}(b_m)$ . Consideraremos 4 possibilidades:

**a)**  $x_r$  não pertence a comutadores de  $b_1$  e de  $b_m$ . Seja  $\partial_{x_r}(b_1) = \epsilon_r$  e  $\varphi(x_r) = e_{r1}e_{r2} + \dots + e_{r(2\epsilon_r-1)}e_{r(2\epsilon_r)}$ , como  $\partial_{x_r}(b_m) \geq \epsilon_r + 1$  e, pelo Lema 2.12 b),  $(\varphi(x_r))^{\epsilon_r+1} = 0$ , então  $\varphi(b_m) = 0$ .

**b)** A variável  $x_r$  não pertence a comutadores de  $b_1$ , contudo pertence a algum comutador de  $b_m$ . Suponhamos  $x_r = x_{i_k}$ , como  $\varphi(x_{i_k})$  é elemento do centro de  $H_{2n}$ ,  $\varphi(b_m) = 0$ .

**c)** A variável  $x_r$  pertence a algum comutador de  $b_1$ , porém não pertence a comutadores de  $b_m$ . Sejam  $\partial_{x_r}(b_1) = \delta_r + 1$  e  $\varphi(x_r) = e_{r1}e_{r2} + \dots + e_{r(2\delta_r-1)}e_{r(2\delta_r)} + e_r$ . Como  $\partial_{x_r}(b_m) \geq \delta_r + 2$ , e pelo Lema 2.12 b),  $(\varphi(x_r))^{\delta_r+2} = 0$ , temos  $\varphi(b_m) = 0$ .

**d)**  $x_r$  pertence a comutadores de  $b_1$  e de  $b_m$ . Sejam  $\partial_{x_r}(b_1) = \delta_r + 1$ ,  $\varphi(x_r) = e_{r1}e_{r2} + \dots + e_{r(2\delta_r-1)}e_{r(2\delta_r)} + e_r$  e  $\partial_{x_r}(b_m) = \delta_r + 1 + t$ , com  $t > 0$ . Se

$\varphi(x_s) = c_s + g_s$ , onde  $c_s$  é um polinômio par e  $g_s$  é um polinômio ímpar, então pelo Lema 2.12 a),  $(\varphi(x_r), \varphi(x_s))\varphi(x_r)^{\delta_r+t}\varphi(x_s)^{\delta_s} = 2(e_{r_1}e_{r_2} + \dots + e_{r(2\delta_r-1)}e_{r(2\delta_r)})^{\delta_r+t}c_s^{\delta_s}e_r g_s$ . Pelo Lema 2.12 b),  $(e_{r_1}e_{r_2} + \dots + e_{r(2\delta_r-1)}e_{r(2\delta_r)})^{\delta_r+t} = 0$ , então  $\varphi(b_m) = 0$ .

**Caso 2)** Se  $\partial(b_1) = \partial(b_m)$  e o número de comutadores em  $b_1$  é menor que o número de comutadores em  $b_m$ , então para algum  $k$  a variável  $x_{i_k}$  pertence a algum comutador de  $b_m$ , mas não pertence a nenhum comutador de  $b_1$ . Como  $\varphi(x_{i_k})$  é um elemento do centro de  $H_{2n}$ , temos  $\varphi(b_m) = 0$ .

**Caso 3)** Se  $\partial(b_1) = \partial(b_m)$ , o número de comutadores em  $b_1$  e  $b_m$  é o mesmo e existe  $r \geq 1$  tal que para todo  $l < r$ ,  $\partial_{x_l}(b_1) = \partial_{x_l}(b_m)$  e  $\partial_{x_r}(b_1) < \partial_{x_r}(b_m)$ . Reaímos no Caso 1).

**Caso 4)** Se  $\partial(b_1) = \partial(b_m)$ , o número de comutadores em  $b_1$  e  $b_m$  é o mesmo,  $\partial_{x_j}(b_1) = \partial_{x_j}(b_m)$  para todo  $x_j$ , existe  $r \geq 1$  tal que para  $l < r$ ,  $x_l$  pertence a um comutador em  $b_1$  se, e somente se, pertence a um comutador em  $b_m$ , e  $x_r$  pertence a algum comutador de  $b_1$  e não pertence a comutadores de  $b_m$ . Neste caso, para algum  $k$ ,  $x_{i_k}$  pertence a um comutador em  $b_m$ , mas não pertence a nenhum comutador de  $b_1$ . Como  $\varphi(x_{i_k})$  é um elemento do centro de  $H_{2n}$ , temos  $\varphi(b_m) = 0$ .

Portanto,  $\varphi(f) = \alpha_1\gamma_1e_1\dots e_d$ ,  $0 \neq \gamma_1 \in \mathbb{R}$ .

Se  $f = \sum_{i=1}^t \alpha_i b_i = 0 \pmod{T(H_{2n})}$ , temos  $\alpha_1\gamma_1e_1\dots e_d = 0$ , o que implica que  $\alpha_1 = 0$ .

Assim sucessivamente, verificamos que  $\alpha_i = 0$  ( $1 \leq i \leq t$ ).

Portanto,  $B_{n+1}$  é linearmente independente módulo  $T(H_{2n})$ .

■

**Proposição 3.16.** (Stojanova-Venkova) *Se  $K$  é um corpo arbitrário infinito de característica prima  $p > 2$ , então  $R_{n+1} = T(H_{2n})$ .*

**Demonstração:**

Esta proposição foi citada sem demonstração em [22].

Pelo Lema 3.6,  $R_{n+1} \subseteq T(H_{2n})$ . O Corolário 3.13 garante que o conjunto  $\{b + R_{n+1} \mid b \in B_{n+1}\}$  gera  $K\langle X \rangle / R_{n+1}$ . Pelo Corolário 3.14 e o Lema 3.15, o conjunto  $\{b + T(H_{2n}) \mid b \in B_{n+1}\}$  é base de  $K\langle X \rangle / T(H_{2n})$ . Logo  $T(H_{2n}) = R_{n+1}$ . ■

Nosso próximo objetivo é determinar o centro de  $K\langle X \rangle / R_{n+1}$ .

Seja  $y = y(x_1, \dots, x_n)$  um polinômio. Diremos que uma variável  $x$  é *independente* de  $y$  se  $x \notin \{x_1, \dots, x_n\}$ .

**Definição 3.17.** Sejam  $I$  um T-ideal de  $K\langle X \rangle$ ,  $f = f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$  e  $x_N$  uma variável independente de  $f$ . Dizemos que  $f$  é um *polinômio central módulo  $I$*  se  $f \notin I$  e  $(f, x_N)$  pertence a  $I$ .

Verificaremos inicialmente que todo polinômio central módulo  $R_{n+1}$  é imagem de um polinômio central módulo  $T$ .

**Lema 3.18.** *Seja  $y = x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_m}^{\epsilon_m}(x_{j_1}, x_{j_2}) \dots (x_{j_{2q-1}}, x_{j_{2q}}) x_{j_1}^{\delta_1} \dots x_{j_{2q}}^{\delta_{2q}}$  elemento de  $B_{n+1} \subseteq B$  e  $x_N$  uma variável independente. Se*

$$(y, x_N) = \sum_{i=1}^l \alpha_i b_i \pmod{R_{n+1}},$$

onde  $b_i \in B_{n+1}$ , então

$$(y, x_N) = \sum_{i=1}^l \alpha_i b_i \pmod{T}.$$

**Demonstração:**

Sejam  $y = x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_m}^{\epsilon_m}(x_{j_1}, x_{j_2}) \dots (x_{j_{2q-1}}, x_{j_{2q}}) x_{j_1}^{\delta_1} \dots x_{j_{2q}}^{\delta_{2q}} \in B_{n+1}$  e  $x_N$  uma variável independente. Como o elemento  $(x_{j_1}, x_{j_2}) \dots (x_{j_{2q-1}}, x_{j_{2q}}) x_{j_1}^{\delta_1} \dots x_{j_{2q}}^{\delta_{2q}} + T$  é central em  $K\langle X \rangle / T$ ,

temos

$$\begin{aligned}
(y, x_N) &= (x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_m}^{\epsilon_m} (x_{j_1}, x_{j_2}) \dots (x_{j_{2q-1}}, x_{j_{2q}}) x_{j_1}^{\delta_1} \dots x_{j_{2q}}^{\delta_{2q}}, x_N) \\
&= (x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_m}^{\epsilon_m}, x_N) (x_{j_1}, x_{j_2}) \dots (x_{j_{2q-1}}, x_{j_{2q}}) x_{j_1}^{\delta_1} \dots x_{j_{2q}}^{\delta_{2q}} \\
&= \epsilon_1 (x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_m}^{\epsilon_m} (x_{i_1}, x_N) (x_{j_1}, x_{j_2}) \dots (x_{j_{2q-1}}, x_{j_{2q}}) x_{i_1}^{\epsilon_1-1} x_{j_1}^{\delta_1} \dots x_{j_{2q}}^{\delta_{2q}}) + \dots \\
&\quad + \epsilon_m (x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_{m-1}}^{\epsilon_{m-1}} (x_{i_m}, x_N) (x_{j_1}, x_{j_2}) \dots (x_{j_{2q-1}}, x_{j_{2q}}) x_{i_m}^{\epsilon_m-1} x_{j_1}^{\delta_1} \dots x_{j_{2q}}^{\delta_{2q}}) \pmod{T},
\end{aligned}$$

onde  $\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{t-1} + \epsilon_{t+1} + \dots + \epsilon_m + (\epsilon_t - 1) + \delta_1 + \dots + \delta_{2q} + q + 1 \leq n$  para  $1 \leq t \leq m$ .

Como  $(x_{l_1}, x_{l_3})(x_{l_2}, x_{l_4}) = -(x_{l_1}, x_{l_4})(x_{l_2}, x_{l_3}) \pmod{T}$ , reordenando os índices dos elementos que pertencem aos comutadores, temos

$$(y, x_N) = \sum_{t=1}^m \epsilon_t h_t(x_{k_1}, x_{k_2}) \dots (x_{k_{2q+1}}, x_{k_{2q+2}}) x_{k_1}^{\gamma_1} \dots x_{k_{2q+2}}^{\gamma_{2q+2}} \pmod{T},$$

onde  $k_1 < \dots < k_{2q+2}$ ,  $h_t(x_{i_1}, \dots, x_{i_{t-1}}, x_{i_{t+1}}, \dots, x_{i_m}) = x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_{t-1}}^{\epsilon_{t-1}} x_{i_{t+1}}^{\epsilon_{t+1}} \dots x_{i_m}^{\epsilon_m}$  e  $\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{t-1} + \epsilon_{t+1} + \dots + \epsilon_m + \gamma_1 + \dots + \gamma_{2q+2} + (q + 1) \leq n$  para  $1 \leq t \leq m$ , ou seja,  $h_t(x_{k_1}, x_{k_2}) \dots (x_{k_{2q+1}}, x_{k_{2q+2}}) x_{k_1}^{\gamma_1} \dots x_{k_{2q+2}}^{\gamma_{2q+2}} \in B_{n+1}$  para  $1 \leq t \leq m$ . ■

**Corolário 3.19.** *Seja  $f \in K\langle X \rangle$  um polinômio,  $f \notin R_{n+1}$ . Seja  $x_N$  uma variável independente tal que*

$$(f, x_N) = 0 \pmod{R_{n+1}}.$$

Então,

$$(f, x_N) = 0 \pmod{T}.$$

**Demonstração:**

Seja  $f = \sum_{i=1}^t \alpha_i b_i + r$ , onde  $r \in R_{n+1}$ ,  $b_i \in B_{n+1}$  e  $\alpha_i \neq 0$  para  $1 \leq i \leq t$ . Temos que

$$(f, x_N) = \left( \sum_{i=1}^t \alpha_i b_i + r, x_N \right) = \sum_{i=1}^t \alpha_i (b_i, x_N) + r'$$

onde  $r' \in R_{n+1}$ . Pela demonstração do Lema 3.18, se  $b_i \in B_{n+1}$ , então  $(b_i, x_N)$  é uma combinação linear de elementos de  $B_{n+1}$  e elementos de  $T$ . Então,

$$(f, x_N) = \sum_k \gamma_k u_k = 0 \pmod{R_{n+1}},$$

onde  $u_k \in B_{n+1}$ , para todo  $k$ . Como  $B_{n+1}$  é linearmente independente módulo  $R_{n+1}$ ,  $\gamma_k = 0$ , para todo  $k$ .

Pelo Lema 3.18,  $(f, x_N) = \sum_k \gamma_k u_k \pmod{T}$ , ou seja,  $(f, x_N) = 0 \pmod{T}$ .

■

**Proposição 3.20.** *Sejam  $\phi : K\langle X \rangle/T \rightarrow K\langle X \rangle/R_{n+1}$  o epimorfismo canônico,  $C_1$  e  $C_2$  os centros de  $K\langle X \rangle/T$  e  $K\langle X \rangle/R_{n+1}$ , respectivamente. Então,  $\phi(C_1) = C_2$ , ou seja, o centro de  $K\langle X \rangle/R_{n+1}$  é a imagem do centro de  $K\langle X \rangle/T$  pela  $\phi$ .*

**Demonstração:**

Temos que  $\phi(C_1) \subseteq C_2$ . Resta verificar que  $C_2 \subseteq \phi(C_1)$ .

Seja  $f$  um polinômio tal que  $f + R_{n+1}$  é elemento de  $C_2$ . Seja  $x_N$  uma variável independente, então  $(f, x_N) = 0 \pmod{R_{n+1}}$ . Pelo Corolário 3.19,  $(f, x_N) = 0 \pmod{T}$ , logo  $f + T \in C_1$  e conseqüentemente  $f + R_{n+1} \in \phi(C_1)$ .

Portanto,  $\phi(C_1) = C_2$ .

■

**Teorema 3.21.** *O centro de  $K\langle X \rangle/R_{n+1}$  é o  $T$ -espaço gerado por*

$$(x_1, x_2) + R_{n+1}$$

e pelos polinômios

$$\left\{ (x_1, x_2) \dots (x_{2q-1}, x_{2q}) x_1^{p-1} \dots x_{2q}^{p-1} + R_{n+1} \mid 0 < q \leq \frac{n}{2p-1} \right\}.$$

**Demonstração:**

Pelo Lema 3.20, um polinômio é central módulo  $R_{n+1}$  se for imagem de um polinômio central módulo  $T$ . Pelo Teorema 2.2, o conjunto

$$\{(x_1, x_2) + T, (x_1, x_2) \dots (x_{2q-1}, x_{2q}) x_1^{p-1} \dots x_{2q}^{p-1} + T \mid q \in \mathbb{N}\}$$

gera os polinômios centrais módulo  $T$ . Contudo, pelo Corolário 3.12, se  $f_1, \dots, f_{n+1}$  são elementos de  $K\langle X \rangle / R_{n+1}$  podemos escrever

$$f_1 \dots f_{n+1} = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_{2k} \\ i_{2k+1} < \dots < i_{n+1} \\ 1 \leq k \leq (n+1)/2}} -\xi_{i_1 \dots i_{n+1}} 2^{\eta_k - \eta} (f_{i_1}, f_{i_2}) \dots (f_{i_{2k-1}}, f_{i_{2k}}) f_{i_{2k+1}} \dots f_{i_{n+1}} + t,$$

onde  $t \in T$ ,  $\xi_{i_1 \dots i_{n+1}} = \pm 1$ ,  $\eta, \eta_k \in \mathbb{N}$ . Portanto, os elementos da forma

$$(x_1, x_2) \dots (x_{2q-1}, x_{2q}) x_1^{p-1} \dots x_{2q}^{p-1} + T$$

que possuem mais que  $n$  fatores podem ser reescritos como elementos de  $T$ . Logo,  $q + 2q(p-1) \leq n$ . Portanto, o teorema segue. ■

Como consequência imediata temos o Teorema 3.1, pois  $T(H_{2n}) = R_{n+1}$ .

**Teorema 3.1.** *O  $T$ -espaço dos polinômios centrais da álgebra de Grassmann  $H_{2n}$  é gerado, como  $T$ -espaço em  $K\langle X \rangle / T(H_{2n})$ , por*

$$(x_1, x_2) + T(H_{2n})$$

e pelos polinômios

$$\left\{ (x_1, x_2) \dots (x_{2q-1}, x_{2q}) x_1^{p-1} \dots x_{2q}^{p-1} + T(H_{2n}) \mid 0 < q \leq \frac{n}{2p-1} \right\}.$$

Agora passaremos a estudar o segundo caso, associado às álgebras de Grassmann  $H_{2n-1}$ .

**Definição 3.22.** O T-ideal  $W_{n+1}$  de  $K\langle X \rangle$  é o T-ideal gerado por  $T$ , pelos polinômios

$$x_{n+1}v_n = x_{n+1}(x_1 \circ \dots \circ x_n), \quad v_n x_{n+1} = (x_1 \circ \dots \circ x_n)x_{n+1}$$

e se  $s = n/(2p - 1)$  é um número inteiro incluímos o polinômio

$$u_s = (x_1, x_2) \dots (x_{2s-1}, x_{2s}) x_1^{p-1} \dots x_{2s}^{p-1}.$$

Stojanova-Venkova [72] demonstrou que  $W_{n+1} = T(H_{2n-1})$ . Como este artigo é escrito em russo, vamos apresentar a demonstração. Inicialmente, verificaremos que  $W_{n+1}$  está contido em  $T(H_{2n-1})$ .

**Lema 3.23.** *A álgebra  $H_{2n-1}$  satisfaz as identidades*

$$x_{n+1}v_n = x_{n+1}(x_1 \circ \dots \circ x_n) = 0, \quad v_n x_{n+1} = (x_1 \circ \dots \circ x_n)x_{n+1} = 0.$$

**Demonstração:**

Suponhamos que  $H_{2n-1}$  não satisfaz as identidades  $x_{n+1}v_n = x_{n+1}(x_1 \circ \dots \circ x_n) = 0$  e  $v_n x_{n+1} = (x_1 \circ \dots \circ x_n)x_{n+1} = 0$ . Pelo Lema 3.5,  $H_{2n}$  satisfaz a identidade  $(x_1 \circ \dots \circ x_{n+1}) = x_{n+1}(x_1 \circ \dots \circ x_n) + (x_1 \circ \dots \circ x_n)x_{n+1} = 0$ , logo  $H_{2n-1}$  também satisfaz.

Observemos que se  $r_{n+1} \neq 0$  é um polinômio par de  $H_{2n-1}$ , temos  $0 = (r_1 \circ \dots \circ r_n)r_{n+1} + r_{n+1}(r_1 \circ \dots \circ r_n) = 2(r_1 \circ \dots \circ r_n)r_{n+1}$ , para todos  $r_1, \dots, r_{n+1} \in H_{2n-1}$ . Como a característica do corpo  $K$  é diferente de 2 e  $H_{2n-1}$  não satisfaz a identidade  $v_n x_{n+1} = 0$ , temos  $0 = (r_1 \circ \dots \circ r_n)$ , para todos  $r_1, \dots, r_n \in H_{2n-1}$ , uma contradição.

Supondo que  $H_{2n-1}$  satisfaça apenas uma das identidades, de forma análoga, obteremos uma contradição. ■

**Lema 3.24.** *Seja  $s = n/(2p - 1)$ . Se  $s$  é um inteiro positivo, então a álgebra  $H_{2n-1}$  satisfaz a identidade*

$$u_s = (x_1, x_2) \dots (x_{2s-1}, x_{2s}) x_1^{p-1} \dots x_{2s}^{p-1} = 0.$$



### Demonstração:

O número  $s$  será um inteiro positivo  $k$ , se  $n = (2p - 1)k$ . Logo, devemos mostrar que a álgebra  $H_{2n-1} = H_{4kp-2k-1}$  satisfaz a identidade  $u_k = (x_1, x_2) \dots (x_{2k-1}, x_{2k}) x_1^{p-1} \dots x_{2k}^{p-1} = 0$ .

Se  $H_{4kp-2k-1}$  não satisfaz a identidade  $u_k = 0$ , existe um homomorfismo  $\varphi : K\langle X \rangle / T(H_{4kp-2k-1}) \rightarrow H_{4kp-2k-1}$  tal que  $\varphi(u_k) \neq 0$ .

Sejam  $\varphi(x_i) = c_i + g_i$  e  $\varphi(x_j) = c_j + g_j$ , onde  $c_i, c_j$  são polinômios pares e  $g_i, g_j$  são polinômios ímpares.

Os polinômios  $g_i, g_j$  devem ser não nulos, pois caso contrário  $\varphi(x_i)$  ou  $\varphi(x_j)$  seria elemento do centro de  $H_{4kp-2k-1}$  e  $\varphi(u_k)$  se anularia. Fazamos  $g_l = e_l$ .

Pelo Lema 2.12 a),  $\varphi((x_i, x_j) x_i^{p-1} x_j^{p-1}) = 2c_i^{p-1} c_j^{p-1} g_i g_j$ . Portanto,  $c_l = \alpha_{l1} b_{l1} + \dots + \alpha_{lt} b_{lt}$ , onde  $b_{l1}, \dots, b_{lt}$  são polinômios pares e  $t \geq p - 1$ , pois se  $t < p - 1$  pelo Lema 2.12 b),  $c_l^{p-1} = 0$  e conseqüentemente  $\varphi(u_k) = 0$ .

Assumindo que  $t = p - 1$ , fazamos  $b_{lq} = e_{l(2q-1)} e_{l(2q)}$ . Pelo Lema 2.12 c),  $c_l^{p-1} = \gamma(p-1)! e_{l1} \dots e_{l(2p-2)}$ , onde  $0 \neq \gamma \in \mathbb{R}$ . Logo  $c_l^{p-1} \neq 0$ , se  $e_{l1}, \dots, e_{l(2p-2)}$  forem distintos.

Como  $\varphi(u_k) = 2^k c_1^{p-1} c_2^{p-1} g_1 g_2 \dots c_{2k-1}^{p-1} c_{2k}^{p-1} g_{2k-1} g_{2k}$ , temos que  $\varphi(u_k) \neq 0$  se todos os elementos  $e_r$  que aparecem nas imagens de  $x_1, \dots, x_{2k}$  forem distintos. Logo, precisamos de  $2k(2p - 2 + 1) = 4kp - 2k$  elementos distintos.

Observemos que definimos  $\varphi$  de maneira que utilizamos o menor número possível de elementos  $e_r$ . Como em  $H_{4kp-2k-1}$  não dispomos de  $4kp - 2k$  elementos distintos,  $\varphi(u_k) = 0$ .

■

Portanto, pelos Lemas 2.5, 2.4, 3.23 e 3.24 podemos concluir o seguinte lema.

**Lema 3.25.** *O  $T$ -ideal  $W_{n+1}$  está contido em  $T(H_{2n-1})$ .*

Agora verificaremos que  $T(H_{2n-1})$  está contido em  $W_{n+1}$ . Precisaremos de alguns resultados adicionais.

**Lema 3.26.** *[72, Lema 10] Os elementos da forma*

$$(x_1 \circ \dots \circ x_{(n-1)-s})x_{n-s} \dots x_{n+s} \quad e \quad x_1^n$$

*pertencem a  $W_n$ , para  $s = 1, \dots, n - 2$ .*

**Demonstração:**

Esta demonstração é diferente da demonstração feita em [72].

Mostraremos por indução sobre  $s$ . Temos que  $(x_1 \circ \dots \circ x_{n-1}x_n)x_{n+1} \in W_n$ , como

$$\begin{aligned} (x_1 \circ \dots \circ x_{n-1}x_n)x_{n+1} &= [x_{n-1}x_n(x_1 \circ \dots \circ x_{n-2}) + (x_1 \circ \dots \circ x_{n-2})x_{n-1}x_n]x_{n+1} \\ &= x_{n-1}[x_n(x_1 \circ \dots \circ x_{n-2}) + (x_1 \circ \dots \circ x_{n-2})x_n]x_{n+1} \\ &\quad + [x_{n-1}(x_1 \circ \dots \circ x_{n-2}) + (x_1 \circ \dots \circ x_{n-2})x_{n-1}]x_nx_{n+1} \\ &\quad + x_{n-1}(x_1 \circ \dots \circ x_{n-2})x_nx_{n+1} \\ &= x_{n-1}(x_1 \circ \dots \circ x_{n-2} \circ x_n)x_{n+1} + (x_1 \circ \dots \circ x_{n-1})x_nx_{n+1} \\ &\quad + x_{n-1}(x_1 \circ \dots \circ x_{n-2})x_nx_{n+1} \end{aligned}$$

então,  $x_{n-1}(x_1 \circ \dots \circ x_{n-2})x_nx_{n+1} \in W_n$ , mas  $[x_{n-1}(x_1 \circ \dots \circ x_{n-2})x_n]x_{n+1}$  é igual a  $-[(x_1 \circ \dots \circ x_{n-2})x_{n-1}x_n]x_{n+1}$  módulo  $W_n$ . Logo  $(x_1 \circ \dots \circ x_{n-2})x_{n-1}x_nx_{n+1} \in W_n$ , ou seja, a afirmação vale para  $s = 1$ .

Suponhamos que  $(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s})x_{n-s+1} \dots x_{n+(s-1)} \in W_n$ . Temos que

$$\begin{aligned}
w &= (x_1 \circ \dots \circ x_{n-s}x_{n-s+1})x_{n-s+2} \dots x_{n+s} \\
&= [(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s-1})x_{n-s}x_{n-s+1} + x_{n-s}x_{n-s+1}(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s-1})]x_{n-s+2} \dots x_{n+s} \\
&= [(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s-1})x_{n-s} + x_{n-s}(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s-1})]x_{n-s+1} \dots x_{n+s} \\
&\quad + x_{n-s}[x_{n-s+1}(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s-1}) + (x_1 \circ \dots \circ x_{n-s-1})x_{n-s+1}]x_{n-s+2} \dots x_{n+s} \\
&\quad + x_{n-s}(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s-1})x_{n-s+1} \dots x_{n+s} \\
&= (x_1 \circ \dots \circ x_{n-s})x_{n-s+1} \dots x_{n+s} + x_{n-s}(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s-1} \circ x_{n-s+1})x_{n-s+2} \dots x_{n+s} \\
&\quad + x_{n-s}(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s-1})x_{n-s+1} \dots x_{n+s}.
\end{aligned}$$

Por hipótese de indução

$$(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s})x_{n-s+1} \dots x_{n+s-1} \quad \text{e} \quad (x_1 \circ \dots \circ x_{n-s-1} \circ x_{n-s+1})x_{n-s+2} \dots x_{n+s}$$

são elementos de  $W_n$ , portanto

$$(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s})x_{n-s+1} \dots x_{n+s} \quad \text{e} \quad x_{n-s}(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s-1} \circ x_{n-s+1})x_{n-s+2} \dots x_{n+s}$$

pertencem a  $W_n$ . Consequentemente

$$x_{n-s}(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s-1})x_{n-s+1} \dots x_{n+s} \in W_n$$

como

$$[x_{n-s}(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s-1}) + (x_1 \circ \dots \circ x_{n-s-1})x_{n-s}]x_{n-s+1} \dots x_{n+s} \in W_n,$$

temos que

$$(x_1 \circ \dots \circ x_{(n-1)-s})x_{n-s} \dots x_{n+s} \in W_n.$$

Sabemos que  $x_n(x_1 \circ \dots \circ x_{n-1})$  pertence a  $W_n$ . Fazendo  $x_i = x_1$  para  $i = 2, \dots, n$ , temos que  $x_1(x_1 \circ \dots \circ x_1) = \xi 2^{n-2} x_1^n$ , onde  $\xi = \pm 1$ , como a característica do corpo  $K$  é diferente de 2,  $x_1^n$  pertence a  $W_n$ .

■

**Corolário 3.27.** *Os elementos da forma*

$$(x_1 \circ \dots \circ x_{n-s})x_{n+1-s} \dots x_{n+1+s} \quad e \quad x_1^{n+1}$$

*pertencem a  $W_{n+1}$ , para  $s = 1, \dots, n - 1$ .*

**Corolário 3.28.** *[72, Lema 10] Os elementos da forma*

$$x_1 \cdot \dots \cdot x_{2n}$$

*pertencem a  $W_{n+1}$ .*

**Lema 3.29.** *[72, Lema 10] Os elementos da forma*

$$(x_1 \circ \dots \circ x_s)(x_{s+1} \circ \dots \circ x_t)x_{t+1} \dots x_{2n-t},$$

*onde  $1 \leq s \leq n - 1$  e  $s + 1 \leq t \leq n$ , pertencem a  $W_n$ .*

**Demonstração:**

Sejam  $x, y, z, w$  tais que

$$(x \circ y)zw = xyzw + yxzw = 0 \pmod{W_n}$$

$$z(x \circ y)w = zxyw + zyxw = 0 \pmod{W_n}$$

$$(x, y, z)w = xyzw - yxzw - zxyw + zyxw = 0 \pmod{W_n}$$

Então, somando as três equações, temos  $2xyzw + 2zyxw = 0 \pmod{W_n}$ , como a característica do corpo  $K$  é diferente de 2, temos  $xyzw = -zyxw \pmod{W_n}$ . Portanto,

$$xyzw = -zyxw = zxyw = -xzyw \quad e \quad zyxw = -xyzw = yxzw = -yzxw,$$

ou seja,

$$x(y \circ z)w = 0 \pmod{W_n} \quad e \quad (y \circ z)xw = 0 \pmod{W_n}.$$

Pelo Lema 3.26,

$$(x_1 \circ \dots \circ x_t)x_{t+1}\dots x_{2n-t-1} = 0 \pmod{W_n} \quad \text{e} \quad (x_1 \circ \dots \circ x_{t-1})x_t\dots x_{2n-t} = 0 \pmod{W_n}.$$

Portanto,  $x_t(x_1 \circ \dots \circ x_{t-1})x_{t+1}\dots x_{2n-t}$  pertence a  $W_n$ , pois caso contrário  $(x_1 \circ \dots \circ x_t)x_{t+1}\dots x_{2n-t-1}x_{2n-t}$  não pertenceria a  $W_n$ , uma contradição.

Façamos  $x = (x_1 \circ \dots \circ x_{t-2})$ ,  $y = x_{t-1}$ ,  $z = x_t$  e  $w = x_{t+1}\dots x_{2n-t}$ , logo

$$(x_1 \circ \dots \circ x_{t-2})(x_{t-1} \circ x_t)x_{t+1}\dots x_{2n-t} \quad \text{e} \quad (x_{t-1} \circ x_t)(x_1 \circ \dots \circ x_{t-2})x_{t+1}\dots x_{2n-t}$$

pertencem a  $W_n$ .

Façamos agora  $x = (x_1 \circ \dots \circ x_{t-3})$ ,  $y = x_{t-2}$ ,  $z = (x_{t-1} \circ x_t)$  e  $w = x_{t+1}\dots x_{2n-t}$ , logo

$$(x_1 \circ \dots \circ x_{t-3})(x_{t-2} \circ x_{t-1} \circ x_t)x_{t+1}\dots x_{2n-t} \quad \text{e} \quad (x_{t-2} \circ x_{t-1} \circ x_t)(x_1 \circ \dots \circ x_{t-3})x_{t+1}\dots x_{2n-t}$$

pertencem a  $W_n$ .

Assim sucessivamente,  $(x_1 \circ \dots \circ x_s)(x_{s+1} \circ \dots \circ x_t)x_{t+1}\dots x_{2n-t} = 0 \pmod{W_n}$ .

■

**Corolário 3.30.** *Os elementos da forma*

$$(x_1 \circ \dots \circ x_s)(x_{s+1} \circ \dots \circ x_t)x_{t+1}\dots x_{2n+2-t},$$

onde  $1 \leq s \leq n$  e  $s+1 \leq t \leq n+1$ , pertencem a  $W_{n+1}$ .

Seja

$$\begin{aligned} D_1 &= \{x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_m}^{\epsilon_m}(x_{j_1}, x_{j_2}) \dots (x_{j_{2q-1}}, x_{j_{2q}})x_{j_1}^{\delta_1} \dots x_{j_{2q}}^{\delta_{2q}} \mid m, q \geq 0, i_1 < \dots < i_m, j_1 < \dots < j_{2q}, \\ & i_r \neq j_s \ (1 \leq r \leq m, 1 \leq s \leq 2q), 1 \leq \epsilon_l < \min\{p, n+1\} \ (1 \leq l \leq m), \\ & 0 \leq \delta_t < \min\{p, n+1\} \ (1 \leq t \leq 2q), \epsilon_1 + \dots + \epsilon_m + \delta_1 + \dots + \delta_{2q} + q < n\} \end{aligned}$$

**Definição 3.31.**  $D_{n+1}$  é o subconjunto de  $B_{n+1}$  formado por  $D_1$  e todos os produtos constituídos por  $n$  fatores tais que  $x_{i_1}$  é a variável de menor índice que possui expoente menor que  $p$ .

**Lema 3.32.** *Seja  $b$  um elemento de  $B_{n+1} \setminus D_1$ . Então  $b$  pode ser reescrito como combinação linear de elementos de  $D_{n+1}$  módulo  $W_{n+1}$ .*

**Demonstração:**

Esta demonstração é baseada na demonstração do Lema 11 de [72].

Seja  $b \in B_{n+1} \setminus D_1$ . Se  $b = b(x_1, \dots, x_r) = \prod_{k=1}^m x_{i_k}^{\epsilon_k} \prod_{l=1}^q (x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}})^{\delta_{2l-1}} x_{j_{2l}}^{\delta_{2l}}$ . Podemos reescrevê-lo como  $b = \prod_{i=1}^{m+2q} x_i^{\gamma_i} \prod_{l=1}^q (x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}})$ , onde  $\gamma_i = \epsilon_k$  se  $x_i = x_{i_k}$  para algum  $i_k$  ( $1 \leq k \leq m$ ) e  $\gamma_i = \delta_t$  se  $x_i = x_{j_t}$  para algum  $j_t$  ( $1 \leq t \leq 2q$ ).

Seja  $x_{j_t}$  a primeira das variáveis  $x_1, \dots, x_r$  que possui grau menor que  $p$ . Façamos,

$$b = \xi(x_{j_t}, x_{j_{t+\xi}}) x_{j_t}^{\delta_t} \prod_{i=1, i \neq j_t}^{t+2q} x_i^{\gamma_i} \prod_{l=1, l \neq t/2, (t+\xi)/2}^q (x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}) = \xi(x_{j_t}, x_{j_{t+\xi}}) x_{j_t}^{\delta_t} v(x)$$

onde  $\xi \in \{-1, 1\}$ , então

$$\begin{aligned} b &= \frac{\xi}{\delta_t + 1} (x_{j_t}^{\delta_t+1}, x_{j_{t+\xi}}) v(x) \\ &= \frac{2\xi}{\delta_t + 1} x_{j_t}^{\delta_t+1} x_{j_{t+\xi}} v(x) - \frac{\xi}{\delta_t + 1} (x_{j_t}^{\delta_t+1} \circ x_{j_{t+\xi}}) v(x) \pmod{W_{n+1}}. \end{aligned}$$

Observemos que se  $a = \sum_i \gamma_i$ , pelo Corolário 3.30,

$$(x_1 \circ \dots \circ x_{\delta_t+1})(x_{\delta_t+2} \circ \dots \circ x_{a+2}) x_{a+3} \dots x_{2n-a} = 0 \pmod{W_{n+1}}$$

e

$$(x_1 \circ \dots \circ x_{\delta_t+2})(x_{\delta_t+3} \circ \dots \circ x_{a+2}) x_{a+3} \dots x_{2n-a} = 0 \pmod{W_{n+1}},$$

logo

$$v_1(x) = 2^{\delta_t} x_{j_t}^{\delta_t+1} (x_{j_{t+\xi}} \circ x_1 \circ \dots \circ x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_r) \prod_{l=1, l \neq t/2, (t+\xi)/2}^q (x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}})$$

e

$$v_2(x) = 2^{\delta_t}(x_{j_t}^{\delta_t+1} \circ x_{j_t+\xi})(x_1 \circ \dots \circ x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_r) \prod_{l=1, l \neq t/2, (t+\xi)/2}^q (x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}})$$

são elementos de  $W_{n+1}$ .

Contudo, podemos reescrever  $v_1(x)$  e  $v_2(x)$ ,

$$v_1(x) = 2^{\eta_1} x_{j_t}^{\delta_t+1} x_{j_t+\xi} v(x) + x_{j_t}^{\delta_t+1} \overline{v_1(x)} \prod_{l=1, l \neq t/2, (t+\xi)/2}^q (x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}})$$

e

$$\begin{aligned} v_2(x) &= 2^{\eta_2} (x_{j_t}^{\delta_t+1} \circ x_{j_t+\xi}) v(x) + (x_{j_t}^{\delta_t+1} \circ x_{j_t+\xi}) \overline{v_2(x)} \prod_{l=1, l \neq t/2, (t+\xi)/2}^q (x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}) \\ &= 2^{\eta_2} (x_{j_t}^{\delta_t+1} \circ x_{j_t+\xi}) v(x) + 2x_{j_t}^{\delta_t+1} x_{j_t+\xi} \overline{v_2(x)} \prod_{l=1, l \neq t/2, (t+\xi)/2}^q (x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}) \\ &\quad - (x_{j_t}^{\delta_t+1}, x_{j_t+\xi}) \overline{v_2(x)} \prod_{l=1, l \neq t/2, (t+\xi)/2}^q (x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}), \end{aligned}$$

onde  $\overline{v_1(x)}$  e  $\overline{v_2(x)}$  são elementos do T-ideal gerado por  $(x_1, x_2)$ . Logo,

$$\begin{aligned} b &= b - \frac{2\xi}{2^{\eta_1}(\delta_t+1)} v_1(x) + \frac{\xi}{2^{\eta_2}(\delta_t+1)} v_2(x) \\ &= \left[ -\frac{2\xi}{2^{\eta_1}(\delta_t+1)} x_{j_t}^{\delta_t+1} \overline{v_1(x)} + \frac{2\xi}{2^{\eta_2}(\delta_t+1)} x_{j_t}^{\delta_t+1} x_{j_t+\xi} \overline{v_2(x)} - \frac{\xi}{2^{\eta_2}} (x_{j_t}, x_{j_t+\xi}) x_{j_t}^{\delta_t} \overline{v_2(x)} \right] \\ &\quad \times \left[ \prod_{l=1, l \neq t/2, (t+\xi)/2}^q (x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}) \right] \pmod{W_{n+1}}. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{\xi}{2^{\eta_2}} (x_{j_t}, x_{j_t+\xi}) x_{j_t}^{\delta_t} \overline{v_2(x)} \prod_{l=1, l \neq t/2, (t+\xi)/2}^q (x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}) \pmod{W_{n+1}}$$

pertence a  $D_1$ , o lema segue. ■

**Corolário 3.33.** *O conjunto  $\{d + W_{n+1} \mid d \in D_{n+1}\}$  gera  $K\langle X \rangle / W_{n+1}$ .*

**Demonstração:**

Observemos que  $x_{n+1}(x_1 \circ \dots \circ x_n) = 0$  e  $(x_1 \circ \dots \circ x_n)x_{n+1} = 0$  implicam  $(x_1 \circ \dots \circ x_{n+1}) = 0$ . Logo,  $R_{n+1} \subseteq W_{n+1}$ . Como  $\{b + R_{n+1} \mid b \in B_{n+1}\}$  gera  $K\langle X \rangle / R_{n+1}$ , temos que  $\{b + W_{n+1} \mid b \in B_{n+1}\}$  gera  $K\langle X \rangle / W_{n+1}$ . Contudo, pelo Lema 3.32, o conjunto  $\{d + W_{n+1} \mid d \in D_{n+1}\}$  ainda gera  $K\langle X \rangle / W_{n+1}$ .

■

**Corolário 3.34.** *O conjunto  $\{d + T(H_{2n-1}) \mid d \in D_{n+1}\}$  gera  $K\langle X \rangle / T(H_{2n-1})$ .*

**Demonstração:**

Pelo corolário 3.33, o conjunto  $\{d + W_{n+1} \mid d \in D_{n+1}\}$  gera  $K\langle X \rangle / W_{n+1}$ . O Lema 3.25 garante que  $W_{n+1} \subseteq T(H_{2n-1})$ , então  $\{d + T(H_{2n-1}) \mid d \in D_{n+1}\}$  gera  $K\langle X \rangle / T(H_{2n-1})$ .

■

Pelo Corolário 3.34, o conjunto  $\{d + T(H_{2n-1}) \mid d \in D_{n+1}\}$  é um candidato natural à base de  $K\langle X \rangle / T(H_{2n-1})$ . Resta verificar se  $D_{n+1}$  é linearmente independente módulo  $T(H_{2n-1})$ .

**Lema 3.35.** *Os elementos de  $D_{n+1}$  são linearmente independentes módulo  $T(H_{2n-1})$ .*

**Demonstração:**

Esta demonstração é baseada na demonstração do Lema 12 de [72].

Para os elementos de  $D_1$  a demonstração é análoga à do Lema 3.15.

Consideremos uma combinação linear arbitrária,  $f = \sum_{i=1}^t \alpha_i b_i$ , de elementos de  $D_{n+1} \setminus D_1$ . Suponhamos que o termo líder de  $f$  com respeito à Definição 2.11 é  $\alpha_1 b_1$ , onde  $\alpha_1 \in K$ ,  $\alpha_1 \neq 0$ . Seja  $b_1 = \prod_{k=1}^m x_{i_k}^{\epsilon_k} \prod_{l=1}^q (x_{j_{2l-1}}, x_{j_{2l}}) x_{j_{2l-1}}^{\delta_{2l-1}} x_{j_{2l}}^{\delta_{2l}}$ .



Definamos um homomorfismo  $\psi : K\langle X \rangle / T(H_{2n-1}) \rightarrow H_{2n-1}$  por:

$$\psi(x_{i_1}) = e_{i_1} e_{i_1 2} + \dots + e_{i_1(2\epsilon_1-3)} e_{i_1(2\epsilon_1-2)} + e_{i_1},$$

$$\psi(x_{i_k}) = e_{i_k 1} e_{i_k 2} + \dots + e_{i_k(2\epsilon_k-1)} e_{i_k(2\epsilon_k)}, \text{ para } 1 < k \leq m,$$

$$\psi(x_{j_t}) = e_{j_t 1} e_{j_t 2} + \dots + e_{j_t(2\delta_t-1)} e_{j_t(2\delta_t)} + e_{j_t}, \text{ para } 1 \leq t \leq 2q,$$

$$\psi(x_s) = 0, \text{ se } x_s \neq x_{i_k} \ (1 \leq k \leq m) \text{ e } x_s \neq x_{j_t} \ (1 \leq t \leq 2q),$$

onde todos  $e_{j_t}, e_{i_k \gamma_k}, e_{j_t \beta_t}$  ( $1 \leq k \leq m, 1 \leq t \leq 2q, 1 \leq \gamma_k \leq 2\epsilon_k, 1 \leq \beta_t \leq 2\delta_t$ ) são elementos distintos da base de  $H_{2n-1}$ . Este número de elementos distintos existe, pois por definição de  $B_{n+1}$ , temos que  $\epsilon_1 + \dots + \epsilon_m + \delta_1 + \dots + \delta_{2q} + q \leq n$ . Logo, o número de elementos distintos exigidos na imagem de  $b_1$  que é  $d = (2\epsilon_1 - 1) + 2\epsilon_2 + \dots + 2\epsilon_m + 2\delta_1 + \dots + 2\delta_{2q} + 2q$  é menor ou igual a  $2n - 1$ .

Pelo Lema 2.12, itens a), c) e d),  $\psi(b_1) = \gamma_1 e_1 \dots e_d \neq 0$ , onde  $0 \neq \gamma_1 \in \mathbb{R}$ .

Agora, vamos verificar o que acontece com os outros termos de  $f$ . Seja  $\alpha_m b_m$  um destes termos.

Se  $b_m$  possui alguma variável  $x_s$  distinta das variáveis de  $b_1$ , como  $\psi(x_s) = 0$ , temos  $\psi(b_m) = 0$ . Resta verificar os casos onde  $b_1$  e  $b_m$  não possuem variáveis distintas.

Pela escolha de  $b_1$  temos que  $b_m < b_1$ , então alguma das condições da Definição 2.11 é satisfeita.

**Caso 1)** Se  $\partial(b_1) < \partial(b_m)$ , então existe  $x_r$  tal que  $\partial_{x_r}(b_1) < \partial_{x_r}(b_m)$ . Consideraremos 4 possibilidades:

**a)**  $x_r$  não pertence a comutadores de  $b_1$  e de  $b_m$ . Seja  $\partial_{x_r}(b_1) = \epsilon_r$  então, ou  $\psi(x_r) = e_{r1} e_{r2} + \dots + e_{r(2\epsilon_r-3)} e_{r(2\epsilon_r-2)} + e_{r(2\epsilon_r-1)}$  ou  $\psi(x_r) = e_{r1} e_{r2} + \dots + e_{r(2\epsilon_r-1)} e_{r(2\epsilon_r)}$ . Em ambos os casos, como  $\partial_{x_r}(b_m) \geq \epsilon_r + 1$  e, pelo Lema 2.12 b),  $(\psi(x_r))^{\epsilon_r+1} = 0$ , então  $\psi(b_m) = 0$ .

b) A variável  $x_r$  não pertence a comutadores de  $b_1$ , contudo pertence a algum comutador de  $b_m$ .

- Seja  $x_r = x_{i_k}$ ,  $k \neq 1$ . Como  $\psi(x_{i_k})$  é elemento do centro de  $H_{2n-1}$ , temos  $\psi(b_m) = 0$ .
- Sejam  $x_r = x_{i_1}$ ,  $\partial_{x_{i_1}}(b_m) = \epsilon_1 + t + 1$ , com  $t \geq 0$  e  $\psi(x_s) = c_s + g_s$ , onde  $c_s$  é um polinômio par e  $g_s$  é um polinômio ímpar. Então, pelo Lema 2.12 a),  $(\psi(x_{i_1}), \psi(x_s))(\psi(x_{i_1}))^{\epsilon_1+t}(\psi(x_s))^{\delta_s} = 2(e_{i_1 1}e_{i_1 2} + \dots + e_{i_1(2\epsilon_1-3)}e_{i_1(2\epsilon_1-2)})^{\epsilon_1+t}c_s^{\delta_s}e_{i_1}g_s$ . O Lema 2.12 b) garante que  $(e_{i_1 1}e_{i_1 2} + \dots + e_{i_1(2\epsilon_1-3)}e_{i_1(2\epsilon_1-2)})^{\epsilon_1+t} = 0$ , então  $\psi(b_m) = 0$ .

c) A variável  $x_r$  pertence a um comutador de  $b_1$ , porém não pertence a comutadores de  $b_m$ .

Sejam  $\partial_{x_r}(b_1) = \delta_r + 1$  e  $\psi(x_r) = e_{r1}e_{r2} + \dots + e_{r(2\delta_r-1)}e_{r(2\delta_r)} + e_r$ . Como  $\partial_{x_r}(b_m) \geq \delta_r + 2$ , e pelo Lema 2.12 b),  $(\psi(x_r))^{\delta_r+2} = 0$ , temos  $\psi(b_m) = 0$ .

d)  $x_r$  pertence a comutadores de  $b_1$  e de  $b_m$ . Sejam  $\partial_{x_r}(b_1) = \delta_r + 1$ ,  $\psi(x_r) = e_{r1}e_{r2} + \dots + e_{r(2\delta_r-1)}e_{r(2\delta_r)} + e_r$  e  $\partial_{x_r}(b_m) = \delta_r + 1 + t$ , com  $t > 0$ . Se  $\psi(x_s) = c_s + g_s$ , onde  $c_s$  é um polinômio par e  $g_s$  é um polinômio ímpar. Então, pelo Lema 2.12 a),  $(\psi(x_r), \psi(x_s))\psi(x_r)^{\delta_r+t}\psi(x_s)^{\delta_s} = 2(e_{r1}e_{r2} + \dots + e_{r(2\delta_r-1)}e_{r(2\delta_r)})^{\delta_r+t}c_s^{\delta_s}e_rg_s$ . O Lema 2.12 b) garante que  $(e_{r1}e_{r2} + \dots + e_{r(2\delta_r-1)}e_{r(2\delta_r)})^{\delta_r+t} = 0$ , então  $\psi(b_m) = 0$ .

**Caso 2)** Se  $\partial(b_1) = \partial(b_m)$  e o número de comutadores em  $b_1$  é menor que o número de comutadores em  $b_m$ , então para algum  $k \neq 1$  a variável  $x_{i_k}$  pertence a algum comutador de  $b_m$  e não pertence a comutadores de  $b_1$ . Como  $\psi(x_{i_k})$  é um elemento do centro de  $H_{2n-1}$ , temos  $\psi(b_m) = 0$ .

**Caso 3)** Se  $\partial(b_1) = \partial(b_m)$ , o número de comutadores em  $b_1$  e  $b_m$  é o mesmo e existe  $r \geq 1$  tal que para todo  $l < r$ ,  $\partial_{x_l}(b_1) = \partial_{x_l}(b_m)$  e  $\partial_{x_r}(b_1) < \partial_{x_r}(b_m)$ . Recai-mos no Caso 1).

**Caso 4)** Se  $\partial(b_1) = \partial(b_m)$ , o número de comutadores em  $b_1$  e  $b_m$  é o mesmo,

$\partial_{x_j}(b_1) = \partial_{x_j}(b_m)$  para todo  $x_j$ , existe  $r \geq 1$  tal que para  $l < r$ ,  $x_l$  pertence a um comutador em  $b_1$  se, e somente se, pertence a um comutador em  $b_m$ , e  $x_r$  pertence a algum comutador de  $b_1$  e não pertence a comutadores de  $b_m$ . Neste caso, para algum  $k$ ,  $x_{i_k}$  pertence a um comutador em  $b_m$ .

- Se  $k \neq 1$ , então  $\psi(x_{i_k})$  é um elemento do centro de  $H_{2n-1}$ , logo  $\psi(b_m) = 0$ .
- Se  $k = 1$ , como  $x_{i_1}$  é a variável de menor índice que possui grau menor que  $p$ , pela Definição 2.11,  $b_m$  é maior que  $b_1$ , uma contradição.

Portanto,  $\psi(f) = \alpha_1 \gamma_1 e_1 \dots e_d$ ,  $0 \neq \gamma_1 \in \mathbb{R}$ .

Se  $f = \sum_{i=1}^t \alpha_i b_i = 0 \pmod{T(H_{2n-1})}$ , temos  $\alpha_1 \gamma_1 e_1 \dots e_d = 0$ , o que implica que  $\alpha_1 = 0$ .

Assim sucessivamente, verificamos que  $\alpha_i = 0$  ( $1 \leq i \leq t$ ).

Portanto,  $D_{n+1}$  é linearmente independente módulo  $T(H_{2n-1})$ .

■

**Proposição 3.36.** (Stojanova-Venkova) *Se  $K$  é um corpo arbitrário infinito de característica prima  $p > 2$ , então  $W_{n+1} = T(H_{2n-1})$ .*

**Demonstração:**

Esta proposição foi citada sem demonstração em [22].

Pelo Lema 3.25,  $W_{n+1} \subseteq T(H_{2n-1})$ . O Corolário 3.33 garante que o conjunto  $\{d + W_{n+1} \mid d \in D_{n+1}\}$  gera  $K\langle X \rangle / W_{n+1}$ . Pelo Corolário 3.34 e o Lema 3.35, o conjunto  $\{d + T(H_{2n-1}) \mid d \in D_{n+1}\}$  é base de  $K\langle X \rangle / T(H_{2n-1})$ . Logo,  $T(H_{2n-1}) = W_{n+1}$ .

■

Nosso próximo objetivo é determinar o centro de  $K\langle X \rangle / W_{n+1}$ .

Verificaremos inicialmente que os polinômios de  $R_n$  são centrais módulo  $W_{n+1}$  e que todo polinômio central módulo  $W_{n+1}$  pode ser escrito como soma de dois polinômios, onde um é central módulo  $T$  e o outro pertence a  $R_n$ .

**Lema 3.37.** *Os polinômios de  $R_n$  são centrais módulo  $W_{n+1}$ .*

**Demonstração:**

Seja  $r$  um elemento de  $R_n \setminus W_{n+1}$ . Consideremos o elemento  $r_1 = (r, x_N)$ , onde  $x_N$  é uma variável independente. Pelo Lema 3.4, a imagem de  $r$  em  $H_{2n-1}$  é  $\varphi(r) = \alpha e_1 \dots e_{2n-1}$ . Logo, a imagem de  $r_1$  em  $H_{2n-1}$ ,  $\varphi(r_1) = (\varphi(r), \varphi(x_N))$ , já é nula. Portanto,  $r_1 = (r, x_{N+1})$  pertence a  $W_{n+1}$ , ou seja,  $r$  é central módulo  $W_{n+1}$ .

■

**Lema 3.38.** *Seja  $f \in K\langle X \rangle$  um polinômio central módulo  $W_{n+1}$ . Então,  $f = h + r$  onde  $h$  é um polinômio central módulo  $T$  e  $r$  é um polinômio de  $R_n$ .*

**Demonstração:**

Seja  $f$  um polinômio central módulo  $W_{n+1} \subset R_n$ , então  $f \in R_n$  ou  $f$  é central módulo  $R_n$ . Se  $f \in R_n$ , pelo Lema 3.37,  $f$  é central módulo  $W_{n+1}$ . Caso contrário, pelo Lema 3.20, existe um polinômio  $h$ , central módulo  $T$ , tal que  $r = f - h$  pertence a  $R_n$ . Portanto,  $f = r + h$ , onde  $h$  é um polinômio central módulo  $T$  e  $r$  é um polinômio de  $R_n$ .

■

**Teorema 3.39.** *O centro de  $K\langle X \rangle / W_{n+1}$  é o  $T$ -espaço gerado por*

$$(x_1, x_2) + W_{n+1}, \quad (x_1 \circ \dots \circ x_n) + W_{n+1}$$

e pelos polinômios

$$\left\{ (x_1, x_2) \dots (x_{2q-1}, x_{2q}) x_1^{p-1} \dots x_{2q}^{p-1} + W_{n+1} \mid 0 < q \leq \frac{n}{2p-1} \right\}.$$

**Demonstração:**

Pelo Lema 3.38 queremos encontrar o conjunto de geradores dos polinômios que podem ser escritos como  $f = h + r$ , onde  $h$  é um polinômio central módulo  $T$  e  $r$  é um polinômio de  $R_n$ .

O Lema 2.2 garante que o conjunto

$$\{(x_1, x_2) + T, (x_1, x_2) \dots (x_{2q-1}, x_{2q}) x_1^{p-1} \dots x_{2q}^{p-1} + T \mid q \in \mathbb{N}\}$$

gera os polinômios centrais módulo  $T$ . Pelo Lema 3.21, como  $R_{n+1} \subseteq W_{n+1}$ , é suficiente considerarmos o conjunto

$$\left\{ (x_1, x_2) \dots (x_{2q-1}, x_{2q}) x_1^{p-1} \dots x_{2q}^{p-1} + W_{n+1} \mid 0 < q \leq \frac{n}{2p-1} \right\},$$

visto que se  $y = (x_1, x_2) \dots (x_{2q-1}, x_{2q}) x_1^{p-1} \dots x_{2q}^{p-1}$  é elemento de  $D_{n+1}$ , então  $y \in B_{n+1}$ .

Como  $R_n$  é gerado por  $(x_1 \circ \dots \circ x_n)$ , o teorema segue. ■

Como consequência imediata temos o Teorema 3.2, pois  $T(H_{2n-1}) = W_{n+1}$ .

**Teorema 3.2.** *O  $T$ -espaço dos polinômios centrais da álgebra de Grassmann  $H_{2n-1}$  é gerado, como  $T$ -espaço em  $K\langle X \rangle / T(H_{2n-1})$ , por*

$$(x_1, x_2) + T(H_{2n-1}), (x_1 \circ \dots \circ x_{2n-2}) + T(H_{2n-1})$$

e pelos polinômios

$$\left\{ (x_1, x_2) \dots (x_{2q-1}, x_{2q}) x_1^{p-1} \dots x_{2q}^{p-1} + T(H_{2n-1}) \mid 0 < q \leq \frac{n}{2p-1} \right\}.$$

# Capítulo 4

## Um Subespaço Vetorial Verbal Limite

Observemos que, em álgebras de grupos relativamente livres, a noção semelhante a T-espacos de álgebras associativas é a noção de subespaços vetoriais verbais.

Sejam  $G$  um grupo relativamente livre,  $KG$  a álgebra de grupo de  $G$  sobre  $K$ . Um ideal  $I$  de  $KG$  é um *ideal verbal* se for invariante por todos os endomorfismos de  $KG$  induzidos pelos endomorfismos de  $G$ . Um subespaço  $U$  de  $KG$  é denominado *subespaço vetorial verbal* de  $KG$ , se é invariante por todos os endomorfismos de  $KG$ , induzidos pelos endomorfismos do grupo  $G$ . Analogamente, definimos subespaço vetorial verbal em um quociente de  $KG$  por um ideal verbal. Estas estruturas são importantes para resolução de alguns problemas.

Acreditamos que a noção de subespaços vetoriais verbais limite poderá ser utilizada na construção de exemplos de variedades limite de representações de grupo.

Neste capítulo  $K$  é um corpo de característica 2 arbitrário e  $F$  um grupo livre de posto infinito enumerável, livremente gerado por  $a_1, a_2, \dots$ .

Seja  $KF$  a álgebra do grupo  $F$  sobre  $K$ . Sejam  $L$  um espaço linear sobre  $K$ ,  $G$  um grupo e  $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(L)$  uma representação de  $G$ . Seja  $u(a_1, \dots, a_n) \in KF$ . Então,  $u(a_1, \dots, a_n) = 0$  é chamada *identidade da representação  $\rho$  do grupo  $G$*  se

$u(\rho(g_1), \dots, \rho(g_n)) = 0$  para quaisquer elementos  $g_1, \dots, g_n$  de  $G$ .

A classe de todas as representações de grupo sobre  $K$  que satisfazem um dado conjunto de identidades é denominado *variedade de representações de grupo*.

O estudo sistemático de identidades de representações de grupo foi iniciada por B. I. Plotkin. Conceitos básicos e resultados nesta direção podem ser encontrados em [54] e [73]. Um dos principais problemas no estudo de identidades é o problema da base finita: “O conjunto de todas as identidades de uma dada representação é equivalente a um conjunto finito de identidades?”. Segue de [53] que existem representações de grupo de dimensão infinita cujas identidades não possuem base finita. Contudo, o problema da base finita continua em aberto para representações de dimensão finita, sobre um corpo infinito.

Um caso particular importante no estudo do problema da base finita é a construção de variedades limite de representações de grupos. Seja  $\mathcal{V}$  uma variedade. Se todas as subvariedades próprias de  $\mathcal{V}$  são definidas por conjuntos finitos de identidades e  $\mathcal{V}$  não pode ser definida por um conjunto finito de identidades, então  $\mathcal{V}$  é chamada *variedade limite*. Neste sentido, as variedades limite formam uma fronteira entre as variedades que são finitamente definidas e as que não são.

A existência de variedades limite segue do Lema de Zorn e do fato de que existem variedades de representações de grupos sem base finita de identidades. Um problema importante, ainda em aberto, é a construção de exemplos de variedades limite de representações de grupo. Acreditamos que subespaços vetoriais verbais limite poderão ser úteis para a resolução deste problema. Nós apresentamos agora um exemplo de subespaço vetorial verbal limite sobre um corpo de característica 2.

Sejam  $N_{2,4}$  a variedade de todos os grupos cujos expoentes dividem 4, nilpotentes de classe no máximo 2 e  $G = F/\gamma_3(F)F^4$  o grupo livre na variedade  $N_{2,4}$ , cujos geradores livres denotaremos por  $a_1, a_2, \dots$ .

Fixemos uma ordem linear arbitrária em  $G$  tal que  $g > 1$  para todo  $g \in G$ ,  $g \neq 1$  e consideremos a  lgebra de grupo  $KG$ .

**Lema 4.1.** *Para todos  $g_i, g_j \in G$  temos:*

$$a) [g_i, g_j]^2 = 1; \quad b) [g_i^2, g_j] = 1; \quad c) [g_i, g_j^2] = 1; \quad d) [g_i^2, g_j^2] = 1;$$

**Demonstra o:**

a) Como  $[g_i, g_j, g_k] = 1$ , para todos  $g_i, g_j, g_k \in G$ , temos que  $[g_i, g_j]$  são elementos centrais de  $G$ , para todos  $i, j$ . Além disso,  $g^4 = 1$ , para todo  $g \in G$ , então

$$\begin{aligned} 1 = (g_i g_j)^4 &= g_i g_j g_i g_j g_i g_j g_i g_j \\ &= g_i^2 g_j [g_j, g_i] g_i g_j [g_j, g_i] g_i g_j [g_j, g_i] g_j \\ &= g_i^3 g_j [g_j, g_i] g_i g_j [g_j, g_i] g_j^2 [g_j, g_i]^3 \\ &= g_i^4 g_j [g_j, g_i] g_j^3 [g_j, g_i]^5 \\ &= g_i^4 g_j^4 [g_j, g_i]^6 \\ &= [g_j, g_i]^2. \end{aligned}$$

As demonstra es dos demais ítems são imediatas. ■

## 4.1 Um Subespaço Vetorial Verbal Não Finitamente Gerado $W$

**Lema 4.2.** *Seja  $f_{ij} = [a_i, a_j] + a_i^2 a_j^2 + a_i^2 + a_j^2$ . O conjunto*

$$\begin{aligned} A = \{ & f_{i_1 i_2} \dots f_{i_{2l-1} i_{2l}} (a_{j_1}^2 + 1) \dots (a_{j_m}^2 + 1) a_{k_1} \dots a_{k_q} \mid l, m, q \geq 0; [a_{i_1}, a_{i_2}] < \dots < [a_{i_{2l-1}}, a_{i_{2l}}]; \\ & i_1 < i_2, \dots, i_{2l-1} < i_{2l}; j_1 < \dots < j_m; k_1 < \dots < k_q \} \end{aligned}$$



gera  $KG$ .

**Demonstração:**

Os elementos de  $G'$  são centrais em  $G$  e têm ordem 2. Além disso,  $G$  tem expoente 4.

Logo o conjunto

$$\{[a_{i_1}, a_{i_2}] \dots [a_{i_{2l-1}}, a_{i_{2l}}] a_{j_1}^2 \dots a_{j_m}^2 a_{k_1} \dots a_{k_q} \mid l, m, q \geq 0, [a_{i_1}, a_{i_2}] < \dots < [a_{i_{2l-1}}, a_{i_{2l}}], \\ i_1 < i_2, \dots, i_{2l-1} < i_{2l}; j_1 < \dots < j_m; k_1 < \dots < k_q\}$$

gera  $KG$ . Como  $[a_i, a_j] = f_{ij} + a_i^2 a_j^2 + a_i^2 + a_j^2$ , então o conjunto

$$\{f_{i_1 i_2} \dots f_{i_{2l-1} i_{2l}} a_{j_1}^2 \dots a_{j_m}^2 a_{k_1} \dots a_{k_q} \mid l, m, q \geq 0; [a_{i_1}, a_{i_2}] < \dots < [a_{i_{2l-1}}, a_{i_{2l}}]; \\ i_1 < i_2, \dots, i_{2l-1} < i_{2l}; j_1 < \dots < j_m; k_1 < \dots < k_q\}$$

gera  $KG$ . E usando a equação  $a_j^2 = (a_j^2 + 1) + 1$  concluímos que  $A$  também gera  $KG$ . ■

**Corolário 4.3.** *O conjunto*

$$A_0 = \{f_{i_1 i_2} \dots f_{i_{2l-1} i_{2l}} (a_{j_1}^2 + 1) \dots (a_{j_m}^2 + 1) \mid l, m \geq 0; [a_{i_1}, a_{i_2}] < \dots < [a_{i_{2l-1}}, a_{i_{2l}}]; \\ i_1 < i_2, \dots, i_{2l-1} < i_{2l}; j_1 < \dots < j_m\}$$

gera  $KG^2$ .

**Lema 4.4.** *O ideal verbal  $T$  de  $KG$  determinado por  $f(a_1, a_2) = [a_1, a_2] + a_1^2 a_2^2 + a_1^2 + a_2^2$  é gerado, como ideal, pelos elementos  $f_{ij}, i < j$ .*

**Demonstração:**

Como todo elemento  $g \in G$ , pode ser escrito na forma  $g = a_{i_1} \dots a_{i_k} h$ , onde  $i_1 < \dots < i_k$ ,  $h \in G^2$ , definamos o peso de  $g$  por  $w(g) = k$ .

Seja  $T^{(k)}$  o ideal em  $KG$  gerado por todos os elementos da forma  $[g_1, g_2] + g_1^2 g_2^2 + g_1^2 + g_2^2$  tais que  $w(g_1), w(g_2) \geq 1$  e  $w(g_1) + w(g_2) \leq k$ . Observemos que  $T = \bigcup_{k=2}^{\infty} T^{(k)}$  e  $T^{(2)}$  é o ideal em  $KG$  gerado por todos os elementos  $f_{ij} (i < j)$ .

Mostraremos, por indução sobre  $k$ , que  $T^{(k)} = T^{(2)}$ , para todo  $k \geq 2$ .

É claro que a afirmação é válida para  $k = 2$ . Suponhamos que  $T^{(k-1)} = T^{(2)}$ .

Consideremos um elemento na forma  $[g_1, g_2] + g_1^2 g_2^2 + g_1^2 + g_2^2$  tal que  $w(g_1) + w(g_2) = k$ . Suponhamos que  $w(g_1) > 1$  e  $g_1 = g_1' g_1''$ , onde  $w(g_1) = w(g_1') + w(g_1'')$  e  $w(g_1'), w(g_1'') > 0$ . Então,

$$\begin{aligned}
f(g_1, g_2) &= [g_1, g_2] + g_1^2 g_2^2 + g_1^2 + g_2^2 \\
&= [g_1' g_1'', g_2] + (g_1' g_1'')^2 g_2^2 + (g_1' g_1'')^2 + g_2^2 \\
&= [g_1', g_2][g_1'', g_2] + (g_1')^2 (g_1'')^2 g_2^2 [g_1', g_1''] + (g_1')^2 (g_1'')^2 [g_1', g_1''] + g_2^2 \\
&= ([g_1', g_2] + (g_1')^2 g_2^2 + (g_1')^2 + g_2^2)[g_1'', g_2] + ((g_1')^2 g_2^2 + (g_1')^2 + g_2^2)[g_1', g_1''] \\
&\quad + ((g_1')^2 (g_1'')^2 g_2^2 + (g_1')^2 (g_1'')^2)[g_1', g_1''] + g_2^2 \\
&= ([g_1', g_2] + (g_1')^2 g_2^2 + (g_1')^2 + g_2^2)[g_1'', g_2] + ((g_1')^2 g_2^2 + (g_1')^2 + g_2^2) \\
&\quad \times ([g_1'', g_2] + (g_1'')^2 g_2^2 + (g_1'')^2 + g_2^2) + ((g_1')^2 g_2^2 + (g_1')^2 + g_2^2)((g_1'')^2 g_2^2 + (g_1'')^2 + g_2^2) \\
&\quad + ((g_1')^2 (g_1'')^2 g_2^2 + (g_1')^2 (g_1'')^2)([g_1', g_1''] + (g_1')^2 (g_1'')^2 + (g_1')^2 + (g_1'')^2) \\
&\quad + ((g_1')^2 (g_1'')^2 g_2^2 + (g_1')^2 (g_1'')^2)((g_1')^2 (g_1'')^2 + (g_1')^2 + (g_1'')^2) + g_2^2 \\
&= f^{(1)} + f^{(2)}
\end{aligned}$$

onde  $f^{(1)} \in T^{(k-1)}$  e

$$\begin{aligned}
f^{(2)} &= ((g_1')^2 g_2^2 + (g_1')^2 + g_2^2)((g_1'')^2 g_2^2 + (g_1'')^2 + g_2^2) + ((g_1')^2 (g_1'')^2 g_2^2 + (g_1')^2 (g_1'')^2) \\
&\quad \times ((g_1')^2 (g_1'')^2 + (g_1')^2 + (g_1'')^2) + g_2^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto,  $[g_1, g_2] + g_1^2 g_2^2 + g_1^2 + g_2^2 \in T^{(k-1)} = T^{(2)}$ .

Se  $w(g_1) = 1$  necessariamente,  $w(g_2) > 1$ , logo

$$[g_1, g_2] + g_1^2 g_2^2 + g_1^2 + g_2^2 = [g_2, g_1] + g_2^2 g_1^2 + g_2^2 + g_1^2 \in T^{(k-1)} = T^{(2)}.$$

Logo,  $T^{(k)} = T^{(2)}$ , para todo  $k \geq 2$ . ■

**Lema 4.5.** *O conjunto*

$$A' = \{f_{i_1 i_2} \dots f_{i_{2l-1} i_{2l}} (a_{j_1}^2 + 1) \dots (a_{j_m}^2 + 1) a_{k_1} \dots a_{k_q} \mid l > 0, m, q \geq 0; \\ [a_{i_1}, a_{i_2}] < \dots < [a_{i_{2l-1}}, a_{i_{2l}}]; i_1 < i_2, \dots, i_{2l-1} < i_{2l}; j_1 < \dots < j_m; k_1 < \dots < k_q\}$$

gera  $T$ , como espaço vetorial.

**Demonstração:**

Claramente,  $A'$  está contido em  $T$ , logo resta mostrar que  $T$  é o espaço vetorial gerado por  $A'$ . O Lema 4.4 garante que todo elemento de  $T$  é a combinação linear de elementos da forma  $f_{ij}g$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$ ,  $g \in G$ . Pelo Lema 4.2, todo  $g \in G$ , é uma combinação linear de elementos do conjunto  $A$ , então  $T$  é gerado por elementos da forma

$$h = f_{ij} f_{i_1 i_2} \dots f_{i_{2l-1} i_{2l}} (a_{j_1}^2 + 1) \dots (a_{j_m}^2 + 1) a_{k_1} \dots a_{k_q}.$$

Se  $f_{ij} = f_{i_{2s-1} i_{2s}}$  para algum  $s \in \{1, \dots, l\}$ , então  $h = 0$ , pois  $f_{ij}^2 = 0$ .

Se  $f_{ij} \neq f_{i_{2s-1} i_{2s}}$ , para todo  $s \in \{1, \dots, l\}$ , então  $h \in A'$ .

Logo,  $T$  é o espaço vetorial gerado por  $A'$ . ■

**Observação 4.6.** Temos que  $G'$  e  $G^2$  são centrais em  $G$ . Além disso, todo elemento de  $T$  é a combinação linear de elementos da forma  $f_{ij}g = gf_{ij}$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$ ,  $g \in G$ . Logo,  $T$  é o subespaço vetorial verbal de  $KG$  gerado por  $f(x_1, x_2)x_3$ .

**Lema 4.7.** *Seja  $A_1 = \{(a_{j_1}^2 + 1)\dots(a_{j_m}^2 + 1) \mid m \geq 0; j_1 < \dots < j_m\}$ . Então, o conjunto  $\{a + T \mid a \in A\}$  é uma  $K$ -base de  $(KG^2 + T)/T$ .*

Para a demonstração deste Lema vide [35].

**Lema 4.8.** *Para todos  $g_1, g_2 \in G$ ,  $(g_1g_2)^2 + 1 = (g_1^2 + 1) + (g_2^2 + 1) \pmod{T}$ .*

**Demonstração:**

Sejam  $g_1$  e  $g_2$  elementos de  $G$ . Então

$$\begin{aligned} (g_1g_2)^2 + 1 &= g_1^2g_2^2[g_1, g_2] + 1 \\ &= g_1^2g_2^2([g_1, g_2] + g_1^2g_2^2 + g_1^2 + g_2^2) + g_1^2g_2^2(g_1^2g_2^2 + g_1^2 + g_2^2) + 1 \\ &= (1 + g_1^2) + (1 + g_2^2) \pmod{T}. \end{aligned}$$

■

**Corolário 4.9.** *Para todos  $a_i (i \in \mathbb{N})$ , temos  $(a_{i_1}\dots a_{i_l})^2 + 1 = \sum_{m=1}^l (a_{i_m}^2 + 1) \pmod{T}$ .*

**Proposição 4.10.** *Seja  $H$  o subespaço vetorial de  $KG$  gerado por  $T$  e pelo conjunto  $\{(a_{j_1}^2 + 1)\dots(a_{j_m}^2 + 1) \mid j_s \in \mathbb{N}; m > 0; j_1 < \dots < j_m\}$ . Então são válidas as seguintes afirmações:*

a)  $H$  é o subespaço vetorial verbal de  $KG$  gerado, como subespaço vetorial verbal, por

$$f(a_1, a_2)a_3$$

e pelo conjunto

$$\{(a_1^2 + 1)\dots(a_m^2 + 1) \mid m \geq 0\}.$$

b)  $H$  não é finitamente gerado como subespaço vetorial verbal.

**Demonstração:**

a) Seja  $H'$  o subespaço vetorial verbal de  $KG$  gerado por  $f(a_1, a_2)a_3$  e pelo conjunto  $\{(a_1^2 + 1)\dots(a_m^2 + 1) \mid m \geq 0\}$ . É imediato verificar que  $H$  está contido em  $H'$ . Devemos demonstrar que  $H'$  está contido em  $H$ .

O polinômio  $f(a_1, a_2)a_3$  gera  $T \subset H$ , como subespaço vetorial verbal. Portanto, resta verificar que  $(g_1^2 + 1)\dots(g_m^2 + 1)$  é elemento de  $H$  para todos  $g_1, \dots, g_m \in G$ . Temos que

$$\begin{aligned} (g_1^2 + 1)\dots(g_m^2 + 1) &= ((a_{1_1}\dots a_{1_{l_1}})^2 + 1)\dots((a_{m_1}\dots a_{m_{l_m}})^2 + 1) \\ &= \left(\sum_{s_1=1}^{l_1} (a_{1_{s_1}}^2 + 1)\right)\dots\left(\sum_{s_m=1}^{l_m} (a_{m_{s_m}}^2 + 1)\right) \pmod{T}. \end{aligned}$$

Logo  $(g_1^2 + 1)\dots(g_m^2 + 1)$  é a combinação linear de elementos da forma  $(a_{1_{j_1}}^2 + 1)\dots(a_{m_{j_m}}^2 + 1)$  e elementos de  $T$ . Como  $(a_{i_j}^2 + 1)$  é central, podemos supor  $1_{j_1} < \dots < m_{j_m}$ . Portanto,  $(g_1^2 + 1)\dots(g_m^2 + 1) \in H$ .

b) Seja  $h$  uma soma de elementos de  $T$  e elementos da forma  $(g_1^2 + 1)\dots(g_s^2 + 1)$ ,  $s \leq k$ , para  $k$  fixo. Então cada parcela de  $h$  é elemento de  $T$  ou da forma  $(a_{1_{i_1}}^2 + 1)\dots(a_{s_{i_s}}^2 + 1)$ ,  $s \leq k$ , onde podemos supor  $1_{i_1} < \dots < s_{i_s}$ , pois  $(a_j^2 + 1)$  é central, para todo  $j$ . Pelo Corolário 4.9, podemos concluir que não serão gerados produtos da forma  $(a_{1_{i_1}}^2 + 1)\dots(a_{s_{i_s}}^2 + 1)$ ,  $s > k$ . Portanto,  $H$  não é finitamente gerado como subespaço vetorial verbal. ■

**Lema 4.11.** *A álgebra  $R = KG/T$  é a soma direta de subespaços vetoriais*

$$(a_{k_1}\dots a_{k_q}KG^2 + T)/T, \quad (q \geq 0, k_1 < \dots < k_q).$$

**Demonstração:**

Observemos que  $KG$  é a soma direta de subespaços vetoriais da forma  $a_{k_1}\dots a_{k_q}KG^2$  ( $q \geq 0$ ,  $k_1 < \dots < k_q$ ). Seja  $T'$  o ideal de  $KG^2$  gerado por todos os elementos  $f_{ij}$ , ( $i, j \in \mathbb{N}$ ).

Então,

$$\begin{aligned}
T &= KG \cdot T' \\
&= \bigoplus_{q \geq 0, k_1 < \dots < k_q} (a_{k_1} \dots a_{k_q} KG^2) \cdot T' \\
&= \bigoplus_{q \geq 0, k_1 < \dots < k_q} a_{k_1} \dots a_{k_q} T'.
\end{aligned}$$

Como  $a_{k_1} \dots a_{k_q} T' \subseteq T \cap a_{k_1} \dots a_{k_q} KG^2$ , então  $T = \bigoplus_{q \geq 0, k_1 < \dots < k_q} (T \cap a_{k_1} \dots a_{k_q} KG^2)$ .

Portanto,

$$\begin{aligned}
KG/T &= \frac{\bigoplus_{q \geq 0, k_1 < \dots < k_q} (a_{k_1} \dots a_{k_q} KG^2)}{\bigoplus_{q \geq 0, k_1 < \dots < k_q} (T \cap a_{k_1} \dots a_{k_q} KG^2)} \\
&\simeq \bigoplus_{q \geq 0, k_1 < \dots < k_q} \frac{(a_{k_1} \dots a_{k_q} KG^2)}{(T \cap a_{k_1} \dots a_{k_q} KG^2)} \\
&\simeq \bigoplus_{q \geq 0, k_1 < \dots < k_q} \frac{a_{k_1} \dots a_{k_q} KG^2 + T}{T}.
\end{aligned}$$

■

**Proposição 4.12.** *Seja  $W$  o subespaço vetorial de  $KG$  gerado por  $H$  e  $L$ , onde  $L$  é o espaço vetorial gerado pelo conjunto  $\{g + g^{-1} \mid g \in G\}$ . Então,*

a)  $W$  é o subespaço vetorial verbal de  $KG$  gerado, como subespaço vetorial verbal, por

$$f(a_1, a_2)a_3, a_1 + a_1^{-1}$$

e pelo conjunto

$$\{(a_1^2 + 1) \dots (a_m^2 + 1) \mid m \geq 0\}.$$

b)  $W$  não é finitamente gerado como espaço vetorial verbal.

**Demonstração:**

a) É imediato.

b) Se  $g \in G^2$ , então  $g = g^{-1}$  e  $g + g^{-1} = 0$ .

Se  $g \notin G^2$ , então  $g = a_{k_1} \dots a_{k_q} d$ ,  $d \in G^2$ ,  $k_1 < \dots < k_q$ . Assim,

$$g + g^{-1} = (a_{k_1} \dots a_{k_q} + a_{k_q}^{-1} \dots a_{k_1}^{-1})d \notin KG^2.$$

Logo,  $L \cap KG^2$  é trivial.

Devemos mostrar que  $\{(a_1^2 + 1) \dots (a_m^2 + 1) \mid m \geq 0\}$  é linearmente independente em  $KG/(T + L)$ .

Seja

$$\varphi : KG \rightarrow KG/T = \bigoplus_{q \geq 0, k_1 < \dots < k_q} \frac{a_{k_1} \dots a_{k_q} KG^2 + T}{T},$$

então  $\varphi(L) = (L + T)/T$  e  $\varphi(KG^2) = (KG^2 + T)/T$ . Seja  $w \in L$  tal que  $\varphi(w)$  é não trivial. Como  $w \notin KG^2$  pelo menos uma parcela de  $w$  é da forma

$$(a_{j_1}^2 + 1) \dots (a_{j_m}^2 + 1) a_{k_1} \dots a_{k_q} (q \neq 0),$$

ou seja,

$$w = (a_{j_1}^2 + 1) \dots (a_{j_m}^2 + 1) a_{k_1} \dots a_{k_q} + w' (q \neq 0).$$

Então,

$$\varphi(w) = (a_{j_1}^2 + 1) \dots (a_{j_m}^2 + 1) a_{k_1} \dots a_{k_q} + \varphi(w') + T.$$

Portanto,

$$\varphi(w) \notin \frac{KG^2 + T}{T} = \varphi(KG^2) \quad \text{e} \quad \varphi(L) \cap \varphi(KG^2) \text{ é não trivial.}$$

Logo, os elementos

$$(a_{j_1}^2 + 1) \dots (a_{j_m}^2 + 1) + T \in \varphi(KG^2) \quad (m > 0, j_1 < \dots < j_m)$$

não são triviais e são linearmente independentes em  $(KG/T)/\varphi(L) \simeq KG/(T + L)$ .

Usando um raciocínio análogo ao da Proposição 4.10, concluímos que  $W$  não tem base finita. ■

## 4.2 Um Subespaço Vetorial Verbal $U \supset W$ Finitamente Gerado

**Proposição 4.13.** *Sejam  $R = \{f(a_1, a_2)a_3, a + a^{-1}, (a_1^2 + 1)\dots(a_m^2 + 1) \mid m \geq 0\}$ , o conjunto que gera  $W$  como subespaço vetorial verbal e  $u \in KG \setminus W$ . Então, o subespaço vetorial verbal  $U$  de  $KG$  gerado por  $R \cup \{u\}$  contém  $a_1(a_2^2 + 1)\dots(a_M^2 + 1)$ , para algum  $M$ .*

**Demonstração:**

Observemos que  $u$  pode ser escrito como  $u = \sum_{i=1}^k g_i f_i + f_{k+1}$ , onde  $f_i \in KG^2$ ,  $g_i \notin G^2$ , para todo  $i$  e  $g_i \neq g_j \pmod{G^2}$ .

Como  $u \notin W$ , então  $g_i f_i \notin W$  para algum  $i$ . Suponhamos que  $g_1 f_1 \notin W$ . Sendo  $g_1 \notin G^2$ , existe  $\psi \in \text{Aut}(G)$  tal que  $\psi(g_1) = a_1$ . Denotemos pela mesma letra  $\psi$  o automorfismo induzido de  $KG$ . Como  $W$  é verbal,  $\psi(W) = W$ . Substituindo  $u$  por  $\psi(u)$ , podemos assumir que  $u = a_1 f_1 + \sum_{i=2}^k g_i f_i + f_{k+1} \in U \setminus W$ , onde  $a_1 f_1 \notin W$ .

Seja  $u = u(a_1, \dots, a_N)$ . Dizemos que  $g \in G$  contém o gerador  $a_l$  ( $l \in \mathbb{N}$ ) módulo  $G^2$ , se  $g = a_{k_1} \dots a_{k_s} \pmod{G^2}$ ,  $k_1 < \dots < k_s$  e  $k_r = l$  para algum  $r$ ,  $1 \leq r \leq s$ .

Definamos  $\psi_1 \in \text{Aut}(KG)$  por  $\psi_1(a_1) = a_1 a_{N+1}^2$  e  $\psi_1(a_i) = a_i$  ( $i \neq 1$ ). Então,  $\psi_1(g_i) = g_i a_{N+1}^2$  para cada  $g_i$  que contém  $a_1$  módulo  $G^2$ ,  $\psi_1(g_i) = g_i$  para cada  $g_i$  que não contém  $a_1$  módulo  $G^2$  e  $\psi_1(f_i) = f_i$ , para todo  $i$ . Fazendo  $u_1 = \psi_1(u) + u \in U \setminus W$ , temos

$$u_1 = a_1 f_1 (1 + a_{N+1}^2) + \sum_{j \in J^{(1)}} g_j f_j (1 + a_{N+1}^2),$$

onde  $J^{(1)} = \{j \in \mathbb{N} \mid g_j \text{ contém } a_1 \text{ módulo } G^2\}$ .

Para cada  $l = 2, \dots, N$ , seja  $\psi_l \in \text{Aut}(KG)$  definido por  $\psi_l(a_1) = a_1 a_{N+l}^2$ ,  $\psi_l(a_l) = a_l a_{N+l}^2$  e  $\psi_l(a_i) = a_i$  ( $i \neq 1, l$ ). Seja  $u_l = \psi_l(u_{l-1}) + u_{l-1} \in U \setminus W$ . Portanto,

$$u_2 = \psi_2(u_1) + u_1 = a_1 f_1 (1 + a_{N+1}^2) (1 + a_{N+2}^2) + \sum_{j \in J^{(2)}} g_j f_j (1 + a_{N+1}^2) (1 + a_{N+2}^2),$$



onde  $J^{(2)} = \{j \in N \mid g_j \text{ contém } a_1 \text{ módulo } G^2 \text{ e não contém } a_2 \text{ módulo } G^2\}$ . Assim, sucessivamente,

$$u_N = a_1 f_1 (1 + a_{N+1}^2) \dots (1 + a_{2N}^2) \in U \setminus W.$$

Como  $f_1 \in KG^2$ , pelo Lema 4.7,  $f_1 = \sum_t (1 + a_{j_{11}}^2) \dots (1 + a_{j_{lm(l)}}^2) + t$ , onde  $t \in T$  e  $j_{11} < \dots < j_{lm(l)} < N$ . Então,

$$u_N = a_1 \left( \sum_t (1 + a_{j_{11}}^2) \dots (1 + a_{j_{lm(l)}}^2) \right) (1 + a_{N+1}^2) \dots (1 + a_{2N}^2) + a_1 t (1 + a_{N+1}^2) \dots (1 + a_{2N}^2).$$

Visto que  $u_N \in U \setminus W$  e  $a_1 t (1 + a_{N+1}^2) \dots (1 + a_{2N}^2) \in W \subset U$ , temos que

$$a_1 \left( \sum_t (1 + a_{j_{11}}^2) \dots (1 + a_{j_{lm(l)}}^2) \right) (1 + a_{N+1}^2) \dots (1 + a_{2N}^2) \in U \setminus W.$$

Logo, podemos supor  $t = 0$  e

$$u_N = a_1 \left( \sum_t (1 + a_{j_{11}}^2) \dots (1 + a_{j_{lm(l)}}^2) \right) (1 + a_{N+1}^2) \dots (1 + a_{2N}^2) \in U \setminus W.$$

Seja  $m = m(1)$ . Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $m \leq m(l)$ , para todo  $l \geq 2$ . Para cada  $l = 1, \dots, N - m - 1$ , definamos  $\psi'_l \in \text{Aut}(KG)$  por  $\psi'_l(a_1) = a_1 a_{m+l+1}^2$  e  $\psi'_l(a_i) = a_i (i \neq 1)$ . Seja  $u_{N+l} = \psi'_l(u_{N+l-1}) + u_{N+l-1} \in U \setminus W$ , então

$$u_{N+1} = a_1 f_1 (1 + a_{m+2}^2) (1 + a_{N+1}^2) \dots (1 + a_{2N}^2).$$

Assim sucessivamente,

$$u_{N+(N-m-1)} = u_{(2N-m-1)} = a_1 f_1 (1 + a_{m+2}^2) \dots (1 + a_{m+(N-m-1)+1}^2) (1 + a_{N+1}^2) \dots (1 + a_{2N}^2)$$

**Afirmação:**  $f_1 (1 + a_{m+2}^2) \dots (1 + a_N^2) = (1 + a_2^2) \dots (1 + a_{m+1}^2) \dots (1 + a_N^2)$ .

Portanto,

$$u_{2N-m-1} = a_1 f_1 (1 + a_{m+2}^2) \dots (1 + a_N^2) (1 + a_{N+1}^2) \dots (1 + a_{2N}^2) = a_1 (1 + a_2^2) \dots (1 + a_{2N}^2) \in U \setminus W.$$

### Demonstração da afirmação:

Suponhamos  $j_{l1} = 1$  para algum  $l$ . Seja  $s$  o  $l$ -ésimo somando de  $f_1$ . Temos que  $s = (1 + a_1^2)(1 + a_{j_{l2}}^2)\dots(1 + a_{j_{lm(l)}}^2)$ , logo  $a_1s \in L$ ,  $a_1s(1 + a_{N+1}^2)\dots(1 + a_{2N}^2) \in W$  e  $a_1(f_1 + s)(1 + a_{N+1}^2)\dots(1 + a_{2N}^2) \in U \setminus W$ .

Substituindo  $f_1$  por  $f_1 + s$  e fazendo substituições similares tantas vezes quantas forem necessárias, podemos assumir que  $j_{l1} > 1$ , para todo  $l$ . Aplicando, se necessário,  $\psi' \in \text{Aut}(KG)$  adequado a  $u$ , assumimos que  $j_{11} = 2, \dots, j_{1m} = m + 1$ . Então,

$$f_1 = (1 + a_2^2)\dots(1 + a_{m+1}^2) + \sum_{l \geq 2} (1 + a_{j_{l1}}^2)\dots(1 + a_{j_{lm(l)}}^2),$$

onde para todo  $l \geq 2$  existe  $k(l)$  tal que  $j_{lk(l)} > m + 1$ . Como  $(1 + a_j^2)^2 = 0$ , para todo  $j$ , temos

$$(1 + a_{j_{l1}}^2)\dots(1 + a_{j_{lm(l)}}^2)(1 + a_{m+2}^2)\dots(1 + a_N^2) = \dots(1 + a_{j_{lk(l)}}^2)^2 \dots = 0,$$

para todo  $l \geq 2$  e conseqüentemente

$$f_1(1 + a_{m+2}^2)\dots(1 + a_N^2) = (1 + a_2^2)\dots(1 + a_{m+1}^2)\dots(1 + a_N^2).$$

■

**Proposição 4.14.** *Seja  $u \in KG \setminus W$ . Então, o subespaço vetorial verbal  $U$  de  $KG$  gerado por  $R \cup \{u\}$  já é finitamente gerado.*

### Demonstração:

Pela Proposição 4.13, sabemos que  $a_1(1 + a_2^2)\dots(1 + a_M^2)$  pertence a  $U$  para algum  $M$ . Então,  $a_1a_{M+1}^2(1 + a_2^2)\dots(1 + a_M^2)$  e conseqüentemente  $a_1(1 + a_2^2)\dots(1 + a_{M+1}^2)$  também pertencem a  $U$ . Logo,

$$a_1(1 + a_2^2)\dots(1 + a_m^2) \tag{4.1}$$

pertence a  $U$  para todo  $m \geq M$ . Aplicando um endomorfismo adequado a (4.1) verificamos que  $(1 + a_1^2)\dots(1 + a_{m-1}^2)$  pertence a  $U$  para  $m \geq M$ . Portanto,  $U$  pode ser gerado como

subespaço vetorial verbal pelo conjunto

$$\{f(a_1, a_2)a_3, a_1 + a_1^{-1}, u, a_1(1 + a_2^2)\dots(1 + a_M^2), (a_1^2 + 1)\dots(a_m^2 + 1) \mid 0 \leq m \leq M - 1\}$$

que é finito. ■

### 4.3 O Subespaço Vetorial Verbal Limite $W$

Observemos que  $\{(a_{j_1}^2 + 1)\dots(a_{j_m}^2 + 1)a_{k_1}\dots a_{k_q} + T \mid m, q \geq 0, j_1 < \dots < j_m, k_1 < \dots < k_q\}$  é um conjunto de geradores de  $KG/T$ . Pela Proposição 4.14,

$$\{a_{i_1}(1 + a_{i_2}^2)\dots(1 + a_{i_m}^2) \mid m \geq M\}$$

é subconjunto de  $U$ . Consequentemente,

$$\{(a_{j_1}^2 + 1)\dots(a_{j_m}^2 + 1)a_{k_1}\dots a_{k_q} + U \mid 0 \leq m < M, q > 0, j_1 < \dots < j_m, k_1 < \dots < k_q\} \quad (4.2)$$

é um conjunto de geradores de  $KG/U$ .

Para mostrar que  $KG/W$  satisfaz a condição maximal para subespaços vetoriais verbais é suficiente mostrar que  $KG/U$  satisfaz. Como  $a_1(1 + a_2^2)\dots(1 + a_M^2) \in U$  podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $U$  é o subespaço vetorial verbal gerado por  $a_1(1 + a_2^2)\dots(1 + a_M^2)$ . E que o conjunto gerador (4.2) é uma base de  $KG/U$  sobre  $K$ .

Para cada  $m$ ,  $0 \leq m \leq M - 1$ , denotemos por  $Y_m$  o subespaço vetorial de  $KG$  gerado por  $\{(a_{j_1}^2 + 1)\dots(a_{j_m}^2 + 1)a_{k_1}\dots a_{k_q} \mid q \geq 0, j_1 < \dots < j_m, k_1 < \dots < k_q\}$ . Seja  $U_m = U + Y_{M-1} + \dots + Y_m$ , onde  $U = U_M$ . Consideremos a cadeia de subespaços vetoriais

$$U/U \subseteq U_{M-1}/U \subseteq U_{M-2}/U \subseteq \dots \subseteq U_1/U \subseteq U_0/U = KG/U.$$

Se

$$U_{m+1}/U \text{ e } (U_m/U)/(U_{m+1}/U) \simeq U_m/U_{m+1}$$

satisfizerem a condição maximal para subespaços vetoriais verbais, então  $U_m/U$  também satisfaz. Assim, devemos mostrar que  $U_m/U_{m+1}$  satisfaz a condição maximal para subespaços vetoriais verbais para todo  $m$ ,  $0 \leq m \leq M - 1$ , a fim de concluirmos que  $KG/U$  satisfaz a condição maximal para subespaços vetoriais verbais.

## Resultados Auxiliares

Seja  $\Phi$  o conjunto de todas as aplicações monótonas do conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais. Usaremos  $\Phi$  para denotar também o conjunto de endomorfismos  $\varphi$  de  $G$  tais que  $\varphi(a_i) = a_{\varphi(i)}$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , assim como os conjuntos dos endomorfismos induzidos de  $KG$  e de subespaços de  $KG/U$ .

Seja  $\Theta$  o conjunto de endomorfismos  $\theta_{kl}$ ,  $k < l$ , de  $G$  tais que  $\theta_{kl}(a_l) = a_k a_l$  e  $\theta_{kl}(a_i) = a_i$ , para todo  $i \neq l$ . Usaremos  $\Theta$  para denotar também o conjunto dos endomorfismos induzidos de  $KG$  e de subespaços de  $KG/U$ .

Seja  $\Lambda$  o conjunto de endomorfismos de  $KG$  da forma  $\lambda = \theta_{r_{11}r_{12}} \dots \theta_{r_{s1}r_{s2}} \varphi$ , onde  $s \geq 0$ ,  $r_{j1} \notin \varphi(\mathbb{N})$  e  $r_{j1} \neq r_{i1}$ , para todo  $i \neq j$ .  $\Lambda$  também denotará o conjunto de endomorfismos induzidos de subespaços de  $KG/U$ .

Fixaremos a seguinte relação de ordem sobre os geradores de  $U_m/U_{m+1}$ .

**Definição 4.15.** Sejam

$$(a_{j_1}^2 + 1) \dots (a_{j_m}^2 + 1) a_{k_1} \dots a_{k_{q_1}} + U_{m+1} \quad \text{e} \quad (a_{i_1}^2 + 1) \dots (a_{i_m}^2 + 1) a_{l_1} \dots a_{l_{q_2}} + U_{m+1}$$

elementos arbitrários de  $U_m/U_{m+1}$ . Dizemos que

$$(a_{j_1}^2 + 1) \dots (a_{j_m}^2 + 1) a_{k_1} \dots a_{k_{q_1}} + U_{m+1} < (a_{i_1}^2 + 1) \dots (a_{i_m}^2 + 1) a_{l_1} \dots a_{l_{q_2}} + U_{m+1}$$

se uma das seguintes afirmações for válida

a)  $j_m < i_m$ ;

b)  $j_m = i_m, \dots, j_t = i_t$  e  $j_{t-1} < i_{t-1}$  para algum  $t \in \{2, \dots, m\}$ ;

c)  $j_m = i_m, \dots, j_1 = i_1$  e  $k_{q_1} < l_{q_2}$ ;

Podemos supor, sem perda de generalidade que  $q_1 \leq q_2$ .

d)  $k_{q_1} = l_{q_2}, \dots, k_{q_1-t} = l_{q_2-t}$  e  $k_{q_1-t-1} < l_{q_2-t-1}$  para algum  $t \in \{0, \dots, q_1 - 2\}$  ;

e)  $k_{q_1} = l_{q_2}, \dots, k_1 = l_{q_2-(q_1-1)}$  e  $q_1 < q_2$ .

**Definição 4.16.** Seja

$$x = \sum_{q \geq 0, k_1 < \dots < k_q, j_1 < \dots < j_m} (a_{j_1}^2 + 1) \dots (a_{j_m}^2 + 1) a_{k_1} \dots a_{k_q} + U_{m+1} \in U_m/U_{m+1}.$$

A maior parcela de  $x$ , segundo a Definição 4.15, denotada por  $\bar{x}$ , é denominada termo líder de  $x$ .

Denotemos por  $\overline{U_m/U_{m+1}}$  a expansão linear do conjunto dos termos líderes de todos os elementos de  $U_m/U_{m+1}$ .

**Lema 4.17.** *Sejam  $V$  e  $V'$  espaços vetoriais tais que  $V \subseteq V'$ . Se  $\overline{V} = \overline{V'}$ , então  $V = V'$ .*

**Demonstração:**

Suponhamos por absurdo que  $V \subsetneq V'$ . Como é definido em  $V'$  uma relação de ordem total, podemos tomar  $v'$  o elemento de  $V' \setminus V$ , cujo termo líder  $v'_n$  é o menor possível. Como  $\overline{V} = \overline{V'}$ , existe  $v \in V$ , tal que  $v'_n$  é o termo líder de  $v$ . Então,  $v' - v \in V' \setminus V$  e possui termo líder menor que  $v'_n$ , contradição.

■

Para cada  $m$ ,  $0 \leq m \leq M - 1$ , definamos  $D$  como o conjunto de todas as sequências  $d = \{(j_{l1}, j_{l2})\}$  de pares ordenados de inteiros tais que  $0 \leq j_{l1}, j_{l2} \leq 1$ , para todo  $l \in \mathbb{N}$ ,

$(j_{l1}, j_{l2}) = (0, 0)$  para quase todo valor de  $l$  e, no máximo  $m$  valores de  $j_{l2}$  são não nulos. Seja  $D'$  o  $K$ -módulo livre, livremente gerado pelos elementos  $d$  de  $D$ .

Para todo  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  em  $\Phi$ , definamos  $\varphi : D \rightarrow D$  por  $\varphi(\{(j_{l1}, j_{l2})\}) = \{(j'_{l1}, j'_{l2})\}$ , onde  $j'_{\varphi(k)t} = j_{kt}$  e  $j'_{lt} = 0$  se  $l \notin \varphi(\mathbb{N})$ ,  $t = 1, 2$ .

Para  $k, l \in \mathbb{N}$  arbitrários, com  $k < l$ , definamos  $\theta_{kl} : D \rightarrow D$  por  $\theta_{kl}(\{(j_{s1}, j_{s2})\}) = \{(j'_{s1}, j'_{s2})\}$ , onde  $j'_{k1} = j_{l1}$ ,  $j'_{k2} = 0$  e  $j'_{st} = j_{st}$  para  $s \neq l$  e  $t = 1, 2$ .

Seja  $\Lambda$  o semigrupo das transformações lineares do espaço vetorial  $D'$  definidas por  $\lambda = \theta_{r_{11}r_{12}} \dots \theta_{r_{s1}r_{s2}} \varphi$ , onde  $s \geq 0$ ,  $r_{j1} \notin \varphi(\mathbb{N})$  e  $r_{j1} \neq r_{i1}$ , para todo  $i \neq j$ .

O próximo lema segue da Proposição 1.12 da referência [47].

**Lema 4.18.** *Para todo inteiro  $m$ ,  $0 \leq m \leq M - 1$ , cadeias ascendentes de  $K$ -submódulos de  $D'$  que admitem todos os endomorfismos de  $\Lambda$  estacionam.*

Para cada  $\varphi \in \Phi$  definamos uma aplicação sobre  $\overline{U_m/U_{m+1}}$ , por  $\varphi(\bar{x}) = \overline{\varphi(x)}$ . Para cada  $\theta_{kl} \in \Theta$  definamos uma aplicação sobre  $\overline{U_m/U_{m+1}}$ , por  $\theta_{kl}(\bar{x}) = \overline{\theta_{kl}(x)}$ . Logo, para cada  $\lambda \in \Lambda$  temos uma aplicação sobre  $\overline{U_m/U_{m+1}}$ , tal que  $\lambda(\bar{x}) = \overline{\lambda(x)}$ .

Sabemos que os elementos da forma

$$(a_{j_1}^2 + 1) \dots ((a_{j_m}^2 + 1)a_{k_1} \dots a_{k_q} + U_{m+1}, \quad q \geq 0, j_1 < \dots < j_m, k_1 < \dots < k_q$$

formam uma base de  $\overline{U_m/U_{m+1}}$  sobre  $K$ .

Definamos  $\alpha : \overline{U_m/U_{m+1}} \rightarrow D'$  por  $\alpha((a_{j_1}^2 + 1) \dots (a_{j_m}^2 + 1)a_{k_1} \dots a_{k_q} + U_{m+1}) = d$ , onde  $d = \{(i_{l1}, i_{l2})\}$  é tal que

$i_{l1} = 1$ , se  $l = k_t$ , para algum  $t \in \{1, \dots, q\}$ ,  $i_{l1} = 0$  caso contrário,

$i_{l2} = 1$ , se  $l = j_s$ , para algum  $s \in \{1, \dots, m\}$ ,  $i_{l2} = 0$  caso contrário.

Como  $\alpha$  é um homomorfismo injetivo, tal que  $\alpha(\lambda(x)) = \lambda(\alpha(x))$  para todo  $\lambda \in \Lambda$

e todo  $x \in \overline{U_m/U_{m+1}}$ , segue que cadeias ascendentes de  $K$ -submódulos de  $\overline{U_m/U_{m+1}}$  que admitem  $\Lambda$  estacionam.

**Lema 4.19.** *Sejam  $V$  um subespaço vetorial  $\Lambda$ -invariante e  $\overline{V}$  a expansão linear do conjunto dos termos líderes de todos os elementos de  $V$ . Então,  $\overline{V}$  é  $\Lambda$ -invariante.*

**Demonstração:**

Seja  $\bar{v} = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i \in \overline{V}$ . Então, para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\bar{v}_i$  é termo líder de algum elemento  $v_i$  de  $V$ . Suponhamos  $v_i = \sum_{t=1}^r v_{it} + \bar{v}_i$ . Observemos que, pela definição das aplicações  $\lambda$ , o termo líder de  $\lambda(v_i)$  é  $\overline{\lambda(v_i)}$ , pois  $\lambda(v_i) = \sum_{t=1}^r \lambda(v_{it}) + \lambda(\bar{v}_i)$ . Como  $V$  é  $\Lambda$ -invariante  $\lambda(v_i) \in V$  e, conseqüentemente,  $\overline{\lambda(v_i)} \in \overline{V}$ . Assim,  $\overline{\lambda(v)} = \sum_{i=1}^n \overline{\lambda(v_i)} \in \overline{V}$ . ■

**Proposição 4.20.** *O subespaço vetorial  $KG/W$  satisfaz a condição maximal de subespaços vetoriais verbais.*

**Demonstração:**

Devemos mostrar que  $U_m/U_{m+1}$  satisfaz a condição maximal para subespaços vetoriais verbais para  $0 \leq m \leq M - 1$ . Seja  $V_1 \subseteq \dots \subseteq V_n \subseteq V_{n+1} \subseteq \dots$ , uma cadeia arbitrária de subespaços vetoriais verbais de  $U_m/U_{m+1}$ . Como  $V_i$  é verbal, em particular é  $\Lambda$ -invariante, pelo Lema 4.19,  $\overline{V}_i$  é  $\Lambda$ -invariante. Então, o Lema 4.18 garante que  $\overline{V}_1 \subseteq \dots \subseteq \overline{V}_n \subseteq \overline{V}_{n+1} \subseteq \dots$  implica  $\overline{V}_n = \overline{V}_{n+1} = \dots$ . Pelo Lema 4.17 concluímos que  $V_n = V_{n+1} = \dots$ . ■

**Teorema 4.21.** *O subespaço  $W$  de  $KG$  é subespaço vetorial verbal limite.*

**Demonstração:**

Pela Proposição 4.12,  $W$  não é finitamente gerado. A Proposição 4.20 garante que todo subespaço vetorial verbal de  $KG$  contendo  $W$ , pode ser gerado por um sistema composto por  $R$  e um número finito de elementos que não pertencem a  $R$ . Então, pela Proposição 4.14, este sistema tem base finita. Assim,  $W$  é subespaço vetorial verbal limite.





# Referências Bibliográficas

- [1] ALADOVA, E. V., GRISHIN, A. V., AND KIREEVA, E. A.  $T$ -spaces. The history of the question, applications, and recent results. *Chebyshevskii Sb.* 5, 4(12) (2005), 39–57.
- [2] AMITSUR, A. S., AND LEVITZKI, J. Minimal identities for algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1 (1950), 449–463.
- [3] AMITSUR, S. A. The  $T$ -ideals of the free ring. *J. London Math. Soc.* 30 (1955), 470–475.
- [4] ANAN'IN, A. Z. Representability of Noetherian finitely generated algebras. *Arch. Math. (Basel)* 59, 1 (1992), 1–5.
- [5] BAHTURIN, Y. *Basic structures of modern algebra*, vol. 265 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.
- [6] BELOV, A. Y. On non-Specht varieties. *Fundam. Prikl. Mat.* 5, 1 (1999), 47–66.
- [7] BELOV, A. Y. Counterexamples to the Specht problem. *Mat. Sb.* 191, 3 (2000), 13–24.
- [8] BELOV, A. Y. No associative PI-algebra coincides with its commutant. *Sibirsk. Mat. Zh.* 44, 6 (2003), 1239–1254.
- [9] BERELE, A. Examples and counterexamples for  $M_{1,1}$  embeddings. *J. Algebra* 172, 2 (1995), 379–384.

- 
- [10] BRANDÃO JR., A. P., AND KOSHLUKOV, P. Central polynomials for  $\mathbb{Z}_2$ -graded algebras and for algebras with involution. *J. Pure Appl. Algebra* 208, 3 (2007), 877–886.
- [11] BRAUN, A. The nilpotency of the radical in a finitely generated PI ring. *J. Algebra* 89, 2 (1984), 375–396.
- [12] CHIRIPOV, P. Z., AND SIDEROV, P. N. On bases for identities of some varieties of associative algebras. *PLISKA Stud. Math. Bulgar.* 2 (1981), 103–115.
- [13] COLOMBO, J., AND KOSHLUKOV, P. Central polynomials in the matrix algebra of order two. *Linear Algebra Appl.* 377 (2004), 53–67.
- [14] DEHN, M. Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlssysteme. *Math. Ann.* 85, 1 (1922), 184–194.
- [15] DI VINCENZO, O. M. A note on the identities of the Grassmann algebras. *Boll. Un. Mat. Ital. A (7)* 5, 3 (1991), 307–315.
- [16] DI VINCENZO, O. M., AND DRENSKY, V. Polynomial identities for tensor products of Grassmann algebras. *Math. Pannon.* 4, 2 (1993), 249–272.
- [17] DRENSKY, V. A minimal basis of identities for a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0. *Algebra and Logic* 20, 3 (1981), 188–194.
- [18] DRENSKY, V. Identities of representations of nilpotent Lie algebras. *Comm. Algebra* 25, 7 (1997), 2115–2127.
- [19] DRENSKY, V., AND FORMANEK, E. *Polynomial identity rings*. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.
- [20] FORMANEK, E. Central polynomials for matrix rings. *J. Algebra* 23 (1972), 129–132.
- [21] FORMANEK, E. Invariants and the ring of generic matrices. *J. Algebra* 89, 1 (1984), 178–223.

- 
- [22] GIAMBRUNO, A., AND KOSHLUKOV, P. On the identities of the Grassmann algebras in characteristic  $p > 0$ . *Israel J. Math.* 122 (2001), 305–316.
- [23] GRISHIN, A. V. On the finite basis property for systems of generalized polynomials. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 54, 5 (1990), 899–927.
- [24] GRISHIN, A. V. On the finite basis property of abstract  $T$ -spaces. *Fundam. Prikl. Mat.* 1, 3 (1995), 669–700.
- [25] GRISHIN, A. V. Examples of  $T$ -spaces and  $T$ -ideals of characteristic 2 without the finite basis property. *Fundam. Prikl. Mat.* 5, 1 (1999), 101–118.
- [26] GRISHIN, A. V. On non-Spechtianness of the variety of associative rings that satisfy the identity  $x^{32} = 0$ . *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* 6 (2000), 50–51 (electronic).
- [27] GRISHIN, A. V., AND SHCHIGOLEV, V. V.  $T$ -spaces and their applications. *Sovrem. Mat. Prilozh.*, 18, Algebra (2004), 26–97. translation in *J. Math. Sci. (N. Y.)* 134, 1 (2006), 1799–1878.
- [28] GUPTA, C. K., AND KRASILNIKOV, A. The finite basis question for varieties of groups—some recent results. *Illinois J. Math.* 47, 1-2 (2003), 273–283. Special issue in honor of Reinhold Baer (1902–1979).
- [29] GUPTA, C. K., AND KRASIL'NIKOV, A. N. A solution of a problem of Plotkin and Vovsi and an application to varieties of groups. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* 67, 3 (1999), 329–355.
- [30] GUPTA, C. K., AND KRASILNIKOV, A. N. A just non-finitely based variety of bigroups. *Comm. Algebra* 29, 9 (2001), 4011–4046. Special issue dedicated to Alexei Ivanovich Kostrikin.
- [31] GUPTA, N., AND LEVIN, F. On the Lie ideals of a ring. *J. Algebra* 81, 1 (1983), 225–231.
- [32] HALL, M. Projective planes. *Trans. Amer. Math. Soc.* 54 (1943), 229–277.

- 
- [33] KANEL-BELOV, A., AND ROWEN, L. H. *Computational aspects of polynomial identities*, vol. 9 of *Research Notes in Mathematics*. A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 2005.
- [34] KAPLANSKY, I. Rings with a polynomial identity. *Bull. Amer. Math. Soc.* 54 (1948), 575–580.
- [35] KASIMOVA, R. R., AND KRASILNIKOV, A. N. Some nonfinitely based varieties of group representations. *Comm. Algebra* 33, 2 (2005), 525–538.
- [36] KEMER, A. R. Capelli identities and nilpotency of the radical of finitely generated PI-algebra. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 255, 4 (1980), 793–797.
- [37] KEMER, A. R. Solution of the problem as to whether associative algebras have a finite basis of identities. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 298, 2 (1988), 273–277.
- [38] KEMER, A. R. The standard identity in characteristic  $p$ : a conjecture of I. B. Volichenko. *Israel J. Math.* 81, 3 (1993), 343–355.
- [39] KIREEVA, E. A. Limit  $T$ -spaces. *Fundam. Prikl. Mat.* 13, 1 (2007), 135–159.
- [40] KIREEVA, E. A.  $T$ -spaces in associative algebras. *J. Math. Sci. (N. Y.)* 143, 5 (2007), 3451–3508. Algebra.
- [41] KIREEVA, E. A., AND KRASIL'NIKOV, A. N. On some extremal varieties of associative algebras. *Mat. Zametki* 78, 4 (2005), 542–558. translation in *Math. Notes* 78, 3-4 (2005), 503–517.
- [42] KOSHLUKOV, P. Algebras with polynomial identities. *Mat. Contemp.* 16 (1999), 137–186. 15th School of Algebra (Portuguese) (Canela, 1998).
- [43] KOSHLUKOV, P. Ideals of identities of representations of nilpotent Lie algebras. *Comm. Algebra* 28, 7 (2000), 3095–3113.
- [44] KOSHLUKOV, P. Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic  $p \neq 2$ . *J. Algebra* 241, 1 (2001), 410–434.

- 
- [45] KRAKOWSKI, D., AND REGEV, A. The polynomial identities of the Grassmann algebra. *Trans. Amer. Math. Soc.* 181 (1973), 429–438.
- [46] KRASIL'NIKOV, A. N. Identities of triangulable matrix representations of groups. *Trudy Moskov. Mat. Obshch.* 52 (1989), 229–245, 248.
- [47] KRASIL'NIKOV, A. N. On the finiteness of the basis of identities of groups with a nilpotent commutator group. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 54, 6 (1990), 1181–1195. translation in *Math. USSR Izvestiya* 37, 3 (1991), 539–553.
- [48] KRASIL'NIKOV, A. N., AND VOVSI, S. M. On fully invariant ideals of the free group algebra. *Proc. Amer. Math. Soc.* 124, 9 (1996), 2613–2618.
- [49] LATYŠEV, V. N. On the choice of basis in a  $T$ -ideal. *Sibirsk. Mat. Ž.* 4 (1963), 1122–1127.
- [50] LATYŠEV, V. N. On Regev's theorem on identities in a tensor product of PI-algebras. *Uspehi Mat. Nauk* 27, 4(166) (1972), 213–214.
- [51] NEUMANN, H. *Varieties of groups*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967.
- [52] OKHITIN, S. V. Central polynomials of an algebra of second-order matrices. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, 4 (1988), 61–63.
- [53] OL'SHANSKII, A. Y. On the problem of a finite basis of identities in groups. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 34 (1970), 376–384. translation in *Math. USSR-Izv* 4 (1970).
- [54] PLOTKIN, B. I., AND VOVSI, S. M. Varieties of representations. *Zinatne* (1983).
- [55] POPOV, A. P. On the identities of the matrices over the Grassmann algebra. *J. Algebra* 168, 3 (1994), 828–852.
- [56] RAZMYSLOV, J. P. A certain problem of Kaplansky. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 37 (1973), 483–501.

- 
- [57] RAZMYSLOV, J. P. The existence of a finite basis for the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic zero. *Algebra i Logika* 12 (1973), 83–113, 121.
- [58] RAZMYSLOV, J. P. The Jacobson Radical in PI-algebras. *Algebra i Logika* 13 (1974), 337–360, 365.
- [59] RAZMYSLOV, Y. P. *Identities of algebras and their representations*, vol. 138 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994. Translated from the 1989 Russian original by A. M. Shtern.
- [60] REGEV, A. Existence of identities in  $A \otimes B$ . *Israel J. Math.* 11 (1972), 131–152.
- [61] REGEV, A. Grassmann algebras over finite fields. *Comm. Algebra* 19, 6 (1991), 1829–1849.
- [62] SCHELTER, W. Non-commutative affine P.I. rings are catenary. *J. Algebra* 51, 1 (1978), 12–18.
- [63] SHCHIGOLEV, V. V. Examples of infinitely based  $T$ -ideals. *Fundam. Prikl. Mat.* 5, 1 (1999), 307–312.
- [64] SHCHIGOLEV, V. V. Examples of infinitely basable  $T$ -spaces. *Mat. Sb.* 191, 3 (2000), 143–160.
- [65] SHCHIGOLEV, V. V. Construction of non-finitely based  $T$ -ideals. *Comm. Algebra* 29, 9 (2001), 3935–3941. Special issue dedicated to Alexei Ivanovich Kostrikin.
- [66] SHCHIGOLEV, V. V. Finite basis property of  $T$ -spaces over fields of characteristic zero. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* 65, 5 (2001), 191–224.
- [67] SHCHIGOLEV, V. V. *Finitely based  $T$ -spaces and  $T$ -ideals*. PhD thesis, Moscow State University, 2002.
- [68] ŠIRŠOV, A. I. On rings with identity relations. *Mat. Sb. N.S.* 43(85) (1957), 277–283.

- [69] ŠIRŠOV, A. I. On some non-associative null-rings and algebraic algebras. *Mat. Sb. N.S.* 41(83) (1957), 381–394.
- [70] SMALL, L. W. Prime ideals in Noetherian PI-rings. *Bull. Amer. Math. Soc.* 79 (1973), 421–422.
- [71] SPECHT, W. Gesetze in Ringen. I. *Math. Z.* 52 (1950), 557–589.
- [72] STOJANOVA-VENKOVA, A. H. Bases of identities of Grassmann algebras. *Serdica* 6, 1 (1980), 63–72.
- [73] VOVSI, S. M. *Topics in varieties of group representations*, vol. 163 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [74] WAGNER, W. Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme. *Math. Ann.* 113, 1 (1937), 528–567.